



HAL
open science

ÉTUDE MATHÉMATIQUE ET NUMÉRIQUE DE MODÈLES EN CHIMIOTAXIE-FLUIDE ET APPLICATIONS À LA BIOLOGIE

Georges Chamoun

► **To cite this version:**

Georges Chamoun. ÉTUDE MATHÉMATIQUE ET NUMÉRIQUE DE MODÈLES EN CHIMIOTAXIE-FLUIDE ET APPLICATIONS À LA BIOLOGIE. Equations aux dérivées partielles [math.AP]. Ecole Centrale de Nantes (ECN), 2014. Français. NNT: . tel-01015918

HAL Id: tel-01015918

<https://theses.hal.science/tel-01015918>

Submitted on 27 Jun 2014

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

ÉCOLE CENTRALE DE NANTES-UNIVERSITÉ LIBANAISE

ÉCOLE DOCTORALE
SCIENCES ET TECHNOLOGIES
DE L'INFORMATION ET MATHÉMATIQUES-

ÉCOLE DOCTORALE
SCIENCES ET TECHNOLOGIES

Année : 2014

N° B.U.:

Thèse de Doctorat

Spécialité : MATHÉMATIQUES ET LEURS INTERACTIONS

Présentée et soutenue publiquement par :

Georges CHAMOUN

le 23 Juin 2014

à l'École Centrale de Nantes

TITRE

Étude mathématique et numérique de modèles en chimiotaxie-fluide et applications à la biologie.

JURY

Président	François JAUBERTEAU	<i>Professeur à l'Université de Nantes</i>
Rapporteurs	Emmanuel CREUSÉ	<i>Professeur à l'Université de Lille 1</i>
	Martin VOHRALIK	<i>Directeur de recherche à l'INRIA Paris</i>
Examineurs	Ayman MOURAD	<i>Professeur à l'Université Libanaise</i>
	Mostafa BENDAHMANE	<i>HDR, Université Victor Segalen, Bordeaux</i>

Directeurs de thèse:

Mazen Saad

Ecole Centrale de Nantes, Laboratoire de Mathématiques Jean Leray, Nantes, France.

mazen.saad@ec-nantes.fr

Raafat Talhouk

Université Libanaise, Laboratoire de Mathématiques, Hadath, Liban.

rtalhouk@ul.edu.lb

ÉTUDE MATHÉMATIQUE ET NUMÉRIQUE DE MODÈLES EN CHIMIOTAXIE-FLUIDE ET APPLICATIONS À LA BIOLOGIE

Résumé

Les résultats présentés dans ce mémoire sont dédiés à l'étude théorique et numérique de modèles en chimiotaxie-fluide motivés par un large éventail de phénomènes biologiques comme la chimiotaxie de populations cellulaires dans un fluide. Les deux premiers chapitres de cette thèse portent sur la chimiotaxie dans un fluide au repos. Au début, on généralise un schéma de volumes finis au cas de modèles isotropes de Keller-Segel avec des coefficients diffusifs scalaires généraux sur des maillages admissibles. Ensuite, on propose et on étudie un schéma monotone combinant les méthodes de volumes finis et d'éléments finis non conformes et permettant une discrétisation efficace et robuste de modèles de Keller-Segel avec des tenseurs diffusifs anisotropes hétérogènes sans imposer des conditions restrictives sur le maillage du domaine en espace. Les deux derniers chapitres sont dédiés à l'étude théorique (existence globale, unicité) et l'étude numérique (extension de la méthode combinée) du système chimiotactisme-fluide complet constitué d'équations chimiotaxiques anisotropes couplées aux équations de Navier-Stokes modélisant un fluide incompressible. Ce couplage s'effectue à travers les termes décrivant d'un part le transport des cellules vivantes et du chimio-attractant par le fluide et d'autre part la force gravitationnelle exercée par ces organismes vivants sur le fluide. Les travaux de cette thèse ont donné lieu à l'écriture d'un code de calcul très développé en Fortran 95 afin de valider nos résultats par des simulations numériques.

Mots clés

Chimiotaxie, équations paraboliques dégénérées, systèmes chimiotaxie-fluide, méthodes volumes finis, méthodes éléments finis, existence globale de solutions faibles, unicité, convergence, simulations numériques.

MATHEMATICAL AND NUMERICAL STUDY OF CHEMOTAXIS-FLUID MODELS AND APPLICATIONS IN BIOLOGY

Abstract

The results of this thesis are devoted to the theoretical and numerical study of chemotaxis-fluid models motivated by a wide range of biological phenomena such as the chemotaxis of cell populations in a fluid. The first two chapters of this thesis deals with chemotaxis in a fluid at rest. In the beginning, we generalize a finite volume scheme to the isotropic Keller-Segel model with general scalar diffusive coefficients on admissible meshes. Then, we propose and we study a monotone combined finite volume-nonconforming finite element method allowing an efficient and robust discretization of Keller-Segel models with heterogeneous anisotropic diffusive tensors and without restrictions on the mesh of the space domain. The last two chapters are devoted to the theoretical study (global existence, uniqueness) and the numerical study (extension of the combined method) of a complete chemotaxis-fluid model consisting of anisotropic chemotaxis equations coupled to Navier-Stokes equations through transport of living cells and chemo-attractant by the fluid and through the gravitational force exerted by these living organisms on the fluid. The work of this thesis leads us to write a highly developed calculation code in Fortran 95 to validate our results by numerical simulations.

Keywords

Chemotaxis, degenerate parabolic equations, chemotaxis-fluid systems, finite volume method, finite element method, global existence of weak solutions, uniqueness, convergence, numerical simulations.

À mes parents

Remerciements

Mes premiers remerciements s'adressent à mes deux directeurs de thèse. Leurs remarquables connaissances scientifiques, leurs qualités pédagogiques rares ainsi que la profonde humanité dont ils ont fait preuve, tant pour me faciliter les séjours en France et au Liban que lors de l'élaboration de ma thèse, font des Messieurs Mazen Saad et Raafat Talhouk deux directeurs de thèse exceptionnelles. Je les remercie pour l'aide qu'ils m'ont apportée, pour leur disponibilité, leur patience et leurs encouragements.

Je tiens à remercier tout d'abord le président de jury François Jauberteau, les rapporteurs Emmanuel Creusé et Martin Vohralík pour l'intérêt qu'ils ont porté à ce travail et à Mostafa Bendahmane, Ayman Mourad pour avoir bien voulu être membres de jury.

Je remercie l'École Centrale de Nantes et l'Université Libanaise qui m'ont offert la possibilité de faire cette thèse en cotutelle dans le cadre d'un programme commun. Je désire en outre remercier le conseil national Libanais de la recherche scientifique (CNRS) pour son support financier qu'il m'a accordé. Ainsi, je remercie l'École Doctorale Sciences et Technologie de l'Information et Mathématiques et l'École Doctorale des Sciences et de Technologie pour leur soutien infini. Un grand merci à mes amis qui ont été ma deuxième famille en France et en particulier Moustafa Ibrahim, je n'oublie pas ton accueil chaleureux et les beaux moments passés ensemble. J'en ai de la chance de partager mon bureau à Nantes avec le Maître de conférences Françoise Foucher dont ses précieux conseils, sa tendresse et sa gentillesse m'ont témoigné beaucoup de sympathie et d'encouragements. Je salue aussi mes collègues du Laboratoire de Jean Leray à Nantes ainsi du Laboratoire de Mathématiques au Liban pour leur bonne humeur.

Mes plus profonds remerciements vont à ma famille : à mon père Toni Chamoun, à ma mère Thérèse Maroun, à mes soeurs Ramona et Rachelle et à mon frère Elias, qui sont et ont toujours été une source infinie d'encouragements, d'inspiration et de joie. Merci pour votre confiance en moi et votre grand amour. Sans votre soutien et votre patience, cette thèse n'aurait jamais vu le jour. Enfin, mes pensées vont à mon père qui n'a pas pu réaliser son rêve de continuer ses études universitaires à cause des problèmes familiaux et financiers. Bref! considérez cette thèse comme si elle était la vôtre.

Voilà, une étape de voyage se termine ici et une autre commence....

“Poème récité le jour de ma soutenance”

Trois années de ma jeunesse
Plongé dans la recherche sans cesse
Des jours de joie et des jours de tristesse
Mais grâce à mes amis pas de stress“e”

Un grand merci à Dieu pour sa sagesse
Qui m’a aidé à surmonter mes profondes faiblesses
Un grand merci à mes directeurs de thèse pour leur richesse
Qui m’ont appris à résoudre les problèmes avec une grande vitesse

Un grand merci à mes parents pour leur tendresse
De mon père Toni, j’ai appris la robustesse
Incapable de s’exprimer devant ma mère Thérèse la princesse
Ainsi devant mes soeurs Ramona et Rachelle les duchesses
Et mon frère Elias qui fait tant de prouesses

Un grand merci à vous le jury pour votre justesse
Vous êtes partout le bon exemple de noblesse
Rapporteurs messieurs Creusé et Vohralik
Examineurs messieurs Bendahmane, Jauberteau et Mourad
Merci pour votre attention accordée à ma thèse, votre présence et votre gentillesse

Finalement, je suis très dérangé d’utiliser tous les mots terminant par esse
Sans trouver une place dans ce poème pour le mot forteresse
Tant pis! je ne veux pas rester toute la journée à réciter de la poétesse
Allons y, je vous invite tout de suite à un pot inoubliable, c’est une promesse

Table des matières

Table des matières	xiv
Liste des Symboles	xvi
Liste des Figures	xviii
Liste des Tableaux	xix
Introduction Générale	xxi
0.1 Motivations	xxi
0.2 Méthodes numériques	xxiv
0.3 Plan de la thèse	xxv
1 Méthode de Volumes Finis généralisée pour un modèle isotrope de Keller-Segel	1
1.1 Introduction	1
1.1.1 Problème posé	1
1.1.2 Solution faible.	3
1.2 Problème discret	3
1.2.1 Discrétisation en espace	3
1.2.2 Discrétisation en temps	5
1.2.3 Fonctions discrètes associées	5
1.2.4 Construction du schéma de volumes finis	5
1.2.4.1 Terme diffusif	6
1.2.4.2 Terme Convectif	7
1.2.4.3 Schéma Numérique	8
1.3 Convergence du schéma numérique	9
1.3.1 Analyse a priori de solutions discrètes	9
1.3.1.1 Positivité de C_h et confinement de N_h	9
1.3.1.2 Estimations a priori discrètes	10
1.3.2 Existence d'une solution discrète	10
1.3.3 Estimations de compacité sur les solutions discrètes	12
1.3.4 Etude de Convergence	13
1.4 Tests Numériques	18
1.4.1 Problème elliptique.	19
1.4.1.1 Test 0 : Tuyau oblique	19

1.4.2	Problème isotrope général de Keller-Segel	20
1.4.2.1	Test 1 : Cas hétérogène continu	20
1.4.2.2	Test 2 : Cas hétérogène discontinu	20
2	Schéma Volumes Finis-Éléments Finis combiné monotone pour un modèle anisotrope de Keller-Segel	27
2.1	Introduction	27
2.2	Modèle anisotrope de Keller-Segel.	28
2.3	Problème discret	30
2.3.1	Discrétisation en espace et en temps	30
2.3.2	Schéma combiné	32
2.4	Existence et propriétés discrètes	34
2.4.1	Propriétés discrètes du schéma.	35
2.4.2	Estimations a priori	37
2.4.3	Existence d'une solution discrète	39
2.5	Étude de convergence	40
2.5.1	Estimations de compacité sur les solutions discrètes	40
2.5.2	Convergence du schéma combiné	44
2.6	Correction du schéma numérique	50
2.6.1	Propriétés du schéma corrigé	52
2.6.2	Convergence du schéma corrigé	54
2.6.3	Exemple d'une correction	55
2.7	Simulations numériques	57
2.7.1	Problème elliptique.	58
2.7.1.1	Test 1. Anisotropie homogène	58
2.7.1.2	Test 2. Anisotropie rotationnelle hétérogène	59
2.7.1.3	Test 3. Isotropie sur un maillage non admissible au sens de volumes finis	59
2.7.1.4	Test 4. Anisotropie sur un maillage non admissible au sens de volumes finis	59
2.7.2	Problème anisotrope de Keller-Segel	59
2.7.2.1	Test 5. Anisotropie modérée.	60
2.7.2.2	Test 6. Diffusion anisotrope sur un maillage du Benchmark FVCA5	60
2.7.2.3	Test 7. Diffusion anisotrope sur un maillage de Delaunay	61
2.7.2.4	Test 8. Diffusion anisotrope hétérogène sur un maillage avec un trou	61
3	Étude mathématique d'un modèle anisotrope en chimiotaxie-fluide	73
3.1	Introduction	73
3.2	Préliminaires et résultats principaux	75
3.3	Problème régularisé non dégénéré : Existence globale	78
3.3.1	Méthode de semi-discrétisation en temps	79

3.3.1.1	Confinement de solutions approchées $N_{n+1,\varepsilon}^{\tilde{N}}$ et $C_{n+1,\varepsilon}^{\tilde{N}}$	80
3.3.1.2	Existence de solutions approchées	82
3.3.2	Estimations a priori	84
3.3.3	Passage à la limite	87
3.4	Problème principal dégénéré : Existence globale	92
3.4.1	Estimations a priori	92
3.4.2	Passage à la limite	95
3.5	Conclusion et Remarques	96
3.6	La pression	97
3.7	Preuve du Théorème d'unicité	97
4	Étude numérique d'un modèle anisotrope en chimiotaxie-fluide	103
4.1	Introduction	103
4.2	Discrétisation des équations de Navier-Stokes	104
4.2.1	Approximation de l'espace $H_0^1(\Omega)$	104
4.2.2	Approximation de l'espace V	104
4.2.3	Approximation des équations de Navier-Stokes	105
4.2.4	Approximation de la pression	105
4.3	Schéma numérique du système Chimiotactisme-fluide	106
4.3.1	Première étape : Système (4.2)	107
4.3.2	Deuxième étape : Système (4.1)	107
4.3.3	Résultats de convergence	108
4.4	Convergence	109
4.4.1	Propriétés discrètes du schéma	109
4.4.2	Estimations discrètes a priori	111
4.4.3	Existence d'une solution discrète	114
4.4.4	Convergence	114
4.4.5	Passage à la limite	115
4.5	Simulations Numériques	120
4.5.1	Test 0 : Influence de la force gravitationnelle	120
4.5.2	Test 1 : Chimiotaxie isotrope dans un fluide monodirectionnel	120
4.5.3	Test 2 : Cavité entraînée	121
4.5.3.1	Problème de Stokes	121
4.5.3.2	Chimiotaxie anisotrope dans une cavité entraînée	122
4.5.4	Test 3 : Chimiotaxie anisotrope dans un fluide oblique	122
	Conclusions et Perspectives	136
A	Éléments Finis non conformes	137
A.1	Élément fini de Crouzeix-Raviart	137
A.2	Fonctions de base locales	138

B	Approximation d'un espace normé	141
B.1	Approximation stable et convergente	141
	Bibliographie.	

Notations

$\Omega, \partial\Omega$: ouvert borné de \mathbb{R}^d , frontière topologique de Ω
$x = (x_1, x_2, \dots, x_d)$: point générique de \mathbb{R}^d
$dx = dx_1 dx_2 \dots dx_d$: mesure de Lebesgue sur Ω
$d\sigma$: mesure de surface sur $\partial\Omega$
Q_T	: $[0, T] \times \Omega$, $t \in [0, T]$, t variable de temps, $T > 0$
Σ_t	: $[0, T] \times \partial\Omega$
η	: normale unitaire extérieure à Ω
$\mathcal{T}_h, \mathcal{D}_h$: maillage initial de Ω , maillage dual de Ω
s^+, s^-	: $\max(s, 0)$, $\max(-s, 0)$
$a \times b$: produit vectoriel de a et b
$\nabla u, \nabla \cdot u, \nabla \times u$: gradient de u , divergence de u , rotationnel de u
$\sup \text{ess } u$: Borne supérieure essentielle = le plus petit presque majorant a de u , ($u(x) \leq a$ p.p. $x \in \Omega$)

$\mathcal{D}(\Omega)$	= espace des fonctions différentiables et à support compact dans Ω
\wp	= $\{u \in \mathcal{D}(\Omega), \nabla \cdot u = 0\}$
V (resp. H)	= $\bar{\wp}^{H_0^1(\Omega)}$ (resp. $\bar{\wp}^{L^2(\Omega)}$) clôture de \wp dans $H_0^1(\Omega)$ (resp. $L^2(\Omega)$)
$L^p(\Omega)$	= espace des fonctions de puissance p – ème intégrables sur Ω pour la mesure dx ; $\ u\ _p = (\int_{\Omega} u(x) ^p dx)^{\frac{1}{p}}$ ou $\ u\ _{\infty} = \sup_{x \in \Omega} \text{ess } u(x) $
$L_0^2(\Omega)$	= $\{u \in L^2(\Omega), \int_{\Omega} u dx = 0\}$
$W^{m,p}(\Omega)$	= espace des fonctions dans $L^p(\Omega)$ qui possèdent des dérivées généralisées jusqu'à l'ordre $m \in \mathbb{N}$ et qui sont p – sommables sur Ω . En particulier,
$W^{1,p}(\Omega)$	= $\{u \in L^p(\Omega); \nabla u \in L^p(\Omega)\}$ avec $\ u\ _{1,p} = (\ u\ _p^p + \ \nabla u\ _p^p)^{\frac{1}{p}}$ si $1 \leq p < \infty$ et $\ u\ _{1,\infty} = \max(\sup_{x \in \Omega} \text{ess } u(x) , \sup_{x \in \Omega} \text{ess } \nabla u(x))$
$W_p^{2m,m}(Q_T)$	= $\{u \in L^p(Q_T); \partial_t^r \partial_x^s u \in L^p(Q_T)$ avec $2r + s \leq 2m\}$, ($r, s, m \in \mathbb{N}$). En particulier, pour $m = 1$, $\ u\ _{W_p^{2,1}(Q_T)}^p = \int_0^T (\ u\ _{W^{2,p}(\Omega)}^p + \ \partial_t u\ _{L^p(\Omega)}^p) dt$

Si X est un espace de Banach,

$L^p(0, T; X)$	= $\{f : [0, T] \rightarrow X$ mesurable; $\int_0^T \ f(t)\ _X^p dt < \infty\}$ ($1 \leq p < \infty$)
$L^\infty(0, T; X)$	= $\{f : [0, T] \rightarrow X$ mesurable; $\sup_{t \in [0, T]} \ f(t)\ _X dt < \infty\}$
$C^k([0, T]; X)$	= espace des fonctions k – fois continûment différentiables de $[0, T] \rightarrow X$

Table des figures

1	Chimiotaxie dans un fluide.	xxi
1.1	Discrétisation en espace de Ω	4
1.2	Des maillages admissibles \mathcal{T}_h	21
1.3	Test 0- Tuyau oblique.	22
1.4	Test 1- Conditions initiales.	22
1.5	Test 1- Cas hétérogène continu sur un maillage de Delaunay.	23
1.6	Test 2- Conditions initiales.	24
1.7	Test 2- Cas hétérogène discontinu sur un maillage de type Boyer admissible.	24
1.8	Test 2- Courbes d'évolution en temps.	25
1.9	Test 0- Comparaison de l'erreur L^2 relative pour les deux types de transmissibilités en fonction du raffinement du maillage.	25
2.1	Maillage dual associé aux interfaces du maillage initial de Ω	30
2.2	Différents maillages \mathcal{T}_h	62
2.3	Exemple d'un maillage initial grossier \mathcal{T}_{h_1} et son dual \mathcal{D}_{h_1}	64
2.4	Test 2- Concentration et position des densités négatives avant et après la correction.	64
2.5	Test 3- Solution exacte et solution approchée.	65
2.6	Test 5- Conditions initiales.	66
2.7	Test 5- Évolution en temps de la densité cellulaire.	66
2.8	Test 6- Conditions initiales.	67
2.9	Test 6- Densité cellulaire avant et après la correction à l'instant $t = 0.05$	67
2.10	Test 6- Densité cellulaire avant et après la correction à l'instant $t = 3.125$	68
2.11	Test 7- Conditions initiales.	68
2.12	Test 7- Évolution en temps de la densité cellulaire avant et après la correction.	69
2.13	Test 8- Conditions initiales.	70
2.14	Test 8- Évolution en temps de la densité cellulaire sur un maillage avec un trou.	71
4.1	Test 0- Sans force gravitationnelle ($\nabla\phi = (0, 0)$).	123
4.2	Test 0- Effet de la force gravitationnelle ($\nabla\phi = (0, 100)$).	124
4.3	Test 1- Évolution en temps de la densité cellulaire dans un fluide monodirectionnel.	125
4.4	Test 2- Cavité entraînée.	126
4.5	Test 2- Évolution en temps de la densité cellulaire dans une cavité entraînée.	128

4.6	Test 3- Conditions initiales.	129
4.7	Test 3- Cas d'un fluide au repos ($u = 0$).	130
4.8	Test 3- Premier cas ($c < c_1$)	131
4.9	Test 3- Deuxième cas ($c > c_2$).	132
4.10	Test 3- Troisième cas ($c < c_1 = c_2$).	133
A.1	Élément fini de référence \hat{K}	140
A.2	Transformation affine F_K	140

Liste des tableaux

1.1	Test 0- Comparaison des erreurs de solutions approchées.	21
2.1	Test 1- Raffinement du maillage FVCA5	62
2.2	Test 1- Cas anisotrope homogène	63
2.3	Test 4- Cas anisotrope hétérogène sur le maillage 2.2(<i>d</i>)	63
2.4	Paramètres initiaux des Tests 5, 6, 7 et 8	63
4.1	Caractéristiques du maillage	123

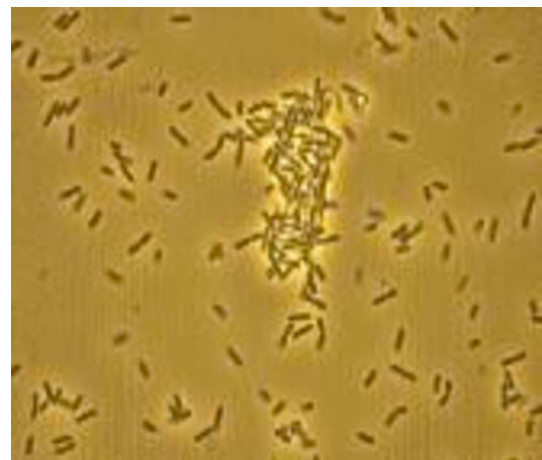
Introduction Générale

0.1 Motivations

Le mouvement dirigé d'organismes vivants en réponse aux gradients chimiques, **chimiotaxie**, a suscité beaucoup d'intérêt en raison de son rôle primordial dans un large éventail de phénomènes biologiques. Ce comportement peut s'agir d'une attraction ou d'une répulsion afin que les cellules corporelles, les bactéries et d'autres organismes vivants dans un fluide assurent leurs nourritures et évitent les agents nuisibles. Un exemple est donné par l'organisme modèle de laboratoire "Dictyostelium discoideum" qui se trouve sur les tapis de feuilles mortes dans les forêts et qui se nourrit de bactéries et de levures. Dans le cas de carence nutritionnelle, cette amibe secrète un chimio-attractant pour former un pseudo-plasmode (Fig. 1(a)) ressemblant à une petite limace et constitué de milliers d'amibes agglomérées. Ce pseudo-plasmode peut persister plusieurs jours afin de chercher des conditions nutritionnelles plus favorables. Un autre exemple est donné par les bactéries "Bacillus subtilis" qui assurent leurs nutriments en se déplaçant vers des milieux riches en dioxygène (Fig. 1(b)), ce qui rend nécessaire une compréhension profonde de mouvements biologiques dirigés en fonction de certaines espèces chimiques présentes dans l'environnement ainsi que le développement d'outils appropriés pour les simulations numériques.



(a) Cellules "Dictyostelium Discoideum" agglomérées.



(b) Bactéries nageantes vers un milieu riche en dioxygène.

FIGURE 1 – Chimiotaxie dans un fluide.

Le chimiotactisme de la population cellulaire dans un fluide joue un rôle primordial tout au long du cycle de la vie : Les spermatozoïdes sont attirés par les substances chimiques libérées par le revêtement extérieur de l'ovule [47] ; au cours du développement de l'embryon, ce phénomène joue un rôle dans l'organisation du positionnement des cellules, par exemple au cours de la gastrulation [27] et la structuration du système nerveux [68]. Ainsi, ces mêmes mécanismes chimiotaxiques sont utilisés au cours de la croissance du cancer (Voir [20], [57]). Le changement éventuel du potentiel migratoire des cellules dans un fluide a une importance relativement élevée dans le développement de certains symptômes et syndromes cliniques. En effet, la modification de la capacité chimiotaxique de ces micro-organismes par des agents pharmaceutiques permet de diminuer le taux des infections ou la propagation des maladies contagieuses.

La modélisation théorique et mathématique de la chimiotaxie remonte aux travaux pionniers de Patlack [69] en 1950. Le modèle de Keller-Segel introduit dans [53] était la pierre angulaire de la plupart de ces travaux. Trente ans après sa proposition, ce modèle est devenu le plus populaire pour le contrôle chimique des mouvements cellulaires dans le cas d'un fluide au repos. En plus, l'article [51] de Horstmann a introduit une étude mathématique détaillée du modèle chimiotaxique de Keller-Segel. Ensuite, Pedley et Kessler dès 1988 ([50], [70], [71]), Tuval et al. en 2005 (Voir [78]) ont proposé différents systèmes chimiotactisme-fluide couplés modélisant le comportement collectif de bactéries en suspension dans un fluide incompressible.

Les équations aux dérivées partielles décrivent un grand nombre de phénomènes dans l'environnement. Dans ce qui suit, on va construire une équation aux dérivées partielles (EDP) qui modélise le comportement des organismes vivants via un chimio-attractant et on va énoncer l'origine et l'interprétation biologique des termes de cette équation primordiale dans nos modèles. Cette équation est décrite comme étant un processus de "saut en espace" durant lequel les cellules subissent une trajectoire aléatoire basée sur des sauts instantanés dans l'espace. On suppose qu'une particule subit des sauts constants de longueur h sur un réseau discret en $1D$. En négligeant les interactions entre les particules, on obtient une équation d'évolution continue en temps et discrète en espace pour une particule de densité $N(x, t)$ à la position x et à l'instant t :

$$\frac{\partial N(x, t)}{\partial t} = T_{x-h}^+ N(x-h, t) + T_{x+h}^- N(x+h, \tau) - (T_x^+ + T_x^-) N(x, t) \quad (1)$$

où T_x^+ (resp. T_x^-) est la probabilité d'une particule à la position x de sauter à $x+h$ (resp. $x-h$) pendant une unité de temps. Grâce au choix de ces fonctions, on peut modéliser différentes classes de mouvements. Dans ce manuscrit, on s'intéresse aux classes de modèles qui obéissent à l'effet de "Volume filling". En d'autres termes, chaque cellule occupe une certaine place dans la région du chimio-attractant ce qui réduit la chance de certaines cellules de trouver une place dans cette région. Cet effet a été modélisé par un produit d'une fonction $q(N)$ qui décrit la probabilité qu'une densité cellulaire locale trouve une place autour du chimio-attractant et du saut cellulaire en réponse d'un gradient spatial local du chimio-attractant C . Donc,

$$T_x^\pm = q(N(x \pm h, t))(a + b(C(x \pm h, t) - C(x, t))). \quad (2)$$

En plongeant le terme (2) dans l'équation (1) et en utilisant les techniques de [49], on a :

$$\partial_t N = \left(D(q(N) - N\partial_N q(N))N_x - Nq(N)C_x \right)_x,$$

où D désigne un coefficient diffusif constant. Un simple choix de $q(N) = 1 - N/\gamma$ pour $0 \leq N \leq \gamma$, où on note la densité cellulaire maximale par $\gamma \geq 1$. Dans cette mémoire, on suppose que $\gamma = 1$. On passe facilement aux dimensions supérieures :

$$\partial_t N - \nabla \cdot (D\nabla N) + \nabla \cdot (N(1 - N)\nabla C) = 0.$$

En général, le terme diffusif représente un mouvement aléatoire des cellules. Pour cela, on considère une diffusion non-linéaire $a(N)$ dépendant de la densité cellulaire. On introduit une fonction $\chi(N)$ comme étant la sensibilité des cellules vers les substances chimiques. Dans notre thèse, on introduit des tenseurs $S(x)$ anisotropes et hétérogènes car la diffusion, dans les applications pratiques, est souvent hétérogène et anisotrope. D'ailleurs, un terme de transport $u \cdot \nabla N$ des cellules par un fluide incompressible s'ajoute à cette équation lorsqu'on étudie le comportement chimiotactique des cellules dans un fluide de vitesse u qui n'est plus au repos. Par suite, on obtient l'équation suivante :

$$\partial_t N - \nabla \cdot (S(x)a(N)\nabla N) + \nabla \cdot (S(x)\chi(N)\nabla C) + u \cdot \nabla N = 0.$$

Ainsi, en tenant compte de la diffusion et de la convection du chimio-attractant C dans ce fluide incompressible modélisé par les équations de Navier-Stokes [75], nous sommes maintenant capables d'énoncer le modèle assez général de nos systèmes étudiés dans ce manuscrit :

$$\left\{ \begin{array}{lcl} \partial_t N + \nabla \cdot J_N & = & 0, \\ \partial_t C + \nabla \cdot J_C & = & g(N, C), \\ \partial_t u - \nu \Delta u + u \cdot \nabla u + \nabla P & = & -N\nabla\Phi, \\ \nabla \cdot u & = & 0, \end{array} \right.$$

qui décrit le comportement chimiotactique des cellules dans un fluide incompressible ($\nabla \cdot u = 0$) de viscosité ν , de vitesse u et de pression P . Le flux de cellules est noté par $J_N = -S(x)a(N)\nabla N + S(x)\chi(N)\nabla C + uN$, le flux de chimio-attractant est noté par $J_C = -M(x)\nabla C + uC$ et le taux de production et de consommation du chimio-attractant est noté par la fonction $g(N, C)$. Le couplage du fluide aux équations de chimiotaxie se réalise par les termes de transport inclus dans J_N et J_C et par la force gravitationnelle $\nabla\Phi$ exercée par une cellule sur le fluide.

Si les flux sont donnés par $J_N = -D_N\nabla N - \chi N\nabla C$ et $J_C = -D_C\nabla C$ (où D_N , D_C et χ sont des constantes positives de diffusion et de convection) dans un fluide au repos, on retrouve le modèle de Patlak-Keller-Segel [53, 69] qui est l'exemple le plus simple de mouvements chimiotactiques.

Une étude mathématique et numérique de systèmes chimiotactisme-fluide est l'une des motivations principales de cette thèse. Dans la suite de ce chapitre d'introduction générale, nous allons dans un premier temps détailler des différentes méthodes numériques discrétisant

les équations aux dérivées partielles. Ensuite, nous présentons un plan détaillé de ce manuscrit avec les principaux résultats obtenus.

0.2 Méthodes numériques

Dans la plupart des cas, il n'est pas possible de trouver des solutions analytiques aux équations aux dérivées partielles. C'est dans le but de pouvoir calculer des solutions approchées que les méthodes numériques ont été développées. Aujourd'hui l'impact de ces méthodes est d'autant plus essentiel que la puissance des ordinateurs ne cesse d'augmenter. Il existe plusieurs méthodes numériques pour la discrétisation d'une équation aux dérivées partielles. Parmi ces méthodes, les plus utilisées sont la méthode des éléments finis EF, la méthode des différences finies DF et la méthode des volumes finis VF. La première question qui se pose est : Quelle est la différence entre ces trois méthodes ? En fait, la réponse se lie au concept de la méthode, mais en effet dans certains cas, ces méthodes donnent des schémas similaires.

- Pour la méthode des différences finies (cf. Thomée [77]), le domaine Ω est représenté par un nombre fini de points $\{x_i\}$ appelés noeuds du maillage. La solution du problème est représentée par un ensemble de valeurs u_i approchant $u(x_i)$. La méthode consiste à remplacer les dérivées partielles par des différences ou combinaisons à valeurs ponctuelles de la fonction à l'aide de développements de Taylor. L'avantage de cette méthode est sa grande simplicité d'écriture et son faible coût de calcul. Un inconvénient est qu'on se limite en général à des géométries simples.
- Pour la méthode des éléments finis (cf. Ciarlet [19] ou Ern et Guermond [30]), le domaine Ω est partitionné en un nombre fini d'éléments $\{K_i\}$ tels que $\cup K_i = \bar{\Omega}$. Cette méthode s'appuie sur une formulation variationnelle obtenue en multipliant l'équation principale par une "fonction test" puis en intégrant sur Ω . L'idée de base de cette méthode est de remplacer l'espace V dans lequel est posée la formulation variationnelle par un sous-espace de dimension finie V_h . La solution est alors approchée par $u_h = \sum a_i \varphi_i$ où les coefficients a_i sont les inconnues et la famille φ_i est une base de V_h . Le problème approché posé sur V_h se ramène à la résolution d'un système linéaire.
- Pour la méthode des volumes finis, le domaine Ω est également partitionné en un nombre fini de volumes $\{K_i\}$ tels que $\cup K_i = \bar{\Omega}$. L'idée de base pour la construction d'un schéma volumes finis est d'intégrer l'équation sur chaque volume dit volume de contrôle. Une formule de Green est ensuite utilisée pour transformer l'intégrale de la divergence d'un flux sur le volume de contrôle en une intégrale de la composante normale de ce flux sur la frontière de ce volume. Ensuite, cette intégrale est approchée en utilisant les inconnues locales autour de cette frontière. Il existe plusieurs catégories de méthodes des volumes finis en fonction du placement des inconnues : Par exemple, les volumes centrés par mailles (cf. Eymard, Gallouët et Herbin [33] ou Lazarov, Mishev et Vassilevski [59]) et les volumes centrés par sommets (cf. Morton et Süli [65]). Dans cette thèse, on s'intéresse uniquement aux volumes finis centrés par mailles qu'on va appeler volumes finis tout court.

La méthode des volumes finis est une méthode de discrétisation bien adaptée pour la simulation des lois de conservation. Elle se base sur la formulation forte de l'équation à résoudre. Cette méthode est très attirante dans la modélisation des problèmes dont le flux joue un rôle important, comme la mécanique des fluides et la diffusion de la chaleur, car le flux numérique est conservé entre un volume de contrôle et ses voisins. En comparaison avec la méthode des différences finies, la méthode de volumes finis est également peu coûteuse en termes de calcul mais elle peut être utilisée sur des géométries plus complexes. La spécificité des volumes finis par rapport aux différences finies est que la discrétisation est faite sur les équations de bilan locales et non pas sur l'équation aux dérivées partielles : ce sont les flux aux bords des volumes de contrôle qui sont discrétisés et non pas l'opérateur différentiel.

Les idées essentielles des deux méthodes de volumes finis et d'éléments finis sont apparemment très différentes. Pourtant, la discrétisation d'une équation elliptique du deuxième ordre à l'aide de ces méthodes peut conduire à des problèmes discrets très proches et parfois identiques. En particulier, ces deux méthodes peuvent être utilisées sur des géométries arbitraires en utilisant des maillages structurés ou non structurés et possèdent la propriété de la conservativité locale. Tandis qu'elles sont très voisines pour la discrétisation d'un terme diffusif du deuxième ordre, ces méthodes ont un comportement différent pour celles d'un terme convectif du premier ordre, d'un terme réactif ou pour la discrétisation de la dérivée en temps. C'est ce qui motive l'introduction de schémas combinant les méthodes de volumes finis et d'éléments finis.

0.3 Plan de la thèse

Ce manuscrit est composé de quatre chapitres : Dans les deux premiers, nous supposons que le fluide est au repos et nous généralisons tout d'abord un schéma de volumes finis pour la discrétisation du modèle de Keller-Segel avec des fonctions scalaires diffusives hétérogènes et discontinues sur des maillages admissibles. Nous proposons et nous étudions ensuite un schéma combinant les méthodes de volumes finis et d'éléments finis pour la discrétisation de modèles de Keller-Segel avec un tenseur de diffusion hétérogène et anisotrope sur des maillages très généraux. Afin d'être robuste et de respecter les bornes biologiques des quantités approchées, le schéma combiné développé ne doit pas être mis en échec dans le cas de transmissibilités négatives. Pour dépasser ce problème, nous corrigeons le flux diffusif dans le but d'obtenir un schéma monotone sans aucune contrainte restrictive sur le maillage ou le tenseur. Dans les deux derniers chapitres de cette thèse, nous établissons une étude mathématique et numérique détaillée d'un modèle anisotrope couplé en chimiotaxie-fluide et nous énonçons les premiers résultats concernant ce modèle dégénéré en deux points. Au début, nous montrons les propriétés fondamentales de solutions comme l'existence globale en temps et l'unicité. Après, nous étudions la convergence du schéma combiné monotone étendu à la discrétisation de tout le système chimiotactisme-fluide. Tout au long de ces trois années de thèse, nous avons construit et développé un code sous Fortran 95 afin de réaliser des simulations numériques montrant le comportement chimiotactisme des cellules dans un fluide et validant l'efficacité et la robustesse de notre schéma numérique.

Chapitre 1 : Méthode de volumes finis généralisée pour un modèle isotrope de Keller-Segel

Nous proposons dans ce chapitre une méthode de volumes finis pour la discrétisation d'un modèle de Keller-Segel avec des lois de diffusion dégénérées, non-linéaires, discontinues et dépendant de l'espace. Pour cela, on considère le système suivant :

$$\begin{cases} \partial_t N - \nabla \cdot (s(x)a(N)\nabla N) + \nabla \cdot (s(x)\chi(N)\nabla C) = 0, \\ \partial_t C - \nabla \cdot (m(x)\nabla C) = g(N, C). \end{cases}$$

C'est un système formé d'une EDP de convection-diffusion parabolique dégénérée modélisant la densité $N = N(x, t)$ d'une population cellulaire couplée à une EDP parabolique modélisant la concentration $C = C(x, t)$ d'un chimio-attractant. La fonction $a(N)$ décrit la diffusion non-linéaire, la fonction $\chi(N)$ décrit la sensibilité des cellules vers le chimio-attractant et la fonction g désigne le taux de production et de consommation du chimio-attractant.

La méthode de volumes finis (centrée par mailles) a été étudiée pour des équations paraboliques dégénérées dans [36, 37] et pour des systèmes de Keller-Segel avec des tenseurs homogènes continus dans [2]. Ici, nous étudions la convergence d'un schéma de volumes finis généralisé au cas des coefficients diffusifs hétérogènes et discontinus représentés par $s(x)$ et $m(x)$ sur des maillages admissibles (la ligne joignant les centres de cercles circonscrits de deux volumes voisins est orthogonale à l'interface commune de ces volumes) dont les discontinuités coïncident avec les interfaces du maillage. Finalement, l'implémentation numérique est effectuée à l'aide d'un code développé et les cas tests mis en place dans ce chapitre sont liés à l'hétérogénéité et à la discontinuité des coefficients diffusifs.

Ce chapitre fait l'objet d'un article [16] soumis et accepté pour publication dans des actes (avec comité de lecture) du congrès ESAIM 2013.

Chapitre 2 : Schéma volume fini-élément fini combiné monotone pour un modèle anisotrope de Keller-Segel

Dans ce chapitre, nous étudions le modèle anisotrope de Keller-Segel :

$$\begin{cases} \partial_t N - \nabla \cdot (S(x)a(N)\nabla N) + \nabla \cdot (S(x)\chi(N)\nabla C) = 0, \\ \partial_t C - \nabla \cdot (M(x)\nabla C) = g(N, C). \end{cases}$$

Tout d'abord, l'existence globale d'une solution faible de ce problème continu ainsi que l'unicité sous une hypothèse supplémentaire sont assurées mais les techniques de preuves sont détaillées dans le troisième chapitre de cette thèse dans le cadre très général d'un système chimiotactisme-fluide couplé. Nous nous intéressons en premier lieu dans ce chapitre à la construction d'un schéma numérique efficace et robuste discrétisant notre modèle anisotrope de Keller-Segel sur des maillages très généraux en dimension deux ou trois d'espace sans imposer aucune condition d'admissibilité ou d'angles maximaux sur le maillage.

Il est bien connu qu'une méthode efficace de volumes finis n'entraînent pas d'oscillations

numériques quand le problème est dominé par la convection. En revanche, les caractéristiques géométriques du maillage peuvent jouer un rôle prépondérant lorsque les flux numériques diffusifs entrent en jeu et on ne sait pas étendre ces restrictions imposées sur le maillage même au cas simple d'un tenseur anisotrope de diffusion. En effet, dès que l'on souhaite discrétiser un terme de diffusion plus général $-\nabla \cdot (S(x)\nabla A(N))$ où S est une matrice symétrique définie positive, la condition géométrique nécessaire à la consistance du flux devient une condition de S -orthogonalité dont la construction d'un maillage admissible adapté à ce problème est illusoire lorsque les coefficients de S varient. Plusieurs solutions ont été récemment proposées pour traiter ce problème qu'on peut citer par exemple les approches de Coudière, Vila, Villedieu dans [21] et d'Aavatsmark dans [1] qui utilisent une procédure de reconstruction permettant de calculer de façon consistante les flux numériques sur chaque arête du maillage en reconstruisant une approximation de toutes les composantes du gradient. Ainsi, on peut citer les méthodes de volumes finis mixtes et de volumes finis hybrides dans [28, 34]. Malheureusement, la plupart de ces approches ne satisfont pas le principe de maximum discret dans le cas d'une diffusion anisotrope sur des maillages généraux (Voir [46]).

D'autre part, la discrétisation des flux diffusifs avec la méthode d'éléments finis n'impose pas cette restriction d'admissibilité du maillage nécessaire à la consistance de ces flux mais elle produit des oscillations numériques non justifiées quand la convection du problème est dominante. Pour cela, nous proposons un schéma combinant ces deux méthodes classiques initialement proposé dans [3] en dimension deux d'espace et développé dans [31, 32] pour une équation parabolique dégénérée en dimension deux ou trois d'espace. Cette méthode combinée proposée à notre modèle anisotrope de Keller-Segel consiste à discrétiser les termes diffusifs non-linéaires dégénérés à l'aide de la méthode d'éléments finis non conformes sur le maillage initial donné et les autres termes d'évolution en temps et de convection non-linéaire à l'aide de la méthode de volumes finis sur un maillage dual de diamants construits autour des faces du maillage initial.

Pour l'approximation de notre modèle, il est crucial dans le cadre des applications qui nous concernent que le schéma respecte les bornes biologiques de quantités approchées, le dépassement de celles-ci pouvant conduire à des résultats non biologiques : une densité cellulaire hors de $[0, 1]$ ou une concentration négative du chimio-attractant. Cette condition de cohérence avec la biologie se traduit mathématiquement par la vérification d'un principe de maximum. Pour cela, nous prouvons que notre solution approchée du schéma combiné vérifie ce principe s'il n'y a pas d'angles obtus dans le maillage et si le tenseur de diffusion est scalaire. Dans le cas de transmissibilités négatives, nous corrigeons notre flux diffusif à l'aide d'une technique non-linéaire inspirée de [12, 60] afin d'obtenir un schéma monotone et de maintenir le principe de maximum et la convergence.

Finalement, nous présentons des résultats numériques effectués avec un nouveau code développé sous Fortran 95 tout d'abord pour les problèmes elliptiques anisotropes dans le but de montrer l'efficacité et la robustesse du schéma numérique corrigé et ensuite pour le modèle de Keller-Segel avec des tenseurs anisotropes sur différents types de maillages non-structurés.

Ce chapitre fait l'objet de l'article [14] publié dans le journal "Numerical Methods for

Partial Differential Equations”. Ainsi, l’existence globale de solutions faibles, l’unicité et une version abrégée de la méthode combinée sans correction font l’objet de l’article [15] publié dans des actes (avec comité de lecture) du congrès BIOMATH 2013.

Chapitre 3 : Étude mathématique d’un modèle anisotrope en chimiotaxie-fluide

Dans ce qui suit de cette thèse, nous modélisons des bactéries dans un fluide (par exemple l’eau) qui n’est plus au repos. Afin d’assurer leurs nutriments, ces bactéries nagent vers la zone la plus riche en dioxygène dans le fluide. En même temps, elles sont légèrement plus denses que le fluide sur lequel elles exercent une force de gravitation. Nous étudions dans ce chapitre le modèle suivant incluant tous ces effets :

$$\left\{ \begin{array}{l} \partial_t N - \nabla \cdot (S(x)a(N)\nabla N) + \nabla \cdot (S(x)\chi(N)\nabla C) + u \cdot \nabla N = f(N), \\ \partial_t C - \nabla \cdot (M(x)\nabla C) + u \cdot \nabla C = -k(C)N, \\ \partial_t u - \nu \Delta u + (u \cdot \nabla)u + \nabla P = -N\nabla\phi, \\ \nabla \cdot u = 0, \quad t > 0, x \in \Omega. \end{array} \right.$$

Les nouvelles inconnues qui interviennent dans ce modèle sont : la vitesse u et la pression P dans le fluide incompressible de viscosité ν . Ce système se compose d’équations de chimiotaxie anisotrope du chapitre 2 couplées aux équations de Navier-Stokes incompressibles par le transport de cellules par le fluide $'u \cdot \nabla N'$, le transport du chimio-attractant par le fluide $'u \cdot \nabla C'$ et la force de gravitation $\nabla\Phi$ exercée par les cellules sur le fluide. La fonction f est liée aux réactions chimiques et la fonction $k(C)$ désigne le taux de consommation du chimio-attractant par les cellules. Cette fonction $g(N, C) = -k(C)N$ peut être aussi remplacée par la fonction $\alpha N - \beta C$ où α et β sont des constantes positives, comme étant le cas dans les deux premiers chapitres où les substances chimiques sont produites et consommées en même temps.

Motivé par l’étude numérique, de nombreuses études d’existence globale ont été établies pour des systèmes isotropes chimiotactisme-Stokes avec une diffusion non-linéaire qui se dégénère en un seul point (Voir [62, 63, 41]) en utilisant une inégalité d’entropie si elle existe. Nous démontrons dans ce chapitre l’existence globale de solutions faibles du notre modèle continu par une autre méthode inspirée de [7, 64, 75] en présence d’anisotropie, de la dégénérescence en deux points, de la sensibilité chimiotaxique modifiée et des équations de Navier-Stokes. Au début, on montre l’existence de solutions faibles du problème régularisé non dégénéré en utilisant la méthode de semi-discrétisation en temps. Ensuite, on fait tendre le paramètre de régularisation vers zéro pour obtenir une solution faible du système original. Sous des hypothèses supplémentaires, nous montrons ainsi l’unicité de solutions faibles du système chimiotactisme-Stokes en utilisant une technique de dualité.

Ce chapitre fait l’objet de l’article [13] accepté pour publication dans le journal “Computers And Mathematics With Applications”.

Chapitre 4 : Étude numérique d'un modèle anisotrope en chimiotaxie-fluide

Ce dernier chapitre de la thèse est dédié à la discrétisation du système chimiotactisme-fluide complet introduit dans le chapitre précédent. L'idée principale est l'extension de la méthode combinée monotone introduite et étudiée au chapitre 2. De nombreux schémas numériques ont été largement étudiés pour la discrétisation des équations de Stokes et de Navier-Stokes, par exemple [42, 43, 44, 45, 72, 73]. Ainsi, Roger Temam dans son livre [75] nous montre clairement que la contrainte d'incompressibilité du fluide ($\nabla \cdot u = 0$) dans les espaces fonctionnels ne nous permet pas de discrétiser les équations de Stokes et de Navier-Stokes par les éléments finis les plus simples linéaires et continus par morceaux. En effet, les résultats avec ces éléments varient selon la dimension de l'espace dès que la construction d'une base explicite de l'espace approché n'est pas toujours possible. Cependant, les éléments finis non conformes nous permettent de discrétiser les équations de Navier-Stokes indépendamment de la dimension d'espace et une base explicite de l'espace approché est valable en dimension 2 (Voir [76]). Même pour la discrétisation des équations de Stokes stationnaires (Voir [22]), la méthode des éléments finis non conformes est plus intéressante que celle des éléments finis conformes P2 qui fait inclure plus de degrés de libertés avec un déficit de précision en approchant la condition de divergence, afin d'obtenir des estimations d'erreurs similaires avec les deux méthodes. Grâce aux avantages des éléments finis non conformes, nous discrétisons les équations de Navier-Stokes dans notre modèle couplé en utilisant ces éléments pour la vitesse et les éléments constants par morceaux pour la pression.

Suite à la discrétisation de nouveaux termes de transport dans les équations chimiotaxiques par la méthode de volumes finis et à la discrétisation des équations de Navier-Stokes par la méthode des éléments finis non conformes, nous établissons une étude de convergence détaillée d'un schéma combiné discrétisant le système chimiotactisme-fluide. Similairement au chapitre 2, nous corrigeons les flux diffusifs de notre schéma numérique dans le cas de transmissibilités négatives afin d'obtenir un schéma monotone vérifiant le principe de maximum discret. En se basant sur un code sous Fortran 95, ainsi développé dans le cadre de cette thèse, des simulations numériques de la chimiotaxie anisotrope des cellules dans un fluide sont effectuées pour valider les résultats obtenus avec notre schéma combiné monotone proposé.

Ce chapitre fait l'objet d'un l'article "Monotone combined finite volume-non conforming finite element method for a coupled chemotaxis-fluid model" qui est en cours de préparation.

Chapitre 1

Méthode de Volumes Finis généralisée pour un modèle isotrope de Keller-Segel

1.1 Introduction

Un schéma de volumes finis, discrétisant le modèle de Keller-Segel avec des opérateurs diffusifs homogènes, a été récemment étudié en détail dans [2]. Le but de ce chapitre est l'extension de ce schéma afin de considérer des coefficients diffusifs hétérogènes et probablement discontinus car la diffusion dans un milieu hétérogène peut impliquer des discontinuités dès que les conductivités des composantes du milieu sont différentes. En d'autres termes, les tenseurs sont notés par $S(x) = s(x)Id$ et $M(x) = m(x)Id$ où s et m sont des fonctions scalaires diffusives générales et Id est la matrice identité. Enfin, on effectue plusieurs tests numériques pour valider ce schéma généralisé de volumes finis.

1.1.1 Problème posé

Ce chapitre est consacré à l'étude du système parabolique-parabolique suivant :

$$\partial_t N - \nabla \cdot (s(x)a(N)\nabla N) + \nabla \cdot (s(x)\chi(N)\nabla C) = 0 \text{ dans } Q_T \quad (1.1)$$

$$\partial_t C - \nabla \cdot (m(x)\nabla C) = g(N, C) \text{ dans } Q_T, \quad (1.2)$$

avec des conditions aux bords de flux nul sur $\Sigma_t = \partial\Omega \times (0, T)$,

$$s(x)a(N)\nabla N \cdot \eta = 0, m(x)\nabla C \cdot \eta = 0, \quad (1.3)$$

et des conditions initiales définies dans Ω :

$$N(x, 0) = N_0(x), C(x, 0) = C_0(x). \quad (1.4)$$

On a $Q_T := \Omega \times (0, T)$ où $T > 0$ est un temps fixé et Ω est un domaine ouvert borné polygonal dans \mathbb{R}^d , $d = 2$ ou $d = 3$ dont le bord $\partial\Omega$ est Lipschitz et η est un vecteur normal unitaire.

Dans ce modèle, la densité de la population cellulaire et la concentration du chimio-attractant (ou chimio-répulsant) sont représentées par $N = N(x, t)$ et $C = C(x, t)$, respectivement. De plus, $a(N)$ est le coefficient de diffusion et $\chi(N)$ est la sensibilité des cellules vers le chimio-attractant. La positivité de χ indique l'attraction chimique des cellules, le cas négatif signifie la répulsion. La fonction $g(N, C)$ décrit le taux de production et de dégradation du chimio-attractant ; ici, on suppose qu'elle est une fonction linéaire :

$$g(N, C) = \alpha N - \beta C; \quad \alpha, \beta \geq 0. \quad (1.5)$$

Cette hypothèse aussi utilisée dans la littérature liée (Voir par exemple la référence [3]). Les signes positifs de α et β sont nécessaires pour l'analyse mathématique du modèle.

On suppose que $\chi(0) = 0$ et qu'il existe une densité maximale de cellules N_m telle que $\chi(N_m) = 0$. Cette dernière condition a une interprétation biologique claire : lorsque la densité cellulaire atteint sa valeur maximale N_m , l'accumulation des cellules s'arrête en un point donné de Ω . Cette interprétation est nommée par l'effet d'une densité cellulaire critique ou l'effet de "Volume-filling effect" qui a été aussi prise en considération dans la modélisation de phénomènes chimiotactiques dans [49] et [67]. En plus, on suppose que le coefficient de diffusion $a(N)$ dégénère en $N = 0$ et $N = N_m$. Cela signifie que la diffusion s'arrête en l'absence de la population cellulaire ou lorsque la densité des cellules atteint sa valeur maximale. La dégénérescence du coefficient de diffusion a une grande conséquence sur le traitement mathématique et numérique du système (1.1)-(1.4).

Grâce à une normalisation de N_m , on peut supposer que $N_m = 1$. En effet, il suffit de considérer la transformation suivante : $\tilde{N} = \frac{N}{N_m}$, $\tilde{C} = C$, $\tilde{\chi}(\tilde{N}) = \frac{\chi(\tilde{N}N_m)}{N_m}$, $\tilde{a}(\tilde{N}) = a(\tilde{N}N_m)$, $\tilde{g}(\tilde{N}, \tilde{C}) = g(\tilde{N}N_m, \tilde{C})$ et d'omettre les tildes de la notation.

Un exemple typique de χ est :

$$\chi(N) = N(1 - N); \quad N \in [0, 1]. \quad (1.6)$$

La positivité (resp. la négativité) de χ désigne l'attraction (resp. la répulsion) des cellules par le chimio-attractant (resp. le chimio-répulsant). Dans ce manuscrit, χ est toujours positive.

Les hypothèses principales sont :

$$\chi : [0, 1] \longrightarrow \mathbb{R} \text{ est continue et } \chi(0) = \chi(1) = 0; \quad (1.7)$$

$$a : [0, 1] \longrightarrow \mathbb{R}^+ \text{ est continue ; } a(0) = a(1) = 0 \text{ et } a(s) > 0 \text{ pour } 0 < s < 1. \quad (1.8)$$

$$s, m \in L^\infty(\Omega) \text{ et il existe } \bar{s}, \underline{s}, \bar{m}, \underline{m} \in \mathbb{R}_+^* \text{ telles que } \underline{s} \leq s \leq \bar{s} \text{ et } \underline{m} \leq m \leq \bar{m} \text{ p.p. .} \quad (1.9)$$

On commence par définir une solution faible du système (1.1)-(1.4).

1.1.2 Solution faible.

On suppose que

$$0 \leq N_0 \leq 1 \text{ et } C_0 \geq 0. \quad (1.10)$$

Définition 1 Une *solution faible* du problème continu (1.1)-(1.4) est la paire (N, C) , des fonctions définies sur $Q_T = \Omega \times [0, T]$, telle que :

$$\begin{aligned} 0 \leq N(x, t) \leq 1, C(x, t) \geq 0 \text{ p.p. dans } Q_T, \\ N \in L^\infty(Q_T), A(N) := \int_0^N a(r) dr \in L^2(0, T; H^1(\Omega)), \\ C \in L^\infty(Q_T) \cap L^2(0, T; H^1(\Omega)), \end{aligned}$$

et pour tout φ et $\psi \in D([0, T] \times \bar{\Omega})$, la paire (N, C) satisfait :

$$\begin{aligned} - \int_{\Omega} N_0(x) \varphi(0, x) dx - \iint_{Q_T} N \partial_t \varphi \, dx dt + \iint_{Q_T} s(x) \nabla A(N) \cdot \nabla \varphi \, dx dt - \\ \iint_{Q_T} s(x) \chi(N) \nabla C \cdot \nabla \varphi \, dx dt = 0, \\ - \int_{\Omega} C_0(x) \psi(0, x) dx - \iint_{Q_T} C \partial_t \psi \, dx dt + \iint_{Q_T} m(x) \nabla C \cdot \nabla \psi \, dx dt \\ = \iint_{Q_T} g(N, C) \psi \, dx dt. \end{aligned}$$

1.2 Problème discret

Cette section est consacrée à la formulation du schéma généralisé de volumes finis. Au début, on décrit les discrétisations en espace et en temps et après on énonce le schéma numérique.

1.2.1 Discrétisation en espace

On rappelle que le domaine Ω est un ouvert borné polygonal et connexe de bord $\partial\Omega$ et qu'il est inclus dans \mathbb{R}^d ($d = 2$ ou $d = 3$). On dit qu'un maillage \mathcal{T}_h du domaine Ω , formé de polygones K ouverts et convexes nommés volumes de contrôle, est admissible s'il vérifie les propriétés suivantes :

- La clôture de l'union des K est $\bar{\Omega}$.
- L'intersection entre deux volumes voisins K et L est un sommet ou un côté en dimension deux (une face en dimension trois). Donc, La mesure de $\partial K \cap \partial L$ n'est pas nulle.

- Il existe une famille $\mathcal{P} = (x_K)_{K \in \mathcal{T}_h}$, où x_K est le centre du volume K tel que $\overline{x_K x_L} \perp \sigma_{K,L}$ où $\sigma_{K,L}$ est l'interface commune entre deux volumes de contrôle voisins. Dans le cas d'une triangularisation, on prend x_K comme étant le centre du cercle circonscrit de K .

Dans ce chapitre, on considère \mathcal{T}_h comme étant un maillage admissible de Ω . Dans le cas de fonctions diffusives discontinues, les discontinuités de s et m coïncident avec les interfaces du maillage. Dans ce qui suit, on utilise les notations suivantes :

- La taille du maillage : $\tilde{h} = \sup\{\text{diam}(K), K \in \mathcal{T}_h\}$.
- $|K| = \text{mes}(K)$ = la mesure de Lebesgue d -dimensionnel de K (c'est l'aire de K en dimension 2 et le volume de K en dimension 3) et $|\sigma|$ est la mesure $(d-1)$ -dimensionnel de σ .
- \mathcal{E}_{int} est l'ensemble des côtés intérieurs du maillage et $\mathcal{E}_{ext} = \{\sigma; \sigma \subset \partial\Omega\}$.
- $d_{K,L}$ est la distance euclidienne entre x_K et x_L . Si $\sigma \subset \partial\Omega$ alors $d_{K,\sigma}$ est la distance euclidienne entre x_K et y_σ où y_σ est la projection orthogonale de x_K sur σ .
- $\eta_{K,L}$ est la normale sortant de K et orthogonale à $\sigma_{K,L}$; $\eta_{K,L} = -\eta_{L,K}$.
- $\tau_{K,L}$ est la transmissibilité à travers l'interface $\sigma_{K,L}$ définie par :

$$\tau_{K,L} = \frac{|\sigma_{K,L}|}{d_{K,L}}.$$

- $N(K) = \{L \in \mathcal{T}_h / \partial K \cap \partial L \neq \emptyset\}$ est l'ensemble de volumes voisins de K .
- $T_{K,L}$ est le diamant convexe construit en reliant les deux centres voisins x_K et x_L aux sommets de l'interface commune $\sigma_{K,L}$. On a :

$$\Omega = \bigcup_{K \in \mathcal{T}_h} \left(\bigcup_{L \in N(K)} \bar{T}_{K,L} \right).$$

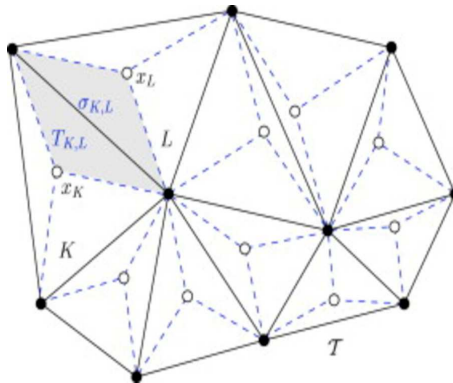


FIGURE 1.1 – Discretisation en espace de Ω .

1.2.2 Discrétisation en temps

Une discrétisation de l'intervalle $[0, T]$ est donnée par un entier $\tilde{N} \in \mathbb{N}^*$; $t_n = n\Delta t$ pour $n \in \{0, \dots, \tilde{N} + 1\}$ et pour un pas de temps fixé Δt . Les inconnues discrètes sont notées par $w_K^n = w(x_K, t_n)$ pour $w = N$ ou C .

Soit \mathcal{D} une discrétisation admissible de $Q_T = \Omega \times [0, T]$ qui n'est autre qu'un maillage admissible \mathcal{T}_h de Ω et un pas de temps fixé $\Delta t > 0$. On définit la régularité du maillage par :

$$h = \max\{\Delta t, \max_{K \in \mathcal{T}_h} \text{diam}(K), \max_{K \in \mathcal{T}_h} \max_{L \in N(K)} d_{K,L}\}.$$

1.2.3 Fonctions discrètes associées

Sur un maillage \mathcal{T}_h admissible, une fonction discrète W est définie par un ensemble $\{W_K\}_{K \in \mathcal{T}_h}$. On identifie W à une fonction w_h constante par morceaux sur Ω telle que $w_h|_K = W_K, \forall K \in \mathcal{T}_h$. Etant donné deux fonctions discrètes w_h et v_h , le produit scalaire et la norme dans $L^2(\Omega)$ sont définis par :

$$(w_h, v_h)_{L^2(\Omega)} = \sum_{K \in \mathcal{T}_h} |K| W_K V_K, \quad \|w_h\|_{L^2(\Omega)}^2 = \sum_{K \in \mathcal{T}_h} |K| |W_K|^2.$$

En plus, on définit un produit scalaire positif qui correspond à une semi-norme $H_0^1(\Omega)$ discrète :

$$\langle w_h, v_h \rangle_{H_h^1(\Omega)} = d \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \sum_{L \in N(K)} \frac{|\sigma_{K,L}|}{d_{K,L}} (W_L - W_K)(V_L - V_K),$$

$$\|w_h\|_{H_h^1(\Omega)}^2 = d \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \sum_{L \in N(K)} \frac{|\sigma_{K,L}|}{d_{K,L}} (W_L - W_K)^2.$$

Finalement, on définit le gradient discret d'une fonction w_h constante par volume de contrôle, comme étant une fonction constante par diamant $T_{K,L}$:

$$(\nabla_h w_h) \Big|_{T_{K,L}} = \nabla_{K,L} w_h := d \frac{W_L - W_K}{d_{K,L}} \eta_{K,L}. \quad (1.11)$$

Notons que la mesure d -dimensionnel $|T_{K,L}|$ est égale à $\frac{1}{d} |\sigma_{K,L}| d_{K,L}$ donc la semi-norme $\|w_h\|_{H_h(\Omega)}$ coïncide avec la norme de $\nabla_h w_h$ dans $L^2(\Omega)$.

1.2.4 Construction du schéma de volumes finis

Afin de discrétiser les équations (1.1) et (1.2), on intègre formellement ces deux équations sur chaque volume de contrôle K et on utilise la formule de Stokes pour les intégrales de divergence. Alors, on obtient :

$$\int_K \partial_t N \, dx - \int_{\partial K} s(x) a(N) \nabla N \cdot \eta_K \, d\gamma(x) - \int_{\partial K} s(x) \chi(N) \nabla C \cdot \eta_K \, dx = 0,$$

$$\int_K \partial_t C \, dx - \int_{\partial K} m(x) \nabla C \cdot \eta_K \, d\gamma(x) = \int_K g(N, C) \, dx.$$

Or, l'intégrale sur le bord ∂K est la somme des intégrales sur les côtés (ou faces) du volume K . D'après l'hypothèse (1.3), on ne tient pas compte des côtés extérieurs car les flux de bord sont nuls. Par la suite :

$$\begin{aligned} \int_K \partial_t N \, dx - \sum_{L \in N(K)} \int_{\sigma_{K,L}} s(x) a(N) \nabla N \cdot \eta_{K,L} \, d\gamma(x) - \sum_{L \in N(K)} \int_{\sigma_{K,L}} s(x) \chi(N) \nabla C \cdot \eta_{K,L} \, dx &= 0, \\ \int_K \partial_t C \, dx - \sum_{L \in N(K)} \int_{\sigma_{K,L}} m(x) \nabla C \cdot \eta_{K,L} \, d\gamma(x) &= \int_K g(N, C) \, dx. \end{aligned}$$

Une discrétisation implicite en temps consiste à remplacer t par t_{n+1} et à remplacer $\partial_t N(x, t_{n+1})$, $\partial_t C(x, t_{n+1})$ par $\frac{N(x, t_{n+1}) - N(x, t_n)}{\Delta t}$, $\frac{C(x, t_{n+1}) - C(x, t_n)}{\Delta t}$.

1.2.4.1 Terme diffusif

Le calcul du flux numérique diffusif nécessite d'approcher les valeurs de $s(x) \nabla A(N) \cdot \eta_{K,L}$ sur les interfaces $\sigma_{K,L}$ des volumes. Dans le cas de fonctions diffusives scalaires (s et m) continues et sous l'hypothèse d'admissibilité du maillage \mathcal{T}_h , la valeur approchée du flux diffusif normal peut être calculée en utilisant des différences finies,

$$\int_{\sigma_{K,L}} s(x) \nabla A(N) \cdot \eta_{K,L} \, d\gamma(x) \approx s_{K,L} \frac{|\sigma_{K,L}|}{d_{K,L}} (A(N_L) - A(N_K)), \quad (1.12)$$

où $s_{K,L} := s(\bar{x}_{K,L})$ désigne l'approximation de $s(x)$ sur l'interface $\sigma_{K,L}$ et $\bar{x}_{K,L}$ est le point d'intersection du segment $[x_K, x_L]$ avec l'interface commune $\sigma_{K,L}$. Par conséquent, les nouvelles transmissibilités sont :

$$\tau_{K,L} = s_{K,L} \frac{|\sigma_{K,L}|}{d_{K,L}}. \quad (1.13)$$

Afin de traiter les discontinuités de coefficients diffusifs qui coïncident avec les interfaces du maillage, on introduit :

$$s_K = \frac{1}{|K|} \int_K s(x) \, dx \text{ et } s_{K,\sigma} = |s_K \eta_{K,\sigma}|, \quad (1.14)$$

où $|\cdot|$ est la norme euclidienne, $s_{K,\sigma}$ est l'approximation de $s(x)$ sur l'interface $\sigma = \sigma_{K,L}$ et $\eta_{K,\sigma}$ est le vecteur normal unitaire orthogonal à l'interface $\sigma_{K,L}$ en sortant du volume K .

Afin d'obtenir un flux conservatif, on introduit des inconnues auxiliaires u_σ sur les interfaces. Ces inconnues sont très utiles à l'écriture du schéma numérique mais elles sont localement éliminées afin d'écrire le problème discret seulement avec les inconnues primaires $(N_K)_{K \in \mathcal{T}_h}$. Comme s est continue sur K et L , l'approximation H_σ de $s(x) \nabla A(N) \cdot \eta_{K,L}$ peut être aussi

effectuée de chaque part de $\sigma_{K,L}$ en utilisant le principe des différences finies,

$$H_\sigma = s_{K,\sigma} \frac{A(N_\sigma) - A(N_K)}{d_{K,\sigma}} \text{ sur } K; H_\sigma = s_{L,\sigma} \frac{A(N_L) - A(N_\sigma)}{d_{L,\sigma}} \text{ sur } L.$$

En exigeant l'égalité de ces deux approximations ci-dessus (la conservativité du flux diffusif), on obtient la valeur suivante de $A(N_\sigma)$,

$$A(N_\sigma) = \frac{1}{\frac{s_{L,\sigma}}{d_{L,\sigma}} + \frac{s_{K,\sigma}}{d_{K,\sigma}}} \left(A(N_L) \frac{s_{L,\sigma}}{d_{L,\sigma}} + A(N_K) \frac{s_{K,\sigma}}{d_{K,\sigma}} \right),$$

qui nous permet de déduire l'expression de l'approximation H_σ ,

$$H_\sigma = \tau_\sigma (A(N_L) - A(N_K)) \text{ avec } \tau_\sigma = \frac{s_{K,\sigma} s_{L,\sigma}}{s_{L,\sigma} d_{K,\sigma} + s_{K,\sigma} d_{L,\sigma}}. \quad (1.15)$$

En conséquence,

$$\int_{\sigma_{K,L}} s(x) \nabla A(N) \cdot \eta_{K,L} d\gamma(x) \approx \tau_\sigma |\sigma_{K,L}| (A(N_L) - A(N_K)), \quad (1.16)$$

avec les nouvelles transmissibilités suivantes :

$$\tau_{K,L} = \tau_\sigma |\sigma_{K,L}|. \quad (1.17)$$

Finalement, on peut donc introduire la fonction suivante s_h comme étant une approximation de s constante sur chaque diamant $T_{K,L}$:

$$s_h(x) = \begin{cases} s_{K,L} := s(\bar{x}_{K,L}) & \text{si } s \text{ est continue,} \\ \tau_\sigma d_{K,L} & \text{si } s \text{ est discontinue sur les interfaces.} \end{cases} \quad (1.18)$$

où le terme τ_σ est bien défini dans (1.15).

Sous l'hypothèse d'admissibilité du maillage \mathcal{T}_h , on peut utiliser le même raisonnement pour en déduire une approximation similaire du flux normal $s(x) \nabla C \cdot \eta_{K,L}$ (resp. $m(x) \nabla C \cdot \eta_{K,L}$) sur les bords de volumes de contrôle au sens des différences divisées de valeurs C_L et C_K :

$$\delta C_{K,L} := s_{K,L} \delta C_{K,L}^1 := s_{K,L} \frac{|\sigma_{K,L}|}{d_{K,L}} (C_L - C_K) \text{ (resp. } \delta \tilde{C}_{K,L} := \mu_{K,L} (C_L - C_K)),$$

où $\mu_{K,L}$ sont les transmissibilités reliées au flux diffusif du chimio-attractant et qui sont définies similairement aux termes $\tau_{K,L}$ mais cette fois ci en utilisant la fonction $m(x)$.

1.2.4.2 Terme Convectif

Pour calculer le flux numérique convectif, on approche $s(x) \chi(N) \nabla C \cdot \eta_{K,L}$ en utilisant les valeurs N_K, N_L et $\delta C_{K,L}$ qui sont valables dans le voisinage de l'interface $\sigma_{K,L}$. Pour cela, on utilise le même flux numérique $G(N_K, N_L, \delta C_{K,L})$ défini dans [2]. La fonction G d'arguments $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$

désigne le flux numérique de convection et elle satisfait les propriétés suivantes :

- $G(., b, c)$ est croissante, $\forall b, c \in \mathbb{R}$ et $G(a, ., c)$ est décroissante, $\forall a, c \in \mathbb{R}$.
- $G(a, b, c) = -G(b, a, -c) \forall a, b, c \in \mathbb{R}$; donc le flux est conservatif.
- $G(a, a, c) = \chi(a)c \forall a, c \in \mathbb{R}$; donc le flux est consistant.
- Il existe $C > 0$ telle que $\forall a, b, c \in \mathbb{R}$, $|G(a, b, c)| \leq C(|a| + |b|)|c|$.
- Il existe un module de continuité $\omega : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$ tel que : $\forall a, b, a', b', c \in \mathbb{R}$, $|G(a, b, c) - G(a', b', c)| \leq |c|\omega(|a - a'| + |b - b'|)$.

Remarque 1 Voici une possibilité de construire un flux numérique G qui satisfait les propriétés précédentes. On décompose χ en sa partie χ_\uparrow croissante et sa partie χ_\downarrow décroissante :

$$\chi_\uparrow(z) := \int_0^z (\chi'(s))^+ ds, \quad \chi_\downarrow(z) := \int_0^z (\chi'(s))^- ds.$$

On rappelle que :

$$s^+ = \max(s, 0) \text{ et } s^- = \max(-s, 0).$$

Il suffit donc de prendre comme flux numérique convectif,

$$G(a, b, c) = c^+(\chi_\uparrow(a) + \chi_\downarrow(b)) - c^-(\chi_\uparrow(b) + \chi_\downarrow(a)). \quad (1.19)$$

Notons que dans le cas où χ (par exemple (1.6)) possède un maximum local unique au point $\bar{N} \in [0, 1]$, on a : $\chi_\uparrow(z) = \chi(\min\{z, \bar{N}\})$ et $\chi_\downarrow(z) = \chi(\max\{z, \bar{N}\}) - \chi(\bar{N})$.

1.2.4.3 Schéma Numérique

Finalement, on peut écrire le schéma de volumes finis suivant : $\forall K \in \mathcal{T}_h$,

$$N_K^0 = \frac{1}{|K|} \int_K N_0(x) dx, \quad C_K^0 = \frac{1}{|K|} \int_K C_0(x) dx. \quad (1.20)$$

Et $\forall n \in [0, \dots, \tilde{N}]$, $\forall K \in \mathcal{T}_h$,

$$|K| \frac{N_K^{n+1} - N_K^n}{\Delta t} - \sum_{L \in N(K)} \tau_{K,L} (A(N_L^{n+1}) - A(N_K^{n+1})) + \sum_{L \in N(K)} G(N_K^{n+1}, N_L^{n+1}; \delta C_{K,L}^{n+1}) = 0, \quad (1.21)$$

$$|K| \frac{C_K^{n+1} - C_K^n}{\Delta t} - \sum_{L \in N(K)} \mu_{K,L} (C_L^{n+1} - C_K^{n+1}) = |K| g(N_K^n, C_K^{n+1}), \quad (1.22)$$

où les transmissibilités sont définies par (1.13) si les fonctions diffusives sont continues sur les interfaces ou par (1.17) sinon. Les inconnues sont $N = \{N_K^{n+1}\}_{K \in \mathcal{T}_h, n \in \{0, \dots, \tilde{N}\}}$ et $C = \{C_K^{n+1}\}_{K \in \mathcal{T}_h, n \in \{0, \dots, \tilde{N}\}}$. La solution discrète associée au schéma (1.21)-(1.22) est un couple (N_h, C_h)

de fonctions constantes par morceaux sur Q_T données par :

$$\forall K \in \mathcal{T}_h, \forall n \in [0, \dots, \tilde{N}], N_h|_{(t^n, t^{n+1}] \times K} = N_K^{n+1}, C_h|_{(t^n, t^{n+1}] \times K} = C_K^{n+1}.$$

1.3 Convergence du schéma numérique

Cette section est consacrée à l'étude de convergence du schéma généralisé de Volume Fini construit dans la section précédente. Tout d'abord, on commence par énoncer le théorème de la convergence. Ensuite, on va démontrer ce théorème en construisant des estimations a priori et en utilisant des arguments de compacité.

Théorème 1 (Convergence du schéma) *On suppose que $C_0 \in L^\infty(\Omega)$, $C_0 \geq 0$ et que $0 \leq N_0 \leq 1$ p.p. sur Ω . Sous les hypothèses (1.5), (1.7) et (1.8),*

- 1) *Il existe une solution (N_h, C_h) du système discret (1.21)-(1.22) avec la condition initiale (1.4).*
- 2) *Toute suite $(h_{\tilde{m}})_m$ qui tend vers 0 possède une sous-suite telle que $(N_{h_{\tilde{m}}}, C_{h_{\tilde{m}}})$ converge p.p. sur Q_T vers une solution faible (N, C) du système (1.1)-(1.2) au sens de la Définition 1.*

La preuve de ce théorème se divise en plusieurs Lemmes et Propositions dont les techniques sont essentiellement utilisées dans [33] écrit par Eymard, Gallouët et Herbin.

1.3.1 Analyse a priori de solutions discrètes

1.3.1.1 Positivité de C_h et confinement de N_h .

Lemme 1 *Soit $(N_K^{n+1}, C_K^{n+1})_{K \in \mathcal{T}_h, n \in \{0, \dots, \tilde{N}\}}$ la solution discrète du schéma (1.21)-(1.22). Alors, pour tout $K \in \mathcal{T}_h$ et pour tout $n \in \{0, \dots, \tilde{N}\}$, on a : $0 \leq N_K^{n+1} \leq 1$ et $C_K^{n+1} \geq 0$.*

Preuve : Raisonnons par récurrence sur n . Grâce à l'hypothèse (1.10), cette assertion est vraie pour $n = 0$. Supposons qu'elle est vraie à l'ordre n et montrons par l'absurde qu'elle reste vraie à l'ordre $n + 1$ ($N_K^{n+1} \geq 0$). On suppose que $N_K^{n+1} < 0$ et que $N_K^n \geq 0$. On considère un volume fixe K tel que $N_K^{n+1} = \min\{N_L^{n+1}\}_{L \in \mathcal{T}_h}$.

Multiplions l'équation (1.21) par $-(N_K^{n+1})^-$, on aura :

$$\begin{aligned} -|K| \frac{N_K^{n+1} - N_K^n}{\Delta t} (N_K^{n+1})^- + \sum_{L \in N(K)} \tau_{K,L} (A(N_L^{n+1}) - A(N_K^{n+1})) (N_K^{n+1})^- \\ - \sum_{L \in N(K)} G(N_K^{n+1}, N_L^{n+1}; \delta C_{K,L}^{n+1}) (N_K^{n+1})^- = 0. \end{aligned}$$

D'une part, la monotonie de l'opérateur A et la positivité des transmissibilités $\tau_{K,L}$ (par définition) entraînent la positivité du terme diffusif. D'autre part, les propriétés du flux G (par définition : la monotonie et la conservativité) et le prolongement de χ par 0 en dehors de $[0, 1]$ impliquent que

$$G(N_K^{n+1}, N_L^{n+1}; \delta C_{K,L}^{n+1}) \leq G(N_K^{n+1}, N_K^{n+1}; \delta C_{K,L}^{n+1}) = \delta C_{K,L}^{n+1} \chi(N_K^{n+1}) = 0.$$

En conséquence,

$$-|K| \frac{N_K^{n+1} - N_K^n}{\Delta t} (N_K^{n+1})^- \leq 0.$$

Comme $N_K^{n+1} = (N_K^{n+1})^+ - (N_K^{n+1})^- = -(N_K^{n+1})^-$, alors :

$$|K| \frac{-(N_K^{n+1})^- - N_K^n}{\Delta t} (N_K^{n+1})^- \geq 0.$$

Cette dernière inégalité est satisfaite si $(N_K^{n+1})^- = \min\{-N_K^{n+1}, 0\} \leq 0$ qui n'est autre qu'une contradiction.

En suivant le même raisonnement, on peut montrer que $N_K^{n+1} \leq 1$ en multipliant (1.21) par $(N_K^{n+1} - 1)^+$ et que $C_K^{n+1} \geq 0$ en multipliant (1.22) par $-(C_K^{n+1})^-$.

1.3.1.2 Estimations a priori discrètes

Sous l'hypothèse de transmissibilités positives, la Proposition suivante des estimations a priori est démontrée en détail dans la Proposition 3.2 de [2].

Proposition 1 Soit $(N_K^{n+1}, C_K^{n+1})_{K \in \mathcal{T}_h, n \in [0, \dots, \tilde{N}]}$ la solution discrète du problème (1.21)-(1.22). Alors, il existe une constante M dépendant de $\|C_0\|_\infty$, α , β et T telle que :

$$C_K^n \leq M. \quad (1.23)$$

En plus, il existe une constante $\tilde{C} > 0$ dépendant de Ω , T , $\|C_0\|_\infty$, α , d et de la constante C qui provient de la propriété de continuité du flux G telle que :

$$\frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\tilde{N}-1} \Delta t \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \sum_{L \in N(K)} \tau_{K,L} \left| A(N_K^{n+1}) - A(N_L^{n+1}) \right|^2 + \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\tilde{N}-1} \Delta t \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \sum_{L \in N(K)} \tau_{K,L} \left| C_K^{n+1} - C_L^{n+1} \right|^2 \leq \tilde{C}. \quad (1.24)$$

1.3.2 Existence d'une solution discrète

Proposition 2 Le problème (1.21)-(1.22) admet au moins une solution $(N_K^{n+1}, C_K^{n+1})_{K \in \mathcal{T}_h, n \in [0, \dots, \tilde{N}]}$.

Preuve : On suit une démarche similaire utilisée dans la preuve de la Proposition 4.1 de [2].

On note $N_h^n = \{N_K^n\}_{K \in \mathcal{T}_h}$ et $C_h^n = \{C_K^n\}_{K \in \mathcal{T}_h}$. On montre l'existence de la solution discrète par récurrence sur n . Supposons que (N_h^n, C_h^n) existe et montrons l'existence de (N_h^{n+1}, C_h^{n+1}) .

L'équation (1.22) est une discrétisation en volumes finis d'une équation parabolique linéaire, implicite en temps. C'est un système en dimension finie linéaire par rapport aux inconnues $\{N_K^{n+1}, K \in \mathcal{T}_h\}$. Il suffit donc de montrer par récurrence que la solution unique du système homogène associé est nulle ($AC = 0 \Rightarrow C = 0$) pour en déduire l'existence et l'unicité de C_h^{n+1} . En effet, supposons que $g = 0$ et $C_K^n = 0$ et montrons que $C_K^{n+1} = 0$ pour tout $K \in \mathcal{T}_h$. En

multipliant l'équation discrète homogène associée à (1.22) par C_K^{n+1} et en additionnant sur tous les volumes $K \in \mathcal{T}_h$, on obtient :

$$\sum_{K \in \mathcal{T}_h} |K| (C_K^{n+1})^2 - \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \sum_{L \in N(K)} \mu_{K,L} (C_L^{n+1} - C_K^{n+1}) C_K^{n+1} = 0.$$

Le rassemblement de la somme du flux diffusif selon les interfaces implique que :

$$\sum_{K \in \mathcal{T}_h} |K| (C_K^{n+1})^2 + \sum_{\sigma_{K,L} \in \mathcal{E}} \mu_{K,L} (C_L^{n+1} - C_K^{n+1})^2 = 0,$$

d'où $\|C_h^{n+1}\|_{L^2(\Omega)}^2 = 0$ et donc $C_K^{n+1} = 0$ pour tout $K \in \mathcal{T}_h$.

Comme $A(\cdot)$ est strictement monotone alors $A(\cdot)$ est inversible. On peut réécrire l'équation (1.21) en termes de w_h^i avec $N_h^i = A^{-1}(w_h^i)$; $i \in [0, \dots, \tilde{N}]$. Supposons que w_h^n et C_h^{n+1} existent. On introduit le produit scalaire $[\cdot, \cdot]$ sur $\mathbb{R}^{\mathcal{T}_h}$ et on définit l'application \mathcal{M} qui associe, à un vecteur $\mathcal{W} = (W_K^{n+1})_{K \in \mathcal{T}_h}$, l'expression suivante déduite de l'équation (1.21) :

$$\begin{aligned} \mathcal{M}(\mathcal{W}) = & \left(|K| \frac{A^{-1}(W_K^{n+1}) - A^{-1}(W_K^n)}{\Delta t} - \sum_{L \in N(K)} \tau_{K,L} (W_L^{n+1} - W_K^{n+1}) \right. \\ & \left. + \sum_{L \in N(K)} G(A^{-1}(W_K^{n+1}), A^{-1}(W_L^{n+1}); \delta C_{K,L}^{n+1}) \right)_{K \in \mathcal{T}_h}. \end{aligned}$$

On multiplie par W_K^{n+1} , on additionne sur tous les volumes $K \in \mathcal{T}_h$, on utilise les estimations (1.23), (1.24) et l'inégalité de Young pour en déduire que :

$$[\mathcal{M}(\mathcal{W}), \mathcal{W}] \geq C|\mathcal{W}|^2 - C'|\mathcal{W}| - C'' \geq 0 \text{ pour } |\mathcal{W}| \text{ suffisamment grand,}$$

où C , C' et C'' sont des constantes strictement positives. En conséquence,

$$[\mathcal{M}(\mathcal{W}), \mathcal{W}] > 0 \text{ pour } |\mathcal{W}| \text{ suffisamment grand.}$$

Cela implique qu'il existe un vecteur \mathcal{W} telle que

$$\mathcal{M}(\mathcal{W}) = 0.$$

En effet, raisonnons par l'absurde et supposons qu'il n'existe pas un \mathcal{W} tel que $\mathcal{M}(\mathcal{W}) = 0$. Dans ce cas, on peut définir sur une boule d'origine O et de rayon k , l'application suivante :

$$\begin{aligned} S : \bar{B}(0, k) & \rightarrow \bar{B}(0, k) \\ \mathcal{W} & \mapsto S(\mathcal{W}) = -\frac{k\mathcal{M}(\mathcal{W})}{[\mathcal{M}(\mathcal{W})]}. \end{aligned}$$

L'application S est continue grâce à la continuité de \mathcal{M} et la norme $[\mathcal{M}(\mathcal{W})]$ n'est pas nulle sur la boule $\bar{B}(0, R)$ convexe et compacte. Le théorème de point fixe de Brower nous permet de

conclure l'existence de \mathcal{W} tel que

$$-\frac{k\mathcal{M}(\mathcal{W})}{[\mathcal{M}(\mathcal{W})]} = \mathcal{W}. \quad (1.25)$$

En prenant la norme de deux côtés de (1.25), on obtient que $[\mathcal{W}] = k > 0$ et en prenant le produit scalaire par \mathcal{W} de chaque côté de (1.25), on obtient que $[\mathcal{W}, \mathcal{W}] = [\mathcal{W}]^2 = -k \frac{[\mathcal{M}(\mathcal{W}), \mathcal{W}]}{[\mathcal{W}]} \leq 0$ qui n'est autre qu'une contradiction. Ainsi, w_h^{n+1} existe et Par la suite la solution discrète N_h^{n+1} existe.

1.3.3 Estimations de compacité sur les solutions discrètes

On montre maintenant des estimations de translatés en temps et en espace de la fonction discrète w_h avec $w_h = A(N_h)$ ou C_h nécessaires à l'application des arguments de compacité.

Lemme 2 *Il existe une constante $C(\Omega, T, N_0, C_0) > 0$ telle que :*

$$\forall \xi \in \mathbb{R}^d, \iint_{\Omega' \times [0, T]} \left| w_h(t, x + \xi) - w_h(t, x) \right|^2 dx dt \leq C |\xi| (|\xi| + 2h) \text{ pour } w_h = A(N_h), C_h, \quad (1.26)$$

avec $\Omega' = \{x \in \Omega, [x, x + \xi] \subset \Omega\}$ et

$$\forall \tau \in [0, T], \iint_{\Omega \times [0, T - \tau]} \left| w_h(t + \tau, x) - w_h(t, x) \right|^2 dx dt \leq C(\tau + \Delta t) \text{ pour } w_h = A(N_h), C_h. \quad (1.27)$$

Preuve : Tout d'abord, on simplifie les notations en écrivant :

$$\sum_{\sigma_{K,L}} \text{ au lieu de } \sum_{[(K,L) \in \mathcal{T}_h^2, K \neq L, |\sigma_{K,L}| \neq 0]} .$$

Soit $\xi \in \mathbb{R}^3$, $L \in N(K)$. On définit sur Ω' la fonction :

$$\beta_{\sigma_{K,L}}(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } [x, x + \xi] \text{ intersecte } \sigma_{K,L}, K \text{ et } L \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} .$$

Ensuite, on définit $c_{\sigma_{K,L}} = \left| \frac{\xi}{|\xi|} \cdot \eta_{K,L} \right|$ et on remarque que

$$\text{i) } \int_{\Omega'} \beta_{\sigma_{K,L}}(x) dx \leq |\sigma_{K,L}| |\xi| c_{\sigma_{K,L}},$$

car $\int_{\Omega'} \beta_{\sigma_{K,L}}(x) dx$ est la mesure de l'ensemble des points de Ω' qui se trouvent dans un cylindre de base $\sigma_{K,L}$ et de vecteur générateur $-\xi$. En plus, on a :

$$\text{ii) } \sum_{\sigma_{K,L}} \beta_{\sigma_{K,L}}(x) c_{\sigma_{K,L}} d_{K,L} \leq |\xi| + 2h .$$

En effet, dès que Ω n'est pas supposé convexe, il se peut que $[x, x + \xi] \not\subset \bar{\Omega}$. Pour éviter cela, soit y' et $z' \in [x, x + \xi]$ tel que $y' \neq z'$ et le segment $[y', z'] \subset \bar{\Omega}$ dont il existe deux volumes K et $L \in \mathcal{T}_h$ tels que : $y' \in \bar{K}$ et $z' \in \bar{L}$. D'où,

$$\sum_{\sigma_{K,L}} \beta_{\sigma_{K,L}}(x) c_{\sigma_{K,L}} d_{K,L} = \left| (y_1 - z_1) \cdot \frac{\xi}{|\xi|} \right|,$$

où $y_1 = x_K$ ou x_σ avec $\sigma \in \mathcal{E}_{ext} \cap \mathcal{E}_K$ et $z_1 = x_L$ ou $x_{\sigma'}$ avec $\sigma' \in \mathcal{E}_{ext} \cap \mathcal{E}_L$ dépendant de la position de y' et z' dans \bar{K} ou \bar{L} respectivement.

Dès que $y_1 = y' + y_2$ avec $|y_2| \leq h$ et $z_1 = z' + z_2$ avec $|z_2| \leq h$, alors

$$\left| (y_1 - z_1) \cdot \frac{\xi}{|\xi|} \right| \leq |y' - z'| + |y_2| + |z_2| \leq |\xi| + 2h.$$

Par la suite, l'inégalité de Cauchy-Schwarz et l'estimation (1.24) entraînent que :

$$\begin{aligned} \iint_{\Omega' \times [0, T]} |A(N_h)(t, x + y) - A(N_h)(t, x)|^2 dx dt &\leq \iint_{\Omega' \times [0, T]} \left(\sum_{\sigma_{K,L}} |A(N_L^{n+1}) - A(N_K^{n+1})| \beta_{\sigma_{K,L}}(x) \right)^2 dx dt \\ &\leq \iint_{\Omega' \times [0, T]} \left(\sum_{\sigma_{K,L}} \frac{|A(N_L^{n+1}) - A(N_K^{n+1})|^2}{d_{K,L} c_{\sigma_{K,L}}} \beta_{\sigma_{K,L}}(x) \right) \left(\sum_{\sigma_{K,L}} \beta_{\sigma_{K,L}}(x) d_{K,L} c_{\sigma_{K,L}} \right) dx dt \\ &\leq (T \sum_{\sigma_{K,L}} \beta_{\sigma_{K,L}}(x) d_{K,L} c_{\sigma_{K,L}}) \sum_{n=0}^{\tilde{N}-1} \Delta t \sum_{\sigma_{K,L}} \frac{|A(N_L^{n+1}) - A(N_K^{n+1})|^2}{d_{K,L} c_{\sigma_{K,L}}} \int_{\Omega'} \beta_{\sigma_{K,L}}(x) dx \\ &\leq CT|y|(|y| + 2h). \end{aligned}$$

L'estimation (1.27) de translatés en temps est facilement montrée en adaptant les mêmes techniques du référence [2]. Ceci termine la preuve de ce Lemme.

1.3.4 Etude de Convergence

Dans cette section, on va montrer la convergence de la solution du problème discret vers une limite qui n'est autre qu'une solution faible du problème continu au sens de la Définition 1.

Lemme 3 *Il existe une suite $(h_{\tilde{m}})_{\tilde{m} \in \mathbb{N}}/h_{\tilde{m}} \rightarrow 0$ quand $\tilde{m} \rightarrow \infty$ et des fonctions (N, C) sur Q_T vérifiant $0 \leq N \leq 1$, $A(N)$ et $C \in L^2(0, T; H^1(\Omega))$, telles que :*

$$i) N_{h_{\tilde{m}}} \rightarrow N \text{ et } C_{h_{\tilde{m}}} \rightarrow C \text{ p.p. dans } Q_T \text{ et fortement dans } L^p(Q_T) \forall 1 \leq p < +\infty, \quad (1.28)$$

$$ii) \nabla_{h_{\tilde{m}}} A(N_{h_{\tilde{m}}}) \rightharpoonup \nabla A(N) \text{ et } \nabla_{h_{\tilde{m}}} C_{h_{\tilde{m}}} \rightharpoonup m(x) \nabla C \text{ dans } (L^2(Q_T))^d, \quad (1.29)$$

$$iii) s_h(x) \rightarrow s(x) \text{ p.p. dans } \Omega. \quad (1.30)$$

Preuve : Le Lemme 2 et le critère de compacité de Kolmogorov (Voir [10], Theorem IV.25) impliquent l'existence d'une sous-suite de N_h telle que

$$A(N_h) \longrightarrow \bar{A} \text{ dans } L^2(Q_T).$$

Puisque A est strictement monotone, il existe une densité unique N telle que $A(N) = \bar{A}$. Donc,

$$A(N_h) \longrightarrow A(N) \text{ dans } L^2(Q_T) \text{ et p.p. dans } Q_T. \quad (1.31)$$

Comme A^{-1} est bien définie et continue, en appliquant la borne L^∞ sur N_h et le théorème de convergence dominée de Lebesgue à $N_h = A^{-1}(A(N_h))$, on a :

$$N_h \longrightarrow N \text{ dans } L^p(Q_T) \text{ et p.p. dans } Q_T, 1 \leq p < +\infty.$$

De la même manière, les estimations de translatés en espace et en temps et la L^∞ -borne de C_h de (1.23) assurent l'extraction d'une sous-suite C_h telle que :

$$C_h \longrightarrow C \text{ dans } L^p(Q_T) \text{ et p.p. dans } Q_T, 1 \leq p < +\infty.$$

Montrons maintenant (1.29). Grâce à l'estimation (1.24), on a $\nabla_{h_{\bar{m}}} A(u_{h_{\bar{m}}}) \rightharpoonup \Gamma$ dans $L^2(Q_T)$. Il reste à montrer que $\Gamma = \nabla A(N)$ en deux étapes :

Première étape : Montrons que :

$$E_{h_{\bar{m}}} = \iint_{Q_T} \nabla_{h_{\bar{m}}} A(N_{h_{\bar{m}}}) \varphi \, dx dt + \iint_{Q_T} A(N_{h_{\bar{m}}}) \nabla \cdot \varphi \, dx dt \xrightarrow{h_{\bar{m}} \rightarrow 0} 0.$$

On a :

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} A(N_{h_{\bar{m}}})(x, t) \nabla \cdot (\varphi(x, t)) \, dx &= \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \int_K A(N_{h_{\bar{m}}})(x, t) \nabla \cdot (\varphi(x, t)) \, dx \\ &= \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \sum_{L \in N(K)} A(N_K^{n+1}) \int_{\sigma_{K,L}} \varphi(s, t) \eta_{K,L} \, ds \\ &= \frac{1}{2} \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \sum_{L \in N(K)} (A(N_K^{n+1}) - A(N_L^{n+1})) \int_{\sigma_{K,L}} \varphi(s, t) \eta_{K,L} \, ds. \end{aligned}$$

D'après la définition (1.11) du gradient discret, on a :

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \nabla_{h_{\bar{m}}} A(N_{h_{\bar{m}}}) \varphi \, dx &= \frac{1}{2} \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \sum_{L \in N(K)} \int_{T_{K,L}} \nabla_{h_{\bar{m}}} A(N_{h_{\bar{m}}}) \varphi \, dx \\ &= -\frac{1}{2} \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \sum_{L \in N(K)} (A(N_K^{n+1}) - A(N_L^{n+1})) \frac{|\sigma_{K,L}|}{|T_{K,L}|} \int_{T_{K,L}} \varphi(x, t) \eta_{K,L} \, dx. \end{aligned}$$

Dès que φ est régulière, on applique la formule de Taylor pour obtenir :

$$\left| \frac{1}{|T_{K,L}|} \int_{T_{K,L}} \varphi(x,t) \eta_{K,L} dx - \frac{1}{|\sigma_{K,L}|} \int_{\sigma_{K,L}} \varphi(s,t) \eta_{K,L} ds \right| \leq h_{\tilde{m}} \|\varphi\|_{C^1(\overline{\Omega_T})}.$$

D'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz et l'estimation (1.24), on a :

$$\begin{aligned} 2|E_{h_{\tilde{m}}}| &\leq h_{\tilde{m}} \|\varphi\|_{C^1(\overline{\Omega_T})} \sum_{n=0}^{\tilde{N}-1} \Delta t \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \sum_{L \in N(K)} |A(N_L^{n+1}) - A(N_K^{n+1})| |\sigma_{K,L}| \\ &\leq h_{\tilde{m}} \sqrt{C} \|\varphi\|_{C^1(\overline{\Omega_T})} \left(\sum_{n=0}^{\tilde{N}-1} \Delta t \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \sum_{L \in N(K)} d_{K,L} |\sigma_{K,L}| \right)^{\frac{1}{2}}. \end{aligned}$$

Ensuite, on rappelle que la condition d'orthogonalité (dûe à l'admissibilité du maillage) implique

$$d_{K,L} |\sigma_{K,L}| = d|T_{K,L}|, \quad (1.32)$$

et que :

$$\sum_{K \in \mathcal{T}_h} \sum_{L \in N(K)} |T_{K,L}| = 2|\Omega|.$$

Par la suite,

$$E_{h_{\tilde{m}}} \leq \frac{1}{2} h_{\tilde{m}} \|\varphi\|_{C^1(\overline{\Omega_T})} \sqrt{2CTd|\Omega|} \xrightarrow{h_{\tilde{m}} \rightarrow 0} 0.$$

Deuxième étape :

D'un part, la première étape et l'assertion (1.31) impliquent que :

$$(\nabla_{h_{\tilde{m}}} A(N_{h_{\tilde{m}}}), \varphi) \rightarrow -(A(N_{h_{\tilde{m}}}), \nabla \cdot \varphi) \rightarrow -(A(N), \nabla \cdot \varphi) \rightarrow (\nabla A(N), \varphi).$$

D'autre part, la convergence faible dans $L^2(Q_T)$ déduite de (1.24) entraîne que :

$$(\nabla_{h_{\tilde{m}}} A(N_{h_{\tilde{m}}}), \varphi) \rightarrow (\Gamma, \varphi).$$

D'où $\Gamma = \nabla A(N)$.

Finalement, on montre (1.30). On se base sur l'approximation s_h définie dans (1.18). $\forall s \in L^\infty(\Omega) \subset L^1(\Omega)$, on rappelle que la fonction constante sur chaque diamant $T_{K,L}$:

$$s_h(x) = \frac{1}{|T_{K,L}|} \int_{T_{K,L}} s(x) dx.$$

Soit $\varphi \in C^0(\Omega)$ alors $\Pi_h \varphi(x) = \frac{1}{|T_{K,L}|} \int_{T_{K,L}} \varphi(x) dx \rightarrow \varphi(x)$ p.p. et $|\Pi_h \varphi(x)| \leq \|\varphi\|_{L^\infty(\Omega)}$. D'après le théorème de convergence dominée de Lebesgue, on a : $\Pi_h \varphi \rightarrow \varphi$ fort dans $L^1(\Omega)$. En plus, par densité on a :

$$\forall s \in L^1(\Omega), \exists \varphi \in C^0(\Omega); \|s - \varphi\|_{L^1(\Omega)} \leq \varepsilon.$$

D'où :

$$\|s_h - s\|_{L^1(\Omega)} \leq \|s_h - \Pi_h \varphi\|_{L^1(\Omega)} + \|\Pi_h \varphi - \varphi\|_{L^1(\Omega)} + \|s - \varphi\|_{L^1(\Omega)} \xrightarrow{h \rightarrow 0} 0$$

Et on peut facilement déduire (1.30).

Lemme 4 *Les fonctions limites N et C construites dans le Lemme 2 constituent une solution faible du problème (1.1)-(1.2) au sens de la Définition 1.*

Preuve : Soit $\varphi_K^n := \varphi(t^n, x_K), \forall K \in \mathcal{T}_h$ et $n \in [0, \dots, \tilde{N} + 1]$ avec $\varphi \in \mathcal{D}([0, T] \times \bar{\Omega})$. On multiplie (1.21) par $\Delta t \varphi_K^{n+1}$ et on additionne pour tout $K \in \mathcal{T}_h$ et $n \in [0, \dots, \tilde{N}]$. On obtient :

$$S_1^h + S_2^h + S_3^h = 0,$$

où

$$\begin{aligned} S_1^h &:= \sum_{n=0}^{\tilde{N}-1} \sum_{K \in \mathcal{T}_h} |K| (N_K^{n+1} - N_K^n) \varphi_K^{n+1}, \\ S_2^h &:= - \sum_{n=0}^{\tilde{N}-1} \Delta t \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \sum_{L \in N(K)} \tau_{K,L} (A(N_L^{n+1}) - A(N_K^{n+1})) \varphi_K^{n+1}, \\ S_3^h &:= \sum_{n=0}^{\tilde{N}-1} \Delta t \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \sum_{L \in N(K)} G(N_K^{n+1}, N_L^{n+1}, \delta C_{K,L}) \varphi_K^{n+1}. \end{aligned}$$

Terme d'évolution en temps. En faisant une intégration par parties et en tenant compte que $\varphi_K^{\tilde{N}+1} = 0$ pour tout $K \in \mathcal{T}_h$, on obtient :

$$\begin{aligned} S_1^h &= - \sum_{n=0}^{\tilde{N}-1} \sum_{K \in \mathcal{T}_h} |K| N_K^{n+1} (\varphi_K^{n+1} - \varphi_K^n) - \sum_{K \in \mathcal{T}_h} |K| N_K^0 \varphi_K^0 \\ &= - \sum_{n=0}^{\tilde{N}-1} \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \int_{t^n}^{t^{n+1}} \int_K N_K^{n+1} \partial_t \varphi(t, x_K) dx dt - \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \int_K N_0(x) \varphi(0, x_K) dx dt \\ &= - \int_0^T \int_{\Omega} N_h(t, x) \partial_t \varphi(t, x_K) dx dt - \int_{\Omega} N_0(x) \varphi(0, x_K) dx. \end{aligned}$$

On définit

$$\tilde{S}_1^h = - \int_0^T \int_{\Omega} N \partial_t \varphi dx dt - \int_{\Omega} N_0 \varphi(0, \cdot) dx$$

En profitant de la régularité de la fonction test φ , en appliquant Taylor et en utilisant le Lemme 3 i), on obtient facilement que :

$$|S_1^h - \tilde{S}_1^h| \xrightarrow{h \rightarrow 0} 0.$$

Terme diffusif. En le regroupant par côtés et en appliquant Taylor, on a :

$$\begin{aligned} S_2^h &= \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\tilde{N}-1} \Delta t \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \sum_{L \in N(K)} s_{K,L} \frac{1}{d} |\sigma_{K,L}| d_{K,L} d \frac{A(N_L^{n+1}) - A(N_K^{n+1})}{d_{K,L}} \frac{\varphi_L^{n+1} - \varphi_K^{n+1}}{d_{K,L}} \\ &= \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\tilde{N}-1} \Delta t \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \sum_{L \in N(K)} s_{K,L} |T_{K,L}| (\nabla_{K,L} A(N_h^{n+1}) \cdot \eta_{K,L}) (\nabla \varphi(t^{n+1}, \bar{x}_{K,L}) \cdot \eta_{K,L}), \end{aligned}$$

où $\bar{x}_{K,L}$ est un point du segment $[x_K, x_L]$ et $\eta_{K,L} = \frac{x_L - x_K}{d_{K,L}}$. Par la suite,

$$\begin{aligned} S_2^h &= \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\tilde{N}-1} \Delta t \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \sum_{L \in N(K)} s_{K,L} |T_{K,L}| (\nabla_{K,L} A(N_h^{n+1}) \cdot \nabla \varphi(t^{n+1}, \bar{x}_{K,L})) \\ &= \int_0^T \int_{\Omega} s_h(x) \nabla_h A(N_h) \cdot (\nabla \varphi)_h \, dx dt, \end{aligned}$$

où

$$(\nabla \varphi)_h|_{]t^n, t^{n+1}] \times T_{K,L}} := \nabla \varphi(t^{n+1}, \bar{x}_{K,L}).$$

Ensuite, il est clair d'après le Lemme 3 ii) et iii), la continuité de φ qui donne $(\nabla \varphi)_h \rightarrow \nabla \varphi$ dans $L^\infty(Q_T)$ et le théorème de convergence dominée de Lebesgue que

$$\lim_{m \rightarrow +\infty} S_2^{h_m} = \int_0^T \int_{\Omega} s(x) \nabla A(N) \cdot \nabla \varphi \, dx dt.$$

Terme convectif. En regroupant par côtés, on aura :

$$S_3^h := -\frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\tilde{N}-1} \Delta t \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \sum_{L \in N(K)} G(N_K^{n+1}, N_L^{n+1}, \delta C_{K,L}^{n+1}) (\varphi_L^{n+1} - \varphi_K^{n+1}).$$

Pour chaque couple K et L de volumes voisins, on introduit $N_{K,L}^{n+1}$ comme étant le minimum de N_K^{n+1} et N_L^{n+1} et on pose :

$$S_3^{h,*} := -\frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\tilde{N}-1} \Delta t \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \sum_{L \in N(K)} \chi(N_{K,L}^{n+1}) \delta C_{K,L}^{n+1} (\varphi_L^{n+1} - \varphi_K^{n+1}).$$

On introduit les deux fonctions \overline{N}_h et \underline{N}_h :

$$\overline{N}_h|_{]t^n, t^{n+1}] \times T_{K,L}} := \max\{N_K^{n+1}, N_L^{n+1}\}, \quad \underline{N}_h|_{]t^n, t^{n+1}] \times T_{K,L}} := \min\{N_K^{n+1}, N_L^{n+1}\}.$$

Selon la définition de ∇_h et $(\nabla \varphi)_h$, on peut écrire :

$$S_3^{h,*} := -\frac{d}{2} \int_0^T \int_{\Omega} s_h(x) \chi(\underline{N}_h) \nabla_h C_h \cdot (\nabla \varphi)_h \, dx dt.$$

En utilisant la monotonicité de A et l'estimation (1.24), on a :

$$\begin{aligned} \int_0^T \int_{\Omega} |A(\overline{N_h}) - A(\underline{N_h})|^2 &\leq \sum_{n=0}^{\tilde{N}-1} \Delta t \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \sum_{L \in N(K)} |T_{K,L}| |A(N_L^{n+1}) - A(N_K^{n+1})|^2 \\ &\leq h^2 \sum_{n=0}^{\tilde{N}-1} \Delta t \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \sum_{L \in N(K)} \frac{|\sigma_{K,L}|}{d_{K,L}} |A(N_L^{n+1}) - A(N_K^{n+1})|^2 \leq Ch^2. \end{aligned}$$

Donc,

$$A(\overline{N_{h_{\tilde{m}}}}) \rightarrow A(\underline{N_{h_{\tilde{m}}}}) \text{ p.p. dans } Q_T \text{ quand } h_{\tilde{m}} \rightarrow 0.$$

Comme A^{-1} est continue alors,

$$\overline{N_{h_{\tilde{m}}}} \rightarrow \underline{N_{h_{\tilde{m}}}} \text{ p.p. dans } Q_T \text{ quand } h_{\tilde{m}} \rightarrow 0.$$

En utilisant le Lemme 3 i), iii) et que $\underline{N_{h_{\tilde{m}}}} \leq N_{h_{\tilde{m}}} \leq \overline{N_{h_{\tilde{m}}}}$, on a :

$$\chi(\underline{N_{h_{\tilde{m}}}}) \rightarrow \chi(N) \text{ p.p. dans } Q_T \text{ et dans } L^p(Q_T), \text{ pour } p < +\infty.$$

Le Lemme 3 ii) implique que

$$\lim_{m \rightarrow +\infty} S_3^{h_{\tilde{m}},*} = - \int_0^T \int_{\Omega} s(x) \chi(N) \nabla C \cdot \nabla \varphi \, dx dt.$$

Ensuite, il en résulte des propriétés de G que :

$$\begin{aligned} |G(N_K^{n+1}, N_L^{n+1}, \delta C_{K,L}^{n+1}) - \chi(N_{K,L}^{n+1}) \delta C_{K,L}^{n+1}| &= |G(N_K^{n+1}, N_L^{n+1}, \delta C_{K,L}^{n+1}) - G(N_{K,L}^{n+1}, N_{K,L}^{n+1}, \delta C_{K,L}^{n+1})| \\ &\leq |\delta C_{K,L}^{n+1}| w(d|N_L^{n+1} - N_K^{n+1}|). \end{aligned}$$

Donc,

$$|S_3^h - S_3^{h,*}| \leq \int_0^T \int_{\Omega} s(x) w(2|\overline{N_h} - \underline{N_h}|) |\nabla_h C_h \cdot (\nabla \varphi)_h|.$$

En utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz, la borne uniforme de $\nabla_h C_h$ d'après (1.24), la borne uniforme de s et la convergence $\overline{N_{h_{\tilde{m}}}} \rightarrow \underline{N_{h_{\tilde{m}}}}$, on peut finalement déduire que :

$$\lim_{m \rightarrow +\infty} S_3^{h_{\tilde{m}}} = - \int_0^T \int_{\Omega} s(x) \chi(N) \nabla C \cdot \nabla \varphi \, dx dt.$$

Finalement, il faut noter que les résultats de convergence concernant la concentration du chimio-attractant C peuvent être montrés de la même façon et en suivant le même raisonnement.

1.4 Tests Numériques

Dans cette section, des expériences numériques sont effectuées afin de vérifier nos résultats théoriques. La résolution se fait à l'aide d'un code Fortran 95 étendu au cas de problèmes avec

des coefficients diffusifs hétérogènes et discontinus.

1.4.1 Problème elliptique.

On cherche à montrer dans cette partie l'efficacité de la solution numérique calculée en utilisant les nouvelles transmissibilités (1.17). Ainsi, il faut faire attention qu'on puisse écrire ces transmissibilités sur les interfaces d'une autre façon. Il suffit de prendre dans (1.15) la moyenne arithmétique des approximations de la fonction diffusive $s(x)$ sur les deux triangles voisins de cette interface. Par suite, les transmissibilités s'écrivent :

$$\tau_{K,L} = \frac{|\sigma_{K,L}| (s_{K,\sigma} + s_{L,\sigma})}{d_{K,L}}. \quad (1.33)$$

Le but du test suivant est de montrer que les transmissibilités (1.17) apportent de solutions approchées plus précises que celles calculées en utilisant les transmissibilités (1.33). On va effectuer ce test de comparaison sur le maillage admissible donné sur la Figure 1.2(b).

1.4.1.1 Test 0 : Tuyau oblique

Afin de comparer l'efficacité de solutions numériques calculées avec (1.17) et (1.33), on considère le problème elliptique suivant :

$$\begin{cases} -\nabla \cdot (s(x)\nabla N) & = f \\ N_{exacte} & = x + \delta y \end{cases}.$$

Le domaine Ω est le carré unité et il est divisé en trois sous-domaines :

$$\Omega_1 = \{(x, y) \in \Omega; \phi_1(x, y) < 0\},$$

$$\Omega_2 = \{(x, y) \in \Omega; \phi_1(x, y) > 0 \text{ et } \phi_2(x, y) < 0\},$$

$$\Omega_3 = \{(x, y) \in \Omega; \phi_2(x, y) > 0\},$$

avec $\phi_1(x, y) = y + \delta(x - 0.5) - 0.475$ et $\phi_2(x, y) = \phi_1(x, y) - 0.05$. Les conditions aux bords sont de Dirichlet non homogènes. Dans ce test, la pente du tuyau est $\delta = 0.3$, la fonction diffusive scalaire,

$$s(x, y) = \begin{cases} 1 & \text{si } (x, y) \in \Omega_1 \cup \Omega_3 \\ 6 & \text{si } (x, y) \in \Omega_2 \end{cases}$$

est hétérogène discontinue et le second membre $f = -\nabla \cdot (s(x, y)\nabla N_{exacte}) = 0$ déterminée en fonction de la solution exacte et de la fonction diffusive scalaire choisies dans ce test.

La Figure 1.3 nous montre la solution exacte et la solution approchée obtenues dans ce test. Les erreurs entre la solution exacte et la solution calculée avec les deux types de transmissibilités (1.17) et (1.33) sont données dans le tableau 1.1 et dans la Figure 1.9. On conclut qu'avec la moyenne harmonique, les solutions approchées sont plus efficaces.

1.4.2 Problème isotrope général de Keller-Segel

Dans ce qui suit, on effectue plusieurs tests numériques pour valider le schéma généralisé de volumes finis appliqué au modèle isotrope général de Keller-Segel. Le calcul de la solution numérique est effectué selon l'algorithme suivant : A chaque instant discret t_{n+1} , on calcule tout d'abord la solution C^{n+1} du système linéaire donné par l'équation (1.22). Ensuite, on calcule la solution N^{n+1} du système non-linéaire (1.21) en utilisant un algorithme de Newton pour approcher la solution du système non-linéaire et une méthode de bigradient pour résoudre les systèmes linéaires résultants de la procédure de l'algorithme de Newton. On va effectuer nos tests sur des maillages admissibles donnés dans la Figure 1.

1.4.2.1 Test 1 : Cas hétérogène continu

On considère les données suivantes : $L_x = 1$ et $L_y = 1$ comme étant la longueur et la largeur du domaine de Delaunay construit par un logiciel triangle et donné dans la Figure 1.2(a). Dans ce premier test, on considère les fonctions diffusives suivantes :

$$s(x) = (x - 0.5)^2 + (y - 0.5)^2; m(x) = 1.$$

En plus, $dt = 0.005$, $\alpha = 0.01$, $\beta = 5 \times 10^{-3}$, $A(N) = D(\frac{N^2}{2} - \frac{N^3}{3})$ avec $D = 10^{-1}$, $\chi(N) = cN(1 - N)^2$ avec $c = 4 \times 10^{-1}$. Finalement, le coefficient diffusif du chimio-attractant est $d = 10^{-5}$. Les conditions initiales sont définies par régions (Voir Figure 1.4). La densité initiale est définie par $N_0(x, y) = 1$ dans le carré $(x, y) \in ([0.2, 0.3] \times [0.45, 0.55])$ et 0 ailleurs. La concentration du chimio-attractant initiale est définie par $C_0(x, y) = 5$ dans l'union des deux carrés $(x, y) \in ([0.45, 0.55] \times [0.25, 0.35]) \cup ([0.45, 0.55] \times [0.65, 0.75])$ et 0 ailleurs. Dans la Figure 1.5, on observe l'évolution de la densité cellulaire en temps durant laquelle on remarque l'effet du chimio-attractant, dès que les cellules sont finalement présentes dans les zones du chimio-attractant.

1.4.2.2 Test 2 : Cas hétérogène discontinu

On présente ce deuxième test pour traiter le cas des coefficients diffusifs hétérogènes et discontinus. Pour cela, on considère

$$s(x) = \begin{cases} 6 & \text{si } y \leq 0.5 \\ 1 & \text{si } y > 0.5 \end{cases}, m(x) = 1.$$

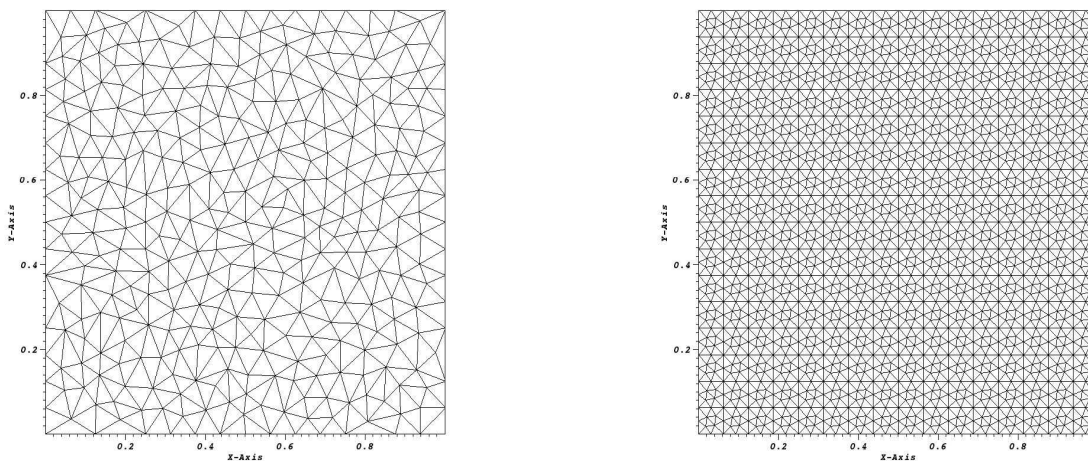
Le domaine Ω est le carré unité et le maillage est donné dans la Figure 1.2(b). On peut ainsi remarquer que les discontinuités des coefficients diffusifs coïncident avec les interfaces du maillage. Ensuite, on choisit $dt = 0.005$, $\alpha = 0.01$, $\beta = 0.05$, $A(N) = D(\frac{N^2}{2} - \frac{N^3}{3})$ avec $D = 0.03$, $\chi(N) = cN(1 - N)^2$ avec $c = 0.1$. Finalement, le coefficient diffusif du chimio-attractant est $d = 10^{-5}$. Les conditions initiales sont définies par régions (Voir Figure 1.6). La densité initiale est définie par $N_0(x, y) = 1$ dans le carré $(x, y) \in ([0.15, 0.25] \times [0.45, 0.55])$ et 0 ailleurs. La concentration du chimio-attractant initiale est définie par $C_0(x, y) = 5$ dans l'union de deux

Transmissibilités	(1.33)	(1.17)
Erreur L^∞	2.211×10^{-2}	1.578×10^{-2}
Erreur L^2	4.889×10^{-4}	2.488×10^{-4}
Erreur L^∞ relative	1.711×10^{-2}	1.221×10^{-2}
Erreur L^2 relative	2.928×10^{-4}	1.490×10^{-4}

TABLE 1.1 – Test 0- Comparaison des erreurs de solutions approchées.

carrés $(x, y) \in ([0.45, 0.55] \times [0.7, 0.8]) \cup ([0.45, 0.55] \times [0.2, 0.3])$ et 0 ailleurs. On observe clairement dans la Figure 1.7 le comportement de la densité cellulaire et son évolution en temps ainsi que l'influence de la diffusion discontinue. On remarque que les cellules sont finalement présentes en excès dans la zone inférieure du domaine.

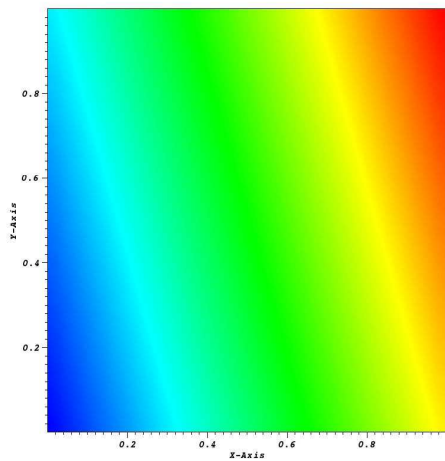
On note aussi qu'on peut visualiser nos résultats numériques à l'aide des courbes d'évolution en temps de la densité cellulaire et de la concentration du chimio-attractant sur des points fixés. Pour ce deuxième test, afin de comparer l'attitude de la densité cellulaire N entre les zones supérieures et inférieures du domaine, il suffit de fixer les deux points $(0.25, 0.46)$ et $(0.25, 0.54)$ dans la zone initiale des cellules et les deux points $(0.5, 0.25)$ et $(0.5, 0.75)$ dans les deux zones du chimio-attractant. On peut facilement remarquer la diffusion discontinue dès qu'elle commence en retard dans la région supérieure de la zone initiale des cellules (Voir Figure 1.8(a)) et le retard de la convection des cellules vers la zone supérieure du chimio-attractant (Voir Figure 1.8(b)).



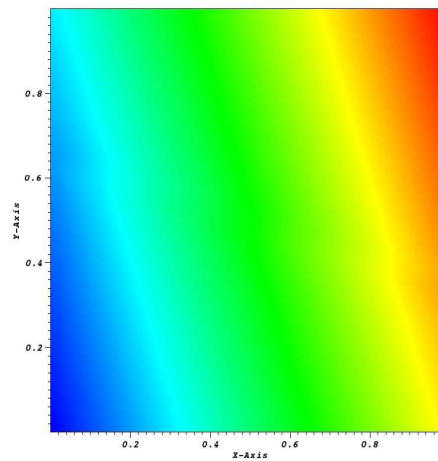
(a) Maillage de Delaunay de 620 triangles.

(b) Maillage de type Boyer de 3584 triangles.

FIGURE 1.2 – Des maillages admissibles \mathcal{T}_h .



(a) Solution exacte.



(b) Solution approchée.

FIGURE 1.3 – Test 0- Tuyau oblique.

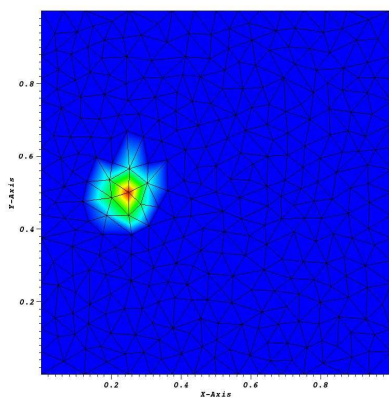
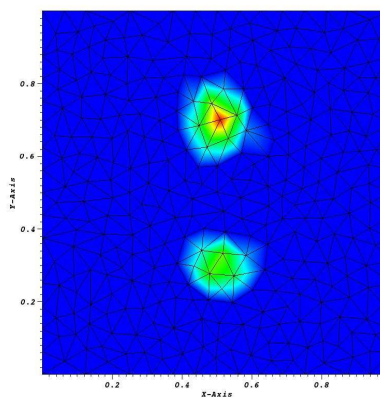
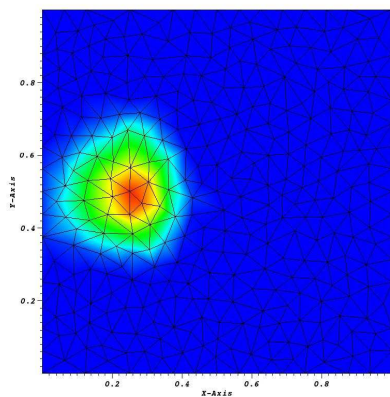
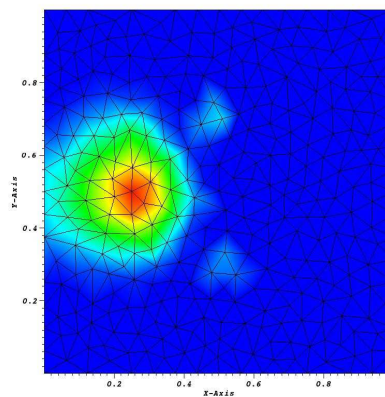
(a) Condition Initiale de la densité cellulaire N_0 .(b) Condition initiale de la concentration du chimio-attractant C_0 .

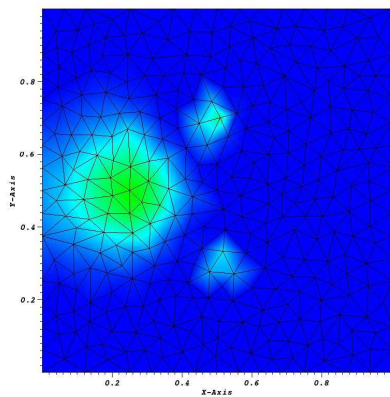
FIGURE 1.4 – Test 1- Conditions initiales.



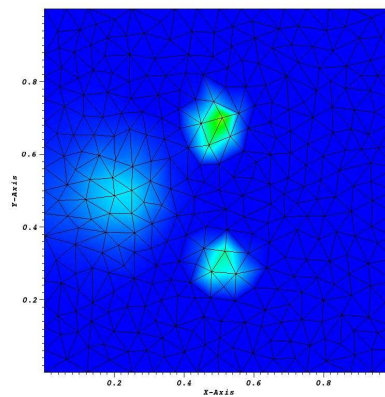
(a) La densité cellulaire (N) à l'instant $t = 5$ avec $0 \leq N \leq 0.1859$.



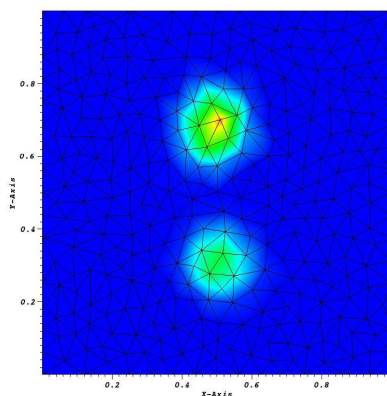
(b) La densité cellulaire (N) à l'instant $t = 12.5$ avec $0 \leq N \leq 0.1365$.



(c) La densité cellulaire (N) à l'instant $t = 17.5$ avec $0 \leq N \leq 0.2345$.

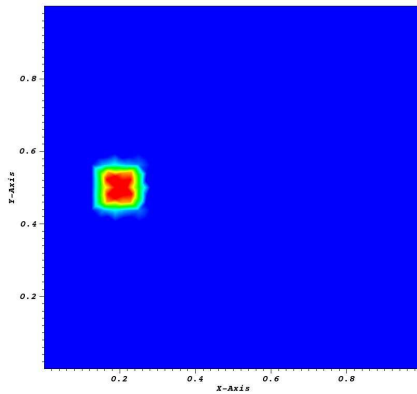


(d) La densité cellulaire (N) à l'instant $t = 50$ avec $0 \leq N \leq 0.4291$.

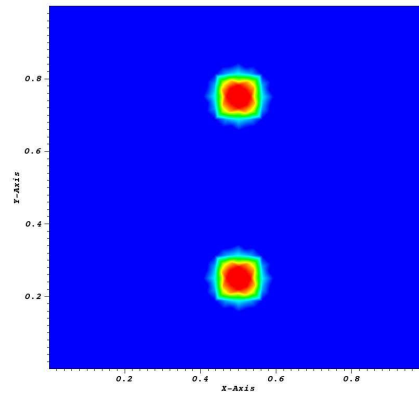


(e) La densité cellulaire (N) à l'instant $t = 100$ avec $0 \leq N \leq 0.3760$.

FIGURE 1.5 – Test 1- Cas hétérogène continu sur un maillage de Delaunay.

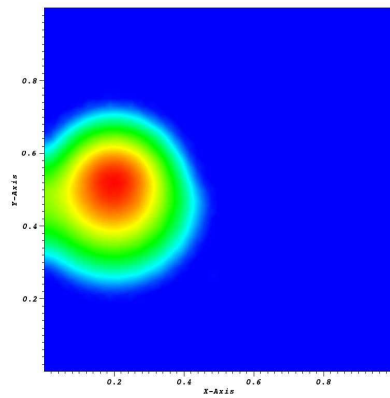


(a) Condition Initiale de la densité cellulaire N_0 .

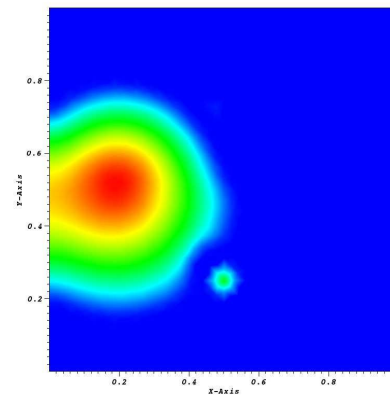


(b) Condition initiale de la concentration du chimio-attractant C_0 .

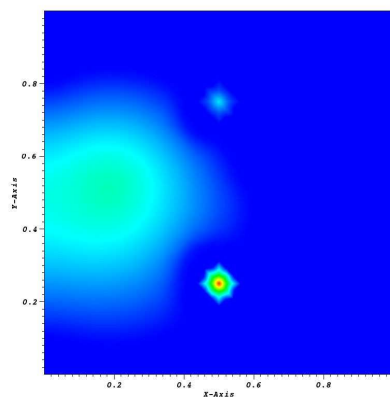
FIGURE 1.6 – Test 2- Conditions initiales.



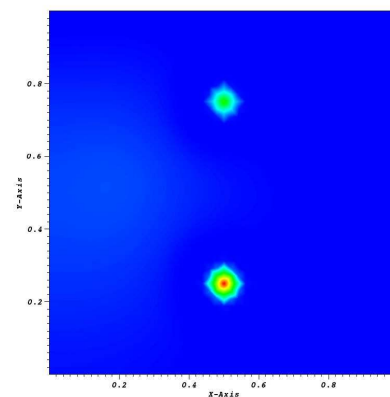
(a) La densité cellulaire (N) à l'instant $t = 2.5$ avec $0 \leq N \leq 0.1055$.



(b) La densité cellulaire (N) à l'instant $t = 5$ avec $0 \leq N \leq 0.07963$.

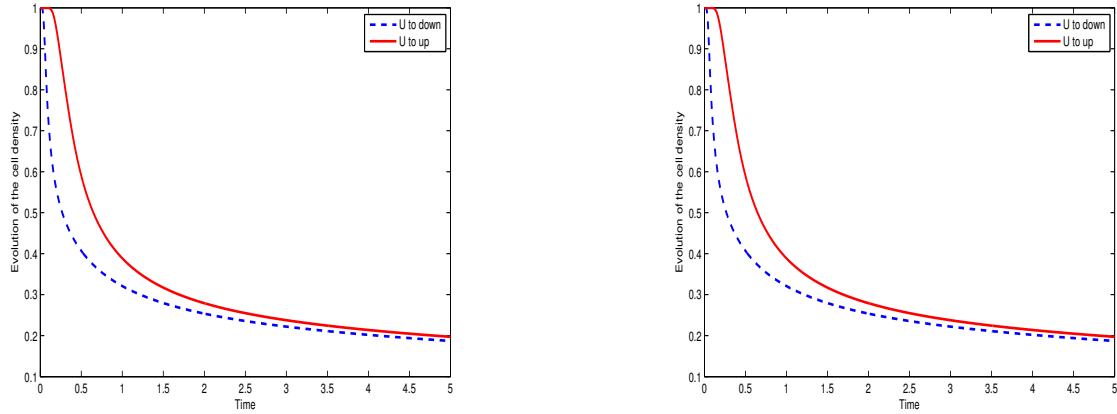


(c) La densité cellulaire (N) à l'instant $t = 10$ avec $0 \leq N \leq 0.1991$.



(d) La densité cellulaire (N) à l'instant $t = 40$ avec $0 \leq N \leq 0.5570$.

FIGURE 1.7 – Test 2- Cas hétérogène discontinu sur un maillage du Benchmark FVCA5.



(a) Évolution en temps en deux points de la zone initiale de N .

(b) Évolution initiale de N en deux points des deux zones du chimio-attractant.

FIGURE 1.8 – Test 2- Courbes d'évolution en temps.

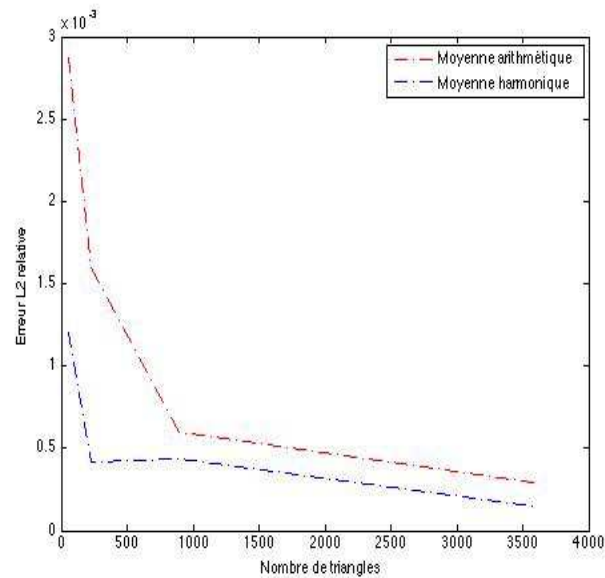


FIGURE 1.9 – Test 0- Comparaison de l'erreur L^2 relative pour les deux types de transmissibilités en fonction du raffinement du maillage 1.2(b).

Chapitre 2

Schéma Volumes Finis-Éléments Finis combiné monotone pour un modèle anisotrope de Keller-Segel

Dans ce chapitre, on s'intéresse à l'étude d'un schéma combinant les méthodes de volumes finis et d'éléments finis non conformes qui permet une discrétisation efficace du modèle dégénéré de Keller-Segel avec des tenseurs anisotropes sans imposer trop de restrictions sur le maillage du domaine en espace. Dans le cadre des applications qui nous concernent, le schéma doit respecter les bornes biologiques de quantités approchées et cela se réalise par la vérification du principe de maximum. Dans le cas de transmissibilités négatives, une correction du flux diffusif est nécessaire pour maintenir ce principe et Par la suite la convergence du problème discret. Finalement, des tests numériques sont effectués pour montrer la robustesse et l'efficacité du schéma combiné monotone.

2.1 Introduction

Dans le cas de tenseurs isotropes et homogènes réduits à une matrice d'identité, un schéma de volumes finis a été récemment développé dans [2] et a été étendu au cas isotrope hétérogène et discontinu dans le premier chapitre de cette thèse. Toutefois, le schéma de volumes finis classique centré par maille impose des restrictions sur le maillage (condition d'orthogonalité) pour obtenir des flux diffusifs consistants et on ne peut pas l'étendre simplement au cas où le tenseur de diffusion est anisotrope où le calcul du flux numérique diffusif général nécessite d'approcher les valeurs $S(x)\nabla A(N) \cdot \eta$ sur les interfaces du maillage. Une grande variété de méthodes qui consistent à reconstruire tout le gradient de la solution sur les arêtes et pas uniquement sa composante normale, ont été proposées. Par exemple, le schéma MPFA "Multi-Point Flux Approximation" étudié dans [1] mais le schéma résultant n'est pas symétrique et Par la suite la résolution du système linéaire pour le calcul de la solution approchée est plus coûteuse. Un autre exemple est le schéma de volumes finis hybride (aussi connu sous le nom de SUSHI) proposé initialement dans [34] et généralisé dans [28], mais ce schéma n'assure pas la validité du

principe de maximum discret. En revanche, il est bien connu que la discrétisation par éléments finis permet une approximation très aisée des flux diffusifs dans le cas de tenseurs anisotropes sans imposer des restrictions sur le maillage (pas une condition d'orthogonalité ni une condition d'angle maximal imposées pour que le maillage soit admissible). Mais, on sait qu'elle produit des instabilités numériques non justifiées dans le cas d'une convection dominante.

Pour éviter les inconvénients de ces deux méthodes classiques, une idée assez intuitive sera donc la combinaison d'une discrétisation de termes diffusifs par la méthode d'éléments finis et des autres termes par la méthode de volumes finis. Les schémas combinant les éléments finis conformes sur un maillage primaire non structuré avec les volumes finis sur un maillage dual associé aux sommets, ont été proposés et étudiés, dans [39] et [40], pour des équations de la mécanique des fluides. La combinaison des volumes finis avec des éléments Finis non conformes a été introduite par Angot et Al dans [3] pour une équation de diffusion-convection avec un terme convectif non-linéaire en dimension deux d'espace.

Dans notre travail, nous introduisons et nous étudions l'analyse de convergence d'un nouveau schéma combiné discrétisant un modèle de Keller-Segel avec des tenseurs anisotropes hétérogènes en dimension deux ou trois d'espace sur des maillages généraux sans tenir compte de la condition d'orthogonalité restrictive sur le maillage ni de la contrainte d'angle maximal imposées dans [3]. On a besoin seulement d'une condition de régularité sur la forme du maillage initial en espace.

D'autre part, le principe de maximum discret n'est pas vérifié, s'il y a d'angles obtus dans le maillage et si le tenseur n'est pas un scalaire (Voir [31] et [32]), à cause des transmissibilités négatives obtenues avec le schéma combiné. Pour cela, on présente une technique non-linéaire, selon l'esprit de la méthode faite dans [60] et [12], comme une correction de flux diffusifs pour obtenir un schéma monotone qui maintient les propriétés discrètes du schéma initial, en particulier la coercivité et la convergence vers une solution faible du problème continu. Finalement, nos résultats théoriques sont validés par des expériences numériques en tenant compte des différents maillages possibles du domaine en espace, des tenseurs anisotropes et de la correction du schéma combiné dans le cas de transmissibilités négatives.

2.2 Modèle anisotrope de Keller-Segel.

Le modèle anisotrope de Keller-Segel est donné par le système parabolique-parabolique suivant :

$$\partial_t N - \nabla \cdot (S(x)a(N)\nabla N) + \nabla \cdot (S(x)\chi(N)\nabla C) = 0 \text{ dans } Q_T \tag{2.1}$$

$$\partial_t C - \nabla \cdot (M(x)\nabla C) = g(N, C) \text{ dans } Q_T, \tag{2.2}$$

avec des conditions aux bords de flux nul sur $\Sigma_t = \partial\Omega \times (0, T)$,

$$S(x)a(N)\nabla N \cdot \eta = 0, M(x)\nabla C \cdot \eta = 0, \tag{2.3}$$

et des conditions initiales définies dans Ω :

$$N(x, 0) = N_0(x), C(x, 0) = C_0(x). \quad (2.4)$$

On rappelle que $Q_T := \Omega \times (0, T)$ où $T > 0$ est un temps fixé et Ω est un domaine ouvert borné polygonal connexe dans \mathbb{R}^d , $d = 2$ ou $d = 3$ dont le bord $\partial\Omega$ est Lipschitz et η est un vecteur normal unitaire. Dans ce qui suit, on considère les mêmes hypothèses (1.5), (1.7) et (1.8) du premier chapitre ainsi que leurs interprétations. Seulement, on généralise l'hypothèse (1.9) à la suivante : Les perméabilités $S, M : \Omega \rightarrow \mathcal{M}_d(\mathbb{R})$ où $\mathcal{M}_d(\mathbb{R})$ est l'ensemble des matrices symétriques $d \times d$, vérifient :

$$S_{i,j} \in L^\infty(\Omega), M_{i,j} \in L^\infty(\Omega), \forall i, j \in \{1, \dots, d\}, \quad (2.5)$$

et il existe $C_S \in \mathbb{R}_+^*$ et $C_M \in \mathbb{R}_+^*$ telles que $x \in \Omega, \forall \xi \in \mathbb{R}^d$,

$$S(x)\xi \cdot \xi \geq C_S|\xi|^2, M(x)\xi \cdot \xi \geq C_M|\xi|^2. \quad (2.6)$$

Tout d'abord, il faut noter que l'existence globale d'une solution faible de ce modèle ainsi que l'unicité sous une hypothèse supplémentaire ont été énoncées et montrées dans le papier [15]. Pour plus des détails, ces résultats théoriques et les techniques suivies pour leurs démonstrations sont donnés dans le troisième chapitre de cette thèse (Remarque 7) dans un cadre très général d'un système chimiotactisme-fluide couplé.

Dans ce qui suit, on va construire un schéma combiné robuste et efficace discrétisant le modèle (2.1)-(2.4). On construit le problème discret et on effectue une étude de convergence de la solution discrète vers une solution faible du problème continu au sens de la Définition suivante :

Définition 2 Une *solution faible* du problème continu (2.1)-(2.4) est la paire (N, C) qui a la même régularité donnée par la Définition 1 telle que :

$$\begin{aligned} & - \int_{\Omega} N_0(x)\varphi(0, x)dx - \iint_{Q_T} N \partial_t \varphi \, dxdt + \iint_{Q_T} S(x) \nabla A(N) \cdot \nabla \varphi \, dxdt - \\ & \qquad \qquad \qquad \iint_{Q_T} S(x) \chi(N) \nabla C \cdot \nabla \varphi \, dxdt = 0, \\ & - \int_{\Omega} C_0(x)\psi(0, x)dx - \iint_{Q_T} C \partial_t \psi \, dxdt + \iint_{Q_T} M(x) \nabla C \cdot \nabla \psi \, dxdt \\ & \qquad \qquad \qquad = \iint_{Q_T} g(N, C) \psi \, dxdt. \end{aligned}$$

pour tout φ et $\psi \in \mathcal{W} = \{\phi \in L^2(0, T; H^1(\Omega)), \frac{\partial \phi}{\partial t} \in L^2(Q_T), \phi(\cdot, T) = 0\}$.

2.3 Problème discret

Cette section est consacrée à la formulation du schéma combinant les méthodes de volumes finis et d'éléments finis non conformes afin de discrétiser le modèle anisotrope de Keller-Segel (2.1)-(2.4). Au début, on décrit la discrétisation en espace et en temps, on définit les espaces d'approximation et après on introduit le schéma combiné.

2.3.1 Discrétisation en espace et en temps

On rappelle que Ω est un ouvert polygonal borné de \mathbb{R}^d avec $d = 2$ ou 3 . Afin de discrétiser (2.1)-(2.4), on considère une famille de maillages $\{\mathcal{T}_h\}$ du domaine Ω , composé de simplexes fermés avec des intérieurs disjoints, telle que $\bar{\Omega} = \cup_{K \in \mathcal{T}_h} \bar{K}$. En plus, l'intersection de deux volumes distincts $K, L \in \mathcal{T}_h$ est un ensemble vide, une face, un segment ou un sommet commun de ces deux volumes. On note par \mathcal{E}_h (resp. par $\mathcal{E}_h^{int}, \mathcal{E}_h^{ext}$) l'ensemble de tous les segments (resp. intérieurs, extérieurs) et par \mathcal{E}_K l'ensemble de tous les segments d'un élément $K \in \mathcal{T}_h$. La taille du maillage \mathcal{T}_h est définie par $h := size(\mathcal{T}_h) = \max_{K \in \mathcal{T}_h} diam(K)$ comme étant la borne supérieure du diamètre maximal de volumes de contrôle dans \mathcal{T}_h . On peut aussi définir un facteur géométrique relié à la régularité du maillage, en imposant l'hypothèse suivante de régularité en forme sur la famille de triangularisations $\{\mathcal{T}_h\}_h$: Il existe une constante positive $k_{\mathcal{T}}$ telle que

$$\min_{K \in \mathcal{T}_h} \frac{|K|}{(diam(K))^d} \geq k_{\mathcal{T}}, \forall h > 0. \tag{2.7}$$

L'hypothèse (2.7) est équivalente à l'existence d'une constante $\theta_{\mathcal{T}} > 0$ telle que

$$\max_{K \in \mathcal{T}_h} \frac{diam(K)}{\rho_K} \leq \theta_{\mathcal{T}}, \forall h > 0, \tag{2.8}$$

où ρ_K est le diamètre de la plus grande boule inscrite dans le simplexe K .

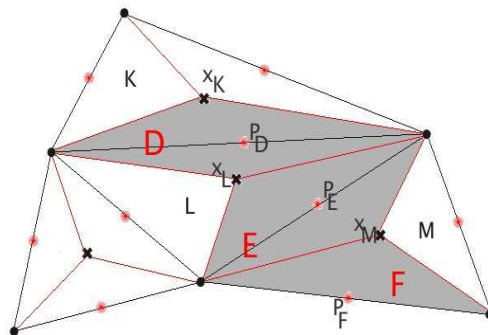


FIGURE 2.1 – Maillage dual associé aux interfaces du maillage initial de Ω .

Pour construire le schéma, il est nécessaire de définir un maillage dual associé au maillage \mathcal{T}_h initial. Pour cela, on définit une partition duale \mathcal{D}_h , de simplexes fermés avec des intérieurs disjoints nommés des volumes de contrôle de Ω , telle que $\bar{\Omega} = \cup_{D \in \mathcal{D}_h} \bar{D}$. Un élément dual D est associé à chaque côté $\sigma_D = \sigma_{K,L} \in \mathcal{E}_h$. On le construit en reliant les barycentres de volumes voisins du côté σ_D à travers les sommets de σ_D . Similairement au maillage initial, on définit \mathcal{F}_h , \mathcal{F}_h^{int} et \mathcal{F}_h^{ext} respectivement par l'ensemble de tous les côtés, des côtés intérieurs et des côtés extérieurs du maillage dual \mathcal{D}_h . Pour $\sigma_D \in \mathcal{F}_h^{ext}$, le contour de D est complété par le côté σ_D . La Figure 2.1 représente le cas bidimensionnel. On utilise les notations suivantes :

- $|D| = \text{mes}(D) =$ la mesure d -dimensionnel du volume D et $|\sigma|$ est la mesure $(d - 1)$ -dimensionnel du côté σ .
- P_D est le barycentre du côté σ_D .
- $\mathcal{N}(D)$ est l'ensemble des voisins du volume D .
- $d_{D,E} := |P_E - P_D|$ est la distance entre les centres P_D et P_E .
- $\sigma_{D,E}$ est l'interface commune entre le volume D et $E \in \mathcal{N}(D)$.
- $\eta_{D,E}$ est le vecteur normal unitaire à $\sigma_{D,E}$ sortant de D .
- $K_{D,E} = \{K \in \mathcal{T}_h; \sigma_{D,E} \subset K\}$.
- \mathcal{D}_h^{int} et \mathcal{D}_h^{ext} sont respectivement les ensembles de volumes duals intérieurs et extérieurs.

Ensuite, on définit les espaces suivants d'éléments finis non conformes (détaillés dans l'Annexe A) :

$$X_h := \{\varphi_h \in L^2(\Omega); \varphi_h|_K \text{ est linéaire } \forall K \in \mathcal{T}_h, \varphi_h \text{ est continue aux points } P_D, D \in \mathcal{D}_h^{int}\},$$

$$X_h^0 := \{\varphi_h \in X_h; \varphi_h(P_D) = 0, \forall D \in \mathcal{D}_h^{ext}\}.$$

La base de X_h est engendrée par des fonctions chapeaux φ_D , $D \in \mathcal{D}_h$ telle que $\varphi_D(P_E) = \delta_{DE}$, $E \in \mathcal{D}_h$ et δ est le delta de Kronecker. On rappelle que les approximations dans ces espaces de Crouzeix-Raviart sont non conformes dès que $X_h \not\subset H^1(\Omega)$. En effet, seulement la continuité faible de la solution est assurée à travers les faces du maillages et donc la solution peut être discontinue sur les interfaces. On munit l'espace X_h par la semi-norme suivante :

$$\|N_h\|_{X_h}^2 := \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \int_K |\nabla N_h|^2 dx,$$

qui devient une norme sur X_h^0 . On a le lemme suivant démontré dans [79].

Lemme 5 *Pour chaque élément $W_h = \sum_{D \in \mathcal{D}_h} W_D \varphi_D \in X_h$, on a*

$$\sum_{\sigma_{D,E} \in \mathcal{D}_h^{int}} \text{diam}(K_{D,E})^{d-2} (W_E - W_D)^2 \leq \frac{d+1}{2dk_T} \|W_h\|_{X_h}^2, \quad (2.9)$$

$$\sum_{\sigma_{D,E} \in \mathcal{D}_h^{int}} \frac{|\sigma_{D,E}|}{d_{D,E}} (W_E - W_D)^2 \leq \frac{d+1}{2(d-1)k_{\mathcal{T}}} \|W_h\|_{X_h}^2. \quad (2.10)$$

Preuve : On remarque que :

$$d_{D,E} \leq \frac{\text{diam}(K_{D,E})}{d}, \quad |\sigma_{D,E}| \leq \frac{(\text{diam}(K_{D,E}))^{d-1}}{d-1}. \quad (2.11)$$

Donc,

$$\begin{aligned} \sum_{\sigma_{D,E} \in \mathcal{F}_h^{int}} (\text{diam}(K_{D,E}))^{d-2} (W_E - W_D)^2 &\leq \sum_{\sigma_{D,E} \in \mathcal{F}_h^{int}} (\text{diam}(K_{D,E}))^{d-2} |\nabla W_h|_{K_{D,E}}|^2 d_{D,E}^2 \\ &\leq \frac{d+1}{2d} \sum_{K \in \mathcal{T}_h} (\text{diam}(K))^d |\nabla W_h|_K|^2 \leq \frac{d+1}{2dk_{\mathcal{T}}} \sum_{K \in \mathcal{T}_h} |K| |\nabla W_h|_K|^2 = \frac{d+1}{2dk_{\mathcal{T}}} \|W_h\|_{X_h}^2. \end{aligned}$$

En utilisant le fait que le gradient de W_h est une constante par morceaux sur \mathcal{T}_h , les inégalités de (2.11), le fait que chaque $K \in \mathcal{T}_h$ contient exactement $\binom{d+1}{2} = \frac{d(d+1)}{2}$ côtés duals et (2.7), on réussit à montrer (2.9). De la même façon,

$$\sum_{\sigma_{D,E} \in \mathcal{F}_h^{int}} \frac{|\sigma_{D,E}|}{d_{D,E}} (W_E - W_D)^2 \leq \sum_{\sigma_{D,E} \in \mathcal{F}_h^{int}} |\nabla W_h|_{K_{D,E}}|^2 d_{D,E} |\sigma_{D,E}| \leq \frac{d+1}{2(d-1)k_{\mathcal{T}}} \|W_h\|_{X_h}^2.$$

Une discrétisation en temps de $[0, T]$ est donnée par $\tilde{N} \in \mathbb{N}^*$ tels que $t_n = n\Delta t$ pour $n \in \{0, \dots, \tilde{N} + 1\}$ et Δt est le pas constant de temps.

2.3.2 Schéma combiné

Afin de discrétiser le système (2.1)-(2.4), on utilise le schéma d'Euler implicite en temps et la méthode d'éléments finis non conformes pour la discrétisation de termes diffusifs en espace. Les autres termes sont discrétisés par la méthode de volumes finis sur le maillage dual \mathcal{D}_h .

En notant l'approximation du flux $S(x)\nabla C \cdot \eta_{D,E}$ sur l'interface $\sigma_{D,E}$ par $\delta C_{D,E}$, on peut considérer la même fonction $G(N_D, N_E, \delta C_{D,E})$ que celle du premier chapitre comme étant une approximation du flux numérique convectif $S(x)\chi(N)\nabla C \cdot \eta_{D,E}$. Cette fonction est exprimée à l'aide des valeurs N_D , N_E et $\delta C_{D,E}$ qui sont valables au voisinage de l'interface $\sigma_{D,E}$ et elle satisfait les mêmes propriétés du flux G données au paragraphe 1.2.4.2 du premier chapitre. On peut aussi construire ce flux G selon la Remarque 1 du chapitre précédant.

Ensuite, pour tout élément $N_h = \sum_{D \in \mathcal{D}_h} N_D \varphi_D$ de l'espace X_h , on définit la fonction $A_h(N_h)$ comme étant une fonction discrète de $A(N_h)$:

$$A_h(N_h) = \sum_{D \in \mathcal{D}_h} A(N_D) \varphi_D. \quad (2.12)$$

Finalement, un schéma combiné volume fini-élément fini non conforme est donné par l'ensemble des équations suivantes : Pour tout $D \in \mathcal{D}_h$,

$$N_D^0 = \frac{1}{|D|} \int_D N_0(x) dx, \quad C_D^0 = \frac{1}{|D|} \int_D C_0(x) dx, \quad (2.13)$$

et pour tout $D \in \mathcal{D}_h$, $n \in \{0, 1, \dots, \tilde{N}\}$,

$$|D| \frac{N_D^{n+1} - N_D^n}{\Delta t} - \sum_{E \in \mathcal{D}_h} \mathcal{S}_{D,E} A(N_E^{n+1}) + \sum_{E \in \mathcal{N}(D)} G(N_D^{n+1}, N_E^{n+1}; \delta C_{D,E}^{n+1}) = 0, \quad (2.14)$$

$$|D| \frac{C_D^{n+1} - C_D^n}{\Delta t} - \sum_{E \in \mathcal{D}_h} \mathcal{M}_{D,E} C_E^{n+1} = |D| g(N_D^n, C_D^{n+1}). \quad (2.15)$$

La matrice de diffusion \mathcal{S} (resp. \mathcal{M}) (resp. $\mathcal{M}_{D,E}$) pour $D, E \in \mathcal{D}_h^{int}$ est la matrice de rigidité de la méthode d'éléments finis non conformes dont ses éléments $\mathcal{S}_{D,E}$ expriment les coefficients de flux diffusifs discrets entre les inconnues. Donc,

$$\mathcal{S}_{D,E} = - \sum_{K \in \mathcal{T}_h} (\mathcal{S}(x) \nabla \varphi_E, \nabla \varphi_D)_{0,K} \text{ et } \mathcal{M}_{D,E} = - \sum_{K \in \mathcal{T}_h} (M(x) \nabla \varphi_E, \nabla \varphi_D)_{0,K}, \quad (2.16)$$

où $(\cdot, \cdot)_{0,K}$ désigne le produit intérieur dans l'espace de Lebesgue $[L^2(K)]^d$. En plus, $\delta C_{D,E}^{n+1}$ désigne l'approximation du flux $S(x) \nabla C \cdot \eta_{D,E}$ sur l'interface $\sigma_{D,E}$:

$$\delta C_{D,E}^{n+1} = S_{D,E} (C_E^{n+1} - C_D^{n+1}). \quad (2.17)$$

Remarque 2 (Comparaison avec la méthode de volumes finis.) Si le maillage \mathcal{T}_h est formé des triangles équilatéraux et si les tenseurs diffusifs sont $S(x) = M(x) = Id$ alors les segments $[P_D, P_E]$ sont perpendiculaires aux faces duales $\sigma_{D,E}$ et on a :

$$\mathcal{S}_{D,E} = \frac{|\sigma_{D,E}|}{d_{D,E}}, \quad E \in \mathcal{N}(D),$$

(Voir [33], sections 3.4.1 et 3.4.2). Dans ce sens, on peut voir le schéma combiné comme étant une extension du schéma volume fini classique aux maillages généraux et aux tenseurs diffusifs anisotropes et hétérogènes.

Définition 3 En utilisant les valeurs de couples (N_D^{n+1}, C_D^{n+1}) , $\forall D \in \mathcal{D}_h$ et $n \in [0, \dots, \tilde{N}]$, on définit deux solutions approchées du problème discret (2.14)-(2.15) au sens du schéma combiné volume fini-élément fini non conforme :

i) Une solution élément fini non conforme $(N_{h,\Delta t}, C_{h,\Delta t})$ qui est une fonction linéaire par morceaux en espace, continue aux barycentres des côtés intérieurs et constante par morceaux en

temps telle que :

$$(N_{h,\Delta t}(x,0), C_{h,\Delta t}(x,0)) = (N_h^0(x), C_h^0(x)) \text{ pour } x \in \Omega,$$

$$(N_{h,\Delta t}(x,t), C_{h,\Delta t}(x,t)) = (N_h^{n+1}(x), C_h^{n+1}(x)) \text{ pour } x \in \Omega, t \in]t_n, t_{n+1}],$$

où $N_h^{n+1} = \sum_{D \in \mathcal{D}_h} N_D^{n+1} \varphi_D$ et $C_h^{n+1} = \sum_{D \in \mathcal{D}_h} C_D^{n+1} \varphi_D$;

ii) Une solution volume fini $(\tilde{N}_{h,\Delta t}, \tilde{C}_{h,\Delta t})$ qui est une fonction constante par morceaux en espace sur les volumes duals D et constante par morceaux en temps telle que :

$$(\tilde{N}_{h,\Delta t}(x,0), \tilde{C}_{h,\Delta t}(x,0)) = (N_D^0, C_D^0) \text{ pour } x \in D, D \in \mathcal{D}_h,$$

$$(\tilde{N}_{h,\Delta t}(x,t), \tilde{C}_{h,\Delta t}(x,t)) = (N_D^{n+1}, C_D^{n+1}) \text{ pour } x \in D, D \in \mathcal{D}_h, t \in]t_n, t_{n+1}].$$

On énonce maintenant un premier résultat de convergence du schéma combiné sous l'hypothèse suivante de la positivité de transmissibilités :

$$\mathcal{S}_{D,E} \geq 0 \text{ et } \mathcal{M}_{D,E} \geq 0, \forall D \in \mathcal{D}_h, E \in \mathcal{N}(D). \quad (2.18)$$

Remarque 3 Dès que :

$$\nabla \varphi_D|_K = \frac{|\sigma_D|}{|K|} n_{\sigma_D} \text{ pour } K \in \mathcal{T}_h \text{ et } \sigma_D \in \mathcal{E}_K,$$

montré dans l'Appendice A, on peut facilement remarquer que l'hypothèse (2.18) est satisfaite quand les tenseurs diffusifs sont réduits à des fonctions scalaires et quand l'angle entre les normales n_{σ_D} , $\sigma_D \in \mathcal{E}_K$ pour tout $K \in \mathcal{T}_h$ est plus grand ou égale à $\Pi/2$.

Plus loin, dans la section 5, on présente une correction du flux diffusif permettant de surmonter l'hypothèse (2.18) par l'introduction d'une famille de schémas monotones.

Théorème 2 (Convergence du schéma)

On suppose (1.5), (1.7), (1.8), (1.10), (2.5) et (2.6). Sous l'hypothèse (2.18) :

- 1) Il existe une solution (N_h, C_h) du système discret (2.13)-(2.15).
- 2) Toute suite $(h_m)_m$ qui décroît vers zéro possède une sous-suite (N_{h_m}, C_{h_m}) qui converge p.p. sur Q_T vers une solution faible (N, C) du système (2.1)-(2.4) au sens de la Définition 2 .

La preuve de ce théorème se décompose en plusieurs Lemmes et Propositions détaillés dans la section suivante.

2.4 Existence et propriétés discrètes

Dans cette section, on présente des lemmes techniques reliés à la conservativité, la coercivité et la continuité du terme diffusif. Ainsi, on montre des estimations a priori nécessaires à la preuve

de l'existence d'une solution discrète au problème (2.13)-(2.15) et de la convergence.

2.4.1 Propriétés discrètes du schéma.

Lemme 6 (Matrice de diffusion des éléments finis non conformes) *Pour tout $D \in \mathcal{D}_h$:*

$$\mathcal{S}_{D,D} = - \sum_{E \in \mathcal{N}(D)} \mathcal{S}_{D,E} \text{ et } \mathcal{M}_{D,D} = - \sum_{E \in \mathcal{N}(D)} \mathcal{M}_{D,E}. \quad (2.19)$$

Preuve : On fixe un volume dual $D \in \mathcal{D}_h$. En considérant la fonction de base φ_D , la somme (2.16) est réduite en deux triangles K et L qui possèdent σ_D comme étant leur interface commune,

$$\mathcal{S}_{D,D} = -(S(x)\nabla\varphi_D, \nabla\varphi_D)_{0,L} - (S(x)\nabla\varphi_D, \nabla\varphi_D)_{0,K}. \quad (2.20)$$

On note par E_1 et E_2 les deux volumes duals associés aux deux autres côtés de l'élément L . Puisque l'on a

$$\varphi_D + \varphi_{E_1} + \varphi_{E_2} = 1 \text{ sur } L,$$

alors

$$-(S(x)\nabla\varphi_D, \nabla\varphi_D)_{0,L} = (S(x)\nabla\varphi_{E_1}, \nabla\varphi_D)_{0,L} + (S(x)\nabla\varphi_{E_2}, \nabla\varphi_D)_{0,L}.$$

En utilisant une contribution similaire pour l'élément K et en remplaçant dans l'équation (2.20), la preuve de la première assertion du Lemme 6 est achevée. Les mêmes arguments sont suivis pour montrer la deuxième assertion de ce Lemme.

En utilisant le fait que $\mathcal{S}_{D,E} = 0$ et $\mathcal{M}_{D,E} = 0$ sauf si $E \in \mathcal{N}(D)$ ou si $E = D$, on déduit de (2.19) que :

$$\begin{aligned} \sum_{E \in \mathcal{D}_h} \mathcal{S}_{D,E} A(N_E^{n+1}) &= \sum_{E \in \mathcal{N}(D)} \mathcal{S}_{D,E} A(N_E^{n+1}) + \mathcal{S}_{D,D} A(N_D^{n+1}) \\ &= \sum_{E \in \mathcal{N}(D)} \mathcal{S}_{D,E} (A(N_E^{n+1}) - A(N_D^{n+1})), \end{aligned} \quad (2.21)$$

$$\sum_{E \in \mathcal{D}_h} \mathcal{M}_{D,E} C_E^{n+1} = \sum_{E \in \mathcal{N}(D)} \mathcal{M}_{D,E} (C_E^{n+1} - C_D^{n+1}). \quad (2.22)$$

Notons que le schéma (2.14)-(2.15) est **conservatif** par rapport au maillage dual \mathcal{D}_h . En effet, (2.14) et (2.21) impliquent que le schéma volumes finis-éléments finis est conservatif sur chaque intervalle de temps et sur chaque volume dual car la somme des flux diffusifs sur les côtés de chaque volume dual est égale à l'accumulation en temps et du flux convectif sur ce volume dual. En fixant deux volumes duals voisins D et $E \in \mathcal{D}_h$, on remarque que $\mathcal{S}_{D,E} = \mathcal{S}_{E,D}$ en utilisant la symétrie du tenseur S et cela implique une égalité qui diffère d'une signe entre les deux flux diffusifs discrets de D vers E et de E vers D . En d'autres termes, $\mathcal{S}_{D,E}(N_E^{n+1} - N_D^{n+1}) = -\mathcal{S}_{E,D}(N_D^{n+1} - N_E^{n+1})$.

Lemme 7 Soient $A_h(N_h) = \sum_{D \in \mathcal{D}_h} A(N_D) \varphi_D$ et $C_h = \sum_{D \in \mathcal{D}_h} C_D \varphi_D \in X_h$, alors :
L'opérateur diffusif discret est **coercif**,

$$- \sum_{D \in \mathcal{D}_h} A(N_D) \sum_{E \in \mathcal{D}_h} \mathcal{S}_{D,E} A(N_E) \geq c_S \|A_h(N_h)\|_{X_h}^2 \text{ et } - \sum_{D \in \mathcal{D}_h} C_D \sum_{E \in \mathcal{D}_h} \mathcal{M}_{D,E} C_E \geq c_M \|C_h\|_{X_h}^2. \quad (2.23)$$

L'opérateur diffusif discret est **continu**,

$$\left| \sum_{D \in \mathcal{D}_h} A(N_D) \sum_{E \in \mathcal{D}_h} \mathcal{S}_{D,E} A(N_E) \right| \leq c_S \|A_h(N_h)\|_{X_h}^2 \text{ et } \left| \sum_{D \in \mathcal{D}_h} C_D \sum_{E \in \mathcal{D}_h} \mathcal{M}_{D,E} C_E \right| \leq c_M \|C_h\|_{X_h}^2. \quad (2.24)$$

En plus, les transmissibilités sont bornées : $\forall D \in \mathcal{D}_h, E \in \mathcal{N}(D)$,

$$|\mathcal{S}_{D,E}| \leq \frac{c_S}{k_{\mathcal{T}}} \frac{(\text{diam}(K_{D,E}))^{d-2}}{(d-1)^2} \text{ et } |\mathcal{M}_{D,E}| \leq \frac{c_M}{k_{\mathcal{T}}} \frac{(\text{diam}(K_{D,E}))^{d-2}}{(d-1)^2}. \quad (2.25)$$

Preuve : Il résulte de (2.12) et de (2.16) que :

$$- \sum_{D \in \mathcal{D}_h} A(N_D) \sum_{E \in \mathcal{D}_h} \mathcal{S}_{D,E} A(N_E) = \sum_{K \in \mathcal{T}_h} (\mathcal{S}(x) \nabla A_h(N_h), \nabla A_h(N_h))_{0,K}.$$

Grâce à la coercivité du tenseur \mathcal{S} donné par (2.6), on peut facilement déduire (2.23). Ensuite,

$$\left| - \sum_{D \in \mathcal{D}_h} A(N_D) \sum_{E \in \mathcal{D}_h} \mathcal{S}_{D,E} A(N_E) \right| = \left| \sum_{K \in \mathcal{T}_h} (\mathcal{S}(x) \nabla A(N_h), \nabla A(N_h))_{0,K} \right|,$$

et donc (2.24) sera une conséquence directe de (2.5). Montrons maintenant (2.25). En effet, on rappelle que $\mathcal{S}_{D,E} = - \sum_{K \in \mathcal{T}_h} (\mathcal{S}(x) \nabla \varphi_E, \nabla \varphi_D)_{0,K}$. Cette somme est seulement réduite sur les triangles $K_{D,E} \in \mathcal{T}_h$ pour $E \in \mathcal{N}(D)$. Par la suite, en utilisant aussi que $|\mathcal{S}|_{L^\infty} \leq c_S$, on obtient

$$|\mathcal{S}_{D,E}| \leq c_S \left| \nabla \varphi_E|_{K_{D,E}} \right| \left| \nabla \varphi_D|_{K_{D,E}} \right| |K_{D,E}|.$$

En plus, on a que $\nabla \varphi_D|_K = \frac{|\sigma_D|}{|K|} n_{\sigma_D}$ pour $K \in \mathcal{T}_h$ et $\sigma_D \in \mathcal{E}_K$ (Voir Annexe A) où n_{σ_D} est le vecteur normal unitaire à σ_D et sortant de K . Donc,

$$|\mathcal{S}_{D,E}| \leq c_S \frac{|\sigma_E|}{|K_{D,E}|} \frac{|\sigma_D|}{|K_{D,E}|} |K_{D,E}|.$$

En utilisant le fait que $|\sigma_D|, |\sigma_E| \leq \frac{(\text{diam}(K_{D,E}))^{d-1}}{(d-1)}$ et la régularité du maillage (2.7), on a :

$$|\mathcal{S}_{D,E}| \leq c_S \frac{\text{diam}(K_{D,E})^{2d-2}}{(d-1)^2 |K_{D,E}|} \leq \frac{c_S}{k_{\mathcal{T}}} \frac{(\text{diam}(K_{D,E}))^{d-2}}{(d-1)^2}.$$

Proposition 3 (Principe de maximum discret)

Sous les hypothèses (1.10) et (2.18), la solution du problème discret satisfait :

$$0 \leq N_D^{n+1} \leq 1 \text{ et } C_D^{n+1} \geq 0, \forall D \in \mathcal{D}_h, n \in \{0, 1, \dots, \tilde{N}\}.$$

Preuve : On utilise un argument de récurrence pour montrer que $N_D^{n+1} \leq 1$. On a que $0 \leq N_{D_0}^0 \leq 1$ et $C_{D_0}^0 \geq 0$ d'après (1.10) et (2.13). On suppose que cette assertion est vraie à l'ordre n et on la montre par contradiction à l'ordre $n+1$. Pour cela, supposons que $N_{D_0}^n \leq 1$ et $N_{D_0}^{n+1} > 1$. On fixe le volume dual D_0 tel que $N_{D_0}^{n+1} = \max_{D \in \mathcal{D}_h} N_D^{n+1}$. L'équation (2.14) implique que :

$$N_{D_0}^n = N_{D_0}^{n+1} - \frac{\Delta t}{|D_0|} \sum_{E \in \mathcal{N}(D_0)} S_{D_0, E} (A(N_E^{n+1}) - A(N_{D_0}^{n+1})) + \frac{\Delta t}{|D_0|} \sum_{E \in \mathcal{N}(D_0)} G(N_{D_0}^{n+1}, N_E^{n+1}; \delta C_{D_0, E}^{n+1}).$$

En utilisant la monotonie de A , la croissance de G par rapport à la première variable et l'extension de χ par 0 pour $N_{D_0}^{n+1} \geq 1$, on déduit que : $1 \geq N_{D_0}^n \geq N_{D_0}^{n+1}$ qui est une contradiction. Alors, $N_D^{n+1} \leq 1 \forall D \in \mathcal{D}_h$ et $\forall n \in \{0, 1, \dots, \tilde{N}\}$. En utilisant les mêmes arguments, on peut montrer les autres assertions de cette proposition.

2.4.2 Estimations a priori

Proposition 4 (*Estimations a priori sous l'hypothèse (2.18)*).

Soit $(N_D^{n+1}, C_D^{n+1})_{D \in \mathcal{D}_h, n \in \{0, \dots, \tilde{N}\}}$ une solution du schéma (2.13)-(2.15). Alors, il existe une constante M dépendante de $\|C_0\|_\infty$, α , β et T telle que

$$C_D^{n+1} \leq M. \quad (2.26)$$

En plus, il existe une constante $\tilde{C} > 0$ qui dépend de $\|C_0\|_\infty$, α , d et de la constante de continuité de G telle que

$$\frac{1}{2} \sum_{D \in \mathcal{D}_h} |D| |C_D^{\tilde{N}+1}|^2 + C_M \sum_{n=0}^{\tilde{N}-1} \Delta t \|C_h^{n+1}\|_{X_h}^2 \leq \tilde{C}. \quad (2.27)$$

Il existe aussi une constante $C_1 > 0$ qui dépend de Ω , T , $\|C_0\|_\infty$, α , d et de la constante de continuité du flux G telle que

$$\sum_{n=0}^{\tilde{N}-1} \Delta t \sum_{D \in \mathcal{D}_h} \sum_{E \in \mathcal{N}(D)} S_{D, E} |A(N_D^{n+1}) - A(N_E^{n+1})|^2 + \sum_{n=0}^{\tilde{N}-1} \Delta t \sum_{D \in \mathcal{D}_h} \sum_{E \in \mathcal{N}(D)} S_{D, E} |C_D^{n+1} - C_E^{n+1}|^2 \leq C_1, \quad (2.28)$$

et donc

$$\sum_{n=0}^{\tilde{N}-1} \Delta t \|A_h(N_h^{n+1})\|_{X_h}^2 \leq C_1. \quad (2.29)$$

Preuve : L'estimation (2.26) est démontrée en détail dans [2]. Montrons maintenant (2.27). On multiplie (2.15) par $\Delta t C_D^{n+1}$ et on somme pour tout $D \in \mathcal{D}_h$ et $n \in \{0, \dots, \tilde{N} - 1\}$. On obtient

que $E_{2,1} + E_{2,2} = E_{2,3}$. D'après l'inégalité suivante $(a - b)a \geq \frac{a^2 - b^2}{2}$, pour tout $a, b \in \mathbb{R}$, on a :

$$\begin{aligned} E_{2,1} &= \sum_{n=0}^{\tilde{N}-1} \sum_{D \in \mathcal{D}_h} |D| (C_D^{n+1} - C_D^n) C_D^{n+1} \\ &\geq \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\tilde{N}-1} \Delta t \sum_{D \in \mathcal{D}_h} |D| (|C_D^{n+1}|^2 - |C_D^n|^2) = \frac{1}{2} \sum_{D \in \mathcal{D}_h} |D| (|C_D^{\tilde{N}+1}|^2 - |C_D^0|^2). \end{aligned}$$

En utilisant l'estimation (2.23), on a

$$E_{2,2} = - \sum_{n=0}^{\tilde{N}-1} \Delta t \sum_{D \in \mathcal{D}_h} C_D^{n+1} \sum_{E \in \mathcal{D}_h} \mathcal{M}_{D,E} C_E^{n+1} \geq C_M \sum_{n=0}^{\tilde{N}-1} \Delta t \|C_h^{n+1}\|_{X_h}^2.$$

Finalement, la Proposition (3) et la forme (1.5) impliquent que :

$$E_{2,3} = \sum_{n=0}^{\tilde{N}-1} \Delta t \sum_{D \in \mathcal{D}_h} |D| g(N_D^n, C_D^{n+1}) C_D^{n+1} \leq \alpha M T |\Omega|.$$

En regroupant les inégalités précédentes, on peut facilement déduire (2.27).

Pour montrer (2.28), on multiplie (2.14) par $\Delta t A(N_D^{n+1})$ et on somme pour tout $D \in \mathcal{D}_h$ et $n \in \{0, \dots, \tilde{N} - 1\}$. On obtient $E_{1,1} + E_{1,2} + E_{1,3} = 0$. D'après la convexité de la fonction $\mathcal{B}(s) = \int_0^s A(r) dr$ ($\mathcal{B}''(s) = a(s) \geq 0$), on aura l'inégalité suivante : $(a - b)A(a) \geq \mathcal{B}(a) - \mathcal{B}(b)$. Alors,

$$\begin{aligned} E_{1,1} &= \sum_{n=0}^{\tilde{N}-1} \sum_{D \in \mathcal{D}_h} |D| (N_D^{n+1} - N_D^n) A(N_D^{n+1}) \tag{2.30} \\ &\geq \sum_{n=0}^{\tilde{N}-1} \sum_{D \in \mathcal{D}_h} |D| (\mathcal{B}(N_D^{n+1}) - \mathcal{B}(N_D^n)) = \sum_{D \in \mathcal{D}_h} |D| (\mathcal{B}(N_D^{\tilde{N}+1}) - \mathcal{B}(N_D^0)). \end{aligned}$$

La propriété discrète (2.21) implique

$$\begin{aligned} E_{1,2} &= - \sum_{n=0}^{\tilde{N}-1} \Delta t \sum_{D \in \mathcal{D}_h} A(N_D^{n+1}) \sum_{E \in \mathcal{D}_h} \mathcal{S}_{D,E} A(N_E^{n+1}) \tag{2.31} \\ &= \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\tilde{N}-1} \Delta t \sum_{D \in \mathcal{D}_h} \sum_{E \in \mathcal{N}(D)} \mathcal{S}_{D,E} \left(A(N_E^{n+1}) - A(N_D^{n+1}) \right)^2. \end{aligned}$$

D'après la propriété de coercivité (2.23), on a aussi l'inégalité suivante :

$$E_{1,2} \geq C_S \sum_{n=0}^{\tilde{N}-1} \Delta t \|A_h(N_h^{n+1})\|_{X_h}^2. \tag{2.32}$$

Finalement, en utilisant la conservativité du flux numérique G , on intègre par parties afin d'obtenir :

$$\begin{aligned} E_{1,3} &= \sum_{n=0}^{\tilde{N}-1} \Delta t \sum_{D \in \mathcal{D}_h} A(N_D^{n+1}) \sum_{E \in \mathcal{N}(D)} G(N_D^{n+1}, N_E^{n+1}; \delta C_{D,E}^{n+1}) \\ &= \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\tilde{N}-1} \Delta t \sum_{D \in \mathcal{D}_h} \sum_{E \in \mathcal{N}(D)} G(N_D^{n+1}, N_E^{n+1}; \delta C_{D,E}^{n+1}) \left(A(N_D^{n+1}) - A(N_E^{n+1}) \right). \end{aligned}$$

Grâce à la continuité du flux numérique G et à (2.17), on a :

$$|E_{1,3}| \leq \frac{\tilde{c}}{2} \sum_{n=0}^{\tilde{N}-1} \Delta t \sum_{D \in \mathcal{D}_h} \sum_{E \in \mathcal{N}(D)} |\mathcal{S}_{D,E}| |C_D^{n+1} - C_E^{n+1}| |A(N_D^{n+1}) - A(N_E^{n+1})|.$$

Suite à une inégalité de Young et à la positivité de transmissibilités $\mathcal{S}_{D,E}$,

$$\begin{aligned} |E_{1,3}| &\leq \tilde{c} \sum_{n=0}^{\tilde{N}-1} \Delta t \sum_{D \in \mathcal{D}_h} \sum_{E \in \mathcal{N}(D)} \mathcal{S}_{D,E} (C_D^{n+1} - C_E^{n+1})^2 \\ &\quad + \frac{1}{4} \sum_{n=0}^{\tilde{N}-1} \Delta t \sum_{D \in \mathcal{D}_h} \sum_{E \in \mathcal{N}(D)} \mathcal{S}_{D,E} \left(A(N_D^{n+1}) - A(N_E^{n+1}) \right)^2, \end{aligned} \tag{2.33}$$

pour une constante \tilde{c} positive. On peut facilement déduire (2.28) en regroupant (4.26), (4.27) et (2.33). Ensuite, en prenant en considération l'inégalité (4.28) à la place de (4.27) et en utilisant l'estimation (2.28), on peut finalement déduire (2.29).

2.4.3 Existence d'une solution discrète

L'existence d'une solution discrète du schéma combiné est donnée par la proposition suivante.

Proposition 5 *Il existe au moins une solution du problème discret (2.13)-(2.15).*

Preuve : Notons par $N_h^n = \{N_D^n\}$ et $C_h^n = \{C_D^n\}$. On montre l'existence par induction sur n . Supposons que (N_h^n, C_h^n) existe et montrons l'existence de (N_h^{n+1}, C_h^{n+1}) . Le système discret (2.15) est un système linéaire de dimension finie par rapport aux inconnues $\{C_D^{n+1}, D \in \mathcal{D}_h\}$. La matrice résultante de ce système est symétrique et définie positive donc il existe une solution unique C_h^{n+1} de (2.15).

Comme $A(\cdot)$ est strictement monotone alors $A(\cdot)$ est inversible. On peut réécrire le schéma (2.14) en termes de w_h^i avec $N_h^i = A^{-1}(w_h^i)$, $i \in [0, \dots, \tilde{N}]$. Supposons que w_h^n et C_h^{n+1} existent. On choisit le produit des composantes $[\cdot, \cdot]$ comme étant le produit scalaire sur $\mathbb{R}^{\mathcal{D}_h}$ et on définit l'application \mathcal{M} , qui associe à chaque vecteur $\mathcal{W} = \{W_D^{n+1}\}_{D \in \mathcal{D}_h}$ l'expression suivante :

$$\mathcal{M}(\mathcal{W}) = \left(|D| \frac{A^{-1}(W_D^{n+1}) - A^{-1}(W_D^n)}{\Delta t} - \sum_{E \in \mathcal{N}(D)} \mathcal{S}_{D,E} (W_E^{n+1} - W_D^{n+1}) \right)$$

$$+ \sum_{E \in \mathcal{N}(D)} G(A^{-1}(W_D^{n+1}), A^{-1}(W_E^{n+1}); \delta C_{D,E}^{n+1}) \Big|_{D \in \mathcal{D}_h}.$$

On multiplie par W_D^{n+1} , on somme sur tous les volumes $D \in \mathcal{D}_h$, on utilise l'estimation (2.28) et l'inégalité de Young afin d'obtenir

$$[\mathcal{M}(\mathcal{W}), \mathcal{W}] \geq C|\mathcal{W}|^2 - C'|\mathcal{W}| - C'' \geq 0 \text{ pour } |\mathcal{W}| \text{ suffisamment grand,}$$

avec les constantes $C, C', C'' > 0$. Cela implique que

$$[\mathcal{M}(\mathcal{W}), \mathcal{W}] > 0 \text{ pour } |\mathcal{W}| \text{ suffisamment grand,}$$

et donc on obtient l'existence de \mathcal{W} tel que

$$\mathcal{M}(\mathcal{W}) = 0.$$

Donc, le terme w_h^{n+1} existe et on a montré par conséquent l'existence au moins d'une solution N_h^{n+1} de l'équation (2.14). Des détails en plus sont donnés dans la preuve du Proposition 2 au Chapitre 1.

2.5 Étude de convergence

2.5.1 Estimations de compacité sur les solutions discrètes

Dans ce paragraphe, on dérive des estimations sur les translatés en espace et en temps nécessaires à l'application du critère de compacité de Kolmogorov.

Lemme 8 (*Estimations des translatés en temps*)

Il existe une constante $C_2 > 0$ dépendant de Ω, T et A telle que :

$$\iint_{\Omega \times [0, T-\tau]} \left(A(\tilde{N}_h(t + \tau, x)) - A(\tilde{N}_h(t, x)) \right)^2 dx dt \leq C_2(\tau + \Delta t), \forall \tau \in [0, T].$$

Preuve : Soient $\tau \in [0, T]$ et $t \in [0, T - \tau]$. On peut écrire

$$\iint_{\Omega \times [0, T-\tau]} \left(A(\tilde{N}_h(t + \tau, x)) - A(\tilde{N}_h(t, x)) \right)^2 dx dt = \int_0^{T-\tau} B(t) dt,$$

avec

$$B(t) = \sum_{D \in \mathcal{D}_h} |D| \left(A(N_D^{n_1(t)}) - A(N_D^{n_0(t)}) \right)^2, \tag{2.34}$$

où $n_1(t) \in \{0, \dots, \tilde{N} - 1\}$ tel que $t_{n_1} < t + \tau \leq t_{n_1 + 1}$ et $n_0(t) \in \{0, \dots, \tilde{N} - 1\}$ tel que $t_{n_0} < t \leq t_{n_0 + 1}$. L'équation (2.34) implique aussi que

$$\mathcal{B}(t) \leq c \sum_{D \in \mathcal{D}_h} (A(N_D^{n_1(t)}) - A(N_D^{n_0(t)})) \times \sum_{t \leq n \Delta t \leq t + \tau} |D| (N_D^{n+1} - N_D^n).$$

On introduit la fonction caractéristique en temps :

$$\chi(n, t) = \begin{cases} 1 & \text{si } t \leq (n+1)\Delta t < t + \tau \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}.$$

L'équation (2.14) nous permet de passer à l'inégalité suivante :

$$\begin{aligned} \mathcal{B}(t) &\leq \sum_{t \leq n \Delta t \leq t + \tau} \Delta t \sum_{D \in \mathcal{D}_h} (A(N_D^{n_1(t)}) - A(N_D^{n_0(t)})) \times \left(\sum_{E \in \mathcal{N}(D)} \mathcal{S}_{D,E} (A(N_E^{n+1}) - A(N_D^{n+1})) \right. \\ &\quad \left. - \sum_{E \in \mathcal{N}(D)} G(N_D^{n+1}, N_E^{n+1}; \delta C_{D,E}^{n+1}) \right) \leq \mathcal{B}_1(t) + \mathcal{B}_2(t), \end{aligned}$$

avec

$$\mathcal{B}_1(t) := \sum_{n=0}^{\tilde{N}-1} \Delta t \int_0^{T-\tau} \chi(n, t) \sum_{D \in \mathcal{D}_h} (A(N_D^{n_1(t)}) - A(N_D^{n_0(t)})) \left(\sum_{E \in \mathcal{N}(D)} \mathcal{S}_{D,E} (A(N_E^{n+1}) - A(N_D^{n+1})) \right) dt, \quad (2.35)$$

et \mathcal{B}_2 est définie après par (2.36). En écrivant la somme $\mathcal{B}_1(t)$ sur les côtés duals intérieurs et dès que la côté $\sigma_{D,E} \in \mathcal{F}_h^{int}$ apparaît deux fois dans la somme originale, on a :

$$\begin{aligned} \mathcal{B}_1(t) &:= \sum_{n=0}^{\tilde{N}-1} \Delta t \int_0^{T-\tau} \chi(n, t) \sum_{\sigma_{D,E} \in \mathcal{F}_h^{int}} \mathcal{S}_{D,E}^{n+1} \left((A(N_E^{n+1}) - A(N_D^{n+1})) (A(N_D^{n_1(t)}) - A(N_E^{n_1(t)})) \right. \\ &\quad \left. + (A(N_E^{n+1}) - A(N_D^{n+1})) (A(N_D^{n_0(t)}) - A(N_E^{n_0(t)})) \right) dt. \end{aligned}$$

En utilisant l'inégalité de Young et l'estimation (2.25) sur $|\mathcal{S}_{D,E}|$, on a que

$$\mathcal{B}_1(t) \leq T_1 + T_2 + T_3,$$

avec

$$\begin{aligned} T_1 &= \frac{c_S}{k_{\mathcal{T}}} \frac{1}{(d-1)^2} \sum_{n=0}^{\tilde{N}-1} \Delta t \int_0^{T-\tau} \chi(n, t) \sum_{\sigma_{D,E} \in \mathcal{F}_h^{int}} \text{diam}(K_{D,E})^{d-2} (A(N_E^{n+1}) - A(N_D^{n+1}))^2 dt, \\ T_2 &= \frac{c_S}{2k_{\mathcal{T}}} \frac{1}{(d-1)^2} \sum_{n=0}^{\tilde{N}-1} \Delta t \int_0^{T-\tau} \chi(n, t) \sum_{\sigma_{D,E} \in \mathcal{F}_h^{int}} \text{diam}(K_{D,E})^{d-2} (A(N_E^{n_1(t)}) - A(N_D^{n_1(t)}))^2 dt, \end{aligned}$$

$$T_3 = \frac{c_S}{2k_T} \frac{1}{(d-1)^2} \sum_{n=0}^{\tilde{N}-1} \Delta t \int_0^{T-\tau} \chi(n, t) \sum_{\sigma_{D,E} \in \mathcal{F}_h^{int}} \text{diam}(K_{D,E})^{d-2} (A(N_E^{n_0(t)}) - A(N_D^{n_0(t)}))^2 dt.$$

L'inégalité (2.9) entraîne que :

$$\mathcal{B}_1(t) \leq \frac{D_1}{k_T^2} \frac{d+1}{2d(d-1)^2} (\tilde{T}_1 + \tilde{T}_2 + \tilde{T}_3),$$

avec

$$\tilde{T}_1 := \sum_{n=0}^{\tilde{N}-1} \Delta t \|A_h(N_h^{n+1})\|_{X_h}^2 \int_0^{T-\tau} \chi(n, t) \leq C_1 \tau,$$

$$\tilde{T}_2 := \sum_{n=0}^{\tilde{N}-1} \Delta t \int_0^{T-\tau} \chi(n, t) \|A_h(N_h^{n_0(t)})\|_{X_h}^2 = \sum_{n=0}^{\tilde{N}-1} \Delta t \|A_h(N_h^{n_0})\|_{X_h}^2 \int_0^{T-\tau} \chi(n, t) \leq C_1 \tau,$$

$$\tilde{T}_3 := \sum_{n=0}^{\tilde{N}-1} \Delta t \int_0^{T-\tau} \chi(n, t) \|A_h(N_h^{n_1(t)})\|_{X_h}^2 = \sum_{n=0}^{\tilde{N}-1} \Delta t \|A_h(N_h^{n_1})\|_{X_h}^2 \int_0^{T-\tau} \chi(n, t) \leq C_1 \tau,$$

et par conséquent $B_1(t) \leq C_1 \tau$. Ensuite, on a

$$\mathcal{B}_2(t) := - \sum_{t \leq n \Delta t \leq t+\tau} \Delta t \int_0^{T-\tau} \chi(n, t) \sum_{D \in \mathcal{D}_h} \sum_{E \in \mathcal{N}(D)} G(N_D^{n+1}, N_E^{n+1}; \delta C_{D,E}^{n+1}) (A(N_D^{n_1(t)}) - A(N_D^{n_0(t)})) \quad (2.36)$$

$$= - \sum_{t \leq n \Delta t \leq t+\tau} \Delta t \int_0^{T-\tau} \chi(n, t) \sum_{D \in \mathcal{D}_h} \sum_{E \in \mathcal{N}(D)} \left(G(N_D^{n+1}, N_E^{n+1}; \delta C_{D,E}^{n+1}) (A(N_E^{n_1(t)}) - A(N_D^{n_1(t)})) \right. \\ \left. + G(N_D^{n+1}, N_E^{n+1}; \delta C_{D,E}^{n+1}) (A(N_E^{n_0(t)}) - A(N_D^{n_0(t)})) \right).$$

On utilise l'inégalité de Young, $|G(a, b, c)| \leq C(|a| + |b|)|c|$, (2.17), l'estimation (2.25) et la Proposition 3 pour en déduire que

$$\mathcal{B}_2(t) \leq C'(\mathcal{B}_3(t) + \mathcal{B}_4(t))$$

pour une constante $C' > 0$, avec

$$\mathcal{B}_3(t) = \sum_{n=0}^{\tilde{N}-1} \Delta t \int_0^{T-\tau} \chi(n, t) \sum_{\sigma_{D,E} \in \mathcal{F}_h^{int}} \text{diam}(K_{D,E})^{d-2} \left((A(N_E^{n_1(t)}) - A(N_D^{n_1(t)}))^2 + (C_E^{n+1} - C_D^{n+1})^2 \right) dt,$$

$$\mathcal{B}_4(t) = \sum_{n=0}^{\tilde{N}-1} \Delta t \int_0^{T-\tau} \chi(n, t) \sum_{\sigma_{D,E} \in \mathcal{F}_h^{int}} \text{diam}(K_{D,E})^{d-2} \left((A(N_E^{n_0(t)}) - A(N_D^{n_0(t)}))^2 + (C_E^{n+1} - C_D^{n+1})^2 \right) dt.$$

On suit le même raisonnement pour montrer que $\mathcal{B}_3(t) \leq \tau C$ et $\mathcal{B}_4(t) \leq \tau C$ pour une certaine constante $C > 0$ et cela nous permet de déduire facilement la preuve du Lemme.

Lemme 9 (*Estimations des translatés en espace*)

Il existe une constante $c' > 0$ qui dépend de Ω , T , A et ξ telle que :

$$\iint_{\Omega \times [0, T]} \left(A(\tilde{N}_h(t, x + \xi)) - A(\tilde{N}_h(t, x)) \right)^2 dx dt \leq c' |\xi| (|\xi| + h), \forall \xi \in \mathbb{R}^d.$$

Preuve : Soit $\xi \in \mathbb{R}^d$, $\xi \neq 0$. On définit la fonction $\chi_\sigma(x)$ pour tout $\sigma \in \mathcal{F}_h^{int}$ par :

$$\chi_\sigma = \begin{cases} 1 & \text{si } [x, x + \xi] \cap \sigma \neq \emptyset \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}.$$

Une simple considération géométrique implique que p.p. $x \in \Omega$ avec $t \in]t_n, t_{n+1}]$,

$$\begin{aligned} & |A(\tilde{N}_h(t, x + \xi)) - A(\tilde{N}_h(t, x))|^2 \\ & \leq C \left(\sum_{\sigma_{D,E} \in \mathcal{F}_h^{int}} |A(N_E^{n+1}) - A(N_D^{n+1})| \chi_{\sigma_{D,E}}(x) \right)^2 + C \sum_{\sigma_D \in \mathcal{F}_h^{ext}} \chi_{\sigma_D}(x) (A(N_D^{n+1}))^2. \end{aligned}$$

En appliquant l'inégalité de Cauchy-Schwarz au premier terme, on a

$$\begin{aligned} & \left(A(\tilde{N}_h(t, x + \xi)) - A(\tilde{N}_h(t, x)) \right)^2 \leq C \left(\sum_{\sigma_{D,E} \in \mathcal{F}_h^{int}} \chi_{\sigma_{D,E}}(x) \text{diam}(K_{D,E}) \right) \\ & \times \left(\sum_{\sigma_{D,E} \in \mathcal{F}_h^{int}} \frac{(A(N_E^{n+1}) - A(N_D^{n+1}))^2}{\text{diam}(K_{D,E})} \chi_{\sigma_{D,E}}(x) \right) + C \sum_{\sigma_D \in \mathcal{F}_h^{ext}} \chi_{\sigma_D}(x) (A(N_D^{n+1}))^2 = T_1 + T_2. \end{aligned}$$

On remarque que le premier terme du T_1 est plus petit que $C'(|\xi| + h)$ (Voir [79], Chapitre 2, Lemme 2.3.4) où C' est une constante indépendante de la fonction χ_σ . Ensuite, on intègre sur Q_T et pour le deuxième terme du T_1 , on obtient

$$\begin{aligned} & \sum_{n=0}^{\tilde{N}-1} \Delta t \sum_{\sigma_{D,E} \in \mathcal{F}_h^{int}} \frac{(A(N_E^{n+1}) - A(N_D^{n+1}))^2}{d_{D,E}} \int_{\Omega} \chi_{\sigma_{D,E}}(x) dx \\ & \leq |\xi| \sum_{n=0}^{\tilde{N}-1} \Delta t \sum_{\sigma_{D,E} \in \mathcal{F}_h^{int}} \frac{|\sigma_{D,E}|}{d_{D,E}} (A(N_E^{n+1}) - A(N_D^{n+1}))^2 \leq |\xi| \frac{d+1}{2(d-1)k_{\mathcal{T}}} \sum_{n=0}^{\tilde{N}-1} \Delta t \|A_h(N_h^{n+1})\|_{X_h}^2 \\ & \leq |\xi| \frac{d+1}{2(d-1)k_{\mathcal{T}}} C_1, \end{aligned}$$

dès que $\int_{\Omega} \chi_{\sigma_{D,E}}(x) dx \leq |\xi| |\sigma_{D,E}|$ et grâce à (2.10) et (2.29). Pour terminer la preuve, il faut encore traiter le terme T_2 . Dès que $\int_{\Omega} \chi_{\sigma_D}(x) dx \leq |\xi| |\sigma_D|$ et grâce au théorème des traces appliqué sur chaque triangle K , on a :

$$\sum_{n=0}^{\tilde{N}-1} \Delta t \sum_{\sigma_D \in \mathcal{F}_h^{ext}} \int_{\Omega} \chi_{\sigma_D}(x) (A(N_D^{n+1}))^2 \leq |\xi| \sum_{n=0}^{\tilde{N}-1} \Delta t \sum_{\sigma_D \in \mathcal{F}_h^{ext}} |\sigma_D| (A(N_D^{n+1}))^2$$

$$\begin{aligned}
 &= |\xi| \sum_{n=0}^{\tilde{N}-1} \Delta t \sum_{\sigma_D \in \mathcal{F}_h^{ext}} \int_{\sigma_D} A_h(N_h^{n+1})|_{\sigma_D}^2 \leq |\xi| \sum_{n=0}^{\tilde{N}-1} \Delta t \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \int_{\partial K} A_h(N_h^{n+1})|_{\partial K}^2 \\
 &= |\xi| \sum_{n=0}^{\tilde{N}-1} \Delta t \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \|\gamma(A_h(N_h^{n+1}))\|_{L^2(\partial K)}^2 \leq |\xi| \sum_{n=0}^{\tilde{N}-1} \Delta t \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \|A_h(N_h^{n+1})\|_{H^1(K)}^2 \\
 &= |\xi| C_{trace} \sum_{n=0}^{\tilde{N}-1} \Delta t \|A_h(N_h^{n+1})\|_{X_h}^2 \leq C|\xi|.
 \end{aligned}$$

Finalement, on note qu'il existe une autre démonstration possible de la compacité de solutions approchées dans les références [3] et [40].

2.5.2 Convergence du schéma combiné

Ce paragraphe est consacré à la preuve de la convergence forte de solutions approchées dans $L^2(Q_T)$ en utilisant les estimations a priori et le critère de compacité de Kolmogorov (see, e.g., [10]). Ensuite, on montre que la limite est une solution faible du problème continu au sens de la Définition 2.

Lemme 10 *La suite $(A_h(N_{h,\Delta t}) - A(\tilde{N}_{h,\Delta t}))_{h,\Delta t}$ converge fortement vers zero dans $L^2(Q_T)$ quand $h \rightarrow 0$.*

Preuve : En utilisant la définition des fonctions de base de l'espace X_h , on a :

$$|A(\tilde{N}_{h,\Delta t}) - A_h(N_{h,\Delta t})|^2 = |A_h(N_{h,\Delta t})(P_D) - A_h(N_{h,\Delta t})(x)|^2 = |\nabla A_h(N_{h,\Delta t}) \cdot (P_D - x)|^2.$$

Une intégration sur Ω implique que :

$$\begin{aligned}
 \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \sum_{\sigma_D \in \mathcal{E}_K} \int_{K \cap D} |\nabla A_h(N_{h,\Delta t}) \cdot (P_D - x)|^2 &\leq \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \sum_{\sigma_D \in \mathcal{E}_K} |\nabla A_h(N_{h,\Delta t})|_K|^2 (\text{diam}(D))^2 |K \cap D| \\
 &\leq h^2 \sum_{K \in \mathcal{T}_h} |\nabla A_h(N_{h,\Delta t})|_K|^2 |K| \leq h^2 \|A_h(N_{h,\Delta t})\|_{X_h}^2.
 \end{aligned}$$

Donc,

$$\|A_h(N_{h,\Delta t}) - A(\tilde{N}_{h,\Delta t})\|_{L^2(Q_T)} = h^2 \sum_{n=0}^{\tilde{N}-1} \Delta t \|A_h(N_{h,\Delta t})\|_{X_h}^2 \leq C_1 h^2 \xrightarrow{h \rightarrow 0} 0.$$

Théorème 3 (Convergence forte dans $L^2(Q_T)$)

Il existe une sous-suite de $(A_h(N_{h,\Delta t}))_{h,\Delta t}$ qui converge fortement dans $L^2(Q_T)$ vers une certaine fonction $\Gamma = A(N) \in L^2(0, T; H^1(\Omega))$.

Preuve : L'estimation a priori (2.29) et les Lemmes 8 et 9 impliquent que la suite $(A(\tilde{N}_{h,\Delta t}))_{h,\Delta t}$ satisfait les hypothèses du théorème de compacité discrète pour les éléments finis non conformes (Voir [75], chapitre 2, Théorème 2.4) et par conséquent la suite $(A(\tilde{N}_{h,\Delta t}))_{h,\Delta t}$ est relativement

compacte dans $L^2(Q_T)$. Cela implique l'existence de sous-suites de $(A(\tilde{N}_{h,\Delta t}))_{h,\Delta t}$ qui convergent fortement vers une certaine fonction $\Gamma \in L^2(Q_T)$. Grâce au Lemme 10, $(A_h(N_{h,\Delta t}))_{h,\Delta t}$ converge fortement vers une certaine fonction $\Gamma \in L^2(Q_T)$. En utilisant la monotonicité de A , on a que $\Gamma = A(N)$. En plus, suite aux estimations de translatés en espace du Lemme 9 et au référence [[33], Theorem 3.10], on déduit que $A(N) \in L^2(0, T; H^1(\Omega))$.

Comme A^{-1} est bien définie et continue, en appliquant la borne L^∞ uniforme de \tilde{N}_h et le théorème de convergence dominée de Lebesgue appliqu e à $\tilde{N}_h = A^{-1}(A(\tilde{N}_h))$, il existe des sous-suites $\tilde{N}_{h,\Delta t}$ et $N_{h,\Delta t}$ qui possèdent la même notation que les suites et qui convergent fortement dans $L^2(Q_T)$ et p.p. dans Q_T vers la même fonction N .

Montrons maintenant que le couple limite (N, C) est une solution faible du problème continu. On introduit :

$$\Psi := \{\psi \in C^{2,1}(\bar{\Omega} \times [0, T]), \psi(\cdot, T) = 0\}. \quad (2.37)$$

En multipliant l'équation (2.14) par $\Delta t \psi(P_D, t_{n+1})$ et en additionnant sur tous les volumes duaux $D \in \mathcal{D}_h^{int}$ et pour tout $n \in [0, \dots, \tilde{N} - 1]$, on a :

$$T_T + T_D + T_C = 0,$$

avec,

$$\begin{aligned} T_T &= \sum_{n=0}^{\tilde{N}-1} \sum_{D \in \mathcal{D}_h} |D| (N_D^{n+1} - N_D^n) \psi(P_D, t_{n+1}), \\ T_D &= \sum_{n=0}^{\tilde{N}-1} \Delta t \sum_{D \in \mathcal{D}_h} \sum_{E \in \mathcal{D}_h} \mathcal{S}_{D,E} A(N_E^{n+1}) \psi(P_D, t_{n+1}), \\ T_C &= \sum_{n=0}^{\tilde{N}-1} \Delta t \sum_{D \in \mathcal{D}_h} \sum_{E \in \mathcal{N}(D)} G(N_D^{n+1}, N_E^{n+1}, \delta C_{D,E}^{n+1}) \psi(P_D, t_{n+1}). \end{aligned}$$

Montrons que chaque terme converge vers sa version continue quand $h, \Delta t \rightarrow 0$.

Le **terme d'évolution en temps** est équivalent à

$$\begin{aligned} T_T &= \sum_{n=0}^{\tilde{N}-1} \sum_{D \in \mathcal{D}_h} |D| N_D^{n+1} (\psi_D^n - \psi_D^{n+1}) - \sum_{D \in \mathcal{D}_h^{int}} |D| N_D^0 (\psi_D^0) \\ &= - \sum_{n=0}^{\tilde{N}-1} \sum_{D \in \mathcal{D}_h} \int_{t_n}^{t_{n+1}} \int_D N_D^{n+1} \frac{\partial \psi}{\partial t}(P_D, t) dx dt - \sum_{D \in \mathcal{D}_h} \int_D N_D^0 \psi(x_D, 0) dx. \end{aligned}$$

On définit

$$\tilde{T}_T = - \iint_{Q_T} \tilde{N}_{h,\Delta t} \frac{\partial \psi}{\partial t} dx dt - \int_{\Omega} \tilde{N}_{0,h}(0, x) \psi(x, 0) dx$$

$$= - \sum_{n=0}^{\tilde{N}-1} \sum_{D \in \mathcal{D}_h} \int_{t_n}^{t_{n+1}} \int_D N_D^{n+1} \frac{\partial \psi}{\partial t}(x, t) dx dt - \sum_{D \in \mathcal{D}_h} \int_D N_D^0 \psi(x, 0) dx.$$

On a, pour tout $x \in D$, $D \in \mathcal{D}_h$ et pour tout $h > 0$, $|\frac{\partial \psi}{\partial t}(P_D, t) - \frac{\partial \psi}{\partial t}(x, t)| \leq f(h)$, où la fonction f satisfait $f(h) > 0$ et $f(h) \xrightarrow{h \rightarrow 0} 0$. Cela suit du fait que $\frac{\partial \psi}{\partial t} \in C^0(\bar{\Omega})$ et du (2.37) donc $\frac{\partial \psi}{\partial t}$ est uniformément continu sur $\bar{\Omega}$. Par la suite,

$$|T_T - \tilde{T}_T| \leq T|\Omega| f(h) \xrightarrow{h \rightarrow 0} 0.$$

Pour étudier la convergence du **terme diffusif**, on s'appuie sur des techniques utilisées dans [79]. Tout d'abord, on remplace $S_{D,E}$ par sa valeur ce qui implique que :

$$T_D = \sum_{n=0}^{\tilde{N}-1} \Delta t \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \int_K S(x) \nabla A_h(N_h^{n+1}(x)) \cdot \nabla \left(\sum_{D \in \mathcal{D}_h} \psi(P_D, t_{n+1}) \varphi_D(x) \right) dx.$$

On pose

$$I_\psi(x, t_{n+1}) := \sum_{D \in \mathcal{D}_h} \psi(P_D, t_{n+1}) \varphi_D(x).$$

a) Comme une première étape, on montre que :

$$T_{D_1} = \sum_{n=0}^{\tilde{N}-1} \Delta t \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \int_K S(x) \nabla A_h(N_h^{n+1}(x)) \cdot \nabla (I_\psi(x, t_{n+1}) - \psi(x, t_{n+1})) dx \xrightarrow{h \rightarrow 0} 0.$$

En effet, en utilisant la borne uniforme du tenseur S , l'inégalité de Cauchy-Schwarz et une estimation d'interpolation (Voir [[18], Theorem 15.3]), on a :

$$\begin{aligned} |T_{D_1}| &\leq c_S \sum_{n=0}^{\tilde{N}-1} \Delta t \|A_h(N_h^{n+1})\|_{X_h} \left(\sum_{K \in \mathcal{T}_h} \int_K |\nabla (I_\psi(x, t_{n+1}) - \psi(x, t_{n+1}))|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} \\ &\leq c_S \sum_{n=0}^{\tilde{N}-1} \Delta t \|A_h(N_h^{n+1})\|_{X_h} (C\theta_{\mathcal{T}} h (\sum_{K \in \mathcal{T}_h} |\psi(x, t_{n+1})|_{2,K}^2)^{\frac{1}{2}}), \end{aligned}$$

où $|\cdot|_{2,K}$ désigne la semi-norme H^2 et la constante C ne dépend pas de h (ni de Δt). Finalement, en utilisant de nouveau l'inégalité de Cauchy-Schwarz, on déduit que :

$$|T_{D_1}| \leq c_S C\theta_{\mathcal{T}} h C_\psi \left(\sum_{n=0}^{\tilde{N}-1} \Delta t \|A_h(N_h^{n+1})\|_{X_h}^2 \right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{n=0}^{\tilde{N}-1} \Delta t \right)^{\frac{1}{2}} \xrightarrow{h \rightarrow 0} 0.$$

b) Comme une deuxième étape, on montre que :

$$\sum_{n=0}^{\tilde{N}-1} \Delta t \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \int_K S(x) \nabla A_h(N_h^{n+1}(x)) \cdot \nabla \psi(x, t_{n+1}) dx dt - \iint_{Q_T} S(x) \nabla A(N) \cdot \nabla \psi dx dt \xrightarrow{h \rightarrow 0} 0.$$

Pour cela, on ajoute et on retranche $\int_{Q_T} S(x) \nabla A_h(N_h^{n+1}) \cdot \nabla \psi \, dxdt$ et on considère

$$T_{D_2} = \sum_{n=0}^{\tilde{N}-1} \int_{t_n}^{t_{n+1}} \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \int_K S(x) \nabla A_h(N_h^{n+1}(x)) \cdot \nabla (\psi(x, t_{n+1}) - \psi(x, t)) \, dxdt,$$

$$T_{D_3} = \iint_{Q_T} S(x) (\nabla A_h(N_h^{n+1}(x)) - \nabla A(N)) \cdot \nabla \psi(x, t) \, dxdt.$$

Dès que ψ est de classe C^1 par rapport à t , alors $|\nabla \psi(x, t_{n+1}) - \nabla \psi(x, t)| \leq g(\Delta t) \xrightarrow{\Delta t \rightarrow 0} 0$ et

$$|T_{D_2}| \leq c_S g(\Delta t) \sum_{n=0}^{\tilde{N}-1} \Delta t \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \left| \nabla A_h(N_h^{n+1}) \right|_K |K|.$$

L'inégalité de Cauchy-Schwarz et l'estimation (2.29) impliquent que :

$$|T_{D_2}| \leq c_S g(\Delta t) T^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{n=0}^{\tilde{N}-1} \Delta t \|A_h(N_h^{n+1})\|_{X_h}^2 \right)^{\frac{1}{2}} \leq C c_S g(\Delta t) T^{\frac{1}{2}} |\Omega|^{\frac{1}{2}} \xrightarrow{\Delta t \rightarrow 0} 0.$$

Il nous reste à montrer que

$$T'_{D_3} = \iint_{Q_T} (\nabla A_h(N_h^{n+1}(x)) - \nabla A(N)) \cdot w(x, t) \, dxdt \xrightarrow{h \rightarrow 0} 0, \quad (2.38)$$

pour tout $w \in (C^\infty(Q_T))^d$. En effet,

$$T'_{D_3} = \iint_{Q_T} \nabla A_h(N_h^{n+1}(x)) \cdot w(x, t) \, dxdt + \iint_{Q_T} A(N(x, t)) \cdot \nabla w(x, t) \, dxdt = B_1 + B_2,$$

où on utilise la formule de Green dans B_2 car $A(N) \in L^2(0, T; H^1(\Omega))$ mais dans B_1 on applique la formule de Green sur chaque $K \in \mathcal{T}_h$ car $A_h(N_h^{n+1}) \notin H^1(\Omega)$. Par la suite,

$$B_1 = \int_0^T \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \int_K A_h(N_h^{n+1}(x)) \nabla \cdot (w(x, t)) \, dxdt + \int_0^T \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \int_{\partial K} A_h(N_h^{n+1}(x)) w(x, t) \cdot \eta \, d\gamma(x) dt.$$

En regroupant le second terme par côtés, on obtient :

$$B_1'' = \int_0^T \sum_{\sigma_{K,L} \in \mathcal{E}_h^{int}} \int_{\sigma_{K,L}} \left(A_h(N_h^{n+1}(x))|_K - A_h(N_h^{n+1}(x))|_L \right) w(x, t) \cdot \eta \, d\gamma(x) dt$$

$$+ \int_0^T \sum_{\sigma_K \in \mathcal{E}_h^{ext}} \int_{\sigma_K} \left(A_h(N_h^{n+1}(x))|_K \right) w(x, t) \cdot \eta \, d\gamma(x) dt.$$

Dès que la fonction w est régulière, on a :

$$w \cdot \eta_{\sigma_D}(x) = w \cdot \eta_{\sigma_D}(P_D) + f(\xi) |P_D - x|, \quad x \in \sigma_D, \quad \xi \in [P_D, x],$$

avec $|f(\xi)| \leq C_w$. Donc,

$$\begin{aligned} B_1'' &= \int_0^T \sum_{\sigma_{K,L} \in \mathcal{E}_h^{ext}} \int_{\sigma_{K,L}} \left(A_h(N_h^{n+1}(x))|_K - A_h(N_h^{n+1}(x))|_L \right) (w \cdot \eta_{\sigma_D}(P_D) + f(\xi)|_{P_D-x}) d\gamma(x) dt \\ &\quad + \int_0^T \sum_{\sigma_K \in \mathcal{E}_h^{ext}} \int_{\sigma_K} \left(A_h(N_h^{n+1}(x))|_K \right) (w \cdot \eta_{\sigma_D}(P_D) + f(\xi)|_{P_D-x}) d\gamma(x) dt. \end{aligned}$$

La continuité faible imposée aux points P_D dans l'espace X_h implique que la fonction $A_h(N_h^{n+1})|_K - A_h(N_h^{n+1})|_L$ (un polynôme d'ordre 1 qui s'annule en P_D) vérifie :

$$\int_{\sigma_{K,L}} \left(A_h(N_h^{n+1}(x))|_K - A_h(N_h^{n+1}(x))|_L \right) d\gamma(x) = 0.$$

Ensuite, l'inégalité de Cauchy-Schwarz et le théorème des traces sur chaque triangle K impliquent que :

$$\int_{\sigma_K} \left(A_h(N_h^{n+1}(x))|_K \right) d\gamma(x) \leq |\partial K| \|A_h(N_h^{n+1}(x))\|_{L^2(\partial K)} \leq C_T |\partial K| \|A_h(N_h^{n+1}(x))\|_{H^1(K)} \xrightarrow{h \rightarrow 0} 0.$$

Cependant, pour tout $x \in \sigma_D = \sigma_{K,L}$,

$$\begin{aligned} \left| A_h(N_h^{n+1}(x))|_K - A_h(N_h^{n+1}(x))|_L \right| &\leq |\nabla A_h(N_h^{n+1}(x))|_K| \frac{\text{diam}(\sigma_{K,L})}{4-d} \\ &\quad + |\nabla A_h(N_h^{n+1}(x))|_L| \frac{\text{diam}(\sigma_{K,L})}{4-d}, \end{aligned}$$

où on a utilisé que $|x - P_D| \leq \text{diam}(\sigma_{K,L})/2$ pour $d = 2$ et que $|x - P_D| \leq \text{diam}(\sigma_{K,L})$ pour $d = 3$. Par la suite, il existe une constante C dépendant de C_f et d telle que :

$$\begin{aligned} &\sum_{\sigma_{K,L} \in \mathcal{E}_h^{int}} \int_{\sigma_{K,L}} \left(A_h(N_h^{n+1}(x))|_K - A_h(N_h^{n+1}(x))|_L \right) f(\xi)|_{P_D-x} d\gamma(x) \\ &\leq C_w \sum_{\sigma_{K,L} \in \mathcal{E}_h^{int}} |\sigma_{K,L}| \left(|\nabla A_h(N_h^{n+1}(x))|_K| + |\nabla A_h(N_h^{n+1}(x))|_L| \right) \left(\frac{\text{diam}(\sigma_{K,L})}{4-d} \right)^2. \end{aligned}$$

De même,

$$\sum_{\sigma_K \in \mathcal{E}_h^{ext}} \int_{\sigma_K} \left(A_h(N_h^{n+1}(x))|_K \right) f(\xi)|_{P_D-x} d\gamma(x) \leq C_w \sum_{\sigma_K \in \mathcal{E}_h^{ext}} |\sigma_{K,L}| \left(|\nabla A_h(N_h^{n+1}(x))|_K| \right) \left(\frac{\text{diam}(\sigma_K)}{4-d} \right)^2.$$

En regroupant toutes ces estimations et en utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz, on peut facilement déduire que B_1'' tend vers 0 quand h tend vers 0.

Grâce à la convergence de $A_h(N_h^{n+1})$ vers $A(N)$ dans $L^2(Q_T)$, on déduit que T'_{D_3} tend vers 0 pour tout $w \in (C^\infty(Q_T))^d$ et par conséquent T'_{D_3} tend vers 0 pour tout $w \in L^2(Q_T)$ par

un argument de densité.

Comme T_{D_2} et T_{D_3} convergent vers 0 alors la convergence de l'étape $b)$ est démontrée. En regroupant les convergences des étapes $a)$ et $b)$, on déduit que :

$$T_D \xrightarrow{h \rightarrow 0} - \iint_{Q_T} S(x) \nabla A(N) \cdot \nabla \psi \, dx dt.$$

Finalement, on s'intéresse au **terme convectif** :

$$T_C^h = \sum_{n=0}^{\tilde{N}-1} \Delta t \sum_{D \in \mathcal{D}_h} \sum_{E \in \mathcal{N}(D)} G(N_D^{n+1}, N_E^{n+1}, \delta C_{D,E}^{n+1}) \psi_D^{n+1}.$$

Pour chaque couple D et E de volumes voisins, on introduit :

$$N_{D,E}^{n+1} = \min(N_D^{n+1}, N_E^{n+1}), \quad (2.39)$$

et on pose

$$T_C^{h,*} = \sum_{n=0}^{\tilde{N}-1} \Delta t \sum_{D \in \mathcal{D}_h} \sum_{E \in \mathcal{N}(D)} \chi(N_{D,E}^{n+1}) \delta C_{D,E}^{n+1} \psi_D^{n+1}.$$

Le diamant construit de barycentres des côtés P_D , P_E et de l'interface $\sigma_{D,E}$ du maillage dual est noté par $T_{D,E} \subset K_{D,E}$. Ensuite, on introduit

$$\overline{N_h} \Big|_{]t_n, t_{n+1}] \times T_{D,E}} := \max(N_D^{n+1}, N_E^{n+1}), \quad \underline{N_h} \Big|_{]t_n, t_{n+1}] \times T_{D,E}} := \min(N_D^{n+1}, N_E^{n+1}),$$

et on réécrit

$$T_C^{h,*} = - \iint_{Q_T} S(x) \chi(\underline{N_h}) \nabla C_h \cdot (\nabla \psi)_h \, dx dt.$$

Grâce à la monotonie de A et à l'estimation (2.9), on aura

$$\begin{aligned} \int_0^T \int_{\Omega} |A(\overline{N_h}) - A(\underline{N_h})|^2 &\leq \sum_{n=0}^{\tilde{N}-1} \Delta t \sum_{D \in \mathcal{D}_h} \sum_{E \in \mathcal{N}(D)} |T_{D,E}| |A(N_D^{n+1}) - A(N_E^{n+1})|^2 \\ &\leq \sum_{n=0}^{\tilde{N}-1} \Delta t \sum_{D \in \mathcal{D}_h} \sum_{E \in \mathcal{N}(D)} (\text{diam}(K_{D,E}))^2 |A(N_D^{n+1}) - A(N_E^{n+1})|^2 \leq Ch^{4-d} \xrightarrow{h \rightarrow 0} 0, \end{aligned}$$

avec $d = 2$ ou 3 . Comme A^{-1} est continue, on déduit qu'en termes de sous-suites,

$$|\overline{N_h} - \underline{N_h}| \xrightarrow{h \rightarrow 0} 0 \text{ p.p. sur } Q_T.$$

En plus, $\underline{N_h} \leq \tilde{N_h} \leq \overline{N_h}$ et $\tilde{N_h} \xrightarrow{h \rightarrow 0} N$ p.p. sur Q_T . Donc, on aura que $\chi(\underline{N_h}) \xrightarrow{h \rightarrow 0} \chi(N)$ p.p. sur Q_T . Le théorème de convergence dominée de Lebesgue entraîne que $S(x) \chi(\underline{N_h}) (\nabla \psi)_h \rightarrow S(x) \chi(N) \nabla \psi$ dans $(L^2(Q_T))^d$. En utilisant la convergence faible du gradient discret de la solu-

tion discrète C_h dans $(L^2(Q_T))^d$ (traité comme pour $A_h(N_h)$ dans (3.68)), on peut déduire :

$$T_C^{h,*} \xrightarrow{h \rightarrow 0} - \iint_{Q_T} S(x) \chi(N) \nabla C \cdot \nabla \psi \, dx dt.$$

Il nous reste à montrer que

$$\lim_{h \rightarrow 0} |T_C^h - T_C^{h,*}| = 0. \quad (2.40)$$

En se basant sur les propriétés de G , on a :

$$\begin{aligned} |G(N_D^{n+1}, N_E^{n+1}, \delta C_{D,E}^{n+1}) - \chi(N_{D,E}^{n+1}) \delta C_{D,E}^{n+1}| &= |G(N_D^{n+1}, N_E^{n+1}, \delta C_{D,E}^{n+1}) - G(N_{D,E}^{n+1}, N_{D,E}^{n+1}, \delta C_{D,E}^{n+1})| \\ &\leq |\delta C_{D,E}^{n+1}| |A(N_E^{n+1}) - A(N_D^{n+1})| = \mathcal{S}_{D,E} |C_E^{n+1} - C_D^{n+1}| |A(N_E^{n+1}) - A(N_D^{n+1})|. \end{aligned}$$

Donc,

$$|T_C^h - T_C^{h,*}| \leq \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\tilde{N}-1} \Delta t \sum_{D \in \mathcal{D}_h} \sum_{E \in \mathcal{N}(D)} \mathcal{S}_{D,E} |C_E^{n+1} - C_D^{n+1}| |A(N_E^{n+1}) - A(N_D^{n+1})| |\psi_E^{n+1} - \psi_D^{n+1}|.$$

En utilisant l'inégalité de Young, l'estimation (2.28) et la formule de Taylor appliqué à ψ , on peut facilement déduire (6).

Finalement, on conclut que la couple limite (N, C) est une solution faible du problème continu au sens de la Définition 2 en utilisant la densité de l'ensemble Ψ dans $\mathcal{W} = \{\phi \in L^2(0, T; H^1(\Omega)), \frac{\partial \phi}{\partial t} \in L^2(Q_T), \phi(\cdot, T) = 0\}$.

2.6 Correction du schéma numérique

Lorsque la condition (2.18) n'est pas satisfaite, on construit dans cette section une correction non-linéaire qui nous mène à un schéma monotone possédant les mêmes propriétés principales du schéma initial. Notre but est l'obtention d'un schéma corrigé qui respecte le principe de maximum discret et donc le confinement de la densité cellulaire dans $[0, 1]$. En plus, dès qu'on évite les oscillations dans un régime à convection dominée en utilisant un flux numérique de type "upwind", notre intérêt sera seulement la correction du terme diffusif non-linéaire qui est le terme bloquant du principe de maximum discret dans notre schéma numérique. Dans [60] et [12], les auteurs introduisent une correction non-linéaire à un problème elliptique discrétisé par la méthode standard de volumes finis. Dans cette section, on va généraliser cette technique à notre opérateur diffusif anisotrope dégénéré et non-linéaire.

Pour une raison de simplicité, on va omettre dans ce qui suit l'indice du temps n . On commence par définir la notion d'un schéma monotone et d'une correction associée à la discrétisation d'un opérateur dégénéré non-linéaire : $-div(S(x) \nabla(A(N)))$.

Soit \mathcal{D}_h un maillage dual de Ω . Une discrétisation numérique de l'opérateur diffusif est un système

d'équations donné par la fonction suivante,

$$\begin{aligned} \mathcal{B}^{\mathcal{D}_h} : \mathbb{R}^{\text{card}(\mathcal{D}_h)} &\rightarrow \mathbb{R}^{\text{card}(\mathcal{D}_h)} \\ A(\tilde{N}_h) &\mapsto (\mathcal{B}_D(A(\tilde{N}_h)))_{D \in \mathcal{D}_h}. \end{aligned} \quad (2.41)$$

Définition 4 (*Discrétisation Monotone*) Une discrétisation $\mathcal{B}^{\mathcal{D}_h}$ est **monotone** si :

$$\mathcal{B}_D(A(\tilde{N}_h)) = \sum_{E \in \mathcal{N}(D)} \tau_{D,E}(A(\tilde{N}_h))(A(N_D) - A(N_E)), \forall D \in \mathcal{D}_h,$$

où les fonctions $\tau_{D,E} : \mathbb{R}^{\text{card}(\mathcal{D}_h)} \rightarrow \mathbb{R}_+$ satisfont la propriété suivante :

$$\tau_{D,E}(A(\tilde{N}_h)) > 0, \forall A(\tilde{N}_h) \in \mathbb{R}^{\text{card}(\mathcal{D}_h)}, \forall D \in \mathcal{D}_h, \forall E \in \mathcal{N}(D).$$

En se basant sur la structure de discrétisations monotones, on considère des corrections de la forme suivante.

Définition 5 (*Correction*) Si le terme diffusif $\mathcal{S}^{\mathcal{D}_h} = (\mathcal{S}_D(A(\tilde{N}_h)))_{D \in \mathcal{D}_h}$ du schéma initial est :

$$\mathcal{S}_D(A(\tilde{N}_h)) = \sum_{E \in \mathcal{N}(D)} \mathcal{S}_{D,E}(A(N_D) - A(N_E)), \forall D \in \mathcal{D}_h, \quad (2.42)$$

alors la correction de ce terme est définie par une famille $\beta^{\mathcal{D}_h} = (\beta_{D,E})_{D \in \mathcal{D}_h, E \in \mathcal{N}(D)}$ des fonctions $\beta_{D,E} : \mathcal{H}_{\mathcal{D}_h} \rightarrow \mathbb{R}$, définies sur l'espace $\mathcal{H}_{\mathcal{D}_h}$ de fonctions constantes sur chaque volume de contrôle dual à valeurs dans \mathbb{R} .

Etant donné une correction $\beta^{\mathcal{D}_h}$, on définit l'opérateur diffusif corrigé $\mathcal{B}^{\mathcal{D}_h}$ par :

$$\mathcal{B}_D(A(\tilde{N}_h)) = \mathcal{S}_D(A(\tilde{N}_h)) + \sum_{E \in \mathcal{N}(D)} \beta_{D,E}(A(\tilde{N}_h))(A(N_D) - A(N_E)), \forall D \in \mathcal{D}_h. \quad (2.43)$$

En plus, on définit le terme correctif comme étant la fonction $\mathcal{Q}^{\mathcal{D}_h} : \mathcal{H}_{\mathcal{D}_h} \rightarrow \mathcal{H}_{\mathcal{D}_h}$ telle que :

$$\mathcal{Q}_D(A(\tilde{N}_h)) = \sum_{E \in \mathcal{N}(D)} \beta_{D,E}(A(\tilde{N}_h))(A(N_D) - A(N_E)), \forall D \in \mathcal{D}_h. \quad (2.44)$$

Les corrections définies en haut nous mènent à une structure monotone si elles satisfont la condition suivante :

Proposition 6 (*Correction Monotone*)

Soit $(\gamma_{D,E})_{D \in \mathcal{D}_h, E \in \mathcal{N}(D)}$ une famille de fonctions $\gamma_{D,E} : \mathcal{H}_{\mathcal{D}_h} \rightarrow \mathbb{R}_+$ telle que pour tout $A(\tilde{N}_h) \in \mathcal{H}_{\mathcal{D}_h}$ et pour tout $D \in \mathcal{D}_h$,

$$\text{si } \sum_{E \in \mathcal{N}(D)} |A(N_D) - A(N_E)| \neq 0 \text{ alors } \sum_{E \in \mathcal{N}(D)} \gamma_{D,E}(A(\tilde{N}_h)) |A(N_D) - A(N_E)| = 1. \quad (2.45)$$

Supposons que la correction $\beta^{\mathcal{D}_h}$ satisfait l'inégalité suivante :

$$\forall D \in \mathcal{D}_h, \forall E \in \mathcal{N}(D), \beta_{D,E}(A(\tilde{N}_h)) > \gamma_{D,E}(A(\tilde{N}_h)) |\mathcal{S}_D(A(\tilde{N}_h))|. \quad (2.46)$$

Alors l'opérateur diffusif corrigé est monotone.

Preuve : En utilisant la condition (2.45), on peut écrire (2.42) selon la forme suivante :

$$\mathcal{S}_D(A(\tilde{u}_h)) = \sum_{E \in \mathcal{N}(D)} \gamma_{D,E}(A(\tilde{N}_h)) |A(N_D) - A(N_E)| \mathcal{S}_D(A(\tilde{N}_h)).$$

Sachant que $|x| = x \cdot \text{sgn}(x)$, on a :

$$\mathcal{S}_D(A(\tilde{u}_h)) = \sum_{E \in \mathcal{N}(D)} \{ \gamma_{D,E}(A(\tilde{N}_h)) \text{sgn}(A(N_D) - A(N_E)) \mathcal{S}_D(A(\tilde{N}_h)) \} (A(N_D) - A(N_E)). \quad (2.47)$$

Alors la coordonnée D de l'opérateur diffusif corrigé s'écrit :

$$\begin{aligned} \mathcal{B}_D(A(\tilde{N}_h)) &= \sum_{E \in \mathcal{N}(D)} \{ \gamma_{D,E}(A(\tilde{N}_h)) \text{sgn}(A(N_D) - A(N_E)) \mathcal{S}_D(A(\tilde{N}_h)) \\ &\quad + \beta_{D,E}(A(\tilde{N}_h)) \} (A(N_D) - A(N_E)). \end{aligned} \quad (2.48)$$

On choisit donc les nouvelles transmissibilités comme étant :

$$\tau_{D,E}(A(\tilde{N}_h)) = \gamma_{D,E}(A(\tilde{N}_h)) \text{sgn}(A(N_D) - A(N_E)) \mathcal{S}_D(A(\tilde{N}_h)) + \beta_{D,E}(A(\tilde{N}_h)),$$

$\forall D \in \mathcal{D}_h, E \in \mathcal{N}(D)$. Ensuite, l'hypothèse (2.46) entraînent que les fonctions $\tau_{D,E}(A(\tilde{N}_h))$ sont strictement positives. Donc, l'opérateur diffusif corrigé est monotone au sens de la Définition 4.

Exemple 1 On peut considérer la famille suivante :

$$\gamma_{D,E}(A(\tilde{N}_h)) = \begin{cases} \frac{1}{\sum_{E \in \mathcal{N}(D)} |A(N_D) - A(N_E)|} & \text{si } \sum_{E \in \mathcal{N}(D)} |A(N_D) - A(N_E)| \neq 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases},$$

qui vérifie la condition (2.45). Dans ce cas, la condition (2.46) s'écrit :

$$\beta_{D,E}(A(\tilde{N}_h)) > \frac{\mathcal{S}_D(A(\tilde{N}_h))}{\sum_{E \in \mathcal{N}(D)} |A(N_D) - A(N_E)|}. \quad (2.49)$$

2.6.1 Propriétés du schéma corrigé

Notre point de départ est un opérateur diffusif conservatif, coercif et consistant au sens de la Définition 6 donné au-dessous. On va montrer que notre opérateur diffusif corrigé maintient toutes ces propriétés du schéma initial.

Définition 6 (Consistance du flux diffusif) Soit $(\mathcal{D}_h)_h$ une suite de maillages duals de Ω . Soit la famille $(\mathcal{S}^{\mathcal{D}_h})_h$ telle que, pour tout $h > 0$, $\mathcal{S}^{\mathcal{D}_h} = (\mathcal{S}_D)_{D \in \mathcal{D}_h}$ est un schéma associé

au discrétisation \mathcal{D}_h . Soit $\{P_D\}_{D \in \mathcal{D}_h}$ la famille des centres des volumes duals.

La famille $(\mathcal{S}^{\mathcal{D}_h})_h$ est consistante si, pour toute famille $(A(\tilde{N}_h))_h$ de fonctions discrètes :

- Il existe une constante positive c telle que, pour tout $h > 0$, $\|A(\tilde{N}_h)\|_{X_h} \leq c$;
- Il existe une fonction $A(N) \in H^1(\Omega)$ telle que $A(\tilde{N}_h) \rightarrow A(N) \in L^2(\Omega)$.

Alors,

$$\forall \psi \in C^\infty(\Omega), - \sum_{D \in \mathcal{D}_h} \sum_{E \in \mathcal{D}_h} \mathcal{S}_{D,E} A(N_E) \psi(P_D) \xrightarrow{h \rightarrow 0} \int_{\Omega} S(x) \nabla A(N) \cdot \nabla \psi \, dx.$$

En dépit de la conservativité du flux diffusif initial, le flux corrigé n'est pas nécessairement conservatif. En fait, une simple hypothèse de symétrie sur la correction assure la maintenance de la structure conservative du flux diffusif.

Proposition 7 (*Correction Conservative*) Si la famille $\beta^{\mathcal{D}_h}$ est symétrique

$$\forall D \in \mathcal{D}_h, \forall E \in \mathcal{N}(D), \beta_{D,E} = \beta_{E,D}, \quad (2.50)$$

alors l'opérateur diffusif corrigé (2.43) est **conservatif**.

Preuve : La condition de symétrie nous conduit à une inégalité qui diffère d'un signe entre les deux flux diffusifs corrigés de D vers E et de E vers D . Dans d'autres termes, $\beta_{D,E}(A(\tilde{N}_h))(A(N_D) - A(N_E)) = -\beta_{E,D}(A(\tilde{N}_h))(A(N_E) - A(N_D))$. Dans le cas où le stencil du schéma n'est pas limité aux volumes voisins, on peut adapter la preuve selon [12].

On peut facilement remarquer la positivité des fonctions de correction comme étant une conséquence de l'inégalité (2.46). Dans d'autres termes,

$$\forall D \in \mathcal{D}_h, \forall E \in \mathcal{N}(D), \beta_{D,E} \geq 0. \quad (2.51)$$

La Proposition suivante montre que l'hypothèse (2.51) est suffisante pour maintenir la coercivité du schéma initial.

Proposition 8 (*Correction Coercive*) L'opérateur diffusif corrigé (2.43) est **coercif** grâce à la positivité de la famille $\beta^{\mathcal{D}_h}$.

Preuve : Dès que le schéma initial est coercive (d'après (2.23)) avec une constante $C_S > 0$, on multiplie (2.43) par $A(U_D)$ et on additionne sur tout $D \in \mathcal{D}_h$ pour en déduire que :

$$\sum_{D \in \mathcal{D}_h} \mathcal{B}_D(A(\tilde{N}_h))A(U_D) \geq C_S \|A(\tilde{N}_h)\|_{X_h}^2 + \sum_{D \in \mathcal{D}_h} \sum_{E \in \mathcal{N}(D)} \beta_{D,E}(A(\tilde{N}_h))(A(N_D) - A(N_E))A(N_D).$$

Grâce à la conservativité du flux corrigé, on a :

$$\sum_{D \in \mathcal{D}_h} \sum_{E \in \mathcal{N}(D)} \beta_{D,E}(A(\tilde{N}_h))(A(N_D) - A(N_E))A(N_D)$$

$$= \frac{1}{2} \sum_{D \in \mathcal{D}_h} \sum_{E \in \mathcal{N}(D)} \beta_{D,E}(A(\tilde{N}_h))(A(N_E) - A(N_D))^2 \geq 0,$$

et donc la coercivité est conservée pour l'opérateur diffusif corrigé.

Proposition 9 (*Existence d'une solution*) *Supposons que le terme correctif $\mathcal{Q}^{\mathcal{D}_h} : \mathcal{H}_{\mathcal{D}_h} \rightarrow \mathcal{H}_{\mathcal{D}_h}$ est continue. Alors, il existe une solution discrète du schéma corrigé.*

Preuve : En suivant les mêmes lignes de la Proposition 4, la monotonie du flux diffusif corrigé $\mathcal{B}^{\mathcal{D}_h}$ implique de nouveau l'estimation à priori suivante,

$$\sum_{n=0}^{N-1} \Delta t \sum_{D \in \mathcal{D}_h} \sum_{E \in \mathcal{N}(D)} \tau_{D,E} |A(N_D^{n+1}) - A(N_E^{n+1})|^2 + \sum_{n=0}^{N-1} \Delta t \sum_{D \in \mathcal{D}_h} \sum_{E \in \mathcal{N}(D)} \tau_{D,E} |C_D^{n+1} - C_E^{n+1}|^2 \leq C, \quad (2.52)$$

et donc on se retrouve dans le cas de transmissibilités positives et on déduit similairement l'existence d'une solution discrète de notre schéma corrigé. L'existence peut être aussi montrée en utilisant la notion du degré topologique de Brower où la continuité de flux corrigé $\mathcal{Q}^{\mathcal{D}_h}$ implique la continuité de l'application $h_t = \mathcal{S}^{\mathcal{D}_h} + t\mathcal{Q}^{\mathcal{D}_h}$ pour tout $t \in [0, 1]$. On peut voir [12] pour une démonstration détaillée.

2.6.2 Convergence du schéma corrigé

D'après le sous-paragraphe (2.6.1), on peut donc corriger notre schéma initial et obtenir un schéma monotone qui reste conservatif et coercif. De nouveau, la monotonie et la coercivité du schéma corrigé vont assurer les estimations a priori nécessaires. La convergence, en termes de sous-suites, de la solution discrète du schéma monotone n'est autre qu'une conséquence du critère de compacité de Kolmogorov. Ensuite, sous une hypothèse numérique, on montre que la limite est une solution faible du problème continu. La convergence sera détaillée dans la Proposition suivante.

Proposition 10 (*Convergence*) *Soit $(\mathcal{D}_h)_h$ une suite de maillages duals discrétisant Ω . Soit $(\beta^{\mathcal{D}_h})_h$ une suite de corrections associées à $(\mathcal{D}_h)_h$ telle que $\beta^{\mathcal{D}_h}$ est symétrique et positive, pour tout $h > 0$. On note par $\mathcal{B}^{\mathcal{D}_h}$ l'opérateur diffusif corrigé correspondant.*

Supposons que la famille $(A(\tilde{N}_h))_h$ satisfait :

- Pour tout h , $(A(\tilde{N}_h))_h \in \mathcal{H}_{\mathcal{D}_h}$ est une solution de $\mathcal{B}^{\mathcal{D}_h}$;
- Quand $h \rightarrow 0$,

$$\sum_{D \in \mathcal{D}_h} \text{diam}(D) \sum_{E \in \mathcal{N}(D)} \beta_{D,E}(A(\tilde{N}_h)) |A(N_D) - A(N_E)| \longrightarrow 0. \quad (2.53)$$

Alors, $A(\tilde{N}_h) \xrightarrow{h \rightarrow 0} A(N)$ dans $L^2(\Omega)$ et N est une solution faible au sens de la Définition 2.

Preuve : Grâce à l'estimation (2.52), $A(\tilde{N}_h)$ est bornée dans X_h (comme on a déduit cela de l'estimation (2.29) avant la correction). Par conséquent, les estimations des translatés en espace et en temps énoncées dans les Lemmes 8 et 9 restent vraies. De nouveau, en utilisant le critère de

compacité de Kolmogorov et la monotonie de A , on peut extraire une sous-suite qui converge fortement vers $A(N)$ dans $L^2(\Omega)$. En plus, les mêmes arguments de la preuve du Théorème 3 entraînent la convergence forte de \tilde{N}_h vers une fonction N dans $L^2(\Omega)$. Il nous reste à montrer que la limite N est une solution faible du problème. En effet, étant donné une fonction régulière ψ , on pose $\psi^{\mathcal{D}_h} = (\psi_D)_{D \in \mathcal{D}_h} \in \mathcal{H}_{\mathcal{D}_h}$. En multipliant le schéma corrigé par ψ_D et en additionnant sur $D \in \mathcal{D}_h$, on aura

$$\sum_{D \in \mathcal{D}_h} \mathcal{B}_D(A(\tilde{N}_h))\psi_D = \sum_{D \in \mathcal{D}_h} \mathcal{S}_D(A(\tilde{N}_h))\psi_D + \sum_{D \in \mathcal{D}_h} \mathcal{Q}_D(A(\tilde{N}_h))\psi_D.$$

Le comportement de la partie initiale de l'opérateur diffusif corrigé est connu. En effet, en utilisant (2.21) et la consistance de l'opérateur diffusif initial avec le problème continu au sens de la Définition 6, on obtient que :

$$\forall \psi \in C^\infty(\Omega), \sum_{D \in \mathcal{D}_h} \sum_{E \in \mathcal{N}(D)} \mathcal{S}_{D,E}(A(N_D) - A(N_E))\psi(P_D) = - \sum_{D \in \mathcal{D}_h} \sum_{E \in \mathcal{D}_h} \mathcal{S}_{D,E}A(N_E)\psi(P_D)$$

$$\xrightarrow{h \rightarrow 0} \int_{\Omega} S(x) \nabla A(N) \cdot \nabla \psi \, dx.$$

Il nous reste maintenant de montrer que le terme correctif tend vers zéro. On a :

$$\left| \sum_{D \in \mathcal{D}_h} \mathcal{Q}_D(A(\tilde{N}_h))\psi_D \right| \leq \frac{1}{2} \sum_{D \in \mathcal{D}_h} \sum_{E \in \mathcal{N}(D)} \beta_{D,E}(A(\tilde{N}_h)) \left| A(N_D) - A(N_E) \right| |\psi_D - \psi_E|.$$

Dès que ψ est suffisamment régulière, il existe une constante C_ψ indépendante de \mathcal{D}_h telle que

$$|\psi_D - \psi_E| \leq C_\psi |P_D - P_E| \leq 2C_\psi \text{diam}(D), \quad \forall D \in \mathcal{D}_h, E \in \mathcal{N}(D).$$

Et d'après l'hypothèse (2.53), on a la convergence du terme correctif vers zéro.

Dans le paragraphe suivant, on va montrer que la condition (2.53) n'est pas restrictive grâce au choix des fonctions de corrections $\beta_{D,E}$.

2.6.3 Exemple d'une correction

Dans les références [60] et [12], on peut trouver une méthode générale pour construire des corrections satisfaisant toutes les conditions précédentes afin que l'opérateur diffusif corrigé soit monotone, conservatif, consistant et coercif. Voici un exemple d'une correction applicable à notre problème dégénéré non-linéaire qui a été initialement proposé dans [60] pour un problème linéaire elliptique.

Etant donné le paramètre $\eta > 0$, on considère la correction suivante,

$$\beta_{D,E}(A(\tilde{N}_h)) = \frac{|\mathcal{S}_D(A(\tilde{N}_h))|}{\sum_{Y \in \mathcal{N}(D)} |A(N_Y) - A(N_D)|} + \frac{|\mathcal{S}_E(A(\tilde{N}_h))|}{\sum_{Y \in \mathcal{N}(E)} |A(N_Y) - A(N_E)|} + \eta |\sigma_{D,E}|. \quad (2.54)$$

Dans ce qui suit, on va détailler la convergence de l'opérateur diffusif corrigé par (2.54). Selon le choix sélectionné dans l'Exemple 1, il est clair que la correction (2.54) est monotone, positive et symétrique. Donc, l'opérateur diffusif corrigé est conservatif et coercif. En plus, le terme de correction est continue, borné sur $\mathcal{H}_{\mathcal{D}_h}$ et donc l'existence d'une solution est bien assurée. La convergence est donné par,

Proposition 11 *On note par $\mathcal{B}^{\mathcal{D}_h}$ l'opérateur diffusif corrigé correspondant à (2.54). Supposons que,*

$$\sup_{D \in \mathcal{D}_h} \left\{ \frac{\text{diam}(D)}{|D|} |\mathcal{S}_D(A(\tilde{N}_h))| \right\} \rightarrow 0 \text{ as } h \rightarrow 0. \quad (2.55)$$

Alors l'hypothèse (2.53) de la Proposition 10 reste vraie.

Preuve : Il suffit de montrer que (2.55) implique (2.53). $\forall D \in \mathcal{D}_h, \forall E \in \mathcal{N}(D)$,

$$\beta_{D,E}(A(\tilde{N}_h)) |A(N_D) - A(N_E)| \leq |\mathcal{S}_D(A(\tilde{N}_h))| + |\mathcal{S}_E(A(\tilde{N}_h))| + \eta |\sigma_{D,E}| |A(N_D) - A(N_E)|.$$

Il existe une constante positive C indépendante de \mathcal{D}_h telle que

$$\begin{aligned} \sum_{D \in \mathcal{D}_h} \text{diam}(D) \sum_{E \in \mathcal{N}(D)} \beta_{D,E}(A(\tilde{N}_h)) |A(N_D) - A(N_E)| &\leq C \sum_{D \in \mathcal{D}_h} \text{diam}(D) |\mathcal{S}_D(A(\tilde{N}_h))| \\ &+ \eta \sum_{D \in \mathcal{D}_h} \text{diam}(D) \sum_{E \in \mathcal{N}(D)} |\sigma_{D,E}| (A(N_D) - A(N_E)). \end{aligned} \quad (2.56)$$

Ce dernier terme tend vers 0. En effet, en utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz, $|\sigma_{D,E}| \leq h$, $d_{D,E} \leq h$, $\text{diam}(D) \leq 2h$ et l'inégalité (2.10), il existe une constante positive $C' > 0$ telle que

$$\begin{aligned} \left| \sum_{D \in \mathcal{D}_h} \text{diam}(D) \sum_{E \in \mathcal{N}(D)} |\sigma_{D,E}| (A(N_D) - A(N_E)) \right| &\leq \left(\sum_{D \in \mathcal{D}_h} \sum_{E \in \mathcal{N}(D)} (\text{diam}(D))^2 |\sigma_{D,E}| d_{D,E} \right)^{\frac{1}{2}} \\ &\times \left(\sum_{D \in \mathcal{D}_h} \sum_{E \in \mathcal{N}(D)} \frac{|\sigma_{D,E}|}{d_{D,E}} (A(N_D) - A(N_E))^2 \right)^{\frac{1}{2}} \leq C' h \|A(\tilde{N}_h)\|_{X_h}^{\frac{1}{2}} \xrightarrow{h \rightarrow 0} 0. \end{aligned}$$

D'ailleurs, le premier terme dans (2.56) est majoré comme suit

$$\sum_{D \in \mathcal{D}_h} \text{diam}(D) |\mathcal{S}_D(A(\tilde{N}_h))| \leq |\Omega| \sup_{D \in \mathcal{D}_h} \left\{ |\mathcal{S}_D(A(\tilde{N}_h))| \frac{\text{diam}(D)}{|D|} \right\},$$

et grâce à (2.55), on a

$$\sum_{D \in \mathcal{D}_h} \text{diam}(D) |\mathcal{S}_D(A(\tilde{N}_h))| \xrightarrow{h \rightarrow 0} 0.$$

D'où l'hypothèse (2.53) est vérifiée et le résultat de convergence souhaité est une conséquence de la Proposition 10.

2.7 Simulations numériques

Dans cette section, des tests numériques sont effectués pour montrer l'efficacité et la robustesse du schéma volume fini-élément fini combiné monotone. La résolution se fait avec un nouveau code FORTRAN 95 développé et étendu dans le cadre de cette thèse afin d'implémenter ce schéma combiné monotone discrétisant le modèle anisotrope de Keller-Segel. Au début, on démontre l'efficacité et la robustesse de cette méthode pour un problème elliptique. Après, on présente des expériences numériques illustrant le comportement de la solution discrète d'un modèle anisotrope de Keller-Segel. Les simulations s'effectuent sur des différents maillages non structurés. Un exemple d'un maillage FV dual \mathcal{D}_{h_1} associé au maillage initial EF \mathcal{T}_{h_1} de type Boyer est donné sur la Figure 2.3. En plus, on peut raffiner ce maillage initial \mathcal{T}_{h_1} en divisant chaque triangle régulièrement en sous-triangles afin d'obtenir les maillages EF \mathcal{T}_{h_i} , $i = 2, 3, 4$ et par conséquent les maillages FV duals \mathcal{D}_{h_i} , $i = 2, 3, 4$ où h_i sont les tailles du maillage données dans le Tableau 2.1. Les tenseurs de diffusion S sont considérés comme étant fortement elliptiques, c'est à dire, chaque tenseur S est une matrice symétrique ayant des valeurs propres majorées et minorées par des constantes strictement positives.

On note que le cas d'une diffusion isotrope ($S(x) = Id$) sur un maillage triangulaire contenant des angles supérieurs à $\Pi/2$ entraîne des problèmes similaires obtenus en cas de tenseurs diffusifs anisotropes sur un maillage de Delaunay (avec des angles aigus). Dans les deux cas, le principe de maximum n'est pas nécessairement vérifié (On rappelle que ce principe est vrai sous l'hypothèse (2.18)) et une correction est nécessaire pour maintenir la monotonie de l'opérateur diffusif et donc le confinement de la densité cellulaire. Dans ce cas, on a l'algorithme itératif suivant :

Supposons que la valeur de la solution U^n à l'instant t_n est connue, alors la solution U^{n+1} est calculée comme une limite d'une suite construite par le schéma itératif suivant :

$$\begin{aligned}
|D| \frac{N_D^{k+1} - N_D^n}{\Delta t} - \sum_{E \in \mathcal{D}_h^{int}} \mathcal{S}_{D,E} A(N_E^{k+1}) + \sum_{E \in \mathcal{N}(D)} \beta_{D,E}(A(N^k))(A(N_D^{k+1}) - A(N_E^{k+1})) \quad (2.57) \\
+ \sum_{E \in \mathcal{N}(D)} G(N_D^{k+1}, N_E^{k+1}; \delta C_{D,E}^{k+1}) = 0, \\
\beta_{D,E}(A(N^k)) = \max \left(\frac{|\mathcal{S}_D(A(N^{k+1}))|}{\text{card}_\varepsilon(\mathcal{N}(D))}, \frac{|\mathcal{S}_E(A(N^{k+1}))|}{\text{card}_\varepsilon(\mathcal{N}(E))} \right) \frac{1}{|A(N_D^{k+1}) - A(N_E^{k+1})| + \varepsilon} \\
+ \frac{|\sigma_{D,E}| d_{D,E}}{|A(N_D^{k+1}) - A(N_E^{k+1})| + \varepsilon},
\end{aligned}$$

et

$$\text{card}_\varepsilon(\mathcal{N}(D)) = \sum_{E \in \mathcal{N}(D)} \frac{|A(N_D^{k+1}) - A(N_E^{k+1})|}{|A(N_D^{k+1}) - A(N_E^{k+1})| + \varepsilon}.$$

On arrête l'algorithme quand la condition $\frac{\|A(N^{k+1}) - A(N^k)\|}{\|A(N^k)\|} \leq 10^{-7}$ est satisfaite.

2.7.1 Problème elliptique.

On considère le problème elliptique suivant :

$$(I) \begin{cases} -\nabla \cdot (S(x)\nabla N) & = f \\ N_{exacte} & = x(1-x)y(1-y) \end{cases} ,$$

où Ω est le carré unité, $S : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^{2 \times 2}$ est le tenseur de diffusion et $f = -\nabla \cdot (S\nabla N_{exacte})$ est la donnée du problème déterminée en fonction de la solution exacte et du champ diffusif choisis dans chaque test.

2.7.1.1 Test 1. Anisotropie homogène

Dans l'ordre d'estimer et de comparer le taux de convergence entre le flux diffusif initial et le flux diffusif corrigé, on considère le problème elliptique (I) avec un tenseur diffusif S anisotrope et homogène défini par :

$$S = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \delta \end{bmatrix} ,$$

et on change la valeur de $\delta > 0$. Ce test a été mentionné dans [46] comme étant l'un des tests bloquants du principe de maximum discret et certains schémas ne convergent pas avec ce test. Les simulations sont effectuées sur un maillage raffiné en espace \mathcal{D}_{h_4} du domaine Ω donné dans la Figure 2.2(a). Le minimum et le maximum obtenus avant et après la correction, avec l'ordre de convergence de l'erreur entre la solution exacte et la solution approchée calculée aux barycentres des côtés du maillage initial (qui sont aussi les centres des volumes duals), sont donnés dans le Tableau 2.2. En fait, on peut facilement remarquer un meilleur ordre de convergence du schéma corrigé où le principe de maximum est vérifié.

Remarque 4 On dit que $D_0 \in \mathcal{D}_h$ est une cellule maximale pour $A(N)$ si

$$\frac{|\mathcal{S}_{D_0}(A(N))|}{\text{card}_\varepsilon(\mathcal{N}(D_0))} = \max_{E \in \mathcal{D}_h} \left(\frac{|\mathcal{S}_E(A(N))|}{\text{card}_\varepsilon(\mathcal{N}(E))} \right) .$$

Pour la correction régularisée utilisée dans l'équation (2.57), la condition (2.53) est équivalente à l'existence d'une cellule maximale $D_0 \in \mathcal{D}_h$ pour $A(N)$ (see [12]) telle que :

$$\exists E \in \mathcal{N}(D_0); |A(N_{D_0}) - A(N_E)| \geq \varepsilon .$$

On prend par exemple le cas de $\delta = 10^{-2}$ et on réussit à déterminer la cellule maximale dont :

$$\frac{|\mathcal{S}_{D_0}(A(N))|}{\text{card}_\varepsilon(\mathcal{N}(D_0))} = 3,01 \times 10^{-5} \text{ et } \varepsilon = 1.94 \times 10^{-5} .$$

2.7.1.2 Test 2. Anisotropie rotationnelle hétérogène

Dans ce test, on considère le problème elliptique (I) , sur le maillage dual raffiné \mathcal{D}_{h_2} , où le tenseur de diffusion est rotationnel anisotrope et hétérogène,

$$S = \frac{1}{x^2 + y^2} \begin{bmatrix} y^2 + \delta x^2 & -(1 - \delta)xy \\ -(1 - \delta)xy & x^2 + \delta y^2 \end{bmatrix},$$

avec $\delta = 10^{-2}$. La Figure 2.4 nous montre la concentration et la position des valeurs négatives de la densité cellulaire approchée du schéma initial et du schéma corrigé. Après la correction du flux diffusif, on peut remarquer que le principe de maximum discret est bien respecté grâce à la disparition des valeurs négatives dans la Figure 2.4(b). En plus, en comparant les erreurs L^2 entre la solution exacte et les solutions approchées calculées par les deux schémas initial et corrigé, on peut conclure un meilleur ordre de convergence obtenu avec le schéma corrigé.

2.7.1.3 Test 3. Isotropie sur un maillage non admissible au sens de volumes finis

On considère le problème elliptique (I) avec $N_{exacte} = x^2(1-x)^2y^2(1-y)^2 + 1$ et $S(x) = Id$. On effectue ce test numérique sur un maillage non admissible au sens de volumes finis donné dans la Figure 2.2(d). Géométriquement, la perte de l'admissibilité du maillage au sens de volumes finis est provoquée par l'inversion des centres de deux mailles voisins (la distance entre les centres des cercles circonscrits $d_{K,L} < 0$) et pour les faces frontières $\sigma \in \mathcal{E}_h^{ext}$ par des centres de mailles hors de Ω ($d_{K,\sigma} < 0$). Il est bien connu que sur des maillages non admissibles, le schéma de volumes finis classique converge vers une solution avec des valeurs très éloignées de la solution exacte et de signes opposés (Voir [4], chapitre 1). En effet, l'apparition de transmissibilités négatives entraîne la perte de la consistance de flux diffusifs pour le schéma de volumes finis classique centré par maille tandis que le schéma monotone converge avec une erreur L^2 d'ordre 10^{-5} en vérifiant le principe de maximum (Voir Figure 2.5). Cet test encourage à utiliser la méthode d'éléments finis non conforme comme étant une méthode d'approximation consistante de flux diffusifs de nos modèles de Keller-Segel avec des conditions peu restrictives sur le maillage.

2.7.1.4 Test 4. Anisotropie sur un maillage non admissible au sens de volumes finis

On considère le même Test 2 mais cette fois ci on l'effectue sur le maillage 2.2(d) en variant le paramètre δ . Les erreurs entre la solution exacte et la solution approchée, le minimum et le maximum de la solution approchée sont donnés dans le Tableau 2.3. De nouveau, le flux diffusif corrigé nous donne le meilleur ordre de convergence et la satisfaction du principe de maximum discret.

2.7.2 Problème anisotrope de Keller-Segel

On effectue maintenant des tests numériques avec notre schéma combiné monotone appliqué au modèle anisotrope de Keller-Segel. L'algorithme utilisé est le suivant : A chaque instant t_{n+1} , on calcule la solution C^{n+1} du système linéaire donné par l'équation (2.15). Après, un algorithme

de Newton est utilisé pour approcher le système non-linéaire donné par l'équation (2.14) couplé avec une méthode de bigradient pour résoudre le problème linéaire résultant de l'algorithme de Newton. Si l'hypothèse (2.18) n'est pas satisfaite, on ajoute une boucle itérative additionnelle (2.57) dans l'algorithme de Newton afin de corriger le flux diffusif et de comparer les résultats obtenus avant et après la correction. Afin de visualiser nos résultats numériques, on crée un fichier de format .vtk et on le dessine à l'aide de l'application VisIt. Dans les tests suivants, on choisit les données initiales suivantes : un pas de temps $dt = 0.0005$, $\alpha = 0.01$, $\beta = 0.05$, un opérateur $A(N) = D(\frac{N^2}{2} - \frac{N^3}{3})$ et une sensibilité chimio-attractante $\chi(N)$. La valeur de cette fonction χ , le coefficient diffusif du chimio-attractant d et le coefficient D des tests suivants sont donnés dans le Tableau 2.4.

2.7.2.1 Test 5. Anisotropie modérée.

On considère le tenseur diffusif suivant :

$$S = M = \begin{bmatrix} 1.5 & 0.5 \\ 0.5 & 1.5 \end{bmatrix}.$$

Le domaine d'espace est le carré unité et les simulations s'effectuent sur le maillage construit par le logiciel triangle et donné dans la Figure 2.2(d). La répartition initiale de la densité cellulaire sur le domaine Ω est arbitraire. La concentration du chimio-attractant est définie par $C_0(x, y) = 5$ dans le carré $(x, y) \in ([0.4, 0.6] \times [0.4, 0.6])$ et 0 ailleurs (Voir Figure 4.4). Dans la Figure 2.7, on remarque que les cellules se déplacent vers la zone du chimio-attractant et pas de nécessité de la correction grâce au confinement de la densité N entre 0 et 1.

2.7.2.2 Test 6. Diffusion anisotrope sur un maillage du Benchmark FVCA5

Dans ce test, on considère le tenseur diffusif anisotrope suivant :

$$S = M = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 5 \end{bmatrix}.$$

Les simulations s'effectuent sur le maillage donné dans la Figure 2.2(a) et les conditions initiales sont définies par régions dans la Figure 2.8. La densité initiale est définie par $N_0(x, y) = 1$ dans le carré $(x, y) \in ([0.45, 0.55] \times [0.45, 0.55])$ et 0 ailleurs. La concentration du chimio-attractant est définie par $C_0(x, y) = 5$ dans l'union des quatre carrés suivants : $(x, y) \in ([0.2, 0.3] \times [0.45, 0.55]) \cup ([0.45, 0.55] \times [0.2, 0.3]) \cup ([0.7, 0.8] \times [0.45, 0.55]) \cup ([0.45, 0.55] \times [0.7, 0.8])$ et 0 ailleurs. Dans les Figures 2.9 et 2.10, on observe l'influence de l'anisotropie dès que les cellules sont plus présentes dans deux régions du chimio-attractant. En plus, en comparant les valeurs de N avant et après la correction, on remarque que le schéma numérique corrigé respecte le principe de maximum discret. Ce résultat démontre la robustesse du schéma monotone appliqué au modèle anisotrope de Keller-Segel grâce au confinement de la densité cellulaire entre 0 et 1.

2.7.2.3 Test 7. Diffusion anisotrope sur un maillage de Delaunay

On considère les tenseurs suivants :

$$S = \begin{bmatrix} 1,5 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}, M = Id.$$

Le domaine d'espace est aussi le carré unité. Les simulations s'effectuent sur le maillage VF dual d'un maillage initial de Delaunay donné dans la Figure 2.2(b) et les conditions initiales sont définies par régions dans la Figure 2.11. La densité initiale est définie par $N_0(x, y) = 1$ dans le carré $(x, y) \in ([0.45, 0.55] \times [0.45, 0.55])$ et 0 ailleurs. La concentration du chimio-attractant est définie par $C_0(x, y) = 5$ dans l'union des quatre carrés suivants : $(x, y) \in ([0.275, 0.325] \times [0.275, 0.325]) \cup ([0.275, 0.325] \times [0.675, 0.725]) \cup ([0.675, 0.725] \times [0.275, 0.325]) \cup ([0.675, 0.725] \times [0.675, 0.725])$ et 0 ailleurs. Dans la Figure 2.12, on peut remarquer le déplacement elliptique de la densité cellulaire sous l'influence de tenseurs diffusifs pleins avant et après la correction. En plus, la correction est nécessaire pour que le principe de maximum soit vérifié ce qui montre de nouveau la robustesse du schéma combiné monotone construit.

Remarque 5 *En se basant sur la matrice S , on calcule les deux valeurs propres $\lambda_2 = 0.7192 < \lambda_1 = 2.7808$ et les deux vecteurs propres $e_1 = (0.6154, 0.7882)$ et $e_2 = (-0.7882, 0.6154)$ associés respectivement aux valeurs propres λ_1 et λ_2 . Tout d'abord, on peut facilement déduire le rapport d'anisotropie $= \frac{\lambda_2}{\lambda_1} = 3.8665$. Ensuite, comme la matrice S est symétrique réelle donc il existe une matrice de passage P orthogonale formée de vecteurs propres telle que*

$$P^{-1}SP = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix} \text{ avec } P = \begin{bmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{bmatrix}.$$

Par conséquent, $\theta = 51^\circ$ et ça justifie la déviation subie par les cellules dans la Figure 2.12.

2.7.2.4 Test 8. Diffusion anisotrope hétérogène sur un maillage avec un trou

Dans ce test, on considère les tenseurs suivants :

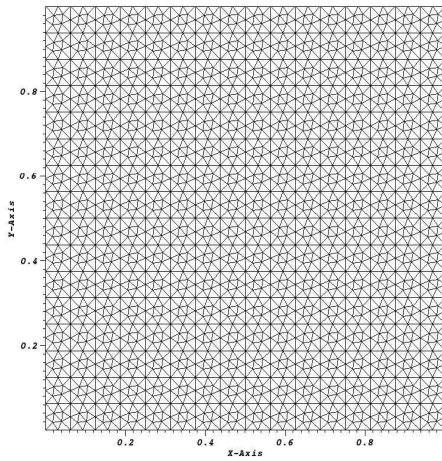
$$S = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 10 \end{bmatrix} \text{ si } y \geq 2 \text{ et } S = \begin{bmatrix} 10 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ si } y < 2, M = Id.$$

Le maillage considéré dans ce cas est un maillage avec un trou construit avec le logiciel Triangle et donné dans la Figure 2.2(c). Les conditions initiales sont données dans la Figure 2.13. On considère une distribution initiale arbitraire des cellules dans le domaine Ω . La concentration du chimio-attractant est définie par $C_0(x, y) = 10$ dans l'union des cinq carrés suivants : $(x, y) \in ([0.4, 0.6] \times [2.4, 2.6]) \cup ([0.4, 0.6] \times [0.4, 0.6]) \cup ([2.4, 2.6] \times [0.4, 0.6]) \cup ([2.4, 2.6] \times [2.4, 2.6]) \cup ([1.4, 1.6] \times [3.4, 3.6])$ et 0 ailleurs. Dans la Figure 2.14, on remarque la diffusion anisotrope verticale (resp. horizontale) des cellules dans la moitié supérieure (resp. inférieure) du domaine vers les régions du chimio-attractant. La vérification du principe de maximum avec le schéma initial rend ce cas très intéressant grâce à la satisfaction de l'hypothèse (2.18) avec ce choix du

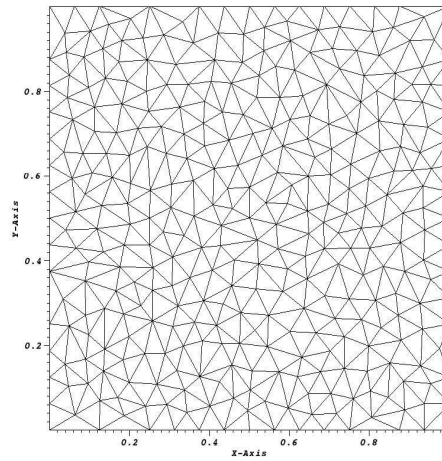
Taille du maillage	h_1	h_2	h_3	h_4
Nombre de triangles	56	224	896	3584
Nombre de côtés	92	352	1376	5440

TABLE 2.1 – Test 1- Raffinement du maillage FVCA5 .

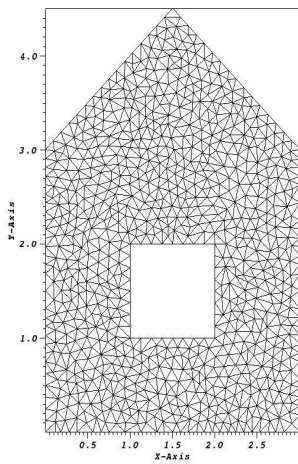
maillage et des tenseurs sans aucune correction du flux diffusif initial et par conséquent cela explique le confinement de la densité cellulaire dans $[0, 1]$.



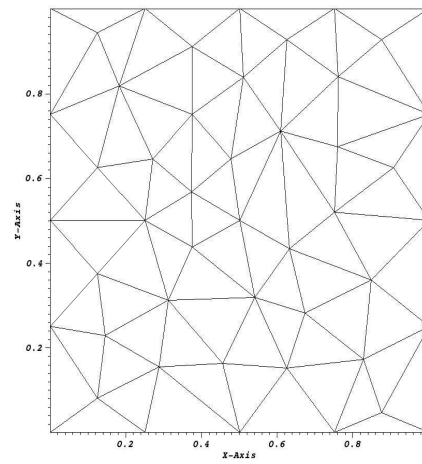
(a) Maillage \mathcal{T}_{h_4} FVCA5 (3584 triangles).



(b) Maillage de Delaunay (620 triangles).



(c) Maillage avec un trou (1563 triangles).



(d) Maillage grossier (78 triangles).

FIGURE 2.2 – Différents maillages \mathcal{T}_h .

delta	$\delta = 10^{-2}$	$\delta = 10^0$	$\delta = 10^1$	$\delta = 10^2$	$\delta = 10^3$
Erreur L^∞	3.27×10^{-2}	4.12×10^{-5}	1.23×10^{-2}	3.27×10^{-2}	6.71×10^{-2}
Erreur L^2	1.07×10^{-3}	1.70×10^{-9}	1.52×10^{-4}	1.07×10^{-3}	4.50×10^{-3}
NMax avant correction	5.42×10^{-2}	6.248×10^{-2}	5.72×10^{-2}	5.42×10^{-2}	7.71×10^{-2}
NMin avant correction	-7.07×10^{-4}	4.545×10^{-5}	-3.32×10^{-5}	-7.08×10^{-4}	-2.62×10^{-3}
Nombre d'itérations	1	0	1	59	88
Erreur L^∞	2.21×10^{-2}	-	1.13×10^{-2}	3.11×10^{-2}	4.39×10^{-2}
Erreur L^2	4.92×10^{-4}	-	1.28×10^{-4}	9.65×10^{-4}	1.93×10^{-3}
NMax après correction	4.45×10^{-2}	-	5.44×10^{-2}	5.16×10^{-2}	5.11×10^{-2}
NMin après correction	4.67×10^{-6}	-	1.22×10^{-5}	1.23×10^{-8}	1.31×10^{-8}

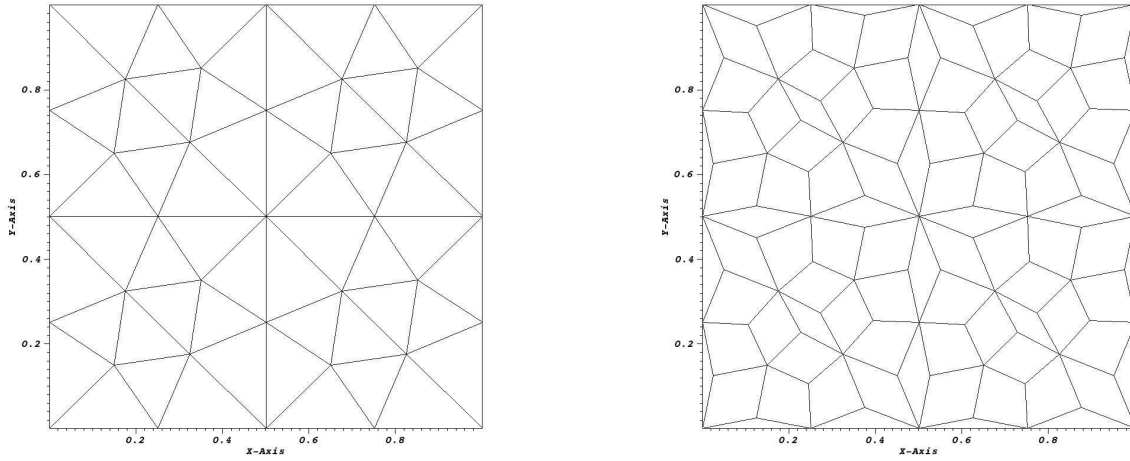
TABLE 2.2 – Test 1- Cas anisotrope homogène .

delta	$\delta = 10^{-1}$	$\delta = 10^{-2}$
Erreur L^∞ avant correction	5.63×10^{-2}	4.60×10^{-1}
Erreur L^2 avant correction	3.17×10^{-3}	2.12×10^{-1}
NMax avant correction	8.80×10^{-2}	4.79×10^{-1}
NMin avant correction	-2.62×10^{-2}	-2.82×10^{-1}
Nombre d'itérations	2	3
Erreur L^∞ après correction	4.34×10^{-2}	4.78×10^{-2}
Erreur L^2 après correction	1.89×10^{-3}	2.28×10^{-3}
NMax après correction	1.94×10^{-2}	2.21×10^{-2}
NMin après correction	1.72×10^{-3}	4.34×10^{-5}

TABLE 2.3 – Test 4- Cas anisotrope hétérogène sur le maillage 2.2(d) .

Tests	Test 5	Test 6	Test 7	Test 8
$D =$	2.	0.05	0.05	0.3
$\chi(N) =$	$cN(1 - N)$	$cN(1 - N)^2$	$cN(1 - N)$	$cN(1 - N)$
$c =$	1.5	0.005	0.3	0.01
$d =$	10^{-6}	10^{-4}	10^{-4}	5×10^{-5}

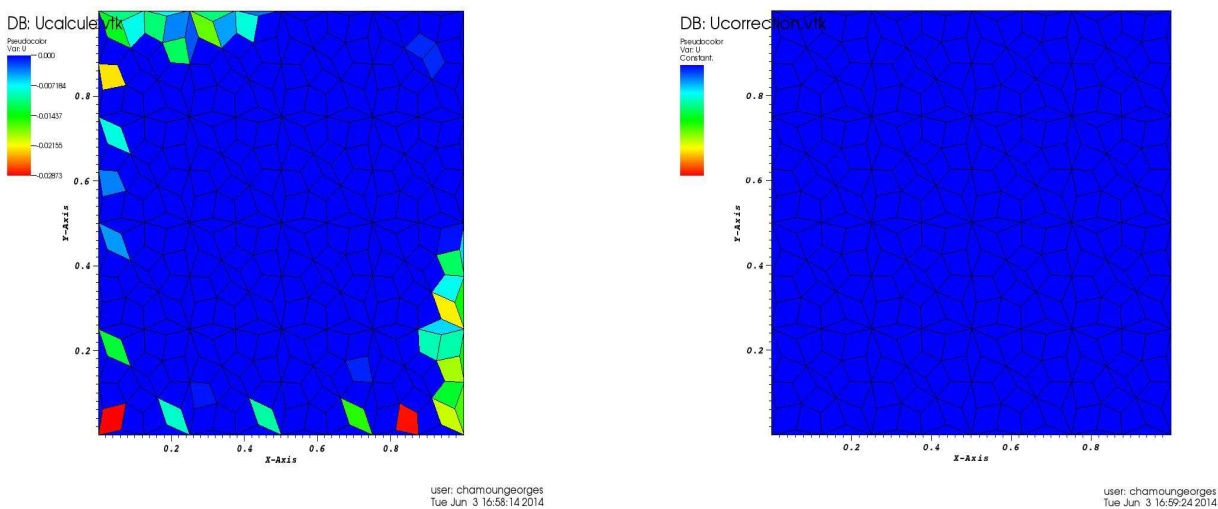
TABLE 2.4 – Paramètres initiaux des Tests 5, 6, 7 et 8 .



(a) Maillage initial \mathcal{T}_{h_1} .

(b) Maillage dual \mathcal{D}_{h_1} .

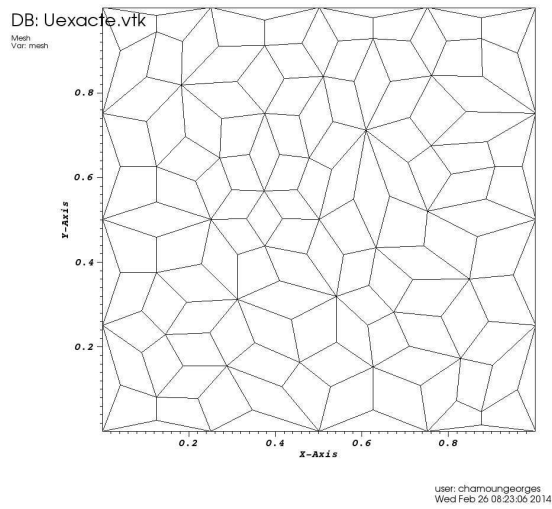
FIGURE 2.3 – Exemple d’un maillage initial \mathcal{T}_{h_1} et son dual \mathcal{D}_{h_1} .



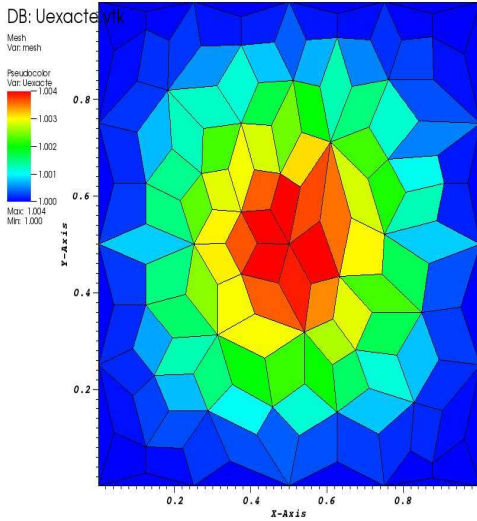
(a) Schéma initial : Concentration des densités négatives avec une erreur- $L^2 = 2.33 \times 10^{-2}$.

(b) Schéma corrigé : Disparition des densités négatives avec une erreur- $L^2 = 1.77 \times 10^{-3}$.

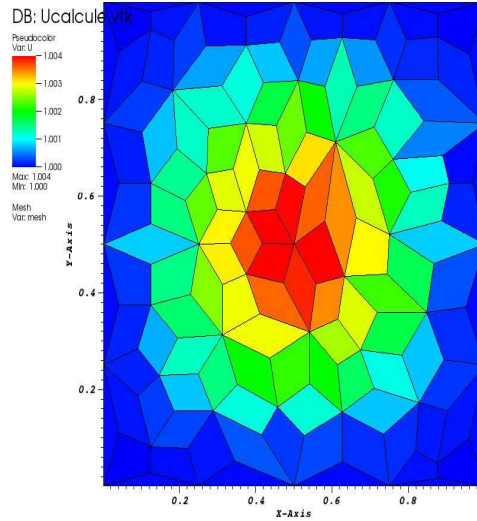
FIGURE 2.4 – Test 2- Concentration et position des densités négatives avant et après la correction.



(a) Maillage dual associé au maillage 2.2(d).

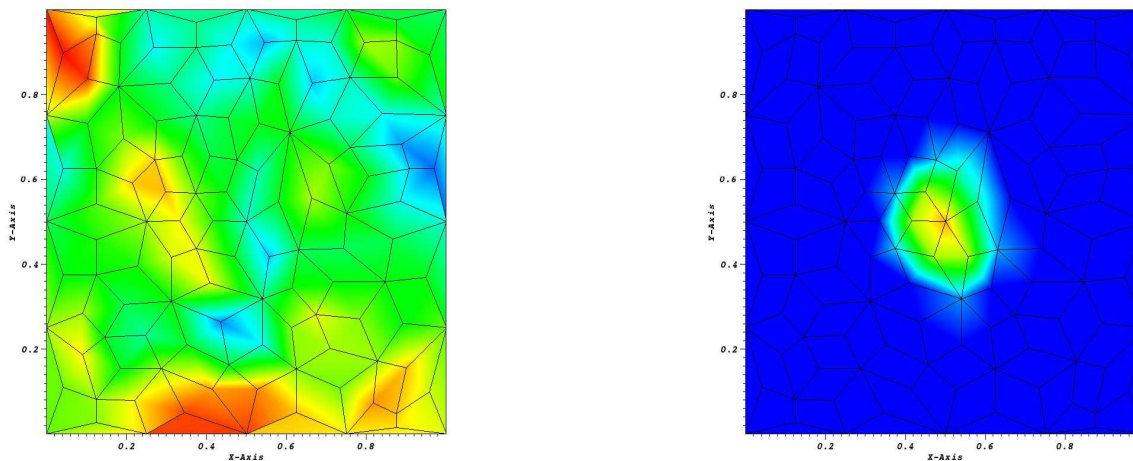


(b) Solution exacte.



(c) Solution approchée.

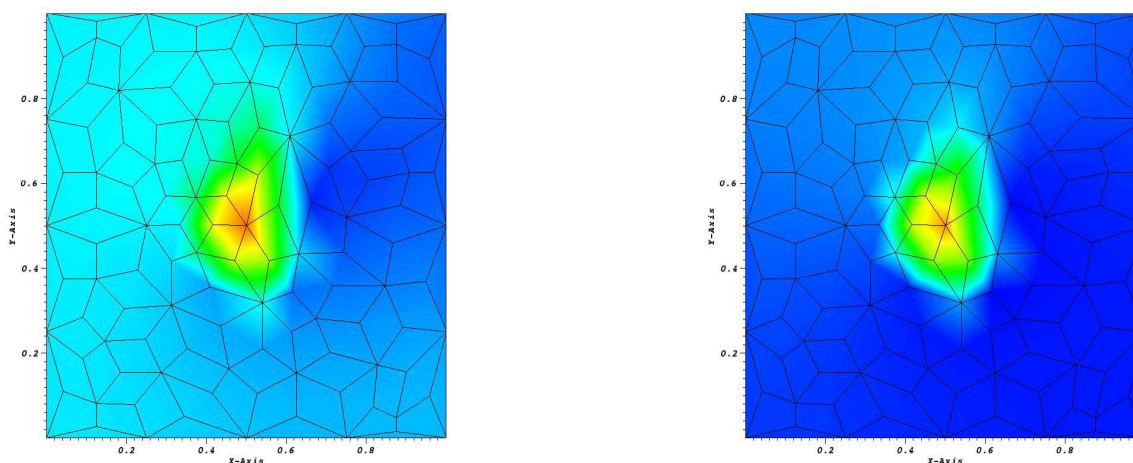
FIGURE 2.5 – Test 3- Solution exacte et solution approchée.



(a) Condition Initiale de la densité cellulaire N_0 .

(b) Condition initiale de la concentration du chimio-attractant C_0 .

FIGURE 2.6 – Test 5- Conditions initiales.



(a) Densité cellulaire : $0.38 \leq N(t = 0.2) \leq 0.98$.

(b) Densité cellulaire : $0.42 \leq N(t = 15) \leq 0.96$

FIGURE 2.7 – Test 5- Évolution en temps de la densité cellulaire.

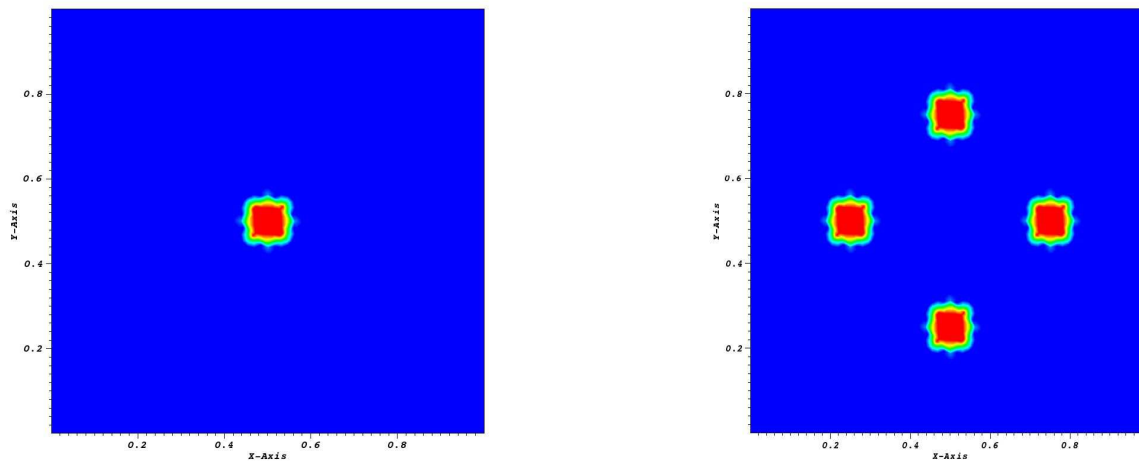
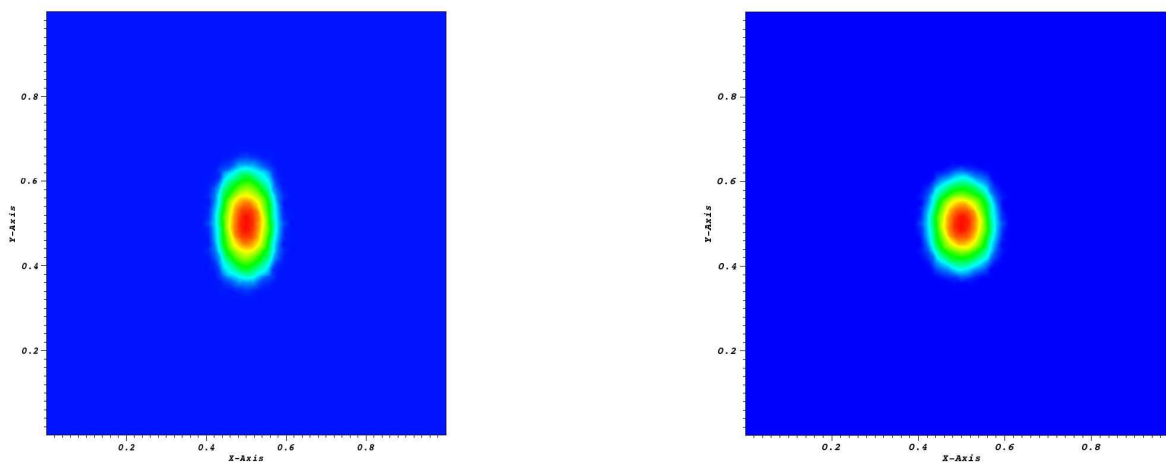
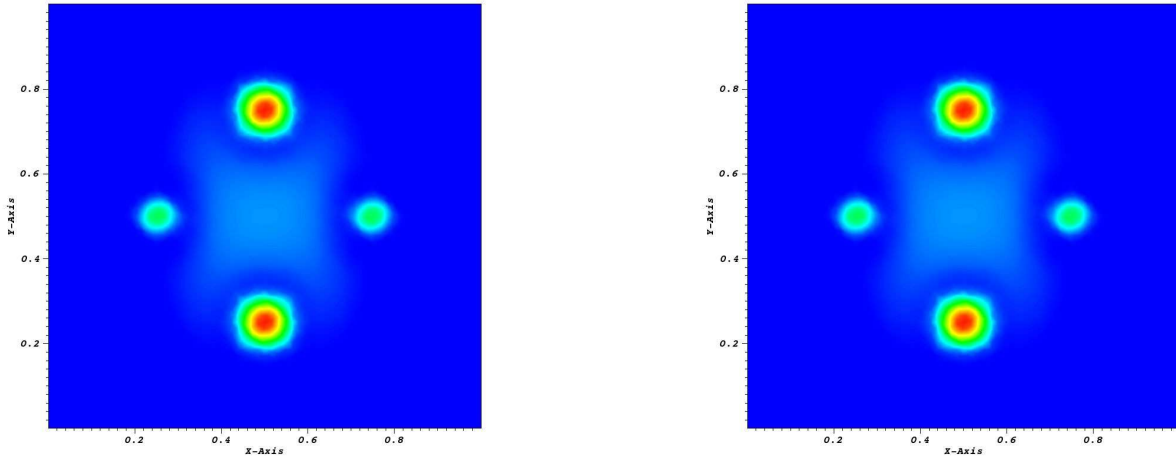
(a) Condition Initiale de la densité cellulaire N_0 .(b) Condition initiale de la concentration du chimio-attractant C_0 .

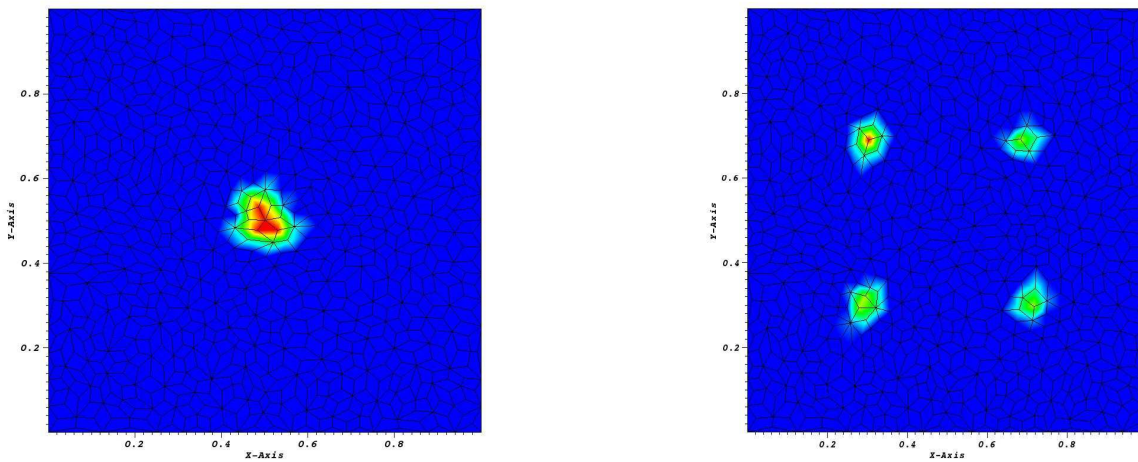
FIGURE 2.8 – Test 6- Conditions initiales.

(a) Avant la correction : $-0.009599 \leq N(t = 0.05) \leq 0.4080$.(b) Après la correction : $6.996 \times 10^{-5} \leq N(t = 0.05) \leq 0.3140$ FIGURE 2.9 – Test 6- Densité cellulaire avant et après la correction à l'instant $t = 0.05$.



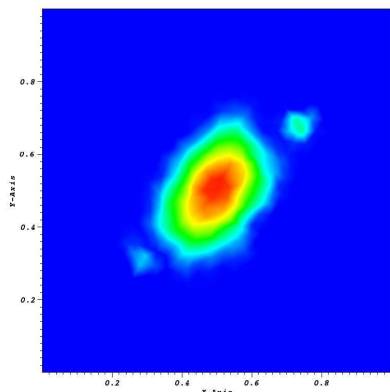
(a) Avant la correction : $-0.009599 \leq N(t = 3.125) \leq 0.4080$.
 (b) Après la correction : $6.996 \times 10^{-5} \leq N(t = 3.125) \leq 0.3140$

FIGURE 2.10 – Test 6- Densité cellulaire avant et après la correction à l’instant $t = 3.125$.

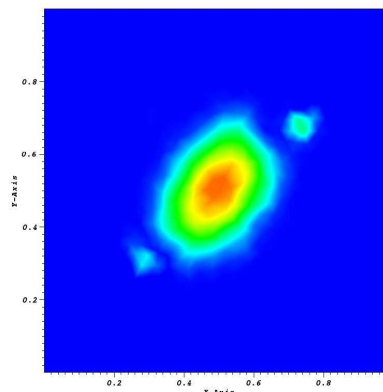


(a) Condition Initiale de la densité cellulaire N_0 .
 (b) Condition initiale de la concentration du chemo-attractant C_0 .

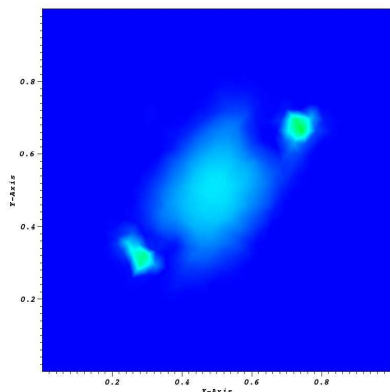
FIGURE 2.11 – Test 7- Conditions initiales.



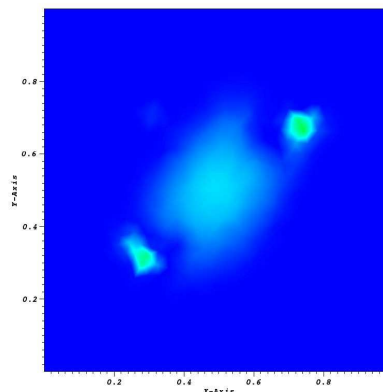
(a) Avant correction : $-1.23 \times 10^{-2} \leq N(t = 0.4) \leq 0.1918$.



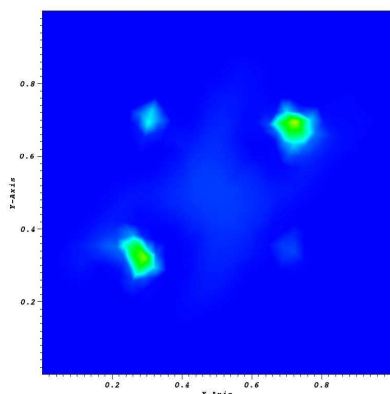
(b) Après correction : $0. \leq N(t = 0.4) \leq 0.1885$.



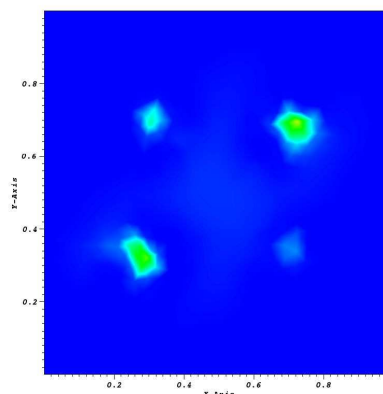
(c) Avant correction : $-2.47 \times 10^{-2} \leq N(t = 1) \leq 0.4829$.



(d) Après correction : $0. \leq N(t = 1) \leq 0.4792$.

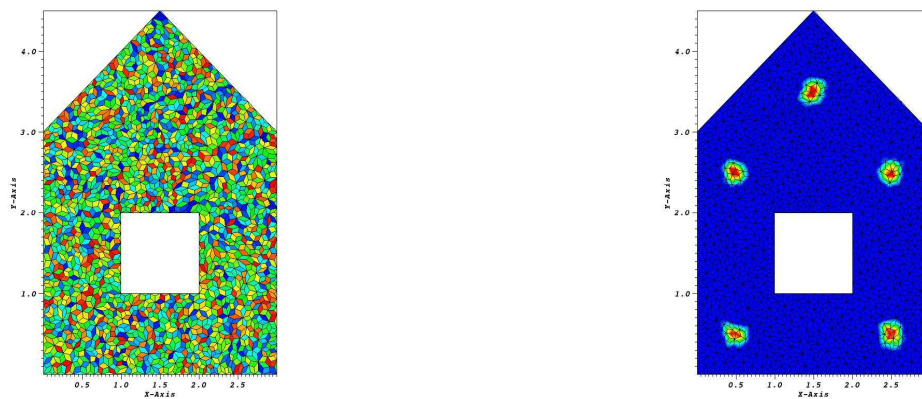


(e) Avant correction : $-2.81 \times 10^{-2} \leq N(t = 4) \leq 0.6862$.



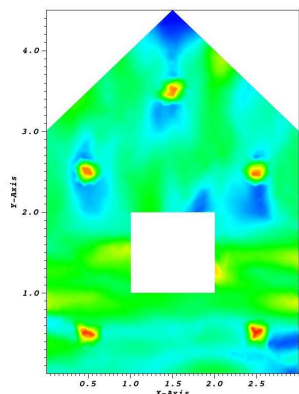
(f) Après correction : $0. \leq N(t = 4) \leq 0.6727$.

FIGURE 2.12 – Test 7- Évolution en temps de la densité cellulaire avant et après la correction.

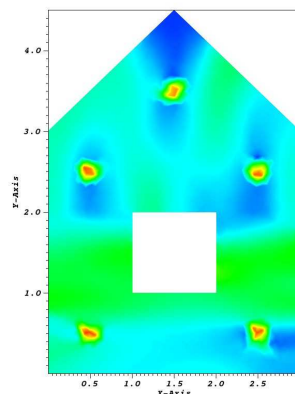


(a) Condition Initiale de la densité cellulaire N_0 . (b) Condition initiale de la concentration du chimio-attractant C_0 .

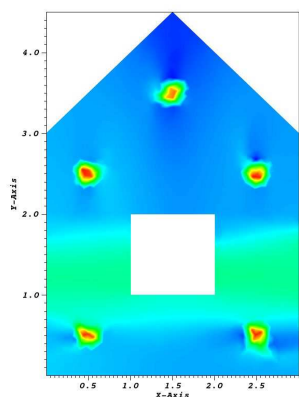
FIGURE 2.13 – Test 8- Conditions initiales.



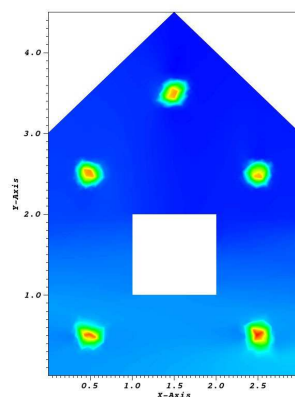
(a) La densité cellulaire (N) à l'instant $t = 0.075$ avec $0.3693 \leq N \leq 0.7454$.



(b) La densité cellulaire (N) à l'instant $t = 0.02$ avec $0.4005 \leq N \leq 0.7656$.



(c) La densité cellulaire (N) à l'instant $t = 1$ avec $0.4420 \leq N \leq 0.7561$.



(d) La densité cellulaire (N) à l'instant $t = 10$ avec $0.4804 \leq N \leq 0.6970$.

FIGURE 2.14 – Test 8- Évolution en temps de la densité cellulaire sur un maillage avec un trou.

Chapitre 3

Étude mathématique d'un modèle anisotrope en chimiotaxie-fluide

3.1 Introduction

Le système chimiotactisme-fluide couplé décrit le comportement collectif d'une suspension de cellules attirées par un chimio-attractant dans un fluide qui n'est pas au repos. Ce modèle a été motivé par une expérience de bactéries nageantes de nature "Bacillus subtilis" suspendues dans une goutte d'eau et confinées entre deux (verticales et invisibles) plaques de verre de 1 mm d'écart. Ces bactéries nagent vers le milieu riche en dioxygène dans le but d'assurer leurs nutriments, tandis que d'autres bactéries manquent d'oxygène et se sont rendues immobiles. Dans ce qui suit, on va étudier mathématiquement le modèle suivant formé d'un système parabolique de chimiotaxie avec des tenseurs diffusifs généraux couplé aux équations de Navier-Stokes,

$$\left\{ \begin{array}{l} \partial_t N - \nabla \cdot (S(x)a(N)\nabla N) + \nabla \cdot (S(x)\chi(N)\nabla C) + u \cdot \nabla N = f(N), \\ \partial_t C - \nabla \cdot (M(x)\nabla C) + u \cdot \nabla C = -k(C)N, \\ \partial_t u - \nu \Delta u + (u \cdot \nabla)u + \nabla P = -N\nabla \phi, \\ \nabla \cdot u = 0, \end{array} \right. \quad t > 0, x \in \Omega, \quad (3.1)$$

où Ω est un domaine ouvert borné dans \mathbb{R}^d , $d \leq 4$ de bord $\partial\Omega$ régulier. L'expérience correspond aux conditions mixtes aux bords. Mais, on utilise ici des conditions aux bords de flux nul pour N et C et de Dirichlet nulle pour u (non-glissement). Les conditions aux bords sur $\Sigma_t = \partial\Omega \times (0, T)$ associées à ce système d'équations sont données par :

$$S(x)a(N)\nabla N \cdot \eta = 0, M(x)\nabla C \cdot \eta = 0, u = 0, \quad (3.2)$$

où η est la normale unitaire sortant de $\partial\Omega$. Les conditions initiales sur Ω sont données par,

$$N(x, 0) = N_0(x), C(x, 0) = C_0(x), u(x, 0) = u_0(x). \quad (3.3)$$

Ici, on note la densité cellulaire, la concentration d'un chimio-attractant, la vitesse et la pression dans le fluide incompressible respectivement par N , C , u and P . En plus, $a(N)$ désigne le coefficient diffusif qui dépend de la densité cellulaire et $\chi(N)$ est généralement écrit sous la forme $\chi(N) = Nh(N)$ où h est la fonction sensibilité chimiotactique. Les tenseurs anisotropes et hétérogènes sont notés par $S(x)$ et $M(x)$. La motivation pour ce modèle provient de l'étude numérique de deux premiers chapitres de cette thèse et le but d'étudier la dynamique du comportement chimiotactique des cellules dans un fluide qui n'est pas au repos. Ainsi, on note les expériences décrites dans [17, 50, 78] concernant l'attitude des bactéries via un chimio-attractant.

Dans le modèle (3.1), la densité cellulaire N se diffuse, elle se dirige vers le gradient chimique et elle est transportée par le fluide. En plus, le chimio-attractant C se diffuse, il est aussi transporté par le fluide et il est consommé proportionnellement à la densité cellulaire. La fonction $k(C)$ désigne le taux de consommation d'un chimio-attractant par les cellules et modélise le seuil d'inactivité des bactéries en raison du manque d'oxygène. Le fluide de viscosité ν est décrit par une équation incompressible de Navier-Stokes. Il est couplé à N et C à travers le transport par le fluide modélisé par $u \cdot \nabla N$, $u \cdot \nabla C$ et la force gravitationnelle $g = -N\nabla\phi$ comme étant une force extérieure exercée par les cellules sur le fluide. En effet, cette force extérieure peut être produite par des mécanismes physiques différents tels que : la gravité, les forces électriques et magnétiques mais on s'intéresse seulement dans cette thèse à la force gravitationnelle $\nabla\phi = V_b(\rho_b - \rho)g''z$ exercée par une bactérie sur le fluide suivant le vecteur unitaire z proportionnellement au volume du bactérie V_b , à l'accélération gravitationnelle $g = 9.8m/s^2$ et à la densité des bactéries (qui sont plus denses que le fluide). En plus, dès que le fluide est lent, on peut donc utiliser l'équation de Stokes au lieu de Navier-Stokes. Alors le système apparaît comme,

$$\left\{ \begin{array}{l} \partial_t N - \nabla \cdot (S(x)a(N)\nabla N) + \nabla \cdot (S(x)\chi(N)\nabla C) + u \cdot \nabla N = f(N), \\ \partial_t C - \nabla \cdot (M(x)\nabla C) + u \cdot \nabla C = -k(C)N, \\ \partial_t u - \nu\Delta u + \nabla P = -N\nabla\phi, \\ \nabla \cdot u = 0 \end{array} \right. \quad t > 0, x \in \Omega. \quad (3.4)$$

Dans le cas de tenseurs isotropes homogènes ($S(x) = M(x) = Id$), d'une diffusion linéaire ($a(N) = 1$) et d'une sensibilité ($\chi(N, C) = N\beta(C)$ qui dépend de la concentration où $\beta(C)$ est la sensibilité chimiotactique), plusieurs auteurs dans la littérature de la chimiotaxie, ont récemment étudié l'existence globale face à l'explosion en temps fini d'une solution faible de modèles (3.1) et (3.4). L'outil principal utilisé pour montrer l'existence globale est une inégalité entropique si elle existe. Dans [29], les auteurs ont montré l'existence globale de solutions faibles pour le modèle (3.4) avec un potentiel ϕ faible ou avec une condition initiale de la concentration C suffisamment petite. En plus, pour $\Omega = \mathbb{R}^2$ ou \mathbb{R}^3 , en changeant le taux de consommation ($-k(C)N$) en un autre de production ($N - aC$ où $a > 0$) et en considérant l'équation stationnaire de C , les auteurs dans [63] ont montré l'existence d'une masse critique initiale M pour le modèle (3.4), au-dessous de M on a l'existence globale et au-dessus de M on a l'explosion en temps fini. Pour $\Omega = \mathbb{R}^2$, l'existence globale en temps d'une solution faible du modèle (3.1) est montrée dans [63]. En plus, dans le cas de tenseurs isotropes, d'une diffusion non-linéaire

($a(N) = mN^{m-1}$) qui se dégenère seulement en un seul point ($N = 0$) et pour la même sensibilité ($\chi(N, C) = N\beta(C)$), l'existence globale d'une solution faible pour le modèle (3.4) est montrée dans [41] pour $\Omega = \mathbb{R}^2$ et montrée aussi pour $\frac{4}{3} < m \leq 2$ où Ω est borné dans \mathbb{R}^2 . En plus, le cas $m = \frac{4}{3}$ dans tout l'espace $\Omega = \mathbb{R}^3$ est traité aussi dans [63]. Selon notre connaissance, ce sont les seuls résultats montrés à des modèles reliés à (3.1) et (3.4).

Dans ce papier, on a deux buts : D'un part, on établit l'existence globale en temps de solutions faibles des modèles (3.1) et (3.4) dans le domaine Ω ouvert et borné ($\Omega \subset \mathbb{R}^d$, $d \leq 4$), en présence des tenseurs anisotropes et hétérogènes, d'une diffusion non-linéaire qui se dégenère en deux points, d'une sensibilité chimiotactique modifiée χ et des équations de Navier-Stokes. D'autre part, on montre l'unicité de ces solutions faibles du système (3.4) dans Ω ($\Omega \subset \mathbb{R}^d$, $d = 2, 3$) sous des hypothèses et des régularités supplémentaires sur la donnée initiale.

Une technique de semi-discrétisation, inspirée de [64], est utilisée au début pour établir l'existence d'une solution faible du système Chimiotactisme-Navier-Stokes régularisé et non dégénéré. On peut citer [75] pour des détails supplémentaires concernant l'existence globale de solutions faibles pour les équations de Navier-Stokes par une semi-discrétisation en temps qui reste validée pour tout nombre des dimensions en espace. Ensuite, on tend le paramètre de régularisation vers zéro et on utilise des arguments de compacité, comme dans [2], pour passer à la limite et pour montrer l'existence d'une solution faible du système dégénéré (3.1) qui a deux points de dégénérescence ($N = 0$ et N_m). Plus loin, la preuve de l'unicité se base sur une technique de dualité utilisée aussi dans [58] pour le modèle classique de Keller-Segel.

Ce chapitre est structuré comme suit. Dans la section 2, on résume les états du problème mathématique, on formule le concept de solutions faibles pour les modèles (3.1) et (3.4) et on énonce les théorèmes principaux d'existence globale et d'unicité de solutions faibles. Les sections 3, 4 et 5 sont consacrées à la preuve de ces Théorèmes.

3.2 Préliminaires et résultats principaux

Dans cette section, on va énoncer les hypothèses posées sur les données initiales dans cette étude mathématique et les résultats principaux obtenus dans ce chapitre.

On suppose que la densité critique N_m vaut 1 et que les fonctions χ et a satisfont les mêmes hypothèses (1.7) et (1.8) utilisées tout au long de cette thèse. Les perméabilités S et M possèdent les mêmes propriétés données par (2.5) et (2.6). Grâce à (1.7), (1.8) et (2.5), on peut déduire l'existence de \bar{D} et $\bar{D}_1 \in \mathbb{R}_+^*$ telles que p.p. $x \in \Omega$, $\forall N \in [0, 1]$,

$$\|D\|_{\mathcal{M}_d(\mathbb{R})} = \|S(x)a(N)\|_{\mathcal{M}_d(\mathbb{R})} \leq \bar{D}, \quad \|D_1\|_{\mathcal{M}_d(\mathbb{R})} = \|S(x)\chi(N)\|_{\mathcal{M}_d(\mathbb{R})} \leq \bar{D}_1. \quad (3.5)$$

Ensuite, on exige que

$$k : [0, +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}^+ \text{ est une fonction de classe } C^1; k(0) = 0 \text{ et } k'(c) > 0, \forall c \in \mathbb{R}^+, \quad (3.6)$$

$$f : [0, 1] \mapsto \mathbb{R}^+ \text{ est une fonction continue avec } f(0) = 0, \quad (3.7)$$

$$\nabla \phi \in (L^\infty(\Omega))^d \text{ et } \phi \text{ est une fonction indépendante du temps.} \quad (3.8)$$

Ensuite, pour p dans $(0, \infty)$ et un entier $m \geq 0$, on note par $W^{m,p}(\Omega)$ (resp. $W_p^{2m,m}(\Omega \times [0, T])$) l'espace de Banach qui contient les éléments de $L^p(\Omega)$ (resp. de $L^p(\Omega \times [0, T])$) qui possèdent des dérivées généralisées jusqu'à l'ordre m (resp. dérivées de la forme $\partial_t^r \partial_x^s$ avec $2r + |s| \leq 2m$) et qui sont p -sommables sur Ω .

Finalement, l'étude de l'équation de Navier-Stokes nécessite l'introduction des espaces suivants :

$$\varphi = \{u \in \mathcal{D}(\Omega), \nabla \cdot u = 0\}, V = \bar{\varphi}^{H_0^1(\Omega)} \text{ et } H = \bar{\varphi}^{L^2(\Omega)}, \quad (3.9)$$

où V et H sont les clôtures de φ dans $H_0^1(\Omega)$ et $L^2(\Omega)$ respectivement.

Pour montrer l'unicité de solutions faibles du modèle chimiotactisme-Stokes (3.4), on a besoin après de l'ensemble suivant des hypothèses sur les données initiales :

$$\left\{ \begin{array}{l} i) d \leq 3, N_0 \in L^\infty(\Omega), u_0 \in W^{2-\frac{2}{p},p}(\Omega), C_0 \in W^{2-\frac{2}{p},p}(\Omega) \text{ avec une suffisante } p > d, \\ ii) \nabla \phi \in W^{1,\infty}(\Omega), f \text{ est affine, } \chi \text{ de classe } C^1 \text{ et les coefficients } S_{i,j} \in C^1(\bar{\Omega}). \end{array} \right. \quad (3.10)$$

Avant l'établissement de l'existence globale, tout d'abord on a besoin d'une notion propre d'une solution faible.

Définition 7 *Supposons que*

$$0 \leq N_0 \leq 1, C_0 \geq 0, C_0 \in L^\infty(\Omega), u_0 \in H, \nabla \cdot u_0 = 0 \text{ et } g \in L^2(0, T; V'). \quad (3.11)$$

Le triplet (N, C, u) est dit une **solution faible** de (3.1)-(3.3) si

$$\begin{aligned} & 0 \leq N(x, t) \leq 1, C(x, t) \geq 0 \text{ p.p. dans } Q_T = \Omega \times [0, T], \\ & N \in C_w(0, T; L^2(\Omega)), \partial_t N \in L^2(0, T; (H^1(\Omega))'), A(N) := \int_0^N a(r) dr \in L^2(0, T; H^1(\Omega)), \\ & C \in L^\infty(Q_T) \cap L^2(0, T; H^1(\Omega)) \cap C(0, T; L^2(\Omega)); \partial_t C \in L^2(0, T; (H^1(\Omega))'), \\ & u \in L^\infty(0, T; H) \cap L^2(0, T; V) \cap C_w(0, T; H); \frac{du}{dt} \in L^1(0, T; V'), \end{aligned}$$

et (N, C, u) satisfait

$$\begin{aligned} & \int_0^T \langle \partial_t N, \psi_1 \rangle_{(H^1)', H^1} dt + \iint_{Q_T} [S(x)a(N)\nabla N - S(x)\chi(N)\nabla C - Nu] \cdot \nabla \psi_1 dx dt \\ & = \iint_{Q_T} f(N)\psi_1 dx dt, \end{aligned} \quad (3.12)$$

$$\int_0^T \langle \partial_t C, \psi_2 \rangle_{(H^1)', H^1} dt + \iint_{Q_T} [M(x)\nabla C - Cu] \cdot \nabla \psi_2 dxdt = \iint_{Q_T} -Nk(C)\psi_2 dxdt, \quad (3.13)$$

$$\begin{aligned} \int_0^T \langle \partial_t u, \psi \rangle_{V', V} dt + \nu \iint_{Q_T} \nabla u \cdot \nabla \psi dxdt + \iint_{Q_T} (u \cdot \nabla)u\psi dxdt \\ = \iint_{Q_T} -N\nabla\phi\psi dxdt = \iint_{Q_T} g\psi dxdt, \end{aligned} \quad (3.14)$$

pour tout $\psi_1, \psi_2 \in L^2(0, T; H^1(\Omega))$ et $\psi \in C_c^0([0, T[; V)$, où $C_c^0([0, T[; V)$ désigne l'espace des fonctions continues à support compact à valeurs dans V et $C_w(0, T; L^2(\Omega))$ désigne l'espace des fonctions continues à valeurs dans (une boule fermée de) $L^2(\Omega)$ induit par la topologie faible.

Définition 8 Grâce à l'équation linéaire de Stokes $((u \cdot \nabla)u = 0)$, le triplet (N, C, u) est dit une **solution faible** de (3.2)-(3.4) dans le même sens de la Définition 7 avec une meilleure régularité en temps obtenue pour u . En effet, le terme $\frac{du}{dt}$ appartient à $L^2(0, T; V')$ et par conséquent la composante u appartient à $C(0, T; H)$.

On énonce maintenant les théorèmes principaux concernant l'existence globale et l'unicité de solutions faibles.

Théorème 4 Supposons que les hypothèses (3.6) à (3.9) sont vérifiées. Avec les données initiales (3.11), le système (3.1)-(3.3) possède une solution faible globale (N, C, u) au sens de la Définition 7.

Théorème 5 Supposons qu'il existe une constante $C_0 > 0$ telle que

$$(\chi(N_1) - \chi(N_2))^2 \leq C_0(N_1 - N_2)(A(N_1) - A(N_2)), \quad \forall N_1, N_2 \in [0, 1]. \quad (3.15)$$

Alors, sous l'ensemble (3.10) des hypothèses supplémentaires, la solution faible globale du système (3.4)-(3.3) est unique.

La condition (3.15) peut être exprimée autrement selon la Remarque suivante.

Remarque 6 Si $a(N) = N(1 - N)$ et $\chi(N) = (N(1 - N))^\beta$ alors la solution faible du système (3.4)-(3.3) est unique si $\beta \geq \frac{3}{2}$. En effet, ce résultat suit de [58], Proposition 4] qui nous donne une condition suffisante garantissant l'inégalité (3.15). Il suffit de tester si la fonction

$$N \rightarrow \chi'(N)a(N)^{-\frac{1}{2}} \text{ appartient à } L^\infty(0, 1).$$

Un simple calcul est laissé au lecteur.

Si on suppose pour le modèle (3.1) que la vitesse u du fluide et les forces de réaction f sont négligeables et si on remplace la consommation de la substance chimique $-k(C)N$ par sa production $\alpha N - \beta C$ où α et β sont des constantes positives, on retrouve le modèle anisotrope

de Keller-Segel (2.1)-(2.2) étudié dans le deuxième chapitre. Les propriétés fondamentales des solutions de ce modèle sont données dans la Remarque suivante :

Remarque 7 *Le Théorème 4 et sa preuve détaillée dans ce chapitre restent vrais pour le modèle (2.1)-(2.2) traité comme un cas particulier des modèles (3.1) et (3.4). En plus, on a besoin seulement de supposer que les fonctions χ et A sont de classe C^1 pour montrer l'unicité de ces solutions faibles sous l'hypothèse (3.15).*

Au début, notre but est la preuve du Théorème 4. La difficulté principale dans l'analyse de notre système (3.1) est la dégénérescence forte du terme diffusif. Pour surmonter cette difficulté, on remplace le terme diffusif principal $a(N)$ par $a_\varepsilon(N) = a(N) + \varepsilon$ et on considère pour tout $\varepsilon > 0$ fixé, le problème non dégénéré suivant :

$$\left\{ \begin{array}{l} \partial_t N_\varepsilon - \nabla \cdot (S(x)a_\varepsilon(N_\varepsilon)\nabla N_\varepsilon) + \nabla \cdot (S(x)\chi(N_\varepsilon)\nabla C_\varepsilon) + \nabla \cdot (N_\varepsilon u_\varepsilon) = f(N_\varepsilon), \\ \partial_t C_\varepsilon - \nabla \cdot (M(x)\nabla C_\varepsilon) + \nabla \cdot (C_\varepsilon u_\varepsilon) = -N_\varepsilon k(C_\varepsilon), \\ \partial_t u_\varepsilon - \nu \Delta u_\varepsilon + (u_\varepsilon \cdot \nabla)u_\varepsilon + \nabla p_\varepsilon = -N_\varepsilon \nabla \phi, \\ \nabla \cdot u_\varepsilon = 0, \end{array} \right. \quad (3.16)$$

avec les conditions aux bords et initiales suivantes,

$$\begin{aligned} S(x)a(N_\varepsilon)\nabla N_\varepsilon \cdot \eta &= 0, \quad M(x)\nabla C_\varepsilon \cdot \eta = 0, \quad u_\varepsilon = 0 \text{ sur } \partial\Omega \times (0, T), \\ N_\varepsilon(x, 0) &= N_0(x), \quad C_\varepsilon(x, 0) = C_0(x), \quad u_\varepsilon(x, 0) = u_0(x). \end{aligned}$$

L'hypothèse d'incompressibilité $\nabla \cdot u_\varepsilon = 0$ permet de remplacer le terme $u_\varepsilon \cdot \nabla N_\varepsilon$ (resp. $u_\varepsilon \cdot \nabla C_\varepsilon$) par $\nabla \cdot (N_\varepsilon u_\varepsilon)$ (resp. $\nabla \cdot (C_\varepsilon u_\varepsilon)$) dans le problème (3.16). Afin de montrer le Théorème 4, on a besoin au début de montrer l'existence de solutions faibles du problème non dégénéré (3.16), dans la section 3, en utilisant la méthode de semi-discrétisation en temps. On applique le théorème de point fixe de Schauder pour l'équation de N , on considère l'équation de C comme étant une équation parabolique de convection-diffusion et on utilise les mêmes lignes du livre [75] pour la semi-discrétisation en temps du problème de Navier-Stokes. Ensuite, le critère de compacité de Kolmogorov (Voir [10]) est utilisé comme un argument de compacité pour obtenir la convergence vers une solution faible du système (3.16). Finalement, dans la section 4, on fait tendre le paramètre de régularisation ε vers zéro pour obtenir une solution faible du système original (3.1) au sens de la Définition 7 comme étant une limite d'une suite de solutions approchées du problème non dégénéré. La convergence est aussi achevée grâce à des estimations a priori et des arguments de compacité.

3.3 Problème régularisé non dégénéré : Existence globale

Pour montrer l'existence de solutions faibles du problème non dégénéré (3.16), on utilise une technique du semi-discrétisation en temps qui a été récemment étudiée dans [64] pour des systèmes modélisant le déplacement miscible des éléments radioactifs dans un domaine hétérogène et poreux. Dans ce qui suit, on va construire une suite de solutions approchées par une semi-

discrétisation en temps et on passera à la limite en utilisant des arguments de compacité. Le but de cette section est énoncé dans la Proposition suivante.

Proposition 12 *Le problème non dégénéré (3.16) admet une solution faible $(N_\varepsilon, C_\varepsilon, u_\varepsilon)$ au sens de la Définition 7 telle que $\forall \psi_1, \psi_2 \in L^2(0, T; H^1(\Omega))$ et $\psi \in C_c^0(0, T; V)$,*

$$\int_0^T \langle \partial_t N_\varepsilon, \psi_1 \rangle dt + \iint_{Q_T} \left[S(x) a_\varepsilon(N_\varepsilon) \nabla N_\varepsilon - S(x) \chi(N_\varepsilon) \nabla C_\varepsilon - N_\varepsilon u_\varepsilon \right] \cdot \nabla \psi_1 dx dt \quad (3.17)$$

$$= \iint_{Q_T} f(N_\varepsilon) \psi_1 dx dt,$$

$$\iint_{Q_T} \left[\partial_t C_\varepsilon \psi_2 + [M(x) \nabla C_\varepsilon - C_\varepsilon u_\varepsilon] \cdot \nabla \psi_2 \right] dx dt = \iint_{Q_T} -N_\varepsilon k(C_\varepsilon) \psi_2 dx dt, \quad (3.18)$$

$$\int_0^T \langle \partial_t u_\varepsilon, \psi \rangle_{V', V} dt + \iint_{Q_T} \nabla u_\varepsilon \cdot \nabla \psi dx dt + \iint_{Q_T} (u_\varepsilon \cdot \nabla) u_\varepsilon \psi dx dt \quad (3.19)$$

$$= \iint_{Q_T} -N_\varepsilon \nabla \phi \psi dx dt,$$

et de la Définition de l'espace V , on a

$$\nabla \cdot u_\varepsilon = 0. \quad (3.20)$$

3.3.1 Méthode de semi-discrétisation en temps

Soit $T > 0$ et $\tilde{N} \in \mathbb{N}^*$. On définit $h = \Delta t = \frac{T}{\tilde{N}}$ comme un pas constant de temps. Ensuite, on définit deux opérateurs d'interpolation comme étant un outil primordial à l'étude de convergence. Soit E est un espace de Banach.

$\forall w = (w_0, w_1, \dots, w_{\tilde{N}}) \in E^{\tilde{N}+1}$, l'opérateur d'interpolation constant est défini de $[0, T]$ vers E par :

$$\begin{cases} \Pi_{\tilde{N}}^0 w(0) = w_0, \\ \Pi_{\tilde{N}}^0 w(t) = \sum_{n=0}^{\tilde{N}-1} w_{n+1} \chi_{]nh, (n+1)h]}(t) \text{ si } 0 < t \leq T, \end{cases}$$

où $\chi_{]nh, (n+1)h]}(t)$ est une fonction caractéristique dans $]nh, (n+1)h]$. L'opérateur d'interpolation linéaire de $[0, T]$ vers E est défini par

$$\Pi_{\tilde{N}}^1 w(t) = \sum_{n=0}^{\tilde{N}-1} \left[\left(1 + n - \frac{t}{h}\right) w_n + \left(\frac{t}{h} - n\right) w_{n+1} \right] \chi_{]nh, (n+1)h]}(t).$$

La fonction $\Pi_{\tilde{N}}^1 w$ est continue et sa dérivée, pour tout $t \neq nh$, est

$$\frac{d}{dt} \left(\Pi_{\tilde{N}}^1 w(t) \right) = \sum_{n=0}^{\tilde{N}-1} \left[\frac{1}{h} (w_{n+1} - w_n) \right] \chi_{]nh, (n+1)h]}(t).$$

Notons que

$$\|\Pi_{\tilde{N}}^0 w\|_{L^p(0,T;E)} = h \left(\sum_{n=0}^{\tilde{N}-1} \|w_n\|_E^p \right)^{\frac{1}{p}} \text{ si } 1 \leq p < \infty, \quad (3.21)$$

$$\|\Pi_{\tilde{N}}^0 w\|_{L^\infty(0,T;E)} = \|\Pi_{\tilde{N}}^1 w\|_{L^\infty(0,T;E)} = \max_{n=1,\dots,\tilde{N}} (\|w_n\|_E). \quad (3.22)$$

Maintenant, on définit une famille de solutions approchées du problème suivant discrétisé en temps. Soit le triplet suivant

$$(N_{0,\varepsilon}^{\tilde{N}}, C_{0,\varepsilon}^{\tilde{N}}, u_{0,\varepsilon}^{\tilde{N}}) = (N_0, C_0, u_0) \text{ comme étant la donnée initiale.} \quad (3.23)$$

Si les solutions $(N_{0,\varepsilon}^{\tilde{N}}, C_{0,\varepsilon}^{\tilde{N}}, u_{0,\varepsilon}^{\tilde{N}}), \dots, (N_{n,\varepsilon}^{\tilde{N}}, C_{n,\varepsilon}^{\tilde{N}}, u_{n,\varepsilon}^{\tilde{N}})$ sont connues alors on définit la solution à l'ordre $n+1$ par le triplet $(N_{n+1,\varepsilon}^{\tilde{N}}, C_{n+1,\varepsilon}^{\tilde{N}}, u_{n+1,\varepsilon}^{\tilde{N}})$ vérifiant :

$$\frac{1}{h} \int_{\Omega} (N_{n+1,\varepsilon}^{\tilde{N}} - N_{n,\varepsilon}^{\tilde{N}}) \psi_1 \, dx + \int_{\Omega} \left(S(x) a_\varepsilon(N_{n+1,\varepsilon}^{\tilde{N}}) \nabla N_{n+1,\varepsilon}^{\tilde{N}} - S(x) \chi(N_{n+1,\varepsilon}^{\tilde{N}}) \nabla C_{n+1,\varepsilon}^{\tilde{N}} \right) \cdot \nabla \psi_1 \, dx \quad (3.24)$$

$$- \int_{\Omega} N_{n+1,\varepsilon}^{\tilde{N}} u_{n,\varepsilon}^{\tilde{N}} \cdot \nabla \psi_1 \, dx = \int_{\Omega} f(N_{n+1,\varepsilon}^{\tilde{N}}) \psi_1 \, dx,$$

$$\frac{1}{h} \int_{\Omega} (C_{n+1,\varepsilon}^{\tilde{N}} - C_{n,\varepsilon}^{\tilde{N}}) \psi_2 \, dx + \int_{\Omega} M(x) \nabla C_{n+1,\varepsilon}^{\tilde{N}} \cdot \nabla \psi_2 \, dx - \int_{\Omega} C_{n+1,\varepsilon}^{\tilde{N}} u_{n,\varepsilon}^{\tilde{N}} \cdot \nabla \psi_2 \, dx \quad (3.25)$$

$$= - \int_{\Omega} N_{n,\varepsilon}^{\tilde{N}} k(C_{n+1,\varepsilon}^{\tilde{N}}) \psi_2 \, dx,$$

$$\frac{1}{h} \int_{\Omega} (u_{n+1,\varepsilon}^{\tilde{N}} - u_{n,\varepsilon}^{\tilde{N}}) \psi \, dx + \nu \int_{\Omega} \nabla u_{n+1,\varepsilon}^{\tilde{N}} \cdot \nabla \psi \, dx + \int_{\Omega} (u_{n+1,\varepsilon}^{\tilde{N}} \cdot \nabla) u_{n+1,\varepsilon}^{\tilde{N}} \psi \, dx \quad (3.26)$$

$$= - \int_{\Omega} N_{n+1,\varepsilon}^{\tilde{N}} \nabla \phi \psi \, dx,$$

$$\forall \psi_1, \psi_2 \in H^1(\Omega) \text{ et } \forall \psi \in V.$$

3.3.1.1 Confinement de solutions approchées $N_{n+1,\varepsilon}^{\tilde{N}}$ et $C_{n+1,\varepsilon}^{\tilde{N}}$

Le but de ce paragraphe est la Proposition suivante.

Proposition 13 *Il existe $M > 0$ telle que pour tout $n = 0, \dots, \tilde{N} - 1$,*

$$0 \leq N_{n+1,\varepsilon}^{\tilde{N}} \leq 1 \text{ et } 0 \leq C_{n+1,\varepsilon}^{\tilde{N}} \leq M \text{ p.p. } x \in \Omega.$$

Preuve : Au début, on note que $N^- = \max(-N, 0)$ appartient à $H^1(\Omega)$ (Voir [54], p. 54). On utilise maintenant un argument d'induction. On a $N_{0,\varepsilon}^{\tilde{N}} = N_0 \geq 0$. Supposons que $N_{n,\varepsilon}^{\tilde{N}} \geq 0$ et

$N_{n+1,\varepsilon}^{\tilde{N}} < 0$ p.p. $x \in \Omega$ et on choisit $\psi_1 = -(N_{n+1,\varepsilon}^{\tilde{N}})^-$ dans (3.24), alors

$$\begin{aligned} & -\frac{1}{h} \int_{\Omega} (N_{n+1,\varepsilon}^{\tilde{N}} - N_{n,\varepsilon}^{\tilde{N}})(N_{n+1,\varepsilon}^{\tilde{N}})^- dx - \int_{\Omega} D_{\varepsilon}(x, N_{n+1,\varepsilon}^{\tilde{N}}) \nabla N_{n+1,\varepsilon}^{\tilde{N}} \cdot \nabla (N_{n+1,\varepsilon}^{\tilde{N}})^- dx \\ & + \int_{\Omega} S(x) \chi(N_{n+1,\varepsilon}^{\tilde{N}}) \nabla C_{n+1,\varepsilon}^{\tilde{N}} \cdot \nabla (N_{n+1,\varepsilon}^{\tilde{N}})^- dx - \int_{\Omega} N_{n+1,\varepsilon}^{\tilde{N}} u_{n,\varepsilon}^{\tilde{N}} \cdot \nabla (N_{n+1,\varepsilon}^{\tilde{N}})^- dx \\ & = - \int_{\Omega} f(N_{n+1,\varepsilon}^{\tilde{N}}) (N_{n+1,\varepsilon}^{\tilde{N}})^- dx. \end{aligned}$$

On note que la coercivité de l'opérateur diffusif $D_{\varepsilon} = S(x)a_{\varepsilon}$ est assurée grâce à la non dégénérescence de a_{ε} . Ensuite, on a

$$- \int_{\Omega} N_{n+1,\varepsilon}^{\tilde{N}} u_{n,\varepsilon}^{\tilde{N}} \cdot \nabla (N_{n+1,\varepsilon}^{\tilde{N}})^- dx = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \left(u_{n,\varepsilon}^{\tilde{N}} \cdot \nabla [(N_{n+1,\varepsilon}^{\tilde{N}})^-]^2 \right) dx = 0.$$

Après, on introduit des extensions continues et Lipschitziennes $\tilde{\chi}$ et \tilde{f} de χ et f sur \mathbb{R} telles que

$$\tilde{\chi}(s) = \begin{cases} 0 & \text{si } s < 0 \\ \chi(s) & \text{si } 0 \leq s \leq 1 \\ 0 & \text{si } s > 1 \end{cases}, \quad \tilde{f}(s) = \begin{cases} 0 & \text{si } s < 0 \\ f(s) & \text{si } 0 \leq s \leq 1 \\ f(1) \geq 0 & \text{si } s > 1 \end{cases},$$

qui nous permettent de conclure que $S(x)\chi(N_{n+1,\varepsilon}^{\tilde{N}}) = 0$ et $f(N_{n+1,\varepsilon}^{\tilde{N}}) = 0$ pour $N_{n+1,\varepsilon}^{\tilde{N}} < 0$. Alors,

$$-\frac{1}{h} \int_{\Omega} N_{n+1,\varepsilon}^{\tilde{N}} (N_{n+1,\varepsilon}^{\tilde{N}})^- dx \leq 0,$$

et par suite $(N_{n+1,\varepsilon}^{\tilde{N}})^- = \max(-N_{n+1,\varepsilon}^{\tilde{N}}, 0) = 0$, ce qui est une contradiction avec $N_{n+1,\varepsilon}^{\tilde{N}} < 0$. Par conséquent,

$$\forall n = 0, \dots, \tilde{N} - 1, N_{n+1,\varepsilon}^{\tilde{N}} \geq 0 \text{ p.p. } x \in \Omega. \quad (3.27)$$

D'autre part, en choisissant $\psi_1 = (N_{n+1,\varepsilon}^{\tilde{N}} - 1)^+$ dans (3.24), on aura

$$\begin{aligned} & \frac{1}{h} \int_{\Omega} (N_{n+1,\varepsilon}^{\tilde{N}} - N_{n,\varepsilon}^{\tilde{N}})(N_{n+1,\varepsilon}^{\tilde{N}} - 1)^+ dx + \int_{\Omega} D_{\varepsilon}(x, N_{n+1,\varepsilon}^{\tilde{N}}) \nabla (N_{n+1,\varepsilon}^{\tilde{N}} - 1)^+ \cdot \nabla (N_{n+1,\varepsilon}^{\tilde{N}} - 1)^+ dx \\ & - \int_{\Omega} S(x) \chi(N_{n+1,\varepsilon}^{\tilde{N}}) \nabla C_{n+1,\varepsilon}^{\tilde{N}} \cdot \nabla (N_{n+1,\varepsilon}^{\tilde{N}} - 1)^+ dx - \int_{\Omega} N_{n+1,\varepsilon}^{\tilde{N}} u_{n,\varepsilon}^{\tilde{N}} \cdot \nabla (N_{n+1,\varepsilon}^{\tilde{N}} - 1)^+ dx \\ & = \int_{\Omega} f(N_{n+1,\varepsilon}^{\tilde{N}}) (N_{n+1,\varepsilon}^{\tilde{N}} - 1)^+ dx. \end{aligned}$$

Supposons que $N_{n,\varepsilon}^{\tilde{N}} \leq 1$ et que $N_{n+1,\varepsilon}^{\tilde{N}} > 1$. En suivant les mêmes arguments, on peut aboutir à une contradiction. Donc,

$$\forall n = 0, \dots, \tilde{N} - 1, N_{n+1,\varepsilon}^{\tilde{N}} \leq 1 \text{ p.p. } x \in \Omega. \quad (3.28)$$

Finalement, on peut montrer similairement que

$$\forall n = 0, \dots, \tilde{N} - 1, 0 \leq C_{n+1, \varepsilon}^{\tilde{N}} \leq M \text{ p.p. } x \in \Omega. \quad (3.29)$$

Le Lemme suivant contient un résultat classique montré dans [75].

Lemme 11 *On considère la fonction trilinéaire suivante :*

$$\begin{aligned} B : H_0^1(\Omega) \times H^1(\Omega) \times H^1(\Omega) &\rightarrow \mathbb{R} \\ (u, v, w) &\rightarrow B(u, v, w) = \int_{\Omega} (u \cdot \nabla v) w \, dx. \end{aligned}$$

Elle satisfait les propriétés suivantes :

$$1) \text{ Si } \nabla \cdot u = 0 \text{ alors } B(u, v, v) = 0. \quad (3.30)$$

$$2) B \text{ est continue en dimensions d'espace } d \leq 4. \quad (3.31)$$

3.3.1.2 Existence de solutions approchées

On commence par énoncer l'existence d'une solution discrète $u_{n+1, \varepsilon}^{\tilde{N}}$ de l'équation (3.26) obtenue par une semi-discrétisation en temps de l'équation (3.19) sous le fait de la borne L^∞ -uniforme du second membre déduit de (3.28) et (3.8). Ainsi, on donne quelques estimations utiles à l'étude de convergence. On peut voir les détails des preuves dans le livre [75]. Pour une raison de clarté, on va seulement donner les idées principales. En dimension d'espace $d \leq 4$, l'existence de $u_{n+1, \varepsilon}^{\tilde{N}} \in V$ solution de (3.26) est donnée par le Lemme suivant montré dans [[75], Lemme 4.3].

Lemme 12 *Pour chaque h fixé et pour tout $n \geq 1$, il existe au moins $u_{n+1, \varepsilon}^{\tilde{N}}$ qui satisfait (3.26).*

En plus, on a les estimations et les résultats de convergence suivants,

$$\|\Pi_{\tilde{N}}^0 u_{\varepsilon}^{\tilde{N}}\|_{L^2(0, T; V)} \leq d_1, \quad (3.32)$$

$$\forall h > 0, \|\tau_{-h} \Pi_{\tilde{N}}^0 u_{\varepsilon}^{\tilde{N}} - \Pi_{\tilde{N}}^0 u_{\varepsilon}^{\tilde{N}}\|_{L^2(0, T-h; (L^2(\Omega)))} \leq d_1 h, \quad (3.33)$$

$$\left\| \frac{\partial}{\partial t} (\Pi_{\tilde{N}}^1 u_{\varepsilon}^{\tilde{N}}) \right\|_{L^2(0, T; (H^1(\Omega))')} \leq d_1, \quad (3.34)$$

où $d_1 = \|u_0\|_H^2 + \int_0^T \|g(s)\|_V^2 \, ds$ et $g = (\Pi_{\tilde{N}}^0 N_{\varepsilon}^{\tilde{N}}) \nabla \phi \in L^\infty(Q_T)$. En plus, il existe $u_{\varepsilon} \in L^\infty(0, T; H) \cap L^2(0, T; V)$ telle que, modulo une sous-suite,

$$\Pi_{\tilde{N}}^0 u_{\varepsilon}^{\tilde{N}} \rightharpoonup u_{\varepsilon} \text{ faible } * \text{ dans } L^\infty(0, T; H), \quad (3.35)$$

$$\Pi_{\tilde{N}}^0 u_\varepsilon^{\tilde{N}} \rightharpoonup u_\varepsilon \text{ faiblement dans } L^2(0, T; V), \quad (3.36)$$

$$\Pi_{\tilde{N}}^0 u_\varepsilon^{\tilde{N}} \longrightarrow u_\varepsilon \text{ fortement dans } L^2(0, T; H). \quad (3.37)$$

Grâce à (3.30), (3.31) et (2.6), l'existence d'une concentration unique $C_{n+1,\varepsilon}^{\tilde{N}}$ qui satisfait l'équation (3.25) est une conséquence directe du théorème de Lax-Milgram. De plus, on peut facilement établir l'estimation uniforme suivante

$$\|C_{n+1,\varepsilon}^{\tilde{N}}\|_{H^1(\Omega)} \leq C', \quad (3.38)$$

où C' est une constante indépendante de \tilde{N} . En effet, il suffit de choisir $C_{n+1,\varepsilon}^{\tilde{N}}$ comme une fonction test dans (3.25) et l'estimation (3.38) est une conséquence directe du fait que la fonction k est uniformément bornée, (2.6), (3.28), (3.29) et (3.30).

Pour la démonstration de l'existence d'une solution $N_{n+1}^{\tilde{N}}$ de l'équation (3.24), on utilise le théorème de point fixe de Schauder. Pour cela, on introduit un sous-ensemble borné, fermé et convexe de l'espace de Banach $L^2(\Omega)$:

$$\mathcal{D} = \{N_{n+1,\varepsilon}^{\tilde{N}} \in L^2(\Omega); 0 \leq N_{n+1,\varepsilon}^{\tilde{N}}(x) \leq 1, \text{ for a.e. } x \in \Omega\}.$$

Une application directe du théorème de Lax-Milgram, (3.27) et (3.28) nous permettent de définir l'application $\theta : \mathcal{D} \longrightarrow \mathcal{D}$ par $\theta(w) = N_{n+1,\varepsilon}^{\tilde{N}}$ où $N_{n+1,\varepsilon}^{\tilde{N}}$ est la fonction unique dans l'espace $H^1(\Omega)$ qui vérifie,

$$\begin{aligned} \frac{1}{h} \int_{\Omega} (N_{n+1,\varepsilon}^{\tilde{N}} - N_{n,\varepsilon}^{\tilde{N}}) \psi_1 dx + \int_{\Omega} S(x) a_\varepsilon(w) \nabla N_{n+1,\varepsilon}^{\tilde{N}} \cdot \nabla \psi_1 dx - \int_{\Omega} S(x) \chi(w) \nabla C_{n+1,\varepsilon}^{\tilde{N}} \cdot \nabla \psi_1 dx, \\ + \int_{\Omega} N_{n+1,\varepsilon}^{\tilde{N}} u_{n,\varepsilon}^{\tilde{N}} \cdot \nabla \psi_1 dx = \int_{\Omega} f(N_{n+1,\varepsilon}^{\tilde{N}}) \psi_1 dx, \quad \forall \psi_1 \in H^1(\Omega). \end{aligned} \quad (3.39)$$

Chaque point fixe de θ est une solution de (3.24). On va montrer maintenant que l'ensemble $\theta(\mathcal{D})$ est relativement compact dans $L^2(\Omega)$. En choisissant $\psi_1 = N_{n+1,\varepsilon}^{\tilde{N}}$ comme une fonction test dans (3.39), en considérant les trois nombres réels positifs a_1, a_2, a_3 et en utilisant (2.6), (3.5), (3.30) et l'inégalité de Young, on aura

$$\begin{aligned} \frac{1}{h} \int_{\Omega} |N_{n+1,\varepsilon}^{\tilde{N}}|^2 dx + \gamma' \int_{\Omega} |\nabla N_{n+1,\varepsilon}^{\tilde{N}}|^2 dx \leq \bar{D}1 \|\nabla C_{n+1,\varepsilon}^{\tilde{N}}\|_{L^2} \|\nabla N_{n+1,\varepsilon}^{\tilde{N}}\|_{L^2} + \frac{1}{h} \|N_{n,\varepsilon}^{\tilde{N}}\|_{L^2} \|N_{n+1,\varepsilon}^{\tilde{N}}\|_{L^2} \\ + \|f(N_{n+1,\varepsilon}^{\tilde{N}})\|_{L^2} \|N_{n+1,\varepsilon}^{\tilde{N}}\|_{L^2} \leq \bar{D}1 a_1 \|\nabla N_{n+1,\varepsilon}^{\tilde{N}}\|_{L^2}^2 + \frac{\bar{D}1}{a_1} \|\nabla C_{n+1,\varepsilon}^{\tilde{N}}\|_{L^2}^2 + \frac{a_2}{h} \|N_{n,\varepsilon}^{\tilde{N}}\|_{L^2}^2 \\ + \frac{1}{a_2 h} \|N_{n,\varepsilon}^{\tilde{N}}\|_{L^2}^2 + a_3 \|N_{n+1,\varepsilon}^{\tilde{N}}\|_{L^2}^2 + \frac{1}{a_3} \|f(w)\|_{L^2}^2. \end{aligned}$$

Ensuite, on choisit $a_1 = \frac{\gamma'}{2D_1}$, $a_2 = \frac{1}{4}$, $a_3 = \frac{1}{4h}$ et on utilise (3.38), la borne uniforme de f et de $N_{n,\varepsilon}^{\tilde{N}}$ afin de réduire l'estimation précédente à

$$\|N_{n+1,\varepsilon}^{\tilde{N}}\|_{H^1(\Omega)} \leq \frac{1}{2h} \int_{\Omega} |N_{n+1,\varepsilon}^{\tilde{N}}|^2 dx + \frac{\gamma'}{2} \int_{\Omega} |\nabla N_{n+1,\varepsilon}^{\tilde{N}}|^2 dx \leq C, \quad (3.40)$$

où C est une constante indépendante de w . Alors $\theta(\mathcal{D})$ est borné dans $H^1(\Omega)$ et donc $\theta(\mathcal{D})$ est relativement compact dans $L^2(\Omega)$.

Montrons que θ est une application continue. Soit $(w_n)_n$ est une suite dans \mathcal{D} et $w \in \mathcal{D}$ tel que $w_n \rightarrow w$ dans $L^2(\Omega)$ pour $n \rightarrow +\infty$. Posons $N_n = \theta(w_n)$. L'objectif est de montrer que $N_n \rightarrow \theta(w)$ dans $L^2(\Omega)$ quand $n \rightarrow +\infty$.

Tout d'abord, on extrait de $(w_n)_n$ une sous-suite $(w_{n_j})_j$ qui converge vers w presque partout dans Ω . Dès que $D_\varepsilon(x, w) = S(x)a_\varepsilon(w)$ et $D_1(x, w) = S(x)\chi(w)$ sont bornées et continues par rapport à w , alors le théorème de convergence dominée de Lebesgue implique que

$$D_\varepsilon(x, w_{n_j}) \rightarrow D_\varepsilon(x, w) \text{ dans } (L^2(\Omega))^{d^2},$$

$$D_1(x, w_{n_j}) \rightarrow D_1(x, w) \text{ dans } (L^2(\Omega))^{d^2}.$$

La suite $(N_n)_n$ est bornée dans $H^1(\Omega)$ qui est un espace d'Hilbert donc il existe une sous-suite $(N_{n_j})_j$ telle que $N_{(n_j)_q} \rightharpoonup N$ dans $H^1(\Omega)$ et $N_{(n_j)_q} \rightarrow N$ dans $L^2(\Omega)$ et p.p. dans Ω quand $q \rightarrow +\infty$. L'équation (3.39) s'écrit alors :

$$\begin{aligned} \frac{1}{h} \int_{\Omega} (N_{(n_j)_q} - N_{n,\varepsilon}^{\tilde{N}}) \psi_1 dx + \int_{\Omega} D_\varepsilon(x, w_{(n_j)_q}) \nabla N_{(n_j)_q} \cdot \nabla \psi_1 dx - \int_{\Omega} D_1(x, w_{(n_j)_q}) \nabla C_{n+1,\varepsilon}^{\tilde{N}} \cdot \nabla \psi_1 dx \\ + \int_{\Omega} N_{(n_j)_q} (u_{n,\varepsilon}^{\tilde{N}} \cdot \nabla \psi_1) dx = \int_{\Omega} f(w_{(n_j)_q}) \psi_1 dx. \end{aligned}$$

Passant à la limite quand $q \rightarrow +\infty$, on aura $N = \theta(w)$. La sous-suite $N_{(n_j)_q}$ converge donc vers $\theta(w) = N$ dans $L^2(\Omega)$ quand $q \rightarrow +\infty$, et les mêmes arguments montrent aussi que chaque sous-suite de $(N_n)_n$ qui converge dans $L^2(\Omega)$ a la valeur $\theta(w)$ comme une limite. Alors, la suite $(N_n)_n$ a un point d'accumulation unique et dès qu'elle est incluse dans un sous-ensemble relativement compact dans $L^2(\Omega)$, toute la suite $(N_n)_n$ converge vers $\theta(w)$ dans $L^2(\Omega)$ ce qui montre la continuité de θ . La compacité de θ est une conséquence directe de (3.40) et de l'injection compacte de $H^1(\Omega)$ dans $L^2(\Omega)$.

Finalement, le théorème de point fixe de Schauder nous permet de conclure l'existence d'un point fixe $N_{n+1,\varepsilon}^{\tilde{N}} \in H^1(\Omega)$ pour θ , qui n'est autre qu'une solution de (3.24).

3.3.2 Estimations a priori

Dans la Proposition suivante, on construit des estimations a priori indépendantes de \tilde{N} et concernant les interpolations de $N^{\tilde{N}}$ et $C^{\tilde{N}}$.

Proposition 14 *Il existe deux constantes positives A' et A'' indépendantes de \tilde{N} telles que*

$$\|\Pi_{\tilde{N}}^0 N_\varepsilon^{\tilde{N}}\|_{L^\infty(Q_T)} = \max_{n=1,\dots,\tilde{N}} \|N_{n,\varepsilon}^{\tilde{N}}\|_{L^\infty(\Omega)} \leq 1, \quad \|\Pi_{\tilde{N}}^0 C_\varepsilon^{\tilde{N}}\|_{L^\infty(Q_T)} = \max_{n=1,\dots,\tilde{N}} \|C_{n,\varepsilon}^{\tilde{N}}\|_{L^\infty(\Omega)} \leq M, \quad (3.41)$$

$$\|\Pi_{\tilde{N}}^0 N_\varepsilon^{\tilde{N}}\|_{L^2(0,T;(H^1(\Omega)))} \leq A', \quad \|\Pi_{\tilde{N}}^0 C_\varepsilon^{\tilde{N}}\|_{L^2(0,T;(H^1(\Omega)))} \leq A'', \quad (3.42)$$

$$\forall h' > 0, \|\tau_{-h'} \Pi_{\tilde{N}}^0 N_\varepsilon^{\tilde{N}} - \Pi_{\tilde{N}}^0 N_\varepsilon^{\tilde{N}}\|_{L^2(0,T-h';(L^2(\Omega)))} \leq A'h', \quad (3.43)$$

$$\left\| \frac{\partial}{\partial t} (\Pi_{\tilde{N}}^1 N_\varepsilon^{\tilde{N}}) \right\|_{L^2(0,T;(H^1(\Omega))')} \leq A', \quad \left\| \frac{\partial}{\partial t} (\Pi_{\tilde{N}}^1 C_\varepsilon^{\tilde{N}}) \right\|_{L^2(0,T;(H^1(\Omega))')} \leq A'', \quad (3.44)$$

$$\|\Pi_{\tilde{N}}^1 N_\varepsilon^{\tilde{N}} - \Pi_{\tilde{N}}^0 N_\varepsilon^{\tilde{N}}\|_{L^2(0,T;(H^1(\Omega))')} \leq \frac{A'h^2}{3}. \quad (3.45)$$

Preuve : L'estimation (3.41) est une conséquence simple de la Proposition 13. En choisissant $\psi_2 = C_{n+1,\varepsilon}^{\tilde{N}}$ comme fonction test dans (3.25) et en considérant (2.6), l'inégalité $(a-b)a \geq \frac{1}{2}(a^2 - b^2)$, (3.30), Proposition 13 et la borne uniforme de k , on obtient

$$\frac{1}{h} \int_{\Omega} [(C_{n+1,\varepsilon}^{\tilde{N}})^2 - (C_{n,\varepsilon}^{\tilde{N}})^2] dx + \mu \int_{\Omega} (\nabla C_{n+1,\varepsilon}^{\tilde{N}})^2 dx \leq C_1,$$

où C_1 est une constante indépendante de \tilde{N} . En multipliant par h et en additionnant de $n = 0$ à $n = \tilde{N} - 1$, on a :

$$\int_{\Omega} (C_{\tilde{N},\varepsilon}^{\tilde{N}})^2 dx + \mu \|\nabla \Pi_{\tilde{N}}^0 C_\varepsilon^{\tilde{N}}\|_{L^2(0,T;L^2(\Omega))}^2 \leq C_1 T + \int_{\Omega} (C_{0,\varepsilon}^{\tilde{N}})^2 dx = A''.$$

La même démarche est suivie pour l'équation (3.24) ce qui termine la preuve de l'estimation (3.42).

Montrons maintenant l'estimation (3.43) des translatés en temps de solutions approchées qui est utilisée comme une propriété de compacité pour la suite $\Pi_{\tilde{N}}^0 N_\varepsilon^{\tilde{N}}$ dans $L^2(0,T;L^2(\Omega))$. Soit $h > 0$, on a

$$\begin{aligned} I &:= \|\tau_{-h} \Pi_{\tilde{N}}^0 N_\varepsilon^{\tilde{N}} - \Pi_{\tilde{N}}^0 N_\varepsilon^{\tilde{N}}\|_{L^2(0,T-h;(L^2(\Omega)))}^2 \\ &= \int_0^{T-h} \int_{\Omega} \left(\Pi_{\tilde{N}}^0 N_\varepsilon^{\tilde{N}}(t+h, x) - \Pi_{\tilde{N}}^0 N_\varepsilon^{\tilde{N}}(t, x) \right)^2 dx dt = \int_0^{T-h} A(t) dt \end{aligned}$$

pour tout $t \in [0, T-h]$, avec

$$A(t) = \int_{\Omega} (N_{[\frac{t+h}{h},\varepsilon]}^{\tilde{N}}(x) - N_{[\frac{t}{h},\varepsilon]}^{\tilde{N}}(x))^2 dx$$

(on note par $[x]$ la partie entière du réel x) qui est lue encore comme

$$A(t) = \int_{\Omega} \sum_{n=\lfloor \frac{t}{h} \rfloor}^{\lfloor \frac{t+h}{h} \rfloor - 1} (N_{n+1,\varepsilon}^{\tilde{N}}(x) - N_{n,\varepsilon}^{\tilde{N}}(x)) (N_{\lfloor \frac{t+h}{h} \rfloor,\varepsilon}^{\tilde{N}}(x) - N_{\lfloor \frac{t}{h} \rfloor,\varepsilon}^{\tilde{N}}(x)) dx.$$

Notons par $n_0(t) = \lfloor \frac{t}{h} \rfloor$ et $n_1(t) = \lfloor \frac{t+h}{h} \rfloor$. En choisissant $\psi_1 = (N_{n_1,\varepsilon}^{\tilde{N}} - N_{n_0,\varepsilon}^{\tilde{N}})$ dans (3.24) et en sommant de n_0 à $n_1 - 1$, on a :

$$\begin{aligned} \sum_{n=n_0}^{n_1-1} \frac{1}{h} \int_{\Omega} (N_{n+1,\varepsilon}^{\tilde{N}} - N_{n,\varepsilon}^{\tilde{N}}) (N_{n_1,\varepsilon}^{\tilde{N}} - N_{n_0,\varepsilon}^{\tilde{N}}) dx &\leq - \sum_{n=n_0}^{n_1-1} \left[\int_{\Omega} D_{\varepsilon}(x, N_{n+1,\varepsilon}^{\tilde{N}}) \nabla N_{n+1,\varepsilon}^{\tilde{N}} \cdot \nabla (N_{n_1,\varepsilon}^{\tilde{N}} - N_{n_0,\varepsilon}^{\tilde{N}}) dx \right. \\ &+ \int_{\Omega} S(x) \chi(N_{n+1,\varepsilon}^{\tilde{N}}) \nabla C_{n+1,\varepsilon}^{\tilde{N}} \cdot \nabla (N_{n_1,\varepsilon}^{\tilde{N}} - N_{n_0,\varepsilon}^{\tilde{N}}) dx + \int_{\Omega} N_{n+1,\varepsilon}^{\tilde{N}} u_{n,\varepsilon}^{\tilde{N}} \cdot \nabla (N_{n_1,\varepsilon}^{\tilde{N}} - N_{n_0,\varepsilon}^{\tilde{N}}) dx \\ &\left. + \int_{\Omega} f(N_{n+1,\varepsilon}^{\tilde{N}}) (N_{n_1,\varepsilon}^{\tilde{N}} - N_{n_0,\varepsilon}^{\tilde{N}}) dx \right]. \end{aligned}$$

On définit

$$\begin{aligned} v_{i,\varepsilon} &= \int_{\Omega} |\nabla N_{i,\varepsilon}^{\tilde{N}}|^2 dx \text{ et} \\ p_{j,\varepsilon} &= \int_{\Omega} \left[\bar{D}^2 |\nabla N_{j,\varepsilon}^{\tilde{N}}|^2 + \bar{D}_1^2 |\nabla C_{j,\varepsilon}^{\tilde{N}}|^2 + |u_{j,\varepsilon}^{\tilde{N}}|^2 + |f(N_{j,\varepsilon}^{\tilde{N}})| \right] dx. \end{aligned}$$

L'inégalité de Young implique que $I \leq h(I_1 + I_2 + I_3)$, où

$$I_1 = \int_0^{T-h} \left(\sum_{n=n_0+1}^{n_1} p_{n,\varepsilon}^{\tilde{N}} \right) dt, \quad I_2 = \int_0^{T-h} \left(\sum_{n=n_0+1}^{n_1} v_{n_0,\varepsilon}^{\tilde{N}} \right) dt, \quad I_3 = \int_0^{T-h} \left(\sum_{n=n_0+1}^{n_1} v_{n_1,\varepsilon}^{\tilde{N}} \right) dt.$$

On définit $\chi_n(t, t+h) = 1$ si $nh \in]t, t+h]$ et $\chi_n(t, t+h) = 0$ sinon. Donc, I_1 peut se réécrire comme

$$I_1 = \int_0^{T-h} \sum_{n=1}^{\tilde{N}} N_{n,\varepsilon}^{\tilde{N}} \chi_n(t, t+h) dt = \sum_{n=1}^{\tilde{N}} N_{n,\varepsilon}^{\tilde{N}} \int_0^{T-h} \chi_n(t, t+h) dt \leq h \sum_{n=1}^{\tilde{N}} N_{n,\varepsilon}^{\tilde{N}},$$

dès que $\int_0^{T-h} \chi_n(t, t+h) dt \leq h$. Similairement, on peut obtenir que $I_2 \leq h \sum_{n=1}^{\tilde{N}} C_{n,\varepsilon}^{\tilde{N}}$ et $I_3 \leq h \sum_{n=1}^{\tilde{N}} C_{n,\varepsilon}^{\tilde{N}}$. Finalement, on déduit que

$$I \leq \sum_{i=1}^{\tilde{N}} h^2 (p_{i,\varepsilon}^{\tilde{N}} + 2v_{i,\varepsilon}^{\tilde{N}}).$$

L'estimation (3.42) et l'hypothèse (3.7) impliquent (3.43).

Pour montrer l'estimation (3.44), on remarque tout d'abord que

$$\left\| \frac{\partial}{\partial t} \left(\Pi_{\tilde{N}}^1 N_{\varepsilon}^{\tilde{N}} \right) \right\|_{L^2(0,T;(H^1(\Omega))')}^2 = \sum_{n=0}^{\tilde{N}-1} h \left\| \frac{\partial}{\partial t} (N_{n+1,\varepsilon}^{\tilde{N}}) \right\|_{(H^1(\Omega))'}^2 = \sum_{n=0}^{\tilde{N}-1} \frac{1}{h} \|N_{n+1,\varepsilon}^{\tilde{N}} - N_{n,\varepsilon}^{\tilde{N}}\|_{(H^1(\Omega))'}^2. \quad (3.46)$$

On choisit $\psi_1 \in H^1(\Omega)$ comme une fonction test dans (3.24). L'inégalité de Cauchy-Schwarz et la propriété (3.5) impliquent que

$$\begin{aligned} \left| \frac{1}{h} \langle N_{n+1,\varepsilon}^{\tilde{N}} - N_{n,\varepsilon}^{\tilde{N}}, \psi_1 \rangle_{(H^1(\Omega))',(H^1(\Omega))} \right| &= \left| \frac{1}{h} \int_{\Omega} (N_{n+1,\varepsilon}^{\tilde{N}} - N_{n,\varepsilon}^{\tilde{N}}) \psi_1 \, dx \right| \\ &\leq \bar{D} \|\nabla N_{n+1,\varepsilon}^{\tilde{N}}\|_{(L^2(\Omega))^d} \|\nabla \psi_1\|_{(L^2(\Omega))^d} + \bar{D}_1 \|\nabla C_{n+1,\varepsilon}^{\tilde{N}}\|_{(L^2(\Omega))^d} \|\nabla \psi_1\|_{(L^2(\Omega))^d} \\ &\quad + \|u_{n,\varepsilon}^{\tilde{N}}\|_{(L^2(\Omega))^d} \|\nabla \psi_1\|_{(L^2(\Omega))^d} + \|f(N_{n+1,\varepsilon}^{\tilde{N}})\|_{(L^2(\Omega))^d} \|\psi_1\|_{(L^2(\Omega))^d}. \end{aligned} \quad (3.47)$$

En simplifiant par $\|\psi_1\|_{H^1(\Omega)}$, en élevant au carré et en utilisant l'inégalité suivante $(a+b)^2 \leq 2(a^2+b^2)$ pour $a, b \geq 0$, on obtient que pour tout n ,

$$\begin{aligned} \frac{1}{h^2} \|N_{n+1,\varepsilon}^{\tilde{N}} - N_{n,\varepsilon}^{\tilde{N}}\|_{(H^1(\Omega))'}^2 &\leq 2(\bar{D}^2 \|\nabla N_{n+1,\varepsilon}^{\tilde{N}}\|_{(L^2(\Omega))^d}^2 + \bar{D}_1^2 \|\nabla C_{n+1,\varepsilon}^{\tilde{N}}\|_{(L^2(\Omega))^d}^2 + \|u_{n,\varepsilon}^{\tilde{N}}\|_{(L^2(\Omega))^d}^2 \\ &\quad + \|f(N_{n+1,\varepsilon}^{\tilde{N}})\|_{(L^2(\Omega))^d}^2). \end{aligned}$$

En multipliant par h , en sommant de $n=0$ à $n=\tilde{N}-1$, en rappelant (3.21) et en utilisant les estimations (3.32) et (3.42), on obtient l'existence d'une constante positive A' qui ne dépend pas de \tilde{N} et qui vérifie (3.44).

Finalement, on montre (3.45). En effet,

$$\left\| \Pi_{\tilde{N}}^1 N_{\varepsilon}^{\tilde{N}} - \Pi_{\tilde{N}}^0 N_{\varepsilon}^{\tilde{N}} \right\|_{L^2(0,T;(H^1(\Omega))')} = \sum_{n=0}^{\tilde{N}-1} \int_{nh}^{(n+1)h} \left\| \left(1+n-\frac{t}{h}\right) [N_{n,\varepsilon}^{\tilde{N}} - N_{n+1,\varepsilon}^{\tilde{N}}] \right\|_{(H^1(\Omega))'}^2 dt \leq \frac{A'h^2}{3},$$

est une conséquence de

$$\int_{nh}^{(n+1)h} \left(1+n-\frac{t}{h}\right)^2 dt = -h \int_{nh}^{(n+1)h} \frac{-1}{h} \left(1+n-\frac{t}{h}\right)^2 dt = -h \left[\frac{1}{3} \left(1+n-\frac{t}{h}\right)^3 \right]_{nh}^{(n+1)h} = \frac{h}{3}$$

et

$$\sum_{n=0}^{\tilde{N}-1} \left\| N_{n+1,\varepsilon}^{\tilde{N}} - N_{n,\varepsilon}^{\tilde{N}} \right\|_{(H^1(\Omega))'}^2 \leq A'h \quad (\text{déduite de l'estimation (3.44)}).$$

3.3.3 Passage à la limite

Dans ce paragraphe, on fait tendre \tilde{N} vers $+\infty$ et on montre l'existence d'une solution faible du problème non dégénéré.

Proposition 15 *Il existe de sous-suites $(\Pi_{\tilde{N}}^0 C_\varepsilon^{\tilde{N}})_N$ et $(\Pi_{\tilde{N}}^0 N_\varepsilon^{\tilde{N}})_N$ encore notées par $(\Pi_{\tilde{N}}^0 C_\varepsilon^{\tilde{N}})_N$ et $(\Pi_{\tilde{N}}^0 N_\varepsilon^{\tilde{N}})_N$, et des fonctions N_ε et C_ε telles que*

$$\Pi_{\tilde{N}}^0 C_\varepsilon^{\tilde{N}} \rightharpoonup C_\varepsilon \text{ et } \Pi_{\tilde{N}}^0 N_\varepsilon^{\tilde{N}} \rightharpoonup N_\varepsilon \text{ faiblement-}^* \text{ dans } L^\infty(Q_T), \quad (3.48)$$

$$\Pi_{\tilde{N}}^0 C_\varepsilon^{\tilde{N}} \rightharpoonup C_\varepsilon \text{ et } \Pi_{\tilde{N}}^0 N_\varepsilon^{\tilde{N}} \rightharpoonup N_\varepsilon \text{ faiblement dans } L^2(0, T; H^1(\Omega)), \quad (3.49)$$

$$\Pi_{\tilde{N}}^0 C_\varepsilon^{\tilde{N}} \longrightarrow C_\varepsilon \text{ et } \Pi_{\tilde{N}}^0 N_\varepsilon^{\tilde{N}} \longrightarrow N_\varepsilon \text{ fortement dans } L^2(Q_T) \text{ et p.p. dans } Q_T, \quad (3.50)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\Pi_{\tilde{N}}^1 C_\varepsilon^{\tilde{N}} \right) \rightharpoonup \frac{\partial C_\varepsilon}{\partial t} \text{ et } \frac{\partial}{\partial t} \left(\Pi_{\tilde{N}}^1 N_\varepsilon^{\tilde{N}} \right) \rightharpoonup \frac{\partial N_\varepsilon}{\partial t} \text{ faiblement dans } L^2(0, T; (H^1(\Omega))'), \quad (3.51)$$

$$\Pi_{\tilde{N}}^1 C_\varepsilon^{\tilde{N}} \rightharpoonup C_\varepsilon \text{ et } \Pi_{\tilde{N}}^1 N_\varepsilon^{\tilde{N}} \rightharpoonup N_\varepsilon \text{ faiblement-}^* \text{ dans } L^\infty(Q_T), \quad (3.52)$$

quand $\tilde{N} \rightarrow +\infty$. En plus, N_ε et C_ε vérifient

$$N_\varepsilon(0, x) = N_{0,\varepsilon}(x) \text{ et } C_\varepsilon(0, x) = C_{0,\varepsilon}(x) \text{ p.p.}, \quad (3.53)$$

$$0 \leq N_\varepsilon(t, x) \leq 1 \text{ et } C_\varepsilon(t, x) \geq 0 \text{ p.p. } (t, x) \in [0, T] \times \Omega = Q_T. \quad (3.54)$$

Preuve : Chaque assertion de cette Proposition est montrée pour l'équation de N et par des arguments similaires, on peut montrer les convergences reliées à l'équation de la concentration C . Les assertions (3.48), (3.49) et (3.51) sont des conséquences directes des estimations (3.41), (3.42) et (3.44) construites dans la Proposition 14. En montrant (3.49) et (3.43) qui sont respectivement des translatés en espace et en temps de solutions approchées, les hypothèses du critère de compacité de Kolmogorov sont satisfaites. Par la suite, on peut déduire que la suite $(\Pi_{\tilde{N}}^0 N_\varepsilon^{\tilde{N}})_N$ est relativement compacte dans $L^2(0, T; L^2(\Omega))$. Donc, modulo une sous-suite, on a la convergence (3.50).

Ensuite, la preuve de l'assertion (3.52) est similaire à la preuve de (3.48) car on a la même L^∞ -norme (3.22) des opérateurs d'interpolation. En plus, les estimations (3.44) et la Proposition 13 nous permettent de montrer l'existence de w et d'une sous-suite $N_\varepsilon^{\tilde{N}}$ telles que quand $\tilde{N} \rightarrow +\infty$,

$$\Pi_{\tilde{N}}^1 N_\varepsilon^{\tilde{N}} \rightharpoonup w \text{ faiblement-}^* \text{ dans } L^\infty(Q_T),$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\Pi_{\tilde{N}}^1 N_\varepsilon^{\tilde{N}} \right) \rightharpoonup \frac{\partial w}{\partial t} \text{ faiblement dans } L^2(0, T; (H^1(\Omega))').$$

L'injection compacte de l'espace $L^\infty(\Omega)$ dans $(H^1(\Omega))'$ nous permet de déduire que (Voir [74])

$$\Pi_{\tilde{N}}^1 N_\varepsilon^{\tilde{N}} \longrightarrow w \text{ fortement dans } C(0, T; (H^1(\Omega))'), \text{ quand } \tilde{N} \rightarrow +\infty. \quad (3.55)$$

Les estimations (3.45) et (3.50) impliquent que $\Pi_{\tilde{N}}^1 N_\varepsilon^{\tilde{N}} \rightarrow N_\varepsilon$ fortement dans $L^2(0, T; (H^1(\Omega))')$ quand $\tilde{N} \rightarrow +\infty$. Grâce à l'unicité de la limite, on peut donc déduire que :

$$w = N_\varepsilon. \quad (3.56)$$

La suite $(N_\varepsilon)_\varepsilon$ appartient à l'espace $C(0, T; (H^1(\Omega))') \subseteq C_w(0, T; (H^1(\Omega))')$. En effet, cette dernière inclusion est vraie car : Pour une suite $(t_n)_n$ qui converge, quand $n \rightarrow +\infty$, vers t dans $[0, T]$ on a :

$$| \langle N_\varepsilon(t_n) - N_\varepsilon(t), v \rangle | \leq \|N_\varepsilon(t_n) - N_\varepsilon(t)\|_{(H^1(\Omega))'} \|v\|_{H^1(\Omega)} \rightarrow 0.$$

Comme l'injection $L^2(\Omega) \hookrightarrow (H^1(\Omega))'$ est continue et $N_\varepsilon \in C_w(0, T; (H^1(\Omega))') \cap L^\infty(0, T; L^2(\Omega))$ donc $N_\varepsilon \in C_w(0, T; (L^2(\Omega)))$ (Voir [8], Chapitre 2, Lemme 2.5.7).

D'après la convergence forte $\Pi_{\tilde{N}}^1 N_\varepsilon^{\tilde{N}}(0) \rightarrow N_\varepsilon(0, x)$ dans $(H^1(\Omega))'$ déduite de (3.55) et de (3.56) et d'après la Définition de $\Pi_{\tilde{N}}^1$ ($\forall N, \Pi_{\tilde{N}}^1 N_\varepsilon^{\tilde{N}}(0) = N_{0,\varepsilon}(x)$) alors $N_\varepsilon(0, x) = N_{0,\varepsilon}(x)$ p.p. $x \in \Omega$ et l'assertion (3.53) est montrée.

Finalement, montrons l'assertion (3.54). On définit $\tilde{n} = [t \frac{\tilde{N}}{T}] + 1 = [\frac{t}{h}] + 1, \forall t \in [0, T]$ et on rappelle que $\Pi_{\tilde{N}}^0 N_\varepsilon^{\tilde{N}}(t, x) = N_{\tilde{n}, \varepsilon}^{\tilde{N}}(x)$. Lorsque $\tilde{N} \rightarrow +\infty$, on note que $\tilde{n}h = ([t \frac{\tilde{N}}{T}] + 1) \frac{T}{\tilde{N}} \rightarrow t$ et que $\Pi_{\tilde{N}}^0 N_\varepsilon^{\tilde{N}}(t, x) \rightarrow N_\varepsilon(t, x)$ p.p. $(t, x) \in Q_T$, d'après (3.50). Comme $0 \leq N_{\tilde{n}, \varepsilon}^{\tilde{N}}(x) \leq 1$ alors on a que $0 \leq N_\varepsilon(x, t) \leq 1$.

Similairement à (3.51), on obtient

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\Pi_{\tilde{N}}^1 C_\varepsilon^{\tilde{N}} \right) \rightharpoonup \frac{\partial C_\varepsilon}{\partial t} \text{ dans } L^2(0, T; (H^1(\Omega))') \text{ quand } \tilde{N} \rightarrow +\infty. \quad (3.57)$$

Pour montrer que le triplet $(N_\varepsilon, C_\varepsilon, u_\varepsilon)$ est une solution faible de (3.16), il nous reste seulement à tester s'il vérifie les égalités variationnelles correspondantes.

L'équation (3.26) s'écrit : $\forall \psi \in L^2(0, T; V)$,

$$\begin{aligned} \int_0^T \langle \partial_t (\Pi_{\tilde{N}}^1 u_\varepsilon^{\tilde{N}}), \psi \rangle dt + \iint_{Q_T} \nabla (\Pi_{\tilde{N}}^0 u_\varepsilon^{\tilde{N}}) \cdot \nabla \psi \, dxdt + \iint_{Q_T} (\Pi_{\tilde{N}}^0 u_\varepsilon^{\tilde{N}} \cdot \nabla) \Pi_{\tilde{N}}^0 u_\varepsilon^{\tilde{N}} \psi \, dxdt \\ = \iint_{Q_T} \Pi_{\tilde{N}}^0 N_\varepsilon^{\tilde{N}} \nabla \phi \cdot \psi \, dxdt, \end{aligned}$$

et en autres termes : $P_1 + P_2 + P_3 = P_4$. Quand \tilde{N} tend vers $+\infty$, on obtient

$$P_1 \rightarrow \int_0^T \langle \frac{\partial u_\varepsilon}{\partial t}, \psi \rangle dt \text{ en utilisant (3.34), } P_2 \rightarrow \iint_{Q_T} \nabla u_\varepsilon \cdot \nabla \psi \, dxdt \text{ en utilisant (3.36),}$$

$$P_3 \rightarrow \iint_{Q_T} (u_\varepsilon \cdot \nabla) u_\varepsilon \psi \, dxdt \text{ en utilisant (3.36) et (3.37),}$$

$$P_4 \rightarrow \iint_{Q_T} N_\varepsilon \nabla \phi \cdot \psi \, dxdt \text{ en utilisant (3.8) et (3.50).}$$

On note que la convergence détaillée du terme P_3 est montrée dans [75].

L'équation (3.25) s'écrit : $\forall \psi_2 \in L^2(0, T; H^1(\Omega))$,

$$\begin{aligned} & \int_0^T \langle \partial_t(\Pi_{\tilde{N}}^1 C_\varepsilon^{\tilde{N}}), \psi_2 \rangle dt + \iint_{Q_T} M(x) \nabla(\Pi_{\tilde{N}}^0 C_\varepsilon^{\tilde{N}}) \cdot \nabla \psi_2 dx dt \\ & - \iint_{Q_T} \Pi_{\tilde{N}}^0 C_\varepsilon^{\tilde{N}} (\tau_h \Pi_{\tilde{N}}^0 u_\varepsilon^{\tilde{N}} \cdot \nabla \psi_2) dx dt = - \iint_{Q_T} (\tau_h \Pi_{\tilde{N}}^0 N_\varepsilon^{\tilde{N}}) k(\Pi_{\tilde{N}}^0 C_\varepsilon^{\tilde{N}}) \psi_2 dx dt. \end{aligned}$$

Pour simplifier, on peut réécrire l'égalité comme $V_1 + V_2 + V_3 = -V_4$. Quand \tilde{N} tend vers $+\infty$, on a

$$V_1 \longrightarrow \int_0^T \langle \frac{\partial C_\varepsilon}{\partial t}, \psi_2 \rangle dt \text{ en utilisant (3.57).}$$

$$V_2 \longrightarrow \iint_{Q_T} M(x) \nabla C_\varepsilon \cdot \nabla \psi_2 dx dt \text{ en utilisant (3.49) et la borne du tenseur } M(x).$$

$$V_3 \longrightarrow - \iint_{Q_T} C_\varepsilon u_\varepsilon \cdot \nabla \psi_2 dx dt,$$

en effet, la convergence faible de $\tau_h \Pi_{\tilde{N}}^0 u_\varepsilon^{\tilde{N}}$ vers u_ε dans $L^2(Q_T)$ est suffisante pour montrer cette convergence,

$$\begin{aligned} V_3 - \left(- \iint_{Q_T} C_\varepsilon u_\varepsilon \cdot \nabla \psi_2 dx dt \right) &= - \iint_{Q_T} \Pi_{\tilde{N}}^0 C_\varepsilon^{\tilde{N}} (\tau_h \Pi_{\tilde{N}}^0 u_\varepsilon^{\tilde{N}} \cdot \nabla \psi_2) dx dt + \iint_{Q_T} C_\varepsilon u_\varepsilon \cdot \nabla \psi_2 dx dt \\ &= - \iint_{Q_T} (\Pi_{\tilde{N}}^0 C_\varepsilon^{\tilde{N}} - C_\varepsilon) \tau_h \Pi_{\tilde{N}}^0 u_\varepsilon^{\tilde{N}} \cdot \nabla \psi_2 dx dt - \iint_{Q_T} C_\varepsilon (\tau_h \Pi_{\tilde{N}}^0 u_\varepsilon^{\tilde{N}} - u_\varepsilon) \cdot \nabla \psi_2 dx dt. \end{aligned}$$

La convergence du premier terme est une conséquence du théorème de convergence dominée de Lebesgue. La convergence faible de $\tau_h \Pi_{\tilde{N}}^0 u_\varepsilon^{\tilde{N}}$ vers u_ε dans $L^2(Q_T)$ est suffisante pour que le second terme converge vers 0. En outre, on peut aussi montrer la convergence du terme V_3 en utilisant la convergence forte dans $L^2(Q_T)$ de $\tau_h \Pi_{\tilde{N}}^0 u_\varepsilon^{\tilde{N}}$ vers u_ε déduite de (3.33) et (3.37) et donc,

$$\begin{aligned} \left| V_3 - \left(- \iint_{Q_T} u_\varepsilon \cdot \nabla C_\varepsilon \psi_2 dx dt \right) \right| &\leq \|(\Pi_{\tilde{N}}^0 C_\varepsilon^{\tilde{N}} - C_\varepsilon) \cdot \nabla \psi_2\|_{L^2(Q_T)} \|\tau_h \Pi_{\tilde{N}}^0 u_\varepsilon^{\tilde{N}}\|_{L^2(Q_T)} \\ &+ \|C_\varepsilon\|_{L^\infty(Q_T)} \|\tau_h \Pi_{\tilde{N}}^0 u_\varepsilon^{\tilde{N}} - u_\varepsilon\|_{L^2(Q_T)} \|\nabla \psi_2\|_{L^2(Q_T)} \longrightarrow 0. \end{aligned}$$

Finalement, on montre que

$$V_4 \longrightarrow \iint_{Q_T} N_\varepsilon k(C_\varepsilon) \psi_2 dx dt,$$

en effet,

$$\begin{aligned} \left| V_4 - \iint_{Q_T} N_\varepsilon k(C_\varepsilon) \psi_2 dx dt \right| &\leq \|\Pi_{\tilde{N}}^0 N_\varepsilon^{\tilde{N}}\|_{L^\infty(Q_T)} \|k(\Pi_{\tilde{N}}^0 C_\varepsilon^{\tilde{N}}) - k(C_\varepsilon)\|_{L^2(Q_T)} \|\psi_2\|_{L^2(Q_T)} \\ &+ \|k(C_\varepsilon)\|_{L^\infty(Q_T)} \|\Pi_{\tilde{N}}^0 N_\varepsilon^{\tilde{N}} - N_\varepsilon\|_{L^2(Q_T)} \|\psi_2\|_{L^2(Q_T)}. \end{aligned}$$

En utilisant (3.50) et la borne L^∞ uniforme de k (k est une fonction de classe C^1 sur un compact) et de $\Pi_{\tilde{N}}^0 N_\varepsilon^{\tilde{N}}$, on obtient la convergence voulue.

L'équation (3.24) implique : $\forall \psi_1 \in L^2(0, T; H^1(\Omega))$,

$$\begin{aligned} & \int_0^T \langle \partial_t(\Pi_{\tilde{N}}^1 N_\varepsilon^{\tilde{N}}), \psi_1 \rangle dt + \iint_{Q_T} D_\varepsilon(x, \Pi_{\tilde{N}}^0 N_\varepsilon^{\tilde{N}}) \nabla(\Pi_{\tilde{N}}^0 N_\varepsilon^{\tilde{N}}) \cdot \nabla \psi_1 dx dt \\ &= \iint_{Q_T} D_1(x, \Pi_{\tilde{N}}^0 N_\varepsilon^{\tilde{N}}) \nabla(\Pi_{\tilde{N}}^0 C_\varepsilon^{\tilde{N}}) \cdot \nabla \psi_1 dx dt + \iint_{Q_T} \Pi_{\tilde{N}}^0 N_\varepsilon^{\tilde{N}} (\tau_h \Pi_{\tilde{N}}^0 u_\varepsilon^{\tilde{N}} \cdot \nabla \psi_1) dx dt \\ & \quad + \iint_{Q_T} f(\Pi_{\tilde{N}}^0 N_\varepsilon^{\tilde{N}}) \psi_1 dx dt. \end{aligned}$$

Dans d'autres termes, $U_1 + U_2 = U_3 + U_4 + U_5$. Quand \tilde{N} tend vers $+\infty$,

$$U_1 \longrightarrow \int_0^T \langle \frac{\partial N_\varepsilon}{\partial t}, \psi_1 \rangle dt \text{ en utilisant (3.51).}$$

$$U_2 \longrightarrow \iint_{Q_T} D_\varepsilon(x, N_\varepsilon) \nabla N_\varepsilon \cdot \nabla \psi_1 dx dt,$$

en effet, on a $\Pi_{\tilde{N}}^0 N_\varepsilon^{\tilde{N}} \rightarrow N_\varepsilon$ p.p. dans Q_T et donc $D_\varepsilon(x, \Pi_{\tilde{N}}^0 N_\varepsilon^{\tilde{N}}) \rightarrow D_\varepsilon(x, N_\varepsilon)$ p.p. dans Q_T car $D_\varepsilon = S(x)a_\varepsilon$ est continue par rapport au deuxième variable. D'après le théorème de convergence dominée de Lebesgue, (3.49) et l'appartenance de $D_\varepsilon(x, N_\varepsilon) \nabla \psi_1$ à $L^2(Q_T)$, on a :

$$\begin{aligned} \left| U_2 - \iint_{Q_T} D_\varepsilon(x, N_\varepsilon) \nabla(N_\varepsilon) \nabla \psi_1 dx dt \right| &\leq \| (D_\varepsilon(x, \Pi_{\tilde{N}}^0 N_\varepsilon^{\tilde{N}}) - D_\varepsilon(x, N_\varepsilon)) \nabla \psi_1 \|_{L^2(Q_T)} \| \nabla \Pi_{\tilde{N}}^0 N_\varepsilon^{\tilde{N}} \|_{L^2(Q_T)} \\ &+ \iint_{Q_T} D_\varepsilon(x, N_\varepsilon) (\nabla \Pi_{\tilde{N}}^0 N_\varepsilon^{\tilde{N}} - \nabla N_\varepsilon) \cdot \nabla \psi_1 dx dt \longrightarrow 0. \end{aligned}$$

Avec des arguments similaires, on peut monter que

$$U_3 \longrightarrow \iint_{Q_T} D_1(x, N_\varepsilon) \nabla C_\varepsilon \cdot \nabla \psi_1 dx dt,$$

en utilisant (3.49) et la continuité de $D_1 = S(x)\chi(N_\varepsilon)$ par rapport à N_ε .

$$U_4 \longrightarrow \iint_{Q_T} N_\varepsilon u_\varepsilon \cdot \nabla \psi_1 dx dt \text{ (similaire à la convergence de } V_3).$$

$$U_5 \longrightarrow \iint_{Q_T} f(N_\varepsilon) \psi_1 dx dt,$$

en effet, la continuité Lipschitz de la fonction f sur $[0, 1]$ et (3.50) impliquent cette dernière convergence. Grâce aux mêmes arguments, on obtient la convergence de l'équation discrète (3.26) vers la formulation faible de l'équation évolutive de Navier-Stokes donnée dans la Définition 7 (Voir [75]).

3.4 Problème principal dégénéré : Existence globale

Le but de cette section est de faire tendre le paramètre de régularisation ε vers zéro pour les suites de solutions faibles du problème (3.16) afin d'obtenir une solution faible du système original (3.1) au sens de la Définition 7. Notons que, pour tout $\varepsilon > 0$ fixé, on a montré l'existence d'une solution $(N_\varepsilon, C_\varepsilon, u_\varepsilon)$ telle que $0 \leq N_\varepsilon(x, t) \leq 1$ et $0 \leq C_\varepsilon(x, t) \leq M$ p.p. dans Q_T . Ensuite, pour aboutir à une conclusion à propos de l'existence d'une solution faible du système (3.1), on doit montrer les estimations a priori suivantes.

3.4.1 Estimations a priori

En choisissant $\psi_2 = C_\varepsilon$ comme une fonction test dans (3.18), en utilisant (3.30) et $N_\varepsilon(x, t) \geq 0$, on a :

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega} |C_\varepsilon|^2 dx + c_M \iint_{Q_T} |\nabla C_\varepsilon|^2 dx dt + \iint_{Q_T} |C_\varepsilon|^2 dx dt \leq C, \quad (3.58)$$

où C est une constante indépendante de ε . Par conséquent,

$$(C_\varepsilon)_\varepsilon \text{ est une suite bornée dans } L^\infty(Q_T) \cap L^2(0, T; H^1(\Omega)). \quad (3.59)$$

Donc il existe $C \in L^\infty(Q_T) \cap L^2(0, T; H^1(\Omega))$ et une sous-suite de (C_ε) ayant la même notation de la suite telle que, quand ε tend vers 0,

$$C_\varepsilon \rightharpoonup C \text{ faiblement-}^* \text{ dans } L^\infty(Q_T), \quad (3.60)$$

$$C_\varepsilon \rightharpoonup C \text{ faiblement dans } L^2(0, T; H^1(\Omega)). \quad (3.61)$$

On peut facilement déduire de la formulation faible (3.18) appliquée à une fonction test $\varphi \in L^2(0, T; (H^1(\Omega)))$ que

$$\left(\frac{\partial C_\varepsilon}{\partial t}\right)_\varepsilon \text{ est une suite bornée dans } L^2(0, T; (H^1(\Omega))'). \quad (3.62)$$

Donc,

$$\frac{\partial C_\varepsilon}{\partial t} \rightharpoonup \frac{\partial C}{\partial t} \text{ faiblement dans } L^2(0, T; (H^1(\Omega))'). \quad (3.63)$$

Pour l'équation de Navier-Stokes, on considère $u_{\varepsilon,0} \in H$ comme une condition initiale et la fonction $g = -N_\varepsilon \nabla \phi \in L^\infty(Q_T) \subset L^2(0, T, V')$ comme un second membre. En prenant $\psi = u_\varepsilon$ comme une fonction test dans (3.19), en utilisant le fait que

$$\left(\frac{\partial u_\varepsilon}{\partial t}, u_\varepsilon\right) = \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|u_\varepsilon(t)\|_H^2 \text{ and } b(u_\varepsilon, u_\varepsilon, u_\varepsilon) = \langle (u_\varepsilon \cdot \nabla) u_\varepsilon, u_\varepsilon \rangle_{V', V} = 0$$

et en intégrant entre 0 et t , on obtient

$$\frac{1}{2} \|u_\varepsilon(t)\|_H^2 + \alpha \int_0^t \|u_\varepsilon(s)\|_V^2 ds \leq \frac{1}{2} \|u_\varepsilon(0)\|_H^2 + \int_0^t \|g(s)\|_{V'} \|u_\varepsilon(s)\|_V ds.$$

Par conséquent, avec une simple application de l'inégalité de Young, on peut facilement déduire que la suite de $(u_\varepsilon)_\varepsilon$ de (3.19)-(3.20) est bornée dans $L^\infty(0, T; H) \cap L^2(0, T; V)$. Donc, il existe $u \in L^2(0, T; V) \cap L^\infty(0, T; H)$ telle que quand ε tend vers 0,

$$u_\varepsilon \rightharpoonup u \text{ faiblement-}^* \text{ dans } L^\infty(0, T; H) \text{ et} \quad (3.64)$$

$$u_\varepsilon \rightharpoonup u \text{ faiblement dans } L^2(0, T; V). \quad (3.65)$$

Remarque 8 *En effet, il existe deux limites u_1 et u_2 pour ces dernières convergences mais on peut facilement montrer que $u_1 = u_2 = u$. En effet, en écrivant clairement la définition d'une convergence faible et faible-*, on a,*

$$\int_0^T (u_1(t) - u_2(t), h(t)) dt = 0, \forall h \in L^2(0, T; H) \subset L^1(0, T; H) \cap L^2(0, T; V').$$

Ensuite, il suit du choix de $h = u_1 - u_2$ que $\|u_1 - u_2\|_{L^2(0, T; H)} = \int_0^T \|u_1(t) - u_2(t)\|_H^2 dt = 0$.

En plus, grâce au théorème de compacité d'Aubin-Simon, l'injection de l'espace $E_{2,1} = \{u_\varepsilon \in L^2(0, T; V); \frac{du_\varepsilon}{dt} \in L^1(0, T; V')\}$ dans $L^2(0, T; H)$ est compacte (Voir [8], Théorème 2.5.15). Donc, modulo une sous-suite,

$$u_\varepsilon \longrightarrow u \text{ dans } L^2(0, T; H), \text{ quand } \varepsilon \rightarrow 0. \quad (3.66)$$

On peut aussi montrer cette dernière assertion par un théorème de compacité qui contient des dérivations fractionnaires et par la transformée inverse de Fourier d'une fonction. (Voir [75]).

Ensuite, en prenant $\psi_1 = A_\varepsilon(N_\varepsilon) = A(N_\varepsilon) + \varepsilon N_\varepsilon$ comme une fonction test dans (3.17) :

$$\begin{aligned} \int_0^T \langle \partial_t(N_\varepsilon), A_\varepsilon(N_\varepsilon) \rangle dx + \iint_{Q_T} S(x) \nabla A_\varepsilon(N_\varepsilon) \cdot \nabla A_\varepsilon(N_\varepsilon) dxdt &= \iint_{Q_T} N_\varepsilon u_\varepsilon \cdot \nabla A_\varepsilon(N_\varepsilon) dxdt \\ &+ \iint_{Q_T} S(x) \chi(N_\varepsilon) \nabla C_\varepsilon \cdot \nabla A_\varepsilon(N_\varepsilon) dxdt + \iint_{Q_T} f(N_\varepsilon) A_\varepsilon(N_\varepsilon) dxdt. \end{aligned}$$

En considérant $\mathcal{A}(s) = \int_0^s A(r) dr$ et en utilisant (2.6), l'inégalité de Young pour $\nabla C_\varepsilon \cdot \nabla A_\varepsilon(N_\varepsilon)$, $u_\varepsilon \cdot \nabla A_\varepsilon(N_\varepsilon)$ et la borne uniforme de χ , f et A_ε , on a :

$$\sup_{0 \leq t \leq T} \int_\Omega \mathcal{A}(N_\varepsilon)(x, t) dx + \varepsilon \sup_{0 \leq t \leq T} \int_\Omega \frac{|N_\varepsilon(x, t)|^2}{2} dx + \frac{1}{2} \iint_{Q_T} |\nabla A_\varepsilon(N_\varepsilon)|^2 dxdt$$

$$+\frac{\varepsilon}{2} \iint_{Q_T} |\nabla N_\varepsilon|^2 dxdt \leq C, \quad (3.67)$$

où C est une constante indépendante de ε . On déduit alors quand ε tend vers 0 que

$$N_\varepsilon \rightharpoonup N \text{ faiblement-}^* \text{ dans } L^\infty(Q_T), \quad (3.68)$$

$$\sqrt{\varepsilon}N_\varepsilon \rightarrow 0 \text{ dans } L^2(0, T; H^1(\Omega)), A(N_\varepsilon) \rightarrow \Gamma_1 \text{ dans } L^2(0, T; H^1(\Omega)). \quad (3.69)$$

En utilisant la formulation faible (3.17), les assertions (3.59) et (3.67), on a :

$$\begin{aligned} \left| \int_0^T \langle \partial_t N_\varepsilon, \psi_1 \rangle dt \right| &\leq \|\nabla A(N_\varepsilon)\|_{L^2(Q_T)} \|\nabla \psi_1\|_{L^2(Q_T)} + \|\sqrt{\varepsilon} \nabla N_\varepsilon\|_{L^2(Q_T)} \|\nabla \psi_1\|_{L^2(Q_T)} \\ &+ \|S(x)\chi(N_\varepsilon)\|_{L^\infty(Q_T)} \|\nabla C_\varepsilon\|_{L^2(Q_T)} \|\nabla \psi_1\|_{L^2(Q_T)} + \|u_\varepsilon\|_{L^2(Q_T)} \|\nabla \psi_1\|_{L^2(Q_T)} \\ &+ \|f(N_\varepsilon)\|_{L^2(Q_T)} \|\psi_1\|_{L^2(Q_T)} \leq C \|\psi_1\|_{L^2(0, T; H^1(\Omega))}, \end{aligned}$$

où C est une constante indépendante de ε . Alors,

$$\|\partial_t N_\varepsilon\|_{L^2(0, T; (H^1(\Omega))')} \leq C, \quad (3.70)$$

$$\frac{\partial N_\varepsilon}{\partial t} \rightharpoonup \frac{\partial N}{\partial t} \text{ dans } L^2(0, T; (H^1(\Omega))'). \quad (3.71)$$

D'après (3.68), (3.71) et l'injection compacte $L^\infty(\Omega) \hookrightarrow (H^1(\Omega))'$, on peut similairement à l'assertion (3.55) montrer que

$$N_\varepsilon \longrightarrow N \text{ dans } C(0, T; (H^1(\Omega))') \text{ quand } \varepsilon \rightarrow 0.$$

En plus, $N \in C_w(0, T; L^2(\Omega))$ (Voir [8], Lemme 2.5.7). Avec les mêmes arguments de la preuve de l'estimation (3.53) dans la Proposition 15, on peut aussi montrer que $N(0, x) = N_0(x)$.

En plus, il est facile de montrer que $A(N_\varepsilon)$ est uniformément borné dans $\mathcal{W} = \{w \in L^2(0, T; H^1(\Omega)), \frac{\partial w}{\partial t} \in L^2(0, T; (H^1(\Omega))')\}$ et comme on a $\mathcal{W} \hookrightarrow L^2(Q_T)$ est compacte (Voir [8], Théorème 2.5.12) alors on déduit :

$$\text{il existe une sous-suite de } (N_\varepsilon)/A(N_\varepsilon) \longrightarrow \Gamma_1 \text{ dans } L^2(Q_T). \quad (3.72)$$

Comme A est strictement monotone, alors il existe N telle que

$$\Gamma_1 = A(N). \quad (3.73)$$

Par la suite,

$$A(N_\varepsilon) \longrightarrow A(N) \text{ dans } L^2(Q_T) \text{ et p.p. dans } Q_T. \quad (3.74)$$

D'ailleurs, comme A^{-1} est bien définie et continue, on applique à $N_\varepsilon = A^{-1}(A(N_\varepsilon))$ le théorème de convergence dominée de Lebesgue pour en déduire que,

$$N_\varepsilon = A^{-1}(A(N_\varepsilon)) \longrightarrow N \text{ dans } L^2(Q_T) \text{ et p.p. dans } Q_T. \quad (3.75)$$

Lemme 13 *La suite $(C_\varepsilon)_\varepsilon$ converge fortement vers C dans $L^2(0, T; H^1(\Omega))$ quand $\varepsilon \longrightarrow 0$.*

Preuve : La soustraction de relations satisfaites par $(N_\varepsilon, C_\varepsilon)$ et (N, C) implique :

$$\partial_t(C_\varepsilon - C) + \nabla \cdot (M(x)\nabla(C_\varepsilon - C)) + [u_\varepsilon \cdot \nabla(C_\varepsilon - C) + (u_\varepsilon - u) \cdot \nabla C] = (N_\varepsilon - N)k(C) + N_\varepsilon(k(C_\varepsilon) - k(C)).$$

En prenant $\psi = C_\varepsilon - C$ comme une fonction test, en utilisant (2.6), (3.29), (3.30) (quand $\nabla \cdot (u_\varepsilon - u) = 0$) et l'inégalité de Young, on peut conclure l'existence de deux constantes positives c_1 et c_2 telles que

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_\Omega |C_\varepsilon - C|^2 dx + c_M \int_\Omega |\nabla(C_\varepsilon - C)|^2 dx &\leq c_1 \int_\Omega |N_\varepsilon - N|^2 dx \\ &+ c_2 \int_\Omega |C_\varepsilon - C|^2 dx + M \int_\Omega |u_\varepsilon - u| |\nabla C_\varepsilon| dx. \end{aligned}$$

En intégrant cette inégalité sur $[0, T]$ et en utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz, on obtient :

$$\begin{aligned} c_M \iint_{Q_T} |\nabla(C_\varepsilon - C)|^2 dx dt &\leq c_1 \iint_{Q_T} |N_\varepsilon - N|^2 dx dt + c_2 \iint_{Q_T} |C_\varepsilon - C|^2 dx dt \\ &+ M \left(\iint_{Q_T} |u_\varepsilon - u|^2 dx dt \right)^{\frac{1}{2}} \left(\iint_{Q_T} |\nabla C_\varepsilon|^2 dx dt \right)^{\frac{1}{2}}. \end{aligned}$$

Grâce à (3.58) et la convergence forte de N_ε , C_ε et u_ε respectivement vers N , C et u dans $L^2(Q_T)$, on déduit la convergence forte de $(\nabla C_\varepsilon)_\varepsilon$ vers ∇C dans $L^2(Q_T)$.

3.4.2 Passage à la limite

Quand le paramètre de régularisation ε tend vers 0, on a :

$$\int_0^T \langle \partial_t(N_\varepsilon), \psi_1 \rangle dt \longrightarrow \int_0^T \langle \partial_t N, \psi_1 \rangle dt \text{ en utilisant (3.71).}$$

$$\iint_{Q_T} S(x) \nabla A_\varepsilon(N_\varepsilon) \cdot \nabla \psi_1 dx dt \longrightarrow \iint_{Q_T} S(x) \nabla A(N) \cdot \nabla \psi_1 dx dt,$$

en effet, on définit $\nabla : L^2(0, T; H^1(\Omega)) \longrightarrow L^2(Q_T)$ comme étant une application linéaire continue et donc faiblement continue. Par conséquent, en utilisant (3.69) et (3.73), on a : $\nabla A_\varepsilon(N_\varepsilon) \rightharpoonup \nabla A(N)$ dans $L^2(Q_T)$. De nouveau, l'application : $v \rightarrow S(x)v$ faiblement continue

implique que $S(x)\nabla A_\varepsilon(N_\varepsilon) \rightharpoonup S(x)\nabla A(N)$ dans $L^2(Q_T)$.

$$\iint_{Q_T} S(x)\chi(N_\varepsilon)\nabla C_\varepsilon \cdot \nabla \psi \, dxdt \longrightarrow \iint_{Q_T} S(x)\chi(N)\nabla C \cdot \nabla \psi \, dxdt,$$

qui est une conséquence de la borne L^∞ uniforme de $\chi(N_\varepsilon)$ et du Lemme 4.36.

$$\iint_{Q_T} N_\varepsilon u_\varepsilon \cdot \nabla \psi \, dxdt \longrightarrow \iint_{Q_T} Nu \cdot \nabla \psi \, dxdt,$$

en effet,

$$\begin{aligned} I &= \iint_{Q_T} (N_\varepsilon u_\varepsilon \cdot \nabla \psi - Nu \cdot \nabla \psi) \, dxdt = \iint_{Q_T} (N_\varepsilon - N)u_\varepsilon \cdot \nabla \psi \, dxdt \\ &\quad + \iint_{Q_T} N(u_\varepsilon - u) \cdot \nabla \psi \, dxdt. \end{aligned}$$

D'après le théorème de convergence dominée de Lebesgue et (3.66), on déduit que

$$I \leq \|(N_\varepsilon - N)\nabla \psi\|_{L^2(Q_T)} \|u_\varepsilon\|_{L^2(Q_T)} + \|u_\varepsilon - u\|_{L^2(Q_T)} \|N\nabla \psi\|_{L^2(Q_T)} \longrightarrow 0.$$

Finalement, la continuité Lipschitz de f et la convergence forte de N_ε vers N dans $L^2(Q_T)$ impliquent que

$$\iint_{Q_T} (f(N_\varepsilon) - f(N))\psi \, dxdt \leq L\|N_\varepsilon - N\|_{L^2(Q_T)} \|\psi\|_{L^2(Q_T)} \longrightarrow 0.$$

3.5 Conclusion et Remarques

On a donc identifié N , C et u comme étant des composantes d'une solution faible du système dégénéré (3.1)-(3.3) au sens de la Définition 7. En plus, on peut réécrire l'équation (3.14) comme

$$\frac{d}{dt} \langle u, \psi \rangle = \langle g - \nu \Delta u - B(u), \psi \rangle_{V', V}, \quad \forall \psi \in V. \quad (3.76)$$

Dès que le Laplacien $-\Delta$ est linéaire et continue de V dans V' et $u \in L^2(0, T; V)$, alors la fonction $-\Delta u$ appartient à $L^2(0, T; V')$. Ensuite, dès que la forme $b(u, u, w) = \langle (u \cdot \nabla)u, w \rangle_{V', V} = \langle B(u), w \rangle_{V', V}$ est trilinéaire dans V (en dimension d'espace $d \leq 4$) alors $\|B(u)\|_{V'} \leq c\|u\|_V^2$. Par conséquent, la fonction $B(u)$ appartient à $L^1(0, T; V')$ et donc

$$\frac{du}{dt} \text{ appartient à } L^1(0, T; V').$$

D'où la fin de la preuve du Théorème 4.

Remarque 9 *A travers les mêmes arguments, on peut montrer l'existence d'une solution faible du système (3.4)-(3.3) au sens de la Définition 8. La seule différence dans le cas de couplage avec l'équation de Stokes linéaire ($B(u) = 0$ dans (3.76)) est que $\frac{du}{dt}$ appartient à $L^2(0, T; V')$ et par conséquent u appartient à $C(0, T; H)$ (Voir [75]).*

D'ailleurs, d'après [55], Théorème 6, page 100], une régularité L^p différente de la condition

initiale u_0 entraîne une meilleure régularité de la solution u c'est à dire si $u_0 \in W^{2-\frac{2}{p},p}(\Omega)$ et $\nabla \cdot u_0 = 0$ alors $u \in W_p^{2,1}(Q_T)$ pour $1 < p < \infty$ et

$$\int_0^T (\|u\|_{W^{2,p}(\Omega)}^p + \|\partial_t u\|_{L^2(\Omega)}^p) dt \leq C(\|u(0)\|_{W^{1,p}(\Omega)}^p + \int_0^T \|N\nabla\phi\|_{L^p(\Omega)}^p dt), \quad (3.77)$$

où C est une constante positive. Par conséquent, les injections de Sobolev impliquent qu'il existe un $p \geq 2$ suffisamment grande de tel sorte que ∇u appartient à $L^2(0, T; L^\infty(\Omega))$.

Remarque 10 Cette remarque est consacrée à l'équation du chimio-attractant du système (3.4). Si $C_0 \in W^{2-\frac{2}{p},p}(\Omega)$, le second membre est uniformément borné dans Q_T et la régularité de u est donné par (3.77), alors des résultats classiques de régularité parabolique (Voir [56], chapitre 4) implique que C appartient à $L^p(0, T; W^{2,p}(\Omega))$ pour tout $1 < p < \infty$ et par conséquent il existe un $p \geq 2$ suffisamment grande de tel sorte que ∇C appartient à $L^2(0, T; L^\infty(\Omega))$.

3.6 La pression

Pour l'équation de Navier-Stokes, on introduit $\tilde{u}(t) = \int_0^t u(s) ds$, $G(t) = \int_0^t g(s) ds$ et $\beta(t) = \int_0^t (u(s) \cdot \nabla)u(s) ds$ avec \tilde{u}, G et $\beta \in C(0, T; (H^1(\Omega))')$. Jusqu'à maintenant, on a trouvé une solution faible u au sens de la formulation (3.19)-(3.20) qui vérifie l'équation (3.76). En intégrant cette dernière en temps sur $[0, T]$, on obtient que

$$\langle u(t) - u_0 - \Delta\tilde{u} + \beta - G, \psi \rangle = 0, \quad \forall \psi \in V, \quad \forall t \in [0, T].$$

Ensuite, le Théorème de Rham (Voir [75], chapitre 1) implique l'existence de $P(t) \in L_0^2(\Omega)$, $\forall t \in [0, T]$ telle que $u(t) - u_0 - \Delta\tilde{u} + \beta + \nabla P(t) = G(t)$, où

$$L_0^2(\Omega) = \{w \in L^2(\Omega), \int_\Omega w dx = 0\}. \quad (3.78)$$

Donc $\nabla P \in C(0, T; (H^1(\Omega))')$ et alors $P \in C(0, T; L_0^2(\Omega))$. En dérivant au sens de distributions par rapport au temps t , on obtient :

$$\partial_t u - \Delta u + (u \cdot \nabla)u + \nabla p = g,$$

où $p = \frac{dP}{dt} \in W^{-1,\infty}(0, T; L_0^2(\Omega))$. Dans le cas du système (3.4) où le fluide est modélisé par l'équation de Stokes, il suffit de considérer $\beta = 0$ pour obtenir les mêmes résultats concernant la pression.

3.7 Preuve du Théorème d'unicité

Sous les hypothèses supplémentaires (3.10) et (3.15), la preuve de l'unicité se repose sur une technique de dualité classique. On va noter que les Remarques 9 et 10 sont vérifiées grâce à la régularité imposée sur la donnée initiale dans (3.10). On considère le sous-ensemble $L_0^2(\Omega)$ de

$L^2(\Omega)$ définie dans (3.78) et on note par $\mathcal{N}w \in H^2(\Omega) \cap L_0^2(\Omega)$ la solution unique de

$$\begin{cases} -\nabla \cdot (S(x)\nabla \mathcal{N}w) & = w \\ S(x)\nabla \mathcal{N}w \cdot \eta & = 0 \end{cases} . \quad (3.79)$$

Soient (N_1, C_1, u_1) et (N_2, C_2, u_2) deux solutions faibles du système (3.4) au sens de la Définition 8. On fixe $T > 0$ et on considère pour $(t, x) \in [0, T] \times \Omega$,

$$N(t, x) = N_1(t, x) - N_2(t, x), \quad C(t, x) = C_1(t, x) - C_2(t, x), \quad U(t, x) = u_1(t, x) - u_2(t, x).$$

On commence par soustraire les équations (3.14) associées aux solutions u_1 et u_2 du système (3.4) et par choisir $\psi = U$ comme une fonction test. Alors, on a :

$$\langle \partial_t U, U \rangle + \nu \int_{\Omega} \nabla U \cdot \nabla U \, dx = - \int_{\Omega} N \nabla \phi \cdot U \, dx .$$

Le problème variationnel associé au problème dual (3.79) et la formule de Leibniz impliquent que

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \|U(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 + \nu \|\nabla U(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 &= - \int_{\Omega} S(x)\nabla \mathcal{N}N \cdot \nabla(\nabla \phi \cdot U) \, dx \\ &= - \int_{\Omega} S(x)\nabla \mathcal{N}N \cdot \left[(\nabla \phi \cdot \nabla)U + (U \cdot \nabla)\nabla \phi + \nabla \phi \times \text{rot}(U) + U \times \text{rot}(\nabla \phi) \right] \, dx , \end{aligned}$$

où $a \times b$ désigne le produit vectoriel de deux vecteurs a et b . Grâce aux propriétés suivantes : $\text{rot}(\nabla \phi) = 0$, $\|a \times b\|_{L^2(\Omega)} \leq \|a\|_{L^2(\Omega)}\|b\|_{L^2(\Omega)}$, $\|\text{rot}(U)\|_{L^2(\Omega)} \lesssim \|\nabla U\|_{L^2(\Omega)}$ (où $a \lesssim b$ signifie l'existence d'une constante positive c' telle que $a \leq c'b$), les inégalités de Poincaré et de Young, on a :

$$\frac{d}{dt} \|U(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 + \nu \|\nabla U(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq \quad (3.80)$$

$$\begin{aligned} &\|S(x)\|_{L^\infty(\Omega)} \left((1 + c_P + c') \|\nabla \phi\|_{W^{1,\infty}(\Omega)} \right) \|\nabla \mathcal{N}N(t)\|_{L^2(\Omega)} \|\nabla U(t)\|_{L^2(\Omega)} \\ &\leq \left(\frac{1}{\delta} c_1^2 \|S(x)\|_{L^\infty(\Omega)}^2 \|\nabla \phi\|_{W^{1,\infty}(\Omega)}^2 \right) \|\nabla \mathcal{N}N(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 + \delta \|\nabla U(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 , \end{aligned}$$

où c_P , c' et c_1 sont des constantes positives.

Ensuite, on soustrait les équations (3.13) reliées aux solutions C_1 et C_2 de l'équation du chimio-attractant et on choisit $\psi_2 = C$ comme une fonction test, alors

$$\begin{aligned} \langle \partial_t C, C \rangle + \int_{\Omega} M(x)\nabla C^2 \, dx + \int_{\Omega} (U \cdot \nabla C_1)C \, dx + \int_{\Omega} (u_2 \cdot \nabla C)C \, dx &= - \int_{\Omega} (k(C_1) - k(C_2))N_1 C \, dx \\ - \int_{\Omega} k(C_2)NC \, dx &= - \int_{\Omega} (k(C_1) - k(C_2))N_1 C \, dx - \int_{\Omega} S(x)\nabla \mathcal{N}N \cdot \nabla(k(C_2)C) \, dx . \end{aligned}$$

D'après (2.6), (3.30), (3.6) et l'inégalité de Young, on a

$$\begin{aligned}
& \frac{d}{dt} \|C(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 + c_M \|\nabla C(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq \|C_1\|_{L^\infty(\Omega)} \|U(t)\|_{L^2(\Omega)} \|\nabla C(t)\|_{L^2(\Omega)} + c_k \left(\|C(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 \right. \\
& \left. \|S\|_{L^\infty(\Omega)} \|\nabla \mathcal{N}N(t)\|_{L^2(\Omega)} \|\nabla C(t)\|_{L^2(\Omega)} + \|\nabla C_2\|_{L^\infty(\Omega)} \|S\|_{L^\infty(\Omega)} \|\nabla \mathcal{N}N(t)\|_{L^2(\Omega)} \|C(t)\|_{L^2(\Omega)} \right) \\
& \leq M^2 \delta \|\nabla C(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 + \frac{1}{\delta} \|U(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 + c_k \|C(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 + \frac{1}{\delta} \|S\|_{L^\infty(\Omega)}^2 \|\nabla \mathcal{N}N(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 \\
& + \delta c_k^2 \|\nabla C(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 + \delta \|S\|_{L^\infty(\Omega)}^2 c_k^2 \|\nabla C_2\|_{L^\infty(\Omega)}^2 \|\nabla \mathcal{N}N(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 + \frac{1}{\delta} \|C(t)\|_{L^2(\Omega)}^2, \quad (3.81)
\end{aligned}$$

où c_k est une constante positive.

Dès qu'on a $-\nabla \cdot (S(x) \nabla \partial_t(\mathcal{N}N)) = \partial_t N$ dans $(H^1(\Omega))'$ et grâce à la symétrie de S , on peut écrire

$$\int_{\Omega} S(x) \nabla \mathcal{N}N(t) \cdot \nabla \mathcal{N}N(t) dx = \int_{\Omega} S(x) \nabla \mathcal{N}N(0) \cdot \nabla \mathcal{N}N(0) dx + 2 \int_0^t \left\langle \frac{\partial N}{\partial t}, \mathcal{N}N \right\rangle ds.$$

La soustraction des deux égalités variationnelles (3.12) reliées aux solutions faibles N_1 et N_2 avec une fonction test $\mathcal{N}N$ implique que :

$$\begin{aligned}
& \int_0^t \left\langle \frac{\partial N}{\partial t}, \mathcal{N}N \right\rangle ds = - \int_0^t \int_{\Omega} S(x) \nabla (A(N_1) - A(N_2)) \cdot \nabla \mathcal{N}N dx ds \quad (3.82) \\
& + \int_0^t \int_{\Omega} S(x) (\chi(N_1) - \chi(N_2)) \nabla C_1 \cdot \nabla \mathcal{N}N dx ds + \int_0^t \int_{\Omega} S(x) \chi(N_2) \nabla C \cdot \nabla \mathcal{N}N dx ds \\
& + \int_0^t \int_{\Omega} N_1 U \cdot \nabla \mathcal{N}N dx ds + \int_0^t \int_{\Omega} N u_2 \cdot \nabla \mathcal{N}N dx ds + \int_0^t \int_{\Omega} (f(N_1) - f(N_2)) \mathcal{N}N dx ds.
\end{aligned}$$

Comme on a $|N_1| < 1$, alors

$$\int_{\Omega} N_1 U \cdot \nabla \mathcal{N}N dx \leq \|\nabla \mathcal{N}N(t)\|_{L^2(\Omega)} \|U(t)\|_{L^2(\Omega)}. \quad (3.83)$$

Ensuite, le problème dual (3.79) et de nouveau la formule de Leibniz impliquent que :

$$\begin{aligned}
& \int_{\Omega} N(u_2 \cdot \nabla \mathcal{N}N) dx = \int_{\Omega} S(x) \nabla \mathcal{N}N \cdot \nabla (u_2 \cdot \nabla \mathcal{N}N) dx \\
& = \int_{\Omega} S(x) \nabla \mathcal{N}N \cdot \left[(u_2 \cdot \nabla) \nabla \mathcal{N}N + (\nabla \mathcal{N}N \cdot \nabla) u_2 + \nabla \mathcal{N}N \times \text{rot}(u_2) + u_2 \times \text{rot}(\nabla \mathcal{N}N) \right] dx. \quad (3.84)
\end{aligned}$$

La propriété $\text{rot}(\nabla \mathcal{N}N) = 0$ nous permet d'annuler la dernière intégrale. Ensuite, on traite la

première intégrale en l'écrivant avec la forme suivante :

$$\int_{\Omega} S(x) \nabla \mathcal{N} N \cdot (u_2 \cdot \nabla) \nabla \mathcal{N} N \, dx = \sum_i \sum_{j,k} \int_{\Omega} u_i S_{j,k} \frac{\partial}{\partial x_k} (\mathcal{N} N) \cdot \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{\partial}{\partial x_j} (\mathcal{N} N) \right) \, dx,$$

où $u_i \in L^\infty(\Omega)$ et les coefficients $S_{j,k}$ sont supposés de classe C^1 d'après (3.10). Grâce à la formule de Green, $\nabla \cdot u_2 = 0$ et la symétrie du tenseur S , on obtient

$$\begin{aligned} 2 \int_{\Omega} S(x) \nabla \mathcal{N} N \cdot (u_2 \cdot \nabla) \nabla \mathcal{N} N \, dx &= - \int_{\Omega} (\nabla \cdot u_2) S(x) \nabla \mathcal{N} N \cdot \nabla \mathcal{N} N \, dx \quad (3.85) \\ - \int_{\Omega} (u_2 \cdot \nabla(S(x))) \nabla \mathcal{N} N \cdot \nabla \mathcal{N} N \, dx &\leq \|u_2\|_{L^\infty(\Omega)} \|\nabla S\|_{L^\infty(\Omega)} \|\nabla \mathcal{N} N(t)\|_{L^2(\Omega)}^2. \end{aligned}$$

Ensuite, on déduit de la fonction affine f et du problème dual (3.79) que

$$\int_{\Omega} (f(N_1) - f(N_2)) \mathcal{N} N \, dx \leq \alpha \|S\|_{L^\infty(\Omega)} \|\nabla \mathcal{N} N(t)\|_{L^2(\Omega)}^2. \quad (3.86)$$

A l'aide des inégalités (3.83), (3.84), (3.85), (3.86) et des inégalités de Cauchy-Schwarz et de Young, on peut déduire de l'équation (3.82) que :

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} S(x) \nabla \mathcal{N} N(t) \cdot \nabla \mathcal{N} N(t) \, dx &\leq -2 \int_0^t \int_{\Omega} (N_1 - N_2) (A(N_1) - A(N_2)) \, dx ds \quad (3.87) \\ + 2\delta \int_0^t \int_{\Omega} (\chi(N_1) - \chi(N_2))^2 \, dx ds &+ \frac{2}{\delta} \int_0^t \|S\|_{L^\infty(\Omega)}^2 \|\nabla C_1\|_{L^\infty(\Omega)}^2 \|\nabla \mathcal{N} N(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 \, ds \\ + 2\delta c_\chi^2 \int_0^t \|\nabla C(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 \, ds &+ \frac{2}{\delta} \int_0^t \|S\|_{L^\infty(\Omega)}^2 \|\nabla \mathcal{N} N(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 \, ds \\ + 2\delta \int_0^t \|U(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 \, ds &+ \frac{2}{\delta} \int_0^t \|\nabla \mathcal{N} N(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 \, ds + \int_0^t \|u_2\|_{L^\infty(\Omega)} \|\nabla S\|_{L^\infty(\Omega)} \|\nabla \mathcal{N} N(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 \, ds \\ + 2 \int_0^t \|S\|_{L^\infty(\Omega)}^2 (\|\nabla u_2(t)\|_{L^\infty(\Omega)}^2 &+ \|\nabla u_2(t)\|_{L^2(\Omega)}^2) \|\nabla \mathcal{N} N(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 \, ds \\ + 2\alpha \int_0^t \|S\|_{L^\infty(\Omega)} \|\nabla \mathcal{N} N(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 \, ds &. \end{aligned}$$

Maintenant, on intègre les inégalités précédentes (3.80) et (3.81) par rapport au temps et on somme les inégalités intégrées avec (3.87). Ensuite, on considère $0 < \delta < \min(\frac{1}{C_0}, \frac{c_M}{2c_\chi^2 + c_k^2 + M^2}, 1)$ et on utilise (3.15) pour en déduire que

$$\begin{aligned} c_S \|\nabla \mathcal{N} N(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|C(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|U(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 &\leq \int_0^t \left(\frac{1}{\delta} + c_k \right) \|C(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 \, ds \\ + \int_0^t \left(\frac{1}{\delta} + 2 \right) \|U(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 \, ds &+ \int_0^t \frac{1}{\delta} \left[2 + 2\alpha \|S\|_{L^\infty(\Omega)} + \|u_2(t)\|_{L^\infty(\Omega)} \|\nabla S\|_{L^\infty(\Omega)} \right. \\ + \|S\|_{L^\infty(\Omega)}^2 \left(3 + 2\|\nabla C_1(t)\|_{L^\infty(\Omega)}^2 &+ 2(\|\nabla u_2(t)\|_{L^\infty(\Omega)}^2 + \|\nabla u_2(t)\|_{L^2(\Omega)}^2) \right) + c_k^2 \|\nabla C_2(t)\|_{L^\infty(\Omega)}^2 \end{aligned}$$

$$+c_1^2\|\nabla\phi\|_{W^{1,\infty}(\Omega)}^2)\Big]\|\nabla\mathcal{N}N(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 ds.$$

Les Remarques 9 et 10 impliquent que

$$\|\nabla\mathcal{N}N(t)\|_{L^2(\Omega)}^2+\|C(t)\|_{L^2(\Omega)}^2+\|U(t)\|_{L^2(\Omega)}^2\leq\int_0^t\mu(s)\left[\|\nabla\mathcal{N}N\|_{L^2(\Omega)}^2+\|C\|_{L^2(\Omega)}^2+\|U\|_{L^2(\Omega)}^2\right] ds,$$

où $\mu(s)$ est une fonction intégrable positive. On conclut avec le Lemme de Gronwall (Voir [66]) que $U(t) = C(t) = \nabla\mathcal{N}N(t) = 0$ pour tout $t \in [0, T]$ et Par la suite la preuve du Théorème 5 est achevée.

Chapitre 4

Étude numérique d'un modèle anisotrope en chimiotaxie-fluide

4.1 Introduction

Après l'étude mathématique détaillée d'un système chimiotactisme-fluide dans le chapitre 3, nos travaux maintenant sont dédiés à l'étude numérique et l'analyse de convergence de ce système introduit dans la section 3.1 sous les mêmes hypothèses de la section 3.2 du chapitre précédent. En profitant des avantages d'éléments finis non conformes pour la discrétisation des équations de Navier-Stokes (Voir [75]) ainsi que des avantages de la méthode combinée discrétisant le modèle anisotrope de Keller-Segel détaillée dans le chapitre 2, on cherche à étendre l'idée de la méthode combinée au système chimiotactisme-fluide complet. Dans ce qui suit, on divise le modèle (3.1) en deux systèmes :

$$\left\{ \begin{array}{l} \partial_t N - \nabla \cdot (S(x)a(N)\nabla N) + \nabla \cdot (S(x)\chi(N)\nabla C) + u \cdot \nabla N = f(N), \\ \partial_t C - \nabla \cdot (M(x)\nabla C) + u \cdot \nabla C = -k(C)N, \\ S(x)a(N)\nabla N \cdot \eta = 0, M(x)\nabla C \cdot \eta = 0, \\ N(x, 0) = N_0(x), C(x, 0) = C_0(x), \end{array} \right. \quad (4.1)$$

et

$$\left\{ \begin{array}{l} \partial_t u - \nu \Delta u + (u \cdot \nabla)u + \nabla P = -N\nabla \phi, \\ \nabla \cdot u = 0 \quad t > 0, x \in \Omega, \\ u = 0 \quad x \in \partial\Omega, \\ u(x, 0) = u_0(x). \end{array} \right. \quad (4.2)$$

Dans ce chapitre, on va discrétiser les équations de Navier-Stokes en utilisant les éléments finis de Crouzeix-Raviart pour la vitesse et les fonctions constantes par morceaux pour la pression. Ainsi, on va discrétiser les nouveaux termes de transport dans les équations chimiotaxiques par la méthode de volumes finis. Ensuite, on va construire le schéma combiné et étudier la convergence vers une solution faible du problème continu. Dans le cas de transmissibilités négatives et similairement à la section 2.6 du chapitre 2, on corrige les flux diffusifs de notre schéma combiné pour que le confinement de solutions approchées, dans d'autres termes le principe de maximum

discret, soit respecté. Finalement, on présente des expériences numériques afin de valider nos résultats théoriques.

4.2 Discrétisation des équations de Navier-Stokes

Les résultats de cette section sont plus détaillés dans le livre [75] et l'annexe B. Tout au long de ce chapitre, on considère la même discrétisation en espace du domaine Ω et la même discrétisation en temps de l'intervalle $[0, T]$ que celles considérées dans la sous-section 2.3.1 du chapitre 2. Seulement, on rappelle l'espace des éléments finis de Crouzeix-Raviart :

$$X_h := \{\varphi_h \in L^2(\Omega); \varphi_h|_K \text{ est linéaire } \forall K \in \mathcal{T}_h, \varphi_h \text{ est continue aux points } P_D, D \in \mathcal{D}_h^{int}\},$$

$$X_h^0 := \{\varphi_h \in X_h; \varphi_h(P_D) = 0, \forall D \in \mathcal{D}_h^{ext}\}.$$

Ainsi, on équipe l'espace X_h par le produit scalaire :

$$((N_h, V_h))_h = \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \int_K \nabla N_h \cdot \nabla V_h \, dx,$$

et la semi-norme :

$$\|N_h\|_{X_h}^2 := \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \int_K |\nabla N_h|^2 \, dx \text{ qui devient une norme sur } X_h^0.$$

4.2.1 Approximation de l'espace $H_0^1(\Omega)$

La famille $\{X_h^0\}_h$ est une approximation externe stable et convergente de $H_0^1(\Omega)$ au sens donné dans l'annexe B. Il suffit de prendre :

- $F = (L^2(\Omega))^{d+1}$, $\bar{w} : u \in H_0^1 \rightarrow \bar{w}u = \{u, \partial_1 u, \dots, \partial_d u\} \in F$,
- $\tilde{p}_h u_h = \{u_h, \partial_1 u_h, \dots, \partial_d u_h\}$, $r_h u \in X_h^0$ avec $u_h(P_D) = u(P_D)$.

4.2.2 Approximation de l'espace V

Étant donné le sous-espace V_h de l'espace X_h tel que :

$$V_h = \{u_h \in (X_h)^d, \text{div}_h(u_h) = 0\}, \quad (4.3)$$

où la divergence discrète est définie par la fonction étagée suivante,

$$\text{div}_h(u_h) = \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \eta_K 1_K \text{ avec } \eta_K = \frac{1}{|K|} \int_K \nabla \cdot u_h \, dx.$$

L'espace V_h est une approximation externe stable et convergente de l'espace V défini dans (3.9). En s'appuyant sur l'annexe B, il suffit de prendre :

- $F = (L^2(\Omega))^{d+1}$, $\bar{w} : u \in V \rightarrow \bar{w}u = \{u, \partial_1 u, \dots, \partial_d u\} \in F$,

- $\tilde{p}_h u_h = \{u_h, \partial_1 u_h, \dots, \partial_d u_h\}$, $r_h u = u_h \in V_h$ avec

$$u_h(P_D) = \frac{1}{|\sigma|} \int_{\sigma} u \, d\gamma. \quad (4.4)$$

Grâce au théorème des traces défini sur chaque élément K , cette intégrale existe et $r_h u \in X_h$ (Voir [3]). En plus, dès que $\nabla \cdot u_h$ est une constante sur chaque élément K , la condition concernant la divergence discrète de u_h dans (4.3) est équivalente à :

$$\nabla \cdot u_h = 0 \text{ dans } K, \forall K \in \mathcal{T}_h. \quad (4.5)$$

La formule de Green et (4.4) impliquent que pour tout $K \in \mathcal{T}_h$,

$$\int_K \nabla \cdot u_h \, dx = \sum_{\sigma \in \partial K} \int_{\sigma} u_h \cdot \eta \, d\gamma = \sum_{\sigma \in \partial K} \int_{\sigma} u \cdot \eta \, d\gamma = \int_K \nabla \cdot u \, dx = 0.$$

Cette dernière intégrale est nulle dès que $\nabla \cdot u = 0$ et donc $r_h u = u_h$ appartient à l'espace V_h .

4.2.3 Approximation des équations de Navier-Stokes

Dans cette partie, on propose un schéma d'éléments finis pour l'approximation des équations de Navier-Stokes modélisant le fluide incompressible. Le problème approché est :

$$u_h^0 = \text{la projection orthogonale de } u_0 \text{ sur } V_h \text{ dans } L^2(\Omega), \quad (4.6)$$

et on cherche $u_h^{n+1} \in V_h, \forall n \in \{0, \dots, \tilde{N}\}$ telle que :

$$\frac{1}{\Delta t} (u_h^{n+1} - u_h^n, v_h) + \nu((u_h^{n+1}, v_h))_h + b_h(u_h^n, u_h^{n+1}, v_h) = (g^n, v_h), \forall v_h \in V_h, \quad (4.7)$$

où le terme non linéaire $(u \cdot \nabla)u$ est approché par $b_h(u_h^n, u_h^{n+1}, v_h)$ et le second membre $g^n = -\tilde{N}_h^n \nabla \phi \in L^2(\Omega)$.

4.2.4 Approximation de la pression

La pression approchée est contenue implicitement dans l'équation (4.7). Dans le but de la présenter, on considère la forme linéaire suivante :

$$v_h \rightarrow \frac{1}{\Delta t} (u_h^{n+1} - u_h^n, v_h) + \nu((u_h^{n+1}, v_h))_h + b_h(u_h^n, u_h^{n+1}, v_h) - (g^n, v_h),$$

qui est définie dans l'espace X_h et qui s'annule dans l'espace V_h . En introduisant des multiplicateurs de Lagrange correspondants aux contraintes linéaires (4.5), on trouve à l'aide d'un théorème classique d'algèbre linéaire qu'il existe des nombres $\{\lambda_K\}_{K \in \mathcal{T}_h} \in \mathbb{R}$ tels que,

$$\frac{1}{\Delta t} (u_h^{n+1} - u_h^n, v_h) + \nu((u_h^{n+1}, v_h))_h + b_h(u_h^n, u_h^{n+1}, v_h) - (g^n, v_h) = \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \lambda_K \left(\int_K \nabla \cdot v_h \, dx \right), \forall v_h \in X_h.$$

On introduit la fonction p_h^n qui appartient à l'espace des fonctions étagées Y_h telle que :

$$p_h^n = \sum_{K \in \mathcal{T}_h} p_h^n(K) 1_K \text{ avec } p_h^n(K) = \frac{\lambda_K}{|K|},$$

et 1_K désigne la fonction caractéristique reliée à l'élément K .

Par conséquent, on a :

$$\frac{1}{\Delta t} (u_h^{n+1} - u_h^n, v_h) + \nu ((u_h^{n+1}, v_h))_h + b_h(u_h^n, u_h^{n+1}, v_h) - (p_h^n, \operatorname{div}_h v_h) = (g^n, v_h), \forall v_h \in X_h. \quad (4.8)$$

Remarque 11 *Le problème de l'approximation numérique des équations de Navier-Stokes n'est pas complètement résolu par la discrétisation (4.7) de ces équations. Actuellement, on a besoin d'une base explicite de l'espace approché V_h connue seulement en dimension deux (Voir [76]). Donc, on peut résoudre (4.7) en interprétant le problème de Navier-Stokes comme étant un problème variationnel avec des contraintes linéaires (4.5) et on résout l'équation (4.8) en utilisant un algorithme classique d'Uzawa.*

4.3 Schéma numérique du système Chimiotactisme-fluide

Cette section est consacrée à la discrétisation du modèle anisotrope chimiotactisme-fluide (3.1) sur des maillages généraux. Pour cela, on utilise le schéma d'Euler implicite en temps et on considère la méthode d'éléments finis non conformes en espace pour la discrétisation des termes diffusifs et de l'équation de Navier-Stokes. Les autres termes sont discrétisés au sens des volumes finis sur le maillage dual. On rappelle que le flux numérique $S(x)\chi(N)\nabla C \cdot \eta_{D,E}$ est approché par la fonction $G(N_D, N_E, \delta C_{D,E})$ dont les propriétés sont données au paragraphe 1.2.4.2 du premier chapitre.

On s'intéresse maintenant à la discrétisation de nouveaux termes de transport des cellules et du chimio-attractant par le fluide. Pour cela, on note l'approximation du flux $u \cdot \eta_{D,E}$ sur l'interface $\sigma_{D,E}$ par $u_{D,E}$. Par suite, on approche le flux $Nu \cdot \eta_{D,E}$ par une nouvelle fonction $G_1(N_D, N_E, u_{D,E})$ de convection numérique qui possède les mêmes propriétés de la fonction G . Ce nouveau flux convectif G_1 de type "upwind" est donné par :

$$G_1(N_D, N_E, u_{D,E}) = u_{D,E}^+ N_D - u_{D,E}^- N_E = u_{D,E} \overline{N_{D,E}}, \quad (4.9)$$

où $u_{D,E}^+$ et $u_{D,E}^-$ désignent respectivement les parties positives et négatives de $u_{D,E}$ (i.e. $u_{D,E}^+ = \max(u_{D,E}, 0)$ et $u_{D,E}^- = \max(-u_{D,E}, 0)$). En plus, $\overline{N_{D,E}} = N_D$ si $u_{D,E} \geq 0$ et $\overline{N_{D,E}} = N_E$ si $u_{D,E} \leq 0$.

Finalement, un schéma combiné volume fini-élément fini non conforme pour la discrétisation du modèle (3.1) est donné par l'algorithme itératif suivant :

4.3.1 Première étape : Système (4.2)

Supposons que la solution discrète $(N_D^n, C_D^n)_{D \in \mathcal{D}_h, n \in \{0, \dots, \tilde{N}\}}$ du modèle (4.1) à l'instant t_n est calculée par le système d'équations (4.13)-(4.14) défini ci-dessous. Dans cette première étape, on interprète le système (4.2) comme étant un problème variationnel avec des contraintes linéaires (4.5) dont la convergence de l'équation (4.8) est étudiée avec un algorithme classique d'Uzawa. Étant connus les éléments $\tilde{N}_h^n = \{N_D^n\}_{D \in \mathcal{D}_h}$, u_h^n et p_h^n à l'instant t_n , on cherche donc $u_h^{n+1} \in X_h$ et $p_h^{n+1} \in Y_h$ comme étant des limites de deux suites d'éléments :

$$u_h^{n+1,r} \in X_h \text{ et } p_h^{n+1,r} \in Y_h, \quad r = 0, 1, \dots, +\infty.$$

On commence l'algorithme par un élément $p_h^{n+1,0}$ arbitraire. Quand la vitesse $u_h^{n+1,r}$ est connue, on définit $u_h^{n+1,r+1}$ et $p_h^{n+1,r+1}$ par

$$\frac{1}{\Delta t}(u_h^{n+1,r+1} - u_h^n, v_h) + \nu((u_h^{n+1,r+1}, v_h))_h + b_h(u_h^n, u_h^{n+1,r+1}, v_h) - (p_h^{n,r+1}, \operatorname{div}_h v_h) = (g^n, v_h), \quad (4.10)$$

$\forall v_h \in X_h$ où $g^n = -\tilde{N}_h^n \nabla \phi \in L^2(\Omega)$ et

$$(p_h^{n+1,r+1} - p_h^{n,r}, q_h) + \rho(\operatorname{div}_h(u_h^{n+1,r+1}), q_h) = 0, \quad \forall q_h \in Y_h. \quad (4.11)$$

L'existence et l'unicité de la solution $u_h^{n+1,r+1}$ est une conséquence du théorème de projection et on peut observer que l'équation (4.11) définit explicitement $p_h^{n+1,r+1}$. Concernant la convergence de l'algorithme, on a la proposition suivante montrée dans [[75], ch. III, Proposition 6.7],

Proposition 16 *Si le nombre ρ satisfait*

$$0 < \rho < \frac{2\nu}{d}$$

alors, quand $r \rightarrow +\infty$, $u_h^{n+1,r+1}$ converge vers u_h^{n+1} dans X_h et $p_h^{n+1,r+1}$ converge vers p_h^{n+1} dans Y_h/\mathbb{R} .

4.3.2 Deuxième étape : Système (4.1)

Soit u_h^{n+1} la vitesse du fluide à l'instant t_{n+1} , calculée à la première étape. Par la suite, $\forall D \in \mathcal{D}_h$,

$$N_D^0 = \frac{1}{|D|} \int_D N_0(x) dx, \quad C_D^0 = \frac{1}{|D|} \int_D C_0(x) dx, \quad (4.12)$$

et pour tout $D \in \mathcal{D}_h$, $n \in \{0, 1, \dots, \tilde{N}\}$,

$$\begin{aligned} |D| \frac{N_D^{n+1} - N_D^n}{\Delta t} - \sum_{E \in \mathcal{D}_h} \mathcal{S}_{D,E} A(N_E^{n+1}) + \sum_{E \in \mathcal{N}(D)} G(N_D^{n+1}, N_E^{n+1}; \delta C_{D,E}^{n+1}) \\ + \sum_{E \in \mathcal{N}(D)} G_1(N_D^{n+1}, N_E^{n+1}; u_{D,E}^{n+1}) = f(N_D^{n+1}), \end{aligned} \quad (4.13)$$

$$|D| \frac{C_D^{n+1} - C_D^n}{\Delta t} - \sum_{E \in \mathcal{D}_h} \mathcal{M}_{D,E} C_E^{n+1} + \sum_{E \in \mathcal{N}(D)} G_1(C_D^{n+1}, C_E^{n+1}; u_{D,E}^{n+1}) = -k(C_D^{n+1}) N_D^n. \quad (4.14)$$

On rappelle que :

$$\mathcal{S}_{D,E} = - \sum_{K \in \mathcal{T}_h} (\mathcal{S}(x) \nabla \varphi_E, \nabla \varphi_D)_{0,K} \text{ et } \mathcal{M}_{D,E} = - \sum_{K \in \mathcal{T}_h} (M(x) \nabla \varphi_E, \nabla \varphi_D)_{0,K}. \quad (4.15)$$

Ainsi, $\delta C_{D,E}^{n+1}$ et $u_{D,E}^{n+1}$ désignent les approximations des flux $S(x) \nabla C \cdot \eta_{D,E}$ et $u \cdot \eta_{D,E}$ sur l'interface $\sigma_{D,E}$, respectivement,

$$\delta C_{D,E}^{n+1} = S_{D,E} (C_E^{n+1} - C_D^{n+1}) \text{ et } u_{D,E}^{n+1} = \int_{\sigma_{D,E}} u_h^{n+1} \cdot \eta_{D,E} d\gamma. \quad (4.16)$$

Définition 9 On définit deux solutions approchées au sens du schéma combiné volume fini-élément fini non conforme :

i) Une solution élément fini non conforme $(N_{h,\Delta t}, C_{h,\Delta t}, u_{h,\Delta t})$ comme étant une fonction linéaire par morceaux et continue aux barycentres des côtés intérieurs en espace et constante par morceaux en temps telle que :

$$(N_{h,\Delta t}(x, 0), C_{h,\Delta t}(x, 0), u_{h,\Delta t}(x, 0)) = (N_h^0(x), C_h^0(x), u_h^0(x)) \text{ pour } x \in \Omega,$$

$$(N_{h,\Delta t}(x, t), C_{h,\Delta t}(x, t), u_{h,\Delta t}(x, t)) = (N_h^{n+1}(x), C_h^{n+1}(x), u_h^{n+1}(x)) \text{ pour } x \in \Omega \text{ and } t \in]t_n, t_{n+1}],$$

où $N_h^{n+1} = \sum_{D \in \mathcal{D}_h} N_D^{n+1} \varphi_D$, $C_h^{n+1} = \sum_{D \in \mathcal{D}_h} C_D^{n+1} \varphi_D$ et $u_h^{n+1} = \sum_{D \in \mathcal{D}_h} u_h^{n+1}(P_D) \varphi_D$.

ii) Une solution volume fini $(\tilde{N}_{h,\Delta t}, \tilde{C}_{h,\Delta t}, \tilde{u}_{h,\Delta t})$ comme étant une fonction constante par morceaux en espace et en temps telle que :

$$(\tilde{N}_{h,\Delta t}(x, 0), \tilde{C}_{h,\Delta t}(x, 0), \tilde{u}_{h,\Delta t}(x, 0)) = (N_D^0, C_D^0, u_h^0(P_D)) \text{ pour } x \in D, D \in \mathcal{D}_h,$$

$$(\tilde{N}_{h,\Delta t}(x, t), \tilde{C}_{h,\Delta t}(x, t), \tilde{u}_{h,\Delta t}(x, t)) = (N_D^{n+1}, C_D^{n+1}, u_h^{n+1}(P_D)) \text{ pour } x \in D, D \in \mathcal{D}_h, t \in]t_n, t_{n+1}].$$

4.3.3 Résultats de convergence

Maintenant, on énonce les résultats de convergence sous l'hypothèse de transmissibilités positives (2.18) du chapitre 2 ($\mathcal{S}_{D,E} \geq 0, \forall D \in \mathcal{D}_h, E \in \mathcal{N}(D)$). Si cette hypothèse n'est pas vérifiée, on peut introduire une famille de schémas monotones pour corriger les flux diffusifs, similairement au section 2.6, afin de maintenir le principe de maximum discret et la convergence.

Pour le problème discret (4.6)-(4.7), on a le théorème de convergence suivant montré dans [75].

Théorème 6 (Convergence de l'équation de Navier-Stokes)

Supposons que $u_0 \in H, \nabla \cdot u_0 = 0$ p.p. sur Ω et $g \in L^2(0, T; H)$, pour tout $n \in \{0, \dots, \tilde{N}\}$. Alors :

1) Il existe une solution discrète unique $u_{h,\Delta t}$ du système (4.6)-(4.7) si $d = 2$ et il existe au

moins une solution si $d = 3$.

2) Les convergences suivantes sont vraies pour des sous-suites, ayant la même notation des suites, quand h et Δt tendent vers zéro :

$u_{h,\Delta t} \rightarrow u \in L^2(Q_T)$ fortement, $u_{h,\Delta t} \overset{*}{\rightharpoonup} u$ dans $L^\infty(0, T; L^2(\Omega))$ et $\tilde{p}_h u_{h,\Delta t} \rightharpoonup \bar{w}u$ dans $L^2(0, T; F)$.

Ensuite, on énonce le théorème principal de convergence.

Théorème 7 (Convergence du schéma combiné)

Supposons que les hypothèses (3.6) à (3.9) ainsi celles du Théorème 2 sont vérifiées. On considère $0 \leq N_0 \leq 1$, $C_0 \in L^\infty(\Omega)$, $C_0 \geq 0$, $u_0 \in L^\infty(\Omega)$, $\nabla \cdot u_0 = 0$ p.p. sur Ω et $g \in L^2(0, T; H)$. Alors,

1) Il existe une solution $(\tilde{N}_{h,\Delta t}, \tilde{C}_{h,\Delta t})$ du système discret (4.13)-(4.14) avec une condition initiale (4.12).

2) Pour toute suite $(h_m)_m$ qui décroît vers zéro, on peut extraire une sous-suite $(N_{h_m}, C_{h_m}, u_{h_m})$ qui converge p.p. sur Q_T vers une solution (N, C, u) du système chimiotactisme-fluide (3.1) au sens de la Définition 7.

4.4 Convergence

Cette section est consacrée à l'énoncé des propriétés discrètes de nouveaux termes dans notre schéma numérique ainsi à la démonstration détaillée du Théorème 7.

4.4.1 Propriétés discrètes du schéma

Concernant les flux diffusifs, on a les mêmes propriétés démontrées dans les lemmes 6 et 7. En plus, on démontre les Propositions suivantes :

Proposition 17 On peut écrire,

$$\sum_{E \in \mathcal{N}(D)} G_1(N_D^{n+1}, N_E^{n+1}, u_{D,E}^{n+1}) = - \sum_{E \in \mathcal{N}(D)} (u_{D,E}^{n+1})^- (N_E^{n+1} - N_D^{n+1}). \quad (4.17)$$

Preuve : Pour tout $n \in \{0, \dots, \tilde{N}\}$, la solution discrète u_h^{n+1} appartient à l'espace V_h défini dans (4.3). Alors, $\nabla \cdot u_h^{n+1} = 0$ pour tout $K \in \mathcal{T}_h$. Par conséquent,

$$\begin{aligned} \sum_{E \in \mathcal{N}(D)} ((u_{D,E}^{n+1})^+ - (u_{D,E}^{n+1})^-) &= \sum_{E \in \mathcal{N}(D)} u_{D,E}^{n+1} = \sum_{E \in \mathcal{N}(D)} \int_{\sigma_{D,E}} u_h^{n+1} \cdot \eta_{D,E} d\gamma = \int_D \nabla \cdot u_h^{n+1} dx \\ &= \int_{D \cap K} \nabla \cdot u_h^{n+1} dx + \int_{D \cap L} \nabla \cdot u_h^{n+1} dx = 0. \end{aligned} \quad (4.18)$$

En ajoutant et en retranchant le terme $(u_{D,E}^{n+1})^- N_D^{n+1}$ dans l'équation (4.9) et en utilisant (4.18), on peut facilement achever la preuve du Lemme 17.

Corollaire 1 La Proposition 3 du chapitre 2 reste vraie.

Proposition 18 Si $u_0 \in L^\infty(\Omega)$ alors

$$\|u_0\|_{L^\infty(\Omega)} - (T+1)\|\nabla\phi\|_{L^\infty(\Omega)} \leq u_h^k \leq \|u_0\|_{L^\infty(\Omega)} + (T+1)\|\nabla\phi\|_{L^\infty(\Omega)},$$

pour tout $k \in \{0, \dots, \tilde{N}\}$ avec $k\Delta t \leq T$.

Preuve : En effet, le problème variationnel (4.7) s'écrit :

$$\frac{1}{\Delta t} \int_{\Omega} (u_h^{n+1} - u_h^n) v_h \, dx + ((\nabla u_h^{n+1} \cdot \nabla v_h))_h + b_h(u_h^n, u_h^{n+1}, v_h) \, dx = - \int_{\Omega} \tilde{N}_h^n \nabla \phi v_h \, dx. \quad (4.19)$$

Tout d'abord, on introduit le vecteur $\bar{H}^n = (H_i^n)_{i=1, \dots, d}$ tel que pour tout $i = \{1, \dots, d\}$, la fonction discrète H_i^n constante par morceaux en espace est notée par $(H_D^{n+1})_{D \in \mathcal{D}_h, n \in \{0, \dots, \tilde{N}\}}$.

$$\forall n \in \{0, \dots, \tilde{N} + 1\}, \forall D \in \mathcal{D}_h, H_D^n = \|\nabla\phi\|_{L^\infty(\Omega)} n \Delta t + \|u_0\|_{L^\infty(\Omega)}. \quad (4.20)$$

Notre but maintenant est de montrer que (4.20) est une super-solution de (4.19).

En effet,

$$\begin{cases} H_D^0 \equiv H^0 = \|u_0\|_{L^\infty(\Omega)}, \\ \frac{1}{\Delta t} (H_D^{n+1} - H_D^n) = \|\nabla\phi\|_{L^\infty(\Omega)}. \end{cases} \quad (4.21)$$

Montrons par induction que : $u_h^k \leq \bar{H}^k, \forall k \in \{0, \dots, \tilde{N} + 1\}$. Pour $k = 0, u_h^0 \leq \bar{H}^0 = \|u_0\|_{L^\infty(\Omega)}$. Supposons que $u_h^n \leq \bar{H}^n$ et montrons par contradiction que $u_h^{n+1} \leq \bar{H}^{n+1}$. En soustrayant les équations (4.19) et (4.21), on obtient :

$$\begin{aligned} \frac{1}{\Delta t} \int_{\Omega} (u_h^{n+1} - \bar{H}^{n+1}) v_h \, dx + ((\nabla u_h^{n+1} \cdot \nabla v_h))_h + b_h(u_h^n, u_h^{n+1}, v_h) \, dx &= \frac{1}{\Delta t} \int_{\Omega} (u_h^n - \bar{H}^n) v_h \, dx + \\ &\int_{\Omega} [-\nabla\phi - \|\nabla\phi\|_{L^\infty(\Omega)}] v_h \, dx \end{aligned}$$

Ensuite, on choisit $v_h = (u_h^{n+1} - \bar{H}^{n+1})^+ = \max(u_h^{n+1} - \bar{H}^{n+1}, 0) \in V_h$ comme une fonction test. On remarque que pour $u_h^{n+1} > \bar{H}^{n+1}$, on a $b_h(u_h^n, u_h^{n+1}, (u_h^{n+1} - \bar{H}^{n+1})^+) = b_h(u_h^n, (u_h^{n+1} - \bar{H}^{n+1})^+, (u_h^{n+1} - \bar{H}^{n+1})^+) = 0$. Par la suite, on peut facilement déduire que :

$$0 \leq \frac{1}{\Delta t} \int_{\Omega} \left((u_h^{n+1} - \bar{H}^{n+1})^+ \right)^2 \, dx \leq 0.$$

Alors $(u_h^{n+1} - \bar{H}^{n+1})^+ = 0$ et donc $u_h^{n+1} \leq \bar{H}^{n+1}$. Ainsi,

$$\sup_{\tilde{N} \in \mathbb{N}} \left(\max_{0 \leq n \leq \tilde{N}} \bar{H}^{n+1} \right) \leq \|u_0\|_{L^\infty(\Omega)} + (T+1)\|\nabla\phi\|_{L^\infty(\Omega)}.$$

En outre, il suffit de prendre $H_D^n = -\|\nabla\phi\|_{L^\infty(\Omega)} n \Delta t + \|u_0\|_{L^\infty(\Omega)}$ au lieu de (4.20) et de suivre les mêmes lignes pour démontrer l'autre inégalité de cette proposition.

On peut maintenant énoncer le corollaire suivant.

Corollaire 2 Pour tout $n \in \{0, \dots, \tilde{N}\}$,

$$|u_{D,E}^{n+1}| \leq \int_{\sigma_{D,E}} |u_h^{n+1} \cdot \eta_{D,E}| \leq C_u |\sigma_{D,E}|, \quad (4.22)$$

où C_u est une constante dépendant des données initiales et détaillée ainsi dans [75] dans le cadre continu.

4.4.2 Estimations discrètes a priori

Proposition 19 Soit $(N_D^{n+1}, C_D^{n+1})_{D \in \mathcal{D}_h, n \in \{0, \dots, \tilde{N}\}}$ une solution du schéma (4.12)-(4.14). Alors, il existe une constante $C_1 > 0$, dépendant de $\|C_0\|_\infty$, α , d et de la borne de G telle que

$$\frac{1}{2} \sum_{D \in \mathcal{D}_h} |D| |C_D^{\tilde{N}+1}|^2 + C_M \sum_{n=0}^{\tilde{N}-1} \Delta t \|C_h^{n+1}\|_{X_h}^2 \leq C_1. \quad (4.23)$$

En plus, il existe une constante $C_2 > 0$ telle que,

$$\sum_{n=0}^{\tilde{N}-1} \Delta t \|A_h(N_h^{n+1})\|_{X_h}^2 \leq C_2. \quad (4.24)$$

Par conséquent, il existe une constante $C_3 > 0$, dépendant de Ω , T , $\|C_0\|_\infty$, α , d et de la constante résultant des propriétés de G telle que

$$\sum_{n=0}^{\tilde{N}-1} \Delta t \sum_{D \in \mathcal{D}_h} \sum_{E \in N(D)} S_{D,E} |A(N_D^{n+1}) - A(N_E^{n+1})|^2 + \sum_{n=0}^{\tilde{N}-1} \Delta t \sum_{D \in \mathcal{D}_h} \sum_{E \in N(D)} S_{D,E} |C_D^{n+1} - C_E^{n+1}|^2 \leq C_3. \quad (4.25)$$

Preuve : Au début, montrons l'assertion (4.23). On multiplie l'équation (4.14) par $\Delta t C_D^{n+1}$ et on additionne sur tous les volumes $D \in \mathcal{D}_h$ et pour tout $n \in \{0, \dots, \tilde{N}\}$. Par conséquent, on obtient l'équation suivante : $E_{2,1} + E_{2,2} + E_{2,3} = E_{2,4}$.

D'après l'inégalité suivante $(a-b)a \geq \frac{a^2-b^2}{2}$, pour tout $a, b \in \mathbb{R}$, on a :

$$\begin{aligned} E_{2,1} &= \sum_{n=0}^{\tilde{N}-1} \sum_{D \in \mathcal{D}_h} |D| (C_D^{n+1} - C_D^n) C_D^{n+1} \\ &\geq \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\tilde{N}-1} \Delta t \sum_{D \in \mathcal{D}_h} |D| (|C_D^{n+1}|^2 - |C_D^n|^2) = \frac{1}{2} \sum_{D \in \mathcal{D}_h} |D| (|C_D^{\tilde{N}+1}|^2 - |C_D^0|^2). \end{aligned}$$

L'estimation (2.23) implique que :

$$E_{2,2} = - \sum_{n=0}^{\tilde{N}-1} \Delta t \sum_{D \in \mathcal{D}_h} C_D^{n+1} \sum_{E \in \mathcal{D}_h} \mathcal{M}_{D,E} C_E^{n+1} \geq C_M \sum_{n=0}^{\tilde{N}-1} \Delta t \|C_h^{n+1}\|_{X_h}^2.$$

$$E_{2,3} = \sum_{n=0}^{\tilde{N}-1} \Delta t \sum_{D \in \mathcal{D}_h} C_D^{n+1} \sum_{E \in \mathcal{N}(D)} u_{D,E}^{n+1} \bar{C}_{D,E}^{n+1} = \sum_{n=0}^{\tilde{N}-1} \Delta t \sum_{D \in \mathcal{D}_h} C_D^{n+1} \sum_{E \in \mathcal{N}(D)} G_1(C_D^{n+1}, C_E^{n+1}; u_{D,E}^{n+1})$$

En utilisant (4.22), on majore le terme $E_{2,3}$ de la façon suivante :

$$\begin{aligned} E_{2,3} &\leq MC_u \sum_{n=0}^{\tilde{N}-1} \Delta t \sum_{n=0}^{\tilde{N}-1} \Delta t \sum_{D \in \mathcal{D}_h} \sum_{E \in \mathcal{N}(D)} |\sigma_{D,E}| |C_D^{n+1} - C_E^{n+1}| \leq C_u \frac{M}{\varepsilon} \left(\sum_{n=0}^{\tilde{N}-1} \Delta t \sum_{D \in \mathcal{D}_h} \sum_{E \in \mathcal{N}(D)} |\sigma_{D,E}| d_{D,E} \right) \\ &+ C_u \frac{M}{\varepsilon} \left(\sum_{n=0}^{\tilde{N}-1} \Delta t \sum_{D \in \mathcal{D}_h} \sum_{E \in \mathcal{N}(D)} \frac{|\sigma_{D,E}|}{d_{D,E}} |C_D^{n+1} - C_E^{n+1}|^2 \right) \leq C_u T \frac{M}{\varepsilon} |\Omega| + C_u M \varepsilon \sum_{n=0}^{\tilde{N}-1} \Delta t \|C_h\|_{X_h}^2. \end{aligned}$$

Ainsi, on a que

$$E_{2,4} = - \sum_{n=0}^{\tilde{N}-1} \Delta t \sum_{D \in \mathcal{D}_h} |D| k(C_D^{n+1}) N_D^n \leq c_k M T |\Omega|.$$

En regroupant les inégalités précédentes et en choisissant $\varepsilon = \frac{1}{2} \frac{C_M}{MC_u}$, on peut facilement déduire l'assertion (4.23). Ensuite, on montre l'assertion (4.25). En multipliant l'équation (4.13) par $\Delta t A(N_D^{n+1})$ et en additionnant sur tous les volumes $D \in \mathcal{D}_h$ et pour tout $n \in \{0, \dots, \tilde{N}\}$, on a :

$$E_{1,1} + E_{1,2} + E_{1,3} + E_{1,4} = E_{1,5}.$$

La convexité de la fonction $\mathcal{B}(s) = \int_0^s A(r) dr$ ($\mathcal{B}''(s) = a(s) \geq 0$) entraîne l'inégalité suivante : $(a-b)A(a) \geq \mathcal{B}(a) - \mathcal{B}(b)$. Alors,

$$E_{1,1} = \sum_{n=0}^{\tilde{N}-1} \sum_{D \in \mathcal{D}_h} |D| (N_D^{n+1} - N_D^n) A(N_D^{n+1}) \quad (4.26)$$

$$\geq \sum_{n=0}^{\tilde{N}-1} \sum_{D \in \mathcal{D}_h} |D| (\mathcal{B}(N_D^{n+1}) - \mathcal{B}(N_D^n)) = \sum_{D \in \mathcal{D}_h} |D| (\mathcal{B}(N_D^{\tilde{N}+1}) - \mathcal{B}(N_D^0)).$$

La propriété discrète (2.21) implique que

$$E_{1,2} = - \sum_{n=0}^{\tilde{N}-1} \Delta t \sum_{D \in \mathcal{D}_h} A(N_D^{n+1}) \sum_{E \in \mathcal{D}_h} \mathcal{S}_{D,E} A(N_E^{n+1}) = \sum_{n=0}^{\tilde{N}-1} \Delta t \sum_{D \in \mathcal{D}_h} \sum_{E \in \mathcal{N}(D)} \mathcal{S}_{D,E} \left(A(N_E^{n+1}) - A(N_D^{n+1}) \right)^2. \quad (4.27)$$

La propriété de coercivité (2.23) entraîne que

$$E_{1,2} \geq C_S \sum_{n=0}^{\tilde{N}-1} \Delta t \|A_h(N_h^{n+1})\|_{X_h}^2. \quad (4.28)$$

Ensuite, la conservativité du flux numérique G implique que :

$$\begin{aligned} E_{1,3} &= \sum_{n=0}^{\tilde{N}-1} \Delta t \sum_{D \in \mathcal{D}_h} A(N_D^{n+1}) \sum_{E \in \mathcal{N}(D)} G(N_D^{n+1}, N_E^{n+1}; \delta C_{D,E}^{n+1}) \\ &= \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\tilde{N}-1} \Delta t \sum_{D \in \mathcal{D}_h} \sum_{E \in \mathcal{N}(D)} G(N_D^{n+1}, N_E^{n+1}; \delta C_{D,E}^{n+1}) \left(A(N_D^{n+1}) - A(N_E^{n+1}) \right), \end{aligned}$$

et d'après les propriétés du flux G et de la définition (2.17), on a

$$|E_{1,3}| \leq \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\tilde{N}-1} \Delta t \sum_{D \in \mathcal{D}_h} \sum_{E \in \mathcal{N}(D)} |\mathcal{S}_{D,E}| |C_D^{n+1} - C_E^{n+1}| |A(N_D^{n+1}) - A(N_E^{n+1})|.$$

En utilisant l'inégalité de Young et grâce à la positivité de transmissibilités $\mathcal{S}_{D,E}$, on a

$$|E_{1,3}| \leq \frac{1}{2\varepsilon} \sum_{n=0}^{\tilde{N}-1} \Delta t \sum_{D \in \mathcal{D}_h} \sum_{E \in \mathcal{N}(D)} \mathcal{S}_{D,E} (C_D^{n+1} - C_E^{n+1})^2 + \frac{\varepsilon}{2} \sum_{n=0}^{\tilde{N}-1} \Delta t \sum_{D \in \mathcal{D}_h} \sum_{E \in \mathcal{N}(D)} \mathcal{S}_{D,E} \left(A(N_D^{n+1}) - A(N_E^{n+1}) \right)^2.$$

D'après les inégalités (2.10) et (2.25),

$$|E_{1,3}| \leq \frac{C}{\varepsilon} \sum_{n=0}^{\tilde{N}-1} \Delta t \|C_h^{n+1}\|_{X_h}^2 + C\varepsilon \sum_{n=0}^{\tilde{N}-1} \Delta t \|A_h(N_h^{n+1})\|_{X_h}^2, \quad (4.29)$$

pour une constante C positive. D'ailleurs,

$$\begin{aligned} E_{1,4} &= \sum_{n=0}^{\tilde{N}-1} \Delta t \sum_{D \in \mathcal{D}_h} A(N_D^{n+1}) \sum_{E \in \mathcal{N}(D)} u_{D,E}^{n+1} \bar{N}_{D,E}^{n+1} \\ &= \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\tilde{N}-1} \Delta t \sum_{D \in \mathcal{D}_h} \sum_{E \in \mathcal{N}(D)} G_1(N_D^{n+1}, N_E^{n+1}; u_{D,E}^{n+1}) \left(A(N_D^{n+1}) - A(N_E^{n+1}) \right). \end{aligned}$$

D'après la Proposition 3 du chapitre 2 et l'assertion (4.22), on obtient

$$\begin{aligned} |E_{1,4}| &\leq \frac{C_u}{2} \sum_{n=0}^{\tilde{N}-1} \Delta t \sum_{D \in \mathcal{D}_h} \sum_{E \in \mathcal{N}(D)} |\sigma_{D,E}| |A(N_D^{n+1}) - A(N_E^{n+1})| \\ &\leq \varepsilon \frac{C_u}{2} \left(\sum_{n=0}^{\tilde{N}-1} \Delta t \sum_{D \in \mathcal{D}_h} \sum_{E \in \mathcal{N}(D)} \frac{|\sigma_{D,E}|}{d_{D,E}} |A(N_D^{n+1}) - A(N_E^{n+1})|^2 \right) + \frac{C_u}{\varepsilon} \left(\sum_{n=0}^{\tilde{N}-1} \Delta t \sum_{D \in \mathcal{D}_h} \sum_{E \in \mathcal{N}(D)} |\sigma_{D,E}| d_{D,E} \right). \end{aligned}$$

Il en résulte du Lemme (2.10) que

$$|E_{1,4}| \leq \varepsilon C \sum_{n=0}^{\tilde{N}-1} \Delta t \|A_h(N_h^{n+1})\|_{X_h}^2 + C'. \quad (4.30)$$

Finalement, la continuité Lipschitz de la fonction f et la majoration $N_D^{n+1} \leq 1$ entraînent que

$$|E_{1,5}| = \left| \sum_{n=0}^{\tilde{N}-1} \Delta t \sum_{D \in \mathcal{D}_h} |D| N_D^{n+1} f(N_D^{n+1}) \right| \leq L_f T |\Omega|. \quad (4.31)$$

On peut facilement obtenir l'estimation (4.24) en regroupant les inégalités (4.26), (4.28), (4.29), (4.30) et (4.31). Par conséquent, on peut facilement en déduire l'estimation (4.25) en utilisant le Lemme 2.10 du chapitre 2.

4.4.3 Existence d'une solution discrète

L'existence d'une solution discrète du schéma combiné est donné par la proposition suivante.

Proposition 20 *Le problème discret (4.12)-(4.14) possède au moins une solution.*

Preuve : On a la même preuve de la Proposition 5 du chapitre 2. Il nous suffit en plus de noter la nouvelle expression suivante :

$$\begin{aligned} \mathcal{M}(\mathcal{W}) = & \left(|D| \frac{A^{-1}(W_D^{n+1}) - A^{-1}(W_D^n)}{\Delta t} - \sum_{E \in \mathcal{N}(D)} \mathcal{S}_{D,E}(W_E^{n+1} - W_D^{n+1}) \right. \\ & + \sum_{E \in \mathcal{N}(D)} G(A^{-1}(W_D^{n+1}), A^{-1}(W_E^{n+1}); \delta C_{D,E}^{n+1}) + \sum_{E \in \mathcal{N}(D)} G_1(A^{-1}(W_D^{n+1}), A^{-1}(W_E^{n+1}); u_{D,E}^{n+1}) \\ & \left. - f(A^{-1}(W_D^{n+1})) \right)_{D \in \mathcal{D}_h}, \end{aligned}$$

et de détailler l'estimation du terme supplémentaire,

$$\begin{aligned} & \sum_{D \in \mathcal{D}_h} \sum_{E \in \mathcal{N}(D)} G_1(A^{-1}(W_D^{n+1}), A^{-1}(W_E^{n+1}); u_{D,E}^{n+1}) (A(N_E^{n+1}) - A(N_D^{n+1})) \\ & \leq \sum_{D \in \mathcal{D}_h} \sum_{E \in \mathcal{N}(D)} |u_{D,E}^{n+1}| |A(N_E^{n+1}) - A(N_D^{n+1})| \\ & \leq C_u \left(\sum_{D \in \mathcal{D}_h} \sum_{E \in \mathcal{N}(D)} \frac{|\sigma_{D,E}|}{d_{D,E}} (A(N_E^{n+1}) - A(N_D^{n+1}))^2 \right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{D \in \mathcal{D}_h} \sum_{E \in \mathcal{N}(D)} |\sigma_{D,E}| d_{D,E} \right)^{\frac{1}{2}} \\ & \leq C_u |\Omega|^{\frac{1}{2}} \|\mathcal{W}\|_{X_h}. \end{aligned}$$

4.4.4 Convergence

Cette partie du chapitre est dédiée à la preuve de la convergence en s'appuyant sur des estimations de translatés en espace démontrées dans le Lemme 9 du chapitre 2 et de translatés en temps démontrées ci-dessous. Après, on utilise le même Lemme 10 et le critère de compacité de Kolmogorov, pour en déduire la convergence démontrée au théorème 3 du chapitre 2. Dans ce qui suit, on note seulement les lignes supplémentaires du nouveau terme convectif dans la construction des estimations de translatés en temps.

Lemme 14 (*Estimations de translatés en temps*)

Il existe une constante $C_2 > 0$ dépendant de Ω , T et A telle que :

$$\iint_{\Omega \times [0, T-\tau]} \left(A(\tilde{N}_h(t + \tau, x)) - A(\tilde{N}_h(t, x)) \right)^2 dx dt \leq C_2(\tau + \Delta t), \forall \tau \in [0, T].$$

Preuve : On suit les mêmes lignes de la preuve du Lemme 8 du chapitre 2. Ici, on va seulement détailler les techniques concernant le nouveau terme convectif.

$$\begin{aligned} \mathcal{B}_2(t) &:= - \sum_{t \leq n\Delta t \leq t+\tau} \Delta t \int_0^{T-\tau} \chi(n, t) \sum_{D \in \mathcal{D}_h} \sum_{E \in \mathcal{N}(D)} G_1(N_D^{n+1}, N_E^{n+1}; u_{D,E}^{n+1}) (A(U_D^{n_1(t)}) - A(U_D^{n_0(t)})) \\ &= - \sum_{t \leq n\Delta t \leq t+\tau} \Delta t \int_0^{T-\tau} \chi(n, t) \sum_{D \in \mathcal{D}_h} \sum_{E \in \mathcal{N}(D)} \left(G_1(N_D^{n+1}, N_E^{n+1}; u_{D,E}^{n+1}) (A(U_E^{n_1(t)}) - A(U_D^{n_1(t)})) \right. \\ &\quad \left. + G_1(N_D^{n+1}, N_E^{n+1}; u_{D,E}^{n+1}) (A(U_E^{n_0(t)}) - A(U_D^{n_0(t)})) \right). \end{aligned} \quad (4.32)$$

On utilise l'inégalité de Young, $|G_1(a, b, c)| \leq C(|a| + |b|)|c|$, l'inégalité (4.22) et la Proposition 3 du chapitre 2 pour en déduire que

$$\mathcal{B}_2(t) \leq C'(\mathcal{B}_3(t) + \mathcal{B}_4(t))$$

pour une constante $C' > 0$ avec

$$\begin{aligned} \mathcal{B}_3(t) &= C_u \sum_{n=0}^{\tilde{N}-1} \Delta t \int_0^{T-\tau} \chi(n, t) \sum_{\sigma_{D,E} \in \mathcal{F}_h^{int}} |\sigma_{D,E}| \left| A(N_E^{n_1(t)}) - A(N_D^{n_1(t)}) \right| dt, \\ \mathcal{B}_4(t) &= C_u \sum_{n=0}^{\tilde{N}-1} \Delta t \int_0^{T-\tau} \chi(n, t) \sum_{\sigma_{D,E} \in \mathcal{F}_h^{int}} |\sigma_{D,E}| \left| A(N_E^{n_0(t)}) - A(N_D^{n_0(t)}) \right| dt. \end{aligned}$$

Par conséquent,

$$\begin{aligned} \mathcal{B}_3(t) &\leq C_u \sum_{n=0}^{\tilde{N}-1} \Delta t \int_0^{T-\tau} \chi(n, t) \left(\sum_{\sigma_{D,E} \in \mathcal{F}_h^{int}} \frac{|\sigma_{D,E}|}{d_{D,E}} (A(N_E^{n_1(t)}) - A(N_D^{n_1(t)}))^2 \right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{\sigma_{D,E} \in \mathcal{F}_h^{int}} |\sigma_{D,E}| d_{D,E} \right)^{\frac{1}{2}} dt, \\ &\leq \tau C_u C' |\Omega|^{\frac{1}{2}} = \tau C. \end{aligned}$$

De même, le terme $\mathcal{B}_4(t) \leq \tau C$ pour une constante $C > 0$. Cela conclut la preuve du Lemme.

4.4.5 Passage à la limite

On s'intéresse dans cette partie au passage de la solution discrète à la limite vers une solution faible du problème continu. Pour cela, montrons que le triplet limite (N, C, u) est une solution

faible au sens de la Définition 7. Au début, on introduit l'espace

$$\Psi := \{\psi \in C^{2,1}(\bar{\Omega} \times [0, T]), \psi(\cdot, T) = 0\}. \quad (4.33)$$

Après, on multiplie l'équation (4.13) par $\Delta t \psi(P_D, t_{n+1})$ et on somme sur tous les volumes $D \in \mathcal{D}_h$ et tous les $n \in \{0, \dots, \tilde{N} - 1\}$ pour obtenir :

$$T_T + T_D + T_C + \tilde{T}_C = T_R.$$

Ensuite, on recherche successivement les limites de ces termes quand h et Δt tendent vers zéro. Les termes T_T , T_D et T_C sont détaillés dans le chapitre 2 donc il suffit maintenant de tester la convergence des autres termes.

Terme de transport par le fluide : Montrons que

$$\tilde{T}_C = \sum_{n=0}^{\tilde{N}-1} \Delta t \sum_{D \in \mathcal{D}_h} \sum_{E \in \mathcal{N}(D)} G_1(N_D^{n+1}, N_E^{n+1}, u_{D,E}^{n+1}) \psi_D^{n+1} \xrightarrow{h, \Delta t \rightarrow 0} - \iint_{Q_T} N(x, t) u(x, t) \cdot \nabla \psi(x, t) dx dt.$$

Pour chaque couple de volumes voisins D et E , on pose :

$$N_{D,E}^{n+1} = \min(N_D^{n+1}, N_E^{n+1}), \quad (4.34)$$

et en utilisant la consistance du flux G_1 , on introduit :

$$\tilde{T}_C^* = \sum_{n=0}^{\tilde{N}-1} \Delta t \sum_{D \in \mathcal{D}_h} \sum_{E \in \mathcal{N}(D)} N_{D,E}^{n+1} u_{D,E}^{n+1} \psi_D^{n+1}.$$

Le diamant construit des centres des arêtes voisins P_D , P_E reliés à l'interface $\sigma_{D,E}$ du maillage dual est noté par $T_{D,E} \subset K_{D,E}$. Alors, on introduit

$$\overline{N}_h \Big|_{]t_n, t_{n+1}] \times T_{D,E}} := \max(N_D^{n+1}, N_E^{n+1}), \quad \underline{N}_h \Big|_{]t_n, t_{n+1}] \times T_{D,E}} := \min(N_D^{n+1}, N_E^{n+1}).$$

En utilisant la monotonie de A et grâce aux estimations (2.9) et (4.24), on a

$$\begin{aligned} \int_0^T \int_{\Omega} |A(\overline{N}_h) - A(\underline{N}_h)|^2 &\leq \sum_{n=0}^{\tilde{N}-1} \Delta t \sum_{D \in \mathcal{D}_h} \sum_{E \in \mathcal{N}(D)} |T_{D,E}| |A(N_D^{n+1}) - A(N_E^{n+1})|^2 \\ &\leq \sum_{n=0}^{\tilde{N}-1} \Delta t \sum_{D \in \mathcal{D}_h} \sum_{E \in \mathcal{N}(D)} (\text{diam}(K_{D,E}))^2 |A(N_D^{n+1}) - A(N_E^{n+1})|^2 \leq Ch^{4-d} \xrightarrow{h \rightarrow 0} 0, \end{aligned}$$

avec $d = 2$ ou 3 . Comme A^{-1} est continue, on déduit qu'en termes de sous-suites, on a :

$$|\overline{N}_h - \underline{N}_h| \xrightarrow{h \rightarrow 0} 0 \text{ p.p. sur } Q_T. \quad (4.35)$$

En plus, $\underline{N}_h \leq \tilde{N}_h \leq \overline{N}_h$ et $\tilde{N}_h \xrightarrow{h \rightarrow 0} N$ p.p. sur Q_T . Montrons tout d'abord que

$$\tilde{T}_C^* \longrightarrow \sum_{n=0}^{\tilde{N}-1} \Delta t \sum_{D \in \mathcal{D}_h} \sum_{E \in \mathcal{N}(D)} \int_{\sigma_{D,E}} N u_h^{n+1} \cdot \eta_{D,E} \psi(x, t_{n+1}) d\gamma(x). \quad (4.36)$$

Pour cela, on ajoute et on retranche $N\psi(P_D, t_{n+1})u_{D,E}^{n+1}$ et $N_{D,E}^{n+1} \int_{\sigma_{D,E}} u_h^{n+1} \cdot \eta_{D,E} \psi(x, t_{n+1})$ à \tilde{T}_C^* . Par suite, on obtient :

$$T_C = T_{C_1} + T_{C_2} + T_{C_3},$$

avec,

$$T_{C_2} = \sum_{n=0}^{\tilde{N}-1} \Delta t \sum_{D \in \mathcal{D}_h} N\psi(x, t_{n+1}) \sum_{E \in \mathcal{N}(D)} u_{D,E}^{n+1} = 0 \text{ grâce à (4.18),}$$

$$T_{C_3} = \sum_{n=0}^{\tilde{N}-1} \Delta t \sum_{D \in \mathcal{D}_h} \sum_{E \in \mathcal{N}(D)} N_{D,E}^{n+1} \int_{\sigma_{D,E}} u_h^{n+1} \cdot \eta_{D,E} \psi(x, t_{n+1}) d\gamma(x) = 0,$$

en effet, on a seulement besoin de remarquer que le terme $u_{\psi;D,E}^{n+1} = \int_{\sigma_{D,E}} u_h^{n+1} \cdot \eta_{D,E} \psi(x, t_{n+1}) d\gamma(x)$ qui apparaît deux fois sur chaque côté intérieur de T_{C_2} est conservatif ($u_{\psi;D,E}^{n+1} = -u_{\psi;E,D}^{n+1}$) et que $N_{D,E}^{n+1} = N_{E,D}^{n+1}$ par définition. De plus,

$$T_{C_1} = \sum_{n=0}^{\tilde{N}-1} \Delta t \sum_{D \in \mathcal{D}_h} \sum_{E \in \mathcal{N}(D)} (N_{D,E}^{n+1} - N) \left(\psi(P_D, t_{n+1}) u_{D,E}^{n+1} - \int_{\sigma_{D,E}} u_h^{n+1} \cdot \eta_{D,E} \psi(x, t_{n+1}) d\gamma(x) \right),$$

et l'inégalité de Cauchy-Schwarz impliquent que $T_{C_1}^2 \leq T_{C_4} T_{C_5}$ avec

$$T_{C_4} = \iint_{Q_T} (\underline{N}_h - N)^2 dx dt \xrightarrow{h, \Delta t \rightarrow 0} 0 \text{ grâce au théorème de convergence dominée de Lebesgue,}$$

$$\begin{aligned} T_{C_5} &= \sum_{n=0}^{\tilde{N}-1} \Delta t \sum_{D \in \mathcal{D}_h} \sum_{E \in \mathcal{N}(D)} \left(\int_{\sigma_{D,E}} u_h^{n+1} \cdot \eta_{D,E} \left(\psi(P_D, t_{n+1}) - \psi(x, t_{n+1}) \right) d\gamma(x) \right)^2 \\ &\Rightarrow |T_{C_5}| \leq C_{2,\psi}^2 h^2 C_u^2 \sum_{n=0}^{N-1} \Delta t \sum_{D \in \mathcal{D}_h} \sum_{E \in \mathcal{N}(D)} |\sigma_{D,E}|^2 \leq C_{2,\psi}^2 h^2 C_u^2 |\Omega| T \xrightarrow{h, \Delta t \rightarrow 0} 0. \end{aligned}$$

Par suite, on a

$$T_{C_1} \xrightarrow{h, \Delta t \rightarrow 0} 0.$$

Le théorème de la divergence et la propriété $\nabla \cdot (f\vec{A}) = f(\nabla \cdot \vec{A}) + \vec{A} \cdot \nabla f$ impliquent que,

$$\sum_{n=0}^{\tilde{N}-1} \Delta t \sum_{D \in \mathcal{D}_h} N \sum_{E \in \mathcal{N}(D)} \int_{\sigma_{D,E}} u_h^{n+1} \cdot \eta_{D,E} \psi(x, t_{n+1}) d\gamma = \sum_{n=0}^{\tilde{N}-1} \Delta t \sum_{D \in \mathcal{D}_h} \int_D \nabla \cdot (N u_h^{n+1}) \psi(x, t_{n+1}) dx$$

$$= \sum_{n=0}^{\tilde{N}-1} \Delta t \sum_{D \in \mathcal{D}_h} \int_D N u_h^{n+1} \cdot \nabla \psi(x, t_{n+1}) dx + \sum_{n=0}^{\tilde{N}-1} \Delta t \sum_{D \in \mathcal{D}_h} N \int_D (\nabla \cdot u_h^{n+1}) \psi(x, t_{n+1}) dx. \quad (4.37)$$

Comme $\nabla \cdot u_h^{n+1} = 0$ alors il suffit de montrer maintenant que

$$\sum_{n=0}^{\tilde{N}-1} \Delta t \sum_{D \in \mathcal{D}_h} \int_D N u_h^{n+1} \cdot \nabla \psi(x, t_{n+1}) dx \xrightarrow{h, \Delta t \rightarrow 0} - \iint_{Q_T} N(x, t) u(x, t) \cdot \nabla \psi(x, t) dx dt.$$

On introduit

$$T_{C_6} = \int_0^T \int_{\Omega} N u_h^{n+1}(x) \cdot (\nabla \psi(x, t_{n+1}) - \nabla \psi(x, t)) dx dt \xrightarrow{h, \Delta t \rightarrow 0} 0.$$

En effet, $|\nabla \psi(x, t_{n+1}) - \nabla \psi(x, t)| \leq g(\Delta t)$ et $|T_{C_6}| \leq g(\Delta t) C_u h$. Et

$$T_{C_7} = \int_0^T \int_{\Omega} N(x, t) (u(x, t) - u_h^{n+1}(x)) \cdot \nabla \psi(x, t) dx dt \rightarrow 0,$$

car u_h^{n+1} converge faiblement vers u dans $L^2(Q_T)$, $|\nabla \psi(x, t)| \leq C_{2,\psi}$ et N appartient à $L^2(Q_T)$.

En regroupant les convergences (4.36) et (4.37), on obtient que

$$\tilde{T}_C^* \xrightarrow{h, \Delta t \rightarrow 0} - \iint_{Q_T} N(x, t) u(x, t) \cdot \nabla \psi(x, t) dx dt.$$

Pour conclure, il suffit de démontrer encore que :

$$\lim_{h \rightarrow 0} |\tilde{T}_C - \tilde{T}_C^*| = 0.$$

En effet, Les propriétés de G_1 impliquent que :

$$\begin{aligned} |G_1(N_D^{n+1}, N_E^{n+1}, u_{D,E}^{n+1}) - N_{D,E}^{n+1} u_{D,E}^{n+1}| &= |G_1(N_D^{n+1}, N_E^{n+1}, u_{D,E}^{n+1}) - G_1(N_{D,E}^{n+1}, N_{D,E}^{n+1}, u_{D,E}^{n+1})| \\ &\leq 2|N_D^{n+1} - N_{D,E}^{n+1}| |u_{D,E}^{n+1}| \leq 2C_u |\overline{N}_h - \underline{N}_h| |\sigma_{D,E}|. \end{aligned}$$

D'après (4.35) et le théorème de convergence dominée de Lebesgue, on peut déduire que :

$$\begin{aligned} |\tilde{T}_C - \tilde{T}_C^*| &\leq 2C_u \sum_{n=0}^{N-1} \Delta t \sum_{D \in \mathcal{D}_h} \sum_{E \in \mathcal{N}(D)} |\overline{N}_h - \underline{N}_h| |\sigma_{D,E}| |\psi_E^{n+1} - \psi_D^{n+1}| \\ &\leq 2C_u C_\psi h |\Omega|^{\frac{1}{2}} T^{\frac{1}{2}} \left(\iint_{Q_T} |\overline{N}_h - \underline{N}_h|^2 dx dt \right)^{\frac{1}{2}} \xrightarrow{h, \Delta t \rightarrow 0} 0. \end{aligned}$$

Terme de réaction : Montrons maintenant que :

$$T_R = \sum_{n=0}^{\tilde{N}-1} \Delta t \sum_{D \in \mathcal{D}_h} |D| f(N_D^{n+1}) \psi(P_D, t_{n+1}) \xrightarrow{h, \Delta t \rightarrow 0} \int_0^T \int_{\Omega} f(N(x, t)) \psi(x, t) dx dt.$$

Pour cela, on introduit :

$$T_{R_1} = \sum_{n=0}^{\tilde{N}-1} \Delta t \sum_{D \in \mathcal{D}_h} f(N_D^{n+1}) \int_D (\psi(P_D, t_{n+1}) - \psi(x, t)) dx dt \xrightarrow{h, \Delta t \rightarrow 0} 0,$$

en effet, $|\psi(P_D, t_{n+1}) - \psi(x, t)| \leq \tilde{C}_\psi(h + \Delta t)$ et $|T_{R_1}| \leq \tilde{C}_\psi L_f(h + \Delta t)|\Omega|T$.

$$T_{R_2} = \sum_{n=0}^{\tilde{N}-1} \Delta t \sum_{D \in \mathcal{D}_h} \int_D (f(N_D^{n+1}) - f(N)) \psi(x, t) dx dt \xrightarrow{h, \Delta t \rightarrow 0} 0,$$

en effet, $|T_{R_2}| \leq C_{1,\psi} L_f \int_0^T \int_\Omega |\tilde{N}_{h,\Delta t}(x, t) - N(x, t)| dx dt$ et $\tilde{N}_{h,\Delta t}$ converge fortement vers N dans $L^2(Q_T) \hookrightarrow L^1(Q_T)$.

De même, on multiplie l'équation (4.14) par $\Delta t \psi(P_D, t_{n+1})$ et on somme sur tous les volumes $D \in \mathcal{D}_h$ et tous les $n \in \{0, \dots, \tilde{N} - 1\}$ pour obtenir :

$$T_T + T_D + \tilde{T}_C = T_V.$$

Pour cette équation, il nous reste seulement à montrer le passage à la limite du terme T_V . Dans d'autres termes, on va montrer que :

$$T_V = \sum_{n=0}^{\tilde{N}-1} \Delta t \sum_{D \in \mathcal{D}_h} |D| k(C_D^{n+1}) N_D^n \psi(P_D, t_{n+1}) \xrightarrow{h, \Delta t \rightarrow 0} \int_0^T \int_\Omega k(C(x, t)) N(x, t) \psi(x, t) dx dt.$$

De nouveau, on introduit :

$$T_{V_1} = \sum_{n=0}^{\tilde{N}-1} \Delta t \sum_{D \in \mathcal{D}_h} k(C_D^{n+1}) N_D^n \int_D (\psi(P_D, t_{n+1}) - \psi(x, t)) dx dt \xrightarrow{h, \Delta t \rightarrow 0} 0,$$

en effet, $|\psi(P_D, t_{n+1}) - \psi(x, t)| \leq \tilde{C}_\psi(h + \Delta t)$ et $|T_{V_1}| \leq \tilde{C}_\psi L_k M(h + \Delta t)|\Omega|T$.

$$T_{V_2} = \sum_{n=0}^{\tilde{N}-1} \Delta t \sum_{D \in \mathcal{D}_h} \int_D k(C_D^{n+1}) (N_D^n - N) \psi(x, t) dx dt \xrightarrow{h, \Delta t \rightarrow 0} 0,$$

en effet, $|T_{V_2}| \leq M C_{1,\psi} L_k \int_0^T \int_\Omega |\tilde{N}_{h,\Delta t}(x, t) - N(x, t)| dx dt$ et $\tilde{N}_{h,\Delta t}$ converge fortement vers N dans $L^2(Q_T) \hookrightarrow L^1(Q_T)$.

$$T_{V_3} = \sum_{n=0}^{\tilde{N}-1} \Delta t \sum_{D \in \mathcal{D}_h} \int_D (k(C_D^{n+1}) - k(C)) N \psi(x, t) dx dt \xrightarrow{h, \Delta t \rightarrow 0} 0,$$

en effet, $|T_{V_3}| \leq (\int_0^T \int_\Omega |\psi(k(C_D^{n+1}) - k(C(x, t)))|^2 dx dt) (\int_0^T \int_\Omega |N(x, t)|^2 dx dt)$ et le théorème de convergence dominé de Lebesgue appliqué à $\psi k(\tilde{C}_h)$ impliquent la convergence désirée.

Finalement, on conclut que le triplet limite (N, C, u) est une solution faible du problème continu au sens de la Définition 7 en utilisant la densité de l'ensemble Ψ dans $\mathcal{W} = \{\phi \in L^2(0, T; H^1(\Omega)), \frac{\partial \phi}{\partial t} \in L^2(Q_T), \phi(\cdot, T) = 0\}$.

4.5 Simulations Numériques

Dans cette section, on présente des tests numériques montrant le comportement dynamique de solutions du système chimiotactisme-fluide complet suivant :

$$\left\{ \begin{array}{l} \partial_t N - D \nabla \cdot (S(x) a(N) \nabla N) + c \nabla \cdot (S(x) \chi(N) \nabla C) + c_1 (u \cdot \nabla N) = 0, \\ \partial_t C - d \nabla \cdot (M(x) \nabla C) + c_2 (u \cdot \nabla C) = \alpha N - \beta C, \\ \partial_t u - \nu \Delta u + \nabla P = -N \nabla \phi, \\ \nabla \cdot u = 0, \end{array} \right. \quad (4.38)$$

avec $A(N) = \int_0^N a(N) dx = \int_0^N N(1-N) dx = (\frac{N^2}{2} - \frac{N^3}{3})$, $\chi(N) = N(1-N)^2$, $\alpha = 0.01$, $\beta = 0.05$ et D, c, c_1, c_2, d sont des constantes positives. Ce système est discrétisé par la méthode combinée selon l'algorithme détaillé dans la section 4.3.

4.5.1 Test 0 : Influence de la force gravitationnelle

Ce test vise à mettre en évidence la force gravitationnelle exercée par les cellules sur un fluide. On rappelle que $\nabla \phi = V_c (\rho_c - \rho_{fl}) g \vec{z}$ où V_c est le volume d'une cellule, ρ_c est la densité d'une cellule, ρ_{fl} est la densité du fluide et $g = 9.8 m/s^2$ est l'accélération gravitationnelle. En fait, le vecteur $-\nabla \phi$ n'est autre que la résultante des forces de la pesanteur ($\vec{P} = -\rho_c V_c g \vec{z}$) et de la poussée d'Archimède ($\vec{F} = \rho_{fl} V_c g \vec{z}$). Dans nos tests, les cellules sont plus denses que le fluide et par conséquent un flux de gravitation est créé dans le sens du vecteur $-\vec{z}$.

On considère le carré unité comme étant le domaine en espace et on effectue les simulations numériques sur le maillage donné dans la Figure 4.4(b). Les conditions initiales sont définies par régions dans la Figure 4.2(a). On choisit $dt = 0.0005$, $D = 0.05$, $c = 0.5$, $c_1 = 20$, $c_2 = 0$, $d = 10^{-4}$, $\nu = 10^{-2}$ et des tenseurs isotropes ($S(x) = M(x) = Id$).

Dans ce test, on démarre avec des composantes nulles de vitesse du fluide. Si la force gravitationnelle est nulle ($\nabla \phi = (0, 0)$), on rejoint le cas d'un fluide au repos du chapitre 2 et on observe clairement la diffusion et la convection de toutes les cellules vers le chimio-attractant dans la Figure 4.1. D'ailleurs, si on considère la force gravitationnelle $\nabla \phi = (0, 100)$, on remarque dans la Figure 4.2 qu'une partie de cellules est attirée par les substances chimiques tandis que l'autre partie de cellules nagent en bas sous l'influence d'un flux gravitationnel dominant créé.

4.5.2 Test 1 : Chimiotaxie isotrope dans un fluide monodirectionnel

Afin de visualiser le comportement chimiotaxique des cellules dans un fluide monodirectionnel, on calcule la solution du système discret associé au problème (4.38) en supposant que le fluide

démarré à une vitesse horizontale ($u_2 = 0$) et que le chimio-attractant n'est pas transporté par le fluide ($c_2 = 0$). Les conditions au bord associées au fluide sont de Dirichlet homogène (non-glisement). Les simulations s'effectuent sur le maillage donné dans la Figure 4.4(b) et les conditions initiales sont définies par régions dans la Figure 4.3(a). La densité initiale des cellules est définie par $N_0(x, y) = 0.1$ dans le carré $(x, y) \in ([0.15, 0.25] \times [0.45, 0.55])$ et 0 ailleurs. La concentration initiale du chimio-attractant est définie par $C_0(x, y) = 5$ dans le carré $(x, y) \in ([0.65, 0.75] \times [0.45, 0.55])$ et 0 ailleurs. Les composantes initiales de la vitesse sont définies par $u_1(x, y) = 5$ et $u_2(x, y) = 0$ dans le carré $(x, y) \in ([0.1, 0.4] \times [0.3, 0.7])$ et 0 ailleurs. En plus, on considère dans ce test des tenseurs diffusifs isotropes ($S(x) = M(x) = Id$) et on choisit $dt = 0.0005$, $D = 0.009$, $c = 0.1$, $c_1 = 1$, $c_2 = 0$, $d = 10^{-4}$, $\nu = 10^{-3}$ et $\nabla\phi = (0, 10)$. Dans la Figure 4.3, on remarque l'effet de la gravitation subie par les cellules (plus denses que le fluide) qui a tourné un peu la direction du fluide vers le bas mais à l'instant $t = 20$, les cellules transportées par le fluide sont complètement présentes dans la zone du chimio-attractant avant de suivre la direction gravitationnelle verticale.

4.5.3 Test 2 : Cavité entraînée

On considère dans ce test le problème standard de l'écoulement d'un fluide dans une cavité bidimensionnelle carrée dont la paroi supérieure est défilante à vitesse constante $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et ceci impose le déplacement du fluide à cette vitesse constante sur le bord situé en haut du domaine. C'est l'un des plus importants tests en mécanique de fluide et cela tient principalement à deux raisons : la simplicité de sa géométrie et la très grande richesse de phénomènes physiques pouvant être observés dans cet écoulement.

4.5.3.1 Problème de Stokes

En fait, on ne connaît pas la solution analytique du problème suivant :

$$\begin{cases} \partial_t u - \nu \Delta u + \nabla P = 0 & \text{dans } \Omega, \\ \nabla \cdot u = 0 & \text{dans } \Omega, \\ u = \begin{pmatrix} u_1 \\ 0 \end{pmatrix} & \text{dans } \partial\Omega, \end{cases} \quad (4.39)$$

avec une viscosité $\nu = 5 \times 10^{-3}$ et

$$u_1(x, y) = \begin{cases} 1 & \text{si } y = 1, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Pour cela, on discrétise ce système en utilisant les éléments finis non conformes, on considère un maillage non-structuré d'un carré unité et son maillage dual associé (voir la Figure 4.4(a)). Ainsi, on néglige la pression à l'état initial et on choisit $dt = 0.0005$ comme étant un pas constant en temps. Les caractéristiques du maillage sont données dans le Tableau 4.1 et l'évolution en temps du champ de vitesse est clairement montrée dans les Figures 4.4(c) et 4.4(d). Nous observons

bien le mouvement rotatif et l'accrochage du fluide à la paroi supérieure.

4.5.3.2 Chimiotaxie anisotrope dans une cavité entraînée

On s'intéresse maintenant à la dynamique du comportement chimiotaxique anisotrope des cellules, modélisé par le système (4.38), dans une cavité entraînée. Pour cela, on considère les tenseurs suivants :

$$S = \begin{bmatrix} 8 & -7 \\ -7 & 20 \end{bmatrix}, M = Id.$$

Les simulations de ce test s'effectuent sur le maillage donné dans la Figure 4.4(a) et les conditions initiales de la densité cellulaire et de la concentration du chimio-attractant sont définies par régions dans les Figures 4.5(a) et 4.5(b). Les valeurs initiales du champ de vitesse et de la pression sont supposées nulles dans tout le domaine. Ensuite, on choisit $dt = 0.0005$, $D = 0.001$, $c = 0.1$, $c_1 = 1$, $c_2 = 0$, $d = 2 \times 10^{-4}$, $\nu = 5 \times 10^{-3}$ et $\nabla\phi = (0, 1)$. Dans la Figure 4.5, on observe l'évolution en temps de la densité cellulaire ainsi que l'évolution en temps des profils du chimio-attractant et du vitesse de fluide. A l'instant $t = 0.5$, les cellules commencent à se diffuser d'une façon anisotrope selon la matrice S . Ensuite, elles sont influencées par le champ de vitesse à l'instant $t = 4$ et elles sont transportées par ce champ. A un certain temps et sous l'influence des signaux chimiques, une partie de cellules s'attirent vers la zone du chimio-attractant tandis que l'autre partie reste transportée par le fluide.

4.5.4 Test 3 : Chimiotaxie anisotrope dans un fluide oblique

Motivé par la dynamique de la population cellulaire dans un fluide qui transporte à la fois les cellules et les substances chimiques, on considère le système (4.38) avec des constantes c_1 et c_2 non nulles. Tout d'abord, on considère les tenseurs suivants :

$$S = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 5 \end{bmatrix}, M = Id.$$

Les simulations de ce test s'effectuent sur le maillage donné dans la Figure 4.4(b). Les conditions initiales de la densité cellulaire et de la concentration du chimio-attractant sont définies par régions dans la Figure 4.6(a). Ensuite, on choisit $dt = 0.0005$, $D = 0.001$, $d = 10^{-3}$, $\nu = 5 \times 10^{-3}$ et $\nabla\phi = (0, 10)$.

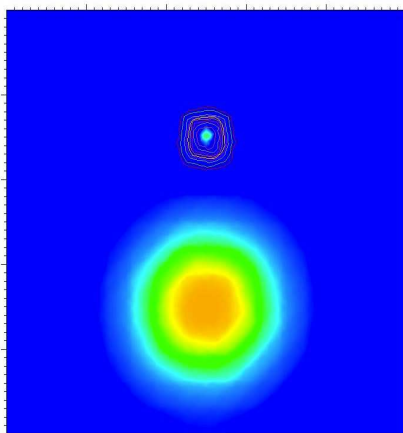
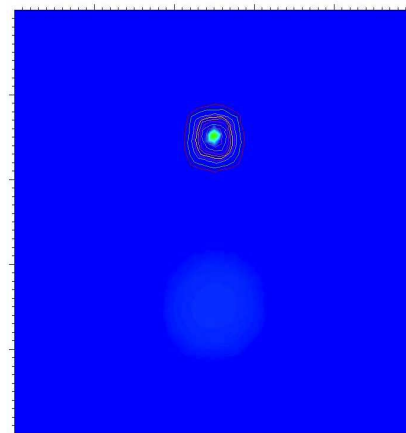
Dans le but de montrer l'influence du fluide sur le comportement chimiotaxique des cellules, on exerce tout d'abord ce test dans un fluide au repos et on observe dans la Figure 4.7 la diffusion anisotrope des cellules et leur attraction par les substances chimiques. Ainsi, on a construit les courbes d'évolution de la densité cellulaire N en temps dans la Figure 4.7(e) aux points $(0.26, 0.29)$ et $(0.71, 0.82)$ situés dans les zones inférieures et supérieures du chimio-attractant.

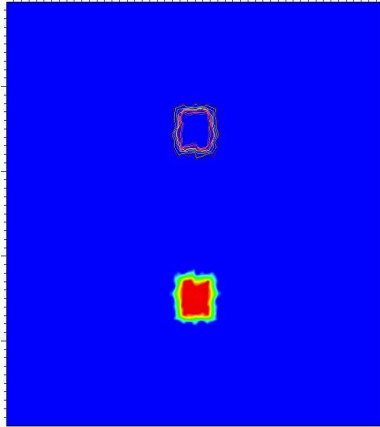
Ensuite, on prend en considération la dynamique d'un flux oblique qu'on l'initialise dans la Figure 4.6(b). Ainsi, la quantité des substances chimiques, présente dans la région inférieure du domaine, est aussi transportée dès le début par le fluide ($c_2 \neq 0$). Comme premier cas, on

Nombre de triangles	Nombres de diamants	$\max(\text{diam}(D))$	$\max(\text{diam}(K))$
224	352	3.75×10^{-3}	5.47×10^{-3}

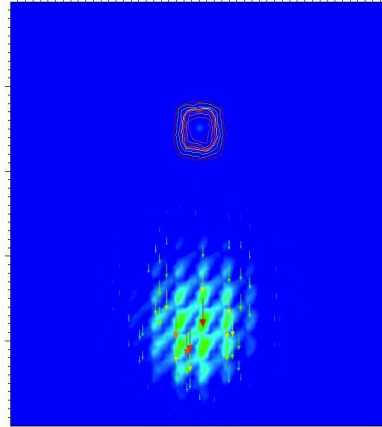
TABLE 4.1 – Caractéristiques du maillage .

suppose que la convection par le fluide est plus forte que celle par le chimio-attractant. Pour cela, on prend $1 = c < c_1 = 4$ et on choisit $c_2 = 10^{-4}$. Par conséquent, on visualise dans la Figure 4.8 le transport rapide des cellules vers la zone supérieure du chimio-attractant avant qu'elles soient attirées vers la zone inférieure. En plus, on constate facilement l'influence d'un fluide sur la chimiotaxie anisotrope en comparant les courbes des Figures 4.7(e) et 4.8(e). Comme deuxième cas, on inverse les coefficients en choisissant $4 = c > c_1 = 1$ et $c_2 = 10^{-4}$. Maintenant, la convection des cellules par le fluide est plus faible que l'attraction par le chimio-attractant. On remarque dans la Figure 4.9 l'attraction d'une partie de cellules par les substances chimiques dans la région inférieure et l'autre partie est transportée par le fluide vers la zone supérieure. Pour le troisième cas, on considère $c = 4$ et $c_1 = c_2 = 0.01$. On observe dans la Figure 4.10 que la totalité des cellules est attirée par le chimio-attractant de la zone inférieure afin de nager ensemble dans le fluide vers la zone supérieure des substances chimiques.

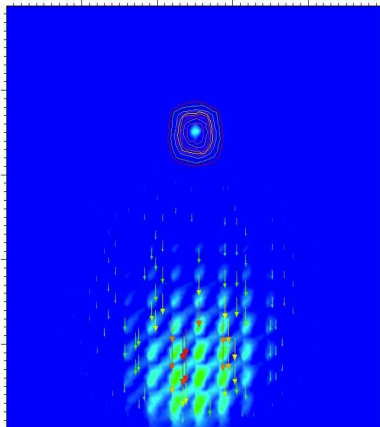
(a) $0 \leq N(t = 1.25) \leq 0.0596$, $0 \leq C(t = 1.25) \leq 9.249$.(b) $0 \leq N(t = 1.9) \leq 0.3549$, $0 \leq C(t = 1.9) \leq 8.676$.FIGURE 4.1 – Test 0- Sans force gravitationnelle ($\nabla\phi = (0, 0)$).



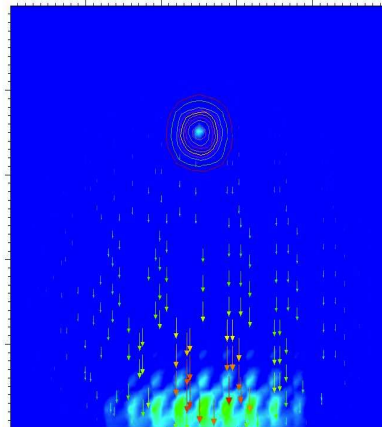
(a) Conditions initiales : $N_0(x, y) = 0.5$ pour $(x, y) \in \{0.45, 0.55\} \times \{0.65, 0.75\}$ et $C_0(x, y) = 10$ pour $(x, y) \in \{0.45, 0.55\} \times \{0.25, 0.35\}$.



(b) $0 \leq N(t = 0.75) \leq 0.2329$, $0.87 \leq C(t = 0.75) \leq 8.72$.

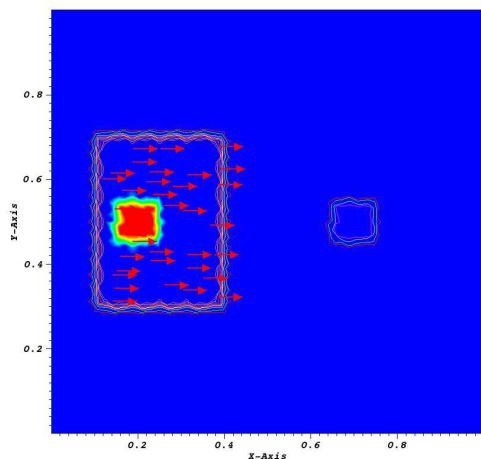


(c) $0 \leq N(t = 1.5) \leq 0.1974$, $0.8220 \leq C(t = 1.5) \leq 8.220$.



(d) $0 \leq N(t = 4) \leq 0.3141$, $0.6039 \leq C(t = 4) \leq 6.039$.

FIGURE 4.2 – Test 0- Effet de la force gravitationnelle ($\nabla\phi = (0, 100)$).



(a) Conditions initiales.

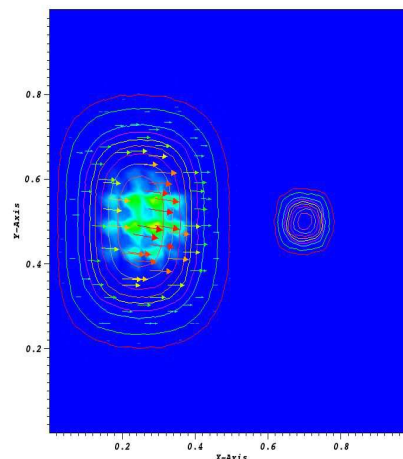
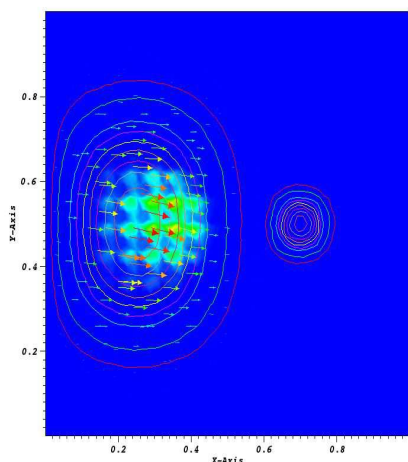
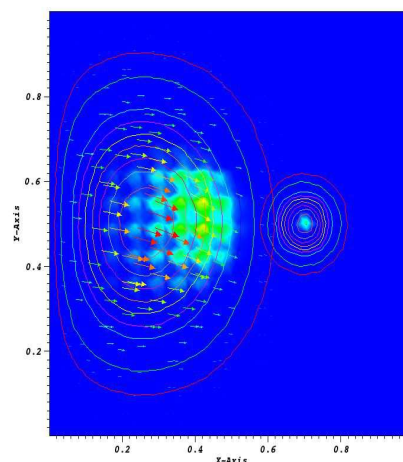
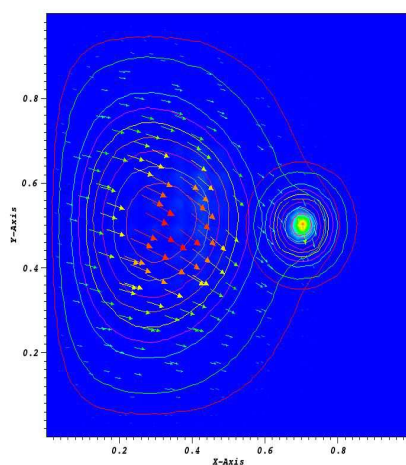
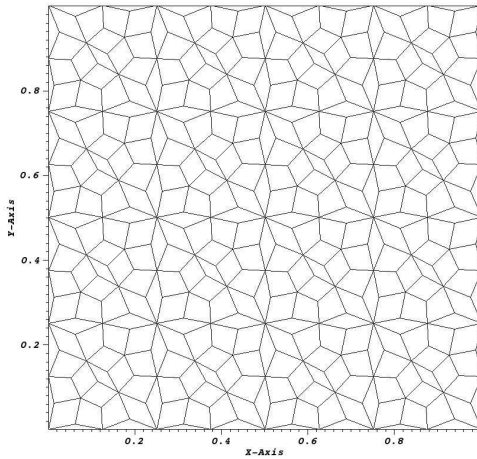
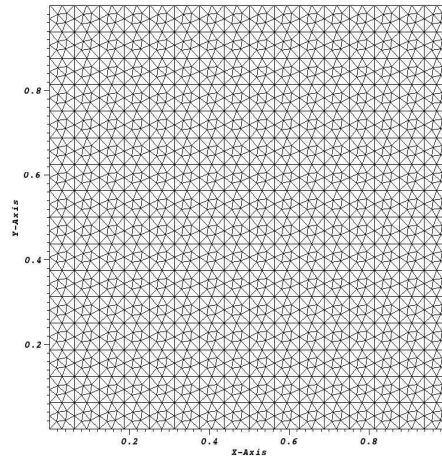
(b) A l'instant $t = 2$.(c) A l'instant $t = 7.5$.(d) A l'instant $t = 10$.(e) A l'instant $t = 15$.

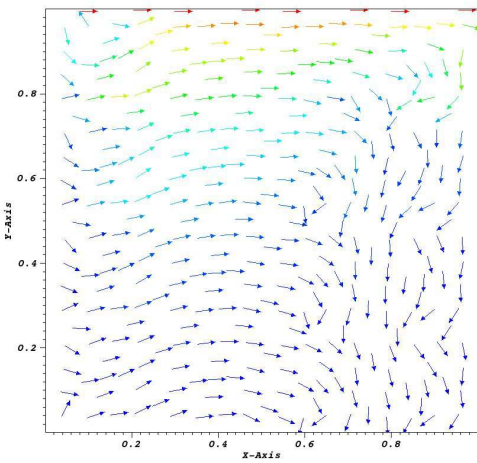
FIGURE 4.3 – Test 1- Évolution en temps de la densité cellulaire dans un fluide monodirectionnel.



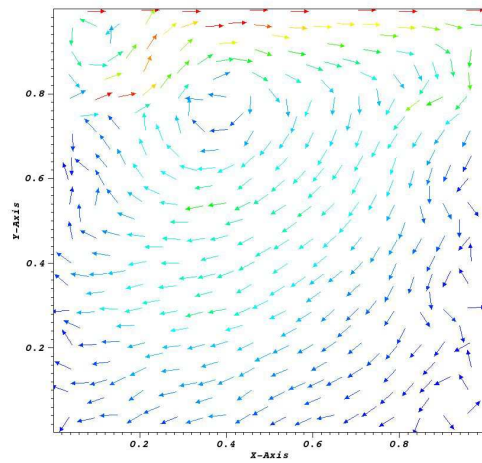
(a) Maillage du domaine en espace (352 diamants).



(b) Maillage \mathcal{T}_h FVCA5 (3584 triangles).

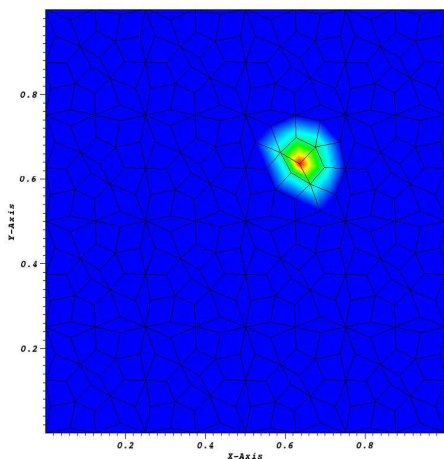


(c) Lignes du champ de vitesse à $t = 20$.

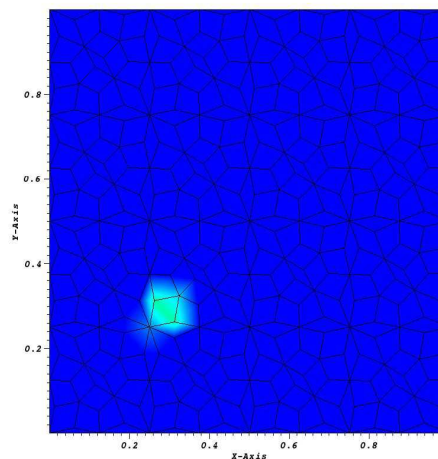


(d) Lignes du champ de vitesse à $t = 50$.

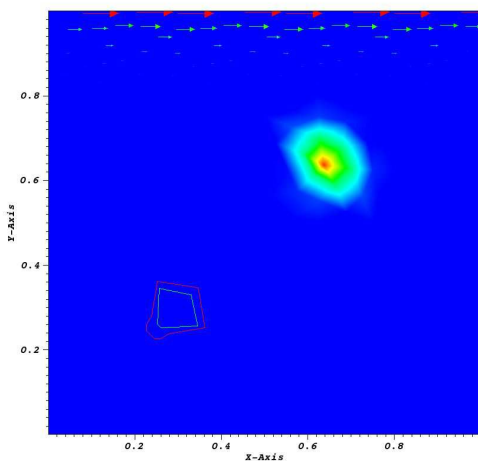
FIGURE 4.4 – Test 2- Cavité entraînée.



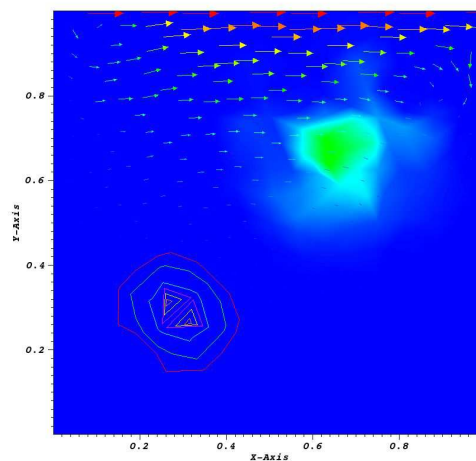
(a) Densité cellulaire initiale $N_0(x, y) = 0.1$ dans le carré $(x, y) \in \{0.6, 0.7\} \times \{0.6, 0.7\}$ et 0 ailleurs.



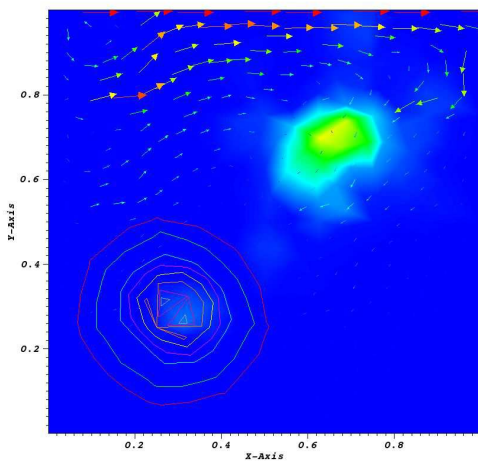
(b) Concentration du chimio-attractant initial $C_0(x, y) = 20$ dans le carré $(x, y) \in \{0.25, 0.35\} \times \{0.25, 0.35\}$ et 0 ailleurs.



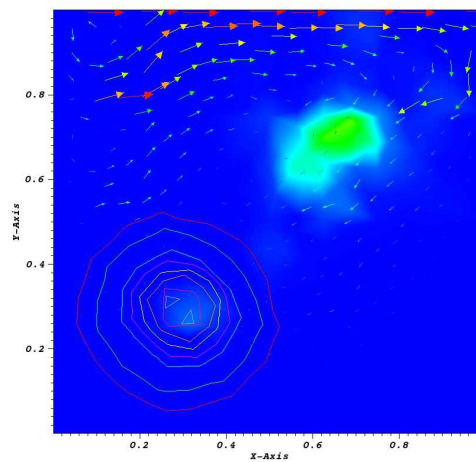
(c) $0 \leq N(t = 0.5) \leq 0.077$.



(d) $0 \leq N(t = 10) \leq 0.034$.



(e) $0 \leq N(t = 25) \leq 0.028$.



(f) $0 \leq N(t = 35) \leq 0.036$.

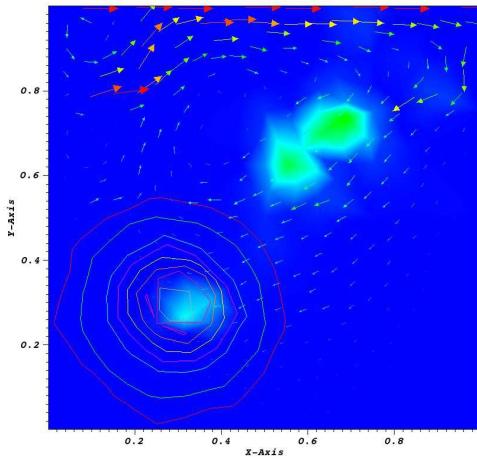
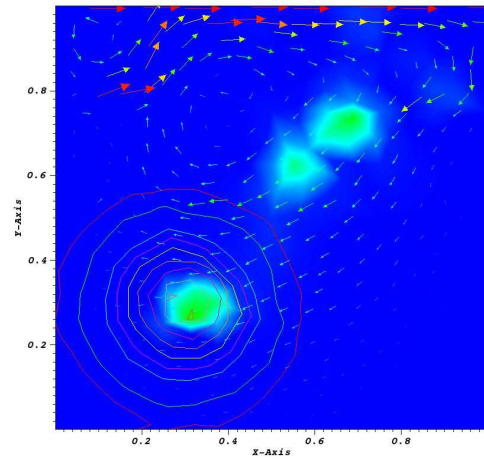
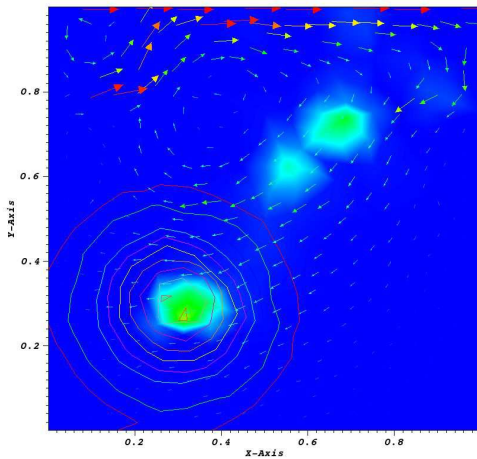
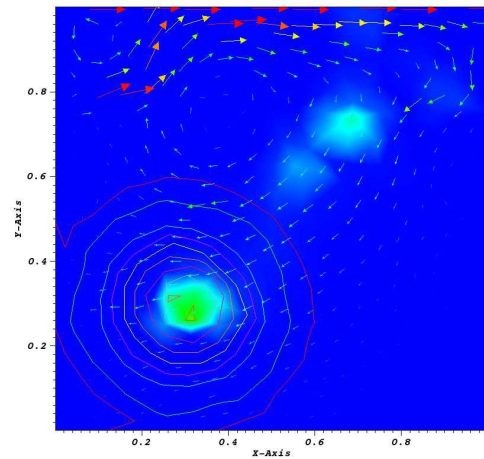
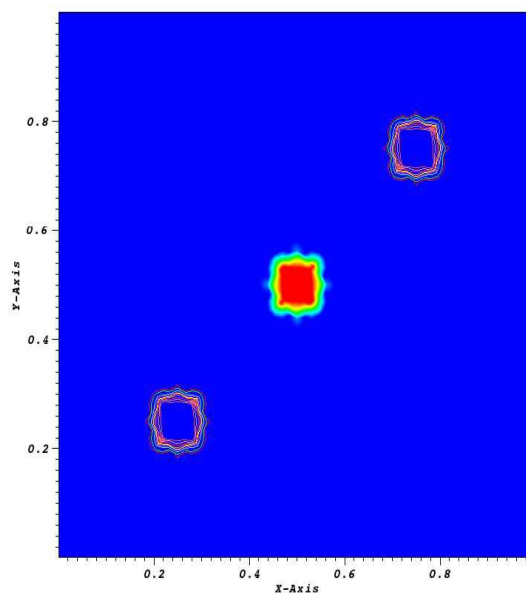
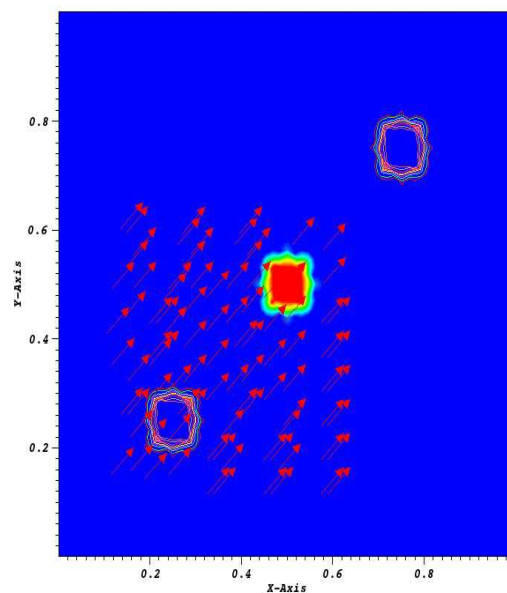
(g) $0 \leq N(t = 40) \leq 0.03852$.(h) $0 \leq N(t = 42.5) \leq 0.03$.(i) $0 \leq N(t = 45) \leq 0.03457$.(j) $0 \leq N(t = 50) \leq 0.04591$.

FIGURE 4.5 – Test 2- Évolution en temps de la densité cellulaire dans une cavité entraînée.

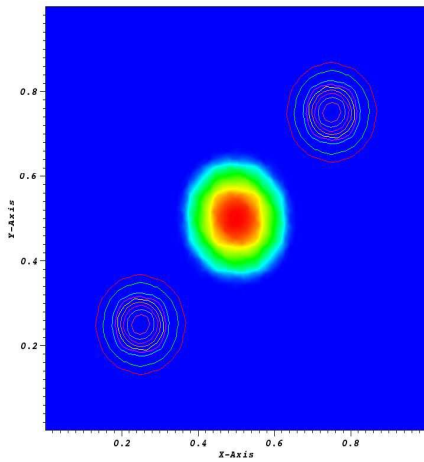


(a) Conditions initiales sans fluide. La densité initiale est définie par $N_0(x, y) = 0.1$ dans le carré $(x, y) \in \{0.45, 0.45\} \times \{0.45, 0.45\}$ et 0 ailleurs. La concentration du chimio-attractant est définie par $C_0(x, y) = 10$ dans les deux carrés $(x, y) \in \{0.2, 0.3\} \times \{0.2, 0.3\} \cup \{0.7, 0.8\} \times \{0.7, 0.8\}$ et 0 ailleurs.

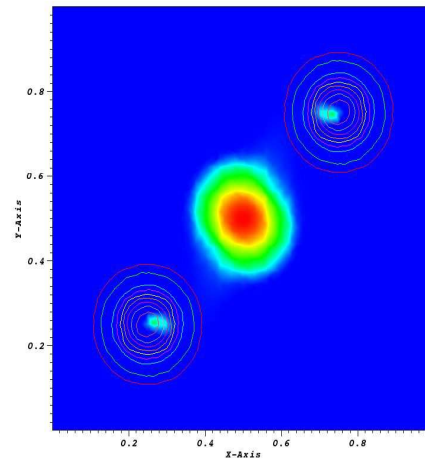


(b) Conditions initiales avec fluide. On ajoute les composantes initiales de la vitesse qui sont définies par $u_1(x, y) = 5$ et $u_2(x, y) = 5$ dans le carré $(x, y) \in \{0.1, 0.6\} \times \{0.1, 0.6\}$ et 0 ailleurs.

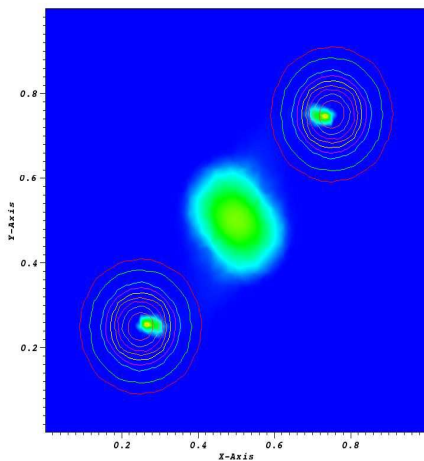
FIGURE 4.6 – Test 3- Conditions initiales.



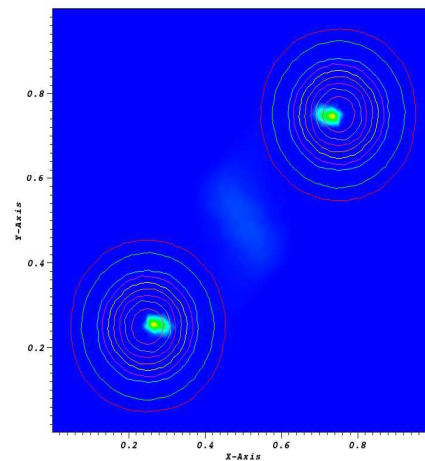
(a) $0 \leq N(t = 1) \leq 0.024$, $0.41 \leq C(t = 1) \leq 4.14$.



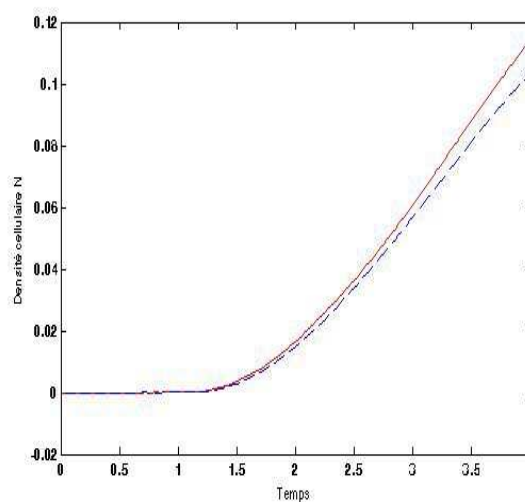
(b) $0 \leq N(t = 1.75) \leq 0.025$, $0.26 \leq C(t = 1.75) \leq 2.60$.



(c) $0 \leq N(t = 3.25) \leq 0.04$, $0.20 \leq C(t = 3.25) \leq 2.09$.

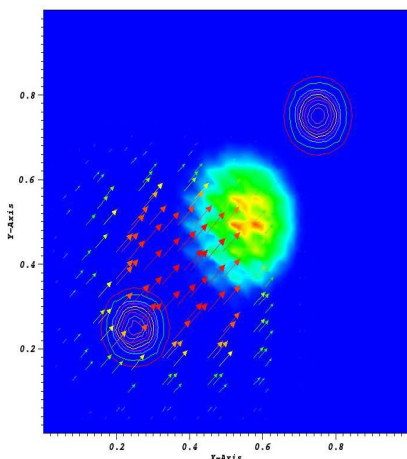


(d) $0 \leq N(t = 4) \leq 0.20$, $0.12 \leq C(t = 4) \leq 1.15$.

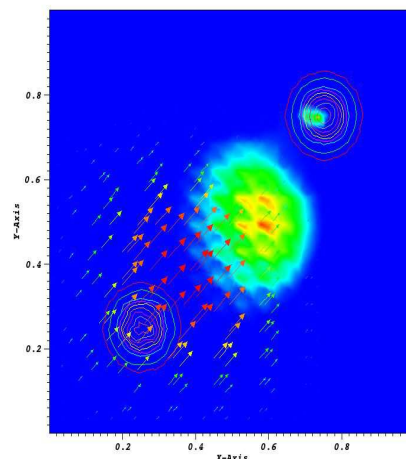


(e) Évolution en temps de la densité cellulaire N au point $(0.26, 0.29)$ (courbe rouge) et au point $(0.71, 0.82)$ (courbe bleue).

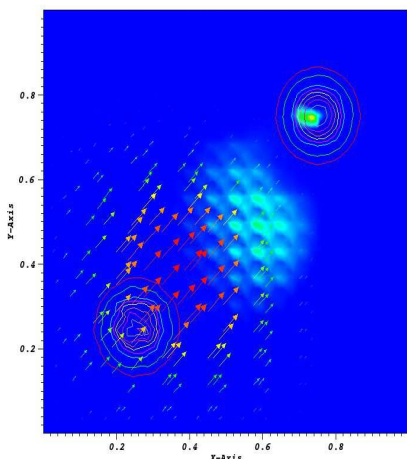
FIGURE 4.7 – Test 3- Cas d'un fluide au repos ($u = 0$).



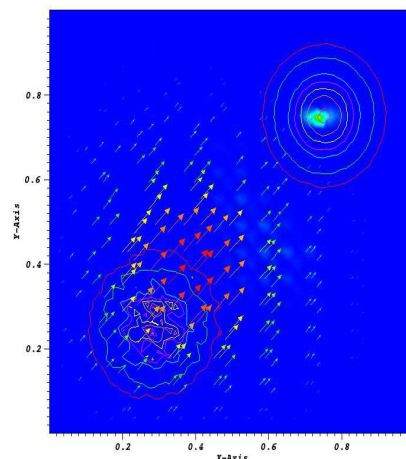
(a) $0 \leq N(t = 0.5) \leq 0.028$, $0.641 \leq C(t = 0.5) \leq 6.411$.



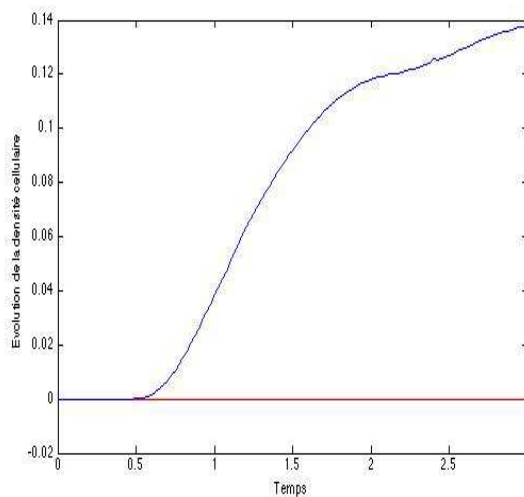
(b) $0 \leq N(t = 0.75) \leq 0.021$, $0.411 \leq C(t = 0.75) \leq 5.671$.



(c) $0 \leq N(t = 1) \leq 0.06$, $0 \leq C(t = 1) \leq 4.537$.

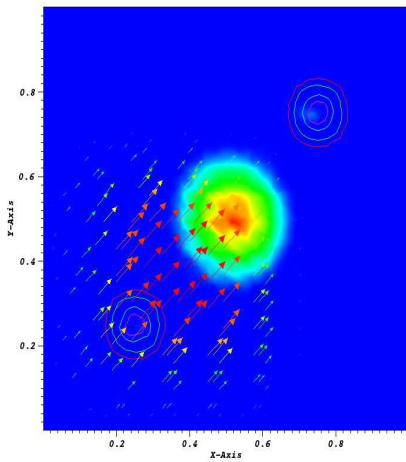


(d) $0 \leq N(t = 3) \leq 0.44$, $0 \leq C(t = 3) \leq 2.334$.

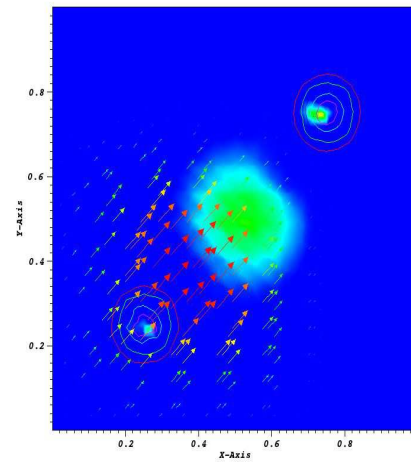


(e) Évolution en temps de la densité cellulaire au point (0.26, 0.29) (courbe rouge) et au point (0.71, 0.82) (courbe bleue).

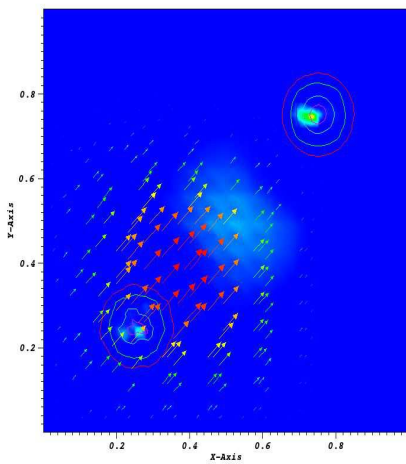
FIGURE 4.8 – Test 3- Premier cas ($c < c_1$).



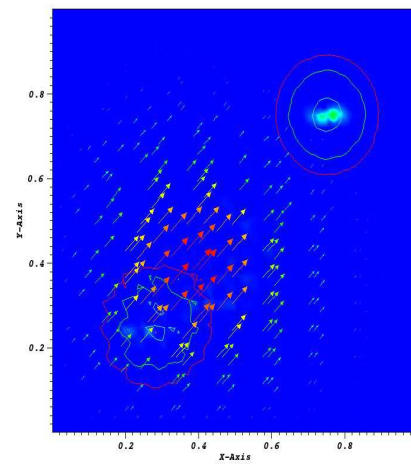
(a) $0 \leq N(t = 0.5) \leq 0.026$, $0 \leq C(t = 0.5) \leq 7.052$.



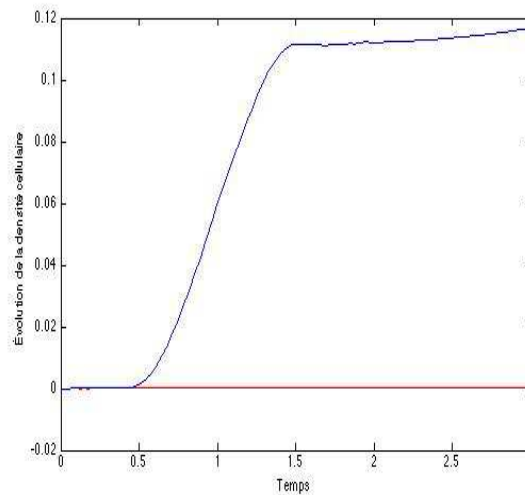
(b) $0 \leq N(t = 0.75) \leq 0.03$, $0 \leq C(t = 0.75) \leq 5.163$.



(c) $0 \leq N(t = 1) \leq 0.11$, $0.45 \leq C(t = 1) \leq 4.537$.

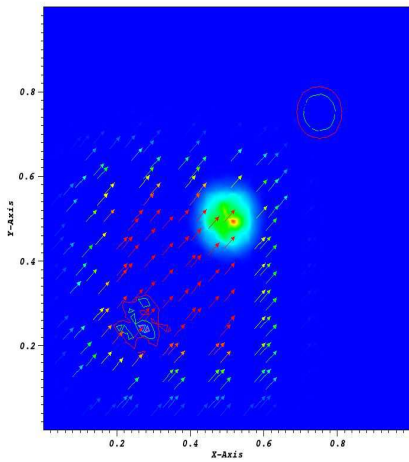


(d) $0 \leq N(t = 3) \leq 0.5734$, $0.21 \leq C(t = 3) \leq 2.122$.

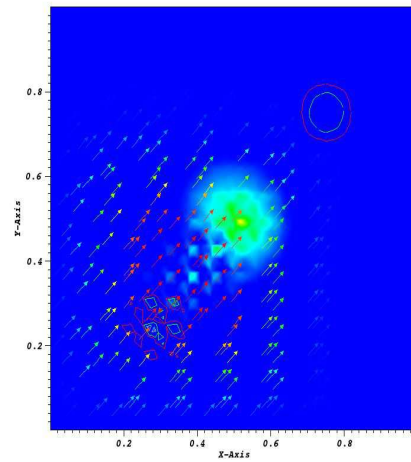


(e) Évolution en temps de la densité cellulaire au point $(0.26, 0.29)$ (courbe rouge) et au point $(0.71, 0.82)$ (courbe bleue).

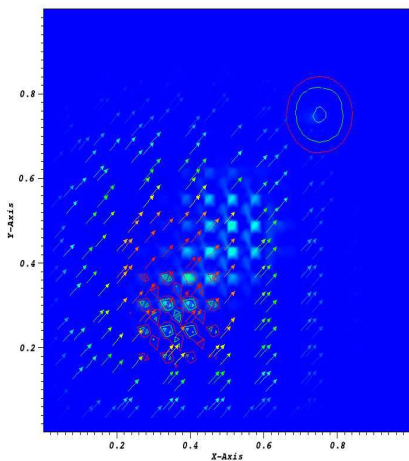
FIGURE 4.9 – Test 3- Deuxième cas ($c > c_1$).



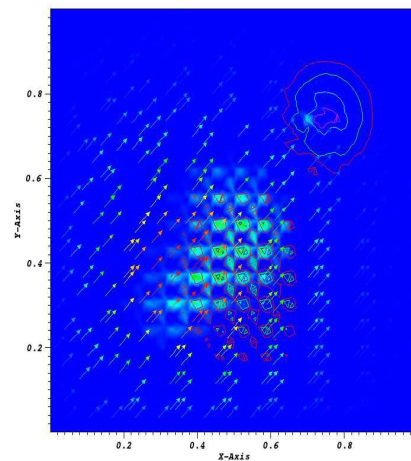
(a) $0 \leq N(t = 0.25) \leq 0.12$, $0 \leq C(t = 0.25) \leq 27.34$.



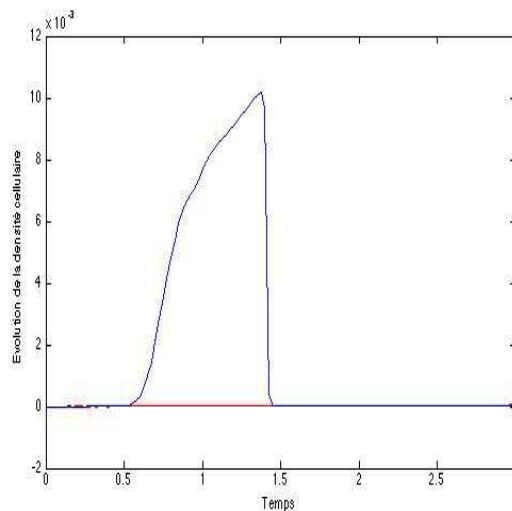
(b) $0 \leq N(t = 0.75) \leq 0.06$, $0 \leq C(t = 0.75) \leq 21.16$.



(c) $0 \leq N(t = 1) \leq 0.17$, $1.08 \leq C(t = 1) \leq 10.4$.



(d) $0 \leq N(t = 2) \leq 0.08$, $0.51 \leq C(t = 2) \leq 5.13$.



(e) Évolution en temps de la densité cellulaire au point (0.26, 0.29) (courbe rouge) et au point (0.71, 0.82) (courbe bleue).

FIGURE 4.10 – Test 3- Troisième cas ($c < c_1 = c_2$).

Conclusions et Perspectives

Durant cette thèse, on a réussi à étudier le comportement chimiotaxique anisotrope des cellules dans un fluide. On a réuni la théorie et la pratique afin de décrire mathématiquement et numériquement certaines observations biologiques expérimentales. En dépit de la dégénérescence du flux diffusif en deux points, l'anisotropie et le couplage avec les équations de Navier-Stokes, on a étudié l'existence globale de solutions faibles du système chimiotactisme-fluide. Sous des hypothèses supplémentaires, on a montré l'unicité des solutions du système chimiotactisme-Stokes. Ensuite, on a construit un schéma combiné monotone efficace et robuste qui est un compromis de deux méthodes classiques de discrétisation et qui respecte les bornes biologiques de quantités approchées. Ainsi, on a implémenté ce schéma à l'aide d'un code très développé écrit sous Fortran afin de visualiser la dynamique de la population cellulaire dans un fluide.

Je conclus ce mémoire en donnant quelques éléments de perspective pour les années à venir. En effet, de nombreuses directions de travail possibles se dégagent suite aux résultats exposés dans ma thèse et on cite quelques unes. Tout d'abord, il apparaît très clairement que le développement de la méthode combinée monotone performante pour les modèles chimiotaxie-fluide est essentiel pour pouvoir envisager de tels modèles dans des géométries tridimensionnelles. Il est possible ainsi d'étendre cette méthode pour des maillages non reliés contenant des éléments non convexes. Aujourd'hui, vue la grande importance donnée à l'adaptation du maillage pour réduire le coût de calcul numérique, le raffinement local du maillage possible avec notre choix de méthode combinée le rend une cible très intéressante dans le monde d'implémentation numérique. D'ailleurs, on peut étendre notre code au cadre le plus général des équations de Navier-Stokes afin de visualiser la dynamique de la chimiotaxie anisotrope dans des régimes turbulents.

Annexe A

Éléments Finis non conformes

Tout au long de cette thèse, on utilise l'élément fini non conforme de Crouzeix-Raviart. Cette annexe est consacrée à la description et à la construction d'une base explicite de cet élément triangulaire en dimension deux d'espace.

A.1 Élément fini de Crouzeix-Raviart

Cet élément a été introduit en 1973 dans [23] pour résoudre l'équation de Stokes stationnaire. Il a été aussi utilisé pour résoudre des équations élastiques linéaires [38]. En plus, l'élément de Crouzeix-Raviart admet une extension d -dimensionnelle (Voir [18]) appliquée dans [80] à des problèmes elliptiques du second ordre en dimensions supérieures. On propose dans cette partie une brève description des éléments finis de Crouzeix-Raviart. Tout d'abord on introduit l'ensemble :

$$P_1(K) = \{q \circ F_K^{-1}; q \in \text{vect}(1, x_i, x_i x_{i+1}), i = 1, \dots, d\},$$

où F_K est la transformation bilinéaire qui permet d'obtenir l'élément K à partir de l'élément de référence \hat{K} . Cette transformation F_K et les fonctions de base locales sur l'élément K en dimension deux sont construites dans la section suivante.

Dans le cadre $3D$, l'élément fini non conforme de Crouzeix-Raviart est représenté par un tétraèdre dont les degrés de liberté correspondent aux barycentres P_D des faces de tétraèdres. L'espace des éléments finis de Crouzeix-Raviart est défini par :

$$X_h^0 = \{\varphi_h \in L^2(\Omega), \varphi_h|_K \in P_1, \forall K \in \mathcal{T}_h \varphi_h \text{ continue vis-à-vis de toutes les fonctionnelles nodales } F_\sigma(\varphi_h) \text{ et } F_\sigma(\varphi_h) = 0 \text{ si } \sigma \subset \partial\Omega \},$$

où la fonctionnelle nodale $F_\sigma(\cdot)$ est de manière équivalente, la moyenne intégrale pondérée sur la face σ du triangle K et la valeur du champ au centre de la face :

$$F_\sigma(\varphi) = \frac{1}{|\sigma|} \int_\sigma \varphi_h(x) d\sigma = \varphi_h(P_D),$$

où P_D est le centre de la face σ .

Dans le cadre $2D$, l'élément fini de référence \hat{K} est représenté par une maille triangulaire dont les degrés de liberté correspondent au milieu P_D de chacune des arêtes comme le montre la Figure A.1 et l'espace peut-être reformulé comme suit

$$X_h^0 = \{\varphi_h \in X_h; \varphi_h(P_D) = 0 \forall D \in \mathcal{D}_h^{ext}\} \text{ avec}$$

$$X_h = \{\varphi_h \in L^2(\Omega); \varphi_h|_K \in P_1, \forall K \in \mathcal{T}_h, \varphi_h \text{ continue aux points } P_D, D \in \mathcal{D}_h^{int}\}.$$

Les éléments finis de Crouzeix-Raviart engendrent un espace de fonctions discontinues, affines sur chaque élément d'une triangulation du domaine. Le seul point de continuité au niveau des interfaces étant le milieu des arêtes. Ces éléments finis sont de type non conforme autrement dit que l'espace des approximations n'est pas inclus au sens ensembliste dans l'espace de vie de la solution.

A.2 Fonctions de base locales

Soit K un triangle quelconque de sommets $A = (x_1, y_1)$, $B = (x_2, y_2)$ et $C = (x_3, y_3)$. On introduit un triangle de référence \hat{K} (Voir Figure A.1) de sommets $\hat{A} = (0, 0)$, $\hat{B} = (1, 0)$ et $\hat{C} = (0, 1)$ et on cherche tout d'abord une transformation affine inversible $F_K : \hat{K} \rightarrow K$ telle que :

$$F \begin{pmatrix} \hat{x} \\ \hat{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}\hat{x} + a_{12}\hat{y} + b_1 \\ a_{21}\hat{x} + a_{22}\hat{y} + b_2 \end{pmatrix}.$$

L'application F_K est déterminée d'une façon unique par

$$F_K(\hat{A}) = A, F_K(\hat{B}) = B, F_K(\hat{C}) = C.$$

En effet,

$$F \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} \Rightarrow b_1 = x_1, b_2 = y_1$$

$$F \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} \Rightarrow a_{11} = x_2 - x_1, a_{21} = y_2 - y_1$$

$$F \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_3 \\ y_3 \end{pmatrix} \Rightarrow a_{12} = x_3 - x_1, a_{22} = y_3 - y_1.$$

L'application F_K s'écrit donc,

$$F_K(\hat{X}) = X = J_K \hat{X} + b = \begin{pmatrix} x_2 - x_1 & x_3 - x_1 \\ y_2 - y_1 & y_3 - y_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{x} \\ \hat{y} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$$

où le jacobien J_K dépend de K et la transformation F_K est inversible si $\det(J_K) \neq 0$. On a $\det(J_K) = (x_2 - x_1)(y_3 - y_1) - (y_2 - y_1)(x_3 - x_1) = 2|K|$. Par suite,

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} \hat{x} \\ \hat{y} \end{pmatrix} &= J_K^{-1} \begin{pmatrix} x - x_1 \\ y - y_1 \end{pmatrix} = \frac{1}{\det(J_K)} \begin{pmatrix} y_3 - y_1 & -(x_3 - x_1) \\ -(y_2 - y_1) & x_2 - x_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x - x_1 \\ y - y_1 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{2|K|} \begin{pmatrix} (y_3 - y_1)(x - x_1) - (x_3 - x_1)(y - y_1) \\ -(y_2 - y_1)(x - x_1) + (x_2 - x_1)(y - y_1) \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

On possède maintenant tout ce qu'il faut pour construire les fonction de base. On introduit les points milieux des arêtes par :

$$P_1 = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right), P_2 = \left(\frac{1}{2}, 0\right) \text{ et } P_3 = \left(0, \frac{1}{2}\right).$$

Les fonctions de base locales φ_1 , φ_2 et φ_3 correspondantes aux points P_1 , P_2 et P_3 sur le triangle de référence \hat{K} telles que $\varphi_i(P_j) = \delta_{ij}$ sont :

$$\hat{\varphi}_1 = -1 + 2(\hat{x} + \hat{y}), \hat{\varphi}_2 = 1 - 2\hat{x}, \hat{\varphi}_3 = 1 - 2\hat{y}.$$

En utilisant la transformation affine F_K , on obtient ces fonctions de base sur le triangle K :

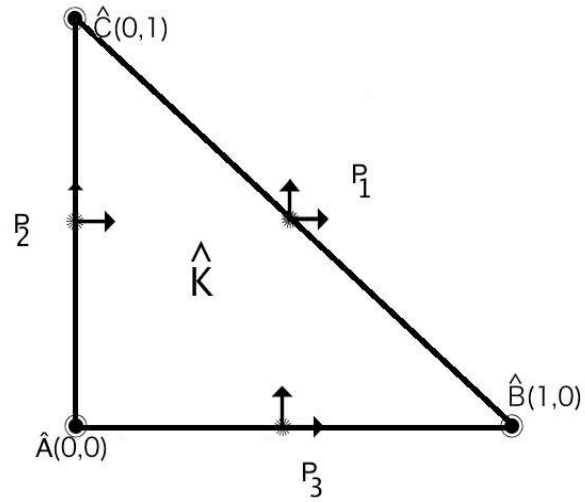
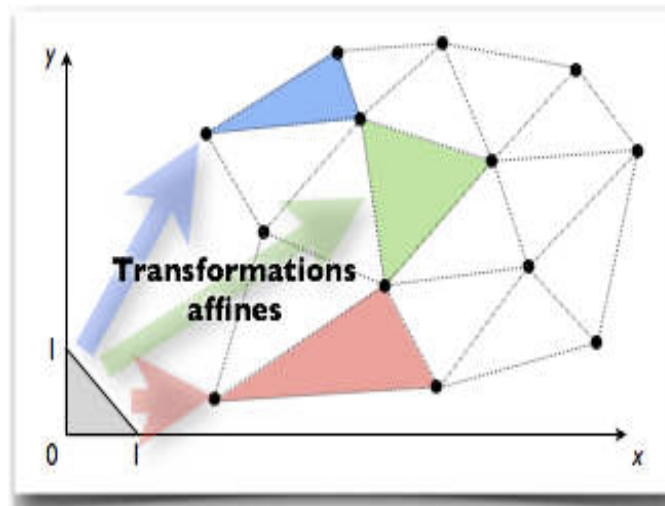
$$\begin{aligned} \varphi_1 &= -1 + \frac{1}{|K|} \left((y_3 - y_2)(x - x_1) - (x_3 - x_2)(y - y_1) \right), \\ \varphi_2 &= 1 - \frac{1}{|K|} \left((y_3 - y_1)(x - x_1) - (x_3 - x_1)(y - y_1) \right), \\ \varphi_3 &= 1 - \frac{1}{|K|} \left(-(y_2 - y_1)(x - x_1) + (x_2 - x_1)(y - y_1) \right). \end{aligned}$$

On peut donc déduire les propriétés suivantes nécessaires à l'implémentation numérique :

$$\begin{aligned} \int_K \varphi_i dx &= \frac{|K|}{3}, \int_K \varphi_i \varphi_j dx = \frac{|K|}{3} \delta_{ij}, \\ \nabla \varphi_1 &= \frac{1}{|K|} \begin{pmatrix} y_3 - y_2 \\ x_2 - x_3 \end{pmatrix}, \nabla \varphi_2 = \frac{1}{|K|} \begin{pmatrix} y_1 - y_3 \\ x_3 - x_1 \end{pmatrix}, \nabla \varphi_3 = \frac{1}{|K|} \begin{pmatrix} y_2 - y_1 \\ x_1 - x_2 \end{pmatrix}, \\ \int_K \frac{\partial \varphi_1}{\partial x} \frac{\partial \varphi_2}{\partial x} dx dy &= -2|K| \frac{(y_3 - y_2)(y_3 - y_1)}{(|K|)^2} \int_{\hat{K}} d\hat{x} d\hat{y} = -\frac{(y_3 - y_2)(y_3 - y_1)}{|K|}, \\ \int_K \frac{\partial \varphi_1}{\partial x} dx dy &= 2|K| \int_{\hat{K}} \frac{\partial \varphi_1}{\partial \hat{x}} \frac{d\hat{x}}{dx} + \int_{\hat{K}} \frac{\partial \varphi_1}{\partial \hat{y}} \frac{d\hat{y}}{dx} d\hat{y} d\hat{x} = 2|K| * 2 \frac{(y_3 - y_2)}{2|K|} \int_{\hat{K}} d\hat{x} d\hat{y} = y_3 - y_2, \end{aligned}$$

ou directement

$$\int_K \frac{\partial \varphi_1}{\partial x} dx dy = \frac{(y_3 - y_2)}{|K|} * 2|K| \int_{\hat{K}} d\hat{x} d\hat{y} = y_3 - y_2.$$

FIGURE A.1 – Élément fini de référence \hat{K} .FIGURE A.2 – Transformation affine F_K .

Annexe B

Approximation d'un espace normé

Lors de la discrétisation des équations de Navier-Stokes par la méthode des éléments finis non conformes, il est nécessaire de bien détailler l'idée d'approximation d'un espace normé W par une famille d'espaces normés $\{W_h\}_h$. Les idées données dans cette annexe sont tirées du livre [75] du Roger Temam.

B.1 Approximation stable et convergente

Définition 10 Une approximation interne d'un espace vectoriel normé W est une famille $\{W_h, \tilde{p}_h, r_h\}_h$;

- W_h est un espace normé,
- \tilde{p}_h est une application linéaire continue qui opère de W_h vers W ,
- r_h est une application (qui peut être non-linéaire) qui opère de W vers W_h .

La comparaison entre deux éléments $u \in W$ et $u_h \in W_h$ peut être réalisée de deux manières. Soit on compare $\tilde{p}_h u_h$ et u dans l'espace fixe W ou bien on compare $r_h u$ et u_h dans l'espace approché W_h . Il existe aussi une autre façon de comparaison, dans un espace normé F extérieur à W et W_h , donnée dans la Définition suivante.

Définition 11 Une approximation externe de l'espace W est un ensemble formé de :

-) Un espace normé F et $\bar{w} : W \rightarrow F$ un isomorphisme.
-) Une famille de triplet $\{W_h, \tilde{p}_h, r_h\}_h$; pour tout h ,

- W_h est un espace normé,
- \tilde{p}_h est une application linéaire continue qui opère de W_h vers F ,
- r_h est une application (qui peut être non-linéaire) qui opère de W vers W_h .

Remarques :

- 1) Si $F = W$ et $\bar{w} =$ identité, on aboutit de nouveau à une approximation interne de W .
- 2) \tilde{p}_h est un opérateur de prolongement et r_h est un opérateur de restriction.

Définition 12 Soient $u \in W$ et $u_h \in W_h$, alors on dit que :

- a) $\|\bar{w}u - \tilde{p}_h u_h\|_F$ est l'erreur entre u et u_h .
- b) $\|u_h - r_h u\|_{W_h}$ est l'erreur discrète entre u et u_h .
- c) $\|\bar{w}u - \tilde{p}_h r_h u\|_F$ est l'erreur de troncature de u .

On définit maintenant des approximations stables et convergentes.

Définition 13 L'approximation W_h est stable si l'opérateur de prolongement \tilde{p}_h est stable, c'est à dire, si $\|\tilde{p}_h\| = \sup\{\|\tilde{p}_h u_h\|_F, u_h \in W_h, \|u_h\|_{W_h} = 1\} < C$ avec C une constante indépendante de h .

Définition 14 Une famille u_h converge fortement (resp. faiblement) vers u si $\tilde{p}_h u_h$ converge fortement (resp. faiblement) vers $\bar{w}u$ dans F . Une famille u_h converge discrètement vers u si l'erreur discrète $\|u_h - r_h u\|_{W_h} \xrightarrow{h \rightarrow 0} 0$.

Définition 15 Une approximation externe W_h de W est convergente si :

(C1) Pour tout $u \in W$, $\tilde{p}_h r_h u \xrightarrow{h \rightarrow 0} \bar{w}u$ dans F .

(C2) Pour toute suite $u_{h'}$ dans $W_{h'}$ telle que $\tilde{p}_{h'} u_{h'}$ converge faiblement vers un élément ϕ dans F alors $\phi \in \bar{w}W$.

Remarques :

- 1) La condition (C2) disparaît si \bar{w} est surjective.
- 2) La condition (C1) peut être seulement vérifiée sur un sous-espace ω dense dans W .

Bibliographie

- [1] I. Aavatsmark, T. Barkve, Ø. Bøe et T. Mannseth, *Discussion on unstructured grids for inhomogeneous anisotropic media. II. Discussion and numerical results*. SIAM J. Sci. Comput. 19(5) : 1717-1736 (electronic), 1998.
- [2] B. Andreianov, M. Bendahmane et M. Saad, *Finite volume methods for degenerate chemotaxis model*. Journal of computational and applied mathematics. 235 : 4015-4031, 2011.
- [3] P. Angot, V. Dolejši, M. Feistauer et J. Felcman, *Analysis of a combined barycentric finite volume-nonconforming finite element method for nonlinear convection-diffusion problems*. Appl.Math. 43(4) : 263-310, 1998.
- [4] G. Ansanay-Alex, *Un schéma Éléments Finis Non Conformes/Volumes Finis pour l'approximation en maillages non structurés des écoulements à faible nombre de Mach*. Thèse soutenue publiquement à l'Université de Provence le 17 juin 2009.
- [5] T. Arbogast, M.F. Wheeler et N. Zhang, *A non-linear mixed finite element method for a degenerate parabolic equations arising in flow in porous media*. Num. Anal. 33 : 1669-1687, 1996.
- [6] M. Bejček, M. Feistauer, T. Gallouët, J. Hájek et R. Herbin, *Combined triangular FV-triangular FE method for non-linear convection-diffusion problems*. Z. Angew. Math. Mech. 87(7) : 499 - 517, 2007.
- [7] M. Bendahmane, K. Karlsen et J.M. Urbano, *On a two-sidedly degenerate chemotaxis model with volume-filling effect*. Math. Methods Appl. Sci. 17(5) : 783-804, 2007.
- [8] F. Boyer et P. Fabrie, *Éléments d'analyse pour l'étude de quelques modèles d'écoulements de fluides visqueux incompressibles*. DEA de Mathématiques appliquées et calcul scientifique, Université Bordeaux 1, 2003.
- [9] K. Brenner, *Méthode de volumes finis sur maillages quelconques pour des systèmes d'évolution non linéaires*. Thèse soutenue à l'Université Paris XI le 8 novembre 2011.
- [10] H. Brezis, *Analyse fonctionnelle : Théorie et Applications*, Masson, Paris, 1983.
- [11] E. Burman et A. Ern, *Discrete maximum principle for Galerkin approximation of the Laplace operator on arbitrary meshes*. C.R.ACAD. sci. Paris Ser. 338(8) : 641-646, 1998.

- [12] C. Cancès, M. Cathala et C. Le Poitier, *Monotone corrections for generic cell-centered finite volume approximations of anisotropic diffusion equations*. Numer. Meth. 125, p. 387-417, 2013.
- [13] G. Chamoun, M. Saad et R. Talhouk, *A coupled anisotropic chemotaxis-fluid model : The case of two sidedly degenerate diffusion*. Journal Computers and mathematics with applications, DOI 10.1016/j.camwa.2014.04.010, 2014.
- [14] G. Chamoun, M. Saad et R. Talhouk, *Monotone combined edge finite volume-nonconforming finite element scheme for anisotropic Keller-Segel model*, Journal of Numerical Methods For Partial Differential Equations, 30(3), p. 1030-1065, 2014.
- [15] G. Chamoun, M. Saad et R. Talhouk, *Mathematical and numerical analysis of a modified Keller-Segel with general diffusive tensors*, Journal BIOMATH 2 1312071, <http://dx.doi.org/10.11145/j.biomath.2013.12.071>, 2013.
- [16] G. Chamoun, M. Saad et R. Talhouk, *Finite volume scheme for isotropic Keller-Segel model with general scalar diffusive functions*, accepté dans ESAIM Proceedings, 2013.
- [17] A. Chertock, K. Fellner, A. Kurganov, A. Lorz and P.A. Markowich *Sinking, merging and stationary plumes in a coupled chemotaxis-fluid model : a high-resolution numerical approach*, J. Fluid, Mech. (694) : 155-190, 2012.
- [18] P.G. Ciarlet, *Basic error estimates for elliptic problems*, Handbook of numerical analysis. (2) : 17-351, Elsevier Science B.V., Amsterdam, 1991.
- [19] P.G. Ciarlet, *The finite element method for elliptic problems*. Studies in Mathematics and its Applications (4), North-Holland Publishing Co Amsterdam, 1978.
- [20] J. Condeelis, R.H. Singer et J.E. Segall, *The great escape : when cancer cells hijack the genes for chemotaxis and motility*. Annu. Rev. Cell Dev. Biol. 21 : 695-718, 2005.
- [21] Y. Coudière, J.P. Vila et P. Villedieu, *Convergence rate of a finite volume scheme for a two-dimensional convection-diffusion problem*. M2AN. Math. Model. Numer. Anal. 33(3) : 493-516, 1999.
- [22] M. Crouzeix, *Résolution numériques des équations de Stokes et Navier-Stokes stationnaires*. Séminaire d'analyse numérique, Université de Paris VI, 1971, 72.
- [23] M. Crouzeix et P.A. Raviart, *Conforming and nonconforming finite element methods for solving stationary Stokes equations*. RAIRO Anal. Numer. 3 : 33-75, 1973.
- [24] C. Dawson et V. Aizinger, *Upwind mixed method for transport equation*. Comput. Geosci. (3) : 93-110, 1999.
- [25] B. Dibenedetto, *Degenerate Parabolic Equations*. Springer-Verlag, New York, 1993.

- [26] E. Dibenedetto, J.M. Urbano et V. Vespri, *Current issues on singular and degenerate evolution equation*. Handbook of differential equations, Evolutionary equations. (1) : 169-286, Amsterdam, 2004.
- [27] D. Dormann et C.J. Weijer, *Chemotactic cell movement during Dictyostelium development and gastrulation*. Curr.Opin.Genet.Dev. 16(4) : 367-373, 2006.
- [28] J. Droniou, R. Eymard, T. Gallouët et R. Herbin, *A unified approach to mimetic finite difference, hybrid finite volume and mixed finite volume methods*. Math. Models Methods Appl. Sci. 20(2) : 265-295, 2010.
- [29] R.-J. Duan, A. Lorz et P. Markowich, *Global solutions to the coupled chemotaxis-fluid equations*. Comm. Partial Differential Equations. 35(9) : 1635-1673, 2010.
- [30] A. Ern et J.-L. Guermond, *Theory and practice of finite elements*. Springer, 2004.
- [31] R. Eymard, D. Hilhorst et M. Vohralík, *A combined finite volume-finite element scheme for the discretization of strongly nonlinear convection-diffusion-reaction problems on non matching grids*. Numer. Methods for partial differential equations. 26 : 612-646, 2009.
- [32] R. Eymard, D. Hilhorst et M. Vohralík, *A combined finite volume-nonconforming/mixed hybrid finite element scheme for degenerate parabolic problems*. Numer. Math. 105 : 73-131, 2006.
- [33] R. Eymard, T. Gallouët et R. Herbin, *Finite volume methods, Handbook of numerical analysis*. Handbook of numerical analysis, Vol VII. North-Holland, Amsterdam. 713-1020, 2000.
- [34] R. Eymard, T. Gallouët et R. Herbin, *Discretization of heterogenous and anisotropic diffusion problem on general non-conforming meshes, SUSHI : a scheme using stabilization and hybrid interfaces*. IMA J Numer Anal. 30(4) : 1009-1043, 2009.
- [35] R. Eymard, T. Gallouët, R. Herbin et J.-C. Latche, *Analysis tools for finite volume schemes*. Acta Math. Univ. Comenianae, Vol. LXXVI. 1 : 111-136, 2007.
- [36] R. Eymard, T. Gallouët, R. Herbin et A. Michel, *Convergence of a finite volume scheme for nonlinear degenerate parabolic equations*. Numer. Math. 92(1) : 41-82, 2002.
- [37] R. Eymard, T. Gallouët, D. Hilhorst et Y. Naït Slimane, *Finite volumes and nonlinear diffusion equations*. M2AN Math. Model. Numer. Anal. 32 : 747-761, 1998.
- [38] R.S. Falk, *Nonconforming finite element methods for the equations of linear elasticity*. Math. Comp. 57 : 529-550, 1991.
- [39] M. Feistauer, J. Felcman et M. Lukáčová-Medviděová, *Combined finite element - finite volume solution of compressible flow*. J. Comput. Appl. Math. 63 : 179-199, 1995.
- [40] M. Feistauer, J. Felcman et M. Lukáčová-Medviděová, *On the convergence of a combined finite volume - finite element method for nonlinear convection - diffusion problems*. Numer. Methods Partial Differ. Equations. 13 : 163-190, 1997.

- [41] M.D. Francesco, A. Lorz et P. Markowich, *Chemotaxis-fluid coupled model for swimming bacteria with nonlinear diffusion : global existence and asymptotic behavior*. Discrete Contin.Dyn. Sys. Ser. A. 28(4) : 1437-1453, 2010.
- [42] V. Girault et P.-A. Raviart, *Finite element methods for the Navier-Stokes equations : Theory and algorithms*. Springer, Berlin, 1986.
- [43] R. Glowinski, *Numerical methods for fluids (part 3), Handbook of numerical analysis . Vol IX*. édité par P.G. Ciarlet et J.L. Lions (North Holland), 2003.
- [44] M.D. Gunzburger, *Finite element methods for viscous incompressible fluids. A guide to theory, practice and algorithms* . Computer science and scientific computing, Academic Press, 1989.
- [45] R. Herbin, *Analysis of cell centered finite volume methods for incompressible fluid flows*. Ecole de printemps de mécanique des fluides numériques, Roscoff, Juin 2005.
- [46] R. Herbin et F. Hubert, *Benchmark on discretization schemes for anisotropic diffusion problems on general grids*. 5th International Symposium on Finite Volumes For Complex Applications, 2008.
- [47] E. Hildebrand et U.B. Kaupp, *Sperm chemotaxis, a primer*. Ann. N. Y. Acad. Sci. 1061 : 221-225, 2005.
- [48] T. Hillen et K. Painter, *Global existence for a parabolic chemotaxis model with prevention of overcrowding*. Adv. Appl. Math. 26 : 280-301, 2001.
- [49] T. Hillen et K. Painter, *A user's guide to PDE models for chemotaxis*. J. Math Biol. 58(1-2) : 183-217, 2009.
- [50] A.J. Hillesdon, T.J. Pedley et J.O. Kessler, *The development of concentration gradients in a suspension of chemotactic bacteria*. Bull. Math. Bio. 57 : 299-344, 1995.
- [51] D. Horstmann, from 1970 until present, *The keller-Segel model in chemotaxis and its consequences*. I.Jahresberichte DMV. 105(3) : 103-165, 2003.
- [52] H.J. Hwang, K. Kang et A. Stevens, *Drift-Diffusion limits of kinetic models for chemotaxis*. Discrete Conti. Dyn. Syst. Ser. B. 5(2) : 319-334, 2005.
- [53] E.F. Keller et L.A. Segel, *The Keller-Segel model of chemotaxis*. J. Theor Biol. 30 : 225-234, 1971.
- [54] C. Kinderlehrer et G. Stampachia, *An Introduction to Variational Inequalities and Their Applications*. Pure Appl. Math., Academic Press, New York, 1980.
- [55] O.A. Ladyzhenskaya, *The mathematical theory of viscous incompressible fluid*. Second English edition, revised and enlarged. translated by the Russian by Richard A. Silverman and John Chu. Mathematics and its Applications, Vol 2, Gordon and Breach Science Publishers, New York, 1969.

- [56] O.A. Ladyzhenskaya, V. Solonnikov and N. N. Ural'ceva, *Linear and Quasi Linear Equations of Parabolic Type*. American Mathematical Society, Providence, Rhode Island, 1968.
- [57] B. Larrivee et A. Karcan, *Signaling pathways induced by vascular endothelial growth factor*. Int. J. Mol. Med. 5(5) : 447-456, 2000.
- [58] P. Laurençot et D. Wrzosek, *A Chemotaxis model with threshold density and degenerate diffusion*. Nonlinear differential equations and their applications. (64) : 273-290, Birkhauser, Boston, 2005.
- [59] R.D. Lazarov, I.D. Mishev et P.S. Vassilevski *Finite volume methods for convection-diffusion problems*. SIAM. J. Numerical analysis. 33(1) : 31-55, 1996.
- [60] C. Le Poitier, *Correction non-linéaire et principe de maximum pour la discrétisation d'opérateurs de diffusion avec des schémas volumes finis centrés sur les mailles*. C.R. Acad. Sci.Paris. 348(11-12) : 691-695, 2010.
- [61] J.L. Lions, *Quelques méthodes de résolution des problèmes aux limites non-linéaires*. Dunod, Paris, 1969.
- [62] J.-G. Liu et A. Lorz, *A coupled chemotaxis model : Global existence*. Ann. I. H. Poincaré - AN, 2011.
- [63] A. Lorz, *Coupled Keller-Segel-Stokes model : global existence for small initial data and blow-up delay*. Communications in Mathematical Sciences. 10 : 555-574, 2012.
- [64] F. Marpeau et M. Saad, *Mathematical analysis of radionuclides displacement in porous media with nonlinear adsorption*. J. Differential Equations. 228 : 412-439, 2006.
- [65] K. W. Morton and I. Süli, *Finite volume methods and their analysis*. IMA. J. Numerical analysis. 11(2) : 241-260, 1991.
- [66] J. A. Oguntuase, *On an inequality of Gronwall*. Journal of inequalities in Pure and Applied Mathematics, Vol. 2, 2001.
- [67] K. Painter et T. Hillen, *Volume filling effect and quorum-sensing in models for chemosensitive movement*. Canadian Appl. Math. Q. 10 : 501-543, 2002.
- [68] H.T. Park, J. Wu et Y. Rao, *Molecular control of neuronal migration*. Bioessays 24(9) : 821-827, 2002.
- [69] C.S. Patlak, *Random walk with persistence and external bias*. Math. Biophys.15 : 311-338, 1953.
- [70] T.J. Pedley et J.O. Kessler, *A new continuum model for suspensions of swimming micro-organisms*. J. Fluid Mech. 212 : 155-182, 1990.
- [71] T.J. Pedley et J.O. Kessler, *The growth of bioconvection patterns in a uniform suspension of gyrotactic micro-organisms*. J. Fluid Mech. 195 : 223-238, 1988.

- [72] R. Peyrey and T. Taylor, *Computational methods for fluid flow*. Springer, New-York, 1893.
- [73] O. Pironneau, *Finite element methods for fluids*. John Wiley and sons, 1989.
- [74] J. Simon, *Sobolev compact set in the space $L^p(0, T; B)$* . ANN. Mat. Pura Appl. 146(4) : 65-96, 1987.
- [75] R. Temam, *Navier-Stokes equations*. AMS CHELSEA edition, 2000.
- [76] F. Thomasset, *Méthodes d'éléments finis non conformes en hydrodynamique*. Rapport IRIA, laboria, 1976.
- [77] V. Thomée, *Finite differences for linear parabolic equations*. Handbook of numerical analysis, I. North-Holland, Amsterdam, 1991.
- [78] I. Tuval, L. Cisneros, C. Dombrowski, C.W. Wolgemuth, J.O. Kessler and R.E. Goldstein, *Bacterial swimming and oxygen transport near contact lines*. Proc. Natl. Acad. Sci. USA. 102 : 2277-2282, 2005.
- [79] M. Vohralík, *Méthodes numériques pour des équations elliptiques et paraboliques non linéaires*. Thèse soutenue le 9 décembre 2004.
- [80] Y. Yang, F. Lin et Z. Zhang, *N -simplex Crouzeix-Raviart element for the second order elliptic/eigenvalue problems*. International journal of numerical analysis and modeling. 6(4) : 615-626, 2009.