



HAL
open science

Commande et observation d'une classe de systèmes linéaires à commutations : Application aux convertisseurs de puissance DC-DC

Ahmed Rédha Meghnous

► **To cite this version:**

Ahmed Rédha Meghnous. Commande et observation d'une classe de systèmes linéaires à commutations : Application aux convertisseurs de puissance DC-DC. Electronique. INSA de Lyon, 2013. Français. NNT : 2013ISAL0137 . tel-01015252

HAL Id: tel-01015252

<https://theses.hal.science/tel-01015252>

Submitted on 26 Jun 2014

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

THÈSE

présentée devant

L'Institut National des Sciences Appliquées de Lyon

pour obtenir le grade de

DOCTEUR DE L'UNIVERSITÉ DE LYON

Ecole doctorale : Electronique, Electrotechnique, Automatique
Spécialité : Energie et systèmes

par

Ahmed Rédha Meghnous

**Commande et observation d'une classe de systèmes
linéaires à commutations. Application aux
convertisseurs de puissance DC-DC**

Soutenue le 02 décembre 2013 devant la Commission d'examen

Jury :

Jean-Pierre Barbot	Professeur, ENSEA, Cergy-Pontoise	Rapporteur
Pierre Riedinger	Professeur, ENSEM, Nancy	Rapporteur
Maurice Fadel	Professeur, INPT-ENSEEIH, Toulouse	Examineur
Diego Patiño	Professeur associé, PUJ, Bogotá, Colombie	Examineur
Xuefang Lin-Shi	Professeur, INSA, Lyon	Directrice de Thèse
Minh Tu Pham	Maître de Conférences, INSA, Lyon	Co-directeur de Thèse

Résumé

Résumé

Cette thèse s'intéresse à la commande et l'observation d'une classe de systèmes linéaires à commutations (SLC). La classe considérée regroupe les systèmes pouvant être représentés par un modèle Hamiltonien à ports. Récemment, plusieurs travaux ont utilisé la théorie des systèmes dynamiques hybrides pour traiter les problèmes de stabilité, de commandabilité et d'observabilité des systèmes linéaires à commutations. Cependant, certains verrous scientifiques demeurent et nécessitent d'être levés tels que la synthèse d'observateurs pour des SLC présentant des modes de fonctionnement inobservables ou la commande hybride de systèmes possédant un nombre réduit d'entrées de commutations et un nombre élevé de variables d'état à contrôler.

Dans ce travail, nous nous intéressons à la synthèse d'observateurs s'appuyant sur la modélisation moyenne et la modélisation hybride de SLC ayant une topologie Hamiltonienne à ports particulière. Ce formalisme possède les outils nécessaires pour établir des preuves de stabilité des erreurs d'observation. Dans un premier temps, nous proposons un observateur non linéaire reposant sur le modèle moyen de la classe des SLC considérée. Ensuite, nous traitons le problème de synthèse d'un observateur hybride où nous proposons un observateur commuté prenant en compte les modes de fonctionnement inobservables.

Le problème de la commande des SLC est abordé par la suite. Au départ, la théorie de Lyapunov est utilisée pour proposer deux lois de commandes : La première est synthétisée à partir du modèle moyen et la deuxième exploite le modèle hybride. Une commande optimale hybride est élaborée en utilisant le principe du maximum de Pontryagin et une approche utilisant la recherche d'arcs singuliers. Finalement, une commande prédictive hybride est établie à partir d'un modèle discrétisé du système.

Des résultats de simulation et une mise en œuvre expérimentale sur un convertisseur DC-DC SEPIC sont donnés pour montrer l'efficacité des méthodes proposées. L'étude d'un tel circuit est motivée par sa topologie particulière qui contient à la fois un mode de fonctionnement observable et un mode de fonctionnement inobservable. En outre, il possède une seule entrée de commutations et quatre variables d'état ce qui lui vaut la réputation être difficile à commander.

Abstract

This thesis is dedicated to the control and the observation of a class of switched linear systems (SLS). This class contains the systems that can be represented by a port-Hamiltonian model. A lot of works have been studied SLS for several years using an average modeling approach. Recently, various works have shown that hybrid system theory allows to cope with stabilization, controllability, and observability problems of switched linear systems. However, several problems are still open and need more development such as the design of hybrid observers for SLS that have unobservable modes or the control of systems with reduced number of switching inputs and numerous variable states to control.

In this work, we are interested in the design of state observers for a particular class of SLS using both the average and the hybrid port-Hamiltonian models. This formalism has the necessary tools to study and establish the stability of the observation errors. At the beginning, a nonlinear observer based on the average modeling is proposed. Next, a hybrid observer is designed for switched linear systems. This observer takes into account the unobservable operating modes of the system.

The second point of our work concerns the design of control laws for the considered class of SLS. At first, two Lyapunov-based control laws have been established using either an average model or a hybrid model of the system. A hybrid optimal control based on the maximum principle of Pontryagin and the computation of singular arcs has been also proposed. Finally, a hybrid predictive control based on a discrete model of the system is synthesized.

Simulation results and an experimental implementation on a SEPIC converter are given to show the efficiency of the proposed methods. Our motivation to study such a converter is mainly due to its particular topology that includes observable and unobservable subsystems. It is also known to be difficult to be controlled because only one switching input is used to control four state variables.

Table des matières

Introduction	1
1 Notions introductives	7
1 Introduction	7
2 Stabilité des systèmes linéaires à commutations	9
2.1 Modèle commuté d'un SLC	9
2.2 Stabilité au sens de Lyapunov	10
2.2.1 Fonction de Lyapunov commune	10
2.2.2 Fonctions de Lyapunov multiples	11
2.2.3 Pseudo-fonctions de Lyapunov	12
2.3 Stabilisation par temps de séjour minimum	13
3 Observabilité des systèmes linéaires à commutations	13
3.1 Modèle moyen et observabilité des systèmes bilinéaires	13
3.2 Observabilité au sens hybride des SLC	15
3.2.1 Observabilité par la détermination du sous-espace observable	16
3.2.2 $Z(T_N)$ -observabilité	17
3.2.3 Observabilité par la détermination du sous-espace inobservable	18
3.2.4 Observabilité hybride d'un SLC à temps discret	20
4 Synthèse d'observateurs pour les SLC sans saut sur l'état	21
4.1 Observateur du modèle moyen	21
4.2 Observateur commuté : modes de fonctionnement observables	21
4.3 Observateur hybride : modes de fonctionnement inobservables	22
5 Commande des systèmes linéaires à commutations	22
5.1 Commandabilité des SLC	23
5.2 Commande à partir du modèle moyen	24
5.3 Commande par retour d'état commuté	24
5.4 Commande par optimisation des instants de commutations	25
6 Conclusion	26
2 Observateurs pour une classe de systèmes linéaires à commutations	27
1 Introduction	27
2 Modèle Hamiltonien à ports	29
3 Observateur non linéaire à partir du modèle moyen	30
3.1 Modélisation et analyse d'observabilité	30
3.2 Synthèse d'un observateur	32
4 Observateur hybride pour SLC à deux modes	33
4.1 Synthèse d'un observateur	33

4.2	Exemple	38
4.3	Convergence de l'observateur	41
5	Application : Convertisseur SEPIC	42
5.1	Modélisation	43
5.2	Observateur non linéaire à partir du modèle moyen	44
5.2.1	Synthèse d'un observateur	44
5.2.2	Estimation de la résistance de charge	44
5.2.3	Résultats de simulation	46
5.2.4	Résultats Expérimentaux	49
5.3	Observateur hybride pour le convertisseur SEPIC	52
5.3.1	Synthèse d'un observateur	52
5.3.2	Résultats de simulation	53
5.3.3	Résultats expérimentaux	56
6	Conclusion	59
3	Commande d'une classe des systèmes linéaires à commutations	61
1	Introduction	61
2	Commandes non linéaires avec les méthodes de Lyapunov	62
2.1	Commande à partir du modèle moyen	63
2.1.1	Loi de commande proposée	63
2.1.2	Cas des convertisseurs de puissance DC-DC	65
2.1.3	Application au convertisseur SEPIC	65
2.2	Commande à partir du modèle hybride	70
2.2.1	Synthèse de la loi de commande	70
2.2.2	Application au convertisseur SEPIC	71
3	Commande optimale hybride	75
3.1	Formulation du problème de la commande optimale	75
3.2	Application du principe du maximum de Pontryagin	77
3.3	Types de solutions	77
3.4	Cas de $p = 1$	79
3.5	Détermination des arcs singuliers	79
3.6	Exemples d'application	82
3.6.1	Convertisseur buck-boost	82
3.6.2	Convertisseur SEPIC	85
4	Commande prédictive hybride	89
4.1	Synthèse de la loi de commande	89
4.2	Application au convertisseur SEPIC	91
4.2.1	Résultats de simulation	92
4.2.2	Résultats expérimentaux	92
5	Conclusion	97
	Conclusion	99
	Annexe	103
	Bibliographie	112

Table des figures

1.1	Fonctions de Lyapunov multiples : Exemple	12
2.1	Evolution des états et erreurs d'observation en simulation	40
2.2	Convertisseur SEPIC	42
2.3	Observateur du modèle moyen : Variation de référence en simulation	47
2.4	Estimation d'état par l'observateur non linéaire en simulation	48
2.5	Convertisseur SEPIC	49
2.6	Observateur à partir du modèle moyen : Variation de référence	50
2.7	Estimation d'état avec l'observateur moyen en expérimentation	51
2.8	Evolution de l'estimation d'état avec l'observateur hybride en simulation	54
2.9	Erreur d'observation sur les états avec l'observateur hybride en simulation	55
2.10	Evolution de l'estimation d'état avec l'observateur hybride en expérimentation	57
2.11	Evolution de l'estimation d'état avec l'observateur hybride en expérimentation : Zoom	58
3.1	Commande du modèle moyen à partir d'une fonction de Lyapunov : Simulation	68
3.2	Commande du modèle moyen à partir d'une fonction de Lyapunov : Expérimentation	69
3.3	Commande hybride à partir d'une fonction de Lyapunov : Simulation	74
3.4	Convertisseur buck-boost	82
3.5	Commande optimale du buck-boost : Simulation	84
3.6	Commande optimale du SEPIC : Simulation	86
3.7	Commande optimale du SEPIC : Expérimentation	88
3.8	Tension de sortie : variation de la référence de 15V à 20V	89
3.9	Tension de sortie : variation de la référence de 20V à 15V	89
3.10	Période suréchantillonnée	90
3.11	Commande prédictive du SEPIC : Simulation	94
3.12	Commande prédictive du SEPIC : Expérimentation	95
3.13	Commande prédictive du SEPIC : Résolution $v = 20$	96
3.14	Banc d'essai	103
3.15	Convertisseur SEPIC	104
3.16	Carte d'acquisition dSpace	104

Notations

\bar{N}	Nombre de modes
\hat{x}, \hat{x}_a	Estimé du vecteur d'état et du vecteur d'état moyen
$\langle T_N \rangle$	Liste ordonnée de commutations
σ	Entrée de commutation
τ_q	Temps de séjour
Θ	Sous-espace observable (déterminable)
ξ_q	Vecteur de correction de l'état
A_i	Matrice d'état
B_i	Matrice d'entrée
C_i	Matrice de sortie
d	Rapport cyclique
E_i, F_i	Matrices de la dynamique des sauts
e_x	Erreur d'observation
F_z, F_w	Matrices de gains
g	Matrice d'entrée pour les systèmes Hamiltoniens
G_q	Matrice d'observabilité au sens de Kalman
H	Fonction Hamiltonienne
I_d	Matrice identité
Im	Image d'un ensemble
J_q	Matrice de structure
ker	Noyau d'un ensemble
L_q	Gain d'observateur
N_q^m	Sous-espace inobservable
O	Matrice d'observabilité
P	Matrice paramétrique
q_i	Mode actif de commutation

Q_m^q	Sous-espace indéterminable
R	Matrice de dissipation
T_N	Séquence d'intervalles de temps
t_q	Instant de commutation
t_q^-	Instant précédent la commutation
u	Signal de commande
u_{in}	Vecteur d'entrée
V	Fonction de Lyapunov
x	Vecteur d'état
x_a	Vecteur d'état moyen
y	Vecteur de sortie
y_a	Vecteur de sortie moyen
y_p	Port de sortie
Z_q, W_q	Matrices orthogonales d'observabilité et d'inobservabilité
z_q, w_q	Etats observables et inobservables du mode q

Introduction

Contexte et Problématique

Les systèmes dynamiques hybrides ont attiré l'attention de nombreux chercheurs durant les dernières années en raison de leur capacité à décrire les dynamiques à la fois continues et discrètes de plusieurs processus réels. Leurs propriétés théoriques telles que l'observabilité et la commandabilité font l'objet d'intenses travaux de recherche de nombreuses équipes issues de différentes cultures (systèmes à événements discrets, systèmes non linéaires, systèmes linéaires, ...). Cependant, en dépit de l'effervescence du nombre d'études une approche générale d'analyse ou de commande n'est pas disponible encore en raison de la complexité du problème. Ainsi, plusieurs auteurs ont pris le parti de ne s'intéresser qu'à une classe ou sous-classe de systèmes hybrides en regardant uniquement les problèmes de stabilité, d'autres ne s'intéressent qu'à la commande ou à l'observation. Dans le cadre de cette thèse, nos efforts se porteront sur les systèmes linéaires à commutations (SLC) qui sont décrits par une représentation Hamiltonienne à ports particulière. Par définition, un SLC est caractérisé par un ensemble de dynamiques linéaires qui commutent entre elles selon une loi de commutation représentant l'état discontinu et pouvant être contrôlée ou pas. Dans le cas où la loi de commutation est commandée, elle constitue une entrée de commande supplémentaire pour le système. Traditionnellement, un observateur construit sur la base d'un modèle moyen d'un SLC reste une approche efficace pour estimer les états du système lorsque celui-ci présente des configurations inobservables liées à des séquences de commutations particulières [Gensior et al., 2006, Spinu et al., 2012]. Malheureusement, cette technique n'est valable que dans une plage de fréquences pour laquelle le modèle moyen approxime raisonnablement le comportement du SLC. En dehors de ce domaine, l'utilisation d'un modèle hybride et les méthodes d'Automatique associées s'imposent. Par ailleurs, une autre difficulté concerne la présence de modes de fonctionnement inobservables au cours des cycles de commutations du SLC. Contrairement aux systèmes linéaires invariants dans le temps, la synthèse d'un observateur hybride demeure possible sous certaines conditions. Plusieurs travaux se sont intéressés à l'observabilité hybride de ce cas de figure [Babaali, 2004, Riedinger et al., 2008, Shim and Tanwani, 2011, Sun et al., 2001, Zhao and Su, 2010] mais peu d'études abordent réellement le problème de la synthèse d'un observateur hybride.

Les propriétés de passivité des systèmes port-Hamiltonien permettent de synthétiser des commandes hybrides reposant sur l'analyse d'une fonction de Lyapunov. Cependant, comme certains SLC sont des systèmes contraints, en raison par exemple de limitations physiques, des stratégies de commande envisagées doivent aussi conduire à une commande calculée appartenant à un domaine physique admissible. De ce fait, une recherche d'arcs singuliers est nécessaire lorsqu'on envisage de mettre en œuvre par exemple une commande optimale [Patino et al., 2009]. Dans le travail de recherche présenté dans ce mémoire, les convertisseurs de puissance DC-DC sont pris comme exemples d'application avec les difficultés liées à ces systèmes. Certains de

ces convertisseurs possèdent des modes de fonctionnement qui ne sont pas observables par la tension de sortie. De plus, la commande de ces convertisseurs est par nature hybride puisqu'elle fait appel à des composants de commutation. L'objectif de la commande pour ce type de systèmes consiste en général à maintenir la tension de sortie autour d'une référence et garder les autres grandeurs de l'état dans un domaine admissible. Bien que la théorie de l'observation de l'état ait atteint une certaine maturité dans les domaines des systèmes continus et des systèmes discrets, beaucoup de points méritent d'être approfondis sur le concept de l'observabilité et de la synthèse d'observateurs pour les systèmes hybrides. En effet, l'observabilité d'un système hybride n'implique pas nécessairement l'existence d'une procédure de reconstruction de l'état (observateurs), notamment, dans le cas où le processus passe par un mode de fonctionnement inobservable. Il est par exemple possible de prouver qu'un système commuté possédant des modes de fonctionnement inobservables est observable d'un point de vue hybride. Cependant, la synthèse d'un observateur hybride pour un tel cas constitue encore un verrou scientifique et très peu de résultats existent dans la littérature. La prise en compte des modes inobservables dans la synthèse d'un observateur hybride a été proposée dans une première étude dans [Ghanes et al., 2009]. Néanmoins, le travail a été effectué pour un cas particulier de systèmes à commutations dont les états inobservables sont constants pendant les modes de fonctionnement inobservables. Cette condition particulière est validée pour certains convertisseurs de puissance tel que le convertisseur multicellulaire série. Les auteurs de [Tanwani et al., 2011] et [Tanwani et al., 2013] traitent, quant à eux, de la synthèse d'un observateur hybride en présence de modes pouvant être individuellement observables ou inobservables dans un cas général où les états inobservables varient durant le mode de fonctionnement inobservable. L'inconvénient de cet observateur est que sa synthèse et sa mise en œuvre dans la pratique demeurent un travail fastidieux même pour des systèmes simples de taille réduite.

La première problématique de cette thèse concerne la synthèse d'un observateur hybride prenant en compte les modes de fonctionnement inobservables pour les SLC avec une seule entrée de commutation. L'un des objectifs souhaités est de développer un observateur qui doit être simple à mettre en œuvre pour une application sur des systèmes réels tels que les convertisseurs de puissance DC-DC.

La commande des SLC dépend fortement de la nature et de la disponibilité des entrées de commande. Dans cette thèse, la classe des SLC avec une topologie Hamiltonienne à ports est considérée [Valentin et al., 2007] et seule l'entrée de commutations est utilisée pour réaliser la commande. Dans cette configuration, la difficulté principale est la commande de plusieurs états du système à partir d'une seule entrée de commande. Une première solution consiste à utiliser un modèle moyen ce qui permet d'étendre le domaine de la commande initialement discret à un domaine admissible continu. Le modèle moyen étant bilinéaire, il offre la possibilité d'appliquer les techniques développées pour les systèmes non linéaires. Malheureusement à cause des limites de la modélisation moyenne il est judicieux d'appliquer une commande hybride dans le cas où le modèle moyen n'est pas valide.

Ainsi, la deuxième problématique de ce travail de thèse consiste à proposer des lois de commande classiques et hybrides pour les SLC possédant une représentation port-Hamiltonienne et une seule entrée de commutation.

Les travaux de cette thèse s'appuient fortement sur le formalisme Hamiltonienne qui propose non seulement un cadre général systématique pour l'analyse structurelle des propriétés d'un

SLC mais offre aussi des outils géométriques pour la synthèse d'un observateur et d'une commande hybrides [van der Schaft and Maschke, 2004, van der Schaft, 2000]. Ce formalisme est caractérisé par une fonction appelée fonction Hamiltonienne qui représente l'énergie stockée dans le système. Dans notre travail, cette fonction est utilisée comme une fonction de Lyapunov pour le système ou comme un point de départ pour déduire d'autres fonctions de Lyapunov candidates. Les problèmes de stabilité, de synthèse d'observateurs et de lois de commande sont traités par une analyse des fonctions de Lyapunov trouvées.

Les convertisseurs de puissance sont pris comme applications dans ce travail. Leur modèle commuté fournit une représentation plus proche du comportement réel du convertisseur qu'une modélisation classique. Contrairement à la modélisation classiquement adoptée qui utilisent un modèle moyen, une modélisation hybride du convertisseur permet d'avoir une description plus fine du système avec toutes ses dynamiques continues et discrètes. Les convertisseurs de puissance étudiés appartiennent à la classe des systèmes linéaires à commutations envisagés dans cette thèse. De plus, ils possèdent une structure inter-connectée qui permet de décrire leur comportement par le formalisme Hamiltonien. Un intérêt particulier est porté au convertisseur SEPIC (Single Ended Primary Inductor Converter) réputé être difficile à commander et possédant une configuration inobservable par la tension de sortie.

Contributions

Les contributions de cette thèse portent essentiellement sur les points suivants :

- Proposition d'un observateur non linéaire pour le modèle moyen des SLC avec une topologie Hamiltonienne à ports particulière. Une fonction de Lyapunov est utilisée pour établir la stabilité asymptotique de l'erreur d'observation indépendamment du rapport cyclique.
- Proposition d'un observateur hybride pour le modèle hybride de la classe des SLC considérée possédant une seule entrée de commutations. L'observateur prend en compte les modes de fonctionnement inobservables. La convergence asymptotique de l'erreur d'observation est garantie par l'analyse d'une fonction de Lyapunov. L'observateur proposé est facile à concevoir et implémenter.
- Proposition de deux lois de commande en utilisant la théorie de Lyapunov. La première est élaborée à partir du modèle moyen et la deuxième est une commande hybride. Ces deux commandes possèdent la propriété d'être indépendantes des paramètres du système.
- Proposition d'une commande hybride optimale établie à partir de la détermination d'arcs singuliers. Bien que l'élaboration théorique de cette commande est un peu complexe, son implémentation pratique n'est pas difficile à mettre en oeuvre.
- Proposition d'une commande hybride prédictive.
- Validation expérimentale de la plupart des techniques développées sur un banc d'essai d'un circuit SEPIC.

Organisation du mémoire

Ce mémoire comporte trois chapitres qui se déclinent de la manière suivante

Chapitre 1

Le premier chapitre présente les systèmes linéaires à commutations dans leur contexte hybride. Différentes techniques d'analyse à base de fonctions de Lyapunov nécessaires à l'étude de la stabilité de ces systèmes sont présentées. Une introduction à l'observabilité des systèmes linéaires à commutations est faite en présentant les théorèmes utilisés pour deux types de modélisation : la modélisation moyenne et la modélisation hybride. Par la suite, le problème de la synthèse d'observateurs pour les modèles moyen et hybride est formulé. Concernant le modèle hybride, nous marquons la différence entre les systèmes possédant des modes de fonctionnement tous observables et ceux qui ont des modes inobservables au sens classique de Kalman. Après l'observabilité, la problématique de la commande des systèmes linéaires à commutations est présentée. Nous donnons un aperçu de différents types de commandes généralement utilisées pour ce genre de systèmes.

Chapitre 2

Dans ce second chapitre, nous proposons, pour une classe particulière de SLC, un observateur non linéaire utilisant un modèle moyen. La classe concerne les systèmes qui peuvent être décrits par une représentation Hamiltonienne à ports. Nous proposons aussi un observateur hybride pour les systèmes linéaires à commutations qui peuvent posséder des modes de fonctionnement inobservables. Le formalisme Hamiltonien à ports est exploité pour établir la convergence asymptotique de l'erreur d'observation pour les deux observateurs proposés. Un exemple d'application sur le convertisseur SEPIC est présenté. Enfin, les résultats de validation en simulation et expérimentation de l'observateur construit à partir du modèle moyen et de l'observateur hybride sur le circuit SEPIC sont présentés.

Chapitre 3

Le dernier chapitre concerne le développement de lois de commande classiques et hybrides pour la classe de SLC considérée. Dans une première partie, nous proposons deux lois de commandes reposant sur la théorie de Lyapunov. La première commande est synthétisée à partir du modèle moyen de la représentation port-Hamiltonienne du système. La deuxième loi est une commande hybride développée à partir du modèle hybride. Par la suite, nous proposons une commande hybride optimale utilisant les arcs singuliers et dédiée à la commande des SLC de dimension supérieure à 2. Finalement, une commande prédictive hybride élaborée à partir d'un modèle discrétisé du système est proposée. Les résultats de validation en simulation et expérimentation des commandes proposées sur le convertisseur SEPIC sont présentés.

Enfin, un résumé des techniques proposées et résultats obtenus est donné dans une conclusion ainsi que les perspectives futur de ce travail de thèse.

Références Personnelles

Revue Internationale avec Comité de Lecture

A.R. Meghnous, M.T. Pham and X. Lin-Shi, Hybrid observer for switched linear systems with unobservable operating modes, Automatica. (en préparation)

A.R. Meghnous, M.T. Pham, X. Lin-Shi and D. Patino, Hybrid optimal control with singular arcs for a class of switched linear systems, *International Journal of Robust and Nonlinear Control*. (en révision)

A.R. Meghnous, M.T. Pham and X. Lin-Shi, Observer-based Lyapunov control for Single Ended Primary Inductor Converter (SEPIC), *IEEE Power Electronic Letters*. (soumis)

Conférences Internationales avec Comité de Lecture

A.R. Meghnous, M.T. Pham and X. Lin-Shi, Averaged port-Hamiltonian modeling based observer for DC-DC power converters, In Proc. of the IFAC Joint conference : 5th Symposium on System Structure and Control, 11th Workshop on Time-Delay Systems, and 6th Workshop on Fractional Differentiation and Its Applications, 2013, Grenoble, France, pages 827-832.

A.R. Meghnous, M.T. Pham and X. Lin-Shi, A hybrid observer for a class of DC-DC power converter, In Proceedings of the American Control Conference (ACC'13), 2013, Washington DC, USA, pages 6240-6245.

A.R. Meghnous, M.T. Pham and X. Lin-Shi, Nonlinear observer and Lyapunov-based control for SEPIC converter : Design and experimental results, In Proceedings of the American Control Conference (ACC'13), 2013, Washington DC, USA, pages 5853-5858

A.R. Meghnous, D. Patino, M.T. Pham and X. Lin-Shi, Hybrid optimal control with singular arcs for DC-DC power converters, Conference on Decision and Control (CDC'13), 2013, Florence, Italy. (accepté)

Conférences Nationales avec Comité de Lecture

A.R. Meghnous, M.T. Pham et X. Lin-Shi, Commande et observateur hybrides pour les convertisseurs de puissance DC-DC, 5 ème Journées Doctorales / Journées Nationales MACS, Strasbourg, 2013.

Chapitre 1

Notions introductives

1	Introduction	7
2	Stabilité des systèmes linéaires à commutations	9
2.1	Modèle commuté d'un SLC	9
2.2	Stabilité au sens de Lyapunov	10
2.3	Stabilisation par temps de séjour minimum	13
3	Observabilité des systèmes linéaires à commutations	13
3.1	Modèle moyen et observabilité des systèmes bilinéaires	13
3.2	Observabilité au sens hybride des SLC	15
4	Synthèse d'observateurs pour les SLC sans saut sur l'état	21
4.1	Observateur du modèle moyen	21
4.2	Observateur commuté : modes de fonctionnement observables	21
4.3	Observateur hybride : modes de fonctionnement inobservables	22
5	Commande des systèmes linéaires à commutations	22
5.1	Commandabilité des SLC	23
5.2	Commande à partir du modèle moyen	24
5.3	Commande par retour d'état commuté	24
5.4	Commande par optimisation des instants de commutations	25
6	Conclusion	26

1 Introduction

Les systèmes linéaires à commutations sont une classe des systèmes dynamiques hybrides composée de dynamiques linéaires qui commutent entre elles suivant une dynamique discrète représentée par une entrée de commutations exogène. Cette entrée peut être commandée ou autonome. Les trajectoires d'état peuvent présenter des sauts durant leur évolution [Babaali, 2004].

Différents types de commande ont été élaborés pour les systèmes dynamiques hybrides pour résoudre un nombre important de problèmes [Montagner et al., 2006, Wulff et al., 2009] [Chen et al., 2012]. Cependant, les algorithmes de commande hybride utilisent l'intégralité du vecteur d'état, alors que dans la pratique, il arrive souvent qu'une seule partie des états du système soit mesurée. Par ailleurs, la connaissance de l'état discret est indispensable pour la

commande. Comme pour les systèmes dynamiques continus, la nécessité de la connaissance de tous les états a motivé le développement de techniques sur l'observation des systèmes dynamiques hybrides [Tian et al., 2009, Babaali, 2004, Babaali and Egerstedt, 2004]. Par contre, l'étude de l'observabilité de ce genre de systèmes présente plusieurs difficultés théoriques majeures telles que :

- la complexité intrinsèque des dynamiques hybrides. Cet aspect rend l'étude de l'observabilité plus difficile car il faut prendre en compte l'état discret (configuration ou mode de fonctionnement) en plus des états continus de chaque mode ;
- la définition d'une notion d'observabilité unifiée ;
- la convergence asymptotique des observateurs de systèmes hybrides ;
- le passage entre des modes de fonctionnement observables et d'autres inobservables ;
- l'observation des SDH avec le phénomène de Zénon (commutations infinies dans un temps fini [Yu et al., 2011]) ;

Dans le domaine de l'observation d'état, un nombre important de travaux et théories ont été élaborés pour les systèmes continus et des systèmes discrets. Néanmoins, les notions d'observation et synthèse d'observateurs pour les systèmes commutés et hybrides nécessitent encore d'être approfondies et développées. S'agissant de l'observabilité de sous-classes de systèmes hybrides, ce problème a été traité dans plusieurs travaux comme dans [Yu et al., 2011, Yu et al., 2009, Chaib et al., 2005, Babaali, 2004, Balluchi et al., 2003, Vidal et al., 2003].

Dans le cas où un système possède un mode de fonctionnement inobservable, son observabilité au sens hybride n'implique pas nécessairement qu'il est possible de synthétiser un observateur pour ce système. Lorsqu'il est possible de mettre en œuvre un observateur hybride, on s'aperçoit que celui-ci doit non seulement assurer l'estimation des variables d'état continues non mesurées mais aussi les modes de commutations dans le cas où ces derniers ne sont pas disponibles. Notons que les auteurs de [Tanwani et al., 2011, Daafouz et al., 2004, Vecchio and Murray, 2004, Gennaro, 2003, Santis et al., 2003, Balluchi et al., 2002] ont proposé différents types d'observateurs hybrides pour certaines classes de SDH.

Malgré l'abondance des travaux sur la synthèse d'observateurs hybrides, peu d'entre eux abordent le cas de la présence d'un mode de fonctionnement inobservable [Tanwani et al., 2011]. Ce cas est caractérisé par un système observable au sens hybride mais contient un ou plusieurs modes de fonctionnement inobservables au sens classique. Par conséquent, les techniques classiques d'observateurs commutés ne s'appliquent pas à ce cas puisque pour ces dernières, les modes de fonctionnement sont supposés toujours observables au sens classique de Kalman. Ce problème présente un véritable défi pour la synthèse générique d'un observateur hybride.

La commande d'un SLC dépend des natures de l'entrée de commutations et l'entrée continue du système. Ainsi, trois cas de figures se présentent : commande par l'entrée de commutations et l'entrée continue, commande par l'entrée continue, commande par l'entrée de commutations. Dans ce mémoire, nous nous intéressons au dernier cas où la commande du système se fait à travers l'entrée de commutations. L'entrée continue est considérée comme nulle (systèmes autonomes) où constante. La difficulté principale réside dans le fait que pour certains SLC, le nombre d'entrées de commutations est faible par rapport au nombre des états à commander, ce qui rend le problème difficile.

Dans ce chapitre, nous aborderons dans un premier temps deux aspects sur les SLC : la modélisation et l'analyse de stabilité. Puis nous donnerons un aperçu des approches utilisées pour l'observation des systèmes linéaires à commutations (SLC) : l'approche moyenne et l'approche hybride. Nous présenterons alors quelques notions et techniques sur l'observabilité et la synthèse

d'observateurs hybrides existant dans la littérature. Finalement, le problème de la commande des systèmes commutés sera abordé à travers la présentation d'un état de l'art sur les techniques les plus intéressantes pour notre travail.

2 Stabilité des systèmes linéaires à commutations

La stabilité des systèmes linéaires à commutation dépend à la fois de la stabilité des sous-systèmes et de la loi de commutation. Il est bien connu que même avec des sous-systèmes asymptotiquement stables, le comportement d'un système commuté peut devenir stable ou instable selon la séquence de commutations. Dans le cas des sous-systèmes instables, il est possible de stabiliser le système commuté grâce à une loi de commutations particulière. De ce fait, l'étude de la stabilité des SLC est un problème intéressant ayant fait l'objet d'un grand nombre de travaux de recherche où plusieurs théorèmes ont été élaborés. Nous présentons ici quelques notions et résultats importants pour la suite de notre étude.

2.1 Modèle commuté d'un SLC

Pour les SLC, les trajectoires d'état peuvent présenter des sauts durant leur évolution [Tanwani et al., 2011]. Leur modèle est donné par

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = A_{\sigma(t)}x(t) + B_{\sigma(t)}u_{in}(t), & t \neq \{t_q\} \\ x(t_q) = E_{\sigma(t_q^-)}x(t_q^-) + F_{\sigma(t_q^-)}v_q(t_q^-) \\ y(t) = C_{\sigma(t)}x(t) + D_{\sigma(t)}u_{in}(t) \end{cases} \quad (1.1)$$

où $x \in \mathbb{R}^n$ est le vecteur d'état, $u_{in} \in \mathbb{R}^m$ est le vecteur d'entrée et $y \in \mathbb{R}^p$ est la sortie du système.

$A_{\sigma(t)}$, $B_{\sigma(t)}$, $C_{\sigma(t)}$ et $D_{\sigma(t)}$ sont respectivement les matrices d'état, d'entrée, de sortie et d'action directe du système. Les matrices $E_{\sigma(t_q^-)}$ et $F_{\sigma(t_q^-)}$ caractérisent la dynamique de saut sur l'état et v_q est une perturbation extérieure.

Les instants t_q et t_q^- correspondent respectivement à l'instant de commutation et à l'instant juste avant la commutation.

Le signal de commutation $\sigma : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{N}$ est une fonction constante par morceaux et continue à droite. Elle change de valeur à chaque instant de commutation $\{t_q\}$, $q \in \mathbb{N}$.

Pour écarter le problème du phénomène de Zénon [Yu et al., 2011], on suppose par la suite qu'il existe un nombre fini de commutations dans chaque intervalle de temps fini. Les modes et les instants de commutations sont déterminés par une loi de commande, par les dynamiques internes du système, ou par des entrées extérieures. Dans ce travail, les modes et les instants de commutations sont supposés connus.

Dans ce qui suit, nous admettons les hypothèses suivantes :

- seuls les systèmes à commutations sans saut sur l'état ($E_{\sigma(t)} = I_d, F_{\sigma(t)} = 0$) sont considérés ;
- la trajectoire des modes discrets est supposée disponible ;
- le phénomène de Zénon n'est pas pris en compte ;

Nous adoptons donc le modèle linéaire à commutations suivant par la suite :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = A_q x(t) + B_q u_{in}(t), & q \in \{q_1, \dots, q_N\}, \quad N \in \mathbb{N} \\ x(t_q) = x(t_q^-) \\ y(t) = C_q x(t) \end{cases} \quad (1.2)$$

où q_i représente le mode actif de fonctionnement.

2.2 Stabilité au sens de Lyapunov

Dans cette partie, nous nous intéressons à la stabilité au sens de Lyapunov des SLC modélisés par (1.2) avec ($u_{in} = 0$) et donnés par

$$\dot{x}(t) = A_q x(t), \quad q \in \{q_1, \dots, q_N\}, \quad N \in \mathbb{N} \quad (1.3)$$

Nous rappelons le théorème de stabilité au sens de Lyapunov pour le systèmes commuté (1.3). Nous présentons par la suite les conditions d'existence des différents types de fonctions de Lyapunov. Nous nous intéressons aux fonctions de Lyapunov communes, multiples et les pseudo-fonctions de Lyapunov avec une loi de commutation arbitraire.

Une propriété importante recherchée dans les systèmes dynamiques est la stabilité asymptotique. La notion de la stabilité asymptotique uniforme globale est donc donnée ci-dessous :

Définition 1 (*Stabilité asymptotique uniforme globale* [Hespanha and Morse, 1999])

Soit le système linéaire à commutations (1.3). L'origine $x = 0$ est dite globalement uniformément asymptotiquement stable (GUAS) si

$$\|x(t)\| \leq \beta(\|x(\tau)\|, t - \tau), \quad \forall t \geq \tau \geq 0, \quad \forall q \in \{q_1, \dots, q_N\}$$

avec $\beta(.,.)$ fonction de classe \mathcal{KL} .

Remarque 1 Une fonction $\beta(r, s)$ est dite de classe \mathcal{KL} si :

- En fixant s , $\beta(., s)$ est strictement croissante et $\beta(0, s) = 0$.
- En fixant r , $\beta(r, .)$ est strictement décroissante et $\beta(r, s) \rightarrow 0$ quand $s \rightarrow \infty$.

2.2.1 Fonction de Lyapunov commune

La théorie de Lyapunov joue un rôle important dans l'analyse de stabilité des systèmes linéaires et non linéaires. Il n'est donc pas surprenant qu'elle ait un rôle similaire pour les systèmes commutés où plusieurs résultats ont été obtenus à partir de cette théorie. Un concept très important de la stabilité au sens de Lyapunov est celui des fonctions de Lyapunov communes pour les sous-systèmes d'un SLC. L'existence d'une telle fonction facilite l'analyse de stabilité pour un SLC. Par contre, la recherche de cette fonction s'avère souvent être une tâche difficile et fastidieuse [Liberzon, 2003][Hauvoigne et al., 2011].

Définition 2 (*Fonction de Lyapunov commune* [Liberzon, 2003])

Le système (1.3) possède une fonction de Lyapunov commune à l'origine $x = 0$ s'il existe une fonction V continuellement différentiable telle que

- $V(x) > 0 \forall x \neq 0, V(x_0) = 0$
- $\|x(t)\| \rightarrow \infty \Rightarrow V(x) \rightarrow \infty$
- $\frac{\partial V}{\partial x} A_q x(t) < 0, \forall x \neq 0, \forall q$

A partir de cette dernière définition, un théorème de stabilité s'énonce comme suit

Théorème 1 *Si les sous-systèmes du système commuté (1.3) possèdent une fonction de Lyapunov commune au point $x = 0$, alors ce point d'équilibre est GUAS.*

Le théorème suivant concerne le cas où le système commuté possède une fonction de Lyapunov commune quadratique. Ce cas est très intéressant pour des applications pratiques où la fonction de Lyapunov a un sens physique (fonction d'énergie pour certains systèmes passifs par exemple).

Théorème 2 [Liberzon and Morse, 1999] *Si les sous-systèmes du système commuté (1.3) possèdent une fonction de Lyapunov commune au point $x = 0$ de la forme $V(x) = x^T P x$ telle que P est une matrice symétrique définie positive et vérifie la condition*

$$P A_q + A_q P^T < 0, \quad \forall q$$

alors, le point d'équilibre $x = 0$ est GUAS.

La fonction de Lyapunov $V(x) = x^T P x$ vérifie les conditions de la définition 2. D'après le théorème 2, le point d'équilibre $x = 0$ est donc GUAS.

Remarque 2 *Si la dérivée de la fonction de Lyapunov prend des valeurs négatives ou nulles, la stabilité asymptotique n'est plus garantie et on est dans le cas d'une fonction de Lyapunov faible. Il est alors possible d'avoir recours au principe d'invariance de LaSalle pour tirer une conclusion sur la stabilité asymptotique. Le principe consiste à vérifier que le plus grand ensemble invariant contenu dans le noyau de la dérivée de la fonction de Lyapunov ne contient que l'origine. [Hespanha, 2004, Cheng et al., 2007].*

2.2.2 Fonctions de Lyapunov multiples

L'intérêt d'une fonction de Lyapunov commune est que son existence fournit une condition suffisante de stabilité. Comme son existence n'est pas toujours garantie, il est possible de chercher des fonctions de Lyapunov individuelles pour chaque sous-système et d'imposer ensuite des conditions sur la loi de commutations pour assurer la stabilité du système commuté comme le propose [Branicky, 1998].

Théorème 3 *Soient les fonctions de Lyapunov V_q avec $q \in \{q_1, \dots, q_N\}$, $N \in \mathbb{N}$. Ces fonctions correspondent aux sous-systèmes de (1.3) décrits par les matrices A_q . Considérons le couple des instants de commutation $(t_i, t_j)_{q_l}$ pour le mode q_l , $l = 1, \dots, N$ avec $i < j$ tel que $q_i = q_j = q_l$ et $q_k \neq q_l$ pour $t_i < t_k < t_j$. Le système commuté (1.3) est asymptotiquement stable s'il existe $\gamma > 0$ tel que*

$$V_q(x(t_j)) - V_q(x(t_i)) \leq -\gamma \|x(t_i)\|^2, \quad \forall (t_i, t_j)_{q_l}, \forall q \in \{q_1, \dots, q_N\}$$

Un exemple de fonctions de Lyapunov multiples pour un système asymptotiquement stable à deux modes de commutations est illustré sur la figure 1.1. La valeur de la fonction V_{q_2} à un instant de commutation t_i donné pour un mode q_2 est supérieure à sa valeur à l'instant de commutation suivant t_j pour ce même mode. Dans le cas où le q_2 est inactif (q_1 actif), c'est-à-dire entre les instants t_{i+1} et t_j dans notre exemple, la fonction de Lyapunov de ce mode peut croître pendant la durée de son inactivité. Si une fonction de Lyapunov commune est difficile à élaborer ou n'existe pas, il est toujours possible d'analyser la stabilité d'un système commuté à l'aide des fonctions de Lyapunov multiples. Cependant, cette analyse nécessite la connaissance des valeurs des fonctions de Lyapunov aux instants de commutations ce qui implique une connaissance de l'état à ces instants. Or les techniques classiques de Lyapunov ne nécessitent pas de déterminer explicitement les solutions du système [Wulff, 2004].

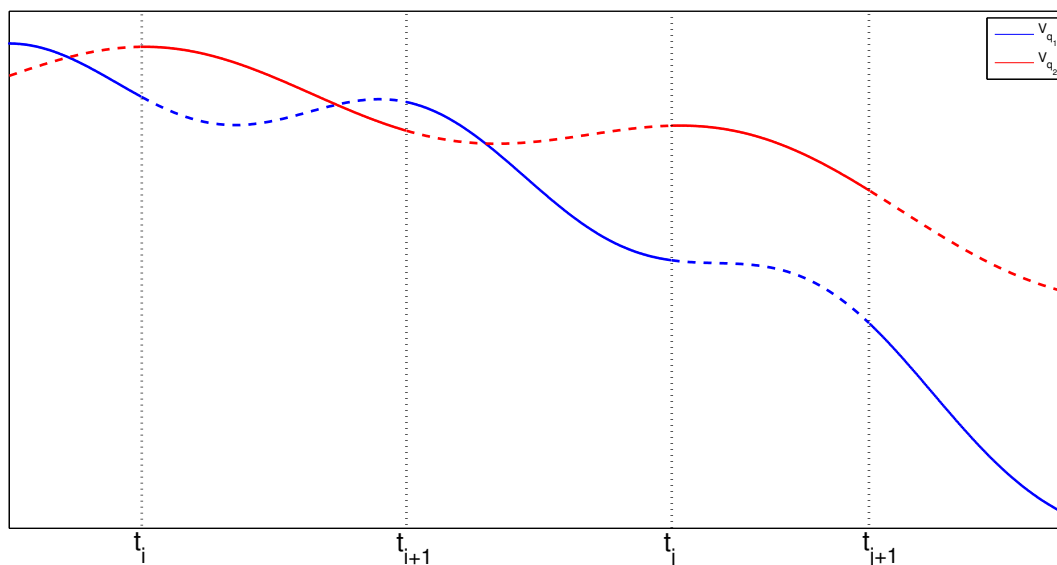


FIGURE 1.1 – Fonctions de Lyapunov multiples : Exemple

2.2.3 Pseudo-fonctions de Lyapunov

Pour certains systèmes commutés où la loi de commutations dépend de l'état, il est judicieux de caractériser les commutations par des partitions de l'espace d'état. La stabilité de ce genre de système se fait à travers la détermination d'une fonction appelée pseudo-fonction de Lyapunov (en anglais : Lyapunov-like function) où sa dérivée le long des solutions des sous-systèmes Σ_{A_q} de (1.3) est négative seulement dans les régions Ω_q où ses sous-systèmes sont actifs [Hu et al., 2002].

Définition 3 (*Pseudo-fonction de Lyapunov* [Liberzon, 2003])

Définissons une famille de fonctions $V_q : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ où chaque fonction correspond à un mode de q . Une pseudo-fonction de Lyapunov pour le sous-système Σ_{A_q} avec un point d'équilibre $x_0 \in \Omega_q \subset \mathbb{R}^n$ est une fonction qui satisfait les conditions d'une fonction de Lyapunov pour le système Σ_{A_q} dans Ω_q

- $V_q(x) > 0 \forall x \neq 0, V(x_0) = 0$
- $\|x(t)\| \rightarrow \infty \Rightarrow V_q(x) \rightarrow \infty, \forall x \in \Omega_q$
- $\frac{\partial V_q}{\partial x} A_q x(t) < 0, \forall x \neq 0, \forall q, \forall x \in \Omega_q$

Dans le cas de pseudo-fonctions de Lyapunov quadratiques, le problème de la détermination de fonctions qui satisfont les conditions de la définition 3 peut être formulé comme un problème LMI (Linear Matrix Inequalities). Considérons le cas d'une pseudo-fonction de Lyapunov commune pour toutes les régions Ω_q de la forme $V_q(x) = x^T P x$ où P est une matrice symétrique définie positive. Pour chaque région, la condition que la valeur de $x^T (A_q^T P + P A_q) x$ soit négative pour $x \in \Omega_q$ doit être satisfaite. Pour garantir cette condition, il est possible d'utiliser une procédure, appelée S -procédure, où des matrices S_q sont construites telles que $x^T S_q x \geq 0$ pour $x \in \Omega_q$ [Feron et al., 1995]. Alors, nous obtenons une condition de stabilité relaxée comme suit

$$A_q^T P + P A_q + S_q < 0, \forall q \quad (1.4)$$

Comme $x^T S_q x \geq 0$ pour $x \in \Omega_q$, alors $x^T (A_q^T P + P A_q) x < 0$ est satisfaite pour $x \in \Omega_q$. La condition (1.4) définit un problème *LMI* dont les matrices P sont les variables [Wulff, 2004]. Le théorème suivant permet d'étudier la stabilité des systèmes commutés avec les pseudo-fonctions de Lyapunov :

Théorème 4 [Branicky, 1995]

Supposons qu'il existe une pseudo-fonction de Lyapunov candidate V_q pour $q \in \{q_1, \dots, q_N\}$. Appelons \mathbb{S} l'ensemble de toutes les séquences associées au système (1.3).

Si pour chaque séquence de commutations, V_q est une pseudo-fonction de Lyapunov de Σ_{A_q} , $\forall q$ pour $x \in \Omega_q$ le long de la séquence alors le système est stable au sens de Lyapunov.

On peut remarquer que la différence entre les fonctions de Lyapunov multiples et les pseudo-fonctions de Lyapunov réside dans le fait que ces dernières ont des conditions moins fortes que les premières. Pour les pseudo-fonctions, les conditions sont satisfaites seulement dans certaines régions alors que les fonctions multiples doivent être valides pour tout l'espace d'état.

2.3 Stabilisation par temps de séjour minimum

L'idée de base de la stabilisation par temps de séjour minimum est simple. Si le temps de séjour dans un mode est suffisamment long pour que l'état s'approche de zéro, il est alors possible d'obtenir un système à commutations stable. Le principe consiste à calculer le temps de séjour minimum τ_D entre deux commutations successives pour que le système soit stable [Serres et al., 2011] [Cheng et al., 2005] [Liberzon, 2003]. Considérons le système commuté donné par (1.3) et soit $\Psi_q(t - \tau)$ la matrice de transition du sous-système A_q . Supposons que tous les sous-systèmes sont stables, alors il est possible de trouver de constantes ν_0 et μ telles que

$$\|\Psi_q(t - \tau)\| < \mu e^{-\nu_0(t-\tau)} \quad (1.5)$$

Ces constantes représentent un taux de décroissance commun pour tous les sous-systèmes. Elles peuvent être déterminées par

$$\nu_0 = \max(\nu_q), \quad \mu = \max(\mu_q), \quad q \in \{q_1, \dots, q_N\}$$

où ν_q et μ_q sont des constantes qui définissent la convergence de chaque sous-système A_q .

Théorème 5 [Hetel, 2007] Le système (1.3) est asymptotiquement stable avec la marge de stabilité ν si le temps de séjour minimum satisfait la condition

$$\tau_D \geq \frac{\log \mu}{\nu_0 - \nu}$$

avec $\nu \in (0, \nu_0)$.

3 Observabilité des systèmes linéaires à commutations

3.1 Modèle moyen et observabilité des systèmes bilinéaires

La technique de "moyennage" est certainement la méthode de synthèse d'observateurs la plus classique pour les SLC car elle est d'une part intuitive et d'autre part a su montrer son efficacité

dans certaines applications comme par exemple en génie électrique [Guezar, 2009] . Elle consiste à remplacer le modèle hybride de commutations par un modèle équivalent qui fait apparaître les dynamiques moyennes des variables d'état. Le modèle moyen d'un SLC est obtenu sur un cycle périodique de commutations parfaitement identifié. Dans ce genre d'approche, les équations d'état d'un SLC sont d'abord écrites, puis le modèle moyen est obtenu en effectuant la moyenne pondérée de toutes les équations d'état. Au cours de cette dernière étape, la pondération est déterminée à partir des durées relatives passées de chaque mode de fonctionnement.

Définition 4 *La valeur moyenne d'un signal continu X entre les instants t_0 et t_f , notée X_a , est donnée par*

$$X_a = \frac{1}{T} \int_0^T X(t) dt \quad (1.6)$$

avec $T = t_f - t_0$.

Si X est un signal continu par morceaux et commute entre plusieurs dynamiques X_i à chaque instant $t = t_i$, sa valeur moyenne sur l'intervalle $[t_0; t_f]$ sera

$$X_a = \frac{1}{T} \sum_{i=1}^{\bar{N}} \int_{t_{i-1}}^{t_i} X_i dt \approx \sum_{i=1}^{\bar{N}} X_i d_i \quad (1.7)$$

avec $d_i = \frac{t_i - t_{i-1}}{T}$ et $\sum_1^{\bar{N}} d_i = 1$

et \bar{N} le nombre de modes dans le cycle de commutations considéré.

Un modèle moyen d'un SLC s'écrit sous la forme d'état suivante :

$$\begin{cases} \dot{x}_a = (\sum_1^{\bar{N}} d_i A_i) x_a + (\sum_1^{\bar{N}} d_i B_i) u_{in} \\ y_a = (\sum_1^{\bar{N}} d_i C_i) x_a \end{cases} \quad (1.8)$$

où x_a et y_a sont les vecteurs d'état et de sortie moyens de x et y , d_i est la période fractionnaire (ou rapport cyclique) du $i^{\text{ème}}$ mode de fonctionnement. A_i , B_i et C_i désignent les matrices du système associé au $i^{\text{ème}}$ mode de fonctionnement.

Notons d'une part qu'en dépit des apparences, le modèle moyen est souvent non linéaire et d'autre part que par construction, le modèle moyen n'est pas adapté à la caractérisation des hautes fréquences et des dynamiques à échelle rapide car il néglige par exemple les phénomènes liés aux commutations. C'est pour cette raison qu'il est d'usage d'utiliser un modèle moyen pour l'analyse et la caractérisation de phénomènes dont la dynamique est inférieure à la fréquence de commutations. En considérant toutes les matrices de sortie identiques c'est-à-dire ($C_i = C$, $i = 1, \dots, \bar{N}$), il est possible de montrer que l'étude de l'observabilité de ce type de modèle équivaut à l'analyse de l'observabilité d'un système continu bilinéaire [Canitrot, 2009, Gensior et al., 2006]. Il en découle le critère d'observabilité générique suivant

Définition 5 (*Observabilité bilinéaire [Grasselli and Isidori, 1977]*)

Le système bilinéaire (1.8) est dit génériquement observable si et seulement si

$$\text{rang}(O) = n$$

où $O = \text{col}(C, CA_1, \dots, CA_{\bar{N}}, CA_1^2, CA_1 A_2, \dots, CA_1 A_{\bar{N}}, CA_2 A_1, CA_2^2, \dots)$ est la matrice d'observabilité.

Remarquons que le modèle moyen peut être observable même si les dynamiques de chaque mode de fonctionnement ne sont pas complètement observables.

L'exemple suivant montre l'intérêt d'utiliser la définition 5 pour étudier l'observabilité du modèle moyen d'un SLC.

Exemple 1 *Considérons le SLC donné par le modèle suivant :*

$$\begin{cases} \dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & (u-1) \\ (1-u) & -1 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} u_{in} \\ y = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} x \end{cases} \quad (1.9)$$

L'entrée de commutation u ne peut prendre que deux valeurs soit 0, soit 1. La dynamique du système dépend de la valeur de u . Si $u = 0$, la dynamique est régie par la matrice d'état $A_1 = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$. Sinon, $u = 1$ et la dynamique est régie par $A_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$.

Cette dernière dynamique n'est pas observable par la sortie y au sens classique de l'observabilité des systèmes linéaires. En effet, la matrice d'observabilité associée s'écrit $\begin{bmatrix} C \\ CA_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}^T$. Néanmoins, l'analyse de l'observabilité du modèle moyen du système à partir du critère introduit par la définition 5 conduit à un résultat tout à fait différent. Le modèle moyen est donné par :

$$\begin{cases} \dot{x}_a = (A_1(1-d) + A_2d)x_a + Bu_{in} \\ y_a = Cx_a \end{cases} \quad (1.10)$$

où d est le rapport cyclique et $B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}^T$.

La matrice d'observabilité déterminée par la définition 5 s'écrit

$$O = \begin{bmatrix} C & CA_1 & CA_2 & CA_1A_2 & CA_2A_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \\ 0 & -1 \\ 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

Il est clair que le rang de O est 2 et le système est donc observable au sens de la définition 5.

3.2 Observabilité au sens hybride des SLC

La terminologie "observabilité hybride" caractérise la capacité à reconstruire l'état continu initial et éventuellement une portion finie de l'état discret (dans le cas où ce dernier est inobservable) en utilisant un nombre fini de mesures. Dans le cas d'un système linéaire classique, la définition de l'observabilité est unique mais dans le cas des systèmes à commutations, cette notion est définie suivant la possibilité d'estimer le mode de fonctionnement (l'état discret). Ainsi, en commutant entre des modes de fonctionnement observables, on peut obtenir, après un certain nombre de commutations, un système hybride qui peut être soit observable soit inobservable. [Babaali, 2004] présente différents concepts d'observabilité tels que l'observabilité selon une trajectoire, l'observabilité conjointe et l'observabilité forte du mode de fonctionnement. D'autres définitions existent aussi dans la littérature telles que la $Z(T_N)$ -observabilité

[Ghanes et al., 2009] ou l'observabilité par incrémentation [Birouche, 2006], mais il apparaît un manque d'unité dans les différentes définitions existantes.

D'une manière générale, la loi de commutation et le temps de séjour jouent un rôle capital dans l'observabilité des systèmes à commutations [Babaali and Egerstedt, 2004]. Il importe donc de préciser dans un premier temps les notions de trajectoire de temps hybride, de temps de séjour, d'observabilité et de déterminabilité au sens hybride. Nous rappelons par la suite quelques critères d'observabilité hybride pour les SLC qui semblent intéressants pour mettre en perspective notre travail.

Définition 6 (Trajectoire de temps hybride [Branicky, 1995])

Une trajectoire de temps hybride est une séquence finie ou infinie d'intervalles $T_N = \bigcup_{i=1}^N I_i$ telle que $I_i = [t_i, t_{i+1}^+)$, $1 \leq i \leq N$.

De plus, la séquence de commutations $\langle T_N \rangle$ est définie comme la liste ordonnée de q associée à T_N (i.e. $\{q_1, \dots, q_N\}$ avec q_i la valeur de q pendant l'intervalle I_i).

Définition 7 (Temps de séjour (Dwell time))

On appelle τ_q le temps de séjour du système dans le mode q l'intervalle de temps défini par $\tau_q = t_{q+1}^- - t_q$

Définition 8 (Observabilité hybride [Sun et al., 2001])

Un système (1.2) est dit observable s'il existe une séquence de commutations $\langle T_N \rangle$ telle que l'état initial $x(t_0)$ est déterminé uniquement à partir de l'entrée du système $u_{in}(t)$ et la sortie $y(t)$ sur la trajectoire hybride T_N .

Définition 9 (Déterminabilité hybride [Sun et al., 2001])

Un système (1.2) est dit déterminable s'il existe une séquence de commutations $\langle T_N \rangle$ et un instant $t_{N^*} > t_0$ tels que l'état $x(t_{N^*})$ peut être déterminé uniquement par l'entrée du système $u_{in}(t)$ et la sortie $y(t)$ sur la trajectoire T_{N^*} .

Remarque 3 Lorsque l'état discret q est connu, l'observabilité du système linéaire à commutations (1.2) ne dépend pas de l'entrée u_{in} .

3.2.1 Observabilité par la détermination du sous-espace observable

Les auteurs de [Sun et al., 2001] exploitent la dualité entre l'observabilité et l'atteignabilité pour étudier l'observabilité des systèmes linéaires à commutations à partir de considérations géométriques.

Théorème 6 Pour le système (1.2), les propriétés suivantes sont équivalentes :

- Le système est complètement observable
- Le système est complètement déterminable
- $\Theta = \mathbb{R}^n$

où le sous-espace $\Theta = \sum_{j=1}^{\infty} \Theta_j$ est défini de la manière suivante

$$\begin{aligned} \Theta_1 &= \text{Im}C_1^T + \dots + \text{Im}C_N^T \\ \Theta_{j+1} &= \Gamma_{A_1^T} \Theta_j + \dots + \Gamma_{A_N^T} \Theta_j, j = 1, 2, \dots \\ \Gamma_{A_q} \Theta_j &= \Theta_j + A_q \Theta_j + \dots + A_q^{n-1} \Theta_j \end{aligned}$$

Θ est appelé le sous-espace observable (déterminable) du système (1.2). Si ce sous-espace est égal à l'espace d'état \mathbb{R}^n , le système à commutations est complètement observable.

Exemple 2 *Considérons le modèle d'un SLC caractérisé par deux modes de fonctionnement donnés par les deux paires (A_1, C_1) et (A_2, C_2) suivants :*

$$\begin{aligned} A_1 &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} & A_2 &= \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \\ C_1 &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} & C_2 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (1.11)$$

On peut vérifier facilement que les deux modes de fonctionnement ne sont pas observables au sens classique de Kalman. Examinons à présent l'observabilité à partir du théorème 6 et construisons pour cela les matrices suivantes

$$\begin{aligned} \Theta_1 &= \text{Im}C_1^T + \text{Im}C_2^T = \text{span}\{e_1\} \\ \Gamma_{A_1^T}\Theta_1 &= \Theta_1 + A_1^T\Theta_1 = \text{span}\{e_1\} \\ \Gamma_{A_2^T}\Theta_1 &= \Theta_1 + A_2^T\Theta_1 = \text{span}\{e_1, e_2\} \\ \Theta_2 &= \Gamma_{A_1^T}\Theta_1 + \Gamma_{A_2^T}\Theta_1 = \text{span}\{e_1, e_2\} \end{aligned} \quad (1.12)$$

Finalement, on obtient

$$\Theta = \Theta_1 + \Theta_2 = \text{span}\{e_1, e_2\} \quad (1.13)$$

avec $\{e_1, e_2\}$ la base canonique de \mathbb{R}^2 .

Comme $\text{rang}(\Theta) = 2$ ceci implique que $\Theta = \mathbb{R}^2$, donc conformément au théorème qui précède, le système hybride est complètement observable.

3.2.2 $Z(T_N)$ -observabilité

Le concept de la Z -observabilité a été proposé par [Kang and Barbot, 2007] pour les systèmes non linéaires et SLC. Les auteurs ont par la suite défini la notion de $Z(T_N)$ -observabilité. Cette notion d'observabilité a la particularité de prendre en compte :

- l'observabilité partielle de l'état et des instants de commutations ;
- l'observabilité avec un modèle partiel, c'est-à-dire qu'une partie des équations du modèle est totalement inconnue ;
- les systèmes avec contraintes algébriques.

Dans ce qui suit, U est un ensemble ouvert et connexe dans l'espace temps-état-commutation $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^N$.

Définition 10 (*Fonction $Z(T_N)$ -observable [Kang and Barbot, 2007]*)

Une fonction $Z(t, x(t), q)$ est dite $Z(T_N)$ -observable dans U pour un système (1.2) et une trajectoire de temps hybride T_N et la séquence de commutations $\langle T_N \rangle$ si pour deux trajectoires $(t, x^i(t), q_i(t))$, $i = 1, 2$ dans U sur un intervalle $[t_{ini}, t_{fin}]$, l'égalité

$$y^1(t) = y^2(t)$$

implique

$$Z(t, x^1(t), q_1(t)) = Z(t, x^2(t), q_2(t))$$

Définition 11 ($Z(T_N)$ -**observabilité** [Kang and Barbot, 2007])

Considérons une trajectoire de temps hybride T_N et la séquence de commutations $\langle T_N \rangle$ et une fonction continue $Z(t, x(t), q)$. Supposons qu'il existe N projections linéaires P_i telles que

1. Pour $1 \leq i \leq N$, $P_i Z(t, x(t), q)$ est $Z(T_N)$ -observable dans U pour $t \in [t_i, t_{i+1}]$
2. $\text{rang}[P_0^T \dots P_N^T] = \dim(Z) = n_z$
3. $\frac{d\bar{P}_i Z(t, x(t), q)}{dt} = 0$ pour $t \in [t_i, t_{i+1}]$ avec $\text{rang}[\bar{P}_i^T P_i^T] = n_z$ dans $(R)^{n_z \times n_z}$. \bar{P}_i est le complément de P_i .

alors $z = Z(t, x(t), q)$ est $Z(T_N)$ -observable dans U suivant la trajectoire de temps hybride T_N et $\langle T_N \rangle$.

Notons que la troisième condition indique que les états inobservables doivent avoir une dynamique nulle. Ceci est le cas dans un certain nombre d'applications comme le convertisseur multicellulaire série [Ghanes et al., 2009] où les états inobservables sont constants. Une autre définition de la notion de $Z(T_N)$ -observabilité est établie par [Amghar et al., 2013] pour le cas où cette troisième condition s'avère difficile à vérifier.

Exemple 3 Considérons un système linéaire commuté suivant

$$\begin{cases} \dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & u \\ -u & -1 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} u_{in} \\ y = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} x \end{cases} \quad (1.14)$$

Le sous-système correspondant à $u = 0$ n'est pas observable par la sortie y . Pour étudier l'observabilité hybride, On considère la trajectoire du temps hybride $T_2 = [t_1, t_1^+) \cup [t_2, t_2^+)$ et la séquence de commutations $q = 1, 2$ où le mode 1 correspond à $u = 1$ et le mode 2 à $u = 0$. on choisit $Z(t, x(t), q) = x_1$, $P_1 = 1$ et $\bar{P}_1 = 0$.

Durant l'intervalle $[t_1, t_1^+)$, x_1 est $Z(T_N)$ -observable par la sortie y et pendant le deuxième intervalle sa dynamique est constante. Remarquons que $\text{rang}(P_1) = \dim(Z) = 1$ et $\frac{d\bar{P}_1 Z(t, x(t), q)}{dt} = 0$, alors le système (1.14) est $Z(T_N)$ -observable d'après la définition 11.

3.2.3 Observabilité par la détermination du sous-espace inobservable

Une autre caractérisation géométrique intéressante de la notion d'observabilité pour les SLC est établie dans [Tanwani et al., 2011]. Le principe de l'approche repose sur la recherche du sous-espace inobservable du système le long de la trajectoire de temps hybride. Notons N_q^m le sous-espace inobservable du système (1.2) sur l'intervalle $[t_q, t_m^+)$. Il est clair que le système (1.2) est un système LTI entre deux instants de commutations. Son sous-espace inobservable sur l'intervalle $[t_q, t_{q+1}]$ est donné par le plus grand espace A_q -invariant contenu dans $\ker C_q$, c'est-à-dire $\langle \ker C_q | A_q \rangle = G_q$ avec $G_q = \text{col}(C_q; C_q A_q; \dots; C_q A_q^{n-1})$. Il est clair que $N_q^q = \ker G_q$.

Lorsque la mesure est disponible le long de l'intervalle $[t_{q-1}, t_m^+)$, la quantité d'informations sur l'état s'en trouve augmentée ce qui a pour conséquence de diminuer progressivement la dimension du sous-espace inobservable N_q^m au fil des commutations. On peut alors montrer que l'évolution de ce sous-espace est déterminée par la relation de récurrence suivante [Tanwani et al., 2013]

$$\begin{aligned} N_m^m &= \text{Ker} G_m \\ N_q^m &= \text{Ker} G_q \cap e^{-A_q \tau_q} N_{q+1}^m, \quad 1 \leq q \leq m-1 \end{aligned} \quad (1.15)$$

Théorème 7 *Le système (1.2) est dit observable sur l'intervalle $[t_1, t_m^+)$ avec la séquence de commutations $\langle T_m \rangle$ si et seulement si*

$$N_1^m = \{0\} \quad (1.16)$$

Un théorème pour la déterminabilité du système (1.2) est également proposé par [Tanwani et al., 2011]. Le sous-espace indéterminable Q_1^m sur l'intervalle $[t_q, t_m^+)$ est donné par la relation de récurrence suivante :

$$\begin{aligned} Q_1^1 &= \text{Ker}G_1 \\ Q_1^q &= \text{Ker}G_q \cap e^{A_{q-1}\tau_{q-1}}Q_1^{q-1}, \quad 2 \leq q \leq m \end{aligned} \quad (1.17)$$

Théorème 8 *Le système (1.2) est dit déterminable sur l'intervalle $[t_1, t_m^+)$ avec la séquence de commutations $\langle T_m \rangle$ si et seulement si*

$$Q_1^m = \{0\} \quad (1.18)$$

Dans le cas du système (1.2) où $E_q = I_n$, les deux conditions sont équivalentes. Dans [Tanwani et al., 2011], des corollaires sont proposés pour simplifier l'étude de l'observabilité d'une manière indépendante des instants de commutations t_q par le biais de conditions nécessaires ou suffisantes.

Exemple 4 *Considérons un SLC défini par*

$$\begin{aligned} A_1 &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} & A_2 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ C_1 &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} & C_2 &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (1.19)$$

les deux modes de fonctionnement ne sont pas observables individuellement. On définit les matrices d'observation de chaque mode de la manière suivante :

$$G_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad G_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (1.20)$$

Les noyaux de G_1 et G_2 sont donnés par

$$\text{ker}G_1 = \text{span}\{e_2\}, \quad \text{ker}G_2 = \text{span}\{e_1\}$$

où $e_1 = (1, 0)$ et $e_2 = (0, 1)$ sont les vecteurs de la base canonique de l'espace d'état \mathbb{R}^2 .

A partir de (1.15), les sous-espaces inobservables sont donnés par

$$\begin{aligned} N_2^2 &= \text{span}\{e_1\} \\ N_1^2 &= \text{span}\{e_2 \cap e^{-A_1\tau_1}e_1\}, \end{aligned} \quad (1.21)$$

Puisque $e^{-A_1\tau_1}e_1 = \begin{pmatrix} e^{-\tau_1} & 0 \\ 0 & e^{-\tau_1} \end{pmatrix}e_1 = e^{-\tau_1}e_1$, alors $N_1^2 = \{0\}$ et le système (1.19) est observable au sens hybride selon le théorème 7.

3.2.4 Observabilité hybride d'un SLC à temps discret

Grâce à la nature récurrente des équations à temps discret, l'étude de l'observabilité d'état d'un SLC à temps discret est plus simple que celle du cas d'un système à temps continu [Babaali, 2004]. Considérons le système linéaire à temps discret à commutations suivant :

$$\begin{aligned} x(k+1) &= A_q x(k) + B_q u_{in}(k) \\ y(k) &= C_q x(k) \end{aligned} \quad (1.22)$$

Considérons également la séquence de commutations $\langle T_N \rangle = \{q_1, q_2, \dots, q_N\}$ pour le système (1.22) et définissons

$$Y(q, x, U_{in}) = O(q)x + \Gamma(q)U_{in} \quad (1.23)$$

avec $Y(q, x, U_{in}) = (y_1^T \dots y_N^T)^T$, $U_{in} = (u_{in_1}^T \dots u_{in_N}^T)^T$,

$$O(q) = \begin{pmatrix} C(q_1) \\ C(q_2)A(q_1) \\ \vdots \\ C(q_N)A(q_{N-1}) \dots A(q_1) \end{pmatrix} \quad (1.24)$$

et

$$\Gamma(q) = \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & 0 \\ C(q_2)B(q_1) & \dots & 0 & 0 \\ C(q_3)A(q_2)B(q_1) & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \dots & 0 & \vdots \\ C(q_N)A(q_{N-1}) \dots A(q_2)B(q_1) & \dots & C(q_N)B(q_{N-1}) & 0 \end{pmatrix} \quad (1.25)$$

$O(q)$ est la matrice de d'observabilité [Chaib et al., 2005].

Définition 12 *Observabilité hybride par morceaux (Pathwise Observability PWO)* [Babaali, 2004]

Un SLC est dit observable par morceaux (pathwise observable) pour une séquence de commutations q s'il existe un entier N tel que, pour chaque séquence de commutations de longueur N , le SLC est observable, c'est-à-dire que $\text{rang}(O(q)) = n$, où n désigne la dimension du système. Le plus petit entier N est appelé index d'observabilité sur une trajectoire.

Exemple 5 Considérons

$$\begin{aligned} A(1) &= \begin{pmatrix} 0.5 & 0 \\ 0 & 0.1 \end{pmatrix} & A(2) &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0.2 \end{pmatrix} \\ C(1) &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} & C(2) &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (1.26)$$

Les deux modes de fonctionnement définis par $(A(1), C(1))$ et $(A(2), C(2))$ sont inobservables. Choisissons la séquence de commutations $q = 1, 2$; la matrice d'observabilité associée au système est donnée par :

$$O(q) = \begin{pmatrix} C(1) \\ C(2)A(1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0.1 \end{pmatrix} \quad (1.27)$$

Le rang de $O(q)$ est 2 donc le système hybride est observable pour la séquence de commutations choisie en dépit du fait que les modes de fonctionnement associés à ses deux modes de fonctionnement sont inobservables suivant le critère classique de Kalman.

4 Synthèse d'observateurs pour les SLC sans saut sur l'état

4.1 Observateur du modèle moyen

La technique de "moyennage" déjà présentée dans la section 3.1 reste une technique efficace pour synthétiser des observateurs pour les SLC dont un ou plusieurs modes ne sont pas observables au sens classique de Kalman. Notons que le modèle résultant du moyennage est généralement bilinéaire donc la synthèse d'un observateur pour ce type de modèle s'inscrit dans le cadre de la synthèse d'observateurs pour les systèmes non linéaires. Plusieurs approches non linéaires peuvent être employées dans ce cas comme par exemple le filtrage de Kalman étendu, la synthèse d'un observateur à grand gain ou d'un observateur par modes de glissement [Gensior et al., 2006]. Néanmoins, peu de travaux existent sur le thème de la convergence des observateurs d'un modèle moyen.

4.2 Observateur commuté : modes de fonctionnement observables

Considérons le système à commutations sans saut donné par (1.2) et supposons que les couples (A_q, C_q) sont observables pour chaque état q .

L'observateur à commutations proposé par [Birouche, 2006] est donné par :

$$\begin{cases} \dot{\hat{x}} = A_q \hat{x}(t) + B_q u(t) + L_q (y(t) - C_q \hat{x}(t)) \\ \hat{y}(t) = C_q \hat{x}(t) \end{cases} \quad (1.28)$$

où \hat{x} est l'estimé du vecteur d'état x et L_q est un vecteur de gain correspondant au mode q .

La synthèse de l'observateur repose sur la détermination du gain L_q tels que la dynamique de l'erreur d'observation

$$\dot{e}_x(t) = (A_q - L_q C_q) e_x(t) \quad (1.29)$$

soit stable où $e_x = x - \hat{x}$ est l'erreur d'observation.

Par conséquent la synthèse d'observateur pour les systèmes hybrides avec l'état discret connu rejoint l'étude de la stabilité asymptotique des systèmes à commutations. Une condition de stabilité est formulée en terme de rapport entre le nombre de commutations et le temps moyen de séjour dans chaque mode de fonctionnement. Pour prouver la stabilité d'un observateur on a souvent recours aux fonctions de Lyapunov. Malheureusement, aucune méthode générale n'est disponible pour calculer ces fonctions. Cependant, le choix de fonctions de Lyapunov de type quadratique permet souvent de formuler la stabilité des systèmes à commutations sous forme d'inégalités matricielles linéaires LMI. La stabilité est alors garantie par :

- l'existence d'une fonction de Lyapunov quadratique commune à tous les modes de fonctionnement ;
- l'existence de fonctions de Lyapunov quadratiques multiples.

Une fonction quadratique commune est donnée par

$$V(e_x(t)) = e_x(t)^T P e_x(t) \quad (1.30)$$

avec $P = P^T$ matrice définie positive.

La condition de stabilité asymptotique s'écrit alors

$$\dot{V}(e_x(t)) < 0 \quad (1.31)$$

et les gains L_q peuvent être déterminés grâce à l'inégalité

$$(A_q - L_q C_q)^T P + P(A_q - L_q C_q) < 0 \quad (1.32)$$

Il apparaît clairement que trouver une fonction de Lyapunov commune n'est pas toujours une tâche facile surtout si le nombre de modes de fonctionnement est important. Une deuxième solution consistant à trouver des fonctions de Lyapunov quadratiques multiples peut donc s'imposer dans certains cas [Birouche, 2006, Saadaoui et al., 2006].

4.3 Observateur hybride : modes de fonctionnement inobservables

Dans le cas où certains couples (A_q, C_q) du modèle (1.2) ne sont pas observables, la synthèse d'un observateur hybride n'est pas garantie même si l'observabilité au sens hybride est vérifiée. Pour un tel problème, très peu de travaux proposent une solution. On peut citer néanmoins l'observateur proposé par [Ghanes et al., 2009] pour un convertisseur de puissance multicellulaire où les états inobservables du système sont constants. Les auteurs dans [Tanwani et al., 2011] proposent une solution innovante et intéressante avec des modes de fonctionnement qui peuvent être tous inobservables en prenant en compte le saut sur l'état. L'approche repose sur la collecte de l'information sur l'état à partir de chaque mode de fonctionnement le long d'une trajectoire de temps hybride jusqu'à ce que le système devienne observable. L'observateur proposé est de la forme

$$\begin{aligned} \dot{\hat{x}}(t) &= A_q \hat{x}(t) + B_q u_{in}(t), \quad t \in [t_{q-1}, t_q), t \neq \hat{t}_k \\ \hat{x}(t_q) &= E_q \hat{x}(t_q^-) + F_q v_q, \quad q \geq 1 \\ \hat{x}(\hat{t}_k) &= \hat{x}(t_q^-) - \xi_k, \quad k \geq 1 \end{aligned} \quad (1.33)$$

où \hat{t}_k est l'instant de la mise à jour de l'estimation d'état. Cet instant est différent de l'instant de commutation t_q . ξ_k est le vecteur de correction de l'observateur. Ce terme de correction est calculé grâce à une loi de mise à jour de l'état définie dans [Tanwani et al., 2011].

L'inconvénient majeur de cette technique est sa complexité en termes de synthèse et de mise en œuvre.

5 Commande des systèmes linéaires à commutations

Au niveau de la commande des systèmes linéaires à commutations, on distingue en général les entrées continues et les entrées de commutations [Montagner et al., 2006, Wulff et al., 2009, Chen et al., 2012]. La technique de commande dépend essentiellement du type d'entrées utilisées (entrées continues ou entrées de commutations ou encore les deux en même temps). Par exemple pour les systèmes commutés autonomes¹, le contrôle se fait exclusivement par les entrées de commutations et il est alors nécessaire de commander les instants et les séquences de commutations. Dans le cas de systèmes non autonomes avec des commutations non commandées, les entrées continues sont employées en tant que commandes. Dans le troisième cas, ces entrées sont considérées constantes. Par conséquent, seulement les entrées de commutations

1. sont les systèmes à commutations qui ne peuvent pas être commandés par une commande continue exogène.

sont disponibles pour effectuer le contrôle (cas des convertisseurs de puissance). Dans cette section, nous présentons la notion de commandabilité des SLC ainsi que quelques techniques de commande dans la littérature.

5.1 Commandabilité des SLC

La propriété de commandabilité est une notion fondamentale à vérifier pour un système dynamique avant d'aborder le problème de synthèse de la commande [Cheng, 2005]. Cette notion dans le cas des SLC sans saut est définie comme suit :

Définition 13 (*Commandabilité [Sun and Zheng, 2001]*)

Le système linéaire à commutations (1.2) est dit complètement commandable si pour toute valeur initiale x_0 et finale x_f , il existe un instant de temps $t_f > 0$, un signal de commutations $q \in \{q_1, \dots, q_N\}$ et une entrée $u_{in} : [0, t_f] \rightarrow \mathbb{R}^m$ tels que $x(0) = x_0$ et $x(t_f) = x_f$

Le système (1.2) est dit complètement commandable si la matrice de commandabilité Co donnée par

$$Co = [\begin{array}{c} B_{q_1}, \dots, B_{q_N}, A_{q_1} B_{q_1}, \dots, A_{q_N} B_{q_1}, \dots, A_{q_N} B_{q_N}, \\ \dots, A_{q_1}^{n-1} B_{q_1}, A_{q_2} A_{q_1}^{n-2} B_{q_1}, \dots, \\ A_{q_1} A_{q_m}^{n-2} B_{q_1}, \dots, A_{q_N}^{n-1} B_{q_N} \end{array}] \quad (1.34)$$

est de rang plein [Liu et al., 2011].

Les auteurs dans [Sun and Ge, 2005] définissent un critère intéressant de commandabilité indépendant des paramètres du système. Il s'appuie sur la recherche des sous-espaces commandables de toutes les séquences de commutations possibles. Rappelons que l'ensemble commandable d'une paire de matrices (A, B) est le plus petit sous-espace invariant contenant l'image de B . Pour les systèmes commutés, nous notons $\mathcal{V}(A_q, B_q)$ le plus petit sous-espace de \mathbb{R}^n invariant pour tout A_q , $q \in \{q_1, \dots, q_N\}$, et contenant toutes les images de B_q , $q \in \{q_1, \dots, q_N\}$. Ce sous-espace peut être obtenu à l'aide de la relation récursive suivante

$$\begin{aligned} \mathcal{V}_1 &= \sum_{q=q_1}^{q_N} Im B_q \\ \mathcal{V}_{j+1} &= \mathcal{V}_j + \sum_{q=q_1}^{q_N} \sum_{k=1}^{n-1} A_q^k \mathcal{V}_j, \quad j = 1, 2, \dots \end{aligned} \quad (1.35)$$

et

$$\mathcal{V}(A_q, B_q) = \mathcal{V}_n$$

Ainsi, le théorème suivant est énoncé

Théorème 9 *Le système commuté (1.2) est dit complètement commandable si $\mathcal{V}(A_q, B_q) = \mathbb{R}^n$.*

Exemple 6 *Considérons le modèle d'un SLC suivant :*

$$\begin{aligned} A_1 &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} & A_2 &= \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \\ B_1 &= \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} & B_2 &= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (1.36)$$

Les deux sous-systèmes ne sont pas commandables au sens classique de la commandabilité. Examinons à présent la commandabilité à partir du théorème 9. et construisons pour cela les matrices suivantes

$$\begin{aligned}\mathcal{V}_1 &= \text{Im}B_1 + \text{Im}B_2 = \text{span}\{e_1\} \\ \mathcal{V}_2 &= \mathcal{V}_1 + A_1\mathcal{V}_1 + A_2\mathcal{V}_1 = \text{span}\{e_1, e_2\}\end{aligned}\quad (1.37)$$

Finalement, on obtient

$$\mathcal{V}(A_q, B_q) = \mathcal{V}_n = \text{span}\{e_1, e_2\} \quad (1.38)$$

avec $\{e_1, e_2\}$ la base canonique de \mathbb{R}^2 .

Comme $\mathcal{V}(A_q, B_q) = \mathbb{R}^2$, alors conformément au théorème qui précède, le système hybride est complètement commandable.

Dans le cas des SLC autonomes avec des commutations commandées, l'étude de commandabilité devient celle d'un système bilinéaire en considérant un système similaire à

$$\dot{x} = A_c x + \sum_{i=1}^N A_i u_i x \quad (1.39)$$

avec $A_q = (A_c + A_i)$ et $u_i = \begin{cases} 1 & \text{si le mode } q_i \text{ est actif} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}, i = 1 \dots, N$

5.2 Commande à partir du modèle moyen

Cette technique consiste à utiliser un modèle moyen (1.8) pour synthétiser la loi de commande. Elle est utilisée dans le cas où le SLC possède une seule entrée de commutations. Après moyennage, le système obtenu est bilinéaire et l'entrée de commande devient les rapports cycliques d_i . Ainsi, les techniques de commandes des systèmes bilinéaires ou non linéaires peuvent être appliquées [Ouquelle et al., 2009, Meghnous and Pham, 2013].

5.3 Commande par retour d'état commuté

Comme pour les systèmes linéaires à temps continu, il est possible d'envisager une commande par retour d'état pour les SLC dès lors que l'état est disponible. Comme un SLC est composé d'une famille de systèmes linéaires, il est possible de synthétiser une loi de commande pour chaque mode de fonctionnement tout en assurant la stabilité globale du système commuté vis-à-vis de ses commutations [Geromel and Deaecto, 2009].

Pour les SLC continus, le corollaire suivant peut être utilisé pour synthétiser le retour d'état.

Corollaire 1 Retour d'état commuté continu [Montagner et al., 2006]

Le système commuté (1.2) peut être stabilisé à l'aide du retour d'état

$$u_{in} = K_q x \quad (1.40)$$

s'il existe une matrice W_u définie positive et des matrices $G_q \forall q \in \{q_1, \dots, q_N\}$ telles que

$$A_q W_u + W_u A_q^T + B_q G_q + G_q^T B_q^T < 0, \forall q \in \{q_1, \dots, q_N\} \quad (1.41)$$

alors les gains K_q de la loi de commande (1.40) sont donnés par $K_q = G_q W_u^{-1}$.

Puisque les systèmes linéaires commutés à temps discret peuvent être représentés par le modèle suivant :

$$x(k+1) = A_q x(k) + B_q u_{in}(k) \quad (1.42)$$

le retour d'état discret est formalisé à l'aide du théorème qui suit

Théorème 10 Retour d'état commuté discret [Daafouz et al., 2002]

Le système linéaire à commutations (1.42) peut être stabilisé, quelle que soit la loi de commutation, à l'aide d'un retour d'état

$$u_{in}(k) = K_q x(k) \quad (1.43)$$

s'il existe des matrices définies positives S_q et R_q et des matrices G_q , $\forall q \in \{q_1, \dots, q_N\}$ telles que les inégalités matricielles linéaires

$$\begin{bmatrix} G_q + G_q^T - S_q & 0 \\ A_q G_q + B_q R_q & S_{\bar{q}} \end{bmatrix} > 0, \forall (q, \bar{q}) \in \{q_1, \dots, q_N\} \quad (1.44)$$

sont satisfaites. Le gain commuté du retour d'état est alors donné par $K_q = R_q G_q^{-1}$ et la matrice de Lyapunov quadratique multiple par $P_q = S_q^{-1}$, $\forall q \in \{q_1, \dots, q_N\}$

Il faut noter que ces retours d'état dans le cas continu ou discret sont établis pour une loi de commutations arbitraire supposée disponible. Par ailleurs, la synthèse d'une commande conjointe de retour d'état et de loi de commutations reste un problème délicat. Les auteurs de [Lin and Antsaklis, 2008] proposent une solution reposant sur une technique d'optimisation LMI pour synthétiser à la fois les gains du retour d'état et la loi de commutations. Une autre méthode est proposée également par [Pettersson, 2004] où la synthèse de la commande conjointe se fait à l'aide des fonctions de Lyapunov multiples et de la résolution d'un problème d'inégalités matricielles bilinéaires (BMI : Bilinear Matrix inequality).

5.4 Commande par optimisation des instants de commutations

Certaines classes de systèmes linéaires à commutations sont commandées exclusivement par la loi de commutations, soit à cause de l'absence des entrées continues (système autonome) soit parce que ces entrées sont données ou constantes comme par exemple les convertisseurs de puissance. L'une des techniques existantes est celle de l'optimisation des instants de commutations entre les différents modes de fonctionnement du SLC. Ainsi, le problème de la commande se formalise comme suit

$$\begin{aligned} & \min_{t_{q_2}, \dots, t_{q_N}} J(x_0, t_{q_1}, t_{q_2}, \dots, t_{q_N}) \quad (1.45) \\ \text{par rapport à : } & \begin{cases} \dot{x} = \begin{cases} A_{q_1} + B_{q_1} u_{in}, & t \in [t_{q_1}, t_{q_2}) \\ A_{q_2} + B_{q_2} u_{in}, & t \in [t_{q_2}, t_{q_3}) \\ \vdots \\ A_{q_N} + B_{q_N} u_{in}, & t \in [t_{q_N}, t_{q_{N+1}}) \end{cases} \\ x(t_{q-1}) = x_0 \end{cases} \end{aligned}$$

Un grand intérêt a été porté pour ce type de commande et un grand nombre de chercheurs se sont intéressés à ce problème d'optimisation comme [Branicky et al., 1998]

[Shahid Shaikh and Caines, 2002][Shaikh and Caines, 2003][Axelsson et al., 2005a]

[Axelsson et al., 2005b]. Une autre formulation de ce problème consiste à déterminer des surfaces de commutations optimales qui contiennent implicitement les instants de commutations

pour une famille de trajectoires générées à partir d'un ensemble de valeurs initiales. L'optimalité des instants de commutations est élaborée par rapport à un critère d'optimisation non linéaire [Boccardo et al., 2005] [Schild et al., 2009]. Cette méthode d'optimisation de surfaces de commutations fournit dans la pratique une loi de commande sous la forme d'une cartographie, ce qui réduit énormément les temps de calcul.

Dans ce même concept de commande, la commande prédictive des SLC commandés exclusivement par la loi de commutations a fait également l'objet d'intenses travaux de recherche [Geyer et al., 2005][Attia and Alamir, 2006][Li et al., 2013]. Dans le cas de cette commande, l'optimisation des instants de commutations se fait sur un horizon de prédiction prédéfini.

6 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons présenté une description des systèmes linéaires à commutations dans le contexte hybride (1.2). Une vue d'ensemble est faite sur la notion de stabilité des systèmes commutés en utilisant la théorie de Lyapunov. Nous avons illustré la majorité de types de fonctions de Lyapunov généralement utilisées pour étudier la stabilité : fonction de Lyapunov commune, fonction de Lyapunov multiple et pseudo-fonction de Lyapunov. Dans le cadre de cette thèse, les fonctions de Lyapunov communes vont être employées pour étudier la convergence des erreurs d'observation et la synthèse des lois de commande.

Par la suite, un aperçu sur le concept de l'observabilité hybride et sur les notions les plus intéressantes d'observabilité pour les SLC existantes dans la littérature a été dressé. La technique de moyennage, très utile dans l'étude de l'observabilité, a été présentée ainsi qu'un observateur reposant sur cette approche. Les observateurs hybrides pour les SLC ont également été abordés et nous les avons classés selon l'observabilité des modes de fonctionnement du système. Dans le cas où le système présente des modes inobservables, la synthèse d'un observateur n'a pas reçu un grand intérêt jusqu'ici par la communauté des systèmes dynamiques hybrides ([Tanwani et al., 2011]) ce qui est l'un des enjeux de notre travail.

Enfin, nous avons abordé le problème de la commande des SLC et leur concept de commandabilité. Des techniques de commande répandues ont été présentées : la commande à partir du modèle moyen, le retour d'état commuté et l'optimisation des instants de commutations. Dans notre travail, nous nous intéressons aux systèmes avec des entrées continues constantes. Par conséquent, la commande par retour d'état ne peut pas être appliquée. Pour cette raison, nous regarderons par la suite uniquement des lois de commande qui visent à optimiser les instants de commutations ou à déterminer les rapports de moyennage d_i .

Dans le chapitre qui suit, nous développerons l'étude d'observabilité et la synthèse d'observateurs pour une classe particulière des SLC. Un intérêt particulier est porté sur les systèmes contenant des modes de fonctionnement inobservables.

Chapitre 2

Observateurs pour une classe de systèmes linéaires à commutations

1	Introduction	27
2	Modèle Hamiltonien à ports	29
3	Observateur non linéaire à partir du modèle moyen	30
3.1	Modélisation et analyse d'observabilité	30
3.2	Synthèse d'un observateur	32
4	Observateur hybride pour SLC à deux modes	33
4.1	Synthèse d'un observateur	33
4.2	Exemple	38
4.3	Convergence de l'observateur	41
5	Application : Convertisseur SEPIC	42
5.1	Modélisation	43
5.2	Observateur non linéaire à partir du modèle moyen	44
5.3	Observateur hybride pour le convertisseur SEPIC	52
6	Conclusion	59

1 Introduction

La synthèse d'observateurs d'état pour les systèmes linéaires à commutations a connu un intérêt croissant par les chercheurs ces dernières années. D'un point de vue de la commande, le contrôle de ces systèmes nécessite la connaissance du vecteur d'état ce qui signifie qu'un nombre suffisant de capteurs doit être employé. Ceci induit un coût économique qui peut être élevé pour une fabrication industrielle en série. Par ailleurs, certains capteurs ne peuvent pas être utilisés dans des environnements hostiles pour eux [McGinnis et al., 2007]. L'utilisation d'observateurs peut donc s'avérer utile pour remédier aux problèmes de l'instrumentation. Malheureusement, l'observabilité au sens classique des systèmes résultant de chaque commutation n'est pas toujours garantie. Comme il a été vu dans le chapitre précédent, deux démarches sont traditionnellement adoptées face à ce problème : l'utilisation d'un modèle moyen ou la prise en compte d'un modèle hybride du système.

La première approche est certainement celle qui jusqu'ici a suscité le plus d'intérêt chez les

chercheurs [Spinu et al., 2012]. Deux raisons peuvent expliquer l'engouement autour de cette technique. Au niveau conceptuel, la démarche proposée est intuitive et donc facile à comprendre. Au niveau méthodologique, il s'agit de se ramener, modulo une hypothèse de comportement moyen, à un problème d'Automatique connu. Dans la pratique, un tel observateur demeure un moyen efficace pour estimer les états du système en présence de modes de fonctionnement inobservables. Par contre, cette solution n'est valide que pour une certaine gamme de fréquence. Dans ce cas, l'utilisation de modèles et de techniques propres aux systèmes hybrides s'impose. De plus, il arrive parfois qu'on ait besoin d'effectuer la synthèse d'un observateur hybride pour un système comportant des modes de fonctionnement inobservables. Pour cette problématique, plusieurs travaux s'intéressent à l'observabilité hybride [Babaali, 2004, Barbot et al., 2007, Riedinger et al., 2008, Riedinger et al., 2010][Sun et al., 2001][Zhao and Su, 2010, Shim and Tanwani, 2011][Zheng et al., 2009] mais aucun d'entre eux n'évoque réellement la synthèse proprement dite d'un observateur. Comme nous l'avons déjà évoqué dans le chapitre précédent, la prise en compte des modes inobservables dans la synthèse d'un observateur hybride a été proposée dans une première étude [Ghanes et al., 2009]. Néanmoins, le travail a été effectué pour un cas particulier de systèmes à commutations dont les états inobservables sont constants pendant les modes de fonctionnement inobservables. Cette condition particulière est validée pour certains convertisseurs de puissance tels que le convertisseur multicellulaire série. A notre connaissance, seul [Tanwani et al., 2011] traite de la synthèse d'un observateur hybride en présence de modes pouvant être individuellement observables ou inobservables dans un cas général où les états inobservables varient durant le mode de fonctionnement individuellement inobservables. Une application de cet observateur sur les convertisseurs de puissance est proposée dans [Gorp et al., 2012] où le système considéré est un convertisseur multicellulaire de type série.

Dans ce chapitre, la classe de SLC considérée est celle des systèmes qui s'écrivent sous une forme Hamiltonienne à ports commutée. Dans le but de proposer une approche générale de synthèse d'observateurs pour cette classe, nous utiliserons la structure inter-connectée des systèmes port-Hamiltoniens pour décrire le comportement du système dynamique, mais aussi ses interactions avec l'environnement à travers le concept de ports. Cette représentation offre également un cadre général systématique pour l'analyse, l'observation, la simulation et la synthèse de commandes. Elle permet notamment d'analyser des propriétés structurelles du système à travers des outils géométriques [van der Schaft and Maschke, 2004, van der Schaft, 2000].

Par la suite, nous présentons dans un premier temps la modélisation de la classe des systèmes considérés puis nous proposons un observateur non linéaire synthétisé à partir du modèle moyen du système. L'étude d'observabilité et l'analyse de stabilité de l'observateur à l'aide de la théorie de Lyapunov sont détaillées en exploitant la représentation Hamiltonienne. Le problème de l'observation hybride avec des modes de fonctionnement inobservables est abordé dans un second temps. Après l'étude de l'observabilité sur un modèle hybride du système, nous proposons un nouvel observateur hybride pour des SLC à deux modes et une seule entrée de commutation sans hypothèse d'observabilité sur les différents modes de fonctionnement.

Pour illustrer nos propos, le convertisseur Single Ended Primary Inductor Circuit (SEPIC) est choisi à titre d'exemple d'application. Nous synthétisons les deux observateurs proposés pour ce système, ainsi qu'un observateur étendu à la résistance de charge du circuit. Enfin, des résultats

expérimentaux et de simulation sont présentés pour valider les performances de l'observateur non linéaire étudié pour le modèle moyen. De même pour l'observateur hybride, des résultats de simulation et d'expérimentation sur le circuit SEPIC sont présentés pour valider les théories.

2 Modèle Hamiltonien à ports

Considérons la classe des systèmes port-Hamiltoniens commutés avec dissipation [Gerritsen et al., 2002] donnée par

$$\begin{cases} \dot{z} &= [J_q(z) - R(z)] \frac{\delta H(z)}{\delta z} + g_q(z) u_{in} \\ y_p &= g_q^T(z) \frac{\delta H(z)}{\delta z} \end{cases} \quad (2.1)$$

où $z \in \mathbb{R}^n$ est un vecteur d'état et $y_p \in \mathbb{R}$ est la sortie de ports. g est la matrice d'entrée. J est une matrice antisymétrique de dimension $n \times n$ appelée matrice de structure. Elle reflète la structure des interconnexions dans le système. R est une matrice symétrique semi-définie positive indépendante de q . H est appelé Hamiltonien et représente l'énergie emmagasinée dans le système. q est le signal de commutation.

Dans le cas des convertisseurs de puissance DC-DC, si les éléments de stockage de l'énergie sont linéaires [Bâja et al., 2009], l'Hamiltonien est donné par

$$\frac{dH}{dz}(z) = Pz \quad (2.2)$$

avec P matrice symétrique et inversible.

La matrice Hamiltonienne peut s'écrire comme suit

$$H(z) = \frac{1}{2} z^T P z \quad (2.3)$$

En considérant $x = Pz$ comme variable d'état, le modèle (2.1) devient

$$\begin{cases} \dot{x} &= P[J_q(x) - R(x)]x + P g_q(x) u_{in} \\ y_p &= P g_q^T(x) x \end{cases} \quad (2.4)$$

et

$$H(x) = \frac{1}{2} (P^{-1}x)^T x = \frac{1}{2} x^T P^{-1} x \quad (2.5)$$

Notons que pour les convertisseurs de puissance DC-DC, les états de x correspondent aux variables de co-énergie (courants et tensions) et les états de z aux variables d'énergie (charge électrique et flux magnétique). La matrice P contient les paramètres des éléments passifs du circuit (inductances et capacités), tandis que les matrices d'entrée $g_q(x)$, de structure $J_q(x)$ et de dissipation $R(x)$ ne dépendent pas du vecteur d'état de sorte que nous pouvons poser $g_q(x) = B_q$, $J_q(x) = J_q$ et $R(x) = R$ (R contient les résistances du circuit). Pour une application sur les convertisseurs nous allons considérer dans ce qui suit la classe des systèmes définis par le modèle suivant :

$$\begin{cases} \dot{x} &= P[J_q - R]x + P B_q u_{in} \\ y_p &= P B_q^T x \end{cases} \quad (2.6)$$

Posons $y = C_q x$ la sortie mesurée avec $C_q \in \mathbb{R}^p$ la matrice de sortie. L'observabilité de (2.6) dépend des paires $(P[J_q - R], C_q)$ $q = 1, \dots, \bar{N}$ où \bar{N} est le nombre de modes de fonctionnement.

Afin de pouvoir montrer la stabilité des observateurs étudiés, il peut être judicieux d'utiliser la théorie de stabilité de Lyapunov dans la mesure où le formalisme Hamiltonien nous fournit généralement une fonction de Lyapunov candidate pour remédier à ce problème [Maschke et al., 2000]. Le bilan de puissance pour un système port-Hamiltonien avec dissipation conduit à

$$\frac{dH}{dt}(x) = u_{in}^T y_p - \frac{\delta H^T}{\delta x}(x) R \frac{\delta H}{\delta x} \quad (2.7)$$

Le terme $u_{in}^T y_p$ représente la puissance fournie et le terme restant est la puissance de dissipation. Dans le cas où le système est libre ($u_{in} = 0$), nous avons

$$\dot{H}(x) = -\frac{\delta H^T}{\delta x}(x) R \frac{\delta H}{\delta x} \quad (2.8)$$

Rappelons que $H(0) = 0$ et $H(x) \geq 0$ (fonction quadratique (2.5)). Puisque $\dot{H}(x) \leq 0$ (2.8), il est donc possible d'utiliser la fonction Hamiltonienne $H(x)$ comme fonction de Lyapunov candidate pour étudier la stabilité.

Comme nous l'avons vu au chapitre 1, l'observabilité des systèmes définis par (2.4) avec la sortie $y = C_q x$ n'est pas toujours garantie même si les sous-systèmes sont observables individuellement au sens classique de Kalman. L'observabilité des systèmes commutés dépend fortement de la séquence de commutation. Plusieurs techniques pour les SDH permettent de conclure sur l'observabilité d'un SLC, même s'il possède des sous-systèmes inobservables. En revanche, peu de méthodes existent pour synthétiser un observateur hybride pour ce cas. Dans [Riedinger et al., 2008], [Ghanes et al., 2009] et [Bejarano et al., 2010], des observateurs hybrides sont proposés pour certains convertisseurs particuliers. Ces convertisseurs ont la particularité de posséder des états qui sont constants dans le cas d'inobservabilité. Les auteurs de [Tanwani et al., 2013] proposent une solution intéressante pour le cas général d'un SLC. Cependant, l'observateur proposé reste difficile à synthétiser et n'est pas pratique pour une application sur les convertisseurs [Gorp et al., 2012]. Dans ce qui suit, nous proposons une solution classique par modèle moyen pour la classe des systèmes considérée. Ensuite, nous proposons un observateur hybride pour ces systèmes décrits par un modèle SLC. Cet observateur prend en compte les sous-systèmes inobservables tout en étant facile à synthétiser et implémenter.

3 Observateur non linéaire à partir du modèle moyen

Dans cette section, nous nous intéressons à la synthèse d'un observateur non linéaire pour la classe des systèmes donnée par (2.6) en utilisant le modèle moyen.

3.1 Modélisation et analyse d'observabilité

La technique du modèle moyen peut être utilisée afin de résoudre le problème de l'inobservabilité de certains modes de fonctionnement. Dans la mesure où le modèle obtenu est bilinéaire il apparaît nécessaire d'utiliser la définition 5 pour étudier l'observabilité du système. Pour des raisons pratiques, nous considérons que la matrice de sortie est unique pour tous les modes

de fonctionnement ($C_q = C \quad q \in 1, \dots, \bar{N}$ et $y_a = Cx_a$). Notons que cette hypothèse n'est pas restrictive pour les convertisseurs de puissance puisqu'elle est vérifiée dans tous les cas. En utilisant la définition 4, le modèle moyen du système (2.6) s'écrit

$$\begin{cases} \dot{x}_a = -PRx_a + P[\sum_{i=1}^{\bar{N}} J_i d_i]x_a + P \sum_{i=1}^{\bar{N}} B_i d_i u_{in} \\ y_a = Cx_a \end{cases} \quad (2.9)$$

où d_i est le rapport cyclique du mode i .

Pour calculer la dérivée de la fonction Hamiltonienne $H(x) = \frac{1}{2}x_a^T P^{-1}x_a$, nous rappelons que les matrices J_i sont antisymétriques. Ainsi, les produits $x_a^T J_i x_a$, $i = 1, \dots, \bar{N}$ sont nuls. La dérivée de $H(x)$ est donnée par

$$\dot{H}(x) = u_{in}^T \left(\sum_{i=1}^{\bar{N}} B_i^T d_i \right) x_a - x_a^T R x_a \quad (2.10)$$

Remarque 4 Il est intéressant de noter que dans le cas où les matrices B_i sont identiques ($B_i = B$, $i = 1, \dots, \bar{N}$), alors on a

$$\dot{H}(x) = u_{in}^T B^T x_a - x_a^T R x_a \quad (2.11)$$

du fait que $\sum_{i=1}^{\bar{N}} d_i = 1$.

\dot{H} ne dépend pas du rapport cyclique d_i . Par conséquent, le bilan de puissance de ce genre de systèmes ne dépend pas de l'entrée de commutations (c'est le cas de quelques convertisseurs comme SEPIC, boost,...).

L'observabilité générique du système bilinéaire (2.9) telle qu'elle a été introduite dans la définition 4 est donc équivalente pour le système considéré à la définition suivante

Définition 14 Le système bilinéaire (2.9) est dit génériquement observable si

$$\text{rang}(O) = n \quad (2.12)$$

avec $O = [O_1 \ O_2 \ \dots \ O_{\bar{N}}]^T$

et

$$O_1 = C \text{ et } O_i = \begin{bmatrix} O_{i-1}R \\ O_{i-1}J_1 \\ O_{i-1}J_2 \\ \vdots \\ O_{i-1}J_{\bar{N}} \end{bmatrix}, i = 2, \dots, \bar{N}$$

Le terme *génériquement observable* signifie que le système est observable pour presque toutes les valeurs de d_i . Certaines valeurs du rapport cyclique rendent le système inobservable. Ceci peut être observé dans un certain type de convertisseurs dont le modèle moyen n'est pas observable pour des valeurs particulières du rapport cyclique comme $d_i = 0$ ou $d_i = 1$.

3.2 Synthèse d'un observateur

Dans le but d'estimer les états qui ne sont pas mesurés, nous proposons un observateur non linéaire pour le modèle (2.9) [Hultgren and Lenells, 2002]. Notre choix s'est porté sur cet observateur du fait de sa facilité de synthèse et d'implémentation. Pour simplifier le raisonnement et la démonstration de convergence, nous supposons que la sortie y du système est scalaire c'est-à-dire que la matrice C est de dimension $1 \times n$.

Proposition 1 *Considérons le modèle (2.9) et l'observateur suivant :*

$$\dot{\hat{x}}_a = -PR\hat{x}_a + P\left[\sum_{i=1}^{\bar{N}} J_i d_i\right]\hat{x}_a + P\sum_{i=1}^{\bar{N}} B_i d_i u_{in} + PK(e_y) \quad (2.13)$$

avec $e_y = y_a - \hat{y}_a = C(x_a - \hat{x}_a)$.

K est une fonction de l'erreur d'observation de sortie e_y . Elle représente le terme de correction de l'observateur.

Si $K(e_y) = Ge_y = GC(x_a - \hat{x}_a)$, où $G \in \mathbb{R}^{n \times 1}$ est un vecteur de gain tel que $(R+GC) + (R+GC)^T$ est définie positive, alors l'erreur d'observation $e_x = (x_a - \hat{x}_a)$ converge asymptotiquement vers zéro.

Preuve 1 *La dynamique de l'erreur d'observation est donnée par l'expression suivante*

$$\dot{e}_x = -PRE_x + P\left[\sum_{i=1}^{\bar{N}} J_i d_i\right]e_x - PK(e_y) \quad (2.14)$$

Considérons la fonction de Lyapunov suivante

$$V = e_x^T P^{-1} e_x \quad (2.15)$$

Comme les matrices J_i sont anti-symétriques, elles vérifient la propriété suivante

$$e_x^T J_i e_x = 0 \quad (2.16)$$

A partir de (2.14), (2.15) et (2.16), la dérivée de V s'écrit

$$\dot{V} = -e_x^T (R + R^T) e_x - e_x^T K(e_y) - K^T(e_y) e_x \quad (2.17)$$

Il est intéressant de rappeler que V ne dépend pas du rapport cyclique d_i ce qui simplifie la détermination de K . Afin de garantir la stabilité de l'erreur e_x , il faut s'assurer que $\dot{V} < 0$. Pour cela, il suffit de choisir $K(e_y)$ tel que

$$K(e_y) = Ge_y = GCe_x \quad (2.18)$$

avec $G \in \mathbb{R}^{n \times 1}$ matrice de gain.

De cette façon, (2.17) devient

$$\begin{aligned} \dot{V} &= -e_x^T (R + R^T) e_x - e_x^T (GC + (GC)^T) e_x \\ &= -e_x^T [(R + GC) + (R + GC)^T] e_x \end{aligned} \quad (2.19)$$

Si G vérifie

$$(R + GC) + (R + GC)^T > 0 \quad (2.20)$$

alors, il vient

$$\dot{V} < 0 \quad (2.21)$$

D'après cette dernière équation (2.21), la fonction de Lyapunov V est strictement décroissante et l'erreur d'observation e_x converge asymptotiquement vers zéro.

Notons enfin que dans le cas où la matrice $(R + GC) + (R + GC)^T$ ne peut être que semi-définie positive, alors la stabilité asymptotique peut être étudiée en utilisant le principe d'invariance de Lasalle [Hultgren and Lenells, 2002].

4 Observateur hybride pour SLC à deux modes

Malgré l'efficacité de la technique du modèle moyen, elle n'est valable que dans une gamme de fréquence où ce dernier est valide. Si les dynamiques du système sont par exemple rapides vis-à-vis de la fréquence des commutations, le modèle moyen n'est plus valable et il importe d'utiliser un modèle hybride qui sera plus pertinent pour décrire le comportement réel du système. Malheureusement, dès lors qu'il s'agit d'utiliser un modèle hybride, la synthèse d'observateur devient une tâche plus ardue. Pour les SLC, dans le cas où la séquence et les instants de commutations sont connus, la synthèse d'un observateur est simplifiée à condition que tous les modes de fonctionnement soient observables individuellement au sens classique du terme. La littérature est riche de travaux et de résultats dans ce domaine [Babaali, 2004][Balluchi et al., 2002][Juloski et al., 2007][Daafouz et al., 2004]. En revanche, si l'un des modes de fonctionnement n'est pas observable synthétiser un observateur hybride constitue un véritable verrou que peu de chercheurs ont abordé pour le moment. Une approche intéressante a été proposée par [Tanwani et al., 2011] qui repose sur une collecte d'informations faite le long d'une trajectoire de commutations et l'état est reconstitué dès que le système devient observable au sens hybride. Malgré l'originalité de cet observateur, sa mise en œuvre demeure néanmoins un travail fastidieux même pour des systèmes simples de taille réduite. D'ailleurs, aucun exemple pratique n'a été donné jusqu'ici.

L'observateur proposé dans ce paragraphe est fortement inspiré de [Tanwani et al., 2011] avec l'avantage d'être simplifié et adapté aux SLC avec des modes inobservables. D'un point de vue pratique, de nombreux convertisseurs de puissance correspondent à ces hypothèses tels que SEPIC, Boost, Buck-boost, ou Cuk [Niculescu et al., 2007][Gensior et al., 2006][Spinu et al., 2012].

4.1 Synthèse d'un observateur

Considérons le modèle (1.2) et définissons les matrices Z_q et W_q avec les propriétés suivantes :

- les colonnes de Z_q forment une base orthonormale G_q^T de dimension $n \times r_q$ avec $r_q = \text{rank}(G_q)$;
- les colonnes de W_q forment une base orthonormale de $\ker G_q$. W_q est de dimension $n \times (n - r_q)$;
- $z_q = Z_q^T x$ représente les états observables d'un mode q ;
- $w_q = W_q^T x$ représente les états inobservables ;

Ensuite, nous prenons en compte l'hypothèse suivante :

Hypothèse 1 Les colonnes de Z_q et W_q sont des vecteurs de la base canonique de l'espace d'état.

Cette hypothèse est considérée dans le but de pouvoir isoler les états observables et les états inobservables. Cette décomposition est utilisée ensuite pour exprimer ces derniers en fonction des états observables. Le vecteur d'état $x(t)$ se décompose alors en une partie observable et une partie inobservable

$$x(t) = \begin{bmatrix} Z_q^T \\ W_q^T \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} z_q(t) \\ w_q(t) \end{bmatrix} = Z_q z_q(t) + W_q w_q(t) \quad (2.22)$$

Considérons à présent un système commutant entre deux modes 1 et 2. L'intervalle de temps $[t_{q-1}, t_q^-]$ est associé au mode $q-1$, l'intervalle $[t_q, t_{q+1}^-]$ est associé au mode q et la séquence de commutations considérée est notée $\langle T_2 \rangle = \{q-1, q\}$. Rappelons que par hypothèse il n'y a pas de saut sur l'état lors des commutations donc $x(t_q) = x(t_q^-)$. Autrement dit, la valeur initiale de l'état dans le nouveau mode de fonctionnement correspond à la valeur finale de l'état dans le mode de fonctionnement précédent.

L'application du théorème 7 au modèle (1.2) le long de la trajectoire hybride T_2 mène à

$$\begin{aligned} N_q^q &= \ker G_q \\ N_{q-1}^q &= \ker G_{q-1} \cap (e^{-A_{q-1}\tau_{q-1}} \ker G_q) \end{aligned} \quad (2.23)$$

En considérant une évolution rétrograde du temps, le terme $(e^{-A_{q-1}\tau_{q-1}} \ker G_q)$ représente l'évolution du sous-espace inobservable $\ker G_q$ durant le mode de fonctionnement $q-1$.

Puisque $\ker G_{q-1} = e^{-A_{q-1}\tau_{q-1}} \ker G_{q-1}$, il vient

$$N_{q-1}^q = e^{-A_{q-1}\tau_{q-1}} (\ker G_{q-1} \cap \ker G_q)$$

Si $\ker G_{q-1} \cap \ker G_q = \{0\}$, alors il n'existe aucun état inobservable en commun entre les deux modes de fonctionnement q et $q-1$. Sous l'hypothèse 1, l'intersection des bases orthonormales des deux sous-espaces inobservables est vide, d'où

$$W_q^T W_{q-1} = 0 \quad (2.24)$$

D'après le théorème 7, il est clair que si l'un des sous-systèmes est observable $N_q^q = \{0\}$ alors $N_{q-1}^q = \{0\}$, en conséquence le système commuté est observable le long de la trajectoire hybride T_2 .

Le vecteur $x(t) = Z_q z_q(t) + W_q w_q(t)$ dans le second intervalle $t \in [t_q, t_{q+1}^-]$ résulte de la superposition d'un régime libre et d'un régime forcé qui peut s'écrire de la manière suivante

$$\begin{aligned} Z_q z_q(t) + W_q w_q(t) &= \Psi(t - t_q)(Z_q z_q(t_q) + W_q w_q(t_q)) + \Phi(t - t_q) \\ &= \Psi(t - t_q)(Z_{q-1} z_{q-1}(t_q^-) + W_{q-1} w_{q-1}(t_q^-)) + \Phi(t - t_q) \end{aligned} \quad (2.25)$$

avec $\Psi(t) = e^{A_q t}$ et $\Phi(t - t_q) = \int_{t_q}^t e^{A_q(t-\tau)} B(\tau) u(\tau) d\tau$

En multipliant les deux termes de (2.25) par W_q^T , alors

$$W_q^T Z_q z_q(t) + W_q^T W_q w_q(t) = W_q^T \Psi(t - t_q) Z_{q-1} z_{q-1}(t_q^-) + W_q^T \Phi(t - t_q) \quad (2.26)$$

A partir de cette dernière équation, on voit que la partie inobservable de l'état x s'écrit dans le mode de fonctionnement q

$$w_q(t) = [W_q^T W_q]^{-1} (W_q^T \Psi(t - t_q) Z_{q-1} z_{q-1}(t_q^-) - W_q^T Z_q z_q(t) + W_q^T \Phi(t - t_q)) \quad (2.27)$$

Sachant que les colonnes de W_q forment une base orthonormale donc $[W_q^T W_q] = I_d$ avec I_d la matrice identité et que $W_q^T Z_q = 0$ (intersection vide entre parties observables et inobservables de l'état), (2.27) devient

$$\begin{aligned} w_q(t) &= W_q^T (\Psi(t - t_q) Z_{q-1} z_{q-1}(t_q^-) - Z_q z_q(t) + \Phi(t - t_q)) \\ &= W_q^T (\Psi(t - t_q) Z_{q-1} z_{q-1}(t_q^-) + \Phi(t - t_q)) \end{aligned} \quad (2.28)$$

On remarque que w_q est obtenu à partir des états observables $z_{q-1}(t_q^-)$ de l'ancien mode.

Notons \hat{z}_q et \hat{w}_q les vecteurs estimés de z_q et w_q . Nous appellerons $\xi_q(t)$ le terme défini par

$$\begin{aligned} \xi_q(t) &= e^{A_q^*(t-t_q)} [Z_{q-1} z_{q-1}(t_q^-) - Z_{q-1} \hat{z}_{q-1}(t_q^-)] \\ &= e^{A_q^*(t-t_q)} Z_{q-1} Z_{q-1}^T [x(t_q^-) - \hat{x}(t_q^-)] \\ &= e^{A_q^*(t-t_q)} Z_{q-1} Z_{q-1}^T e_x(t_q^-) \end{aligned} \quad (2.29)$$

Proposition 2 *Considérons le SLC décrit par (1.2), la séquence de commutations $\langle T_2 \rangle = \{q-1, q\}$ sur les intervalles $[t_{q-1}, t_q^-]$ et $[t_q, t_{q+1}^-]$ respectivement et l'observateur hybride donné par*

$$\dot{\hat{x}}(t) = A_q \hat{x}(t) + B_q u + W_q F_w^q C_{q-1} \xi_q(t) + Z_q F_z^q C_q e_x(t) \quad (2.30)$$

L'erreur d'observation $e_x = x - \hat{x}$ converge asymptotiquement vers zéro si :

- $(A_q^* + A_q^{*T})$ Hurwitz
- $(t - t_q) > -\frac{\mu(A_q^*) + \|B_q^*\|}{\mu(A_q^*) \|B_q^*\|}$

avec $\mu(A_q^*) = \lambda_{max}(\frac{A_q^* + A_q^{*T}}{2})$ où λ_{max} la plus grande valeur propre de $\frac{A_q^* + A_q^{*T}}{2}$, et $A_q^* = (A_q - Z_q F_z^q C_q)$, $B_q^* = (W_q F_w^q C_{q-1})$ où $F_z^{q(r_q \times p)}$ et $F_w^{q(n-r_q \times p)}$ sont des matrices de gains.

Remarque 5 *Si le mode de fonctionnement q est observable au sens de Kalman, Z_q est de rang plein et W_q est nulle donc l'observateur ((2.30)) est un observateur classique de Luenberger.*

Preuve 2 *La dynamique de l'erreur d'observation $e_x(t)$ est*

$$\begin{aligned} \dot{e}_x(t) &= A_q e_x(t) - W_q F_w^q C_{q-1} \xi_q(t) - Z_q F_z^q C_q e_x(t) \\ &= [A_q - Z_q F_z^q C_q] e_x(t) - W_q F_w^q C_{q-1} \xi_q(t) \\ &= A_q^* e_x(t) - B_q^* \xi_q(t) \end{aligned} \quad (2.31)$$

En intégrant (2.31), on a

$$e_x(t) = e^{A_q^*(t-t_q)} e_x(t_q^-) - \int_{t_q}^t e^{A_q^*(t-\tau)} B_q^* \xi_q(\tau) d\tau \quad (2.32)$$

1. W_q est une matrice orthonormale où ses colonnes sont des vecteurs de la base canonique.

Notons $\|\cdot\|$ comme la norme euclidienne sur \mathbb{R}^n

$$\begin{aligned} \|e_x(t)\| &\leq \left\| e^{A_q^*(t-t_q)} e_x(t_q^-) \right\| + \left\| \int_{t_q}^t e^{A_q^*(t-\tau)} B_q^* \xi_q(\tau) d\tau \right\| \\ &\leq \left\| e^{A_q^*(t-t_q)} \right\| \left\| e_x(t_q^-) \right\| + \left\| \int_{t_q}^t e^{A_q^*(t-\tau)} B_q^* \xi_q(\tau) d\tau \right\| \end{aligned} \quad (2.33)$$

Rappelons que $\xi_q(t) = e^{A_q^*(t-t_q)} Z_{q-1} Z_{q-1}^T e_x(t_q^-)$, l'expression (2.33) s'écrit

$$\|e_x(t)\| \leq \left\| e^{A_q^*(t-t_q)} \right\| \left\| e_x(t_q^-) \right\| + \left\| \int_{t_q}^t e^{A_q^*(t-\tau)} B_q^* e^{A_q^*(\tau-t_q)} Z_{q-1} Z_{q-1}^T e_x(t_q^-) d\tau \right\| \quad (2.34)$$

Le terme $Z_{q-1} Z_{q-1}^T e_x(t_q^-)$ ne dépend pas de τ , donc cette dernière inégalité devient

$$\begin{aligned} \|e_x(t)\| &\leq \left\| e^{A_q^*(t-t_q)} \right\| \left\| e_x(t_q^-) \right\| + \left\| \left(\int_{t_q}^t e^{A_q^*(t-\tau)} B_q^* e^{A_q^*(\tau-t_q)} d\tau \right) Z_{q-1} Z_{q-1}^T e_x(t_q^-) \right\| \\ &\leq \left\| e^{A_q^*(t-t_q)} \right\| \left\| e_x(t_q^-) \right\| + \left\| \int_{t_q}^t e^{A_q^*(t-\tau)} B_q^* e^{A_q^*(\tau-t_q)} d\tau \right\| \left\| Z_{q-1} Z_{q-1}^T e_x(t_q^-) \right\| \\ &\leq \left\| e^{A_q^*(t-t_q)} \right\| \left\| e_x(t_q^-) \right\| + \left\| \int_{t_q}^t e^{A_q^*(t-\tau)} B_q^* e^{A_q^*(\tau-t_q)} d\tau \right\| \left\| Z_{q-1} Z_{q-1}^T \right\| \left\| e_x(t_q^-) \right\| \end{aligned} \quad (2.35)$$

Les colonnes de la matrice Z_{q_1} sont les vecteurs de la base canonique (voir hypothèse 1). Ainsi, on a $\|Z_{q-1} Z_{q-1}^T\| = 1$ et il est possible d'écrire

$$\|e_x(t)\| \leq \left\| e^{A_q^*(t-t_q)} \right\| \left\| e_x(t_q^-) \right\| + \left\| \int_{t_q}^t e^{A_q^*(t-\tau)} B_q^* e^{A_q^*(\tau-t_q)} d\tau \right\| \left\| e_x(t_q^-) \right\| \quad (2.36)$$

En utilisant les propriétés de la norme d'une intégrale, l'expression (2.36) devient

$$\begin{aligned} \|e_x(t)\| &\leq \left\| e^{A_q^*(t-t_q)} \right\| \left\| e_x(t_q^-) \right\| + \int_{t_q}^t \left\| e^{A_q^*(t-\tau)} B_q^* e^{A_q^*(\tau-t_q)} \right\| d\tau \left\| e_x(t_q^-) \right\| \\ &\leq \left\| e^{A_q^*(t-t_q)} \right\| \left\| e_x(t_q^-) \right\| + \left(\int_{t_q}^t \left\| e^{A_q^*(t-\tau)} \right\| \left\| B_q^* \right\| \left\| e^{A_q^*(\tau-t_q)} \right\| d\tau \right) \left\| e_x(t_q^-) \right\| \\ &\leq \left\| e^{A_q^*(t-t_q)} \right\| \left\| e_x(t_q^-) \right\| + \left(\int_{t_q}^t \left\| e^{A_q^*(t-\tau)} \right\| \left\| e^{A_q^*(\tau-t_q)} \right\| d\tau \right) \left\| B_q^* \right\| \left\| e_x(t_q^-) \right\| \end{aligned} \quad (2.37)$$

Considérons la norme matricielle logarithmique $\mu(\cdot)$ donnée par

$$\mu(A_q^*) = \lambda_{\max} \left(\frac{A_q^* + A_q^{*T}}{2} \right)$$

avec λ_{\max} la plus grande valeur propre de $\left(\frac{A_q^* + A_q^{*T}}{2} \right)$. [Desoer and Vidyasagar, 1975].

Nous avons les deux inégalités suivantes :

$$\left\| e^{A_q^*(t-\tau)} \right\| < e^{\mu(A_q^*)(t-\tau)} \quad \text{et} \quad \left\| e^{A_q^*(\tau-t_q)} \right\| < e^{\mu(A_q^*)(\tau-t_q)}$$

et par conséquent, on peut écrire la relation suivante

$$\left\| e^{A_q^*(t-\tau)} \right\| \left\| e^{A_q^*(\tau-t_q)} \right\| < e^{\mu(A_q^*)(t-t_q)}$$

Ainsi, l'expression (2.37) devient

$$\|e_x(t)\| \leq e^{\mu(A_q^*)(t-t_q)} \left\| e_x(t_q^-) \right\| + \left(\int_{t_q}^t e^{\mu(A_q^*)(t-t_q)} d\tau \right) \left\| B_q^* \right\| \left\| e_x(t_q^-) \right\| \quad (2.38)$$

En intégrant le terme $\left(\int_{t_q}^t e^{\mu(A_q^*)(t-\tau)} d\tau\right)$ de (2.38), il vient

$$\|e_x(t)\| \leq e^{\mu(A_q^*)(t-t_q)} \|e_x(t_q^-)\| + (t-t_q) e^{\mu(A_q^*)(t-t_q)} \|B_q^*\| \|e_x(t_q^-)\| \quad (2.39)$$

Soit

$$\|e_x(t)\| \leq \left(1 + (t-t_q) \|B_q^*\|\right) e^{\mu(A_q^*)(t-t_q)} \|e_x(t_q^-)\| \quad (2.40)$$

Finalement, on a

$$\|e_x(t)\| \leq \beta(\|e_x(t_q^-)\|, (t-t_q)) \quad (2.41)$$

avec

$$\beta(\|e_x(t_q^-)\|, (t-t_q)) = \left(1 + (t-t_q) \|B_q^*\|\right) e^{\mu(A_q^*)(t-t_q)} \|e_x(t_q^-)\|$$

Pour conclure sur la convergence asymptotique de l'observateur, il reste à montrer que la fonction $\beta(\|e_x(t_q^-)\|, (t-t_q))$ est de classe \mathcal{KL}^2 . Pour cela, il faut vérifier que

1. en fixant $(t-t_q)$, $\beta(\|e_x(t_q^-)\|, (t-t_q))$ est strictement croissante et $\beta(0, (t-t_q)) = 0$.
2. en fixant $\|e_x(t_q^-)\|$, $\beta(\|e_x(t_q^-)\|, (t-t_q))$ est strictement décroissante et $\beta(\|e_x(t_q^-)\|, (t-t_q)) \rightarrow 0$ quand $t-t_q \rightarrow +\infty$.

La première condition est vérifiée puisque $\left(1 + (t-t_q) \|B_q^*\|\right) e^{\mu(A_q^*)(t-t_q)}$ est strictement positif et $\beta(\|e_x(t_q^-)\|, (t-t_q)) = 0$.

Pour vérifier la seconde condition, calculons la dérivée de $\beta(.,.)$ par rapport à $(t-t_q)$.

$$\frac{\partial \beta(.,.)}{\partial (t-t_q)} = \left[\mu(A_q^*) \left(1 + (t-t_q) \|B_q^*\|\right) + \|B_q^*\|\right] e^{\mu(A_q^*)(t-t_q)} \|e_x(t_q^-)\| \quad (2.42)$$

Pour que $\beta(.,.)$ soit strictement décroissante par rapport à $(t-t_q)$, on a la condition suivante

$$\left[\mu(A_q^*) \left(1 + (t-t_q) \|B_q^*\|\right) + \|B_q^*\|\right] < 0 \quad (2.43)$$

Or, pour que $\beta(\|e_x(t_q^-)\|, (t-t_q))$ tende vers 0 quand $t-t_q$ tend vers l'infini, $\mu(A_q^*)$ doit être négative ce qui conduit à la condition que la matrice $(A^* + A^{*T})$ doit être Hurwitz. Ceci vient du fait que $e^{\mu(A_q^*)(t-t_q)}$ tend vers 0 quand $(t-t_q)$ tend vers l'infini si $\mu(A_q^*)$ est négative.

Afin d'avoir la condition (2.43) satisfaite, le temps de séjour $(t-t_q)$ doit donc vérifier la condition suivante :

$$(t-t_q) > -\frac{\mu(A_q^*) + \|B_q^*\|}{\mu(A_q^*) \|B_q^*\|} \quad (2.44)$$

Alors, $\beta(.,.)$ est de classe \mathcal{KL} et l'erreur d'observation converge asymptotiquement vers zéro.

2. Une fonction $\beta(r, s)$ est dite de classe \mathcal{KL} si :

- En fixant s , $\beta(., s)$ est strictement croissante et $\beta(0, s) = 0$.
- En fixant r , $\beta(r, .)$ est strictement décroissante et $\beta(r, s) \rightarrow 0$ quand $s \rightarrow \infty$.

4.2 Exemple

Considérons le SLC donné par le modèle suivant

$$\begin{cases} \dot{x} = A_q x + B_q, & q \in \{1, 2\} \\ y = C_q x \end{cases} \quad (2.45)$$

avec

$$A_1 = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 2 & -1.2 & 0 \\ 3 & 0 & -1 \end{bmatrix} \quad A_2 = \begin{bmatrix} -2 & -1.5 & 0 \\ 0 & -1.2 & 0 \\ 0 & 0.5 & -5 \end{bmatrix}$$

$$C_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad C_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$B_1 = B_2 = [1 \ 0 \ 0]^T$$

Les paires (A_1, C_1) et (A_2, C_2) montrent que les états des deux modes de fonctionnement 1 et 2 ne sont pas observables. Considérons la séquence de commutations $T_2 = \langle 1, 2 \rangle$, les matrices nécessaires pour synthétiser l'observateur sont

– Mode 1

$$W_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad Z_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$F_w^1 = [2 \ 0] \quad F_z^1 = \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 5 \end{bmatrix}$$

$$KerG_1 = span\{W_1\}$$

– Mode 2 :

$$W_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad Z_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$F_w^2 = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \quad F_z^2 = [1 \ 0]$$

$$KerG_2 = span\{W_2\}$$

Il est clair que $KerG_1 \cap KerG_2 = \{0\}$ donc le système est observable au sens du théorème 7.

Les gains F_z^q vérifient la condition $(A_q^* + A_q^{*T})$ est Hurwitz. De même le temps de séjour de chaque mode doit satisfaire la condition (2.44).

Afin d'assurer la convergence de l'observateur, les temps de séjour minimum calculés à partir de (2.44) sont :

- pour le mode 1, $(t - t_1) > 0.52$ avec $\mu(A_1^*) = -0.9812$ et $\|B_1^*\| = 2$;
- pour le mode 2, $(t - t_2) > 0.25$ avec $\mu(A_2^*) = -1.3359$ et $\|B_2^*\| = 2$.

Il faut noter que les termes de correction $\xi_q(t)$ ne dépendent que des composants de $e_x(t_q^-)$ disponibles. Ils ne dépendent que des erreurs d'observation issues de la différence entre les sorties mesurées et les estimées de ces sorties. En considérant $e_x(t) = [e_{x1} \ e_{x2} \ e_{x3}]^T$, les

termes de correction $\xi_1(t)$ et $\xi_2(t)$ de l'observateur sont définis par

$$\begin{aligned}\xi_1(t) &= e^{A_1^*(t-t_1)} Z_2 Z_2^T e_x(t_1^-) \\ &= \begin{bmatrix} 0 & e^{0.3(t-t_q)} e_{x_2}(t_1^-) & 0 \end{bmatrix}^T\end{aligned}\quad (2.46)$$

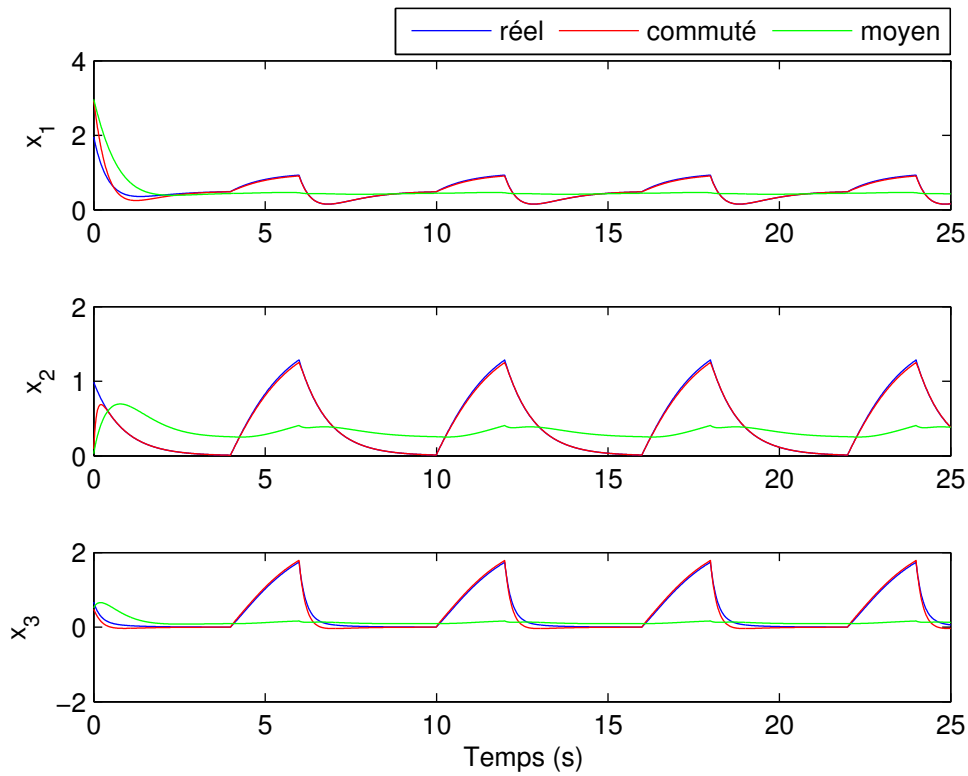
et

$$\begin{aligned}\xi_2(t) &= e^{A_2(t-t_2)} Z_1 Z_1^T e_x(t_2^-) \\ &= \begin{bmatrix} e^{0.13(t-t_q)} e_{x_1}(t_2^-) & 0 & e^{0.0067(t-t_q)} e_{x_3}(t_2^-) \end{bmatrix}^T\end{aligned}\quad (2.47)$$

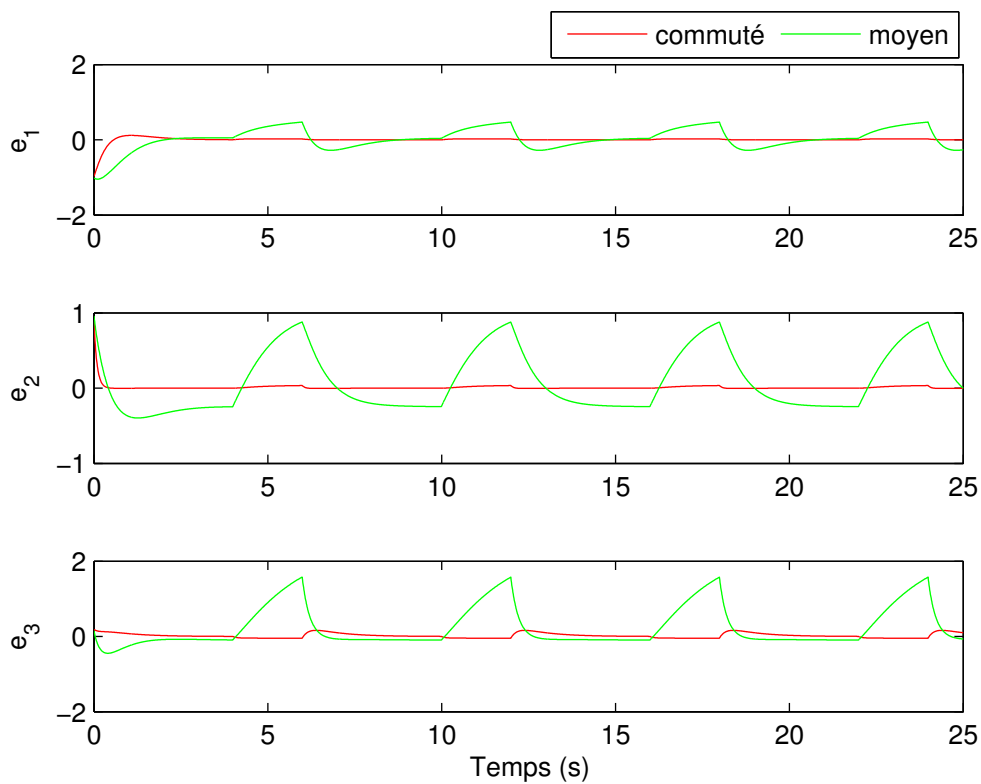
De ce fait, nous avons $C_2 \xi_1(t) = \begin{bmatrix} e^{0.3(t-t_q)} e_{x_2}(t_1^-) \\ 0 \end{bmatrix}^T$ et $C_1 \xi_2(t) = \begin{bmatrix} e^{0.13(t-t_q)} e_{x_1}(t_2^-) \\ e^{0.0067(t-t_q)} e_{x_3}(t_2^-) \end{bmatrix}^T$.

En conclusion, l'observateur hybride dépend des erreurs d'observation de sortie du mode précédent et celles du mode en cours. La figure 2.1(a) présente l'estimation des trois états avec l'observateur hybride proposé en comparaison avec une estimation utilisant un observateur du modèle moyen en simulation. L'entrée de commutations utilisée a un rapport cyclique de $\frac{2}{3}$ pour le premier mode par rapport au deuxième ($\frac{2}{3}d$ pour Mode 1 et $\frac{1}{3}d$ pour Mode 2). La fréquence de commutations est $\frac{1}{15} Hz$. Une erreur de mesure a été ajoutée à la deuxième sortie du premier sous-système pour évaluer les performances des deux observateurs. La valeur de cette erreur s'élève à environ 25% de la valeur de cette sortie.

Remarquons que la condition (2.44) est respectée : la durée de séjour du mode 1 est de 4s (le temps minimum est 0.52s) et du mode 2 est de 2s (le temps minimum est 0.25s). On remarque également que l'observateur moyen (trait vert) n'arrive pas à approximer le comportement du système commuté. La fréquence de commutations employée pour cet exemple ne permet pas l'utilisation de cet observateur. Par contre, l'observateur hybride (trait rouge) suit les signaux du système (trait bleu) d'une manière satisfaisante. Par conséquent, on peut constater que les erreurs d'observation de l'observateur hybride sont proches de zéro (voir la figure 2.1(b)). Cet exemple est un cas typique où l'utilisation d'un observateur hybride est nécessaire.



(a) Evolution des états : Comparaison avec un observateur moyen



(b) Erreur d'observation

FIGURE 2.1 – Evolution des états et erreurs d'observation en simulation

4.3 Convergence de l'observateur

Dans le cas où il n'est pas possible de vérifier que $\frac{A^* + A^{*T}}{2}$ est Hurwitz, la convergence asymptotique de l'observateur peut être établie par l'analyse d'une fonction de Lyapunov. L'observateur (2.30) synthétisé initialement pour le système (1.2) prend la forme suivante

$$\dot{\hat{x}}(t) = P[J_q - R]\hat{x}(t) + B_q u + PW_q F_w^q C_{q-1} \xi_q(t) + PZ_q F_z^q C_q e_x(t) \quad (2.48)$$

avec $A_q = P[J_q - R]$ et $A_q^* = A_q - PZ_q F_z^q C_q$.

Choisissons la fonction de Lyapunov commune suivante

$$V = \frac{1}{2} e_x^T P^{-1} e_x \quad (2.49)$$

Puisque J_q est antisymétrique alors $e_x^T(t) J_q e_x(t) = 0$, ainsi la dérivée de la fonction V est

$$\begin{aligned} \dot{V} &= -\frac{1}{2} e_x^T(t) (R + R^T) e_x(t) - e_x^T(t) (Z_q F_z^q C_q + (Z_q F_z^q C_q)^T) e_x(t) - e_x(t)^T B_q^* \xi_q(t) \\ &= -\frac{1}{2} e_x^T(t) \left((R + Z_q F_z^q C_q) + (R + Z_q F_z^q C_q)^T \right) e_x(t) - e_x(t)^T B_q^* \xi_q(t) \end{aligned} \quad (2.50)$$

La matrice $(R + Z_q F_z^q C_q)$ est choisie de telle sorte qu'elle satisfasse

$$(R + Z_q F_z^q C_q) + (R + Z_q F_z^q C_q)^T > 0$$

Déterminons par la suite les conditions garantissant $e_x(t)^T B_q^* \xi_q(t) > 0$.

$$\begin{aligned} e_x(t)^T B_q^* \xi_q(t) &= \left[e^{A_q^*(t-t_q)} e_x(t_q^-) - \int_{t_q}^t e^{A_q^*(t-\tau)} B_q^* \xi_q(\tau) d\tau \right]^T B_q^* e^{A_q^*(t-t_q)} Z_{q-1} Z_{q-1}^T e_x(t_q^-) \\ &= e_x(t_q^-)^T M e_x(t_q^-) - \left[\int_{t_q}^t e^{A_q^*(t-\tau)} B_q^* \xi_q(\tau) d\tau \right]^T B_q^* e^{A_q^*(t-t_q)} Z_{q-1} Z_{q-1}^T e_x(t_q^-) \\ &= e_x(t_q^-)^T M e_x(t_q^-) - \alpha \end{aligned} \quad (2.51)$$

avec

$$M = e^{A_q^*(t-t_q)^T} B_q^* e^{A_q^*(t-t_q)} Z_{q-1} Z_{q-1}^T$$

et

$$\alpha = \left[\int_{t_q}^t e^{A_q^*(t-\tau)} B_q^* \xi_q(\tau) d\tau \right]^T B_q^* e^{A_q^*(t-t_q)} Z_{q-1} Z_{q-1}^T e_x(t_q^-)$$

Comme $\xi_q(\tau) = e^{A_q^*(\tau-t_q)} Z_{q-1} Z_{q-1}^T e_x(t_q^-) d\tau$, l'expression de α devient

$$\alpha = \left[\int_{t_q}^t e^{A_q^*(t-\tau)} B_q^* e^{A_q^*(\tau-t_q)} Z_{q-1} Z_{q-1}^T e_x(t_q^-) d\tau \right]^T e^{-A_q^*(t-t_q)^T} M e_x(t_q^-)$$

En posant $\bar{M} = \left[\int_{t_q}^t e^{A_q^*(t-\tau)} B_q^* e^{A_q^*(\tau-t_q)} Z_{q-1} Z_{q-1}^T d\tau \right]^T$, on obtient

$$\alpha = e_x(t_q^-)^T \bar{M} e^{-A_q^*(t-t_q)^T} M e_x(t_q^-)$$

Alors, l'équation (2.51) s'écrit

$$e_x(t)^T B_q^* \xi_q(t) = e_x(t_q^-)^T \left(M - \bar{M} e^{-A_q^*(t-t_q)^T} M \right) e_x(t_q^-) \quad (2.52)$$

Choisissons les matrices M et \bar{M} telles que

$$\left(M - \bar{M} e^{-A_q^*(t-t_q)^T} M \right) > 0 \quad (2.53)$$

La dérivée de la fonction de Lyapunov est négative $\dot{V} < 0$ et la fonction V est strictement décroissante. En conclusion, l'erreur d'observation converge asymptotiquement vers zéro.

5 Application : Convertisseur SEPIC

Le convertisseur SEPIC est un convertisseur de puissance continu-continu (DC-DC) qui peut fournir une tension de sortie supérieure, inférieure ou égale à une tension d'entrée continue et constante (Figure 2.2). Ce circuit est utilisé dans plusieurs applications comme les appareils de photos numériques, les téléphones mobiles, les lecteurs CD/DVD, les systèmes PDA et GPS, etc...[Eng et al., 2009]. Contrairement au convertisseur buck-boost, le SEPIC maintient la même polarité de la sortie par rapport à l'entrée. De plus ce circuit comporte un véritable mode d'extinction puisque quand l'interrupteur est ouvert, la tension de sortie est nulle. Du point de vue du comportement et de la modélisation, on peut montrer que ce circuit est équivalent à un SLC d'ordre 4 avec quatre éléments de stockage d'énergie (deux condensateurs et deux inductances) et un seul élément de commutations [Niculescu et al., 2007][Jaafar et al., 2009]. Pour la modélisation du circuit, les courants traversant les inductances et les tensions aux bornes des condensateurs sont généralement utilisés comme variables d'état. Le convertisseur est commandé grâce à l'élément de commutation et la tension de sortie est considéré comme la seule grandeur mesurée.

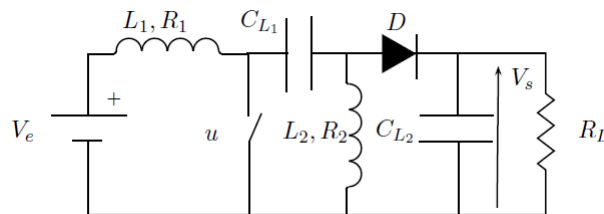


FIGURE 2.2 – Convertisseur SEPIC

5.1 Modélisation

Les équations dynamiques du circuit dans le mode de conduction continu (CCM : continuous conduction mode) sont données par le modèle commuté suivant :

$$\begin{cases} \begin{bmatrix} \dot{I}_{L_1} \\ \dot{V}_{C_1} \\ \dot{I}_{L_2} \\ \dot{V}_s \end{bmatrix} \\ y = V_s \end{cases} = \begin{bmatrix} -\frac{R_1}{L_1} & \frac{u-1}{L_1} & 0 & \frac{u-1}{L_1} \\ \frac{1-u}{C_{L_1}} & 0 & \frac{u}{C_{L_1}} & 0 \\ 0 & -\frac{u}{L_2} & -\frac{R_2}{L_2} & \frac{1-u}{L_2} \\ \frac{1-u}{C_{L_2}} & 0 & \frac{u-1}{C_{L_2}} & -\frac{1}{R_L C_{L_2}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_{L_1} \\ V_{C_1} \\ I_{L_2} \\ V_s \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{L_1} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} V_e \quad (2.54)$$

où L_1 , L_2 , C_{L_1} et C_{L_2} sont respectivement les inductances et les capacités de l'entrée et de la sortie. R_1 et R_2 sont les résistances en série équivalentes des inductances. R_L est la résistance de charge. I_{L_1} et I_{L_2} sont les courants dans les bobines. V_{C_1} est la tension aux bornes de la capacité C_{L_1} . V_s est la tension aux bornes de C_{L_2} considérée comme tension de sortie, et V_e est la tension d'entrée. Le vecteur d'état contient ces courants et tensions.

La présence d'un seul interrupteur conduit le convertisseur à commuter entre deux modes $q = 1$ quand $u = 0$ et $q = 2$ quand $u = 1$. Le modèle port-Hamiltonien à commutations associé au SEPIC s'écrit alors

$$\begin{cases} \dot{x} = P[J_q - R]x + PBu_{in} \\ y = Cx \end{cases} \quad (2.55)$$

avec $x = [I_{L_1} \quad V_{C_1} \quad I_{L_2} \quad V_s]^T$, $u_{in} = V_e$

$$J_q = \begin{bmatrix} 0 & u-1 & 0 & u-1 \\ 1-u & 0 & u & 0 \\ 0 & -u & 0 & 1-u \\ 1-u & 0 & u-1 & 0 \end{bmatrix}, R = \begin{bmatrix} R_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & R_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{R_L} \end{bmatrix}, P = \begin{bmatrix} \frac{1}{L_1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{C_{L_1}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{L_2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{C_{L_2}} \end{bmatrix},$$

$$B = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \text{ et } C = [0 \quad 0 \quad 0 \quad 1]$$

Notons $d_1 = (1-d)$ quand $q = 1$ et $d_2 = d$ pour $q = 2$ où d est le rapport cyclique. Le modèle moyen du modèle (2.55) s'écrit :

$$\begin{cases} \dot{x}_a = P[J_1(1-d) + J_2d - R]x_a + PBu_{in} \\ y_a = Cx_a \end{cases} \quad (2.56)$$

$$\text{avec } J_1 = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \text{ et } J_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

5.2 Observateur non linéaire à partir du modèle moyen

5.2.1 Synthèse d'un observateur

En utilisant R , J_1 et J_2 pour vérifier l'observabilité du système bilinéaire par la condition (2.12), on trouve que la matrice d'observabilité O est de rang plein.

D'une manière similaire à (2.13) et (2.14), l'observateur suivant peut être envisagé

$$\dot{\hat{x}}_a = P[J_1(1-d) + J_2d - R]\hat{x}_a + PBV_e + PG(y_a - C\hat{x}_a) \quad (2.57)$$

avec $G = \begin{bmatrix} G_1 & G_2 & G_3 & G_4 \end{bmatrix}^T C(x_a - \hat{x}_a)$ est le vecteur de gains et $G_i, i = 1, \dots, 4$ sont des scalaires.

L'erreur d'observation $e_x = x_a - \hat{x}_a = x = \begin{bmatrix} e_{x1} & e_{x2} & e_{x3} & e_{x4} \end{bmatrix}^T$ est donnée par

$$\dot{e}_x = P[J_1(1-d) + J_2d - R]e_x - PG(y_a - C\hat{x}_a) \quad (2.58)$$

Considérons la fonction de Lyapunov candidate suivante

$$V = \frac{1}{2}e_x^T P^{-1}e_x \quad (2.59)$$

alors,

$$\dot{V} = -R_1e_{x1}^2 - R_2e_{x3}^2 - \frac{1}{R_L}e_{x4}^2 - (G_1e_{x4}e_{x1} + G_2e_{x4}e_{x2} + G_3e_{x4}e_{x3} + G_4e_{x4}^2) \quad (2.60)$$

Pour assurer la convergence de l'observateur, les gains G_i doivent satisfaire la condition (2.20). Il est clair qu'il est toujours possible de choisir G dans le but de satisfaire cette condition.

Pour montrer la stabilité asymptotique de l'erreur d'observation, on a recours au principe d'invariance de LaSalle en déterminant le plus grand ensemble invariant I inclus dans

$$E = \{e_x \in \mathbb{R}^n / \dot{V}(e_x) = 0\}$$

A partir de (2.60),

$$\dot{V} = 0 \Rightarrow E = \{e_v = \begin{bmatrix} 0 & e_{x2} & 0 & 0 \end{bmatrix}^T\} \quad (2.61)$$

En remplaçant e_x par e_v dans (2.58) à l'équilibre, on obtient le système d'équation suivant

$$\begin{cases} (u-1)e_{x2} = 0 \\ -ue_{x2} = 0 \end{cases} \quad (2.62)$$

Il est évident que $e_{x2} = 0$. Ceci veut dire que $I = \{\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}^T\}$ ne contient que l'origine. En conclusion, l'erreur d'observation (2.58) est asymptotiquement stable.

5.2.2 Estimation de la résistance de charge

En pratique l'observation des états du SEPIC doit être assurée même en présence d'éventuelle variation paramétrique de la charge. Dans le but de compenser l'effet des variations soudaines de la résistance de charge R_L , l'observateur (2.57) a été étendu à l'estimation de cette résistance [Meghnous and Pham, 2011][Poznyak et al., 2006].

Proposition 3 *Supposons que R_L est constante par morceaux et considérons observateur suivant :*

$$\begin{cases} \dot{\hat{x}}_a = P[J_1(1-d) + J_2d - R]\hat{x}_a + PBV_e + PG(y_a - C\hat{x}_a) \\ \dot{\hat{\theta}} = -\hat{x}_{a4}e_{x4} \end{cases} \quad (2.63)$$

où $\hat{\theta}$ est une estimation de $1/R_L$.

Si $G \in \mathbb{R}^{4 \times 1}$ est un vecteur tel que $(R+GC) + (R+GC)^T$ est une matrice semi-définie positive, alors l'erreur d'observation est stable.

Remarque 6 *L'erreur d'observation est asymptotiquement stable si la condition (2.61) est vérifiée.*

Preuve 3 *Notons $e_\theta = \theta - \hat{\theta}$ et $\theta = \frac{1}{R_L}$.*

L'erreur de sortie est

$$\dot{e}_{x4} = \frac{1-q}{C_{L2}}e_{x1} + \frac{q-1}{C_{L2}}e_{x2} - \theta x_{a4} + \hat{\theta}\hat{x}_{a4} - G_4e_{x4} \quad (2.64)$$

Cette équation peut être écrite comme

$$\dot{e}_{x4} = \frac{1-q}{C_{L2}}e_{x1} + \frac{q-1}{C_{L2}}e_{x2} - \hat{\theta}e_{x4} - x_{a4}e_\theta - G_4e_{x4} \quad (2.65)$$

Considérons la fonction de Lyapunov candidate suivante

$$V = \frac{1}{2}e_x^T P^{-1}e_x + \frac{1}{2}e_\theta^2 \quad (2.66)$$

La dérivée de (2.66) est donnée par

$$\begin{aligned} \dot{V} = & -R_1e_{x1}^2 - R_2e_{x3}^2 - \hat{\theta}e_{x4}^2 - e_\theta x_{a4}e_{x4} + e_\theta \dot{e}_\theta \\ & - (G_1e_{x4}e_{x1} + G_2e_{x4}e_{x2} + G_3e_{x4}e_{x3} + G_4e_{x4}^2) \end{aligned} \quad (2.67)$$

Choisissons $\dot{e}_\theta = \hat{x}_{a4}e_{x4}$, donc

$$\begin{aligned} -\hat{\theta}e_{x4}^2 - e_\theta x_{a4}e_{x4} + e_\theta \dot{e}_\theta &= -\hat{\theta}e_{x4}^2 - e_\theta x_{a4}e_{x4} + e_\theta \hat{x}_{a4}e_{x4} \\ &= -\hat{\theta}e_{x4}^2 - e_\theta e_{x4}^2 \\ &= -\theta e_{x4}^2 \end{aligned} \quad (2.68)$$

$$\dot{V} = -R_1e_{x1}^2 - R_2e_{x3}^2 - \theta e_{x4}^2 - (G_1e_{x4}e_{x1} + G_2e_{x4}e_{x2} + G_3e_{x4}e_{x3} + G_4e_{x4}^2) \quad (2.69)$$

L'équation (2.69) est similaire à (2.60), donc une preuve similaire de stabilité asymptotique peut être déterminée.

Sachant que θ est constante par morceaux, on a $\dot{e}_\theta = -\dot{\hat{\theta}}$, alors

$$\dot{\hat{\theta}} = -\hat{x}_{a4}e_{x4} \quad (2.70)$$

Paramètre	Valeur (unité)
L_1	$2.3 \cdot 10^{-3} H$
L_2	$330 \cdot 10^{-6} H$
C_{L1}	$190 \cdot 10^{-6} F$
C_{L2}	$190 \cdot 10^{-6} F$
R_1	2.134Ω
R_2	0.234Ω
V_e	$20V$

TABLE 2.1 – Paramètres du SEPIC

5.2.3 Résultats de simulation

L'observateur étendu proposé a été testé sur le modèle du convertisseur SEPIC en simulation en utilisant MATLAB. L'observateur est implémenté en boucle ouverte avec une fréquence d'échantillonnage de $20kHz$. Les paramètres du circuit sont donnés par le tableau 2.1. Ces va-

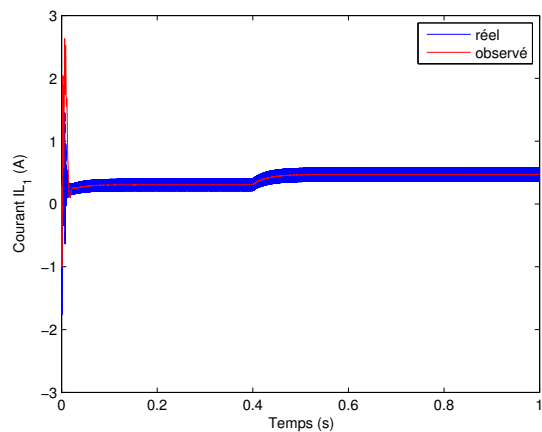
leurs sont les valeurs des paramètres du circuit SEPIC d'un banc d'essai expérimental (Figure 2.5). Le modèle de l'observateur simulé a été discrétisé avec la méthode d'Euler.

Au départ, l'observateur est testé sans l'estimation de la résistance de charge. La figure 2.3 illustre l'évolution des courants et tensions du circuits et leurs estimations sur une période d'une seconde. La tension de sortie est changée de $15V$ à $20V$ pour tester le comportement de l'observateur en cas de variation de référence.

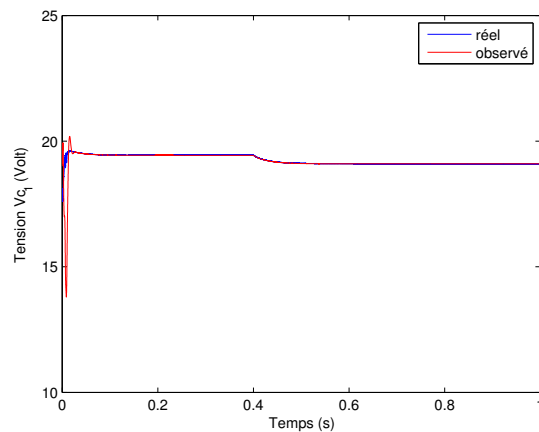
Ensuite, l'estimation de R_L est introduite. Sa valeur est variée de $R_L = 44\Omega$ à $R_L = 22\Omega$ à l'instant $t = 0.4s$. La figure 2.4 montre l'évolution des états estimés.

L'analyse des résultats de simulation montre que :

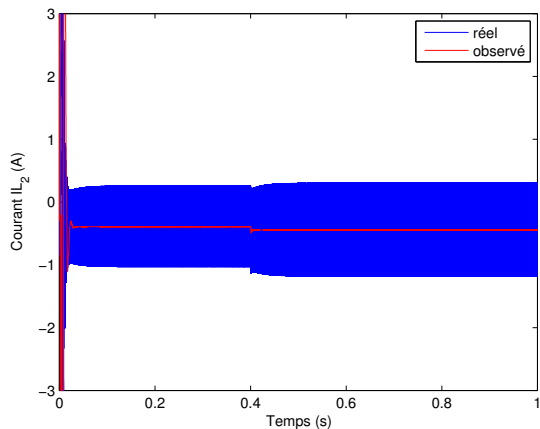
- Les états estimés par l'observateur convergent asymptotiquement vers les valeurs moyennes des états réels.
- Les valeurs moyennes des états non mesurés sont bien estimées par l'observateur malgré la variation de R_L .
- La résistance de charge est estimée avec une erreur négligeable.



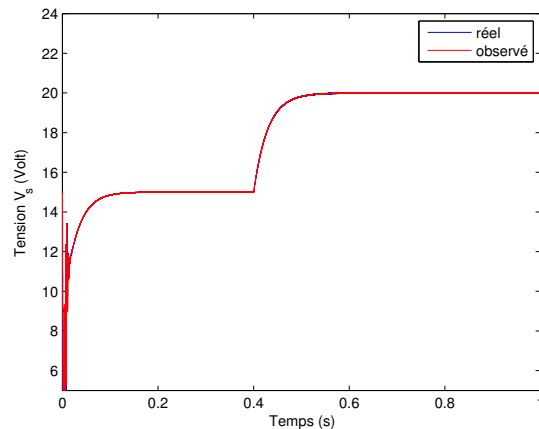
(a) Courant I_{L_1}



(b) Tension V_{C_1}

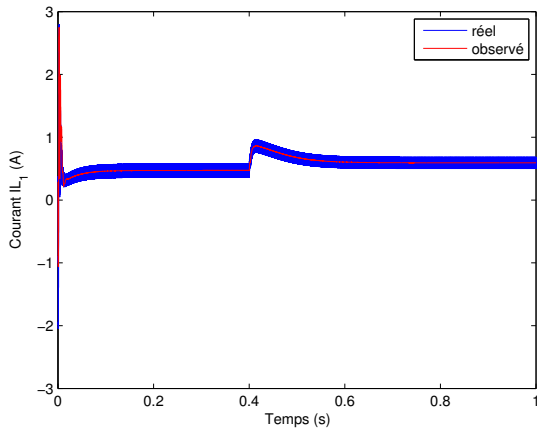


(c) Courant I_{L_2}

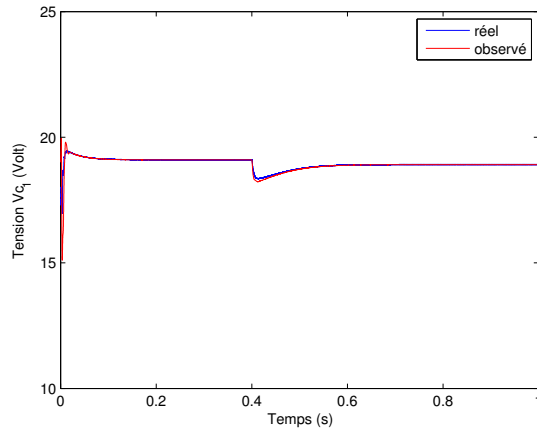


(d) Tension de sortie V_s

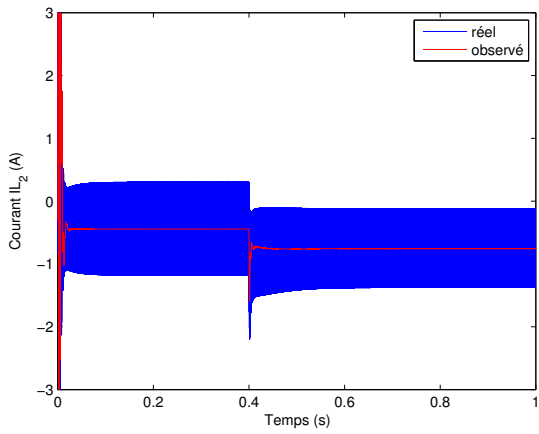
FIGURE 2.3 – Observateur du modèle moyen : Variation de référence en simulation



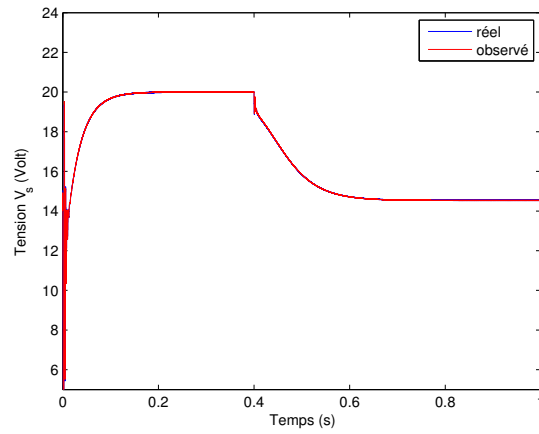
(a) Courant I_{L_1}



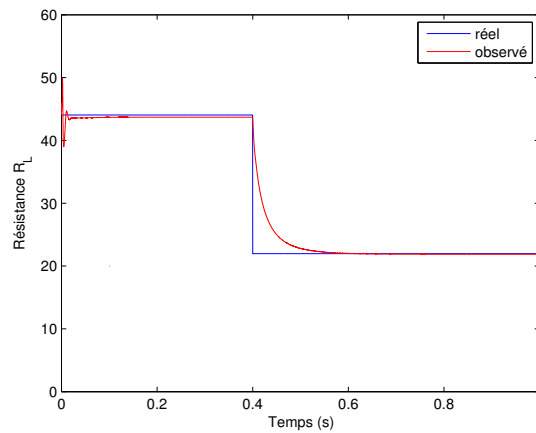
(b) Tension V_{C_1}



(c) Courant I_{L_2}



(d) Tension de sortie V_s



(e) Résistance R_L

FIGURE 2.4 – Estimation d'état par l'observateur non linéaire en simulation

5.2.4 Résultats Expérimentaux

La figure 2.7 montre la validation expérimentale de l'observateur proposé sur un banc d'essai d'un convertisseur SEPIC (Figure 2.5). Une carte d'acquisition dSpace *dS1104* est utilisée pour l'interface de transfert des données entre le convertisseur et un PC, où l'observateur est implémenté en utilisant la « Real-TimeWindows Target Simulink Library » (voir annexe). L'environnement logiciel « Control Desk » est utilisé comme interface graphique. La fréquence d'échantillonnage est $20kHz$. La tension d'entrée V_e est fixée à $20V$.

Comme en simulation, l'observateur est implémenté dans un premier temps sans l'estimation de la résistance de charge. La figure 2.6 montre l'évolution des différents signaux du circuit ainsi que leurs estimées. Pour ce premier cas, une variation de la tension de sortie de $15V$ à $20V$ est faite afin d'examiner les performances de l'observateur. Puis, l'observation est étendue à l'estimation de R_L . Cette résistance de charge est variée de 44Ω à 22Ω à l'instant $t = 0.4s$ dans le but de tester l'efficacité de l'observateur étendu. Les résultats expérimentaux montrent que

- L'erreur d'observation de l'observateur non étendu converge asymptotiquement et fournit une bonne estimation des valeurs moyennes des états non mesurés.
- L'erreur d'observation de l'observateur étendu converge asymptotiquement mais fournit des estimations biaisées en cas de variation de R_L .
- L'estimation de la résistance de charge est biaisée. Le biais s'agrandit en cas de variation de R_L ce qui provoque des erreurs dans l'observation des courants et tensions du convertisseur.
- L'observateur n'arrive pas à reproduire le comportement du système en régime transitoire.

Le biais sur l'estimation de la résistance en expérimentation est beaucoup plus important par rapport à celui de la simulation qui est négligeable. L'utilisation du modèle moyen pour synthétiser l'observateur étendu est la cause de l'écart entre la valeur réelle de la charge et celle estimée. Nous verrons dans la section suivante que la mise en place d'un observateur hybride étendu permet de supprimer ce biais.

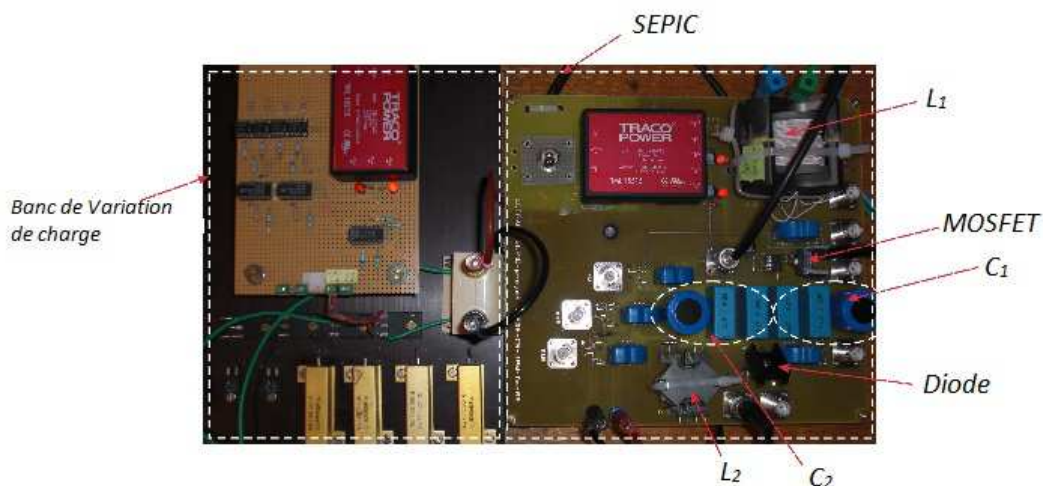


FIGURE 2.5 – Convertisseur SEPIC

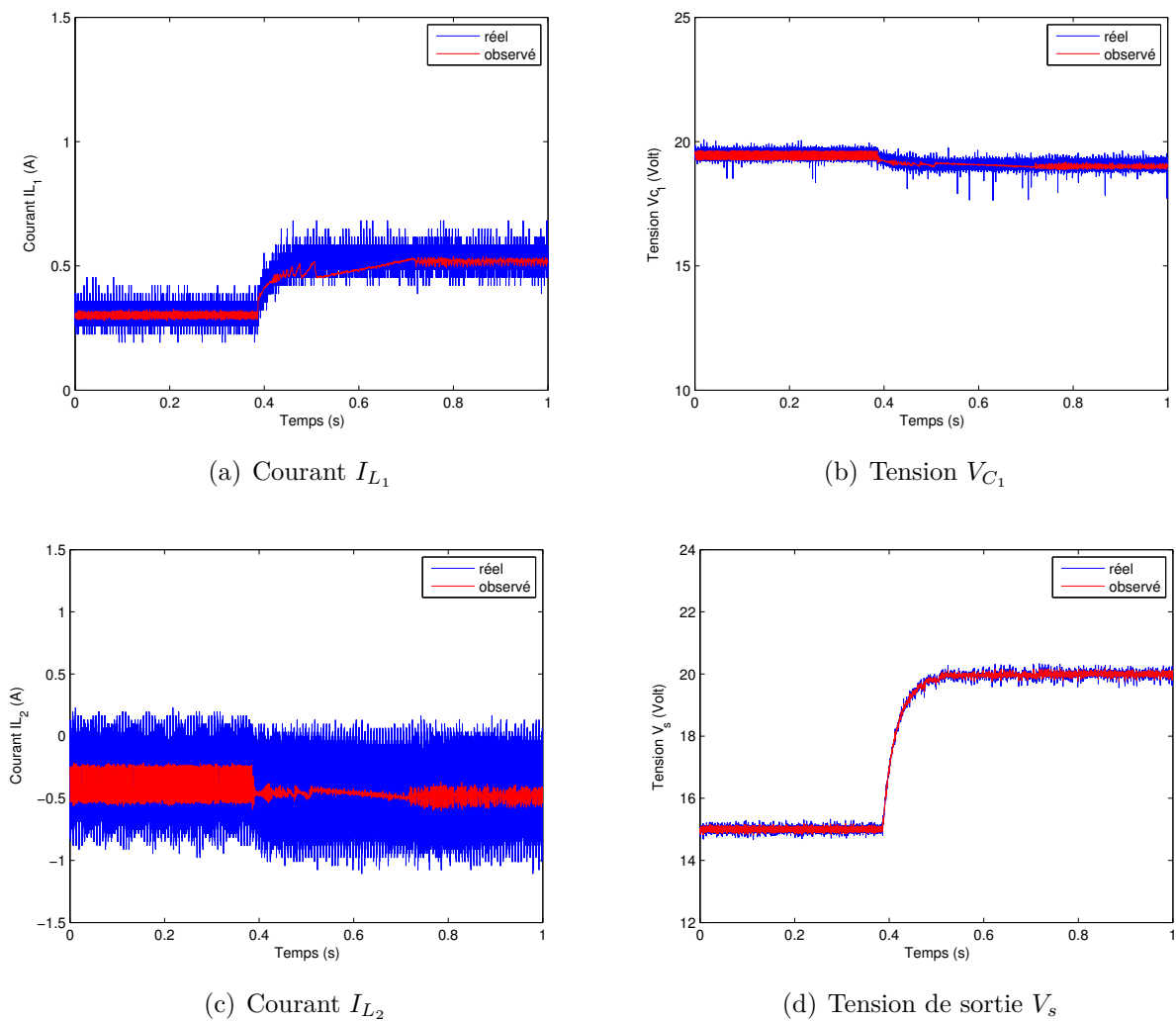
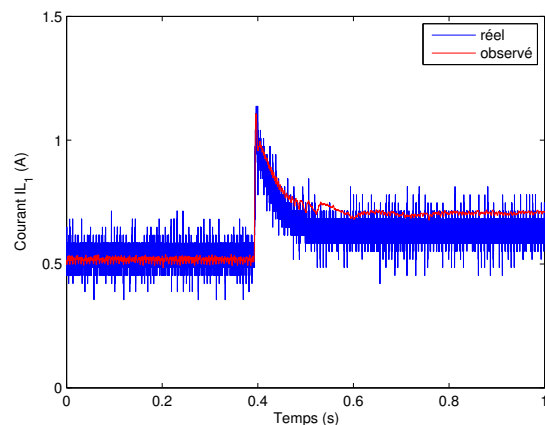
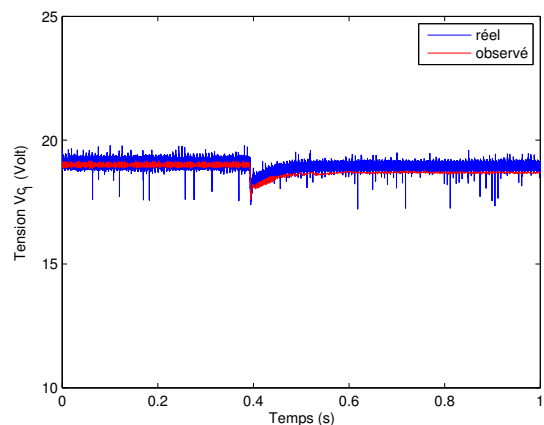


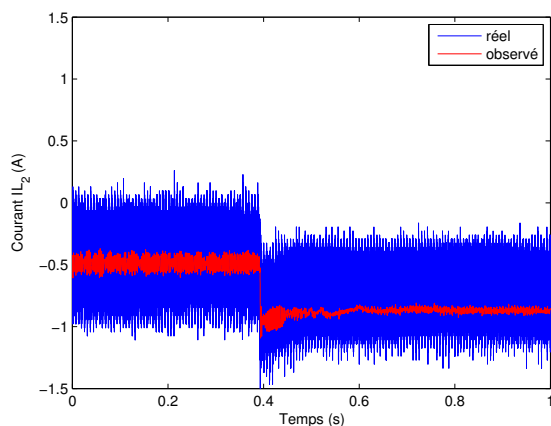
FIGURE 2.6 – Observateur à partir du modèle moyen : Variation de référence



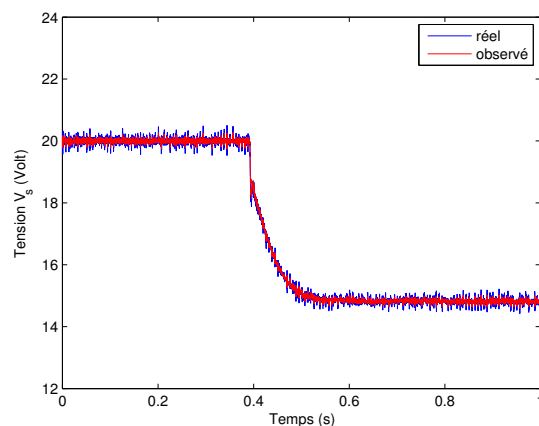
(a) Courant I_{L_1}



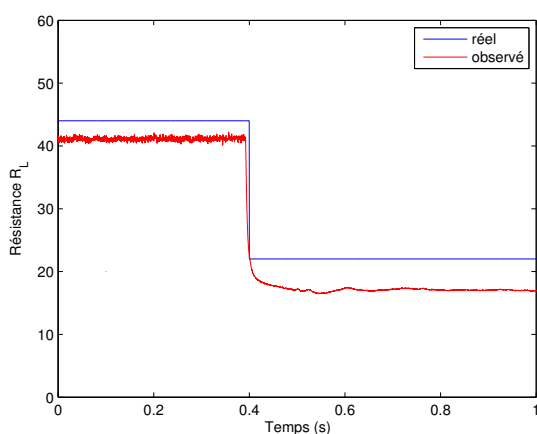
(b) Tension V_{C_1}



(c) Courant I_{L_2}



(d) Tension de sortie V_s



(e) Résistance R_L

FIGURE 2.7 – Estimation d'état avec l'observateur moyen en expérimentation

5.3 Observateur hybride pour le convertisseur SEPIC

5.3.1 Synthèse d'un observateur

Remarquons que si l'interrupteur du circuit est ouvert $u = 0$, le mode de fonctionnement correspondant $q = 1$ est observable. Si à présent, l'interrupteur est fermé $u = 1$, le mode de fonctionnement correspondant $q = 2$ n'est pas observable. Dans ce dernier cas, le convertisseur devient composé de trois circuits indépendants à cause du court-circuit provoqué par la fermeture de l'interrupteur et le blocage de la diode. La tension de sortie devient alors indépendante des deux courants et de la tension V_{C_1} d'où l'observabilité de cette configuration par la tensions V_s .

En vertu du théorème 7, le modèle (2.55) est observable dans le sens hybride quelle que soit la séquence de commutations. Pour appliquer l'observateur (2.30) sur le SEPIC, définissons les matrices suivantes :

– *Mode 1*

$$W_1 = 0^{4 \times 4} \quad Z_1 = I_d^{4 \times 4}$$

$$\text{Ker}G_1 = \text{span}\{0\}$$

– *Mode 2 :*

$$W_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad Z_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\text{Ker}G_2 = \text{span}\{W_2\}$$

D'après (2.48), l'observateur pour le mode $q = 1$ s'écrit comme suit

$$\dot{\hat{x}}(t) = P(J_1 - R)\hat{x}(t) + B_q u_{in} + P F_z^1 C e(t) \quad (2.71)$$

où F_z^1 est une matrice de dimension (4×1) .

Il s'agit d'un observateur de Luenberger classique et la dynamique de l'erreur d'observation est donnée par

$$\begin{aligned} e_x(t) &= P(J_1 - R)e_x(t) - P F_z^1 C e_x(t) \\ &= P[(J_1 - R) - F_z^1 C] e_x(t) \end{aligned} \quad (2.72)$$

$$\text{et } e_x(t) = \begin{bmatrix} e_{x1}(t) & e_{x2}(t) & e_{x3}(t) & e_{x4}(t) \end{bmatrix}^T$$

En utilisant (2.49) et (2.50), nous avons

$$\begin{aligned} \dot{V} &= -e_x^T(t) [R + F_z^1 C] e_x(t) \\ &= -R_1 e_{x1}^2(t) - R_2 e_{x3}^2(t) - \frac{1}{R_L} e_{x4}^2(t) - e_x^T(t) F_z^1 e_{x4}(t) \end{aligned} \quad (2.73)$$

La matrice $(R + F_z^1 C) + (R + F_z^1 C)^T$ est alors choisie définie positive pour garantir $\dot{V} < 0$.

Pour le mode de fonctionnement $q = 2$, l'observateur d'état est

$$\dot{\hat{x}}(t) = P(J_2 - R)\hat{x}(t) + B_q u_{in} + P W_2 F_w^2 C \xi_2(t) + P Z_2 F_z^2 C e_x(t) \quad (2.74)$$

où F_w^2 et F_z^2 sont des matrices de dimensions (3×1) et (1×1) respectivement.

L'erreur d'observation de l'observateur (2.74) est donnée par

$$\dot{e}_x(t) = P(J_2 - R)e_x(t) - PW_2F_w^2C\xi_2(t) - PZ_2F_z^2Ce_x(t) \quad (2.75)$$

La dérivée de la fonction de Lyapunov commune V s'écrit alors

$$\begin{aligned} \dot{V} &= -e_x^T(t) [R + Z_2F_z^2C] e_x(t) - e_x^T(t)W_2F_w^2C\xi_2(t) \\ &= -R_1e_{x1}^2(t) - R_2e_{x3}^2(t) - \left(\frac{1}{R_L} + F_z^2\right)e_{x4}^2(t) - e_x^T(t)W_2F_w^2C\xi_2(t) \end{aligned} \quad (2.76)$$

La fonction V est décroissante c'est-à-dire $\dot{V} \leq 0$ si

- La matrice $(R + Z_2F_z^2C) + (R + Z_2F_z^2C)^T$ est définie positive.
- $W_2F_w^2C$ satisfait la condition (2.53).

L'estimation de la résistance de charge est faite d'une façon similaire à la section 5.2.2. L'évolution de l'estimation de l'inverse de la résistance de charge est régie par la dynamique

$$\dot{\hat{\theta}} = -\hat{x}_4(y - \hat{y}) \quad (2.77)$$

où $\hat{\theta}$ est une estimation de $1/R_L$. Ce choix nous permet de garder les mêmes conditions de convergence pour l'observateur hybride en adoptant le même raisonnement utilisé pour 5.2.2.

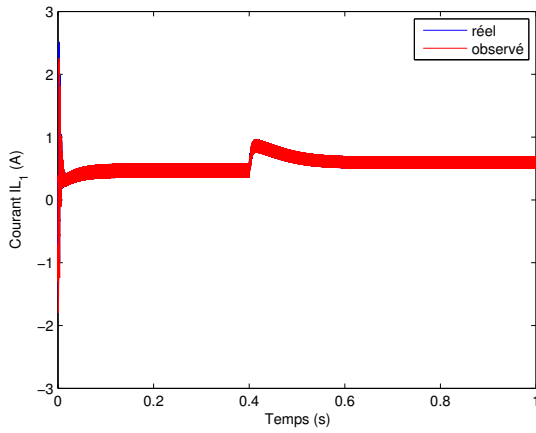
5.3.2 Résultats de simulation

Les résultats de simulation de l'observation avec l'estimation de la résistance de charge sont obtenus avec les mêmes paramètres du circuit utilisés dans le paragraphe (5.2). La fréquence de commutations est $20kHz$ et la fréquence d'échantillonnage est $200kHz$. Les figures (2.8) et (2.9) illustrent l'évolution des états observés et leurs erreurs d'observation ainsi que la décroissance de la fonction de Lyapunov. Une variation paramétrique de la résistance de charge de 44Ω à 22Ω est appliquée à l'instant $t = 0.4s$.

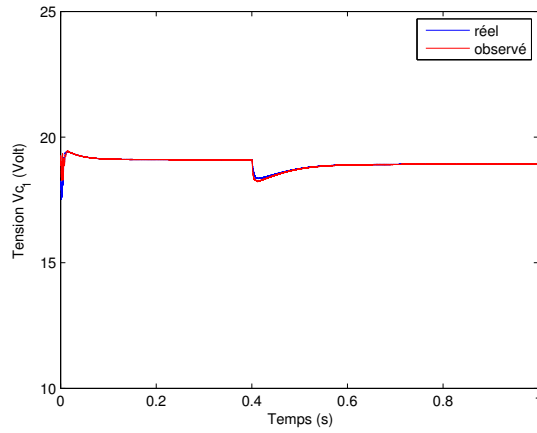
Ces résultats de simulation montrent que :

- L'observateur hybride arrive à reconstruire les états du système en convergeant vers les états réels.
- L'observateur converge d'une manière asymptotique d'après l'évolution de la fonction de Lyapunov.
- La résistance de charge est estimée sans biais.

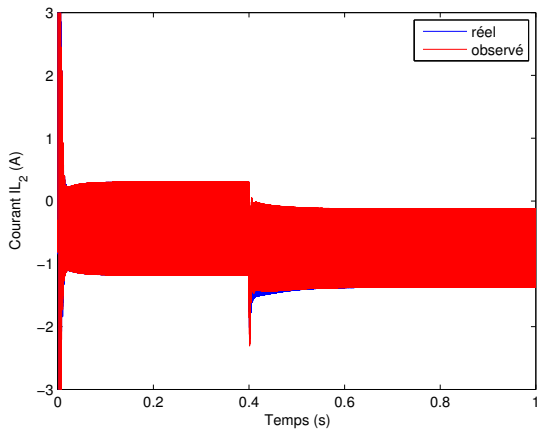
L'absence du biais sur l'estimation s'expliquerait par l'utilisation du modèle hybride représentant un comportement plus proche de la réalité physique par rapport à l'approche de la représentation moyenne.



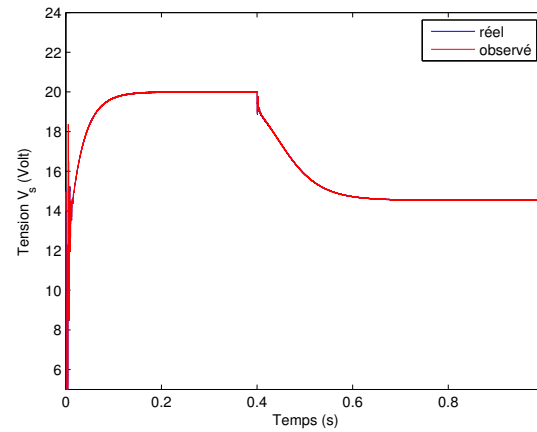
(a) Courant I_{L_1}



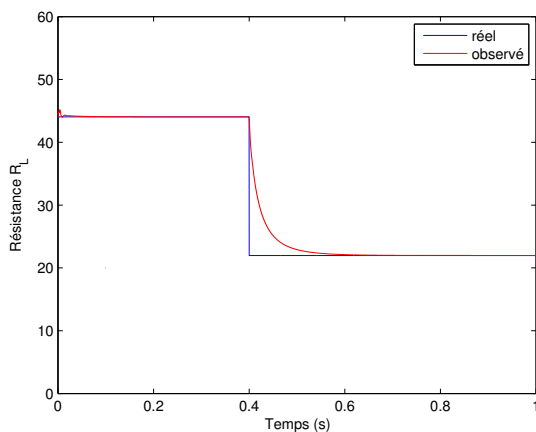
(b) Tension V_{C_1}



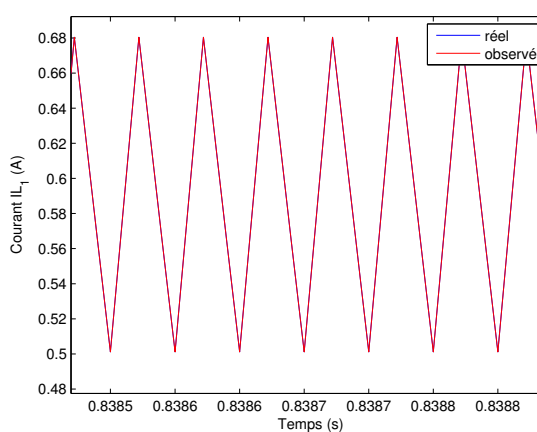
(c) Courant I_{L_2}



(d) Tension de sortie V_s

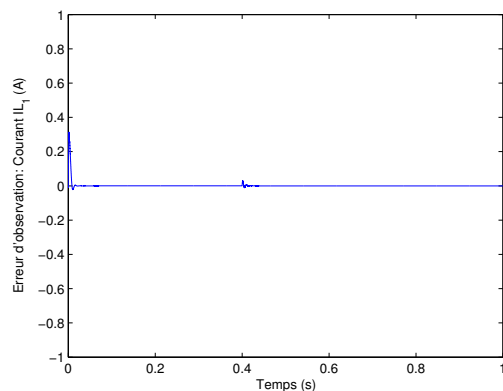


(e) Résistance de charge R_L

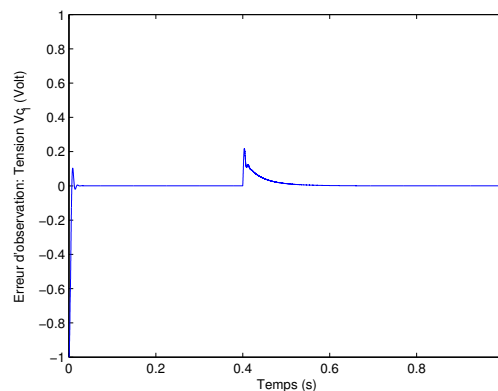


(f) Courant I_{L_1} : Zoom

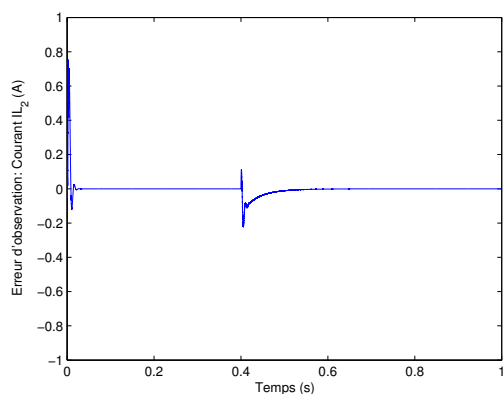
FIGURE 2.8 – Evolution de l'estimation d'état avec l'observateur hybride en simulation



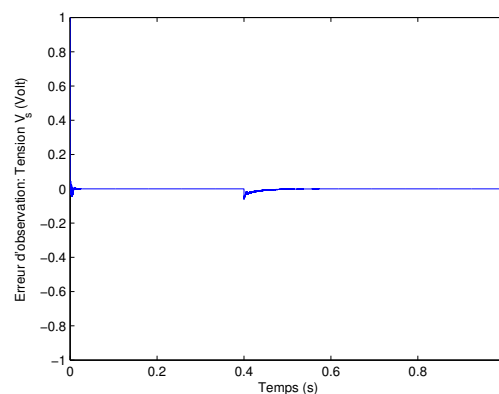
(a) Courant I_{L_1}



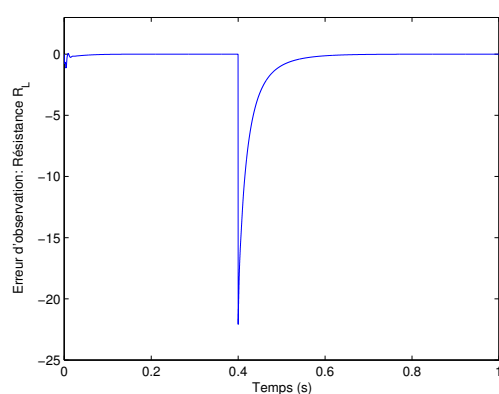
(b) Tension V_{C_1}



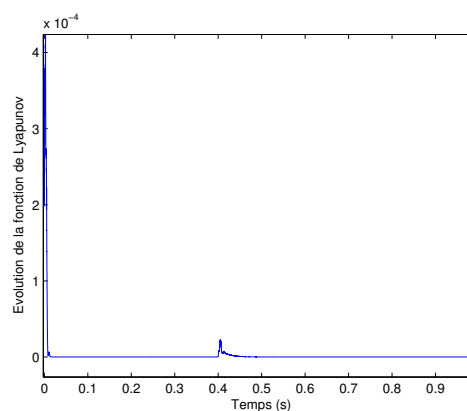
(c) Courant I_{L_2}



(d) Tension de sortie V_s



(e) Résistance de charge R_L



(f) Evolution de la fonction de Lyapunov V

FIGURE 2.9 – Erreur d'observation sur les états avec l'observateur hybride en simulation

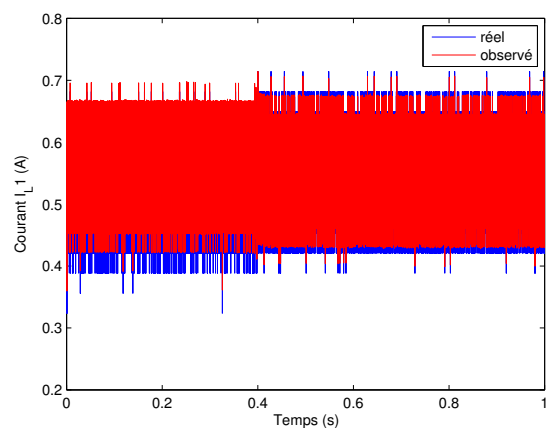
5.3.3 Résultats expérimentaux

Le circuit SEPIC disponible sur le banc d'essai présenté dans le paragraphe 5.2.4 a été conçu pour fonctionner à une fréquence de commutations égal à $20kHz$. L'observateur hybride du SEPIC proposé dans cette section nécessite une fréquence d'échantillonnage de $200kHz$ du fait que la détermination des instants de commutations est nécessaire pour l'estimation d'état. Or, la carte d'acquisition dSpace utilisée pour réaliser les essais expérimentaux ne supporte pas une telle fréquence (limitée à $30kHz$). Pour cela, la validation de l'observateur hybride a été faite avec une fréquence de commutations égale à $10kHz$. Cette fréquence permet de prélever jusqu'à trois mesures dans chaque mode de commutations ce qui donne un temps et un nombre suffisant d'informations à l'algorithme de l'observateur pour calculer les états observés. Une commande hybride a été utilisée pour le test de l'observation. Lors des essais expérimentaux, des oscillations importantes apparaissent sur les états de l'observateur. Un filtre passe-bas a été placé à la sortie de la commande dans le but de lisser la forme des signaux enregistrés. La fréquence de coupure du filtre est $1.6kHz$. Cette valeur a été déterminée expérimentalement en réalisant un compromis entre la qualité de l'observation et la conservation de l'aspect hybride de la commande (une fréquence de coupure très basse aurait annulé le comportement hybride de l'observateur). L'ajout de ce filtre a permis d'obtenir des résultats satisfaisant pour l'observateur hybride.

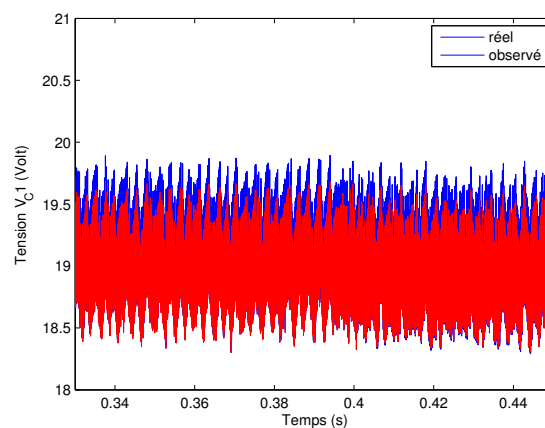
Puisque cet observateur n'est pas étendu à l'estimation de la résistance de charge, un test de variation de charge moins sévère que dans le cas de l'observateur moyen a été choisi. La variation effectuée est de 44Ω à 36Ω au lieu de 44Ω à 22Ω . Cette variation de la résistance de charge intervient à instant $t = 0.4s$. La figure 2.10 illustre l'évolution des états observés sur une période d'une seconde. Un zoom est fait sur les différents signaux au voisinage de l'instant $0.4s$ (voir la figure 2.11) pour observer le comportement de l'observateur lors d'un régime transitoire.

Ces résultats expérimentaux permettent de faire les conclusions suivantes :

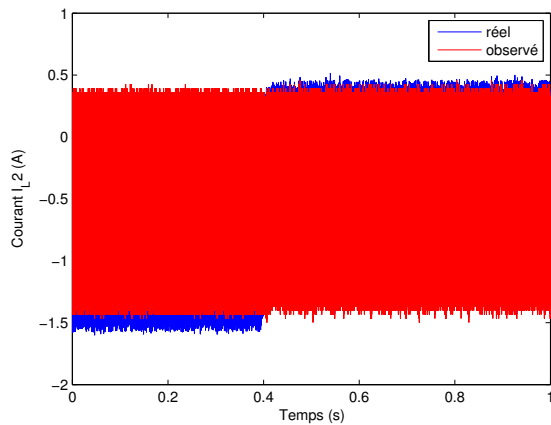
- Les états de l'observateur convergent vers les signaux réels du convertisseur.
- L'observateur hybride présente une meilleure reconstitution des signaux du système par rapport à l'observateur synthétisé à partir du modèle moyen.
- Lors d'un régime transitoire, le comportement du système est reproduit par l'observateur hybride ce qui n'est pas le cas de l'observateur moyen.



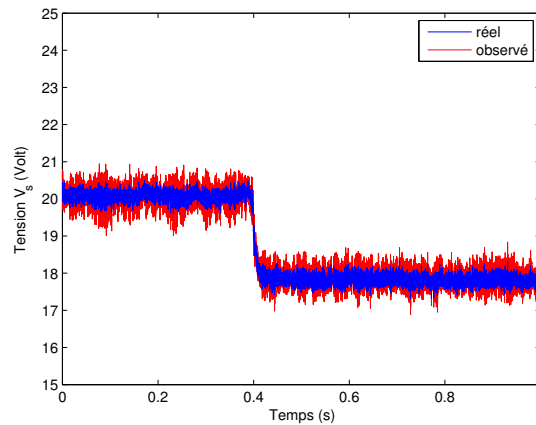
(a) Courant I_{L_1}



(b) Tension V_{C_1}

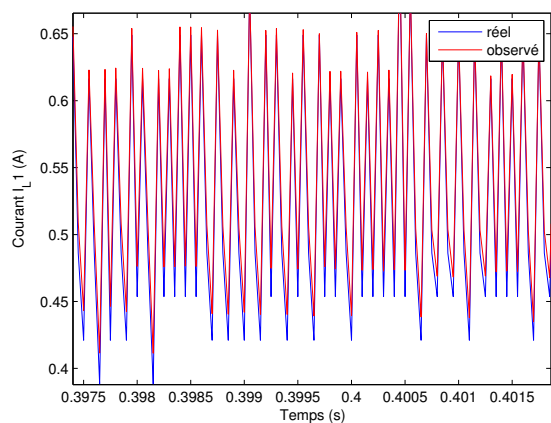


(c) Courant I_{L_2}

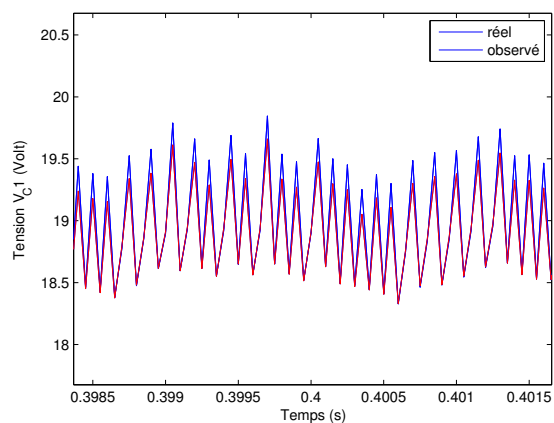


(d) Tension de sortie V_s

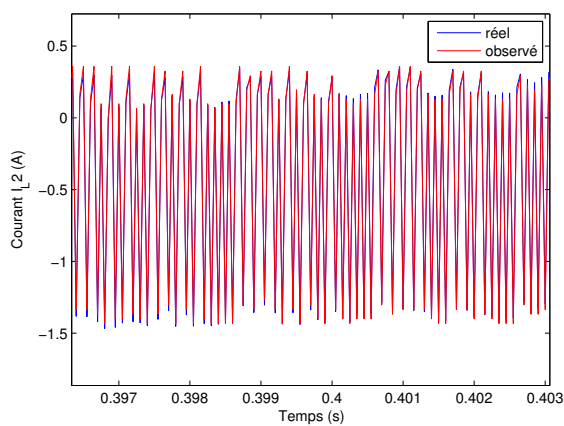
FIGURE 2.10 – Evolution de l'estimation d'état avec l'observateur hybride en expérimentation



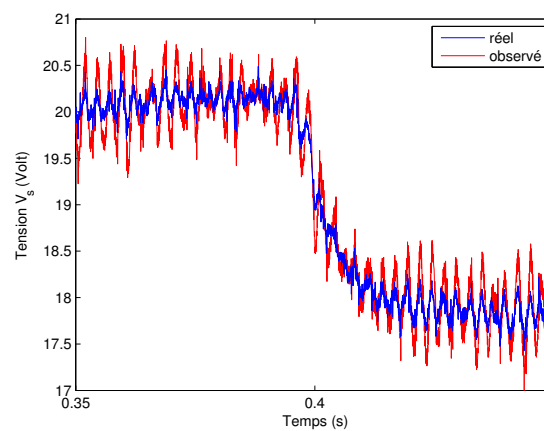
(a) Courant I_{L_1}



(b) Tension V_{C_1}



(c) Courant I_{L_2}



(d) Tension de sortie V_s

FIGURE 2.11 – Evolution de l'estimation d'état avec l'observateur hybride en expérimentation : Zoom

6 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons étudié le problème de l'observation des systèmes port-Hamiltonien à commutations en nous intéressant en particulier au cas des modes de fonctionnement non observables. Une première solution reposant sur la synthèse d'un observateur non linéaire pour le modèle moyen du système à commutations a été abordée. Contrairement à d'autres approches, nous avons proposé une approche qui s'appuie sur une modélisation port-hamiltonienne et avons montré qu'il est possible d'obtenir de manière systématique une preuve de convergence asymptotique de l'erreur d'observation en s'appuyant sur une fonction de Lyapunov.

A cause des limites de la technique du modèle moyen, nous avons proposé une autre solution fondée sur une approche hybride. Un observateur hybride original a été synthétisé en prenant en compte les modes de fonctionnement inobservables. Contrairement aux travaux de [Tanwani et al., 2011], où l'observateur est complexe et où la correction se produit de manière épisodique par saut sur l'état après un certain intervalle de temps, notre observateur est simple à mettre en œuvre et effectue une correction continue. Une condition sur le temps de séjour minimum a été élaborée pour établir la convergence asymptotique de l'erreur d'observation.

Le convertisseur de puissance SEPIC est choisi comme exemple d'application. Les deux observateurs présentés précédemment ont été étendus à l'estimation de la résistance de charge. A l'aide des fonctions de Lyapunov, nous avons montré la convergence asymptotique des erreurs d'observation des deux observateurs. L'observateur non linéaire et l'observateur hybride ont été validés en simulation et en expérimentation sur un circuit SEPIC réel.

Chapitre 3

Commande d'une classe des systèmes linéaires à commutations

1	Introduction	61
2	Commandes non linéaires avec les méthodes de Lyapunov	62
2.1	Commande à partir du modèle moyen	63
2.2	Commande à partir du modèle hybride	70
3	Commande optimale hybride	75
3.1	Formulation du problème de la commande optimale	75
3.2	Application du principe du maximum de Pontryagin	77
3.3	Types de solutions	77
3.4	Cas de $p = 1$	79
3.5	Détermination des arcs singuliers	79
3.6	Exemples d'application	82
4	Commande prédictive hybride	89
4.1	Synthèse de la loi de commande	89
4.2	Application au convertisseur SEPIC	91
5	Conclusion	97

1 Introduction

La commande des systèmes linéaires à commutations avec une entrée continue constante repose essentiellement sur la détermination des instants de commutations nécessaires pour atteindre les objectifs de la commande. Ces instants de commutations peuvent être déterminés d'une façon implicite ou explicite. Pour certains systèmes, la tâche peut néanmoins être difficile en raison du nombre important de grandeurs à contrôler vis-à-vis du faible nombre d'entrées de commande. Par ailleurs, si les références sont générées à partir du modèle moyen du SLC, la commande hybride ne pourra au mieux qu'entraîner les grandeurs à commander autour de leurs références dans un cycle limite [Beccuti et al., 2007].

Comme pour le problème de l'observation, une technique de commande classique consiste à utiliser un modèle moyen. Malheureusement, l'approche de moyennage n'est pas valable pour toutes les gammes de fréquences. Les techniques de commande hybride sont donc plus adéquates pour remédier au problème de la validité du modèle moyen rencontré généralement dans

les méthodes classiques. La théorie des systèmes hybrides permet de traiter le problème de la commande en adoptant une modélisation plus réaliste qui prend en compte les phénomènes discontinus du système.

Dans ce chapitre, nous considérons seulement des systèmes avec une seule entrée de commutations. Néanmoins, les méthodes développées pourraient être généralisées au cas de plusieurs entrées de commutations.

Nous proposons tout d'abord une première loi de commande construite par une analyse Lyapunov du modèle port-Hamiltonien moyen d'un SLC. La fonction de Lyapunov utilisée est obtenue à partir de la fonction d'énergie appelée fonction Hamiltonienne. Cette commande a l'avantage d'être facile à implémenter et d'être dépendante de peu de paramètres du système. Pour les convertisseurs de puissance, nous montrons que seule la résistance de charge a une influence sur les performances de la commande. En général, un correcteur PI est associé à la loi de commande pour assurer sa robustesse vis-à-vis des variations de la charge. Néanmoins, pour certains choix de la loi de commande, il est possible de ne pas utiliser ce correcteur PI. Ensuite, une deuxième loi de commande utilisant une fonction de Lyapunov est établie pour le modèle hybride de la classe des SLC considérée. Cette commande, simple à synthétiser, génère directement la séquence de commutations et implicitement les instants de commutations.

Dans un troisième temps, une loi de commande optimale hybride est développée. Cette technique s'appuie sur le principe du maximum de Pontryagin et la minimisation d'un critère énergétique. Nous montrons que par construction cette commande possède une partie singulière n'appartenant pas au domaine de la commande et qui nécessite une recherche des arcs singuliers associés pour pouvoir être exploitée. Nous proposons alors une méthode pour les déterminer dans le cas des convertisseurs de puissance.

Pour terminer, une approche de commande prédictive est élaborée en utilisant un modèle discret pour les SLC. Cette technique repose sur la décomposition du modèle du système en plusieurs sous-modèles sur un horizon de prédiction puis détermination de l'instant de commutations à l'aide d'un algorithme d'optimisation.

Les techniques de commandes proposées dans ce chapitre ont été appliquées sur un convertisseur SEPIC. Des résultats en simulation et en expérimentation sont donnés afin de valider et montrer les performances des lois de commande proposées.

2 Commandes non linéaires avec les méthodes de Lyapunov

L'utilisation d'un modèle Hamiltonien à ports permet de trouver facilement une fonction de Lyapunov adéquate au problème de la commande [Jaafar et al., 2009]. L'idée de base est de construire une fonction de Lyapunov candidate à partir de la fonction de stockage d'énergie du modèle port-Hamiltonien. Cette approche facilite la détermination de la loi de commande valable pour tous les systèmes commutés qui peuvent d'être représentés par le modèle adopté.

2.1 Commande à partir du modèle moyen

2.1.1 Loi de commande proposée

Considérons une seule entrée de commutations pour le modèle (2.6). Il est possible de le récrire sous la forme suivante

$$\begin{cases} \dot{x} &= P[J_1(1-u) + J_2u - R]x + PB_q u_{in} \\ y_p &= PB_q^T x \end{cases} \quad (3.1)$$

où $q = 1$ correspond à une commande $u = 0$ et $q = 2$ correspond à une commande $u = 1$.

Le modèle moyen peut être écrit sous la forme suivante

$$\begin{cases} \dot{x}_a &= P[\bar{J}_1 + \bar{J}_2 d - R]x_a + P\bar{B}_1 u_{in} + P\bar{B}_2 d u_{in} \\ y_a &= Cx_a \end{cases} \quad (3.2)$$

où x_a est le vecteur d'état moyen, d est le rapport cyclique où $d \in [0, 1]$, $\bar{J}_1 = J_1$, $\bar{J}_2 = J_2 - J_1$, $\bar{B}_1 = B_1$ et $\bar{B}_2 = B_2 - B_1$.

Définissons x_a^{ref} comme étant le vecteur de référence et $\tilde{x}_a = x_a - x_a^{ref}$ comme étant l'erreur de poursuite sur l'état. Notons $y_a^{ref} = Cx_a^{ref}$ la référence de sortie et $\tilde{y}_a = y_a - y_a^{ref}$ l'erreur de poursuite sur la sortie. Choisissons la référence x_a^{ref} telle que la dynamique soit décrite par l'expression suivante

$$\dot{x}_a^{ref} = P[\bar{J}_1 + \bar{J}_2 d_{ref} - R]x_a^{ref} + P\bar{B}_1 u_{in} + P\bar{B}_2 d_{ref} u_{in} \quad (3.3)$$

où d_{ref} est le rapport cyclique de référence associé à x_a^{ref} .

On note $\tilde{d} = d - d_{ref}$. L'erreur de poursuite s'écrit

$$\begin{aligned} \dot{\tilde{x}}_a &= P(\bar{J}_1 - R)\tilde{x}_a + P\bar{J}_2(dx_a - d_{ref}x_a^{ref}) + P\bar{B}_2\tilde{d}u_{in} \\ &= P(\bar{J}_1 - R)\tilde{x}_a + P\bar{J}_2d\tilde{x}_a + P\bar{J}_2\tilde{d}x_a^{ref} + P\bar{B}_2\tilde{d}u_{in} \end{aligned} \quad (3.4)$$

A partir de (3.4), si $\tilde{x}_a = 0$ en régime permanent, ceci implique que $\dot{\tilde{x}}_a = 0$ et par conséquent $d = d_{ref}$. Rappelons que d_{ref} est constante ($\dot{d}_{ref} = 0$) alors $\dot{\tilde{d}} = \dot{d}$.

Considérons la fonction de Lyapunov suivante

$$V_a = \frac{1}{2}\tilde{x}_a^T P^{-1}\tilde{x}_a + \frac{1}{2}\tilde{d}^2 \quad (3.5)$$

La dérivée de la fonction de Lyapunov V_a par rapport au temps est donnée par

$$\dot{V}_a = -\tilde{x}_a^T R\tilde{x}_a + \tilde{x}_a^T \bar{J}_2 x_a^{ref} \tilde{d} + \tilde{x}_a^T \bar{B}_2 \tilde{d} u_{in} + \dot{\tilde{d}} \tilde{d} \quad (3.6)$$

Dans le but de satisfaire la condition $\dot{V}_a \leq 0$, nous proposons la loi de commande suivante

$$\dot{d} = -\tilde{x}_a^T \bar{J}_2 x_a^{ref} - \tilde{x}_a^T \bar{B}_2 u_{in} - k\tilde{d} \quad (3.7)$$

avec k un scalaire.

Ainsi, l'expression de \dot{V}_a devient

$$\dot{V}_a = -\tilde{x}_a^T R\tilde{x}_a - k\tilde{d}^2 \quad (3.8)$$

Finalement, on a $\dot{V}_a \leq 0$.

L'expression de la commande (3.7) dépend de l'intégralité du vecteur d'état x . Dans le cas des convertisseurs de puissance, l'utilisation des correcteurs PI est nécessaire dans ce cas pour assurer la robustesse vis-à-vis des variations paramétriques. Afin de ne pas utiliser ou diminuer le nombre de ces correcteurs, considérons une autre fonction de Lyapunov reposant sur le bilan d'énergie des systèmes Hamiltoniens forcés ou non autonomes pour des entrées constantes (x_{ref} et u_{in} pour ce cas). D'après [Maschke et al., 2000], la différence entre l'énergie totale et l'énergie fournie au système par des entrées constantes peut être utilisée comme une fonction de Lyapunov. Cette fonction est utilisée généralement comme une fonction d'énergie désirée dans la commande par interconnexion des systèmes Hamiltoniens à ports [Ortega et al., 2000]. Ainsi, la fonction représentant cette différence d'énergie pour le système (3.4) donnée par

$$V(\tilde{x}_a) = \frac{1}{2}\tilde{x}_a^T P^{-1}\tilde{x}_a - x_{ref}^T \int_0^{t_f} \bar{J}_2 \tilde{d}\tilde{x}_a dt - u_{in}^T \int_0^{t_f} \bar{B}_2^T \tilde{d}\tilde{x}_a dt \quad (3.9)$$

est définie positif et s'annule pour $\tilde{x}_a = 0$.

Pour réaliser l'objectif de la commande, nous ajoutons deux termes positifs à la dernière fonction : $\frac{1}{2}\tilde{d}^2$ et $\frac{1}{2}\tilde{x}_a^T Q P^{-1}\tilde{x}_a$ avec Q une matrice de pondération diagonale.

La nouvelle fonction donnée par

$$V_a = \frac{1}{2}\tilde{x}_a^T P^{-1}\tilde{x}_a - x_{ref}^T \int_0^{t_f} \bar{J}_2 \tilde{d}\tilde{x}_a dt - u_{in}^T \int_0^{t_f} \bar{B}_2^T \tilde{d}\tilde{x}_a dt + \frac{1}{2}\tilde{x}_a^T Q P^{-1}\tilde{x}_a + \frac{1}{2}\tilde{d}^2 \quad (3.10)$$

est une fonction de Lyapunov candidate.

Les matrices \bar{J}_1 et \bar{J}_2 sont des matrices anti-symétriques ce qui fait que les produits $\tilde{x}_a^T \bar{J}_1 \tilde{x}_a$ et $\tilde{x}_a^T \bar{J}_2 \tilde{x}_a$ sont nuls. En dérivant (3.10), on obtient

$$\begin{aligned} \dot{V}_a = & -\tilde{x}_a^T R \tilde{x}_a + \frac{1}{2}\tilde{x}_a^T \left(Q(\bar{J}_1 + \bar{J}_2 d - R) + (\bar{J}_1 + \bar{J}_2 d - R)^T Q \right) \tilde{x}_a + \tilde{x}_a^T Q \bar{J}_2 x_a^{ref} \tilde{d} \\ & + \tilde{x}_a^T Q \bar{B}_2 \tilde{d} u_{in} + \dot{d}\tilde{d} \end{aligned} \quad (3.11)$$

Posons la matrice $X_Q = (Q(\bar{J}_1 + \bar{J}_2 d - R) + (\bar{J}_1 + \bar{J}_2 d - R)^T Q)$, on obtient l'inégalité

$$\begin{aligned} \dot{V}_a & < -\lambda_{min}(R) \|\tilde{x}\|^2 + \|X_Q\| \|\tilde{x}\|^2 + \tilde{x}_a^T Q \bar{J}_2 x_a^{ref} \tilde{d} + \tilde{x}_a^T Q \bar{B}_2 \tilde{d} u_{in} + \dot{d}\tilde{d} \\ & < -(\lambda_{min}(R) - \|X_Q\|) \|\tilde{x}\|^2 + \tilde{x}_a^T Q \bar{J}_2 x_a^{ref} \tilde{d} + \tilde{x}_a^T Q \bar{B}_2 \tilde{d} u_{in} + \dot{d}\tilde{d} \end{aligned} \quad (3.12)$$

où $\lambda_{min}(\cdot)$ et la plus petite valeurs propre d'une matrice.

Si la condition $(\lambda_{min}(R) - \|X_Q\|) > 0$ est vérifiée grâce à un choix adéquat de Q , alors en choisissant la loi de commande suivante

$$\dot{d} = -\tilde{x}_a^T Q \bar{J}_2 x_a^{ref} - \tilde{x}_a^T Q \bar{B}_2 u_{in} - k\tilde{d} \quad (3.13)$$

et l'expression (3.12) devient

$$\dot{V}_a < -(\lambda_{min}(R) - \|X_Q\|) \|\tilde{x}_a\|^2 - k\tilde{d}^2 \quad (3.14)$$

donc la condition $\dot{V}_a < 0$ est satisfaite.

On s'aperçoit que l'utilisation de (3.13) plutôt (3.7) permet de réduire le nombre de variables d'état dans l'expression de la commande à travers une matrice de pondération dont le choix n'est pas totalement libre.

2.1.2 Cas des convertisseurs de puissance DC-DC

En pratique, x_a^{ref} est généralement constant par morceaux ($\dot{x}_a^{ref} = 0$). x_a^{ref} est déterminé en satisfaisant

$$x_a^{ref} = [\bar{J}_1 + \bar{J}_2 d_{ref} - R]^{-1} [\bar{B}_1 u_{in} + \bar{B}_2 d u_{in}] \quad (3.15)$$

Remarquons aussi que la commande développée (3.13) ne dépend pas des paramètres du système contenus dans la matrice P qui sont des capacités et des inductances, mais dépend seulement de la matrice de dissipation R (elle contient des résistances dans le cas des convertisseurs) à travers l'expression de x_a^{ref} (3.15). Les variations des éléments de cette matrice vont donc faire varier les valeurs des références et par conséquent influencer la commande.

Pour les convertisseurs de puissance DC-DC, le rapport cyclique d_{ref} est choisi de sorte à déterminer la référence de la tension de sortie désirée y_a^{ref} , les autres références étant obtenues à l'aide de (3.15). Il faut noter que ces références sont générées à partir d'un seul rapport cyclique de référence, il est donc impossible de garder tous les signaux du circuit autour de leurs références si la résistance de charge varie. Avec la nouvelle résistance, le modèle (3.15) va générer de nouvelles références. Afin de garder la tension de sortie autour de y_a^{ref} malgré une variation paramétrique de la résistance de charge, les références des courants sont donc modifiées en fonction de l'erreur \tilde{y}_a . La variation de la charge est compensée par une variation sur les références des courants opérée par un ou plusieurs PI. Ces correcteurs PI correspondent aux régulateurs utilisés dans une deuxième boucle de commande présente pratiquement dans toutes les commandes classiques des convertisseurs [Dhali et al., 2012][Arikatla and Qahouq, 2011][Mariéthoz and al, 2010].

Pour résumer nos propos, la loi de commande proposée dans ce paragraphe pour les convertisseurs DC-DC est simple et garantit le maintien de la tension de sortie autour d'une référence donnée. Elle est associée à des régulateurs PI qui génèrent les références de courants. Cette association permet d'assurer la robustesse de la commande vis-à-vis des variations de la résistance de charge. Cette commande est totalement indépendante des paramètres du circuit à l'exception de la tension d'entrée V_e . Par contre, son inconvénient réside dans le fait que par construction la loi de commande proposée ne possède peu de paramètres de réglage et il est difficile de lier ces paramètres aux performances désirées.

2.1.3 Application au convertisseur SEPIC

Le circuit SEPIC utilise une seule entrée de commande pour commander quatre grandeurs. En prenant le modèle du SEPIC donné par (2.56), le vecteur d'état s'écrit

$$x = \begin{bmatrix} I_{L_1} & V_{C_1} & I_{L_2} & V_s \end{bmatrix}^T$$

et le vecteur de référence associé est défini par

$$x_a^{ref} = \begin{bmatrix} I_{L_1}^{ref} & V_{C_1}^{ref} & I_{L_2}^{ref} & V_s^{ref} \end{bmatrix}^T$$

Pour établir la commande du circuit SEPIC, définissons les matrices J_1 , J_2 et Q :

$$J_1 = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}, J_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ et } Q = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & k_\epsilon \end{bmatrix}$$

avec $k_\epsilon = 0.01$.

La valeur de k_ϵ est déterminée pour satisfaire la condition $(\lambda_{\min}(R) - \|X_Q\|) > 0$ ($\lambda_{\min}(R) = 0.0227$ et $\|X_Q\| < 0.02$ pour toute valeur de d).

En posant $k = 0$ la loi de commande (3.13) s'écrit

$$\dot{d} = k_\epsilon (V_s - V_s^{ref})(I_{L_1}^{ref} - I_{L_2}^{ref}) \quad (3.16)$$

Remarquons que cette commande (3.16) ne dépend pas des courants ce qui signifie que l'utilisation des correcteurs PI n'est plus nécessaire.

Résultats de simulation La commande proposée (3.16) a été appliquée en simulation sur un convertisseur SEPIC avec une fréquence d'échantillonnage de $20kHz$ et $\epsilon = 0.1$. Les paramètres du circuit sont donnés par la table 3.1. Pour tester la commande en cas d'une variation brusque

Paramètre	Valeur (unité)
L_1	$2.3 \cdot 10^{-3}$ H
L_2	$330 \cdot 10^{-6}$ H
C_{L1}	$190 \cdot 10^{-6}$ F
C_{L2}	$190 \cdot 10^{-6}$ F
R_1	2.134Ω
R_2	0.234Ω
R_L	44Ω
V_e	20 V

TABLE 3.1 – Paramètres du circuit SEPIC

de la référence, deux références sont choisies $15V$ et $20V$ pour examiner le suivi de la trajectoire par la loi de commande. Ces références correspondent respectivement aux rapports cycliques $d_{ref} = 0.437$ et $d_{ref} = 0.514$. Le convertisseur subit également une variation de la résistance de charge de la valeur $R_L = 44\Omega$ à $R_L = 22\Omega$ et une autre variation de $R_L = 22\Omega$ à $R_L = 44\Omega$ à l'instant $t = 0.4s$. Les figures 3.1(a) et 3.1(b) montrent respectivement la tension de sortie quand la référence varie entre $15V$ à $20V$ et inversement de $20V$ à $15V$ à l'instant $t = 0.4s$. Les rapports cycliques correspondant aux deux variations précédentes sont donnés par les figures 3.1(c) et 3.1(d). Les figures 3.1(e) et 3.1(f) présentent la tension de sortie lorsque le circuit subit une variation paramétrique de la résistance de charge.

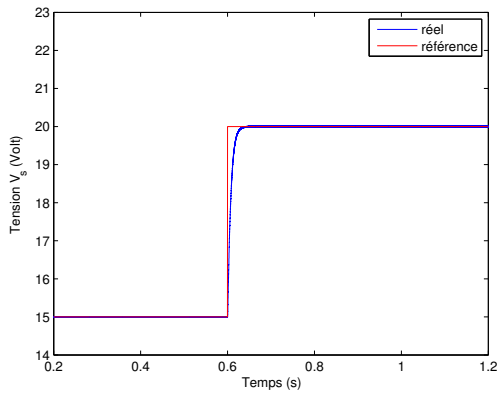
On peut clairement constater sur les figures 3.1(a) et 3.1(b) que la loi de commande assure le maintien de la tension de sortie autour de sa référence. De même, elle permet d'atteindre une nouvelle référence dans un temps de $0.04s$. Le rapport cyclique généré par la commande atteint celui de référence dans un temps similaire.

Concernant la variation de charge, la loi de commande assure le retour de la tension de sortie autour de sa référence dans un temps court. Pour une variation de $R_L = 44\Omega$ à $R_L = 22\Omega$ (Figure 3.1(e)), la durée pour revenir à la référence est $0.03s$ et cette durée est similaire pour une variation dans l'autre sens de $R_L = 22\Omega$ à $R_L = 44\Omega$ (Figure 3.1(f)).

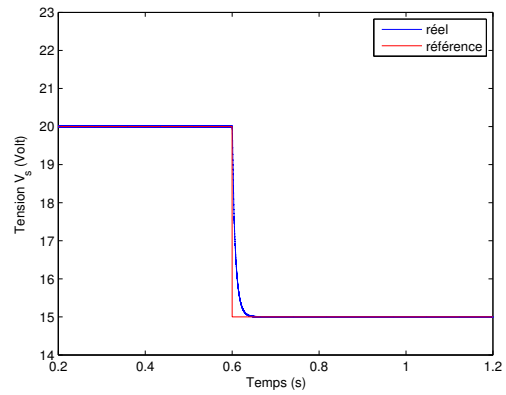
Résultats expérimentaux Sur le banc d'essai expérimental présenté à la section 5.2.4 dans le chapitre 2, la commande (3.16) a été validée. Les mêmes conditions expérimentales de simulation ont été reproduites en pratique.

Sur les figures 3.2(a) et 3.2(b), on remarque que la loi de commande implémentée permet à la tension de sortie d'entrer dans un cycle limite autour de sa référence. Contrairement à la simulation, le temps permettant d'atteindre une nouvelle référence dépend du sens de variation de celle-ci. Pour une variation de $15V$ à $20V$, on atteint cette dernière en $0.05s$ et pour le sens inverse (de $20V$ à $15V$) le temps nécessaire pour atteindre $15V$ est le même. Les rapports cycliques correspondant à ces deux tests donnés par les figures 3.2(c) et 3.2(d) présentent des erreurs statiques par rapport à leurs valeurs de références (environ 2.5%). Ces erreurs peuvent être dues aux conditions de l'expérimentation (le temps d'ouverture et fermeture des interrupteurs, temps d'acquisition, temps de calcul...) ou aux dynamiques non modélisées.

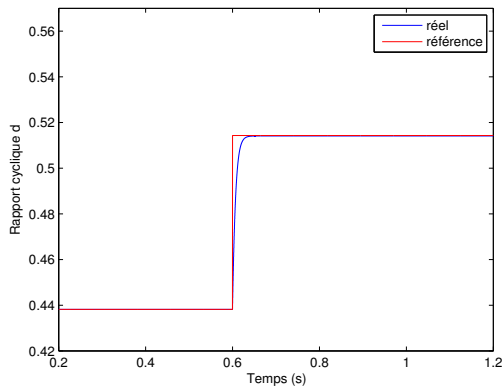
Pour la variation de charge, on enregistre des temps similaires ($0.04s$) pour revenir à la référence pour les deux sens de variations (de $R_L = 44\Omega$ à $R_L = 22\Omega$ (Figure 3.1(e)) et de $R_L = 22\Omega$ à $R_L = 44\Omega$ (Figure 3.1(f)).



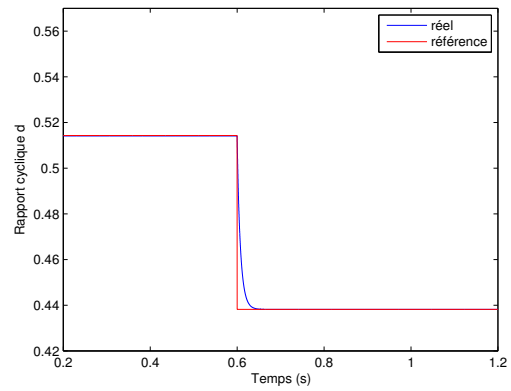
(a) Variation de la référence de 15V à 20V



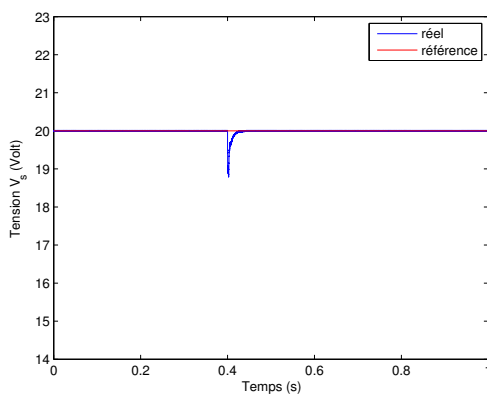
(b) Variation de la référence de 20V à 15V



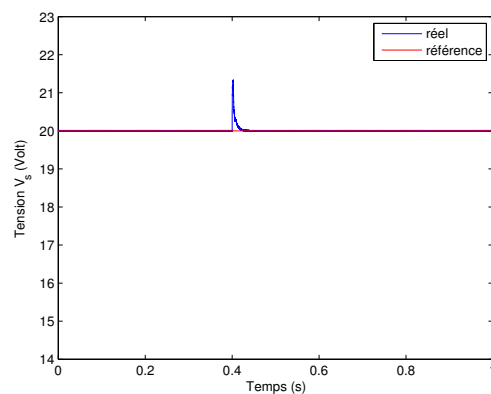
(c) Variation de la référence de 15V à 20V : rapport cyclique



(d) Variation de la référence de 20V à 15V : rapport cyclique

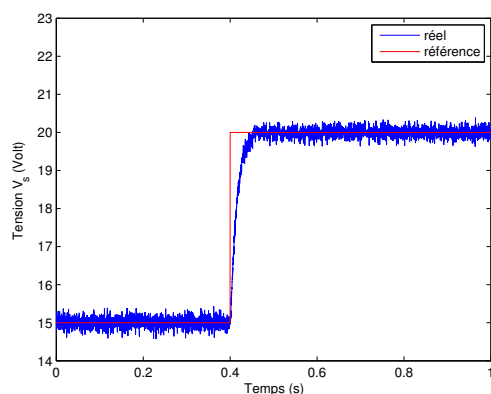


(e) Variation de la résistance de 44Ω à 22Ω

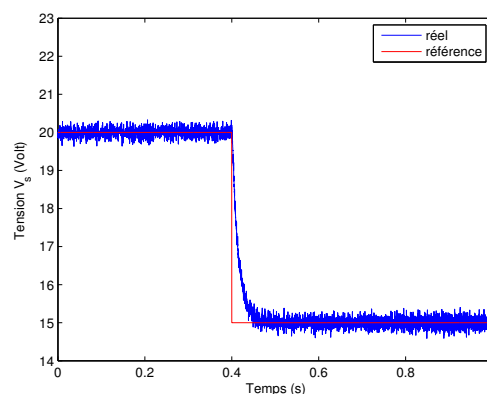


(f) Variation de la résistance de 22Ω à 44Ω

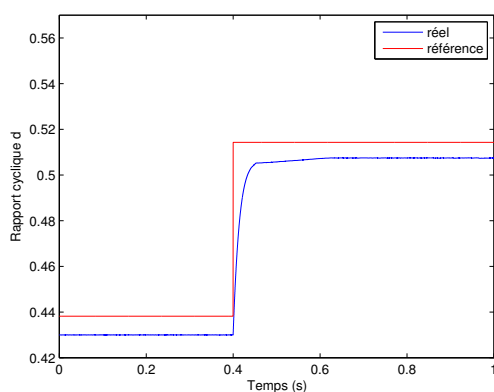
FIGURE 3.1 – Commande du modèle moyen à partir d'une fonction de Lyapunov : Simulation



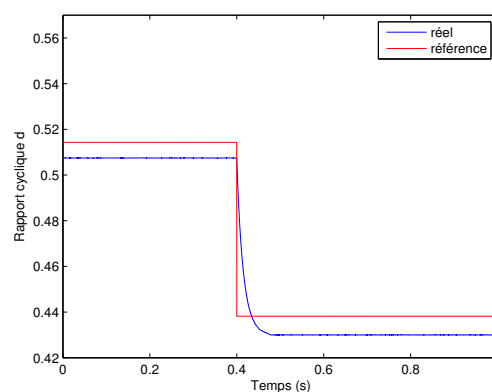
(a) Variation de la référence de 15V à 20V



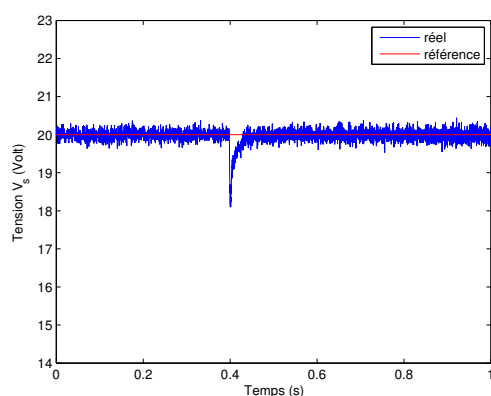
(b) Variation de la référence de 20V à 15V



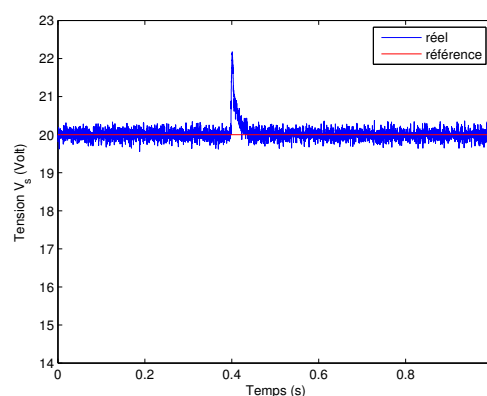
(c) Variation de la référence de 15V à 20V : rapport cyclique



(d) Variation de la référence de 20V à 15V : rapport cyclique



(e) Variation de la résistance de 44Ω à 22Ω



(f) Variation de la résistance de 22Ω à 44Ω

FIGURE 3.2 – Commande du modèle moyen à partir d'une fonction de Lyapunov : Expérimentation

2.2 Commande à partir du modèle hybride

2.2.1 Synthèse de la loi de commande

Considérons maintenant le modèle hybride décrit par

$$\dot{x} = P[\bar{J}_1 + \bar{J}_2 u - R]x + P\bar{B}_1 u_{in} + P\bar{B}_2 u u_{in} \quad (3.17)$$

avec $u \in U = \{0, 1\}$

L'ensemble X_{ref} des points de fonctionnement du système (3.17) est donné par

$$X_{ref} = \{x_{ref} \in \mathbb{R}^n, \dot{x}_{ref} = P[\bar{J}_1 + \bar{J}_2 u_{ref} - R]x_{ref} + P\bar{B}_1 u_{in} + P\bar{B}_2 u_{ref} u_{in}, u_{ref} \in co(U)\} \quad (3.18)$$

où $co(U)$ est une enveloppe convexe de U .

Soit l'erreur de poursuite suivante $\tilde{x} = (x - x_{ref})$. Supposons que x_{ref} est constant quel que soit le mode de fonctionnement alors $\dot{x}_{ref} = 0$ et $\dot{x} = \dot{\tilde{x}}$. Sachant que $x = \tilde{x} + x_{ref}$, il est possible donc d'écrire

$$\dot{\tilde{x}} = P[\bar{J}_1 + \bar{J}_2 u - R](\tilde{x} + x_{ref}) + P\bar{B}_1 u_{in} + P\bar{B}_2 u_{in} u \quad (3.19)$$

Dans le but de déterminer une fonction de Lyapunov commune pour le modèle hybride, nous pouvons utiliser une approche énergétique reposant sur les systèmes Hamiltoniens à ports.

Considérons la fonction Hamiltonienne $H = \frac{1}{2} \tilde{x}^T P^{-1} \tilde{x}$ associée au modèle (3.19), où x_{ref} et u_{in} sont les entrées de ports.

Le bilan de puissance du système (3.19) entre ses ports donné par $\frac{dH}{dt}$ (voir (2.7)) se traduit par

$$\dot{H} = x_{ref}^T (\bar{J}_1 + \bar{J}_2 u - R) \tilde{x} + u_{in}^T \bar{B}_1^T \tilde{x} - \tilde{x}^T R \tilde{x} \quad (3.20)$$

Comme précédemment, la différence entre l'énergie du système et l'énergie fournie par les entrées constantes permet de proposer la fonction de Lyapunov candidate [Maschke et al., 2000].

$$V(x) = \frac{1}{2} \tilde{x}^T P^{-1} \tilde{x} - x_{ref}^T \int_0^{t_f} (\bar{J}_1 + \bar{J}_2 u - R) \tilde{x} dt - u_{in}^T \int_0^{t_f} (\bar{B}_1^T + \bar{B}_2^T u) \tilde{x} dt \quad (3.21)$$

Pour le système (3.19), proposons la fonction de Lyapunov suivante

$$V(x) = \frac{1}{2} \tilde{x}^T P^{-1} \tilde{x} - x_{ref}^T \int_0^{t_f} (\bar{J}_1 + \bar{J}_2 u - R) \tilde{x} dt - u_{in}^T \int_0^{t_f} (\bar{B}_1^T + \bar{B}_2^T u) \tilde{x} dt + \frac{1}{2} \tilde{x}^T Q P^{-1} \tilde{x} \quad (3.22)$$

avec Q une matrice diagonale de pondération.

Sa dérivée s'écrit

$$\dot{V}(x) = -\tilde{x}^T R \tilde{x} + \frac{1}{2} \tilde{x}^T \left(Q(\bar{J}_1 - R) + (\bar{J}_1 - R)^T Q \right) \tilde{x} + \tilde{x}^T Q [\bar{J}_2 x_{ref} + \bar{B}_2 u_{in}] u \quad (3.23)$$

Rappelons que les matrices \bar{J}_1 et \bar{J}_2 sont des matrices anti-symétriques ce qui fait que les produits $\tilde{x}^T \bar{J}_1 \tilde{x}$ et $\tilde{x}^T \bar{J}_2 \tilde{x}$ sont nuls.

En posant $Y_Q = (Q(\bar{J}_1 - R) + (\bar{J}_1 - R)^T Q)$, on peut écrire

$$\dot{V}(x) < -(\lambda_{min}(R) - \|Y_Q\|) \|\tilde{x}\|^2 + \tilde{x}^T Q [\bar{J}_2 x_{ref} + \bar{B}_2 u_{in}] u \quad (3.24)$$

Pour assurer la décroissance de (3.22), sa dérivée doit être négative. Il faut ainsi s'assurer que le terme $(\lambda_{min}(R) - \|Y_Q\|)$ est positif puis que la commande u peut être choisie selon le signe de $\tilde{x}^T Q[\bar{J}_2 x_{ref} + \bar{B}_2 u_{in}]$. Si ce terme est positif, la commande $u = 0$ sinon $u = 1$. Cette loi de commande peut être représentée par l'expression suivante

$$u = \frac{1 - \text{sign}(\tilde{x}^T Q[\bar{J}_2 x_{ref} + \bar{B}_2 u_{in}])}{2} \quad (3.25)$$

La fonction de Lyapunov candidate (3.22) conduit donc à la synthèse d'une loi de commande hybride (3.25) simple et rapide à mettre en œuvre. De plus, la commande présentée dans cette section a été développée pour tout système commuté représenté par le modèle général (3.17) et en particulier pour les convertisseurs de puissance DC-DC.

Pour ce dernier cas, un autre avantage de cette commande tient au fait qu'elle génère directement les commandes d'ouverture et de fermeture des interrupteurs du circuit sans passer par une modulation de largeur d'impulsions (MLI). Cette technique permet donc en principe d'atteindre plus rapidement les références. Malheureusement, cette commande ne dépend pas de la largeur d'impulsion ce qui la rend non uniforme (rapport cyclique variable pendant le régime permanent).

Dans une commande par modèle moyen, le rapport cyclique est calculé une seule fois au début de l'intervalle de commutation puis appliqué le long de l'intervalle (l'instant de commutation est connu à l'avance). La commande hybride proposée dans cette section peut être appliquée à n'importe quel instant (l'instant de commutation n'est pas connu à l'avance et l'intervalle de commutation n'est pas constant). Compte tenu de sa nature, une commande hybride génère moins de commutations par rapport à une commande classique pour une même fréquence d'acquisition. Néanmoins, cette diminution de la fréquence de commutations peut dégrader les performances du système commandé. Il peut alors être judicieux de faire l'acquisition des signaux et le calcul des commandes beaucoup plus rapidement par rapport aux méthodes classiques.

2.2.2 Application au convertisseur SEPIC

Pour appliquer la commande hybride donnée par (3.25) sur le convertisseur SEPIC, nous définissons les matrices nécessaires pour écrire le modèle (2.54) sous la forme (3.17) :

$$\bar{J}_1 = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}, \bar{J}_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \bar{B}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \bar{B}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \text{ et}$$

$$Q = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & k_\epsilon \end{bmatrix} \text{ avec } k_\epsilon = 0.01.$$

La valeur de k_ϵ est choisi de telle sorte à satisfaire la condition $(\lambda_{min}(R) - \|Y_Q\|) > 0$ ($\lambda_{min}(R) = 0.0227$ et $\|Y_Q\| = 0.02$).

Conformément à (3.25), la commande hybride s'écrit comme suit

$$u = \frac{1 - \text{sign}(k_\epsilon(V_s - V_s^{ref})(I_{L_1}^{ref} - I_{L_2}^{ref}))}{2} \quad (3.26)$$

Remarquons que cette commande dépend seulement des deux courants du circuit, la tension de sortie et sa référence. De ce fait, cette commande ne peut pas être influencée en principe par des variations de la résistance de charge puisque les références des courants ne sont pas employées. Les correcteurs PI utilisés classiquement pour générer ses références ne sont plus d'utilité dans ce cas.

L'application de la commande hybride (3.26) génère une commande de type bang-bang à chaque instant d'échantillonnage alors que la technique MLI donne une commande pour un intervalle de temps égal à la période d'échantillonnage. Pour la même fréquence d'échantillonnage, les commandes hybrides commutent moins rapidement que les commandes établies à partir d'un modèle moyen ce qui a tendance à dégrader les performances du système commandé. D'ailleurs, pour améliorer la performance, cette commande nécessite des fréquences d'échantillonnage et de calcul beaucoup plus rapides que celles utilisées dans les commandes à modèle moyen ce qui constitue un obstacle pour son implémentation expérimentale.

Résultats de simulation D'un point de vue pratique, la fréquence d'échantillonnage pour appliquer la commande hybride est fixée à $200kHz$ ce qui est dix fois supérieur à celle de la commande utilisant le modèle moyen.

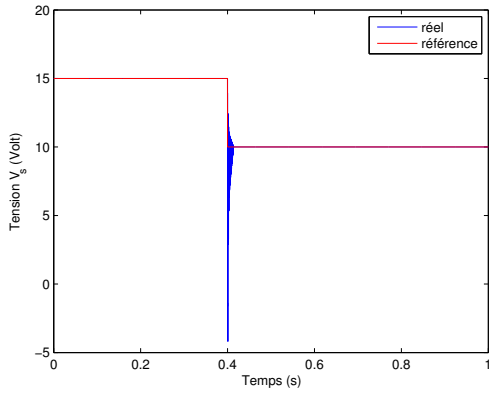
Deux simulations sont effectuées pour valider la commande proposée. Une variation de la référence de $15V$ à $20V$, puis une seconde variation dans le sens inverse de $20V$ à $15V$ à l'instant $t = 0.4s$ (voir les figures 3.3(a) et 3.3(b)). Avec une référence de $15V$ pour la tension de sortie, une variation de la résistance de charge est faite entre 44Ω et 22Ω et une autre de 22Ω et 44Ω à l'instant $t = 0.4s$ (voir les figures 3.3(e) et 3.3(f)).

On remarque sur les figures de simulation que la loi de commande proposée assure le suivi de la référence par la tension de sortie. La nouvelle référence est atteinte dans un temps très court. Quelques oscillations apparaissent autour de la tension de sortie pour certaines variations de références (de $0V$ à $10V$ et de $10V$ à $15V$, voir Figure 3.3(b)). On remarque aussi que les commandes pour les deux variations de références (Figures 3.3(c) et 3.3(d)) ne sont pas uniformes (rapport cyclique variable).

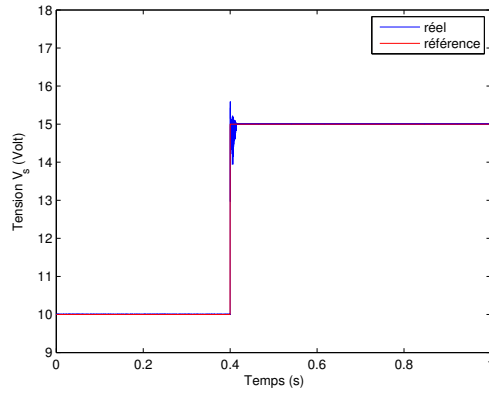
Les figures 3.3(e) et 3.3(f) représentent la tension de sortie lors d'une variation de la résistance R_L de 44Ω à 22Ω (Figure 3.3(e)) et inversement (Figure 3.3(f)). On constate enfin que la tension V_s est maintenue autour de sa référence dans les deux cas. Cependant, le deuxième cas présente de fortes oscillations à l'instant de la variation avant de revenir à la position initiale. Ceci s'explique par la non uniformité de la loi de commande qui fait solliciter fortement le système en présence de perturbations.

Résultats expérimentaux Pour des raisons pratiques et par manque de temps, cette commande hybride n'a pas pu être appliquée sur le banc d'essai. La fréquence d'échantillonnage de $200kHz$ est très éloignée des fréquences d'acquisition supportées par le dSpace utilisé pour l'implémentation. Une autre difficulté est liée à l'implémentation pratique de la fonction signe présente dans la commande. La commutation rapide de cette fonction peut provoquer l'apparition des oscillations sur les signaux et éventuellement un phénomène de Zénon

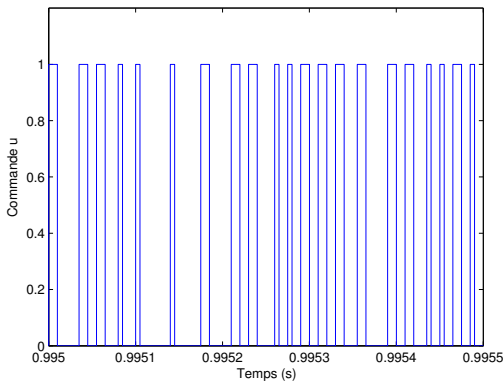
[Heymann et al., 2002]. Une des solutions possibles pour diminuer ces oscillations est de faire une régularisation de la loi de commande en imposant un temps minimum entre les commutations. Une autre possibilité est de construire une cartographie de commande hors ligne qui permet d'imposer au système des trajectoires prédéfinies et empêche l'apparition des phénomènes indésirables.



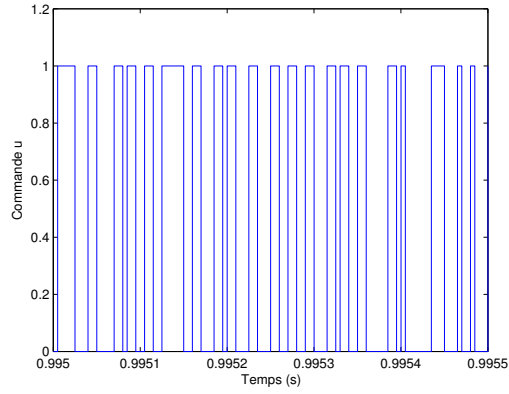
(a) Variation de la référence de 15V à 10V



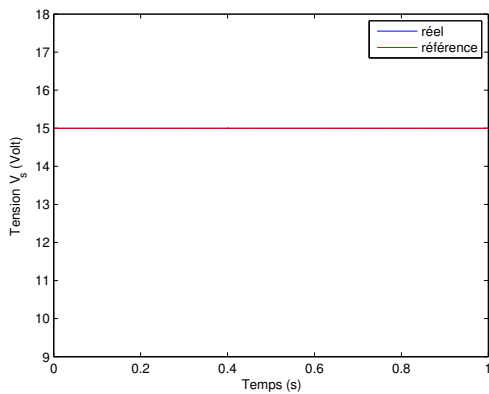
(b) Variation de la référence de 10V à 15V



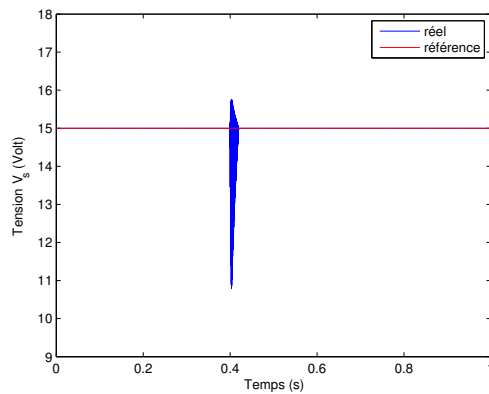
(c) Variation de la référence de 15V à 10V : Com-
mande



(d) Variation de la référence de 10V à 15V :
Commande



(e) Variation de la résistance de 44Ω à 22Ω



(f) Variation de la résistance de 22Ω à 44Ω

FIGURE 3.3 – Commande hybride à partir d'une fonction de Lyapunov : Simulation

3 Commande optimale hybride

Récemment, la commande optimale hybride des systèmes linéaires à commutations a fait l'objet de plusieurs travaux. Les approches proposées montrent qu'une commande singulière apparaît pour ce type de systèmes [Patino et al., 2010][Riedinger and Morarescu, 2012]. Généralement, la solution considérée consiste à associer une commande régulière avec une autre singulière [Powers, 1980][Moylan and Moore, 1971]. Cette commande singulière est une solution du problème de la commande optimale mais elle n'appartient pas au domaine admissible de la commande. Une procédure particulière est utilisée pour la déterminer et l'intégrer dans la loi de commande. D'un point de vue méthodologique, la synthèse de la partie singulière repose sur la détermination des trajectoires singulières du système appelées arcs singuliers. Dans la pratique, la détermination de ces derniers est une tâche fastidieuse même pour des systèmes d'ordre réduit (2 et 3). Les auteurs de [Patino et al., 2010] proposent une approche algébrique pour déterminer ces arcs. Dans cette méthode, la recherche des arcs singuliers est indépendante de l'état adjoint issu du principe de maximum de Pontryagin. Un retour d'état est ensuite mis en œuvre en utilisant des réseaux de neurones. L'inconvénient de cette approche réside dans le fait qu'elle ne peut être utilisée que pour des systèmes d'ordre réduit (2 ou 3). Pour des systèmes d'ordre supérieur, une technique numérique de commande optimale a été proposée dans [Riedinger and Morarescu, 2012].

Dans cette section, nous proposons une stratégie de loi de commande optimale pour la classe des SLC considérée dans cette thèse en déterminant les arcs singuliers du système. La technique s'appuie sur la minimisation d'un critère énergétique et le principe du maximum de Pontryagin. La méthode utilise une matrice de pondération choisie dans le but de faciliter la détermination des arcs singuliers. Cette méthode permet de déterminer non seulement les arcs singuliers mais aussi d'obtenir une loi de commande optimale pour des SLC d'ordre élevé (supérieur à 3). En utilisant les réseaux de neurones pour générer une cartographie de contrôle, la loi de commande proposée fournit une commande uniforme. En régime permanent, la commande conduit à un rapport cyclique constant pour une référence donnée contrairement à la commande hybride élaborée dans la section précédente.

3.1 Formulation du problème de la commande optimale

Considérons le système affine suivant avec une seule entrée de commutation

$$\dot{z}(t) = R_s(z(t)) + S(z(t))u(t) \quad (3.27)$$

où $z(t) \in \mathbb{R}^v$ est le vecteur d'état, $R_s(\cdot)$ est la fonction dynamique du système et $S(\cdot)$ est la fonction d'entrée. $u(t) \in U$ est l'entrée de commande avec $U = \{0, 1\}$. La commutation n'est pas autonome entre les modes et elle ne dépend que de $u(t)$. Pour des raisons pratiques, une seule entrée de commutation est considérée puisqu'un grand nombre de convertisseurs de puissance possède un seul interrupteur de commande.

Définissons les points du fonctionnement du système (3.27) à partir de son modèle moyen. L'ensemble des points de fonctionnement Z_{ref} est donnée d'une manière similaire à (3.18) :

$$Z_{ref} = \{z_{ref} \in \mathbb{R}^v : R(z_{ref}) + S(z_{ref})u_{ref} = 0, u_{ref} \in co(U)\} \quad (3.28)$$

Dans le cas où $u_{ref} \in co(U) \setminus U$, il n'existe aucune commande $u(t)$ qui permet de maintenir le système au voisinage de son point de fonctionnement. Cependant, il est toujours possible

d'approcher suffisamment z_{ref} en commutant rapidement $u(t)$ entre 0 et 1. Pour cela, $u(t)$ doit avoir u_{ref} comme valeur moyenne. Ce résultat est une conséquence du théorème de Filippov-Ważewski [Ingalls et al., 2003] qui dit que pour une trajectoire donnée d'un système relaxé définie sur un intervalle fini, il existe une trajectoire avec les mêmes valeurs initiales qui approxime la trajectoire du système relaxé sur cet intervalle fini. Le système relaxé est défini sur une enveloppe convexe du domaine de définition du système initial non relaxé.

Le problème de la commande optimale peut être formulé comme suit

$$\begin{aligned} & \min_{u(\cdot)} \int_0^{t_f} L(z(t) - z_{ref}, u) dt \\ & \text{avec } \dot{z}(t) = R_s(z(t)) + S(z(t))u(t) \\ & z(0) = z_0, \quad u(t) \in U \end{aligned} \quad (3.29)$$

où $L : \mathbb{R}^v \rightarrow \mathbb{R}$ est la fonction du coût et t_f est le temps final.

Par la suite afin de simplifier l'écriture, la dépendance au temps des variables est omise. Nous réécrivons le problème (3.29) sous la forme de Mayer [Verlohren et al., 2010] en introduisant un nouvel état correspondant au critère d'optimisation :

$$\rho(t) = \int_0^t L(z(\tau) - z_{ref}(\tau), u) d\tau \quad (3.30)$$

et nous définissons

$$\begin{aligned} x &= [z^T, \rho]^T \\ x_0 &= [z_0^T, 0]^T \\ f(x) &= [R_s^T(z), L(z - z_{ref}, u = 0)]^T \\ g(x) &= [S^T(z), \frac{\partial L(z - z_{ref}, u)}{\partial u}]^T \end{aligned}$$

Le problème de la commande optimale (3.29) devient

$$\begin{aligned} & \min_{u(\cdot)} [0 \ 0 \ \dots \ 1] x(t_f) \\ & \text{avec } \dot{x} = f(x) + g(x)u \\ & x(0) = x_0, \quad u(t) \in U \end{aligned} \quad (3.31)$$

avec $x \in \mathbb{R}^n$ et $n = v + 1$.

L'objectif de la commande est la synthèse d'une loi de commande $u^*(t) \in U$ pour $t \in [0, t_f]$ qui minimise $x_n(t_f)$ pour une valeur initiale x_0 donnée. Pour résoudre le problème (3.31), la commande $u^*(t)$ est déterminée à travers le principe du maximum de Pontryagin [Patino et al., 2010].

Dans ce qui suit, nous allons montrer que l'application directe du principe du maximum de Pontryagin sur les systèmes ayant comme modèle (3.27) ne permet pas de proposer une solution complète au problème (3.31). Puisque la commande de ce genre de systèmes est limitée à un ensemble fini de possibilités, il n'est pas toujours possible de trouver une solution optimale compte tenue de la nature hybride des systèmes considérés. Pour remédier à cette difficulté, la solution du problème de la commande optimale est approchée à l'aide d'une solution singulière. Cette dernière est déterminée après une analyse des arcs singuliers [Chitour et al., 2006][Aronna, 2011].

La méthode analytique existante dans la littérature pour la détermination des arcs singuliers des systèmes à commutations est limitée seulement aux systèmes de dimension de 2 et 3

[Patino et al., 2009]. Dans les sections suivantes, nous proposons une généralisation de la méthode de commande proposée dans [Patino et al., 2009] grâce à une approche énergétique. Nous montrons que cette approche permet de synthétiser une commande optimale hybride dans le cas des SLC de dimension supérieure à 3.

3.2 Application du principe du maximum de Pontryagin

La fonction Hamiltonienne pour le problème (3.31) est donnée par

$$\mathcal{H}(x, \lambda, u) = \lambda^T (f(x) + g(x)u) \quad (3.32)$$

Les dynamiques de l'état x et l'état adjoint λ sont les suivants

$$\dot{x} = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \lambda}, \quad \dot{\lambda} = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial x} \quad (3.33)$$

Le maximum de Pontryagin pour les SLC est donné par le théorème suivant :

Théorème 11 ([Patino et al., 2010]) *Considérons la paire optimale (x^*, u^*) solution de (3.31). Il existe une fonction absolument continue $\lambda^* : \{0, t_f\} \rightarrow \mathbb{R}^n$ telle que pour presque tout $t \in [0, t_f]$ les conditions suivantes sont vérifiées :*

– *La condition du minimum*

$$\mathcal{H}^* = \mathcal{H}(x^*, \lambda^*, u^*) = \inf_{u \in U} \mathcal{H}(x^*, \lambda^*, u) \quad (3.34)$$

– *Première condition de transversalité : Pour tout $t \in [0, t_f]$*

$$\mathcal{H}(t) = cst \quad (3.35)$$

où cst est une constante et $cst = 0$ si t_f n'est pas fixé.

– *Deuxième condition de transversalité*

$$\lambda^*(0) \text{ libre and } \lambda^*(t_f) = [0, \dots, 0, 1] \quad (3.36)$$

Notons que ce théorème suppose l'existence d'une solution (x^*, u^*) , cependant, ceci n'est pas toujours le cas. Si l'ensemble U ne contient aucune solution, il doit être étendu à son enveloppe convexe $co(U)$. Si le problème relaxé (i.e. quand $u \in co(U)$) admet une solution de type bang-bang, cette solution résout le problème originel (3.31). Par contre, si une telle solution n'existe pas alors la commande $u(t)$ prend ses valeurs dans l'enveloppe $co(U)$ (commande bang-singulière). Cette dernière solution ne peut pas être appliquée au problème originel (3.31) mais elle peut être approchée en commutant rapidement de telle sorte que la solution du problème relaxé soit la valeur moyenne de la commande hybride [Patino et al., 2009] [Kopp, 1962].

3.3 Types de solutions

Définissons la fonction de commutation suivante

$$\phi(t) = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial u} = \lambda^T g(x) \quad (3.37)$$

D'après (3.32) et (3.34), la minimisation de \mathcal{H} par rapport à u avec $u \in \{0, 1\}$ conduit à la commande suivante :

$$u = \begin{cases} 0 & \text{si } \phi > 0 \\ 1 & \text{si } \phi < 0 \\ ? & \text{si } \phi = 0 \end{cases} \quad (3.38)$$

Si la commande optimale est de type bang-bang, $u(t)$ a pour expression :

$$u = \frac{1 - \text{sign}(\phi)}{2} \quad (3.39)$$

S'il existe un intervalle de temps $[a, b]$ où la fonction de commutation reste nulle, la solution est de type bang-singulière et appartient à $co(U)$. Dans ce cas, des arcs singuliers apparaissent. Bien que les trajectoires singulières ne permettent pas de résoudre le problème (3.31), ces trajectoires peuvent être approchées par des trajectoires du système commuté qui sont des solutions sous-optimales [Patino et al., 2010][Powers, 1980].

Définition 15 Pour une fonction \mathcal{H} linéaire par rapport à u , un arc (x^*, λ^*, u^*) est dit singulier sur l'intervalle $t \in [a, b]$ si

$$\mathcal{H}_u = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial u}(x^*, \lambda^*, u^*) = 0 \quad (3.40)$$

Définition 16 L'ordre du problème est le plus petit entier q tel que $d^{(2q)}\phi/dt^{(2q)}$ contient u explicitement. Après chaque dérivation, \dot{x} et $\dot{\lambda}$ sont remplacés par leurs expressions dans (3.33), on obtient

$$\frac{d^{(2q)}\phi}{dt^{(2q)}} = A(x, \lambda) + B(x, \lambda)u \quad (3.41)$$

Si ce nombre n'existe pas, q tend vers ∞ .

Définition 17 Considérons l'arc singulier (x^*, λ^*, u^*) le long de $[a, b]$. Si q existe, l'ordre de l'arc p est le plus petit entier tel que

$$(\phi^{(2p)})_u = ((\mathcal{H}_u)^{(2p)})_u(x^*, \lambda^*, u^*) \neq 0 \quad (3.42)$$

Si ce nombre n'existe pas, p tend vers ∞ .

Dans le cas où l'ordre de l'arc existe, les équations suivantes sont établies depuis l'extrémum (x^*, λ^*, u^*)

$$\phi^{(i)} = 0, \quad \forall i = 0, \dots, 2p - 1 \quad (3.43)$$

$$\frac{\partial}{\partial u}\phi^{(i)} = 0, \quad \forall i = 0, \dots, 2p - 1 \quad (3.44)$$

$$\phi^{(2p)} = A(x, \lambda) + B(x, \lambda)u = 0 \quad (3.45)$$

La loi de commande est déterminée à l'aide de cette dernière équation (3.45) comme :

$$u = -A(x, \lambda)/B(x, \lambda) \quad (3.46)$$

A ce niveau, la condition Legendre-Clebsch généralisée dite condition du second ordre doit être considérée. C'est une condition nécessaire pour l'optimalité. Elle est donnée par le théorème suivant [Robbins, 1967] :

Théorème 12 Si (x^*, λ^*, u^*) est un arc singulier optimal t

– Si l'ordre du problème est q sur $[a, b]$, l'arc satisfait

$$(-1)^q ((\mathcal{H}_u)^{(2q)})_u \geq 0 \quad (3.47)$$

pour tout $t \in [a, b]$

– Si l'ordre de l'arc est p sur $[a, b]$, l'arc satisfait

$$(-1)^p ((\mathcal{H}_u)^{(2p)})_u > 0 \quad (3.48)$$

pour tout $t \in [a, b]$

3.4 Cas de $p = 1$

Nous ne considérons que l'ordre de l'arc pour le problème (3.31) est $p = 1$. C'est le cas typique pour les convertisseurs DC-DC. De (3.32), la fonction de commutation est $\phi(t) = \lambda^T g(x)$. Les dérivées successives par rapport au temps permettent de déterminer la loi de commande à partir de la deuxième dérivée $\phi^{(2)}$. La dynamique de l'état adjoint λ est :

$$\dot{\lambda}^T = -\lambda^T (f_x(x) + g_x(x)u) \quad (3.49)$$

avec $f_x(x) = \frac{\partial f}{\partial x}$ et $g_x(x) = \frac{\partial g}{\partial x}$.

A partir de (3.43), (3.44) et (3.45), on obtient

$$\begin{cases} \lambda^T g(x) = 0 \\ \lambda^T ad_f g(x) = 0 \\ \lambda^T ad_f(ad_f g)(x) + \lambda^T ad_g(ad_f g)(x)u = 0 \end{cases} \quad (3.50)$$

où $ad_f g(x) = g_x(x)f(x) - f_x(x)g(x)$ est un crochet de Lie.

et la loi de commande est donnée par l'expression suivante :

$$u = -\frac{\lambda^T ad_f(ad_f g)(x)}{\lambda^T ad_g(ad_f g)(x)} \quad (3.51)$$

Remarquons que la commande u dépend de l'état adjoint λ qui est inconnu et doit satisfaire (3.50). Par contre, la résolution du système d'équations non linéaires (3.50) où le système défini par (3.43), (3.44) et (3.45) pour le cas général n'est pas facile même pour des systèmes de faible dimension. La difficulté réside dans le fait qu'il n'existe pas une méthode systématique pour déterminer explicitement (x, λ, u) .

3.5 Détermination des arcs singuliers

Considérons un modèle similaire à (3.17) dans le paragraphe 2.2.1.

$$\dot{z} = P[\bar{J}_1 + \bar{J}_2 u - R]z + P\bar{B}_1 u_{in} + P\bar{B}_2 u u_{in} \quad (3.52)$$

avec z est le vecteur d'état.

La référence z_{ref} est supposée être constante ($\dot{z}_{ref} = 0$) (voir les équations (3.18) et (3.17)). Alors, la dynamique de l'erreur de poursuite notée $\tilde{z} = (z - z_{ref})$ est donnée par

$$\dot{\tilde{z}} = P[\bar{J}_1 + \bar{J}_2 u - R](\tilde{z} + z_{ref}) + P\bar{B}_1 u_{in} + P\bar{B}_2 u_{in} \quad (3.53)$$

Pour élaborer une commande optimale, considérons la fonction du coût suivante :

$$L(\tilde{z}, u) = -\tilde{z}^T [Q(\bar{J}_1 + \bar{J}_2 u - R) + (\bar{J}_1 + \bar{J}_2 u - R)^T Q] \tilde{z} - z_{ref}^T (\bar{J}_1 + \bar{J}_2 u - R)^T Q \tilde{z} - (\bar{B}_1 + \bar{B}_2 u)^T Q \tilde{z} u_{in} \quad (3.54)$$

Pour $Q = I_d$ où I_d est la matrice identité, la fonction du coût s'écrit

$$L(\tilde{z}, u) = 2\tilde{z}^T R \tilde{z} - z_{ref}^T (\bar{J}_1 + \bar{J}_2 u - R)^T \tilde{z} - (\bar{B}_1 + \bar{B}_2 u)^T \tilde{z} u_{in}$$

La puissance de dissipation du système (3.53) est

$$P_{dissipation} = \tilde{z}^T R \tilde{z}$$

et

$$P_{fournie} = z_{ref}^T (\bar{J}_1 + \bar{J}_2 u - R)^T \tilde{z} + (\bar{B}_1 + \bar{B}_2 u)^T \tilde{z} u_{in}$$

est la puissance fournie à ce système (voir le paragraphe 2 du chapitre 2).

Le bilan de puissance (puissance totale) est alors donnée par

$$P_{totale} = z_{ref}^T (\bar{J}_1 + \bar{J}_2 u - R)^T \tilde{z} + (\bar{B}_1 + \bar{B}_2 u)^T \tilde{z} u_{in} - \tilde{z}^T R \tilde{z}$$

Ainsi, la fonction du coût $L(\tilde{z}, u)$ pour $Q = I_d$ est la différence entre la puissance de dissipation et la puissance totale du système.

$$L(\tilde{z}, u) = P_{dissipation} - P_{totale}$$

Pour le cas général où Q n'est pas nécessairement la matrice identité, on peut dire que la fonction du coût $L(\tilde{z}, u)$ correspond à la différence entre la puissance de dissipation et la puissance totale d'une partie du système. De ce fait, l'emploi de cette fonction pour la commande optimale revient à minimiser un critère énergétique.

Pour simplifier la synthèse de la loi de commande, la matrice Q est choisie de façon à simplifier la détermination des arcs singuliers. Mettons le système (3.52) sous la forme de Mayer avec la fonction de coût (3.54). Comme précédemment dans (3.30), définissons la variable d'état $\rho = \int_0^{t_f} L(\tilde{z}, u) dt$ et $z = (\tilde{z} + z_{ref})$. Alors, (3.52) devient

$$\dot{x} = f(x) + g(x)u \quad (3.55)$$

avec

$$\begin{aligned} x &= [z^T \quad \rho]^T \\ f(x) &= [(P(\bar{J}_1 - R)(\tilde{z} + z_{ref}) + P\bar{B}_1 u_{in})^T \quad L(\tilde{z}, u = 0)]^T \\ g(x) &= [(P\bar{J}_2(\tilde{z} + z_{ref}) + P\bar{B}_2 u_{in})^T \quad \frac{\partial L(\tilde{z}, u)}{\partial u}]^T \end{aligned}$$

Dans le but de déterminer la loi de commande optimale, nous proposons l'état adjoint candidat donné par

$$\lambda^T = [\tilde{z}^T Q P^{-1} \quad 1] \quad (3.56)$$

avec Q est une matrice symétrique.

Pour satisfaire la condition nécessaire donnée par (3.49), calculons dans ce qui suit la dérivée de λ^T

$$\begin{aligned} \dot{\lambda}^T &= [\dot{\tilde{z}}^T Q P^{-1} \quad 0] \\ &= [(\tilde{z} + z_{ref})^T [\bar{J}_1 + \bar{J}_2 u - R]^T Q + (\bar{B}_1^T + \bar{B}_2^T u) Q u_{in} \quad 0] \end{aligned} \quad (3.57)$$

Rappelons que les dérivées $f_x(x)$ et $g_x(x)$ de $f(x)$ et $g(x)$ par rapport à x sont données comme suit

$$f_x(x) = \begin{bmatrix} P(\bar{J}_1 - R) & 0 \\ -\tilde{z}^T [Q(\bar{J}_1 - R) + (\bar{J}_1 - R)^T Q] - z_{ref}^T (\bar{J}_1 - R)^T Q - \bar{B}_1^T Q u_{in} & 0 \end{bmatrix} \quad (3.58)$$

et

$$g_x(x) = \begin{bmatrix} P\bar{J}_2 & 0 \\ -\tilde{z}^T [Q\bar{J}_2 + \bar{J}_2^T Q] - z_{ref}^T \bar{J}_2^T Q - \bar{B}_2^T Q u_{in} & 0 \end{bmatrix} \quad (3.59)$$

Un calcul direct de $-\lambda^T(f_x(x) + g_x(x)u)$ fournit les résultats suivants

$$\lambda^T f_x(x) = \begin{bmatrix} -\tilde{z}^T (\bar{J}_1 - R)^T Q - z_{ref}^T (\bar{J}_1 - R)^T Q - \bar{B}_1^T Q u_{in} & 0 \end{bmatrix} \quad (3.60)$$

et

$$\lambda^T g_x(x) = \begin{bmatrix} -\tilde{z}^T \bar{J}_2^T Q - z_{ref}^T \bar{J}_2^T Q - \bar{B}_2^T Q u_{in} & 0 \end{bmatrix} \quad (3.61)$$

Finalement, on a l'égalité suivante

$$-\lambda^T(f_x(x) + g_x(x)u) = [(\tilde{z} + z_{ref})^T [\bar{J}_1 + \bar{J}_2 u - R]^T Q + (\bar{B}_1^T + \bar{B}_2^T u) Q u_{in} \quad 0] \quad (3.62)$$

Remarquons que $\dot{\lambda}^T = -\lambda^T(f_x(x) + g_x(x)u)$ ce qui permet de conclure que l'état adjoint proposé (3.56) satisfait la condition nécessaire (3.49).

Enfin, afin de déterminer l'arc singulier optimal, supposons que le temps final t_f pour le problème de la commande optimale ne soit pas fixé. D'après (3.35), il vient $\mathcal{H}(t) = 0$ ce qui conduit aux deux conditions suivantes $\lambda^T f(x) = 0$ et $\lambda^T g(x) = 0$ [Patino et al., 2010]. En ajoutant la condition $\lambda^T [f, g](x) = 0$ donnée dans (3.50), l'état adjoint optimal et les arcs singuliers sont déterminés à partir du système d'équations suivant

$$\begin{cases} \lambda^T f(x) = 0 \\ \lambda^T g(x) = 0 \\ \lambda^T ad_f g(x) = 0 \end{cases} \quad (3.63)$$

En conclusion, les principales étapes de la méthode proposée sont les suivantes :

- Détermination de l'état adjoint optimal et les arcs singuliers à partir de (3.56) et (3.63).
- Génération des trajectoires optimales en utilisant une intégration rétrograde pour les deux valeurs de la commande $u = 0$ and $u = 1$. Les valeurs initiales de cette intégration $x(t_f)$ et $\lambda(t_f)$ se trouvent sur les arcs singuliers optimaux (les portions d'arcs satisfaisant la condition de Legendre-Clebsch).
- Elaboration d'un retour d'état par une interpolation des trajectoires optimales en employant un réseau de neurones.

3.6 Exemples d'application

Dans ce paragraphe, deux exemples d'applications sur les convertisseurs de puissance DC-DC sont présentés. Le premier est un convertisseur buck-boost et le deuxième un convertisseur SEPIC. Le premier exemple qui est un système d'ordre 2 a été choisi parce qu'il permet de montrer les trajectoires régulières, arcs singuliers et la cartographie de la commande sur un plan 2-D. Une chose qui n'est pas possible avec le deuxième exemple qui est un système d'ordre 4.

3.6.1 Convertisseur buck-boost

Le circuit buck-boost est un convertisseur de puissance DC-DC qui fournit une tension de sortie pouvant être d'une valeur supérieure, inférieure ou égale à la tension d'entrée en inversant sa polarité (voir la figure 3.4). Il est généralement utilisé dans des applications comme les alimentations à découpage où une polarité négative peut s'avérer nécessaire.

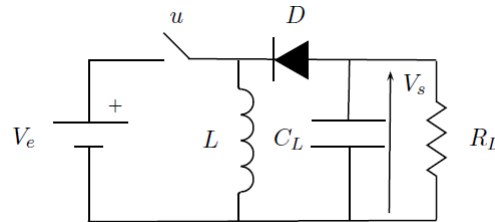


FIGURE 3.4 – Convertisseur buck-boost

Modélisation D'après (3.17), le modèle port-Hamiltonien du buck-boost est donné par

$$\dot{z} = P[\bar{J}_1 + \bar{J}_2 u - R]z + P\bar{B}_2 u u_{in} \quad (3.64)$$

$$\text{avec } \bar{J}_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}, \bar{J}_2 = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, R = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{R_L} \end{bmatrix}$$

$$P = \begin{bmatrix} \frac{1}{L} & 0 \\ 0 & \frac{1}{C_L} \end{bmatrix}, \bar{B}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \text{ et } u_{in} = V_e.$$

où L , C_L sont l'inductance et la capacité du circuit. Nous choisissons le courant de charge I_L et la tension de sortie V_s comme variables d'état. Le vecteur d'état est donc $z = [I_L \quad V_s]^T$.

Loi de commande Considérons le problème de la commande optimale du système décrit par (3.64) suivant : L'objectif de la commande est de ramener la tension de sortie à sa référence et la maintenir autour de cette dernière en un temps t_f non fixé.

Dans le but de déterminer les arcs singuliers, nous adoptons une fonction de coût similaire à (3.54) avec

$$Q = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

D'après (3.56), l'état adjoint candidat λ^T est donné par

$$\lambda^T = [L\tilde{z}_1 \quad 0 \quad 1] \quad (3.65)$$

Rappelons que pour que λ^T soit optimal, λ^T doit satisfaire la deuxième condition de transversalité et le système d'équations (3.63) déduit de la première condition de transversalité. En résolvant le système d'équations donné par (3.63), on obtient la solution $\tilde{z}_1 = 0$. Ainsi, il est clair que l'arc singulier est $(\tilde{z}_1 = 0, \lambda^*, u^*)$. L'expression de la commande optimale u^* est déduite à partir de (3.51).

Notons que nous ne considérons que les portions des arcs singuliers qui respectent la condition de Legendre-Clebsch donnée par le théorème 12.

La fonction de commutation définie par (3.37) utilisée pour la commande bang-bang est

$$\phi(t) = -\tilde{z}_1(-z_2 - V_e) \quad (3.66)$$

Résultats de simulation La loi de commande développée est appliquée sur un convertisseur buck-boost en simulation sous Matlab. Les paramètres considérés du modèle sont donnés par la table 3.2. La fréquence d'échantillonnage est $20kHz$ et le temps de simulation est $t = 1.5s$.

Paramètre	Valeur (unité)
L	$550 \times 10^{-3} \text{ H}$
C	$2.2 \times 10^{-3} \text{ F}$
R	44 100
V_e	30 V

TABLE 3.2 – Paramètres du circuit Buck-boost

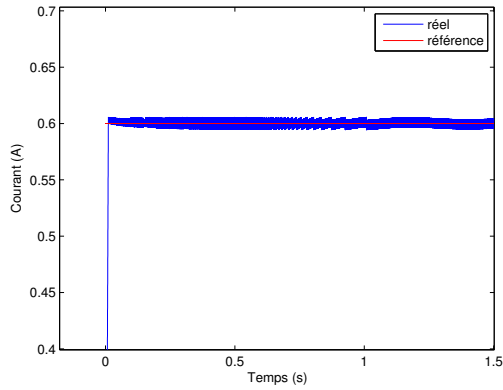
Le vecteur de référence z_{ref} calculé à partir de (3.28) avec le rapport cyclique de référence $u_{ref} = 0.5$ est

$$z_{ref} = \begin{bmatrix} 0.6 & -30 \end{bmatrix}^T$$

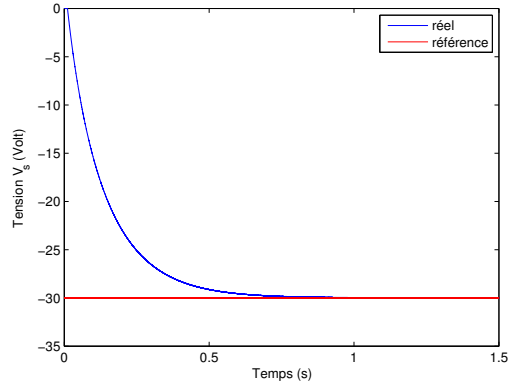
Les figures 3.5(a) et 3.5(b) montrent respectivement l'évolution du courant et la tension du circuit vers leurs références. La figure 3.5(c) présente le signal de commande et la figure 3.5(d) présente le plan des phases avec les trajectoires régulières, l'arc singulier, la trajectoire commandée et la référence. La cartographie présentée par la figure 3.5(e) illustre la carte de commande générée par les réseaux de neurones.

On constate que le courant et la tension du buck-boost convergent vers leurs références respectives. Le temps nécessaire pour rejoindre la référence du courant est très court. Par contre, la tension a besoin de $0.75s$ pour entrer dans le cycle limite autour de la référence. Le signal de la commande associée est uniforme avec un rapport cyclique de 0.5 correspondant la valeur choisie pour u_{ref} pour déterminer les références.

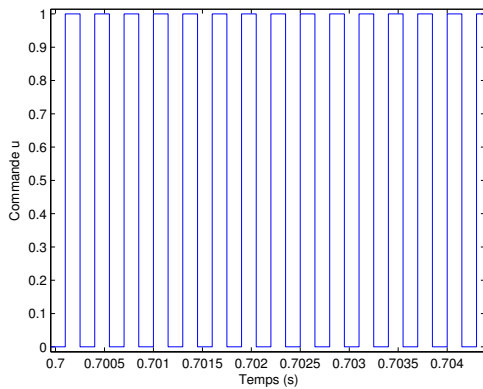
Sur le plan des phases, on peut remarquer que la trajectoire commandée suit une trajectoire régulière depuis sa valeur initiale jusqu'à ce qu'elle rencontre l'arc singulier. Puis, elle suit ce dernier jusqu'à la référence. L'interpolation de ce plan des phases par les réseaux de neurones donne une carte de commande comportant deux régions. Chaque région correspond à une valeur de la commande $u = 0$ ou $u = 1$. La limite entre les deux régions est définie par l'arc singulier.



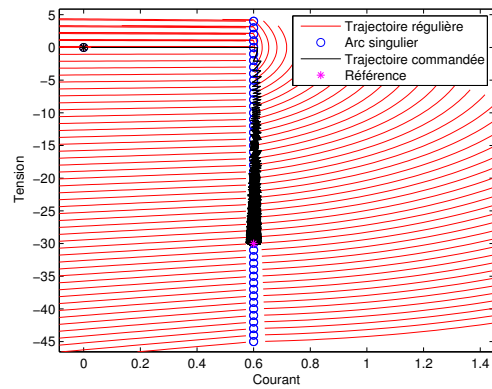
(a) Courant dans l'inductance



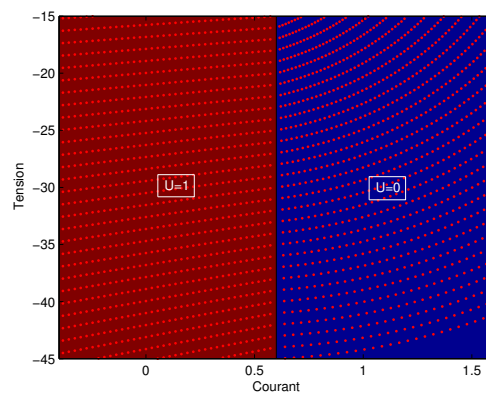
(b) Tension de sortie



(c) Signal de la commande



(d) Arc singulier et trajectoires optimales



(e) Cartographie de commande

FIGURE 3.5 – Commande optimale du buck-boost : Simulation

3.6.2 Convertisseur SEPIC

Loi de commande D'une manière similaire à l'exemple précédent, considérons le problème (3.31) associé au système (2.54) avec t_f non fixé. La commande optimale est déterminée en minimisant une fonction de coût similaire à (3.54) avec avec

$$Q = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Comme pour le cas du convertisseur buck-boost, l'état adjoint candidat λ^T est

$$\lambda^T = \begin{bmatrix} L_1 \tilde{z}_1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.67)$$

En utilisant le système d'équations (3.63), la solution de ce dernier est $\tilde{z}_1 = 0$. Alors, l'arc singulier est défini par $(\tilde{z}_1 = 0, \lambda^*, u^*)$.

La commande hybride est déterminée par la fonction de commutation suivante

$$\phi(t) = \tilde{z}_1(z_2 + z_4) \quad (3.68)$$

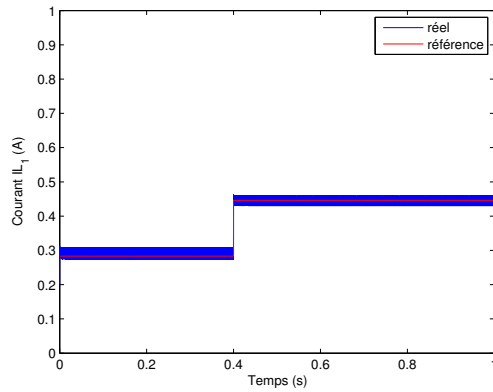
Résultats de simulation La loi de commande proposée est validée en simulation en utilisant Matlab sur un circuit SEPIC dont les paramètres sont donnés par le tableau 3.1. La fréquence d'échantillonnage est $20kHz$ et le temps de simulation est $t = 1s$. Les points de fonctionnement z_{ref} sont calculés par (3.18) avec deux rapports cycliques différents; le premier $u_{ref} = 0.52$ correspondant à la tension $20V$ et le deuxième $u_{ref} = 0.45$ correspondant à une tension de sortie de $15V$. Une variation de références est opérée à l'instant $t = 0.4s$. Les figures 3.6(a) à 3.6(d) montrent l'évolution des courants et tensions du circuit pendant une seconde.

Sur ces figures, on peut remarquer que les courants et les tensions du système arrivent à atteindre leurs références dans un temps très court (moins de $0.02s$). La figure 3.6(f) présente un zoom sur la tension de sortie. On voit que cette dernière entre dans un cycle limite autour de sa référence. Ce cycle limite est plus apparent sur les deux figures des courants (Figures 3.6(a) et 3.6(c)).

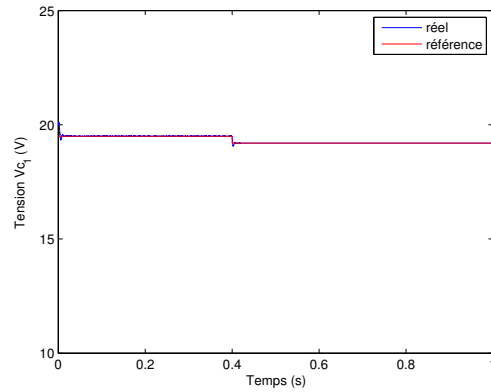
Contrairement à la commande hybride présentée dans la section précédente, le signal d'ouverture et fermeture de la commande optimale est uniforme sur l'ensemble de l'intervalle du temps choisi et possède un rapport cyclique correspondant à celui de référence ($u_{ref} = 0.52$ à partir de $t = 0.4s$).

Résultats expérimentaux La technique de commande proposée a été testée en pratique sur le banc d'essai présenté dans l'annexe (Figure 2.5). La fréquence d'échantillonnage employée est $20kHz$. Les figures 3.7(a) à 3.7(d) montrent l'évolution des courants et tensions du convertisseur.

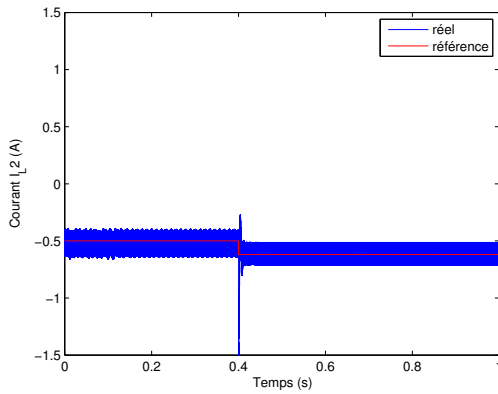
Conformément à la simulation, les courants et tensions expérimentaux sont ramenés autour de leurs références dans un temps très court (moins de $0.02s$). La tension de sortie (voir la figure 3.7(d)) rejoint sa référence avec une erreur statique négligeable de $0.3V$.



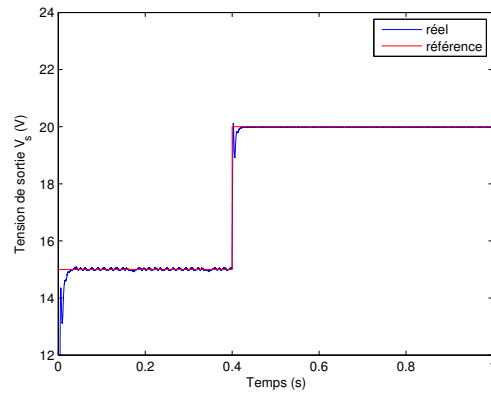
(a) Courant I_{L_1}



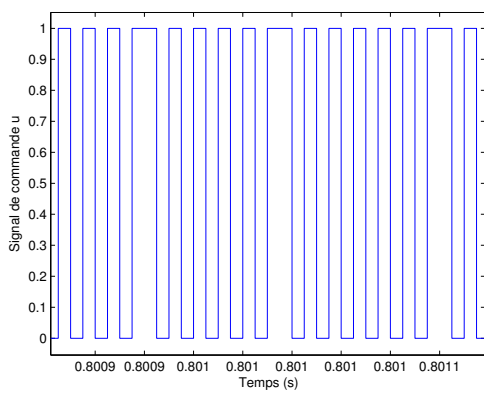
(b) Tension V_{c_1}



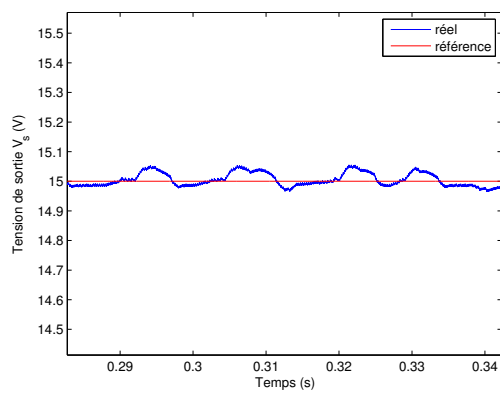
(c) Courant I_{L_2}



(d) Tension de sortie V_s



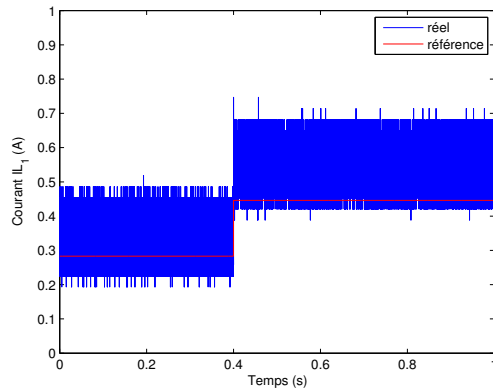
(e) Signal de commande u



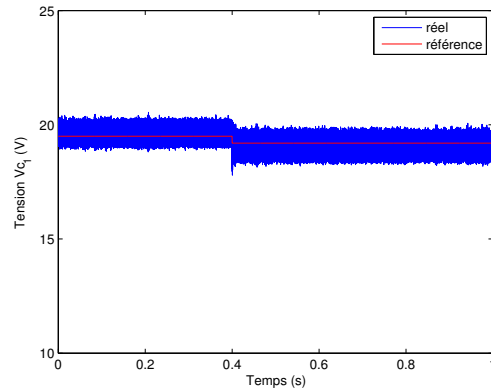
(f) Tension de sortie V_s : Zoom

FIGURE 3.6 – Commande optimale du SEPIC : Simulation

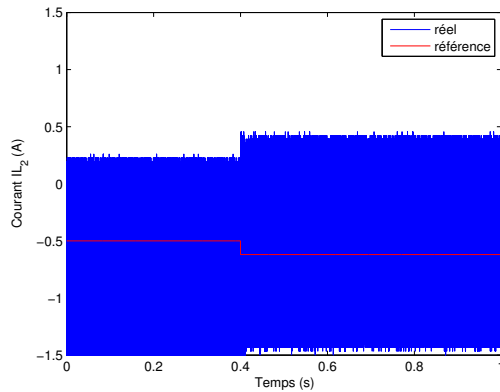
Le signal de la commande montré sur la figure 3.7(e) est uniforme de manière similaire au signal de commande en simulation. Les tensions de sortie simulées et expérimentales sont tracées sur les mêmes courbes pour une variation de référence de 15V à 20V (voir la figure 3.8) et une autre de 20V à 15V (voir la figure 3.9). On remarque qu'il existe une différence de comportement en régime transitoire qui s'expliquerait par la présence des dynamiques non modélisées ou non prises en compte pour la simulation (courbes violettes sur les figures 3.8 et 3.9).



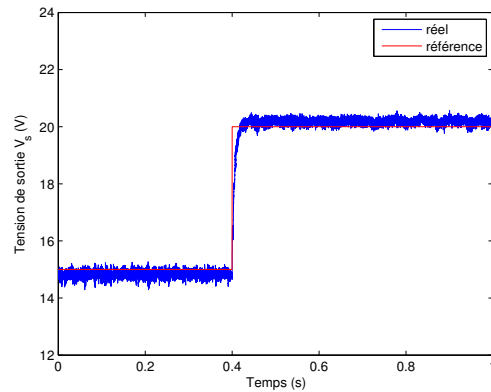
(a) Courant I_{L_1}



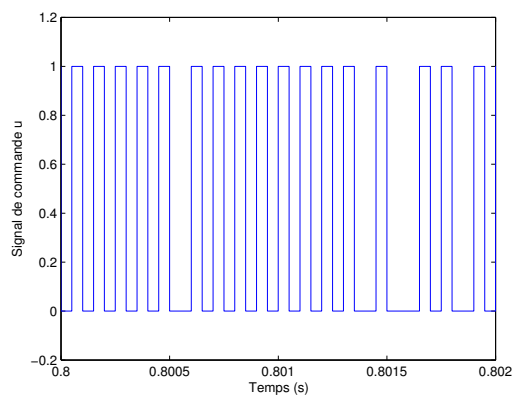
(b) Tension V_{C_1}



(c) Courant I_{L_2}



(d) Tension de sortie V_s



(e) Signal de la commande u

FIGURE 3.7 – Commande optimale du SEPIC : Expérimentation

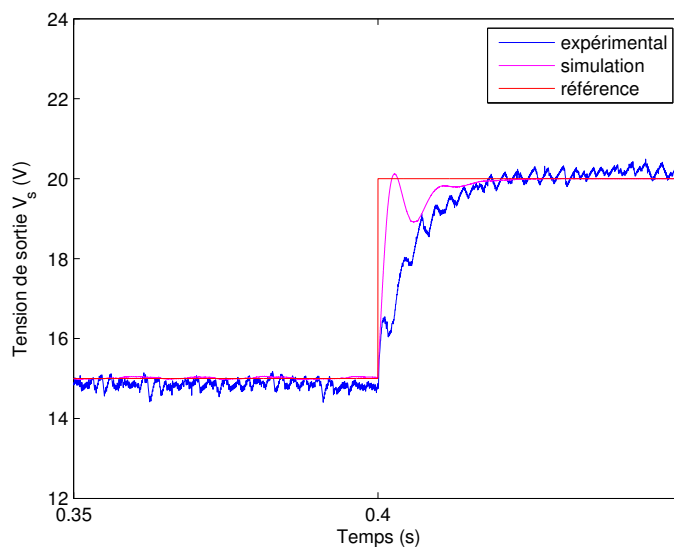


FIGURE 3.8 – Tension de sortie : variation de la référence de 15V à 20V

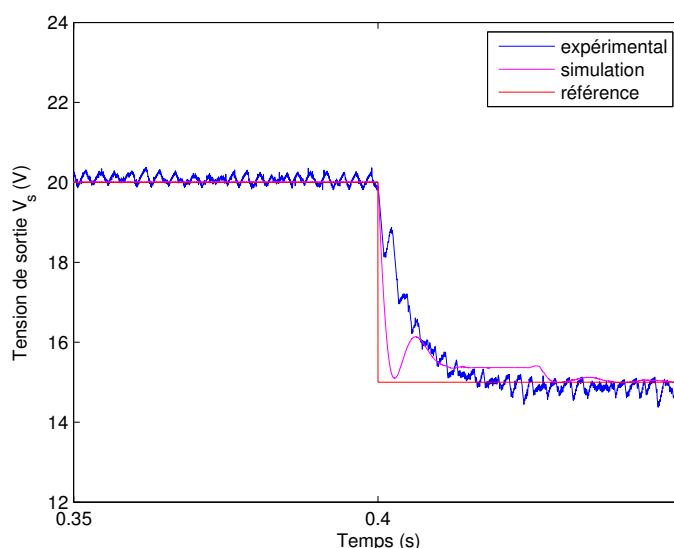


FIGURE 3.9 – Tension de sortie : variation de la référence de 20V à 15V

4 Commande prédictive hybride

4.1 Synthèse de la loi de commande

Dans cette section, nous proposons une nouvelle commande prédictive reposant sur un modèle hybride suréchantillonné. Pour cela un modèle discret du système est établi tout d'abord pour des sous-intervalles de temps d'une période de commutations. Un algorithme d'optimisation détermine ensuite les instants de commutations à l'aide d'un critère de réglage des performances du système en boucle fermée. Contrairement à l'approche de [Geyer et al., 2004] qui est utilisée pour des systèmes affines par morceaux, la commande proposée ici est appliquée à une classe plus générale des SLC (systèmes bilinéaires). Dans le travail [Geyer et al., 2004], le modèle moyen d'un SLC est décomposé en trois subdivisions par période de commutations. La déter-

mination du rapport cyclique s'effectue ensuite à l'aide d'une stratégie d'optimisation hors ligne telle que la programmation multiparamétrique [Bemporad et al., 2000][Borrelli et al., 2005]. La commande, élaborée dans cette section, est établie à partir d'un modèle hybride discret de SLC. Le modèle est décomposé en plusieurs subdivisions par période de commutations. Grâce au caractère hybride du modèle utilisé, la procédure d'optimisation est allégée en calculant les différents sous-modèles correspondant aux subdivisions hors ligne, puis, le processus d'optimisation s'effectue en temps réel.

Pour la commande prédictive proposée, un modèle discret prenant en compte l'instant de commutation est établie à partir d'une combinaison des sous-modèles correspondant à des sous-périodes d'une période d'échantillonnage et une entrée de commutation donnée ($u = 1$ ou $u = 0$). La période d'échantillonnage est considérée comme horizon de prédiction et les sous-modèles discrets sont établis à l'aide d'une fréquence de suréchantillonnage. Ensuite, un algorithme d'optimisation va tester le modèle discret pour chaque instant de commutation possible afin de déterminer l'instant adéquat qui satisfait un critère d'optimisation.

Nous considérons un intervalle de temps $[kT, (k+1)T)$ où T est la période d'échantillonnage. Le modèle hybride des convertisseurs de puissance avec une seule entrée de commutations est le suivant

$$\dot{x} = [A_1(1-u) + A_2u]x + [B_1(1-u) + B_2u]u_{in} \quad (3.69)$$

Définissons une période de suréchantillonnage T_e telle que $T_e = \frac{T}{v}$ où v est un paramètre définissant la résolution du suréchantillonnage et division de l'intervalle $[kT, (k+1)T)$ en plusieurs sous-intervalles (voir la figure 3.10) de la forme

$$[(k+i-1)T_e, (k+i)T_e), i = 1, \dots, v$$

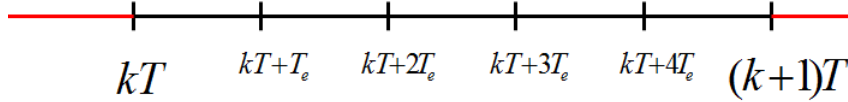


FIGURE 3.10 – Période suréchantillonnée

Des sous-modèles peuvent être obtenus à partir de (3.69) après une discrétisation par la méthode d'Euler simple en utilisant la période T_e . La composition de ces sous-modèles sur la période T conduit à une version discrète de (3.69) donnée par

$$x(k+1) = A_{s2}^{v-i} A_{s1}^i x(k) + \sum_{j=i}^v A_{s2}^{v-j} B_{s2} u_{in}(k) + \sum_{l=1}^{i-1} A_{s2}^{v-l} A_{s1}^l B_{s1} u_{in}(k), \quad i = 1, 2, \dots, v \quad (3.70)$$

avec $A_{sj} = I_d + T_e A_j$ et $B_{sj} = T_e B_j$, $j = 1, 2$ où I_d est la matrice identité.

A_1 correspond à la dynamique du système quand la commande $u = 1$. De même, A_2 correspond à la dynamique du circuit quand l'entrée de commande $u = 0$.

L'objectif de la loi de commande est de déterminer l'instant de commutation en satisfaisant les performances souhaitées. Cela se traduit par la détermination de la valeur de i tel que $i \in \{0, \dots, v-1\}$.

Considérons maintenant une fonction de coût notée \mathcal{J} . Cette fonction est utilisée comme un critère d'optimisation afin de déterminer la commande. L'algorithme suivant permet d'établir la loi de commande en donnant l'instant de commutation où le critère \mathcal{J} est minimal.

Algorithme 1

- **Etape 1** : $u(k) = 1$ à l'instant kT .
- **Etape 2** : Calculer $x(k+1)$ avec les v modèles dans l'intervalle $[kT, (k+1)T]$.
- **Etape 3** : Déterminer $i \in \{1, \dots, v\}$ qui minimise \mathcal{J} .
- **Etape 4** : Commuter $u(k)$ de 1 à 0 à l'instant $kT + iT_e$.
- **Etape 5** : A l'instant $(k+1)T$, mettre $k = k+1$ et retour à **Etape 1**.

Cette technique possède l'avantage d'être indépendante des paramètres du système. Plusieurs algorithmes d'optimisation peuvent être appliqués en incluant des contraintes sur l'état. Ainsi, elle permet un réglage des performances du système en boucle fermée contrairement aux autres commandes proposées où il y a peu voire pas du tout de paramètres de réglage. Cependant, la loi de commande doit être calculée dans un temps inférieur à une sous-période T_e ce qui exige une capacité de calcul importante pour une implémentation pratique.

Pour faciliter l'implémentation expérimentale, il est judicieux de calculer les matrices $A_{s2}^{v-i} A_{s1}^i$, $\sum_{j=i}^v A_{s2}^{v-j} B_{s2} u_{in}(k)$ et $\sum_{l=1}^{i-1} A_{s2}^{v-l} A_{s1}^l B_{s1} u_{in}(k)$ du modèle (3.70) hors ligne pour toutes les valeurs de $i = 1, 2, \dots, v$. De cette manière, les valeurs de $x(k+1)$ dans l'étape 2 de l'algorithme 1 seront calculées plus rapidement.

4.2 Application au convertisseur SEPIC

Pour l'application de cette méthode sur le circuit SEPIC (voir la figure 2.2), nous avons choisi de minimiser un critère de la forme

$$\mathcal{J} = (x(k+1) - x_{ref}(k+1))^T Q (x(k+1) - x_{ref}(k+1)) \quad (3.71)$$

où Q est une matrice symétrique de pondération.

Les matrices nécessaires pour établir la commande sont

$$A_{s1} = \begin{bmatrix} 1 - T_e \frac{R_1}{L_1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & T_e \frac{1}{C_{L1}} & 0 \\ 0 & T_e \frac{-1}{L_2} & 1 - T_e \frac{R_2}{L_2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 - T_e \frac{1}{R_L C_{L2}} \end{bmatrix}$$

$$A_{s2} = \begin{bmatrix} 1 - T_e \frac{R_1}{L_1} & -T_e \frac{1}{L_1} & 0 & -T_e \frac{1}{L_1} \\ T_e \frac{1}{C_{L1}} & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 - T_e \frac{R_2}{L_2} & \frac{1}{L_2} \\ T_e \frac{1}{C_{L2}} & 0 & T_e \frac{-1}{C_{L2}} & 1 - T_e \frac{1}{R_L C_{L2}} \end{bmatrix}$$

et

$$B_{s1} = B_{s2} = \begin{bmatrix} T_e \frac{1}{L_1} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

L'algorithme d'optimisation utilisé est simple. Un ensemble de $x(k+1)$ est calculé à l'aide du modèle (3.70) pour tout $i \in \{0, \dots, v-1\}$. Ensuite, la valeur de i correspondant à la valeur de $x(k+1)$ minimisant le critère \mathcal{J} est utilisé pour définir l'instant de commutation $kT + iT_e$.

4.2.1 Résultats de simulation

La loi de commande proposée est testée en simulation sur un circuit SEPIC (Figure 2.2) dont les paramètres sont donnés par le tableau 3.1. La fréquence d'échantillonnage est $20kHz$ et le paramètre de résolution v est choisi égal à 100. La matrice de pondération Q pour le critère d'optimisation \mathcal{J} donné par (3.71) est

$$Q = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

La figure 3.11 montre l'évolution des tensions de sortie et les rapports cycliques associés pour deux tests de variation de référence. La première variation est de $15V$ à $20V$ (Figure 3.11(a)) et la deuxième est faite dans le sens inverse de $20V$ à $15V$ (Figure 3.11(a)).

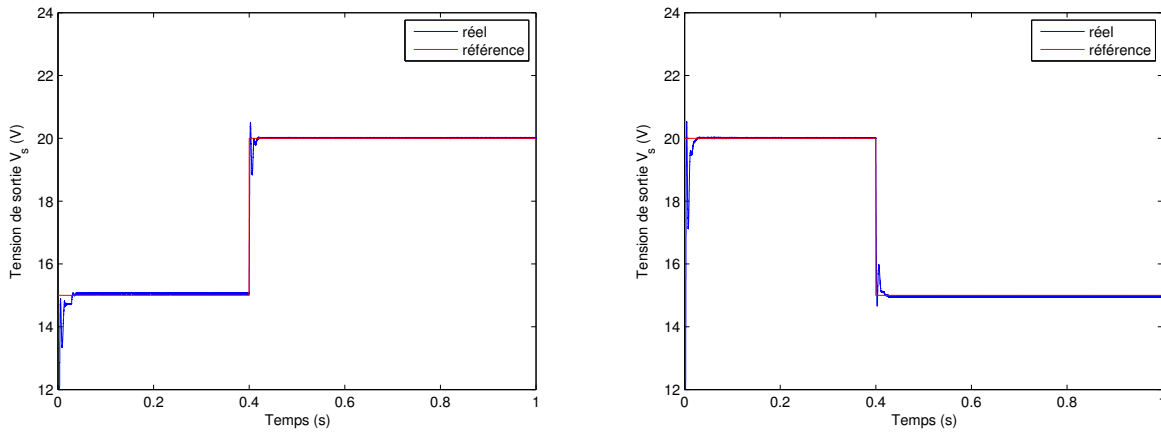
On peut remarquer que la tension de sortie dans le deux cas arrive à atteindre sa référence dans un temps très court $0.1s$. On peut remarquer aussi qu'une petite erreur statique apparait entre la tension et sa référence. Cette erreur est due à la résolution choisie ($v = 100$). Sachant que le rapport cyclique de référence pour la référence de $20V$ est $d_{ref} = 0.514$, la résolution choisie ne permet d'atteindre que $d = 0.51$ ou $d = 0.52$ (la période d'échantillonnage est découpée en v partitions) ce qui induit cette erreur statique. Un dépassement est aperçu après variation de la référence. En ajoutant des contraintes sur l'état au critère d'optimisation, il est possible d'éliminer ce dépassement. Le rapport cyclique généré par la commande prédictive n'est pas constant mais sa valeur moyenne correspond au rapport cyclique de référence.

4.2.2 Résultats expérimentaux

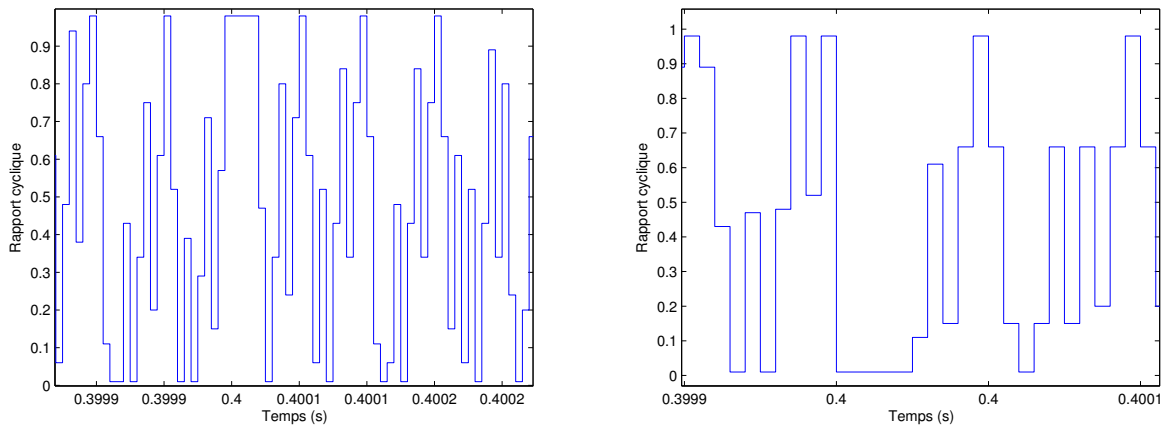
Pour valider la technique proposée expérimentalement, cette dernière a été testée sur le banc d'essai expérimental du SEPIC. La fréquence d'échantillonnage est $20Hz$. Pour des raisons pratiques, il n'était pas possible de choisir une résolution de $v = 100$. La résolution choisie pour

l'expérimentation est $v = 20$. Avec une telle valeur de v , la commande a moins de valeurs possibles pour le rapport cyclique par rapport à la résolution utilisée pour la simulation. Ainsi, on sait a priori que des erreurs statiques vont apparaître entre la tension de sortie et sa référence. La figure 3.12 montre l'évolution des tensions de sortie et les rapports cycliques associés pour les mêmes tests de variation de référence.

Dans les deux cas, la tension de sortie est maintenue autour de sa référence avec une erreur statique qui était déjà prédite. On peut voir que les valeurs moyennes des deux rapports cycliques sont proches de leurs rapports cycliques de références associées (Figures 3.12(c) et 3.12(c)). Sur la figure 3.13, les signaux issus de la pratique et ceux issus de la simulation sont comparés avec une résolution $v = 20$. On constate une correspondance entre les erreurs statiques qui apparaissent entre la référence et la tension de sortie réelle et celle de la simulation (Figure 3.13(a)). Par contre, le régime transitoire dans la simulation est différent de celui de la pratique à cause des erreurs de modélisation. Ces dernières provoquent la différence remarquée entre les rapports cycliques sur la figure 3.13(b).

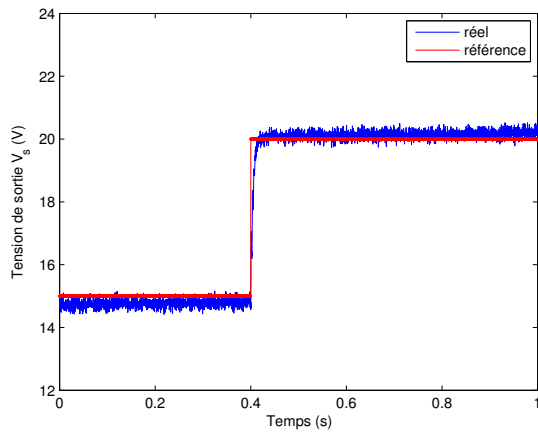


(a) Variation de la référence de 15V à 20V : Tension de sortie
 (b) Variation de la référence de 20V à 15V : tension de sortie

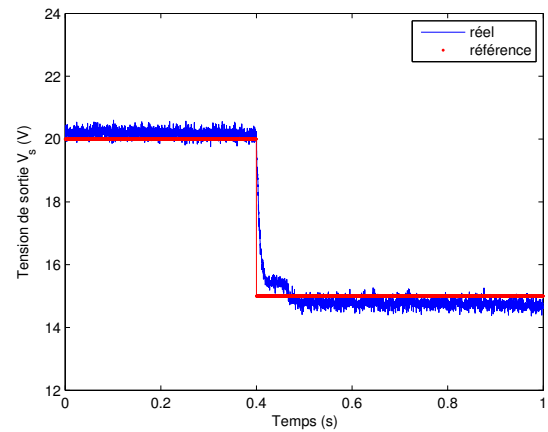


(c) Variation de la référence de 15V à 20V : Rapport Cyclique
 (d) Variation de la référence de 20V à 15V : Rapport Cyclique

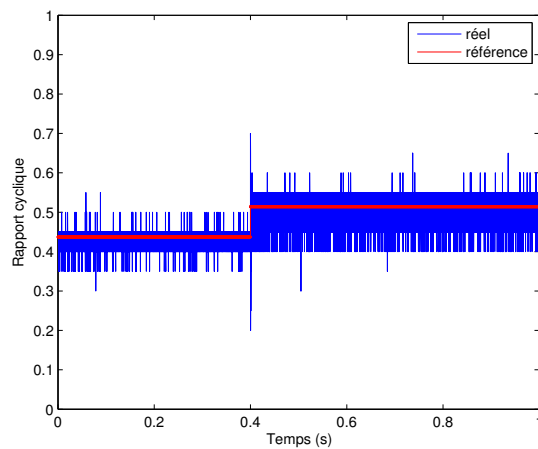
FIGURE 3.11 – Commande prédictive du SEPIC : Simulation



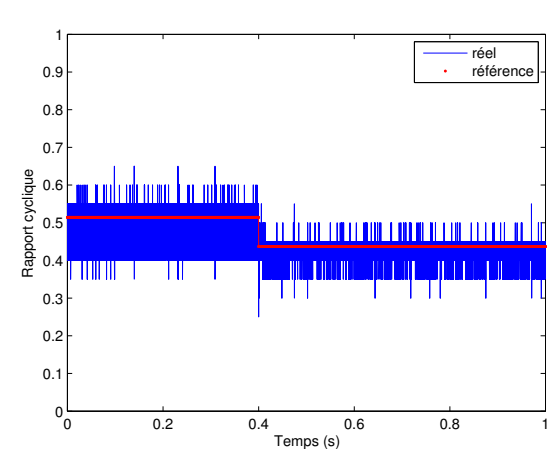
(a) Variation de la référence de 15V à 20V : Tension de sortie



(b) Variation de la référence de 20V à 15V : Tension de sortie

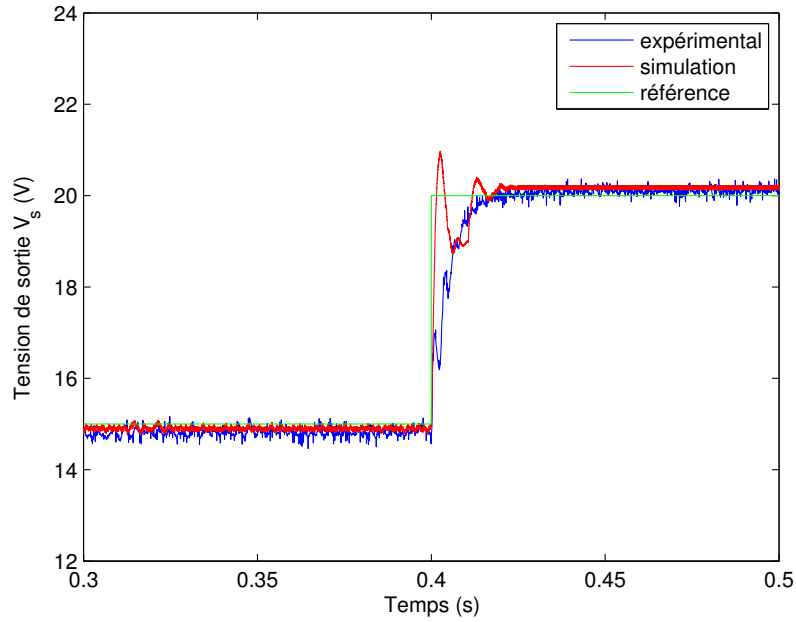


(c) Variation de la référence de 15V à 20V : Rapport Cyclique

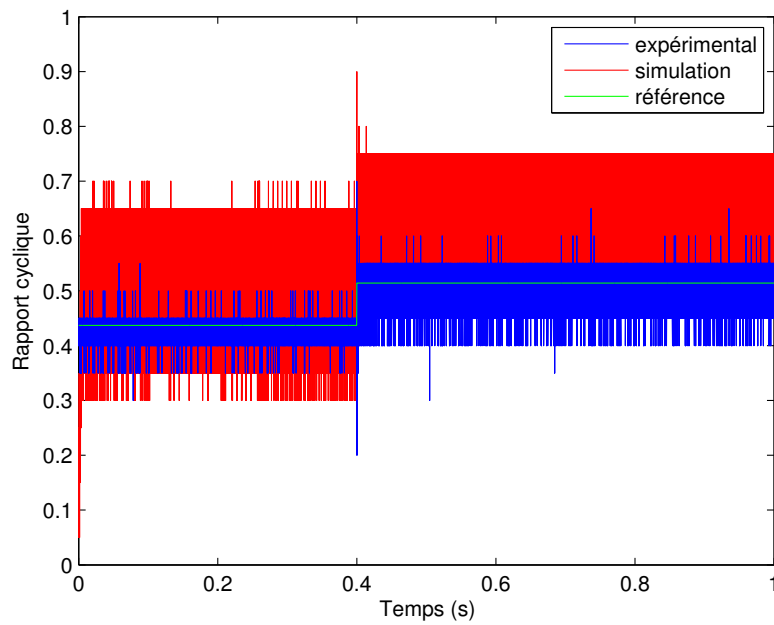


(d) Variation de la référence de 20V à 15V : Rapport Cyclique

FIGURE 3.12 – Commande prédictive du SEPIC : Expérimentation



(a) Variation de la référence de 15V à 20V : Tension de sortie



(b) Variation de la référence de 15V à 20V : Rapport cyclique

FIGURE 3.13 – Commande prédictive du SEPIC : Résolution $v = 20$

5 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons traité le problème de la commande classique et hybride des SLC avec une représentation Hamiltonienne à ports. Dans un premier temps, une commande reposant sur le modèle moyen a été synthétisée en utilisant la théorie de Lyapunov. Le formalisme Hamiltonien a été utilisé afin d'exploiter ses propriétés dans la recherche des fonctions de Lyapunov candidates. Dans le cadre de la commande des convertisseurs de puissance, cette commande a été associée à des correcteurs PI pour la rendre totalement indépendante des paramètres du système et robuste vis-à-vis des variations de la résistance de charge.

Ensuite, une commande hybride a été proposée en s'appuyant sur le même formalisme Hamiltonien ainsi que les théories de Lyapunov. Cette commande est indépendante des paramètres du système. Ainsi, les correcteurs PI ne sont pas nécessaires pour assurer la robustesse vis-à-vis les variations de charge des convertisseurs. On remarque, en comparant avec des commandes utilisées souvent en électrotechnique comme la commande par hystérésis ou la commande directe du couple (DTC), que cette commande sollicite beaucoup plus le système en commutant un nombre de fois plus important que la commande établie à partir du modèle moyen dans la même période de temps. Cependant, la stabilité en boucle en fermée est garantie par cette loi de commande grâce à l'emploi de la théorie de Lyapunov contrairement aux deux commandes : hystérésis et DTC.

Une commande optimale hybride a été élaborée à partir du principe de Pontryagin et l'approche des arcs singuliers. Cette loi de commande se caractérise par des arcs singuliers faciles à déterminer et qui ont des formes de droite ce qui facilite l'implémentation de la commande en pratique. Un critère d'optimisation est choisi de sorte qu'il simplifie la détermination des états adjoints candidats et les arcs singuliers optimaux.

Par la suite, une commande prédictive hybride discrète utilisant le sur-échantillonnage de la période de commutation est proposée. Contrairement aux autres commandes, cette commande a la propriété de pouvoir inclure plusieurs paramètres de réglage en fonction du critère d'optimisation choisi. Des contraintes sur l'état et le temps de convergence peuvent être aussi inclus dans ce critère.

Des résultats de simulation et d'expérimentation ont été présentés dans ce chapitre pour illustrer les qualités et les performances des techniques proposées en prenant le convertisseur SEPIC comme exemple d'application. Un exemple d'application de la commande optimale en simulation sur le convertisseur buck-boost est présenté afin de montrer la cartographie de la commande sur un plan de deux dimensions.

La comparaison entre les méthodes de commande proposées en expérimentation montre que la commande optimale hybride présente les meilleures performances en termes de temps de réponse et d'erreur statique. La commande prédictive hybride présente un temps de réponse similaire à la commande optimale. En revanche, son erreur statique est plus importante à cause de la faible résolution choisie. Pour la commande à partir du modèle moyen, l'utilisation des correcteurs PI permet d'assurer la robustesse vis-à-vis des variations paramétriques et garantir une erreur statique négligeable en régime permanent. Par contre, les performances dynamiques

de cette commande sont pauvres et on aboutit à des temps de réponse relativement grands. Sur le plan de la simulation, la commande hybride synthétisée à partir d'une fonction de Lyapunov présente les meilleures performances par rapport aux autres commandes en termes de temps de réponse, erreur statique et robustesse vis-à-vis des variations paramétriques. Malheureusement, la nécessité d'utiliser une grande fréquence de commutations a empêché son implémentation pratique.

Conclusion et Perspectives

Les travaux présentés dans cette thèse portent sur le développement d'observateurs et la synthèse de commandes pour les systèmes linéaires à commutations qui peuvent être décrits par une modélisation port-Hamiltonienne. L'un des objectifs de cette thèse est de proposer des observateurs d'état de systèmes hybrides ayant des modes de fonctionnement inobservables. Une première solution consiste à utiliser la modélisation moyenne pour remédier au problème de l'observabilité et obtenir un modèle bilinéaire dont la synthèse d'observateurs est maîtrisée. Lorsque cette première solution n'est pas envisageable, une deuxième solution s'appuyant sur la théorie des systèmes hybrides s'impose.

La proposition des lois de commande pour contrôler les sorties des systèmes considérés fait partie des contributions. Comme pour l'observation, il est possible d'élaborer un certain nombre de commandes à partir du modèle moyen. Par contre, la synthèse d'une commande hybride, reste un problème difficile à palier particulièrement pour les systèmes de dimension supérieure à 2. Ainsi, le deuxième objectif de cette thèse est de synthétiser des lois de commande classiques et hybrides pour la classe des systèmes considérée.

Le dernier objectif réalisé dans ce travail est la validation théorique et pratique des techniques développées. Les convertisseurs de puissance DC-DC sont choisis pour illustrer les contributions de ce travail de thèse parce que ces circuits électriques sont des systèmes linéaires à commutations qui peuvent être décrits par le formalisme Hamiltonien. Le convertisseur SEPIC est pris comme exemple d'application pour valider les observateurs et les commandes proposés en simulation mais aussi sur un banc d'essai expérimental. Ce circuit particulier a été choisi car il combine deux difficultés : Ce système est d'ordre quatre et possède une seule entrée de commutations ; de plus, ce circuit contient deux modes de fonctionnement dont l'un n'est pas observable.

La synthèse d'observateurs à partir des modèles moyen et hybride pour des SLC avec une topologie port-hamiltonienne est la première problématique de cette thèse. Un observateur non linéaire conçu à partir du modèle moyen est proposé pour la classe de systèmes considérée. Une fonction de Lyapunov candidate représentant l'énergie de l'erreur d'observation a été utilisée pour formuler les conditions nécessaires pour assurer sa stabilité. La fonction de Lyapunov choisie permet d'établir la convergence de l'observateur indépendamment de la commande du système. L'observateur développé a été appliqué à un convertisseur SEPIC et a été étendu à l'estimation de la charge. En choisissant astucieusement une fonction de Lyapunov candidate, nous avons établi un estimateur pour cette charge tout en préservant les mêmes conditions de convergence que l'observateur non étendu. Les deux observateurs ont été validés en simulation et en expérimentation sur un banc d'essai.

Le problème de synthèse d'observateurs pour les systèmes linéaires à commutations possédant des modes de fonctionnement inobservables et son application aux convertisseurs de puissance

est l'une des contributions de cette thèse. Comme l'observabilité individuelle des modes de fonctionnement au sens de Kalman n'est plus exigée, seule l'observabilité au sens hybride du système commuté est étudiée. Nous avons proposé un observateur hybride qui prend en compte les modes de fonctionnement inobservables pour une classe particulière de SLC. Cette classe concerne les SLC possédant deux modes de fonctionnement. L'utilisation du formalisme Hamiltonien et sa fonction d'énergie comme une fonction de Lyapunov permettent de déterminer les conditions de convergence asymptotique de l'observateur proposé. Des résultats en simulation et d'expérimentation de l'observateur hybride appliqué sur le circuit SEPIC sont présentés pour valider la théorie. Cet observateur a été étendu à l'estimation de la résistance de charge d'une manière similaire à l'observateur moyen. L'observateur hybride étendu a été validé en simulation où l'estimation de cette résistance n'est plus biaisée. Pour des raisons pratiques, seul l'observateur hybride non étendu a été validé expérimentalement.

La deuxième problématique de ce mémoire concerne la synthèse de lois de commandes classiques et hybrides pour une classe considérée des SLC avec une seule entrée de commutations. Comme pour l'observation, le formalisme Hamiltonien à ports et la théorie de Lyapunov ont été employés pour synthétiser la plupart des lois de commande.

Une première commande reposant sur la modélisation moyenne est proposée. Le contrôle du système se fait par un rapport cyclique déterminé à partir d'une fonction de Lyapunov. La structure des systèmes Hamiltoniens à ports ne permet pas d'utiliser la fonction d'énergie totale comme une fonction de Lyapunov pour déterminer la commande, aussi, la fonction de Lyapunov candidate utilisée dans cette partie contient un terme représentant une fraction de l'énergie du système. L'application sur le convertisseur SEPIC montre que la loi de commande proposée ne dépend que des résistances du circuit à travers les consignes des courants. Ces signaux de références sont calculés à partir d'un modèle qui dépend des résistances du convertisseur. Ainsi, des correcteurs PI sont utilisés pour générer les références des courants afin d'assurer la robustesse vis-à-vis des variations de la résistance de charge. Une validation en simulation et en expérimentation de cette commande est présentée en effectuant des tests de changement de consignes et de variation de la résistance de charge.

Une commande hybride a été synthétisée à partir d'une fonction de Lyapunov. Les propriétés de passivité des systèmes Hamiltoniens à ports permettent de proposer une fonction de Lyapunov candidate pour la synthèse de la commande. L'application sur le circuit SEPIC montre que cette commande est totalement indépendante des paramètres du système et les variations de la résistance de charge n'ont pas d'effets sur la tension de sortie. Ainsi, les correcteurs PI ne sont plus nécessaires. Par contre, cette commande nécessite une fréquence d'échantillonnage beaucoup plus rapide que la fréquence de commutations ce qui n'a pas permis de la valider expérimentalement sur notre banc d'essai. Pour des raisons pratiques, cette loi n'a donc été validée qu'en simulation sur le SEPIC.

Une commande optimale hybride est ensuite élaborée en minimisant un critère énergétique. La technique proposée est dédiée aux systèmes de dimension supérieure à 2 où les techniques algébriques classiques restent difficiles à appliquer. Cette commande conduit à l'étude d'une commande singulière au voisinage des points de fonctionnement. A partir d'un état adjoint candidat, les conditions nécessaires d'optimalité sont vérifiées et la fonction de commutations

est déterminée puis les arcs singuliers du système sont recherchés. Une intégration rétrograde est utilisée pour générer les trajectoires régulières à partir des arcs singuliers optimaux. Finalement, un retour d'état est obtenu par interpolation de trajectoires optimales grâce à un réseau de neurones. La technique a été validée en simulation sur deux convertisseurs : le buck-boost et le SEPIC. Des résultats en expérimentation sont également fournis pour ce dernier circuit.

La dernière commande proposée dans cette thèse est une commande prédictive hybride pour les SLC. Un modèle hybride discret du système est établi pour prédire l'état sur un horizon de prédiction égal à une période d'échantillonnage. Un critère d'optimisation quadratique a été utilisé pour déterminer l'instant de commutation optimale. Cette commande a l'avantage d'être applicable pour une large gamme de SLC et permet, grâce au modèle hybride utilisé, un processus d'optimisation en ligne. On montre que la qualité de la commande dépend du paramètre de résolution qui détermine le nombre de points utilisés pour la prédiction. Cette dernière commande a été validée en simulation et en expérimentation.

En conclusion, la considération d'un modèle Hamiltonien à ports moyen a permis de proposer une loi de commande en association avec un observateur. Dans le contexte hybride, le nouvel observateur hybride développé a donné la possibilité d'estimer les états d'un système commuté avec des modes de fonctionnement qui ne sont pas nécessairement individuellement observables. Concernant la commande hybride, les lois de commande élaborées - Lyapunov, optimale et prédictive - confirment l'intérêt d'utiliser ces techniques pour la commande des systèmes linéaires commutés. Les méthodes proposées d'observation et commandes ont montré leur efficacité en simulation et en expérimentation pour une application sur des convertisseurs de puissance DC-DC. En revanche, plusieurs points en termes d'observation et commande nécessitent d'être développés en perspectives de ce travail.

Perspectives

Par manque de temps, l'observateur hybride étendu et la commande hybride à partir d'une fonction de Lyapunov n'ont pas pu être validés expérimentalement. Pour avoir des résultats similaires à ceux de la simulation, la validation en pratique de ces méthodes pourrait se faire à l'aide de moyens matériels plus rapides pour la commande tels que les FPGA. Une autre alternative consiste à envisager une application sur des systèmes moins rapides que le SEPIC utilisé dans ce travail comme par exemple des systèmes électro-pneumatiques munis d'électrovannes. L'utilisation de ces dernières est plus économiques que les servo-valves traditionnellement employée pour la commande. Il serait intéressant de valider les méthodes développées sur ces applications puisque ces systèmes commutent beaucoup moins rapidement que les convertisseurs de puissance. La fréquence de commutations de certaines électrovannes est en effet de l'ordre de 500Hz .

Les techniques de commande et observation proposées dans cette thèse sont dédiées à un fonctionnement en mode de conduction continue (CCM) avec une charge résistive. Alors que pour les charges non linéaires, on peut reformuler le problème en considérant le courant de charge comme une perturbation. Il faut alors revoir le problème de la commande et de l'observation en utilisant les concepts de commande et observateur robuste pour les systèmes à commutations.

Les commandes et observateurs développés sont également dédiés pour des systèmes avec une seule entrée de commutations. Cependant, plusieurs convertisseurs possèdent plusieurs entrées de commutations. En profitant des propriétés d'interconnexion des systèmes Hamiltoniens à ports, il nous semble possible d'étendre les techniques développées dans ce manuscrit au cas de plusieurs entrées de commutations. Par exemple, on peut étendre les commandes proposées vers les convertisseurs multi-niveaux où la réversibilité nous permet de prendre en compte la récupération d'énergie renvoyée par la charge. Il serait alors très intéressant de comparer avec les méthodes existantes pour ces convertisseurs beaucoup plus développés dans la littérature.

Enfin, la prise en compte des contraintes sur l'état pour le problème de la commande optimale fait partie des perspectives de recherche de ce travail de thèse. Le cas d'une commande optimale singulière avec la présence des contraintes n'a pas été traité auparavant. Une piste de travail qui pourrait être envisager consiste à transformer dans un premier temps le problème des contraintes en un problème de recherche d'arcs singuliers. La mise en œuvre d'une telle commande serait une contribution importante à apporter au domaine de la commande optimale des SLC.

Annexe : Banc d'essai expérimental

Le banc d'essai expérimental du convertisseur SEPIC (Figure 3.14) présent dans les locaux du laboratoire Ampère a été utilisé pour valider les techniques de commande et d'observation développées dans ce travail de thèse.

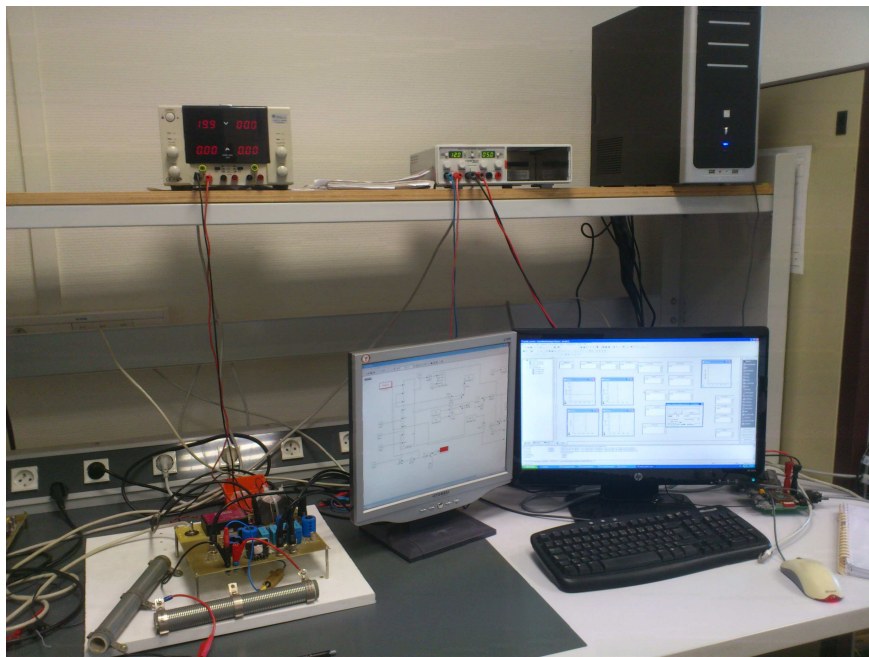


FIGURE 3.14 – Banc d'essai

Les paramètres du circuit (Figure 3.15) sont : $L_1 = 2.3 \cdot 10^{-3} \text{ H}$, $L_2 = 330 \cdot 10^{-6} \text{ H}$, $C_{L1} = 190 \cdot 10^{-6} \text{ F}$, $C_{L2} = 190 \cdot 10^{-6} \text{ F}$, $R_1 = 2.134\Omega$, $R_2 = 0.234\Omega$, $R_L = 44\Omega$, $V_e = 20\text{V}$.

Une carte d'acquisition dSpace *dS1104* (Figure 3.16) est utilisée pour l'interface de transfert des données entre le convertisseur et un PC, où les algorithmes de commande et d'observation sont implémentés en utilisant la « Real-TimeWindows Target Simulink Library ». Deux capteurs 'LEM LTSP 25-NP' sont utilisés pour mesurer les courants. L'environnement logiciel « Control Desk » est utilisé comme interface graphique.

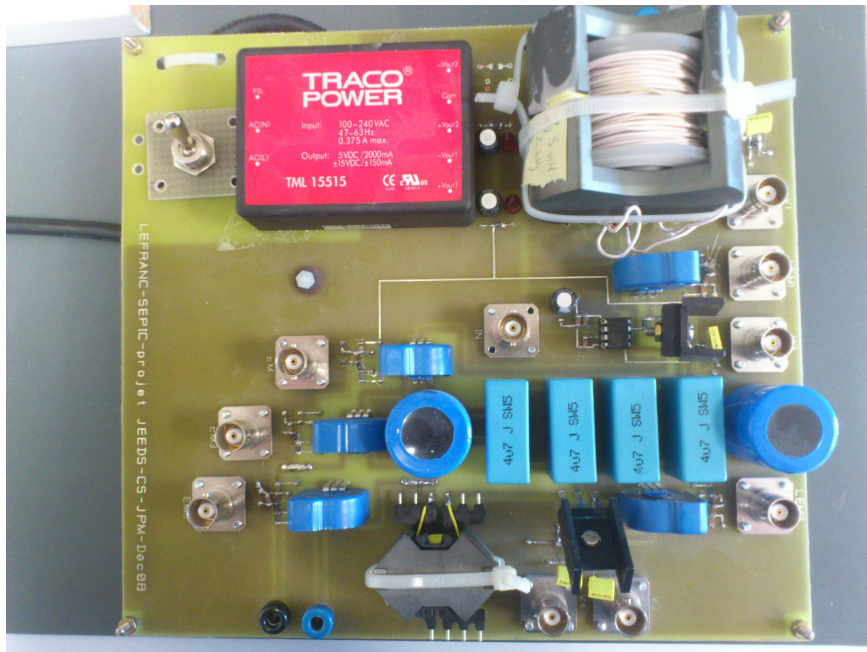


FIGURE 3.15 – Convertisseur SEPIC

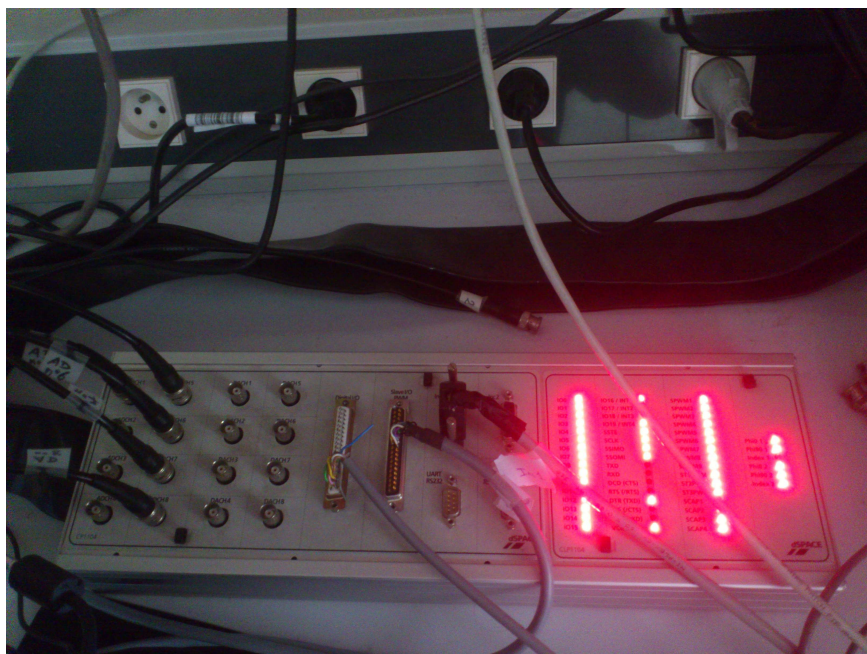


FIGURE 3.16 – Carte d'acquisition dSpace

Bibliographie

- [Amghar et al., 2013] Amghar, B., Darcherif, A., and Barbot, J.-P. (2013). Z(tn)-observability and control of parallel multicell chopper using petri nets. *Power Electronics, IET*, 6(4) :-.
- [Arikatla and Qahouq, 2011] Arikatla, V. and Qahouq, J. (2011). Dc-dc power converter with digital pid controller. In *Applied Power Electronics Conference and Exposition (APEC), 2011 Twenty-Sixth Annual IEEE*, pages 327–330.
- [Aronna, 2011] Aronna, M. (2011). Second order analysis of optimal control problems with singular arcs. Master’s thesis, Ecole polytechnique de Paris.
- [Attia and Alamir, 2006] Attia, S.-A. and Alamir, M. (2006). A predictive switching strategy for a class of hybrid systems : wave suppression in fluid dynamic systems. In *Conference Proceedings IFAC workshop on Nonlinear Model Predictive Control for Fast Systems. NMPC’06*, October 9-11, 2006, Grenoble, France, page 6 p. IFAC. CO CO.
- [Axelsson et al., 2005a] Axelsson, H., Egerstedt, M., Wardi, Y., and Vachtsevanos, G. (2005a). Algorithm for switching-time optimization in hybrid dynamical systems. In *Intelligent Control, 2005. Proceedings of the 2005 IEEE International Symposium on, Mediterrean Conference on Control and Automation*, pages 256–261.
- [Axelsson et al., 2005b] Axelsson, H., Wardi, Y., and Egerstedt, M. (2005b). Transition-time optimization for switched systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 51 :110–115.
- [Babaali, 2004] Babaali, M. (2004). *Switched linear system observability and observers*. PhD thesis, Georgia Institute of Technology.
- [Babaali and Egerstedt, 2004] Babaali, M. and Egerstedt, M. (2004). Observability of switched linear systems. In Springer, editor, *HSCC 2004 : hybrid systems : computation and control*, volume 2993, Philadilphia.
- [Bâja et al., 2009] Bâja, M., Patino, D., Cormerais, H., Riedinger, P., and Buisson, J. (2009). Hybrid control methods for a single ended primary inductor converter (sepic). In *The European Control Conference 2009*, Budapest, Hungary.
- [Balluchi et al., 2002] Balluchi, A., Benvenuti, L., Benedetto, M. D., and Sangiovanni-Vincentelli, A. (2002). Design of observers for hybrid systems. In Springer-Verlag, editor, *Hybrid Systems : Computation and Control*, New York, U.S.A.
- [Balluchi et al., 2003] Balluchi, A., Benvenuti, L., Benedetto, M. D., and Sangiovanni-Vincentelli, A. (2003). Observability for hybrid systems. In *Conference on Decision and Contro*, Maui, Hawaii.
- [Barbot et al., 2007] Barbot, J.-P., Djemai, M., and Manamanni, N. (2007). State observer and observability conditions for a class of hybrid continuous-discrete dynamic system. In *CDC 2007*, New Orleans, États-Unis.

- [Beccuti et al., 2007] Beccuti, A., Papafotiou, G., Morari, M., Almer, S., Fujioka, H., Jonsson, U., Kao, C.-Y., Wernrud, A., Rantzer, A., Baja, M., Cormerais, H., and Buisson, J. (2007). Hybrid control techniques for switched-mode dc-dc converters part ii : The step-up topology. In *American Control Conference, 2007. ACC '07*, pages 5464–5471.
- [Bejarano et al., 2010] Bejarano, F., Ghanes, M., and Barbot, J. P. (2010). Observability and observer design for hybrid multicell choppers. *International Journal of Control*, 83(1) :617–632.
- [Bemporad et al., 2000] Bemporad, A., Borrelli, F., and Morari, M. (2000). Optimal controllers for hybrid systems : Stability and piecewise linear explicit form. In *in Proceedings of the 39th IEEE Conference on Decision and Control*, pages 1810–1815. IEEE.
- [Birouche, 2006] Birouche, A. (2006). *Contribution sur la synthèse d’observateurs pour les système dynamiques hybrides*. PhD thesis, Institut National Polytechnique de Lorraine.
- [Boccardo et al., 2005] Boccardo, M., Wardi, Y., Egerstedt, M., and Verriest, E. (2005). Optimal control of switching surfaces in hybrid dynamical systems. *Discrete Event Dynamic Systems*, 15(4) :433–448.
- [Borrelli et al., 2005] Borrelli, F., Baoti, M., Bemporad, A., and Morari, M. (2005). Dynamic programming for constrained optimal control of discrete-time linear hybrid systems. *Automatica*, 41(10) :1709 – 1721.
- [Branicky, 1995] Branicky, M. (1995). *Studies in Hybrid Systems : Modeling, Analysis, and Control*. PhD thesis, Massachusetts Institute of Technology.
- [Branicky, 1998] Branicky, M. (1998). Multiple lyapunov functions and other analysis tools for switched and hybrid systems. *Automatic Control, IEEE Transactions on*, 43(4) :475–482.
- [Branicky et al., 1998] Branicky, M., Borkar, V., and Mitter, S. (1998). A unified framework for hybrid control : model and optimal control theory. *Automatic Control, IEEE Transactions on*, 43(1) :31–45.
- [Canitrot, 2009] Canitrot, S. (2009). *Étude des propriétés structurelles d’observabilité et de diagnosticabilité des systèmes bilinéaires par approche graphique*. PhD thesis, Université Henri Poincaré - Nancy I - Institut National Polytechnique de Lorraine.
- [Chaib et al., 2005] Chaib, S., Boutat, D., Benali, A., and Barbot, J. (2005). Observability of the discrete state for dynamical piecewise hybrid systems. *Nonlinear Analysis, Elsevier*, 63 :423–438.
- [Chen et al., 2012] Chen, Y., Fei, S., Zhang, K., and Yu, L. (2012). Control of switched linear systems with actuator saturation and its applications. *Mathematical and Computer Modelling*, 56(2) :14 – 26.
- [Cheng, 2005] Cheng, D. (2005). Controllability of switched bilinear systems. *Automatic Control, IEEE Transactions on*, 50(4) :511–515.
- [Cheng et al., 2005] Cheng, D., Guo, L., Lin, Y., and Wang, Y. (2005). Stabilization of switched linear systems. *IEEE transactions on automatic control*, 50(5) :661–666.
- [Cheng et al., 2007] Cheng, D., Wang, J., and Hu, X. (2007). Stabilization of switched linear systems via lasalle’s invariance principle. In *Control and Automation, 2007. ICCA 2007. IEEE International Conference on*, pages 1–6.
- [Chitour et al., 2006] Chitour, Y., Jean, F., and Trélat, E. (2006). Genericity results for singular trajectories. *Journal of differential Geometry*, 73(1) :45–73.

- [Daafouz et al., 2002] Daafouz, J., Riedinger, P., and Iung, C. (2002). Stability analysis and control synthesis for switched systems : a switched lyapunov function approach. *Automatic Control, IEEE Transactions on*, 47(11) :1883–1887.
- [Daafouz et al., 2004] Daafouz, J., Riedinger, P., and Iung, C. (2004). Observer-based switched control design with pole placement for discrete-time switched systems. *International Journal of Hybrid Systems*, 3(2 & 3) :263–282.
- [Desoer and Vidyasagar, 1975] Desoer, A. and Vidyasagar, M. (1975). *Feedback Systems : Input-output Properties.* , New York 1975. Academic Press, New York.
- [Dhali et al., 2012] Dhali, S., Rao, P. N., Mande, P., and Rao, K. V. (2012). Pwm-based sliding mode controller for dc-dc boost converter. *International Journal of Engineering Research and Applications*, 2(1) :618–623.
- [Eng et al., 2009] Eng, V., Pinsopon, U., and Bunlaksananusorn, C. (2009). Modeling of a sepic converter operating in continuous conduction mode. In *Electrical Engineering/Electronics, Computer, Telecommunications and Information Technology, 2009. ECTI-CON 2009. 6th International Conference on*, volume 01, pages 136–139.
- [Feron et al., 1995] Feron, E., Apkarian, P., and Gahinet, P. (1995). S-procedure for the analysis of control systems with parametric uncertainties via parameter-dependent lyapunov functions. In *American Control Conference, Proceedings of the 1995*, volume 1, pages 968–972 vol.1.
- [Gennaro, 2003] Gennaro, D. (2003). Notes on the nested observers for hybrid systems. In *European Control Conference*, Cambridge, UK.
- [Gensior et al., 2006] Gensior, A., Woywode, O., Rudolph, J., and Guldner, H. (2006). On differential flatness, trajectory planning, observers and stabilization for dc-dc converters. *IEEE transactions on circuits and systems*, 53(9) :2000 – 2010.
- [Geromel and Deaecto, 2009] Geromel, J. C. and Deaecto, G. S. (2009). Switched state feedback control for continuous-time uncertain systems. *Automatica*, 45(2) :593 – 597.
- [Gerritsen et al., 2002] Gerritsen, K., van der Schaft, A., and Heemels, W. (2002). On switched hamiltonian systems. In Gilliam, D. and Rosenthal, J., editors, *Proceedings of the Symposium on Mathematical Theory of Networks and Systems*, South Bend. University of Notre Dame.
- [Geyer et al., 2004] Geyer, T., Papafotiou, G., and Morari, M. (2004). On the optimal control of switch-mode dc-dc converters. In Alur, R. and Pappas, G., editors, *Hybrid Systems : Computation and Control*, volume 2993 of *Lecture Notes in Computer Science*, pages 342–356. Springer Berlin Heidelberg.
- [Geyer et al., 2005] Geyer, T., Papafotiou, G., and Morari, M. (2005). Model predictive control in power electronics : A hybrid systems approach. In *Decision and Control, 2005 and 2005 European Control Conference. CDC-ECC '05. 44th IEEE Conference on*, pages 5606–5611.
- [Ghanes et al., 2009] Ghanes, M., Bejarano, F., and Barbot, J. (2009). On sliding mode and adaptative observers design for multicell converter. In *American Control Conference*, St-Louis, Missouri.
- [Gorp et al., 2012] Gorp, J. V., Defoot, M., Djemai, M., and Manamanni, N. (2012). Hybrid observer for the multicellular converter. In *4th IFAC Conference on Analysis and Design of Hybrid Systems*, Eindhoven, The Netherlands.

- [Grasselli and Isidori, 1977] Grasselli, O. and Isidori, A. (1977). Deterministic state reconstruction and reachability of bilinear processes. In *In IEEE Joint Automatic Control Conference*, pages 1423–1427., San Francisco, USA.
- [Guezar, 2009] Guezar, F. E. (2009). *Modélisation et Simulation des Systèmes Dynamiques Hybrides Affines par Morceaux. Exemples en Électronique de Puissance*. PhD thesis, INSA de Toulouse.
- [Hauroigne et al., 2011] Hauroigne, P., Riedinger, P., and Iung, C. (2011). Switched affine systems using sampled-data controllers : Robust and guaranteed stabilization. *Automatic Control, IEEE Transactions on*, 56(12) :2929–2935.
- [Hespanha, 2004] Hespanha, J. (2004). Uniform stability of switched linear systems : extensions of lasalle’s invariance principle. *Automatic Control, IEEE Transactions on*, 49(4) :470–482.
- [Hespanha and Morse, 1999] Hespanha, J. and Morse, A. (1999). Stability of switched systems with average dwell-time. In *Decision and Control, 1999. Proceedings of the 38th IEEE Conference on*, volume 3, pages 2655–2660 vol.3.
- [Hetel, 2007] Hetel, L. (2007). *Stabilité et commande robuste des systèmes à commutation*. PhD thesis, Institut National Polytechnique de Lorraine.
- [Heymann et al., 2002] Heymann, M., Meyer, G., and Resmerita, S. (2002). Analysis of zeno behaviors in hybrid systems. In *In : Proceedings of the 41st IEEE Conference on Decision and Control, Las Vegas, NV (2002*, pages 2379–2384.
- [Hu et al., 2002] Hu, B., Zhai, G., and Michel, A. N. (2002). Common quadratic lyapunov-like functions with associated switching regions for two unstable second-order lti systems. *International Journal of Control*, 75(14) :1127–1135.
- [Hultgren and Lenells, 2002] Hultgren, A. and Lenells, M. (2002). Convergence of a switched hamiltonian observer applied to an slr converter. In *15th Triennial World Congress*, Barcelona, Spain.
- [Ingalls et al., 2003] Ingalls, B., Sontag, E. D., and Wang, Y. (2003). An infinite-time relaxation theorem for differential inclusions. In *2002 American Mathematical Society*, volume 131, pages 487–499.
- [Jaafar et al., 2009] Jaafar, A., Lefranc, P., Godoy, E., Lin-Shi, X., Fayaz, A., and Li, N. (2009). Experimental validation with a control point of view analysis of the sepic converter. In *IEEE Industrial Electronics Society Conference*, Porto, Portugal.
- [Juloski et al., 2007] Juloski, A. L., Heemels, W. P. M. H., and Weiland, S. (2007). Observer design for a class of piecewise linear systems. *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, 17 :1387–1404.
- [Kang and Barbot, 2007] Kang, W. and Barbot, J. (2007). Discussions on observability and invertibility. In *NOLCOS*, Pretoria, South Africa. IFAC.
- [Kopp, 1962] Kopp, R. (1962). *Pontryagin maximum principle*. Optimization techniques, New York.
- [Li et al., 2013] Li, D., Xi, Y., and Zou, Y. (2013). Model predictive control for constrained uncertain piecewise linear systems. *Journal of Control Theory and Applications*, 11(2) :230–236.
- [Liberzon, 2003] Liberzon, D. (2003). *Switching in systems and control*. Birkhauser.

- [Liberzon and Morse, 1999] Liberzon, D. and Morse, A. (1999). Basic problems in stability and design of switched systems. *Control Systems, IEEE*, 19(5) :59–70.
- [Lin and Antsaklis, 2008] Lin, H. and Antsaklis, P. J. (2008). Hybrid state feedback stabilization with l_2 performance for discrete-time switched linear systems. *International Journal of Control*, 81(7) :1114–1124.
- [Liu et al., 2011] Liu, X., Lin, H., and Chen, B. M. (2011). Structural controllability of switched linear systems. *CoRR*, abs/1106.1703 :1286–1293.
- [Mariéthoz and al, 2010] Mariéthoz, S. and al (2010). Comparison of hybrid control techniques for buck and boost dc-dc converters. *IEEE transactions on control systems technology*, 18(5) :1126–1145.
- [Maschke et al., 2000] Maschke, B., Ortega, R., and van der Schaft, A. J. (2000). Energy-based lyapunov functions for forced hamiltonian systems with dissipation. *IEEE Transactions on automatic control*, 45(8) :1498–1502.
- [McGinnis et al., 2007] McGinnis, T., Henze, C. P., and Conroy, K. (2007). Inductive power system for autonomous underwater vehicles. In *OCEANS*.
- [Meghnous and Pham, 2011] Meghnous, A R. Lin-Shi, X. and Pham, M. T. (2011). Synchronous machine parameter identification via sliding mode technique : a comparison of two approaches. In *Electrimacs Conference*.
- [Meghnous and Pham, 2013] Meghnous, A R. Lin-Shi, X. and Pham, M. T. (2013). Nonlinear observer and lyapunov-based control for sepic converter : Design and experimental results. In *2013 American Control Conference*, Washington, DC, USA.
- [Montagner et al., 2006] Montagner, V., Leite, V., Oliveira, R., and Peres, P. (2006). State feedback control of switched linear systems : An {LMI} approach. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 194(2) :192 – 206.
- [Moyle and Moore, 1971] Moyle, P. and Moore, J. (1971). Generalizations of singular optimal control theory. *Automatica*, 7 :591–598.
- [Niculescu et al., 2007] Niculescu, E., Niculescu, M., and Puracaru, D. (2007). Modelling the pwm sepic converter in discontinuous conduction mode. In *Proceedings of the 11th WSEAS International Conference on CIRCUITS*, pages 98–103, Agios Nikolaos, Crete Island, Greece.
- [Ortega et al., 2000] Ortega, R., Mareels, I., Van Der Schaft, A., and Maschke, B. (2000). Energy shaping revisited. In *Control Applications, 2000. Proceedings of the 2000 IEEE International Conference on*, pages 121–126.
- [Ouquelle et al., 2009] Ouquelle, H., Dessaint, L.-A., and Casoria, S. (2009). An average value model-based design of a deadbeat controller for vsc-hvdc transmission link. In *Power Energy Society General Meeting, 2009. PES '09. IEEE*, pages 1–6.
- [Patino et al., 2010] Patino, D., Bâja, M., Riedinger, P., Cormerais, H., Buisson, J., and Iung, C. (2010). Alternative control methods for dc-dc converters : An application to a four-level three cell dc-dc converter. *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, 21 :1112–1133.
- [Patino et al., 2009] Patino, D., Riedinger, P., and Iung, C. (2009). Practical optimal state feedback control law for continuous-time switched affine systems with cyclic steady state. *International Journal of Control*, 82(7) :1357–1376.

- [Pettersson, 2004] Pettersson, S. (2004). Controller design of switched linear systems. In *American Control Conference, 2004. Proceedings of the 2004*, volume 4, pages 3869–3874 vol.4.
- [Powers, 1980] Powers, W. (1980). On the order of singular optimal control problems. *Journal of optimization theory and applications*, 32(4) :479–489.
- [Poznyak et al., 2006] Poznyak, A., Shtessel, Y., Fridman, L., Davila, J., and Escobar, J. (2006). Identification of parameters in dynamic systems via sliding-mode techniques. *Advances in Variable Structure*, 4 :313–347.
- [Riedinger and Morarescu, 2012] Riedinger, P. and Morarescu, I. (2012). A numerical framework for optimal control of switched affine systems with state constraint. In *4th IFAC Conference on Analysis and Design of Hybrid Systems*, Eindhoven, Netherlands.
- [Riedinger et al., 2008] Riedinger, P., Sigalotti, M., and Daafouz, J. (2008). On the observability of the flying capacitor converter. In *European Control Conference*, Budapest, Hongrie.
- [Riedinger et al., 2010] Riedinger, P., Sigalotti, M., and Daafouz, J. (2010). Observabilité d’un convertisseur multi-niveaux via le principe d’invariance de lasalle. In *Sixième Conférence Internationale Francophone d’Automatique, CIFA 2010*, page CDROM, Nancy, France.
- [Robbins, 1967] Robbins, H. (1967). A generalized legendre-clebsch condition for the singular cases of optimal control. *IBM Journal*, 11 :361–372.
- [Saadaoui et al., 2006] Saadaoui, H., Manamanni, N., Djemaï, M., and Barbot, J.-P. (2006). Observateur non linéaire pour des systèmes d’ordre 2 autonomes à commutations avec sauts. In *CIFA 06*.
- [Santis et al., 2003] Santis, E., Benedetto, M. D., Gennaro, S. D., and Pola., G. (2003). Hybrid observer : Design methodology. project : Distributed control and stochastic analysis of hybrid systems supporting safety critical real-time systems design. Technical report, univesty of L’Aquila.
- [Schild et al., 2009] Schild, A., Ding, X. C., Egerstedt, M., and Lunze, J. (2009). Design of optimal switching surfaces for switched autonomous systems. In *Decision and Control, 2009 held jointly with the 2009 28th Chinese Control Conference. CDC/CCC 2009. Proceedings of the 48th IEEE Conference on*, pages 5293–5298.
- [Serres et al., 2011] Serres, U., Vivalda, J. C., and Riedinger, P. (2011). On the convergence of linear switched systems. *Automatic Control, IEEE Transactions on*, 56(2) :320–332.
- [Shahid Shaikh and Caines, 2002] Shahid Shaikh, M. and Caines, P. (2002). On trajectory optimization for hybrid systems : theory and algorithms for fixed schedules. In *Decision and Control, 2002, Proceedings of the 41st IEEE Conference on*, volume 2, pages 1997–1998 vol.2.
- [Shaikh and Caines, 2003] Shaikh, M. and Caines, P. (2003). On the optimal control of hybrid systems : optimization of switching times and combinatoric location schedules. In *American Control Conference, 2003. Proceedings of the 2003*, volume 4, pages 2773–2778 vol.4.
- [Shim and Tanwani, 2011] Shim, H. and Tanwani, A. (2011). On a sufficient condition for observability of nonlinear switched systems and observer design strategy. In *2011 American Control Conference*, pages 1206–1211, on O’Farrell Street, San Francisco, CA, USA.
- [Spinu et al., 2012] Spinu, V., Dam, M., and Lazar, M. (2012). Observer design for dc/dc power converters with bilinear averaged model. In *4th IFAC Conference on Analysis and Design of Hybrid Systems*, Eindhoven, The Netherlands.

- [Sun and Ge, 2005] Sun, Z. and Ge, S. (2005). Analysis and synthesis of switched linear control systems. *Automatica*, 41(2) :181 – 195.
- [Sun et al., 2001] Sun, Z., Ge, S., and Lee, T. (2001). Controllability and reachability criteria for switched linear systems. *Automatica*, 38 :775–786.
- [Sun and Zheng, 2001] Sun, Z. and Zheng, D. (2001). On reachability and stabilization of switched linear systems. *Automatic Control, IEEE Transactions on*, 46(2) :291–295.
- [Tanwani et al., 2011] Tanwani, A., Shim, H., and Liberzon, D. (2011). Observability implies observer design for switched linear systems. In *HSCC '11 Proceedings of the 14th international conference on Hybrid systems : computation and control*.
- [Tanwani et al., 2013] Tanwani, A., Shim, H., and Liberzon, D. (2013). Observability for switched linear systems : characterization and observer design. *Automatic Control, IEEE Transactions on*, 58(4) :891–904.
- [Tian et al., 2009] Tian, Y., Floquet, T., Belkoura, L., Su, J., and Perruquetti, W. (2009). Switching time estimation for linear switched systems : an algebraic approach. In *48th IEEE Conference on Decision and Control and 28th Chinese Control Conference*.
- [Valentin et al., 2007] Valentin, C., Magos, M., and Maschke, B. (2007). A port-hamiltonian formulation of physical switching systems with varying constraints. *Automatica*, 43(7) :1125 – 1133.
- [van der Schaft, 2000] van der Schaft, A. (2000). Port-controlled hamiltonian systems : towards a theory for control and design of nonlinear physical systems. *Journal of the Society of Instrument and Control Engineers of Japan*, 39(2) :91–98.
- [van der Schaft and Maschke, 2004] van der Schaft, A. and Maschke, B. (2004). Port-hamiltonian systems : network modeling and control of nonlinear physical systems. *Dynamics and Control*, 1 :1–38.
- [Vecchio and Murray, 2004] Vecchio, D. D. and Murray, R. M. (2004). Observers for a class of hybrid systems on a lattice. In *2004 Workshop on Hybrid Systems : Computation and control (HSCC)*.
- [Verlohren et al., 2010] Verlohren, C., Singh, T., and Singla, P. (2010). Optimal control design using sequential linear programming. In *American Control Conference (ACC), 2010*, pages 1562–1567.
- [Vidal et al., 2003] Vidal, R., Chiuso, A., Soatto, S., and Sastry, S. (2003). Observability of linear hybrid systems. In Springer, editor, *Workshop on Hybrid Systems Computation and Control*, Berlin.
- [Wulff, 2004] Wulff, K. (2004). *Quadratic and Non-Quadratic Stability Criteria for Switched Linear Systems*. PhD thesis, National University of Ireland, Maynooth, December.
- [Wulff et al., 2009] Wulff, K., Wirth, F., and Shorten, R. (2009). A control design method for a class of switched linear systems. *Automatica*, 45(11) :2592 – 2596.
- [Yu et al., 2009] Yu, L., Barbot, J., Boutat, D., and Benmerzouk, D. (2009). Observability normal forms for a class of switched systems with zeno phenomena. In *American Control Conference*.
- [Yu et al., 2011] Yu, L., Barbot, J., Boutat, D., and Benmerzouk, D. (2011). Observability forms for switched systems with zeno phenomenon or high switching frequency. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 56 :436 – 441.

- [Zhao and Su, 2010] Zhao, S. and Su, J. (2010). Controllability and observability for time-varying switched impulsive controlled systems. *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, 20 :1313–1325.
- [Zheng et al., 2009] Zheng, G., Yu, L., Boutat, D., and Barbot, J.-P. (2009). Algebraic observer for a class of switched systems with zeno phenomenon. In *48th IEEE Conference on Decision and Control, CDC 2009*, shanghai, Chine.

Folio Administratif
Thèse soutenue devant l'Institut National
des Sciences Appliquées de Lyon

Nom : MEGHNOUS Prénoms : Ahmed Rédha	Date de soutenance : 02/12/13
Titre : Commande et observation d'une classe de systèmes linéaires à commutations. Application aux convertisseurs de puissance DC-DC	
Nature : Doctorat Ecole doctorale : Electronique, Electrotechnique, Automatique Spécialité : Energie et Systèmes	Numéro d'ordre :
Résumé : Cette thèse s'intéresse à la commande et l'observation d'une classe de systèmes linéaires à commutations (SLC). La classe considérée regroupe les systèmes pouvant être représentés par un modèle Hamiltonien à ports. Récemment, plusieurs travaux ont utilisé la théorie des systèmes dynamiques hybrides pour traiter les problèmes de stabilité, de commandabilité et d'observabilité des systèmes linéaires à commutations. Cependant, certains verrous scientifiques demeurent et nécessitent d'être levés tels que la synthèse d'observateurs pour des SLC présentant des modes de fonctionnement inobservables ou la commande hybride de systèmes possédant un nombre réduit d'entrées de commutations et un nombre élevé de variables d'état à contrôler. Dans ce travail, nous nous intéressons à la synthèse d'observateurs s'appuyant sur la modélisation moyenne et la modélisation hybride de SLC ayant une topologie Hamiltonienne à ports particulière. Ce formalisme possède les outils nécessaires pour établir des preuves de stabilité des erreurs d'observation. Dans un premier temps, nous proposons un observateur non linéaire reposant sur le modèle moyen de la classe des SLC considérée. Ensuite, nous traitons le problème de synthèse d'un observateur hybride où nous proposons un observateur commuté prenant en compte les modes de fonctionnement inobservables. Le problème de la commande des SLC est abordé par la suite. Au départ, la théorie de Lyapunov est utilisée pour proposer deux lois de commande : La première est synthétisée à partir du modèle moyen et la deuxième exploite le modèle hybride. Une commande optimale hybride est élaborée en utilisant le principe du maximum de Pontryagin et une approche utilisant la recherche d'arcs singuliers. Finalement, une commande prédictive hybride est établie à partir d'un modèle discrétisé du système. Des résultats de simulation et une mise en œuvre expérimentale sur un convertisseur DC-DC SEPIC sont donnés pour montrer l'efficacité des méthodes proposées. L'étude d'un tel circuit est motivée par sa topologie particulière qui contient à la fois un mode de fonctionnement observable et un mode de fonctionnement inobservable. En outre, il possède une seule entrée de commutations et quatre variables d'état ce qui lui vaut la réputation être difficile à commander.	
Mots-clés : observateur hybride, commande hybride, convertisseur de puissance, système Hamiltonien à port	
Laboratoire de Recherches : AMPERE, UMR CNRS 5005	
Directeur de Thèse : Xuefang LIN-SHI	
Président du Jury : Maurice Fadel	
Composition du Jury : Jean-Pierre Barbot , Pierre Riedinger, Xuefang Lin-Shi, Minh Tu Pham, Maurice Fadel, Diego Patiño	