



HAL
open science

Problèmes de plongements en géométrie symplectique

Emmanuel Opshtein

► **To cite this version:**

Emmanuel Opshtein. Problèmes de plongements en géométrie symplectique. Géométrie symplectique [math.SG]. Université de Strasbourg, 2014. tel-01011600

HAL Id: tel-01011600

<https://theses.hal.science/tel-01011600>

Submitted on 27 Jun 2014

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Habilitation à diriger des recherches

INSTITUT DE
RECHERCHE
MATHÉMATIQUE
AVANCÉE

UMR 7501

Strasbourg

Université de Strasbourg
Spécialité MATHÉMATIQUES

Emmanuel Opshtein

**Problèmes de plongements en géométrie
symplectique**

Soutenue le 3 juillet 2014
devant la commission d'examen

Jean-François Barraud, rapporteur

Paul Biran, rapporteur

Thomas Delzant, examinateur

Emmanuel Giroux, examinateur

Viatcheslav Kharlamov, garant

Claude Viterbo, rapporteur

www-irma.u-strasbg.fr



Remerciements

Le texte qui suit est un rapport sur mes travaux en topologie symplectique, sujet sur lequel j'ai commencé à travailler en 2006 sous la supervision de Paul Biran à l'université de Tel Aviv. Je voudrais profiter de la rédaction de ce mémoire pour remercier tous ceux qui ont participé de près ou de loin, directement ou indirectement à ces travaux.

Tout d'abord, P. Biran m'a introduit au sujet avec beaucoup d'enthousiasme et de disponibilité et je lui suis très reconnaissant. Les questions qu'il m'a posées en 2006 sont à l'origine de mon intérêt pour le sujet et de presque tous mes résultats. C. Viterbo et E. Giroux ont également joué un rôle central dans ma formation quelque peu tardive dans le domaine : ils m'ont écouté avec beaucoup de bienveillance dès le début, et leur attitude m'a beaucoup encouragé dans l'idée que l'Homologie de Floer peut co-exister avec d'autres types de techniques en topologie symplectique.

Je voudrais remercier tous les membres du jury pour leur participation à cette habilitation. J.-F. Barraud, P. Biran, et C. Viterbo me font beaucoup d'honneur en acceptant de rapporter ce mémoire. Je suis extrêmement reconnaissant à E. Giroux de s'être déplacé et de faire partie du jury. C'est une très grande joie pour moi. Je dois adresser des remerciements particuliers à V. Kharlamov qui a accepté de garantir cette habilitation (contre quoi, je ne sais pas).

Je tiens également à remercier chaleureusement mes collègues strasbourgeois pour l'ambiance très agréable qui règne à l'IRMA. En particulier, Nicolas pour sa bonne humeur permanente et sa manie de déplacer les tas de sable et les chameaux, Michèle, Thomas, Slava, Alex, Mihai, pour les encouragements, les explications et les nombreuses discussions que nous avons pu avoir. Travailler avec des amis est une chance et un réel bonheur, et je remercie pour cela Ana, Lev, Vincent Humilière et Frédéric LeRoux.

Je ne peux pas oublier ma famille, qui m'a bien des fois désespéré, mais toujours apporté un grand bonheur de vivre. Merci Agnès, Ari, Noé et Amos. Je dois finalement remercier plus particulièrement Ari pour m'avoir soufflé l'idée de la définition de polarisation singulière. Je ne me rappelle plus trop du processus exact, mais le brouillard dans lequel je vivais à l'époque de ses insomnies est certainement la seule chose qui a pu me faire penser qu'après tout, une forme irrationnelle pouvait tout aussi bien être Poincaré-Duale à une sous-variété, que pas.

Table des matières

1	Introduction	3
1.1	Empilements symplectiques	4
1.2	Géométrie symplectique \mathcal{C}^0	6
1.3	Organisation du mémoire	7
1.4	Notations, conventions	7
2	Inflation de Lalonde-McDuff	8
2.1	Eclatement et effondrements symplectiques	9
2.2	Inflation classique (Lalonde-McDuff [LM95])	11
2.3	Invariants de Gromov-Taubes	12
2.4	Utilisation dans les problèmes de plongements de boules	13
2.5	Plongements d'ellipsoïdes	13
3	Inflation de Liouville	14
3.1	Polarisations singulières	14
3.2	Astuce d'Alexander généralisée, coeur d'un domaine	16
3.3	Des exemples	17
4	Inflation singulière	21
4.1	Technique	21
4.2	Association aux techniques approximativement holomorphes	25
4.3	Applications	25
5	Quelques questions	27
5.1	Plongements symplectiques et singularités algébriques	27
5.2	Recombinaisons d'ellipsoïdes	31
6	Géométrie symplectique \mathcal{C}^0	34
6.1	\mathcal{C}^0 -rigidité des coisotropes	35
6.2	Flexibilité des sous-variétés symplectiques	39
6.3	h -principe quantitatif en géométrie symplectique	40
6.4	Vers une géométrie symplectique \mathcal{C}^0	41
A	Plongements d'ellipsoïdes : éclatements singuliers	43
A.1	Eclatement d'un ellipsoïde	44
A.2	Effondrements d'un diviseur singulier	45
A.3	Aspect algorithmique de l'éclatement d'un ellipsoïde	48
A.4	Preuve du théorème 6	50

1 Introduction

Une structure symplectique sur une variété (de dimension paire) est la donnée d'une deux forme différentielle fermée et non-dégénérée, c'est-à-dire dont la puissance extérieure maximale est une forme volume. La géométrie symplectique consiste en l'étude des groupes de transformations associés à ces structures. Les cotangents, munis de leur forme de Liouville, fournissent un exemple d'origine mécanique : les équations du mouvement des systèmes conservatifs sur une variété L , vues sous l'angle du formalisme Hamiltonien, définissent une classe de système dynamiques sur T^*L , précisément invariante sous l'action des transformations symplectiques. Une autre classe d'exemples, de nature mathématique, est fournie par les variétés Kähleriennes. On peut d'une certaine façon considérer les structures symplectiques comme un analogue topologique des structures Kähleriennes, qui existent sur beaucoup plus de variétés [Gom95]. Une dernière classe d'exemples, plus évidents mais tout aussi importants, est donnée par les surfaces orientables, munies d'une forme d'aire.

La condition de fermeture de la forme symplectique est en fait une condition de flexibilité : toutes les formes symplectiques sont localement les mêmes, et il n'y a pas d'invariants locaux. La condition de non-dégénérescence induit quant à elle une rigidité. Contrairement à l'espace des formes volumes dans une classe d'orientation fixée, l'espace des structures symplectiques n'est pas affine, donc les structures symplectiques ne se déforment pas aisément l'une sur l'autre. La compétition entre ces deux propriétés fait des structures symplectiques des objets à l'interface entre la topologie et la géométrie, dont l'étude constitue le coeur de la *topologie symplectique*. Cette compétition apparaît dans différentes directions de la géométrie symplectique, de natures variées : dynamique (conjecture d'Arnold, de Weinstein . . .), topologique (topologie intrinsèque et extrinsèque des sous-variétés lagrangiennes, représentabilité de classes de cohomologie par des formes symplectiques . . .), géométrique (sur laquelle porte le présent texte). Voici trois questions à l'honneur dans ce mémoire :

- Le théorème de Darboux assure que les variétés symplectiques sont localement standard. A quelle échelle cette standardisation est-elle réalisable ? Le théorème de non-tassement de Gromov assure par exemple qu'une boule symplectique maximale peut ne recouvrir qu'une petite portion de la variété. D'un autre côté, lorsque la classe de cohomologie de la forme symplectique est rationnelle, on peut trouver des ellipsoïdes de volume total dans la variété. Peut-on dire mieux ?
- A quel point une transformation symplectique peut-elle déformer ? Par exemple, quelle est la flexibilité pour le plongement d'objets standards ?
- Une transformation symplectique préserve la forme symplectique, donc ses puissances. Les transformations symplectiques préservent donc en particulier

un volume. Il est par ailleurs facile de trouver des difféomorphismes qui préservent le volume sans être symplectiques. La géométrie symplectique est-elle réellement plus rigide que celle des applications qui préservent le volume ? Par exemple, peut-on approcher de façon C^0 n'importe quelle transformation qui préserve le volume par des difféomorphismes symplectiques ? La réponse à cette question est non. C'est le théorème de C^0 -rigidité d'Eliashberg-Gromov. Comme nous le verrons dans ce texte, cette réponse peut-être raffinée.

Cette liste ne prétend évidemment pas épuiser les problèmes de la topologie symplectique, même de loin. Elle est seulement donnée pour illustrer la variété des questions qui se posent. Il ne faut pas voir ces différents problèmes comme déconnectés. Ainsi, l'étude du cone symplectique sur les éclatements de variétés symplectiques est en lien direct avec les questions de plongements symplectiques. Le théorème de non-tassement peut se démontrer en étudiant les orbites périodiques de certains hamiltoniens. Les phénomènes de rigidité C^0 se retrouvent également du côté de la dynamique (rigidité du crochet de Poisson). Le théorème de rigidité C^0 résulte facilement du théorème de non-tassement, et on verra dans ce texte comment d'autres résultats très classiques sur les plongements symplectiques peuvent être utiles pour établir des résultats de rigidité C^0 .

1.1 Empilements symplectiques.

Le problème principal dont il sera question ici est celui des *plongements équidimensionnels*, qu'on peut résumer ainsi :

Question 1. *Etant donné un domaine D (par exemple dans \mathbb{R}^{2n} avec sa forme symplectique standard), et une variété symplectique (M^{2n}, ω) , déterminer si D se plonge dans M . Quand D est dans \mathbb{R}^{2n} , une variante consiste à déterminer la dilatation maximale de D se plongeant dans M . Ensuite, quelle est la topologie de l'espace de ces plongements. Par exemple, deux boules de même taille sont-elles toujours isotopes symplectiquement ?*

Les résultats fondamentaux sur cette question sont au nombre de trois lorsqu'on se restreint à la dimension 4 (il faudrait rajouter un résultat de Guth sinon [Gut08]) :

Théorème (Non-squeezing, Gromov [Gro85]). *Si la boule $B^{2n}(a)$ se plonge symplectiquement dans le cylindre $Z^{2n}(A) := \mathbb{D}(A) \times \mathbb{C}^{n-1} \subset (\mathbb{C}^n, \omega_{\text{st}})$, $A \geq a$.*

Il s'agit d'une réponse à la question 1 dans un cas particulier, qui montre une rigidité frappante de la géométrie symplectique : le plongement symplectique le plus économique de la boule dans \mathbb{C}^n est réalisé par le plongement standard.

Théorème (Gromov [Gro85], McDuff-Polterovich [MP94], Biran [Bir99a]). *On connaît la réponse à la question 1 lorsque le domaine source est une union de boules identiques, et la variété étudiée est $(\mathbb{P}^2, \omega_{\text{FS}})$.*

Lorsque, comme dans ce théorème, le domaine source est une union de domaines disjoints, on a coutume de parler d'*empilements symplectiques*. Ce résultat montre que la question 1 est attaquable, au moins en dimension 4. Le travail de Biran sur le sujet a de plus établi un rapport entre ces questions et certaines questions de géométrie algébrique (sur lesquelles nous reviendrons). Finalement je voudrais citer un dernier résultat :

Théorème (McDuff [McD09]). *Le problème du plongement d'un ellipsoïde $E(a, b)$ dans une variété symplectique rationnelle/réglée (de dimension 4) se traduit en terme de plongements d'une certaine configuration de boules qui dépend uniquement de a, b .*

Ce théorème a été responsable d'une avancée significative du domaine dans ces dernières années. Il montre qu'il est possible d'envisager avec succès des problèmes de plongements de domaines autre que des boules (par exemple, ce théorème permet d'obtenir une liste d'invariants complets pour le problème de plongements d'ellipsoïdes les uns dans les autres), et *via* un argument de Buse-Hind, d'envisager des problèmes de plongements en dimension supérieure [BH11].

Les deuxième et troisième résultats se basent sur des techniques communes : on obtient les obstructions par des techniques de courbes holomorphes, et on prouve l'optimalité de ces obstructions par inflation, comme défini par Lalonde-McDuff [LM95]. Détaillons un peu plus la ligne d'argumentation du second problème. L'outil élémentaire est la notion d'éclatement : plonger un tel domaine (une configuration de boules ou un ellipsoïde) revient à trouver une forme symplectique dans une bonne classe de cohomologie dans une variété obtenue par une succession d'éclatements. Construire cette forme symplectique est un problème "hard" de la topologie symplectique, qui *via* la technique d'inflation, revient à trouver de bonnes courbes symplectiques. Dans certaines variétés de dimension 4, ce problème dual se résoud grace aux invariants de Seiberg-Witten.

La technique d'inflation, sur laquelle tout repose, possède deux défauts majeurs. D'une part, elle fournit des résultats de nature théorique (telle classe de cohomologie admet un représentant symplectique dans un éclatement de la variété initiale, donc telle configuration de boule admet un plongement), mais elle ne va pas au-delà d'un théorème d'existence. Cette technique ne permet pas de *construire* des plongements et de visualiser les configuration de boules optimales. D'autre part, elle n'est en fait pas assez souple pour prouver complètement le troisième théorème mentionné ci-dessus [McD09] : l'article original présentait une erreur critique. Je présente ci-dessous deux techniques d'inflation alternatives, chacune répondant à l'un des problème soulevé.

1.2 Géométrie symplectique \mathcal{C}^0

L'autre problématique illustrée dans ce texte est celle de la *rigidité* \mathcal{C}^0 en géométrie symplectique. Encore une fois, cette histoire part d'un résultat de Gromov, que nous avons déjà évoqué :

Théorème (Eliashberg-Gromov). *Un difféomorphisme qui est limite \mathcal{C}^0 de difféomorphismes symplectiques est lui-même symplectique.*

On ne peut donc pas espérer approcher une transformation qui préserve le volume arbitraire par des difféomorphismes symplectiques. Plus informellement, mais plus fidèlement aussi, ce théorème dit qu'en considérant des transformations (lisses) qui sont limites \mathcal{C}^0 de transformations symplectiques, on ne peut rien faire de nouveau. On est naturellement conduit à se poser la question de ce qui se passe lorsqu'on enlève la condition de régularité de la limite.

Définition 1.1. *Un homéomorphisme symplectique est un homéomorphisme qui est limite de difféomorphismes symplectiques.*

Notons que n'importe quel homéomorphisme de surface qui préserve l'aire est un homéomorphisme symplectique. Par produit, on construit facilement des homéomorphismes symplectiques de \mathbb{R}^{2n} à support compact, qui ne sont pas des difféomorphismes. Cette notion n'est donc pas triviale. Il peut être intéressant de noter que la démonstration du théorème d'Eliashberg-Gromov donnée dans [HZ94] assure qu'en n'importe quel point de différentiabilité, la différentielle d'un homéomorphisme symplectique est symplectique. La *géométrie symplectique* \mathcal{C}^0 est l'étude des homéomorphismes symplectiques. Evidemment, l'étude de la géométrie symplectique \mathcal{C}^0 est considérablement compliquée par l'absence de régularité (et de différentielle), et la généralisation de propriétés immédiates de la géométrie symplectique classique requière une débauche d'énergie dans le contexte \mathcal{C}^0 . Il semble donc légitime de se poser la question de l'intérêt de l'introduction de cette nouvelle géométrie. Permet-elle simplement de faire la même chose que la géométrie symplectique classique dans un cadre différent, ou bien est-elle réellement différente ? Une première réponse, évidente mais peu satisfaisante, consiste à dire qu'un homéomorphisme qui n'est pas lisse envoie des objets lisses sur des objets singuliers, ce que ne sait pas faire un difféomorphisme. Une façon d'obtenir une question non-triviale, et à mon avis intéressante, est de se focaliser sur l'action des homéomorphismes symplectiques sur les sous-variétés lisses.

Question 2. *Si un homéomorphisme symplectique de (M, ω) envoie une sous-variété lisse N sur une sous-variété N' , existe-t'il un difféomorphisme symplectique qui fait de même ?*

Nous dirons que N est \mathcal{C}^0 -rigide lorsque la réponse à la question précédente est positive, \mathcal{C}^0 -flexible sinon. Précisons tout de suite que cette question

semble pour l’instant hors d’atteinte, sauf en dimension 4. Dans un travail en collaboration avec L. Buhovski, nous étudions des variantes plus simples de cette question, et apportons un certain nombre de réponses. Le principe général qui semble se dégager de notre étude et des résultats précédents est que la flexibilité est la règle, mais que des phénomènes de rigidité surgissent dans les contextes intéressants de la topologie symplectique (variétés coisotropes, hypersurfaces symplectiques). En un certain sens, la géométrie symplectique \mathcal{C}^0 fait un tri, et seuls certains invariants symplectiques classiques sont \mathcal{C}^0 -robustes.

1.3 Organisation du mémoire

Ce document est organisé de la façon suivante. Les quatre premières parties sont dédiée aux problèmes de plongements symplectiques équidimensionnels. La partie 2 explique en détail la technique d’inflation classique pour comprendre ses limitations. Les parties 3 et 4 consistent en un résumé des travaux [Ops13a, Ops13b, Ops14, MO13, BHO], dans lesquels des techniques d’inflations alternatives sont développées et appliquées. La partie 5 propose quelques questions qui découlent naturellement de ces travaux. La partie 6 discute des propriétés de rigidité/flexibilité \mathcal{C}^0 , obtenues dans [Ops09, BO14].

1.4 Notations, conventions

J’ai essayé d’utiliser des notations et conventions standards dans ce texte, mais par souci d’efficacité et de lisibilité, certaines conventions sont légèrement différentes de celles utilisées habituellement dans un texte de mathématiques.

- Une variété symplectique rationnelle désignera ici une variété munie d’une forme symplectique dont la classe d’homologie est rationnelle. Même en dimension 4, il ne s’agira jamais d’une variété birationnelle à \mathbb{P}^2 .
- Tous nos angles sont à valeurs dans $[0, 1]$. En d’autres termes, un angle 1 est un tour complet dans le plan, et l’intégrale de la forme $d\theta$ sur un cercle autour de l’origine vaut 1
- Lorsque r est une variable radiale, R dénote son carré. Il s’agit de la variable qui intervient naturellement dans l’application moment.
- La forme symplectique standard sur $\mathbb{C}^n = \mathbb{R}^{2n}$ est $\omega_{st} := \sum dR_i \wedge d\theta_i$ (où (r_i, θ_i) sont des coordonnées polaires dans le i -ème facteur). Avec cette convention, l’aire d’un disque de rayon 1 est 1.
- $\mathbb{D}(a)$ est le disque ouvert d’aire a .
- $B(a)$ est la boule fermée de capacité a .
- $E(a, b)$ désigne l’ellipsoïde fermé $\{|z|^2/a + |w|^2/b \leq 1\}$. La notation $\mathcal{E}(a, b)$ sera utilisée lorsqu’un ellipsoïde vivra dans le même paragraphe qu’un

diviseur exceptionnel. Avec nos normalisations, la capacité de Hofer-Zehnder de cet ellipsoïde est $\min(a, b)$.

- Une boule ou un ellipsoïde symplectique est l'image d'une boule euclidienne ou d'un ellipsoïde dans \mathbb{C}^n par un plongement symplectique.
- Un disque de Hopf d'une boule est l'intersection de cette boule avec une droite vectorielle complexe, les axes d'un ellipsoïde sont les intersection de l'ellipsoïde avec les axes $\{z = 0\}$ ou $\{w = 0\}$.
- Une forme de Liouville λ d'une structure symplectique ω est une 1-forme qui vérifié $d\lambda = -\omega$. Son champ de Liouville, défini par $\omega(X_\lambda, \cdot) = \lambda(\cdot)$ est donc conformément symplectique, et $L_{X_\lambda} \cdot \omega = -\omega$. La forme de Liouville standard sur \mathbb{C}^n est $-\sum R_i d\theta_i$.
- Finalement, nous aurons à considérer des courbes et leurs classes d'homologie. Pour garder les notations les plus légères possibles, dès qu'il n'y aura pas de risque de confusion, je noterai S pour la courbe et $[S]$ (ou quand même $[S]$) pour sa classe d'homologie. Un diviseur exceptionnel sera toujours noté E . Avec cet abus de notation, la transformée stricte d'une courbe C passant par un point éclaté sera ainsi notée $C - E$.

2 Inflation de Lalonde-McDuff

Décrivons tout d'abord l'approche adoptée dans la série d'articles [MP94, Bir97, Bir99a, McD09, MS12] pour comprendre les plongements d'un domaine dans une variété symplectique de dimension 4. Fixons tout d'abord le contexte. Pour un domaine $\Omega \subset \mathbb{R}^4$ (*i.e.* un ouvert borné, pas nécessairement connexe), et (M, ω) une variété symplectique, on définit

$$c_\Omega(M) := \sup\{\lambda \mid \lambda\Omega \xrightarrow{\omega} M\}.$$

D'après le théorème de Darboux, on peut supposer, quitte à remplacer Ω par un dilaté suffisamment petit, que Ω se plonge symplectiquement dans M . On s'intéresse alors à calculer $c_\Omega(M)$, et si possible à trouver un plongement de $c_\Omega(M)\Omega$ dans M . La ligne d'argumentation est schématiquement la suivante :

Compactification : En faisant subir à son bord une réduction, on compactifie Ω en un espace $\Omega^\#$ muni d'une forme symplectique $\omega^\#$, qui contient un diviseur D correspondant à la réduction de $\partial\Omega$. De plus, la compactification de $\lambda\Omega$ fournit simplement la forme symplectique $\lambda\omega^\#$ sur $\Omega^\#$.

Eclatement : On fait subir une réduction au bord de $M \setminus \Omega$. On obtient un espace \hat{M} muni d'une forme symplectique $\hat{\omega}$, qui contient le même diviseur D , mais avec la coorientation opposée. Le problème de plonger $\lambda\Omega$ dans M revient alors à trouver une forme symplectique dans une certaine classe de cohomologie, qui donne une aire $\lambda\mathcal{A}_{\hat{\omega}}(D)$ à D .

Inflation : *Via* inflation et effondrement, on ramène le problème précédent à trouver une courbe symplectique dans une certaine classe d’homologie, qui intersecte positivement le diviseur D .

Invariants de Seiberg-Witten On trouve cette courbe symplectique dans des classes possédant un invariant de Gromov-Taubes non nul (l’invariant de Gromov, tel que défini par Taubes). Le point essentiel ici est que Li-Liu ont dégagé des critères explicites pour vérifier si une classe d’homologie a un invariant non nul, et donc un représentant J -holomorphe pour J générique [LL95, LL99, LL01].

Cette approche a de nombreuses limitations intrinsèques. Tout d’abord, on a besoin que \hat{M} soit une variété, ce qui est une condition extrêmement restrictive sur le feuilletage caractéristique de $\partial\Omega$, donc sur Ω . Cette condition est vérifiée lorsque Ω est une boule, ou une union finie de boules disjointes [MP94]. La condition n’est pas vérifiée même pour des domaines comme les ellipsoïdes. Cependant, McDuff a développé une méthode alternative pour l’éclatement de ces ellipsoïdes, qui contourne cette difficulté [McD09] (voir aussi l’appendice A). Ensuite, on a besoin d’avoir à disposition dans la variété de nombreuses classes d’homologie avec des invariants de Seiberg-Witten non-nuls, donc pour une classe de variétés de *type de Seiberg-Witten non simple*, appelée classe \mathcal{C} . Sans entrer dans le détail de la définition, \mathcal{C} contient la sous-classe \mathcal{C}^* formée de \mathbb{P}^2 , des surfaces réglées et de leurs éclatements (voir [McD98] pour la liste exhaustive des 4-variétés dans cette classe). Nous travaillerons dans ce mémoire avec la classe \mathcal{C}^* par souci de simplicité, mais la plupart des résultats devraient rester vrais dans la classe \mathcal{C} . On doit aussi être capable de résoudre le problème de savoir si une classe vérifie effectivement les critères évoqués ci-dessus. Dans [MP94], la situation envisagée correspond au cas où ce critère numérique consiste en un nombre fini d’équations, qui sont vérifiées l’une après l’autre. Cela ne permet que de considérer des empilements de \mathbb{P}^2 par moins de 8 boules. Dans le cas plus général où la liste de ces invariants est infinie, le problème est plus compliqué, et a été résolu par Biran pour la première fois [Bir97], et plus récemment par McDuff-Schlenk [MS12]. Enfin, lorsque l’on veut quitter le royaume des empilements de boules, les diviseurs D deviennent singuliers du point de vue de la théorie Fredholm des courbes pseudo-holomorphes. On ne peut donc pas à la fois garantir que la courbe trouvée par un argument de type Seiberg-Witten-Taubes et le diviseurs sont J -holomorphes pour une même structure presque complexe, donc garantir la positivité de l’intersection semble compliqué.

2.1 Eclatement et effondrements symplectiques

D’après le théorème de Darboux, une variété symplectique (M, ω) est localement standard, elle peut donc être munie d’une structure presque-complexe compatible à ω qui est intégrable au voisinage d’un point. L’écla-

tement (algébrique) standard $\pi : \hat{M} \rightarrow M$ de ce point fournit donc une structure presque complexe \hat{J} sur \hat{M} compatible avec $\pi^*\omega$ sur le complément du diviseur exceptionnel E . La forme $\pi^*\omega$ n'est cependant pas symplectique sur \hat{M} : elle dégénère sur E . L'éclatement symplectique permet de munir \hat{M} d'une forme symplectique $\hat{\omega}$ compatible à \hat{J} , à partir d'une boule symplectique $B(\varepsilon)$ centrée en p . Le procédé peut être décrit de différentes façons, toutes équivalentes : découpage symplectique de Lerman [Ler95], quotient du bord de $M \setminus B(\lambda)$ par son feuilletage caractéristique, ou encore définition analytique d'une forme symplectique sur un voisinage du diviseur exceptionnel qui coïncide avec $\omega|_{B^4(\lambda+\varepsilon) \setminus B^4(\lambda)}$ [MS98]. Un calcul immédiat montre que l'aire symplectique de E est λ , donc que $[\hat{\omega}] = [\pi^*\omega] - \lambda e$, où e désigne la classe Poincaré-duale au diviseur exceptionnel.

Cet éclatement est réversible : étant donné une forme symplectique $\hat{\omega}$ sur \hat{M} telle que E est symplectique, d'aire λ , l'effondrement de (\hat{M}, E) est une forme symplectique ω sur M , pour laquelle une boule symplectique de taille λ se plonge dans (M, ω) . Si \mathbb{P}^1 désigne une droite projective dans \mathbb{P}^2 , et $\omega_{\text{FS}}(\lambda)$ la forme de Fubini-Study sur \mathbb{P}^2 qui donne une aire λ à \mathbb{P}^1 , cette forme est obtenue par la somme de Gompf $(\hat{M}, \hat{\omega}) \#_{E \sim \mathbb{P}^1} (\mathbb{P}^2, \omega_{\text{FS}}(\lambda))$ [Gom95].

Proposition 2.1. [MP94] *Soit (M^4, ω) une variété symplectique et $B_\varepsilon = \varphi(B(\varepsilon)) \subset M$ une boule symplectiquement plongée dans M . Soit $\pi : (\hat{M}, \hat{\omega}_\varepsilon) \rightarrow (M, \omega)$ l'éclatement symplectique de M en B_ε . La boule $B^4(\tau)$ se plonge dans M si et seulement si la forme $\hat{\omega}_\varepsilon$ possède une déformation $(\hat{\omega}_t)_{t \in [\varepsilon, \tau]}$ parmi les formes symplectiques, dans la classe de cohomologie $[\omega_\tau] = [\pi^*\omega] - \text{tPD}(E)$, où E est la fibre exceptionnelle de π .*

Preuve : Si $\psi : B^4(\tau) \hookrightarrow (M^4, \omega)$, on commence par trouver une valeur $\varepsilon' < \varepsilon$ pour laquelle $\varphi(B(\varepsilon')) \subset B_\varepsilon$ et $\psi(B(\varepsilon'))$ sont symplectiquement isotopes. Après isotopie, on peut donc supposer que ψ et φ coïncident sur $B(\varepsilon')$. Considérons alors les deux familles de formes symplectiques $(\hat{\omega}'_t)_{t \in [\varepsilon', \tau]}$, $(\hat{\omega}''_t)_{t \in [\varepsilon', \varepsilon]}$ sur \hat{M} , obtenues en éclatant $\psi(B(t))$ et $\varphi(B(t))$ respectivement. La première fournit une déformation de structures symplectiques entre $\hat{\omega}'_\tau$ et $\hat{\omega}'_{\varepsilon'} = \hat{\omega}_{\varepsilon'}$, et la seconde entre $\hat{\omega}_{\varepsilon'}$ et $\hat{\omega}_\varepsilon$. On obtient la déformation recherchée par concaténation.

Réciproquement, sous l'hypothèse d'existence des formes symplectiques sur \hat{M} , on effondre (\hat{M}, ω_t) le long du diviseur exceptionnel. Ceci donne donc une famille de formes symplectiques ω_t , toutes dans la même classe de cohomologie, telles que (M, ω_t) contient $B^4(t) \approx \mathbb{P}^2(t) \setminus \mathbb{P}^1$. Par le théorème de stabilité de Moser, les structures symplectiques associées sont les mêmes. Mais pour $t = \varepsilon$, cette structure est simplement ω . \square

Notons que cette proposition garantit l'existence d'une boule symplectique de taille τ dans M , mais ne précise pas comment la construire. En effet, bien que l'effondrement au temps t , vu comme une somme de Gompf,

soit relativement explicite, il ne produit une boule symplectique explicite que pour une forme symplectique diffeomorphe à la forme symplectique initiale, par un diffeomorphisme obtenu par la méthode de Moser, sur lequel on ne sait rien.

2.2 Inflation classique (Lalonde-McDuff [LM95])

La technique d'inflation se base sur la proposition suivante :

Proposition 2.2. *Soit (M^4, ω) une variété symplectique de dimension 4, avec une courbe symplectique fermée lisse C . Il existe une famille à un paramètre de formes symplectiques ω_t avec $[\omega_t] = [\omega] + tPD(N)$, $t \in [-\varepsilon, K[$, où K ne dépend que de données topologiques (l'aire de N et la classe de Chern de son fibré normal). Précisément,*

- Si $C \cdot C \geq 0$, $K = +\infty$: la classe $[\omega] + tPD(C)$ est représentée par une forme symplectique $\forall t \geq 0$.
- Si $C \cdot C < 0$, $K = \frac{\omega|_C}{C \cdot C}$.

Preuve : Comme C est lisse (donc plongée), il existe un modèle standard pour un voisinage de C . Comme C est symplectique, son fibré normal dans M est isomorphe à son fibré symplectique normal, $TC^{\perp\omega}$, défini par

$$T_p C^{\perp\omega} := \{v \in T_p M \mid \omega(v, u) = 0 \forall u \in T_p C\}.$$

Ce fibré symplectique possède une 2-forme fermée naturelle $\omega_0 := \pi^* \omega|_C + d(R\alpha)$, où α est une forme de connexion du fibré et R est le carré d'une coordonnée radiale sur la fibre. Précisément, si $\frac{\partial}{\partial \theta}$ est le générateur d'une action de $S^1 = \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ sur le fibré, α vérifie :

$$\begin{cases} \alpha(\frac{\partial}{\partial \theta}) = 1, \\ d\alpha = -\lambda \pi^* \omega|_C, \end{cases} \quad \lambda = \frac{C \cdot C}{\mathcal{A}_\omega(C)}.$$

En développant la forme $\omega_0 = (1 - \lambda R)\pi^* \omega|_C + dR \wedge \alpha$, on voit que cette forme est symplectique sur le sous-fibré en disque d'aire $\frac{1}{\lambda}$. Lorsque la classe de C est Poincaré-dual à un multiple de la classe symplectique, ce fibré en disques se plonge symplectiquement dans M [Bir01]. Dans tous les cas, un voisinage V de C dans M est symplectomorphe à un fibré en disque d'aire ε (c'est à dire $\{R < \varepsilon\}$) pour $\varepsilon \ll 1$.

On choisit alors une fonction $\rho : [0, \varepsilon] \rightarrow \mathbb{R}^+$ décroissante à support compact, qui vaut 1 sur un voisinage de 0, et on définit

$$\omega_t := \omega - t d\rho(R)\alpha = (1 - \lambda R + t\lambda\rho(R))\pi^* \omega|_C + (1 - t\rho'(R))dR \wedge \alpha$$

si $R < \varepsilon$ et $\omega_t := \omega$ sinon. Cette forme est clairement dans la classe de cohomologie annoncée, elle coïncide avec ω sur le complémentaire du fibré en disque d'aire ε autour de C , et elle est non dégénérée pour tout $t > 0$ si

$\lambda > 0$ (i.e. $C \cdot C > 0$), pour $t \in [0, \frac{1}{\lambda}]$ si $C \cdot C < 0$. □

Notons que si J est une structure presque complexe compatible avec ω pour laquelle les fibres de π sont J -invariantes, ω_t reste compatible avec J . En particulier, si une courbe symplectique intersecte un voisinage de C le long d'une fibre, cette courbe reste symplectique pour toutes les formes ω_τ de la famille. De plus, si une courbe symplectique S intersecte C transversalement et positivement, on vérifie explicitement qu'une perturbation \tilde{C} de C (qui reste symplectique), intersecte cette courbe orthogonalement. On peut ensuite décider que S coïncide avec des fibres du fibré normal à \tilde{C} au voisinage des intersections. On obtient finalement :

Proposition 2.3. *Si une courbe symplectique fermée lisse C intersecte une courbe symplectique S transversalement et positivement, une inflation bien choisie le long d'une perturbation de C fournit une famille à un paramètre de formes symplectiques de classes $[\omega] + tPD(C)$, $t \in [-\varepsilon, K]$, pour lesquelles S est symplectique $\forall t$.*

2.3 Invariants de Gromov-Taubes

La technique d'inflation permet de réaliser certaines classes de $H^2(M)$ par des formes symplectiques, à condition de disposer de courbes symplectiques dans des classes d'homologie appropriées. L'outil principal pour trouver ces courbes est l'invariant de Gromov, tel qu'introduit par Taubes [Tau95, Tau96], qui sera appelé invariant de Gromov-Taubes dans ce texte. Sans entrer dans les détails, pour une variété symplectique (M, ω) , cet invariant associe à une classe $A \in H_2(M)$ un décompte signé des courbes J -holomorphes (non-nécessairement irréductibles) dans la classe A (pour J générique, passant par $k(A)$ points génériques). L'invariant $\text{Gr}(A)$ ainsi calculé ne dépend que de la classe de déformation de la structure symplectique. Sans surprise, l'intérêt de cet invariant réside d'une part dans le fait qu'une classe A avec $\text{Gr}(A) \neq 0$ admet un représentant J -holomorphe pour tout J générique et compatible avec la forme symplectique; d'autre part que l'on dispose de conditions vérifiables sur la classe A qui garantissent $\text{Gr}(A) \neq 0$, surtout quand $M \in \mathcal{C}$. Par exemple :

Proposition 2.4. [LL95, LL99] *Soit (M, ω) un éclatement de \mathbb{P}^2 , et $A \in H_2(M)$ telle que $A^2 > 0$ et $[\omega](A) > 0$. Alors $\text{Gr}(qA) \neq 0$ pour $q \gg 1$. Si de plus $A \cdot E \geq 0 \forall E \in \mathcal{E}$ (\mathcal{E} est l'ensemble des classes représentées par des sphères symplectiques de carré -1), qA est représentée par une courbe J -holomorphe plongée pour J générique. Sans cette hypothèse, A est représentée par une courbe a priori réductible, formée d'une composante plongée, et de revêtements de diviseurs exceptionnels.*

2.4 Utilisation dans les problèmes de plongements de boules

Lorsque l'on souhaite plonger une boule de taille τ dans une variété dans la classe \mathcal{C}^* (un éclatement de \mathbb{P}^2 ou d'une surface réglée), on commence par éclater une petite boule symplectique de M , pour obtenir une forme symplectique $\hat{\omega}$ sur \hat{M} , dans la classe $[\pi^*\omega] - \varepsilon e$, où $e = \text{PD}(E)$ est le Poincaré-dual de la classe du diviseur exceptionnel E introduit lors de l'éclatement. On vérifie ensuite que pour $q \gg 1$, la classe $q(\text{PD}(\pi^*\omega) - \tau e)$ a un invariant de Gromov non nul, et vérifie $A \cdot E' > 0 \forall E' \in \mathcal{E}$ (voir par exemple [Bir97]). On représente donc cette classe par une courbe plongée C pour J -générique, qui intersecte positivement E puisque $[E]$ est également J -représenté pour J générique. D'après la proposition 2.3, une inflation le long d'une perturbation de C fournit donc un chemin de formes symplectiques $\hat{\omega}_t$ sur \hat{M} , pour lesquelles E reste symplectique, dans la classe

$$[\pi^*\omega] - \varepsilon e + tq([\pi^*\omega] - \tau e) = (1 + tq)[\pi^*\omega] - (\varepsilon + tq\tau)e.$$

En divisant cette forme par $1 + tq$, et en prenant des t très grands, la proposition 2.1 montre qu'on peut plonger dans M une boule de taille arbitrairement proche de τ . Cette approche fonctionne aussi pour plonger des boules disjointes, ces plongements sont appelés des *empilements*.

Notons ici que la condition que C rencontre E positivement et transversalement est essentielle pour garder E symplectique le long de la déformation, et pour que la proposition 2.1 s'applique. Une autre remarque concerne la classe de ω : si on veut représenter un multiple de $\text{PD}(\pi^*\omega) - \tau E$ par une courbe, il faut que cette classe soit rationnelle. On peut toujours considérer que $\tau \in \mathbb{Q}$, et considérer seulement les plongements de boules rationnelles. Mais $[\omega] \in H^2(M, \mathbb{R})$ doit être rationnel dans cette approche. Lorsque la classe de ω est irrationnelle, l'approche décrite doit être légèrement modifiée [Bir97] : on écrit ω comme une combinaison convexe $\sum \mu_i \omega_i$ de formes symplectiques rationnelles proches de ω , et on trouve des représentants à chacune des classes $q(\text{PD}(\pi^*\omega_i) - \tau e)$. Il s'agit alors d'effectuer une inflation le long d'un union de courbes qui s'intersectent.

2.5 Plongements d'ellipsoïdes

Lorsque l'on cherche à plonger un ellipsoïde, le problème dual sur la réalisation de classes de cohomologies dans l'éclaté est analogue, mais plus subtil [McD09]. McDuff prouve dans cet article qu'il existe une suite de nombres $(w_i(p, q))_{i \in P(p, q)}$ associée à deux entiers p, q premiers entre eux, tels que plonger un ellipsoïde $\tau E(p, q)$ dans une variété (M, ω) revient à trouver, sur $\hat{M}_{P(p, q)}$ une forme symplectique dans la classe $[\pi^*\omega] - \tau \sum_{i=1}^{P(p, q)} w_i(p, q) e_i$, pour laquelle certaines classes d'homologie engendrées par les classes exceptionnelles sont représentées par des sphères symplectiques plongées, positivement transverses entre elles (voir aussi l'appendice A). Pour fixer les idées,

considérons l'exemple de $E(1, 2)$. Dans ce cas, on doit représenter la classe $[\pi^*\omega] - e_1 - e_2$ sur \hat{M}_2 , par une forme symplectique qui est non-dégénérée sur une chaîne de deux sphères S_1, S_2 de classes $E_1, E_2 - E_1$, qui s'intersectent transversalement et positivement. Le raisonnement précédent ne fonctionne alors pas. On peut chercher un représentant J -holomorphe plongé à la classe $PD([\omega]) - E_1 - E_2$ pour J générique par la théorie de Taubes, mais comme la sphère S_2 est une -2 -sphère, elle n'est pas J -holomorphe pour J -générique. On ne peut donc rien garantir sur les intersections entre la courbe le long de laquelle on veut faire une inflation et S_2 , que l'on doit conserver symplectique lors de la déformation. Ce problème n'est pas simplement technique, on peut facilement trouver des situations où ces intersections *doivent* être négatives. Il manque donc un outil pour utiliser les invariants de Gromov-Taubes afin de plonger les ellipsoïdes. L'inflation singulière, développée dans [McD13, MO13] est précisément cet outil.

3 Inflation de Liouville

Dans la série d'articles [Ops07, Ops13a, Ops13b, Ops14], je montre qu'une procédure d'inflation directement au niveau de la variété étudiée (et non pas d'un éclatement de celle-ci) est possible. Les conséquences principales de cette technique, partiellement détaillées ci-dessous, sont de plusieurs ordres : construction explicite de plongements dont l'existence était prédite par la théorie, nouveaux résultats de recouvrement de variétés symplectiques par des cartes standards, mise en évidence de liens entre singularités des courbes algébriques et problème de plongements symplectiques.

3.1 Polarisations singulières

Le cadre de travail naturel pour ces inflations est celui des variétés polarisées, en un sens particulier.

Définition 3.1 (Polarisation Singulière). *Une polarisation singulière Σ d'une variété symplectique fermée (M, ω) est la donnée d'hypersurfaces symplectiques lisses pondérées, $\Sigma = (\Sigma_i, \mu_i)$, qui vérifient les deux propriétés suivantes :*

1. $[\omega] = \sum \mu_i PD(\Sigma_i)$,
2. les hypersurfaces Σ_i s'intersectent transversalement et positivement.

On note $\Sigma = \cup \Sigma_i$. En dimension 4, on autorise les Σ_i à avoir des singularités modélées symplectiquement sur des singularités algébriques. Ceci signifie qu'il existe au voisinage de chaque singularités de Σ une carte symplectique dans laquelle Σ est donnée par une équation polynomiale.

La notion d'intersection positives n'est pas évidente en grande dimension. Elle signifie que toutes les intersections, impliquant un nombre arbitraire

de Σ_i , sont transverses, symplectiques, et que l'orientation d'intersection et celle donnée par la forme symplectique coïncident. Le théorème principal de [Ops13b] est que ces polarisations existent toujours.

Théorème 1. *Toute variété symplectique fermée admet des polarisations singulières, avec moins de $b_2(M) + 1$ composantes.*

Pour des raisons cohomologiques, la forme symplectique est exacte sur le complémentaire d'une polarisation, même topologique, c'est-à-dire même sans hypothèse de positivité ou de non-dégénérescence de la forme symplectique. Lorsque ces polarisations sont constituées de courbes symplectiques, sans positivité des intersections, on voit assez facilement qu'une forme de Liouville λ (avec $d\lambda = -\omega$) sur le complémentaire de la polarisation admet des résidus bien définis sur chaque composante Σ_i , qui doivent coïncider avec μ_i . Précisément, si γ_ε^i est une famille de lacet de petits diamètres, tendant vers un point $p_i \in \Sigma_i$, engendrant l'homologie de $B(p, \varepsilon) \setminus \Sigma_i$ et tournant positivement autour de Σ_i ,

$$\int_{\gamma_\varepsilon^i} \lambda \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} \mu_i.$$

Lorsque les intersections entre différentes branches sont positives et que la polarisation est faite de courbes symplectiques, comme dans la définition 3.1, on peut construire des formes de Liouville sur $M \setminus \Sigma$ qui sont standard au voisinage de la polarisation, et dont le champ de vecteur dual pointe en direction de $M \setminus \Sigma$. Ces champs de vecteurs sont alors positivement complets, et une étude un peu plus fine montrent que les trajectoires qui ne restent pas dans un compact de $M \setminus \Sigma$ en temps négatifs viennent intersecter la polarisation en temps (négatifs) finis, tangentiellment à une direction radiale bien définie ([Ops13a], appendice).

Finalement, en dimension 4, même si les Σ_i possèdent des singularités, modelées sur des singularités algébriques, on peut aussi trouver de telles formes de Liouville, que j'appelle formes de Liouville tempérées [Ops14]. Dans un voisinage des singularités, elles sont définies par la formule

$$\lambda = \lambda_{\text{st}} + \mu_i d^c \log |P_i|,$$

de sorte que leur dual vérifie $X_\lambda \cdot |P_i| > 0$, ce que nous résumons encore en disant que X_λ pointe vers l'extérieur de Σ . Cette discussion est résumée dans la proposition ci-dessous :

Proposition 3.2. *[Ops13a, Ops13b, Ops14] Le complémentaire d'une polarisation Σ sur une variété M est muni d'une forme de Liouville contractante λ , qui possède des résidus μ_i en Σ_i , dont le flot du champ dual est positivement complet (il pointe vers l'extérieur de Σ), et s'étend en un flot sur l'éclaté de M le long de Σ .*

3.2 Astuce d'Alexander généralisée, coeur d'un domaine

Nous expliquons à présent que les bassins de répulsion des sous-ensembles d'une polarisation vis-à-vis du flot de Liouville ne dépendent que de très peu de paramètres (en fait de ces sous-ensembles eux-même et des résidus). Le cadre de travail de ce paragraphe est celui d'une variété polarisée (M, Σ) , avec un sous-ensemble $X \subset \Sigma$ ouvert, que l'on décompose en

$$X := \cup_i X_i, \quad \text{où } X_i = \overline{X \cap \Sigma_i}^{\circ}$$

(cette définition un peu formelle de X_i garantit simplement que $X_i = \emptyset$ si $X \cap \Sigma_i$ est un nombre fini de points). Pour simplifier la lecture, les X_i peuvent être considérés comme connexes, mais ce n'est nulle part utilisé dans la discussion qui suit (et en fait le cas non-connexe arrive naturellement dans les applications). On définit le bassin de répulsion de X comme

$$\begin{aligned} \mathcal{B}_R(X, \lambda) &:= \{p \in M \mid \exists t > 0, \Phi_{X_\lambda}^{-t}(p) \in X\} \\ &= \{\Phi_{X_\lambda}^t(x, \theta), x \in X, \theta \in S^1, t \geq 0\} \end{aligned}$$

où dans la seconde égalité, on a étendu le flot à l'éclaté de M le long de Σ . On définit finalement une notion d'équivalence pour ces sous-domaines X .

Définition 3.3. *Deux ouverts X, X' dans des polarisations $\Sigma = (\Sigma_i, \mu_i), \Sigma' = (\Sigma'_i, \mu'_i)$ sont équivalents ($X \sim X'$) si il existe une application $f : X \rightarrow X'$ vérifiant :*

1. *la restriction de f à $X_i \setminus \text{Sing}(\Sigma_i)$ est un difféomorphisme symplectique sur $X'_{\sigma(i)}$, où σ est une renumérotation.*
2. *$f|_{X_i}$ se relève en un isomorphisme de fibré $F : T_M X_i \rightarrow T_M X'_{\sigma(i)}$. Cette condition est automatiquement vérifiée lorsque les X_i sont contractiles, ce qui sera toujours le cas dans les applications.*
3. *Si $X_i \neq \emptyset$, $\mu_i = \mu'_{\sigma(i)}$.*

Autrement dit, on a un difféomorphisme symplectique défini sur un voisinage de X dans M , qui envoie X sur X' , et qui envoie des composantes de X sur des composantes de Σ' de même poids.

Proposition 3.4. *Soient (M, Σ) et (M, Σ') des variétés polarisées, munies de sous-domaines $X, X' \subset \Sigma, \Sigma'$ équivalents. Pour toute formes de Liouville tempérées λ, λ' sur $M \setminus \Sigma, M' \setminus \Sigma'$, on a*

$$\mathcal{B}_R(X, \lambda) \stackrel{\omega}{\approx} \mathcal{B}_R(X', \lambda').$$

Cette proposition se démontre en utilisant une généralisation de l'astuce d'Alexander. Lorsque l'on dispose d'un difféomorphisme symplectique f sur un voisinage \mathcal{U} de X dans M qui transporte λ sur λ' , c'est facile : à un point $p \in \mathcal{B}_R(X, \lambda)$, on associe le point $\Phi_{X_\lambda}^\tau \circ f \circ \Phi_{X_\lambda}^{-\tau}(p)$, où τ est n'importe quel

temps τ pour lequel $\Phi_{X_\lambda}^{-\tau}(p) \in \mathcal{U}$. Cette application est bien définie (c'est-à-dire qu'elle ne dépend pas du choix de τ) précisément parce que f transporte X_λ sur $X_{\lambda'}$ dans \mathcal{U} . Cette approche est valable lorsque le complémentaire de X dans chaque composante est ouvert, mais lorsque ce n'est pas le cas, trouver un tel difféomorphisme f n'est pas toujours possible. C'est dans cette situation que l'hypothèse que λ est tempérée est essentielle : on associe cette fois à p le point $\Phi_{X_{\lambda'}}^\tau \circ F \circ \Phi_{X_\lambda}^{-\tau}(p)$, où τ représente le temps nécessaire pour atteindre X depuis p , $\Phi_{X_\lambda}^{-\tau}(p) = x^* \in T_x M$ représente le point atteint, décoré de la direction le long de laquelle la trajectoire arrive. Démontrer alors que l'application obtenue est bien un difféomorphisme, et est symplectique, nécessite une petite analyse réalisée dans l'appendice de [Ops13a].

En résumé, si $\mathbf{X} = (X_i, \mu_i)$ est la décomposition *pondérée* de X en tant que sous-ensemble d'une polarisation, on voit que $\mathcal{B}_R(X, \lambda) \subset M$ ne dépend que de \mathbf{X} . On notera $\mathcal{D}(\mathbf{X})$ ce domaine, et on dira que \mathbf{X} est le coeur de $\mathcal{D}(\mathbf{X})$. Pour résumer :

Théorème 2. *Soit (M, ω, Σ) une variété symplectique polarisée. On suppose que \mathbf{X} se plonge dans Σ (au sens où X se plonge dans Σ , le plongement se relève à $T_M X$, et les poids coïncident). Alors $\mathcal{D}(\mathbf{X})$ se plonge symplectiquement dans M .*

3.3 Des exemples

On a identifié dans le paragraphe précédent des domaines $\mathcal{D}(\mathbf{X})$ qui se plongent naturellement dans des variétés symplectiques, dès que \mathbf{X} apparaît dans une de leurs polarisations. Le problème de déterminer ces domaines est à présent central. Dans le cas non-singulier, on a le résultat suivant, qui caractérise les domaines dont le coeur est un ellipsoïde.

Proposition 3.5. $\mathcal{D}(E(a_1, \dots, a_{n-1}), \mu) = E(a_1, \dots, a_{n-1}, \mu)$.

Preuve : Considérons $E(a_1, \dots, a_{n-1}) \subset \mathbb{C}^{n-1} \times \{0\} \subset \mathbb{C}^n$, et considérons la forme de Liouville $\lambda := \mu d\theta_n - \lambda_{\text{st}}$, où $\lambda_{\text{st}} = -\sum r_i^2 d\theta_i = -\sum R_i d\theta_i$. Le flot de Liouville associé est

$$X_\lambda := \mu \frac{\partial}{\partial R_n} - \sum R_i \frac{\partial}{\partial R_i}.$$

En résolvant explicitement les équations différentielles correspondantes, on trouve que le flot de X_λ est donné par

$$\Phi_{X_\lambda}^t(R, \theta) = (R_1 e^{-t}, \dots, R_{n-1} e^{-t}, \mu + (R_n - \mu) e^{-t}, \theta),$$

et un calcul immédiat donne $\mathcal{B}_R(E(a_1, \dots, a_{n-1}), \mu) = E(a_1, \dots, a_{n-1}, \mu)$. \square

Comme les variétés symplectiques rationnelles ont toujours une polarisation régulière, et que toutes les variétés symplectiques fermées ont des polarisations, une récurrence immédiate basée sur la proposition précédente donne :

Théorème 3. *Toute variété symplectique M^{2n} est couverte, à volume nul près, par N ellipsoïdes, où $N \leq (b_2(M) + 1)^{n+1}$ [Ops13b]. Lorsque la forme symplectique est rationnelle, le résultat est vrai pour $N = 1$ [Ops07].*

Le résultat est plus explicite qu'il n'y paraît : lorsqu'on dispose de polarisations (par exemple dans le cas algébrique), les ellipsoïdes en question sont complètement déterminés, et constructibles. Par exemple :

- Si ω_{FS} représente la forme de Fubini-Study sur \mathbb{P}^2 pour laquelle l'aire d'une droite projective est 1, $(\mathbb{P}^2, \omega_{\text{FS}})$ contient les ellipsoïdes suivants, qui ont tous volume total : $B(1), \frac{1}{2}E(1, 4), \frac{1}{3}E(1, 9), \dots$ (considérer des courbes de degré k).
- Si ω est une forme sur S^2 d'aire totale 1, $(S^2 \times S^2, \omega \oplus \omega)$ contient l'ellipsoïde $E(1, 2), \frac{1}{2}E(1, 8), \frac{1}{3}E(1, 18), \dots$ (considérer des polarisation données par des perturbations lisses des courbes $z \mapsto (z^p, z^p)$).

En dimension 4, lorsqu'on autorise des singularités pour les polarisations, la situation la plus favorable pour identifier $\mathcal{D}(\mathbf{X})$ est celle où \mathbf{X} ne présente qu'une seule singularité (ou une par composante connexe). En effet, par hypothèse sur la polarisation, X se plonge alors symplectiquement dans une sous-variété algébrique $\{P = \prod P_i = 0\} \subset \mathbb{C}^2$, où $\{P_i = 0\}$ modélise un voisinage de la composante Σ_i de la polarisation. Ceci est vrai car chaque composante $\{P_i = 0\} \subset \mathbb{C}^2$ a une aire infinie. La forme de Liouville sur $\mathbb{C}^2 \setminus \{P = 0\}$ définie par

$$\lambda := \sum \mu_i d^c \log |P| + \lambda_{\text{st}}$$

a les résidus souhaités le long de X . Ainsi, d'après la proposition 3.4, $\mathcal{D}(\mathbf{X})$ coïncide avec le domaine de répulsion de $X \subset \{P = 0\} \subset \mathbb{C}^2$ sous l'action du flot de Liouville associé à λ . Il reste donc à identifier ce bassin de répulsion. Comme tout est explicite, on peut certainement résoudre numériquement ce problème. Une expression analytique semble en revanche difficilement calculable directement, sauf dans certains cas particuliers, que nous détaillons à présent.

Le premier cas simple est celui des croix : X est une union de deux disques qui s'intersectent transversalement.

Proposition 3.6. *Soit \mathbf{X} une union de deux disques de taille a_1, a_2 , affectés de poids μ_1, μ_2 , s'intersectant transversalement et positivement en un point exactement. Le domaine $\mathcal{D}(\mathbf{X})$ est l'union (non-disjointe) de deux ellipsoïdes :*

$$\mathcal{D}(\mathbf{X}) = E(a_1, \mu_1) \cup E(\mu_2, a_2) \subset \mathbb{C}^2.$$

Cette proposition se généralise également en dimension supérieure. Cette situation arrive naturellement lorsqu'on cherche à recouvrir la variété à partir d'une polarisation générique, construite par la méthode de Donaldson

par exemple, dont toutes les composantes sont lisses et s'intersectent transversalement. La proposition 3.5 permet de recouvrir la variété par des ellipsoïdes en considérant un recouvrement de la polarisation par des disques qui évitent les singularités, mais ces ellipsoïdes sont complètement déterminés par la polarisation. Les recouvrements d'une polarisation par des croix ont eux de nombreux paramètres (la taille des croix), et cette souplesse peut être utile. Cette proposition, complétée par la technique d'inflation singulière expliquée ci-dessous permet ainsi de montrer que les variétés symplectiques de dimension 4 fermées ont toutes la propriété de "packing stability" : les obstructions symplectiques au recouvrement d'une variété par des boules disparaissent lorsque la taille des boules utilisées passe en dessous d'une taille critique. Ce phénomène, observé par Biran pour les variétés symplectiques rationnelles [Bir97, Bir99a], peut se démontrer dans ce cas en prouvant que les ellipsoïdes de dimension 4 ont la packing stability et en utilisant le théorème 3 [BH13]. Dans le cas irrationnel, l'approche est identique : on recouvre la variété par des bassins de répulsion de croix, et on montre que ceux-ci, qui sont des unions d'ellipsoïdes décrites dans la proposition 3.6, possèdent la packing stability. Les paramètres d'ajustements de ces croix sont nécessaires pour assurer que les boules qu'on met dans chaque domaine ont bien la même taille.

Considérons à présent des singularités étoilées : X est une union de disques lisses qui s'intersectent deux-à-deux transversalement en un seul point, qui est le même pour tous les couples de disques. Nous supposons ci-dessous que les polarisations sont homogènes (les poids sont tous égaux) pour avoir l'énoncé le plus simple possible.

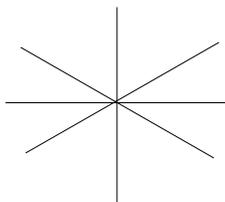


FIGURE 3.1 – Singularité étoilée

Proposition 3.7. *Soit $\mathbf{X} = (X, \mu)$ une singularité étoilée à p branches, composée de disques d'aire τ . Si $p \geq \frac{\tau}{\mu}$, $\mathcal{D}(\mathbf{X})$ contient $B^4(\tau)$. Si $p \leq \frac{\tau}{\mu}$, $\mathcal{D}(\mathbf{X})$ est inclus dans $B(\tau)$. Par conséquent, $\mathcal{D}(\mathbf{X}) = B(\tau)$ pour une singularité étoilée de taille τ à $\frac{\tau}{\mu}$ branches [Ops14].*

Cette proposition permet donc de contruire des boules dans des variétés à partir de singularités étoilées de leurs polarisations. En fait, les techniques de Donaldson permettent de montrer que la réciproque est également

vraie. Dans le cas des variétés rationnelles par exemple, on peut montrer que $B^4(\tau) \subset (M, \omega)$ si et seulement $\frac{\tau^2}{2} \leq \text{Vol } M$ et M admet une polarisation de degré k avec une singularité étoilée à $k\tau$ branches. Nous savons donc exactement comment construire les plongements de boules dans les variétés de dimension 4 : il faut et il suffit de trouver certaines courbes symplectiques. Une application est une construction explicite des *empilements maximaux* de \mathbb{P}^2 . Rappelons que McDuff-Polterovich, puis Biran, ont déterminé les tailles maximales des empilements de k boules dans \mathbb{P}^2 . Tant que $k < 9$, les obstructions sont de nature symplectique, et les boules ne remplissent pas toujours \mathbb{P}^2 . A partir de 10 boules, les obstructions symplectiques disparaissent, et il ne reste que l'obstruction volumique : les empilements optimaux doivent donc remplir l'espace. Comme expliqué précédemment, leurs résultats sont de nature purement théorique : ils ne construisent pas d'empilements. Le problème de *voir* ces empilements est donc resté ouvert, et a été résolu par une série de travaux [Tra95, Sch05a, Wie09] qui produisent respectivement des empilements maximaux par 5 boules, 6 boules, puis 7 et 8 boules. Les constructions sont explicites mais assez compliquées (très compliquées pour 7 et 8 boules). De plus, les boules maximales construites dans ces travaux n'ont aucune régularité au bord. L'inflation de Liouville permet de construire ces empilements maximaux par une méthode simple pour $k \leq 9$.

Corollaire 3.8. *On peut construire des empilements maximaux de \mathbb{P}^2 de la façon suivante :*

- Un disque d'aire 1 dans $\mathbb{P}^1 \subset \mathbb{P}^2$ permet de construire $B^4(1) \subset \mathbb{P}^2$,
- Quatre disques d'aire $1/2$ dans une conique lisse permettent de construire un empilement de quatre boules de capacités $1/2$ dans \mathbb{P}^2 (voir aussi dans [MP94], l'appendice par Y. Karshon),
- Cinq disques d'aire $2/5$ dans une conique donnent un empilement de 5 boules de taille $2/5$ dans \mathbb{P}^2 - et même cinq ellipsoïdes $E(\frac{1}{2}, \frac{2}{5})$.
- Six étoiles de taille $2/5$ à 5 branches chacune, dans une courbe algébrique de degré 12 formée par 6 coniques passant chacune par 5 points parmi 6 points de \mathbb{P}^2 fixés, donne un empilement de 6 boules de taille $\frac{2}{5}$ dans \mathbb{P}^2 ,
- Sept étoiles de taille $3/8$ à 3 branches chacune, dans la courbe algébrique de degré 8 formée par deux courbes rationnelles de degré 3 passant respectivement par (p_1^2, p_2, \dots, p_7) , (p_1, p_2^2, \dots, p_7) et d'une conique passant par (p_3, \dots, p_7) , fournissent un empilement de 7 boules de taille $3/8$ dans \mathbb{P}^2 ,
- Huit étoiles de taille $6/17$ à 18 branches chacune, dans une courbe algébrique de degré 51 fournissent un empilement de 8 boules de taille $6/17$ dans \mathbb{P}^2 . Cette courbe est la réunion de huit sextiques $(S_i)_{i=1..8}$ passant respectivement par $(p_1^2, p_2^2, \dots, p_i^3, \dots, p_8^2)$ et d'une cubique passant par (p_1, \dots, p_8) .

Ici, toutes les branches des polarisations sont affectées du même poids $1/k$, où k est le degré total de la courbe considérée. Des exemples d'empile-

lements par 6, 7, 8 boules étaient déjà disponibles, par une construction de Schlenk [Sch05b] puis de Wieck [Wie09], mais la construction proposée ici est nettement plus simple.

Une singularité multi-cusp de type (p, q) est une singularité donnée par une équation de type

$$\prod_{i=1}^r (z^p - \alpha_i w^q), \quad \alpha_i \neq \alpha_j.$$

En fait, ces singularités se réduisent à des singularités étoilées par un revêtement symplectique d'ordre pq de \mathbb{C}^2 , ramifié le long des axes :

$$\begin{aligned} \Phi : \quad \tau B(pq) &\longrightarrow \tau E(p, q) \\ (R_1, \theta_1, R_2, \theta_2) &\longmapsto \left(\frac{R_1}{q}, q\theta_1, \frac{R_2}{p}, p\theta_2 \right). \end{aligned}$$

Ce revêtement permet le calcul explicite de $\mathcal{D}(\mathbf{X})$.

Proposition 3.9. *Soit $\mathbf{X} = (X, \frac{1}{k})$ une singularité multi-cusp de type (p, q) à $k\tau$ branches. $\mathcal{D}(\mathbf{X}) = \tau E(p, q)$.*

Là encore, on peut adapter la construction de Donaldson pour montrer que lorsqu'un ellipsoïde se plonge dans une variété, on a une polarisation qui a une singularité multi-cusp [Ops14]. Dans le cas des variétés rationnelles par exemple,

Théorème 4. *Soit (M^4, ω) une variété symplectique rationnelle. Si M admet une polarisation de degré k avec une singularité multi-cusp à $k\tau$ branches de types (p, q) (c'est-à-dire $\prod_{i=1}^{k\tau} (z^p - \alpha_i w^q)$), alors l'ellipsoïde ouvert $\tau \overset{\circ}{E}(p, q)$ se plonge dans M .*

Réciproquement, si l'ellipsoïde fermé $\tau E(p, q)$ se plonge dans M , il existe une polarisation de degré k de M , avec exactement une singularité multi-cusp, à $k\tau$ branches de types (p, q) .

4 Inflation singulière

4.1 Technique

Le but de l'inflation singulière est de réaliser des inflations relatives à des courbes qui ne sont pas J -représentées pour J générique.

Définition 4.1. *Soit (M, ω) une variété symplectique. Un diviseur singulier de \mathcal{S} est une configuration de courbes $\mathcal{S} = (S_1, \dots, S_s)$ qui s'intersectent transversalement et positivement, de sorte qu'elles sont J -holomorphes pour une structure presque-complexe calibrée par ω , mais qui ne sont pas J -représentées pour J générique (par exemple, l'une des courbes S_i est une $-\ell$ -sphère avec $\ell \geq 2$). On appelle $\mathcal{J}(\mathcal{S})$ l'ensemble des structures presque-complexes calibrées par ω et pour lesquelles \mathcal{S} est J -holomorphe.*

Soit (M, ω) un éclatement de \mathbb{P}^2 ou d'une variété réglée, et \mathcal{S} un diviseur singulier. Soit A une classe vérifiant $\text{Gr } A \neq 0$, $A \cdot E \geq 0 \forall E \in \mathcal{E}$, de sorte que A est J -représentée pour J générique (ces deux conditions garantissent alors que $A^2 \geq 0$). Peut-on trouver des formes symplectiques ω_t dans les classes

$$\omega + t\text{PD}(A), \quad \forall t > 0,$$

telles que \mathcal{S} reste ω_t -symplectique pour tout t ? Bien qu'on ne puisse garantir l'existence d'une courbe plongée J -holomorphe pour $J \in \mathcal{J}(\mathcal{S})$ (sauf dans des cas très particuliers), on démontre dans [MO13] qu'un représentant singulier J -holomorphe (avec $J \in \mathcal{J}(\mathcal{S})$) bien choisi permet de mener l'inflation à bien (voir aussi [McD13]).

Proposition 4.2. *Soit (M, ω) un éclatement de \mathbb{P}^2 , ou d'une surface réglée, \mathcal{S} un diviseur singulier et A une classe de $H_2(M, \mathbb{Z})$ qui vérifie $\text{Gr}(A) \neq 0$, $A \cdot E \geq 0 \forall E \in \mathcal{E}$ et $A \cdot [S_i] \geq 0$. Alors, $\forall t > 0$, il existe une forme symplectique ω_t sur M dans la classe $[\omega] + t\text{PD}(A)$ qui est non-dégénérée sur \mathcal{S} .*

Principe de la preuve : Pour cette preuve (seulement), on notera C^{S_i} les composantes du diviseur singulier, et S_i leur classe. La première étape est d'obtenir un représentant symplectique de la classe A le meilleur possible du point de vue de l'inflation. On considère pour cela une structure presque-complexe $J \in \mathcal{J}(\mathcal{S})$, aussi générique que possible : $\bar{\partial}_{J_n}$ est transverse à la section nulle en toute courbe J_n -holomorphe d'aire inférieure à $[\omega](A)$ qui n'est pas contenue dans un voisinage fixé de \mathcal{S} (ce qui revient à dire que l'opérateur de Cauchy-Riemann linéarisé $D_{J_n, u}$ est surjectif pour toutes ces courbes). On considère une suite de structures presque-complexes J_n génériques (la transversalité est obtenue pour toutes les courbes qui nous intéressent, mais \mathcal{S} n'est plus une configuration de courbes holomorphes). Les hypothèses sur la classe A et les structures J_n garantissent que A est représentée par une courbe plongée u_n qui est J_n -holomorphe, et dont le genre est fixé par la formule d'adjonction. D'après le théorème de compacité de Gromov, on peut supposer, quitte à extraire, que u_n converge vers une courbe nodale u , associée à une décomposition

$$[u] = A = \sum \ell_i S_i + \sum B_i,$$

où chaque terme a un représentant J -holomorphe. Cette décomposition nodale n'est pas unique. Dans les variétés qui nous intéressent (dans la classe \mathcal{C}^*), on peut garantir qu'on a un tel représentant nodal, Σ^A , du type

$$A = \sum \ell_i S_i + \sum m_i E_i + B, \quad (4.1)$$

où les classes E_i et B sont représentées par des J' -courbes plongées C^{E_i}, C^B , $B^2 > 0$, $E_i \cdot B = 0$, où J' est une perturbation de J dans $\mathcal{J}(\mathcal{S})$. De plus,

les représentants de chacune de ces classes s'intersectent transversalement et ω -orthogonalement. On peut alors écrire un voisinage de Σ^A comme le plombage d'un voisinage standard de chacune des courbes C^B, C^{E_i}, C^{S_i} .

On peut alors, comme dans la preuve de la proposition 2.2, produire des 2-formes $\rho^{E_i}, \rho^{S_i}, \rho^B$ Poincaré-Duales aux classes correspondantes, et compatibles avec ω dans le sens où

$$\omega_t := \omega + t(\sum \ell_i \rho^{S_i} + \sum m_i \rho^{E_i} + \rho^B)$$

reste symplectique pour $t > 0$, tant que ω_t reste non-dégénérée sur les composantes de Σ^A . Comme expliqué précédemment, une inflation le long d'un diviseur d'auto-intersection négative diminue son aire symplectique. Mais comme la classe A intersecte positivement les classes exceptionnelles, les classes de \mathcal{S} et la classe B , l'inflation le long de Σ^A augmente l'aire symplectique totale de toutes les composantes de \mathcal{S} et de Σ^A . Pour les composantes de carré négatif cependant, la masse se concentre près des points d'intersections avec les autres composantes. On peut alors redistribuer la masse le long de toute la courbe pour continuer l'inflation en temps infini (voir [MO13] pour plus de détails). \square

C'est la deuxième étape de cette preuve qu'on appelle inflation singulière : elle permet de définir une inflation le long de certaines courbes nodales, dont on dispose toujours dans les variétés qui nous intéressent. Comme nous l'avons déjà dit, la première conséquence de la proposition précédente est de fournir une preuve complète du théorème suivant [McD09] :

Théorème (McDuff). *Il existe un entier $P(p, q)$ et des tailles $(w_i(p, q))_{i \leq P(p, q)}$, tels que $\tau E(p, q)$ se plonge dans $M \in \mathcal{C}^*$ si et seulement si $\sqcup_i \tau B(w_i(p, q))$ se plongent dans M .*

Preuve : Donnons l'exemple du plongement $E(2, 1)$. On suppose que deux boules fermées de taille 1 se plongent dans M . Alors $B(1) \sqcup B(1 + \delta) \xrightarrow{\omega} M$, donc la classe $A := q(\text{PD}[\pi^* \omega] - E_1 - (1 + \delta)E_2) \in H_2(\hat{M}_2)$ vérifie $\text{Gr}(A) \neq 0$, $A \cdot E \geq 0 \forall E \in \mathcal{E}$, $A^2 \geq 0$, pourvu que $q \gg 1$. Considérons un ellipsoïde $\varepsilon E(2, 1) \subset M$, que l'on éclate selon la procédure définie par McDuff [McD09] (voir aussi l'appendice A.1). Cela fournit une forme symplectique sur \hat{M}_2 avec un diviseur singulier \mathcal{S} formé d'une -1 -sphère dans la classe E_1 et une -2 -sphère dans la classe $E_2 - E_1$. Comme $A \cdot [E_1] = 1$ et $A \cdot [E_2 - E_1] = \delta$, la proposition 4.2 garantit l'existence d'une famille à 1-paramètre de formes symplectiques ω_t dans \hat{M}_2 , dans la classe

$$\begin{aligned} [\omega_t] &= \frac{[\pi^* \omega] - \varepsilon E_1 - \varepsilon E_2 + t([\pi^* \omega] - E_1 - (1 + \delta)E_2)}{1 + t} \\ &= [\pi^* \omega] - \frac{\varepsilon + t}{1 + t} E_1 - \frac{\varepsilon + t(1 + \delta)}{1 + t(1 + \delta)} \\ &\approx [\pi^* \omega] - E_1 - (1 + \delta)E_2. \end{aligned}$$

Le diviseur singulier \mathcal{S} reste de plus symplectique le long de cette déformation, donc l'ellipsoïde $E(2, 1)$ se plonge dans M . \square

L'inflation fournit également des résultats d'isotopie. Lorsqu'on veut isotoper deux plongement φ_1, φ_2 de boules (de taille 1) dans une variété symplectique, on peut commencer par isotoper les restrictions de φ_1, φ_2 à de très petites boules, et les éclater. On obtient sur \hat{M} deux structures presque complexes associées à φ_1, φ_2 , et des courbes J_i -holomorphes dans la classe $\text{PD}([\pi^*\omega] - e)$. Dans les variétés de la classe \mathcal{C}^* , un multiple de cette classe a un invariant de Gromov-Taubes non nul, et donc est représentée par des courbes J_t -holomorphes C_t pour un chemin (à un paramètre) générique de structures presque-complexes reliant J_1 à J_2 (en dimension 4, la formation de bulles est un phénomène de codimension 2). Le diviseur exceptionnel est aussi représenté pour un tel chemin générique, de sorte qu'on peut réaliser une inflation de la forme symplectique le long des courbes C_t . L'effondrement de ces formes symplectiques montre que les boules initiales sont isotopes [McD98]. Lorsque l'on veut isotoper des ellipsoïdes, la même difficulté que pour les plongements apparaît : comme on souhaite conserver \mathcal{S} holomorphe le long du chemin J_t , on ne peut plus supposer que J_t est générique, donc l'hypothèse de semi-positivité ne permet plus de garantir que la classe $k\text{PD}([\pi^*\omega] - \sum w_i e_i)$ dont l'invariant de Gromov-Taubes est non-nul a un représentant plongé pour tout t . L'inflation singulière permet cependant de résoudre cette difficulté technique. Lorsque l'on considère la dégénération maximale des représentants de cette classe le long du chemin J_t , on obtient une décomposition $k\text{PD}([\pi^*\omega] - \sum w_i e_i) = \sum A_i$ pour laquelle les A_i sont J_t -représentés pour tout t . En effectuant l'inflation singulière le long de ces courbes nodales, on obtient pour les ellipsoïdes les mêmes résultats d'isotopie que ceux obtenus dans [McD98] pour les boules. Précisément on obtient dans [MO13] le résultat technique suivant :

Lemme 4.3. *Soit \mathcal{S} une configuration singulière dans une variété de la classe \mathcal{C}^* et ω_s une déformation de formes symplectiques adaptées à \mathcal{S} . On suppose que $A \in H_2(M, \mathbb{R})$ vérifie les hypothèses suivantes : $A = \sum \mu_i A_i$ où $\text{Gr}(A_i) \neq 0$, $A_i \cdot E > 0 \forall E \in \mathcal{E}$, $A_i^2 \geq 0$, $A \cdot S \geq 0$ pour toute les classes d'homologie des composantes de \mathcal{S} . Alors il existe une famille à deux paramètres de formes symplectiques ω_{st} , $(s, t) \in [0, 1] \times [0, +\infty]$ dans la classe $[\omega_s] + t\text{PD}(A)$ et qui sont non-dégénérées sur \mathcal{S} .*

Ce lemme technique permet par exemple de prouver que les plongements d'un ou plusieurs ellipsoïdes dans les variétés dans la classe \mathcal{C}^* sont tous isotopes, comme annoncé dans [McD09].

4.2 Association aux techniques approximativement holomorphes

L'inflation singulière permet de contourner la difficulté qu'on ne sait pas produire de courbe symplectique plongée dans une classe donnée, qui intersecte positivement un diviseur singulier. Sous certaines hypothèses très particulières (sur la classe A et le lieu singulier \mathcal{S}), on sait quand même dire qu'une classe A qui admet des représentants J -holomorphes pour J génériques est également représentée par une courbe plongée J -holomorphe pour un $J \in \mathcal{J}(\mathcal{S})$ (voir le théorème 1.2.7 dans [MO13]). Dans ce cas, l'inflation peut être réalisée de façon classique, sans se référer à l'inflation singulière. On peut noter une conséquence *a posteriori* de l'inflation singulière, lorsqu'elle est associée aux techniques de constructions de courbes symplectiques de Donaldson. Considérons un diviseur singulier \mathcal{S} et une classe A qui vérifie les hypothèses de la proposition 4.2. On sait alors garantir l'existence d'une forme symplectique ω_t , qui est compatible avec une structure presque complexe $J \in \mathcal{J}(\mathcal{S})$, dans la classe $[\omega_t] = [\omega] + t\text{PD}(A)$, $\forall t \in [0, +\infty[$. Si ω et t sont rationnels, le théorème de Donaldson assure que la classe $k(t)\text{PD}(\omega_t) = k(t)(\text{PD}(\omega) + tA)$ est représentée par une courbe symplectique plongée, positivement transverse à \mathcal{S} , pour $k(t)$ suffisamment grand. Notons que pour $t \gg 1$, cette classe est une approximation d'une classe KA pour $K \gg 1$. Autrement dit, la classe A n'est peut-être pas représentée, et ne permet pas de faire une inflation classique, mais une approximation de KA l'est. Par exemple :

Théorème 5. *Soit $\mathcal{S} \subset \mathbb{P}^2$ un diviseur singulier quelconque. Supposons que $\sqcup B(a_i) \xrightarrow{\omega} \mathbb{P}^2$, $a_i \in \mathbb{Q}$, et que la classe $\ell - \sum a_i e_i$ s'évalue positivement sur toutes les composantes de \mathcal{S} (on rappelle que $B(a_i)$ représente la boule fermée). Alors il existe un représentant symplectique plongé dans une classe $k(L - \sum a_i E_i)$, $k \gg 1$, qui intersecte \mathcal{S} transversalement et ω -orthogonalement.*

4.3 Applications

Cette technique d'inflation singulière, par exemple *via* le théorème 5 montre une flexibilité très forte des plongements symplectiques dans les variétés de classe \mathcal{C}^* . Une fois vaincue la rigidité initiale pour plonger des domaines dans ces variétés, leur disposition est très flexible. Par exemple :

Théorème 6. *Soit $\varphi : E(a, b) \xrightarrow{\omega} M$ un plongement d'ellipsoïde dans une variété de classe \mathcal{C}^* . Soit C une courbe symplectique plongée, d'aire supérieure à b . Alors il existe un plongement $\psi : E(a, b) \xrightarrow{\omega} M$ tel que $C \cap \text{Im } \psi = \psi(\{z_1 = 0\})$.*

Autrement dit, on peut mettre un ellipsoïde en position standard par rapport à une courbe, pourvu qu'une contrainte cohomologique soit vérifiée.

C'est un énoncé très fort, vraiment différent d'un énoncé classique de théorie Fredholm des courbes holomorphes : on ne fait aucune hypothèse de transversalité du $\bar{\partial}$ sur C , et même si on en faisait, lorsque $a \ll b$, l'indice d'une courbe passant par le centre de l'ellipsoïde et intersectant l'ellipsoïde selon le grand axe devient très négatif. Il permet de redémontrer par exemple le théorème 4.1 facilement. Donnons l'exemple de $E(1, 2)$: si $B(1) \sqcup B(1 + \varepsilon)$ se plonge dans M , alors $B(1)$ se plonge dans $(\hat{M}_1, \hat{\omega})$, où $[\hat{\omega}](E_1) = 1 + \varepsilon$. D'après le théorème 6 (puisque $1 + \varepsilon > 1$), on a également un plongement de $B(1)$ dont l'intersection avec E_1 est exactement un disque de Hopf. L'image de cette boule sous l'effondrement de E_1 contient un ellipsoïde $E(1, 2)$ (voir le lemme A.4). Le cas d'un ellipsoïde général se traite aisément par une récurrence sur le nombre de boules (voir encore l'appendice A.2 et la figure 4.1). Nous donnons une idée de la preuve de ce résultat en appendice (partie A.4).

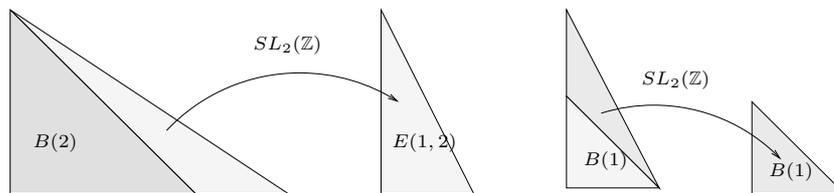


FIGURE 4.1 – Décomposition de $E(3, 2)$ en $B(2) \sqcup 2B(1)$

Une autre application, toujours aux problèmes de plongements, concerne le problème de "packing stability". Lorsqu'on cherche à empiler des boules identiques dans une variété, des obstructions symplectiques peuvent apparaître. Ainsi, deux boules de même taille disjointes dans \mathbb{P}^2 ne peuvent recouvrir que la moitié du volume de \mathbb{P}^2 . Une variété symplectique M possède la packing stability, s'il existe un entier N à partir duquel les obstructions symplectiques disparaissent : on peut recouvrir M , à volume nul près, par n boules identiques, dès que $n \geq N$. Cette propriété, découverte par Biran, a été prouvée dans les variétés de la classe \mathcal{C} [Bir97], et dans les variétés symplectiques rationnelles (voir [Bir99a] en dimension 4, et [BH11] en dimension arbitraire). En utilisant la possibilité de mettre les empilements en position particulière par rapport à n'importe quelle courbe, on peut démontrer la packing stability dans certains domaines ouverts de dimension 4 (par exemple des ellipsoïdes ou ce que nous appelons des pseudo-boules), ainsi que pour toutes les variétés fermées de dimension 4, rationnelles ou non.

Théorème 7 (avec O. Buse, R. Hind). *Le phénomène de packing stability est vrai dans certains domaines de \mathbb{C}^2 (par exemples les ellipsoïdes), ainsi que dans toutes les 4-variétés symplectiques fermées (sans hypothèse de rationalité de la classe symplectique). Plus précisément, quelle que soit la 4-variété*

M , il existe une taille λ_0 , telle que les empilements de boules de tailles inférieures à λ_0 dans M ne sont soumis qu'aux contraintes volumiques.

Nous laissons cependant ouverte la question de savoir si une variété symplectique fermée de dimension 4 est toujours recouverte par un ellipsoïde.

5 Quelques questions

5.1 Plongements symplectiques et singularités algébriques

Singularités des courbes pseudo-holomorphes. La question présentée ici concerne une variante symplectique d'un problème classique de la géométrie algébrique. Soit $\mathcal{S} = \{P = 0\}$ un germe de singularité algébrique dans $(\mathbb{C}^2, 0)$. On dira qu'une courbe symplectique C réalise la singularité \mathcal{S} si C est J -holomorphe pour une structure presque complexe J ω -compatible et a une singularité dont un voisinage admet une carte symplectique dans laquelle C est donnée par l'équation de \mathcal{S} . Lorsque C est une courbe algébrique, on dit que $\mathcal{S} \subset C$ s'il existe une carte polynomiale (ou analytique, ou topologique) dans laquelle C a la même équation que \mathcal{S} .

Question 3. Soit \mathcal{S} une singularité plane. Déterminer

$$\begin{aligned} d(\mathcal{S}) &:= \min\{d \mid \exists P \in \mathbb{C}_d[z_0 : z_1 : z_2], \mathcal{S} \subset \{P = 0\}\} \\ d_\infty(\mathcal{S}) &:= \min\{d \mid \exists P \in \mathbb{C}_{nd}[z_0 : z_1 : z_2], n\mathcal{S} \subset \{P = 0\}\}, \end{aligned} \quad (\mathcal{A})$$

où $n\mathcal{S}$ est la singularité de germe $\prod_{i=1}^n P(z, \alpha_i w)$, où les α_i sont n nombres complexes distincts. De façon similaire, peut-on déterminer le degré minimal $d^\omega(\mathcal{S})$ d'une courbe symplectique qui réalise la singularité \mathcal{S} et l'analogue stabilisé $d_\infty^\omega(\mathcal{S})$.

Soit maintenant une résolution de la singularité \mathcal{S} , vue comme un diviseur singulier dans un éclatement de \mathbb{P}^2 : il s'agit d'une configuration de courbes symplectiques plongées qui s'intersectent deux à deux transversalement et positivement, toutes dans des classes d'homologie dans l'espace engendré par les classes exceptionnelles, et telle qu'une courbe réalise la singularité \mathcal{S} (respectivement $n\mathcal{S}$) si et seulement si sa transformée stricte représente une certaine classe d'homologie, et intersecte \mathcal{S} transversalement et positivement. Les courbes de degré d qui réalisent la singularité \mathcal{S} sont donc en correspondance avec les courbes sur l'éclaté de \mathbb{P}^2 dans une certaine classe d'homologie $A(\mathcal{S}) := dL - \sum w_i(\mathcal{S})E_i$, et qui intersectent le diviseur singulier transversalement et positivement. Les courbes de degré kd qui réalisent $k\mathcal{S}$ sont pour leur part en correspondance avec les courbes dans la classe kA qui intersectent le diviseur singulier positivement et transversalement. La technique d'inflation singulière permet, comme dans le cas des ellipsoïdes de recombinaison des singularités étoilées pour obtenir la singularité \mathcal{S} . On appelle \mathcal{S}^* l'étoile associée à \mathcal{S} , qui est une combinaison de singularités de type étoiles à $w_i(\mathcal{S})$ branches.

Proposition 5.1. *Si \mathcal{S} est réalisée par une courbe symplectique de degré d , les singularités \mathcal{S}^* sont réalisées par une courbe de degré d . Réciproquement, si \mathcal{S}^* est réalisée par une courbe symplectique de degré d alors $N\mathcal{S}$ est réalisée par une courbe de degré $Nd + o(N)$ pour N assez grand. Par conséquent,*

$$d_\infty^\omega(\mathcal{S}) = c(\sqcup B(w_i(\mathcal{S})), \mathbb{P}^2)^{-1} = \frac{1}{\sup\{\tau \mid \sqcup \tau B(w_i(\mathcal{S})) \xrightarrow{\omega} \mathbb{P}^2\}} = d_\infty^\omega(\mathcal{S}^*).$$

Idée de preuve : Supposons que \mathcal{S} est réalisée par une courbe symplectique de degré d . En régularisant les autres singularités de la courbe, on peut réaliser \mathcal{S} par une courbe symplectique C de degré d qui a exactement une singularité. On effectue alors une succession d'éclatements de boules de tailles ε qui correspondent à la désingularisation de C . Sa transformée stricte est une courbe symplectique plongée dans la classe $dL - \sum w_i(\mathcal{S})E_i$. De plus, si ε est suffisamment petit, un représentant J -holomorphe nodal d'une des classes exceptionnelles $[E_i]$ ne peut pas contenir C (par un argument d'aire). Par un argument de transversalité, on peut donc trouver une structure presque complexe J qui rend C J -holomorphe, et qui est transverse sur tous les représentants des diviseurs exceptionnels (voir [MS98], section 3.2). Ces diviseurs sont alors J -représentés, donc sont plongés et intersectent positivement C [McD91]. Par une perturbation supplémentaire, on rend toutes les intersections entre ces courbes transverses. En effectuant un effondrement de ces diviseurs exceptionnels, on obtient une courbe avec les singularités étoilées voulues.

Réciproquement, si on a une courbe de degré d avec des singularités étoilées de multiplicités $w_i(\mathcal{S})$ (c'est-à-dire que \mathcal{S}^* est réalisée par une courbe symplectique de degré d), on a un empilement des boules de tailles w_i/d dans \mathbb{P}^2 , de sorte que la classe $A = q(dL - \sum w_i(\mathcal{S})E_i)$ a $\text{Gr}(A) \neq 0$, vérifie $A \cdot E \geq 0 \forall E \in \mathcal{E}$, et donc est représentée pour J générique. Par hypothèse, cette classe intersecte positivement les composantes du diviseur singulier correspondant à la désingularisation de \mathcal{S} , donc la technique d'inflation singulière permet de construire des formes symplectiques dans la classe $\ell + \text{NPD}(A) \simeq Na$ pour $N \gg 1$, qui sont J -compatibles pour une structure J compatible avec $\hat{\omega}$ et pour laquelle C est J -holomorphe. En appliquant la théorie de Donaldson, on trouve une courbe lisse Σ Poincaré-duale à $N'(\ell + \text{NPD}(A)) \simeq N''A$, qui est transverse à C et qui est presque J -holomorphe, donc $\hat{\omega}$ -symplectique. L'effondrement donne une courbe de degré $N''(1 + 1/N)d$ sur \mathbb{P}^2 qui réalise la singularité $N''\mathcal{S}$. \square

Ce qui ressort des travaux sur les empilements de boules dans \mathbb{P}^2 tend à indiquer qu'il s'agit d'un problème algorithmique [Bir97, Bir99b, MS12, She09]. Le problème de déterminer $d_\infty^\omega(\mathcal{S})$ serait alors un problème avec une solution algorithmique. Il serait intéressant de savoir si cette propriété est partagée par les courbes algébriques, ou si une rigidité supplémentaire a lieu dans le cadre algébrique.

Propriétés symplectiques des domaines $\mathcal{D}(\mathbf{X})$. Considérons une 4-variété symplectique (M, ω) , qu'on suppose rationnelle par commodité. Une polarisation de degré k fournit un recouvrement de la variété (à volume nul près) par un ellipsoïde $\mathcal{E}(2k\text{Vol}(M), \frac{1}{k})$, où k est le degré de la polarisation. On peut voir cet ellipsoïde comme une carte standard qui recouvre presque tout M . Malheureusement, la seule technique disponible pour produire des polarisations dans un cadre général est celle développée par Donaldson, qui fournit des courbes de grands degrés. L'ellipsoïde ainsi construit est donc très fin, et cette carte ne représente que très infidèlement la variété M du point de vue symplectique. Elle a même volume, mais ses invariants symplectiques sont en général beaucoup plus petit que ceux de M . Lorsque l'on dispose de polarisations avec des singularités compliquées, on peut construire des plongements de domaines plus intéressants du point de vue symplectique, comme on l'a vu dans les propositions 3.7 et 3.9.

Avant d'énoncer une question précise, définissons une version des domaines moins générale que les domaines $\mathcal{D}(\mathbf{X})$ mais plus adaptée à la géométrie algébrique.

Définition 5.2. Soit C une courbe algébrique dans \mathbb{C}^2 (pas nécessairement irréductible), avec une singularité unique en 0. Soit p le nombre de composantes locales de C en 0. Considérons un domaine $X \subset C$ formé de disques d'aires a_1, \dots, a_p , centrés en 0 (chacun localement dans une branche différente de C). Considérons un poids $1/k$ pour toutes les composantes irréductibles de C . On définit $\mathcal{D}(\mathcal{S}, k, a_1, \dots, a_n) = \mathcal{D}(\mathbf{X})$.

Question 4. Peut-on calculer les invariants symplectiques classiques (capacités de Gromov, de Hofer-Zehnder, ECH) des domaines $\mathcal{D}(\mathbf{X})$ ou des domaines $\mathcal{D}(\mathcal{S}, a_1, \dots, a_p)$.

Dans une variété symplectique rationnelle avec une polarisation de degré k , les domaines de ce type que l'on peut plonger dans M , sous l'hypothèse que la singularité \mathcal{S} est réalisée par une courbe de degré k sont les $\mathcal{D}(\mathcal{S}, k, a_1, \dots, a_n)$, avec $a_1 + \dots + a_n = 2k\text{Vol}(M)$ (l'aire totale de Σ). Il est donc naturel de chercher à maximiser les différentes capacités des $\mathcal{D}(\mathcal{S}, k, a_1, \dots, a_p)$ sous la contrainte

$$a_1 + \dots + a_p = 2kV$$

Il semble clair que lorsque toutes les branches sont de même type, l'optimal sera atteint pour $a_i = a_j$. Ce ne devrait plus être vrai quand \mathcal{S} est formée de plusieurs branches avec des singularités différentes. Par contre, il semble raisonnable de conjecturer que la répartition des aires optimale devrait être la même pour toutes les capacités. La quantité

$$C_*(\mathcal{S}, k) = \max\{c_*(\mathcal{D}(\mathcal{S}, k, a_1, \dots, a_p)), \sum a_i = 2k\}, \quad * \in \{\text{HZ}, \text{ECH}, B, \dots\}$$

est alors une mesure symplectique de la complexité de la singularité \mathcal{S} . Elle fournit une obstruction symplectique à la réalisation de la singularité \mathcal{S} par une courbe de degré k dans une variété symplectique M de volume 1, puisqu'une telle courbe ne peut exister que si $C_*(\mathcal{S}, k) \leq c_*(M)$.

Question 5. *Peut-on relier les quantités $C_*(\mathcal{S}, k)$ à des invariants plus classiques de \mathcal{S} (comme le nombre de Milnor).*

Nous avons expliqué que le problème du plongement symplectique des domaines $\mathcal{D}(\mathcal{S}, k, a_1, \dots, a_n)$ dans \mathbb{P}^2 se ramène toujours à un problème d'empilement symplectique de boules, et que ce problème semble traitable algorithmiquement. On peut alors regarder si les obstructions obtenues fournissent des obstructions qui n'étaient pas connues du côté de la géométrie algébrique. Il faut noter ici que ces obstructions ne sont pas très différentes dans leur nature des obstructions algébriques classiques : elles proviennent *in fine* de courbes presque-complexe qui passent par la singularité avec un jet maximalelement tangent, tout comme dans l'approche algébrique. On ne peut cependant exclure que l'approche symplectique permette de détecter plus facilement ces courbes.

Lien entre l'inflation classique et l'inflation de Liouville. L'inflation de Lalonde-McDuff et l'inflation de Liouville telle que définie ici sont sans conteste de même nature. L'une utilise des courbes lisses dans un éclatement d'une variété M pour déformer des formes symplectiques et obtenir ainsi des plongements ; l'autre utilise des courbes singulières dans M pour plonger directement des domaines standards. Or une courbe singulière de M se désingularise dans un éclatement approprié (plus précisément une succession d'éclatements), donc sa transformée stricte dans cet éclatement peut servir à une inflation classique.

Soit C une polarisation de degré k dans M avec une singularité \mathcal{S} à p branches. Comme nous l'avons expliqué, $\mathcal{D}(\mathcal{S}, k, a_1, \dots, a_p)$ se plonge dans M . Soit (\hat{M}_p, \mathcal{C}) une résolution de \mathcal{S} , c'est-à-dire une succession d'éclatements pour laquelle la transformée stricte \hat{C} de C est lisse, munie du diviseur singulier \mathcal{C} qui correspond à la succession d'éclatements (on peut le voir comme le transformé total du point singulier dans \hat{M}). L'éclatement successif est réalisable par succession d'éclatements symplectiques, donc correspond à l'éclatement d'un domaine Ω_ε , formé d'une union de boules dans une position particulière. La courbe \hat{C} permet de réaliser une inflation, et l'effondrement donne le plongement d'un domaine $\Omega(\mathcal{S}, k)$ dans M .

Question 6. *Quel est le rapport entre les domaines $\mathcal{D}(\mathcal{S}, k, a_1, \dots, a_p)$ et $\Omega(\mathcal{S}, k)$?*

Les domaines $\Omega(\mathcal{S}, k)$ ont beaucoup moins de paramètres, et sont beaucoup plus faciles à déterminer. En fait l'argument donné dans la preuve de

la proposition 5.1, couplé à des arguments similaires à [McD09] (voir aussi l'appendice de ce manuscript) montre que dans les variétés de la classe \mathcal{C}^* , plonger un domaine $\Omega(\mathcal{S}, k)$ est équivalent à un problème d'empilements de boules. Lorsque le diviseur singulier forme une chaîne (c'est-à-dire que les composantes de \mathcal{S} intersectent une ou deux autres composantes), un calcul supplémentaire basé sur le lemme A.4 montre que le domaine $\Omega(\mathcal{S}, k)$ est un domaine torique concave, comme défini dans [CCF⁺13]. Cet article calcule les capacités ECH de ces domaines.

Notons aussi que les propositions 3.7, 3.9 et A.1 montrent que ces domaines coïncident parfois. Par exemple, lorsque \mathcal{S} est une singularité étoilée à $k\tau$ branches, $\mathcal{D}(\mathcal{S}, k, \tau, \dots, \tau) = B(\tau) = \Omega(\mathcal{S}, k)$ (la résolution de la singularité se fait en un éclatement et le diviseur singulier est un diviseur exceptionnel). De même, lorsque \mathcal{S} est un multi-cusp de type (p, q) à $k\tau$ branches, $\mathcal{D}(\mathcal{S}, k, \tau, \dots, \tau) = \tau E(p, q) = \omega(\mathcal{S}, k)$ (voir la proposition A.1 et sa preuve en appendice). Par contre, la proposition 3.6 montre que lorsque la singularité est simplement une croix, les domaines \mathcal{D} et Ω ne coïncident pas. Sans surprise, les domaines $\mathcal{D}(\mathcal{S}, k, a_1, \dots, a_p)$ semblent plus généraux, mais aussi plus difficiles à calculer. On peut encore se poser la question du lien avec la question 4 : est-ce que les domaines $\Omega(\mathcal{S}, k)$ coïncident toujours avec $\mathcal{D}(\mathcal{S}, k, (a_i))$ pour un certain choix de a_i , et si oui, est-ce que ce choix de a_i est le choix optimal du point de vue des capacités symplectiques ?

5.2 Recombinaisons d'ellipsoïdes

Le résultat principal de [McD09] est équivalent à l'énoncé suivant :

Théorème (McDuff). *Si $B(a) \sqcup E(a, b)$ se plonge symplectiquement dans \mathbb{P}^2 , alors $E(a, a + b)$ se plonge aussi.*

Ce théorème, avec la figure 5.1, suggère un énoncé du type :

$$E(a, b) \sqcup E(a, c) \xrightarrow{\omega} \mathbb{P}^2 \implies E(a, b + c) \xrightarrow{\omega} \mathbb{P}^2.$$

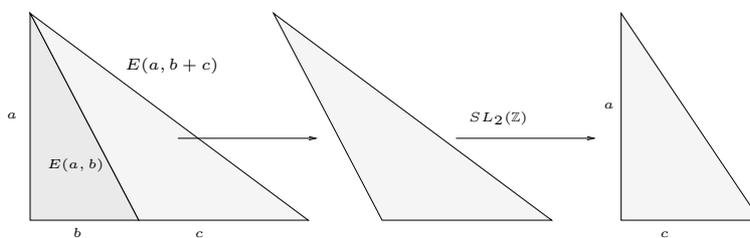


FIGURE 5.1 – Un ellipsoïde scindé en deux ellipsoïdes

Cet énoncé est évidemment faux dans $(S^2 \times S^2, \omega \oplus 4\omega)$, dans lequel on a deux ellipsoïdes $E(1, 2)$ qui ne se recombinent pas selon leur grand axe pour donner un ellipsoïde $E(2, 2) = B(2)$. Dans \mathbb{P}^2 , c'est un peu plus compliqué de trouver un contre-exemple, mais l'énoncé reste faux.

Exemple 5.3. *Il est immédiat de plonger $E(2, 3) \sqcup E(2, 1)$ dans $\mathbb{P}^2(3)$ (un plongement torique évident est disponible). Mais $E(2, 4)$ ne se plonge pas dans \mathbb{P}^2 car sa deuxième capacité de Ekeland-Hofer vaut 4 alors que celle de la boule vaut 3.*

On peut cependant démontrer le résultat suivant :

Proposition 5.4. *Soit $\varphi : E(a, b) \sqcup E(a, c) \xrightarrow{\omega} M$, $\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2 \subset M$ les images de ces ellipsoïdes, D_1, D_2 des disques symplectiques plongés dans $\partial\mathcal{E}_1, \partial\mathcal{E}_2$, dont le bord coincide avec $\varphi(S^1(a) \times \{0\})$. S'il existe un plongement symplectique de l'hypersurface $\psi : \mathbb{D}(a) \times [-1, 1] \hookrightarrow M \setminus (\mathcal{E}_1 \cup \mathcal{E}_2)$ tel que $\mathbb{D}(a) \times \{-1\} = \mathbb{D}_1$ et $\mathbb{D}(a) \times \{1\} = \mathbb{D}_2$, alors $E(a, b + c)$ se plonge symplectiquement dans M .*

En fait, en notant $\Sigma := \text{Im } \psi$, on vérifie que $E(a, b + c)$ se plonge dans un voisinage arbitraire de $\mathcal{E}_1 \sqcup \Sigma \sqcup \mathcal{E}_2$. Cette proposition est immédiate si $\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2$ sont des bidisques $\mathbb{D}(a) \times \mathbb{D}(b), \mathbb{D}(a) \times \mathbb{D}(c)$ (et $D_i = \mathbb{D}(a) \times \{*_i\}$, $*_1 \in \partial\mathbb{D}(b), *_2 \in \partial\mathbb{D}(c)$). En effet, un voisinage de $\mathcal{E}_1 \cup \Sigma \cup \mathcal{E}_2$ est dans ce cas symplectomorphe à $(\mathbb{D}(b) \cup \mathbb{D}(c) \cup \gamma) \times \mathbb{D}(a)$ où γ est un chemin qui joint les bords de $\mathbb{D}(b)$ et $\mathbb{D}(c)$. Cette figure contient donc évidemment une copie symplectique de $\mathbb{D}(b + c) \times \mathbb{D}(a)$.

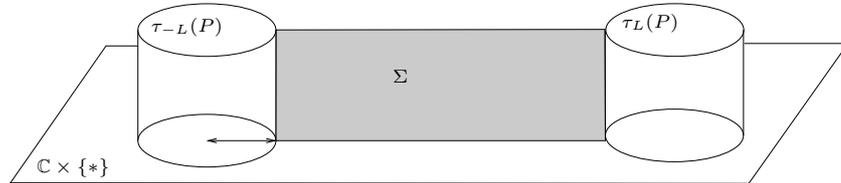


FIGURE 5.2 – Deux bidisques et leur connecteur.

La démonstration est quasiment identique pour les ellipsoïdes. Cette remarque a des applications (voir la \mathcal{C}^0 -rigidité de la réduction des hypersurfaces, partie 6.1), mais elle illustre surtout une remarque évidente : deux ellipsoïdes, s'ils sont reliés par un connecteur approprié, peuvent être combinés en un ellipsoïde plus gros. Le problème est de comprendre ce qu'est le connecteur minimal.

Conjecture 1. *On suppose que $E(a, b) \sqcup E(a, c) \xrightarrow{\omega} \mathbb{P}^2$, on note $\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2$ les images des ellipsoïdes et γ_1, γ_2 les cercles d'action a , images de $\partial E(a, c) \cap \{z_2 = 0\}$. S'il existe un plongement Lagrangien de $S^1 \times [-1, 1]$ dans $M \setminus (\mathcal{E}_1 \cup \mathcal{E}_2)$ qui est asymptotique à γ_1, γ_2 en $S^1 \times \{-1\}, S^1 \times \{1\}$, alors $E(a, b + c)$ se plonge dans M .*

Autrement dit, il doit exister des *connecteurs lagrangiens*, qui sont des tubes reliant les cercles caractéristiques de même action. Une façon d'attacher le problème est de prouver qu'on peut toujours remplir le tube Lagrangien $L \subset M$ par une hypersurface Σ qui connecte \mathcal{E}_1 et \mathcal{E}_2 . Il est facile de voir qu'un remplissage Σ de L par une hypersurface $\mathbb{D} \times [0, 1]$ asymptotique à D_1, D_2 est un connecteur si et seulement si les disques D_1, D_2 sont les extrémités d'une famille à un paramètre de disques symplectiques qui forment un feuilletage de Σ . On doit donc démontrer que le tube Lagrangien L , fermé par D_1, D_2 , borde une 3-boule dans $M \setminus (\mathcal{E}_1 \cup \mathcal{E}_2)$, et que cette boule est feuilletée par disques symplectiques. Pour cela, on remarque que les disques D_1, D_2 , à bord dans L ont un indice de Maslov 2, et qu'on a bien des familles à 1-paramètre locales près de D_1, D_2 , composées de disques symplectiques disjoints, qui remplissent L . On peut alors essayer d'utiliser les techniques de courbes holomorphes pour construire Σ . La difficulté est qu'on doit remplir une Lagrangienne ouverte, et que les problèmes de compacité ne se résument pas à étudier des "bubbling" à la Gromov : on doit aussi s'assurer que les bords des disques ne sortent pas de notre cylindre Lagrangien L . Pour l'instant, je ne sais pas démontrer la conjecture. Je peux seulement démontrer la chose suivante :

Proposition 5.5. *Sous les hypothèses de la conjecture 1, il existe une structure presque-complexe J sur $M \setminus (\mathcal{E}_1 \cup \mathcal{E}_2)$ et une famille à 1-paramètre de disques J -holomorphes $(D_t)_{t \in [1, 2]}$ telle que $\partial D_t \subset L \forall t$, D_t correspond aux familles standard pour $t \approx 0, 1$ (en particuliers cette famille est bien asymptotique à D_1, D_2).*

La preuve de cette propriété est assez technique. L'idée est d'éclater les ellipsoïdes de bord, pour compactifier la Lagrangienne. Celle-ci devient une sphère lagrangienne, qui intersecte transversalement deux diviseurs exceptionnels singuliers. Cet éclatement fournit naturellement une structure presque-complexe pour laquelle les disques J -holomorphes à bord dans \hat{L} n'intersectent pas les diviseurs singuliers, donc se projettent lors de l'effondrement sur des disques dans le complémentaire des ellipsoïdes. Comme les disques cherchés ont indice de Maslov 2, aire minimale parmi les disques à bord dans \hat{L} , et comme \hat{L} est maintenant une Lagrangienne fermée, les techniques de continuation de disques holomorphes à bord dans \hat{L} permettent de conclure.

Je ne sais pour l'instant pas démontrer que ces disques sont plongés, ou qu'ils ne s'intersectent pas. Par formule d'adjonction et positivité de l'intersection, il suffirait de prouver que les ∂D_t forment un feuilletage de L pour prouver la conjecture, mais ce point est délicat.

La conjecture 1 décrit un pont possible entre le monde des plongements symplectiques équidimensionnels et celui des plongements Lagrangiens. Si la stratégie de preuve esquissée ci-dessus fonctionne à terme, on aura une

traduction de tous les phénomènes de rigidité des plongements équidimensionnels en terme d'existence ou d'intersections de Lagrangiennes à bords. Par exemple :

1. Une boule $B^4(2)$ ne se plonge pas dans $Z(2 - \varepsilon) := \mathbb{D}(2 - \varepsilon) \times \mathbb{C}$ [Gro85]. En revanche, deux ellipsoïdes $E(2, 1)$ se plongent dans $Z(1)$. Les connecteurs Lagrangiens d'action 2 entre ces deux ellipsoïdes, dans \mathbb{C}^2 , ne se plongent pas dans le cylindre $Z(2 - \varepsilon)$.
2. Deux boules de taille $\frac{1}{2}$ dans \mathbb{P}^2 ont toujours une intersection. Il est facile en revanche de construire 4 ellipsoïdes $E(\frac{1}{2}, \frac{1}{4})$ disjoints, lisses jusqu'au bord, dans \mathbb{P}^2 : on considère 4 disques de taille $\frac{1}{2}$ dans une cubique lisse, leurs bassins de répulsion dans \mathbb{C}^2 pour une forme de Liouville tame sur le complémentaire de cette cubique, sont des ellipsoïdes $E(\frac{1}{2}, \frac{1}{3})$ dont les intérieurs sont disjoints, qui contiennent donc des ellipsoïdes $E(\frac{1}{2}, \frac{1}{4})$. On en conclut que les connecteurs Lagrangiens d'action $\frac{1}{2}$ entre des paires d'ellipsoïdes distinctes doivent s'intersecter. Il s'agit d'un phénomène d'intersections symplectique (pas topologique), qui semble délicat à obtenir par Homologie de Floer car même dans l'éclatement, les sphères lagrangiennes correspondantes n'ont aucune raison d'être monotones.

6 Géométrie symplectique \mathcal{C}^0

Dans cette partie, on s'intéresse à la question 2, que je rappelle :

Question 2. *Si un homéomorphisme symplectique f de (M, ω) envoie une sous-variété lisse N sur une sous-variété N' , existe-t'il un difféomorphisme symplectique qui fait de même ?*

Le premier résultat remonte à [LS94], et répond par l'affirmative pour les Lagrangiennes fermées.

Théorème (Laudenbach-Sikorav, 1994). *Si un homéomorphisme symplectique de (M, ω) envoie une sous-variété lagrangienne fermée L sur une sous-variété L' , L' est lagrangienne.*

D'après le théorème de Weinstein, le théorème ci-dessus garantit qu'il existe effectivement un difféomorphisme symplectique défini sur un voisinage de L , qui envoie L sur L' . Le prolongement de ce difféomorphisme à M n'est pas contre pas garanti (la lagrangienne image pourrait par exemple avoir un spectre différent, voir la question 9).

Le second résultat concerne les hypersurfaces, mais donne une réponse beaucoup plus partielle [Ops09] :

Théorème. *Sous les hypothèses de la question 2, si N est une hypersurface, f transporte le feuilletage caractéristique de N sur celui de N' .*

Ces deux résultats sont en fait des cas particuliers d'un phénomène bien plus général, mis en évidence dans [HLS13].

Théorème (Humilière-Leclercq-Seyffadini). *Sous les hypothèses de la question 2, si N est une sous-variété co-isotrope, alors N' est co-isotrope et f transporte le feuilletage caractéristique de N sur celui de N' .*

Rappelons que le feuilletage caractéristique d'une variété co-isotrope N^{2n-k} est le feuilletage de dimension k , engendré par la distribution $\ker \omega|_{TN}$. C'est un invariant classique évident puisqu'un difféomorphisme symplectique préserve ω , donc son noyau. Ce résultat garantit donc que notre homéomorphisme symplectique f préserve au moins la direction nulle de la forme symplectique, et que f agit sur la réduction de N . Informellement, la réduction consiste en l'ensemble des sous-variétés de N transverses au feuilletage caractéristique, identifiées lorsqu'elles sont images l'une de l'autre par le flot d'un champ de vecteur tangent à la direction caractéristique. Bien que f n'envoie pas une transverse $T \subset N$ sur une sous-variété de N , le fait que f préserve le feuilletage caractéristique permet d'associer à $f(T)$ une sous-variété lisse transverse, obtenue par glissement le long du feuilletage caractéristique. Cette action sur la réduction sera notée $\hat{f} : \text{Red } N \rightarrow \text{Red } N'$. Les éléments de la réduction sont naturellement équipés d'une forme symplectique. La question 2 se spécialise donc ainsi :

Question 7. *Lorsqu'un homéomorphisme symplectique h de M envoie une sous-variété coisotrope N sur une sous-variété lisse (donc co-isotrope) N' , la réduction \hat{f} de f associe-t-elle des éléments symplectomorphes ? Autrement dit, si $[U] \in \text{Red } N$, $\hat{f}([U])$ est-il symplectomorphe à $[U]$?*

Ces résultats et ceux que je vais exposer à présent pour les variétés co-isotropes tendent tous du côté de la rigidité : on ne fait rien de neuf avec des homéomorphismes symplectiques. On verra que c'est loin d'être le cas en général.

L'impression que ces questions sont complètement décorréées des questions de plongements symplectiques est trompeuse. L'étude des plongements symplectiques fournit des invariants quantitatifs des variétés symplectiques, qui permettent de "sonder" ces variétés. C'est l'approche adoptée dans [BO14] : nous établissons dans un certain nombre de situations ou bien une flexibilité, ou bien une rigidité qui s'exprime par exemple en terme de non-tassement relatif.

6.1 \mathcal{C}^0 -rigidité des coisotropes

Un résultat de non-tassement dans les hypersurfaces. Nous montrons dans [BO14] que la réduction de f vérifie la propriété de non-tassement.

Théorème 8 (avec L. Buhovski). *Soit f un homéomorphisme symplectique de M^{2n} qui envoie une hypersurface N sur une hypersurface lisse N' , et $\hat{f} : \text{Red } N \rightarrow \text{Red } N'$ sa réduction. On a :*

$$c^Z(\hat{f}([U])) \geq c_B([U]) \quad \forall [U] \in \text{Red } N.$$

Plus concrètement, si $[B(a)] \in \text{Red } N$ est une boule de capacité a , et si $\hat{f}([B(a)])$ se plonge dans $Z(A) = \mathbb{D}(A) \times \mathbb{R}^{2n-4}$, alors $A \geq a$.

Idee de la preuve : On considère une boule $[B(a)] \in \text{Red } N$, et on fait l'hypothèse que $\hat{f}([B(a)])$ se plonge dans le cylindre $Z(A)$ (si cette boule ne se plonge pas dans \mathbb{R}^{2n-2} , le terme de gauche de l'inégalité est infini, donc l'inégalité est triviale). Comme f préserve le feuilletage caractéristique, on a une trivialisaton $B(a) \times [-1, 1] \subset N$ du feuilletage caractéristique, qui est envoyé sur une trivialisaton $U \times [-1, 1] \subset N'$, où $U \xrightarrow{\omega} Z(A)$ par hypothèse. Ces trivialisations ont des voisinages normaux, et la restriction de f à un tel voisinage donne un homéomorphisme symplectique, encore noté f , défini sur un voisinage \mathcal{B} de $B(a) \times [-1, 1] \subset \mathbb{C}^{n-1} \times \mathbb{R} \subset \mathbb{C}^n$ à valeur dans un voisinage \mathcal{U} de $U \times [-1, 1] \subset Z(A) \times \mathbb{C}$. Cet homéomorphisme symplectique est approché par des difféomorphismes symplectiques $f_n : \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{U}$, qui s'étendent en des difféomorphismes symplectiques à support compact dans \mathbb{C}^n . Ceux-ci fournissent donc des plongements symplectiques de $B(a) \times \mathbb{R}$ dans \mathbb{C}^n standards à l'infini, et qui sont aussi près que voulu de $U \times [-1, 1]$ sur $B(a) \times [-1, 1]$. On notera Σ_n les images de ces plongements.

La première étape de la preuve, la plus technique et que je ne détaille pas ici, consiste à contrôler suffisamment les prolongements de f_n pour garantir que Σ_n intersecte l'hyperplan $H := \mathbb{C}^{n-1} \times i\mathbb{R}$ dans un voisinage arbitrairement proche de $U \times \{0\}$, donc que $\Sigma_n \cap H \subset Z(A) \times i\mathbb{R}$.

La seconde étape est une application de l'idée de connecteur. Pour $L \gg 1$, l'hypersurface $B(a) \times [-L, L]$ connecte les "bidisques" $P_{\pm} := \tau_{\pm L}(B(a) \times \mathbb{D}(a))$, où $\tau_{\pm L}$ désigne simplement la translation par le vecteur $\pm L \frac{\partial}{\partial x_n}$. En particulier, un voisinage arbitraire de $P_- \cup B(a) \times [-L, L] \cup P_+$ supporte une isotopie hamiltonienne qui échange P_- et P_+ . En transportant cette isotopie par f_n pour n assez grand, on obtient donc une isotopie entre P_- et P_+ supportée dans un voisinage arbitraire de $P_- \cup \Sigma_n \cup P_+$ (comme $L \gg 1$, P_{\pm} sont en dehors du support de f_n). Cette isotopie transporte donc P_- sur P_+ , à travers $Z(A) \times i\mathbb{R}$. Le théorème du chameau symplectique garantit donc que $A \geq a$ (car P_+ contient évidemment la boule de taille a). \square

C^0 -rigidité globale des hypersurfaces en dimension 4 Le théorème 8 n'apporte qu'un tout début de réponse à la question 7. Il ne garantit par exemple même pas que \hat{f} préserve le volume. Il assure tout de même que \hat{f} ne peut pas trop déformer la structure symplectique, ce qui, en vue du

théorème 12, n'est pas évident. D'autre part, il répond tout de même à la question 7 en dimension 4.

Corollaire 6.1. *Les bords des ellipsoïdes rationnels de dimension 4 sont \mathcal{C}^0 -rigides : si f est un homéomorphisme symplectique défini sur un voisinage de $\partial E(a, b)$, $a/b \in \mathbb{Q}$, et si $f(\partial E(a, b))$ est une hypersurface lisse N , alors N est symplectomorphe à $\partial E(a, b)$.*

Une façon de comprendre ce corollaire est la suivante. Certaines hypersurfaces de type contact dans des variété symplectiques de dimension 4 ont une section de la dynamique globale. Il s'agit d'une surface symplectique, dont le bord est une union de caractéristiques fermées, qui intersecte toutes les caractéristiques, et pour laquelle l'application de retour induite par le feuilletage caractéristique est un difféomorphisme qui préserve l'aire. Par exemple, $\partial E(a, b)$ vérifie cette propriété, la section est un disque, et l'application de retour est une rotation d'angle a/b .

Si N a une telle section globale de la dynamique P^N , et si f est un homéomorphisme symplectique qui envoie N sur N' , N' vérifie cette hypothèse, et $\hat{f}(P^N) = P^{N'}$ est un homéomorphisme qui préserve l'aire et qui conjugue les applications de retour du feuilletage caractéristiques $\varphi_N, \varphi_{N'}$. D'un autre côté, il est immédiat de voir que si il existe un *difféomorphisme* symplectique $\tilde{f} : P^N \rightarrow P^{N'}$ qui conjugue les applications de retour, les hypersurfaces N et N' sont symplectomorphes.

Question 8. *Quelles difféomorphismes symplectiques $\Phi : P \rightarrow P$ ont la propriété de rigidité dynamique suivante : si $\Phi' : P' \rightarrow P'$ est conjuguée à Φ par un homéomorphisme symplectique alors Φ' est conjugué à Φ par un difféomorphisme symplectique ?*

Cette question est évidemment très difficile dans le cas général, un peu plus abordable lorsque P est de dimension 2, et évidente lorsque Φ est périodique, comme c'est le cas pour les rotations rationnelles d'un disque (d'où le corollaire 6.1). Notons que les rotations irrationnelles n'ont pas toutes cette rigidité [FK04].

Une conjecture de non-tassement dans le cas co-isotrope. Dans [BO14], nous conjecturons que le théorème 8 reste vrai pour les sous-variétés co-isotropes.

Conjecture 2. *Soit f un homéomorphisme symplectique de M^{2n} qui envoie une co-isotrope N^{2n-r} sur une sous-variété lisse N' , et $\hat{f} : \text{Red } N \rightarrow \text{Red } N'$ sa réduction. On a :*

$$c^Z(\hat{f}([U])) \geq c_P([U]) \quad \forall [U] \in \text{Red } N.$$

Plus concrètement, si $[P(a)] \in \text{Red } N$ désigne un polydisque $\mathbb{D}(a)^{n-r}$ et si $\hat{f}([P(a)])$ se plonge dans $Z(A) = \mathbb{D}(A) \times \mathbb{C}^{n-r}$, alors $A \geq a$.

Suggestion de preuve : Nous suggérons dans [BO14] que la même preuve que celle du théorème 8 devrait fonctionner. Dans un premier temps, on produit sous les hypothèses de la conjecture, un homéomorphisme symplectique défini sur un voisinage \mathcal{P} de $P(a) \times [-1, 1]^r \subset \mathbb{C}^{n-r} \times \mathbb{R}^r \subset \mathbb{C}^n$ à valeur dans un voisinage \mathcal{U} de $U \times [-1, 1]^r \subset Z(A) \times \mathbb{C}^r$. Cet homéomorphisme symplectique est approché par des difféomorphismes symplectiques $f_n : \mathcal{P} \rightarrow \mathcal{U}$, qui s'étendent en des difféomorphismes symplectiques à support compact dans \mathbb{C}^n . Ceux-ci fournissent donc des plongements symplectiques de $P(a) \times \mathbb{R}^r$ dans \mathbb{C}^n standards à l'infini, et qui sont aussi près que voulu de $U \times [-1, 1]^r$ sur $P(a) \times [-1, 1]^r$. On note Σ_n les images de ces plongements.

C'est la première étape de la preuve qui est conjecturale. Elle consiste encore à contrôler suffisamment les prolongements de f_n pour garantir que Σ_n intersecte $H := \mathbb{C}^{n-r} \times i\mathbb{R}^r$ dans un voisinage arbitrairement proche de $U \times \{0\}$, donc que $\Sigma_n \cap H \subset Z(A) \times i\mathbb{R}^r$. Ce contrôle nécessite une version quantitative de h -principe pour les sous-variétés strictement isotropes (voir [BO14] pour plus de détails).

Dans la seconde étape, on ne considère que le bord distingué $L_n \stackrel{\omega}{\approx} S^1(a)^{n-r} \times \mathbb{R}^r \subset \partial\Sigma_n$ (comme dans [HL13]). Il s'agit d'une Lagrangienne, de spectre $a\mathbb{Z}$. La conjecture suit alors d'un analogue lagrangien du théorème du chameau symplectique :

Théorème 9. *Soit L l'image d'un plongement lagrangien de $S^1(a)^{n-r} \times \mathbb{R}^r$ qui est standard à l'infini et qui intersecte $H := \mathbb{C}^{n-r} \times i\mathbb{R}^r$ seulement à l'intérieur de $Z(A)^{n-r} \times i\mathbb{R}^r$. Alors $A \geq a$.*

L'idée de la preuve de ce théorème est, comme dans le cas des isotopies de boules, de remplir $\partial Z(A)^{n-r} \times i\mathbb{R}^r$ par des disques J -holomorphes en utilisant la technique d'Eliashberg [Eli87]. Nos hypothèses sur L impliquent que L est noué à $\partial Z(A) \times i\mathbb{R}^r$, donc l'un des disques (d'aire A) doit intersecter L . On étire ensuite le cou le long de notre Lagrangienne pour produire un tel disque qui intersecte presque L le long d'un cercle d'action a . On en déduit l'inégalité voulue (voir [BO14] pour les détails). \square

Et les Lagrangiennes ? Les sous-variétés Lagrangiennes n'ont pas de réduction (ou plutôt, la réduction est un point, sans masse). On peut cependant leur associer des invariants numériques, par exemple en mesurant l'aire des disques symplectiques à bords dans la Lagrangienne. L'ensemble de ces nombres est appelé le spectre de la Lagrangienne.

Théorème 10 (avec L. Buhovski). *Soit L un tore Lagrangien dans M^{2n} et f un homéomorphisme symplectique qui associe à L une sous-variété L' lisse, donc Lagrangienne par [HLS13]. Le spectre de L coïncide avec celui de L' . Plus précisément, si $[\gamma] \in \pi_1(L)$ borde un disque dans M , $f(\gamma)$ borde un disque de même aire.*

La preuve est facile, mais utilise de façon cruciale l'hypothèse que L est un tore.

Question 9. *Le spectre d'une Lagrangienne est-il préservé par homéomorphisme symplectique.*

6.2 Flexigidité des sous-variétés symplectiques

Lorsqu'on s'intéresse aux rigidité des sous-variétés symplectiques, la situation est très différente. Nous montrons dans [BO14] que la rigidité n'apparaît qu'en codimension 2, sous l'hypothèse supplémentaire que l'image est aussi symplectique (nous pensons cette hypothèse indispensable).

Théorème 11 (avec L. Buhovski). *Si un homéomorphisme symplectique f envoie une variété symplectique N de codimension 2 sur une sous-variété symplectique N' , alors*

$$c^Z(h(U)) \geq c_B(U) \quad \forall U \subset N.$$

Autrement dit, si $B^{2n-2}(a) \hookrightarrow N$, alors $h(B(a)) \subset N'$ ne peut se plonger symplectiquement dans $Z^{2n-2}(A) := \mathbb{D}(A) \times \mathbb{C}^{n-2}$ que si $A \geq a$: la restriction de f à N vérifie le théorème de non-tassement.

En codimension 4 ou plus par contre, on a enfin de la flexibilité pour les homéomorphismes symplectiques, qui peuvent agir de façon à peu près arbitraire (au moins localement).

Théorème 12 (avec L. Buhovski). *Si $m \geq 2$, il existe un homéomorphisme symplectique à support compact dans un voisinage arbitraire de $\mathbb{D}(1)^{n-m} \times \{0\} \subset \mathbb{C}^n$ qui vérifie :*

$$h|_{\mathbb{D}(1)^{n-m} \times \{0\}_m} = \frac{1}{2} Id.$$

Bien que ce théorème apparaissent en dernier, après une série de théorème de C^0 -rigidité, il implique que la C^0 -flexibilité est la norme. Toutes les sous-variétés - sauf peut-être les isotropes - qui sont incluses dans une variété symplectique de codimension 4 sont C^0 -flexibles : on peut diminuer l'aire d'un disque symplectique à l'intérieur de cette sous-variété par un homéomorphisme symplectique qui la préserve. C'est le cas de presque toutes les sous-variétés de codimension suffisante, sauf précisément les sous-variétés co-isotropes. Le paragraphe suivant décrit une façon de formaliser cette discussion.

Flexigidité à la Eliashberg-Gromov

Question 10. *Soit f un homéomorphisme symplectique de M qui se restreint à une sous-variété en un plongement (donc $f(N)$ est une sous-variété et $f|_N$ est un difféomorphisme). La restriction de f à N est-elle symplectique (lorsque N n'est pas symplectique, cela signifie que $f^*\omega|_N = \omega|_{N'}$) ?*

Rappelons que le théorème d’Eliashberg-Gromov est une conséquence immédiate du théorème de non-tassement (voir par exemple [HZ94]). Les énoncés de rigidité énoncés précédemment donne donc des réponses à cette question très facilement. Les théorèmes 8, 11, 12 et les méthodes développées permettent de répondre à cette question (ou de deviner une réponse) dans pratiquement tous les cas. Commençons par préciser le contexte.

Définition 6.2. *Une sous-variété $N \subset (M^n, \omega)$ est dite présymplectique si le rang de la forme symplectique, restreinte à N , est constant. Le corang r de $\omega|_{TN}$ et la dimension k de N sont des invariants symplectiques classiques de ces sous-variétés. Ces sous-variétés sont localement symplectomorphes à $B^{k-r}(\varepsilon) \times [-1, 1]^r$.*

Toute sous-variété est présymplectique sur un ouvert dense, mais le rang de la forme symplectique peut évidemment varier d’une composante connexe à l’autre de cet ouvert. Notons aussi que $k - r$ doit être pair, et qu’une sous-variété présymplectique de dimension k et de corang r se plonge localement dans une sous-variété symplectique de dimension $k+r$. Pour une sous-variété présymplectique de dimension k et de corang r , on obtient les réponses suivantes à la question 10 :

$k + r = 2n$: C’est le cas des variétés co-isotropes, la réponse est positive (on peut se passer de la conjecture 2).

$k + r \leq 2n - 4$: C’est le cas où N se prolonge localement en une sous-variété symplectique de codimension 4. Lorsque N n’est pas isotrope ($k \neq r$), le théorème 12 donne une réponse négative.

$k = r, k \neq n$: C’est le cas des sous-variétés isotropes non-Lagrangiennes. Les techniques développées pour prouver le théorème 12 devraient permettre de construire des homéomorphismes symplectiques qui envoient ces variétés sur des sous-variétés avec $r = k - 2$ (donc non-isotropes), tout en restant lisse sur N . Nous conjecturons donc une réponse négative à la question 10 dans ce cas.

$k + r = 2n - 2$: Lorsque $r = 0$, c’est le cas des hypersurfaces symplectiques, pour lesquelles la réponse est positive par le théorème 11. Lorsque $r \geq 2$, les mêmes techniques que pour le cas précédent devraient montrer que la réponse est négative. Lorsque $r = 1$ par contre, nous n’avons aucune idée de la réponse. La situation locale est celle du produit d’une sous-variété symplectique de codimension 4, qui est flexible, par un intervalle, qui rigidifie la situation. Il semble ainsi très compliqué de rendre l’homéomorphisme symplectique du théorème 12 lisse sur un ensemble de codimension 3.

6.3 h -principe quantitatif en géométrie symplectique

La preuve du théorème 12 (la flexibilité en codimension 4) utilise de façon cruciale un théorème de type h -principe quantitatif. En mettant de côté au

maximum les aspects techniques de cette preuve, le résultat de base est le suivant :

Théorème 13. *Si $i_0, i_1 : \mathbb{D}(0) \rightarrow V \subset \mathbb{C}^3$ désignent des plongements symplectiques du disque de même aire, i_0 est un plongement standard ($i_0(z) = (z, 0, 0)$), il existe $\varepsilon_0(V)$, tel que $\forall \varepsilon < \varepsilon_0$, si $d_{\mathcal{C}^0}(i_0, i_1) < \varepsilon$, il existe un difféomorphisme hamiltonien h à support dans V , tel que $h \circ i_1 = i_0$, et $d_{\mathcal{C}^0}(h, Id) < C\varepsilon$, où C est une constante universelle.*

L'énoncé est légèrement technique, mais on peut le résumer ainsi : les résultats de type h -principe en géométrie symplectique garantissent que deux disques symplectiques de même aire dans une variété connexe sont hamiltonniennement isotopes. La preuve consiste à trouver une isotopie de disques symplectiques D_t , de considérer un hamiltonien $H(x, t)$ qui réalise le champ de vecteur de l'isotopie en restriction au disque, et de multiplier ce hamiltonien par une fonction cloche centrée en D_t . Mais ce processus de cut-off induit une perte totale de contrôle du difféomorphisme hamiltonien global, qui peut être très loin de l'identité. La preuve de ce théorème est une version contrôlée de cette idée. Le contrôle s'obtient avec une perte de dimension : le h -principe pour les disques symplectique est valable dès la dimension 4 (en dimension 2 aussi, mais pour une raison différente), mais seulement à partir de la dimension 6 dans sa version contrôlée. Les détails de la preuve sont disponibles dans [BO14].

De façon générale, ces théorèmes de type h -principe quantitatifs permettent de contrôler des prolongements de Hamiltoniens, ou de plongements symplectiques.

Conjecture 3. *L'énoncé du théorème 13 est valable lorsque i_0 est le plongement isotrope standard de $[-1, 1]^r$ défini par $i_0(t) = (t, 0) \in \mathbb{C}^r \times \mathbb{C}^{n-r}$ et i_1 est un plongement isotrope de $[-1, 1]$, dès que $r \leq n - 1$.*

Cet énoncé est vrai pour $r = 1$ (il fait partie de la preuve du théorème 13), et il est à la base de la première étape dans la preuve du théorème 8. La généralisation en dimension quelconque, qui me semble raisonnable, fournira une preuve de la conjecture 2 et la réponse à la question 10 dans tous les cas non encore prouvés, sauf $k + r = 2n - 2$, $r = 1$.

6.4 Vers une géométrie symplectique \mathcal{C}^0

Les résultats de rigidité/flexibilité \mathcal{C}^0 fournissent évidemment des résultats sur la géométrie symplectique classique : en fournissant des obstructions à approcher certains homéomorphismes par des difféomorphismes symplectiques, ils nous renseignent sur la morphologie des transformations symplectiques. Mais ces résultats peuvent aussi s'interpréter un peu différemment. Ils montrent que la géométrie des homéomorphismes symplectiques, appelée *géométrie symplectique \mathcal{C}^0* dans ce mémoire, est peut-être intéressante en soi.

Il s'agit d'une géométrie réellement différente de la géométrie symplectique classique (théorème 12), qui conserve cependant certaines de ses propriétés (théorèmes 11, 8). Les homéomorphismes symplectiques font donc un tri parmi les invariants symplectiques, et montrent en quelque sorte un coeur à la topologie symplectique.

Si on souhaite considérer la géométrie symplectique \mathcal{C}^0 , il faut comprendre quels sont les objets naturels sur lesquels elle agit.

Question 11. *Quels sont les objets naturels de la géométrie symplectique \mathcal{C}^0 . Par exemple, qu'est-ce qu'une Lagrangienne \mathcal{C}^0 , qu'est-ce qu'une sous-variété co-isotrope \mathcal{C}^0 (ou même y-a-t'il une notion plus générale d'ensemble co-isotrope), qu'est-ce qu'un feuilletage caractéristique \mathcal{C}^0 ... ?*

Dans [HLS13], les auteurs définissent les Lagrangiennes \mathcal{C}^0 comme les images des variétés Lagrangiennes sous homéomorphismes symplectiques, Mais cette définition ne répond pas réellement à la question 11 parce qu'elle ne donne pas de définition intrinsèque de ces objets. Une autre tentative peut être extraite de [HLS13], consistant à définir une Lagrangienne comme un ensemble de dimension topologique n , non-localement déplaçable avec énergie nulle. Une fois définies les Lagrangiennes, le feuilletage caractéristique d'une coisotrope N devrait pouvoir se définir comme les intersections des Lagrangiennes locales dans N . Mais ce ne sont que des ébauches de définition, qui méritent à mon avis une réflexion plus poussée.

A Plongements d'ellipsoïdes : éclatements singuliers

Le but de cette partie est d'expliquer une généralisation de la procédure d'éclatement aux plongements d'ellipsoïdes : comment l'existence du plongement d'un ellipsoïde découle de l'existence d'une forme symplectique sur un éclatement, non-dégénérée sur un diviseur singulier. Précisément

Proposition A.1 (McDuff). *Soit $p, q \in \mathbb{N}$ premiers entre eux. Il existe un entier $P(p, q)$, des rationnels $(w_i(p, q))_{i=1, \dots, P}$ et une chaîne $\mathcal{S}(p, q)$ de P courbes plongées dans \hat{M}_P , qui contient un diviseur exceptionnel E_P , tels que :*

1. *Si l'ellipsoïde fermé $\tau E(p, q)$ se plonge dans M , il existe une forme symplectique $\hat{\omega}_\tau$ sur \hat{M}_P dans une classe $[\pi^*\omega] - \tau \sum (w_i + \delta_i)e_i$ ($\delta_i > 0$), non-dégénérée sur \mathcal{S} .*
2. *S'il existe des formes symplectiques $(\omega_t)_{t \in [0, 1]}$ dans des classes $[\omega_t] = [\pi^*\omega] - f(t) \sum (w_i + \delta_i(t))e_i$, $f(1) = \tau$, $\delta_i(t) > 0$, qui déforment $\omega_0 = \hat{\omega}_\varepsilon$ (ou $\hat{\omega}_\varepsilon$ est défini en 1), et qui sont non-dégénérées sur \mathcal{S} , alors $\tau E(p, q)$ se plonge dans M .*

On peut bien sur préciser : \mathcal{S} est le diviseur singulier associé à une résolution de la singularité $z^p = w^q$ (voir A.1). Les nombres w_i sont déterminés en écrivant $\mathcal{S} = (S_i)$ ($S_P = E_P$), par les équations

$$\begin{aligned} -(\sum w_i e_i) \cdot E_P &= 1 & \text{donc } w_P &= 1, \\ -(\sum w_i e_i) \cdot S_i &= 0 & \forall i \leq P-1. \end{aligned}$$

Comme pour la proposition 2.1, on va démontrer que si la classe

$$[\pi^*\omega] - \tau \sum (w_i + \delta_i)e_i$$

est représentée par une forme symplectique, il existe une forme symplectique ω_τ sur M avec $[\omega_\tau] = [\omega]$, pour laquelle $\tau E(p, q)$ se plonge symplectiquement. Sous l'hypothèse supplémentaire de déformation, on a une déformation de formes cohomologues sur M , donc ω_τ est isotope à ω , donc $\tau E(p, q) \xrightarrow{\omega} M$. Finalement, l'hypothèse de déformation est toujours vérifiée dans la pratique car la forme $\hat{\omega}_\tau$ s'obtient par inflation. Il reste donc à se focaliser sur l'énoncé ci-dessous :

Proposition A.2. *La variété \hat{M}_P admet une forme symplectique dans une classe $[\pi^*\omega] - \tau \sum (w_i + \delta_i)e_i$, $\delta_i > 0$, non-dégénérée sur \mathcal{S} si et seulement si M admet une forme symplectique cohomologue à ω pour laquelle $\tau E(p, q)$ se plonge.*

Il s'agit d'un problème relativement simple, mais le traiter correctement permet de l'utiliser efficacement. Dans [McD09], McDuff obtient cet énoncé par une procédure d'approximation intérieure/extérieure, couplée à un argument d'unicité du remplissage symplectique en dimension 4. Nous renvoyons à l'article original pour cette approche, et en présentons une autre.

A.1 Éclatement d'un ellipsoïde

Nous montrons ici un sens de la proposition A.2 : si $\tau E(p, q)$ se plonge alors \hat{M}_P admet une forme symplectique dans la classe requise. On se place dans le cadre des variétés symplectiques rationnelles pour simplifier la preuve. Le théorème 4 garantit alors que l'existence d'un ellipsoïde $\tau E(p, q)$ est équivalent à l'existence d'une polarisation Σ de degré k , qui a une singularité multi-cusp d'équation locale dans une carte symplectique :

$$\prod_{i=1}^{k\tau} (z^p - \alpha_i w^q). \quad (\text{A.1})$$

Une résolution (classique) de cette singularité est une succession d'éclatements qui désingularisent cette singularité : le transformé strict de Σ , noté $\hat{\Sigma}$, est lisse et intersecte les diviseurs d'éclatements transversalement. Ces diviseurs d'éclatements sont en général un ensemble de $-\ell_i$ -sphères holomorphes qui s'intersectent transversalement. Comme la singularité est standard dans une carte de Darboux, on peut réaliser cette succession d'éclatements par des éclatements symplectiques de boules plongées isométriquement. L'effet est de construire une forme symplectique sur l'éclatement, dans la classe

$$[\pi^* \omega] - \sum \varepsilon e_i$$

pour laquelle le diviseur d'éclatement est un diviseur singulier au sens de la définition 4.1.

On peut calculer explicitement la résolution de la singularité (A.1) : le diviseur singulier est une chaîne, avec exactement un diviseur exceptionnel E_p (une -1 -sphère), et la résolution $\hat{\Sigma}$ est une courbe symplectique plongée, dans une classe

$$kA := k(\pi^* \omega - \tau \sum_{i=1}^p w_i(p, q) E_i) \in H_2(\hat{M}),$$

qui intersecte E_p en $k\tau$ points, et n'intersecte pas les autres composantes du diviseur singulier (donc les w_i sont bien donnés par le système d'équation annoncé). Une inflation classique le long de C fournit une structure symplectique sur cet éclatement \hat{M}_p de M , dans une classe

$$\pi^* \omega - \tau \sum \frac{\varepsilon_i + tkw_i}{1 + kt} e_i = \pi^* \omega - \tau \sum (\delta_i(t) + \frac{tk}{1 + kt} w_i) e_i \approx \text{PD}(A).$$

Sous l'hypothèse que l'ellipsoïde fermé $\tau E(p, q)$ se plonge dans M , un ellipsoïde légèrement plus grand $\tau' E(p, q)$ se plonge aussi, donc on peut réaliser la classe

$$\pi^* \omega - \tau' \sum (\delta'_i(t) + \frac{tk}{1 + kt} w_i) e_i = \pi^* \omega - \tau \sum (\delta_i(t) + \frac{\tau'}{\tau} \frac{tk}{1 + kt} w_i) e_i.$$

□

Réciproquement, si on a une structure symplectique $\hat{\omega}$ sur l'éclatement \hat{M}_p décrit ci-dessus, dans la classe requise, qui donne donc une aire τ au diviseur exceptionnel, la construction de Donaldson produit une courbe Poincaré-Duale à $k\hat{\omega}$, qu'on peut forcer à intersecter E_p transversalement et positivement (donc en $k\tau$ points). L'effondrement de cette courbe fournit une courbe symplectique de degré k dans M , qui a une singularité isolée, avec une équation locale

$$\prod_{i=1}^{k\tau} (z^p - \alpha_i w^q) \cdot Q,$$

où Q est un polyôme inconnu. La singularité est donc plus compliquée qu'une singularité multi-cusp. Si on savait scinder cette singularité en ne gardant que la composante multi-cusp, on pourrait alors effectuer l'inflation de Liouville correspondante et obtenir notre ellipsoïde. Bien que ce scindement existe certainement, je ne sais pas le faire, donc je donne une autre preuve pour la réciproque dans le paragraphe suivant.

On peut préciser légèrement la preuve précédente. Un calcul explicite montre que lorsqu'on dispose d'une polarisation avec une singularité multi-cusp du type (A.1), les axes de l'ellipsoïde sont exactement les axes $\{z = 0\}$, $\{w = 0\}$. En gardant la trace de ces axes dans la désingularisation, on voit que les courbes de M qui intersectent l'ellipsoïde le long d'un axe sont celles dont la transformée stricte intersecte l'une des composantes du diviseur singulier positivement et transversalement. On obtient donc la proposition suivante, qui est la clé du théorème 6. On détaille une autre preuve de cette proposition dans le paragraphe A.3

Proposition A.3. *Soit \mathcal{S} le diviseur singulier associé à l'éclatement d'un ellipsoïde $E \subset M$. Soit C une courbe qui intersecte E le long d'un grand axe. Alors $\mathcal{S} \cup C$ est un diviseur singulier au sens de la définition 4.1.*

A.2 Effondrements d'un diviseur singulier

L'effondrement d'un diviseur singulier est un procédé itératif, basé sur le lemme suivant :

Lemme A.4. *Soit M une variété symplectique, contenant une boule symplectique de taille $a + \delta$, soit $(\hat{M}, \hat{\omega})$ la variété obtenue en éclatant cette boule, et E le diviseur exceptionnel associé. On suppose que \hat{M} contient un ellipsoïde $\mathcal{E}(a, b)$ dont l'intersection avec E est exactement l'axe d'aire a de $\mathcal{E}(a, b)$. Alors M contient un ellipsoïde $\mathcal{E}(a, a + b)$. En fait, M contient un plongement symplectique de*

$$T(a, \delta, b) := B(a + \delta) \cup \mathcal{E}(a, a + b) \quad (\text{voir figure A.3}).$$

Une fois ce lemme établi, le fait que l'effondrement d'un diviseur singulier donne un ellipsoïde est un argument simple, basé sur un dessin.

Deux exemple d'effondrements de diviseur singulier Commençons par $\mathcal{E}(2, 1)$. Dans ce cas, $\mathcal{S} = (S_1, E_2)$, avec $[S_1] = [E_1 - E_2]$. La forme ω_τ donne une aire $\tau + \delta_2$ à E_2 et δ_1 à E_1 . L'effondrement de E_2 (noté π_2) donne donc une boule de taille $\tau + \delta$ qui intersecte $E_1 = \pi_2(S_1)$ exactement le long d'un axe. L'effondrement de π_1 de E_1 produit alors un ellipsoïde $\tau E(2, 1)$ d'après le lemme précédent.

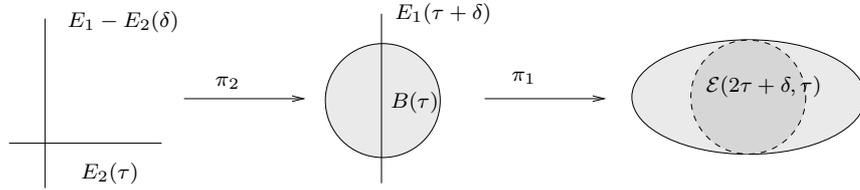


FIGURE A.1 – Diviseur singulier de $E(2, 1)$ et son effondrement

Considérons maintenant $E(3, 2)$. Dans ce cas, le diviseur singulier est une chaîne de trois sphères (S_1, S_2, E_3) , où $[S_1] = [E_1 - E_2 - E_3]$, $[S_2] = [E_2 - E_3]$, et la forme donne une aire $\tau + \delta_3$ à E_3 . L'effondrement de E_3 fournit une boule de taille $\tau + \delta_3$ qui intersecte les diviseurs $\pi_3(S_1), \pi_3(S_2)$ le long de disques de Hopf (qu'on peut décider orthogonaux pour la forme symplectique au centre de la boule), avec $[\pi_3(S_1)] = [E_1 - E_2]$ et $[\pi_3(S_2)] = E_2$. En appliquant le lemme précédent une première fois, on obtient donc par effondrement de E_2 un ellipsoïde $\tau E(2, 1)$, dont l'intersection avec $\pi_2 \circ \pi_3(S_1)$ est le grand axe. Cette courbe est un diviseur exceptionnel (dans la classe $[E_1]$). Son effondrement fournit alors un ellipsoïde $E(2, 2 + 1) = E(2, 3)$ dans M .

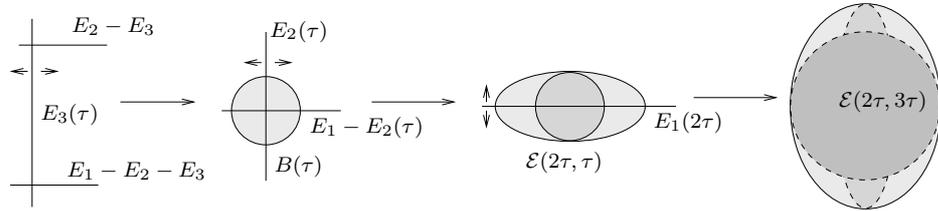


FIGURE A.2 – Diviseur singulier de $E(2, 3)$ et son effondrement

Preuve du lemma A.4 : On doit pouvoir prouver ce lemme de différentes façons, en particulier en restant dans le cadre torique (voir figure A.3). L'approche ci-après est différente.

Le problème est local : on cherche à montrer qu'un voisinage de l'effondrement de l'ellipsoïde contient $T(a, b, \delta)$, donc on peut le faire dans n'importe quelle variété ambiante. Considérons $\mathbb{P}^2(M)$, $M \gg 1$, vue comme la compactification de $B^4(M)$, dans lequel on a donc un diviseur L_∞ privilégié (le diviseur à l'infini, autrement dit $B^4(M) = \mathbb{P}^2(M) \setminus L_\infty$). Eclatons la boule standard $B^4(a + \delta) \subset B^4(M) \subset \mathbb{P}^2(M)$. On obtient une forme symplectique sur $\hat{\mathbb{P}}_1^2$, avec un feuilletage en courbes symplectiques dans la classe $[L_\infty - E] \in H_2(\hat{\mathbb{P}}_1^2)$ (E est le diviseur exceptionnel). Soient N, S deux points distincts de E , \hat{L}_N, \hat{L}_S les deux courbes de ce feuilletage passant par N, S . On considère alors la polarisation de $\hat{\mathbb{P}}_1^2$

$$\Sigma := (\hat{L}_N, \delta), (\hat{L}_S, a), (L_\infty, M - a - \delta),$$

une forme de Liouville tempérée $\hat{\lambda}$ associée à cette polarisation, et $X_{\hat{\lambda}}$ son champ de Liouville.

Fait A.5. *On peut imposer que $X_{\hat{\lambda}}$ est tangent à E .*

Comme $\mathcal{A}_\omega(\hat{L}_S) = [\omega](L - E) = M - a - \delta \gg 1$, on a un disque $\hat{D} \subset \hat{L}_S \setminus L_\infty$ d'aire b , qui contient le point $S = \hat{L}_S \cap E$. D'après la proposition 3.5, son bassin de répulsion est un ellipsoïde $\mathcal{E}(a, b)$, dont on vérifie sans difficulté que l'intersection avec E est l'axe de taille a .

On effondre alors E , avec une application d'effondrement $\pi : \hat{\mathbb{P}}_1^2 \rightarrow \mathbb{P}^2 \setminus B^4(a + \delta)$. Les courbes \hat{L}_N, \hat{L}_S se projettent sur des disques, qu'on peut fermer avec des disques de Hopf de $B^4(a + \delta)$ pour obtenir des droites projectives L_N, L_S . L'effondrement $\pi(\hat{D})$ est un anneau, qu'on peut aussi fermer dans L_S en un disque D d'aire $b + a + \delta$.

Fait A.6. *La forme $\pi_*\lambda$, définie sur $(\mathbb{P}^2 \setminus B^4(a + \delta)) \setminus (L_\infty \cup L_N \cup L_S)$ se prolonge en une forme de Liouville tempérée λ sur $\mathbb{P}^2 \setminus (L_N \cup L_S \cup L_\infty)$, de résidus $\delta, a, M - a - \delta$ respectivement.*

Notons que $\pi_*\hat{\lambda}$ est tangent à $\partial B^4(a + \delta)$, donc $B^4(a + \delta)$ est invariant par le flot de X_λ . La situation est donc la suivante. L'effondrement de $\mathcal{E}(a, b)$ est constitué de $\pi(\mathcal{E}(a, b))$ et de $B^4(a + \delta)$, qui sont tous deux invariants par le flot de X_λ , et il contient deux disques $D \subset L_S$ et $D' \subset L_N$, d'aires $a + b + \delta$ et $a + \delta$ respectivement. L'effondrement de $E(a, b)$ contient donc le bassin de répulsion de la croix $D \cup D'$. La proposition 3.6 permet de conclure. \square

Remarque A.7. *Dans la preuve ci-dessus, une courbe \hat{C} dans \hat{M} qui intersecte positivement et transversalement E en un point, hors de $E(a, b)$. L'effondrement de \hat{C} fournit une courbe qui intersecte $T(a, b, \delta)$ (et donc $\mathcal{E}(a, a + b)$) le long de l'axe d'aire $a + \delta$ (respectivement, a). Si \hat{C} intersecte $\mathcal{E}(a, b)$ selon l'axe d'aire b , C intersecte $\mathcal{E}(a, a + b)$ selon l'axe d'aire $a + b$. Finalement, si \hat{C} combine ces deux intersections, C intersecte $\mathcal{E}(a, a + b)$ exactement le long de ses deux axes.*

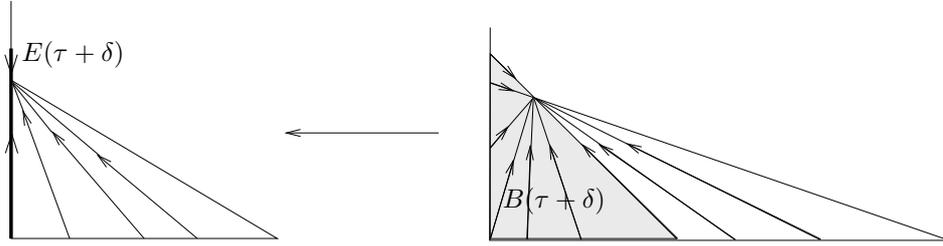


FIGURE A.3 – Effondrement d'un ellipsoïde, avec son flot de Liouville

A.3 Aspect algorithmique de l'éclatement d'un ellipsoïde

Dans la partie A.2, les figures A.1 et A.2 décrivent l'effondrement d'un diviseur singulier de manière algorithmique. En inversant, on obtient une présentation algorithmique de l'éclatement d'un ellipsoïde, que j'explique maintenant sur l'exemple de l'éclatement d'un ellipsoïde $E(2, 5)$. Le calcul effectué dans le paragraphe précédent justifie exactement que les dessins ci-dessous sont justifiés. L'algorithme est illustré par la figure A.4. Les commentaires sur chaque étape sont donnés ci-dessous.

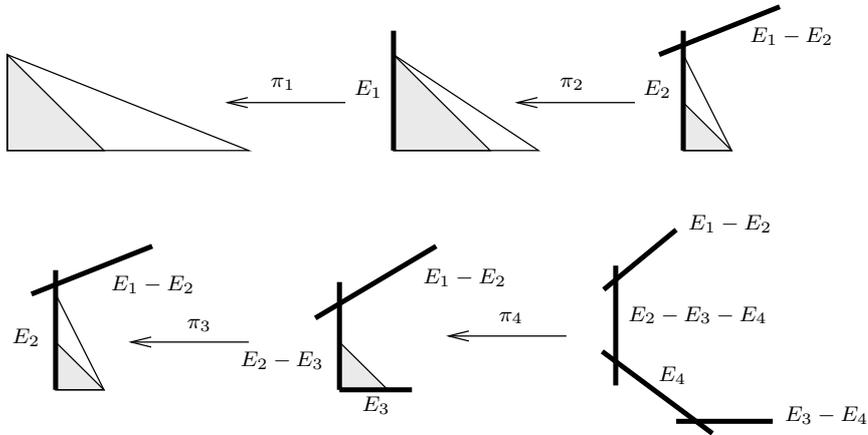


FIGURE A.4 – Eclatement de $E(2, 5)$ et son diviseur singulier

1. On éclate $B(2) \subset \mathcal{E}(5, 2)$, avec pour résultat un diviseur exceptionnel E_1 et un ellipsoïde $\mathcal{E}(3, 2)$. Le diviseur E_1 intersecte $\mathcal{E}(3, 2)$ le long de son grand axe,
2. On éclate $B(2) \subset \mathcal{E}(3, 2)$, avec pour résultat un diviseur E_2 et un ellipsoïde $\mathcal{E}(1, 2)$. Comme E_1 est un disque de Hopf de $B(2)$, son transformé sous l'éclatement intersecte E_2 en un point, et sa classe est $E_1 - E_2$. Comme le complémentaire de $B(2)$ ne rencontre pas E_1 , $\mathcal{E}(1, 2)$ n'intersecte pas $E_1 - E_2$ (rappel : on éclate toujours des boules légèrement

- plus grosses, comme dans la figure A.3). Encore, $\mathcal{E}(1,2)$ intersecte E_2 le long de son grand axe,
3. On éclate $B(1) \subset \mathcal{E}(1,2)$, avec pour résultat un diviseur exceptionnel E_3 et une boule $B(1)$. Comme dans l'étape précédente, le transformé strict de E_2 est $E_2 - E_3$, et comme il intersecte $\mathcal{E}(1,2) \setminus B(1)$ le long d'un axe, $E_2 - E_3$ intersecte $B(1)$ le long d'un disque de Hopf.
 4. On éclate la dernière boule $B(1)$, avec pour résultat l'introduction d'un diviseur exceptionnel E_4 . Comme $B(1)$ intersectait E_3 et $E_2 - E_3$ selon deux disques de Hopf distincts, les transformés stricts de E_3 et $E_2 - E_3$ sont des courbes qui intersectent E_4 en un point exactement, dans les classes $E_3 - E_4$ et $E_2 - E_3 - E_4$ respectivement.

Dans le cas général, le diviseur singulier \mathcal{S} est une chaîne, dont le diviseur exceptionnel E_P est un maillon (pas nécessairement un bout). Dans l'algorithme d'effondrement, deux courbes qui sont effondrées consécutivement ne sont pas nécessairement adjacentes dans la chaîne formée par le diviseur exceptionnel : il y a des sauts. Le résultat est le suivant : tant qu'on effondre des courbes adjacentes, l'ellipsoïde grandit dans une direction fixe (horizontale ou verticale). Un saut correspond à un changement de direction dans cette croissance de l'ellipsoïde. Dans l'exemple traité, il y a seulement un saut, lors de l'effondrement π_3 (on passe de l'effondrement de E_3 , qui provenait de $E_3 - E_4$, en fin de chaîne, à l'effondrement de E_2 , qui provenait de $E_2 - E_3 - E_4$ en milieu de chaîne). Dans la proposition suivante, deux composantes du diviseur singulier jouent un rôle particulier : $S_{\min} = S_1$ est la composante qui est effondrée en dernier ($E_1 - E_2$ dans notre exemple), et S_{\max} est la composante pour laquelle a lieu le dernier saut (ici $E_3 - E_4$). En itérant la remarque A.7 dans l'algorithme ci-dessus, on obtient (voir aussi la figure A.5) :

Proposition A.8. *Soit \hat{M} une variété symplectique obtenue par éclatement d'un ellipsoïde. Une courbe \hat{C} dans \hat{M} intersecte \mathcal{S} positivement et transversalement en un point de S_{\min} si et seulement si son image après effondrement est une courbe C qui intersecte l'ellipsoïde le long du petit axe.*

Similairement, \hat{C} intersecte \mathcal{S} positivement et transversalement en un point de S_{\max} si et seulement si C intersecte l'ellipsoïde le long du grand axe.

La courbe \hat{C} intersecte \mathcal{S} en un point de S_{\min} et un point de S_{\max} si et seulement si C intersecte l'ellipsoïde exactement le long de la croix formée par ses deux axes.

La courbe \hat{C} intersecte \mathcal{S} en m point de E_P exactement si et seulement si C intersecte l'ellipsoïde le long d'un multicusp $\{z^p = w^q\}^m$.

Le dernier point n'est pas illustré dans les dessins ci-dessous, mais résulte du fait que \mathcal{S} correspond précisément à la résolution de la singularité $z^p = w^q$ (voir A.1)

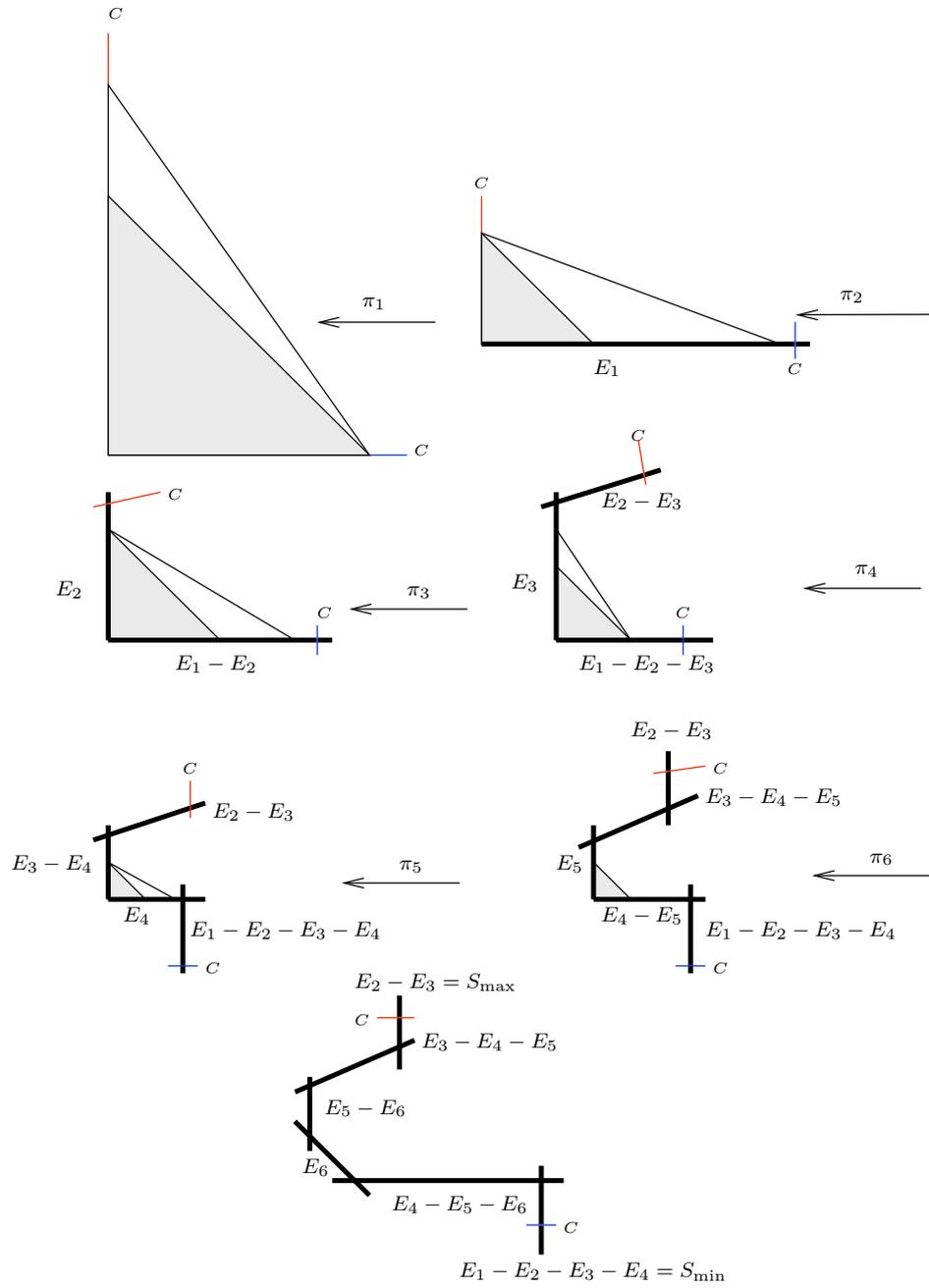


FIGURE A.5 – Eclatement de $E(7,10)$, son diviseur singulier, et C

A.4 Preuve du théorème 6

Rappelons l'énoncé du théorème 6.

Théorème. Soit $\varphi : E(a, b) \xrightarrow{\omega} M$ un plongement d'ellipsoïde dans une variété de classe C^* . Soit C une courbe symplectique plongée, d'aire supérieure à b . Alors il existe un plongement $\psi : E(a, b) \xrightarrow{\omega} M$ tel que $C \cap \text{Im } \psi = \psi(\{z_1 = 0\})$.

On peut aller plus loin. Si la courbe C est une immersion, et contient une croix dont les disques ont des aires a, b , on a aussi un ellipsoïde $E(a, b)$ dont l'intersection avec C se fait exactement le long de cette croix. De même si on a plusieurs ellipsoïdes dans M , et plusieurs disques, croix (même multicups) dans C : on peut mettre tous les ellipsoïdes en position standard par rapport à C . La preuve suivante se focalise sur l'énoncé ci-dessus, mais elle fonctionne pareillement dans tous les cas.

Idée de Preuve : Supposons que $b > a$ pour fixer les idées. Notons $E(a, b) = \tau E(p, q)$ où $\text{pgcd}(p, q) = 1$. Il est tout d'abord évident que pour $\varepsilon \ll 1$, $\varepsilon E(p, q)$ se plonge dans M , de sorte que son intersection avec C soit le grand axe. Eclatons ce (petit) ellipsoïde, et notons \mathcal{S} le diviseur singulier et \hat{C} la transformée stricte de C . La courbe \hat{C} intersecte \mathcal{S} positivement et transversalement en un point de S_{\max} d'après la proposition A.8. Ainsi, $\mathcal{S} \cup \hat{C}$ est un diviseur singulier au sens de la définition 4.1.

La classe $A := [\pi^*\omega] - \tau \sum w_i e_i$ vérifie $\text{Gr}(A) \neq 0$ puisque $\mathcal{E}(a, b)$ se plonge dans M , $A \cdot E > 0$ puisque qA est représentée pour certains J génériques d'après la méthode de Donaldson. De plus, la condition $\mathcal{A}_\omega(C) > b$ implique exactement que $A \cdot [\hat{C}] > 0$. On peut donc procéder à l'inflation singulière le long de la classe A , comme dans la proposition 4.2, et on obtient une forme symplectique dans la classe $\text{PD}(A)$, qui est non-dégénérée sur $\mathcal{S} \cup \hat{C}$. L'effondrement donne alors un ellipsoïde $\mathcal{E}(a, b)$ qui intersecte C le long du grand axe d'après la proposition A.8. \square

Références

- [BH11] O. Buse and R. Hind. Symplectic embeddings of ellipsoïds in dimension greater than four. *Geom. Topol.*, 15(4) :2091–2110, 2011.
- [BH13] O. Buse and R. Hind. Ellipsoïd embeddings and symplectic packing stability. *Compos. Math.*, 149(5) :889–902, 2013.
- [BHO] O. Buse, R. Hind, and E. Opshtein. Packing stability in dimension 4. *en préparation*.
- [Bir97] P. Biran. Symplectic packing in dimension 4. *Geom. Funct. Anal.*, 7(3) :420–437, 1997.
- [Bir99a] P. Biran. A stability property of symplectic packing. *Invent. Math.*, 136(1) :123–155, 1999.
- [Bir99b] Paul Biran. Constructing new ample divisors out of old ones. *Duke Math. J.*, 98(1) :113–135, 1999.

- [Bir01] P. Biran. Lagrangian barriers and symplectic embeddings. *Geom. Funct. Anal.*, 11(3) :407–464, 2001.
- [BO14] L. Buhovsky and E. Opshtein. Some quantitative results in \mathcal{C}^0 symplectic geometry. *ArXiv e-prints*, April 2014.
- [CCF⁺13] K. Choi, D. Cristofaro-Gardiner, D. Frenkel, M. Hutchings, and V. G. B. Ramos. Symplectic embeddings into four-dimensional concave toric domains. *ArXiv e-prints*, October 2013.
- [Eli87] Ya. M. Eliashberg. A theorem on the structure of wave fronts and its application in symplectic topology. *Funktsional. Anal. i Prilozhen.*, 21(3) :65–72, 96, 1987.
- [FK04] Bassam Fayad and Anatole Katok. Constructions in elliptic dynamics. *Ergodic Theory Dynam. Systems*, 24(5) :1477–1520, 2004.
- [Gom95] Robert E. Gompf. A new construction of symplectic manifolds. *Ann. of Math. (2)*, 142(3) :527–595, 1995.
- [Gro85] M. Gromov. Pseudoholomorphic curves in symplectic manifolds. *Invent. Math.*, 82(2) :307–347, 1985.
- [Gut08] Larry Guth. Symplectic embeddings of polydisks. *Invent. Math.*, 172(3) :477–489, 2008.
- [HL13] R. Hind and S. Lisi. Symplectic embeddings of polydisks. *ArXiv e-prints*, April 2013.
- [HLS13] Vincent Humilière, Rémi Leclercq, and Sobhan Seyffadini. Coisotropic rigidity and \mathcal{C}^0 -symplectic geometry. *ArXiv*, 2013.
- [HZ94] H. Hofer and E. Zehnder. *Symplectic invariants and Hamiltonian dynamics*. Birkhäuser Advanced Texts : Basler Lehrbücher. 1994.
- [Ler95] Eugene Lerman. Symplectic cuts. *Math. Res. Lett.*, 2(3) :247–258, 1995.
- [LL95] T. J. Li and A. Liu. General wall crossing formula. *Math. Res. Lett.*, 2(6) :797–810, 1995.
- [LL99] Tian-Jun Li and Ai-Ko Liu. The equivalence between SW and Gr in the case where $b^+ = 1$. *Internat. Math. Res. Notices*, (7) :335–345, 1999.
- [LL01] Tian-Jun Li and Ai-Ko Liu. Uniqueness of symplectic canonical class, surface cone and symplectic cone of 4-manifolds with $B^+ = 1$. *J. Differential Geom.*, 58(2) :331–370, 2001.
- [LM95] F. Lalonde and D. McDuff. Local non-squeezing theorems and stability. *Geom. Funct. Anal.*, 5(2) :364–386, 1995.
- [LS94] F. Laudenbach and J.-C. Sikorav. Hamiltonian disjunction and limits of Lagrangian submanifolds. *Internat. Math. Res. Notices*, (4) :161 ff., approx. 8 pp. (electronic), 1994.
- [McD91] Dusa McDuff. The local behaviour of holomorphic curves in almost complex 4-manifolds. *J. Differential Geom.*, 34(1) :143–164, 1991.
- [McD98] D. McDuff. From symplectic deformation to isotopy. In *Topics in symplectic 4-manifolds (Irvine, CA, 1996)*, First Int. Press Lect. Ser., I, pages 85–99. Internat. Press, Cambridge, MA, 1998.
- [McD09] Dusa McDuff. Symplectic embeddings of 4-dimensional ellipsoids. *J. Topol.*, 2(1) :1–22, 2009.

- [McD13] D. McDuff. Symplectic embeddings of 4-dimensional ellipsoids : erratum. *ArXiv e-prints*, May 2013.
- [MO13] D. McDuff and E. Opshtein. Nongeneric J-holomorphic curves and singular inflation. *ArXiv e-prints*, September 2013.
- [MP94] D. McDuff and L. Polterovich. Symplectic packings and algebraic geometry. *Invent. Math.*, 115(3) :405–434, 1994. With an appendix by Yael Karshon.
- [MS98] D. McDuff and D. Salamon. *Introduction to symplectic topology*. Oxford Mathematical Monographs. The Clarendon Press Oxford University Press, New York, second edition, 1998.
- [MS12] Dusa McDuff and Felix Schlenk. The embedding capacity of 4-dimensional symplectic ellipsoids. *Ann. of Math. (2)*, 175(3) :1191–1282, 2012.
- [Ops07] Emmanuel Opshtein. Maximal symplectic packings in \mathbb{P}^2 . *Compos. Math.*, 143(6) :1558–1575, 2007.
- [Ops09] Emmanuel Opshtein. C^0 -rigidity of characteristics in symplectic geometry. *Ann. Sci. Éc. Norm. Supér. (4)*, 42(5) :857–864, 2009.
- [Ops13a] Emmanuel Opshtein. Polarizations and symplectic isotopies. *J. Symplectic Geom.*, 11(1) :109–133, 2013.
- [Ops13b] Emmanuel Opshtein. Singular polarizations and ellipsoid packings. *Int. Math. Res. Not. IMRN*, (11) :2568–2600, 2013.
- [Ops14] Emmanuel Opshtein. Symplectic packings in dimension 4 and singular curves. *J. Symplectic Geom.*, 2014. à paraître.
- [Sch05a] F. Schlenk. Packing symplectic manifolds by hand. *J. Symplectic Geom.*, 3(3) :313–340, 2005.
- [Sch05b] Felix Schlenk. *Embedding problems in symplectic geometry*, volume 40 of *de Gruyter Expositions in Mathematics*. Walter de Gruyter GmbH & Co. KG, Berlin, 2005.
- [She09] V. Shevchishin. Secondary Stiefel-Whitney class and diffeomorphisms of rational and ruled symplectic 4-manifolds. *ArXiv e-prints*, April 2009.
- [Tau95] Clifford Henry Taubes. The Seiberg-Witten and Gromov invariants. *Math. Res. Lett.*, 2(2) :221–238, 1995.
- [Tau96] Clifford H. Taubes. $SW \Rightarrow Gr$: from the Seiberg-Witten equations to pseudo-holomorphic curves. *J. Amer. Math. Soc.*, 9(3) :845–918, 1996.
- [Tra95] L. Traynor. Symplectic packing constructions. *J. Differential Geom.*, 41(3) :735–751, 1995.
- [Wie09] I. Wieck. *Explicit symplectic packings : Symplectic tunneling and new maximal constructions*. Oxford Mathematical Monographs. Shaker Verlag, Aachen, 2009.