Contributions à la modélisation, l'évaluation de performances et la commande des systèmes à événements discrets

Rabah Boukra

l'université nantes angers le mans
PÔLE DE RECHERCHE ET D'ENSEIGNEMENT SUPÉRIEUR

université angers

Thèse de Doctorat

Rabah BOUKRA

Mémoire présenté en vue de l'obtention du
grade de Docteur de l'Université d'Angers
sous le label de L'Université Nantes Angers Le Mans

École doctorale : EDSTIM
Discipline : Génie informatique, automatique et traitement de signal
Spécialité : *Automatique et informatique appliquée*
Unité de recherche : *Laboratoire d'ingénierie des systèmes automatisés (LISA)*

Soutenue le *02/12/2013*

Contributions à la modélisation, l'évaluation de performances et la commande des systèmes à événements discrets

JURY

Rapporteurs :	**Hassane ALLA**, Professeur, Université Joseph Fourier **Stéphane GAUBERT**, Directeur de recherche, INRIA
Examinateurs :	**Jean-Marc FAURE,** Professeur, Supméca **Jan KOMENDA**, Chercheur, Académie Tchèque des sciences **Jean-Jacques LOISEAU**, Directeur de recherche, CNRS
Directeur de Thèse :	**Sébastien LAHAYE**, Professeur, Université d'Angers
Co-directeur de Thèse :	**Jean-Louis BOIMOND**, Professeur, Université d'Angers

Table des matières

Introduction

À un certain niveau d'abstraction, la dynamique de nombreux systèmes est essentiellement régie par des règles opérationnelles appliquées en réaction à l'occurrence d'*événements*. On parle alors de Systèmes à Événements Discrets (SED), et on peut citer comme exemples les systèmes de production, les réseaux de transport, les réseaux informatiques. L'étude des SED vise, entre autres, à analyser leurs comportements, identifier leurs propriétés et les commander. Pour ce faire, différents formalismes de modélisation sont utilisés dans la littérature (réseaux de Petri, automates à états finis, chaînes de Markov, ...).

Dans la théorie initiée par Ramadge et Wonham [Ramadge 1987, Ramadge 1989], les événements correspondent à des lettres et les SED sont modélisés par des machines à états finis. La plupart des résultats ont trait à la maîtrise du comportement logique des SED, par exemple, restreindre le comportement afin que certains états interdits ne soient plus atteignables. Les modèles reposant sur l'algèbre (max,+) s'intéressent plutôt au comportement temporisé des SED. Par exemple, ils peuvent être utilisés pour déterminer des temps de cycle, ou pour piloter les entrées de sorte à respecter des échéances en sortie [Baccelli 1992, Heidergott 2006]. Alors que les automates modélisent naturellement les non-déterminismes inhérents aux conflits ou choix (par exemple, pour prendre en compte plusieurs ordonnancements possibles), les modèles (max,+) permettent plutôt d'appréhender les SED avec un comportement déterministe (typiquement en fixant un ordonnancement pour ce même exemple).

Stéphane Gaubert a montré le premier dans [Gaubert 1995] que les automates avec multiplicités dans l'algèbre (max,+), aussi appelés automates (max,+), combinent ces deux approches : les concepts sur les automates à états finis peuvent être combinés avec les résultats de l'algèbre (max,+) pour étudier à la fois les aspects logiques et temporisés des SED. En particulier, les automates (max,+) ont été appliqués avec succès pour l'analyse de performances [Gaubert 1995, Gaubert 1999b, Su 2011], l'ordonnancement de tâches [Weyerman 2007, Houssin 2011] et la commande supervisée [Komenda 2009b, Badouel 2011, Su 2012]. De façon plus générale, les automates à multiplicités constituent un outil théorique largement étudié, et des applications existent bien au-delà du champ des SED, notamment dans les domaines du traitement d'image et de la reconnaissance vocale (voir [Droste 2009] pour un

aperçu).

Dans la littérature, le comportement des automates (max,+) est représenté :
- soit par des équations récurrentes sur des labels, qui peuvent être perçues comme une généralisation de la représentation d'état en dateur pour les systèmes (max,+)-linéaires,
- soit par des séries formelles à coefficients dans l'algèbre (max,+), qui jouent un rôle équivalent aux langages pour les automates logiques (booléens).

Avec ces représentations, plusieurs problèmes cruciaux s'avèrent complexes, ou même indécidables, pour les cas généraux d'automates (max,+). Citons par exemple :
- l'égalité et l'inégalité entre séries formelles représentant des automates (max,+) est non-décidable [Krob 1994] ;
- la pseudo-inverse (*résiduation*) du produit de séries formelles est rationnelle uniquement sous des hypothèses restrictives [Badouel 2011]. Par conséquent, pour obtenir des contrôleurs réalisables, l'approche de commande supervisée dans [Komenda 2009b] ne peut s'appliquer qu'à une classe réduite d'automates (max,+).

Dans ce manuscrit, nous proposons des représentations alternatives pour les automates (max,+). Ces représentations traduisent l'évolution des automates avec moins de précision, dans le sens où seuls leurs comportements extrémaux sont décrits. Cependant, on escompte que ces représentations permettent d'élargir la classe de problèmes qui peuvent être résolus avec une complexité raisonnable.

Plus exactement, on définit des équations récursives dans l'algèbre (max,+) et l'algèbre (min,+) afin de décrire les comportements *pire-cas* et *meilleur-cas* des automates. Il est alors montré que ces représentations ont une application directe pour évaluer les performances du système avec une faible complexité de calcul. De plus, il est possible de modéliser l'influence d'entrées exogènes grâce à un terme rajouté à ces représentations. On obtient alors un modèle sous la forme d'équations analogues aux équations d'état standard pour les systèmes non-autonomes dans l'algèbre (max,+). Cela permet d'adapter des lois de commande existantes pour les systèmes (max,+)-linéaires. Dans un premier lieu, une commande en boucle ouverte est étudiée pour les automates (max,+).

Ce mémoire est organisé comme suit :
- Les définitions et propriétés ainsi que les représentations des automates (max,+) sont rappelées dans le premier chapitre. Nous nous intéressons en particulier aux notions d'ambiguïté des automates (max,+) de par leur importance pour les contributions ultérieures. Un bref état de l'art est présenté, dans lequel sont cités plusieurs travaux utilisant le formalisme des automates (max,+) pour l'étude des SED.
- Le second chapitre introduit les nouvelles représentations apportées pour les automates (max,+). Ces représentations permettent d'évaluer deux grandeurs caractéristiques des SED, à savoir, les durées d'achèvement des séquences et

les longueurs de séquences achevées. Ces contributions sont illustrées par des exemples académiques visant à faciliter la compréhension.

– Dans le troisième chapitre, l'accent est mis sur l'apport des nouvelles représentations relativement à l'évaluation de performances des SED, en explicitant les indicateurs de performance qui peuvent en être déduits. Ces indicateurs sont comparés aux résultats de la littérature, tant sur le plan de l'originalité que des performances. Enfin, deux applications sont présentées pour illustrer et interpréter la portée de ces indicateurs sur des exemples d'ateliers organisés en *jobshop*.

– Le quatrième chapitre contribue à la commande des SED à l'aide des automates (max,+) en utilisant l'une des représentations extrémales développées dans cette thèse. Une entrée exogène est modélisée pour influencer la dynamique du système (en retardant l'activation des transitions d'état de l'automate (max,+)). Une loi de commande en boucle ouverte peut alors être proposée pour les automates (max,+). La solution de commande proposée est illustrée par des exemples de *jobshop* et de croisement ferroviaire.

CHAPITRE 1

Automates (max,+) pour les SED

Sommaire

Dans ce chapitre, l'objectif est d'introduire les automates (max,+) en tant qu'outil de modélisation et d'analyse des Systèmes à Événements Discrets (SED). Les quatre premières sections précisent les définitions et propriétés utiles pour la suite de notre propos. Ces éléments sont extraits de références de base sur le sujet telles que [Gaubert 1995], [Sakarovitch 2003, chap. III], [Klimann 2004], [Kirsten 2009], [Droste 2009]. La section 5 met en valeur certains résultats de la littérature afin de constituer un état de l'art, non exhaustif, de l'apport des automates (max,+) pour l'étude des SED.

1 Définition générale

Les automates à multiplicités dans le semi-anneau $\overline{\mathbb{R}}_{\max}$[1] sont appelés automates (max,+). Ils peuvent être vus comme des automates logiques, tels que ceux étudiés

[1] Le dioïde (ou semi-anneau idempotent) $\overline{\mathbb{R}}_{\max}$ est l'ensemble $(\mathbb{R} \cup \{\pm\infty\})$ muni de l'opérateur max comme somme $\oplus$ et de l'addition usuelle comme produit $\otimes$, avec $\varepsilon = -\infty$ et $e = 0$ comme éléments neutres respectifs. L'ensemble des matrices $n \times n$ à éléments dans $\overline{\mathbb{R}}_{\max}$, muni de l'addition et de la multiplication matricielles définies de façon conventionnelle à partir de $\oplus$ et $\otimes$, est également un dioïde noté $\overline{\mathbb{R}}_{\max}^{n\times n}$. Le lecteur peut se reporter aux références [Baccelli 1992], [Gaubert 1992] et [Heidergott 2006] pour une présentation détaillée de cette structure algébrique et de son utilisation.

dans [Ramadge 1989] et [Cassandras 2006, chap. II-III], auxquels le temps est intégré, c'est-à-dire, comme une classe d'automates temporisés.

Définition 1 *Un automate (max,+) est un quadruplet $G = (Q, \Sigma, \alpha, \mu)$ dans lequel :*
- *Q et Σ désignent les ensembles finis d'états et d'événements ;*
- *$\alpha \in \overline{\mathbb{R}}_{\max}^{1\times|Q|}$ est tel que pour tout $q \in Q$, $\alpha_q = e$ ou ε, un état q étant dit initial si $\alpha_q = e$;*
- *$\mu : \Sigma^* \to \overline{\mathbb{R}}_{\max}^{|Q|\times|Q|}$ est un morphisme sur le monoïde libre[2] Σ^* spécifié de façon unique par la famille de matrices $\mu(a) \in \overline{\mathbb{R}}_{\max}^{|Q|\times|Q|}$, $a \in \Sigma$, sachant que pour un mot $w = a_1 \dots a_n$, on a :*

$$\mu(w) = \mu(a_1 \dots a_n) = \mu(a_1) \dots \mu(a_n),$$

où le produit matriciel mis en jeu est celui de $\overline{\mathbb{R}}_{\max}^{|Q|\times|Q|}$. Un coefficient $[\mu(a)]_{qq'} \neq \varepsilon$ signifie que, dans l'état q, l'occurrence de l'événement a provoque une transition d'état vers q', et la valeur $[\mu(a)]_{qq'}$ est interprétée comme la durée associée à cette transition (durée d'activation de l'événement a avant qu'il survienne).

Remarque 1 *Cette définition est légèrement différente de celle donnée dans [Gaubert 1995] où des retards initiaux et finaux sont considérés. Dans le cadre de nos travaux, nous nous intéressons aux automates (max,+) dont les retards initiaux sont tous égaux à $e = 0$ (cette hypothèse est sans perte de généralité car une transformation adéquate est toujours possible). De plus, on ne définit pas de vecteur permettant de distinguer les états finaux avec leurs retards, par conséquent tous les états peuvent être vus comme des états finaux (marqués), comme c'est le cas pour les automates de type-tas [Gaubert 1999b].*

Remarque 2 *Une définition équivalente d'un automate (max,+) consiste à le spécifier comme un quadruplet $G = (Q, \Sigma, Q_i, \mu)$, où Q_i est l'ensemble fini des états initiaux.*

Exemple 1 *La figure 1.1 est un exemple de représentation graphique qui peut être associée à chaque automate* $(\max, +)$ *:*
- *les sommets correspondent aux états $q \in Q$;*
- *un arc existe d'un état $q \in Q$ à un état q' s'il existe $a \in \Sigma$ tel que $[\mu(a)]_{qq'} \neq \varepsilon$: celui-ci représente la transition d'état lorsque l'événement a survient après son activation durant $[\mu(a)]_{qq'}$ unités de temps et il est représenté avec le label $a/\mu(a)_{qq'}$;*
- *un arc d'entrée symbolise un état initial.*

[2] Si Σ est un ensemble fini (*alphabet*), le monoïde libre Σ^* est défini par l'ensemble des séquences finies de lettres (*mots*) de Σ. Un *mot* $w \in \Sigma^*$ peut être écrit comme une séquence $w = a_1 a_2 \dots a_n$ avec a_1, a_2, …, $a_n \in \Sigma$ et n un nombre naturel. Les *langages formels* sont des sous-ensembles du monoïde libre Σ^*. La concaténation de deux mots u et v est notée uv, et u^* désigne l'ensemble des mots de la forme u^n avec n un nombre naturel et u^0 égal au mot vide ϵ.

Pour cet exemple, on a $Q = \{I, II\}$, $\Sigma = \{a, b, c\}$, *et*

$$\alpha = \begin{pmatrix} e & \varepsilon \end{pmatrix},\ \mu(a) = \begin{pmatrix} \varepsilon & 2 \\ \varepsilon & \varepsilon \end{pmatrix},\ \mu(b) = \begin{pmatrix} \varepsilon & \varepsilon \\ 1 & \varepsilon \end{pmatrix},\ \mu(c) = \begin{pmatrix} \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & 3 \end{pmatrix}.$$

Les séquences d'événements possibles sont les mots : a, ac, ab, acc, acb, aba, accc, accb, acba, abac, abab, ... du langage $(ac^*b)^*$.

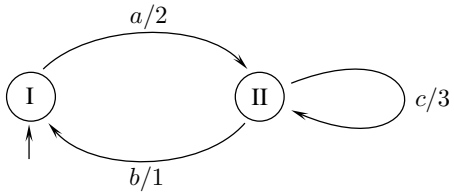

Figure 1.1 – Un automate (max,+).

Remarque 3 *Dans un automate (max,+), un même événement peut être impliqué dans plusieurs transitions d'état distinctes, avec des multiplicités possiblement différentes. En d'autres termes, la durée d'activation d'un événement est spécifiée selon l'état de départ de l'état d'arrivée de la transition. Cette caractéristique fournit aux automates (max,+) la capacité suffisante à modéliser la totalité des phénomènes pouvant intervenir au sein d'un SED (la concurrence, le parallélisme, le choix et la synchronisation). On renvoie le lecteur à [Gaubert 1999b, sec.III] pour une présentation de la diversité des SED qui peuvent être étudiés à l'aide d'automates (max,+). Pourtant, la définition du périmètre de modélisation des automates (max,+) est, à notre connaissance, un problème toujours ouvert. Citons à ce sujet les travaux [Gaubert 1999a], [Lahaye 2013c, Lahaye 2013a] qui contribuent à cerner la classe de réseaux de Petri qui peuvent être représentés par des automates (max,+).*

2 Déterminisme et ambiguïté

Un automate (max, +) est dit *déterministe* si :
- il comporte un unique état initial, c'est-à-dire, qu'il existe un unique $q \in Q$ tel que $\alpha_q \neq \varepsilon$;
- depuis chaque état, l'occurrence d'un événement ne peut pas induire plusieurs transitions d'état possibles, c'est-à-dire, si pour tout $a \in \Sigma$ chaque ligne de $\mu(a)$ contient au plus un élément différent de ε.

Exemple 2 *L'automate (max,+) représenté sur la figure 1.1 est un automate déterministe.*

Si ces conditions ne sont pas satisfaites, l'automate est dit non-déterministe. On peut distinguer plusieurs types d'automates non-déterministes au travers de la notion d'*ambiguïté*.

On introduit les notions suivantes afin de faciliter leur distinction.
Si $[\mu(a)]_{pq} \neq \varepsilon$, alors on note (p, a, q) la transition dans l'automate. Soient $m \geq 1$ et $\pi = (q_0, a_1, q_1)(q_1, a_2, q_2) \dots (q_{m-1}, a_m, q_m)$ désignant une séquence de transitions. On dit que π est un *chemin* allant de q_0 à q_m. On note $\sigma(\pi)$ le produit $\otimes$ des poids sur le chemin π, soit :

$$\sigma(\pi) = \bigotimes_{i=1,\dots,m} [\mu(a_i)]_{q_{i-1}q_i} = \sum_{i=1,\dots,m} [\mu(a_i)]_{q_{i-1}q_i}. \tag{1.1}$$

Soient $p, q \in Q$ et $w \in \Sigma^*$. On note par $p \overset{w}{\rightsquigarrow} q$ l'ensemble des chemins qui vont de p vers q et dont les événements associés aux transitions successives forment le mot w (il peut y avoir plusieurs chemins dans le cas d'un automate (max,+) non déterministe). On peut montrer que :

$$[\mu(a_1 a_2 \dots a_m)]_{q_0 q_m} = \bigoplus_{\pi \in q_0 \overset{a_1 \dots a_m}{\rightsquigarrow} q_m} \sigma(\pi) \ . \tag{1.2}$$

Cela signifie que $[\mu(a_1 a_2 \dots a_m)]_{q_0 q_m}$ est égal au maximum des poids des chemins qui vont de q_0 à q_m et qui ont $a_1 a_2 \dots a_m$ comme label.

Exemple 3 *Soit l'automate (max,+) non-déterministe de la figure 1.2. Si on prend l'exemple de la séquence d'événements $w = aab$, celle-ci est reconnue par deux chemins allant de l'état I à l'état I :*
- $\pi_1 = (I, a, II)(II, a, II)(II, b, I)$,
- $\pi_2 = (I, a, I)(I, a, II)(II, b, I)$.

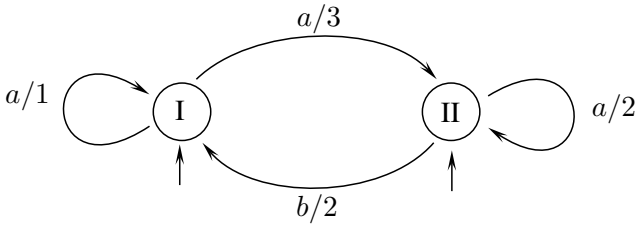

Figure 1.2 – Un automate (max,+) non-déterministe.

On a :

$$\mu(a) = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ \varepsilon & 2 \end{pmatrix}, \ \mu(b) = \begin{pmatrix} \varepsilon & \varepsilon \\ 2 & \varepsilon \end{pmatrix},$$

et $\mu(a) \otimes \mu(a) \otimes \mu(b) = \begin{pmatrix} 7 & \varepsilon \\ 6 & \varepsilon \end{pmatrix}$.

Le terme $\mu(aab)_{I,I} = 7$ donne bien le poids maximum entre les deux chemins ciblés ci-dessus.

On distingue au moins deux définitions pour la notion d'ambiguïté dans la littérature. Un automate (max,+) peut être dit non-ambigu si :

1. chaque séquence $w \in \Sigma^*$ est reconnue par au plus un chemin allant d'un état initial $q_0 \in Q_i$ vers un état final $q_f \in Q_f \subseteq Q$ (voir par exemple [Klimann 2004, Kirsten 2009]), soit :
$$|Q_i \overset{w}{\rightsquigarrow} Q_f| \leq 1, \ \forall w \in \Sigma^*. \tag{1.3}$$
2. pour chaque séquence $w \in \Sigma^*$, et pour une paire d'états $(p, q) \in Q \times Q$ donnée, il existe au plus un chemin reconnaissant w et allant de p à q (voir par exemple [Béal 2008]), soit :
$$|p \overset{w}{\rightsquigarrow} q| \leq 1, \forall w \in \Sigma^*, \forall p, q \in Q. \tag{1.4}$$

La première définition est plus restrictive que la seconde[3], autrement dit, si la non-ambiguïté est vérifiée pour la définition du point 1, elle le sera pour le point 2. Dans ce manuscrit, on utilise une notion d'ambiguïté "intermédiaire" (plus générale que la condition (1.3) mais moins que celle exprimée par (1.4)) que l'on qualifie de *non-ambiguïté forte* (pour la distinguer de celles rappelées ci-dessus).

Définition 2 *(Automate fortement non-ambigu) : Un automate (max,+) est dit fortement non-ambigu s'il existe au plus un chemin partant d'un état initial, reconnaissant une séquence $w \in \Sigma^*$ et aboutissant à un état q donné, soit :*

$$|Q_i \overset{w}{\rightsquigarrow} q| \leq 1, \ \forall w \in \Sigma^*, \ \forall q \in Q.$$

Afin d'illustrer ces nuances de non-ambiguïté, on se propose de prendre comme exemples les automates G_1, G_2 et G_3 représentés respectivement sur les figures 1.3, 1.4 et 1.5.

- L'automate G_1 est fortement non-ambigu et non-ambigu selon la définition du point 2. Par contre (en considérant que $Q_f = Q$) il y a une ambiguïté selon la définition du point 1 puisque :
$$|Q_i \overset{a}{\rightsquigarrow} Q| = 2.$$
- L'automate G_2 n'est pas fortement non-ambigu (on pourra dire faiblement ambigu), ni non-ambigu selon la définition du point 1 (en considérant $Q_f = Q$), car
$$|Q_i \overset{a}{\rightsquigarrow} III| = |Q_i \overset{a}{\rightsquigarrow} Q| = 2.$$
- L'automate G_3 est un automate ambigu selon l'ensemble des définitions (en considérant $Q_f = Q$) car :
$$|I \overset{ab}{\rightsquigarrow} IV| = |Q_i \overset{ab}{\rightsquigarrow} Q| = 2.$$

[3]Pour se convaincre de l'implication (1.3) $\Rightarrow$ (1.4), on peut aisément vérifier la contraposée. En effet, supposons qu'il existe $p, q \in Q$ et $w \in \Sigma^*$ tel que :
$$p \overset{w}{\rightsquigarrow} q > 1.$$
Il doit alors être clair qu'il exite $q_i \in Q_i$, $q_f \in Q_f$, $u, v \in \Sigma^*$ tel que
$$|q_i \overset{u}{\rightsquigarrow} p \overset{w}{\rightsquigarrow} q \overset{v}{\rightsquigarrow} q_f| > 1.$$

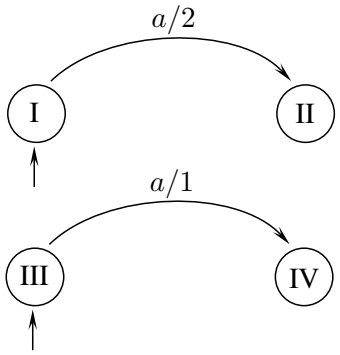

Figure 1.3 – L'automate (max,+) G_1.

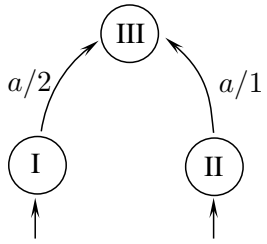

Figure 1.4 – L'automate (max,+) G_2.

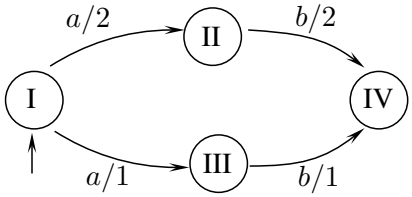

Figure 1.5 – L'automate (max,+) G_3.

3 Représentation sous la forme d'équations d'état dans $\overline{\mathbb{R}}_{\max}$

La représentation usuelle pour les automates (max,+) consiste à décrire leur évolution et leur dynamique à travers un vecteur $x(w) \in \overline{\mathbb{R}}_{\max}^{1\times|Q|},\ w \in \Sigma^*$, défini par :

$$x(w) = \alpha\mu(w). \tag{1.5}$$

L'élément $x(w)_q,\ q \in Q$, est interprété comme la date à laquelle l'état q est atteint consécutivement à la séquence d'événements w partant d'un état initial (avec la convention que $[x(w)]_q = \varepsilon$ si l'état q n'est pas atteint quand la séquence w est

achevée).
Les éléments de x sont appelés des *dateurs généralisés* [Gaubert 1995], et on a :

$$\left\{ \begin{array}{rcl} x(\epsilon) & = & \alpha, \\ x(wa) & = & x(w)\mu(a). \end{array} \right. \tag{1.6}$$

où ϵ désigne le mot de longueur nulle. La représentation (1.6) peut être vue comme une équation d'état (max,+) linéaire pour laquelle la dynamique dépend de lettres $a \in \Sigma$ (labels associés aux événements).
Rappelons que la théorie des systèmes (max,+) linéaires manipule généralement (voir par exemple [Baccelli 1992], [Gaubert 1992], [Heidergott 2006]) des équations d'état de la forme :

$$\left\{ \begin{array}{rcl} x(0) & = & b, \\ x(k+1) & = & A(k)x(k). \end{array} \right.$$

où la dynamique dépend pltôt d'un numéro d'événement k.

Remarque 4 *On peut facilement vérifier que :*

$$x(w)_q = \bigoplus_{\pi \in Q_i \overset{w}{\rightsquigarrow} q} \sigma(\pi) \ . \tag{1.7}$$

Exemple 4 *Soit l'automate représenté sur la figure 1.6.*

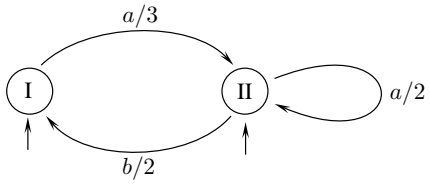

Figure 1.6 – Un automate (max,+) non-déterministe.

On a :

$$\Sigma = \{a, b\},\ Q = \{I, II\},\ \alpha = \begin{pmatrix} e & e \end{pmatrix},\ \mu(a) = \begin{pmatrix} \varepsilon & 3 \\ \varepsilon & 2 \end{pmatrix},\ \mu(b) = \begin{pmatrix} \varepsilon & \varepsilon \\ 2 & \varepsilon \end{pmatrix}.$$

En appliquant la représentation (1.6) *pour la séquence $w = aab$, on obtient :*

$$[x(aab)] = [\alpha \otimes \mu(a) \otimes \mu(a) \otimes \mu(b)] = \begin{bmatrix} 7 & \varepsilon \end{bmatrix}.$$

Le résultat $[x(aab)]_I = 7$ signifie que la séquence aab permet d'atteindre l'état I à l'instant $t = 7$. On peut noter que cette valeur est le maximum entre les poids des deux chemins qui reconnaissent aab, à savoir $(I, a, II)(II, a, II)(II, b, I)$ et $(II, a, II)(II, a, II)(II, b, I)$.
L'élément $[x(aab)]_{II} = \varepsilon$ indique que la séquence aab ne permet pas d'atteindre l'état II.

Remarque 5 *Dans le cas des automates fortement non-ambigus, pour $q_m \in Q$ et $w \in \Sigma^*$, l'ensemble $Q_i \overset{w}{\rightsquigarrow} q_m$ est l'ensemble vide ou un singleton. Soit $\pi = (q_0, a_1, q_1)(q_1, a_2, q_2) \dots (q_{m-1}, a_m, q_m)$ le seul chemin reconnaissant $a_1 a_2 \dots a_m$ ($q_0 \in Q_i$), les équations (1.2) et (1.7) sont alors réduites à :*

$$x(w)_{q_m} = [\alpha\mu(a_1 a_2 \dots a_m)]_{q_m} = \mu(a_1 a_2 \dots a_m)_{q_0 q_m} = \bigotimes_{i=1\dots m} [\mu(a_i)]_{q_{i-1}q_i}. \qquad (1.8)$$

4 Représentation sous la forme de séries formelles

Le vecteur de dateurs généralisés peut s'écrire, de façon équivalente, sous la forme d'un vecteur de séries formelles, soit :

$$x = \bigoplus_{w \in \Sigma^*} x(w) w.$$

Ce vecteur est une solution de (1.6) qui s'écrit :

$$x = \alpha \otimes \mu^*, \qquad (1.9)$$

avec $\mu = \bigoplus_{a \in \Sigma} \mu(a) a$ et $\mu^* = \bigoplus_{n \in \mathbb{N}} \mu^n$. On manipule alors des séries formelles en des variables non commutatives dans Σ^* et à coefficients dans $\overline{\mathbb{R}}_{\max}$. Pour comparaison, les systèmes (max,+) linéaires peuvent être modélisés par des représentations mettant en jeu des séries formelles en deux variables commutatives γ et δ, à exposant dans $\mathbb{Z}$ et à coefficients booléens [Baccelli 1992, chap. III].

Exemple 5 *On obtient pour l'automate représenté sur la figure 1.6 le vecteur de séries formelles suivant :*

$$\begin{aligned} x &= \alpha \otimes (\mu(a)a \oplus \mu(b)b)^*, \\ &= \alpha \otimes \begin{pmatrix} \varepsilon & 3a \\ 2b & 2a \end{pmatrix}^*, \\ &= \begin{bmatrix} ((3a \oplus e)(2a)^* 2b)^* & ((2a)^* \oplus (5ba)^*)^* \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

5 Apports connus pour l'étude des SED

Les automates (max,+) permettent d'étudier les aspects logiques et temporels des SED. En effet, un intérêt de cette approche est qu'elle allie des résultats issus de la théorie des automates (qui se concentre par essence sur les questions logiques) à ceux issus de la théorie des systèmes (max,+)-linéaires (qui traite essentiellement des aspects temporels).

Dans cette section, nous exposons brièvement plusieurs résultats de la littérature utilisant le formalisme automate (max,+) pour aborder des questions relatives à l'évaluation de performances et la commande supervisée des SED (évoquons à nouveau les applications à l'ordonnancement [Houssin 2011], [Weyerman 2007] qui ne sont pas reprises ici).

5 .1 Évaluation de performances

Les automates (max,+) ont été utilisés pour évaluer les performances de certains SED. Citons notamment les articles [Gaubert 1995] et [Su 2011], où les automates (max,+) sont utilisés pour estimer *les durées d'achèvement maximum* et *minimum* pour les séquences d'une longueur donnée.

5 .1.1 Durée d'achèvement maximum pour les séquence d'une longueur donnée

Pour certains systèmes, il est important de pouvoir disposer de la durée d'achèvement maximum pour les séquences d'événements une longueur donnée n, on parle alors de comportement selon le "pire cas".
Pour des systèmes de production dans lesquels les différentes séquences de longueur n traduisent les différents ordonnancements possibles, on évalue alors le plus grand *makespan*[4].
Son calcul est présenté dans [Gaubert 1995] comme suit dans $\overline{\mathbb{R}}_{\max}$:

$$\begin{aligned} l_n^{worst} &= \bigoplus_{w\in\Sigma^n}\bigoplus_{p\in Q}[x(w)]_p, \\ &= \bigoplus_{w\in\Sigma^n}\bigoplus_{p\in Q}[\alpha\mu(a_1)...\mu(a_n)]_p, \\ &= \bigoplus_{p\in Q}[\alpha M^n]_p, \end{aligned}$$

avec

$$M = \bigoplus_{a\in\Sigma}\mu(a). \tag{1.10}$$

Dans cette expression, on évalue pour l'ensemble des séquences de n événements les dates auxquelles les état terminaux p sont atteints. La valeur retenue pour l_n^{worst} est le maximum selon p, c'est-à-dire, la durée d'achèvement maximum pour les séquences de longueur n.

Dans [Su 2011, Su 2012], les auteurs considèrent des *systèmes pondérés par le temps* [5]. Ces modèles correspondent à des automates à états finis auxquels on associe une fonction de pondération du temps, ainsi qu'une fonction d'exclusion. La fonction de pondération affecte une valeur non-négative à chaque événement, interprétée comme la durée de chaque transition associée à celui-ci. À partir d'un système pondéré par le temps, les auteurs construisent un automate de type-tas[6] (qui appartient à une classe particulière d'automates (max,+), voir [Gaubert 1999b]) dans

[4] Terme anglais utilisé dans le domaine de l'ordonnancement d'ateliers pour désigner le temps total nécessaire pour élaborer tous les produits en quantités requises.

[5] Traduction littérale de *time-weighted systems*.

[6] Un automate de *type-tas* est un 5-tuple $\mathcal{H} = (\mathcal{T}, \mathcal{R}, R, l, u)$, où
- $\mathcal{T}$ et $\mathcal{R}$ sont des ensembles finis de pièces et de slots respectivement,
- $R : \mathcal{T} \to 2^{\mathcal{R}}$ est l'application qui associe à chaque pièce un sous-ensemble de slots,
- $l : \mathcal{T} \times \mathcal{R} \to \mathbb{R}^+ \cup \{0, +\infty\}$ donne la hauteur du plus petit contour de pièce,
- $u : \mathcal{T} \times \mathcal{R} \to \mathbb{R}^+ \cup \{0, +\infty\}$ donne la hauteur du plus grand contour de pièce.

lequel le contour supérieur de la pièce associée à un événement est défini à partir de la fonction de pondération. Notons que ce contour supérieur a la même valeur dans tous les *slots* occupés par la pièce. Dans l'automate (max,+) correspondant, toutes les transitions qui mettent en jeu un événement donné ont la même durée (une seule durée possible pour chaque événement quel que soit l'état courant). Il est clair que ces études s'appliquent donc à une classe restreinte d'automates (max,+) (on discutera plus encore de la généralité de ces résultats dans le chapitre 3). Pour ces systèmes, un algorithme est présenté dans [Su 2011] pour le calcul de la durée d'achèvement maximum.

5 .1.2 Durée d'achèvement minimum pour une séquence de longueur donnée

Il peut aussi être utile d'évaluer la durée d'achèvement minimum pour les séquences d'une longueur donnée n, on parle alors de comportement selon le "meilleur cas" ou encore de cas optimal.
Dans le cas d'un automate (max,+) modélisant les ordonnancements possibles au sein d'un système manufacturier, on peut ainsi évaluer le plus petit *makespan*.

Dans [Gaubert 1995], le cas optimal est formulé comme suit :

$$l_n^{opt} = \min_{w \in \Sigma^n} \min_{p \in Q} [x(w)]_p.$$

L'algorithme présenté dans [Gaubert 1995] ne s'applique qu'à une classe réduite d'automates (max,+), à savoir les automates déterministes.

Dans [Su 2011], il est démontré[7] que, dans le cas général, ce problème est NP-Complet.

5 .2 Commande supervisée

La commande à l'aide des automates (max,+) s'inspire de la théorie de la supervision pour les automates à états finis, initiée dans [Ramadge 1987] et [Ramadge 1989].

1. Une approche comportementale a été développée dans [Komenda 2008], [Komenda 2009a], [Komenda 2009c] et [Komenda 2009b]. Elle est basée sur la composition de deux automates (max,+) qui représentent respectivement le contrôleur (G_c) et le système à contrôler (G). Cette composition spécifie l'interaction du contrôleur avec le système en présence d'événements incontrôlables. On note $y \in \overline{\mathbb{R}}_{\max}(\Sigma)$ (resp., $y_c \in \overline{\mathbb{R}}_{\max}(\Sigma)$)[8] la représentation en séries formelles (le comportement) du système (resp., du contrôleur). On se donne une

Les slots représentent les ressources du système. Une pièce symbolise une activité qui mobilise des ressources (les slots qu'elle occupe) pour une durée correspondant à la hauteur occupée par la pièce. La dynamique du système est alors traduite par l'empilement de pièces (enchainement d'activités) à la manière du jeu Tetris.

[7] Le résultat est démontré pour une classe restreinte de systèmes (schématiquement, cette classe correspond aux automates (max,+) pour lesquels une seule valeur de pondération est possible par événement), et s'étend *a fortiori* à l'ensemble des automates (max,+).

[8] $\overline{\mathbb{R}}_{\max}(\Sigma)$ est le dioïde des séries formelles à variables dans Σ et à coefficients dans $\overline{\mathbb{R}}_{\max}$. Il est muni de l'addition mot à mot et d'une multiplication sous forme de convolution.

série $y_{ref} \in \overline{\mathbb{R}}_{\max}(\Sigma)$ spécifiant le comportement désiré du système contrôlé, classiquement appelée la consigne. Cette approche est naturelle, au sens où les comportements de référence sont classiquement définis par des langages de spécification, lesquels correspondent à des séries formelles dans le cadre des automates (max,+).

Le comportement du système contrôlé est alors donné par :

$$y_c \odot_{\Sigma_u} y.$$

où $\odot_{\Sigma_u}$ désigne le produit d'Hadamard généralisé[9].
Un problème de commande traité consiste à trouver la plus grande série y_c telle que

$$y_{ref} \succeq y_c \odot_{\Sigma_u} y.$$

Cette inégalité s'interprète au regard de l'ordre naturel de $\overline{\mathbb{R}}_{\max}(\Sigma)$. Il s'agit de trouver la plus grande série $\overline{y}_c$, c'est-à-dire, les plus grands coefficients $\overline{y}_c(w)$ pour chaque mot w, et donc les plus grands coefficients $(\overline{y}_c \odot_{\Sigma_u} y)(w)$, tels que $y_{ref}(w) \succeq (\overline{y}_c \odot_{\Sigma_u} y)(w)$.
Ainsi le superviseur recherché vise à retarder autant que possible l'achèvement des séquences d'événements w du système supervisé. D'un point de vue logique, ce superviseur est le plus permissif qui permette de restreindre le langage du système au langage maximal spécifié par y_{ref}.
En introduisant la notation $H_y^{\Sigma_u}$ pour l'application correspondant au produit de Hadamard généralisé, à savoir :

$$H_y^{\Sigma_u} \ : \ s \mapsto s \odot_{\Sigma_u} y,$$

il a été montré que cette application est à la fois résiduable et dualement résiduable[10], et donc la solution au problème de commande est donnée par :

$$(H_y^{\Sigma_u})^\sharp(y_{ref}),$$

[9]Le produit de Hadamard de séries formelles de $\overline{\mathbb{R}}_{\max}(\Sigma)$ est défini par :

$$s, s' \in \overline{\mathbb{R}}_{\max}(\Sigma), \ s \odot s' \triangleq \oplus_{w \in \Sigma^*} (s(w) \otimes s'(w))w.$$

Aussi, le produit de Hadamard généralisé $\odot_{\Sigma_u}$ s'écrit comme suit :

$$(l(G_c) \odot_{\Sigma_u} l(G))(w) = l(G_c)(P_c(w)) \otimes l(G)(w),$$

où P_c est une projection qui retire des mots $w \in \Sigma^*$ les lettres de $\Sigma_u \subseteq \Sigma$, l'ensemble des événements incontrôlables.

[10]La théorie de la résiduation (voir [Blyth 1972] pour une présentation détaillée et [Baccelli 1992, §4.4] pour une spécification aux dioïdes) permet la définition de pseudo-inverses d'applications isotones (f isotone si $a \geq b \Rightarrow f(a) \geq f(b)$). En particulier, une application isotone $f : \mathcal{C} \mapsto \mathcal{D}$ est dite :

- *résiduable* si $\forall y \in \mathcal{D}$, la plus petite borne supérieure de l'ensemble $\{x \in \mathcal{C} \mid f(x) \preceq y\}$ existe et appartient à cet ensemble, celle-ci est notée $f^\sharp(y)$, l'application $f^\sharp$ étant appelée la résiduée de f.
- *dualement résiduable* si $\forall y \in \mathcal{D}$, la plus grande borne inférieure de l'ensemble $\{x \in \mathcal{C} \mid f(x) \succeq y\}$ existe et appartient à cet ensemble, celle-ci est notée $f^\flat(y)$, l'application $f^\flat$ étant appelée

où $(H_y^{\Sigma_u})^\sharp$ désigne la résiduée du produit de Hadamard généralisé.

Un autre problème de commande traité consiste à trouver la plus petite série y_c telle que :

$$y_c \odot_{\Sigma_u} y \succeq y_{ref}.$$

Le superviseur recherché ainsi retarde le moins possible le système, et d'un point de vue logique, est le moins permissif garantissant le comportement minimal spécifié via y_{ref}.

La solution est donnée par :

$$(H_y^{\Sigma_u})^\flat(y_{ref}),$$

où $(H_y^{\Sigma_u})^\flat$ désigne la résiduée duale du produit de Hadamard généralisé.

2. Une autre approche de commande est présentée dans [Su 2012]. L'objectif est d'obtenir un superviseur qui satisfait le plus grand sous-langage minimisant les durées d'achèvement.
   L'auteur modélise les SED par un ensemble fini d'automates logiques dont les événements sont pondérés par le temps (*time-weighted systems*). ceux-ci sont définis par un 3-tuple $(\mathcal{G}, f, h)$ où, pour I un ensemble fini d'indices :
   – $\mathcal{G} = \{G_i \in \phi(\Sigma_i) \mid i \in I\}$ est un ensemble d'automates à états finis[11],
   – $f : \bigcup_{i\in I} \Sigma_i) \to \mathbb{R}^+$ est la fonction de pondération par le temps qui, à chaque événement $\sigma \in \bigcup_{i\in I} \Sigma_i$, associe sa durée d'exécution,
   – $h : (\bigcup_{i\in I} \Sigma_i) \times (\bigcup_{i\in I} \Sigma_i) \to \{0, 1\}$ est la fonction d'exclusion mutuelle. On a $h(\sigma, \sigma') = 1$ si les événements σ et σ' sont mutuellement exclusifs (si lorsque l'un des événements est en cours d'exécution alors l'autre événement ne peut pas être exécuté), sinon $h(\sigma, \sigma') = 0$.
   Un algorithme est proposé pour le calcul de K^*, le plus grand sous-langage contrôlable à temps minimum, c'est-à-dire, le plus grand ensemble de séquences contrôlables, satisfaisant une contrainte non temporisée, et dont la durée d'achèvement est minimum. Pour cela, l'auteur utilise la théorie des automates de type-tas (classe particulière d'automates (max,+)) pour calculer la durée d'achèvement des séquences, ainsi que le *makespan* des sous-langages.
   Le superviseur déduit de K^* spécifie à tout instant, et en fonction de la séquence d'événements survenus jusqu'alors, les événements autorisés.
   Plus précisément, le superviseur autorise un événement :
   – s'il est non contrôlable,

résiduée duale de f.

[11] $\phi(\Sigma)$ est l'ensemble de tous les automates à états finis dont l'alphabet est Σ.

– ou s'il est contrôlable, s'il n'existe pas d'autre événement en-cours provoquant l'exclusion, et si la séquence en vigueur complétée par l'événement appartient à K^*.

L'auteur précise que l'obtention de K^* est un problème NP-difficile.

6 Conclusion et motivations

Le comportement des automates (max,+) est représenté de deux manières dans la littérature :

– soit par les équations récurrentes (1.6) sur les événements (lettres), ce qui peut être vu comme une généralisation de la représentation d'état en dateurs des systèmes (max,+) linéaires.
– soit par les séries formelles (1.9) à coefficients dans $\overline{\mathbb{R}}_{\max}$ qui jouent le même rôle que le langage formel pour les automates logiques.

De nombreux problèmes restent difficiles à résoudre, ou même sont non décidables pour les automates (max,+) avec ces représentations. En particulier :

– l'égalité et l'inégalité entre des séries formelles représentant des automates (max,+) sont non décidables [Krob 1994] ;
– le calcul de la durée d'achèvement minimum pour des séquences de longueur donnée est un problème NP-complet [Su 2011] ;
– la pseudo-inversion (appelée la *residuation*) du produit des séries formelles est rationnelle seulement si celles-ci sont non-ambiguës [Badouel 2011] (c'est-à-dire, reconnues par des automates non-ambigus au sens strict de la définition spécifiée par l'équation (1.3)). Par conséquent, afin d'obtenir des contrôleurs réalisables, l'approche de commande dans [Komenda 2009b] doit se restreindre à cette sous-classe d'automates (max,+).

Pour tenter de contourner ces problèmes, nous proposons dans ce manuscrit des représentations alternatives pour les automates (max,+). Ces représentations décrivent le comportement des automates avec moins de précision, car seuls leurs *comportements extrémaux* sont décrits. Néanmoins, l'objectif de ces représentations est de pouvoir résoudre, ou approcher, les solutions de problèmes importants, ceci avec une complexité raisonnable. Dans le prochain chapitre, nous allons expliciter ces nouvelles représentations.

CHAPITRE 2

Modélisation du comportement extrémal des automates (max,+)

Sommaire

Dans ce chapitre, plusieurs représentations sont décrites pour modéliser les comportements extrémaux des automates (max,+). Au lieu de décrire exactement leur évolution, comme dans les représentations classiques (1.6) et (1.9) (en différenciant les événements entre eux pour chaque occurrence), ces représentations n'apportent que des bornes pour les comportements du SED correspondant (en considérant tous les événements possibles pour chaque occurrence).
Les représentations présentées aux sections 1 et 2 ont été esquissées dans les communications [Boukra 2012c], [Boukra 2012a], [Boukra 2012b], et leur présentation plus complète se trouve dans la soumission [Boukra 2013]. Les résultats de la section 3 n'ont pas encore donné lieu à une publication.
Ce chapitre contient des contributions (originales à notre connaissance) au formalisme des automates (max,+). Les deux chapitres suivants, plus applicatifs, s'appuieront sur ces résultats pour présenter des éléments concourant à l'évaluation de performances et la commande de SED modélisés par des automates (max,+).

Définissons d'abord plusieurs notations utiles tout au long de ce chapitre.

Notation 1 *Pour un automate (max,+) $G = (Q, \Sigma, \alpha, \mu)$, soit H l'ensemble des transitions défini comme suit :*

$$H \triangleq \{(p, a, q) \in Q \times \Sigma \times Q \mid [\mu(a)]_{pq} \neq \varepsilon\}. \tag{2.1}$$

Dans le but d'alléger la présentation, un élément de H peut aussi être noté par un entier correspondant à sa position dans l'ensemble (on suppose alors que l'ordre des éléments de H est fixé).
Pour un état donné $p \in Q$, on définit l'ensemble $H_p \subset H$ tel que :

$$H_p = \{(r, a', s) \in H \mid r = p\}.$$

L'ensemble H_p regroupe les transitions partant de l'état p.

1 Représentations évaluant les dates d'achèvement

Soit la matrice $A \in \mathcal{D}^{|H|\times|H|}$ ($\mathcal{D}$ peut correspondre à $\overline{\mathbb{R}}_{\max}$, ou $\overline{\mathbb{R}}_{\min}$[1]) définie pour les indices j et k des transition (p, a, q) et (r, a', s) dans H par :

$$A_{jk} = \begin{cases} [\mu(a')]_{rs} & \text{si } s = p, \\ \varepsilon & \text{sinon.} \end{cases} \tag{2.2}$$

Une interprétation est : $A_{jk} \neq \varepsilon$ signifie que la transition (p, a, q) (d'indice j dans H) peut survenir consécutivement à l'occurrence de la transition (r, a', s) (d'indice k dans H) dont la durée est égale à $[\mu(a')]_{rs}$; au contraire $A_{jk} = \varepsilon$ signifie que la transition (p, a, q) ne peut pas survenir consécutivement à l'occurrence de la transition (r, a', s).

Exemple 6 *L'automate (max,+) G_4 représenté sur la figure 2.1 est non-déterministe, mais fortement non-ambigu.*
Pour G_4, on a

$$H = \{(I, a, I), (I, b, II), (II, c, II)\},$$

et

$$A = \begin{pmatrix} 3 & \varepsilon & \varepsilon \\ 3 & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Par exemple $A_{2,1} = 3$ signifie que la transition (I, b, II) (d'indice 2) peut survenir consécutivement à l'occurrence de la transition (I, a, I) (d'indice 1) dont la durée est égale à 3 unités de temps.

Définition 3 *Un vecteur $x \in \mathcal{D}^{|H|\times 1}$ est dit homogène si $\forall p \in Q$, $\forall i, j \in H_p$, $x_i = x_j$. En d'autres termes, l'élément x_i d'un vecteur homogène dépend uniquement de l'état d'origine de la transition i. Puisque la somme sur $\mathcal{D}$ est idempotente, x_i est égale à $\bigoplus_{i\in H_p} x_i$. On notera alors cette valeur x_p.*

[1] Le dioïde $\overline{\mathbb{R}}_{\min}$ est l'ensemble $\mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ muni de l'opérateur min comme somme $\oplus$ (d'élément neutre $\varepsilon = +\infty$) et de l'addition usuelle comme produit $\otimes$ (d'élément neutre $e = 0$).

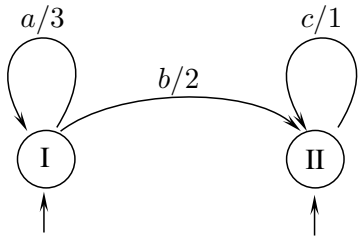

Figure 2.1 – Automate G_4.

Puisque les lignes de A qui correspondent à des transitions de même origine sont identiques, on déduit que pour chaque vecteur homogène $y \in \mathcal{D}^{|H|\times 1}$, le vecteur $x = A \otimes y$ est aussi homogène.

On définit, par récurrence, la séquence de vecteurs homogènes $x(n) \in \mathcal{D}^{|H|\times 1}$ pour $n \in \mathbb{N}$ par :

$$\begin{cases} x(1)_{(p,a,q)} = \alpha_p & \text{pour tout } (p,a,q) \in H, \\ x(n+1) = A \otimes x(n) & \text{pour } n \geq 1. \end{cases} \tag{2.3}$$

1 .1 Dans l'algèbre (max,+)

La proposition 1 qui suit montre comment la récurrence (2.3), formulée dans l'algèbre (max,+), concourt à la représentation du comportement "pire-cas" d'un automate (max,+).

Proposition 1 *Soient $\overline{A}$ et $\overline{x}(n)$, $n \in \mathbb{N}$, définis respectivement par* (2.2) *et* (2.3) *avec $\mathcal{D} = \overline{\mathbb{R}}_{\max}$. Alors $\overline{x}(n+1)_p$, $n \in \mathbb{N}$, $p \in Q$, est l'élément maximum de $\sigma_{n,p} = \{x(w)_p \mid |w| = n\}$, c'est-à-dire, la durée d'achèvement maximum pour toutes les séquences de longueur n aboutissant à l'état p.*

Preuve 1 *On raisonne par récurrence.*
Initialisation. *Pour tout $p \in Q$, on a par définition :*

$$\overline{x}(1)_p = \alpha_p = x(\epsilon)_p = \{x(w)_p \mid |w| = 0\}.$$

Hérédité.

$$\begin{aligned}
\max \sigma_{n+1,p} & \\
&= \bigoplus_{\{w \mid |w|=n+1\}} x(w)_p, \\
&= \bigoplus_{q\in Q} \bigoplus_{\{a|(q,a,p)\in H\}} \bigoplus_{\{w'||w'|=n\}} x(w')_q \otimes \mu(a)_{qp}, && (\textit{selon } (1.6)), \\
&= \bigoplus_{q\in Q} (\bigoplus_{\{w'||w'|=n\}} x(w')_q) \otimes (\bigoplus_{\{a|(q,a,p)\in H\}} \mu(a)_{qp}) \\
&= \bigoplus_{q\in Q} \overline{x}(n+1)_q \otimes (\bigoplus_{\{a|(q,a,p)\in H\}} \mu(a)_{qp}), \textit{ par hypothèse de récurrence}, \\
&= \bigoplus_{q\in Q} \bigoplus_{(q,a,p)\in H_q} \mu(a)_{qp} \otimes \overline{x}(n+1)_{(q,a,p)}, \\
&= \bigoplus_{(q,a,p)\in H_q} \bigoplus_{j\in H_p} \overline{A}_{j,(q,a,p)} \otimes \overline{x}(n+1)_{(q,a,p)}, && (\textit{selon } (2.2)), \\
&= [\overline{A} \otimes \overline{x}(n+1)]_p, \\
&= \overline{x}(n+2)_p.
\end{aligned}$$

Exemple 7 *Considérons l'automate G_4 étudié dans l'exemple 6 et représenté sur la figure 2.1. On a :*

$$\overline{x}(n) = \begin{bmatrix} \overline{x}(n)_{(I,a,I)} \\ \overline{x}(n)_{(I,b,II)} \\ \overline{x}(n)_{(II,c,II)} \end{bmatrix}.$$

Le vecteur $\overline{x}$ satisfait l'équation (2.3), c'est-à-dire :

$$\overline{x}(1) = \begin{pmatrix} e \\ e \\ e \end{pmatrix}, \quad \overline{x}(n+1) = \begin{pmatrix} 3 & \varepsilon & \varepsilon \\ 3 & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & 2 & 1 \end{pmatrix} \otimes \overline{x}(n).$$

Le tableau 2.1 contient les premières valeurs obtenues grâce à cette récurrence dans $\overline{\mathbb{R}}_{\max}$.

n	1	2	3	4	5	...
$\overline{x}(n)_{(I,a,I)}$	e	3	6	9	12	...
$\overline{x}(n)_{(I,b,II)}$	e	3	6	9	12	...
$\overline{x}(n)_{(II,c,II)}$	e	2	5	8	11	...

Tableau 2.1 –

Par exemple, les séquences possibles de longueur 4 et aboutissant à l'état II sont $\{cccc, bccc, abcc, aabc, aaab\}$. On obtient à l'aide de la représentation (1.6) :

$$x(cccc)_{II} = 4,\ x(bccc)_{II} = 5,\ x(abcc)_{II} = 7, x(aabc)_{II} = 9,\ x(aaab)_{II} = 11,$$

ce qui donne $\sigma_{4,II} = \{4, 5, 7, 9, 11\}$.
D'autre part, on a :

$$H_{II} = \{(II, c, II)\}.$$

On vérifie bien que :

$$\overline{x}(5)_{II} = \overline{x}(5)_{(II,c,II)} = 11,$$

correspond à l'élément maximum de $\sigma_{4,II}$, qui est la durée d'achèvement maximum pour toutes les séquences de longueur 4 aboutissant à l'état II.

1 .2 Dans l'algèbre (min,+)

La proposition suivante contribue à la description du comportement optimal d'un automate (max,+). Cette représentation est formulée dans l'algèbre (min,+). Toutefois, nous devons garder à l'esprit qu'elle décrit un automate (max,+).

Proposition 2 *Soient $\underline{A}$ et $\underline{x}(n)$, $n \in \mathbb{N}$, définis respectivement par (2.2) et (2.3) avec $\mathcal{D} = \overline{\mathbb{R}}_{\min}$. Alors $\underline{x}(n+1)_p$, $n \in \mathbb{N}$, $p \in Q$, est un minorant de $\sigma_{n,p} = \{x(w)_p \mid |w| = n\}$, c'est-à-dire un minorant des durées d'achèvement des séquences de longueur n aboutissant à l'état p.*

Preuve 2 *$\forall q_{n+1} \in Q$, on a :*

$$\begin{aligned}
\underline{x}(n+1)_{q_{n+1}} &= [\underline{A} \otimes \underline{x}(n)]_{q_{n+1}}, && \textit{(en utilisant (2.3)),}\\
&= \bigoplus_{l\in H} \underline{A}_{q_{n+1},l} \otimes \underline{x}(n)_l,\\
&= \bigoplus_{q_n\in Q} \bigoplus_{k\in H_{q_n}} \underline{A}_{q_{n+1},k} \otimes \underline{x}(n)_k,\\
&= \bigoplus_{q_n\in Q} \bigoplus_{k\in H_{q_n}} \underline{A}_{q_{n+1},k} \otimes \underline{x}(n)_{q_n}, && \textit{(car } \underline{x} \textit{ est homogène).}
\end{aligned}$$

D'après (2.2) qui définit $\underline{A}$, on a :

$$\forall q_{n+1} \in Q, \quad \bigoplus_{k\in H_{q_n}} \underline{A}_{q_{n+1},k} = \bigoplus_{a_n\in\Sigma} \mu(a_n)_{q_n q_{n+1}}.$$

On a alors, $\forall q_{n+1} \in Q$:

$$\begin{aligned}
&\underline{x}(n+1)_{q_{n+1}}\\
&= \bigoplus_{q_n\in Q} \bigoplus_{a_n\in\Sigma} \mu(a_n)_{q_n q_{n+1}} \otimes \underline{x}(n)_{q_n},\\
&= \bigoplus_{q_n\in Q} \bigoplus_{a_n\in\Sigma} \underline{x}(n)_{q_n} \otimes \mu(a_n)_{q_n q_{n+1}},\\
&= \bigoplus_{q_n\in Q} \cdots \bigoplus_{q_1\in Q} \bigoplus_{a_n\in\Sigma} \cdots \bigoplus_{a_1\in\Sigma} \underline{x}(1)_{q_1} \otimes \mu(a_1)_{q_1 q_2} \otimes \ldots \otimes \mu(a_n)_{q_n q_{n+1}},\\
&= \bigoplus_{q_n\in Q} \cdots \bigoplus_{q_1\in Q} \bigoplus_{a_n\in\Sigma} \cdots \bigoplus_{a_1\in\Sigma} \alpha_{q_1} \otimes \mu(a_1)_{q_1 q_2} \otimes \ldots \otimes \mu(a_n)_{q_n q_{n+1}}, \qquad (*)\\
&= \min_{q_n\in Q} \cdots \min_{q_1\in Q} \min_{a_n\in\Sigma} \cdots \min_{a_1\in\Sigma} \alpha_{q_1} + \mu(a_1)_{q_1 q_2} + \ldots + \mu(a_n)_{q_n q_{n+1}}, \qquad (**)
\end{aligned}$$

Clairement, le terme $\alpha_{q_1} \otimes \mu(a_1)_{q_1 q_2} \otimes \ldots \otimes \mu(a_n)_{q_n q_{n+1}}$ n'est pas égal à ε $(= +\infty)$ si q_1 est un état initial et si le chemin $(q_1, a_1, q_2) \ldots (q_n, a_n, q_{n+1})$ existe dans l'automate. On a alors $[\underline{x}(n+1)]_{q_{n+1}} = \varepsilon$ s'il n'y a aucune séquence de longueur n aboutissant à q_{n+1}.

Supposons que $[\underline{x}(n+1)]_{q_{n+1}} \neq \varepsilon$ et notons $\underline{a}_1 \ldots \underline{a}_n \in \Sigma^*$ une séquence qui satisfait la minimisation dans $(**)$. On considère deux cas :

(i) Si l'ensemble $Q_i \overset{\underline{a}_1\cdots\underline{a}_n}{\rightsquigarrow} q_{n+1}$ est un singleton, aucune opération $\min_{q_i\in Q}$, $i = 1, \ldots n$ n'intervient dans $(**)$ et $\underline{x}(n+1)_{q_{n+1}}$ est égal à $[\alpha\mu(\underline{a}_1) \otimes \ldots \otimes \mu(\underline{a}_n)]_{q_{n+1}} = x(\underline{a}_1 \ldots \underline{a}_n)_{q_{n+1}}$ (par identification avec (1.8)).

(ii) S'il existe plusieurs chemins reconnaissant la séquence $\underline{a}_1 \ldots \underline{a}_n$ allant d'un état dans Q_i vers q_{n+1}, alors $\mu(\underline{a}_1)_{q_1 q_2} \otimes \ldots \otimes \mu(\underline{a}_n)_{q_n q_{n+1}}$ avec $q_1 \in Q_i$ peut prendre des valeurs différentes. Dans ce cas, l'équation $(**)$ calcule le minimum de ces valeurs alors que $x(\underline{a}_1 \ldots \underline{a}_n)_{q_{n+1}} = [\alpha\mu(\underline{a}_1) \otimes \ldots \otimes \mu(\underline{a}_n)]_{q_{n+1}}$ correspond au maximum de ces valeurs. En d'autres termes, la valeur calculée par l'équation $(**)$ peut être strictement inférieure à $x(\underline{a}_1 \ldots \underline{a}_n)_{q_{n+1}}$.

Les arguments énoncés dans (i) et (ii) conduisent à conclure que $\underline{x}(n+1)_{q_{n+1}}$ est un minorant de $\sigma_{n,q_{n+1}} = \{x(w)_{q_{n+1}} \mid |w| = n\}$.

Proposition 3 *Si G est fortement non-ambigu, alors $\underline{x}(n+1)_p$ est l'élément minimum de $\sigma_{n,p} = \{x(w)_p \mid |w| = n\}$.*

Preuve 3 *Si G est fortement non-ambigu, alors $|Q_i \overset{\underline{a}_1 \cdots \underline{a}_n}{\rightsquigarrow} q_{n+1}| \leq 1$ pour tout $q_{n+1} \in Q$ et tout $\underline{a}_1 \ldots \underline{a}_n \in \Sigma^*$. Il n'y a que le cas (i) dans la preuve de la proposition 2 qui est possible, et $\underline{x}(n+1)_{q_{n+1}}$ appartient alors à l'ensemble $\sigma_{n,q_{n+1}} = \{x(w)_{n+1} \mid |w| = n\}$.*

Exemple 8 *Considérons de nouveau l'automate G_4 représenté sur la figure 2.1. Il est fortement non-ambigu, et comme précisé dans la Proposition 3, $\underline{x}(n+1)_p$ donne le minimum des durées d'achèvement pour les séquences de longueur n aboutissant à l'état p.*
Le tableau 2.2 contient les premières valeurs obtenues pour $\underline{x}$ à l'aide de la récurrence (2.3) dans $\overline{\mathbb{R}}_{\min}$.

n	1	2	3	4	5	...
$\underline{x}(n)_{(I,a,I)}$	e	3	6	9	12	...
$\underline{x}(n)_{(I,b,II)}$	e	3	6	9	12	...
$\underline{x}(n)_{(II,c,II)}$	e	1	2	3	4	...

Tableau 2.2 –

Nous avons affirmé dans l'exemple 7 que l'ensemble des durées d'achèvement possibles pour les séquences de longueur 4 aboutissant à l'état II, est donné par :

$$\sigma_{4,II} = \{4, 5, 7, 9, 11\},$$

et $H_{II} = \{(II, c, II)\}$.
L'élément minimum de l'ensemble $\sigma_{4,II}$ est donné par :

$$\underline{x}(5)_{(II,c,II)} \quad = \quad 4.$$

Examinons un autre exemple (d'un automate faiblement ambigu) où le résultat $\underline{x}(n+1)_p$ est un minorant de l'ensemble $\sigma_{n,p}$ et non pas un minimum.

Exemple 9 *Soit l'automate (max,+) faiblement ambigu de la figure 2.2 (en particulier $|Q_i \overset{a}{\rightsquigarrow} II| = 2$).*

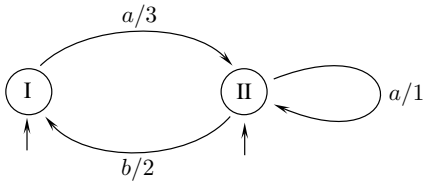

Figure 2.2 – Automate G_5.

On a :

$$H = \{(I, a, II), (II, a, II), (II, b, I)\},$$

et

$$A = \begin{pmatrix} \varepsilon & \varepsilon & 2 \\ 3 & 1 & \varepsilon \\ 3 & 1 & \varepsilon \end{pmatrix}.$$

Le tableau 2.3 contient les premières valeurs obtenues pour $\underline{x}$ *à l'aide de la récurrence (2.3) dans* $\overline{\mathbb{R}}_{\min}$.

n	1	2	3	4	5	...
$\underline{x}(n)_{(I,a,II)}$	e	2	3	4	5	...
$\underline{x}(n)_{(II,a,II)}$	e	1	2	3	4	...
$\underline{x}(n)_{(II,b,I)}$	e	1	2	3	4	...

Tableau 2.3 –

L'ensemble des durées d'achèvement des séquences de longueur 3 *aboutissant à l'état* II *est :*

$$\sigma_{3,II} = \{5, 6, 8\},$$

ces dates correspondant aux séquences $\{aaa, baa, aba\}$ *respectivement. On a* $H_{II} = \{(II, a, II), (II, b, I)\}$.
Un minorant de l'ensemble $\sigma_{3,II} = \{5, 6, 8\}$ *est donné par :*

$$\underline{x}(4)_{(II,a,II)} \quad = \quad \underline{x}(4)_{(II,b,I)} \quad = \quad 3.$$

2 Représentations évaluant les longueurs de séquences

Les deux représentations de la section précédente ont permis de décrire le comportement extrémal d'un automate (max,+), en évaluant les durées d'achèvement pour des séquences de longueur donnée. Dans cette section et de façon duale, nous allons, grâce à deux autres représentations décrivant le comportement extrémal d'un automate (max,+), évaluer les longueurs de séquences s'achevant avant, ou à, une date donnée.
Il est à noter qu'on utilise des variables qui dépendent du temps t et qui peuvent, à tort, faire penser à des variables compteurs manipulées dans l'algèbre (min,+) (voir par ex. [Baccelli 1992, §5.2]). Les variables qu'on utilise sont mises en jeu dans des représentations dans les algèbres (max,+) et (min,+), pour modéliser les comportements extrémaux d'automates (max,+).

Notation 2 *Soit* T *l'ensemble des temporisations associées aux événements :*

$$T \triangleq \{\tau \mid \exists a \in \Sigma, \exists p \in Q, \exists q \in Q \text{ avec } [\mu(a)]_{pq} = \tau\}.$$

On suppose que $T \subset \mathbb{N}$.

Soient les matrices $E_\tau \in \mathcal{D}^{|H|\times|H|}$ ($\mathcal{D}$ peut correspondre à $\overline{\mathbb{R}}_{\min}$ ou $\overline{\mathbb{R}}_{\max}$), $\tau \in T$, définies pour les indices j et k des transitions (p, a, q) et (r, a', s) dans H par :

$$[E_\tau]_{jk} = \begin{cases} 1 & \text{si } s = p \text{ et } [\mu(a')]_{rs} = \tau, \\ \varepsilon & \text{sinon.} \end{cases} \tag{2.4}$$

Il est à noter que pour tout vecteur homogène $x \in \mathcal{D}^{|H|\times 1}$, les vecteurs $E_\tau \otimes x$, $\tau \in T$ sont aussi homogènes.
On définit, par récurrence, la séquence de vecteurs homogènes suivante $z(t) \in \mathcal{D}^{|H|\times 1}$ pour $t \in \mathbb{N}$:

$$\begin{cases} z(0)_{(p,a,q)} = \alpha_p & \text{pour tout } (p,a,q) \in H, \\ z(t) = \bigoplus_{\tau\in T, \tau\le t} E_\tau \otimes z(t-\tau) \oplus z(t-1), & \text{pour } t > 0. \end{cases} \tag{2.5}$$

2 .1 Dans l'algèbre (max,+)

La proposition suivante permet d'évaluer la longueur maximum des séquences s'achevant avant une date donnée, et contribue en cela à caractériser le cas optimal représenté par un automate (max,+).

Proposition 4 *Soient $\overline{E}_\tau$, $\tau =\in T$, et $\overline{z}(t)$, $t \in \mathbb{N}$, définis respectivement par (2.4) et (2.5) avec $\mathcal{D} = \overline{\mathbb{R}}_{\max}$. Alors $\overline{z}(t)_p$, $t \in \mathbb{N}$, $p \in Q$, est un majorant de l'ensemble $\gamma_{t,p} = \{|w| \mid x(w)_q \le t\}$, c'est-à-dire, un majorant des longueurs des séquences permettant d'atteindre l'état p avant, ou à, la date t.*
Si G est fortement non-ambigu, alors $\overline{z}(t)_p$ est l'élément maximum de $\gamma_{t,p}$.

Preuve 4 *Soit $n \ge 0$ et $w \in \Sigma^*$ avec $|w| = n$, on note π_n un chemin allant d'un état initial à $q_n \in Q$ selon la séquence w, à savoir $\pi_n \in Q_i \overset{w}{\rightsquigarrow} q_n$. On raisonne par récurrence pour démontrer que $\overline{z}(\sigma(\pi_n))_{q_n} \ge n$.*

Initialisation. *Pour $n = 0$, on a q_0 un état initial, $\sigma(\pi_0) = 0$ et $\overline{z}(0)_{q_0} = \alpha_{q_0} = 0$.*
Hérédité. *On note $(q_0, a_1, q_1)\dots(q_{n-1}, a_n, q_n)$ les transitions successives de π_n et $[\overline{E}_\tau]_{q_n,k}$, $k \in H$, les valeurs $[\overline{E}_\tau]_{(q_n,a_{n+1},q_{n+1}),k}$ identiques pour tout $a_{n+1} \in \Sigma$ et*

$q_{n+1} \in Q$. *On a :*

$$
\begin{aligned}
&[\overline{z}(\sigma(\pi_n))]_{q_n}\\
&= \bigoplus_{\tau\in T, t\geq\tau} \left[E_\tau \otimes \overline{z}(\sigma(\pi_n)-\tau)\right]_{q_n} \oplus \overline{z}(\sigma(\pi_n)-1)_{q_n},\\
&\geq \bigoplus_{\tau\in T, t\geq\tau} \left[E_\tau \otimes \overline{z}(\sigma(\pi_n)-\tau)\right]_{q_n},\\
&= \bigoplus_{\tau\in T, t\geq\tau} \bigoplus_{k\in H} [\overline{E}_\tau]_{q_n,k} \otimes \overline{z}(\sigma(\pi_n)-\tau)_k,\\
&\geq \bigoplus_{\tau\in T, t\geq\tau} [\overline{E}_\tau]_{q_n,(q_{n-1},a_n,q_n)} \otimes [\overline{z}(\sigma(\pi_n)-\tau)]_{(q_{n-1},a_n,q_n)},\\
&\qquad\qquad\qquad\qquad \textit{(en spécifiant pour } k=(q_{n-1},a_n,q_n))\\
&\geq \bigoplus_{\tau\in T, t\geq\tau} [\overline{E}_\tau]_{q_n,(q_{n-1},a_n,q_n)} \otimes [\overline{z}(\sigma(\pi_{n-1})+\mu(a_n)_{q_{n-1}q_n}-\tau)]_{(q_{n-1},a_n,q_n)},\\
&\qquad\qquad\qquad\qquad \textit{(par définition de } \sigma \textit{ et } \pi_n)\\
&= 1 \otimes \overline{z}(\sigma(\pi_{n-1}))_{q_{n-1}},\\
&\qquad\qquad\qquad\qquad \textit{(puisque } \exists\tau\in T \textit{ tel que } [\mu(a_n)]_{q_{n-1},q_n}=\tau)\\
&\geq 1+(n-1)\ (=n), \qquad\qquad \textit{(par hypothèse de récurrence)}.
\end{aligned}
$$

Soit $t \in \mathbb{R}$ *tel que* $x(w)_{q_n} \leq t$. *Puisque* $\overline{z}$ *est monotone (i.e.* $\overline{z}(t) \geq \overline{z}(t-1)$*), on a (d'après (1.7) pour la dernière inégalité) :*

$$\overline{z}(t)_{q_n} \geq \overline{z}(x(w)_{q_n})_{q_n} \geq \overline{z}(\sigma(\pi_n))_{q_n}.$$

On a montré précédemment que $[\overline{z}(\sigma(\pi_n))]_{q_n} \geq |\pi_n| (= n)$ *et on en déduit que :*

$$\overline{z}(t)_{q_n} \geq |\pi_n|.$$

Le même raisonnement est valable pour tout chemin π' *reconnaissant* w' *tel que* $t \geq x(w')_{q_n}$, *ce qui permet de conclure que* $\overline{z}(t)_{q_n}$ *est un majorant de* $\gamma_{t,q_n} = \{|w| \mid x(w)_{q_n} \leq t\}$.

Considérons maintenant le cas où G *est un automate fortement non-ambigu. On peut vérifier que :*

$$\overline{z}(t)_{q_n} \neq \varepsilon,$$

implique qu'il existe un chemin $(q_0, a_1, q_1) \dots (q_{n-1}, a_n, q_n)$ *avec* $q_0 \in Q_i$ *tel que :*

$$\mu(a_1)_{q_0 q_1} \dots \mu(a_n)_{q_{n-1} q_n} \leq t\ .$$

Par définition de la notion de forte non-ambiguïté, l'ensemble $Q_i \overset{a_1 \dots a_0}{\rightsquigarrow} q_n$ *est un singleton et d'après* (1.8) *on a :*

$$x(a_1 \dots a_n)_{q_n} = \mu(a_1)_{q_0 q_1} \dots \mu(a_n)_{q_{n-1} q_n}.$$

On a alors $x(a_1 \dots a_n)_{q_n} \leq t$, *ce qui signifie que* $\overline{z}(t)_{q_n} = |a_1 \dots a_n|$ *appartient à* $\gamma_{t,q_n} = \{|w| \mid x(w)_{q_n} \leq t\}$. *Comme il a été démontré que c'était un majorant, on peut déduire que* $\overline{z}(t)_{q_n}$ *est l'élément maximum de cet ensemble.*

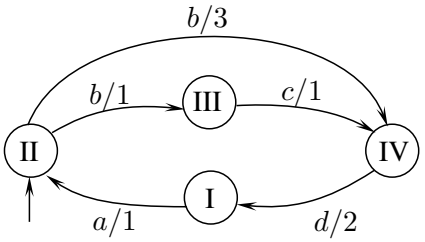

Figure 2.3 – Automate G_6.

Exemple 10 *On considère l'automate (max,+) G_6 représenté sur la figure 2.3. On notera que G_6 est non-déterministe (à partir de l'état II deux transitions sont possibles selon b) mais fortement non-ambigu.*

On a :

$$H = \{(I, a, II), (II, b, III), (III, c, IV), (II, b, IV), (IV, d, I)\},$$

$$T = \{1, 2, 3\}.$$

Selon la définition (2.4), on obtient :

$$\overline{E}_1 = \begin{pmatrix} \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ 1 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & 1 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ 1 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & 1 & \varepsilon & \varepsilon \end{pmatrix}, \overline{E}_2 = \begin{pmatrix} \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & 1 \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \end{pmatrix}, \overline{E}_3 = \begin{pmatrix} \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & 1 & \varepsilon \end{pmatrix}.$$

Les équations (2.5) s'écrivent :

$$\overline{z}(t) = \begin{bmatrix} \overline{z}(t)_{(I,a,II)} \\ \overline{z}(t)_{(II,b,III)} \\ \overline{z}(t)_{(III,c,IV)} \\ \overline{z}(t)_{(II,b,IV)} \\ \overline{z}(t)_{(IV,d,I)} \end{bmatrix},$$

$$\overline{z}(0) = \begin{bmatrix} \varepsilon \\ e \\ \varepsilon \\ e \\ \varepsilon \end{bmatrix}, \quad \overline{z}(t) = \bigoplus_{\tau \in T, \tau \geq t} \overline{E}_\tau \otimes \overline{z}(t-\tau) \oplus \overline{z}(t-1) \text{ pour } t > 0.$$

Le tableau 2.4 contient les premières valeurs obtenues à l'aide de cette récurrence dans $\overline{\mathbb{R}}_{\max}$.

t	0	1	2	3	4	5	6	7	...
$\overline{z}(t)_{(I,a,II)}$	ε	ε	ε	ε	3	3	3	3	...
$\overline{z}(t)_{(II,b,III)}$	e	e	e	e	e	4	4	4	...
$\overline{z}(t)_{(III,c,IV)}$	ε	1	1	1	1	1	5	5	...
$\overline{z}(t)_{(II,b,IV)}$	e	e	e	e	e	4	4	4	...
$\overline{z}(t)_{(IV,d,I)}$	ε	ε	2	2	2	2	2	6	...

Tableau 2.4 –

Par exemple, les séquences permettant d'atteindre l'état IV avant la date $t = 7$ sont : $\{b, bc, bcdabc\}$. On a alors $\gamma_{7,IV} = \{1, 2, 6\}$.
D'autre part, on a :

$$\overline{z}(7)_{IV} = \overline{z}_{(IV,d,I)}(7) = 6,$$

qui correspond bien à l'élément maximum de $\gamma_{7,IV}$, c'est-à-dire, la longueur maximum des séquences permettant d'atteindre l'état IV avant la date $t = 7$.

2 .2 Dans l'algèbre (min,+)

À l'aide de la proposition 5 qui suit, la longueur minimum des séquences s'achevant avant une date donnée peut être évaluée. Ce résultat participe donc à la description du comportement pire-cas d'un automate (max,+).

Proposition 5 *Soient $\underline{E}_\tau$, $\tau =\in T$, et $\underline{z}(t)$, $t \in \mathbb{N}$, définis respectivement par (2.4) et (2.5) avec $\mathcal{D} = \overline{\mathbb{R}}_{\min}$. L'élément $\underline{z}(t)_p$, $t \in \mathbb{N}$, $p \in Q$, est un minorant de l'ensemble $\gamma_{t,p} = \{|w| \mid x(w)_p \leq t\}$, autrement dit, un minorant des longueurs de séquences possibles, permettant d'atteindre l'état p avant, ou à, la date t.*
Si G est un automate (max,+) fortement non-ambigu, alors $\underline{z}(t)_p$ est l'élément minimum de $\gamma_{t,p}$.

Preuve 5 *Simplement en réécrivant la preuve de la proposition 4 dans $\overline{\mathbb{R}}_{\min}$ (où $\oplus$ correspond à un* min *et l'ordre est inversé), on prouve le résultat de la proposition 5.*

Exemple 11 *On considère à nouveau l'automate (max,+) G_6 représenté sur la figure 2.3. Les matrices $\underline{z}$ et $\underline{E}_\tau$ sont des répliques dans $\overline{\mathbb{R}}_{\min}$ de $\overline{z}$ et $\overline{E}_\tau$ données dans l'exemple 10.*
Le tableau 2.5 contient les premières valeurs obtenues pour $\underline{z}(t)$.

t	0	1	2	3	4	5	6	7	...
$\underline{z}(t)_{(I,a,II)}$	ε	ε	ε	ε	3	2	2	2	...
$\underline{z}(t)_{(II,b,III)}$	e	e	e	e	e	e	e	e	...
$\underline{z}(t)_{(III,c,IV)}$	ε	1	1	1	1	1	1	1	...
$\underline{z}(t)_{(II,b,IV)}$	e	e	e	e	e	e	e	e	...
$\underline{z}(t)_{(IV,d,I)}$	ε	ε	2	1	1	1	1	1	...

Tableau 2.5 –

Par exemple, les séquences possibles aboutissant à l'état I et se terminant avant, ou à, la date $t = 5$ sont : $\{bd, bcd\}$. On a alors $\gamma_{5,I} = \{2, 3\}$.
D'autre part, on a :

$$\underline{z}(5)_I = \underline{z}(5)_{(I,a,II)} = 2,$$

ce qui correspond à l'élément minimum de $\gamma_{5,I}$.

3 Représentations symétriques

Dans les deux sections précédentes, on a proposé des représentations permettant d'évaluer les dates d'achèvement et les longueurs de séquences aboutissant à un état donné. En suivant la même logique de modélisation, il est possible d'établir des représentations symétriques qui permettent d'évaluer les mêmes grandeurs mais pour les séquences partant d'un état donné.

3 .1 Représentations symétriques évaluant les dates d'achèvement

Avec la représentation classique des automates (max,+) spécifiée par l'équation (1.6), on définit parfois le vecteur $\beta \in \overline{\mathbb{R}}_{\max}^{|Q|\times 1}$ pour spécifier des délais finaux [Gaubert 1995]. Plus précisément, $\beta_q \neq \varepsilon$ si q est un état final, et β_q désigne le délai associé à cet état. On définit alors $y(w) \in \overline{\mathbb{R}}_{\max},\ w \in \Sigma^*$, par :

$$y(w) = x(w)\beta,$$

qui s'interprète comme la durée d'achèvement de la séquence w (maximum des poids des chemins reconnaissant w, partant d'un état initial et aboutissant à un état final). Conformément à la définition 1, on considère dans ce mémoire que tous les états d'un automate (max,+) sont finaux et qu'il n'y a pas de délais finaux (ce qui correspond à supposer qu'ils sont nuls). Ces hypothèses reviennent à considérer que

$$\beta = \begin{bmatrix} e \\ e \\ \vdots \\ e \end{bmatrix}.$$

Il est aisé de vérifier que :

$$[\mu(w) \otimes \beta]_p = \bigoplus_{\pi \in p \overset{w}{\rightsquigarrow} Q} \sigma(\pi)\ .$$

Autrement dit, $[\mu(w) \otimes \beta]_p$ est le maximum des poids des chemins partant de l'état p et ayant w comme label.
Soit la matrice $A \in \mathcal{D}^{|H|\times|H|}$ ($\mathcal{D}$ peut correspondre à $\overline{\mathbb{R}}_{\max}$ ou $\overline{\mathbb{R}}_{\min}$) donnée par (2.2). On définit, par récurrence, la séquence de vecteurs $\chi(n) \in \mathcal{D}^{|H|\times 1}$ pour $n \in \mathbb{N}$ par :

$$\begin{cases} \chi(1)_{(p,a,q)} = \beta_p & \text{pour tout } (p,a,q) \in H, \\ \chi(n+1) = A^T \otimes \chi(n) & \text{pour } n \geq 1. \end{cases} \tag{2.6}$$

Proposition 6 *Soient $\overline{A}$ et $\overline{\chi}(n)$, $n \in \mathbb{N}$, définis respectivement par (2.2) et (2.6) avec $\mathcal{D} = \overline{\mathbb{R}}_{\max}$. Alors $\bigoplus_{j \in H_p} \overline{\chi}(n+1)_j$, $n \in \mathbb{N}$, $p \in Q$, est l'élément maximum de $\{[\mu(w) \otimes \beta]_p \mid |w| = n\}$, c'est-à-dire, la durée d'achèvement maximum pour les séquences de longueur n partant de p.*

Preuve 6 *On raisonne par récurrence.*

Initialisation. *Pour tout $p \in Q$, $j \in H_p$, on a par définition :*

$$\overline{\chi}(1)_j = e = \{[\mu(w) \otimes \beta]_p \mid |w| = 0\}.$$

Hérédité.

$\max_{\{w||w|=n+1\}} [\mu(w) \otimes \beta]_p$

$$\begin{array}{lll} = & \bigoplus_{q \in Q} \bigoplus_{\{a|(p,a,q)\in H\}} \bigoplus_{\{w'||w'|=n\}} \mu(a)_{pq} \otimes [\mu(w') \otimes \beta]_q, & \\ = & \bigoplus_{q \in Q} \big(\bigoplus_{\{a|(p,a,q)\in H\}} \mu(a)_{pq} \big) \otimes \big(\bigoplus_{\{w'||w'|=n\}} [\mu(w') \otimes \beta]_q \big), & \\ = & \bigoplus_{q \in Q} \big(\bigoplus_{\{a|(p,a,q)\in H\}} \mu(a)_{pq} \big) \otimes \big(\bigoplus_{j \in H_q} \overline{\chi}(n+1)_j \big), & \\ & & \textit{(par hypothèse de récurrence)} \\ = & \bigoplus_{(p,a,q)\in H_p} \bigoplus_{j \in H_q} \overline{A}_{j,(p,a,q)} \otimes \overline{\chi}(n+1)_j, & \\ = & \bigoplus_{(p,a,q)\in H_p} [\overline{A}^T \otimes \overline{\chi}(n+1)]_{(p,a,q)}, & \\ = & \bigoplus_{j \in H_p} \overline{\chi}(n+2)_j. & \end{array}$$

Exemple 12 *On considère à nouveau l'automate G_4 représenté sur la figure 2.1.*

$$A^T = \begin{pmatrix} 3 & 3 & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & 2 \\ \varepsilon & \varepsilon & 1 \end{pmatrix},$$

$$n \in \mathbb{N},\ \overline{\chi}(n) = \begin{bmatrix} \overline{\chi}(n)_{(I,a,I)} \\ \overline{\chi}(n)_{(I,b,II)} \\ \overline{\chi}(n)_{(II,c,II)} \end{bmatrix}.$$

Le vecteur $\overline{\chi}$ satisfait (2.6), c'est-à-dire :

$$\begin{cases} \overline{\chi}(1) = \begin{pmatrix} e \\ e \\ e \end{pmatrix}, \\ \overline{\chi}(n+1) = \begin{pmatrix} 3 & 3 & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & 2 \\ \varepsilon & \varepsilon & 1 \end{pmatrix} \otimes \overline{\chi}(n). \end{cases}$$

Le tableau 2.6 contient les premières valeurs obtenues grâce à cette récurrence dans $\overline{\mathbb{R}}_{\max}$.

n	1	2	3	4	5	...
$\overline{\chi}(n)_{(I,a,I)}$	e	3	6	9	12	...
$\overline{\chi}(n)_{(I,b,II)}$	e	2	3	4	5	...
$\overline{\chi}(n)_{(II,c,II)}$	e	1	2	3	4	...

Tableau 2.6 –

Par exemple, la durée d'achèvement maximum pour les séquences de longueur 3 qui partent de l'état I *est donnée par :*

$$\bigoplus_{j\in H_I} \overline{\chi}(4)_j = \overline{\chi}(4)_{(I,a,I)} \oplus \overline{\chi}(4)_{(I,b,II)} = 9 \oplus 4 = 9,$$

Proposition 7 *Soient* $\underline{A}$ *et* $\underline{\chi}(n)_j$, $n \in \mathbb{N}$, *définis respectivement par* (2.2) *et* (2.6) *avec* $\mathcal{D} = \overline{\mathbb{R}}_{\min}$. *Alors* $\bigoplus_{j\in H_p} \underline{\chi}(n+1)$, $n \in \mathbb{N}$, $p \in Q$, *est un minorant de* $\{[\mu(w) \otimes \beta]_p \mid |w| = n\}$, *c'est-à-dire, un minorant des durées d'achèvement des séquences de longueur* n *partant de* p.
Si l'automate (max,+) G *est non ambigu au sens de la définition spécifiée par* (1.4), *alors* $\bigoplus_{j\in H_p} \underline{\chi}(n+1)$, $n \in \mathbb{N}$, $p \in Q$, *est l'élément minimum de* $\{[\mu(w)\otimes\beta]_p \mid |w| = n\}$.

Preuve 7 $\forall q_0 \in Q$, *on a :*

$$\begin{aligned}
\bigoplus_{j\in H_{q_0}} \underline{\chi}(n+1)_j &= \bigoplus_{j\in H_{q_0}} [\underline{A}^T \otimes \underline{\chi}(n)]_j, && \text{(en utilisant (2.6))},\\
&= \bigoplus_{j\in H_{q_0}} \bigoplus_{l\in H} \underline{A}^T_{j,l} \otimes \underline{\chi}(n)_l,\\
&= \bigoplus_{j\in H_{q_0}} \bigoplus_{q_1\in Q} \bigoplus_{k\in H_{q_1}} \underline{A}_{k,j} \otimes \underline{\chi}(n)_k.
\end{aligned}$$

D'après (2.2) qui définit $\underline{A}$, *on a :*

$$\forall k \in H_{q_1}, \quad \bigoplus_{j\in H_{q_0}} \underline{A}_{k,j} = \bigoplus_{a_1\in\Sigma} \mu(a_1)_{q_0q_1}.$$

On a alors, $\forall q_0 \in Q$ *:*

$$\begin{aligned}
&\bigoplus_{j\in H_{q_0}} \underline{\chi}(n+1)_j\\
&= \bigoplus_{q_1\in Q} \bigoplus_{a_1\in\Sigma} \mu(a_1)_{q_0,q_1} \otimes \underline{\chi}(n)_k,\\
&= \bigoplus_{q_1\in Q} \dots \bigoplus_{q_n\in Q} \bigoplus_{a_1\in\Sigma} \dots \bigoplus_{a_n\in\Sigma} \mu(a_1)_{q_0q_1} \otimes \dots \otimes \mu(a_n)_{q_{n-1}q_n} \otimes \beta_{q_n}, \qquad (*)\\
&= \min_{q_1\in Q} \dots \min_{q_n\in Q} \min_{a_1\in\Sigma} \dots \min_{a_n\in\Sigma} \mu(a_1)_{q_0q_1} + \dots + \mu(a_n)_{q_{n-1}q_n} + \beta_{q_n}. \qquad (**)
\end{aligned}$$

Clairement, le terme $\mu(a_1)_{q_0q_1} \otimes \ldots \otimes \mu(a_n)_{q_{n-1}q_n} \otimes \beta_{q_n}$ *n'est pas égal à* ε *si le chemin* $(q_0, a_1, q_1) \ldots (q_{n-1}, a_n, q_n)$ *existe dans l'automate. On a alors* $\bigoplus_{j \in H_{q_0}} \underline{\chi}(n+1)_j = \varepsilon$ *s'il n'existe aucune séquence de longueur* n *démarrant de* q_0.

Supposons que $\bigoplus_{j \in H_{q_0}} [\underline{\chi}(n+1)]_j \neq \varepsilon$ *et notons* $\underline{a}_1 \ldots \underline{a}_n \in \Sigma^*$ *une séquence qui satisfait la minimisation dans* $(**)$. *On considère deux cas :*

(i) Si $q_0 \overset{\underline{a}_1 \ldots \underline{a}_n}{\rightsquigarrow} q_n$ *est un singleton, ce qui est le cas si l'automate est non ambigu au sens de la définition spécifiée par* (1.4), *aucune opération* $\min_{q_i \in Q}$, $i = 1, \ldots n$ *n'intervient dans* $(**)$ *et* $\bigoplus_{j \in H_{q_0}} \underline{\chi}(n+1)_j$ *est égal à* $[\mu(\underline{a}_1) \otimes \ldots \otimes \mu(\underline{a}_n)\beta]_{q_0} = [\mu(\underline{a}_1 \ldots \underline{a}_n)\beta]_{q_0}$ *qui est l'élément minimum de* $\{[\mu(w) \otimes \beta]_{q_0} \mid |w| = n\}$.

(ii) Si $|q_0 \overset{\underline{a}_1 \ldots \underline{a}_n}{\rightsquigarrow} q_n| > 1$, *alors* $\mu(a_1)_{q_0q_1} \otimes \ldots \otimes \mu(a_n)_{q_{n-1}q_n}$ *peut prendre plusieurs valeurs distinctes. Dans ce cas, l'équation* $(**)$ *retient le minimum de ces valeurs alors que* $[\mu(\underline{a}_1) \otimes \ldots \otimes \mu(\underline{a}_n)\beta]_{q_0}$ *est égal au maximum de ces valeurs. Cela signifie que* $\bigoplus_{j \in H_{q_0}} \underline{\chi}(n+1)_j$ *est alors un minorant de* $\{[\mu(w) \otimes \beta]_{q_0} \mid |w| = n\}$.

Exemple 13 *Pour l'automate* G_4 *représenté sur la figure 2.1, on a :*

$$n \in \mathbb{N},\ \underline{\chi}(n) = \begin{bmatrix} \underline{\chi}(n)_{(I,a,I)} \\ \underline{\chi}(n)_{(I,b,II)} \\ \underline{\chi}(n)_{(II,c,II)} \end{bmatrix}.$$

Le vecteur $\underline{\chi}$ *satisfait (2.6), c'est-à-dire :*

$$\underline{\chi}(1) = \begin{pmatrix} e \\ e \\ e \end{pmatrix}, \quad \underline{\chi}(n+1) = \begin{pmatrix} 3 & 3 & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & 2 \\ \varepsilon & \varepsilon & 1 \end{pmatrix} \otimes \underline{\chi}(n).$$

Le tableau 2.7 contient les premières valeurs obtenues grâce à cette récurrence dans $\overline{\mathbb{R}}_{\min}$.

n	1	2	3	4	5	...
$\underline{\chi}(n)_{(I,a,I)}$	e	3	5	6	7	...
$\underline{\chi}(n)_{(I,b,II)}$	e	2	3	4	5	...
$\underline{\chi}(n)_{(II,c,II)}$	e	1	2	3	4	...

Tableau 2.7 –

Le minimum des durées d'achèvement des séquences de longueur 3 qui partent de l'état I *est obtenu comme suit :*

$$\bigoplus_{j \in H_I} \underline{\chi}(4)_j = \underline{\chi}(4)_{(I,a,I)} \oplus \underline{\chi}(4)_{(I,b,II)} = 6 \oplus 4 = 4.$$

3 .2 Représentation symétrique évaluant les longueurs de séquences

Proposition 8 *Soient $\overline{E}_\tau, \tau \in T$, les matrices définies par (2.4) avec $\mathcal{D} = \overline{\mathbb{R}}_{\max}$. On définit, par récurrence, la séquence de vecteurs $\overline{\zeta}(t) \in \overline{\mathbb{R}}_{\max}^{|H|\times 1}$, $t \in \mathbb{N}$, comme suit :*

$$\left\{ \begin{array}{lcll} \overline{\zeta}(0)_{(p,a,q)} & = & \beta_p, & \text{pour tout } (p,a,q) \in H, \\ \overline{\zeta}(t) & = & \bigoplus\limits_{\tau\in T,\tau\le t} \overline{E}_\tau^T \otimes \overline{\zeta}(t-\tau) \oplus \overline{\zeta}(t-1), & \text{pour } t > 0. \end{array} \right. \tag{2.7}$$

L'expression $\bigoplus\limits_{j\in H_p} [\overline{\zeta}(t)]_j$ majore les longueurs de séquences débutant par l'état p et se terminant avant, ou à, l'instant t (majorant de l'ensemble $\{|w| \mid [\mu(w)\beta]_p \le t\}$). Si G est non-ambigu au sens de la définition spécifiée par l'équation (1.4), alors $\bigoplus\limits_{j\in H_p} [\overline{\zeta}(t)]_j$ est l'élément maximum de l'ensemble $\{|w| \mid [\mu(w)\beta]_p \le t\}$.

Preuve 8 *Soit $n \ge 0$ et $w \in \Sigma^*$ avec $|w| = n$, on note π_n un chemin allant d'un état $q_0 \in Q$ selon la séquence w, à savoir $\pi_n \in q_0 \overset{w}{\rightsquigarrow} q_n$. On raisonne par récurrence pour démontrer que $\bigoplus\limits_{j\in H_{q_0}} \overline{\zeta}(\sigma(\pi_n))_j \ge n$.*

Initialisation. *Pour $n = 0$, on a pour tout $q_0 \in Q$: $\sigma(\pi_0) = 0$ et $\bigoplus\limits_{j\in H_{q_0}} \overline{\zeta}(0)_j = \beta_{q_0} = 0$.*

Hérédité. *On note $(q_0, a_1, q_1)\dots(q_{n-1}, a_n, q_n)$ les transitions successives de π_n. On a :*
$\forall q_0 \in Q$,

$$\begin{aligned}
&\bigoplus_{j\in H_{q_0}} [\overline{\zeta}(\sigma(\pi_n))]_j \\
&= \bigoplus_{j\in H_{q_0}} \bigoplus_{\tau\in T,t\ge\tau} \left[\overline{E}_\tau^T \otimes \overline{\zeta}(\sigma(\pi_n)-\tau)\right]_j \oplus \overline{\zeta}(\sigma(\pi_n)-1)_j, \\
&\ge \bigoplus_{j\in H_{q_0}} \bigoplus_{\tau\in T,t\ge\tau} \left[\overline{E}_\tau^T \otimes \overline{\zeta}(\sigma(\pi_n)-\tau)\right]_j, \\
&= \bigoplus_{j\in H_{q_0}} \bigoplus_{\tau\in T,t\ge\tau} \bigoplus_{k\in H} [\overline{E}_\tau^T]_{j,k} \otimes \overline{\zeta}(\sigma(\pi_n)-\tau)_k, \\
&\ge \bigoplus_{j\in H_{q_0}} \bigoplus_{\tau\in T,t\ge\tau} [\overline{E}_\tau^T]_{j,(q_1,a_2,q_2)} \otimes [\overline{\zeta}(\sigma(\pi_n)-\tau)]_{(q_1,a_2,q_2)}, \\
&\qquad\qquad (\textit{en spécifiant pour } k = (q_1,a_2,q_2)) \\
&\ge \bigoplus_{j\in H_{q_0}} \bigoplus_{\tau\in T,t\ge\tau} [\overline{E}_\tau^T]_{j,(q_1,a_2,q_2)} \otimes [\overline{\zeta}(\sigma(\pi_{n-1}) + \mu(a_2)_{q_1q_2} - \tau)]_{(q_1,a_2,q_2)}, \\
&\qquad\qquad (\textit{par définition de } \sigma \textit{ et } \pi_n) \\
&= 1 \otimes \bigoplus_{l\in H_{q_1}} \overline{\zeta}(\sigma(\pi_{n-1}))_l, \\
&\qquad\qquad (\textit{puisque } \exists\tau \in T \textit{ tel que } [\mu(a_2)]_{q_1,q_2} = \tau) \\
&\ge 1 + (n-1)\ (= n), \qquad\qquad (\textit{par hypothèse de récurrence}).
\end{aligned}$$

Soit $t \in \mathbb{R}$ tel que $x(w)_{q_n} \le t$. Puisque $\overline{\zeta}$ est monotone (i.e., $\overline{\zeta}(t) \ge \overline{\zeta}(t-1)$) on

a (d'après (1.7) pour la dernière inégalité) :

$$\bigoplus_{j\in H_{q_0}} \overline{\zeta}(t)_j \geq \bigoplus_{j\in H_{q_0}} \overline{\zeta}(x(w)_{q_n})_j \geq \bigoplus_{j\in H_{q_0}} \overline{\zeta}(\sigma(\pi_n))_j.$$

On a montré précédemment que $\bigoplus_{j\in H_{q_0}} [\overline{\zeta}(\sigma(\pi_n))]_j \geq |\pi_n| (= n)$ *et on en déduit que :*

$$\bigoplus_{j\in H_{q_0}} \overline{\zeta}(t)_j \geq |\pi_n|.$$

Le même raisonnement est valable pour tout chemin π' *reconnaissant* w' *tel que* $t \geq x(w')_{q_n}$*, ce qui nous amène à conclure que* $\bigoplus_{j\in H_p} \overline{\zeta}(t)_j$ *est un majorant de l'ensemble* $\{|w| \mid [\mu(w)\beta]_p \leq t\}$*.*

Considérons maintenant le cas où G est un automate non-ambigu au sens de l'équation (1.4)*. On peut vérifier que :*

$$\bigoplus_{j\in H_{q_0}} \overline{\zeta}(t)_j \neq \varepsilon,$$

implique qu'il existe un chemin $(q_0, a_1, q_1)\dots(q_{n-1}, a_n, q_n)$ *avec* $q_0 \in Q_i$ *tel que :*

$$\mu(a_1)_{q_0q_1} \dots \mu(a_n)_{q_{n-1}q_n} \leq t \ .$$

Par définition de la notion de non-ambiguïté , l'ensemble $q_0 \overset{a_1\dots a_0}{\rightsquigarrow} q_n$ *est un singleton et d'après l'équation* (1.8) *on a :*

$$[\mu(a_1 \dots a_n) \otimes \beta]_{q_0} = \mu(a_1)_{q_0q_1} \dots \mu(a_n)_{q_{n-1}q_n}.$$

On a alors $[\mu(a_1 \dots a_n) \otimes \beta]_{q_0} \leq t$*, ce qui signifie que* $\bigoplus_{j\in H_{q_0}} \overline{\zeta}(t)_j = |a_1 \dots a_n|$ *appartient à* $\{|w| \mid [\mu(w)\beta]_{q_0} \leq t\}$*. Comme il a été démontré que c'était un majorant, on peut déduire que* $\bigoplus_{j\in H_{q_0}} \overline{\zeta}(t)_j$ *est l'élément maximum de cet ensemble.*

Exemple 14 *On considère l'automate (max,+)* G_7 *représenté sur la figure 2.4. On notera que* G_7 *diffère de l'automate* G_6*, représenté sur la figure 2.3 et étudié dans l'exemple 10, seulement par le fait que tous ses états sont initiaux. Cette hypothèse permet de considérer tous les états comme états initiaux potentiels de séquences.*

Le tableau 2.8 contient les premières valeurs obtenues à l'aide de cette récurrence dans $\overline{\mathbb{R}}_{\max}$.

Par exemple, comme l'automate G_7 est non-ambigu, on obtient le maximum des longueurs de séquences débutant par l'état II et se terminant avant $t = 7$:

$$\bigoplus_{j\in H_{II}} [\overline{\zeta}(7)]_j = \overline{\zeta}(7)_{(II,b,IV)} \oplus \overline{\zeta}(7)_{(II,b,III)} = 4 \oplus 6 = 6,$$

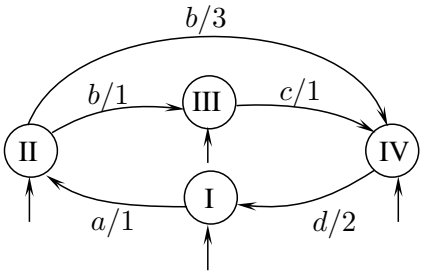

Figure 2.4 – Automate G_7.

t	0	1	2	3	4	5	6	7	...
$\overline{\zeta}(t)_{(I,a,II)}$	e	1	2	3	3	4	5	6	...
$\overline{\zeta}(t)_{(II,b,III)}$	e	1	2	2	3	4	5	6	...
$\overline{\zeta}(t)_{(III,c,IV)}$	e	1	1	2	3	4	5	5	...
$\overline{\zeta}(t)_{(II,b,IV)}$	e	e	e	1	1	2	3	4	...
$\overline{\zeta}(t)_{(IV,d,I)}$	e	e	1	2	3	4	4	5	...

Tableau 2.8 –

4 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons introduit de nouvelles représentations pour les automates (max,+). Celles-ci décrivent les comportements extrémaux. En effet, grâce à une approche différente pour la représentation analytique des automates (max,+), on peut borner les durées d'achèvement des séquences en fonction de la longueur, et symétriquement, borner les longueurs des séquences en fonction de dates d'achèvement.

Le prochain chapitre traite des indicateurs de performances qui peuvent être déduits de ces représentations, en apportant des détails sur leur complexité algorithmique et leur originalité comparés aux travaux semblables dans la littérature.

Une autre possibilité est abordée dans le chapitre 4. Grâce à ces représentations, on aborde en effet la problématique de commande de SED modélisés par des automates (max,+). Une étape préalable consiste à modéliser une entrée exogène au sein de ces représentations, afin de représenter une influence externe sur l'évolution dynamique du système.

CHAPITRE 3

Apports pour l'évaluation de performances des SED

Sommaire

Dans ce chapitre, nous allons nous intéresser à l'utilisation des représentions introduites dans le chapitre précédent pour l'évaluation de performances des SED. Il est mis en avant que ces représentations permettent d'évaluer des bornes sur les durées d'achèvement et les longueurs de séquences, avec divers degrés de raffinement possibles. Pour certains SED, ces indicateurs peuvent être d'importance significative. Par exemple,

- pour la vérification et la validation de systèmes temps réel, les durées d'achèvement minimum et maximum fournissent des garanties concernant le meilleur et le pire temps d'exécution de tâches, alors que les bornes sur les longueurs de séquences indiquent les nombres minimum et maximum de tâches pouvant être accomplies avant une date donnée ;
- pour des systèmes de production au sein desquels différents ordonnancements sont possibles, les durées d'achèvement minimum et maximum fournissent des

bornes sur le *makespan*[1], alors que les bornes sur les longueurs de séquences informent sur les quantités minimum et maximum de produits qui peuvent être livrés à une date donnée.

Les deux premières sections portent sur les bornes concernant les durées d'achèvement des séquences. Ces résultats ont été partiellement introduits dans [Boukra 2012a] et [Boukra 2012c], puis finalisés dans [Boukra 2012b] et [Boukra 2013]. Plusieurs papiers ont déjà traité de ces indicateurs dans la littérature. On décrit dans ces sections à la fois l'originalité et le caractère concurrentiel (en terme de complexité) des résultats proposés.

Les sections 3 et 4 traitent de bornes sur les longueurs de séquences pouvant être achevées à une date donnée. Ces résultats ont été présentés en partie dans [Boukra 2012b] et [Boukra 2013]. Nous n'avons pas connaissance d'autres travaux dans la littérature traitant de ces indicateurs.

Afin d'illustrer les apports des résultats et démontrer leur applicabilité, ils sont mis en oeuvre dans la dernière section pour l'étude d'ateliers *jobshop*[2].

1 Calcul de bornes supérieures pour les dates d'achèvement

Considérons un SED modélisé par un automate (max,+). Comme discuté au paragraphe 5.1.1 du chapitre 1, un indicateur de performance pertinent pour ce système peut être d'évaluer la durée d'achèvement maximum pour les séquences d'une longueur choisie. En particulier, si au sein de l'automate (max,+) les séquences possibles modélisent l'ensemble des ordonnancements pouvant s'appliquer à un système manufacturier, on est alors à même d'évaluer le plus grand *makespan*.
La représentation introduite dans la Proposition 1 permet précisément d'évaluer la durée d'achèvement maximum pour les séquences de longueur n, noté l_n^{worst}, selon :

$$l_n^{worst} = \bigoplus_{j \in H} [\overline{x}(n+1)]_j = \bigoplus_{j \in H} [\overline{A}^n \overline{x}(1)]_j. \tag{3.1}$$

1 .1 Originalité et complexité

Comme rappelé dans la Section. 5 .1.1, l'indicateur de performance noté, l_n^{worst}, (durée d'achèvement maximum pour les séquences de n événements) est étudié dans [Gaubert 1995]. Plus précisément, il est proposé d'évaluer :

$$l_n^{worst} = \bigoplus_{p \in Q} [\alpha M^n]_p,$$

[1]Terme anglais utilisé dans le domaine de l'ordonnancement d'ateliers pour désigner le temps total nécessaire pour élaborer tous les produits en quantités requises.

[2]Nom anglais qui désigne les ateliers à cheminements multiples dans lesquels les tâches successives des différents travaux requièrent des machines partagées selon des séquences possiblement dissemblables.

avec

$$M = \bigoplus_{\alpha \in \Sigma} \mu(a) \in \overline{\mathbb{R}}_{\max}^{|Q| \times |Q|}.$$

La complexité en temps est alors égale à $O(n|Q|^3)$ (car ce calcul requiert n produits de matrices de dimension $|Q| \times |Q|$ dans $\overline{\mathbb{R}}_{\max}$).

Une application directe de la formule (3.1) a une complexité en temps égale à $O(n|H|^3)$. Toutefois, il est possible de réduire cette complexité en exploitant la forme particulière de la matrice A définie par l'équation (2.2). En effet, on peut observer que toutes les valeurs différentes de ε dans une colonne sont identiques.

Propriété 1 *Soient :*

- $A_{\bullet,k}$ *la colonne de* A *d'indice* k*, avec* $k \in H$*,*
- H_k *pour* $k = (r, a', s)$*, le sous-ensemble de* H *défini par* $H_k = \{(p, a, q) \in H \mid p = s\}$*, c'est-à-dire l'ensemble des transitions qui peuvent survenir consécutivement à la transition* k*.*
- $a_{\bullet,k}$ *la valeur identique pour tous les éléments différents de* ε *dans la colonne* $A_{\bullet,k}$*.*

On peut vérifier que :

$$[A^n]_{\bullet,k} = \left[\bigoplus_{j \in H_k} A_{\bullet,j}^{n-1} \right] \otimes a_{\bullet,k} \text{ pour } n > 1. \tag{3.2}$$

Exemple 15 *Considérons l'automate étudié dans l'exemple 6 pour illustrer la propriété 1. On a :*

$$H = \{(I, a, I), (I, b, II), (II, c, II)\},$$

et

$$A = \begin{pmatrix} 3 & \varepsilon & \varepsilon \\ 3 & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Soit $k = (I, a, I)$*, on a alors :*

$$A_{\bullet,(I,a,I)} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ \varepsilon \end{pmatrix},$$

$$H_{I,a,I} = \{(I, a, I), (I, b, II)\},$$

$$a_{\bullet,(I,a,I)} = 3.$$

Dans $\overline{\mathbb{R}}_{\max}$*, on obtient par exemple :*

$$\overline{A}^3 = \begin{pmatrix} 9 & \varepsilon & \varepsilon \\ 9 & \varepsilon & \varepsilon \\ 8 & 4 & 3 \end{pmatrix}.$$

On vérifie alors bien la relation (3.2) *puisque :*

$$[\overline{A}^4]_{\bullet,(I,a,I)} = \left(\overline{A}^3_{\bullet,(I,a,I)} \oplus \overline{A}^3_{\bullet,(I,b,II)}\right) \otimes a_{\bullet,(I,a,I)} = \begin{pmatrix} 9 \\ 9 \\ 8 \end{pmatrix} \otimes 3 = \begin{pmatrix} 12 \\ 12 \\ 11 \end{pmatrix}.$$

La relation est également satisfaite dans $\overline{\mathbb{R}}_{\min}$*, on a :*

$$\underline{A}^3 = \begin{pmatrix} 9 & \varepsilon & \varepsilon \\ 9 & \varepsilon & \varepsilon \\ 6 & 4 & 3 \end{pmatrix},$$

et

$$[\underline{A}^4]_{\bullet,(I,a,I)} = \left(\underline{A}^3_{\bullet,(I,a,I)} \oplus \underline{A}^3_{\bullet,(I,b,II)}\right) \otimes a_{\bullet,(I,a,I)} = \begin{pmatrix} 9 \\ 9 \\ 4 \end{pmatrix} \otimes 3 = \begin{pmatrix} 12 \\ 12 \\ 7 \end{pmatrix}.$$

Cette propriété permet de calculer l_n^{worst}, exprimé par l'équation (3.1), avec une complexité en temps égale à $O(n|H|^2)$.
Pour les automates dont le nombre d'arcs $|H|$ est proche du nombre d'états $|Q|$, on peut affirmer que notre approche a une meilleure complexité que la méthode de [Gaubert 1995]. Il est à noter qu'il existe des automates dans lesquels $|Q| < |H|$, et d'autres dans lesquels $|Q| > |H|$, et la comparaison entre les complexités des deux méthodes peut alors aboutir à des conclusions contradictoires.

Dans [Su 2011], comme mentionné dans la Section 5 .1.1, un algorithme est présenté pour le calcul de la durée d'achèvement maximum avec une complexité algorithmique de l'ordre de $O(|H||\mathcal{R}|^2)$ (où $\mathcal{R}$ est une couverture de cliques pour Σ, de cardinalité maximale $\frac{|\Sigma|^2}{4}$). Selon les automates, la cardinalité $|H|$ peut être inférieure ou supérieure à $|\Sigma|^2$. On ne peut donc pas complétement trancher quant à la performance de cet algorithme vis-à-vis de notre méthode. De plus, cet algorithme s'applique seulement à une classe restreinte de systèmes. Pour être plus précis, on peut dire que la classe est moins générale que celle des automates fortement non-ambigus.

En effet, d'une part, on peut observer que comme les chemins avec un même label ont le même poids (car à un événement donné est associé un seul poids possible), alors la maximisation de l'équation (1.7) n'intervient pas. Plus précisément, pour tout $w \in \Sigma^*$, $q \in Q$, on a alors un poids identique $\sigma(\pi)$ pour tous les chemins $\pi \in Q_i \overset{w}{\rightsquigarrow} q$. L'ensemble des résultats spécifiés dans ce manuscrit pour les automates fortement non-ambigus, c'est-à-dire si $|Q_i \overset{w}{\rightsquigarrow} q| \leq 1$, se vérifient également si l'ensemble des poids possibles $|\sigma(\pi)|$ avec $\pi \in Q_i \overset{w}{\rightsquigarrow} q$, contient au plus un élément, et s'appliquent donc aussi aux automates (max,+) dérivés des systèmes pondérés par le temps considérés dans [Su 2011, Su 2012].

D'autre part, les automates fortement non-ambigus, dans lesquels les transitions associées à un même événement ont plusieurs durées possibles, ne peuvent pas être représentés par les systèmes pondérés par le temps définis dans [Su 2011].

1 .2 Raffinements

Dans $\overline{\mathbb{R}}_{\max}$, $\overline{x}(n+1)_{(p,a,q)}$ donne la date la plus tardive à laquelle la transition (p,a,q) peut survenir consécutivement à l'occurrence de n événements.
On peut alors affirmer que $\overline{x}(n+1)_{(p,a,q)} + [\mu(a)]_{pq}$ est la durée d'achèvement maximum pour les séquences de longueur $(n+1)$ se terminant par l'événement a et aboutissant à l'état q.
On a donc la possibilité d'affiner l'indicateur (durée maximum d'achèvement pour une longueur de séquence donnée) en le spécifiant pour un dernier événement et un état d'arrivée.
On peut poursuivre plus encore ce raisonnement pour spécifier ce résultat à des séquences se terminant par une sous-séquence d'événements w choisie. En effet,

$$\overline{x}(n+1)_{(p,a,q)} + [\mu(a)]_{pq} + [\mu(w)]_{qr},$$

permet d'établir la durée d'achèvement maximum pour les séquences de longueur $n+1+|w|$ se terminant par la séquence aw et aboutissant à l'état r.

Exemple 16 *Dans l'exemple 7, on a explicité la représentation de l'automate G_4 (dessiné sur la figure 2.1) permettant d'évaluer la durée maximum d'achèvement de séquences de longueur donnée. On obtient le résultat suivant :*

$$\overline{x}(5)_{(II,c,II)} = 11,$$

qui est la durée d'achèvement maximum pour toutes les séquences de longueur 4 aboutissant à l'état II. En d'autres termes, $\overline{x}(5)_{(II,c,II)}$ est la date la plus tardive à laquelle la transition (II,c,II) peut survenir consécutivement à l'occurrence de 4 événements.
Alors

$$\overline{x}(5)_{(II,c,II)} + [\mu(c)]_{II,II} = 12,$$

est la durée d'achèvement maximum pour toutes les séquences de longueur 5 se terminant par l'événement c et aboutissant à l'état II.

On peut également utiliser le résultat de la Proposition 6 pour, de façon symétrique, calculer la date d'achèvement maximum des séquences de longueur $n+|w|$, partant d'un état p et débutant par la sous-séquence w comme suit dans $\overline{\mathbb{R}}_{\max}$:

$$[\mu(w)]_p \otimes \bigoplus_{j \in H_p} [\overline{\chi}(n+1)]_j.$$

2 Calcul de bornes inférieures pour les dates d'achèvement

Comme indiqué dans la section 5 .1.2, pour un SED modélisé par un automate (max,+), il peut être intéressant d'évaluer la durée d'achèvement minimum pour les séquences d'une longueur choisie. Appliqué à un système manufacturier cet indicateur caractérise le plus petit *makespan*.

La représentation introduite dans la Proposition 2 permet d'obtenir un minorant, voir un minimum si l'automate (max,+) correspondant est fortement non-ambigu des durées d'achèvements pour les séquences de longueur n, noté l_n^{opt}. En effet, on a à l'aide de cette représentation dans $\overline{\mathbb{R}}_{\min}$:

$$l_n^{opt} \geq \bigoplus_{j \in H} [\underline{x}(n+1)]_j = \bigoplus_{j \in H} [\underline{A}^n \underline{x}(1)]_j. \tag{3.3}$$

2 .1 Originalité et complexité

L'indicateur de performance, noté l_n^{opt}, qui tend à calculer le minimum des durées d'achèvement pour les séquences de longueur n est défini dans [Gaubert 1995] par :

$$l_n^{opt} = \min_{w \in \Sigma^n} \min_{p \in Q} [x(w)]_p.$$

La procédure proposée dans [Gaubert 1995] pour évaluer l_n^{opt} ne s'applique qu'à une classe restreinte d'automates (max,+), à savoir les automates déterministes.

Notre contribution à travers le résultat (3.3) permet d'obtenir un minorant de cet indicateur avec une complexité algorithmique identique à celle pour obtenir l_n^{worst}, à savoir $O(n|H|^2)$. Le minimum l_n^{opt} est obtenu lorsque l'automate (max,+) étudié est fortement non-ambigu (Définition 2).

Vis-à-vis du résultat dans [Gaubert 1995], la Proposition 3 permet d'élargir la classe d'automates (max,+) (du cas déterministe au cas fortement non-ambigu) pour laquelle on peut calculer l_n^{opt}.

Remarque 6 *Contrairement aux automates à états finis (booléens), les automates (max,+) non déterministes ne peuvent pas toujours être déterminisés, c'est-à-dire, qu'il n'est pas toujours possible de trouver un automate (max,+) déterministe équivalent. Même si ce sujet a été largement étudié (les références [Gaubert 1995], [Gaubert 1999a], [Mairesse 2002], [Klimann 2004], [Lombardy 2006] , [Kirsten 2009] et [Lahaye 2013c] constituent une bibliographie partielle sur le sujet), le problème de déterminisation des automates (max,+) reste relativement ouvert. En particulier, et à notre connaissance, les automates (max,+) fortement non-ambigus ne satisfont pas nécessairement les conditions connues dans la littérature pour être suffisantes à leur déterminisation.*

Il n'existe pas d'algorithme, à notre connaissance, permettant d'évaluer l_n^{opt} pour les automates (max,+) ambigus. Notre approche permet de calculer un minorant avec une complexité polynomiale.

2 .2 Raffinements

Dans $\overline{\mathbb{R}}_{\min}$, $\underline{x}(n+1)_{(p,a,q)}$ minore la date à laquelle la transition (p,a,q) peut survenir consécutivement à n événements.
On peut alors affirmer que $\underline{x}(n+1)_{(p,a,q)} + [\mu(w)]_{pq}$ est un minorant pour les durées d'achèvement des séquences de longueur $(n+|w|)$ se terminant par la séquence w et aboutissant à l'état q. Pour les automates fortement non-ambigus, on obtient la durée d'achèvement minimum.

Exemple 17 *Dans l'exemple 8, on a explicité la représentation de l'automate G_4 (représenté sur la figure 2.1) permettant d'évaluer les durées d'achèvement minimum. On obtient le résultat suivant :*

$$\underline{x}(5)_{(II,c,II)} = 4,$$

qui correspond à la date d'achèvement minimum pour les séquences de longueur 4 *aboutissant à l'état II.*
Alors

$$\underline{x}(5)_{(II,c,II)} + [\mu(c)]_{II,II} = 5,$$

est la durée d'achèvement minimum pour les séquences de longueur 5 *se terminant par l'événement c et aboutissant à l'état II.*

La Proposition 7 peut aussi être utilisée pour cerner les dates d'achèvement minimum de séquences de longueur donnée. Plus précisément, l'expression dans $\overline{\mathbb{R}}_{\min}$:

$$[\mu(w)]_p \otimes \bigoplus_{j \in H_p} \underline{\chi}(n+1)_j,$$

fournit un minorant (l'élément minimum si l'automate est non-ambigu) des dates d'achèvement des séquences de longueur $n+|w|$ partant de l'état p et débutant par la sous-séquence w.

3 Calcul de bornes supérieures pour les longueurs de séquences

La représentation introduite dans la Proposition 4, permet de calculer un indicateur de performances qui, à notre connaissance, n'a pas été étudié dans la littérature. Ce dernier s'apparente à un compteur appliqué au cas optimal, car il permet d'évaluer le nombre maximum d'événements pouvant avoir lieu sur un horizon de temps donné.

En effet, un majorant pour les longueurs de séquences achevées avant, où à, un instant t est obtenu à l'aide de l'expression suivante dans $\overline{\mathbb{R}}_{\max}$:

$$\bigoplus_{j\in H}[\overline{z}(t)]_j.$$

Pour les automates fortement non-ambigus, on obtient la longueur maximum.

La valeur $\overline{z}(t)_{(p,a,q)}$ majore les longueurs de séquences précédant la transition (p,a,q) et s'achevant avant, ou à, l'instant t.
Alors, $\overline{z}(t)_{(p,a,q)}+1$ est le majorant des longueurs de séquences se terminant par l'événement a, aboutissant à l'état q et s'achevant avant, ou à, l'instant $t+[\mu(a)]_{pq}$.

Exemple 18 *Dans l'exemple 10, on a explicité la représentation de l'automate fortement non-ambigu G_6 (dessiné sur la figure 2.3) permettant d'évaluer les longueurs de séquences maximum s'achevant avant une date donnée. On obtient la longueur maximum des séquences aboutissant à l'état IV et s'achevant avant la date $t=7$, en calculant :*

$$\overline{z}_{(IV,d,I)}(7)=6.$$

Cette valeur correspond à la longueur maximum des séquences qui précèdent la transition (IV,d,I) et qui s'achèvent avant la date $t=7$. Il en résulte que la longueur maximum des séquences se terminant par l'événement d et aboutissant à l'état I avant la date $t=9$ est égale à 7.

Dans la Proposition 8, on évalue un majorant (l'élément maximum si l'automate est non-ambigu) pour les longueurs de séquences débutant par un état p et se terminant avant, ou à, l'instant t à l'aide de l'expression suivante :

$$\bigoplus_{j\in H_p}[\overline{\zeta}(t)]_j$$

. Par extension :

$$|w|+\bigoplus_{j\in H_p}[\overline{\zeta}(t)]_j,$$

donne un majorant pour les longueurs de séquences partant de l'état p, débutant par la sous-séquence w et s'achevant avant la date $t+[\mu(w)]_p$.

4 Calcul de bornes inférieures pour les longueurs de séquences

On peut utiliser la Proposition 5 pour élaborer un indicateur qui peut être assimilé à un compteur associé au comportement pire-cas. En effet, on peut évaluer grâce à ce résultat le nombre d'événements pouvant survenir sur un horizon de temps donné. À notre connaissance, il s'agit d'un apport original de notre étude.

Un minorant pour les longueurs de séquences achevées à l'instant t est obtenu à l'aide de :

$$\bigoplus_{j\in H}[\underline{z}(t)]_j.$$

Ce terme donne la longueur minimum des séquences achevées à t pour les automates (max,+) fortement non-ambigus.

Formulé différemment, $\underline{z}(t)_{(p,a,q)}$ minore les longueurs de séquences précédant la transition (p,a,q) et s'achevant avant, ou à, l'instant t.
On peut donc affirmer que $\underline{z}(t)_{p,a,q}+1$ minore les longueurs de séquences se terminant par l'événement a, aboutissant à l'état q et s'achevant avant, ou à, l'instant $t + [\mu(a)]_{pq}$.

Exemple 19 *Dans l'exemple 11, on utilise la représentation pour l'automate G_6 qui évalue les longueurs s'achevant avant un instant t donné. À l'aide de celle-ci, on déduit la longueur minimum des séquences aboutissant à l'état I et s'achevant avant, ou à, la date $t = 5$:*

$$\underline{z}(5)_{(I,a,II)} = 2,$$

ce qui correspond aussi à la longueur minimum des séquences qui précèdent la transition (I,a,II) s'achevant avant, ou à, la date $t = 5$.

Alors la longueur (non nulle) minimum des séquences se terminant par l'événement a et aboutissant à l'état II avant, ou à, la date $t = 5$ est égale à 3.

5 Applications à des exemples d'ateliers Jobshop

Nous allons maintenant nous intéresser à l'illustration des résultats de l'évaluation de performances, en les appliquant à deux exemples d'ateliers *Jobshop*.

5 .1 Jobshop 1

On considère un *Jobshop* (inspiré par l'exemple dans [Gaubert 1999b]) avec deux ressources $\mathcal{R}_1$, $\mathcal{R}_2$ exécutant deux types de jobs $\mathcal{J}_1$, $\mathcal{J}_2$.
Il y a 6 tâches élémentaires, notées a, b, c, d, e et f, dont les durées d'exécutions sont respectivement 2, 2, 2, 1, 1 et 3. La séquence de production pour le job $\mathcal{J}_1$ est abc, ce qui signifie que les tâches élémentaires a, b et c doivent être exécutées dans cet ordre afin d'achever la tâche $\mathcal{J}_1$. La séquence de production pour le job $\mathcal{J}_2$ est def. Les ressources exécutent les tâches l'une après l'autre. Les tâches a et d (resp. c et f) sont traitées en utilisant la ressource $\mathcal{R}_1$ (resp. $\mathcal{R}_2$). Les deux ressources $\mathcal{R}_1$ et $\mathcal{R}_2$ sont nécessaires pour réaliser les tâches b et e. De plus, deux occurrences du même job ne peuvent pas être traitées simultanément : par exemple dans la séquence $\mathcal{J}_1\mathcal{J}_1$ le premier job $\mathcal{J}_1$ doit être achevé avant que le second job $\mathcal{J}_1$ puisse commencer (mais dans le cas d'une séquence $\mathcal{J}_1\mathcal{J}_2$, le second job $\mathcal{J}_2$ peut débuter avant l'achèvement du premier job $\mathcal{J}_1$).

On considère toutes les séquences possibles et un fonctionnement au plus tôt, de plus, le système commence à fonctionner à la date 0.

Le système peut être modélisé par le réseau de Petri temporisé[3] de la figure 3.1 dans lequel :

- des temporisations sont associées aux transitions (la notation a/τ signifie que la transition correspondante a comme label la lettre a et comme durée de franchissement τ),
- *une politique de présélection* est utilisée pour décider quelle transition est à tirer lorsqu'il y a plusieurs transitions de sortie à une place, et on considère alors tous les choix possibles,
- on suppose qu'un jeton du marquage initial arrive dans le réseau de Petri à l'instant 0.

Ce réseau de Petri est uniquement proposé pour l'illustration (dans le but de clarifier les explications et fixer les idées) car le jobshop sera étudié à l'aide d'un modèle d'automate (max,+), à savoir l'automate de la figure 3.2.

Notons, qu'à notre connaissance, il n'y a que des réponses partielles au problème de la transformation d'un réseau de Petri temporisé en un automate (max,+) (et vice-versa). Une approche proposée dans [Gaubert 1999b] associe un automate (max,+) à tout réseau de Petri temporisé sauf. Cet automate (max,+) est généralement non-déterministe et peut admettre un langage qui est plus grand que celui du réseau de Petri (*i.e.*, il reconnait des séquences qui ne sont pas des séquences de franchissement possibles). Pour l'exemple de *jobshop* considéré, une procédure basée sur les automates de type tas proposée dans [Gaubert 1999a] peut alors être utilisée pour la déterminisation, c'est-à-dire la construction d'un automate (max,+) déterministe correspondant au réseau de Petri de la figure 3.1. Une autre contribution [Lahaye 2013b] propose une procédure récursive qui construit un automate (max,+) déterministe équivalent à un réseau de Petri temporisé sauf. L'équivalence correspond au fait que l'automate et le réseau de Petri possèdent le même langage, et que la date d'achèvement d'une séquence de franchissement dans le réseau de Petri est la même que celle de la séquence de transitions d'état correspondante dans l'automate (max,+). De plus, il a été prouvé que la procédure se termine si entre toute paire de transitions reliée par un chemin orienté, il existe un chemin orienté qui ne contient pas plus d'une place dite "conflictuelle" (*i.e.*, avec plus d'une transition de sortie). Cette condition est satisfaite par le réseau de Petri de la figure 3.1 et cette procédure[4] a été utilisée pour obtenir l'automate (max,+) de la figure 3.2.

[3] Un réseau de Petri est un quadruplet $\mathcal{G} = (\mathcal{P}, \mathcal{T}, \mathcal{F}, M)$, pour lequel $\mathcal{P}$ est un ensemble fini de places (représentées par des cercles), $\mathcal{T}$ est un ensemble fini de transitions (représentées par des rectangles), $\mathcal{F} \subseteq (\mathcal{P} \times \mathcal{T}) \cup (\mathcal{P} \times \mathcal{T})$ est une relation entre les places et les transitions (représentées par des arcs orientés), $M : \mathcal{P} \to \mathbb{N}$ définit le marquage initial des places (représenté par des jetons dans les places). Un réseau de Petri est dit temporisé si des durées de franchissements sont associés aux transitions et/ou des temps de séjour minimal sont associés aux places (voir [Ramchandani 1973], [David 1989] et [Murata 1989] pour plus de détails).

[4] À noter que la complexité de cette procédure reste à démontrer

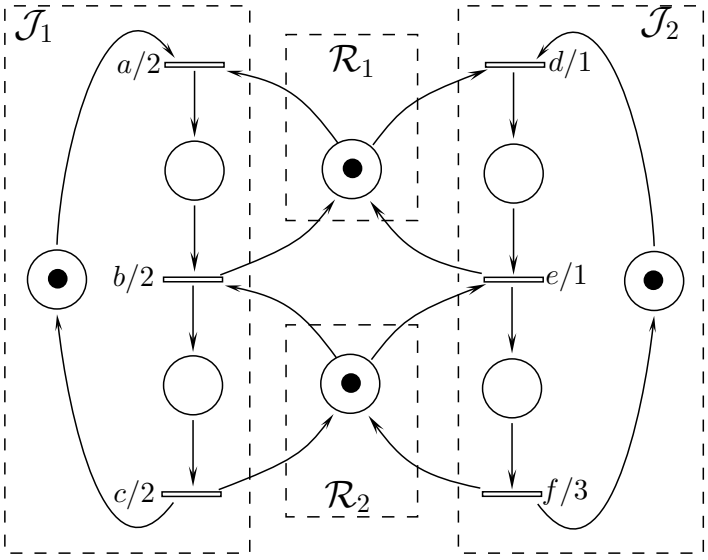

Figure 3.1 – Atelier jobshop 1 représenté par un réseau de Petri.

Illustrons maintenant comment les résultats des chapitres 2 et 3 de ce manuscrit peuvent contribuer à l'étude des performances de ce système manufacturier.

– En utilisant la représentation évaluant les durées d'achèvements de séquences au sein d'automates (max,+), introduite dans la section 1 du chapitre 2, on peut évaluer les performances du *jobshop1* en matière de durées d'exécutions pour un nombre de tâches désirées. Pour ce faire, on définit d'abord l'ensemble H qui contient les 22 transitions d'état de l'automate (max,+) correspondant ($|H| = 22$). Cet ensemble permet de définir les éléments du vecteur $x(n)$ défini par la récurrence (2.3), ce qui conduit ensuite à la construction de la matrice A selon (2.2). Cette représentation est présentée dans la section 1 de l'annexe A. Comme les jobs $\mathcal{J}_1$ et $\mathcal{J}_2$ exigent trois tâches, n jobs seront représentés par $3n$ transitions dans l'automate. De plus, on s'intéresse aux séquences de transitions qui mènent vers les états 6, 8 et 13, correspondant aux états où les jobs $\mathcal{J}_1$ et $\mathcal{J}_2$ sont complètement achevés. Cette représentation, développée dans les deux algèbres (max,+) et (min,+), permet de déduire les deux indicateurs suivants :

  1. Dans $\overline{\mathbb{R}}_{\max}$, nous étudions le comportement pire cas du *jobshop1*, ainsi le résultat de la proposition 1 :

$$\bigoplus_{j \in H_6 \cup H_8 \cup H_{13}} [\overline{x}(n+1)]_j,$$

  donne les dates maximum auxquelles le système peut achever un nombre de jobs désiré. Par exemple, on obtient pour 10 jobs ($n = 30$) :

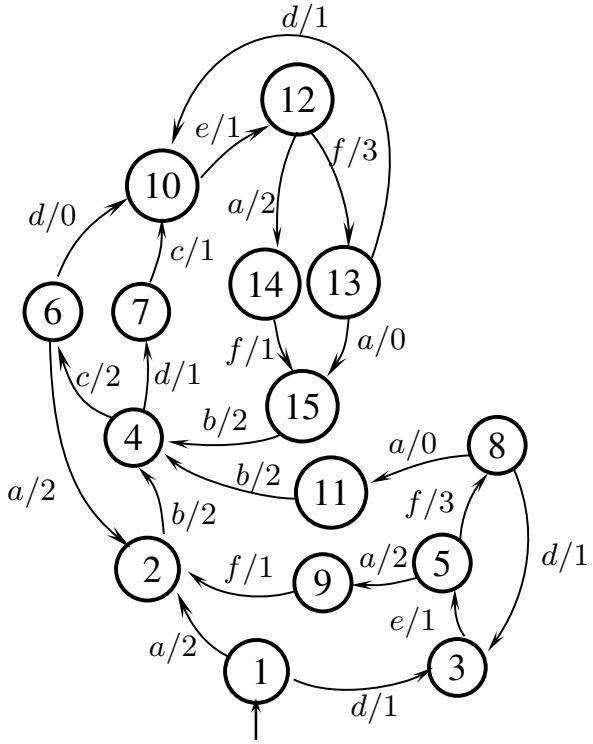

Figure 3.2 – Atelier jobshop 1 représenté par un automate (max,+).

$$\bigoplus_{j\in H_6\cup H_8\cup H_{13}} [\overline{x}(31)]_j = 60,$$

ce qui signifie que le temps d'exécution maximum pour 10 jobs est de 60 unités de temps. Ceci correspond au makespan du pire ordonnancement, c'est-à-dire, 10 fois le job $\mathcal{J}_1$ comme illustré sur le chronogramme de la figure 3.3.

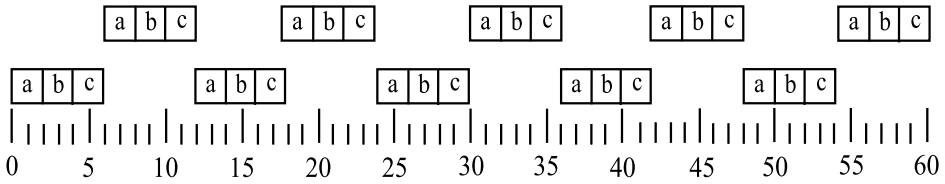

Figure 3.3 – Chronogramme de réalisation de l'ordonnancement correspondant à 10 fois le job $\mathcal{J}_1$ au sein du *jobshop1*.

2. Dans $\overline{\mathbb{R}}_{\min}$, la représentation décrit le comportement optimal du système. Notons que puisque l'automate (max,+) est fortement non-ambigu (l'ensemble des chemins allant d'un état initial, reconnaissant une séquences

w et aboutissant à un état q donné est un singleton ou l'ensemble vide), on obtient en utilisant le résultat de la proposition 2 :

$$\bigoplus_{j\in H_6\cup H_8\cup H_{13}} [\underline{x}(n+1)]_j,$$

la date minimum à laquelle le *jobshop1* peut achever un nombre de tâches donné. Par exemple, on obtient pour 10 jobs :

$$\bigoplus_{j\in H_6\cup H_8\cup H_{13}} [\underline{x}(31)]_j = 41.$$

Ce résultat signifie que le date d'achèvement optimale pour 10 jobs est égale à 41 unités de temps. Cela correspond au *makespan* du meilleur ordonnancement, en l'occurrence cinq fois $\mathcal{J}_2\mathcal{J}_1$, dont le chronogramme d'exécution est représenté sur la figure 3.4.

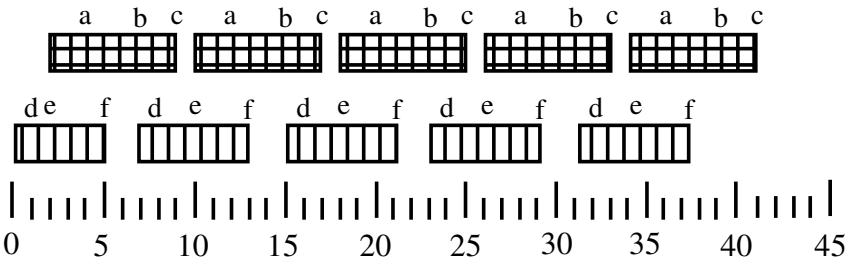

Figure 3.4 – Chronogramme d'exécution de l'ordonnancement correspondant à cinq fois $\mathcal{J}_2\mathcal{J}_1$ dans le *jobshop1*.

– En utilisant la représentation qui permet d'évaluer les longueurs de séquences au sein d'automates (max,+), introduite dans la section 2 du chapitre 2, on peut évaluer le nombre de tâches que le *jobshop1* peut exécuter sur un horizon de temps donné. Pour cela, on construit les matrices E_1, E_2 et E_3 relatives aux différentes durées associées aux tâches du *jobshop*, ce qui permet d'établir la récurrence (2.5) qui définit le vecteur $z(n)$ (dont les éléments sont ordonnés selon l'ordre des transitions dans l'ensemble H). Cette représentation (présentée en détails dans la section 1.2 de l'annee A) donne les résultats suivant dans $\overline{\mathbb{R}}_{\max}$ et $\overline{\mathbb{R}}_{\min}$ (on s'intéresse aux séquences aboutissant aux états 6, 8 et 13) :

1. Dans $\overline{\mathbb{R}}_{\max}$, on décrit le comportement optimal du *jobshop1* car on évalue, grâce au résultat de la proposition 4 :

$$\bigoplus_{j\in H_6\cup H_8\cup H_{13}} [\overline{z}(t)]_j,$$

le nombre maximum (car l'automate (max,+) correspondant est fortement non-ambigu) de jobs qui peuvent être exécutés jusqu'à une date t donnée. On obtient, par exemple pour $t = 41$:

$$\bigoplus_{j\in H_6\cup H_8\cup H_{13}} [\overline{z}(41)]_j = 30.$$

Ce résultat est cohérent avec celui obtenu au point précédent, puisque cela nous informe que 10 jobs (soient 30 tâches) peuvent être achevés avant l'instant 41 (comme illustré sur la figure 3.4).

2. Dans $\overline{\mathbb{R}}_{\min}$, on décrit le comportement pire-cas du *jobshop1* puisque le résultat de la proposition 5 :

$$\bigoplus_{j\in H_6\cup H_8\cup H_{13}} [\underline{z}(t)]_j,$$

nous permet d'évaluer le nombre minimum de jobs qui peuvent être exécutés jusqu'à une date t. On obtient pour $t \geq 6$:

$$\bigoplus_{j\in H_6\cup H_8\cup H_{13}} [\underline{z}(6)]_j = 3.$$

Ce résultat signifie qu'à partir de l'instant 6, le nombre minimum de tâches réalisées est égal à 3, c'est-à-dire, un job.

5 .2 Jobshop 2

On s'intéresse maintenant à un autre modèle d'atelier de type Jobshop représenté par le réseau de Petri de la figure 3.5 et modélisé par l'automate (max,+) équivalent dessiné sur la figure 3.6.
Comme pour l'exemple précédent, les jobs $\mathcal{J}_1$ et $\mathcal{J}_2$ sont réalisés par les séquences de tâches respectives abc et def.

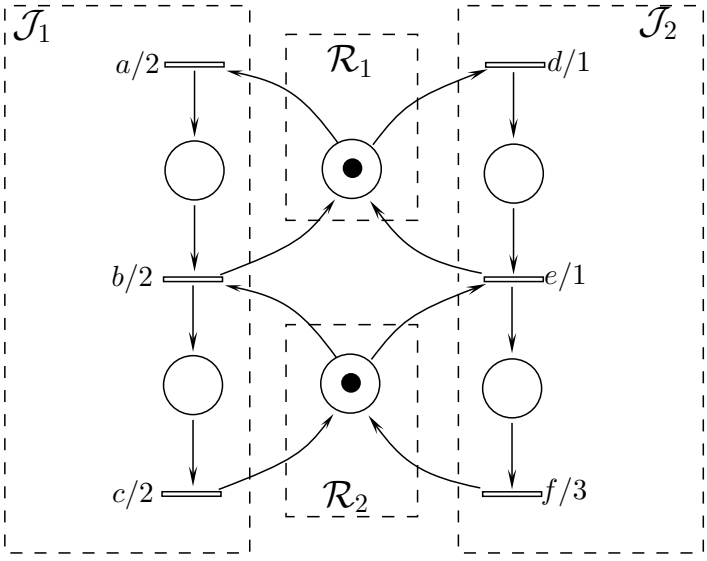

Figure 3.5 – Atelier jobshop 2 représenté par un réseau de Petri.

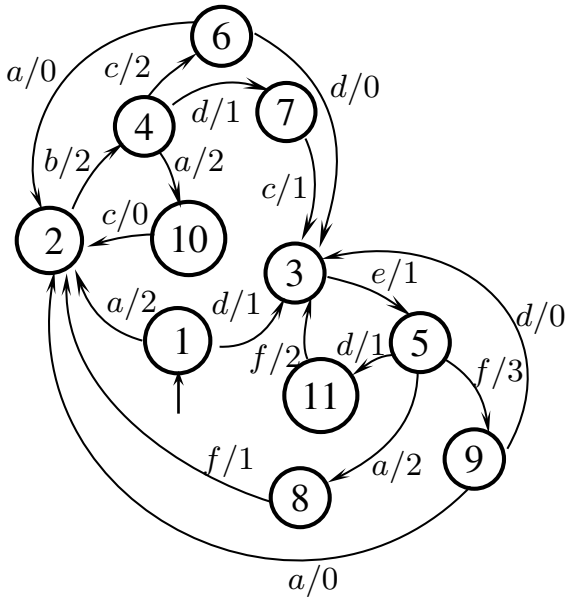

Figure 3.6 – Atelier jobshop 2 représenté par un automate (max,+).

Ce modèle de jobshop se différencie du premier par le fait que deux jobs du même type peuvent se chevaucher. Par exemple une deuxième occurrence du job $\mathcal{J}_1$ (resp. $\mathcal{J}_2$) peut survenir avant la fin de la première. En effet, la deuxième occurrence de la tâche a (resp. d) peut survenir à l'issue de la première tâche b (resp. e) et ainsi être exécutée en parallèle à la tâche c (resp. f).

– Afin d'évaluer les performances en matière de temps d'exécution au sein du *jobshop2*, on va appliquer la représentation évaluant les durées d'achèvements de séquences au sein d'automates (max,+). Comme pour le *jobshop1*, on définit d'abord l'ensemble H qui contient les 18 transitions de l'automate (max,+) ($|H| = 18$). La matrice A est construite selon (2.2) pour être utilisée dans la récurrence (2.3) (voir la section 2.1 de l'annexe A pour une présentation détaillée de cette représentation). Ici on s'intéresse aux séquences de transitions qui mènent vers les états 2, 3, 6 et 9, là où les jobs $\mathcal{J}_1$ et $\mathcal{J}_2$ sont achevés. Cette représentation développée dans $\overline{\mathbb{R}}_{\max}$ et $\overline{\mathbb{R}}_{\min}$ permet d'interpréter les indicateurs de performances suivants :

  1. Dans $\overline{\mathbb{R}}_{\max}$, on s'intéresse au comportement pire-cas du *jobshop2*. Grâce au résultat de la proposition 1 :

$$\bigoplus_{j \in H_2 \cup H_3 \cup H_6 \cup H_9} [\overline{x}(n+1)]_j,$$

  on obtient les dates maximum auxquelles le *jobshop2* peut achever le

nombre de tâches donné par n. Par exemple, on obtient pour 10 jobs ($n = 30$) :

$$\bigoplus_{j \in H_2 \cup H_3 \cup H_6 \cup H_9} [\overline{x}(31)]_j = 42.$$

Ce résultat signifie que le temps maximum pour l'exécution de 10 jobs est de 42 unités de temps, ce qui correspond au pire ordonnancement (10 fois $\mathcal{J}_1$) dont le chronogramme d'exécution est représenté sur la figure 3.7.

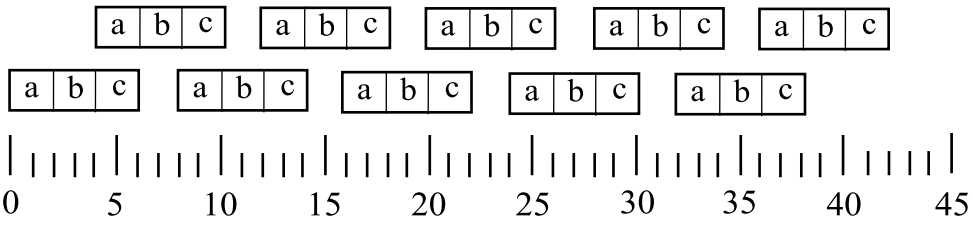

Figure 3.7 – Chronogramme de réalisation de l'ordonnancement correspondant à 10 jobs $\mathcal{J}_1$ au sein du *jobshop2*.

2. Dans $\overline{\mathbb{R}}_{\min}$, on décrit le comportement optimal du *jobshop2*. L'automate (max,+) de la figure 3.6 vérifie la condition de forte non-ambiguïté, ce qui permet d'obtenir, grâce à l'expression déduite de la propositions 2 :

$$\bigoplus_{j \in H_2 \cup H_3 \cup H_6 \cup H_9} [\underline{x}(n+1)]_j,$$

les durées minimum pour lesquelles le *jobshop2* peut achever un nombre de tâches donné par n. Par exemple, pour 10 jobs ($n = 30$), on obtient :

$$\bigoplus_{j \in H_2 \cup H_3 \cup H_6 \cup H_9} [\underline{x}(31)]_j = 41.$$

Le temps minimum pour 10 jobs est de 41 unités de temps. Cette valeur correspond au *makespan* du meilleur ordonnancement, en l'occurrence cinq fois $\mathcal{J}_2\mathcal{J}_1$, ou dix fois $\mathcal{J}_2$. Le chronogramme d'exécution de ce dernier ordonnancement est représenté sur la figure 3.8.

– Pour évaluer le nombre de tâches que le *jobshop2* peut exécuter sur un horizon de temps donné, on utilise les représentations qui permettent d'évaluer les longueurs de séquences des automates (max,+). On s'appuie alors sur l'ensemble H pour définir les matrices E_1, E_2 et E_3 relatives aux différentes durées associées aux tâches du *jobshop*, ainsi on peut écrire la récurrence (2.5) qui définit $z(n)$ (la section 2.2 de l'annexe A détaille cette représentation). Cette représentation donne les résultats suivant dans $\overline{\mathbb{R}}_{\max}$ et $\overline{\mathbb{R}}_{\min}$ (on s'intéresse aux séquences aboutissant aux états 2, 3, 6 et 9) :

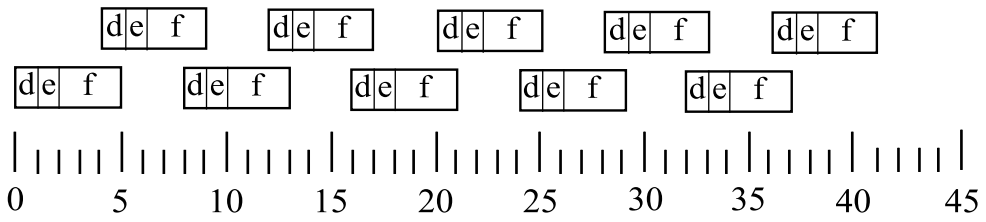

Figure 3.8 – Chronogramme de réalisation de l'ordonnancement correspondant à dix fois le job $\mathcal{J}_2$ au sein du *jobshop2*.

1. Dans $\overline{\mathbb{R}}_{\max}$, c'est le comportement optimal du *jobshop2* qui est décrit, car on évalue le nombre de tâches maximum pouvant être exécuté sur un horizon de temps donné. En effet, grâce au résultat de la proposition 4 :

$$\bigoplus_{j\in H_2\cup H_3\cup H_6\cup H_9} [\overline{z}(t)]_j,$$

on dispose du nombre maximum (car l'automate (max,+) correspondant vérifie la condition de forte non-ambiguïté) de jobs pouvant être achevés jusqu'à une date t donnée. On obtient, par exemple pour $t = 41$:

$$\bigoplus_{j\in H_2\cup H_3\cup H_6\cup H_9} [\overline{z}(41)]_j = 31.$$

Ce résultat est cohérent avec celui que l'on a obtenu au point précédent, puisque cela traduit le fait que 10 jobs peuvent être achevés avant, ou à, l'instant 41, comme indiqué sur la figure 3.8.

2. Dans $\overline{\mathbb{R}}_{\min}$, le comportement pire-cas du *jobshop2* est décrit, puisque le résultat de la proposition 5 :

$$\bigoplus_{j\in H_2\cup H_3\cup H_6\cup H_9} [\underline{z}(t)]_j,$$

permet d'évaluer le nombre minimum de jobs qui peuvent être achevés à une date t. On obtient pour $t > 6$:

$$\bigoplus_{j\in H_2\cup H_3\cup H_6\cup H_9} [\underline{z}(t)]_j = 3,\ t \geq 6.$$

Ce résultat signifie qu'à partir de l'instant 6, le nombre minimum de tâches achevées est égal à 3, c'est-à-dire, un job.

6 Conclusion

Dans ce chapitre, on a explicité des indicateurs de performance directement dérivés des représentations proposées au chapitre 2.

En premier lieu, on a mis en avant comment évaluer la durée d'achèvement maximum pour les séquences d'une longueur donnée. La méthode proposée est de complexité polynomiale en temps, et est compétitive vis-à-vis des procédures décrites dans la littérature concernant ce problème, à savoir [Gaubert 1995] et pour une classe restreinte de systèmes [Su 2011]. On a, de plus, souligné les possibilités d'affiner l'indicateur que rend possible notre approche.

Dans un deuxième temps, on a montré comment évaluer la durée d'achèvement minimum pour les séquences de longueur donnée. Il a été montré que, dans le cas général, ce problème est NP-complet. La procédure proposée est de complexité polynomiale en temps et résout le problème sous l'hypothèse de non-ambiguïté forte. Cette solution est compétitive sur le plan de la complexité et étend la classe de systèmes considérée vis-à-vis de la procédure décrite dans [Gaubert 1995]. Si l'hypothèse de non-ambiguïté forte n'est pas satisfaite, alors on apporte un minorant de la solution. À notre connaissance, il n'existait pas d'élément de réponse pour ce cas général dans la littérature.

On a ensuite exploité les représentations du chapitre 2 pour calculer des indicateurs de performance qui, à notre connaissance, n'avaient pas encore été étudiés dans la littérature. Il s'agit des longueurs maximum et minimum des séquences pouvant être achevées sur un horizon temporel donné. La procédure proposée a une complexité en temps polynomiale. Sous l'hypothèse de non-ambiguïté forte, on obtient les longueurs minimum et maximum, à défaut, la procédure fournit respectivement un minorant et un majorant.

Enfin, on a illustré et interprété ces indicateurs en les appliquant à deux modèles d'ateliers *Jobshop*. Ces interprétations permettent d'expliciter les apports pour l'évaluation de performances de ces systèmes (bornes pour les *makespans*, garanties sur l'atteignabilité d'états sur un horizon donné, ...).

Comme dans [Gaubert 1995], notre approche pourrait profiter des propriétés spectrales des matrices définies dans $\overline{\mathbb{R}}_{\max}$ ou $\overline{\mathbb{R}}_{\min}$. En d'autres termes (voir Section V dans [Gaubert 1995] pour plus de détails), une matrice $A \in \mathcal{D}^{k\times k}$ (avec $\mathcal{D}$ correspondant à $\overline{\mathbb{R}}_{\max}$ ou $\overline{\mathbb{R}}_{\min}$) peut admettre une propriété de cyclicité, à savoir, $A^{n+c} = \lambda^c A^n$ pour $n \in \mathbb{N}$ assez grand et $c \in \mathbb{N}$, $\lambda \in \mathbb{R}$. Le scalaire λ correspondant au rayon spectral de A et plusieurs algorithmes sont disponibles pour son calcul. Rappelons que si A est irréductible, alors l'algorithme de Karp calcule λ avec une complexité en temps de $O(|H| \times E)$, où E désigne le nombre d'éléments différents de ε de A, alors que l'algorithme de Howard présente expérimentalement, une moyenne linéaire pour le temps de calcul [Cochet-Terrasson 1998]. Pour $\overline{A}$ (respectivement $\underline{A}$), λ caractérise l'accroissement de la durée d'achèvement maximum (respectivement minimum) pour un n assez grand, ainsi les indicateurs de performance étudiés peuvent être facilement déduits pour de plus grandes longueurs de séquences. Dans les travaux à venir, on souhaite exploiter les formes particulières des matrices qu'on manipule, dans le but de rendre plus explicite la contribution de la théorie spectrale

aux indicateurs de performances qu'on a apportés. En particulier :

- Il conviendrait d'identifier les conditions d'irréductibilité des matrices A proposées pour représenter les automates (max,+), et plus généralement d'étudier leur *robustesse* [Butkovic 2010]. Cela fournirait les conditions pour lesquelles les matrices A admettent une propriété de cyclicité.

- L'étude des vecteurs propres de A pourraient donner des vecteur initiaux pour la récurrence (2.3), de telle sorte que le calcul des durées d'achèvement soit directement en fonction de λ (*i.e*, à partir de la longueur de séquences $n = 0$).

CHAPITRE 4

Contributions à la commande des automates (max,+)

Sommaire

Les systèmes à événements discrets modélisés à l'aide d'automates (max,+) à travers la représentation usuelle (1.5), ou l'une des représentations extrémales introduites dans le chapitre 2, peuvent être considérés comme *autonomes* dans le sens où l'évolution de leur dynamique ne dépend pas d'une influence exogène. En effet, la totalité des variables mises en jeu dans ces représentations traduisent des grandeurs qui peuvent être considérées comme internes au système, et on ne distingue donc pas de variables jouant le rôle d'entrées pour celui-ci.

La problématique de définir des entrées pour la représentation usuelle (1.5), dans le but de modéliser les influences externes, est à notre connaissance toujours ouverte. En effet comme rappelé dans la section 5 .2 du chapitre 1, des approches de commande ont été développées en se basant sur cette représentation. Toutefois, l'influence du contrôleur sur le système est alors traduite par une composition parallèle ou un produit synchrone entre leurs représentations, et non par un signal d'entrée représentant la commande.

Ce chapitre tend à enrichir les nouvelles représentations introduites au chapitre 2 pour les automates (max,+) de telle sorte que des influences exogènes puissent être prises en compte au travers de variables supplémentaires identifiées comme des entrées. Pour cela, on va restreindre notre attention à la représentation définie dans la proposition 1 et qui décrit le comportement pire-cas en termes de dates d'achève-

ment.
Dans la section 1, on montre comment modéliser des entrées au sein d'une telle représentation. On obtient alors un modèle pour les automates (max,+) qui s'apparente à un modèle d'état d'un système (max,+)-linéaire non autonome. Cette analogie de forme ouvre la voie à la transposition aux automates (max,+) de lois de commande établies pour les systèmes (max,+)-linéaires (ce sujet de recherche est particulièrement actif depuis une vingtaine d'années, les références [Cohen 1989, Menguy 2000, Lahaye 1999a], [De Schutter 2001, Cottenceau 2001, Maia 2003, Lhommeau 2004], [Houssin 2007, Lahaye 2008, Houssin 2013, Amari 2012] donnent un aperçu de la multiplicité des travaux). Les résultats de la section 2 constituent un premier pas dans ce sens. En effet, la commande en boucle ouverte selon le critère juste-à-temps, bien connue pour les systèmes (max,+)-linéaires, est adaptée à la représentation établie à la section 1 pour les automates (max,+).

La section 3 vise à illustrer l'intérêt de cette approche de commande au travers d'applications à la gestion d'un *jobshop* et d'un croisement de lignes ferroviaires.
Ces travaux sont à notre connaissance originaux. On peut trouver une première diffusion dans [Boukra 2013].

1 Représentation de systèmes non-autonomes

Dans la théorie de la supervision, tout comme dans l'approche de commande dans [Komenda 2009b] pour les automates (max,+), il est considéré que le superviseur influence l'évolution du système en conditionnant l'occurrence de certains événements (qualifiés de contrôlables). Avec notre approche, pour des SED modélisés par des automates (max,+), on considère des influences externes au système pouvant agir sur les transitions d'état contrôlables.

Définition 4 *Une transition d'état est dite contrôlable si la validation de l'événement impliqué peut être retardée.*

On suppose qu'on peut observer et compter les transitions d'état (les occurrences d'événements). C'est-à-dire qu'à tout instant, on considère connaître le nombre de transitions exécutées jusque-là.

Soit en $\overline{A}$ la matrice définie par l'équation (2.2) avec $\mathcal{D}$ correspondant à $\overline{\mathbb{R}}_{\max}$, et $\overline{v}(n) \in \overline{\mathbb{R}}_{\max}^{|H|\times 1}$, $n \in \mathbb{N}$, un vecteur modélisant l'influence externe.
On définit itérativement la séquence de vecteurs $\overline{x}_c(n) \in \overline{\mathbb{R}}_{\max}^{|H|\times 1}$ pour $n \in \mathbb{N}$ comme suit :

$$\begin{cases} \overline{x}_c(0) = \varepsilon, \\ \overline{x}_c(n+1) = \overline{A}\overline{x}_c(n) \oplus \overline{B}\overline{v}(n) \quad . \end{cases} \tag{4.1}$$

La matrice $\overline{B} \in \overline{\mathbb{R}}_{\max}^{|H|\times|H|}$ est définie par :

$$\overline{B}_{jk} = \begin{cases} e & \text{si } j = k \text{ et } j \text{ est une transition contrôlable,} \\ \varepsilon & \text{sinon.} \end{cases} \tag{4.2}$$

Notons que pour une transition j incontrôlable, $B_{jk} = \varepsilon$ pour tout $k \in H$ et donc

$$\overline{x}_c(n+1)_j = [\overline{A}\overline{x}_c(n)]_j \ , \tag{4.3}$$

ce qui signifie que l'entrée $\overline{v}(n)_j$ n'a aucune influence sur le signal $\overline{x}_c(n+1)_j$.
Dans le cas inverse,

$$\overline{x}_c(n+1)_j = [\overline{A}\overline{x}_c(n)]_j \oplus \overline{v}(n)_j \ , \tag{4.4}$$

le signal $\overline{x}_c(n+1)_j$ dépend alors de $\overline{v}(n)_j$.

Proposition 9 *Pour tout $j \in H$, on définit l'élément $\overline{v}(n)_j$ comme la date à partir de laquelle la transition j est autorisée lorsque n transitions d'état ont été observées (en supposant que $\overline{v}(0)_{(p,a,q)} \geq \alpha_p$). L'élément $\overline{x}_c(n+1)_j$ désigne la valeur maximum de l'ensemble contenant les dates à partir desquelles la transition j peut survenir à l'issue de n transitions d'état.*

Preuve 9 *D'une part, $\overline{x}_c(n+1) \geq \overline{x}(n+1)$ où $\overline{x}(n+1)_j$ (défini dans la proposition 1 sans influence externe) est la date d'achèvement maximum pour les séquences de longueur n à l'issue desquelles la transition j peut survenir.*

On a d'autre part $\overline{x}_c(n+1) \geq \overline{B}\overline{v}(n)$ où $[\overline{B}\overline{v}(n)]_j$ correspond à la date à partir de laquelle la transition j est autorisée après que n transitions d'état aient été observées.

Ces deux observations permettent de conclure que $\overline{x}_c(n+1)_j$ désigne le maximum des dates à partir desquelles la transition j peut survenir consécutivement à n transitions d'état.

Notons que la récurrence (4.1) mène à :

$$\overline{x}_c(n+1) = \bigoplus_{i=0}^{n} \overline{A}^i \overline{B}\overline{v}(n-i). \tag{4.5}$$

Remarque 7 *Pour des automates conventionnels (booléens), l'influence d'un contrôle (supervision) est modélisée à l'aide d'un produit (synchrone) avec le langage [Ramadge 1989]. La situation est comparable au contrôle des automates (max,+) basé sur leur représentation comportementale dans [Komenda 2009b]. Dans ces approches, le contrôle n'est donc pas considéré comme une entrée exogène agissant sur l'état du système (il n'apparait pas comme un terme additionnel dans l'équation d'état comme dans l'équation (4.1)).*

Remarque 8 *Avec l'approche décrite ci-dessus, une entrée influence une transition d'état en prévision d'un comportement pire-cas dans le futur (c'est-à-dire, en anticipant le fait que les séquences de durées d'achèvement maximum puissent être exécutées par le systèmes). Par exemple, si on considère un système avec plusieurs ordonnancements possibles (et l'ordonnancement choisi est inconnu), alors l'entrée va agir comme si le pire ordonnancement (avec le plus grand makespan) s'applique pour les transitions futures. Dans la section suivante, cette représentation permet de calculer des lois de commande garantissant des objectifs pour le système (typiquement des deadlines pour l'achèvement de séquences de longueur donnée) quel que soit l'ordonnancement appliqué en pratique. C'est une différence significative par rapport à l'approche de commande proposée dans [Komenda 2009b] qui est basée sur la représentation comportementale, et dont la commande dépend de l'état courant et du mot correspondant à la séquence qui a permis d'atteindre cet état. La commande est alors définie selon l'ordonnancement choisi.*
Notons que $\overline{v}(n)_j$ peut être choisi égal à $\top = +\infty$, ce qui veut dire que la transition contrôlable j est autorisée seulement à l'issue d'un délai infini. Ceci est équivalent à interdire cette transition, et ainsi des problèmes de commande logique peuvent être abordés.

2 Approche de commande en juste-à-temps

La représentation définie par les équations (4.1) et (4.5) est utilisée pour traiter le problème de commande suivant :

Trouver la *plus grande* trajectoire $\{\overline{v}(n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ telle que :

$$\bigoplus_{i=0}^{n} \overline{A}^{i}\overline{B}\overline{v}(n-i) \preceq z(n), \tag{4.6}$$

où $[z(n)]_j$ spécifie l'échéance souhaitée pour les séquences de longueur n précédant la transition j. En d'autres termes, on souhaite imposer que l'ensemble des séquences de longueur n préfixant la transition j soient achevées avant, ou à, l'instant $[z(n)]_j$.

Les motivations sont les suivantes :

- L'inégalité (4.6) implique que l'entrée $\overline{v}$ est telle que $\overline{x}_c(n+1)_j \leq z(n)_j$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, $j \in H$. Cela signifie que toutes les séquences de longueur n doivent s'achever avant l'échéance spécifiée par $z(n)$. Autrement dit, le maximum des dates à partir desquelles la transition j peut survenir à l'issue de n transitions d'état doit être inférieur à l'échéance $z(n)_j$.

- Rechercher la plus grande entrée $\{v(n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ signifie que l'on souhaite autoriser l'occurrence des transitions au plus tard.

Dans ce sens, la loi de commande satisfait le critère appelé *juste-à-temps*.

Remarque 9 *On peut choisir un signal de consigne z tel que $z(n)_j = \top = +\infty$ (échéance infinie) pour une transition j et pour n supérieur à une valeur donnée N. Ceci conduit à une entrée de commande qui retarde indéfiniment (ce qui revient à interdire) la transition contrôlable j. Ceci peut être utile :*

- *pour traiter des aspects de commande logique,*
- *ou alors si $\{z(n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ est partiellement connu. Dans ce cas, il est possible de considérer qu'au delà de la N-ième les échéances sont $+\infty$. Lorsqu'on s'intéresse à la commande de systèmes industriels, cela permet de spécifier, soit qu'un nombre fini N de produits est à réaliser, soit que les ordres de production sont inconnus au-delà du N-ième produit. Dans les deux cas, les échéances manquantes, ou inconnues, sont alors supposées non contraignantes au fonctionnement courant du système.*

Les Propositions 10 et 11 donnent une réponse positive au problème de commande (4.6), et peuvent être vues comme des adaptations de résultats établis pour les systèmes (max,+) linéaires [Baccelli 1992, §5.6], [Lahaye 1999b], [Menguy 2000], [Lahaye 2000], [Lahaye 2008].
Ces résultats sont basés sur la théorie de la résiduation[1] du produit dont on rappelle plusieurs propriétés.

Rappel 1 *Dans le dioïde complet $\overline{\mathbb{R}}_{\max}$, l'applicatioin $x \mapsto a \otimes x$ est résiduable ; sa résiduée est l'application $y \mapsto a\backslash y$. Les quelques formules de [Baccelli 1992, §4.4] suivantes seront utiles par la suite :*

$$a \otimes (a\backslash x) \leq x \ , \tag{f.1}$$
$$a\backslash(x \wedge y) = (a\backslash x) \wedge (a\backslash y) \ , \tag{f.2}$$
$$(a \otimes b)\backslash x = b\backslash(a\backslash x) \ . \tag{f.3}$$

Proposition 10 *La trajectoire $\{\overline{v}_{opt}(n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :*

$$n \in \mathbb{N},\ \overline{v}_{opt}(n) = \bigwedge_{i\geq 0} (\overline{A}^i \overline{B})\backslash z(n+i), \tag{4.7}$$

est la plus grande solution $\overline{v}$ de (4.6).

Preuve 10 *Soit $\{\overline{v}(n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ une solution de* (4.6). *On a alors :*

[1] La théorie de la résiduation permet la définition de pseudo-inverses d'applications isotones définies sur des ensembles ordonnés : une application $f : C \to D$ est dite résiduable si $\forall y \in D$, le plus petit élément de l'ensemble $\{x \in C | f(x) \preceq y\}$ existe et appartient à cet ensemble.

$$
\begin{array}{lll}
 & \forall n \in \mathbb{N}, & \bigoplus_{i=0}^{n} \overline{A}^i \overline{B} \overline{v}(n-i) \preceq z(n), \\
\Leftrightarrow & \forall n \in \mathbb{N}, \forall i \mid i \geq 0 \text{ et } i \leq n, & \overline{A}^i \overline{B} \overline{v}(n-i) \preceq z(n), \\
\Leftrightarrow & \forall n \in \mathbb{N}, \forall i \mid i \geq 0 \text{ et } i \leq n, & \overline{v}(n-i) \preceq (\overline{A}^i \overline{B}) \backslash z(n), \\
\Leftrightarrow & \forall n' \in \mathbb{N}, \forall i \mid i \geq 0 \text{ et } n' \geq 0, & \overline{v}(n') \preceq (\overline{A}^i \overline{B}) \backslash z(n'+i), \\
 & & \qquad (\textit{avec } n' = n - i) \\
\Leftrightarrow & \forall n' \in \mathbb{N}, \forall i \geq 0, & \overline{v}(n') \preceq (\overline{A}^i \overline{B}) \backslash z(n'+i), \\
\Leftrightarrow & \forall n' \in \mathbb{N}, & \overline{v}(n') \preceq \bigwedge_{i \geq 0} (\overline{A}^i \overline{B}) \backslash z(n'+i) = \overline{v}_{opt}(n').
\end{array}
$$

Dans la proposition suivante, nous montrons que $\overline{v}_{opt}$ peut être calculé à l'aide d'une récurrence "à rebours".

Proposition 11 *La trajectoire $\{\overline{v}_{opt}(n)\}_{n\in\mathbb{N}}$, définie par (4.7), est la plus grande solution $\overline{v}$ de :*

$$
\begin{cases}
\xi(n) = \overline{A} \backslash \xi(n+1) \wedge z(n), \\
\overline{v}(n) = \overline{B} \backslash \xi(n).
\end{cases}
\tag{4.8}
$$

Preuve 11 *Montrons d'abord que $\{\overline{v}_{opt}(n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ est solution de* (4.8)*.*
On définit $\{\xi_{opt}(n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ par $\overline{v}_{opt}(n) = \overline{B} \backslash \xi_{opt}(n)$, et donc :

$$
\xi_{opt}(n) = \bigwedge_{i \geq 0} \overline{A}^i \backslash z(n+i) \quad \textit{(conformément à (f.3)).}
$$

On vérifie alors que $\{\xi_{opt}(n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ est solution de la première équation de (4.8) :

$$
\begin{array}{rcll}
\left[\overline{A} \backslash \xi_{opt}(n+1)\right] \wedge z(n) & = & \left[\overline{A} \backslash (\bigwedge_{i \geq 0} \overline{A}^i \backslash z(n+i+1))\right] \wedge z(n), & \\
 & = & \bigwedge_{i \geq 0} \left[\overline{A} \backslash (\overline{A}^i \backslash z(n+i+1))\right] \wedge z(n), & (\textit{selon } (f.2)) \\
 & = & \bigwedge_{i \geq 0} \left[(\overline{A}^{i+1} \backslash z(n+i+1))\right] \wedge z(n), & (\textit{selon } (f.3)) \\
 & = & \bigwedge_{i \geq 0} (\overline{A}^i \backslash z(n+i)), & \\
 & = & \xi_{opt}(n). &
\end{array}
$$

Montrons à présent, que chaque solution de (4.8) *est plus petite que $\{\overline{v}_{opt}(n)\}_{n\in\mathbb{N}}$.*
Soit $\{\overline{v}(n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ une solution de (4.8)*, on a :*

$$
\begin{aligned}
\overline{v}(n) &= \overline{B}\backslash\Big(\overline{A}\backslash\xi(n+1)\wedge z(n)\Big),\\
&= \overline{B}\backslash\Big(\overline{A}\backslash\big[\overline{A}\backslash\xi(n+2)\wedge z(n+1)\big]\wedge z(n)\Big),\\
&= \overline{B}\backslash\Big(\overline{A}^2\backslash\xi(n+2)\wedge\overline{A}\backslash z(n+1)\wedge z(n)\Big),\\
&\ \ \vdots\\
&= \overline{A}^i\overline{B}\backslash\xi(n+i)\wedge\bigwedge_{j=0}^{i-1}\overline{A}^j\overline{B}\backslash z(n+j), \qquad (\forall i>0)\\
&\preceq \bigwedge_{j\geq 0}\overline{A}^j\overline{B}\backslash z(n+j),\\
&\preceq \overline{v}_{opt}(n).
\end{aligned}
$$

Remarque 4.1 *Le calcul de la solution de commande en juste-à-temps* $\{\overline{v}_{opt}(n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ *à l'aide de* (4.8) *met seulement en jeu des résiduations du produit de matrices et des infimums de matrices dans l'algèbre (max,+). La complexité en temps est par conséquent polynômiale.*

3 Applications

3 .1 Gestion d'ateliers à cheminements multiples

3 .1.1 Jobshop 1

On considère le *jobshop* introduit dans la section 5 .1 du chapitre précédent, noté *jobshop1* et représenté par le réseau de Petri et l'automate (max,+) qui sont dessinés respectivement sur les figures 4.1 et 4.2.

On considère la consigne suivante : retarder le système au maximum, tout en assurant que l'exécution de 10 jobs s'achève avant, ou à, la date t=70, quel que soit l'ordonnancement appliqué. Ceci se traduit par :

$$[z(30)]_j = 70, \text{ pour } j \in H_6 \cup H_8 \cup H_{13}.$$

On considère ce seul objectif, et on spécifie donc :

$$[z(n)]_j = \begin{cases} 70 & \text{si } j \in H_6 \cup H_8 \cup H_{13} \text{ et } 0 \leq n \leq 30,\\ T & \text{sinon.}\end{cases}$$

Les valeurs de $[z(n)]_j$ égales à $T = +\infty$ signifient que les échéances correspondantes ne sont pas connues et par conséquent on leur attribue la valeur la moins contraignante.

– En premier lieu, on considère que tous les événements sont contrôlables (B est égale à la matrice identité). En appliquant la récurrence (4.8), on obtient (Un détail de ce calcul se trouve dans la section 1 de l'annexe B) :

$$[v_{opt}(0)]_{(1,a,2)} = 10.$$

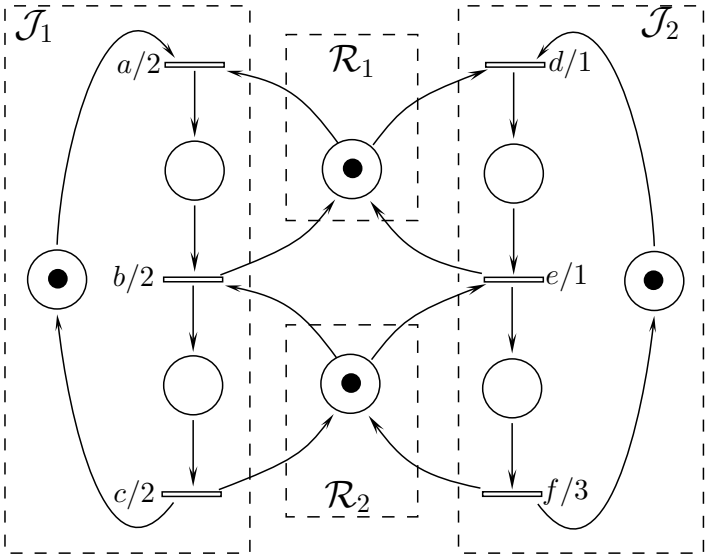

Figure 4.1 – Atelier jobshop 1 représenté par un réseau de Petri.

Cela signifie que si le premier job effectivement réalisé est $\mathcal{J}_1$, alors le début de sa réalisation est autorisé à partir de la date 10. Ainsi, même si le pire ordonnancement est appliqué (10 jobs $\mathcal{J}_1$ dont la durée d'achèvement est égale à 60), ces 10 jobs sont alors achevés avant, ou à, la date 70.
On obtient d'autre part,

$$[v_{opt}(0)]_{(1,d,3)} = 13.$$

Cela signifie que si le premier job effectivement réalisé est $\mathcal{J}_2$, alors le début de sa réalisation est autorisé à partir de la date 13. Ainsi, même si 9 jobs $\mathcal{J}_1$ sont ensuite réalisés (la duré d'achèvement de 9 jobs $\mathcal{J}_1$ après un job $\mathcal{J}_2$ est égale à 57), les 10 jobs seront toujours achevés avant ou à la date 70.

On note que dans les deux cas (débuter par $\mathcal{J}_1$ ou par $\mathcal{J}_2$), le résultat de commande nous permet d'assurer des dates d'achèvement qui respectent la consigne désirée z, en juste-à-temps.

– Supposons maintenant que toutes les transitions associées au job $\mathcal{J}_1$ sont incontrôlables (a, b et c incontrôlables). Dans ce cas la matrice B est différente de la matrice identité, car les éléments de la diagonale qui correspondent aux transitions incontrôlables sont égaux à $\varepsilon = -\infty$ (conformément à la définition (4.2) de la matrice B).

L'ordonnancement qui ne contient que des jobs $\mathcal{J}_1$ n'est pas contrôlable, on ne peut donc pas retarder la réalisation de ces jobs s'il s'agit de l'ordonnancement

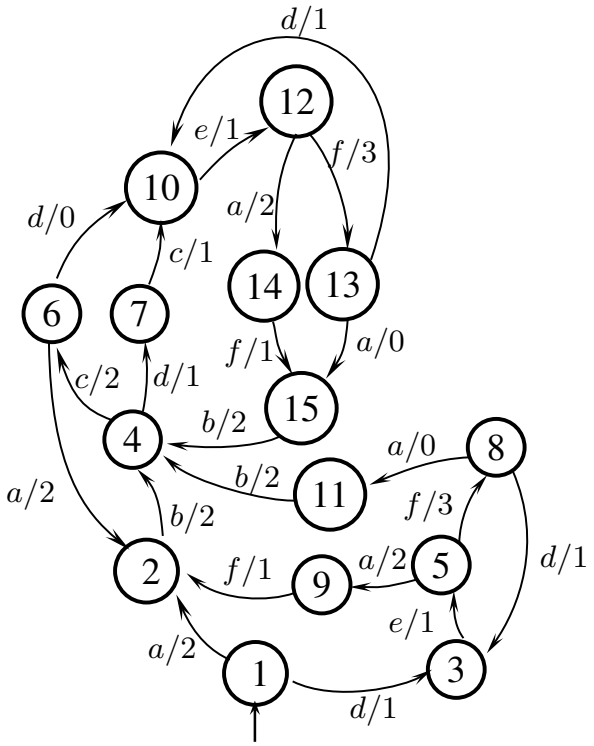

Figure 4.2 – Atelier jobshop 1 représenté par un automate (max,+).

effectivement appliqué. On obtient par exemple :

$$[v_{opt}(n)]_{(1,a,2)} = T, \forall n \in \mathbb{N}.$$

Puisque $B_{j,(1,a,2)} = \varepsilon, \forall j$ (car a est incontrôlable), les itérés $[v_{opt}(n)]_{(1,a,2)},\ n \in \mathbb{N}$, n'influent pas (ne retardent pas) l'évolution du système. La récurrence (4.8) donne alors la plus grande valeur pour $[v_{opt}(n)]_{(1,a,2)}$, qui de toute façon n'a pas d'influence sur l'évolution du système.

Cependant, tous les autres ordonnancements sont contrôlables, car il suffit que l'ordonnancement contienne un job $\mathcal{J}_2$ (dont les événements sont contrôlables), pour que le contrôleur retarde sa réalisation au maximum, tout en respectant le principe du juste-à-temps. Par exemple, on obtient (comme dans le cas où toutes les transitions sont contrôlables, voir le point précédent) :

$$[v_{opt}(0)]_{(1,d,3)} = 13.$$

Cela signifie que le début de la réalisation du job $\mathcal{J}_2$ est autorisé à partir de la date 13. Ainsi, même si la suite de 9 jobs $\mathcal{J}_1$ (incontrôlables) sont ensuite réalisés, les 10 jobs seront toujours achevés avant, ou à, la date 70.

On obtient également :

$$[v_{opt}(27)]_{(9,f,2)} = 65.$$

Ainsi, même si l'ordonnancement optimal est appliqué (5 fois $\mathcal{J}_2\mathcal{J}_1$, dont la durée d'achèvement est égale à 41 unités de temps), la dernière transition du 9ème job $\mathcal{J}_2$, à savoir $(9, f, 2)$, est retardée telle que quelle que soit la séquence d'événements qui survient ensuite, on est assuré de finir les 10 jobs avant ou à la date désirée : t=70.
En d'autres termes, le principe du contrôle en juste-à-temps est respecté, car les dernières transitions, selon l'ordonnancement optimal, sont :$(9, f, 2)(2, b, 4)(4, c, 6)$, qui ont pour durée d'achèvement 5 unités de temps (voir la figue 4.3).

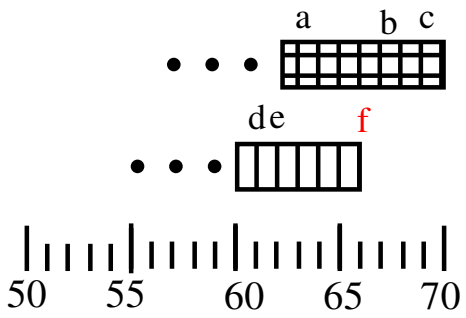

Figure 4.3 – Chronogramme de l'exécution de l'ordonnancement $\mathcal{J}_2\mathcal{J}_1\mathcal{J}_2\mathcal{J}_1\mathcal{J}_2\mathcal{J}_1\mathcal{J}_2\mathcal{J}_1\mathcal{J}_2\mathcal{J}_1$ après contrôle en juste-à-temps.

3 .1.2 Jobshop 2

On considère le *jobshop* introduit dans la section 5 .2 du chapitre précédent, noté *jobshop2* et modélisé par le réseau de Petri et l'automate (max,+) qui sont dessinés respectivement sur les figures 4.4 et 4.5.

Pour une consigne qui exige de retarder le système au maximum, tout en assurant que l'exécution de 10 jobs s'achève au plus tard à la date $t = 50$, l'application du résultat de commande en juste-à-temps permet d'obtenir, entre autres, les résultats suivants :

– En considérant que tous les événements sont contrôlables, on obtient :

$$[v_{opt}(0)]_{(1,a,2)} = 8.$$

Cela signifie que l'entrée exogène va retarder la réalisation du premier job $\mathcal{J}_1$ jusqu'à la date $t = 8$. Si le pire ordonnancement est ensuite effectivement appliqué (dont le makespan est égal à 42), alors l'échéance pour les 10 jobs sera tout de même satisfaite.
Par ailleurs,

$$[v_{opt}(0)]_{(1,d,3)} = 9,$$

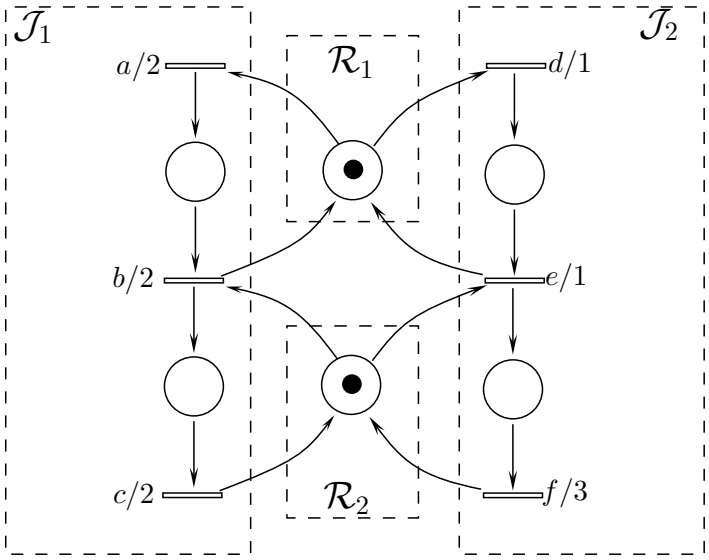

Figure 4.4 – Atelier jobshop 2 représenté par un réseau de Petri.

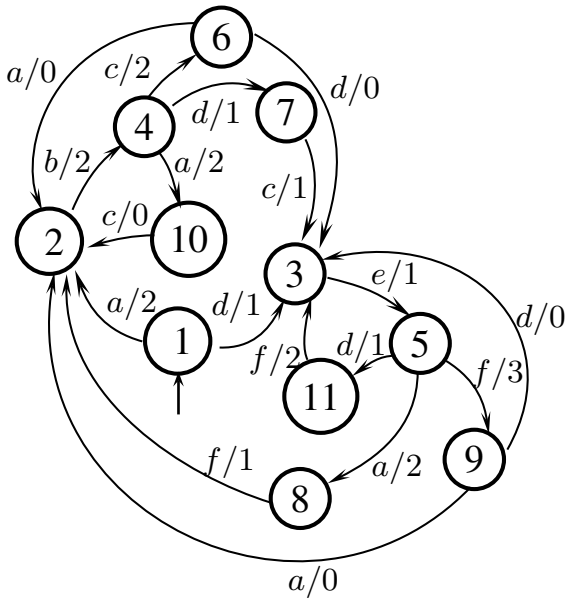

Figure 4.5 – Atelier jobshop 2 représenté par un automate (max,+).

indique que l'on retarde la réalisation du premier job $\mathcal{J}_2$ à la date $t = 9$. Ainsi, quelle que soit la suite de jobs qui s'effectuera à la suite du job $\mathcal{J}_2$ (même si c'est une suite de 9 jobs $\mathcal{J}_1$) le makespan de l'ensemble des 10 jobs sera inférieur où égale à 41 unités de temps, ce qui assure l'achèvement avant ou à

la date $t = 50$.

– On considère maintenant que les événements du job $\mathcal{J}_2$ sont incontrôlables. On obtient toujours :

$$[v_{opt}(0)]_{(1,a,2)} = 8.$$

Cela signifie que la commande continue à retarder les événements contrôlables du job $\mathcal{J}_1$.
On a aussi :

$$[v_{opt}(26)]_{(4,c,6)} = 44.$$

Ce résultat peut servir dans le cas où le job $\mathcal{J}_2$ est le dernier de l'ordonnancement. En effet, le dernier événement du job $\mathcal{J}_1$, c, ne sera autorisé qu'à partir de la date $t = 44$. Ceci anticipe l'occurrence du job $\mathcal{J}_2$ en dernier, c'est-à-dire que la dernière séquence qui démarrerait à la date $t = 44$ serait : $cdef$ qui a comme durée d'exécution 6 unités de temps (voir figure 4.6). La consigne en juste-à-temps est donc satisfaite car l'ensemble de l'ordonnancement s'achève avant, où à, l'instant $t = 50$.

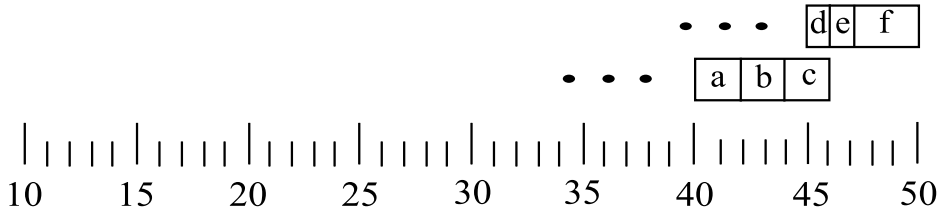

Figure 4.6 – Déroulement de l'ordonnancement $\ldots \mathcal{J}_1\mathcal{J}_2$ au sein du système contrôlé.

3 .2 Gestion d'un croisement de lignes ferroviaires

Nous allons maintenant nous intéresser à un système de croisement de rails ferroviaires (figure 4.7). Celui-ci est composé de trois lignes unidirectionnelles notées : $\mathcal{L}_1$, $\mathcal{L}_2$ et $\mathcal{L}_3$. On considère que chaque ligne comporte trois feux de signalisation, notés comme suit :

– $\mathcal{L}_1 : a \rightarrow a' \rightarrow b$,
– $\mathcal{L}_2 : c \rightarrow d \rightarrow e$,
– $\mathcal{L}_3 : f \rightarrow f' \rightarrow g$.

Un feu de signalisation permet d'autoriser ou interdire à un train de franchir ce feu et de parcourir le tronçon en aval jusqu'au feu suivant. Par exemple, le train qui empreinte la ligne unidirectionnelle $\mathcal{L}_2$ va devoir franchir trois feux selon l'ordre suivant : c, d puis e.
Le croisement ferroviaire comporte alors 9 feux de signalisation : a, a', b, c, d, e, f et f' auxquels on associe les durées respectives : 2, 1, 2, 2, 1, 1, 1, 1 et 2 unités de temps.

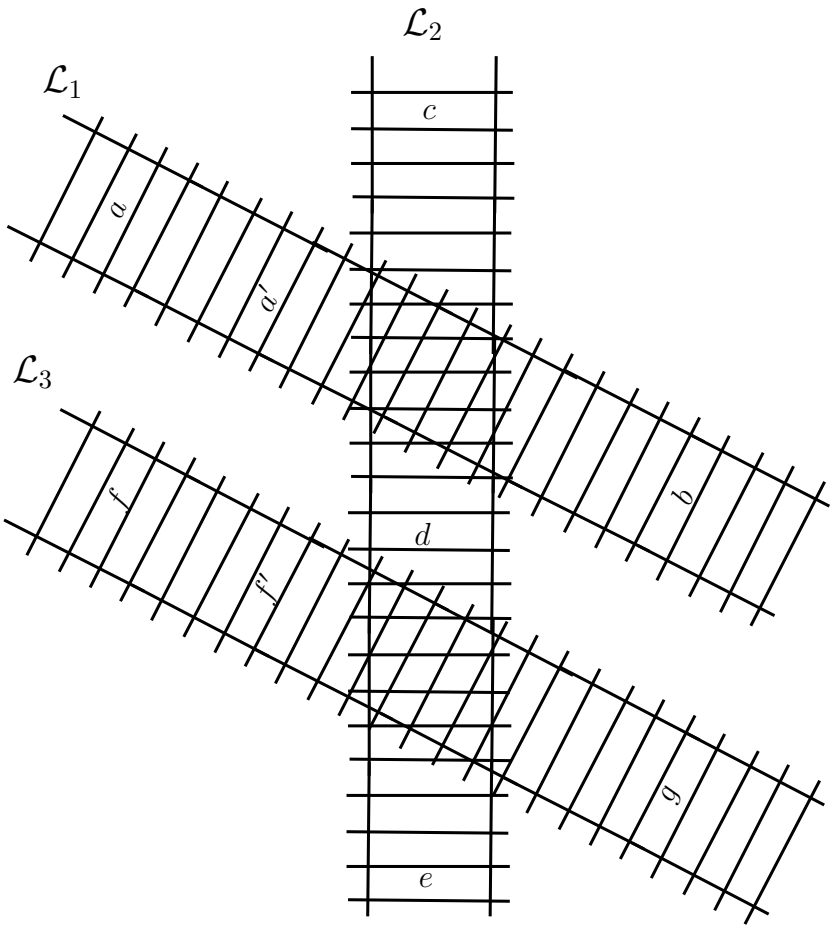

Figure 4.7 – Croisement de 3 rails ferroviaires .

Une telle durée de passage traduit le temps nécessaire au train, s'il y est autorisé, pour traverser le feu et parcourir le tronçon jusqu'au prochain feu. Par exemple, le train traversant la ligne $\mathcal{L}_1$ met 2 unités de temps à franchir le feu a et arriver au feu a'.

Afin d'éviter les collisions, le tronçon $[cd]$ de la ligne $\mathcal{L}_2$ ne pourra pas être traversé si un train se présente sur la ligne $\mathcal{L}_1$ (c'est-à-dire, si un train est présent sur le tronçon $[aa']$ ou sur le tronçon $[a'b]$). De même, le tronçon $[de]$ de la ligne $\mathcal{L}_2$ sera fermé si un train est présent sur la ligne $\mathcal{L}_3$.

Réciproquement, la ligne $\mathcal{L}_1$ (respectivement $\mathcal{L}_3$) n'est pas autorisée quand un train passe sur le tronçon $[cd]$ (respectivement $[de]$) de la ligne $\mathcal{L}_2$. D'autre part, les feux sont utilisés pour garantir la présence d'un seul train sur les tronçons de ligne. Plus précisément, le feu a (respectivement f) autorise le passage d'un train à la condition qu'aucun autre train ne soit présent sur les tronçons $[aa']$ et $[a'b]$ (respectivement $[ff']$ et $[f'g]$). Sur la ligne $\mathcal{L}_2$, un seul train est autorisé par tronçon.

Sur la ligne $\mathcal{L}_2$, un seul train est autorisé par tronçon.

Cette gestion des trains sur le croisement est modélisée par le réseau de Petri de la figure 4.8.

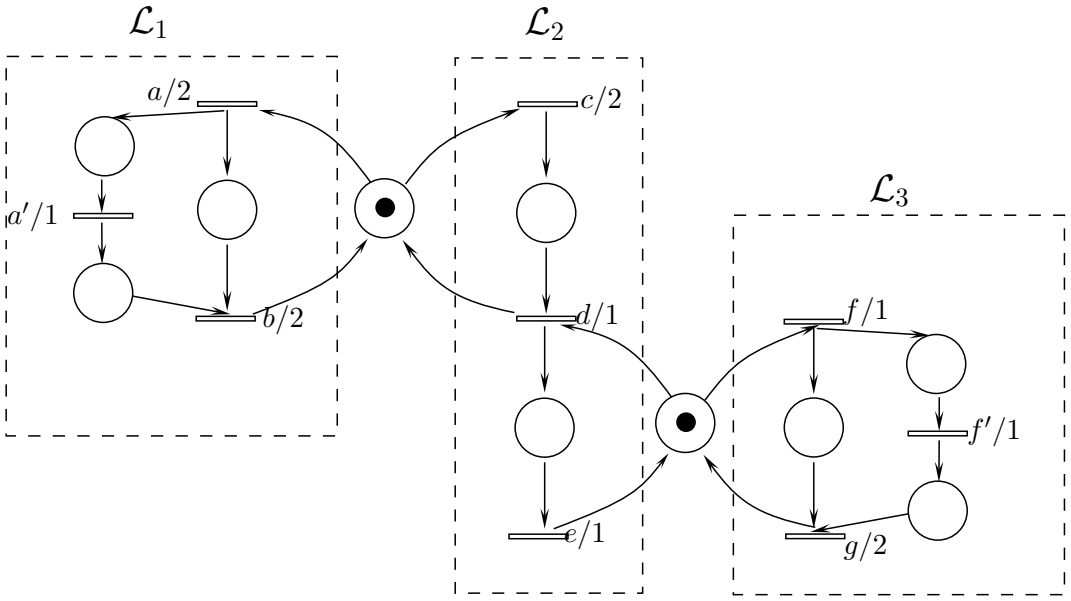

Figure 4.8 – Croisement ferroviaire représenté par un réseau de Petri.

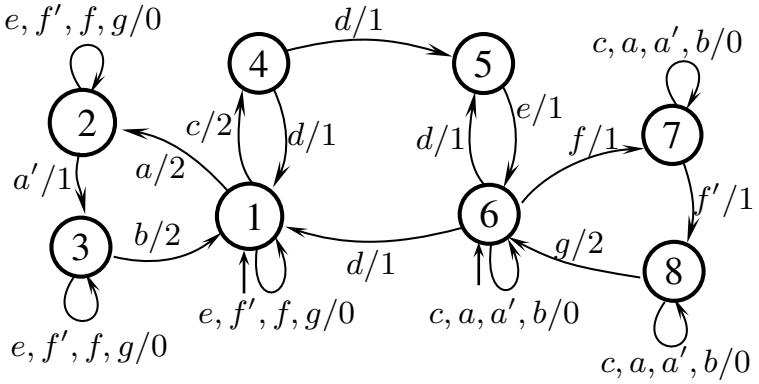

Figure 4.9 – Croisement ferroviaire représenté par un automate (max,+).

L'automate (max,+), dessiné sur la figure 4.9, admet le même dateur que le réseau de Petri de la figure 4.8, mais reconnaît un langage plus grand (par exemple : l'automate reconnait la séquence $ffff\ldots.$ qui n'est pas possible dans le réseau de

Petri).

Toutefois, étant donné que ce modèle d'automate (max,+) nous permet d'obtenir les bonnes dates d'achèvement pour les séquences d'événements, selon la représentation classique de l'automate (max,+), on est certain que la représentation du comportement pire-cas nous donne les durées d'achèvement maximum pour toutes les séquences de longueur n aboutissant à un état p donné. Par conséquent, on s'intéressera à l'évaluation des *makespan* du comportement pire-cas du système et à sa commande.

Si le nombre de trains traversant le croisement est égal à n, le nombre de feux franchis par ces trains sera égal à $3n$, puisque chaque ligne comporte 3 feux de signalisation. On peut alors interpréter quelques résultats obtenus en appliquant la représentation pire-cas en matière de durées d'achèvement pour les automates (max,+) (voir la section 2 de l'annexe B pour un détail des résultats). En effet, pour le passage de 10 trains consécutifs par le croisement ($n = 30$) on obtient :

$$\bigoplus_{j \in H_1 \cup H_6} [\overline{x}(31)]_j = 50.$$

Cela signifie que la traversée de 10 trains sur le croisement dure au maximum 50 unités de temps, ce qui correspond à 10 traversées consécutives de la ligne $\mathcal{L}_1$.

On considère que tous les événements (les feux de signalisation) sont contrôlables. On applique comme consigne pour 10 traversées de trains la date maximale $t = 80$. En utilisant le résultat de commande en juste-à-temps pour les durées d'achèvements, on obtient le résultat suivant :

$$[v_{opt}(0)]_{(1,a,2)} = 30.$$

Le premier train candidat à la traversée de la ligne $\mathcal{L}_1$ ne sera autorisé qu'à partir de la date $t = 30$, afin que les 9 traversées de trains suivantes soient achevées au plus tard à $t = 80$.

4 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons apporté une modification à la représentation extrémale évaluant les durées d'achèvements maximum des séquences, en considérant une influence extérieure. En effet, une entrée exogène a été définie, notée $v(n),\ n \in \mathbb{N}$, qui agit sur la dynamique du système en retardant ou interdisant l'occurrence de transitions contrôlables.
Ce qui nous conduit à une représentation des automates (max,+) qui s'apparente aux équations d'états des systèmes (max,+) linéaires :

$$\begin{cases} \overline{x}_c(0) = \varepsilon, \\ \overline{x}_c(n+1) = \overline{A}\overline{x}_c(n) \oplus \overline{B}\overline{v}(n). \end{cases}$$

Un premier problème de commande est alors posé, celui de trouver la commande qui retarde le système le plus possible tout en respectant des échéances. C'est ce qu'on appelle la commande en boucle ouverte selon le critère du juste à temps.

Un solution analytique à ce problème est donnée, ainsi qu'un algorithme de complexité polynomiale sous la forme d'une récurrence à rebours pour le calcul de la solution de commande.
Enfin, des applications de cette commande sont présentées afin d'illustrer son apport et son influence sur le système sur deux exemples d'atelier *jobshop* et un exemple de croisement de lignes ferroviaires.
Parmi les perspectives qui découlent de ce travail de commande, il est prévu d'appliquer d'autres lois de commande développées pour les systèmes (max,+)-linéaires. En particuliers, l'entrée exogène pourrait être influencée par retour d'information (*feedback*) sous la forme d'une tructure de commande en boucle fermée. D'autres critères pourraient également être considérés (minimisation de retards, commande en juste après, ...).

D'autre part, on peut envisager une même approche de commande, à partir des autres représentations de comportements extrémaux introduites au chapitre 2.

Conclusion générale

Dans ce manuscrit, nous avons pu apporter des contributions à l'étude des systèmes à événements discrets. Ces contributions concernent plus précisément la théorie des automates pondérés dans l'algèbre (max,+), appelés automates (max,+). L'utilisation de cet outil de modélisation nous a permis d'obtenir des résultats dans les domaines de l'évaluation de performances et de la commande.

Dans un premier temps, nous avons présenté cet outil de modélisation ainsi qu'une partie des résultats et propriétés proposées dans la littérature. Cette présentation conduit au constat servant de postulat à cette thèse : il existe de nombreux problèmes importants pour les automates (max,+) qui ne peuvent pas (ou seulement partiellement) être traités en utilisant les représentations connues pour ceux-ci. Ce travail vise donc à proposer des représentations alternatives pour les automates (max,+) avec l'ambition de pouvoir traiter de façon efficace des nouveaux problèmes.

L'idée est de définir un vecteur dont les éléments sont liés aux transitions d'état de l'automate (max,+) et qui satisfont une récurrence soit sur la longueur des séquences, soit sur le temps discrétisé.

Partant de cette approche, nous avons pu aboutir à différentes représentations décrivant les comportements extrémaux des automates (max,+). Ces représentations s'écrivent soit dans l'algèbre (max,+), soit dans l'algèbre (min,+), selon que l'on cherche à décrire le comportement pire-cas ou le comportement optimal.

Grâce à ces représentations, on a pu extraire des indicateurs de performances intéressants, avec une complexité en temps polynomiale. De plus, pour une des représentations exposées, on a pu définir une entrée exogène qui modélise une influence extérieure. Une telle entrée peut être vue comme un moyen pour retarder, voire interdire, une transition d'état au sein de l'automate. On obtient alors une représentation d'état semblable à celle des systèmes (max,+)-linéaires. Cette ressemblance entre les représentations nous incite ensuite à approfondir les analogies pour la commande. Plus précisément, on transpose aux automates (max,+), une loi de commande en boucle ouverte bien connue pour les systèmes (max,+)-linéaires. Des applications à différents systèmes (2 systèmes d'ateliers *jobshop* ainsi qu'un système de croisement de lignes ferroviaires) ont été présentés afin d'illustrer l'apport des indicateurs de

performance ainsi que de la commande proposée.

Les perspectives qui découlent de ces travaux, qui ont déjà été soulignées, peuvent se résumer comme suit :

- tirer profit des propriétés spectrales des matrices utilisées pour les représentations extrémales, dans le but de simplifier le calcul des indicateurs de performance déduits et de définir des propriétés de cyclicité pour le système.
- transposer d'autres lois de commande connues pour les systèmes (max,+)-linéaires. Plus précisément, des structures de commande différentes peuvent être abordées, comme la commande en boucle fermée, la commande avec précompensateur, ...
- appliquer les résultats de commande et d'évaluation de performance pour des systèmes réels. Un intérêt serait d'interpréter des problématiques de gestion de trafic ferroviaire, d'économie d'énergie, de diagnostic, d'ordonnancement manufacturier, ...

ANNEXE A

Détails des exemples pour l'évaluation de performances

Sommaire

1 Détails pour l'exemple du *jobshop1*

1 .1 Évaluation des durées d'achèvement

L'automate (max,+) modélisant le *jobshop1* est représenté sur la figure 3.2. L'ensemble des transition est : $H = \{(1,a,2),(1,d,3),(2,b,4),(3,e,5),(4,c,6),(4,d,7),(5,f,8),(5,a,9)$ $,(6,a,2),(6,d,10),(7,c,10),\ (8,a,11),(8,d,3),(9,f,2),(10,e,12),(11,b,4),$ $(12,f,13),(12,a,14),(13,d,10),(13,a,15),(14,f,15),(15,b,4)\}$.

La matrice A est construite selon (2.2) :

$$A = \begin{pmatrix}
\varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\
\varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\
2 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & 2 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & 1 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\
\varepsilon & 1 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & 1 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\
\varepsilon & \varepsilon & 2 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & 2 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & 2 \\
\varepsilon & \varepsilon & 2 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & 2 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & 2 \\
\varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & 1 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\
\varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & 1 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\
\varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & 2 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\
\varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & 2 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\
\varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & 1 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\
\varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & 3 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\
\varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & 3 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\
\varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & 2 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\
\varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & 0 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & 1 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\
\varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & 0 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\
\varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & 1 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\
\varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & 1 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\
\varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & 3 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\
\varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & 3 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\
\varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & 2 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\
\varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & 0 & 1 & \varepsilon
\end{pmatrix}.$$

Rappelons que l'équation (2.3) nous permet d'évaluer les durées d'achèvement de l'automate (max,+) comme suit :

$$\begin{cases} x(1)_{(p,a,q)} = \alpha_p & \text{pour tout } (p,a,q) \in H, \\ x(n+1) = A \otimes x(n) & \text{pour } n \geq 1. \end{cases}$$

Appliquée dans $\overline{\mathbb{R}}_{\max}$ et $\overline{\mathbb{R}}_{\min}$, on obtient respectivement les durées d'achèvement du comportement pire cas $\overline{x}(n)$, et meilleurs cas $\underline{x}(n)$. Pour $n = 0 : 30$ on obtient :

dans $\overline{\mathbb{R}}_{\max}$,

$$\overline{x}^T(n+1) = \begin{pmatrix}
0 & 0 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\
\varepsilon & \varepsilon & 2 & 1 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\
\varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & 4 & 4 & 2 & 2 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\
\varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & 6 & 6 & 5 & 5 & 5 & 4 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\
\varepsilon & \varepsilon & 8 & 6 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & 6 & 5 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\
\varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & 10 & 10 & 7 & 7 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & 7 & 7 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\
\varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & 12 & 12 & 11 & 10 & 10 & 9 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & 10 & 10 & 9 & \varepsilon \\
\varepsilon & \varepsilon & 14 & 11 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & 12 & 10 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & 10 \\
\varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & 16 & 16 & 12 & 12 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & 13 & 13 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\
\varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & 18 & 18 & 17 & 15 & 15 & 14 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & 16 & 16 & 15 & \varepsilon \\
\varepsilon & \varepsilon & 20 & 16 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & 18 & 15 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & 16 \\
\varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & 22 & 22 & 17 & 17 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & 19 & 19 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\
\varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & 24 & 24 & 23 & 20 & 20 & 19 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & 22 & 22 & 21 & \varepsilon \\
\varepsilon & \varepsilon & 26 & 21 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & 24 & 20 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & 22 \\
\varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & 28 & 28 & 22 & 22 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & 25 & 25 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\
\varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & 30 & 30 & 29 & 25 & 25 & 24 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & 28 & 28 & 27 & \varepsilon \\
\varepsilon & \varepsilon & 32 & 26 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & 30 & 25 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & 28 \\
\varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & 34 & 34 & 27 & 27 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & 31 & 31 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\
\varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & 36 & 36 & 35 & 30 & 30 & 29 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & 34 & 34 & 33 & \varepsilon \\
\varepsilon & \varepsilon & 38 & 31 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & 36 & 30 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & 34 \\
\varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & 40 & 40 & 32 & 32 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & 37 & 37 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\
\varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & 42 & 42 & 41 & 35 & 35 & 34 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & 40 & 40 & 39 & \varepsilon \\
\varepsilon & \varepsilon & 44 & 36 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & 42 & 35 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & 40 \\
\varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & 46 & 46 & 37 & 37 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & 43 & 43 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\
\varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & 48 & 48 & 47 & 40 & 40 & 39 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & 46 & 46 & 45 & \varepsilon \\
\varepsilon & \varepsilon & 50 & 41 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & 48 & 40 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & 46 \\
\varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & 52 & 52 & 42 & 42 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & 49 & 49 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\
\varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & 54 & 54 & 53 & 45 & 45 & 44 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & 52 & 52 & 51 & \varepsilon \\
\varepsilon & \varepsilon & 56 & 46 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & 54 & 45 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & 52 \\
\varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & 58 & 58 & 47 & 47 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & 55 & 55 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\
\varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & 60 & 60 & 59 & 50 & 50 & 49 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & 58 & 58 & 57 & \varepsilon
\end{pmatrix},$$

et dans $\overline{\mathbb{R}}_{\min}$,

$$\underline{x}^T(n+1) = \begin{pmatrix}
0 & 0 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\
\varepsilon & \varepsilon & 2 & 1 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\
\varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & 4 & 4 & 2 & 2 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\
\varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & 6 & 6 & 5 & 5 & 5 & 4 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\
\varepsilon & \varepsilon & 5 & 6 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & 6 & 5 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\
\varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & 7 & 7 & 7 & 7 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & 7 & 7 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\
\varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & 9 & 9 & 8 & 10 & 10 & 9 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & 10 & 10 & 9 & \varepsilon \\
\varepsilon & \varepsilon & 10 & 11 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & 9 & 10 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & 10 \\
\varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & 12 & 12 & 12 & 12 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & 10 & 10 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\
\varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & 14 & 14 & 13 & 15 & 15 & 14 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & 13 & 13 & 12 & \varepsilon \\
\varepsilon & \varepsilon & 15 & 16 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & 14 & 15 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & 13 \\
\varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & 15 & 15 & 17 & 17 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & 15 & 15 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\
\varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & 17 & 17 & 16 & 20 & 20 & 19 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & 18 & 18 & 17 & \varepsilon \\
\varepsilon & \varepsilon & 19 & 21 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & 17 & 20 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & 18 \\
\varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & 20 & 20 & 22 & 22 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & 18 & 18 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\
\varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & 22 & 22 & 21 & 25 & 25 & 24 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & 21 & 21 & 20 & \varepsilon \\
\varepsilon & \varepsilon & 24 & 26 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & 22 & 25 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & 21 \\
\varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & 23 & 23 & 27 & 27 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & 23 & 23 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\
\varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & 25 & 25 & 24 & 30 & 30 & 29 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & 26 & 26 & 25 & \varepsilon \\
\varepsilon & \varepsilon & 27 & 31 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & 25 & 30 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & 26 \\
\varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & 28 & 28 & 32 & 32 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & 26 & 26 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\
\varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & 30 & 30 & 29 & 35 & 35 & 34 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & 29 & 29 & 28 & \varepsilon \\
\varepsilon & \varepsilon & 32 & 36 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & 30 & 35 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & 29 \\
\varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & 31 & 31 & 37 & 37 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & 31 & 31 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\
\varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & 33 & 33 & 32 & 40 & 40 & 39 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & 34 & 34 & 33 & \varepsilon \\
\varepsilon & \varepsilon & 35 & 41 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & 33 & 40 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & 34 \\
\varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & 36 & 36 & 42 & 42 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & 34 & 34 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\
\varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & 38 & 38 & 37 & 45 & 45 & 44 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & 37 & 37 & 36 & \varepsilon \\
\varepsilon & \varepsilon & 40 & 46 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & 38 & 45 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & 37 \\
\varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & 39 & 39 & 47 & 47 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & 39 & 39 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\
\varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & 41 & 41 & 40 & 50 & 50 & 49 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & 42 & 42 & 41 & \varepsilon
\end{pmatrix}.$$

1 .2 Évaluation des longueurs de séquences

L'ensemble des durées associées aux événements de l'automate (max,+) est :

$$T = \{0, 1, 2, 3\}.$$

On construit alors les matrices E_τ, $\tau \in T$ selon (2.4) :

$$E_0 = \begin{pmatrix}
\varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\
\varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\
\varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\
\varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\
\varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\
\varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\
\varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\
\varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\
\varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\
\varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\
\varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\
\varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\
\varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\
\varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\
\varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & 1 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\
\varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & 1 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\
\varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\
\varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\
\varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\
\varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\
\varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\
\varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & 1 & \varepsilon & \varepsilon
\end{pmatrix},$$

$$E_1 = \begin{pmatrix}
\varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\
\varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\
\varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & 1 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\
\varepsilon & 1 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & 1 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\
\varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\
\varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\
\varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & 1 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\
\varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & 1 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\
\varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\
\varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\
\varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & 1 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\
\varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\
\varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\
\varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\
\varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & 1 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\
\varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\
\varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & 1 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\
\varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & 1 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\
\varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\
\varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\
\varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\
\varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & 1 & \varepsilon
\end{pmatrix},$$

$$E_2 = \begin{pmatrix}
\varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\
\varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\
1 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & 1 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\
\varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\
\varepsilon & \varepsilon & 1 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & 1 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & 1 \\
\varepsilon & \varepsilon & 1 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & 1 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & 1 \\
\varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\
\varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\
\varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & 1 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\
\varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & 1 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\
\varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\
\varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\
\varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\
\varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & 1 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\
\varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\
\varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\
\varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\
\varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\
\varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\
\varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\
\varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & 1 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\
\varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon
\end{pmatrix}$$

$$
\text{et } E_3 = \begin{pmatrix}
\varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\
\varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\
\varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\
\varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\
\varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\
\varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\
\varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\
\varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\
\varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\
\varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\
\varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\
\varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & 1 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\
\varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & 1 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\
\varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\
\varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\
\varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\
\varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\
\varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\
\varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & 1 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\
\varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & 1 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\
\varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\
\varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon
\end{pmatrix}.
$$

L'équation (2.5) nous permet d'évaluer les longueurs de séquences s'achevant avant, ou à, l'instant t :

$$
\begin{cases}
z(0)_{(p,a,q)} = \alpha_p & \text{pour tout } (p,a,q) \in H, \\
z(t) = \bigoplus_{\tau \in T, \tau \leq t} E_\tau \otimes z(t-\tau) \oplus z(t-1), & \text{pour } t > 0.
\end{cases}
$$

On obtient alors pour $t = 1 : 41$:

dans $\overline{\mathbb{R}}_{\max}$,

$$\overline{z}^T(t) = \begin{pmatrix}
0 & 0 & \varepsilon & 1 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\
0 & 0 & 1 & 1 & \varepsilon & \varepsilon & 2 & 2 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\
0 & 0 & 1 & 1 & \varepsilon & \varepsilon & 2 & 2 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\
0 & 0 & 1 & 1 & 2 & 2 & 2 & 2 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & 3 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\
0 & 0 & 4 & 1 & 2 & 2 & 2 & 2 & \varepsilon & \varepsilon & 3 & 3 & 3 & 3 & \varepsilon & 4 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\
0 & 0 & 4 & 4 & 2 & 2 & 2 & 2 & 3 & 3 & 3 & 3 & 3 & 3 & 4 & 4 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\
0 & 0 & 4 & 4 & 5 & 5 & 5 & 5 & 3 & 3 & 3 & 3 & 3 & 3 & 4 & 4 & 5 & 5 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\
0 & 0 & 4 & 4 & 5 & 5 & 5 & 5 & 3 & 3 & 6 & 3 & 3 & 3 & 4 & 4 & 5 & 5 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\
0 & 0 & 4 & 4 & 5 & 5 & 5 & 5 & 6 & 6 & 6 & 3 & 3 & 6 & 7 & 4 & 5 & 5 & \varepsilon & \varepsilon & 6 & \varepsilon \\
0 & 0 & 7 & 4 & 5 & 5 & 5 & 5 & 6 & 6 & 6 & 6 & 6 & 6 & 7 & 7 & 8 & 8 & 6 & 6 & 6 & 7 \\
0 & 0 & 7 & 7 & 5 & 5 & 5 & 5 & 6 & 6 & 6 & 6 & 6 & 6 & 7 & 7 & 8 & 8 & 6 & 6 & 6 & 7 \\
0 & 0 & 7 & 7 & 8 & 8 & 8 & 8 & 6 & 6 & 6 & 6 & 6 & 6 & 7 & 7 & 8 & 8 & 6 & 6 & 9 & 7 \\
0 & 0 & 7 & 7 & 8 & 8 & 8 & 8 & 6 & 6 & 9 & 6 & 6 & 6 & 7 & 7 & 8 & 8 & 9 & 9 & 9 & 10 \\
0 & 0 & 7 & 7 & 8 & 8 & 8 & 8 & 9 & 9 & 9 & 6 & 6 & 9 & 10 & 7 & 8 & 8 & 9 & 9 & 9 & 10 \\
0 & 0 & 10 & 7 & 11 & 11 & 8 & 8 & 9 & 9 & 9 & 9 & 9 & 9 & 10 & 10 & 11 & 11 & 9 & 9 & 9 & 10 \\
0 & 0 & 10 & 10 & 11 & 11 & 8 & 8 & 9 & 9 & 12 & 9 & 9 & 9 & 10 & 10 & 11 & 11 & 9 & 9 & 9 & 10 \\
0 & 0 & 10 & 10 & 11 & 11 & 11 & 11 & 12 & 12 & 12 & 9 & 9 & 9 & 13 & 10 & 11 & 11 & 9 & 9 & 12 & 10 \\
0 & 0 & 10 & 10 & 11 & 11 & 11 & 11 & 12 & 12 & 12 & 9 & 9 & 9 & 13 & 10 & 14 & 14 & 12 & 12 & 12 & 13 \\
0 & 0 & 13 & 10 & 11 & 11 & 11 & 11 & 12 & 12 & 12 & 9 & 9 & 12 & 13 & 10 & 14 & 14 & 12 & 12 & 12 & 13 \\
0 & 0 & 13 & 10 & 14 & 14 & 11 & 11 & 12 & 12 & 12 & 12 & 12 & 12 & 13 & 13 & 14 & 14 & 12 & 12 & 15 & 13 \\
0 & 0 & 13 & 13 & 14 & 14 & 11 & 11 & 12 & 12 & 15 & 12 & 12 & 12 & 13 & 13 & 14 & 14 & 15 & 15 & 15 & 16 \\
0 & 0 & 13 & 13 & 14 & 14 & 14 & 14 & 15 & 15 & 15 & 12 & 12 & 12 & 16 & 13 & 14 & 14 & 15 & 15 & 15 & 16 \\
0 & 0 & 13 & 13 & 17 & 17 & 14 & 14 & 15 & 15 & 15 & 12 & 12 & 12 & 16 & 13 & 17 & 17 & 15 & 15 & 15 & 16 \\
0 & 0 & 16 & 13 & 17 & 17 & 14 & 14 & 15 & 15 & 18 & 12 & 12 & 15 & 16 & 13 & 17 & 17 & 15 & 15 & 15 & 16 \\
0 & 0 & 16 & 13 & 17 & 17 & 14 & 14 & 18 & 18 & 18 & 15 & 15 & 15 & 19 & 16 & 17 & 17 & 15 & 15 & 18 & 16 \\
0 & 0 & 16 & 16 & 17 & 17 & 14 & 14 & 18 & 18 & 18 & 15 & 15 & 15 & 19 & 16 & 20 & 20 & 18 & 18 & 18 & 19 \\
0 & 0 & 19 & 16 & 17 & 17 & 17 & 17 & 18 & 18 & 18 & 15 & 15 & 15 & 19 & 16 & 20 & 20 & 18 & 18 & 18 & 19 \\
0 & 0 & 19 & 16 & 20 & 20 & 17 & 17 & 18 & 18 & 18 & 15 & 15 & 15 & 19 & 16 & 20 & 20 & 18 & 18 & 21 & 19 \\
0 & 0 & 19 & 16 & 20 & 20 & 17 & 17 & 18 & 18 & 21 & 15 & 15 & 18 & 19 & 16 & 20 & 20 & 21 & 21 & 21 & 22 \\
0 & 0 & 19 & 16 & 20 & 20 & 17 & 17 & 21 & 21 & 21 & 18 & 18 & 18 & 22 & 19 & 20 & 20 & 21 & 21 & 21 & 22 \\
0 & 0 & 19 & 19 & 23 & 23 & 17 & 17 & 21 & 21 & 21 & 18 & 18 & 18 & 22 & 19 & 23 & 23 & 21 & 21 & 21 & 22 \\
0 & 0 & 22 & 19 & 23 & 23 & 20 & 20 & 21 & 21 & 24 & 18 & 18 & 18 & 22 & 19 & 23 & 23 & 21 & 21 & 21 & 22 \\
0 & 0 & 22 & 19 & 23 & 23 & 20 & 20 & 24 & 24 & 24 & 18 & 18 & 18 & 25 & 19 & 23 & 23 & 21 & 21 & 24 & 22 \\
0 & 0 & 22 & 19 & 23 & 23 & 20 & 20 & 24 & 24 & 24 & 18 & 18 & 21 & 25 & 19 & 26 & 26 & 24 & 24 & 24 & 25 \\
0 & 0 & 25 & 19 & 23 & 23 & 20 & 20 & 24 & 24 & 24 & 21 & 21 & 21 & 25 & 22 & 26 & 26 & 24 & 24 & 24 & 25 \\
0 & 0 & 25 & 22 & 26 & 26 & 20 & 20 & 24 & 24 & 24 & 21 & 21 & 21 & 25 & 22 & 26 & 26 & 24 & 24 & 27 & 25 \\
0 & 0 & 25 & 22 & 26 & 26 & 23 & 23 & 24 & 24 & 27 & 21 & 21 & 21 & 25 & 22 & 26 & 26 & 27 & 27 & 27 & 28 \\
0 & 0 & 25 & 22 & 26 & 26 & 23 & 23 & 27 & 27 & 27 & 21 & 21 & 21 & 28 & 22 & 26 & 26 & 27 & 27 & 27 & 28 \\
0 & 0 & 25 & 22 & 29 & 29 & 23 & 23 & 27 & 27 & 27 & 21 & 21 & 24 & 28 & 22 & 29 & 29 & 27 & 27 & 27 & 28 \\
0 & 0 & 28 & 22 & 29 & 29 & 23 & 23 & 27 & 27 & 30 & 24 & 24 & 24 & 28 & 25 & 29 & 29 & 27 & 27 & 27 & 28 \\
0 & 0 & 28 & 25 & 29 & 29 & 23 & 23 & 30 & 30 & 30 & 24 & 24 & 24 & 31 & 25 & 29 & 29 & 27 & 27 & 30 & 28
\end{pmatrix},$$

dans $\overline{\mathbb{R}}_{\min}$,

$$\underline{z}^T(t) = \begin{pmatrix}
0 & 0 & \varepsilon & 1 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\
0 & 0 & 1 & 1 & \varepsilon & \varepsilon & 2 & 2 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\
0 & 0 & 1 & 1 & \varepsilon & \varepsilon & 2 & 2 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\
0 & 0 & 1 & 1 & 2 & 2 & 2 & 2 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & 3 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\
0 & 0 & 1 & 1 & 2 & 2 & 2 & 2 & \varepsilon & \varepsilon & 3 & 3 & 3 & 3 & \varepsilon & 4 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\
0 & 0 & 1 & 1 & 2 & 2 & 2 & 2 & 3 & 3 & 3 & 3 & 3 & 3 & 4 & 4 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\
0 & 0 & 1 & 1 & 2 & 2 & 2 & 2 & 3 & 3 & 3 & 3 & 3 & 3 & 4 & 4 & 5 & 5 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\
0 & 0 & 1 & 1 & 2 & 2 & 2 & 2 & 3 & 3 & 3 & 3 & 3 & 3 & 4 & 4 & 5 & 5 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\
0 & 0 & 1 & 1 & 2 & 2 & 2 & 2 & 3 & 3 & 3 & 3 & 3 & 3 & 4 & 4 & 5 & 5 & \varepsilon & \varepsilon & 6 & \varepsilon \\
0 & 0 & 1 & 1 & 2 & 2 & 2 & 2 & 3 & 3 & 3 & 3 & 3 & 3 & 4 & 4 & 5 & 5 & 6 & 6 & 6 & 7 \\
0 & 0 & 1 & 1 & 2 & 2 & 2 & 2 & 3 & 3 & 3 & 3 & 3 & 3 & 4 & 4 & 5 & 5 & 6 & 6 & 6 & 7 \\
0 & 0 & 1 & 1 & 2 & 2 & 2 & 2 & 3 & 3 & 3 & 3 & 3 & 3 & 4 & 4 & 5 & 5 & 6 & 6 & 6 & 7 \\
0 & 0 & 1 & 1 & 2 & 2 & 2 & 2 & 3 & 3 & 3 & 3 & 3 & 3 & 4 & 4 & 5 & 5 & 6 & 6 & 6 & 7 \\
0 & 0 & 1 & 1 & 2 & 2 & 2 & 2 & 3 & 3 & 3 & 3 & 3 & 3 & 4 & 4 & 5 & 5 & 6 & 6 & 6 & 7 \\
0 & 0 & 1 & 1 & 2 & 2 & 2 & 2 & 3 & 3 & 3 & 3 & 3 & 3 & 4 & 4 & 5 & 5 & 6 & 6 & 6 & 7 \\
0 & 0 & 1 & 1 & 2 & 2 & 2 & 2 & 3 & 3 & 3 & 3 & 3 & 3 & 4 & 4 & 5 & 5 & 6 & 6 & 6 & 7 \\
0 & 0 & 1 & 1 & 2 & 2 & 2 & 2 & 3 & 3 & 3 & 3 & 3 & 3 & 4 & 4 & 5 & 5 & 6 & 6 & 6 & 7 \\
0 & 0 & 1 & 1 & 2 & 2 & 2 & 2 & 3 & 3 & 3 & 3 & 3 & 3 & 4 & 4 & 5 & 5 & 6 & 6 & 6 & 7 \\
0 & 0 & 1 & 1 & 2 & 2 & 2 & 2 & 3 & 3 & 3 & 3 & 3 & 3 & 4 & 4 & 5 & 5 & 6 & 6 & 6 & 7 \\
0 & 0 & 1 & 1 & 2 & 2 & 2 & 2 & 3 & 3 & 3 & 3 & 3 & 3 & 4 & 4 & 5 & 5 & 6 & 6 & 6 & 7 \\
0 & 0 & 1 & 1 & 2 & 2 & 2 & 2 & 3 & 3 & 3 & 3 & 3 & 3 & 4 & 4 & 5 & 5 & 6 & 6 & 6 & 7 \\
0 & 0 & 1 & 1 & 2 & 2 & 2 & 2 & 3 & 3 & 3 & 3 & 3 & 3 & 4 & 4 & 5 & 5 & 6 & 6 & 6 & 7 \\
0 & 0 & 1 & 1 & 2 & 2 & 2 & 2 & 3 & 3 & 3 & 3 & 3 & 3 & 4 & 4 & 5 & 5 & 6 & 6 & 6 & 7 \\
0 & 0 & 1 & 1 & 2 & 2 & 2 & 2 & 3 & 3 & 3 & 3 & 3 & 3 & 4 & 4 & 5 & 5 & 6 & 6 & 6 & 7 \\
0 & 0 & 1 & 1 & 2 & 2 & 2 & 2 & 3 & 3 & 3 & 3 & 3 & 3 & 4 & 4 & 5 & 5 & 6 & 6 & 6 & 7 \\
0 & 0 & 1 & 1 & 2 & 2 & 2 & 2 & 3 & 3 & 3 & 3 & 3 & 3 & 4 & 4 & 5 & 5 & 6 & 6 & 6 & 7 \\
0 & 0 & 1 & 1 & 2 & 2 & 2 & 2 & 3 & 3 & 3 & 3 & 3 & 3 & 4 & 4 & 5 & 5 & 6 & 6 & 6 & 7 \\
0 & 0 & 1 & 1 & 2 & 2 & 2 & 2 & 3 & 3 & 3 & 3 & 3 & 3 & 4 & 4 & 5 & 5 & 6 & 6 & 6 & 7 \\
0 & 0 & 1 & 1 & 2 & 2 & 2 & 2 & 3 & 3 & 3 & 3 & 3 & 3 & 4 & 4 & 5 & 5 & 6 & 6 & 6 & 7 \\
0 & 0 & 1 & 1 & 2 & 2 & 2 & 2 & 3 & 3 & 3 & 3 & 3 & 3 & 4 & 4 & 5 & 5 & 6 & 6 & 6 & 7 \\
0 & 0 & 1 & 1 & 2 & 2 & 2 & 2 & 3 & 3 & 3 & 3 & 3 & 3 & 4 & 4 & 5 & 5 & 6 & 6 & 6 & 7 \\
0 & 0 & 1 & 1 & 2 & 2 & 2 & 2 & 3 & 3 & 3 & 3 & 3 & 3 & 4 & 4 & 5 & 5 & 6 & 6 & 6 & 7 \\
0 & 0 & 1 & 1 & 2 & 2 & 2 & 2 & 3 & 3 & 3 & 3 & 3 & 3 & 4 & 4 & 5 & 5 & 6 & 6 & 6 & 7 \\
0 & 0 & 1 & 1 & 2 & 2 & 2 & 2 & 3 & 3 & 3 & 3 & 3 & 3 & 4 & 4 & 5 & 5 & 6 & 6 & 6 & 7 \\
0 & 0 & 1 & 1 & 2 & 2 & 2 & 2 & 3 & 3 & 3 & 3 & 3 & 3 & 4 & 4 & 5 & 5 & 6 & 6 & 6 & 7 \\
0 & 0 & 1 & 1 & 2 & 2 & 2 & 2 & 3 & 3 & 3 & 3 & 3 & 3 & 4 & 4 & 5 & 5 & 6 & 6 & 6 & 7 \\
0 & 0 & 1 & 1 & 2 & 2 & 2 & 2 & 3 & 3 & 3 & 3 & 3 & 3 & 4 & 4 & 5 & 5 & 6 & 6 & 6 & 7 \\
0 & 0 & 1 & 1 & 2 & 2 & 2 & 2 & 3 & 3 & 3 & 3 & 3 & 3 & 4 & 4 & 5 & 5 & 6 & 6 & 6 & 7 \\
0 & 0 & 1 & 1 & 2 & 2 & 2 & 2 & 3 & 3 & 3 & 3 & 3 & 3 & 4 & 4 & 5 & 5 & 6 & 6 & 6 & 7 \\
0 & 0 & 1 & 1 & 2 & 2 & 2 & 2 & 3 & 3 & 3 & 3 & 3 & 3 & 4 & 4 & 5 & 5 & 6 & 6 & 6 & 7 \\
0 & 0 & 1 & 1 & 2 & 2 & 2 & 2 & 3 & 3 & 3 & 3 & 3 & 3 & 4 & 4 & 5 & 5 & 6 & 6 & 6 & 7
\end{pmatrix}.$$

2 Détails pour l'exemple du *jobshop2*

2 .1 Évaluation des durées d'achèvement

L'automate (max,+) modélisant le *jobshop2* est représenté sur la figure 3.6. L'ensemble des transitions est : $H = \{(1,a,2),(1,d,3),(2,b,4),(3,e,5),(4,c,6),(4,d,7),(5,a,8),(5,f,9),(6,a,2),(6,d,3),(7,c,3),\ (8,f,2),(9,a,2),(9,d,3),(4,a,10),(10,c,2),(5,d,11),(11,f,3)\}$.

On construit la matrice A selon (2.2) :

$$A = \begin{pmatrix}
\varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\
\varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\
2 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & 0 & \varepsilon & \varepsilon & 1 & 0 & \varepsilon & \varepsilon & 0 & \varepsilon & \varepsilon \\
\varepsilon & 1 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & 0 & 1 & \varepsilon & \varepsilon & 0 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & 2 \\
\varepsilon & \varepsilon & 2 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\
\varepsilon & \varepsilon & 2 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\
\varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & 1 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\
\varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & 1 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\
\varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & 2 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\
\varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & 2 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\
\varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & 1 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\
\varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & 2 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\
\varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & 3 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\
\varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & 3 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\
\varepsilon & \varepsilon & 2 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\
\varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & 2 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\
\varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & 1 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\
\varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & 1 & \varepsilon
\end{pmatrix}.$$

L'évaluation des durées d'achèvement grâce à (2.3) nous permet d'obtenir les résultats suivants, pour $n = 0 : 30$:

dans $\overline{\mathbb{R}}_{\max}$,

$$\overline{x}^T(n+1) = \begin{pmatrix}
0 & 0 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\
\varepsilon & \varepsilon & 2 & 1 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\
\varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & 4 & 4 & 2 & 2 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & 4 & \varepsilon & 2 & \varepsilon \\
\varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & 6 & 6 & 5 & 4 & 5 & 5 & \varepsilon & 6 & \varepsilon & 3 \\
\varepsilon & \varepsilon & 6 & 6 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\
\varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & 8 & 8 & 7 & 7 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & 8 & \varepsilon & 7 & \varepsilon \\
\varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & 10 & 10 & 9 & 9 & 10 & 10 & \varepsilon & 10 & \varepsilon & 8 \\
\varepsilon & \varepsilon & 10 & 10 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\
\varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & 12 & 12 & 11 & 11 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & 12 & \varepsilon & 11 & \varepsilon \\
\varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & 14 & 14 & 13 & 13 & 14 & 14 & \varepsilon & 14 & \varepsilon & 12 \\
\varepsilon & \varepsilon & 14 & 14 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\
\varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & 16 & 16 & 15 & 15 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & 16 & \varepsilon & 15 & \varepsilon \\
\varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & 18 & 18 & 17 & 17 & 18 & 18 & \varepsilon & 18 & \varepsilon & 16 \\
\varepsilon & \varepsilon & 18 & 18 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\
\varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & 20 & 20 & 19 & 19 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & 20 & \varepsilon & 19 & \varepsilon \\
\varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & 22 & 22 & 21 & 21 & 22 & 22 & \varepsilon & 22 & \varepsilon & 20 \\
\varepsilon & \varepsilon & 22 & 22 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\
\varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & 24 & 24 & 23 & 23 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & 24 & \varepsilon & 23 & \varepsilon \\
\varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & 26 & 26 & 25 & 25 & 26 & 26 & \varepsilon & 26 & \varepsilon & 24 \\
\varepsilon & \varepsilon & 26 & 26 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\
\varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & 28 & 28 & 27 & 27 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & 28 & \varepsilon & 27 & \varepsilon \\
\varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & 30 & 30 & 29 & 29 & 30 & 30 & \varepsilon & 30 & \varepsilon & 28 \\
\varepsilon & \varepsilon & 30 & 30 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\
\varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & 32 & 32 & 31 & 31 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & 32 & \varepsilon & 31 & \varepsilon \\
\varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & 34 & 34 & 33 & 33 & 34 & 34 & \varepsilon & 34 & \varepsilon & 32 \\
\varepsilon & \varepsilon & 34 & 34 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\
\varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & 36 & 36 & 35 & 35 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & 36 & \varepsilon & 35 & \varepsilon \\
\varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & 38 & 38 & 37 & 37 & 38 & 38 & \varepsilon & 38 & \varepsilon & 36 \\
\varepsilon & \varepsilon & 38 & 38 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\
\varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & 40 & 40 & 39 & 39 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & 40 & \varepsilon & 39 & \varepsilon \\
\varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & 42 & 42 & 41 & 41 & 42 & 42 & \varepsilon & 42 & \varepsilon & 40
\end{pmatrix},$$

dans $\overline{\mathbb{R}}_{\min}$,

$$\underline{x}^T(n+1) = \begin{pmatrix}
0 & 0 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\
\varepsilon & \varepsilon & 2 & 1 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\
\varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & 4 & 4 & 2 & 2 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & 4 & \varepsilon & 2 & \varepsilon \\
\varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & 6 & 6 & 5 & 4 & 5 & 5 & \varepsilon & 6 & \varepsilon & 3 \\
\varepsilon & \varepsilon & 5 & 5 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\
\varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & 7 & 7 & 6 & 6 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & 7 & \varepsilon & 6 & \varepsilon \\
\varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & 9 & 9 & 8 & 8 & 9 & 9 & \varepsilon & 9 & \varepsilon & 7 \\
\varepsilon & \varepsilon & 9 & 9 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\
\varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & 11 & 11 & 10 & 10 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & 11 & \varepsilon & 10 & \varepsilon \\
\varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & 13 & 13 & 12 & 12 & 13 & 13 & \varepsilon & 13 & \varepsilon & 11 \\
\varepsilon & \varepsilon & 13 & 13 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\
\varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & 15 & 15 & 14 & 14 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & 15 & \varepsilon & 14 & \varepsilon \\
\varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & 17 & 17 & 16 & 16 & 17 & 17 & \varepsilon & 17 & \varepsilon & 15 \\
\varepsilon & \varepsilon & 17 & 17 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\
\varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & 19 & 19 & 18 & 18 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & 19 & \varepsilon & 18 & \varepsilon \\
\varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & 21 & 21 & 20 & 20 & 21 & 21 & \varepsilon & 21 & \varepsilon & 19 \\
\varepsilon & \varepsilon & 21 & 21 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\
\varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & 23 & 23 & 22 & 22 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & 23 & \varepsilon & 22 & \varepsilon \\
\varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & 25 & 25 & 24 & 24 & 25 & 25 & \varepsilon & 25 & \varepsilon & 23 \\
\varepsilon & \varepsilon & 25 & 25 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\
\varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & 27 & 27 & 26 & 26 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & 27 & \varepsilon & 26 & \varepsilon \\
\varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & 29 & 29 & 28 & 28 & 29 & 29 & \varepsilon & 29 & \varepsilon & 27 \\
\varepsilon & \varepsilon & 29 & 29 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\
\varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & 31 & 31 & 30 & 30 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & 31 & \varepsilon & 30 & \varepsilon \\
\varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & 33 & 33 & 32 & 32 & 33 & 33 & \varepsilon & 33 & \varepsilon & 31 \\
\varepsilon & \varepsilon & 33 & 33 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\
\varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & 35 & 35 & 34 & 34 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & 35 & \varepsilon & 34 & \varepsilon \\
\varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & 37 & 37 & 36 & 36 & 37 & 37 & \varepsilon & 37 & \varepsilon & 35 \\
\varepsilon & \varepsilon & 37 & 37 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\
\varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & 39 & 39 & 38 & 38 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & 39 & \varepsilon & 38 & \varepsilon \\
\varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & 41 & 41 & 40 & 40 & 41 & 41 & \varepsilon & 41 & \varepsilon & 39
\end{pmatrix},$$

2 .2 Évaluation des longueurs de séquences

L'ensemble des durées associées aux événements est :

$$T = \{0, 1, 2, 3\}.$$

On construit les matrices E_τ, $\tau \in T$, selon (2.4) et on obtient :

$$E_0 = \begin{pmatrix}
\varepsilon\varepsilon\varepsilon\varepsilon\varepsilon\varepsilon\varepsilon\varepsilon\varepsilon\varepsilon\varepsilon\varepsilon\varepsilon\varepsilon\varepsilon\varepsilon\varepsilon\varepsilon \\
\varepsilon\varepsilon\varepsilon\varepsilon\varepsilon\varepsilon\varepsilon\varepsilon\varepsilon\varepsilon\varepsilon\varepsilon\varepsilon\varepsilon\varepsilon\varepsilon\varepsilon\varepsilon \\
\varepsilon\varepsilon\varepsilon\varepsilon\varepsilon\varepsilon\varepsilon\varepsilon1\varepsilon\varepsilon\varepsilon1\varepsilon\varepsilon1\varepsilon\varepsilon \\
\varepsilon\varepsilon\varepsilon\varepsilon\varepsilon\varepsilon\varepsilon\varepsilon\varepsilon1\varepsilon\varepsilon\varepsilon1\varepsilon\varepsilon\varepsilon\varepsilon \\
\varepsilon\varepsilon\varepsilon\varepsilon\varepsilon\varepsilon\varepsilon\varepsilon\varepsilon\varepsilon\varepsilon\varepsilon\varepsilon\varepsilon\varepsilon\varepsilon\varepsilon\varepsilon \\
\varepsilon\varepsilon\varepsilon\varepsilon\varepsilon\varepsilon\varepsilon\varepsilon\varepsilon\varepsilon\varepsilon\varepsilon\varepsilon\varepsilon\varepsilon\varepsilon\varepsilon\varepsilon \\
\varepsilon\varepsilon\varepsilon\varepsilon\varepsilon\varepsilon\varepsilon\varepsilon\varepsilon\varepsilon\varepsilon\varepsilon\varepsilon\varepsilon\varepsilon\varepsilon\varepsilon\varepsilon \\
\varepsilon\varepsilon\varepsilon\varepsilon\varepsilon\varepsilon\varepsilon\varepsilon\varepsilon\varepsilon\varepsilon\varepsilon\varepsilon\varepsilon\varepsilon\varepsilon\varepsilon\varepsilon \\
\varepsilon\varepsilon\varepsilon\varepsilon\varepsilon\varepsilon\varepsilon\varepsilon\varepsilon\varepsilon\varepsilon\varepsilon\varepsilon\varepsilon\varepsilon\varepsilon\varepsilon\varepsilon \\
\varepsilon\varepsilon\varepsilon\varepsilon\varepsilon\varepsilon\varepsilon\varepsilon\varepsilon\varepsilon\varepsilon\varepsilon\varepsilon\varepsilon\varepsilon\varepsilon\varepsilon\varepsilon \\
\varepsilon\varepsilon\varepsilon\varepsilon\varepsilon\varepsilon\varepsilon\varepsilon\varepsilon\varepsilon\varepsilon\varepsilon\varepsilon\varepsilon\varepsilon\varepsilon\varepsilon\varepsilon \\
\varepsilon\varepsilon\varepsilon\varepsilon\varepsilon\varepsilon\varepsilon\varepsilon\varepsilon\varepsilon\varepsilon\varepsilon\varepsilon\varepsilon\varepsilon\varepsilon\varepsilon\varepsilon \\
\varepsilon\varepsilon\varepsilon\varepsilon\varepsilon\varepsilon\varepsilon\varepsilon\varepsilon\varepsilon\varepsilon\varepsilon\varepsilon\varepsilon\varepsilon\varepsilon\varepsilon\varepsilon \\
\varepsilon\varepsilon\varepsilon\varepsilon\varepsilon\varepsilon\varepsilon\varepsilon\varepsilon\varepsilon\varepsilon\varepsilon\varepsilon\varepsilon\varepsilon\varepsilon\varepsilon\varepsilon \\
\varepsilon\varepsilon\varepsilon\varepsilon\varepsilon\varepsilon\varepsilon\varepsilon\varepsilon\varepsilon\varepsilon\varepsilon\varepsilon\varepsilon\varepsilon\varepsilon\varepsilon\varepsilon \\
\varepsilon\varepsilon\varepsilon\varepsilon\varepsilon\varepsilon\varepsilon\varepsilon\varepsilon\varepsilon\varepsilon\varepsilon\varepsilon\varepsilon\varepsilon\varepsilon\varepsilon\varepsilon \\
\varepsilon\varepsilon\varepsilon\varepsilon\varepsilon\varepsilon\varepsilon\varepsilon\varepsilon\varepsilon\varepsilon\varepsilon\varepsilon\varepsilon\varepsilon\varepsilon\varepsilon\varepsilon \\
\varepsilon\varepsilon\varepsilon\varepsilon\varepsilon\varepsilon\varepsilon\varepsilon\varepsilon\varepsilon\varepsilon\varepsilon\varepsilon\varepsilon\varepsilon\varepsilon\varepsilon\varepsilon
\end{pmatrix},$$

$$E_1 = \begin{pmatrix}
\varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\
\varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\
\varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & 1 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\
\varepsilon & 1 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & 1 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\
\varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\
\varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\
\varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & 1 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\
\varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & 1 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\
\varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\
\varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\
\varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & 1 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\
\varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\
\varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\
\varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\
\varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\
\varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\
\varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & 1 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\
\varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & 1 & \varepsilon
\end{pmatrix},$$

$$E_2 = \begin{pmatrix}
\varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\
\varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\
1 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\
\varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & 1 \\
\varepsilon & \varepsilon & 1 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\
\varepsilon & \varepsilon & 1 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\
\varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\
\varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\
\varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & 1 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\
\varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & 1 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\
\varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\
\varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & 1 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\
\varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\
\varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\
\varepsilon & \varepsilon & 1 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\
\varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & 1 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\
\varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\
\varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon
\end{pmatrix},$$

$$E_3 = \begin{pmatrix}
\varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\
\varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\
\varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\
\varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\
\varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\
\varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\
\varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\
\varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\
\varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\
\varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\
\varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\
\varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\
\varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & 1 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\
\varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & 1 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\
\varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\
\varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\
\varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\
\varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon
\end{pmatrix}.$$

L'équation (2.5) nous permet d'évaluer les longueurs de séquences s'achevant une date donnée. On obtient pour $t = 1 : 41$:

dans $\overline{\mathbb{R}}_{\max}$,

$$\overline{z}^T(t) = \begin{pmatrix}
0 & 0 & \varepsilon & 1 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\
0 & 0 & 1 & 1 & \varepsilon & \varepsilon & 2 & 2 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & 2 & \varepsilon \\
0 & 0 & 1 & 1 & \varepsilon & \varepsilon & 2 & 2 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & 2 & 3 \\
0 & 0 & 1 & 1 & 2 & 2 & 2 & 2 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & 3 & \varepsilon & \varepsilon & 2 & \varepsilon & 2 & 3 \\
0 & 0 & 4 & 4 & 2 & 2 & 2 & 2 & \varepsilon & \varepsilon & 3 & 3 & 3 & 3 & 2 & \varepsilon & 2 & 3 \\
0 & 0 & 4 & 4 & 2 & 2 & 5 & 5 & 3 & 3 & 3 & 3 & 3 & 3 & 2 & 3 & 5 & 3 \\
0 & 0 & 4 & 4 & 5 & 5 & 5 & 5 & 3 & 3 & 3 & 3 & 3 & 3 & 5 & 3 & 5 & 6 \\
0 & 0 & 4 & 4 & 5 & 5 & 5 & 5 & 3 & 3 & 6 & 6 & 3 & 3 & 5 & 3 & 5 & 6 \\
0 & 0 & 7 & 7 & 5 & 5 & 5 & 5 & 6 & 6 & 6 & 6 & 6 & 6 & 5 & 6 & 5 & 6 \\
0 & 0 & 7 & 7 & 5 & 5 & 8 & 8 & 6 & 6 & 6 & 6 & 6 & 6 & 5 & 6 & 8 & 6 \\
0 & 0 & 7 & 7 & 8 & 8 & 8 & 8 & 6 & 6 & 6 & 6 & 6 & 6 & 8 & 6 & 8 & 9 \\
0 & 0 & 7 & 7 & 8 & 8 & 8 & 8 & 6 & 6 & 9 & 9 & 6 & 6 & 8 & 6 & 8 & 9 \\
0 & 0 & 10 & 10 & 8 & 8 & 8 & 8 & 9 & 9 & 9 & 9 & 9 & 9 & 8 & 9 & 8 & 9 \\
0 & 0 & 10 & 10 & 8 & 8 & 11 & 11 & 9 & 9 & 9 & 9 & 9 & 9 & 8 & 9 & 11 & 9 \\
0 & 0 & 10 & 10 & 11 & 11 & 11 & 11 & 9 & 9 & 9 & 9 & 9 & 9 & 11 & 9 & 11 & 12 \\
0 & 0 & 10 & 10 & 11 & 11 & 11 & 11 & 9 & 9 & 12 & 12 & 9 & 9 & 11 & 9 & 11 & 12 \\
0 & 0 & 13 & 13 & 11 & 11 & 11 & 11 & 12 & 12 & 12 & 12 & 12 & 12 & 11 & 12 & 11 & 12 \\
0 & 0 & 13 & 13 & 11 & 11 & 14 & 14 & 12 & 12 & 12 & 12 & 12 & 12 & 11 & 12 & 14 & 12 \\
0 & 0 & 13 & 13 & 14 & 14 & 14 & 14 & 12 & 12 & 12 & 12 & 12 & 12 & 14 & 12 & 14 & 15 \\
0 & 0 & 13 & 13 & 14 & 14 & 14 & 14 & 12 & 12 & 15 & 15 & 12 & 12 & 14 & 12 & 14 & 15 \\
0 & 0 & 16 & 16 & 14 & 14 & 14 & 14 & 15 & 15 & 15 & 15 & 15 & 15 & 14 & 15 & 14 & 15 \\
0 & 0 & 16 & 16 & 14 & 14 & 17 & 17 & 15 & 15 & 15 & 15 & 15 & 15 & 14 & 15 & 17 & 15 \\
0 & 0 & 16 & 16 & 17 & 17 & 17 & 17 & 15 & 15 & 15 & 15 & 15 & 15 & 17 & 15 & 17 & 18 \\
0 & 0 & 16 & 16 & 17 & 17 & 17 & 17 & 15 & 15 & 18 & 18 & 15 & 15 & 17 & 15 & 17 & 18 \\
0 & 0 & 19 & 19 & 17 & 17 & 17 & 17 & 18 & 18 & 18 & 18 & 18 & 18 & 17 & 18 & 17 & 18 \\
0 & 0 & 19 & 19 & 17 & 17 & 20 & 20 & 18 & 18 & 18 & 18 & 18 & 18 & 17 & 18 & 20 & 18 \\
0 & 0 & 19 & 19 & 20 & 20 & 20 & 20 & 18 & 18 & 18 & 18 & 18 & 18 & 20 & 18 & 20 & 21 \\
0 & 0 & 19 & 19 & 20 & 20 & 20 & 20 & 18 & 18 & 21 & 21 & 18 & 18 & 20 & 18 & 20 & 21 \\
0 & 0 & 22 & 22 & 20 & 20 & 20 & 20 & 21 & 21 & 21 & 21 & 21 & 21 & 20 & 21 & 20 & 21 \\
0 & 0 & 22 & 22 & 20 & 20 & 23 & 23 & 21 & 21 & 21 & 21 & 21 & 21 & 20 & 21 & 23 & 21 \\
0 & 0 & 22 & 22 & 23 & 23 & 23 & 23 & 21 & 21 & 21 & 21 & 21 & 21 & 23 & 21 & 23 & 24 \\
0 & 0 & 22 & 22 & 23 & 23 & 23 & 23 & 21 & 21 & 24 & 24 & 21 & 21 & 23 & 21 & 23 & 24 \\
0 & 0 & 25 & 25 & 23 & 23 & 23 & 23 & 24 & 24 & 24 & 24 & 24 & 24 & 23 & 24 & 23 & 24 \\
0 & 0 & 25 & 25 & 23 & 23 & 26 & 26 & 24 & 24 & 24 & 24 & 24 & 24 & 23 & 24 & 26 & 24 \\
0 & 0 & 25 & 25 & 26 & 26 & 26 & 26 & 24 & 24 & 24 & 24 & 24 & 24 & 26 & 24 & 26 & 27 \\
0 & 0 & 25 & 25 & 26 & 26 & 26 & 26 & 24 & 24 & 27 & 27 & 24 & 24 & 26 & 24 & 26 & 27 \\
0 & 0 & 28 & 28 & 26 & 26 & 26 & 26 & 27 & 27 & 27 & 27 & 27 & 27 & 26 & 27 & 26 & 27 \\
0 & 0 & 28 & 28 & 26 & 26 & 29 & 29 & 27 & 27 & 27 & 27 & 27 & 27 & 26 & 27 & 29 & 27 \\
0 & 0 & 28 & 28 & 29 & 29 & 29 & 29 & 27 & 27 & 27 & 27 & 27 & 27 & 29 & 27 & 29 & 30 \\
0 & 0 & 28 & 28 & 29 & 29 & 29 & 29 & 27 & 27 & 30 & 30 & 27 & 27 & 29 & 27 & 29 & 30 \\
0 & 0 & 31 & 31 & 29 & 29 & 29 & 29 & 30 & 30 & 30 & 30 & 30 & 30 & 29 & 30 & 29 & 30
\end{pmatrix},$$

dans $\overline{\mathbb{R}}_{\min}$,

$$
\underline{z}^T(t) = \begin{pmatrix}
0 & 0 & \varepsilon & 1 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\
0 & 0 & 1 & 1 & \varepsilon & \varepsilon & 2 & 2 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & 2 & \varepsilon \\
0 & 0 & 1 & 1 & \varepsilon & \varepsilon & 2 & 2 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & 2 & 3 \\
0 & 0 & 1 & 1 & 2 & 2 & 2 & 2 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & 3 & \varepsilon & \varepsilon & 2 & \varepsilon & 2 & 3 \\
0 & 0 & 1 & 1 & 2 & 2 & 2 & 2 & \varepsilon & \varepsilon & 3 & 3 & 3 & 3 & 2 & \varepsilon & 2 & 3 \\
0 & 0 & 1 & 1 & 2 & 2 & 2 & 2 & 3 & 3 & 3 & 3 & 3 & 3 & 2 & 3 & 2 & 3 \\
0 & 0 & 1 & 1 & 2 & 2 & 2 & 2 & 3 & 3 & 3 & 3 & 3 & 3 & 2 & 3 & 2 & 3 \\
0 & 0 & 1 & 1 & 2 & 2 & 2 & 2 & 3 & 3 & 3 & 3 & 3 & 3 & 2 & 3 & 2 & 3 \\
0 & 0 & 1 & 1 & 2 & 2 & 2 & 2 & 3 & 3 & 3 & 3 & 3 & 3 & 2 & 3 & 2 & 3 \\
0 & 0 & 1 & 1 & 2 & 2 & 2 & 2 & 3 & 3 & 3 & 3 & 3 & 3 & 2 & 3 & 2 & 3 \\
0 & 0 & 1 & 1 & 2 & 2 & 2 & 2 & 3 & 3 & 3 & 3 & 3 & 3 & 2 & 3 & 2 & 3 \\
0 & 0 & 1 & 1 & 2 & 2 & 2 & 2 & 3 & 3 & 3 & 3 & 3 & 3 & 2 & 3 & 2 & 3 \\
0 & 0 & 1 & 1 & 2 & 2 & 2 & 2 & 3 & 3 & 3 & 3 & 3 & 3 & 2 & 3 & 2 & 3 \\
0 & 0 & 1 & 1 & 2 & 2 & 2 & 2 & 3 & 3 & 3 & 3 & 3 & 3 & 2 & 3 & 2 & 3 \\
0 & 0 & 1 & 1 & 2 & 2 & 2 & 2 & 3 & 3 & 3 & 3 & 3 & 3 & 2 & 3 & 2 & 3 \\
0 & 0 & 1 & 1 & 2 & 2 & 2 & 2 & 3 & 3 & 3 & 3 & 3 & 3 & 2 & 3 & 2 & 3 \\
0 & 0 & 1 & 1 & 2 & 2 & 2 & 2 & 3 & 3 & 3 & 3 & 3 & 3 & 2 & 3 & 2 & 3 \\
0 & 0 & 1 & 1 & 2 & 2 & 2 & 2 & 3 & 3 & 3 & 3 & 3 & 3 & 2 & 3 & 2 & 3 \\
0 & 0 & 1 & 1 & 2 & 2 & 2 & 2 & 3 & 3 & 3 & 3 & 3 & 3 & 2 & 3 & 2 & 3 \\
0 & 0 & 1 & 1 & 2 & 2 & 2 & 2 & 3 & 3 & 3 & 3 & 3 & 3 & 2 & 3 & 2 & 3 \\
0 & 0 & 1 & 1 & 2 & 2 & 2 & 2 & 3 & 3 & 3 & 3 & 3 & 3 & 2 & 3 & 2 & 3 \\
0 & 0 & 1 & 1 & 2 & 2 & 2 & 2 & 3 & 3 & 3 & 3 & 3 & 3 & 2 & 3 & 2 & 3 \\
0 & 0 & 1 & 1 & 2 & 2 & 2 & 2 & 3 & 3 & 3 & 3 & 3 & 3 & 2 & 3 & 2 & 3 \\
0 & 0 & 1 & 1 & 2 & 2 & 2 & 2 & 3 & 3 & 3 & 3 & 3 & 3 & 2 & 3 & 2 & 3 \\
0 & 0 & 1 & 1 & 2 & 2 & 2 & 2 & 3 & 3 & 3 & 3 & 3 & 3 & 2 & 3 & 2 & 3 \\
0 & 0 & 1 & 1 & 2 & 2 & 2 & 2 & 3 & 3 & 3 & 3 & 3 & 3 & 2 & 3 & 2 & 3 \\
0 & 0 & 1 & 1 & 2 & 2 & 2 & 2 & 3 & 3 & 3 & 3 & 3 & 3 & 2 & 3 & 2 & 3 \\
0 & 0 & 1 & 1 & 2 & 2 & 2 & 2 & 3 & 3 & 3 & 3 & 3 & 3 & 2 & 3 & 2 & 3 \\
0 & 0 & 1 & 1 & 2 & 2 & 2 & 2 & 3 & 3 & 3 & 3 & 3 & 3 & 2 & 3 & 2 & 3 \\
0 & 0 & 1 & 1 & 2 & 2 & 2 & 2 & 3 & 3 & 3 & 3 & 3 & 3 & 2 & 3 & 2 & 3 \\
0 & 0 & 1 & 1 & 2 & 2 & 2 & 2 & 3 & 3 & 3 & 3 & 3 & 3 & 2 & 3 & 2 & 3 \\
0 & 0 & 1 & 1 & 2 & 2 & 2 & 2 & 3 & 3 & 3 & 3 & 3 & 3 & 2 & 3 & 2 & 3 \\
0 & 0 & 1 & 1 & 2 & 2 & 2 & 2 & 3 & 3 & 3 & 3 & 3 & 3 & 2 & 3 & 2 & 3 \\
0 & 0 & 1 & 1 & 2 & 2 & 2 & 2 & 3 & 3 & 3 & 3 & 3 & 3 & 2 & 3 & 2 & 3 \\
0 & 0 & 1 & 1 & 2 & 2 & 2 & 2 & 3 & 3 & 3 & 3 & 3 & 3 & 2 & 3 & 2 & 3 \\
0 & 0 & 1 & 1 & 2 & 2 & 2 & 2 & 3 & 3 & 3 & 3 & 3 & 3 & 2 & 3 & 2 & 3 \\
0 & 0 & 1 & 1 & 2 & 2 & 2 & 2 & 3 & 3 & 3 & 3 & 3 & 3 & 2 & 3 & 2 & 3 \\
0 & 0 & 1 & 1 & 2 & 2 & 2 & 2 & 3 & 3 & 3 & 3 & 3 & 3 & 2 & 3 & 2 & 3 \\
0 & 0 & 1 & 1 & 2 & 2 & 2 & 2 & 3 & 3 & 3 & 3 & 3 & 3 & 2 & 3 & 2 & 3 \\
0 & 0 & 1 & 1 & 2 & 2 & 2 & 2 & 3 & 3 & 3 & 3 & 3 & 3 & 2 & 3 & 2 & 3 \\
0 & 0 & 1 & 1 & 2 & 2 & 2 & 2 & 3 & 3 & 3 & 3 & 3 & 3 & 2 & 3 & 2 & 3
\end{pmatrix} .
$$

ANNEXE B

Détails des exemples pour la commande

Sommaire

Dans cette annexe, nous explicitons les résultats numériques complets du calcul de commande en juste-temps.

1 Commande du *jobshop1*

La représentation utilisée pour le *jobshop1* est détaillée dans la section 1.1 de l'annexe A.

Rappelons que la consigne appliquée $z(n)$ signifie que l'on souhaite une date d'achèvement maximum pour 10 jobs inférieur ou égale à 70 unités de temps :

$$[z(n)]_j = \begin{cases} 70 & \text{si } j \in H_6 \cup H_8 \cup H_{13} \text{ et } 0 \leq n \leq 30, \\ T & \text{sinon.} \end{cases}$$

On obtient alors grâce à la récurrence (4.8), pour $n = 0 : 30$:

Si tous les événements sont contrôlables, alors la matrice B est la matrice identité (des "e" sur la diagonale et des ε partout ailleurs).

$$v_{opt}^{T}(n) = \begin{pmatrix}
10 & 13 & 12 & 14 & 14 & +\infty & 15 & 15 & 10 & 14 & +\infty & 12 & 13 & 11 & 14 & 12 & 15 & 15 & 13 & 12 & 11 & 12 \\
16 & 19 & 12 & 14 & 14 & +\infty & 15 & 15 & 16 & 20 & +\infty & 18 & 19 & 17 & 14 & 12 & 15 & 15 & 19 & 18 & 17 & 12 \\
16 & 19 & 18 & 20 & 14 & +\infty & 15 & 15 & 16 & 20 & +\infty & 18 & 19 & 17 & 20 & 18 & 15 & 15 & 19 & 18 & 17 & 18 \\
16 & 19 & 18 & 20 & 20 & +\infty & 21 & 21 & 16 & 20 & +\infty & 18 & 19 & 17 & 20 & 18 & 21 & 21 & 19 & 18 & 17 & 18 \\
22 & 25 & 18 & 20 & 20 & +\infty & 21 & 21 & 22 & 26 & +\infty & 24 & 25 & 23 & 20 & 18 & 21 & 21 & 25 & 24 & 23 & 18 \\
22 & 25 & 24 & 26 & 20 & +\infty & 21 & 21 & 22 & 26 & +\infty & 24 & 25 & 23 & 26 & 24 & 21 & 21 & 25 & 24 & 23 & 24 \\
22 & 25 & 24 & 26 & 26 & +\infty & 27 & 27 & 22 & 26 & +\infty & 24 & 25 & 23 & 26 & 24 & 27 & 27 & 25 & 24 & 23 & 24 \\
28 & 31 & 24 & 26 & 26 & +\infty & 27 & 27 & 28 & 32 & +\infty & 30 & 31 & 29 & 26 & 24 & 27 & 27 & 31 & 30 & 29 & 24 \\
28 & 31 & 30 & 32 & 26 & +\infty & 27 & 27 & 28 & 32 & +\infty & 30 & 31 & 29 & 32 & 30 & 27 & 27 & 31 & 30 & 29 & 30 \\
28 & 31 & 30 & 32 & 32 & +\infty & 33 & 33 & 28 & 32 & +\infty & 30 & 31 & 29 & 32 & 30 & 33 & 33 & 31 & 30 & 29 & 30 \\
34 & 37 & 30 & 32 & 32 & +\infty & 33 & 33 & 34 & 38 & +\infty & 36 & 37 & 35 & 32 & 30 & 33 & 33 & 37 & 36 & 35 & 30 \\
34 & 37 & 36 & 38 & 32 & +\infty & 33 & 33 & 34 & 38 & +\infty & 36 & 37 & 35 & 38 & 36 & 33 & 33 & 37 & 36 & 35 & 36 \\
34 & 37 & 36 & 38 & 38 & +\infty & 39 & 39 & 34 & 38 & +\infty & 36 & 37 & 35 & 38 & 36 & 39 & 39 & 37 & 36 & 35 & 36 \\
40 & 43 & 36 & 38 & 38 & +\infty & 39 & 39 & 40 & 44 & +\infty & 42 & 43 & 41 & 38 & 36 & 39 & 39 & 43 & 42 & 41 & 36 \\
40 & 43 & 42 & 44 & 38 & +\infty & 39 & 39 & 40 & 44 & +\infty & 42 & 43 & 41 & 44 & 42 & 39 & 39 & 43 & 42 & 41 & 42 \\
40 & 43 & 42 & 44 & 44 & +\infty & 45 & 45 & 40 & 44 & +\infty & 42 & 43 & 41 & 44 & 42 & 45 & 45 & 43 & 42 & 41 & 42 \\
46 & 49 & 42 & 44 & 44 & +\infty & 45 & 45 & 46 & 50 & +\infty & 48 & 49 & 47 & 44 & 42 & 45 & 45 & 49 & 48 & 47 & 42 \\
46 & 49 & 48 & 50 & 44 & +\infty & 45 & 45 & 46 & 50 & +\infty & 48 & 49 & 47 & 50 & 48 & 45 & 45 & 49 & 48 & 47 & 48 \\
46 & 49 & 48 & 50 & 50 & +\infty & 51 & 51 & 46 & 50 & +\infty & 48 & 49 & 47 & 50 & 48 & 51 & 51 & 49 & 48 & 47 & 48 \\
52 & 55 & 48 & 50 & 50 & +\infty & 51 & 51 & 52 & 56 & +\infty & 54 & 55 & 53 & 50 & 48 & 51 & 51 & 55 & 54 & 53 & 48 \\
52 & 55 & 54 & 56 & 50 & +\infty & 51 & 51 & 52 & 56 & +\infty & 54 & 55 & 53 & 56 & 54 & 51 & 51 & 55 & 54 & 53 & 54 \\
52 & 55 & 54 & 56 & 56 & +\infty & 57 & 57 & 52 & 56 & +\infty & 54 & 55 & 53 & 56 & 54 & 57 & 57 & 55 & 54 & 53 & 54 \\
58 & 60 & 54 & 56 & 56 & +\infty & 57 & 57 & 58 & 61 & +\infty & 60 & 60 & 59 & 56 & 54 & 57 & 57 & 60 & 60 & 59 & 54 \\
58 & 60 & 60 & 61 & 56 & +\infty & 57 & 57 & 58 & 61 & +\infty & 60 & 60 & 59 & 61 & 60 & 57 & 57 & 60 & 60 & 59 & 60 \\
58 & 60 & 60 & 61 & 62 & +\infty & 62 & 63 & 58 & 61 & +\infty & 60 & 60 & 59 & 61 & 60 & 62 & 63 & 60 & 60 & 59 & 60 \\
64 & 65 & 60 & 61 & 62 & +\infty & 62 & 63 & 64 & 66 & +\infty & 66 & 65 & 65 & 61 & 60 & 62 & 63 & 65 & 66 & 65 & 60 \\
64 & 65 & 66 & 66 & 62 & +\infty & 62 & 63 & 64 & 66 & +\infty & 66 & 65 & 65 & 66 & 66 & 62 & 63 & 65 & 66 & 65 & 66 \\
64 & 65 & 66 & 66 & 68 & +\infty & 67 & +\infty & 64 & 66 & +\infty & 66 & 65 & 65 & 66 & 66 & 67 & +\infty & 65 & 66 & 65 & 66 \\
+\infty & +\infty & 66 & 66 & 68 & +\infty & 67 & +\infty & 70 & 70 & +\infty & 70 & 70 & +\infty & 66 & 66 & 67 & +\infty & 70 & 70 & +\infty & 66 \\
+\infty & +\infty & +\infty & +\infty & 68 & +\infty & 67 & +\infty & 70 & 70 & +\infty & 70 & 70 & +\infty & +\infty & +\infty & 67 & +\infty & 70 & 70 & +\infty & +\infty \\
+\infty & +\infty & +\infty & +\infty & +\infty & +\infty & +\infty & +\infty & 70 & 70 & +\infty & 70 & 70 & +\infty & +\infty & +\infty & +\infty & +\infty & 70 & 70 & +\infty & +\infty
\end{pmatrix}.$$

Grâce à la récurrence (4.1) (en considérant que toutes les transitions sont contrôlables), on obtient :

$$\overline{x}_c^T(n+1) = \begin{pmatrix}
10 & 13 & 12 & 14 & 14 & +\infty & 15 & 15 & 10 & 14 & +\infty & 12 & 13 & 11 & 14 & 12 & 15 & 15 & 13 & 12 & 11 & 12 \\
16 & 19 & 12 & 14 & 14 & +\infty & 15 & 15 & 16 & 20 & +\infty & 18 & 19 & 17 & 14 & 12 & 15 & 15 & 19 & 18 & 17 & 12 \\
16 & 19 & 18 & 20 & 14 & +\infty & 15 & 15 & 16 & 20 & +\infty & 18 & 19 & 17 & 20 & 18 & 15 & 15 & 19 & 18 & 17 & 18 \\
16 & 19 & 18 & 20 & 20 & +\infty & 21 & 21 & 16 & 20 & +\infty & 18 & 19 & 17 & 20 & 18 & 21 & 21 & 19 & 18 & 17 & 18 \\
22 & 25 & 18 & 20 & 20 & +\infty & 21 & 21 & 22 & 26 & +\infty & 24 & 25 & 23 & 20 & 18 & 21 & 21 & 25 & 24 & 23 & 18 \\
22 & 25 & 24 & 26 & 20 & +\infty & 21 & 21 & 22 & 26 & +\infty & 24 & 25 & 23 & 26 & 24 & 21 & 21 & 25 & 24 & 23 & 24 \\
22 & 25 & 24 & 26 & 26 & +\infty & 27 & 27 & 22 & 26 & +\infty & 24 & 25 & 23 & 26 & 24 & 27 & 27 & 25 & 24 & 23 & 24 \\
28 & 31 & 24 & 26 & 26 & +\infty & 27 & 27 & 28 & 32 & +\infty & 30 & 31 & 29 & 26 & 24 & 27 & 27 & 31 & 30 & 29 & 24 \\
28 & 31 & 30 & 32 & 26 & +\infty & 27 & 27 & 28 & 32 & +\infty & 30 & 31 & 29 & 32 & 30 & 27 & 27 & 31 & 30 & 29 & 30 \\
28 & 31 & 30 & 32 & 32 & +\infty & 33 & 33 & 28 & 32 & +\infty & 30 & 31 & 29 & 32 & 30 & 33 & 33 & 31 & 30 & 29 & 30 \\
34 & 37 & 30 & 32 & 32 & +\infty & 33 & 33 & 34 & 38 & +\infty & 36 & 37 & 35 & 32 & 30 & 33 & 33 & 37 & 36 & 35 & 30 \\
34 & 37 & 36 & 38 & 32 & +\infty & 33 & 33 & 34 & 38 & +\infty & 36 & 37 & 35 & 38 & 36 & 33 & 33 & 37 & 36 & 35 & 36 \\
34 & 37 & 36 & 38 & 38 & +\infty & 39 & 39 & 34 & 38 & +\infty & 36 & 37 & 35 & 38 & 36 & 39 & 39 & 37 & 36 & 35 & 36 \\
40 & 43 & 36 & 38 & 38 & +\infty & 39 & 39 & 40 & 44 & +\infty & 42 & 43 & 41 & 38 & 36 & 39 & 39 & 43 & 42 & 41 & 36 \\
40 & 43 & 42 & 44 & 38 & +\infty & 39 & 39 & 40 & 44 & +\infty & 42 & 43 & 41 & 44 & 42 & 39 & 39 & 43 & 42 & 41 & 42 \\
40 & 43 & 42 & 44 & 44 & +\infty & 45 & 45 & 40 & 44 & +\infty & 42 & 43 & 41 & 44 & 42 & 45 & 45 & 43 & 42 & 41 & 42 \\
46 & 49 & 42 & 44 & 44 & +\infty & 45 & 45 & 46 & 50 & +\infty & 48 & 49 & 47 & 44 & 42 & 45 & 45 & 49 & 48 & 47 & 42 \\
46 & 49 & 48 & 50 & 44 & +\infty & 45 & 45 & 46 & 50 & +\infty & 48 & 49 & 47 & 50 & 48 & 45 & 45 & 49 & 48 & 47 & 48 \\
46 & 49 & 48 & 50 & 50 & +\infty & 51 & 51 & 46 & 50 & +\infty & 48 & 49 & 47 & 50 & 48 & 51 & 51 & 49 & 48 & 47 & 48 \\
52 & 55 & 48 & 50 & 50 & +\infty & 51 & 51 & 52 & 56 & +\infty & 54 & 55 & 53 & 50 & 48 & 51 & 51 & 55 & 54 & 53 & 48 \\
52 & 55 & 54 & 56 & 50 & +\infty & 51 & 51 & 52 & 56 & +\infty & 54 & 55 & 53 & 56 & 54 & 51 & 51 & 55 & 54 & 53 & 54 \\
52 & 55 & 54 & 56 & 56 & +\infty & 57 & 57 & 52 & 56 & +\infty & 54 & 55 & 53 & 56 & 54 & 57 & 57 & 55 & 54 & 53 & 54 \\
58 & 60 & 54 & 56 & 56 & +\infty & 57 & 57 & 58 & 61 & +\infty & 60 & 60 & 59 & 56 & 54 & 57 & 57 & 60 & 60 & 59 & 54 \\
58 & 60 & 60 & 61 & 56 & +\infty & 57 & 57 & 58 & 61 & +\infty & 60 & 60 & 59 & 61 & 60 & 57 & 57 & 60 & 60 & 59 & 60 \\
58 & 60 & 60 & 61 & 62 & +\infty & 62 & 63 & 58 & 61 & +\infty & 60 & 60 & 59 & 61 & 60 & 62 & 63 & 60 & 60 & 59 & 60 \\
64 & 65 & 60 & 61 & 62 & +\infty & 62 & 63 & 64 & 66 & +\infty & 66 & 65 & 65 & 61 & 60 & 62 & 63 & 65 & 66 & 65 & 60 \\
64 & 65 & 66 & 66 & 62 & +\infty & 62 & 63 & 64 & 66 & +\infty & 66 & 65 & 65 & 66 & 66 & 62 & 63 & 65 & 66 & 65 & 66 \\
64 & 65 & 66 & 66 & 68 & +\infty & 67 & +\infty & 64 & 66 & +\infty & 66 & 65 & 65 & 66 & 66 & 67 & +\infty & 65 & 66 & 65 & 66 \\
+\infty & +\infty & 66 & 66 & 68 & +\infty & 67 & +\infty & 70 & 70 & +\infty & 70 & 70 & +\infty & 66 & 66 & 67 & +\infty & 70 & 70 & +\infty & 66 \\
+\infty & +\infty & +\infty & +\infty & 68 & +\infty & 67 & +\infty & 70 & 70 & +\infty & 70 & 70 & +\infty & +\infty & +\infty & 67 & +\infty & 70 & 70 & +\infty & +\infty \\
+\infty & +\infty & +\infty & +\infty & +\infty & +\infty & +\infty & +\infty & 70 & 70 & +\infty & 70 & 70 & +\infty & +\infty & +\infty & +\infty & +\infty & 70 & 70 & +\infty & +\infty
\end{pmatrix}.$$

Si seuls les événements associés au job $\mathcal{J}_2$ sont contrôlables alors la matrice B est donnée par :

$$B = \begin{pmatrix}
\varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\
\varepsilon & 0 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\
\varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\
\varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & 0 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\
\varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\
\varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & 0 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\
\varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\
\varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & 0 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\
\varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\
\varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & 0 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\
\varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\
\varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & 0 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\
\varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\
\varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & 0 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\
\varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\
\varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\
\varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & 0 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\
\varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & 0 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\
\varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & 0 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\
\varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & 0 & \varepsilon & \varepsilon \\
\varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & 0 & \varepsilon \\
\varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & 0
\end{pmatrix}.$$

La récurrence (4.8) donne :

$$v_{opt}^{T}(n) = \begin{pmatrix}
+\infty & 13 & +\infty & 14 & +\infty & +\infty & +\infty & 15 & +\infty & 14 & +\infty & 12 & +\infty & 11 & +\infty & +\infty & 15 & 15 & 13 & 12 & 11 & 12 \\
+\infty & 19 & +\infty & 14 & +\infty & +\infty & +\infty & 15 & +\infty & 20 & +\infty & 18 & +\infty & 17 & +\infty & +\infty & 15 & 15 & 19 & 18 & 17 & 12 \\
+\infty & 19 & +\infty & 20 & +\infty & +\infty & +\infty & 15 & +\infty & 20 & +\infty & 18 & +\infty & 17 & +\infty & +\infty & 15 & 15 & 19 & 18 & 17 & 18 \\
+\infty & 19 & +\infty & 20 & +\infty & +\infty & +\infty & 21 & +\infty & 20 & +\infty & 18 & +\infty & 17 & +\infty & +\infty & 21 & 21 & 19 & 18 & 17 & 18 \\
+\infty & 25 & +\infty & 20 & +\infty & +\infty & +\infty & 21 & +\infty & 26 & +\infty & 24 & +\infty & 23 & +\infty & +\infty & 21 & 21 & 25 & 24 & 23 & 18 \\
+\infty & 25 & +\infty & 26 & +\infty & +\infty & +\infty & 21 & +\infty & 26 & +\infty & 24 & +\infty & 23 & +\infty & +\infty & 21 & 21 & 25 & 24 & 23 & 24 \\
+\infty & 25 & +\infty & 26 & +\infty & +\infty & +\infty & 27 & +\infty & 26 & +\infty & 24 & +\infty & 23 & +\infty & +\infty & 27 & 27 & 25 & 24 & 23 & 24 \\
+\infty & 31 & +\infty & 26 & +\infty & +\infty & +\infty & 27 & +\infty & 32 & +\infty & 30 & +\infty & 29 & +\infty & +\infty & 27 & 27 & 31 & 30 & 29 & 24 \\
+\infty & 31 & +\infty & 32 & +\infty & +\infty & +\infty & 27 & +\infty & 32 & +\infty & 30 & +\infty & 29 & +\infty & +\infty & 27 & 27 & 31 & 30 & 29 & 30 \\
+\infty & 31 & +\infty & 32 & +\infty & +\infty & +\infty & 33 & +\infty & 32 & +\infty & 30 & +\infty & 29 & +\infty & +\infty & 33 & 33 & 31 & 30 & 29 & 30 \\
+\infty & 37 & +\infty & 32 & +\infty & +\infty & +\infty & 33 & +\infty & 38 & +\infty & 36 & +\infty & 35 & +\infty & +\infty & 33 & 33 & 37 & 36 & 35 & 30 \\
+\infty & 37 & +\infty & 38 & +\infty & +\infty & +\infty & 33 & +\infty & 38 & +\infty & 36 & +\infty & 35 & +\infty & +\infty & 33 & 33 & 37 & 36 & 35 & 36 \\
+\infty & 37 & +\infty & 38 & +\infty & +\infty & +\infty & 39 & +\infty & 38 & +\infty & 36 & +\infty & 35 & +\infty & +\infty & 39 & 39 & 37 & 36 & 35 & 36 \\
+\infty & 43 & +\infty & 38 & +\infty & +\infty & +\infty & 39 & +\infty & 44 & +\infty & 42 & +\infty & 41 & +\infty & +\infty & 39 & 39 & 43 & 42 & 41 & 36 \\
+\infty & 43 & +\infty & 44 & +\infty & +\infty & +\infty & 39 & +\infty & 44 & +\infty & 42 & +\infty & 41 & +\infty & +\infty & 39 & 39 & 43 & 42 & 41 & 42 \\
+\infty & 43 & +\infty & 44 & +\infty & +\infty & +\infty & 45 & +\infty & 44 & +\infty & 42 & +\infty & 41 & +\infty & +\infty & 45 & 45 & 43 & 42 & 41 & 42 \\
+\infty & 49 & +\infty & 44 & +\infty & +\infty & +\infty & 45 & +\infty & 50 & +\infty & 48 & +\infty & 47 & +\infty & +\infty & 45 & 45 & 49 & 48 & 47 & 42 \\
+\infty & 49 & +\infty & 50 & +\infty & +\infty & +\infty & 45 & +\infty & 50 & +\infty & 48 & +\infty & 47 & +\infty & +\infty & 45 & 45 & 49 & 48 & 47 & 48 \\
+\infty & 49 & +\infty & 50 & +\infty & +\infty & +\infty & 51 & +\infty & 50 & +\infty & 48 & +\infty & 47 & +\infty & +\infty & 51 & 51 & 49 & 48 & 47 & 48 \\
+\infty & 55 & +\infty & 50 & +\infty & +\infty & +\infty & 51 & +\infty & 56 & +\infty & 54 & +\infty & 53 & +\infty & +\infty & 51 & 51 & 55 & 54 & 53 & 48 \\
+\infty & 55 & +\infty & 56 & +\infty & +\infty & +\infty & 51 & +\infty & 56 & +\infty & 54 & +\infty & 53 & +\infty & +\infty & 51 & 51 & 55 & 54 & 53 & 54 \\
+\infty & 55 & +\infty & 56 & +\infty & +\infty & +\infty & 57 & +\infty & 56 & +\infty & 54 & +\infty & 53 & +\infty & +\infty & 57 & 57 & 55 & 54 & 53 & 54 \\
+\infty & 60 & +\infty & 56 & +\infty & +\infty & +\infty & 57 & +\infty & 61 & +\infty & 60 & +\infty & 59 & +\infty & +\infty & 57 & 57 & 60 & 60 & 59 & 54 \\
+\infty & 60 & +\infty & 61 & +\infty & +\infty & +\infty & 57 & +\infty & 61 & +\infty & 60 & +\infty & 59 & +\infty & +\infty & 57 & 57 & 60 & 60 & 59 & 60 \\
+\infty & 60 & +\infty & 61 & +\infty & +\infty & +\infty & 63 & +\infty & 61 & +\infty & 60 & +\infty & 59 & +\infty & +\infty & 62 & 63 & 60 & 60 & 59 & 60 \\
+\infty & 65 & +\infty & 61 & +\infty & +\infty & +\infty & 63 & +\infty & 66 & +\infty & 66 & +\infty & 65 & +\infty & +\infty & 62 & 63 & 65 & 66 & 65 & 60 \\
+\infty & 65 & +\infty & 66 & +\infty & +\infty & +\infty & 63 & +\infty & 66 & +\infty & 66 & +\infty & 65 & +\infty & +\infty & 62 & 63 & 65 & 66 & 65 & 66 \\
+\infty & 65 & +\infty & 66 & +\infty & +\infty & +\infty & +\infty & +\infty & 66 & +\infty & 66 & +\infty & 65 & +\infty & +\infty & 67 & +\infty & 65 & 66 & 65 & 66 \\
+\infty & +\infty & +\infty & 66 & +\infty & +\infty & +\infty & +\infty & +\infty & 70 & +\infty & 70 & +\infty & +\infty & +\infty & +\infty & 67 & +\infty & 70 & 70 & +\infty & 66 \\
+\infty & +\infty & +\infty & +\infty & +\infty & +\infty & +\infty & +\infty & +\infty & 70 & +\infty & 70 & +\infty & +\infty & +\infty & +\infty & 67 & +\infty & 70 & 70 & +\infty & +\infty \\
+\infty & +\infty & +\infty & +\infty & +\infty & +\infty & +\infty & +\infty & +\infty & 70 & +\infty & 70 & +\infty & +\infty & +\infty & +\infty & +\infty & +\infty & 70 & 70 & +\infty & +\infty
\end{pmatrix}.$$

Grâce à la récurrence (4.1) (en considérant que seules les transitions du job $\mathcal{J}_2$ sont contrôlables), on obtient :

$$\overline{x}_c^T(n+1) = \begin{pmatrix}
0 & 13 & \varepsilon & 14 & \varepsilon & +\infty & \varepsilon & 15 & \varepsilon & 14 & \varepsilon & 12 & \varepsilon & 11 & \varepsilon & \varepsilon & 15 & 15 & 13 & 12 & 11 & 12 \\
\varepsilon & 19 & 12 & 14 & 14 & +\infty & 15 & 15 & \varepsilon & 20 & +\infty & 18 & \varepsilon & 17 & 14 & 12 & 15 & 15 & 19 & 18 & 17 & 12 \\
\varepsilon & 19 & 18 & 20 & 14 & +\infty & 15 & 15 & 16 & 20 & +\infty & 18 & 18 & 17 & 20 & 18 & 15 & 15 & 19 & 18 & 17 & 18 \\
\varepsilon & 19 & 18 & 20 & 20 & +\infty & 21 & 21 & 16 & 20 & +\infty & 18 & 18 & 17 & 20 & 18 & 21 & 21 & 19 & 18 & 17 & 18 \\
\varepsilon & 25 & 18 & 20 & 20 & +\infty & 21 & 21 & 22 & 26 & +\infty & 24 & 24 & 23 & 20 & 18 & 21 & 21 & 25 & 24 & 23 & 18 \\
\varepsilon & 25 & 24 & 26 & 20 & +\infty & 21 & 21 & 22 & 26 & +\infty & 24 & 24 & 23 & 26 & 24 & 21 & 21 & 25 & 24 & 23 & 24 \\
\varepsilon & 25 & 24 & 26 & 26 & +\infty & 27 & 27 & 22 & 26 & +\infty & 24 & 24 & 23 & 26 & 24 & 27 & 27 & 25 & 24 & 23 & 24 \\
\varepsilon & 31 & 24 & 26 & 26 & +\infty & 27 & 27 & 28 & 32 & +\infty & 30 & 30 & 29 & 26 & 24 & 27 & 27 & 31 & 30 & 29 & 24 \\
\varepsilon & 31 & 30 & 32 & 26 & +\infty & 27 & 27 & 28 & 32 & +\infty & 30 & 30 & 29 & 32 & 30 & 27 & 27 & 31 & 30 & 29 & 30 \\
\varepsilon & 31 & 30 & 32 & 32 & +\infty & 33 & 33 & 28 & 32 & +\infty & 30 & 30 & 29 & 32 & 30 & 33 & 33 & 31 & 30 & 29 & 30 \\
\varepsilon & 37 & 30 & 32 & 32 & +\infty & 33 & 33 & 34 & 38 & +\infty & 36 & 36 & 35 & 32 & 30 & 33 & 33 & 37 & 36 & 35 & 30 \\
\varepsilon & 37 & 36 & 38 & 32 & +\infty & 33 & 33 & 34 & 38 & +\infty & 36 & 36 & 35 & 38 & 36 & 33 & 33 & 37 & 36 & 35 & 36 \\
\varepsilon & 37 & 36 & 38 & 38 & +\infty & 39 & 39 & 34 & 38 & +\infty & 36 & 36 & 35 & 38 & 36 & 39 & 39 & 37 & 36 & 35 & 36 \\
\varepsilon & 43 & 36 & 38 & 38 & +\infty & 39 & 39 & 40 & 44 & +\infty & 42 & 42 & 41 & 38 & 36 & 39 & 39 & 43 & 42 & 41 & 36 \\
\varepsilon & 43 & 42 & 44 & 38 & +\infty & 39 & 39 & 40 & 44 & +\infty & 42 & 42 & 41 & 44 & 42 & 39 & 39 & 43 & 42 & 41 & 42 \\
\varepsilon & 43 & 42 & 44 & 44 & +\infty & 45 & 45 & 40 & 44 & +\infty & 42 & 42 & 41 & 44 & 42 & 45 & 45 & 43 & 42 & 41 & 42 \\
\varepsilon & 49 & 42 & 44 & 44 & +\infty & 45 & 45 & 46 & 50 & +\infty & 48 & 48 & 47 & 44 & 42 & 45 & 45 & 49 & 48 & 47 & 42 \\
\varepsilon & 49 & 48 & 50 & 44 & +\infty & 45 & 45 & 46 & 50 & +\infty & 48 & 48 & 47 & 50 & 48 & 45 & 45 & 49 & 48 & 47 & 48 \\
\varepsilon & 49 & 48 & 50 & 50 & +\infty & 51 & 51 & 46 & 50 & +\infty & 48 & 48 & 47 & 50 & 48 & 51 & 51 & 49 & 48 & 47 & 48 \\
\varepsilon & 55 & 48 & 50 & 50 & +\infty & 51 & 51 & 52 & 56 & +\infty & 54 & 54 & 53 & 50 & 48 & 51 & 51 & 55 & 54 & 53 & 48 \\
\varepsilon & 55 & 54 & 56 & 50 & +\infty & 51 & 51 & 52 & 56 & +\infty & 54 & 54 & 53 & 56 & 54 & 51 & 51 & 55 & 54 & 53 & 54 \\
\varepsilon & 55 & 54 & 56 & 56 & +\infty & 57 & 57 & 52 & 56 & +\infty & 54 & 54 & 53 & 56 & 54 & 57 & 57 & 55 & 54 & 53 & 54 \\
\varepsilon & 60 & 54 & 56 & 56 & +\infty & 57 & 57 & 58 & 61 & +\infty & 60 & 60 & 59 & 56 & 54 & 57 & 57 & 60 & 60 & 59 & 54 \\
\varepsilon & 60 & 60 & 61 & 56 & +\infty & 57 & 57 & 58 & 61 & +\infty & 60 & 60 & 59 & 61 & 60 & 57 & 57 & 60 & 60 & 59 & 60 \\
\varepsilon & 60 & 60 & 61 & 62 & +\infty & 62 & 63 & 58 & 61 & +\infty & 60 & 60 & 59 & 61 & 60 & 62 & 63 & 60 & 60 & 59 & 60 \\
\varepsilon & 65 & 60 & 61 & 62 & +\infty & 62 & 63 & 64 & 66 & +\infty & 66 & 65 & 65 & 61 & 60 & 62 & 63 & 65 & 66 & 65 & 60 \\
\varepsilon & 65 & 66 & 66 & 62 & +\infty & 62 & 63 & 64 & 66 & +\infty & 66 & 65 & 65 & 66 & 66 & 62 & 63 & 65 & 66 & 65 & 66 \\
\varepsilon & 65 & 66 & 66 & 68 & +\infty & 67 & +\infty & 64 & 66 & +\infty & 66 & 65 & 65 & 66 & 66 & 67 & +\infty & 65 & 66 & 65 & 66 \\
\varepsilon & +\infty & 66 & 66 & 68 & +\infty & 67 & +\infty & 70 & 70 & +\infty & 70 & 70 & +\infty & 66 & 66 & 67 & +\infty & 70 & 70 & +\infty & 66 \\
\varepsilon & +\infty & +\infty & +\infty & 68 & +\infty & 67 & +\infty & 70 & 70 & +\infty & 70 & 70 & +\infty & 71 & 70 & 67 & +\infty & 70 & 70 & +\infty & +\infty \\
\varepsilon & +\infty & +\infty & +\infty & +\infty & +\infty & +\infty & +\infty & 70 & 70 & +\infty & 70 & 70 & +\infty & 71 & 70 & +\infty & +\infty & 70 & 70 & +\infty & +\infty
\end{pmatrix}.$$

2 Commande du croisement ferroviaire

L'automate (max,+) modélisant le croisement ferroviaire est représenté sur la figure 4.9. L'ensemble des transitions est :

$H = \{(1,a,2),(1,c,4),(1,f',1),(1,f,1),(1,g,1),(2,a',3),(2,f',2),(2,f,2),$
$(2,g,2),(3,b,1),(3,f',3),(3,f,3),(3,g,3),(4,d,1),(4,d,5),(5,e,6),$
$(6,d,5),(6,d,1),(6,a,6),(6,a',6),(6,b,6),(6,f,7),(7,f',8),(7,a,7),$
$(7,a',7),(7,b,7),(8,g,6),(8,a',8),(8,a,8),(8,b,8),(1,e,1),(2,e,2),$
$(3,e,3),(6,c,6),(7,c,7),(8,c,8)\}$.

La consigne appliquée à l'exemple du croisement ferroviaire, pour 10 traversées de trains la date maximale est $t = 80$:

$$[z(n)]_j = \begin{cases} 50 & \text{si } j \in H_1 \cup H_6 \text{ et } 0 \leq n \leq 80, \\ T & \text{sinon.} \end{cases}$$

En considérant que tous les feux de signalisation sont contrôlables, on aboutit à une solution de commande grâce à la récurrence (4.8), pour $n = 0 : 30$:

$v_{opt}(n) =$

$$\begin{pmatrix}
30 & 32 & 34 & 35 & 37 & 39 & 40 & 42 & 44 & 45 & 47 & 49 & 50 & 52 & 54 & 55 & 57 & 59 & 60 & 62 & 64 & 65 & 67 & 69 & 70 & 72 & 75 & 75 & 80 & 80 & 80 \\
31 & 32 & 34 & 36 & 37 & 39 & 41 & 42 & 44 & 46 & 47 & 49 & 51 & 52 & 54 & 56 & 57 & 59 & 61 & 62 & 64 & 66 & 67 & 69 & 71 & 72 & 74 & 76 & 77 & 80 & 80 \\
32 & 34 & 35 & 37 & 39 & 40 & 42 & 44 & 45 & 47 & 49 & 50 & 52 & 54 & 55 & 57 & 59 & 60 & 62 & 64 & 65 & 67 & 69 & 70 & 72 & 74 & 75 & 77 & 80 & 80 & 80 \\
32 & 34 & 35 & 37 & 39 & 40 & 42 & 44 & 45 & 47 & 49 & 50 & 52 & 54 & 55 & 57 & 59 & 60 & 62 & 64 & 65 & 67 & 69 & 70 & 72 & 74 & 75 & 77 & 80 & 80 & 80 \\
32 & 34 & 35 & 37 & 39 & 40 & 42 & 44 & 45 & 47 & 49 & 50 & 52 & 54 & 55 & 57 & 59 & 60 & 62 & 64 & 65 & 67 & 69 & 70 & 72 & 74 & 75 & 77 & 80 & 80 & 80 \\
31 & 32 & 34 & 36 & 37 & 39 & 41 & 42 & 44 & 46 & 47 & 49 & 51 & 52 & 54 & 56 & 57 & 59 & 61 & 62 & 64 & 66 & 67 & 69 & 71 & 72 & 74 & 77 & 77 & +\infty & +\infty \\
32 & 34 & 36 & 37 & 39 & 41 & 42 & 44 & 46 & 47 & 49 & 51 & 52 & 54 & 56 & 57 & 59 & 61 & 62 & 64 & 66 & 67 & 69 & 71 & 72 & 74 & 77 & 77 & +\infty & +\infty & +\infty \\
32 & 34 & 36 & 37 & 39 & 41 & 42 & 44 & 46 & 47 & 49 & 51 & 52 & 54 & 56 & 57 & 59 & 61 & 62 & 64 & 66 & 67 & 69 & 71 & 72 & 74 & 77 & 77 & +\infty & +\infty & +\infty \\
32 & 34 & 36 & 37 & 39 & 41 & 42 & 44 & 46 & 47 & 49 & 51 & 52 & 54 & 56 & 57 & 59 & 61 & 62 & 64 & 66 & 67 & 69 & 71 & 72 & 74 & 77 & 77 & +\infty & +\infty & +\infty \\
30 & 32 & 33 & 35 & 37 & 38 & 40 & 42 & 43 & 45 & 47 & 48 & 50 & 52 & 53 & 55 & 57 & 58 & 60 & 62 & 63 & 65 & 67 & 68 & 70 & 72 & 73 & 75 & 78 & 78 & +\infty \\
32 & 33 & 35 & 37 & 38 & 40 & 42 & 43 & 45 & 47 & 48 & 50 & 52 & 53 & 55 & 57 & 58 & 60 & 62 & 63 & 65 & 67 & 68 & 70 & 72 & 73 & 75 & 78 & 78 & +\infty & +\infty \\
32 & 33 & 35 & 37 & 38 & 40 & 42 & 43 & 45 & 47 & 48 & 50 & 52 & 53 & 55 & 57 & 58 & 60 & 62 & 63 & 65 & 67 & 68 & 70 & 72 & 73 & 75 & 78 & 78 & +\infty & +\infty \\
32 & 33 & 35 & 37 & 38 & 40 & 42 & 43 & 45 & 47 & 48 & 50 & 52 & 53 & 55 & 57 & 58 & 60 & 62 & 63 & 65 & 67 & 68 & 70 & 72 & 73 & 75 & 78 & 78 & +\infty & +\infty \\
31 & 33 & 34 & 36 & 38 & 39 & 41 & 43 & 44 & 46 & 48 & 49 & 51 & 53 & 54 & 56 & 58 & 59 & 61 & 63 & 64 & 66 & 68 & 69 & 71 & 73 & 74 & 76 & 79 & 79 & +\infty \\
32 & 34 & 36 & 37 & 39 & 41 & 42 & 44 & 46 & 47 & 49 & 51 & 52 & 54 & 56 & 57 & 59 & 61 & 62 & 64 & 66 & 67 & 69 & 71 & 72 & 74 & 76 & 77 & 78 & +\infty & +\infty \\
32 & 33 & 35 & 37 & 38 & 40 & 42 & 43 & 45 & 47 & 48 & 50 & 52 & 53 & 55 & 57 & 58 & 60 & 62 & 63 & 65 & 67 & 68 & 70 & 72 & 73 & 75 & 77 & 78 & 79 & +\infty \\
32 & 34 & 36 & 37 & 39 & 41 & 42 & 44 & 46 & 47 & 49 & 51 & 52 & 54 & 56 & 57 & 59 & 61 & 62 & 64 & 66 & 67 & 69 & 71 & 72 & 74 & 76 & 77 & 78 & 80 & 80 \\
31 & 33 & 34 & 36 & 38 & 39 & 41 & 43 & 44 & 46 & 48 & 49 & 51 & 53 & 54 & 56 & 58 & 59 & 61 & 63 & 64 & 66 & 68 & 69 & 71 & 73 & 74 & 76 & 79 & 79 & 80 \\
33 & 34 & 36 & 38 & 39 & 41 & 43 & 44 & 46 & 48 & 49 & 51 & 53 & 54 & 56 & 58 & 59 & 61 & 63 & 64 & 66 & 68 & 69 & 71 & 73 & 74 & 76 & 78 & 79 & 80 & 80 \\
33 & 34 & 36 & 38 & 39 & 41 & 43 & 44 & 46 & 48 & 49 & 51 & 53 & 54 & 56 & 58 & 59 & 61 & 63 & 64 & 66 & 68 & 69 & 71 & 73 & 74 & 76 & 78 & 79 & 80 & 80 \\
33 & 34 & 36 & 38 & 39 & 41 & 43 & 44 & 46 & 48 & 49 & 51 & 53 & 54 & 56 & 58 & 59 & 61 & 63 & 64 & 66 & 68 & 69 & 71 & 73 & 74 & 76 & 78 & 79 & 80 & 80 \\
32 & 34 & 35 & 37 & 39 & 40 & 42 & 44 & 45 & 47 & 49 & 50 & 52 & 54 & 55 & 57 & 59 & 60 & 62 & 64 & 65 & 67 & 69 & 70 & 72 & 74 & 75 & 76 & 80 & 80 & 80 \\
31 & 33 & 35 & 36 & 38 & 40 & 41 & 43 & 45 & 46 & 48 & 50 & 51 & 53 & 55 & 56 & 58 & 60 & 61 & 63 & 65 & 66 & 68 & 70 & 71 & 73 & 75 & 76 & 77 & +\infty & +\infty \\
33 & 35 & 36 & 38 & 40 & 41 & 43 & 45 & 46 & 48 & 50 & 51 & 53 & 55 & 56 & 58 & 60 & 61 & 63 & 65 & 66 & 68 & 70 & 71 & 73 & 75 & 76 & 77 & +\infty & +\infty & +\infty \\
33 & 35 & 36 & 38 & 40 & 41 & 43 & 45 & 46 & 48 & 50 & 51 & 53 & 55 & 56 & 58 & 60 & 61 & 63 & 65 & 66 & 68 & 70 & 71 & 73 & 75 & 76 & 77 & +\infty & +\infty & +\infty \\
33 & 35 & 36 & 38 & 40 & 41 & 43 & 45 & 46 & 48 & 50 & 51 & 53 & 55 & 56 & 58 & 60 & 61 & 63 & 65 & 66 & 68 & 70 & 71 & 73 & 75 & 76 & 77 & +\infty & +\infty & +\infty \\
31 & 32 & 34 & 36 & 37 & 39 & 41 & 42 & 44 & 46 & 47 & 49 & 51 & 52 & 54 & 56 & 57 & 59 & 61 & 62 & 64 & 66 & 67 & 69 & 71 & 72 & 74 & 76 & 77 & 78 & +\infty \\
32 & 34 & 36 & 37 & 39 & 41 & 42 & 44 & 46 & 47 & 49 & 51 & 52 & 54 & 56 & 57 & 59 & 61 & 62 & 64 & 66 & 67 & 69 & 71 & 72 & 74 & 76 & 77 & 78 & +\infty & +\infty \\
32 & 34 & 36 & 37 & 39 & 41 & 42 & 44 & 46 & 47 & 49 & 51 & 52 & 54 & 56 & 57 & 59 & 61 & 62 & 64 & 66 & 67 & 69 & 71 & 72 & 74 & 76 & 77 & 78 & +\infty & +\infty \\
32 & 34 & 36 & 37 & 39 & 41 & 42 & 44 & 46 & 47 & 49 & 51 & 52 & 54 & 56 & 57 & 59 & 61 & 62 & 64 & 66 & 67 & 69 & 71 & 72 & 74 & 76 & 77 & 78 & +\infty & +\infty \\
32 & 34 & 35 & 37 & 39 & 40 & 42 & 44 & 45 & 47 & 49 & 50 & 52 & 54 & 55 & 57 & 59 & 60 & 62 & 64 & 65 & 67 & 69 & 70 & 72 & 74 & 75 & 77 & 80 & 80 & 80 \\
32 & 34 & 36 & 37 & 39 & 41 & 42 & 44 & 46 & 47 & 49 & 51 & 52 & 54 & 56 & 57 & 59 & 61 & 62 & 64 & 66 & 67 & 69 & 71 & 72 & 74 & 77 & 77 & +\infty & +\infty & +\infty \\
32 & 33 & 35 & 37 & 38 & 40 & 42 & 43 & 45 & 47 & 48 & 50 & 52 & 53 & 55 & 57 & 58 & 60 & 62 & 63 & 65 & 67 & 68 & 70 & 72 & 73 & 75 & 78 & 78 & +\infty & +\infty \\
33 & 34 & 36 & 38 & 39 & 41 & 43 & 44 & 46 & 48 & 49 & 51 & 53 & 54 & 56 & 58 & 59 & 61 & 63 & 64 & 66 & 68 & 69 & 71 & 73 & 74 & 76 & 78 & 79 & 80 & 80 \\
33 & 35 & 36 & 38 & 40 & 41 & 43 & 45 & 46 & 48 & 50 & 51 & 53 & 55 & 56 & 58 & 60 & 61 & 63 & 65 & 66 & 68 & 70 & 71 & 73 & 75 & 76 & 77 & +\infty & +\infty & +\infty \\
32 & 34 & 36 & 37 & 39 & 41 & 42 & 44 & 46 & 47 & 49 & 51 & 52 & 54 & 56 & 57 & 59 & 61 & 62 & 64 & 66 & 67 & 69 & 71 & 72 & 74 & 76 & 77 & 78 & +\infty & +\infty
\end{pmatrix}$$

Grâce à la récurrence (4.1), on évalue les durées d'achèvements maximales du systèmes commandé, et on trouve pour $n = 0 : 30$:

$$\overline{x}_c(n+1) = \begin{pmatrix}
30 & 32 & 34 & 35 & 37 & 39 & 40 & 42 & 44 & 45 & 47 & 49 & 50 & 52 & 54 & 55 & 57 & 59 & 60 & 62 & 64 & 65 & 67 & 69 & 70 & 72 & 75 & 75 & 80 & 80 & 80 \\
31 & 32 & 34 & 36 & 37 & 39 & 41 & 42 & 44 & 46 & 47 & 49 & 51 & 52 & 54 & 56 & 57 & 59 & 61 & 62 & 64 & 66 & 67 & 69 & 71 & 72 & 74 & 76 & 77 & 80 & 80 \\
32 & 34 & 35 & 37 & 39 & 40 & 42 & 44 & 45 & 47 & 49 & 50 & 52 & 54 & 55 & 57 & 59 & 60 & 62 & 64 & 65 & 67 & 69 & 70 & 72 & 74 & 75 & 77 & 80 & 80 & 80 \\
32 & 34 & 35 & 37 & 39 & 40 & 42 & 44 & 45 & 47 & 49 & 50 & 52 & 54 & 55 & 57 & 59 & 60 & 62 & 64 & 65 & 67 & 69 & 70 & 72 & 74 & 75 & 77 & 80 & 80 & 80 \\
32 & 34 & 35 & 37 & 39 & 40 & 42 & 44 & 45 & 47 & 49 & 50 & 52 & 54 & 55 & 57 & 59 & 60 & 62 & 64 & 65 & 67 & 69 & 70 & 72 & 74 & 75 & 77 & 80 & 80 & 80 \\
31 & 32 & 34 & 36 & 37 & 39 & 41 & 42 & 44 & 46 & 47 & 49 & 51 & 52 & 54 & 56 & 57 & 59 & 61 & 62 & 64 & 66 & 67 & 69 & 71 & 72 & 74 & 77 & 77 & +\infty & +\infty \\
32 & 34 & 36 & 37 & 39 & 41 & 42 & 44 & 46 & 47 & 49 & 51 & 52 & 54 & 56 & 57 & 59 & 61 & 62 & 64 & 66 & 67 & 69 & 71 & 72 & 74 & 77 & 77 & +\infty & +\infty & +\infty \\
32 & 34 & 36 & 37 & 39 & 41 & 42 & 44 & 46 & 47 & 49 & 51 & 52 & 54 & 56 & 57 & 59 & 61 & 62 & 64 & 66 & 67 & 69 & 71 & 72 & 74 & 77 & 77 & +\infty & +\infty & +\infty \\
32 & 34 & 36 & 37 & 39 & 41 & 42 & 44 & 46 & 47 & 49 & 51 & 52 & 54 & 56 & 57 & 59 & 61 & 62 & 64 & 66 & 67 & 69 & 71 & 72 & 74 & 77 & 77 & +\infty & +\infty & +\infty \\
30 & 32 & 33 & 35 & 37 & 38 & 40 & 42 & 43 & 45 & 47 & 48 & 50 & 52 & 53 & 55 & 57 & 58 & 60 & 62 & 63 & 65 & 67 & 68 & 70 & 72 & 73 & 75 & 78 & 78 & +\infty \\
32 & 33 & 35 & 37 & 38 & 40 & 42 & 43 & 45 & 47 & 48 & 50 & 52 & 53 & 55 & 57 & 58 & 60 & 62 & 63 & 65 & 67 & 68 & 70 & 72 & 73 & 75 & 78 & 78 & +\infty & +\infty \\
32 & 33 & 35 & 37 & 38 & 40 & 42 & 43 & 45 & 47 & 48 & 50 & 52 & 53 & 55 & 57 & 58 & 60 & 62 & 63 & 65 & 67 & 68 & 70 & 72 & 73 & 75 & 78 & 78 & +\infty & +\infty \\
32 & 33 & 35 & 37 & 38 & 40 & 42 & 43 & 45 & 47 & 48 & 50 & 52 & 53 & 55 & 57 & 58 & 60 & 62 & 63 & 65 & 67 & 68 & 70 & 72 & 73 & 75 & 78 & 78 & +\infty & +\infty \\
31 & 33 & 34 & 36 & 38 & 39 & 41 & 43 & 44 & 46 & 48 & 49 & 51 & 53 & 54 & 56 & 58 & 59 & 61 & 63 & 64 & 66 & 68 & 69 & 71 & 73 & 74 & 76 & 79 & 79 & +\infty \\
32 & 34 & 36 & 37 & 39 & 41 & 42 & 44 & 46 & 47 & 49 & 51 & 52 & 54 & 56 & 57 & 59 & 61 & 62 & 64 & 66 & 67 & 69 & 71 & 72 & 74 & 76 & 77 & 78 & +\infty & +\infty \\
32 & 33 & 35 & 37 & 38 & 40 & 42 & 43 & 45 & 47 & 48 & 50 & 52 & 53 & 55 & 57 & 58 & 60 & 62 & 63 & 65 & 67 & 68 & 70 & 72 & 73 & 75 & 77 & 78 & 79 & +\infty \\
32 & 34 & 36 & 37 & 39 & 41 & 42 & 44 & 46 & 47 & 49 & 51 & 52 & 54 & 56 & 57 & 59 & 61 & 62 & 64 & 66 & 67 & 69 & 71 & 72 & 74 & 76 & 77 & 78 & 80 & 80 \\
31 & 33 & 34 & 36 & 38 & 39 & 41 & 43 & 44 & 46 & 48 & 49 & 51 & 53 & 54 & 56 & 58 & 59 & 61 & 63 & 64 & 66 & 68 & 69 & 71 & 73 & 74 & 76 & 79 & 79 & 80 \\
33 & 34 & 36 & 38 & 39 & 41 & 43 & 44 & 46 & 48 & 49 & 51 & 53 & 54 & 56 & 58 & 59 & 61 & 63 & 64 & 66 & 68 & 69 & 71 & 73 & 74 & 76 & 78 & 79 & 80 & 80 \\
33 & 34 & 36 & 38 & 39 & 41 & 43 & 44 & 46 & 48 & 49 & 51 & 53 & 54 & 56 & 58 & 59 & 61 & 63 & 64 & 66 & 68 & 69 & 71 & 73 & 74 & 76 & 78 & 79 & 80 & 80 \\
33 & 34 & 36 & 38 & 39 & 41 & 43 & 44 & 46 & 48 & 49 & 51 & 53 & 54 & 56 & 58 & 59 & 61 & 63 & 64 & 66 & 68 & 69 & 71 & 73 & 74 & 76 & 78 & 79 & 80 & 80 \\
32 & 34 & 35 & 37 & 39 & 40 & 42 & 44 & 45 & 47 & 49 & 50 & 52 & 54 & 55 & 57 & 59 & 60 & 62 & 64 & 65 & 67 & 69 & 70 & 72 & 74 & 75 & 76 & 80 & 80 & 80 \\
31 & 33 & 35 & 36 & 38 & 40 & 41 & 43 & 45 & 46 & 48 & 50 & 51 & 53 & 55 & 56 & 58 & 60 & 61 & 63 & 65 & 66 & 68 & 70 & 71 & 73 & 75 & 76 & 77 & +\infty & +\infty \\
33 & 35 & 36 & 38 & 40 & 41 & 43 & 45 & 46 & 48 & 50 & 51 & 53 & 55 & 56 & 58 & 60 & 61 & 63 & 65 & 66 & 68 & 70 & 71 & 73 & 75 & 76 & 77 & +\infty & +\infty & +\infty \\
33 & 35 & 36 & 38 & 40 & 41 & 43 & 45 & 46 & 48 & 50 & 51 & 53 & 55 & 56 & 58 & 60 & 61 & 63 & 65 & 66 & 68 & 70 & 71 & 73 & 75 & 76 & 77 & +\infty & +\infty & +\infty \\
33 & 35 & 36 & 38 & 40 & 41 & 43 & 45 & 46 & 48 & 50 & 51 & 53 & 55 & 56 & 58 & 60 & 61 & 63 & 65 & 66 & 68 & 70 & 71 & 73 & 75 & 76 & 77 & +\infty & +\infty & +\infty \\
31 & 32 & 34 & 36 & 37 & 39 & 41 & 42 & 44 & 46 & 47 & 49 & 51 & 52 & 54 & 56 & 57 & 59 & 61 & 62 & 64 & 66 & 67 & 69 & 71 & 72 & 74 & 76 & 77 & 78 & +\infty \\
32 & 34 & 36 & 37 & 39 & 41 & 42 & 44 & 46 & 47 & 49 & 51 & 52 & 54 & 56 & 57 & 59 & 61 & 62 & 64 & 66 & 67 & 69 & 71 & 72 & 74 & 76 & 77 & 78 & +\infty & +\infty \\
32 & 34 & 36 & 37 & 39 & 41 & 42 & 44 & 46 & 47 & 49 & 51 & 52 & 54 & 56 & 57 & 59 & 61 & 62 & 64 & 66 & 67 & 69 & 71 & 72 & 74 & 76 & 77 & 78 & +\infty & +\infty \\
32 & 34 & 36 & 37 & 39 & 41 & 42 & 44 & 46 & 47 & 49 & 51 & 52 & 54 & 56 & 57 & 59 & 61 & 62 & 64 & 66 & 67 & 69 & 71 & 72 & 74 & 76 & 77 & 78 & +\infty & +\infty \\
32 & 34 & 35 & 37 & 39 & 40 & 42 & 44 & 45 & 47 & 49 & 50 & 52 & 54 & 55 & 57 & 59 & 60 & 62 & 64 & 65 & 67 & 69 & 70 & 72 & 74 & 75 & 77 & 80 & 80 & 80 \\
32 & 34 & 36 & 37 & 39 & 41 & 42 & 44 & 46 & 47 & 49 & 51 & 52 & 54 & 56 & 57 & 59 & 61 & 62 & 64 & 66 & 67 & 69 & 71 & 72 & 74 & 77 & 77 & +\infty & +\infty & +\infty \\
32 & 33 & 35 & 37 & 38 & 40 & 42 & 43 & 45 & 47 & 48 & 50 & 52 & 53 & 55 & 57 & 58 & 60 & 62 & 63 & 65 & 67 & 68 & 70 & 72 & 73 & 75 & 78 & 78 & +\infty & +\infty \\
33 & 34 & 36 & 38 & 39 & 41 & 43 & 44 & 46 & 48 & 49 & 51 & 53 & 54 & 56 & 58 & 59 & 61 & 63 & 64 & 66 & 68 & 69 & 71 & 73 & 74 & 76 & 78 & 79 & 80 & 80 \\
33 & 35 & 36 & 38 & 40 & 41 & 43 & 45 & 46 & 48 & 50 & 51 & 53 & 55 & 56 & 58 & 60 & 61 & 63 & 65 & 66 & 68 & 70 & 71 & 73 & 75 & 76 & 77 & +\infty & +\infty & +\infty \\
32 & 34 & 36 & 37 & 39 & 41 & 42 & 44 & 46 & 47 & 49 & 51 & 52 & 54 & 56 & 57 & 59 & 61 & 62 & 64 & 66 & 67 & 69 & 71 & 72 & 74 & 76 & 77 & 78 & +\infty & +\infty
\end{pmatrix}$$

Bibliographie

[Amari 2012] S. Amari, I. Demongodin, J.-J. Loiseau et C. Martinez. *Max-Plus Control Design for Temporal Constraints Meeting in Timed Event Graphs.* IEEE Transactions on Automatic Control, vol. 57, no. 8, 2012.

[Baccelli 1992] F. Baccelli, G. Cohen, G.-J. Olsder et J.-P. Quadrat. Synchronization and Linearity. Wiley, 1992.

[Badouel 2011] E. Badouel, A. Bouillard, P. Darondeau et J. Komenda. *Residuation of tropical series : rationality issues.* In joint 50th IEEE Conference on Decision and Control and European Control Conference (CDC-ECC'11), pages 3855–39861, 2011.

[Béal 2008] M.-P. Béal, E. Czeizler, J. Kari et D. Perrin. *Unambiguous automata.* Mathematics in Computer Science, vol. 1, no. 4, pages 625–638, 2008.

[Blyth 1972] T. S. Blyth et M. F. Janowitz. Residuation theory. Pergamon press, 1972.

[Boukra 2012a] R. Boukra, S. Lahaye et J.-L. Boimond. *Elements d'Evaluation de Performance pour les Systèmes à Evénements Discrets à travers de Nouvelles Représentations pour les Automates (max,+).* In 9e Conférence Internationale de Modélisation, Optimisation et Simulation (MOSIM'12), Bordeaux, France, Juin 2012.

[Boukra 2012b] R. Boukra, S. Lahaye et J.-L. Boimond. *New Representations for (max,+) Automata with Applications to the Performance Evaluation of Discrete Event Systems.* In 11th international workshop on discrete event systems (WODES 2012), Guadalajara, Mexico, Octobre 2012.

[Boukra 2012c] R. Boukra, S. Lahaye et J.-L. Boimond. *Performance Evaluation of Discrete Event Systems Thanks to New Representations for (max,+) Automata.* In 9th International Conference on Informatics in Control, Automation and Robotics (ICINCO'12), Roma, Italy, 2012.

[Boukra 2013] R. Boukra, S. Lahaye et J.-L. Boimond. *New Representations for (max,+) Automata with Applications to Performance Evaluation and Control of Discrete Event Systems.* Discrete Event Dynamic Systems (en cours de révision), 2013.

[Butkovic 2010] P. Butkovic, R.A. Cuninghame-Green et S. Gaubert. *Reducible Spectral Theory with Applications to the Robustness of Matrices in Max-Algebra.*

SIAM Journal on Matrix Analysis and Applications, vol. 31, no. 3, pages 1412–1431, 2010.

[Cassandras 2006] C. G. Cassandras et S. Lafortune. Introduction to discrete event systems. Springer-Verlag New York, Inc., 2006.

[Cochet-Terrasson 1998] J. Cochet-Terrasson, S. Gaubert, G. Cohen, M. Mc Gettrick et J.-P. Quadrat. *Numerical compuatation of spectral elements in max-plus algebra*. In IFAC Conference System Structure and Control, pages 667–674, 1998.

[Cohen 1989] G. Cohen, P. Moller, J. P. Quadrat et M. Viot. *Algebraic Tools for the Performance Evaluation of Discrete Event Systems*. IEEE Proceedings : Special issue on Discrete Event Systems, vol. 77, no. 1, Jan. 1989.

[Cottenceau 2001] B. Cottenceau, L. Hardouin, J.-L. Boimond et J.-L. Ferrier. *Model Reference Control for Timed Event Graphs in Dioids*. Automatica, vol. 37, pages 1451–1458, 2001.

[David 1989] R. David et H. Alla. Du grafcet aux réseaux de Petri. Hermès, Paris, 1989.

[De Schutter 2001] B. De Schutter et T.J.J. van den Boom. *Model predictive control for max-plus-linear discrete event systems*. Automatica, vol. 37, no. 7, pages 1049 – 1056, 2001.

[Droste 2009] M. Droste, W. Kuich et H. Vogler (Eds.). Handbook of weighted automata. Springer, 2009.

[Gaubert 1992] S. Gaubert. *Théorie des systèmes linéaires dans les dioïdes*. Thèse de doctorat, Ecole des Mines de Paris, July 1992.

[Gaubert 1995] S. Gaubert. *Performance Evaluation of (max,+) Automata*. IEEE Transactions on Automatic Control, vol. 40, no. 12, pages 2014–2025, 1995.

[Gaubert 1999a] S. Gaubert et J. Mairesse. *Asymptotic Analysis of heaps of pieces and application to timed Petri nets*. In Petri nets and performance models (PNPM'99), pages 158 – 169, 1999.

[Gaubert 1999b] S. Gaubert et J. Mairesse. *Modeling and Analysis of Timed Petri Nets using Heaps of Pieces*. IEEE Transactions on Automatic Control, vol. 44, no. 4, pages 683–698, 1999.

[Heidergott 2006] B. Heidergott, G. J. Olsder et J. V. D. Woude. Max Plus at work. Princeton, 2006.

[Houssin 2007] L. Houssin, S. Lahaye et J.-L. Boimond. *Just in Time Control of constrained (max,+)-Linear Systems*. Discrete Event Dynamic Systems, vol. 17, no. 2, pages 159–178, 2007.

[Houssin 2011] L. Houssin. *Cyclic jobshop problem and (max,plus) algebra*. In 18th IFAC World Congress, pages 2717–2721, Milan, Italy, 2011.

[Houssin 2013] L. Houssin, S. Lahaye et J. L. Boimond. *Control of (max,+)-linear systems minimizing delays*. Discrete Event Dynamic Systems, vol. 23, pages 261–276, 2013.

[Kirsten 2009] D. Kirsten et S. Lombardy. *Deciding Unambiguity and Sequentiality of Polynomially Ambiguous Min-Plus Automata*. In 26th International Symposium on Theoretical Aspects of Computer Science (STACS 2009), pages 589–600, 2009.

[Klimann 2004] I. Klimann, S. Lombardy, J. Mairesse et C. Prieur. *Deciding unambiguity and sequentiality from a finitely ambiguous max-plus automaton*. Theor. Comput. Sci., vol. 327, 2004.

[Komenda 2008] J. Komenda, J.-L. Boimond et S. Lahaye. *Control of (max,+) automata : logical and timing aspects*. In 9th international workshop on discrete event systems (WODES 2008), pages 55–60, Göteborg, sweden, Mai 2008.

[Komenda 2009a] J. Komenda, S. Lahaye et J.-L. Boimond. *Controllability of (max,+) Formal Power Series*. In IFAC Workshop on Dependable Control of Discrete Systems (DCDS 2009), Bari, Italy, Juin 2009.

[Komenda 2009b] J. Komenda, S. Lahaye et J.-L. Boimond. *Supervisory Control of (max,+) Automata : A Behavioral Approach*. Discrete Event Dynamic Systems, vol. 19, no. 4, pages 525–549, 2009.

[Komenda 2009c] J. Komenda, S. Lahaye et J.-L. Boimond. *Supervisory Control of (max,+) Automata : A Single Step Approach*. In 10th European Control Conference (ECC'09), Budapest, Hungary, 2009.

[Krob 1994] D. Krob. *The equality problem for rational series with multiplicities in the tropical semirings is undecidable*. International Journal of Algebra and Computation, pages 405–425, 1994.

[Lahaye 1999a] S. Lahaye, J.-L. Boimond et L. Hardouin. *Optimal Control of (Min,+) Linear Time-Varying Systems*. In 8th International Workshop on Petri Nets and Performance Models (PNPM 1999), pages 170–178, Saragosse, Espagne, Septembre 1999.

[Lahaye 1999b] S. Lahaye, J.-L. Boimond et L. Hardouin. *Optimal Control of (Min,+) Linear Time-Varying Systems*. In 8th International Workshop on Petri Nets and Performance Models (PNPM 1999), pages 170–178, Saragosse, Espagne, Septembre 1999.

[Lahaye 2000] S. Lahaye. *Contribution à l'étude des systèmes non stationnaires dans l'algèbre des dioïdes*. Thèse de doctorat, Université d'Angers, Oct. 2000.

[Lahaye 2008] S. Lahaye, J.-L. Boimond et J.-L. Ferrier. *Just in Time Control of Time-Varying Discrete Event Dynamic Systems in (max,+) Algebra*. International Journal of Production Research (IJPR), vol. 46, no. 19, pages 5337–5348, 2008.

[Lahaye 2013a] S. Lahaye, J. Komenda et J.-L. Boimond. *Composition of (max,+) Automata*. Discrete Event Dynamic Systems (en cours de révision), 2013.

[Lahaye 2013b] S. Lahaye, J. Komenda et J.-L. Boimond. *Modeling of timed Petri nets using deterministic (max,+) automata*. Rapport de recherche, LISA, Angers, France, 2013.

[Lahaye 2013c] S. Lahaye, J. Komenda et J.-L. Boimond. *On the Determinization of (max,+) automata*. Rapport de recherche, LISA, Angers, France, 2013.

[Lhommeau 2004] M. Lhommeau, L. Hardouin, B. Cottenceau et L. Jaulin. *Interval analysis in diod : Application to robust controller design for Timed Event Graphs*. Automatica, vol. 40, pages 1923–1930, 2004.

[Lombardy 2006] S. Lombardy et J. Sakarovitch. *Sequential ?* Theoretical Computer Science, vol. 359, no. 1-2, pages 224–244, 2006.

[Maia 2003] C.A. Maia, L. Hardouin, R. Santos Mendes et B. Cottenceau. *Optimal Closed-Loop Control for Timed Event Graphs in Dioid*. IEEE Transactions on Automatic Control, vol. 48, pages 2284–2287, 2003.

[Mairesse 2002] J. Mairesse et L. Vuillon. *Asymptotic behavior in a heap model with two pieces*. Theoretical Computer Science, vol. 270, no. 12, pages 525 – 560, 2002.

[Menguy 2000] E. Menguy, J.-L. Boimond, L. Hardouin et J.-L. Ferrier. *Just in time control of linear systems in dioid : cases of an update of reference input and uncontrollable input*. IEEE Transactions on Automatic Control, vol. 45, no. 11, pages 2155–2159, 2000.

[Murata 1989] T. Murata. *Petri Nets : Properties, Analysis and Applications*. IEEE Proceedings : Special issue on Discrete Event Systems, vol. 77, pages 541–580, Jan. 1989.

[Ramadge 1987] P. J. G. Ramadge et W. M. Wonham. *Supervisory Control of a Class of Discrete Event Processes*. SIAM Journal on Control and Optimization, vol. 25, no. 1, pages 206–230, 1987.

[Ramadge 1989] P. J. G. Ramadge et W. M. Wonham. *The control of discrete event systems*. Proceedings of The IEEE, vol. 77, pages 81–98, 1989.

[Ramchandani 1973] C. Ramchandani. *Analysis of asynchronous concurrent systems by timed Petri nets*. Ph.d. thesis, M.I.T., 1973.

[Sakarovitch 2003] J. Sakarovitch. Éléments de théorie des automates. Vuibert, 2003.

[Su 2011] Rong Su et Gerhard J. Woeginger. *String execution time for finite languages : Max is easy, min is hard*. Automatica, vol. 47, no. 10, pages 2326–2329, 2011.

[Su 2012] R. Su, J.H. van Schuppen et J.E. Rooda. *The synthesis of time optimal supervisors by using heaps-of-pieces*. IEEE Transations on Automatic Control, vol. 57, no. 1, pages 105–118, 2012.

[Weyerman 2007] W. Weyerman et S. Warnick. *Monotonically improving error bounds for a sequence of approximations for makespan minimization of batch manufacturing systems*. In IEEE Conference on Decision and Control, pages 5288–5293, 2007.

l'université nantes angers le mans
PÔLE DE RECHERCHE ET D'ENSEIGNEMENT SUPÉRIEUR

université angers

Thèse de Doctorat

Rabah BOUKRA

Contributions à la modélisation, l'évaluation de performances et la commande des systèmes à événements discrets

Contribution to modeling, performance evaluation and control of discrete event systems

Résumé

Les travaux abordés dans cette thèse concernent la modélisation des systèmes à événements discrets à l'aide d'automates à multiplicités dans l'algèbre (max,+), appelés automates (max,+). Nous proposons des représentations alternatives pour les automates (max,+). Celles-ci traduisent l'évolution des automates de façon approximative, car seuls leurs comportements extrémaux sont décrits, mais il est escompté de pouvoir résoudre à l'aide de celles-ci des problèmes importants avec une complexité raisonnable. Plus exactement, des équations récursives ont été définies dans l'algèbre (max,+) et l'algèbre (min,+) afin de décrire les comportements pire-cas et meilleur-cas des automates (max,+).
Il est montré que ces représentations permettent d'évaluer les performances de systèmes avec une faible complexité de calcul.
L'influence d'une entrée exogène peut être prise en compte dans ces représentations et on obtient alors un modèle analogue aux équations d'état standard pour les systèmes non-autonomes dans l'algèbre (max,+). Cette caractéristique permet l'adaptation de lois de commande développées pour les systèmes (max,+) linéaires aux systèmes à événements discrets appréhendés à l'aide d'automates (max,+).

Mots clés
Systèmes à événements discrets, modélisation, automates (max,+), évaluation de performances, commande.

Abstract

The work presented in this thesis deals with the modeling of discrete event systems using (max,+) automata, that is automata with weights in the so-called (max,+) algebra.
We propose alternative representations for (max,+) automata. These representations approximate the dynamics of (max,+) automata, since only their extremal behaviors are described, but they are expected to make possible to solve important problems with reasonable complexity. More precisely, recursive equations are defined over (max,+) and (min,+) algebras to describe worst case and optimal case behaviors of (max,+) automata.
It is shown that several pertinent performance indicators can be easily derived or approximated from these representations with a low computation complexity.
Another contribution is to define inputs which model exogenous influences on their dynamic evolution, and a new approach for the control of (max,+) automata is proposed.

Key Words
Discrete event systems, modeling, (max,+) automata, performance evaluation, control.