Fluctuations des marches aléatoires en dimension 1 Théorèmes limites locaux pour des marches réfléchies sur N

Rim Essifi

UNIVERSITÉ FRANÇOIS RABELAIS DE TOURS

École Doctorale : Mathématiques, Informatique, Physique Théorique, Ingénierie des Systèmes

LABORATOIRE : Laboratoire De Mathématiques et de Physique Théorique

THÈSE présentée par :

ESSIFI Rim

soutenue le : 19 Mars 2014

pour obtenir le grade de : Docteur de l'Université François-Rabelais

Discipline/ Spécialité : Mathématiques

Fluctuations des marches aléatoires en dimension 1
Théorèmes limites locaux pour des marches réfléchies sur $\mathbb{N}$

THÈSE DIRIGÉE PAR :

PEIGNÉ Marc	Professeur, Université F. Rabelais de Tours

RAPPORTEURS :

ALSMEYER Gerold	Professeur, Université de Muenster, Allemagne
LE PAGE Émile	Professeur, Université de Bretagne Sud

JURY :

ABRAHAM Romain	Professeur, Université d'Orléans
ALSMEYER Gerold	Professeur, Université de Muenster, Allemagne
GOUEZEL Sébastien	Chargé de Recherche, HDR, Université de Rennes 1
LE PAGE Émile	Professeur, Université de Bretagne Sud
PEIGNÉ Marc	Professeur, Université F.Rabelais de Tours
RASCHEL Kilian	Chargé de Recherche, Université F.Rabelais de Tours

À mon Père, ma Mère,
Et à mes Grands-Parents…

Remerciements

Je tiens tout d'abord à exprimer toute ma gratitude envers mon directeur de thèse Marc Peigné. Cette aventure n'aurait pas été possible sans son soutien. Il m'a initiée au monde de la recherche et m'a transmis les valeurs indispensables d'exigence et de rigueur. Je le remercie pour avoir partagée avec moi son immense culture en Théorie des Probabilités et de m'avoir guidée vers des sujets passionnants et stimulants. Il a fait preuve d'une grande patience et m'a beaucoup aidée à améliorer la qualité de ma rédaction ; il n'a pas hésité à me donner de son temps, je lui en suis extrêmement reconnaissante. Merci aussi pour sa présence et ses conseils avisés lors de mes moments d'hésitation et des périodes difficiles que j'ai pu traverser pendant ces années.

J'adresse aussi mes sincères remerciements aux deux rapporteurs de cette thèse Gerold Alsmeyer et Émile Le Page. Je les remercie pour le temps qu'ils ont accepté de consacrer pour lire ce manuscrit ainsi que pour leurs remarques et suggestions pertinantes et enrichissantes qui ont contribué à l'amélioration de cette thèse.

Je remercie profondément Romain Abraham, Sébastien Gouzel et Kilian Raschel pour le très grand honneur qu'ils m'ont accordé en acceptant de faire partie de mon jury de thèse.

Je ne remercierai jamais assez Kilian Raschel pour tout ce qu'il m'a apporté pendant ces deux dernières années. Tout d'abord pour nos discussions et notre collaboration, ainsi que pour sa curiosité et l'intérêt qu'il a porté à mon travail. Ensuite pour son enthousiasme et sa passion des Probabilités qui m'ont beaucoup inspirée. Merci aussi pour tout le temps qu'il n'a pas hésité à me consacrer, pour sa gentillesse, son écoute, sa bienveillance et la grande modestie dont il a fait preuve. Finalement, un grand merci pour la relecture de ce manuscrit et toutes ses remarques et propositions enrichissantes.

Le monde des Probabilités me serait encore inconnu sans la personne de Jean-Philippe Anker. Je tiens à lui adresser ma profonde gratitude pour m'avoir encouragée et incitée à me lancer dans cette aventure et à dépasser mes peurs et mes idées préconçues. Je le remercie aussi pour sa bienveillance et son accompagnement depuis bientôt six ans et pour l'aide qu'il m'a apportée lors de mon arrivée en France. Je garde aussi un très bon souvenir du professeur que j'ai eu pour mon cours de master à la Faculté des Sciences de Tunis.

J'ai une pensée particulière envers tous mes professeurs qui ont cru en moi et qui m'ont encouragée. Plusieurs d'entre eux ont été des figures marquantes et stimulantes dans mon parcours. Un grand merci à Madame Yamina, à Monsieur Teyeb et à Monsieur Chtourou. J'exprime aussi ma profonde gratitude envers mes professeurs de l'École Normale Supérieure de Tunis qui m'ont transmis l'amour des Mathématiques et la rigueur nécessaire. Merci tout d'abord à Nejib Ben Salem pour sa foi en moi puis à Habib Maagli, à Othman Echi, à Amel Baraket, à Hatem Mejjaoli, à Mourad Bellassoued et à Sami Lazaar. Merci aussi à Sami Mustapha que j'ai eue comme professeur au cours de master d'Analyse Harmonique.

J'ai eu la chance pendant cette thèse de partciper à plusieurs conférences et d'interagir avec de brillants et inspirants mathématiciens. Je voudrais remercier sincèrement tous les gens qui se sont intéressés à mon travail et qui ont pris le temps de discuter avec moi et de répondre à mes questions. Plus particulièrement Loïc Chaumont, Ewa Damek, Andreas Kyprianou, Philippe Bougerol, Philippe Biane, Sonia Fourati, Nizar Demni, Monique Pontier ... J'exprime toute ma reconnaissance envers tous les gens qui m'ont invitée à donner des exposés et qui m'ont ainsi aidée à avoir confiance en moi ; les discussions que nous avons pu avoir m'ont beaucoup éclairée. Merci à Jean-françois Quint, Thomas Simon, Sergio Alvarez, ...

Je tiens aussi à remercier Steven Lalley pour avoir inspiré une partie de ce travail.

L'aventure qu'est la thèse m'a permis de faire la rencontre de plusieurs personnes enrichissantes scientifiquement, mais aussi humainement. Le Laboratoire de Mathématiques et de Physique Théorique a été un exellent cadre pour cela. Je remercie tout particulièrement Ahmad El Soufi pour ses conseils, ses encouragements, sa bienveillance et son amitié et toute l'aide qu'il m'a apportée. Je remercie aussi Jean Fabbri pour son amitié et son soutien et toutes les discussions que nous avons échangés. Un grand merci à toute l'équipe de Probabilités et de Théorie Ergodique, en particulier Olivier Durieu, Cédric Lecouvey, et Emmanuel Lesigne. Merci aussi à Guy Barles ; sans son investissement et ses efforts cette aventure n'aurait, sans doute pas, été possible. Une pensée aussi envers Romain Gicquad qui m'a énormément soutenue. J'ai beaucoup appréciée les moments passés avec Noureddine Mohammedi ; nos petites conversations du quotidien m'ont beaucoup imprégnée. Merci à Hector Giacomini pour tous les débats passionnants qu'on a pu avoir ainsi qu'à Dominique Boosé pour son soutien.

Durant mes années de thèse, j'ai eu l'occasion d'enseigner ; il m'a alors été donné de collaborer avec des professeurs qui maîtrisent parfaitement leur mission d'enseignement et qui ont daigné à me faciliter mon travail de débutante ; ils se sont montrés assez souvent très compréhensifs, une pensée particulière à Salameh Salameh.

Je suis aussi très redevable envers le personnel du LMPT que j'ai pu côtoyer, Anne-Marie, Bernadette, Sandrine, Anouchka, Linda, Olivier et Romain. Je remercie aussi Persa pour sa gentillesse. Toutes ces personnnes m'ont toujours accueillie avec le sourire et leur joie de vivre communicante.

Finalement, un grand merci aux doctorants du LMPT ; plusieurs d'entre eux ne m'ont jamais refusé la moindre aide. Je les remercie aussi pour tous les instants chaleureux que nous avons partagés. Merci plus particulièrement à Amine, Ali, Shuang-wei, Abdolhakim et Franchesco.

Les journées passées au LMPT n'auraient pas été les mêmes sans les fameux occuppants du bureau 1360 ou plutôt le trio Kevin, Thomas et Jérémie. Thomas et Kevin merci pour tous les moments que nous avons passé ensemble et pour tous les fous rires que nous avons partagés. Par ailleurs, merci pour avoir répondu à toutes mes questions de LATEX, qui bien souvent pouvaient sembler interminables. Jérémie merci pour ton sens de l'humour (pas très politiquement correct) qui m'a redonné le sourire tant de fois. Merci à tous les trois pour votre soutien et votre amitié.

Dali merci d'avoir été là pour moi, merci pour ta gentillesse et ton amitié.

Inès, merci pour ta joie de vivre débordante et pour toute l'aide que tu m'as apportée.

Je tiens à remercier Hédi et Wafa ainsi que toute la famille Sghaier pour l'acceuil chaleureux qu'ils m'ont toujours réservé chez eux. Hédi merci pour avoir pris le temps, malgré ton emploi du temps surchargé, de m'écouter. Tes conseils, très judicieux et sages, m'ont été d'une grande aide.

Jacqueline et Michel merci pour m'avoir proposée votre aide inconditionnelle et pour m'avoir traitée comme votre propre fille. Je reste sans voix devant les personnes merveilleuses que vous êtes : votre générosité, votre bonté mais aussi votre engagement, votre détermination et persévérance à défendre les causes nobles m'émeuvent constamment.

J'ai eu aussi la chance de connaître cette belle ville qu'est Tours avec de très belles personnes. Myriam et Bassam, merci pour tout le bonheur que vous m'avez, et que vous continuez, à m'apporter. Myriam merci pour tous nos moments de joie et de folie, merci pour ton amour et tes encouragements. Bassam merci pour ta présence si rassurante et pour tous nos débats qui s'éternisaient des heures et des heures. Merci à tous les deux pour nos petites escapades et pour le trio magique que nous avons formés.

Il y'a des gens que vous connaissez depuis toujours et que pour rien au monde vous ne renonceriez ; ce qui se confirme d'autant plus lorsque vous êtes loin de votre pays et de votre famille.

Salma et Sourour merci pour votre soutien inconditionnel et votre joie de vivre, Khaled merci pour ton grain de folie et tes encouragements incessants.

Rahma, nous nous connaissons depuis une quinzaine d'année (et oui, on est plus aussi jeunes que ça). On a traversé toutes les phases, tout partagé ensemble, la joie, l'insouciance, mais aussi des moments bien plus difficiles. Merci pour ce que tu es. Tu n'en as pas encore fini avec moi, tu auras à me supporter encore pour un bon bout de temps.

Pouch, merci d'être rentrée dans ma vie et de ne pas en sortir. Merci pour ta générosité et ta sincérité. Merci de m'avoir donné la sensation que même ici loin de ma famille, il y'a une personne sur laquelle je peux compter sans faille. Merci pour ta joie de vivre et ton sourire qui ne te quittent jamais. Merci de supporter mon petit caractère grincheux, je ne te remercierai par contre pas pour la torture que tu m'as infligée en me réveillant sur du Haifa Wahbi. Merci pour nos chamailleries ridicules. Merci d'être cette petite libanaise qui m'agace tant parfois. Merci de m'avoir fait découvrir ton monde, ta culture et surtout vos épices. Merci de m'avoir fait comprendre que maintenant, de la famille, j'en avais aussi au Liban. Je remercie d'ailleurs Rajrouj, Wafika, Khairiya, Loulou et Rourou qui m'ont traîté comme l'une des leurs. Merci Safaa pour nos crises d'hystérie et nos moments de folie, merci de m'avoir écouté et rassuré tant de fois. Merci tout simplement d'être ma famille ici !

Asma, nous nous connaissons depuis huit ans, mais c'est comme si je te connaissais depuis toujours. Notre complicité me laisse parfois perplexe. Je ne peux rien te cacher et ça m'énerve. La personne modeste, généreuse et intelligente que tu es m'a tant donnée. Avec toi, même enfermées dans une petite pièce et après des heures de travail, j'arrive à m'amuser comme jamais, uniquement en clignant des yeux .... Merci de m'avoir donné l'opportunité de connaître la famille mythique des Boussen. Tu n'as pas cessé de croire en moi, même quand moi je n'y croyais plus et bien souvent tu m'as rappelé qui j'étais. Pour tout cela et pour bien d'avantage je te remercie. Tu sais, notre wish-list est encore longue, mais le plus important ce n'est pas de réaliser tous ces rêves (un peu bizaroïdes) mais c'est de le faire ensemble.

Je remercie Dieu tous les jours pour ce merveilleux cadeau qu'il m'a fait à la naissance : ma famille ; l'amour inconditionnel, c'est plutôt une denrée rare de nos jours. J'exprime ma profonde gratitude envers mes grands parents Ommi Aychoucha et Jeddi Khmayes dont la douceur a bercé mon enfance ; le souvenir de leur amour et de leur bonté ne me quittera jamais. Merci à Mohsen et à toutes mes secondes mamans Fatima, Nana et Jalila, à qui j'en ai fais voir de toutes les couleurs quand j'étais enfant. Ils m'ont tout donné sans rien attendre en retour et avec eux, j'ai appris que la famille c'était ça : des gens qui sont capables de sacrifier leur jeunesse pour s'occupper les uns des autres. Merci à toi Halima, tu as été comme une grande soeur pour moi. Je n'oublierai jamais les années où nous étions inséparables, quand tu daignais écouter tous mes petits soucis et tracas. Un grand merci à Nabil pour avoir toujours été là dans les moments difficiles.

Merci à mon tonton et à mes tatas super cool dont les éclats de rire n'ont jamais cessé de retentir en toutes circonstances ; merci à vous pour avoir su garder les liens qui nous unissent si forts et pour avoir fait que tous ces moments passés ensemble soient des moments de joie hilarante. Merci à Salma, Sahbi et Sondes. Tata Najwa merci pour ton amour et ta présence, Am Mounir, merci pour t'être si bien occupé de nous pendant toutes ces années, merci de n'avoir jamais eu assez des questions insistantes de mon père. Khali Lakhdhar merci d'avoir toujours cru en moi et de m'avoir soutenu. Tata Raouda, merci pour ton soutien indéfectible et tes encouragements incessants et pour ta foi en moi. Merci à mes cousines et cousins. Et puis merci aux deux personnes qui sont à l'origine de cette famille unique en son genre. Baba Mounaouer merci pour ta grandeur d'âme, pour ta sagesse et pour tes encouragements, Ommi Saadia, je suis dans l'inacapacité de décrire à justes mots la femme exeptionnelle que tu es. Merci pour ta force de caractère, merci pour ta tendresse, merci pour ton amour débordant, merci pour tes bons petits plats, merci pour tes prières, merci pour nous avoir appris que nous, nous ne renonçons jamais.

Harhour merci de m'accepter comme je suis, merci de supporter toutes mes grossiéretés. Merci pour ta gentillesse, ta générosité, ton amour et ton soutien. Merci pour ton si beau sourire, ta douceur et ta gaieté. Merci pour ton courage, la force que tu as su puiser, tous les efforts que tu as déployé récemment. Merci de tenir bon.

Billy, ou deverais-je dire Douchka, Louppy, Bouly, ou Kardaddou, merci d'être dans ma vie, aussi insupportable et agaçante que tu puisses être, merci de me parler tous les jours, merci de croire en moi, merci de me pousser à dépasser mes peurs et mes limites, merci de me réconforter dans mes moments les plus retranchés, merci de me faire rire pour un rien, merci de subir le supplice de m'écouter raler tous les jours pour des futilités, merci de compter avec mon caractère lunatique d'autant plus exaspérant dans mes instants de stress, merci pour toutes ces discussions aussi improbables et surréalistes l'une que l'autre. Merci pour tous ces projets délirants auxquels on aspire ensemble. Merci enfin de me donner l'illusion que tu es encore ce tout petit être qui illumine ma vie.

Mamma, je ne te l'ai jamais avouée, mais je te crois dotée de super pouvoirs. Je pense que tu peux tout faire, tout résoudre, trouver toutes les réponses ... À mes yeux tu es cette femme exceptionnellement forte, battante, passionnée par son travail, qui réussit tout ce qu'elle entreprend. Tu nous a appris, à mes soeurs et à moi , qu'on pouvait tout faire, tout avoir ou presque pourvu d'avoir confiance en nos capacités. Tu m'as toujours impressionnée avec ton immense culture. Tu as fait en sorte de me transmettre depuis toute jeune les valeurs de liberté et ta soif de justice qui te sont aussi chères. Merci de m'avoir appris qui j'étais et d'où je venais. Derrière ce caractère tranché se cache aussi une femme extrêmement sensible (même si Ayoub lui, ne s'en doute pas), aimante dont la priorité a toujours été sa famille. Tu as su traverser les épreuves les plus difficiles et parce que nous sommes tes petites filles, tu nous as tout pardonné. Merci, je te dois tout et même plus.

Pappa, grâce à toi, j'ai découvert le monde féerique et intriguant des Mathématiques. Tu as été mon premier professeur. Je l'ai toujours niée, mais mon souhait le plus fort c'était de te ressembler.

Tout ce que j'ai toujours voulu c'est que tu sois fier de moi. Merci d'avoir été mon mentor, mon modèle. Merci pour avoir été la personne la plus humble, intègre et honnête que je connaisse. Merci d'être aussi têtu. Merci pour ta tendresse et ton amour inconditionnel. Merci d'avoir supporté mes caprices, merci d'avoir veillé sur moi, merci pour les innombrables sacrifices, sans jamais te plaindre, merci d'avoir voulu le meilleur pour nous. Merci pour m'avoir appris que la vie c'était avant tout une question de personnes, de personnes exceptionnelles comme toi, qui ont su gravir les échelons en partant de rien. Ta persévérance et ta tenacité m'impressionneront toujours. Merci pour être aussi rassurant et sécurisant. Merci pour être tout simplement mon papa.

En prenant le risque de tomber dans le cliché, je voudrais remercier tous les braves gens qui sont morts pendant la révolution tunisienne juste pour nous donner l'espoir pendant un court instant, que oui, on peut rêver.

Résumé

L'objet de cette thèse est d'établir des théorèmes limites locaux pour des marches aléatoires réfléchies sur $\mathbb{N}$. La théorie des fluctuations des marches aléatoires et la factorisation de Wiener-Hopf y jouent un rôle important.

On développera dans la première partie une approche classique que l'on appliquera à l'étude des marches aléatoires sur $\mathbb{R}^+$ avec réflexions non élastiques en 0.

Dans la deuxième partie, on explicitera une méthode différente qui fait intervenir des outils algébriques, d'analyse complexe et des techniques de factorisation utilisant de manière essentielle les fonctions génératrices. Cette approche a été développée il y a une cinquantaine d'année pour l'étude de marches de Markov, elle sera présentée dans cette partie dans le cas des marches aléatoires à pas i.i.d. où un certain nombre de simplifications apparaissent et sera ensuite utilisée pour étudier les marches aléatoires sur $\mathbb{N}$ avec réflexions élastiques ou non élastiques en zéro.

Finalement, dans la dernière partie, nous mettons en place les outils nécessaires pour établir une factorisation de Wiener-Hopf dans un cadre markovien afin d'étudier les fluctuations des marches de Markov sur $\mathbb{Z}$; nous reprenons des travaux anciens dont les démonstrations méritaient d'être détaillées, l'objectif à moyen terme étant d'appliquer les méthodes algébriques décrites ci-dessus pour l'étude de marches de Markov réfléchies sur $\mathbb{N}$.

Mots clés : Chaînes de Markov, marches aléatoires, théorème limite local, théorie des fluctuations des marches aléatoires, factorisation de Wiener-Hopf, marches aléatoires absorbées, marches aléatoires réfléchies, marches de Markov.

Abstract

The purpose of this thesis is to establish some local limit theorems for reflected random walks on $\mathbb{N}$. The fluctuations theory and the Wiener-Hopf factorization play a crucial role.

We will develop in the first part a classical approach that we will apply to the study of random walks on $\mathbb{R}^+$ with non-elastic reflections at zero.

In the second part, we will explicit a different method which involves algebraic tools, complex analysis and factorization techniques, using in an essential way generating functions. These approach was developed 50 years ago to cover Markov walks, it will be presented in this part in the case of random walks with i.i.d jumps where many simplifications appear and will be then used to study random walks on $\mathbb{N}$ with either elastic or non-elastic reflections at zero.

Finally, in the last part, we will introduce the useful tools to establish a Wiener-Hopf factorization in a markovian framework in order to study the fluctuations of Markov walks on $\mathbb{Z}$. We investigate some previous work, especially some proofs that warranted to be more detailed, with a medium-term objective of applying the algebraic tools described above to study reflected Markov walks on $\mathbb{N}$.

Keywords : Markov chains, random walks, local limit theorems, fluctuations theory, Wiener-Hopf factorization, absorbed random walks, reflected random walks, Markov walks.

Table des matières

Glossaire

Avertissement

Dans les énoncés, les lettres c, C, η désignent des constantes réelles positives dont la valeur est susceptible de changer d'une ligne à l'autre.

Abréviations

– **i.i.d** : indépendantes et identiquement distribuées.
– **p.s** : presque-sûrement
– **a.s** : almost surely

Conventions et symboles

On désigne par $\mathbb{N}^*$ respectivement $\mathbb{Z}^{*-}$ l'ensemble des entiers strictement positifs respectivement strictement négatifs.

Si $M = (M_{i,j})_{i,j}$ est une matrice et n un entier $\geqslant 1$, on note M^n la puissance d'ordre n de M et M^n_{ij} le coefficient de M^n à l'intersection de la ligne i et de la colonne j.

Si $v = (v_1, \cdots, v_N) \in \mathbb{C}^N$, on note $\mathrm{Diag(v_1, \cdots, v_N)}$, la matrice diagonale, ayant pour coefficients $(v_1, \cdots, v_N)$ sur la diagonale.

On désigne par $B(o, 1)$ la boule unité ouverte du plan complexe c'est à dire l'ensemble défini par $\{z \in \mathbb{C} \text{ tel que } |z| < 1\}$ et par $\overline{B(o, 1)}$ la boule unité fermée donnée par $\{z \in \mathbb{C} \text{ tel que } |z| \leqslant 1\}$; la sphère unité définie par $\{z \in \mathbb{C} \text{ tel que } |z| = 1\}$ sera notée $\mathbb{S}^1$ ou $S(0.1)$.

Pour une mesure μ sur $\mathbb{R}$, on note $(\mu^\star)^n$ la convolée n fois de μ.

Pour alléger, si I est un intervalle et μ est une mesure sur $\mathbb{R}$, on note $\mu(I) := \mu I$.

Le triplet $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ désigne un espace probabilisé et $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de variables aléatoires définies sur $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ à valeurs dans un ensemble E. Lorsque $X_0 = x$ $\mathbb{P}$. p.s, la mesure de probabilité sur $(\Omega, \mathcal{F})$ conditionnée à l'évènement $[X_0 = x]$ est notée $\mathbb{P}_x$ et l'espérance conditionelle correspondante $\mathbb{E}_x$. Lorsque l'ensemble E est dénombrable et si ν est une mesure de probabilité sur E, on pose

$$\mathbb{P}_\nu := \sum_{x\in E} \nu(x)\mathbb{P}_x.$$

Soit X une variable aléatoire définie sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ à valeurs dans $\mathbb{R}$. On considère une partie A mesurable de $\mathbb{R}$ et une fonction f positive définie sur $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ qui soit X mesurable ; on note

$$\mathbb{E}(X \in A; f) := \mathbb{E}(f 1_{\{X \in A\}}).$$

Introduction

L'objet de cette thèse est d'établir des théorèmes limites locaux pour certaines chaînes de Markov proches des marches aléatoires sur $\mathbb{Z}$. La théorie des fluctuations des marches aléatoires et la factorisation de Wiener-Hopf y jouent un rôle important. On traitera essentiellement le cas de la marche aléatoire avec des réflexions élastiques ou non élastiques en zéro sur $\mathbb{N}$; cela constitue les deux premières parties de la thèse. Dans le cas de la marche sur $\mathbb{N}$ avec réflexions non élastiques en zéro, l'approche développée est valide dans le contexte général d'une marche à valeurs dans $\mathbb{R}^+$; elle fait l'objet du premier chapitre. L'autre exemple fondamental, à savoir celui de la marche avec réflexions élastiques en zéro, est d'un point de vue combinatoire beaucoup plus compliqué et l'on restreint l'étude au cas de la marche sur $\mathbb{N}$ en utilisant notamment de façon essentielle les fonctions génératrices. Dans la dernière partie de cette thèse, nous introduisons les outils nécessaires pour établir une factorisation de Wiener-Hopf dans un cadre markovien afin d'étudier les fluctuations des marches de Markov et le comportement des chaînes dont les transitions sont proches des marches aléatoires.

On considère une suite $(Y_i)_{i\geqslant 1}$ de variables aléatoires définies sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ à valeurs dans $\mathbb{Z}$. On suppose que les variables Y_i sont i.i.d de loi commune μ. On désigne par $(S_n)_{n\geqslant 0}$ la marche aléatoire correspondante partant de zéro, définie par $S_0 = 0$ et $S_n = Y_1 + \cdots + Y_n$ pour tout $n \geqslant 1$.
On note S_μ le support de la loi μ et $\widehat{\mu}$ sa fonction génératrice définie pour $z \in \mathbb{C}$ par

$$\widehat{\mu}(z) = \mathbb{E}(z^{S_1}) = \sum_{y\in\mathbb{Z}} \mu(y) z^y.$$

On fixe $r > 0$ et deux réels α, β tels que $0 < \alpha < 1 < \beta$. On aura à considérer les hypothèses suivantes.

Hypothèses 0.0.1.
A *: La loi μ est apériodique*[1] *(pour tout $x \in \mathbb{Z}$, le sous-groupe engendré par $x + \mathrm{S}_\mu$ est égal à $\mathbb{Z}$).*
$\boldsymbol{S^{*-}}$ *: $\mu(\mathbb{Z}^{*-}) > 0$.*
M(r) *: $\mathbb{E}(|Y_1|^r) < +\infty$.*
C *: La loi μ satisfait* **M(1)** *et $\mathbb{E}(Y_1) = \sum_{y\in\mathbb{Z}} y\mu(y) = 0$.*
$\boldsymbol{M(\mathbf{exp})([\alpha,\beta])}$ *: La mesure μ a des moments exponentiels d'ordres α et β (i.e. $\sum_{y\in\mathbb{Z}} \alpha^y \mu(y) < +\infty$ et $\sum_{y\in\mathbb{Z}} \beta^y \mu(y) < +\infty$).*
$\mathbf{min}([\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}])$ *:* $\boldsymbol{M(\mathbf{exp})([\alpha,\beta])}$ *est satisfaite et la fonction $\widehat{\mu}$ définie sur $[\alpha, \beta]$ atteint son mini-*

1. On trouve aussi la terminologie de fortement apériodique, notamment employée par Spitzer dans [40], nous préférons cependant utiliser le terme d'apériodicité ; en effet, la loi μ satisfait l'hypothèse **A** si et seulement si la marche aléatoire $(S_n)_{n\geqslant 0}$ est apériodique sur $\mathbb{Z}$ au sens des chaînes de Markov.

mum dans $]\alpha, \beta[$.

La première hypothèse est une hypothèse classique quand il s'agit d'étudier le comportement asymptotique des probabilités de retour de la marche aléatoire de loi μ. En outre, l'étude des marches réfléchies qu'on abordera n'a de l'intérêt que lorsque $\mu(\mathbb{Z}^{*-}) > 0$. Notamment, on se placera dans le cas où $\mathbb{E}(Y_1) \geqslant 0$, en particulier, lorsque la loi μ est différente de la masse en Dirac en zéro notée δ_0, on a aussi $\mu(\mathbb{N}^*) > 0$. La dernière hypothèse apparaîtra lorsqu'on étudiera le cas où la loi μ n'est pas centrée, on utilisera alors une technique dite de relativisation qui nécessite que cette hypothèse soit satisfaite.
Le résultat suivant a été établi dans les années 50 par différents auteurs ; on renvoit au livre de Spitzer [40] pour des références précises.

Théorème 0.0.1. *[40]*

• *Si la loi μ satisfait les hypothèses* **A**, **M(2)** *et* **C**, *alors il existe une constante $C > 0$ telle que pour tout $y \in \mathbb{N}$*

$$\mathbb{P}(S_n = y) \sim Cn^{-1/2} \quad \textit{lorsque} \quad n \to +\infty.$$

• *Si la loi μ satisfait les hypothèses* **A** *et* $\mathbf{min([\alpha,\beta])}$ *pour tous $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, avec $\mathbb{E}(Y_1) \neq 0$, alors, il existe une constante $R = R_\mu > 1$ et pour tout $y \in \mathbb{N}$, une constante $C_y > 0$ telles que*

$$\mathbb{P}(S_n = y) \sim C_y R^{-n} n^{-1/2} \quad \textit{lorsque} \quad n \to +\infty.$$

Soit r_0 le réel dans l'intervalle $]\alpha, \beta[$ où la fonction $t \mapsto \hat{\mu}(t)$ atteint son minimum. Dans l'énoncé précédent, la constante C vaut $\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}}$ et pour tout $y \in \mathbb{Z}$, la constante $C_y = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}} \exp(r_0 y)$. En outre, on a $R = R_\mu = \frac{1}{\min\limits_{t\in[\alpha,\beta]} \widehat{\mu}(t)}$.

0.1 Factorisation de Wiener-Hopf : l'approche classique

Un aspect essentiel de la théorie des fluctuations des marches aléatoires est l'étude du processus de renouvellement formé par les maxima et minima successifs de la suite $(S_n)_{n\geqslant 0}$ et les temps d'atteinte correspondants. Ces processus sont appelés processus de records ascendants et descendants de $(S_n)_{n\geqslant 0}$. De nombreuses études existent sur ce sujet : citons par exemple Baxter [3], Spitzer [40]... Les techniques employées utilisent de façon essentielle la factorisation de Wiener-Hopf et les identités qui en découlent ; celles-ci permettent de relier le processus de record à la loi de la marche aléatoire.
Soyons plus précis et introduisons les temps d'arrêt suivants :

$$\begin{aligned}
\tau^{+} &= \inf\{n \geqslant 1/S_n \geqslant 0\},\\
\tau^{*-} &= \inf\{n \geqslant 1/S_n < 0\},\\
\tau^{*+} &= \inf\{n \geqslant 1/S_n > 0\},\\
\tau^{-} &= \inf\{n \geqslant 1/S_n \leqslant 0\},
\end{aligned}$$

avec la convention $\inf \emptyset = \infty$. Plus généralement, pour tout $r \in \mathbb{Z}$, on pose

$$\begin{aligned}
\tau^{\geqslant r} &= \inf\{n \geqslant 1/S_n \geqslant r\},\\
\tau^{<r} &= \inf\{n \geqslant 1/S_n < r\},\\
\tau^{>r} &= \inf\{n \geqslant 1/S_n > r\},\\
\tau^{\leqslant r} &= \inf\{n \geqslant 1/S_n \leqslant r\}.
\end{aligned}$$

De façon générale, pour tout temps d'arrêt T relativement à la filtration canonique $(\mathcal{F}_n)_{n\geqslant 0}$, on pose

$$S_T = \sum_{n\in\mathbb{N}} S_n 1_{\{T=n\}}.$$

Remarquons que la variable aléatoire S_T n'est définie que sur l'événement $\{T < +\infty\}$, par suite, lorsqu'on écrira S_T, on sous-entend que l'on se restreint à l'événement $\{T < +\infty\}$. On a le

Théorème 0.1.1. *(Iglehart)[24] (Le Page et Peigné)[30]*

(i). *On suppose que la loi μ satisfait les hypothèses* $\mathbf{A}$, $\mathbf{M(2)}$ *et* $\mathbf{C}$ *; il existe alors une constante $D > 0$ et pour tout $y \in \mathbb{Z}$ une constante $C_y > 0$ telles que*

$$\mathbb{P}(\tau^+ > n) \sim \frac{D}{\sqrt{n}} \quad \text{et} \quad \mathbb{E}\Big(\tau^+ > n,\ S_n = y\Big) \sim \frac{C_y}{n^{3/2}} \quad \textit{lorsque} \quad n \to +\infty.$$

(ii). *Dans le cas* **décentré** $\mathbb{E}(Y_i) > 0$*, on suppose que la loi μ satisfait l'hypothèse* $\mathbf{A}$ *et admet des moments exponentiels de tous les ordres ; c'est-à-dire qu'elle vérifie* $\boldsymbol{M(\exp)([\alpha,\beta])}$ *pour tous $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Il existe une constante $R = R_\mu > 1$, une constante D et pour tout $y \in \mathbb{N}$, une constante $C_y > 0$ telles que*

$$\mathbb{E}\Big(\tau^+ > n,\ S_n = y\Big) \sim C_y \frac{\rho^n}{n^{3/2}} \quad \textit{lorsque} \quad n \to +\infty \quad \text{et}$$

$$\mathbb{P}(\tau^+ > n) \sim D\frac{\rho^n}{\sqrt{n}} \quad \textit{lorsque} \quad n \to +\infty.$$

On renvoit à [30] pour une démonstration détaillée reposant sur la factorisation de Wiener-Hopf, le théorème local limite classique et utilisant de façon cruciale un lemme élémentaire présenté par Iglehart [24]. Nous consacrerons une grande partie de cette thèse à la factorisation de Wiener-Hopf et à ses conséquences sur la théorie des fluctuations des marches aléatoires.

0.1.1 La factorisation de Wiener-Hopf

On suppose que μ vérifie l'hypothèse $\mathbf{M(1)}$.

(i). Pour tous nombre complexe $s \in \overline{B(0,1)}$ et tout réel θ, on a

$$1 - s\mathbb{E}(e^{i\theta S_1}) = \Big(1 - \mathbb{E}(s^{\tau^{*-}} e^{i\theta S_{\tau^{*-}}})\Big)\Big(1 - \mathbb{E}(s^{\tau^+} e^{i\theta S_{\tau^+}})\Big) \tag{0.1.1}$$

avec

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left(s^{\tau^{*-}} e^{i\theta S_{\tau^{*-}}}\right) &= \sum_{y<0}\sum_{n\geqslant 1} s^n \mathbb{P}(S_1 \geqslant 0, ..., S_{n-1} \geqslant 0, S_n = y) e^{i\theta y},\\
\text{et} \quad \mathbb{E}(s^{\tau^+} e^{i\theta S_{\tau^+}}) &= \sum_{y\geqslant 0}\sum_{n\geqslant 1} s^n \mathbb{P}(S_1 < 0, ..., S_{n-1} < 0, S_n = y) e^{i\theta y}.
\end{aligned}$$

(ii). Si de plus $0 < s < 1$, on a

$$\begin{aligned}
\frac{1}{1 - \mathbb{E}(s^{\tau^{*-}} e^{i\theta S_{\tau^{*-}}})} &= 1 + \sum_{y<0}\sum_{n\geqslant 1} s^n \mathbb{P}(S_1 < 0, ..., S_{n-1} < 0, S_n = y) e^{i\theta y} \qquad (0.1.2)\\
&= \sum_{n\geqslant 0} s^n \mathbb{E}(\tau^+ > n; e^{i\theta S_n}),\\
\text{et} \quad \frac{1}{1 - \mathbb{E}(s^{\tau^+} e^{i\theta S_{\tau^+}})} &= 1 + \sum_{y\geqslant 0}\sum_{n\geqslant 1} s^n \mathbb{P}(S_1 \geqslant 0, ..., S_{n-1} \geqslant 0, S_n = y) e^{i\theta y} \qquad (0.1.3)\\
&= \sum_{n\geqslant 0} s^n \mathbb{E}(\tau^{*-} > n; e^{i\theta S_n}).
\end{aligned}$$

La factorisation de Wiener-Hopf possède une forme d'unicité qu'on explicitera ultérieurement. En utilisant l'identité $1 - s\mathbb{E}(e^{i\theta S_1}) = \exp\Big(-\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{s^n}{n}\mathbb{E}(e^{i\theta S_n})\Big)$ et en écrivant

$$\exp\Big(-\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{s^n}{n}\mathbb{E}(e^{i\theta S_n})\Big) = \exp\Big(-\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{s^n}{n}\mathbb{E}(e^{i\theta S_n}, S_n \geqslant 0)\Big)\exp\Big(-\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{s^n}{n}\mathbb{E}(e^{i\theta S_n}, S_n < 0)\Big),$$

on peut identifier chacun des facteurs et obtenir

$$\begin{aligned} \exp\Big(\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{s^n}{n}\mathbb{E}(e^{i\theta S_n}, S_n \geqslant 0)\Big) &= \Big(1 - \mathbb{E}(s^{\tau^+} e^{i\theta S_{\tau^+}})\Big)^{-1} \\ &= \sum_{n\geqslant 0} s^n \mathbb{E}(\tau^{*-} > n; e^{i\theta S_n}) \qquad (0.1.4) \\ \text{et} \quad \exp\Big(\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{s^n}{n}\mathbb{E}(e^{i\theta S_n}, S_n < 0)\Big) &= \Big(1 - \mathbb{E}(s^{\tau^{*-}} e^{i\theta S_{\tau^{*-}}})\Big)^{-1} \\ &= \sum_{n\geqslant 0} s^n \mathbb{E}(\tau^{+} > n; e^{i\theta S_n}). \qquad (0.1.5) \end{aligned}$$

Les identités (0.1.4) et (0.1.5) sont appelées identités de Spitzer. Celui-ci les a utilisées afin d'établir des théorèmes limites locaux pour le processus de records dans des cas particuliers comme celui où la loi μ est symétrique.

Les estimations du théorème 0.1.1 jouent un rôle crucial dans plusieurs domaines, notamment dans l'étude des processus de branchement en environnement aléatoire (Geiger et Kersting [19], Guivarc'h [23] et Kozlov [26]) et celle des marches aléatoires sur des groupes non uni-modulaires (Le Page et Peigné [31]). Pour décrire le comportement asymptotique des probabilités de retour des marches aléatoires réfléchies sur $\mathbb{N}$, nous aurons besoin d'étudier des processus de records construits à partir des temps d'arrêt $\tau^{<r}$ et $\tau^{\geqslant r}$, pour $r \in \mathbb{Z}$, et des positions correspondantes de la marche aléatoire. En 1995, Lalley [28] a démontré dans le cas où les Y_i sont des variables aléatoires discrètes centrées et bornées inférieurement que pour tout $r, y \in \mathbb{Z}$, il existe une constante $C_{r,y} > 0$ on a

$$\mathbb{P}(\tau^{>r} = n, S_n = y) \sim \frac{C_{r,y}}{n^{3/2}} \quad \text{lorsque} \quad n \to +\infty.$$

Nous avons prolongé cette étude en nous affranchissant de l'hypothèse de la borne inférieure sur le support de μ. Cette démarche s'inspire aussi du travail d'Iglehart [24], Le Page et Peigné [30](sections 2 et 3) ; elle diffère en plusieurs points de celle de Lalley notamment par le choix d'induire ce processus aux instants de réflexions.
On démontre principalement les deux résultats suivants, répondant en particulier à une question de Lalley [28].

Théorème. 1.3.3 *[15] On suppose que la loi μ satisfait les hypothèses* **A**, **M(2)** *et* **C**. *Pour tout $r \in \mathbb{Z}$ et tout $y \in]r, +\infty[$, il existe une constante $C_{r,y} > 0$ telle que*

$$\mathbb{E}[\tau^{>r} = n, S_n = y] \sim \frac{C_{r,y}}{n^{3/2}} \quad \textit{lorsque} \quad n \to +\infty.$$

Théorème. 1.3.4 *[15] On suppose que la loi μ satisfait les hypothèses* **A**, **M(2)** *et* **C**. *Pour tout $r \in \mathbb{Z}$ et tout $y \in]r, +\infty[$, il existe une constante $C_{r,y} > 0$ telle que*

$$\mathbb{E}[\tau^{>r} > n,\ S_n = y)] \sim \frac{C_{r,y}}{n^{3/2}} \quad \textit{lorsque} \quad n \to +\infty.$$

0.1.2 La marche aléatoire sur $\mathbb{N}$ avec réflexions non élastiques en zéro

On considère une suite $(Y_i)_{i\geqslant 1}$ de variables aléatoires définies sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ à valeurs dans $\mathbb{Z}$. On suppose que les variables aléatoires $Y_1, Y_2, \ldots$ sont i.i.d de loi commune μ.

La *marche aléatoire sur* $\mathbb{N}$ *de loi* μ *avec réflexions non élastiques en zéro* (dite aussi de façon plus courte *marche aléatoire sur* $\mathbb{N}$ *absorbée en* 0) est la chaîne de Markov $(X_n)_{n\geqslant 0}$ définie par la relation de récurrence suivante

$$\forall\, n \geqslant 0 \quad X_{n+1} = \max(X_n + Y_{n+1}, 0), \tag{0.1.6}$$

où X_0 est une variable aléatoire définie sur l'espace $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ à valeurs dans $\mathbb{N}$. Il s'agit d'un système dynamique aléatoire qui apparaît de façon très naturelle en théorie des files d'attente et dont les propriétés de récurrence ont été étudiées notamment par Peigné et Woess [36]. En utilisant les résultats concernant les fluctuations des marches aléatoires sur $\mathbb{Z}$, on obtient le

Théorème. 1.3.5*[15]*

(i). *On suppose que la loi* μ *satisfait les hypothèses* **A**, **M(2)** *et* **C**. *Alors pour tout* $y \in \mathbb{N}$, *il existe une constante* $C_y > 0$ *telle que pour tout* $x \in \mathbb{N}$, *on ait*

$$\mathbb{P}_x(X_n = y) \sim \frac{C_y}{\sqrt{n}} \quad \textit{lorsque} \quad n \to +\infty.$$

(ii). *Si la loi* μ *vérifie les hypothèses* **A** *et* $\mathbf{min([\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}])}$ *avec* $0 < \alpha < 1 < \beta$ *et si de plus,* $\mathbb{E}(Y_1) > 0$, *alors il existe une constante* $R = R_\mu > 1$ *et pour tous* $x, y \in \mathbb{N}$ *des constantes* $C_{xy} > 0$ *telles que*

$$\mathbb{P}_x(X_n = y)) \sim \frac{C_{x,y} R^{-n}}{n^{3/2}} \quad \textit{lorsque} \quad n \to +\infty.$$

Soulignons que ce résultat est valide pour des marches aléatoires sur $\mathbb{R}$, la démonstration est donnée dans le chapitre 1. Le fait qu'il y ait absorption en 0 simplifie singulièrement l'étude : dans le cas de réflexions élastiques nous serons amenés à nous restreindre au cas discret et proposer une approche radicalement différente qui nécessite malheureusement des moments exponentiels. Par souci pédagogique, nous développerons à titre d'exemple cette autre approche dans le cas de la marche absorbée puis, au prix de difficultés techniques importantes, son extension au cas de la marche avec réflexions élastiques. En d'autres termes, le lecteur trouvera dans cette thèse deux démonstrations du théorème ci-dessus, l'une donnée dans l'article [15] présenté dans la section 1.3 et l'autre développée dans la section 2.6.

0.2 Une approche alternative

À toute suite de nombres complexes $(a_n)_{n\geqslant 0}$, on peut associer la série formelle, dite aussi fonction génératrice, définie par $f(s) = \sum_{n\geqslant 0} a_n s^n$, où $s \in \mathbb{C}$. Typiquement, les suites $(a_n)_{n\geqslant 0}$ considérées seront les probabilités d'une certaine suite d'événements.
Rappelons quelques propriétés élémentaires des fonctions génératrices de probabilités de transition. Considérons un noyau de transition q d'une chaîne de Markov irréductible $(X_n)_{n\geqslant 0}$ sur $\mathbb{Z}$. La fonction de Green G associée à q est définie pour $x, y \in \mathbb{Z}$ et $s \in \mathbb{C}$ par

$$G(s|x,y) = \sum_{n=0}^{+\infty} q^n(x,y) s^n.$$

Les fonctions $s \mapsto G(s|x,y)$ sont des séries entières à coefficients positifs de rayon de convergence supérieur ou égal à 1. L'irréductibilité de la chaîne de Markov de noyau q entraîne que les séries entières $G(\cdot|x,y)$ pour $x,y \in \mathbb{Z}$ ont toutes le même rayon de convergence

$$R(q) = \frac{1}{\limsup\limits_{n\to+\infty} (q^n(x,y))^{1/n}}. \tag{0.2.1}$$

Le réel positif $\rho(q) := \frac{1}{R(q)}$ est appelé rayon spectral du noyau q.
S'agissant de séries entières à coefficients positifs, le rayon de convergence est "la plus petite singularité" de la fonction $s \mapsto G(s|x,y)$; dans le cas que nous serons amenés à étudier, l'hypothèse **A** entraînera que le réel R sera la seule singularité dans le disque de convergence $\overline{D(0,R)}$.
La méthode développée dans cette partie consiste à utiliser des outils algébriques et/ou analytiques dans le but d'obtenir des informations sur la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et plus particulièrement sur son comportement asymptotique lorsque $n \to +\infty$. Les théorèmes taubériens généralement utilisés dans ce type d'étude requiérant des hypothèses de monotonie dont on ne dispose pas ici, on utilisera plutôt deux approches, l'une plus classique dite de Darboux et la seconde qui est une formulation plus moderne de la première due à Flajolet et à Odlyzko [16].

On appliquera ces résultats principalement à la détermination de l'asymptotique de la probabilité de retour des marches aléatoires avec réflexions sur $\mathbb{N}$. On adoptera la méthode suivante. Dans le but de démontrer que les suites $(a_n)_{n\geqslant 0}$ considérées vérifient les énoncés des théorèmes de Darboux ou d'Odlyzko-Flajolet, on écrira des équations fonctionnelles vérifiées par les fonctions génératrices temporelles $f(s) = \sum\limits_{n\geqslant 0} a_n s^n$, lesquelles laisseront paraître des termes liés aux processus de records.
Ces termes seront vus comme des coefficients de séries génératrices spatiales intervenant dans la factorisation de Wiener-Hopf. Il s'agira ensuite d'énoncer la factorisation de Wiener-Hopf dans un cadre algébrique et fonctionnel plus large selon une approche développée par Presman [34]. En exploitant les relations algébriques obtenues, on étudiera les singularités des fonctions génératrices spatiales. On appliquera dans un second temps la formule de Cauchy afin de déduire le type de singularité des fonctions génératrices temporelles qui nous intéressent.
Signalons que cette méthode est différente de l'approche trajectorielle développée par Denisov et Wachtel [12] ; c'est la forme de "la plus petite singularité" des fonctions génératrices qui nous intéresse ici ; L'hypothèse de finitude de moments exponentiels paraît essentielle dans cettea approche. On redémontre notamment le théorème **1.3.5**, mais sous la condition des moments exponentiels et non juste d'ordre 2 comme dans le chapitre 1.

0.2.1 La factorisation de Presman

Nous introduisons ici le cadre algébrique de [34] mis en en place par Presman pour étendre la factorisation de Wiener-Hopf à un cadre markovien. Nous la présentons dans un premier temps dans le cas i.i.d classique.
Soit $\mathcal{R}$ une algèbre de Banach d'élément neutre e. On note $\mathcal{E}$ l'opérateur identité sur $\mathcal{R}$ et $\mathcal{P}$ un projecteur sur $\mathcal{R}$ vérifiant la relation suivante

$$(\mathcal{P}f)(\mathcal{P}g) = \mathcal{P}[(\mathcal{P}f)g + f(\mathcal{P}g) - fg]. \tag{0.2.2}$$

On pose $\mathcal{N}^* = \mathcal{E} - \mathcal{P}$, l'opérateur $\mathcal{N}^*$ vérifie alors la relation (0.2.2).

Définition 0.2.1. *Soit $a \in \mathcal{R}$. On dit que l'élément $e-a$ admet une* **factorisation canonique** *de $e-a$ relativement à $\mathcal{P}$ s'il existe $b,c \in \mathcal{R}$, tels que*

$$\begin{array}{lrcl} i) & e-a & = & (e-\mathcal{P}b)(e-\mathcal{N}^*c), \\ ii) & (e-\mathcal{P}b)^{-1} & = & e+\mathcal{P}c, \\ iii) & (e-\mathcal{N}^*c)^{-1} & = & e+\mathcal{N}^*b. \end{array} \tag{0.2.3}$$

Dans ce cas, on dit que b et c fournissent une $\mathcal{P}$-factorisation canonique de $e - a$ notée $\mathcal{P}.f.c$ en abrégé.

Les éléments $e - \mathcal{P}b$ et $e - \mathcal{N}^*c$ sont les facteurs de la $\mathcal{P}.f.c$ et sont appelés respectivement **partie strictement négative** *et* **partie positive** *de la factorisation.*

Exemple 0.2.1. *On va illustrer à travers l'exemple de la marche "aux plus proches voisins" le lien entre la théorie des fluctuations des marches aléatoires et la $\mathcal{P}.f.c$. Soient r, p, q trois réels dans $\mathbb{R}^+$ tels que $r + p + q = 1$. Pour tout $x \in \mathbb{Z}$, on désigne par δ_x la mesure de Dirac en x et on pose*

$$\mu = r\delta_0 + p\delta_1 + q\delta_{-1}.$$

Pour tout $z \in \mathbb{C}^*$, on a

$$\mathbb{E}(z^{Y_1}) = r + pz + \frac{q}{z}.$$

Pour éviter des problèmes de périodicité, on suppose que $r > 0$ et on se place dans le cas où $\mathbb{E}(Y_1) > 0$ c'est-à-dire $p - q > 0$. On a alors $\mathbb{P}(\tau^+ < +\infty) = 1$ et $0 < \mathbb{P}(\tau^{*-} < +\infty) < 1$ (voir le chapitre 1, proposition 1.1.2). On note $\mu^+ := \mathbb{P}_{S_{\tau^+}}$ et $\mu^{*-} := \mathbb{P}_{S_{\tau^{*-}}}$; la mesure μ^+ est une loi de probabilité, en revanche, la mesure μ^{*-} est une sous-probabilité. On montre aisément que

$$\mu^+ = (1 - p)\delta + p\delta_1 \ \text{ et } \ \mu^{*-} = \frac{q}{p}\delta_{-1}.$$

Pour tout $z \in \mathbb{C}^*$, on a

$$\mathbb{E}(z^{S_{\tau^+}}) = 1 - p + pz \ \text{ et } \ \mathbb{E}(z^{S_{\tau^{*-}}}) = \frac{q}{pz}.$$

La factorisation de Wiener-Hopf s'écrit alors

$$1 - (r + pz + \frac{q}{z}) = (p - pz)\left(1 - \frac{q}{pz}\right).$$

Soient α, β deux réels tels que $0 < \frac{q}{p} < \alpha < \beta < 1$. On note $\mathcal{A}_{[\alpha,\beta]}$ l'ensemble

$$\mathcal{A}_{[\alpha,\beta]} = \{re^{i\theta} / \ r \in [\alpha, \beta], \ \theta \in [0, 2\pi]\}. \tag{0.2.4}$$

On considère l'algèbre de Banach $\mathcal{R} = \mathcal{V}_{[\alpha,\beta]}$ des fonctions de la variable complexe définies sur $\mathcal{A}_{[\alpha,\beta]}$ de la forme $\phi_{\mathbf{a}} : z \mapsto \sum_{y\in\mathbb{Z}} a_y z^y$ telles que $\mathbf{a} = (a_y)_{y\in\mathbb{Z}}$ vérifie $\sum_{y\in\mathbb{Z}} a_y \alpha^y < +\infty$ et $\sum_{y\in\mathbb{Z}} a_y \beta^y < +\infty$. Pour tout $z \in \mathcal{A}_{[\alpha,\beta]}$, on pose

$$\mathcal{P}B_z := 1 - p + pz \qquad \text{et} \qquad \mathcal{N}^*C_z := \frac{q}{pz}.$$

Puisque $\frac{q}{p} < \alpha \leqslant |z| \leqslant \beta < 1$, on a

$$\frac{1}{p(1 - z)} = \frac{1}{p}(1 + z + z^2 + \cdots) \qquad \text{et} \qquad \frac{1}{1 - \frac{q}{pz}} = 1 + \frac{q}{pz} + \left(\frac{q}{pz}\right)^2 + \cdots.$$

On pose alors

$$1 + \mathcal{P}C_z := \frac{1}{p}(1 + z + z^2 + \cdots) \qquad \text{et} \qquad 1 + \mathcal{N}^*B_z := 1 + \frac{q}{pz} + \left(\frac{q}{pz}\right)^2 + \cdots$$

On peut à présent reconstruire les fonctions

$$\mathcal{B}_z := \mathcal{P}B_z + \mathcal{N}^*B_z = 1 - p + pz + \frac{q}{pz} + \left(\frac{q}{pz}\right)^2 + \cdots \in \mathcal{R}$$

et

$$\mathcal{C}_z := \mathcal{P}C_z + \mathcal{N}^*C_z = \frac{1}{p} - 1 + \frac{1}{p}(1 + z + z^2 + \cdots) + \frac{q}{pz} \in \mathcal{R},$$

définies pour tout $z \in \mathcal{A}_{[\alpha,\beta]}$. *Par construction, les fonctions* $z \mapsto B_z$ *et* $z \mapsto C_z$ *fournissent une* $\mathcal{P}.f.c$ *à la fonction* $z \mapsto A_z := 1 - r - pz - \frac{q}{z}$ *dans l'algèbre de Banach* $\mathcal{R}$.

Dans ce qui suit, on fait varier la $\mathcal{P}.f.c$ en fonction d'un paramètre complexe s.

Définition 0.2.2. *Une fonction* γ *de la variable complexe, prenant ses valeurs dans une algèbre de Banach* $\mathcal{R}$ *sera dite analytique au voisinage d'un point* s_0 *si elle est développable en série entière au voisinage de* s_0. *Plus précisément, si il existe* $\epsilon > 0$ *et* $(\gamma_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *une suite d'éléments de* $\mathcal{R}$ *tels que pour* $|s - s_0| < \epsilon$, *la série* $\sum_{n\geqslant 0} \gamma_n(s - s_0)^n$ *converge normalement dans* $\mathcal{R}$ *vers la fonction* $\gamma(s)$.

On fixe dans ce qui suit deux constantes positives $\alpha \leqslant \beta$.
Dans les applications qui nous intéressent, le choix de l'algèbre $\mathcal{R}$ sera déterminant. Pour tout intervalle $I \subset [0, +\infty[$, on note $\mathcal{A}_I$ l'anneau de $\mathbb{C}$ défini par

$$\mathcal{A}_I = \{re^{i\theta} / \ r \in I,\ \theta \in [0, 2\pi]\}. \tag{0.2.5}$$

On considère à présent l'ensemble $\mathcal{S}_I$ des suites $\mathbf{a} = (a_y)_{y\in\mathbb{Z}}$ à valeurs complexes telles que

$$\forall r \in I, \quad \sum_{y\in\mathbb{Z}} |a_y| r^y < +\infty$$

et on introduit l'ensemble $\mathcal{V}_I$ des fonctions de la variable complexe de la forme $\phi_{\mathbf{a}} : z \mapsto \sum_{y\in\mathbb{Z}} a_y z^y$ telles que $\mathbf{a} = (a_y)_{y\in\mathbb{Z}} \in \mathcal{S}_I$.
Les algèbres de Banach $\mathcal{R}$ qu'on considérera seront ces ensembles $\mathcal{V}_I$ où I est un intervalle fermé borné de $\mathbb{R}$. Le résultat qui suit permettra d'étudier la régularité des fonctions génératrices à partir de la réécriture de la factorisation de Wiener-Hopf en terme de la factorisation canonique au sens de Presman.

Lemme 0.2.1. *[34] Soit* $s \mapsto A_s$ *une fonction analytique sur un voisinage* $O(s_0)$ *de* $s_0 \in \mathbb{C}$ *et à valeurs dans* $\mathcal{V}_{[\alpha,\beta]}$. *On suppose qu'il existe* $\gamma \in [\alpha, \beta]$ *tel que pour tout* $s \in O(s_0)$, *il existe* $B_s, C_s \in \mathcal{V}_{[\gamma]}$ *qui fournissent une* $\mathcal{P}.f.c$ *de* $I - A_s$ *dans* $\mathcal{V}_{[\gamma]}$. *Alors la fonction* $s \mapsto \mathcal{P}B_s$ *(resp.* $s \mapsto \mathcal{N}^*C_s$*) est analytique sur* $O(s_0)$ *et à valeurs dans* $\mathcal{P}\mathcal{V}_{[\alpha]}$ *(resp.* $\mathcal{N}^*\mathcal{V}_{[\beta]}$*).*

Les fonctions $s \mapsto A_s$, $s \mapsto B_s$ et $s \mapsto C_s$ auxquelles on appliquera le lemme 0.2.1 seront les facteurs de la factorisation de Wiener-Hopf. La fonction $s \mapsto A_s$ sera directement liée à la fonction génératrice de la loi $\hat{\mu}$ et ses propriétés de régularité seront simples à déterminer. Le lemme 0.2.1 permettra alors d'étudier les singularités des fonctions $s \mapsto \mathcal{P}B_s$ et $s \mapsto \mathcal{N}^*C_s$ qui sont quant à elles liées aux processus de records de la marche aléataoire.
La section qui suit présente un exemple fondamental illustrant l'intérêt de cette approche.

0.2.2 La marche aléatoire sur $\mathbb{N}$ avec réflexions élastiques en zéro

On considère une suite $(Y_i)_{i\geqslant 1}$ de variables aléatoires définies sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ à valeurs dans $\mathbb{Z}$. On suppose que les variables aléatoires $Y_1, Y_2, \ldots$ sont indépendantes et identiquement distribuées de loi commune μ. On désigne par $(S_n)_{n\geqslant 0}$ la marche aléatoire correspondante partant de zéro, définie par $S_0 = 0$ et $S_n = Y_1 + \cdots + Y_n$ pour tout $n \geqslant 1$.

La marche aléatoire sur $\mathbb{N}$ avec réflexions élastiques en zéro a été étudiée par Feller [17] et introduite pour la première fois par Schelling dans le contexte des réseaux téléphoniques [41]. Elle

est définie par :
pour X_0 une variable aléatoire donnée définie sur $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ à valeurs dans $\mathbb{N}$, on pose

$$\forall n \geqslant 0, \quad X_{n+1} = |X_n + Y_{n+1}|. \tag{0.2.6}$$

Il s'agit d'une chaîne de Markov sur $\mathbb{N}$ de matrice de transition $Q = (q(x,y))_{x,y\in\mathbb{N}}$ donnée par

$$\forall x, y \geqslant 0 \quad q(x,y) = \begin{cases} \mu(y-x) + \mu(y+x) & \text{si} \quad y \neq 0, \\ \mu(-x) & \text{si} \quad y = 0. \end{cases}$$

Boudiba en (1985) [6] a étudié l'existence d'une mesure invariante pour la chaîne $(X_n)_{n\geqslant 0}$ sur $\mathbb{N}$. Par ailleurs, Boudiba (1986) [8], Leguesdron (1989) [29] et Benda (1998) [5] (voir aussi [35]) ont étudié son unicité (à une constante multiplicative près) sous des hypothèses de moments sur μ et en supposant notamment $\mathbb{E}(Y_i) \leqslant 0$.

On suppose que μ vérifie les hypothèse **A** et $\mathbf{M(1)}$, on peut montrer que si $\mathbb{E}(Y_1) < 0$ alors la chaîne $(X_n)_{n\geqslant 0}$ est récurrente positive ; en revanche, lorsque $\mathbb{E}(Y_1) > 0$, elle est transiente. Dans le cas centré ($\mathbb{E}(Y_1) = 0$), sous la condition supplémentaire $\boldsymbol{M(\frac{3}{2})}$, la chaîne $(X_n)_{n\geqslant 0}$ est récurrente nulle (voir [37] (2002) et [35] (2008)).

En adoptant la démarche de la section précédente, on se propose d'énoncer le théorème local limite pour la marche aléatoire réfléchie sur $\mathbb{N}$. Lorsque $\mathbb{E}(Y_1) < 0$, la chaîne $(X_n)_{n\geqslant 0}$ est récurrente positive ; elle admet par conséquent une unique mesure invariante et le théorème limite local est immédiat. On supposera donc que $\mathbb{E}(Y_1) \geqslant 0$. L'approche qu'on développera a été utilisée par Lalley dans le contexte général des marches aléatoires $(X_n)_{n\geqslant 0}$ avec une zone de réflexion finie [27] ; ceci signifie qu'il existe un entier $K \geqslant 0$ tel que les transitions $q(x,\cdot)$ de la chaîne $(X_n)_{n\geqslant 0}$ sont celles d'une marche aléatoire classique pour tous les $x \geqslant K$; entraînant en particulier que $\mu(x) = 0$ pour tout $x < -K$, hypothèse dont on cherche à s'affranchir ici. L'existence d'une zone de réflexion finie a permis à Lalley de considérer les instants successifs où la marche $(X_n)_{n\geqslant 0}$ s'approche de l'origine. Ces approches se faisant à pas bornés, il obtient ainsi par induction une chaîne de Markov et le théorème de Perron-Frobenius apparaît alors comme un argument crucial pour l'étude de la chaîne réfléchie. Précisons à présent son résultat.

Théorème 0.2.1. *(Lalley) [27] On suppose que les Y_i sont bornées inférieurement et que la loi μ satisfait les hypothèses* **A** *et* $\boldsymbol{M(\exp)([\alpha,\beta])}$ *pour tous $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.*

(i). *Si $\mathbb{E}(Y_1) = 0$, alors pour tous $x, y \in \mathbb{N}$, il existe des constantes $C_{x,y} \in \mathbb{R}^{*+}$ telles que*

$$\mathbb{P}_x(X_n = y) \sim \frac{C_{x,y}}{\sqrt{n}} \quad \textit{lorsque} \quad n \to +\infty.$$

(ii). *Si $\mathbb{E}(Y_1) > 0$, alors pour tous $x, y \in \mathbb{N}$, il existe une constante $R = R_\mu > 1$ et pour tous $x, y \in \mathbb{N}$ des constantes $C_{xy} > 0$ telles que*

$$\mathbb{P}_x(X_n = y) \sim C_{x,y}\frac{R^{-n}}{n^{3/2}} \quad \textit{lorsque} \quad n \to +\infty.$$

Lorsque le support de la mesure μ n'est pas borné inférieurement deux écueils apparaissent rapidement : tout d'abord la "marche d'approche" de l'origine n'est pas à espace d'état fini et l'utilisation d'un théorème de type Perron-Frobenius se complique singulièrement, d'autre part une réflexion peut arriver à tout instant, ce qui réduit l'analogie entre la marche classique et la marche réfléchie. Pour prendre en compte ces deux difficultés, nous proposons d'induire la marche aux instants de réflexions. Nous généralisons le théorème précédent comme suit. Soulignons que dans le cas centré, nous précisons que la constante $C_{x,y}$ qui apparaît dans le théorème de Lalley ne dépend en fait que de y. Autrement dit, le fait que dans ce cas les réflexions ont lieu $\mathbb{P}$.p.s en un temps fini entraîne une perte de mémoire progressive par rapport aux conditions initiales.

Théorème. 2.7.2 Théorème local limite pour la marche réfléchie sur $\mathbb{N}$ *[14] On suppose que la loi μ satisfait l'hypothèse* **A** *et qu'il existe $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ avec $\alpha < 1 < \beta$ tels que μ vérifie* $\boldsymbol{M}(\mathbf{exp})([\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}])$.

(i). *Si $\mathbb{E}(Y_1) = 0$, alors pour tout $y \in \mathbb{N}$, il existe une constante $C_y \in \mathbb{R}^{*+}$ telle que pour tout $x \in \mathbb{N}$, on ait*
$$\mathbb{P}_x(X_n = y) \sim \frac{C_y}{\sqrt{n}} \quad \textit{lorsque} \quad n \to +\infty.$$

(ii). *Si $\mathbb{E}(Y_1) > 0$ et si de plus la loi μ vérifie l'hypothèse* $\mathbf{min}([\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}])$, *alors il existe une constante $R = R_\mu > 1$ et pour tous $x, y \in \mathbb{N}$ des constantes $C_{x,y} > 0$ telles que*
$$\mathbb{P}_x(X_n = y) \sim C_{x,y} \frac{R^{-n}}{n^{3/2}} \quad \textit{lorsque} \quad n \to +\infty.$$

0.3 Le cas des marches de Markov

On se propose dans cette partie de généraliser les résultats obtenus précédemment lorsque les pas Y_i ne sont plus forcément i.i.d, en se plaçant dans un cadre plus général où leurs transitions sont gouvernées par une chaîne de Markov à valeurs dans un espace d'état fini.

Soit $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé. On fixe $N \geqslant 1$ et on pose $E = \{1, 2, ..., N\}$. On considère une chaîne de Markov $\xi = (\xi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ irréductible et apériodique sur E de matrice de transition $P = (P(k,l))_{k,l\in E}$. On note ν l'unique mesure de probabilité invariante de $(\xi_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Par ailleurs, on considère une famille $\mu = (\mu_{k,l})_{k,l\in E}$ de mesures de probabilité sur $\mathbb{Z}$ et une suite $Y = (Y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de variables aléatoires définies sur $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ à valeurs dans $\mathbb{Z}$ telles que $(\xi_n, Y_n)_{n\geqslant 0}$ soit une chaîne de Markov sur $E \times \mathbb{Z}$ de probabilité de transition $\overline{P}$ donnée par :
$$\begin{aligned} \forall\ (k,x),(l,y) \in E\times\mathbb{Z}, \quad \overline{P}\left((k,x),(l,y)\right) &= \mathbb{P}(\xi_{n+1} = l, Y_{n+1} = y / \xi_n = k, Y_n = x) \\ &= P(k,l)\mu_{kl}(y). \end{aligned}$$

Les transitions de la suite $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ étant gouvernées par celles de la suite $(\xi_n)_{n\in\mathbb{N}}$, on dit que $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est semi-markovienne. On note enfin $S_0 = 0$ et pour tout $n \geqslant 1$, on pose $S_n = \sum_{j=1}^{n} Y_j$.
La suite $(\xi_n, S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une chaîne de Markov de probabilités de transition $\widetilde{P}$ définies pour tous $(k,x),(l,y) \in E \times \mathbb{Z}$ par
$$\widetilde{P}\left((k,x),(l,x+y)\right) = \mathbb{P}(S_{n+1} = x+y, \xi_{n+1} = l / S_n = x, \xi_n = k) = P(k,l)\mu_{k,l}(y).$$

Cette suite est appelée "marche de Markov" ou "marche aléatoire à pas markoviens sur $E\times\mathbb{Z}$". Nous allons étendre les résultats de la section 0.2 à ce cadre, dans le but de généraliser les théorèmes **1.3.1** et **2.7.2** au cas où les Y_i sont en dépendance markovienne. On adapte dans ce contexte les hypothèses considérées dans les deux parties précédentes et on gardera les mêmes appelations ; afin de ne pas alourdir le texte, nous ne les redéfinirons pas ici ; elles seront explicitées dans le troisième chapitre de cette thèse.
Dans [21], Guivarc'h énonce un théorème limite local qu'il applique ensuite à l'étude des propriétés de récurrence de la suite $(S_n)_{n\geqslant 0}$. Il obtient notamment le résultat suivant :

Théorème 0.3.1. *[21] On suppose que le couple (P, μ) est* **apériodique**, *centré et que la mesure $\mu_{k,l}$ admet un moment d'ordre 2 pour tous $k, l \in E$ vérifiant $P(k,l) > 0$. Il existe alors une constante $C > 0$ telle que*
$$\mathbb{P}_\nu(S_n = 0) \sim \frac{C}{n^{1/2}} \quad \textit{lorsque} \quad n \to +\infty.$$

On s'inspirera fortement de son travail afin d'étendre au cas markovien des hypothèses classiques de type "adaptation" et "apériodicité". Ces hypothèses seront lues à travers les propriétés spectrales de l'opérateur de Laplace P_z qui est la généralisation de la transformée de Laplace dans ce contexte. Nous nous concentrerons sur des théorèmes limites locaux pour les processus de records de la suite $(S_n)_{n\geqslant 0}$, tout en précisant la position de la chaîne $(\xi_n)_{n\geqslant 0}$. De nombreux travaux existent dans cette direction, on peut citer en particulier ceux de Presman [33] (1969) ; dans le cadre qui nous intéresse, ses résultats peuvent être énnocés comme suit :

Théorème 0.3.2. *[33] On suppose que le couple (P,μ) est* **apériodique** *et satisfait les hypothèses* $\boldsymbol{M(exp, [\alpha,\beta])}$ *et* **C**. *Pour tous $k,l\in E$, il existe une constante $C_{k,l}\geqslant 0$ telle que*

$$\sqrt{\pi}n^{\frac{1}{2}}\mathbb{P}_k(\xi_n=l, S_1>S_n, S_2>S_n,\cdots,S_{n-1}>S_n)\underset{n\to+\infty}{\to} C_{k,l}.$$

Théorème 0.3.3. *[33] On suppose que le couple (P,μ) est* **apériodique** *et satisfait les hypothèses* $\boldsymbol{M(exp, [\alpha,\beta])}$ *et* **C**. *Pour tous $y\in\mathbb{Z}^{*-}$ et $k,l\in E$, il existe une constante $C_{y,k,l}\geqslant 0$ telle que*

$$2\sqrt{\pi}n^{\frac{3}{2}}\mathbb{P}_k(\xi_n=l, S_1>S_n,\cdots,S_{n-1}>S_n, S_n<0; S_n=y)\underset{n\to+\infty}{\to} C_{y,k,l}.$$

Théorème 0.3.4. *[33] On suppose que le couple (P,μ) est* **apériodique** *et satisfait les hypothèses* $\boldsymbol{M(exp, [\alpha,\beta])}$ *et* **C**. *Pour tous $y\in\mathbb{Z}^{*-}$ et $k,l\in E$, il existe une constante $C_{y,k,l}\geqslant 0$ telle que*

$$2\sqrt{\pi}n^{\frac{3}{2}}\mathbb{P}_k(\xi_n=l, S_1>S_n, S_2>S_n,\cdots,S_{n-1}>S_n, S_n=y)\underset{n\to+\infty}{\to} C_{y,k,l}.$$

Ces énoncés sont peu développés dans la littérature, nous les regrouperons et les redémontrerons dans le cadre qui nous intéresse. Nous proposerons en particulier une condition suffisante, portant sur le support des mesures $\mu_{k,l}, k,l\in E$, assurant la stricte positivité des constantes apparaissant dans ces énoncés sur laquelle Presman [33] ne conclut pas. Cette condition s'énonce comme suit

Hypothèses 0.3.1.
Binf *Il existe une loi de probabilité $\underline{\mu}$ sur $\mathbb{Z}$ vérifiant l'hypothèse* **A** *et une constante $c_0>0$ telle que, pour tous $k,l\in E$ et $y\in\mathbb{Z}$, on ait*

$$\mu_{k,l}(y)\geqslant c_0\underline{\mu}(y),\quad \textit{avec}$$

$\underline{\mu}(-S)>0$ *et* $\underline{\mu}(\mathbb{Z}^{*+})>0$.
Bsup *Il existe une loi de probabilité $\underline{\mu}$ sur $\mathbb{Z}$ vérifiant l'hypothèse* **A** *et une constante $c_0>0$ telle que, pour tous $k,l\in E$ et $y\in\mathbb{Z}$, on ait*

$$\mu_{k,l}(y)\geqslant c_0\underline{\mu}(y),\quad \textit{avec}$$

$\underline{\mu}(M)>0$ *et* $\underline{\mu}(\mathbb{Z}^{*-})>0$.

Soulignons de nouveau que les résultats de ce chapitre sont déjà connus pour la plupart et constituent pour nous un terrain préparatoire pour l'étude des marches réfléchies dans un cadre markovien.

Chapitre 1

La factorisation de Wiener-Hopf : l'approche classique

1.1 Préliminaires

On rappelle ici quelques notions et résultats classiques en théorie des fluctuations des marches aléatoires, cela servira de préliminaires pour l'article [14] que nous présentons dans la section 1.3. Soulignons que les résultats qui y sont énoncés sont obtenus pour des marches aléatoires à valeurs dans $\mathbb{R}$. Par soucis d'homogénéité avec le reste de la thèse, les rappels de ce paragraphe sont donnés pour des marches aléatoires à valeurs dans $\mathbb{Z}$.
On considère une suite $(Y_i)_{i\geqslant 1}$ de variables aléatoires définies sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ à valeurs dans $\mathbb{Z}$. On suppose que les Y_i sont i.i.d de loi commune μ. La filtration canonique associée à la suite $(Y_i)_{i\geqslant 1}$ est notée $(\mathcal{F}_n)_{n\geqslant 1}$. On désigne par $(S_n)_{n\geqslant 0}$ la marche aléatoire partant de zéro et de loi μ définie par $S_0 = 0$ et $S_n = Y_1 + \cdots + Y_n$ pour tout $n \geqslant 1$.
On note S_μ le support de la loi μ et $\hat{\mu}$ sa fonction génératrice définie formellement $z \in \mathbb{C}$ par

$$\hat{\mu}(z) = \mathbb{E}(z^{S_1}) = \sum_{y\in\mathbb{Z}} \mu(y) z^y.$$

Pour tout $r > 0$ et tous α, β tels que $0 < \alpha \leqslant \beta$, on introduit les hypothèses suivantes.

Hypothèses 1.1.1.
A *: La loi μ est apériodique*[1] *: pour tout $x \in \mathbb{Z}$, le sous groupe engendré par $x + \mathrm{S}_\mu$ est égal à $\mathbb{Z}$.*
$\boldsymbol{S^{*-}}$ *: $\mu(\mathbb{Z}^{*-}) > 0$.*
M(r) *: $\mathbb{E}(|Y_1|^r) < +\infty$.*
C *: La loi μ satisfait* **M(1)** *et $\mathbb{E}(Y_1) = \sum_{y\in\mathbb{Z}} y\mu(y) = 0$.*
$\boldsymbol{M(\exp)([\alpha,\beta])}$ *: La mesure μ a des moments exponentiels d'ordres α et β (i.e. $\sum_{y\in\mathbb{Z}} \alpha^y \mu(y) < +\infty$ et $\sum_{y\in\mathbb{Z}} \beta^y \mu(y) < +\infty$).*
$\mathbf{min}([\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}])$ *: $\boldsymbol{M(\exp)([\alpha,\beta])}$ est satisfaite et la fonction $\widehat{\mu}$ définie sur $[\alpha,\beta]$ atteint son minimum dans $]\alpha,\beta[$.*

1. On trouve aussi la terminologie de "*fortement apériodique*", notamment employée par Spitzer dans [40], nous préférons cependant utiliser le terme d'apériodicité ; en effet, la loi μ satisfait l'hypothèse **A** si et seulement si la marche aléatoire $(S_n)_{n\geqslant 0}$ est apériodique sur $\mathbb{Z}$ au sens des chaînes de Markov.

Remarque 1.1.1. *La notion d'apériodicité se traduit en termes de fonctions génératrices : la loi μ satisfait l'hypothèse* **A** *si et seulement si pour tout $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| = 1$, on a*

$$|\hat{\mu}(z)| = 1 \Leftrightarrow z = 1.$$

De nombreuses études existent concernant la théorie des fluctuations des marches aléatoires : on renvoit le lecteur notamment aux livres de Spitzer (1964), Feller (1971) ; ils se sont intéressés notamment à la classification en marches transientes/oscillantes et à l'obtention de théorèmes limites locaux,... L'approche la plus classique repose sur la factorisation de Wiener-Hopf ; c'est celle-ci que nous privilégions ici.
Les chaînes de Markov que nous étudierons dans ce chapitre sont fortement liées à la marche aléatoire restreinte à la demi-droite réelle $[0, +\infty[$; une forme de dualité entre l'ensemble $[0, +\infty[$ et la demi droite $]-\infty, 0[$ apparaît de façon naturelle, on sera donc aussi amené à étudier la marche aléatoire forcée à rester dans $]-\infty, 0[$. On se restreint ici au cas de la dimension 1 pour lequel de nombreuses questions restent toujours sans réponse [12] ; cela constituera aussi un champ d'essai pour les dimensions supérieures où très peu de résultats existent.
Introduisons dans un premier temps quelques notations classiques.

Notations 1.1.1. *Soit τ^{*-} l'instant où la marche aléatoire $(S_n)_{n\geqslant 0}$ atteint pour la première fois l'ensemble $\mathbb{Z}^{*-}$:*

$$\tau^{*-} := \inf\{n \geqslant 1/S_n < 0\} \quad \textit{avec la convention} \quad \inf \emptyset = +\infty.$$

De manière analogue, on considère aussi les variables

$$\begin{aligned} \tau^{+} &= \inf\{n \geqslant 1 | S_n \geqslant 0\}, \\ \tau^{*+} &= \inf\{n \geqslant 1 | S_n > 0\}, \\ \tau^{-} &= \inf\{n \geqslant 1 | S_n \leqslant 0\}, \end{aligned}$$

avec la convention $\inf \emptyset = \infty$. *Plus généralement, pour tout $r \in \mathbb{Z}$, on pose*

$$\begin{aligned} \tau^{<r} &= \inf\{n \geqslant 1 | S_n < r\}, \\ \tau^{\geqslant r} &= \inf\{n \geqslant 1 | S_n \geqslant r\}, \\ \tau^{>r} &= \inf\{n \geqslant 1 | S_n > r\}, \\ \tau^{\leqslant r} &= \inf\{n \geqslant 1 | S_n \leqslant r\}. \end{aligned}$$

Ces variables sont à valeurs dans $\mathbb{N} \bigcup \{+\infty\}$ et sont des temps d'arrêt relativement à la filtration canonique $(\mathcal{F}_n)_{n\geqslant 0}$; on dira que ce sont les premiers instants de records descendants strict (resp. descendants, ascendants stricts, ascendants) de $(S_n)_{n\geqslant 0}$.
On introduit à présent la suite des temps successifs de records descendants stricts de la marche aléatoire $(S_n)_{n\geqslant 0}$ notée $(T_n^{*-})_{n\geqslant 0}$ et définie par $T_0^{*-} = 0$ et $T_{n+1}^{*-} = \inf\{k > T_n^{*-}/S_k < S_{T_n^{*-}}\}$ pour tout $n \geqslant 0$, en particulier, on a $T_1^{*-} = \tau^{*-}$. De la même façon, on considérera la suite de records successifs descendants (resp. ascendants, ascendants stricts) notée $(T_n^{-})_{n\geqslant 0}$ (resp. $(T_n^{*+})_{n\geqslant 0}$,$(T_n^{+})_{n\geqslant 0}$).
Par ailleurs, nous verrons qu'il est important de préciser la position de la marche aléatoire lorsqu'elle pénètre pour la première fois dans $\mathbb{Z}^{*-}$. De façon générale, pour tout temps d'arrêt T relativement à la filtration canonique $(\mathcal{F}_n)_{n\geqslant 0}$, on pose

$$S_T = \sum_{n\in\mathbb{N}} S_n 1_{\{T=n\}}.$$

Remarquons que la variable aléatoire S_T n'est définie que sur l'événement $\{T < +\infty\}$, par suite, lorsqu'on écrira S_T, on sous-entend que l'on se restreint à l'événement $\{T < +\infty\}$. On considère

aussi la mesure μ^{*-} définie par $\mu^{*-}(y) = \mathbb{P}(S_{\tau^{*-}} = y, \tau^{*-} < +\infty)$ pour tout $y \in \mathbb{Z}$. Lorsque la variable τ^{*-} est $\mathbb{P}-$presque sûrement finie, la mesure μ^{*-} correspond à la loi de la variable aléatoire $S_{\tau^{*-}}$. De même, on peut définir les mesures μ^-, μ^{*+} et μ^+.
Pour simplifier, on supposera désormais que la loi μ satisfait l'hypothèse **A** . On a le résultat suivant :

Proposition 1.1.1. *[17] On suppose que la variable aléatoire τ^{*-} est $\mathbb{P}-$presque-sûrement finie. Pour tout $n \geqslant 1$, on pose $D_n = S_{T_n^{*-}} - S_{T_{n-1}^{*-}}$ et $D_0 = 0$. La suite $(D_n)_{n\geqslant 1}$ est alors une suite de variables aléatoires i.i.d de loi commune μ^{*-}, en particulier, la suite $(S_{T_n^{*-}})_{n\geqslant 0} = (D_1 + \cdots + D_n)_{n\geqslant 0}$ est une marche aléatoire de loi μ^{*-}.*

On peut clairement énoncer un résultat analogue en remplacant τ^{*-} par τ^- (resp. τ^{*+},τ^+). On utilisera souvent le fait suivant appelé parfois "principe de dualité" qui relie l'étude de la marche conditionnée à rester dans $[0, +\infty[$ au potentiel de la mesure μ^+.

Fait 1.1.1. *[17] Principe de dualité*

$$\text{Pour tout } w \geqslant 0, \text{ on a } \quad \sum_{n\geqslant 0} \mathbb{P}(\tau^{*-} > n, S_n = w) = \sum_{n\geqslant 0} \mathbb{P}(S_{T_n^+} = w).$$

La proposition 1.1.1 combinée avec le principe de dualité entraîne

$$\sum_{n\geqslant 0} \mathbb{P}(\tau^{*-} > n, S_n = w) = \sum_{n\geqslant 0} \mathbb{P}(S_{T_n^+} = w) = \sum_{n\geqslant 0} (\mu^+)^{*n}(w), \tag{1.1.1}$$

où $(\mu^+)^{*n}$ est la puissance $n^{ème}$ de convolution de μ^+. On note alors U^+ le potentiel de μ^+ défini par

$$\forall w \in \mathbb{Z}, \quad U^+(w) := \sum_{n\geqslant 0} (\mu^+)^{*n}(w).$$

Les temps de record de la marche aléatoire $(S_n)_{n\geqslant 0}$ pouvant prendre la valeur $+\infty$, on cherche à dégager une condition en terme de moments, sous lesquelles ces variales aléatoires sont $\mathbb{P}-$presque sûrement finies. On a la

Proposition 1.1.2. *[17] On suppose que la mesure μ satisfait l'hypothèse* **M(1)**.
- *Si $\mathbb{E}(Y_1) > 0$, alors $\mathbb{E}(\tau^+) = \mathbb{E}(Y_1)\mathbb{E}(\tau^+) < +\infty$ et $\mathbb{E}(S_{\tau^+}) < +\infty$; en particulier la variable τ^+ est finie $\mathbb{P}-$presque sûrement, en revanche $\mathbb{P}(\tau^{*-} < +\infty) < 1$.*
- *Si $\mathbb{E}(Y_1) < 0$, alors $\mathbb{E}(\tau^{*-}) < +\infty$ et $\mathbb{E}(S_{\tau^{*-}}) = \mathbb{E}(Y_1)\mathbb{E}(\tau^{*-}) < +\infty$; en particulier la variable τ^{*-} est finie $\mathbb{P}-$presque surement, en revanche $\mathbb{P}(\tau^+ < +\infty) < 1$.*
- *Si $\mathbb{E}(Y_1) = 0$, alors $\mathbb{P}(\tau^+ < +\infty) = \mathbb{P}(\tau^{*-} < +\infty) = 1$ et $\mathbb{E}(\tau^{*-}) = \mathbb{E}(\tau^+) = +\infty$.*

On sera amené par la suite à supposer que la mesure μ satisfait l'hypothèse de type moments exponentiels $\boldsymbol{M(\exp)([\alpha, \beta])}$, avec $0 < \alpha < 1 < \beta$, le résultat suivant stipule dans ce cas que la mesure μ^{*-} satisfait aussi $\boldsymbol{M(\exp)([\alpha, \beta])}$.

Proposition 1.1.3. *Soient $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tels que $0 < \alpha < 1 < \beta$. On suppose que μ satisfait l'hypothèse $\boldsymbol{M(\exp)([\alpha, \beta])}$ et que $\mathbb{P}(\tau^{*-} < +\infty) = 1$, avec $\mathbb{P}(N^*) > 0$, la mesure μ^{*-} satisfait alors aussi $\boldsymbol{M(\exp)([\alpha, \beta])}$.*

Démonstration. Puisque la mesure μ^{*-} est à support dans $\mathbb{Z}^{*-}$, il suffit de montrer que $\sum_{y\in\mathbb{Z}} \mu(y)r^y < +\infty$ pour $r = \alpha$. On a

$$\begin{aligned}
\sum_{y<0} \mu^{*-}(y)r^y &= \sum_{y<0} \mathbb{P}(S_{\tau^{*-}} = y)r^y \\
&= \sum_{n\geqslant 1}\sum_{y<0} \mathbb{P}(S_1 \geqslant 0, \cdots, S_{n-1} \geqslant 0, S_n = y)r^y \\
&= \sum_{n\geqslant 1}\sum_{y<0}\sum_{w\geqslant 0} \mathbb{P}(S_1 \geqslant 0, \cdots, S_{n-1} = w)\mu(y-w)r^y \\
&= \sum_{n\geqslant 1}\sum_{y<0}\sum_{w\geqslant 0} \mathbb{P}(\tau^{*-} > n-1, S_{n-1} = w)\mu(y-w)r^y \\
&= \sum_{y<0}\sum_{w\geqslant 0}\sum_{n\geqslant 0} \mathbb{P}(\tau^{*-} > n, S_n = w)\mu(y-w)r^y.
\end{aligned}$$

D'après l'identité (1.1.1), on a

$$\sum_{n\geqslant 0} \mathbb{P}(S_n = w, \tau^{*-} > n) = U^+(w).$$

D'après le principe du maximum, on sait que $U^+(w) \leqslant U^+(0)$ pour tout $w \geqslant 0$. Or puisque $\mathbb{P}(N^*) > 0$, on a $\mathbb{E}(S_{\tau^+}) > 0$, le potentiel U^+ est donc celui d'une marche transiente, d'où $U^+(0) = C < +\infty$.
Il vient

$$\sum_{y<0} \mu^{*-}(y)r^y \leqslant C\sum_{y<0}\sum_{w\geqslant 0} \mu(y-w)r^y \leqslant C\sum_{w\geqslant 0} r^w \sum_{k<0} \mu(k)r^k.$$

Cette dernière somme étant finie puisque $0 < r = \alpha < 1$ et puisque μ admet des moments exponentiels de tous les ordres. $\square$

1.2 Théorèmes limites locaux pour les processus de records

Afin d'énoncer les théorèmes 1.3.3 et 1.3.4, on s'inspire du travail d'Iglehart [24] et de Le Page et Peigné dans [30]. Les techniques employées se basent essentiellement sur la factorisation de Wiener-Hopf et les identités qui en découlent, en particulier les identités de Spitzer rappelées dans l'introduction de cette thèse. On utilise aussi de façon fondamentale le lemme suivant présenté par Iglehart. Nous parvenons ainsi à généraliser les résultats de Lalley dans [28] qui a considéré le cas où les Y_i sont des variables aléatoires discrètes bornées inférieurement.

Lemme 1.2.1. *[24] (Iglehart, 1974)*

(i). *Soient $(\alpha_n)_{n\geqslant 0}$ et $(a_n)_{n\geqslant 0}$ deux suites de réels positifs ou nuls telles que*

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \alpha_n s^n = \exp\left(\sum_{n=1}^{+\infty} a_n s^n\right).$$

Si la suite $(n^{3/2}a_n)_{n\geqslant 0}$ est bornée, il en est de même pour la suite $(n^{3/2}\alpha_n)_{n\geqslant 0}$.

(ii). *Soient $(\alpha_n)_{n\geqslant 0}$ et $(\beta_n)_{n\geqslant 0}$ deux suites de réels positifs telles qu'il existe des constantes $A, b >$*

0 *satisfaisant*

$$\begin{array}{ll} i) & \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \alpha_n = A, \\ ii) & \textit{la suite} \quad (n\alpha_n)_{n\geqslant 0} \quad \textit{est bornée et} \\ iii) & \beta_n \sim \dfrac{b}{\sqrt{n}} \quad \textit{lorsque} \quad n \to +\infty. \end{array}$$

On a alors

$$\sum_{k=0}^{n} \alpha_k \beta_{n-k} \sim \frac{Ab}{\sqrt{n}} \quad \textit{lorsque} \quad n \to +\infty.$$

1.2.1 Application à la marche aléatoire sur $\mathbb{R}^+$ avec absorption en zéro

La marche aléatoire absorbée apparaît naturellement dans plusieurs problèmes, notamment en théorie des files d'attente avec un seul serveur. Considérons par exemple une file d'attente et notons $I_1, I_2, \cdots$ les durées des temps qui s'écoulent entre deux arrivées successives ; les dates d'arrivée des clients successifs sont donc $0, I_1 + I_2, \cdots$. On désigne par $D_1, D_2, \cdots$ les durées de service des différents clients. On suppose que les suites $(I_n)_{n\geqslant 1}$ et $(D_n)_{n\geqslant 1}$ sont des suites de variables aléatoires i.i.d et que ces deux suites sont indépendantes entre elles.
On pose $X_0 = 0$ et pour tout $n \geqslant 1$, on note X_n le temps d'attente du n$^{\text{ème}}$ client. Si ce client arrive à l'instant t, il sera servi à l'instant $t + X_n$ et repartira à l'instant $t + X_n + D_n$; le client $n+1$ arrive quant à lui à l'instant $t + I_{n+1}$ et son temps d'attente dans la file est nul si $X_n + D_n - I_{n+1} \leqslant 0$ et égal à $X_n + D_n - I_{n+1}$ sinon. Pour tout $n \geqslant 0$, on pose alors, $Y_{n+1} = D_n - I_{n+1}$; la suite $(Y_n)_{n\geqslant 1}$ est une suite de variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées et le processus $(X_n)_{n\geqslant 0}$ s'écrit

$$\forall n \geqslant 0, \quad X_{n+1} = \max(X_n + Y_{n+1}, 0). \tag{1.2.1}$$

1.2.1.1 Irréductibilté et apériodicité de la marche absorbée

La marche aléatoire absorbée en 0 (ou marche avec réflexions non élastiques en 0) est un système dynamique aléatoire dont les propriétés de récurrence ont été notamment étudiées par Peigné et Woess [36]. Dans ce qui suit, on en donne un bref aperçu.

Proposition 1.2.1. *On suppose que la mesure μ satisfait l'hypothèse* **A**. *La marche absorbée $(X_n)_{n\geqslant 0}$ de loi μ définie par la relation (1.2.1) est alors irréductible et apériodique sur* $\mathbb{N}$.

Démonstration. On fixe $x, y \in \mathbb{N}$. La marche aléatoire $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de loi μ étant irréductible et apériodique sur $\mathbb{Z}$, il existe $n_0 = n_0(x, y) \in \mathbb{N}^*$ tel que pour tout $n \geqslant n_0$, on puisse trouver un chemin Γ_1 de probabilité strictement positive de longueur n reliant x à y. Puisque les accroissements sont indépendants, on peut réordonner les pas de telle sorte à avoir d'abord tous les pas vers la droite, puis ceux vers la gauche. Ainsi, le nouveau chemin obtenu Γ_2 n'entre pas dans $]-\infty, 0[$ et a la même longueur et la même probabilité que Γ_1. D'où, il existe $n_0(x, y) \in \mathbb{N}^*$ tel que pour tout $n \geqslant n_0$, on peut trouver un chemin de longueur n inclus dans $[0, +\infty[$ qui mène de x à y et donc de probabilité strictement positive . Autrement dit,

$$\mathbb{P}_x(\tau^{*-} > n, S_n = y) > 0.$$

Or

$$\mathbb{P}_x(X_n = y) \geqslant \mathbb{P}_x(\tau^{*-} > n, X_n = y) = \mathbb{P}_x(\tau^{*-} > n, S_n = y) > 0.$$

Ainsi pour tous $x, y \in \mathbb{N}$, il existe $n_0(x, y) \in \mathbb{N}^*$ tel que $\mathbb{P}_x(X_n = y) > 0$ pour tout $n \geqslant n_0$ et la chaîne de Markov $(X_n)_{n\geqslant 0}$ est alors irréductible et apériodique sur $\mathbb{N}$. □

À présent, on s'intéresse aux propriétés de récurrence de la marche absorbée.

1.2.1.2 Récurrence de la marche absorbée

La classification de la chaîne de Markov $(X_n)_{n\geqslant 0}$ se décline selon le signe de $\mathbb{E}(Y_1)$. On a la

Proposition 1.2.2. *On suppose que la mesure μ satisfait les hypothèses* $\mathbf{A}$ *et* $\mathbf{M(1)}$. *La marche absorbée $(X_n)_{n\geqslant 0}$ de loi μ est*
- *récurrente positive lorsque* $\mathbb{E}(Y_1) < 0$,
- *récurrente nulle lorsque* $\mathbb{E}(Y_1) = 0$,
- *transiente lorsque* $\mathbb{E}(Y_1) > 0$.

Démonstration. D'après la proposition 1.2.1, la marche absorbée $(X_n)_{n\geqslant 0}$ est irréductible sur $\mathbb{N}$. Pour étudier ses propriétés de récurrence/transience, on introduit le temps de retour en 0 de la marche absorbée $\mathbf{a} := \inf\{n \geqslant 1/X_n = 0\}$ (avec la convention $\inf \emptyset = +\infty$) ; la variable aléatoire $\mathbf{a}$ est le premier instant d'absorption de la marche $(X_n)_{n\geqslant 0}$. Lorsque $X_0 = 0$, ce temps de retour en 0 coïncide avec le premier temps de record descendant τ^- de la marche classique $(S_n)_{n\geqslant 0}$. Lorsque $\mathbb{E}(Y_1) \leqslant 0$, on a pour tout $x \geqslant 0$

$$\mathbb{P}(\exists n \geqslant 1 | X_n = 0/X_0 = x) = \mathbb{P}_x(\mathbf{a} < +\infty) = 1.$$

La chaîne $(X_n)_{n\geqslant 0}$ étant irréductible, elle est alors récurrente. Si de plus on a $\mathbb{E}(Y_1) < 0$, d'après la proposition 1.1.2 il vient $\mathbb{E}(\tau^-) < +\infty$ et la chaîne $(X_n)_{n\geqslant 0}$ est alors récurrente positive ; a contrario, lorsque $\mathbb{E}(Y_1) = 0$ on a $\mathbb{E}(\tau^-) = \mathbb{E}(\mathbf{a}) = +\infty$ et la chaîne $(X_n)_{n\geqslant 0}$ est récurrente nulle. Lorsque $\mathbb{E}(Y_1) > 0$, on a $\mathbb{P}(\tau^-) < \infty) = \mathbb{P}(\mathbf{a} < +\infty) < 1$ et la chaîne $(X_n)_{n\geqslant 0}$ est transiente. □

La technique dite de balayage permet de construire explicitement l'unique mesure invariante de $(X_n)_{n\geqslant 0}$, à constante multiplicative près, dans le cas où la chaîne $(X_n)_{n\geqslant 0}$ est récurrente. Présentons la brièvement. Soit $(T_k)_{k\geqslant 0}$ une suite de temps d'arrêt pour la filtration naturelle associée à la chaîne $(X)_{n\geqslant 0}$ telle que pour tout $k \geqslant 1$ $\mathbb{P}(T_k < +\infty) = 1$. Supposons que la suite $(X_{T_k})_{k\geqslant 0}$ est une chaîne de Markov sur $\mathbb{N}$ dont on est capable d'expliciter une mesure stationnaire ν' sur $\mathbb{N}$. La mesure $\overline{\nu'}$ sur $\mathbb{N}$ définie par

$$\forall y \in \mathbb{N} \quad \overline{\nu'}(y) = \mathbb{E}_{\nu'}\left(\sum_{k=0}^{T_1-1} 1_y(X_k)\right)$$

est alors invariante pour $(X_n)_{n\geqslant 0}$; en effet, pour tout $y \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}_{\overline{\nu'}}[1_y(X_1)] &= \sum_{x\in\mathbb{N}} \mathbb{E}_x[1_y(X_1)]\overline{\nu'}(x) \\
&= \mathbb{E}_{\nu'}\left[\sum_{k=0}^{T_1-1} \mathbb{E}_{X_k}[1_y(X_1)]\right] \\
&= \mathbb{E}_{\nu'}\left[\sum_{k=0}^{T_1-1} 1_y(X_{k+1})\right] \\
&= \mathbb{E}_{\nu'}\left[\sum_{k=1}^{T_1} 1_y(X_k)\right] \\
&= \overline{\nu'}(y) - \mathbb{E}_{\nu'}[1_y(X_0)] + \mathbb{E}_{\nu'}[1_y(X_{T_1})] \\
&= \overline{\nu'}(y).
\end{aligned}$$

La dernière égalité provient du fait que la mesure ν' est invariante pour la chaîne $(X_{T_k})_{k\geqslant 0}$. Dans le cas de la marche absorbée, on introduit la suite des temps de records descendants stricts successifs de la marche classique $(S_n := Y_1 + Y_2 + \cdots + Y_n)_{n\geqslant 1}$, notée $(T_k^{*-})_{k\geqslant 0}$ et définie par

$$T_0^{*-} = 0 \quad \text{et} \quad \forall k \geqslant 0, \quad T_{k+1}^{*-} = \inf\{n > T_k^{*-} / S_n < S_{T_k^-}\}.$$

D'après la loi forte des grands nombres, les variables aléatoires T_k^{*-}, $k \geqslant 1$, sont finies $\mathbb{P}-$presque sûrement lorsque $\mathbb{E}(Y_1) < 0$. La suite $(X_{T_k^{*-}})_{k\geqslant 1}$ est identiquement nulle et la mesure de Dirac en 0 notée δ_0 est donc invariante pour $(X_{T_k^{*-}})_{k\geqslant 1}$. On note alors ν la mesure correspondante à $\overline{\delta_0}$ construite par le procédé rappelé ci-dessus ; pour tout $y \in \mathbb{N}$, on a $\nu(y) = \mathbb{E}\left(\sum_{k=0}^{\tau^- -1} 1_y(X_k)\right)$ et cette mesure est invariante pour la chaîne $(X)_{n\geqslant 0}$.On a par ailleurs

$$\nu(\mathbb{N}) = \mathbb{E}(T_1^-) = \begin{cases} < +\infty & \text{si } \mathbb{E}(Y_1) < 0, \\ +\infty & \text{si } \mathbb{E}(Y_1) = 0. \end{cases} \tag{1.2.2}$$

Dans la section qui suit, on établit un théorème local limite pour la marche aléatoire absorbée en 0.

1.3 Fluctuations des marches aléatoires sur ℝ et application à la marche absorbée

Les résultats présentés ici ont fait l'objet d'un article écrit en collaboration avec M. Peigné et K. Raschel et qui est publié dans ALEA **10** (2013) 591–60. Nous inscrivons intégralement ici le texte de cet article, écrit en anglais.

Abstract *In this article we refine well-known results concerning the fluctuations of one-dimensional random walks. More precisely, if $(S_n)_{n\geqslant 0}$ is a random walk starting from 0 and $r \geqslant 0$, we obtain the precise asymptotic behavior as $n \to \infty$ of $\mathbb{P}[\tau^{>r} = n, S_n \in K]$ and $\mathbb{P}[\tau^{>r} > n, S_n \in K]$, where $\tau^{>r}$ is the first time that the random walk reaches the set $]r, \infty[$, and K is a compact set. Our assumptions on the jumps of the random walks are optimal. Our results give an answer to a question of Lalley stated in [27], and are applied to obtain the asymptotic behavior of the return probabilities for random walks on $\mathbb{R}^+$ with non-elastic reflection at 0*

1.3.1 Introduction

General context

An essential aspect of fluctuation theory of discrete time random walks is the study of the two-dimensional renewal process formed by the successive maxima (or minima) of the random walk $(S_n)_{n\geqslant 0}$ and the corresponding times ; this process is called the ascending (or descending) ladder process. It has been studied by many people, with major contributions by [4], [40], and others who introduced Wiener-Hopf techniques and established several fundamental identities that relate the distributions of the ascending and descending ladder processes to the law of the random walk.

Let $(S_n)_{n\geqslant 0}$ be a random walk defined on a probability space $(\Omega, \mathcal{T}, \mathbb{P})$ and starting from 0 ; in other words, $S_0 = 0$ and $S_n = Y_1 + \cdots + Y_n$ for $n \geqslant 1$, where $(Y_i)_{i\geqslant 1}$ is a sequence of independent and identically distributed (i.i.d.) random variables. The strict ascending ladder process $(T_n^{*+}, H_n)_{n\geqslant 0}$ is defined as follows :

$$T_0^{*+} = 0, \quad T_{n+1}^{*+} = \inf\{k > T_n^{*+} : S_k > S_{T_n^{*+}}\}, \quad \forall n \geqslant 0, \tag{1.3.1}$$

and

$$H_n = S_{T_n^{*+}}, \quad \forall n \geqslant 0.$$

There exists a large literature on this process, which typically focuses on so-called local limit theorems, and in particular on the behavior of the probabilities $\mathbb{P}[T_1^{*+} > n]$ and $\mathbb{P}[T_1^{*+} > n, H_1 \in K]$, where $K \subset \mathbb{R}$ is some compact set. Roughly speaking, when the variables $(Y_i)_{i\geqslant 1}$ admit moments of order 2 and are centered, one has the asymptotic behavior, as $n \to \infty$,

$$\mathbb{P}[T_1^{*+} > n] = \frac{a}{\sqrt{n}}(1 + o(1)), \qquad \mathbb{P}[T_1^{*+} > n, H_1 \in K] = \frac{b}{n^{3/2}}(1 + o(1)),$$

for some constants $a, b > 0$ to be specified (see for instance [30] and references therein).

These estimations are of great interest in several domains : one may cite for example branching processes in random environment (see for instance [19, 23, 26]) and random walks on non-unimodular groups (see [30, 31]) ; they also play a crucial role in several other less linear contexts, as in the study of return probabilities for random walks with reflecting zone on a half-line [27].

In [27], Lalley introduced for $r > 0$ the waiting time

$$\tau^{>r} = \inf\{n > 0 : S_n > r\},$$

and first looked at the behavior, as $n \to \infty$, of the probability $\mathbb{P}[\tau^{>r} = n, S_n \in K]$, where K is a compact set. Under some strong conditions (namely, if the variables $(Y_i)_{i\geqslant 1}$ are lattice, bounded from above and centered), Lalley proved that

$$\mathbb{P}[\tau^{>r} = n, S_n \in K] = \frac{c}{n^{3/2}}(1 + o(1)), \quad n \to \infty, \tag{1.3.2}$$

for some non-explicit constant $c > 0$, and wrote that "[he] do[es] not know the minimal moment conditions necessary for [such an] estimate" (see Equation (3.18) and below in [27, page 590]). His method is based on the Wiener-Hopf factorization and on a classical theorem of Darboux which, in this case, relates the asymptotic behavior of certain probabilities to the regularity of the underlying generating function in a neighborhood of its radius of convergence. In [27], the fact that the jumps $(Y_i)_{i\geqslant 1}$ are bounded from above is crucial since it allows the author to verify that the generating function of the jumps $(Y_i)_{i\geqslant 1}$ is meromorphic in a neighborhood of its disc of convergence, with a non-essential pole at 0.

Aim and methods of this article

In this article we obtain the asymptotic behavior of the probability in (1.3.2), with besides an explicit formula for the constant c, under quite general hypotheses (Theorem 1.3.3). This in particular answers to Lalley's question. We will also obtain (Theorem 1.3.4) the asymptotic behavior of

$$\mathbb{P}[\tau^{>r} > n, S_n \in K], \quad n \to \infty. \tag{1.3.3}$$

To prove Theorems 1.3.3 and 1.3.4, we shall adopt another strategy as that in [27], inspired by the works of [24], [30] (Sections 1.3.2 and 1.3.3). We will also propose an application of our main results to random walks on $\mathbb{R}^+$ with non-elastic reflection at 0 (Section 1.3.4). Finally, we shall emphasize the connections of our results with the ones of [12], where quite a new approach is developed in any dimension, to find local limit theorems for random walks in cones (Section 1.3.5).

1.3.2 First results

1.3.2.1 Notations

We consider here a sequence $(Y_i)_{i\geqslant 1}$ of i.i.d. $\mathbb{R}$-valued random variables with law μ, defined on a probability space $(\Omega, \mathcal{T}, \mathbb{P})$. For any $n \geqslant 1$, we set $\mathcal{T}_n = \sigma(Y_1, \ldots, Y_n)$. Let $(S_n)_{n\geqslant 0}$ be the corresponding random walk on $\mathbb{R}$ starting from 0, i.e., $S_0 = 0$ and for $n \geqslant 1$, $S_n = Y_1 + \cdots + Y_n$. In order to study the fluctuations of $(S_n)_{n\geqslant 0}$, we introduce for $r \in \mathbb{R}$ the random variables $\tau^{\geqslant r}$, $\tau^{>r}$, $\tau^{\leqslant r}$ and $\tau^{<r}$, defined by

$$\begin{aligned}
\tau^{\geqslant r} &:= \inf\{n \geqslant 1 : S_n \geqslant r\},\\
\tau^{>r} &:= \inf\{n \geqslant 1 : S_n > r\},\\
\tau^{\leqslant r} &:= \inf\{n \geqslant 1 : S_n \leqslant r\},\\
\tau^{<r} &:= \inf\{n \geqslant 1 : S_n < r\}.
\end{aligned}$$

Throughout we shall use the convention $\inf\{\emptyset\} = \infty$. The latter variables are stopping times with respect to the canonical filtration $(\mathcal{T}_n)_{n\geqslant 1}$. When $r = 0$, in order to use standard notations, we shall rename $\tau^{\geqslant 0}$, $\tau^{>0}$, $\tau^{\leqslant 0}$ and $\tau^{<0}$ in τ^+, τ^{*+}, τ^- and τ^{*-}, respectively. As [2] $\mathbb{R}^- = \mathbb{R}\setminus\mathbb{R}^{*+}$ (resp. $\mathbb{R}^+ = \mathbb{R}\setminus\mathbb{R}^{*-}$), there will be some duality connections between τ^- and τ^{*+} (resp. τ^+ and τ^{*-}).

We also introduce, as in (1.3.1), the sequence $(T_n^{*+})_{n\geqslant 0}$ of successive ascending ladder epochs of the walk $(S_n)_{n\geqslant 0}$. One has $T_1^{*+} = \tau^{*+}$. Further, setting $\tau_{n+1}^{*+} := T_{n+1}^{*+} - T_n^{*+}$ for any $n \geqslant 0$, one may write $T_n^{*+} = \tau_1^{*+} + \cdots + \tau_n^{*+}$, where $(\tau_n^{*+})_{n\geqslant 1}$ is a sequence of i.i.d. random variables with the same law as τ^{*+}. [3]

1.3.2.2 Hypotheses

Throughout this manuscript, we shall assume that the law μ satisfies one of the following moment conditions $\mathbf{M}$:

$\mathbf{M}(k)$ **:** $\mathbb{E}[|Y_1|^k] < \infty$ *;*
$\mathbf{M}(\exp)$ **:** $\mathbb{E}[\exp(\gamma Y_1)] < \infty$*, for all* $\gamma \in \mathbb{R}$ *;*
$\mathbf{M}(\exp^-)$ **:** $\mathbb{E}[\exp(\gamma Y_1)] < \infty$*, for all* $\gamma \in \mathbb{R}^-$.

We shall also often suppose

$\mathbf{C}$ **:** $\mathbb{E}[Y_1] = 0$.

2. Here and throughout, we note $\mathbb{R}^+ = [0, \infty[$, $\mathbb{R}^{*+} =]0, \infty[$, $\mathbb{R}^- =]-\infty, 0]$ and $\mathbb{R}^{*-} =]-\infty, 0[$.

3. Similarly, we may also consider the sequences $(T_n^+)_{n\geqslant 0}$, $(T_n^-)_{n\geqslant 0}$ and $(T_n^{*-})_{n\geqslant 0}$ defined respectively by $T_0^+ = T_0^- = T_0^{*-} = 0$ and $T_{n+1}^+ = \inf\{k > T_n^+ : S_k \geqslant S_{T_n^+}\}$, $T_{n+1}^- = \inf\{k > T_n^- : S_k \leqslant S_{T_n^-}\}$ and $T_{n+1}^{*-} = \inf\{k > T_n^{*-} : S_k < S_{T_n^{*-}}\}$, for $n \geqslant 0$.

Under $\mathbf{M(1)}$ and $\mathbf{C}$, the variables τ^+, τ^{*+}, τ^- and τ^{*-} are $\mathbb{P}$-a.s. finite, see [18], [4] and we denote by μ^+ (resp. $\mu^{*+}, \mu^-, \mu^{*-}$) the law of the variable S_{τ^+} (resp. $S_{\tau^{*+}}, S_{\tau^-}$ and $S_{\tau^{*-}}$).

We will also consider the two following couples of hypotheses $\mathbf{AA}$:

$\mathbf{AA}(\mathbb{Z})$: *the measure μ is adapted on $\mathbb{Z}$ (i.e., the group generated by the support S_μ of μ is equal to $\mathbb{Z}$) and aperiodic (i.e., the group generated by $S_\mu - S_\mu$ is equal to $\mathbb{Z}$) ;*

$\mathbf{AA}(\mathbb{R})$: *the measure μ is adapted on $\mathbb{R}$ (i.e., the closed group generated by the support S_μ of μ is equal to $\mathbb{R}$) and aperiodic (i.e., the closed group generated by $S_\mu - S_\mu$ is equal to $\mathbb{R}$).*

1.3.2.3 Classical results

Let us now recall the result below, which concerns the probability (1.3.3) for $r = 0$.

Théorème 1.3.1 ([24, 30]). *Assume that the hypotheses $\mathbf{AA}$, $\mathbf{C}$ and $\mathbf{M(2)}$ hold. Then for any continuous function ϕ with compact support on $\mathbb{R}$, one has* [5]

$$\lim_{n\to\infty} n^{3/2}\mathbb{E}[\tau^{*+} > n; \phi(S_n)] = a^-(\phi) := \int_{\mathbb{R}^-} \phi(t)a^-(\mathrm{d}t)$$
$$:= \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}^-} \phi(t)\lambda^- * U^-(\mathrm{d}t),$$

where
- $\sigma^2 := \mathbb{E}[Y_1^2]$;
- λ^- *is the counting measure on $\mathbb{Z}^-$ when $\mathbf{AA}(\mathbb{Z})$ holds (resp. the Lebesgue measure on $\mathbb{R}^-$ when $\mathbf{AA}(\mathbb{R})$ holds) ;* [6]
- U^- *is the σ-finite potential $U^- := \sum_{n\geqslant 0}(\mu^-)^{*n}$.*

Since some arguments will be quite useful and used in the sequel, we give below a sketch of the proof of Theorem 1.3.1, following [24, 30]. By a standard argument in measure theory (see Theorem 2 in Chapter XIII on Laplace transforms in the book [18]), it is sufficient to prove the above convergence for all functions ϕ of the form $\phi(t) = \exp(\alpha t)$, $\alpha > 0$ (indeed, notice that the support of the limit measure $a^-(\mathrm{d}t)$ is included in $\mathbb{R}^-$). We shall use the same remark when proving Theorems 1.3.2 and 1.3.3.

Sketch of the proof of Theorem 1.3.1 in the case $\mathbf{AA}(\mathbb{Z})$. We shall use the following identity, which is a consequence of the Wiener-Hopf factorization (see [40, P5 in page 181]) :

$$\phi_\alpha(s) := \sum_{n\geqslant 0} s^n \mathbb{E}[\tau^{*+} > n; e^{\alpha S_n}] = \exp B_\alpha(s), \quad \forall s \in [0,1[, \quad \forall \alpha > 0, \tag{1.3.1}$$

where

$$B_\alpha(s) := \sum_{n\geqslant 1} \frac{s^n}{n}\mathbb{E}[S_n \leqslant 0; e^{\alpha S_n}].$$

Further, by the classical local limit theorem on $\mathbb{Z}$ (this is here that we use $\mathbf{M(2)}$, see for instance [40, P10 in page 79]), one gets

$$\mathbb{E}[S_n \leqslant 0; e^{\alpha S_n}] = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi n}}\frac{1}{1-e^{-\alpha}}(1 + o(1)), \quad n \to \infty.$$

4. Notice that this property also holds for symmetric laws μ without any moment assumption.
5. Below and throughout, for any bounded random variable $Z : \Omega \to \mathbb{R}$ and any event $A \in \mathcal{T}$, one sets $\mathbb{E}[A; Z] := \mathbb{E}[Z\mathbb{1}_A]$.
6. For an upcoming use, we also introduce
- the counting measures λ^{*-}, λ^+ and λ^{*+} on $\mathbb{Z}^{*-}$, $\mathbb{Z}^+$ and $\mathbb{Z}^{*+}$, respectively ;
- the Lebesgue measures λ^{*-}, λ^+ and λ^{*+} on $\mathbb{R}^{*-}$, $\mathbb{R}^+$ and $\mathbb{R}^{*+}$, respectively.

Notice that $\lambda^{*-} = \lambda^-$ and $\lambda^{*+} = \lambda^+$ when $\mathbf{AA}(\mathbb{R})$ holds, but we keep the two notations in order to unify the statements under the two types of hypotheses $\mathbf{AA}$.

Accordingly, the sequence $(n^{3/2}\mathbb{E}[\tau^{*+} > n; e^{\alpha S_n}])_{n\geqslant 1}$ is bounded, thanks to Lemma 1.3.1 below (taken from [24, Lemma 2.1]), applied with $b_n := \mathbb{E}[S_n \leqslant 0; e^{\alpha S_n}]/n$ and $d_n := \mathbb{E}[\tau^{*+} > n; e^{\alpha S_n}]$.

Lemme 1.3.1 ([24]). *Let $\sum_{n\geqslant 0} d_n s^n = \exp \sum_{n\geqslant 0} b_n s^n$. If the sequence $(n^{3/2} b_n)_{n\geqslant 1}$ is bounded, the same holds for $(n^{3/2} d_n)_{n\geqslant 1}$.*

Differentiating the two members of (1.3.1) with respect to s, one gets

$$\phi_\alpha'(s) = \sum_{n\geqslant 1} n s^{n-1}\mathbb{E}[\tau^{*+} > n; e^{\alpha S_n}] = \phi_\alpha(s)\sum_{n\geqslant 1} s^{n-1}\mathbb{E}[S_n \leqslant 0; e^{\alpha S_n}].$$

We then make use of Lemma 1.3.2 (see [24, Lemma 2.2] for the original statement), applied with $c_n := \mathbb{E}[S_n \leqslant 0; e^{\alpha S_n}] = n b_n$, $d_n := \mathbb{E}[\tau^{*+} > n; e^{\alpha S_n}]$ and $a_n := n\mathbb{E}[\tau^{*+} > n; e^{\alpha S_n}]$.

Lemme 1.3.2 ([24]). *Let $(c_n)_{n\geqslant 0}$ and $(d_n)_{n\geqslant 0}$ be sequences of non-negative real numbers such that*

(i). $\lim_{n\to\infty} \sqrt{n} c_n = c > 0$ *;*

(ii). $\sum_{n\geqslant 0} d_n = D < \infty$ *;*

(iii). $(n d_n)_{n\geqslant 0}$ *is bounded.*

If $a_n = \sum_{0\leqslant k\leqslant n-1} d_k c_{n-k}$, then $\lim_{n\to\infty}\sqrt{n} a_n = cD$.

This way, one reaches the conclusion that

$$\lim_{n\to\infty} n^{3/2}\mathbb{E}[\tau^{*+} > n; e^{\alpha S_n}] = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\frac{1}{1-e^{-\alpha}}\sum_{n\geqslant 0}\mathbb{E}[\tau^{*+} > n; e^{\alpha S_n}].$$

To conclude, it remains to express differently the limit. First, the factor $1/(1-e^{-\alpha})$ is equal to $\int_{\mathbb{R}} e^{\alpha t}\lambda^-(\mathrm{d}t)$. Further, since the vectors $(Y_1,\ldots,Y_n)$ and $(Y_n,\ldots,Y_1)$ have the same law, one gets

$$\begin{aligned}
\sum_{n\geqslant 0}\mathbb{E}[\tau^{*+} > n; e^{\alpha S_n}] &= \sum_{n\geqslant 0}\mathbb{E}[S_1 \leqslant 0, S_2 \leqslant 0, \ldots, S_n \leqslant 0; e^{\alpha S_n}]\\
&= \sum_{n\geqslant 0}\mathbb{E}[S_n \leqslant S_{n-1}, S_n \leqslant S_{n-2}, \ldots, S_n \leqslant 0; e^{\alpha S_n}]\\
&= \sum_{n\geqslant 0}\mathbb{E}[\exists \ell \geqslant 0 : T_\ell^- = n; e^{\alpha S_n}]\\
&= \sum_{\ell\geqslant 0}\mathbb{E}[e^{\alpha S_{T_\ell^-}}] = U^-(x \mapsto e^{\alpha x}),
\end{aligned}$$

i.e., $\sum_{n\geqslant 0}\mathbb{E}[\tau^{*+} > n; S_n \in \mathrm{d}x] = U^-(\mathrm{d}x)$, so that

$$\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\frac{1}{1-e^{-\alpha}}\sum_{n\geqslant 0}\mathbb{E}[\tau^{*+} > n; e^{\alpha S_n}] = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\int_{\mathbb{R}^-} e^{\alpha t}\lambda^- * U^-(\mathrm{d}t).$$

The proof is complete. $\square$

Remarque 1.3.1. *For similar reasons as in the proof of Theorem 1.3.1, one has*

$$\begin{aligned}
&\textstyle\sum_{n\geqslant 0}\mathbb{E}[\tau^{+} > n; S_n \in \mathrm{d}x] = U^{*-}(\mathrm{d}x) := \sum_{n\geqslant 0}(\mu^{*-})^{*n}(\mathrm{d}x),\\
&\textstyle\sum_{n\geqslant 0}\mathbb{E}[\tau^{*-} > n; S_n \in \mathrm{d}x] = U^{+}(\mathrm{d}x) := \sum_{n\geqslant 0}(\mu^{+})^{*n}(\mathrm{d}x),\\
&\textstyle\sum_{n\geqslant 0}\mathbb{E}[\tau^{-} > n; S_n \in \mathrm{d}x] = U^{*+}(\mathrm{d}x) := \sum_{n\geqslant 0}(\mu^{*+})^{*n}(\mathrm{d}x),
\end{aligned}$$

as well as the weak convergences, as $n \to \infty$,

$$\begin{aligned}
n^{3/2}\mathbb{E}[\tau^{*+} > n; S_n \in \mathrm{d}x] \quad &\longrightarrow \quad a^{-}(\mathrm{d}x) := (1/\sigma\sqrt{2\pi})\lambda^{-} * U^{-},\\
n^{3/2}\mathbb{E}[\tau^{+} > n; S_n \in \mathrm{d}x] \quad &\longrightarrow \quad a^{*-}(\mathrm{d}x) := (1/\sigma\sqrt{2\pi})\lambda^{*-} * U^{*-},\\
n^{3/2}\mathbb{E}[\tau^{*-} > n; S_n \in \mathrm{d}x] \quad &\longrightarrow \quad a^{+}(\mathrm{d}x) := (1/\sigma\sqrt{2\pi})\lambda^{+} * U^{+},\\
n^{3/2}\mathbb{E}[\tau^{-} > n; S_n \in \mathrm{d}x] \quad &\longrightarrow \quad a^{*+}(\mathrm{d}x) := (1/\sigma\sqrt{2\pi})\lambda^{*+} * U^{*+}.
\end{aligned}$$

We conclude this part by finding the asymptotic behavior of $\mathbb{P}[\tau^{*+} > n]$. Using the well-known expansion

$$\sqrt{1-s} = \exp\left(\frac{1}{2}\ln(1-s)\right) = \exp\left(-\frac{1}{2}\sum_{n\geqslant 1}\frac{s^n}{n}\right)$$

and setting $\alpha = 0$ in (1.3.1), one gets that for s close to 1,

$$\sum_{n\geqslant 0} s^n \mathbb{P}[\tau^{*+} > n] = \exp\left(\sum_{n\geqslant 1}\frac{s^n}{n}\mathbb{P}[S_n \leqslant 0]\right) = \frac{\exp\kappa}{\sqrt{1-s}}(1+o(1)),$$

where

$$\kappa = \sum_{n\geqslant 1}\frac{1}{n}\left(\mathbb{P}[S_n \leqslant 0] - \frac{1}{2}\right). \tag{1.3.2}$$

Notice that the series in (1.3.2) is absolutely convergent, see [38, Theorem 3]. [7] By a standard Tauberian theorem, since the sequence $(\mathbb{P}[\tau^{*+} > n])_{n\geqslant 0}$ is decreasing, one obtains (see [30])

$$\mathbb{P}[\tau^{*+} > n] = \frac{\exp\kappa}{\sqrt{\pi n}}(1+o(1)), \quad n \to \infty. \tag{1.3.3}$$

Note that the monotonicity of the sequence $(\mathbb{P}[\tau^{*+} > n])_{n\geqslant 0}$ is crucial to replace the Cesàro means convergence by the usual convergence.

1.3.2.4 Extensions

Equation (1.3.3) shows that the asymptotic behavior of $\mathbb{P}[\tau^{*+} > n]$ is in $1/\sqrt{n}$ as $n \to \infty$. As for the probability $\mathbb{P}[\tau^{*+} = n]$, we have the following result, which is proved in [1, 13].

Proposition 1.3.1. *Assume that the hypotheses* **AA**, **C** *and* **M**(2) *hold. Then the sequence* $(n^{3/2}\mathbb{P}[\tau^{*+} = n])_{n\geqslant 0}$ *converges to some positive constant.*

We now refine Proposition 1.3.1, by adding in the probability the information of the position of the walk at time τ^{*+}. Using the same approach as for Theorem 1.3.1, we may obtain the following theorem, which we did not find in the literature :

Théorème 1.3.2. *Assume that the hypotheses* **AA**, **C** *and* **M**(2) *hold. Then for any continuous function* ϕ *with compact support on* $\mathbb{R}$, *one has*

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} n^{3/2}\mathbb{E}[\tau^{*+} = n; \phi(S_n)] = b^{*+}(\phi) := \int_{\mathbb{R}^+}\phi(t)b^{*+}(\mathrm{d}t)&\\
:= \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\int_{\mathbb{R}^+}\phi(t)\lambda^{*+} * \mu^{*+}(\mathrm{d}t)&,
\end{aligned}$$

where λ^{*+} *is the counting measure on* $\mathbb{Z}^{*+}$ *when* $\mathbf{AA}(\mathbb{Z})$ *holds (resp. the Lebesgue measure on* $\mathbb{R}^{*+}$ *when* $\mathbf{AA}(\mathbb{R})$ *holds).*

7. There also exists the following expression for κ : $e^{\kappa} = (\sqrt{2}/\sigma)\mathbb{E}[S_{\tau^{*+}}]$, see [40, P5 in Section 18].

Sketch of the proof of Theorem 1.3.2 in the case $\mathbf{AA}(\mathbb{Z})$. We shall use the following identity, which as (1.3.1) is a consequence of the Wiener-Hopf factorization :

$$\psi_\alpha(s) := \sum_{n\geqslant 0} s^n \mathbb{E}[\tau^{*+} = n; e^{-\alpha S_n}] = 1 - \exp -\widetilde{B}_\alpha(s), \quad \forall s \in [0,1[, \quad \forall \alpha > 0, \tag{1.3.4}$$

where

$$\widetilde{B}_\alpha(s) := \sum_{n\geqslant 1} \frac{s^n}{n} \mathbb{E}[S_n > 0; e^{-\alpha S_n}].$$

Setting $d_n := \mathbb{E}[\tau^{*+} = n; e^{-\alpha S_n}]$, the same argument as in the proof of Theorem 1.3.1 (via Lemma 1.3.1) implies that the sequence $(n^{3/2} d_n)_{n\geqslant 1}$ is bounded (we notice that in Lemma 1.3.1, the sequences $(b_n)_{n\geqslant 0}$ and $(d_n)_{n\geqslant 0}$ are not necessarily non-negative, so it can be applied in the present situation).

Differentiating the two members of (1.3.4) with respect to s then yields

$$\psi'_\alpha(s) = \sum_{n\geqslant 1} n s^{n-1} \mathbb{E}[\tau^{*+} = n; e^{-\alpha S_n}] = (1 - \psi_\alpha(s)) \sum_{n\geqslant 1} s^{n-1} \mathbb{E}[S_n > 0; e^{-\alpha S_n}],$$

and Theorem 1.3.2 is thus a consequence of Lemma 1.3.2, applied with $c_n := \mathbb{E}[S_n > 0; e^{-\alpha S_n}]$, $d_n := \mathbb{1}_{\{n=0\}} - \mathbb{E}[\tau^{*+} = n; e^{-\alpha S_n}]$ and $a_n := n\mathbb{E}[\tau^{*+} = n; e^{-\alpha S_n}]$. □

According to the previous proof, we also have, as $n \to \infty$, the weak convergences below :

$$\begin{aligned}
n^{3/2}\mathbb{E}[\tau^{*+} = n; S_n \in \mathrm{d}x] &\longrightarrow b^{*+}(\mathrm{d}x) := (1/\sigma\sqrt{2\pi})\lambda^{*+} * \mu^{*+}, \\
n^{3/2}\mathbb{E}[\tau^{+} = n; S_n \in \mathrm{d}x] &\longrightarrow b^{+}(\mathrm{d}x) := (1/\sigma\sqrt{2\pi})\lambda^{+} * \mu^{+}, \\
n^{3/2}\mathbb{E}[\tau^{*-} = n; S_n \in \mathrm{d}x] &\longrightarrow b^{*-}(\mathrm{d}x) := (1/\sigma\sqrt{2\pi})\lambda^{*-} * \mu^{*-}, \\
n^{3/2}\mathbb{E}[\tau^{-} = n; S_n \in \mathrm{d}x] &\longrightarrow b^{-}(\mathrm{d}x) := (1/\sigma\sqrt{2\pi})\lambda^{-} * \mu^{-}.
\end{aligned}$$

1.3.3 Main results

In this section we are first interested in the expectation $\mathbb{E}[\tau^{>r} = n; \phi(S_n)]$, for any fixed value of $r > 0$. In Theorem 1.3.3 we find its asymptotic behavior as $n \to \infty$, for any continuous function ϕ with compact support on $\mathbb{R}$. Then in Proposition 1.3.2 we take ϕ identically equal to 1, and we prove that the sequence $(n\mathbb{P}[\tau^{>r} = n])_{n\geqslant 0}$ is bounded. We then consider the expectation $\mathbb{E}[\tau^{>r} > n; \phi(S_n)]$. We first derive its asymptotic behavior as $n \to \infty$, in Theorem 1.3.4. Finally, in Proposition 1.3.3 we obtain the asymptotics of the probability $\mathbb{P}[\tau^{>r} > n]$ for large values of n. The theorems stated in Section 1.3.3 concern the hitting time $\tau^{>r}$; similar statements (obtained exactly along the same lines) exist for the hitting times $\tau^{\geqslant r}$, $\tau^{<r}$ and $\tau^{\leqslant r}$.

Théorème 1.3.3. *Assume that the hypotheses* $\mathbf{AA}$, $\mathbf{C}$ *and* $\mathbf{M}(2)$ *hold. Then for any continuous function* ϕ *with compact support on* $]r, \infty[$, *one has*

$$\lim_{n\to\infty} n^{3/2}\mathbb{E}[\tau^{>r} = n; \phi(S_n)] = \iint_{\Delta_r} \phi(x+y) U^{*+}(\mathrm{d}x) b^{*+}(\mathrm{d}y) + \iint_{\Delta_r} \phi(x+y) a^{*+}(\mathrm{d}x) \mu^{*+}(\mathrm{d}y),$$

where $\Delta_r := \{(x,y) \in \mathbb{R}^{*+} \times \mathbb{R}^{*+} : 0 \leqslant x \leqslant r, x+y > r\}$.

Démonstration. Since ϕ has compact support in $]r,\infty[$, one has

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[\tau^{>r}=n;\phi(S_n)] &= \sum_{0\leqslant k\leqslant n}\mathbb{E}[\exists \ell\geqslant 0, T_\ell^{*+}=k, S_k\leqslant r, n-k=\tau^{*+}_{\ell+1}, S_n>r;\phi(S_n)]\\ &= \sum_{0\leqslant k\leqslant n}\iint_{\Delta_r}\phi(x+y)\mathbb{P}[\exists \ell\geqslant 0, T_\ell^{*+}=k, S_k\in \mathrm{d}x]\times\\ &\qquad\qquad\qquad\times\mathbb{P}[\tau^{*+}=n-k, S_{n-k}\in\mathrm{d}y]\\ &= \sum_{0\leqslant k\leqslant n} I_{n,k}(r,\phi),\end{aligned}$$

where we have set

$$I_{n,k}(r,\phi) := \iint_{\Delta_r}\phi(x+y)\mathbb{P}[\tau^->k, S_k\in\mathrm{d}x]\mathbb{P}[\tau^{*+}=n-k, S_{n-k}\in\mathrm{d}y]. \tag{1.3.1}$$

In Equation (1.3.1) above, we have used the equality $\mathbb{P}[\exists \ell\geqslant 0, T_\ell^{*+}=k, S_k\in\mathrm{d}x]=\mathbb{P}[\tau^->k, S_k\in \mathrm{d}x]$. It follows by the same arguments as in the proof of Theorem 1.3.1 (below Lemma 1.3.2). To pursue the proof, we shall use the following elementary result (see [30, Lemma II.8] for the original statement and its proof) :

Lemme 1.3.3. *Let $(a_n)_{n\geqslant 0}$ and $(b_n)_{n\geqslant 0}$ be two sequences of non-negative real numbers such that $\lim_{n\to\infty} n^{3/2}a_n = a\in\mathbb{R}^{*+}$ and $\lim_{n\to\infty} n^{3/2}b_n=b\in\mathbb{R}^{*+}$. Then :*

- *there exists $C>0$ such that, for any $n\geqslant 1$ and any $0<i<n-j<n$,*

$$n^{3/2}\sum_{i+1\leqslant k\leqslant n-j} a_k b_{n-k}\leqslant C\left(\frac{1}{\sqrt{i}}+\frac{1}{\sqrt{j}}\right);$$

- *setting $A:=\sum_{n\geqslant 0}a_n$ and $B:=\sum_{n\geqslant 0}b_n$, one has*

$$\lim_{n\to\infty} n^{3/2}\sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k} = aB+bA.$$

Since ϕ is non-negative with compact support in $]r,\infty[$, there exists a constant $c_\phi>0$ such that $\phi(t)\leqslant c_\phi e^{-t}$, for all $t\geqslant 0$. This yields that for any $0<i<n-j<n$,

$$\sum_{i+1\leqslant k\leqslant n-j} I_{n,k}(r,\phi)\leqslant c_\phi\sum_{i+1\leqslant k\leqslant n-j} a_k b_{n-k},$$

with $a_k:=\mathbb{E}[\tau^->k;e^{-S_k}]$ and $b_k:=\mathbb{E}[\tau^{*+}=k;e^{-S_k}]$. With Lemma 1.3.3 we deduce that there exists some constant $C>0$ such that

$$\sum_{i+1\leqslant k\leqslant n-j} I_{n,k}(r,\phi)\leqslant C\left(\frac{1}{\sqrt{i}}+\frac{1}{\sqrt{j}}\right).$$

On the other hand, for any fixed $k\geqslant 1$ and $x\in[0,r]$, one has by Theorem 1.3.2

$$\lim_{n\to\infty} n^{3/2}\int_{\{y\geqslant 0\}}\phi(x+y)\mathbb{P}[\tau^{*+}=n-k, S_{n-k}\in\mathrm{d}y]=\int_{\{y\geqslant 0\}}\phi(x+y)b^{*+}(\mathrm{d}y).$$

Further, for any $k\geqslant 1$, the function

$$x\mapsto n^{3/2}\int_{\{y\leqslant 0\}}\phi(x+y)\mathbb{P}[\tau^{*+}=n-k, S_{n-k}\in\mathrm{d}y]$$

is dominated on $[0,r]$ by $x \mapsto c_\phi(\sup_{n\geqslant 1} n^{3/2}\mathbb{E}[\tau^{*+} = n-k; e^{-S_{n-k}}])e^{-x}$, which is bounded (by Theorem 1.3.2) and so integrable with respect to the measure $\mathbb{P}[\tau^- > k, S_k \in \mathrm{d}x]$. The dominated convergence theorem thus yields

$$\lim_{n\to\infty} n^{3/2} \sum_{0\leqslant k\leqslant i} I_{n,k}(r,\phi) = \sum_{0\leqslant k\leqslant i} \iint_{\Delta_r} \phi(x+y)\mathbb{P}[\tau^- > k, S_k \in \mathrm{d}x]b^{*+}(\mathrm{d}y).$$

The same argument leads to

$$\lim_{n\to\infty} n^{3/2} \sum_{n-j\leqslant k\leqslant n} I_{n,k}(r,\phi) = \sum_{0\leqslant k\leqslant j} \iint_{\Delta_r} \phi(x+y)a^{*+}(\mathrm{d}x)\mathbb{P}[\tau^{*+} = k, S_k \in \mathrm{d}y].$$

Letting $i,j\to\infty$ and using the equalities

$$\sum_{k\geqslant 0} \mathbb{E}[\tau^- > k; S_k \in \mathrm{d}x] = U^{*+}(\mathrm{d}x), \qquad \sum_{k\geqslant 0} \mathbb{E}[\tau^{*+} = k; S_k \in \mathrm{d}y] = \mu^{*+}(\mathrm{d}y),$$

one concludes. □

Proposition 1.3.2. *Assume that the hypotheses* **AA**, **C** *and* **M(2)** *hold. Then for any* $r\in\mathbb{R}^+$, *the sequence* $(n\mathbb{P}[\tau^{>r} = n])_{n\geqslant 0}$ *is bounded.*

Démonstration. By the proof of Theorem 1.3.3, one may decompose the probability $\mathbb{P}[\tau^{>r} = n]$ as $\sum_{0\leqslant k\leqslant n} I_{n,k}(r,1)$, with $I_{n,k}$ defined in (1.3.1). One easily obtains that

$$I_{n,k}(r,1) \leqslant \mathbb{P}[\tau^- > k, S_k \in [0,r]]\mathbb{P}[\tau^{*+} = n-k],$$

Δ_r being defined as in Theorem 1.3.3. One concludes by applying Remark 1.3.1 (we obtain the estimate $1/k^{3/2}$ for the first probability above), Proposition 1.3.2 (we deduce the estimate $1/(n-k)^{3/2}$ for the second probability) and Lemma 1.3.3. □

We now pass to the second part of Section 1.3.3, which is concerned with the expectation $\mathbb{E}[\tau^{>r} > n; \phi(S_n)]$.

Théorème 1.3.4. *Assume that the hypotheses* **AA**, **C** *and* **M(2)** *hold. Then for any continuous function* ϕ *with compact support on* $\mathbb{R}$, *one has*

$$\lim_{n\to\infty} n^{3/2}\mathbb{E}[\tau^{>r} > n; \phi(S_n)] = \iint_{D_r} \phi(x+y)U^{*+}(\mathrm{d}x)a^-(\mathrm{d}y) + \iint_{D_r} \phi(x+y)a^{*+}(\mathrm{d}x)U^-(\mathrm{d}y),$$

where $D_r := \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : 0\leqslant x\leqslant r, y\leqslant 0\} = [0,r]\times\mathbb{R}^-$.

We do not write the proof of Theorem 1.3.4 in full details, for the three following reasons. First, it is similar to that of Theorem 1.3.3. We just emphasize the unique but crucial difference in the decomposition of the expectation $\mathbb{E}[\tau^{>r} > n; \phi(S_n)]$, namely :

$$\mathbb{E}[\tau^{>r} > n; \phi(S_n)] = \sum_{0\leqslant k\leqslant n} \iint_{D_r} \phi(x+y)\mathbb{P}[\tau^- > k, S_k \in \mathrm{d}x]\mathbb{P}[\tau^{*+} > n-k, S_{n-k} \in \mathrm{d}y]. \quad (1.3.2)$$

The second reason is that Theorem 1.3.4 is equivalent to [30, Theorem II.7]. Indeed, the event $[\tau^{>r} > n]$ can be written as $[M_n \leqslant r]$, where $M_n = \max(0, S_1, \ldots, S_n)$. Likewise, Proposition 1.3.3 below on the asymptotics of $\mathbb{P}[\tau^{>r} > n]$ can be found in [30]. Finally, Theorem 1.3.4 is also proved in the recent article [11], see in particular Proposition 11.

Proposition 1.3.3. *Assume that the hypotheses* **AA**, **C** *and* **M(2)** *hold. One has*

$$\mathbb{P}[\tau^{>r} > n] = \frac{\exp \kappa}{\sqrt{\pi n}} U^{*+}([0,r])(1+o(1)), \quad n \to \infty. \tag{1.3.3}$$

Démonstration. By (1.3.2), the probability $\mathbb{P}[\tau^{>r} > n]$ may be decomposed as $\sum_{0 \leqslant k \leqslant n} J_{n,k}(r)$, with

$$\begin{aligned} J_{n,k}(r) &= \iint_{D_r} \mathbb{P}[\tau^- > k, S_k \in \mathrm{d}x] \mathbb{P}[\tau^{*+} > n-k, S_{n-k} \in \mathrm{d}y] \\ &= \mathbb{P}[\tau^- > k, S_k \in [0,r]] \mathbb{P}[\tau^{*+} > n-k], \end{aligned}$$

where the domain D_r is defined in Theorem 1.3.4. One concludes, using the following three facts. Firstly, by Remark 1.3.1, one has $n^{3/2}\mathbb{P}[\tau^- > n, S_n \in [0,r]] \to a^{*+}([0,r])$ as $n \to \infty$. Secondly, by Equation (1.3.3), one has $\sqrt{n}\mathbb{P}[\tau^{*+} > n] \to e^{\kappa}/\sqrt{\pi}$ as $n \to \infty$. Thirdly, one has $\sum_{n \geqslant 0} \mathbb{P}[\tau^- > n, S_n \in [0,r]] = U^{*+}([0,r])$, also thanks to Remark 1.3.1. $\square$

Remarque 1.3.2. *Theorem 1.3.3 (for which $r > 0$) formally implies Theorem 1.3.2 ($r = 0$). To see this, it is enough to check that for $r = 0$, the constant in the asymptotics of $\mathbb{E}[\tau^{>r} = n; \phi(S_n)]$ coincides with the one in the asymptotics of $\mathbb{E}[\tau^{*+} = n; \phi(S_n)]$. To that purpose, we first notice that for $r = 0$, the domain Δ_r degenerates in $\{0\} \times \mathbb{R}^{*+}$. Furthermore, $U^{*+}(0) = 1$ and $a^{*+}(0) = 0$. Accordingly,*

$$\iint_{\Delta_r} \phi(x+y) U^{*+}(\mathrm{d}x) a^-(\mathrm{d}y) + \iint_{\Delta_r} \phi(x+y) a^{*+}(\mathrm{d}x) U^-(\mathrm{d}y) = \int_{\mathbb{R}^{*+}} \phi(y) b^{*+}(\mathrm{d}y).$$

In the right-hand side of the equation above, $\mathbb{R}^{*+}$ can be replaced by $\mathbb{R}^+$, as $b^{*+}(0) = 0$. We then obtain the right constant in Theorem 1.3.2. Likewise, we could see that Theorem 1.3.4 formally implies Theorem 1.3.1.

1.3.4 Applications to random walks on $\mathbb{R}^+$ with non-elastic reflection at 0

In this section we consider a sequence $(Y_i)_{i \geqslant 1}$ of i.i.d. random variables defined on a probability space $(\Omega, \mathcal{T}, \mathbb{P})$, and we define the random walk $(X_n)_{n \geqslant 0}$ on $\mathbb{R}^+$ with non-elastic reflection at 0 (or absorbed at 0) recursively, as follows :

$$X_{n+1} := \max(X_n + Y_{n+1}, 0), \quad \forall n \geqslant 0,$$

where X_0 is a given $\mathbb{R}^+$-valued random variable. The process $(X_n)_{n \geqslant 0}$ is a Markov chain on $\mathbb{R}^+$. We obviously have that for all $n \geqslant 0$, $X_{n+1} = f_{Y_{n+1}}(X_n)$, with

$$f_y(x) := \max(x+y, 0), \quad \forall x, y \in \mathbb{R}.$$

The chain $(X_n)_{n \geqslant 0}$ is thus a random dynamical system ; we refer the reader to [35, 36] for precise notions and for a complete description of recurrence properties of such Markov processes.

The profound difference between this chain and the classical random walk $(S_n)_{n \geqslant 0}$ on $\mathbb{Z}$ or $\mathbb{R}$ is due to the reflection at 0. We therefore introduce the successive absorption times $(\mathbf{a}_\ell)_{\ell \geqslant 0}$:

$$\begin{aligned} \mathbf{a_0} &:= 0, \\ \mathbf{a} = \mathbf{a}_1 &:= \inf\{n > 0 : X_0 + Y_1 + \cdots + Y_n < 0\}, \\ \mathbf{a}_\ell &:= \inf\{n > \mathbf{a}_{\ell-1} : Y_{\mathbf{a}_{\ell-1}+1} + \cdots + Y_{\mathbf{a}_{\ell-1}+n} < 0\}, \quad \forall \ell \geqslant 2. \end{aligned}$$

Let us assume the first moment condition $\mathbf{M}(1)$ (i.e., that $\mathbb{E}[|Y_1|] < \infty$). If in addition $\mathbb{E}[Y_1] > 0$, the absorption times are not $\mathbb{P}$-a.s. finite, and in this case, the chain is transient. Indeed, one has $X_n \geqslant X_0 + Y_1 + \cdots + Y_n$, with $Y_1 + \cdots + Y_n \to \infty$, $\mathbb{P}$-a.s. If $\mathbb{E}[Y_1] \leqslant 0$, all the $\mathbf{a}_\ell$, $\ell \geqslant 1$, are $\mathbb{P}$-a.s. finite, and the equality $X_{\mathbf{a}_\ell} \mathbb{1}_{\{\mathbf{a}_\ell < \infty\}} = 0$, $\mathbb{P}$-a.s., readily implies that $(X_n)_{n\geqslant 0}$ visits 0 infinitely often. On the event $[X_0 = 0]$, the first return time of $(X_n)_{n\geqslant 0}$ at the origin equals τ^-. In the subcase $\mathbb{E}[Y_1] = 0$, it has infinite expectation, and $(X_n)_{n\geqslant 0}$ is null recurrent. If $\mathbb{E}[Y_1] < 0$, one has $\mathbb{E}[\tau^-] < \infty$, and the chain $(X_n)_{n\geqslant 0}$ is positive recurrent. In particular, when $\mathbb{E}[Y_1] \geqslant 0$, for any $x \geqslant 0$ and any continuous function ϕ with compact support included in $\mathbb{R}^+$, one has

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{E}[\phi(X_n)|X_0 = x] = 0. \tag{1.3.1}$$

We shall here focus our attention on the speed of convergence in (1.3.1), by proving the following result :

Théorème 1.3.5. *Assume that the hypotheses* **AA**, **C** *and* $\mathbf{M}(2)$ *are satisfied. Then, for any* $x \geqslant 0$ *and any continuous function* ϕ *with compact support on* $\mathbb{R}^+$*, one has*

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt{n}\mathbb{E}[\phi(X_n)|X_0 = x] = \frac{\widetilde{\kappa}}{\sqrt{\pi}} \int_{\mathbb{R}^+} \phi(t) U^+(\mathrm{d}t),$$

where[8]

$$\widetilde{\kappa} := \exp\left(\sum_{n\geqslant 1} \frac{\mathbb{P}[S_n < 0] - 1/2}{n} \right). \tag{1.3.2}$$

If $\mathbb{E}[Y_1] > 0$ *and if furthermore* **AA** *and* $\mathbf{M}(\exp^-)$ *hold,*[9] *there exists* $\rho = \rho(\mu) \in]0, 1[$ *and a positive constant* $C(\phi)$ *(which can be computed explicitly) such that*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^{3/2}}{\rho^n} \mathbb{E}[\phi(X_n)|X_0 = x] = C(\phi).$$

Démonstration. We first assume that $X_0 = 0$. On the event $[T_\ell^{*-} \leqslant n < T_{\ell+1}^{*-}]$, one has that $X_n = S_n - S_{T_\ell^{*-}}$. It readily follows that

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}[\phi(X_n)|X_0 = 0] \\
&= \sum_{\ell\geqslant 0} \mathbb{E}[\mathbf{a}_\ell \leqslant n < \mathbf{a}_{\ell+1}; \phi(X_n)|X_0 = 0] \\
&= \sum_{\ell\geqslant 0} \mathbb{E}[T_\ell^{*-} \leqslant n < T_{\ell+1}^{*-}; \phi(X_n)|X_0 = 0] \\
&= \sum_{\ell\geqslant 0} \mathbb{E}[T_\ell^{*-} \leqslant n < T_{\ell+1}^{*-}; \phi(S_n - S_{T_\ell^{*-}})] \\
&= \sum_{\ell\geqslant 0} \sum_{0\leqslant k\leqslant n} \mathbb{E}[T_\ell^{*-} = k, Y_{k+1} \geqslant 0, \ldots, Y_{k+1} + \cdots + Y_n \geqslant 0; \phi(Y_{k+1} + \cdots + Y_n)] \\
&= \sum_{0\leqslant k\leqslant n} \sum_{\ell\geqslant 0} \mathbb{P}[T_\ell^{*-} = k] \mathbb{E}[Y_{k+1} \geqslant 0, \ldots, Y_{k+1} + \cdots + Y_n \geqslant 0; \phi(Y_{k+1} + \cdots + Y_n)].
\end{aligned}$$

8. We refer to Footnote 7 for another expression of $\widetilde{\kappa}$.

9. In fact, it would be sufficient to assume that $\mathbb{E}[e^{\gamma Y_1}] < \infty$ for γ belonging to some interval $[a, 0]$, if $[a, 0]$ is such that the convex function $\gamma \mapsto \mathbb{E}[e^{\gamma Y_1}]$ reaches its minimum at a point $\gamma_0 \in]a, 0[$.

Using the fact that for any $k \geqslant 0$, the events $[T_\ell^{*-} = k]$, $\ell \geqslant 0$, are pairwise disjoint together with the fact that $\mathcal{L}(Y_1, \dots, Y_n) = \mathcal{L}(Y_n, \dots, Y_1)$, one gets

$$\sum_{\ell \geqslant 0} \mathbb{P}[T_\ell^{*-} = k] = \mathbb{P}[\exists \ell \geqslant 0, T_\ell^{*-} = k]$$
$$= \mathbb{P}[S_k < 0, S_k < S_1, \dots, S_k < S_{k-1}] = \mathbb{P}[\tau^+ > k],$$

which in turn implies that

$$\mathbb{E}[\phi(X_n)|X_0 = 0] = \sum_{0 \leqslant k \leqslant n} \mathbb{P}[\tau^+ > k]\mathbb{E}[\tau^{*-} > n-k; \phi(S_{n-k})]. \tag{1.3.3}$$

The situation is more complicated when the starting point is $x \geqslant 0$. In that case, one has the decomposition

$$\mathbb{E}[\phi(X_n)|X_0 = x] = E_1(x,n) + E_2(x,n), \tag{1.3.4}$$

with $E_1(x,n) := \mathbb{E}[\mathbf{a} > n; \phi(X_n)|X_0 = x]$ and $E_2(x,n) := \mathbb{E}[\mathbf{a} \leqslant n; \phi(X_n)|X_0 = x]$. From the definition of $\mathbf{a}$, one gets $E_1(x,n) = \mathbb{E}[\tau^{<-x} > n; \phi(x+S_n)]$. Similarly, by the Markov property and the fact that $X_{\mathbf{a}} = 0$, $\mathbb{P}$-a.s., one may write

$$E_2(x,n) = \sum_{0 \leqslant \ell \leqslant n} \mathbb{P}[\tau^{<-x} = \ell]\mathbb{E}[\phi(X_{n-\ell})|X_0 = 0].$$

The centered case

We first assume that hypotheses **AA** and **M(2)** are satisfied and that the $(Y_i)_{i\geqslant 1}$ are centered (hypothesis **C**). In this case, by fluctuation theory of centered random walks, one gets $\mathbb{P}[\mathbf{a}_\ell < \infty] = 1$ for any $\ell \geqslant 0$ and any initial distribution $\mathcal{L}(X_0)$.

We first consider the case when $X_0 = 0$ and we use the identity (1.3.3). By [30, Theorem II.2] (see also how (1.3.3) is obtained), one gets

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt{n}\mathbb{P}[\tau^+ > n] = \frac{\widetilde{\kappa}}{\sqrt{\pi}},$$

with $\widetilde{\kappa}$ defined in (1.3.2). On the other hand, by Remark 1.3.1 in Section 1.3.2 we know that

$$\lim_{n\to\infty} n^{3/2}\mathbb{E}[\tau^{*-} > n; \phi(S_n)] = a^+(\phi).$$

We conclude, setting $c_n := \mathbb{P}[\tau^+ > n$, $d_n := \mathbb{E}[\tau^{*-} > n; \phi(S_n)]$, thus $c := \widetilde{\kappa}/\sqrt{\pi}$ and $D := \sum_{n\geqslant 0}\mathbb{E}[\tau^{*-} > n; \phi(S_n)] = U^+(\phi)$, in Lemma 1.3.2.

In the general case (when $X_0 = x$), we use identity (1.3.4). By the results of Section 1.3.3 (Theorem 1.3.4 with $\tau^{<-x}$ instead of $\tau^{>r}$), one gets $E_1(x,n) = O(n^{-3/2})$.[10] On the other hand, by the Markov property, since $X_{\mathbf{a}} = 0$, $\mathbb{P}$-a.s., one has

$$\begin{aligned} E_2(x,n) &= \sum_{0 \leqslant k \leqslant n} \mathbb{E}[\mathbf{a} = k; \phi(X_n)|X_0 = x] \\ &= \sum_{0 \leqslant k \leqslant n} \mathbb{P}[\mathbf{a} = k|X_0 = x]\mathbb{E}[\phi(X_{n-k})|X_0 = 0] \\ &= \sum_{0 \leqslant k \leqslant n} \mathbb{P}[\tau^{<-x} = k]\mathbb{E}[\phi(X_{n-k})|X_0 = 0]. \end{aligned}$$

10. Notice that in the preceding formula, $O(n^{-3/2})$ depends on x.

Recall that $\lim_{n\to\infty}\sqrt{n}\mathbb{E}[\phi(X_n)|X_0=0]=(\widetilde{\kappa}/\sqrt{\pi})U^+(\phi)$; on the other hand, it follows from Proposition 1.3.2 (with $\tau^{<-x}$ instead of $\tau^{>r}$) that $(n\mathbb{P}[\tau^{<-x}=n])_{n\geqslant 0}$ is bounded. Furthermore, $\sum_{n\geqslant 1}\mathbb{P}[\tau^{<-x}=n]=\mathbb{P}[\tau^{<-x}<\infty]=1$. One may thus apply Lemma 1.3.2, which yields

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt{n}\mathbb{E}[\phi(X_{n-k})|X_0=x]=\lim_{n\to\infty}\sqrt{n}E_2(x,n)=\frac{\widetilde{\kappa}}{\sqrt{\pi}}U^+(\phi).$$

The non-centered case

Hereafter, we assume that hypotheses $\mathbf{M}(1)$, $\mathbf{M}(\exp^-)$ and $\mathbf{AA}$ hold, and that in addition $\mathbb{E}[Y_1]>0$. We use the standard relativisation procedure that we now recall : the function

$$\widehat{\mu}(\gamma):=\mathbb{E}[e^{\gamma Y_1}]$$

is well defined on $\mathbb{R}^-$, tends to ∞ as $\gamma\to-\infty$, and has derivative $\mathbb{E}[Y_1]>0$ at 0. It thus achieves its minimum at a point $\gamma_0<0$, and we have $\rho:=\widehat{\mu}(\gamma_0)\in]0,1[$. The measure

$$\widetilde{\mu}(\mathrm{d}x):=(1/\rho)e^{\gamma_0 x}\mu(\mathrm{d}x)$$

is a probability on $\mathbb{R}$. Furthermore, if $(\widetilde{Y}_i)_{i\geqslant 1}$ is a sequence of i.i.d. random variables with law $\widetilde{\mu}$ and $(\widetilde{S}_n)_{n\geqslant 1}$ is the corresponding random walk on $\mathbb{R}$ starting from 0, one gets

$$\mathbb{E}[\varphi(Y_1,\ldots,Y_n)]=\rho^n\mathbb{E}[\varphi(\widetilde{Y}_1,\ldots,\widetilde{Y}_n)e^{-\gamma_0\widetilde{S}_n}]$$

for any $n\geqslant 1$ and any bounded test Borel function $\varphi:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$. Denoting by $\widetilde{\tau}^+$ and $\widetilde{\tau}^{*-}$ the first entrance times of $(\widetilde{S}_n)_{n\geqslant 1}$ in $\mathbb{R}^+$ and $\mathbb{R}^{*-}$, respectively, we may thus write (1.3.3) as

$$\mathbb{E}[\phi(X_n)|X_0=0]=\rho^n\sum_{0\leqslant k\leqslant n}\mathbb{E}[\widetilde{\tau}^+>k;e^{-\gamma_0\widetilde{S}_k}]\mathbb{E}[\widetilde{\tau}^{*-}>n-k;\phi(\widetilde{S}_{n-k})e^{-\gamma_0\widetilde{S}_{n-k}}],$$

and by Lemma 1.3.3 the sequence $((n^{3/2}/\rho^n)\mathbb{E}[\phi(X_n)|X_0=x])_{n\geqslant 0}$ converges to some constant $C(\phi)>0$.

Following the same way, for any $x\geqslant 0$ one can decompose as above $\mathbb{E}[\phi(X_n)|X_0=x]$ as $E_1(x,n)+E_2(x,n)$, with

$$\begin{aligned}E_1(x,n)&=\rho^n\mathbb{E}[\widetilde{\tau}^{<-x}>n;\phi(\widetilde{S}_n)e^{-\gamma_0\widetilde{S}_{n-k}}],\\E_2(x,n)&=\sum_{0\leqslant k\leqslant n}\rho^k\mathbb{E}[\widetilde{\tau}^{<-x}=k;e^{-\gamma_0\widetilde{S}_k}]\mathbb{E}[\phi(X_n)|X_0=0].\end{aligned}$$

One concludes using Section 1.3.3 (Theorem 1.3.3 with $\tau^{<-x}$ instead of $\tau^{>r}$) for the behavior of the sequence $(\mathbb{E}[\widetilde{\tau}^{<-x}=n;e^{-\gamma_0\widetilde{S}_n}])_{n\geqslant 0}$ and the previous estimation for the behavior of $(\mathbb{E}[\phi(X_n)|X_0=0])_{n\geqslant 0}$. □

1.3.5 Local limit theorems and links with results by Denisov and Wachtel

Hereafter, we shall assume that $\mathbf{AA}(\mathbb{Z})$ holds ; in particular, the random walk $(S_n)_{n\geqslant 0}$ is $\mathbb{Z}$-valued. Taking $\phi(S_n)=\mathbb{1}_{\{S_n=i\}}$, Theorem 1.3.4 immediately leads to :

Corollaire 1.3.1. *Assume that the hypotheses $\mathbf{AA}(\mathbb{Z})$, $\mathbf{C}$ and $\mathbf{M}(2)$ hold. Then for $i\leqslant r$,*

$$\mathbb{P}[\tau^{>r}>n,S_n=i]=\frac{Z(r,i)}{n^{3/2}}(1+o(1)),\quad n\to\infty,$$

where we have set

$$Z(r,i) = \sum_{\max\{i,0\}\leqslant k\leqslant r} [a^-(i-k)U^{*+}(k) + U^-(i-k)a^{*+}(k)]. \tag{1.3.1}$$

It is worth noting that the definition of a^- implies that for $y \in \mathbb{Z}^{*+}$, $a^-(y) = 0$, and for $y \in \mathbb{Z}^-$,

$$a^-(y) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \sum_{n\geqslant 0} \mathbb{E}[\tau^{*+} > n; S_n \in [y,0]].$$

Likewise, for $y \in \mathbb{Z}^-$, $a^{*+}(y) = 0$, and for $y \in \mathbb{Z}^{*+}$,

$$a^{*+}(y) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \sum_{n\geqslant 0} \mathbb{E}[\tau^- > n; S_n \in]0,y]].$$

Remarque 1.3.3. *Using these facts and similar remarks for the potentials U^{*+} and U^-, we obtain that the quantity* (1.3.1) *can also be written as a sum of two convolution terms :*

$$Z(r,i) = \sum_{-\infty<k<r} [a^-(i-k)U^{*+}(k) + U^-(i-k)a^{*+}(k)] \tag{1.3.2}$$

$$= \sum_{-\infty<k<\infty} [a^-(i-k)U^{*+}(k)\mathbb{1}_{\{k\leqslant r\}} + U^-(i-k)a^{*+}(k)\mathbb{1}_{\{k\leqslant r\}}]. \tag{1.3.3}$$

In the remaining of this section we compare the local limit theorem of Corollary 1.3.1 with the one in [12]. All results taken from [12] make the assumptions that the $(Y_i)_{i\geqslant 1}$ have moments of order $2+\epsilon$, with $\epsilon > 0$. To state the local limit theorem [12, Theorem 7], we need to introduce the function (see [12, Section 2.4] for more details)

$$V(x) := -\mathbb{E}[S_{\tau^{\leqslant -x}}] = -\mathbb{E}[S_{\tau^{<-x+1}}]. \tag{1.3.4}$$

This function is positive on $\mathbb{R}^+$ and is harmonic for the random walk $(S_n)_{n\geqslant 0}$ killed when reaching $\mathbb{R}^-$; it means that for $x > 0$,

$$\mathbb{E}[V(x+Y_1); \tau^{<-x} > 1] = V(x).$$

Define V' as the harmonic function for the random walk with increments $(-Y_i)_{i\geqslant 1}$ with the same construction as (1.3.4). We have the following result :

Théorème 1.3.6 ([12])**.** *Assume that the hypotheses* $\mathbf{AA}(\mathbb{Z})$*,* $\mathbf{C}$ *and* $\mathbf{M}(2+\epsilon)$ *hold. Then for* $i \leqslant r$*,*

$$\mathbb{P}[\tau^{>r} > n, S_n = i] = \frac{1}{\sigma}\sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{V'((r+1)/\sigma)V((r+1-i)/\sigma)}{n^{3/2}}(1+o(1)), \quad n \to \infty.$$

Démonstration. Theorem 7 in [12] states that if $(\widetilde{S}_n)_{n\geqslant 0}$ is a random walk on a lattice $h\mathbb{Z}$ starting from 0 and with increments $(\widetilde{Y}_i)_{i\geqslant 0}$ having a variance equal to 1, the following local limit theorem holds :

$$\mathbb{P}[x + \widetilde{S}_n = y, \tau^{\leqslant -x} > n] = h\sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{V(x)V'(y)}{n^{3/2}}(1+o(1)), \quad n \to \infty.$$

Applying this result to the random walk $(\widetilde{S}_n)_{n\geqslant 0} := (-S_n/\sigma)_{n\geqslant 0}$, and letting $x := (r+1)/\sigma$ and $y := (r+1-i)/\sigma$, we obtain Theorem 1.3.6. □

By Corollary 1.3.1 and Theorem 1.3.6, we must have

$$Z(r,i) = \frac{1}{\sigma}\sqrt{\frac{2}{\pi}}V'((r+1)/\sigma)V((r+1-i)/\sigma). \tag{1.3.5}$$

However :

Question : *It is an open problem to show by a direct computation that* (1.3.5) *holds.*

To conclude Section 1.3.5, we prove (1.3.5) for the simple random walk, with probabilities of transition $\mathbb{P}[Y_i = -1] = \mathbb{P}[Y_i = 1] = p$ and $\mathbb{P}[Y_i = 0] = 1 - 2p$. In this case the harmonic functions have the simple form $V(x) = V'(x) = x$, and obviously $\sigma = \sqrt{2p}$. We deduce that the constant in Theorem 1.3.6 is

$$\frac{(r+1)(r+1-i)}{2p^{3/2}\sqrt{\pi}}. \tag{1.3.6}$$

To compute $Z(r,i)$, we start from the formulation (1.3.1), where we assume that $i \geqslant 0$ (the computation for $i < 0$ would be similar). We recall that for the simple random walk one has $U^{*+}(k) = \mathbb{1}_{\{k\geqslant 0\}}$ and $U^{-}(k) = \mathbb{1}_{\{k\leqslant 0\}}/p$. Then for $k \leqslant 0$, $a^{-}(k) = (|k|+1)/(p\sigma\sqrt{2\pi})$ and for $k \geqslant 0$, $a^{*+}(k) = k/(\sigma\sqrt{2\pi})$. We deduce that

$$Z(r,i) = \frac{1}{p\sigma\sqrt{2\pi}} \sum_{i\leqslant k\leqslant r} [(k-i+1)+k].$$

It is then an easy exercise to show that $Z(r,i)$ equals (1.3.6).

Acknowledgments

We wish to thank Nguyen Thi Hoang Oanh for useful discussions concerning Section 1.3.5. We are grateful to Vitali Wachtel for pointing out the reference [11]. Finally, we thank an anonymous referee for useful comments and suggestions.

Chapitre 2

Autre approche : méthode des fonctions génératrices et application à la marche aléatoire avec réflexions élastiques en zéro

2.1 La factorisation de Presman

Motivation : Nous introduisons ici le cadre algébrique mis en place par E.L. Presman dans [34] pour formaliser la factorisation de Wiener-Hopf. On pourra ainsi mieux comprendre les relations algébriques mises en jeu dans la factorisation de Wiener-Hopf. Ce qui permettra de déduire, à partir d'hypothèses faites sur la loi de la marche aléatoire, des informations sur la chaîne formée par le processus de records et le temps d'atteinte correspondant.

Dans le cadre classique et dans la factorisation de Wiener-Hopf, les projecteurs considérés ici sont les restrictions des transformées de Laplace de mesures de Radon aux demi-droites $\mathbb{R}^+$, $\mathbb{R}^{*+}$, $\mathbb{R}^-$ et $\mathbb{R}^{*-}$ avec une dualité entre $\mathbb{R}^+$ et $\mathbb{R}^{*-}$ d'une part et $\mathbb{R}^-$ et $\mathbb{R}^{*+}$ d'autre part. Pour garder en mémoire cela, nous noterons, $\mathcal{P}$, $\mathcal{N}^*$, $\mathcal{P}$, $\mathcal{N}$ les différents opérateurs de projection mis en jeu, liés entre eux par les relations $\mathcal{N}^* = \mathcal{E} - \mathcal{P}$ et $\mathcal{N} = \mathcal{E} - \mathcal{P}^*$ où $\mathcal{E}$ désigne l'identité. L'opérateur $\mathcal{P}$ peut être vu comme la restriction à la demi-droite $\mathbb{R}^+$ des réels positifs et $\mathcal{N}^*$ la restriction à $\mathbb{R}^{*-}$.

Soit $\mathcal{R}$ une algèbre de Banach d'élément neutre e. On note $\mathcal{E}$ l'opérateur identité sur $\mathcal{R}$ et $\mathcal{P}$ un projecteur sur $\mathcal{R}$ vérifiant la relation d'entrelacement suivante, essentielle pour les manipulations algébriques

$$(\mathcal{P}f)(\mathcal{P}g) = \mathcal{P}[(\mathcal{P}f)g + f(\mathcal{P}g) - fg]. \tag{2.1.1}$$

On pose $\mathcal{N}^* = \mathcal{E} - \mathcal{P}$. Il est alors clair que $\mathcal{N}^*$ vérifie aussi la relation (2.1.1) [1].

Définition 2.1.1. *Soit $a \in \mathcal{R}$. On dit que l'élément $e - a$ admet une* **factorisation canonique** *relativement à $\mathcal{P}$ s'il existe $b, c \in \mathcal{R}$, tels que*

$$\begin{array}{rrcl} i) & e-a & = & (e-\mathcal{P}b)(e-\mathcal{N}^*c), \\ ii) & (e-\mathcal{P}b)^{-1} & = & e+\mathcal{P}c, \\ iii) & (e-\mathcal{N}^*c)^{-1} & = & e+\mathcal{N}^*b. \end{array} \tag{2.1.2}$$

Dans ce cas, on dit que b et c fournissent une $\mathcal{P}-$factorisation de $e - a$ canonique, notée $\mathcal{P}.f.c$ en abrégé.

Les éléments $e - \mathcal{P}b$ et $e - \mathcal{N}^*c$ sont les facteurs de la $\mathcal{P}.f.c$ et sont appelés respectivement **partie strictement négative** *et* **partie positive** *de la factorisation.*

Le lemme suivant donne une condition nécessaire et une condition suffisante pour l'existence de la factorisation et il montre de plus que lorsque cette factorisation existe, les éléments qui la fournissent sont déterminés de façon unique.

Lemme 2.1.1. *[34]*

(i). *Si b et c fournissent une $\mathcal{P}.f.c$ de $e - a$, on a*

a) pour tout $d \in \mathbb{R}$, l'équation

$$x - \mathcal{P}(xa) = d \tag{2.1.3}$$

admet une solution unique donnée par $x = d+\mathcal{P}[da(e+\mathcal{N}^*b)](e+\mathcal{P}c)$; de même, l'équation

$$y - \mathcal{N}^*(ay) = d \tag{2.1.4}$$

admet une solution unique donnée par $y = d + (e + \mathcal{N}^*b)\,(\mathcal{N}^*[(e + \mathcal{P}c)ad])$.
En particulier, pour $d = e$, ces solutions s'écrivent respectivement :

$$x = e + \mathcal{P}c \quad et \quad y = e + \mathcal{N}^*b.$$

b) Les éléments b et c sont déterminés de façon unique par la $\mathcal{P}.f.c$.

c) L'élément c est aussi l'unique solution de l'équation $(e + \mathcal{P}x)(e - a) = e - \mathcal{N}^*x$ et b est solution unique de $(e - a)(e + \mathcal{N}^*x) = e - \mathcal{P}x$.

(ii). *Réciproquement, si pour $d = e$, les équations (2.1.3) et (2.1.4) possèdent des solutions x et y, on a*

$$x(e - a)y = e.$$

De plus, si deux des éléments $x, y, e - a$ sont inversibles alors les éléments $b = ay$ et $c = xa$ fournissent une $\mathcal{P}.f.c$ de $e - a$.

---

1. **Démonstration :** On a

$$\begin{array}{rcl} (\mathcal{N}^*f)(\mathcal{N}^*g) & = & ((\mathcal{E}-\mathcal{P})f)((\mathcal{E}-\mathcal{P})g) \\ & = & fg - f\mathcal{P}g - (\mathcal{P}f)g + \mathcal{P}f\mathcal{P}g \\ & = & fg - f\mathcal{P}g - (\mathcal{P}f)g + \mathcal{P}[(\mathcal{P}f)g + f(\mathcal{P}g) - fg] \\ & = & fg - f\mathcal{P}g - (\mathcal{P}f)g + \mathcal{P}[(\mathcal{P}f)g] + \mathcal{P}\,[f(\mathcal{P}g)] - \mathcal{P}(fg) \\ & = & (\mathcal{E}-\mathcal{P})[fg - f\mathcal{P}g - (\mathcal{P}f)g] \\ & = & (\mathcal{E}-\mathcal{P})[f((\mathcal{E}-\mathcal{P})g) + ((\mathcal{E}-\mathcal{P})f)g - fg] \\ & = & \mathcal{N}^*[f\mathcal{N}^*g + (\mathcal{N}^*f)g - fg]. \end{array}$$

Ce qu'on voulait démontrer.

Démonstration. Montrons 1) a).

Soit $d \in \mathbb{R}$, on considère l'équation : $x - \mathcal{P}(xa) = d$. Vérifions que $x = d + \mathcal{P}[da(e+\mathcal{N}^*b)](e+\mathcal{P}c)$ est solution de l'équation (2.1.3). On a $a = e - (e - \mathcal{P}b)(e - \mathcal{N}^*c)$. D'après (2.1.2), il s'ensuit que

$$\begin{aligned} a(e+\mathcal{N}^*b) &= e + \mathcal{N}^*b - (e - \mathcal{P}b)(e+\mathcal{N}^*b)^{-1}(e+\mathcal{N}^*b) \\ &= e + \mathcal{N}^*b - (e - \mathcal{P}b) \\ &= \mathcal{N}^*b + \mathcal{P}b = b. \end{aligned}$$

Par suite

$$a(e+\mathcal{N}^*b) = b. \tag{2.1.5}$$

Il vient $x = d + \mathcal{P}(db)(e+\mathcal{P}c)$ et donc $xa = da + \mathcal{P}(db)(e+\mathcal{P}c)a$. Par ailleurs

$$\begin{aligned} (e+\mathcal{P}c)a &= (e+\mathcal{P}c)(e - (e+\mathcal{P}c)^{-1}(e - \mathcal{N}^*c)) \qquad \text{d'après (2.1.2)} \\ &= e + \mathcal{P}c - (e - \mathcal{N}^*c) = c. \end{aligned}$$

D'où $(e+\mathcal{P}c)a = c$.
On obtient alors $xa = da + \mathcal{P}(db)c$ et donc $\mathcal{P}(xa) = \mathcal{P}(da) + \mathcal{P}[\mathcal{P}(db)c]$. Par conséquent

$$\begin{aligned} x - \mathcal{P}(xa) &= d - \mathcal{P}(da) + \mathcal{P}(db)(e+\mathcal{P}c) - \mathcal{P}(\mathcal{P}(db)c) \\ &= d - \mathcal{P}(da) + \mathcal{P}(db) + \mathcal{P}(db)\mathcal{P}c - \mathcal{P}(\mathcal{P}(db)c) \qquad \text{d'après (2.1.1)} \\ &= d + \mathcal{P}\left[-da + db + (\mathcal{P}(db))c + db(\mathcal{P}c) - dbc - (\mathcal{P}(db))c\right] \\ &= d + \mathcal{P}\left[d(b(e+\mathcal{P}c - c) - a)\right] \\ &= d + \mathcal{P}\left[db(e - \mathcal{N}^*c) - da\right]. \end{aligned}$$

Or d'après (2.1.5), on a $a(e+\mathcal{N}^*b) = b$, d'où

$$\begin{aligned} b(e - \mathcal{N}^*c) &= a(e+\mathcal{N}^*b)(e - \mathcal{N}^*c) \\ &= a(e - \mathcal{N}^*c)^{-1}(e - \mathcal{N}^*c) \qquad \text{d'après (2.1.2)} \\ &= a. \end{aligned}$$

Ce qui donne $x - \mathcal{P}(xa) = d + \mathcal{P}(da - da) = d$. Ainsi x est bien une solution de l'équation (2.1.3).
Montrons à présent l'unicité de cette solution. La linéarité de l'équation en question fait qu'il suffit d'établir l'unicité pour une valeur arbitraire de d, par exemple $d = e$. Vérifions donc que l'équation $x - \mathcal{P}(xa) = e$ admet une solution unique.
Soit x_0 une solution de cette équation (l'existence découle de ce qui précède). On a alors $x_0 = e + \mathcal{P}(x_0a)$, si bien qu'en multipliant l'équation précédente à droite par $e - \mathcal{P}b$, on obtient

$$\begin{aligned} x_0(e - \mathcal{P}b) &= (e + \mathcal{P}(x_0a))(e - \mathcal{P}b) \\ &= e - \mathcal{P}b + \mathcal{P}(x_0a) - \mathcal{P}(x_0a)\mathcal{P}b \\ &= e - \mathcal{P}b + \mathcal{P}[x_0a - \mathcal{P}(x_0a)b - x_0a\mathcal{P}b + x_0ab] \qquad \text{d'après (2.1.1)} \\ &= e - \mathcal{P}b + \mathcal{P}\left[-\mathcal{P}(x_0a)b + x_0a(e - \mathcal{P}b + b)\right] \\ &= e - \mathcal{P}b + \mathcal{P}\left[-\mathcal{P}(x_0a)b + x_0a(\mathcal{N}^*b + e)\right], \end{aligned}$$

avec $a + (e+\mathcal{N}^*b) = b$ d'après (2.1.5).
Par conséquent

$$x_0(e - \mathcal{P}b) = e - \mathcal{P}b + \mathcal{P}[-\mathcal{P}(x_0a)b + x_0b] = e - \mathcal{P}b + \mathcal{P}\left[(x_0 - \mathcal{P}(x_0a))b\right].$$

Comme x_0 est une solution de l'équation (2.1.3) pour $d = e$, on a $x_0 - \mathcal{P}(x_0a) = e$ et l'égalité ci-dessus entraîne $x_0(e - \mathcal{P}b) = e$. De même, on montre que $(e - \mathcal{P}b)x_0 = e$. Ce qui donne

$x_0 = (e - \mathcal{P}b)^{-1} = e + \mathcal{P}c$.
Ainsi, $x_0 = e + \mathcal{P}c$ est l'unique solution de (2.1.5) lorsque $d = e$. De la même façon on montre que l'élément $y = d + (e + \mathcal{N}^*b)\mathcal{N}^*[(e + \mathcal{P}c)ad]$ est l'unique solution de (2.1.4) et qu'en particulier $y_0 = e + \mathcal{N}^*b$ est l'unique solution de (2.1.4) pour $d = e$.

Démontrons à présent 1.b) Soient b et c (resp. b_1 et c_1) des éléments de $\mathcal{R}$ qui fournissent une $\mathcal{P}.f.c$ de $e - a$. D'après 2.1.1.a), les éléments $e + \mathcal{P}c$ et $e + \mathcal{P}c_1$ sont solutions de l'équation (2.1.3) pour $d = e$; par unicité de la solution de l'équation (2.1.3), on obtient $\mathcal{P}c = \mathcal{P}c_1$.
De même, les éléments $e + \mathcal{N}^*b$ et $e + \mathcal{N}^*b_1$ sont solutions de l'équation (2.1.4) pour $d = e$ et par unicité de la solution on conclut $\mathcal{N}^*b = \mathcal{N}^*b_1$.
Par suite et d'après (2.1.2-i)) et (2.1.2-ii)), on a $\mathcal{P}b = \mathcal{P}b_1$ et $\mathcal{N}^*c = \mathcal{N}^*c_1$. D'où

$$\mathcal{N}^*b + \mathcal{P}b = \mathcal{N}^*b_1 + \mathcal{P}b_1 \quad \text{et} \quad \mathcal{N}^*c + \mathcal{P}c = \mathcal{N}^*c_1 + \mathcal{P}c_1,$$

c'est-à-dire $b = b_1$ et $c = c_1$.
Ainsi les éléments b et c sont déterminés de façon unique par la $\mathcal{P}.f.c.$
Démontrons maintenant 1.c) Considérons l'équation $(e + \mathcal{P}x)(e - a) = e - \mathcal{N}^*x$. Cette équation admet c comme solution, d'après (2.1.2). Il nous faut donc démontrer que cette solution est unique.
En remplaçant $(e - a)$ par l'expression (2.1.2-i)), on a

$$(e + \mathcal{P}x)(e - \mathcal{P}b)(e - \mathcal{N}^*c) = e - \mathcal{N}^*x$$

et l'égalité (2.1.2-iii)) nous donne

$$(e + \mathcal{P}x)(e - \mathcal{P}b) = (e - \mathcal{N}^*x)(e + \mathcal{N}^*c). \tag{2.1.6}$$

Examinons alors le membre de gauche de (2.1.6), on a

$$(e+\mathcal{P}x)(e-\mathcal{P}b) = e-\mathcal{P}b+\mathcal{P}x-\mathcal{P}x\mathcal{P}b = e-\mathcal{P}[b-x+x\mathcal{P}b+(\mathcal{P}x)b-xb], \text{ d'après la relation (2.1.1).}$$

Par ailleurs, en développant le membre de droite de (2.1.6), on trouve

$$\begin{aligned}(e - \mathcal{N}^*x)(e - \mathcal{N}^*b) &= e + \mathcal{N}^*b - \mathcal{N}^*x - \mathcal{N}^*x\mathcal{N}^*b \\ &= e - \mathcal{N}^*[-b + x + x\mathcal{N}^*b + (\mathcal{N}^*x)b - xb] \qquad \text{d'après (2.1.1)} \\ &= e - \mathcal{N}^*[-b + x + x(e - \mathcal{P})b + ((e - \mathcal{P})x)\, b - xb] \\ &= e - \mathcal{N}^*[b + x - x\mathcal{P}b - (\mathcal{P}x)b + xb].\end{aligned}$$

En posant $X = b - x + x\mathcal{P}b + (\mathcal{P}x)b - xb$, l'égalité (2.1.6) s'écrit $e - \mathcal{P}X = e + \mathcal{N}^*X$. Ce qui donne $\mathcal{P}(X) = -\mathcal{N}^*(X)$ c'est à dire $\mathcal{P}(X) = -(X - \mathcal{P}(X))$ et donc $X = 0$.
D'où

$$(e + \mathcal{P}x)(e - \mathcal{P}b) = (e - \mathcal{N}^*x)(e + \mathcal{N}^*c) = e.$$

Par suite

$$e + \mathcal{P}x = (e - \mathcal{P}b)^{-1} = e + \mathcal{P}c, \qquad \text{d'après (2.1.2-ii))}$$

et donc $\mathcal{P}x = \mathcal{P}c$.
Par ailleurs :

$$e - \mathcal{N}^*x = (e + \mathcal{N}^*b)^{-1} = e - \mathcal{N}^*c.$$

D'où $\mathcal{N}^*x = \mathcal{N}^*c$. Ainsi $\mathcal{P}x + \mathcal{N}^*x = \mathcal{P}c + \mathcal{N}^*c$, c'est-à-dire $x = c$. De même, on montre que b est l'unique solution de $(e - a)(e + \mathcal{N}^*x) = e - \mathcal{P}x$.
2) Réciproquement, on suppose que pour $d = e$, les équations (2.1.3) et (2.1.4) admettent des solutions notées respectivement x et y. Si bien que

$$x = e + \mathcal{P}(xa); \quad y = e + \mathcal{N}^*(ay).$$

On obtient

$$xy = (e + \mathcal{P}(xa))(e + \mathcal{N}^*(ay)) = e + \mathcal{N}^*(ay) + \mathcal{P}(xa) + \mathcal{P}(xa)\mathcal{N}^*(ay).$$

La relation

$$\mathcal{P}f\mathcal{N}^*g = \mathcal{P}[f\mathcal{N}^*g] + \mathcal{N}^*[(\mathcal{P}f)g]$$

satisfaite pour tous les éléments de $\mathcal{R}$ entraîne [2]

$$\begin{aligned} xy &= e + \mathcal{N}^*(ay) + \mathcal{P}(xa) + \mathcal{P}[xa\mathcal{N}^*(ay)] + \mathcal{N}^*[\mathcal{P}(xa).ay] \\ &= e + \mathcal{P}[xa(e + \mathcal{N}^*(ay))] + \mathcal{N}^*[(e + \mathcal{P}(xa))ay] \\ &= e + \mathcal{P}(xay) + \mathcal{N}^*(xay) = e + xay. \end{aligned}$$

Ce qui donne $x(e - a)y = e$.
Supposons par exemple que x et $e - a$ soient inversibles, alors y l'est aussi par la dernière relation.
On pose

$$\begin{cases} b = ay, \\ c = xa. \end{cases} \tag{2.1.7}$$

Montrons que b et c fournissent une $\mathcal{P}.f.c$ de $e - a$. Les éléments x et y s'écrivent en fonction de b et c comme suit : $x = e + \mathcal{P}c$, $y = e + \mathcal{N}^*b$.
Il vient

$$x^{-1} = (e - a)y = (e - a)(e + \mathcal{N}^*b) = e + \mathcal{N}^*b - a(e + \mathcal{N}^*b).$$

Or $y = e + \mathcal{N}^*(ay)$, par suite $ay = a(e + \mathcal{N}^*(ay))$ c'est à dire $b = a(e + \mathcal{N}^*b)$ et donc
$x^{-1} = e + \mathcal{N}^*b - b = e - \mathcal{P}b$.
De même, on a $y^{-1} = x(e - a) = e - \mathcal{N}^*c$ et $e - a$ s'écrit $e - a = x^{-1}y^{-1} = (e - \mathcal{P}b)(e - \mathcal{N}^*c)$ avec $(e - \mathcal{P}b)^{-1} = x = e + \mathcal{P}c$ et $(e - \mathcal{N}^*c)^{-1} = y = e + \mathcal{N}^*b$.
On vient de démontrer que les éléments b et c fournissent une $\mathcal{P}.f.c$ de l'élément $e - a$. Ce qui achève la démonstration. □

Dans ce qui suit, on étudie la dépendance de la $\mathcal{P}.f.c$ en fonction d'un paramètre complexe s.

Définition 2.1.2. *Une fonction γ de la variable complexe s, prenant ses valeurs dans une algèbre de Banach $\mathcal{R}$, sera dite analytique au voisinage d'un point s_0 si elle est développable en série entière au voisinage de s_0.*
Cela signifie qu'il existe $\epsilon > 0$ et $(\gamma_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de $\mathcal{R}$ tels que pour $|s - s_0| < \epsilon$, la série $\sum_{n\geqslant 0} \gamma_n(s - s_0)^n$ converge normalement dans $\mathcal{R}$ vers la fonction $\gamma(s)$.

Lemme 2.1.2. *Soit $s \mapsto a(s)$ une fonction analytique au voisinage de s_0 à valeurs dans une algèbre de Banach $\mathcal{R}$. Supposons que b et c fournissent une $\mathcal{P}.f.c$ de $e - a(s_0)$. Alors $e - a(s)$ admet une $\mathcal{P}.f.c$ sur un voisinage O de s_0 et les éléments $c(s)$ et $b(s)$ qui fournissent cette $\mathcal{P}.f.c$ sont tels que les fonctions $s \mapsto c(s)$ et $s \mapsto b(s)$ sont analytiques sur O.*

---

2. **Démonstration**

$$\begin{aligned} \mathcal{P}f\mathcal{N}^*g &= (\mathcal{P}f)(g - \mathcal{P}g) \\ &= (\mathcal{P}f)g - \mathcal{P}f.\mathcal{P}g \\ &= (\mathcal{P}f)g - \mathcal{P}[f.\mathcal{P}g + (\mathcal{P}f)g - fg] \\ &= (\mathcal{P}f)g - \mathcal{P}[f(\mathcal{P}g - g) + (\mathcal{P}f)g] \\ &= (\mathcal{P}f)g - \mathcal{P}[-f\mathcal{N}^*g + (\mathcal{P}f)g] \\ &= \mathcal{P}[f\mathcal{N}^*g] + \mathcal{N}^*[(\mathcal{P}f)g]. \end{aligned}$$

Démonstration. Dans l'algèbre de Banach $\mathcal{R}$, on considère les opérateurs bornés $U(s)$ et $V(s)$ définis par

$$\left\{\begin{array}{lcl} U(s)(x) & = & x - \mathcal{P}(xa(s)) \\ V(s)(y) & = & y - \mathcal{N}^*(a(s)y). \end{array}\right. \tag{2.1.8}$$

Pour simplifier les notations, on peut supposer que $s_0 = 0$; on fixe un voisinage ouvert O de 0 sur lequel la fonction $s \mapsto a(s)$ s'écrit sous la forme

$$a(s) = \sum_{n \geqslant 0} a_n s^n, \quad (a_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}.$$

Comme l'opérateur $\mathcal{P}$ est linéaire et borné, on a

$$\begin{aligned} \left\| \mathcal{P}\left(\sum_{n\geqslant 0} xa_n s^n \right) - \sum_{n=0}^{N} \mathcal{P}(xa_n)s^n \right\| &= \left\| \mathcal{P}\left(\sum_{n\geqslant N+1} xa_n s^n \right) \right\| \\ &\leqslant \|\mathcal{P}\| \cdot \|x\| \cdot \left\| \sum_{n\geqslant N+1} a_n s^n \right\| \underset{n\to+\infty}{\to} 0 \end{aligned}$$

D'où

$$\mathcal{P}((a(s)) = \sum_{n\geqslant 0} \mathcal{P}(xa_n)s^n.$$

Ainsi, pour tout $x \in \mathcal{R}$, la fonction $s \mapsto U(s)(x)$ donnée par (2.1.8) est analytique au voisinage de $s_0 = 0$, il en est de même pour la fonction $s \mapsto V(s)(y)$ donnée par (2.1.8) pour tout $y \in \mathcal{R}$.

Comme $e - a(0)$ admet une $\mathcal{P}.f.c$, les opérateurs $U(0)$ et $V(0)$ sont bijectifs, leurs inverses sont donnés par le lemme 2.1.1, les formules explicites qu'on y trouve montrent qu'ils sont continus sur $\mathcal{R}$. Les opérateurs $U(0)$ et $V(0)$ sont par suite des homéomorphismes de l'espace de Banach $\mathcal{R}$. D'après le théorème d'inversion locale pour les fonctions analytiques, les fonctions $s \mapsto U^{-1}(s)$ et $s \mapsto V^{-1}(s)$ sont analytiques sur un voisinage de $s_0 = 0$, d'après les formules du lemme 2.1.1.

Ainsi les équations (2.1.3) et (2.1.4) admettent des solutions uniques pour $d = e$ et $a = a(s)$ et ces solutions $x(s)$ et $y(s)$ sont analytiques au voisinage de $s_0 = 0$.
Par suite et d'après le lemme 2.1.1-ii), on obtient au voisinage de $s_0 = 0$ une $\mathcal{P}.f.c$ de l'élément fourni par

$$\left\{\begin{array}{lcl} b(s) & = & y(s)a(s), \\ c(s) & = & a(s)x(s), \end{array}\right. \tag{2.1.9}$$

de plus les fonctions $s \mapsto b(s)$ et $s \mapsto c(s)$ sont analytiques au voisinage de $s_0 = 0$. □

Corollaire 2.1.1. *Soit $a \in \mathcal{R}$, alors pour $|s|$ assez petit, l'élément $e - sa$ admet une $\mathcal{P}.f.c$ dont les facteurs sont analytiques en s.*

Démonstration. Ceci découle du lemme 2.1.2 pour $s_0 = 0$, en utilisant la factorisation $e = ee$. □

2.1.1 Factorisation dans l'algèbre de Banach $\mathcal{V}_{[\alpha,\beta]}$

Pour tout intervalle $I \subset [0, +\infty[$, on note $\mathcal{A}_I$ l'anneau de $\mathbb{C}$ défini par

$$\mathcal{A}_I = \{re^{i\theta} / \ r \in I,\ \theta \in [0, 2\pi]\}. \tag{2.1.10}$$

Pour simplifier, on pose

$$\forall \gamma \in \mathbb{R}, \quad \mathcal{A}_{[\gamma]} := \mathcal{A}_{[\gamma,\gamma]}.$$

On considère à présent l'ensemble $\mathcal{S}_I$ des suites $\mathbf{a} = (a_y)_{y\in\mathbb{Z}}$ à valeurs complexes telles que

$$\forall r \in I, \quad \sum_{y\in\mathbb{Z}} |a_y| r^y < +\infty$$

et on introduit l'ensemble $\mathcal{V}_I$ des fonctions de la variable complexe de la forme $\phi_a : z \mapsto \sum_{y\in\mathbb{Z}} a_y z^y$ telles que $\mathbf{a} = (a_y)_{y\in\mathbb{Z}} \in \mathcal{S}_I$. Lorsque I est fermé et borné, l'ensemble $\mathcal{V}_I$ muni des lois usuelles et de la norme de la convergence uniforme notée $\| \ \|_\infty$ est une algèbre de Banach (pour tout $\phi_a \in V_I$, on a $\|\phi_a\|_\infty = \sup_{r\in I} \sum_{y\in\mathbb{Z}} |a_y| r^y$).

On note $\mathcal{P}_I$ (et en fait plus simplement $\mathcal{P}$) l'opérateur de $\mathcal{V}_I$ qui à toute fonction $\Phi : z \mapsto \sum_{y\in\mathbb{Z}} a_y z^y$ associe la fonction $z \mapsto \sum_{y\geqslant 0} a_y z^y$. De même, $\mathcal{N}^*$ désigne l'opérateur $I-\mathcal{P}$: à la fonction $z \mapsto \sum_{y\in\mathbb{Z}} a_y z^y$, il associe la fonction $z \mapsto \sum_{y<0} a_y z^y$. Les opérateurs $\mathcal{P}$ et $\mathcal{N}^*$ vérifient l'identité d'entrelacement (2.1.1) dans $\mathcal{V}_I$.

On fixe à présent $N \geqslant 1$; on note $\mathcal{M}_N(\mathbb{C})$ l'ensemble des matrices carrées de dimension N à coefficients complexes et on introduit $\mathcal{V}_I^N$ l'ensemble des matrices $N \times N$ dont les coefficients sont des éléments de $\mathcal{V}_I$. Pour tout $M \in \mathcal{V}_I^N$, on note avec un abus de notations

$$\|M\|_\infty = \sup_{1\leqslant k\leqslant N} \sum_{1\leqslant l\leqslant N} \|M(k,l)\|_\infty.$$

L'ensemble $\mathcal{V}_I^N$ muni des lois usuelles et de la norme $\|\cdot\|_\infty$ est une algèbre de Banach. On considérera aussi les opérateurs $\mathcal{P}$ et $\mathcal{N}^*$ comme des opérateurs de $\mathcal{V}_I^N$ de la façon suivante.
Pour tout $M = (M(k,l))_{1\leqslant k,l\leqslant N} \in \mathcal{V}_I^N$

$$\mathcal{P}(M) = (\mathcal{P}(M(k,l)))_{1\leqslant k,l\leqslant N} \quad \text{et} \quad \mathcal{N}^*(M) = (\mathcal{N}^*(M(k,l)))_{1\leqslant k,l\leqslant N}.$$

On vérifie aisément que les opérateurs $\mathcal{P}$ et $\mathcal{N}^*$ vérifient l'identité d'entrelacement (2.1.1) dans $\mathcal{V}_I^N$.
Nous fixons dans ce qui suit α, β deux réels tels que $0 < \alpha \leqslant \beta$.

Pour tout γ tel que $\alpha \leqslant \gamma \leqslant \beta$, on a $\mathcal{P}(\mathcal{V}^N_{[\alpha,\beta]}) = \mathcal{P}(\mathcal{V}^N_{[\gamma,\beta]})$ et $\mathcal{N}^*(\mathcal{V}^N_{[\alpha,\beta]}) = \mathcal{N}^*(\mathcal{V}^N_{[\alpha,\gamma]})$; en effet on a, pour tout $a = (a_y)_{y\in\mathbb{Z}} \in (\mathbb{R}^+)^{\mathbb{Z}}$,

$$\sum_{y\geqslant 0} a_y \gamma^y \leqslant \sum_{y\geqslant 0} a_y \beta^y \quad \text{et} \quad \sum_{y<0} a_y \gamma^y \leqslant \sum_{y<0} a_y \alpha^y.$$

Ainsi, l'ensemble $\mathcal{P}(\mathcal{V}^N_{[\alpha,\beta]})$ ne dépend pas du choix de $\alpha \leqslant \beta$ et on a

$$\mathcal{P}(\mathcal{V}^N_{[0,\beta]}) = \mathcal{P}(\mathcal{V}^N_{[\alpha,\beta]}) = \mathcal{P}(\mathcal{V}^N_{[\beta]}).$$

De même,

$$\mathcal{N}^*(\mathcal{V}^N_{[\alpha,+\infty[)} = \mathcal{N}^*(\mathcal{V}^N_{[\alpha,\beta]}) = \mathcal{N}^*(\mathcal{V}^N_{[\alpha]}).$$

Pour tout intervalle $I \subset [0,+\infty[$, les éléments de $\mathcal{V}^N_{[I]}$ sont des fonctions analytiques sur $\mathcal{A}_{\mathring{I}}$ où $\mathring{I}$ désigne l'intérieur de I et à valeurs dans l'ensemble $\mathcal{M}_N(\mathbb{C})$; ces fonctions sont de plus continues sur $\mathcal{A}_{[I]}$.

Lemme 2.1.3. *Soit $s \mapsto A_s$ une fonction analytique sur un voisinage $O(s_0)$ de $s_0 \in \mathbb{C}$ et à valeurs dans $\mathcal{V}^N_{[\alpha,\beta]}$. On suppose qu'il existe $\gamma \in [\alpha,\beta]$ tel que pour tout $s \in O(s_0)$, il existe $B_s, C_s \in \mathcal{V}^N_{[\gamma]}$ qui fournissent une $\mathcal{P}$.f.c de $I - A_s$ dans $\mathcal{V}^N_{[\gamma]}$. Alors la fonction $s \mapsto \mathcal{P}B_s$ (resp. $s \mapsto \mathcal{N}^*C_s$) est analytique sur $O(s_0)$ et à valeurs dans $\mathcal{P}V^N_{[\beta]}$ (resp. $\mathcal{N}^*V^N_{[\alpha]}$).*

Démonstration. L'existence pour $s \in O(s_0)$ de la $\mathcal{P}.f.c$ de $I - A_s$ dans l'anneau $\mathcal{V}_{[\gamma]}^N$ ainsi que l'analyticité de cette $\mathcal{P}.f.c$ découlent du lemme 2.1.2. De plus au voisinage de s_0, on a :

$$I - \mathcal{P}B_s = (I - A_s)(I + \mathcal{N}^* B_s).$$

Or on sait que $\mathcal{N}^* B_s \in \mathcal{V}_{[\gamma,\beta]}^N$ et que $A_s \in \mathcal{V}_{[\gamma,\beta]}^N$. D'où $\mathcal{P}B_s \in \mathcal{V}_{[\gamma,\beta]}^N$ et par suite
$\mathcal{P}(\mathcal{P}B_s) = \mathcal{P}B_s \in \mathcal{P}V_{[\gamma,\beta]}^N = \mathcal{P}V_{[\beta]}^N$.
De même, on montre qu'au voisinage de s_0, $\mathcal{N}^* C_s \in \mathcal{N}^* \mathcal{V}_{[\alpha]}^N$, ce qui donne le résultat. □

2.2 La factorisation de Wiener-Hopf dans le cas où les accroissements sont indépendants et identiquement distribués

On considère une suite $(Y_i)_{i\geqslant 1}$ de variables aléatoires définies sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ à valeurs dans $\mathbb{Z}$. On suppose que les Y_i sont indépendantes et identiquement distribuées de loi commune μ. On désigne par $(S_n)_{n\geqslant 0}$ la marche aléatoire correspondante partant de zéro, définie par $S_0 = 0$ et $S_n = Y_1 + \cdots + Y_n$ pour tout $n \geqslant 0$.
Dans ce qui suit, nous fixons deux réels α, β tels que $0 < \alpha < 1 < \beta$. On rappelle les hypothèses suivantes qui figureront dans certains énoncés des résultats de ce chapitre :

Hypothèses 2.2.1.
A : *La mesure μ est apériodique (pour tout $x \in \mathbb{Z}$, le sous groupe engendré par $x + \mathrm{S}_\mu$ est égal à $\mathbb{Z}$). De plus, $\mathbb{P}(\mathbb{Z}^{*-}) > 0$ et $\mathbb{P}(\mathbb{Z}^{*+}) > 0$.*
M(r) : $\mathbb{E}(|Y_1|^r) < +\infty$.
C : *La loi μ satisfait* **M(1)** *et* $\mathbb{E}(Y_1) = \sum_{y\in\mathbb{Z}} y\mu(y) = 0$.
***M(exp)*[$\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}$]** : *La mesure μ a des moments exponentiels d'ordres α et β (i.e. $\sum_{y\in\mathbb{Z}} \alpha^y \mu(y) < +\infty$ et $\sum_{y\in\mathbb{Z}} \beta^y \mu(y) < +\infty$.*
min([$\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}$]) :***M*(exp)([$\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}$])** *est satisfaite et la fonction $\hat{\mu}$ définie sur $[\alpha, \beta]$ atteint son minimum dans $]\alpha, \beta[$.*

On note $\hat{\mu}$ la fonction génératrice de μ définie formellement par

$$\forall z \in \mathbb{C}, \quad \hat{\mu}(z) = \sum_{y\in\mathbb{Z}} \mu(y) z^y.$$

Sous l'hypothèse ***M(exp)*, [$\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}$]**, cette fonction est analytique sur $\mathcal{A}_{]\alpha,\beta[}$.
Rappelons que la loi μ est apériodique si et seulement si pour tout $z \in \mathcal{A}_{[1]}$, on a

$$|\hat{\mu}(z)| = 1 \Leftrightarrow z = 1.$$

L'étude des fluctuations de la marche aléatoire $(S_n)_{n\geqslant 0}$ entre les demi-droites positives et négatives nécessite de rappeler les variables aléatoires suivantes correspondant aux premiers instants de visite des demi-droites $\mathbb{R}^+, \mathbb{R}^{*+}, \mathbb{R}^-$ et $\mathbb{R}^{*-}$:

$$\begin{aligned}
\tau^+ &= \inf\{n \geqslant 1 / S_n \geqslant 0\}, \\
\tau^{*+} &= \inf\{n \geqslant 1 / S_n > 0\}, \\
\tau^- &= \inf\{n \geqslant 1 / S_n \leqslant 0\}, \\
\tau^{*-} &= \inf\{n \geqslant 1 / S_n < 0\},
\end{aligned}$$

avec la convention $\inf \emptyset = \infty$. Ces variables sont des temps d'arrêt relativement à la filtration canonique $(\mathcal{T}_n)_{n\geqslant 1}$ associée à la suite $(Y_n)_{n\geqslant 1}$. Comme $\mathbb{R}^- = \mathbb{R}\setminus\mathbb{R}^{*+}$, il y a une forme de "dualité" entre τ^+ and τ^{*-} (resp. τ^{*+} and τ^-).

Nous rappelons aussi la suite $(T_n^+)_{n\geqslant 0}$ [3] des instants successifs de records de la marche aléatoire $(S_n)_{n\geqslant 0}$ définis par $T_0^+ = 0$ et pour tout $n \geqslant 0$

$$T_{n+1}^+ = \inf\{k > T_n^+ : S_k \geqslant S_{T_n^+}\}.$$

En particulier, on a $T_1^+ = \tau^+$; de plus, en posant $\tau_{n+1}^+ := T_{n+1}^+ - T_n^+$ pour tout $n \geqslant 0$, on peut écrire $T_n^+ = \tau_1^+ + \cdots + \tau_n^+$, où $(\tau_n^+)_{n\geqslant 1}$ est une suite de variables aléatoires i.i.d. dont la loi est celle de τ^+. Lorsque les variables aléatoires Y_i vérifient les conditions **M(1)** et **C**, les temps d'arrêts ci-dessus sont tous $\mathbb{P}$-p.s. finis. Ce n'est plus le cas lorsque les variables Y_i ne sont plus centrées ; sous l'hypothèse $\boldsymbol{M(exp, [\alpha,\beta]}$ nous nous ramènerons au cas centré par un procédé dit de *relativisation* et que nous décrirons en temps utile.
Nous supposerons donc dans ce qui suit que les variables Y_i vérifient les hypothèses $\boldsymbol{M(exp)[\alpha,\beta]}$ et C.
Nous allons à présent nous intéresser aux familles de fonctions $(B_s(\cdot))_{s\in\mathbb{C}} = (B(s,\cdot))_{s\in\mathbb{C}}$, $(C_s(\cdot))_{s\in\mathbb{C}} = (C(s,\cdot))_{s\in\mathbb{C}}$ et définies formellement par : pour tous $s, z \in \mathbb{C}$

$$\begin{aligned} B_s(z) = B(s,z) &= \sum_{y\in\mathbb{Z}}\sum_{n\geqslant 1} \mathbb{P}(S_1 < 0, S_2 < 0, \cdots, S_{n-1} < 0, S_n = y) s^n z^y \\ &= \sum_{n\geqslant 1} \mathbb{E}(\tau^+ \geqslant n; z^{S_n}) s^n, \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} C_s(z) = C(s,z) &= \sum_{y\in\mathbb{Z}}\sum_{n\geqslant 1} \mathbb{P}(S_1 \geqslant 0, S_2 \geqslant 0, \cdots, S_{n-1} \geqslant 0, S_n = y) s^n z^y \\ &= \sum_{n\geqslant 1} \mathbb{E}(\tau^{*-} \geqslant n; z^{S_n}) s^n. \end{aligned}$$

Remarquons que les quantités $B_s(z)$ et $C_s(z)$ sont bien définies pour tous s et z tels que $|s| < 1$ et $|z| = 1$. Autrement dit, pour tout $s \in B(0,1)$, on a $B_s \in \mathcal{V}_{[1]}^N$ et $C_s \in \mathcal{V}_{[1]}^N$. De plus pour $s = z = 1$, on a $B_s(z) = B_1(1) = \mathbb{E}(\tau^+) = +\infty$ et $C_s(z) = C_1(1) = \mathbb{E}(\tau^{*-}) = +\infty$.
Si l'on applique formellement les opérateurs $\mathcal{P}$ et $\mathcal{N}^*$ à B_s et à C_s, on a

$$\begin{aligned} \mathcal{P}B_s(z) = \mathcal{P}B(s,z) &= \sum_{y\geqslant 0}\sum_{n\geqslant 1} \mathbb{P}(S_1 < 0, S_2 < 0, \cdots, S_{n-1} < 0, S_n = y) s^n z^y \\ &= \mathbb{E}(s^{\tau^+} z^{S_{\tau^+}}), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathcal{P}C_s(z) = \mathcal{P}C(s,z) &= \sum_{y\geqslant 0}\sum_{n\geqslant 1} \mathbb{P}(S_1 \geqslant 0, S_2 \geqslant 0, \cdots, S_{n-1} \geqslant 0, S_n = y) s^n z^y \\ &= \sum_{n\geqslant 1} s^n \mathbb{E}(\tau^{*-} > n; z^{S_n}), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathcal{N}^*B_s(z) = \mathcal{N}^*B(s,z) &= \sum_{y<0}\sum_{n\geqslant 1} s^n \mathbb{P}(S_1 < 0, \cdots, S_{n-1} < 0, S_n = y) z^y \\ &= \sum_{n\geqslant 1} s^n \mathbb{E}(\tau^+ > n; z^{S_n}), \end{aligned}$$

3. De façon analogue, on peut considérer les suites de variables aléatoires $(T_n^{*+})_{n\geqslant 0}$, $(T_n^-)_{n\geqslant 0}$ et $(T_n^{*-})_{n\geqslant 0}$ définies respectivement par $T_0^{*+} = T_0^- = T_0^{*-} = 0$ et pour tout $n \geqslant 0$,
$T_{n+1}^{*+} = \inf\{k > T_n^+ / S_k > S_{T_n^{*+}}\}$, $T_{n+1}^- = \inf\{k > T_n^- / S_k \leqslant S_{T_n^-}\}$ et $T_{n+1}^{*-} = \inf\{k > T_n^{*-} / S_k < S_{T_n^{*-}}\}$.

$$\begin{aligned}\mathcal{N}^*C_s(z) = \mathcal{N}^*C(s,z) &= \sum_{y<0}\sum_{n\geqslant 1} \mathbb{P}(S_1 \geqslant 0, \cdots, S_{n-1} \geqslant 0, S_n = y) s^n z^y \\ &= \mathbb{E}(s^{\tau^{*-}} z^{S_{\tau^{*-}}}).\end{aligned}$$

Remarque 2.2.1. (i). *On fixe $s \in \overline{B(0,1)}$. Pour tout $z \in \mathcal{A}_{[0,\beta]}$, on a*

$$\mathcal{P}B_{|s|}(|z|)(k,l) \leqslant \mathbb{E}(|z|^{S_{\tau^+}}) \tag{2.2.1}$$

et pour tout $z \in \mathcal{A}_{[\alpha,+\infty[}$, on a

$$\mathcal{N}^*C_{|s|}(|z|)(k,l) \leqslant \mathbb{E}(|z|^{S_{\tau^{*-}}}). \tag{2.2.2}$$

Puisque la mesure μ admet des moments exponentiels finis d'ordres α et β, il en est de même pour les mesures μ^+ et μ^{*-} (REF chapitre1) ; et pour tout $z \in \mathcal{A}_{[0,\beta]}$, on a

$$\mathcal{P}B(|s|, |z|) < +\infty.$$

De même, pour tout $z \in \mathcal{A}_{[\alpha,+\infty[}$, on a

$$\mathcal{N}^*C(|s|, |z|) < +\infty.$$

Pour $s \in \overline{B(0,1)}$, l'application $z \mapsto \mathcal{P}B(s,z)$ (resp. $z \mapsto \mathcal{N}^*C(s,z)$) est donc une fonction analytique sur $\mathcal{A}_{[0,\beta[}$ (resp. $\mathcal{A}_{]\alpha,+\infty[}$) et continue sur $\mathcal{A}_{[0,\beta]}$ (resp. $\mathcal{A}_{[\alpha,+\infty[}$). De plus lorsque $|z| < 1$, on a

$$\mathcal{P}B(|s|, |z|) < 1.$$

En particulier, l'application $z \mapsto (I - \mathcal{P}B(s,z))^{-1}$ est analytique sur $\mathcal{A}_{[0,1[}$. De manière analogue, lorsque $|z| > 1$, on a

$$\mathcal{N}^*C(|s|, |z|) < 1$$

et l'application $z \mapsto (I - \mathcal{N}^*C(s,z))^{-1}$ est analytique sur $\mathcal{A}_{]1,+\infty[}$.

(ii). *L'inégalité (2.2.1) (resp. (2.2.2)) montre que pour tout $z \in \mathcal{A}_{[0,\beta]}$ (resp. $\mathcal{A}_{[\alpha,+\infty[}$), l'application $s \mapsto \mathcal{P}B(s,z)$ (resp. $s \mapsto \mathcal{N}^*C(s,z)$) est analytique sur $B(0,1)$ et continue sur $\mathbb{S}^1$.*

Objectif : On se propose dans ce chapitre d'étudier la régularité sur un voisinage de $\overline{B(0,1)}$ des fonctions $s \mapsto \mathcal{P}B_s$ et $s \mapsto \mathcal{N}^*C_s$ considérées comme fonctions à valeurs dans $\mathcal{V}_I$, où l'intervalle I est à préciser. L'outil principal de cette étude sera la factorisation de Wiener-Hopf dans les espaces de Banach $\mathcal{V}_I$, via l'approche de Presman introduite dans la section 2.1. On montrera que pour des valeurs convenables de s, les applications $z \mapsto 1 - \mathcal{P}B(s,z)$ et $z \mapsto 1 - \mathcal{N}^*C(s,z)$ fournissent à la fonction $z \mapsto A(s,z) := 1 - s\phi(z)$ une "$\mathcal{P}$-factorisation canonique" au sens de la définition 2.1.1. La fonction $s \mapsto A_s(.) := A(s,.)$ étant clairement analytique à valeurs dans $\mathcal{V}_I$ pour tout $I \subset \mathbb{R}^+$, on pourra, en utilisant l'approche de Presman, en déduire des informations sur la régularité des applications $s \mapsto \mathcal{P}B_s$ et $s \mapsto \mathcal{N}^*C_s$. Pour ce faire, l'inversibilité de la fonction $z \mapsto A_s(z)$ dans $\mathcal{V}_I$ est une hypothèse essentielle, satisfaite lorsque $s \in \overline{B(0,1)} \setminus \{1\}$; le cas $s = 1$ nécessite un traitement particulier, où les zéros de l'équation implicite $A(s,z) = 0$ jouent un rôle important.

Remarque 2.2.2. *On suppose que la loi μ satisfait les hypothèses $\mathbf{M(1)}$ et $\mathbf{A}$. Alors la fonction $A(s,z) \mapsto A(s,z) := 1 - s\phi(z)$ s'annule sur $\overline{B(0,1)} \times \mathcal{A}_{[1]}$ uniquement en $(1,1)$. En effet, soient $s \in \overline{B(0,1)}$ et $z \in \mathcal{A}_{[1]}$ et supposons que $1 - s\hat{\mu}(z) = 0$. Il vient $s \neq 0$ et $\hat{\mu}(z) = \frac{1}{s}$; en particulier $|\hat{\mu}(z)| \geqslant 1$. Par ailleurs, $|\hat{\mu}(z)| \leqslant 1$ et donc $|\hat{\mu}(z)| = 1$. La loi μ vérifiant l'hypothèse $\mathbf{A}$, on a nécessairement $z = 1$ et donc $s = \frac{1}{\hat{\mu}(z)} = 1$.*

2.2.1 La factorisation de Wiener-Hopf et son prolongement

Nous supposons ici que la mesure μ satisfait les hypothèses $\boldsymbol{M(exp)[\alpha,\beta]}$ et $\mathbf{C}$; les variables aléatoires τ^+ et τ^{*-} qui apparaissent dans l'énoncé qui suit sont donc $\mathbb{P}$-p.s. finies. Nous avons la

Proposition 2.2.1. *(***Factorisation de Wiener-Hopf***) On suppose que la loi μ vérifie les hypothèses* $\mathbf{M(1)}$ *et* $\mathbf{C}$.

(i). *Pour tous nombres complexes $s \in \overline{B(0,1)}$ et $z \in \mathbb{C}, |z| = 1$, on a*

$$1 - s\hat{\mu}(z) = \Big(1 - \mathbb{E}(s^{\tau^+} z^{S_{\tau^+}})\Big)\Big(1 - \mathbb{E}(s^{\tau^{*-}} z^{S_{\tau^{*-}}})\Big) \tag{2.2.3}$$

avec

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(s^{\tau^+} z^{S_{\tau^+}}) &= \sum_{y\geqslant 0}\sum_{n\geqslant 1} s^n \mathbb{P}(S_1 < 0, \dots, S_{n-1} < 0, S_n = y) z^y \\ \textit{et} \quad \mathbb{E}\left(s^{\tau^{*-}} z^{S_{\tau^{*-}}}\right) &= \sum_{y<0}\sum_{n\geqslant 1} s^n \mathbb{P}(S_1 \geqslant 0, \dots, S_{n-1} \geqslant 0, S_n = y) z^y.\end{aligned} \tag{2.2.4}$$

(ii). *Si de plus μ vérifie l'hypothèse* $\mathbf{A}$, *pour tous nombres complexes $s \in \overline{B(0,1)} \setminus \{1\}$ et $z \in \mathbb{C}, |z| = 1$, on a*

$$\begin{aligned}\frac{1}{1 - \mathbb{E}(s^{\tau^+} z^{S_{\tau^+}})} &= 1 + \sum_{y\geqslant 0}\sum_{n\geqslant 1} s^n \mathbb{P}(S_1 \geqslant 0, \dots, S_{n-1} \geqslant 0, S_n = y) z^y \qquad (2.2.5)\\ &= \sum_{n\geqslant 0} s^n \mathbb{E}(\tau^{*-} > n; z^{S_n}),\\ \frac{1}{1 - \mathbb{E}(s^{\tau^{*-}} z^{S_{\tau^{*-}}})} &= 1 + \sum_{y<0}\sum_{n\geqslant 1} s^n \mathbb{P}(S_1 < 0, \dots, S_{n-1} < 0, S_n = y) z^y \qquad (2.2.6)\\ &= \sum_{n\geqslant 0} s^n \mathbb{E}(\tau^{+} > n; z^{S_n}).\end{aligned}$$

En outre, pour ces valeurs de s, on a

$$\sum_{y\geqslant 0}\Big|\sum_{n\geqslant 1} s^n \mathbb{P}(S_1 \geqslant 0, \dots, S_{n-1} \geqslant 0, S_n = y)\Big| < +\infty$$

$$\textit{et} \quad \sum_{y<0}\Big|\sum_{n\geqslant 1} s^n \mathbb{P}(S_1 < 0, \dots, S_{n-1} < 0, S_n = y)\Big| < +\infty.$$

Remarque 2.2.3. *On pose respectivement pour tout $y \in \mathbb{N}$ et $y \in \mathbb{Z}^{*-}$*

$$U_y := \sum_{n=1}^{+\infty} s^n \mathbb{P}(S_1 \geqslant 0, \dots, S_{n-1} \geqslant 0, S_n = y),$$

$$V_y := \sum_{n=1}^{+\infty} s^n \mathbb{P}(S_1 < 0, \dots, S_{n-1} < 0, S_n = y).$$

L'énoncé ci-dessus précise que les séries $\sum_{y\geqslant 0} U_y$ et $\sum_{y<0} V_y$ sont absolument convergentes pour tout $s \in \overline{B(0,1)} \setminus \{1\}$; de plus, pour tout $z \in \mathcal{A}_{[0,1]}$, on a

$$\frac{1}{1 - \mathbb{E}(s^{\tau^+} z^{S_{\tau^+}})} = 1 + \sum_{y\geqslant 0}\sum_{n\geqslant 1} s^n \mathbb{P}(S_1 \geqslant 0, \dots, S_{n-1} \geqslant 0, S_n = y) z^y.$$

De même, pour tout $s \in \overline{B(0,1)} \setminus \{1\}$, *et pour tout* $z \in \mathcal{A}_{[1,+\infty[}$, *on a*

$$\frac{1}{1-\mathbb{E}(s^{\tau^{*-}} z^{S_{\tau^{*-}}})} = 1 + \sum_{y<0}\sum_{n\geqslant 1} s^n \mathbb{P}(S_1 < 0, \ldots, S_{n-1} < 0, S_n = y) z^y.$$

Soulignons cependant que les séries doubles

$$\begin{array}{cc} & \displaystyle\sum_{y\geqslant 0}\sum_{n\geqslant 1} \mathbb{P}(S_1 \geqslant 0, \ldots, S_{n-1} \geqslant 0, S_n = y) s^n z^y \\ \textit{et} & \displaystyle\sum_{y<0}\sum_{n\geqslant 1} \mathbb{P}(S_1 < 0, \ldots, S_{n-1} < 0, S_n = y) s^n z^y \end{array}$$

ne sont pas absolument convergentes pour s *et* z *tels que* $|s| = |z| = 1$, *en effet on a*

$$\sum_{y\geqslant 0}\sum_{n\geqslant 1} \mathbb{P}(S_1 \geqslant 0, \ldots, S_{n-1} \geqslant 0, S_n = y) = \sum_{n\geqslant 1} \mathbb{P}(\tau^{*-} > n) = \mathbb{E}(\tau^{*-}) = +\infty$$

puisque $\mathbb{E}(Y_1) = +\infty$ *(voir le chapitre 1, la proposition 1 1.1.2). De même, on a*

$$\mathbb{P}(S_1 < 0, \cdots, S_{n-1} < 0, S_n = y) = \left|\mathbb{E}(\tau^{*-})\right| = +\infty.$$

Démonstration. Démontrons tout d'abord l'assertion (2.2.3). Fixons $s, z \in \mathbb{C}$ avec $|s| < 1$ et $|z| = 1$. On a $|s\hat{\mu}(z)| < 1$ d'où

$$(1 - s\hat{\mu}(z))^{-1} = \sum_{n\geqslant 0} s^n (\hat{\mu}(z))^n = \sum_{n\geqslant 0} s^n \mathbb{E}(z^{S_n}) = I_1(s,z) + I_2(s,z),$$

avec

$$I_1(s,z) := \mathbb{E}\left(\sum_{n=0}^{\tau^{*-}-1} s^n z^{S_n}\right) \quad \text{et} \quad I_2(s,z) = \mathbb{E}\left(\sum_{n\geqslant \tau^{*-}} s^n z^{S_n}\right).$$

On a d'une part

$$\begin{aligned} I_1(s,z) &= \sum_{n=0}^{+\infty} s^n \mathbb{E}\left(\tau^{*-} > n; z^{S_n}\right) \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} s^n \mathbb{E}\left(S_1 \geqslant 0, \cdots, S_n \geqslant 0; z^{S_n}\right) \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} s^n \mathbb{E}\left(S_n \geqslant S_{n-1}, \cdots, S_n \geqslant 0; z^{S_n}\right) \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} s^n \mathbb{E}\left(\exists l \geqslant 0 \ \mid \ n = T_l^+; z^{S_n}\right) \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} s^n \sum_{l\geqslant 0} \mathbb{E}\left(n = T_l^+; z^{S_n}\right) \\ &= \sum_{l\geqslant 0} \mathbb{E}\left(s^{T_l^+} z^{S_{T_l^+}}\right) \\ &= \sum_{l\geqslant 0} \left(\mathbb{E}\left(s^{\tau^+} z^{S_{\tau^+}}\right)\right)^l, \end{aligned}$$

$$\text{soit} \quad I_1(s,z) = \frac{1}{1-\mathbb{E}\left(s^{\tau^+} z^{S_{\tau^+}}\right)}. \tag{2.2.7}$$

Ainsi, pour $|s|<1$ et $|z|=1$, on a

$$\frac{1}{1-\mathbb{E}\left(s^{\tau^+} z^{S_{\tau^+}}\right)} = \mathbb{E}\left(\sum_{n=0}^{\tau^{*-}-1} s^n z^{S_n}\right) = \sum_{n=0}^{+\infty} s^n \mathbb{E}(\tau^{*-}>n; z^{S_n}).$$

De la même façon, on aura, pour ces valeurs de s et z,

$$\frac{1}{1-\mathbb{E}\left(s^{\tau^{*-}} z^{S_{\tau^{*-}}}\right)} = \mathbb{E}\left(\sum_{n=0}^{\tau^{+}-1} s^n z^{S_n}\right) = \sum_{n=0}^{+\infty} s^n \mathbb{E}(\tau^{+}>n; z^{S_n}).$$

D'autre part

$$I_2(s,z) = \sum_{n\geqslant 0} s^n \mathbb{E}\left(n \geqslant \tau^{*-}; z^{S_n}\right) = \mathbb{E}\left(s^{\tau^{*-}} z^{S_{\tau^{*-}}} \sum_{k\geqslant 0} s^k z^{(S_{k+\tau^{*-}}-S_{\tau^{*-}})}\right)$$

et la propriété d'indépendance des accroissements de la marche aléatoire $(S_n)_{n\geqslant 0}$ donne

$$I_2(s,z) = \mathbb{E}\left(s^{\tau^{*-}} z^{S_{\tau^{*-}}}\right)\mathbb{E}\left(\sum_{k\geqslant 0} s^k z^{S_k}\right) = \mathbb{E}\left(s^{\tau^{*-}} z^{S_{\tau^{*-}}}\right)(1-s\hat{\mu}(z))^{-1}.$$

Ainsi

$$\frac{1}{1-s\hat{\mu}(z))} = \frac{1}{1-\mathbb{E}\left(s^{\tau^+} z^{S_{\tau^+}}\right)} + \frac{\mathbb{E}\left(s^{\tau^{*-}} z^{S_{\tau^{*-}}}\right)}{(1-s\hat{\mu}(z))}.$$

Les identités (2.2.3), (2.2.5) et (2.2.6) sont donc démontrées lorsque $|s|<1$ et $|z|=1$. Intéressons nous à présent à la validité de ces égalités lorsque $|s|=1$. L'égalité (2.2.3) reste valable lorsque $|s|=1$ par un argument élémentaire de convergence dominée. Pour les égalités (2.2.6) et (2.2.5) apparaît une obstruction lorsque $|s|=1$ puisque la fonction A s'annule au moins en $(1,1)$, il en est donc de même pour l'un des deux facteurs de droite de l'identité (2.2.3) et ce facteur n'est donc pas inversible ; c'est cette difficulté qu'il faut lever. On fixe dans ce qui suit $s \in \overline{B(0,1)} \setminus \{1\}$. La remarque 2.2.2 implique que lorsque la loi μ satisfait l'hypothèse **A**, la fonction A ne s'annule pas sur $\overline{B(0,1)} \times \mathcal{A}_{[1]} \setminus (1,1)$. Ainsi, la fonction $z \mapsto 1-\mathbb{E}(s^{\tau^+} z^{S_{\tau^+}})$ ne s'annule pas sur le cercle unité du plan complexe lorsque $s \in \overline{B(0,1)} \setminus \{1\}$. D'autre part, pour tout $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z|<1$, on a $\mathbb{E}(|s|^{\tau^+}|z|^{S_{\tau^+}})<1$ et la fonction $z \mapsto 1-\mathbb{E}(s^{\tau^+} z^{S_{\tau^+}})$ ne s'annule donc pas sur $\mathcal{A}_{[0,1[}$. Cette fonction étant analytique sur $\mathcal{A}_{[0,\beta[}$, il existe $\eta_s>0$ tel qu'elle ne s'annule pas sur $\mathcal{A}_{[0,1+\eta_s]}$. On en déduit que la fonction $f : z \mapsto \dfrac{1}{1-\mathbb{E}(s^{\tau^+} z^{S_{\tau^+}})}$ est analytique sur $\mathcal{A}_{[0,1+\eta_s]}$. Elle est par conséquent développable en série de Laurent sur $\mathcal{A}_{[r,1+\eta_s]}$ pour tout $0<r<1$. Fixons alors $0<r<1$ et écrivons pour tout $z \in \mathcal{A}_{[r,1+\eta_s]}$

$$f(z) = \sum_{y\in\mathbb{Z}} a_y z^y,$$

où les coefficients a_y sont donnés par la formule de Cauchy

$$a_y = \frac{1}{2i\pi r}\int_{|z|=r} \frac{f(z)}{z^{y+1}} dz.$$

De façon analogue à l'identité (2.2.7), on a pour $s \in \overline{B(0,1)} \setminus \{1\}$ et $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| < 1$

$$1 + \sum_{y \geqslant 0} \sum_{n \geqslant 1} s^n \mathbb{P}(S_1 \geqslant 0, ..., S_{n-1} \geqslant 0, S_n = y) z^y = \sum_{n \geqslant 1} s^n \mathbb{E}(\tau^{*-} > n; z^{S_n}) = \frac{1}{1 - \mathbb{E}(s^{\tau^+} z^{S_{\tau^+}})}. \tag{2.2.8}$$

La série $\sum_{y \geqslant 0} \left| \sum_{n \geqslant 1} s^n \mathbb{P}(S_1 \geqslant 0, ..., S_{n-1} \geqslant 0, S_n = y) \right| r^y$ étant convergente puisque $0 < r < 1$, la formule de Cauchy donne alors

$$a_y = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad y = 0, \\ 0 & \text{si} \quad y < 0, \\ \sum_{n \geqslant 1} s^n \mathbb{P}(S_1 \geqslant 0, ..., S_{n-1} \geqslant 0, S_n = y) & \text{si} \quad y > 0. \end{cases}$$

En particulier, l'identité (2.2.8) est valable pour tout $s \in \overline{B(0,1)} \setminus \{1\}$ et $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| = 1$

$$\frac{1}{1 - \mathbb{E}(s^{\tau^+} z^{S_{\tau^+}})} = 1 + \sum_{y > 0} \sum_{n \geqslant 1} s^n \mathbb{P}(S_1 \geqslant 0, ..., S_{n-1} \geqslant 0, S_n = y) z^y;$$

de plus, la série $\sum_{y \geqslant 0} \left| \sum_{n \geqslant 1} s^n \mathbb{P}(S_1 \geqslant 0, ..., S_{n-1} \geqslant 0, S_n = y) \right|$ est convergente. On opère de la même façon pour la fonction $z \mapsto \dfrac{1}{1 - \mathbb{E}(s^{\tau^{*-}} z^{S_{\tau^{*-}}})}$. □

D'après ce qui précède, pour $s \in \overline{B(0,1)} \setminus \{1\}$, on a

$$\sum_{y \geqslant 0} \left| \sum_{n \geqslant 1} s^n \mathbb{P}(S_1 \geqslant 0, ..., S_{n-1} \geqslant 0, S_n = y) \right| < +\infty.$$

Par ailleurs, de façon immédiate

$$\sum_{y < 0} \left| \sum_{n \geqslant 1} s^n \mathbb{P}(S_1 \geqslant 0, ..., S_{n-1} \geqslant 0, S_n = y) \right| \leqslant \sum_{n \geqslant 1} \mathbb{P}(\tau^{*-} = n) < +\infty.$$

Ainsi, la fonction $z \mapsto B_s(z) = \sum_{y \in \mathbb{Z}} \sum_{n \geqslant 1} s^n \mathbb{P}(S_1 < 0, ..., S_{n-1} < 0, S_n = y)$ appartient à $\mathcal{V}_{[1]}$.

En termes de factorisation canonique de Presman, la proposition 2.2.1 stipule que sous l'hypothèse **A**, pour tout $s \in S(0,1) \setminus \{1\}$, les fonctions $1 - \mathcal{P}B_s$ et $1 - \mathcal{N}^* C_s$ sont les facteurs d'une $\mathcal{P}$-factorisation de la fonction $A(s, \cdot) = 1 - s\hat{\mu}(\cdot)$ à valeurs dans $\mathcal{V}_{[1]}$. Plus précisément, on a le

Corollaire 2.2.1. *On suppose que μ vérifie les hypothèses* **M(1)** *et* **C**.

(i). *Pour tout $s \in \overline{B(0,1)}$ et tout $z \in \mathcal{A}_{[1]}$, on a*

$$1 - s\hat{\mu}(z) = (1 - \mathcal{P}B_s(z))(1 - \mathcal{N}^* C_s(z)). \tag{2.2.9}$$

(ii). *Si de plus μ vérifie l'hypothèse* **A**, *pour tous nombres complexes $s \in S(0,1) \setminus \{1\}$ et $z \in \mathcal{A}_{[1]}$, on a*

$$(1 - \mathcal{P}B_s(z))^{-1} = 1 + \mathcal{P}C_s(z) \tag{2.2.10}$$

et

$$(1 - \mathcal{N}^* C_s(z))^{-1} = 1 + \mathcal{N}^* B_s(z). \tag{2.2.11}$$

Remarque 2.2.4. *On fixe $s \in \overline{B(0,1)}$. Sous l'hypothèse $\boldsymbol{M(exp)[\alpha,\beta]}$, la fonction $z \mapsto A_{(s,z)} := z \mapsto 1 - sP_z$ est analytique sur $\mathcal{A}_{[\alpha,\beta]}$. D'après la remarque 2.2.1, les applications $z \mapsto 1 - \mathcal{P}B_{(s,z)}$ et $z \mapsto 1 - \mathcal{N}^*C_{(s,z)}$ sont analytiques sur $\mathcal{A}_{[\alpha,\beta]}$. Par unicité du prolongement analytique et lorsque la loi μ satisfait de plus l'hypothèse* **C**, *l'identité (2.2.9) est donc en fait valide pour tout $z \in \mathcal{A}_{[\alpha,\beta]}$.*

2.2.2 Une variante de la factorisation de Wiener-Hopf sur un voisinage de $s = 1$

L'étude de la régularité des fonctions $s \mapsto \mathcal{P}B_s$ et $s \mapsto \mathcal{N}^*C_s$ sur un voisinage de $s = 1$ est plus délicate puisque la fonction A s'annule en $(1,1)$; pour remédier à cette difficulté, on va décomposer $A(s,z)$ en produit de deux facteurs, le premier étant un polynôme du second degré en z admettant pour racines les zéros de l'équation implicite $A(s,z) = 0$ et le deuxième facteur étant une fonction analytique non nulle sur un voisinage de $(1,1)$. Dans un premier temps, nous étudions donc, en lien avec l'hypothèse **A**, le comportement des solutions de l'équation $\hat{\mu}(z) = 1/s$ lorsque s est proche de 1.

2.2.2.1 Etude de la fonction $\hat{\mu}$ sur $[\alpha,\beta]$

On supposera dans tout ce qui suit que la loi μ satisfait l'hypothèse de moments exponentiels $\boldsymbol{M(\mathbf{exp})[\alpha,\beta]}$; la fonction $\hat{\mu}$ est alors de classe C^∞ sur $]\alpha,\beta[$. En particulier, on a

$$\forall\ r \in]\alpha,\beta[, \quad \hat{\mu}''(r) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} n(n-1)\mu(n)r^{n-2}.$$

Ainsi, $\hat{\mu}''$ est strictement positive sur $]\alpha,\beta[$ car $\mu(\mathbb{Z}^{*-}) > 0$; la fonction $\hat{\mu}$ est donc strictement convexe sur $[\alpha,\beta]$. Le fait que la dérivée $\hat{\mu}'$ s'annule en $r = 1$ permet de conclure que le point 1 est l'unique minimum de $\hat{\mu}$ sur $]\alpha,\beta[$; puisque $\hat{\mu}(1) = 1$, on conclut ainsi que la fonction $\hat{\mu}$ est définie sur $]\alpha,\beta[$ et à valeurs dans $[1,+\infty[$. Par stricte convexité, elle est même bijective de $[\alpha,1]$ sur $[1,\hat{\mu}(\alpha)]$ et de $[1,\beta]$ sur $[1,\hat{\mu}(\beta)]$; on note $\hat{\mu}^-$ et $\hat{\mu}^+$ les fonctions réciproques respectives. Fixons à présent $s > 0$ et résolvons l'équation

$$1 - s\hat{\mu}(r) = 0 \tag{2.2.12}$$

sur $[\alpha,\beta]$, en fonction de la valeur du paramètre s. On pose $\eta_0 = \frac{1}{\min(\hat{\mu}(\alpha),\hat{\mu}(\beta))}$. Lorsque $\eta_0 < s < 1$, cette équation admet deux solutions distinctes

$$z_s^- := \hat{\mu}^-\left(\frac{1}{s}\right) \quad \text{et} \quad z_s^+ := \hat{\mu}^+\left(\frac{1}{s}\right); \tag{2.2.13}$$

de plus, puisque $\hat{\mu}'(z_s^\pm) \neq 0$, ces deux racines sont simples. A contrario pour $s = 1$, cette équation admet $r = 1$ comme unique solution et l'on a $\hat{\mu}'(1) = 0$; autrement dit $z_1^- = z_1^+ = 1$ est racine double. L'étude qui précède repose sur la stricte convexité de la fonction $\hat{\mu}$ sur $[\alpha,\beta]$ et le paramètre s varie dans l'intervalle $[\eta_0, 1]$.
Nous allons à présent étendre le domaine dans lequel s peut être amené à varier et introduire les notations suivantes :

Notations 2.2.1. *Pour tout $\eta \in]0,1[$, on note U_η le voisinage de 1 défini par*

$$U_\eta := \{s \in \mathbb{C}/1-\eta < |s| < 1+\eta, |\mathrm{Im}(s)| < \eta\}$$

et l'on pose $V_\eta := U_\eta \backslash]1, 1+\eta[$. [4]

Intéressons nous à présent à la fonction $(s,z) \mapsto A(s,z) := 1 - s\hat{\mu}(z)$ lorsque $s \in \mathbb{C}$ et $z \in \mathcal{A}_{[\alpha,\beta]}$. Nous reprenons ici une approche classique, en renvoyant le lecteur à [42] pour plus de détails et une mise en perspective.

On a $\hat{\mu}'(1) = 0$ et $\hat{\mu}''(1) = \sigma^2 := \mathbb{E}[Y_1^2] > 0$, si bien que

$$\frac{\partial A}{\partial z}(1,1) = 0 \quad \text{et} \quad \frac{\partial^2 A}{\partial z^2}(1,1) = \sigma^2 > 0.$$

Le théorème de préparation de Weierstrass entraîne que sur un voisinage $\mathcal{U}$ de $(1,1)$, on peut écrire

$$A(s,z) = 1 - s\hat{\mu}(z) = \Big((z-1)^2 + b(s)(z-1) + c(s)\Big)H(s,z)$$

où la fonction H est analytique et non nulle sur ce voisinage et $s \mapsto b(s)$ et $s \mapsto c(s)$ analytiques sur la boule ouverte $B(1,\eta)$ pour η suffisamment petit. Un calcul direct nous donne $H(1,1) = -\frac{\sigma^2}{2}, b(1) = c(1) = 0$ et $c'(1) = \frac{-1}{\mathcal{A}(1,1)} = \frac{2}{\sigma^2}$. Sur l'ensemble $\mathcal{U}$, l'équation $A(s,z) = 0$ admet deux solutions z_s^- et z_s^+ (avec $z_s^- < 1 < z_s^+$ lorsque s est réel différent de 1 et $z_1^- = z_1^+ = 1$ d'après le paragraphe précédent), qui sont celles de l'équation quadratique $(z-1)^2 + b(s)(z-1) + c(s) = 0$; en résolvant, on trouve

$$z_s^\pm = \mathcal{C}(s) \pm \mathcal{B}(s)\sqrt{1-s}$$

avec $\mathcal{C}(s)$ et $\mathcal{B}(s)$ analytiques sur $B(1,\eta)$ et $\mathcal{C}(1) = 1$, $\mathcal{C}(1) = \sqrt{c'(1)} = \frac{\sqrt{2}}{\sigma}$. En d'autres termes, pour η assez petit, les fonctions $s \mapsto z_\pm(s)$ sont à valeurs dans $\mathcal{A}_{]1-\eta,1+\eta[}$ et admettent un développement en série entière selon les puissances de $\sqrt{1-s}$ sur l'ensemble $V_\eta(1)$:

$$z_s^\pm = 1 + \sum_{n\geqslant 1} (\pm 1)^n \alpha_n (1-s)^{n/2} \qquad \text{avec} \quad \alpha_1 = \frac{\sqrt{2}}{\sigma}.$$

En particulier, pour tout $z \in \mathcal{A}_{[\alpha,\beta]}$, la fonction $s \mapsto (z - z_s^-)(z - z_s^+)$ est analytique sur U_η pour η assez petit. D'après ce qui précède, la fonction

$$H \quad : \quad (s,z) \mapsto \frac{A(s,z)}{(z - z_s^-)(z - z_s^+)}$$

est analytique et ne s'annule pas sur $\mathcal{U}$, et en particulier sur $U_\eta \times U_\eta$.
La fonction $s \mapsto (z - z_s^-)(z - z_s^+)$ étant analytique sur U_η et puisque $z_s^\pm \in U_\eta$ pour η assez petit, il s'ensuit que la fonction H est analytique sur $U_\eta \times (\mathcal{A}_{[\alpha,\beta]} \setminus U_\eta)$. Par conséquent, cette fonction est analytique sur $U_\eta \times \mathcal{A}_{[\alpha,\beta]}$. Pour η assez petit, l'hypothèse **A** permet de préciser que l'on peut choisir $\eta > 0$ de façon à ce que la fonction H ne s'annule pas pour $s \in U_\eta \cap \overline{B(0,1)}$ et $z \in \mathcal{A}_{]1-\eta,1+\eta[}$. En effet, si $\epsilon > 0$ est fixé, on peut choisir $\eta > 0$ de façon que $|z_\pm(s) - 1| < \epsilon$ lorsque $s \in U_\eta$. Par ailleurs, sous l'hypothèse **A**, lorsque $z \in \mathcal{A}_{[1]}$ et vérifie et $|1-z| \geqslant \epsilon$, on a $|\hat{\mu}(z)| < 1$ et donc $|s\hat{\mu}(z)| < 1$ dès que $s \in U_\eta \cap \overline{B(0,1)}$; pour ces valeurs de s et z, on a donc $A(s,z) \neq 0$ et cette propriété reste valide pour $s \in U_\eta \cap \overline{B(0,1)}$ et z dans un voisinage de $\{z \in \mathcal{A}_{[1]} \text{ et } |1-z| \geqslant \epsilon\}$. De cette discussion, on déduit la

Proposition 2.2.2. *On suppose que la loi* μ *satisfait les hypothèses*$\boldsymbol{M(\exp)([\alpha,\beta])}$ *et* **C**. *Alors il existe* $\eta > 0$ *tel que la fonction*

$$s \mapsto \left(z \mapsto \frac{1 - s\hat{\mu}(z)}{(z - z_s^-)(z - z_s^+)}\right)$$

4. Le choix de la "coupure" $[1, 1+\eta]$ vient de celui d'une détermination principale de la fonction racine carrée, à savoir $\sqrt{z} := \sqrt{r}e^{i\theta/2}$ lorsque $z = re^{i\theta}$ avec $-\pi < \theta < \pi$.

est analytique sur U_η *à valeurs dans* $\mathcal{V}_{[\alpha,\beta]}$. *De plus, lorsque* μ *satisfait l'hypothèse* **A**, *la fonction* $(s,z) \mapsto \frac{1-s\hat{\mu}(z)}{(z-z_s^-)(z-z_s^+)}$ *ne s'annule ni sur* $U_\eta \times U_\eta$ *ni sur* $(U_\eta \cap \overline{B(0,1)}) \times \mathcal{A}_{]1-\eta,1+\eta[}$. *Enfin, les fonctions* $s \mapsto z_\pm(s)$ *sont analytiques en la variable* $\sqrt{1-s}$ *sur* $V_\eta = U_\eta \setminus]1, 1+\eta[$ *et l'on a*

$$z_\pm(s) = 1 \pm \frac{\sqrt{2}}{\sigma}\sqrt{1-s} + (1-s)O(s)$$

où $s \mapsto O(s)$ *est bornée sur* V_η.

Rappelons par ailleurs que la fonction A se factorise en $(1 - \mathcal{P}B_s(z))(1 - \mathcal{N}^*C_s(z))$ d'après la remarque 2.2.4 ; il est donc naturel et important de préciser lequel des deux facteurs s'annule en z_s^+ et z_s^-. Nous avons la

Proposition 2.2.3. *On suppose que la loi* μ *satisfait les hypothèses* $\boldsymbol{M(\exp)([\alpha,\beta])}$ *et* **C**. *Pour tout nombre complexe* $s \in U_\eta(1) \bigcap \overline{B(0,1)}$, *on a*

$$1 - \mathcal{P}B_s(z_s^+) = 0 \quad \textit{et} \quad 1 - \mathcal{N}^*C_s(z_s^-) = 0.$$

Démonstration. Il est clair que ces égalités sont vérifiées pour $s = 1$ puisque l'on a $z_1^\pm = 1$. Fixons à présent $s \in]1-\eta, 1[$; d'après l'étude de l'équation implicite $1 - s\hat{\mu}(z) = 0$ menée ci-dessus le nombre z_s^+ est alors réel et l'on a $1 < z_s^+ \leqslant 1 + \eta$. Par ailleurs, d'après la remarque 2.2.4, on a $1 - s\hat{\mu}(z) = (1 - \mathcal{P}C_{(s,z)})(1 - \mathcal{N}^*B_{(s,z)})$; pour $s \in]1-\eta, 1[$ et tout $z \in [\alpha, \beta]$. D'autre part, pour tout $z \in [1, +\infty[$, on a

$$0 < \mathcal{N}^*C_{(s,z)} < +\infty \quad \text{et} \quad (1 - \mathcal{N}^*B_{(s,z)})^{-1} = 1 + \mathcal{N}^*C_{(s,z)}.$$

Il vient

$$1 - \mathcal{P}C_{(s,z_s^+)} = (1 - s\hat{\mu}(z_s^+))(1 + \mathcal{N}^*C_{(s,z_s^+)}).$$

D'où

$$1 - \mathcal{P}C_{(s,z_s^+)} = (1 - s\hat{\mu}(z_s^+))(I + \mathcal{N}^*C_{(s,z_s^+)}).$$

Or $1 - s\hat{\mu}(z_s^+) = 0$. Ainsi $1 - \mathcal{P}C_{(s,z_s^+)} = 0$ pour $s \in]1-\eta, 1[$. Les fonctions $s \mapsto z_s^+$ et $z \mapsto \mathcal{P}C_{(s,z)}$ étant analytiques respectivement sur $V_\delta \setminus \{1\}$ et $\mathcal{A}_{[0,\beta[}$, on obtient $1 - \mathcal{P}C_{(s,z_s^+)} = 0$ pour tout $s \in (V_\delta \setminus \{1\}) \cap \overline{B(0,1)}$, par unicité du prolongement analytique ; on conclut en notant que $(V_\delta \setminus \{1\}) \cap \overline{B(0,1)} = U_\delta \cap \overline{B(0,1)} \setminus \{1\}$. L'égalité $1 - \mathcal{N}^*B_{(s,z_s^-)} = 0$ pour tout $s \in U_\delta \cap \overline{B(0,1)}$ s'obtient de façon identique. □

2.2.2.2 Une factorisation "à la Presman" sur U_η

Dans ce paragraphe, nous proposons une factorisation "à la Presman" de la fonction $z \mapsto \frac{A(s,z)}{(z-z_s^-)(z-z_s^+)}$ lorsque $s \in U_\eta$; cette approche permettra alors de relier la régularité des fonctions $s \mapsto PB_s$ et $s \mapsto \mathcal{N}^*C_s$ à celle des racines $z_\pm(s)$.

Nous utiliserons de façon cruciale le

Lemme 2.2.1. *Soient* $0 < u \leqslant v \leqslant +\infty$, $\phi \in \mathcal{V}_{[u,v]}$ *et* $z_0 \in \mathcal{A}_{[u,v]}$ *tels que* $\phi(z_0) = 0$. *Alors*

(i). *la fonction* $z \mapsto \dfrac{\phi(z)}{z - z_0}$ *appartient à* $\mathcal{V}_{[u,v]}$,

(ii). *si* $\phi \in \mathcal{P}\mathcal{V}_v$ *(resp.* $\phi \in \mathcal{N}^*\mathcal{V}_u$*) il en est de même pour* $z \mapsto \dfrac{\phi(z)}{z - z_0}$.

Démonstration. Fixons $s \in K$. Puisque $\phi \in \mathcal{V}_{]u,v[}$, il existe une suite $(a_k)_{k\in\mathbb{Z}}$ telle que pour tout $z \in \mathcal{A}_{]u,v[}$, on ait $\phi(z) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} a_k z^k$; de plus, on a $\phi(z_0) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} a_k z_0^k = 0$. On peut alors écrire

$$\psi(z) := \frac{\phi(z)}{z - z_0} = \frac{\sum_{k\in\mathbb{Z}} a_k (z^k - z_0^k)}{z - z_0}$$

avec

$$z^k - z_0^k = \begin{cases} 0 & \text{si } k = 0, \\ (z - z_0) \displaystyle\sum_{i=0}^{k-1} z_0^{k-1-i} z^i & \text{si } k \geqslant 1, \\ (z_0 - z) \displaystyle\sum_{i=0}^{-k-1} z_0^{i+k} z^{-i-1} & \text{si } k \leqslant -1. \end{cases} \tag{2.2.14}$$

Il vient

$$\begin{aligned} \psi(z) &= \sum_{i\geqslant 0} \sum_{k\geqslant i+1} a_k z_0^{k-i-1} z^i - \sum_{i\geqslant 0} \left(\sum_{k\leqslant -i-1} a_k z_0^{k+i} \right) z^{-i-1} \\ &= \sum_{i\geqslant 0} \left(\sum_{k\geqslant i+1} a_k z_0^{k-i-1} \right) z^i + \sum_{i\leqslant -1} \left(-\sum_{k\leqslant i} a_k z_0^{k-i-1} \right) z^i. \end{aligned}$$

Les calculs ci-dessus, effectués jusqu'à présent de façon formelle, sont validés par le fait que les séries mises en jeu sont absolument convergentes ; en effet on a d'une part

$$\sum_{i\geqslant 0} \sum_{k\geqslant i+1} |a_k| \times |z_0|^{k-i-1} |z|^i \leqslant \sum_{i\geqslant 0} \sum_{k\geqslant i+1} |a_k| v^{k-i-1} v^i = \sum_{k\geqslant 1} k|a_k| v^{k-1} < +\infty$$

et d'autre part

$$\sum_{i\leqslant -1} \sum_{k\leqslant i} |a_k| \times |z_0|^{k-i-1} |z|^i \leq \sum_{i\leqslant -1} \sum_{k\leqslant i} |a_k| u^{k-i-1} u^i = \sum_{k\leqslant -1} |k a_k| u^{k-1} < +\infty.$$

Ceci prouve que ψ appartient à $\mathcal{V}_{[u,v]}$. Remarquons que, puisque $\sum_{k\leqslant -i-1} a_k z_0^k = -\sum_{k\geqslant -i} a_k z_0^k$, on peut aussi écrire

$$\begin{aligned} \psi(z) &= \sum_{i\geqslant 0} \sum_{l\geqslant 1} a_{l+i} z_0^{l-1} z^i + \sum_{i\geqslant 0} \sum_{l\geqslant 0} a_{l-i} z_0^l z^{-i-1} \\ &= \sum_{i\geqslant 0} \sum_{l\geqslant 0} a_{l+i+1} z_0^l z^i + \sum_{i\leqslant -1} \sum_{l\geqslant 0} a_{l+i+1} z_0^l z^i \\ &= \sum_{i\in\mathbb{Z}} \sum_{l\geqslant 0} a_{l+i+1} z_0^l z^i. \end{aligned}$$

On vérifie de façon immédiate que $\psi(z) = \sum_{i\geqslant 0} \sum_{k\geqslant i+1} a_k z_0^{k-i-1} z^i$ dès que $a_k = 0$ pour tout $k < 0$ et que $\psi(z) = -\sum_{i\leqslant -1} \sum_{k\leqslant i} a_k z_0^{k-i-1} z^i$ dès que $a_k = 0$ pour tout $k \geqslant 0$. □

Introduisons à présent les quantités suivantes qui vont nous permettre d'exhiber de nouvelles $\mathcal{P}$-factorisations. Pour ce faire, rappelons que pour η assez petit et pour tout $s \in U_\eta$, on a $\alpha < |z_s^-| < \beta$ et $\alpha < |z_s^+| < \beta$ et posons

- $P_s^+(z) = (z-\beta) \times \dfrac{1-\mathcal{P}B_s(z)}{z-z_s^+}$ pour $z \neq z_s^+$,
- $P_s^-(z) = (z-\alpha) \times \dfrac{1-\mathcal{N}^*C_s(z)}{z-z_s^-}$ pour $z \neq z_s^-$.
- $P_s(z) = (z-\alpha)(z-\beta) \times \dfrac{1-s\hat{\mu}(z)}{(z-z_s^-)(z-z_s^+)}$ pour $z \neq z_s^\pm$. Nous avons la

Proposition 2.2.4. *On suppose que la loi μ satisfait les hypothèses* $\boldsymbol{M(\exp)([\alpha,\beta])}$, **C** *et* **A**. *Pour tout $s \in U_\eta \bigcap \overline{B(0,1)}$, les fonctions P_s^+ et P_s^- sont les facteurs d'une $\mathcal{P}.f.c$ de la fonction P_s dans $\mathcal{V}_{[1]}$; de même, les fonctions $\frac{1}{P_s^+}$ et $\frac{1}{P_s^-}$ sont les facteurs d'une $\mathcal{P}.f.c$ de $\frac{1}{P_s}$ dans $\mathcal{V}_{[1]}$.*

Démonstration. Fixons $s \in U_\eta \bigcap \overline{B(0,1)}$ et vérifions que les fonctions $1-P_s^+$ et $1-\frac{1}{P_s^+}$ appartiennent à $\mathcal{P}\mathcal{V}_{[1]}$ (de même P_s^- et $\frac{1}{P_s^-}$ appartiennent à $\mathcal{N}^*\mathcal{V}_{[1]}$). La fonction $\mathcal{P}B_s$ appartient à $\mathcal{P}\mathcal{V}_{[0,\beta]}$ et l'on a $1-\mathcal{P}B_s(z_s^+)=0$, on peut donc appliquer le lemme 3.4.1 : la fonction $z \mapsto \dfrac{1-\mathcal{P}B_s(z)}{z-z_s^+}$ appartient à $\mathcal{P}\mathcal{V}_{[0,\beta]}$ ainsi que $z \mapsto 1-P_s^+(z)$ puisque l'on a

$$1-P_s^+(z) = \mathcal{P}B_s(z) + (\alpha - z_s^+)\frac{1-\mathcal{P}B_s(z)}{z-z_s^+}.$$

Par ailleurs, d'après la remarque 2.2.4, on a

$$P_s(z) = P_s^+(z) \times P_s^-(z) = (z-\alpha)(z-\beta) \times \frac{1-s\hat{\mu}(z)}{(z-z_s^-)(z-z_s^+)},$$

si bien que, d'après la proposition 3.4.3, la fonction $z \mapsto P_s^+(z)$ ne s'annule pas sur $\mathcal{A}_{]1-\eta,1+\eta[}$; elle ne s'annule pas non plus sur $\mathcal{A}_{[0,1[}$ puisque $|\mathcal{P}B_s(z)| \leqslant \mathbb{E}(|z|^{S_{\tau^+}}) < 1$ dès que $|z|<1$. Par conséquent, $\frac{1}{P_s^+} \in \mathcal{V}_{[0,1+\eta[}$. La formule de Cauchy entraîne alors que $1-\frac{1}{P_s^+}$ appartient à $\mathcal{P}\mathcal{V}_{[0,1+\eta[}$ et donc à $\mathcal{P}\mathcal{V}_{[1]}$.

Vérifions à présent que les fonctions P_s^+ et P_s^- sont les facteurs d'une $\mathcal{P}.f.c$ de P_s dans $\mathcal{V}_{[1]}$ (de la même façon, les fonctions $\frac{1}{P_s^+}$ et $\frac{1}{P_s^-}$ seront les facteurs d'une $\mathcal{P}.f.c$ de $\frac{1}{P_s}$ dans $\mathcal{V}_{[1]}$).

Fixons $s \in U_\eta \bigcap \overline{B(0,1)}$, posons $a = 1-P_s$ et vérifions que les fonctions $x = \frac{1}{P_s^+}$ et $y = \frac{1}{P_s^-}$ sont solutions du système d'équations

$$\left\{ \begin{array}{rcl} x - \mathcal{P}(xa) & = & 1 \\ y - \mathcal{N}^*(ya) & = & 1 \end{array} \right.$$

dans l'anneau $\mathcal{V}_{[1]}$; le lemme 2.1.1ii) permettra alors de conclure.

D'après ce qui précède, on a $\frac{1}{P_s^+} \in \mathcal{P}\mathcal{V}_{[1]}$ et $1-P_s^- \in \mathcal{N}^*\mathcal{V}_{[1]}$, si bien que

$$\frac{1}{P_s^+} - \mathcal{P}\Big(\frac{1}{P_s^+}\Big) = 0 \quad \text{et} \quad \mathcal{P}(P_s^-) = 1.$$

Ainsi $\frac{1}{P_s^+} - \mathcal{P}\Big(\frac{1}{P_s^+}a\Big) = \frac{1}{P_s^+} - \mathcal{P}\Big(\frac{1}{P_s^+} - P_s^-\Big) = \frac{1}{P_s^+} - \mathcal{P}(\frac{1}{P_s^+}) + \mathcal{P}(P_s^-) = 1$; en d'autres termes, la fonction $\frac{1}{P_s^+}$ est solution de l'équation $x - \mathcal{N}^*(xa) = 1$ dans l'anneau $\mathcal{V}_{[1]}$. De façon analogue, on montre que $\frac{1}{P_s^+}$ est solution de l'équation $y - \mathcal{P}(y(1-P_s)) = 1$ dans $\mathcal{V}_{[1]}$. Le raisonnement est identique pour la factorisation de $\frac{1}{P_s}$. $\square$

2.2.3 Sur la régularité des fonctions $s \mapsto PB_s$ et $s \mapsto \mathcal{N}^*C_s$ sur un voisinage de $B(0,1)$

Grâce à la proposition 3.4.6 et à l'étude menée dans la proposition 3.4.3 concernant la singularité des fonctions $z_s^{\pm}$ au voisinage de 1, on en déduit le résultat suivant qui porte essentiellement sur la singularité des fonctions $s \mapsto \mathcal{P}B_s$ et $s \mapsto \mathcal{N}^*C_s$ au voisinage de 1.

Théorème 2.2.1. *On suppose que la loi μ satisfait les hypothèses $\boldsymbol{M(\exp)([\alpha,\beta])}$, $\mathbf{C}$ et $\mathbf{A}$. Il existe alors un voisinage $\mathcal{O}$ de $\overline{B(0,1)} \setminus \{1\}$ dans $\mathbb{C}$ et une constante $\eta > 0$ tels que*

(i). *les fonctions $s \mapsto \mathcal{P}B_s$ et $s \mapsto \mathcal{N}^*C_s$ à valeurs dans $\mathcal{V}_{[\alpha,\beta]}$, sont analytiques sur $\mathcal{O}$,*

(ii). *les fonctions $s \mapsto \left(z \mapsto \dfrac{1-\mathcal{P}B_s(z)}{z-z_s^+}\right)$ et $s \mapsto \left(z \mapsto \dfrac{1-\mathcal{N}^*C_s(z)}{z-z_s^-}\right)$, à valeurs dans $\mathcal{V}_{[\alpha,\beta]}$, sont analytiques sur U_η.*

En particulier, les fonctions $s \mapsto \mathcal{P}B_s$ et $s \mapsto \mathcal{N}^*C_s$ sont analytiques sur V_η en la variable $\sqrt{1-s}$ et l'on a

$$\mathcal{P}B_s = \mathcal{P}B + \sqrt{1-s}\,\widetilde{\mathcal{P}B} + (1-s)O_s, \tag{2.2.15}$$

$$\mathcal{N}^*C_s = \mathcal{N}^*C + \sqrt{1-s}\,\widetilde{\mathcal{N}^*C} + (1-s)O_s, \quad \textit{avec} \tag{2.2.16}$$

- $\mathcal{P}B := \mathcal{P}B_1 \in \mathcal{V}_{[\alpha,\beta]}$ *et* $\mathcal{N}^*C := \mathcal{N}^*C_1 \in \mathcal{V}_{[\alpha,\beta]}$,
- $\widetilde{\mathcal{P}B}(z) = -\frac{\sqrt{2}}{\sigma}\frac{1-\mathbb{E}[z^{S_{\tau^+}}]}{1-z} = -\frac{\sqrt{2}}{\sigma}\sum_{y\geqslant 0}\mu^+\,[y+1,+\infty[\,z^y \in \mathcal{V}_{[\alpha,\beta]}$,
- $\widetilde{\mathcal{N}^*C}(z) = \frac{\sqrt{2}}{\sigma}\frac{1-\mathbb{E}[z^{S_{\tau^{*-}}}]}{1-z} = -\frac{\sqrt{2}}{\sigma}\sum_{y\leqslant -1}\mu^{*-}\,]-\infty,y]\,z^y \in \mathcal{V}_{[\alpha,\beta]}$

et la fonction $s \mapsto O_s$, définie sur V_η et à valeurs dans $\mathcal{V}_{[\alpha,\beta]}$, est bornée et analytique en la variable $\sqrt{1-s}$.

Démonstration. La première assertion du théorème est une conséquence directe de la théorie de Presman (lemme 2.1.3), du fait que $s \mapsto A(s,\cdot)$ est analytique sur $\mathbb{C}^*$ à valeurs dans $\mathcal{V}_{[\alpha,\beta]}$ et que les fonctions $1-\mathcal{P}B_s$ et $1-\mathcal{N}^*C_s$ sont les facteurs d'une $\mathcal{P}$-factorisation de $A(s,\cdot)$ dans $\mathcal{V}_{[1]}$.

Pour établir la seconde assertion, on fait de même avec la factorisation de P_s lorsque s est proche de 1. D'après la proposition 3.4.3, la fonction $s \mapsto P_s$ est analytique sur U_η à valeurs dans $\mathcal{V}_{[\alpha,\beta]}$; de plus, lorsque $s \in U_\eta \bigcap \overline{B(0,1)}$, la fonction P_s ne s'annule pas sur $\mathcal{A}_{]1-\eta,1+\eta[}$ et $s \mapsto 1/P_s$ est donc analytique sur U_η à valeurs dans $\mathcal{V}_{]1-\eta,1+\eta[}$. D'après le lemme 2.1.3 et la proposition 3.4.6, les fonctions $s \mapsto P_s^+, s \mapsto P_s^-, s \mapsto \frac{1}{P_s^+}$ et $s \mapsto \frac{1}{P_s^-}$ sont analytiques sur un voisinage ouvert de $U_\eta \bigcap \overline{B(0,1)}$ (et donc sur U_η quitte à réduire la valeur de η) à valeurs respectivement dans $\mathcal{P}\mathcal{V}_{[\alpha,\beta]}, \mathcal{N}^*\mathcal{V}_{[\alpha,\beta]}, \mathcal{P}\mathcal{V}_{[0,1+\eta]}$ et $\mathcal{N}^*\mathcal{V}_{[1-\eta,+\infty[}$. En particulier, la fonction $s \mapsto \left(z \mapsto \dfrac{P_s^+(z)}{z-\beta}\right)$ est analytique sur U_η à valeurs dans $\mathcal{V}_{[\alpha,\beta]}$. À présent, on écrit

$$\mathcal{P}B_s(z) = 1-(z-z_s^+)\frac{P_s^+(z)}{z-\beta} \quad \text{pour tout} \quad s \in U_\eta \quad \text{et} \quad z \in \mathcal{A}[\alpha,\beta].$$

Or, d'après la proposition 3.4.3, la fonction $s \mapsto z_s^+$ est analytique en la variable $\sqrt{1-s}$ sur $V_\eta = U_\eta \setminus [1,1+\eta[$ et l'on a

$$z_s^+ = 1 + \frac{\sqrt{2}}{\sigma}\sqrt{1-s} + (1-s)O(s),$$

où $s \mapsto O(s)$ est bornée sur V_η. On obtient alors le développement annoncé de la fonction $s \mapsto \mathcal{P}B_s$. On opère de la même façon pour la fonction $s \mapsto \mathcal{N}^*C_s$. $\square$

Remarque 2.2.5. *On a*

$$\widetilde{\mathcal{P}B}(1) = -\frac{\sqrt{2}}{\sigma}\mathbb{E}(S_{\tau^+}) \quad et \quad \widetilde{\mathcal{N}^*C}(1) = \frac{\sqrt{2}}{\sigma}\mathbb{E}(S_{\tau^{*-}}).$$

En effet d'après le théorème 3.4.1, on a

$$\begin{aligned}
\widetilde{\mathcal{P}B}(1) &= -\frac{\sqrt{2}}{\sigma}\sum_{y\geqslant 0}\mu^+\,[y+1,+\infty[\\
&= -\frac{\sqrt{2}}{\sigma}\sum_{y\geqslant 0}\sum_{w\geqslant y+1}\mu^+(w) \\
&= -\frac{\sqrt{2}}{\sigma}\sum_{w\geqslant 1}\mu^+(w)\sum_{0\leqslant y\leqslant w-1}1 \\
&= -\frac{\sqrt{2}}{\sigma}\sum_{w\geqslant 1}w\mu^+(w) = -\frac{\sqrt{2}}{\sigma}\mathbb{E}(S_{\tau^+}).
\end{aligned}$$

De même, on montre que $\widetilde{\mathcal{N}^*C}(1) = \frac{\sqrt{2}}{\sigma}\mathbb{E}(S_{\tau^{*-}})$.

De manière analogue, on a le

Théorème 2.2.2. *On suppose que la loi μ satisfait les hypothèses $\boldsymbol{M(\exp)([\alpha,\beta])}$, $\mathbf{C}$ et $\mathbf{A}$. Il existe alors un voisinage $\mathcal{O}$ de $\overline{B(0,1)}\setminus\{1\}$ dans $\mathbb{C}$ et une constante $\eta>0$ tels que*

(i). *les fonctions $s\mapsto \mathcal{P}C_s$ et $s\mapsto\mathcal{N}^*B_s$, à valeurs dans $\mathcal{V}_{[\alpha,\beta]}$, sont analytiques sur $\mathcal{O}$,*

(ii). *pour tout $s\in V_\eta$ et $z\in\mathcal{A}_{[\alpha,1]}$, on a*

$$\mathcal{P}C(s,z) = \begin{cases} \mathcal{P}C(z) + \sqrt{1-s}\,\widetilde{\mathcal{P}C}(z) + (1-s)O_1(s,z) & \text{si } z\neq 1,\\ \frac{\sigma}{\sqrt{2}\mathbb{E}(S_{\tau^+})}\frac{1}{\sqrt{1-s}} + H_1(s) & \text{si } z=1,\end{cases} \tag{2.2.17}$$

avec, pour tout $z\in\mathcal{A}_{[\alpha,1]}\setminus\{1\}$,
- $\mathcal{P}C(z) := \mathcal{P}C_1(z)$,
- $\widetilde{\mathcal{P}C}(z) := \widetilde{\mathcal{P}B}(z)(1+\mathcal{P}C(z))^2$.
- *Pour tout $r<1$ et tout $z\in\mathcal{A}_{[\alpha,r]}$, la fonction $s\mapsto O_1(s,z)$ est analytique en la variable $\sqrt{1-s}$ et est bornée sur $V_\eta\times\mathcal{A}_{[\alpha,r]}$. Par ailleurs, la fonction $s\mapsto\ H_1(s)$ est bornée sur V_η.*

De même, pour tout $s\in V_\eta$ et $z\in\mathcal{A}_{[1,\beta]}$, on a

$$\mathcal{N}^*B(s,z) = \begin{cases} \mathcal{N}^*B(z) + \sqrt{1-s}\,\widetilde{\mathcal{N}^*B}(z) + (1-s)O_2(s,z) & \text{si } z\neq 1,\\ -\frac{\sigma}{\sqrt{2}\mathbb{E}(S_{\tau^{*-}})}\frac{1}{\sqrt{1-s}} + H_2(s) & \text{si } z=1,\end{cases} \tag{2.2.18}$$

avec, pour tout $z\in\mathcal{A}_{[1,\beta]}\setminus\{1\}$,
- $\mathcal{N}^*B(z) := \mathcal{N}^*B_1(z)$,
- $\widetilde{\mathcal{N}^*B}(z) := \widetilde{\mathcal{N}^*C}(z)(1+\mathcal{N}^*B(z))^2$.
- *Pour tout $r>1$ et tout $z\in\mathcal{A}_{[r,\beta]}$, la fonction $s\mapsto O_2(s,z)$ est analytique en la variable $\sqrt{1-s}$ et est bornée sur $V_\eta\times\mathcal{A}_{[r,\beta]}$. Par ailleurs, la fonction $s\mapsto\ H_2(s)$ est bornée sur V_η.*

Démonstration. Fixons $z\in\mathbb{C}$ tel que $|z|\leqslant 1$. D'après la relation (2.2.11), pour tout $s\in\mathbb{C}$ tel que $|s|\leqslant 1$ et $s\neq 1$, on a

$$\mathcal{P}B(s,z) = \frac{1}{1-\mathcal{P}C(s,z)} - 1 = 1 - \frac{z-\beta}{z-z_s^+}\frac{1}{P^+(s,z)}.$$

Le raisonnement fait dans la démonstration du théorème 3.4.6 montre que la fonction $s \mapsto \frac{1}{P_s^+}$ est analytique en la variable $\sqrt{1-s}$ sur V_η et à valeurs dans $\mathcal{PV}_{[0,1+\eta]}$. On en déduit que pour z fixé tel que $|z| \leqslant 1$, la fonction $s \mapsto \frac{1}{P^+(s,z)}$ est analytique en la variable $\sqrt{1-s}$ sur V_η. D'autre part, d'après la proposition 3.4.3, la fonction $s \mapsto z_s^+$ est analytiques en la variable $\sqrt{1-s}$ sur V_η et l'on a

$$z_s^+ = 1 + \frac{\sqrt{2}}{\sigma}\sqrt{1-s} + (1-s)O(s),$$

où l'application $s \mapsto O(s)$ est bornée sur V_η. En particulier, pour η assez petit et pour tout $s \in V_\eta$, on a $|z_s^+| > 1$ et donc $z - z_s^+ \neq 0$ pour tout $s \in V_\eta$. Ainsi pour $z \in \mathbb{C}$ fixé tel que $|z| \leqslant 1$, la fonction $s \mapsto \mathcal{P}C(s,z) = \frac{1}{1-\mathcal{P}B(s,z)} - 1$ se prolonge en une fonction analytique en la variable $\sqrt{1-s}$ sur l'ensemble V_η. De plus, d'après le théorème 3.4.1, on a

$$\mathcal{P}C(s,z) = \frac{1}{1 - \mathcal{P}B(z) - \sqrt{1-s}\;\widetilde{\mathcal{P}B}(z) + (1-s)O(s,z)} - 1,$$

où la fonction $s \mapsto O_s$, définie sur V_η et à valeurs dans $\mathcal{V}_{[\alpha,\beta]}$, est bornée et analytique en la variable $\sqrt{1-s}$. Remarquons que lorsque de plus $z \neq 1$ on a $|\mathcal{P}B(z)| < 1$ et dans ce cas, on a

$$\frac{1}{1-\mathcal{P}B(z)} = 1 + \mathcal{P}C(z).$$

Supposons alors que $|z| \leqslant 1$ et $z \neq 1$, il vient pour tout $s \in V_\eta$,

$$\begin{aligned}
\mathcal{P}C(s,z) &= \frac{1}{1-\mathcal{P}B(z)}\left(1 + \sqrt{1-s}\frac{\widetilde{\mathcal{P}B}(z)}{1-\mathcal{P}B(z)} + (1-s)\frac{1}{1-\mathcal{P}B(z)O(s,z)}\right) - 1 \\
&= \mathcal{P}C(z) + \sqrt{1-s}\,(1+\mathcal{P}C(z))^2\,\widetilde{\mathcal{P}B}(z) + (1+\mathcal{P}C(z))^2\,O(s,z),
\end{aligned}$$

avec pour tout $r < 1$, l'application $u \mapsto (1+\mathcal{P}C(u))^2 \in \mathcal{V}_{[\alpha,r]}$. Ce qui donne le résultat annoncé lorsque $|z| \leqslant 1$ et $z \neq 1$. À présent, pour $z = 1$, on a $\mathcal{P}B(z) = \mathcal{P}B(1) = 1$, d'où, pour tout $s \in V_\eta$, on a

$$\begin{aligned}
\mathcal{P}C(s,z) &= \frac{1}{-\sqrt{1-s}\;\widetilde{\mathcal{P}B}(z) - 1 + (1-s)O(s,z)} \\
&= \frac{-1}{\widetilde{\mathcal{P}B}(z)\sqrt{1-s}}\;\frac{1}{1 - \frac{\sqrt{1-s}O(s,z)}{\widetilde{\mathcal{P}B}(z)}} \\
&= \frac{-1}{\sqrt{1-s}\;\widetilde{\mathcal{P}B}(z)}\left(1 + \frac{\sqrt{1-s}O(s,z)}{\widetilde{\mathcal{P}B}(z)}\right),
\end{aligned}$$

avec pour tout $r < 1$, l'application $u \mapsto \frac{1}{(\widetilde{\mathcal{P}B}(u))^2} \in \mathcal{V}_{[\alpha,r]}$. La remarque 2.2.5 permet ainsi de conclure. On opère de la même façon pour la fonction $s \mapsto \mathcal{N}^*C_s$. $\square$

Remarque 2.2.6. *Rappelons que U^+ et U^{*-} sont les potentiels respectifs des mesures μ^+ et μ^{*-}. Pour toute suite à valeurs complexes $a = (a_n)_{n\in\mathbb{Z}}$, on note $\hat{a}$ la fonction génératrice de a, définie formellement par*

$$\forall z \in \mathbb{C}, \quad \hat{a}(z) = \sum_{y\in\mathbb{Z}} a_y z^y.$$

On a $\mathbb{E}(z^{S_{\tau^+}}) = \widehat{\mu^+}(z)$ et $1 + \mathcal{P}C = \widehat{U^+}$; d'où

$$\forall z \in \mathcal{A}_{[\alpha]}, \quad \widetilde{\mathcal{P}C}(z) = -\frac{\sqrt{2}}{\sigma}\frac{1}{1-z}(1-\widehat{\mu^+}(z))\widehat{U^+}^2(z).$$

La définition $U^+ := \sum_{n=0}^{+\infty} (\mu^+)^{\star n}$ *entraîne immédiatement la relation* $U^+ = \mu^+ \star U^+ + \delta_0$ *où* δ_0 *la mesure de Dirac en zéro. En passant aux fonctions génératrices, on a*

$$\widehat{U^+} = \widehat{\mu^+}\widehat{U^+} + 1,$$

d'où, pour tout $z \in \mathcal{A}_{[\alpha]}$*,*

$$\widetilde{\mathcal{P}C}(z) = -\frac{\sqrt{2}}{\sigma}\frac{1}{1-z}\widehat{U^+}(z).$$

Or pour tout $z \in \mathbb{C}$ *tel que* $|z| < 1$*, on a* $\frac{1}{1-z} = \sum_{n\geqslant 0} z^n$ *et la fonction* $z \mapsto \frac{1}{1-z}$ *définie sur* $\mathcal{A}_{[0,1[}$ *est donc la fonction génératrice de* $\sum_{n\geqslant 0} \delta_n$*. En convolant alors* $\sum_{n\geqslant 0} \delta_n$ *et* U^+*, on obtient*

$$\forall z \in \mathcal{A}_{[\alpha]}, \quad \widetilde{\mathcal{P}C}(z) = -\frac{\sqrt{2}}{\sigma}\sum_{y\geqslant 0} U^+[0, y]z^y.$$

De même, on montre que pour tout $z \in \mathcal{A}_{[\beta]}$*, on a*

$$\widetilde{\mathcal{N}^*B}(z) = -\frac{\sqrt{2}}{\sigma}\sum_{y\leqslant -1} U^{*-}[y+1, 0]z^y.$$

2.2.4 Conséquences

Pour $y \in \mathbb{N}$, on introduit les notations suivantes
- $\mathcal{P}B(s|y) = \mathbb{E}(S_{\tau^+} = y; s^{\tau^+})$,
- $\mathcal{P}C(s|y) = \sum_{n\geqslant 1} \mathbb{P}(\tau^{*-} > n, S_n = y)s^n$.

De même, pour $y \in \mathbb{Z}^{*-}$, on pose
- $\mathcal{N}^*C(s|y) = \mathbb{E}(S_{\tau^{*-}} = y; s^{\tau^{*-}})$,
- $\mathcal{N}^*B(s|y) = \sum_{n\geqslant 1} \mathbb{P}(\tau^+ > n, S_n = y)s^n$.

Dans ce paragraphe, on utilise la formule de Cauchy et le théorème de convergence dominée afin d'énoncer un analogue du théorème 3.4.1 pour les fonctions $s \mapsto \mathcal{P}B(s|y)$, $s \mapsto \mathcal{N}^*C(s|y)$, $s \mapsto \mathcal{P}C(s|y)$ et $s \mapsto \mathcal{N}^*B(s|y)$, où y est fixé dans $\mathbb{Z}$.
On rappelle aussi que pour tout $r \in \mathbb{R}^{*+}$, on désigne par $\mathcal{S}_{[r]}$, l'ensemble des suites $(a_y)_{y\in\mathbb{Z}}$ à valeurs complexes vérifiant $\sum_{y\in\mathbb{Z}} |a_y|r^y < +\infty$. Pour tout $a \in \mathcal{S}_{[r]}$, on pose $\|a\|_r = \sum_{y\in\mathbb{Z}} |a_y|r^y$. L'ensemble $(\mathcal{S}_{[r]}, \| \|_r)$ est un espace de Banach.

Proposition 2.2.5. *On suppose que la loi* μ *satisfait les hypothèses* $\boldsymbol{M(\exp)([\alpha,\beta])}$, **C** *et* **A**. *Il existe alors un voisinage* $\mathcal{O}$ *de* $\overline{B(0,1)} \setminus \{1\}$ *dans* $\mathbb{C}$ *et une constante* $\eta > 0$ *tels que pour tout* $y \in \mathbb{Z}^+$*, on ait*

(i). *la fonction* $s \mapsto \mathcal{P}B(s|y)$ *est analytique sur* $\mathcal{O}$,

(ii). *la fonction* $s \mapsto \mathcal{P}B(s|y)$ *est analytique sur* V_η *en la variable* $\sqrt{1-s}$. *Plus précisément, pour tout* $s \in V_\eta$, *on a*

$$\mathcal{P}B(s|y) = \mu^+(y) - \frac{\sqrt{2}}{\sigma}\mu^+]y, +\infty[\sqrt{1-s} + (1-s)O_s(y),$$

et la fonction $s \mapsto O_s$*, à valeurs dans* $\mathcal{S}_{[\beta]}$*, est analytique en la variable* $\sqrt{1-s}$ *et bornée sur* V_η*.*

Démonstration. Fixons $r \in [\alpha, \beta]$. D'après le théorème 3.4.1, il existe un voisinage $\mathcal{O}$ de $\overline{B(0,1)} \setminus \{1\}$ dans $\mathbb{C}$ sur lequel la fonction $s \mapsto \mathcal{P}B_s$ est analytique sur $\mathbb{C}$ à valeurs dans $\mathcal{V}_{[\alpha,\beta]}$, En particulier, la fontion $(s,z) \mapsto \mathcal{P}B(s,z)$ est bornée sur $\mathcal{O} \times \mathcal{A}_{[\alpha,\beta]}$ et pour $s \in \mathcal{O}$, la fonction $\mathcal{P}B_s$ admet un développement en série de Laurent sur l'anneau $\mathcal{A}_{[\alpha,\beta]}$. On peut alors appliquer la formule de Cauchy et écrire : pour tout $y \in \mathbb{N}$

$$\mathcal{P}B(s|y) = \frac{1}{2i\pi r} \int_{|z|=r} \frac{\mathcal{P}B_s(z)}{z^{y+1}} dz.$$

La fontion $(s,z) \mapsto \mathcal{P}B(s,z)$ étant bornée sur $\mathcal{O} \times \mathcal{A}_{[\alpha,\beta]}$ et la fonction $s \mapsto \mathcal{P}B_s(z)$ étant analytique sur $\mathcal{O}$ pour tout $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| = r$, il en est de même pour la fonction $s \mapsto \mathcal{P}B(s|y)$ pour tout $y \in \mathbb{N}$ d'après le théorème de convergence dominée. À présent, d'après le le théorème 3.4.1, il existe $\eta > 0$ tel que pour tout $s \in V_\eta$, on ait

$$\mathcal{P}B_s = \mathcal{P}B + \sqrt{1-s}\widetilde{\mathcal{P}B} + (1-s)O_s,$$

où $\mathcal{P}B$ et $\widetilde{\mathcal{P}B}$ appartiennent à $\mathcal{V}_{[\alpha,\beta]}$ et la fonction $(s,z) \mapsto \ O(s,z)$ est bornée sur $V_\eta \times \mathcal{A}_{[r]}$. De façon analogue à ci-dessus pour tout $y \in \mathbb{N}$, on a

$$\mathcal{P}B(s|y) = \frac{1}{2i\pi r} \int_{|z|=r} \frac{\mathcal{P}B(z)}{z^{y+1}} dz + \frac{1}{2i\pi r} \sqrt{1-s} \int_{|z|=r} \frac{\widetilde{\mathcal{P}B}(z)}{z^{y+1}} dz + (1-s) \frac{1}{2i\pi r} \int_{|z|=r} O_s(z) dz.$$

Or $\mathcal{P}B = \widetilde{\mu^+}$ et $\widetilde{\mathcal{P}B} = -\frac{\sqrt{2}}{\sigma}\hat{a}$, où la suite $a = (a_y)_{y\in\mathbb{Z}}$ est donnée par $a_y = \mu^+]y, +\infty[$ pour tout $y \in \mathbb{N}$. Il vient $\frac{1}{2i\pi r} \int_{|z|=r} \frac{\mathcal{P}B(z)}{z^{y+1}} dz = \ \mu^+(y)$ et $\frac{1}{2i\pi r} \int_{|z|=r} \frac{\widetilde{\mathcal{P}B}(z)}{z^{y+1}} dz = \mu^+]y, +\infty[$ pour tout $y \in \mathbb{N}$. □

De même, on obtient le résultat suivant

Proposition 2.2.6. *On suppose que la loi μ satisfait les hypothèses* $\boldsymbol{M(\exp)([\alpha,\beta])}$, **A**, *et* **C**. *Il existe alors un voisinage $\mathcal{O}$ de $\overline{B(0,1)} \setminus \{1\}$ dans $\mathbb{C}$ et une constante $\eta > 0$ tels que pour tout $y \in \mathbb{Z}^{*-}$, on ait*

(i). *la fonction $s \mapsto \mathcal{N}^*C(s|y)$ est analytique sur $\mathcal{O}$,*

(ii). *la fonction $s \mapsto \mathcal{N}^*C(s|y)$ est analytique sur V_η en la variable $\sqrt{1-s}$: plus précisément, pour tout $s \in V_\eta$, on a*

$$\mathcal{N}^*C(s|y) = \mu^{*-}(y) - \frac{\sqrt{2}}{\sigma}\mu^{*-}]-\infty, y]\sqrt{1-s} + (1-s)O_s(y)$$

et la fonction $s \mapsto \ O_s$, à valeurs dans $\mathcal{S}_{[\alpha]}$, est analytique en la variable $\sqrt{1-s}$ et bornée sur V_η.

Pour $s \in \mathbb{C}$ et $y \in \mathbb{Z}$, on note

$$U^+(s|y) := \delta_0(y) + \mathcal{P}C(s|y),$$
$$U^{*-}(s|y) := \delta_0(y) + \mathcal{N}^*B(s|y).$$

Dans ce qui suit, on énonce des résultats analogues pour les fonctions $s \mapsto U^+(s|y)$ et $s \mapsto U^{*-}(s|y)$ pour $y \in \mathbb{Z}$.

Proposition 2.2.7. *On suppose que la loi μ satisfait les hypothèses* $\boldsymbol{M(\exp)([\alpha,\beta])}$, **A**, *et* **C**. *Il existe alors un voisinage $\mathcal{O}$ de $\overline{B(0,1)} \setminus \{1\}$ dans $\mathbb{C}$ et une constante $\eta > 0$ tels que pour tout $y \in \mathbb{Z}^+$, on ait*

(i). *la fonction $s \mapsto U^+(s|y)$ est analytique sur $\mathcal{O}$,* (ii). *la fonction* $s \mapsto U^+(s|y)$ *est analytique sur* V_η *en la variable* $\sqrt{1-s}$. *Plus précisément, pour tout* $s \in V_\eta$, *on a*

$$U^+(s|y) = U^+(y) - \frac{\sqrt{2}}{\sigma} U^+[0,y]\sqrt{1-s} + (1-s)O_s(y)$$

et la fonction $s \mapsto O_s$, *à valeurs dans* $\mathcal{S}_{[\beta]}$, *est analytique en la variable* $\sqrt{1-s}$ *et bornée sur* V_η.

Démonstration. Fixons $r \in [\alpha, 1[$. D'après le théorème 2.2.2, il existe un voisinage $\mathcal{O}$ de $\overline{B(0,1)} \setminus \{1\}$ dans $\mathbb{C}$ sur lequel la fonction $s \mapsto \mathcal{P}C_s(z)$ est analytique sur $\mathcal{O}$ pour tout $z \in \mathcal{A}_{[r]}$, de plus, la fonction $(s,z) \mapsto \mathcal{P}C_s(z)$ est bornée sur $\mathcal{O} \times \mathcal{A}_{[r]}$. D'après la formule de Cauchy et le théorème de convergence dominée, pour tout $y \in \mathbb{N}$, la fonction $s \mapsto \mathcal{P}C(s|y)$ est aussi analytique sur $\mathcal{O}$. À présent, d'après le théorème 2.2.2, il existe $\eta > 0$ tel que pour tout $s \in V_\eta$, la fonction $z \mapsto \mathcal{P}C_s(z)$ est une série de Laurent en z absolument convergente pour les valeurs de $z \in \mathcal{A}_{[r]}$ et on a

$$\mathcal{P}C(s,z) = \mathcal{P}C(z) + \sqrt{1-s}\widetilde{\mathcal{P}C}(z) + (1-s)O(s,z)$$

où les fonctions $z \mapsto \mathcal{P}C(z)$ et $z \mapsto \widetilde{\mathcal{P}C}(z)$ sont des séries de Laurent absolument convergentes pour tout $z \in \mathcal{A}_{[r]}$ et la fonction $(s,z) \mapsto O(s,z)$ est bornée sur l'ensemble $V_\eta \times \mathcal{A}_{[r]}$. La formule de Cauchy et un argument de convergence dominée entraînent alors que pour tout $y \in \mathbb{N}$, on a

$$\mathcal{P}C(s|y) = \frac{1}{2i\pi r}\int_{|z|=r} \frac{\mathcal{P}C(z)}{z^{y+1}} dz + \frac{1}{2i\pi r}\sqrt{1-s}\int_{|z|=r} \frac{\widetilde{\mathcal{P}C}(z)}{z^{y+1}} dz + (1-s)\frac{1}{2i\pi r}\int_{|z|=r} O(s,z)dz.$$

Par ailleurs, d'après la remarque 2.2.6, il vient $1 + \mathcal{P}C = \widehat{U^+[0,y]}$ et $\widetilde{\mathcal{P}C} = -\frac{\sqrt{2}}{\sigma}\hat{b}$, où la suite $b = (b_y)_{y\in\mathbb{N}}$ est donnée par $b_y = U^+[0,y]$ pour tout $y \in \mathbb{N}$. Ainsi, pour tout $y \in \mathbb{N}$, on a $\frac{1}{2i\pi r}\int_{|z|=r} \frac{\mathcal{P}C(z)}{z^{y+1}} dz = U^+(y)$ et $\frac{1}{2i\pi r}\int_{|z|=r} \frac{\widetilde{\mathcal{P}C}(z)}{z^{y+1}} dz = U^+[0,y]$, ce qui permet de conclure. $\square$

Un raisonnement similaire donne la

Proposition 2.2.8. *On suppose que la loi* μ *satisfait les hypothèses* $\boldsymbol{M}(\mathbf{exp})([\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}])$, **A**, *et* **C**. *Il existe alors un voisinage* $\mathcal{O}$ *de* $\overline{B(0,1)} \setminus \{1\}$ *dans* $\mathbb{C}$ *et une constante* $\eta > 0$ *tels que pour tout* $y \in \mathbb{Z}^{*-}$, *on a*

(i). *la fonction* $s \mapsto U^{*-}(s|y)$ *est analytique sur* $\mathcal{O}$,

(ii). *la fonction* $s \mapsto U^{*-}(s|y)$ *est analytique sur* V_η *en la variable* $\sqrt{1-s}$. *Plus précisément, pour tout* $s \in V_\eta$, *on a*

$$U^{*-}(s|y) = U^{*-}(y) - \frac{\sqrt{2}}{\sigma} U^{*-}]y,0]\sqrt{1-s} + (1-s)O_s(y)$$

et la fonction $s \mapsto O_s$, *à valeurs dans* $\mathcal{S}_{[\alpha]}$, *est analytique en la variable* $\sqrt{1-s}$ *et bornée sur* V_η.

2.3 Sur les excursions positives de la marche aléatoire

Pour tous $x, y \in \mathbb{N}$, on définit formellement la fonction suivante : pour $s \in \mathbb{C}$,

$$\begin{aligned}\mathcal{E}(s|x,y) &= \sum_{n\geqslant 0} s^n \mathbb{P}_x(\tau^{*-} > n, S_n = y) \qquad (2.3.1)\\ &= \delta_0(y-x) + \sum_{n\geqslant 1} s^n \mathbb{P}(x+S_1 \geqslant 0, x+S_2 \geqslant 0, \cdots, x+S_n = y).\end{aligned}$$

La fonction $s \mapsto \mathcal{E}(s|x,y)$ recèle l'excursion de la marche aléatoire partant de x et atteignant y en restant dans la demi-doite $[0,+\infty[$. Remarquons que pour tout $y \in \mathbb{N}$ et pour $s \in \mathbb{C}$, on a $\mathcal{E}(s|0,y) = U^+(s|y) = \delta_0(y) + \mathcal{P}C(s|y)$. Ainsi, on peut énoncer un analogue de la proposition 2.2.7 pour la fonction $s \mapsto \mathcal{E}(s|0,y)$. On s'intéresse à présent à étendre ces résultats pour toutes les fonctions $s \mapsto \mathcal{E}(s|x,y)$. Pour y parvenir on utilise la formule suivante, que l'on retrouvera un peu plus loin dans cette thèse (voir la formule (2.7.32)) : pour tous $x, y \in \mathbb{N}$ et tout $s \in \mathbb{C}$, on a

$$\mathcal{E}(s|x,y) = \sum_{w=0}^{\min(x,y)} U^{*-}(s|w-x)U^+(s|y-w). \tag{2.3.2}$$

On a la

Proposition 2.3.1. *On suppose que la loi μ satisfait les hypothèses $\boldsymbol{M}(\mathbf{exp})([\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}])$, $\mathbf{C}$ et $\mathbf{A}$. Il existe alors un voisinage $\mathcal{O}$ de $\overline{B(0,1)} \setminus \{1\}$ dans $\mathbb{C}$ et une constante $\eta > 0$ tels que pour tous $x, y \in \mathbb{N}$, on ait*

(i). *la fonction $s \mapsto \mathcal{E}(s|x,y)$ est analytique sur $\mathcal{O}$,*

(ii). *la fonction $s \mapsto \mathcal{E}(s|x,y)$ est analytique sur V_η en la variable $\sqrt{1-s}$. Plus précisément, pour tout $s \in V_\eta$, on a*

$$\mathcal{E}(s|x,y) = \mathcal{E}(x,y) + \tilde{\mathcal{E}}(x,y)\sqrt{1-s} + (1-s)O_s(x,y),$$

avec

- $\mathcal{E}(x,y) = \mathcal{E}(1|x,y)$,
- $\tilde{\mathcal{E}}(x,y) = -\frac{\sqrt{2}}{\sigma}U^+[0,y]U^{*-}[-x,0]$

et pour tous $x, y \in \mathbb{N}$, la fonction $s \mapsto O_s(x,y)$, est analytique en la variable $\sqrt{1-s}$ et bornée sur V_η.

Démonstration. Le résultat annoncé s'obtient en utilisant la proposition 2.2.7 et l'identité (2.3.2). Il reste à expliciter le terme $\tilde{\mathcal{E}}(x,y)$ pour $x, y \in \mathbb{N}$. Pour tout $y \in \mathbb{N}$, on note

$$\widetilde{U^+}(y) = \widetilde{\mathcal{P}C}(y) := -\frac{\sqrt{2}}{\sigma}U^+[0,y]$$

et

$$\widetilde{U^{*-}}(y) = \widetilde{\mathcal{N}^*B}(y) := -\frac{\sqrt{2}}{\sigma}U^{*-}]y,0].$$

On a

$$\begin{aligned}
\tilde{\mathcal{E}}(x,y) &= \sum_{w=0}^{\min(x,y)} U^{*-}(w-x)\widetilde{U^+}(y-w) + \widetilde{U^{*-}}(w-x)U^+(y-w) \\
&= -\frac{\sqrt{2}}{\sigma}\sum_{w=0}^{\min(x,y)} U^{*-}(w-x)U^+[0,y-w] + U^{*-}]w-x,0]U^+(y-w).
\end{aligned}$$

Décomposons $\tilde{\mathcal{E}}(x,y)$ sous la forme $\tilde{\mathcal{E}}(x,y) = -\frac{\sqrt{2}}{\sigma}(S_1 + S_2)$, avec

$$S_1 = \sum_{w=0}^{\min(x,y)} U^{*-}(w-x)U^+[0,y-w] \quad \text{et} \quad S_2 = \sum_{w=0}^{\min(x,y)} U^{*-}]w-x,0]U^+(y-w).$$

Calculons S_1. On a

$$\begin{aligned}
S_1 &= \sum_{w=0}^{\min(x,y)} U^{*-}(w-x)U^{+}[0,y-w] \\
&= \sum_{w=0}^{\min(x,y)} U^{*-}(w-x)\sum_{k=0}^{y-w} U^{+}(k) \\
&= \sum_{k=0}^{y} U^{+}(k) \sum_{w=0}^{\min(y-k,x)} U^{*-}(w-x) \\
&= \sum_{k=0}^{y} U^{+}(y-k) \sum_{w=0}^{\min(k,x)} U^{*-}(w-x).
\end{aligned}$$

Supposons que $y \geqslant x$, on a alors

$$\begin{aligned}
S_1 &= \sum_{k=0}^{x} U^{+}(y-k)\sum_{w=0}^{k} U^{*-}(w-x) + \sum_{k=x+1}^{y} U^{+}(y-k)\sum_{w=0}^{x} U^{*-}(w-x) \\
&= \sum_{k=0}^{x} U^{+}(y-k)U^{*-}[-x,k-x] + \sum_{k=x+1}^{y} U^{+}(y-k)U^{*-}[-x,0] \\
&= \sum_{k=0}^{x} U^{+}(y-k)U^{*-}[-x,0] - \sum_{k=0}^{x} U^{+}(y-k)U^{*-}]k-x,0] + \sum_{k=x+1}^{y} U^{+}(y-k)U^{*-}[-x,0] \\
&= \sum_{k=0}^{y} U^{+}(y-k)U^{*-}[-x,0] - \sum_{k=0}^{x} U^{+}(y-k)U^{*-}]k-x,0] \\
&= U^{+}[0,y]U^{*-}[-x,0] - S_2.
\end{aligned}$$

À présent lorsque $y < x$, on a

$$\begin{aligned}
S_1 &= \sum_{k=0}^{y} U^{+}(y-k)\sum_{w=0}^{k} U^{*-}(w-x) \\
&= \sum_{k=0}^{y} U^{+}(y-k)U^{*-}[-x,k-x] \\
&= \sum_{k=0}^{y} U^{+}(y-k)U^{*-}[-x,0] - \sum_{k=0}^{y} U^{+}(y-k)U^{*-}]k-x,0] \\
&= U^{+}[0,y]U^{*-}[-x,0] - S_2.
\end{aligned}$$

Ainsi, pour tous $x, y \in \mathbb{N}$, on a $\tilde{\mathcal{E}}(x,y) = -\frac{\sqrt{2}}{\sigma}(S_1+S_2) = -\frac{\sqrt{2}}{\sigma}U^{+}[0,y]U^{*-}[-x,0]$. □

Remarque 2.3.1. *Nous verrons que le calcul explicite des constantes $\tilde{\mathcal{E}}(x,y)$ pour $x, y \in \mathbb{N}$ effectué ci-dessus, nous permettra de répondre à une question que nous nous sommes posés dans le chapitre 1 à la section 1.3.5). En effet les constantes qui apparaîtront dans les théorèmes limite locaux pour la marche aléatoire restreinte à rester positive s'exprimeront en fonction des $\tilde{\mathcal{E}}(x,y)$ dont nous avons donné ici une forme factorisée. On pourra ainsi retrouver les résultats de Denisov and Wachtel [12].*

2.4 Sur les réflexions de la marche aléatoire

Pour tous $x, y \in \mathbb{N}$, on définit formellement la fonction suivante : pour $s \in \mathbb{C}$

$$\begin{aligned} \mathcal{R}(s|x,y) &= \mathbb{E}_x(S_{\tau^{*-}} = -y; s^{\tau^{*-}}) \qquad (2.4.1)\\ &= \sum_{n\geqslant 1} \mathbb{P}(x+S_1 \geqslant 0, x+S_2 \geqslant 0, \cdots, x+S_{n-1} \geqslant 0, x+S_n < 0, x+S_n = -y)s^n. \end{aligned}$$

La fonction $s \mapsto \mathcal{R}(s|x,y)$ recèle l'information concernant la marche aléatoire partant de x et atteignant y la première fois où elle rentre dans la demi-droite $]-\infty, 0[$. Remarquons que pour tout $y \in \mathbb{N}$ et pour $s \in \mathbb{C}$, on a $\mathcal{A}(s|0,y) = \mathcal{N}^*C(s|y)$. On s'intéresse à présent à énoncer une version analogue de la proposition 2.2.5 pour toutes les fonctions $s \mapsto \mathcal{R}(s|x,y)$. Pour ce faire, on utilise la formule suivante, que l'on retrouvera un peu plus loin dans cette thèse (voir la formule (2.7.8)). Pour tous $x \in \mathbb{N}$, $y \in \mathbb{N}^*$ et tout $s \in \mathbb{C}$, on a

$$\mathcal{R}(s|x,y) = \sum_{w=0}^{x} U^{*-}(s|w-x)\mathcal{N}^*C(s|-y-w). \qquad (2.4.2)$$

En reprenant la démarche utilisée pour montrer la proposition 2.3.1, on obtient la

Proposition 2.4.1. *On suppose que la loi μ satisfait les hypothèses* $\boldsymbol{M}(\mathbf{exp})([\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}])$, **C** *et* **A**. *Il existe alors un voisinage $\mathcal{O}$ de $\overline{B(0,1)} \setminus \{1\}$ dans $\mathbb{C}$ et une constante $\eta > 0$ tels que pour tous $x, y \in \mathbb{N}$, on ait*

(i). *la fonction $s \mapsto \mathcal{R}(s|x,y)$ est analytique sur $\mathcal{O}$,*

(ii). *la fonction $s \mapsto \mathcal{R}(s|x,y)$ est analytique sur V_η en la variable $\sqrt{1-s}$. Plus précisément, pour tout $s \in V_\eta$, on a*

$$\mathcal{R}(s|x,y) = \mathcal{R}(x,y) + \tilde{\mathcal{R}}(x,y)\sqrt{1-s} + (1-s)O_s(x,y),$$

avec

- $\mathcal{R}(x,y) = \mathcal{R}(1|x,y)$,
- $\tilde{\mathcal{R}}(x,y) = -\frac{\sqrt{2}}{\sigma}\mu^{*-}]-\infty, -y]U^{*-}[-x, 0]$

et pour tous $x, y \in \mathbb{N}$, la fonction $s \mapsto (O_s(x,y))_{y\in\mathbb{N}}$, est analytique en la variable $\sqrt{1-s}$ et bornée sur V_η à valeurs dans $\mathcal{S}_{[\beta]}$.

Démonstration. Le résultat annoncé s'obtient en utilisant la proposition 2.2.6 et l'identité (2.4.2). Il reste à expliciter le terme $\tilde{\mathcal{R}}(x,y)$ pour $x, y \in \mathbb{N}$. Pour tout $y \in \mathbb{N}^*$, On note

$$\widetilde{\mathcal{N}^*C}(y) := -\frac{\sqrt{2}}{\sigma}\mu^{*-}]-\infty, y].$$

En utilisant les propositions 2.2.6, 2.2.8 et l'identité (2.4.2), il vient

$$\begin{aligned} \tilde{\mathcal{R}}(x,y) &= \sum_{w=0}^{x} U^{*-}(w-x)\widetilde{\mathcal{N}^*C}(-w-y) + \widetilde{U^{*-}}(w-x)\mathcal{N}^*C(-w-y)\\ &= -\frac{\sqrt{2}}{\sigma}\sum_{w=0}^{x} U^{*-}(w-x)\mu^{*-}]-\infty, -y-w] + \ U^{*-}]w-x, 0]\mu^{*-}(-w-y). \end{aligned}$$

Décomposons

$$\tilde{\mathcal{R}}(x,y) = -\frac{\sqrt{2}}{\sigma}(S_1 + S_2), \quad \text{avec}$$

$$S_1 = \sum_{w=0}^{x} U^{*-}(w-x)\mu^{*-}]-\infty, -w-y] \quad \text{et} \quad S_2 = \sum_{w=0}^{x} U^{*-}]w-x,0]\mu^{*-}(-w-y).$$

On a

$$\begin{aligned}
S_1 &= \sum_{w=0}^{x} U^{*-}(w-x)\mu^{*-}]-\infty,-y-w] \\
&= \sum_{w=0}^{x} U^{*-}(w-x) \sum_{k\geqslant w+y} \mu^{*-}(-k) \\
&= \sum_{k\geqslant y} \mu^{*-}(-k) \sum_{w=0}^{\min(x,k-y)} U^{*-}(w-x) \\
&= \sum_{k\geqslant 0} \mu^{*-}(-k-y) \sum_{w=0}^{\min(x,k)} U^{*-}(w-x) \\
&= \sum_{k=0}^{x-1} \mu^{*-}(-k-y) \sum_{w=0}^{k} U^{*-}(w-x) + \sum_{k\geqslant x} \mu^{*-}(-k-y) \sum_{w=0}^{x} U^{*-}(w-x) \\
&= \sum_{k=0}^{x-1} \mu^{*-}(-k-y)U^{*-}[-x,k-x] + \sum_{k\geqslant x} \mu^{*-}(-k-y)U^{*-}[-x,0] \\
&= \sum_{k=0}^{x-1} \mu^{*-}(-k-y)U^{*-}[-x,0] - \sum_{k=0}^{x-1} \mu^{*-}(-k-y)U^{*-}]k-x,0] + \sum_{k\geqslant x} \mu^{*-}(-k-y)U^{*-}[-x,0] \\
&= \sum_{k\geqslant 0} \mu^{*-}(-k-y)U^{*-}[-x,0] - \sum_{k=0}^{x-1} \mu^{*-}(-k-y)U^{*-}]k-x,0] \\
&= \mu^{*-}]-\infty,-y]U^{*-}[-x,0] - S_2.
\end{aligned}$$

Ainsi

$$\tilde{\mathcal{R}}(x,y) = -\frac{\sqrt{2}}{\sigma}(S_1+S_2) = -\frac{\sqrt{2}}{\sigma}\mu^{*-}]-\infty,-y]U^{*-}[-x,0].$$

□

Remarque 2.4.1. *De la même façon, on peut énoncer des résultats similaires pour les fonctions* $s \mapsto \sum_{n\geqslant 0} s^n \mathbb{P}_x(\tau^+ > n, S_n = y)$, *avec* $y \in \mathbb{Z}^-$ *et* $s \mapsto \mathbb{E}_x(S_{\tau^+} = y; s^{\tau^+})$, *avec* $y \in \mathbb{Z}^+$.

2.5 Applications aux théorèmes limites locaux

Nous allons à présent utiliser une approche classique dite “méthode de Darboux” qui permet, à partir des résultats précédents portant sur le type de singularité des séries entières $G(s) = \sum_{n\geqslant 0} g_n s^n$ près de leur rayon de convergence, de décrire le comportement asymptotique des coefficients g_n lorsque $n \to +\infty$. Dans notre cas, on obtiendra donc des théorèmes limites locaux relatifs à la marche aléatoire $(S_n)_{n\geqslant 0}$.

Théorème 2.5.1. *(Théorème de Darboux) Soit* $G(s) = \sum_{n=0}^{+\infty} g_n s^n$ *une série entière à coefficients positifs* g_n *et de rayon de convergence* $R > 0$. *On suppose que* G *n'a pas de singularité dans le* *disque fermé* $\Big\{s \in \mathbb{C}/|s| \leqslant R\Big\}$ *excepté en* $s = R$ *; plus précisément, on suppose que* G *admet un prolongement analytique sur un voisinage ouvert de* $\Big\{s \in \mathbb{C}/|s| \leqslant R\Big\} \setminus \{R\}$ *et que sur un voisinage* V *de* $s = R$*, on a*

$$G(s) = A(s)(R-s)^{\alpha} + B(s) \tag{2.5.1}$$

où A *et* B *sont des fonctions analytiques sur* V *et* α *est une constante dans* $\mathbb{R} \setminus \mathbb{N}$*. On a alors :*

$$g_n \sim \frac{A(R)R^{1-n}}{\Gamma(-\alpha)n^{1+\alpha}} \quad \text{quand} \quad n \to +\infty. \tag{2.5.2}$$

Le théorème 2.2.2 appliqué en $z = 1$ et le théorème 2.7.1 appliqué avec $R = 1$, $\alpha = \frac{-1}{2}$ (et donc $\Gamma(-\alpha) = \sqrt{\pi}$), donnent les résultats suivants :

Corollaire 2.5.1. *On suppose que la loi* μ *satisfait les hypothèses* $\boldsymbol{M}(\mathbf{exp})([\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}])$, **C** *et* **A**. *On a alors*

$$\mathbb{P}(\tau^+ > n) \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{\sigma}{\sqrt{2\pi}\mathbb{E}(S_{\tau^+})n^{\frac{1}{2}}}, \tag{2.5.3}$$

$$\mathbb{P}(\tau^{*-} > n) \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{\sigma}{\sqrt{2\pi}|\mathbb{E}(S_{\tau^{*-}})|n^{\frac{1}{2}}}. \tag{2.5.4}$$

Les propositions 2.2.6, 2.2.7, 2.2.8, 2.2.5 et le théorème 2.7.1 appliqué avec $R = 1$, $\alpha = \frac{1}{2}$ (et donc $\Gamma(-\alpha) = -2\sqrt{\pi}$), donnent les résultats suivants et on retrouve ainsi les théorèmes limites locaux obtenus dans la section 1.3, on énonce dans un premier temps des estimations concernant la marche partant de 0, ensuite celles concernant la marche partant de $x \in \mathbb{N}$.

Corollaire 2.5.2. *On suppose que la loi* μ *satisfait les hypothèses* $\boldsymbol{M}(\mathbf{exp})([\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}])$, **A**, *et* **C**. *Pour tout* $y \in \mathbb{N}$*, on a alors*

$$\mathbb{P}(\tau^+ = n, S_n = y) \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{\mu^+]y, +\infty[}{\sqrt{2\pi}\sigma n^{\frac{3}{2}}}, \tag{2.5.5}$$

$$\mathbb{P}(\tau^{*-} > n, S_n = y) \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{U^+[0, y]}{\sqrt{2\pi}\sigma n^{\frac{3}{2}}}. \tag{2.5.6}$$

De même, pour tout $y \in \mathbb{Z}^{*-}$*, on a*

$$\mathbb{P}(\tau^{*-} = n, S_n = y) \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{\mu^{*-}]-\infty, y]}{\sqrt{2\pi}\sigma n^{\frac{3}{2}}}, \tag{2.5.7}$$

$$\mathbb{P}(\tau^+ > n, S_n = y) \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{U^{*-}]y, 0]}{\sqrt{2\pi}\sigma n^{\frac{3}{2}}}. \tag{2.5.8}$$

De façon analogue, les propositions 2.3.1, 2.4.1, la remarque 2.4.1 et le théorème 2.7.1 appliqué avec $R = 1$, $\alpha = \frac{1}{2}$ (et donc $\Gamma(-\alpha) = -2\sqrt{\pi}$), donnent pour tout $x \in \mathbb{N}$ les résultats suivants.

Corollaire 2.5.3. *On suppose que la loi* μ *satisfait les hypothèses* $\boldsymbol{M}(\mathbf{exp})([\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}])$, **A**, *et* **C**. *Pour tous* $x \in \mathbb{N}$ *et* $y \in \mathbb{N}^*$*, on a*

$$\mathbb{P}_x(\tau^{*-} = n, S_n = -y) \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{\mu^{*-}]-\infty, -y]U^{*-}[-x, 0]}{\sqrt{2\pi}\sigma n^{\frac{3}{2}}}. \tag{2.5.9}$$

Pour tous $x, y \in \mathbb{N}$*, on a*

$$\mathbb{P}_x(\tau^{*-} > n, S_n = y) \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{U^+[0, y]U^{*-}[-x, 0]}{\sqrt{2\pi}\sigma n^{\frac{3}{2}}}. \tag{2.5.10}$$

2.6 Application à la marche absorbée en zéro sur $\mathbb{N}$

On considère une suite $(Y_n)_{n\geqslant 1}$ de variables aléatoires définies sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ à valeurs dans $\mathbb{Z}$. On suppose que les variables aléatoires $Y_1, Y_2, \cdots$ sont indépendantes et identiquement distribuées de loi commune μ. On désigne par $(S_n)_{n\geqslant 0}$ la marche aléatoire correspondante partant de zéro, définie par $S_0 = 0$ et $S_n = Y_1 + \cdots + Y_n$ pour tout $n \geqslant 1$.

La marche aléatoire absorbée sur $\mathbb{N}$ (ou marche aléatoire sur $\mathbb{N}$ avec choc non élastique en zéro) de loi μ est la chaîne de Markov $(X_n)_{n\geqslant 0}$ définie par la relation de récurrence suivante

$$\forall\, n \geqslant 0, \quad X_{n+1} = \max(X_n + Y_{n+1}, 0) \tag{2.6.1}$$

où X_0 est une variable aléatoire définie sur l'espace $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ à valeurs dans $\mathbb{N}$. La matrice de transition de cette chaîne de Markov est donnée par

$$\forall x, y \in \mathbb{N}, \quad q(x,y) := \begin{cases} \mu]-\infty, -x] & \text{si } y = 0, \\ \mu(y-x) & \text{si } y \in \mathbb{N}^*. \end{cases} \tag{2.6.2}$$

Lorsque $X_0 = x$ $\mathbb{P}$.p.s, la marche aléatoire absorbée est notée $(X_n^x)_{n\geqslant 0}$; la mesure de probabilité sur $(\Omega, \mathcal{F})$ conditionnée à l'évènement $[X_0 = x]$ est notée $\mathbb{P}_x$ et l'espérance conditionelle correspondante $\mathbb{E}_x$.

2.6.1 Objectif et présentation de la méthode générale

Objectif : Dans ce chapitre, on appliquera l'approche des fonctions génératrices pour retrouver le théorème limite local 1.3.5 pour la marche aléatoire absorbée démontré dans le chapitre 1. Soulignons tout de même que cette méthode impose d'avoir des moments exponentiels, ce qui n'était pas le cas dans le chapitre 1, où l'on se contentait de moments d'ordre 2. Nous chercherons dans dans cette section à estimer le comportement asymptotique de la suite des probabilités $(\mathbb{P}_x(X_n = y))_{n\geqslant 0}$ pour tous $x, y \in \mathbb{N}$. Lorsque $\mathbb{E}(Y_1) < 0$, la marche absorbée est récurrente positive et la suite $(\mathbb{P}_x(X_n = y))_{n\geqslant 0}$ converge alors vers $\nu(y)$ où ν désigne l'unique mesure de probabilité invariante de $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ (voir la proposition 1.2.2). Nous allons dans ce qui suit nous focaliser sur le cas $\mathbb{E}(Y_1) \geqslant 0$. On fixe deux réels α, β tels que $0 < \alpha < 1 < \beta$. On a le

Théorème 2.6.1. *On suppose que la mesure μ satisfait les hypothèses* **A** *et* $\boldsymbol{M(\exp)([\alpha,\beta])}$.
- *Lorsque $\mathbb{E}[Y_1] = 0$, pour tout $y \in \mathbb{N}$, il existe une constante $B_y \in \mathbb{R}^{*+}$ telle que pour tout $x \in \mathbb{N}$, on ait*

$$\mathbb{P}_x[X_n = y] \sim \frac{B_y}{\sqrt{n}} \quad \textit{lorsque} \quad n \to +\infty. \tag{2.6.3}$$

- *Lorsque $\mathbb{E}[Y_1] > 0$, on suppose de plus que $\mu(\mathbb{Z}^{*-})$, $\mu(\mathbb{Z}^{*+}) > 0$; il existe alors une constante $\rho = \rho(\mu) \in]0, 1[$ et pour tous $x, y \in \mathbb{N}$, une constante $B_{x,y} \in > 0$ telles que*

$$\mathbb{P}_x[X_n = y] \sim B_{x,y} \frac{\rho^n}{n^{3/2}} \quad \textit{lorsque} \quad n \to +\infty. \tag{2.6.4}$$

Nous verrons par la suite que la constante $\rho(\mu)$ qui apparaît dans cet énoncé est le minimum de la fonction génératrice de μ sur $\mathbb{R}^{*+}$; les constantes B_y et $B_{x,y}, x, y \in \mathbb{N}$ seront explicitées en temps voulu. Notons que dans le cas centré, la constante B_y ne dépend pas du point de départ x ; ceci s'explique par le fait que les temps de records descendants sont alors $\mathbb{P}$-presque sûrement finis ; la chaîne $(X_n)_{n\geqslant 0}$ est donc absorbée en un temps fini, temps à partir duquel elle repart de zéro, oubliant ainsi son point de départ initial.

Présentation de la méthode : Afin d'estimer le comportement asymptotique de la suite $(\mathbb{P}_x[X_n = y])_{n\geqslant 0}$ pour tous $x, y \in \mathbb{N}$, on utilise comme précédemment la méthode des fonctions génératrices. Rappelons que cette méthode nécessite cependant des propriétés de forte régularité de la fonction $\mathcal{G}(s|x, y)$ au voisinage du disque de convergence, qui imposeront l'existence de moments exponentiels pour μ. On va considérer la fonction génératrice $\mathcal{G}$ définie formellement par :

$$\forall x, y \in \mathbb{N}, \forall s \in \mathbb{C}, \quad \mathcal{G}(s|x, y) := \sum_{n\geqslant 0} \mathbb{P}_x[X_n = y]s^n.$$

Le rayon de convergence R de cette série est supérieur ou égal à 1, la fonction $\mathcal{G}(s|x, y)$ est alors bien définie pour tout $s \in \mathbb{C}$ de module strictement inférieur à 1. La proposition 1.2.2 du premier chapitre stipule que lorsque $\mathbb{E}[|Y_i|] < +\infty$ et $\mathbb{E}[Y_i] < 0$, la marche aléatoire absorbée est récurrente positive ; en particulier $R = 1$. On montrera que c'est aussi le cas lorsque $\mathbb{E}[Y_i] = 0$ et que, a contrario, lorsque $\mathbb{E}[|Y_i|] < +\infty$ et $\mathbb{E}[Y_i] > 0$ le rayon de convergence R est strictement supérieur à 1, comme dans le cas de la marche classique.

2.6.2 Équations itératives pour la marche absorbée

Afin d'étudier les fonctions $s \mapsto \mathcal{G}(s|x, y)$, $x, y \in \mathbb{N}$, nous allons tout d'abord expliciter certaines équations fonctionelles qu'elles satisfont. Ces équations reposent sur un raisonnement de type probabiliste qui décompose la marche aléatoire absorbée en deux termes, traduisant respectivement ce qui se passe avant la première absorption puis à partir de celle-ci.

Notations 2.6.1. *On définit les temps d'absorption successifs de la chaîne* $(X_n)_{n\geqslant 0}$

$$\mathbf{a}_0 = 0 \quad \text{et} \quad \mathbf{a}_{k+1} := \inf\{n > \mathbf{a}_k : X_{\mathbf{a}_k} + Y_{\mathbf{a}_k+1} + \cdots + Y_n < 0\} \quad \text{pour} \quad \text{tout} \quad k \geqslant 0.$$

La suite $(\mathbf{a}_k)_{k\geqslant 0}$ est une suite de temps d'arrêt relativement à la filtration $(\mathcal{F}_n)_{n\geqslant 0}$. Pour simplifier, on posera $\mathbf{a} = \mathbf{a_1} = \tau^{*-}$. On remarque que pour tout $k \geqslant 0$, on a $X_{\mathbf{a_k}} 1_{[\mathbf{a_k}<\infty]} = 0$. Lorsque $\mathbb{E}[|Y_i|] < +\infty$ et $\mathbb{E}[Y_i] \leqslant 0$, on a $\mathbb{P}_x[\mathbf{a}_k < +\infty] = 1$ pour tout $x \in \mathbb{N}$ et $k \geqslant 0$ (voir chapitre 1). En revanche, lorsque $\mathbb{E}[|Y_i|] < +\infty$ et $\mathbb{E}[Y_i] > 0$, on a forcément $\mathbb{P}_x[\mathbf{a}_k < +\infty] < 1$; on suppose néanmoins dans ce cas que $\mu(\mathbb{Z}^{*-}) > 0$ afin d'avoir $\mathbb{P}_x[\mathbf{a}_1 < +\infty] > 0$ et donc $\mathbb{P}_x[\mathbf{a}_k < +\infty] > 0$ pour tout $k \geqslant 1$. Notons que le premier instant d'absorption $\mathbf{a}$ de la chaîne $(X_n)_{n\geqslant 0}$ partant de 0 correspond aussi au premier instant de la visite de $\mathbb{Z}^{*-}$ pour la marche classique noté τ^{*-}. De même, l'excursion avant la première absorption en y de la chaîne $(X_n)_{n\geqslant 0}$ partant de x est aussi l'excursion de la marche classique $(S_n)_{n\geqslant 0}$ partant de x, avant la première visite de $\mathbb{Z}^{*-}$; elle pourra être explicitée par le terme $\mathcal{E}(s|x, y)$ introduit dans la section 2.7.9 dont nous rappelons l'expression : pour tout $x, y \geqslant 0$ et $s \in \mathbb{C}$,

$$\begin{aligned}
\mathcal{E}(s|x, y) &:= \sum_{n=0}^{+\infty} s^n \mathbb{P}_x[X_n = y, \mathbf{a} > n] \\
&= \sum_{n\geqslant 0} s^n \mathbb{P}[x + S_1 \geqslant 0, \cdots, x + S_n \geqslant 0, x + S_n = y].
\end{aligned}$$

On introduit aussi les fonctions $\mathcal{A}(s|x)$, $x \geqslant 0$ définies par,

$$\begin{aligned}
\forall s \in \mathbb{C}, \quad \mathcal{A}(s|x) &:= \mathbb{E}_x(s^{\mathbf{a}} 1_{[\mathbf{a}<+\infty]}) \\
&= \sum_{n\geqslant 0} s^n \mathbb{P}[x + S_1 \geqslant 0, \cdots, x + S_{n-1} \geqslant 0, x + S_n < 0].
\end{aligned}$$

La fonction génératrice $\mathcal{A}$ recèle l'information de ce qui se passe au moment de la première absorption.
De ces définitions découle la

Proposition 2.6.1. *Pour tous x, $y \in \mathbb{N}$ et $s \in \mathbb{C}$, on a*

$$\mathcal{G}(s|x,y) = \mathcal{E}(s|x,y) + \mathcal{A}(s|x)\mathcal{G}(s|0,y). \tag{2.6.5}$$

Démonstration. On décompose la fonction $\mathcal{G}(s|x,y)$ en deux termes $\mathcal{G}_1(s|x,y) + \mathcal{G}_2(s|x,y)$ de la façon suivante

$$\mathcal{G}_1(s|x,y) := \mathbb{E}_x\left[\sum_{n=0}^{\mathbf{a}-1} 1_{\{y\}}(X_n)s^n\right] \quad \text{et} \quad \mathcal{G}_2(s|x,y) := \mathbb{E}_x\left[1_{[\mathbf{a}<+\infty]}\sum_{n=\mathbf{a}}^{+\infty} 1_{\{y\}}(X_n)s^n\right].$$

On a $\mathcal{G}_1(s|x,y) = \mathcal{E}(s|x,y)$; d'autre part, on peut écrire

$$\begin{aligned}
\mathcal{G}_2(s|x,y) &= \sum_{l\geqslant 0}\mathbb{E}_x\left[1_{[\mathbf{a}<+\infty]}1_{[X_{\mathbf{a}+l}=y]}s^{\mathbf{a}+l}\right]\\
&= \sum_{k\geqslant 1}\sum_{l\geqslant 0}\mathbb{E}_x\left[1_{[\mathbf{a}=k]}1_{[X_{k+l}=y]}s^{k+l}\right]\\
&= \sum_{k\geqslant 1}\sum_{l\geqslant 0}\mathbb{E}_x\left[1_{[\mathbf{a}=k]}\mathbb{E}(1_{[X_{k+l}=y]}/\mathcal{F}_k)s^{k+l}\right].
\end{aligned}$$

Or sur l'événement $[\mathbf{a} = k]$ on a $X_k = 0$ si bien que, grâce à la propriété de Markov, on peut écrire

$$1_{[\mathbf{a=k}]}\mathbb{E}(1_{[X_{k+l}=y]}/\mathcal{F}_k) = 1_{[\mathbf{a=k}]}\mathbb{P}_0[X_l = y] \quad \mathbb{P}.p.s. \tag{2.6.6}$$

Il vient

$$\begin{aligned}
\mathcal{G}_2(s|x,y) &= \sum_{k\geqslant 1}s^k\mathbb{E}_x\left[1_{[\mathbf{a=k}]}\right]\sum_{l\geqslant 0}\mathbb{P}_0[X_l = y]s^l\\
&= \mathbb{E}_x\left[s^a 1_{[a<\infty]}\right]\mathcal{G}(s|0,y).
\end{aligned}$$

□

Corollaire 2.6.1. *Pour tous $s \in B(0,1)$ et $x, y \in \mathbb{N}$, on a*

$$\mathcal{G}(s|x,y) = \mathcal{E}(s|x,y) + (1 + \mathcal{P}C(s,1))\mathcal{A}(s|x)U^+(s|y).$$

Démonstration. En appliquant la proposition 2.6.1 pour $x = 0$ et en insérant le résultat obtenu dans l'équation (2.7.3), pour tout $s \in B(0,1)$, on obtient

$$\mathcal{G}(s|x,y) = \mathcal{E}(s|x,y) + (1 - \mathcal{A}(s|0))^{-1}\mathcal{A}(s|x)\mathcal{E}(s|0,y). \tag{2.6.7}$$

Remarquons à présent que

$$\mathcal{A}(s|0) = \mathcal{P}B(s,1) \quad \text{et} \quad \mathcal{E}(s|0,y) = U^+(s|y);$$

l'identité (2.2.10) permet alors de conclure. □

Proposition 2.6.2. *On suppose que la loi μ satisfait les hypothèses $\boldsymbol{M(\exp)([\alpha,\beta])}$, **C** et **A**. Il existe alors un voisinage $\mathcal{O}$ de $\overline{B(0,1)} \setminus \{1\}$ dans $\mathbb{C}$ et une constante $\eta > 0$ tels que pour tout $x \in \mathbb{N}$, on ait*

(i). *la fonction $s \mapsto \mathcal{A}(s|x)$ est analytique sur $\mathcal{O}$,*

(ii). *la fonction $s \mapsto \mathcal{A}(s|x)$ est analytique sur V_η en la variable $\sqrt{1-s}$. Plus précisément, pour tout $s \in V_\eta$, on a*

$$\mathcal{A}(s|x) = 1 - \frac{\sqrt{2}}{\sigma}|\mathbb{E}(S_{\tau^{*-}})|U^{*-}[-x,0]\sqrt{1-s} + (1-s)O(s|x), \tag{2.6.8}$$

et la fonction $s \mapsto\ O(s|x)$ est analytique en la variable $\sqrt{1-s}$ et bornée sur V_η.

Démonstration. Fixons x dans $\mathbb{N}$. On a

$$\mathcal{A}(s|x) = \sum_{y \geqslant 1} \mathcal{R}(s|x,y). \tag{2.6.9}$$

Or d'après la proposition 2.4.1, pour y dans $\mathbb{N}$, l'application $s \mapsto \mathcal{R}(s|x,y)$ admet un prolongement analytique sur le voisinage de $\overline{B}(0,1) \setminus \{1\}$. Notons que chacune des fonctions $s \mapsto \mathcal{R}(s|x,y)$ est uniformément bornée en s par la quantité $\mathcal{R}(x,y) := \mathcal{R}(1|x,y)$, l'égalité $\sum_{y \geqslant 1} \mathcal{R}(x,y) = \mathbb{P}_x(\mathbf{a} < \infty) = 1 < +\infty$, combinée avec l'identité (2.6.9) entraîne que $s \mapsto \mathcal{R}(s|x,y)$ est analytique sur un voisinage de $\overline{B}(0,1) \setminus \{1\}$.

Par ailleurs, d'après la proposition 2.4.1 si $\delta > 0$ est suffisament petit, les fonctions $s \mapsto \mathcal{R}(s|x,y)$ admettent sur l'ensemble $O_\delta(1)$ le développement local suivant

$$\mathcal{R}(s|x,y) = \mathcal{R}(x,y) + \tilde{\mathcal{R}}(x,y)\sqrt{1-s} + (1-s)O_s(x,y), \tag{2.6.10}$$

avec

- $\mathcal{R}(x,y) = \mathcal{R}(1|x,y)$,
- $\tilde{\mathcal{R}}(x,y) = -\frac{\sqrt{2}}{\sigma}\mu^{*-}]-\infty,-y]U^{*-}[-x,0]$,

où la fonction $s \mapsto O_s(x,y)$ est analytique en la variable $\sqrt{1-s}$ et bornée sur V_η. Sommons formellement par rapport à $y \geqslant 1$ les différents termes de (2.6.10) ; il vient

$$\mathcal{A}(s|x) = 1 - \frac{\sqrt{2}}{\sigma}U^{*-}[-x,0]\sum_{y \geqslant 1}\mu^{*-}]-\infty,-y]\sqrt{1-s} + (1-s)\sum_{y \geqslant 1} O_s(x,y).$$

On a $\mu^{*-}(]-\infty,-x[) \leqslant 1$; par ailleurs, d'après le calcul fait dans la remarque 2.2.5, la somme infinie $\sum_{y \geqslant 1} \mu^{*-}]-\infty,-y]$ est finie dès que μ^{*-} a des moments d'ordre 1, ce qui est acquis ici puisque la mesure μ^{*-} admet des moments exponentiels d'ordre $\alpha < 1$ et qu'elle est à support dans $\mathbb{Z}^{*-}$; de plus, cette somme vaut $-\mathbb{E}(S_{\tau^{*-}})$. Enfin l'application $s \mapsto O_s$ est bornée dans $\mathcal{S}_{[\beta]}$; la série $\sum_{y \geqslant 1} O_s(x,y)$ est donc uniformément convergente pour tout $s \in V_\eta$. □

En combinant les propositions 2.2.2, 2.2.7, 2.3.1, 2.6.2 et l'identité 2.6.1, on obtient la

Proposition 2.6.3. *On suppose que la loi μ satisfait les hypothèses $\boldsymbol{M(\exp)([\alpha,\beta])}$, **A**, et **C**. Il existe alors un voisinage $\mathcal{O}$ de $\overline{B(0,1)} \setminus \{1\}$ dans $\mathbb{C}$ et une constante $\eta > 0$ tels que pour tous $x, y \in \mathbb{N}$, on ait*

(i). *la fonction $s \mapsto \mathcal{G}(s|x)$ est analytique sur $\mathcal{O}$,* (ii). *la fonction $s \mapsto \mathcal{G}(s|x)$ est analytique sur V_η en la variable $\frac{1}{\sqrt{1-s}}$. Plus précisément, pour tout $s \in V_\eta$, on a*

$$\mathcal{G}(s|x) = \frac{\sigma U^+(y)}{\sqrt{2}\mathbb{E}(S_{\tau^+})} \frac{1}{\sqrt{1-s}} + O(s|x), \tag{2.6.11}$$

et la fonction $s \mapsto \ O(s|x)$ est analytique en la variable $\sqrt{1-s}$ et bornée sur V_η.

La proposition 2.6.3 appliquée en $z = 1$ et le théorème 2.7.1 appliqué avec $R = 1$, $\alpha = \frac{-1}{2}$ (et donc $\Gamma(-\alpha) = \sqrt{\pi}$), donnent les résultats suivants :

Théorème 2.6.2. *On suppose que la loi μ satisfait les hypothèses $\boldsymbol{M}$**(exp)([$\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}$])**, **A**, et **C**. Pour tout $y \in \mathbb{N}$, il existe $c_y > 0$ tel que pour tout $x \in \mathbb{N}$, on a*

$$\mathbb{P}_x(X_n = y) \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{c_y}{n^{\frac{1}{2}}}, \quad \textit{avec} \quad c_y = \frac{\sigma U^+(y)}{\sqrt{2\pi}\mathbb{E}(S_{\tau^+})}. \tag{2.6.12}$$

En utilisant la technique dite de relativisation dans le cas décentré qui va être explicitée dans la section 2.7, on obtient le

Corollaire 2.6.2. *On suppose que $\mathbb{E}(Y_1) > 0$ et que la loi μ satisfait les hypothèses* **min([$\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}$])** *et* **A**. *Pour tous $x, y \in \mathbb{N}$, il existe $c_{xy} > 0$ telle que*

$$\mathbb{P}_x(X_n = y) \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{c_{xy}}{n^{\frac{3}{2}}}. \tag{2.6.13}$$

2.7 Application à la marche aléatoire sur $\mathbb{N}$ avec réflexions élastiques en 0

Les résultats présentés ici et leur application à la marche aléatoire sur $\mathbb{N}$ avec réflexions élastiques en 0 ont fait l'objet d'un article écrit en collaboration avec M. Peigné, publié dans *Journal of Theoretical Probability*. Nous insérons intégralement ici le texte de cet article, rédigé en anglais.

Soulignons que nous utiliserons de manière essentielle le corollaire 2.2.1 et la proposition 3.4.6, ainsi que leurs conséquences, notamment l'étude menée dans le paragraphe 2.2.3 concernant la singularité en 1 des quantités $\mathcal{P}B_s$, $\mathcal{N}^*C_s$, $\mathcal{P}C_s$ et $\mathcal{N}^*B_s$. La proposition 2.2.1 et le corollaire 3.4.6 figurent dans [7], [33] et [34] ; dans cette thèse, et tout particulièrements dans les paragraphes qui précèdent, on a détaillé leur démonstration par souci de clarté. Il s'agit d'une version de la factorisation de Wiener-Hopf vue dans l'espace de Banach $\mathcal{V}_{[\alpha,\beta]}$, elle précise une certaine forme d'uniformité en le paramètre z dans la factorisation classique énoncée par exemple dans [17]. Nous employons ainsi dans l'article qui suit la terminologie de "strong version of the Wiener-Hopf factorization" en faisant référence aux travaux précités [7], [33] et [34] ; cette version "forte" sera essentielle car elle permettra d'étudier le type de singularités d'applications à valeurs opérateurs.

Abstract-*Let (Y_n) be a sequence of i.i.d. $\mathbb{Z}$-valued random variables with law μ. The reflected random walk (X_n) is defined recursively by $X_0 = x \in \mathbb{N}_0, X_{n+1} = |X_n + Y_{n+1}|$. Under mild hypotheses on the law μ, it is proved that, for any $y \in \mathbb{N}_0$, as $n \to +\infty$, one gets $\mathbb{P}_x[X_n = y] \sim C_{x,y}R^{-n}n^{-3/2}$ when $\sum_{k\in\mathbb{Z}} k\mu(k) > 0$ and $\mathbb{P}_x[X_n = y] \sim C_y n^{-1/2}$ when $\sum_{k\in\mathbb{Z}} k\mu(k) = 0$, for some constants $R, C_{x,y}$ and $C_y > 0$.*

2.7.1 Introduction

We consider a sequence $(Y_n)_{n\geqslant 1}$ of $\mathbb{Z}$-valued independent and identically distributed random variables, with commun law μ, defined on a probability space $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$.

We denote by $(S_n)_{n\geqslant 0}$ the classical random walk with law μ on $\mathbb{Z}$, defined by $S_0 = 0$ and $S_n = Y_1 + \cdots + Y_n$; the canonical filtration associated with the sequence $(Y_n)_{n\geqslant 1}$ is denoted $(\mathcal{T}_n)_{n\geqslant 1}$. The **reflected random walk** on $\mathbb{N}_0$ is defined by : for X_0 given and $\mathbb{N}_0$ valued, one sets

$$\forall n \geqslant 0 \quad X_{n+1} = |X_n + Y_{n+1}|.$$

The process $(X_n)_{n\geqslant 0}$ is a Markov chain on $\mathbb{N}_0$ with initial law $\mathcal{L}(X_0)$ and transition matrix $Q = (q(x,y))_{x,y\in\mathbb{N}_0}$ given by

$$\forall x, y \geqslant 0 \quad q(x,y) = \begin{cases} \mu(y-x) + \mu(y+x) & \text{if} \quad y \neq 0 \\ \mu(-x) & \text{if} \quad y = 0 \end{cases}.$$

When $X_0 = x$ $\mathbb{P}$−a.s., with $x \in \mathbb{N}_0$ fixed, the random walk $(X_n)_{n\geqslant 0}$ is denoted $(X_n^x)_{n\geqslant 0}$; the probability measure on $(\Omega, \mathcal{T})$ conditioned to the event $[X_0 = x]$ will be denoted $\mathbb{P}_x$ and the corresponding expectation $\mathbb{E}_x$.

We are interested with the behavior as $n \to +\infty$ of the probabilities $\mathbb{P}_x[X_n = y], x, y \in \mathbb{N}_0$; it is thus natural to consider the following generating function $\mathbf{G}$ associated with $(X_n)_{n\geqslant 0}$ and defined formally as follows :

$$\forall x, y \in \mathbb{N}_0, \forall s \in \mathbb{C} \quad \mathbf{G}(s|x,y) := \sum_{n\geqslant 0} \mathbb{P}_x[X_n = y]s^n.$$

The radius of convergence R of this series is $\geqslant 1$. The reflected random walk is positive recurrent when $\mathbb{E}[|Y_n|] < +\infty$ and $\mathbb{E}[Y_n] < 0$ (see [35] and [36] for instance and references therein) and consequently $R = 1$; it is also the case when the Y_n are centered, under the stronger assumption $\mathbb{E}[|Y_n|^{3/2}] < +\infty$. On the other hand, when $\mathbb{E}[|Y_n|] < +\infty$ and $\mathbb{E}[Y_n] > 0$, as in the case of the classical random walk on $\mathbb{Z}$, it is natural to assume that μ has exponential moments.

We will extract information about the asymptotic behavior of coefficients of a generating function using the following theorem of Darboux.

Théorème 2.7.1. *Let* $\mathbf{G}(s) = \sum_{n=0}^{+\infty} g_n s^n$ *be a power series with nonnegative coefficients* g_n *and radius of convergence* $R > 0$. *We assume that* $\mathbf{G}$ *has no singularities in the closed disk* $\Big\{s \in \mathbb{C}/ |s| \leqslant R\Big\}$ *except* $s = R$ *(in other words,* $\mathbf{G}$ *has an analytic continuation to an open neighborhood of the set* $\Big\{s \in \mathbb{C}/|s| \leqslant R\Big\} \setminus \{R\}$*) and that in a neighborhood of* $s = R$

$$\mathbf{G}(s) = \mathbf{A}(s)(R-s)^\alpha + \mathbf{B}(s) \tag{2.7.1}$$

where $\mathbf{A}$ *and* $\mathbf{B}$ *are analytic functions* [5]. *Then*

$$g_n \sim \frac{\mathbf{A}(R)R^{1-n}}{\Gamma(-\alpha)n^{1+\alpha}} \quad \textit{as} \quad n \to +\infty. \tag{2.7.2}$$

This approach has been yet developed by S. Lalley in the general context of *random walk with a finite reflecting zone* [27] : the transitions $q(x, \cdot)$ of Markov chains of this class are the ones of a classical random walk on $\mathbb{N}_0$ whenever $x \geqslant K$ for some $K \geqslant 0$. In our context of the reflected random walk on $\mathbb{N}_0$, it means that the support of μ is bounded from below (namely by $-K$) ; we will not assume this in the sequel and will thus not follow the same strategy than S. Lalley. The methods required for the analysis of random walks with non localized reflections are more delicate,

5. in equation 2.7.1, this is the positive branch s^α which is meant, which implies that the branch cut is along the negative axis ; so the branch cut for the function $\mathbf{G}(s)$ is along the halfline $[R, +\infty]$

this is the aim of the present work. We also refer to [28] for a generalization of the main theorem in [27] in another direction

The reflected random walk on $\mathbb{N}_0$ is characterized by the existence of reflection times. We have to consider the sequence $(\mathbf{r}_k)_{k\geqslant 0}$ of waiting times with respect to the filtration $(\mathcal{T}_n)_{n\geqslant 0}$ defined by

$$\mathbf{r}_0 = 0 \quad \text{and} \quad \mathbf{r}_{k+1} := \inf\{n > \mathbf{r}_k : X_{\mathbf{r}_k} + Y_{\mathbf{r}_k+1} + \cdots + Y_n < 0\} \quad \text{for all} \quad k \geqslant 0.$$

In the sequel we will often omit the index for $\mathbf{r}_1$ and denote this first reflection time $\mathbf{r}$. If one assumes $\mathbb{E}[|Y_n|] < +\infty$ and $\mathbb{E}[Y_n] \leqslant 0$, one gets $\mathbb{P}_x[\mathbf{r}_k < +\infty] = 1$ for all $x \in \mathbb{N}_0$ and $k \geqslant 0$; on the contrary, when $\mathbb{E}[|Y_n|] < +\infty$ and $\mathbb{E}[Y_n] > 0$, one gets $\mathbb{P}_x[\mathbf{r}_k < +\infty] < 1$ and in order to have $\mathbb{P}_x[\mathbf{r}_k < +\infty] > 0$ it is necessary to assume that $\mu(\mathbb{Z}^{*-}) > 0$.

The following identity will be essential in this work :

Proposition 2.7.1. *For all $x, y \in \mathbb{N}_0$ and $s \in \mathbb{C}$, one gets*

$$\mathbf{G}(s|x,y) = \mathbf{E}(s|x,y) + \sum_{w\in\mathbb{N}^*} \mathbf{R}(s|x,w)\mathbf{G}(s|w,y), \tag{2.7.3}$$

with

- *for all $x, y \geqslant 0$*

$$\mathbf{E}(s|x,y) := \sum_{n=0}^{+\infty} s^n \mathbb{P}_x[X_n = y, \mathbf{r} > n]$$

- *for all $x \geqslant 0$ and $w \geqslant 1$*

$$\begin{aligned}\mathbf{R}(s|x,w) &:= \mathbb{E}_x[1_{[\mathbf{r}<+\infty, X_{\mathbf{r}}=w]} s^{\mathbf{r}}] \\ &= \sum_{n\geqslant 0} s^n \mathbb{P}[x+S_1 \geqslant 0, \cdots, x+S_{n-1} \geqslant 0, x+S_n = -w].\end{aligned}$$

The generating function $\mathbf{E}$ concerns the excursion of the Markov chain $(X_n)_{n\geqslant 0}$ before its first reflection and $\mathbf{R}$ is related to the process of reflection $(X_{\mathbf{r}_k})_{k\geqslant 0}$.

By (2.7.3), one easily sees that, to make precise the asymptotic behavior of the $\mathbb{P}_x[X_n = y]$, it is necessary to control the excursions of the walk between two successive reflection times. Note that this interrelationship among the Green's functions $\mathbf{G}, \mathbf{E}$ and $\mathbf{H}$ may be written as a single matrix equation involving matrix-valued generating functions. For $s \in \mathbb{C}$, let us denote $\mathcal{G}_s, \mathcal{E}_s$ and $\mathcal{R}_s$ the following infinite matrices

- $\mathcal{G}_s = (\mathcal{G}_s(x,y))_{x,y\in\mathbb{N}_0}$ with $\mathcal{G}_s(x,y) = \mathbf{G}(s|x,y)$ for all $x, y \in \mathbb{N}_0$,
- $\mathcal{E}_s = (\mathcal{E}_s(x,y))_{x,y\in\mathbb{N}_0}$ with $\mathcal{E}_s(x,y) = \mathbf{E}(s|x,y)$ for all $x, y \in \mathbb{N}_0$,
- $\mathcal{R}_s = (\mathcal{R}_s(x,y))_{x\in\mathbb{N}_0, y\in\mathbb{N}^*}$ with $\mathcal{R}_s(x,y) = \mathbf{R}(s|x,y)$.

Thus for all $x, y \in \mathbb{N}_0$ and $s \in \mathcal{C}$, one gets

$$\mathcal{G}_s = \mathcal{E}_s + \mathcal{R}_s\mathcal{G}_s. \tag{2.7.4}$$

The Green functions $\mathbf{G}(\cdot|x,y)$ may thus be computed when $I - \mathcal{R}_s$ is invertible, in which case one may write $\mathcal{G}_s = (I - \mathcal{R}_s)^{-1}\mathcal{E}_s$.

Let us now introduce some general assumptions :

Hypotheses H :

H1 : *the measure μ is* **adapted** *on $\mathbb{Z}$ (i-e the group generated by its support S_μ is equal to $\mathbb{Z}$) and* **aperiodic** *(i-e the group generated by $S_\mu - S_\mu$ is equal to $\mathbb{Z}$)*

H2 *: the measure μ has exponential moments of any order (i.e. $\sum_{n\in\mathbb{Z}} r^n\mu(n) < +\infty$ for any $r \in]0,+\infty[$) and $\sum_{n\in\mathbb{Z}} n\mu(n) \geqslant 0$.* [6]

We now state the main result of this paper, which extends [27] in our situation :

Théorème 2.7.2. *Let $(Y_n)_{n\geqslant 1}$ be a sequence of $\mathbb{Z}$-valued independent and identically distributed random variables with law μ defined on a probability space $(\Omega,\mathcal{F},\mathbb{P})$. Assume that μ satifies Hypotheses* **H** *and let $(X_n)_{n\geqslant 0}$ be the reflected random walk defined inductively by*

$$X_{n+1} = |X_n + Y_{n+1}| \quad \text{for} \quad n \geqslant 0.$$

- *If $\mathbb{E}[Y_n] = \sum_{k\in\mathbb{Z}} k\mu(k) = 0$, then for any $y \in \mathbb{N}_0$, there exists a constant $C_y \in \mathbb{R}^{*+}$ such that, for any $x \in \mathbb{N}_0$*

$$\mathbb{P}_x[X_n = y] \sim \frac{C_y}{\sqrt{n}} \quad as \quad n \to +\infty.$$

- *If $\mathbb{E}[Y_n] = \sum_{k\in\mathbb{Z}} k\mu(k) > 0$ then, for any $x, y \in \mathbb{N}_0$, there exists a constant $C_{x,y} \in \mathbb{R}^{*+}$ such that*

$$\mathbb{P}_x[X_n = y] \sim C_{x,y}\frac{\rho^n}{n^{3/2}}$$

for some $\rho = \rho(\mu) \in]0,1[$.

The constant $\rho(\mu)$ which appears in this statement is the infimum over $\mathbb{R}$ of the generating function of μ. We also know the exact value of the constants C_y and $C_{x,y}, x, y \in \mathbb{N}_0$, which appear in the previous statement : see formulas (2.7.36) and (2.7.40).

Aknowledgements. We thank the referee for many useful remarks which have really improved the manuscript.

2.7.2 Decomposition of the trajectories and factorizations

In this section, we will consider the subprocess of reflections $(X_{\mathbf{r}_k})_{k\geqslant 0}$ in order to decompose the trajectories of the reflected random walk in several parts which can be analyzed.

We first introduce some notations which appear classically in the fluctuation theory of 1-dimensional random walks.

2.7.2.1 On the fluctuations of a classical random walk on $\mathbb{Z}$

Let τ^{*-} the first strict descending time of the random walk $(S_n)_{n\geqslant 0}$:

$$\tau^{*-} := \inf\{n \geqslant 1 / S_n < 0\}$$

(with the convention $\inf\emptyset = +\infty$). The variable τ^{*-} is a stopping time with respect to the filtration $(\mathcal{T}_n)_{n\geqslant 0}$.

6. we can in fact consider weaker assumptions : there exist $0 < r_- < 1 < r^+$ such that $\hat{\mu}(r) := \sum_{n\in\mathbb{Z}} r^n\mu(n) < +\infty$ for any $r \in]r_-, r_+[$ and μ_r reaches its minimum on this interval at a (unique) $r_0 \in]r_-, 1]$. We thus need much more notations at the beginning, this complicates in fact the understanding of the proof and is not really of interest.

We denote by $(T_n^{*-})_{n\geqslant 0}$ the sequence of successive strict ladder descending epochs of the random walk $(S_n)_{n\geqslant 0}$ defined by $T_0^{*-}=0$ and $T_{n+1}^{*-}=\inf\{k>T_n^{*-}/S_k<S_{T_n^{*-}}\}$ for $n\geqslant 0$. One gets in particular $T_1^{*-}=\tau^{*-}$; furthermore, setting $\tau_n^{*-}:=T_n^{*-}-T_{n-1}^{*-}$ for any $n\geqslant 1$, one may write $T_n^{*-}=\tau_1^{*-}+\cdots+\tau_n^{*-}$ where $(\tau_n^{*-})_{n\geqslant 1}$ is a sequence of independent and identically random variables with the same law as τ^{*-}. The sequence $(S_{T_n^{*-}})_{n\geqslant 0}$ of successive strict ladder descending positions of $(S_n)_{n\geqslant 0}$ is also a random walk on $\mathbb{Z}$ with independent and identically distributed increments of law $\mu^{*-}:=\mathcal{L}(S_{\tau^{*-}})$. The potential associated to μ^{*-} is denoted by U^{*-} ; one gets

$$U^{*-}(\cdot):=\sum_{n=0}^{+\infty}\Big(\mu^{*-}\Big)^{\star n}(\cdot)=\sum_{n=0}^{+\infty}\mathbb{E}\Big[\delta_{S_{T_n^{*-}}}(\cdot)\Big].$$

Similarly, we can introduce the first ascending time $\tau^+:=\inf\{n\geqslant 1/S_n\geqslant 0\}$ of the random walk $(S_n)_{n\geqslant 0}$ and the the sequence $(T_n^+)_{n\geqslant 0}$ of successive large ladder ascending epochs of $(S_n)_{n\geqslant 0}$ defined by $T_0^+=0$ and $T_{n+1}^+=\inf\{k>T_n^+/S_k\geqslant S_{T_n^+}\}$ for $n\geqslant 0$; as above, one may write $T_n^+=\tau_1^++\cdots+\tau_n^+$ where $(\tau_n^+)_{n\geqslant 1}$ is a sequence of i.i.d. random variables. The sequence $(S_{T_n^+})_{n\geqslant 0}$ of successive large ladder ascending positions of $(S_n)_{n\geqslant 0}$ is also a random walk on $\mathbb{Z}$ with independent and identically distributed increments of law $\mu^+:=\mathcal{L}(S_{\tau^+})$. The potential associated to μ^+ is denoted by U^+ ; one gets

$$U^{+}(\cdot):=\sum_{n=0}^{+\infty}\Big(\mu^{+}\Big)^{\star n}(\cdot)=\sum_{n=0}^{+\infty}\mathbb{E}\Big[\delta_{S_{T_n^{+}}}(\cdot)\Big].$$

We need to control the law of the couple $(\tau^{*-},S_{\tau^{*-}})$ and thus introduce the characteristic function φ^{*-} defined formally by $\varphi^{*-}:(s,z)\mapsto\sum_{n\geqslant 1}s^n\mathbb{E}\left[1_{[\tau^{*-}=n]}z^{S_n}\right]$ for $s,z\in\mathbb{C}$. We also introduce the characteristic function associated to the potential of $(\tau^{*-},S_{\tau^{*-}})$ defined by $\Phi^{*-}(s,z)=\sum_{k\geqslant 0}\mathbb{E}\left[s^{T_k^{*-}}z^{S_{T_k^{*-}}}\right]=\sum_{k\geqslant 0}\varphi^{*-}(s,z)^k=\frac{1}{1-\varphi^{*-}(s,z)}$. Similarly, we consider the function $\varphi^+(s,z):=\mathbb{E}[s^{\tau^+}z^{S_{\tau^+}}]$ and the corresponding potential $\Phi^+(s,z):=\sum_{k\geqslant 0}\mathbb{E}\Big[s^{T_k^+}z^{S_{T_k^+}}\Big]=\sum_{k\geqslant 0}\varphi^+(s,z)^k=\frac{1}{1-\varphi^+(s,z)}$. By a straightforward argument, called the *duality lemma* in Feller's book [17], one also gets

$$\Phi^{*-}(s,z)=\sum_{n\geqslant 0}s^n\mathbb{E}\left[\tau^+>n,z^{S_n}\right]\quad\text{and}\quad\Phi^{+}(s,z)=\sum_{n\geqslant 0}s^n\mathbb{E}\left[\tau^{*-}>n,z^{S_n}\right].\tag{2.7.5}$$

We now introduce the corresponding generating functions $\mathbf{T}^{*-},\mathbf{U}^{*-}$ and $\mathbf{U}^+$ defined by, for $s\in\mathbb{C}$ and $x\in\mathbb{Z}$

$$\begin{aligned}
\mathbf{T}^{*-}(s|x)&=\mathbb{E}\Big[s^{\tau^{*-}}1_{\{x\}}(S_{\tau^{*-}})\Big]=\sum_{n\geqslant 1}s^n\mathbb{P}\Big[\tau^{*-}=n,S_n=x\Big],\\
\mathbf{T}^{+}(s|x)&=\mathbb{E}\Big[s^{\tau^{+}}1_{\{x\}}(S_{\tau^{+}})\Big]=\sum_{n\geqslant 1}s^n\mathbb{P}\Big[\tau^{+}=n,S_n=x\Big],\\
\mathbf{U}^{*-}(s|x)&=\sum_{k\geqslant 0}\mathbb{E}\Big[s^{T_k^{*-}}1_{\{x\}}(S_{T_k^{*-}})\Big]=\sum_{n\geqslant 0}s^n\mathbb{P}\Big[\tau^{+}>n,S_n=x\Big],\\
\mathbf{U}^{+}(s|x)&=\sum_{k\geqslant 0}\mathbb{E}\Big[s^{T_k^{+}}1_{\{x\}}(S_{T_k^{+}})\Big]=\sum_{n\geqslant 0}s^n\mathbb{P}\Big[\tau^{*-}>n,S_n=x\Big].
\end{aligned}$$

Note that $\mathbf{U}^{*-}(s|x)=0$ when $x\geqslant 1$ and $\mathbf{U}^+(s|x)=0$ when $x\leqslant -1$.

We will first study the regularity of the Fourier transforms φ^{*-} and φ^+ to describe the one of the functions $\mathbf{T}^{*-}(\cdot|x)$ and $\mathbf{T}^+(\cdot|x)$; to do this we will use the Wiener-Hopf factorization theory, in a quite strong version, in order to obtain some uniformity in the estimations we will need. We could adapt the same approach for the functions $\mathbf{U}^{*-}(\cdot|x)$ and $\mathbf{U}^{+}(\cdot|x)$, but it is more difficult to control the behavior near $s=1$ of their respective Fourier transforms Φ^{*-} and Φ^{+}. We will thus prefer to note that, for any $x \in \mathbb{Z}^{*-}$, the function $\mathbf{U}^{*-}(\cdot|x)$ is equal to the finite sum $\sum_{k=0}^{|x|} \mathbb{E}\Big[s^{T_k^{*-}} 1_{\{x\}}(S_{T_k^{*-}})\Big]$, since $T_k^{*-} \geqslant k$ a.s; the same remark does not hold for $\mathbf{U}^{+}(\cdot|x)$ since $\mathbb{P}[S_{\tau^+}=0]>0$ but we will see that the series $\sum_{k=0}^{+\infty} \mathbb{E}\Big[s^{T_k^{+}} 1_{\{x\}}(S_{T_k^{+}})\Big]$ converges exponentially fast and a similar approach will be developed.

It will be of interest to consider the following square infinite matrices

- $\mathcal{T}_s^{*-} = \Big(\mathcal{T}_s^{*-}(x,y)\Big)_{x,y\in\mathbb{Z}^-}$ with $\mathcal{T}_s^{*-}(x,y) := \mathbf{T}^{*-}(s|y-x)$ for any $x,y \in \mathbb{Z}^-$,
- $\mathcal{U}_s^{*-} = \Big(\mathcal{U}_s^{*-}(x,y)\Big)_{x,y\in\mathbb{Z}^-}$ with $\mathcal{U}_s^{*-}(x,y) := \mathbf{U}^{*-}(s|y-x)$ for any $x,y \in \mathbb{Z}^-$.

The elements of $\mathbb{Z}^-$ are labelled here in the decreasing order. Note that the matrix $\mathcal{T}_s^{*-}$ is strictly upper triangular; so for any $x,y\in\mathbb{Z}^-$ one gets $\mathcal{U}_s^{*-}(x,y) = \sum_{k=0}^{|x-y|} (\mathcal{T}_s^{*-})^k(x,y)$.

- $\mathcal{T}_s^{+} = \Big(\mathcal{T}_s^{+}(x,y)\Big)_{x,y\in\mathbb{N}_0}$ with $\mathcal{T}_s^{+}(x,y) := \mathbf{T}^{+}(s|y-x)$ for any $x,y \in \mathbb{N}_0$,
- $\mathcal{U}_s^{+} = \Big(\mathcal{U}_s^{+}(x,y)\Big)_{x,y\in\mathbb{N}_0}$ with $\mathcal{U}_s^{+}(x,y) := \mathbf{U}^{+}(s|y-x)$ for any $x,y \in \mathbb{N}_0$.

We will also have $\mathcal{U}_s^{+}(x,y) = \sum_{k\geqslant 0} (\mathcal{T}_s^{+})^k(x,y)$ for any $x,y\in\mathbb{N}_0$, the number of terms in the sum will not be finite in this case but it will not be difficult to derive the regularity of the function $s \mapsto \mathcal{U}_s^{+}(x,y)$ from the one of each term $s \mapsto \mathcal{T}_s^{+}(x,y)$.

In the sequel, we will consider the matrices $\mathcal{T}_s^{*-}$ and $\mathcal{T}_s^{+}$ as operators acting on some Banach space of sequences of complex numbers; we will first consider the case of bounded sequences, that is the set $\mathbb{C}_\infty^{\mathbb{N}_0}$ of sequences $\mathbf{a} = (a_x)_{x\geqslant 0}$ of complex numbers such that $|\mathbf{a}|_\infty := \sup_{x\geqslant 0} |a_x| < +\infty$; unfortunately, it will not be possible to give sense to the above inversion formula on the Banach space of linear continuous operators acting on $\big(\mathbb{C}_\infty^{\mathbb{N}_0}, |\cdot|_\infty\big)$ and we will have to consider the action of these matrices on a larger space of $\mathbb{C}$-valued sequences introduced in § 2.7.2.4.

In the following subsections, we decompose both the excursion of $(X_n)_{n\geqslant 0}$ before the first reflection and the process of reflections $(X_{\mathbf{r_k}})_{k\geqslant 0}$.

2.7.2.2 The approach process and the matrices $\mathcal{T}_s$

The trajectories of the reflected random walk are governed by the strict descending ladder epochs of the corresponding classical random walk on $\mathbb{Z}$, and the generating function $\mathbf{T}^{*-}$ introduced in the previous section will be essential in the sequel. Since the starting point may be any $x \in \mathbb{N}_0$, we have to consider the first time at which the random walk $(X_n)_{n\geqslant 0}$ goes on the "left" of the starting point (with eventually a reflection at this time, in which case the arrival point may be $> x$), that is the strict descending ladder epoch τ^{*-} of the random walk $(S_n)_{n\geqslant 0}$. We thus introduce the matrices $\mathcal{T}_s$ defined by $\mathcal{T}_s = \Big(\mathcal{T}_s(x,y)\Big)_{x,y\in\mathbb{N}_0}$ with

$$\forall x,y \in \mathbb{N}_0 \qquad \mathcal{T}_s(x,y) := \mathbf{T}^{*-}(s|y-x). \tag{2.7.6}$$

Observe that the $\mathcal{T}_s$ are strictly lower triangular.

2.7.2.3 The excursion before the first reflection

Recall that the function $\mathbf{E}$ is defined by

$$\forall x, y \in \mathbb{N}_0, \forall s \in \mathbb{C} \qquad \mathbf{E}(s|x,y) := \sum_{n\geqslant 0} s^n \mathbb{P}_x\left[\mathbf{r} > n, X_n = y\right].$$

We have the following identity : for all $s \in \mathbb{C}$ and $x, y \in \mathbb{N}_0$

$$\mathbf{E}(s|x,y) = \mathbf{U}^+(s|y-x) + \sum_{w=0}^{x-1} \mathbf{T}^{*-}(s|w-x)\mathbf{E}(s|w,y).$$

As above, we introduce the square infinite matrices $\mathcal{E}_s = \Big(\mathcal{E}_s(x,y)\Big)_{x,y\in\mathbb{N}_0}$ with $\mathcal{E}_s(x,y) := \mathbf{E}(s|x,y)$ for any $x, y \in \mathbb{N}_0$, and rewrite this identity as follows

$$\mathcal{E}_s = \mathcal{U}_s^+ + \mathcal{T}_s\mathcal{E}_s.$$

Since $\mathcal{T}_s$ is strictly lower triangular, the matrix $I - \mathcal{T}_s$ will be invertible (in a suitable space to made precise) and one will get

$$\mathcal{E}_s = \Big(I - \mathcal{T}_s\Big)^{-1}\mathcal{U}_s^+. \tag{2.7.7}$$

In the following sections, we will give sense to this inversion formula and describe the regularity in s of the matrix-valued function $s \mapsto \mathcal{E}_s$.

2.7.2.4 The process of reflections

Under the hypothesis $\mathbb{P}[\tau^{*-} < +\infty] = 1$ [7], the distribution law of the variable $S_{\tau^{*-}}$ is denoted μ^{*-} and its potential $U^{*-} := \sum_{n\geqslant 0}(\mu^{*-})^{\star n}$; all the waiting times T_n^{*-} are thus a.s. finite and one gets $(\mu^{*-})^{\star n} = \mathcal{L}(S_{T_n^{*-}})$, furthermore, for any $x \in \mathbb{N}_0$ the successive reflection times $\mathbf{r}_k, k \geqslant 0$, are also a.s. finite. The process $(X_{\mathbf{r}_k})_{k\geqslant 0}$ appears in a crucial way in [35] to study the recurrence/transience properties of the reflected walk.

Fait 2.7.1. *[35] Under the hypothesis $\mathbb{P}[\tau^{*-} < +\infty] = 1$, the process of reflections $(X_{\mathbf{r}_k})_{k\geqslant 0}$ is a Markov chain on $\mathbb{N}_0$ with transition probability $\mathcal{R}$ given by*

$$\forall x \in \mathbb{N}_0, \forall y \in \mathbb{N}_0 \qquad \mathcal{R}(x,y) = \begin{cases} 0 & \text{if} \quad y = 0 \\ \displaystyle\sum_0^x U^{*-}(-w)\mu^{*-}(w-x-y) & \text{if} \quad y \geqslant 1. \end{cases} \tag{2.7.8}$$

Furthermore, the measure $\nu_{\mathbf{r}}$ on $\mathbb{N}^*$ defined by

$$\forall x \in \mathbb{N}^* \quad \nu_{\mathbf{r}}(x) := \sum_{y=1}^{+\infty}\left(\frac{\mu^{*-}(-x)}{2} + \mu^{*-}\Big(]-x-y,-x[\Big) + \frac{\mu^{*-}(-x-y)}{2}\right)\mu^{*-}(-y) \tag{2.7.9}$$

is stationary for $(X_{\mathbf{r}_k})_{k\geqslant 0}$ and is unique up to a multiplicative constant ; this measure is finite when $\mathbb{E}[|S_{\tau^{*-}}|] = \sum_{k\geqslant 1} k\mu^{*-}(-k) < +\infty$.

7. this condition is satisfied for instance when $\mathbb{E}[|Y_n|] < +\infty$ and $\mathbb{E}[Y_n] \leqslant 0$.

This statement is a bit different from the one in [35] since we assume here that at the reflection time the process $(X_n)_{n\geqslant 0}$ belongs to $\mathbb{N}^*$; nevertheless, the proof goes exactly along the same lines. It will be useful in the sequel in order to control the spectrum of the stochastic infinite matrix $\mathcal{R} = \Big(\mathcal{R}(x,y)\Big)_{x,y\in\mathbb{N}_0}$; before stating the following crucial property, we introduce the

Notation 2.7.1. *Let $K = (K(x))_{x\in\mathbb{N}_0}$ be a sequence of non negative real numbers which tends to $+\infty$; the set of complex valued sequences $\mathbf{a} = (a_x)_{x\in\mathbb{N}_0}$ such that $|\mathbf{a}|_K := \sup_{x\in\mathbb{N}_0} \frac{|a_x|}{K(x)} < +\infty$ is denoted $\mathbb{C}_K^{\mathbb{N}_0}$.*

The space $\mathbb{C}_K^{\mathbb{N}_0}$ endowed with the norm $|\cdot|_K$ is a $\mathbb{C}$-Banach space. In the following statement, $\mathbf{h}$ denotes the sequence whose terms are all equal to 1.

Propriété 2.7.1. *There exists a constant $\kappa \in]0,1[$ such that, for any $x \in \mathbb{N}_0$ and $y \in \mathbb{N}^*$ one gets*

$$\mathcal{R}(x,y) \geqslant \kappa\mu^{*-}(-y).$$

In particular, the operator $\mathcal{R}$ acting on $(\mathbb{C}_\infty^{\mathbb{N}_0}, |\cdot|_\infty)$ is quasi-compact : the eigenvalue 1 is simple, with associated eigenvector $\mathbf{h}$ and the rest of the spectrum is included in a disk of radius $\leqslant 1-\kappa$.

Furthermore, for any $\mathbf{K} > 1$, the operator $\mathcal{R}$ acts on the Banach space $(\mathbb{C}_K^{\mathbb{N}_0}, |\cdot|_K)$, where K is the function defined by $\forall x \geqslant 0$ $K(x) := \mathbf{K}^x$, the eigenvalue 1 is simple with associated eigenvector $\mathbf{h}$ and the rest of the spectrum of $\mathcal{R}$ acting on $(\mathbb{C}_K^{\mathbb{N}_0}, |\cdot|_K)$ is included in a disk of radius $\leqslant 1-\kappa$.

Proof. Let $N_\mu := \inf\{k \leqslant -1/\mu\{k\} > 0\}$ (with $N = -\infty$ is the support of μ is not bounded from below). Since μ is adapted, one gets $\mu^{*-}(k) > 0$ for any $k \in \{-N_\mu, \cdots, -1\}$ (and any $k \in \mathbb{Z}^{*-}$ when $N_\mu = -\infty$) ; consequently $U^{*-}(k) > 0$ for any $k \in \mathbb{Z}^{*-}$. In fact, by the 1-dimensional renewal theorem, one knows that $\lim_{k\to-\infty} U^{*-}(k) = \dfrac{1}{-\mathbb{E}[S_{\tau^{*-}}]} > 0$ since $\mathbb{E}[S_{\tau^{*-}}] > -\infty$ when μ has exponential moments ; consequently $\kappa := \inf_{x\in\mathbb{Z}^-} U^{*-}(x) > 0$. Using (2.7.8), one may thus write, for any $x \in \mathbb{N}_0$ and $y \in \mathbb{N}^*$

$$\mathcal{R}(x,y) \geqslant U^{*-}(x)\mu^{*-}(-y) \geqslant \kappa\mu^{*-}(-y).$$

The matrix $\Big(\mathcal{R}(x,y)\Big)_{x,y\in\mathbb{N}_0}$ thus satisfies the so-called "Doeblin condition" and it is quasi-compact on $(\mathbb{C}_\infty^{\mathbb{N}_0}, |\cdot|_\infty)$ (see for instance [3] for a precise statement). The same spectral property holds on $(\mathbb{C}_K^{\mathbb{N}_0}, |\cdot|_K)$ for any $\mathbf{K} > 1$; indeed, since μ^{*-} has exponential moments of any order, we have

$$\sup_{x\in\mathbb{N}_0} \sum_{y\in\mathbb{N}_0} \mathcal{R}(x,y)\mathbf{K}^y < +\infty.$$

$\square$

For technical reasons which will appear in Section 4, we will replace the function $K : x \mapsto \mathbf{K}^x$ by a function denoted also K which satisfies the following conditions

$$(i) \quad \forall x \in \mathbb{N}_0 \quad K(x) \geqslant 1 \quad (ii) \quad \lim_{x\to+\infty} \frac{K(x)}{\mathbf{K}^x} = 1 \quad (iii) \quad \mathcal{R}K(x) \leqslant 1. \tag{2.7.10}$$

It suffices to consider the function $x \mapsto \Big(1 \vee \frac{\mathbf{K}^x}{M}\Big)$ with $M := \sup_{x\in\mathbb{N}_0} \sum_{y\in\mathbb{N}^*} \mathcal{R}(x,y)\mathbf{K}^y$. **The set of functions which satisfy the conditions (2.7.10) will be denoted $\mathcal{K}(\mathbf{K})$.**

We now explicit the connection between $\mathcal{R}_s$ and $\mathcal{T}_s$; namely, there exists a similar factorization identity than (2.7.3) for the process of reflection. Using the fact that the first reflection time may appear or not at time τ^{*-}, one may write : for all $s \in \mathbb{C}$ and $x \in \mathbb{N}_0$ and $y \in \mathbb{N}^*$

$$\mathbf{R}(s|x,y) = \mathbf{T}(s|-x-y) + \sum_{w=0}^{x-1} \mathbf{T}(s|w-x)\mathbf{R}(s|w,y), \tag{2.7.11}$$

which leads to the following equality :

$$\mathcal{R}_s = \Big(I - \mathcal{T}_s\Big)^{-1}\mathcal{V}_s \tag{2.7.12}$$

where we have set $\mathcal{V}_s = \Big(\mathcal{V}_s(x,y)\Big)_{x,y\in\mathbb{N}_0}$ with

$$\mathcal{V}_s(x,y) := \begin{cases} 0 & \text{if } y = 0 \\ \mathbf{T}^{*-}(s|-x-y) & \text{if } y \in \mathbb{N}^*. \end{cases} \tag{2.7.13}$$

The crucial point in the sequel will be thus to describe the regularity of the maps $s \mapsto \mathcal{T}_s$, $s \mapsto \mathcal{V}_s$ and $s \mapsto \mathcal{U}_s^+$ near the point $s = 1$. We will first detail the centered case ; the main ingredient is the classical Wiener-Hopf factorization which permits to control both functions φ^{*-} and φ^+.

Another essential point will be to describe the one of the maps $(I - \mathcal{T}_s)^{-1}$ and $(I - \mathcal{R}_s)^{-1}$ and this question is related to the description of the spectrum of the operators $\mathcal{T}_s$ and $\mathcal{R}_s$ when s is close to 1 : this is not difficult for $\mathcal{T}_s$ since it is a strictly lower triangular matrix but more subtle for $\mathcal{R}_s$ in the centered case where $\mathcal{R} = \mathcal{R}_1$ is a Markov operator.

2.7.3 On the Wiener-Hopf factorization in the space of analytic functions

2.7.3.1 Preliminaries and notations

The Wiener-Hopf factorization proposes a decomposition of the space-time characteristic function $(s,z) \mapsto 1 - s\mathbb{E}[z^{Y_n}] = 1 - s\hat{\mu}(z)$ in terms of φ^{*-} and φ^+ ; namely, for all $s, z \in \mathbb{C}$ with modulus < 1

$$1 - s\hat{\mu}(z) = \Big(1 - \varphi^{*-}(s,z)\Big)\Big(1 - \varphi^+(s,z)\Big). \tag{2.7.14}$$

In [15], we use this factorization to obtain local limit theorems for fluctuations of the random walk $(S_n)_{n\geqslant 0}$; we first propose another such a decomposition, and, by identification of the corresponding factors, we obtain another expression for each of the functions φ^{*-} and φ^+.This new expression allows us to use elementary arguments coming from entire functions theory in order to describe the asymptotic behavior of the sequences $\Big(\mathbb{P}[S_n = x, \tau^{*-} = n]\Big)_{n\geqslant 1}$ and $\Big(\mathbb{P}[S_n = y, \tau^{*-} > n]\Big)_{n\geqslant 1}$ for any $x \in \mathbb{Z}^{*-}$ and $y \in \mathbb{Z}^+$.

In the present situation, we need first to obtain similar results than in [15] but in terms of regularity with respect to the variable s of the functions φ^{*-} and φ^+ around the unit circle, with a precise description of their singularity near the point $s = 1$; by the identity (2.7.3) we will show that these properties spread to the function $\mathbf{G}(s|x,y)$, which allows us to conclude, using the classical Darboux's method for entire functions.

We will assume that the law μ has exponential moments of any order, i.e. $\sum_{n\in\mathbb{Z}} r^n\mu(n) < +\infty$ for any $r \in \mathbb{R}^{*+}$. This implies that its generating function $\hat{\mu} : z \mapsto \sum_{n\in\mathbb{Z}} z^n\mu(n)$ is analytic on $\mathbb{C}^*$; furthermore, its restriction to $]0,+\infty[$ is strictly convex and $\lim_{r\to+\infty}\hat{\mu}(r) = \lim_{\substack{r\to 0\\ r>0}}\hat{\mu}(r) = +\infty$ when μ charges $\mathbb{Z}^{*+}$ and $\mathbb{Z}^{*-}$. In particular, under these conditions, there exists a unique $r_0 > 0$ such that $\hat{\mu}(r_0) = \inf_{r>0}\hat{\mu}(r)$; it follows $\hat{\mu}'(r_0) = 0, \hat{\mu}''(r_0) > 0$. Set $\rho_0 := \hat{\mu}(r_0)$ and $R_\circ := \frac{1}{\rho_0}$; one has $\rho_0 = 1$ when μ is centered and $\rho_0 \in]0,1[$ otherwise.

We now fix $0 < r_- < r_0 < r_+ < +\infty$ and will denote by $\mathbf{L} = \mathbf{L}[r_-, r_+]$ the space of functions $F : \mathbb{C}^* \to \mathbb{C}$ of the form $F(z) := \sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n z^n$ for some (bilateral)-sequence $(a_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ such that

$\sum_{n\leqslant 0}|a_n|r_-^n+\sum_{n\geqslant 0}|a_n|r_+^n<+\infty$; the elements of $\mathbf{L}$ are called **Laurent functions** on the annulus $\{r_-\leqslant|z|\leqslant r_+\}$ and $\mathbf{L}$, endowed with the norm $|\cdot|_\infty$ of uniform convergence on this annulus, is a Banach space containing the function $\hat\mu$.

2.7.3.2 The centered case

Let us first consider the centered case : $\mathbb{E}[Y_n]=\hat\mu'(1)=0$; we thus have $r_0=1$ and $\rho_0=R_\circ=1$. Under the aperiodicity condition on μ, one gets $|1-s\hat\mu(z)|>0$ for any $z\in\mathbb{C}^*, |z|=1$, and s such that $|s|\leqslant 1$, except $s=1$; it follows that for any $z\in\mathbb{C}^*, |z|=1$, the function $s\mapsto\dfrac{1}{1-s\hat\mu(z)}$ may be analytically extended on the set $\{s\in\mathbb{C}/|s|\leqslant 1+\delta\}\setminus[1,1+\delta[$ for some $\delta>0$.

The following argument is classical, we refer to [43] for the description we present here. One gets $\hat\mu'(1)=0$ and $\hat\mu''(1)=\sigma^2:=\mathbb{E}[Y_n^2]>0$; setting $H(s,z):=1-s\hat\mu(z)$, it thus follows

$$\frac{\partial H}{\partial z}(1,1)=0\quad\text{and}\quad\frac{\partial^2 H}{\partial z^2}(1,1)=\sigma^2>0.$$

The Weierstrass preparation theorem implies that, on a neighborhood of $(1,1)$

$$H(s,z)=1-s\hat\mu(z)=\Big((z-1)^2+b(s)(z-1)+c(s)\Big)\mathcal{H}(s,z)$$

with $\mathcal{H}$ analytic on $\mathbb{C}\times\mathbb{C}^*$ and $\mathcal{H}\neq 0$ on this neighborhood, and $b(s)$ and $c(s)$ analytic on the open ball $B(1,\delta)$ for δ small enough. We compute $\mathcal{H}(1,1)=-\frac{\sigma^2}{2}, b(1)=c(1)=0$ and $c'(1)=\frac{-1}{\mathcal{H}(1,1)}=\frac{2}{\sigma^2}$. The roots $z_-(s)$ and $z_+(s)$ (with $z_-(s)<1<z_+(s)$ when $s\in]0,1[$ and $z_-(1)=z_+(1)=1$) of the equation $H(s,z)=0$ are thus the ones of the quadratic equation $(z-1)^2+b(s)(z-1)+c(s)=0$; solving, we find

$$z_\pm(s)=\mathcal{B}(s)\pm\mathcal{C}(s)\sqrt{1-s}$$

where $\mathcal{B}(s)$ and $\mathcal{C}(s)$ are analytic in $B(1,\delta)$ with $\mathcal{B}(1)=1$ and $\mathcal{C}(1)=\sqrt{c'(1)}=\frac{\sqrt2}{\sigma}$.

Consequently, for δ small enough, the functions $z_\pm$ admit the following analytic expansion on $\mathcal{O}_\delta(1):=B(1,\delta)\setminus[1,1+\delta[$:

$$z_\pm(s)=1+\sum_{n\geqslant 1}(\pm 1)^n\alpha_n(1-s)^{n/2}\qquad\text{with}\quad\alpha_1=\frac{\sqrt2}{\sigma}.$$

This type of singularity of the functions $z_\pm$ near $s=1$ is essential in the sequel because it contains the one of the functions $\varphi^{*-}(s,z)$ and $\varphi^+(s,z)$ near $(1,1)$. The Wiener-Hopf factorization has several versions in the literature; we emphasize here that we need some kind of uniformity with respect to the parameter z in the local expansion of the function φ^{*-} near $s=1$, this is why we consider the map $s\mapsto\varphi^{*-}(s,\cdot)$ with values in $\mathbf{L}$. It is proved in particular in [3] (see also [33] for a more precise statement, in the context of Markov walks) that there exists $\delta>0$ such that the function $s\mapsto\left(z\mapsto\phi^{*-}(s,z):=\dfrac{1-\varphi^{*-}(s,z)}{z-z_-(s)}\right)$ is analytic on the open ball $B(1,\delta)\subset\mathbb{C}$, with values in $\mathbf{L}$. Setting $\phi^{*-}(s,\cdot):=\sum_{k\geqslant 0}(1-s)^k\phi^{*-}_{(k)}(\cdot)$ for $|1-s|<\delta$ and $\phi^{*-}_{(k)}\in\mathbf{L}$ and using the local expansion $z_-(s)=1-\frac{\sqrt2}{\sigma}\sqrt{1-s}+\cdots$, one thus gets for δ small enough and $s\in\mathcal{O}_\delta(1)$

$$\varphi^{*-}(s,\cdot)=\varphi^{*-}(1,\cdot)+\sum_{k\geqslant 1}(1-s)^{k/2}\varphi^{*-}_{(k)}(\cdot)$$

with $\sum_{k\geqslant 0} |\varphi^{*-}_{(k)}|_\infty \delta^k < +\infty$ and $\varphi^{*-}_{(1)} : z \mapsto \frac{\sqrt{2}}{\sigma} \times \frac{1-\mathbb{E}[z^{S_{\tau^{*-}}}]}{1-z}$.

We summarize the information we will need in the following

Proposition 2.7.2. *For any $r_- < 1 < r_+$, the function $s \mapsto \varphi^{*-}(s,\cdot)$ has an analytic continuation to an open neighborhood of $\overline{B(0,1)} \setminus \{1\}$ with values in $\mathbf{L}$; furthermore, for $\delta > 0$, this function is analytic in the variable $\sqrt{1-s}$ on the set $\mathcal{O}_\delta(1)$ and its local expansion of order 1 in $\mathbf{L}$ is*

$$\varphi^{*-}(s,\cdot) = \varphi^{*-}(1,\cdot) + \sqrt{1-s}\ \varphi^{*-}_{(1)}(\cdot) + \mathbf{O}(s,\cdot) \tag{2.7.15}$$

with $\quad \varphi^{*-}_{(1)} : z \mapsto \frac{\sqrt{2}}{\sigma} \times \frac{1-\mathbb{E}[z^{S_{\tau^{*-}}}]}{1-z}$ *and $\mathbf{O}(s,\cdot)$ uniformly bounded in $\mathbf{L}$.*

A similar statement holds for the function φ^+ ; in particular, the local expansion near $s = 1$ follows from the one of the root $z_+(s)$, namely $z_+(s) = 1 + \frac{\sqrt{2}}{\sigma}\sqrt{1-s} + \cdots$. We may thus state the

Proposition 2.7.3. *The function $s \mapsto \varphi^+(s,\cdot)$ has an analytic continuation to an open neighborhood of $\overline{B(0,1)} \setminus \{1\}$ with values in $\mathbf{L}$; furthermore, for $\delta > 0$ small enough, this function is analytic in the variable $\sqrt{1-s}$ on the set $\mathcal{O}_\delta(1)$ and one gets*

$$\varphi^{+}(s,\cdot) = \varphi^{+}(1,\cdot) + \sqrt{1-s}\ \varphi^{+}_{(1)}(\cdot) + \mathbf{O}(s,\cdot) \tag{2.7.16}$$

with $\quad \varphi^{+}_{(1)} : z \mapsto -\frac{\sqrt{2}}{\sigma} \times \frac{1-\mathbb{E}[z^{S_{\tau^{+}}}]}{1-z}$ *and $\mathbf{O}(s,\cdot)$ uniformly bounded in $\mathbf{L}$.*

2.7.3.3 The maps $s \mapsto \mathbf{T}^{*-}(s|x)$ and $s \mapsto \mathbf{T}^{+}(s|x)$ for $x \in \mathbb{Z}$

We use here the inverse Fourier's formula : for any $x \in \mathbb{Z}^{*-}$ and $s \in \mathbb{C}, |s| < 1$, one gets

$$\mathbf{T}^{*-}(s|x) = \frac{1}{2i\pi}\int_{\mathbb{T}} z^{-x-1}\varphi^{*-}(s,z)dz.$$

Similarly $\mathbf{T}^{+}(s|x) = \frac{1}{2i\pi}\int_{\mathbb{T}} z^{-x-1}\varphi^{+}(s,z)dz$ for any $x \in \mathbb{N}_0$. We will apply Propositions 2.7.3 and 2.7.3 and first identify the coefficients which appear in the local expansion as Fourier transforms of some known measures ; let us denote

- δ_x the Dirac mass at $x \in \mathbb{Z}$,
- $\lambda^{*-} = \sum_{x\leqslant -1} \delta_x$ the counting measures on $\mathbb{Z}^{*-}$,
- $\lambda^{+} = \sum_{n\geqslant 0} \delta_x$ the counting measures on $\mathbb{N}_0$.

One easily checks that $z \mapsto \frac{1-\mathbb{E}[z^{S_{\tau^{*-}}}]}{z-1}$ and $z \mapsto \frac{1-\mathbb{E}[z^{S_{\tau^{+}}}]}{1-z}$ are the generating functions associated respectively with the measures $(\delta_0 - \mu^{*-}) \star \lambda^{*-}$ and $(\delta_0 - \mu^{+}) \star \lambda^{+}$.

Proposition 2.7.4. *There exists an open neighborhood Ω of $\overline{B(0,1)} \setminus \{1\}$ such that, for any $x \in \mathbb{Z}$, the functions $s \mapsto \mathbf{T}^{*-}(s|x) := \mathbb{E}[s^{\tau^{*-}} 1_{\{x\}}(S_{\tau^{*-}})]$ and $s \mapsto \mathbf{T}^{+}(s|x) := \mathbb{E}[s^{\tau^{+}} 1_{\{x\}}(S_{\tau^{+}})]$ have an analytic continuation to Ω ; furthermore, for $\delta > 0$ small enough, these functions are analytic in the variable $\sqrt{1-s}$ on the set $\mathcal{O}_\delta(1)$ and their local expansions of order 1 are*

$$\mathbf{T}^{*-}(s|x) = \mu^{*-}(x) - \sqrt{1-s}\frac{\sqrt{2}}{\sigma}\mu^{*-}\Big(]-\infty,x]\Big) + (1-s)\ \mathbf{O}(s|x) \tag{2.7.17}$$

and

$$\mathbf{T}^{+}(s|x) = \mu^{+}(x) - \sqrt{1-s}\frac{\sqrt{2}}{\sigma}\mu^{+}\Big(]x,+\infty[\Big) + (1-s)\ \mathbf{O}(s|x) \tag{2.7.18}$$

with $\mathbf{O}(s|x)$ *analytic in the variable* $\sqrt{1-s}$ *and uniformly bounded in* $s \in \mathcal{O}_\delta(1)$ *and* $x \in \mathbb{Z}$.

Furthermore, for any $K > 1$, *there exists a constant* $\mathbf{O} > 0$ *such that*

$$K^{|x|}\Big|\mathbf{T}^{*-}(s|x)\Big| \leqslant \mathbf{O}, \quad K^{|x|}\Big|\mathbf{T}^{+}(s|x)\Big| \leqslant \mathbf{O} \quad \text{and} \quad K^{|x|}\Big|\mathbf{O}(s|x)\Big| \leqslant \mathbf{O}. \tag{2.7.19}$$

for any $s \in \Omega \cup \mathcal{O}_\delta(1)$ *and* $x \in \mathbb{Z}$.

Proof. The analyticity property and the local expansions (2.7.17) and (2.7.18) are direct consequences of Propositions 2.7.3 and 2.7.3. To establish for instance the first inequality in (2.7.19), we use the fact that for $s \in \Omega \cup \mathcal{O}_\delta(1)$, the function $z \mapsto \varphi^{*-}(s,z)$ is analytic on any annulus $\{z \in \mathbb{C}/r_- < |z| < r_+\}$; for any $K > 1$ and $x \in \mathbb{Z}^{*-}$, one thus gets

$$\mathbf{T}^{*-}(s|x) = \frac{1}{2i\pi}\int_{\mathbb{T}} z^{-x-1}\varphi^{*-}(s,z)dz = \frac{1}{2i\pi}\int_{\{z/|z|=1/K\}} z^{-x-1}\varphi^{*-}(s,z)dz.$$

So $\Big|\mathbf{T}^{*-}(s|x)\Big| \leqslant \frac{K^{-|x|}}{2\pi} \times \sup_{\substack{s\in\Omega\cup\mathcal{O}_\delta(1)\\ |z|=1/K}} |\varphi*-(s,z)|$. The same argument holds for the quantities $\mathbf{T}^{+}(s|x)$ and $\mathbf{O}(s|x)$.

□

2.7.3.4 The coefficient maps $s \mapsto \mathcal{T}_s^{*-}(x,y)$ and $s \mapsto \mathcal{T}_s^{+}(x,y)$ for $x, y \in \mathbb{Z}$

We first present some consequences of the previous statement for the matrix coefficients $\mathcal{T}_s^{*-}(x,y)$ and $\mathcal{T}_s^{+}(x,y)$.

Proposition 2.7.5. *There exists an open neighborhood* Ω *of* $\overline{B(0,1)}\setminus\{1\}$ *such that for any* $x, y \in \mathbb{Z}$, *the functions* $s \mapsto \mathcal{T}_s^{*-}(x,y)$ *and* $s \mapsto \mathcal{T}_s^{+}(x,y)$ *have an analytic continuation to* Ω *; furthermore, for* $\delta > 0$ *small enough, these functions are analytic in the variable* $\sqrt{1-s}$ *on the set* $\mathcal{O}_\delta(1)$ *and their local expansions of order 1 are*

$$\mathcal{T}_s^{*-}(x,y) = \mathcal{T}^{*-}(x,y) + \sqrt{1-s}\ \widetilde{\mathcal{T}}^{*-}(x,y) + (1-s)\ \mathbf{O}_s(x,y) \tag{2.7.20}$$

and

$$\mathcal{T}_s^{+}(x,y) = \mathcal{T}^{+}(x,y) + \sqrt{1-s}\ \widetilde{\mathcal{T}}^{+}(x,y) + (1-s)\ \mathbf{O}_s(x,y) \tag{2.7.21}$$

where

- $\mathcal{T}^{*-}(x,y) = \mu^{*-}(y-x)$,
- $\widetilde{\mathcal{T}}^{*-}(x,y) = -\frac{\sqrt{2}}{\sigma}\mu^{*-}\Big(]-\infty, y-x]\Big)$,
- $\mathcal{T}^{+}(x,y) = \mu^{+}(y-x)$,
- $\widetilde{\mathcal{T}}^{+}(x,y) = -\frac{\sqrt{2}}{\sigma}\mu^{+}\Big(]y-x,+\infty[\Big)$,
- $\mathbf{O}_s(x,y)$ *is analytic in the variable* $\sqrt{1-s}$ *for* $s \in \mathcal{O}_\delta(1)$.

Proof. We give the details for the maps $s \mapsto \mathcal{T}_s^{*-}(x,y)$. Let Ω be the open neighborhood of $\overline{B(0,1)}\setminus\{1\}$ given by Proposition 2.7.4 and fix $\delta > 0$ such that (2.7.17), (2.7.18) and (2.7.19) hold.

In particular, for any $x, y \in \mathbb{Z}^-$, the function $s \mapsto \mathcal{T}_s^{*-}(x,y) = \mathbf{T}^{*-}(s|y-x)$ is analytic on Ω and has the local expansion, for $s \in \mathcal{O}_\delta(1)$

$$\mathcal{T}_s^{*-}(x,y) = \mathcal{T}^{*-}(x,y) + \sqrt{1-s}\ \widetilde{\mathcal{T}}^{*-}(x,y) + (1-s)\ \mathbf{O}_s(x,y)$$

whose coefficients are given in the statement of the proposition and $s \mapsto \mathbf{O}(x,y)$ is analytic in the variable $\sqrt{1-s}$; furthermore, the quantities $K^{|y-x|}\Big|\mathcal{T}_s^{+}(x,y)\Big|$ and $K^{|y-x|}\Big|\mathbf{O}_s(x,y)\Big|$ are bounded, uniformly in $x, y \in \mathbb{Z}^-$ and $s \in \Omega \cup \mathcal{O}_\delta(1)$.

□

2.7.3.5 The coefficient maps $s \mapsto \mathcal{U}_s^{*-}(x,y)$ and $s \mapsto \mathcal{U}_s^{+}(x,y)$ for $x, y \in \mathbb{Z}$

We consider here the maps $s \mapsto \mathcal{U}_s^{*-}(x,y)$ and $s \mapsto \mathcal{U}_s^{+}(x,y)$. The matrix $\mathcal{U}_s^{*-} = (\mathcal{U}_s^{*-}(x,y))_{x,y\in\mathbb{Z}}$ is the potential of $\mathcal{T}_s^{*-} = (\mathcal{T}_s^{*-}(x,y))_{x,y\in\mathbb{Z}}$; since $\mathcal{T}_s^{*-}$ is strictly upper triangular, each $\mathcal{U}_s^{*-}(x,y)$ will be the combination by summations and products of finitely many coefficients $\mathcal{T}_s^{*-}(i,j), i,j \in \mathbb{Z}$, and their regularity will thus be a direct consequence of the previous statement.

Proposition 2.7.6. *There exists an open neighborhood Ω of $\overline{B(0,1)} \setminus \{1\}$ such that, for any x, y in $\mathbb{Z}^-$, the functions $s \mapsto \mathcal{U}_s^{*-}(x,y)$ have an analytic continuation to Ω ; furthermore, for $\delta > 0$ small enough, these functions are analytic in the variable $\sqrt{1-s}$ on the set $\mathcal{O}_\delta(1)$ and their local expansions of order 1 are*

$$\mathcal{U}_s^{*-}(x,y) = \mathcal{U}^{*-}(x,y) + \sqrt{1-s}\ \widetilde{\mathcal{U}}^{*-}(x,y) + (1-s)\ \mathbf{O}_s(x,y) \tag{2.7.22}$$

where

- $\mathcal{U}^{*-}(x,y) = U^{*-}(y-x)$,
- $\widetilde{\mathcal{U}}^{*-}(x,y) = -\frac{\sqrt{2}}{\sigma} U^{*-}\Big(]y-x, 0]\Big)$,
- $\mathbf{O}_s(x,y)$ *is analytic in the variable $\sqrt{1-s}$ and bounded for $s \in \mathcal{O}_\delta(1)$.*

Similarly, for any $x, y \in \mathbb{N}_0$, the functions $s \mapsto \mathcal{U}_s^{+}(x,y)$ have an analytic continuation to Ω and these functions are analytic in the variable $\sqrt{1-s}$ on the set $\mathcal{O}_\delta(1)$ with the following local expansions of order 1

$$\mathcal{U}_s^{+}(x,y) = \mathcal{U}^{+}(x,y) + \sqrt{1-s}\ \widetilde{\mathcal{U}}^{+}(x,y) + (1-s)\ \mathbf{O}_s(x,y) \tag{2.7.23}$$

where

- $\mathcal{U}^{+}(x,y) = U^{+}(y-x)$,
- $\widetilde{\mathcal{U}}^{+}(x,y) = -\frac{\sqrt{2}}{\sigma} U^{+}\Big([0, y-x]\Big)$,
- $\mathbf{O}_s(x,y)$ *is analytic in the variable $\sqrt{1-s}$ and bounded for $s \in \mathcal{O}_\delta(1)$.*

Proof. The matrix $\mathcal{T}_s^{*-}$ being strictly upper triangular, for any $x, y \in \mathbb{Z}^-$, one gets $\left(\mathcal{T}_s^{*-}\right)^n(x,y) = 0$ when $n > |x-y|$, so

$$\mathcal{U}_s^{*-}(x,y) = \sum_{n=0}^{|x-y|} \left(\mathcal{T}_s^{*-}\right)^n(x,y). \tag{2.7.24}$$

The analyticity of the coefficients $\mathcal{U}_s^{*-}(x,y)$ with respect to $s \in \Omega$ and $\sqrt{1-s}$ when $s \in \mathcal{O}_\delta(1)$ follows from the previous Proposition.

Let us now establish the local expansion (2.7.22) ; for any fixed $x, y \in \mathbb{Z}^-$, one gets

$$\mathcal{U}_s^{*-}(x,y) = \sum_{n=0}^{|x-y|} \Big(\mathcal{T}^{*-} + \sqrt{1-s}\ \widetilde{\mathcal{T}}^{*-} + (1-s)\ \mathbf{O}_s\Big)^n (x,y).$$

The constant term $\mathcal{U}^{*-}(x,y)$ is thus equal to $\sum_{n=0}^{|x-y|} \Big(\mathcal{T}^{*-}\Big)^n (x,y) = \sum_{n=0}^{+\infty} \Big(\mathcal{T}^{*-}\Big)^n (x,y)$; on the other hand, the coefficient corresponding to $\sqrt{1-s}$ in this expansion is equal to

$$\widetilde{\mathcal{U}}^{*-}(x,y) = \sum_{n=0}^{|x-y|} \sum_{k=0}^{n-1} \Big(\mathcal{T}^{*-}\Big)^k \widetilde{\mathcal{T}}^{*-} \Big(\mathcal{T}^{*-}\Big)^{n-k-1} (x,y).$$

Inverting the order of summations and using the expression of $\widetilde{\mathcal{T}}^{*-}$ in Proposition 2.7.5, one gets

$$\begin{aligned}
\widetilde{\mathcal{U}}^{*-}(x,y) &= \mathcal{U}^{*-}\widetilde{\mathcal{T}}^{*-}\mathcal{U}^{*-}(x,y) \\
&= -\frac{\sqrt{2}}{\sigma}\left(U^{*-} \star \Big(\sum_{k\leqslant -1} \mu^{*-}\left(]-\infty,k]\right)\ \delta_k\Big) \star U^{*-}\right)(y-x) \\
&= -\frac{\sqrt{2}}{\sigma} U^{*-}\left(]y-x,0]\right).
\end{aligned}$$

To obtain the last equality, observe that the measures $U^{*-} \star \Big(\sum_{k\leqslant -1} \mu^{*-}(]-\infty,k])\ \delta_k\Big) \star U^{*-}$ and $U^{*-} \star \lambda^{*-} = \sum_{k\leqslant -1}\ U^{*-}\left(]k,0]\right)\ \delta_k$ have the same generating function.

The proof goes along the same lines for $\mathcal{U}_s^{+}(x,y) = \sum_{n=0}^{+\infty} \Big(\mathcal{T}_s^{+}\Big)^n (x,y)$ but there are infinitely many terms in the sum since $\mu^+(0) > 0$; for $s \in \Omega \cup \mathcal{O}_\delta(1)$, one thus first sets $\mathcal{T}_s^+ = \varepsilon_s I + T_s$ with $\varepsilon_s := \mathbb{E}\left[s^{\tau^+} 1_{\{0\}}(S_{\tau^+})\right]$. One gets $\delta_1 = \mu^+(0) \in]0,1[$, so $|\varepsilon_s| < 1$ for Ω and δ small enough. Since I and T_s commute and T_s is strictly upper triangular, one may write, for any $x, y \in \mathbb{N}_0$ and $n \geqslant |x-y|$,

$$\Big(\mathcal{T}_s^{+}\Big)^n (x,y) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \varepsilon_s^{n-k} T_s^k(x,y) = \sum_{k=0}^{|x-y|} \binom{n}{k} \varepsilon_s^{n-k} T_s^k(x,y)$$

so that

$$\begin{aligned}
\mathcal{U}_s^{+}(x,y) &= \sum_{n\geqslant 0} \Big(\mathcal{T}_s^{+}\Big)^n (x,y) \\
&= \sum_{n=0}^{|x-y|} \Big(\mathcal{T}_s^{+}\Big)^n (x,y) + \sum_{n>|x-y|} \sum_{k=0}^{|x-y|} \binom{n}{k} \varepsilon_s^{n-k} T_s^k(x,y) \\
&= \sum_{n=0}^{|x-y|} \Big(\mathcal{T}_s^{+}\Big)^n (x,y) + \sum_{k=0}^{|x-y|} \frac{1}{k!} \left(\sum_{n>|x-y|} n\cdots(n-k+1)\varepsilon_s^{n-k}\right) T_s^k(x,y)
\end{aligned}$$

with $s \mapsto \left(\sum_{n>|x-y|} n\cdots(n-k+1)\varepsilon_s^{n-k}\right)$ analytic on Ω and analytic in $\sqrt{1-s}$ on $\mathcal{O}_\delta(1)$. The analyticity of $s \mapsto \mathcal{U}_s^{+}(x,y)$ follows and the computation of the coefficients in (2.7.23) goes along the same line than in (2.7.22).

□

2.7.4 The centered reflected random walk

Throughout this section, we will assume that hypotheses **H** hold and that μ is centered. In this case, the radius of convergence of the generating functions $\mathbf{G}(\cdot|x,y), x, y \in \mathbb{N}_0$, is equal to 1 and we study the type of their singularity near $s=1$.

We denote by $\mathcal{M}_\infty$ the space of infinite matrices $M = (M(x,y))_{x,y\in\mathbb{N}_0}$ such that

$$\|M\|_\infty := \sup_{x\in\mathbb{N}_0} \sum_{y\in\mathbb{N}_0} |M(x,y)| < +\infty.$$

The quantity $\|M\|_\infty$ is the norm of the matrix M considered as an operator acting continuously on the Banach space $(\mathbb{C}_\infty^{\mathbb{N}_0}, |\cdot|_\infty)$. As we have already seen, we also work on the space of infinite sequences $\mathcal{C}_K^{\mathbb{N}_0}$ for some $K \in \mathcal{K}(1+\eta)$ where $\eta > 0$; consequently, we will consider the space $\mathcal{M}_K$ of infinite matrices $M = (M(x,y))_{x,y\in\mathbb{N}_0}$ such that

$$\|M\|_K := \sup_{x\in\mathbb{N}_0} \sum_{y\in\mathbb{N}_0} \frac{K(y)}{K(x)} |M(x,y)| < +\infty.$$

The quantity $\|M\|_K$ is the norm of M considered as an operator acting continuously on $(\mathbb{C}_K^{\mathbb{N}_0}, |\cdot|_K)$.

2.7.4.1 The map $s \mapsto \mathcal{T}_s$ and its potential $\mathcal{U}_s$

Recall that the matrix $\mathcal{T}_s$ is the lower triangular with coefficients $\mathcal{T}_s(x,y), x, y \in \mathbb{N}_0$, given by

$$\mathcal{T}_s(x,y) = \mathbf{T}_s(y-x) = \mathbb{E}\left[s^{\tau^{*-}} 1_{\{y-x\}}(S_{\tau^{*-}})\right].$$

Proposition 2.7.7. *There exists an open neighborhood Ω of $\overline{B(0,1)} \setminus \{1\}$ such that the $\mathcal{M}_\infty$-valued function $s \mapsto \mathcal{T}_s$ has an analytic continuation to Ω ; furthermore, for $\delta > 0$ small enough, this function is analytic in the variable $\sqrt{1-s}$ on the set $\mathcal{O}_\delta(1)$ and its local expansions of order 1 in $(\mathcal{M}_\infty, \|\cdot\|_\infty)$ is*

$$\mathcal{T}_s = \mathcal{T} + \sqrt{1-s}\ \widetilde{\mathcal{T}} + (1-s)\ \mathbf{O}_s \tag{2.7.25}$$

where

- $\mathcal{T} = \Big(\mathcal{T}(x,y)\Big)_{x,y\in\mathbb{N}_0}$ *with* $\mathcal{T}(x,y) = \begin{cases} \mu^{*-}(y-x) & \text{if } 0 \leqslant y \leqslant x-1 \\ 0 & \text{if } y \geqslant x \end{cases}$,
- $\widetilde{\mathcal{T}} = \Big(\widetilde{\mathcal{T}}(x,y)\Big)_{x,y\in\mathbb{N}_0}$ *with* $\widetilde{\mathcal{T}}(x,y) = \begin{cases} -\frac{\sqrt{2}}{\sigma}\mu^{*-}\Big(]-\infty, y-x]\Big) & \text{if } 0 \leqslant y \leqslant x-1 \\ 0 & \text{if } y \geqslant x \end{cases}$,
- $\mathbf{O}_s$ *is analytic in the variable $\sqrt{1-s}$ and uniformly bounded in $(\mathcal{M}_\infty, \|\cdot\|_\infty)$ for $s \in \mathcal{O}_\delta(1)$.*

Proof. The regularity of each coefficient map $s \mapsto \mathcal{T}_s(x,y)$ may be proved as in Proposition 2.7.5 ; we thus focuse our attention on the analyticity of the $\mathcal{M}_\infty$-valued map $s \mapsto \mathcal{T}_s$. By a classical result in the theory of vector valued analytic functions of the complex variable (see for instance [9], Theorem 9.13), it suffices to check that this property holds for the functions $s \mapsto \mathcal{T}_s(\mathbf{a})$ for any bounded sequence $\mathbf{a} = (a_i)_{i\geqslant 0} \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}_0}$; to check this, we will use the fact that any uniform limit on some open set of analytic functions is analytic on this set.

Fix $N \geqslant 1$ and let $\mathcal{T}_{s,N}$ be the "truncated" matrix defined by

$$\mathcal{T}_{s,N}(x,y) = \begin{cases} \mathcal{T}_s(x,y) & \text{if } \max(x-N,0) \leqslant y \leqslant x-1 \\ 0 & \text{otherwise.} \end{cases}$$

One gets $\mathcal{T}_{s,N}(\mathbf{a}) = \sum_1^N \mathbf{T}_s^{*-}(-k)\mathbf{a}^{(k)}$ with $\mathbf{a}^{(k)} := \underbrace{0, \cdots, 0}_{k\ times}, a_0, a_1, \cdots$, which implies that the $\mathcal{M}_\infty$-valued map $s \to \mathcal{T}_{s,N}$ is analytic on Ω and analytic in the variable $\sqrt{1-s}$ on $\mathcal{O}_\delta(1)$. The same property holds for the map $s \to \mathcal{T}_s$ since, by (2.7.19), one gets

$$\|\mathcal{T}_s - \mathcal{T}_{s,N}\|_\infty = \sup_{x\in\mathbb{N}_0} \sum_{|y-x|>N} |\mathcal{T}_s(x,y)| \leqslant \sum_{|y-x|>N} \frac{\mathbf{O}}{K^{|x-y|}} = \frac{\mathbf{O}}{(K-1)K^N} \overset{N\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$$

□

Let us now give sense to the matrix $(I - \mathcal{T}_s)^{-1}$; formally one may write

$$(I - \mathcal{T}_s)^{-1} = \mathcal{U}_s := \sum_{k\geqslant 0} (\mathcal{T}_s)^k.$$

Since the matrices $\mathcal{T}_s$ are strictly lower triangular, one gets $\mathcal{T}_s^k(x,y) = 0$ for any $x, y \in \mathbb{N}_0$ and $k \geqslant |x-y|+1$; it follows that, for any $x, y \in \mathbb{N}_0$

$$(I - \mathcal{T}_s)^{-1}(x,y) = \mathcal{U}_s(x,y) = \sum_{k=0}^{|x-y|} (\mathcal{T}_s)^k(x,y). \tag{2.7.26}$$

The analyticity in the variable s (resp. $\sqrt{1-s}$) on Ω (resp. on $\mathcal{O}_\delta(1)$) of each coefficient $\mathcal{U}_s(x,y)$ follows by the previous fact and one may compute its local expansion near $s = 1$. Nevertheless, this property does not hold in the Banach space $(\mathcal{M}_\infty, \|\cdot\|_\infty)$, as can be seen easily in the following statement (clearly $\mathcal{U}$ and $\widetilde{\mathcal{U}} \notin \mathcal{M}_\infty$), we have in fact to consider the bigger space $\mathcal{M}_K$ to obtain a similar statement.

Proposition 2.7.8. *Fix $\eta > 0$ and $K \in \mathcal{K}(1+\eta)$. There exists an open neighborhood Ω of $\overline{B(0,1)} \setminus \{1\}$ such that the function $s \mapsto \mathcal{U}_s$ has an analytic continuation to Ω, with values in $\mathcal{M}_K$; furthermore, for $\delta > 0$ small enough, this function is analytic in the variable $\sqrt{1-s}$ on the set $\mathcal{O}_\delta(1)$ and its local expansion of order 1 in $\mathcal{M}_K$ is*

$$\mathcal{U}_s = \mathcal{U} + \sqrt{1-s}\, \widetilde{\mathcal{U}} + (1-s)\ \mathbf{O}_s \tag{2.7.27}$$

where

- $\mathcal{U} = (\mathcal{U}(x,y))_{x,y\in\mathbb{N}_0}$ *with* $\mathcal{U}(x,y) = \begin{cases} U^{*-}(y-x) & \text{if } 0 \leqslant y \leqslant x \\ 0 & \text{if } y > x \end{cases}$,
- $\widetilde{\mathcal{U}} = \left(\widetilde{\mathcal{U}}(x,y)\right)_{x,y\in\mathbb{N}_0}$ *with* $\widetilde{\mathcal{U}}(x,y) = \begin{cases} -\frac{\sqrt{2}}{\sigma} U^{*-}\left(]y-x, 0]\right) & \text{if } 0 \leqslant y \leqslant x-1 \\ 0 & \text{if } y \geqslant x \end{cases}$,
- $\mathbf{O}_s = (\mathbf{O}_s(x,y))_{x,y\in\mathbb{N}_0}$ *is analytic in the variable $\sqrt{1-s}$ for $s \in \mathcal{O}_\delta(1)$ and uniformly bounded in $\mathcal{M}_K$.*

Proof. Since $\|\mathcal{T}\|_\infty = 1$, one may choose $\delta > 0$ in such a way $\|\mathcal{T}_s\|_\infty \leqslant 1 + \frac{\eta}{2}$ for any $s \in \mathcal{O}_\delta(1)$; it thus follows that, for such s, any $x \in \mathbb{N}_0$ and $y \in \{0, \cdots, x-1\}$

$$|\mathcal{U}_s(x,y)| \leqslant \sum_{n=0}^{|x-y|} \|\mathcal{T}_s\|_\infty^k \leqslant (1+2/\eta)\left(1+\frac{\eta}{2}\right)^{|x-y|}. \tag{2.7.28}$$

So, $\|\mathcal{U}_s\|_K < +\infty$ when $s \in \mathcal{O}_\delta(1)$ and $K \in \mathcal{K}(1+\eta)$. To prove the analyticity of the function $s \mapsto \mathcal{U}_s$, we consider as above the truncated matrix $\mathcal{U}_{s,N}$ and check, first that for any $\mathbf{a} \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}_0}$ the maps $s \mapsto \mathcal{U}_{s,N}(\mathbf{a})$ are analytic on Ω and analytic in the variable $\sqrt{1-s}$ on $\mathcal{O}_\delta(1)$, and second that the sequence $(\mathcal{U}_{s,N})_{N\geqslant 1}$ converges to $\mathcal{U}_s$ in $(\mathcal{M}_K, \|\cdot\|_K)$. The expansion (2.7.27) is a straightforward computation.

□

From now on, we fix a constant $\eta > 0$ and a function $K \in \mathcal{K}(1+\eta)$.

2.7.4.2 The excursions $\mathcal{E}_s(\cdot, y)$ for $y \in \mathbb{N}_0$

The excursion $\mathcal{E}_s$ before the first reflection has been defined formally in (2.7.7) as follows

$$\mathcal{E}_s = \Big(I - \mathcal{T}_s\Big)^{-1}\mathcal{U}_s^+ = \mathcal{U}_s\, \mathcal{U}_s^+.$$

The regularity with respect to the parameter s of the matrix coefficients $\mathcal{U}_s^+(x,y)$ and the matrix $\mathcal{U}_s = \Big(I - \mathcal{T}_s\Big)^{-1}$ is well described in Propositions 2.7.6 and 2.7.8. Each coefficient of $\mathcal{E}_s$ is a finite sum of products of coefficients of $\mathcal{U}_s$ and $\mathcal{U}_s^+$ so the regularity of the map $s \mapsto \mathcal{E}_s(x,y)$ will follow immediately ; the number of terms in this sum is equal to $\min(x,y)$, it thus increases with x and y and it is not easy to obtain some kind of uniformity with respect to these parameters. In fact, it will be sufficient to fix the arrival site y and to describe the regularity of the map $s \mapsto (\mathcal{E}_s(x,y))_{x\in\mathbb{N}_0}$.

Proposition 2.7.9. *There exists an open neighborhood Ω of $\overline{B(0,1)} \setminus \{1\}$ (depending on the function K) such that, for any $y \in \mathbb{N}_0$, the function $s \mapsto \mathcal{E}_s(\cdot, y)$ hasan analytic continuation on Ω with values in the Banach space $\mathbb{C}_K^{\mathbb{N}_0}$; furthermore, for $\delta > 0$ small enough, this function is analytic in the variable $\sqrt{1-s}$ on the set $\mathcal{O}_\delta(1)$ and its local expansion of order 1 in $\mathbb{C}_K^{\mathbb{N}_0}$ is*

$$\mathcal{E}_s(\cdot, y) = \mathcal{E}(\cdot, y) + \sqrt{1-s}\ \widetilde{\mathcal{E}}(\cdot, y) + (1-s)\ \mathbf{O}_s(y) \tag{2.7.29}$$

where

- $\mathcal{E}(\cdot, y) = \Big(I - \mathcal{T}\Big)^{-1}\mathcal{U}^+(\cdot, y) = \mathcal{U}\mathcal{U}^+(\cdot, y)$,
- $\widetilde{\mathcal{E}}(\cdot, y) = \widetilde{\mathcal{U}}\mathcal{U}^+(\cdot, y) + \mathcal{U}\widetilde{\mathcal{U}}^+(\cdot, y)$,
- $\mathbf{O}_s(y)$ *is analytic in the variable $\sqrt{1-s}$ and uniformly bounded in $\mathbb{C}_K^{\mathbb{N}_0}$ for $s \in \mathcal{O}_\delta(1)$.*

Proof. For any $x, y \in \mathbb{N}_0$, one gets $\mathcal{E}_s(x,y) = \sum_{z=0}^{y}\mathcal{U}_s(x,z)\mathcal{U}_s^+(z,y)$ and the conclusions above follow from Propositions 2.7.6 and 2.7.8 ; in particular, for any fixed $y \in \mathbb{N}_0$ and $N \geqslant 1$, the $\mathbb{C}_K^{\mathbb{N}_0}$-valued map $s \mapsto \Big(\mathcal{E}_{s,N}(x,y)\Big)_x$ defined by $\mathcal{E}_{s,N}(x,y) = \mathcal{E}_s(x,y)$ if $0 \leqslant x \leqslant N$ and $\mathcal{E}_{s,N}(x,y)$ otherwise, is analytic in $s \in \Omega$ and $\sqrt{1-s}$ when $s \in \mathcal{O}_\delta(1)$. It is sufficient to check that this sequence of vectors converges to $\mathcal{E}_s(\cdot, y)$ in the sense of the norm $|\cdot|_K$ for some suitable choice of $K > 1$; by (2.7.28), one gets

$$\Big|\mathcal{E}_s(x,y)\Big| \leqslant (y+1)(1+2/\eta)\left(1+\frac{\eta}{2}\right)^x \times \max_{0\leqslant z\leqslant y} |\mathcal{U}_s^+(z,y)|$$

so that $\dfrac{\Big|\mathcal{E}_s(x,y)\Big|}{(1+\eta/2)^x} \leqslant \dfrac{C_y}{(1+\eta/2)^x}$, for some constant $C_y > 0$ depending only on y. Since $K \in \mathcal{K}(1+\eta)$, one gets $\sup_{x\geqslant N}\dfrac{\Big|\mathcal{E}_s(x,y)\Big|}{K(x)} \to 0$ as $N \to +\infty$; this proves that the sequence $\Big(\mathcal{E}_{s,N}(\cdot, y)\Big)_{N\geqslant 0}$ converges in $\mathbb{C}_K^{\mathbb{N}_0}$ to $\mathcal{E}(\cdot, y)$ as $N \to +\infty$ and that $s \mapsto \mathcal{E}_s(\cdot, y)$ is analytic. The local expansion (2.7.29) follows by a direct computation.

□

2.7.4.3 On the map $s \mapsto \mathcal{R}_s$

The matrice $\mathcal{R}_s$ describes the dynamic of the space-time reflected process $(\mathbf{r}_k, X_{\mathbf{r}_k})_{k\geqslant 0}$ and is defined formally in §2 :

$$\mathcal{R}_s = \Big(I - \mathcal{T}_s\Big)^{-1} \mathcal{V}_s = \mathcal{U}_s \mathcal{V}_s$$

with $\mathcal{V}_s = \Big(\mathcal{V}_s(x,y)\Big)_{x,y\in\mathbb{N}_0}$ and $\mathcal{V}_s(x,y) := \begin{cases} 0 & \text{if } y = 0 \\ \mathbf{T}^{*-}(s|-x-y) & \text{if } y \in \mathbb{N}^* \end{cases}$. So, one first needs to control the regularity of the map $s \mapsto \mathcal{V}_s$.

Fait 2.7.2. *The $\mathcal{M}_K$-valued function $s \mapsto \mathcal{V}_s$ is analytic in s on Ω and in $\sqrt{1-s}$ on $\mathcal{O}_\delta(1)$; furthermore, it has the following local expansion of order 1 near $s = 1$*

$$\mathcal{V}_s = \mathcal{V} + \sqrt{1-s}\ \widetilde{\mathcal{V}} + (1-s)\ \mathbf{O}_s \tag{2.7.30}$$

where

- $\mathcal{V} = \Big(\mathcal{V}(x,y)\Big)_{x,y\in\mathbb{N}_0}$ *with* $\mathcal{V}(x,y) := \begin{cases} 0 & \text{if } y = 0 \\ \mu^{*-}(-x-y) & \text{if } y \in \mathbb{N}^*, \end{cases}$
- $\widetilde{\mathcal{V}} = \Big(\widetilde{\mathcal{V}}(x,y)\Big)_{x,y\in\mathbb{N}_0}$ *with* $\widetilde{\mathcal{V}}(x,y) := \begin{cases} 0 & \text{if } y = 0 \\ -\frac{\sqrt{2}}{\sigma}\mu^{*-}\Big(]-\infty, -x-y]\Big) & \text{if } y \in \mathbb{N}^*, \end{cases}$
- $\mathbf{O}_s$ *is analytic in the variable $\sqrt{1-s}$ and uniformly bounded in $\mathcal{M}_K$ for $s \in \mathcal{O}_\delta(1)$.*

We now may describe the regularity of the map $s \mapsto \mathcal{R}_s$.

Proposition 2.7.10. *The $\mathcal{M}_K$-valued function $s \mapsto \mathcal{R}_s$ is analytic in s on Ω and in $\sqrt{1-s}$ on $\mathcal{O}_\delta(1)$; furthermore, it has the following local expansion of order 1 near $s = 1$*

$$\mathcal{R}_s = \mathcal{R} + \sqrt{1-s}\ \widetilde{\mathcal{R}} + (1-s)\ \mathbf{O}_s \tag{2.7.31}$$

where

- $\widetilde{\mathcal{R}} = \widetilde{\mathcal{U}}\mathcal{V} + \mathcal{U}\widetilde{\mathcal{V}}$.
- $\mathbf{O}_s$ *is analytic in the variable $\sqrt{1-s}$ and uniformly bounded in $\mathcal{M}_K$ for $s \in \mathcal{O}_\delta(1)$.*

Proof. The analyticity of this function with respect to the variables s or $\sqrt{1-s}$ is clear by Proposition 2.7.8 and Fact 2.7.2 and one may write, for $s \in \mathcal{O}_\delta(1)$,

$$\begin{aligned}
\mathcal{R}_s &= \Big(I - \mathcal{T}_s\Big)^{-1} \mathcal{V}_s \\
&= \mathcal{U}_s \mathcal{V}_s \\
&= \Big(\mathcal{U} + \sqrt{1-s}\ \widetilde{\mathcal{U}} + (1-s)\mathbf{O}_s\Big)\Big(\mathcal{V} + \sqrt{1-s}\ \widetilde{\mathcal{V}} + (1-s)\mathbf{O}_s\Big) \\
&= \mathcal{U}\mathcal{V} + \sqrt{1-s}\Big(\widetilde{\mathcal{U}}\mathcal{V} + \mathcal{U}\widetilde{\mathcal{V}}\Big) + (1-s)\mathbf{O}_s.
\end{aligned}$$

□

A direct computation gives in particular

$$\mathcal{E}(x,y) = \sum_{k=0}^{\min(x,y)} U^{*-}(k-x)U^{+}(y-k) \tag{2.7.32}$$

and

$$\widetilde{\mathcal{R}}(x,y) = \mathcal{A}(x,y) + \mathcal{B}(x,y) \tag{2.7.33}$$

with

$$\mathcal{A}(x,y) \quad := \quad \begin{cases} 0 & \text{if } x=0 \text{ or } y=0 \\ -\dfrac{\sqrt{2}}{\sigma}\displaystyle\sum_{k=0}^{x-1} U^{*-}\Big(]k-x,0]\Big)\mu^{*-}(-k-y) & \text{otherwise} \end{cases},$$

and

$$\mathcal{B}(x,y) \quad := \quad \begin{cases} 0 & \text{if } y=0 \\ -\dfrac{\sqrt{2}}{\sigma}\displaystyle\sum_{k=0}^{x} U^{*-}(k-x)\mu^{*-}\Big(]-\infty,-k-y]\Big) & \text{otherwise} \end{cases}.$$

2.7.4.4 On the spectrum of $\mathcal{R}_s$ and its resolvant $\Big(I-\mathcal{R}_s\Big)^{-1}$

The question is more delicate in the centered case since the spectral radius of $\mathcal{R}$ is equal to 1 (we will see in the next Section that it is <1 in the non centered case, which simplifies this step).

2.7.4.5 The spectrum of $\mathcal{R}_s$ for $|s|=1$ and $s\neq 1$

Using Property 2.7.1 , we first control the spectral radius of the $\mathcal{R}_s$ for $s\neq 1$; indeed, we may control the norm of $\mathcal{R}_s^2$:

Fait 2.7.3. *For $|s|=1$ and $s\neq 1$ one gets $\|\mathcal{R}_s^2\|_K<1$; in particular, the spectral radius of $\mathcal{R}_s$ in $\mathcal{M}_K$ is <1.*

Proof. Fix $s\in\mathbb{C}\setminus\{1\}$ of modulus 1 ; by strict convexity, for any $w\in\mathbb{N}_0$ and $y\in\mathbb{N}^*$, there exists $\rho_{w,y}\in]0,1[$, depending also on s, such that $|\mathcal{R}_s(w,y)|\leqslant\rho_{w,y}\mathcal{R}(w,y)$; on the other hand, by Property 2.7.1, we may choose $\epsilon>0$ and a finite set $F\subset\mathbb{N}_0$ such that, for any $x\in\mathbb{N}_0$,

$$\mathcal{R}(x,F):=\sum_{w\in F}\mathcal{R}(x,w)\geqslant\epsilon.$$

For any $y\in\mathbb{N}_0$, we set $\rho_y:=\max_{w\in F}\rho_{w,y}$; since F is finite, one gets $\rho_y\in]0,1[$.

Consequently, for any $x\in\mathbb{N}_0$

$$\Big|\mathcal{R}_s^2K(x)\Big|\leqslant\sum_{w\in\mathbb{N}^*}\sum_{y\in\mathbb{N}^*}\mathcal{R}(x,w)\times\Big|\mathcal{R}_s(w,y)\Big|K(y)\leqslant\mathcal{S}_1(s|x)+\mathcal{S}_2(s|x)$$

with

$$\begin{aligned}\mathcal{S}_1(s|x) \quad &:= \quad \sum_{w\in F}\sum_{y\in\mathbb{N}^*}\mathcal{R}(x,w)\times\Big|\mathcal{R}_s(w,y)\Big|K(y)\\ \mathcal{S}_2(s|x) \quad &:= \quad \sum_{w\notin F}\sum_{y\in\mathbb{N}^*}\mathcal{R}(x,w)\times\Big|\mathcal{R}_s(w,y)\Big|K(y).\end{aligned}$$

One gets

$$\mathcal{S}_1(s|x)\leqslant\sum_{w\in F}\mathcal{R}(x,w)\sum_{y\in\mathbb{N}^*}\rho_y\mathcal{R}(w,y)K(y)\leqslant\rho\mathcal{R}(x,F)$$

with $\rho:=\max_{w\in F}\sum_{y\in\mathbb{N}^*}\rho_y\mathcal{R}(w,y)K(y)\in]0,1[$.

On the other hand $\mathcal{S}_2(s|x) \leqslant \mathcal{R}(x, \mathbb{N}^* \setminus F) = 1 - \mathcal{R}(x, F)$. Finally, since $K \geqslant 1$, one gets

$$\frac{\left|\mathcal{R}_s^2 K(x)\right|}{K(x)} \leqslant \Big(\rho\mathcal{R}(x, F) + 1 - \mathcal{R}(x, F)\Big) \leqslant 1 - (1-\rho)\epsilon < 1,$$

which achieves the proof of the Fact 2.7.3.

□

Since the map $s \mapsto \mathcal{R}_s$ is analytic on the set $\{s \in \mathbb{C}/|s| < 1 + \delta\} \setminus [1, 1+\delta[$, the same property holds for the map $s \mapsto (I - \mathcal{R}_s)^{-1}$ on a neighborhood of $\{s \in \mathbb{C}/|s| \leqslant 1\} \setminus \{1\}$.

2.7.4.6 Perturbation theory and spectrum of $\mathcal{R}_s$ for s close to 1

We now focus our attention on s close to 1. By Property 2.7.1, the operator $\mathcal{R}$ may be decomposed as follows on $\mathcal{M}_K$

$$\mathcal{R} = \pi + \mathcal{Q}$$

where

• π is the rank one projector on the space $\mathbb{C} \cdot \mathbf{h}$ defined by

$$\mathbf{a} = (a_k)_{k \geqslant 0} \mapsto \Big(\sum_{i \geqslant 1} \nu_{\mathbf{r}}(k) a_k\Big)\mathbf{h} \quad (8),$$

• $\mathcal{Q}$ is a bounded operator on $\mathbb{C}_K^{\mathbb{N}_0}$ with spectral radius < 1,

• $\pi \circ \mathcal{Q} = \mathcal{Q} \circ \pi = 0$.

The map $s \mapsto \dfrac{\mathcal{R}_s - \mathcal{R}}{\sqrt{1-s}}$ is bounded on on $\mathcal{O}_\delta(1)$. By perturbation theory, for $s \in \mathcal{O}_\delta(1)$ with δ small enough, the operator $\mathcal{R}_s$ admits a similar spectral decomposition as above ; namely, one gets

$$\forall s \in \mathcal{O}_\delta(1) \qquad \mathcal{R}_s = \lambda_s \pi_s + \mathcal{Q}_s \tag{2.7.34}$$

with

• λ_s is the dominant eigenvalue of $\mathcal{R}_s$, with corresponding eigenvector $\mathbf{h}_s$, normalized in such a way that $\nu_{\mathbf{r}}(\mathbf{h}_s) = 1$,

• π_s is a rank one projector on the space $\mathbb{C} \cdot \mathbf{h}_s$,

• $\mathcal{Q}_s$ is a bounded operator on $\mathbb{C}_K^{\mathbb{N}_0}$ with spectral radius $\leqslant \rho_\delta$ for some $\rho_\delta < 1$,

• $\pi_s \circ \mathcal{Q}_s = \mathcal{Q}_s \circ \pi_s = 0$.

Furthermore, the maps $s \mapsto \dfrac{\lambda_s - 1}{\sqrt{1-s}}$, $s \mapsto \dfrac{\pi_s - \pi}{\sqrt{1-s}}$, $s \mapsto \dfrac{\mathbf{h}_s - \mathbf{h}}{\sqrt{1-s}}$ and $s \mapsto \dfrac{\mathcal{Q}_s - \mathcal{Q}}{\sqrt{1-s}}$ are bounded on $\mathcal{O}_\delta(1)$. We may in fact make precise the local behavior of the map $s \mapsto \lambda_s$; by the above decomposition and Proposition 2.7.10, one gets, for $s \in \mathcal{O}_\delta(1)$,

$$\begin{aligned} \lambda_s &= \nu_{\mathbf{r}}(\mathcal{R}_s \mathbf{h}) + \nu_{\mathbf{r}}\Big((\mathcal{R}_s - \mathcal{R})(\mathbf{h}_s - \mathbf{h})\Big) \\ &= 1 + \sqrt{1-s} \ \ \nu_{\mathbf{r}}(\widetilde{\mathcal{R}}\mathbf{h}) + (1-s)O(s) \end{aligned}$$

with $O(s)$ bounded on $\mathcal{O}_\delta(1)$. Since $\nu_{\mathbf{r}}(\widetilde{\mathcal{R}}\mathbf{h}) \neq 0$, the operator $I - \mathcal{R}_s$ is invertible when $s \in \mathcal{O}_\delta(1)$ and δ small enough, with inverse

$$\Big(I - \mathcal{R}_s\Big)^{-1} = \frac{1}{1-\lambda_s}\ \pi_s + \Big(I - \mathcal{Q}_s\Big)^{-1}.$$

8. recall that $\mathbf{h}$ denotes the sequence whose terms are all equal to 1 and observe that $\nu_{\mathbf{r}}(\mathbf{h}) = 1$ since $\nu_{\mathbf{r}}$ is a probability measure on $\mathbb{N}_0$

Fait 2.7.4. *For $\delta > 0$ small enough, the function $s \mapsto \Big(I - \mathcal{R}_s\Big)^{-1}$ admits on $\mathcal{O}_\delta(1)$ the following local expansion of order 1 with values in $\mathcal{M}_K$.*

$$\Big(I - \mathcal{R}_s\Big)^{-1} = -\frac{1}{\sqrt{1-s} \times \nu_{\mathbf{r}}\Big(\widetilde{\mathcal{R}}\mathbf{h}\Big)}\,\pi + \mathbf{O}_s \tag{2.7.35}$$

where $\mathbf{O}_s$ is analytic in the variable $\sqrt{1-s}$ and uniformly bounded in $\mathcal{M}_K$.

2.7.4.7 The return probabilities in the centered case : proof of the main theorem

We use here the identity $\mathcal{G}_s = \Big(I - \mathcal{R}_s\Big)^{-1}\mathcal{E}_s$ given in the introduction. By Proposition 2.7.10 and Fact 2.7.3, for any fixed $y \in \mathbb{N}_0$, the function $s \mapsto \mathcal{G}_s(\cdot, y)$ is analytic on a neigborhood of $\overline{B(0,1)} \setminus \{1\}$. Furthermore, for $\delta > 0$ small enough and $s \in \mathcal{O}_\delta(1)$, one may write, using (2.7.29) and (2.7.38)

$$\mathcal{G}_s(\cdot, y) = -\frac{\nu_{\mathbf{r}}(\mathcal{E}(\cdot, y))}{\nu_{\mathbf{r}}\Big(\widetilde{\mathcal{R}}\mathbf{h}\Big)} \times \frac{1}{\sqrt{1-s}} + \mathbf{O}_s$$

with $\nu_{\mathbf{r}}, \mathcal{E}(\cdot, y)$ and $\widetilde{\mathcal{R}}$ given respectively by formulas (2.7.9), (2.7.32) and (2.7.33) and $s \mapsto \mathbf{O}_s$ analytic on $\mathcal{O}_\delta(1)$ in the variable $\sqrt{1-s}$ and uniformly bounded in $\mathcal{M}_K$.

We may thus apply Darboux's theorem 2.7.1 with $R = 1, \alpha = -\frac{1}{2}$ (and so $\Gamma(-\alpha) = \sqrt{\pi}$) and $\mathbf{A}(1) = -\dfrac{\nu_{\mathbf{r}}(\mathcal{E}(\cdot, y))}{\nu_{\mathbf{r}}\Big(\widetilde{\mathcal{R}}\mathbf{h}\Big)} > 0$. One gets, for all $x, y \in \mathbb{N}_0$

$$\mathbb{P}_x[X_n = y] \sim \frac{C_y}{\sqrt{n}} \quad \text{with} \quad C_y = -\frac{1}{\sqrt{\pi}} \times \frac{\nu_{\mathbf{r}}(\mathcal{E}(\cdot, y))}{\nu_{\mathbf{r}}\Big(\widetilde{\mathcal{R}}\mathbf{h}\Big)} > 0. \tag{2.7.36}$$

□

2.7.5 The non centered random walk

We assume here $\mathbb{E}[Y_n] > 0$ and use a standard argument in probability theory, called sometimes "relativisation procedure", to reduce the question to the centered case.

2.7.5.1 The relativisation principle and its consequences

For any $r > 0$, we denote by μ_r the probability measure defined on $\mathbb{Z}$ by

$$\forall n \in \mathbb{Z} \qquad \mu_r(n) = \frac{1}{\hat{\mu}(r)} r^n \mu(n).$$

For any $k \geqslant 0$ one gets $(\mu^{*k})_r = (\mu_r)^{*k}$ and that the generating function $\hat{\mu}_r$ is related to the one of μ by the following identity $\forall z \in \mathbb{C} \quad \hat{\mu}_r(z) := \dfrac{\hat{\mu}(rz)}{\hat{\mu}(r)}$.

The waiting times τ^{*-} and τ^+ are defined on the space $(\Omega, \mathcal{T})$, with values in $\mathbb{N}_0 \cup \{+\infty\}$; they are both a.s. finite if and only if μ_r is centered, i.e. $r = r_0$ (see Section 3.1 for the notations).

Throughout this section, we will denote $\mathbb{P}^\circ$ the probability on $(\Omega, \mathcal{T})$ which ensures that the Y_n are i.i.d. with law μ_{r_0} ; the expectation with respect to $\mathbb{P}^\circ$ is denoted $\mathbb{E}^\circ$. We set $\rho_\circ = \hat{\mu}(r_0)$ and $R_\circ = 1/\rho_\circ \in]1, +\infty[$. The variables Y_n have common law μ_{r_0} under $\mathbb{P}^\circ$, they are in particular centered ; we may thus apply the results of the previous section when we refer to this probability measure on $(\Omega, \mathcal{T})$.

Fait 2.7.5. *Let $n \geqslant 1$ and $\Phi : \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{C}$ a bounded Borel function; then, one gets*

$$\mathbb{E}\Big[\Phi(S_0, S_1, \cdots, S_n)\Big] = \rho_\circ^n \times \mathbb{E}^\circ\Big[\Phi(S_0, S_1, \cdots, S_n) r_0^{-S_n}\Big].$$

As a direct consequence, for any $x, y \in \mathbb{N}_0$ and $s \in \mathbb{C}$, one gets, at least formally

$$\mathcal{E}_s(x,y) = r_0^{x-y} \mathcal{E}^\circ_{\rho_\circ s}(x,y) \quad \text{and} \quad \mathcal{R}_s(x,y) = r_0^{x+y} \mathcal{R}^\circ_{\rho_\circ s}(x,y)$$

where we have set $\mathcal{E}^\circ_s(x,y) := \sum_{n \geqslant 0} s^n \mathbb{E}^\circ_x[\mathbf{r} > n, X_n = y]$ and $\mathcal{R}^\circ_s(x,y) := \sum_{n \geqslant 0} s^n \mathbb{E}^\circ_x[\mathbf{r} = n, X_n = y]$. We may thus introduce the diagonal matrix $\Delta = (\Delta(x,y))_{x,y \in \mathbb{N}_0}$ defined by $\Delta(x,y) = 0$ when $x \neq y$ and $\Delta(x,x) = r_0^x$ for any $x \geqslant 0$; by the above, one gets formally

$$\mathcal{E}_s = \Delta \mathcal{E}^\circ_s \Delta^{-1} \quad \text{and} \quad \mathcal{R}_s = \Delta \mathcal{R}^\circ_s \Delta.$$

In the sequel, we will add the exponent $\circ$ to the quantities $\mathcal{U}^+, \mathcal{T}, \mathcal{U}, \mathcal{V}$ defined in the previous section when μ was assumed to be centered and considered here as variables defined on $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}^\circ)$; with these notations, we will have

$$\mathcal{E}^\circ = \mathcal{U}^\circ \mathcal{U}^{\circ+}, \quad \widetilde{\mathcal{E}}^\circ = \widetilde{\mathcal{U}}^\circ \mathcal{U}^{\circ+} + \mathcal{U}^\circ \widetilde{\mathcal{U}}^{\circ+}, \mathcal{R}^\circ = \mathcal{U}^\circ \mathcal{V}^\circ \quad \text{and} \quad \widetilde{\mathcal{R}}^\circ = \widetilde{\mathcal{U}}^\circ \mathcal{V}^\circ + \mathcal{U}^\circ \widetilde{\mathcal{V}}^\circ.$$

Combining Propositions 2.7.9 and 2.7.10, we may thus state the

Proposition 2.7.11. *There exist a function K, an open neighborhood Ω of $\overline{B(0,R_\circ)} \setminus \{R_\circ\}$ and $\delta > 0$ small enough such that, for any $y \in \mathbb{N}_0$, the functions $s \mapsto \Big(\mathcal{E}_s(x,y)\Big)_{x \in \mathbb{N}_0}$ have an analytic continuation on Ω with values in the Banach space $\mathbb{C}_K^{\mathbb{N}_0}$ and are analytic in the variable $\sqrt{R_\circ - s}$ on the set $\mathcal{O}_\delta(R_\circ) := B(R_\circ, \delta) \setminus [R_\circ, R_\circ + \delta)$, with the following local expansion of order 1 in $\mathbb{C}_K^{\mathbb{N}_0}$:*

$$\mathcal{E}_s = \mathcal{E} + \sqrt{R_\circ - s}\ \widetilde{\mathcal{E}} + (R_\circ - s)\ \mathbf{O}_s \tag{2.7.37}$$

where

- $\mathcal{E} = \Delta \mathcal{E}^\circ \Delta^{-1}$,
- $\widetilde{\mathcal{E}} = \sqrt{\rho_0}\ \Delta \widetilde{\mathcal{E}}^\circ \Delta^{-1}$,
- $\mathbf{O}_s = (\mathbf{O}_s(x,y))_{x \in \mathbb{N}_0}$ *is analytic in the variable $\sqrt{R_\circ - s}$ and uniformly bounded in $\mathbb{C}_K^{\mathbb{N}_0}$ for $s \in \mathcal{O}_\delta(R_\circ)$.*

Similarly, the function $s \mapsto \mathcal{R}_s = \Big(\mathcal{R}_s(x,y)\Big)_{x,y \in \mathbb{N}_0}$ has an analytic continuation to Ω, with values in the Banach space $\mathcal{M}_K$, and is analytic in the variable $\sqrt{R_\circ - s}$ on the set $\mathcal{O}_\delta(R_\circ)$ with the following local expansion of order 1 in $\mathcal{M}_K$:

$$\mathcal{R}_s = \mathcal{R} + \sqrt{R_\circ - s}\ \widetilde{\mathcal{R}} + (R_\circ - s)\ \mathbf{O}_s \tag{2.7.38}$$

where

- $\mathcal{R} = \Delta \mathcal{R}^\circ \Delta$,
- $\widetilde{\mathcal{R}} = \sqrt{\rho_0}\ \Delta \widetilde{\mathcal{R}}^\circ \Delta$,
- $\mathbf{O}_s = (\mathbf{O}_s(x,y))_{x \in \mathbb{N}_0}$ *is analytic in the variable $\sqrt{R_\circ - s}$ and uniformly bounded in $\mathbb{C}_K^{\mathbb{N}_0}$ for $s \in \mathcal{O}_\delta(R_\circ)$.*

To prove the main theorem in the non centered case, we will thus apply the same strategy than in the previous section. The proof simplifies in this case since the operator $I - \mathcal{R}_s$ becomes invertible.

Fait 2.7.6. *For K suitably choosen, $\delta > 0$ small enough and any $s \in \mathcal{O}_\delta(R_\circ)$, the spectral radius of the operator $\mathcal{R}_s$ on $\mathcal{M}_K$ is < 1.*

Proof. It will be a direct consequence of the continuity of the map $s \mapsto \mathcal{R}_s$ on $K_\delta(R_0)$ and the inequality $\|\mathcal{R}_{R_\circ}\|_K < 1$. Indeed, one gets, using the definition of $\mathcal{R}$ and setting $\phi := 1_{[-x,+\infty[}$

$$\begin{aligned}
\|\mathcal{R}_{R_\circ}\|_K &\leqslant \sup_{x\in\mathbb{N}_0} \sum_{y\geqslant 1}\Big(\sum_{n\geqslant 0} R_\circ^n \mathbb{P}\left[\phi(S_1)\cdots\phi(S_{n-1})1_{\{-x-y\}}(S_n)\right]\Big)K(y)\\
&= \sup_{x\in\mathbb{N}_0} \sum_{y\geqslant 1}\Big(\sum_{n\geqslant 0} R_\circ^n r_0^{x+y} K(y)\mathbb{P}^\circ\left[\phi(S_1)\cdots\phi(S_{n-1})1_{\{-x-y\}}(S_n)\right]\Big)\\
&\leqslant r_0 \sup_{x\in\mathbb{N}_0}\Big(\sum_{n\geqslant 0} R_\circ^n \mathbb{P}^\circ\left[\phi(S_1)\cdots\phi(S_{n-1})(1-\phi)(S_n)\right]\Big) \quad \text{if} \quad r_0^{y-1}K(y)\leqslant 1 \quad \text{for all} \quad y \geqslant 1\\
&\leqslant r_0
\end{aligned}$$

which achieves the proof, assuming that $y \mapsto r_0^{y-1}K(y)$ is $\leqslant 1$ on $\mathbb{N}_0$.

□

As a direct consequence, one may write

$$(I-\mathcal{R}_s)^{-1} = \sum_{n\geqslant 0}\mathcal{R}_s^n.$$

Furthermore, the map $s \mapsto (I-\mathcal{R}_s)^{-1}$ is analytic in the variable s on Ω and analytic in the variable $\sqrt{R_\circ - s}$ on $O_\delta(R_\circ)$ and the local expansion near $R_\circ$ is

$$(I-\mathcal{R}_s)^{-1} = (I-\mathcal{R})^{-1} + \sqrt{R_\circ - s}\,(I-\mathcal{R})^{-1}\,\widetilde{\mathcal{R}}\,(I-\mathcal{R})^{-1} + (R_\circ - s)\cdots \tag{2.7.39}$$

2.7.5.2 The return probabilities in the non centered case : proof of the main theorem

We use here the identity $\mathcal{G}_s = \Big(I-\mathcal{R}_s\Big)^{-1}\mathcal{E}_s$ given in the introduction. By Proposition 2.7.11 and Fact 2.7.6, for any fixed $y \in \mathbb{N}_0$, the function $s \mapsto \mathcal{G}_s(\cdot, y)$ is analytic on a neigborhood of $\overline{B(0,R_\circ)} \setminus \{R_\circ\}$. Furthermore, for $\delta > 0$ small enough and $s \in \mathcal{O}_\delta(R_\circ)$, one may write, using Proposition 2.7.11 and the local expansion (2.7.39)

$$\mathcal{G}_s(\cdot,y) = (I-\mathcal{R})^{-1}(\cdot,y) + \sqrt{R_\circ - s}\Big((I-\mathcal{R})^{-1}\,\widetilde{\mathcal{R}}\,(I-\mathcal{R})^{-1}\,\mathcal{E}(\cdot,y) + (I-\mathcal{R})^{-1}\,\widetilde{\mathcal{E}}(\cdot,y)\Big) + (R_\circ - s)\mathbf{O}_s$$

with $s \mapsto \mathbf{O}_s$ analytic on $\mathcal{O}_\delta(R_\circ)$ in the variable $\sqrt{R_\circ - s}$ and uniformly bounded in $\mathcal{M}_K$.

We may thus apply Darboux's theorem 2.7.1 with $R = R_\circ, \alpha = \frac{1}{2}$ (and so $\Gamma(-\alpha) = -2\sqrt{\pi}$) and $\mathbf{A}(R_\circ) = (I-\mathcal{R})^{-1}\,\widetilde{\mathcal{R}}\,(I-\mathcal{R})^{-1}\,\mathcal{E}(\cdot,y) + (I-\mathcal{R})^{-1}\,\widetilde{\mathcal{E}}(\cdot,y) < 0$.

For all $x, y \in \mathbb{N}_0$, one gets

$$\mathbb{P}_x[X_n = y] \sim C_{x,y}\frac{\rho_\circ^n}{n^{3/2}}$$

with $\rho_\circ = \frac{1}{R_\circ} = \hat{\mu}(r_0) \in]0,1[$ and

$$C_{x,y} = -\frac{1}{2\rho_\circ\sqrt{\pi}} \times \Big((I-\mathcal{R})^{-1}\,\widetilde{\mathcal{R}}\,(I-\mathcal{R})^{-1}\,\mathcal{E}(x,y) + (I-\mathcal{R})^{-1}\,\widetilde{\mathcal{E}}(x,y)\Big) > 0 \tag{2.7.40}$$

where the matrices $\mathcal{R}, \widetilde{\mathcal{R}}, \mathcal{E}$ and $\widetilde{\mathcal{E}}$ are given explicitely in Proposition 2.7.11.

□

Chapitre 3

Marches aléatoires de Markov

3.1 Cadre

Soit $(\Omega, \mathfrak{F}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé. On fixe $N \geqslant 1$ et on pose $E = \{1, 2, ..., N\}$.

On considère une chaîne de Markov $\xi = (\xi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ irréductible et apériodique sur E de matrice de transition $P = (P(k,l))_{k,l\in E}$. L'ensemble E étant fini, il existe $n_0 \geqslant 1$ tel que pour tous $k, l \in E$, on a $P^n(k,l) > 0$ pour tout $n \geqslant n_0$; les matrices positives vérifiant cette dernière propriété sont dite primitives. On note ν l'unique mesure de probabilité invariante de $(\xi_n)_{n\in\mathbb{N}}$; on a donc $\nu P = \nu$. Les fonctions de E à valeurs dans $\mathbb{C}$ seront considérées comme des vecteurs colonnes de $\mathbb{C}^N$ et les mesures sur E comme des vecteurs lignes.
On considère par ailleurs, une famille $\mu = (\mu_{kl})_{k,l\in E}$ de mesures de probabilité sur $\mathbb{Z}$ et une suite $Y = (Y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de variables aléatoires définies sur $(\Omega, \mathfrak{F}, \mathbb{P})$ à valeurs dans $\mathbb{Z}$ telles que $(\xi_n, Y_n)_{n\geqslant 0}$ soit une chaîne de Markov sur $E \times \mathbb{Z}$ de probabilité de transition $\overline{P}$ donnée par : pour tous $(k,x), (l,y) \in E \times \mathbb{Z}$

$$\overline{P}\left((k,x),(l,y)\right) = \mathbb{P}(\xi_{n+1} = l, Y_{n+1} = y / \xi_n = k, Y_n = x) = P(k,l)\mu_{kl}(y).$$

Les transitions de la suite $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ étant subordonnées à celles de la suite $(\xi_n)_{n\in\mathbb{N}}$, on dit que $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est semi-markovienne. On pose $S_0 = 0$ et $S_n = \sum_{j=1}^{n} Y_j$ pour tout $n \geqslant 1$. La suite $(\xi_n, S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une chaîne de Markov de probabilité de transition $\widetilde{P}$ définie par : pour tous $(k,x), (l,y) \in E \times \mathbb{Z}$

$$\begin{aligned} \widetilde{P}\left((k,x),(l,x+y)\right) &= \mathbb{P}(S_{n+1} = x+y, \xi_{n+1} = l / S_n = x, \xi_n = k) \\ &= P(k,l)\mu_{kl}(y). \end{aligned}$$

La suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est appelée “marche de Markov” ou “marche aléatoire à pas markoviens sur $\mathbb{Z}$”.

Nous allons à présent généraliser au cas markovien les notions classiques de dégénérescence, d'adaptation et d'apériodicité ; nous nous inspirons fortement du travail de Guivarc'h [21]. On sera amené à introduire la notion de **a**-équivalence.

Définition 3.1.1. *Soient $\mu = (\mu_{kl})_{k,l\in E}$ et $\omega = (\omega_{kl})_{k,l\in E}$ deux familles de mesures de probabilité sur $\mathbb{Z}$. On dit que le couple (P, ω) est* **a-équivalent** *à (P, μ) s'il existe un vecteur $u = (u(k))_{k\in E} \in \mathbb{Z}^N$ tel que pour tous $k, l \in E$ vérifiant $P(k,l) > 0$, on ait*

$$\omega_{kl} = \delta_{u(l)-u(k)} \star \mu_{kl}. \tag{3.1.1}$$

Pour tout $x \in \mathbb{Z}$, on désigne par δ_x la mesure de Dirac en x et on note $\Delta_x = (\Delta_x(k,l))_{k,l\in E}$ avec, $\Delta_x(k,l) = \delta_x \quad \forall k, l \in E$.

Définition 3.1.2. *On dit que le couple* (P, μ) *est* **dégénéré** *s'il existe* $x \in \mathbb{Z}$ *tel que* (P, μ) *est* **a**-*équivalent à* (P, Δ_x).

On considère $\omega = (\omega_{kl})_{k,l \in E}$ une famille de lois de probabilités sur $\mathbb{Z}$; introduisons les hypothèses suivantes.

Hypothèses 3.1.1.
Non $\mathbf{Ad_1}$ *Il existe un sous groupe strict* H *de* $\mathbb{Z}$ *($H \neq \mathbb{Z}$) tels que*

$$\mathrm{S}_{\omega_{k,l}} \subset H \quad \textit{pour tous} \quad k, l \in E \quad \textit{vérifiant} \quad P(k,l) > 0.$$

Non $\mathbf{A_1}$ *Il existe* $a \in \mathbb{Z}$ *et un sous groupe strict* H *de* $\mathbb{Z}$ *($H \neq \mathbb{Z}$) tels que*

$$\mathrm{S}_{\omega_{k,l}} \subset a + H \quad \textit{pour tous} \quad k, l \in E \quad \textit{vérifiant} \quad P(k,l) > 0.$$

Définition 3.1.3. *On dit que le couple* (P, μ) *est* **non adapté** *s'il existe une famille de lois* $\omega = (\omega_{kl})_{k,l \in E}$ *telle que le couple* (P, ω) *est équivalent à* (P, μ) *et vérifiant la condition* **Non $\mathbf{Ad_1}$**.

Définition 3.1.4. *On dit que le couple* (P, μ) *est* **non apériodique** *s'il existe une famille de lois* $\omega = (\omega_{kl})_{k,l \in E}$ *telle que le couple* (P, ω) *est équivalent à* (P, μ) *et vérifiant la condition* **Non $\mathbf{A_1}$**.

Remarque 3.1.1. *On rappelle qu'une mesure de probabilité* p *de support* S_p *est dite apériodique sur* $\mathbb{Z}$ *si pour tout* $x \in \mathbb{Z}$, *le sous groupe engendré par* $x + S_p$ *est égal à* $\mathbb{Z}$, *ce qui est équivalent à dire que*

$$\textit{pour tout} \quad z \in \mathcal{A}_{[1]} \setminus \{1\}, \quad \textit{on a} \quad |\hat{p}(z)| < 1. \tag{3.1.2}$$

Il est clair que (P, μ) *est* **apériodique** *(resp.***adapté***) dès que* μ_{kl} *est apériodique (resp.***adapté***) sur* $\mathbb{Z}$ *pour un choix du couple* (k, l) *tel que* $P(k, l) > 0$.

On a la

Proposition 3.1.1. *[21]*

(i). *Le couple* (P, μ) *est* **dégénéré** *si pour tous nombre complexe* $z \in \mathcal{A}_{[1]}$, *il existe un vecteur* $g = (g(k))_{k \in E} \in (\mathbb{C}^*)^N$ *tel que*

$$\hat{\mu}_{kl}(z) = \frac{g(l)}{g(k)} \quad \textit{pour tous} \quad k, l \in E \quad \textit{vérifiant} \quad P(k,l) > 0. \tag{3.1.3}$$

(ii). *Le couple* (P, μ) *est* **non adapté** *s'il existe un nombre complexe* $z \in \mathcal{A}_{[1]} \setminus \{1\}$ *et un vecteur* $g = (g(k))_{k \in E} \in (\mathbb{C}^*)^N$ *tels que*

$$\hat{\mu}_{kl}(z) = \frac{g(l)}{g(k)} \quad \textit{pour tous} \quad k, l \in E \quad \textit{vérifiant} \quad P(k,l) > 0. \tag{3.1.4}$$

(iii). *Le couple* (P, μ) *est* **non apériodique** *s'il existe un nombre complexe* $z \in \mathcal{A}_{[1]} \setminus \{1\}$, *un réel* θ *et un vecteur* $g = (g(k))_{k \in E} \in (\mathbb{C}^*)^N$ *tels que*

$$\hat{\mu}_{kl}(z) = e^{i\theta} \frac{g(l)}{g(k)} \quad \textit{pour tous} \quad k, l \in E \quad \textit{vérifiant} \quad P(k,l) > 0. \tag{3.1.5}$$

Nous serons aussi amenés à introduire des hypothèses sur les moments des lois μ_{kl} ; nous supposerons que les variables aléatoires Y_i admettent des moments exponentiels. Plus, précisément, on fixe deux réels α, β tels que $0 < \alpha < 1 < \beta$.

Hypothèse 3.1.1.
$\boldsymbol{M(exp)[\alpha,\beta]}$ *On dira que le couple* (P,μ) *vérifie l'hypothèse* $\boldsymbol{M(exp)[\alpha,\beta]}$ *si pour tous* $k,l \in E$ *vérifiant* $P(k,l) > 0$*, les lois* μ_{kl} *possèdent des moments exponentiels dans l'anneau* $\mathcal{A}_{[\alpha,\beta]}$*, c'est-à-dire pour tous* $k,l \in E$ *tels que* $P(k,l) > 0$*, on a*

$$\sum_{y\in\mathbb{Z}} \mu_{kl}(y)\alpha^y < +\infty \quad et \quad \sum_{y\in\mathbb{Z}} \mu_{kl}(y)\beta^y < +\infty.$$

Pour tout $z \in \mathbb{C}^*$, on pose $\hat{\mu}(z) = (\hat{\mu}_{kl}(z))_{k,l\in E}$, avec

$$\forall k,l \in E, \quad \hat{\mu}_{kl}(z) = \sum_{y\in\mathbb{Z}} \mu_{kl}(y)z^y.$$

Sous l'hypothèse $\boldsymbol{M(exp)[\alpha,\beta]}$, l'application $z \mapsto (P(k,l)\hat{\mu}_{kl}(z))_{k,l\in E}$ est ainsi bien définie sur $\mathcal{A}_{[\alpha,\beta]}$ à valeurs dans $M_N(\mathbb{C})$ l'espace des matrices de taille $N \times N$ à coefficients dans $\mathbb{C}$.

3.2 La transformée de Laplace

Rappelons pour commencer le théorème de Perron-Frobenius qui nous sera utile par la suite.

Théorème 3.2.1. *Soit* M *une matrice primitive de de* $\mathcal{M}_N(\mathbb{R})$ *(c'est à dire :* M *est positive et il existe* $n_0 \geqslant 1$ *tel que* $M^{n_0}(k,l) > 0$ *pour tous* $1 \leqslant k,l \leqslant N$*).*

(i). *le rayon spectral de* M *noté* $\rho(M)$ *est strictement positif ; c'est une valeur propre simple dominante de* M *; elle admet un vecteur propre associé qui a toutes ses coordonnées strictement positives.*

(ii). *En notant* π *la matrice de projection sur l'espace propre associé à* $\rho(M)$*, et* $R = M - \rho(M)\pi$*, on a*

$$M = \rho(M)\pi + R,$$

avec $\pi R = R\pi = 0$ *et* $\rho(R) < \rho(M)$*.*

Remarque 3.2.1. *La matrice de transition d'une chaîne de Markov irréductible et apériodique sur un ensemble fini est primitive. Etant aussi stochastique, le théorème précédent s'applique avec* $\rho(A) = 1$*.*

On suppose ici que l'hypothèse $\boldsymbol{M(exp)[\alpha,\beta]}$ est satisfaite. On introduit la famille de matrices $P_z = (P_z(k,l))_{k,l\in E}$, $z \in \mathcal{A}_{[\alpha,\beta]}$, définies par

$$P_z(k,l) = \mathbb{E}(\xi_1 = l; z^{Y_1}/\xi_0 = k) = \sum_{y\in\mathbb{Z}} P(k,l)\mu_{kl}(y)z^y = P(k,l)\hat{\mu}_{kl}(z).$$

Pour tout $z \in \mathcal{A}_{[\alpha,\beta]}$, la matrice P_z sera considérée comme un opérateur continu sur $(\mathbb{C}^N, \|\cdot\|_\infty)$.

Fait 3.2.1. *Pour tout* $n \geqslant 1$ *et* $z \in \mathcal{A}_{[\alpha,\beta]}$*, on a* $P_z^n = (P_z^n(k,l))_{k,l\in E}$ *avec*

$$P_z^n(k,l) = \mathbb{E}(\xi_n = l, z^{S_n}/\xi_0 = k).$$

Démonstration. Elle se fait par induction sur n, vérifions-la pour $n = 2$; pour tous $k, l \in E$, on a

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(\xi_2 = l; z^{S_2}/\xi_0 = k) &= \sum_{x,y\in\mathbb{Z}} z^{x+y} \sum_{j\in E} \mathbb{P}(\xi_2 = l, Y_2 = y/\xi_1 = j, Y_1 = x) \\
&\quad \mathbb{P}(\xi_1 = j, Y_1 = x/\xi_0 = k) \\
&= \sum_{x,y\in\mathbb{Z}} \sum_{j\in E} P(j,l)\mu_{jl}(y) P(k,j)\mu_{kj}(x) z^{x+y} \\
&= \sum_{j\in E} \sum_{x\in\mathbb{Z}} P(k,j)\mu_{kj}(x) z^x \sum_{y\in\mathbb{Z}} P(j,l)\mu_{jl}(y) z^y \\
&= \sum_{j\in E} P_z(k,j) P_z(j,l) \\
&= P_z^2(k,l).
\end{aligned}$$

□

3.2.1 Propriétés spectrales de la matrice P_z pour z proche de 1

La matrice $P_1 = P$ est une matrice stochastique apériodique ; d'après le théorème de Perron-Frobenius, le réel 1 est l'unique valeur propre dominante de P, cette valeur propre est simple, l'espace propre associé étant l'espace $\mathbb{C}h$ engendré par le vecteur $h = (h(k))_{k\in E}$ avec $h(k) = 1$ pour tout $k \in E$. La matrice P admet une unique mesure de probabilité invariante notée ν, on a donc $\nu h = 1$. La matrice P se décompose ainsi sous la forme : $P = \pi + R$ avec
- π matrice de rang 1 donnée par $\pi v = (\nu v)h$ pour tout $v \in \mathbb{C}^N$,
- R matrice de rayon spectral strictement inférieur à 1,
- $\pi R = R\pi = 0$.

Remarquons que l'hypothèse d'irréductibilité sur P entraîne que $\nu(k) > 0$ pour tout $k \in E$.
Lorsque $r \in [\alpha, \beta]$, la matrice P_r est une matrice positive, les hypothèses d'irréductibilité et d'apériodicité sur la matrice P impliquent que la matrice P_r est primitive ; elle satisfait donc les hypothèses du théorème de Perron-Frobenius. Plus précisément, on a le

Fait 3.2.2. *On suppose que le couple (P, μ) satisfait l'hypothèse $\boldsymbol{M(exp)[\alpha,\beta]}$. Pour tout $r \in [\alpha, \beta]$, la matrice P_r est une matrice positive et primitive ; le rayon spectral $\rho(P_r)$ est une valeur propre dominante et simple de la matrice P_r ; c'est un zéro simple de l'équation* $\det(tI - P_r) = 0$, *et l'application $r \mapsto \rho(P_r)$ est C^∞ sur $]\alpha, \beta[$.*

Démonstration. Pour montrer que $\rho(P_r)$ est une valeur propre dominante et simple de la matrice P_r, on va montrer que la matrice P_r est une matrice primitive ; comme il s'agit d'une matrice positive, le résultat sera une conséquence du théorème de Perron-Frobenius. On fixe $r \in [\alpha, \beta]$. Pour tout $n \geqslant 1$, on a $P_r^n(k,l) = \sum_{k_1,\cdots,k_{n-1}\in E} P(k,k_1)\cdots P(k_{n-1},l)\hat{\mu}_{kk_1}(r)\cdots\hat{\mu}_{k_{n-1}l}(r)$. D'où

$$P_r^n(k,l) \geqslant \left(\min_{j,p\in E} \hat{\mu}_{jp}(r)\right)^n P^n(k,l). \tag{3.2.1}$$

Or, pour tous $j, p \in E$, on a $\hat{\mu}_{jp}(r) > 0$; l'ensemble E étant fini, on a $\min_{j,p\in E} \hat{\mu}_{jp}(r) > 0$. Par ailleurs, la matrice P est une matrice irréductible et apériodique ; comme il s'agit d'une matrice finie, elle est primitive, il existe donc $n \geqslant 1$ tel que tous les coefficients de P^n sont strictement positifs. L'inégalité (3.2.1) permet alors de conclure. En particulier, $\rho(P_r)$ est un zéro simple de l'équation $\det(tI - P_r) = 0$; l'application $r \mapsto P_r$ étant C^∞ sur $]\alpha, \beta[$, il en est de même pour la fonction $r \mapsto \rho(P_r)$ par le théorème des fonctions implicites. □

Sous l'hypothèse $\boldsymbol{M(exp)[\alpha,\beta]}$, la fonction $P(k,l)\hat{\mu}_{kl}$ est analytique sur $\mathcal{A}_{]\alpha,\beta[}$ et continue sur $\mathcal{A}_{[\alpha,\beta]}$, il en est donc de même pour la fonction $z \mapsto P_z$. La théorie des perturbations permet d'étendre les propriétés spectrales de la matrice P aux matrices P_z pour z proche de 1.
On rappelle que $B(0,1)$ (resp. $\overline{B(0,1)}$) désigne la boule unité ouverte (resp. fermée) du plan complexe et on note

$$\mathbb{S}^1 = \mathcal{A}_{[1]} = \{z \in \mathbb{C}/|z| = 1\}.$$

Pour tout $\eta \in]0,1[$, on désigne par U_η le voisinage de 1 dans $\mathbb{C}$ défini par

$$U_\eta := \{z \in \mathbb{C}/1-\eta < |z| < 1+\eta, |\mathrm{Im}(z)| < \eta\}.$$

Remarquons que pour tout $z \in \mathcal{A}_{[1]}$, on a $\rho(P_z) \leqslant 1$; de plus, si $s \in B(0,1)$, la matrice $I - sP_z$ est inversible et on a

$$(I - sP_z)^{-1} = \sum_{n=0}^{+\infty} s^n P_z^n. \tag{3.2.2}$$

Les résultats suivants donnent une caractérisation spectrale des propriétés d'apériodicité et d'adaptation.

Propriété 3.2.1. *Le couple (P,μ) est* **non apériodique** *si et seulement si il existe $z \in \mathcal{A}_{[1]} \setminus \{1\}$ tel que $\rho(P_z) = 1$.*

Démonstration. Supposons que (P,μ) est **non apériodique**. Il existe donc un nombre complexe $z \in \mathcal{A}_{[1]} \setminus \{1\}$, un réel θ et un vecteur $g = (g(k))_{k\in E}$ tels que

$$\hat{\mu}_{kl}(z) = e^{i\theta}\frac{g(l)}{g(k)} \quad \text{pour tous} \quad k,l \in E \quad \text{vérifiant} \quad P(k,l) > 0.$$

On a donc

$$\forall k,l \in E, \quad P_z(k,l) = P(k,l)e^{i\theta}\frac{g(l)}{g(k)}.$$

Posons alors $f = (f(k))_{k\in E}$ avec $f(k) = \nu(k)g(k)$ pour tout $k \in E$. On a, pour tout $l \in E$

$$(fP_z)(l) = \sum_{k\in E} \nu(k)g(k)P(k,l)e^{i\theta}\frac{g(l)}{g(k)} = e^{i\theta}g(l)\sum_{k\in E}\nu(k)P(k,l)$$

et puisque $\nu P = \nu$, il s'ensuit que $fP_z = e^{i\theta}f$. Ainsi, le nombre complexe $e^{i\theta}$ est une valeur propre de $(P_z)^t$ et donc de P_z ; il vient $\rho(P_z) \geqslant 1$. D'autre part, puisque $|z| = 1$, on a $\rho(P_z) \leqslant 1$. Finalement, on a $\rho(P_z) = 1$.
Réciproquement, supposons qu'il existe $z \in \mathcal{A}_{[1]} \setminus \{1\}$ tel que $\rho(P_z) = 1$; il existe donc $\theta \in \mathbb{R}$ et $g = (g(k))_{k\in E} \in \mathbb{C}^N$ vérifiant $P_z g = e^{i\theta}g$: pour tout $k \in E$, on a

$$e^{i\theta}g(k) = \sum_{l\in E} P_z(k,l)g(l), \tag{3.2.3}$$

d'où $|g(k)| \leqslant \displaystyle\sum_{l\in E} P(k,l)|g(l)|$ et donc aussi $|g(k)|\nu(k) \leqslant \sum_{l\in E}\nu(k)P(k,l)|g(l)|$. Supposons qu'il existe $j \in E$ tel que $|g(j)|\nu(j) < \displaystyle\sum_{l\in E}\nu(j)P(j,l)|g(l)|$. Dans ce cas

$$\sum_{k\in E}|g(k)|\nu(k) < \sum_{k,l\in E}\nu(k)P(k,l)|g(l)|.$$

Comme $\nu h = 1$ et $\nu P = P$, il vient $\sum_{k\in E} |g(k)|\nu(k) < \sum_{l\in E} |g(l)|\nu(l)$, ce qui est absurde. Par ailleurs, la probabilité de transition P étant irréductible, on a $\nu(k) > 0$ pour tout $k \in E$, il s'ensuit que pour tout $k \in E$

$$|g(k)| = \sum_{l\in E} P(k,l)|g(l)|.$$

Le vecteur $|g| := (|g(k)|)_{k\in E}$ est donc un vecteur propre de P associé à la valeur propre 1, il existe donc $c \in \mathbb{R}^{*+}$ tel que $|g(k)| = c$ pour tout $k \in E$. Sans perdre en généralité, on peut supposer que $c = 1$; on a alors $g(k) \neq 0$ pour tout $k \in E$ et l'égalité (3.2.3) donne

$$1 = \sum_{l\in E} P(k,l)\hat{\mu}_{kl}(z)\frac{g(l)}{g(k)}e^{-i\theta}.$$

Or $|\hat{\mu}_{kl}(z)\frac{g(l)}{g(k)}e^{-i\theta}| \leqslant 1$ pour tous $k, l \in E$; par convexité, pour tous $k, l \in E$ tels que $P(k,l) > 0$, on a alors $\hat{\mu}_{kl}(z)\frac{g(l)}{g(k)}e^{-i\theta} = 1$, ce qui donne le résultat. □

Par un raisonnement analogue, on a la

Propriété 3.2.2. *Le couple (P, μ) est* **non adapté** *si et seulement si il existe $z \in \mathcal{A}_{[1]} \setminus \{1\}$ tel que 1 est valeur propre de P_z.*

Le raisonnement fait ci-dessus montre que lorsque (P, μ) est **non apériodique** (resp. **non adapté**), les coordonnées du vecteur $g = (g(k))_{k\in E}$ donné par (3.1.5) ont toutes le même module, que l'on peut supposer égal à 1 dans ce qui suit.

Dans ce qui suit, nous utiliserons surtout la caractérisation spectrale de l'**adaptation** (resp.**apériodicité**) donnée par la propriété 3.2.2 (resp. 3.2.1) qui est plus facile à manipuler que la première définition. Pour simplifier, on prendra désormais cette propriété comme définition de l'**adaptation** (resp.**apériodicité**).

Remarque 3.2.2. (i). *Lorsque les pas $(Y_i)_{i\geqslant 1}$ sont i.i.d de loi commune μ, il est alors connu que la condition d'adaptation énoncée comme ci-dessus est équivalente au fait que la marche aléatoire $(S_n)_{n\geqslant 0}$ soit irréductible au sens des chaînes de Markov [40]. Dès lors, une question naturelle est de savoir si cela s'étend aux marches de Markov. Autrement dit, la condition d'***adaptation** *sur le couple (P, μ) est-elle équivalente à l'irréductibilité de la chaîne de Markov $(\xi_n, S_n)_{n\geqslant 0}$ sur $E\times\mathbb{Z}$? La réponse est oui, nous remercions Sébastien Gouëzel de nous l'avoir donnée. En effet, il est facile de voir que si le couple (P, μ) est* **non adapté***, alors, en notant H le sous-groupe propre de $\mathbb{Z}$ qui apparaît dans la définition 3.1.3, un chemin de $(k, 0)$ à (k, x) n'est possible que si $x \in H$. Ainsi, on ne peut pas aller de $(k, 0)$ à $(k, 1)$, ce qui montre que la chaîne est réductible sur $E \times \mathbb{Z}$. Inversement, supposons la chaîne réductible, il faut voir que le couple (P, μ) est* **non adapté***. Par définition, ils existent $(k_0, x), (k_1, y) \in E \times \mathbb{Z}$ tels qu'on ne puisse pas aller du premier au second. La chaîne $(\xi_n)_{n\geqslant 0}$ étant irréductible sur E , on peut en revanche aller de $(k_0, 0)$ à un certain (k_1, z). On peut donc aller de $(k_0, y - z)$ à (k_1, y). Cela implique qu'on ne peut pas aller de (k_0, x) à $(k_0, y - z)$, et donc qu'on ne peut pas aller de $(k_0, 0)$ à $(k_0, y - z - x)$. Soit H l'ensemble des z tels qu'on puisse aller de $(k_0, 0)$ à (k_0, z), c'est un sous-groupe de $\mathbb{Z}$ propre par ce qui précède. Pour chaque $k \in E$, on fixe une trajectoire de la chaîne de Markov $(\xi_n, S_n)_{n\geqslant 0}$, qui va de $(k_0, 0)$ à $(k, x(k))$ pour un certain $x(k) \in \mathbb{Z}$. On va montrer que la mesure $\mu_{kl} + x(k) - x(l)$ est à valeurs dans H, ce qui conclura. Soit $w(k, l)$ dans le support de μ_{kl}, alors $(k, x(k))$ conduit à $(l, x(k) + w_{kl})$, ainsi $(k_0, 0)$ conduit à $(l, x(k) + w_{kl})$. De plus, $(k_0, 0)$ conduit à $(l, x(l))$. Fixons une trajectoire qui va de $(l, 0)$ à un certain (k_0, y). Alors $(k_0, 0)$ conduit à $(l, x(k) + w_{kl})$ qui conduit à $(k_0, x(k) + w_{kl} + y)$, donc $x(k) + w_{kl} + y \in H$ par définition de H. De même, $(k_0, 0)$ conduit à $(l, x(l))$ qui conduit à $(k_0, x(l) + y)$ donc $x(l) + y \in H$. En faisant la différence, on obtient*

$x(k) + w_{kl} - x(l) \in H$, ce qu'on voulait.

(ii). *De même, on peut montrer que le couple (P, μ) est* **apériodique** *si et seulement si la chaîne de Markov $(\xi_n, S_n)_{n \geqslant 0}$ est apériodique sur $E \times \mathbb{Z}$.*

Par la théorie des perturbations, on peut choisir $\eta > 0$ suffisament petit tel que pour tout $z \in U_\eta$, la matrice P_z admette une unique valeur propre dominante correspondant à λ_z et cette valeur propre est simple. On note $\mathbb{C}h_z$ et $\mathbb{C}\nu_z$ les espaces propres associés à P_z et à $(P_z)^t$ pour la valeur propre λ_z, les vecteurs h_z et $(\nu_z)^t$ sont déterminés de façon unique si l'on impose les conditions $\nu_z h = \sum_{k \in E} \nu_z(k) = 1$ et $\nu_z h_z = \sum_{k \in E} \nu_z(k) h_z(k) = 1$. Plus précisément, on a la

Proposition 3.2.1. *On suppose que le couple (P, μ) satisfait l'hypothèse $\boldsymbol{M(exp)[\alpha, \beta]}$. Il existe alors $\eta > 0$ et $0 < \eta_0 < 1/3$ tels que*

(i). *pour tout $z \in U_\eta$, on a $P_z = \lambda_z \pi_z + R_z$, où*
- *λ_z est l'unique valeur propre dominante de P_z, cette valeur propre est simple et satisfait $|1 - \lambda_z| \leqslant \eta_0$: il existe donc un unique vecteur ligne $\nu_z \in \mathbb{C}^N$ et un unique vecteur colonne $h_z \in \mathbb{C}^N$ tels que*

$$\sum_{k \in E} \nu_z(k) = 1, \quad \sum_{k \in E} \nu_z(k) h_z(k) = 1,$$

$$\nu_z P_z = \lambda_z \nu_z, \quad P_z h_z = \lambda_z h_z,$$

- *la matrice π_z est de rang 1 et correspond à la projection sur l'espace propre de dimension 1 associé à λ_z ; elle est donnée par $\pi_z = (h_z(k)\nu_z(l))_{k,l \in E}$,*
- *la matrice R_z est une matrice de rayon spectral $\rho(R_z) < 1 - 2\eta_0 < 1$,*
- *$\pi_z R_z = R_z \pi_z = 0$,*
- *les applications $z \mapsto P_z$, $z \mapsto \lambda_z$, $z \mapsto \pi_z$ et $z \mapsto R_z$ sont analytiques sur U_η.*

(ii). *Si de plus, (P, μ) est* **apériodique***, il existe $\rho \in]0, 1[$ tel que pour tout $z \in \mathcal{A}_{[1-\eta, 1+\eta]} \setminus U_\eta$, on ait*

$$\rho(P_z) < \rho.$$

Démonstration. Pour la preuve du 1 voir (théorème 9 du chapitre 7 de [10]).
Lorsque (P, μ) est **apériodique**, on a

$$\rho(P_z) < 1 \quad \text{pour tout} \quad z \in \mathcal{A}_{[1]} \setminus \{1\}.$$

D'après la théorie des perturbations, quitte à réduire η, pour tout $z \in \mathcal{A}_{[1-\eta, 1+\eta]} \setminus U_\eta$, on a

$$\rho(P_z) < 1.$$

L'application $z \mapsto \rho(P_z)$ étant continue sur le compact sur $\mathcal{A}_{[1-\eta, 1+\eta]} \setminus U_\eta$, on pose alors $\rho := \sup_{z \in \mathcal{A}_{[1-\eta, 1+\eta]} \setminus U_\eta} \rho(P_z)$ et on obtient le résultat voulu.

□

Remarque 3.2.3. *Notons que d'après le fait 3.2.2, les fonctions $r \mapsto \lambda_r$, $r \mapsto \pi_r$, $r \mapsto R_r$, $r \mapsto \nu_r$ et $r \mapsto h_r$ sont en fait définies sur $[\alpha, \beta]$ et sont même de classe C^∞ sur intervalle $]\alpha, \beta[$. Pour tout $r \in [\alpha, \beta]$, le nombre λ_r est un réel strictement positif et il s'agit d'une valeur propre dominante et simple de la matrice P_r. De plus, les vecteur h_r et $(\nu_r)^t$ sont à valeurs dans $(\mathbb{R}^{*+})^N$.*

La fonction $z \mapsto P_z$ étant analytique sur $\mathcal{A}_{]\alpha,\beta[}$, elle admet le développement suivant au voisinage de $z=1$

$$P_z = P + (z-1)\frac{\partial P_z}{\partial z}(1) + \frac{(z-1)^2}{2}\frac{\partial^2 P_z}{\partial z^2}(1) + o((z-1)^2). \tag{3.2.4}$$

On note
– $M = \frac{\partial P_z}{\partial z}(1)$, on a $M = (M(k,l))_{1 \leqslant k,l \leqslant n}$ avec $M(k,l) = P(k,l)\sum_{y\in\mathbb{Z}} y\mu_{kl}(y)$,

– $\Sigma = \frac{\partial^2 P_z}{\partial z^2}(1)$, on a $\Sigma = (\Sigma(k,l))_{k,l\in E}$, avec $\Sigma(k,l) = P(k,l)\displaystyle\sum_{y\in\mathbb{Z}} y(y-1)\mu_{kl}(y)$.

On écrit alors

$$P_z = P + (z-1)M + \frac{(z-1)^2}{2}\Sigma + o((z-1)^2). \tag{3.2.5}$$

Précisons à présent le développement d'ordre 2 de λ_z au voisinage de 1 à partir de celui de P_z. Introduisons les notations suivantes

$$\begin{aligned}
\lambda' &:= \frac{\partial \lambda_z}{\partial z}(1), \quad \lambda'' := \frac{\partial^2 \lambda_z}{\partial z^2}(1),\\
\pi' &:= \frac{\partial \pi_z}{\partial z}(1), \quad \pi'' := \frac{\partial^2 \pi_z}{\partial z^2}(1),\\
R' &:= \frac{\partial R_z}{\partial z}(1), \quad R'' := \frac{\partial^2 \lambda_z}{\partial z^2}(1).
\end{aligned}$$

On a la

Proposition 3.2.2. *On suppose que le couple (P,μ) vérifie l'hypothèse $\boldsymbol{M(exp)[\alpha,\beta]}$. On a*

$$\lambda' = \sum_{y\in\mathbb{Z}} y \sum_{k,l\in E} \nu(k)P(k,l)\mu_{kl}(y) = \nu M h =: \gamma.$$

Démonstration. D'après la proposition 3.2.1, pour tout $z \in U_\eta$, on a

$$P_z = \lambda_z\pi_z + R_z, \tag{3.2.6}$$

avec $\pi_z^2 = \pi_z$, $\pi_z R_z = R_z\pi_z = 0$ et $P_1 = P$, $\pi_1 = \pi$, $\lambda_1 = 1$. Il vient

$$P_z\pi_z = \lambda_z\pi_z. \tag{3.2.7}$$

En dérivant par rapport à z les deux membres de l'égalité (3.2.7), on obtient en $z=1$

$$M\pi + P\pi' = \lambda'\pi + \pi',$$

d'où $\nu M\pi h + \nu\pi' h = \lambda'\nu\pi h + \nu\pi' h$, soit $\nu M\pi h = \lambda'\nu\pi h$. En utilisant le fait que $\nu\pi = \nu$, $\pi h = h$ et que $\nu h = 1$, il vient $\lambda' = \nu M h$.

□

On suppose à présent que (P,μ) et (P,ω) vérifient l'hypothèse $\boldsymbol{M(exp)[\alpha,\beta]}$; on note P_z^ω la famille de matrices transformées de Laplace associée à ω. De manière analogue, on note λ_z^ω, π_z^ω, P_z^ω les quantités fournies par la proposition 3.2.1 relativement à la famille de lois ω et l'on pose
• $M^\omega = \frac{\partial P_z}{\partial z}(1)$, c'est-à-dire $M^\omega = (M^\omega(k,l))_{1\leqslant k,l\leqslant n}$ avec

$$\forall k,l \in E, \quad M^\omega(k,l) = P(k,l)\sum_{y\in\mathbb{Z}} y\omega_{kl}(y),$$

• $\Sigma^\omega = \frac{\partial^2 P_z^\omega}{\partial z^2}(1)$, c'est-à-dire $\Sigma^\omega = (\Sigma^\omega(k,l))_{k,l\in E}$, avec

$$\forall k,l \in E, \quad \Sigma^\omega(k,l) = P(k,l)\sum_{y\in\mathbb{Z}} y(y-1)\omega_{kl}(y),$$

• $\gamma^\omega = \nu M^\omega h = (\lambda^\omega)' = \frac{\partial \lambda_z^\omega}{\partial z}(1)$,
• $(\pi^\omega)' = \frac{\partial \pi_z^\omega}{\partial z}(1)$,
• $(R^\omega)' = \frac{\partial R_z^\omega}{\partial z}(1)$,
• $(\lambda^\omega)'' = \frac{\partial^2 \lambda_z^\omega}{\partial z^2}(1)$,
• $(\pi^\omega)'' = \frac{\partial^2 \pi_z^\omega}{\partial z^2}(1)$,
• $(R^\omega)'' = \frac{\partial^2 R_z^\omega}{\partial z^2}(1)$.

Quitte à réduire les valeurs de η et η_0, les conclusions de la proposition 3.2.1 sont valides simultanément pour les deux familles de lois μ et ω.

On va à présent calculer λ''. En faisant un calcul direct comme dans la preuve de 3.2.2, une obstruction advient ; celle d'une relation directe entre γh et Mh. Dans le fait suivant, nous montrons tout d'abord que la quantité $\lambda' = \gamma$ est conservée par changement de famille de lois a-équivalente, en deuxième étape, nous construisons une famille de lois ω qui soit a-équivalente à μ et qui vérifie de plus l'égalité

$$\gamma^\omega h = \gamma h.$$

Fait 3.2.3. (i). *On suppose que (P,μ) et (P,ω) vérifient l'hypothèse $\boldsymbol{M(exp)[\alpha,\beta]}$ et sont a-équivalents ; alors pour tout $z \in U_\eta$, on a*

$$\lambda_z = \lambda_z^\omega. \tag{3.2.8}$$

(ii). *Pour toute famille de lois μ telle que (P,μ) vérifie l'hypothèse $\boldsymbol{M(exp)[\alpha,\beta]}$, il existe une famille de lois ω telle que (P,ω) soit a-équivalent à (P,μ) et vérifie*

$$M^\omega h = \gamma^\omega h = \gamma h. \tag{3.2.9}$$

Démonstration. D'après la relation (3.1.1), pour tous $k,l \in E$ et tout $z \in \mathbb{C}^*$, on a

$$P_z^\omega(k,l) = z^{u(l)-u(k)} P_z(k,l)$$

et donc, pour tout $n \geqslant 1$

$$(P_z^\omega)^n(k,l) = z^{u(l)-u(k)} P_z^n(k,l). \tag{3.2.10}$$

Or d'après la proposition 3.2.1, pour tout $z \in U_\eta$ et $n \geqslant 1$, on a

$$P_z^n = \lambda_z^n \pi_z + R_z^n,$$

d'où

$$(P_z^\omega)^n(k,l) = \lambda_z^n z^{u(l)-u(k)}\pi_z(k,l) + z^{u(l)-u(k)}(R_z)^n(k,l),$$

avec $\rho(R_z) < 1 - 2\eta_0$ et $|\lambda_z| \geqslant 1 - \eta_0$ et donc

$$\frac{\rho(R_z)}{|\lambda_z|} < \frac{1-2\eta_0}{1-\eta_0} < 1. \tag{3.2.11}$$

Il vient $\lim\limits_{n\to+\infty} (\lambda_z)^{-n} R_z^n = 0$ et par conséquent,

$$\forall k,l \in E, \quad \lim_{n\to+\infty} \frac{(P_z^\omega)^n(k,l)}{\lambda_z^n} = z^{u(l)-u(k)}\pi_z(k,l),$$

d'où $|\lambda_z| = \rho(P_z^\omega) = |\lambda_z^\omega|$. Il existe alors $\theta_z \in \mathbb{R}$ tel que $\lambda_z = e^{i\theta_z}\lambda_z^\omega$. Par ailleurs, pour $z \in U_\eta$ et $n \geqslant 1$, on a

$$(P_z^\omega)^n h_z^\omega = (\lambda_z^\omega)^n h_z^\omega. \tag{3.2.12}$$

En combinant les relations (3.2.10) et (3.2.12), on obtient

$$\begin{aligned}(\lambda_z^\omega)^n h_z^\omega(k) &= \sum_{l\in E} z^{u(l)-u(k)} P_z^n(k,l) h_z^\omega(l) \\ &= z^{-u(k)}(\lambda_z)^n \sum_{l\in E} z^{u(l)}\pi_z(k,l)h_z^\omega(l) + z^{-u(k)}\sum_{l\in E} z^{u(l)}(R_z)^n(k,l)h_z^\omega(l) \\ &= z^{-u(k)} e^{in\theta_z}(\lambda_z^\omega)^n \sum_{l\in E} z^{u(l)}\pi_z(k,l)h_z^\omega(l) \\ &\quad + z^{-u(k)}\sum_{l\in E} z^{u(l)}(R_z)^n(k,l)h_z^\omega(l).\end{aligned}$$

Choisissons à présent $k_z \in E$ tel que $h_z^\omega(k_z) \neq 0$, l'égalité précédente entraîne

$$h_z^\omega(k_z) = e^{in\theta_z} a_z(k_z) + b_z(k_z, n),$$

avec

$$a_z(k_z) := z^{-u(k_z)} \sum_{l\in E} z^{u(l)}\pi_z(k_z,l)h_z^\omega(l)$$

et

$$b_z(k_z,n) := z^{-u(k_z)}(\lambda_z^\omega)^{-n}\sum_{l\in E} z^{u(l)}(R_z)^n(k_z,l)h_z^\omega(l).$$

L'identité 3.2.11 montre que pour tout $z \in U_\eta$,

$$\lim_{n\to+\infty} b_z(k_z,n) = 0$$

et donc $\lim_{n\to+\infty} e^{in\theta_z} = \frac{h_z^\omega(k_z)}{a_z(k_z)} \neq 0$, ce qui impose $\theta_z = 0$ et donc $\lambda_z^\omega = \lambda_z$ pour tout $z \in U_\eta$. Posons $\tilde{u} := Mh - \gamma h = Mh - (\nu Mh)h$ et remarquons que $\nu\tilde{u} = 0$ puisque $\nu h = 1$.

Montrons alors que $u := \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} P^n\tilde{u}$ existe et vérifie

$$u - Pu = \tilde{u} = Mh - \gamma h.$$

Pour cela, pour tout $m \geqslant 1$, on pose $u_m = \displaystyle\sum_{n=0}^{m} P^n\tilde{u}$. D'après ce qui précède, on peut écrire

$$\sum_{k\in E} \nu(k)\tilde{u}_m(k) = \nu u_m \sum_{n=0}^{m} \nu P^n\tilde{u} = \sum_{n=0}^{m} \nu\tilde{u} = 0. \tag{3.2.13}$$

Le support de ν étant égal à E, la suite $(u_m)_{m\geqslant 1}$ est bornée dans $(\mathbb{C}^N, \|\cdot\|_\infty)$. Pour montrer qu'elle converge, il suffit de montrer qu'elle possède une unique valeur d'adhérence. Supposons qu'elle en admette deux notées u et u', avec $u \neq u'$. On a $u - Pu = \tilde{u} = u' - Pu'$, d'où $P(u-u') = u - u'$. Il existe ainsi une constante c telle que $u - u' = ch$ avec $c = \nu(u-u')$. Or pour tout $m \geqslant 1$, on a $\nu u_m = 0$, d'où $\nu u = \nu u' = 0$ et donc $c = 0$, ce qui est absurde. Par conséquent $u := \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} P^n\tilde{u}$ existe et vérifie

$$u - Pu = \tilde{u} = Mh - \gamma h. \tag{3.2.14}$$

Considérons la famille ω de mesures définie par

$$\forall k, l \in E, \quad \omega_{kl} = \delta_{u(l)-u(k)} \star \mu_{kl}.$$

On a

$$\forall k, l \in E, \quad M^\omega(k,l) = M(k,l) + P(k,l)(u(l) - u(k)).$$

Il vient

$$(M^\omega h)(k) = (Mh)(k) + \sum_{k \in E} P(k,l)u(l) - u(k).$$

D'où, d'après l'égalité (3.2.14),

$$M^\omega h = Mh + Pu - u = Mh - (Mh - \gamma h) = \gamma h.$$

Par ailleurs $\gamma^\omega = \nu M^\omega h = \nu(\gamma h) = \gamma \nu h = \gamma$. D'où le résultat.

□

On a la

Proposition 3.2.3. *On suppose que le couple (P, μ) satisfait l'hypothèse $\boldsymbol{M(exp)[\alpha, \beta]}$. Soit ω une famille de lois telle que (P, ω) soit a-équivalent à (P, μ) et satisfasse les égalités (3.2.8) et (3.2.9). On a*

$$\lambda'' = \sum_{y \in \mathbb{Z}} y(y-1) \sum_{k,l \in E} \nu(k)P(k,l)\omega_{kl}(y) = \nu \Sigma^\omega v.$$

Démonstration. Pour tout $z \in U_\eta$, on a

$$\pi_z^\omega P_z = \lambda_z^\omega \pi_z^\omega, \tag{3.2.15}$$

avec

$$\begin{array}{rcl} P_z^\omega & = & P + (z-1)M^\omega + \dfrac{(z-1)^2}{2}\Sigma^\omega + o((z-1)^2), \\ \lambda_z^\omega & = & 1 + (z-1)\gamma^\omega + \dfrac{(z-1)^2}{2}(\lambda^\omega)'' + o((z-1)^2), \\ \text{et} \quad \pi_z^\omega & = & \pi + (z-1)(\pi^\omega)' + \dfrac{(z-1)^2}{2}(\pi^\omega)'' + o((z-1)^2), \end{array}$$

si bien qu'en identifiant les coefficients d'ordre 2 dans la relation (3.2.15), on obtient

$$(\lambda^\omega)''\pi + (\pi^\omega)'' + 2\gamma^\omega(\pi^\omega)' = (\pi^\omega)''P + \pi\Sigma^\omega + 2(\pi^\omega)'M^\omega.$$

En utilisant le fait que $Ph = \pi h = h$, il vient

$$(\lambda^\omega)''h + 2(\pi^\omega)'(\gamma^\omega)h = \pi\Sigma^\omega h + 2(\pi^\omega)'M^\omega h.$$

Or, d'après la relation (3.2.9), on a $M^\omega h = \gamma^\omega h$, d'où $(\lambda^\omega)''h = \pi\Sigma^\omega h$. En multipliant les deux membres de cette égalité par ν et en utilisant les relations $\nu\pi = \nu$ et $\nu h = 1$, on obtient

$$(\lambda^\omega)'' = \nu\Sigma^\omega h.$$

Par ailleurs, d'après le fait 3.2.3 1), pour tout $z \in U_\eta$, on a $\lambda_z = \lambda_z^\omega$, en particulier $\lambda'' = (\lambda^\omega)''$, ce qui permet de conclure. □

Soit ω une famille de lois telle que (P,ω) soit a-équivalent à (P,μ) et satisfaisse les égalités (3.2.8) et (3.2.9). On pose

$$\begin{aligned}\sigma^2 &= \sum_{y\in\mathbb{Z}} y^2 \sum_{k,l\in E} \nu(k)P(k,l)\omega_{kl}(y) - \left(\sum_{y\in\mathbb{Z}} y \sum_{k,l\in E} \nu(k)P(k,l)\omega_{kl}(y)\right)^2 \\ &= \sum_{y\in\mathbb{Z}} y^2 \sum_{k,l\in E} \nu(k)P(k,l)\omega_{kl}(y) - \gamma^2.\end{aligned}$$

Remarquons que $\sigma^2 \geqslant 0$ et que $\sigma^2 = 0$ si et seulement si il existe $x \in \mathbb{Z}$ tel que pour tous $k,l \in E$ vérifiant $P(k,l) > 0$, on ait $\omega_{kl} = \delta_x$; autrement dit, s'il existe $x \in \mathbb{Z}$ tel que le couple (P,μ) soit a-équivalent à (P,Δ_x). On a le

Fait 3.2.4. *Le couple (P,μ) est dégénéré si et seulement si pour tout $z \in \mathcal{A}_{[1]}$, on a $\rho(P_z) = 1$.*

Démonstration. Supposons que (P,μ) est dégénéré, il existe alors un vecteur $u = (u(k))_{k\in E}$ et $x \in \mathbb{Z}$ tels que pour tous $k,l \in E$ vérifiant $P(k,l) > 0$, on ait $\mu_{kl} = \delta_{u(l)-u(k)} \star \delta_x$. Il vient $\hat{\mu}_{kl}(z) = z^x z^{u(l)-u(k)}$ dès que $P(k,l) > 0$ et donc

$$P_z(k,l) = P(k,l) z^x z^{u(l)-u(k)}.$$

Pour tout $z \in \mathcal{A}_{[1]}$, on définit le vecteur ligne $g_z = (g_z(k))_{k\in E}$, avec

$$\forall k \in E, \quad g_z(k) := \nu(k) z^{u(k)}.$$

Comme $\nu P = P$, on a $g_z P_z = z^x g_z$ pour tout $z \in \mathcal{A}_{[1]}$. Ainsi pour tout $z \in \mathcal{A}_{[1]}$, le nombre complexe z^x est une valeur propre de $(P_z)^t$ et par suite de P_z ; comme $|z|^x = |z| = 1$, il vient $\rho(P_z) = 1$.
Réciproquement supposons que pour tout $z \in \mathcal{A}_{[1]}$, on a $\rho(P_z) = 1$. Par conséquent, pour tout $z \in \mathcal{A}_{[1]} \cap U_\eta$, on a $|\lambda_z| = 1$. D'où pour t assez petit,

$$|\lambda_{e^{it}}|^2 = 1. \tag{3.2.16}$$

Or d'après les propositions 3.2.2 et 3.2.3, on a $\frac{\partial \lambda_{e^{it}}}{\partial t}(0) = i\lambda' = i\gamma$ et

$$\frac{\partial^2 \lambda_{e^{it}}}{\partial t^2}(0) = -(\lambda'' + \gamma) = -(\sigma^2 + \gamma^2),$$

d'où $\lambda_{e^{it}} = 1 + i\gamma t - (\sigma^2+\gamma^2)t^2/2 + o(t^2)$ et donc $|\lambda_{e^{it}}|^2 = \big(1 - (\sigma^2+\gamma^2)t^2/2\big)^2 + \gamma^2 t^2 + o(t^2) = 1 - \sigma^2 t^2 + o(t^2)$. L'équation (3.2.16) entraîne alors que $\sigma^2 = 0$. $\square$

Remarque 3.2.4. *Les faits 3.2.1 et 3.2.4 montrent que lorsque le couple (P,μ) est* **apériodique**, *il est non dégénéré et $\sigma^2 > 0$.*

Résumons ici les hypothèses qu'on est amenés à introduire pour le couple (P,μ). Pour tout $r > 0$ et $0 < \alpha \leqslant \beta$, on note les

Hypothèses 3.2.1.
non adapté *Il existe $z \in \mathcal{A}_{[1]} \setminus \{1\}$ tel que 1 est valeur propre de P_z.*
non apériodique *Il existe $z \in \mathcal{A}_{[1]} \setminus \{1\}$ tel que $\rho(P_z) = 1$.*
M(r) *Pour tous $k,l \in E$ vérifiant $P(k,l) > 0$, les lois μ_{kl} possèdent des moments d'ordre r dans l'anneau $\mathcal{A}_{[\alpha,\beta]}$, c'est-à-dire pour tous $k,l \in E$ tels que $P(k,l) > 0$, on a*

$$\sum_{y\in\mathbb{Z}} \mu_{kl}(y) r^y < +\infty.$$

***M(exp)*[α, β]** *Pour tous $k, l \in E$ vérifiant $P(k,l) > 0$, les lois μ_{kl} possèdent des moments exponentiels dans l'anneau $\mathcal{A}_{[\alpha,\beta]}$, c'est-à-dire pour tous $k, l \in E$ tels que $P(k,l) > 0$, on a*

$$\sum_{y\in\mathbb{Z}} \mu_{kl}(y)\alpha^y < +\infty \quad \textit{et} \quad \sum_{y\in\mathbb{Z}} \mu_{kl}(y)\beta^y < +\infty.$$

C *Le couple (P, μ) satisfait* ***M(exp)*[α, β]** *et*

$$\lambda' = \sum_{y\in\mathbb{Z}} y \sum_{k,l\in E} \nu(k)P(k,l)\mu_{kl}(y) = \gamma = 0.$$

min([α, β]) *Le couple (P, μ) satisfait* ***M(exp)*([α, β])** *et la fonction $t \mapsto \lambda_t$ définie sur $[\alpha, \beta]$ atteint son minimum dans $]\alpha, \beta[$.*

3.3 Récurrence de la marche de Markov sur $\mathbb{Z}$

Dans ce paragraphe, on étudie les propriétés de récurrence de la marche de Markov $(\xi_n, S_n)_{n\geqslant 0}$ sur $E\times\mathbb{Z}$. On introduit le noyau de Green $\widetilde{G}$ de la chaîne $(\xi_n, S_n)_{n\geqslant 0}$ défini pour tous $(k,x), (l,y) \in E\times\mathbb{Z}$ par

$$\begin{aligned}
\widetilde{G}((k,x),(l,x+y)) &= \sum_{n\geqslant 0} \mathbb{P}(\xi_n = l, S_n = x+y/\xi_0 = k, S_0 = x) \\
&= \sum_{n\geqslant 0} \mathbb{P}(\xi_n = l, S_n = y/\xi_0 = k, S_0 = 0) \\
&= \widetilde{G}((k,0),(l,y)) \in \mathbb{R}^+ \cup \{+\infty\}. \qquad (3.3.1)
\end{aligned}$$

La chaîne $(\xi_n, S_n)_{n\geqslant 0}$ est récurrente sur $E\times\mathbb{Z}$ si et seulement si pour tous $(k,x), (l,y) \in E\times\mathbb{Z}$, on a $\widetilde{G}((k,x),(l,x+y)) = \widetilde{G}((k,0),(l,y)) = +\infty$; il suffit donc de considérer la quantité $\widetilde{G}(k,l)(y) := \widetilde{G}((k,0),(l,y))$ pour tous $k, l \in E$ et $y \in \mathbb{Z}$.

On introduit les quantités $\widetilde{G}_r$, $0 < r < 1$, définies pour tous $k, l \in E$ et $y \in \mathbb{Z}$ par

$$\widetilde{G}_r(k,l)(y) = \sum_{n\geqslant 0} \mathbb{P}(\xi_n = l, S_n = y/\xi_0 = k, S_0 = 0)r^n.$$

Remarquons que pour tout $0 \leqslant r < 1$, on a $0 \leqslant \widetilde{G}_r((k,0),(l,y)) < +\infty$ et $\widetilde{G}(k,l)(y) = \lim_{\substack{r\to 1\\ r<1}} \widetilde{G}_r(k,l)(y)$.
Fixons $k, l \in E$ et $y \in \mathbb{Z}$; en utilisant le théorème de Fubini, pour tout $0 < r < 1$, on peut écrire

$$\begin{aligned}
\widetilde{G}_r(k,l)(y) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{-ity} \sum_{n\geqslant 0} r^n \mathbb{E}(e^{itS_n}, \xi_n = l/\xi_0 = k, S_0 = 0)dt \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{-ity} \sum_{n\geqslant 0} r^n P^n_{e^{it}}(k,l)dt. \qquad (3.3.2)
\end{aligned}$$

Notons que d'après la proposition 3.2.1, il existe $\alpha_0 > 0$ tel que pour tout t vérifiant $|t| \leqslant \alpha_0$, on ait $e^{it} \in U_\eta$ et les conclusions de 3.2.1-1) sont alors valides pour $z = e^{it}$. A contrario, pour tout $|t| > \alpha_0$, on a $e^{it} \in \mathcal{A}_{[1]} \setminus U_\eta$ et les conclusions de 3.2.1-2) sont vérifiées pour $z = e^{it}$.
Remarquons aussi que lorsqu'il s'agit de la transformation $t \mapsto P_{e^{it}}$, la condition **M(2)** suffit pour mener les calculs ci-dessus. L'énoncé suivant propose une condition nécessaire et suffisante à la récurrence de la chaîne (ξ_n, S_n).

Proposition 3.3.1. *On suppose que le couple (P,μ) est* **adapté**. *Pour tous $k,l \in E$ et $y \in \mathbb{Z}$, on a*

$$\widetilde{G}(k,l)(y) = +\infty \quad \Leftrightarrow \quad \textit{il existe } \eta = \eta_{k,l,y} \leqslant \alpha_0 \textit{ tel que } \quad \sup_{r<1} \int_{-\eta}^{\eta} \mathrm{Re}\left(\frac{\lambda_{e^{it}} e^{-ity} \pi_{e^{it}}(k,l)}{1 - r\lambda_{e^{it}}}\right) dt = +\infty.$$

Démonstration. Fixons $k,l \in E$ et $y \in \mathbb{Z}$. D'après la relation (3.3.2), pour tout $r \in [0,1[$, on a

$$\widetilde{G}_r(k,l)(y) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{-ity} \sum_{n \geqslant 0} r^n P^n_{e^{it}}(k,l) dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{-ity} (I - rP_{e^{it}})^{-1}(k,l) dt.$$

Quitte à réduire la valeur de α_0, on peut supposer que $0 < \alpha_0 < \pi$. Décomposons alors l'expression $\widetilde{G}_r$ en $I^1_r(\alpha_0,k,l)(y) + I^2_r(\alpha_0,k,l)(y)$ avec

$$I^1_r(\alpha_0,k,l)(y) = \frac{1}{2\pi} \int_{|t|<\alpha_0} e^{-ity} \sum_{n \geqslant 0} r^n P^n_{e^{it}}(k,l) dt = \frac{1}{2\pi} \int_{|t|<\alpha_0} e^{-ity} (I - rP_{e^{it}})^{-1}(k,l) dt$$

et

$$\begin{aligned} I^2_r(\alpha_0,k,l)(y) &= \frac{1}{2\pi} \int_{t \in [-\pi,\pi] \setminus]\alpha_0,\alpha_0[} e^{-ity} \sum_{n \geqslant 0} r^n P^n_{e^{it}}(k,l) dt \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{t \in [-\pi,\pi] \setminus]\alpha_0,\alpha_0[} e^{-ity} (I - rP_{e^{it}})^{-1}(k,l) dt. \end{aligned}$$

Lorsque $|t| \leqslant \alpha_0$, on a $(I - rP_{e^{it}})^{-1} = \frac{r\lambda_{e^{it}}}{1 - r\lambda_{e^{it}}} \pi_{e^{it}} + (I - rR_{e^{it}})^{-1}$; le terme $I^1_r(\alpha_0,k,l)(y)$ se décompose alors en $I^1_r(\alpha_0,k,l)(y) = I^{11}_r(k,l)(y) + I^{12}_r(\alpha_0,k,l)(y)$, avec

$$I^{11}_r(\alpha_0,k,l)(y) = \frac{1}{2\pi} \int_{|t|<\alpha_0} \frac{r\lambda_{e^{it}} e^{-ity}}{1 - r\lambda_{e^{it}}} \pi_{e^{it}}(k,l) dt$$

et

$$I^{12}_r(\alpha_0,k,l)(y) = \frac{1}{2\pi} \int_{|t|<\alpha_0} e^{-ity} (I - rR_{e^{it}})^{-1}(k,l) dt.$$

D'après la proposition 3.2.1, l'application $(r,t) \mapsto (I - rR_{e^{it}})^{-1}(k,l)$ est continue sur le compact $[0,1] \times [-\pi,\pi]$; par le théorème de convergence dominée, la quantité $I^{12}_r(k,l)(y)$ admet une limite dans $\mathbb{C}$ lorsque r tend vers 1. De même, la fonction $(r,t) \mapsto (I - rP_{e^{it}})^{-1}(k,l)$ est continue sur le compact $[0,1] \times [-\pi,\pi] \setminus]\alpha_0,\alpha_0[$ et la quantité $I^2_r(\alpha_0,k,l)(y)$ admet donc une limite dans $\mathbb{C}$ lorsque r tends vers 1. Finalement, on a

$$\lim_{\substack{r \to 1 \\ r<1}} \widetilde{G}_r(k,l)(y) = \sup_{r<1} \widetilde{G}_r(k,l)(y) = +\infty \quad \text{ssi} \quad \sup_{r<1} \mathrm{Re}(I^{11}_r(\alpha_0,k,l)(y)) = +\infty,$$

Pour conclure, il suffit de remarquer que $\sup_{r<1} \mathrm{Re}(I^{11}_r(\alpha_0,k,l)(y)) = +\infty$ si et seulement si il existe $\eta = \eta_{k,l,y} \leqslant \alpha_0$ tel que $\sup_{r<1} \mathrm{Re}(I^{11}_r(\eta,k,l)(y)) = +\infty$. □

On a la

Proposition 3.3.2. *On suppose que le couple (P,μ) est* **adapté** *et satisfait les hypothèses* $\mathbf{M(1)}$ *et* $\mathbf{C}$. *La chaîne $(\xi_n, S_n)_{n \geqslant 0}$ est alors récurrente sur $E \times \mathbb{Z}$.*

Nous utiliserons le lemme suivant.

Lemme 3.3.1. *Sous les hypothèses de la proposition 3.3.2, pour tous $k, l \in E$ et $y \in \mathbb{Z}$, il existe $\eta_{k,l,y} > 0$ tel que que pour tout $r \in]0, 1[$ et pour tout $t \in [-\eta_{k,l,y}, \eta_{k,l,y}]$*

$$\mathrm{Re}\left(\frac{\lambda_{e^{it}} e^{-ity} \pi_{e^{it}}(k,l)}{1 - r\lambda_{e^{it}}}\right) > \frac{(1-r)\pi(k,l)}{2|1 - r\lambda_{e^{it}}|^2},$$

en particulier la fonction $\Psi_r(k,l)(y) : t \mapsto \mathrm{Re}\left(\frac{\lambda_{e^{it}} e^{-ity} \pi_{e^{it}}(k,l)}{1 - r\lambda_{e^{it}}}\right)$ est positive sur $[-\eta_{k,l,y}, \eta_{k,l,y}]$.

Démonstration. du Lemme 3.3.1 Fixons $k, l \in E$ et $y \in \mathbb{Z}$. Pour tout $t \in [-\alpha_0, \alpha_0]$, on a

$$\begin{aligned}
\Psi_r(k,l)(y)(t) &= \frac{1}{|1 - r\lambda_{e^{it}}|^2} \mathrm{Re}\big[\lambda_{e^{it}} e^{-ity} \pi_{e^{it}}(k,l)(1 - r\overline{\lambda_{e^{it}}})\big] \\
&= \frac{1}{|1 - r\lambda_{e^{it}}|^2} \big[\mathrm{Re}(\lambda_{e^{it}} e^{-ity} \pi_{e^{it}}(k,l)) - r|\lambda_{e^{it}}|^2 \mathrm{Re}(e^{-ity} \pi_{e^{it}}(k,l))\big].
\end{aligned}$$

De plus, il existe $\eta_{k,l,y} < \alpha_0$ tel que pour tout $t \in [-\eta_{k,l,y}, \eta_{k,l,y}]$, on ait

$$e^{-ity} = 1 + o(1), \quad \lambda_{e^{it}} = 1 + o(1) \quad \text{et} \quad \pi_{e^{it}}(k,l) = \pi(k,l) + o(1),$$

où $o(1)$ est une fonction qui tend vers zéro lorsque t tend vers zéro. Comme $\pi(k,l) \in \mathbb{R}$, il vient $\mathrm{Re}(\lambda_{e^{it}} e^{-ity} \pi_{e^{it}}(k,l)) = \pi(k,l) + o(1)$ pour tout $t \in [-\eta_{k,l,y}, \eta_{k,l,y}]$. De même, quitte à réduire la valeur de $\eta_{k,l,y}$, pour tout $t \in [-\eta_{k,l,y}, \eta_{k,l,y}]$, on a

$$|\lambda_{e^{it}}|^2 \mathrm{Re}(e^{-ity} \pi_{e^{it}}(k,l)) = \pi(k,l) + o(1),$$

d'où

$$\mathrm{Re}(\lambda_{e^{it}} e^{-ity} \pi_{e^{it}}(k,l)) - r|\lambda_{e^{it}}|^2 \mathrm{Re}(e^{-ity} \pi_{e^{it}}(k,l)) = (1-r)(\pi(k,l) + o(1)). \tag{3.3.3}$$

(la fonction $t \mapsto o(1)$ dans l'égalité ci-dessus est à valeurs réelles et ne dépend pas du paramètre r mais uniquement du choix de k, l et y). Puisque $\lim\limits_{t \to 0} o(1) = 0$, on peut choisir $0 < \eta_{k,l,y} \leqslant \alpha_{k,l,y}$ de façon à avoir $o(1) > -\frac{\pi(k,l)}{2}$ dès que $|t| < \eta_{k,l,y}$, d'où le résultat. □

Démonstration. de la Proposition 3.3.2
Fixons $k, l \in E$ et $y \in \mathbb{Z}$. Grâce à la proposition 3.3.1, pour montrer que $\widetilde{G}(k,l)(y) = +\infty$, il suffit de montrer que trouver $\eta = \eta_{k,l,y} \leqslant \alpha_0$ tel que $\sup\limits_{r<1} \int_{-\eta}^{\eta} \Psi_r(k,l)(y)(t)dt = +\infty$. D'après le lemme 3.3.1, pour tout $r \in]0, 1[$, il existe $0 < \eta = \eta_{k,l,y} \leqslant \alpha_{k,l,y}$ tel que pour $|t| < \eta$, on ait

$$\mathrm{Re}\left(\frac{\lambda_{e^{it}} e^{-ity} \pi_{e^{it}}(k,l)}{1 - r\lambda_{e^{it}}}\right) \geqslant \frac{(1-r)\frac{\pi(k,l)}{2}}{(1 - r\mathrm{Re}(\lambda_{e^{it}}))^2 + r^2 (\mathrm{Im}(\lambda_{e^{it}}))^2}.$$

Sous les hypothèses $\mathbf{M(1)}$ et $\mathbf{C}$, on a $\frac{\partial \lambda_{e^{it}}}{\partial t}(0) = i\lambda' = i\gamma = 0$, la fonction $t \mapsto \lambda_{e^{it}}$ vérifie $\lambda_{e^{it}} = 1 + to(1)$. Fixons $\epsilon > 0$, on peut supposer quitte à réduire la valeur de η que pour tout $|t| < \eta$, on a

$$|\mathrm{Im}(\lambda_{e^{it}})| \leqslant \epsilon|t| \quad \text{et} \quad |1 - \mathrm{Re}(\lambda_{e^{it}})| \leqslant \epsilon|t|.$$

il vient,

$$\begin{aligned}
\int_{-\eta}^{\eta} \Psi_r(k,l)(y)(t)dt &\geqslant (1-r)\frac{\pi(k,l)}{2} \int_{-\eta}^{\eta} \frac{dt}{3r^2\epsilon^2 t^2 + 2(1-r)^2} \\
&\geqslant (1-r)\frac{\pi(k,l)}{2} \int_{-\eta}^{\eta} \frac{dt}{3\epsilon^2 t^2 + 2(1-r)^2} \\
&\geqslant \frac{\pi(k,l)}{4(1-r)} \int_{-\eta}^{\eta} \frac{dt}{1 + \frac{3\epsilon^2 t^2}{2(1-r)^2}}.
\end{aligned}$$

En faisant le changement de variables $u = \frac{\sqrt{3}t}{\sqrt{2}(1-r)}$, on obtient

$$\int_{-\eta}^{\eta} \Psi_r(k,l)(y)(t)dt \geqslant \frac{\sqrt{2}\pi(k,l)}{4\sqrt{3}} \int_{\frac{-2\eta}{1-r}}^{\frac{2\eta}{1-r}} \frac{du}{1+\epsilon^2 u^2}$$

Ainsi $\sup_{r<1} \int_{-\eta}^{\eta} \Psi_r(k,l)(y)(t)dt \geqslant \sqrt{\frac{2}{3}}\pi\frac{\pi(k,l)}{4\epsilon}$. Le paramètre ϵ étant arbitraire, on a finalement $\sup_{r<1} \int_{-\eta}^{\eta} \Psi_r(k,l)(y)(t)dt = +\infty$, ce qui permet de conclure. □

Remarque 3.3.1.

(i). *La démonstration de la proposition 3.3.1 peut être adaptée en dimension supérieure en généralisant de manière naturelle les hypothèses ; notamment, on peut montrer de façon analogue que lorsque les Y_i sont à valeurs dans $\mathbb{Z}^2$ et en supposant que le couple (P,μ) est* **adapté** *et satisfait les hypothèses* **M(2)** *et* **C***, la chaîne $(\xi_n, S_n)_{n\geqslant 0}$ est récurrente.*

(ii). *On suppose que le couple (P,μ) est* **adapté***. La proposition 3.3.1 peut être démontrée autrement via un résultat d'Alsmeyer [2] qui montre la récurrence dans un cadre plus général sous la condition*

$$\frac{S_n}{n} \xrightarrow{\mathbb{P}_\nu} 0;$$

condition qui est satisfaite ici dès que l'hypothèse **C** *est vérifiée par une application du théorème ergodique (Voir [2], page 2).*

3.4 Factorisation de Wiener-Hopf et conséquences

Dans ce qui suit, on suppose que le couple (P,μ) est non dégénéré et satisfait les hypothèses $\boldsymbol{M(exp)[\alpha,\beta]}$ et **C** ($\gamma = 0$) ; la marche de Markov $(\xi_n, S_n)_{n\geqslant 0}$ est alors récurrente, en particulier, pour tout $k \in E$, on a

$$\mathbb{P}_k(\tau^+ < +\infty) = 1 \quad \text{et} \quad \mathbb{P}_k(\tau^{*-} < +\infty) = 1.$$

On adaptera ici les notations du chapitre 2 au cas markovien et on utilisera de façon essentielle les résultats de la section 2.1.

3.4.1 La factorisation de Wiener-Hopf et son prolongement

On énonce dans cette partie la factorisation de Wiener-Hopf pour les marches de Markov. Cela nécessite un travail préparatoire ; le résultat complet sera énoncé dans le corollaire 3.4.1 ; il s'agit de la généralisation de la proposition 2.2.1 au cas markovien. Nous allons dans un premier temps nous intéresser aux familles de fonctions $\left(B_{(s,\cdot)}\right)_{s\in\mathbb{C}}$ et $\left(C_{(s,\cdot)}\right)_{s\in\mathbb{C}}$ définies formellement pour $s,z \in \mathbb{C}$ par :

$$B_{(s,z)} = \left(B_{(s,z)}(k,l)\right)_{1\leqslant k,l\leqslant N} \quad \text{et} \quad C_{(s,z)} = \left(C_{(s,z)}(k,l)\right)_{1\leqslant k,l\leqslant N},$$

$$\begin{aligned} \text{avec} \quad B_{(s,z)}(k,l) &= \sum_{y\in\mathbb{Z}}\sum_{n\geqslant 1} \mathbb{P}_k(\xi_n = l, S_1 > S_n, S_2 > S_n \cdots S_{n-1} > S_n, S_n = y)s^n z^y \\ &= \sum_{n\geqslant 1} \mathbb{E}_k(\xi_n = l, S_1 > S_n, S_2 > S_n \cdots S_{n-1} > S_n; z^{S_n})s^n \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} C_{(s,z)}(k,l) &= \sum_{y\in\mathbb{Z}}\sum_{n\geqslant 1}\mathbb{P}_k(\xi_n = l, S_1\geqslant 0, S_2\geqslant 0\cdots S_{n-1}\geqslant 0, S_n = y)s^n z^y \\ &= \sum_{n\geqslant 1}\mathbb{E}_k(\xi_n = l, \tau^{*-}\geqslant n; z^{S_n})s^n. \end{aligned}$$

Pour alléger les notations, on écrira $B_s := B_{(s,\cdot)}$ et $C_s := C_{(s,\cdot)}$.
Remarquons que les quantités $B_{(s,z)}$ et $C_{(s,z)}$ sont bien définies pour tous s et z tels que $|s| < 1$ et $|z| = 1$. Autrement dit, pour tout $s\in\mathbb{C}$ tel que $|s| < 1$, on a $B_s \in \mathcal{V}^N_{[1]}$ et $C_s \in \mathcal{V}^N_{[1]}$. Si l'on applique formellement les opérateurs $\mathcal{P}$ et $\mathcal{N}^*$ à B_s et C_s, on a

• $\mathcal{P}B_{(s,z)} = \big(\mathcal{P}B_{(s,z)}(k,l)\big)_{k,l\in E}$ avec

$$\begin{aligned} \mathcal{P}B_{(s,z)}(k,l) &= \sum_{y\geqslant 0}\sum_{n\geqslant 1}\mathbb{P}_k(\xi_n = l, S_1 > S_n, S_2 > S_n\cdots S_{n-1} > S_n, S_n = y)s^n z^y \\ &= \sum_{n\geqslant 1} s^n\mathbb{E}_k(\xi_n = l, S_1 > S_n, S_2 > S_n\cdots S_{n-1} > S_n\geqslant 0; z^{S_n}), \end{aligned}$$

• $\mathcal{N}^*B_{(s,z)} = \big(\mathcal{N}^*B_{(s,z)}(k,l)\big)_{k,l\in E}$ avec

$$\begin{aligned} \mathcal{N}^*B_{(s,z)}(k,l) &= \sum_{y<0}\sum_{n\geqslant 1}\mathbb{P}_k(\xi_n = l, S_1 > S_n, S_2 > S_n\cdots S_{n-1} > S_n, S_n = y)s^n z^y \\ &= \sum_{n\geqslant 1} s^n\mathbb{E}_k(\xi_n = l, S_1 > S_n, S_2 > S_n\cdots S_{n-1} > S_n, S_n < 0; z^{S_n}), \end{aligned}$$

• $\mathcal{P}C_{(s,z)} = \big(\mathcal{P}C_{(s,z)}(k,l)\big)_{k,l\in E}$ avec

$$\begin{aligned} \mathcal{P}C_{(s,z)}(k,l) &= \sum_{y\geqslant 0}\sum_{n\geqslant 1}\mathbb{P}_k(\xi_n = l, S_1\geqslant 0, S_2\geqslant 0\cdots S_{n-1}\geqslant 0, S_n = y)s^n z^y \\ &= \sum_{n\geqslant 1} s^n\mathbb{E}_k(\xi_n = l, \tau^{*-} > n; z^{S_n}), \end{aligned}$$

• $\mathcal{N}^*C_{(s,z)} = \big(\mathcal{N}^*C_{(s,z)}(k,l)\big)_{k,l\in E}$ avec

$$\begin{aligned} \mathcal{N}^*C_{(s,z)}(k,l) &= \sum_{y<0}\sum_{n\geqslant 1}\mathbb{P}_k(\xi_n = l, S_1\geqslant 0, S_2\geqslant 0\cdots S_{n-1}\geqslant 0, S_n = y)s^n z^y \\ &= \mathbb{E}_k(\xi_{\tau^{*-}} = l; s^{\tau^{*-}} z^{S_{\tau^{*-}}}). \end{aligned}$$

Remarque 3.4.1. (i). *On fixe $s\in\overline{B(0,1)}$; pour tout $z\in\mathcal{A}_{[\alpha,+\infty[}$ et $k,l\in E$, on a*

$$\mathcal{N}^*C_{|s|}(|z|)(k,l)\leqslant \mathbb{E}_k(\xi_n = l; |z|^{S_{\tau^{*-}}}). \tag{3.4.1}$$

Puisque le couple (P,μ) satisfait l'hypothèse $\boldsymbol{M(exp)[\alpha,\beta]}$, il en est de même pour le couple (P,μ^{*-}) [1] *et pour tout $z\in\mathcal{A}_{[\alpha,+\infty[}$, on a*

$$\mathcal{N}^*C_{(|s|,|z|)}(k,l) < +\infty.$$

1. Comme le couple (P,μ) satisfait l'hypothèse $\boldsymbol{M(exp)[\alpha,\beta]}$, la loi μ satisfait l'hypothèse $\boldsymbol{M(exp)[\alpha,\beta]}$ pour tous $k,l\in E$ tels que $P(k,l) > 0$; d'après la proposition 1.1.3, chapitre 1 , il en est de même pour la loi $\mu^{*-}_{k,l}$ (resp. $\mu^{+}_{k,l}$) dès que $P(k,l) > 0$. Ainsi le couple (P,μ^{*-}) (resp. (P,μ^{+})) satisfait aussi l'hpothèse $\boldsymbol{M(exp)[\alpha,\beta]}$.

Pour $s \in \overline{B(0,1)}$, l'application $z \mapsto \mathcal{N}^* C_{(s,z)}$ est donc une fonction à valeurs dans $(\mathcal{M}_N(\mathbb{C}), \|\cdot\|_\infty)$ analytique sur $\mathcal{A}_{]\alpha,+\infty[}$ et continue sur $\mathcal{A}_{[\alpha,+\infty[}$. De plus lorsque $|z|>1$, on a

$$\forall k \in E, \quad \sum_{l\in E} \mathcal{N}^* C_{(|s|,|z|)}(k,l) < \sum_{l \in E} \mathbb{E}_k(\xi_{\tau^{*-}} = l) = 1,$$

d'où $\|\mathcal{N}^* C_{(|s|,|z|)}\|_\infty < 1$ et la matrice $I - \mathcal{N}^* C_{(s,z)}$ est alors inversible. En particulier, l'application $z \mapsto (I - \mathcal{N}^* C_{(s,z)})^{-1}$ est analytique sur $\mathcal{A}_{]1,+\infty[}$.

(ii). *L'inégalité (3.4.1) montre que pour tout $z \in \mathcal{A}_{[\alpha,+\infty[}$, l'application $s \mapsto \mathcal{N}^* C_{(s,z)}$ est analytique sur $B(0,1)$ et continue sur $\mathbb{S}^1$.*

Lorsque les acroissements Y_i sont i.i.d, on a le principe de dualité qui entraîne notamment

$$\mathbb{E}(S_1 > S_n, S_2 > S_n \cdots S_{n-1} > S_n; z^{S_n}) = \mathbb{E}(S_1 < 0, S_2 < 0, \cdots, S_{n-1} < 0; z^{S_n})$$

puisque $\mathcal{L}(Y_1, \cdots, Y_n) = \mathcal{L}(Y_n, \cdots, Y_1)$; ceci permet de mener l'étude des quantités $\mathcal{P}B_s$ de façon similaire à celle de $\mathcal{N}^* C_s$. Cela n'est plus possible dans le cas markovien et nous sommes amenés à considérer la chaîne duale (ξ'_n, S'_n) sur $E \times \mathbb{Z}$ de probabilité de transition P' donnée par : pour tous $(k,x),(l,y) \in E \times \mathbb{Z}$

$$\begin{aligned} P'((k,x),(l,y)) &= \mathbb{P}(\xi'_{n+1} = l, S'_{n+1} = x+y, /\xi'_n = k, Y'_n = x) \\ &= \frac{\nu(l)}{\nu(k)} P(l,k)\mu_{lk}(y). \end{aligned}$$

On pose alors $\tau'^+ = \inf\{n \geqslant 1 / S'_n \geqslant 0\}$ et pour $z \in \mathbb{C}^*$ et $s \in \mathbb{C}$,

$$B'_{(s,z)} = (B'_{(s,z)}(k,l))_{k,l\in E},$$

$$\begin{aligned} \text{avec} \quad B'_{(s,z)}(k,l) &= \sum_{y\in\mathbb{Z}} \sum_{n\geqslant 1} \mathbb{P}_k(\xi'_n = l, S'_1 < 0, S'_2 < 0 \cdots S'_{n-1} < 0, S'_n = y) s^n z^y \\ &= \sum_{n \geqslant 1} \mathbb{E}_k(\xi'_n = l, S'_1 < 0, S'_2 < 0 \cdots S'_{n-1} < 0; z^{S'_n}) s^n \\ &= \sum_{n\geqslant 1} \mathbb{E}_k(\xi'_n = l, \tau'^+ \geqslant n; z^{S'_n}) s^n. \end{aligned}$$

On note $X := \mathrm{diag}\,(\nu(1), \cdots \nu(N))$.

Fait 3.4.1. *Pour tous $s, z \in \mathbb{R}^{*+}$, on a $B_{(s,z)} = X (B'_{(s,z)})^t X^{-1}$.*

Démonstration. On fixe $s, z \in \mathbb{R}^{*+}$. Pour tous $k, l \in E$ et $n \geqslant 1$, on pose

$$B_z^{(n)}(k,l) := \mathbb{E}_k(\xi_n = l, S_n < S_1, S_n < S_2 \cdots S_n < S_{n-1}; z^{S_n})$$

et

$$B_z'^{(n)}(k,l) := \mathbb{E}_k(\xi'_n = l, S'_1 < 0, S'_2 < 0 \cdots S'_{n-1} < 0; z^{S'_n}).$$

On a

$$B_{(s,z)}(k,l) = \sum_{n\geqslant 1} s^n C_z^{(n)}(k,l) \quad \text{et} \quad B'_{(s,z)}(k,l) = \sum_{n \geqslant 1} s^n B_z'^{(n)}(k,l). \tag{3.4.2}$$

Or

$$\begin{aligned} B_z'^{(n)}(k,l) = & \sum_{k_1,\cdots,k_{n-1}\in E} \sum_{y'_1,\cdots,y'_n \in \mathbb{Z}} \frac{\nu(k_1)}{\nu(k)} \cdots \frac{\nu(l)}{\nu(k_{n-1})} z^{y'_1+\cdots+y'_n} 1_{\{y'_1<0\}} \cdots 1_{\{y'_1+\cdots+y'_{n-1}<0\}} \\ & \times P(k_1,k)\mu_{k_1k}(y'_1) \cdots P(l,k_{n-1})\mu_{lk_{n-1}}(y'_1). \end{aligned} \tag{3.4.3}$$

En posant $y'_j = y_{n+1-j}$ et $\xi'_j = \xi_{n-j}$ pour $1 \leqslant j \leqslant n$, on obtient

$$\begin{aligned} B'^{(n)}_z(k,l) &= \frac{\nu(l)}{\nu(k)} \sum_{k_1,\cdots,k_{n-1}\in E} \sum_{y_1,\cdots,y_n\in\mathbb{Z}} z^{y_1+\cdots+y_n} 1_{\{y_n<0\}} \cdots 1_{\{y_n+\cdots+y_2<0\}} \\ &\quad \times P(k_1,k)\mu_{k_1 k}(y_n)\cdots P(l,k_{n-1})\mu_{lk_{n-1}}(y_1) \\ &= \frac{\nu(l)}{\nu(k)} \mathbb{E}_l(\xi_n = k, S_n < S_{n-1},\cdots,S_n < S_1; z^{S_n}) \\ &= \frac{\nu(l)}{\nu(k)} B^{(n)}_z(l,k). \end{aligned} \tag{3.4.4}$$

On obtient le résultat en combinant les relations (3.4.2) et (3.4.4). □

Remarque 3.4.2. *(i). D'après le fait 3.4.1, on peut écrire pour $s \in \mathbb{C}$ et $z \in \mathbb{C}^*$*

$$\mathcal{P}B_{(s,z)} = X(\mathcal{P}B'_{(s,z)})^t X^{-1} \tag{3.4.5}$$

avec

$$\begin{aligned} \mathcal{P}B'_{(s,z)}(k,l) &= \sum_{n\geqslant 1} \mathbb{E}_k(\xi'_n = l, \tau'^+ \geqslant n, S'_n \geqslant 0; z^{S'_n}) s^n \\ &= \mathbb{E}_k(\xi'_{\tau'^+} = l; s^{\tau'^+} z^{S'_{\tau'^+}}). \end{aligned} \tag{3.4.6}$$

On fixe $s \in \overline{B(0,1)}$. D'après les relations (3.4.5) et (3.4.6) on a

$$\mathcal{P}B_{(|s|,|z|)}(k,l) = \frac{\nu(k)}{\nu(l)} \mathcal{P}B'_{(|s|,|z|)}(k,l). \tag{3.4.7}$$

Puisque le couple (P,μ) satisfait l'hypothèse $\boldsymbol{M(exp)[\alpha,\beta]}$, il en est de même pour (P,μ'), où $\mu' = (\mu'_{kl} := \mu_{lk})_{k,l\in E}$ et donc aussi pour le couple $(P,(\mu')^+)$ (voir chapitre : théorie des fluctuations) ; pour tout $z \in \mathcal{A}_{[0,\beta]}$ et tous $k,l \in E$, on a

$$\mathcal{P}B_{(|s|,|z|)}(k,l) < +\infty.$$

Lorsque $|s| \leqslant 1$, l'application $z \mapsto \mathcal{P}B_{(s,z)}$ est alors une fonction à valeurs dans $(\mathcal{M}_N(\mathbb{C}), \|\cdot\|_\infty)$ analytique sur $\mathcal{A}_{[0,\beta[}$ et continue sur $\mathcal{A}_{[0,\beta]}$. De plus lorsque $|z|<1$, on a

$$\forall k \in E, \quad \sum_{l\in E} PB_{|s|}(|z|)(k,l) < \sum_{l\in E} \mathbb{E}_k(\xi'_n = l) = 1,$$

d'où

$$\|PB_{(s,z)}\|_\infty \leqslant \|PB_{(|s|,|z|)}\|_\infty < 1$$

et la matrice $I - \mathcal{P}B_{(s,z)}$ est donc inversible. En particulier, l'application $z \mapsto (I-\mathcal{P}B_{(s,z)})^{-1}$ est analytique sur $\mathcal{A}_{[0,1[}$.

(ii). L'inégalité (3.4.7) montre que pour tout $z \in \mathcal{A}_{[0,\beta]}$ fixé, l'application $s \mapsto \mathcal{P}B_{(s,z)}$ est analytique sur $B(0,1)$ et continue sur $\mathbb{S}^1$.

L'hypothèse d'apériodicité sur (P,μ) permet de montrer que $(s,z) = (1,1)$ est la seule valeur possible dans $\overline{B(0,1)} \times \mathcal{A}_{[1]}$ pour laquelle la matrice $I - sP_z$ est non inversible. Plus précisément, on a le

Fait 3.4.2. *On suppose que (P,μ) est* **apériodique** *et que le couple (P,μ) satisfait les hypothèse* $\boldsymbol{M(exp)[\alpha,\beta]}$ *et* **C**. *Alors,* *(i). pour tout $s \in \overline{B(0,1)}$ et $z \in \mathcal{A}_{[1]} \setminus \{1\}$, la matrice $I - sP_z$ est inversible et*

$$(I - sP_z)^{-1} = \sum_{n=0}^{+\infty} s^n P_z^n,$$

(ii). de même, pour tout $s \in \mathbb{S}^1 \setminus \{1\}$ et $z \in \mathcal{A}_{[1]}$, la matrice $I - sP_z$ est inversible et

$$(I - sP_z)^{-1} = \sum_{n=0}^{+\infty} s^n P_z^n.$$

Démonstration. On fixe $s, z \in \mathbb{C}$ tels que $|s| \leqslant 1$ et $|z| = 1$. Supposons que la matrice $I - sP_z$ n'est pas inversible ; le réel $\frac{1}{s}$ est une valeur propre de P_z et l'on a donc

$$1 \leqslant \left|\frac{1}{s}\right| \leqslant \rho(P_z) \leqslant 1. \tag{3.4.8}$$

Il vient $\rho(P_z) = 1$, puis $z = 1$ puisque (P, μ) est apériodique. Ainsi $\frac{1}{s}$ est une valeur propre de P. Or l'inégalité (3.4.8) entraîne aussi que $|\frac{1}{s}| = 1$; comme 1 est l'unique valeur propre dominante de P, il vient $s = 1$. Ainsi pour $s, z \in \mathbb{C}$ tels que $|s| \leqslant 1$ et $|z| = 1$, la matrice $I - sP_z$ est inversible si et seulement si $(s, z) \neq (1, 1)$. □

La proposition suivante donne la factorisation de Wiener-Hopf dans le cas markovien en explicitant les inverses des facteurs lorsque $s \in B(0, 1)$.

Proposition 3.4.1. *On suppose que le couple (P, μ) satisfait les hypothèses $\boldsymbol{M(exp)[\alpha,\beta]}$ et* **C**. *Alors,*

(i). *pour tous $s \in \overline{B(0,1)}$ et $z \in \mathcal{A}_{[1]}$, on a*

$$I - sP_z = (I - \mathcal{P}B_{(s,z)})(I - \mathcal{N}^* C_{(s,z)}), \tag{3.4.9}$$

(ii). *pour tous $s \in B(0, 1)$, $z \in \mathcal{A}_{[1]}$ et $k, l \in E$, on a*

$$\mathcal{P}C(|s|, 1)(k, l) < +\infty \quad \textit{et} \quad \mathcal{N}^* B(|s|, 1)(k, l) < +\infty$$

et les matrices $I - \mathcal{P}B_{(s,z)}$ et $I - \mathcal{N}^* C_{(s,z)}$ sont inversibles avec

$$(I - \mathcal{P}B_{(s,z)})^{-1} = I + \mathcal{P}C_{(s,z)}, \tag{3.4.10}$$

$$(I - \mathcal{N}^* C_{(s,z)})^{-1} = I + \mathcal{N}^* B_{(s,z)}. \tag{3.4.11}$$

Démonstration. On fixe $s, z \in \mathbb{C}$ tel que $|s| < 1$ et $|z| = 1$. D'après le fait 3.4.2, la matrice $I - sP_z$ est inversible et on a

$$(I - sP_z)^{-1} = \sum_{n=0}^{+\infty} s^n P_z^n.$$

D'après le fait 3.2.1, on a alors pour tous $k, l \in E$,

$$\begin{aligned}
(I - sP_z)^{-1}(k, l) &= I(k, l) + \sum_{n=1}^{+\infty} s^n P_z^n(k, l) \\
&= I(k, l) + \sum_{n=1}^{+\infty} s^n \mathbb{E}(\xi_n = l, z^{S_n} / \xi_0 = k) \\
&= I(k, l) + S_1(k, l) + S_2(k, l),
\end{aligned}$$

$$\text{avec} \quad S_1(k,l) = \sum_{n=1}^{+\infty} s^n \mathbb{E}(\xi_n = l, n < \tau^{*-}; z^{S_n}/\xi_0 = k) = \mathcal{P}C_{(s,z)}$$
$$\text{et} \quad S_2(k,l) = \sum_{n=1}^{+\infty} s^n \mathbb{E}(\xi_n = l, n \geqslant \tau^{*-}; z^{S_n}/\xi_0 = k).$$

en reprenant le raisonnement utilisé dans la démonstration de la proposition 2.2.1lorsque les variables Y_i étaient supposées i.i.d, on a

$$\begin{aligned}
S_2(k,l) &= \sum_{j\in E} \mathbb{E}_k(\xi_{\tau^{*-}} = j; s^{\tau^{*-}} z^{S_{*-}}) \sum_{n\geqslant 0} s^n \mathbb{E}_j(\xi_n = l; z^{S_n}) \\
&= \sum_{j\in E} \mathcal{N}^* C_{(s,z)}(k,j)(I - sP_z)^{-1}(j,l) \\
&= \left(\mathcal{N}^* C_{(s,z)}(I - sP_z)^{-1}\right)(k,l).
\end{aligned}$$

Il vient $(I - sP_z)^{-1} = I + \mathcal{P}C_{(s,z)} + \mathcal{N}^* C_{(s,z)}(I - sP_z)^{-1}$, d'où

$$(I - \mathcal{N}^* C_{(s,z)})(I - sP_z)^{-1} = I + \mathcal{P}C_{(s,z)}. \tag{3.4.12}$$

Montrons à présent que

$$F_{(s,z)} := (I - \mathcal{P}B_{(s,z)})(I + \mathcal{P}C_{(s,z)}) = I; \tag{3.4.13}$$

l'égalité (3.4.9) en découlera via l'identité (3.4.12). On a

$$F_{(s,z)} = I + \mathcal{P}C_{(s,z)} - \mathcal{P}B_{(s,z)} - \mathcal{P}B_{(s,z)}\mathcal{P}C_{(s,z)}. \tag{3.4.14}$$

Évaluons les quantités $\left(\mathcal{P}B_{(s,z)}\mathcal{P}C_{(s,z)}\right)(k,l)$ pour $k,l \in E$. Grâce à la propriété de Markov, on peut écrire

$$\begin{aligned}
&\left(\mathcal{P}B_{(s,z)}\mathcal{P}C_{(s,z)}\right)(k,l) \\
= &\sum_{n\geqslant 1} s^n \mathbb{E}_k \Bigg[S_1 > S_n, \cdots, S_{n-1} > S_n \geqslant 0; z^{S_n} \\
&\sum_{m\geqslant 1} \mathbb{E}_{\xi_n}\left(\xi_m = l, S_1 \geqslant 0, \cdots S_m \geqslant 0 s^m z^{S_m}\right)\Bigg] \\
= &\sum_{n,m\geqslant 1} s^{n+m} \mathbb{E}_k \left(\xi_{n+m} = l, S_1 > S_n, \cdots, S_{n-1} > S_n \geqslant 0,\right. \\
&\left. S_{n+1} \geqslant S_n, \cdots, S_{n+m} \geqslant S_n; z^{S_{n+m}}\right) \\
= &\sum_{p\geqslant 2} s^p \sum_{1\leqslant n\leqslant p-1} \mathbb{E}_k \left(\xi_p = l, S_1 > S_n, \cdots, S_{n-1} > S_n \geqslant 0,\right. \\
&\left. S_{n+1} \geqslant S_n, \cdots, S_p \geqslant S_n; z^{S_p}\right).
\end{aligned} \tag{3.4.15}$$

En combinant les relations (3.4.14) et (3.4.15), on obtient

$$\begin{aligned}
F_s(z)(k,l) &= I(k,l) + \sum_{n\geqslant 1} s^n \mathbb{E}_k\left[\xi_n = l, S_1 \geqslant 0, \cdots, S_n \geqslant 0; z^{S_n}\right] \\
&\quad - \sum_{n\geqslant 1} s^n \mathbb{E}_k\left[\xi_n = l, S_1 > S_n, \cdots, S_{n-1} > S_n \geqslant 0; z^{S_n}\right] \\
&\quad - \sum_{p\geqslant 2} s^p \sum_{1\leqslant n\leqslant p-1} \mathbb{E}_k\left[\xi_p = l, S_1 > S_n, \cdots, S_{n-1} > S_n \geqslant 0,\right. \\
&\quad \left. S_{n+1} \geqslant S_n, \cdots, S_p \geqslant S_n; z^{S_p}\right] \\
&= I(k,l) + \sum_{n\geqslant 1} s^n \mathbb{E}_k\left[\xi_m = l, S_1 \geqslant 0, \cdots, S_n \geqslant 0; z^{S_n}\right] \\
&\quad - s\mathbb{E}_k\left[\xi_n = l, S_1 \geqslant 0; z^{S_1}\right] \\
&\quad - \sum_{p\geqslant 2} s^p \sum_{1\leqslant n\leqslant p} \mathbb{E}_k\left[\xi_p = l, S_1 > S_n, \cdots, S_{n-1} > S_n \geqslant 0,\right. \\
&\quad \left. S_{n+1} \geqslant S_n, \cdots, S_p \geqslant S_n; z^{S_p}\right) \\
&= I(k,l) + \sum_{n\geqslant 1} s^n \mathbb{E}_k\left[\xi_m = l, S_1 \geqslant 0, \cdots, S_n \geqslant 0; z^{S_n}\right] \qquad (3.4.16) \\
&\quad - \sum_{p\geqslant 1} s^p \sum_{1\leqslant n\leqslant p} \mathbb{E}_k\left[\xi_p = l, S_1 > S_n, \cdots, S_{n-1} > S_n \geqslant 0,\right. \\
&\quad \left. S_{n+1} \geqslant S_n, \cdots, S_p \geqslant S_n; z^{S_p}\right].
\end{aligned}$$

Pour établir la relation (3.4.13), il suffit de montrer que

$$\begin{aligned}
&\sum_{n\geqslant 1} s^n \mathbb{E}_k\left[\xi_m = l, S_1 \geqslant 0, \cdots, S_n \geqslant 0; z^{S_n}\right] \\
= &\sum_{n\geqslant 1} s^n \sum_{1\leqslant p\leqslant n} \mathbb{E}_k\left[\xi_n = l, S_1 > S_p, \cdots, S_{p-1} > S_p \geqslant 0, S_{p+1} \geqslant S_p, \cdots, S_n \geqslant S_p; z^{S_n}\right].
\end{aligned}$$

Pour cela, pour tout $n \geqslant 1$, on considère la variable aléatoire T_n à valeurs dans $\mathbb{N}^*$ définie par

$$T_n = \inf\{1 \leqslant m \leqslant n / S_m = \min_{1\leqslant j\leqslant n} S_j\}.$$

On a

$$\begin{aligned}
&\sum_{n\geqslant 1} s^n \mathbb{E}_k\left[\xi_m = l, S_1 \geqslant 0, \cdots, S_n \geqslant 0; z^{S_n}\right] \\
= &\sum_{n\geqslant 1} s^n \sum_{1\leqslant p\leqslant n} \mathbb{E}_k\left[\xi_n = l, S_1 \geqslant 0, \cdots, S_n \geqslant 0, T_n = p\right] \\
= &\sum_{n\geqslant 1} s^n \sum_{1\leqslant p\leqslant n} \mathbb{E}_k\left[\xi_n = l, S_1 > S_p, \cdots, S_{p-1} > S_p \geqslant 0, S_{p+1} \geqslant S_p, \cdots, S_n \geqslant S_p; z^{S_n}\right]
\end{aligned}$$

et la relation (3.4.13) est ainsi démontrée. En particulier, la matrice $I - \mathcal{P}B_{(s,z)}$ est inversible et

$$(I - \mathcal{P}B_{(s,z)})^{-1} = I + \mathcal{P}C_{(s,z)}.$$

De manière analogue, on peut montrer que la matrice $I - \mathcal{N}^*C_{(s,z)}$ est inversible et

$$(I - \mathcal{N}^*C_{(s,z)})^{-1} = I + \mathcal{N}^*B_{(s,z)}.$$

La proposition 3.4.1 est ainsi démontrée lorsque $|s| < 1$ et $|z| = 1$. Supposons à présent que $|s| = 1$. D'après les remarques 3.4.1(ii) et 3.4.2(ii), pour tout $z \in \mathcal{A}_{[1]}$, les applications $s \mapsto \mathcal{N}^*C_{(s,z)}$ et $s \mapsto \mathcal{P}B_{(s,z)}$ sont continues sur $\overline{B(0,1)}$ et il en est de même pour l'application $s \mapsto I - sP_z$. Ainsi pour tout $z \in \mathcal{A}_{[1]}$, l'égalité (3.4.9) est bien satisfaite lorsque $s \in \mathbb{S}^1$. □

Remarque 3.4.3. *D'après les remarques 3.4.1 et 3.4.2, pour tous $s \in \overline{B(0,1)}$ et $z \in \mathcal{A}_{]1,+\infty[}$, on a $\rho(\mathcal{N}^*C_{(s,z)}) < 1$; de même, pour tout $z \in \mathcal{A}_{[0,1[}$, on a $\rho(\mathcal{P}B_{(s,z)}) < 1$. La démarche suivie dans la démonstration de la relation (3.4.13) reste valide lorsque $s \in \overline{B(0,1)}$ et $z \in \mathcal{A}_{[0,1[}$; pour ces valeurs de s et z, la matrice $I - \mathcal{P}B_{(s,z)}$ est donc inversible et l'on a*

$$(I - \mathcal{P}B_{(s,z)})^{-1} = I + \mathcal{P}C_{(s,z)}, \tag{3.4.17}$$

avec $\mathcal{P}C(|s|,|z|)(k,l) < +\infty$ pour tous $k,l \in E$.
De manière analogue, pour tout $s \in \overline{B(0,1)}$ et $z \in \mathcal{A}_{]1,+\infty[}$, la matrice $I - \mathcal{N}^*C_{(s,z)}$ est inversible et l'on a

$$(I - \mathcal{N}^*C_s(z))^{-1} = I + \mathcal{N}^*B_{(s,z)}, \tag{3.4.18}$$

avec $\mathcal{N}^*C(|s|,|z|)(k,l) < +\infty$, pour tous $k,l \in E$.

Proposition 3.4.2. *On suppose que le couple (P,μ) est* **apériodique** *et satisfait les hypothèses* $\boldsymbol{M(exp)[\alpha,\beta]}$ *et* **C**. *Alors, pour tous $s \in \overline{B(0,1)} \setminus \{1\}$ et $k,l \in E$, on a*

(i).
$$\sum_{y\geqslant 0}\Big|\sum_{n\geqslant 1} s^n \mathbb{P}_k(\xi_n = l, S_1 \geqslant 0, ..., S_{n-1} \geqslant 0, S_n = y)\Big| < +\infty$$

et pour tout $z \in \mathcal{A}_{[0,1]}$, la matrice $I - \mathcal{P}B_{(s,z)}$ est inversible, avec

$$(I - \mathcal{P}B_{(s,z)})^{-1} = I + \mathcal{P}C_{(s,z)}, \tag{3.4.19}$$

(ii).
$$\sum_{y<0}\Big|\sum_{n\geqslant 1} s^n \mathbb{P}_k(\xi_n = l, S_1 > S_n, \cdots, S_{n-1} > S_n, S_n = y)\Big| < +\infty$$

et pour tout $z \in \mathcal{A}_{[1,+\infty[}$, la matrice $I - \mathcal{N}^*C_{(s,z)}$ est inversible, avec

$$(I - \mathcal{N}^*C_{(s,z)})^{-1} = (I + \mathcal{N}^*B_{(s,z)}). \tag{3.4.20}$$

Démonstration. Démontrons l'assertion 1).

On fixe $s \in \overline{B(0,1)} \setminus \{1\}$. D'après la remarque 3.4.3, le résultat annoncé est obtenu pour tout $z \in \mathcal{A}_{[0,1[}$. Supposons à présent $|z| = 1$; d'après la proposition 3.4.1, l'égalité (3.4.9) est satisfaite :

$$I - sP_z = (I - \mathcal{P}B_{(s,z)})(I - \mathcal{N}^*C_{(s,z)}).$$

D'après le fait 3.4.2$-(ii)$, la matrice $I - sP_z$ est inversible, il en est alors de même pour la matrice $I - \mathcal{P}B_{(s,z)}$ puisque $\det(I - sP_z) = \det(I - \mathcal{P}B_{(s,z)})\det(I - \mathcal{N}^*C_{(s,z)}) \neq 0$. Par conséquent, $\rho(\mathcal{P}B_{(s,z)}) < 1$ pour tout $|z| \leqslant 1$. Par ailleurs, d'après la remarque 3.4.2$-(i)$, la fonction $s \mapsto \mathcal{P}B_{(s,z)}$ est analytique sur $\mathcal{A}_{[0,\beta[}$. Par la théorie des perturbations, il existe $\eta_s > 0$ tel que pour tout $z \in \mathcal{A}_{[0,1+\eta_s]}$, on ait $\rho(\mathcal{P}B_{(s,z)}) < 1$ et la matrice $I - \mathcal{P}B_{(s,z)}$ est alors inversible ; on en déduit que la fonction $z \mapsto (I - \mathcal{P}B_{(s,z)})^{-1}$ est analytique sur $\mathcal{A}_{[0,1+\eta_s]}$. Ainsi, pour tous $k,l \in E$ et $0 < \gamma < 1$, la fonction $f : z \mapsto (I - \mathcal{P}B_{(s,z)})^{-1}(k,l)$ est développable en série de Laurent sur $\mathcal{A}_{[\gamma,1+\eta_s]}$; on écrit alors

$$\forall z \in \mathcal{A}_{[\gamma,1+\eta_s]}, \quad f(z) = \sum_{y\in\mathbb{Z}} a_y(k,l) z^y,$$

avec pour tous $0 < r \leqslant 1 + \eta_s$ et $y \in \mathbb{Z}$,

$$a_y(k,l) = \frac{1}{2i\pi r} \int_{|z|=r} \frac{f(z)}{z^{y+1}} dz.$$

Choisissons $0 < r < 1$ et $z \in \mathcal{A}_{[r]}$; d'après la remarque 3.4.3, la quantité $\mathcal{P}C_{(s,z)}(k,l)$ est une série absolument convergente et on a $(I - \mathcal{P}B_{(s,z)})^{-1}(k,l) = I + \mathcal{P}C_{(s,z)}(k,l)$. D'où

$$a_y = \begin{cases} I(k,l) + \sum_{n \geqslant 1} s^n \mathbb{P}_k(\xi_n = l, S_1 \geqslant 0, ..., S_{n-1} \geqslant 0, S_n = y) & \text{si} \quad y \geqslant 0, \\ I(k,l) & \text{si} \quad y < 0. \end{cases}$$

En particulier pour $|z| = 1$, on a

$$\sum_{y \geqslant 0} \Big| \sum_{n \geqslant 1} s^n \mathbb{P}_k(\xi_n = l, S_1 \geqslant 0, ..., S_{n-1} \geqslant 0, S_n = y) \Big| < +\infty$$

$$\text{et} \quad (I - \mathcal{P}B_{(s,z)})^{-1}(k,l) = (I + \mathcal{P}C_{(s,z)})(k,l),$$

ce qui donne le résultat. On opère de la même façon pour montrer le 2). □

Ainsi, en combinant les propositions 3.4.1 et 3.4.2, on obtient le

Corollaire 3.4.1. *On suppose que le couple (P, μ) satisfait les hypothèses* $\boldsymbol{M(exp)[\alpha,\beta]}$ *et* **C**. *Alors,*

(i). *pour tout $s \in \overline{B(0,1)}$ et $z \in \mathcal{A}_{[1]}$, on a*

$$I - sP_z = (I - \mathcal{P}B_{(s,z)})(I - \mathcal{N}^* C_{(s,z)}) \tag{3.4.21}$$

(ii). *lorsque de plus (P, μ) est* **apériodique**, *pour tous $s \in \overline{B(0,1)} \setminus \{1\}$, $z \in \mathcal{A}_{[1]}$ et $k, l \in E$, on a*

$$\sum_{y \geqslant 0} \left| \sum_{n \geqslant 1} s^n \mathbb{P}_k(\xi_n = l, S_1 \geqslant 0, ..., S_{n-1} \geqslant 0, S_n = y) \right| < +\infty,$$

$$\sum_{y < 0} \left| \sum_{n \geqslant 1} s^n \mathbb{P}_k(\xi_n = l, S_1 > S_n, \cdots, S_{n-1} > S_n, S_n = y) \right| < +\infty$$

et les matrices $I - \mathcal{P}B_{(s,z)}$ et $I - \mathcal{N}^* C_{(s,z)}$ sont inversibles, avec

$$(I - \mathcal{P}B_{(s,z)})^{-1} = I + \mathcal{P}C_{(s,z)}, \tag{3.4.22}$$

$$(I - \mathcal{N}^* C_{(s,z)})^{-1} = I + \mathcal{N}^* B_{(s,z)}. \tag{3.4.23}$$

Sous l'hypothèse d'apériodicité, pour tout $s \in \overline{B(0,1)} \setminus \{1\}$, les fonctions $I - \mathcal{N}^* C_s$ et $I - \mathcal{P}B_s$ sont donc les facteurs d'une $\mathcal{P}$-factorisation de la fonction $A_{(s,\cdot)} := z \mapsto 1 - sP_z$ à valeurs dans $\mathcal{V}_{[1]}^N$.

Remarque 3.4.4. *On fixe $s \in \overline{B(0,1)}$. Sous les hypothèses du corollaire 3.4.1, la fonction $z \mapsto A_{(s,z)} := z \mapsto 1 - sP_z$ est analytique sur $\mathcal{A}_{[\alpha,\beta]}$. D'après les remarques 3.4.1 et 3.4.2, les applications $z \mapsto I - \mathcal{P}B_{(s,z)}$ et $z \mapsto I - \mathcal{N}^* C_{(s,z)}$ sont analytiques sur $\mathcal{A}_{[\alpha,\beta]}$. Par unicité du prolongement analytique, l'identité (3.4.21) est donc en fait valide pour tout $z \in \mathcal{A}_{[\alpha,\beta]}$.*

3.4.2 Une variante de la factorisation de Wiener-Hopf au voisinage de $s = 1$

On suppose que les hypothèses $\boldsymbol{M(exp)[\alpha, \beta]}$ et $\mathbf{C}$ sont satisfaites. Dans ce paragraphe, on va donner une variante de la factorisation de Wiener-Hopf sur un voisinage de $s = 1$. La principale difficulté à contourner dans ce cas étant la non iversibilité de la matrice $I - sP_z$ lorsque (s, z) varie dans un voisinage de $(1, 1)$; Les zéros de l'équation implicites $1 - s\lambda_z$ vont jouer un rôle important et nous pouvons faire le parallèle ici avec les zéros de l'équation $1 - s\hat{\mu}(z)$ dans le cas où les accroissements sont i.i.d (Voir le chapitre 2, section 2.2.2)).

3.4.2.1 Étude de l'équation implicite $1 - s\lambda_z = 1$

D'après la remarque 3.2.3, l'application $r \mapsto \lambda_r$ est strictement positive et de classe C^∞ sur $[\alpha, \beta]$. En outre, dans [32], il a été démontré que lorsque le couple (P, μ) est non dégénéré, la fonction $r \mapsto \lambda_r$ est strictement convexe sur $]\alpha, \beta[$; elle admet par suite un minimum unique dans $[\alpha, \beta]$. Comme $\frac{\partial \lambda_z}{\partial z}(1) = \lambda' = \gamma = 0$, ce minimum est atteint en $r = 1$ et vaut $\lambda_1 = 1$. On conclut ainsi que la fonction $r \mapsto \lambda_r$, définie sur $[\alpha, \beta]$ est à valeurs dans $[1, +\infty[$. Par stricte convexité, elle est même bijective de $[\alpha, 1]$ sur $[1, \lambda_\alpha]$ et de $[1, \beta]$ sur $[1, \lambda_\beta]$; on note $r \mapsto \lambda_r^-$ et $r \mapsto \lambda_r^+$ les fonctions réciproques respectives. Fixons à présent $s > 0$ et résolvons l'équation

$$1 - s\lambda_r = 0 \tag{3.4.24}$$

sur $[\alpha, \beta]$, en fonction de la valeur du paramètre s. On pose $\eta_1 = \frac{1}{\min(\lambda_\alpha, \lambda_\beta)}$. Lorsque $\eta_1 < s < 1$, cette équation admet deux solutions distinctes

$$z_s^- := \lambda_{\frac{1}{s}}^- \quad \text{et} \quad z_s^+ := \lambda_{\frac{1}{s}}^+; \tag{3.4.25}$$

de plus, puisque $\frac{\partial \lambda_z}{\partial z}(z_s^\pm) \neq 0$, ces deux racines sont simples. A contrario pour $s = 1$, cette équation admet $r = 1$ comme unique solution et l'on a $\frac{\partial \lambda_z}{\partial z}(1) = 0$; autrement dit $z_1^- = z_1^+ = 1$ est racine double. L'étude qui précède repose sur la stricte convexité de la fonction $r \mapsto \lambda_r$ sur $[\alpha, \beta]$ et le paramètre s varie dans l'intervalle $[\eta_1, 1]$.
Nous allons à présent étendre le domaine dans lequel s peut être amené à varier et introduire les notations suivantes. On rappelle que d'après la proposition 3.2.1, il existe $\eta > 0$ tel que l'application $z \mapsto \lambda_z$ soit analytique sur U_η. On pose

$$V_\eta := U_\eta \setminus]1, 1 + \eta].$$ [2]

Intéressons nous à présent à la fonction $(s, z) \mapsto a(s, z) := 1 - s\lambda_z$ lorsque $s \in \mathbb{C}$ et $z \in U_\eta$. Nous reprenons ici une approche classique, en renvoyant le lecteur à [42] pour plus de détails et une mise en perspective.

On a $\frac{\partial \lambda_z}{\partial z}(1) = 0$ et $\frac{\partial^2 \lambda_z}{\partial z^2}(1) = \sigma^2 > 0$ si bien que

$$\frac{\partial a}{\partial z}(1, 1) = 0 \quad \text{et} \quad \frac{\partial^2 a}{\partial z^2}(1, 1) = \sigma^2 > 0.$$

Le théorème de préparation de Weierstrass entraîne que sur un voisinage $\mathcal{U}$ de $(1, 1)$ on peut écrire

$$a(s, z) = 1 - s\lambda_z = \Big((z - 1)^2 + b(s)(z - 1) + c(s)\Big)h(s, z)$$

où la fonction h est analytique et non nulle sur ce voisinage et les fonctions $s \mapsto b(s)$ et $s \mapsto c(s)$ sont analytiques sur la boule ouverte $B(1, \eta)$ pour η suffisamment petit. Un calcul direct nous donne

2. Le choix de la "coupure" $]1, 1 + \eta]$ vient de celui d'une détermination principale de la fonction $\sqrt{}$, à savoir $\sqrt{z} := \sqrt{r}e^{i\theta/2}$ lorsque $z = re^{i\theta}$ avec $-\pi < \theta < \pi$.

$h(1,1) = -\frac{\sigma^2}{2}, b(1) = c(1) = 0$ et $c'(1) = \frac{-1}{a(1,1)} = \frac{2}{\sigma^2}$. Sur l'ensemble $\mathcal{U}$, l'équation $a(s,z) = 0$ admet deux solutions z_s^- et z_s^+ (avec $z_s^- < 1 < z_s^+$ lorsque s est réel et $z_1^- = z_1^+ = 1$ d'après le paragraphe précédent), qui sont celles de l'équation quadratique $(z-1)^2 + b(s)(z-1) + c(s) = 0$; en résolvant, on trouve

$$z_s^{\pm} = \mathcal{B}(s) \pm \mathcal{C}(s)\sqrt{1-s}$$

où $s \mapsto \mathcal{B}(s)$ et $s \mapsto \mathcal{C}(s)$ sont des fonctions sont analytiques sur $B(1,\eta)$ vérifiant $\mathcal{B}(1) = 1, \mathcal{C}(1) = \sqrt{c'(1)} = \frac{\sqrt{2}}{\sigma}$. En d'autres termes, pour η assez petit, les fonctions $s \mapsto z_s^{\pm}$ sont à valeurs dans U_η et admettent un développement en série entière en $\sqrt{1-s}$ sur l'ensemble V_η :

$$z_s^{\pm} = 1 + \sum_{n\geqslant 1} (\pm 1)^n \alpha_n (1-s)^{n/2} \qquad \text{avec} \quad \alpha_1 = \frac{\sqrt{2}}{\sigma}.$$

D'après ce qui précède, la fonction

$$(s,z) \mapsto \frac{a(s,z)}{(z-z_s^-)(z-z_s^+)}$$

est analytique et ne s'annule pas sur $\mathcal{U}$, donc en particulier sur $U_\eta \times U_\eta$. De cette discussion, on déduit la

Proposition 3.4.3. *Il existe $\eta > 0$ tel que la fonction*

$$s \mapsto \left(z \mapsto \frac{1 - s\lambda_z}{(z-z_s^-)(z-z_s^+)} \right)$$

est analytique sur U_η et à valeurs dans l'ensemble des fonctions analytiques sur U_η. De plus, la fonction $(s,z) \mapsto \frac{1-s\lambda_z}{(z-z_s^-)(z-z_s^+)}$ ne s'annule pas sur $U_\eta \times U_\eta$. Enfin, les fonctions $s \mapsto z_s^{\pm}$ sont analytiques en la variable $\sqrt{1-s}$ sur $V_\eta = U_\eta \backslash]1, 1+\eta]$ à valeurs dans U_η et l'on a

$$z_s^{\pm} = 1 \pm \frac{\sqrt{2}}{\sigma}\sqrt{1-s} + (1-s)\mathcal{O}(s)$$

où la fonction $s \mapsto \mathcal{O}(s)$ est bornée sur V_η.

De cette proposition découle le

Corollaire 3.4.2. *Il existe $\eta > 0$ tel que la fonction*

$$(s,z) \mapsto \frac{\det(I - sP_z)}{(z-z_s^-)(z-z_s^+)}$$

est bien définie sur $U_\eta \times \mathcal{A}_{[\alpha,\beta]}$ et ne s'annule pas sur $U_\eta \times U_\eta$. Si de plus le couple (P,μ) est apériodique alors cette fonction ne s'annule pas non plus sur $\left(U_\eta \bigcap \overline{B(0,1)}\right) \times \mathcal{A}_{[1-\eta,1+\eta]}$.

Démonstration. On fixe $s \in U_\eta$. Pour η assez petit, on a $z_s^{\pm} \in U_\eta$, il est clair alors que la fonction $z \mapsto \frac{\det(I-sP_z)}{(z-z_s^-)(z-z_s^+)}$ est bien définie sur $\mathcal{A}_{[\alpha,\beta]} \setminus U_\eta$.
À présent, pour tout $z \in U_\eta$, le nombre complexe λ_z est la valeur propre dominante de P_z et cette valeur propre est simple. On pose alors

$$\eta_1 = \inf_{z \in U_\eta} \min_{\alpha_z \in \mathrm{Sp}(P_z)\setminus\{\lambda_z\}} |\lambda_z| - |\alpha_z|.$$

Pour tout $z \in U_\eta$, la matrice P_z ayant un nombre fini de valeurs propres et l'ensemble U_η étant relativement compact, on a $\eta_1 > 0$; on peut supposer par ailleurs que $\eta_1 < 1$. D'après la proposition 3.2.1, il existe $\eta_0 > 0$ tel que pour tout $z \in U_\eta$, on a $|\lambda_z| \leqslant 1 + \eta_0$. Il vient, pour tout $z \in U_\eta$,

$$\det(I - sP_z) = (1 - s\lambda_z) \prod_{\alpha_z \in \mathrm{Sp}(P_z) \setminus \{\lambda_z\}} (1 - s\alpha_z),$$

avec $|\alpha_z| \leqslant 1 + \eta_0 - \eta_1$. Puisque $|1/s| > \frac{1}{1+\eta}$, on peut supposer, quitte à diminuer la valeur de η_0 et celle de η, que $\eta_0 < \eta_1$ et $\eta < \frac{1}{1+\eta_0-\eta_1} - 1$. Ainsi, pour tout $z \in U_\eta$ et tout $\alpha_z \in \mathrm{Sp}(P_z) \setminus \{\lambda_z\}$, on a $|\alpha_z| < |1/s|$. D'où $\displaystyle\prod_{\alpha_z \in \mathrm{Sp}(P_z) \setminus \{\lambda_z\}} (1 - s\alpha_z) \neq 0$ pour tout $z \in U_\eta$. La proposition 3.4.3 permet alors de montrer que la fonction $(s, z) \mapsto \frac{\det(I-sP_z)}{(z-z_-(s))(z-z_+(s))}$ est bien définie et ne s'annule pas sur $U_\eta \times U_\eta$.
Supposons à présent que le couple (P, μ) est apériodique. Pour conclure, il suffit, d'après ce qui précède, de démontrer que la fonction $(s, z) \mapsto \frac{\det(I-sP_z)}{(z-z_s^-)(z-z_s^+)}$ ne s'annule pas sur $\left(U_\eta \bigcap \overline{B(0,1)}\right) \times \mathcal{A}_{[1-\eta,1+\eta]} \setminus U_\eta$. Pour ce faire, fixons $s \in U_\eta \bigcap \overline{B(0,1)}$. La proposition 3.2.1 implique que pour tout $z \in \mathcal{A}_{[1-\eta,1+\eta]} \setminus U_\eta$, on a $\rho(P_z) < 1$ et la fonction $z \mapsto \det(I - sP_z)$ ne s'annule donc pas sur $\mathcal{A}_{[1-\eta,1+\eta]} \setminus U_\eta$. En outre, pour η assez petit, on a $z_s^\pm \in U_\eta$; par conséquent, la fonction $z \mapsto \frac{\det(I-sP_z)}{(z-z_s^-)(z-z_s^+)}$ ne s'annule pas sur $\mathcal{A}_{[1-\eta,1+\eta]} \setminus U_\eta$. $\square$

Pour tout $s \in U_\eta$, on a $z_s^\pm \in U_\eta$ et les matrices $\pi_{z_s^\pm}$ sont alors bien définies. On a le

Fait 3.4.3. *Pour tout $s \in U_\eta$, la fonction $z \mapsto \pi_{z_s^+}(I - sP_z)$ s'annule en $z = z_s^+$. De même, la fonction $z \mapsto (I - sP_z)\pi_{z_s^-}$ s'annule en $z = z_s^-$. En particulier, pour tout $s \in U_\eta$, la fonction $z \mapsto \pi_{z_s^+}(I - sP_z)\pi_{z_s^-}$ s'annule en $z = z_s^+$ et en $z = z_s^-$ avec $z_s^+ \neq z_s^-$ pour $s \in U_\eta \setminus \{1\}$; de plus pour $s = 1$, le nombre $z = 1$ est un zéro double de la fonction $z \mapsto \pi_{z_s^+}(I - sP_z)\pi_{z_s^-}$.*

En effet, d'après la proposition 3.2.1 et en utilisant la relation $\lambda_{z_s^+} = 1/s$, on a

$$\pi_{z_s^+}(I - sP_{z_s^+}) = \pi_{z_s^+}(I - s\lambda_{z_s^+}\pi_{z_s^+} - sR_{z_s^+}) = \pi_{z_s^+} - s\frac{1}{s}\pi_{z_s^+} = 0.$$

De la même façon, la fonction $z \mapsto (I - sP_z)\pi_{z_s^-}$ s'annule en $z = z_s^-$. À présent, pour $s = 1$, on a $z_s^+ = z_s^- = 1$ et $\pi_{z_s^+} = \pi$, si bien que

$$\pi_{z_s^+}(I - sP_z)\pi_{z_s^-} = \pi(I - P_z)\pi = (\pi P - \pi P_z)\pi = \pi(P - P_z)\pi.$$

On a $\displaystyle\lim_{z\to 1} \frac{P - P_z}{1 - z} = \frac{\partial P_z}{\partial z}(1) = M$, d'où $\displaystyle\lim_{z\to 1} \frac{\pi(P - P_z)\pi}{1 - z} = \pi M\pi$. En dérivant la relation $P_z\pi_z = \lambda_z\pi_z$ en $z = 1$ et en utilisant le fait que $\lambda' = 0$ on obtient $M\pi + P\pi' = \pi'$. En multipliant à gauche par π, il vient $\pi M\pi + \pi\pi' = \pi\pi'$, ainsi, $\pi M\pi = 0$, ce qui permet de conclure.

Rappelons par ailleurs que d'après la remarque 3.4.4 la fonction $(s, z) \mapsto \pi_{z_s^+}(I - sP_z)\pi_{z_s^-}$ se factorise en $\left(\pi_{z_s^+}(I - \mathcal{P}B_s(z))\right)\left((I - \mathcal{N}^*C_s(z))\pi_{z_s^-}\right)$ pour tout $s \in \overline{B(0,1)}$ et $z \in \mathcal{A}_{[\alpha,\beta]}$; il est donc naturel et important de préciser lequel des deux facteurs s'annule en $z_-(s)$ et $z_+(s)$. Nous avons la

Proposition 3.4.4. *Pour tout nombre complexe $s \in U_\eta \bigcap \overline{B(0,1)}$, on a*

$$\pi_{z_s^+}(I - \mathcal{P}B_{(s,z_s^+)}) = 0 \quad \textit{et} \quad (I - \mathcal{N}^*C_{(s,z_s^-)})\pi_{z_s^-} = 0.$$

Démonstration. Il est clair que ces égalités sont vérifiées pour $s = 1$ puisque l'on a $z_1^\pm = 1$. Fixons à présent $s \in]1-\eta, 1[$; d'après l'étude de l'équation implicite $1 - s\lambda_z = 0$ menée dans la section 3.4.2.1 le nombre z_s^+ est alors réel et l'on a $1 < z_s^+ \leqslant 1 + \eta$. Par ailleurs, d'après la remarque 3.4.4, on a $I - sP_z = (I - \mathcal{P}B_{(s,z)})(I - \mathcal{N}^* C_{(s,z)})$; pour $s \in]1-\eta, 1[$ et tout $z \in [\alpha, \beta]$ d'autre part, d'après la proposition 3.4.2 pour tout $z \in [1, +\infty[$ et tous $k, l \in E$, on a

$$0 < \mathcal{N}^* B_{(s,z)}(k,l) < +\infty \quad \text{et} \quad (I - \mathcal{N}^* C_{(s,z)})^{-1}(k,l) = (I + \mathcal{N}^* B_{(s,z)})(k,l).$$

Il vient

$$I - \mathcal{P}B_{(s,z_s^+)} = (I - sP_{z_s^+})(I + \mathcal{N}^* B_{(s,z_s^+)}).$$

D'où, on a

$$\pi_{z_s^+}(I - \mathcal{P}B_{(s,z_s^+)}) = \pi_{z_s^+}(I - sP_{z_s^+})(I + \mathcal{N}^* B_{(s,z_s^+)}).$$

Or d'après le fait 3.4.3, on a $\pi_{z_s^+}(I - sP_{z_s^+}) = 0$. Ainsi $\pi_{z_s^+}(I - \mathcal{P}B_{(s,z_s^+)}) = 0$ pour $s \in]1-\eta, 1[$. Les fonctions $s \mapsto z_s^+$, $z \mapsto \pi_z$ et $z \mapsto \mathcal{P}B_{(s,z)}$ étant analytiques respectivement sur $V_\delta \setminus \{1\}$, U_η et $\mathcal{A}_{[0,\beta[}$, on obtient $\pi_{z_s^+}(I - \mathcal{P}B_{(s,z_s^+)}) = 0$ pour tout $s \in (V_\delta \setminus \{1\}) \cap \overline{B(0,1)}$, par unicité du prolongement analytique ; on conclut en notant que $(V_\delta \setminus \{1\}) \cap \overline{B(0,1)} = U_\delta \cap \left(\overline{B(0,1)} \setminus \{1\}\right)$. L'égalité $(I - \mathcal{N}^* C_{(s,z_s^-)})\pi_{z_s^-} = 0$ pour tout $s \in U_\delta \cap \overline{B(0,1)}$ s'obtient de façon identique. □

3.4.2.2 Une factorisation "à la Presman" sur U_δ

Rappelons tout d'abord la propriété classique suivante : pour tout $s \in U_\eta$ et $z \in \mathbb{C} \setminus \{z_s^\pm\}$, on introduit les notations suivantes
- $\pi^\pm := \pi_{z_s^\pm}$,
- $\nu_s^\pm := \nu_{z_s^\pm}$,
- $h_s^\pm := h_{z_s^\pm}$,
- $F_{(s,z)}^+ := I + \frac{z_s^+ - \beta}{z - z_s^+}\pi_s^+$,
- $F_{(s,z)}^- := I + \frac{z_s^- - \alpha}{z - z_s^-}\pi_s^-$,
- $A_{(s,z)} := F_{(s,z)}^+(I - sP_z)F_{(s,z)}^-$,
- $P_{(s,z)}^+ := F_{(s,z)}^+(I - \mathcal{P}B_{(s,z)})$ et
- $P_{(s,z)}^- := (I - \mathcal{N}^* C_{(s,z)})F_{(s,z)}^-$.

Dans ce paragraphe, nous proposons une factorisation "à la Presman" de la fonction $z \mapsto A(s,z)$ lorsque $s \in U_\eta$; cette approche permettra alors de relier la régularité des fonctions $s \mapsto PB_s$ et $s \mapsto \mathcal{N}^* C_s$ à celle des racines $s \mapsto z_s^\pm$. Rappelons que pour tout $s \in U_\eta$, on a $\pi_s^\pm = \pi_{z_s^\pm} = h_{z_s^\pm}\nu_{z_s^\pm}$, avec $\nu_{z_s^\pm} h_{z_s^\pm} = 1$ si bien que,

$$\det(F_{(s,z)}^+) = 1 + \frac{z_s^+ - \beta}{z - z_s^+} = \frac{z - \beta}{z - z_s^+} \quad \text{et} \tag{3.4.26}$$

$$\det(F_{(s,z)}^-) = 1 + \frac{z_s^- - \alpha}{z - z_s^-} = \frac{z - \alpha}{z - z_s^-}. \tag{3.4.27}$$

(On utilise ici la propriété élémentaire suivante : soit u un vecteur ligne et v un vecteur colonne de $\mathbb{C}^N$, on a

$$\det(I - uv) = 1 - vu \quad \text{et} \quad (I - uv)^{-1} = I + (1 - vu)^{-1}uv.)$$

Par conséquent, pour tous $s \in U_\eta$ et $z \in \mathcal{A}_{]\alpha,\beta[} \setminus \{z_s^\pm\}$, la matrice $F_{(s,z)}^\pm$ est inversible et on a

$$(F_{(s,z)}^+)^{-1} = I - \left(\frac{z - z_s^+}{z - \beta}\right)\left(\frac{z_s^+ - \beta}{z - z_s^+}\right)\pi_s^+ = I - \frac{z_s^+ - \beta}{z - \beta}\pi_s^+ \quad \text{et} \tag{3.4.28}$$

$$(F^-_{(s,z)})^{-1} = I - \left(\frac{z - z_s^-}{z-\alpha}\right)\left(\frac{z_s^- - \alpha}{z - z_s^-}\right)\pi_s^- = I - \frac{z_s^- - \alpha}{z-\alpha}\pi_s^- . \tag{3.4.29}$$

Soit $s \in U_\eta$, on a

$$A_{(s,z)} = (I - sP_z) + \frac{z_s^+ - \beta}{z - z_s^+}\pi_s^+(I - sP_z) + \frac{z_s^- - \alpha}{z - z_s^-}(I - sP_z)\pi_s^- + \frac{z_s^+ - \beta}{z - z_s^+}\frac{z_s^- - \alpha}{z - z_s^-}\pi_s^+(I - sP_z)\pi_s^- . \tag{3.4.30}$$

Nous utiliserons de façon cruciale le lemme qu'on a démontré dans le cas des accroissements i.i.d (lemme 3.4.1, chapitre2).

Lemme 3.4.1. *[34] Soient $0 < u \leqslant v \leqslant +\infty$ et O un ouvert relativement compact de $\mathbb{C}$. On considère une fonction $\phi :\quad s \mapsto \big(z \mapsto \phi_{(s,z)}\big)$ définie sur O à valeurs dans $\mathcal{V}^N_{[u,v]}$ et on suppose que pour tout $s \in O$, il existe $z_s \in \mathcal{A}_{[u,v]}$ tel que $\phi_{(s,z_s)} = 0$. Alors*

(i). *la fonction $s \mapsto \left(z \mapsto \dfrac{\phi_{(z,s)}}{z - z_s}\right)$ est à valeurs dans $\mathcal{V}^N_{[u,v]}$; si de plus, la fonction ϕ est analytique à valeurs dans $\mathcal{V}^N_{[u,v]}$ et la fonction $s \mapsto z_s$ est analytique sur O à valeurs dans $\mathbb{C}$, alors la fonction $s \mapsto \left(z \mapsto \dfrac{\phi_{(z,s)}}{z - z_s}\right)$ est analytique sur O à valeurs dans $\mathcal{V}^N_{[u,v]}$,*

(ii). *si $\phi \in \mathcal{P}\mathcal{V}^N_{[u]}$ (resp. $\phi \in \mathcal{N}^*\mathcal{V}^N_{[v]}$), il en est de même pour $s \mapsto \left(z \mapsto \dfrac{\phi_{(z,s)}}{z - z_s}\right)$.*

Nous avons la

Proposition 3.4.5. *On suppose que le couple (P, μ) satisfait les hypothèses $\boldsymbol{M(exp)[\alpha,\beta]}$ et $\mathbf{C}$. La fonction $s \mapsto \big(z \mapsto A_{(s,z)}\big)$ est bien définie sur U_η à valeurs dans $\mathcal{V}^N_{[\alpha,\beta]}$ et est analytique en la variable $\sqrt{1-s}$ sur V_η à valeurs dans $\mathcal{V}^N_{[\alpha,\beta]}$. De plus, lorsque le couple (P,μ) est* **apériodique***, pour tout $s \in U_\eta \bigcap \overline{B(0,1)}$, la fonction $z \mapsto (A_{(s,z)})^{-1}$ appartient à $\mathcal{V}^N_{[1-\eta,1+\eta]}$.*

Démonstration. La fonction $s \mapsto (z \mapsto I - sP_z)$ est analytique sur U_η à valeurs dans $\mathcal{V}^N_{[\alpha,\beta]}$. En outre, comme la fonction $s \mapsto z_s^\pm$ à valeurs dans U_η est analytique en la variable $\sqrt{1-s}$ sur V_η et la fonction $z \mapsto \pi_z$ est analytique sur U_η, alors, les fonctions $s \mapsto \pi_s^\pm = \pi_{z_s^\pm}$ sont analytiques en la variable $\sqrt{1-s}$ sur V_η. Par ailleurs, d'après le fait 3.4.3, les fonctions $z \mapsto \pi_s^+(I - sP_z)$ et $z \mapsto (I - sP_z)\pi_s^-$ s'annulent respectivement en $z = z_s^+$ et en $z = z_s^-$, de plus la fonction $z \mapsto \pi_s^+(I - sP_z)\pi_s^-$ s'annule à la fois en $z = z_s^+$ et en $z = z_s^-$ avec $z_s^+ \neq z_s^-$ pour $s \in V_\eta \setminus \{1\}$ et elle admet $z = 1$ comme zéro double pour $s = 1$. La relation (3.4.30) et le lemme 3.4.1 entraînent alors que la fonction $s \mapsto A_s$ est analytique en la variable $\sqrt{1-s}$ sur V_η à valeurs dans $\mathcal{V}^N_{[\alpha,\beta]}$. Fixons à présent $s \in U_\eta \cap \overline{B(0,1)}$. On a

$$A_{(s,z)} = F^+_{(s,z)}(I - sP_z)F^-_{(s,z)}.$$

D'après les relations 3.4.26 et 3.4.27, il vient

$$\det(A_{(s,z)}) = (z-\beta)(z-\alpha)\frac{\det(I - sP_z)}{(z - z_s^+)(z - z_s^-)}.$$

Le corollaire 3.4.2 implique alors que la fonction $z \mapsto \det(A_{(s,z)})$ ne s'annule pas sur $\mathcal{A}_{[1-\eta,1+\eta]}$. En particulier, la fonction $z \mapsto (A_{(s,z)})^{-1}$ est analytique et donc développable en série de Laurent sur $\mathcal{A}_{[1-\eta,1+\eta]}$. Ainsi, pour $s \in U_\eta \cap \overline{B(0,1)}$, la fonction $z \mapsto (A_{(s,z)})^{-1} \in \mathcal{V}^N_{[1-\eta,1+\eta]}$. □

Nous avons la

Proposition 3.4.6. *On suppose que le couple (P,μ) est* **apériodique** *et satisfait les hypothèses* $\boldsymbol{M(exp)[\alpha,\beta]}$ *et* **C**. *Pour tout $s \in U_\eta \bigcap \overline{B(0,1)}$, les fonctions P_s^+ et P_s^- sont les facteurs d'une $\mathcal{P}.f.c$ de la fonction A_s dans $\mathcal{V}_{[1]}^N$.*

Démonstration. On fixe s dans $U_\eta \cap \overline{B(0,1)}$. Vérifions alors que les fonctions $z \mapsto P_{(s,z)}^+$ et $z \mapsto (P_{(s,z)}^+)^{-1}$ appartiennent à $\mathcal{PV}_{[1+\eta]}^N = \mathcal{PV}_{[0,1+\eta]}$ (de même, les fonctions $z \mapsto I - P_{(s,z)}^-$ et $z \mapsto I - (P_{(s,z)}^-)^{-1}$ appartiennent à $\mathcal{N}^*\mathcal{V}_{[1-\eta]}^N = \mathcal{N}^*V_{[1-\eta,+\infty[}^N$). On a

$$\begin{aligned} P_{(s,z)}^+ &= F_{(s,z)}^+(I - \mathcal{P}B_{(s,z)}) = (I + \frac{z_s^+ - \beta}{z - z_s^+}\pi_s^+)(I - \mathcal{P}B_{(s,z)}) \\ &= I - \mathcal{P}B_{(s,z)} + \frac{z_s^+ - \beta}{z - z_s^+}\pi_s^+(I - \mathcal{P}B_{(s,z)}). \end{aligned}$$

La fonction $z \mapsto \mathcal{P}B_{(s,z)}$ appartient à $\mathcal{P}V_{[\beta]}^N$ et d'après la proposition 3.4.4, la fonction $z \mapsto \pi_s^+(I - \mathcal{P}B_{(s,z)})$ s'annule en $z = z_s^+$, ainsi d'après le lemme 3.4.1, la fonction $z \mapsto P_{(s,z)}^+$ appartient à $\mathcal{P}V_{[\beta]}^N$. De même, on peut montrer que $z \mapsto I - P_{(s,z)}^-$ appartient à $\mathcal{N}^*\mathcal{V}_{[\beta]}^N$. Par ailleurs, pour tout $z \in \mathcal{A}_{[\alpha,\beta]}$, on a $A_{(s,z)} = P_{(s,z)}^+ \times P_{(s,z)}^-$, et donc $\det(A_{(s,z)}) = \det(P_{(s,z)}^+)\det(P_{(s,z)}^-)$, si bien que, d'après la proposition 3.4.2, la fonction $z \mapsto \det(P_{(s,z)}^+)$ ne s'annule pas sur $\mathcal{A}_{[1-\eta,1+\eta]}$. La matrice $P_{(s,z)}^+$ est alors inversible pour tout $z \in \mathcal{A}_{[1-\eta,1+\eta]}$. D'autre part, on a $P_{(s,z)}^+ = F_{(s,z)}^+(I - \mathcal{P}B_{(s,z)})$. Comme pour η assez petit, on a $z_s^- \in \mathcal{A}_{[1-\eta,1+\eta]}$ et d'après la relation (3.4.26), la matrice $F_{(s,z)}^+$ est inversible pour tout $z \in \mathcal{A}_{[0,1-\eta[}$; d'après la remarque 3.4.3, il en est de même pour la matrice $I - \mathcal{P}B_{(s,z)}$. Ainsi, pour tout $z \in \mathcal{A}_{[0,1-\eta[}$, la matrice $P_{(s,z)}^+$ est inversible ; l'application $z \mapsto (P_{(s,z)}^+)^{-1}$ est alors analytique sur $\mathcal{A}_{[0,1+\eta]}$ puisque l'application $z \mapsto P_{(s,z)}^+$ l'est d'après ce qui précède. Ainsi, la fonction $z \mapsto P_{(s,z)}^+$ appartient à $\mathcal{V}_{[0,1+\eta]}^N$. En particulier, pour tous $k,l \in E$, la fonction $z \mapsto (P_{(s,z)}^+)^{-1}(k,l)$ est bornée au voisinage de zéro ; la formule de Cauchy entraîne alors que pour tous $k,l \in E$, l'application $z \mapsto (P_{(s,z)}^+)^{-1}(k,l)$ appartient à $\mathcal{PV}_{[0,1+\eta]}^N$. Il s'ensuit que l'application $z \mapsto (P_{(s,z)}^+)^{-1}$ appartient à $\mathcal{PV}_{[0,1+\eta]}^N$. De manière analogue, on montre que la fonction $z \mapsto (I - P_{(s,z)}^-)^{-1}$ appartient à $\mathcal{N}^*\mathcal{V}_{[1-\eta,+\infty]}^N$. En particulier, on vient de montrer que pour s fixé dans $U_\eta \cap \overline{B(0,1)}$, les fonctions $z \mapsto P_{(s,z)}^+$ et $z \mapsto (P_{(s,z)}^+)^{-1}$ appartiennent à $\mathcal{PV}_{[1]}^N = \mathcal{PV}_{[0,1]}^N$.

Vérifions à présent que les fonctions $z \mapsto P_{(s,z)}^-$ et $z \mapsto P_{(s,z)}^+$ sont les facteurs d'une $\mathcal{P}.f.c$ de $z \mapsto A_{(s,z)}$ dans $\mathcal{V}_{[1]}^N$.

Fixons $s \in U_\eta \bigcap \overline{B(0,1)}$, posons $a := z \mapsto I - A_{(s,z)}$ et vérifions que les fonctions $x := z \mapsto P_{(s,z)}^+$ et $y := z \mapsto P_{(s,z)}^-$ sont solutions du système d'équations

$$\left\{ \begin{array}{rcl} x - \mathcal{P}(xa) &=& I, \\ y - \mathcal{N}^*(ay) &=& I, \end{array} \right.$$

dans l'anneau $\mathcal{V}_{[1]}^N$; le lemme 2.1.1 permettra alors de conclure.

D'après ce qui précède, on a $z \mapsto P_{(s,z)}^+ \in \mathcal{PV}_{[1]}^N$ et $z \mapsto (P_{(s,z)}^+)^{-1} \in \mathcal{PV}_{[1]}^N$; de même, les fonctions $z \mapsto I - P_{(s,z)}^-$ et $z \mapsto I - (P_{(s,z)}^-)^{-1}$ appartiennent à $\mathcal{N}^*\mathcal{V}_{[1]}^N$, si bien que

$$P_s^+ - \mathcal{P}\Big((P_s^+)^{-1}\Big) = 0 \quad \text{et} \quad \mathcal{P}(P_s^-) = I.$$

Ainsi $(P_s^+)^{-1} - \mathcal{P}\Big((P_s^+)^{-1}a\Big) = (P_s^+)^{-1} - \mathcal{P}\Big((P_s^+)^{-1} - P_s^-\Big) = (P_s^+)^{-1} - \mathcal{P}((P_s^+)^{-1}) + \mathcal{P}(P_s^-) = I$; en d'autres termes, la fonction $(P_s^+)^{-1}$ est solution de l'équation $x - \mathcal{P}(xa) = 1$ dans l'anneau $\mathcal{V}_{[1]}^N$.

De façon analogue, on montre que $(P_s^-)^{-1}$ est solution de l'équation $y - \mathcal{N}^*((I - A_s)y) = I$ dans $\mathcal{V}_{[1]}^N$. $\square$

Corollaire 3.4.3. *On suppose que le couple (P, μ) est* **apériodique** *et satisfait les hypothèses* $\boldsymbol{M(exp)[\alpha, \beta]}$ *et* **C**. *Il existe alors une constante $\eta > 0$ telle que*

(i). *les fonctions $s \mapsto P_s^+$ et $s \mapsto P_s^-$, à valeurs dans $\mathcal{V}_{[\alpha,\beta]}^N$, sont analytiques en la variable $\sqrt{1-s}$ sur V_η,*

(ii). *les fonctions $s \mapsto (P_s^+)^{-1}$ et $s \mapsto (P_s^-)^{-1}$, à valeurs respectivement dans $\mathcal{P}V_{[0,1]}^N$ et $\mathcal{N}^*V_{[1,+\infty[}^N$, sont analytiques en la variable $\sqrt{1-s}$ sur V_η.*

Démonstration. D'après la proposition 3.4.5, la fonction $s \mapsto A_s$ à valeurs dans $\mathcal{V}_{[\alpha,\beta]}^N$ est analytique en la variable $\sqrt{1-s}$ sur V_η. En outre, la proposition 3.4.6 implique que pour tout $s \in U_\eta \bigcap \overline{B(0,1)}$, les fonctions P_s^+ et P_s^- à valeurs dans $\mathcal{V}_{[1]}^N$ sont les facteurs d'une $\mathcal{P}$-factorisation de $z \mapsto A_{(s,z)}$ dans $\mathcal{V}_{[1]}^N$. Le lemme 2.1.3 permet alors de conclure. $\square$

3.4.3 Sur la régularité des fonctions $s \mapsto \mathcal{P}B_s$, $s \mapsto \mathcal{N}^*C_s$, $s \mapsto \mathcal{P}C_s$ et $s \mapsto \mathcal{N}^*B_s$ sur un voisinage de $B(0,1)$

Théorème 3.4.1. *On suppose que le couple (P, μ) est* **apériodique** *et satisfait les hypothèses* $\boldsymbol{M(exp)[\alpha, \beta]}$ *et* **C**. *Il existe un voisinage $\mathcal{O}$ de $\overline{B(0,1)} \setminus \{1\}$ dans $\mathbb{C}$ et une constante $\eta > 0$ tels que*

(i). *les fonctions $s \mapsto \mathcal{P}B_s$ et $s \mapsto \mathcal{N}^*C_s$, à valeurs dans $\mathcal{V}_{[\alpha,\beta]}^N$, sont analytiques sur $\mathcal{O}$,*

(ii). *les fonctions $s \mapsto \left(z \mapsto \dfrac{I - \mathcal{P}B_{(s,z)}}{z - z_s^+}\right)$ et $s \mapsto \left(z \mapsto \dfrac{1 - \mathcal{N}^*C_{(s,z)}}{z - z_s^-}\right)$, à valeurs dans $\mathcal{V}_{[\alpha,\beta]}^N$, sont analytiques en la variable $\sqrt{1-s}$ sur V_η.*

En particulier, les fonctions $s \mapsto \mathcal{P}B_s$ et $s \mapsto \mathcal{N}^*C_s$, à valeurs dans $\mathcal{V}_{[\alpha,\beta]}^N$, sont analytiques sur V_η en la variable $\sqrt{1-s}$ et l'on a pour tout $s \in V_\eta$

$$\mathcal{P}B_{(s,z)} = \mathcal{P}B_z + \sqrt{1-s}\, \widetilde{\mathcal{P}B}_z + (1-s)O_{(s,z)}, \tag{3.4.31}$$

$$\mathcal{N}^*C_{(s,z)} = \mathcal{N}^*C_z + \sqrt{1-s}\, \widetilde{\mathcal{N}^*C}_z + (1-s)O_{(s,z)}, \tag{3.4.32}$$

avec

- $\mathcal{P}B_z := \mathcal{P}B_{(1,z)}$ *et* $\mathcal{N}^*C_z := \mathcal{N}^*C_{(1,z)}$,
- *les fonctions $z \mapsto \widetilde{\mathcal{P}B}_z$ et $z \mapsto \widetilde{\mathcal{N}^*C}_z$ appartiennent respectivement à $\mathcal{P}\mathcal{V}_{[\alpha,\beta]}^N$ et $\mathcal{N}^*\mathcal{V}_{[\alpha,\beta]}^N$,*
- *la fonction $s \mapsto O_{(s,z)}$, définie sur V_η et à valeurs dans $\mathcal{V}_{[\alpha,\beta]}^N$, est bornée et analytique en la variable $\sqrt{1-s}$.*

Démonstration. Rappelons que la fonction $s \mapsto (z \mapsto I - sP_z)$ est analytique sur $\mathbb{C}$ à valeurs dans $\mathcal{V}_{[\alpha,\beta]}^N$ et que les fonctions $I - \mathcal{P}B_s$ et $I - \mathcal{N}^*C_s$ sont les facteurs d'une $\mathcal{P}$-factorisation de $z \mapsto I - sP_z$ dans $\mathcal{V}_{[1]}^N$; la première assertion découle alors de la théorie de Presman (lemme 2.1.3). Pour la seconde assertion, d'après le corollaire 3.4.3, les fonctions $s \mapsto P_s^+$ et $s \mapsto P_s^-$ sont analytiques en la variable $\sqrt{1-s}$ sur V_η à valeurs respectivement dans $\mathcal{P}\mathcal{V}_{[\alpha,\beta]}^N$ et $\mathcal{N}^*\mathcal{V}[\alpha,\beta]$. En particulier, la fonction $s \mapsto \left(z \mapsto (I - \dfrac{z_s^+ - \beta}{z - \beta}\pi_s^+)P_s^+(z)\right)$ est analytique en la variable $\sqrt{1-s}$ sur V_η à valeurs dans $\mathcal{V}_{[\alpha,\beta]}^N$. À présent, d'après la relation (3.4.28), on a

$$\mathcal{P}B_{s,z} = I - (I - \frac{z_s^+ - \beta}{z - \beta}\pi_s^+)P_s^+(z) \quad \text{pour tout} \quad s \in U_\eta \quad \text{et} \quad z \in \mathcal{A}_{[\alpha,\beta]}.$$

Or, d'après la proposition 3.4.3, la fonction $s \mapsto z_+(s)$ est analytique en la variable $\sqrt{1-s}$ sur $V_\eta = U_\eta \setminus]1, 1+\eta[$ et l'on a

$$z_+(s) = 1 + \frac{\sqrt{2}}{\sigma}\sqrt{1-s} + (1-s)\mathcal{O}(s)$$

où $s \mapsto \mathcal{O}(s)$ est bornée sur V_η. On obtient alors le développement annoncé de la fonction $s \mapsto \mathcal{P}B_s$. On opère de la même façon pour la fonction $s \mapsto \mathcal{N}^*C_s$. □

Théorème 3.4.2. *On suppose que le couple* $(P, \underline{\mu)}$ *est* **apériodique** *et satisfait les hypothèses* $\boldsymbol{M(exp)[\alpha,\beta]}$ *et* **C**. *Il existe un voisinage* $\mathcal{O}$ *de* $\overline{B(0,1)} \setminus \{1\}$ *dans* $\mathbb{C}$ *et une constante* $\eta > 0$ *tels que*

(i). *les fonctions* $s \mapsto \mathcal{P}C_s$ *et* $s \mapsto \mathcal{N}^*B_s$ *à valeurs respectivement dans* $\mathcal{P}V^N_{[0,1]}$ *et* $\mathcal{P}V^N_{[1,+\infty[}$ *sont analytiques sur* $\mathcal{O}$,

(ii). *pour tout* $s \in V_\eta$ *et* $z \in \mathcal{A}_{[0,1]}$,

$$\mathcal{P}C_{(s,z)} = \begin{cases} \mathcal{P}C_z + \sqrt{1-s}\widetilde{\mathcal{P}C}_z + (1-s)O_1(s,z) & \text{si } z \neq 1, \\ \frac{K^+}{\sqrt{1-s}} + H_1(s) & \text{si } z = 1, \end{cases} \tag{3.4.33}$$

avec, pour tout $z \in \mathcal{A}_{[0,1]} \setminus \{1\}$,
- $\mathcal{P}C_z := \mathcal{P}C_{(1,z)}$
- $K^+ = (K^+(k,l))_{k,l\in E} \in \mathcal{M}_N(\mathbb{C})$, *avec* $K^+(k,l) \geqslant 0$ *pour tous* $k,l \in E$,
- $\widetilde{\mathcal{P}C}_z$ *appartient à* $\mathcal{P}\mathcal{V}^N_{[\alpha,\beta]}$,
- *pour tout* $r < 1$ *et tout* $z \in \mathcal{A}_{[0,r]}$, *la fonction* $s \mapsto O_1(s,z)$ *est analytique en la variable* $\sqrt{1-s}$ *et est bornée sur* $V_\eta \times \mathcal{A}_{[0,r]}$.
- *la fonction* $s \mapsto H_1(s)$ *est bornée sur* V_η.

De même, pour tout $s \in V_\eta \setminus \{1\}$ *et* $z \in \mathcal{A}_{[1,+\infty[}$, *on a*

$$\mathcal{N}^*B_{(s,z)} = \begin{cases} \mathcal{N}^*B_z + \sqrt{1-s}\widetilde{\mathcal{N}^*B}_z + (1-s)O_2(s,z) & \text{si } z \neq 1, \\ \frac{K^-}{\sqrt{1-s}} + H_2(s) & \text{si } z = 1, \end{cases} \tag{3.4.34}$$

avec, pour tout $z \in \mathcal{A}_{[1,+\infty[} \setminus \{1\}$,
- $\mathcal{N}^*B_z := \mathcal{N}^*B_{(1,z)}$
- $K^- = (K^-(k,l))_{k,l\in E} \in \mathcal{M}_N(\mathbb{C})$, *avec* $K^-(k,l) \geqslant 0$ *pour tous* $k,l \in E$.
- *pour tout* $r > 1$ *et tout* $z \in \mathcal{A}_{[r,+\infty[}$, *la fonction* $s \mapsto O_2(s,z)$ *est analytique en la variable* $\sqrt{1-s}$ *et est bornée sur* $V_\eta \times \mathcal{A}_{[r,+\infty[}$.
- *la fonction* $s \mapsto H_2(s)$ *est bornée sur* V_η.

Démonstration. La première partie de l'énoncé découle de la théorie de Presman (lemme 2.1.3) et du corollaire 3.4.1.1). Fixons à présent $z \in \mathcal{A}_{[0,1]}$. Supposons tout d'abord que $z \in \mathcal{A}_{[0,1]} \setminus \{1\}$. D'après la proposition 3.4.2, pour η assez petit et pour $s \in V_\eta$, on a $\rho(PB_{(s,z)}) < 1$ et

$$\mathcal{P}C_{(s,z)} = (I - \mathcal{P}B_{(s,z)})^{-1} - I = \sum_{n=1}^{\infty} PB^n_{(s,z)}. \tag{3.4.35}$$

Or d'après le théorème 3.4.1, pour $z \in \mathcal{A}_{[0,1]}$ et pour tout $s \in V_\eta$, il vient

$$\mathcal{P}B_{(s,z)} = \mathcal{P}B_z + \sqrt{1-s}\,\widetilde{\mathcal{P}B}_z + (1-s)O_{(s,z)}.$$

Avec, $\mathcal{P}B_z := \mathcal{P}B_{(1,z)}$ appartient à $\mathcal{V}^N_{[\alpha,\beta]}$ et $\widetilde{\mathcal{P}B}_z$ appartient à $\mathcal{V}^N_{[\alpha,\beta]}$; de plus, la fonction $s \mapsto O_{(s,\cdot)}$, définie sur V_η et à valeurs dans $\mathcal{V}^N_{[\alpha,\beta]}$, est bornée et analytique en la variable $\sqrt{1-s}$. Puisque

$z \in \mathcal{A}_{[0,1]} \setminus \{1\}$, d'après la proposition 3.4.2, on a $\rho(\mathcal{P}B_z) < 1$ et via la relation (3.4.35), pour tout $s \in V_\eta$, on a

$$\begin{aligned}
\mathcal{P}C_{(s,z)} &= \sum_{n\geqslant 1} \mathcal{P}B_z^n + \sum_{n\geqslant 1}\sum_{1\leqslant r\leqslant n} \mathcal{P}B_z^{r-1}\widetilde{\mathcal{P}B}_z\mathcal{P}B_z^{n-r}\sqrt{1-s} + (1-s)O_{(s,z)} \\
&= \sum_{n\geqslant 1} \mathcal{P}B_z^n + \sum_{r\geqslant 1} \mathcal{P}B_z^{r-1}\widetilde{\mathcal{P}B}_z \sum_{n\geqslant r}\mathcal{P}B_z^{n-r}\sqrt{1-s} + (1-s)O_{(s,z)} \\
&= (I-\mathcal{P}B_z)^{-1} - I + (I-\mathcal{P}B_z)^{-1}\widetilde{\mathcal{P}B}_z(I-\mathcal{P}B_z)^{-1}\sqrt{1-s} + (1-s)O_{(s,z)} \\
&= \mathcal{P}C_z + (I+\mathcal{P}C_z)\widetilde{\mathcal{P}B}_z(I+\mathcal{P}C_z)\sqrt{1-s} + (1-s)O_{(s,z)}.
\end{aligned}$$

On obtient ainsi le résultat lorsque $z \in \mathcal{A}_{[0,1]} \setminus \{1\}$, en posant

$$\widetilde{\mathcal{P}C}_z = (I+\mathcal{P}C_z)\widetilde{\mathcal{P}B}_z(I+\mathcal{P}C_z).$$

Considérons à présent le cas $z = 1$. Pour tout $s \in V_\eta \setminus \{1\}$, on a $I + \mathcal{P}C_{(s,1)} = (I - \mathcal{P}B_{(s,1)})^{-1}$; par ailleurs, $I - \mathcal{P}B_{(s,1)} = (F^+_{(s,1)})^{-1}P^+_{(s,1)}$. Il vient, pour tout $s \in V_\eta \setminus \{1\}$,

$$\sqrt{1-s}(I+\mathcal{P}C_{(s,1)}) = (P^+_{(s,1)})^{-1}(\sqrt{1-s}F^+_{(s,1)}).$$

Or d'après le corollaire 3.4.3, la fonction $s \mapsto (P^+_{(s,1)})^{-1}$ est analytique en la variable $\sqrt{1-s}$ sur V_η. De plus, on a

$$F^+_{(s,1)} = I + \frac{z_s^+ - \beta}{1 - z_s^+}\pi_s^+ \quad \text{avec} \quad z_s^+ = 1 + \frac{\sqrt{2}}{\sigma}\sqrt{1-s} + (1-s)O_s,$$

où la fonction $s \mapsto O_s$ est bornée sur V_η ; en particulier, on a

$$\frac{\sqrt{1-s}}{1-z_s^+} = -\frac{\sigma}{\sqrt{2}} + \sqrt{1-s}O_s.$$

Puisque les fonctions $s \mapsto z_s^+$ et $s \mapsto \pi_s^+$ sont analytiques en la variable $\sqrt{1-s}$ sur V_η, il vient pour tout $s \in V_\eta \setminus \{1\}$,

$$\sqrt{1-s}F^+_{(s,1)} = F^+ + \sqrt{1-s}O_s,$$

où $F^+ \in \mathcal{M}_N(\mathbb{C})$ et la fonction $s \mapsto O_s$ est bornée sur V_η, ce qui permet de conclure. Le signe de $K^+(k,l)$ découle de la croissance de la fonction $s \mapsto \mathcal{P}C_{s,1}(k,l)$ pour tous $k, l \in E$. On raisonne de manière similaire pour $\mathcal{N}^*B_s$. □

Fait 3.4.4. *On a*

$$K^+K^- = \pi.$$

Démonstration. On a

$$K^+ = \lim_{s\nearrow 1}\sqrt{1-s}(I+\mathcal{P}C_{(s,1)}), \quad \text{de même,} \quad K^- = \lim_{s\nearrow 1}\sqrt{1-s}(I+\mathcal{N}^*B_{(s,1)}).$$

Or lorsque $0 < s < 1$, d'après le corollaire 3.4.1, on a

$$(I-sP)^{-1} = (I+\mathcal{N}^*B_{(s,1)})(I+\mathcal{P}C_{(s,1)}).$$

Il vient, pour tout $0 < s < 1$,

$$(1-s)(I-sP)^{-1} = \left(\sqrt{1-s}(I+\mathcal{N}^*B_{(s,1)})\right)\left(\sqrt{1-s}(I+\mathcal{P}C_{(s,1)})\right). \tag{3.4.36}$$

L'identité $(I-sP)^{-1} = \frac{s\pi}{1-s} + (I-sR^{-1})^{-1}$ satisfaite pour tout $0 < s < 1$ et le fait que $\rho(R) < 1$ impliquent que $\lim_{s\nearrow 1}(1-s)(I-sP)^{-1} = \pi$; le résultat s'obtient alors en passant à la limite dans l' égalité (3.4.36).

□

3.4.4 Conséquences

On introduit les notations suivantes : pour tous $y \in \mathbb{Z}$ et $k, l \in E$,

- $\mathcal{P}B_{(s|y)}(k,l) = \sum_{n \geqslant 1} \mathbb{P}_k(\xi_n = l, S_1 > S_n, S_2 > S_n, \cdots, S_{n-1} > S_n, S_n = y)s^n$,
- $\mathcal{N}^*C_{(s|y)}(k,l) = \mathbb{E}_k(\xi_{\tau^{*-}} = l, S_{\tau^{*-}} = y; s^{\tau^{*-}})$,
- $\mathcal{P}C_{(s|y)}(k,l) = \sum_{n \geqslant 1} s^n \mathbb{E}_k(\xi_n = l, \tau^{*-} > n; S_n = y)$,
- $\mathcal{N}^*B_{(s|y)}(k,l) = \sum_{n \geqslant 1} s^n \mathbb{E}_k(\xi_n = l, S_1 > S_n, \cdots, S_{n-1} > S_n, S_n < 0; S_n = y)$.

Dans ce paragraphe, on utilise la formule de Cauchy et le théorème de convergence dominée afin d'énoncer un analogue du théorème 3.4.1 pour les fonctions $s \mapsto \mathcal{P}B_{(s|y)}(k,l)$, $s \mapsto \mathcal{N}^*C_{(s|y)}(k,l)$, $s \mapsto \mathcal{P}C_{(s|y)}(k,l)$ et $s \mapsto \mathcal{N}^*B_{(s|y)}(k,l)$, où y et k, l sont fixés respectivement dans $\mathbb{Z}$ et E.

On rappelle aussi que $\mathcal{S}^N_{[r]}$, $r \in \mathbb{R}^{*+}$ désigne l'ensemble des matrices carrées de taille N dont les coefficients sont des suites $(a(y))_{y \in \mathbb{Z}}$ à valeurs dans $\mathbb{C}$ vérifiant $\sum_{y \in \mathbb{Z}} |a(y)| r^y < +\infty$. L'ensemble $\mathcal{S}^N_{[r]}$, muni de la norme $\|M\|_r = \max_{k \in E} \sum_{l \in E} \sum_{y \in \mathbb{Z}} |a(y)(k,l)| r^y$, est un espace de Banach.

Proposition 3.4.7. *On suppose que le couple (P, μ) est* **apériodique** *et satisfait les hypothèses* $\boldsymbol{M(exp)[\alpha, \beta]}$ *et* **C**. *Il existe alors un voisinage $\mathcal{O}$ de $\overline{B(0,1)} \setminus \{1\}$ dans $\mathbb{C}$ et une constante $\eta > 0$ tels que pour tout $y \in \mathbb{Z}^+$ et $k, l \in E$,*

(i). *la fonction $s \mapsto \mathcal{P}B_{(s|y)}(k,l)$ est analytique sur $\mathcal{O}$,*

(ii). *la fonction $s \mapsto \mathcal{P}B_{(s|y)}(k,l)$ est analytique en la variable $\sqrt{1-s}$ sur V_η : plus précisément, pour tout $s \in V_\eta$ et tous $k, l \in E$, on a*

$$\mathcal{P}B_{(s|y)}(k,l) = \mathcal{P}B(y)(k,l) + \widetilde{\mathcal{P}B(y)}(k,l)\sqrt{1-s} + (1-s)O_s(y)(k,l),$$

$$\text{où } \bullet \ \mathcal{P}B(y) := \big(\mathcal{P}B(y)(k,l)\big)_{k,l \in E} := \big(\mathcal{P}B_{(1|y)}(k,l)\big)_{k,l \in E} \in \mathcal{S}^N_{[\beta]},$$

$$\bullet \ \widetilde{\mathcal{P}B(y)} := \Big(\widetilde{\mathcal{P}B(y)}(k,l)\Big)_{k,l \in E} \in \mathcal{S}^N_{[\beta]}$$

et la fonction $s \mapsto O_s(y)(k,l)$, à valeurs dans $\mathcal{S}_{[\beta]}$, est analytique en la variable $\sqrt{1-s}$ et bornée sur V_η.
De plus, pour tout $y \in \mathbb{Z}^+$ et $k, l \in E$, on a

$$\mathcal{P}B(y)(k,l) \geqslant 0 \quad \text{et} \quad \widetilde{\mathcal{P}B(y)}(k,l) \leqslant 0.$$

Démonstration. Fixons $r \in [\alpha, \beta]$. D'après le théorème 3.4.1, il existe un voisinage $\mathcal{O}$ de $\overline{B(0,1)} \setminus \{1\}$ dans $\mathbb{C}$ sur lequel la fonction $s \mapsto \mathcal{P}B_s$ est analytique sur $\mathbb{C}$ à valeurs dans $\mathcal{V}^N_{[\alpha,\beta]}$. En particulier, pour tous $k, l \in E$ la fonction $(s,z) \mapsto \mathcal{P}B_{(s,z)}(k,l)$ est bornée sur $\mathcal{O} \times \mathcal{A}_{[\alpha,\beta]}$ et pour $s \in \mathcal{O}$, la fonction $\mathcal{P}B_{(s,z)}(k,l)$ admet un développement en série de Laurent sur l'anneau $\mathcal{A}_{[\alpha,\beta]}$. On peut alors appliquer la formule de Cauchy et écrire : pour tout $y \in \mathbb{Z}^{*-}$

$$\mathcal{P}B_{(s|y)}(k,l) = \frac{1}{2i\pi r} \int_{|z|=r} \frac{\mathcal{P}B_{(s,z)}(k,l)}{z^{y+1}} dz.$$

Notons que la fontion $(s,z) \mapsto \mathcal{P}B_{(s,z)}(k,l)$ est bornée sur $\mathcal{O} \times \mathcal{A}_{[\alpha,\beta]}$; de plus, pour tout $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| = r$, la fonction $s \mapsto \mathcal{P}B_{(s,z)}(k,l)$ est analytique sur $\mathcal{O}$, il en est donc de même pour les fonctions $s \mapsto \mathcal{P}B_{(s|y)}(k,l)$, $y \in \mathbb{Z}^+$, d'après le théorème de convergence dominée. À présent, d'après le le théorème 3.4.1, il existe $\eta > 0$ tel que pour tout $s \in V_\eta$, on ait

$$\mathcal{P}B_{(s,z)} = \mathcal{P}B_z + \sqrt{1-s}\,\widetilde{\mathcal{P}B}_z + (1-s)O_{(s,z)},$$

où les fonctions $z \mapsto \mathcal{P}B_z$ et $z \mapsto \widetilde{\mathcal{P}B}_z$ appartiennent à $\mathcal{V}^N_{[\alpha,\beta]}$ et la fonction $(s,z) \mapsto O_{(s,z)}$ est bornée sur $V_\eta \times \mathcal{A}_{[r]}$. De façon analogue à ci-dessus pour tout $y \in \mathbb{Z}^{*-}$ et $k,l \in E$, on a

$$\begin{aligned}\mathcal{P}B_{(s|y)}(k,l) &= \frac{1}{2i\pi r}\int_{|z|=r}\frac{\mathcal{P}B_z(k,l)}{z^{y+1}}dz + \frac{1}{2i\pi r}\sqrt{1-s}\int_{|z|=r}\frac{\widetilde{\mathcal{P}B}_z(k,l)}{z^{y+1}}dz\\ &\quad +(1-s)\frac{1}{2i\pi r}\int_{|z|=r}O_{(s,z)}(k,l)dz,\end{aligned}$$

ce qui donne le développement annoncé.
On a

$$\mathcal{P}B(y)(k,l) = \mathcal{P}B_{(1|y)}(k,l) = \sum_{n\geqslant 1} s^n\mathbb{E}_k(\xi_n = l, S_1 > S_n, S_2 > S_n \cdots S_{n-1} > S_n \geqslant 0; S_n = y);$$

puisque les fonctions $s \mapsto \mathcal{P}B_{(s|y)}(k,l)$ sont croissantes sur $[0,1]$, il s'ensuit que $\widetilde{\mathcal{P}B(y)}(k,l) \leqslant 0$. $\square$

Pour tous $y \in \mathbb{Z}$ et $k,l \in E$, on pose $(PB)'_{(s|y)}(k,l) = \mathbb{E}_k(\xi_{\tau^+} = l, S_{\tau^+} = y; s^{\tau^+})$. En appliquant la proposition 3.4.7 à la chaîne duale et en utilisant le fait 3.4.1, on obtient le résultat suivant

Proposition 3.4.8. *On suppose que le couple (P,μ) est* **apériodique** *et satisfait les hypothèses* $\boldsymbol{M(exp)[\alpha,\beta]}$ *et* **C**. *Il existe alors un voisinage $\mathcal{O}$ de $\overline{B(0,1)}\setminus\{1\}$ dans $\mathbb{C}$ et une constante $\eta > 0$ tels que pour tout $y \in \mathbb{Z}^+$ et $k,l \in E$, on ait*

(i). *la fonction $s \mapsto (PB)'_{(s|y)}(k,l)$ est analytique sur $\mathcal{O}$,*

(ii). *la fonction $s \mapsto (PB)'_{(s|y)}(k,l)$ est analytique en la variable $\sqrt{1-s}$ sur V_η : plus précisément, pour tout $s \in V_\eta$ et tous $k,l \in E$, on a*

$$(PB)'_{(s|y)}(k,l) = (PB)'(y)(k,l) + \widetilde{(PB)'}(y)(k,l)\sqrt{1-s} + (1-s)O_s(y)(k,l),$$

où • $(PB)'(y) := ((PB)'(y)(k,l))_{k,l\in E} := \Big((PB)'_{(1|y)}(k,l)\Big)_{k,l\in E} \in \mathcal{S}^N_{[\beta]}$,

• $\widetilde{(PB)'}(y) := \Big(\widetilde{(PB)'}(y)(k,l)\Big)_{k,l\in E} \in \mathcal{S}^N_{[\beta]}$

et la fonction $s \mapsto O_s(y)(k,l)$, à valeurs dans $\mathcal{S}_{[\beta]}$, est analytique en la variable $\sqrt{1-s}$ et bornée sur V_η.

De plus, pour tout $y \in \mathbb{Z}^+$ et $k,l \in E$, on a $(PB)'(y)(k,l) \geqslant 0$ et $\widetilde{(PB)'}(y)(k,l) \leqslant 0$.

De manière analogue, on a la

Proposition 3.4.9. *On suppose que le couple (P,μ) est* **apériodique** *et satisfait les hypothèses* $\boldsymbol{M(exp)[\alpha,\beta]}$ *et* **C**. *Il existe un voisinage $\mathcal{O}$ de $\overline{B(0,1)}\setminus\{1\}$ dans $\mathbb{C}$ et une constante $\eta > 0$ tels que pour tout $y \in \mathbb{Z}^{*-}$, on ait*

(i). *la fonction $s \mapsto \mathcal{N}^*C_{(s|y)}$ est analytique sur $\mathcal{O}$,*

(ii). *la fonction $s \mapsto \mathcal{N}^*C_{(s|y)}$ est analytique sur V_η en la variable $\sqrt{1-s}$: plus précisément, pour tout $s \in V_\eta$ et tous $k,l \in E$,*

$$\mathcal{N}^*C_{(s|y)} = \mathcal{N}^*C(y)(k,l) + \widetilde{\mathcal{N}^*C(y)}(k,l)\sqrt{1-s} + (1-s)O_s(y)(k,l)$$

où • $\mathcal{N}^*C(y) := (\mathcal{N}^*C(y)(k,l))_{k,l\in E} := \left(\mathcal{N}^*C_{(1|y)}(k,l)\right)_{k,l\in E} \in \mathcal{S}^N_{[\alpha]}$,

• $\widetilde{\mathcal{N}^*C(y)} := \left(\widetilde{\mathcal{N}^*C(y)}(k,l)\right)_{k,l\in E} \in \mathcal{S}^N_{[\alpha]}$

et la fonction $s \mapsto O_s(y)(k,l)$, *à valeurs dans* $\mathcal{S}_{[\alpha]}$, *est analytique en la variable* $\sqrt{1-s}$ *et bornée sur* V_η.

De plus, pour tout $y \in \mathbb{Z}^{*-}$ *et* $k,l \in E$, *on a* $\mathcal{N}^*C(y)(k,l) \geqslant 0$ *et* $\widetilde{\mathcal{N}^*C(y)}(k,l) \leqslant 0$.

Proposition 3.4.10. *On suppose que le couple* (P,μ) *est* **apériodique** *et satisfait les hypothèses* ***M(exp)*[*α, β*]** *et* **C**. *Il existe un voisinage* $\mathcal{O}$ *de* $\overline{B(0,1)} \setminus \{1\}$ *dans* $\mathbb{C}$ *et une constante* $\eta > 0$ *tels que pour tout* $y \in \mathbb{Z}^+$, *on ait*

(i). *la fonction* $s \mapsto \mathcal{P}C_{(s|y)}$ *est analytique sur* $\mathcal{O}$,

(ii). *la fonction* $s \mapsto \mathcal{P}C_{(s|y)}$ *est analytique sur* V_η *en la variable* $\sqrt{1-s}$: *plus précisément, pour tout* $s \in V_\eta$ *et tous* $k,l \in E$, *on a*

$$\mathcal{P}C_{(s|y)}(k,l) = \mathcal{P}C(y)(k,l) + \widetilde{\mathcal{P}C(y)}(k,l)\sqrt{1-s} + (1-s)O_s(y)(k,l)$$

où • $\mathcal{P}C(y) := (\mathcal{P}C(y)(k,l))_{k,l\in E} := \left(\mathcal{P}C_{(1|y)}(k,l)\right)_{k,l\in E} \in \mathcal{S}^N_{[\alpha]}$,

• $\widetilde{\mathcal{P}C(y)} := \left(\widetilde{\mathcal{P}C(y)}(k,l)\right)_{k,l\in E} \in \mathcal{S}^N_{[\alpha]}$

et la fonction $s \mapsto O_s$, *à valeurs dans* $\mathcal{S}^N_{[\alpha]}$, *est analytique en la variable* $\sqrt{1-s}$ *et bornée sur* V_η.

Démonstration. Fixons $r \in [\alpha, 1[$. D'après le théorème 3.4.2, il existe un voisinage $\mathcal{O}$ de $\overline{B(0,1)} \setminus \{1\}$ dans $\mathbb{C}$ sur lequel la fonction $s \mapsto \mathcal{P}C_{(s,z)}$ est analytique sur $\mathcal{O}$ pour tout $z \in \mathcal{A}_{[r]}$. De plus, la fonction $(s,z) \mapsto \mathcal{P}C_{(s,z)}$ est bornée sur $\mathcal{O} \times \mathcal{A}_{[r]}$. D'après la formule de Cauchy et le théorème de convergence dominée, pour tout $y \in \mathbb{Z}^{*-}$ et tous $k,l \in E$, la fonction $s \mapsto \mathcal{P}C_{(s|y)}(k,l)$ est aussi analytique sur $\mathcal{O}$. D'après le théorème 3.4.2, il existe $\eta > 0$ tel que pour tout $s \in V_\eta$ et tous $k,l \in E$, la fonction $z \mapsto \mathcal{P}C_{(s,z)}(k,l)$ est une série de Laurent en z absolument convergente pour les valeurs de $z \in \mathcal{A}_{[r]}$ et on a

$$\mathcal{P}C_{(s,z)}(k,l) = \mathcal{P}C_z(k,l) + \sqrt{1-s}\widetilde{\mathcal{P}C_z}(k,l) + (1-s)O_{(s,z)}(k,l),$$

où les fonctions $z \mapsto \mathcal{P}C_z(k,l)$ et $z \mapsto \widetilde{\mathcal{P}C_z}(k,l)$ sont des séries de Laurent absolument convergentes pour tout $z \in \mathcal{A}_{[r]}$ et la fonction $(s,z) \mapsto O_{(s,z)}$ est bornée sur l'ensemble $V_\eta \times \mathcal{A}_{[r]}$. La formule de Cauchy et un argument de convergence dominé entraînent alors que pour tout $y \in \mathbb{Z}^{*-}$ et tous $k,l \in E$ on a

$$\begin{aligned}\mathcal{P}C_{(s|y)}(k,l) &= \frac{1}{2i\pi r}\int_{|z|=r}\frac{\mathcal{P}C_z(k,l)}{z^{y+1}}dz + \frac{1}{2i\pi r}\sqrt{1-s}\int_{|z|=r}\frac{\widetilde{\mathcal{P}C_z}(k,l)}{z^{y+1}}dz \\ &\quad +(1-s)\frac{1}{2i\pi r}\int_{|z|=r}O_{(s,z)}(k,l)dz,\end{aligned}$$

ce qui permet de conclure. □

De façon similaire, on a la

Proposition 3.4.11. *On suppose que le couple* (P,μ) *est* **apériodique** *et satisfait les hypothèses* ***M(exp)*[*α, β*]** *et* **C**. *Il existe alors un voisinage* $\mathcal{O}$ *de* $\overline{B(0,1)} \setminus \{1\}$ *dans* $\mathbb{C}$ *et une constante* $\eta > 0$ *tels que pour tout* $y \in \mathbb{Z}^+$,

(i). *la fonction* $s \mapsto \mathcal{N}^*B_{(s|y)}$ *est analytique sur* $\mathcal{O}$, (ii). *la fonction* $s \mapsto \mathcal{N}^* B_{(s|y)}$ *est analytique sur* V_η *en la variable* $\sqrt{1-s}$ *: plus précisément, pour tout* $s \in V_\eta$ *et tout* $k, l \in E$*, on a*

$$\mathcal{N}^* B_{(s|y)}(k,l) = \mathcal{N}^* B(y)(k,l) + \widetilde{\mathcal{N}^* B(y)}(k,l)\sqrt{1-s} + (1-s)O_s(y)(k,l)$$

$$\text{où} \quad \bullet \ \mathcal{N}^* B(y) := \left(\mathcal{N}^* B(y)(k,l)\right)_{k,l\in E} := \left(\mathcal{N}^* B_{(1|y)}(k,l)\right)_{k,l\in E} \in \mathcal{S}^N_{[\beta]},$$

$$\bullet \ \widetilde{\mathcal{N}^* B(y)} := \left(\widetilde{\mathcal{N}^* B(y)}(k,l)\right)_{k,l\in E} \in \mathcal{S}^N_{[\beta]}$$

et la fonction $s \mapsto O_s$*, à valeurs dans* $\mathcal{S}^N_{[\beta]}$*, est analytique en la variable* $\sqrt{1-s}$ *et bornée sur* V_η*.*

3.5 Applications aux théorèmes limites locaux

On s'inscrit à présent dans la même démarche que dans le chapitre 2, section 2.5, on obtient les estimations suivantes qui décrivent les fluctuations de la marche de markov couplée avec la chaîne $(\xi_n)_{n\geqslant 0}$. Cependant, en n'ayant pas pour le moment de renseignements sur la nullité ou non des constantes mises en jeu, on se contentra en première étape d'énoncer des résultats de calcul de limites et on n'établira pas d'équivalence ; on préfère alors utilser le théorème d'Odlysko-Flajolet qu'on énonce ci-dessous

Théorème 3.5.1. *[16] Soient* $\eta > 0$ *et* θ *un réel vérifiant* $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ *; On définit*

$$\Delta = \Delta(\theta, \eta) = \{s \in \mathbb{C} \text{ tel que } |s| < 1 + \eta, |Arg(s-1)| \geqslant \theta\}.$$

Soit $F = \sum_{n\geqslant 0} F_n s^n$ *une fonction anlytique sur un* $\Delta \setminus \{1\}$ *et qu'il existe un réel* α *tel que lorsque* s *tend vers* 1 *dans* Δ*, on a*

$$F(s) = o((1-s)^\alpha).$$

On a alors

$$F_n \underset{n\to+\infty}{=} o(n^{-\alpha-1}).$$

Le théorème 3.5.1 peut s'énoncer avec O et $\sim$. On peut aussi remplcer le réel 1 par n'importe quel réel positif R. Le théorème 3.4.2 en $z = 1$ et le théorème 3.5.1 appliqué avec $\alpha = \frac{-1}{2}$ (et donc $\Gamma(-\alpha) = \sqrt{\pi}$) donnent les résultats suivants :

Corollaire 3.5.1. *On suppose que le couple* (P, μ) *est* **apériodique** *et satisfait les hypothèses* $\boldsymbol{M(exp)[\alpha,\beta]}$ *et* **C**. *Pour tous* $k, l \in E$*, on a*

$$\sqrt{\pi} n^{\frac{1}{2}} \mathbb{P}_k(\xi_n = l, \tau^{*-} > n) \underset{n\to+\infty}{\to} K^+(k,l).$$

De même, on a le

Corollaire 3.5.2. *On suppose que le couple* (P, μ) *est* **apériodique** *et satisfait les hypothèses* $\boldsymbol{M(exp)[\alpha,\beta]}$ *et* **C**. *Pour tous* $k, l \in E$*, on a*

$$\sqrt{\pi} n^{\frac{1}{2}} \mathbb{P}_k(\xi_n = l, S_1 > S_n, S_2 > S_n, \cdots, S_{n-1} > S_n, S_n < 0) \underset{n\to+\infty}{\to} K^-(k,l).$$

Remarque 3.5.1. *En appliquant le raisonnement précédent à la chaîne duale, on obtient un résultat similaire pour la quantité* $\mathbb{P}_k(\xi_n = l, \tau^+ > n)$*.*

Les propositions 3.4.9, 3.4.7, 3.4.11, 3.4.10 et le théorème 3.5.1 appliqué avec $R = 1$, $\alpha = \frac{1}{2}$ (et donc $\Gamma(-\alpha) = -2\sqrt{\pi}$) donnent les résultats suivants :

Corollaire 3.5.3. *On suppose que le couple* (P,μ) *est* **apériodique** *et satisfait les hypothèses* $\boldsymbol{M(exp)[\alpha,\beta]}$ *et* **C**. *Pour tous* $y \in \mathbb{Z}^+$ *et* $k,l \in E$, *on a*

$$2\sqrt{\pi}n^{\frac{3}{2}}\mathbb{P}_k(\xi_n = l, S_1 > S_n, S_2 > S_n \cdots S_{n-1} > S_n, S_n = y) \underset{n\to+\infty}{\to} -\widetilde{\mathcal{P}B(y)}(k,l).$$

En utilisant la chaîne duale, on obtient le

Corollaire 3.5.4. *On suppose que le couple* (P,μ) *est* **apériodique** *et satisfait les hypothèses* $\boldsymbol{M(exp)[\alpha,\beta]}$ *et* **C**. *Pour tous* $y \in \mathbb{Z}^+$ *et* $k,l \in E$, *on a*

$$2\sqrt{\pi}n^{\frac{3}{2}}\mathbb{P}_k(\xi_{\tau^+} = l, \tau^+ = n, S_n = y) \underset{n\to+\infty}{\to} -\widetilde{(PB)'(y)}(k,l).$$

De façon similaire pour τ^{*-}, on a

Corollaire 3.5.5. *On suppose que le couple* (P,μ) *est* **apériodique** *et satisfait les hypothèses* $\boldsymbol{M(exp)[\alpha,\beta]}$ *et* **C**. *Pour tous* $y \in \mathbb{Z}^{*-}$ *et* $k,l \in E$, *on a*

$$2\sqrt{\pi}n^{\frac{3}{2}}\mathbb{P}_k(\xi_{\tau^{*-}} = l, \tau^{*-} = n, S_n = y) \underset{n\to+\infty}{\to} -\widetilde{\mathcal{N}^*C(y)}(k,l).$$

En considérant les potentiels, on a le

Corollaire 3.5.6. *On suppose que le couple* (P,μ) *est* **apériodique** *et satisfait les hypothèses* $\boldsymbol{M(exp)[\alpha,\beta]}$ *et* **C**. *Pour tous* $y \in \mathbb{Z}^+$ *et* $k,l \in E$, *on a*

$$2\sqrt{\pi}n^{\frac{3}{2}}\mathbb{P}_k(\xi_n = l, \tau^{*-} > n; S_n = y) \underset{n\to+\infty}{\to} -\widetilde{\mathcal{P}C(y)}(k,l).$$

De même, on obtient le

Corollaire 3.5.7. *On suppose que le couple* (P,μ) *est* **apériodique** *et satisfait les hypothèses* $\boldsymbol{M(exp)[\alpha,\beta]}$ *et* **C**. *Pour tous* $y \in \mathbb{Z}^{*-}$ *et* $k,l \in E$, *on a*

$$2\sqrt{\pi}n^{\frac{3}{2}}\mathbb{P}_k(\xi_n = l, S_1 > S_n, \cdots, S_{n-1} > S_n, S_n < 0, S_n = y) \underset{n\to+\infty}{\to} -\widetilde{\mathcal{N}^*B(y)}(k,l).$$

Soulignons que les propositions 3.4.7, 3.4.9, 3.4.10, 3.4.11 assurent que les constantes mises en jeu dans les énoncés ci-dessus sont positives.

Remarques 3.5.1. (i). *Pour tous* $k,l \in E$, *on a* $\pi(k,l) = \nu(k) > 0$; *d'après le fait 3.4.4, on a* $K^+K^- = \pi$ *et donc pour tous* $k,l \in E$, *il existe* $j \in E$, *tel que*

$$K^+(k,j) > 0 \quad \text{et} \quad K^-(j,l) > 0.$$

En considérant la suite $(-Y_i)_{\geqslant 1}$ *au lieu de* $(Y_i)_{i\geqslant 1}$ *on obtient : pour tout* $k \in E$, *il existe* $l \in E$ *tel que* $K^{\pm}(k,l) > 0$. *De même, pour tout* $l \in E$, *il existe* $k \in E$ *tel que* $K^{\pm}(k,l) > 0$. *En particulier, comme* $\nu(j) > 0$ *pour tout* $j \in E$, *il vient*

$$\nu K^{\pm}(l) = \sum_{j\in E} \nu(j)K^{\pm}(j,l) > 0 \quad \forall l \in E. \tag{3.5.1}$$

(ii). *Fixons $k, l \in E$. On a*

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}_k(\tau^{*-}1_{\{\xi_{\tau^{*-}}=l\}}) &= \sum_{n\geqslant 1}\mathbb{P}_k(\xi_{\tau^{*-}}=l, \tau^{*-}\geqslant n) \\
&= \lim_{s\nearrow 1}\mathcal{P}C_{(s,1)}(k,l) \\
&= \lim_{s\nearrow 1}\left(\frac{K^+(k,l)}{\sqrt{1-s}}+H_1(s)\right), \qquad (3.5.2)
\end{aligned}$$

avec $K^+(k,l)\geqslant 0$ et la fonction H_1 est bornée. D'autre part, on a $\mathbb{E}_k(\xi_{\tau^{*-}}=l, s^{\tau^{*-}}) = \mathcal{N}^*C_{(s,1)}(k,l)$, d'où

$$\mathbb{E}_k(\xi_{\tau^{*-}}=l,\tau^{*-}) = \lim_{s\nearrow 1}\frac{\mathcal{N}^*C_{(s,1)}(k,l)-\mathcal{N}^*C_{(1,1)}(k,l)}{s-1}. \qquad (3.5.3)$$

Or d'après la proposition 3.4.2, on a

$$\mathcal{N}^*C_{(s,1)}(k,l)=\mathcal{N}^*C_{(1,1)}(k,l)+\widetilde{\mathcal{N}^*C}_1(k,l)\sqrt{1-s}+(1-s)O_s(k,l),$$

où la fonction $s\mapsto O_s(k,l)$ est bornée sur un voisinage de 1. Ainsi, la relation (3.5.3) donne

$$\mathbb{E}_k(\xi_{\tau^{*-}}=l;\tau^{*-}) = -\lim_{s\nearrow 1}\frac{\widetilde{\mathcal{N}^*C}_1(k,l)}{\sqrt{1-s}}. \qquad (3.5.4)$$

D'après les relations (3.5.2) et (3.5.4), pour tous $k,l\in E$, on a

$$\mathbb{E}_k(\tau^{*-}1_{\{\xi_{\tau^{*-}}=l\}})=+\infty \Leftrightarrow K^+(k,l)>0 \Leftrightarrow \widetilde{\mathcal{N}^*C}_1(k,l)<0.$$

De même, on peut montrer que pour tous $k,l\in E$, on a

$$\mathbb{E}_k(\tau^{+}1_{\{\xi_{\tau^{+}}=l\}})=+\infty \Leftrightarrow K^-(k,l)>0 \Leftrightarrow \widetilde{\mathcal{P}B}_1(k,l)<0.$$

Ainsi en combinant la remarque 3.5.1 aux théorèmes limites locaux obtenus ci-dessus, on a les

Corollaire 3.5.8. *On suppose que le couple (P,μ) est* **apériodique** *et satisfait les hypothèses* $\boldsymbol{M(exp)[\alpha,\beta]}$ *et* **C**. *Pour tout $l\in E$, on a*

$$\mathbb{P}_\nu(\xi_n=l,\tau^{*-}>n)\underset{n\to+\infty}{\sim}\frac{\nu K^+(l)}{\sqrt{\pi}n^{\frac{1}{2}}}, \quad \text{avec} \qquad (3.5.5)$$

$\nu K^+(l)>0$ pour tout $l\in E$.

Corollaire 3.5.9. *On suppose que le couple (P,μ) est* **apériodique** *et satisfait les hypothèses* $\boldsymbol{M(exp)[\alpha,\beta]}$ *et* **C**. *Pour tout $l\in E$, on a*

$$\mathbb{P}_\nu(\xi_n=l,S_1>S_n,\cdots,S_{n-1}>S_n,S_n<0)\underset{n\to+\infty}{\sim}\frac{\nu K^-(l)}{\sqrt{\pi}n^{\frac{1}{2}}}, \quad \text{avec} \qquad (3.5.6)$$

$\nu K^-(l)>0$ pour tout $l\in E$.

Corollaire 3.5.10. *On suppose que le couple (P,μ) est* **apériodique** *et satisfait les hypothèses* $\boldsymbol{M(exp)[\alpha,\beta]}$ *et* **C**. *Pour tout $l\in E$, on a*

$$\mathbb{P}_\nu(\xi_n=l,\tau^{*-}=n)\underset{n\to+\infty}{\sim}\frac{-\nu\widetilde{\mathcal{N}^*C}_1(l)}{2\sqrt{\pi}n^{\frac{3}{2}}}, \quad \text{avec} \qquad (3.5.7)$$

$-\nu\widetilde{\mathcal{N}^*C}_1(l)>0$ pour tout $l\in E$.

Corollaire 3.5.11. *On suppose que le couple* (P, μ) *est* **apériodique** *et satisfait les hypothèses* $\boldsymbol{M(exp)[\alpha,\beta]}$ *et* **C**. *Pour tout* $l \in E$, *on a*

$$\mathbb{P}_\nu(\xi_n = l, S_1 > S_n, S_2 > S_n \cdots S_{n-1} > S_n, S_n \geqslant 0) \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{-\nu\widetilde{\mathcal{P}B}_1(l)}{2\sqrt{\pi}n^{\frac{3}{2}}}, \quad \textit{avec} \tag{3.5.8}$$

$-\nu\widetilde{\mathcal{P}B}_1(l) > 0$ *pour tout* $l \in E$.

En faisant la somme sur l dans les énoncés précédents, on obtient les

Corollaire 3.5.12. *On suppose que le couple* (P, μ) *est* **apériodique** *et satisfait les hypothèses* $\boldsymbol{M(exp)[\alpha,\beta]}$ *et* **C**. *On a alors*

$$\mathbb{P}_\nu(\tau^{*-} > n) \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{\nu K^+ h}{\sqrt{\pi}n^{\frac{1}{2}}}, \quad \textit{avec} \tag{3.5.9}$$

$\nu K^+ h > 0$ *pour tout* $l \in E$.

Corollaire 3.5.13. *On suppose que le couple* (P, μ) *est* **apériodique** *et satisfait les hypothèses* $\boldsymbol{M(exp)[\alpha,\beta]}$ *et* **C**. *On a alors*

$$\mathbb{P}_\nu(S_1 > S_n, \cdots, S_{n-1} > S_n, S_n < 0) \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{\nu K^- h}{\sqrt{\pi}n^{\frac{1}{2}}}, \quad \textit{avec} \tag{3.5.10}$$

$\nu K^- h > 0$ *pour tout* $l \in E$.

Corollaire 3.5.14. *On suppose que le couple* (P, μ) *est* **apériodique** *et satisfait les hypothèses* $\boldsymbol{M(exp)[\alpha,\beta]}$ *et* **C**. *On a alors*

$$\mathbb{P}_\nu(\tau^{*-} = n) \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{-\nu\widetilde{\mathcal{N}^* C}_1 h}{2\sqrt{\pi}n^{\frac{3}{2}}}, \quad \textit{avec} \tag{3.5.11}$$

$-\nu\widetilde{\mathcal{N}^* C}_1 h > 0$ *pour tout* $l \in E$.

Corollaire 3.5.15. *On suppose que le couple* (P, μ) *est* **apériodique** *et satisfait les hypothèses* $\boldsymbol{M(exp)[\alpha,\beta]}$ *et* **C**. *On a alors*

$$\mathbb{P}_\nu(S_1 > S_n, \cdots, S_{n-1} > S_n, S_n \geqslant 0) \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{-\nu\widetilde{\mathcal{P}B}_1 h}{2\sqrt{\pi}n^{\frac{3}{2}}}, \quad \textit{avec} \tag{3.5.12}$$

$-\nu\widetilde{\mathcal{P}B}_1 h > 0$ *pour tout* $l \in E$.

Dans le cas où les variables aléatoires Y_i sont i.i.d et centrées (1.1.2, (voir chapitre 1) on a

$$\mathbb{E}(\tau^{*-}) = +\infty \quad \text{et} \quad \mathbb{E}(\tau^+) = +\infty.$$

On se pose à présent la question de savoir si, sous l'hypothèse d'apériodicité sur P et sur le couple (P, μ), dans le cas des marches de Markov centrées, on a encore $\mathbb{E}_k(\tau^{*-} 1_{\{\xi_{\tau^{*-}} = l\}}) = +\infty$ et $\mathbb{E}_k(\tau^+ 1_{\{\xi_{\tau^+} = l\}}) = +\infty$, pour tous $k, l \in E$. Dans ce qui suit, nous donnons une réponse positive, sous une condition quelque peu restrictive sur la famille de lois μ. Nous supposerons que les lois μ_{kl} sont à support borné et vérifient une hypothèse qui traduit une sorte d'indépendance entre les accroissements de la marche de Markov.
Plus précisément, on supposera que toutes les lois μ_{kl} sont à support borné et qu'il existe une loi

de probabilité $\underline{\mu}$ sur $\mathbb{Z}$ apériodique et une constante $c_0 > 0$ telle que, pour tous $k, l \in E$ et $y \in \mathbb{Z}$, on ait

$$\mu_{kl}(y) \geqslant c_0 \underline{\mu}(y).$$

On s'inspire du travail de S.Lalley dans [27], et on généralise un lemme qu'il a démontré dans le cas où les variables aléatoires Y_i sont indépendantes.
Fixons $S, M \in \mathbb{R}^{*+}$, on introduit les hypothèses suivantes :

Hypothèses 3.5.1. **Binf** *Il existe une loi de probabilité $\underline{\mu}$ sur $\mathbb{Z}$ apériodique et une constante $c_0 > 0$ telle que, pour tous $k, l \in E$ et $y \in \mathbb{Z}$, on ait*

$$\mu_{kl}(y) \geqslant c_0 \underline{\mu}(y),$$

$\underline{\mu}(-S) > 0$ *et* $\underline{\mu}(\mathbb{Z}^{*+}) > 0$.
Bsup *Il existe une loi de probabilité $\underline{\mu}$ sur $\mathbb{Z}$ apériodique et une constante $c_0 > 0$ telle que, pour tous $k, l \in E$ et $y \in \mathbb{Z}$, on ait*

$$\mu_{kl}(y) \geqslant c_0 \underline{\mu}(y),$$

avec $\underline{\mu}(M) > 0$ *et* $\underline{\mu}(\mathbb{Z}^{*-}) > 0$.

On a le

Lemme 3.5.1. *On suppose que le couple (P, μ) est* **apériodique** *et satisfait les hypothèses* $\boldsymbol{M(exp)[\alpha, \beta]}$, **C** *et* **Binf**. *De plus, on se place dans le cas où toutes les lois μ_{kl} sont à support borné inférieurement inclus dans $[-S, +\infty[$. Il existe alors $r \geqslant 1$ et $c > 0$ tels que pour tous $x, y \in \{1, S\}$ et $k, l, i, j \in E$ et $n \geqslant 1$, on ait*

$$\mathbb{P}_k(\xi_{\tau^{*-}} = l, \tau^{*-} = n + r, S_{\tau^{*-}} = -x) \geqslant c\ \mathbb{P}_i(\xi_{\tau^{*-}} = j, \tau^{*-} = n, S_{\tau^{*-}} = -y). \tag{3.5.13}$$

Démonstration. On fixe $C > 0$. La marche aléatoire $(S_n^{\underline{\mu}})_{n \in \mathbb{N}}$ de loi $\underline{\mu}$ sur $\mathbb{Z}$ étant apériodique sur $\mathbb{Z}$, pour tous $x, y \in \{0, \cdots, C\}$, il existe $n_0(x, y) \in \mathbb{N}^*$ tel que pour tout $n \geqslant n_0(x, y)$, on peut trouver un chemin de probabilité strictement positive de longueur n reliant x à y. Comme l'ensemble $\{0, \cdots, C\}$ est fini, $n_0(x, y)$ ne dépend en fait pas de x, y ; on pose $n_0 := n_0(x, y)$. Pour tout $n \geqslant n_0$ et tous $x, y \in \{0, \cdots, C\}$, il existe alors un chemin Γ_1 de probabilité strictement positive de longueur n reliant x à y. Supposons dans un premier temps que $x \leqslant y$; puisque les accroissements sont indépendants, on peut réordonner les pas de telle sorte à avoir d'abord tous les pas vers la droite, puis ceux vers la gauche. Ainsi, le nouveau chemin obtenu Γ_2 n'entre pas dans $]-\infty, 0[$ et a la même longueur que Γ_1. Lorsque $x > y$, on reprend le même raisonnement ; cette fois, en mettant d'abord tous les pas vers la gauche puis les pas vers la droite. Ainsi pour tout $C > 0$, il existe $n_0 \in \mathbb{N}^*$ tel que pour tout $n \geqslant n_0$ et tous $x, y \in \{0, C\}$, on peut trouver un chemin de longueur n qui mène de x à y et de probabilité strictement positive qui ne rentre pas dans $-]\infty, 0[$. Autrement dit

$$\mathbb{P}_x((\tau^{\underline{\mu}})^{*-} > n, S_n^{\underline{\mu}} = y) > 0,$$

où $(\tau^{\underline{\mu}})^{*-}$ est le premier temps de record strict descendant correspondant. D'autre part, pour tous $x, y \in \{1, S\}$ et tous $k, l \in E$, on a

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}_{(k,x)}(\xi_n = l, \tau^{*-} > n, S_n = y) &= \sum_{k_1, \cdots, k_{n-1} \in E} \sum_{y_1, \cdots, y_{n-1} \geqslant 0} P(k, k_1) \cdots P(k_{n-1}, l) \\
&\quad \times \mu_{kk_1}(y_1 - x) \cdots \mu_{k_{n-1}l}(y - y_{n-1}) \\
&\geqslant c_0^n \sum_{k_1, \cdots, k_{n-1} \in E} P(k, k_1) \cdots P(k_{n-1}, l) \\
&\quad \times \sum_{y_1, \cdots, y_{n-1} \geqslant 0} \underline{\mu}(y_1 - x) \cdots \underline{\mu}(y - y_{n-1}) \\
&\geqslant c_0^n P^n(k, l) \mathbb{P}_{(k,x)}((\tau^{\underline{\mu}})^{*-} > n, S_n^{\underline{\mu}} = y).
\end{aligned}$$

Lorsque $x, y \in \{0, \cdots, S\}$, on a $S - x + y \in \{0, 2S\}$; d'après ce qui précède, il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ et pour tous $x, y \in \{0, S\}$ et $k, i \in E$, un chemin Γ_1 de longueur n_0 de probabilité strictement positive qui mène de $(k, 0)$ à $(i, S - x + y)$ sans rentrer dans $]-\infty, 0[$. On considère à présent un chemin Γ_2 de longueur n allant de $(i, S - x + y)$ à $(j, S - x)$, qui rentre dans dans $]-\infty, S - x + y]$ pour la première fois en atteignant $S - x$; ce chemin a la même probabilité qu'un chemin de longueur n, menant de 0 à $-y$ et qui entre pour la première fois dans $]-\infty, 0[$ en $-y$. Soit $l' \geqslant 0$ tel que $P(l', l) > 0$. D'après la construction précédente, il existe un chemin Γ_3 de longueur n_0 et de probabilité strictement positive qui mène de $(j, S-x)$ à $(l', S-x)$. On note alors c_1 le minimum des probabilités des chemins $(\Gamma_1 \bigcup \Gamma_3)$ lorsque x, y varient dans l'intervalle $\{0, S\}$. Finalement, puisque $P(l', l)\mu(-S) > 0$, il existe un chemin Γ_4 de longueur 1 qui mène de $(l', S-x)$ à $(l, -x)$. Le chemin Γ obtenu en concaténant $\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3$ et Γ_4 a pour longueur $n + 2n_0 + 1$ et mène de $(k, 0)$ à $(l, -x)$ en entrant dans $]-\infty, 0[$ pour la première fois en $-x$; le résultat annoncé est ainsi démontré avec $c = P(l', l)\mu(-S)c_1$ et $k = 2n_0 + 1$. □

De manière analogue, on a le

Lemme 3.5.2. *On suppose que le couple (P, μ) est* **apériodique** *et satisfait les hypothèses* $\boldsymbol{M(exp)[\alpha, \beta]}$, **C** *et* **Bsup**. *De plus, on se place dans le cas où toutes les lois μ_{kl} sont à support borné supérieurement inclus dans $]-\infty, M]$. Il existe alors $r \geqslant 1$ et $c > 0$ tels que pour tous $x, y \in \{0, M\}$ et $k, l, i, j \in E$ et $n \geqslant 1$, on a*

$$\mathbb{P}_k(\xi_{\tau^+} = l, \tau^+ = n + r, S_{\tau^+} = x) \geqslant c\ \mathbb{P}_i(\xi_{\tau^+} = j, \tau^+ = n, S_{\tau^+} = y). \tag{3.5.14}$$

Sous les hypothèses du lemme 3.5.1, pour tout $x \in \{0, M\}$ et $k, l, i, j \in E$, d'après l'inégalité (3.5.13), en sommant sur x, on obtient

$$\mathbb{P}_k(\xi_{\tau^{*-}} = l, \tau^{*-} = n + r) \geqslant c\ \mathbb{P}_i(\xi_{\tau^{*-}} = j, \tau^{*-} = n). \tag{3.5.15}$$

De même, sous les hypothèses du lemme 3.5.2, on a

$$\mathbb{P}_k(\xi_{\tau^+} = l, \tau^+ = n + r) \geqslant c\ \mathbb{P}_i(\xi_{\tau^+} = j, \tau^+ = n). \tag{3.5.16}$$

On a la

Proposition 3.5.1. *On suppose que le couple (P, μ) est* **apériodique** *et satisfait les hypothèses* $\boldsymbol{M(exp)[\alpha, \beta]}$, **C** *et* **Binf**. *De plus, on se place dans le cas où toutes les lois μ_{kl} sont à support inclus dans $[-S, +\infty[$. Pour tous $k, l \in E$, on a alors d'une part*

(i).

$$\mathbb{E}_k(\tau^{*-} 1_{\{\xi_{\tau^{*-}} = l\}}) = +\infty$$

et d'autre part,

(ii).

$$K^+(k, l) > 0 \quad et \quad \widetilde{\mathcal{N}^* C_1}(k, l) < 0.$$

Démonstration. Fixons $k, l \in E$, on a

$$\mathbb{E}_k(\tau^{*-} 1_{\{\xi_{\tau^{*-}} = l\}}) = \sum_{n \geqslant 1} n \mathbb{P}_k(\xi_{\tau^{*-}} = l, \tau^{*-} = n).$$

D'après la remarque 3.5.1, il existe $j \in E$ tel que

$$\mathbb{E}_k(\tau^{*-} 1_{\{\xi_{\tau^{*-}} = j\}}) = \sum_{n \geqslant 1} n \mathbb{P}_k(\xi_{\tau^{*-}} = j, \tau^{*-} = n) + \infty.$$

L'identité (3.5.15) entraîne que la série $\sum_{n\geqslant 1} n\mathbb{P}_k(\xi_{\tau^{*-}} = l, \tau^{*-} = n)$ diverge aussi. Par conséquent, $\mathbb{E}_k(\tau^{*-}1_{\{\xi_{\tau^{*-}}=l\}}) = +\infty$; la seconde assertion de la proposition se déduit de la remarque 3.5.1. □

De même, on a la

Proposition 3.5.2. *On suppose que le couple* (P, μ) *est* **apériodique** *et satisfait les hypothèses* $\boldsymbol{M(exp)[\alpha, \beta]}$, **C** *et* **Bsup**. *De plus, on se place dans le cas où toutes les lois* μ_{kl} *sont à support inclus dans* $]-\infty, M]$. *Pour tous* $k, l \in E$, *on a d'une part*

(i).

$$\mathbb{E}_k(\tau^+ 1_{\{\xi_{\tau^+}=l\}}) = +\infty,$$

et d'autre part,

(ii).

$$K^-(k,l) > 0 \quad \textit{et} \quad \widetilde{\mathcal{P}B}_1(k,l) < 0.$$

Des corollaires 3.5.1, 3.5.2 et de la proposition 3.5.2, découle le

Corollaire 3.5.16. *On suppose que le couple* (P, μ) *est* **apériodique** *et satisfait les hypothèses* $\boldsymbol{M(exp)[\alpha, \beta]}$, **C** *et* **Binf**. *De plus, on se place dans le cas où toutes les lois* μ_{kl} *sont à support borné inférieurement inclus dans* $[-S, +\infty[$. *Pour tous* $k, l \in E$, *on a*

$$\mathbb{P}_k(\xi_n = l, \tau^{*-} > n) \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{K^+(k,l)}{\sqrt{\pi} n^{\frac{1}{2}}}, \tag{3.5.17}$$

avec $K^+(k,l) > 0$ *pour tous* $k, l \in E$.

Corollaire 3.5.17. *On suppose que le couple* (P, μ) *est* **apériodique** *et satisfait les hypothèses* $\boldsymbol{M(exp)[\alpha, \beta]}$, **C** *et* **Binf**. *De plus, on se place dans le cas où toutes les lois* μ_{kl} *sont à support borné inférieurement inclus dans* $[-S, +\infty[$. *Pour tous* $k, l \in E$, *on a*

$$\mathbb{P}_k(\xi_n = l, \tau^{*-} = n) \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{-\widetilde{\mathcal{N}^*C}_1(k,l)}{2\sqrt{\pi} n^{\frac{3}{2}}}, \tag{3.5.18}$$

avec $-\widetilde{\mathcal{N}^*C}_1(k,l) > 0$ *pour tous* $k, l \in E$.

Corollaire 3.5.18. *On suppose que le couple* (P, μ) *est* **apériodique** *et satisfait les hypothèses* $\boldsymbol{M(exp)[\alpha, \beta]}$, **C** *et* **Bsup**. *De plus, on se place dans le cas où toutes les lois* μ_{kl} *sont à support borné supérieurement inclus dans* $]-\infty, M]$. *Pour tous* $k, l \in E$, *on a*

$$\mathbb{P}_k(\xi_n = l, S_1 > S_n, \cdots, S_{n-1} > S_n, S_n < 0) \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{K^-(k,l)}{\sqrt{\pi} n^{\frac{1}{2}}}, \tag{3.5.19}$$

avec $K^-(k,l) > 0$ *pour tous* $k, l \in E$.

Corollaire 3.5.19. *On suppose que le couple* (P, μ) *est* **apériodique** *et satisfait les hypothèses* $\boldsymbol{M(exp)[\alpha, \beta]}$, **C** *et* **Bsup**. *De plus, on se place dans le cas où toutes les lois* μ_{kl} *sont à support borné supérieurement inclus dans* $]-\infty, M]$. *Pour tous* $k, l \in E$, *on a*

$$\mathbb{P}_k(\xi_n = l, S_1 > S_n, \cdots, S_{n-1} > S_n, S_n \geqslant 0) \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{-\widetilde{\mathcal{P}B}_1(k,l)}{2\sqrt{\pi} n^{\frac{3}{2}}}, \tag{3.5.20}$$

avec $-\widetilde{\mathcal{P}B}_1(k,l) > 0$ *pour tous* $k, l \in E$.

En adoptant le même raisonnement pour la marche duale, on obtient un résultat similaire pour l'estimation des quantités $\mathbb{P}_k(\xi_n = l, \tau^{*-} > n)$ lorsque n tend vers $+\infty$.

Afin d'obtenir des estimations plus précises dans les énoncés 3.5.3, 3.5.4, 3.5.5, 3.5.6, 3.6.7, on voudrait à présent répondre à la question de la nullité des constantes $\widetilde{\mathcal{N}^*C}(y)(k,l)$ (resp. $\widetilde{\mathcal{P}B}(y)(k,l)$), pour $y \in \mathbb{Z}$ et $k, l \in E$ sous les hypothèses du lemme 3.5.1 (resp. 3.5.2). On a la

Proposition 3.5.3. *On suppose que le couple (P,μ) est* **apériodique** *et satisfait les hypothèses* $\boldsymbol{M(exp)[\alpha,\beta]}$, **C** *et* **Binf**. *De plus, on se place dans le cas où toutes les lois μ_{kl} sont à support borné inférieurement inclus dans $[-S,+\infty[$. Pour tous $k,l \in E$, on a*

$$\forall y < 0, \quad \widetilde{\mathcal{N}^*C}(y)(k,l) < 0. \tag{3.5.21}$$

Démonstration. Fixons $k, l \in E$. On suppose que pour tout $y < 0$ on a $\widetilde{\mathcal{N}^*C}(y)(k,l) = 0$. On a alors de façon immédiate $\sum_{y<0} \widetilde{\mathcal{N}^*C}(y)(k,l) = 0$. Or

$$\mathcal{N}^*C_{(s,1)}(k,l) = \sum_{y<0} \mathcal{N}^*C(y)(k,l)s^y,$$

avec $\sum_{y<0} |\mathcal{N}^*C(y)(k,l)| = \mathbb{E}_k(\xi_{\tau^{*-}} = l) < +\infty$. Et donc $\widetilde{\mathcal{N}^*C_1}(k,l) = 0$ pour tous $k, l \in E$, ce qui contredit la remarque 3.5.1$-ii)$ et la proposition 3.5.3. Ainsi, il existe $y_0 < 0$ tel que $\widetilde{\mathcal{N}^*C}(y_0)(k,l) < 0$. Or on a

$$\widetilde{\mathcal{N}^*C}(y)(k,l) = 0 \Leftrightarrow \lim_{s \nearrow 1} \frac{\mathcal{N}^*C_{(s|y)}(k,l) - \mathcal{N}^*C_{(1|y)}(k,l)}{s-1} < +\infty.$$

Par conséquent, la fonction $s \mapsto \mathcal{N}^*C_{(s|y_0)}(k,l)$ n'admet pas de dérivée à droite en 1 ; le lemme 3.5.1 montre que toutes les séries entières $s \mapsto \mathcal{N}^*C_{(s|y)}(k,l)$ sont de même nature ; ce qui prouve l'identité (3.5.2). $\square$

De même, on a la

Proposition 3.5.4. *On suppose que le couple (P,μ) est* **apériodique** *et satisfait les hypothèses* $\boldsymbol{M(exp)[\alpha,\beta]}$, **C** *et* **Bsup**. *De plus, on se place dans le cas où toutes les lois μ_{kl} sont à support borné supérieurement inclus dans $]-\infty, M]$. Pour tous $k,l \in E$, on a*

$$\forall y \geqslant 0, \quad \widetilde{\mathcal{P}B}(y)(k,l) < 0. \tag{3.5.22}$$

D'après les propositions 3.5.3 et 3.5.4 et les corollaires 3.5.4 et 3.5.5, on obtient les

Corollaire 3.5.20. *On suppose que le couple (P,μ) est* **apériodique** *et satisfait les hypothèses* $\boldsymbol{M(exp)[\alpha,\beta]}$, **C** *et* **Binf**. *De plus, on se place dans le cas où toutes les lois μ_{kl} sont à support borné inférieurement inclus dans $[-S,+\infty[$. Pour tous $y \in \mathbb{Z}^{*-}$ et $k,l \in E$, on a*

$$\mathbb{P}_k(\xi_{\tau^{*-}} = l, \tau^{*-} = n, S_n = y) \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{-\widetilde{\mathcal{N}^*C(y)}(k,l)}{2\sqrt{\pi}n^{\frac{3}{2}}} \tag{3.5.23}$$

avec $\mathcal{N}^*\widetilde{C(y)}(y)(k,l) < 0$ pour tous $y \in \mathbb{Z}^{*-}$ et $k,l \in E$.

Corollaire 3.5.21. *On suppose que le couple (P,μ) est* **apériodique** *et satisfait les hypothèses* $\boldsymbol{M(exp)[\alpha,\beta]}$*,* **C** *et* **Bsup**. *De plus, on se place dans le cas où toutes les lois μ_{kl} sont à support borné supérieurement inclus dans $]-\infty,M]$. Pour tous $y\in\mathbb{Z}^+$ et $k,l\in E$, on a*

$$\mathbb{P}_k(\xi_n=l,S_1>S_n,S_2>S_n\cdots S_{n-1}>S_n,S_n=y)\underset{n\to+\infty}{\sim}\frac{-\widetilde{\mathcal{P}B(y)}(k,l)}{2\sqrt{\pi}n^{\frac{3}{2}}}$$

avec $\widetilde{\mathcal{P}B(y)}(k,l)<0$ pour tous $y\in\mathbb{Z}^+$ et $k,l\in E$.

En utilisant la marche duale, on obtient un résultat similaire pour l'estimation des quantités $\mathbb{P}_k(\xi_{\tau^+}=l,\tau^+=n,S_n=y)$ lorsque n tend vers $+\infty$.

3.6 Marche de Markov dans le cas décentré

On suppose que le couple (P,μ) est **apériodique** et satisfait l'hypothèse $\boldsymbol{M(exp)[\alpha,\beta]}$. Pour tout $r\in[\alpha,\beta]$, on introduit $P^{(r)}$ la probabilité de transition définie sur $E\times E$ pour tous $k,l\in E$ par

$$P^{(r)}(k,l)=\frac{h_r(l)\hat{\mu}_{kl}(r)P(k,l)}{h_r(k)}=\frac{h_r(l)P_r(k,l)}{\lambda_r h_r(k)},\tag{3.6.1}$$

où $h_r\in(\mathbb{R}^{*+})^N$ et $\lambda_r\in\mathbb{R}^{*+}$ sont donnés par la proposition 3.2.1 et par la remarque 3.2.3. On note $D_r:=\operatorname{Diag}(h_r(1),\cdots h_r(N))$. On a

$$P^{(r)}=\frac{1}{\lambda_r}D_r^{-1}P_rD_r.\tag{3.6.2}$$

Rappelons que d'après le fait 3.2.2, la matrice P_r est une matrice positive et primitive ; elle vérifie par conséquent les hypothèses du théorème de Perron Frobenius, λ_r étant l'unique valeur propre dominante de P_r. De plus le sous-espace $\mathbb{C}h_r$ de dimension 1 est l'espace propre associé à λ_r. D'après la relation (3.6.2), la matrice $P^{(r)}$ est donc positive, primitive ; elle satisfait à son tour les hypothèses du théorème de Perron Frobenius. On introduit aussi pour tout $r\in[\alpha,\beta]$ la famille de lois $\mu^{(r)}=(\mu^{(r)}_{k,l})_{k,l\in E}$ définie pour tous $k,l\in E$ par

$$\mu^{(r)}_{k,l}(y)=\frac{r^y}{\hat{\mu}_{kl}(r)}\mu_{kl}(y).\tag{3.6.3}$$

Il est clair que lorsque le couple (P,μ) satisfait l'hypothèse $\boldsymbol{M(exp,[\alpha,\beta])}$, le couple $(P^{(r)},\mu^{(r)})$ vérifie l'hypothèse $\boldsymbol{M(exp,[\frac{\alpha}{r},\frac{\beta}{r}])}$. On fixe $r\in[\alpha,\beta]$. Vérifions que $P^{(r)}$ définie bien une probabilité de transition sur $E\times E$. Pour tout $k\in E$, on a

$$\sum_{l\in E}P^{(r)}(k,l)=\frac{\sum_{l\in E}h_r(l)P_r(k,l)}{\lambda_r h_r(k)}=\frac{(P_rh_r)(k)}{\lambda_r h_r(k)}.$$

On associe à la probabilité de transition $P^{(r)}$ et à la famille de lois $\mu^{(r)}$, une chaîne de Markov sur $E\times\mathbb{Z}$ de probabilité de transition $Q^{(r)}$, avec

$$\begin{aligned}\forall(k,x),(l,y)\in E\times\mathbb{Z},\quad Q^{(r)}\left((k,x),(l,y)\right)&=P^{(r)}(k,l)\mu^{(r)}_{k,l}(y)\\&=\frac{h_r(l)}{\lambda_r\hat{\mu}_{kl}(r)h_r(k)}P_r(k,l)r^y\mu_{kl}(y).\end{aligned}\tag{3.6.4}$$

Pour tous $k,l\in E$ et $z\in\mathbb{C}$, on note $p^{(r)}_z(k,l)$ la transformée de Laplace en y du noyau $P^{(r)}$ définie par

$$p^{(r)}_z(k,l)=P^{(r)}(k,l)\widehat{\mu^{(r)}}_{k,l}(z)=\frac{P_{rz}(k,l)h_r(l)}{\lambda_r h_r(k)}.$$

On a
$$p_z^{(r)} = \frac{1}{\lambda_r} D_r^{-1} P_{rz} D_r. \tag{3.6.5}$$

Comme le couple (p, μ) satisfait l'hypothèse $\boldsymbol{M(exp)[\alpha,\beta]}$, pour tous $k, l \in E$, l'application $z \mapsto p_z^{(r)}(k,l)$ est bien définie sur $\mathcal{A}_{[\frac{\alpha}{r},\frac{\beta}{r}]}$. Remarquons que puisque $r \in [\alpha, \beta]$, on a $1 \in [\frac{\alpha}{r}, \frac{\beta}{r}]$. D'après la relation (3.6.5), il est clair que lorsque le couple (P, μ) est **apériodique**, il en est de même pour $(P^{(r)}, \mu^{(r)})$. Le but de cette section est d'étendre les résultats précédents au cas décentré. Une solution classique est la procédure dite de relativisation avec laquelle on se ramène à l'étude du noyau $P^{(r)}$ avec un choix adéquat de r pour lequel le couple $(P^{(r)}, \mu^{(r)})$ va satisfaire l'hypothèse **C**. On va alors exprimer la valeur propre dominante de $p^{(r)}$, qu'on notera $\lambda^{(r)}$, en fonction de λ_r et déterminer $r_0 \in [\alpha, \beta]$ tel que $(\lambda^{(r_0)})' = 0$.

Propriétés spectrales de $P_z^{(r)}$

D'après la proposition 3.2.1, pour tout $z \in \mathcal{A}_{[\frac{\alpha}{r},\frac{\beta}{r}]}$ tel que $rz \in U_\eta$ et pour tous $k, l \in E$, on a

$$P_z^{(r)}(k,l) = \frac{P_{rz}(k,l)h_r(l)}{\lambda_r h_r(k)} = \frac{\lambda_{rz}}{\lambda_r}\frac{\pi_{rz}(k,l)h_r(l)}{h_r(k)} + \frac{R_{rz}(k,l)h_r(l)}{\lambda_r h_r(k)}.$$

On pose alors
$$\lambda_z^{(r)} := \frac{\lambda_{rz}}{\lambda_r}$$

$$\begin{aligned} \text{et pour tous} \quad k,l \in E, \quad \pi_z^{(r)}(k,l) \quad &:= \quad \frac{\pi_{rz}(k,l)h_r(l)}{h_r(k)}, \\ R_z^{(r)}(k,l) \quad &:= \quad \frac{R_{rz}(k,l)h_r(l)}{\lambda_r h_r(k)}. \end{aligned}$$

On a
$$\pi_z^{(r)} = D_r^{-1} \pi_{rz} D_r \tag{3.6.6}$$
et
$$R_z^{(r)} = \frac{1}{\lambda_r} D_r^{-1} R_{rz} D_r. \tag{3.6.7}$$

Comme la matrice π_{rz} est une matrice de projection de rang 1 et d'après la relation (3.6.6), il en est de même pour la matrice π_z^r. L'identité (3.6.7) donne $\rho(R_z^{(r)}) \leqslant \frac{1}{\lambda_r}\rho(R_{rz}) < \frac{\lambda_{rz}}{\lambda_r}$; de plus, puisque $\pi_{rz} R_{rz} = R_{rz}\pi_{rz} = 0$, on a

$$\begin{aligned} \pi_z^r R_z^{(r)} &= D_r^{-1}\pi_{rz} D_r D_r^{-1} R_{rz} D_r \\ &= D_r^{-1}\pi_{rz} R_{rz} D_r \\ &= D_r^{-1} R_{rz}\pi_{rz} D_r = R_z^{(r)}\pi_z^{(r)} = 0. \end{aligned}$$

Remarquons que pour $z = 1$, on a $\lambda_z^{(r)} = 1$, et la matrice $\pi_1^{(r)}$ est une matrice stochastique ; en effet, puisque $\pi_r h_r = h_r$, on a

$$\sum_{l\in E} \pi_1^{(r)}(k,l) = \frac{\sum_{l\in E} \pi_r(k,l)h_r(l)}{h_r(k)} = \frac{(\pi_r h_r)(k)}{h_r(k)} = 1.$$

En utilisant la proposition 3.2.1, on peut à présent énoncer la

Proposition 3.6.1. *On suppose que le couple (P, μ) est* **apériodique** *et satisfait l'hypothèses* $\boldsymbol{M(exp)[\alpha,\beta]}$.

(i). *Pour tout $z \in U_{\eta/r}$, on a $P_z^{(r)} = \lambda_z^{(r)} \pi_z^{(r)} + R_z^{(r)}$, où*

$$\begin{aligned}
\lambda_z^{(r)} &= \frac{\lambda_{rz}}{\lambda_r}, \\
\pi_z^{(r)} &= D_r^{-1} \pi_{rz} D_r \quad \text{et} \\
R_z^{(r)} &= \frac{1}{\lambda_r} D_r^{-1} R_{rz} D_r,
\end{aligned}$$

avec
• *$\lambda_z^{(r)}$ est l'unique valeur propre dominante de $P_z^{(r)}$, cette valeur propre est simple et satisfait $|1-\lambda_z^{(r)}| \leqslant \eta_0$: il existe donc un unique vecteur ligne $\nu_z^{(r)} \in \mathbb{C}^N$ et un unique vecteur colonne $h_z^{(r)} \in \mathbb{C}^N$ tels que*

$$\sum_{k\in E} \nu_z^{(r)}(k) = 1, \quad \sum_{k\in E} \nu_z^{(r)}(k) h_z^{(r)}(k) = 1,$$

$$\nu_z^{(r)} P_z^{(r)} = \lambda_z^{(r)} \nu_z^{(r)}, \quad P_z^{(r)} h_z^{(r)} = \lambda_z^{(r)} h_z^{(r)}.$$

• *la matrice π_z^r est de rang 1 et correspond à la projection sur l'espace propre de dimension 1 associé à λ_z^r ; elle est donnée par $\pi_z^{(r)} = (h_z^{(r)}(k)\nu_z^{(r)}(l))_{k,l\in E}$,*
• *la matrice $R_z^{(r)}$ est une matrice de rayon spectral $\rho(R_z^{(r)}) < 1 - 2\eta_0 < 1$,*
• $\pi_z^{(r)} R_z^{(r)} = R_z^{(r)} \pi_z^{(r)} = 0$,
• *les applications $z \mapsto P_z^{(r)}$, $z \mapsto \lambda_z^{(r)}$, $z \mapsto \pi_z^{(r)}$ et $z \mapsto R_z^{(r)}$ sont analytiques sur U_η.*

(ii). *Si de plus (P,μ) est* **apériodique**, *il existe $\rho \in]0,1[$ tel que pour tout $z \in \mathcal{A}_{[1-\eta,1+\eta]} \setminus U_\eta$, on ait*

$$\rho(P_z^{(r)}) < \rho.$$

D'après [32], la fonction $t \mapsto \lambda_t$ est strictement convexe sur $]\alpha,\beta[$, elle atteint alors son minimum en un unique $r_0 \in [\alpha,\beta]$. On rappelle à présent l'hypothèse suivante

Hypothèse 3.6.1. Hypothèse min($[\alpha,\beta]$) *Le couple (P,μ) satisfait* $\boldsymbol{M(exp)([\alpha,\beta])}$ *et la fonction $t \mapsto \lambda_t$ définie sur $[\alpha,\beta]$ atteint son minimum dans $]\alpha,\beta[$.*

Ainsi, lorsque le couple (P,μ) satisfait l'hypothèse $\boldsymbol{Min([\alpha,\beta])}$, il existe $r_0 \in]\alpha,\beta[$ tel que $\frac{\partial \lambda_t}{\partial t}(r_0) = 0$; on note $\lambda_{r_0} := \lambda_0 \leqslant 1$. On a alors $\frac{\partial \lambda_z^{(r_0)}}{\partial z}(1) = 0$. En effet,

$$\frac{\partial \lambda_z^{(r_0)}}{\partial z}(1) = \frac{1}{\lambda_{r_0}} \frac{\partial \lambda_{r_0 z}}{\partial z}(1) = \frac{r_0}{\lambda_{r_0}} \frac{\partial \lambda_z}{\partial z}(r_0) = 0.$$

Le noyau de transition $P^{(r_0)}$ nous permet donc de nous ramener au cas centré. Pour alléger, on note $P^0 := P^{(r_0)}$; de la même façon, toutes les quantités associées au noyau $P^{(r_0)}$ seront notées avec un 0 en exposant. Grâce au pragraphe précédent, on a la

Proposition 3.6.2. *On suppose que le couple (P,μ) est* **apériodique** *et satisfait l'hypothèse* $\boldsymbol{Min([\alpha,\beta])}$. *Alors, le couple (P^0,μ^0) est aussi* **apériodique** *et satisfait les hypothèses* $\boldsymbol{M(exp)[\frac{\alpha}{r_0},\frac{\beta}{r_0}]}$ *et* **C**.

La proposition suivante permet de relier les couples (P,μ) et (P^0,μ^0).

Proposition 3.6.3. *On suppose que le couple (P,μ) est* **apériodique** *et satisfait l'hypothèse* $\boldsymbol{Min([\alpha,\beta])}$. *Pour toute fonction $\Phi : \mathbb{R}^{n+1} \longrightarrow \mathbb{C}$ bornée, on a*

$$\mathbb{E}_k\left(\xi_n = l, \Phi(S_0,\cdots,S_n)\right) = \lambda_0^n \frac{h_{r_0}(k)}{h_{r_0}(l)} \mathbb{E}_k^0\left(\xi_n = l, \Phi(S_0,\cdots,S_n) r_0^{-S_n}\right). \tag{3.6.8}$$

On rappelle que

- $\mathcal{P}B_{(s|y)}(k,l) = \sum_{n\geqslant 1} \mathbb{P}_k(\xi_n = l, S_1 > S_n, S_2 > S_n, \cdots, S_{n-1} > S_n, S_n = y)s^n$,
- $\mathcal{N}^*C_{(s|y)}(k,l) = \mathbb{E}_k(\xi_{\tau^{*-}} = l, S_{\tau^{*-}} = y; s^{\tau^{*-}})$,
- $\mathcal{P}C_{(s|y)}(k,l) = \sum_{n\geqslant 1} s^n \mathbb{E}_k(\xi_n = l, \tau^{*-} > n; S_n = y)$,
- $\mathcal{N}^*B_{(s|y)}(k,l) = \sum_{n\geqslant 1} s^n \mathbb{E}_k(\xi_n = l, S_1 > S_n, \cdots, S_{n-1} > S_n, S_n < 0; S_n = y)$.

Proposition 3.6.4. *On suppose que le couple (P,μ) est* **apériodique** *et satisfait l'hypothèse* $\boldsymbol{Min([\alpha,\beta])}$. *On a alors*

$$\begin{aligned}
\mathcal{P}B_{(s|y)} &= r_0^{x-y} D_{r_0} \mathcal{P}B^0_{(\lambda_0 s|y)} D_{r_0}^{-1}, \\
\mathcal{N}^*C_{(s|y)} &= r_0^{x-y} D_{r_0} \mathcal{N}^*C^0_{(\lambda_0 s|y)} D_{r_0}^{-1}, \\
\mathcal{P}C_{(s|y)} &= r_0^{x-y} D_{r_0} \mathcal{P}C^0_{(\lambda_0 s|y)} D_{r_0}^{-1} \quad \textit{et} \\
\mathcal{N}^*B_{(s|y)} &= r_0^{x-y} D_{r_0} \mathcal{N}^*B^0_{(\lambda_0 s|y)} D_{r_0}^{-1}.
\end{aligned}$$

On note $R_0 := \frac{1}{\lambda_0}$. Lorsque $\lambda' = \frac{\partial \lambda_z}{\partial z}(1) \neq 0$, on a $\lambda_0 < 1$ et donc $R_0 > 1$. Ainsi, en utilisant les propositions 3.4.7, 3.4.9, 3.4.10, 3.4.11 et la proposition 3.6.4, on obtient les

Proposition 3.6.5. *On suppose que le couple (P,μ) est* **apériodique** *et satisfait l'hypothèse* $\boldsymbol{Min([\alpha,\beta])}$, *avec $\lambda' \neq 0$. Ils existent $R_0 > 1$, un voisinage $\mathcal{O}$ de $\overline{B(0,R_0)} \setminus \{R_0\}$ dans $\mathbb{C}$ et une constante $\eta > 0$ tels que pour tout $y \in \mathbb{Z}^+$ et $k,l \in E$,*

(i). *la fonction $s \mapsto \mathcal{P}B_{(s|y)}(k,l)$ est analytique sur $\mathcal{O}$,*

(ii). *la fonction $s \mapsto \mathcal{P}B_{(s|y)}(k,l)$ est analytique en la variable $\sqrt{R_0 - s}$ sur V_η : plus précisément, pour tout $s \in V_\eta$ et tous $k,l \in E$, on a*

$$\mathcal{P}B_{(s|y)}(k,l) = \mathcal{P}B(y)(k,l) + \widetilde{\mathcal{P}B(y)}(k,l)\sqrt{R_0 - s} + (R_0 - s) O_s(y)(k,l)$$

$$\begin{aligned}
\textit{où } \bullet\, \mathcal{P}B(y) &:= \left(\mathcal{P}B(y)(k,l) := \mathcal{P}B_{(R_0|y)}(k,l)\right)_{k,l\in E} \in \mathcal{S}^N_{[\beta]}, \\
\bullet\, \widetilde{\mathcal{P}B(y)} &:= \left(\widetilde{\mathcal{P}B(y)}(k,l)\right)_{k,l\in E} \in \mathcal{S}^N_{[\beta]}
\end{aligned}$$

et la fonction $s \mapsto O_s(y)(k,l)$, à valeurs dans $\mathcal{S}_{[\beta]}$, est analytique en la variable $\sqrt{R_0 - s}$ et bornée sur V_η. De plus, pour tout $y \in \mathbb{Z}^+$ et $k,l \in E$, on a

$$\mathcal{P}B(y)(k,l) \geqslant 0 \ \textit{et} \ \widetilde{\mathcal{P}B(y)}(k,l) \leqslant 0.$$

Proposition 3.6.6. *On suppose que le couple (P,μ) est* **apériodique** *et satisfait l'hypothèse* $\boldsymbol{Min([\alpha,\beta])}$, *avec $\lambda' \neq 0$. Ils existent $R_0 > 1$, un voisinage $\mathcal{O}$ de $\overline{B(0,R_0)} \setminus \{R_0\}$ dans $\mathbb{C}$ et une constante $\eta > 0$ tels que pour tout $y \in \mathbb{Z}^{*-}$,*

(i). *la fonction $s \mapsto \mathcal{N}^*C_{(s|y)}$ est analytique sur $\mathcal{O}$,* (ii). *la fonction* $s \mapsto \mathcal{N}^*C_{(s|y)}$ *est analytique sur* V_η *en la variable* $\sqrt{R_0 - s}$ *: plus précisément, pour tout* $s \in V_\eta$ *et tous* $k, l \in E$,

$$\mathcal{N}^*C(k,l) = \mathcal{N}^*C(y)(k,l) + \widetilde{\mathcal{N}^*C(y)}(k,l)\sqrt{R_0 - s} + (R_0 - s)O_s(y)(k,l)$$

$$\text{où } \bullet\, \mathcal{N}^*C(y) := \big(\mathcal{N}^*C(y)(k,l) := \mathcal{N}^*C_{(R_0|y)}(k,l)\big)_{k,l\in E} \in \mathcal{S}^N_{[\alpha]},$$

$$\bullet\, \widetilde{\mathcal{N}^*C(y)} := \Big(\widetilde{\mathcal{N}^*C(y)}(k,l)\Big)_{k,l\in E} \in \mathcal{S}^N_{[\alpha]}$$

et la fonction $s \mapsto O_s(y)(k,l)$, *à valeurs dans* $\mathcal{S}_{[\alpha]}$, *est analytique en la variable* $\sqrt{R_0 - s}$ *et bornée sur* V_η. *De plus, pour tout* $y \in \mathbb{Z}^+$ *et* $k, l \in E$, *on a*

$$\mathcal{N}^*C(y)(k,l) \geqslant 0 \text{ et } \widetilde{\mathcal{N}^*C(y)}(k,l) \leqslant 0.$$

Proposition 3.6.7. *On suppose que le couple* (P, μ) *est* **apériodique** *et satisfait l'hypothèse* $\boldsymbol{Min([\alpha,\beta])}$, *avec* $\lambda' \neq 0$. *Ils existent* $R_0 > 1$, *un voisinage* $\mathcal{O}$ *de* $\overline{B(0,R_0)} \setminus \{R_0\}$ *dans* $\mathbb{C}$ *et une constante* $\eta > 0$ *tels que pour tout* $y \in \mathbb{Z}^+$, *on ait*

(i). *la fonction* $s \mapsto \mathcal{P}C_{(s|y)}$ *est analytique sur* $\mathcal{O}$,

(ii). *la fonction* $s \mapsto \mathcal{P}C_{(s|y)}$ *est analytique sur* V_η *en la variable* $\sqrt{R_0 - s}$ *: plus précisément, pour tout* $s \in V_\eta$ *et tous* $k, l \in E$, *on a*

$$\mathcal{P}C_{(s|y)}(k,l) = \mathcal{P}C(y)(k,l) + \widetilde{\mathcal{P}C(y)}(k,l)\sqrt{R_0 - s} + (R_0 - s)O_s(y)(k,l)$$

$$\text{où } \bullet\, \mathcal{P}C(y) := \big(\mathcal{P}C(y)(k,l) := \mathcal{P}C_{(\lambda_0|y)}(k,l)\big)_{k,l\in E} \in \mathcal{S}^N_{[\alpha]},$$

$$\bullet\, \widetilde{\mathcal{P}C(y)} := \Big(\widetilde{\mathcal{P}C(y)}(k,l)\Big)_{k,l\in E} \in \mathcal{S}^N_{[\alpha]}$$

et la fonction $s \mapsto O_s$, *à valeurs dans* $\mathcal{S}^N_{[\alpha]}$, *est analytique en la variable* $\sqrt{R_0 - s}$ *et bornée sur* V_η.

Proposition 3.6.8. *On suppose que le couple* (P, μ) *est* **apériodique** *et satisfait l'hypothèse* $\boldsymbol{Min([\alpha,\beta])}$, *avec* $\lambda' \neq 0$. *Ils existent* $R_0 > 1$, *un voisinage* $\mathcal{O}$ *de* $\overline{B(0,\lambda_0)} \setminus \{\lambda_0\}$ *dans* $\mathbb{C}$ *et une constante* $\eta > 0$ *tels que pour tout* $y \in \mathbb{Z}^+$,

(i). *la fonction* $s \mapsto \mathcal{N}^*B_{(s|y)}$ *est analytique sur* $\mathcal{O}$,

(ii). *la fonction* $s \mapsto \mathcal{N}^*B_{(s|y)}$ *est analytique sur* V_η *en la variable* $\sqrt{R_0 - s}$ *: plus précisément, pour tout* $s \in V_\eta$ *et tout* $k, l \in E$, *on a*

$$\mathcal{N}^*B_{(s|y)}(k,l) = \mathcal{N}^*B(y)(k,l) + \widetilde{\mathcal{N}^*B(y)}(k,l)\sqrt{R_0 - s} + (R_0 - s)O_s(y)(k,l)$$

$$\text{où } \bullet\, \mathcal{N}^*B(y) := \big(\mathcal{N}^*B(y)(k,l) := \mathcal{N}^*B_{(R_0|y)}(k,l)\big)_{k,l\in E} \in \mathcal{S}^N_{[\beta]},$$

$$\bullet\, \widetilde{\mathcal{N}^*B(y)} := \Big(\widetilde{\mathcal{N}^*B(y)}(k,l)\Big)_{k,l\in E} \in \mathcal{S}^N_{[\beta]}$$

et la fonction $s \mapsto O_s$, *à valeurs dans* $\mathcal{S}^N_{[\beta]}$, *est analytique en la variable* $\sqrt{R_0 - s}$ *et bornée sur* V_η.

Les propositions 3.6.8, 3.6.5, 3.6.8, 3.6.5 et le théorème 3.5.1 appliqué avec $R = R_0$, $\alpha = \frac{-1}{2}$ (et donc $\Gamma(-\alpha) = \sqrt{\pi}$) donnent les résultats suivants :

Corollaire 3.6.1. *On suppose que le couple* (P, μ) *est* **apériodique** *et satisfait l'hypothèse* $\boldsymbol{Min([\alpha,\beta])}$, *avec* $\lambda' \neq 0$. *Pour tous* $k, l \in E$, *on a*

$$\sqrt{\pi} R_0^{n-1} n^{\frac{1}{2}} \mathbb{P}_k(\xi_n = l, \tau^{*-} > n) \underset{n\to+\infty}{\to} K^+(k,l),$$

où $R_0 > 1$.

De même, on a le

Corollaire 3.6.2. *On suppose que le couple (P,μ) est* **apériodique** *et satisfait l'hypothèse* $\boldsymbol{Min([\alpha,\beta])}$, *avec $\lambda' \neq 0$. Pour tous $k,l \in E$, on a*

$$\sqrt{\pi} R_0^{n-1} n^{\frac{1}{2}} \mathbb{P}_k(\xi_n = l, S_1 > S_n, S_2 > S_n, \cdots, S_{n-1} > S_n, S_n < 0) \underset{n\to+\infty}{\to} K^-(k,l),$$

où $R_0 > 1$.

Les propositions 3.4.11, 3.4.7, 3.4.11, 3.4.7 et le théorème 3.5.1 appliqué avec $R = R_0$, $\alpha = \frac{1}{2}$ (et donc $\Gamma(-\alpha) = -2\sqrt{\pi}$), donnent les résultats suivants :

Corollaire 3.6.3. *On suppose que le couple (P,μ) est* **apériodique** *et satisfait l'hypothèse* $\boldsymbol{Min([\alpha,\beta])}$, *avec $\lambda' \neq 0$. Pour tous $y \in \mathbb{Z}^+$ et $k,l \in E$, on a*

$$2\sqrt{\pi} R_0^{n-1} n^{\frac{3}{2}} \mathbb{P}_k(\xi_n = l, S_1 > S_n, S_2 > S_n, \cdots, S_{n-1} > S_n, S_n = y) \underset{n\to+\infty}{\to} -\widetilde{\mathcal{P}B(y)}(k,l),$$

où $R_0 > 1$.

En passant à la chaîne duale, il vient

Corollaire 3.6.4. *On suppose que le couple (P,μ) est* **apériodique** *et satisfait l'hypothèse* $\boldsymbol{Min([\alpha,\beta])}$, *avec $\lambda' \neq 0$. Pour tous $y \in \mathbb{Z}^+$ et $k,l \in E$, on a*

$$2\sqrt{\pi} R_0^{n-1} n^{\frac{3}{2}} \mathbb{P}_k(\xi_{\tau^+} = l, \tau^+ = n, S_n = y) \underset{n\to+\infty}{\to} -\widetilde{(PB)'(y)}(k,l),$$

où $R_0 > 1$.

De même, on a le

Corollaire 3.6.5. *On suppose que le couple (P,μ) est* **apériodique** *et satisfait l'hypothèse* $\boldsymbol{Min([\alpha,\beta])}$, *avec $\lambda' \neq 0$. Pour tous $y \in \mathbb{Z}^{*-}$ et $k,l \in E$, on a*

$$2\sqrt{\pi} R_0^{n-1} n^{\frac{3}{2}} \mathbb{P}_k(\xi_{\tau^{*-}} = l, \tau^{*-} = n, S_n = y) \underset{n\to+\infty}{\to} -\widetilde{\mathcal{N}^* C(y)}(k,l),$$

où $R_0 > 1$.

On a aussi les

Corollaire 3.6.6. *On suppose que le couple (P,μ) est* **apériodique** *et satisfait l'hypothèse* $\boldsymbol{Min([\alpha,\beta])}$, *avec $\lambda' \neq 0$. Pour tous $y \in \mathbb{Z}^+$ et $k,l \in E$, on a*

$$2\sqrt{\pi} R_0^{n-1} n^{\frac{3}{2}} \mathbb{P}_k(\xi_n = l, \tau^{*-} > n, S_n = y) \underset{n\to+\infty}{\to} -\widetilde{\mathcal{P}C(y)}(k,l),$$

où $R_0 > 1$.

Corollaire 3.6.7. *On suppose que le couple (P,μ) est* **apériodique** *et satisfait l'hypothèse* $\boldsymbol{Min([\alpha,\beta])}$, *avec $\lambda' \neq 0$. Pour tous $y \in \mathbb{Z}^{*-}$ et $k,l \in E$, on a*

$$2\sqrt{\pi} R_0^{n-1} n^{\frac{3}{2}} \mathbb{P}_k(\xi_n = l, S_1 > S_n, \cdots, S_{n-1} > S_n, S_n = y) \underset{n\to+\infty}{\to} -\widetilde{\mathcal{N}^* B(y)}(k,l),$$

où $R_0 > 1$.

Bibliographie

[1] Alili L. & Doney R. Wiener-Hopf factorization revisited and some applications, Stochastics Rep. **66** (1999), 87–102.

[2] Alsmeyer G. Recurrence theorems for markov random walks, Probab. Math. Statist. **21** no. 1, Acta Univ. Wratislav. No. 2298 (2001), 123–134.

[3] Baxendale P.H. Renewal theory and computable convergence rates for geometrically ergodic Markov chains, Annals of Appl. Prob 15 (2005), 700–738.

[4] Baxter G. Combinatorial methods in fluctuation theory, Z. Wahrsch. Verw. Gebiete **1** (1962/1963) 263–270.

[5] Benda M. Schwach kontraktive dynamische systeme, Z. Ph. D. Thesis. Ludwig-Maximilans-Universität München (1998).

[6] Boudiba M.A. La chaîne de Feller $X_{n+1} = |X_n - Y_{n+1}|$, *cas où les* $(Y_n)_{n\geqslant 1}$ *sont indépendantes et identiquement distribuées*, C.R. Acad. Sc. Paris Sér. 1 Math. **301** (1985) 517–519.

[7] Borovkov A.A. New limit theorems in boundary problems for sums of independent terms, Sibirsk. Mat. Z. **3** (1962) 645–694. English transl., Selected Transl. Math. Statist and Prob. Amer. Math. Soc, Providence, R. I. MR 26 No. 3099. **5** (1965) 315–372.

[8] Boudiba M.A. La chaîne de Feller $X_{n+1} = |X_n - Y_{n+1}|$ *et les chaînes associées,* Ann. Sci. Univ. Clermont-Ferrand 2 Probab. Appl. **5** (1986) 91–132.

[9] Chae S.B. *Holomorphy and calculus in normed spaces*, Pure and Applied Mathematics.

[10] Dunford et Schwarz *Linear operators.* vol.2, Wiley.

[11] Doney R. Local behaviour of first passage probabilities, Prob. Theor. Relat. Fields 152 (2012), 559–588.

[12] Denisov D. & Wachtel V. Random walks in cones, Ann.Prob. to appear (2013).

[13] Eppel M.S. A local limit theorem for the first passage time, Sib. Math. J. 20 130–138 (1979).

[14] Essifi R. & Peigné M. Return Probabilities for the Reflected Random Walk on $\mathbb{N}_0$, Journal of Theoretical Probabilities (DOI) 10.1007/S10959-013-0490-3 (2013).

[15] Essifi R., Raschel K. & Peigné M. Some aspects of fluctuations of random walks on R and applications to random walks on R+ with non-elastic reflection at 0, ALEA **10** (2013) 591–607 .

[16] Flajolet P. & Odlyzko Singularity analysis of generating functions, SIAM J. Discrete Math. **3** (1990), 216–240.

[17] Feller W. *An Introduction to Probability Theory and Its Applications, Vol. 2,* Wiley series.

[18] Feller W. *An Introduction to Probability Theory and Its Applications, Vol. 2*, John Wiley & Sons Inc, New York (1971).

[19] Geiger J. & Kersting G. The survival probability of a critical branching process in random environment, Theory Probab. Appl. **45** (2002) 518–526.

[20] Gnedenko B. V. & Kolmogrov A. N. Limit distributions for sums of independent random variables, Addison-Wesley Pubilishing Co. Inc., Reading Mass. (1954)

[21] Guivarc'h Y. Application d'un théorème limite local à la transience et la récurrence de marches de Markov, Collloque de théorie du potentiel-Jacques Deny, Orsay (1938).

[22] Guivarc'h Y. & Hardy J. Théorèmes limites pour une classe de chaîne de Markov et applications aux difféomorphismesd'Anosov, Anales de l'I.H.P., section B, **24**, (1998).

[23] Guivarc'h Y. & Le Page E. & Liu Q. Normalisation d'un processus de branchement critique dans un environnement aléatoire, C. R. Math. Acad. Sci. Paris, **337** (2003) 603–608.

[24] Iglehart D.L. Random walks with negative drift conditioned to stay positive, J. Appl. Probab. **11** (1974) 742–751.

[25] Knight F.B. On the absolute difference chains, Z. Wahrsch. Verw. Gebiete **43** (1978) 57–63.

[26] Kozlov M.V. On the asymptotic behavior of the probability of non-extinction for critical branching processes in a random environment, Theory Probab. Appl. **21** (1976) 791–804.

[27] Lalley S. Return probabilities for random walk on a half-line, J. Theoret. Probab. 8 (1995) 571–599.

[28] Lalley S. Random walks on regular languages and algebraic systems of generating functions, Algebraic methods in statistics and probability (Notre Dame, IN, 2000), Contemp. Math., 287, Amer. Math. Soc., Providence, RI, (2001), 201–230.

[29] Leguesdron J.P. Marches aléatoires sur le semi groupe des contractions de $\mathbb{R}^d$. Cas de la marche aléatoire sur $\mathbb{R}^+$ avec des chocs élastiques en zéro, Ann. Inst. H. Poincaré Probab. Stat. **25** (1989) 483–502.

[30] Le Page E. & Peigné M. A local limit theorem on the semi-direct product of $\mathbb{R}^{*+}$ and $\mathbb{R}^d$, Ann. Inst. H. Poincaré Probab. Statist. **33** (1997) 223–252.

[31] Le Page E. & Peigné M. Local limit theorems on some non-unimodular groups, Rev. Mat. Iberoam. **15** (1999) 117–141.

[32] Miller H.D. A convexity property in the theory of random variables, defined on a finite Markov chain, Ann. Math. Statist. **32** (1961) 1260-1270.

[33] Presman E. L. A Boundary Problem for Sums of Lattice Random Variables Defined on a Regular Finite Markov Chain , Teor. Veroyatnost. i Primenen. **12** Issue 2 (1967) 373–380.

[34] Presman E. L. Factorization Methods And Boundary Problems For Sums Of Random Variables Given On Markov Chains, Math.USSR Izvestija, **3**, No. 4 (1969).

[35] Peigné M. & Woess W. On recurrence of a reflected random walk on the half line, http ://arxiv.org/abs/math/0612306.

[36] Peigné M. & Woess W. Stochastic dynamical systems with weak contractivity properties I. Strong and local contractility II.Iteration of Lipschitz mappings, Colloquium Mathematicum **125** (2011) 31–54 & 55–81.

[37] Rabeherimanana T.J. Résultats sur l'irréductibilité et la conservativité de la chaîne de différences absolues. Annales de la faculté des sciences de Toulouse, Sér. 6, 11 No. 2 (2002), 177–199.

[38] Rosén B. On the asymptotic distribution of sums of independent identically distributed random variables Ark. Mat.4 (1962) 323–332.

[39] Sheep L.A. A local limit theorem Ann. Math. Stat (1962) **35** 419–423 (1964).

[40] Spitzer F. *Principle of random walks*, D. Van Nostrand Co., Princeton (1964).

[41] Schelling H.von. Über die veteiling der kopplungswerte in gekreuzten fernmeldekabeln grober länge, Elektrische Nachrichten-Technik **125** (1943) 251–259

[42] Woess W. *Denumerable Markov Chains*, European Mathematical Society (2009).

[43] Woess W. Generating function techniques for random walks on graphs in "Heat Kernels and Analysis on Manifolds, Graphs, and Metric Spaces", P. Auscher, Th. Coulhon and A. Grigor'yan, eds. Contemporary Math. 338 (2003) 391–423.

[44] Ye Y. *Probabilité de survie d'un processus de branchement dans un environnement aléatoire markovien*, Thèse (2011).

Résumé :

L'objet de cette thèse est d'établir des théorèmes limites locaux pour des marches aléatoires réfléchies sur $\mathbb{N}$. La théorie des fluctuations des marches aléatoires et la factorisation de Wiener-Hopf y jouent un rôle important.
On développera dans la première partie une approche classique que l'on appliquera à l'étude des marches aléatoires sur $\mathbb{R}^+$ avec réflexions non élastiques en 0.
Dans la deuxième partie, on explicitera une méthode différente qui fait intervenir des outils algébriques, d'analyse complexe et des techniques de factorisation utilisant de manière essentielle les fonctions génératrices. Cette approche a été développée il y a une cinquantaine d'année pour l'étude de marches de Markov, elle sera présentée dans cette partie dans le cas des marches aléatoires à pas i.i.d. où un certain nombre de simplifications apparaissent et sera ensuite utilisée pour étudier les marches aléatoires sur $\mathbb{N}$ avec réflexions élastiques ou non élastiques en zéro.
Finalement, dans la dernière partie, nous mettons en place les outils nécessaires pour établir une factorisation de Wiener-Hopf dans un cadre markovien afin d'étudier les fluctuations des marches de Markov sur $\mathbb{Z}$; nous reprenons des travaux anciens dont les démonstrations méritaient d'être détaillées, l'objectif à moyen terme étant d'appliquer les méthodes algébriques décrites ci-dessus pour l'étude de marches de Markov réfléchies sur $\mathbb{N}$.

Mots clés :

Chaînes de Markov, marches aléatoires, théorème limite local, théorie des fluctuations des marches aléatoires, factorisation de Wiener-Hopf, marches aléatoires absorbées, marches aléatoires réfléchies, marches de Markov.

Abstract :

The purpose of this thesis is to establish some local limit theorems for reflected random walks on $\mathbb{N}$. The fluctuations theory and the Wiener-Hopf factorization play a crucial role.
We will develop in the first part a classical approach that we will apply to the study of random walks on $\mathbb{R}^+$ with non-elastic reflections at zero.
In the second part, we will explicit a different method which involves algebraic tools, complex analysis and factorization techniques, using in an essential way generating functions. These approach was developed 50 years ago to cover Markov walks, it will be presented in this part in the case of random walks with i.i.d jumps where many simplifications appear and will be then used to study random walks on $\mathbb{N}$ with either elastic or non-elastic reflections at zero.
Finally, in the last part, we will introduce the useful tools to establish a Wiener-Hopf factorization in a markovian framework in order to study the fluctuations of Markov walks on $\mathbb{Z}$. We investigate some previous work, especially some proofs that warranted to be more detailed, with a medium-term objective of applying the algebraic tools described above to study reflected Markov walks on $\mathbb{N}$.

Keywords :

Markov chains, random walks, local limit theorems, fluctuations theory, Wiener-Hopf factorization, absorbed random walks, reflected random walks, Markov walks.