Etude didactique de la reprise de l'algèbre par l'introduction de l'algorithmique au niveau de la classe de seconde du lycée français.

Nathalie Briant

THÈSE

Pour obtenir le grade de Docteur

Délivré par **UNIVERSITE MONTPELLIER 2**

Préparée au sein de l'école doctorale
Information, structures et systèmes
et de l'unité de recherche **LIRDEF**

Spécialité : **Didactique des mathématiques**

Présentée par Nathalie BRIANT

Étude didactique de la reprise de l'algèbre par l'introduction de l'algorithmique au niveau de la classe de seconde du lycée français

Soutenue le 10/12/2013 devant le jury composé de

Mme Marianna BOSCH, Professeur Université Ramon Llull	Rapporteur
M. Alain BRONNER, Professeur Université Montpellier 2, FDE	Directeur
M. Yves CHEVALLARD, Professeur émérite Université Aix-Marseille	Examinateur
Mme Gisèle CIRADE, Maître de conférences ESPE de l'académie de Toulouse	Examinateur
Mme Brigitte GRUGEON-ALLYS, Professeur ESPE de l'académie de Créteil, UPEC	Rapporteur
M. Yves MATHERON, Professeur Institut français de l'Éducation, ENS de Lyon	Examinateur

À mon père,
qui m'a transmis le plaisir d'apprendre,
le goût des sciences,
la persévérance et la recherche de la rigueur.

Remerciements

Au lieu de ce grand nombre de préceptes dont la logique est composée, je crus que j'aurois assez des quatre suivants, pourvu que je prisse une ferme et constante résolution de ne manquer pas une seule fois à les observer.
Le premier étoit de ne recevoir jamais aucune chose pour vraie que je ne la connusse évidemment être telle ; c'est-à-dire, d'éviter soigneusement la précipitation et la prévention, et de ne comprendre rien de plus en mes jugements que ce qui se présenteroit si clairement et si distinctement à mon esprit, que je n'eusse aucune occasion de le mettre en doute.
Le second, de diviser chacune des difficultés que j'examinerois, en autant de parcelles qu'il se pourroit, et qu'il seroit requis pour les mieux résoudre.
Le troisième, de conduire par ordre mes pensées, en commençant par les objets les plus simples et les plus aisés à connoître, pour monter peu à peu comme par degrés jusque à la connaissance des plus composés, et supposant même de l'ordre entre ceux qui ne se précèdent point naturellement les uns les autres.
Et le dernier, de faire partout des dénombrements si entiers et des revues si générales, que je fusse assuré de ne rien omettre.

Descartes, *Discours de la Méthode (1637)*

Ces quatre préceptes, que Descartes présente comme une sorte de méthode *algorithmique*, résument bien le cheminement de ma pensée durant ce travail de thèse : ne rien recevoir pour vrai sans l'avoir clairement compris et assimilé, diviser les difficultés et les traiter une à une, établir un ordre des pensées – des objets (de la didactique) les plus simples aux plus complexes – et tout passer en revue afin de ne rien omettre… Telle a été ma tâche lors de ces quatre années !
Ce travail n'aurait pas été possible sans mon directeur de thèse, Alain Bronner, que je remercie vivement pour ses conseils, ses régulations et la qualité scientifique de son encadrement.
J'adresse mes remerciements à Madame Marianna Bosch, Madame Brigitte Grugeon-Allys, Monsieur Yves Chevallard, Madame Gisèle Cirade et Monsieur Yves Matheron pour avoir accepté de faire partie du jury de ma thèse.
J'aimerais également remercier particulièrement les trois professeurs expérimentateurs Anne, Alain et Marc pour le temps qu'ils m'ont accordé et pour nos échanges fructueux, sans oublier Éric qui a également participé à la phase expérimentale de ce projet.
Je tiens à remercier sincèrement les membres du LIRDEF pour m'avoir accompagnée et la direction de l'IUFM qui a aménagé mon temps de travail, me permettant ainsi de réaliser cette thèse dans des conditions optimales.
Je remercie mes collègues et mes amis qui m'ont apporté leur soutien.
Je remercie mes enfants, Camille, Jeanne et Victor, pour leurs encouragements, leur compréhension et leurs pensées, surtout au cours des six derniers mois où j'ai vécu comme une recluse.
Et pour terminer, merci à François, mon mari, qui ne sait que trop ce que signifie l'expression « l'absence en présence »… et qui est resté un soutien infaillible dans cette aventure, aussi bien durant mes moments d'exaltation que mes moments de doute, toujours patient, toujours confiant et toujours à mon écoute.

TABLE DES MATIÈRES

TABLE DES MATIÈRES 1
INTRODUCTION 7
CHAPITRE 1 - CADRE DIDACTIQUE THÉORIQUE 11
1.1 Introduction 11
1.2 Éléments de la théorie anthropologique du didactique de Chevallard 12
1.2.1 La transposition didactique 12
1.2.2 Le concept de praxéologie 13
1.2.3 L'échelle de niveaux de codétermination didactique 15
1.3 D'autres éléments théoriques sur les pratiques enseignantes 18
1.3.1 Justifications 18
1.3.2 Les gestes professionnels de l'enseignant 19
1.3.3 Événements prévisibles et problématiques 22
1.3.4 La méthodologie « des quatre composantes » 22
1.4 Résumé du cadrage théorique utilisé 25
1.5 Remarque sur les choix des cadres théoriques utilisés 26
CHAPITRE 2 - CADRE DIDACTIQUE DE L'ALGÈBRE 29
2.1 Le passage de l'arithmétique à l'algèbre : rupture ou continuité ? 29
2.2 Les objets de l'algèbre élémentaire 33
2.2.1 Le statut des lettres et leur introduction dans l'enseignement 33
2.2.2 Le signe d'égalité, sens et usages 39
2.2.3 Les expressions algébriques et la dualité procédurale/structurale 42
2.2.4 Les premières équations et leurs obstacles 46
2.3 Approche linguistique des expressions algébriques 48
2.3.1 Approche logico-linguistique de Frege 48
2.3.2 Les travaux de Drouhard 49
2.3.3 Les registres de représentation sémiotique de Duval 49
2.3.4 Ostensifs et non-ostensifs de Bosch et Chevallard 50
2.4 La compétence algébrique selon Grugeon 52
2.5 Articulation numérique-algèbre : typologie des rapports personnels des élèves aux nombres réels 54
2.6 Le paradoxe de la compétence algébrique 56
CHAPITRE 3 - CADRE DIDACTIQUE DES TICE 61

3.1 L'introduction des TIC dans l'enseignement des mathématiques : une évolution sociétale 61
3.2 Les travaux de Rabardel : artefact et instrument 63
3.3 Les travaux de Balacheff : la transposition informatique 64
3.4 Le concept de pseudo-transparence 64
3.5 La notion de distance instrumentale 67
3.6 Les travaux de recherche sur les CAS pour l'enseignement de l'algèbre 69
3.7 Retour sur le thème d'étude 72
CHAPITRE 4 - CADRE DIDACTIQUE DE L'ALGORITHMIQUE 75
4.1 Un premier algorithme 75
4.2 Définitions d'un algorithme 77
4.3 Définition de l'algorithmique 79
4.4 Structure d'un algorithme/ d'un programme 81
4.5 Algorithmique dans les programmes actuels du lycée 88
4.5.1 Pourquoi étudier l'algorithmique et la programmation au lycée ? 88
4.5.2 Historique de l'introduction de l'algorithmique dans la discipline des mathématiques 90
4.5.3 Algorithmique dans les programmes de mathématiques actuels 94
4.5.4 Conclusion en rapport avec le thème d'étude 95
CHAPITRE 5 - PROBLEMATIQUE 103
5.1 Une étude de l'*algèbre* dans le cadre des programmes officiels de la classe de seconde 103
5.2 La *reprise* de l'algèbre dans le cadre de la classe de seconde 107
5.3 Reprendre de l'algèbre par l'*algorithmique* dans le cadre de la classe de seconde. 109
5.4 Étude des *conditions et des contraintes* de cette reprise 112
5.5 Problématique et résumé des hypothèses de recherche 113
CHAPITRE 6 - MÉTHODOLOGIE DE RECHERCHE 115
6.1 Les différents éléments du recueil de données 115
6.1.1 Analyse institutionnelle de quelques concepts algébriques 115
6.1.2 Étude des connaissances d'élèves français en algèbre élémentaire, au niveau du début du lycée 117
6.1.3 Expérimentation didactique spécifique 118
6.1.4 Entretiens avec les professeurs expérimentateurs 127
6.2 Organisation des analyses 129
6.2.1 Synthèse du recueil de données 129
6.2.2 Méthodologie des analyses de l'expérimentation didactique spécifique 130
6.3 Établissement et professeurs ayant participé à la recherche 132
6.3.1 Caractéristiques de l'établissement 132

6.3.2 Choix des enseignants expérimentateurs 133
CHAPITRE 7 – UNE ANALYSE INSTITUTIONNELLE 135
7.1 Objectif de l'étude de manuels de troisième et de seconde 135
7.2 Deux catégories pour le second degré 139
7.3 Fréquence de l'utilisation des nombres déterminés dans les équations proposées par les manuels 146
7.4 Conclusion 147
CHAPITRE 8 – UNE ÉTUDE DES CONNAISSANCES DES ÉLÈVES 149
8.1 Exploration du programme PISA 149
8.2 Exploration des enquêtes nationales 157
8.3 Test diagnostique de fin de seconde 159
8.3.1 Présentation 159
8.3.2 Analyse a priori du test diagnostique 161
8.3.3 Analyse des résultats du test diagnostique 180
8.3.4 Bilan et premières réponses à l'hypothèse H2 196
CHAPITRE 9 – PRÉSENTATION DE LA TRAME D'INGÉNIERIE DIDACTIQUE 199
9.1 Introduction 199
9.2 Situation n°1 200
9.2.1 Présentation de la situation n°1 200
9.2.2 Analyse a priori de la situation n°1 203
9.2.3 Les éléments imposés et modulables de la situation n°1 208
9.3 Situation n°2 211
9.3.1 Présentation de la situation n°2 211
9.3.2 Analyse a priori de la situation n°2 214
9.3.3 Tâches alternatives de la situation n°2 et objectifs complémentaires 220
9.3.4 Les éléments imposés et modulables de la situation n°2 223
9.4 Situation n°3 226
9.4.1 Préambule : *modélisation* des équations 226
9.4.2 Présentation de la situation n°3 227
9.4.3 Analyse a priori de la situation n°3 229
9.4.4 Les éléments imposés et modulables de la situation n°3 237
CHAPITRE 10 - ÉLABORATION DES TRAMES PROJETÉES 241
10.1 Entretien générique pré-expérimentation 241
10.1.1 Présentation de l'entretien 241
10.1.2 Analyse a priori de l'entretien 242
10.1.3 Analyse a posteriori des entretiens 243
10.1.4 Bilan des entretiens génériques pré-expérimentation 250

10.2 Situation de l'expérimentation dans la progression annuelle des professeurs......... 251
10.3 Retour sur la méthodologie de constitution des trames projetées 253
10.4 Analyse a priori des trames projetées d'Annabelle et de Maurice (TP_1 et TP_2)...... 254
10.4.1 Situation n°1 254
10.4.2 Situation n°2 263
10.4.3 Situation n°3 266
10.5 Analyse a priori de la trame projetée d'Alex (TP_3) 268
10.5.1 Situation n°1 268
10.5.2 Situation n°2 274
10.5.3 Situation n°3 278
10.6 Bilan : comparaison des trames projetées.. 282
10.6.1 Situation n°1 282
10.6.2 Situation n°2 289
10.6.3 Situation n°3 291
CHAPITRE 11 - ANALYSE DES SÉQUENCES RÉALISÉES... 293
11.1 Situation n°1 294
11.1.1 Classe d'Annabelle : séance 1 294
11.1.2 Classe de Maurice : séance 1 322
11.1.3 Classe d'Alex : séance 1.1 338
11.1.4 Classe d'Alex : séance 1.2 360
11.2 Situation n°2 380
11.2.1 Classe d'Annabelle : Séance 2 380
11.2.2 Classe de Maurice : Séance 2 405
11.2.3 Classe d'Alex : Séance 2.1 421
11.2.4 Classe d'Alex : Séance 2.2 444
11.2.5 Classe d'Alex : Fin de la situation n°2 en travail maison 465
11.3 Situation n°3 470
11.3.1 Classe d'Alex : Séance 3.1 470
11.3.2 Classe d'Alex : Séance 3.2 487
11.4 Entretien spécifique post-expérimentation 506
11.4.1 Présentation de l'entretien.. 506
11.4.2 Analyse a priori de l'entretien.. 508
11.4.3 Analyse a posteriori des entretiens 509
11.4.4 Bilan des entretiens spécifiques post-expérimentation 515
CHAPITRE 12 - BILAN.. 517
12.1 Situation n°1 : La catégorisation des équations.. 517

12.2 Situations n°2 et 3 : L'algorithmique et la programmation pour la résolution d'équations 521
12.3 Sur l'introduction de l'algorithmique et de la programmation 524
12.4 Pour une reprise de l'expérimentation 527
12.5 Sur les professeurs expérimentateurs 529
12.6 Retour sur les hypothèses 531
12.6.1 Hypothèse H1 : sur la reprise par l'enseignant de l'algèbre comme objet 531
12.6.2 Hypothèse H2 : sur la capacité des élèves à considérer l'algèbre comme objet 533
12.6.3 Hypothèse H3 : sur l'introduction de l'algorithmique pour l'apprentissage de l'algèbre 534
12.6.4 Hypothèse H4 : sur les différences et les invariants des OM et OD des enseignants pour l'enseignement de l'algèbre 537
CONCLUSION 541
RÉFÉRENCES BIBLIOGRAPHIQUES 549
TABLE DES ILLUSTRATIONS 561

Les annexes sont présentées dans le *volume des annexes.*

INTRODUCTION

Les origines de la recherche

Les origines de cette recherche sont multiples. Elles reposent sur une combinaison de diverses rencontres que nous avons pu faire tout au long de notre carrière, rencontres conjuguant à la fois des institutions, des personnes appartenant à ses institutions, des concepts mathématiques, didactiques et informatiques, sans oublier notre cursus initial d'études et notre parcours professionnel. Alliant un début de carrière comme ingénieur dans la recherche industrielle avec une poursuite dans l'Éducation Nationale en tant qu'enseignante de lycée, puis dans l'Enseignement Supérieur et de la Recherche comme formatrice à l'IUFM de Montpellier, devenu Faculté d'Éducation à la rentrée 2013-2014, les multiples facettes de ce parcours nous ont conduite à tisser des liens entre différents domaines et à effectuer des rapprochements entre eux. Aussi ce travail de recherche reflète-t-il notre parcours personnel : il se trouve au carrefour de différentes spécialités, qui se complètent et s'enrichissent mutuellement, comme nous tentons de le justifier ci-après.

L'objet de ce travail de recherche constitue une *articulation* entre divers éléments. Tout d'abord, une première articulation fondamentale a émergé entre un large domaine mathématique, lui-même constitué de deux sous-domaines, *le numérique – algébrique*, tel que l'a défini Bronner (2007), et un concept didactique, la notion de *reprise* développée dans la thèse de Larguier (2009). Ces deux premiers objets constituent l'un des substrats de recherche du laboratoire ERES du LIRDEF[1] de l'Université de Montpellier II ; ils nous ont permis de nous appuyer sur des thématiques répondant à des besoins propres de formation des professionnels des métiers de la formation et de l'enseignement, et ce, dans un souci de continuité et de cohérence avec des travaux déjà entrepris dans ce laboratoire.

D'autre part, toute préoccupation d'enseignement et d'apprentissage ne peut se faire sans tenir compte du niveau institutionnel, et en particulier des programmes propres à chaque niveau de l'École. Depuis la rentrée scolaire 2009 s'effectue en France la *réforme des lycées*, débutée en classe de Seconde et poursuivie en classes de Première et de Terminale en 2011 et 2012. Cette réforme s'accompagne de changements de programmes qui concernent, entre autres, en mathématiques, le domaine *numérique - algébrique*[2] : la question de la *reprise* des premiers concepts de ce domaine vus au collège se pose aux professeurs de lycée d'une façon nouvelle, d'autant plus que des changements de programmes au niveau du collège ont également été opérés. Un autre changement institutionnel concerne l'introduction, dans toutes les classes de la voie générale du lycée, de l'*algorithmique* dans les programmes de mathématiques. Sans doute influencée par notre formation initiale d'ingénieur informaticien, notre intérêt s'est porté sur l'intégration des TIC dans l'enseignement des mathématiques. L'introduction de cette nouvelle branche de l'informatique nous a semblé porteuse de sens mais aussi sujette à de nombreuses questions : comment les enseignants l'intègreront-ils dans leur enseignement ?

[1] Etudes et Recherches sur l'Enseignement des Sciences (ERES), composante du Laboratoire Interdisciplinaire de Recherche en Didactique, Education et Formation (LIRDEF)

[2] Ce point sera développé dans le cadre de ce travail au chapitre 5.

Comment les élèves recevront-ils ce nouvel enseignement : comme une aide à la compréhension des concepts mathématiques ou comme un greffon extérieur venant se surajouter à des notions mathématiques qu'ils ont parfois des difficultés à comprendre ?
Un dernier point est à soulever : le lien entre *algèbre* et *algorithmique*. En effet, d'un point de vue historique et épistémologique, les deux mots ont une origine commune, le nom du philosophe, mathématicien et astronome Al-Khawarizmi d'origine perse (vers 780 - 850) : le mot *algorithme* est la traduction française de son propre nom et le terme *algèbre* vient de l'expression *al jabr* qu'Al-Khawarizmi utilisait pour signifier *la transposition*[3] d'un terme négatif d'un membre à l'autre dans une équation donnée. Ce travail de recherche tente de montrer que les origines communes des termes *algèbre* et *algorithme* ne se limitent pas à une question de vocabulaire, mais permettent une réelle articulation entre les concepts qu'ils véhiculent.
Pour résumer, ce travail s'articule entre les thématiques de recherche précitées, présenté ci-dessous sous forme synoptique. C'est l'étude de cette articulation, matérialisée par les flèches du schéma ci-dessous et qui relient les différents éléments les uns aux autres qui vont faire l'objet de cette recherche.

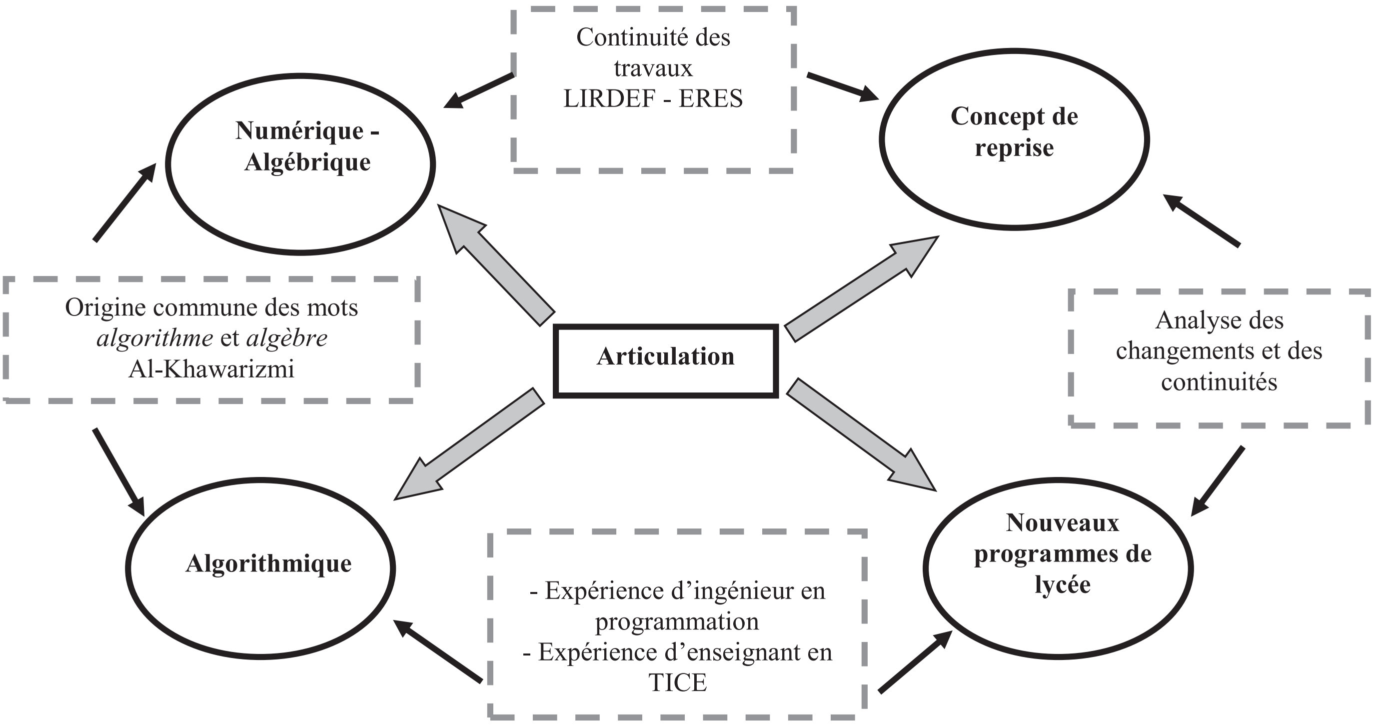


Figure 1: Articulation entre les différents domaines en jeu dans la recherche menée

Les premières questions de la recherche
À partir de ces différents éléments et de leurs articulations, et forte de notre expérience d'enseignante en lycée, nous nous sommes intéressée à l'enseignement/apprentissage de l'algèbre en classe de seconde. Ce niveau de classe a retenu notre attention à plusieurs titres. Il représente pour chaque élève suivant une filière générale un passage, une classe charnière

[3] La traduction mot à mot est *reboutement*, c'est-à-dire *remise en place, réparation.*

entre le collège et la série du cycle terminal du lycée qui sera choisie. De plus, de nombreux travaux de recherche sur l'enseignement de l'algèbre élémentaire ont montré les difficultés épistémologiques et didactiques de l'introduction de ce domaine, et nombre de lycéens éprouvent des difficultés avec les premiers concepts algébriques introduits au collège. L'algèbre se trouve alors avoir un rôle spécifique, particulièrement en classe de seconde, puisqu'elle fonctionne comme un verrou d'accès aux études mathématiques et scientifiques. Nous nous interrogeons sur la *reprise* de l'algèbre élémentaire vue au collège. Étant donné l'étendue de ce domaine, nous avons choisi de nous intéresser essentiellement aux objets gravitant autour du concept d'équation, que nous cherchons à approfondir par le *détour* de l'algorithmique. Ce choix est guidé par les éléments donnés au paragraphe précédent, mais aussi parce que ce concept permet d'atteindre de nombreux objets du savoir algébrique. Nous nous attachons à la fois à l'enseignement et à l'apprentissage de ces objets, et les premières questions de recherche peuvent être envisagées sous différents axes. En nous basant sur le triangle didactique, nous amorçons les questions suivantes :

- *Relativement au savoir* : quelle place occupe ces objets de l'algèbre en classe de seconde, relativement aux programmes institutionnels ? Quelle évolution par rapport aux anciens programmes ?
- *Relativement à l'enseignant* : quelles sont les conditions et les contraintes de l'enseignant vis-à-vis de l'enseignement de ces objets ? Comment l'enseignant considère-il leur *reprise*, considérant l'enseignement déjà dispensé au collège ? Envisage-t-il un détour par l'algorithmique pour l'enseignement de ces objets et de quelles manières ?
- *Relativement à l'élève* : reprendre le concept d'équation en seconde, est-ce bien utile ? Quel est l'état des savoirs de l'élève à ce niveau ? Un détour par l'algorithmique peut-il faciliter l'apprentissage de concepts algébriques ?

Le présent travail a pour ambition de tenter de répondre, au moins partiellement, à ces questions.

Les différents chapitres du mémoire et les différentes études de la recherche

Notre exposé se présente en trois grandes parties que nous avons choisi de décliner en 12 chapitres, de la façon suivante :

Les quatre premiers chapitres du mémoire de thèse constituent la présentation du cadre didactique dans lequel nous nous inscrivons (chapitre 1), puis est réalisé un état des lieux de la recherche en didactique de l'algèbre élémentaire (chapitre 2) et de la recherche sur l'intégration des TIC et de l'algorithmique dans l'enseignement des mathématiques (chapitres 3 et 4). Ces premiers chapitres permettent de clarifier les concepts et la terminologie utilisée dans la suite de l'exposé. Le cadre didactique principal est emprunté à Chevallard (1985, 1992, 1999) pour la *théorie anthropologique du didactique,* et nous développons dans le premier chapitre certains aspects de ses recherches particulièrement utiles dans ce travail. Nous y développons également quelques outils théoriques complémentaires sur lesquels nous avons appuyé nos analyses. Le chapitre suivant, sur les recherches en enseignement et apprentissage de l'algèbre élémentaire, n'a pas vocation à présenter un bilan exhaustif des travaux fort nombreux en ce domaine, mais propose un état des lieux des principales recherches sur les objets de l'algèbre auxquels nous nous intéressons. Les travaux de Grugeon (1995) sur la *compétence algébrique* nous servent pour une grande part de référence. Le chapitre suivant expose des résultats de travaux autour des TIC liées à l'enseignement/apprentissage des mathématiques, ainsi que les questions d'instrumentation qui en découlent dans une perspective didactique, avec les apports de *l'approche instrumentale* développée en ergonomie cognitive (Rabardel, 1995), et également des travaux de Balacheff (1994) sur la *transposition informatique*. Cette première partie se termine par un chapitre sur l'algorithmique, où peu de travaux de recherche en didactique sont dénombrés. Nous sous sommes principalement appuyée sur les travaux de thèse de Nguyen (2005) et de Modeste (2012).

La deuxième partie de la thèse est constituée des chapitres 5 et 6 qui explicitent notre méthodologie de recherche et notre problématique dont l'intitulé est le suivant :

Quelles sont les conditions et des contraintes, côté enseignant et côté apprenant, pour une reprise de l'algèbre par l'introduction de l'algorithmique dans le cadre de la classe de seconde du lycée ?

Quatre hypothèses de recherche sont dégagées en lien avec cette problématique**,** portant sur différents pôles : le savoir *à enseigner* et le savoir *enseigné*, le professeur, l'élève. Le chapitre 6 présente alors la méthodologie générale de notre travail ainsi que les diverses procédures qui composent ce cadre méthodologique.

La troisième partie de notre mémoire constitue le questionnement de nos hypothèses de recherche (chapitres 7 à 12). Nous pourrions qualifier les chapitres 7 et 8 de recherches *in vitro* et les chapitres 9 à 11 de recherches *in vivo*. En effet, les premières recherches portent sur une étude comparative de manuels scolaires de troisième et de seconde au sujet des praxéologies développées sur de mêmes concepts algébriques (chapitre 7) et sur l'étude d'un test diagnostique réalisé en fin de seconde sur 160 élèves d'un même lycée, portant sur des concepts algébriques utilisés comme *objet* ou comme *outil* (chapitre 8). Les recherches suivantes sont constituées de la conception d'une ingénierie didactique, située au cœur de notre problématique, conjuguant algèbre et algorithmique, que nous analysons a priori au chapitre 9. Cette ingénierie est ensuite proposée à trois enseignants expérimentateurs qui la *projettent* en trois séquences (chapitre 10), puis les trois séquences réalisées en classe de seconde sont analysées a posteriori (chapitre 11).

Le chapitre 12 consiste en la discussion des résultats obtenus et en des éléments de réponse aux hypothèses de recherche.

En conclusion, sont évoquées les limites de cette recherche, les retombées que cette étude peut susciter sur le plan de la formation des enseignants, ainsi que les pistes que cette recherche nous a permis de dégager.

CHAPITRE 1 - CADRE DIDACTIQUE THÉORIQUE

1.1 Introduction

Le titre de la thèse « *Étude didactique de la reprise de l'algèbre par l'introduction de l'algorithmique au niveau de la classe de seconde du lycée français* » annonce que les travaux entrepris se situent à la frontière de différents champs, de différents domaines qui s'articulent entre eux. Il s'ensuit que le travail d'analyse et de synthèse de cette recherche nécessite des outils théoriques issus de plusieurs origines et avec différentes approches.
Afin de préciser le cadre théorique utilisé dans ce travail, il nous semble opportun de repartir d'une définition de la didactique des mathématiques et nous avons choisi celle-ci de Chevallard (2005) :

> Au sens large, la didactique des mathématiques se voue à étudier les conditions et contraintes sous lesquelles *des mathématiques* se mettent à vivre, à migrer, à changer, à opérer, à dépérir, à disparaître, à renaître, etc., au sein des groupes humains.

Les travaux entrepris dans cette thèse vont étudier comment vivent *des mathématiques,* en prenant en compte les points de vue de divers *groupes humains* : celui de l'élève, celui du professeur, celui de l'institution scolaire, celui de la société dans laquelle évoluent ces différents acteurs ou composantes. Chacun de ces acteurs ou chacune de ces composantes interagissent selon des *conditions* et des *contraintes liées à l'institution dans laquelle ils évoluent*. Pour préciser, les *conditions* relèvent davantage des facteurs sur lesquels il est possible d'agir, alors que le vocable *contraintes* renvoie plutôt aux caractéristiques qui ne peuvent être modifiées et avec lesquelles il faudra composer, et ce, à tous les niveaux : au niveau de l'élève face à son apprentissage, au niveau du professeur face à sa classe et à son enseignement, au niveau de l'institution Éducation Nationale (EN) et de ses préconisations. Nous tentons de mettre en évidence des conditions et de ces contraintes dans le cadre de cette recherche, relativement aux différents acteurs ou composantes précités.
D'autre part, bien que ce travail s'appuie sur des observations de trois pratiques enseignantes, des interactions des professeurs avec leurs élèves et des apprentissages de ces derniers, nous cherchons à dégager quelques invariants, ou du moins des régularités dans les expérimentations menées afin de proposer des conclusions relativement fiables et transposables. Aussi, afin de modéliser le travail de l'enseignant et celui de ses élèves, en tenant compte des conditions et contraintes qui s'exercent sur eux, nous avons choisi un cadre théorique permettant des analyses autant de niveau macro-didactique que de niveau micro-didactique telle la *théorie anthropologique du didactique* (TAD) de Chevallard (1992b, 1997, 1999). Néanmoins, nous avons éprouvé le besoin de compléter ce cadre par d'autres travaux, notamment pour l'analyse singulière des pratiques enseignantes. Ces travaux sont, entre

autres, issus de la *théorie des situations* de Brousseau (1998), de celles de *champ conceptuel* de Vergnaud (1990), de la *dialectique outil et objet* de Douady (1986).
Définissons maintenant plus précisément les choix du cadre didactique, afin d'expliciter la méthodologie de la recherche entreprise.

1.2 Éléments de la théorie anthropologique du didactique de Chevallard

Plusieurs concepts de la TAD présentés dans cette section se prêtent à l'explicitation de la mise en œuvre et des résultats de nos travaux. Ces concepts sont présentés relativement à ce travail de recherche, c'est-à-dire en évoquant l'utilisation qui en est faite dans les analyses.

1.2.1 La transposition didactique

Chevallard a développé le concept de *transposition didactique* (Chevallard, 1982, 1991, 1992b, 1994a, 1994b, 2005) et l'a ensuite maintes fois repris et enrichi :

> Le concept de transposition didactique, par cela seulement qu'il renvoie au passage du savoir savant au savoir enseigné, donc à l'éventuelle, à l'obligatoire distance qui les sépare, témoigne de ce questionnement nécessaire, en même temps qu'il en est l'outil premier. Pour le didacticien, c'est un outil qui permet de prendre du recul, d'interroger les évidences, d'éroder les idées simples, de se déprendre de la familiarité trompeuse de son objet d'étude, bref, d'exercer sa vigilance épistémologique. (Chevallard, 1982, p.3)

Cette citation de Chevallard (1982) questionne les *distances*, non seulement entre le *savoir savant* et le *savoir à enseigner* mais aussi entre le *savoir à enseigner* et le *savoir enseigné*. Une seconde citation de Chevallard (Ibid.) vient compléter la précédente en ce sens :

> C'est [la noosphère], dès lors, qui va procéder à la sélection des éléments du savoir savant qui, désignés par là comme « savoir à enseigner », seront alors soumis au travail de transposition ; c'est elle, encore, qui va assumer la partie visible de ce travail, ce qu'on peut appeler le travail *externe* de la transposition didactique, par opposition au travail *interne*, qui se poursuit, à l'intérieur même du système d'enseignement, bien *après* l'introduction officielle des éléments nouveaux dans le savoir enseigné. (p.12)

Pour le travail de cette thèse et pour le domaine algébrique, l'étude de ces *distances*, des phénomènes de transposition didactique *externe* et *interne*, peut aider à l'étude des ruptures épistémologiques observées dans le cas du passage du savoir algébrique savant au savoir algébrique à enseigner, avec, entre autres, l'analyse de l'évolution du contenu des programmes scolaires. Également, cette étude des distances peut permettre de mesurer l'impact de l'introduction de l'algorithmique dans l'apprentissage de l'algèbre ainsi que les marges de manœuvre des enseignants pour le passage du *savoir à enseigner* au *savoir enseigné* dans ces deux domaines conjoints.
Plus particulièrement, nous utilisons le concept de transposition didactique dans ce travail pour étudier les pôles suivants et leurs différentes interactions :

- pôle *savoir savant*, c'est-à-dire le savoir lié à l'algèbre et à l'algorithmique et les liens existant entre les objets algébriques et les objets algorithmiques ;
- pôles institution EN/*savoir à enseigner*, soit les programmes préconisés pour l'enseignement secondaire en ce qui concerne la nature et le statut des notions algébriques à enseigner et la place accordée à l'algorithmique ;
- pôles enseignant/*savoir enseigné*, c'est-à-dire les choix que le professeur peut effectuer sur les organisations mathématique et didactique pour enseigner le domaine algébrique en tenant compte des possibilités que lui laisse l'institution (les programmes, le temps d'enseignement des mathématiques attribué à un niveau donné, etc.) mais aussi sur la façon d'un enseignant de se représenter son métier et d'adhérer à l'institution EN ;
- pôles élève/enseignant/*savoir enseigné*, soit les capacités de l'élève à comprendre et à apprendre les concepts algébriques qui sont véhiculés dans la classe, ceux qui sont acquis et ceux qui restent incompris, mais aussi les possibilités de l'élève à entrer dans le jeu didactique du professeur et à adhérer aux situations d'apprentissages mises en place. Nous pourrions ajouter ici une dimension de *savoir appris* par l'élève.

Ce court développement permet de situer une première approche des analyses entreprises.

1.2.2 Le concept de praxéologie

Un des concepts essentiels de la TAD est celui d'*organisation praxéologique* (Chevallard, 1992b, 1997, 1998, 1999). Ce dernier mot se décompose en deux parties, *praxis* et *logos*. Le choix du mot rappelle que toute activité humaine, au sein d'une institution donnée, n'est jamais isolée, c'est-à-dire qu'elle est formée d'une part d'un bloc pratico-technique, la *praxis* et qu'elle va toujours s'accompagner d'un discours technologico-théorique, d'un *logos* qui la justifie et tente d'en rendre raison.

Citons Chevallard (1998) qui en donne cette définition :

> Minimalement, une praxéologie O est constituée, d'une part, d'un *type de tâches* T et d'une *technique* τ d'accomplissement des tâches du type T, qui forment ensemble la partie *praxis* de O, notée $[T/\tau]$; d'autre part d'une *technologie* θ, discours justifiant et éclairant la technique τ, ainsi que d'une *théorie* Θ qui, à son tour, justifie et éclaire le discours technologique θ, et qui forment ensemble la partie *logos* de O, notée $[\theta /\Theta]$. (On note le tout $O = [T/\tau/\theta/\Theta]$.) (p.1)

Dans ce travail, nous utilisons de deux manières ce concept de praxéologie selon l'observation et l'analyse du couple élève/savoir appris ou celles du couple professeur/savoir enseigné. Ce que nous nommons *couple* ici constitue les entités nommées mais aussi les interactions que l'un entretient avec l'autre au sein de l'*institution* donnée. En effet, Chevallard (2005) précise qu'*une praxéologie* ne se limite pas à la description de tâches, techniques et théories, au sens mathématique des termes mais que le concept s'utilise aussi dans un sens plus large, c'est-à-dire qu'il peut *être regardé, à l'échelle d'une institution ou d'une personne, comme la science de telle pratique, qui conçoit et contrôle cette dernière et en permet la mise en œuvre, et que l'institution ou la personne porte en elle.* En effet, pour Chevallard (Ibid.), *les notions de technologie et de théorie [ne sont pas] nécessairement celles de telle science ou de telle discipline établie.* Dans ce travail, selon les couples observés, la fonction technologique pourra donc être tout ce qui permet *d'éclairer la* *technique relative à un type de tâches* et la *théorie* pourra être tout ce qui dans une institution donnée ou pour une personne donnée *assume cette fonction*.

Le concept de praxéologie dans l'analyse du couple élève/savoir appris

Pour mieux comprendre comment sont étudiées et analysées les expérimentations réalisées dans le cadre de ce travail de thèse, donnons, dans le cas des analyses élève/savoir appris, un exemple de *praxis* : le type de tâches pourra être un travail algébrique et les techniques utilisées par l'élève pour les réaliser et le *logos* reposera sur le bloc technologico-théorique issu des concepts algébriques que l'élève est capable ou non de mettre en œuvre.

Pour un élève en classe de seconde, par exemple, pour le type de tâches « Résoudre dans $\mathbb{R}$ une équation du type $ax + b = c$ » (où a, b et c sont trois nombres réels donnés, avec a non nul), une des techniques utilisables est de transposer le terme b du côté droit de l'égalité pour obtenir l'équation $ax = c - b$ puis de diviser chaque membre de cette nouvelle équation par a pour obtenir $x = \frac{c-b}{a}$. La technologie, discours justificatif de la technique, correspond ici à des règles comme : « *en ajoutant un même nombre aux deux membres d'une équation, ou en multipliant par un même nombre non nul les deux membres d'une équation, on obtient une équation équivalente à la première* » et « *deux équations équivalentes ont les mêmes solutions* ». La théorie est rarement présente à ce niveau d'enseignement, notamment celle issue de l'anneau des polynômes $\mathbb{R}[X]$.

D'autre part, afin d'affiner l'analyse des difficultés récurrentes des élèves concernant l'apprentissage de l'algèbre, nous ferons référence à une éventuelle *incomplétude* des praxéologies, concept développé en particulier par Bosch et al. (2004). En effet, ces chercheurs exposent la difficulté de l'apprentissage des mathématiques lors du passage du statut d'élève du secondaire à celui d'étudiant à l'entrée à l'université et relient cette difficulté à la différence d'enseignement des professeurs du secondaire par rapport aux universitaires. Cette différence s'exprime selon leur étude *en termes de contradictions et de discontinuités ou de changements brusques entre les contrats didactiques institutionnels des deux institutions*. Bien que notre étude se situe au niveau de la classe de seconde, un parallèle peut être réalisé, puisqu'il y a à ce niveau également une transition, un passage du collège au lycée. Bosch et al. (Ibid.) décrivent comment ce qui était considéré comme un type de tâches au niveau du secondaire n'est plus considéré comme tel au niveau de l'université : l'exemple de la décomposition en facteurs premiers des « petits » nombres est donné, dont une technique est à connaître par les élèves au niveau de l'enseignement secondaire espagnol et qui n'est plus usitée dans le supérieur. En France, pour le passage du collège au lycée, nous pourrions prendre l'exemple du type de tâches « calcul sur les fractions numériques » qui se pratique au collège mais qui n'intervient que ponctuellement au lycée, au cours d'une tâche ayant un autre objectif et la plupart du temps mêlé à du calcul algébrique. Le passage du secondaire au supérieur est analysé par Bosch et al. d'un point de vue cognitif d'une part et à partir de l'analyse des pratiques mathématiques effectuées dans les différentes institutions d'autre part. Dans leur analyse du point de vue cognitif, ces chercheurs reviennent sur les concepts d'EMT (Elementary Mathematical Thinking) et AMT (Advanced Mathematical Thinking) développés par Tall[4], concepts caractérisés par deux niveaux de pensée mathématique que l'on peut faire coïncider avec la transition secondaire/supérieur et où s'opère dans le même temps une transition *from describing to defining, from convincing to proving*. Bosch et al. étudient comment la limitation des organisations mathématiques locales, au niveau de l'enseignement secondaire, peut engendrer des manques de capacités des élèves à résoudre certains types de tâches, lorsque celles-ci ne sont pas suffisamment diversifiées, et où un apprentissage de techniques stéréotypées ne peut permettre qu'un apprentissage partiel et stéréotypé de notions mathématiques. Nous utilisons dans ce travail de recherche les résultats établis par Bosch et al. que nous tentons de transposer au niveau de la transition collège-lycée. Une étude conjointe de manuels scolaires de la classe de troisième du collège et d'un comparatif des attentes respectives des programmes officiels des classe de troisième et de seconde dans le domaine algébrique tend à montrer que les paradigmes des deux institutions sont différents et que des malentendus et des disfonctionnements peuvent en résulter.

Le concept de praxéologie dans l'analyse du couple professeur/savoir enseigné

Chercher à analyser le couple professeur/savoir enseigné revient, en d'autres termes, à se questionner sur les pratiques enseignantes. La TAD propose un outil pour examiner ces pratiques. En partant d'un thème mathématique θ que l'on cherche à étudier, Chevallard (1999) considère d'une part, *la réalité mathématique qui peut se construire dans une classe de mathématiques où l'on étudie le thème θ* et qu'il nomme l'organisation mathématique OM_θ et d'autre part, *la manière dont peut se construire cette réalité mathématique* et qu'il nomme l'organisation didactique OD_θ. En d'autres termes, l'analyse de l'organisation mathématique consiste à établir et décomposer les praxéologies qu'utilise le professeur, où les deux blocs *praxis* et *logos* sont ici à caractère mathématique. Quant à l'analyse de l'organisation didactique, elle renvoie à la façon dont l'enseignant organise les tâches de son OM, c'est-à-dire comment il construit et gère les différents de moments de l'étude du thème θ. Notons de plus que ces deux composantes sont solidaires l'une de l'autre et que le découpage en OM et OD ne donnent pas deux unités indépendantes. Bien au contraire, nous pouvons dire que l'OD « dérive » de l'OM et d'ailleurs Chevallard (1999) utilise le symbole ∂ sous la forme $OD = \partial OM$ pour signifier cette dépendance. Ainsi, l'analyse des OM et des OD ne sera-t-elle pas étudiée séparément, lorsqu'il s'agira d'analyser les pratiques des enseignants. Conjointement, nous utilisons le concept *d'échelle de codétermination du mathématique et du didactique* (Chevallard, 2002) développé dans la section suivante.

1.2.3 L'échelle de niveaux de codétermination didactique

Le concept *d'échelle de niveaux de codétermination didactique* développé par Chevallard (2002) repose sur le concept d'*écologie* qu'Artaud (1997) résume par le questionnement suivant :

[4] Auteur cité par Bosch et al (2004) : Tall, D. (1991), The Psychology of Advanced Mathematical Thinking. Dans Tall D. (dir.), *Advanced Mathematical Thinking*. (p.3-21). Dordrecht: Kluwer.

> Qu'est-ce qui existe et qu'est-ce qui n'existe pas ? Que devrait-il exister ? Que pourrait-il exister ? Quelles sont les conditions qui favorisent, permettent ou au contraire gênent, empêchent l'existence de tel objet ? (Artaud, 1997).

Ce concept d'*écologie* permet de mettre en lumière les conditions et les contraintes de l'existence de certains concepts mathématiques à enseigner dans une institution donnée. Chevallard (2002) a ainsi défini une structuration en différents *niveaux de détermination mathématique et de détermination didactique*, qui permettent de mettre au jour les conditions et les contraintes pesant sur les différents systèmes didactiques.

Pour les niveaux de détermination mathématique, ce chercheur distingue, pour l'étude d'un thème donné, les différentes organisations suivantes, allant de la plus particulière à la plus générale : *ponctuelle*, *locale*, *régionale* et *globale*. Pour expliciter ces concepts, choisissons un thème d'étude, comme « la résolution des équations polynômiales de degré 2 ». L'organisation praxéologique *ponctuelle* ne prend en compte qu'un seul type de tâches qui s'étudie par une ou des techniques, prenant elles-mêmes appui sur une technologie et une théorie relative à ce type de tâches. Par exemple, il pourrait s'agir avec le choix du thème ci-dessus de « résoudre des équations polynômiales de degré 2 de la forme $ax^2 + b = 0$, où a et b sont des réels fixés ». Ce type de tâches est alors un *sujet d'études* pour le professeur, que celui-ci plonge ensuite dans une organisation *locale,* amalgamant plusieurs types de tâches que l'on peut étudier utilisant des techniques différentes. En découle que la justification de l'agglomération de ces différents types de tâches ne se fait plus par des techniques comme pour le cas précédent mais par une technologie. Dans ce cas, on passe au niveau supérieur du *thème d'études,* regroupant divers sujets d'études. Le professeur doit ensuite gérer une organisation plus vaste, à un niveau supérieur, que Chevallard nomme *régionale*, et *qu'on peut regarder formellement comme le fruit de l'amalgamation d'organisations locales admettant la même théorie.* (Ibid.) L'organisation *régionale* correspond alors à tout un *secteur* mathématique dépendant d'une même théorie. Une dernière étape pour terminer cette échelle est celle de l'organisation *globale* qui est constituée par l'amalgamation de ces organisations *régionales et identifiable à un domaine d'études ; et l'ensemble de ces domaines est amalgamé en une commune discipline – pour nous, « les mathématiques »* (Ibid.).

Pour les niveaux de détermination didactique, il distingue donc pour une *discipline* donnée (niveau 1), les niveaux de *domaine* (niveau 2)*, secteur* (niveau 3)*, thème* (niveau 4) et *sujet* (niveau 5). Chevallard précise (2008a) :

> L'analytique didactique d'une matière à étudier est souvent précisée et imposée par *l'école* au sein de laquelle le système didactique correspondant doit fonctionner. Pour nombre de matières scolaires, notamment, le découpage distingue dans la « discipline » une suite emboîtée constituée d'abord de *domaines d'étude*, eux-mêmes découpés en *secteurs d'étude*, à leur tour analysés en *thèmes d'étude*, ceux-ci étant déclinés enfin en *sujets d'étude*. [...] Un point que l'on doit noter dès maintenant, c'est que le « découpage » n'est pas « inscrit dans » [la matière], autrement dit *ne lui est pas consubstantiel*. Il est produit et diffusé *par une institution*, par exemple [...] dans le cas de la France, par le ministère de l'Éducation nationale, c'est-à-dire par « l'école ». (p.9)

Regardons où se place notre objet d'étude dans le programme de la classe de seconde de 2009 (MEN, 2009a). Ce dernier apparaît scindé en trois *domaines d'étude* que les rédacteurs du programme ont appelés « parties » et intitulés respectivement *Fonctions*, *Géométrie* et

Statistiques et probabilités. Le domaine des *Fonctions* est lui-même scindé en plusieurs *secteurs d'études*, que l'on peut nommer *Généralités sur les fonctions, Expressions algébriques, Équations, Inéquations, Fonctions de référence* et *Trigonométrie.* Le secteur *Expressions algébriques* se divise à son tour en trois *thèmes d'études* :
- *associer à un problème une expression algébrique ;*
- *identifier la forme la plus adéquate d'une expression en vue de la résolution du problème donné ;*
- *transformer des expressions polynomiales ou rationnelles.*

Selon Chevallard (2002), un des intérêts de l'identification de ces niveaux et de leur hiérarchisation est de permettre un premier tri dans les différentes contraintes auxquelles est soumis le professeur. En particulier, il précise que le professeur n'opère – en général – qu'aux niveaux 4 et 5 pour construire les OM et OD de « ses cours ».

Il évoque également des niveaux supérieurs de détermination didactique, les niveaux de la *civilisation*, de la *société*, de l'*école*, de la *pédagogie* et de la *discipline étudiée*, pour lesquels le pouvoir de décision appartient soit aux communautés savantes des disciplines, soit aux politiciens.

Par exemple, le niveau de la *société* (-2) réfère à ce que celle-ci considère légitime d'enseigner ou non. La loi Ferry de 1882 donnait la liste des enseignements de l'école primaire, concernant les enfants des deux sexes âgés de six ans à treize ans et prévoyait en particulier *pour les garçons, les exercices militaires ; pour les filles, les travaux à l'aiguille.*[5]
De même, en 1950, un texte de l'UNESCO, écrit par un rapporteur français[6], faisait l'apologie des travaux manuels dans l'enseignement secondaire :

> On s'accorde à reconnaître que les travaux manuels ont une valeur éducative générale et qu'ils peuvent contribuer à la formation et au développement de l'être tout entier. Par conséquent, les raisons de les faire figurer dans l'enseignement secondaire ne tiennent pas seulement aux qualités manuelles et pratiques qu'ils peuvent développer, ou à l'avantage qu'ils présentent de mettre l'individu en mesure d'assurer par lui-même les menus travaux de la vie quotidienne et de meubler utilement ses loisirs d'adulte. Elles ne résident pas davantage dans une initiation à une activité professionnelle. Mais elles se fondent essentiellement sur des valeurs générales de la personnalité humaine qu'elles permettent d'épanouir. (p.2)

Comparons ces propos aux préconisations des programmes officiels quant à l'utilisation des technologies de l'information et de la communication appliquées à l'enseignement (TICE) pour constater à quel point l'impact des préoccupations de la société est prégnant dans l'enseignement. Nous lisons en effet dans l'introduction des programmes de mathématiques du collège de 2008 (MEN, 2008a) :

> Les technologies de l'information et de la communication sont présentes dans tous les aspects de la vie quotidienne : une maîtrise suffisante des techniques usuelles est nécessaire à l'insertion sociale et professionnelle. Les mathématiques, les sciences expérimentales et la technologie contribuent, comme les autres disciplines, à l'acquisition de cette compétence. […] Les règles d'identification et de

[5] Consulté sur le site : http://www.tlfq.ulaval.ca/axl/francophonie/France-loi-Ferry-1882.htm
[6] 13ème conférence internationale de l'instruction publique. Consulté sur le site : http://unesdoc.unesco.org/images/0014/001424/142433fb.pdf

> protection, de respect des droits sont systématiquement appliquées, de façon à faire acquérir des comportements responsables. (p.5)

Ce point de comparaison entre les enseignements des travaux manuels prodigués en 1950 et les TICE aujourd'hui montrent bien l'influence du niveau sociétal dans l'École et son évolution selon les époques.
Pour conclure, le découpage des *contraintes et des conditions* repérées dans l'enseignement d'une discipline selon *les niveaux de l'échelle de codétermination didactique* nous semble ici un outil pertinent pour ce travail de recherche. En effet, cet élargissement de point de vue peut permettre d'analyser des pratiques enseignantes non seulement au niveau de leurs classes, mais aussi de prendre en compte d'autres déterminants. L'interprétation des marges de manœuvre des enseignants est ainsi affinée.

1.3 D'autres éléments théoriques sur les pratiques enseignantes

1.3.1 Justifications

Comme l'écrit Chevallard (1997) lui-même, lorsqu'il prend pour postulat que *toute action humaine procède d'une praxéologie*, il n'est pas toujours possible d'avoir accès au bloc *logos* et plus particulièrement à la théorie, qu'il qualifie de *généralement évanouissante*. En effet, pour analyser le couple élève/savoir présenté ci-dessus lors d'un apprentissage en mathématiques, le bloc *logos* est parfaitement défini, puisque les mathématiques reposent sur des théories précisément déterminées, du moins celles qui fondent l'enseignement des mathématiques du secondaire. En revanche, pour analyser des types de tâches relevant de la fonction du professeur, l'accès au bloc *logos* sera la plupart du temps incomplet, hypothétique, voire inaccessible.
Chevallard (Ibid.) relève la possibilité de cette *incomplétude* en indiquant :

> [On admet] bien sûr que cette praxéologie puisse être en cours d'élaboration, ou, aussi bien, que sa construction se soit arrêtée - peut-être définitivement, à l'échelle d'une vie humaine ou institutionnelle - en la figeant dans un état d'incomplétude ou de sous-développement, avec, par exemple, un type de tâches mal identifié, une technique à peine ébauchée, une technologie incertaine, une théorie inexistante.

Pour illustrer ce qui précède, donnons un exemple de type de tâches que peut donner un professeur dans sa classe. Il s'agit d'un exemple développé par Bronner (2009) où le type de tâches considéré est le *démarrage d'une séance dans le cas où la tâche a déjà été rencontrée lors d'une séance précédente*. Les techniques utilisées sont décrites comme *l'appel à la mémoire didactique des élèves, leur remise en condition par la présentation d'un matériel identique et la constitution d'une communauté discursive avec leur coopération.* Ces deux premiers axes constituent le *praxis*. Le *logos* décrit ensuite ne considère que des éléments technologiques, présentés comme hypothétiques qui reposeraient sur un principe de volonté *de faire participer les élèves, de les rendre actifs*, *de leur donner un maximum de place* pour s'exprimer, en espérant qu'un élève fournira le lien, la réponse attendue *pour faire avancer le projet didactique*. Cette praxéologie a été nommée la *technique du passeur* par Bronner et

Larguier (2004). Nous émettons l'hypothèse que celle-ci se rapproche d'une théorie socioconstructiviste, mais contrairement aux théories auxquelles nous pouvons accéder pour les « sciences dures » comme les mathématiques, dès que nous cherchons à expliciter le rôle du professeur de mathématiques exerçant dans sa classe, le *logos* de l'analyse praxéologique visant à comprendre les agissements de l'enseignant est d'une grande complexité. Ce *logos* peut être constitué aussi bien d'habitus du professeur, ou de théories issues des sciences humaines - théories que l'enseignant utilise soit parce qu'il en possède quelques notions, soit de façon instinctive -, que de recommandations des programmes institutionnels données par la noosphère.
Aussi, partant du constat de l'incomplétude de la praxéologie visant à expliciter le rôle du professeur dans sa classe dans toutes ses dimensions (interactions du professeur avec le savoir, avec les élèves, organisations mathématique et didactique des séances de classe, etc.), des chercheurs en didactique se sont penchés vers d'autres approches théoriques dont nous exposons dans la section suivante quelques éléments. Ces éléments sont utilisés dans l'analyse a posteriori du rôle du professeur, relativement à l'expérimentation mise en place pour ce travail de recherche.

1.3.2 Les gestes professionnels de l'enseignant

Comme vu plus haut (Cf. 1.2.1), le terme *savoir* ne recouvre pas les mêmes concepts selon que l'objet d'étude est l'élève ou le professeur. Le couple élève/savoir le situe entre le *savoir enseigné* et le *savoir appris* alors que dans la relation professeur/savoir, le terme *savoir* regroupe plusieurs dimensions : il y a le propre savoir mathématique *savant* du professeur, issu de ses connaissances, le *savoir à enseigner* que l'institution EN a sélectionné à partir des éléments du *savoir savant* et que le professeur va devoir à son tour transposer en *savoir enseigné.* Lorsque nous nous intéressons aux pratiques enseignantes, pour compléter ce que recouvre le terme *savoir*, il faut également ajouter le concept de *savoir enseigner*, ce qui correspond aux *gestes professionnels* d'un enseignant. Afin de définir ce concept, nous partirons de cette citation de Bucheton (2004) qui distingue geste de métier et gestes professionnels de la façon suivante :

> Le *geste de métier* (Jorro, 2002)[7], renvoie à un savoir-faire partagé et reconnu par la profession, rattaché à un genre scolaire bien identifié par le maître et les élèves (ex : le geste de correction de copie, la lecture magistrale du texte par le maître avant de commencer l'étude d'un texte). Il s'est construit dans l'histoire de l'école, il est généralement la mise en œuvre d'un genre de l'activité professionnelle.
> Nous appelons *gestes professionnels* les arts de faire et de dire qui permettent la conduite spécifique de la classe. Le geste professionnel est situé. Il ne se confond pas avec le genre mais le met en œuvre, l'actualise, l'ajuste. Le genre est statique, le geste dynamique. (p.2)

Une autre définition des *gestes professionnels*, qui rejoint la précédente est donnée par Chevallard (1995), quand il cherche à qualifier le répertoire des gestes qu'un professeur en position d'enseigner dans le cadre de l'EN se doit de mettre en œuvre :

[7] Jorro A. (2002), Professionnaliser le métier d'enseignant, *ESF éditeur, collection pratiques & enjeux pédagogiques.*

> Le mot de geste, employé ici génériquement, mérite un bref commentaire. Le latin gestus signifie, au figuré, « prendre sur soi, se charger volontairement de », et donc « exécuter, faire ». C'est en ce sens large, et non dans le sens restreint plus courant (« mouvement du corps »), que le mot est pris ici : on doit le rapprocher du verbe gérer et du substantif gestion, de même origine, et de quelques autres encore. (p.2)

Le *savoir enseigner* est donc constitué de gestes professionnels qui sont la caractéristique de l'agir de l'enseignant au sein de sa classe. Bronner (2004, 2009) explique, au travers du concept de *praxéologie*, que ces gestes professionnels peuvent être considérés comme des *praxéologies professorales*. Par exemple, *« construire une séance »* ou encore *« construire une progression » sont des types de tâches associés à* des *praxéologies professorales globales*, et *« donner une consigne »* ou *« gérer des réponses d'élèves après un exercice »* sont alors vues comme des *praxéologies plus ponctuelles*. La citation suivante de Bronner (ibid.) explicite ce concept de gestes professionnels :

> Nous concevons les *gestes professionnels* comme des *pratiques* de réalisation de tâches au sens de l'approche anthropologique. Cette théorie amène un autre regard sur le geste professionnel comme étant une *praxéologie* liée à un type de tâches d'enseignement ou à un agrégat de tels types. L'approche anthropologique invite à regarder un *geste professionnel* comme une pratique qui peut s'analyser et se décomposer selon les quatre dimensions proposées par Chevallard : *type de tâches, technique* (manière de réaliser les tâches)*, technologie* (justification de la technique) et *théorie* (niveau supérieur de justification).

Notons, pour résumer sur les différents *savoirs* en action dans le couple professeur/savoir que Chevallard et Cirade (2010) les ont intégrés sous l'appellation de *praxéologies pour la profession,* qu'ils définissent comme *l'ensemble des praxéologies dont la profession peut avoir avantage à s'équiper.* Nous revenons dans nos analyses sur ce concept (Cf. §11). Mais comme dit plus haut (cf. 2.2.2.2), les théories permettant de comprendre les pratiques enseignantes et les outils permettant de les expliciter sont encore dans la jeunesse de leur histoire. Margolinas (2004) explique que *les recherches en didactique, et notamment les ingénieries, concernent toujours le professeur, en tant qu'il participe ou est destinataire des travaux. Mais le rôle du professeur en tant qu'objet modélisable a été long et difficile à construire.* L'une des raisons avancées par ce chercheur de la lenteur de la prise en compte du rôle du professeur dans les théories didactiques est d'ordre historique et épistémologique : en effet, dans les années 1980, Brousseau pose les premiers jalons de la théorie des situations didactiques et cherche à *« épurer » en quelque sorte la situation d'enseignement pour en « extraire » le « noyau dur ». Dans la lignée de la psychologie piagétienne et de la théorie des jeux, Brousseau va considérer l'interaction sujet-milieu comme étant la plus petite unité d'interaction cognitive.* (Margolinas, ibid.). Le professeur est exclu de cette unité, *il n'intervient qu'en tant qu'agent de la situation*, et Margolinas explique qu'il faudra une dizaine d'années pour que le rôle du professeur dans le processus d'apprentissage soit reconnu comme incontournable mais également comme extrêmement complexe. La citation qui suit montre qu'elle insiste également sur la difficulté à développer des théories sur le rôle du professeur :

> Par ailleurs, le travail sur le rôle du professeur, qui a occupé mes recherches pendant une dizaine d'années, conduit inévitablement à la prise en compte d'autres dimensions que les dimensions

> strictement didactiques. Il est possible de modéliser une part importante du rôle de l'élève, dès lors qu'il s'engage dans la résolution d'un problème, par des considérations exclusivement didactiques. Il est plus douteux que ce soit possible pour le professeur, dont le travail en tant que professionnel et l'insertion dans le social peuvent se révéler déterminants. (p.8)

La prise en compte de facteurs plus larges pour comprendre et analyser le rôle du professeur, autres que purement didactiques, se retrouvent également dans d'autres travaux. Par exemple, les travaux réalisés par une équipe pluridisciplinaire[8] dirigée par Bucheton (2004) en termes de gestes professionnels consistent en la catégorisation de gestes que l'on retrouve de façon récurrente lors de la gestion de la classe par le professeur, outre la *préoccupation centrale […] d'enseigner un contenu spécifique*, et que nous allons définir ici :

- le geste de *tissage,* qui peut être déterminé comme *la préoccupation de l'enseignant à articuler les différentes unités de la leçon.* Ce *tissage* est particulièrement présent au moment, au sens de Chevallard, de la première rencontre avec la nouvelle notion et pour *opérer la transition à la fin de l'unité* ;
- le geste d'*étayage* qui consiste pour l'enseignant à *accompagner* l'élève dans *un geste d'étude qu'il ne peut mener seul.* Bucheton différencie trois sous-catégories du geste d'étayage : *le soutien, la demande d'approfondissement, le contrôle des réponses* ;
- le geste de *maintien d'atmosphère*, permettant *de rendre compte du climat général cognitif et relationnel qui autorise ou non la prise de parole de l'élève et son niveau d'engagement attendu dans l'activité* ;
- le geste de contrôle *des dimensions spatio-temporelles* qui sont constituées par le contrôle pragmatique de l'avancée du temps *des horloges* (Mercier, 1992), des déplacements de l'enseignant dans l'espace de la classe, de l'utilisation du tableau noir, etc.

Dans ce travail de recherche, afin préciser l'organisation didactique des différents professeurs expérimentateurs, nous analysons la présence ou l'absence des gestes définis ci-dessus dans les différentes phases des séances observées. En analysant les vidéos et verbatim des séances, nous tentons de souligner l'impact de l'utilisation de tel ou tel geste dans l'activité de l'élève ainsi que les différences ou similitudes d'emploi chez les différents enseignants ayant participé à l'étude.

D'autre part, Bucheton (ibid.) précise que les gestes définis ici en quatre catégories et qu'elle nomme de façon plus générale le *multi-agenda de la parole du maître* n'ont sans doute pas la même portée, la même importance pour rendre plus effectif l'apprentissage d'une notion donnée et que *si cette vision architecturée des gestes professionnels rend compte de l'épaisseur des gestes langagiers du maître, de leur polysémie, de leur complexité, elle rend mal compte de leur dynamique.*

Aussi pour compléter cette catégorisation des gestes et déboucher sur la dynamique de la co-activité enseignant/élève, nous réfèrerons-nous aux travaux de Bronner (2006, 2009) qui convoquent la notion d'*événement* que nous allons définir dans la section ci-dessous.

[8] Étude réalisée au LIRDEF, laboratoire de recherche de l'IUFM de Montpellier qui a abouti à l'ouvrage collectif : Bucheton (dir.), *L'agir enseignant : des gestes professionnels ajustés*. Toulouse : Octarès.

1.3.3 Événements prévisibles et problématiques

Comme dit précédemment, ce concept d'événement tente de montrer la dynamique de l'interaction entre le professeur et les élèves pendant la situation d'enseignement. La définition qu'en donne Bronner (2009) repose sur le sens premier de ce mot, à savoir, *ce qui se produit, arrive ou apparaît, fait, circonstance*[9].

Bronner se centre sur les *événements* qu'il qualifie de *didactiques*, *au sens où un fait a une incidence sur le projet, les actions didactiques ou encore sur les connaissances des différents acteurs de la situation.* Ses travaux le conduisent à distinguer deux caractères de ces événements didactiques, le caractère de *prévisibilité* et celui de *problématicité*.

Le caractère de *prévisibilité* est défini par le couple prévu-imprévu d'un événement par rapport au contrat didactique. C'est l'analyse a priori d'une situation qui permet de caractériser ainsi un événement : tout ce qui n'a pas été prévu dans cette analyse, soit par le professeur, soit par le chercheur est alors qualifié d'*imprévu*. Précisons qu'un événement imprévu dans le déroulement d'une situation de classe n'est pas forcément problématique, au sens où son avènement peut permettre au contraire un éventuel avancement dans le temps didactique, comme par exemple *un élève qui donne une solution non prévue a priori à un problème, mais solution juste qui s'intègre aux autres réponses.* (Bronner, 2006).

Quant au caractère de *problématicité* d'un événement, il peut s'agir soit d'un événement prévu, soit d'un événement problématique imprévu. Dans le premier cas, le professeur sait que la situation qu'il propose contient des obstacles épistémologiques ou didactiques à dépasser, alors que le second est défini par Bronner comme un *incident critique*, un *événement qui provoque une perturbation au niveau du projet didactique de l'enseignant.* C'est le cas par exemple, lorsque le professeur prévoit une situation s'appuyant sur des notions considérées comme anciennes, au sens de Douady, et que le projet d'enseignement tourne court car ces notions ne sont pas en fait assimilées par les élèves.

1.3.4 La méthodologie « des quatre composantes »

Afin d'approfondir les analyses des pratiques enseignantes dans les expérimentations menées dans ces travaux de thèse, et en particulier sur l'organisation didactique, nous nous appuyons sur la méthodologie dite « des quatre composantes » élaborée par Bronner et al. (2003). Cette méthodologie est une modélisation de l'action du professeur au sein de sa classe. Elle se base à la fois sur la théorie des situations de Brousseau (1986b, 1998), notamment sur les concepts de *contrat didactique*, de *milieu* et sur la TAD de Chevallard (1999) où sont considérés plus particulièrement les notions de *temps didactique* (Chevallard, 1985a) ainsi que celles de *topos*, en lien avec la *topogénèse* initiées par Chevallard (ibid.), et reprises par Mercier (1992) et Sensevy (2003).

L'examen du *contrat didactique* est réalisé par l'analyse de la parole du professeur dans les situations expérimentées en classe et par ses interactions avec les élèves. Cette analyse va nous permettre de repérer les éventuels changements de contrat qui vont se mettre en place, afin que la relation didactique puisse se poursuivre et qu'un apprentissage soit réalisé. Ces changements de contrat feront parfois suite à des *événements*, au sens de Bronner, tels qu'ils ont été définis plus haut (Cf. §1.3.3). Par exemple, nous pourrons relever la façon dont les

[9] Petit Robert (2003)

élèves sollicitent le professeur pour qu'il leur apporte son aide, ou encore la façon dont l'enseignant modifie ou non le contrat établi au départ, en nous interrogeant sur les différentes formes d'aide qu'il procure, en nous appuyant sur les différents *gestes* qu'il produit, au sens de Bucheton et vus ci-dessus (Cf. §1.3.2).

Brousseau (2010b) définit le concept de *milieu* comme la délimitation des *possibilités de décisions des actants, composé d'objets matériels ou de contraintes immatérielles comme des savoirs.* Il précise bien que le concept de *milieu* peut être utilisé non seulement pour apprécier l'avancement de l'apprentissage de l'élève mais aussi pour étudier le rôle de l'enseignant dont il indique : *le milieu sur lequel il agit est une situation mathématique dans laquelle le ou les élèves sont engagés* (ibid.). On pourrait dire que le milieu est « tout ce sur quoi le sujet (l'élève ou le professeur) peut agir et tout ce qui peut agir sur lui ». Pour les situations proposées donnant lieu à expérimentations, nous analyserons les évolutions de ce milieu.

Ensuite, l'enseignant est en permanence confronté à plusieurs types de temps, le *temps des horloges*, comme le nomme Mercier (1992) qui correspond aux nombres d'heures de cours attribuées par l'institution EN pour réaliser le programme de mathématiques d'un niveau donné, le *temps didactique* introduit par Chevallard (1985a) qui désigne le temps spécifique que le professeur décide de passer pour instituer une nouvelle notion mathématique. En principe, le professeur est le maître du temps didactique, c'est lui qui décide quand l'étude de la notion débute et quand elle est achevée pour pouvoir avancer dans le temps didactique et aborder une nouvelle notion, mais il existe aussi le *temps d'apprentissage* des élèves, qui ne coïncide pas avec le temps d'enseignement et qui nécessite des reprises, des retours en arrière, des réorganisations des notions vues… Le décalage entre le moment de l'enseignement et le moment de l'apprentissage est qualifié de fiction par rapport à une supposée homogénéité du temps par Mercier (1992) :

> Le temps didactique n'est donc en fait ni le temps de l'enseignement ni le temps de l'apprentissage. Il est une fiction, un temps légal. Il permet que se noue le contrat didactique : c'est donc une fiction nécessaire. Il permet que se marque le lieu enseignant - porteur du projet social d'enseigner - et le lieu enseigné, où viennent s'assujettir les élèves. (p. 190)

Ce temps didactique est donc vu comme nécessaire à l'avancée de la connaissance, mais Mercier (1992) conclut par la nécessité de prendre en compte le *temps de l'élève,* qui risque de ne plus adhérer au contrat didactique si un fossé se creuse entre ses possibilités de rattraper le temps d'enseignement par rapport à son temps d'apprentissage. Cependant des études récentes (Favre, 2004) citées et développées par Chopin (2007) tendent à montrer que l'avancée du *temps didactique* doit rester suffisamment proche du *temps de l'élève,* pour éviter d'une part, aux élèves faibles de décrocher complètement – mais en notant que de rester un temps trop long sur une notion non comprise ne fait pas non plus avancer l'apprentissage – et d'autre part, au professeur d'être en retard sur le *temps des horloges*, c'est-à-dire dans l'avancée du programme officiel.

L'observation de ce temps didactique dans les pratiques des enseignants est un facteur pris en compte dans nos analyses, ainsi que son articulation avec la renégociation éventuelle du contrat didactique, ainsi que le changement de milieu qui en découlerait. Par exemple, nous pourrons étudier comment un professeur expérimentateur réagit s'il ne constate aucune avancée sur la construction d'un algorithme visant à résoudre un certain type d'équations

algébriques, comment il négocie l'avancement du *temps didactique* dans le temps de la séance, et s'il modifie le *contrat* de recherche de l'algorithme établi avec la classe, en apportant une aide ou un début de solution qui modifierait le *milieu*.
Pour finir, afin de préciser le rôle des protagonistes, élèves et enseignants dans l'apprentissage/enseignement d'un savoir, Chevallard (1985a) a défini le concept de *topogénèse*. C'est un concept qui se situe au cœur de la relation élève/enseignant et qui peut être défini comme le partage des tâches et des responsabilités de l'enseignant et des élèves, vis à vis du savoir enseigné. Le terme *topos*[10], introduit par Chevallard en 1999, est pris en référence au mot grec signifiant « le lieu ». Ainsi, dans une séance, élèves et professeur occupent une place, un *lieu* qui leur appartient, mais ce lieu peut être changeant, selon l'évolution du temps didactique et la négociation du contrat didactique entre l'enseignant et l'élève. Sensevy (2003) décrit ainsi ces concepts :

> […] le professeur et les élèves occupent un lieu précis, un topos, c'est-à-dire accomplissent un ensemble de tâches, dont certaines sont spécifiquement liées à la position de professeur, et d'autres à la position d'élève. Par exemple, dans le contrat didactique classique en mathématiques, la démonstration appartient au topos du professeur, la recherche d'exercices appartient au topos de l'élève, et une topogénèse particulière est ainsi décrite. (p.210)

L'équilibre, difficile à trouver, entre le *topos* de l'élève et celui du professeur fait partie des problèmes d'organisation didactique, en relation avec le savoir en construction. Aussi cette citation de Chevallard (1997) illustre-t-elle bien cette difficulté :

> L'élève doit accepter le professeur comme directeur d'étude, et, dans le même temps, renoncer presque violemment aux trompeuses facilités qu'il lui apporte comme enseignant –et cela, en principe, à propos de *chacun* des moments de l'étude, évaluation et institutionnalisation comprises. Le « drame didactique » que le mot de *topos* résume se noue ainsi autour du jeu du professeur : toujours subtilement présent, fût-ce *in absentia*, celui-ci doit savoir se faire absent même *in praesentia*, pour laisser l'élève libre de conquérir une indépendance que la figure tutélaire du professeur rend tout à la fois possible et incertaine.

Le concept de *topos* est également utilisé dans les analyses des expérimentations, en veillant à étudier ce qui vient du topos du professeur (comme les types de tâches proposées à l'élève, les ajustements nécessaires pendant la séance) et la façon dont celui-ci laisse le topos de l'élève s'exprimer, de manière plus ou moins autonome.
Non seulement chacune des quatre composantes *contrat, milieu, temps didactique* et *topos* est regardée explicitement dans l'analyse des situations didactiques expérimentées, mais c'est également leur articulation qui est visée et qui permet ainsi d'affiner les analyses. Nous reprenons plus en détail les différentes étapes de la méthodologie des quatre composantes de Bronner plus au chapitre 6.

[10] Source : Lieu commun (rhétorique). Récupéré le 13 janvier 2012 du site Wikipédia, l'encyclopédie libre. http://fr.wikipedia.org/w/index.php?title=Lieu_commun_(rhétorique)&oldid=73084301.

1.4 Résumé du cadrage théorique utilisé

Afin d'ordonner et de hiérarchiser de qui a été développé ci-dessus et pour expliciter le cadre dans lequel sera analysé le recueil des données concernant cette recherche, et en particulier les pratiques enseignantes, nous proposons un diagramme récapitulatif répertoriant les différents concepts développés plus haut.
Par rapport à notre thème de recherche, à savoir la reprise de l'algèbre en y introduisant une part d'algorithmique, sont analysées les OM des professeurs expérimentateurs au travers de l'ingénierie proposée, par le classement en types de tâches et techniques, technologies et théories associées. Les blocs *praxis* et *logos* déclinés ici sont de type mathématique. Est également analysée la *transposition didactique* des savoirs en partant du niveau du *savoir savant* pour arriver au *savoir appris,* et ce, en passant par les différentes adaptations du savoir vues précédemment (cf. §1.2.1). Pour ce faire, nous choisissons différents grains d'analyse. Ce grain peut se décliner en une année scolaire, pour montrer par exemple l'évolution des connaissances algébriques attendues lors de la dernière année de collège (classe de troisième) ou pour la première année de lycée (classe de seconde) ou encore le grain se réduit à la durée d'une séance de cours, dans une classe de seconde où l'expérimentation est menée, de manière à étudier précisément un type de tâches algébriques, par exemple. De manière simplifiée, cette analyse de l'OM permettra de répondre aux questions : « Qu'enseigne-t-on dans le domaine algébrique et quelles conditions et contraintes impose le cadre institutionnel EN ? ».
Ensuite, il s'agit de considérer plus particulièrement dans les pratiques enseignantes *la manière dont peut se construire la réalité mathématique, c'est-à-dire la manière dont peut se réaliser dans la classe l'étude du thème* considéré. […] C'*est ce qu'on nommera une organisation didactique* (Chevallard, ibid.). C'est dans ce cadre que sont utilisées les quatre composantes définies plus haut, qui permettent d'analyser les interactions élèves/enseignant dans la classe de mathématiques, de rechercher et de comprendre les facteurs qui agissent sur l'enseignement/apprentissage, en choisissant comme grain d'analyse la durée d'une séance de cours. Le choix de ce grain nous semble pertinent pour analyser le cœur des *gestes professionnels* d'un enseignant, en action dans sa classe. Pour simplifier, cette analyse de l'OD permettra de répondre aux questions : « Comment le professeur enseigne-t-il dans la situation considérée, quelles contraintes et quelles conditions s'impose-t-il ? ».
Rappelons le fort lien existant entre l'OM et l'OD par le biais de l'échelle des niveaux de codétermination, déjà mentionné en section 1.2.
Résumons les propos précédents par un schéma :

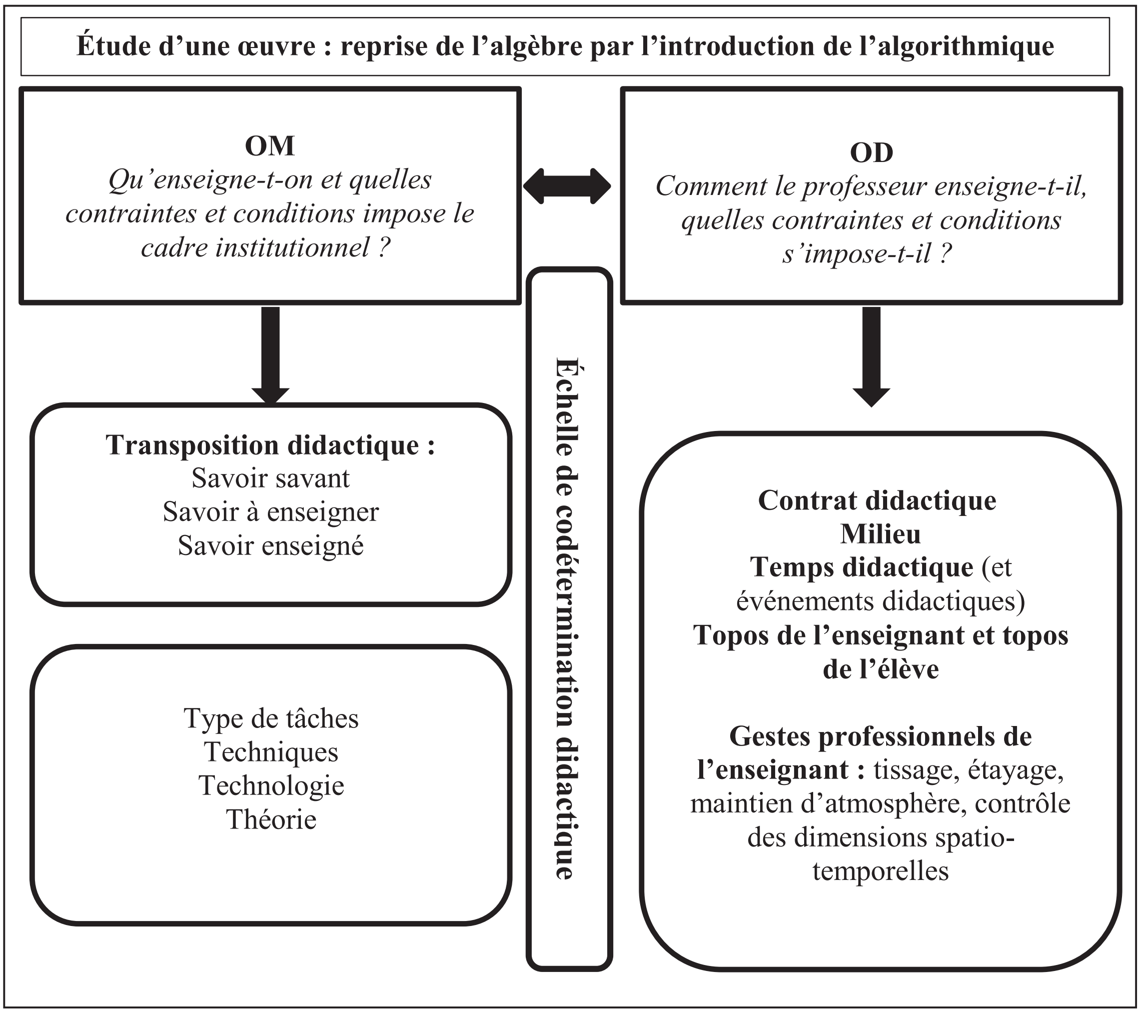


Figure 2 : Résumé des divers éléments du cadrage théorique utilisé

1.5 Remarque sur les choix des cadres théoriques utilisés

Plusieurs courants cohabitent aujourd'hui, tentant de théoriser le rôle du professeur, comme la TAD de Chevallard décrite plus avant dans ses grandes lignes.

On peut citer également la didactique comparée de Sensevy (2007), avec en particulier l'action conjointe du professeur et des élèves que Schneuwly (2007) définit de la façon suivante : *l'action de l'enseignant, entrée assez tardivement dans le centre de l'attention de chercheurs en didactique, ne peut être comprise qu'en tenant compte en même temps de celle de l'élève. Et l'action conjointe [...] se fait nécessairement à propos de savoirs qui donnent forme à l'action, contenu et forme étant – comme toujours – intimement liés.*

Il existe également la théorie de la double approche didactique et ergonomique de Robert (2010) que Vergnaud (Vandebrouck, 2010) définit ainsi : *la double approche répond au souci de dépasser les perspectives ordinairement utilisées dans l'analyse des pratiques des enseignants, en associant aussi étroitement que possible l'analyse des tâches proposées au départ par l'enseignant et celle des déroulements effectifs qui interviennent ensuite dans la classe, en fonction des connaissances mobilisées par les élèves.*

Ces théories ont chacune leur spécificité et leur intérêt, et leur étude montre à la fois des points de convergence, des concurrences et des complémentarités. Cependant, afin de conserver une certaine unité de pensée et en calquant la démarche de Margonilas dans sa note d'habilitation (2004), nous choisissons de rester dans le paradigme de Chevallard (1999), lui-même inspiré par les travaux de Brousseau (1998). En effet, cette citation de Margonilas (2004) a retenu notre attention :

> « C'est précisément la possibilité d'expliquer « complètement » un phénomène humain d'au moins deux manières (complémentaires) qui démontre, d'une part, que le phénomène en question est à la fois réel et explicable, et, d'autre part, que chacune de ses deux explications est « complète » (et donc valable) dans son propre cadre de référence. » (Georges Devereux)[11] (p.8)

C'est justement parce que nous aurions pu choisir d'autres cadres de référence, d'autres paradigmes qui nous auraient tout aussi bien permis d'expliciter nos analyses, tant pour la place de l'élève dans ses apprentissages que pour le rôle du professeur dans son enseignement que nous n'hésitons pas à choisir un paradigme particulier, un référentiel unificateur, comme la théorie de Chevallard, avec quelques apports supplémentaires, décrits ci-dessus.

[11] Citation de Georges Devereux (1972,1985). *Ethnopsychanalyse complémentariste*, coll. Champs. Paris : Flammarion.

CHAPITRE 2 - CADRE DIDACTIQUE DE L'ALGÈBRE

Ce chapitre consiste en l'exposition de résultats de recherches en didactique de l'algèbre avec l'explicitation de quelques concepts qui sont utilisés dans le cadre de ce travail. Les études menées dans ce domaine étant très vastes, cet exposé ne se veut en aucun cas exhaustif. Les points abordés le sont par rapport à la problématique de cette recherche, en particulier nous axons cette synthèse sur l'enseignement de l'algèbre élémentaire sans aborder les questions liées aux structures algébriques, puisque le lieu de la recherche se situe principalement au niveau de la seconde générale du lycée français. Les diverses approches visitées relèvent de différents cadres théoriques : épistémologique, cognitif, linguistique et anthropologique. Après avoir situé l'algèbre par rapport à l'arithmétique, nous abordons la question de l'introduction des objets de l'algèbre dans l'enseignement, regroupant différents travaux existant dans ce domaine ainsi que les difficultés récurrentes de l'apprentissage de ces objets.

2.1 Le passage de l'arithmétique à l'algèbre : rupture ou continuité ?

Donner une définition de l'algèbre s'avère une tâche délicate, d'autant plus que celle-ci peut être totalement différente selon l'époque, selon le niveau où l'on se place et selon les personnes auxquelles elle s'adresse.
Pour illustrer ces propos, prenons deux définitions sommaires, destinées au grand public mais qui montrent les grandes disparités de sens que recouvre cette branche des mathématiques. Voici celle donnée par le Larousse encyclopédique[12] :

> (du latin médiéval *algebra,* de l'arabe *al-djabr,* réduction)
> Branche des mathématiques qui, dans sa partie classique, se consacre à la résolution par des formules explicites des équations algébriques et, dans sa partie moderne, étudie des structures (groupes, anneaux, corps, idéaux) et se prolonge par les algèbres linéaire et multilinéaire et par l'algèbre topologique.

ou encore celle donnée par l'Encyclopédie de l'Internaute[13] :

> **Sens :** Partie des mathématiques qui a pour objet l'étude des grandeurs en substituant des lettres aux valeurs numériques.
> **Synonyme :** calcul.

La première définition, si l'on considère la partie « classique » de l'algèbre qui y est définie, réduit l'algèbre à la résolution d'équations par des formules. Notons que cette « algèbre classique » est souvent nommée *algèbre élémentaire* par les didacticiens et la noosphère de

[12] http://www.larousse.fr/encyclopedie/
[13] http://www.linternaute.com/dictionnaire/fr/

l'EN et recouvre généralement le savoir enseigné en algèbre au collège et au lycée, c'est-à-dire sans considérer les structures algébriques qui sont étudiées à l'université.
La seconde définition considère l'algèbre comme une *arithmétique généralisée*, où l'on remplace les nombres par des lettres et s'apparente au calcul.
De nombreux chercheurs en didactique se sont intéressés à la question du passage de l'arithmétique à l'algèbre et s'accordent pour conclure de leurs recherches que la restriction de l'algèbre élémentaire à une arithmétique généralisée est à l'origine de nombreux obstacles d'apprentissage. Nous allons expliciter ce résultat succinctement, en mettant en avant les concepts utiles à ce travail de recherche.
Isaac Newton définissait déjà l'algèbre par rapport à l'arithmétique dans son ouvrage sur l'algèbre élémentaire, qui porte le titre de *The Universal Arithmetic* (1710) :

> Common arithmetic and algebra rest on the same computational foundations and are directed to the same end. But whereas arithmetic treats questions in a definite, particular way, algebra does so in an indefinite, universal manner, with the result that almost all pronouncements which are made in this style of computation - and its conclusions especially - may be called theorems. However, algebra most excels, in contrast with arithmetic where questions are solved merely by progressing from given quantities to those sought, in that for the most part it regresses from the sought quantities, treated as given, to those given, as though they were the ones sought, so as...to attain some conclusion -that is equation- from which it is permissible to derive the quantities sought... Yet arithmetic is so instrumental to algebra in all its operations that they seem jointly to constitute but a unique, complete computing science, and for that reason I shall explain both together.[14]

Pour Newton, l'arithmétique et l'algèbre sont fortement liées et dépendantes l'une de l'autre. Le passage de l'une à l'autre est d'une grande complexité puisque la pensée algébrique s'est construite historiquement *sur* l'arithmétique et l'on pourrait alors parler de continuité entre les deux domaines. Depuis, de nombreux auteurs comme Chevallard (1985b, 1989), Vergnaud (1988), Kieran (1992) ou encore Grugeon (1995) ont mis en avant les ruptures entre ces deux domaines. Le rapport Kahane (2001) sur le calcul utilise même le terme de *révolution* le passage du calcul numérique au calcul algébrique.
Se plaçant sur un plan épistémologique, Chevallard (1985b) explique la rupture entre l'arithmétique et l'algèbre par la dialectique ancien-nouveau, *objet transactionnel entre passé et avenir*, sa caractéristique principale étant *l'identification de l'algèbre élémentaire à une arithmétique généralisée,* modèle qui met l'accent sur le « symbolisme algébrique » et l'oppose à un supposé « langage arithmétique » que le premier est censé élargir et généraliser.

[14] Citation relevée dans : *The Mathematical Papers of Issac Newton,* Volume V, 1683-1684 (Cambridge: At the University Press, 1972), D.T. Whiteside, editor. 539 ff. et dont une traduction est donnée ici :
L'arithmétique et l'algèbre reposent sur les mêmes bases de calcul et sont dirigées vers le même but. Mais tandis que l'arithmétique traite des questions d'une façon définie, l'algèbre le fait d'une façon indéfinie, universelle, avec le résultat que presque toutes les déclarations qui sont faites avec ce style de calcul - et ses conclusions particulièrement - peuvent être appelées théorèmes. Cependant, là où l'algèbre excelle particulièrement, par contraste avec l'arithmétique qui résout les questions simplement en progressant de quantités données à celles recherchées, c'est dans la régression des quantités cherchées, traitées comme connues, vers celles données, comme si ces dernières étaient recherchées, pour atteindre une certaine conclusion - qui est équation - de laquelle il est possible de tirer les quantités cherchées. […] Ainsi, l'arithmétique contribue tant à l'algèbre dans toutes ses opérations qu'elles semblent conjointement constituer une science de calcul unique et complète et pour cette raison j'expliquerai les deux ensemble.

> Ainsi l'algèbre s'oppose-t-elle à l'arithmétique par une propriété qui lui donne une puissance supérieure. Mais, par là, dans un deuxième temps de la dialectique que tissent les auteurs entre arithmétique (l'ancien) et algèbre (le nouveau), l'algèbre apparaît, positivement, comme l'accomplissement de l'arithmétique. S'appliquant à l'origine au même corps de problèmes, elle est une arithmétique délivrée de l'opacité et de l'oubli qui dérobent à nos yeux la structure des problèmes étudiés. Elle est un instrument supérieur pour une tâche semblable. Elle est une arithmétique universelle -comme l'appelle Newton -ou encore une arithmétique généralisée, comme le note Poinsot un bon siècle plus tard. (p.67)

Ce même auteur oppose arithmétique et algèbre, en définissant l'arithmétique comme le *raisonnement sur les énoncés du langage ordinaire, augmenté du calcul sur les nombres* et l''algèbre comme fournissant *un moyen plus puissant, essentiellement lié à l'usage des lettres et à la possibilité de calculer sur les expressions littérales qu'elle conduit à former* (Chevallard, 1989).
Vergnaud (1988) quant à lui, ajoute une dimension à cette rupture, il y adjoint une rupture de nature didactique. En utilisant l'expression de *détour algébrique*, il précise une différence de traitement des objets dans le calcul algébrique, obligeant à considérer les relations entre ces objets et à « oublier » le sens des grandeurs exprimées. Considérant l'enseignement de l'algèbre élémentaire, il insiste sur le changement de contrat didactique induit par l'introduction de l'algèbre :

> Renoncer à la recherche arithmétique directe de la solution, extraire des relations pertinentes et indépendantes, s'en remettre à des formes symboliques et à une syntaxe explicites, c'est entrer dans un nouveau contrat.

Les obstacles inhérents à ce nouveau contrat reposent pour ce chercheur principalement du changement d'appréhension des écritures arithmétiques et algébriques (statut du signe d'égalité, calcul avec des nombres entiers négatifs et des rationnels) et de la difficulté de contrôle des transformations des écritures.
Kieran (1992) souligne elle aussi une opposition forte entre arithmétique et algèbre lors de l'introduction de cette dernière dans le cursus scolaire. On peut trouver par exemple, cette citation (Kieran et Chalouh, 1993) sur l'introduction de l'équation :

> Setting up the equation requires an analytic mode of thinking that is exactly opposite to that used when solving a problem arithmetically.[15]

Cette auteure réfute également l'idée que l'algèbre élémentaire est simplement une *arithmétique généralisée*, en indiquant qu'il existe des fausses continuités entre les deux domaines, notamment par l'utilisation des signes « égal » et « moins ». L'utilisation de ces signes doit être revisitée et étendue pour accéder au sens de l'algèbre.
Grugeon (1995), quant à elle, caractérise la rupture entre arithmétique et algèbre par la différence de démarche entre une résolution arithmétique et une résolution algébrique. Comme l'expliquait déjà Newton dans la citation ci-dessus, dans une résolution arithmétique, la démarche consiste à partir des données du problème pour progresser vers la solution finale en passant très souvent par des solutions intermédiaires. Grugeon (ibid.) prend comme

[15] La mise en place de l'équation nécessite un mode de pensée analytique qui est exactement opposé à celui utilisé lors de la résolution d'un problème de façon arithmétique.

exemple le problème suivant : *Déterminer un nombre tel que, quand 5 est additionné à 2 fois ce nombre, la somme est 35.* Cet exemple est typique de ce qui est fait dans une démarche arithmétique : en raisonnant par chaînage arrière, on part du résultat connu (35) auquel on retranche 5 (30) puis on divise par 2. Le résultat (15) est obtenu en progressant du connu vers l'inconnu et en produisant pas à pas des résultats intermédiaires. Dans une démarche algébrique, l'inconnue est nommée, étiquetée en général à l'aide d'une lettre – x la plupart du temps – manipulée comme si elle était connue et l'on détermine dans un registre syntaxique littéral les relations entre les inconnues et les données ($2x + 5 = 35$). Il reste ensuite à faire un calcul spécifique sur ces objets, *un calcul équationnel* pour trouver la solution en progressant par équations équivalentes. Par cet exemple, Grugeon met l'accent sur la rupture entre un traitement algébrique et un traitement arithmétique d'un même problème. Elle fait de plus remarquer une rupture supplémentaire par rapport aux objets anciens (comme le statut du signe d'égalité, que nous reprendrons plus loin) et par rapport aux opérations qui interviennent dans le traitement de ce problème : la démarche arithmétique fait intervenir la soustraction et la division, alors que la mise en équation algébrique nécessite les deux opérations inverses, l'addition et la multiplication. Le calcul équationnel, quant à lui, nécessitera de nouveau l'utilisation de la soustraction et de la division.

Ainsi, l'ensemble des recherches effectuées au cours des années 1990 tendent à montrer que de nombreux obstacles à l'apprentissage de l'outil algébrique de base proviennent d'une part, de la vision de l'algèbre comme une *continuité* de l'arithmétique, à sa restriction comme une *arithmétique généralisée* et d'autre part, de la difficulté à gérer les objets nouveaux de l'algèbre ou à intégrer les objets anciens de l'arithmétique et à leur donner un sens étendu. Grugeon et Coppé (2009) reprennent cette idée, précisant que la réduction de l'algèbre élémentaire à une activité de symbolisation, par l'utilisation de lettres pour désigner des quantités inconnues, des paramètres ou des variables, ne peut qu'engendrer des difficultés et des obstacles à son apprentissage si on ne lui adjoint pas une utilisation réglée de systèmes de signes *à travers une pluralité coordonnée de registres sémiotiques* (ibid.).

À ce point, nous terminons cette section comme nous l'avons commencée, c'est-à-dire par une seconde tentative de définition de l'algèbre, ou plutôt de *l'activité algébrique élémentaire*, comme la nomme Grugeon, puisque c'est ce qui nous intéresse dans la suite de ce travail. Grugeon et al. (2012) définissent en effet l'algèbre élémentaire comme une *activité algébrique élémentaire* qui comprend *des problèmes de généralisation, de production de formules dans différents cadres, de preuve, de reconnaissance d'expressions, de calcul algébrique (développer, factoriser).* Cette définition de l'algèbre, moins réductrice qu'une *arithmétique généralisée* entre en résonance avec les champs conceptuels de Vergnaud qui précisait déjà, en 1988 :

> Le champ conceptuel de l'algèbre est plus vaste que celui des problèmes « arithmétiques » et la résolution de problèmes de ce champ met en jeu des emplois variés de l'outil algébrique : modéliser des relations générales entre variables d'un système dans des contextes variés, mettre en équations des problèmes, produire des expressions générales et prouver des propriétés numériques ou géométriques.

2.2 Les objets de l'algèbre élémentaire

Dans cette section, nous allons reprendre brièvement une classification de quatre objets spécifiques de l'algèbre élémentaire. Ces objets sont quatre points-clefs du développement de la pensée algébrique. Il s'agit du statut des lettres, de celui du signe d'égalité, de la compréhension des expressions algébriques et des équations. Partant des définitions mathématiques de ces différents objets, nous nous centrerons sur l'évolution de leur compréhension chez les apprenants débutants ainsi que les obstacles et les difficultés habituellement rencontrés.

2.2.1 Le statut des lettres et leur introduction dans l'enseignement

De nombreux travaux de didactique sur l'algèbre se sont penchés sur les différents statuts de la lettre utilisée en arithmétique ou en algèbre élémentaire. Une partie de ces travaux est d'ailleurs évoquée dans le document d'accompagnement du collège actuel intitulé *Du numérique au littéral* (MEN, 2008b). Par rapport à notre thème d'étude, et en particulier pour mettre en place une expérimentation alliant algèbre et algorithmique, une synthèse des travaux sur les différents statuts de la lettre nous apparaît nécessaire, puisque différents sens de la lettre seront convoqués dans cette étude. Un tour d'horizon concernant cinq statuts de la lettre est effectué dans cette section : la lettre comme étiquette, comme indéterminée, comme inconnue, variable et comme paramètre, en y incluant les difficultés des élèves à naviguer entre les différents sens.

La lettre comme étiquette

En arithmétique, on utilise déjà la lettre dans deux sens différents : soit pour coder les différentes unités de mesure (de longueur, de masse, d'aire, de volume, …) où la lettre sert alors de « marque » de ces unités dans un calcul sur les grandeurs, soit pour désigner des objets, comme par exemple dans les formules.

Par rapport à l'enseignement, cette utilisation de la lettre est déjà initiée au niveau de l'école primaire. Citons la rubrique *Grandeurs et mesures* du programme actuel de l'enseignement mathématique en primaire (MEN, 2008c), au cycle 3 où l'introduction de la lettre est sous-entendue par l'emploi des termes *formule* et *unités légales* ou *usuelles* :

> **Les longueurs, les masses, les volumes :** mesure, estimation, unités légales du système métrique, calcul sur les grandeurs, conversions, périmètre d'un polygone, formule du périmètre du carré et du rectangle, de la longueur du cercle, du volume du pavé droit.
> **Les aires :** comparaison de surfaces selon leurs aires, unités usuelles, conversions ; formule de l'aire d'un rectangle et d'un triangle.

De nombreux chercheurs se sont penchés sur l'obstacle que représente cette tout première représentation de la lettre. Grugeon (1995) donne l'exemple suivant : *12m peut désigner 12 mètres ou bien 12 motos, la lettre m est alors utilisée comme étiquette.* De façon analogue, d'après Vlassis et al. (2002), les formules de périmètre, de volume ou d'aire, telles que par exemple $A = L \times l$ sont considérées par les élèves comme une version simplifiée de la procédure à appliquer : ils interprètent cette formule dans le sens où « *pour calculer l'aire du rectangle, je multiplie la longueur par la largeur ; A étant l'abréviation de Aire, L de*

longueur et l de largeur ». Bien que mathématiquement les lettres *A*, *L* et *l* soient des variables, elles ne sont pas considérées comme telles par la majorité des élèves de l'école primaire, en ce sens que la formule n'indique pas pour eux la relation de dépendance entre ces nombres. Ces mêmes élèves comprendraient plus difficilement la même formule exprimée avec d'autres lettres que *L* ou *l*. D'après Vlassis et Demonty (2002), la lettre n'a pas encore, pour les élèves, acquis le *statut de nombre ; elle correspond simplement à l'abréviation d'un mot*. Ce sont également les propos tenus par Artigue (2012) qui précise : *[Les lettres utilisées en arithmétique] n'y représentent pas des nombres et ne sont pas engagées à ce titre dans des calculs.* Pour expliciter cette difficulté à passer d'une lettre désignant un objet à une lettre désignant un nombre, Artigue (ibid.) rappelle l'erreur classique des élèves qui, pour exprimer qu'il y a 6 fois plus d'élèves que de professeurs dans un établissement, en notant E le nombre d'élèves et P le nombre de professeurs, écrivent 6E = P au lieu de 6P = E.
Ainsi les auteurs précités arrivent-ils à la conclusion que le passage de l'arithmétique à l'algèbre s'accompagne de l'obstacle de changement de sens de signification de la lettre, alors que l'on garde le même type d'écriture. Beaucoup d'élèves conservent leur représentation première : Vlassis de Demonty (2002) indiquent que de nombreux collégiens (plus de 20%) restent à ce niveau d'interprétation de la lettre. Booth (1984) mentionnait déjà *que les lettres sont utilisées en arithmétique tout comme en algèbre*, cependant en arithmétique, 6*m signifie « 6 mètres »* alors qu'en algèbre 6*m* signifie *« 6 fois le nombre représenté par m »*. Kucheman (1981)[16] a proposé une classification synthétisant différents stades de compréhension des lettres en algèbre et la conception développée ici de la lettre comme une étiquette est appelée par cet auteur *letter as object*, dans le sens où la lettre est assimilée à un objet concret. Un autre constat est également émis par Grugeon (1995) qui soulève la difficulté de cette rupture du sens de la lettre en indiquant *que des moyens pédagogiques discursifs consistent à suggérer de penser à x comme à des pommes pour additionner 2x et 3x, ce qui aplatit les nombres sur des étiquettes.* Ce qui peut sembler a priori une aide pour les élèves, les conforte dans cette réduction de la lettre à une étiquette et ne leur permet pas d'évoluer vers une signification plus mathématique de celle-ci.

La lettre comme indéterminée

La recherche d'une définition du terme *indéterminée* donne :

> - En mathématiques, une **indéterminée** est le concept permettant de formaliser des objets comme les polynômes formels, les fractions rationnelles ou encore les séries formelles. On la désigne en général par une lettre majuscule *X*. L'indéterminée permet de définir des structures algébriques parfois plus simples que leurs équivalents en analyse. (Wikipédia[17])
> - La ou les variables dans le cas de fonctions polynômes. (Larousse[18])

Ces définitions restant très théoriques, afin de donner une définition de la lettre comme indéterminée dans le cadre de l'algèbre élémentaire, nous avons recherché des origines

[16] Référence citée par Grugeon (1995) : Küchemann, D. (1981). Algebra. In K. M. Hart, M. L. Brown, D. E. Kuchemann, D. Kerslake, G. Ruddock, & M. McCartney (Eds.), Children's Understanding of Mathematics :11-16 (pp. 102-119). Oxford, U.K.: John Murray.
[17] Définition consultée le 28/09/12 sur http://fr.wikipedia.org/wiki/Indétermininée
[18] Définition consultée le 29/09/12 sur http://www.larousse.fr/dictionnaires/francais/indéterminée

historiques de cette notion. Radford (1992) indique qu'on la trouve chez Diophante dès le III^{e} siècle après J.C. Ce dernier, dans son ouvrage intitulé l'*Arithmétique*, donne à la lettre grecque ζ le nom d'*arithme* et la qualifie de *quantité indéterminée d'unités*. Il l'oppose ainsi aux nombres[19] invariants déterminés, c'est-à-dire, comme « *formés d'une certaine quantité d'unités* »[20]. Il définit ensuite les mécanismes opératoires de l'addition et de la multiplication d'une expression contenant la lettre ζ en accordant à ces nouveaux objets les mêmes propriétés opératoires qu'aux nombres invariants déterminés. Il indique par exemple : « *L'inverse de l'arithme multiplié par le bicarré de l'arithme donne le cube de l'arithme* ». Aujourd'hui, en appelant x cet arithme indéterminé, nous traduirions la phrase précédente sous la forme de l'égalité :

$$\frac{1}{x} \times (x^2)^2 = x^3$$

La lettre ne représente pas ici des nombres particuliers, mais au contraire des nombres quelconques, d'où le vocable d'*indéterminé*.

Par rapport à l'enseignement, c'est au niveau du collège que l'on rencontre actuellement l'introduction de la lettre comme indéterminée, la première confrontation ayant lieu en classe de 5^{e} lors de la mise en œuvre de la propriété de distributivité : $k(a + b) = ka + kb$, où *k, a* et *b* sont trois nombres quelconques indéterminés. La difficulté que représente cette introduction est mentionnée dans les termes mêmes du programme (MEN, 2008a) avec la précaution suivante : *L'intégration des lettres dans ce type d'égalités est une difficulté qu'il faut prendre en compte.* Booth (1984) donne l'exemple du problème suivant : « *Un vaisseau spatial voyage par étapes, chacune d'une longueur de 11 années-lumière. Que pouvez-vous écrire pour exprimer la distance accomplie par le vaisseau en y étapes ?* » où des élèves ne se résignent pas à donner la réponse « $11y$ » parce qu'ils cherchent une réponse chiffrée, affectant à y un nombre déterminé. Booth (Ibid.) souligne que l'introduction de l'algèbre se fait souvent par des équations très simples telle que $a + 2 = 5$ ou dans des problèmes de substitution tels que « trouver $a + b$ si $a = 5$ et $b = 3$» où les lettres n'ont qu'une seule valeur possible, même si la même lettre peut avoir différentes valeurs dans des problèmes différents. Dans la classification de Kucheman (1981), ce stade correspond au stade « *letter evaluated* »[21]*,* c'est-à-dire que l'élève assigne à une lettre une valeur numérique et une seule. Lorsque ce stade est dépassé et que l'élève est capable de comprendre qu'une lettre peut prendre différentes valeurs, on arrive alors au stade plus évolué de « *letter used as a generalised number* »[22].

La lettre comme inconnue

La consultation de définitions sur Wikidépia et Larousse donne, pour le terme *inconnue* :

> - Une **inconnue**, en mathématiques, est un élément constitutif d'une question de même nature qu'une équation. L'inconnue permet de décrire une propriété vérifiée par une ou plusieurs valeurs qui prendraient la place de cette inconnue […]. Dans le cas d'une équation, une bonne réponse est une

[19] Diophante se limite aux nombres rationnels positifs.

[20] Les traductions de l'*Arithmétique* de Diophante sont issues de VER EECKE P. (1926).- *Diophante d'Alexandrie. Les Six Livres Arithmétiques et le Livre des Nombres Polygones.*- Desclée de Brouwer. Liège. Réimpression. Paris :Albert Blanchard.

[21] La lettre évaluée.

[22] Lettre utilisée comme nombre généralisé.

> valeur pour laquelle, quand on la *substitue* à l'inconnue, l'égalité est vérifiée. Cette réponse prend le nom de **solution**. […]. Un problème peut comporter plusieurs inconnues, mais chacune d'entre elles est exprimée sous la forme d'un seul et unique symbole. Une inconnue possède les mêmes propriétés algébriques que les objets mathématiques susceptibles de lui être substitués. (Wikipédia[23])
>
> - Nom donné à la ou aux variable(s) dans le cas d'équations ou d'inéquations. (Larousse[24])

Si l'on se restreint à l'algèbre élémentaire et à son enseignement dans le secondaire, on peut noter, comme pour la définition ci-dessus, que les termes employés par la noosphère et les programmes officiels associent les termes *équation* et *inconnue*. Par exemple, on trouve dans le document d'accompagnement actuel du programme de collège (MEN, 2008b) : *Résoudre une équation, c'est trouver toutes les valeurs qui, substituées à l'inconnue, donnent une égalité vraie.* Les concepts d'équation et d'inconnue sont introduits dès la classe de 5e avec cette mise en garde donnée dans le programme (MEN, 2008a) : « *Une attention particulière est apportée à l'introduction d'une lettre pour désigner un nombre inconnu dans des situations où le problème ne peut pas être facilement résolu par un raisonnement arithmétique* ». Dans sa classification, Kuchemann (1981) considère ce stade comme une évolution de la compréhension du statut des lettres dans l'algèbre et donne le nom de « *letter used as a specific unknown* »[25]. La résolution des premières équations, équations polynomiales du premier degré, va entraîner une nouvelle rupture, celle du sens du signe d'égalité et la façon dont il était utilisé en arithmétique. Ce point est développé dans la section suivante.

La lettre comme variable

En consultant de nouveau des dictionnaires et encyclopédies en ligne, ces définitions du terme *variable* sont données :

> - En mathématiques comme en informatique les variables symbolisent des objets et peuvent prendre des valeurs qui sont des éléments d'un certain ensemble. (Wikipédia[26])
> - Élément qui peut prendre des valeurs différentes à l'intérieur d'un ensemble, d'un système, d'une relation. Logique et mathématiques : terme indéterminé qui, dans une relation ou une fonction, peut être remplacé alternativement par différents termes déterminés qui en sont les valeurs. (Larousse[27]).

Notons que si la première définition marque bien la lettre en référence à un ensemble de nombres, il y manque la notion de dépendance. En effet, de même que le concept d'inconnue est inséparable de la notion d'équation, le concept de variable est indissociable de celui de relation, où la valeur de certaines lettres dépend alors des valeurs attribuées aux autres. C'est ce que l'on retrouve dans la seconde définition. On retrouve cette dualité de la définition d'une variable dans les propos de Vlassis et Demonty (2002) :

> Le concept de variable implique que non seulement les lettres désignent un ensemble de valeurs, mais qu'en plus il est possible de dégager un lien entre les valeurs des lettres.

[23] Définition consultée le 28/09/12 sur : http://fr.wikipedia.org/wiki/Inconnue_(mathématiques)
[24] Définition consultée le 29/09/12 sur : http://www.larousse.fr/dictionnaires/francais/inconnue
[25] Lettre comme inconnue spécifique.
[26] Définition consultée le 28/09/12 sur : http://fr.wikipedia.org/wiki/Variable_(mathématiques)
[27] Définition consultée le 29/09/12 sur : http://www.larousse.fr/dictionnaires/francais/variable

Même si l'idée la plus répandue est que le cadre fonctionnel semble s'imposer pour l'introduction de la lettre comme variable, le rapport Kahane (2001), dont les propos ont été également repris par le document d'accompagnement du programme du collège (MEN, 2008b) souligne l'importance de la précocité du travail sur les formules pour initier cette notion. Comme nous l'avons souligné dans la section « la lettre comme étiquette », les élèves ont tendance à interpréter les lettres des formules (d'aire ou de périmètre par exemple) comme des abréviations des procédures à appliquer. Cependant ce travail sur les formules reste primordial*, qu'il s'agisse d'exploiter des formules données, ou d'en élaborer,* [car il] *permet une première entrée dans le calcul littéral, sans mettre en jeu nécessairement tous les renversements de pensée* (Kahane, ibid.). Les deux documents cités insistent particulièrement sur l'intérêt de faire produire des formules aux élèves, tâche qualifiée de *nécessaire pour ressentir en quoi consiste cette démarche de généralisation par passage au littéral et la puissance que nous donne le calcul algébrique, une fois la formule établie. En fait, ce qui est en germe ici, c'est la pensée fonctionnelle et le calcul associé*. (Kahane, ibid.). Pour Kuchemann (1981), ce stade est nommé « *letter used as a variable* » et constitue avec les deux stades définis par *letter used as a specific unknown* et « *letter used as a generalised number* » les phases nécessaires pour une réelle compétence algébrique.

La lettre comme paramètre

Le dictionnaire Larousse[28] en ligne propose la définition suivante :

> Paramètre (du grec *metron*, mesure) :
> Nom donné à certains coefficients, à certaines quantités, autres que la variable ou l'inconnue, en fonction desquels on peut exprimer une proposition ou les solutions d'un problème.

Remarquons que cette définition est donnée en négatif, un paramètre étant défini comme n'étant ni une variable, ni une inconnue. Tournons-nous alors vers la définition de Chevallard (1989) qui précise également dans cette citation l'intérêt didactique d'introduire le concept de paramètre dans l'enseignement de l'algèbre élémentaire :

> Ce qui fait la force de l'algèbre, donc, c'est ce que nous nommerions aujourd'hui l'emploi de **paramètres**, soit les variables du système dont les valeurs sont supposées connues. En termes de modélisation, l'introduction des paramètres fait passer d'une modélisation « arithmétique », où les énoncés du langage ordinaire, quasi inertes du point de vue calculatoire, côtoient le seul calcul sur les nombres, à une modélisation (algébrique) où les énoncés en vernaculaire cèdent la place à des expressions littérales (ou numéro-littérales), sur lesquelles opère le calcul algébrique, et qu'on pourra évaluer en fin de calcul, en revenant alors aux nombres particuliers définissant l'état du système auquel on s'intéresse. (p.65)

Ce chercheur définit le paramètre comme une *quantité supposée connue* et représentée par une lettre, qui permet d'accéder à la modélisation d'un système. Cette définition rejoint celle donnée dans le document d'accompagnement des programmes du collège (MEN, 2008b) sous la forme suivante : *la lettre [le paramètre] représente une quantité supposée connue par rapport à d'autres lettres qui ont le statut de variable*, *d'inconnue, ou d'indéterminée [...]*.

[28] Définition consultée de 29/09/12 sur : http://www.larousse.fr/dictionnaires/francais/paramètre/57952

De la même manière que nous avons vu ci-dessus une définition de la lettre comme variable et les incidences didactiques de son introduction par les formules, Chevallard (1989) décrit l'importance de l'utilisation de la lettre comme paramètre dans les formules pour accéder à une compréhension plus fine des objets de l'algèbre élémentaire :

> L'emploi de paramètres remet à une place centrale, dès le niveau le plus élémentaire des études mathématiques, la notion de formule. Cette notion est immédiatement liée à celle de fonction : la mesure b du côté d'un rectangle d'aire S, dont l'autre côté a pour mesure a, est donnée par la formule $b = S/a$; supposons S fixé, et faisons varier $x = a$; la mesure de l'autre côté, soit $y = b$, est une fonction (homographique) de x, donnée par $y = S/x$.
> La fonctionnalité du calcul algébrique qu'une perspective de renouvellement curriculaire doit viser suppose ainsi, précocement, l'emploi de paramètres ; suscite la réappropriation de la notion de formule (en mettant en avant autant leur production que leur mise en œuvre) ; et conduit à envisager la familiarisation, précoce tout autant, avec la notion de fonction. (p.65)

En guise de conclusion

Les différentes définitions données dans cette section sur les différents statuts des lettres qui se côtoient tout au long de la scolarité permettent de pointer les difficultés qui émergent, tant pour l'enseignement que pour l'apprentissage. Non seulement ces notions sont complexes, mais aussi elles ne sont pas indépendantes les unes des autres, par le biais des formules, par exemple. Un autre point doit également être soulevé, qui est le changement de statut que peut prendre une même lettre lors de la résolution d'un problème. Bloedy-Vinner (1994) évoque par exemple le problème suivant « *Trouver l'équation de la droite de pente 3 qui passe par le point (2, 5)* » :

> Moreover, the meaning of a letter as a parameter or as an unknown or variable might change throughout the process of solving a problem […]. Solving this problem ("Find an equation for the line through (2, 5) with slope 3") starts with writing an equation $y = ax + b$, where common knowledge determines that x and y are variables whereas a and b are parameters. The process continues by substituting the constant 3 for a, and solving an equation with unknown b, where constants are substituted for x and y. The process terminates by substituting the constants found for a and b, and by letting x and y be variables in $y = 3x + 1$.[29] (p.89)

Nous observons ici le changement de statut de la lettre b, au départ ayant le statut de paramètre, qui prend ensuite celui d'inconnue, pour finir par un nombre déterminé. Les difficultés inhérentes à ces changements de statut des lettres sont évoquées dans le document d'accompagnement des programmes du collège (MEN, 2008b) où est précisé : *Les désignations des différents statuts de la lettre présentés ici sont à destination de l'enseignant. Si ce vocabulaire ne doit pas être un enjeu d'enseignement, il est essentiel que les élèves sachent distinguer en situation les rôles différents joués par les lettres.*

[29] En outre, le sens de la lettre comme paramètre ou comme inconnue ou variable, pourrait changer au cours du processus de résolution d'un problème […]. La résolution de ce problème (« Trouver l'équation de la droite de pente 3 passant par (2, 5) ») commence par l'écriture d'une équation $y = ax + b$, où l'on sait communément déterminer que x et y sont des variables alors que a et b sont des paramètres. Le processus se poursuit par la substitution de a par 3, et la résolution d'une équation avec b pour inconnue, et où les constantes 2 et 5 sont substituées à x et à y. Le processus se termine par la substitution des constantes trouvées pour a et b, et en laissant les variables x et y dans la formule : $y = 3\,x + 1$.

2.2.2 Le signe d'égalité, sens et usages

Afin de déterminer les différents sens du signe d'égalité et de faire un bilan des obstacles et difficultés inhérentes à l'utilisation de ce signe lors de son enseignement, commençons par donner une définition de l'égalité en mathématiques :

> En mathématiques, **l'égalité** est une relation binaire entre objets (souvent appartenant à un même ensemble) signifiant que ces objets sont identiques, c'est-à-dire que le remplacement de l'un par l'autre dans une expression ne change jamais la valeur de cette dernière.
> **Une égalité** est une proposition (qu'elle soit vraie ou fausse) pouvant s'écrire à l'aide du signe égal (« = ») séparant deux expressions mathématiques de même nature (nombres, vecteurs, fonctions, ensembles…) […]. Une égalité peut apparaître comme une affirmation, une définition de notation ou encore comme une équation. (Wikipédia)[30]

Dans cette définition, on distingue deux sens de l'égalité qui correspondent à deux objets distincts : *l'*égalité qui est une relation binaire et *une* égalité définie comme une proposition vraie ou fausse. En explicitant différents statuts du signe « égal », nous allons percevoir que cette distinction est liée à la manière dont il est fait usage de ce signe dans un contexte arithmétique ou algébrique. Ce qui est nommé « usage » dans les propos qui suivent est à distinguer du sens mathématique associé au signe « = », et les développements sont destinés à synthétiser les travaux existants sur la façon dont évolue la compréhension du concept d'égalité dans l'enseignement et par rapport à son apprentissage.

Usage n°1 : résultat numérique de l'exécution d'une opération
Par exemple : 4 + 2 = 6. C'est le premier usage que rencontre l'élève dans sa scolarité, où le signe « égal » est vu comme l'annonce du résultat, comme l'exécuteur de l'opération. Le symbole « = » est alors lu comme une abréviation de « ça donne », « ça fait ». Notons que ce premier sens induit l'attente d'un résultat unique : un seul nombre est attendu comme réponse. Ce premier usage reste très prégnant dans toute la scolarité de l'élève : d'une part, son utilisation se fait comme dans le sens de la lecture, orienté de gauche à droite et d'autre part, cette utilisation perdure par l'utilisation croissante des calculatrices ordinaires où la touche « = » ou « EXE » joue ce même rôle. (MEN, 2008b).

Usage n°2 : valeur équivalente de deux expressions numériques
On peut distinguer deux variantes de cet usage. Tout d'abord, un usage de décomposition numérique où une différence avec le premier usage tient à l'infinité des décompositions qui peuvent être obtenues. Ce type d'égalité se rencontre, entre autres, pour aborder les concepts de soustraction et de division (on décompose, par exemple, 6 sous la forme 6 = 4 + 2 ou $6 = 3 \times 2$, en réponse aux questions « Combien pour aller de 4 à 6 ? Dans 6, combien y a-t-il de fois 2 ? »), ou encore pour travailler la numération décimale lorsqu'on *décompose un nombre, entier ou décimal, suivant les puissances de la base [10].* Par exemple, *l'égalité : $2304 = 2\times1000 + 3\times100 + 4$ traduit que 2304, c'est deux milliers, trois centaines et quatre unités* (MEN, 2008b).
Contrairement au premier usage qui privilégie un sens de lecture orienté de la gauche vers la droite, cet usage représente une évolution dans la compréhension du signe d'égalité, puisqu'il

[30] Définition consultée le 29/09/12 sur : http://fr.wikipedia.org/wiki/égalité (mathématiques)

lui confère une relation de symétrie (si $a = b$, alors $b = a$) et permet de s'acheminer vers la considération du signe « = » comme un symbole d'équivalence. De nombreux chercheurs se sont penchés sur cette question de la mise en évidence de la propriété de symétrie de l'égalité et Kieran (2003, 2008) propose d'introduire plus tôt dans l'apprentissage des tâches numériques permettant de travailler cette propriété :

> Much of elementary school arithmetic is answer oriented [for the equal sign]. […] Experience with the construction of multi-operation arithmetic equalities (e.g., $7 \times 2 + 3 - 2 = 5 \times 2 - 1 + 6$) and with justifying such "arithmetic identities" with the same value of both sides *has been found to help in extending students' meaning of the equal sign from a do-some-thing signal to a relational symbol*. Subsequent experience in covering up any one of the numbers (on one or both sides) of these arithmetic identities can then be used to make the transition to algebraic equations with letters on both sides of the equal sign.[31] (Kieran, 2008, p.2)

Les deux premiers usages ainsi dégagés sont appliqués en arithmétique et présents dès l'école primaire. Par rapport à leur signification mathématique et la définition donnée au début de cette section, le signe égal est relatif à l'objet « *l'*égalité » et non pas à celui d' « *une* égalité ».

Usage n°3 : signe d'affectation

Ce sens se rencontre lorsqu'on effectue le type de tâches qui consiste à substituer à des lettres des valeurs numériques ou des expressions algébriques pour effectuer un calcul numérique ou algébrique. MEN (2008b) cite l'exemple du calcul de $a + 2b$ pour $a = 1{,}3$ et $b = 0{,}7$. On peut aussi citer l'exemple du développement de $\left(3a + b\sqrt{2}\right)^2$ à l'aide de l'identité : $(x+y)^2 = x^2 + y^2 + 2xy$, où l'on pose $x = 3a$ et $y = b\sqrt{2}$. Le sens mathématique que l'on peut accorder au signe égal ici est celui d'*une* égalité puisqu'il s'agit d'une *définition de notation*, sens précisé dans la définition donnée au début de cette section.

Notons qu'en informatique, certains langages de programmation utilisent le signe « égal » comme signe d'affectation, d'autres utilisent « := » ou « = = ». Nous revenons dans la partie algorithmique à ces notations.

Usage n°4 : écritures équivalentes de deux expressions algébriques

L'emploi du signe « égal » comme symbole exprimant qu'on a affaire à deux expressions d'un même objet mathématique se rencontre dans les identités où les expressions égalées comportent des indéterminées introduites par un quantificateur extérieur. Par exemple : pour tous x et y réels, $(x+y)^2 = x^2 + y^2 + 2xy$.

On peut considérer ce cinquième sens comme une continuité du sens n°2, sans rupture majeure dans le passage de l'arithmétique à l'algèbre. C'est davantage une extension du signe « égal » qui peut être soulignée ici. Néanmoins, cette généralisation induit le passage à l'objet « *une* égalité », où les quantificateurs montrent ici son caractère de vérité universelle.

---

[31] Une grande partie de l'arithmétique de l'école primaire est une réponse orientée [pour le signe égal]. [...] L'expérience de la construction d'égalités arithmétiques multi-opérationnelles (par exemple, $7 \times 2 + 3 - 2 = 5 \times 2 - 1 + 6$) et la justification de ces « identités arithmétiques » ayant la même valeur des deux côtés ont été trouvées pour aider à étendre la compréhension des élèves du signe égal, passant d'un signal de faire-quelque-chose à un symbole relationnel. Une expérience ultérieure consistant à dissimuler l'un quelconque des nombres (d'un seul côté de l'égalité ou des deux) de ces identités arithmétiques peut ensuite être utilisée pour faire la transition vers les équations algébriques avec des lettres des deux côtés du signe égal.

Usage n°5 : signe égal conditionnel [32]

C'est lors de l'introduction des équations que la rupture du passage de l'arithmétique à l'algèbre s'affirme avec un nouveau sens du signe d'égalité, qui représente un véritable saut conceptuel pour l'élève. Ce signe « égal conditionnel » a la particularité de rendre l'égalité présente dans l'équation soit vraie, soit fausse, au gré des valeurs choisies pour les lettres.
Il s'agit d'une véritable rupture avec les usages donnés ci-dessus puisque toutes les utilisations précédentes sous-entendent « *le vrai* » (MEN, 2008b). Nous sommes bien ici dans le cas d'*une* égalité, dans le sens de proposition pouvant être vraie ou fausse.
Cet usage du signe égal est indissociable du concept d'équation et induit un changement de contrat pour l'élève. La rencontre de ce signe devra déclencher chez lui non seulement la recherche de valeurs qui substituées aux inconnues permettent de rendre l'égalité vraie, mais il devra de plus déterminer l'ensemble de toutes les valeurs qui sont solutions. Prenons un exemple pour montrer la complexité de la tâche à accomplir et les implicites qui font partie du contrat. Pour résoudre l'équation du premier degré $3x + 2 = 4 - 5x$, un élève de troisième ou de seconde averti effectue les étapes suivantes :

(1) $3x + 2 = 4 - 5x$
(2) $3x + 5x = 4 - 2$
(3) $8x = 2$
(4) $x = \frac{2}{8}$
(5) $x = \frac{1}{4}$
(6) L'équation $3x + 2 = 4 - 5x$ admet comme unique solution $\frac{1}{4}$.

Un enseignant ayant à corriger une telle copie accorderait sans doute la totalité des points à cette résolution, aucune explication n'étant habituellement attendue pour expliciter le passage d'une ligne à la suivante. Cependant, de la 1ère à la 5e ligne, il est sous-entendu que « deux équations équivalentes possèdent les mêmes solutions » et le passage d'une ligne à la suivante considère ce contrat comme implicite, la ligne (5) donnant une équation triviale équivalente à la première. Chacune des cinq lignes de calcul comporte le signe d'égalité, utilisé dans l'usage n°5 défini plus haut comme *signe égal conditionnel*. D'autre part, lors du passage de la 2e à la 3e ligne, de nouveaux implicites apparaissent, comme le passage de $3x + 5x$ à $8x$ et celui de $4 - 2$ à 2. Il y a ici des égalités implicites : $3x + 5x = 8x$ et $4 - 2 = 2$ qui correspondent respectivement à l'usage n°4 : *écritures équivalentes de deux expressions algébriques* et n°1 : *résultat numérique de l'exécution d'une opération.* Notons au passage que l'écriture $3x + 5x = 8x$ nécessite de donner temporairement à la lettre x le statut d'indéterminée alors qu'elle a dans toutes les équations équivalentes celui d'inconnue. Se trouve également en filigrane la notion de transitivité de l'égalité dans le passage de la ligne (2) à la ligne (3) : si $3x + 5x = 4 - 2$ et $3x + 5x = 8x$ alors $8x = 4 - 2$. Pour finir, un autre usage du signe d'égalité

[32] Notons que nous pourrions dégager encore d'autres usages du signe d'égalité, par exemple en analyse lors du calcul des limites, par exemple avec l'écriture : $\lim_{n\to+\infty} \sum_1^n \frac{9}{10^n} = 1$ ou encore pour une suite u où l'on écrit $u_n = o(n)$ pour signifier que la suite u est négligeable devant n au voisinage de l'infini. Néanmoins, nous n'étudierons pas plus avant ces différents usages, ceux-ci n'étant pas pertinents pour la problématique de la thèse.

est rencontré lors du passage de la ligne (4) à la ligne (5) relatif à l'égalité implicite $\frac{2}{8}=\frac{1}{4}$, correspondant à l'usage n°2 : *valeur équivalente de deux expressions numériques*.
En conclusion, la résolution de cette équation avait pour objectif de montrer que, sous son apparente simplicité, de nombreux implicites et obstacles existent. Une interaction constante se fait entre les domaines de l'arithmétique et de l'algèbre. La compréhension des objets de l'algèbre est une construction complexe qui demande du temps et de multiples reprises. Bronner (2007) insiste sur la difficulté de différencier les domaines arithmétique et algébrique en mentionnant la *continuité* des écritures et convient d'une rupture entre les deux, qu'il nomme *discontinuités* au niveau des démarches de résolution, des techniques utilisées et des pratiques usuelles :

> Les différents problèmes et objets, notamment ceux où l'on trouve une présence de lettres, ne suffisent pas à discriminer les domaines, c'est surtout au niveau des différentes démarches de résolution, des techniques et des pratiques et plus globalement *des praxéologies* différentes que les deux domaines numérique et algébrique se différencient et qu'on pourrait y voir des discontinuités. (p.16)

2.2.3 Les expressions algébriques et la dualité procédurale/structurale

La lecture de cette citation de MacGregor et Stacey (1999) :

> The language of arithmetic is focused on answers. The language of algebra is focused on relationships.[33]

nous engage à donner la définition suivante d'une expression algébrique : un objet construit lors de la représentation formelle d'un problème à partir de *relations* entre écriture des nombres, lettres et signes opératoires.
De nombreux didacticiens se sont penchés sur les processus de formation et de compréhension des expressions algébriques et des difficultés engendrées par ceux-ci. Nous nous attardons dans cette section sur les travaux de Sfard (1991, 1994) dont le cadre théorique développé pour expliciter la double nature des conceptions mathématiques est utilisé lors de l'analyse de notre expérimentation. En s'appuyant sur les concepts de nombre et de fonction, cette didacticienne montre que, d'un point de vue historique et épistémologique, deux conceptions émergent : un aspect *structural* considérant l'objet mathématique et un aspect *procédural*[34], considérant les processus opérationnels de cet objet. Pour elle, l'aspect structural d'un concept correspond à un aspect *statique* de l'objet mathématique considéré, que l'on peut appréhender dans son ensemble, le manipuler comme un tout, sans entrer dans les détails :

[33] « Le langage de l'arithmétique se concentre sur les réponses alors que le langage de l'algèbre se concentre sur les relations ».
[34] Notons que le terme « procédural » n'est pas utilisé par Sfard. Ce sont les traductions françaises qui ont introduit ce vocable. Le terme utilisé par Sfard est *« operational conception »* qu'elle oppose à « *structural conception* ».

> Seeing a mathematical entity means being capable of referring to it as if it was a real thing – a static structure, existing somewhere in space and time. It also means being able to recognize the idea "at a glance" and to manipulate it as a whole, without going into details.[35] (Sfard, 1991, p.4)

À cet aspect s'oppose l'aspect procédural d'un concept, qui consiste à l'appréhender comme un processus qui viendra à exister par les actions qui seront opérées sur lui :

> In contrast, interpreting a notion as a process implies regarding it as a potential rather than actual entity, which comes into existence upon request in a sequence of actions.[36](p.4)

Ainsi, Sfard considère la conception structurale comme statique, intemporelle, instantanée et intégrative par opposition à la conception procédurale qui est dynamique, séquentielle et détaillée. Néanmoins Sfard insiste sur la complémentarité de ces deux aspects, indiquant leur complémentarité et leur indissociabilité. Elle les compare au double aspect corpusculaire et ondulatoire de la lumière que les physiciens utilisent, précisant que l'on ne peut comprendre la nature profonde d'un concept si ces deux conceptions ne cohabitent pas : *We are dealing here with duality rather than dichotomy*.[37] (Ibid.)
Grugeon (1995) applique ces éléments au domaine de l'algèbre. Elle donne l'exemple (Grugeon, 2009) de l'expression algébrique : $x^2 + 2x + 3$ qui peut être interprétée selon l'aspect *procédural* lorsqu'on se réfère à un processus de calcul permettant par exemple, de substituer la variable à une valeur numérique, ce qui correspond à « prendre le carré d'un nombre, lui ajouter le double de ce nombre puis ajouter 3 », alors que selon l'aspect *structural*, l'expression peut être vue comme un trinôme du second degré que l'on peut factoriser, dériver, etc.
Sfard (ibid.) considère comme un invariant le fait que les conceptions procédurales apparaissent avant les conceptions structurales, que l'on se place sur le plan épistémologique ou sur le plan de l'apprentissage individuel. Elle considère également que la conception structurale est un stade plus abouti d'un concept, plus abstrait et plus difficile à atteindre que la conception procédurale. Elle donne l'exemple de l'algèbre et de sa lente évolution de l'algèbre *rhétorique* où les énoncés et les calculs se faisaient en langage naturel vers une algèbre *symbolique* telle que l'a introduite Viète à la fin du 16e siècle :

> Indeed, the science of computation, known today under its relatively new name "algebra", has retained a distinctly operational character for thousands of years. The so called "rhetorical" algebra, which preceded the syncopated and symbolic algebras (the last one developed not before the 16th century!) dealt with computational processes as such, while the only kind of abstract objects permitted in the discourse were numbers. Even most complex sequences of numerical operations were presented by help of verbal prescriptions […]. As long as the computational processes have been presented in the purely

[35] Voir une entité mathématique comme un objet, c'est être capable de se référer à elle comme si elle était une chose réelle - une structure statique, existant quelque part dans l'espace et le temps. Cela signifie également être capable de reconnaître l'idée « d'un coup d'œil » et de la manipuler comme un tout, sans entrer dans les détails.
[36] En revanche, l'interprétation d'une notion comme un processus implique de la considérer comme un potentiel au lieu de l'entité réelle qui vient à exister, à la demande, dans une séquence d'actions.
[37] Nous avons affaire ici à la *dualité* plutôt qu'à la *dichotomie*.

> operational way, they could not be squeezed into static abstract entities, thus were not susceptible of being treated as objects.[38] (p.23-24)

Sfard (ibid.) insiste sur la nécessaire *réification* d'un concept, que l'on pourrait traduire par « appréhender le concept comme une *chose* concrète ». Elle en donne la définition suivante :

> Only when a person becomes capable of conceiving the notion as a fully-fledged object, we shall say that the concept has been reified. *Reification*, therefore, is defined as an ontological shift – a sudden ability to see something familiar in a totally new light.[39] (p.19)

Pour que la construction d'un concept soit achevée, Sfard insiste sur le fait que les deux conceptions procédurale et structurale d'une même notion doivent coexister, c'est-à-dire qu'il est nécessaire d'en connaître les *règles* (en réponse à la question : comment faire ?) et les *raisons* (en réponse à la question : pour quoi faire ?). Bien qu'elle précise elle-même que cette identification est réductrice et simplificatrice, Sfard qualifie l'aspect procédural de *règles sans raisons* et l'aspect structural de *raisons sans règles*, si chacun des aspects est pris en considération sans tenir compte de l'autre. S'appuyant sur l'exemple de la résolution des équations en algèbre, Sfard (1994) indique que la seule compréhension de l'aspect procédural est insuffisante car elle ne s'accompagne pas de la capacité à comprendre les algorithmes. Nous pouvons rapprocher ces propos de *l'incomplétude des praxéologies* développée par Bosch et al. (2004) où les *techniques* de résolution d'équations ne seraient pas fondées par des *technologies/théories* les justifiant et coupant ainsi le bloc *logos* du bloc *praxis* (Chevallard, 1992b). Cette incomplétude se révèle alors être un manque dans la compréhension du concept en ce sens que :

> […] without an ability to give some kind of explanation to the formal algebraic procedures, the students are not very likely to be able to cope either with non-standard questions or with more advanced algebraic ideas which will be introduced to at least some of them in the future.[40] (Sfard, 1994, p.282)

Une conception erronée peut émerger lorsque l'apprenant commence à passer de l'aspect procédural à l'aspect structural, reposant sur des *raisons sans règles*. Sfard (1994) qualifie cette conception de *pseudo-structurale* où les objets de l'algèbre deviennent des *pseudo-objets* (Grugeon, 1995). Par exemple, les seules formes externes des expressions algébriques deviennent les bases de jugement et de décisions, sans référence aux règles arithmétiques sous-jacentes. Grugeon (1995) précise que *ces conceptions pseudo-structurales conduisent les*

---

[38] En effet, la science du calcul, connue aujourd'hui sous le nom relativement nouveau d'"algèbre", a conservé un caractère nettement opérationnel pendant des milliers d'années. La soi-disant algèbre "rhétorique", qui a précédé les algèbres syncopée et symbolique (la dernière ne fut pas développée avant le 16ème siècle !) portait sur des processus de calcul en tant que tels, tandis que le seul type d'objets abstraits autorisés dans le discours étaient des nombres. Même les séquences les plus complexes d'opérations numériques étaient présentées à l'aide de prescriptions verbales […]. Tant que les processus de calcul étaient présentés de manière purement opérationnelle, ils ne pouvaient pas être unifiés en entités abstraites statiques, ils n'étaient donc pas susceptibles d'être traités comme des objets.

[39] C'est seulement quand une personne atteint la capacité à concevoir une notion comme un objet à part entière que nous dirons que le concept a été réifié. La *réification* est donc définie comme un changement ontologique - une soudaine capacité de voir quelque chose de familier sous un jour totalement nouveau.

[40] sans la capacité à donner quelques explications aux procédures formelles algébriques, les élèves sont peu susceptibles d'être en mesure de faire face soit à des questions non standard, soit à des idées algébriques plus avancées qui seront introduites dans l'avenir, au moins à certains d'entre eux.

élèves à percevoir les expressions algébriques comme des chaînes de symboles indécomposables et à priver de sens les manipulations formelles qui les régissent.

Des chercheurs comme Booth (1984), Vlassis et Demonty (2002) ont exemplifié la difficulté de l'apprentissage de la considération des deux aspects, procédural et structural, des objets de l'algèbre et du nécessaire va-et-vient entre les deux pour la compréhension des expressions algébriques. Ces auteurs prennent le cas du signe « plus ». Elles donnent l'exemple d'une erreur fréquemment rencontrée et récurrente chez les élèves de la réduction d'expressions comme $2a + 5a + 3b$, sous la forme erronée $10ab$. Cette erreur, souvent attribuée par les enseignants à un simple manque d'attention, dénote en fait un obstacle conceptuel durable. La présence d'un signe opératoire dans la réponse attendue, $7a + 3b$, n'est pas conforme à l'idée que les élèves se sont fait, en arithmétique, de la solution d'un problème. C'est la conception procédurale qui prédomine ici, l'expression $7a + 3b$ est vue comme une procédure à exécuter et non comme un résultat. Pour Grugeon (2000), *l'algèbre ne permet pas une distinction claire entre le processus de calcul et son résultat,* alors que dans les premiers usages de l'arithmétique, *un signe opératoire indique un calcul à effectuer.*

D'autres chercheurs comme Maguire et Neill (2007) ont tenté d'expliciter la difficulté de l'évolution de l'aspect procédural vers l'aspect structural par le concept de l'« *acceptance of lack of closure* » dans l'apprentissage de l'algèbre. Ce concept défini par Collis[41] comporte plusieurs niveaux d'évolution dans la compréhension des objets algébriques dont nous ne détaillerons ici que les deux derniers :

- le niveau des formules *fermées*. Par exemple, si l'on considère la formule du volume d'un pavé droit, L × l × h, l'élève est capable à ce niveau de l'utiliser aussi longtemps que chaque lettre correspond à un nombre unique. En d'autres termes, les élèves sont capables de substituer des nombres à des lettres dans une formule pour obtenir un résultat numérique ;
- le niveau le plus élevé de la classification de Collis se produit quand un élève peut traiter les lettres d'une formule comme des variables, ce qui signifie par exemple, qu'il est en mesure de discuter de l'influence d'une variable sur les autres variables de la formule sans avoir à les remplacer par des nombres déterminés. (Par exemple, si la longueur L dans la formule précédente du volume est doublée, le volume sera également doublé).

The acceptance of lack of closure traduit la difficulté pour un élève de passer du premier niveau décrit ci-dessus au second.

D'autres approches existent encore pour comprendre cette difficulté, comme celle de Bardini (2003) qui reprend les études de Mac Gregor et Stacey (1994)[42] sur la *concaténation des termes* sous la forme *ab* quand *a+b* est attendu. Bardini (Idib.) arrive à la conclusion que les élèves opérant ce genre de « contraction » des termes se situent à un niveau opérationnel, et *que la volonté de produire un résultat dévoile par là même, le caractère procédural de l'addition auquel les élèves sont rattachés.* Elle s'appuie également sur la thèse de Serfati

---

[41] L'acceptation de l'absence de fermeture. Collis, K. F. (1978). Operational Thinking in Elementary Mathematics. In J. A. Keats, K. F. Collis & G. S. Halford, *Cognitive Development: Research Based on a Neo-Piagetian Approach.* Chichester: John Wiley & Sons, 221-248.
Cette expression est reprise par Maguire et Neill (2007) .

[42] Stacey K. and MacGregor M. (1994). Algebraic sums and products: students concepts and symbolism. In J.P. da Ponte and J.F. Matos (Eds.). *Proceedings of the 18th International Conference for the Psychology of Mathematics Education (vol. IV),* 289-296. Lisbonne.

(1997)[43] pour mettre en exergue qu'une des fonctions des expressions algébriques est *d'assurer la codification d'une instruction d'exécution et non la valeur du résultat*. Bardini conclut que les élèves qui concatènent les expressions *ne considèrent pas le résultat de l'addition (ou de la multiplication) proposée en tant qu'objet, octroyant ainsi la primauté au volet opérationnel de l'interprétation de l'écriture.*

L'ensemble de ces chercheurs rejoignent le point de vue de Sfard sur la dualité des aspects, prodécural et structural, d'une expression algébrique.

En conclusion de cette section sur les expressions algébriques et sur l'importance de celles-ci dans l'apprentissage de l'algèbre élémentaire, citons Grugeon (2000) qui explicite que la compétence algébrique comporte la *fonction d'adaptabilité dans l'interprétation des expressions [algébriques] et la capacité d'en faire des usages variés.*

2.2.4 Les premières équations et leurs obstacles

Les premiers problèmes proposés aux élèves de collège pour introduire une démarche algébrique sont souvent donnés dans des cas où cette démarche ne s'impose pas d'elle-même, comme par exemple le problème proposé plus haut (Grugeon, 1995) : *Déterminer un nombre tel que, quand 5 est additionné à 2 fois ce nombre, la somme est 35.*

Un étudiant en mathématiques ou a fortiori un jeune enseignant venant d'obtenir le CAPES de mathématiques, pense – tout naturellement – à un traitement algébrique de ce problème, en nommant x le nombre inconnu cherché et en résolvant l'équation : $2x + 5 = 35$. Il éprouvera même souvent des difficultés à réinventer une solution arithmétique. Pour l'élève, comme on l'a vu plus haut, cette démarche ne s'impose pas et il n'en voit pas la nécessité puisqu'il sait résoudre le problème avec ses outils arithmétiques. Les enseignants débutants éprouvent des difficultés certaines à comprendre le renversement de pensée demandé à l'élève. Cet exemple montre qu'une première difficulté pour un apprentissage effectif des prémices de l'algèbre est le choix de situations didactiques appropriées, au sens de la théorie des situations de Brousseau.

Grugeon (1995) mentionne que de nombreuses recherches mettent en évidence les décalages importants de réussite existant entre les différents types *d'équations du premier degré*. Cela tiendrait au fait que les équations de la forme $x + a = b$, $ax = b$ et $ax + b = c$ voient l'inconnue présente dans un seul membre de l'égalité et peuvent être résolues en adaptant des démarches arithmétiques, comme décrit en section 2.1. Au contraire, la résolution d'équations de la forme $ax + b = cx + d$, où l'inconnue est présente dans les deux membres repose sur la conservation de l'égalité et sur le traitement par équations équivalentes, ce qui rend inopérantes les méthodes arithmétiques.

Par exemple, le problème suivant, niveau quatrième du collège[44], nécessite un traitement algébrique :

> *Deux élèves, Alice et Brice ont chacun une calculatrice. Ils affichent le même nombre sur leur calculatrice. Alice multiplie le nombre affiché par 3 puis ajoute 7 au résultat*

[43] Serfati, M. (1997). *La constitution de l'écriture symbolique mathématique*. Thèse de Doctorat. Université Paris I.

[44] Activité extraite de l'ouvrage : *Les débuts de l'algèbre au collège. Au pied de la lettre,* Combier G., Guillaume J-C, Pressiat A. Éditions INRP, Paris, 1996

> *obtenu. Brice, lui, multiplie le nombre affiché par 5 puis ajoute 1 au résultat obtenu. Quand ils ont terminé, ils s'aperçoivent que leurs calculatrices affichent exactement le même nombre. Quel nombre ont-ils choisi au départ ?*

Ici, à moins de procéder par tâtonnement ou d'utiliser un tableur pour approcher la solution, la nécessité de la lettre apparaît. Si l'on nomme x le nombre de départ, on est amené à résoudre l'équation : $3x + 7 = 5x + 1$, dont la solution est ici entière est positive (3) mais il suffit de changer les données de l'énoncé pour obtenir des solutions dans $\mathbb{Z}$, $\mathbb{D}$, $\mathbb{Q}$ ou $\mathbb{R}$. En effet, une solution *idécimale* au sens de Bronner (1997) apparaît alors comme un choix de variable didactique, puisque l'élève ne peut plus déterminer la solution exacte par un petit nombre d'encadrements et d'essais successifs. Il en ressort implicitement que la technique algébrique de résolution des équations permet seule de trouver la valeur exacte de la solution, d'où la nécessité de l'apprendre. Cette rupture avec les pratiques arithmétiques est encore appelée *didactic cut* (Filloy et Rojano, 1984). Ces deux auteurs expliquent cette « coupure » de la façon suivante :

> A *didactic cut* in the transition from arithmetic to algebraic thought consists of the manifestations of students, who are facing tasks of an algebraic nature for the first time, as regards the need to build new meanings and new senses for arithmetic objects and operations, with the added special characteristic that such newly built meanings and senses necessarily presuppose a break with arithmetic.[45] (p.40)

Filloy et Rojano (ibid.) nomme les équations du type $ax + b = cx + d$ les équations *non arithmétiques*, cette dénomination montrant bien la coupure didactique faite avec les équations dites *arithmétiques* de la forme $x + a = b$, $ax = b$ et $ax + b = c$.

Ainsi c'est l'entrée dans l'étude des équations *non arithmétiques* qui induit la nécessité d'une démarche *où l'on ne procède pas du connu vers l'inconnu, la nécessité de s'affranchir du contrôle par le sens externe des transformations et calculs effectués au profit d'un contrôle syntaxique et d'un contrôle par la sémantique interne des expressions* (Grugeon, 2012).

Ce contrôle repose sur des techniques de transformations des égalités qui ont été formalisées et algorithmisées vers 800 après J.C. par Al-Khawarizmi[46]. Ce dernier décrit les opérations successives destinées à résoudre des équations du premier degré ou du second degré par équilibrage, selon les trois principes suivants décrits par Rodet (1878) :

- *al jabr* : désigne la compensation à l'aide d'un nombre pour ne plus avoir de soustraction. Par exemple, pour résoudre une équation $100 – 20x = 40$, Al-Khwarizmi dit qu'il *enrichit* 100 du déficit causé par la soustraction des $20x$, puis qu'il *compense cet enrichissement* par l'ajout de $20x$ à 40. Il s'ensuit l'équation $100 = 20x + 40$ à termes tous positifs ;
- *al muqabala* : correspond une règle d'équilibrage pour se ramener à des inconnues de même espèce dans un seul membre. *Les espèces semblables et égales des deux côtés se retranchent.*

[45] Une coupure didactique de la transition de l'arithmétique vers la pensée algébrique consiste en des comportements d'élèves, qui rencontrant pour la première fois une tâche de nature algébrique, découvrent la nécessité de construire de nouvelles significations et de nouveaux sens pour les objets et les opérations arithmétiques, avec la caractéristique supplémentaire que ces significations nouvellement construites présupposent nécessairement *un break* avec l'arithmétique.

[46] Son traité d'algèbre est intitulé *Al-Kitab al mukhtasar hisab al-jabr wa'l-muqabala* que l'on peut traduire par *Abrégé de calcul par la restauration et la comparaison.* Son traité permettait de résoudre des équations du premier et du second degré à coefficients positifs et dont les solutions sont positives. Notons qu'il ne s'agit pas d'équation au sens actuel, l'expression des « membres » de celle-ci se faisant par des phrases, sans signe mathématique.

Dans l'exemple ci-dessus, ceci correspond à retrancher 40 à chaque membre de l'équation pour aboutir à $60 = 20x$;
- *al hatt* : revient à une simplification des coefficients par multiplication ou division des deux membres de l'équation. Rodet (ibid.) traduit les propos d'Al-Khwarizmi par : *Et si l'équation existe entre espèce et espèce, et que ce soient des nombres égaux à des x, divise par le nombre [de ces derniers] et tu auras la valeur de la chose inconnue.* Dans l'exemple précédent, ceci correspond à diviser par 20 chaque membre de l'équation pour aboutir à $x = 3$.
Ainsi ces règles d'*équilibrage* traduisent-elles les techniques, toujours usitées de nos jours, de résolution algébrique d'une équation polynomiale du premier degré et reposent sur la propriété technologique : « deux équations équivalentes possèdent les mêmes solutions ».
Pour conclure sur l'introduction de l'objet équation dans l'enseignement et dans apprentissage, nous pouvons dégager que de nombreux obstacles existent, dus au changement de démarche que l'algèbre impose par rapport à l'arithmétique, au changement de statut du signe d'égalité et également à la manipulation des nombres négatifs. Ces obstacles subsistent pendant les années « collège » et même les années « lycée » pour de nombreux élèves comme le confirmeront les résultats des analyses que nous présenterons au chapitre 8.

2.3 Approche linguistique des expressions algébriques

Dans cette section, nous allons présenter un résumé de travaux de chercheurs ayant abordé la compréhension des concepts mathématiques par une approche plus linguistique. Après avoir défini quelques concepts généraux, nous donnerons pour chaque auteur quelques exemples sur la question du statut des expressions algébriques.

2.3.1 Approche logico-linguistique de Frege

La plupart des travaux de ces chercheurs prennent appui sur l'article de Frege, *Über Sinn und Bedeutung* publié en 1892 dans la revue *Zeitschrift für Philosophie und philosophische Kritik*[47]. D'après Bardini (2003), cet article repose essentiellement sur la définition et l'analyse des deux composantes d'un signe : son sens (*Sinn*) et sa dénotation (*Bedeutung*). Bardini rapporte la définition donnée d'un signe par Frege : *toute manière de désigner qui joue le rôle d'un nom propre*[48]. Pour illustrer les deux composantes d'un signe, Frege donne l'exemple de la désignation de la planète Vénus : « Vénus » est une *dénotation* que l'on peut utiliser pour nommer cet objet céleste, et que l'on pourrait remplacer par « l'étoile du matin » ou « l'étoile du soir » qui ont la même *dénotation* car ces expressions désignent le même objet céleste. En revanche, Frege définit le *sens* d'une expression comme étant « le mode de donation » de la dénotation de cette expression, c'est-à-dire la fonction mentale qui, partant d'une expression linguistique, nous permet de retrouver sa dénotation. Le *sens* est ainsi ce qui fait le lien entre l'univers du langage et l'univers des choses que l'on cherche à désigner. Les deux expressions « étoile du matin » et « étoile du soir » n'ont pas ici le même *sens*, *elles ne relèvent pas du même domaine de description, du même point de vue* (Grugeon, 1995). Frege

[47] http://fr.wikipedia.org/wiki/Sens_et_dénotation
[48] Traduction de Frege par C. Imbert dans *Écrits Logiques et Philosophiques*, 1971. Paris : Seuil.

oppose le concept de *sens* qu'il définit comme objectif, conventionnel et partagé par la communauté de locuteurs et celui de *représentation* qui relève d'une association d'idées et d'une interprétation subjectives.

2.3.2 Les travaux de Drouhard

Drouhard (1992)[49] a repris les travaux de Frege pour les appliquer à la compréhension qu'ont les élèves de la signification des écritures symboliques en algèbre élémentaire (notées ESA). Par exemple, les deux expressions algébriques $(x-1)^2+1$ et x^2-2x+2 ont la même *dénotation*, mais pas le même *sens*, puisque seule la première montre le signe de l'expression (Grugeon, 2000).
Drouhard (ibid.) considère également le concept de *représentation* de Frege, qu'il rebaptise *connotation* pour prendre en compte le point de vue de l'élève qui interprète une expression algébrique d'une manière personnelle et subjective. C'est par exemple le cas de l'élève qui développe l'expression $(a+b)^2$ sous la forme a^2+b^2 sans considérer que la validation du résultat doit se poser en valeur de vérité de l'écriture obtenue, donc sans tenir compte de la dénotation de l'expression algébrique. Enfin, Drouhard introduit le concept d'*interprétation* par la définition suivante : « *J'appelle interprétation d'une ESA X dans un cadre donné tout objet qui « correspond » à la dénotation de X dans ce cadre.* » Le terme *cadre* s'inscrit dans la théorie développée par Douady (1984), par exemple, l'ESA « $2x+1$ » peut être interprétée dans le cadre fonctionnel comme la fonction : $x \to 2x+1$ ou dans le cadre arithmétique comme un nombre impair. Drouhard utilise les quatre concepts définis ci-dessus à la fois comme outil d'analyse des conceptions d'élèves mais aussi pour parvenir à la conclusion que *com-prendre*[50] *une ESA, c'est prendre en compte ensemble sa syntaxe, sa dénotation, son sens et son interprétation.*

2.3.3 Les registres de représentation sémiotique de Duval

Une approche de la sémiotique est réalisée par Duval (1993, 1995). Pour ce chercheur, une des différences fondamentales des mathématiques avec les autres sciences est qu'elle est constituée d'objets qui ne sont directement accessibles, ni par la perception, ni observables à l'aide d'instruments. Ces objets mathématiques ne pourront alors être appréhendés que par leurs représentations, comme une description en langage naturel, une notation, un symbole, une figure. Duval (1993) nomme *représentations sémiotiques,* ces *productions constituées par l'emploi de signes appartenant à un système de représentation qui a ses contraintes propres de signifiance et de fonctionnement*. Il mentionne les travaux de Frege (Duval, 1995) par rapport aux concepts de *signe*, de *sens* et de *dénotation.* Pour lui, la difficulté de la compréhension des objets mathématiques est que *l'invariant référentiel* que Frege nomme la *dénotation* d'un signe ne peut se construire indépendamment de différents *sens* que Duval compare aux différents registres sémiotiques d'un même objet (Duval, 2002). Il donne l'exemple de l'objet « fonction linéaire » qui peut être appréhendé dans différents registres (Duval, 2007) :

---

[49] Référence tirée de Grugeon (1995) - Drouhard J.P. (1992) : *Les écritures symboliques de l'algèbre élémentaire*, Thèse de doctorat, Université Paris 7.
[50] En latin, le préfixe « com » exprime l'adjonction, la réunion et la simultanéité.

- dans le registre de la langue naturelle par une définition : ***Pour toute** situation de proportionnalité, si x est transformé en y, **il existe un nombre a ne dépendant pas de** x tel que **y = ax***[51] ;
- dans le registre des tableaux, par un tableau de proportionnalité donnant quelques couples (x, y) répondant au problème ;
- dans le registre algébrique par la donnée de l'équation $y = ax$;
- dans le registre graphique, par la représentation graphique de la droite d'équation $y = ax$.

Duval précise qu'un concept mathématique commence à être compris lorsqu'il est utilisé dans différents registres sémiotiques :

> […] On recourt à des types très différents de représentations sémiotiques, car tous les systèmes sémiotiques n'offrent pas les mêmes possibilités de traitement. Autrement dit, le point fondamental dans l'activité mathématique n'est pas l'utilisation nécessaire de représentations sémiotiques mais la capacité à passer d'un registre de représentation sémiotique à un autre registre. (Duval, 2007)

Cette capacité de passer d'un registre à un autre est nommée *conversion* par Duval (1993, 2007). La conversion désigne une transformation *consistant à changer de registre de représentation, comme dans le passage d'une formulation verbale ou numérique à une écriture algébrique ou à une représentation cartésienne des relations formulées* (Duval, 2007). La notion de conversion est particulièrement importante pour Duval, qui considère que disposer d'une seule forme de représentation ne garantit pas la compréhension d'un concept, un des effets pouvant être dans ce cas la confusion entre l'objet (sa *dénotation*) et le contenu de sa représentation (un de ses *sens*). Aussi est-il essentiel de disposer d'au moins deux représentations différentes de l'objet. En outre, il est nécessaire que ces représentations soient perçues comme représentant le même objet, et pour cela l'élève doit être capable de passer de l'une à l'autre. En bref, pour Duval, il n'y a pas de compréhension d'un concept en mathématiques sans le recours à plusieurs registres sémiotiques et sans la capacité à effectuer des conversions d'un registre à un autre, et de plus, c'est l'existence de plusieurs registres et les activités de conversion inter-registres qui créent l'objet mathématique, tout en permettant la différenciation entre l'objet et sa (ou ses) représentation(s).
Cette idée d'appréhender un concept par différents registres sera développée et expérimentée dans ce travail de recherche où nous étudierons dans le chapitre 9 comment le concept d'équation pourrait être mieux compris par la combinaison de plusieurs registres, dont l'utilisation d'un registre algorithmique.

2.3.4 Ostensifs et non-ostensifs de Bosch et Chevallard

Les travaux de Bosch et Chevallard (1999) apportent un autre angle d'éclairage de la compréhension des objets mathématiques au travers d'une analyse logico-linguistique. Ils explicitent que la dualité des objets mathématiques, d'une part par leur « nature » et d'autre part par leur « fonction » dans l'activité mathématique les amène à établir une *dichotomie fondamentale* en distinguant les objets *ostensifs* des objets *non ostensifs*. Les définitions données en sont :

[51] C'est Duval qui accentue en gras certains passages pour bien montrer que cet énoncé ne peut être réduit à une simple description du tableau de proportionnalité, *en raison de la quantification qu'il introduit*.

- les objets *ostensifs* sont ceux qui possèdent une forme matérielle (comme un crayon) ou accessible aux sens humains comme les gestes, les mots, les schémas, les écritures, etc. ;
- les objets *non ostensifs* sont les idées, les notions, les concepts, reconnus par une institution, *qui ne peuvent qu'être évoqués ou invoqués par la manipulation adéquate de certains objets ostensifs associés (un mot, une phrase, un graphisme, une écriture, un geste ou tout un long discours).* (Bosch et Chevallard, ibid.)

Pour ces chercheurs, *la co-activation d'ostensifs et de non-ostensifs est toujours présente et apparaît à tous les niveaux d'activité, aussi bien au plan de la technique que de son environnement technologico-théorique* (ibid.). Bosch et Chevallard donnent l'exemple de la somme $S(x)$ de deux expressions algébriques $x^3 + x + 1$ et $x^2 + 4x - 2$ que l'on peut écrire des deux façons suivantes :

$$S(x) = x^3 + x^2 + 5x - 1 \qquad (1)$$

ou encore : $$S(x) = -1 + 5x + x^2(1 + x) \qquad (2)$$

Dans les deux cas, la technique qui conduit à écrire la somme $S(x)$ sous l'une ou l'autre forme repose non seulement sur des ostensifs *scripturaux* (les chiffres, les lettres, les parenthèses, les signes « plus », « moins », « égal ») mais aussi sur des ostensifs *gestuels* (comme pointer du doigt les termes de même degré pour les ajouter ensuite) et des ostensifs *discursifs* (comme dire oralement « *x plus 4x égalent 5x* »). Cependant ce sont les objets non ostensifs qui règlent ces manipulations. En effet, la forme (1) a été conduite en résonnance à l'objet non ostensif « développement » ou « limite en $+\infty$ » alors que la forme (2) est une activation de l'objet non ostensif « développement limité d'ordre 1 ». Cet exemple montre que les ostensifs et non-ostensifs se construisent simultanément et qu'il existe *une dialectique nécessaire* entre les deux. *La manipulation des ostensifs est réglée à l'aide notamment des non ostensifs, et ces derniers, inversement, sont évoqués à l'aide des ostensifs* (ibid.).

Bosch et Chevallard rapprochent les registres ostensifs des registres sémiotiques de Duval dans le sens où, dans les deux cas, c'est la pluralité de ces registres qui permet d'accéder au concept, au non-ostensif. Cependant il existe une différence entre les deux approches : Duval, par son approche cognitive, étudie le *fonctionnement cognitif impliqué par l'acquisition de connaissances mathématiques* [52], c'est-à-dire comment fonctionne l'acquisition de ces connaissances en étudiant les processus cognitifs développés de façon individuelle. La tâche mathématique à effectuer est considérée dans ce modèle comme déjà problématisée. Par conséquent, l'étude des difficultés est-elle située par rapport à ce fonctionnement cognitif individuel. Bosch et Chevallard (ibid.) considèrent au contraire que la réalisation de la tâche mathématique dépend de la mise en œuvre d'une technique mathématique, construite – ou à construire – sur une *praxéologie mathématique locale* relative à ce type de tâches. Même si la construction de cette technique suppose la mobilisation de registres sémiotiques et d'ostensifs, Bosch et Chevallard *intègrent les objets ostensifs dans la description du savoir mathématique en tant qu'objets mathématiques* alors qu'ils considèrent que pour Duval, ils ne font pas partie de l'activité mathématique, *mais uniquement comme des ingrédients mathématiquement contingents, mais nécessaires au fonctionnement cognitif sous-jacent à cette activité*.

[52] Citation rapportée par Bosch et Chevallard (1999) tirée de l'article de Duval, R. (1996). Quel cognitif retenir en didactique des mathématiques ?, *Recherches en Didactique des Mathématiques*, *16*/3, 349-382.

Comme vu dans l'exemple de la somme $S(x)$ qui peut s'écrire d'une façon appropriée selon la tâche mathématique à effectuer, les concepts d'*ostensif* et de *non ostensif* sont particulièrement adaptés aux expressions algébriques, compte tenu des grandes possibilités d'interprétation, de traitement, de sens et de variations dans leurs formes d'écriture. C'est pourquoi nous utiliserons ces concepts dans nos analyses.

2.4 La compétence algébrique selon Grugeon

Partant sur une structure multidimensionnelle de l'algèbre, Grugeon (1995, 2000) a conçu à partir de divers travaux didactiques une classification des différentes dimensions du *savoir algébrique*, savoir se situant au niveau du collège et du lycée français. Afin de définir ce qu'est la *compétence algébrique*, Grugeon organise la synthèse de ses travaux autour de trois entrées principales : la rupture épistémologique entre l'arithmétique et l'algèbre, l'introduction de nouveaux objets en algèbre et la délimitation du champ des problèmes algébriques. Citons Grugeon (2000) :

> L'apprentissage de l'algèbre ne se limite pas au traitement d'expressions algébriques […] La compétence algébrique ne s'évalue pas seulement à travers la capacité à transformer des expressions. Elle s'évalue aussi à travers la capacité à résoudre des problèmes où l'algèbre intervient comme outil pertinent. Il s'agit d'être capable de produire des expressions et des relations algébriques pour traduire un problème, de les interpréter puis de mobiliser les outils algébriques adaptés à sa résolution. (p.7)

La lecture de ces lignes nous amène à considérer deux dimensions dans la compétence algébrique, une dimension *objet*, où est considérée la capacité à comprendre et à transformer les expressions algébriques et une dimension *outil*, est évaluée la capacité à résoudre des problèmes en utilisant l'algèbre élémentaire. Suit un schéma (Grugeon et al., 2003) montrant ce découpage qualifié de *multidimensionnel*, du savoir algébrique.

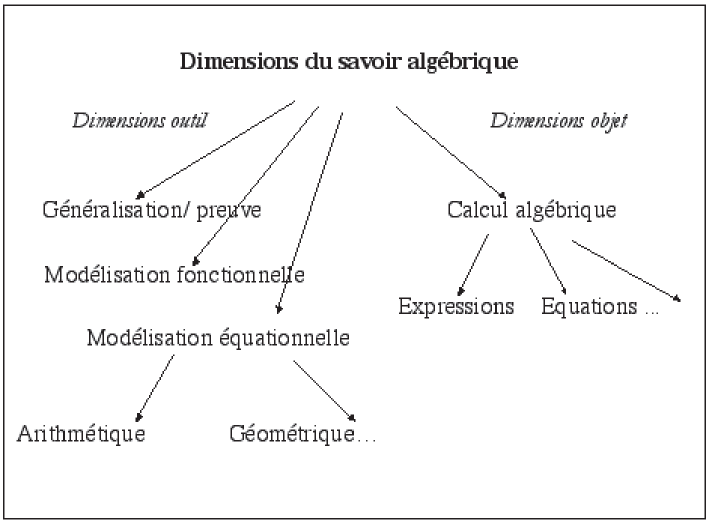


Figure 3 : Découpage multidimensionnel du savoir algébrique selon Grugeon

Précisons que les vocables *outil* et *objet* sont à considérer dans le sens où Douady (1986) les définit :

> […] un concept est ***outil*** lorsque nous focalisons notre intérêt sur l'usage qui en est fait pour résoudre un problème. Un même outil peut être adapté à plusieurs problèmes, plusieurs outils peuvent être adaptés à un même problème. Par ***objet***, nous entendons l'objet culturel ayant sa place dans un édifice plus large qui est le savoir savant à un moment donné, reconnu socialement. (Douady, 1986)

Pour Grugeon (2000), il existe donc une double compétence algébrique, celle qui s'exprime à travers la capacité à *mobiliser l'outil algébrique* pour résoudre des problèmes et celle qui s'exprime à travers la capacité à *manipuler les objets de l'algèbre*.

Ainsi dans ce mémoire, utilisons-nous ce découpage de l'algèbre élémentaire en la considérant comme *objet,* d'une part lorsque nous nous y intéressons comme ensemble structuré de variables, d'inconnues, d'indéterminées, d'expressions, de formules, d'équations et inéquations, …, ensemble sur lequel se greffe le calcul dans son sens le plus général, et d'autre part lorsque nous examinons la place qui lui est attribuée dans l'institution scolaire. Nous la considérons comme *outil* lorsqu'elle est utilisée pour résoudre divers types de problèmes : des problèmes de généralisation et de preuve, des problèmes d'étude de fonctions, des problèmes de modélisation, des problèmes arithmétiques conduisant à des équations, des problèmes géométriques.

Au-delà de cette dichotomie entre un aspect *objet* et un aspect *outil* de l'algèbre, Grugeon (2000) a défini six composantes de la compétence algébrique. Ces composantes se déclinent aussi bien du côté institutionnel que du côté élève et s'articulent de la façon suivante :

- une composante appelée *traitement algébrique*. Le traitement algébrique recouvre les différents emplois de l'algèbre et prend en compte les deux dimensions *outil* et *objet*. Grugeon (ibid.) en distingue les tâches suivantes : tâches d'ordre numérique (substitution de nombres dans une formule et calculs), tâches de calcul formel non finalisées (comme développer, factoriser, résoudre une équation), tâches d'interprétation d'une expression algébrique dans des registres de représentation distincts, puis viennent les tâches d'utilisation de l'algébrique pour faire fonctionner d'autres notions mathématiques (comme l'étude du signe d'une fonction) ou pour résoudre des problèmes par l'outil algébrique (comme modéliser une situation, généraliser un résultat, prouver une conjecture) ;
- une composante nommée *rapport arithmétique/algèbre* qui a pour objectif de mesurer quelle différenciation existe effectivement entre la démarche arithmétique et la démarche algébrique. Outre la démarche, le statut accordé aux lettres, au signe d'égalité, etc. peut être étudié ainsi que le statut procédural, structural ou pseudo-structural des expressions algébriques ;
- deux composantes *gestion dans le registre des écritures algébriques* et *articulation entre registre des écritures algébriques et les autres registres* qui permettent de prendre en compte la dimension sémiotique de l'activité algébrique ;
- une composante *fonction de l'algèbre* qui a pour objectif de repérer quelles formes d'activités algébriques sont privilégiées et quelles en sont les techniques associées mises en œuvre ;
- une composante *rationalité algébrique* qui a pour rôle de cerner le rapport à la rationalité mathématique mis en jeu dans l'activité algébrique, c'est-à-dire qu'on y étudie le type et le niveau de preuve mis en œuvre (pragmatique, intellectuel, etc. au sens de Balacheff).

Pour Grugeon (1995), la première composante, *traitement algébrique*, joue un rôle d'identification et d'évaluation, c'est-à-dire qu'elle permet d'une part de situer l'algèbre par rapport aux attendus institutionnels et d'autre part, de situer les rapports personnels des élèves

par rapport à l'algèbre enseignée. Les autres composantes ont pour objectif *d'identifier et de décrire des caractéristiques importantes, des cohérences locales aussi bien dans les programmes officiels que dans le fonctionnement des élèves en algèbre* (ibid.).
Précisons que le concept de *compétence algébrique* est utilisé dans ce travail de recherche, lors des analyses effectuées avec une orientation plus grande vers la dimension objet que vers la dimension outil. En effet, nous verrons plus loin que la problématique de ce travail est davantage orientée vers la première dimension, vers la compréhension des objets de l'algèbre pour eux-mêmes, plutôt que dans leur utilisation dans la résolution de problèmes, autres qu'algébriques.

2.5 Articulation numérique-algèbre : typologie des rapports personnels des élèves aux nombres réels

Cette section constitue en partie une synthèse du chapitre 3 de la thèse de Bronner (1997) où ce chercheur propose une classification qu'il a intitulé *typologie des rapports personnels des élèves aux objets racine carrée et nombre réel.* Cette classification permettra d'affiner les analyses de l'expérimentation réalisée en classe de seconde, par rapport aux représentations qu'ont les élèves des expressions algébriques. En effet, les expressions algébriques étant constituées de lettres (représentant elles-mêmes des nombres), de nombres et de signes en relation, le domaine algébrique est indissociable du domaine numérique. C'est ainsi que Bronner (2007) évoque un domaine *numérico-algébrique*. Dans ses travaux, il précise l'impossibilité d'établir une frontière nette entre le domaine numérique et le domaine algébrique. Il nomme les problèmes algébriques les *problèmes mettant en jeu des nombres […] mis en scène dans des apparats numériques directs ou sous de belles lettres* et « traque » selon son expression, le numérique dans tous les domaines qui lui sont à la fois périphériques et imbriqués. Il est amené à définir un *espace numérique* permettant de travailler les différents ensembles de nombres et leurs spécificités, dont il donne la définition suivante (ibid.) :

> À partir de cet objet premier [le nombre], le développement des praxéologies numériques conduit à construire un espace numérique EN et à travailler sur des systèmes de nombres, que nous noterons SN, espace et systèmes plus ou moins identifiés par l'institution et ses sujets. SN peut être un des ensembles de nombres (**N**, **Z**, **D**, **Q** ou **R**) bien identifiés dans le savoir universitaire mathématique, bien que pouvant être introduits ou construits de manières très diverses. Mais nous montrerons que ce système de nombres peut aussi prendre des positions intermédiaires ou plus complexes par rapport à cette échelle classique des ensembles de nombres. (p.23)

L'espace numérique ainsi défini est donc dépendant de l'institution qui le considère et du niveau auquel il est enseigné. Bronner (2007) élabore alors un *filtre numérique* qu'il définit comme un outil permettant d'analyser les praxéologies mathématiques construites dans le domaine du numérique ou des domaines en interaction avec le numérique. Notre travail étant centré sur le domaine algébrique, les technologies et théories que ce chercheur cite ci-dessous (ibid.) vont intervenir dans nos propres analyses, lors de l'étude des espaces numériques sur lesquels les élèves et les enseignants vont être amenés à travailler au cours de l'expérimentation proposée :

> On peut notamment avancer :
> - la nature arithmétique ou les types des nombres ;
> - les critères de reconnaissance de ces nombres ;
> - les ensembles de nombres ;
> - les propriétés arithmétiques des nombres (divisibilité sur les entiers, ..) ;
> - les opérateurs et comparateurs spécifiés ou en jeu dans le numérique et la manière de les spécifier ; et leurs propriétés algébriques. La place et le rôle d'objet comme *fraction* ou *racine carrée* seront des indicateurs privilégiés.
> - Les ostensifs et la complexité des expressions numériques ou algébriques.

Nous remarquons qu'à deux reprises, Bronner évoque le domaine algébrique lorsqu'il précise le bloc *logos* ci-dessus du domaine numérique, ce qui renforce encore l'idée d'imbrication et de fortes relations entre ces deux domaines. C'est ainsi que nous pouvons affirmer que la typologie décrivant les différentes catégories d'élèves en fonction de leur conceptions de la racine carrée et des nombres réels plus généralement vont nous être utiles dans nos analyses. Bronner (1997) a classifié les élèves selon quatre grandes catégories que nous explicitons dans le tableau ci-dessous. Pour chaque catégorie, les sous-catégories indiquées par Bronner (ibid.) sont précisées ainsi que la caractérisation du système de nombres SN leur correspondant. Sont également présentés les théorèmes en actes, au sens de Vergnaud, correspondant à chaque catégorie, ainsi que quelques exemples d'illustration.

	Modèle	**Caractérisation de SN**	**Exemples**	**Théorèmes en acte associés au modèle**
	CP (carré parfait)	Les seuls nombres acceptés sont les entiers et les décimaux et éventuellement les rationnels (ou du moins les quotients d'entiers écrits sous forme fractionnaire, les nombres idécimaux n'existant pas).	$\sqrt{4}$, $\sqrt{\frac{9}{16}}$ existent. $\sqrt{2}$ n'a pas le statut de nombre. $\frac{2}{3}$ existe éventuellement mais 0,6666… n'a pas le statut de nombre.	- Pour $a \in$ SN, $\sqrt{a}$ existe si et seulement si a est carré parfait - Pour a nombre positif de SN, $\sqrt{a^2} = a$ - Pour a et b de SN et carrés parfaits : $\sqrt{ab} = \sqrt{a} \times \sqrt{b}$; $\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$
Conception Formelle	**CF** (conception formelle)	Les entiers, les décimaux et les rationnels sont acceptés comme nombres. Les racines carrées $\sqrt{a}$ (a non carré parfait) sont considérées comme des expressions formelles ou des artifices de calcul.	$\sqrt{4}$, $\sqrt{\frac{9}{16}}$ existent. $\sqrt{2}$ n'a pas le statut de nombre mais peut être manipulé.	- Pour a nombre positif de SN, $\sqrt{a^2} = a$ - Pour a et b de SN : $\sqrt{ab} = \sqrt{a} \times \sqrt{b}$; $\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$ Les règles de calcul sont considérées comme des règles de transformation des écritures formelles.
	CP-N (carré parfait et nombres négatifs)	Même caractérisation que CP. On y ajoute $\sqrt{-a}$ lorsque a est un carré parfait, ce qui rattache aussi ce modèle à une conception formelle.	$\sqrt{4}$, $\sqrt{\frac{9}{16}}$ existent. $\sqrt{2}$ n'a pas le statut de nombre. $\sqrt{-4}$ existe et vaut 2.	On ajoute aux trois théorèmes en acte du modèle CP : - Pour a et b de SN et carrés parfaits : $\sqrt{-a} = \sqrt{a}$ et $\sqrt{-b^2} = b$ Ou bien : $\sqrt{-a} = -\sqrt{a}$ et $\sqrt{-b^2} = -b$

Modèles Approximation	**CA ≈** (conception approchée)	Les fonctions (division, carré, racine carrée, cosinus, …) sont différenciées des opérateurs. La différenciation valeurs exactes/valeurs approchées (obtenues à la calculatrice) est effective. Les entiers, les décimaux et les rationnels sont acceptés comme nombres. Les nombres idécimaux ($\mathbb{R}\backslash\mathbb{D}$) peuvent avoir ou non le statut de nombre.	Les nombres obtenus avec les opérations et les opérateurs racine carrée, cosinus, …, ne sont pas assimilés aux valeurs approchées. $\sqrt{2} \approx 1{,}414$ $\frac{2}{3} \approx 0{,}66$	Les règles de calculs sont connues mais les calculs sont effectués en remplaçant au fur et à mesure les racines carrées par leur valeur approchée (avec le symbole $\approx$)
	CA (conception approchée « dégénérée »)	Conception « dégénérée » de CA ≈ où la différenciation valeurs exactes/valeurs approchées (obtenues à la calculatrice) n'est pas effective. Même système de nombres que CA ≈.	$\sqrt{2} = 1{,}414$ $\frac{2}{3} = 0{,}66$	Le nombre $\sqrt{a}$ n'est plus caractérisé par sa propriété opératoire algébrique $(\sqrt{a})^2 = a$, mais il est l'image de a par un opérateur $\sqrt{}$ (lien effacé avec l'opérateur carré).
Conception de la racine carrée comme Nombre	**CN** (conception comme nombre)	le système de nombres est un ensemble contenant au moins les rationnels et les racines carrées de rationnels positifs. Les idécimaux sont considérés comme des nombres.	Les fractions et les radicaux sont utilisés pour désigner les valeurs exactes.	Définitions et règles opératoires sur les racines carrées connues et manipulées.
	CNU (conception comme nombre unifiée)	Niveau supérieur à CN où les nombres irrationnels sont complètement intégrés dans le système des nombres réels.	L'élève écrit et considère de lui-même $\sqrt{3} + 1$ comme un nombre.	
	CN$\mathbb{R}$	Reconstruction axiomatique de l'ensemble des réels.		

Tableau 4 : Typologie des rapports personnels des élèves aux irrationnels selon Bronner

Pour conclure, cette typologie sera utilisée comme outil d'analyse des connaissances des élèves à propos des *objets du numérique* quand ceux-ci seront plongés dans les domaines de l'algébrique et de l'algorithmique.

2.6 Le paradoxe de la compétence algébrique

Comme s'il reproduisait l'histoire, l'élève n'est pas immédiatement sensible à la puissance mathématique que lui octroie le calcul algébrique et ce, tant qu'il ne le manipulera pas avec une certaine expertise. L'une des difficultés, développée par de nombreux didacticiens et évoquée plus avant, vient de la démarche de résolution algébrique, différente voire opposée à la démarche arithmétique, qui déstabilise l'élève car elle l'oblige à réviser profondément ses stratégies de calcul. De plus, cette difficulté est accentuée par les vraies et fausses continuités entre l'arithmétique et l'algèbre, comme par exemple l'usage de signes communs (lettres, symboles mathématiques) qui peuvent garder le même sens ou prendre un sens différent. Une autre difficulté vient du fait que les modes de contrôle du calcul algébrique sont radicalement différents de ceux du calcul arithmétique. En effet, en fin d'école primaire et au cours des premières années du collège, la résolution de problèmes arithmétiques est éclairée par le sens du contexte et chacune des opérations effectuées peut s'y exprimer. En revanche, le calcul algébrique induit une capacité à s'affranchir du sens du contexte pour se concentrer sur des transformations d'écriture effectuées à partir de règles formelles, impliquant un changement de sémantique et de syntaxe. C'est ce changement de sémantique et de syntaxe qui a été développé dans les sections de ce chapitre consacrées aux expressions algébriques et à leur approche linguistique. Ce changement est vécu *pour beaucoup d'élèves, [comme] un moment de rupture, un moment où l'activité mathématique cesse de faire sens, tendant à se réduire à un jeu formel basé sur des règles dont ils ne comprennent pas les raisons d'être* (Grugeon, 2012). Le « pilotage » du calcul algébrique est en effet différent du calcul arithmétique : il fait intervenir le « sens interne » des expressions, reposant sur la compréhension des règles qui gèrent la formation et le traitement de ces expressions. Grugeon (ibid.) qualifie ce pilotage de « jeu du calcul algébrique », *un jeu où l'on pilote le calcul en fonction du but poursuivi en naviguant entre expressions équivalentes.* Ce pilotage est délicat comme le montrent les erreurs récurrentes des élèves pour parvenir à maîtriser ce calcul, et même lorsque ceux-ci parviennent à l'automatiser, les difficultés à en contrôler le sens perdurent. Ce travail d'automatisation, d'algorithmisation du traitement des expressions algébriques, est pourtant une nécessité pour accéder à la puissance du calcul algébrique. Lorsque Sfard (1994) cite Whitehead :

> It is a profoundly erroneous truism, repeated by all copybooks and by eminent people when they are making speaches, that we should cultivate the habit of thinking about what we are doing. The precise opposite is the case. Civilisation advances by extending the number of important operations which we can perform without thinking about them.[53]

elle veut signifier, en appliquant ces propos à l'algèbre, qu'il s'agit d'exécuter les manipulations formelles algébriques de manière automatisée, sans constamment garder présent à l'esprit les règles qui les régissent, mais en étant capable de s'y référer, à chaque fois que la nécessité s'en ressent. C'est bien ce que fait un mathématicien averti lorsqu'il est amené à résoudre une équation complexe : la technicité à laquelle il est parvenu lui permet de s'affranchir de la signification première des symboles et des règles sous-jacentes, comme un élève peut le faire en arithmétique, par exemple lorsqu'il exécute l'algorithme de multiplication en colonnes de deux nombres entiers. Mais c'est lors de la mise en place de ces automatismes que l'élève pourrait développer des conceptions *pseudo-structurales* au sens de Sfard, avec une compréhension erronée des règles conduisant les manipulations qu'il entreprend. L'une des difficultés de l'enseignement de l'algèbre est donc de faire acquérir à l'élève des réflexes de calcul tout en lui permettant d'en garder le contrôle. Cette capacité à *manipuler les objets de l'algèbre* est nécessaire à l'acquisition d'une certaine compétence algébrique, comme le précise Grugeon (2000) :

[53] « C'est un truisme profondément erroné, répété par tous les ouvrages et par des personnes éminentes quand elles font des discours, que nous devrions cultiver l'habitude de penser à ce que nous faisons. C'est exactement le cas opposé. La civilisation progresse en étendant le nombre d'opérations importantes que nous pouvons accomplir sans y penser. »
Citation de Whitehead A.N. (1911) *An Introduction to Mathematics.* London: Williams and Norgate.

> Il s'agit de tenir compte du double aspect syntaxique et sémantique des expressions algébriques pour les manipuler formellement en redonnant sa juste place à la dimension technique du traitement algébrique. La signification d'une expression algébrique réside à la fois dans sa syntaxe, sa dénotation, son interprétation en liaison avec les cadres mathématiques en jeu et ses sens. (p.9)

Dans son expression : *redonner sa juste place à la dimension technique du traitement algébrique*, Grugeon signifie que cette place n'a pas toujours été suffisamment prise en considération. Ainsi, c'est sur cette capacité à manipuler les objets de l'algèbre et sur l'accession à l'aisance nécessaire à leur manipulation que notre intérêt s'est porté et sur lesquelles portent ces travaux de recherche : nous le développons au chapitre 5.
D'autre part, une étude de l'ICMI[54], reprise par Grugeon (2012) fait l'inventaire des différentes voies d'entrée dans l'algèbre élémentaire :

> Dans certains pays, c'est la voie historique des équations associée à la démarche analytique cartésienne qui est choisie, dans d'autres, notamment de culture anglo-saxonne, c'est la voie de la reconnaissance de structures et de la généralisation qui est choisie. Il ne s'agit pas d'enseigner les structures algébriques mais de repérer ce que l'on appelle des « patterns » dans des suites de nombres, dans des configurations géométriques, de les exprimer algébriquement et d'utiliser cette expression algébrique pour les étudier, les caractériser, les comparer. Dans d'autres pays, c'est la voie de la modélisation qui est choisie, souvent en lien avec des situations extra-mathématiques.

La multiplicité des approches de l'algèbre est liée à la multiplicité de ses fonctions. L'algèbre peut apparaître historiquement comme la science des équations, ou au 20e siècle comme la science des structures. Mais elle est aussi considérée comme une arithmétique généralisée (cf. §2.1), ou encore, elle se manifeste comme le langage privilégié entre les mathématiques et les autres disciplines scientifiques, par la modélisation des phénomènes qu'elle permet.
Du point de vue de l'enseignement, diverses études didactiques ont montré que les différentes voies choisies pour entrer dans l'algèbre ne sont pas équivalentes et que le problème des rapports entre l'arithmétique et l'algèbre se pose différemment, selon l'entrée retenue. Grugeon (2012) rapporte ces études en concluant que l'approche par la généralisation des phénomènes arithmétiques (patterns) ou bien l'approche par la modélisation conduit à créer et à exploiter des formules, en étendant sans opposition majeure les résultats arithmétiques à l'algèbre. En France, *l'entrée dans l'algèbre, culturellement, est d'abord perçue comme l'entrée dans le monde des équations* (ibid.) et les recherches didactiques convergent pour montrer alors une rupture de pensée plus importante avec l'arithmétique, d'autant plus que l'entrée dans le symbolisme algébrique se fait assez tardivement, contrairement aux pays anglo-saxons qui pratiquent l'*early algebra*[55]. Grugeon (ibid.) précise que les élèves français voient le *développement du calcul littéral comme une propédeutique à l'algèbre dont les finalités et fonctionnalités ne [leur] sont pas accessibles* et que l'*on accumule les obstacles, faisant de ce domaine, un domaine inaccessible à beaucoup.* Grugeon conclut que le choix

---

[54] ICMI (International Commission on Mathematical Instruction) est la commission internationale de l'enseignement mathématique, dont les résultats sur l'algèbre ont été publiés en 2004 par Stacey, K., Chick, H., Kendal, M. (2004). *The future of the Teaching and Learning of Algebra*. Springer Verlag.

[55] *L'algèbre précoce* consiste à introduire l'utilisation de lettres dès 9-10 ans. Cet enseignement a cours au Canada et aux USA. On pourra se référer à Kieran (2003, 2008) ;
Carraher, D.W., Schliemann, A.D. & Schwartz, J. (2008). Early algebra is not the same as algebra early. In J. Kaput. D. Carraher, & M. Blanton (Eds.), Algebra in the Early Grades. Mahwah, NJ, Erlbaum, pp. 235-272. Récupéré du site : http://ase.tufts.edu/education/earlyalgebra/default.asp

curriculaire de l'entrée historique par les équations renforce les difficultés d'apprentissage inhérentes au domaine de l'algèbre.

En tant qu'enseignante de lycée pendant douze ans, nous avons pris conscience de ces difficultés de contrôle *du jeu du calcul algébrique*, et c'est une autre raison pour laquelle nous avons souhaité orienter nos recherches vers l'étude d'un renforcement de la compréhension des équations et de leur traitement, en tentant de trouver un équilibre entre la nécessaire automatisation du traitement algébrique et la compréhension des règles sous-jacentes.

CHAPITRE 3 - CADRE DIDACTIQUE DES TICE

Depuis plus de trente que les technologies de l'information et de la communication (TIC) sont entrées à l'École, beaucoup de recherches ont été effectuées pour étudier l'impact de ces nouvelles technologies, aussi bien pour l'enseignement que pour l'apprentissage. Nous présentons dans ce chapitre quelques résultats de ces recherches, dans la mesure où l'algorithmique et la programmation sont convoquées dans notre travail, en conjonction avec l'enseignement/apprentissage de l'algèbre. En particulier, bien que les TIC soient devenues omniprésentes dans l'enseignement des mathématiques au secondaire, leur intégration ne se fait pas de façon transparente, pour aucun des acteurs concernés : institution, enseignant, élève.

3.1 L'introduction des TIC dans l'enseignement des mathématiques : une évolution sociétale

Depuis environ 35 ans, de nouveaux outils de calculs sont apparus dans les sociétés occidentales. Trouche (in Guin, 2002) fait une synthèse des différentes branches professionnelles ayant eu recours aux *machines à calculer,* comme les comptables, les gestionnaires ou encore les commerçants avec l'apparition des caisses automatiques des supermarchés. Il évoque *l'évolution technologique* qui *bouleverse les rapports sociaux aux objets des mathématiques* (ibid.). En effet, l'introduction d'outils de calculs mathématiques à l'École ne vient pas d'un besoin de l'institution scolaire : c'est une réponse de cette institution à un phénomène social plus vaste, avec la présence sans cesse croissante de l'informatique, dans tous les secteurs économiques. Trouche conclut par la *légitimité sociale* de ces nouveaux outils de calcul, qui vivent en dehors de l'enseignement des mathématiques, légitimité appuyée par un usage professionnel d'*aide au calcul*. Cette évolution technologique va entraîner une évolution institutionnelle au niveau de curricula scolaires, rendant de plus en plus présents les outils informatiques dans l'apprentissage mathématique, au niveau de l'enseignement secondaire. Une évolution semblable se retrouve à l'étranger, en particulier aux USA où le NCTM[56] recommande l'introduction des TIC dans l'enseignement des mathématiques en insistant sur le *nécessaire contrôle par l'enseignant du processus d'intégration*. (Guin, ibid.). Relativement à l'échelle de niveaux de codétermination du mathématique et du didactique de Chevallard (2002), les TIC se placent aux niveaux de la société (cf. §1.2.3) et de la civilisation, situant ainsi les contraintes apportées par celle-ci sur l'introduction de ces nouvelles technologies à l'École.

[56] National Concil of Teachers of Mathematics.

Pour expliquer les changements inhérents à l'introduction des TIC dans l'enseignement des mathématiques, utilisons le concept d'*organisation praxéologique* (Chevallard, 2002). L'introduction des TIC dans l'enseignement des mathématiques va générer de nouveaux types de techniques pour l'accomplissement d'un certain type de tâches qui jusque-là étaient généralement effectuées dans un environnement papier-crayon. Chevallard (1998) précise :

> D'une façon très générale, on peut dire que la mise en œuvre, par une personne x, d'une technique τ revient à accomplir certains *gestes* dans le cadre de certains *dispositifs*. Si les dispositifs prévus manquent, ou si x ne sait pas accomplir les gestes requis, la technique ne peut pas fonctionner : les deux « composantes » – dispositifs et gestes – sont également nécessaires. (p.1)

Chevallard (ibid.) s'interroge alors sur la part de changement du *système de travail* que requiert l'utilisation de l'outil informatique dans l'organisation praxéologique jusque-là utilisée pour un certain type de tâches à réaliser. Il prend comme exemple la tâche « *Déterminer la somme des fractions* $\frac{3}{7}+\frac{8}{21}-\frac{5}{12}$ » qui peut être résolue de deux façons : soit avec un dispositif papier-crayon et les gestes qui sont alors ceux qu'on apprend au collège pour effectuer une telle somme, soit un dispositif calculatrice formelle où les gestes constituent à taper sur les touches adéquates. Dans les deux cas, le résultat est le même, à savoir $\frac{11}{28}$. Si la seule préoccupation dans l'accomplissement de cette tâche est l'obtention du résultat, ces deux organisations sont équivalentes, mais la seconde semble plus rapide et plus fiable que la première. Cet exemple simple montre que l'introduction de l'outil informatique induit un *changement de gestes*, des gestes anciens vont disparaître et d'autres vont apparaître. Ce changement s'accompagne de réticences à tous les niveaux : au niveau de l'institution, de la noosphère, des enseignants et des élèves. Chevallard (ibid.) donne une image pour expliquer cette réticence, en comparant l'introduction de l'outil informatique dans les classes à celle du lave-vaisselle dans les cuisines des années 1960. Voici ses propos :

> Ainsi lorsque, au cours des années 1960, se répand le lave-vaisselle, bien des « ménagères de cinquante ans » et plus se refusent d'abord à cette facilité illusoire : la vaisselle, pensent-elles, ne sera jamais lavée par un lave-vaisselle au sens où elles l'entendent – lavée. La technique τ, à l'origine *instrumentale* par rapport au type de tâches T, devient ainsi peu à peu *définitoire* de ce type de tâches : on reconnaît qu'on accomplit une tâche *du type* T – qu'on lave de la vaisselle, par exemple – au fait qu'on met en œuvre *la technique* τ.(p.16)

Chevallard veut signifier par cette comparaison que l'introduction d'un nouvel objet dans une praxéologie anciennement établie et l'imposition d'une nouvelle technique en lieu et place d'une technique traditionnelle ne rencontrent pas seulement des résistances liées aux changements de *gestes* nécessaires. Elle se heurte presque irrémédiablement au sentiment que *c'est la nature même de la tâche qui en serait changée* (ibid.).

Ces premières réflexions empruntées à Chevallard montrent la nécessité, dans l'élaboration d'ingénieries liant apprentissage des mathématiques et TICE, de penser l'ingénierie didactique en y incluant la présence de l'objet technologique, objet qui va nécessiter de *transposer* l'organisation praxéologique existant dans un *dispositif* papier-crayon, pour en créer une nouvelle, reconstruite à partir de la première.

3.2 Les travaux de Rabardel : artefact et instrument

À l'opposé des réticences explicitées par Chevallard dans la section précédente et à l'aube de la démocratisation des outils informatiques, les compagnies de vente d'ordinateurs et de logiciels avaient imaginé qu'il suffirait de laisser les élèves « jouer » avec leurs programmes éducatifs pour que ceux-ci découvrent les mathématiques pour elles-mêmes et les comprennent en travaillant avec soin des séquences orchestrées d'activités. Depuis, des chercheurs comme Rabardel (1995) ont montré que l'introduction d'un outil – quel qu'il soit – n'est pas *transparent* pour l'utilisateur : ce dernier se construit une représentation de la façon d'utiliser l'outil. Rabardel définit le concept de *genèse instrumentale*, dont l'idée de départ est qu'un outil n'est pas automatiquement un instrument efficace. Drijvers (2002) donne l'image du marteau :

> Un marteau, par exemple, est un objet sans signification, sauf si on en a déjà utilisé un auparavant ou si on a vu quelqu'un marteler. C'est seulement après avoir ressenti le besoin de quelque chose comme un marteau, et après en avoir eu une certaine expérience, que l'on peut intégrer un marteau comme un instrument utile. (p.218-219)

Cet exemple peut se transposer à des outils technologiques numériques utilisés en mathématiques. L'*instrument* constitue pour Rabardel *une entité mixte qui tient à la fois du sujet et de l'artefact* : l'instrument est alors l'unité entre un *artefact* et l'organisation d'actions possibles, appelées les *schèmes d'utilisation*, qui constituent un ensemble structuré d'invariants correspondant à des catégories d'opérations réalisables à l'aide de l'artefact considéré. Tout au long de ce processus de conception, de création, de modification et d'utilisation d'un l'outil, le sujet évolue aussi personnellement en même temps qu'il s'approprie cet outil, et cette évolution concerne à la fois son comportement et sa connaissance. En ce sens, un instrument est le résultat d'un double processus : l'*instrumentation* et l'*instrumentalisation*. Rabardel différencie ces deux concepts en précisant que, même si les deux processus sont le fait du sujet, l'instrumentalisation est dirigée vers l'artefact, alors que l'instrumentation est relative au sujet qui utilise l'artefact. Rabardel (1995) définit ces deux processus comme suit :

> - Les processus d'instrumentation sont relatifs à l'émergence et à l'évolution des schèmes d'utilisation et d'action instrumentée : leur constitution, leur fonctionnement, leur évolution par accommodation, coordination, combinaison, inclusion et assimilation réciproque, […] ;
> - Les processus d'instrumentalisation concernent l'émergence et l'évolution des composantes artefact de l'instrument : sélection, regroupement, production et institution de fonctions, détournements et catachrèses, attribution de propriétés, […]. (p.111)

Des chercheurs comme Artigue (1997), Trouche (2002), Drijvers (2002) ont utilisé ce concept de *genèse instrumentale* pour étudier l'apprentissage de mathématiques en environnement informatique. Ils montrent que le processus de transformation de l'artefact en instrument est lent et complexe. Nous y revenons en section 3.6.

3.3 Les travaux de Balacheff : la transposition informatique

Nous avons mentionné au chapitre 1 (cf. §1.2.1) comment Chevallard (1982) a développé le concept de *transposition didactique* comme le processus par lequel un élément du savoir savant devient une connaissance à enseigner puis un objet d'enseignement.
Ce concept a été repris par Balacheff (1994) et augmenté des contraintes liées à l'apprentissage de savoirs en environnement informatique sous le nom de *transposition informatique.* Le savoir enseigné dans une situation classique d'enseignement est différent du savoir enseigné avec un ordinateur, ce qui peut se schématiser comme suit :

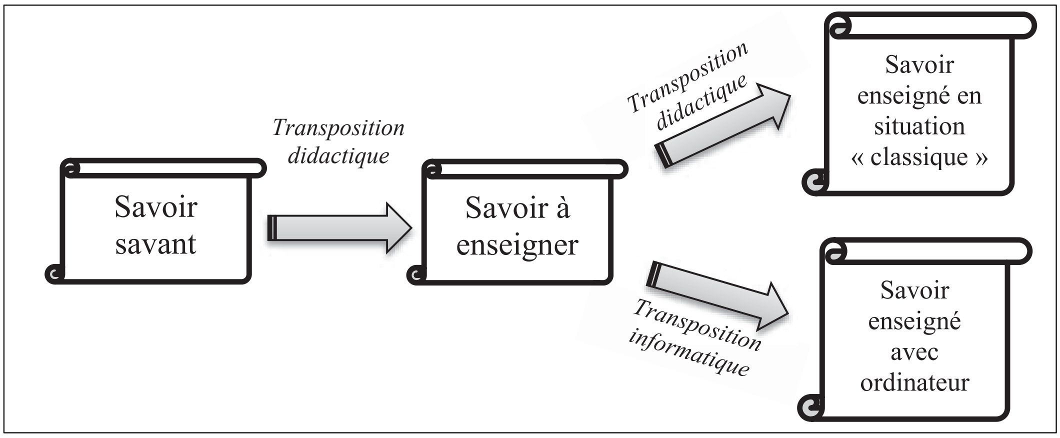


Figure 5 : Transpositions didactique et informatique (Chevallard, 1982, Balacheff, 1994)

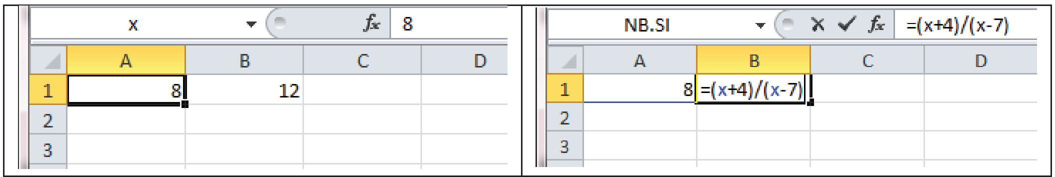
Balacheff (1994) explique *qu'aux contraintes de la transposition didactique s'ajoutent, ou plutôt se combinent, celles de modélisation et d'implémentation informatiques*. Ce chercheur définit deux types de contraintes liées à la transposition informatique, les contraintes de la *modélisation computable* et les contraintes *logicielles et matérielles des supports informatiques*. Les premières portent sur la représentation et le traitement interne des savoirs dans la machine et les secondes sur la représentation et le traitement au niveau de l'interface, autrement dit ce qui est « visible » pour le sujet. Balacheff (ibid.) donne l'exemple du logiciel Cabri-Géomètre qui possède une représentation interne des objets géométriques issu de la géométrie analytique sur un modèle des nombres réels et une interface offrant une représentation de ces objets sous forme d'un pavage fini de pixels. Il précise que ces représentations ne sont pas transparentes, *les systèmes de représentations ayant leurs propres caractéristiques, l'univers interne et l'interface combinent des effets générateurs et des phénomènes non intrinsèques aux entités représentées* (ibid., p.16)
C'est sur cette *transparence* que nous allons rebondir pour définir un concept d'Artigue en section suivante.

3.4 Le concept de pseudo-transparence

Artigue (1997) définit le concept de pseudo-transparence comme un *phénomène qui renvoie à des décalages dans les modes de représentation (interne et à l'interface) des objets*. Ce chercheur souligne que même si les phénomènes peuvent sembler minimes, ils perturbent le fonctionnement didactique. Pour exemplifier ce phénomène de *pseudo-transparence*, prenons le cas de l'écriture des expressions algébriques sur support informatisé et considérons la tâche t : *entrer l'expression* $\frac{x+4}{x-7}$ *(1) dans un logiciel ou une calculatrice*, pour ensuite la traiter.

Jean (2000) propose une classification des différentes écritures pouvant représenter cette fraction :

- l'écriture linéaire parenthésée, comme par exemple celle obtenue par une calculatrice actuelle de type collège ou encore un tableur, où la disposition spatiale de l'expression (1) n'apparaît pas ;



On a nommé x la case A1. Dans la case B1, on a entré l'expression (1) ci-dessus.
Lorsque x =8, l'expression (1) vaut 12.

Figure 6 : Exemple de phénomène de pseudo-transparence sur tableur (écriture linéaire parenthésée non spatialisée)

- l'écriture linéaire parenthésée donnant lieu à un affichage sous forme spatiale, comme par exemple celle obtenue par une calculatrice actuelle comportant un module de calcul formel de type Dérive. Ici, l'expression est entrée sous forme linéaire parenthésée (écran de gauche) et affichée sous forme spatiale (écran de droite) ;

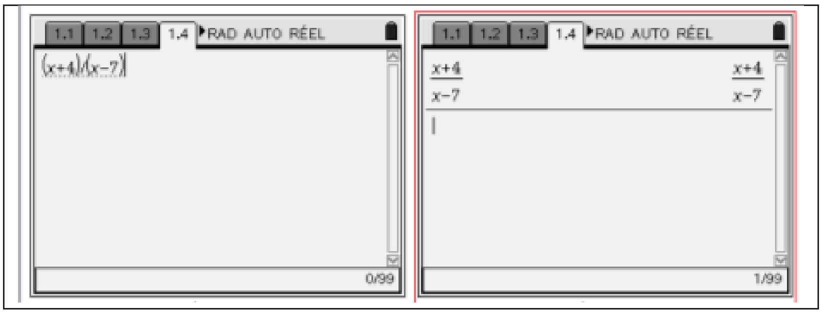


Figure 7 : Exemple de phénomène de pseudo-transparence sur calculatrice Texas instruments TI-Nspire (écriture linéaire parenthésée spatialisée)

- l'écriture directement sous forme spatiale, donnée par exemple par le logiciel Aplusix[57]. Dans ce troisième cas, l'écriture est entrée directement sous forme spatiale. Un clavier virtuel permet de choisir, entre autres, la forme souhaitée de l'expression. Si la forme « quotient » entourée ci-dessous est sélectionnée, elle apparaît à l'écran et il reste à compléter les espacements déterminés pour entrer les valeurs numériques ou les expressions algébriques du numérateur et du dénominateur, comme ci-dessous :

[57] Aplusix est développé par le Laboratoire d'Informatique de Grenoble. Il se présente comme un logiciel pour aider les élèves à apprendre l'arithmétique et l'algèbre.

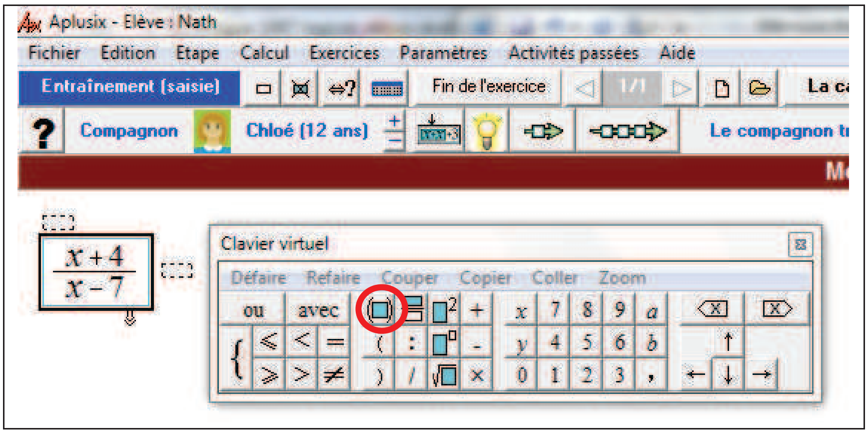


Figure 8 : Exemple d'écriture spatiale sur le logiciel Aplusix

Dans les deux premiers cas, il n'y a pas *transparence* entre l'affichage de l'écriture de l'expression (1) dans le tableur ou sur la calculatrice et la forme spatiale obtenue en environnement papier-crayon. Il est nécessaire d'adapter l'expression, de la *transposer* pour qu'elle soit comprise par la machine. Il serait facile ici d'incriminer le logiciel considéré et de le considérer perfectible, pour obtenir une interface identique à celle d'Aplusix. Mais Artigue (ibid.) considère que le problème est plus vaste :

> Dans beaucoup de situations, des choix habiles peuvent minimiser les perturbations liées aux phénomènes de pseudo-transparence, certes le logiciel peut être amélioré, mais ceci ne modifie en rien le problème fondamental qui est celui de la coexistence au sein d'une même situation de deux espaces de transposition proches mais distincts et des effets incontournables de cette coexistence. (p. 151)

En effet, ces éléments, au départ considérés comme des parasites qu'il faut éviter ou minimiser, peuvent se révéler exploitables. Ainsi selon Artigue, cette *pseudo-transparence* ne doit pas être vue comme un phénomène négatif, même s'ils *peuvent détourner l'attention de l'élève des problèmes dont la résolution est visée* (ibid., p.163). La confrontation des deux environnements papier-crayon et informatique peut s'avérer bénéfique pour une compréhension approfondie de concepts, en exhibant des techniques ou des technologies différentes. Par exemple pour les trois cas présentés ci-dessus, à la même tâche t, la technique associée à chacun des trois cas est différente et ne relève pas d'un même *logos*, au sens de Chevallard. Dans les premier et second cas, la technique τ consiste à transformer une écriture spatiale en une linéarisation et un parenthésage des expressions. La technologie associée en est la connaissance des règles de priorité des opérations, ajoutée à la connaissance des opérations usuelles. Dans le troisième cas, la technique τ' est plus proche des gestes familiers de l'environnement papier-crayon habituel des élèves. Ici la connaissance des règles de priorité des opérations n'est plus nécessaire et la technologie associée se réduit à la connaissance des opérations usuelles. L'effectuation de la tâche T dans les deux environnements permet de questionner les objets manipulés, alors qu'ils étaient considérés comme « naturalisés » en environnement papier-crayon seul.

Il existe ainsi une *distance* entre les connaissances en environnement papier-crayon et celles mises en œuvre en environnement informatisé. Cette notion de distance est explicitée dans la section suivante.

3.5 La notion de distance instrumentale

Toujours dans l'objectif de penser les questions d'intégration d'artefacts informatiques à l'enseignement, Haspekian (2005) introduit la notion de *distance instrumentale*. De manière générale, pour un *artefact informatisé* (calculatrice, logiciel dédié, tableur, etc.) utilisé pour enseigner des mathématiques, la *distance instrumentale* résulte de différents facteurs dont au moins les deux suivants (Artigue et Haspekian, 2007) :

- la *transposition informatique*, au sens de Balacheff, définie ci-dessus ;
- la *légitimité institutionnelle* et *culturelle* conférée par les programmes officiels de l'Éducation Nationale et par le statut épistémologique de l'instrument.

Pour le premier point, nous avons vu que la transposition informatique est génératrice de distance, dans le sens d'une plus ou moins grande *transparence* des objets définis dans les deux environnements, papier-crayon et informatique. Haspekian (2005) étudie comment débuter l'apprentissage de l'algèbre élémentaire au collège en utilisant le tableur et met au jour une première source de *distance*, en la question de la dénomination des concepts algébriques, où les objets algébriques basiques se présentent pour le tableur en termes de *variables* ou de *formules*, alors que les objets mathématiques associés sont plutôt des inconnues et des équations. Mais beaucoup plus qu'une affaire de langage, c'est la représentation des objets qui est différente. Haspekian (2005) indique alors le rôle important que va jouer l'enseignant qui, *s'appuyant* sur les différences des représentations mathématiques des objets dans les deux environnements, aura la charge de *faire « coller »* ces deux représentations ou au contraire de mettre en avant leurs différences, et de dégager ainsi les objets mathématiques visés. Cette mise en relation n'est pas seulement une source de difficultés supplémentaires à l'apprentissage d'un concept mathématique, mais peut permettre au contraire un enrichissement des concepts mathématiques en jeu. En particulier, Artigue et Haspekian (2007) mentionnent le cas de logiciels de géométrie dynamique où la distance instrumentale peut être *mathématiquement productive* (p.51). Ces auteurs indiquent que d'une part, le vocabulaire utilisé dans ces logiciels est très proche du vocabulaire scolaire habituel et d'autre part que *les caractéristiques dynamiques données aux représentations les rapprochent des objets mathématiques auxquels elles sont associées*. Par exemple, pour la notion de *figure*, ces deux auteurs indiquent que l'accès à ce concept nécessite, dans sa représentation traditionnelle en environnement papier-crayon, une multitude de dessins, alors qu'en déplaçant les éléments libres d'un unique dessin tracé à l'écran de l'ordinateur avec un logiciel de géométrie dynamique, les invariants apparaissent et par suite, les propriétés géométriques d'une figure donnée. Ceci est d'autant plus vrai que la multitude de dessins qu'il est possible d'effectuer à la main en papier-crayon est chronophage et que nous nous contentons en général d'un seul dessin qui résume toutes les propriétés inhérentes à la figure. Ainsi la *distance instrumentale* créée ici permet de mieux approcher le concept de figure qu'en environnement papier-crayon. Laborde (2003) montre également l'intégration privilégiée des logiciels de géométrie dynamique par rapport aux autres logiciels : elle met en avant que pour être accepté et utilisé dans l'institution scolaire, un environnement informatique doit nécessairement être *distant* des environnements traditionnels. Si la distance est trop faible avec un environnement traditionnel en papier-crayon, les enseignants risquent

de ne pas percevoir la nécessité de transformer ou de revisiter leur enseignement, et également si la distance est trop grande, l'adaptation de leurs scénarios didactiques peut leur sembler trop coûteuse.
Pour le second point, la distance instrumentale est consécutive de la *considération des normes et valeurs de la culture de référence* (Artigue et Haspekian, 2007). Pour exemplifier, Artigue et Haspekian donne l'exemple d'un système de calcul formel (noté CAS[58] dans la suite) qu'elles comparent au tableur. Ces deux artefacts sont issus de milieux professionnels : les CAS ont été développés pour les besoins de calculs des scientifiques, le tableur l'a été pour satisfaire ceux des comptables. Pour ces deux auteurs, la *légitimité* des artefacts issus de milieux professionnels est plus problématique que ceux, comme les logiciels de géométrie dynamique, à visée éducative. Les CAS peuvent sembler a priori plus proches de la culture algébrique traditionnelle, puisque sont manipulées formellement les expressions algébriques, alors que le tableur est conçu au départ pour gérer des tableaux de nombres et ne permet pas de calculs formels. Cependant, la proximité n'est pas forcément un critère à retenir pour légitimer un artefact, comme le disent Artigue et Haspekian (ibid.) :

> Mais la proximité ne rend pas forcément ici la légitimité plus aisée car ce que vise l'enseignement, ce n'est pas une pratique instrumentée efficace, mais l'aide de pratiques instrumentées à un apprentissage dont les valeurs sont définies essentiellement hors de l'instrument. (p.58)

Ainsi la notion de *distance instrumentale* tient-elle compte de la légitimité à la fois institutionnelle et culturelle de l'artefact. D'autre part, cette légitimité s'acquiert également par le *statut épistémologique* conféré à celui-ci. Citons Haspekian (2005) pour expliciter ce point :

> Le statut épistémologique de l'outil est intrinsèquement lié à la création de problèmes qu'il engendre. La règle et le compas, comme le souligne Chevallard (1992a), *« loin d'être des pièces rapportées au sein de l'ordre didactique (...) en sont, comme on sait, des éléments fondateurs. »* des mathématiques, et, surtout, ils sont perçus comme tels par les enseignants. […] Cette question, qui peut se poser pour tout nouvel outil en mathématiques, est à prendre en considération lorsqu'on s'interroge sur la facilité ou non d'intégration de l'outil en question : crée-t-il de nouveaux problèmes mathématiques, si oui lesquels ? (p. 295-296)

Un *statut épistémologique* mais également *didactique* est nécessaire à l'existence pérenne d'un artefact, pour qu'il puisse vivre dans l'institution scolaire et être *légitimé*. Chevallard écrivait déjà en 1992 :

> C'est une condition nécessaire à l'existence pérenne d'un objet technique, à l'intérieur d'un type donné de systèmes didactiques, qu'il s'y voie conférer un statut épistémologique et didactique déterminé, compatible avec l'ensemble du fonctionnement didactique. Si l'arrivée d'un nouvel objet technique modifie clairement le milieu didactique, elle pose, plus secrètement mais de manière non moins certaine, le problème de l'intégration fonctionnelle de cet objet au système didactique. [...] Or, si un statut ne [lui] est pas rapidement donné en tant qu'élément entrant dans la relation didactique à propos

[58] L'expression CAS signifie « *Computer Algebra Systems* » que l'on peut traduire par *système de calcul formel* et se rapporte à tout logiciel du type Mathematica, Matlab, Maple, XCAS ainsi que les systèmes de type Derive implantés sur les calculatrices formelles comme la TI-89 ou plus récemment la TI-Nspire. En France, on utilise aussi l'abréviation SCF : *Système de Calcul Formel.*

> du savoir enseigné, il se trouvera vite marginalisé, privé d'existence épistémologique et didactique d'abord, puis matériellement relégué. (Chevallard, 1992a, p.1-2)

Pour conclure, la notion de *distance instrumentale* s'inscrit dans différents niveaux de l'échelle des niveaux de codétermination didactique de Chevallard (2002). Nous la retrouvons au niveau sociétal et de l'École, où une forte injonction est faite d'intégrer les TIC à l'enseignement, ces nouvelles technologies étant déclarées *nécessaires à l'insertion sociale et professionnelle* (MEN, 2008a). Nous la situons également au niveau des disciplines où les programmes officiels réclament leur utilisation en leur sein (en particulier en mathématiques, sciences expérimentales, technologie, mais aussi pour les disciplines littéraires). Enfin pour le cas des mathématiques, la distance instrumentale va intervenir au niveau des domaines d'études et dans les niveaux inférieurs, si nous considérons les nouvelles praxéologies instrumentées qui vont être développées à côté des praxéologies existantes en environnement traditionnel papier-crayon. Ainsi, la distance instrumentale « mesure » les décalages introduits par l'artefact informatique dans l'enseignement traditionnel.

3.6 Les travaux de recherche sur les CAS pour l'enseignement de l'algèbre

À ce jour, de nombreuses recherches ont été faites sur les environnements informatiques pour l'enseignement/apprentissage de l'algèbre. Ce domaine, en effet, intéresse d'une part les informaticiens, en raison du caractère formel du langage algébrique qui se prête aux modélisations, et d'autre part, les chercheurs en didactique des mathématiques et en sciences de l'éducation, puisque l'algèbre représente un *verrou d'entrée dans l'enseignement supérieur scientifique et son enseignement et son apprentissage sont des enjeux sociaux de première importance.* (Nicaud et al., 2002). Notre objectif est de présenter brièvement quelques résultats des recherches entreprises à propos des CAS, dans la mesure où celles-ci font écho à l'objet de notre recherche, à savoir l'introduction d'une part d'algorithmique dans l'enseignement/apprentissage de concepts algébriques. Nous nous limitons volontairement à ces systèmes de calcul formel, implantés dans les calculatrices symboliques ou des logiciels dédiés comme Aplusix, qui permettent d'*instrumenter* les calculs algébriques élémentaires.

Les environnements CAS sont utilisés maintenant depuis près de deux décennies dans les cursus scolaires de différents pays et ont été légitimés par les programmes scolaires. Cuoco et Goldenberg (2003) qualifient d'*optimisme naïf* la période qui a suivi l'apparition des CAS, quand des éducateurs ont proclamé la fin de l'apprentissage du calcul algébrique papier-crayon, avançant des arguments comme : « si la machine peut le faire, pourquoi l'enseigner ? » et que le règne des pages de factorisation, de simplification et de résolution d'équations était achevé. Les deux auteurs précités expliquent que cette première période est aujourd'hui révolue et que cet optimisme exalté a évolué en quelque chose de beaucoup plus modeste : les environnements CAS prennent peu à peu leur place aux côtés de l'enseignement traditionnel du calcul algébrique (et fonctionnel) comme *renforcement* plutôt qu'en *remplacement*, mettant en évidence le rôle essentiel que joue l'aisance technique dans la maîtrise de la compréhension des concepts algébriques. Nous retrouvons ici la notion de

distance instrumentale définie en section précédente : pour vivre dans un enseignement, l'outil informatique doit se positionner en complément de l'enseignement traditionnel papier-crayon pour, d'une part être accepté par la noosphère, par les enseignants et les élèves, et d'autre part pour espérer produire une amélioration de l'enseignement/apprentissage.
Artigue (2002) résume en trois points les problèmes de l'intégration des systèmes de calcul automatisé dans l'enseignement des mathématiques :
- *la complexité de la genèse instrumentale* ;
- *les besoins mathématiques de l'instrumentation* ;
- *le statut des techniques instrumentées*, en considérant les problèmes résultant de leur rapport avec les techniques traditionnelles en environnement papier-crayon et leur gestion institutionnelle.

Pour le premier point, Artigue indique que la complexité de genèse instrumentale a été, au départ, largement sous-estimée dans la recherche sur les TICE, comme nous le disons plus haut, en considérant avec un *optimisme naïf* que les outils technologiques numériques étaient des outils pédagogiques. En fait, la genèse instrumentale se construit différemment selon le profil des individus et selon la relation qu'ils ont développée avec les mathématiques. Trouche (2002) recense ainsi cinq profils extrêmes (le théoricien, le rationnel, le bricoleur, l'expérimentateur et le scolaire) où par exemple le *théoricien* privilégie les références à ses connaissances mathématiques plutôt que l'utilisation de l'outil, alors que le *bricoleur* tente des investigations avec l'outil et recherche *à la pêche* [59] (Artigue, 1997) le résultat mathématique attendu. Artigue (2002, p.259) mentionne *la lenteur* et les *détours* pour l'acquisition de la genèse instrumentale, par l'ensemble des élèves. En particulier, elle rapporte les résultats expérimentaux de plusieurs études sur les CAS [60] qui montrent que l'instrumentation se produit en fonction de la familiarité qu'ont les élèves avec les concepts mathématiques en jeu. Elbaz-Vincent (2002) arrive à des conclusions similaires, ayant travaillé avec des étudiants de l'enseignement supérieur sur Maple : « *ce que l'on oublie, [...], c'est que même avec un CAS, pour comprendre le succès ou l'échec d'un calcul, il faut bien souvent se représenter algorithmiquement le calcul dans sa tête* ». Plus un concept est nouveau et plus les élèves sont réticents à utiliser des fonctionnalités avancées de leur outil, comme si la genèse instrumentale *suivait* les connaissances mathématiques et non les *précédait*.

Le deuxième point, *les besoins mathématiques de l'instrumentation* sont composés, entre autres, de connaissances mathématiques qui ne font pas partie du cursus de l'enseignement secondaire standard et qui sont inhérentes aux environnements informatiques. Artigue donne les exemples suivants :

---

[59] Artigue (1997) nomme le phénomène de pêche celui qui consiste à *faire des essais, sans se préoccuper de leur organisation ou de leur contrôle, en espérant qu'en un temps raisonnable, on obtiendra quelque chose d'intéressant*. (p.162)

[60] Artigue mentionne les travaux de Trouche et de Defouad sur les calculatrices formelles TI-92 (Texas Instruments) :
Defouad, B. (2000). *Etude de genèses instrumentales liées à l'utilisation d'une calculatrice symbolique en classe de première S*. Thèse de doctorat, Université Paris 7.
Trouche, L. (1997). *A propos de l'apprentissage de fonctions dans un environnement de calculatrices, étude des rapports entre processus de conceptualisation et processus d'instrumentation*. Thèse de doctorat, Université de Montpellier.

- dans le domaine fonctionnel, des graphes de fonctions qui subissent des phénomènes de discrétisation ;
- dans le domaine algébrique des expressions algébriques qui ne possèdent pas une syntaxe identique à la formule entrée « à la main » dans la calculatrice, en raison des représentations internes et des algorithmes de la machine (cf. figure 9, à gauche) ;
- dans le domaine numérique, la connaissance de la nature des nombres nécessaire pour comprendre les différents affichages en valeurs exactes et valeurs approchées (cf. figure 9, à droite).

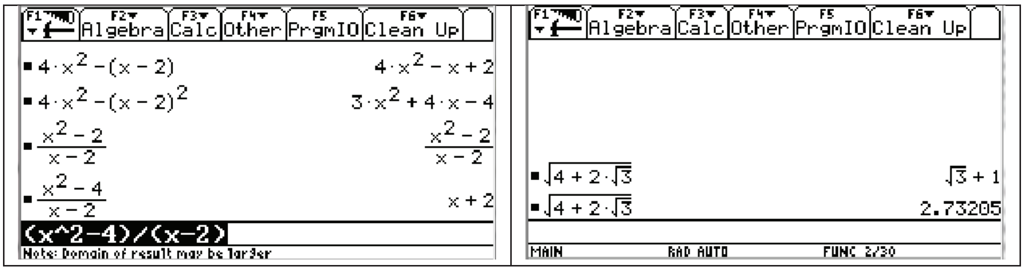


Figure 9 : Exemple de simplification automatique des expressions algébriques et numériques, valeurs exactes et valeurs approchées sur calculatrice Texas instruments Voyage 200

Ceci amène au troisième point, le *statut* des techniques instrumentées et les façons dont ce statut pourrait influencer les genèses instrumentales. Pour expliquer ce point, Artigue (ibid.) fait un parallèle intéressant avec la technique de la division euclidienne obtenue en environnement papier-crayon et à l'aide d'une calculatrice :

> At a more elementary level, through the iteration of the division process, pupils can understand very early why the decimal expansion of a rational number is necessarily periodic. The use of a calculator, which gives the beginning of the decimal expansion of any rational number instantaneously, and in most simple cases allows the student to conjecture about both the periodicity and the actual period, no longer has the epistemic value of the paper & pencil gesture. (p.260)[61]

Ainsi, en général, s'il est facile de reconnaître une *valeur pragmatique* à une technique instrumentée, il est plus difficile de lui reconnaître une *valeur épistémique*. Dans un environnement informatique, l'enseignement associe les deux types de techniques, papier-crayon et instrumentée et Artigue (ibid.) indique que le statut institutionnel des techniques va dépendre des valeurs qui lui sont attribuées. Ces idées sont liées à la notion de *distance instrumentale* évoquée plus haut.

[61] À un niveau plus élémentaire, par l'itération du processus de division, les élèves peuvent comprendre très tôt pourquoi l'expansion décimale d'un nombre raisonnable est nécessairement périodique. L'utilisation d'une calculatrice, qui donne le début de l'expansion décimale de n'importe quel nombre raisonnable instantanément, et, dans la plupart des cas simples, permet à l'étudiant de conjecturer à la fois la périodicité et la période réelle, n'a cependant plus la valeur épistémique du geste en papier-crayon.

3.7 Retour sur le thème d'étude

Étant donné que nous allons introduire, dans le cadre de cette recherche, la programmation effective d'algorithmes réalisés sur des problèmes algébriques, les concepts définis précédemment restent pertinents, bien qu'ils n'aient pas été définis par rapport à cette utilisation. Prenons un exemple, qui porte sur la tâche de simplification d'une racine carrée, où il est demandé de déterminer la racine d'un nombre entier naturel *N*, sous la forme $a\sqrt{b}$ où *a* et *b* sont des entiers et où *b* est le plus petit possible. En utilisant un système CAS, la détermination de quelques valeurs numériques donne, par exemple ci-dessous :

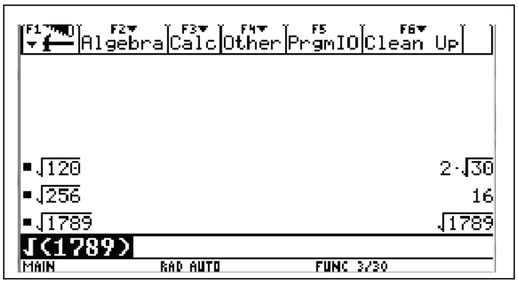


Figure 10 : Exemple de simplification automatique des racines carrées sur calculatrice Texas instruments Voyage 200

La calculatrice fonctionne ici comme une *boîte noire* (Canet, 1994), et obtenir le résultat se résume par une activité « presse-bouton » pour celui qui l'exécute, où ce qui est affiché à la droite de l'écran de la figure 10 s'obtient en appuyant simplement sur la touche « entrée » de la calculatrice. Rien ne permet de déterminer, par les ostensifs de la calculatrice, les techniques et technologies associées à cette tâche. En revanche, la considération de cette même tâche dans un environnement algorithmique est toute autre : elle s'apparente à un *problème*, dans le sens où c'est une *situation dans laquelle il faut découvrir des relations, développer des activités d'exploration, d'hypothèse et de vérification, pour produire une solution* (Vergnaud, 1986b, p.22). La tâche *presse-bouton* de l'environnement CAS, qui est une tâche numérique, devient dans l'environnement algorithmique une tâche algébrique, où entrent en jeu de multiples concepts mathématiques et algorithmiques[62]. La figure ci-dessous donne une résolution possible de ce problème.

[62] Cette tâche est proposée, à l'IUFM de Montpellier, aux étudiants du Master pour l'enseignement des mathématiques et préparant le CAPES de mathématiques, dans le cadre de leur formation en algorithmique.

Soit N un entier naturel. Pour chaque entier I compris entre 1 et Ent($\sqrt{N}$) : - Tester si la division de N par I^2 donne un reste nul ; - Si c'est le cas, affecter à a la valeur de I ; - Si ce n'est pas le cas, passer à la valeur suivante de I. Calculer la valeur de b : N/a^2 Afficher racine(N) = a*racine(b)	VARIABLES N EST_DU_TYPE NOMBRE I EST_DU_TYPE NOMBRE a EST_DU_TYPE NOMBRE b EST_DU_TYPE NOMBRE DEBUT_ALGORITHME LIRE N POUR I ALLANT_DE 1 A floor(sqrt(N)) DEBUT_POUR SI (N%(I*I)==0) ALORS DEBUT_SI a PREND_LA_VALEUR I FIN_SI FIN_POUR b PREND_LA_VALEUR N/(a*a) AFFICHER a AFFICHER "*racine(" AFFICHER b AFFICHER ")" FIN_ALGORITHME	N = 120 ***Algorithme lancé*** 2*racine(30) ***Algorithme terminé*** N = 256 ***Algorithme lancé*** 16*racine(1) ***Algorithme terminé*** N = 1789 ***Algorithme lancé*** 1*racine(1789) ***Algorithme terminé***
Algorithme de simplification de $\sqrt{N}$ sous la forme $a\sqrt{b}$ où $(a, b) \in N^2$ et où b est le plus petit possible.	*Programme correspondant à l'algorithme ci-contre sous Algobox*	*Résultats obtenus par le programme pour trois valeurs particulières de N*

Figure 11 : Exemple de simplification des racines carrées sur le logiciel Algobox (cf. annexe A9)

Les tâches de construction de cet algorithme et de ce programme reposent sur l'existence des valeurs a et b comme indiquée dans la démonstration suivante :

- Si N est un carré parfait, il existe a entier tel que $N = a^2$ et par suite :$\sqrt{N} = a\sqrt{1}$;
- Si N n'est pas un carré parfait, il existe un plus grand carré parfait a qui divise N (au pire $a = 1$). Alors $N = a^2b$ et $\sqrt{N} = a\sqrt{b}$. Si a est le plus grand possible, b sera le plus petit possible.

Concevoir un programme de simplification des racines carrées permet donc de comprendre comment peut fonctionner, en partie, l'*intérieur* d'une calculatrice formelle. Ceci contribue à démystifier l'aspect *boîte noire* de celle-ci et à faire ressurgir à la surface de la connaissance la partie invisible de l'iceberg. C'est de plus l'occasion de convoquer des concepts mathématiques, comme ici, le carré, la racine carrée, les propriétés de ces objets, le concept de plus grand et de plus petit élément, celui de diviseur d'un nombre et aussi de nature d'un nombre (valeur exacte, partie entière, …).

Ainsi, la tâche de simplification d'une racine carrée est-elle fondamentalement différente si elle est effectuée dans un système CAS ou dans un environnement algorithmique où le programme est à concevoir soi-même. Nous allons utiliser les concepts présentés dans ce chapitre par la suite, puisque l'introduction de la programmation nécessite un environnement informatisé et qu'il y aura donc une *transposition informatique* à considérer sur les tâches algébriques à effectuer.

De même que pour un environnement CAS, côté élève, nous considèrerons comment celui-ci construit sa propre *genèse instrumentale* du logiciel de programmation, quels impacts ce nouvel instrument produit sur sa représentation des concepts algébriques et dans quelle mesure les phénomènes de *pseudo-transparence* sont un frein à sa compréhension, à la fois de l'algèbre et de l'algorithmique.

Côté enseignant, nous nous intéresserons à la gestion de celui-ci de l'*instrumentation* et à sa considération de la *distance instrumentale* créée par l'algorithmique dans l'apprentissage de concepts algébriques.

CHAPITRE 4 - CADRE DIDACTIQUE DE L'ALGORITHMIQUE

Dans ce chapitre, après avoir introduit un exemple ancien d'algorithme ayant trait à la résolution d'équations, nous nous proposons de définir l'*algorithmique* que son développement, ces dernières années, incite à considérer comme une science propre. À l'instar de Modeste (2012, p.11) qui place cette science nouvelle à l'intersection des mathématiques et de l'informatique, nous définissons également l'objet *algorithme*, tentant de situer les notions inhérentes à ce concept, soit dans le domaine des mathématiques, soit dans celui de l'informatique. Ces définitions posées, nous abordons les préconisations de la noosphère au sujet de l'algorithmique dans l'enseignement des mathématiques et nous en définissons les conditions et les contraintes. Rappelons qu'une part d'algorithmique est introduite dans les programmes du lycée français dès la classe de seconde depuis 2009.

4.1 Un premier algorithme

Cette introduction a pour but de montrer le lien historique et épistémologique qu'entretient l'algèbre avec la notion d'algorithme. D'un point de vue étymologique, le terme *algorithme* vient du nom du mathématicien, astronome et philosophe persan Muhamad Ibn Musa Al-Khawarizmi (780 - 850, Bagdad), parfois aussi surnommé le père de l'algèbre. Ce dernier a en effet écrit un traité d'algèbre intitulé *Al-Kitab al mukhtasar hisab al-jabr wa'l-muqabala* que l'on peut traduire par *Abrégé du calcul par la restauration et la comparaison*[63]. Dans cet ouvrage, la première partie est consacrée à la classification des équations polynomiales du premier et du second degré, et à leur résolution. Al-Khawarizmi y décrit étape par étape des procédés de calcul à suivre pour résoudre des problèmes ramenés à des équations. Suit un extrait de ce traité, donné dans le texte originel, présentant un algorithme de résolution de l'équation : $x^2 + 10x = 39$.

[63] La traduction du titre de cet ouvrage est proposée sur le site des IREM : http://www.univ-irem.fr/commissions/epistemologie/ressouces/ress.ext/grands%20textes/alkhwarismi.htm Une autre traduction donnée dans le document Ressources pour la classe de seconde en Algorithmique (MEN, 2009c) est : *Abrégé de calcul par la complétion et la simplification*.

فأما الأموال والجذور التى تعدل العدد فمثل قولك
مال وعشرة أجذاره يعدل تسعة وثلاثين درهما ومعناه أى مال اذا زدت عليه مثل
عشرة أجذاره بلغ ذلك كله تسعة وثلاثين . فبابه(٢) أن تنصف الأجذار وهى فى
هذه المسئلة خمسة فتضربها فى مثلها فتكون خمسة وعشرين فتزيدها على التسعة
والثلاثين فتكون أربعة وستين فتأخذ جذرها وهو ثمانية فتنقص منه نصف
الأجذار هو خمسة فيبقى ثلاثة وهو جذر المال الذى تريد والمال تسعة .

Figure 12 : Extrait de l'abrégé du calcul par le Jabr et la Muqabala[64], Al-Khawarizmi

Chabert (2010) en propose la traduction suivante :

> Quant aux carrés et aux racines qui égalent le nombre, c'est comme tu dis : un carré et dix de ses racines égalent trente-neuf dirhams. Sa signification est que tout carré, si tu lui ajoutes l'équivalent de dix de ses racines [est tel que] cela atteindra trente-neuf. Son procédé [de résolution] consiste à diviser les racines par deux, et c'est cinq dans ce problème. Tu le multiplies par lui-même et ce sera vingt-cinq. Tu l'ajoutes à trente-neuf. Cela donnera soixante-quatre. Tu prends alors sa racine carrée qui est huit et tu retranches la moitié [du nombre] des racines et c'est cinq. Il reste trois et c'est la racine du carré que tu cherches et le carré est neuf (p.3).

Si nous suivons pas à pas l'algorithme ci-dessus, en utilisant le langage et le symbolisme algébrique contemporain, nous obtenons les étapes suivantes :

$$x^2 + 10x = 39$$
$$x^2 + 2 \times 5x = 39$$
$$x^2 + 2 \times 5x + 25 = 39 + 25$$
$$x^2 + 2 \times 5x + 25 = 64$$
$$(x + 5)^2 = 8^2$$
$$x + 5 = 8$$
$$x = 8 - 5$$
$$x = 3$$

Nous remarquons que ce procédé ne tient pas compte de la solution négative de l'équation, les nombres négatifs n'étant pas considérés à cette époque. D'autre part, l'algorithme est ici exposé sur un exemple, qui a valeur d'exemple générique, au sens de Balacheff (1994), c'est-à-dire que l'équation est ici de la forme $x^2 + ax = b$, où a et b sont deux nombres positifs. Il serait tout aussi aisé de remplacer $a = 10$ et $b = 39$ par d'autres valeurs positives et l'algorithme s'appliquerait de la même manière. D'ailleurs, dans la traduction donnée ci-dessus, nous relevons : « *Son procédé [de résolution] consiste à diviser les racines par deux, et c'est cinq dans ce problème* ». L'expression semble signifier que dans un problème analogue, *cinq* pourrait être remplacé par une autre valeur. Bien qu'Al-Khawarizmi ne franchisse pas le stade de l'exemple générique, la description donnée ci-dessus possède bien les caractéristiques fondamentales d'un algorithme, à savoir que ce procédé de calcul permet de résoudre toute une famille d'équations à paramètres positifs. Cette idée d'algorithmiser la résolution des équations polynomiales a été retenue pour la suite de ce travail. Nous tentons de donner dans la section suivante une définition plus précise d'un algorithme.

[64] Chabert (2010) : d'après l'édition arabe de A.M. Mashrafa et M.M. Ahmad, Le Caire, 1968, p. 18-19

4.2 Définitions d'un algorithme

Nous avons vu un exemple d'algorithme dans le domaine algébrique, situé dans les années 800. Bien que la notion d'algorithme soit mise en valeur actuellement avec son ancrage dans l'informatique, elle est très est ancienne et étroitement rattachée aux mathématiques. Il est de tradition de citer les règles servant au calcul de l'impôt des babyloniens (vers 1800 avant JC), la méthode d'Euclide de calcul du plus grand diviseur commun de deux nombres par soustractions successives (vers 300 avant JC) ou encore à la même époque, le crible d'Ératosthène permettant de déterminer la liste des premiers nombres premiers.
Il est donc indéniable que le concept d'algorithme existait avant qu'un terme particulier ne le dénomme. Les premières apparitions de termes proches du mot *algorithme* se trouvent dans les traités latins du Moyen-âge sous l'appellation d'*algorisme*, *algorismus* ou *algorithmus* pour désigner les procédés de calcul utilisant le système positionnel (Chabert, 2010).
Nous trouvons, par exemple, au Moyen-Âge, dans le dictionnaire Godefroy[65], l'orthographe et la définition suivantes :

> Algorisme ou augorisme : art du calcul, arithmétique avec les chiffres arabes.

Plus tard, au XVIII^e^ siècle, l'Encyclopédie de d'Alembert et Diderot[66] en donne la définition ci-dessous :

> Terme arabe, employé par quelques auteurs, et singulièrement par les espagnols, pour signifier la pratique de l'algèbre. Il se prend aussi quelquefois pour l'arithmétique par chiffres. L'algorithme, selon la force du mot, signifie proprement *l'art de supputer avec justesse et facilité* [...].

Enfin aujourd'hui, on aboutit à plusieurs définitions analogues, par exemple, celle donnée par l'Encyclopédie Universalis :

> Un algorithme est une suite finie de règles à appliquer dans un ordre déterminé à un nombre fini de données pour arriver, en un nombre fini d'étapes, à un certain résultat, et cela indépendamment des données.

Cette définition est suffisante pour déclarer si un processus donné est un algorithme ou non. Cependant, l'apparition à la fois des « machines à calculer » (Babbage, vers 1820) et le début des travaux de Hilbert, Gödel et Church (vers 1930) sur les fondements logiques des mathématiques vont induire une évolution de cette définition. Au cours du temps, la notion d'algorithme va se préciser, se détachant de termes plus génériques comme procédé, règle, méthode ou technique et aboutir peu à peu au passage de la *notion* d'algorithme à celle de *concept* d'algorithme. La différence réside dans le fait que la *notion* prend plutôt *sa signification par référence à la résolution de certains problèmes*, alors que *la signification d'un concept réside dans la mise en relation avec d'autres concepts d'une théorie, ici mathématique* (Chabert, 2010, p.506).

---

[65] Dictionnaire de l'ancienne langue française et de tous ses dialectes du IX^e^ au XV^e^ siècle, Frédéric Godefroy, 1880-1895. Consultable sur le site : http://www.micmap.org/dicfro/introduction/dictionnaire-godefroy
[66] Encyclopédie de d'Alembert et Diderot. Consultable sur le site : http://encyclopedie.uchicago.edu/

Nous choisissons d'adopter la définition donnée par Modeste (2012) pour sa complétude et sa précision :

> Un algorithme est une procédure de résolution de problème, s'appliquant à une famille d'instances du problème et produisant, en un nombre fini d'étapes constructives, effectives, non-ambigües et organisées, la réponse au problème pour toute instance de cette famille. (p.25)

Reprenons les termes de la phrase ci-dessus un à un, afin d'en expliciter précisément le sens.
- Tout d'abord, il semble essentiel de commencer par la fonction d'un algorithme, définie ici par les termes « *résolution d'une famille d'instances d'un problème* ». Un algorithme sert à décrire les étapes de la résolution d'un problème, mais ce problème est à comprendre non pas comme une *tâche* mathématique à accomplir mais comme tout un *type de tâches*, au sens de Chevallard. C'est ce que Modeste nomme ici la *famille d'instances d'un problème.*
- L'expression « *nombre fini d'étapes* » renvoie à la *décidabilité* d'un problème et la *calculabilité*[67] d'une fonction. Avec l'arrivée de l'informatique, une notion essentielle est mise en avant dans la définition ci-dessus : celle de *finitude*. Pour définir brièvement ces concepts, on peut dire qu'une classe de problèmes est *indécidable* s'il est démontré de façon absolue et définitive qu'ils ne peuvent être résolus par un procédé général de calcul fini. Par exemple, le dixième problème de Hilbert (formulé au Congrès International des Mathématiciens de Paris en 1900), qui se réfère implicitement à la notion d'algorithme, porte sur la recherche d'une méthode générale indiquant quelles équations diophantiennes ont des solutions et lesquelles n'en n'ont pas. Matijasevic a montré en 1970 que ce problème fait partie de la classe des problèmes indécidables algorithmiquement, c'est-à-dire qu'il n'existe aucun algorithme qui indique, pour toute équation diophantienne, si elle admet des solutions ou non. D'autre part, une fonction est dite *calculable* si elle peut être décrite d'une façon finie qui permet effectivement d'en calculer toutes les valeurs. Une fonction calculable peut donc être décrite par un algorithme. La *finitude* recouvre deux concepts : celui de la finitude du nombre de données et du nombre d'opérations à effectuer et celui de la finitude de la résolution, c'est-à-dire que le processus doit pouvoir être réalisé en un nombre fini d'étapes (ce qui n'est pas le cas par exemple pour la division décimale de deux nombres entiers dont le quotient est un nombre rationnel non décimal). Ce dernier concept de finitude est aussi nommé *procédé effectif*, c'est-à-dire permettant d'obtenir directement le résultat en un temps fini (Chabert, 2010) et renvoie au terme « *étapes effectives* » de la définition de Modeste.
À ces notions de *calculabilité* et de *décidabilité* s'ajoute celle de *complexité*, notion permettant une classification des solutions algorithmiques d'un problème donné, sur la base du nombre d'actions élémentaires nécessaires à leur exécution. La complexité renvoie en partie à la vitesse d'exécution d'un algorithme.
- La formule « *étapes non ambigües* » peut être comprise dans le sens d'un concept d'*indivisibilité* ou dans le sens ce qui est *compréhensible* et *maîtrisé* par l'exécutant. Notons que cet exécutant peut être une personne agissant mécaniquement ou encore une machine, un automate. Il y a donc un impératif absolu dans le fonctionnement d'un algorithme : c'est le rejet de toute ambiguïté. Nous utiliserons dans la suite de ce travail le terme d' « *action*

[67] Ces concepts ont été développés dans les années 1930 avec les travaux d'Hilbert, de Gödel, de Church et de Turing. Ils sont au carrefour de la logique mathématique et de l'informatique théorique.

élémentaire » pour désigner chacune de ces étapes indivisibles. Pour exemplifier, ces actions élémentaires peuvent s'adresser à un élève qui effectue l'addition posée de deux nombres entiers naturels rang par rang ou bien à la machine qui lave le linge en suivant le programme qui a été lancé. Leur compréhension implique un processus qui s'exécute pas à pas et où l'action à chaque pas est strictement déterminée par l'algorithme, les données d'entrée et les résultats obtenus dans les étapes précédentes.
- Le terme « *étapes organisées* » précise que l'algorithme n'est plus le même ou ne fonctionne plus si on intervertit des actions élémentaires. En effet l'algorithme décrit de façon statique, un enchaînement dynamique d'un ensemble structuré et ordonné d'actions élémentaires. Chaque action primitive, appliquée à une donnée déterminée, permet d'aboutir à un résultat déterminé. Cette *séquentialité* dans le temps est la structure de base de l'algorithme.
- La fin de la définition, « *produire la réponse à toute instance de la famille* » renvoie aux données en entrée et par suite au choix de l'algorithme. Par exemple, pour un problème donné, si la taille des données est faible, le choix d'un algorithme par rapport à un autre importe souvent peu. En revanche, lorsque la taille des données devient grande, le problème de la *complexité* de l'algorithme se pose, comme pour réaliser un tri automatisé de données où plusieurs algorithmes de tri existent. Selon le nombre et le type de données à trier, le temps d'exécution et l'occupation de la place mémoire en machine sont différents. Aussi ces facteurs sont-ils pris en compte dans le choix de l'algorithme.

Même si les explicitations ci-dessus font plusieurs fois référence à une implémentation possible de l'algorithme dans une machine, la définition de Modeste ne mentionne par cette implémentation : un algorithme ne se décrit pas forcément avec un langage de programmation et une simple feuille de papier et un crayon suffisent à en établir un. Un algorithme n'est pas un synonyme de « programme informatique », il est indépendant du langage de programmation informatique utilisé pour l'écrire et l'exécuter. Comme déjà évoqué, c'est une description abstraite des étapes conduisant à la solution d'un problème, au sens d'une classe de problèmes.

Cette dernière précision nous amène à définir l'algorithmique par rapport à celle de la programmation.

4.3 Définition de l'algorithmique

Nguyen (2005) écrit que *l'algorithmique cherche à étudier l'algorithme indépendamment de sa mise en œuvre dans une machine* (p.3) ou encore que l'algorithmique est la *science des algorithmes* (p.2). Considérons la définition donnée par l'Encyclopédie Universalis[68] :

> L'objet de l'algorithmique est la conception, l'évaluation et l'optimisation des méthodes de calcul en mathématiques et en informatique.

L'algorithmique est devenue une science à part entière, située à l'intersection de la logique mathématique et de l'informatique théorique. Pour Chabert (2010, p.534), l'algorithmique est née lorsque l'homme ne s'est plus contenté *de rechercher un algorithme pour* résoudre *un*

[68] Récupéré le 03 mars 2013 du site : http://www.universalis.fr/encyclopedie/algorithmique/#i_90925.

problème particulier, mais lorsqu'il a commencé *à chercher à résoudre les problèmes posés par l'étude générale des algorithmes.* Des objets et des outils formels ou théoriques ont été développés, qui concernent la conception et l'étude des algorithmes. En particulier, nous pouvons citer :

- les *structures algorithmiques* (structures de contrôle et structures de données) pour la conception d'algorithmes ;
- les notions de *preuve d'algorithme* pour l'évaluation d'un algorithme (*c'est-à-dire la démonstration de ce qu'un algorithme se termine bien, tout en ayant répondu à la question demandée*, Chabert, ibid.) ;
- les notions de *complexité* pour la comparaison et l'optimisation des algorithmes (coût d'un algorithme en temps et en espace).

Comme suggéré par Chabert ci-dessus et repris par Modeste (2012), l'algorithmique est en lien étroit avec la résolution de problèmes : la raison d'être d'un algorithme est avant tout de résoudre un problème. Notons que le champ de ces problèmes n'est pas seulement numérique, ni même mathématique. Il existe par exemple des algorithmes génétiques qui cherchent un motif dans une chaîne de caractères, des algorithmes de tri ou des algorithmes de jeux. L'étude de l'algorithmique *s'est particulièrement développée avec la construction des ordinateurs et l'invention des langages de programmation* (Chabert, 2010, p.534) et possède désormais une place dans les systèmes informatiques modernes. L'algorithmique est d'ailleurs enseignée dans les cursus informatiques de l'enseignement supérieur comme une discipline à part entière. Prenons l'exemple notoire de l'École Polytechnique qui propose à ses étudiants un cours nommé « Algorithmique et Programmation » (Potier et Werner, 2013). Dans l'introduction de ce cours, les auteurs spécifient :

> L'objet de l'algorithmique est de comprendre si l'on peut résoudre tel ou tel problème par le calcul, et si oui, de quelle manière, et à quel prix en termes de temps et de mémoire. Cette discipline est essentiellement indépendante du choix d'une machine ou d'un langage de programmation particuliers.
> La programmation consiste plus spécifiquement à exploiter un langage de programmation particulier pour organiser les programmes de façon simple, élégante, et robuste. (p.12)

Ainsi, même si l'algorithmique est à dissocier de la programmation, les deux vont de pair et sont enseignés simultanément.

Nous ne développons pas davantage cette science complexe qu'est devenue l'algorithmique, au carrefour des mathématiques et de l'informatique. Nous nous centrons sur les notions basiques de l'algorithmique, qui seront utilisées dans ce travail. En particulier, nous revenons à la structure d'un algorithme, en différenciant quand c'est possible ce qui relève des mathématiques de ce qui relève de l'informatique. En effet, l'algorithmique ayant pris un réel essor avec l'avancée de l'informatique, il est quelquefois difficile de ne pas faire l'amalgame entre les deux, du moins dans le vocabulaire utilisé.

4.4 Structure d'un algorithme/ d'un programme

Comme vu dans la section 4.2, pour fonctionner, un algorithme doit contenir uniquement des instructions compréhensibles par celui qui doit l'exécuter. C'est le cas, par exemple d'un mode d'emploi pour le montage d'un meuble destiné au grand public où les instructions doivent être suffisamment claires pour être comprises par des personnes de langue différente, ou d'un piano mécanique qui exécute une partition, ou encore d'un algorithme déterminant si un nombre entier est premier. Ces trois exemples montrent *différents aspects d'un même concept*, selon une expression de Modeste et al. (2010). L'expression de l'algorithme peut être dans le premier cas une suite de pictogrammes, sans texte, montrant les différentes étapes de la construction du meuble, dans le second cas une carte perforée et dans le troisième cas une suite d'instructions à respecter, une suite d'étapes mathématiques permettant de résoudre un problème, traduites dans un langage de programmation sur un système informatique. Nous nous restreignons dans la suite de cet exposé aux algorithmes de la dernière catégorie, c'est-à-dire du domaine mathématique que l'on peut implémenter sur une machine.

Les représentations des algorithmes de ce dernier type ont évolué. Historiquement, les premières représentations d'un algorithme se faisaient par un organigramme, ce qui est pratiquement aujourd'hui abandonné, en raison d'une part de la difficulté à le manipuler quand les instructions sont nombreuses et d'autre part, parce qu'il induit une programmation non structurée[69]. C'est pourquoi un algorithme est-il écrit de nos jours, soit dans un langage de programmation ou encore dans un langage intermédiaire, nommé le *pseudo-code*. Ce langage prend en compte quatre catégories d'instructions qu'un ordinateur est capable d'exécuter :

- l'affectation de variables ;
- la lecture/écriture ;
- les tests ;
- les boucles.

Un programme informatique[70] est la combinaison de ces quatre éléments de base, allant de quelques-uns à plusieurs milliers. Le *pseudo-code* ressemble à un langage de programmation qui serait débarrassé de ses problèmes de syntaxe. Il est purement conventionnel et peut, de ce fait, varier d'une personne à une autre. Modeste (2012, p.24) le présente comme *un langage intermédiaire, inspiré des instructions des langages informatiques mais libéré de certaines contraintes et manipulant directement les objets mathématiques*.

Un premier exemple : test de primalité d'un entier

Pour comprendre ce langage intermédiaire, donnons un exemple d'une propriété mathématique qui peut s'écrire sous la forme d'un algorithme destiné à un humain et sa

[69] La programmation structurée consiste à utiliser des structures de contrôle (répétitives ou alternatives) standardisées qui permettent d'écrire un code plus clair et plus simple. Définition consultée sur le site : http://www.lexique-informatique.com/P/programmation_structureace.html

[70] Les programmes considérés ici sont en style *impératif* (Bessot, Nguyen, 2003) : *ce style est fondé sur deux sortes de structures : les structures de contrôle (appel de fonction, branchement, itération) et les structures de données. Le contrôle permet d'assembler des instructions qui opèrent séquentiellement sur des données, en transformant l'état de la mémoire.*(p.9)

transposition en un algorithme en *pseudo-code*, destiné à être écrit dans un langage de programmation, compréhensible par une machine. Considérons une propriété permettant de déterminer si un entier naturel n est premier. Elle s'énonce « un nombre entier positif n ($n \geq 5$) est premier s'il n'existe aucun nombre premier compris entre 2 et $\sqrt{n}$ qui divise n » et peut se traduire par un algorithme (n°1) destiné à un individu qui l'exécuterait en environnement papier /crayon et pour une valeur de n « raisonnable »[71], de la façon suivante :

> **Algorithme n°1 (*mathématique*)**
> Soit $P_{\sqrt{n}}$, l'ensemble des nombres premiers de l'intervalle $[2\,;\sqrt{n}]$:
> - S'il existe au moins une valeur k_0 de $P_{\sqrt{n}}$ telle que k_0 divise n, alors n n'est pas premier ;
> - Sinon n est premier.

Nous qualifions cet algorithme de *mathématique*, en ce sens que sa structure est celle habituellement reconnue par la noosphère, et qu'il n'est pas destiné au départ à une quelconque transposition dans un environnement informatique.
La transposition de ce premier algorithme dans un *pseudo-code* donne l'algorithme n°2, nommé algorithme *informatisé*, c'est-à-dire destiné à un individu qui devrait l'écrire ensuite dans un langage de programmation :

> **Algorithme n°2 (*informatisé*)**
> - Pour chaque entier k, $2 \leq k \leq \sqrt{n}$, tester si $n \equiv 0[k]$;
> - Si aucune valeur k ne divise n, alors retourner « n est premier » ;
> - Sinon retourner « n n'est pas premier ».

Nous rappelons que cette écriture en pseudo-code est arbitraire et variable selon les individus. Ces deux algorithmes sont à première vue assez semblables. La principale différence repose sur le destinataire de l'algorithme et sur le concept *d'action élémentaire*, vu en section 4.2. En effet, si la connaissance des premiers nombres premiers est élémentaire pour un individu ayant quelques connaissances en mathématiques, elle ne l'est pas pour une machine. L'algorithme n°2 ne propose pas de tester uniquement les nombres premiers, mais tous les entiers compris entre 2 et $\sqrt{n}$, la machine n'ayant pas nécessairement connaissance a priori de la liste des premiers nombres premiers. De la même manière, la propriété « k divise n », *élémentaire* pour un individu, nécessite une reformulation dans l'algorithme n°2 pour donner un équivalent qui soit compréhensible par une machine, selon sa structure interne et dans son langage. La forme « $n \equiv 0[k]$ » a été choisie mais toute autre formulation (comme par exemple « $\mathrm{Ent}\left(\frac{k}{n}\right) = \frac{k}{n}$ »), utilisant une succession d'opérations élémentaires pour une machine et préprogrammées dans celle-ci, conviendrait. Une dernière différence est à noter, l'instruction *retourner*, présente pour l'algorithme n°2, et qui n'existe pas pour le n°1. Cette instruction fait un pas vers la future écriture de cet algorithme dans un langage de

[71] Par raisonnable, nous entendons une valeur de n inférieure à 10000, c'est-à-dire pour laquelle la liste des nombres premiers à tester est connue par l'utilisateur de l'algorithme. Les algorithmes et programmes proposés ici sont élémentaires. Il en existe de plus puissants, adaptés à de grandes valeurs de n. Voir par exemple : http://www-irma.u-strasbg.fr/~noot/publications/primalite_irem_2011.pdf

programmation. L'instruction *retourner* indique ici la réponse au problème posé, qui pourra être traduite, selon les besoins de l'utilisateur, soit par un affichage ou par un codage indiquant si le nombre est premier ou non[72].
Cet exemple du test de primalité est utilisé dans le but de montrer que l'écriture d'un algorithme de type n°2 nécessite de comprendre ce qui est élémentaire pour une machine et ce qui ne l'est pas, ce qui va impliquer de comprendre les bases du fonctionnement d'un ordinateur, au niveau des instructions que celui-ci peut exécuter. Nous sommes au cœur de la *transposition informatique* (Balacheff, 1994) et d'i*nstrumentation* (Rabardel, 1995) avec des problèmes de *pseudo-transparence*, au sens d'Artigue (2005). En effet, l'apprenant en algorithmique va devoir apprendre à se décentrer de sa posture d'individu pour se placer dans la position de tenir compte de ce que sait faire la machine, s'il veut que son algorithme soit transférable en un programme.
Enfin, pour achever notre exemple de test automatique de la primalité d'un entier *n*, nous proposons la transposition de l'algorithme n°2 en un programme informatique, dans le langage de programmation du logiciel Algobox[73] :

```
VARIABLES
n EST_DU_TYPE NOMBRE
i EST_DU_TYPE NOMBRE
d EST_DU_TYPE NOMBRE
DEBUT_ALGORITHME
LIRE n
POUR i ALLANT_DE 2 A sqrt(n)
DEBUT_POUR
SI (n%i==0) ALORS
DEBUT_SI
d PREND_LA_VALEUR 1
FIN_SI
FIN_POUR
SI (d!=0) ALORS
DEBUT_SI
AFFICHER "n n'est pas premier "
FIN_SI
SINON
DEBUT_SINON
AFFICHER "n est premier"
FIN_SINON
FIN_ALGORITHME
```

Figure 13 : Programme de test de primalité d'un entier sous Algobox

L'écriture de cet algorithme à l'aide du logiciel Algobox nécessite des adaptations, par rapport aux contraintes de programmation de celui-ci, sans évoquer ici la syntaxe du langage. Une première adaptation vient du passage des variables mathématiques aux variables informatiques et aux instructions de lecture/écriture. Nous revenons sur ces notions un peu plus loin. Une seconde adaptation de l'algorithme est la création de la variable *d*. Celle-ci a pour objectif de garder une trace d'un diviseur éventuel à la sortie de la boucle de test où sont

[72] On pourrait par exemple utiliser une sorte de variable booléenne que l'on pose égale à 0 si *n* est premier et à 1 s'il ne l'est pas.
[73] Le logiciel utilisé Algobox est présenté en section 9.3.2 et en annexe A9.
Notons que : - « n%i » est la commande pour retourner le reste de la division euclidienne de n par i
- « d !=0 » correspond à l'écriture « $d \neq 0$ »

recherchés les entiers de 2 à $\sqrt{n}$ divisant *n*. La variable *d* passe de 0 à 1 lorsqu'un diviseur est détecté et indique ainsi la non-primalité de *n*. L'introduction de cette variable est nécessaire à la création du programme, alors qu'elle ne l'était pas pour la conception de l'algorithme n°2. Ainsi, cet exemple montre que la démarche algorithmique est nécessaire pour aboutir à un programme implanté sur un système informatique, mais celle-ci n'est pas suffisante : il est indispensable de s'approprier des techniques supplémentaires, propres à la programmation pour faire effectivement « tourner » un programme avec un logiciel donné.

Un second exemple : simplification de la racine carrée d'un entier naturel sous la forme $a\sqrt{b}$ avec a et b entiers et b le plus petit possible

Nous donnons un second exemple, déjà évoqué en fin de chapitre 3, pour compléter les propos ci-dessus concernant la détermination d'un algorithme et d'un programme pour un problème donné. En effet, la plupart des procédures de résolution de problèmes mathématiques ne se présentent pas directement sous la forme d'un algorithme, comme dans l'exemple précédent du test de primalité. En général, la structure de cet algorithme reste à déterminer, à partir d'éléments de la résolution mathématique du problème posé dans un dispositif papier-crayon. Nous cherchons à montrer que la recherche d'un algorithme à partir des éléments de cette résolution n'est pas *transparente* pour l'individu qui doit accomplir cette tâche.

Reprenons l'exemple de la simplification de la racine carrée d'un entier naturel donné, noté *N*. L'existence de l'écriture $\sqrt{N} = a\sqrt{b}$ étant assurée (cf. §3.7), il reste à trouver une procédure qui permette de déterminer les valeurs de *a* et *b*.

Une possibilité est de décomposer *N* en facteurs premiers et de considérer la parité des exposants des nombres premiers en présence pour calculer *a* et *b* : un premier algorithme peut ainsi être réalisé. Cet algorithme est souvent utilisé en environnement papier-crayon (pour des nombres pas trop grands) et se présente sous la forme :

- Effectuer la décomposition de *N* en facteurs premiers : $N = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \dots p_k^{\propto_k}$;
- Pour tout entier i compris entre 1 et *k* :
    - Si $\propto_i$ est pair, *a* contient le facteur $p_i^{\frac{\propto_i}{2}}$;
    - Si $\propto_i$ est impair, *a* contient le facteur $p_i^{\frac{\propto_i - 1}{2}}$ et *b* contient le facteur p_i.

Une autre possibilité est d'utiliser l'égalité $N = a^2b$ et d'effectuer un second algorithme, donné au chapitre 3 (cf. figure 11, §3.7) et rappelé ici :

Pour chaque entier *I* compris entre 1 et Ent($\sqrt{N}$) :
- Tester si la division de *N* par I^2 donne un reste nul ;
- Si c'est le cas, affecter à *a* la valeur de *I* ;
- Si ce n'est pas le cas, passer à la valeur suivante de *I*.

Calculer la valeur de $b = N/a^2$

Ce second algorithme donne, en sortie de la structure répétitive, la plus grande valeur possible de *a*, puisque cette valeur est modifiée à chaque nouvelle valeur de *I* qui vérifie $N \equiv 0$ [I^2]. La valeur de *b* en est alors déduite.

L'un ou l'autre de ces algorithmes répond au problème posé, cependant le second possède l'avantage sur le premier de ne pas nécessiter d'effectuer en préambule la décomposition du nombre *N* en facteurs premiers. La machine n'ayant pas a priori implanté en son sein un programme de décomposition en facteurs premiers d'un nombre entier, le second algorithme

est, de ce fait, plus facilement transposable en un algorithme *informatisé*, qui pourra alors être écrit dans un langage de programmation, compréhensible par une machine (cf. figure 11, §3.7).
Comme le premier, ce second exemple montre que la recherche d'un algorithme *informatisé* s'appuie sur la résolution mathématique mais que celle-ci nécessite d'être *transposée* pour tenir compte des *actions élémentaires* pour la machine.

De la résolution mathématique au programme informatique : une double transposition
Lorsqu'une tâche de type « concevoir un programme pour résoudre un problème » est donnée (dans nos exemples ci-dessus, permettant de déterminer si un entier naturel n est premier ou pour simplifier l'écriture d'une racine carrée), nous voyons émerger une *double transposition*, associée à des techniques différentes, justifiées par des technologies relevant du domaine mathématique, du domaine informatique, ou des deux conjointement.
Nous pouvons schématiser ci-dessous cette double transposition. Nous expliquons les dénominations des cadres ci-dessous.

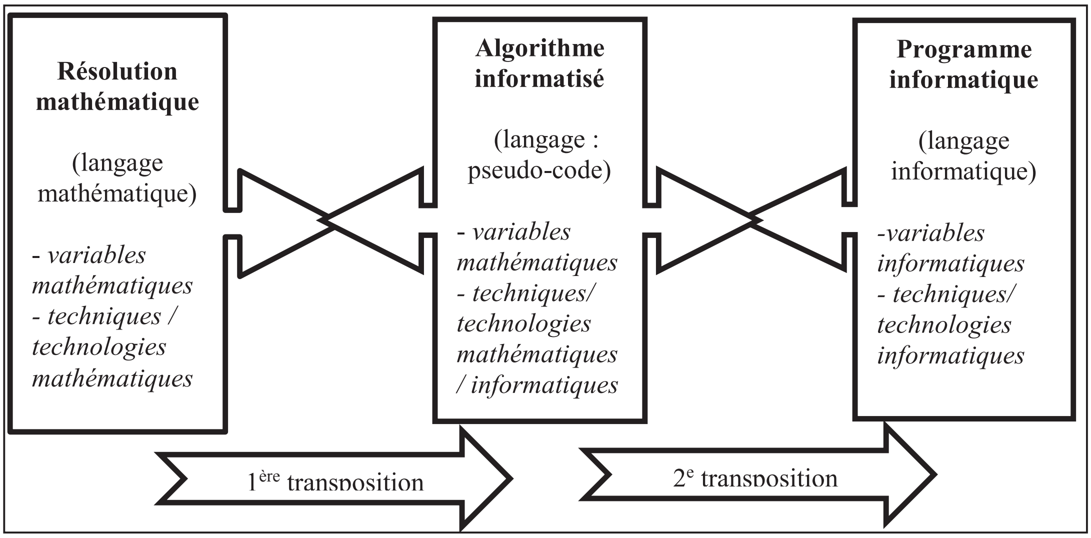


Figure 14 : Double transposition de la résolution d'un problème mathématique en vue de sa programmation

Tenant compte des deux exemples exposés précédemment, le premier cadre symbolise la résolution du problème posé dans le cadre mathématique « habituel », c'est-à-dire en environnement papier-crayon, s'appuyant sur des techniques et un environnement technologico-théorique mathématique : c'est ainsi que la résolution du problème est dite *mathématique* (par opposition à *informatique*). Cette résolution peut avoir donné lieu à un premier algorithme (nommé *algorithme mathématique*, comme l'algorithme n°1 de l'exemple du test de primalité) mais toutes les résolutions de problèmes mathématiques ne se présentent pas nécessairement sous la forme d'un algorithme. La résolution achevée, une première transposition a lieu pour déterminer l'algorithme *informatisé*, écrit en pseudo-code, où la structure de l'algorithme tient compte des actions élémentaires réalisables par une machine. Elle est suivie d'une seconde transposition qui aboutit à l'écriture du programme avec un logiciel adéquat.
Dans la figure ci-dessus, nous voyons plusieurs transpositions des concepts utilisés :

- une transposition au niveau du langage : nous passons d'un langage mathématique, c'est-à-dire *le langage utilisé usuellement par les écrits mathématiques* (Modeste, 2012, p.62) à un langage en pseudo-code défini plus haut pour aboutir à un langage informatique, c'est-à-dire un langage de programmation ;
- une transposition au niveau des variables : les variables mathématiques utilisées dans les algorithmes vont céder la place aux variables informatiques dans le programme informatique ;
- une transposition au niveau des techniques et technologies utilisées. Comme vu dans l'exemple ci-dessus du test de primalité d'un entier, pour écrire un algorithme qui soit transposable dans un langage informatique, il est nécessaire d'adapter les techniques ; les technologies-théories sous-jacentes s'en trouvent alors modifiées.

Ces réflexions tendent également à montrer qu'il existe une *pensée algorithmique.* Pour celle dernière, nous choisissons la définition de Modeste (2012), lui-même inspiré par Hart[74] :

> La pensée algorithmique serait alors une façon d'aborder un problème en essayant de systématiser sa résolution, de se questionner sur la façon dont des algorithmes pourraient ou non le résoudre. (p.47)

Une transposition n'est jamais transparente et un enseignement/apprentissage est nécessaire pour aborder les concepts de l'algorithmique. Ainsi, écrire un algorithme et le transformer en un programme informatique nécessite l'usage de variables informatiques et la connaissance de structures spécifiques et d'instructions que nous allons préciser.
Nous pointons dans l'exposé qui suit et pour chaque élément, la *distance* au sens d'Artigue et Haspekian (cf. §3.5), existant entre la notion informatique (en distinguant quand il y a lieu l'algorithme conceptuel et le programme) et son équivalent mathématique, quand il existe.

Variables informatiques et variables mathématiques

La nécessité de stocker des informations (nombres, textes, etc.) au cours de l'exécution d'un programme informatique mène à la notion de variable. Les variables informatiques sont des emplacements de mémoire physiques de l'ordinateur, repérés par des adresses binaires. Tout programme commence par la déclaration des variables, où l'on précise leur nom, leur contenu et leur type (numérique, alphanumérique, booléen, etc.). La première catégorie d'instructions qu'un ordinateur comprend est l'affectation d'une valeur à une variable, selon le type défini.
Modeste (2012, p.63) définit les variables informatiques comme des variables qui *jouent le rôle d'un emplacement en mémoire en pouvant changer de valeur au cours du temps : lorsque l'information contenue dans la variable est modifiée, l'ancienne information est alors perdue.* Nguyen (2005) évoque, quant à lui, *un emplacement mémoire effaçable*.
À ce point, précisons que malgré la similitude de vocabulaire, une variable mathématique n'est pas une variable informatique. Par exemple, pour la fonction numérique $f : x \rightarrow 4x + 3$, x est une variable mathématique qui existe en référence à un ensemble infini de valeurs, alors qu'une variable informatique n'existe, à proprement parler, que lorsqu'elle est l'objet d'une instruction d'affectation. Pour faire « varier » une variable informatique, il sera nécessaire de lui affecter une autre valeur. Il y a là un problème de *transposition informatique* (Balacheff, 1994). De plus, le signe d'affectation est aussi un élément qui peut éventuellement être

[74] Référence donnée par Modeste (2012) : Hart, E. W. (1998). Algorithmic Problem Solving in Discrete Mathematics. In L. J. Morrow & M. J. Kenney (Eds.), The teaching and learning of Algorithm in school mathematics, 1998 NCTM Yearbook (p. 251-267). Reston, VA : National Council of Teachers of Mathematics.

problématique quant à sa compréhension. En effet, nous avons relevé dans la section 2.2.2 l'usage n°3 du signe égal, consistant à affecter une valeur à une variable ou à une indéterminée. D'un point de vue mathématique, pour la fonction f définie ci-dessus, si l'on cherche, par exemple, à calculer $4x + 3$ pour $x = 2$, on affecte à x la valeur 2. La traduction informatique de l'affectation est marquée par une instruction du type « X ← 2 »[75]. Cette relation n'est pas symétrique, contrairement à l'égalité mathématique. Nguyen (2005) précise également cette différence, insistant sur la différence de sens entre l'usage des signes d'égalité et d'affectation dans un programme :

> […] l'attention pédagogique conduit Knuth[76] à accorder une place importante à l'explicitation de la différence entre l'affectation d'une variable et l'égalité entre deux valeurs (ou variables) en mathématique. Il propose et justifie l'usage du symbole « ← » pour marquer cette différence. L'usage du signe « = » dans un programme est lié à une condition (mathématique) que l'on teste, le signe « ← » à une action qui peut être réalisée. (p.70)

Lecture /écriture

Un deuxième type d'instructions qu'un ordinateur interprète est la lecture /écriture. La lecture consiste à permettre à l'utilisateur de rentrer des valeurs au clavier pour qu'elles soient utilisées par le programme et l'écriture est l'opération inverse, soit de permettre au programme de communiquer des valeurs à l'utilisateur en les affichant à l'écran.

Notons que ces deux instructions sont des objets informatiques qui n'ont pas d'équivalent en objets mathématiques. Un apprenant débutant en programmation pourrait de ce fait être décontenancé par l'obligation de fournir ces instructions, et d'autre part, une confusion peut se produire entre les deux instructions, puisque la *lecture* consiste pour l'utilisateur à écrire au clavier et on utilise l'instruction *écriture* quand celui-ci doit lire sur l'écran. Un décentrage de l'utilisateur est nécessaire, ces termes devant être compris du point de vue de la machine qui est chargée de les exécuter.

D'autre part, relativement à la différence entre algorithme et programme, Modeste (2012) précise :

> On parlera d'amalgame entre saisie et entrée (respectivement entre sortie et affichage) pour désigner cette confusion entre les composantes d'un algorithme (son entrée, sa sortie) et des moyens techniques qui peuvent être utilisés pour mettre en œuvre ces éléments dans un programme. Cette confusion nous semble problématique. D'une part cet amalgame entre entrée-sortie d'un algorithme et saisie-affichage de données induit une confusion entre la machine et la méthode que l'on implémente, l'algorithme. D'autre part, cela empêche la présentation des programmes comme des fonctions, ce qui ne permet plus de faire appel à un programme comme fonction intermédiaire, ni de programmer des algorithmes récursifs. (p.128)

Ainsi, voyons-nous ici encore la nécessaire prise en compte d'une transposition entre les domaines de l'algorithmique et de la programmation. Modeste indique en particulier la différence entre la *sortie* d'un algorithme, qui prouve sa finitude, et la *fin* d'un programme

---

[75] La notation « ← » est utilisée en pseudo-code et par certaines calculatrices. Pour les langages informatiques, différents signes sont utilisés, comme « : = » ou « = = ».

[76] Nguyen se réfère à Knuth D-E. (1968). *Algorithmes fondamentaux, l'art de la programmation d'ordinateur*, Addison-Wesley Publishing Company.

exécuté, où sont affichés les résultats attendus ou encore réservés en mémoire pour une utilisation ultérieure.

Tests
Les tests, aussi appelés structures alternatives, sont la troisième catégorie d'instructions qu'un ordinateur peut effectuer. Un test se présente sous la forme : « Si (condition) alors (instruction 1), sinon (instruction 2) ». Remarquons que l'instruction 2 peut être inexistante et que la condition est un booléen, c'est-à-dire une expression pouvant prendre la valeur « vrai » ou « faux ». Une condition contient également un opérateur de comparaison (égal à, différent de, supérieur ou égal à, etc.).
Une différence essentielle se rencontre ici entre la signification des opérateurs de comparaison en programmation et celle des signes de la relation d'ordre en mathématiques. Si l'inégalité : $2 < x < 4$ a une signification mathématique, on ne peut pas l'employer en programmation car un ordinateur ne peut comprendre une condition comportant deux opérateurs de comparaison. Il faudrait alors utiliser un opérateur logique (et, ou, non ou xor[77]). Dans un programme, la condition $2 < x < 4$ s'écrirait « Si (X > 2) et (X < 4) ». Cette différence est plus conséquente qu'une simple notation, c'est le fonctionnement interne de l'ordinateur qui est en jeu. Cette subtilité montre la *pseudo-transparence*, au sens d'Artigue, des objets informatiques et mathématiques et nécessite la prise en compte des phénomènes liés à la transposition informatique (Balacheff, 1994) des savoirs mathématiques. Elle pose également la question de l'instrumentation (Rabardel, 1995).

Boucles
Les boucles, nommées aussi structures itératives, constituent la quatrième et dernière structure de programmation. Elles consistent à répéter un groupe d'instructions. Plusieurs types de structure existent dont les structures « tant que » et les structures « pour », les premières sont employées pour un traitement systématique sur les éléments d'un ensemble dont on ne connaît pas à l'avance le cardinal, contrairement aux secondes.
Les boucles constituent une structure logique caractéristique de la programmation. En effet, un tableur manipule des variables et des tests mais pas de boucles. Nguyen (2005) confirme les études de Rogalski[78] sur la plus simple accessibilité de la structure « pour », par rapport à la structure « tant que ». Nguyen (ibid., p.17) précise que *la boucle « tant que » est moins accessible que les autres boucles car elle demande une anticipation de condition d'arrêt pour la formuler : on doit anticiper la sortie de la boucle avant de répéter des actions.*

4.5 Algorithmique dans les programmes actuels du lycée

4.5.1 Pourquoi étudier l'algorithmique et la programmation au lycée ?

L'introduction de l'algorithmique dans les programmes de mathématiques par la noosphère est incontestablement motivée par la volonté d'introduire une part de *mathématiques*

[77] « xor » est le ou exclusif.
[78] Nguyen se réfère à : **Rogalski J.** (1985). « Alphabétisation informatique » in *Bulletin APMEP*, N° 347, 61-74.

citoyennes (Modeste, 2012, p.12). En effet, les premières lignes du document *Ressources pour la classe de seconde*, consacré à l'algorithmique, précisent :

> La présence d'algorithmes dans l'univers technologique qui nous entoure n'est plus à démontrer. Depuis l'automate le plus simple jusqu'aux systèmes les plus complexes, les algorithmes ordonnent beaucoup de nos gestes quotidiens. Leur présence cependant ne se traduit pas par un contact direct avec l'utilisateur qui assimile volontiers « la machine » à son mode de fonctionnement. (MEN, 2009c)

Cette référence au développement de l'informatique dans la vie courante, mais aussi dans tous les domaines scientifiques, est également évoquée dans les cours dispensés dans l'enseignement supérieur, comme par exemple, en préambule du cours d'algorithmique de l'École Polytechnique, où cette longue citation montre bien tous les domaines concernés :

> Il est inutile d'insister sur l'omniprésence des programmes informatiques dans le monde actuel. Rappelons simplement que :
> 1. Le logiciel n'est pas uniquement là où on l'attend. La recherche d'informations sur internet (Google, Bing, Yahoo. . .), le traitement d'images fixes ou animées (Photoshop, Gimp, Pixar. . .) ou les logiciels financiers sont des exemples où l'interaction avec l'ordinateur est manifeste. Mais on peut trouver de plus en plus d'exemples d'informatique enfouie (ou « embedded » en anglais). Il y a des programmes, parfois complexes, dans les freins ou les injecteurs des voitures, les montres, les machines à café ou à laver et, évidemment, les outils modernes de communication.
> 2. L'informatique pénètre chaque jour un peu plus les autres sciences ; on parle de bio-informatique, de physique sur ordinateur, d'expérimentation in silico… À chaque fois, ces nouvelles interactions amènent à repenser le monde un peu plus sous l'aspect algorithmique.
> Si, à travers ces nouvelles applications, l'outil informatique est de plus en plus mêlé à des questions venant d'autres horizons, les principes algorithmiques fondamentaux n'en restent pas moins valables. (Potier et Werner, 2013)

Comme le précise Modeste (2012), l'enseignement de l'algorithmique à l'intérieur de la discipline « mathématiques » pose le problème de la légitimité de cet enseignement par des professeurs de mathématiques plutôt que par des enseignants en informatique. Cependant, une justification de l'inclusion de cet enseignement peut être, comme précisé par les travaux de la commission Kahane (2000), que les mathématiques entretiennent des liens privilégiés avec l'informatique.

> L'informatique donne des motivations et un champ nouveau à l'enseignement des mathématiques. Elle amène à revisiter des notions anciennes, à introduire de nouveaux points de vue, à donner des éléments nouveaux aux professeurs et aux élèves. À cet égard, les mathématiques ont une place et un rôle particuliers, différents de ceux des autres disciplines utilisatrices d'informatique. (Kahane, 2000, p.19)

En effet, l'apparition de puissants moyens de calculs a permis de résoudre des problèmes mathématiques complexes, comme pour ne citer que l'un des plus célèbres, le théorème des quatre couleurs, mais nous pourrions également évoquer l'essor des mathématiques discrètes, des systèmes de calcul formel, de la logique appliquée… Ainsi les problématiques récentes liées aux mathématiques constituent-elles une raison supplémentaire à l'introduction de cet enseignement. Le document ressources de la classe de seconde (MEN, 2009c) en évoque d'autres, comme *la formation des élèves à la démarche scientifique sous toutes ses formes* ou encore la continuité de l'utilisation des TICE et le développement de la capacité expérimentale.

4.5.2 Historique de l'introduction de l'algorithmique dans la discipline des mathématiques

Sans faire ici tout l'historique de l'introduction de l'algorithmique dans l'enseignement des mathématiques, nous pouvons néanmoins dégager les principales étapes de cette introduction et les objets figurant dans les programmes successifs. Un découpage selon les principales réformes a été effectué pour présenter cette introduction et en se limitant aux années lycée.

La période de la réforme des mathématiques modernes (années 1970)
Comme le précise Nguyen (2003), l'algorithmique et la programmation sont déjà évoquées dans les programmes de mathématiques de 1971, période dite de la réforme des mathématiques modernes. Dans la rubrique *Enseignement du calcul dans les établissements du second degré,* nous lisons :

> […] Les élèves apprendront à organiser un calcul et à en dresser l'organigramme ; ils établiront par exemple la feuille de calcul des valeurs d'une fonction numérique f donnée, en blanc, avant tout choix de valeurs de la variable x ; c'est déjà l'élaboration d'un programme, une voie ouverte vers l'informatique […]. (MEN, 1971)

À cette époque, il ne s'agit pas, bien entendu, de programmer sur une calculatrice ou un ordinateur mais les tâches proposées tiennent déjà du domaine de l'algorithmique appliqué au secteur des fonctions. L'algorithme est ici défini comme *l'organisation d'un calcul* à présenter sous forme structurée d'un *organigramme*, sous-entendant une succession d'étapes élémentaires à effectuer. Le terme *élaboration d'un programme* renvoie à l'aspect conceptuel d'un algorithme. Les instructions officielles de 1971 annoncent l'essor de l'informatique.

La période de contre-réforme des mathématiques modernes (années 1980 - 1996)
Pour permettre une comparaison de ces périodes, les extraits de programmes[79] sont présentés sous la forme d'un tableau, selon les années de changements successifs des programmes[80].

[79] Ces extraits de programme proviennent du site de l'Académie de Rennes : http://espaceeducatif.ac-rennes.fr/jahia/Jahia/
[80] Les passages en gras sont ajoutés par nos soins pour souligner les termes de la famille (au sens syntaxique) d'« algorithme » ou de « programme » et les passages en italique pour signifier les objets qui leur sont associés.

	Classe de seconde	Première scientifique	Terminale (A1-B-C-D-E)
1981 (Arrêté du 26 janvier)	Naturellement la calculatrice permet toutes sortes de stratégies d'*itération*. On peut par exemple calculer les termes successifs d'une suite récurrente et en présumer le comportement. [...] L'emploi des calculatrices a lui-même ses objectifs : de leur utilisation judicieuse on peut attendre une expansion des activités expérimentales (élaboration de conjectures à partir de recherches sur des exemples), et en retour de nouvelles motivations d'approfondissement théorique nées du besoin de *contrôler* les **algorithmes** et d'apprécier la pertinence des moyens de calcul.	On entraînera les élèves devant un problème à résoudre, à *construire* un **algorithme** et à l'exprimer clairement.	
1985-1986 (Arrêtés des 21 juin 1985 et 5 août 1986)		[...] à la fin de la classe de première, les élèves doivent savoir utiliser leur calculatrice dans les situations numériques liées au programme ; dans ce cadre, ils doivent savoir **programmer**, sur des exemples simples, le calcul de valeurs numériques d'une fonction d'une variable. (1985)	Il convient en outre de mettre en valeur les **aspects algorithmiques** des *méthodes* et des résultats indiqués par le programme (approximation d'un nombre à l'aide de suites, recherche de solutions approchées d'une équation numérique, calcul de valeurs approchées d'une intégrale, représentation graphique d'objets définis géométriquement ou analytiquement, résolution de systèmes linéaires, …) (1986)
1991 (Arrêté du 27 Mars)	Dans l'ensemble du programme, il convient de mettre en valeur les **aspects algorithmiques** des problèmes étudiés [...]. On explicitera ce type de démarche sur quelques exemples simples : *construction et mise en forme* d'**algorithmes**, *comparaison* de leurs performances pour le traitement d'un même problème : mais aucune connaissance spécifique sur ces questions n'est exigible des élèves. [...] sont seules exigibles : • Savoir effectuer les opérations arithmétiques sur les nombres et savoir comparer les nombres ; • Savoir utiliser les touches des fonctions qui figurent au programme de la classe considérée et savoir **programmer** le calcul des valeurs d'une fonction d'une variable permis par ces touches ; • Savoir **programmer** une *instruction séquentielle ou conditionnelle* et, en classe de Terminale, une *instruction itérative*, comportant éventuellement *un test d'arrêt*.		

Tableau 15: Place de l'algorithmique dans les programmes de mathématique du lycée durant la contre-réforme

La lecture de ces extraits successifs fait ressortir, durant cette période, des recommandations constamment renouvelées de la noosphère de tenir compte d'un *aspect algorithmique* dans l'enseignement des mathématiques. Les calculatrices programmables ayant été démocratisées, nous retrouvons à la fois des objets de l'algorithmique et de la programmation. En effet, l'utilisation de termes comme *contrôle, itération, méthode, construction, comparaison* renvoie davantage à l'algorithmique que ceux-ci : *programmer, instructions séquentielle ou conditionnelle ou itérative*, qu'on retrouve plus habituellement en programmation. L'évolution des programmes officiels sur cette période va dans le sens d'un savoir-faire en programmation plutôt que d'un savoir sur l'algorithmique, comme l'indique les programmes de 1991 qui précisent qu'*aucune connaissance spécifique sur [les aspects algorithmiques] n'est exigible des élèves.*

Nguyen (2005) analyse que les concepteurs des programmes souhaitent, pour montrer la rupture avec la réforme des mathématiques modernes, associer à cette contre-réforme une part de démarche expérimentale, basée sur l'utilisation de la calculatrice et d'études d'algorithmes de calcul. Il précise également que cette volonté répond à un besoin social de l'introduction de l'informatique à l'École. Nguyen relève la *forte relation entre algorithmes et calculatrices durant toute la contre-réforme* (ibid., p.11) indiquant, comme dit ci-dessus que la principale fonction de l'algorithmique est d'être outil (au sens de Douady) pour programmer une calculatrice. Malgré leur présence dans tous les programmes de seconde à terminale en 1991, la non-exigibilité annoncée de ces connaissances par les élèves induit une place réduite dans les pratiques enseignantes et dans les propositions des manuels en vigueur, qui se contentent de mentionner quelques *programmes préfabriqués* (ibid., p.12).

Laissons Nguyen conclure sur cette période de contre-réforme :

> […] dans la période des années 1990, en France, des algorithmes sont bien présents dans le domaine de l'analyse mais leur vie est réduite car la responsabilité des calculs numériques est transférée aux instruments de calcul sans engager la construction de l'algorithme. De même, la programmation est quasi-inexistante, puisqu'elle se ramène à l'exécution de programmes préfabriqués dans les calculatrices ou les tableurs. (ibid., p.12)

La période post contre-réforme (années 1996-2007)

Les programmes de cette période qui précède la période actuelle sont mis en place en classe de sixième en 1996, puis en Lycée en 2001 pour la classe de Seconde. Suivent les extraits des programmes du lycée où interviennent quelques objets de l'algorithmique et de la programmation.

Classe de seconde (MEN, 1999)	Classe de première S (MEN, 2000)
Statistique […] On remarquera que la médiane d'une série ne peut se déduire de la médiane de sous séries. Le calcul de la médiane nécessite de trier les données, ce qui pose des problèmes de **nature algorithmique**.	**Suites** On veillera à faire réaliser sur calculatrice ou tableur des **programmes** où interviennent *boucle et test.*
Classe de terminale ES (MEN, 2001)	Classe de terminale S (MEN, 2001)
Graphes […] les problèmes résolus constituent une première approche, volontairement modeste, de situations complexes (d'ordonnancement, d'optimisation de flux, de recherche de fichiers informatiques, …) auxquelles de nombreux élèves seront par la suite confrontés, notamment en gestion ou en informatique. Ce thème sensibilise naturellement à **l'algorithmiqu**e et, en montrant la puissance de la théorie des graphes pour la modélisation, permet un autre regard mathématique sur diverses situations.	**Arithmétique** L'arithmétique est un champ des mathématiques très vivant dont les applications récentes sont nombreuses ; […]. C'est un lieu naturel de sensibilisation à **l'algorithmique** où la nécessité d'être précis impose rigueur et clarté du raisonnement. […]On étudiera quelques **algorithmes** simples et on les *mettra en œuvre sur calculatrice ou tableur* : recherche d'un PGCD, décomposition d'un entier en facteurs premiers, reconnaissance de la primalité d'un entier.

Tableau 16: Place de l'algorithmique dans les programmes de mathématique du lycée durant la post contre-réforme

Les classes de première ES et de la série littéraire ne sont pas mentionnées dans ce tableau car leurs programmes ne contiennent ni les termes d'*algorithmique* ni de *programmation* dans leur intitulé. Il semble, à la lecture de ces extraits, que l'algorithmique et la programmation subissent une régression par rapport aux précédents programmes, en tout cas nous ne notons pas de progression majeure. Ceci peut s'expliquer par l'avertissement en début du bandeau « mathématiques et informatique » commun à la présentation des programmes de première et de terminale S, qui fait allusion à la commission Kahane qui a cours à cette époque :

> Les progrès de l'informatique sont étroitement liés à la fois à ceux de la technologie et à ceux des mathématiques. L'informatique fait ainsi largement appel à des domaines des mathématiques et, par les problématiques qu'elle suscite, elle contribue fortement à leur développement : il en est ainsi notamment des mathématiques discrètes. Les nouveaux programmes ne développent pas en priorité les domaines mathématiques les plus liés à l'informatique ; un tel choix doit se faire à l'issue d'un large débat dont la commission de réflexion sur l'enseignement des mathématiques créée en 1999 a été saisie. (MEN, 2000)

Ces propos vont dans le sens d'une indication d'une période d'expectative des résultats de cette commission, en ce qui concerne l'intégration de l'algorithmique et de la programmation dans l'enseignement des mathématiques au niveau du lycée. Néanmoins, cette assertion est modérée par la suite :

> Certaines notions informatiques élémentaires (boucle, test, récursivité, tri, cheminement dans des graphes, opérations sur des types logiques) font partie du champ des mathématiques et pourraient être objets d'enseignement dans cette discipline. Compte tenu de l'horaire imparti et des débats en cours, il n'est proposé ici aucun chapitre d'informatique. Néanmoins, l'élève devra mettre en œuvre, notamment sur sa calculatrice, les notions de boucle et test. (ibid.)

En 2000, les préconisations de la commission Kahane, dans le rapport intitulé *Informatique et enseignement des mathématiques*, sont de faire évoluer progressivement les contenus pour intégrer de nouveaux objets et notions d'*algorithmique,* et de *programmation* et de *mathématiques de l'informatique* (Kahane, 2000). La commission insiste sur l'intérêt d'enseigner les bases de l'algorithmique et de la programmation malgré l'introduction des calculatrices formelles et des logiciels de mathématiques existants :

> Il nous semble illusoire de penser que la convivialité des logiciels mathématiques rendra un jour inutile l'apprentissage des notions de base d'algorithmique et programmation. (p.10)

4.5.3 Algorithmique dans les programmes de mathématiques actuels

C'est ainsi qu'aujourd'hui l'algorithmique et la programmation ont fait leur apparition dans les programmes du lycée. Les préconisations de la commission Kahane ont sans doute influencé une unité dans la présentation et dans les contenus communs. En effet, l'ensemble des différents programmes du lycée général et technologique, de la seconde à la terminale, présentent toutes séries confondues le même bandeau d'entête, celui du programme de seconde étant légèrement allégé. Nous présentons le contenu de ces programmes relatifs à l'algorithmique, en soulignant les différences quand il y en a.

Seconde (MEN, 2009a)	La démarche algorithmique est, depuis les origines, une composante essentielle de l'activité mathématique. Au collège, les élèves ont rencontré des algorithmes (algorithmes opératoires, algorithme d'Euclide, algorithmes de construction en géométrie …). Ce qui est proposé dans le programme est une formalisation en langage naturel propre à donner lieu à traduction sur une calculatrice ou à l'aide d'un logiciel. Il s'agit de familiariser les élèves avec les grands principes d'organisation d'un algorithme : gestion des entrées-sorties, affectation d'une valeur et mise en forme d'un calcul.
Première S, ES, L (MEN, 2010a-b) Terminale S, ES, L (MEN, 2011a-b) Première et Terminale STL, STI2D[81] (MEN, 2011c)	En seconde, les élèves ont conçu et mis en œuvre quelques algorithmes. Cette formation se poursuit tout au long du cycle terminal. **Instructions élémentaires** (affectation, calcul, entrée, sortie). Les élèves, dans le cadre d'une résolution de problèmes, doivent être capables : - d'écrire une formule permettant un calcul ; - d'écrire un programme calculant et donnant la valeur d'une fonction ; - ainsi que les instructions d'entrées et sorties nécessaires au traitement. **Boucle et itérateur, instruction conditionnelle** Les élèves, dans le cadre d'une résolution de problèmes, doivent être capables de : - programmer un calcul itératif, le nombre d'itérations étant donné ; - programmer une instruction conditionnelle, un calcul itératif, avec une fin de boucle conditionnelle.
Commun à tous les niveaux d'enseignement	Dans le cadre de cette activité algorithmique, les élèves sont entraînés : - à décrire certains algorithmes en langage naturel ou dans un langage symbolique ; - à en réaliser quelques-uns à l'aide d'un tableur ou d'un petit programme réalisé sur une calculatrice ou avec un logiciel adapté ; - à interpréter des algorithmes plus complexes. Aucun langage, aucun logiciel n'est imposé. L'algorithmique a une place naturelle dans tous les champs des mathématiques et les problèmes posés doivent être en relation avec les autres parties du programme […] mais aussi avec les autres disciplines ou la vie courante. À l'occasion de l'écriture d'algorithmes et de petits programmes, il convient de donner aux élèves de bonnes habitudes de rigueur et de les entraîner aux pratiques systématiques de vérification et de contrôle.

Tableau 17: Place de l'algorithmique dans les programmes de mathématique du lycée d'aujourd'hui

[81] STI2D : sciences et technologies de l'industrie et du développement durable et STL : sciences et technologies de laboratoire.

L'analyse de ce programme d'algorithmique pour le lycée montre un contenu qui, même s'il ne va pas jusqu'à des concepts très élaborés comme celui de complexité par exemple, présente déjà des concepts permettant d'en jeter les bases et de comprendre la structure d'un algorithme et d'un programme. Une initiation à la *pensée algorithmique* peut ainsi être amorcée, permettant d'accéder à la connaissance de la structure de base d'un algorithme telle qu'elle a été définie en section 4.4.
L'analyse de ces programmes officiels par Modeste (2012) montre un point qui nous semble crucial, à savoir :

> […] l'ambiguïté des termes utilisés (qui ne sont ni définis, ni ne font référence à des termes canoniques ou usuels de l'algorithmique). […] En particulier, les termes algorithme et programme ne sont pas clairement distingués et semblent même utilisés comme des équivalents. (p.111)

Par exemple, dans le tableau 17 ci-dessus, une expression comme « *une formalisation en langage naturel propre à donner lieu à traduction sur une calculatrice ou à l'aide d'un logiciel* », présente à la fois une composante algorithmique, où *la formulation en langage naturel* évoque l'écriture en pseudo-code d'un algorithme conceptuel et une composante programmation, avec la *traduction* de cet algorithme en un programme, dans un langage compréhensible par une machine. Cette non-différenciation entre algorithme et programme se retrouve à plusieurs reprises dans le tableau ci-dessus. Modeste y voit un amalgame entre les deux concepts. Nous nous interrogeons si ce n'est pas la volonté des concepteurs de programmes ne pas engager les professeurs vers un enseignement trop formel de l'algorithmique. Lier systématiquement algorithmique et programmation peut permettre d'éviter des dérives d'un enseignement de l'algorithmique théorique et de pousser les professeurs à utiliser l'algorithmique comme un outil au service de la résolution de problèmes mathématiques. C'est d'ailleurs de cette façon que débute le document d'accompagnement *Algorithmique* (MEN, 2009c) :

> Depuis une dizaine d'années le développement de l'usage de logiciels (calculatrice ou ordinateur) a permis de développer chez les élèves la capacité d'expérimenter, suscitant le sens de l'observation tout en faisant naitre de nouvelles questions relatives à la nature de la démonstration.
> C'est dans ce contexte que l'introduction d'une familiarisation avec l'algorithmique prend sa place dans une pratique des Mathématiques dont un axe principal est la formation des élèves à la démarche scientifique sous toutes ses formes.

L'algorithmique prend alors sa place au milieu des TICE, offrant à l'élève *la possibilité d'expérimenter, ouvrant largement la dialectique entre l'observation et la démonstration et changeant profondément la nature de l'enseignement* (MEN, 2009a).

4.5.4 Conclusion en rapport avec le thème d'étude

Les habitats de l'algorithmique en mathématiques au lycée
En reprenant une étude plus fine des programmes institutionnels du lycée, général et technologique, nous nous proposons de relever les habitats et les niches que la noosphère propose pour faire vivre l'algorithmique en mathématiques. Effectivement, nous notons des

différences dans la manière d'intituler ces habitats. Ceux-ci sont donnés dans le tableau ci-dessous, selon les niveaux et les filières.

Intitulé commun à tous les niveaux	Seconde générale de technologique	Première et terminale S	Première et terminale ES et L
L'algorithmique a une place naturelle dans tous les champs des mathématiques et les problèmes posés doivent être en relation avec les autres parties du programme mais aussi avec les autres disciplines.	- fonctions - géométrie - statistiques et probabilités - logique (MEN, 2009a)	- analyse - géométrie - statistiques et probabilités - logique (MEN, 2010a et 2011a)	- algèbre et analyse - statistiques et probabilités - logique (MEN, 2010b et 2011b)

Tableau 18 : Comparaison des habitats mathématiques d'utilisation de l'algorithmique selon les filières

Ainsi, nous constatons que si les domaines *Géométrie, Statistiques et probabilités* et *Logique* sont présents à tous les niveaux, le domaine qui se nomme *Fonctions* en seconde, devient *Analyse* en série scientifique et *Algèbre et analyse* dans les autres séries du cycle terminal. À propos de ces habitats, Modeste (2012) déclare :

> Les algorithmes sont tout d'abord annoncés comme ayant une place naturelle dans tous les champs puis on constate que peu d'exemples sont finalement donnés dans les contenus (et l'on parle plus souvent de thématiques propices à des activités algorithmiques). Certains chapitres ne contiennent aucun algorithme et l'on retrouve dans les autres toujours le même type d'algorithmes. (p.119)

En effet, si nous considérons le programme de la classe de seconde, nous lisons que *les capacités attendues dans le domaine de l'algorithmique [...] sont transversales et doivent être développées à l'intérieur de chacune des trois parties [Fonctions, géométrie, statistiques et probabilités]* (MEN, 2009a). Des activités possibles de type algorithmique sont alors listées dans les contenus et capacités attendues du programme, ainsi que dans les documents intitulés *Ressources pour la classe de seconde.* (Algorithmique et fonctions, MEN, 2009b et c). Résumons les types de tâches proposés en fonction des domaines :

- pour le domaine *Fonctions*, il est proposé d'écrire des algorithmes de tracé de courbe, de test de la monotonie d'une fonction, de recherche de ses extrema ou d'une valeur approchée d'une solution d'une équation par dichotomie, de recherche de la longueur approchée d'un arc de courbe ou de l'aire approchée d'une région comprise entre deux courbes ;
- pour le domaine *Géométrie*, il est question de résoudre *certains problèmes* dans le cadre de la géométrie plane repérée *par la mise en œuvre d'algorithmes simples*. Les types de tâches donnés sont la réalisation d'algorithmes calculant les coordonnées du milieu d'un segment ou du 4^{e} sommet d'un parallélogramme, la distance entre deux points, traçant des figures planes usuelles ou encore testant si un triangle est isocèle ;
- pour le domaine *Statistiques et probabilités,* seules des activités dans le domaine des probabilités sont proposées, dans le cadre des simulations, avec une approche fréquentiste des probabilités. Il s'agit de simuler des jets de dés ou encore des dates d'anniversaire pour rechercher des coïncidences sur une population donnée.

Un tour d'horizon des programmes des cycles terminaux des séries S, ES et L permet de dégager de la même manière les habitats de l'algorithmique :

- pour les domaines *Analyse* (S) ou *Algèbre et analyse* (ES et L), il est préconisé de réaliser des activités algorithmiques sur le second degré, sur les suites (compréhension de la notation indicielle avec le calcul de termes d'un rang donné, étude des suites générées par une relation de récurrence, résolution de problèmes de comparaison d'évolutions et de seuil), sur la recherche de solutions d'équations du type $f(x) = k$ ou la recherche d'encadrement d'une intégrale ;
- pour le domaine *Statistiques et probabilités* (S, ES et L), des algorithmes sont requis pour simuler la loi géométrique tronquée ou la loi binomiale, pour déterminer un intervalle de fluctuation, pour simuler une marche aléatoire ;
- pour le domaine *Géométrie* (S), aucune activité algorithmique n'est proposée dans les programmes officiels. En revanche, le document ressources *Analyse* des classes de première (MEN, 2012) propose une activité (une seule) liant fonctions du second degré et calculs d'aires de triangles.

Notons pour finir que la partie des programmes intitulée *Logique*, présenté à tous les niveaux du lycée comme un habitat possible de l'algorithmique, ne voit aucun exemple d'activités proposées.

Nous rejoignons Modeste (2012) dans ses conclusions sur le nombre réduit de propositions d'activités algorithmiques dans les programmes officiels ainsi que le peu de diversité dans les champs proposés. Même si notre propos n'est pas ici de déterminer les niches possibles de ces habitats, notons que si les domaines de l'analyse et de la géométrie peuvent permettre la conception d'algorithmes (au sens de Modeste, défini en section 4.4) résolvant toute une classe de problèmes, le domaine des simulations en probabilités, quant à lui, ne permet pas la recherche d'algorithme répondant à la définition donnée plus haut. Modeste (2012, p.142) nomme les programmes ainsi réalisés des *programmes de modélisation-simulation*, qui correspondent à *l'expression d'une méthode systématique visant à simuler un phénomène ou un modèle donné de ce phénomène*. Ces programmes ne produisent pas la solution d'un problème.

En particulier, il est peu fait mention de la possibilité de lier algorithmique et algèbre, sauf pour le secteur *Second degré* des programmes de la classe de première (S, ES et L) où il est indiqué de façon très vague, *des activités algorithmiques doivent être réalisées dans ce cadre* (MEN, 2010a-b). Outre leur origine étymologique commune, il nous semble cependant que l'*algèbre* élémentaire pourrait occuper une place privilégiée dans l'*algorithmique*, de par les objets qui y sont mobilisés, comme nous l'avons vu du point de vue épistémologique, avec Al-Khawarizmi (cf. §4.1). Convoquer l'algèbre comme *objet* dans le cadre d'une tâche algorithmique est une manière de faire vivre l'algèbre dans un contexte différent et ceci a retenu notre attention pour ce travail de recherche. Notre problématique est basée sur l'idée d'utiliser l'algorithmique comme *outil* pour l'algèbre et de travailler ou de retravailler des concepts algébriques par ce biais. Le chapitre 9 montrera les détails de cette mise en œuvre.

La différenciation algorithmique/programmation

Comme déjà signalé en section précédente, les programmes et documents d'accompagnement en vigueur ne différencient pas, ou très peu, l'algorithmique de la programmation. Nous y voyons une volonté des concepteurs des programmes d'initier les élèves à ces domaines pour les utiliser au service des mathématiques et non pas l'inverse. Nous trouvons d'ailleurs ces recommandations dans le document ressources (MEN, 2009c) de la classe de seconde :

> Enfin, il faut avant tout éviter de confronter les élèves à des difficultés trop importantes ; en effet, la classe de seconde est une classe de détermination et il ne s'agit pas d'y former des programmeurs mais de faire en sorte que les mathématiques et l'algorithmique soient au service d'activités de résolution de problèmes pour les sciences. (p.4)

Ces quelques lignes tendent à montrer que l'introduction de l'algorithmique et de la programmation dans l'enseignement des mathématiques n'a pas pour objectif une formation approfondie de ces domaines. Pour les concepteurs des programmes officiels, il ne s'agit pas d'introduire l'« informatique » en tant que discipline et d'en enseigner les premiers concepts mais de considérer comment la discipline « mathématiques » peut en utiliser ses concepts[82]. Cette absence de différenciation entre algorithmique et programmation peut être expliquée d'une part, par la volonté de la noosphère que l'enseignement de ces notions ne bascule pas vers une trop grande expertise et d'autre part, pour inciter les enseignants à en faire l'initiation des deux en parallèle. C'est ce que nous retrouvons dans le rapport Kahane sur l'informatique :

> L'écriture d'un programme informatique est l'occasion d'appliquer des règles logiques absolues dans un univers clairement défini et limité. Écrire un « programme qui marche » récompense de ses efforts de réflexion, d'analyse et de synthèse. (Kahane, 2000, p.3)

L'apprentissage de l'algorithmique trouve son sens par l'implémentation d'un algorithme conceptuel – qui nécessite *réflexion, analyse et synthèse* – dans une machine, passant ainsi à la programmation, ce qui est alors vu comme une *finalité* :

> Le langage naturel est certes conseillé en début d'apprentissage, mais la finalité d'un algorithme reste son implémentation sur un instrument qui automatise la procédure. (MEN, 2013, p.15)

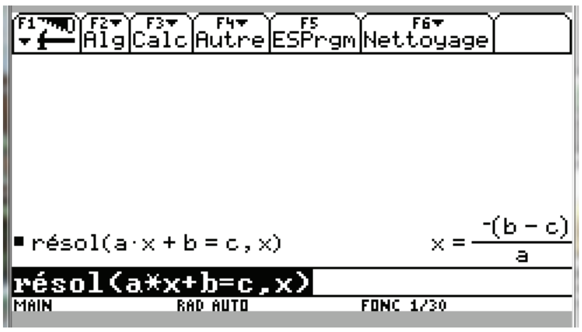
La citation ci-dessus, tirée du document d'accompagnement intitulé *Le calcul sous toutes ses formes au collège et au lycée*, insiste encore sur le fait qu'enseigner l'algorithmique en passant à l'étape programmation sur machine permet d'en comprendre le but. Nous pourrions également ajouter que l'interaction avec la machine peut permettre de mieux comprendre le concept d'algorithme. En effet, si un programme ne fonctionne pas, ce peut être en raison d'une erreur de syntaxe, ce qui relève alors du domaine du langage de programmation, mais aussi en raison d'une erreur de structure ou de logique, relevant alors du domaine de l'algorithmique. C'est par le détour du programme que cette erreur peut être détectée, comprise et corrigée.

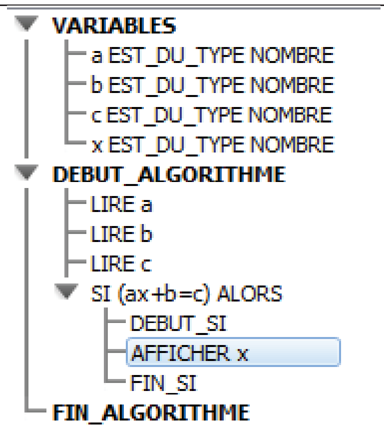
Le temps d'apprentissage des actions élémentaires

Les programmes officiels préconisent de présenter des algorithmes en *langage naturel,* mais tourné vers un langage général de programmation du type *pseudo-code*, tel que nous l'avons

[82] Notons que la terminale scientifique présente depuis 2012 une spécialité optionnelle, nommée ISN (Informatique et sciences du numérique). Son enseignement concerne la discipline « informatique » et comme l'a souligné Modeste (2012, p.120) dans sa thèse, dans ce cas une nette distinction est faite entre algorithmique et programmation.

défini en section 4.4. Cependant, le développement que nous avons effectué montrant une double transposition pour passer d'une résolution dite *mathématique* à un *algorithme informatisé* puis à un *programme informatique* (cf. figure 14, §4.4) met l'accent sur la nécessité d'un décentrage de l'utilisateur qui doit adapter le langage qu'il utilise en fonction du destinataire. Un élève d'une classe de seconde ne saura pas a priori ce qui est *action élémentaire* pour une machine et ce qui ne l'est pas. Si nous reprenons l'exemple du test de primalité d'un entier naturel, qu'est-ce qui laisse supposer que la machine « sait » diviser un nombre par un autre et vérifier que le résultat est entier ? À l'autre extrême, pourquoi la tâche « *vérifier si un entier est premier* » ne serait-elle pas une opération élémentaire ? Pourquoi est-il nécessaire de trouver un algorithme pour cette opération ? Il est fortement probable que sans apprentissage, un élève ne saura discerner les actions élémentaires de celles qui ne le sont pas, d'autant plus que ce qui est « *action élémentaire* » pour un outil ne l'est pas forcément pour un autre. Prenons l'exemple de la résolution d'une équation du type $ax + b = c$, avec a, b, c nombres réels donnés. Lorsque cette tâche est proposée en classe de seconde, des élèves utilisant une calculatrice formelle (type TI-89) connaissent la syntaxe et tapent « résol(a.x + b = c, x) », obtenant la solution correcte « $x = \frac{-(b-c)}{a}$ » (cf. figure de gauche ci-dessous). En revanche, une partie d'entre eux[83], pensant adapter les *actions élémentaires* de cette calculatrice au logiciel de programmation Algobox produisent le programme erroné de droite.





Calculatrice TI-89	**Algobox**

Figure 19 : Résolution d'une équation ax + b = c, l'une exacte, l'autre erronée, sur deux machines différentes

Afin d'expliciter cette différence de conception entre l'utilisation des deux outils ci-dessus, utilisons les concepts de *boîte noire, boîte blanche*, au sens de Canet (1994).

> On emploie souvent le terme "boîte noire/blanche" pour caractériser un mode de fonctionnement de certains dispositifs. Dans un outil de calcul on peut distinguer d'une part les objets internes à l'outil (représentation des nombres, algorithmes, etc.) et d'autre part les objets accessibles à l'utilisateur (objets de l'interface). La "couleur" de l'outil dépend de la "distance" qui sépare ces deux types d'objets. Dans le cas où l'utilisateur aurait accès à tous les objets internes, l'outil serait totalement blanc.

[83] Nous avons observé de tels résultats dans l'expérimentation et y revenons plus loin dans le chapitre 11.

Il est clair que dans le cas ci-dessus, la calculatrice formelle fonctionne comme une *boîte noire*, c'est-à-dire qu'elle n'apporte aucune information sur son fonctionnement. À l'inverse, la résolution d'une équation du type $ax + b = c$ par le logiciel Algobox fonctionne partiellement comme une *boîte blanche*, en ce sens qu'il est possible d'avoir accès à l'algorithme de résolution d'une équation du type $ax + b = c$. En revanche, cette *boîte* n'est pas tout-à-fait *blanche*, en ce sens que nous n'avons pas accès à ses objets internes (représentation des nombres, algorithmes des opérations, …). Dans le cas où le programme ne serait pas conçu par celui qui l'utilise, il pourrait alors être employé par le second dans un dispositif fonctionnant totalement en *boîte noire,* comme un produit fini, en obtenant directement les solutions des équations du type $ax + b = c$, après avoir entré les valeurs numériques de *a, b* et *c*.
Nous indiquons ci-dessous un programme correct sous Algobox, de la résolution d'une équation du type $ax + b = c$.

```
VARIABLES
a EST_DU_TYPE NOMBRE
b EST_DU_TYPE NOMBRE
c EST_DU_TYPE NOMBRE
x EST_DU_TYPE NOMBRE
DEBUT_ALGORITHME
LIRE a
LIRE b
LIRE c
SI (a!=0) ALORS
DEBUT_SI
x PREND_LA_VALEUR (c-b)/a
AFFICHER x
FIN_SI
SINON
DEBUT_SINON
SI (b==c) ALORS
DEBUT_SI
AFFICHER "tout nombre est solution"
FIN_SI
SINON
DEBUT_SINON
AFFICHER "pas de solution"
FIN_SINON
FIN_SINON
FIN_ALGORITHME
```

Figure 20 : Programme sous Algobox donnant les solutions de l'équation ax + b = c

Cet exemple est donné ici pour comprendre qu'un temps d'apprentissage sera nécessaire à l'élève pour qu'il sache déterminer ce qui relève d'une *action élémentaire* pour une machine donnée, et qu'il comprenne comment décomposer les actions qui ne sont pas élémentaires. Ce temps d'appropriation sera bien entendu variable d'un élève à l'autre, d'autant plus que les lycéens sont de plus en plus familiers avec les calculatrices graphiques et formelles, et le statut de *boîtes noires* de celles-ci : de nombreuses fonctions sont intégrées dans ces calculatrices qui ne requièrent aucune démarche de raisonnement et qui réduisent l'élève au rôle de « presse-bouton » (par exemple pour l'obtention d'un tableau de valeurs d'une fonction donnée). C'est en ce sens que nous lisons ce passage du document ressources sur l'algorithmique (MEN, 2009c) :

> Il est important de noter que l'algorithmique modifiera profondément le rapport entre l'élève et les outils ou instruments auxquels il sera confronté dans son environnement scolaire et particulièrement ceux habituellement identifies comme issus du monde des TIC dans l'enseignement (calculatrices, […])

En guise de conclusion

Pour conclure, l'« esprit » des programmes officiels sur l'introduction de l'algorithmique dans les programmes de mathématiques au lycée semble davantage tourné vers l'acquisition de quelques principes algorithmiques, plutôt que celle d'un bagage théorique et technique relevant de la discipline « informatique ». Les préconisations vont dans le sens d'un enseignement qui doit s'intégrer à celui des mathématiques et non s'y ajouter. De plus, l'injonction est forte d'associer la programmation à l'algorithmique, celle-ci étant présentée comme incontournable pour donner du sens à cet enseignement. Notre travail de recherche s'inscrit totalement dans cette conception de la place à accorder à l'algorithmique.

C'est en effet dans cet esprit que nous concevons d'expérimenter la reprise de concepts algébriques par l'introduction de l'algorithmique. Concevoir un algorithme pour résoudre un type de tâches algébriques donné, l'implémenter sur un ordinateur avec un logiciel adéquat qui permette de « visualiser » l'automatisation de la résolution pourrait amener à considérer les objets de l'algèbre avec un regard nouveau, à les faire vivre en les rendant en quelque sorte « matériels » et « visibles » par le biais de la machine.

CHAPITRE 5 - PROBLEMATIQUE

Ce chapitre propose d'expliciter la problématique retenue pour ce travail de recherche. Celle-ci s'accompagne de quatre hypothèses de recherche que nous définissons également. Les chapitres qui suivent celui-ci ont pour ambition de tenter de répondre, au moins partiellement, à cette problématique, et ce, au croisement des divers cadres que nous avons définis dans les chapitres précédents. L'intitulé de la problématique est le suivant :

Quelles sont les *conditions et des contraintes,* côté enseignant et côté apprenant, pour une *reprise* de l'*algèbre* par l'introduction de l'*algorithmique* dans le cadre de la classe de seconde du lycée ?

Chacun des vocables désignés en italique ci-dessus demande une définition ou une précision, sur la manière dont il sera utilisé dans la recherche envisagée. Nous explicitons ces termes, non pas de façon chronologique relativement à leur apparition dans la question posée, mais de manière à faire ressortir les points essentiels que nous cherchons à étudier dans ce travail, et en articulant les points évoqués. Ainsi, dans le développement qui suit, chaque section reprend une partie de la problématique, en accentuant plus particulièrement chaque composante de celle-ci et en mettant en relief le ou les mots en italique.

5.1 Une étude de l'*algèbre* dans le cadre des programmes officiels de la classe de seconde

Dans ce secteur, nous nous intéressons à la place de l'algèbre dans les programmes du lycée de 2009.
Afin de montrer l'évolution de l'enseignement de l'algèbre depuis ces dix dernières années, Michèle Artaud, lors d'une conférence[84] intitulée *Organiser l'étude des fonctions au collège et au lycée : la classe de seconde comme pierre de touche*, a effectué un comparatif des entêtes des programmes institutionnels de ce niveau. En 1990, ceux-ci se déclinaient en quatre domaines, *Problèmes numériques et algébriques, Fonction, Statistiques, Géométrie.* En 2000, ils ont évolué en trois domaines sous la dénomination de *Statistiques, Calculs et fonctions, Géométrie* pour se transformer avec les programmes actuels de 2009 sous la forme *Fonctions, Géométrie, Statistiques et probabilités*.
Les domaines « *Problèmes numériques et algébriques, Fonctions* », puis *« Calculs et fonctions »* ont fusionné sous l'unique dénomination de *« Fonctions »*. La disparition des termes *calcul*, *numérique* et *algébrique* est en fait une refonte de leur place au sein d'un *champ conceptuel* plus vaste, celui des fonctions. Vergnaud (1990) insiste sur cette nécessité d'étudier des concepts, d'autant plus qu'ils sont complexes, en tenant compte des trois principes suivants :

[84] Conférence donnée à l'IUFM de Montpellier, dans le cadre du séminaire de didactiques des mathématiques, en Mars 2010.

- faire rencontrer aux élèves toutes les propriétés d'un concept donné. Une situation unique ne suffit pas, il est nécessaire de leur faire rencontrer toute une classe de problèmes ;
- plusieurs concepts sont mis en jeu pour analyser une situation donnée, il est rarement possible de les isoler ;
- pour qu'un concept se forme, sont nécessaires du temps, des interactions et des confrontations répétées à des résolutions de problèmes.

Vegnaud (ibid.) conclut sur l'utilité de présenter des concepts en les liant entre eux, sans réduire les objets d'étude, de manière à ce que l'apprentissage puisse mettre en exergue les liens existant entre des concepts proches :

> La conséquence principale de ces trois points est que les psychologues et les didacticiens ne doivent pas prendre pour objets d'étude des objets trop petits, mais au contraire des champs conceptuels assez larges. Faute de cela, le risque majeur est de ne pas pouvoir comprendre le processus complexe et laborieux par lequel les enfants et les adolescents maîtrisent (ou ne maîtrisent pas) les mathématiques.

Il semblerait que le programme de seconde de 2009 tienne compte de ce concept de *champ conceptuel*, tel que le définit Vergnaud pour l'appliquer à l'enseignement du domaine numérique-algébrique. Ce dernier est en effet entièrement plongé dans le cadre fonctionnel, lui-même envisagé dans l'objectif plus large *de former les élèves à la démarche scientifique sous toutes ses formes*, en particulier par la résolution de problèmes divers. Dans l'entête du domaine *Fonctions* de ce programme (MEN, 2009a), nous retrouvons ces préconisations. Nous avons souligné en gras les expressions ayant trait au domaine numérique-algébrique :

> L'objectif est de rendre les élèves capables d'étudier :
> - un problème se ramenant à une équation du type $f(x) = k$ et de le résoudre dans le cas où la fonction est donnée (définie par une courbe, un tableau de données, une **formule**) et aussi lorsque toute autonomie est laissée pour associer au problème divers aspects d'une fonction ;
> - un problème d'optimisation ou un problème du type $f(x) > k$ et de le résoudre, selon les cas, en exploitant les potentialités de logiciels, graphiquement ou **algébriquement**, toute autonomie pouvant être laissée pour associer au problème une fonction. […]
>
> Par ailleurs, la résolution de problèmes vise aussi à progresser dans la **maîtrise du calcul algébrique** et à **approfondir la connaissance des différents types de nombres**, en particulier pour la distinction d'un nombre de ses valeurs approchées. (MEN, 2009a, p.3)

Systématiquement, ces expressions sont associées aux termes « problème » ou « fonction » ou « graphique » Ce constat va donc dans le sens, pour l'institution EN, d'inciter les enseignants à intégrer le calcul numérique-algébrique dans le vaste champ de la résolution de problèmes, en y associant à chaque fois que la situation s'y prête un registre fonctionnel. La description détaillée du domaine *Fonctions* de ce même programme présente également les thèmes algébriques fondus au milieu des thèmes fonctionnels. Le tableau qui suit présente des extraits choisis de ce domaine (MEN, 2009a, p.4), déclinés en contenus, capacités et commentaires, et où les concepts algébriques à enseigner ont été indiqués en caractères gras par nous.

CONTENUS	CAPACITÉS ATTENDUES	COMMENTAIRES
Fonctions Image, antécédent, courbe	Traduire le lien entre deux quantités par une **formule**. […]	[…]
Étude qualitative de fonctions	[…]	[…]
Expressions algébriques **Transformations d'expressions algébriques** en vue d'une résolution de problème**.**	- Associer à un problème une **expression algébrique**. **- Identifier la forme la plus adéquate (développée, factorisée) d'une expression** en vue de la résolution du problème donné. **- Développer, factoriser des expressions polynomiales simples ; transformer des expressions rationnelles simples**.	**Les activités de calcul** nécessitent une certaine maîtrise technique et doivent être l'occasion de raisonner. Les élèves apprennent à développer des stratégies s'appuyant sur l'observation de courbes, **l'anticipation et l'intelligence du calcu**l. […]
Équations **Résolution** graphique et **algébrique d'équations.**	- Mettre un problème **en équation.** **- Résoudre une équation se ramenant au premier degré.** […]	Pour un même problème, combiner résolution graphique et **contrôle algébrique.** […]
Fonctions de référence Fonctions linéaires et affines […]	**Donner le tableau de signes de $ax + b$ pour des valeurs numériques données de a et b.** […]	[…]
Étude de fonctions Fonctions polynomes de degré 2 Fonctions homographiques	[…]	[…]
Inéquations **Résolution** graphique et **algébrique d'inéquations.**	- Modéliser un problème par **une inéquation.** - Résoudre graphiquement des inéquations de la forme : $f(x) < k$; $f(x) < g(x)$. **- Résoudre une inéquation à partir de l'étude du signe d'une expression produit ou quotient de facteurs du premier degré.** **- Résoudre algébriquement les inéquations** nécessaires à la résolution d'un problème.	Pour un même problème, il s'agit de : - combiner les apports de l'utilisation d'un graphique et **d'une résolution algébrique**, - mettre en relief les limites de l'information donnée par une représentation graphique. […]
Trigonométrie	[…]	[…]

Tableau 21 : Extraits du domaine "Fonctions" du programme de seconde de 2009

L'analyse de ce tableau confirme l'insistance de l'institution EN à présenter l'algèbre dans le champ conceptuel des fonctions, et pour résoudre des problèmes pouvant se modéliser par une fonction. Comme pour le bandeau d'entête, à chaque sujet[85] d'étude du domaine algébrique est associé les termes « fonction », « problème » ou « graphique ». De plus, les concepts algébriques sont scindés en différents secteurs qui ne sont pas présentés successivement dans ce tableau. Ces secteurs apparaissent disséminés parmi les secteurs fonctionnels : par exemple, le secteur des *équations* est situé entre *l'étude qualitative des fonctions* et l'étude des *fonctions de référence*. De même, le secteur des *inéquations* se trouve entre l'étude *des fonctions polynomiales et homographiques* et la *trigonométrie*. Remarquons enfin que chacun des secteurs comportant de l'algèbre inclut des thèmes algébriques mais également des thèmes fonctionnels : par exemple, les thèmes « résoudre graphiquement une inéquation » et « résoudre algébriquement une inéquation » cohabitent dans le secteur des inéquations.

[85] Les termes *domaine, secteur d'étude, thème d'étude* et *sujet d'étude* sont à prendre au sens des niveaux de l'échelle de codétermination didactique de Chevallard.

Cette étude des programmes nous permet de conclure sur la volonté de la noosphère de considérer l'algèbre dans le champ conceptuel des fonctions, et également sur la volonté de ne pas faire apparaître l'algèbre comme un *domaine*, au sens de Chevallard. L'algèbre ne se présente plus comme une branche des mathématiques étudiée pour elle-même, mais comme un *outil* (Douady, 1986) au service des autres branches des mathématiques et plus particulièrement de l'analyse. Remarquons que ce glissement s'accompagne d'un changement de vocabulaire où le terme *algèbre* est souvent remplacé par celui de *calcul*. Dans le tableau 21 ci-dessus, l'expression « activités de calcul » ressort dans les commentaires. Nous retrouvons également le terme *calcul* par exemple dans le passage suivant sur l'activité de l'élève (MEN, 2009a) :

> Le calcul est un outil essentiel pour la pratique des mathématiques dans la résolution de problème. Il est important en classe de seconde de poursuivre l'entraînement des élèves dans ce domaine par la pratique régulière du calcul mental, du calcul numérique et du calcul littéral. L'utilisation d'outils logiciels de calcul – sur calculatrice ou sur ordinateur – contribue à cet entraînement. (p.2)

La diminution progressive de l'utilisation terme *algèbre* au profit de termes plus généraux comme *calcul* tend à montrer que la place accordée à l'enseignement de l'algèbre se délite. L'algèbre n'a pas disparu des programmes de seconde de 2009 mais nous nous interrogeons sur l'impact de ces préconisations récurrences, où il est encore dit, dans le document *Ressources sur les fonctions pour la classe de seconde* :

> […] il est essentiel, pour lui donner du sens, de toujours situer le calcul algébrique dans la perspective d'une résolution de problème. (MEN, 2009b, p.13)

Le vocable *toujours* utilisé ici tend à montrer l'occultation de l'algèbre en tant qu'*objet*. En effet, comment un concept seulement enseigné et appris en tant qu'*outil*, donc dans des situations ou des problèmes où il est toujours contextualisé et présenté localement, pourra-t-il être compris par les élèves comme un concept général ? Comment ces élèves pourront-ils avoir accès au concept décontextualisé ? Si l'enseignant ne propose pas d'institutionnalisation permettant cette décontextualisation et ce passage du local au global, comment l'élève pourra-t-il le réaliser seul ?

Cette réflexion sur la place de l'algèbre dans les programmes met en avant à la fois le pôle élève et le pôle enseignant. Nous nous intéressons, dans un premier temps, à la lecture que l'enseignant fait de ces programmes. Comment le professeur de la classe de seconde interprète-t-il la logique des concepteurs des programmes, où l'algèbre est considérée essentiellement comme un outil pour l'analyse ? Parvient-il à *toujours* situer l'algèbre dans la perspective d'une résolution de problème (cf. citation ci-dessus) ? Confronté aux difficultés de ses élèves, n'est-il pas dans l'obligation de s'attarder sur l'algèbre en tant qu'objet et de mettre en place ou de reprendre des praxéologies algébriques, en les décontextualisant des contextes des problèmes ?

Nous formulons ainsi notre première hypothèse :

Le professeur de la classe de seconde ne se conforme pas complètement au contenu strict du programme d'algèbre et juge qu'il est nécessaire de reprendre un travail spécifique sur l'algèbre sans la plonger systématiquement dans le cadre fonctionnel, et d'institutionnaliser des praxéologies algébriques.

La réflexion sur la place de l'algèbre dans les programmes amène à s'interroger sur les possibilités d'apprentissage des élèves. Nous définissons la seconde hypothèse, relativement au pôle élève, dans la section suivante.

5.2 La *reprise* de l'algèbre dans le cadre de la classe de seconde

Commençons par définir la notion de *reprise* (Larguier, 2009) en citant cette définition imagée de Larguier :

> La reprise évoque le renouvellement d'un évènement, comme la reprise d'une pièce de théâtre, elle met donc en lien des manifestations qui se produisent dans des temps différents, dans le même contexte ou dans un contexte différent. Dans le cadre de la couture, la reprise sert à réparer un tissu déchiré ou usé. [...] La reprise concerne donc quelque chose d'ancien qui est repris à l'identique comme une copie conforme, ou bien qui est repris avec des transformations et en conséquence des nouveautés. Dans ce dernier cas il s'agit de « nouer » ensemble de l'ancien et du nouveau. La reprise va nécessairement de pair avec de l'ancien gardé sous une forme ou une autre en mémoire. (p.18)

Cette image du tissu que l'on reprise exprime bien cette idée de solidifier un savoir préexistant : le tissu originel représente les premiers savoirs mis en place dans les classes antérieures et la reprise, faite avec un fil neuf, suggère quant à elle les notions nouvelles du programme de l'année en cours qui sont tissées avec les savoirs anciens, afin de consolider et d'enrichir ceux-ci.

C'est en ce sens que la *reprise* de l'algèbre est évoquée dans le document *Ressources sur les fonctions pour la classe de seconde* (MEN, 2009b). Ce document revient brièvement sur les savoirs algébriques abordés au collège : *au collège le travail sur le développement d'une expression algébrique est véritablement amorcé en quatrième alors que la factorisation n'est amorcée qu'en troisième* (p.13). Ce passage montre que les élèves n'ont qu'une faible pratique des tâches et techniques algébriques en arrivant au lycée et qu'une *reprise* s'avère nécessaire en classe de seconde. On peut d'ailleurs lire à la suite dans ce même document qu'*en seconde il s'agit de poursuivre cet apprentissage du calcul algébrique (qui sera à continuer aussi au cycle terminal)*.

Nous nous interrogeons sur les *savoirs enseignés* et les *savoirs appris* par les élèves en fin de collège et au début du lycée. Quel est l'état de la connaissance des élèves relativement aux concepts algébriques à la sortie du collège ? Quels types de praxéologies algébriques ont été institutionnalisés ? Ces praxéologies sont-elles complètes, c'est-à-dire ne comportent-elles pas de lacunes relatives aux quadruplets (type de tâches, technique, technologie, théorie) ? Par exemple, les élèves ont-ils la possibilité de justifier une technique de résolution d'une équation du premier ou du second degré par des arguments mathématiques, soit des éléments technologiques ou théoriques ? Le terme de *complétude* a été utilisé par Bosch et al. (2004) (cf. section 1.2.2) pour caractériser les organisations mathématiques locales. Nous retenons de ce concept qu'un type de tâches peut être étudié au niveau d'une institution avec certaines limitations et que la transition au niveau supérieur (passage du collège au lycée, passage du

lycée à l'université) peut engendrer des manques de capacités des élèves à résoudre ces mêmes types de tâches, lorsque ceux-ci sont considérés dans une organisation mathématique plus globale. L'entrée au lycée voit une *reprise* des premières expressions algébriques (généralement polynomiales de degré 1 et 2) vues au collège, en étendant celles-ci aux expressions rationnelles.
D'autre part, le programme de seconde de 2009 précise dans l'entête du domaine *Fonctions* :

> Par ailleurs, la résolution de problèmes vise aussi à progresser dans la maîtrise du calcul algébrique et à approfondir la connaissance des différents types de nombres, en particulier pour la distinction d'un nombre de ses valeurs approchées. (MEN, 2009a)

L'un des paradoxes de ce dernier programme et l'une de ses différences notables avec le précédent (MEN, 2001a) est justement la disparition de l'étude systématique des ensembles de nombres, de la nature et de l'écriture de ceux-ci, distinguant la valeur exacte de leurs valeurs approchées. Nous nous questionnons sur les conséquences de la disparition de cette étude, en considérant le lien étroit qu'entretient le domaine numérique avec le domaine algébrique (Bronner, 2007, cf. §2.5). Le flou laissé par la non-prise en compte des différentes catégories de nombres ne risque-t-il pas d'accentuer la difficulté à considérer les paramètres d'une expression algébrique donnée ? Par exemple, un élève ayant à résoudre une équation du premier degré comme $3x - 4 = 0$ pourra-t-il concevoir aisément qu'elle est même type que la suivante : $\sqrt{2}\,x + 2{,}7 = \frac{4}{3}$? Nous rejoignons Larguier (2009) sur l'une des conclusions de sa thèse :

> La synthèse sur les nombres [... a] disparu de ce programme qui se met en place en septembre 2009. Je pense à l'issue de ce travail que la synthèse sur les nombres notamment est nécessaire, elle est beaucoup plus difficile à faire qu'il n'y paraît de prime abord. Est-ce une raison pour la faire disparaître ? (p.326)

De plus, comme vu plus haut, les élèves de la classe de seconde n'ayant accès à l'algèbre qu'au travers d'activités et de problèmes, une forte hétérogénéité risque de se creuser entre les élèves. Certains auront une capacité d'abstraction suffisante pour généraliser et réutiliser sous un autre angle, et dans d'autres activités, une notion algébrique vue contextualisée dans un problème donné, alors que d'autres peineront à transposer un type de tâches vu dans un autre contexte. Le document *Ressources sur les fonctions pour la classe de seconde* (MEN, 2009b) fait part d'ailleurs de ces différences :

> La maturité et la capacité d'abstraction que demandent la manipulation des expressions littérales et la mise en place de tels raisonnements sont différentes pour chaque élève et évoluent en cours d'année. (p.12)

Ce même document évoque une *différenciation pédagogique à mettre en place,* mais ne pouvons-nous pas craindre que ces préconisations ne soient perçues par les enseignants comme une absence de gestion de l'apprentissage des bases algébriques ? Ce qui suit dans ce même document peut le laisser penser :

> Toutefois le degré de technicité attendu de certains élèves peut, et doit, rester modeste. Quand la complexité du calcul devient plus grande, ou du moins trop grande pour eux, un recours à des logiciels de calcul formel est possible et est à favoriser. (p.13)

Quelle représentation de l'algèbre les élèves de seconde vont-ils se forger, s'ils utilisent des outils de calcul formel qui remplacent la technique et la technologie sous-jacente ? Quel degré de variabilité des élèves est observable sur leur capacité à révéler l'algèbre en tant qu'objet par rapport à l'utilisation qu'ils en font en tant qu'outil ? Quelle représentation se construisent-ils de l'algèbre lorsque celle-ci est essentiellement étudiée au travers de problèmes empruntés à d'autres champs mathématiques ?
Ce questionnement nous amène à formuler une deuxième hypothèse :
Les élèves de la classe de seconde, amenés à se construire une représentation de l'algèbre au travers de problèmes empruntés à d'autres champs mathématiques, ont une capacité très variable à décontextualiser les notions algébriques ainsi vues localement et à révéler l'algèbre en tant qu'*objet* par rapport à l'utilisation qu'ils en font en tant qu'*outil*.
Cette deuxième hypothèse appelle la question suivante en lien avec notre problématique : comment pallier les difficultés algébriques chez les élèves ? Un élément de réponse est amorcé dans la section suivante.

5.3 Reprendre de l'algèbre par l'*algorithmique* dans le cadre de la classe de seconde

Nous considérons une seconde définition de Larguier (2005) de la *reprise*.

> La reprise se situe donc au moment d'une nouvelle mise en scène de savoirs déjà institutionnalisés dans les classes antérieures. La reprise peut alors aller à l'extrême d'un redoublement du temps didactique, et constitue alors un recommencement qui se traduit dans les classes par des rappels ou encore par des révisions ; jusqu'à une « reprise d'étude » et une reprise de l'avancée du temps didactique qui fait apparaître de nouveaux enjeux d'étude et qui est alors une poursuite de l'étude amorcée dans les classes antérieures.

Dans cette définition, ce chercheur met l'accent sur deux extrêmes de reprise, soit une reprise à l'identique de connaissances déjà rencontrées, au collège dans notre cas, soit une reprise qui permet une avancée du temps didactique en ajoutant aux connaissances anciennes de nouvelles connaissances.
Ces deux types de reprise existent au niveau institutionnel de la classe de seconde dans le domaine algébrique. Citons, par exemple la *résolution de problèmes conduisant à une équation du premier degré à une inconnue* du programme de quatrième du collège (MEN, 2008a) ou encore la *détermination, sur des exemples numériques, des nombres x tels que* $x^2 = a$*, où a est un nombre positif*, étudiée en classe de troisième (ibid.). Dans le premier cas, une reprise à l'identique des techniques de résolution de telles équations pourra être accomplie, lors de problèmes rencontrés issus de champs mathématiques divers. Dans le second cas, une avancée du temps didactique sera effectuée *en nouant ensemble de l'ancien et du nouveau* (Larguier, 2009), puisque le cas où *a* est un nombre négatif pourra être étudié, dans le cadre de *problèmes se ramenant à une équation du type* $f(x) = k$ (MEN, 2009a).
Ces deux points nécessitent d'autant plus fortement une *reprise* qu'ils sont signalés dans les programmes comme n'étant pas exigibles dans le cadre du socle commun du collège : il est donc possible que les professeurs de collège aient interprété très diversement cette

préconisation. À l'entrée en seconde, une forte hétérogénéité des élèves risque d'être constatée sur ces types de tâches.

Comme vu en section 5.1, les programmes ne semblent pas favoriser le travail sur l'algèbre en tant qu'objet. Cependant, travailler l'algèbre non seulement comme *outil* mais aussi comme *objet* permet d'accéder à une complétude du savoir, dans la dialectique outil-objet définie par Douady (1986). Cette dernière précise : *par objet, nous entendons l'objet culturel ayant sa place dans un édifice plus large qui est le savoir savant à un moment donné, reconnu socialement.* L'hypothèse que nous allons développer est donc, tout en tentant de rester conforme au programme institutionnel de la classe de seconde, de présenter l'algèbre en tant qu'*objet*, en utilisant le cadre de l'algorithmique. En effet, comme développé au chapitre 4 sur un exemple de résolution d'une équation du second degré selon Al-Khawarizmi (cf. §4.1), l'algorithmique pourrait se trouver au service de l'algèbre en tant qu'outil et l'algèbre serait le cœur de l'utilisation de l'algorithmique, c'est-à-dire l'objet sur lequel l'algorithmique opère (cf. §4.5).

C'est maintenant le moment de délimiter plus précisément le champ mathématique d'expérimentation qui constitue le sujet de ce travail de recherche. En effet, un choix doit être entrepris pour établir un thème d'étude, comportant des types de tâches variés, à la fois suffisamment vaste et porteur pour la compréhension de l'algèbre, tout en étant centré sur des notions essentielles du programme de seconde. Relativement au développement de ce chapitre et des précédents, il nous est apparu opportun de travailler un thème algébrique comparable à celui d'Al-Khawarizmi, à savoir la classification et la résolution algébrique des équations polynomiales du premier et du second degré. En effet, ce thème peut favoriser un approfondissement de la compétence algébrique à plusieurs titres :

- Les équations du premier degré ont été manipulées au collège et peuvent constituer un point d'appui pour une reprise des équations, en particulier pour l'étude des équations du second degré du programme de seconde (celles que l'on peut factoriser sous la forme d'un produit de deux polynômes du premier degré, à l'aide d'un facteur commun ou d'une identité remarquable). L'apprentissage des équations du second degré est d'ailleurs accentué par le programme de 2009 qui voit l'arrivée de l'étude des fonctions polynomiales[86] de degré 2, avec comme objectif déclaré en entête de *rendre les élèves capables d'étudier un problème se ramenant à une équation du type f (x) = k et de le résoudre dans le cas où la fonction est donnée (définie par [...] une formule*) (MEN, 2009a). Toutefois une étude systématique de la forme canonique d'un polynôme de degré 2 n'est pas envisagée dans ce programme.
- L'étude d'équations polynomiales de degré 1 et 2 permet « d'attraper » un certain nombre de concepts algébriques, dont la plupart ont été évoqués au chapitre 2. Citons par exemple l'inconnue, le paramètre, le signe d'égalité, la solution, le degré, mais encore toutes les notions qui gravitent autour de la résolution des équations, comme le développement, la factorisation, les identités remarquables, et aussi l'équivalence de deux équations. De plus, la manipulation des équations permet une prise en compte de la nature des nombres déterminés des coefficients des équations, ce qui permet d'articuler le domaine numérique et le domaine algébrique.

[86] Ce point est nouveau dans le programme de seconde de 2009 et ne figurait pas dans le programme précédent de 2001 (MEN, 2001a) où seule la « fonction carré » et ses variations étaient étudiées.

- Les techniques de résolution des équations polynomiales de degré 1 et 2 peuvent être *algorithmisées* et se prêtent ainsi à la conception d'algorithmes qui peuvent ensuite être programmés sur une machine avec un logiciel adéquat.

Rappelons que l'algorithmique en classe de seconde est également un élément nouveau du programme de 2009. Son introduction dans le traitement des équations polynomiales de degré 1 et 2 pourrait alors permettre de *nouer l'ancien et le nouveau*. En effet, résoudre une équation du premier ou du second degré demande de reconnaître de quel type d'équation il s'agit, donc de déterminer à quelle catégorie cette équation appartient, puis d'effectuer un traitement algébrique selon des techniques éprouvées permettant sa résolution. L'*ancien* serait ici les techniques de résolution de ces équations déjà rencontrées au collège et le *nouveau* consisterait à généraliser ces techniques de manière à réaliser des algorithmes de résolution, programmés sur ordinateur. Relativement à cette programmation, nous avons vu en section 3.5 que la notion de *distance instrumentale* (Artigue et Haskepian, 2007) est un point-clef pour une introduction optimale d'un outil informatisé à côté du traditionnel environnement papier-crayon. Laborde (2003) exprime que l'introduction d'un environnement informatisé permet un *rôle médiateur* dans l'apprentissage de concepts mathématiques. Elle évoque les systèmes de calcul formel (CAS) en indiquant :

> […] the help CAS could bring in the interiorization process of the [algebraic] structure by offering working models on which the users can carry out actual experiments corresponding to the thought experiments they can perform on abstract objects.[87] (p.7)

Pour Laborde, un tel environnement permet d'explorer les représentations des objets abstraits de l'algèbre, comme s'ils étaient des objets matériels. Laborde (ibid.) cite Vygostki qui considérait déjà que les signes et les outils appartiennent à la même catégorie des *médiateurs* de l'activité humaine et en tant que tels, sont des éléments fondamentaux dans le processus de construction de concepts. Elle indique, en s'appuyant sur les travaux de Bartolini Bussi et Mariotti[88], que dans le cas des environnements CAS et des logiciels de géométrie dynamique

> […] it seems possible that teaching contribute to the internalization process from the external tools offered by the environment to the construction of the meaning of the mathematical concept. [89](p.7)

Comme déjà dit en fin du chapitre 4, cette idée d'expérimenter sur des structures algébriques abstraites comme si elles étaient des objets matériels a retenu notre attention pour ce travail de recherche.

Par ailleurs, un autre point a été soulevé dans la section 3.4, celui de la *pseudo-transparence* (Artigue, 1997) des objets mathématiques par rapport à leurs représentations dans l'environnement informatique, ce que Balacheff (1994) nomme la *transposition informatique*.

---

[87] […] l'aide que les CAS pourraient apporter dans le processus d'intériorisation de la structure [algébrique] en proposant des modèles de travail sur lesquels les utilisateurs peuvent réaliser des expériences réelles correspondant aux expériences de pensée qu'ils peuvent effectuer sur des objets abstraits.

[88] Bartolini Bussi M.-L. & Mariotti M.-A. (1999) Semiotic mediation: from history to the mathematics classroom. *For the learning of mathematics* 19(2),27-35.

[89] […] il semble possible que cet enseignement contribue au processus d'internalisation, à partir des outils externes offerts par l'environnement, pour la construction de la signification du concept mathématique.

Nous nous interrogeons sur la possibilité de d'accéder à des concepts algébriques abstraits par l'intermédiaire de ce détour par l'algorithmique : l'élève pourra-t-il faire la transposition nécessaire pour accéder à ces concepts ? La représentation des objets algébriques informatisés et la distance instrumentale créée vont-elles favoriser l'accès aux concepts mathématiques ? La pseudo-transparence entre les objets informatisés et les objets algébriques de l'environnement papier-crayon ne va-t-elle pas bloquer cet accès ?
Ces questions nous amènent à une troisième hypothèse de recherche :
L'utilisation de l'algorithmique liée à la programmation, comme outil pour enseigner des concepts algébriques, facilite l'apprentissage de ceux-ci par la distance instrumentale créée, en permettant de rendre réelle et consciente une expérience de pensée algébrique abstraite, et ce, malgré la pseudo-transparence induite par les instruments manipulés.
Il reste une dernière expression à expliciter, celle des *conditions et des contraintes* de la mise en place d'une telle expérimentation, unissant *reprise*, *algèbre* et *algorithmique*.

5.4 Étude des *conditions et des contraintes* de cette reprise

Pour cette dernière hypothèse, c'est le pôle professeur que nous souhaitons plus finement mettre au centre de nos observations et de nos recherches, en montrant comment les choix et les pratiques d'enseignement du domaine algébrique d'un professeur peuvent influer sur les apprentissages des élèves.
L'étude des conditions et des contraintes de cette reprise consiste pour nous à étudier, au sens de Chevallard, les *conditions* d'enseignement que le professeur crée dans sa classe et les *contraintes* auxquelles il est soumis. Ainsi, seront analysés et différenciés les paramètres sur lesquels il est possible d'agir et ceux qui sont subis, relativement à l'enseignement de concepts algébriques, liés à des concepts d'algorithmique.
Les nouvelles questions de cet axe de la problématique sont liées à l'expérimentation qui sera proposée aux enseignants. Nous nous interrogeons sur la façon dont ceux-ci vont faire travailler les élèves dans les cadres algébrique et algorithmique et en considérant l'articulation des deux. Notre questionnement est le suivant :
Quels *savoirs pour enseigner* (algébriques et algorithmiques) sont nécessaires à la réalisation de cette expérimentation ? Quelles contraintes proviennent de l'interprétation des programmes officiels par les enseignants ? Quelles institutionnalisations seront faites des concepts algébriques abordés ? Quelle part de l'expérimentation les enseignants vont-ils considérer comme compatible avec leur pratique ? Quelle contrainte de temps considèrent-ils raisonnable pour une telle expérimentation ? Sur quels concepts algébriques et sur quels concepts algorithmiques les enseignants vont-ils centrer leur enseignement ? Comment les enseignants vont-ils transposer les concepts algébriques en environnement informatisé ? Quelles reprises de concepts algébriques ou algorithmiques les enseignants effectuent-ils pour faciliter l'apprentissage de l'élève ? Quelle est leur prise en compte du temps d'apprentissage de l'élève ?
Cette multitude de questions nous amène à formuler la quatrième hypothèse suivante :
Les choix d'organisations mathématique et didactique des enseignants dans le cadre de l'expérimentation mise en place, conjugués aux conditions et contraintes d'exercice du métier,

montrent des invariants dans les gestes professionnels de ceux-ci relativement au domaine de l'algébrique mais pointent aussi des différences, ayant un impact sur les possibilités d'apprentissage des élèves.

5.5 Problématique et résumé des hypothèses de recherche

Pour plus de commodité dans la lecture de la suite de ce travail, nous rappelons ici la problématique et résumons les quatre hypothèses. Par la suite, nous utilisons les abréviations H1, H2, H3 et H4 pour les désigner.

Problématique : Quelles sont les *conditions et des contraintes,* côté enseignant et côté apprenant, pour une *reprise* de l'*algèbre* par l'introduction de l'*algorithmique* dans le cadre de la classe de seconde du lycée ?

H1 : Le professeur de la classe de seconde ne se conforme pas complètement au contenu strict du programme d'algèbre et juge qu'il est nécessaire de reprendre un travail spécifique sur l'algèbre sans la plonger systématiquement dans le cadre fonctionnel, et d'institutionnaliser des praxéologies algébriques.

H2 : Les élèves de la classe de seconde, amenés à se construire une représentation de l'algèbre au travers de problèmes empruntés à d'autres champs mathématiques, ont une capacité très variable à décontextualiser les notions algébriques ainsi vues localement et à révéler l'algèbre en tant qu'*objet* par rapport à l'utilisation qu'ils en font en tant qu'*outil*.

H3 : L'utilisation de l'algorithmique liée à la programmation, comme outil pour enseigner des concepts algébriques, facilite l'apprentissage de ceux-ci par la distance instrumentale créée, en permettant de rendre réelle et consciente une expérience de pensée algébrique abstraite, et ce, malgré la pseudo-transparence induite par les instruments manipulés.

H4 : Les choix d'organisations mathématique et didactique des enseignants dans le cadre de l'expérimentation mise en place, conjugués aux conditions et contraintes d'exercice du métier, montrent des invariants dans les gestes professionnels de ceux-ci relativement au domaine de l'algébrique mais pointent aussi des différences, ayant un impact sur les possibilités d'apprentissage des élèves.

CHAPITRE 6 - MÉTHODOLOGIE DE RECHERCHE

Afin de tester les quatre hypothèses de recherche présentées au chapitre précédent, différentes études ont été réalisées. Le but de ce chapitre est de présenter la méthodologie générale de notre travail ainsi que les diverses procédures qui composent ce cadre méthodologique. Nous présentons les différents éléments du recueil de données, et en particulier l'expérimentation menée dans différentes classes de seconde du lycée, en donnant leur fonction spécifique dans le cadre de notre recherche.
La collaboration avec les enseignants pour construire l'expérimentation est liée aux principes de *recherche collaborative* de Bednarz et Desgagné, que nous explicitons dans ce chapitre.
Nous exposons enfin la manière dont nous articulons ces diverses données afin de mener notre réflexion, et nous finissons par la présentation de l'établissement où s'est déroulée l'expérimentation ainsi que celle des professeurs y ayant participé.

6.1 Les différents éléments du recueil de données

Cette recherche ayant pour objectif de mettre en évidence une utilisation de l'algorithmique pour l'enseignement/apprentissage de l'algèbre au début du lycée ainsi que les conditions et les contraintes liées à une telle utilisation, nous nous proposons d'aborder les points suivants :
- une analyse institutionnelle de quelques concepts algébriques à la fin du collège et au début du lycée, conjuguant une analyse des programmes officiels et de manuels de mathématiques ;
- une étude des connaissances d'élèves français en algèbre élémentaire, au niveau du début du lycée ;
- une ingénierie didactique comportant trois situations expérimentées dans trois classes de seconde sur la reprise du concept d'équation, en utilisant l'algorithmique ;
- des entretiens des professeurs expérimentateurs à propos des conditions et contraintes de l'introduction de l'algorithmique au lycée sur leurs pratiques, en lien avec l'expérimentation réalisée dans leur classe.

Nous tentons de justifier dans les sections qui suivent les choix de ces études et la méthodologie employée pour les mener.

6.1.1 Analyse institutionnelle de quelques concepts algébriques

Notre recherche étant centrée sur l'algèbre au niveau de la classe de seconde générale du lycée, c'est bien entendu à ce niveau que les expérimentations sont effectuées et que les données sont recueillies. Cependant, afin de situer la recherche par rapport aux différents niveaux de *l'échelle de codétermination didactique* (Chevallard, 2002), plusieurs études préliminaires sont effectuées, afin de ne négliger aucun grain d'analyse. Aussi, dans un premier temps, nous penchons-nous sur les contraintes et conditions imposées par deux institutions, le collège et le lycée, en considérant les programmes officiels de mathématiques de la classe de troisième du collège et ceux de la classe de seconde du lycée. En partant du curriculum officiel, tel qu'il est indiqué par les textes des programmes, nous nous intéressons à ce que les deux institutions scolaires indiquent comme *savoirs à enseigner* dans le domaine de l'algèbre, et plus particulièrement celui des équations. Afin d'illustrer comment ces programmes vivent dans ces deux institutions, nous avons examiné différents manuels de mathématiques de troisième et de seconde, les considérant comme des interprétations possibles des textes officiels. Comme nous n'abordons pas ici le curriculum réel, tel qu'il vit véritablement dans les classes, nous n'avons pas cherché à mesurer la représentativité de ces manuels dans les pratiques de classes. Nous avons analysé des manuels de deux époques correspondant aux deux derniers changements de programmes, débutés en 1999-2000 puis en 2008-2009. L'évolution des programmes institutionnels est analysée au travers des textes officiels et de ces manuels. Cette analyse conjointe, évolutive et comparative des programmes et des manuels, devrait permettre :

- d'identifier des contraintes, internes aux curriculums, expliquant l'évolution de la place de quelques concepts algébriques dans les programmes ;
- de mettre en évidence les continuités et ruptures de concepts algébriques à enseigner dans les deux institutions *collège* puis *lycée*.

Ainsi cette étude sert-elle à situer dans quelles conditions et sous quelles contraintes la *reprise* (Larguier, 2009) de l'algèbre s'effectue en classe de seconde.

Les outils utilisés pour cette étude sont la notion de *praxéologie*, avec le quadruplet type de tâches, techniques, technologie, théorie, mais également l'analyse *écologique* (cf. §1.2) comme moyen de questionnement de notre corpus.

Plus particulièrement, l'approche écologique nous questionne sur les points suivants : Quelle est la place accordée au concept d'équation et à sa résolution algébrique dans les deux institutions (collège et lycée) ? Quel lien entretiennent la factorisation et la résolution des équations ? Quelle est la place accordée à la factorisation ? Aux équations du premier degré ? Aux équations du second degré ? Quel lien entretiennent les concepts de racine carrée et d'équation du second degré ?

L'analyse praxéologique, quant à elle, est un moyen de répondre à des questions comme : Quels sont les différents types de tâches proposés autour du concept d'équation ? Quelles sont les techniques associées ? Y a-t-il *complétude* (Bosch et al., 2004) de ces types de tâches, de ces techniques ? Si les technologies et théories correspondantes sont explicitées, quels sont les choix effectués ?

Les résultats obtenus devraient permettre d'apporter des éléments pour étayer l'hypothèse H1, portant sur la manière des enseignants d'aborder l'enseignement de l'algèbre en classe de seconde et également l'hypothèse H2, sur la disparité des connaissances algébriques des élèves de ce niveau de classe.

6.1.2 Étude des connaissances d'élèves français en algèbre élémentaire, au niveau du début du lycée

Résultats des enquêtes PISA

Afin de comparer les performances des élèves français de quinze ans aux autres pays de l'OCDE, nous avons étudié les enquêtes PISA de 2000 à 2006, en recherchant les résultats publiés sur les exercices proposés relevant plus particulièrement du domaine algébrique. Cette première étude des connaissances des élèves français comparées à celles d'autres pays d'une même *civilisation* permet d'observer, à un niveau encore différent de l'échelle de codétermination didactique de Chevallard, l'enseignement de l'algèbre. Cependant, l'accès aux données de ces enquêtes n'est pas libre et seule une petite partie des épreuves proposées est à disposition du public. Notre étude s'est donc restreinte à l'analyse de deux problèmes faisant partie du champ algébrique, analyse réalisée dans le but de déterminer d'une part les concepts algébriques mis en jeu et d'autre part, d'évaluer l'adéquation de ces problèmes avec l'enseignement des mathématiques en France, au niveau des classes de troisième et seconde. Ces deux niveaux de classe ont été choisis puisque les élèves qui passent les enquêtes PISA ont quinze ans révolus, ce qui correspond à des élèves (quand ils ne sont pas en retard ou en avance) en fin de collège ou en début de lycée.

La méthodologie utilisée pour analyser ces problèmes repose sur deux aspects :

- les *composantes de la compétence algébrique* de Grugeon (1995, Cf. §2.4) qui donne une grille de lecture de la complexité des problèmes algébriques proposés ;
- l'approche *écologique* (Chevallard, 1994b, Artaud, 1997) qui permet de mesurer l'adéquation des problèmes de PISA par rapport aux programmes institutionnels français.

Les résultats de ces analyses sont confrontés aux résultats des élèves français et permettent ainsi de les expliquer, en tenant compte des deux pans d'analyse donnés ci-dessus. Cependant, comme dit plus haut, ces tests sont faits dans un environnement particulier, au niveau sociétal international des pays de l'OCDE et les résultats obtenus nous semblent insuffisants pour comprendre le niveau de la société française. Un test diagnostique, ciblé sur des compétences algébriques préconisées par la noosphère et par les programmes officiels en cours, est alors réalisé en complément sur des élèves français de 15 à 17 ans en fin de classe de seconde[90]. Nous le présentons dans ce qui suit.

Test diagnostique de fin de seconde

Ce test diagnostique est réalisé en juin 2010 sur 160 élèves de six classes de seconde générale d'un même lycée, soit durant l'année scolaire précédent celle de l'expérimentation didactique proprement dite (expérimentée en 2010-2011). Il est élaboré par le chercheur en utilisant des sources actées par la noosphère comme *la banque d'outils d'aide à l'évaluation diagnostique*[91] ou l'ancienne *évaluation de mathématiques à l'entrée en seconde*[92], ou encore

[90] Lycée Georges Pompidou, situé à Castelnau le Lez (Hérault) dont les statistiques nationales sont données en section suivante.

[91] Cette banque d'outils se trouve sur le site du Ministère de l'Éducation Nationale : http://www.banqoutils.education.gouv.fr/

[92] Cette évaluation a eu lieu dans les années 2000 et est abandonnée aujourd'hui. Elle était obligatoire et nationale et destinée à apprécier les compétences des élèves à leur entrée au lycée en français, mathématiques,

à partir de ressources des IREM[93] ou de sujets posés au Brevet des Collèges. Le choix des exercices est réalisé de manière à répondre à plusieurs objectifs :
- évaluer les *savoirs appris* des élèves dans le domaine numérico-algébrique pour différents types de tâches prescrits par les programmes officiels ;
- faire émerger des difficultés récurrentes relativement au public testé pour divers types de tâches algébriques, et étudier si ces difficultés peuvent relever d'obstacles épistémologiques ou didactiques ;
- comparer les performances des élèves en considérant les types de tâches algébriques selon qu'ils relèvent d'une utilisation comme *outil* ou comme *objet*, au sens de Douady. En particulier, sont proposés des exercices algébriques dans un cadre purement numérico-algébrique et d'autres dans un cadre géométrique.

La méthodologie utilisée pour analyser ce test repose sur les concepts suivants :
- les *praxéologies* mathématiques avec le quadruplet type de tâches-technique-technologie-théorie de Chevallard (cf. §1.4) ;
- les *composantes de la compétence algébrique* de Grugeon (cf. §2.4).

Une double analyse de chacun des exercices proposés sera effectuée a priori en considérant ces deux approches et en les mettant en regard des compétences exigibles des programmes officiels. Ainsi, pour l'analyse des résultats du test, l'étude des praxéologies nous permettra de repérer quels types de tâches algébriques posent problème aux élèves (et quels sont ceux qui n'en posent pas), quelles sont les techniques mises en œuvre et les technologies sous-jacentes. Considérant les composantes de la compétence algébrique, nous étudierons en particulier si la réussite des élèves s'effectue avec le même taux selon que le traitement algébrique est attendu comme *objet* ou comme *outil* (Douady, 1986), nous évaluerons également le *rapport arithmétique / algèbre* à l'aide d'indicateurs comme le type de démarche ou le statut de l'égalité dans le traitement d'expressions algébriques.

Cet « état des lieux des connaissances algébriques » d'un panel d'élèves de fin de seconde doit nous permettre de formuler des premières réponses relatives à l'hypothèse H2, dans le sens où nous pourrons mesurer la disparité des acquis de ces élèves en algèbre.

La mesure de cette disparité est également un point de départ pour l'expérimentation menée, vue comme une tentative de remédiation aux difficultés récurrentes de certains élèves.

6.1.3 Expérimentation didactique spécifique

Les études menées dans ce mémoire sur les recherches effectuées en didactique de l'algèbre (cf. §2) et sur l'apport de l'introduction des TICE à l'enseignement des mathématiques (cf. §3 et 4), conjuguées aux résultats des analyses des éléments décrits ci-dessus, nous amènent à concevoir et mettre en place une *expérimentation didactique spécifique*, dans le but d'étayer nos quatre hypothèses de recherche.

---

histoire, géographie et en langues étrangères. Les archives se trouvent sur le site : http://cisad.adc.education.fr/eval/pages-00/materiel/seconde/default2nde.htm

[93] Instituts de Recherche sur l'enseignement des Mathématiques : http://www.univ-irem.fr/

Cadre didactique pour l'expérimentation

Comme précédemment, les outils théoriques sont essentiellement empruntés à la théorie des situations de Brousseau (1998), notamment le concept de *situation didactique*, et à la théorie anthropologique du didactique de Chevallard (1992b, 1999), en particulier les concepts d'*organisation mathématique* (OM) et *d'organisation didactique* (OD), qui conduisent nos analyses. Nous complétons ce cadre au fur et à mesure que d'autres concepts nous apparaissent nécessaires à ces analyses.

Spécificité de l'expérimentation menée

La qualification d'*expérimentation spécifique* est liée à la forme particulière de l'étude menée dans cette recherche qui oscille entre une *étude clinique* et une *ingénierie didactique*. Chevallard (2008b) caractérise une *étude clinique*, en opérant un détour par une analogie avec le milieu médical :

> Dans l'usage médical moderne, ce qui semble insister dans le discours sur la clinique, c'est l'idée *d'observation directe* du malade (ou de la pathologie), mode d'accès à quoi il faut bien ajouter, aujourd'hui, toutes sortes d'examens « paracliniques ». (p.1)

Nous retenons ici l'idée d'*observation directe*, que nous pouvons aussi nommer *observation naturelle*, et Chevallard (ibid.) précise qu'il peut s'agir de l'observation d'une population de professeurs, d'élèves, de traces écrites, etc. Une *étude didactique clinique* peut donc être définie comme l'observation par le chercheur des pratiques enseignantes et des répercutions sur les apprentissages des élèves, mais sans intervention de ce dernier dans les conceptions de l'enseignant, ni sur la conception des séances.

Quant au concept d'*ingénierie didactique,* il a été développé par Artigue (1990), à la suite de Brousseau. Cette méthodologie, basée sur des réalisations in situ, se caractérise par quatre phases qui guident la recherche :

- *les analyses préalables* (épistémologiques, contraintes institutionnelles, conceptions des élèves, etc.) sur lesquelles s'appuie en amont la conception de l'ingénierie ;
- *la conception et l'analyse a priori* où le chercheur sélectionne un certain nombre de variables permettant, a priori, de contrôler le comportement des acteurs et d'en déduire des hypothèses qui seront vérifiées par la suite ;
- la réalisation de l'*expérimentation* permettant un recueil de données diverses ;
- *l'analyse a posteriori et l'évaluation*, qui s'appuient sur l'ensemble des données recueillies (observations, productions d'élèves, questionnaires, entretiens, etc.).

Artigue (ibid.) insiste sur le fait que *c'est sur la confrontation des deux analyses : analyse a priori et analyse a posteriori que se fonde essentiellement la validation des hypothèses engagées dans la recherche.*

Bien entendu, dans le cadre d'une étude clinique, des analyses préalables sont également réalisées et le recueil de données est aussi basé sur les observations de classe, les productions d'élèves et autres entretiens a posteriori. La différence essentielle entre une *étude clinique* et une *ingénierie didactique* est basée sur l'intervention ou non du chercheur dans la constitution des situations didactiques.

La démarche que nous proposons se situe *entre* ces deux cadres, puisque notre *expérimentation spécifique* repose sur un principe de collaboration entre le chercheur et les professeurs expérimentateurs, selon des concepts empruntés à la *recherche collaborative*, initiée par Desgagné (1997) et Bednarz (2005, 2011), que nous développons ci-dessous. Insistons sur le fait que la préposition « *entre* » est à comprendre ici de deux manières qui ne s'excluent pas[94] :

- Premier sens, « dans l'espace qui sépare les deux limites ». Ce premier sens montre une *oscillation* entre les deux limites, c'est-à-dire que *l'expérimentation didactique spécifique* s'apparente tantôt à une *étude clinique* (par exemple quand le chercheur observe les ajustements que le professeur a décidé lui-même d'opérer dans la situation didactique observée), tantôt à une ingénierie didactique (quand le professeur suit les préconisations du chercheur dans la situation testée) ;
- Second sens, « un état intermédiaire » (comme dans l'expression : *une couleur entre jaune et vert*). La co-construction des situations didactiques, reposant sur la collaboration du chercheur avec les professeurs expérimentateurs, influe à la fois sur *l'ingénierie didactique* pensée par le chercheur et sur la pratique des enseignants dont on effectue *l'étude clinique*. S'ensuit l'apparition d'un « état spécifique intermédiaire » basé sur cette co-construction, qui relève *à la fois* d'une étude clinique et d'une ingénierie didactique. Par exemple, le chercheur propose une situation que le professeur n'aurait pas mis en place d'emblée dans sa classe, mais ce dernier suggère des modifications de la situation que le chercheur n'aurait a priori pas envisagées. Cette situation intermédiaire adoptée par les deux protagonistes est *spécifique* à leur rencontre.

Résumons nos propos par un schéma, où les flèches symbolisent l'oscillation de l'expérimentation prévue entre une étude clinique et une ingénierie didactique telles que nous les avons définies ci-dessus. Le rectangle gris symbolise « l'état intermédiaire » :

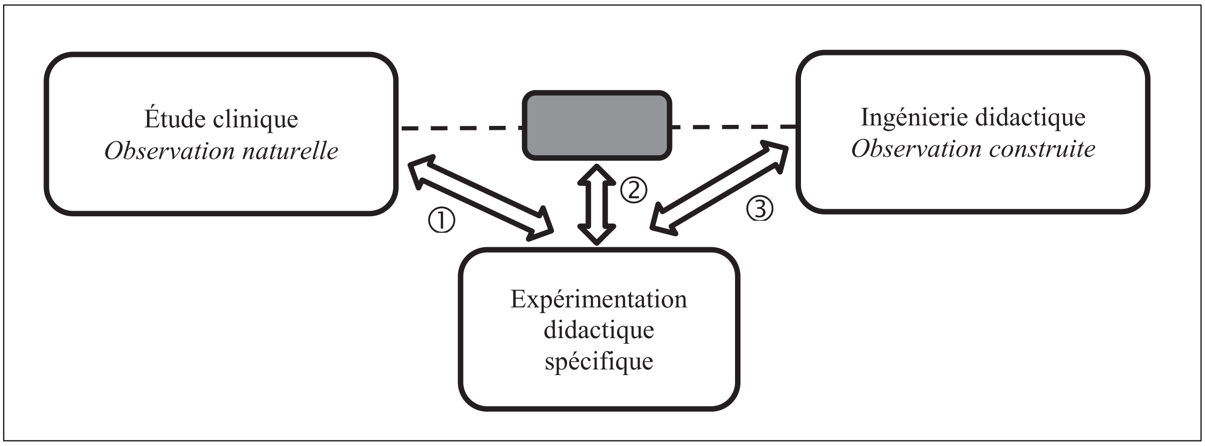


Figure 22 : Positionnement de l'expérimentation didactique spécifique

Justification de la spécificité de l'expérimentation

Il existe plusieurs raisons au choix de cette expérimentation particulière.

Comme les programmes institutionnels n'incitent pas à mêler algèbre et algorithmique, comme nous l'avons montré en section 4.5.4[95], les professeurs ne semblent pas proposer

[94] Définitions sur le site des dictionnaires Larousse (http://www.larousse.fr/dictionnaires/francais/entre/30002).

[95] Nous rappelons que les *niches* de l'algorithmique sont surtout proposées par ces programmes dans les domaines de l'analyse, de la géométrie et des statistiques et probabilités. Seul le secteur « second degré » du domaine algèbre est cité comme pouvant faire l'objet *d'activités algorithmiques* (MEN, 2010a-b).

spontanément des situations de classe présentant cette articulation entre algèbre et algorithmique. En particulier, les enseignants ayant participé à l'expérimentation n'inscrivent pas ou peu ce type de situations dans leurs pratiques, comme nous le verrons dans l'analyse de l'entretien pré-expérimentation. Étant donné que notre recherche est basée sur cette articulation, une *étude clinique* stricte est de ce fait exclue, et il nous est apparu nécessaire de proposer une *ingénierie didactique* où algèbre et algorithmique sont liées.
Cependant, les principes de la recherche collaborative, comme nous tentons de le montrer ci-après, nous ont paru correspondre d'une part, à une prise en compte des contraintes de l'enseignement et d'autre part, à la recherche que nous menons. En effet, pour travailler l'hypothèse H4, nous nous devons d'étudier certains choix d'organisations mathématique et didactique des professeurs expérimentateurs et tenir compte de leurs conditions et contraintes d'enseignement, ce qui nécessite que l'ingénierie ne soit pas complètement achevée et modifiable sur certains points. C'est ainsi qu'une *ingénierie didactique* stricte, où le chercheur met en place une situation et où l'enseignant la teste, ne nous semble pas non plus adéquate pour ce travail.
Nous définissons dans un premier temps les bases de la recherche collaborative puis nous indiquons comment nous avons pensé le montage de cette expérimentation spécifique.

Les principes de la recherche collaborative
Selon Desgagné (1997) et Bednarz (2005, 2011), la recherche collaborative se base sur un positionnement particulier du chercheur qui tente de donner un rôle aux acteurs du terrain. Ce positionnement constitue un projet, une entrée dans la recherche en didactique s'inscrivant dans la nécessité de produire des savoirs pertinents pour le champ de la pratique professionnelle, où *l'on reconnaît aux « praticiens » une part dans l'avancée de la connaissance*[96]. D'autre part, l'explicitation du chercheur qui tente de comprendre les pratiques enseignantes se trouve augmentée d'un éclairage in situ permettant d'accéder aux manières de faire, souvent implicites, partagées par les enseignants d'une même institution. Desgagné (1997, p.381) indique que *le chercheur sollicite des praticiens, parce qu'il croit à une construction de connaissances qui ne peut faire fi du contexte réel d'exploration ni du point de vue de l'acteur praticien en action dans ce contexte d'exploration*.
Ainsi le travail de recherche sur les pratiques enseignantes n'est-il plus seulement vu comme la constitution d'un état des lieux de ce que fait ou ne fait pas l'enseignant. Desgagné et Bednarz y ajoutent un regard croisé entre le chercheur et le praticien, qui par une volonté commune de construire des liens, les fait progresser tous deux dans la constitution d'objets *co-situés*, spécifiques, comme par exemple la conception de séquences ou de scénarios d'enseignement. Cependant, avant même l'opérationnalisation de cette recherche, il existe une sorte de *contrat de recherche* qui oriente le travail entre le chercheur et le praticien expérimentateur. Tout d'abord, le travail sur des objets *co-situés* laisse entendre que ces objets présentent un intérêt d'étude commun, mais le préfixe « co » *ne veut pas dire une exigence de participation des praticiens à l'ensemble des étapes formelles habituellement associées à une recherche* (Bednarz, 2011). Desgagné (1997, p.377) précise : *non seulement*

[96] Référence citée par dans Bednarz (2011) : Darré, J.- P. (1999). *La production de connaissance pour l'action. Arguments contre le racisme de l'intelligence*. Paris : Éditions de la Maison des sciences de l'homme et Institut National de la Recherche Agronomique.

un projet de recherche collaborative se construit sur une double identité, recherche et formation, mais ces deux volets peuvent, à la limite, se mener plus ou moins en parallèle. Ces chercheurs insistent sur le fait que les tâches attribuées au chercheur et aux praticiens sont différentes. Citons Desgagné (ibid.) :

> Cela veut simplement dire que la recherche collaborative, telle qu'on la conçoit, n'exige pas que les praticiens offrent une participation de co-chercheurs, au sens strict du terme, soit cette participation aux tâches formelles de recherche. Ce qu'elle exige c'est leur participation de co-constructeurs, étant entendu que c'est leur compréhension en contexte du phénomène exploré (et investigué) qui est essentielle à la démarche. Là est la véritable contribution souhaitée des praticiens dans le projet collaboratif. (p.380)

L'analyse des données et des interactions est donc faite, la plupart du temps, par le chercheur seul[97], par contre une certaine adhésion du praticien au projet du chercheur est nécessaire : [l'un et l'autre doivent] *tenir compte à chacune des étapes des préoccupations des partenaires et des mondes qu'ils représentent, de leurs connaissances, de leurs expertises, …* (Bednarz, 2011). Desgagné (1997) insiste sur cette dualité, sur cette préoccupation continuelle du chercheur à être habité par une *double vraisemblance*, et définit le concept de collaboration par [l'appui] *sur la prise en compte simultanée des préoccupations et des intérêts respectifs des partenaires, soit ceux qui mobilisent en propre le chercheur (l'avancement des connaissances) et ceux qui mobilisent les praticiens (l'amélioration de la pratique) dans le projet*. (p.378)

Bednarz (2011) exprime que pour que la recherche collaborative définie ci-dessus soit durable, des conditions sont nécessaires, dont celles-ci :

- la *viabilité* de la construction des objets co-situés, dans le sens que le savoir à construire doit être une résonance à la fois pour le praticien dans sa classe et pour la recherche ;
- la prise en compte d'un savoir *situé*, c'est-à-dire que tout savoir est construit dans une pratique professionnelle, où le contexte n'est pas qu'un simple habillage, mais une relation dialectique entre le monde réel et celui créé en fonction de ses besoins.

Pour le dernier point, Bednarz et Desgagné (2005) soulignent le fait que la construction des savoirs est reconnue *comme une œuvre socialement et culturellement située* et sur la nécessité de considérer conjointement les deux mondes dans lesquels le chercheur et l'enseignant évoluent. Pour ces chercheurs, un monde est caractérisé par *un certain groupe de pratique commune, qui impose ses règles de fonctionnement, et où les membres négocient entre eux, dans leur quotidien, un certain mode d'agir et de penser, à partir des ressources et des contraintes qui sont les leurs*. Pour éviter que chacun de ces mondes n'évolue en vase clos, ils préconisent une recherche collaborative permettant *la jonction des deux « mondes », sinon l'émergence d'une communauté nouvelle autour de cette jonction souhaitée*.

Méthodologie globale de l'expérimentation spécifique menée

Nous nous proposons de présenter les grandes lignes de notre méthodologie d'expérimentation, en montrant comment celle-ci s'appuie sur les différents concepts de la recherche collaborative, développés ci-dessus.

Nous avons dégagé trois éléments constitutifs et interdépendants de cette expérimentation :

[97] Les partisans de la recherche collaborative n'entendent cependant pas exclure les praticiens qui souhaiteraient participer à cette investigation.

- la *trame d'ingénierie didactique,* conçue par le chercheur ;
- la *trame projetée,* déterminée conjointement par le chercheur et l'enseignant ;
- la *séquence réalisée,* par l'enseignant et ses élèves.

Définissons ces trois éléments.

- ***Trame d'ingénierie didactique***

Une définition de ce que nous nommons *trame d'ingénierie didactique* est la conception en amont, par le chercheur seul, d'un scénario d'une séquence composée de plusieurs situations, présentant chacune des organisations mathématique et didactique succinctes, conforme à un projet d'enseignement. Ainsi chaque situation sera déclinée selon une OM et une OD non entièrement déterminées, c'est-à-dire que certains éléments de ces organisations sont imposés par le chercheur et d'autres sont modulables. Ce scénario est destiné à confronter les hypothèses théoriques de la recherche avec une mise en œuvre réelle, ce qui permettra de les valider ou de les invalider.
Cette définition de trame est à rapprocher de celle de *trame de séance* selon Bronner (2003) que ce dernier définit comme faisant « *apparaître des découpages de la séance selon de grandes unités rendant intelligibles chaque élément retenu relativement à un projet d'enseignement* ». Bien que le parallèle soit incomplet, puisque la trame de séance définie par Bronner s'analyse a posteriori et la trame d'ingénierie se constitue a priori, nous pouvons rapprocher ces deux concepts. En effet, nous pouvons dire, en imitant Bronner, que *la trame d'ingénierie fait apparaître des découpages de la séquence selon de grandes unités qui rendent intelligibles chaque élément retenu relativement au projet d'enseignement*. Ajoutons que ces grandes unités sont d'ordre mathématique ou didactique.
Relativement aux principes de la recherche collaborative, cette première phase se situe dans le *monde du chercheur*, selon une expression de Bednarz, c'est-à-dire correspond à ses préoccupations de recherche. La *trame d'ingénierie* s'apparente à la définition donnée au début du paragraphe de l'ingénierie didactique au sens d'Artigue : dans l'espace délimité entre une étude clinique et une ingénierie didactique, nous nous situons du côté de l'ingénierie didactique, soit au niveau de la flèche ① du schéma en figure 22.
La constitution de la trame d'ingénierie est donc une planification du projet de recherche, balisée cependant de manière à ce que la dimension recherche n'occulte pas la dimension « pratique » de l'enseignement. Les situations de la trame d'ingénierie sont présentées au chapitre 9.

- ***Trame projetée***

La *trame projetée* est une modification de la *trame d'ingénierie* réalisée à la suite d'une confrontation entre l'enseignant et le chercheur. Le vocable « projeté » a été choisi dans le sens *d'avoir l'intention de faire quelque chose et de concevoir les moyens nécessaires pour y parvenir*[98]. Le rôle du chercheur est de présenter la trame d'ingénierie et d'indiquer les éléments qu'il souhaite prioritairement conserver et les éléments que le professeur expérimentateur a possibilité de modifier. Le rôle du professeur expérimentateur, en restant dans le cadre de cette trame, est d'effectuer une double tâche :

[98] Définition du Centre National de Ressources Textuelles et Lexicales : http://www.cnrtl.fr/definition/projeter

- *compléter* l'OM et l'OD, puisque les organisations de la trame d'ingénierie sont volontairement incomplètes – incomplétude destinée voir émerger des invariants ou des différences selon les professeurs et à les analyser (en réponse à l'hypothèse H4) ;
- *adapter* l'OM ou l'OD de la trame d'ingénierie selon ses *possibles*, ce que Chevallard nomme les *conditions* et les *contraintes*. Ces dernières prennent en compte le filtre de chaque professeur, c'est-à-dire non seulement les conditions et contraintes imposées par l'institution Éducation Nationale, mais aussi la *transposition* de ces conditions et contraintes telles que le professeur expérimentateur les interprète.

Notons que nous ne demandons pas aux professeurs expérimentateurs de constituer complètement l'OM et l'OD de la séquence expérimentale, pour une prise en compte des habitudes d'enseignement des enseignants. Nous les laissons préparer « leur cours » comme ils l'entendent, les analyses *a priori* et *a posteriori* des OM et OD étant reconstituées par nous.

Une *trame projetée* est ainsi constituée pour chaque enseignant expérimentateur. Relativement aux concepts de la recherche collaborative, cette *trame projetée* correspond à la *construction d'un objet co-situé*, objet présentant un intérêt d'étude commun au chercheur et à l'enseignant. Pour expliciter en quoi la construction de cet objet est *viable* au sens de Bednarz, citons Desgagné (1997) :

> En fait, partant du pivot central que constitue la démarche de réflexion conjointe ou de co-construction réalisée dans l'interaction entre le chercheur et les praticiens, le projet va s'articuler, d'une part, comme un projet de perfectionnement pour des praticiens qui souhaitent questionner ou explorer un aspect de leur pratique professionnelle, d'autre part, comme un projet d'investigation pour un chercheur qui souhaite, de l'intérieur de la démarche de réflexion qu'il va encadrer, investiguer un objet de recherche qui le préoccupe. (p.377)

L'expérimentation proposée dans notre recherche met en scène des professeurs qui souhaitent explorer dans leurs classes l'apprentissage de l'algorithmique (nouveauté du programme officiel de seconde de 2009) ou qui se questionnent sur une amélioration possible des résultats de leurs élèves dans le domaine algébrique[99], les deux raisons ne s'excluant pas. De l'autre côté, leur implication dans ce projet fait écho aux préoccupations qui font l'objet de cette recherche, puisqu'elle permet au chercheur d'analyser les conditions et les contraintes de l'enseignement et l'apprentissage de l'algèbre au niveau de la classe de seconde.

La *trame projetée,* comme objet *co-situé,* se situe dans l'espace créé entre une étude clinique et une ingénierie didactique, figuré en gris au niveau de la flèche ② du schéma de la figure 22.

La *trame projetée* ainsi apprêtée diffère de la *trame d'ingénierie* proposée par le chercheur sur les points suivants :
- la trame du chercheur est découpée en situations, la *trame projetée* est découpée en un certain nombre de séances qui s'inscrivent dans la programmation de l'enseignant ;
- la trame du chercheur propose des situations comportant des types de tâches que l'enseignant peut modifier, dans une certaine mesure qui sera précisée plus loin (cf. §9) ;

[99] Les analyses des entretiens le confirmeront.

- la trame du chercheur propose une organisation didactique des situations que le professeur expérimentateur *transpose* selon des conditions et contraintes que nous tenterons d'identifier lors des entretiens.

Comme annoncé ci-dessus, une analyse *a priori* de cette trame projetée est réalisée par nous, ceci en considérant la définition de Margonilas (2000) : « *l'analyse a priori est une analyse théorique qui ne dépend pas des faits d'expérience* » et toujours dans les cadres de la TSD et de la TAD.

Les entretiens relatifs aux adaptations de la *trame d'ingénierie* en la *trame projetée* ont été enregistrés et retranscrits pour les professeurs expérimentateurs (cf. annexes A5 à A7).

- ***Séquences réalisées***

À la suite de la *trame projetée*, chaque enseignant expérimentateur définit donc sa propre séquence, composée de plusieurs séances. Ces séquences sont alors réalisées dans les classes de seconde dont ces professeurs ont la charge. Relativement au schéma en figure 22, *l'expérimentation spécifique menée* se situe dans cette phase plutôt au niveau de la flèche ①, du côté d'une *étude clinique*, puisqu'ici le chercheur n'intervient plus dans la passation des séquences. Le rôle du professeur est alors celui d'un praticien en action et celui du chercheur d'un observateur. En effet, le chercheur laisse le professeur « faire cours » comme celui-ci l'entend. Comme dit plus haut, les analyses réalisées sur ces séquences permettront d'apporter des éléments à l'hypothèse H4, où les organisations mathématiques et didactiques mises en place seront des indicateurs des pratiques enseignantes et des gestes professionnels dans l'enseignement de l'algèbre. Bien entendu, des éléments seront ici également apportés pour l'hypothèse H3 puisque *l'expérimentation didactique spécifique* cherche à tester l'apport de l'algorithmique dans l'enseignement de concepts algébriques.

Pour les analyses *a posteriori* de ces séquences, nous utilisons différents outils, tirés des cadres généraux de la TAD et la TSD déjà évoqués. La définition que nous choisissons de l'analyse *a posteriori* est empruntée à Margolinas (2000) : « *l'analyse a posteriori est une analyse qui replace les faits contingents dans le cadre créé par l'analyse a priori* ». En particulier, chaque séance est analysée en suivant systématiquement la même démarche, par la *méthodologie des quatre composantes* (cf. §1.3.3) développée par Bronner (2005). Ce chercheur propose une méthodologie d'analyse en quatre étapes, notées E_i ($1 \leq i \leq 4$) :

> E_1 : élaboration de la trame de la séance, aboutissant à un premier découpage de la séance ;
> E_2 : description et l'analyse des organisations mathématiques selon l'approche anthropologique ;
> E_3 : analyse de l'organisation didactique selon la méthodologie dite des quatre composantes qui nous conduira à un deuxième découpage ;
> E_4 : repérage de gestes professionnels, des évènements et des ajustements.

Ce découpage en quatre étapes a pour objectif de comprendre *ce qui se joue dans une séance d'enseignement des mathématiques*. (Bronner, ibid.). Ce chercheur propose en effet *de mettre en évidence les caractéristiques mathématiques et didactiques de la situation tout en faisant ressortir les événements saillants*, ce qui semble pertinent pour réaliser une analyse *a posteriori* où l'on cherche à la fois à *caractériser les gestes professionnels de l'enseignant, les gestes d'étude des élèves et leurs interactions*.

Détaillons ce qu'apporte chacune des étapes.

Pour l'étape E_1, il s'agit de découper chaque séance en une première trame, afin de repérer les étapes objectives de son déroulement effectif. Ce découpage initial permet de renseigner sur les fonctions « classiques » d'une séance de cours, comme donner une consigne, lancer un travail de groupe, proposer une mise en commun, écrire le « cours », etc. Sa fonction est *de repérer de grandes phases dans le processus d'interaction à analyser, d'identifier les acteurs du jeu didactique, de dire à quel jeu ils jouent pour un observateur du didactique* (ibid.).
L'étape E_2 consiste à décrire et à analyser les OM qui se sont effectivement déroulées, en les comparant à celles qui étaient prévues dans l'analyse *a priori.*
L'étape E_3, quant à elle, fait appel à l'analyse de l'OD par la méthodologie proprement dite des quatre composantes, qui *permet de découper chaque section de la trame en fonction d'un changement important de l'état d'une des composantes (milieu, contrat didactique, temps didactique, topos)* (ibid.). Ainsi, relativement au découpage en phases de l'étape E_1, les états des composantes ci-dessus sont analysés et c'est le repérage d'un changement de ces états qui débouche éventuellement sur un découpage plus fin de la séance observée, affinant ainsi le premier découpage obtenu en E_1.
Enfin, l'étape E_4 apporte un complément, un « zoom » sur quelques événements particuliers, que Bronner nomme *événements didactiques* (cf. §1.3.3) et dont l'analyse permet d'accéder à des gestes professionnels caractéristiques.
Ajoutons que si les étapes E_1 et E_2 décrivent la séance de façon « statique », identifiant des concepts mathématiques apparus au cours de la séance (autour des types de tâches effectuées, de techniques ou de technologies apparues), les étapes E_3 et E_4 ont pour objectif de reconstruire le côté « dynamique » de la séance, c'est-à-dire d'analyser des éléments particuliers qui ont amené à ces concepts. Ces deux dernières étapes permettent d'analyser plus finement les interactions entre élèves, entre l'enseignant et ses élèves, de situer des contraintes et des conditions d'exercice de l'enseignant, et ce, par rapport au thème ou au sujet traité.
Le recueil des données est multiple. Il se compose :
- de l'enregistrement vidéo de chaque séance, avec éventuellement, l'utilisation de deux caméras pour filmer d'une part le professeur et le groupe classe, et d'autre part un groupe particulier quand un travail de groupe est effectué. Le choix de ce groupe particulier est dicté par l'enseignant, sans critères spécifiques demandés par le chercheur ;
- des productions papiers des élèves, y compris la demande de leurs brouillons ;
- des productions informatiques des élèves (programmes relevés sur clef USB).

Le recoupement de ces données devrait permettre une reconstitution assez fidèle de chaque séance, où par exemple certaines productions d'élèves peuvent être complétées par l'enregistrement vidéo qui permet l'exploration de cheminements intermédiaires. Relativement aux professeurs, la caméra permet de relever certains de leurs gestes professionnels, leurs traces écrites au tableau, etc.
Des comparaisons entre les pratiques des enseignants pourront ainsi être effectuées et mises éventuellement en relation avec les compétences et difficultés des élèves observées durant les séances.

6.1.4 Entretiens avec les professeurs expérimentateurs

Deux entretiens sont menés auprès des professeurs participant à notre *expérimentation didactique spécifique*. Les principaux objectifs de ces entretiens sont pour le premier, situé avant l'expérimentation, de cerner les rapports de chaque enseignant vis-à-vis des domaines mathématiques explorés, l'algèbre et l'algorithmique, et pour le second, post-expérimentation, d'évaluer le dispositif mis en place.
La méthodologie utilisée pour mener ces entretiens est inspirée de quelques principes de base de l'approche de Vermesch sur *l'entretien d'explicitation*.[100] Les entretiens sont menés sous un mode *semi-directif*, c'est-à-dire ni entièrement ouvert, ni entièrement fermé. Nous disposons de *questions guides*, relativement ouvertes, auxquelles nous désirons que les enseignants répondent. Mais les questions ne sont pas obligatoirement posées dans l'ordre où elles sont initialement prévues, ni sous leur formulation exacte. Nous souhaitons ainsi laisser s'exprimer librement l'interviewé, dans les mots qu'il souhaite et dans un ordre qui lui convient. Cette forme d'entretien nous semble correspondre aux principes de la *recherche collaborative*, définie plus haut, où l'enseignant possède un rôle de *co-constructeur* des situations d'enseignement, et être un moyen de montrer *le souci constant [du chercheur] de refléter le point de vue des partenaires qu'il a sollicités* (Desgagné, 1997, p.381). Contrairement à un entretien directif avec des questions fermées qui laisse peu de place à l'initiative de parole, puisque l'interviewé se contente de répondre à la question, sans aller plus loin, le chercheur tentera de simplement de recentrer l'enseignant sur les thèmes et les questions qui l'intéressent quand l'entretien s'en écarte, et de poser les questions auxquelles l'interviewé ne vient pas par lui-même.

Entretien générique pré-expérimentation
Le premier entretien, individuel, vise à recueillir des informations concernant les rapports de l'enseignant à l'algèbre et à l'algorithmique (pris indépendamment puis en interrelation) :
- du point de vue des programmes ;
- du point de vue de sa pratique ;
- du point de vue de l'élève ;
- du point de vue de la construction des savoirs.

Partant de ces thèmes, nous avons élaboré des *questions guides* pour aborder ces sujets. Notons que le questionnement précise que le niveau de classe considéré est la classe de seconde, mais nous laissons l'enseignant s'exprimer de façon plus générale s'il le souhaite, les informations recueillies pouvant être utiles pour différents points de vue, comme le point de vue épistémologique ou de sa pratique.
Lors de la passation de cet entretien, les enseignants ne connaissent pas encore les intentions du chercheur sur sa recherche. C'est à l'issue de cet entretien que le thème leur en est donné. Pour chacun des trois enseignants, l'entretien est enregistré et retranscrit (cf. annexes A16 et A19).

---

[100] Nous n'avons utilisé que très sommairement les concepts de Vermersch et nous ne développons pas dans ce travail les fondements théoriques de cette méthodologie d'entretien. Un ouvrage de référence des travaux de Vermersch est : Vermersch, P. (2003). *L'entretien d'explicitation*. ESF.

Les analyses a priori et a posteriori des entretiens sont présentées en section 10.2. Nous avons choisi de traiter les discours en privilégiant l'analyse thématique, selon les quatre thèmes définis ci-dessus. Ainsi, quelques éléments de réponse pourront être mis en lumière concernant les hypothèses de recherche. En particulier, pour l'hypothèse H1, nous analyserons comment les enseignants comprennent et interprètent la place de l'algèbre et les compétences algébriques attendues du programme officiel de seconde ; pour l'hypothèse H3, si l'introduction de l'algorithmique leur apparaît a priori comme pertinente pour reprendre l'algèbre ; pour l'hypothèse H4, nous pointerons éventuellement quelques éléments sur leurs pratiques dans le domaine de l'algébrique, et nous pourrons alors constater des premiers éléments de convergence ou de divergence dans celles-ci.

Entretien spécifique post expérimentation

L'objectif principal de ce second entretien est l'évaluation par les enseignants du dispositif d'expérimentation mis en place. Cette évaluation reprend la plupart des thèmes de l'entretien pré-expérimentation en s'intéressant au rapport de chaque enseignant à l'expérimentation :
- du point de vue de la construction de savoirs algébriques, algorithmiques et de l'articulation des deux ;
- du point de vue des programmes ;
- du point de vue de l'élève ;
- du point de vue de l'organisation mathématique et didactique de l'expérimentation.

L'entretien, individuel, se termine par des questions plus globales sur les contraintes de l'ingénierie et sur une éventuelle amélioration de l'expérimentation, tant au point de vue des praxéologies mathématiques que des praxéologies didactiques proposées par le chercheur et réellement mises en œuvre par les enseignants.

Comme pour le premier entretien, ces thèmes sont un point de départ pour concevoir des *questions guides,* qui sont plus ou moins suivies selon les réponses des enseignants. Pour chacun des trois enseignants, l'entretien est enregistré et retranscrit (cf. annexes A42 à A44).

Les analyses a priori et a posteriori des entretiens sont présentées en section 11.4. Les entretiens sont ici encore traités selon une analyse thématique, où les thèmes sont donnés ci-dessus. Ces analyses d'entretien visent à étayer les hypothèses de recherche, et parmi les points abordés lors de l'entretien, des éléments de réponse pourront concerner :
- l'hypothèse H1, en abordant le rapport du professeur au programme institutionnel de l'algèbre en seconde, au travers de sa mesure du degré de conformité de *l'expérimentation spécifique* menée ;
- l'hypothèse H4, en questionnant le rapport du professeur à sa pratique, par le biais des organisations mathématiques et didactiques mises en place lors de l'expérimentation ;
- l'hypothèse H3, en analysant les réponses des enseignants sur l'enseignement de concepts algébriques par le biais de l'algorithmique et sur les apprentissages de leurs élèves au cours de cette expérimentation.

6.2 Organisation des analyses

6.2.1 Synthèse du recueil de données

Afin de résumer le dispositif des différentes données recueillies et de leur fonction, suit un tableau récapitulatif de l'organisation de ces données et des analyses prévues. Pour chaque type de données du recueil, sont précisés :

- le type de recueil et ressources utilisés ;
- le public ciblé ;
- la fonction des données en regard des quatre hypothèses de recherche.

Données	Public ciblé	Type de recueil	Fonction	Liaison avec les hypothèses de recherche
Programmes officiels de mathématiques en collège et lycée	Enseignants de collège et lycée	BO	- Contraintes et conditions institution-nelles - OM de référence	H1 H2 H3
Manuels scolaires des classes de troisième et seconde	Enseignants de collège et lycée	Manuels	OM et OD de référence	H1 H2
Résultats des enquêtes PISA	Élèves de 15 ans des pays de l'OCDE	- Énoncés de tests PISA - Analyse institutionnelle des résultats	État de la connaissance des élèves des pays de l'OCDE	H2
Test générique diagnostique	160 élèves de fin de seconde générale	Production écrite des élèves	État de la connaissance des élèves français d'un même lycée	H2
Entretien générique pré expérimentation	3 professeurs expérimentateurs en classe de seconde	Enregistrement vidéo des entretiens	Contraintes et conditions institutionnelles	H1 H4
Trame d'ingénierie didactique (chercheur)		Déroulement et analyse a priori des 3situations proposées	OM *régionales* et OD du *secteur d'étude*	H3
Trame projetée (enseignant)		- Enregistrement vidéo des entretiens - Production des fiches élèves élaborées par les enseignants	OM *régionales* et OD du *secteur d'étude* projetées (relativement à trame chercheur)	H1 H3 H4
Séquence réalisée : déroulement effectif	Les professeurs expérimentateurs et leurs élèves	- Enregistrement vidéo des séances en classe - Productions d'élèves (papier-crayon, programmes informatiques)	- Contraintes locales - OM *locales* et OD du *secteur d'étude* déployées (relativement à trame projetée)	H1 H3 H4
Entretien spécifique post- expérimentation	Les professeurs expérimentateurs	Enregistrement vidéo des entretiens	Effets de l'expérimentation sur l'enseignement Retour sur les contraintes	H1 H3 H4
Progression annuelle des professeurs	Les professeurs expérimentateurs	Trace écrite de la progression/ programmation annuelle des professeurs	Complément du recueil de données	H1 H4

Tableau 23 : Les types des données du recueil et leurs fonctions

Ce tableau récapitulatif montre un recueil de données diversifié, dont les éléments pourront permettre d'aborder le thème de ce travail de thèse à différents niveaux de l'échelle de détermination didactique. L'étude des enquêtes Pisa permet, par exemple, de se placer au niveau de la société, et celle des programmes officiels aux niveaux, entre autres, de l'École et de la discipline des mathématiques. Cette tentative de « complétude » va dans le sens de Chevallard (2005) qui indique que *lorsqu'un didacticien étudie la diffusion d'une praxéologie […] comme réponse R à une question Q, c'est a priori à tous les niveaux qu'il pourra avoir à enquêter […] pour y repérer les contraintes dont la conversion didactique peut constituer une condition pesant fortement sur l'OD examinée ou envisagée.*

6.2.2 Méthodologie des analyses de l'expérimentation didactique spécifique

La méthodologie d'analyse présentée de façon linéaire dans le tableau ci-dessus n'est pas suffisante pour décrire les allers-retours nécessaires entre les différents éléments du recueil. En particulier, les analyses concernant *l'expérimentation didactique spécifique* nécessitent d'être précisées : les interactions entre le chercheur et les différents professeurs ne sont pas suffisamment visibles.

L'expérimentation est réalisée avec la collaboration de trois professeurs de lycée, ayant chacun une classe de seconde. Le recueil des données comporte donc trois trames projetées (TP), trois séquences réalisées (SR) et trois entretiens post-expérimentation (EP).

Dans le schéma qui suit, les éléments suivants du recueil sont mis en avant :

- la *trame d'ingénierie didactique*, élaborée par le chercheur, constituée de trois situations, présentées et analysées *a priori* au chapitre 9 ;
- les trois *trames projetées* (TP1 à TP3), apprêtées à partir de la trame d'ingénierie, fruit de la collaboration du chercheur avec les trois professeurs expérimentateurs et constituées d'un découpage en séances de cours. Elles sont présentées et analysées *a priori* au chapitre 10 ;
- les trois *séquences réalisées* (SR1 à SR3) telles qu'elles se sont déroulées dans les classes, analysées *a posteriori* au chapitre 11 ;
- les trois entretiens post expérimentation (EP1 à EP3) entre le chercheur et chaque professeur expérimentateur, présentés et analysés au chapitre 11.

Toutes ces analyses sont réalisées selon la méthodologie présentée en section 6.1.3.

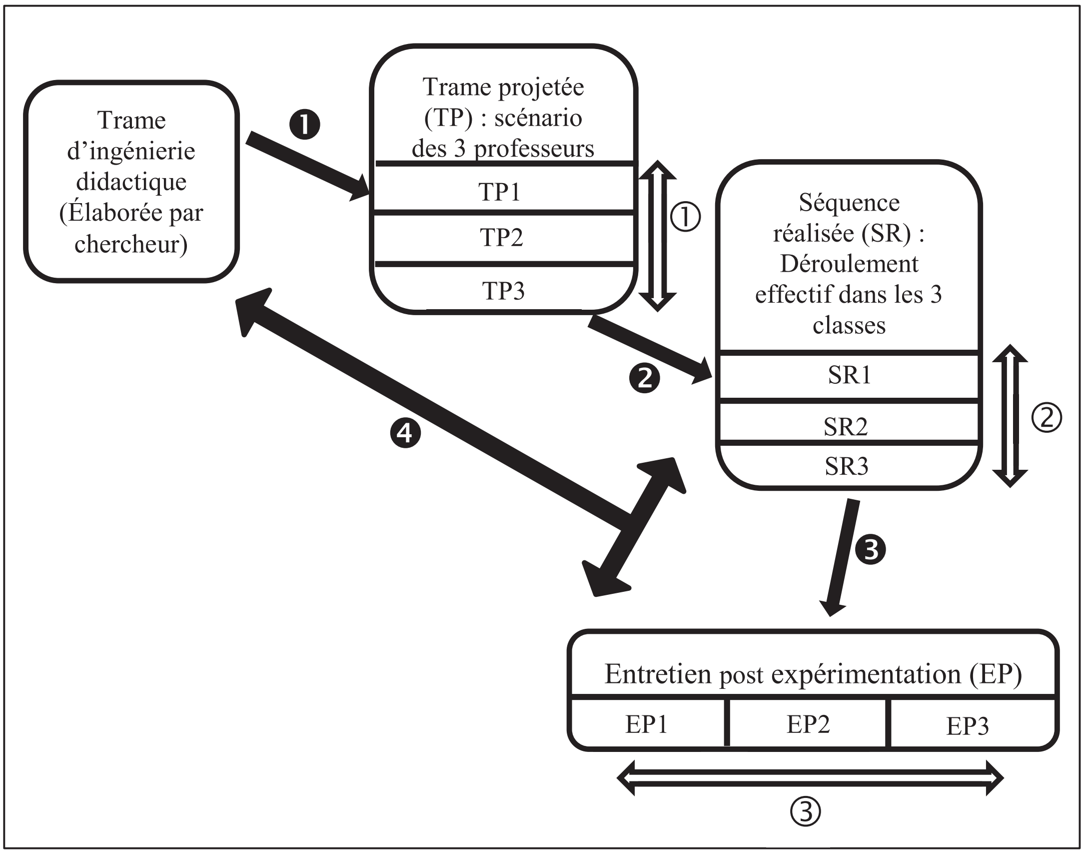


Figure 24 : Synthèse des analyses du dispositif expérimental

Pour compléter la méthodologie d'analyse prévue, explicitons comment vont être examinés entre eux les éléments du recueil de données ci-dessus, les liens étant symbolisés ici par des flèches.

Les flèches noires notées ❶, ❷, ❸ et ❹ correspondent à la chronologie des analyses, mettant en rapport les éléments du corpus de données précisés ci-dessus. Plus précisément :

- la flèche noire ❶ symbolise l'analyse réalisée de chacune des adaptations TP_i ($1 \leq i \leq 3$), effectuée par les trois professeurs expérimentateurs relativement à la trame d'*ingénierie didactique* (analyse comparative des OM et OD de la trame d'ingénierie avec celles de chaque TP_i, pour $1 \leq i \leq 3$) ;
- la flèche noire ❷ symbolise l'analyse de chaque séquence réalisée SR_i ($1 \leq i \leq 3$) dans chacune des trois classes des enseignants, relativement à leur trame projetée respective TP_i (analyse comparative des OM et OD de TP_i avec SR_i, pour $1 \leq i \leq 3$) ;
- la flèche noire ❸ symbolise l'analyse de chaque entretien EP_i ($1 \leq i \leq 3$), où les enseignants effectuent un retour sur les OM et OD de leur séquence SR_i respective ;
- la flèche noire ❹ symbolise le retour sur l'analyse de la *trame d'ingénierie didactique* proposée en amont par le chercheur, par rapport aux séquences effectives dans les classes, et prenant en compte les éléments apportés dans les entretiens post-expérimentation des professeurs expérimentateurs. Notons que la flèche ❹ représente l'évaluation globale du dispositif du chercheur par rapport aux réponses recherchées sur l'ensemble des hypothèses du travail de recherche.

Quant aux flèches blanches notées ①, ② et ③, elles correspondent respectivement aux comparaisons effectuées entre les éléments TP_i ($1 \leq i \leq 3$), aux comparaisons entre les éléments SR_i ($1 \leq i \leq 3$) et aux comparaisons entre les éléments EP_i ($1 \leq i \leq 3$). Ces analyses seront réalisées sous forme de bilan aux chapitres 10 (pour les TP_i) et 12 (pour les SR_i et les EP_i).
Un point est à préciser à ce stade sur les choix de présentation des divers éléments TP_i et SR_i ($1 \leq i \leq 3$). La *trame d'ingénierie* du chercheur proposant trois situations (cf. §9), nous avons croisé les analyses de la façon suivante :
- pour la constitution et l'analyse des trames projetées, nous montrons les choix des enseignants par rapport à l'ensemble de ces situations, insistant ainsi sur la progression particulière de chaque enseignant ;
- pour l'analyse des séquences réalisées, nous la proposons situation par situation, afin de dégager au fur et à mesure des différences et des points de convergence des OM et OD de chaque professeur.
Pour résumer, les analyses se présentent ainsi :

Chapitre 10 : $TP_{i\ (1 \leq i \leq 3)}$	**Chapitre 11 : $SR_{i\ (1 \leq i \leq 3)}$**
Enseignant 1 : Situations 1, 2, 3	Situation 1 : enseignants 1, 2, 3
Enseignant 2 : Situations 1, 2, 3	Situation 2 : enseignants 1, 2, 3
Enseignant 3 : Situations 1, 2, 3	Situation 3 : enseignants 1, 2, 3

Figure 25 : Choix de présentation des analyses des TPi et SRi

Ces comparaisons amèneront des éléments de réponse à l'hypothèse H4 en permettant en particulier de repérer des invariants et également des points de divergence des gestes professionnels des enseignants sur les OM et OD dans l'enseignement de l'algèbre, de l'algorithmique et dans l'articulation des deux. Notons de plus que l'analyse de chaque séquence SR_i ($1 \leq i \leq 3$) questionnera l'hypothèse H3, quant à l'apport de l'introduction de l'algorithmique pour une *reprise* de l'algèbre du point de vue de l'apprentissage des élèves. Ces analyses permettront également d'apporter des éléments de réponse à l'hypothèse H1, dans le sens où le chercheur tentera d'évaluer si les professeurs expérimentateurs restent ou non dans le cadre *stricto sensu* du programme officiel d'algèbre de seconde.

6.3 Établissement et professeurs ayant participé à la recherche

6.3.1 Caractéristiques de l'établissement

Le test diagnostique de fin de seconde et *l'expérimentation didactique spécifique* menée en 2010-2011 ont été réalisés dans un même lycée de la proche banlieue de Montpellier dont nous allons donner ici les caractéristiques, tirées de données fournies par le Ministère de l'Éducation Nationale.
En préambule, notons que le classement des établissements est réalisé par le ministère en tenant compte des caractéristiques scolaires et sociales des élèves accueillis : profession des parents, parcours scolaire, sexe. Les trois indicateurs présentés permettent d'évaluer les

résultats du lycée par rapport à ceux des établissements comparables dans l'académie et au plan national. D'autres lycées, situés dans des contextes différents n'obtiennent pas les taux attendus présentés ci-dessous. Néanmoins le taux de réussite global sur l'ensemble des élèves français ayant passé le baccalauréat est de près de 86% pour les sessions de 2010 et de 2011.[101]

Le lycée Georges Pompidou (Castelnau le Lez, Hérault) obtient, toutes séries confondues, un taux de réussite au baccalauréat analogue à la moyenne nationale, comme le montre le tableau ci-dessous, publié pour l'année scolaire 2009-2010[102].

Lycée Pompidou : Taux de réussite au baccalauréat 2010 Part de bacheliers parmi les élèves ayant passé le baccalauréat.						
Série	**Taux constaté (%)**	**Référence académique**		**Référence nationale**		**Nombre d'élèves présents au bac**
		Taux attendu (%)	**Valeur ajoutée**	**Taux attendu France (%)**	**Valeur ajoutée**	
Toutes séries	89	89	0	89	0	369
L	100	94	+6	92	+8	22
ES	91	89	+2	89	+2	95
S	93	91	+2	92	+1	135
STG	81	84	-3	86	-5	117

Figure 26 : Taux de réussite au BAC du lycée Pompidou de Castelnau le Lez

La lecture du tableau fait apparaître que cet établissement obtient le taux moyen attendu pour des établissements de ce type, dont les élèves sont issus d'un milieu socioprofessionnel plutôt favorisé. Au vu des caractéristiques données ci-dessus de ce lycée, nous pouvons donc estimer que le test diagnostique effectué (sur six classes) est plutôt représentatif du niveau moyen des élèves français de fin de seconde générale de ce type d'établissement. De même, l'expérimentation porte sur trois classes de seconde générale d'une population relativement homogène, en ce qui concerne le contexte socioculturel.

Il faut cependant préciser que les résultats obtenus ne pourront sans doute pas être étendus à d'autres types d'établissements, en particulier ceux situés en zone d'éducation prioritaire, où une étude spécifique sur les conditions et contraintes d'enseignement devrait être menée. Cette remarque prévaut à la fois pour le test diagnostique de fin de seconde et pour l'expérimentation *didactique spécifique*.

6.3.2 Choix des enseignants expérimentateurs

Afin d'étudier les hypothèses émises plus haut dans le chapitre 5 exposant la problématique, nous avons choisi de travailler dans trois classes de seconde générale, classes de niveau qualifié de moyen, par les professeurs eux-mêmes. Les enseignants de ces classes ont tous une expérience d'enseignement en lycée d'une quinzaine d'années. Ce choix d'une certaine homogénéité dans le type de classes et d'enseignants observés est guidé par la volonté de dégager des invariants dans des pratiques d'enseignants plutôt expérimentés et d'en étudier

[101] pour une proportion de 72% de bacheliers dans une génération.

[102] Adresse du site : http://www.education.gouv.fr/pid23933/indicateurs-resultats-des-lycees.html

les différences : des points communs et des différences de pratiques enseignantes seront alors mises en exergue et pourront alimenter l'hypothèse H4.

Les trois professeurs expérimentateurs sont des quadragénaires. Par respect de l'anonymat, leur prénom a été modifié. Les trois professeurs ayant participé à la recherche durant l'année scolaire 2010-2011 sont nommés Annabelle, Alex et Maurice.

L'objectif révélé aux professeurs participant à l'expérimentation est de « tenter une expérience permettant une amélioration des compétences des élèves de seconde sur la résolution des équations du premier et du second degré, en utilisant l'algorithmique ». Il leur est également précisé que cette expérimentation a lieu en parallèle avec d'autres professeurs, afin d'analyser les différences observées entre enseignants dans les organisations mathématiques et didactiques choisies et celles réellement mises en œuvre, dans la gestion du déroulement des séances, ceci afin de rechercher un dispositif optimum de remédiation aux difficultés d'apprentissage de leurs élèves dans le domaine algébrique mais aussi pour permettre une reprise des concepts algébriques dans l'objectif de poursuivre les apprentissages.

De manière plus globale, par la comparaison des analyses faites sur la posture des professeurs expérimentateurs, aussi bien dans leurs réponses au cours des entretiens que dans leurs gestes professionnels au cours des séances expérimentales, nous tenterons de mieux comprendre comment les contraintes institutionnelles liées aux programmes et comment les facteurs sociaux liés aux habitudes de la profession laissent des marges de manœuvre aux enseignants dans leur enseignement de l'algèbre.

CHAPITRE 7 – UNE ANALYSE INSTITUTIONNELLE

Nous proposons dans ce chapitre une analyse institutionnelle du *savoir enseigné* sur les équations. L'étude est réalisée au travers de manuels scolaires des classes de troisième du collège et de seconde du lycée. Nous considérons ici les manuels comme des interprétations possibles des programmes officiels, et non pas comme des pratiques effectives de classe.

7.1 Objectif de l'étude de manuels de troisième et de seconde

Cette étude préliminaire à *l'expérimentation didactique spécifique* tend à justifier pourquoi une *reprise*, au sens de Larguier, de l'enseignement au niveau de la classe de seconde des objets « équations polynomiales de degré 1 » et « équations polynomiales de degré 2 » s'avère nécessaire. Autour de ces objets gravitent d'autres concepts qui sont fortement liés, tels que la distributivité, la factorisation, la résolution, etc. Ce sont ces objets que nous allons analyser dans l'étude de manuels de troisième et de seconde.

Larguier (2009, p.35) indique que *l'organisation mathématique construite au terme d'un processus de reprise, comporte souvent des lacunes relatives aux quadruplets (type de tâches, technique, technologie, théorie).* Nous cherchons dans ces manuels des indicateurs pour évaluer le degré de *complétude* des types de tâches, des techniques et des éléments technologiques et théoriques nécessaires pour justifier ces techniques (Bosch et al., 2004, cf. §1.2.2.1). Afin de comprendre le pourquoi de cette étude, commençons par observer le cas particulier de quelques élèves de seconde auxquels est demandé de résoudre des équations du premier degré[103]. Suivent leurs procédures de résolution pour deux de ces équations :

[103] Ce test a été réalisé indépendamment de l'expérimentation didactique spécifique (Cf. §6.2) par les élèves de seconde de la classe d'un des professeurs expérimentateurs, Annabelle, au mois d'avril 2011, sur une initiative du professeur. L'énoncé complet se trouve en annexe A8.

	Équation n°1 : $1{,}5x - 2 = 3 - 4{,}5x$	**Équation n°2 : $3x + 4 = -\sqrt{2}$**
Production de l'élève Marylou	$1{,}5x + 4{,}5x = 3+2$ $\frac{6x}{6} = \frac{5}{6}$ $\quad x = \frac{5}{6}$	$3x = -\sqrt{2} - 4$
Production de l'élève Jean-Stéphane	$6x = 5$ $x = \frac{5}{6}$	$3x = -\sqrt{2} + 4$ $x = \frac{3}{-\sqrt{2}+4}$
Production de l'élève Camille	$1{,}5x + 4{,}5x - 2 = 3$ $6x - 2 = 3$ $6x = 5$ $\boxed{x = 5/6}$	$3x = -\sqrt{2} - 4$ $3x = 4\sqrt{2}$ $x = \frac{4\sqrt{2}}{3}$
Production de l'élève Clémence	$1{,}5x + 4{,}5x = 3 + 2$ $\Leftrightarrow 6x = 5$ $\Leftrightarrow \boxed{x = \frac{5}{6}}$	$3x = -\sqrt{2} + 4$ $\Leftrightarrow 3x = 4 - \sqrt{2}$ $\Leftrightarrow \boxed{x = \frac{4-\sqrt{2}}{3}}$
Production de l'élève Lisa	$1{,}5x + 4{,}5x = 3+2$ $6x = 5$ $x = \frac{5}{6}$	Pas de réponse

Figure 27 : Exemples de productions d'élèves sur la résolution d'équations du premier degré

Nous avons choisi de montrer cinq cas d'élèves pour lesquels la résolution de l'équation n°1, dont les nombres déterminés sont des décimaux, est correcte alors que la résolution de l'équation n°2, où l'équation comporte une racine carrée, est erronée.

La forme générale de l'équation n°1 est $ax + b = cx + d$ et celle de l'équation n°2 est $ax + b = c$. Les recherches de Grugeon (1995), rappelées en section 2.2.4, indiquent que les résolutions d'équations du second type ont généralement un taux de réussite plus élevé que celles du premier type. Néanmoins, vient se combiner ici une difficulté supplémentaire pour l'équation n°2 : la présence de la racine carrée. Pour l'équation n°1, la technique utilisée par les cinq élèves est classique et consiste à transposer les nombres déterminés dans un membre de l'équation et l'inconnue dans l'autre. Tous les élèves ont correctement effectué cette technique, en respectant les changements de signe nécessaires. En revanche, pour l'équation n°2, les réponses données sont erronées ou encore une élève, Lisa s'abstient.

Analysons les erreurs et difficultés rencontrées :

- Marylou, qui divise chacun des deux membres de l'équation n°1 par 6, n'est pas capable de terminer la résolution de l'équation n°2 en divisant par 3. Elle ne reconnaît pas la technique appliquée pour la première équation, sans doute est-elle gênée par la somme $-\sqrt{2} - 4$, qu'elle ne peut réduire sous la forme d'un nombre unique ;
- Jean-Stéphane, qui transpose sans erreur de signe les nombres déterminés dans l'équation n°1 commet une erreur de signe dans l'équation n°2. De plus, il résout convenablement $ax = b$ dans l'équation n°1, en donnant la solution $\frac{b}{a}$, alors que dans le second cas, il fournit la solution erronée $\frac{a}{b}$.

- la technique de résolution de Camille pour la seconde équation est correcte, l'erreur provient d'une confusion entre somme et produit, l'élève semblant confondre $-\sqrt{2}-4$ avec $(-\sqrt{2})(-4)$, puisqu'elle aboutit à $4\sqrt{2}$. On retrouve la volonté de concaténer l'écriture $-\sqrt{2}-4$ sous la forme d'un résultat « unique » ;
- Clémence, comme Jean-Stéphane, commet une erreur de signe dans la transposition du terme « 4 » pour l'équation n°2, alors qu'elle n'en commet pas pour l'équation n°1 ;
- Lisa, quant à elle, ne se risque pas à résoudre la seconde équation. Nous émettons l'hypothèse d'une « fixation » sur la racine carrée qui l'empêche d'aller plus loin.

Ces cinq cas nous amènent à penser, outre la difficulté de la manipulation de l'objet racine carrée, que la fréquentation des équations du premier degré avec des paramètres irrationnels n'est peut-être pas aussi importante que la résolution d'équations avec des paramètres rationnels, voire entiers. Ainsi, nous nous posons la question de savoir si les élèves ont accès à un répertoire de savoirs canoniques et si ces savoirs sont suffisamment disponibles. Il semble que les erreurs de ces élèves puissent être interprétées comme une limitation des organisations mathématiques de la résolution d'équations, où comme déjà dit dans la section 1.2.2.1, *un apprentissage de techniques stéréotypées ne peut permettre qu'un apprentissage partiel et stéréotypé de notions mathématiques.* L'étude réalisée dans cette partie porte ainsi sur les choix d'équations du premier ou du second degré, relevés dans divers manuels usuels de mathématiques de 3^{e} du collège et de 2nde du lycée. Notre étude porte sur deux points :
- le taux de fréquence des nombres déterminés comme coefficients des équations selon leur ensemble d'appartenance ($\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{D}$, $\mathbb{Q}$ ou $\mathbb{R}$) ;
- les techniques de résolution mises en œuvre pour résoudre les types d'équations proposées.

Cette étude, réalisée pour quelques types de tâches répertoriées dans divers manuels, devrait nous permettre de déterminer d'une part, si le champ numérique fréquenté est assez diversifié pour accéder à des techniques suffisamment générales et d'autre part, si les techniques proposées sont justifiées par des éléments technologiques ou théoriques.

Méthodologie de l'étude de la diversité des nombres déterminés des équations

Le support de l'étude est un ensemble de manuels scolaires, en ce qu'ils reflètent les attentes des programmes officiels – en considérant une transposition du savoir à enseigner vu par l'institution EN vers le savoir à enseigner vu par les enseignants, auteurs des manuels – et devraient permettre de déterminer si les paradigmes des deux « écoles », le collège et le lycée sont semblables ou non. Rappelons que nous considérons ici les manuels comme des interprétations possibles des programmes officiels, et non pas comme des pratiques effectives de classe. D'ailleurs, le choix des manuels a été effectué selon leur diversité et non pas en termes de représentativité d'utilisation par les enseignants.

L'étude consiste en le dénombrement des équations polynomiales de degré 1 et 2 à résoudre dans les exercices des manuels choisis. Nous comptabilisons uniquement les équations données dans les exercices de réinvestissement où les types de tâches demandés ne demandent qu'une technique à restituer (par exemple des énoncés commençant par : « *Résoudre l'équation ...* » ou *« Factoriser puis résoudre l'équation ... »*). Suivent quelques exemples de tels exercices retenus et non retenus :

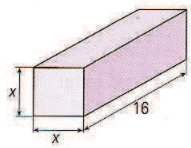
	Exemples d'exercices retenus	Exemples d'exercices non retenus
Équations du 1^er^ degré	Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes : **40** a/ $3(2x-1)-4(1+x)=2(x+3)$; b/ $4(3-5x)=0$; c/ $4x\sqrt{3}=0$; d/ $4x+\sqrt{3}=0$; e/ $x\sqrt{3}+4x=1$. **41** a/ $\frac{2x}{3}-1=\frac{3x}{2}+4$; b/ $\frac{5x-2}{8}-\frac{1-x}{5}=\frac{3(x-3)}{10}$; c/ $2x=\frac{2}{3}\left(x+\frac{x}{4}\right)-7$; d/ $\frac{2x}{7}=\frac{5-3x}{2}$. *Manuel Symbole (2010), 2^nde^, p.81*	**1** Associer chaque nombre avec les équations dont il est solution : 5 • • $3x+9=0$ • $2(x+7)+6=30$ • $3x+9=4x+11$ −3 • • $4x+11=-1$ • $x-5=-7$ −2 • • $(2x+1)-3(x+2)=-10$ *Manuel Diabolo(2008), 3^e^, p.77*
Équations produits	*Résoudre les équations proposées après les avoir transformées en équations-produits.* *Voir l'exercice résolu de la page 37.* **57** *a)* $3x+1-2x(3x+1)=0$; *b)* $(x+4)^2=(x+4)(x+1)$; *c)* $49x^2-(x-1)^2=0$; *d)* $x^2+14x+49=0$. **58** *a)* $(1-x)(2x+5)=(1-x)(x+3)$; *b)* $x-5-3(x-5)^2=0$; *c)* $(2x+7)^2=(x+3)^2$; *d)* $81x^2-18x+1=0$. *Manuel Cinq sur Cinq (1999) 3^e^, p.42*	**59** Soit $A=(x-4)(2x+1)+(x^2-16)$. 1° Développer et réduire A. 2° Factoriser A après avoir remarqué une identité remarquable. 3° Choisir l'écriture la plus adaptée pour résoudre, d'une part, l'équation $A=0$ et, d'autre part, $A=-20$. *Manuel Cinq sur Cinq (1999) 3^e^, p.42*
Équations $x^2 = a$	**Résoudre une équation $x^2 = a$** **81** Résoudre les équations suivantes. **a)** $x^2=21$ **b)** $x^2=16$ **c)** $x^2=1{,}44$ **d)** $x^2=\frac{1}{36}$ **82** Résoudre les équations suivantes. **a)** $y^2-9=0$ **b)** $y^2+1=0$ **c)** $5a^2=80$ **d)** $-6a^2=24$ *Manuel Triangle (2008), 3^e^, p.55*	**186** Un parallélépipède rectangle mesurant 16 cm de hauteur a un volume de 900 cm³.  Calculer le côté de la base carrée. *Manuel Pythagore (2000), 2^nde^, p.33*

Tableau 28 : Exemples d'exercices retenus ou non pour l'étude de la diversité des nombres déterminés des équations

Pour préciser le décompte effectué des équations, la première colonne de gauche contient neuf équations du 1^er^ degré dont deux ont des paramètres entiers, une des paramètres décimaux, trois des paramètres rationnels et trois des paramètres irrationnels. Pour la colonne de droite, quelques exemples d'exercices non retenus sont indiqués. Il s'agit d'exercices ne demandant pas expressément de résoudre une équation ou demandant des tâches plus complexes, comme le choix de la forme de l'expression algébrique pour résoudre. De même, sont exclus les problèmes demandant la recherche d'une mise en équation, que ce soit dans un cadre numérique, géométrique ou fonctionnel. Ce choix a été réalisé de manière à répertorier les équations à résoudre dans le cas où l'objectif premier des auteurs de manuels est de « faire travailler » les techniques de résolution et de rechercher une certaine automatisation de celles-ci. Les catégories à répertorier sont conçues de la manière suivante :

- les équations regroupées sous la dénomination d'« *équations du premier degré* » sont sous la forme $ax + b = 0$ ou $ax + b = cx + d$ ou s'y ramènent par développement (par exemple, l'équation a de l'exercice 40 du manuel Symbole, présentée dans le tableau ci-dessus) ;

- les équations du second degré, regroupées sous la dénomination d'« *équations-produits* » sont des équations déjà factorisées ou se ramenant au produit nul d'équations du premier degré, en les factorisant soit à l'aide d'un facteur commun, soit à l'aide d'une identité remarquable de la forme $(a + b)^2$ ou $(a + b)(a - b)$ où a et b sont des expressions algébriques à une inconnue (cf. exemples des équations des exercices 57 et 58 du manuel Cinq sur Cinq du tableau) ;
- les équations regroupées sous la dénomination d'« *équations* $x^2 = a$ » sont sous la forme nommée ou sous des formes proches, comme $ax^2 = b$ ou $ax^2 - b = c$, avec a, b, c nombres fixés (cf. exemples des équations des exercices 81 et 82 du manuel Triangle du tableau 28).

Nous expliquons plus loin pourquoi la distinction entre les équations dites « produits » (il faudrait d'ailleurs dire « produit nul ») et celles du type « $x^2 = a$ » a été opérée.

L'étude a été réalisée pour deux périodes correspondant aux deux changements de programmes institutionnels les plus récents, un changement de programme ayant eu lieu en 3^e^ en 1999 et en 2^nde^ en 2000, et pour la période actuelle, un nouveau programme est en vigueur depuis 2008 en 3^e^ et depuis 2009 en 2^nde^.

Le choix des 28 manuels retenus pour ce comparatif est donné dans le tableau ci-dessous. Il est constitué de 14 manuels de 3^e^ et 14 manuels de 2^nde^, le choix ayant été effectué pour tenter de couvrir un maximum d'éditeurs, pour une plus grande représentativité.

Programme officiel	Manuels de la classe de 3^e^	Manuels de la classe de 2^nde^
1999 - 2000	Dimathème, Didier (1999) Maths, Bordas (1999) Pythagore, Hatier (1999) Transmath, Nathan (1999) Trapèze, Bréal (1999) Triangle, Hatier (1999) Cinq sur cinq, Hachette (2000)	Maths, Belin (2000) Pythagore, Hatier (2000) Pyramide, Hachette (2000) Transmath, Nathan (2000) Indice, Bordas (2004) Math'x, Didier (2005) Math Antibi, Nathan (2006)
2008 - 2009	Diabolo, Hachette (2008) Dimathème, Didier (2008) Phare, Hachette (2008) Triangle, Hatier (2008) Prisme, Belin (2012) Sésamaths, Magnard (2012) Triangle, Hatier (2012)	Indice, Bordas (2009) Math'x, Didier (2009) Déclic, Hachette (2010) Math Antibi, Nathan (2010) Odyssée, Hatier (2010) Repères, Hachette (2010) Symbole, Belin (2010)

Figure 29 : Choix des manuels pour le comparatif des champs numériques des paramètres des équations

7.2 Deux catégories pour le second degré

Justifions pourquoi nous avons séparé les équations dites « produits » des équations du type « $x^2 = a$ ». Les « équations-produits » polynomiales du second degré sont présentées dans les manuels sous la forme d'un produit nul de deux expressions du premier degré ou s'y ramenant. Elles possèdent donc toujours deux solutions réelles distinctes ou confondues. De la même façon, les équations du type $x^2 = a$ peuvent se mettre sous la forme d'une équation-

produit lorsque $a > 0$, puisque l'équation est alors équivalente à $(x-\sqrt{a})(x+\sqrt{a})=0$ et ont deux solutions réelles. En revanche lorsque $a < 0$, l'équation n'admet pas de solutions réelles. Ce sont les premières équations du second degré que les élèves rencontrent qui ne possèdent pas de solutions réelles.
Cette distinction, qui a donc une raison d'être mathématique, se retrouve dans les programmes de la classe de troisième. Nous avons comparé les compétences exigibles des programmes de 1999 et de 2008. Le tableau ci-dessous présente les points des programmes relatifs à la résolution algébrique des équations, les points du programme ne concernant pas ce concept ont été omis.

	Programme de 1999	Programme de 2008
Classe de 3e	**- Calculs élémentaires sur les radicaux** Déterminer, sur des exemples numériques, les nombres x tels que $x^2 = a$, où a désigne un nombre positif. **- Écritures littérales ; identités remarquables** Factoriser des expressions telles que : $(x+1)(x+2)-5(x+2)$; $(2x+1)^2+(2x+1)(x+3)$. Connaître les égalités : $(a-b)=a^2-b^2$; $(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$; $(a-b)^2=a^2-2ab+b^2$. et les utiliser sur des expressions numériques ou littérales. **- Équations et inéquations du premier degré. Résolution de problèmes du premier degré ou s'y ramenant** Résoudre une équation mise sous la forme A.B = 0, où A et B désignent deux expressions du premier degré de la même variable.	**- Calculs élémentaires sur les radicaux** *Déterminer, sur des exemples numériques, les nombres x tels que $x^2 = a$, où a est un nombre positif.* **- Écritures littérales** *Factoriser des expressions algébriques dans lesquelles le facteur est apparent.* Connaître les identités : $(a-b)=a^2-b^2$; $(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$; $(a-b)^2=a^2-2ab+b^2$. *Les utiliser dans les deux sens sur des exemples numériques ou littéraux simples.* **- Équations et inéquations du premier degré. Problèmes se ramenant au premier degré : équations-produits.** *Résoudre une équation mise sous la forme A(x).B(x) = 0, où A(x) et B(x) sont deux expressions du premier degré de la même variable x.*

Tableau 30 : Comparaison des compétences sur les équations pour les programmes de 3e de 1999 et de 2008

La mise en regard des deux programmes montre une grande similarité des compétences exigées, aussi bien dans la forme – les termes utilisés sont identiques – que dans le fond. La grande différence porte sur l'existence du *socle commun des connaissances et des compétences*, mis en place en 2005 et intégré au programme en vigueur de 2008. Les éléments en italiques du tableau ci-dessus sont les points du programme (connaissances et capacités) qui ne sont pas exigibles pour le socle commun. L'expression « équation-produit » apparaît dans le programme de 2008 et les équations « $x^2 = a$ » sont présentes dans les deux programmes. Notons que ces programmes n'exigent pas la connaissance de l'absence de solutions réelles pour les équations de ce dernier type, puisqu'il est précisé que « *a est un nombre positif* ».
Nous présentons de la même manière le récapitulatif des items du programme de seconde des concepts traitant de la résolution algébrique d'équations pour les deux derniers changements de programmes, en 2000 et 2009.

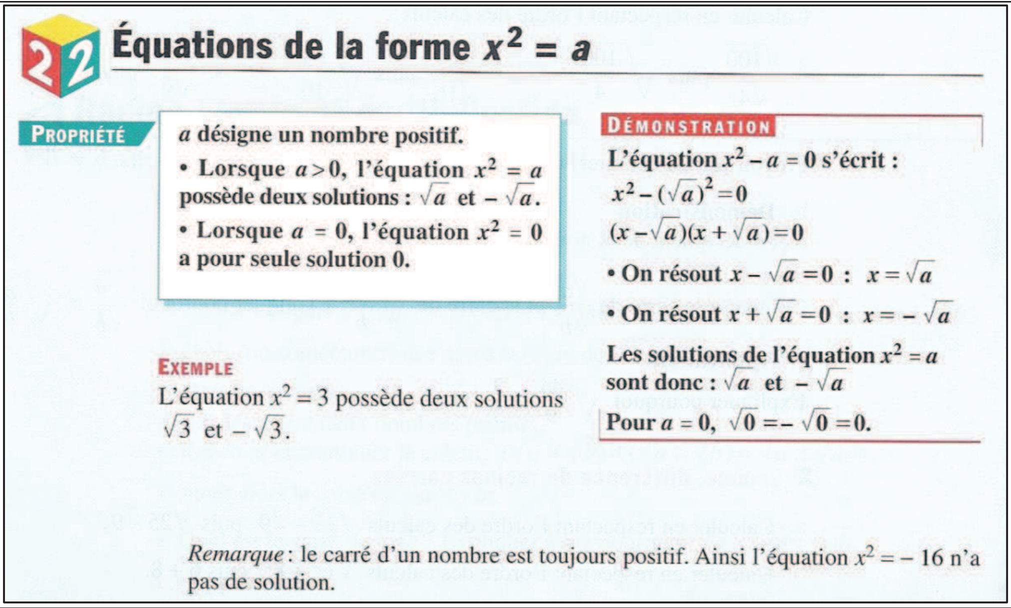
	Programme de 2000	Programme de 2009
Classe de 2^{nde}	***Domaine : Calcul et fonctions*** **- Fonctions et formules algébriques** Reconnaître la forme d'une expression algébrique (somme, produit, carré, différence de deux carrés). Reconnaître différentes écritures d'une même expression et choisir la forme la plus adaptée au travail demandé (forme réduite, factorisée, etc.). Modifier une expression ; la développer ; la réduire selon l'objectif poursuivi. **- Mise en équation ; résolution algébrique, résolution graphique d'équations et inéquations** Résoudre une équation ou une inéquation se ramenant au premier degré.	***Domaine : Fonctions*** **- Expressions algébriques ; Transformations d'expressions algébriques en vue d'une résolution de problème** Associer à un problème une expression algébrique. Identifier la forme la plus adéquate (développée, factorisée) d'une expression en vue de la résolution du problème donné. Développer, factoriser des expressions polynomiales simples ; transformer des expressions rationnelles simples. **- Équations ; Résolution graphique et algébrique d'équations** Mettre un problème en équation. Résoudre une équation se ramenant au premier degré.

Tableau 31 : Comparaison des compétences sur les équations pour les programmes de 2^{nde} de 2000 et de 2009

Comme nous l'avons déjà remarqué dans l'exposition de la problématique (cf. §5), le programme en vigueur de la classe de seconde fait une part importante au domaine des fonctions et l'algèbre s'y retrouve « enfouie ». Cette tendance était naissante dans le programme de 2000, ainsi que le montre des expressions comme le nom du domaine « *Calcul et fonctions* », ou encore le titre du contenu « *Fonctions et formules algébriques* », et elle se confirme dans le programme actuel de 2009. Un autre changement notable concerne la place faite à la résolution de problème, à laquelle le calcul algébrique est systématiquement associé : notons que pour les quelques lignes présentées ci-dessus dans le tableau, le mot « problème » est présent quatre fois. Comme déjà précisé plus avant, cette orientation confère à l'algèbre un statut d'outil, utile et nécessaire à la résolution de problème. Pour revenir aux types d'équations que le programme de seconde demande d'étudier, notons qu'aucune indication précise n'est donnée (ni pour le programme de 2000, ni pour l'actuel) qui pourrait indiquer qu'une *reprise* du programme de troisième est souhaitée pour asseoir les connaissances des élèves sur ce concept. Les capacités exprimées portent sur la transformation des écritures (développement, factorisation) et l'identification des formes les plus adaptées pour résoudre des tâches données. L'unique référence à la résolution d'équations est donnée par la formulation « *Résoudre une équation se ramenant au premier degré* ». Dans ce qui suit, nous présentons comment des manuels de troisième et de seconde traitent les compétences exigibles des programmes et plus particulièrement les techniques et éléments technologiques proposés.

Pour les équations du type $x^2 = a$, nous trouvons deux façons de présenter leur résolution dans la partie « cours » des manuels de troisième, ce qui correspond à une institutionnalisation de la notion.

Extrait de la partie « cours » du manuel Transmath (1999), 3^e^, p.50



2 2 Équations de la forme $x^2 = a$

PROPRIÉTÉ

a désigne un nombre positif.
- **Lorsque $a>0$, l'équation $x^2 = a$ possède deux solutions : $\sqrt{a}$ et $-\sqrt{a}$.**
- **Lorsque $a = 0$, l'équation $x^2 = 0$ a pour seule solution 0.**

EXEMPLE

L'équation $x^2 = 3$ possède deux solutions $\sqrt{3}$ et $-\sqrt{3}$.

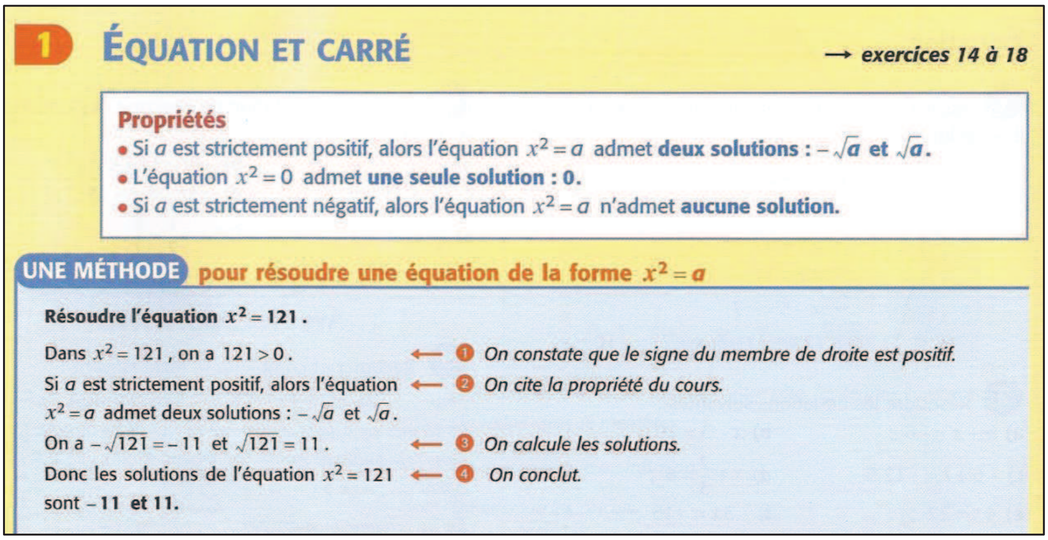
DÉMONSTRATION

L'équation $x^2 - a = 0$ s'écrit :
$x^2 - (\sqrt{a})^2 = 0$
$(x - \sqrt{a})(x + \sqrt{a}) = 0$
- **On résout $x - \sqrt{a} = 0$: $x = \sqrt{a}$**
- **On résout $x + \sqrt{a} = 0$: $x = -\sqrt{a}$**

Les solutions de l'équation $x^2 = a$ sont donc : $\sqrt{a}$ et $-\sqrt{a}$
Pour $a = 0$, $\sqrt{0} = -\sqrt{0} = 0$.

Remarque : le carré d'un nombre est toujours positif. Ainsi l'équation $x^2 = -16$ n'a pas de solution.

Extrait de la partie « cours » du manuel Diabolo (2008), 3^e^, p.78



1 ÉQUATION ET CARRÉ → *exercices 14 à 18*

Propriétés
- Si a est strictement positif, alors l'équation $x^2 = a$ admet **deux solutions : $-\sqrt{a}$ et $\sqrt{a}$.**
- L'équation $x^2 = 0$ admet **une seule solution : 0.**
- Si a est strictement négatif, alors l'équation $x^2 = a$ n'admet **aucune solution.**

UNE MÉTHODE pour résoudre une équation de la forme $x^2 = a$

Résoudre l'équation $x^2 = 121$.

Dans $x^2 = 121$, on a $121 > 0$. ← ① *On constate que le signe du membre de droite est positif.*

Si a est strictement positif, alors l'équation $x^2 = a$ admet deux solutions : $-\sqrt{a}$ et $\sqrt{a}$. ← ② *On cite la propriété du cours.*

On a $-\sqrt{121} = -11$ et $\sqrt{121} = 11$. ← ③ *On calcule les solutions.*

Donc les solutions de l'équation $x^2 = 121$ sont **-11 et 11.** ← ④ *On conclut.*

Figure 32 : Institutionnalisation de la résolution de l'équation x² =a (Manuels de 3^e^)

La différence entre les deux types d'exposition est frappante. Le manuel Transmath (1999) propose une justification technologico-théorique en donnant la démonstration des deux solutions $\sqrt{a}$ et $-\sqrt{a}$, mais ne détaille pas la technique à utiliser en proposant uniquement un exemple résolu. Remarquons que la factorisation effectuée dans la démonstration utilise l'identité remarquable $a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$ sans l'expliciter. En revanche, le manuel Diabolo (2008) cite la propriété sans aucune justification puis détaille la technique à utiliser pas à pas. Larguier (2009, p.48) qualifie ce comportement de *techniques données à reproduire par mimétisme, et non justifiées par un discours,* et où *des éléments de la praxéologie sont alors manquants*. Ici ce sont les éléments technologico-théoriques qui manquent. Notons cependant que la démonstration est proposée dans le manuel Diabolo sous forme d'« activité » dans les pages précédant la partie « cours ». Nous en concluons que l'accent est mis davantage sur un savoir-faire plus que sur un savoir.

Sur les 28 manuels étudiés, nous obtenons la répartition suivante entre les manuels donnant la propriété « *si a >0, l'équation x² = a admet deux solutions,* $\sqrt{a}$ et $-\sqrt{a}$ » et ceux indiquant de plus une justification technologico-théorique, par une démonstration générale ou sur des exemples numériques :

	Propriété indiquée (à utiliser comme technique de résolution)	Justification de la propriété par des éléments technologico-théoriques
Manuels de troisième	100%	57%
Manuels de seconde	71%	29%

Figure 33 : Présence de techniques et d'éléments technologico-théoriques pour la résolution de l'équation $x^2 = a$

Ces résultats confirment que les praxéologies concernant la résolution des équations se ramenant $x^2 = a$ sont incomplètes. Si tous les manuels de troisième présentent la propriété « *si $a > 0$, l'équation $x^2 = a$ admet deux solutions,* $\sqrt{a}$ et $-\sqrt{a}$ » – ce qui respecte les contraintes des programmes officiels –, seuls 57% d'entre eux en proposent une démonstration. De plus, la propriété n'est rappelée que pour 71% des manuels de seconde et démontrée moins d'une fois sur trois. Larguier (2009, p.137), à propos de l'étude du domaine numérique, évoque *des techniques invisibles, des démonstrations souvent évitées même dans la partie théorique du cours*. Nous pouvons appliquer ces mêmes conclusions au domaine algébrique analysé ci-dessus. Nous avons également relevé un autre point qui montre cette incomplétude : pour l'ensemble des manuels de troisième, qui présentent tous la distinction entre les « équations-produits » et les « équations du type $x^2 = a$ », à aucun moment le rapprochement n'est fait pour indiquer que dans le cas où a est un nombre positif, l'équation $x^2 = a$ est équivalente à une équation-produit $(x - \sqrt{a})(x + \sqrt{a}) = 0$. Le terme « équation-produit », utilisé par tous les manuels dans un chapitre consacré à la résolution des équations se ramenant au premier degré ne se retrouve pas dans le chapitre consacré aux racines carrées. Il existe un cloisonnement dans l'étude de ces deux secteurs qui peut s'expliquer par la présentation du programme officiel (cf. tableau 31), séparant les deux notions.

À cette incomplétude des praxéologies vient se conjuguer les difficultés liées à l'objet racine carrée. Suit un exemple qui vient illustrer ces difficultés.

1 Racine carrée

Spécial prof
Objectif : introduire la racine carrée et le symbole $\sqrt{\ }$ à partir des acquis de la classe de 4^e^.

1. Trouver sans calculatrice, des valeurs de x qui vérifient :

a. $x^2 = 16$ **b.** $x^2 = 25$ **c.** $x^2 = 1$ **d.** $x^2 = \frac{1}{4}$

2. À l'aide de la calculatrice, donner la valeur arrondie au centième des nombres x tels que :

a. $x^2 = 3$ **b.** $x^2 = 10$ **c.** $x^2 = \frac{3}{2}$

Figure 34 : Extrait du manuel Dimathème (2008), 3^e^, p.56

Dans la partie « activités » du chapitre « racines carrées » du manuel Dimathème (2008), la figure 34 ci-dessus présente la toute première activité à proposer aux élèves de 3^e^ avec l'objectif cité en marge *d'introduire la racine carrée à partir des acquis de 4^e^*. En effet, en classe de 4^e^, les élèves n'ont abordé la racine carrée que par le biais du théorème de Pythagore où la valeur d'une longueur est obtenue en utilisant la touche √ de la calculatrice. Si la première question ne pose pas problème avec la formulation « trouver *des* valeurs de x », il n'en est pas de même pour la seconde question. En effet, d'une part la calculatrice ne fournira que la solution positive de l'équation et d'autre part il est demandé directement aux élèves de donner une valeur approchée, ce qui pourrait leur laisser penser qu'il est possible d'assimiler la valeur exacte de la racine carrée à l'une de ses valeurs approchées. Le document d'accompagnement du collège sur les nombres (MEN, 2006) met d'ailleurs en garde contre cette dérive :

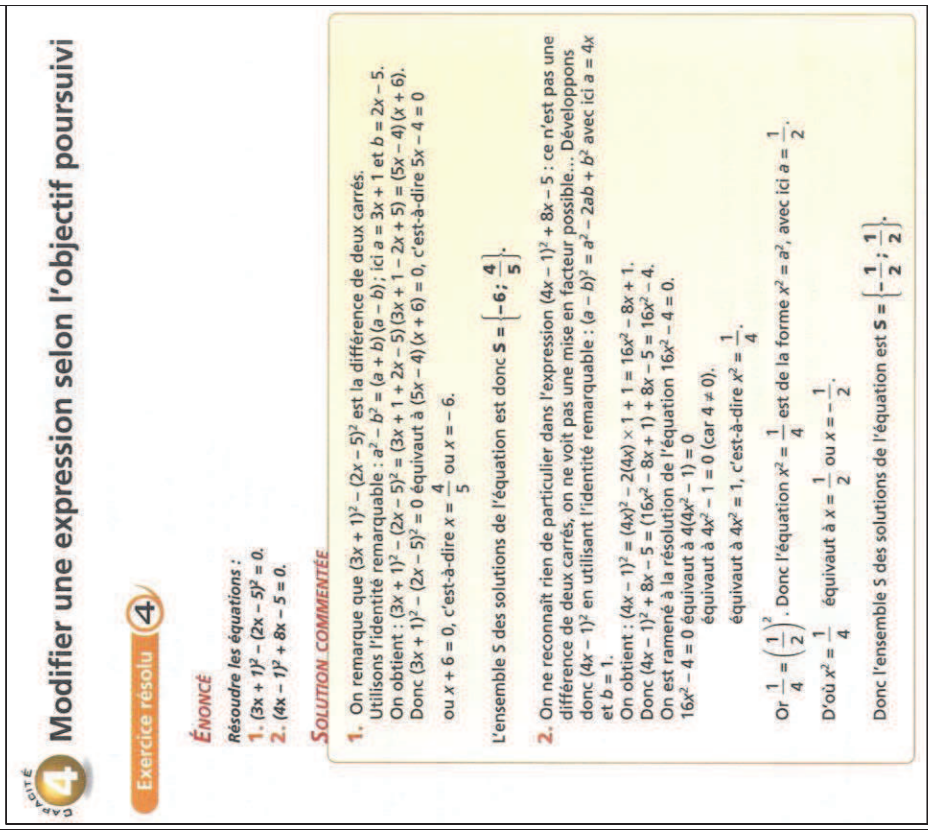
> En particulier, alors qu'en classe de quatrième, la notation √ évoque souvent un calcul à réaliser, notamment à travers l'emploi de la touche √ de la calculatrice qui fournit le plus souvent des valeurs approchées à 10^{-n} près (par exemple pour la racine carrée de 2) ; en troisième le même symbole est surtout utilisé pour désigner le nombre positif dont le carré est 2 (et donc pour exprimer la valeur exacte de ce nombre). Le professeur doit donc justifier ce deuxième usage du symbole √, différent du premier, par le fait qu'il n'existe pas de nombre déjà connu (en l'occurrence rationnel) dont le carré soit 2, d'où la nécessité d'un nouveau type d'écriture ni décimale (en ligne) ni fractionnaire. (p .10)

En appliquant la typologie des rapports personnels à l'objet racine carrée (Bronner, 1997), il semble que cette approche puisse induire chez les élèves une conception approchée **CA** ou **CA≈** (cf. §2.5) où *le nombre n'est plus caractérisé par sa propriété opératoire algébrique* $\left(\sqrt{a}\right)^2 = a$, *mais il est l'image de a par un opérateur √ où le lien avec l'opérateur carré s'efface complètement.* (Bronner, 1997, p.184)

Le cloisonnement, que nous avons évoqué plus haut en ce qui concerne les équations dites produits et celles du type $x^2 = a$ dans les manuels de troisième, se retrouve également dans les manuels de seconde. Lorsque les auteurs de ces derniers effectuent une reprise de la résolution des équations de degré 2, conformément aux préconisations des programmes, « *Résoudre une équation se ramenant au premier degré* », nous remarquons ici encore une certaine incomplétude par rapport au lien qui existe entre les techniques utilisées pour résoudre les équations-produits et les équations du type $x^2 = a$. Nous avons relevé par exemple pour deux manuels de seconde de 2000 et de 2010 (cf. figure 35 en page suivante) les éléments suivants :

- le manuel Antibi (2006) présente deux équations résolues, la première du type équation-produit et la seconde se ramenant après développement à une équation du type $x^2 = a$. La volonté de reprendre les notions vues en troisième est présente. Pour la première équation, le manuel met en avant *la différence de deux carrés*, ce qu'il ne fait pas pour la seconde équation où le développement conduit pourtant à l'équation $16x^2 - 4 = 0$. Nous pensons que dans le cadre d'une reprise faite en seconde sur ces équations, la présentation de la résolution de ces équations pourrait être harmonisée, ceci afin d'indiquer aux élèves que le nombre de techniques à retenir n'est pas si important qu'il n'y paraît et afin d'assurer une cohésion de l'enseignement ;
- le manuel Odyssée (2012) effectue dans la partie consacrée au « cours », un rappel sur la résolution des deux types d'équations cités. Nous remarquons que le vocabulaire utilisé dans le programme de 3^e, « équation-produit » est présent, assurant une certaine continuité avec le collège. Néanmoins, pour la résolution de l'équation $x^2 = a$, le lien n'est pas fait (il reste implicite) avec la règle du produit nul présenté pour les équations-produits juste au-dessus.

Extrait du manuel Math Antibi (2006), 2nde, p.105



4 Modifier une expression selon l'objectif poursuivi

Exercice résolu 4

Énoncé

Résoudre les équations :

1. $(3x+1)^2-(2x-5)^2=0$.
2. $(4x-1)^2+8x-5=0$.

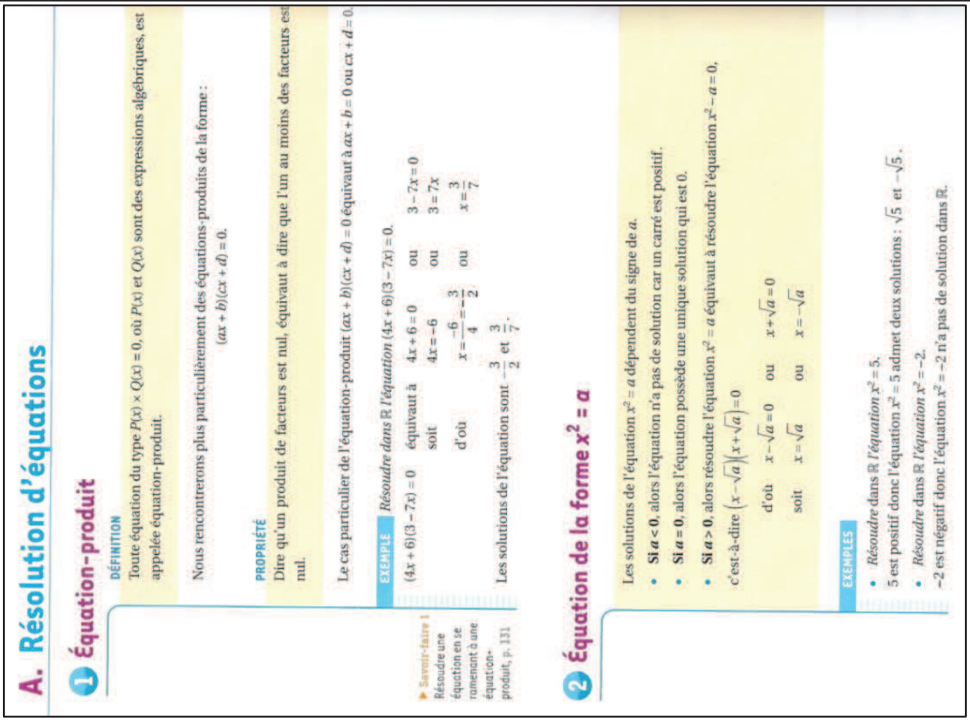
Solution commentée

1. On remarque que $(3x+1)^2-(2x-5)^2$ est la différence de deux carrés.
Utilisons l'identité remarquable : $a^2-b^2=(a+b)(a-b)$; ici $a=3x+1$ et $b=2x-5$.
On obtient : $(3x+1)^2-(2x-5)^2=(3x+1+2x-5)(3x+1-2x+5)=(5x-4)(x+6)$.
Donc $(3x+1)^2-(2x-5)^2=0$ équivaut à $(5x-4)(x+6)=0$, c'est-à-dire $5x-4=0$ ou $x+6=0$, c'est-à-dire $x=\frac{4}{5}$ ou $x=-6$.

L'ensemble S des solutions de l'équation est donc $\mathbf{S}=\left\{-6;\frac{4}{5}\right\}$.

2. On ne reconnaît rien de particulier dans l'expression $(4x-1)^2+8x-5$: ce n'est pas une différence de deux carrés, on ne voit pas une mise en facteur possible... Développons donc $(4x-1)^2$ en utilisant l'identité remarquable : $(a-b)^2=a^2-2ab+b^2$ avec ici $a=4x$ et $b=1$.
On obtient : $(4x-1)^2=(4x)^2-2(4x)\times 1+1=16x^2-8x+1$.
Donc $(4x-1)^2+8x-5=(16x^2-8x+1)+8x-5=16x^2-4$.
On est ramené à la résolution de l'équation $16x^2-4=0$.
$16x^2-4=0$ équivaut à $4(4x^2-1)=0$
équivaut à $4x^2-1=0$ (car $4\neq 0$).
équivaut à $4x^2=1$, c'est-à-dire $x^2=\frac{1}{4}$.
Or $\frac{1}{4}=\left(\frac{1}{2}\right)^2$. Donc l'équation $x^2=\frac{1}{4}$ est de la forme $x^2=a^2$, avec ici $a=\frac{1}{2}$.
D'où $x^2=\frac{1}{4}$ équivaut à $x=\frac{1}{2}$ ou $x=-\frac{1}{2}$.
Donc l'ensemble S des solutions de l'équation est $\mathbf{S}=\left\{-\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right\}$.

Extrait du manuel Odyssée (2010), 2nde, p.128



A. Résolution d'équations

1 Équation-produit

DÉFINITION
Toute équation du type $P(x)\times Q(x)=0$, où $P(x)$ et $Q(x)$ sont des expressions algébriques, est appelée équation-produit.

Nous rencontrerons plus particulièrement des équations-produits de la forme :
$(ax+b)(cx+d)=0$.

PROPRIÉTÉ
Dire qu'un produit de facteurs est nul, équivaut à dire que l'un au moins des facteurs est nul.

Le cas particulier de l'équation-produit $(ax+b)(cx+d)=0$ équivaut à $ax+b=0$ ou $cx+d=0$.

▶ Savoir-faire 1 Résoudre une équation en se ramenant à une équation-produit, p. 131

EXEMPLE *Résoudre dans* $\mathbb{R}$ *l'équation* $(4x+6)(3-7x)=0$.

$(4x+6)(3-7x)=0$ équivaut à $4x+6=0$ ou $3-7x=0$
soit $4x=-6$ ou $3=7x$
d'où $x=\frac{-6}{4}=-\frac{3}{2}$ ou $x=\frac{3}{7}$

Les solutions de l'équation sont $-\frac{3}{2}$ et $\frac{3}{7}$.

2 Équation de la forme $x^2=a$

Les solutions de l'équation $x^2=a$ dépendent du signe de a.

- **Si $a<0$**, alors l'équation n'a pas de solution car un carré est positif.
- **Si $a=0$**, alors l'équation possède une unique solution qui est 0.
- **Si $a>0$**, alors résoudre l'équation $x^2=a$ équivaut à résoudre l'équation $x^2-a=0$, c'est-à-dire $(x-\sqrt{a})(x+\sqrt{a})=0$
d'où $x-\sqrt{a}=0$ ou $x+\sqrt{a}=0$
soit $x=\sqrt{a}$ ou $x=-\sqrt{a}$

EXEMPLES

- *Résoudre* dans $\mathbb{R}$ *l'équation* $x^2=5$.
5 est positif donc l'équation $x^2=5$ admet deux solutions : $\sqrt{5}$ et $-\sqrt{5}$.
- *Résoudre* dans $\mathbb{R}$ *l'équation* $x^2=-2$.
-2 est négatif donc l'équation $x^2=-2$ n'a pas de solution dans $\mathbb{R}$.

Figure 35 : Extraits de manuels de seconde sur la reprise des équations de degré 2

Les deux exemples présentés ici ne sont pas isolés, nous avons relevé des tendances similaires dans d'autres manuels de seconde, aussi bien pour le programme de 2000 que pour le programme en vigueur. Une *reprise* de techniques apprises en collège pourrait laisser penser une certaine unification des savoirs, des liens étant proposés entre les divers concepts mathématiques. Il semblerait que cette unification ne se fasse pas.

7.3 Fréquence de l'utilisation des nombres déterminés dans les équations proposées par les manuels

Les résultats sont présentés pour chacun des deux programmes officiels, en analysant séparément les manuels de 3e et de 2nde.

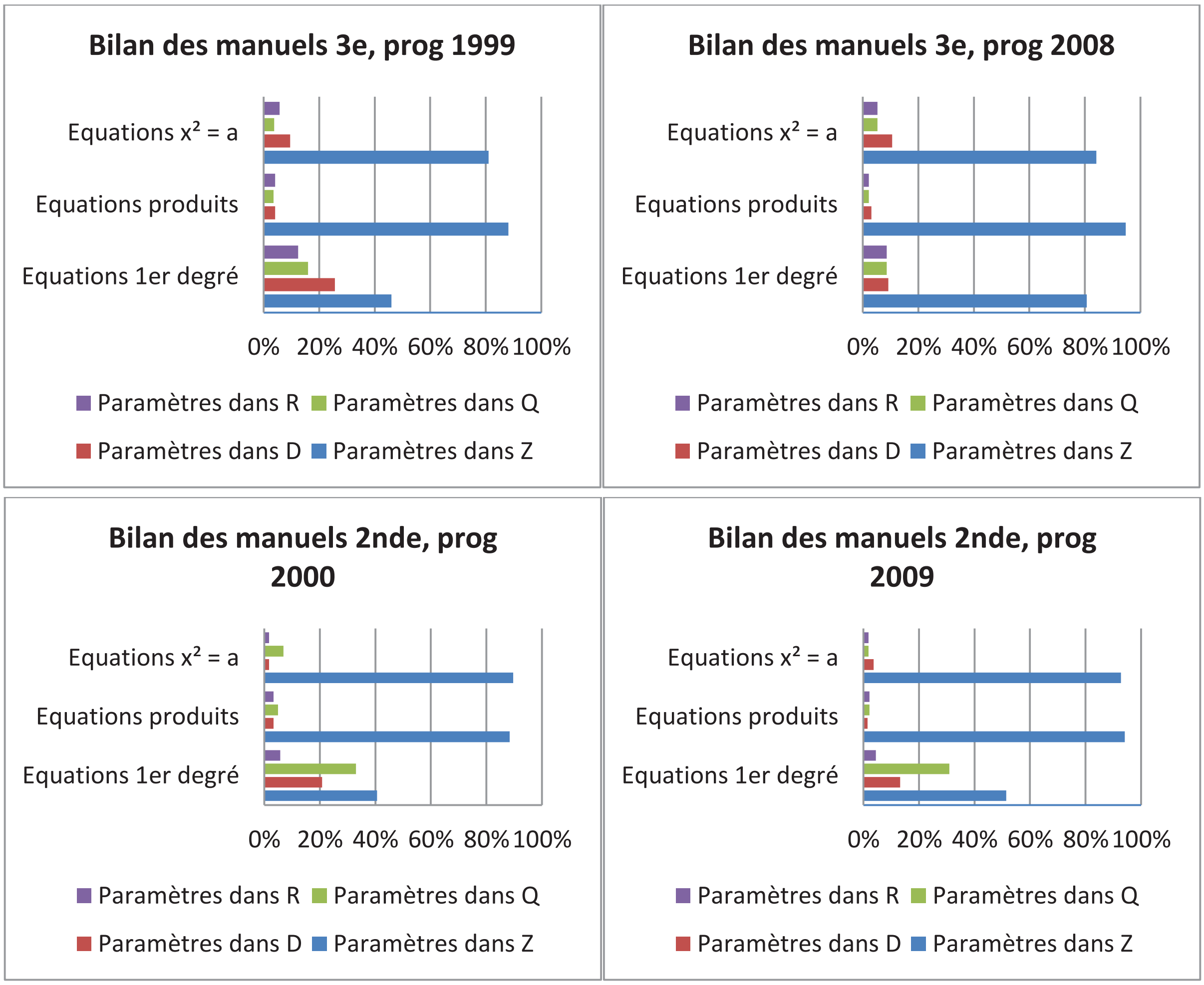


Figure 36 : Taux de fréquence des paramètres des équations selon leur ensemble d'appartenance (programmes de 1999-2000 et de 2008-2009)

L'analyse de la figure 36 montre la nette prédominance des paramètres entiers par rapport aux autres paramètres pour les types d'« équations-produits » et « équations du type $x^2 = a$ », pour une part de plus de 80% pour l'ensemble des manuels, part en légère augmentation dans les manuels récents. En ce qui concerne les équations du premier degré, la comparaison des résultats des manuels de 3e montre un net recul de l'utilisation de paramètres non entiers entre 1999 et 2008, puisque ceux-ci passent de 54% à 19%. Les manuels de seconde montrent qu'une reprise plus large de ces équations du premier degré est accomplie, avec davantage d'équations présentant des nombres déterminés non entiers. Nous notons cependant que pour le programme de 1999, ces équations représentaient 60% des équations proposées et que ce taux descend à 50% pour les manuels du programme actuel.

Deux explications peuvent être avancées de ces phénomènes. D'une part, la sur-représentation des paramètres entiers peut s'expliquer par la volonté de débuter l'apprentissage de la résolution d'équations dans un champ numérique « stable » pour les élèves, à savoir les nombres entiers et ainsi faire ressortir les grandes étapes de la technique, en faisant abstraction de la nature des coefficients. La généralisation de la résolution à des nombres non entiers est alors considérée comme « allant de soi » par les auteurs de manuels, en sous-estimant les obstacles épistémologiques créés par les nombres des ensembles $\mathbb{D}$, $\mathbb{Q}$ et $\mathbb{R}$. Ainsi, Larguier (2009, p.260), écrit-elle que *certains énoncés théoriques ou notions semblent être considérés par les professeurs comme étant acquis et familiers pour les élèves alors qu'ils n'ont été rencontrés que sous des formes partielles.* D'autre part, la sous-représentation des paramètres non entiers et la diminution de leur fréquentation entre 1999 et 2008 peut aussi s'expliquer par les contraintes des programmes officiels en vigueur. En effet, pour le programme de 3^{e} en vigueur, les connaissances à acquérir pour le socle commun ne recouvrent pas entièrement le programme de la classe. Par exemple, nous pouvons lire : « *La notion d'équation ne fait pas partie du socle commun* » ou encore « *C'est en développant notamment des activités où le calcul littéral présente du sens et où il reste simple à effectuer que l'on amène l'élève à recourir à l'écriture algébrique lorsqu'elle est pertinente.* » (MEN, 2008a), De telles injonctions entrainent certainement une lecture et par suite une exigence minimaliste de l'apprentissage des équations. Il est possible que la diminution constatée des exigences sur le calcul littéral qui doit *rester simple à effectuer*, comme indiqué ci-dessus, induise l'utilisation de nombres déterminés « simples » comme des entiers. Des propos similaires se retrouvent dans le document d'accompagnement du programme de 2nde actuel. Ainsi, si le secteur *Expressions algébriques* du programme précise que « *les activités de calcul nécessitent une certaine maîtrise technique et doivent être l'occasion de raisonner* » (MEN, 2009a), le document d'accompagnent sur les fonctions modère cette assertion en précisant qu'« *acquérir de l'autonomie en calcul nécessite bien entendu une part d'entraînement technique. Toutefois faire acquérir cette maîtrise technique à tous n'est pas la priorité. »* (MEN, 2009b, p.13). Nous pouvons donc expliquer que les manuels s'adressant à « tous » proposent une majorité d'équations dont les coefficients sont des entiers, puisque qu'il faut faire « simple ».

7.4 Conclusion

Nous avons vu que ce soit pour les programmes de 1999-2000 ou les programmes en vigueur mis en place en 2008-2009 dans les classes de 3^{e} et de 2nde, les contraintes de ces programmes officiels influent sur le choix des équations présentées par les manuels. Nous pouvons alors faire une corrélation entre la fréquentation insuffisante de la résolution des équations comportant des coefficients non entiers et les difficultés des élèves à résoudre de telles équations. De plus, l'analyse des manuels a permis de dégager l'existence d'autres facteurs expliquant ces difficultés, comme l'incomplétude des techniques ou des technologies des praxéologies mises en œuvre ainsi que le manque de relation entre elles, comme nous l'avons évoqué avec les équations-produits et celles du type $x^2 = a$ où l'enseignement est présenté avec un cloisonnement des techniques pour effectuer des types de tâches pourtant similaires.

Ce cloisonnement induit une juxtaposition de connaissances et de savoir-faire qui ne s'intègrent pas les uns aux autres et ne permet pas un savoir solidement construit des concepts algébriques. Pour conclure, ces analyses viennent conforter un point de l'hypothèse H4, en montrant ici que certains choix d'organisations mathématiques et didactiques relatifs à la résolution d'équations pointent des impacts sur les possibilités d'apprentissages des élèves.

CHAPITRE 8 – UNE ÉTUDE DES CONNAISSANCES DES ÉLÈVES

Nous nous proposons d'étudier dans ce chapitre les connaissances des élèves français en algèbre élémentaire, au niveau du début du lycée. Deux types de données sont d'abord explorés, les évaluations du programme international PISA et les évaluations nationales françaises comme le brevet des collèges en fin de classe de troisième et les évaluations d'entrée en seconde qui ont existé dans les années 2000. Nous exposons ensuite les résultats d'un test diagnostique réalisé par nos soins sur une population de six classes de seconde, dans un lycée de la proche banlieue montpelliéraine. Ces études sont en relation avec le chapitre 2 du cadre didactique de l'algèbre, elles permettent de recouper les résultats de recherches déjà réalisées, en particularisant les tâches algébriques à une dimension essentiellement *objet* (bien qu'une utilisation de l'algèbre comme *outil* soit aussi convoquée) et ont pour objectif de révéler des indicateurs répondant en particulier à l'hypothèse H2.

8.1 Exploration du programme PISA

Afin de connaître les résultats des élèves français en algèbre, en fin de collège ou début du lycée, nous avons analysé les rapports des enquêtes PISA. Commençons par définir dans un premier temps le programme PISA pour comprendre la méthodologie utilisée.
L'OCDE[104] pilote le programme PISA[105] auquel ont participé 32 pays lors de sa mise en place en 2000. Depuis le nombre de pays y participant n'a cessé de croître, passant à 63 en 2009[106]. Ce programme se poursuit sur des périodes de 3 ans et consiste en une évaluation de certains aspects de la préparation à la vie adulte des jeunes de 15 ans, quel que soit leur parcours scolaire. En 2000, l'évaluation portait essentiellement sur la *compréhension de l'écrit*, en 2003, plus particulièrement sur la *culture mathématique* puis enfin en 2006 la dominante d'évaluation s'appuyait sur la *culture scientifique*. Il est à noter que chacun de ces trois grands thèmes a néanmoins été abordé lors de chaque enquête, de manière à élaborer un suivi de l'évolution au cours du temps. L'organisation de l'évaluation est déléguée à un Consortium international d'instituts de recherche en éducation et de statistiques, situé en Australie, au Pays-Bas, aux États-Unis et au Japon. Dans chaque pays participant, une institution ou une société nationale est responsable de la mise en œuvre de PISA. En France, il s'agit du bureau de l'évaluation des élèves et des outils pour le pilotage pédagogique de la Direction de l'évaluation, de la prospective et de la performance, au sein de Ministère de l'Éducation nationale.

[104] Organisation pour la coopération et le développement économique
[105] Programme International pour le Suivi des Acquis des élèves
[106] Les résultats de PISA 2012 seront divulgués en décembre 2013.

Relativement à la population des élèves français de 15 ans révolus, l'enquête PISA concerne, selon le mois de naissance ou du fait des redoublements et des orientations diverses, des élèves scolarisés soit en collège (classes de quatrième ou de troisième) pour 40% d'entre eux, soit en lycée, avec les répartitions suivantes : lycée général et technologique pour 52% (seconde : 50% et première : 2%) et lycée professionnel pour 8%. Ces répartitions ont peu évolué entre 2000 et 2006 [107], avec néanmoins une légère hausse des élèves en lycée professionnel par rapport à ceux en troisième. Les résultats doivent donc être interprétés en tenant compte de ces contextes différents.

La particularité de l'enquête PISA est qu'elle n'a pas pour objectif direct de mesurer les apprentissages des élèves par rapport *aux programmes d'enseignement nationaux, mais propose des épreuves mesurant des compétences générales et supposées communes aux élèves arrivant en fin de scolarité obligatoire* (MEN, 2007). Le programme PISA définit en effet les savoirs en fonction de *contenus, processus et contextes* (OCDE, 2000) et mesure les compétences des élèves selon ces trois pôles. Définissons en particulier ce que le programme PISA entend par *culture mathématique* : la culture mathématique y est définie comme *l'aptitude d'un individu à identifier et à comprendre les divers rôles joués par les mathématiques, à porter des jugements fondés à leur propos et à s'y engager, en fonction de sa vie présente et future, de sa vie professionnelle, de sa vie sociale avec son entourage et ses proches, en tant que citoyen constructif, impliqué et réfléchi* (OCDE, ibid.). La culture mathématique désigne ici la capacité à utiliser de manière fonctionnelle les connaissances et les compétences mathématiques et non la maîtrise des mathématiques telles quelles sont envisagées dans les programmes d'enseignement. Cette définition dépasse très largement celle de la discipline mathématique enseignée dans le secondaire et dans laquelle l'aspect « utile pour le citoyen » n'est pas aussi central. En mathématiques, les contenus, processus et contextes sont les suivants :

- Pour les contenus, ont été retenus les concepts de *quantités*, *d'espace et de formes*, de *variations et relations*, et d'*incertitude*. Ces choix ne signifient pas que des branches spécifiques de l'enseignement comme l'algèbre ou la géométrie aient été ignorées : elles ont été intégrées dans des tâches plus globales.
- Pour les processus, trois grands ensembles ont été déterminés, la *reproduction*, les *liens* et la *réflexion*. Le premier, la *reproduction*, concerne les calculs simples ou les définitions rencontrés dans les évaluations traditionnelles, le deuxième, *les liens*, concerne les relations et procédures à mettre en œuvre pour résoudre des problèmes familiers et enfin, le troisième, la *réflexion* porte sur le raisonnement mathématique et la généralisation nécessaires au traitement des problèmes mathématiques complexes.
- Pour les contextes, ce sont la plupart du temps des problèmes basés sur des situations fictives mais que l'on peut rencontrer dans la vie réelle. La distance qui sépare les élèves de ces situations est variable, de situations les concernant directement (comme par exemple déterminer si un achat est judicieux) à des problèmes scientifiques d'ordre plus général.

Relativement au domaine de l'algèbre, différents rapports du Ministère de l'Éducation Nationale (Bourny et al., 2000, 2001, 2004 et Brun et al., 2008) ont tenté de dégager les compétences algébriques des élèves français au travers des différents items proposés. Ces

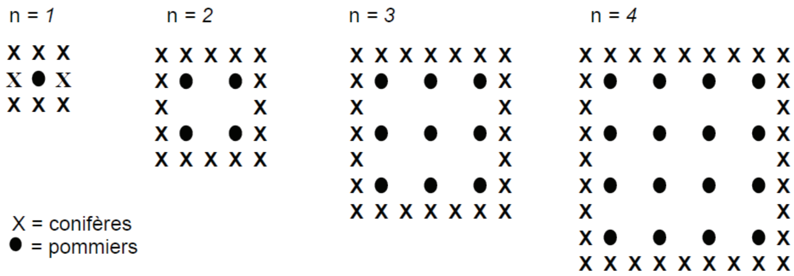
[107] Données référencées dans Bourny et al (2001, 2004,2007)

études montrent des taux d'abstention élevés et s'accroissant au fur et à mesure de l'avancée dans les exercices. En général, pour un exercice donné, les premières formules à établir sont correctes, cependant dès que l'élève doit faire successivement preuve de réflexion, d'imagination, de modélisation et de généralisation, les difficultés s'accentuent. Les auteurs du rapport de 2000 (Bourny et al.) justifient ces difficultés par l'organisation de notre système éducatif français, dont l'apprentissage des bases est situé au niveau du collège, et consiste à apprendre à relier observations et représentations, puis à relier ces représentations à des concepts mathématiques. En revanche, ce n'est qu'à partir de la classe de seconde qu'on s'attache *à rendre compte de la diversité de l'activité mathématique : chercher, trouver des résultats partiels, se poser des questions, critiquer, expérimenter, abstraire et démontrer.* Cet apprentissage tardif serait un frein à la réussite des exercices proposés par PISA.
Aucun résultat général n'est fourni dans les différents rapports évoqués quant à la *compétence algébrique* (au sens de Grugeon) des élèves français. Les raisons évoquées sont la difficulté à mettre en regard les compétences retenues par le programme PISA et nos programmes scolaires, où le taux de recouvrement entre les programmes du collège français et ces compétences est estimé à 15-20% (Bodin, 2009). Nous émettons également l'hypothèse qu'une autre difficulté peut être liée au découpage des contenus selon les quatre pôles définis plus haut, qui ne permet pas de sérier aisément le domaine algébrique. Également, étant donné qu'une partie conséquente des exercices utilisés dans PISA n'est pas divulguée au grand public – de manière à assurer le suivi dans les cycles futurs –, les analyses des exercices publics[108] ne donnent que des résultats parcellaires.
Néanmoins, pour mieux comprendre les principes de l'enquête PISA, nous proposons l'analyse de deux exercices, comportant des compétences algébriques, l'un issu du contenu *quantité* et l'autre, de *variations et relations*. Nous montrons quels types de tâches algébriques sont proposés, ainsi que leurs plus ou moins grandes adéquations avec les programmes scolaires français. Les analyses et taux de réussite donnés dans ces exemples sont tirés des dossiers Bourny et al. (2000) et MEN (2007).

[108] Les exercices libres de diffusion en culture mathématique sont sur le site MEN : http://www.educ-eval.education.fr/pdf/pisaexos3.pdf .

Premier exemple dans le champ « quantités » : Les pommiers

Un fermier plante des pommiers en carré. Afin de protéger ces arbres contre le vent, il plante des conifères tout autour du verger.
Vous pouvez voir ci-dessous un schéma présentant cette situation, avec la disposition des pommiers et des conifères pour un nombre (n) de rangées de pommiers :



Question 1 :
Complétez le tableau :

n	*Nombre de pommiers*	*Nombre de conifères*
1	***1***	***8***
2	***4***	
3		
4		
5		

Question 2 :
Il existe deux expressions que vous pouvez utiliser pour calculer le nombre de pommiers et le nombre de conifères dans cette situation :
Nombre de pommiers = n^2
Nombre de conifères = $8n$*, où n est le nombre de rangées de pommiers.*
Il existe une valeur de n pour laquelle le nombre de pommiers est égal au nombre de conifères. Trouvez cette valeur de n et expliquez votre méthode pour la calculer.
Question 3 :
Supposez que le fermier veuille faire un verger beaucoup plus grand, avec de nombreuses rangées d'arbres. Lorsque le fermier agrandit le verger, qu'est-ce qui va augmenter le plus vite : le nombre de pommiers ou le nombre de conifères ? Expliquez comment vous avez trouvé votre réponse.

Figure 37 : Énoncé du problème des pommiers (Enquête PISA 2000)

Une analyse de cet exercice est réalisée selon les *composantes de la compétence algébrique* de Grugeon (1995, Cf. §2.4) et présentée sous forme de tableau :

Composante d'analyse	**Critères**	**Valeurs des critères**
Traitement algébrique	***Objet*** Reproduction de tâches d'ordre numérique	Effectuation d'un calcul numérique ou substitution de valeurs numériques (Q1)
	Reproduction de tâches formelles non finalisées	Niveau 2 : organiser un calcul algébrique ou numérique et l'interpréter, le contrôler (Q2)
	Outil Utilisation de l'outil algébrique pour faire fonctionner d'autres notions mathématiques	Résolution d'une tâche algébrique dans le cadre fonctionnel (Q3)
	Utilisation de l'outil algébrique pour traduire une situation mathématique (géométrique)	Niveau 0 : la production de la formule n'est pas à la charge de l'élève (Q2)
Rapport arithmétique / algèbre	Démarche de résolution	Arithmétique (Q1) / Algébrique (Q3)
	Statut du signe d'égalité	Annonce de résultat (Q1) / Relation d'équivalence (Q2)
	Statut des lettres	Indéterminée (Q1 / Inconnue (Q2) / Variable (Q3)
	Objets Statut des objets de l'algèbre	Expression polynomiale du 1er et du 2nd degré Structural (Q3) / Procédural (Q2)
Gestion du registre algébrique	Type de formation	*RF* ($\mathbb{N}$, *n*, ²)[109]
	Type de traitement	*RT* (puissances, factoriser, résoudre inéquation se ramenant au 1er degré)[110]
Articulation	Registres et types de conversion	numérique, algébrique, géométrique, pictural (figures), fonctionnel (éventuellement graphique)
Fonction de l'algèbre	Emploi de l'algèbre	Mathématiser et résoudre une situation intra-mathématique issue du domaine géométrique

Tableau 38 : Grille descriptive du problème des pommiers (PISA) selon les composantes de la compétence algébrique de Grugeon

Cette grille permet de situer l'exercice comme un exercice complexe, en raison des nombreuses capacités algébriques qu'il fait intervenir. Pour résumer, le traitement algébrique est à la fois objet et outil (au sens de Grugeon), le statut des lettres utilisées est multiple et enfin une grande diversité de registres est convoquée. La multiplicité des conversions entre les registres, qui ne sont pas toujours congruentes au sens de Duval, laissent penser que les résultats obtenus devraient être assez médiocres, comme nous allons le constater ci-après.

Cet exercice est présenté et analysé dans le rapport de l'OCDE (2000). La première question est située au niveau 1 (premier niveau sur 6, par difficulté croissante). La tâche consiste à compléter un tableau de valeurs après avoir interprété la situation : il s'agit pour l'élève d'identifier un modèle puis de le développer et de l'extrapoler pour remplir la dernière ligne.

---

[109] Selon les notations de Grugeon (1995), *RF* désigne l'ensemble des règles de formation des expressions algébriques mises en jeu. La notation *RF*(E, {*x*, *y*, …}, (), +, -, x, /, ², √) indique que les règles s'appliquent à l'ensemble E (registre d'écriture des nombres), à l'ensemble de lettres désignées par {*x*, *y*, …}. Les paramètres suivants indiquent la présence de parenthèses, puis les opérateurs unaires ou binaires mis en jeu.

[110] De même, *RT* désigne l'ensemble des règles de traitement des expressions formelles propres au registre des écritures algébriques. Les principales règles répertoriées sont les règles de transformation sur les fractions, les décimaux, les puissances, les racines carrées ainsi que les règles de développement, de factorisation (identités remarquables, distributivité) et enfin les règles de résolution d'équations du 1er degré ou s'y ramenant (produit de facteurs du 1er degré).

Dans les pays de l'OCDE, 50% des élèves ont réussi cette question contre 42% en France. Nous trouvons ici une difficulté récurrente des élèves français à généraliser et à anticiper. L'étude française des résultats par la DEPP[111] (MEN, 2007) conclue par la remarque que *ce genre d'exercice, qui valorise la prise d'initiative, n'est pas particulièrement travaillé et encore moins souvent proposé lors d'évaluations individuelles.*

La deuxième question est située au niveau 4 de l'échelle PISA. La tâche consiste ici à interpréter des expressions algébriques et de déterminer une valeur pour laquelle les deux expressions coïncident. Cette tâche nécessite à la fois de faire le lien entre différentes représentations de la situation (verbales, picturales, algébriques) mais aussi de mettre en œuvre une technique pour résoudre une équation et de communiquer un résultat. Dans les pays de l'OCDE y compris en France, environ 25% des élèves ont réussi cette question, considérée à « réponse ouverte » dans les critères de PISA (c'est-à-dire que toute méthode convenablement exposée et donnant la réponse est acceptée : démarche algébrique, numérique par essais successifs ou la continuation des dessins).

Enfin, la troisième question correspond au niveau le plus élevé de l'échelle PISA (niveau 6). La tâche demandée nécessite ici un changement de registre : le registre fonctionnel est convoqué pour comparer la croissance d'une fonction linéaire et d'une fonction polynomiale de degré 2. Des réponses comme *le nombre de pommiers augmente plus rapidement parce qu'il est mis au carré au lieu d'être multiplié par 8* ou encore l'utilisation d'un graphique pour montrer que n^2 devient supérieur à $8n$ [112] donnent le crédit total à cette question. Un crédit partiel est accordé aux élèves ayant fourni une réponse correcte, mais fondée sur des exemples spécifiques ou sur une extension du tableau. Dans les pays de l'OCDE, seuls 8% des élèves obtiennent le crédit total contre 6% des élèves français. Le taux de non-réponse est élevé : plus de 25%, tous pays confondus.

Ce premier exemple montre une certaine adéquation avec les programmes scolaires français de l'époque. Nous avons vu dans la présentation de PISA que 52% des élèves participant à l'enquête sont au lycée. Or, les contenus du programme de 2000 de la classe de seconde (MEN, 1999), en vigueur à l'époque du problème des pommiers, sont en adéquation avec les tâches à accomplir. En particulier, les questions 1 et 2 trouvent leur place dans le domaine *« Fonctions et formules algébriques »*, dans le commentaire précisant : *on s'efforcera de développer, avec des expressions littérales faisant intervenir une seule lettre, deux plus rarement, des stratégies s'appuyant sur l'observation, l'anticipation et l'intelligence du calcul [...]. Des activités liées aux fonctions, aux équations ou aux inéquations mettront en valeur l'information donnée par la forme d'une expression et motiveront la recherche d'une écriture adaptée*. La question 3 peut être traitée par rapport au thème *« Mise en équation ; résolution algébrique, résolution graphique d'équations et inéquations. »,* en utilisant la capacité à *résoudre une équation ou une inéquation se ramenant au premier degré*.

Pour les 40% d'élèves qui sont en classe de troisième, la lecture du programme en vigueur en 2000 (MEN, 1998) montre qu'il est possible de rattacher les deux premières questions de l'exercice des pommiers au commentaire en bandeau de la présentation des *« travaux numériques »,* partie qui comporte à la fois des compétences dans les champs numérique et

[111] Direction de l'évaluation, de la prospective et de la performance

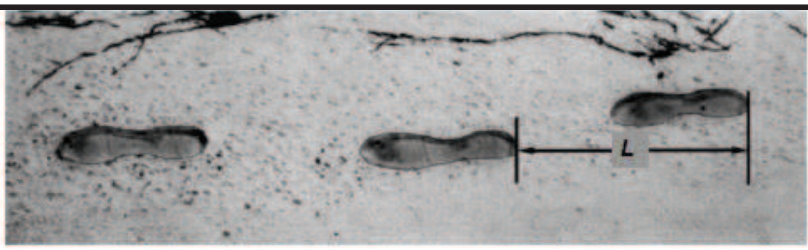
[112] Réponses tirées des exercices libres de diffusion en culture mathématique sur le site MEN : http://www.educ-eval.education.fr/pdf/pisaexos3.pdf

algébrique. Ce commentaire précise : *la résolution de problèmes (issues de la géométrie, de la gestion de données, des autres disciplines, de la vie courante) constitue un objectif de cette partie. Elle nourrit les activités tant dans le domaine numérique que littéral (...). Pour le calcul littéral, un des objectifs à viser est qu'il s'intègre aux moyens d'expression des élèves, à côté de la langue naturelle, de l'emploi des nombres ou des représentations graphiques.* En revanche, la question 3 peut difficilement être abordée par un élève de troisième puisque ni la résolution d'une inéquation produit de deux facteurs du premier degré n'est au programme, ni la notion de croissance ou de décroissance d'une fonction, ni encore l'étude de la fonction « carrée ».

Enfin, pour les 8% d'élèves concernés par l'enquête PISA, les programmes du lycée professionnel, proposent de travailler les mêmes compétences qu'au collège. En effet, l'entête de ces programmes précise que *peu de connaissances nouvelles sont proposées en mathématiques : la plupart d'entre elles ont été vues au collège*. Ces programmes portent essentiellement sur la proportionnalité et la résolution d'équations du premier degré pour les compétences numérico-algébriques (MEN, 2002a)[113]. Comme au collège, la question 3 se révèle hors du champ de ces programmes.

Pour conclure, cet exemple montre que, sous la dénomination PISA de *quantités,* nous trouvons des compétences de différents domaines mathématiques : à travers un exercice basé sur une représentation de type géométrique, avec l'évocation d'un périmètre formé d'arbres, sont explorées des compétences dans les domaines numérique, algébrique, voire fonctionnel.

Second exemple dans le champ « variations et relations » : La marche à pied



L'image montre les traces de pas d'un homme en train de marcher. La longueur de pas L est la distance entre l'arrière de deux traces de pas consécutives.

Pour les hommes, la formule $\frac{n}{L} = 140$ *donne un rapport approximatif entre n et L, où n = nombre de pas par minute, L = longueur de pas en mètres.*

Question A *:*

Si la formule s'applique à la façon de marcher d'Henri et qu'Henri fait 70 pas par minute, quelle est la longueur de pas d'Henri ? Montrez vos calculs.

Question B

Bernard sait que la longueur de son pas est de 0,80 mètre. La formule s'applique à sa façon de marcher. Calculez la vitesse à laquelle marche Bernard en mètre par minute et en kilomètre par heure. Montrez vos calculs.

Figure 39 : Énoncé du problème de la marche à pied (Enquête PISA 2003)

Analysons ce problème selon les composantes de la compétence algébrique de Grugeon (1995, cf. §2.4).

[113] Le programme de la période précédente est similaire.

Composante	Critères	Valeurs des critères
Traitement algébrique	***Objet*** Reproduction de tâches d'ordre numérique	Effectuation d'un calcul numérique et substitution de valeurs numériques (QA-QB)
	Reproduction de tâches formelles non finalisées	Niveau 1 : manipulation formelle d'un calcul algébrique algorithmisé (QA-QB)
	Outil Utilisation de l'outil algébrique pour traduire une situation extra-mathématique	Niveau 0 : la production de la formule n'est pas à la charge de l'élève (QA) Niveau 1 : Production guidée d'une relation numérico-algébrique (QB)
Rapport arithmétique / algèbre	Démarche de résolution	Algébrique (QA-B) /Arithmétique (conversion QB)
	Statut du signe d'égalité	Relation d'équivalence (QA-B) / Annonce de résultat (QB)
	Statut des lettres	Variables / Inconnues
	Objets Statut des objets de l'algèbre	Expressions polynomiale du 1^{er} degré ; rationnelle Procédural
Gestion du registre algébrique	Type de formation	*RF* ($\mathbb{D}$, $\{L, n\}$, $\times$, /)
	Type de traitement	*RT* (fractions, résoudre équation se ramenant au 1^{er} degré)
Articulation	Registres et types de conversion	numérique ; algébrique ; des grandeurs ; pictural (figures) ; langue naturelle
Fonction de l'algèbre	Emploi de l'algèbre	Mathématiser et résoudre une situation extra-mathématique dans un contexte concret peu familier

Tableau 40 : Grille descriptive du problème de la marche à pied selon les composantes de la compétence algébrique de Grugeon

Comparativement à l'exercice précédent, l'analyse de cette grille permet de considérer ce problème comme évaluant des compétences moins diverses sur les objets de l'algèbre. Néanmoins ce problème reste complexe, avec un contexte sans doute moins familier que celui des pommiers, et demandant en particulier pour la question B, une bonne compréhension du registre en langue naturelle et sa conversion dans le domaine numérico-algébrique. De plus, plusieurs étapes sont nécessaires à la résolution de cette question, qui n'est pas guidée. Les résultats publiés dans le dossier de la DEPP (MEN, 2007) situent d'ailleurs ce problème aux niveaux 5-6 de difficulté, donnant au problème le qualificatif de "réponse ouverte construite".

En ce qui concerne la question A, l'objectif est la substitution de valeurs numériques dans une formule donnée puis la résolution d'une équation de la forme $\frac{a}{x} = b$, où a et b sont des valeurs numériques connues. Cette équation présente la difficulté de comporter la notion d'inverse d'une fraction, notion que les élèves français commencent à travailler au niveau de la classe de quatrième. Les auteurs du rapport font remarquer qu'un peu plus de 17 % des élèves français substituent correctement les nombres dans la formule mais aboutissent à une réponse incorrecte ou ne donnent pas de réponse, la difficulté pour eux résidant dans la manipulation formelle algébrique. La réponse correcte donne pour la France un taux de réussite de 43 % par rapport aux 36% des pays de l'OCDE. Le taux de non-réponse est élevé et se situe autour de 21%, tous pays confondus.

Pour la question B, les types de tâches des élèves sont nombreux et de nature différente, comme substituer des nombres dans une formule, effectuer un calcul reposant sur la résolution de l'équation $ax = b$ où a est un nombre en écriture fractionnaire, effectuer un calcul numérique de grandeurs à partir de grandeurs-quotients, et enfin convertir des m/min en km/h. Les résultats indiquent un taux de non-réponse très important (autour de 40 % en moyenne pour tous les pays de l'OCDE), et un taux de réussite faible, 20% des élèves en moyenne pour l'OCDE et 24% pour la France.

L'analyse de cet exercice de la marche à pied vient corroborer les réflexions mentionnées plus haut par Bourny et al (2004) sur le fait que les questions sont rapidement abandonnées par les élèves dès qu'ils doivent faire preuve de réflexion. Relativement aux programmes officiels de l'époque, une autre difficulté peut aussi être évoquée, la notion de *vitesse* n'y apparaît pas comme telle, si ce n'est sous l'appellation de notion de *grandeur-quotient* en classe de quatrième et celle de *grandeur composée* en troisième. La notion de vitesse est traitée à cette époque en sciences physiques. Notons pour conclure que les nouveaux programmes en vigueur en quatrième depuis 2008 mentionnent désormais, dans la rubrique *grandeurs et mesures*, le terme de *vitesse moyenne* comme grandeur quotient usuelle à connaître.

Les deux exemples présentés ci-dessus ont montré que les deux champs *quantité* et *variations et relations* ne coïncident pas entièrement avec les contenus des programmes de mathématiques habituellement enseignés en France aux élèves de 15 ans, en particulier en algèbre. Une baisse des résultats des élèves français ayant été relevée entre 2003 et 2006, le rapport Bourny et al (2008) rappelle que *cette évaluation n'est pas une évaluation disciplinaire de mathématiques, mais comme son nom l'indique, de culture mathématique. Elle ne peut donc pas être interprétée en termes purement disciplinaires. L'aspect essentiel qui ressort de cette comparaison est la baisse générale des taux de réussite aux items de culture mathématique de PISA et l'augmentation des effectifs des bas niveaux définis par cette évaluation.*

Nous terminons par cette citation de Bodin (2009) qui exprime la difficulté d'évaluer les résultats de l'enquête PISA par rapport au paradigme de l'institution EN en France :

> PISA a une approche utilitaire des mathématiques et se demande dans quelles classes de problèmes les compétences mathématiques pourront s'utiliser.

Cette dernière phrase vient corroborer la difficulté d'interpréter les résultats sur les savoirs des élèves dans le domaine algébrique et nous amène à considérer d'autres sources.

8.2 Exploration des enquêtes nationales

Nous avons également tenté d'exploiter les ressources du site d'évaluation de l'Éducation Nationale[114] sur les résultats du Brevet des Collèges au cours du temps ainsi que les résultats des évaluations d'entrée en Seconde qui ont eu lieu durant les années 1992 à 2001[115].

En ce qui concerne la première recherche sur les résultats du Brevet des collèges, une étude a été réalisée (Salines et al, 2001) pour comparer les résultats des élèves de fin de troisième par rapport à leurs performances au Brevet entre 1984 et 1999 mais aucun résultat détaillé n'est

[114] Adresse du site : http://educ-eval.education.fr/

[115] Adresse du site où l'on trouve les évaluations de 2000 et 2001 : http://cisad.adc.education.fr/eval/pages-00/archives.htm

donné concernant les compétences acquises en mathématiques, les auteurs précisant que trop peu d'items sont communs d'une année sur l'autre pour en tirer des résultats comparatifs significatifs.

Nous avons également consulté le rapport *Repères et références statistiques sur les enseignements*[116] (RERS, 2009) dans lequel il est écrit que la proportion des élèves de troisième qui maîtrisent les compétences de base en mathématiques (mars 2008) est de 90% sur un échantillon représentatif de France métropolitaine et DOM, public et privé confondus. Cette étude a été réalisée pour la DEPP[117] entre 2005 et 2007. Les compétences et capacités évaluées sont les suivantes :

> **Organisation et gestion de données, fonctions**
> Utiliser une représentation graphique dans des cas simples (lecture des coordonnées d'un point, lien avec un tableau numérique dans une situation de proportionnalité, détermination des données d'une série statistique) ; calculer la moyenne d'une série statistique ; traiter des problèmes simples de pourcentages.
> **Nombres et calculs**
> Comparer des nombres décimaux relatifs écrits sous forme décimale ; utiliser les opérations élémentaires dans une situation concrète
> **Grandeurs et mesures**
> Effectuer pour des grandeurs (durée, longueur, contenance) un changement d'unités de mesure (h min en min, km en m, L en cL) ; calculer le périmètre d'un triangle dont les longueurs des côtés sont données ; calculer l'aire d'un carré, d'un rectangle dont les longueurs des côtés sont données dans la même unité
> **Géométrie**
> Identifier des figures simples à partir d'une figure codée et en utiliser les éléments caractéristiques (triangle équilatéral, cercle, rectangle) ; écrire et d'utiliser le théorème de Thalès dans un cas simple ; reconnaître un patron de cube ou de parallélépipède rectangle

Nous remarquons que, si la géométrie est présente, avec néanmoins peu de recouvrement du programme de troisième, il y a une absence totale de compétences algébriques, si ce n'est, peut-être l'utilisation de lettres-étiquettes dans le domaine *Grandeurs et mesures* pour le calcul de périmètres et d'aires de figures simples. Cette étude ne permet donc pas d'évaluer les acquis dans les domaines algébriques.

Enfin, autant les résultats sont analysés de façon fine pour les élèves de primaire ou de sixième[118], en revanche aucune publication n'est mise en ligne concernant les résultats des évaluations de début de classe de seconde générale et technologique. Nous pouvons d'ailleurs lire dans le livret de 2000 destiné aux professeurs que *les comparaisons avec les résultats des années précédentes ne sont absolument pas pertinentes puisque les outils d'évaluation utilisés sont différents d'une année à l'autre.*

[116] Adresse du site : http://www.education.gouv.fr/cid21641/reperes-et-references-statistiques.html
[117] Direction de l'évaluation, de la prospective et de la performance
[118] Adresse du site : idem adresse précédente

8.3 Test diagnostique de fin de seconde

8.3.1 Présentation

Afin de préciser les résultats généraux des enquêtes nationales et internationales mentionnées ci-dessus, somme toute, peu probants, nous avons réalisé un test sur une population d'élèves de seconde de lycée général, comme indiqué en section 6.1. Ces élèves proviennent d'un même lycée, le lycée Georges Pompidou de la proche banlieue de Montpellier (cf. §6.3.1) et ce lycée est également celui où est proposée par la suite *l'expérimentation didactique spécifique* sur la reprise de l'algèbre par l'introduction de l'algorithmique.
Le test a été réalisé sur un échantillon de 160 élèves de seconde en juin 2010. Les six classes de seconde testées ont le profil suivant :

	Classe n°1	Classe n°2	Classe n°3	Classe n°4	Classe n°5	Classe n°6
Nombre d'élèves	35	35	27	35	34	35
Nombre de présents au test	28	22	27	26	25	32
Profil de la classe	50% MPI 50% SES	50% MPI 50% SES	LV3	50% MPI 50% SES	50% IGC 50% SES	57% SES 43% OPS
Moyenne annuelle	10,9	11,2	8,9	10,2	9,3	10,6
Écart-type	faible	3	élevé	3	élevé	élevé
Niveau (indicateur donnée par enseignant)	moyen	bon	mauvais	assez bon	Moyen hétérogène	OPS : très bon SES : moyen

Figure 41 : Profil des classes de seconde ayant participé au test diagnostique

Les profils de classe indiqués donnent les options suivies par les élèves. Les sigles signifient : MPI, mesures physiques et informatique ; SES, sciences économiques et sociales ; LV3, trois langues vivantes ; IGC, informatique de gestion et de communication ; OPS, option sciences[119].
Le test tel qu'il a été proposé aux élèves ainsi que les consignes de passation données aux professeurs figurent en annexes A1 et A2. Il est prévu pour une durée de 50 minutes, est individuel et la calculatrice est autorisée.
Il comporte deux parties, une partie algébrique et une partie géométrique. La fonction du découpage en ces deux parties est de faire ressortir vis-à-vis des élèves une différenciation du type de tâches proposées en tâches « relevant du domaine algébrique » et des tâches « relevant du domaine géométrique », dans le but de rester dans le contrat didactique habituel de l'élève. Cette présentation a pour objectif de lui permettre d'entrer dans la recherche des exercices selon ses repères habituels, sans se sentir « piégé », avec un découpage qu'il a l'habitude de rencontrer généralement au cours de l'année des différentes notions, qui lui sont présentées en « chapitres ». En fait, l'objectif pour le chercheur est de mettre l'élève en situation de résoudre des problèmes algébriques de deux façons. Tout d'abord l'algèbre est

[119] Ces options, appelées « enseignements de détermination » ont été supprimées à la rentrée scolaire de 2010 pour laisser la place aux enseignements d'exploration.

essentiellement travaillée en tant qu'*objet*, au sens de Douady, dans un cadre algébrique où des expressions sont manipulées, où elles sont développées, factorisées, reconnues comme somme, produit, quotient et où sont résolues quelques équations. Dans cette première partie, l'algèbre fonctionne pour elle-même et nous cherchons à évaluer directement les capacités des élèves sur des compétences algébriques formelles et décontextualisées. Dans la seconde partie, nous utilisons des problèmes géométriques afin d'évaluer la capacité de l'élève à utiliser ses connaissances algébriques en tant qu'*outil* (Douady, 1986). Certes, dans le cadre géométrique présenté, une démonstration déductive est nécessaire à la résolution des exercices proposés, mais cette démonstration ne peut être menée à son terme sans utiliser un passage par la résolution d'équations algébriques issues de la situation. Différents registres, au sens de Duval (2002) apparaissent alors : registre des figures géométriques codées, registre algébrique, registre des écritures en langue naturelle et symbolique, etc. Ce qui sera plus particulièrement analysé dans les exercices géométriques de cette seconde partie est la capacité de l'élève à utiliser et mettre en œuvre ses capacités en algèbre pour mener à bien son raisonnement et faire aboutir ses calculs. Les compétences algébriques sont ici contextualisées.

Le choix des compétences algébriques a été fait à la fois en fonction du programme officiel en cours de seconde générale mais des programmes du collège, ce qui permet d'évaluer les compétences acquises, non acquises ou en cours d'acquisition sur un panel de 160 élèves de fin de seconde générale d'un lycée français, classé dans la moyenne nationale. La section suivante détaille l'organisation mathématique des compétences algébriques analysées selon Chevallard (cf. §2.2.2) et en tenant compte des programmes institutionnels. La mise en regard des divers types de tâches donnés avec les compétences exigibles des programmes et des résultats effectivement obtenus par les élèves testés permet de mesurer la distance entre le *savoir enseigné* et le *savoir appris*. (cf. §1.2.1). L'analyse a priori par exercice est complétée par la grille listant les *composantes de la compétence algébrique* définies par Grugeon (1995). Ce complément permet de croiser une analyse anthropologique par types de tâches avec une analyse plus particulière des compétences du domaine algébrique. Reprenant les grandes lignes des composantes définies en section 2.4, donnons ici les points qui sont plus précisément pris en compte :

- la considération du *traitement algébrique* comme *objet* ou *outil* (au sens de Douady) et le type de traitement selon les types de tâches associées ;
- la détermination du *rapport arithmétique / algèbre* à l'aide de critères comme le type de démarche, le statut de l'égalité, celui des lettres utilisées ainsi que les objets de l'algèbre en présence et leur statut ;
- le type de *gestion* employé *dans le registre algébrique*, c'est-à-dire quelles règles de formation (comme l'ensemble choisi pour les nombres déterminés des expressions algébriques, la présence ou non de parenthèses, l'utilisation d'opérateurs unaires ou binaires) et quelles règles de traitement (développement, factorisation, règles sur les fractions, racines carrées, résolutions d'équations simples) sont utilisées ;
- l'identification des *registres* en présence et des *articulations* éventuelles *avec d'autres registres* ;
- la *fonction de l'algèbre*, c'est-à-dire pointer les différentes activités algébriques (comme faire du calcul formel dans un cadre algébrique, étudier algébriquement des fonctions,

résoudre des problèmes dans un cadre – géométrique, numérique – autre que le cadre algébrique, …).
Notons que se trouve en annexe A3 un tableau par exercice résumant le type de réponses attendues ainsi que le codage correspondant à chaque item, ces items ayant été déterminés à l'aide des analyses a priori effectuées ici.

8.3.2 Analyse a priori du test diagnostique

Nous présentons l'analyse des six exercices proposés dans le test (cf. annexe A1 pour la présentation du test, tel qu'il est donné aux élèves) puis un regroupement des items proposés selon le type de tâches de l'organisation mathématique de Chevallard et selon les composantes de la compétence algébrique de Grugeon.

8.3.1.1 Premier exercice

Dans une classe de seconde a été donné l'exercice suivant : « Développer et réduire l'expression littérale : $(2x-5)^2 - 7(3x+5)$ »
Voici les résultats trouvés par trois élèves :

Marc : $4x^2 - x + 60$
Sophie : $4x^2 - 41x - 10$
Nadine : $4x^2 - 21x - 210$

Le tableau ci-dessous donne les résultats des valeurs prises par chacune des 4 expressions précédentes lorsqu'on choisit x = 10, pour la colonne 3, puis lorsqu'on choisit x = 2, pour la colonne 4.

Expressions	***x***	***x = 10***	***x = 2***
Expression du texte	$(2x-5)^2 - 7(3x+5)$	- 20	- 76
Expression trouvée par Marc	$4x^2 - x + 60$	450	74
Expression trouvée par Sophie	$4x^2 - 41x - 10$	-20	- 76
Expression trouvée par Nadine	$4x^2 - 21x - 210$	-20	- 236

1) *Peut-on déduire des quatre résultats calculés pour x = 10 que l'un des trois élèves s'est trompé ? Si oui, lequel et en est-on sûr ?* ***(item 1)***
2) *Peut-on déduire des quatre résultats calculés pour x = 2 qu'un autre des trois élèves s'est trompé ? Si oui, lequel et en est-on sûr ?* ***(item 2)***
3) *Prouver que l'élève qui reste a trouvé la bonne réponse.* ***(items 3 et 4)***

Figure 42 : Énoncé de l'exercice 1 du test diagnostique

Les objectifs de ce premier exercice[120] sont de mettre en relation des expressions littérales et les valeurs qu'elles prennent pour certains choix de la variable ainsi que d'exploiter des résultats pour tester des identités et enfin d'utiliser un développement pour prouver une identité. Ces questions permettent de mettre en évidence la représentation qu'ont les élèves des égalités littérales. Si leur statut d'identité est bien intégré, c'est à dire si les élèves les comprennent bien comme des égalités vraies pour toute valeur de *x*, alors le recours à un raisonnement par usage de contre-exemple aux questions 1 et 2 et par usage d'un calcul littéral à la question 3 prend tout son sens. Une observation de la nécessité du passage du cadre arithmétique au cadre algébrique pourra être faite selon les réponses obtenues à la question 3.

[120] Cet exercice est tiré de la banque d´outils d´aide à l´évaluation diagnostique du MEN sur le site : http://www.banqoutils.education.gouv.fr/fic/C3MIGRT07.pdf.

Dès la classe de cinquième, nous pouvons lire dans les programmes (MEN, 2008a) que l'élève doit être capable de *tester si une égalité comportant un ou deux nombres indéterminés est vraie lorsqu'on leur attribue des valeurs numériques.* Ici, il n'est pas demandé à l'élève d'effectuer les calculs présentés dans le tableau (pour les deux valeurs numériques 10 et 2) mais celui-ci doit être capable de les interpréter comme un *calcul de la valeur d'une expression littérale en donnant aux variables des valeurs numériques.* (MEN, 2008a), capacité enseignée au niveau de la classe de quatrième. C'est également en classe de quatrième que l'on trouve la capacité « *réduire une expression littérale à une variable, du type : $3x – (4x – 2)$, $2x^2 – 3x + x^2$…* », capacité qui sera nécessaire pour répondre à la question 3, ainsi que la capacité « *connaître les identités remarquables* et *les utiliser dans les deux sens sur des exemples numériques ou littéraux simples* » que l'on trouve dans le programme de troisième.

Cet exercice pourrait donc paraître au premier abord faire partie du *savoir appris* de l'élève et *le temps de l'élève* pourrait sembler révolu. Cependant, cet exercice reste difficile pour un élève moyen de fin de seconde puisqu'il repose sur des connaissances des règles de logique avec lesquels il est peu familier et qui font partie de l'apprentissage de l'année de seconde. On peut en effet lire dans le programme en vigueur que l'élève doit être entrainé, sur des exemples, *à utiliser à bon escient les quantificateurs universel, existentiel, à repérer les quantifications implicites dans certaines propositions […]* et *à utiliser un contre-exemple pour infirmer une proposition universelle* (MEN, 2009a).

Si nous déclinons l'organisation praxéologique au sens de Chevallard (1998) pour ce premier exercice, nous obtenons l'analyse suivante, en étudiant les questions 1 et 2 d'une part, puis la question 3 d'autre part.

Type de tâches	**Technique**	**Éléments technologiques**	**Éléments théoriques** [121]
Démontrer la non-équivalence de deux expressions algébriques (questions 1 et 2)	- Choisir une valeur numérique et évaluer les deux expressions en substituant à la lettre indéterminée cette valeur. - Si les deux expressions ne donnent pas la même valeur numérique, elles ne sont pas équivalentes.	Deux expressions A et B sont équivalentes ssi : $\forall x \in \mathbb{R}\ A(x) = B(x)$ Pour montrer qu'une proposition mathématique est fausse, il suffit d'exhiber un contre-exemple. $\exists x \in \mathbb{R} / A(x) \neq B(x)$	Propriétés de l'algèbre des polynômes à coefficients réels $\mathbb{R}[X]$.
Démontrer l'équivalence de deux expressions algébriques $A(x)$ et $B(x)$ (question 3)	Transformer l'une, en fonction de x, et l'écrire de manière semblable à l'autre. Utiliser les règles de développement d'une expression littérale polynomiale pour obtenir une somme de monômes (en utilisant la distributivité ou des identités remarquables). Utiliser les règles de réduction d'une expression littérale du second degré pour obtenir une somme de monômes de degré différent.	Deux expressions littérales sont équivalentes si elles sont égales pour tout nombre réel. Règles de distributivité et connaissance des identités remarquables sur des expressions algébriques réelles.	

Tableau 43 : Analyse de l'OM de l'exercice 1

[121] Ces éléments théoriques ne sont pas à la portée de l'élève de seconde.

Afin de compléter cette organisation praxéologique par une analyse propre au domaine de l'algèbre, nous proposons également l'analyse de cet exercice en utilisant les *composantes de la compétence algébrique* définies par Grugeon (1995, Cf. § 2.4). Le tableau qui suit donne par composante, les critères permettant de préciser ces composantes et les valeurs spécifiant ces critères, en lien avec les tâches à effectuer dans l'exercice.

Composante d'analyse	**Critères**	**Valeurs des critères**
Traitement algébrique	***Objet*** Reproduction de tâches d'ordre numérique	Substitution numérique (Q1-Q2)
	Reproduction de tâches formelles non finalisées	Niveau 1 : calcul algorithmisé (développement, Q3) Niveau 2 : interpréter, contrôler (Q3)
	Outil Interprétation d'une expression algébrique dans le cadre algébrique	Égalité de deux expressions algébriques (Q3)
Rapport arithmétique / algèbre	Démarche de résolution	Algébrique (Q3)
	Statut du signe d'égalité	Annonce de résultat (Q1-Q2) / Relation d'équivalence (Q3)
	Statut des lettres	Variables / Indéterminées
	Objets Statut des objets de l'algèbre	Expression polynomiale du 2^{nd} degré Procédural
Gestion du registre algébrique	Type de formation	*RF* ($\mathbb{Z}$, x, (), +, -, ×, /, ²)
	Type de traitement	*RT* (développement)
Articulation entre registre algébrique et d'autres	Registres et types de conversion	Registre numérique ; registre algébrique Conversion du langage algébrique vers langage naturel (Q3)
Fonction de l'algèbre	Emploi de l'algèbre	Calcul formel dans le cadre algébrique

Tableau 44 : Grille descriptive de l'exercice 1 selon les composantes de la compétence algébrique de Grugeon

Pour la constitution de ce tableau, notons que cet exercice ne fait pas appel à une situation mathématique extérieure à l'algèbre. Ici, la fonction de l'algèbre est d'effectuer des calculs formels dans le cadre algébrique et nous pouvons considérer que le traitement algébrique fonctionne à la fois comme *objet* et comme *outil*. Grugeon effectue cette distinction dans son travail de thèse (1995, p.51 à 55) lorsqu'elle définit la composante « traitement algébrique ». Explicitons cette dualité.

L'algèbre est *objet* pour des tâches qui se décomposent, d'une part, en tâches que Grugeon (ibid.) qualifie de *techniques*, situées *dans le registre algébrique ou dans l'articulation du registre algébrique vers le registre numérique, mettant en jeu des capacités d'ordre syntaxique ou sémantique* et d'autre part en tâches de *reconnaissance*, *mettant en jeu différents modes d'activité interprétative*. Ces tâches se décomposent en deux sous-catégories :

- la *reproduction de tâches d'ordre numérique*. Par exemple, pour l'exercice 1, il s'agit de la substitution des valeurs 10 et 2 à la lettre x et à l'effectuation des calculs numériques correspondants. Plus exactement ici, les calculs ont été effectués et l'élève doit comprendre ici que les résultats fournis sont les résultats de ces substitutions.

- la *reproduction de tâches formelles non formalisées* de niveau 1 et 2. Grugeon (ibid.) définit le niveau 1 comme *la manipulation formelle algébrique* qui *fait appel à un travail algorithmisé d'applications directes de savoir-faire de base* (c'est-à-dire développer, factoriser, résoudre « directement « des équations simples du 1er ou du 2nd degré). Pour l'exercice 1, le développement de l'expression algébrique donnée dans l'énoncé satisfait à ce niveau. Le niveau 2 correspond à *une manipulation formelle algébrique* qui *met en jeu des calculs soumis à des contraintes, à un raisonnement stratégique ou à un implicite que l'on doit contrôler.* Ainsi pour l'exercice 1, la prise de décision par l'élève de choisir de développer l'expression du texte pour répondre à la question 3 concorde avec ce niveau.

De plus, Grugeon (ibid.) évoque l'algèbre également en tant qu'*outil*, pour *l'interprétation d'une expression algébrique en liaison avec un cadre ou un contexte.* Il s'agit de tâches d'ordre algébrique *mettant en jeu un travail d'interprétation*, comme des situations de reconnaissance d'expressions, *soit pour associer des expressions dans le registre algébrique ou des registres différents, soit pour rechercher la valeur de vérité dans le cadre algébrique.* C'est le cas dans l'exercice 1 qui demande, en question 3, de prouver l'équivalence de deux expressions algébriques.

Nous avons ainsi dans cet exercice un exemple où le traitement algébrique fonctionne à la fois comme objet et comme outil, au sens de Grugeon.

Les analyses de l'exercice selon l'organisation praxéologique de Chevallard et selon les composantes de la compétence algébrique de Grugeon permettent une grille de lecture complémentaire. Le premier tableau (cf. tableau 43) met en évidence les savoir-faire à constituer pour les tâches algébriques proposées ainsi que les savoirs sous-jacents nécessaires à la compréhension des techniques (comme l'équivalence de deux expressions algébriques). Le second (cf. tableau 44) ajoute des éléments spécifiques de l'algèbre, comme ici la différenciation entre la démarche arithmétique et la démarche algébrique pour répondre à la question 3 ou encore précise le statut des objets algébriques en jeu, par exemple le statut du signe d'égalité dans les différentes questions.

8.3.1.2 Deuxième exercice

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les deux équations suivantes :
Équation 1 : $2(x - 1) + 5x = 3x + 4 - 2(x + 1)$ ***(item 5)***
Équation 2 : $4(2x + 5) - 3x = x - 4 + 2(x + 12)$ ***(item 6)***

Figure 45 : Énoncé de l'exercice 2 du test diagnostique

L'objectif de ce deuxième exercice est de vérifier si la résolution d'équations du premier degré ayant une solution unique est acquise. Ces deux équations sont du niveau de fin de collège français. Elles se réduisent à la forme $ax+ b = cx + d$, avec l'inconnue présente dans les deux membres de l'équation. Nous avons vu dans le cadre théorique (cf. §3) que ce cas requiert l'utilisation d'un cadre algébrique et ne peut être résolu par chaînage arrière dans un cadre arithmétique. Dans le premier cas, la solution obtenue est un rationnel non décimal et dans le second cas, la solution est le nombre zéro. En fin de seconde, il n'est pas rare de rencontrer comme type de réponse à une équation du type $2x = 0$, les réponses erronées suivantes : 2 ; ½ ; -2 ou encore « pas de solution ». Les trois premières réponses relèvent

d'une confusion entre opposé et inverse et le dernier cas provient de la sémantique : l'élève confond « l'équation a 0 solution » avec « l'équation a pour solution 0 ».
Au niveau des programmes institutionnels, les différentes capacités requises pour résoudre ces deux équations se situent en classe de quatrième où l'on peut lire « *Mettre en équation et résoudre un problème conduisant à une équation du premier degré à une inconnue* » ainsi que « *réduire une expression littérale à une variable, du type : 3x – (4x – 2)* » (MEN, 2008a).
Analysons la praxéologie de cet exercice.

Type de tâches	**Techniques**	**Éléments technologiques**	**Éléments théoriques** (non connus des élèves)
Résoudre des équations du premier degré dans l'ensemble des réels.	Utiliser les règles de développement d'une expression littérale polynomiale pour obtenir une somme de monômes en utilisant la distributivité et les règles de multiplication et d'addition sur les réels. Transposer les termes comportant l'inconnue x dans un membre et les valeurs numériques dans l'autre pour se ramener à une équation du type : $ax = b$. Diviser chaque membre par a (s'il est non nul) pour obtenir la valeur de l'inconnue : b/a	Priorités opératoires et règles de développement des expressions algébriques (distributivité). Traitement formel de résolution des équations du premier degré (règles de transformations des équations). Deux équations équivalentes ont les mêmes solutions dans $\mathbb{R}$.	Règles de calculs dans $\mathbb{R}[X]$.

Tableau 46 : Analyse de l'OM de l'exercice 2

Suit le découpage de l'exercice 2 selon les composantes de la compétence algébrique de Grugeon (1995).

Composante d'analyse	**Critères**	**Valeurs des critères**
Traitement algébrique	***Objet*** Reproduction de tâches formelles non finalisées	Niveau 1 : résolution d'une équation du 1er degré
Rapport arithmétique / algèbre	Démarche de résolution	Algébrique
	Statut du signe d'égalité	Relation d'équivalence
	Statut des lettres	Inconnues
	Objets Statut des objets de l'algèbre	Équations polynomiales du 1er degré Structural / Procédural
Gestion du registre algébrique	Type de formation	*RF* ($\mathbb{Z}$, x, (), +, -, ×)
	Type de traitement	*RT* (développement, équations 1er degré)
Articulation entre registre algébrique et d'autres	Registres et types de conversion	Registre algébrique Pas de conversion entre registres
Fonction de l'algèbre	Emploi de l'algèbre	Calcul formel dans le cadre algébrique

Tableau 47 : Grille descriptive de l'exercice 2 selon les composantes de la compétence algébrique de Grugeon

Les tableaux 46 et 47 permettent d'analyser que cet exercice ne demande pas une grande diversité de compétences algébriques à mettre en œuvre, c'est un exercice que l'on peut qualifier d'application directe des techniques de résolution des équations du premier degré. Il ne comporte pas de conversion de registres, pas de changement de cadres.

8.3.1.3 Troisième exercice

Rappel :

x^2 est le produit de deux facteurs : x et x.

$x - 9$ est la somme de deux termes : x et (-9).

$\frac{3}{x}$ est le quotient du numérateur 3 par le dénominateur x.

$x\,(x + 9)$ est le produit de deux facteurs : x et $x + 9$.

$x^2 + x\,(x + 9)$ est la somme de deux termes : x^2 et $x\,(x + 9)$.

$\frac{x-1}{x+3}$ est le quotient du numérateur $x - 1$ par le dénominateur $x + 3$.

1) *Parmi les expressions suivantes, entourer celles qui sont écrites sous la forme d'une somme.* ***(item 7)***

$3x + 4$ $x\,(x+1)$ $(x+3) - 4$ $x + (x-1)(x+2)$ $(2x-1)^2$ $2x\,(x-3) + 3(x-1)$

2) *Parmi les expressions suivantes, entourer celles qui sont écrites sous la forme d'un produit.* ***(item 8)***

$3x + 4$ $x\,(x+1)$ $(x+3) - 4$ $x + (x-1)(x+2)$ $(2x-1)^2$ $2x\,(x-3) + 3(x-1)$

3) a. *Quelle est la forme de l'expression suivante : $\frac{4}{x+3} - \frac{3}{x}$?* ***(item 9)***

b. *Écrire cette expression sous la forme d'un quotient.* ***(item 10)***

Figure 48 : Énoncé de l'exercice 3 du test diagnostique

L'objectif de cet exercice[122] est d'évaluer la capacité à reconnaître la forme d'une expression algébrique « somme », « produit » ou « quotient » et la capacité à transformer une somme algébrique en quotient de deux expressions algébriques. Il s'agit dans cet exercice de travailler sur l'aspect structural des formes algébriques et les résultats exposés dans le chapitre 2 consacré à la didactique de l'algèbre (cf. §2) ont montré que la prise en compte de l'aspect *structural* d'une expression est moins « visible » pour les élèves que l'aspect *procédural*. Les reconnaissances de sommes sont en général les plus simples pour les élèves de seconde. Les principales difficultés de reconnaissance devraient être celles d'un produit pour l'expression $(2x - 1)^2$ où l'équivalence avec l'écriture $(2\,x - 1)(2\,x - 1)$ n'est pas toujours perçue, les règles sur les puissances restant en général mal assimilées par les élèves. La réduction sous forme d'un seul quotient de la différence de deux quotients (question 3b) peut également être un obstacle pour l'élève qui voit pour la première année de son cursus mathématique des expressions comportant une indéterminée au dénominateur. En effet, la fonction inverse est traitée au programme de seconde et n'est pas étudiée au collège, où les élèves n'ont fréquenté que des expressions du type $\frac{x}{3}$ ou $\frac{x+3}{4}$.

Nous remarquons que ce type de tâches de reconnaissance d'une expression algébrique comme somme, produit ou quotient n'apparaît pas dans les programmes officiels du collège. La seule capacité relevée à ce sujet se situe dans le programme de troisième où l'on peut lire que l'élève doit savoir *résoudre une équation mise sous la forme A(x).B(x) =0, où A(x) et B(x) sont deux expressions du premier degré de la même variable x* (MEN, 2008a). Mais le

[122] Cet exercice est inspiré de l'exercice 6 de l'évaluation de mathématiques à l'entrée en seconde de septembre 2000. Voir le site : http://cisad.adc.education.fr/eval/pages-00/materiel/seconde/default2nde.htm

travail de reconnaissance d'une telle forme n'est pas évoqué. En revanche, ce type de tâches apparaît – en filigrane – au niveau de la classe de seconde : *Identifier la forme la plus adéquate (développée, factorisée) d'une expression en vue de la résolution du problème donné (...) Développer, factoriser des expressions polynomiales simples ; transformer des expressions rationnelles simples.* (MEN, 20009a).
Suit l'analyse praxéologique de ce troisième exercice.

Type de tâches	**Techniques**	**Éléments technologiques**	**Éléments théoriques**
Reconnaître des formes algébriques (questions 1 et 2 et 3a)	Repérer si l'expression proposée est composée de termes ou de facteurs : - s'il y a des parenthèses et si un signe « moins » ou « plus » est à l'extérieur des parenthèses, l'expression est une somme, sinon c'est un produit - s'il n'y a pas de parenthèses et si l'expression comporte un signe « moins » ou « plus », c'est une somme (ex : $3x + 4$)	Priorités opératoires et règles de calcul sur les réels.	Propriétés de l'algèbre des polynômes à coefficients réels $\mathbb{R}[X]$.
Réduire une expression algébrique rationnelle (question 3b)	Pour écrire $\frac{a}{b} - \frac{c}{d}$ sous la forme d'un quotient, on multiplie d par a et c par b pour obtenir le dénominateur commun : bd. On obtient une écriture sous la forme d'un quotient : $\frac{ad-bc}{bd}$	Règles de réduction au même dénominateur de deux expressions de dénominateur différent, dont l'un n'est pas un multiple de l'autre.	Structure algébrique du corps $\mathbb{R}$ (X) des fractions rationnelles

Tableau 49: Analyse de l'OM de l'exercice 3

Suit le découpage de l'exercice 3 selon les composantes de la compétence algébrique de Grugeon (1995).

Composante d'analyse	**Critères**	**Valeurs des critères**
Traitement algébrique	***Outil*** Interprétation d'une expression algébrique Reproduction de tâches formelles non finalisées	 Reconnaissance d'expressions (Q1-Q2-Q3a) Transformation d'écriture (Niveau 2) (Q3b)
Rapport arithmétique / algèbre	Démarche de résolution	Algébrique
	Statut du signe d'égalité	Relation d'équivalence (Q3b)
	Statut des lettres	Indéterminées
	Objets Statut des objets de l'algèbre	Expressions polynomiales de degré 1 et 2 ; expressions rationnelles Structural (Q1-Q2-Q3a) / Procédural (Q3b)
Gestion du registre algébrique	Type de formation	*RF* ($\mathbb{Z}$, x, (), +, -, x, /, ²)
	Type de traitement	*RT* (règles sur fractions, développement)
Articulation registres	Type de conversion	Registre algébrique Registre du langage naturel
Fonction de l'algèbre	Emploi de l'algèbre	Calcul formel dans le cadre algébrique

Tableau 50: Grille descriptive de l'exercice 3 selon les composantes de la compétence algébrique de Grugeon

Les caractéristiques des composantes de la compétence algébrique font ressortir un exercice situé entièrement dans le cadre algébrique où prédomine l'aspect structural des expressions algébriques. L'analyse praxéologique met l'accent, quant à elle, sur les techniques mises en œuvre pour reconnaître les différentes formes d'expressions algébriques et les règles de priorités opératoires, tant dans le domaine algébrique que numérique.

8.3.1.4 Quatrième exercice

On considère, pour tout x réel, l'expression $A(x) = (3x + 1)^2 - 4$
1)** Développer et réduire A(x). **(item 11)
2)** Reprendre l'expression initiale et factoriser A(x). **(item 12)
***3)** Compléter le tableau ci-dessous, en suivant les consignes suivantes :*
Pour chaque ligne, vous devez choisir la forme de A(x) qui vous permet de faire le travail demandé le plus simplement possible, et effectuer le calcul dans la colonne correspondante.
Mettre une croix dans les deux autres colonnes.

Travail à faire	***Forme initiale** $A(x) = (3x + 1)^2 - 4$*	***Forme développée***	***Forme factorisée***
3.a.** Calculer $A(-\frac{1}{3})$ **(items 13 et 14)			
3.b.** Calculer $A(\sqrt{2})$ **(items 15)** On donnera le résultat sous la forme $a + b\sqrt{2}$ où a et b sont des entiers. **(item 16)			
3.c.** Résoudre $A(x) = 0$ **(items 17 et 18)			

Figure 51 : Énoncé de l'exercice 4 du test diagnostique

L'objectif principal de cet exercice[123] est l'identification de la forme la plus adéquate (développée, factorisée) d'une expression en vue de la résolution du problème donné. C'est un item donné tel quel dans les programmes de seconde de 2009 (MEN, 2009a) ainsi que d*évelopper, factoriser des expressions polynomiales simples* et *résoudre une équation se ramenant au premier degré*. Cet exercice a également pour objectif d'évaluer la capacité des élèves à réaliser, dans le domaine numérique, des calculs sur des nombres rationnels et irrationnels à partir d'expressions algébriques et à résoudre des équations en utilisant l'outil algébrique. Si la troisième question relève plus spécifiquement du programme de seconde, les deux premières peuvent être traitées au niveau de la classe de troisième, qui est l'année de l'apprentissage du développement et de la factorisation des identités remarquables (MEN, 2008a). Précisons que, prises séparément, les trois parties de la question 3 ont un contenu mathématique qui relève des classes antérieures, comme le *calcul de la valeur d'une expression littérale en donnant aux variables des valeurs numériques,* initié en classe de quatrième et les *calculs élémentaires sur les radicaux* du programme de troisième. La troisième partie de la question 3 fait également partie du programme de troisième : *résoudre une équation mise sous la forme A(x).B(x)=0, où A(x) et B(x) sont deux expressions du premier degré de la même variable x.* (MEN, 2008a). La principale difficulté ici réside donc dans le choix à opérer de la forme de l'expression algébrique adéquate pour répondre aux questions et donc à comprendre pourquoi tel ou tel choix est plus pertinent qu'un autre.

[123] Cet exercice est tiré d'un test de 2007 proposé en classe de seconde au lycée Daudet de Nîmes.

Nous proposons l'analyse praxéologique de ce quatrième exercice.

<table>
<tr><th>Type de tâches</th><th>Techniques</th><th>Éléments technologiques</th><th>Éléments théoriques</th></tr>
<tr><td>Développer une expression algébrique comportant une identité remarquable.
(question 1)</td><td>Reconnaissance puis application de la formule
$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$
en substituant $3x$ à a et 1 à b
Ou : écriture de $(3x + 1)^2$ sous la forme $(3x + 1)(3x + 1)$ et application de la double distributivité</td><td>Priorités opératoires et règles de développement des expressions algébriques (distributivité).
Formule :
$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$</td><td rowspan="5">Propriétés de l'algèbre des polynômes à coefficients réels $\mathbb{R}[X]$.

Structure algébrique du corps des réels.</td></tr>
<tr><td>Réduire une expression polynomiale.
(question 1)</td><td>Ajouter entre eux les termes comportant le même degré de l'indéterminée (x ou x^2 ici), et d'autre part, ajouter entre elles les valeurs numériques.
Ordonner le résultat suivant les puissances de x</td><td>Règles de calcul sur les expressions algébriques et priorités opératoires.
Différences de signification d'écritures comme x et x^2.</td></tr>
<tr><td>Factoriser une expression algébrique.
(question 2)</td><td>Reconnaissance puis application de la formule :
$a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$
en substituant $3x + 1$ à a et 2 à b</td><td>Priorités opératoires et règles de développement des expressions algébriques (distributivité).
Formule :
$a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$</td></tr>
<tr><td>Evaluer une expression algébrique (questions 3a et 3b)</td><td>- Substituer la lettre x par la valeur numérique donnée
- Utiliser les règles de calcul sur les fractions
- Utiliser la définition et les règles de calcul sur les radicaux</td><td>Règles de calculs sur les fractions (multiplication d'une fraction par un entier ; somme de fractions et d'entiers ; etc.)
Définition et règles de calculs sur les radicaux ($(\sqrt{a})^2 = a$; etc.)</td></tr>
<tr><td>Résoudre une équation produit de deux facteurs du premier degré (question 3c)</td><td>Application de la règle :
$A \times B = 0 \Leftrightarrow A = 0$ ou $B = 0$ par substitution de A par $3x - 1$ et de B par $3x + 3$
Traitement formel de résolution des équations du premier degré (voir détails donnés dans l'exercice 2).</td><td>Nature et forme d'une expression algébrique.

Règle du produit nul.

Deux équations équivalentes ont les mêmes solutions dans $\mathbb{R}$.</td></tr>
</table>

Tableau 52 : Analyse de l'OM de l'exercice 4

Suit le découpage du même exercice selon les composantes de la compétence algébrique de Grugeon (1995).

Composante d'analyse	Critères	Valeurs des critères
Traitement algébrique	***Objet*** Reproduction de tâches d'ordre numérique Reproduction de tâches formelles non finalisées	 Substitution numérique (Q3a-Q3b) Niveau 1 : calcul algébrique algorithmisé (Q1-2) Niveau 2 : Implicite à contrôler (Q3)
	Outil Interprétation d'une expression algébrique	 Reconnaissance de la forme d'expressions
Rapport arithmétique / algèbre	Démarche de résolution	Numérique / Algébrique
	Statut du signe d'égalité	Annonce de résultat/ Relation d'équivalence
	Statut des lettres	Indéterminées / Variables / Inconnues
	Objets Statut des objets de l'algèbre	Expressions et équations polynomiales de degré 2 Structural / Procédural
Gestion du registre algébrique	Type de formation	*RF* ($\mathbb{R}$, x, (), +, -, x, /, ², √)
	Type de traitement	*RT* (règles sur fractions ; sur racines carrées ; règles de développement, de factorisation ; règles sur équations 1er degré)
Articulation entre registres	Registres et type de conversion	Registre algébrique Registre numérique
Fonction de l'algèbre	Emploi de l'algèbre	Calcul formel dans le cadre algébrique

Tableau 53: Grille descriptive de l'exercice 4 selon les composantes de la compétence algébrique de Grugeon

Que ce soit l'analyse praxéologique en type des tâches ou le découpage en composantes des concepts algébriques mis en jeu dans cet exercice, nous constatons qu'une multitude de règles de traitement algébrique sont convoquées, avec nombre de technologies sous-jacentes, et que des conversions sont nécessaires entre les registres numérique et algébrique. Plusieurs statuts des lettres sont utilisés différemment et le signe d'égalité apparait soit comme annonce d'un résultat (questions 3a et 3b), soit comme relation d'équivalence (questions 1, 2 et 3c). La diversité de ces approches en fait en exercice que l'on peut qualifier de complexe à ce niveau.

8.3.1.5 Cinquième exercice

On considère la figure ci-contre où :
ABCD est un rectangle ;
Les points A, E et F sont alignés ;
Les points B, C et F sont alignés ;
AE = 5 ;
EF = 4,5 ;
FC = 2,7.
Pour chaque question, ***repasser en couleur sur la figure*** *les points, segments, droites…. utilisés pour la démonstration.*[124]
Faire apparaître les différentes étapes des démonstrations.
1) *Démontrer que EC = 3,6.* ***(items 19, 20 et 21)***
2) *Calculer DE.* ***(items 22, 23 et 24)***

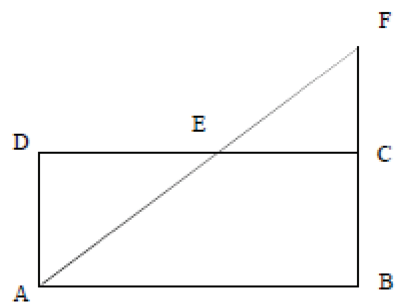


Figure 54 : Énoncé de l'exercice 4 du test diagnostique

[124] L'énoncé original est présenté en annexe A1.

Rappelons que le test comporte de la géométrie pour les deux derniers exercices proposés afin d'évaluer la capacité de l'élève à utiliser ses connaissances algébriques dans des contextes tirés d'autres champs mathématiques que l'algèbre et d'y utiliser l'algèbre comme outil.
L'objectif de ce cinquième exercice[125] est de calculer des longueurs en élaborant une démonstration de géométrie, à partir d'une figure complexe destinée à reconnaître une situation de référence et à choisir un théorème adapté. Les deux théorèmes à mettre en œuvre ici sont les théorèmes de Pythagore et de Thalès, dans leurs sens direct. Nous pouvons lire à cet effet, dans le programme de seconde de 2009 (MEN, 2009a) que *l'objectif est de rendre les élèves capables d'étudier un problème d'alignement de points, de parallélisme ou d'intersection de droites, de reconnaissance des propriétés d'un triangle, d'un polygone – toute autonomie pouvant être laissée sur l'introduction ou non d'un repère, l'utilisation ou non de vecteurs.*
Le théorème de Pythagore est étudié en classe de quatrième et le programme stipule que les élèves doivent être capables de *calculer la longueur d'un côté d'un triangle rectangle à partir de celles des deux autres* (MEN, 2008a) ; cette capacité est à mettre en œuvre dans la question 1 de cet exercice. L'apprentissage du théorème de Thalès est débuté en classe de quatrième et est approfondi en classe de troisième avec l'étude notamment de la réciproque. Une des capacités à travailler est de *connaître et utiliser la proportionnalité des longueurs pour les côtés des deux triangles déterminés par deux parallèles coupant deux droites* sécantes, c'est celle qui est mise en œuvre dans cet exercice (question 2). L'occasion est donnée ici d'observer les acquis des élèves de fin de seconde au sujet de ces deux compétences.
La première question nécessite une démonstration à deux pas (justifier que le triangle ECF est rectangle en C, puis appliquer le théorème de Pythagore dans ce triangle) et la formulation de la question permet de repérer les élèves qui utilisent le résultat à démontrer comme une donnée (EC = 3,6). Dans la mise en œuvre du théorème de Pythagore, le côté dont il faut trouver la longueur n'étant pas l'hypoténuse, un calcul algébrique doit être élaboré pour obtenir la réponse. Cette compétence sera particulièrement analysée, puisqu'elle permet de relever si les élèves utilisent en situation le calcul algébrique de manière adéquate, comme outil (au sens de Douady), pour obtenir la réponse au problème. En effet, les élèves auront à résoudre une équation du type : $a + x^2 = b$, où a et b sont deux réels positifs donnés. Notons également que le calcul s'effectue sur des nombres décimaux et que les élèves vont devoir calculer la racine carrée d'une différence, ce qui permettra de repérer les élèves appliquant une prétendue règle sur la linéarité de la racine carrée ($\sqrt{a-b} \neq \sqrt{a} - \sqrt{b}$).
La seconde question peut être résolue de différentes manières. Nous précisons ci-après trois manières de faire, sachant que cette liste de procédures n'est pas exhaustive :
- soit par une démonstration à deux pas : justifier que les droites (FC) et (AD) sont parallèles puis appliquer le théorème de Thalès dans les triangles ECF et ADE ;
- soit par une démonstration à quatre pas : justifier que les droites (EC) et (AB) sont parallèles, appliquer le théorème de Thalès dans le triangle ABF pour calculer AB, justifier l'égalité des longueurs AB = DC puis déterminer DE en utilisant l'alignement des points D, E et C ;

[125] Cet exercice est l'exercice 4 de l'évaluation de mathématiques à l'entrée en seconde de septembre 2000. Voir le site : http://cisad.adc.education.fr/eval/pages-00/materiel/seconde/default2nde.htm

- soit par une démonstration à six pas : justifier que les droites (EC) et (AB) sont parallèles, appliquer le théorème de Thalès dans le triangle ABF pour calculer FB, en déduire BC par alignement de F, C, B, puis en déduire DA dans le rectangle ABCD, ensuite justifier que le triangle ADE est rectangle en D puis déterminer DE en y appliquant le théorème de Pythagore.

Dans les trois cas, la mise en œuvre du théorème de Thalès nécessite un calcul algébrique pour déterminer la longueur cherchée (l'élève peut arriver à une équation de la forme : $\frac{a}{x} = \frac{b}{c}$ où *a, b, c* sont donnés, ou encore à une équation de la forme : $\frac{x}{a} = \frac{c}{b}$). Ainsi cette question permet également d'analyser le savoir de l'élève sur la résolution d'une équation de ces types dans un cadre géométrique où le calcul algébrique est *outil*. Notons de plus que le calcul s'effectue sur des nombres entiers et décimaux.

Ajoutons pour conclure que les deux équations à résoudre dans cet exercice sont respectivement du 2nd degré (sans terme en x) et sous forme d'une fraction rationnelle (x en dénominateur) ou d'une équation du 1er degré (x en numérateur). Ainsi cet exercice est-il conforme aux préconisations des programmes en vigueur, puisque la classe de seconde est l'année de *l'étude des fonctions carré et inverse* (MEN, 2009a).

Notons enfin que l'utilisation de couleurs pour mettre en relief une sous-figure est une indication de l'énoncé qui peut être une aide pour les élèves, mais n'est pas évaluée ici.

Réalisons l'analyse praxéologique de ce cinquième exercice :

<table>
<tr><th>Type de tâches</th><th>Techniques</th><th>Éléments technologiques</th><th>Éléments théoriques</th></tr>
<tr><td>Déterminer la longueur d'un segment dans un triangle rectangle.
(question 1)</td><td>Reconnaître une situation de référence en isolant un triangle rectangle dans une figure complexe donnée.
Appliquer au triangle rectangle le théorème de Pythagore en identifiant l'hypoténuse et les côtés de l'angle droit.
Calculer la longueur EC en résolvant une équation du type
$EC^2 + a^2 = b^2$ où a et b sont donnés.</td><td>Caractérisation d'un triangle rectangle par l'égalité de Pythagore.

Règles de calcul sur les expressions algébriques et priorités opératoires.
Règles de calcul sur les radicaux.</td><td rowspan="2">Propriétés élémentaires de la géométrie euclidienne dans le plan.

Structure algébrique de (ℝ[X], +, ×)</td></tr>
<tr><td>Déterminer la longueur d'un segment dans une configuration de Thalès
(question 2)</td><td>Reconnaître une situation de référence en isolant une configuration de Thalès dans une figure complexe donnée.
Appliquer à la configuration le théorème de Thalès (voir différentes possibilités décrites plus haut) en identifiant les longueurs des côtés parallèles et sécants.
Calculer la longueur DE en résolvant une équation du type $\frac{a}{x} = \frac{b}{c}$ ou $\frac{x}{a} = \frac{c}{b}$ où *a, b* et *c* sont donnés et où x représente directement DE ou bien une longueur annexe permettant de calculer DE (par soustraction)</td><td>Caractérisation de la configuration de Thalès par la proportionnalité des
longueurs pour les côtés des deux triangles.
déterminés par deux parallèles coupant deux droites
sécantes.

Règles de calcul sur les expressions algébriques et priorités opératoires.
Règles de calcul sur les fractions (et éventuellement radicaux, selon la méthode de résolution choisie)</td></tr>
</table>

Tableau 55 : Analyse de l'OM de l'exercice 5

Vient le découpage de l'exercice selon les composantes de la compétence algébrique de Grugeon (1995).

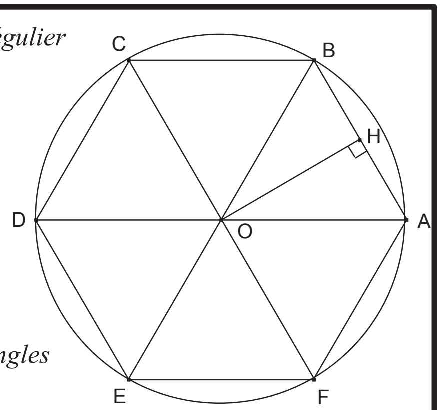
Composante d'analyse	Critères	Valeurs des critères
Traitement algébrique	***Objet*** Reproduction de tâches formelles non finalisées	Niveau 1 : calcul algébrique algorithmisé (Q1-Q2)
	Outil Traduction d'une situation mathématique	Niveau 1 : production guidée d'une relation algébrique (Q1-Q2)
Rapport arithmétique / algèbre	Démarche de résolution	Algébrique
	Statut du signe d'égalité	Annonce de résultat / Relation d'équivalence
	Statut des lettres	Inconnues
	Objets Statut des objets de l'algèbre	Mesures (longueurs) Procédural
Gestion du registre algébrique	Type de formation	*RF* ($\mathbb{D}$, {*EC, ED*}, +, ², /, √)
	Type de traitement	*RT* (règles sur fractions ; sur racines carrées ; règles sur équations 1er et du 2nd degré)
Articulation entre registres	Registres et type de conversion	Conversion entre registres géométrique, figural, algébrique et numérique
Fonction de l'algèbre	Emploi de l'algèbre	Mathématiser et résoudre un problème du domaine géométrique.

Tableau 56: Grille descriptive de l'exercice 5 selon les composantes de la compétence algébrique de Grugeon

Les deux tableaux de l'exercice 5 sont commentés avec ceux de l'exercice suivant.

8.3.1.6 Sixième exercice

Dans cet exercice, on veut calculer les aires d'un carré et d'un hexagone régulier de même périmètre (120 m).
Les deux parties sont indépendantes.
Partie A : Étude du carré
Calculer la longueur d'un côté puis l'aire d'un carré de 120 m de périmètre. ***(items 25 et 26)***
Partie B : Étude de l'hexagone régulier
La figure ci-contre représente un hexagone régulier ABCDEF de 120 m de périmètre.
Il est inscrit dans un cercle de centre O. Il est constitué de six triangles équilatéraux.



Le segment [OH] est une hauteur du triangle équilatéral OAB.
1) *Calculer la longueur AB du côté de l'hexagone régulier.* ***(item 27)***
2) *En déduire AH puis la valeur exacte de OH. (On justifiera chacune des deux réponses)* ***(items 28, 29 et 30)***
3) *Calculer la valeur exacte de l'aire du triangle OAB.* ***(items 31et 32)***
4) *Calculer la valeur exacte puis la valeur arrondie à 10 m² près de l'aire de l'hexagone régulier de 120 m de périmètre.* ***(items 33 et 34)***

Figure 57 : Énoncé de l'exercice 6 du test diagnostique

Ce dernier exercice[126], comme le précédent, se situe à la fois dans le champ de la géométrie euclidienne plane et dans celui des grandeurs et mesures. Il est à remarquer que la distinction est faite dans les programmes de collège de parties nommées *Géométrie* et *Grandeurs et mesures*, cette distinction n'existe plus dans le programme de seconde qui se nomme simplement *Géométrie*. L'objectif de l'exercice est de calculer les aires d'un carré et d'un hexagone régulier de périmètre fixé. Il est conforme au programme de seconde générale où l'on peut lire que l'élève doit être capable *pour résoudre des problèmes, d'utiliser les propriétés des triangles, des quadrilatères, des cercles* (MEN, 2009a). Comme pour l'exercice 5, bien que nous étudiions les résultats des élèves sur ce problème de géométrie, nous nous attachons principalement au traitement algébrique et numérique effectué, afin de considérer les compétences algébriques des élèves de fin de seconde et leur capacité à les mobiliser en tant qu'outil, dans un cadre autre qu'algébrique.
Pour la première partie, un calcul de l'aire d'un carré est demandé, les seules connaissances mobilisées concernent les notions de périmètre et d'aire avec les formules associées. Ici, l'élève peut éviter une démarche algébrique et raisonner par une démarche arithmétique seule. Certains élèves peuvent poser une équation (*120 = 4c donc c = 120/4 = 30*) et d'autres effectuer une démarche plus arithmétique (*le côté vaut le quart du périmètre, donc c = 30*) ne présentant pas de mise en équation. Notons que l'apprentissage de la notion de périmètre débute au primaire et se poursuit en classe de sixième où l'on travaille la capacité *: calculer le périmètre d'un polygone* et où le programme officiel spécifie : *le travail sur les périmètres permet une initiation aux écritures littérales* (MEN, 2008a). Nous avons vu en effet dans la partie consacrée à l'étude didactique de l'algèbre (cf. §2) que la lettre à ce niveau est considérée comme une étiquette, une abréviation : *p* comme périmètre et *c* comme côté du carré.
Dans la seconde partie, pour aboutir au calcul de l'aire de l'hexagone régulier, plusieurs étapes sont nécessaires et l'exercice propose des sous-questions permettant de guider l'élève vers la solution. En effet, le calcul de la longueur du côté d'un triangle équilatéral est nécessaire ainsi que la hauteur de ce dernier, ce qui nécessite la mise en œuvre de connaissances sur les hauteurs et médianes d'un triangle, et l'utilisation du théorème de Pythagore. Vient ensuite le calcul de l'aire d'un triangle puis la mobilisation des connaissances de l'aire comme grandeur mesurable, c'est-à-dire l'ajout de six fois l'aire du triangle équilatéral pour trouver celle de l'hexagone régulier. Un des objectifs de l'exercice est de donner un exemple de deux figures de même périmètre ayant des aires différentes, mais il est peu probable que les élèves réalisent que la distinction aire/périmètre est travaillée ici puisqu'aucune question n'est posée à ce sujet. Les connaissances mises en œuvre pour traiter cette seconde partie se situent au niveau des classes de cinquième, « *calculer l'aire d'un triangle connaissant un côté et la hauteur associée. Calculer l'aire d'une surface plane, par décomposition en surfaces dont les aires sont facilement calculables* » et de quatrième du collège, « *théorème de Pythagore dans un triangle rectangle pour calculer la longueur d'un côté à partir de celles des deux autres* » (MEN, 2008a).
Réalisons l'analyse praxéologique de ce sixième exercice :

[126] Cet exercice est en partie le problème posé à l'épreuve de mathématiques du brevet des collèges de 1997, dans l'Académie de Clermont-Ferrand.

Type de tâches	Technique	Éléments technologiques	Éléments théoriques
Déterminer la longueur d'un côté d'un polygone régulier connaissant son périmètre. (questions A et B.1)	Pour le carré, appliquer la formule c = P/4 implicitement ou explicitement Pour l'hexagone, appliquer la formule c=P/6 ou utiliser un raisonnement arithmétique	Définition du concept de périmètre d'un polygone, comme mesure de la longueur du pourtour. Formule du périmètre du carré.	Géométrie euclidienne dans le plan. Propriétés des grandeurs et de leurs mesures en géométrie euclidienne plane.
Déterminer l'aire d'un polygone régulier connaissant son côté. (questions A, B.3 et B.4)	- Pour le carré, appliquer la formule A = c² - Pour l'hexagone, comprendre que son aire vaut six fois celle de l'aire du triangle équilatéral OAB. - Pour le triangle équilatéral, appliquer la formule de calcul de l'aire d'un triangle : $\frac{base \times hauteur}{2}$ en choisissant une base et une hauteur appropriée. Substituer une valeur numérique pour la longueur de la base et pour la hauteur. - Simplifier les résultats numériques obtenus.	Définition du concept d'aire d'un polygone, comme mesure d'une surface. Mesure d'une aire par décomposition en surfaces d'aires que l'on sait calculer (formules connues : aire d'un carré, aire d'un triangle) Formule de l'aire d'un carré, d'un triangle. Règles de calcul sur les fractions et les radicaux ; priorités opératoires.	
Déterminer la longueur d'un segment (question B.2)	- Pour AH, connaître et reconnaître une médiane et une hauteur confondues d'un triangle équilatéral. - Pour OH, reconnaître une situation de référence en isolant un triangle rectangle dans une figure donnée. Appliquer au triangle rectangle le théorème de Pythagore en identifiant l'hypoténuse et les côtés de l'angle droit. Calculer la longueur OH en résolvant une équation du type OH² + $a^2 = b^2$ où a et b sont donnés. - Utiliser les règles du calcul algébrique et numérique pour calculer la hauteur OH.	Propriétés des droites remarquables (médianes, hauteurs) d'un triangle équilatéral. Caractérisation d'un triangle rectangle par l'égalité de Pythagore. Règles de calcul sur les expressions algébriques et priorités opératoires. Règles de calcul sur les radicaux	

Tableau 58 : Analyse de l'OM de l'exercice 6

Les principales connaissances algébriques mises en œuvre dans cet exercice se situent :
- en question A, où l'élève doit mettre en équation la relation entre le périmètre P d'un carré et le côté c de celui-ci, puis résoudre cette équation (P = 4c donc c = P/4). L'élève doit ensuite substituer la valeur numérique trouvée dans la formule de l'aire d'un carré (Aire = c²) pour obtenir une valeur numérique ;
- en question B.1, où l'élève doit mettre en équation la relation entre le périmètre P de l'hexagone régulier et le côté c de celui-ci, puis résoudre cette équation (P = 6c donc c = P/6) ;
- en question B.2, où il s'agit de déterminer la hauteur du triangle équilatéral par l'utilisation du théorème de Pythagore dans le triangle rectangle AOH. L'élève sera amené à écrire et

résoudre une équation de la forme : $x^2 + a^2 = b^2$ où a et b sont donnés. Pour éviter cette mise en équation, l'élève pourrait aussi utiliser le résultat suivant : la hauteur d'un triangle équilatéral de côté c vaut $c\,\frac{\sqrt{3}}{2}$, mais il est peu probable que ce résultat soit connu, étant donné qu'il ne fait pas partie des connaissances exigibles, ni travaillées, que ce soit au collège ou en seconde ;

- en question B.3, où il s'agit de substituer dans la formule de l'aire d'un triangle les valeurs numériques déterminées précédemment pour effectuer un calcul numérique exact.

Les connaissances algébriques citées ci-dessus seront recherchées lors de l'analyse des résultats du test.

Notons que l'exercice introduit des calculs sur des nombres irrationnels et demande des valeurs exactes et arrondies.

Suit le découpage de l'exercice selon les composantes de la compétence algébrique de Grugeon (1995).

Composante d'analyse	Critères	Valeurs des critères
Traitement algébrique	***Objet***	
	Reproduction de tâches d'ordre numérique	Substitution numérique
	Reproduction de tâches formelles non finalisées	Niveau 1 : calcul algébrique algorithmisé
	Outil	Niveau 0 : branchement sur une formule
	Traduction d'une situation mathématique	Niveau 1 : production guidée d'une relation algébrique
Rapport arithmétique / algèbre	Démarche de résolution	Algébrique
	Statut du signe d'égalité	Annonce de résultat / Relation d'équivalence
	Statut des lettres	Inconnues
	Objets Statut des objets de l'algèbre	Mesures (longueurs, aires) Procédural
Gestion du registre algébrique	Type de formation	*RF* ($\mathbb{D}$, {*AB, OH, AH, …*}, +, ², /, √)
	Type de traitement	*RT* (règles sur fractions ; sur racines carrées ; règles sur équations 1er et 2nd degré)
Articulation entre registres	Registres et type de conversion	Conversion entre registres géométrique, figural, algébrique et numérique
Fonction de l'algèbre	Emploi de l'algèbre	Mathématiser et résoudre un problème du domaine géométrique.

Tableau 59: Grille descriptive de l'exercice 6 selon les composantes de la compétence algébrique de Grugeon

Précisons le sens de deux expressions selon Grugeon (1995) données dans ce tableau et dans le tableau 44, qui n'ont pas été explicitées auparavant. Il s'agit du traitement algébrique vu comme outil, utilisé *pour traduire une situation mathématique*. Grugeon (ibid., p.54-55) y distingue trois niveaux :

- le niveau 0 de *branchement sur une formule*, où il s'agit de *déterminer la formule associée à un contexte donné et où on instancie les variables par les données et inconnues du problème*. C'est le cas dans l'exercice 6, en question 1 par exemple, où sont appliquées les formules du périmètre et de l'aire d'un carré en fonction de la mesure de son côté ;

- le niveau 1 de *production guidée d'une expression ou d'une relation algébrique,* comme par exemple *l'application d'un théorème portant sur une configuration connue en instanciant les données et inconnues du problème dans la relation obtenue*. Nous rencontrons ce niveau pour les exercices 5 et 6 lors de l'application des théorèmes de Pythagore et de Thalès pour rechercher des longueurs inconnues ;
- le niveau 2 de *production d'une expression ou d'une relation algébrique pour traduire une situation*. Il s'agit de problèmes *où la production est entièrement à la charge de l'élève* et où s'articule le registre algébrique avec d'autres registres. Par exemple l'exercice « prouver que la somme de trois entiers consécutifs est un multiple de 3 » où l'écriture générique de trois entiers consécutifs est de ce niveau. Dans les exercices proposés dans le test, ce niveau n'est pas présent.

Pour conclure sur les analyses des exercices 5 et 6, une lecture des tableaux 55 et 58 des analyses praxéologiques montrent que les types de tâches proposées sont restreints à *déterminer des longueurs* ou *déterminer des aires*. Cependant les techniques pour accomplir ces tâches sont diverses, puisqu'elles font appel à des savoirs géométriques comme le théorème de Pythagore, de Thalès et aux concepts de périmètre et d'aire. Les tableaux 56 et 59, décrivant les composantes de la compétence algébrique, indiquent les caractéristiques de l'utilisation de l'algèbre comme outil dans un cadre autre qu'algébrique et met en avant les nombreuses conversions à réaliser entre registres géométrique, figural, algébrique et numérique.

Synthèse des analyses par exercice et regroupement d'items

Afin d'analyser les résultats des élèves testés, les items ont été regroupés de deux manières conformément aux analyses précédentes, selon les différents types de tâches des analyses praxéologiques et selon les composantes de la compétence algébrique. Ces regroupements ont pour objectif de quantifier le taux de réussite des différents items et donc de déterminer un état des lieux des compétences algébriques des élèves de fin de seconde.

Pour les différents types de tâches, nous nommons TA_i les types de tâches relevant du domaine numérico-algébrique et TG_i , ceux du domaine géométrique.

Donnons l'inventaire des types de tâches du domaine numérico-algébrique avec les items correspondants :

Compétence/ Capacité algébrique évaluée (selon le type de tâches)	**Niveau d'enseignement (1ère apparition)**	**Exercice et question considérée**
TA_1 : Résoudre une équation du premier degré dans $\mathbb{R}$ ou s'y ramenant	Collège : 4^e	Ex2, Q1 - Q2, items 5 et 6 Ex5, Q2, item 23 - Ex6, QA, item 25
TA_2 : Résoudre dans $\mathbb{R}$ une équation du second degré de la forme $x^2 = a$ (a réel donné) ou s'y ramenant	Collège : 3^e	Ex5, Q1, item 20 Ex6, Q2, item 30
TA_3 : Résoudre dans $\mathbb{R}$ une équation produit de deux facteurs du premier degré	Collège : 3^e	Ex4, Q3c, item 18
TA_4 : Reconnaître des formes algébriques comme somme ou produit	Lycée : 2de	Ex3, Q1 - Q2, items 7 et 8 Ex3, Q3a, item 9
TA_5 : Réduire une expression algébrique rationnelle	Lycée : 2de	Ex3, Q3b, item 10

TA_6 : Développer une expression algébrique comportant une identité remarquable	Collège : 3e	Ex1, Q3, item 4 Ex4, Q1, item 11
TA_7 : Factoriser une expression algébrique en utilisant une identité remarquable	Collège : 3e	Ex4, Q2, item 12
TA_8 : Substituer une valeur numérique à une lettre dans une expression algébrique	Collège : 5e	Ex1, Q1, item 1. Q2, item 2 Ex4, Q3a - Q3b, items 14 et 16 Ex6, QA, item 26 et QB3, items 32- 34
TA_9 : Démontrer la non-équivalence de deux expressions algébriques	Lycée : 2de	Ex1, Q1 - Q2 items 1 et 2
TA_{10} : Prouver l'équivalence de deux expressions algébriques	Collège : 3e	Ex1, Q3, item 3
TA_{11} : Capacité à choisir la forme la plus adéquate d'une expression algébrique en vue de la réalisation d'un calcul ou de la résolution d'une équation[127]	Lycée : 2de	Ex3, Q3a - Q3b, items 13, 15 et 17

Tableau 60 : Inventaire des types de tâches du domaine numérico-algébrique du test diagnostique

Listons de la même manière les différents types de tâches testées dans le domaine géométrique. Une comparaison des résultats des élèves sera effectuée selon leurs compétences algébriques et géométriques pour évaluer si une corrélation existe entre les deux.

Compétence/ Capacité géométrique évaluée (selon le type de tâches)	**Niveau institutionnel d'enseignement (première apparition)**	**Exercice et question considérée**
TG_1 : Déterminer la longueur d'un segment par mise en œuvre du théorème de Pythagore	Collège : 4e	Ex5, Q1, item 19 Ex6, QB2, item 29
TG_2 : Déterminer la longueur d'un segment par mise en œuvre du théorème de Thalès	Collège : 3e	Ex5, Q2, item 22
TG_3 : Déterminer la longueur d'un côté d'un polygone régulier connaissant son périmètre	Collège : 6e	Ex6, QA - QB1, items 25 et 27
TG_4 : Déterminer la hauteur d'un triangle équilatéral connaissant son côté	Collège : 3e	Ex6, QB2, item 28
TG_5 : Déterminer l'aire d'un polygone régulier connaissant son côté	Collège : 5e	Ex6, QA – QB3 – QB4, items 26, 31 et 33
TG_6 : Rédiger une démonstration de géométrie[128]	Collège : 4e	Ex5, Q1 - Q2, items 21 et 24 Ex6, QB2, item 29

Tableau 61 : Inventaire des types de tâches du domaine géométrique du test diagnostique

Afin de compléter cette analyse des organisations praxéologiques, nous complétons par une grille résumant quels items évaluent les composantes présentes dans les exercices de la compétence algébrique définies par Grugeon (1995).

[127] Ce dernier point ne peut pas vraiment être considéré comme un type de tâches, au sens de Chevallard. Néanmoins, par commodité, nous le plaçons à cet endroit, en lui donnant la fonction de rassembler les items qui n'ont pu trouver place ailleurs.

[128] Comme pour le tableau précédent, ce dernier point ne relève pas exactement d'un type de tâches, au sens de Chevallard. Ce point permet de regrouper tous les items de géométrie ayant trait à la démonstration géométrique.

	Ex1	**Ex2**	**Ex3**	**Ex4**	**Ex5**	**Ex6**
Traitement algébrique (objet)						
Reproduction tâches ordre numérique	Items 1-2			Items 14-16		Items 25-26-27- 32
Reproduction de tâches formel. non final. (Niv1)	Item 4	Items 5-6		Items 11-12-18	Items 20- 23	Items 25-26-27- 30
Reproduction de tâches formel. non final. (Niv2)	Item 3		Item 10	Items 13-15-17		
Traitement algébrique (outil)						
Interprétation d'une expression	Items 1-2-4		Items 7-8-9	Items 13-15-17		
Traduction d'une situation math.					Niveau 1 : Items 20- 23	Niveau 0 : Items 25-26-27- 32 Niveau 1 : Item 33
Rapport arithmétique / algèbre						
Démarche de résolution	Item 3					
Statut du signe égalité	Annonce rés. /Rel. équival.	Relation d'équivalence		Annonce de résultat / relation d'équivalence		
Statut des lettres	Variables/ Indéterminées	Inconnues	Indéterminées	Variables/ Indéterminées/ Inconnues	Inconnues	Inconnues
Objets Statut des objets	2^{nd} degré Procédural	1^{er} degré Structural/ Procédural	1^{er}, 2^{nd} degré/ Expr. rationn. Struct./ Proc.	2^{nd} degré Structural/ Procédural	Mesures Procédural	Mesures Procédural
Gestion dans le registre algébrique						
Formation	$\mathbb{Z}$, x, (), +, -, ×, /, ²	$\mathbb{Z}$, x, (), +, -, ×	$\mathbb{Z}$, x, (), +, -, ×, ²	$\mathbb{R}$, x, (), +, -, ×, /, ², √	$\mathbb{D}$,{*EC, ED*}, +, ², /, √	$\mathbb{D}$, {*AB, OH, AH, …*}, +, ², /, √
Traitement	Dévelop^t	Dévelop^t Équations 1^{er} degré	Fractions, Dévelop^t.	Fractions, Racines, Dévelop^t, Facto., Équat. 1^{er} degré	Fractions, Racines, Équations 1^{er} et 2^{nd} degré	Fractions, Racines, Équations 1^{er} et 2^{nd} degré
Articulation entre le registre algébrique et d'autres registres						
Type/ conversion	Numérique / Langage naturel / Alg.	Algébrique	Langage naturel / Algébrique	Numérique/ Algébrique	Géométrique / Figural / Algébrique / Numérique/ Langage Naturel	
Fonction de l'algèbre						
Emploi de l'algèbre	Calcul formel dans le cadre algébrique				Mathématiser et résoudre un problème du domaine géométrique	

Tableau 62: Répartition des critères des composantes de la compétence algébrique mis en jeu dans les exercices

Ce tableau complète le découpage en types de tâches selon Chevallard, que nous pouvons d'ailleurs retrouver partiellement dans la composante « traitement algébrique ». Cependant cette même composante permet de plus de répertorier si l'algèbre utilisée fonctionne comme *outil* ou comme *objet*, au sens de Douady, pour les tâches à effectuer. Les autres composantes permettent d'analyser plus spécifiquement quels objets de l'algèbre sont étudiés dans le test, quelle dimension, structurale ou procédurale au sens de Sfard, des objets algébriques est employée, quels registres interviennent et par suite quelles conversions sont nécessaires pour résoudre les problèmes donnés. La composante *traitement* pour la *gestion dans le registre algébrique* s'apparente, quant à elle, aux types de techniques associées aux types de tâches selon Chevallard. La répartition des différents items dans les différents types du traitement algébrique permet de constater une certaine complétude des capacités testées. La composante *rapport arithmétique/algèbre* montre une diversité de présence et d'utilisation des objets de l'algèbre. Les deux dernières composantes du tableau permettent de pointer que les compétences algébriques n'ont pas été testées dans le cadre fonctionnel ni dans le cadre d'une mathématisation conduisant à prouver une conjecture sur des propriétés numériques (comme par exemple, montrer que la somme de trois entiers consécutifs est un multiple de 3). Ainsi pouvons-nous constater une sous-représentation de l'outil algébrique par rapport à l'objet algèbre. Rappelons que cette sous-représentation est volontaire, puisque nous cherchons dans ce test à répondre en particulier à l'hypothèse H2, qui propose de rechercher les connaissances des élèves sur l'algèbre en tant qu'*objet* alors que l'étude de celle-ci est préconisée par la noosphère en la plongeant systématiquement dans d'autres cadres (géométrique, fonctionnel) et qu'elle leur apparaît davantage comme *outil*.

8.3.3 Analyse des résultats du test diagnostique

Comparaison de la réussite des compétences testées dans le domaine algébrique par rapport à celles du domaine géométrique

Pour l'ensemble des 160 élèves, deux types de comparaison ont été réalisés :

- une comparaison entre la réussite des exercices fléchés « partie algébrique » (18 items) avec celle des exercices fléchés « partie géométrique » (16 items) ;
- une comparaison entre les 25 items situés dans le domaine numérico-algébrique et les 11 items situés dans le domaine géométrique, tels qu'ils ont été définis dans les tableaux 48 et 49 de la page précédente.

Les résultats indiqués dans les graphiques qui suivent comptabilisent le nombre d'items où les élèves ont répondu de façon satisfaisante. Les pourcentages indiqués donnent le nombre moyen d'items donnant une réponse juste, pour les 160 élèves testés.

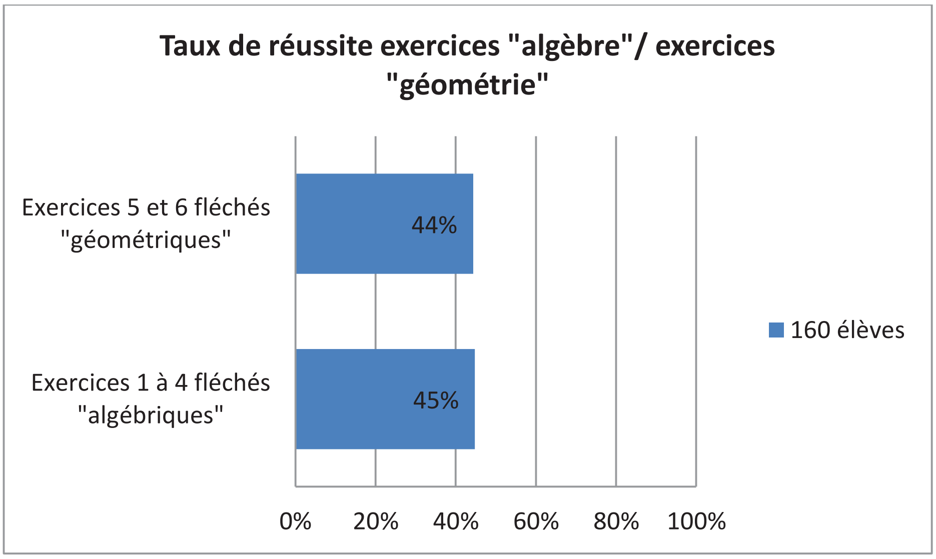


Figure 63 : Comparaison du taux de réussite moyen au test diagnostique selon le type d'exercice

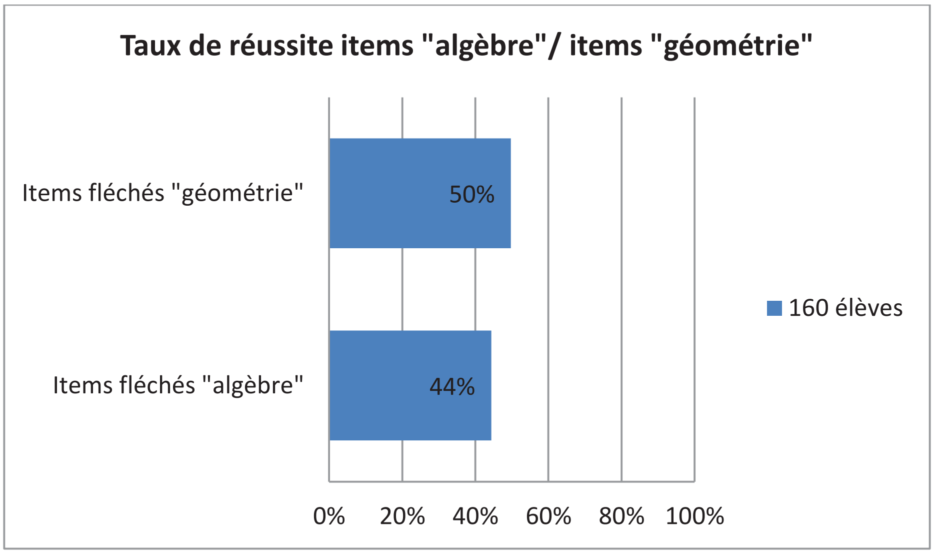


Figure 64 : Comparaison du taux de réussite moyen au test diagnostique dans les domaines algébrique et géométrique

Le graphique de la figure 63 tendrait à montrer que le taux de réussite est identique, que l'on considère la partie algébrique ou la partie géométrie du test. Cependant les résultats plus affinés du graphique de la figure 64 indiquent que le taux de réussite moyen supérieur pour les items fléchés « géométrie » par rapport à ceux fléchés « algèbre ». D'autre part, si nous considérons la moyenne et l'écart-type des items justes, nous obtenons les résultats suivants :

	Domaine algébrique	Domaine géométrique
Nombre moyen d'items réussis	11,1	5,5
Nombre total d'items	25	11
Écart-type	5,2	2,6

Ces résultats montrent un écart-type beaucoup plus élevé pour le domaine algébrique et nous complétons ces données par un second graphique, en secteurs, donnant le pourcentage d'élèves ayant obtenu moins de 25% d'items justes, entre 25 et 50%, entre 25 et 75% et plus de 75% d'items justes dans les deux domaines, algébrique et géométrique :

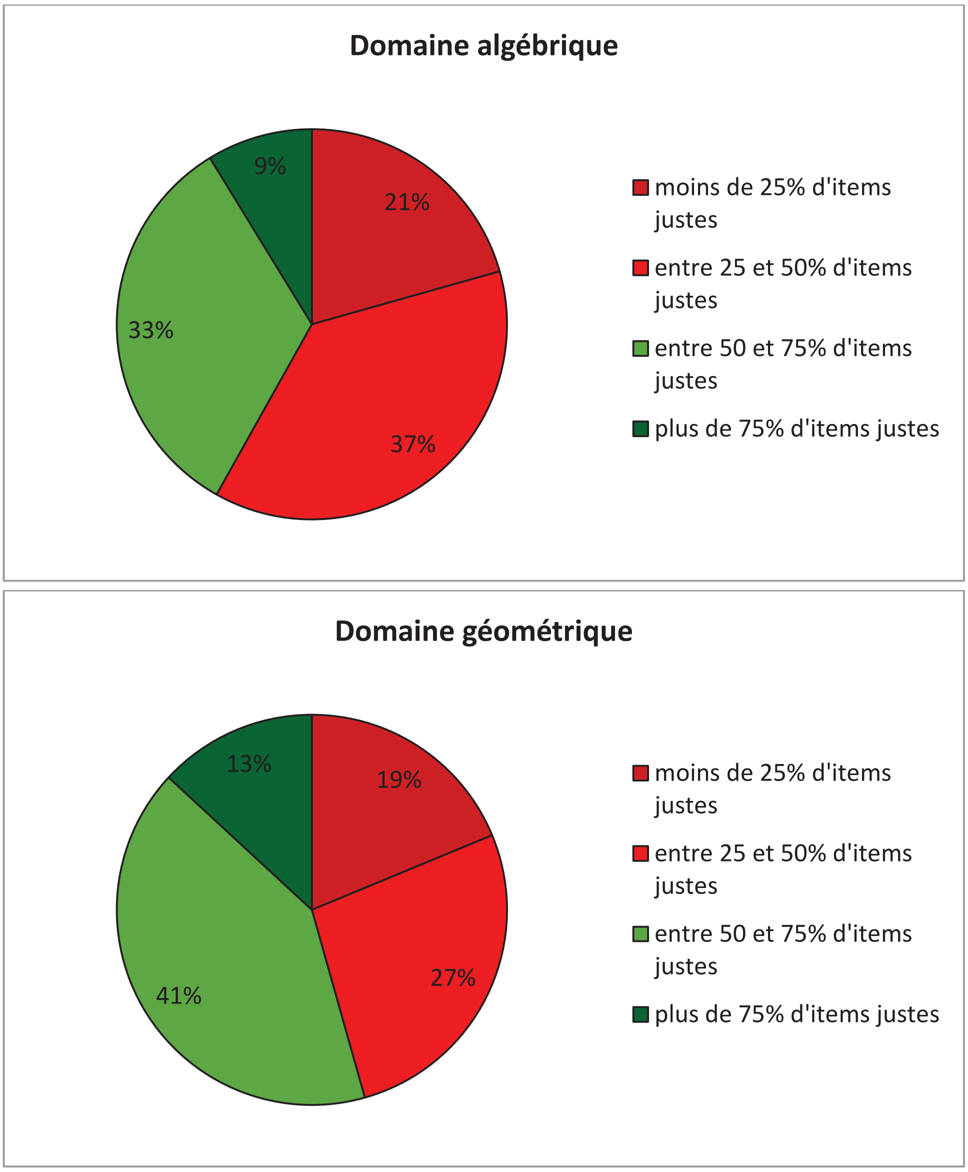


Figure 65 : Pourcentages de réussite comparés des items algébriques et géométriques

Ce comparatif permet d'établir que les compétences testées de ces élèves de fin de seconde sont supérieures dans le domaine géométrique par rapport à celles du domaine algébrique. En effet, 42% des élèves obtiennent au moins 50% de réussite aux items d'algèbre alors que 54% d'entre eux obtiennent au moins 50% de réussite aux items de géométrie. Une des causes de ce décalage a été mise en évidence dans l'analyse a priori du test où nous avons montré que les connaissances géométriques exploitées dans le test sont des connaissances *anciennes*, au sens de Douady, c'est-à-dire qu'elles font partie du *savoir enseigné* au collège et du savoir *appris* par les élèves. Pour résumer les types de tâches à effectuer, les connaissances évaluées sont les notions de périmètre et d'aire enseignées en sixième, la notion de hauteur d'un triangle vue en cinquième, le théorème de Pythagore en quatrième et le théorème de Thalès en troisième. Aucune connaissance nouvelle sur la géométrie euclidienne plane non repérée n'est instaurée en classe de seconde. De fait, le programme de la classe de seconde privilégie l'introduction de la géométrie repérée et des vecteurs. Les types de tâches géométriques

proposées dans le test ne sont que des *reprises à l'identique*, au sens de Larguier, de notions enseignées au collège.
En revanche, dans le domaine algébrique, nous constatons que seuls 42% des élèves réussissent à répondre convenablement à plus de la moitié des items proposés. Une première explication peut se trouver au niveau de la noosphère et du découpage du *savoir à enseigner* selon les programmes officiels de l'EN. Effectuons une comparaison des programmes de fin de collège, afin de comprendre de quels *savoirs enseignés* des domaines algébrique et géométrique dispose un élève en entrant au lycée par la mise en relation des bandeaux d'entête des rubriques *Nombres et calculs* et *Géométrie* du programme de troisième (MEN, 2008a) :

> […] Pour le calcul littéral, l'un des objectifs visés est qu'il prenne sa place dans les moyens d'expression des élèves, à côté de la langue usuelle, de l'emploi des nombres ou des représentations graphiques. C'est en développant notamment des activités où le calcul littéral présente du sens et **où il reste simple** à effectuer que l'on amène l'élève à **recourir à l'écriture algébrique lorsqu'elle est pertinente.**
> La résolution de problèmes a pour objectifs :
> • […] **de compléter les bases du calcul littéral et d'en conforter le sens**, notamment par le recours à des équations ou des inéquations du premier degré pour résoudre des problèmes,
> • de savoir choisir l'écriture appropriée […] d'une expression littérale suivant la situation.

Cet extrait de la rubrique *Nombres et calculs* est à mettre en parallèle avec celui de la rubrique *Géométrie* [129]:

> […] L'étude et la représentation d'objets usuels du plan et de l'espace se poursuivent ainsi que le calcul de grandeurs attachées à ces objets. […] **L'étude des configurations usuelles** est enrichie en particulier de la réciproque du théorème de Thalès et de l'étude de l'angle inscrit. La résolution de problèmes a pour objectifs :
> • […] de **développer les capacités heuristiques, les capacités de raisonnement et les capacités relatives à la formalisation d'une démonstration** ;
> • d'entretenir la pratique des constructions géométriques et des **raisonnements** sous-jacents qu'elles mobilisent ;
> • de solliciter dans les **raisonnements** les propriétés géométriques et les relations métriques associées vues dans les classes antérieures ; […]

Cette lecture comparative des objectifs à atteindre en géométrie et en algèbre, en classe de troisième, présente une plus grande exigence sur les compétences à atteindre en démonstrations géométriques : les parties accentuées en gras par nos soins dans les deux extraits montrent l'insistance faite sur les compétences en raisonnement géométrique et la parcimonie avec laquelle le calcul algébrique doit être utilisé. Les termes choisis dans ces bandeaux d'entête ont tendance à exprimer une initiation au calcul algébrique (*à côté de la langue usuelle ; il reste simple ; les bases du calcul littéral ; …*) par opposition à un réel apprentissage de la démonstration en géométrie (*développer les capacités de raisonnement, les entretenir, les solliciter, ...*). Se trouve également dans la colonne *Commentaires* de ce même programme (ibid.) : « *dans le cadre du socle commun, les élèves connaissent l'existence des identités remarquables et doivent savoir les utiliser pour calculer une*

[129] Les parties coupées portent pour la rubrique *Nombres et calculs* sur le calcul numérique et pour la rubrique *Géométrie* sur le travail sur les solides : elles ont été coupées pour ne pas alourdir la lecture et pour se concentrer sur le calcul algébrique et la démonstration en géométrie plane

expression numérique mais aucune mémorisation des formules n'est exigée » ou encore : « *la notion d'équation ne fait pas partie du socle commun* ». Même si les injonctions de la noosphère ne sont pas forcément suivies par les enseignants, il est possible que la répétition de telles recommandations induise un comportement minimaliste chez les professeurs de troisième en ce qui concerne l'enseignement de ces notions.

Ainsi, une des premières explications de ces différences de scores entre le taux de réussite des types de tâches algébriques et géométriques peut être la différence de fréquentation des élèves quant à ces deux domaines, dans leur scolarité passée.

Pour conforter cette explication, nous avons réalisé une analyse montrant la corrélation entre le taux de réussite des items relevant du domaine algébrique et ceux relevant du domaine géométrique pour les 160 élèves testés.

Le graphique ci-dessous montre la répartition des élèves en quatre domaines :

- les élèves ayant moins de 50% de réussite aux items de géométrie et moins de 50% de réussite aux items numérico-algébriques ;
- les élèves ayant moins de 50% de réussite aux items de géométrie et plus de 50% de réussite aux items numérico-algébriques ;
- les élèves ayant plus de 50% de réussite aux items de géométrie et moins de 50% de réussite aux items numérico-algébriques ;
- les élèves ayant plus de 50% de réussite aux items de géométrie et plus de 50% de réussite aux items numérico-algébriques.

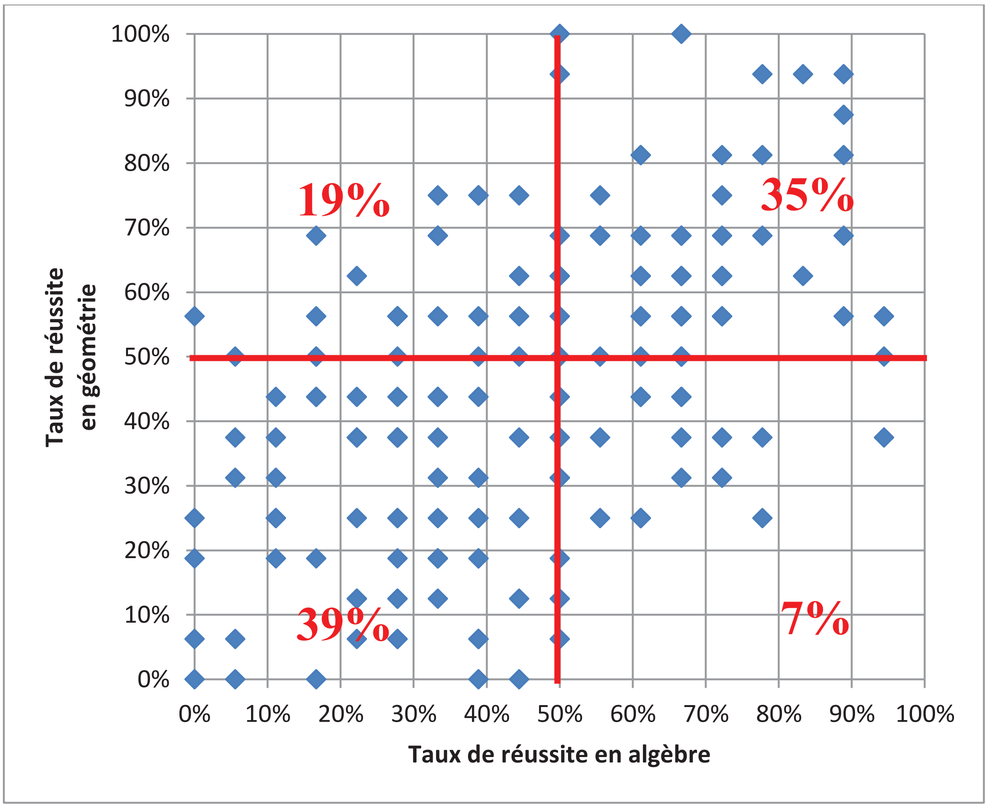


Figure 66 : Taux de corrélation entre la réussite en algèbre et en géométrie

L'étude des résultats de ce graphique montre plusieurs points :

- 35% des élèves ayant un taux de réussite correct en compétences géométriques ont également un taux de réussite correct en compétences algébriques ;
- Près de 40% des élèves qui ont des difficultés en géométrie en ont aussi en algèbre ;
- Et enfin, nous constatons qu'il existe une proportion non négligeable d'élèves (près de 20%) dont les compétences géométriques sont supérieures aux compétences algébriques testées, alors que la proportion inverse n'est que de 7%.

Ce dernier résultat conforte notre hypothèse, à savoir que la plus grande fréquentation des compétences géométriques, encouragées par l'insistance de la noosphère à développer ces compétences au niveau du collège, favorise l'enseignement de la géométrie et que les résultats des élèves s'en ressentent, au détriment de l'enseignement de l'algèbre. L'année de seconde où l'enseignement de l'algèbre est continué – en l'intégrant au domaine fonctionnel – ne semble donc pas permettre d'amener les élèves au niveau des compétences géométriques acquises au collège, et ce, même si l'enseignement de la géométrie plane non repérée est passé au second plan durant l'année de seconde. Nous n'irons pas plus loin dans la comparaison des compétences géométriques et algébriques acquises par les élèves dans ce travail de recherche, la problématique ne tournant pas autour de cette comparaison. Néanmoins ces résultats ont été développés pour montrer que la place restreinte accordée à l'algèbre par l'institution EN permet, du moins en partie, d'expliquer les performances amoindries des élèves dans ce domaine.

Nous pouvons également noter ici qu'un premier jalon est posé dans le sens de la vérification de l'hypothèse H2 développée dans la problématique (cf. §5), puisque nous constatons une très grande hétérogénéité des résultats dans le champ algébrique : le test permet de percevoir les difficultés des élèves de fin de seconde à s'approprier les notions algébriques du programme de seconde et également des programmes antérieurs du collège.

Analyse des résultats des compétences algébriques testées

Nous commençons par présenter le taux de réussite moyen par type de tâches algébriques, telles que celles-ci ont été définies dans le tableau 60.

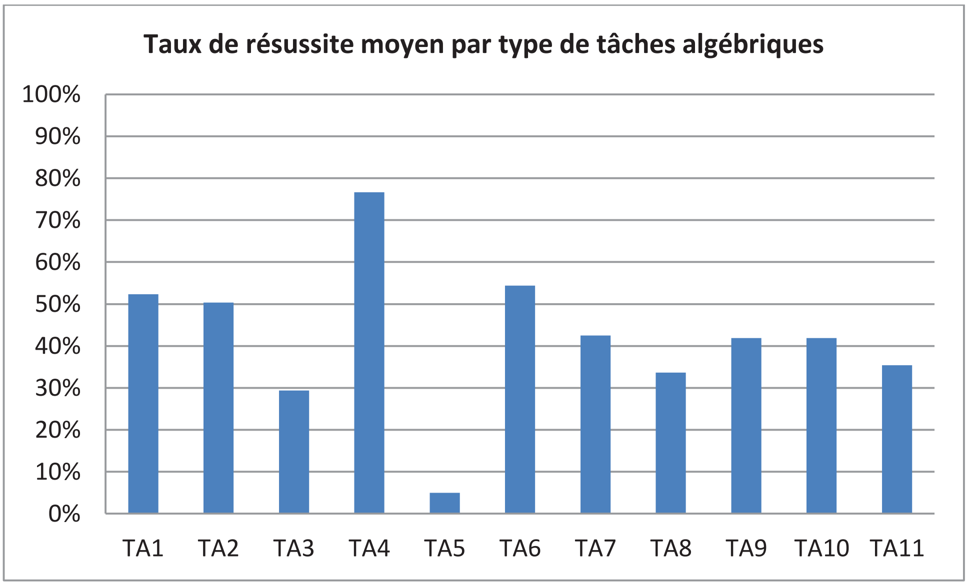


Figure 67 : Taux moyen de réussite des 160 élèves pour les tâches algébriques par type

Deux valeurs sont particulièrement frappantes : le score élevé de près de 80% de réussite pour le type de tâches TA_4, « *Reconnaître des formes algébriques comme somme ou produit* » et le score très faible de 5% du type de tâches TA_5, « *Réduire une expression algébrique rationnelle* ». La reconnaissance des formes algébriques comme somme ou produit semble donc être acquise pour une grande majorité d'élèves. Notons cependant que les questions posées (cf. exercice 3, questions 1 à 3) demandent uniquement la reconnaissance de ces formes et non pas leur utilisation pour interpréter une expression. Ainsi, lorsque les élèves ont à considérer la dimension *structurale*, au sens de Sfard, d'une expression algébrique, sans devoir recourir en parallèle à la dimension *procédurale*, le taux de réussite est satisfaisant. En revanche, le très faible taux de réussite de TA_5 peut s'expliquer par le manque de fréquentation de ce type d'exercices au cours de la classe de seconde, les professeurs des classes testées nous ayant confié ne pas proposer ce genre de tâches à leurs élèves, tâches qu'ils réservent à leurs élèves de première S ou ES. Les raisons invoquées sont généralement que « *c'est trop tôt* », que « *les élèves de seconde ne savent pas le faire* », alors que le programme officiel indique, dans le domaine *Fonctions* et dans le secteur *Expressions algébriques,* la compétence *transformer des expressions rationnelles simples.* Les professeurs ne semblent donc pas suivre les préconisations de la noosphère sur ce point et le faible taux de réussite peut s'expliquer ainsi.
Les autres types de tâches algébriques ont un taux de réussite aux alentours de 30 à 50%.
Afin de commenter ces résultats de façon plus affinée, nous complétons ces analyses en y incluant le taux moyen de réussite de quelques-unes des composantes de la compétence algébrique (Grugeon, 1995), selon la répartition des items du tableau 62.

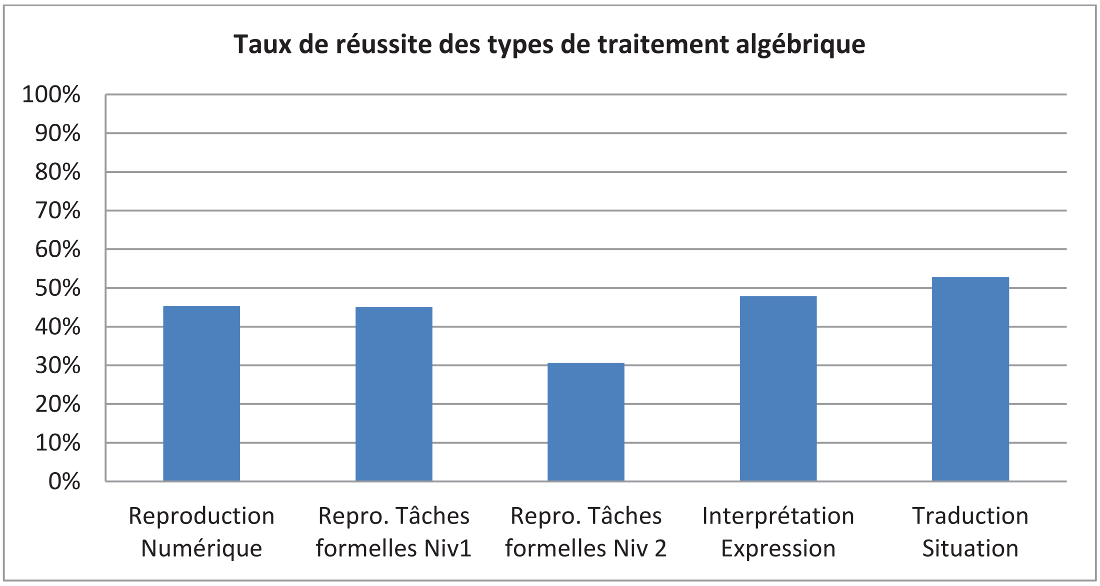


Figure 68 : Taux moyen de réussite des 160 élèves selon les types de traitement algébrique de Grugeon

Nous avons vu précédemment que les trois premiers types de traitement algébrique considèrent l'algèbre dans sa dimension objet alors que les deux derniers la considèrent dans sa dimension outil. Les résultats indiquent que *l'utilisation de l'outil algébrique pour traduire une situation*, ici géométrique, remporte plus de 50% de réussite, ce qui conforte les résultats précédents de la réussite des items géométriques, issus du savoir enseigné au collège. Les autres taux de réussite tournent autour de 30% à 50%, que ce soit pour une utilisation de l'algèbre en tant qu'objet ou outil, résultat qui corrobore celui trouvé par la classification en types de tâches.

Attardons-nous sur la composante *rapport arithmétique / algèbre* qui *permet de caractériser la signification accordée à la démarche algébrique et de la situer par rapport à la démarche arithmétique* (Grugeon, 1995, p.59). Comme présenté dans l'analyse a priori (cf. §8.3.2), la fin de l'exercice 1 permet particulièrement de « mesurer » cette composante puisque la question 3 a pour objectif d'engager une démarche algébrique pour prouver l'équivalence de deux expressions algébriques. L'item 3 correspondant permet de déterminer si l'élève a engagé un calcul littéral à partir de l'expression donnée dans le texte ou au contraire s'il argumente à partir d'exemples. Les résultats obtenus pour les 160 élèves testés donnent le graphique ci-dessous :

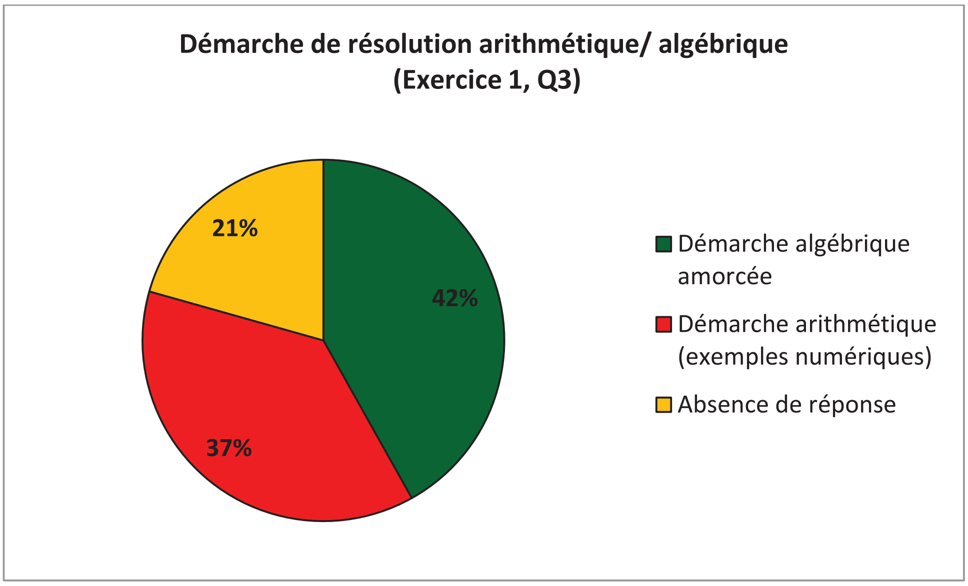


Figure 69 : Mesure de la compétence du rapport arithmétique / algèbre

Le taux de réussite est de 42%, c'est-à-dire que moins d'un élève sur deux est capable d'engager une démarche de résolution algébrique dans le contexte de l'exercice.

Suivent l'analyse de quelques réponses d'élèves, relevées pour leur intérêt.

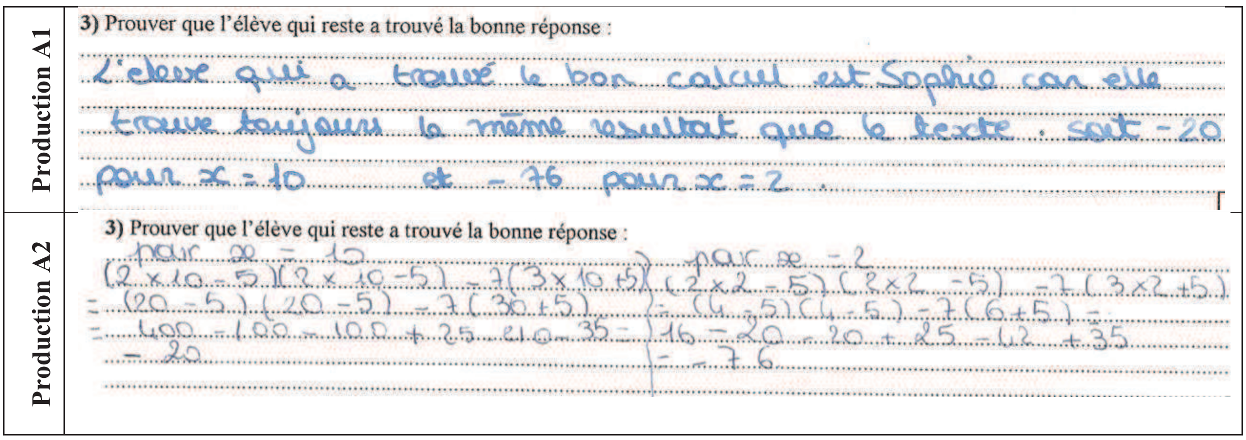


Figure 70 : Productions d'élèves utilisant une démarche arithmétique

Les deux élèves ci-dessus sont clairement dans une démarche arithmétique. La production A1 montre un élève capable d'interpréter que les résultats donnés dans l'énoncé pour les valeurs numériques 10 et 2 correspondent à des substitutions de la variable. Mais les valeurs numériques identiques trouvées pour les deux expressions $(2x - 5)^2 - 7(3x + 5)$ et $4x^2 - x - 10$ après substitution lui suffisent pour décider de l'égalité de ces deux expressions. Pour la production A2, l'élève semble comprendre que prouver que l'égalité est vraie, consiste à vérifier que les résultats numériques donnés dans l'énoncé sont exacts. Ainsi cet élève recalcule-t-il ces valeurs pour constituer cette « preuve ».

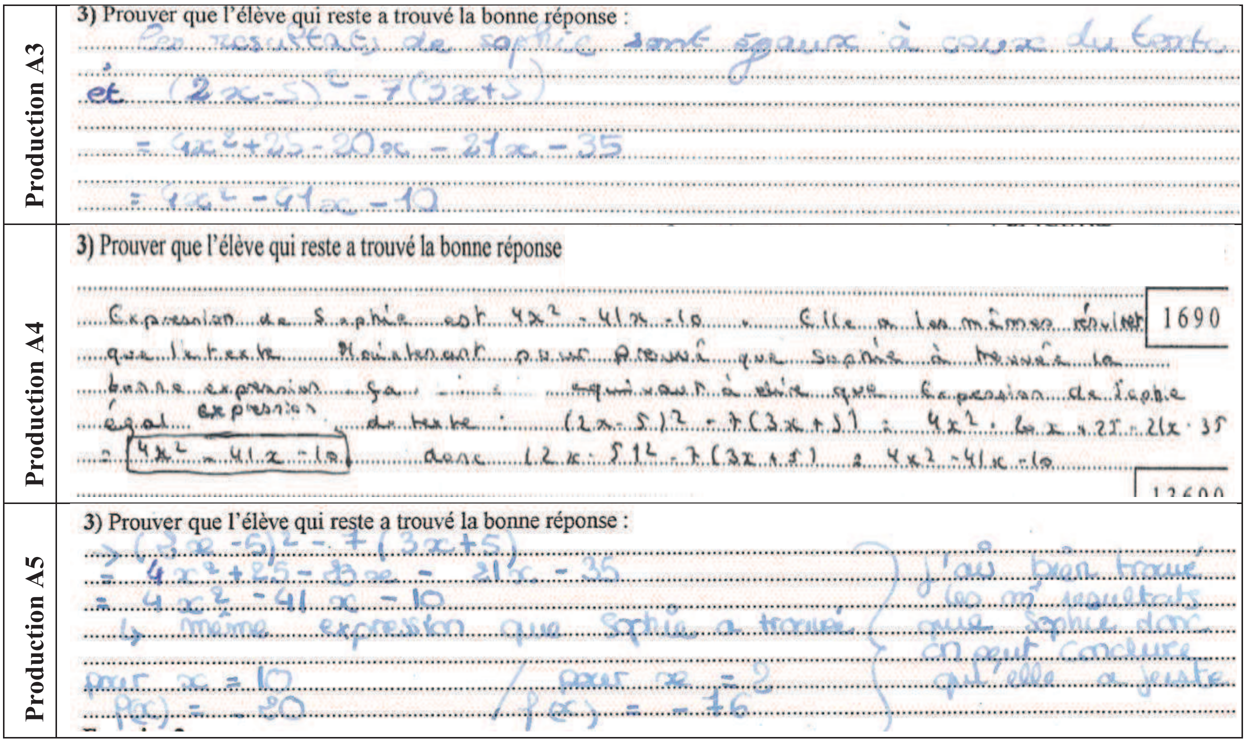


Figure 71 : Productions d'élèves utilisant une démarche algébrique

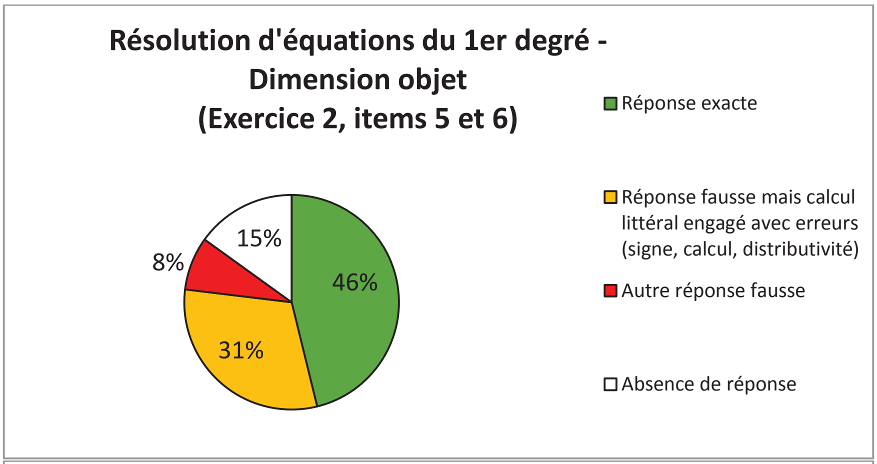
Les trois productions de la figure 71 montrent des élèves ayant engagé une démarche algébrique pour prouver l'égalité des deux expressions. Nous notons cependant quelques différences de formulation qui laissent penser que la prégnance de l'arithmétique reste forte chez certains élèves. En effet dans les trois productions, les élèves font référence aux valeurs numériques déterminées à partir de l'expression du texte et à partir de l'expression développée par Sophie. La production A3 montre un élève qui, par l'utilisation du connecteur « et », semble penser que les deux conditions, égalité des valeurs numériques et égalité des expressions algébriques sont indispensables à la preuve de l'égalité des deux expressions. La production A4 est différente : bien que l'élève mentionne les résultats pris par l'expression de Sophie, il n'y a aucune ambiguïté de sa part sur la nécessité de démontrer l'égalité des deux expressions algébriques pour un x quelconque. Cette même analyse peut être attribuée à la production A5 où l'élève ajoute un cadre fonctionnel (notation *f(x)*) dans sa réponse pour vérifier les résultats numériques.
Ainsi la démarche algébrique, même quand elle est présente, laisse paraître des disparités dans la finesse de la compréhension des objets et des relations algébriques.

Analyse des items spécifiques à la résolution d'équations polynomiales de degré 1 et 2, dans les dimensions objet et outil de l'algèbre

Cette dernière analyse est en lien direct avec l'expérimentation mise en place dans différentes classes de seconde. Comme, dans cette expérimentation, est étudiée plus spécifiquement la résolution des équations polynomiales de degré 1 et 2 et les objets algébriques qui les constituent, il nous a semblé pertinent de dégager des résultats précédents, une analyse plus fine des items qui ont porté sur la résolution de telles équations.

Nous présentons les résultats obtenus en distinguant les dimensions objet et outil de l'algèbre. Ainsi, quatre types de résultats sont proposés ici : le taux de réussite des élèves pour la résolution d'équations du 1er degré puis du 2nd degré dans un contexte où l'algèbre est objet et dans un contexte géométrique où l'algèbre est outil.

Les résultats suivants ont été obtenus pour le premier degré :



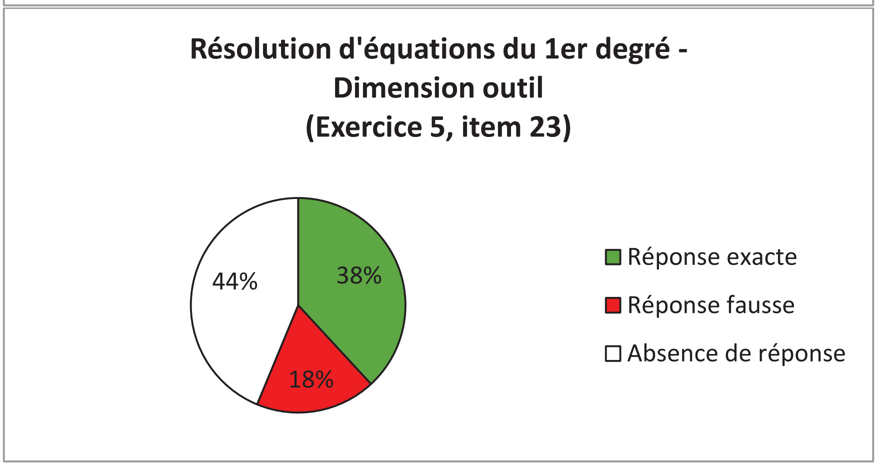


Figure 72 : Résultats des items relatifs à la résolution d'équations du 1er degré

Rappelons que les résultats du premier graphique sont relatifs à la résolution des deux équations de l'exercice 2 :

$2(x-1)+5x=3x+4-2(x+1)$ et $4(2x+5)-3x=x-4+2(x+12)$. Sur l'ensemble des 160 élèves testés de fin de seconde, seulement 46% sont capables de les résoudre convenablement.

Quelques erreurs ont été relevées afin de montrer le type d'erreurs rencontrées, ces erreurs ayant été choisies pour leur fréquence et leur typicité.

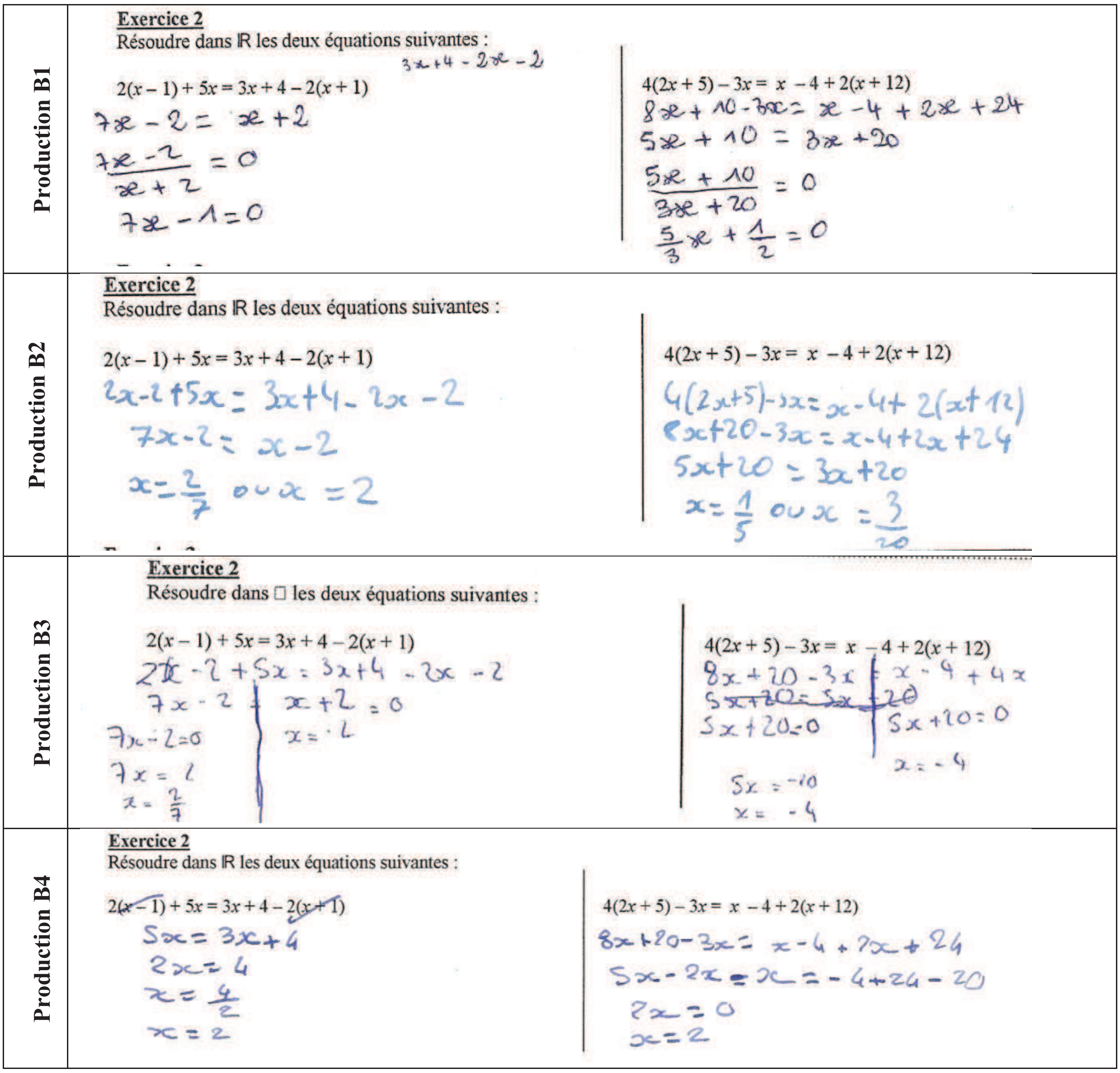


Figure 73 : Erreurs d'élèves sur les résolutions d'équations de l'exercice 2

Ces quatre premières productions montrent les erreurs et difficultés suivantes :

- les productions B1 et B2 indiquent une compréhension de la règle de distributivité et de son utilisation. En revanche, lorsque les élèves ont transformé les équations sous la forme $ax + b = cx + d$, ils utilisent une procédure erronée. Dans la production B1, nous notons une confusion entre les opérations de soustraction et de division, et dans la production B2, l'élève résout « $ax + b = 0$ ou $cx + d = 0$ », semblant confondre la résolution de $ax + b = cx + d$ avec celle de $(ax + b)(cx + d) = 0$. D'autres erreurs de calcul numérique et de signe sont relevées ;
- pour la production B3, l'erreur sur le type d'équation décrite pour la production B2 est également visible, en particulier, nous notons la barre de séparation symbolisant le traitement successif et cloisonné des membres de gauche et de droite de l'équation. Cette notation particulière montre que le signe d'égalité dans son sens « relation d'équivalence » est ignoré. Des erreurs sur les calculs de distributivité sont également présentes ;

- pour la production B4, pour l'équation de gauche, l'élève simplifie dans les deux membres de l'équation le terme $2(x-1)$ avec le terme $2(x+1)$, termes qu'il considère sans doute égaux. Pour l'équation de droite, le développement et la réduction sont effectués de façon correcte, l'erreur réside dans la résolution de l'équation $2x = 0$, pour laquelle l'élève trouve la solution 2. La résolution d'une équation de la forme $ax = 0$, où a est un réel donné est un cas particulier qui présente des difficultés de compréhension chez beaucoup d'élèves. Ci-dessous trois productions supplémentaires où sont représentées ces difficultés.

<table>
<tr><th>Production B5</th><th>Production B6</th></tr>
<tr><td>$4(2x+5)-3x = x-4+2(x+12)$
$8x+20-3x = x-4+2x+24$
$8x-3x-2x-x = -20-4+24$
$2x = 0$
$S : \{\emptyset\}$</td><td>$4(2x+5)-3x = x-4+2(x+12)$
$8x+20-3x = x-4+2x+24$
$5x+20 = 3x+20$
$5x-3x = 0$
$2x = 0$
$x = -2.$</td></tr>
<tr><th colspan="2">Production B7</th></tr>
<tr><td colspan="2">$4(2x+5)-3x = x-4+2(x+12)$
$4\times 2x+4\times 5-3x = x-4+2\times x+2\times 12$
$4\times 2x+20-3x = x-4+2x+24$
$9x+20-3x = 3x+20$
$5x+20 = 3x+20$
$5x = 3x$?</td></tr>
</table>

Figure 74 : Difficultés de résolution d'une équation du type ax = 0 ou ax = bx

Ces erreurs, qui ont été mises en avant dans de nombreuses recherches didactiques, peuvent avoir pour origine une mauvaise compréhension de la division de zéro par un nombre non nul ou la confusion entre « 0 divisé par 2 » et « 2 divisé par 0 » ou encore la difficulté d'accorder à zéro le statut de nombre (production B5). Dans la production B6, l'absence du symbole de multiplication semble entraîner une confusion entre les équations « $2 + x = 0$ » et « $2x = 0$ ». Pour la production B7, l'élève indique, par un point d'interrogation son incapacité à aller plus loin dans la résolution de « $5x = 2x$ ».

Pour les 160 élèves testés, nous avons relevé 19% d'élèves ayant mené correctement le développement et la réduction de l'équation présentée ci-dessus mais qui n'achèvent pas correctement la résolution, en aboutissant aux types d'erreurs présentées ci-dessus.

En ce qui concerne les résultats de l'exercice 5, il s'agit ici de produire et de résoudre une équation, traduite des données d'un problème de géométrie où une configuration de Thalès est reconnue. Selon la manière dont l'élève mène son calcul, la relation obtenue peut être une équation du 1^er^ degré de la forme $\frac{x}{a} = \frac{c}{b}$ où *a, b* et *c* sont donnés et où *x* est la longueur inconnue à déterminer, ou encore une équation où l'inconnue est en dénominateur, sous la forme $\frac{a}{x} = \frac{b}{c}$. Dans le cas de cette seconde forme, l'équation n'est plus directement du 1^er^ degré, mais *s'y ramenant*, en utilisant les termes du programme officiel de la classe de seconde (MEN, 2009a). Deux productions correctes d'élèves montrent la résolution menée selon les deux cas ci-dessus.

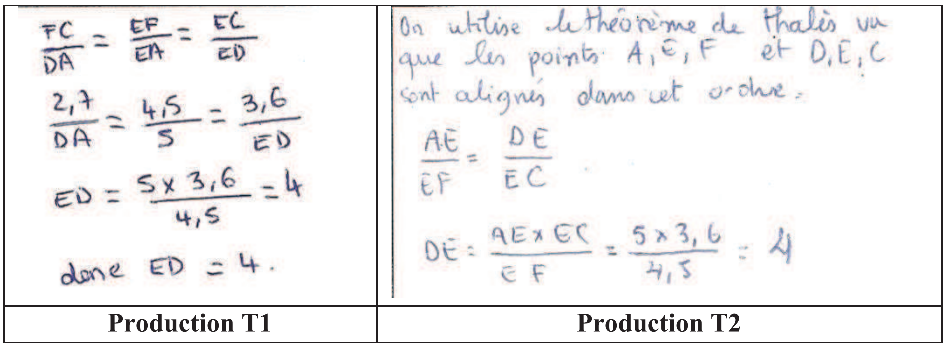


Figure 75 : Exemples de productions correctes permettant de déterminer DE (Exercice 5, question 3)

Ces deux productions ne reflètent pas la majorité des élèves puisque seuls 38% d'entre eux ont mené correctement cette résolution. En revanche, le taux de réussite de la reconnaissance de la configuration de Thalès est de 55%. (item 22) La déperdition du taux de réussite provient pour certains élèves d'une mauvaise détermination des longueurs à utiliser dans les égalités de rapports et pour d'autres, de la difficulté à mener les calculs pour résoudre une équation de la forme $\frac{x}{a} = \frac{c}{b}$ ou $\frac{a}{x} = \frac{b}{c}$, difficulté liée à la maitrise des règles sur les fractions. Donnons un exemple d'une telle procédure erronée :

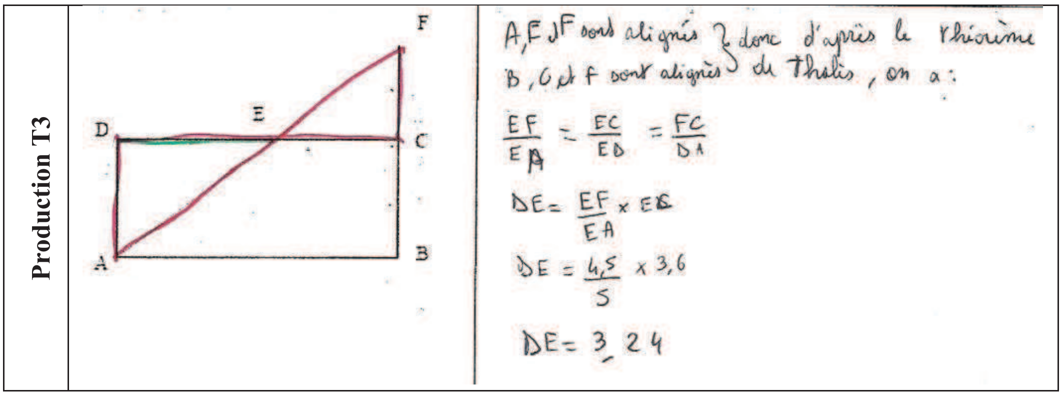
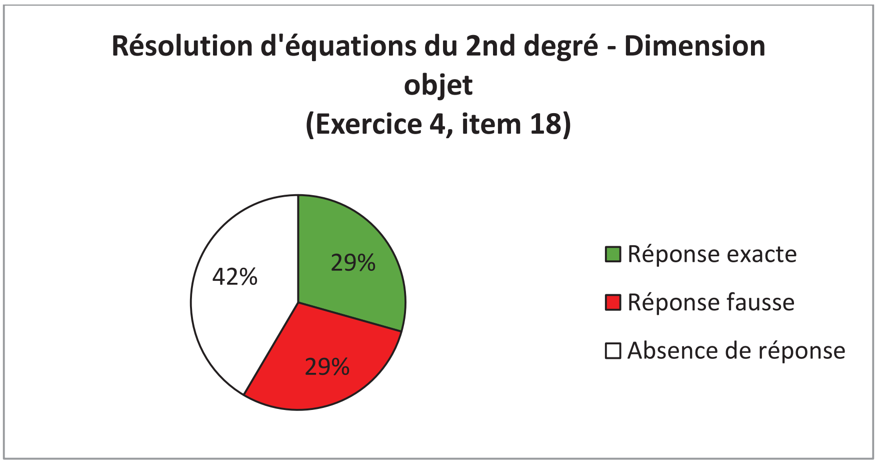


Figure 76 : Exemple de production montrant une erreur de transformation algébrique (Exercice 5, question 3)

Intéressons-nous aux résultats spécifiques aux items se rapportant à la résolution d'équations polynomiales de degré 2.



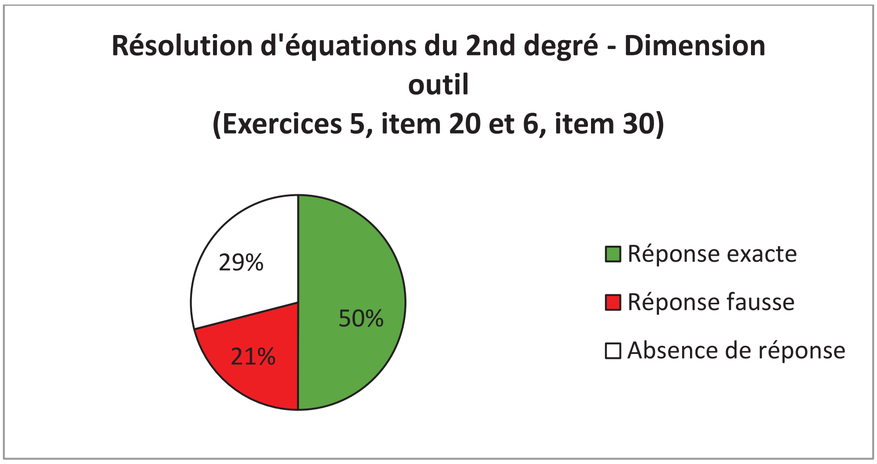


Figure 77 : Résultats des items de résolution d'équations de degré 2

Le résultat de 29% de réussite du premier graphique de la figure 77 est celui de la résolution de l'équation $(3x + 1)^2 - 4 = 0$. Rappelons que cette question est précédée de la détermination de la forme la plus adéquate de l'expression $(3x + 1)^2 - 4$ (item 17) pour résoudre cette équation, et dont le taux de réussite s'élève à 43%. Ce taux de réussite est identique pour la question 2 : « Factoriser l'expression $(3x + 1)^2 - 4$ ». Il y a donc un taux de déperdition de 14% d'élèves qui sont capables de déterminer l'aspect structural d'une expression dans le but de la résoudre mais qui n'ont pas acquis la technique de résolution de la forme obtenue. Cette remarque est à rapprocher du taux de réussite très satisfaisant de 77% de la tâche TA_4, « *Reconnaître des formes algébriques comme somme ou produit* », où les élèves dans leur grande majorité, sont ici capables de dire qu'une forme produit convient. Ils savent ce qu'est une forme produit mais n'ont pas la capacité à transformer formellement une expression pour qu'elle prenne la forme d'un produit.
Viennent quelques productions choisies d'élèves montrant les difficultés rencontrées.

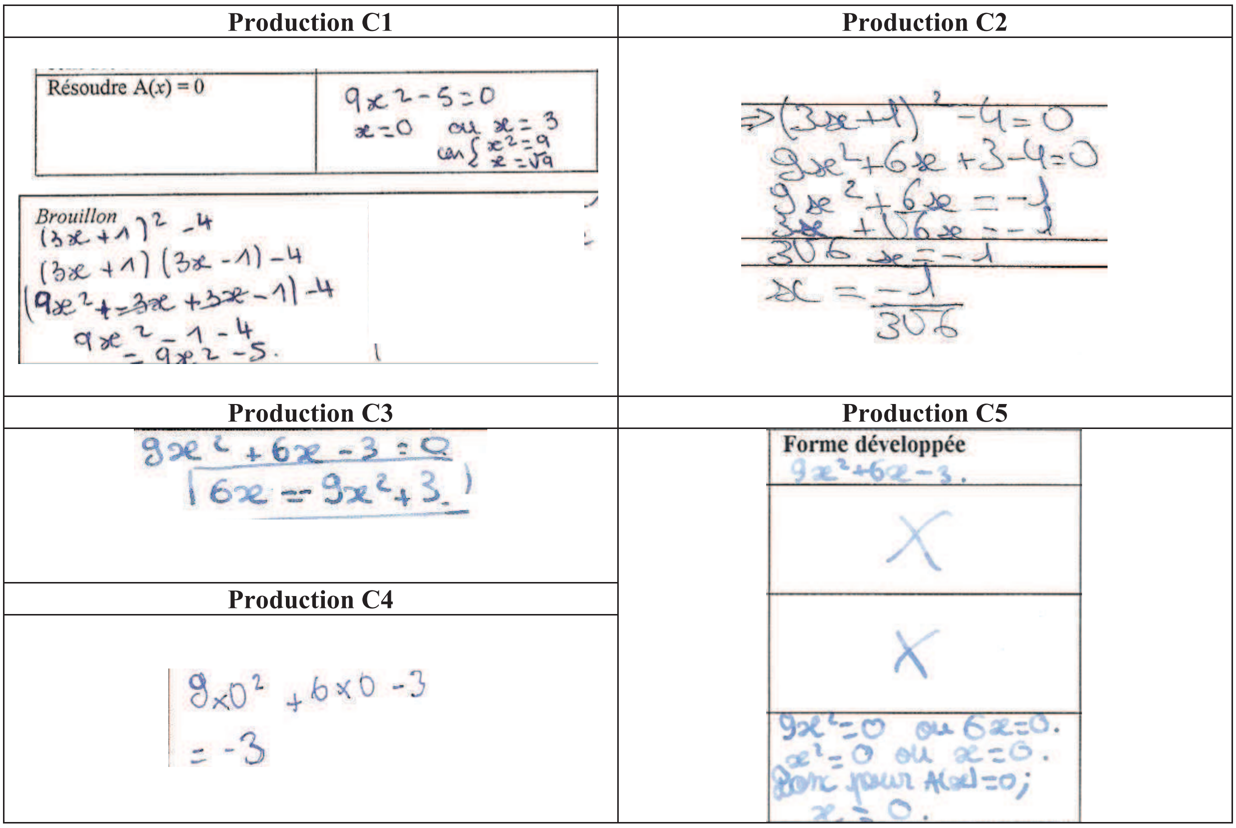


Figure 78 : Productions d'élèves utilisant la forme développée pour résoudre l'équation (3x + 1)² – 4 = 0

Les cinq productions ci-dessus montrent des élèves ayant choisi de développer l'expression $(3x + 1)^2 - 4$ afin de résoudre l'équation $(3x + 1)^2 - 4 = 0$. Sans erreur de calcul, les élèves utilisant cette technique devraient aboutir à l'équation $9x^2 + 6x - 3 = 0$, équation qu'ils ne peuvent résoudre directement avec les techniques algébriques vues au collège et en seconde. C'est en première générale que cette équation sera résolue en utilisant la technique du discriminant. Le développement de l'expression ne permet donc pas à ces élèves de résoudre l'équation et tous échouent.

Les productions C1 et C2 montrent une erreur dans le développement de l'identité remarquable $(3x + 1)^2$.

Les productions C1 et C5 montrent un même type de confusion, sur l'application du *théorème en actes* (Vergnaud, 1990) erroné suivant : « $A + B = 0 \Rightarrow A = 0 \text{ ou } B = 0$ ».

Les productions C2 et C3 indiquent des élèves essayant d'isoler x dans le premier membre de l'égalité, comme ils le feraient pour une équation du premier degré. Pour la production C2, nous notons des confusions supplémentaires relatives aux règles de transformations des racines carrées. Enfin, la production C4 montre un élève confondant la résolution de $9x^2 + 6x - 3 = 0$ avec la substitution de la valeur zéro à la variable x dans l'expression $9x^2 + 6x - 3$. Les écritures algébriques sont vides de sens pour ces élèves et dévoilent une conception *pseudo-structurale* des équations, au sens de Sfard.

Ces conceptions erronées sont encore plus décelables dans la production C6 qui suit, où l'élève (à qui il était demandé de choisir la forme la plus adaptée pour résoudre l'équation précédente) propose une résolution selon les trois formes de l'expression, sans aucun feed-back sur le fait que les solutions de l'équation trouvées dans les trois cas sont différentes.

Production C6		
Forme initiale	Forme développée	Forme factorisée
$A(x) = (3x+1)^2 - 4 = 0$ $\Rightarrow 3x+1=0 ;\ x = \frac{-1}{3}$	$9x^2+6x-3=0$ $9x+6x-3=0$ $15x-3=0 \Rightarrow x = \frac{3}{15}$	$(3x-1)(3x+3)=0$ $3x-1=0 ;\ x=\frac{1}{3}$ $3x+3=0 ;\ x=-1$

Figure 79 : Un exemple de conception procédurale des équations

Finissons par la production C7 où un élève a utilisé l'expression factorisée pour la résolution mais où il a omis de considérer la racine carrée de 4, cette erreur pouvant être imputée à une mauvaise utilisation de l'identité remarquable ou à des difficultés avec le concept de racine carrée. Notons également que les résolutions des équations du 1er degré sont erronées, elles comportent des erreurs de signe.

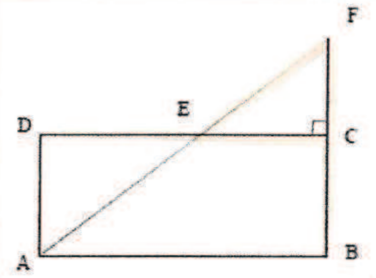
Production C7
2) Reprendre l'expression initiale et factoriser A(x). $(3x+1)^2 - 4 = (3x+1)^2 - \sqrt{4}^2 = ((3x+1)+4)((3x+1)-4)$
3) Résoudre A(x) = 0 • Soit $3x+1+4=0$ $3x=5 \Leftrightarrow x=\frac{5}{3}$ • Soit $3x+1-4=0$ $3x=-3$ $x=\frac{-3}{3}=-1$ $S=\{-1, \frac{5}{3}\}$

Figure 80 : Erreur sur la factorisation de l'expression algébrique de l'exercice 4

Quant au taux de réussite de la résolution d'équations du 2nd degré dans sa dimension *outil*, commençons par noter qu'il ne porte pas sur le même type d'équations que celui testé pour la dimension *objet*. En effet, pour la dimension objet, il s'agit de résoudre une équation du 2nd degré en la ramenant, par une identité remarquable, au produit nul de deux équations du 1er degré, alors que pour la dimension outil, sont demandées la production et la résolution d'une équation du type $x^2 + a^2 = b^2$, traduite des données d'un problème de géométrie où une configuration de Pythagore est reconnue. Notons que la technique usuellement enseignée en classe de 4ème de telles équations issues du théorème de Pythagore est basée sur :

- la transposition du terme a^2 dans le 2nd membre, $x^2 = b^2 - a^2$;
- la racine carrée du résultat précédent, $x = \sqrt{b^2 - a^2}$;
- la non-prise en compte de la valeur négative de l'équation, puisque l'inconnue x représente une longueur.

Cette technique est connue et maîtrisée pour une moitié des élèves testés. Suivent deux productions d'élèves pour illustrer les propos ci-dessus.

Production D1		
Question	**Figure**	**Démonstration** *Faire apparaître les différentes étapes de la démonstration.*
1) Démontrer que EC = 3,6		•ABCD est un rectangle : donc (B F) perpendiculaire à (DC) donc : FCE est un triangle rectangle en C Donc d'après le théorème de Pytagore : $EC^2 + CF^2 = EF^2$ $Ec^2 + 2{,}7^2 = 4{,}5^2$ $Ec^2 = 20{,}25 - 7{,}29$ $Ec^2 = 12{,}96$ $\sqrt{Ec^2} = \sqrt{12{,}96}$ $Ec = 3{,}6$

Production D2
~~D'après~~ On sait que B, C et F alignés, ABCD est un rectangle, d'après le theoreme de Pythagore on a : $EC^2 = EF^2 + FC^2$ $EC^2 = 4{,}5^2 + 2{,}7^2$ $EC^2 = 20{,}25 + 7{,}29$ $EC^2 = 27{,}54$ $EC \simeq 5{,}25$ cm

Figure 81 : Exemples de productions sur la résolution d'une équation du type $x^2 + a^2 = b^2$, dans le cadre géométrique

Les deux productions montrent la technique décrite ci-dessus. L'erreur dans la production D2 ne relève pas du domaine algébrique, mais de la reconnaissance de l'hypoténuse dans le triangle rectangle EFC. Nous voyons ainsi une des limites dans la conception du test : il aurait été intéressant de comparer le taux de réussite à cet item avec celui de l'équation $x^2 + 2{,}7^2 = 4{,}5^2$ dans un cadre algébrique, afin de mesurer entre autres le taux d'élèves donnant la solution négative de l'équation.

8.3.4 Bilan et premières réponses à l'hypothèse H2

Les résultats de l'analyse du test permettent de dégager – en considérant indifféremment soit le découpage des tâches algébriques selon le type de tâches des praxéologies de Chevallard, soit les composantes de la compétence algébrique de Grugeon – que le taux de réussite moyen pour l'ensemble de ces tâches est d'environ **45**% pour les 160 élèves de fin de seconde du lycée considéré. Rappelons que ce lycée est considéré par l'institution EN comme un lycée français moyen, où le taux de réussite au baccalauréat se situe dans la moyenne nationale.

En prenant les précautions d'usage sur la validité de ces résultats, vue la taille relativement faible de l'échantillon, nous pouvons néanmoins considérer que ce taux de réussite n'est pas satisfaisant, d'autant plus qu'une grande partie des capacités testées font partie des savoirs enseignés au niveau du collège.

Reprenons quelques résultats clefs obtenus dans l'analyse :

- **46**% des élèves résolvent convenablement les deux équations du premier degré de l'exercice 2 du test ;
- **19**% des élèves qui parviennent à réduire une équation du 1er degré sous la forme $ax = 0$, où a est un nombre déterminé, ne savent pas la résoudre ;

- **43**% des élèves sont capables de déterminer que la forme factorisée est la plus adaptée pour résoudre une équation du 2nd degré de la forme $(ax + b)^2 - c^2 = 0$, où a, b et c sont des nombres déterminés, mais seulement **29**% de ces élèves la résolvent sans erreur.

Les erreurs analysées dans les productions présentées montrent en particulier des confusions de techniques de résolution pour résoudre des équations du premier ou du second degré. Par exemple, des élèves confondent la résolution de $ax + b = cx + d$ avec celle de $(ax + b)(cx + d) = 0$, ou encore ils tentent d'appliquer la technique, propre aux équations du premier degré qui consiste à isoler l'inconnue x dans un membre, pour tenter de résoudre une équation du second degré de la forme $ax^2 + bx + c = 0$.

De nombreuses erreurs également ont été relevées sur le sens du signe d'égalité, sur la manipulation des nombres négatifs, sur la confusion entre les opérations d'addition et de multiplication (respectivement de soustraction et de division), mais également sur les règles de calcul des fractions et des racines carrées, montrant les interférences fortes entre les domaines du numérique et de l'algébrique. Bronner (2007) souligne ces interférences :

> Dans le cadre arithmétique les fractions et les radicaux ne sont pas encore des objets de l'algèbre au sens où ils ne font pas (encore) intervenir des lettres. Mais ces objets relèvent déjà de l'algébrique même dans le numérique car ils font l'objet *« d'un jeu formel portant sur des écritures »* de nombres déterminés (Chevallard, 1985b).

Ce jeu formel d'écritures sur les fractions et les radicaux, entremêlé au jeu formel d'écritures des expressions algébriques vient encore complexifier le travail de l'élève sur la résolution d'équations.

Relativement à la démarche de résolution algébrique, nous avons relevé que **42%** des élèves sont capables d'engager une démarche de résolution algébrique (dans le contexte de l'exercice 1) et nous avons noté que même si la démarche algébrique est présente, elle est souvent mal dissociée de la démarche arithmétique.

Tous ces éléments vont dans le sens d'une confirmation de l'hypothèse H2. En effet, à travers ce test, nous avons vu l'algèbre fonctionner dans le cadre algébrique, essentiellement en tant qu'*objet* et également dans le cadre géométrique en tant qu'*outil*. Les résultats obtenus confortent l'hypothèse d'une difficulté à comprendre les objets de l'algèbre et les relations algébriques puisqu'environ 6 élèves sur 10 échouent dans la plupart des tâches algébriques décrites dans l'analyse du test. Des élèves connaissent quelques techniques isolées, qu'ils savent appliquer lorsque l'algèbre est contextualisée, comme résoudre une équation issue de l'égalité de Pythagore en donnant la solution positive de l'équation ou encore utiliser la règle du produit en croix pour déterminer une longueur dans l'écriture des rapports du théorème de Thalès. Néanmoins, leur capacité à décontextualiser les notions algébriques ainsi vues localement n'est pas suffisante pour comprendre les objets de l'algèbre.

CHAPITRE 9 – PRÉSENTATION DE LA TRAME D'INGÉNIERIE DIDACTIQUE

9.1 Introduction

Comprendre que résoudre une équation relève d'une technique plutôt que d'une autre implique de savoir reconnaître sa nature (équation polynomiale, rationnelle, …) et sa forme (développée, factorisée, quotient …). Ainsi, lorsqu'une équation est proposée à sa résolution, la première question à se poser est de déterminer la nature de cette équation, afin de lui appliquer une technique de résolution adéquate.
Pour exemplifier ces propos, suit une production d'élève de seconde (classe d'Annabelle), à qui est demandé de résoudre l'équation $x^2 + 6x + 9 = 0$. En passant ici sous silence les difficultés liées au concept de racine carrée, nous pouvons interpréter sa tentative de résolution comme l'application d'une technique adaptée à la résolution d'une équation polynomiale du premier degré, qui consiste en la transposition des termes comportant l'inconnue à gauche de l'équation et des nombres déterminés à droite.

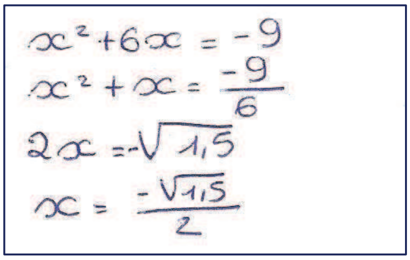


Figure 82 : Un exemple d'inadaptation de la technique de résolution de l'équation proposée

L'inadaptation de cette technique à cette équation est loin d'être un cas isolé, comme le montre les résultats de l'étude des connaissances des élèves (cf. § 8.3.3). C'est ainsi qu'est née l'idée de proposer une tâche *de catégorisation des équations*, afin de d'établir ensuite des *techniques algorithmisées* permettant de les résoudre.
Si un élève est capable de reconnaître la nature d'une équation donnée, il peut lui appliquer tel type de technique pour la résoudre. Le type d'équations retenues pour l'étude est conforme à celui au programme de seconde en vigueur, soit les équations polynomiales du premier et du second degré.
La *trame d'ingénierie* (définie en section 6.1.3) se compose de trois situations dont l'objectif est la reprise de l'étude des équations polynomiales du premier et du second degré par le biais de l'algorithmique. Ces trois situations sont décrites et analysées dans ce paragraphe. Il est également indiqué les éléments de l'OM et de l'OD que les professeurs expérimentateurs peuvent modifier pour transposer cette trame d'ingénierie en leur *trame projetée*. Notons que nous avons choisi le terme de *situation* en référence à la théorie de Brousseau, fondée sur le fait que l'apprentissage d'un savoir mathématique passe par la mise en place de situations,

créées de manière à faire émerger ce savoir. Une définition d'une telle situation est donnée de la façon suivante par Brousseau (2010a) : *la situation est composée de règles (d'un jeu) proposées par le professeur et d'un milieu composé de contingences matérielles et des savoirs de l'élève. Le milieu et les règles déterminent ensemble la trouvaille probable de la réponse et de la solution.* Kuzniak (2005) ajoute qu'*une situation didactique est une situation où se manifeste directement ou indirectement une volonté d'enseigner.*
C'est dans ce sens que nous utilisons le vocable situation dans la suite.

9.2 Situation n°1

9.2.1 Présentation de la situation n°1

Objectifs
Cette première situation a plusieurs objectifs :
- évaluer les représentations des élèves quant aux équations polynomiales de degré 1 et 2 ;
- initier ou renforcer chez les élèves la connaissance que la forme d'une équation algébrique polynomiale (développée, factorisée, …) et son degré influent sur la technique à adopter pour la résoudre ;
- préparer les situations n°2 et n°3 où l'introduction de l'algorithmique revient sur la reconnaissance d'une forme algébrique et les techniques associées de résolution ;
- évaluer les représentations des professeurs sur les connaissances des élèves quant aux équations algébriques polynomiales de degré 1 et 2.

Motivation
La motivation de cette première situation est basée à la fois sur les résultats obtenus au test diagnostique de fin de seconde (cf. §8.3) qui ont montré les faibles connaissances des élèves dans le thème de la résolution d'équations polynomiales. Ainsi cette première situation a-t-elle été conçue, ainsi que les deux suivantes dans l'idée d'une *reprise*, au sens de Larguier de ce thème où *des connaissances ont déjà été rencontrées en collège [...] et leur reprise peut aller des révisions systématiques jusqu'à une avancée du temps didactique en reliant l'ancien à du nouveau.* (Larguier, 2009)

Matériel du milieu initial
Afin d'atteindre les objectifs cités ci-dessus, la situation n°1 consiste en un classement par des élèves d'une classe de seconde d'une vingtaine d'équations polynomiales de degré 1 ou 2. Dans l'esprit d'une *reprise* qui allie l'ancien et le nouveau, une nouvelle façon de « manipuler » les équations leur est proposée. En effet, des équations numérotées et présentées sur des cartons individuels (cf. figure 83) leur sont distribuées, afin qu'ils les trient, les classent, les déplacent, les comparent en leur permettant physiquement de placer ces équations les unes à côté des autres pour mieux les visualiser dans un premier temps puis pour « mettre ensemble celles qui se ressemblent » selon des critères à déterminer. En proposant aux élèves des cartons qu'ils peuvent manipuler, nous les mettons dans une situation d'activité de catégorisation, avec des « images » mobiles permettant de modifier les

associations réalisées, selon des relations variables. De plus, ce travail de classification sera proposé en groupes afin de favoriser la verbalisation sur les critères des catégories créées.

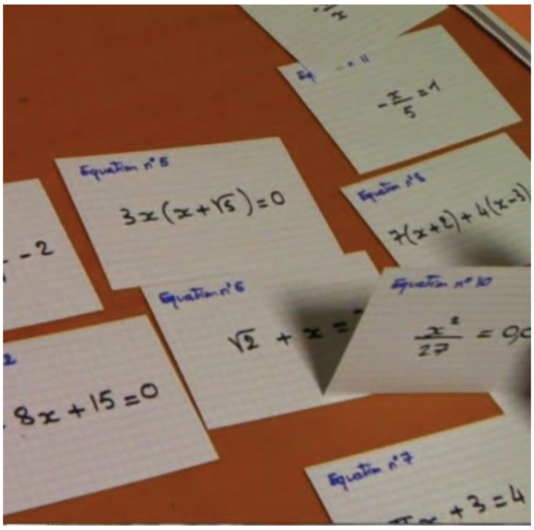


Figure 83 : Jeu d'équations sur fiches cartonnées mis à disposition de chaque groupe d'élèves.

Une grande affiche (format 65 cm × 1m) est également fournie à chaque groupe. Le choix de cette forme de restitution est multiple : d'une part la création collective de cette affiche devrait favoriser les échanges intra-groupes durant la phase de recherche, d'autre part les affiches ainsi constituées sont ensuite récoltées et présentées ensemble au tableau (cf. figure 84) de manière à inciter les groupes d'élèves à comparer leur classification avec celles des autres groupes. En effet, la visualisation simultanée d'affiches de grande taille permet de comparer le nombre de catégories formées ou encore la présence de telle ou telle équation dans une catégorie plutôt que dans une autre et favorise ainsi le débat. Enfin, un côté pratique est également à évoquer pour le chercheur : le recueil des classements effectués par les différents groupes est facilité.

Figure 84 : Affiches récoltées et présentées au tableau

Les équations proposées (cf. A11) sont de la forme suivante, où les paramètres cités (*a, b, c, d*) sont des nombres fixés pouvant être des entiers naturels (éventuellement nuls) ou relatifs, des décimaux non entiers, des rationnels non décimaux ou des irrationnels :

- $ax + b = c$ (1)
- $ax + b = cx + d$ (2)

- $(ax + b) + (cx + d) = 0$ (3)
- $(ax + b)(cx + d) = 0$ (4)
- $ax^2 + b = c$ (5)
- $(ax + b)^2 = c$ (6)
- $ax^2 + bx + c = d$ (7)

Notons qu'il n'est pas mentionné l'ensemble de résolution de ces équations. Les élèves du niveau de la classe de seconde ne connaissant pas l'ensemble des complexes, le contrat didactique implicite est de résoudre ces équations (éventuellement sans solutions) dans l'ensemble des réels. Le choix de ces équations permet d'atteindre les deux premiers objectifs cités plus haut, soit d'évaluer les représentations des élèves sur les équations et de renforcer, ou le cas échéant de faire germer, la connaissance que la forme et la nature d'une équation influent sur sa technique de résolution.
Explicitons plus en détail le choix de ces sept formes d'équations retenues. Par rapport au *savoir savant*, les formes (1), (2) et (3) appartiennent à une même catégorie, quelle que soit la valeur donnée aux paramètres *a, b, c, d*. Cette catégorie est celle des équations polynomiales du premier degré dont tout lecteur averti dispose des techniques éprouvées pour les résoudre. Cependant, nous avons développé en section 2.2 les travaux de Grugeon (2000) sur les différences de techniques employées pour résoudre les équations de type (1) (techniques arithmétiques) et celles pour résoudre les équations de type (2) (techniques algébriques). Ainsi le *savoir enseigné* par les professeurs et *appris* par les élèves pourrait-il impliquer que ces derniers considèrent les équations de type (1) et (2) sont de catégories différentes.
Les équations de type (4) sont proposées dans deux objectifs :
- les proposer avec des paramètres *a, b, c, d* identiques à des équations de type (3) afin d'évaluer si les élèves privilégient l'égalité des paramètres par rapport à la forme « somme » ou « produit » de l'équation ;
- les proposer pour identifier la catégorie dans laquelle les élèves les insèrent ; par exemple, reconnaissance du second degré, reconnaissance d'une équation de la forme « produit nul de deux expressions polynomiales du premier degré » et connaissance d'une technique pour les résoudre.
Enfin, les équations (5), (6) et (7) sont, par rapport au savoir *savant*, dans la catégorie des équations polynomiales du second degré, dont une technique pour les résoudre est le calcul du discriminant et si son signe est positif, le calcul des racines réelles par les formules classiques. Cependant, cette technique n'est enseignée qu'au niveau de la classe de première générale et les élèves de seconde ne l'ayant pas encore rencontrée dans leur cursus scolaire ont appris des techniques différentes pour résoudre certaines de ces équations.
Ainsi, par rapport au savoir *enseigné*, les élèves peuvent-ils résoudre les équations du type (5) et (6) par des techniques apprises en classe de troisième et reprises en classe de seconde (cf. programmes exposés au chapitre 5) alors que les techniques dont ils disposent pour résoudre les équations de type (7) ne sont valables que lorsque les paramètres proposés permettent de se ramener à une identité remarquable sous la forme $x^2 + 2mx + m^2 = 0$ (*m* réel fixé). Notons de plus que les équations de type (6) sont proposées afin d'évaluer deux types de comportement :

- si un élève classe les équations de type (6) avec celles de type (5), il considère $(ax + b)^2 = c$ comme « le carré d'un nombre égal à un autre nombre » et nous conclurons sur la prégnance de l'aspect *structural* de la forme algébrique ;
- en revanche, s'il classe les équations de type (6) avec celles de type (7), il privilégie alors la forme développée de l'expression $(ax + b)^2$ et c'est l'aspect *procédural* qui est privilégié.

9.2.2 Analyse a priori de la situation n°1

Type de tâches de la situation proposée

Comme indiqué dans la section de présentation ci-dessus, le but pour les élèves de la situation n°1 consiste en un classement d'une vingtaine d'équations polynomiales de degré 1 ou 2. Désignons par T_I le type de tâches rencontrées par les élèves que nous caractérisons comme suit :

T_I[130], classer des équations polynomiales de degré 1 ou 2 selon des critères à déterminer.

Les équations proposées étant polynomiales, du premier et du second degré, on peut qualifier cette OM de *locale* au sens de Chevallard, puisque le type de tâches à effectuer regroupe plusieurs thèmes d'étude. Partant de ce constat, nous pouvons déjà analyser que ce type de tâches n'est pas un type de tâches *routinier* (Chevallard, 1999), au sens où il demande de réaliser une synthèse des équations vues au cours de la scolarité de l'élève, incluant des reprises des années collège.

Techniques associées au type de tâches de la situation proposée

Les techniques utilisées pour réaliser le type de tâches T_I vont dépendre de deux points essentiels :
- le sens que les élèves attribuent au terme « classer » ;
- la représentation que les élèves se font d'une équation, leurs connaissances sur les équations et les signifiants qui entrent dans les objets d'une équation.

Plusieurs paramètres sont donc susceptibles d'influencer les techniques que vont utiliser les élèves pour réaliser la tâche T_I. Par rapport au verbe « classer », on peut considérer les deux sens suivants, donnés ici par le dictionnaire Larousse en ligne[131] :

(1) *Distinguer dans un ensemble des groupes d'éléments ayant des caractéristiques communes et qui forment des classes, des catégories*, par exemple classer les mots en « verbes », « adjectifs », « noms », etc. ;

(2) *Ranger, ordonner des choses, des personnes d'une certaine manière : les mettre en ordre,* par exemple classer des mots par ordre alphabétique.

Un premier paramètre qui va influencer les techniques est donc le sens (1) ou (2) que les élèves attribueront au verbe « classer ». Les définitions et les deux exemples donnés ci-dessus montrent en effet que le sens (1) induit un classement catégoriel alors que le sens (2) induit un ordonnancement.

D'autres paramètres vont dépendre du savoir appris et construit par l'élève autour du concept d'équation. Par rapport à ces facteurs, on peut utiliser la dualité de la nature *structurale* et

[130] L'abréviation T_I correspond au Type de tâches de classement avec des critères Indéterminés.
[131] http://www.larousse.fr/dictionnaires/francais/classer/16406#16276

procédurale des expressions algébriques définie par Sfard (1991) en distinguant deux groupes pour caractériser les types de techniques associées à T_I :
- les techniques *qui nécessitent de résoudre les équations (à la main ou mentalement) entièrement ou partiellement avant les groupements* où est considéré le double aspect *structural* et *procédural* d'une expression algébrique ;
- les techniques *qui ne nécessitent pas de résoudre les équations (même partiellement) avant les groupements* où la classification repose davantage sur l'aspect *structural* et où il est possible de rencontrer des élèves ayant une conception *pseudo-structurale* (au sens de Sfard et Linchevski, 1994) d'une expression algébrique.

Nous pensons en effet que le type de tâches T_I ne demandant pas explicitement de « résoudre » les équations mais de les « classer », les élèves ne vont pas forcément se lancer dans une tâche de résolution. Selon leurs connaissances sur les équations, sur la représentation qu'ils s'en font, ils pourront effectuer un classement résultant d'autres critères, comme la forme globale de celles-ci, la présence de signifiants comme x, x^2, la présence de parenthèses, la nature des nombres déterminés, etc. Autrement dit, lorsqu'il est demandé aux élèves de « classer des équations selon des critères à déterminer », deux types de comportement pourront être observés : soit les élèves considèrent qu'un « bon critère » pour ranger des équations dans une même catégorie est de considérer si leur technique de résolution est semblable ou non, soit ils observent d'autres critères plus « visibles », liés à des ostensifs précis (inconnue au carré, parenthèses, écriture fractionnaire, etc.).

En croisant les sens du verbe « classer » et les types de critères de classement liés aux objets mathématiques, nous avons tenté de lister a priori dans le tableau ci-dessous les techniques qui peuvent être associées à T_I. Notons que les techniques présentées ne sont pas totalement exhaustives et qu'il en existe certainement des variantes. Une explication de ces techniques suit le tableau.

<table>
<tr><th colspan="4">Tâche T_I : classer des équations polynomiales selon des critères à déterminer</th></tr>
<tr><td rowspan="2">Sens (1) du verbe classer</td><td>Techniques qui ne nécessitent pas de résoudre les équations (même partiellement) avant les groupements</td><td>τ_{11} : Grouper les équations, somme ou différence d'une part et les équations produit ou quotient d'autre part.
τ_{12} : Grouper les équations polynomiales du premier degré d'une part et les équations du second degré d'autre part.
τ_{13} : Grouper les équations selon la nature des nombres déterminés (entiers, décimaux, rationnels, irrationnels, …).</td><td rowspan="3">Remarque : pour chaque technique, des sous-classes peuvent être créées et un sous-groupe comportant des équations « inclassables » peut être envisagé.</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Techniques qui nécessitent de résoudre les équations (à la main ou mentalement) entièrement ou partiellement avant les groupements</td><td>τ_{15} : Grouper les équations selon leur nombre de solutions.
τ_{16} : Grouper les équations selon qu'une résolution directe est possible ou qu'une transformation de l'équation est nécessaire à sa résolution.
τ_{17} : Grouper les équations selon la nature des nombres-solutions de celles-ci. (Par exemple, mettre ensemble les équations admettant zéro pour solution, puis celles admettant des rationnels, des irrationnels, …).</td></tr>
<tr><td>Sens (2) du verbe classer</td><td>τ_{21} : Ordonner les équations de la plus simple à résoudre à la plus difficile, selon qu'elles comportent des transformations plus ou moins expertes à effectuer.
τ_{22} : Ordonner les équations de la plus simple à résoudre à la plus difficile, selon que les techniques pour les résoudre sont acquises ou non par l'élève.</td></tr>
</table>

Tableau 85 : Inventaire des techniques possibles en fonction du sens donné au verbe « classer »

Avant d'entrer dans les détails de ces techniques, précisons qu'elles ont été déterminées par rapport à des comportements attendus d'élèves. Ce sont des techniques plausibles de classement, avec une pertinence plus ou moins grande. Pour exemplifier, prenons les deux équations : $(3-4x)-(2x-1)=0$ et $(3-4x)(2x-1)=0$. Ces deux équations pourraient se trouver, en utilisant la technique τ_{13}, dans le même groupement puisqu'elles ont des coefficients identiques. Nous ne considérons pas que ce classement soit erroné en lui-même mais sa pertinence reste très limitée, par rapport au concept d'équation. D'autre part, les critères de classement choisis peuvent conduire à montrer des connaissances correctes ou non, comme la notion de degré par exemple. En effet, un élève qui choisirait la technique τ_{12} pour classer les deux équations données pourrait aboutir à une partition correcte en deux groupements « équations du premier degré » et « équations du second degré ». Cependant, il pourrait également placer dans le groupement « équations du premier degré » les deux équations : $(3-4x)-(2x-1)=0$ et $(3-4x)(2x-1)=0$, en considérant que ces équations comportent des termes « visibles » en x et aucun en x^2. C'est bien ici la notion de degré d'une équation polynomiale qui n'est pas comprise et l'on peut rattacher cette réponse à une conception *pseudo-structurale* où les élèves considèrent les *expressions algébriques comme des chaînes de symboles vides de sens ainsi que les manipulations formelles qui les régissent* (Sfard et Linchevski, 1994).

Les techniques croisant le sens (1) du verbe classer et les techniques de classement ne nécessitant pas de résoudre les équations s'appuient davantage sur la forme globale des équations comme :

- la reconnaissance d'une forme « somme » ou « produit » ou « quotient » de l'équation (technique τ_{11}) ;
- la reconnaissance du degré de l'équation (technique τ_{12}) ;
- la prise en compte de la valeur des nombres déterminés (technique τ_{13}) qui peut conduire à des classements peu pertinents, comme par exemple ranger les équations $1{,}8x-3=2{,}5x+7{,}4$ et $8x-3=2x+7$ dans deux classes différentes parce qu'elles ont des coefficients entiers pour l'une et décimaux (non entiers) pour l'autre.

Viennent ensuite les cinq techniques de classement (τ_{15}, τ_{16}, τ_{17}, τ_{21}, τ_{22}) nommées *techniques qui nécessitent de résoudre les équations (à la main ou mentalement) entièrement ou partiellement avant les groupements*. Dans le tableau présenté ci-dessus, elles peuvent se rencontrer si les élèves ont compris les sens (1) ou (2) du verbe classer. Elles requièrent pour être utilisées, au moins un début de résolution des équations considérées, c'est-à-dire dans un premier temps la capacité à en déterminer leur forme globale, soit leur aspect *structural*, puis à les considérer comme des relations entre des lettres, des symboles et des nombres que l'on peut opérationnaliser (transposer, calculer, ajouter, diviser, etc.) et qui relèvent de l'aspect *procédural.* Ces cinq techniques sont utilisées lorsque les élèves choisissent, pour effectuer la tâche T_I, de considérer comme critères de classement :

- soit la façon de résoudre les équations (techniques τ_{16}, τ_{21}, τ_{22}) ;
- soit le ou les résultats, solutions des équations (techniques τ_{15}, τ_{17}).

Explicitons la différence entre les techniques τ_{21} et τ_{22} : ordonner les équations « de la plus simple à la plus difficile » est un critère qui semble pertinent pour les élèves ayant compris le verbe « classer » dans le sens (2). La distinction faite entre les techniques τ_{21} et τ_{22} est de considérer, pour la première, la complexité des transformations à opérer pour déterminer la ou les solutions de l'équation donnée par rapport à sa forme de départ, alors que la seconde est plutôt axée sur la maîtrise des techniques de résolution par les élèves. Par exemple, un élève ordonnant l'équation $x^2 = 7$ avant $3x - \frac{1}{4} = \frac{x}{4} - 2$ relève de la technique τ_{21}, s'il considère que les solutions de la première équation s'obtiennent sans transformation alors que la seconde équation demande des transpositions et des calculs sur les fractions avant d'aboutir à la solution. Par contre, un élève ordonnant l'équation $3x - \frac{1}{4} = \frac{x}{4} - 2$ avant $x^2 = 7$ relève de la technique τ_{22}, s'il considère qu'il maîtrise davantage la résolution des équations du premier degré que celles du second degré.

Pour finir, notons qu'il est fort probable que les élèves oscillent entre plusieurs techniques de classement, la catégorisation selon un même critère à déterminer n'étant pas aisée, d'autant plus que le travail de groupe nécessite de s'accorder pour produire une affiche commune. Les élèves arriveront sans doute à des compromis et l'on pourra trouver des productions de groupes d'élèves mêlant différentes techniques de classement.

Environnement technologico-théorique associé aux techniques

Puisqu'il s'agit de « classer » dans ce type de tâches, le bloc *logos* technologico-théorique correspondant à ces diverses techniques repose sur le concept de *classification* ou de *catégorisation*, contextualisé dans le secteur des équations. Pour définir l'environnement technologico-théorique associé aux techniques décrites ci-dessus, nous allons considérer un point de vue mathématique, où les technologies et théories exposées sont dans le domaine numérico-algébrique. Nous aurions aussi pu considérer un point de vue cognitif, où les technologies et théories exposées considèrent une modélisation du concept de catégorisation. Notre propos se limite ici aux connaissances mathématiques mises en jeu.

Le tableau qui suit précise cet environnement technologico-théorique pour appliquer les techniques τ_{ij} décrites ci-dessus. Les intitulés des techniques ont été résumés, pour une lecture plus synthétique. Notons que le nombre relativement important de connaissances citées dans le bloc technologico-théorique réaffirme que la praxéologie mathématique est *locale* au sens de Chevallard, puisque le type de tâches à effectuer regroupe plusieurs thèmes d'étude. De plus, ces thèmes d'étude se trouvent situés dans les programmes institutionnels des classes de collège ainsi que dans ceux de la classe de seconde du lycée. Le niveau institutionnel où le savoir est rencontré pour la première fois est indiqué entre parenthèses. Par observation de la quantité des notions déjà vues au collège, on constate que la tâche donnée dans la situation n°1 propose effectivement une *reprise*, au sens de Larguier, de la notion d'équation avec alliance de l'*ancien* et du *nouveau,* la nouveauté reposant à la fois sur un type de tâches de classement non rencontré dans la scolarité antérieure de l'élève et sur les nouvelles notions enseignées en seconde sur les équations et sur les expressions algébriques. Précisons que le bloc technologico-théorique a été bâti en mettant en évidence ce qui est générique à l'ensemble des techniques possibles, comme la notion d'équation, et en particularisant ce qui est spécifique à une technique donnée ou à un sous-ensemble de techniques. De plus, si nous faisons apparaître des *techniques* de résolution dans le bloc technologico-théorique, c'est que nous les considérons comme des éléments *technologiques* pour le type de tâches considéré, puisqu'elles servent à justifier et mettre en œuvre les techniques associées.

<table>
<tr><td colspan="3"></td><td colspan="2">Tâche T_I : classer des équations polynomiales selon des critères à déterminer</td></tr>
<tr><td></td><td colspan="2">Techniques</td><td colspan="2">Bloc technologico-théorique</td></tr>
<tr><td rowspan="6">Sens (1) du verbe classer</td><td rowspan="3">Techniques qui ne nécessitent pas de résoudre les équations</td><td>τ_{11} : Grouper les équations comme somme ou produit.</td><td rowspan="8">Notion d'équation (inconnues, solutions, égalités, membres, …)</td><td>Forme d'une expression algébrique : somme, produit, priorités opératoires (3^e).</td></tr>
<tr><td>τ_{12} : Grouper les équations du premier ou du second degré.</td><td>Notion de degré d'une équation polynomiale (2^{de}).
Notion de carré d'un nombre (4^e).</td></tr>
<tr><td>τ_{13} : Grouper les équations selon la nature des nombres déterminés.</td><td>Différents types de nombre : nature et écriture (6^e pour décimaux et fractions, 3^e pour racines carrées).</td></tr>
<tr><td rowspan="5">Techniques qui nécessitent de résoudre les équations avant les groupements</td><td>τ_{15} : Grouper les équations selon leur nombre de solutions.</td><td rowspan="5">- Nature et forme d'une expression algébrique (2^{de}).
- Notion de degré d'une équation polynomiale (2^{de}).
- Différentes écritures d'une même expression algébrique (factorisée, développée, etc.) (3^e).
-Règles de calculs numériques (décimaux (6^e), fractions (5^e), radicaux (3^e), etc.).
- Règles de priorités opératoires (5^e).
- Règles de calcul algébrique : distributivité (5^e), factorisation par facteur commun (3^e), par formules d'identités remarquables (3^e).
- Techniques de résolution d'une équation du premier degré (4^e) : règles de transformation des équations (réduction, transposition, …).
- Techniques de résolution d'équations particulières du second degré ($x^2 = a$, $(ax + b)(cx + d) = 0$, facteur commun, …)(3^e).
- Règle du produit nul (3^e).
- Différents types de nombre : nature et écriture (6^e pour décimaux et fractions, 3^e pour racines carrées).</td></tr>
<tr><td>τ_{16} : Grouper les équations selon une résolution directe ou des types de transformation.</td></tr>
<tr><td>τ_{17} : Grouper les équations selon la nature des nombres solutions.</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Sens (2) du verbe classer</td><td>τ_{21} : Ordonner les équations, selon les transformations à effectuer.</td></tr>
<tr><td>τ_{22} : Ordonner les équations selon que les techniques pour les résoudre sont acquises ou non.</td></tr>
</table>

Tableau 86 : Les OM du type de tâches T_I selon de sens donné au verbe « classer »

La diversité des techniques possibles mises à jour dans cette étude portent en elles la justification de la mise en œuvre de la situation n°1. En effet, analyser la représentation que se font les élèves des équations, la façon dont ils identifient des groupes d'équations « similaires » peut permettre de comprendre, côté apprentissage, les erreurs récurrentes des élèves quant à la résolution des équations et de remédier, côté enseignement, à ces erreurs. Nous pouvons en effet penser que des élèves qui groupent dans une même catégorie des équations auront tendance à vouloir utiliser la même technique de résolution pour chaque équation de cette catégorie.

L'objectif de cette première situation est donc d'initier une prise de conscience que la caractérisation des équations par rapport à des techniques communes de résolution est un *outil*, à la fois technique et technologique pour le type de tâches « résoudre des équations ».

9.2.3 Les éléments imposés et modulables de la situation n°1

Comme indiqué en section 6.2, la trame d'ingénierie propose une OM et une OD des situations qui sera *transposée* par le professeur expérimentateur selon une *trame projetée* qui est un compromis par rapport ses principes, contraintes et habitudes d'enseignement. Cette adaptation est faite de manière collaborative, au cours d'un entretien. Néanmoins, afin que les hypothèses de recherche puissent être testées, il est nécessaire d'indiquer ce que le chercheur souhaite prioritairement conserver dans sa trame d'ingénierie et les éléments que le professeur expérimentateur a possibilité de modifier. Nous présentons dans le tableau qui suit ces éléments, en distinguant OM et OD.

	Éléments	**Éléments imposés**	**Éléments modulables**
OM	Type de tâches	Classer les équations proposées.	Choix dans la consigne : Indiquer ou non que la classification des équations est à réaliser *en fonction du mode de résolution des équations*.
	Équations	Équations polynomiales de degré 1 et 2.	- Un choix d'équations polynomiales est proposé par le chercheur mais possibilité d'en prendre d'autres. - Possibilité de prendre des équations non polynomiales. - Choix du nombre d'équations à classer.
OD	Généralités		- Choix de réaliser la situation en classe entière ou en demi-classe.
	Phase 1	- Objectif : Recherche d'une classification des équations. - Modalités : Travail de groupes. - Matériel : Équations choisies par le professeur sur support cartonné (Un jeu d'équations par groupe).	- Choix de la durée et du critère d'arrêt de la phase. - Taille et composition des groupes : choix du nombre d'élèves par groupe, choix de constituer des groupes homogènes ou hétérogènes. - Choix de donner des indications aux élèves pendant la phase 1.
	Phase 2	- Objectif : Restitution des classifications à la classe. Un rapporteur par groupe commente la classification effectuée et le professeur anime le débat. - Support de la production : une affiche (paper board 65 cm × 1 m) par groupe.	- Choix de la durée et du critère d'arrêt de la phase. - Choix de réaliser une synthèse en fin de phase.

Tableau 87 : Résumé des éléments imposés et modulables de la situation n°1 prévus dans la trame d'ingénierie

Attardons-nous sur le tableau précédent pour donner quelques précisions et pour justifier ces choix.

Les choix imposés et modulables dans l'OM

Par rapport à l'organisation mathématique, rappelons les sept familles d'équations que nous avons considérées :

$ax + b = c$	(1)
$ax + b = cx + d$	(2)
$(ax + b) + (cx + d) = 0$	(3)
$(ax + b)(cx + d) = 0$	(4)
$ax^2 + b = c$	(5)
$(ax + b)^2 = c$	(6)
$ax^2 + bx + c = d$	(7)

Ces types d'équations ont été proposés aux professeurs expérimentateurs en faisant varier les paramètres *a, b, c, d* sous la forme des 40 équations données en annexe A11. Le choix des équations à classer et du nombre de celles-ci est laissé aux enseignants. Nous leur indiquons simplement que le nombre d'équations proposées (40) est trop élevé pour être traité en une séance d'une heure et que la liste proposée constitue une base de travail dans laquelle ils peuvent faire des choix ou encore qu'ils peuvent proposer d'autres équations polynomiales et également soumettre aux élèves des équations non polynomiales, s'ils le souhaitent.

Le choix que nous avons fait de proposer une série d'équations dans lesquelles les professeurs peuvent puiser est basé sur trois raisons :

- faciliter le travail des enseignants et leur faire gagner un temps précieux. Selon un des principes de la recherche collaborative, pour que l'expérimentation fonctionne il est important de *prendre en compte les préoccupations et les intérêts des partenaires* (Desgagné, 1997) ;
- analyser si les choix retenus des équations sont semblables d'un professeur à un autre. Cette analyse apportera des éléments à l'hypothèse H4 sur l'invariance ou la différence de pratiques enseignantes ;
- assurer une variabilité suffisante des valeurs des paramètres. Cette dernière raison repose sur l'analyse des manuels de 3^{e} et de 2de où une des conclusions est l'*incomplétude* de la variabilité de ces paramètres par rapport à leur appartenance aux ensembles $\mathbb{Z}$, $\mathbb{D}$, $\mathbb{Q}$ et $\mathbb{R}$ (cf. §7.3).

Pour le type de tâches T_I « classer les équations selon des critères à déterminer », une discussion sera engagée avec le professeur pour tenir compte de ses *possibles*, à savoir si les conditions et les contraintes de son enseignement lui font considérer ce type de tâches comme acceptable. Ici encore, le chercheur s'accommodera des modifications de la tâche proposée pour *tenir compte des préoccupations des partenaires et des mondes qu'ils représentent, de leurs connaissances, de leurs expertises* (Bednarz, 2011). En effet, un professeur peut considérer que la tâche proposée est trop vague, qu'elle nécessite d'être précisée ou reformulée pour être davantage adaptée à ses élèves ou à sa conception de l'enseignement.

Les choix imposés et modulables dans l'OD

C'est dans le même esprit que la trame d'organisation didactique est proposée avec des éléments imposés et des éléments modulables. Parmi les éléments imposés, nous distinguons deux types de contraintes : celles qui sont inhérentes à la nature mathématique de l'expérimentation que nous menons et celles qui relèvent davantage de la méthodologie pour les analyses à réaliser. Par exemple, le matériel choisi, constitué d'équations sur cartons individuels est imposé d'une part, afin de pouvoir observer et filmer aisément la manipulation des équations par les élèves, et d'autre part, pour favoriser l'activité de catégorisation en plaçant « physiquement » les équations les unes à côté des autres. Le travail en groupe est également imposé pour favoriser un conflit sociocognitif et l'émergence verbalisée des critères des catégories créées. L'imposition de l'affiche et du rapporteur permet un recueil de données, orales et écrites, ouvrant des possibilités d'analyses approfondies.

L'organisation en deux phases, une phase de recherche et une phase de restitution est classique pour un travail en groupe. À la fin de la phase de restitution, un bilan n'est pas exigé, pour deux raisons :

- la réalité du terrain : les séances classiques en lycée ont une durée de 55 minutes et les deux phases précédentes occuperont sans doute toute la séance ;
- la situation n°1 a pour objectif principal de relever les représentations qu'ont les élèves des équations et une première réflexion sur une classification de celles-ci est à la fois un facteur déclenchant pour la situation n°2 et une prise de conscience des différents objets mathématiques qui composent une équation. Si un bilan n'est pas réalisé à la fin de cette séance, les professeurs auront l'occasion d'y revenir au cours des situations suivantes.

Le professeur est laissé libre de réaliser la situation n°1 en une séance en classe entière ou en deux séances en demi-classe. L'appréciation est laissée ici au professeur de choisir entre ces deux modalités, le choix de la séance en classe entière permet aux élèves de comparer plus de classements possibles des équations, la séance en demi-classe donne, quant à elle, plus de temps à chaque groupe pour s'exprimer. D'autres facteurs rentreront en compte dans ce choix, notamment celui du temps et de l'avancement du programme. En classe de seconde, les élèves disposent dans leur emploi du temps d'une heure par semaine en demi-classe et cette heure est souvent utilisée par les professeurs pour des tâches particulières, comme l'apprentissage ou la reprise d'une notion délicate par exemple. En effet, le nombre restreint d'élèves permet à l'enseignant de davantage individualiser son enseignement. La proposition du chercheur peut tomber à un moment de l'année où le professeur veut réaliser une avancée du *temps didactique* dans un autre domaine que celui proposé.

Pour la constitution des groupes, la connaissance de sa classe par l'enseignant nous amène à lui laisser choisir les modalités de la mise en groupe : groupes homogènes ou hétérogènes, groupes constitués par affinité, nombre d'élèves par groupe.

9.3 Situation n°2

Nous arrivons ici au cœur de l'expérimentation menée, c'est-à-dire à la *conjugaison*[132] de l'algorithmique et de l'algèbre. L'objectif principal de la situation n°2 – et également de la situation n°3 qui en est son prolongement – est de montrer aux élèves que la résolution de certaines équations (en particulier celles qu'ils manipulent majoritairement à leur niveau) peut se faire « automatiquement », autrement dit de manière *algorithmisée*. Et ainsi, amener ces élèves à comprendre que la reconnaissance de la nature et de la forme d'une équation leur permet de choisir dans « leur catalogue cognitif de techniques[133] », la technique la plus adéquate pour résoudre l'équation donnée. L'idée est d'arriver à ce que les élèves comprennent qu'une automatisation de la résolution est possible par l'association pertinente de l'ensemble des équations à l'ensemble des techniques de résolution. En effet, les élèves, en général, connaissent la nature et la forme de certaines équations ; de la même manière, ils connaissent différentes techniques de résolution. En revanche, ce qui leur fait souvent défaut (cf. §8.3), est le lien qui permet d'associer à une équation donnée, une (ou plusieurs) techniques de résolutions adéquate(s) et ainsi d'aboutir à des praxéologies plus complètes et plus solides. L'un des objectifs de l'expérimentation est de leur permettre, par le détour de l'algorithmique, d'exhiber ce lien et de comprendre qu'ils peuvent le retrouver quand ils travaillent même en environnement papier-crayon.

9.3.1 Présentation de la situation n°2

Objectifs

L'objectif majeur est de permettre une compréhension plus affinée de l'objet « équation », et en particulier de la notion de solution et de la différence entre paramètre et inconnue.

Les objectifs[134] plus spécifiques de cette deuxième situation, relativement aux connaissances visées sont :

- reconnaître que l'expression $ax + b = cx + d$ renvoie à une équation du premier degré et concevoir que toute équation du premier degré peut s'écrire sous cette forme ;
- élaborer un algorithme permettant de résoudre une équation se ramenant à $ax + b = cx + d$;
- transposer l'algorithme en un programme utilisant un logiciel spécifique ;
- tester le programme pour différentes valeurs numériques des paramètres.

Motivation

Comme dit en introduction ci-dessus, il s'agit de construire la connaissance de la *caractérisation* des équations, en continuité avec le travail réalisé lors de la situation n°1,

---

[132] Nous entendons le terme *conjugaison* comme *action de joindre, de réunir intimement différents éléments*. Définition du site du Centre National de Ressources Textuelles et Lexicales (CNRTL) : http://www.cnrtl.fr/definition/conjugaison.

[133] Ce catalogue cognitif de techniques fait partie de *l'équipement praxéologique des techniques*, défini par Chevallard.

[134] Un autre objectif est de « *déterminer la fonction d'un algorithme permettant de résoudre une équation de la forme $ax + b = cx + d$* ». En effet, un travail est proposé dans l'annexe A13 où il s'agit de donner la fonction d'un algorithme quand celui-ci est traduit dans un langage de programmation. Cet objectif n'est pas présenté ici. La tâche restant optionnelle dans la situation n°2, elle est présentée à part, en section 9.2.2.3.

c'est-à-dire de les regrouper en fonction de techniques communes de résolution qui constituent un *outil*, à la fois technique et technologique pour un type de tâches de résolution d'équations. C'est ainsi que la conception d'un seul algorithme permettant de résoudre des équations du premier degré, aussi diverses que $7 - x = 0$, $-1000x = 0$, $\sqrt{2} + x = 0$, $3x - 5 = 3 - 10x$ ou encore $3x - \frac{1}{4} = \frac{x}{4} - 2$ (cf. A12 pour d'autres équations proposées), est proposée aux élèves. En revenant à la définition d'un algorithme proposée par Modeste (2012), et que nous avons choisi d'utiliser dans ce travail (cf. §4.2), nous analysons que le travail engagé dans cette deuxième situation y est conforme. Tout d'abord, des techniques de résolution des équations se ramenant à $ax + b = cx + d$ se réalisent bien *en un nombre fini d'étapes constructives [...] et organisées*, ce qui en font de bons candidats pour un algorithme. Ensuite, l'algorithme que nous cherchons à concevoir concerne une *famille d'instances d'un problème,* ce que Chevallard nomme *un type de tâches*. De plus, l'algorithme réalisé devra répondre à *toute instance de cette famille*, en ce sens que pour toute valeur de *a, b*, *c* et *d* l'algorithme doit fournir une réponse.
D'autre part, comme dans la situation n°1, c'est encore dans l'idée de *reprise*, au sens de Larguier (2009) que cette situation est conçue, puisqu'il s'agit de retravailler des connaissances déjà rencontrées au collège, mais en alliant *ancien et nouveau,* proposant ce travail dans le cadre de l'algorithmique. Les élèves sont amenés à manipuler les inconnues, les paramètres et les techniques de résolution des équations du premier degré. Si le but pour l'élève est la réalisation d'un programme qui « tourne » sur une machine, l'objectif d'enseignement est une reprise du concept d'« équation » et des objets qui gravitent autour de ce concept, en particulier sur le contrôle et le traitement du calcul algébrique. Le *détour* effectué par l'algorithmique est de réaliser une certaine « matérialisation » des objets de l'algèbre, de les « voir » et de « les faire vivre » au sein d'un programme informatique.

Matériel du milieu initial

Le matériel mis à disposition de chaque élève est composé de :
- une liste d'équations du premier degré, choisies (en partie) parmi celles qui ont été triées lors de la situation n°1 et sous la forme $ax + b = cx + d$. Ainsi la continuité du travail réalisé lors de la première situation est-il lisible pour l'élève. Le choix de ces équations se fait en diversifiant les ensembles d'appartenance de leurs coefficients ($\mathbb{Z}$, $\mathbb{D}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$) ;
- la consigne de réaliser un algorithme pour les résoudre ;
- un poste informatique avec un logiciel de programmation adapté pour des lycéens.

Notons que la liste d'équations est proposée sur une feuille blanche que les élèves sont incités à utiliser dans la phase de conception de l'algorithme, avant celle d'écriture du programme avec le logiciel. D'un point de vue pratique, cette feuille sera relevée en fin de séance par le chercheur, ce qui permettra de récupérer les essais et réflexions des élèves (cf. annexe A11 pour le modèle proposé aux enseignants).
Les postes informatiques mis à disposition permettent aux élèves de lier les deux aspects, algorithmique et programmation, suivant les préconisations du programme de seconde (cf. §4.5.3).
En ce qui concerne le choix du logiciel de programmation, nous nous conformons au choix des professeurs expérimentateurs, qui travaillent tous les trois avec le même logiciel,

Algobox[135]. Ce logiciel, qui n'était pas proposé à la base dans le document ressources sur l'algorithmique en seconde (2009c), est utilisé par un nombre certain de professeurs[136]. C'est un logiciel libre et gratuit pour aider à l'élaboration et à l'exécution d'algorithmes dans l'esprit du programme de seconde en vigueur. En effet, le principe de ce logiciel est que le code de l'algorithme se construit pas à pas grâce à des instructions de base pré-écrites que l'on insère, comme des « briques » dans le corps du programme. Ce fonctionnement est à rapprocher des boutons d'un logiciel de géométrie dynamique comme GeoGebra qui permettent, par un simple clic, l'insertion d'objets géométriques. Ainsi, de la même manière que l'utilisateur de GeoGebra se concentre sur les objets géométriques en relation et non pas sur la précision des tracés à effectuer, l'utilisateur d'Algobox a une activité centrée sur la réflexion du choix des instructions et de leurs articulations plutôt que sur la syntaxe de lignes de code. Algobox n'est pas un environnement complet de programmation ; en particulier, le programme, une fois écrit ne nécessite pas d'être compilé, ses capacités en « programmation pure » sont limitées. Néanmoins, il possède l'avantage de la rapidité d'apprentissage de son langage de programmation, assez proche d'un *pseudo-code*. Par exemple, les structures de tests sont « préfabriquées », évitant des difficultés d'écriture et de logique. La capture d'écran ci-dessous montre la structure du test qui s'affiche à l'écran en ayant simplement cliqué sur le bouton « Ajouter si … alors » :

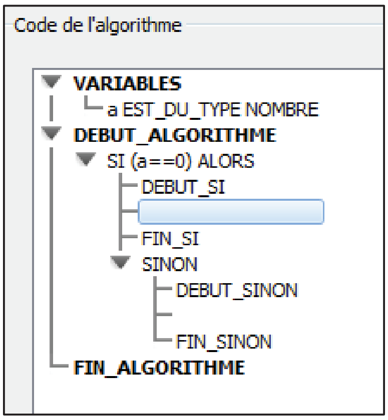


Figure 88 : Exemple de fonctionnalité du logiciel Algobox (test)

Toutes les instructions de base qui structurent un programme sont présentes (déclaration de variables, affectation, lecture/écriture, boucles, tests) ainsi que les principales fonctions mathématiques étudiées au lycée. D'autre part, tous les algorithmes peuvent être exécutés et testés en mode classique, mais aussi en mode pas à pas, ce qui permet des rétroactions sur les erreurs de conception de l'algorithme.

Les trois professeurs expérimentateurs ont, au moment de l'expérimentation, déjà initié leurs élèves à la structure de base d'un algorithme et une prise en main du logiciel Algobox (cf. §10.1) a été effectuée, débutant ainsi l'*instrumentation*, au sens de Balacheff (1994), de ce logiciel.

[135] Se reporter à l'annexe A9 pour une présentation plus complète de ce logiciel.

[136] Nous trouvons ce logiciel utilisé par les sites des IREM (Instituts de recherche sur l'enseignement des mathématiques) de Brest, de la Réunion, de Bordeaux, de Lille, etc.

9.3.2 Analyse a priori de la situation n°2

Types de tâches de la situation proposée

Le but de la situation n°2 consiste en *l'élaboration d'un algorithme permettant de résoudre des équations du premier degré*. Pour parvenir à réaliser ce type de tâches, un ensemble de techniques imbriquées est nécessaire, que nous déclinons ici en sous-types de tâches, numérotées T_i, pour $1 \leq i \leq 5$. En effet, chacune des étapes ci-dessous reste problématique pour les élèves, en ce sens que ce travail ne leur est pas *routinier* et nécessite de ce fait, un découpage plus fin. Ces types de tâches sont les suivants :

- type T_1, *reconnaître qu'une liste d'équations*[137] *peut s'écrire sous une forme générale à déterminer*. Par exemple, dans la situation n°2, une forme générale possible des équations du premier degré est $ax + b = cx + d$, obtenue en substituant aux coefficients numériques des équations de la liste les paramètres a, b, c, d ;
- type T_2, *résoudre sous forme littérale une équation*. (Avec le même exemple que ci-dessus, il s'agit de résoudre $ax + b = cx + d$ en considérant a, b, c, d comme paramètres) ;
- type T_3, *concevoir un algorithme permettant d'automatiser la résolution d'une équation d'une forme donnée*. (Dans notre exemple, concevoir un algorithme résolvant toute équation du type $ax + b = cx + d$, où les coefficients a, b, c, d sont donnés) ;
- type T_4, *écrire, sous un logiciel de programmation donné, un programme traduisant l'algorithme issu de la tâche T_3* ;
- type T_5, *utiliser un programme réalisé pour résoudre des équations d'une liste donnée.*

La décomposition réalisée ci-dessus en types de tâches ne doit pas être considérée comme linéaire, ni séquentielle dans le temps. Il est possible qu'une fois une tâche de type T_1 accomplie, certains élèves tentent, par exemple, de commencer à écrire le programme et fassent des allers-retours entre les différentes tâches pour combler les résultats manquants. En effet, il s'agit dans cette situation d'une organisation *locale*, au sens de Chevallard (2002), dans le sens où elle est constituée de plusieurs organisations *ponctuelles* liées aux différents types de tâches exposés. L'organisation mathématique se met en place au fur et à mesure, à partir du premier type de tâches T_1 et cette première organisation va permettre ensuite la construction des organisations mathématiques ponctuelles suivantes, autour du type de tâches T_4, englobant les autres organisations.

Techniques associées aux types de tâches de la situation proposée

- Pour T_1, la technique τ_1 associée repose sur :
    - le repérage des termes de l'équation comportant la lettre x et celui des nombres déterminés ;
    - l'uniformisation de l'écriture d'une expression algébrique (par exemple $3x - \frac{1}{4}$ ou $\sqrt{2} + x$ sous la même forme $ax + b$, et non pas $ax + b$ pour le 1er exemple et $x + a$ pour le 2nd) en *substituant* aux nombres déterminés des lettres autres que x.

Notons que ce type de tâches n'est pas routinier pour les élèves, puisque cette écriture se repère plutôt dans les parties « cours » des manuels et des cahiers d'élèves, lors de l'institutionnalisation de la forme des fonctions affines par exemple. Ce terme de

[137] Rappelons que nous nous limitons aux équations polynomiales de degré 1 et 2.

substitution demande de comprendre ce qui se joue au niveau de la généralisation. En effet au collège, les élèves sont sans doute entraînés à remplacer les lettres par des valeurs numériques, plutôt que l'inverse, les programmes de 5[e] préconisant de *tester si une égalité comportant un ou deux nombres indéterminés est vraie lorsqu'on leur attribue des valeurs numériques* (MEN, 2008a) : il est donc question de substituer des valeurs numériques à des lettres. Il n'est pas fait mention de la tâche inverse, dans l'ensemble du programme du collège, ni même dans celui de seconde, et cette tâche inverse repose sur la capacité à généraliser des expressions algébriques déterminées.

- Pour T_2, la technique τ_2 associée est la technique de résolution d'une équation. Bien entendu, la technique dépend du degré des équations considérées. La situation n°2 considère des équations du premier degré et nous nous limitons ici à décrire la technique s'y rapportant. Nous choisissons ici la forme générique $ax + b = cx + d$, et nous rappelons ici les étapes de la technique de résolution, pour en exposer la complexité pour l'élève. En effet, cette résolution est attendue en résolution littérale, autrement dit paramétrée. :

  - obtention de la forme $ax - cx = d - b$ par transposition directe des termes comportant l'inconnue x dans un membre de l'équation et des nombres déterminés dans l'autre (ou par ajout de termes opposés) ;
  - factorisation par le facteur x commun dans le membre de gauche (avec obtentions de différentes formes possibles comme $x\,(a - c) = d - b$ ou $(a - c)x = - b + d$) ;
  - discussion du nombre de solutions de l'équation selon la nullité ou non du terme $a - c$. Si ce terme est non nul, division des deux membres de l'équation par ce terme et obtention de la solution de l'équation $\frac{d-b}{a-c}$; s'il est nul, prise en compte de la valeur de $d - b$ pour conclure que l'équation a soit une infinité de solutions, soit aucune.

Notons que ce type de tâches est également non routinier, puisque la résolution d'équations est habituellement proposée à ce niveau avec des nombres déterminés, plutôt qu'avec des paramètres. En conséquence, nous émettons l'hypothèse de la non-prise en compte par certains élèves des conditions à respecter pour l'obtention d'une solution unique de l'équation et de l'aide que le professeur devra apporter aux élèves les plus fragiles pour l'obtention de la solution sous la forme fractionnaire $\frac{d-b}{a-c}$.

- Pour T_3, la technique associée τ_3 consiste en la décomposition en *actions élémentaires* (cf. §4.4) de l'obtention de la solution littérale de l'équation générique retenue. À partir de la résolution de l'équation paramétrée, les éléments nécessaires à la réalisation de l'algorithme doivent être identifiés, sélectionnés et agencés entre eux, afin d'obtenir une structure conforme à un algorithme. Il s'agit de déterminer l'algorithme *informatisé* que nous avons défini en section 4.4 et ainsi de réaliser *la première transposition*, permettant de passer de cette résolution *mathématique* à l'algorithme recherché. Explicitons les étapes de la technique τ_3 avec le cas de la forme générique $ax + b = cx + d$:

  - la définition des données en entrée de l'algorithme (les paramètres a, b, c, d) ;
  - la détermination des étapes élémentaires de traitement à faire (calcul de $\frac{d-b}{a-c}$) en incluant les structures alternatives nécessaires (différenciation des cas où $a - c$ est nul ou non nul ; lorsque $a - c$ est nul, différenciation des cas où $d - b$ est nul ou non nul) ;

- la définition des résultats à donner en sortie de l'algorithmique (« pas de solution » ou « tout nombre est solution » ou « $\frac{d-b}{a-c}$ est la solution ») en fonction de la valeur des paramètres *a, b, c, d*.

Des difficultés prévisibles des élèves sont contenues dans cette première transposition : il y a en effet non-congruence entre la résolution algébrique demandée lors des tâches de type T_2 (avec toutes les étapes vues dans le cas de l'équation $ax + b = cx + d$) et la détermination des éléments de l'algorithme. Un phénomène de *pseudo-transparence,* au sens d'Artigue, est à considérer entre la *démarche algébrique* permettant d'aboutir à la résolution de l'équation $ax + b = cx + d$ et la *démarche algorithmique* qui consiste à sélectionner les paramètres *a, b, c, d* pour l'entrée et la solution $\frac{d-b}{a-c}$ pour le traitement et la sortie. Toutes les étapes de résolution de l'équation sont « perdues », « ignorées » pour constituer l'algorithme.
D'autres difficultés peuvent apparaître concernant la détermination des tests nécessaires à la distinction des cas $a - c$ nul ou non et $d - b$ nul ou non. Il est probable que ces tests seront omis par des élèves qui ne considèreront que le cas où $a - c$ est non nul. Cependant, la rétroaction du professeur proposant de tester une équation particulière où $a = c$ pourrait permettre d'inclure ce cas dans l'écriture de l'algorithme. La compréhension d'un algorithme passe par ces phases d'ajustement, ce que prévoit le document ressource de seconde (MEN, 2009c) :

> Une piste envisageable pourrait être la réécriture d'un algorithme simple, dont la complexification – dans une mesure raisonnable – fait écho à […] de nouveaux questionnements sur la nature de l'objet étudié. (p.4)

- Pour T_4, la technique τ_4 consiste en la *seconde transposition* de l'algorithme dans un langage de programmation (cf. figure 14, §4.4). Comme vu en section 4.4, ceci nécessite de se décentrer pour se positionner du point de vue de la machine en considérant les actions élémentaires que celle-ci peut exécuter, sous les contraintes du logiciel utilisé et de son langage de programmation.
En gardant l'exemple de la forme générique $ax + b = cx + d$, nous pouvons alors décomposer la technique τ_4 sous la forme :

- « convertir » les données en entrée de l'algorithme en termes de lecture des paramètres *a, b, c, d*. Cette première étape comporte également la déclaration des variables nécessaires au programme ;
- « convertir » les structures alternatives sous forme de tests « *si … alors … sinon …* », en y incluant l'instruction du calcul de $\frac{d-b}{a-c}$. Deux boucles de tests imbriquées sont nécessaires (conditions sur la nullité de $a - c$ et de $d - b$) ;
- « convertir » les résultats en sortie de l'algorithmique en terme d'écriture, c'est-à-dire en faisant afficher les messages « pas de solution » ou « tout nombre est solution » ou la valeur numérique $\frac{d-b}{a-c}$, en fonction des résultats des tests.

Des difficultés prévisibles dans les différentes phases de τ_4 sont la définition des variables informatiques, en différenciant celles à lire et celles à écrire, ce qui nécessite, comme dit ci-dessus de se décentrer, mais aussi la gestion des structures de tests imbriqués qui sont sous-tendues par des concepts de logique. Des difficultés dans la syntaxe du logiciel sont

également à envisager. Les difficultés pourront être plus ou moins marquées pour les élèves selon la façon dont la tâche de type T_3 aura été comprise.
- Pour T_5, la technique τ_5 consiste à exécuter le programme. Il s'agit alors de :
    - lancer le programme ;
    - entrer au clavier, successivement, les valeurs numériques correspondant aux paramètres de l'équation considérée, après les avoir identifiés ;
    - lire le résultat affiché à l'écran donnant les solutions éventuelles de l'équation ;
    - interpréter ce résultat comme solution(s) de l'équation considérée.

Pour cette dernière tâche, les difficultés se situent a priori au niveau de la reconnaissance des coefficients des équations à résoudre à l'aide du programme, en fonction de la forme générique retenue. Par exemple, pour la forme générique $ax + b = cx + d$, dans le cas de l'équation $7 - x = 0$, il s'agit de ne pas attribuer aux paramètres a et b les valeurs numériques « dans leur ordre d'apparition » dans l'équation et de comprendre que les paramètres c et d sont nuls. D'autres difficultés peuvent être mentionnées sur cet exemple : le coefficient a vaut -1, mais le nombre -1 n'apparaît pas. De plus, pour identifier $ax + b$ à $7 - x$, il est nécessaire utiliser la commutativité de l'addition (éventuellement *en actes*) et écrire : $7 - x = - x + 7$.

Dans le tableau ci-dessous, résumons les types de tâches et les techniques associées en les faisant apparaître de manière plus concise. Rappelons que les types de tâches présentées sont liés à la *praxéologie locale* du type de tâches global, *concevoir un algorithme permettant de résoudre des équations du premier degré*.

Type de tâches	Technique associée
T_1 : reconnaissance d'un type d'équations et écriture sous une forme générique	τ_1 : repérage des termes comportant la lettre x, substitution des nombres déterminés par des lettres et uniformisation des différentes écritures trouvées.
T_2 : résolution sous forme littérale d'une équation paramétrée	τ_2 : technique « classique » de résolution d'une équation (si 1er degré : transposition, réduction, …) mais effectuée sous forme littérale (discussion selon les valeurs des paramètres)
T_3 : conception d'un algorithme permettant d'automatiser la résolution d'une équation d'une forme déterminée	τ_3 : décomposition en *actions élémentaires* de l'obtention des solutions de l'équation générique, avec discussion selon les paramètres.
T_4 : écriture d'un programme, traduisant dans un langage informatique, l'algorithme issu d'une tâche de type T_3	τ_4 : *transposition* des actions élémentaires de l'algorithme obtenu dans un langage de programmation
T_5 : utilisation d'un programme informatique pour effectuer une résolution d'équation	τ_5 : exécution du programme par entrée au clavier des paramètres et lecture sur l'écran des solutions

Tableau 89 : types de tâches et de techniques pour la situation n°2

Environnement technologico-théorique associé aux techniques

Puisqu'il s'agit dans la situation n°2 d'utiliser l'algorithmique et la programmation pour réaliser une tâche algébrique, le bloc *logos* technologico-théorique correspondant aux diverses techniques exposées ci-dessus se compose à la fois d'un environnement mathématique lié au domaine de l'algèbre et d'un environnement informatique lié à l'algorithmique et à la programmation. Nous nous proposons d'analyser ces deux types d'environnement.

- ***Environnement technologico-théorique mathématique***

La notion d'équation est bien entendu centrale de cette étude et fait partie des éléments technologico-théoriques des cinq techniques τ_1 à τ_5. Les objets d'une équation y sont présents comme inconnue, coefficients ou paramètres, signe d'égalité, membre d'une équation, solution. S'y trouvent également des concepts plus spécifiques relatifs à la résolution d'une équation du premier degré comme la transposition, la réduction, etc. qui permettent de transformer une équation en une équation équivalente. La notion de degré apparaît également comme justifiant les techniques τ_1 et τ_2. De plus, comme dit en section 2.5, les domaines algébrique et numérique étant fortement imbriqués, l'environnement technologico-théorique est également constitué de la nature arithmétique des nombres et de leur ensemble d'appartenance, des critères de reconnaissance de ces nombres et de leurs propriétés arithmétiques.

Pour la technique τ_5, l'identification des paramètres aux nombres déterminés des équations fait appel aux propriétés des opérations, comme la commutativité, l'élément neutre des lois + et ×, etc.

Pour les techniques τ_3 à τ_5, viennent s'ajouter des éléments technologico-théoriques du domaine de l'algorithmique et de la programmation.

- ***Environnement technologico-théorique algorithmique et de programmation***

Afin de caractériser les techniques utilisées pour réaliser l'algorithme de la situation n°2, nous utilisons les éléments technologico-théoriques que Modeste (2012) a dégagés dans son mémoire de thèse. Citons Modeste dans sa façon d'associer algorithme et résolution de problèmes :

> Pour résoudre un problème $p = (I\ ;\ Q)$[138], un algorithme peut être donné. Un tel algorithme doit pouvoir recevoir en entrée n'importe quelle instance i ($i \in I$) du problème p et répondre à la question Q posée. Il est clair qu'un enjeu de preuve est alors présent : l'algorithme proposé répond-il toujours à la question et donne-t-il une réponse valide ? (p.58)

Notre problème p porte sur la résolution des équations du premier degré. Si nous choisissons comme type $ax + b = cx + d$, les instances I du problème sont les valeurs possibles des paramètres a, b, c et d et la question Q est « quelles sont les solutions de l'équation $ax + b = cx + d$? »

Technique τ_3

Pour déterminer le bloc *logos* de la technique τ_3, nous la considérons *en amont* et *en aval*. En amont, la technique et la technologie du type de tâches T_2, *résoudre une équation du premier degré sous forme littérale,* forment le support de l'organisation mathématique du type de tâches T_3, puisque c'est cette résolution qui est le substrat de la conception de l'algorithme. En aval, la technique s'appuie sur les concepts qui fondent un algorithme. Cette double considération rejoint les notions de l'algorithmique exposées au chapitre 4 (cf. §4.3), comme la notion de *preuve* d'un algorithme composée de deux points : pour toute entrée, la preuve de *correction* montre que l'algorithme produit une réponse valide et la preuve de *terminaison*

[138] Modeste (2012, p.57) définit un problème p comme un couple $(I\ ;\ Q)$, où I est l'ensemble des instances pouvant être décrit par plusieurs paramètres) du problème et Q une question portant sur ces instances (spécifiant les propriétés de la solution attendue).

montre que celui-ci donne une réponse après un nombre fini d'étapes. La preuve en question est ici la résolution de l'équation sous forme littérale, avec discussion selon les valeurs des paramètres, et cette preuve permet de savoir que l'algorithme produit donne une réponse pour toute instance. De plus, le nombre d'étapes de l'algorithme est fini puisque celui-ci ce contient pas de structure répétitive, une formule (ou un message) suffisant à produire la réponse. En conséquence, cet algorithme est considéré dans la classification de Modeste (2012) dans le paradigme *AM-outil* :

> Le paradigme Algorithme mathématique (AM) correspond à une activité de la forme Problème-Algorithme-Preuve. Pour un problème donné, on explicite un algorithme résolvant toutes les instances du problème et on fournit une preuve que l'algorithme répond pour toute instance et fournit une solution valide (terminaison et correction de l'algorithme). L'algorithme et la preuve sont ici complétement dissociés. (p.61)

La *preuve* de l'algorithme est ici constituée de l'organisation mathématique du type de tâches T_2. D'autre part, nous le qualifions d'*outil*, au sens de Douady, puisqu'il est utilisé pour la résolution d'un problème. Cependant, Modeste ajoute une nuance :

> Notons cependant que c'est seulement dans l'utilisation d'un algorithme A pour résoudre le problème ou une instance du problème que l'algorithme A est outil. Dès lors que sont questionnées sa validité, sa construction ou ses propriétés, on s'intéresse en réalité à un problème de $\mathbb{P}$ [139] instancié pour l'algorithme A. (Modeste, 2012, p.59)

Ainsi peut-on considérer que la conception *AM-objet* est également présente, en ce sens que la structure et la preuve de l'algorithme sont interrogées.
Comme dit plus haut, cet environnement technologico-théorique se complète *en aval* d'éléments qui structurent un algorithme, comme le concept d'*action élémentaire* pour le destinataire, les notions de variable, d'entrée/sortie, de structure alternative, sans oublier la compréhension d'un langage en *pseudo-code* (cf. §4.4). Modeste (2012, p.63) y ajoute des concepts permettant le contrôle de la structure d'un algorithme et reposant *sur la logique mathématique* et *les règles de raisonnement.*

Techniques τ_4 et τ_5

La technique τ_4 est la transposition de l'algorithme précédent dans un langage de programmation. En utilisant de nouveau la classification de Modeste, nous nous trouvons ici dans le paradigme *AI-outil :*

> Le paradigme Algorithme informatique (AI) correspond à une activité de la forme Problème-Programme-Vérification. Le terme vérification est à prendre au sens de la vérification formelle en informatique. L'algorithme répondant au problème est exprimé sous forme d'un programme que l'on souhaite pouvoir exécuter. La validation du programme n'est pas de l'ordre mathématique mais plutôt informatique, c'est-à-dire suivant des méthodes d'ordre formel […]. Cependant, la validation mathématique, dans le paradigme AM de l'algorithme sous-jacent au programme, peut fournir une forme de validation du programme dans AI. (Modeste, 2012, p.61)

[139] Modeste définit l'ensemble $\mathbb{P}$ comme l'ensemble des problèmes *dont la question porte sur un algorithme (i.e. I contient un ensemble d'algorithmes) ou dont la question spécifie que la réponse doit être de type algorithmique ou avoir un lien avec des notions d'algorithmique (de complexité par exemple).*

La tâche T_4 de programmation va nécessiter un changement de paradigme pour transposer l'algorithme en un programme. En particulier, le système de représentation passe d'un langage mathématique à un langage de programmation et le contrôle repose sur une vérification formelle, syntaxique de l'écriture des propriétés.
Le bloc technologico-théorique de la tâche T_4 comporte le concept d'*action élémentaire* pour une machine (cf. §4.4) ainsi que tout élément qui structure un programme, comme les notions de variable informatique, d'affectation, de lecture/écriture, d'instruction, de structure alternative et la compréhension du langage de programmation du logiciel Algobox.
Pour la technique τ_5, c'est bien l'aspect *outil* du programme qui est présent, puisqu'il est demandé d'exécuter le programme (tâche T_5). Cependant, notons que cette dernière tâche ne se trouve pas seulement son intérêt dans le contrôle de la validation du programme et du respect des règles du langage, mais aussi et surtout par le retour au domaine algébrique. L'environnement technologico-théorique associé repose essentiellement ici sur les concepts de paramètre et de solution d'une équation. La dernière tâche permet le retour à l'utilisation des variables mathématiques (en tant que paramètres ou coefficients déterminés des équations et solutions de l'équation) qui ont été transposées dans le programme sous forme de variables informatiques (en tant que valeurs d'entrée et de sortie du programme).

9.3.3 Tâches alternatives de la situation n°2 et objectifs complémentaires

Comme indiqué en présentation de la situation n°2, un objectif complémentaire a été envisagé par le chercheur. Il s'agit pour le professeur de proposer un algorithme déjà écrit sur papier et de demander aux élèves d'en déterminer la fonction. Cette tâche alternative fait suite aux deux cas que nous avons envisagés pour le déroulement de la situation n°2 :
- soit le professeur expérimentateur souhaite directement proposer aux élèves de concevoir un algorithme résolvant les équations de la forme $ax + b = cx + d$, auquel cas l'analyse précédente est conforme à ce choix ;
- soit le professeur expérimentateur préfère proposer dans un premier temps la conception d'un algorithme résolvant les équations de la forme $ax + b = c$ (avec éventuellement le choix de c nul), considérant que la manipulation de l'expression littérale du premier cas est trop complexe.

Dans ce second cas, nous avons prévu un travail complémentaire, en laissant le choix au professeur de le réaliser en classe ou en travail personnel à la maison. Ce travail consiste à déterminer la fonction d'un algorithme pré-écrit, dans le langage de programmation du logiciel Algobox, qui résout les équations de la forme $ax + b = cx + d$ (cf. énoncé complet en annexe A13).
Les raisons de ce complément optionnel sont basées sur la volonté d'une collaboration efficace entre le chercheur et l'enseignant expérimentateur (cf. §6.2). En effet, nous recherchons un regard croisé entre le chercheur et le praticien, et nous pensons, à l'instar de Desgagné (1997) et Bednarz (2005, 2011), que la construction commune de séquences peut enrichir l'étude du chercheur d'une part et la pratique de l'enseignant d'autre part. C'est donc en ce sens que nous proposons ici aux enseignants de pouvoir adapter ou modifier la conception de la situation n°2. De plus, cette proposition s'inscrit dans l'esprit des programmes, puisque nous pouvons y lire qu'une des activités possibles est d'*analyser le*

fonctionnement ou le but d'un algorithme existant et également d'en réaliser des *complexifications progressives* (MEN, 2009c). Les élèves ayant travaillé sur la conception de l'algorithme de résolution des équations du type $ax + b = c$ se trouvent bien dans cette tâche de complexification, en ayant à comprendre un algorithme de résolution des équations du type $ax + b = cx + d$.
Pour ce second cas, nous ne reprenons pas la praxéologie de la tâche globale des cinq premiers types de tâches présentés en section 9.3.2, elle est similaire ici, que l'on considère les équations du type $ax + b = cx + d$ ou bien $ax + b = c$. Analysons la praxéologie du complément de la situation optionnelle, constitué du type de tâches T_6, *déterminer la fonction d'un algorithme pré-écrit,* ici permettant de résoudre toute équation de la forme $ax + b = cx + d$.

Technique associée au type de tâches T_6
Afin de déterminer la fonction de l'algorithme, la situation optionnelle demande aux élèves de tester le programme *pour quelques exemples de valeurs de a, b, c et d bien choisies, permettant de tester les différentes parties de l'algorithme* présenté, puis de *déduire quelle est la fonction de cet algorithme.* Cette demande de *tester le programme* (« à la main ») est une tâche s'apparentant au type T_5 (cf. §9.3.2), tâche que les élèves effectuent en début de cette situation optionnelle, alors qu'ils l'effectuaient en fin de la situation demandant de concevoir l'algorithme. Ensuite, relativement au déchiffrage des instructions du programme qu'exige la détermination de la fonction de l'algorithme, il est nécessaire d'y retrouver la résolution d'une certaine équation (tâche de type T_2) à partir de l'algorithme conçu qui donne en sortie la ou les solutions de l'équation (tâche de type T_3). Ceci nécessite pour l'élève de *réalgébriser* la situation, c'est-à-dire de retrouver l'expression de l'équation résolue. Cette démarche est en quelque sorte la démarche *inverse* de la démarche décrite précédemment pour la situation n°2. Par *réalgébriser*, nous entendons le passage des objets algorithmiques aux objets algébriques, mais également un autre point que nous tentons d'expliquer ici. En effet, faire fonctionner le programme nécessite d'entrer des valeurs numériques et la sortie est également une valeur numérique (ou un message). Pour déterminer la fonction de l'algorithme, la simple confrontation des valeurs numériques en entrée et en sortie ne suffit pas à donner la fonction de l'algorithme : c'est par la considération des calculs et traitements effectués dans les instructions sur les données d'entrée que la fonction de l'algorithme pourra être trouvée. Ainsi, un retour nécessaire à des *paramètres* (apparaissant transposés sous forme de variables informatiques dans le programme) est-il nécessaire pour reconstruire l'équation générique de départ. C'est ce que nous appelons *réalgébriser* la situation.
Ces éléments permettent de détailler la technique τ_6 relative à la détermination de la fonction de l'algorithme. Pour ce faire, il est nécessaire de procéder en plusieurs étapes, consistant à tester le programme pour certaines valeurs à donner aux données en entrée.
Pour la technique τ_6, nous identifions trois phases :
(1) discerner les variables en entrée et en sortie de l'algorithme ;
(2) choisir des valeurs numériques pour les données en entrée et exécuter les instructions pas à pas, de manière à parcourir les différentes boucles des tests ;
(3) pour chaque ensemble de valeurs obtenu {données en entrée, données en sortie}, mettre en relation ces différentes valeurs avec leur traitement dans le corps du programme.

Cette technique consiste à déchiffrer les instructions du programme et à les exécuter. La phase (1) d'identification des variables en entrée et en sortie de l'algorithme repose sur la recherche des instructions « lire *[variable]* » et « afficher *[variable]* » ou « afficher *[message]* ». Cette phase demande un décentrage de l'élève qui doit s'identifier à la machine qui reçoit les instructions. La phase (2), relative aux différentes parties de l'algorithme à tester, s'appuie sur la détermination de valeurs adéquates en entrée qui rendent successivement vraies puis fausses les conditions des boucles de test et à exécuter les instructions correspondantes. Elle se fonde sur la compréhension des objets en relation sur lesquels portent les tests contenus dans les structures alternatives « *si … alors … sinon* ». La phase (3) comporte le repérage des *relations* entre les variables – relations qu'il est nécessaire de déchiffrer dans les instructions de calcul du programme –, de manière à déterminer la fonction de l'algorithme. Comme dit plus haut, la détermination de cette fonction ne s'obtiendra pas en considérant directement les valeurs numériques, mais également les différentes opérations de traitement des données.
Mentionnons également que ce problème, s'il est sorti de ce contexte, est difficile pour un élève de seconde. Dans la situation n°2, il ne prend sens que s'il est présenté à la suite de l'algorithme permettant de déterminer les solutions de l'équation $ax + b = c$.

Environnement technologico-théorique associé aux techniques
Comme pour la partie précédente de la situation n°2, le bloc technologico-théorique correspondant aux techniques ci-dessus comporte à la fois un environnement mathématique lié au domaine de l'algèbre et un environnement informatique lié à l'algorithmique et à la programmation.

- ***Environnement technologico-théorique mathématique***

Cet environnement se compose des mêmes éléments que précédemment, à savoir la notion d'équation et les objets inconnue, paramètre, signe d'égalité, solution, degré, etc. Notons cependant que la présence de ces objets n'est pas directe, puisque nous les trouvons *transposés* informatiquement dans le cadre de l'algorithmique et de la programmation. C'est la question posée, à savoir la fonction de l'algorithme, qui fait le lien entre les objets informatiques et les objets algébriques.

- ***Environnement technologico-théorique algorithmique et de programmation***

Le type de tâches T_6 d'identification de la fonction de l'algorithme utilise une technique de repérage des données en entrée, du traitement effectué sur celles-ci et des données en sortie. D'après la classification de Modeste (2012), nous sommes ici encore dans un paradigme informatique, *l'algorithme répondant au problème est exprimé sous forme d'un programme que l'on souhaite pouvoir exécuter* (ibid., p.61). Nous sommes de plus dans une conception *AI-outil* puisque l'algorithme se présente comme un outil pour étudier la résolution d'un type d'équations. Il s'agit d'une activité de programmation, mais aussi de par l'interprétation du programme attendu, l'algorithme agit comme un outil pour la compréhension de ce type d'équations. Comme vu précédemment pour le type de tâches T_4, le bloc technologico-théorique du type de tâches T_6 comporte le concept d'*action élémentaire* pour une machine ainsi que tout élément qui structure un programme, comme les notions de variable informatique, d'affectation, de lecture/écriture, d'instruction, de structure alternative et la compréhension du langage de programmation du logiciel Algobox.

9.3.4 Les éléments imposés et modulables de la situation n°2

De manière analogue à la situation n°1, la trame d'ingénierie propose une OM et une OD qui seront *transposées* par le professeur expérimentateur selon une *trame projetée*, faite de manière collaborative au cours d'un entretien entre le chercheur et l'enseignant. Nous présentons dans le tableau qui suit les éléments de l'OM et de l'OD de la situation n°2 qui peuvent être modifiés et ceux que le chercheur souhaite conserver. À la suite de ce tableau, les choix sont justifiés.

	Éléments	**Éléments imposés**	**Éléments modulables**
OM	Type de tâches	Réaliser un programme pour résoudre des équations du 1er degré de la forme : $ax + b = cx + d$	- Possibilité de découper la tâche en sous-tâches (de types T_1 à T_5, §9.3.2) pour la proposer aux élèves - Possibilité d'atteindre l'objectif en deux temps (types T_1 à T_6, §9.3.3) : premier temps, réaliser un programme pour résoudre $ax + b = c$ et second temps, réaliser un programme pour résoudre $ax + b = cx + d$
	Équations	Équations polynomiales de degré 1	- Choix d'équations proposé par le chercheur mais possibilité d'en prendre d'autres - Choix de la forme des équations dont on cherche les solutions ($ax + b = c$ ou $ax + b = cx + d$) - Choix du nombre d'équations
OD	Généralités	Réaliser la situation en salle informatique avec ordinateurs à disposition des élèves	- Choix de faire travailler les élèves seuls ou de constituer des binômes - Choix de la durée et du critère d'arrêt de chaque phase - Choix de donner des indications aux élèves pendant les différentes phases - Choix de réaliser une synthèse à la fin de chaque phase
	Le découpage en phases 1 à 5 n'est pas imposé. Il apparaîtra sans doute cependant de façon plus ou moins linéaire. Il est présenté sous cette forme par commodité de lecture.		
Première option	**Phase 1** reconnaissance et écriture d'équations sous la forme $ax + b = cx + d$ (T_1)	- Matériel : équations choisies par le professeur et distribuées sur une feuille, relevée en fin de séance.	- Choix de faire résoudre quelques équations « à la main »
	Phase 2 résolution littérale de l'équation (T_2)	- Matériel : feuille blanche	
	Phase 3 conception de l'algorithme (T_3)	- Matériel : feuille blanche et logiciel de programmation	- Choix du logiciel de programmation
	Phase 4 écriture d'un	- Matériel : logiciel de programmation	

	programme traduisant l'algorithme ((T_4)		
	Phase 5 utilisation du programme pour résoudre des équations (T_5)	- Matériel : feuille blanche et logiciel de programmation	- Choix de réaliser une synthèse en fin de séance
Seconde option (phases 1 à 6)	**Phase 6** identifier la fonction d'un programme (T_6)	- Matériel : feuille blanche et/ou poste informatique	- Choix de réaliser cette phase en classe ou en travail à la maison

Tableau 90 : Résumé des éléments imposés et modulables de la situation n°2 prévus dans la trame d'ingénierie

Les choix imposés et modulables dans l'OM

La réalisation d'un travail algorithmique sur la résolution d'équations du premier degré est imposée par le chercheur – puisqu'il s'agit du cœur de cette recherche – et un choix d'équations est proposé aux enseignants (cf. annexe A12). Ce choix est tiré des équations proposées lors de la situation n°1 en ne conservant que les équations du premier degré (cf. annexe A11). Nous demandons aux professeurs de choisir une dizaine d'équations parmi celles-ci ou d'en proposer d'autres de leur choix s'ils le souhaitent. Les raisons de ces options sont :

- la facilitation de la tâche des enseignants en leur présentant de manière exemplifiée la situation qu'ils auront à expérimenter ;
- la possibilité d'analyser les choix d'équations retenues par les enseignants, en mesurant les invariants ou les différences observées ;
- comme pour la situation n°1, l'assurance de la variabilité suffisante des valeurs des paramètres et de la forme des équations choisies.

L'OM n'est volontairement pas proposée aux professeurs telle qu'elle est présentée en section 9.3.2, c'est-à-dire avec le découpage en types de sous-tâches. Au contraire, seule est proposée la réalisation de la tâche globale « faire réaliser un programme pour résoudre des équations du premier degré écrites sous la forme $ax + b = cx + d$ ». Rappelons que deux options sont prévues pour l'OM (cf. §9.3.3) mais que nous laissons le professeur libre de choisir s'il préfère mener la situation n°2 en un temps ou en deux temps.

Par ces libertés de choix, nous souhaitons pouvoir analyser les gestes professionnels des professeurs dans la gestion de l'apport de l'algorithmique, comme *outil* pour comprendre les concepts de l'algèbre et ainsi amener des éléments de réponse aux hypothèses H1, H3 et H4. Pour l'hypothèse H1, nous analysons comment les professeurs reprennent des praxéologies algébriques, en considérant l'aspect *objet* de l'algèbre. Pour l'hypothèse H3, c'est la manière dont les professeurs allient algèbre et algorithmique qui est observée, en particulier leur gestion de la transposition informatique des objets algébriques. Enfin la comparaison des pratiques des enseignants expérimentateurs permet d'en relever les invariants et les différences, dans leur enseignement de l'algèbre et d'étayer l'hypothèse H4.

Les choix imposés et modulables dans l'OD

L'OD dépendant de l'OM, nous n'imposons que peu d'éléments dans cette organisation, pour les raisons invoquées ci-dessus. Les éléments imposés sont les postes informatiques équipés d'un logiciel de programmation ainsi que les feuilles comportant la liste d'équations à résoudre à l'aide du programme réalisé. Ces éléments sont certes inhérents à la situation mais ont leur importance par rapport à la façon dont nous souhaitons mener et analyser l'expérimentation. Tout d'abord, la présence de l'ordinateur implique la volonté de ne pas rester au stade de l'algorithme en environnement papier-crayon mais de réaliser un programme automatisant la résolution de certaines équations du premier degré. Lier algorithme et programme est une préconisation des programmes officiels et de plus, l'écriture de l'algorithme sous forme d'un programme informatique peut permettre une rétroaction sur les concepts de base de l'algorithmique (cf. §4.5.3 et 4.5.4). Enfin, comme dit dans l'introduction de la situation n°2, il s'agit de montrer aux élèves qu'ils peuvent automatiser la technique de résolution de certaines équations du premier degré en les faisant résoudre par une machine. La prise de conscience de cette automatisation peut les amener à appliquer eux-mêmes une technique adéquate et automatisée lorsqu'ils travaillent en environnement papier-crayon.

La présence de la feuille de papier n'est pas non plus qu'un simple matériel permettant au chercheur de récupérer les solutions des équations données par le programme. Les traces écrites laissées par les élèves permettent d'analyser la présence d'objets algébriques et d'objets algorithmiques, les allers-retours éventuels entre les deux, l'écriture plus ou moins aboutie de l'algorithme ou encore la forme du langage utilisé (pseudo-code ou langage informatique).

Comme pour les tâches de l'OM et pour les mêmes raisons, l'organisation en cinq ou six phases, présentée dans le tableau 90, n'est pas imposée aux professeurs mais ces phases apparaîtront sans doute au cours de la séance, de façon plus ou moins imbriquées. Les éléments modulables qui en découlent sont le choix de la durée et du critère d'arrêt de chaque phase, celui de donner des indications aux élèves pendant les différentes phases et enfin de réaliser une synthèse à la fin de chaque phase ainsi qu'une synthèse finale.

Notons que dans le cas où le professeur choisit la seconde option pour la situation n°2, la phase 6 lui est proposée en classe ou en travail à la maison. Ce choix lui est laissé pour tenir compte de ses contraintes de temps, en fonction de l'avancée du programme institutionnel.

Pour finir, le professeur a le choix de réaliser la situation n°2 en classe entière ou en demi-classe, mais d'une part le nombre de places restreint des salles informatiques et d'autre part, la difficulté de gestion d'une séance utilisant les TICE favorisent l'hypothèse que les professeurs l'effectueront en demi-classe. Enfin faire travailler les élèves en binôme ou seuls reste à la discrétion du professeur, cette condition n'ayant que peu d'importance pour nos analyses.

9.4 Situation n°3

9.4.1 Préambule : *modélisation* des équations

La situation n°3 constitue la *reprise* et le prolongement des situations précédentes. En effet, l'objet sur lequel nous travaillons ici est l'équation polynomiale de degré 2. Pour la situation n°1, l'objectif est de *trier*, de *catégoriser* des équations, ce qui permet d'une part, de distinguer l'équation du second degré de celle du premier degré et d'autre part, de reconnaître différentes formes d'équation (factorisées, développées, canoniques). La situation n°2 a pour objectif la résolution d'équations du premier degré par le biais de l'algorithmique et la situation n° 3 y ajoute celle d'équations du second degré : elle vient donc en continuation du travail effectué.
À ce point du développement, nous souhaitons préciser la notion de « *modélisation des équations* » que nous allons utiliser dans la suite de nos analyses.
Dans l'Encyclopédie Universalis, nous lisons la définition suivante de la *modélisation*, en mathématiques :

> […] les mathématiques permettent de modéliser, c'est-à-dire de représenter, toutes sortes de situations, d'objets et de structures du monde réel, l'étude mathématique ou les simulations informatiques de ces représentations nous informant – lorsque les représentations sont bonnes – sur le monde réel.[140]

Modéliser en mathématiques consiste donc à *représenter une situation du monde réel*, et le modèle obtenu est souvent perfectible. Ainsi André Revuz[141] indique-t-il :

> Il est capital en tout cas de savoir que le modèle n'est pas la situation et que, si l'écart entre le modèle et la situation est inacceptable, la seule solution est de changer de modèle ou bien, dans l'attente d'un meilleur modèle, de n'utiliser celui dont on dispose qu'avec une grande prudence. Confondre la situation et le modèle est une erreur très fréquente : un modèle qui semble très fidèle, ou qui a été utilisé très longtemps, donne à beaucoup l'illusion qu'il est la situation, et certains le prendront pour « la réalité même » ; qu'on se rappelle les clameurs qui ont salué la création par Einstein d'un modèle différent de celui de la mécanique newtonienne.

Le sens que nous souhaitons donner dans la suite de ce travail au terme « modéliser » est différent de celui exposé ci-dessus. Nous avons vu que la situation n°2 exige de passer par une tâche de reconnaissance d'une forme générique que nous pouvons attribuer à une liste d'équations données avec des coefficients déterminés. Ici, ce qui est modélisé n'est plus une situation du monde réel mais une série d'équations, qui pourraient déjà chacune représenter la modélisation d'une situation. Il s'agit de déterminer un *modèle* d'équations qui convienne pour les inclure toutes. Le terme « *modèle* » est à comprendre ici dans le sens : « *ce qui sert*

[140] Jean-Paul DELAHAYE, « MODÉLISATION, *mathématique* », *Encyclopædia Universalis* [en ligne], consulté le 16 septembre 2013. URL : http://www.universalis-edu.com/encyclopedie/modelisation-mathematique/

[141] André REVUZ, « MATHÉMATIQUES ENSEIGNEMENT DES », *Encyclopædia Universalis* [en ligne], consulté le 16 septembre 2013. URL : http://www.universalis-edu.com/encyclopedie/enseignement-des-mathematiques/

de référence, [...] objet, possédant toutes les caractéristiques d'une catégorie[142] », c'est-à-dire un *représentant-type d'une catégorie*. Par exemple, un « bon modèle » de la catégorie des équations du premier degré serait, par exemple : $1{,}5x - 4 = 412x + \frac{2}{3}$, ce qui fait porter l'accent sur la représentativité des exemplaires. Dans l'exemple donné, les coefficients sont des nombres déterminés appartenant à différents ensembles de nombres, et cet exemple évoque davantage la catégorie des équations du premier degré que l'équation $x + 3 = 0$, qui en est un cas particulier. Mais ce n'est pas non plus dans le sens d'un exemple-type qui représente la catégorie que nous entendons *modéliser des équations*.
Ce que nous définissons comme *modélisation d'équations* est la détermination d'une équation *paramétrée* qui couvre tous les cas de figure de la liste d'équations donnée. Pour les deux équations ci-dessus, un modèle qui convient aux deux équations est $ax + b = cx + d$ (a, b, c, d nombres réels fixés), alors que $x + a = 0$ (a nombre réel fixé) ne convient que pour la seconde.
C'est ainsi que la situation n°2 permet la *modélisation* d'équations du premier degré et de la même manière la situation n°3 permet la *modélisation* de deux catégories d'équations du second degré, ce que nous présentons dans la section qui suit.

9.4.2 Présentation de la situation n°3

Notons que l'étude complète des équations du second degré n'est pas menée ici, puisqu'elle n'est pas au programme de la classe de seconde. Nous souhaitons dans notre étude respecter ce programme, puisque nous travaillons en collaboration avec les enseignants. Pour obtenir leur adhésion à ce projet, il nous a semblé indispensable de tenir compte de cette contrainte institutionnelle. Aussi seulement certaines formes de ces équations, déjà vues au collège, seront-elles reprises et résolues de manière *automatique* par le biais d'un programme informatique. Cette résolution « automatique » passe par la *modélisation* d'équations données au préalable avec des coefficients déterminés (cf. § 9.4.1) et qui sont alors *catégorisées* avec une forme générique comportant des paramètres. Ensuite un algorithme de résolution leur est appliqué.

Objectifs
Comme pour la situation n°2, l'objectif essentiel est d'asseoir le concept d'équation et des objets algébriques gravitant autour de ce concept. Le détour par l'algorithmique tend à faire émerger que toute résolution d'équation peut « s'automatiser » et donc « s'algorithmiser », une fois la reconnaissance de la catégorie d'équation effectuée. La spécificité de la situation n°3 est, de plus, de répertorier les techniques et technologies liées à la résolution d'équations particulières du second degré.
Par rapport aux connaissances visées, nous pouvons dégager les points suivants :
- catégoriser les équations du second degré du programme de la classe de seconde selon leur technique de résolution (par factorisation par un facteur commun, par la reconnaissance d'une identité remarquable) ;
- *modéliser* (cf. §9.4.1) des types d'équations du second degré comme $x^2 = a$ ou $(ax + b)(cx + d) = 0$ où a, b, c, d sont des paramètres réels ;

[142] Dictionnaire de l'Encyclopédie Universalis. Consulté sur le site : http://www.universalis-edu.com, le 16 septembre 2013.

- reconnaître que des expressions comme $x^2 = a$ ou $(ax + b)(cx + d) = 0$ renvoient à des équations du second degré ;
- élaborer des algorithmes permettant de résoudre des équations se ramenant à l'un des deux types précédents ;
- transposer ces algorithmes en des programmes informatiques utilisant un logiciel spécifique ;
- tester les programmes obtenus pour différentes valeurs numériques des paramètres ;
- comparer les solutions déterminées en environnement papier-crayon et algorithmique.

Motivation

Commençons par justifier le choix des équations du second degré sous la forme $x^2 = a$ ou $(ax + b)(cx + d) = 0$. Nous y voyons deux raisons :
- une raison d'ordre mathématique. Ces deux catégories recouvrent en grande partie les équations du second degré fréquentées en classe de seconde. Il manque en effet à ces deux catégories les équations n'ayant pas de solutions réelles, de la forme $ax^2 + bx + c = 0$, avec a et b simultanément non nuls. Ce dernier type d'équations peut être résolu graphiquement par l'intermédiaire de la courbe de la fonction polynôme associée, au niveau de la classe de seconde (MEN, 2009a) ou par une méthode algébrique utilisant le discriminant vue au niveau des classes de première S et ES (MEN, 2010a, 2010b).
- une raison d'ordre didactique. Nous avons vu au chapitre 7 que ces deux types d'équations sont centraux par rapport aux savoirs institutionnels, en ce sens que ces équations sont nommées dans les programmes institutionnels des classes de troisième et de seconde et qu'elles sont traitées et institutionnalisées dans de nombreux manuels scolaires. Il s'agit donc ici d'une *reprise* de ces savoirs, considérés comme des objets, au sens de Douady, sur lesquels l'algorithmique opère en tant qu'outil.

De la même manière que pour la situation n°2, il est question de construire la connaissance de la *caractérisation* des équations et de développer la capacité à considérer le double aspect *structural* et *procédural*, au sens de Sfard, des équations (cf. §2.2.3). Sfard (1991) compare ces deux aspects aux deux côtés d'une médaille : ces deux côtés ne peuvent pas être « vus » simultanément, mais chacun des deux est un constituant de la médaille, sans qu'il soit possible d'affirmer que l'un est plus important que l'autre. Pour la considération de l'objet « équation », le *détour* par l'algorithmique nous semble un bon levier, permettant de tenir compte tour à tour de ces deux aspects. En effet, afin d'élaborer un algorithme qui résolve une catégorie d'équations comme $x^2 = a$ ou $(ax + b)(cx + d) = 0$, il est nécessaire de *modéliser* les équations données avec des nombres déterminés et d'en considérer l'aspect *structural* pour dégager leur forme générique. Ensuite, l'écriture d'un algorithme nécessite de considérer l'aspect *procédural* de cette équation générique, pour lui appliquer une technique de résolution adéquate. Ainsi les deux aspects coexistent-ils dans cette situation, et l'un et l'autre apparaissent indispensables pour réaliser la tâche demandée. Sfard (1991) souligne l'importance des deux aspects dans l'apprentissage d'un concept en ces mots :

> […] one ability cannot be fully developed without the other: on one hand, a person must be quite skillful at performing algorithm in order to attain a good idea of the "objects" involved in these algorithms; on the other hand, to gain full technical mastery, one must already have these objects, since

> without them the processes would seem meaningless and thus difficult to perform and to remember[143]. (p.32)

La présence de ces deux aspects permet de construire le concept d'équation de manière plus approfondie et plus unificatrice.
Il s'agit, dans cette troisième situation comme dans les deux premières de *reprise* (Larguier, 2009) ; toutes les équations dont il est question sont familières aux élèves, dans le sens qu'ils les côtoient depuis le collège. Mais cette reprise adjoint du *nouveau* à l'*ancien* de deux manières :
- par l'introduction de l'algorithmique qui permet une certaine matérialisation des objets algébriques et oblige à une réflexion sur leur statut ;
- par une synthèse des techniques et technologies relatives à la résolution de ces équations.

Matériel du milieu initial
Chaque élève dispose d'un matériel similaire à celui de la situation n°2 :
- une liste d'équations du second degré, choisies (en partie) parmi celles qui ont été triées lors de la situation n°1. Le choix de ces équations montre ainsi à l'élève la continuité du travail entrepris. Elle sont de deux formes $(ax + b)(cx + d) = 0$ et $x^2 = a$ avec a, b, c, d nombres déterminés sélectionnés pour une bonne représentation des ensembles $\mathbb{Z}$, $\mathbb{D}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$. Notons que, soit les équations se trouvent directement sous cette forme, soit elles s'y ramènent selon une technique de factorisation, de développement ou de réduction que les élèves ont déjà vu dans leur cursus antérieur (ce qui ne veut d'ailleurs pas dire que ces techniques sont assimilées). L'annexe A12 présente une liste d'équations type, que les professeurs expérimentateurs peuvent utiliser ;
- la consigne de réaliser des algorithmes pour les résoudre ;
- un poste informatique avec un logiciel de programmation adapté pour des lycéens ;
- une feuille blanche pour y écrire les recherches et les solutions des équations résolues à la main et avec l'algorithme.
Ces feuilles et les programmes conçus par les élèves font partie du recueil de données et sont relevés en fin de séance par le chercheur pour être analysés.

9.4.3 Analyse a priori de la situation n°3

Types de tâches de la situation proposée
La situation n°3 a pour but *d'élaborer des algorithmes permettant de résoudre certaines catégories d'équations du second degré*, ce qui constitue un type de tâches global. De la même manière que pour la situation n°2, cette tâche est complexe et non routinière pour l'élève. Aussi la décomposons-nous en plusieurs sous-types de tâches, en calquant ce

[143] une capacité ne peut pas être pleinement développée sans l'autre : d'une part, une personne doit être très habile à exécuter l'algorithme afin d'atteindre une bonne idée des « objets » impliqués dans ces algorithmes ; d'autre part, pour obtenir cette pleine maîtrise technique, il faut déjà avoir ces objets, car sans eux les processus semble dénués de sens et donc difficiles à réaliser et à retenir.

découpage sur celui de la situation n°2, et puisqu'il s'agit des *mêmes types* de tâches, nous utilisons les mêmes notations T_i[144], pour $1 \leq i \leq 5$. Nous notons :

- t_i ($1 \leq i \leq 5$) pour les tâches relatives à la catégorie d'équations $x^2 = a$;
- t'_i ($1 \leq i \leq 5$) pour les tâches relatives à la catégorie d'équations $(ax + b)(cx + d) = 0)$.

Comme pour la situation n°2, indiquons que ce découpage n'apparaît pas forcément de manière linéaire et dans cette stricte chronologie. En effet, certains élèves peuvent, une fois le type d'équations modélisé (tâches de type T_1), commencer à écrire le programme (tâches de type T_4) en déclarant les variables nécessaires, par exemple, puis revenir à la détermination des solutions de l'équation (tâches de type T_2) pour déterminer les *actions élémentaires* de l'algorithme (tâches de type T_3).

À ces tâches, nous ajoutons la tâche de type T_0, *résoudre tout ou partie « à la main » les équations données*. En effet, un aller-retour entre les tâches de types T_4 et T_5 peut être envisagé afin de procéder à la vérification du bon fonctionnement du programme (et par suite de la justesse de l'algorithme), en résolvant quelques équations « à la main » qui servent alors de test pour comparer les solutions obtenues en environnements papier-crayon et informatique.

Techniques et éléments technologico-théoriques associés aux types de tâches de la situation proposée

Passons en revue pour les différentes sous-tâches répertoriées ci-dessus les techniques possibles pour les effectuer ainsi que les éléments technologico-théoriques associés.

- ***Type de tâches T_1***

Les tâches t_1 et t'_1 de type T_1, *reconnaître que les équations données peuvent s'écrire sous une forme générique à déterminer ($x^2 = a$ ou $(ax + b)(cx + d) = 0$)*, reposent sur la technique τ_1 décrite ci-dessous. Nous exposons la technique en nous appuyant sur quelques exemples d'équations, susceptibles d'être résolues dans le cadre de ce travail, et qui montre le degré de technicité attendu. Sachant que ce degré de technicité ne sera pas dépassé, nous précisons dans le tableau ci-dessous les grandes lignes de la technique envisagée (d'autres équations particulières demanderaient un ajustement de cette technique). La technique proposée dans le tableau qui suit est à considérer comme modulable, c'est-à-dire qu'il peut être nécessaire de réaliser quelques transformations élémentaires sur les équations qui ne seraient pas données directement sous les formes proposées ci-dessous.

[144] Nous rappelons que :
- les types de tâches **T_1** sont *reconnaissance d'un type d'équations et écriture sous une forme générique* ;
- **T_2**, *résolution sous forme littérale d'une équation paramétrée* ;
- **T_3**, *conception d'un algorithme permettant d'automatiser la résolution d'une équation d'une forme déterminée ;*
- **T_4**, *écriture d'un programme, traduisant dans un langage informatique, l'algorithme issu d'une tâche de type T_3* ;
- **T_5**, *utilisation d'un programme informatique pour effectuer une résolution d'équation.*

Reconnaissance de la forme $x^2 = a$	**Reconnaissance de la forme $(ax + b)(cx + d) = 0$**
Exemples d'équation : $x^2 = 7$ $11 = 5x^2 + 2$ $5x^2 + x + 4 = x + x^2 + \sqrt{2}$ $(x + 0{,}5)^2 = x + 4$ - repérer que l'équation comporte des termes en x^2 mais pas de termes en x (éventuellement après développement ou après élimination des termes en x) ; - isoler le terme en x^2 dans un membre et les nombres déterminés dans l'autre, par transposition (ou soustraction, addition), multiplication, etc. ; - substituer les nombres déterminés par une lettre, comme *a* par exemple.	Exemples d'équation : $(4x + 3)(2x - 1) = 0$ $x^2 + 6x = 0$ $4x^2 + 12x + 9 = 0$ $(x + 0{,}5)^2 = x + 0{,}5$ - SOIT repérer que l'équation est sous la forme d'un produit nul de deux facteurs d'expressions algébriques du premier degré ; - SOIT repérer que l'équation du second degré est une somme nulle dont l'un des termes est commun et factoriser par ce terme commun pour se ramener au cas précédent ; - SOIT repérer que les termes composant l'équation du second degré sont de la forme $a^2x^2 + 2abx + b^2 = 0$ d'une identité remarquable et factoriser cette identité en $(ax + b)^2 = 0$; - Pour les trois cas, substituer les nombres déterminés par une lettre, autre que x.

Tableau 91 : Technique τ_1 associée aux tâches de type T_1 (situation n°3)

De la même manière que pour la situation n°2, signalons que cette tâche n'est pas routinière pour les élèves. La substitution attendue de nombres déterminés par des lettres est d'une tout autre nature que l'opération inverse qui est plus habituelle, et qui va dans le sens de l'algèbre vers le numérique. En revanche, ce qui est attendu ici va du numérique vers l'algébrique : c'est une généralisation des équations particulières proposées, autrement dit une *modélisation algébrique* des équations proposées (cf. § 9.4.1). L'environnement technologico-théorique associé se compose des notions d'équation, de degré, de somme et de produit de nombres ou d'expressions algébriques, d'identités remarquables et de tous les objets qui gravitent autour du concept d'équation (membre, inconnue, signe d'égalité, terme, facteur, facteur commun, etc.). Nous pouvons également y inclure *en actes* (Vergnaud, 1990) le concept de paramètre, qui n'est pas une connaissance institutionnalisée à ce niveau de classe mais qui est au cœur de cette première tâche. Dans la suite de l'analyse des techniques, nous ne reprenons pas les éléments du bloc technologico-théorique déjà mentionnés, nous n'ajoutons que ceux qui apparaissent en sus.

- ***Type de tâches T_2***

Considérons les tâches t_2 et t'_2 de type de type T_2, *résoudre sous forme littérale une équation paramétrée ($x^2 = a$ ou $(ax + b)(cx + d) = 0$)*. La technique τ_2 associée et les éléments technologico-théoriques sous-jacents se déclinent pour chacun des deux types d'équations de la façon suivante :

<table>
<tr><th>Résolution de l'équation littérale $x^2 = a$</th><th>Résolution de l'équation littérale $(ax + b)(cx + d) = 0$</th></tr>
<tr><td>
Discussion selon la valeur de a :
- si $a > 0$, l'équation admet deux solutions distinctes $\sqrt{a}$ et $-\sqrt{a}$.
- si $a = 0$, l'équation admet une seule solution, 0.
- si $a < 0$, l'équation n'admet pas de solution.
Ces différentes réponses peuvent être obtenues de deux façons :
• par la connaissance des solutions dans les différents cas (connaissance institutionnalisée)
• par la démonstration directe :
(1) pour $a > 0$, transformation de l'équation en équations équivalentes :
$x^2 - a = 0$
$x^2 - \sqrt{a}^2 = 0$
$(x - \sqrt{a})(x + \sqrt{a}) = 0$ (reconnaissance d'identité remarquable)
Et application de la règle **(R)** :
AB = 0 ⇔ A = 0 ou B = 0
$x - \sqrt{a} = 0$ ou $x + \sqrt{a} = 0$
$x = \sqrt{a}$ ou $x = -\sqrt{a}$
(1) pour $a = 0$, par application de la règle **(R)** ci-dessus
(2) pour $a < 0$, par le fait qu'un carré est toujours un nombre positif
</td><td>
• SOIT discussion selon les valeurs de a, b, c, d :
- si $a \neq 0$ et $c \neq 0$, en application de la règle **(R)**, elle admet deux solutions $\frac{-b}{a}$ et $\frac{-d}{c}$.
- si $a = 0$ et $c \neq 0$, discussion selon la valeur de b
  - si $b \neq 0$, l'équation admet une solution $\frac{-d}{c}$
  - si $b = 0$, tout nombre est solution de l'équation
- si $a \neq 0$ et $c = 0$, discussion selon la valeur de d
  - si $d \neq 0$, l'équation admet une solution $\frac{-b}{a}$
  - si $d = 0$, tout nombre est solution de l'équation
- si $a = 0$ et $c = 0$, discussion selon les valeurs de c et d
  - si $c = 0$ ou $d = 0$, tout nombre est solution de l'équation
  - si $c \neq 0$ et $d \neq 0$, l'équation n'admet pas de solution.

Remarque : La discussion des cas autres que $a \neq 0$ et $c \neq 0$ repose sur la reconnaissance et la compréhension des solutions des équations particulières des équations : $0x + 0 = 0$ et $0x + b = 0$, avec $b \neq 0$.

• SOIT précision donnée que l'équation est du second degré, c'est-à-dire précision donnée que $a \neq 0$ et $c \neq 0$
En application de la règle **(R)**, l'équation admet deux solutions $\frac{-b}{a}$ et $\frac{-d}{c}$
</td></tr>
</table>

Tableau 92 : Tâches de type T_2 (situation n°3) avec indications de la technique τ_2 associée

Résoudre une équation se ramenant au premier degré et *étudier les fonctions polynômes de degré 2* (MEN, 2009a) sont des items inscrits dans le programme institutionnel de la classe de seconde : les deux types d'équations données font partie de ce programme pour des coefficients déterminés, comme nous l'avons déjà évoqué dans ce travail (cf. §7.2).

Certains élèves peuvent, en guise de technique de résolution de l'équation $x^2 = a$, se contenter de donner une règle apprise en classe de 3e au collège ou *reprise* en classe de seconde (cette règle figure habituellement dans les manuels scolaires, cf. §7.2, figures 32 et 35). D'autres élèves peuvent résoudre l'équation sous forme littérale, résolution qui repose sur la discussion selon le signe du paramètre a. Outre les éléments déjà évoqués pour la tâche t_1, le bloc *logos* se compose :

- de connaissances sur les notions de carré et de racine carrée d'un nombre ;
- de la règle, notée (R) portant sur le produit nul de deux facteurs ;
- de connaissances sur les identités remarquables.

Ces connaissances faisant habituellement partie du bagage d'un élève de seconde, cette démonstration peut sembler accessible. Néanmoins, des difficultés prévisibles portent sur l'omission de la considération du cas $a < 0$, et pour $a > 0$, l'omission de la solution négative $-\sqrt{a}$.

En revanche, la résolution complète de l'équation $(ax + b)(cx + d) = 0$ (cf. tableau 92 ci-dessus) repose sur la discussion selon la nullité ou non des paramètres a, b, c, d et engendre un nombre élevé de cas particuliers, pour lesquels l'équation est du premier degré ou dégénérée. Si la démonstration complète n'est pas dénuée d'intérêt, elle se révèle complexe pour un élève de seconde, d'autant plus que le but recherché de cette situation est de reconnaître les équations du second degré exprimées sous la forme d'un produit nul d'expressions du premier degré et d'automatiser leur procédure de résolution. L'environnement technologico-théorique comporte les mêmes éléments gravitant autour du concept d'équation donnés pour la tâche t_1, auxquels s'ajoutent la règle (R) notée ci-dessus, des règles de logique (comme la négation de [$a \neq 0$ et $c \neq 0$] est [$a = 0$ ou $c = 0$]) et l'interprétation des équations particulières (comme $0x + 0 = 0$ et $0x + b = 0$, avec $b \neq 0$). Il nous semble souhaitable, afin de ne pas complexifier l'algorithme à concevoir, de préciser au départ que la situation porte sur des équations du second degré, donc que les deux coefficients a et c sont supposés tous deux non nuls. De ce fait, l'environnement technologico-théorique se trouve allégé des règles de logique et des équations particulières citées ci-dessus. La difficulté nous semble alors « raisonnable » pour un élève moyen de seconde.

- ***Type de tâches T_3***

Les tâches t_3 et t'_3 de type T_3, *concevoir un algorithme permettant d'automatiser la résolution d'une équation ($x^2 = a$ ou $(ax + b)(cx + d) = 0$)*, s'effectuent en utilisant la technique τ_3 de décomposition en *actions élémentaires* de la résolution l'équation littérale. L'algorithme recherché constitue une *transposition* de la résolution de l'équation littérale, une procédure permettant de déterminer les solutions de celle-ci, de manière systématique, en fonction des paramètres et pour tous les cas possibles, soit pour toute *famille d'instances du problème* (Modeste, 2012). Nous indiquons ci-dessous les deux algorithmes *informatisés* correspondant aux deux équations résolues en tâches t_2 et t'_2.
Pour l'équation $(ax + b)(cx + d) = 0$, deux algorithmes, complet et simplifié, sont présentés, selon que les paramètres a et c sont considérés non nuls ou non.

<table>
<tr><th rowspan="2">Algorithme informatisé de résolution des équations du type $x^2 = a$</th><th colspan="2">Algorithme informatisé de résolution des équations du type $(ax + b)(cx + d) = 0$</th></tr>
<tr><th>Complet</th><th>Simplifié ($a \neq 0$ et $c \neq 0$)</th></tr>
<tr><td colspan="3">Transposition de la résolution littérale en dégageant les actions élémentaires (entrée, traitement, sortie, boucles) et en les ordonnant sous la forme suivante :</td></tr>
<tr><td>• Donnée du paramètre a
• Si $a > 0$, sortie des deux valeurs $\sqrt{a}$ et $-\sqrt{a}$
• Si $a = 0$, sortie de 0.
Si $a < 0$, en sortie : pas de solution.</td><td>• Donnée des paramètres a, b, c, d
• Si $ac \neq 0$, sortie des deux valeurs $\frac{-b}{a}$ et $\frac{-d}{c}$
• Si $a = 0$ et $c \neq 0$
- si $b \neq 0$, sortie de $\frac{-d}{c}$
- si $b = 0$, sortie de : tout nombre est solution
• Si $a \neq 0$ et $c = 0$
- si $d \neq 0$, sortie de $\frac{-b}{a}$
- si $d = 0$, sortie de : tout nombre est solution
• Sinon
- si $cd = 0$, sortie de : tout nombre est solution.
- sinon sortie de : l'équation n'admet pas de solution</td><td>• Donnée des paramètres a, b, c, d
• Si $a \neq 0$ et $c \neq 0$, sortie des deux valeurs $\frac{-b}{a}$ et $\frac{-d}{c}$
• Si $a = 0$ ou $c = 0$, en sortie : « l'équation n'est pas du second degré »
(ou « cet algorithme n'est pas conçu pour résoudre ce type d'équation »)</td></tr>
</table>

Tableau 93 : Type de tâches T_3 (situation n°3) avec indications de la technique τ_3 associée

Notons que les *toutes les instances* du problème se traduisent, pour l'équation $x^2 = a$, par la considération de toutes les valeurs possibles de a, c'est-à-dire par la discussion selon le signe de a. Pour l'équation $(ax + b)(cx + d) = 0$ et pour l'algorithme complet, ceci s'interprète dans un premier temps, par la considération de la nullité ou non des paramètres a et c puis dans un second temps, par la nullité ou non des paramètres b et d. En revanche, pour l'algorithme simplifié, tel que nous concevons le proposer aux élèves (ou tel qu'ils le concevront sans doute eux-mêmes), seule la considération de la non nullité des paramètres a et c apparaît, et de plus, celle-ci n'est utilisée que pour vérifier que l'équation entrée est bien du second degré. Dans le cas d'une équation dégénérée, l'élève est ainsi amené à utiliser un autre algorithme. L'algorithme simplifié a pour *instances* les équations du second degré sous la forme d'un produit nul de deux équations du premier degré alors que l'algorithme complet englobe les cas où l'équation est du premier degré ($a = 0$ ou bien $c = 0$) ou dégénérée ($a = 0$ et $c = 0$). Du point de vue de l'élève, nous pouvons prévoir des difficultés dans la considération de ces différents cas mais également, du point de vue de l'enseignant, il est intéressant d'examiner comment le professeur expérimentateur gère ces difficultés, inhérentes à la forme de ces équations et à leur généralisation par l'introduction de paramètres.
Comme pour la situation n°2, à l'environnement technologico-théorique mathématique déjà présent, s'ajoute un environnement technologico-théorique algorithmique qui repose sur la structure d'un algorithme, en particulier sur les concepts d'*action élémentaire*, de variable, d'entrée/sortie, de structure alternative, ainsi que des concepts permettant le contrôle de la structure d'un algorithme basés *sur la logique mathématique* et *les règles de raisonnement* (Modeste, 2012). Soulignons que l'algorithme se situe dans le paradigme *AM-outil*[145], au sens de Modeste (2012, p.61) puisque la preuve est mathématique et constituée de la résolution littérale des équations des deux catégories traitées. Cette preuve témoigne d'un algorithme valide (*preuve de correction*) et le nombre fini d'étapes (sans structure répétitive) montre qu'il se termine (*preuve de terminaison*). Et comme nous nous intéressons à sa construction et à sa validité, il se situe également dans le paradigme AM-*objet*.

- ***Type de tâches T_4***

Les tâches t_4 et t'_4 de type T_4, *écrire, sous un logiciel de programmation donné, un programme traduisant l'algorithme de la tâche T_3*, (pour les équations $x^2 = a$ et $(ax + b)(cx + d) = 0$), s'opèrent suivant la technique τ_4, qui consiste à *transposer* l'algorithme précédent dans un langage de programmation. Il s'agit de la *seconde transposition* définie en section 4.4 (cf. figure 14). La technique τ_4 repose sur :
- la transposition des variables mathématiques en variables informatiques ;
- le décentrage selon le point de vue de la machine (conversion des entrées en lecture, des sorties en écriture) ;
- la considération des actions élémentaires que le logiciel peut exécuter ;
- le respect du langage de programmation.

Comme pour la situation n°2, des difficultés prévisibles dans les différents éléments de τ_4 portent sur la différentiation des variables informatiques dont certaines apparaissent en lecture et d'autres en écriture, et sur la gestion des structures alternatives imbriquées qui nécessitent

[145] Algorithme Mathématique, utilisé comme outil pour résoudre un problème (Cf. §9.2.2 pour la définition)

de se référer à des règles de logique. De plus, l'écriture des algorithmes en *pseudo-code* pour les tâches de type T_3 (cf. tableau 93) ne fait pas apparaître toutes les contraintes de programmation dues au logiciel Algobox. Par exemple, ce logiciel ne permet pas l'affichage d'une expression dont la valeur n'est pas encore évaluée, c'est-à-dire qu'il n'est pas possible de faire afficher directement $\sqrt{a}$ ou $\frac{-b}{a}$, comme dans le tableau ci-dessus.

Le tableau qui suit donne deux exemples de programmes réalisés sous Algobox[146]. Algobox impose de créer une variable informatique (ou d'en utiliser une déjà existante) dans laquelle est calculé le résultat de l'opération (par exemple, lignes 3, 18 et 20 du programme de gauche). L'instruction d'affichage de la variable peut ensuite se faire (par exemple, ligne 19 à gauche). Cette contrainte fait apparaître comme indispensable la compréhension de la nature d'une variable informatique, comme un emplacement mémoire physique de la machine où une nouvelle valeur stockée chasse l'ancienne. C'est ainsi qu'apparaît l'instruction « afficher x » après chaque attribution d'une nouvelle valeur à la variable (lignes 19 et 21, à gauche).

Programme sous Algobox : **Résolution des équations du type $x^2 = a$**	**Programme sous Algobox :** **Résolution des équations du type** **$(ax + b)(cx + d) = 0$ avec $a \neq 0$ et $c \neq 0$**
1 VARIABLES	**1 VARIABLES**
2 a EST_DU_TYPE NOMBRE	2 a EST_DU_TYPE NOMBRE
3 x EST_DU_TYPE NOMBRE	3 b EST_DU_TYPE NOMBRE
4 DEBUT_ALGORITHME	4 c EST_DU_TYPE NOMBRE
5 LIRE a	5 d EST_DU_TYPE NOMBRE
6 SI (a<0) ALORS	6 x EST_DU_TYPE NOMBRE
7 DEBUT_SI	**7 DEBUT_ALGORITHME**
8 AFFICHER "pas de solution"	8 LIRE a
9 FIN_SI	9 LIRE b
10 SINON	10 LIRE c
11 DEBUT_SINON	11 LIRE d
12 SI (a==0) ALORS	12 SI (a!=0 ET c!=0) ALORS
13 DEBUT_SI	**13 DEBUT_SI**
14 AFFICHER "une seule solution : 0"	14 x PREND_LA_VALEUR -b/a
15 FIN_SI	15 AFFICHER x
16 SINON	16 x PREND_LA_VALEUR -d/c
17 DEBUT_SINON	17 AFFICHER x
18 x PREND_LA_VALEUR sqrt(a)	**18 FIN_SI**
19 AFFICHER x	19 SINON
20 x PREND_LA_VALEUR -sqrt(a)	**20 DEBUT_SINON**
21 AFFICHER x	21 AFFICHER "l'équation n'est pas du second degré"
22 FIN_SINON	**22 FIN_SINON**
23 FIN_SINON	**23 FIN_ALGORITHME**
24 FIN_ALGORITHME	

Tableau 94 : Exemples de programmes de résolution d'équations du second degré sous Albogox

Ces contraintes du logiciel induisent un manque de *transparence*, au sens d'Artigue, entre l'algorithme en pseudo-code et le programme en langage Algobox et risquent d'engendrer autant de difficultés pour l'élève. À ce stade, si l'*instrumentation* n'est pas suffisamment avancée, le passage entre les environnements papier-crayon et informatique risque d'être délicat.

[146] En annexe A15 se trouve également un programme sous Algobox correspondant à l'algorithme « complet » de résolution des équations de la forme *(ax + b)(cx + d)* = 0, c'est-à-dire avec *a* et *c* éventuellement nuls..

Au bloc technologico-théorique déjà présent, s'ajoute des concepts propres à la programmation, comme le concept d'*action élémentaire* pour une machine ainsi que tout élément de base qui structure un programme (variable informatique, affectation, lecture/écriture, instruction, structure alternative, etc.) et la compréhension du langage de programmation du logiciel Algobox. Notons que le passage de l'algorithme au programme s'accompagne d'un changement de paradigme au sens de Modeste (2012), vers le paradigme *AI-outil*[147] où le système de représentation passe d'un langage mathématique à un langage de programmation et où le contrôle repose sur une vérification formelle, syntaxique de l'écriture des propriétés.

- ***Type de tâches T_5***

De même que ci-dessus, nous présentons le détail de la technique τ_5 associée aux tâches de type T_5 (notées t_5 pour les équations $x^2 = a$ et t'_5 pour les équations $(ax + b)(cx + d) = 0$), *utiliser le programme réalisé pour résoudre les équations proposées*, sous forme d'un tableau regroupant les deux catégories d'équations :

Exécution du programme de résolution des équations $x^2 = a$	**Exécution du programme de résolution des équations $(ax + b)(cx + d) = 0$ avec $a \neq 0$ et $c \neq 0$**
• Transformer au besoin l'équation pour la ramener à la forme $x^2 = a$ (voir technique τ_1 du tableau 91) ; • Lancer le programme ; • Entrer au clavier, la valeur numérique correspondant au paramètre *a* ; • Lire le résultat affiché à l'écran donnant les solutions éventuelles de l'équation ; • Interpréter ce résultat comme solution(s) de l'équation considérée.	• Transformer au besoin l'équation pour la ramener à la forme $(ax + b)(cx + d) = 0$ (voir technique τ_1 du tableau 91) ; • Lancer le programme ; • Entrer au clavier, successivement, les valeurs numériques correspondant aux paramètres *a, b, c, d* (après les avoir identifiés) de l'équation considérée ; • Lire le résultat affiché à l'écran donnant les solutions de l'équation ; • Interpréter ce résultat comme solution(s) de l'équation considérée.

Tableau 95 : Techniques τ_5 associée aux tâches de type T_5 (situation n°3)

Les techniques de transformations éventuelles de l'équation pour l'amener sous l'une des deux formes génériques $x^2 = a$ ou $(ax + b)(cx + d) = 0$ est décrite pour le type de tâches T_1 et n'est pas reprise ici.
Comme pour la situation n°2, les difficultés se situent a priori au niveau de la reconnaissance des coefficients des équations considérées, surtout pour les équations du type $(ax + b)(cx + d) = 0$. Dans une équation comme $4x(x - 2) = 0$ par exemple, la substitution des valeurs numériques aux paramètres repose sur un bloc *logos* comportant la connaissance des propriétés de l'addition et de la multiplication, et en particulier des éléments neutres (*en actes*) de l'addition et de la multiplication. En effet, il faut identifier que $4x = 4x + 0$ pour attribuer aux paramètres a et b les valeurs 4 et 0 respectivement, alors que pour le facteur

[147] Algorithme Informatique, utilisé comme outil pour résoudre un problème (Cf. §9.2.2 pour la définition)

$x - 2$, il s'agit de comprendre que $x - 2 = 1\times x + (-2)$, pour substituer à c la valeur 1 et à d la valeur -2.
D'autre part, c'est au moment d'effectuer les tâches de type T_5 que la tâche de type T_0, *résoudre « à la main » des équations données*, est susceptible d'apparaître. Cette dernière peut en effet permettre de vérifier le fonctionnement du programme (et par suite de la justesse de l'algorithme), en comparant les solutions obtenues « à la main » et à l'aide du programme. Comme déjà dit pour la situation n°2, cette comparaison est souhaitable, d'une part, elle permet une rétroaction dans le contrôle de validation du programme et d'autre part, elle permet également un retour au domaine algébrique, puisqu'il d'agit de passer d'un traitement informatique de variables informatiques à un traitement algébrique de variables mathématiques.
L'environnement technologico-théorique comporte tout élément déjà cité pour les techniques précédentes, aussi bien pour le domaine mathématique qu'algorithmique ou de programmation, en remarquant que l'accent est mis ici sur les concepts de variable informatique, de paramètre et de solution d'une équation.

9.4.4 Les éléments imposés et modulables de la situation n°3

En suivant notre méthodologie d'expérimentation, nous proposons une trame d'ingénierie pour cette situation, composée d'une OM et d'une OD modulables sur certains points par les professeurs expérimentateurs. Le tableau ci-dessous présente ces éléments.

	Éléments	**Éléments imposés**	**Éléments modulables**
OM	Type de tâches	Réaliser deux programmes : l'un pour résoudre des équations du 2nd degré de la forme $x^2 = a$ et l'autre pour celles de la forme $(ax + b)(cx + d) = 0$	- Possibilité de découper la tâche en sous-tâches (tâches de type T_1 à T_5, §9.4.3) pour la proposer aux élèves
	Équations	Équations polynomiales de degré 2	- Choix d'équations proposé par le chercheur mais possibilité d'en prendre d'autres (déjà sous leur forme générique ou à transformer) - Choix du nombre d'équations
OD	Généralités	Réaliser la situation en salle informatique avec ordinateurs à disposition des élèves	- Choix de faire travailler les élèves seuls ou de constituer des binômes - Choix de la durée et du critère d'arrêt de chaque phase - Choix de donner des indications aux élèves pendant les différentes phases - Choix de réaliser une synthèse à la fin de chaque phase

Déroulement a priori	*Le découpage en phases 1.1 à 2.5 n'est pas imposé. Il apparaîtra sans doute cependant de façon plus ou moins linéaire. Il est présenté sous cette forme par commodité de lecture.*		
Phase 1 : Conception d'un algorithme de résolution des équations de la forme $x^2 = a$	**Phase 1.1** t_1 : reconnaissance et écriture d'équations sous la forme $x^2 = a$	- Matériel : équations choisies par le professeur et distribuées sur une feuille, relevée en fin de séance.	- Choix de faire résoudre quelques équations « à la main »
	Phase 1.2 t_2 : résolution littérale de l'équation	- Matériel : feuille blanche	
	Phase 1.3 t_3 : conception de l'algorithme	- Matériel : feuille blanche et logiciel de programmation	- Choix du logiciel de programmation
	Phase 1.4 t_4 : écriture d'un programme traduisant l'algorithme de t_3	- Matériel : logiciel de programmation	
	Phase 1.5 t_5 : utilisation du programme pour résoudre des équations	- Matériel : feuille blanche et logiciel de programmation	- Choix de réaliser une synthèse en fin de phase
Phase 2 : Conception d'un algorithme de résolution des équations de la forme $(ax + b)(cx + d) = 0$	**Phase 2.1** t'_1 : reconnaissance et écriture d'équations sous la forme $(ax + b)(cx + d) = 0$	- Matériel : équations choisies par le professeur et distribuées sur une feuille, relevée en fin de séance.	- Choix de faire résoudre quelques équations « à la main »
	Phase 2.2 t'_2 : résolution littérale de l'équation	- Matériel : feuille blanche	
	Phase 2.3 t'_3 : conception de l'algorithme	- Matériel : feuille blanche et logiciel de programmation	- Choix du logiciel de programmation
	Phase 2.4 t'_4 : écriture d'un programme traduisant l'algorithme de t'_3	- Matériel : logiciel de programmation	
	Phase 2.5 t'_5 : utilisation du programme pour résoudre des équations	- Matériel : feuille blanche et logiciel de programmation	- Choix de réaliser une synthèse en fin de phase

Tableau 96 : Résumé des éléments imposés et modulables de la situation n°3 prévus dans la trame d'ingénierie

Les choix imposés et modulables dans l'OM

Dans la continuité avec la situation n°2 et dans le même esprit, la réalisation d'un travail algorithmique sur la résolution d'équations du second degré est imposée par le chercheur, en vue d'éprouver plus en avant les hypothèses de la problématique. Un choix d'équations, tiré des celles proposées au cours de la situation n°1 (cf. annexe A11, est présenté aux enseignants :

Équation 1 : $(3-4x)(2x-1)=0$	Équation 10 : $7x^2=7$
Équation 2 : $3x(x+\sqrt{5})=0$	Équation 11 : $\frac{x^2}{7}=21$
Équation 3 : $x^2+6x=0$	Équation 12 : $11=5x^2+2$
Équation 4 : $x^2=7$	Équation 13 : $3=2-x^2$
Équation 5 : $x^2=-4$	Équation 14 : $(x+1)^2=9$
Équation 6 : $x^2=(2{,}07)^2$	Équation 15 : $x^2+6x+9=0$
Équation 7 : $\frac{x^2}{27}=0{,}01$	Équation 16 : $x^2-8x=0$
Équation 8 : $x^2-5=7$	Équation 17 : $x^2-8x+15=-1$
Équation 9 : $\sqrt{3}x^2=-2$	Équation 18 : $x^2-8x+15=15$

Figure 97 : Choix des équations du second degré pour la situation n°3 (trame d'ingénierie)

Il est indiqué aux professeurs que ce choix n'est qu'indicatif et qu'ils peuvent en disposer comme ils le souhaitent, pour n'en conserver qu'une dizaine, en enlevant certaines et en ajoutant éventuellement d'autres de leur choix qui leur semblent pertinentes. En particulier, nous proposons aux enseignants des équations (cf. figure 97 ci-dessus, équations 3, puis 7 à 18) qui ne sont pas directement sous les deux formes génériques retenues, $x^2 = a$ et $(ax + b)(cx + d) = 0$, mais qui s'y ramènent par transformation. Notre objectif est que les élèves manipulent ces équations en les ramenant à leur forme générique, et constatant qu'elles sont du même modèle, utilisent le même algorithme pour les résoudre, ce qui revient à ce qu'une même technique puisse les résoudre. Cependant, nous laissons aux enseignants le choix d'inclure ou non de telles équations, et également de choisir le niveau des transformations nécessaires, selon le niveau de leur classe et selon que la tâche de conception des deux algorithmes leur semble suffisamment complexe. D'autre part, en proposant ces équations, nous présentons de façon exemplifiée la situation aux enseignants, de manière à ce qu'ils se la représentent plus aisément et, comme pour les situations n°1 et n°2, nous nous assurons de la variabilité suffisante des valeurs des paramètres.
Comme pour la situation précédente, l'OM n'est pas proposée aux professeurs découpée en types de sous-tâches et nous laissons chaque professeur expérimentateur décider de ce découpage. De leurs prises de décision, nous tenterons de dégager des gestes professionnels dans l'apport de l'algorithmique, comme *outil* pour comprendre des concepts algébriques et ainsi amener des éléments de réponse aux hypothèses H1, H3 et H4. En particulier, nous observerons si les praxéologies de résolution d'équations du second degré sont reprises par les enseignants (H1) et avec quelle complétude, pour les deux blocs *praxis* et *logos* (Chevallard, 1998). Également, sera étudiée leur gestion de la *transposition informatique* (Balacheff, 1994) des objets algébriques (H3) avec une comparaison de leurs gestes professionnels (H4).

Les choix imposés et modulables dans l'OD

Comme pour la situation n°2, les éléments imposés de l'OD se résument aux postes informatiques équipés d'un logiciel de programmation ainsi que les feuilles comportant la liste d'équations à résoudre à l'aide du programme réalisé. Les raisons du choix de cette organisation sont les mêmes que pour la situation précédente et ne sont pas repris ici. (cf. §9.3.4). L'organisation en phases (cf. tableau 96) est modulable, elle n'est pas proposée aux enseignants, pour leur laisser la latitude d'exprimer leurs propres gestes professionnels.

CHAPITRE 10 - ÉLABORATION DES TRAMES PROJETÉES

Nous présentons dans un premier temps, les analyses a priori et a posteriori de l'entretien générique pré-expérimentation. Puis, après avoir situé le moment de l'expérimentation dans la progression des enseignants, la *trame projetée* déterminée par chaque professeur est exposée, en analysant celle-ci dans le cadre de la TAD. Enfin, un bilan et une comparaison des trames projetées des enseignants sont réalisés.
Nous avons choisi de placer l'analyse de l'entretien pré-expérimentation en tête de ce chapitre afin de comprendre certains aspects des conceptions et pratiques des trois enseignants expérimentateurs et ainsi de mieux situer leurs choix pour l'élaboration de leur trame projetée.
Rappelons que l'expérimentation en œuvre se situe au cours de l'année scolaire 2010-2011 dans un même lycée de la proche banlieue de Montpellier et dont les caractéristiques ont été données en section 6.3. Trois professeurs expérimentateurs, Annabelle, Maurice et Alex ont contribué à ces travaux ainsi que leurs élèves de trois classes de seconde générale.

10.1 Entretien générique pré-expérimentation

10.1.1 Présentation de l'entretien

En préambule de la constitution de la *trame projetée* de chaque enseignant, une analyse des rapports des enseignants aux domaines algébriques et algorithmiques, en les considérant séparément puis en interrelation, est réalisée à l'aide d'un entretien entre le chercheur et chaque professeur, individuellement. Les thèmes abordés par rapport aux domaines cités sont les programmes institutionnels, les pratiques des enseignants, la construction des savoirs et les élèves. Cet entretien constitue, en quelque sorte, une présentation de chaque enseignant, tentant d'approcher ses représentations et les grandes lignes de sa pratique.
Conformément à ce que nous avons annoncé au chapitre 6 sur la méthodologie adoptée, nous avons organisé un entretien semi-directif, avec des questions par domaine puis par thèmes, de manière à rendre claires pour l'enseignant les différences entre chaque question. Nous présentons ce découpage ci-dessous. Rappelons que les questions sont un guide pour le chercheur et qu'elles ne seront pas forcément posées sous cette forme, ni en chapelet.
Domaine 1. Algorithmique
(Thème 1. Point de vue des programmes)
Q1. *Dans les nouveaux programmes de Seconde, une part d'algorithmique a été introduite dans le programme de mathématiques, qu'en pensez-vous ?*
(Thème 2. Point de vue de la pratique de l'enseignant)
Q2. *De quelle façon avez-vous l'intention de le suivre ? Dans quels domaines mathématiques ? Sous quelle forme ? Avec quelle fréquence ? Et avez-vous déjà commencé à l'enseigner dans vos classes ?*

Q3. *Quel(s) logiciels d'algorithmique avez-vous expérimenté ? Avez-vous des préférences ? Et sur la calculatrice ?*
Domaine 2. Algèbre
(Thème 1. Point de vue des programmes)
Q4. *Les nouveaux programmes de seconde ont changé. Que pensez-vous de la place accordée à l'algèbre ? Vous semble-t-elle différente de la place qu'elle occupait dans les programmes précédents ? Si oui, en quoi ?*
(Thème 2. Point de vue de la pratique de l'enseignant)
Q5. *Pensez-vous changer votre pratique d'enseignement de l'algèbre par rapport à ces nouveaux programmes ? Si oui, comment ? Est-ce que vous révisez des notions de collège ? Y a-t-il de nouveaux problèmes (équations du second degré, systèmes 2*2) ?*
Domaine 3. Algèbre et algorithmique
(Thème 3. Point de vue de la construction des savoirs)
Q6. *Pensez-vous qu'on pourrait lier l'apprentissage de l'algèbre et celui de l'algorithmique ? Pour quels types de problème par exemple ?*
(Thème 4. Point de vue de l'élève)
Q7. *Qu'est-ce que cela pourrait apporter aux élèves ?*

10.1.2 Analyse a priori de l'entretien

Nous nous proposons d'analyser par thème les questions de l'entretien pré-expérimentation. Pour chacun de ces thèmes, les domaines de l'algèbre, de l'algorithmique et de l'interrelation entre les deux sont pris en compte.

Thème 1 : point de vue des programmes institutionnels
Pour le thème 1, le rapport personnel de l'enseignant aux programmes institutionnels repose sur sa perception et sa compréhension des contenus et des finalités de ces programmes, ainsi que sur l'interprétation et la mise en œuvre des textes. La confrontation de tous ces éléments à sa propre conception des contenus à enseigner entraîne une adhésion plus ou moins grande aux contenus et techniques proposées dans ces programmes et constitue de plus des éléments décisifs dans sa pratique.
Le questionnement sur le rapport aux programmes est proposé dans le domaine de l'algèbre (Q4) et celui de l'algorithmique (Q1) et a pour objectif de faire ressortir les éléments ci-dessus. En effet, considérer comment l'enseignant perçoit, comprend, se représente et interprète les contenus algébriques et algorithmiques des programmes officiels nous renseigne sur les conceptions de celui-ci et nous permet de mieux comprendre, entre autres, ses motivations par rapport à sa participation à l'expérimentation. Les réponses obtenues devraient aussi permettre des éléments de réponse à l'hypothèse H1, qui considère la place de l'algèbre dans le programme de seconde.

Thème 2 : point de vue des pratiques enseignantes
Nous proposons d'interroger le rapport de l'enseignant aux domaines de l'algèbre et de l'algorithmique du point de vue de sa *pratique*. Nous entendons ce concept comme à la fois les *savoirs de la pratique*, c'est-à-dire ceux qui sont liés à l'acte d'enseigner et des *savoirs pour la pratique*, constitués par les *savoirs à enseigner* transposés par l'enseignant en *savoirs*

apprêtés, selon une expression empruntée à Chevallard (1982), en vue d'un enseignement effectif en classe. La pratique est considérée non seulement comme l'agir de l'enseignant dans la classe, mais aussi comme les organisations mathématiques et didactiques qu'il y met en œuvre. Les questions posées font référence à ces différents éléments dans le domaine de l'algorithmique (Q2 et Q3) pour comprendre comment ce domaine est introduit, en liaison avec quels domaines mathématiques, dans quel environnement informatisé il est proposé, etc. Des questions relatives au thème 2 sont également posées dans le domaine de l'algébrique (Q5), pour considérer la place que lui accorde l'enseignant dans sa pratique et également quels thèmes algébriques il met en place ou il reprend. Les réponses obtenues pourront encore ici alimenter l'hypothèse H1 sur les praxéologies qui vivent réellement dans les classes, en comparaison de celles préconisées par l'institution Éducation Nationale, par le biais des programmes.

Thème 3 : point de vue de la construction des savoirs
Dans ce thème, une question (Q6) est posée, qui concerne l'identification des liens que voient les enseignants entre les domaines algébrique et algorithmique. C'est-à-dire que nous nous interrogeons sur le rapport personnel de l'enseignant aux domaines conjoints de l'algèbre et de l'algorithmique du point de vue de la construction des savoirs. Cette question pourra éventuellement permettre de récolter des indices sur les connaissances des professeurs dans ces domaines conjoints et de considérer leur réflexion sur des thèmes possibles combinant algèbre et algorithmique. Comme l'entretien est semi-ouvert, les enseignants peuvent également confier ici des obstacles à l'utilisation de l'algorithmique pour l'enseignement de l'algèbre, en particulier leur éventuelle méconnaissance de l'algorithmique, comme science qu'ils n'ont pas forcément rencontrée dans leur cursus initial ni en formation continue. Également, la question posée (Q6) peut les amener à communiquer leur point de vue sur la construction des savoirs algébriques ou des savoirs algorithmiques, sans forcément lier les deux.

Thème 4 : point de vue des élèves
La dernière question (Q7) de l'entretien vise à obtenir des renseignements sur le rapport aux domaines conjoints de l'algèbre et de l'algorithmique du point de vue de l'apprentissage. Des informations sur tout ce qui concerne les difficultés des élèves et des connaissances à acquérir dans ces domaines pourront apparaître, en particulier :
- les difficultés récurrentes dans le domaine algébrique rencontrées par les élèves en fin de collège ou début de lycée ;
- les difficultés à utiliser l'algorithmique comme outil, avec l'apprentissage de nouveaux outils et de nouvelles techniques ;
- les difficultés à transférer des connaissances mathématiques du domaine algébrique au domaine algorithmique et réciproquement.

10.1.3 Analyse a posteriori des entretiens

Les analyses présentées ne le sont pas de façon chronologique, selon l'ordre des questions posées mais selon les thèmes définis en section précédente. Nous avons également choisi d'exposer dans les tableaux qui suivent des éléments d'enseignement évoqués par l'enseignant (en caractères droits) comme des concepts enseignés ou des pratiques de logiciels spécifiques et quelques extraits des verbatim (en italiques) significatifs, relativement à nos questions. Notons que ces trois tableaux ne constituent pas seulement des extraits du recueil de données, ils permettent également de montrer le rapport des enseignants, un à un, relativement aux différents thèmes et aux différents domines abordés. Nous présentons les trois tableaux à la suite, puis les rapports des enseignants aux domaines algébrique et algorithmique du point de vue de ces quatre thèmes sont analysés.

Dépouillement des entretiens par thème

L'entretien du professeur Annabelle a dû être écourté, pour des raisons indépendantes du travail mené, et nous ne disposons que peu d'éléments, c'est pourquoi certaines cases du tableau ci-dessous sont vides. Le verbatim complet se trouve en annexe A5.

Professeur Annabelle[148]		
Thème 1 Programmes	Algorith- mique	*« Personnellement, c'est une partie qui m'intéresse »*
	Algèbre	- *« Place plus faible et pas très claire »* - *« Sur les anciens programmes, on avait clairement des parties, d'après moi, plus calculatoires »* - *« C'est une manière un peu dangereuse d'aborder la chose »*
	Interrela- tion AA	
Thème 2 Pratiques	Algorith mique	- *« En fréquence : ce n'est pas ma priorité, c'est quand j'ai du temps. »* - Utilisation des logiciels Scratch et Algobox : *« Algobox, c'est un langage assez naturel mais reste une structure algorithmique. »* - *« j'ai déjà fait 3 ou 4 séances »*
	Algèbre	- *« Tu changes par le fait que tu utilises de plus en plus les TICE »* - *« Je fais beaucoup plus de calculs [algébriques] à partir des fonctions »*
	Interrela- tion AA	
Thème 3 Construction des savoirs	Algorith- mique	- Notion de variables, notion de condition - Algorithmique et géométrie analytique ; algorithmique et fonctions
	Algèbre	
	Interrela- tion AA	- *« Problèmes sur les priorités opératoires, sur les enchaînements de fonctions »* - *« L'algèbre, c'est quand même le domaine le plus calculatoire. »*
Thème 4 Élèves	Algorith- mique	- *« Est-ce que c'est vraiment fait pour tous les élèves, est-ce que vraiment les élèves de STG en ont besoin ? »* - *« C'est indispensable qu'ils aillent sur ordinateur et qu'ils manipulent, sinon ils ne vont rien comprendre »*
	Algèbre	
	Interrela- tion AA	

Figure 98 : Entretien pré-expérimentation du professeur Annabelle : quelques éléments

L'entretien de Maurice est retranscrit en annexe A6. Ici, les cases du tableau vides correspondent à des points qui n'ont pas été abordés, parce que le chercheur n'est pas parvenu à amener le professeur sur le sujet.

[148] Interrelation AA signifie interrelation Algorithmique / Algèbre.

<table>
<tr><th colspan="3">Professeur Maurice</th></tr>
<tr><td rowspan="3">Thème 1
Programmes</td><td>Algorith-
mique</td><td>- « Je trouve ça très intéressant. […] Au début, j'étais pas convaincu. »
- « je me soumets au programme, point final. »</td></tr>
<tr><td>Algèbre</td><td>- « on accentue ce qui s'est passé dans les programmes précédents, c'est-à-dire la perte de compétences de technicité. »
- « il n'y a pas tellement de chapitres consacrés à l'algèbre, c'est saupoudré sur toute l'année »
- « c'est squelettique, ce qu'on nous demande. Je trouve que les compétences sont insuffisantes. »</td></tr>
<tr><td>Interrela-
tion AA</td><td></td></tr>
<tr><td rowspan="3">Thème 2
Pratiques</td><td>Algorith-
mique</td><td>- « pour que ce soit efficace, c'est beaucoup de temps »
- Utilisation des logiciels Scratch et d'Algobox : « Algobox correspond davantage à ce qu'on fait sur le papier ».</td></tr>
<tr><td>Algèbre</td><td>- « sous prétexte de travailler les fonctions, on a travaillé sur des identités remarquables et sur les factorisations. »
- « on va travailler sur les équations du premier degré »
- Chapitre sur les factorisations, sur les identités remarquables.</td></tr>
<tr><td>Interrela-
tion AA</td><td></td></tr>
<tr><td rowspan="3">Thème 3
Construction
des savoirs</td><td>Algorith-
mique</td><td>- « ça fait référence à de la logique »
- Algorithmique et suites (en 1ère S et 1ère ES)
- « En seconde, quand je vois les problèmes qu'on leur fait faire, c'est motivant pour maîtriser l'outil, mais je ne vois pas trop ce que ça apporte. »</td></tr>
<tr><td>Algèbre</td><td>- « ce que je constate et qui m'inquiète beaucoup, c'est que les élèves des classes scientifiques maintenant, avant d'être arrêtés par le concept lui-même et par l'abstraction, sont arrêtés à chaque étape, par la technique du calcul. »
- « il n'y a plus de réflexion sur la nature des nombres, plus du tout ! »
- « Il y a bien un moment où il faut comprendre comment ça fonctionne »</td></tr>
<tr><td>Interrela-
tion AA</td><td>- « Je n'ai pas réfléchi à ça. »
- Algorithmique et expressions algébriques
- Algorithmique et équations du second degré (en 1ère S et 1ère ES)</td></tr>
<tr><td rowspan="3">Thème 4
Élèves</td><td>Algorith-
mique</td><td>- « ça intéresse les élèves, souvent même certains élèves faibles. »
- « question de l'utilité pour les gens qui ne vont pas être des scientifiques »</td></tr>
<tr><td>Algèbre</td><td>- « pour les bons élèves, les identités remarquables, c'est encore laborieux. »
- « J'ai plein d'élèves qui ne maîtrisent pas les équations du premier degré. »</td></tr>
<tr><td>Interrela-
tion AA</td><td></td></tr>
</table>

Figure 99 : Entretien pré-expérimentation du professeur Maurice : quelques éléments

Pour le professeur Alex, la transcription de l'entretien se trouve en annexe A7. De même pour Maurice, les cases non remplies correspondent à des points non abordés.

Professeur Alex		
Thème 1 Programmes	Algorithmique	- *« c'est en fait un substrat intéressant à travailler avec les élèves, pour essayer de finaliser une connaissance mathématique. »* - *« dans le programme de seconde, tu peux l'utiliser pour tout. »*
	Algèbre	- *« c'est en train en passer discrètement en désuétude, tout ce qui est calculatoire, tout ce qui est résolution, tout ça… »* - *« je pense qu'il y a une perte de connaissances au fur et mesure que les années passent. »*
	Interrelation AA	
Thème 2 Pratiques	Algorithmique	- *« avec le peu d'heures qu'on a, c'est difficile »* - *« je ne me vois pas faire de l'algorithmique alors qu'il y a des reprises de points de cours qui me paraissent essentiels. »* - *« On a fait six séances de deux heures »* -Utilisation du logiciel Algobox
	Algèbre	- *« c'est à la carte. C'est en fonction des classes. »* - *« Faire des exercices au kilomètre, je sens bien que ça ne sert pas à grand-chose, faire des reprises des cours, faire des reprises de démonstration ou voir les résolutions d'équations liées à d'autres problèmes …»*
	Interrelation AA	
Thème 3 Construction des savoirs	Algorithmique	- *« difficile de mettre en lien du langage pur avec du langage mathématique. »* - Notion de boucles - Algorithmique et fonctions (dichotomie ; point sur une courbe ou non) - Algorithmique et géométrie vectorielle
	Algèbre	- *« c'est quelque chose dont on a toujours besoin, quel que soit le niveau. »* - *« ils ont supprimé les ensembles de nombres, c'est passé à la trappe ! »* - *« l'arithmétique, c'est quand même assez fondamental »* - *« L'algèbre c'est bien le prolongement, via x et y, du calcul arithmétique. »*
	Interrelation AA	- Algorithmique et systèmes linéaires
Thème 4 Élèves	Algorithmique	- *« pour les élèves, c'est encore un autre monde, c'est autre chose que de résoudre un simple exercice, c'est une dimension supérieure… de difficultés. »*
	Algèbre	- *« je trouve que les élèves qu'on récupère maintenant ont plus en plus de mal à calculer, sont de plus en plus mauvais en algèbre. »*
	Interrelation AA	- *« Je pense que ce ne sera pas accessible à tous les élèves. »*

Figure 100 : Entretien pré-expérimentation du professeur Alex : quelques éléments

De ces trois tableaux, nous tirons les analyses ci-après.

Le rapport de l'enseignant aux domaines algébrique et algorithmique du point de vue des programmes

Il ressort tout d'abord de leurs propos que les trois enseignants considèrent comme importants la place et le rôle accordés aux programmes institutionnels (Maurice, *« je me soumets aux programmes* ») : de façon générale, ils sont attachés à suivre ces programmes, même s'ils expriment leur désaccord sur certains points.

- *Domaine algorithmique*

L'introduction de l'algorithmique est de prime abord bien acceptée par les trois professeurs (tous les trois prononcent l'adjectif *intéressant*) mais des différences apparaissent sur l'intérêt de cette introduction dans l'enseignement des mathématiques. Si Alex pense que *c'est un substrat intéressant à travailler avec les élèves*, Maurice quant à lui, évoque *d'autres démarches plus fructueuses que ça,* comme les démonstrations en géométrie et il précise même : « *si je savais qu'on ne me reprocherait pas de ne pas le faire, je ne le ferais pas* ».

- *Domaine algébrique*

En revanche, pour la place de l'algèbre dans ces nouveaux programmes de 2009, les trois enseignants s'accordent à penser que cette place *n'est pas très claire* (Annabelle), que *tout ce qui est calculatoire est en train en passer discrètement en désuétude* (Alex) et enfin qu'il y a *une perte de compétences de technicité* (Maurice).

Cette impression de *perte* de l'algèbre est au cœur de l'hypothèse H1 et est corroborée par de récents articles. Citons par exemple l'article de Chevallard et Bosch (2012) évocateur de ce phénomène, qui conclut *que l'offre scolaire d'algèbre est aujourd'hui nettement diminuée, au point que l'on peut être tenté de parler de dénaturation de l'algèbre enseignée* (p.37), ou encore celui de Assude et al. (2012) qui parle d'une *algèbre enseignée évanescente*, où l'on note une *réduction des moyens de travail algébrique* (p.45). Dans ces deux articles, il est d'ailleurs notifié que le terme *algèbre* a disparu des programmes officiels du collège de 2008 (MEN, 2008a) au profit d'expressions comme *calcul*, *expression*, *somme*, *produit*, etc. D'après Chevallard et Bosch (ibid.), *le mot n'est rien si la chose est bien là*, mais ils concluent que *cette dernière hypothèse est plus que douteuse* (p.37).

Nos trois professeurs expérimentateurs convergent vers les mêmes résultats que ceux apportés par la recherche.

- *Interrelation algèbre-algorithmique*

Quant à l'interrelation algèbre-algorithmique, le sujet n'a pas été abordé, ce qui fait écho avec l'étude des programmes que nous avons menée au chapitre 4, où nous concluons que l'algèbre ne constitue pas une *niche* pour l'algorithmique, relativement aux différents programmes du lycée. Les professeurs étant attachés à suivre ces programmes, il n'est donc pas surprenant que le sujet n'ait pas émergé.

Le rapport de l'enseignant aux domaines algébrique et algorithmique du point de vue de la pratique

- *Domaine algorithmique*

Le nombre d'heures consacrées à l'algorithmique (entre quatre à six séances, selon les enseignants, au mois de février, soit près de six mois après la rentrée scolaire) tend à montrer que l'algorithmique ne fait pas partie des principales préoccupations de ces enseignants. Les trois professeurs évoquent la composante *temps* :

- *« ce n'est pas ma priorité, c'est quand j'ai du temps. »* (Annabelle) ;
- *« avec le peu d'heures qu'on a, c'est difficile »* (Alex) ;
- *« pour que ce soit efficace, c'est beaucoup de temps »* (Maurice).

Il y a deux aspects dans cette composante. D'une part, le temps semble manquer aux professeurs qui indiquent leurs difficultés à boucler le programme et d'autre part, le temps d'apprentissage de l'algorithmique leur semble également problématique, pour pouvoir dépasser une *instrumentation* de base et commencer à proposer des situations d'apprentissage de notions mathématiques.

La pratique de ces enseignants se réduit plus ou moins à l'apprentissage des concepts de base de l'algorithmique. Pour Maurice, *en seconde, mis à part une initiation [pour apprendre] la technique*, il n'y a que peu d'intérêt à utiliser l'algorithmique dans les problèmes que lui propose son manuel de seconde, il *ne trouve pas d'exercices motivants*. Pour Annabelle et Alex, il s'agit aussi d'enseigner la structure d'un algorithme et de faire quelques séances d'algorithmique « *pures* », c'est-à-dire où l'apprentissage de l'outil prédomine. Les trois enseignants pratiquent le logiciel Algobox[149] parce que celui-ci possède *un langage assez naturel mais reste une structure algorithmique* (Annabelle).

- *Domaine algébrique*

Les pratiques de ces trois professeurs sur l'enseignement de l'algèbre sont constituées de *reprises* de notions du collège, mal maîtrisées selon leurs dires, reprises qu'ils insèrent dans les différents domaines à aborder lors de l'année de seconde (ils citent les fonctions et la géométrie analytique). Deux des trois professeurs indiquent que leur pratique de l'algèbre s'est modifiée avec l'introduction des TICE : « *tu changes par le fait que tu utilises de plus en plus les TICE.* » (Annabelle)

Maurice précise qu'il ne fait pas de chapitre de révision en début d'année mais qu'il *saupoudre* les concepts algébriques quand il les rencontre. Alex et Maurice spécifient quelques concepts algébriques qu'ils reprennent comme les équations et inéquations, les identités remarquables. Les propos de Maurice sur les équations du premier degré permettent d'étayer les hypothèses H1 et H2. Citons-le :

> 38. Maurice : […] Là je viens de faire des exercices avec des coordonnées, où il faut trouver des relations vectorielles, donc ça amène à des équations du premier degré. J'ai plein d'élèves qui ne maîtrisent pas les équations du premier degré. Avant, on faisait ça au premier trimestre. Cette année, on a fait des statistiques, des probabilités, on a beaucoup travaillé la calculatrice, on a fait des trucs graphiques avec les fonctions. Les équations du premier degré, on en a fait quelques-unes mais rien d'automatique. Résultat, j'ai des élèves qui ne maîtrisent pas du tout les équations du premier degré : c'est la première fois que ça m'arrive !

Maurice pose ici le problème de la décontextualisation d'un concept algébrique vu dans un *cadre* géométrique et utilisé comme *outil* (Douady, 1986). Des élèves ne parviennent pas à comprendre ce concept comme *objet* et Maurice indique la nécessaire reprise de praxéologies algébriques pour accéder à ce sens : *« on va travailler sur les équations du premier degré maintenant ».*En suivant les préconisations du programme, Maurice fait le constat que celui-ci ne permet pas à certains élèves d'appréhender les concepts algébriques.

- *Interrelation algèbre-algorithmique*

Lorsque le chercheur demande si l'apprentissage de l'algèbre et celui de l'algorithmique pourraient être reliés, Alex répond qu'il *imagine que c'est possible*, Maurice qu'il *n'a pas réfléchi à ça*, Annabelle qu'elle *croit que ça pourrait se faire.* Leurs réponses évasives indiquent que la corrélation de ces domaines n'est pas inscrite dans leur pratique.

Le rapport de l'enseignant aux domaines algébrique et algorithmique du point de vue de la construction des savoirs

- *Domaine algorithmique*

Les enseignants ne mentionnent pas beaucoup de concepts pour la construction de savoirs algorithmiques, si ce n'est Maurice qui précise que l'algorithmique repose sur la logique. Seules les notions de structures alternatives et répétitives d'un algorithme sont indiquées

[149] Nous rappelons qu'un descriptif de ce logiciel et de son fonctionnement est présenté en annexe A9.

comme faisant l'objet d'un apprentissage. Les trois enseignants indiquent des domaines possibles où l'algorithmique peut être utilisée : géométrie analytique, suites et fonctions. Ces domaines font partie de ceux indiqués par les programmes officiels (cf. §4.5.4), ce qui confirme l'attachement des enseignants à ces programmes. Maurice ajoute de plus que ces domaines ne se trouvent pas enrichis par l'introduction de l'algorithmique, du moins en classe de seconde, où à part pour *maîtriser l'outil*, il *ne voit pas trop ce que ça apporte*. Il cite l'exemple suivant, « *créer un algorithme pour définir si un triangle est rectangle quand on a rentré les longueurs des trois côtés* » et conclut « *je ne trouve pas ça très intéressant.* » Maurice semble penser qu'utiliser l'algorithmique sur des notions mathématiques que les élèves connaissent déjà n'apporte rien de plus à la notion elle-même : pour lui, il s'agit simplement de traduire dans un langage particulier un savoir ou un savoir-faire que les élèves possèdent par ailleurs. En revanche, pour une connaissance à établir, son utilisation lui paraît pertinente (pour les équations du second degré en classe de première, par exemple). Alex a une opinion différente et juge qu'une notion peut être approfondie par le biais de l'algorithmique : « *c'est en fait un substrat intéressant à travailler avec les élèves, pour essayer de finaliser une connaissance mathématique.* »

- *Domaine algébrique*

Les enseignants Alex et Maurice se montrent concernés par la question de la construction des savoirs algébriques et considèrent comme un fondement la construction du domaine numérique. Pour Alex, l'arithmétique *« c'est quand même assez fondamental »* et l'algèbre *« est le prolongement, via x et y, du calcul arithmétique ».* Pour la construction des savoirs algébrique, ces deux enseignants montrent leur inquiétude au sujet de la disparition des programmes du concept de nature d'un nombre : *« il n'y a plus de réflexion sur la nature des nombres, plus du tout ! »* (Maurice), *« ils ont supprimé les ensembles de nombres, c'est passé à la trappe ! »* (Alex). Ils craignent que les élèves ne maîtrisant plus les bases du calcul, numérique et algébrique, soient ensuite bloqués pour la compréhension des concepts à construire : *« il y a bien un moment où il faut comprendre comment ça fonctionne »* (Maurice), « *je crois que si tu ne maîtrises pas la base, tout devient très aléatoire et en particulier sur le calcul* » (Alex). La forte imbrication des domaines numérique et algébrique (cf. §2.5) est ici signalée par ces enseignants, qui considèrent que la construction du calcul algébrique s'appuie sur celle du calcul numérique.

- *Interrelation algèbre-algorithmique*

Seule Annabelle s'exprime ici pour mentionner des thèmes où des savoirs algébriques, via l'algorithmique, pourraient être construits ou repris. Elle cite *les priorités opératoires* et *les enchaînements de fonctions* en concluant que l'algèbre se prête à l'algorithmique car *c'est le domaine le plus calculatoire.*

Le rapport de l'enseignant aux domaines algébrique et algorithmique du point de vue des élèves

- *Domaine algorithmique*

Les réponses des enseignants aux questions de ce thème montrent leur réflexion à l'intégration de l'algorithmique dans leur enseignement des mathématiques. Annabelle s'interroge sur l'utilité de cette intégration pour tous les élèves : *« Est-ce que c'est vraiment* *fait pour tous les élèves, est-ce que vraiment les élèves de STG*[150] *en ont besoin ? »*, de même Maurice : *« je me pose la question de l'utilité pour les gens qui ne vont pas être des scientifiques ».* Malgré cette réticence, les enseignants indiquent que beaucoup d'élèves sont intéressés, *« ça intéresse les élèves, souvent même certains élèves faibles »* (Maurice) et que l'algorithmique est formatrice pour la compréhension de concepts mathématiques dans le sens où celle-ci « *met un gros zoom sur la difficulté qu'ils ont à formaliser jusqu'au bout une idée mathématique* » (Alex).

- *Domaine algébrique*

Comme précisé dans les thèmes précédents, les difficultés des élèves en algèbre sont maintes fois évoquées au cours des entretiens. Pour ces enseignants, les difficultés mentionnées sont liées au manque de techniques des élèves pour effectuer les tâches algébriques, ce qui rejaillit également sur la compréhension des concepts : *« les élèves des classes scientifiques maintenant, avant d'être arrêtés par le concept lui-même et par l'abstraction, sont arrêtés à chaque étape, par la technique du calcul. [...] Donc ils ont à faire face à la fois à la difficulté de la notion nouvelle, mais avec toutes les étapes du calcul.* » (Maurice). De nombreuses techniques sont indiquées comme n'étant pas assimilées : identités remarquables, factorisation, résolution d'équations du premier degré, …

- *Interrelation algèbre-algorithmique*

De la même manière que pour les thèmes précédents, ce domaine conjoint n'est pratiquement pas évoqué. Les enseignants ne semblent pas y avoir réfléchi, ce n'est manifestement pas une priorité dans leur enseignement, comme le montre les propos de Maurice : « *Honnêtement, pour donner du sens aux opérations, ... pour le moment je ne vois pas.* »

10.1.4 Bilan des entretiens génériques pré-expérimentation

Dans la section précédente, nous avons cerné quelques éléments du rapport effectif des enseignants aux domaines algébrique et algorithmique. Nous en retenons principalement l'importance que les trois enseignants octroient à l'enseignement-apprentissage de l'algèbre et le peu d'importance concédé à celui de l'introduction de l'algorithmique dans les nouveaux programmes. Ces enseignants s'accordent à penser que la place de l'algèbre s'amenuise dans les programmes institutionnels et qu'il en résulte une *perte de technicité* qu'ils craignent devenir une *perte de sens* des concepts algébriques abordés. Dans l'exercice de leur pratique, ils défendent une *reprise* de concepts algébriques vus au collège, arguant que leurs élèves ne les maîtrisent pas. En revanche, l'intégration de l'algorithmique dans leur enseignement est superficielle et réduite au minimum exigible par les programmes : quelques concepts de base de l'algorithmique sont posés, sans plus. Quant à l'interrelation des domaines algébrique et algorithmique, elle est inexistante dans la pratique des trois enseignants, ceux-ci s'en tenant aux quelques *niches* définies dans les programmes institutionnels où l'algorithmique est présente, et comme nous l'avons vu, l'algèbre n'y est pas ou très peu évoquée.

[150] Série du lycée : Sciences et Technologie de la Gestion

10.2 Situation de l'expérimentation dans la progression annuelle des professeurs

Précisons un point important pour la suite de notre analyse : les deux professeurs Annabelle et Maurice travaillent ensemble depuis une dizaine d'années. Leur collaboration consiste à préparer ensemble la totalité de leurs cours, lorsqu'ils ont en commun des classes de même niveau. Pour ce faire, ils échangent régulièrement en présentiel une heure par semaine tout au long de l'année et complètent leurs discussions par l'envoi de fichiers par courriel. Plus particulièrement, ils préparent ensemble le découpage des thèmes et sujets d'étude des programmes officiels sur l'année scolaire et en déterminent l'organisation mathématique. Leur collaboration inclut la préparation commune du cours écrit qui est distribué aux élèves, le choix de la plupart des exercices d'entraînement (choisis pour leur majorité dans le manuel de la classe) et l'élaboration commune des sujets de devoirs de contrôle en classe et des devoirs maison. Alex, quant à lui, prépare seul l'ensemble de ses cours. Les trois professeurs se retrouvent néanmoins plusieurs fois par an pour la préparation des devoirs communs qui ont lieu dans leur établissement en classe de seconde, de première S et de terminale (épreuves blanches du baccalauréat).

Nous présentons dans le tableau ci-dessous les progressions des professeurs expérimentateurs, que ceux-ci nous ont confiées : la progression commune d'Annabelle et Maurice comporte les dates des débuts de chapitres, celle d'Alex n'en comporte pas (nous n'avons pu les récupérer). Nous avons indiqué le cas échéant et en caractères gras, les notions d'algèbre qui apparaissent dans les différents chapitres des enseignants. De même, les notions d'algorithmique apparaissent dans les chapitres où des notions mathématiques ont été associées à des notions d'algorithmique. Le professeur Alex a choisi de présenter un chapitre à part (le chapitre 0) que nous avons positionné en début de progression, mais qui a été complété avec les concepts présentés au fur et à mesure de l'année. L'expérimentation réalisée dans le cadre de ce travail de recherche y est indiquée, surlignée en gris.

	Progression commune d'Annabelle et Maurice	**Progression d'Alex**
		chapitre 0 : Algorithmique *(Prise en main Algobox, structure de base d'un algorithme, structures alternatives et itératives)*
Premier trimestre	chapitre 1 (08/09/10) : Probabilités → *Algorithmique (premières notions)*	chapitre 1 : Probabilités
	chapitres 2 (22/09/10) : Fonctions - Généralités et étude qualitative (dont **résolution graphique d'équations et inéquations ; résolution algébrique d'équations et inéquations du 1er degré**) → *Algorithmique (Prise en main Algobox, structure de base d'un algorithme, structure alternative)*	chapitre 2 : Fonctions – Généralités (dont **résolution graphique d'équations et inéquations ; résolution algébrique d'équations et inéquations du 1er degré ; résolution d'équations du second degré**) → *Algorithmique (structure de base d'un algorithme)*
	chapitre 3 (01/12/10) : Statistiques	chapitre 3 : Statistiques
Deuxième trimestre	chapitre 4 (15/12/10) : Repérage	chapitre 4 : Repérage → *Algorithmique (structures alternative, itérative)*
	chapitre 5 (17/01/11) : Vecteurs	chapitre 5 : Vecteurs
	chapitre 6 (07/02/11) : **Révisions sur développement et factorisation** → *Algorithmique (Prise en main Scratch)*	chapitre 6 : Équations de droites - **Systèmes**
Troisième trimestre	chapitre 7 (21/03/11) : Applications affines chapitre 8 (28/03/11) : **Résolution algébrique d'inéquations**	chapitre 7 : **Résolution algébrique d'inéquations Révisions sur développement et factorisation** → *Algorithmique (Expérimentation recherche - Situations n°1 et n°2)*
	chapitre 9 (13/04/11) : Équations de droites - **Systèmes** chapitre 10 (09/05/11) : Fonctions de référence (dont **résolution d'équations et d'inéquations du type x^2 … a**) → *Algorithmique (Expérimentation recherche - Situations n°1 et n°2)*	chapitre 8 : Fonctions usuelles → *Algorithmique (Expérimentation recherche - Situation n°3)*
	chapitre 11 (01/06/11) : Espace	chapitre 9 : Trigonométrie

Tableau 101 : Progression des enseignants expérimentateurs dans leur classe de seconde

La situation de l'expérimentation dans la progression des enseignants montre que les notions d'algèbre du programme de seconde ont été traitées, ou sont en fin de traitement, au moment où elle a lieu. L'expérimentation agira donc comme une *reprise*, au sens de Larguier (2009) de concepts algébriques alliant l'*ancien* et le *nouveau*, puisque ces concepts sont plongés dans le domaine algorithmique.

Relativement au domaine de l'algèbre, la lecture de ce tableau montre :

- un chapitre (chapitre 2 pour tous les enseignants) où l'algèbre plongée dans le domaine fonctionnel, comme préconisé par les programmes institutionnels ;
- un ou deux chapitres (chapitres 6-8 à gauche et 7 à droite) où l'algèbre est travaillée sous forme de *révisions*, en tant que domaine à part entière.

Cette remarque corrobore les éléments relevés dans les entretiens pré-expérimentation sur la place accordée à l'algèbre et nous permet de poser un jalon dans le sens de l'hypothèse H1, où ces enseignants jugent nécessaire de reprendre un travail spécifique sur l'algèbre, sans la plonger systématiquement dans le cadre fonctionnel, et d'institutionnaliser des praxéologies algébriques.

Nous notons que le nombre de séances (d'unité une heure) d'initiation à l'algorithmique et à l'utilisation du logiciel Algobox ne dépasse guère quatre ou cinq pour chacun des enseignants, comme ceux-ci nous l'ont confié lors de l'entretien pré-expérimentation (cf. §10.1). Il est clair que le peu de temps consacré à ce domaine correspond à une utilisation épisodique et que les élèves auront une familiarité limitée avec les concepts de l'algorithmique ainsi qu'avec ceux de la programmation. Cette donnée risque d'être problématique pour l'expérimentation menée, comme nous le verrons plus loin dans les analyses.

10.3 Retour sur la méthodologie de constitution des trames projetées

Le travail collaboratif d'Annabelle et Maurice explique qu'une *trame projetée* quasi-commune (trames nommées TP_1 et TP_2) est présentée dans la section 10.4, celle d'Alex (TP_3) est présentée en section 10.5. Ainsi, l'analyse a posteriori des *séquences réalisées* devrait-elle permettre de dégager deux aspects, en relation avec l'hypothèse H4 :
- à partir de deux trames projetées pratiquement identiques au départ (TP_1 et TP_2), l'exposition des points communs et des points de divergence qui sont apparus lors de leur réalisation ;
- à partir d'une trame projetée (TP_3) différente, l'observation des invariants éventuels dans la pratique de ces trois professeurs.

Préparation du chercheur pour la constitution des trames projetées
Afin de préparer les entretiens avec les professeurs, nous avons réalisé en amont un diaporama de présentation des trois situations (cf. annexe A10). Ce diaporama est succinct et tient le rôle de support visuel pendant les entretiens. Nous rappelons que ces entretiens ont été enregistrés et que les transcriptions se trouvent en annexes (A16 et A19). L'objectif de ce diaporama est de présenter un découpage possible des trois situations en termes de séances, ce qui correspond à une unité de temps plus habituelle des professeurs, ceci dans le but qu'ils s'approprient plus rapidement les situations.
On retrouve les trois situations décrites précédemment déclinées de la façon suivante :
- Situation n°1 : première séance ;
- Situation n°2 : deuxième séance et première phase de la troisième séance ;
- Situation n°3 : seconde phase de la troisième séance et quatrième séance.

Ce découpage en séances est à considérer comme une base de travail avec les enseignants et il leur est présenté comme tel, en leur précisant bien que le nombre de séances n'est qu'un exemple et qu'ils peuvent le moduler selon leurs souhaits et leurs principes de travail, sous les conditions et contraintes de l'institution, au sens de Chevallard .
Pendant l'entretien avec les différents professeurs, le diaporama leur est présenté accompagné d'exemples d'équations, de fiches d'énoncés d'exercices et d'algorithmes réalisés sur différents logiciels, comme Scratch et Algobox. Ces éléments complémentaires ont pour fonction d'aider les professeurs à s'approprier les situations. Ils sont donnés en annexes A11 à A15.
Ainsi, relativement à la méthodologie de travail présentée au chapitre 6, les sections 10.4 et 10.5 constituent les analyses correspondant à la flèche noire notée ❶ (cf. figure 24, §6.2.2) qui symbolise l'analyse réalisée de chacune des adaptations TP_i ($1\leq i \leq 3$), à partir de la trame d'*ingénierie didactique* réalisée par le chercheur.

10.4 Analyse a priori des trames projetées d'Annabelle et de Maurice (TP_1 et TP_2)

Dans un premier temps, nous donnons les choix des deux professeurs quant à leur trame projetée puis nous analysons dans un second temps ces choix. Les supports utilisés pour cette tâche sont les transcriptions de l'entretien de constitution de la trame projetée, donnée en annexe A16 et les documents écrits élaborés par les professeurs (fiches de travail en annexes A17 et A18).

10.4.1 Situation n°1

Annabelle et Maurice ont conservé l'idée de réaliser cette situation en une seule séance. Parmi les éléments modulables, voici leurs choix récapitulés dans le tableau ci-dessous :

	Éléments	**Éléments imposés**	**Éléments modulables**	
			Choix d'Annabelle (TP_1)	**Choix de Maurice (TP_2)**
OM	Équations	Équations polynomiales de degré 1 et 2.	- Choix de 19 équations à classer dont 10 sont des équations polynomiales du premier degré, 7 sont des équations polynomiales du second degré et 2 sont des équations non polynomiales (inconnue sous la forme de l'inverse de *x* ou de la racine carrée de *x*, Cf. annexe A17)	
	Type de tâches	Classer les équations proposées.	*Première consigne* : Classer les équations selon des critères à déterminer. *Seconde consigne* (5 minutes plus tard) : Classer les équations selon leur mode de résolution.	*Une seule consigne donnée dès le départ :* Classer les équations selon leur mode de résolution.
OD	Généralités		Séance d'une heure en classe entière	
	Phase 1	- Objectif : Recherche d'une classification des équations. - Modalités : Travail de groupes. - Matériel : Équations choisies par le professeur sur support cartonné	- *Durée et du critère d'arrêt de la phase* : non évoqué. - *Taille et composition des groupes* : Groupes de 3 élèves puis regroupement de deux groupes de 3 élèves en un groupe de 6 élèves. La constitution des groupes est définie à l'avance par les professeurs qui choisissent de les rendre hétérogènes. - *Choix de donner des indications aux élèves pendant la phase* : non évoqué.	
	Phase 2	- Objectif : Restitution des classifications. Un rapporteur par groupe commente la classification effectuée et le professeur anime le débat. - Support de la production : une affiche par groupe.	- *Durée et du critère d'arrêt de la phase* : non évoqué. - *Choix de réaliser une synthèse en fin de phase* : pas de synthèse en fin de séance mais des commentaires au fur et à mesure de la présentation des affiches par le rapporteur du groupe.	

Tableau 102 : Les choix des éléments modulables de la situation n°1 dans les trames projetées TP_1 et TP_2

Explicitons ce tableau en distinguant les choix effectués pour l'OM et l'OD dans la constitution des deux trames projetées.

Analyse de l'OM des trames projetées TP_1 et TP_2

- ***Types de tâches choisis : T_I et T_R***

Le type de tâches caractérisé dans l'analyse de la situation n°1 de la trame d'ingénierie et proposé par le chercheur est T_I : « *Classer des équations polynomiales de degré 1 ou 2 selon des critères à déterminer* » (cf. §9.2). Avec le choix d'ajouter deux équations non polynomiales dans les équations à classer, ce type de tâches se modifie en : *Classer des équations selon des critères à déterminer*. Pour des raisons de commodité de lecture, nous conservons la notation T_I pour ce type de tâches.

Notons également la différence entre les consignes d'Annabelle et de Maurice où le choix de Maurice fait apparaître un nouveau type de tâches, dérivé des deux précédents sous la forme T_R[151] : *Classer des équations selon leur mode de résolution.*

Étudions quelles sont les motivations qui ont poussé ces deux professeurs à modifier le type de tâches proposé initialement.

Parmi les 40 équations que nous avons proposées et qui sont rappelées ci-dessous, les deux enseignants en ont conservées 17 et en ont ajoutées deux de leur cru, que nous avons noté 6bis et 7bis.

Équation 1 : $x+3=0$	Équation 21 : $x^2=7$
Équation 2 : $7-x=0$	Équation 22 : $x^2=-4$
Équation 3 : $1000x=0$	Équation 23 : $x^2=(2{,}07)^2$
Équation 4 : $-1000x=0$	Équation 24 : $\frac{x^2}{27}=0{,}01$
Équation 5 : $-1000+x=0$	Équation 25 : $x^2-5=7$
Équation 6 : $\sqrt{2}+x=3$	Équation 26 : $\sqrt{3}x^2=-2$
Équation 7 : $-\frac{x}{5}=1$	Équation 27 : $7x^2=7$
Équation 8 : $\frac{2x}{7}=0$	Équation 28 : $\frac{x^2}{7}=21$
Équation 9 : $\frac{10x}{0{,}001}=4$	Équation 29 : $11=5x^2+2$
Équation 10 : $2x-5=9$	Équation 30 : $3=2-x^2$
Équation 11 : $\pi x+3=4$	Équation 31 : $(x+1)^2=9$
Équation 12 : $-3=5x+1$	Équation 32 : $9x^2-16=0$
Équation 13 : $3x-5=3-10x$	Équation 33 : $9x^2-7=0$
Équation 14 : $1{,}8x-3=2{,}5x+7{,}4$	Équation 34 : $x^2+6x+9=0$
Équation 15 : $3x-\frac{1}{4}=\frac{x}{4}-2$	Équation 35 : $x^2+6x=0$
Équation 16 : $\sqrt{2}x-1=4-\sqrt{3}x$	Équation 36 : $x^2-8x=0$
Équation 17 : $7(x+2)+4(x-3)=0$	Équation 37 : $x^2-8x+15=-1$
Équation 18 : $(3-4x)-(2x-1)=0$	Équation 38 : $x^2-8x+15=0$
Équation 19 : $(3-4x)(2x-1)=0$	Équation 39 : $x^2+3x=\frac{7}{2}$
Équation 20 : $3x(x+\sqrt{5})=0$	Équation 40 : $x^2+3x=0$

Figure 103 : Équations proposées par le chercheur (situation n°1)

[151] L'abréviation T_R fait référence à un **T**ype de tâches de classification selon le critère : « mode de **R**ésolution ». Rappelons que l'abréviation T_I correspond à un **T**ype de tâches de classement avec des critères **I**ndéterminés.

Équation 3 : $1000x = 0$	Équation 17 : $7(x+2) + 4(x-3) = 0$
Équation 4 : $-1000x = 0$	Équation 18 : $(3-4x) - (2x-1) = 0$
Équation 5 : $-1000 + x = 0$	Équation 19 : $(3-4x)(2x-1) = 0$
Équation 6 : $\sqrt{2} + x = 3$	Équation 20 : $3x(x+\sqrt{5}) = 0$
Équation 6bis : $\sqrt{x} + 2 = 3$	Équation 21 : $x^2 = 7$
Équation 7 : $-\frac{x}{5} = 1$	Équation 24 : $\frac{x^2}{27} = 0{,}01$
Équation 7bis : $\frac{-5}{x} = 1$	Équation 32 : $9x^2 - 16 = 0$
Équation 11 : $\pi x + 3 = 4$	Équation 38 : $x^2 - 8x + 15 = 0$
Équation 14 : $1{,}8x - 3 = 2{,}5x + 7{,}4$	Équation 39 : $x^2 + 3x = \frac{7}{2}$
Équation 15 : $3x - \frac{1}{4} = \frac{x}{4} - 2$	

Figure 104 : Équations choisies par les enseignants An et Ma (situation n°1)

En répertoriant le choix de ces équations, nous déterminons les types suivants où les coefficients *a, b, c, d* sont des entiers naturels ou relatifs, des décimaux en écriture à virgule, des rationnels sous forme fractionnaire, des irrationnels :

- dix équations polynomiales du premier degré de la forme suivante :
  - $ax = b$ (3 équations)
  - $ax + b = c$ (3 équations)
  - $ax + b = cx + d$ (2 équations)
  - $(ax + b) \pm (cx + d) = 0$ (2 équations)
- sept équations polynomiales du second degré de la forme :
  - $(ax + b)(cx + d) = 0$ (2 équations)
  - $ax^2 = b$ (2 équations)
  - $ax^2 + b = c$ (1 équation)
  - $ax^2 + bx = c$ (2 équations)
- deux équations non polynomiales de la forme :
  - $\sqrt{x} + a = b$ (1 équation)
  - $\frac{a}{x} = b$ (1 équation)

Remarquons que toutes les équations proposées possèdent des solutions. Il n'y a pas d'équations proposées comme par exemple $x + 3 = x - 5$ ou encore $x^2 = -4$ qui n'admettent pas de solutions réelles. D'autre part, par rapport aux sept familles choisies dans la trame d'ingénierie de la situation n°1, seule la forme $(ax + b)^2 = c$ n'a pas été retenue.

En revanche les deux équations supplémentaires non polynomiales (6bis et 7bis) ont une particularité : elles sont jumelées chacune à une équation polynomiale possédant « une certaine symétrie » avec l'équation non polynomiale. Ainsi, l'équation $\sqrt{x} + 2 = 3$ a-t-elle une forte ressemblance de forme globale avec $\sqrt{2} + x = 3$, de même pour l'équation $\frac{-5}{x} = 1$ avec $-\frac{x}{5} = 1$.

Ces équations ont été proposées par Maurice, suite à ses propos lors de l'entretien de construction de la trame projetée (cf. annexe A17) :

> 3. C : Chacun a des équations sur la table et ces équations, ils les classent, j'ai essayé de faire varier les nombres comme - 1000*x* = 0 ou 1000 – *x* = 0, des trucs avec des nombres irrationnels…
> 4. An : des gros mots !

> 5. Ma : des fractions, pas des fractions…
> 6. C : des racines, pas des racines…
> 7. Ma : Il y a des équations avec x en dénominateur ?
> 8. C : Non, je n'ai mis que des équations polynomiales de degré 1 ou 2.
> 9. Ma : Ah, que des polynomiales.
> 10. C : Vous voyez comment les élèves classifient ces équations, ce qu'ils mettent ensemble... C'est pour voir ce qui ressort de leur représentation.
> 11. Ma : Alors juste une question : il n'y a donc aucune équation rationnelle, même si juste pour la mettre de côté... Par exemple, s'il y a un demi ($\frac{x}{2}$) pour ne pas confondre avec ça ($\frac{2}{x}$), on pourrait...
> 12. C : …la mettre de côté. Elle fait partie d'une autre catégorie.
> 13. Ma : Oui, d'une autre famille… Ce ne serait pas inclus dans l'algorithme.
> 14. C : Ce serait une bonne idée d'en mettre une.

La présence de ces équations présente un double intérêt : d'une part, détecter une éventuelle conception pseudo-structurale chez certains élèves qui ne feraient pas la différence entre les équations polynomiales et non polynomiales jumelées et d'autre part, confronter ceux-ci à des compétences nouvelles à acquérir au niveau de la classe de seconde sur les fonctions homographiques. Notons que l'étude de la fonction racine carrée fait partie depuis 2010 du programme institutionnel de la classe de première générale mais la notion de racine carrée est introduite en classe de troisième du collège. Également par rapport aux connaissances des élèves, les deux enseignants ont conservé les équations 38 ($x^2 - 8x + 15 = 0$) et 39 ($x^2 + 3x = \frac{7}{2}$) que les élèves de seconde n'ont pas appris à résoudre de façon algébrique à ce stade de leur scolarité.
Nous relevons donc chez les professeurs Annabelle et Maurice une volonté d'ouverture en balayant un spectre plus large d'équations que celui qui était initialement proposé, en respectant le programme institutionnel quand ceci s'avère opportun (introduction d'expressions algébriques rationnelles) mais aussi ayant la capacité de s'en affranchir en s'hésitant pas à faire une incursion dans le programme de première (avec l'ajout d'une équation où l'inconnue est $\sqrt{x}$, ce choix ayant été fait après l'entretien).

- ***Modification du type de tâches T_I en T_R***

Un long échange de presque dix minutes a été nécessaire pour déterminer s'il était plus judicieux de laisser les élèves libres de choisir les critères de classification des équations (T_I) ou de les orienter vers un critère précis, à savoir classifier ces équations dans le but de les résoudre (T_R). Cet échange est transcrit entièrement ci-dessous (cf. annexe A16). Il permet de montrer la difficulté à trouver un consensus, entre les deux enseignants d'une part et entre le chercheur et les enseignants d'autre part :

> 159. C : Alors pour la première séance ?
> 160. Ma : Pour la présentation, je leur dirais bien qu'il y a une masse d'équations et qu'on aimerait bien qu'ils les classent mais avec un but en plus … Parce que sinon, ils pourraient dire on va mettre celles-là ensemble parce qu'il y a des racines carrées. Voilà !
> 161. C : Oui, mais justement…
> 162. An : Oui, justement j'aimerais bien voir ce qu'ils voient, eux.
> 163. C : Oui, faire ressortir leur représentation des équations…
> 164. Ma : Oui, mais alors là pour toi, c'est évident quand tu dis classement…
> 165. An : Non, non, tu ne sais pas comment ils vont les classer…

> 166. Ma : Oui, mais justement, tu es d'accord avec moi, il faut que nos consignes soient claires. Si on leur dit simplement « vous les classez », sans leur préciser les classer dans quel but…
> 167. An : Moi j'attends, je circule et je regarde ce qu'ils font pendant cinq minutes.
> 168. Ma : Alors il est tout à fait légitime à ce moment-là qu'un élève te mette les racines carrées ensemble.
> 169. An : Et pourquoi ce serait pas légitime ?
> 170. Ma : Mais moi je pense au temps. Notre but, c'est xxx
> 171. An : Et bien moi, je les laisse faire. Ce premier classement, ça va être fait en 30 secondes. Et après… tu les arrêtes.
> 172. C : Après tu leur donnes le but. Mais tu les laisses faire au départ. Moi, je crois que c'est important de laisser sortir ce qu'ils pensent.
> 173. Ma : Moi je trouve que la consigne n'est pas claire.
> 174. An : Mais justement…
> 175. Ma : Quand on dit « vous avez des équations et vous les classez », c'est « vous les classez dans le but d'une résolution », en ajoutant ça.
> 176. An : Moi je dirais d'abord « vous avez des équations et vous les classez »…
> 177. Ma : Et après tu dis « dans le but d'une résolution » ?
> 178. C : Oui, plus tard.
> 179. An : Cinq minutes après, pas trois quarts d'heure après, bien sûr… Si tu les laisses s'enferrer dans leur truc, c'est pas la peine.
> 180. C : C'est intéressant parce que finalement tous les deux vous n'allez pas faire pareil. C'est intéressant de voir ce que vous allez dire, ce que ça va changer de le dire tout de suite ou pas… Donc toi Maurice tu le dirais tout de suite ?
> 181. Ma : Ah oui, oui, oui, je le dirais tout de suite. J'ai détesté ça quand j'étais élève, avoir des consignes qui étaient floues. Je voulais bien que ça soit compliqué, mais à condition que ça soit clair. Si j'étais élève, on me demande de les classer, si je ne sais pas pourquoi… Peut-être à l'époque, je n'aurais pas réagi pareil mais me connaissant, j'aurais refusé, à la limite j'aurais dit mais je les classe pour « quoi » ?
> 182. An : Mais c'est que cinq minutes et tu ne le fais pas tout seul.
> 183. C : Et ça s'appelle quand même des « équations »…
> 184. Ma : Oui…
> 185. An : Mais après, effectivement, on le reformule en disant…
> 186. Ma : Non mais vous m'avez convaincu maintenant si tout de suite après… Je suis convaincu de l'intérêt aussi qu'ils le fassent à leur façon…
> 187. An : On pourra aussi tout de suite analyser si une racine carrée c'est un problème dans une équation, qu'est-ce qu'on cherche à faire dans une équation, racine carrée de 2 c'est quoi pour les élèves, c'est un nombre… Est-ce que racine carrée de 2 va être le problème dans l'équation ?
> 188. C : Et oui, si toi tu ajoutes que racine de 2 c'est un nombre comme un autre, c'est enfin leur faire prendre conscience que… En fait, racine de 2 n'a peut-être pas encore le statut de nombre pour eux.
> 189. An : Par contre, en orientant vers un classement dans le but de résoudre, est-ce qu'il va sortir ce classement ?
> 190. C : On peut se le demander …

On peut analyser que deux conceptions s'opposent :

- axer le travail des élèves sur la recherche de critères pour classifier des équations, ce qui implique de laisser ressortir les représentations que se font les élèves des équations. C'est ce que souligne Annabelle quand elle précise : « *justement j'aimerais bien voir ce qu'ils voient, eux* » (ligne 162) ;
- axer le travail sur la classification des équations en précisant que le critère de classification est le mode de résolution de celles-ci. Ne pas laisser chercher le critère de classement par les élèves permet d'orienter plus directement le travail vers la situation n°2, où il s'agira de

réaliser des algorithmes de résolution des équations du premier degré. C'est dans ce sens que réagit Maurice, quand il dit : *mais moi je pense au temps* (ligne 170), il pense ici à faire avancer le *temps didactique* plus rapidement en précisant la consigne : « *vous avez des équations et vous les classez* par celle-ci : *vous les classez dans le but d'une résolution* » (ligne 174). C'est ainsi que le type de tâches T_R apparait.

Pour réaliser la séance, le choix d'Annabelle est donc de commencer dans une première phase par revenir brièvement sur la représentation qu'ont les élèves d'une équation et de laisser émerger cette représentation. Si celle-ci est peu pertinente, comme par exemple, la focalisation sur la nature des coefficients, Annabelle pointera cette non-pertinence, comme elle l'explique dans ce passage : « *On pourra aussi tout de suite analyser si une racine carrée c'est un problème dans une équation, qu'est-ce qu'on cherche à faire dans une équation [...]. Est-ce que racine carrée de 2 va être le problème dans l'équation ?* » (ligne 187). Dans une seconde phase, que l'enseignante situe temporellement proche de la première : « *Cinq minutes après, pas trois quarts d'heure après, bien sûr… Si tu les laisses s'enferrer dans leur truc, c'est pas la peine* » (ligne 179), elle propose alors de modifier T_I en T_R, comme le préconise Maurice. Un autre point qui montre que la première phase lui semble nécessaire, est la teneur des propos en ligne 189 : « *Par contre, en orientant vers un classement dans le but de résoudre, est-ce qu'il va sortir ce classement ?* » Annabelle souligne ici ses doutes quant à la possibilité des élèves à réaliser un classement des équations selon leur mode de résolution si l'on n'a pas re-pointé[152] auparavant ce *qu'on cherche à faire dans une équation.*

Quant à Maurice, son choix s'oriente vers une consigne unique, donnée au départ, où est indiqué le critère de classement des équations. Ses motivations sont – comme déjà dit plus haut – la volonté de faire avancer le temps didactique, mais aussi de lever l'implicite du contrat didactique en clarifiant la consigne (ligne 174). Son sentiment est ici que les élèves ne comprendront pas l'intérêt de la tâche de classification des équations si l'objectif de ce classement ne leur est pas communiqué comme l'indique ses propos : « *J'ai détesté ça quand j'étais élève, avoir des consignes qui étaient floues. Je voulais bien que ça soit compliqué, mais à condition que ça soit clair. Si j'étais élève, on me demande de les classer, si je ne sais pas pourquoi…* » (ligne 181). Bien qu'il reconnaisse l'intérêt de relever les représentations des élèves : « *Je suis convaincu de l'intérêt aussi qu'ils le fassent à leur façon…* » (ligne 186), il restera sur sa position de proposer un critère de classification dès le début de la séance afin d'assurer une dévolution du problème aux élèves plus directe et plus claire, comme le montre la séance réalisée.

Cette différence de tâches proposées (T_I suivie de T_R ou bien T_R directement) est analysée par le biais de la comparaison de la production des affiches des élèves des deux classes. L'analyse comparée des classifications obtenues dans les deux classes permet de mesurer si ce facteur est important par rapport à la tâche à réaliser, facteur qu'il sera nécessaire de moduler par le niveau des deux classes.

Pour conclure, relativement au concept de recherche collaborative, le choix des équations réalisé par les deux enseignants est conforme à nos attentes pour étudier les facteurs qui influencent les élèves dans la catégorisation des équations. De plus, cette situation semble *co-*

[152] Ce « re-pointage » est à prendre au sens de la *reprise* de Larguier.

située au sens de Bednarz et Desgagné, comme on peut le constater par cet extrait du verbatim de l'entretien (cf. annexe A16) montrant que les professeurs adhèrent au projet :

> 189. C : […] Alors c'est OK pour cette séance ?
> 190. An : Oui, je la sens bien.
> 191. Ma : Moi aussi.
> 192. C : Alors en classe entière ?
> 193. An : Oui, ça se gèrera…

- ***Techniques associées aux types de tâches T_I et T_R***

D'après l'analyse a priori de la situation n°1 réalisée en section 9.2.2, nous avons vu que des techniques différentes cohabitent pour résoudre les tâches T_I selon que les élèves attribuent au verbe « classer » le sens (1) ou le sens (2).
De plus, le fait d'avoir introduit deux équations non polynomiales dans les équations à classer d'une part transforme la tâche T_I initialement donnée dans la trame d'ingénierie, et d'autre part, la précision apportée par Annabelle et Maurice amenant à préciser le critère de classement modifie la tâche T_I en la tâche T_R. Ceci amène à compléter les techniques possibles données précédemment[153]. Le tableau suivant les répertorie a priori, selon les types de tâches T_I et T_R. La technique τ_{14} a ainsi été ajoutée. Nous verrons en détail la mise en œuvre de ces techniques a posteriori ainsi que quelques variantes observées avec l'analyse de la transcription des affiches réalisées par les élèves.

		Tâche T_I : classer les équations selon des critères à déterminer	**Tâche T_R : classer les équations selon leur mode de résolution**
Sens (1) du verbe classer	***Techniques qui ne nécessitent pas de résoudre les équations)***	τ_{11} τ_{12} τ_{13} τ_{14} : Grouper les équations polynomiales d'une part et les non polynomiales d'autre part.	τ_{11} τ_{12} τ_{14}
	Techniques qui nécessitent de résoudre les équations entièrement ou partiellement	τ_{15} τ_{16} τ_{17}	τ_{15}
Sens (2) du verbe classer		τ_{21} τ_{22}	 τ_{22}

Tableau 105 : Modification de l'inventaire des techniques associées au type de tâches T_I et T_R d'après les trames projetées TP_1 et TP_2

Une première analyse du bloc *praxis* de cette praxéologie permet de conclure que la précision donnée dans la consigne de classer les équations selon un critère donné (selon le mode de résolution) réduit a priori le nombre de techniques possibles.
Quant au bloc *logos*, on retrouve a priori l'environnement technologico-théorique donné lors de l'analyse de la situation n°1 (cf. § 9.2.2).

[153] Nous reprenons ici pour les tâches τ_{ij} les notations de la section 9.2.2

Analyse de l'OD des trames projetées TP_1 et TP_2

L'analyse de la transcription de l'entretien (cf. annexe A16) entre le chercheur et les deux professeurs fait ressortir que peu de temps est consacré à la discussion de la mise en place de l'OD par rapport à celle de l'OM. Sur une heure et quart de discussion et 243 échanges, 132 échanges ont porté sur la constitution de la première situation et 111 échanges ont porté sur les situations 2 et 3 que nous reprendrons plus loin. Pour la situation n°1, le nombre d'échanges pour la discussion de la mise en place de l'OD est d'une quarantaine d'échanges contre une centaine pour l'OM.

Passons en revue les différents points qui ont été abordés et ceux qui sont passés sous silence.

Le choix du matériel (équations sur cartons déplaçables, affiches) n'a pas été évoqué : le choix du chercheur a été accepté sans commentaire de la part des deux enseignants. La proposition de réaliser la situation n°1 en une seule séance d'une heure n'a pas été discutée non plus, les enseignants l'ayant actée sous la forme : *Et la durée, c'est une heure ?* (cf. annexe A16, ligne 15). La proposition de réaliser cette première séance sous forme d'un travail de groupes puis restitution à la classe n'a pas non plus soulevé de questions.

Trois points ont été débattus : la taille des groupes, le nombre d'équations à classer et le choix de réaliser une synthèse en fin de séance. Nous allons développer les ci-après.

Les enseignants n'ont pas relevé le fait de pouvoir organiser la situation n°1 en demi-classe, ils sont restés sur la première proposition du chercheur de réaliser la situation en classe entière. Néanmoins, ce choix a induit une organisation particulière du fonctionnement du travail de groupes. Les enseignants ayant tous deux 34-35 élèves, la taille des groupes a été un élément de discussion. En effet, puisque chaque groupe d'élèves doit commenter son affiche durant la phase finale de restitution devant la classe entière, le nombre de groupes constitués doit être calculé de manière à pouvoir laisser une durée suffisante pour cette dernière phase, et par ricochet, le temps consacré à cette phase a une incidence sur la durée des phases précédentes. Ainsi, même si la durée effective de chaque phase n'a pas été évoquée explicitement par les deux enseignants, elle a été prise en compte pour que la séance soit réalisable en une heure. Pour diminuer le nombre d'affiches et permettre un temps de restitution raisonnable, Maurice a eu alors l'idée proposer un travail par groupes de trois élèves pour une première phase de réflexion, puis de regrouper deux groupes de trois en un groupe de six élèves pour la constitution de l'affiche, comme le rapporte cet extrait de verbatim (cf. annexe A16) :

> 211. Ma : C'est peut-être une idée farfelue mais je verrais bien que chaque groupe fasse un premier classement dans un premier temps et que dans une deuxième phase, les groupes se mettent deux par deux pour comparer leur classement. Simplement, pour qu'il y ait ce phénomène de réflexion « tiens vous avez classé comme ça, nous on a classé comme ça ».
> 212. C : Déjà se mettre d'accord à quatre pour les classer, ça ne va pas être simple… Mais c'est une bonne idée.
> 213. Ma : Ce dont j'ai peur, c'est que dans le groupe de quatre, il y en ait un qui prenne le dessus et puis que les autres acceptent …
> 214. An : Il faut les faire avant les groupes. Normalement, on dit que le pur équilibre, c'est trois, c'est pas quatre …
> 215. C : Vous avez combien d'élèves ?
> 216. An : Si on fait trois, avec ton idée Maurice, ils sont 35 …
> 217. C : Ça fait 11 ou 12 groupes, on ne passera pas 12 affiches…

> 218. Ma : C'est pour ça, si on fait dans un premier temps des groupes de trois, et ensuite, on regroupe deux groupes de trois, ils se mettent d'accord par six en faisant une synthèse et en comparant leur classement et ça fait six affiches.
> 219. An : J'en ai pas mal à séparer des joyeux lurons …
> 220. C : Donc le bilan se fait au fur et à mesure des affiches ?
> 221. An : Oui. Donc on fait comme ça, des groupes de trois puis des groupes de six et une affiche par groupe de six.

On peut relever, au travers des propos de Maurice, que ce n'est pas seulement une question de gestion temporelle qui l'amène à faire le choix de la constitution des groupes de 3 puis 6 élèves, mais également une volonté de provoquer un conflit sociocognitif plus important entre les élèves. La composition des groupes n'a pas été évoquée dans cet entretien, cependant les deux professeurs m'ont rapporté en avoir discuté ensemble ensuite pour aboutir à la décision qu'ils constitueraient des groupes hétérogènes de trois élèves, comportant un bon élève, un élève de niveau « moyen » et un élève en difficulté.
Le deuxième point abordé est le nombre d'équations à classer, qui est à d'ailleurs à considérer à la fois dans l'OM – puisque la quantité d'équations influe sur le type de tâches et de techniques : plus il y a d'équations, plus on peut rencontrer de microtechniques différentes – et dans l'OD – puisque une plus grande quantité d'équations va nécessiter plus de temps pour les classer. Il était donc important de déterminer un juste milieu qui tienne compte de ces deux aspects, comme cet extrait les évoque :

> 143. Ma : Combien on en donne d'équations ?
>
> 144. C : Et bien justement, combien pensez-vous qu'il soit judicieux d'en mettre ?
> 145. Ma : Il en faut quand même pas mal …
> 146. An : Je dirais 24-25, parce que s'il y en a trois qui se battent en duel …
> 147. C : Il faut quand même penser qu'il doit rester du temps pour regarder celles qu'ils ont mis ensemble. Je vous préparerai une grande affiche avec celles que vous aurez choisies.

Finalement, un consensus est trouvé en fin d'entretien (lignes 223-225) autour d'une vingtaine d'équations à classer (19 seront effectivement proposées, comme vu dans l'OM).
Le dernier point abordé pour l'OD est la place et le contenu du bilan du professeur. Les questions du chercheur, plusieurs fois réitérées (ligne 16 : « *Chaque groupe passe et à la fin, le choix est laissé à l'enseignant de la synthèse. Comment vous la voyez ?*» ; ligne 142 : « *Mais est-ce qu'on fait un bilan à la fin ?* » ; ligne 209 : *« C'est pour ça, est-ce vous voulez faire un petit bilan à la fin ou est-ce que vous allez le faire au fur et à mesure des affiches ?* »), visent à interroger les enseignants sur la façon de mener la fin de séance, en leur laissant la possibilité d'une institutionnalisation, sous une forme que l'on aurait pu déterminer lors de cette discussion. Mais cette question est éludée par les deux enseignants qui n'ont conservé que l'aspect « bilan de chaque affiche » par l'élève rapporteur au tableau, comme l'indique la réponse d'Annabelle : « *Ah non, je ne me vois pas faire un petit bilan à la fin mais je le ferai au fur et à mesure* » (ligne 210). Nous n'avons pas insisté davantage, puisque cette question d'institutionnaliser le travail réalisé n'est pas survenue.

10.4.2 Situation n°2

Annabelle et Maurice choisissent une séance d'une heure en demi-classe, répétée deux fois pour mettre en œuvre la situation n°2. Nous indiquons ci-dessous le récapitulatif de leurs choix que nous commentons ci-après.

	Éléments	**Éléments imposés**	**Éléments modulables**
			Choix d'Annabelle et Maurice (TP_1 et TP_2)
OM	Type de tâches	Réaliser un programme pour résoudre des équations du 1er degré de la forme : $ax + b = cx + d$	- *Choix retenu d'atteindre l'objectif en deux temps* : premier temps, réaliser un programme pour résoudre $ax + b = c$ et second temps, réaliser un programme pour résoudre $ax + b = cx + d$. - *Choix de découper la tâche en sous-tâches pour la proposer aux élèves* : découpage a priori non évoqué[154].
	Équations	Équations polynomiales de degré 1	- Choix de 11 équations du 1er degré dont : 5 de la forme $ax + b = c$ et 6 de la forme $ax + b = cx + d$.
OD	Généralités	Réaliser la situation en salle informatique avec ordinateurs à disposition des élèves	- *Choix du logiciel* : Algobox - *Choix de faire travailler les élèves seuls ou de constituer des binômes* : en binômes - *Phases correspondant aux sous-tâches avec indication de durée :* non évoqué pour les phases 1 à 5 - *Choix de donner des indications aux élèves pendant les différentes phases* : non évoqué - *Choix de réaliser une synthèse* : non évoqué - *Choix de faire résoudre quelques équations « à la main »* : non évoqué

Tableau 106: Les choix des éléments modulables de la situation n°2 dans les trames projetées TP_1 et TP_2

Une première remarque concerne les choix modulables identiques a priori pour les deux professeurs. Explicitons ce tableau en distinguant OM et OD.

Analyse de l'OM de la situation n°2 des trames projetées TP_1 et TP_2

- ***Types de tâches évoqués a priori et techniques associées***

Pour cette analyse, nous utilisons à la fois la transcription de l'entretien entre le chercheur et les deux professeurs Annabelle et Maurice (cf. annexe A16, lignes 36-75, 229-237) ainsi que l'énoncé fourni par ces deux enseignants et distribué aux élèves au début de la séance relative à la situation n°2 (cf. annexe A18). Bien que l'OM n'ait volontairement pas été proposée aux professeurs avec un découpage précis en type de tâches, nous utilisons ce découpage en sous-tâches, tel que nous l'avons défini dans la trame d'ingénierie (cf. §9.3.2). Notons que les deux professeurs se sont concertés après la rencontre avec le chercheur pour réaliser seuls la fiche d'énoncé. Nous n'avons pas de trace de la constitution de ce travail.

Au cours de l'entretien, dès que la situation n°2 est évoquée par le chercheur, une première discussion s'engage autour de la forme à donner aux équations du premier degré pour réaliser un algorithme les résolvant. À plusieurs reprises, sont évoquées les formes suivantes :

[154] Non évoqué dans l'entretien entre le chercheur et l'enseignant lors de la constitution de la trame projetée.

- $ax + b = 0$ (lignes 40, 42, 44, 232, annexe A16) ;
- $ax + b = c$ (lignes 39, 42, 44, 232, 233, 234) ;
- $ax + b = cx + d$ (lignes 69, 7, 234).

En fin d'entretien, les deux enseignants s'accordent sur le choix de la forme $ax + b = c$ après que Maurice a donné l'argument suivant (ligne 44) :

> 44. Ma : C'est marrant parce que tu parles de ce zéro depuis un moment … Ils ont subi le choc des équations du second degré et c'est pour ça qu'ils se focalisent sur ce zéro et justement, si on veut avancer, il faudrait que ce soit $ax + b = c$ et pas $ax + b = 0$.

Maurice avance le cas particulier du membre de droite d'une équation égal à zéro, que certains élèves assimilent systématiquement à une équation produit nul. Afin d'aider les élèves à comprendre que la présence de ce zéro est anodine pour la résolution d'une équation du premier degré, Maurice suggère de ne pas proposer le type d'équations générique $ax + b = 0$.

Néanmoins la fiche d'énoncé fournie par les deux enseignants (réalisée par les deux enseignants seuls, après l'entretien avec le chercheur) révèle un choix encore différent. Ceux-ci décident de faire réaliser deux algorithmes aux élèves, le premier pour la résolution des équations du type $ax + b = c$ et le second pour la résolution des équations du type $ax + b = cx + d$. L'idée émise de faire réaliser ce second algorithme en travail maison (ligne 234) est alors abandonnée. Suit un condensé de cet énoncé (cf. annexe A18) :

1. *Réaliser un algorithme sur le logiciel Algobox permettant de résoudre les trois premières équations ci-dessous,* ***sans les transformer au préalable****.*
2. *Signaler par une * les équations similaires. Faire fonctionner l'algorithme pour ces équations.*
3. *Comment peut-on résoudre les équations restantes avec un autre algorithme ? Le construire et résoudre les autres équations à l'aide de ce nouvel algorithme.*

*Équation 1 :	$x + 3 = 0$	Équation 7 :	$\frac{7}{2}x + 3 = \frac{2}{3}$
*Équation 2 :	$2x - 3 = 4$	Équation 8 :	$\frac{7}{2}x + \frac{2}{5} = \frac{8}{3} + \frac{1}{2}x$
*Équation 3 :	$3 - 2x = -2$	Équation 9 :	$3 = 2x + 1$
Équation 4 :	$2 + x = 5x$	Équation 10 :	$3x + 2 = 5 + 3x$
Équation 5 :	$2x + 3 = 3x + 1$	Équation 11 :	$1{,}8x - 3 = 2{,}5x + 7{,}4$
Équation 6 :	$8 - x = \sqrt{2}$		

Figure 107 : Consignes des professeurs Annabelle et Maurice pour la situation n°2

Nous présentons pour information une copie d'élève en annexe A33.

Le type de tâches T_1, *reconnaître que les équations données peuvent s'écrire une forme générale à déterminer,* se décline en deux instances : pour les équations 1, 2, 3, 6, 7 et 9, la forme à trouver est $ax + b = c$ et pour les autres équations, il s'agit de $ax + b = cx + d$. Ce premier type de tâches est implicite, il n'est pas donné dans les consignes écrites. Cependant, les deux enseignants ont ajouté, en caractères gras pour bien dégager cette précision, que les équations ne doivent pas être *transformées au préalable*. Cette indication va bien dans le sens qu'une *unique* famille d'équations – qui se résolvent avec la *même* technique – doit être déterminée ; elle incite les élèves à déterminer une *unique* forme structurale pour celles-ci. Le début de la deuxième question, « *signaler par une * les équations similaires* » fait également partie de la tâche de type T_1, mais le travail, bien qu'il reste un travail de reconnaissance, n'est pas exactement identique, puisqu'il s'agit de retrouver parmi des équations données, celles qui sont sous la même forme générique que les trois premières.

Le type de tâches T_2, *résoudre sous forme littérale une équation* n'est pas détaillé dans les questions posées.

Le type de tâches T_3, *concevoir un algorithme permettant d'automatiser la résolution d'une équation du premier degré*, se trouve clairement évoqué dans les questions 1 et 3 de l'énoncé. Remarquons que nous ne retrouvons pas exactement la définition sous-jacente d'un algorithme selon Modeste (2012), qui doit s'appliquer à *toute famille d'instances du problème* (cf. §4.2). Ici, pour le problème, « résoudre des équations du premier degré à l'aide d'un algorithme », Annabelle et Maurice proposent deux algorithmes différents, ce qui peut laisser entendre qu'il y a deux familles d'équations du premier degré. Nonobstant, le second algorithme peut être considéré comme un prolongement du premier, *la modification d'un algorithme par complexification progressive* étant un objectif affiché du programme d'algorithmique du lycée (MEN, 2009c). Nous serons attentifs, lors de l'analyse a posteriori des séances, à déterminer si les élèves ont perçu le second algorithme indépendamment du premier ou comme son prolongement, ce qui peut avoir des conséquences différentes sur la considération de l'objet « équation du premier degré ». Notons également que les tâches de conception de l'algorithme (type T_3) et de programmation (type T_4) ne sont pas dissociées dans les consignes.

La dernière tâche de type T_5, *utiliser le programme réalisé pour résoudre les équations proposées,* est présente dans les questions 2 et 3 sous la forme « *faire fonctionner l'algorithme pour ces équations* » et « *résoudre les autres équations à l'aide de ce nouvel algorithme* ». Nous notons le soin avec lequel sont choisies les équations, de manière à ce que le rôle des élèves ne soit pas réduit à un simple rôle de « presse-bouton ». En effet, les enseignants ont inclus des équations dont l'écriture se présente sous la forme $b + ax = c$ ou $c = ax + b$ ou $ax + b = d + cx$, induisant une réflexion sur les propriétés des opérations et sur l'équivalence de l'égalité.

- ***Choix des équations***

Outre la remarque ci-dessus, le choix des équations est conforme aux attentes du chercheur. Les deux enseignants ont choisi des équations semblables aux 18 équations que nous leur avons suggérées (cf. A12), en proposant des coefficients entiers, décimaux, rationnels ou irrationnels. Ils en proposent 11, présentées en figure 107, sous la forme suivante :

- 6 équations de la forme $ax + b = c$, et où dans 1 cas, c est nul ;
- 5 équations de la forme $ax + b = cx + d$, et où dans 1 cas, d est nul.

Pour cette seconde forme, remarquons que les deux enseignants ont prévu quatre équations ayant une unique solution et une équation (n°10) où $a = c$ et $b \neq d$, qui n'a pas de solution. Ce choix vient compléter celui proposé par le chercheur et permet d'enrichir le travail de l'élève, en l'obligeant à constituer un test portant sur l'égalité des paramètres a et c dans le programme.

Analyse de l'OD de la situation n°2 de la trame projetée TP$_3$

Nous ne relevons que peu d'indices dans l'entretien entre le chercheur et les deux enseignants concernant cette organisation. Son rapidement évoqués le travail en binômes des élèves (lignes 36-37) et le rôle de *soutien* (Bucheton, 2004) du professeur durant la conception de l'algorithme (ligne 50). Cette absence de préparation de l'OD tend à montrer peut-être la latitude que se laissent les professeurs d'ajuster la séance pendant son déroulement, n'ayant que peu de recul par rapport à l'enseignement de l'algorithmique en classe de mathématiques.

10.4.3 Situation n°3

Lors de l'entretien pour la constitution de la trame projetée d'Annabelle et Maurice, un long échange entre les deux professeurs et le chercheur a lieu sur la pertinence d'effectuer la situation n°3 (cf. annexe A16, lignes 75 à 130). Leur décision finale est de ne pas proposer cette dernière situation en classe de seconde pour des raisons que nous tentons d'analyser ci-dessous.

Ce qui semble poser problème aux enseignants est le découpage selon les deux catégories $x^2 = a$ et $(ax + b)(cx + d) = 0$ proposées par le chercheur et dont la systématisation de la résolution est recherchée par le biais d'un algorithme. Plus précisément, c'est le traitement de l'équation $x^2 = a$ qui gêne les deux enseignants, ce qu'ils signifient dans ce passage :

> 84. Ma : Alors moi en fait, j'ai une réserve… sur la partie $x^2 = a$. […] ce qui me pose question, quand moi j'enseigne $x^2 = a$, je passe presque systématiquement soit par le graphique, soit par la factorisation…
>
> 85. An : Oui, moi aussi.
> 86. Ma : Si tu veux pour les faire réfléchir sur ne pas oublier la seconde racine, c'est là que je trouve la courbe ou la factorisation intéressantes. C'est pas d'isoler x^2, c'est l'obsession de la factorisation.

Maurice insiste sur *l'obsession de la factorisation* pour résoudre le type d'équations $x^2 = a$ et rejoint ainsi nos conclusions, données au chapitre 7, sur l'analyse des manuels, où un cloisonnement existe entre l'étude des « équations-produits » et des équations du type $x^2 = a$. La préoccupation de Maurice est d'« effacer » ce cloisonnement. Les deux professeurs ne souhaitent pas que les élèves appliquent directement le théorème suivant « Si a est un nombre positif, l'équation $x^2 = a$ admet pour solutions $\sqrt{a}$ et $-\sqrt{a}$ », sans savoir le démontrer pour chaque valeur instanciée du paramètre a. Le passage par la factorisation est pour lui une garantie de la complétude de la technique associée à la technologie de la règle du produit nul et du contrôle algébrique qui peut alors s'opérer, ce qu'il explique en ces termes :

> 93. Ma : Oui, le fait d'isoler x^2 et puis de le traiter comme ça, c'est l'idéal quand ils ont dépassé ce stade, mais le problème, c'est que si on insiste trop sur cet aspect-là, ils vont isoler x^2 aussi dans des cas comme ça ($x^2 - 8x + 15 = -1$). Je pense que de les faire travailler sur ce type d'équations comme ça, tant qu'elles ne sont pas maîtrisées, les factorisations non plus, je trouve que c'est dangereux de leur faire résoudre des équations $x^2 = a$ de cette façon-là. […]

Maurice souhaiterait, comme il le précise ci-dessous, pouvoir créer un algorithme unique qui résolve simultanément les équations des deux types, afin que les élèves puissent constater que ces deux équations (lorsque a est positif), relève de la même technique et de la même technologie.

> 111. C : D'accord, donc tu voudrais mettre ensemble quel type d'équations ? Toutes celles du second degré ?
> 112. Ma : Oui.
> 113. C : Mais alors comment tu les fais programmer ?
> 114. Ma : Ben oui, c'est ça, je ne sais pas…

Il existe en effet un algorithme *unique* de résolution des équations du second degré qui utilise la technique du discriminant, mais cette technique n'est pas au programme de la classe de seconde. Devant cette impossibilité à faire apparaître la factorisation dans un algorithme de résolution de l'équation $x^2 = a$, les deux enseignants préfèrent renoncer à proposer cette situation.
La non-acceptation de cette situation peut également s'expliquer par un problème de *congruence* entre les environnements algorithmique et papier-crayon qui freine les enseignants. Mettons en parallèle la résolution de l'équation « à la main » et l'algorithme (cf. §9.4) :

Résolution de l'équation littérale $x^2 = a$	**Algorithme de résolution des équations du type $x^2 = a$**
• pour $a > 0$: $x^2 - a = 0$ $x^2 - \sqrt{a}^2 = 0$ $(x - \sqrt{a})(x + \sqrt{a}) = 0$ $x - \sqrt{a} = 0$ ou $x + \sqrt{a} = 0$ $x = \sqrt{a}$ ou $x = -\sqrt{a}$ • pour $a = 0$, $x = 0$ • pour $a < 0$, un carré est toujours positif donc pas de solution	• Donnée du paramètre a • Test sur le signe de a : - Si $a > 0$, sortie des deux valeurs $\sqrt{a}$ et -$\sqrt{a}$ - Si $a = 0$, sortie de 0 - Si $a < 0$, en sortie : « pas de solution »

Tableau 108 : Comparaison de la résolution de l'équation $x^2 = a$ en environnement papier-crayon et algorithmique

La *conversion* (Duval, 1995) de la résolution « à la main » en un *algorithme informatisé* (cf. §4.4) montre que les étapes de la résolution sont *perdues*. En effet, de par la nature d'un algorithme, seule la technique subsiste, et ce qui fonde cette technique, soit les éléments technologico-théoriques, est ici effacé. La perte de ces étapes induit une *non-congruence* entre les deux environnements et déclenche chez Maurice et Annabelle la peur de la *perte du sens* pour leurs élèves. La position du chercheur est de tenter de convaincre les professeurs que la conception de l'algorithme n'empêche pas la résolution de l'équation sous forme littérale en environnement papier-crayon, même si toutes les étapes de cette résolution n'apparaissent plus dans l'algorithme final :

> 104. C : Mais pourquoi vous dites qu'on isole le x^2 ? Quand on va programmer l'algorithme, on va demander de donner comme solutions $\sqrt{a}$ et $-\sqrt{a}$. On peut les obtenir par factorisation ces deux solutions, plutôt que par une règle qui dirait « les solutions de $x^2 = a$ sont $\sqrt{a}$ et $-\sqrt{a}$», ça n'empêche pas. Mais au moment de programmer les solutions, c'est bien ça qu'il faut rentrer dans l'algorithme ? Ça n'empêche pas d'avoir trouvé les solutions par factorisation…

Mais les deux professeurs pensent que la technique restera plus prégnante que la démonstration complète par factorisation et restent sur leur position :

> 110. Ma : Bien sûr, mais ceux qui vont considérer $x^2 = a$, et ils vont dire ensuite si a est négatif, je dis telle chose et si a est positif, je dis autre chose. À ce moment-là, ils n'ont pas du tout la référence à la factorisation. Tu vois c'est ça. [..] Mais à la fin de la séance, ils auront associé ce type d'équation à « j'isole le x^2 » et si c'est positif de l'autre côté, on a deux racines solutions. Ce sera cette façon de résoudre et la factorisation n'aura pas été du tout évoquée.

Maurice évoque ici ce que nous avons nommé le *paradoxe de la compétence algébrique* (cf. §2.6), où une certaine aisance technique va de pair avec le non-appel systématique aux technologies qui fondent ces techniques. Maurice ne souhaite pas autoriser ses élèves à accéder à cette étape, il préfère qu'ils continuent à décomposer la résolution en faisant appel à la factorisation.

Pour conclure, le choix des deux enseignants de systématiser la forme $x^2 = a$ sous la forme $(x - \sqrt{a})(x + \sqrt{a}) = 0$ permet de ne pas occulter la solution négative et de faire le lien entre les deux équations du second degré des types $x^2 = a$ et $(ax + b)(cx + d) = 0$. En revanche, cette forme n'est pas adaptée pour les équations $x^2 = a$, où a est strictement négatif et les enseignants n'indiquent pas s'ils présentent aux élèves des équations du second degré ne possédant pas de solutions réelles.

Bien entendu, nous respectons le choix des enseignants qui jugent que « *c'est une excellente activité de début de première* » (ligne 123) et qui considèrent que celle-ci serait davantage adaptée à des élèves ayant choisi une filière ES ou S, de manière à faire une *mise au point sur les équations du second degré,* avant de présenter la notion de *forme canonique*. Maurice évoque la difficulté de mêler algorithmique et équations du second degré pour des élèves de seconde générale, ainsi que pour lui-même, la difficulté *à expliquer, à mettre en forme et à en tirer parti.*

La situation n°3 n'est donc expérimentée ni par Maurice, ni par Annabelle.

10.5 Analyse a priori de la trame projetée d'Alex (TP_3)

Après avoir donné les choix du professeur quant à sa trame projetée, nous analysons dans un second temps ces choix. Les supports utilisés sont la transcription de l'entretien de constitution de la trame projetée, donnée en annexe A19 et les documents écrits élaborés par le professeur (fiches de travail en annexes A20 à A23).

10.5.1 Situation n°1

Alex a conservé l'idée de réaliser cette situation en une seule séance. Parmi les éléments modulables, voici ses choix récapitulés ci-dessous :

	Éléments	**Éléments imposés**	**Éléments modulables**
			Choix d'Alex (TP_3)
OM	Équations	Équations polynomiales de degré 1 et 2.	- Choix de 28 équations à classer dont 12 sont des équations polynomiales du premier degré et 16 sont des équations polynomiales du second degré (cf. annexe A20).
	Type de tâches	Classer les équations proposées.	*Une seule consigne donnée dès le départ :* Classer les équations selon des critères à déterminer.
OD	Généralités		- Séance d'une heure en demi-classe (séance répétée deux fois)
	Phase 1	- Objectif : Recherche d'une classification des équations. - Modalités : Travail de groupes. - Matériel : Équations choisies par le professeur sur support cartonné	- *Durée et du critère d'arrêt de la phase* : non évoqué. - *Taille et composition des groupe*s : Groupes de 3 à 4 élèves. La constitution des groupes est libre, les élèves se placent par affinité. - *Choix de donner des indications aux élèves pendant la phase* : le professeur prévoit de ne pas donner d'indications.
	Phase 2	- Objectif : Restitution des classifications à la classe. Un rapporteur par groupe commente la classification effectuée et le professeur anime le débat. - Support de la production : une affiche par groupe.	- *Durée et du critère d'arrêt de la phase* : non évoqué. - *Choix de réaliser une synthèse en fin de phase* : choix retenu par Alex.

Tableau 109 : Les choix des éléments modulables de la situation n°1 dans la trame projetée TP_3

Explicitons ce tableau en distinguant les choix effectués pour l'OM et l'OD.

Analyse de l'OM de la situation n°1 de la trame projetée TP_3

- ***Choix des équations***

Rappelons que le type de tâches caractérisé dans l'analyse de la situation n°1 de la trame d'ingénierie et proposé par le chercheur est T_I : *Classer des équations polynomiales de degré 1 ou 2 selon des critères à déterminer* (cf. §9.2). Alex a conservé uniquement les types d'équations prévues, contrairement à Annabelle et Maurice qui ont ajouté des équations non polynomiales. Parmi les 40 équations que nous avons proposées (cf. A11), l'enseignant en a conservé 28, présentées ci-dessous. Notons que l'enseignant a proposé deux équations légèrement différentes de celles qui ont été suggérée par le chercheur. Elles sont notées 5bis et 38bis. Ces deux équations ne présentent pas de différences notables avec celles suggérées par le chercheur.

Équation 1 : $x+3=0$	Équation 21 : $x^2=7$
Équation 4 : $-1000x=0$	Équation 22 : $x^2=-4$
Équation 5bis : $1000-x=0$	Équation 23 : $x^2=(2{,}07)^2$
Équation 6 : $\sqrt{2}+\ x=3$	Équation 24 : $\frac{x^2}{27}=0{,}01$
Équation 8 : $\frac{2x}{7}=0$	Équation 26 : $\sqrt{3}x^2=-2$
Équation 9 : $\frac{10x}{0{,}001}=4$	Équation 28 : $\frac{x^2}{7}=21$
Équation 11 : $\pi x+3=4$	Équation 30 : $3=2-x^2$
Équation 12 : $-3=5x+1$	Équation 31 : $(x+1)^2=9$
Équation 13 : $3x-5=3-10x$	Équation 32 : $9x^2-\ 16=0$
Équation 15 : $3x-\frac{1}{4}=\frac{x}{4}-2$	Équation 34 : $x^2+6x+9=0$
Équation 16 : $\sqrt{2}x-1=4-\sqrt{3}x$	Équation 35 : $x^2+6x=0$
Équation 17 : $7(x+2)+4(x-3)=0$	Équation 37 : $x^2-8x+15=-1$
Équation 19 : $(3-4x)(2x-1)=0$	Équation 38 : $x^2-8x+15=0$
Équation 20 : $3x(x+\sqrt{5})=0$	Équation 38bis : $x^2-8x+15=15$

Figure 110 : Équations choisies par l'enseignant Al (situation n°1)

En répertoriant le choix de ces équations, nous observons les types suivants où les coefficients *a, b, c, d* sont des entiers naturels ou relatifs, des décimaux en écriture à virgule, des rationnels sous forme fractionnaire, des irrationnels :

- douze équations polynomiales du premier degré de la forme suivante :
  - $ax = b$ (3 équations)
  - $ax + b =$ c (5 équations)
  - $ax + b = cx + d$ (3 équations)
  - $(ax + b) \pm (cx + d) = 0$ (1 équation)
- seize équations polynomiales du second degré de la forme :
  - $(ax + b)(cx + d) = 0$ (2 équations)
  - $ax^2 = b$ (6 équations)
  - $ax^2 + b =$ c (2 équation)
  - $ax^2 + bx =$ c (5 équations)
  - $(ax + b)^2 =$ c (1 équation)

Vingt-cinq des vingt-huit équations choisies possèdent des solutions, il y a trois équations du second degré n'admettant pas de solutions réelles. D'autre part, par rapport aux sept familles répertoriées dans la trame d'ingénierie de la situation n°1, il existe au moins une équation de chaque famille proposée par le professeur Alex.

Par rapport au savoir enseigné, les élèves ont déjà rencontré vingt-sept équations sur les vingt-huit proposées. L'enseignant a conservé l'équation 38 ($x^2-8x+15=0$) que les élèves de seconde n'ont pas appris à résoudre de façon algébrique à ce stade de leur scolarité.

- ***Type de tâches choisi : T_I***

Dès les premières minutes de l'entretien (cf. annexe A19), le professeur Alex cherche à préciser le type de tâches envisagées par le chercheur. Il paraît ne pas vouloir orienter les élèves vers un critère de classification spécifique, à savoir classer les équations dans le but de les résoudre, mais il lui semble que c'est ce critère que les élèves vont majoritairement retenir, comme le montre cet échange :

> 1. C : […] Il s'agit de mettre les élèves par groupes de 3-4 et de proposer une classification d'équations selon la consigne : « *Classer les équations. Il n'est pas demandé de les résoudre mais ce n'est pas interdit non plus* ».
> 2. Al : La première chose, je pense qu'ils sont tellement formatés « équations et résolution », je pense que « classer des équations »… ils vont avoir très envie de les résoudre …
> 3. C : Mais ce n'est pas gênant, ça fait partie de …
> 4. A : Oui, oui.
> 5. C : Les résoudre, ça peut les aider à les classifier …
> 6. Al : Ah, oui, peut-être.

Alex semble donc penser que même si le type de tâches T_I est proposé, le type de tâches T_R défini plus haut va émerger. Cependant, les propos suivants montrent qu'il prévoit de ne pas présenter ce second type de tâches et qu'il compte laisser les élèves choisir leurs critères de classement :

> 33. C : […] Est-ce que tu les laisses vraiment classifier à leur idée ? Tu guides sur le nombre de catégories ?
> 34. Al : Moi, je serais assez pour les laisser vraiment complètement libres… mais après enfoncer le clou et leur expliquer…

Pour Alex, il est important de laisser émerger les représentations qu'ont les élèves d'une équation et de revenir à la définition de ce concept, ce qu'il pointe en précisant :

> 48. Al : Et il y a aussi un truc important …. Pour eux, résoudre une équation… ça n'a pas de sens pour certains. C'est-à-dire quand ils résolvent une équation comme $1 - x = 0$, quand ils trouvent une solution fausse, comme $x = -1$, ça n'a pas de sens pour eux de remplacer x par -1 pour voir si ça fonctionne …
> 49. C : Exactement.
> 50. Al : Ça montre que, déjà en amont, le substrat mathématique est biaisé. Donc, comment tisser une vraie connaissance mathématique sur déjà une idée qu'ils se font …

Il s'interroge également sur la focalisation possible des élèves sur la nature des coefficients des équations : « *Je pense que pour eux, ces deux-là [$7 - x = 0$ et $\sqrt{2} + x = 3$] n'auront pas forcément le même statut parce qu'il y a* $\sqrt{2}$ » (ligne 14). Ceci sous-entend que les élèves les placeront peut-être dans deux catégories distinctes, bien qu'elles soient toutes les deux du premier degré.

On peut également noter le souci d'Alex de faire avancer le *temps didactique* quand il prévoit d'intervenir en fin de séance pour proposer une institutionnalisation sur un classement pertinent des équations. Au cours de la discussion, ses propos montrent qu'il envisage un bilan en fin de séance : « *dans la discussion [finale], c'est moi qui serais le grand ordonnancier* » (ligne 32), et qu'il compte orienter son bilan vers une classification des équations en deux catégories, comme il l'indique : « *donc en fait, ce que tu veux faire émerger, c'est qu'il y a deux catégories, celles du premier degré et celles du second degré et que dans chaque catégorie, il y a des sous-catégories* » (ligne 50). Ainsi, cette institutionnalisation permettra-t-elle d'avancer vers les tâches d'algorithmisation des situations n°2 et n°3.

Enfin, notons que relativement au concept de recherche collaborative, le choix des équations réalisé par le professeur Alex est conforme à nos attentes pour étudier les facteurs qui influencent les élèves dans la catégorisation des équations. De plus, la situation semble à la fois être *viable* et pouvoir prendre en compte un savoir *situé*, au sens de Bednarz et Desgagné,

comme on peut le constater par quelques propos d'Alex, comme l'expression « *on est dans un truc intéressant* » (ligne 8) qui montre que la situation correspond à ses attentes par rapport à l'enseignement du calcul algébrique en seconde.
En conclusion, Alex compte donner le type de tâches T_I à effectuer à ses élèves, leur laissant la responsabilité d'établir leurs propres critères de classification.

- ***Techniques associées au type de tâches T_I***

Le type de tâches choisi par le professeur Alex étant conforme à celui de la trame d'ingénierie (cf. § 9.2.1), les techniques associées restent globalement celles prévues.
Notons qu'Alex prévoit que certaines techniques apparaitront de manière plus fréquente que d'autres. À trois reprises, il mentionne que les élèves vont résoudre les équations pour les classer :
- ligne 2 : «*je pense que « classer des équations »... ils vont avoir très envie de les résoudre* ».
- ligne 63 : « *De toute façon, pour faire la classification, je pense qu'il y en aura pas mal qui auront été résolues* ».
- ligne 65 : « *S'ils en n'ont pas résolu une seule, ce qui m'étonnerait, j'embrayerais sur un travail à la maison. Mais je pense qu'ils en auront résolu plusieurs.*».
Ces remarques montrent qu'Alex réalise une analyse succincte des techniques associées au type de tâches proposé et qu'il pense que les techniques, nommées en section 9.2.1 techniques *qui nécessitent de résoudre les équations (à la main ou mentalement) entièrement ou partiellement avant les groupements,* seront utilisées par les élèves de façon préférentielle.
D'autre part, relativement au sens du verbe classer, il semble qu'Alex ait une définition de ce verbe plus proche du sens (1) que du sens (2), comme le laissent présager les propos suivants : « *Donc en fait, ce que tu veux faire émerger, c'est qu'il y a deux catégories, celles du premier degré et celles du second degré et que dans chaque catégorie, il y a des sous-catégories* » (ligne 50). La définition sous-jacente semble plus proche d'un classement catégoriel que d'un ordonnancement. Nous verrons par l'analyse de la séance réalisée que ce premier sens est confirmé et qu'il a une influence sur le classement des équations effectué par les élèves.
Pour le bloc *logos*, nous retrouvons a priori l'environnement technologico-théorique donné lors de l'analyse de la situation n°1 (cf. § 9.2.2.), notamment la notion de degré, mise en avant par le professeur.

Analyse de l'OD de la situation n°1 de la trame projetée TP_3

L'analyse de la transcription de l'entretien (cf. annexe A19) fait ressortir que 53 échanges ont porté sur la constitution de la première situation et 62 échanges ont porté sur les situations 2 et 3, que nous reprendrons plus loin. Pour la situation n°1, le nombre d'échanges pour la discussion de la mise en place de l'OD est d'une vingtaine d'échanges contre une trentaine pour l'OM. Ce temps de parole relativement équilibré pour la mise en place des deux organisations montre l'importance que le professeur Alex accorde à la fois au contenu mathématique enseigné et sa mise en œuvre dans la classe.
Les points abordés ont été les suivants :
- le choix d'une affiche pour la restitution des travaux de groupe. A priori, comme le montre l'extrait ci-dessous (cf. A19), Alex aurait choisi une restitution des groupes écrite directement

au tableau, groupe après groupe, et ne voit pas l'utilité de la restitution sur affiche. L'échange avec le chercheur finit de le convaincre :

> 20. Al : Donc tu préfères une affiche ou on écrit sur le tableau ? Mais les affiches, tu veux les récupérer, c'est ça ?
> 21. C : Oui, ce serait bien pour moi. Mais surtout ça permet pour chaque groupe d'accrocher son affiche au tableau. Chaque groupe présente son affiche…
> 22. Al : Ah d'accord, on met ça au tableau et on discute …
> 23. C : C'est ça ! Chacun défend son choix.

Non seulement l'affiche apparaît comme un support utile pour le recueil des données pour le chercheur, mais aussi comme un outil facilitant la mise en commun des travaux de chaque groupe et la comparaison des affiches.
- le choix de travailler en demi-classe plutôt qu'en classe entière est abordé également :

> 24. Al : Alors ça, il faut que ça aille très vite parce que la discussion sinon, on n'aura pas le temps … Le problème, le mercredi matin, c'est que les élèves arrivent en retard.
> 25. C : On peut caler ça un autre jour …
> 26. Al : Ou alors on le fait en demi-classe ?
> 27. C : Ah oui, on peut le faire en demi-classe.
> 28. Al : Le mercredi à 11h30. À mon avis, les deux demi-groupes sont à voir. Le premier groupe est moins … fort, et le deuxième est beaucoup plus …
> 29. C : D'accord, et on aura plus de temps pour la discussion.
> 30. Al : Je pense que ça serait plus riche, et ça fait moins de choses à gérer.

Plusieurs points sont sous-jacents à cette décision d'Alex. En effet, si Alex ne discute pas la proposition de réaliser la situation n°1 en une seule séance d'une heure, il pense sans doute que la constitution des affiches puis la mise en commun sont difficilement réalisables dans ce laps de temps. Aussi propose-t-il un compromis, consistant à proposer la situation n°1 en demi-classe. Moins d'affiches sont alors à discuter, ce qui permet d'approfondir le travail de chaque groupe, ce qu'Alex exprime par *un travail plus riche*. La gestion du temps en est également facilitée, ce qu'il formule par les termes : « *ça fait moins de choses à gérer* ». Enfin Alex évoque un autre intérêt, celui de comparer les travaux de deux groupes ayant un niveau différent (ligne 28).
- le rôle du rapporteur lors de la restitution. Les propos d'Alex ci-dessous montrent l'importance que ce professeur accorde à ce dernier :

> 34. Al : […] Et il faudra penser aussi à mettre en place le rapporteur, ce sera à lui d'expliciter tout ça, en tant que porte-parole du groupe…
> 35. C : Oui…
> 36. Al : Il aura intérêt à avoir une rhétorique solide…

Nous analysons que le choix d'Alex conduit chaque groupe, à travers le rôle particulier du rapporteur, vers une situation de formulation, au sens de Brousseau (1998) ; le rapporteur ayant la charge de verbaliser les critères des différentes catégories d'équations formées, critères qui deviennent alors explicites pour tous.
- le choix de réaliser une synthèse en fin de séance est évoqué par le professeur en même temps qu'il prévoit de ne pas donner d'indications sur la catégorisation à mener du tant la phase de recherche en groupes. Il utilise les termes : « *je serais assez pour les laisser vraiment*

complètement libres… mais après enfoncer le clou et leur expliquer » (ligne 34). Au sens de Brousseau, le professeur envisage donc de rester en retrait durant la phase d'action puis de réaliser une institutionnalisation après la phase de formulation.
Parmi les points qui n'ont pas été discutés dans l'entretien avec le professeur, on peut citer, entre autres :
- le choix de disposer les équations sur cartons déplaçables. Le choix du chercheur est accepté sans commentaire ;
- la taille et la composition des groupes. Le professeur Alex n'a pas précisé son choix qui finalement se fera par groupes de 3 à 4 élèves, et par affinité ;
- la proposition de réaliser cette première séance sous forme d'un travail de groupes puis restitution à la classe. Cette organisation n'a pas soulevé de questions.

10.5.2 Situation n°2

Pour le temps consacré à la situation n°2, Alex choisit une séance d'une heure en demi-classe, répétée deux fois. Le tableau qui suit indique le récapitulatif des choix d'Alex pour cette deuxième situation.

	Éléments	**Éléments imposés**	**Éléments modulables**
			Choix d'Alex (TP_3)
OM	Type de tâches	Réaliser un programme pour résoudre des équations du 1[er] degré de la forme : $ax + b = cx + d$	- *Choix retenu d'atteindre l'objectif en deux temps* : premier temps, réaliser un programme pour résoudre $ax + b = c$ et second temps, réaliser un programme pour résoudre $ax + b = cx + d$. - *Choix de découper la tâche en sous-tâches pour la proposer aux élèves* : découpage a priori non évoqué.
	Équations	Équations polynomiales de degré 1	- Choix de 10 équations du 1[er] degré dont : 6 de la forme $ax + b = c$ et 4 de la forme $ax + b = cx + d$.
OD	Généralités	Réaliser la situation en salle informatique avec ordinateurs à disposition des élèves	- *Choix du logiciel* : Algobox - *Choix de faire travailler les élèves seuls ou de constituer des binômes* : non évoqué - *Phases correspondant aux sous-tâches avec indication de durée :* non évoqué pour les phases 1 à 5 - *Choix de donner des indications aux élèves pendant les différentes phases* : non évoqué - *Choix de réaliser une synthèse* : non évoqué - *Choix de faire résoudre quelques équations « à la main »* : non évoqué.
Seconde option	**Phase 6**	Environnement papier-crayon	- *Choix de réaliser cette phase en travail à la maison*

Tableau 111 : Les choix des éléments modulables de la situation n°2 dans la trame projetée TP_3

Explicitons ce tableau en distinguant OM et OD.

Analyse de l'OM de la situation n°2 de la trame projetée TP$_3$

- ***Types de tâches a priori évoqués par Alex et techniques associées***

Comme précisé en section 9.3.4, l'OM n'est volontairement pas proposée aux professeurs avec un découpage précis en type de tâches. Rappelons que, afin d'analyser les gestes professionnels des enseignants expérimentateurs, seule la réalisation de la tâche globale « réaliser un programme pour résoudre des équations du premier degré sous la forme $ax + b = cx + d$ » est donnée par le chercheur. Explicitons, en fonction des types de sous-tâches déterminées dans la trame d'ingénierie (cf. §9.3), les types de tâches évoqués par Alex. Nous utilisons la transcription de l'entretien entre le chercheur et Alex pour nos analyses (cf. A19, lignes 54 à 95). Une première discussion s'engage autour de tâches du type T$_1$, *reconnaître que les équations peuvent s'écrire sous la forme générale* $ax + b = cx + d$. La discussion tourne autour de la forme des équations du premier degré dont on cherche l'algorithme de résolution, c'est-à-dire sur le choix de proposer de réaliser cet algorithme soit à partir de la forme $ax + b = cx + d$, soit à partir de $ax + b = 0$. Nous avons envisagé l'éventualité de ce choix dans l'analyse a priori de la trame d'ingénierie (cf. seconde option, §.9.3.3). Suit l'extrait du verbatim correspondant :

> 59. Al : Peut-être essayer de ne présenter que des équations du premier degré … et montrer que c'est une forme mathématique bien précise, c'est-à-dire on a le « théorème mathématique » : $ax + b = 0$ équivalent à $x = -\frac{b}{a}$ avec a non nul… Et ça, ce serait ce qu'ils auraient à modéliser pour le premier degré…
> 60. C : Oui, c'est ça. Alors est-ce qu'on demande de résoudre quelques équations de ce type à la maison avant la deuxième séance, dans des cas particuliers ?
> 61. Al : Le problème, c'est que je l'ai déjà fait, je suis dans les tableaux de signe et $ax + b = 0$, ils savent que ça fait $-\frac{b}{a}$.
> 62. C : Mais même quand ils vont voir les équations comme celles-ci : $3x - 5 = 3 - 10x$ ou $\sqrt{2}x - 1 = 4 - \sqrt{3}x$? Est-ce qu'ils vont reconnaître qu'elles sont toutes de la forme $ax + b = 0$ justement ? Est-ce que ça ne permettrait pas de faire ce premier pas vers …

Alex souhaite a priori proposer aux élèves la programmation d'un algorithme résolvant les équations de la forme $ax + b = 0$, afin que les élèves comprennent que toute équation du premier degré, peut *se modéliser*, selon son expression, sous cette forme. Ce choix nécessite une part de transformations « à la main » des équations qui ne sont pas données directement sous cette forme, ce qu'Alex indique en ligne 88 : « *Ce qui veut dire qu'en amont, ils transformeront l'équation pour qu'elle soit dans le bon cas.* ». Alex évoque également dans cet extrait la tâche de type T$_2$, *résoudre sous forme littérale l'équation* $ax + b = cx + d$, transformée ici en la tâche *résoudre sous forme littérale l'équation* $ax + b = 0$. Pour Alex, la résolution littérale de cette dernière équation ne devrait pas poser de difficultés, puisqu'il l'a *déjà fait*, lors de l'institutionnalisation de l'étude du signe de l'expression algébrique $ax + b$. Le choix d'Alex est donc fixé sur la seconde option proposée pour réaliser la situation n°2 (cf. §9.3.3).

En ce qui concerne la tâche de type T$_3$, *concevoir un algorithme permettant d'automatiser la résolution d'une équation du premier degré*, Alex caractérise cet algorithme comme la modélisation de la résolution de toute équation du premier degré, quelle que soit la forme où

elle est présentée. Il présente la résolution d'une équation du premier degré comme un *théorème mathématique* où la même technique de résolution est applicable à toute équation. La définition sous-jacente d'un algorithme selon Alex rejoint celle donnée en section 4.2 par Modeste (2012) d'un algorithme vu comme *une procédure de résolution de problème, s'appliquant à une famille d'instances du problème.*
Les tâches de conception de l'algorithme (type T_3) et de programmation (type T_4, *écrire un programme traduisant l'algorithme de la tâche* T_3) ne sont ensuite plus dissociées dans le discours. Notons le passage suivant du verbatim :

> 67. C : Il y a donc les trois cas : *a* est nul et *b* est nul ou bien *a* est nul et *b* est nul et enfin *a* non nul.
> 68. Al : Je pense qu'ils vont avoir du mal à trouver les trois cas …parce que je n'ai pas discuté sur les valeurs de *a* et de *b*…
> 69. C : C'est pas grave, même s'ils n'écrivent que :
>
> **Lire a**
> **Lire b**
> **Afficher –b/a**
>
> Et alors leur proposer de rentrer a = 0 pour voir …
> 70. Al : Oui, il y a moyen de réfuter facilement …Ici, c'est bien pour la fonctionnalité de faire programmer :
>
> **Lire a**
> **Lire b**
> **x prend la valeur –b/a**
> **Afficher « –b/a = »**
> **Afficher x**
>
> 71. C : oui, c'est mieux pour qu'ils ne perdent pas le fil …

La transition entre les tâches de conception de l'algorithme et d'écriture du programme se fait entre les lignes 68 et 69 de l'extrait ci-dessus. Nous retrouvons l'idée d'un programme qui se construit pas à pas (cf. §9.3), tout d'abord sans structure alternative et qui sera enrichi peu à peu, pour prendre en compte tous les cas (évocation de $a = 0$). L'intervention d'Alex à la ligne 70 est notable, en ce qui concerne le lien entre les objets algébriques et la structure à donner au programme. En effet, Alex propose ici de faire intervenir l'inconnue *x* comme variable informatique, alors que celle-ci n'est pas nécessaire au fonctionnement du programme ; l'intérêt réside dans la construction d'images mentales – et visuelles par le biais du logiciel – de la résolution systématique d'une équation du premier degré. Ainsi, il n'y a pas recherche du « meilleur » algorithme, au sens de la complexité, mais celui-ci est au service de la compréhension des objets de l'algèbre et plus particulièrement ici des concepts d'inconnue, de paramètre et de solution.
Le cinquième type de tâches T_5, *utiliser le programme réalisé pour résoudre les équations proposées* est soulevé par le chercheur (ligne 73, annexe A19) mais ne suscite pas de remarques de la part d'Alex.

- ***Choix des équations***

Parmi les 18 équations que nous avons proposées (cf. A12), l'enseignant en a conservé 10, présentées ci-dessous.

Équation 1 : $x + 3 = 0$	Équation 6 : $\pi x + 3 = 4$
Équation 2 : $-1000x = 0$	Équation 7 : $3x - 5 = 3 - 10x$
Équation 3 : $-1000 + x = 0$	Équation 8 : $3x - \frac{1}{4} = \frac{x}{4} - 2$
Équation 4 : $\sqrt{2} + x = 3$	Équation 9 : $\sqrt{2}x - 1 = 4 - \sqrt{3}x$
Équation 5 : $\frac{10x}{0,001} = 4$	Équation 10 : $7(x + 2) + 4(x - 3) = 0$

Figure 112 : Choix des équations du 1er degré d'Alex pour la situation n°2

Alex a diversifié son choix proposant des équations dont les coefficients sont entiers, décimaux, rationnels ou irrationnels. De plus, nous relevons :
- 5 équations de la forme $ax + b = c$, où dans 3 cas, c est nul ;
- 4 équations de la forme $ax + b = cx + d$;
- 1 équation se ramenant à $ax + b = 0$ après développement et réduction (s'il n'y a pas transposition de termes dans l'autre membre).

Son choix se révèle conforme aux types de tâches évoquées plus haut.

Analyse de l'OD de la situation n°2 de la trame projetée TP_3

Contrairement à la situation n°1 où la place de l'OD est importante dans la discussion avec le chercheur, ici l'organisation didactique n'est que peu évoquée. Le professeur Alex semble laisser volontairement un certain flou dans celle-ci, en utilisant à deux reprises l'expression *une part d'impondérable* (lignes 63 et 65). Il semble qu'Alex veuille s'appuyer sur le travail des élèves en action pour ajuster cette organisation. Nous pouvons peut-être mettre cette attitude sur le compte de la nouveauté de la conduite de séances comportant de l'algorithmique. En effet, l'ensemble des professeurs des mathématiques en lycée n'a pas encore de recul par rapport à la pratique de ce domaine, introduit seulement depuis un an au moment de l'expérimentation.

Parmi les éléments de l'OD, Alex évoque la *trace écrite* (lignes 86) qui lui semble nécessaire mais *difficile* à obtenir des élèves lors d'une situation utilisant les TICE. Il propose également de réaliser la phase 6 (description de la fonction d'un algorithme traduit sous le logiciel Algobox, cf. annexe A9) sous la forme d'un travail à la maison. Suivent les lignes du verbatim correspondantes :

> 92. C : Il faut le lire et le « décoder » … Mais je pense que …
> 93. Al : Tu le fais photocopier, tu leur donnes et pour la fois suivante, tu demandes ce qu'il produit et tu demandes de le faire tourner sur quelques exemples.
> 94. C : Ah oui !
> 95. Al : À mon avis, un petit travail à faire à la maison, entre la séance 2 et la séance 3 … Avec des valeurs que tu choisis, comme π ou 2/3 …
> 96. C : Et oui, c'est une bonne ici ce que tu me proposes là !

Alex a modifié la proposition du chercheur en y incluant des questions pour guider le travail de l'élève (cf. annexe A22). Ces questions supplémentaires se justifient, par rapport à notre proposition initiale, par le fait qu'Alex propose ce travail à la maison, alors que nous l'avions envisagé en classe. Cette proposition d'Alex repose certainement, même si cela ne transparaît pas dans le dialogue, sur la gestion de son temps d'enseignement. Reporter une partie du travail à la maison lui permet de condenser la demande du chercheur et de limiter le nombre de séances en présentiel. L'unité de temps retenue par Alex pour la situation n°2 est de nouveau la séance d'une heure, comme pour la situation n°1.

10.5.3 Situation n°3

Contrairement à Maurice et Annabelle, Alex accepte de mettre en place cette troisième situation. Comme pour la situation n°2, il choisit une séance d'une heure en demi-classe, répétée deux fois. Le tableau suivant récapitule les choix de l'enseignant, tirés de l'entretien de constitution des séances de la trame projetée (cf. annexe A19, lignes 96 à 118).

	Éléments	**Éléments imposés**	**Éléments modulables**
			Choix d'Alex (TP_3)
OM	Type de tâches	Réaliser deux programmes : l'un pour résoudre des équations du 2nd degré de la forme $x^2 = a$ et l'autre pour celles de la forme $(ax + b)(cx + d) = 0$	- *Choix de découper la tâche en sous-tâches pour la proposer aux élèves* : découpage a priori non évoqué.
	Équations	Équations polynomiales de degré 2	- Choix de 11 équations du 2nd degré dont : 7 de la forme $(ax + b)(cx + d) = 0$ (dont 5 sous leur forme générique et 2 à transformer) 3 de la forme $x^2 = a$
OD	Généralités	Réaliser la situation en salle informatique avec ordinateurs à disposition des élèves	- *Choix du logiciel* : Algobox - *Choix de faire travailler les élèves seuls ou de constituer des binômes* : non évoqué - *Phases correspondant aux sous-tâches avec indication de durée :* non évoqué - *Choix de donner des indications aux élèves pendant les différentes phases* : non évoqué - *Choix de réaliser une synthèse* : non évoqué - *Choix de faire résoudre quelques équations « à la main »* : choix retenu

Tableau 113 : Les choix des éléments modulables de la situation n°3 dans la trame projetée TP_3

Explicitons ce tableau en distinguant OM et OD.

Analyse de l'OM de la situation n°3 de la trame projetée TP_3

- ***Types de tâches a priori évoqués par Alex et techniques associées***

Rappelons que l'OM n'est pas indiquée de façon précise aux professeurs afin d'analyser leurs gestes professionnels et que seule la tâche globale leur est indiquée, de « réaliser un programme pour résoudre des équations du second degré sous la forme $(ax + b)(cx + d) = 0$ ou $x^2 = a$ ». Au cours de l'entretien (cf. annexe A19), une première discussion s'engage autour du type d'équations du second degré dont on cherche l'algorithme de résolution. Le chercheur ayant proposé des équations du type $x^2 = a$ ou s'y ramenant par transformation (ligne 96), Alex émet l'idée de ne pas séparer les deux types d'équations et de les proposer ensemble :

> 99. Al : Je pense que, si tu as voulu faire un truc du type $ax + b = 0$ pour qu'ils aient le même substrat, je pense qu'il faut faire de la même manière tous les substrats possibles pour le second degré ! Parce que $x^2 = a$, ce n'est pas si riche que ça, finalement …
> […]
> 103. Al : Je crois qu'il faut y aller directement : « Est-ce que je suis capable de faire un algorithme avec $ax^2 + bx + c = 0$? ». Je pense qu'il faut ça aussi.

Alex évoque la situation n°2 où des équations du premier degré sont proposées de manière à dégager un même modèle, et suggère de faire de même avec celles du second degré. Mais il réalise très vite que sans la technique du discriminant, c'est *hyper compliqué* (ligne 106) et adhère à l'idée du chercheur de concevoir deux algorithmes :

> 113. C : On pourrait le faire en une seule séance, mais en proposant un découpage selon le type d'équations ?
> 114. Al : Oui, c'est bien ça.

Le chercheur propose alors à l'enseignant le travail réalisé par Annabelle et Maurice pour la situation n°2 comme point de départ à la préparation de la fiche d'énoncé à fournir aux élèves. L'énoncé de droite est constitué par Alex seul, en dehors du temps de l'entretien, et est proposé aux élèves pour la situation n°3. Ci-dessous nous présentons les deux énoncés mis en regard :

Énoncé de la fiche élève pour la situation n°2 de Maurice et d'Annabelle	**Énoncé de la fiche élève pour la situation n°3 d'Alex**
1. *Réaliser un algorithme sur le logiciel Algobox permettant de résoudre les trois premières équations ci-dessous,* ***sans les transformer au préalable****.* 2. *Signaler par une * les équations similaires. Faire fonctionner l'algorithme pour ces équations.* 3. *Comment peut-on résoudre les équations restantes avec un autre algorithme ? Le construire et résoudre les autres équations à l'aide de ce nouvel algorithme.* *Équation 1 : $x + 3 = 0$ *Équation 2 : $2x - 3 = 4$ *Équation 3 : $3 - 2x = -2$ Équation 4 : $2 + x = 5x$ Équation 5 : $2x + 3 = 3x + 1$ Équation 6 : $8 - x = \sqrt{2}$ Équation 7 : $\frac{7}{2}x + 3 = \frac{2}{3}$ Équation 8 : $\frac{7}{2}x + \frac{2}{5} = \frac{8}{3} + \frac{1}{2}x$ Équation 9 : $3 = 2x + 1$ Équation 10 : $3x + 2 = 5 + 3x$ Équation 11 : $1{,}8x - 3 = 2{,}5x + 7{,}4$	1. *Réaliser un algorithme sur le logiciel Algobox permettant de résoudre les trois premières équations ci-dessous,* ***sans les transformer au préalable****.* 2. *Signaler par une * les équations similaires. Faire fonctionner l'algorithme pour ces équations.* 3. *Comment peut-on résoudre les équations restantes avec un autre algorithme ? Le construire et résoudre les autres équations à l'aide de ce nouvel algorithme.* *Équation 1 : $(4x + 3)(2x - 1) = 0$ *Équation 2 : $3x(x + \sqrt{5}) = 0$ *Équation 3 : $(1 - 3x)(1 + \pi x) = 0$ Équation 4 : $x^2 = 7$ Équation 5 : $x^2 = -4$ Équation 6 : $x^2 - 10x + 25 = 0$ Équation 7 : $-\frac{1}{4}x\left(\frac{1}{2}x + 9\right) = 0$ Équation 8 : $7x - x^2 = 0$ Équation 9 : $x^2 = (2{,}07)^2$ Équation 10 : $-0{,}1x(900 - 0{,}1x) = 0$

Tableau 114 : Comparaison des fiches d'énoncé fournis par les enseignants

Alex a manifestement tiré profit de l'organisation mathématique mise en place par Annabelle et Maurice, puisque l'intitulé est identique à celui réalisé par ces deux enseignants. Il est vrai que cette structure convient aussi bien pour les deux situations. Celle-ci permet de :
- modéliser une première catégorie d'équations dont trois spécimens sont donnés ;

- concevoir un premier algorithme de résolution de cette catégorie identifiée ;
- reconnaître d'autres équations appartenant à cette première catégorie (à indiquer avec des étoiles) ;
- faire fonctionner l'algorithme pour ces équations ;
- modéliser la seconde catégorie d'équations (constituée des équations non étoilées) ;
- concevoir un second algorithme de résolution de cette catégorie ;
- faire fonctionner le second algorithme pour les équations non étoilées.

Notons que, pour la situation n°3, la question 3 aurait pu être modifiée en précisant :

> 3. *Parmi les équations restantes, identifier une autre catégorie (sans transformation au préalable des équations) et construire un algorithme permettant de résoudre les équations de cette seconde catégorie.*
> 4. *Reste-t-il des équations ? Si oui, les transformer pour pouvoir utiliser l'un ou l'autre des algorithmes déjà construits.*

En effet, la condition de la première question, *sans transformation préalable*, peut se révéler ambigüe pour la suite puisque les équations 6 et 8 ne sont pas directement données sous les formes génériques identifiées.

À propos de l'ordre dans lequel sont proposées les équations, Alex indique dans l'entretien vouloir commencer par la résolution des « équations-produits », *ce qui permettrait de réinvestir ce qu'on a fait en séance 2* (ligne 116). Il prévoit ainsi le *tissage* (Bucheton, 2004) avec la situation précédente, où la modélisation des équations du premier degré pourra être *reprise*, sous une forme nouvelle, et envisage de faire appel à la *mémoire didactique de la classe* (Matheron, 2000) où les expressions algébriques de la forme $ax + b$ ont déjà été identifiées et travaillées au cours de la situation n°2.

Analysons comment apparaissent les types de tâches répertoriés dans la trame d'ingénierie (cf. §9.4.3), lors de cette conception de la trame projetée d'Alex. Le type de tâches T_1, *reconnaître que les équations données peuvent s'écrire sous une forme générale à déterminer,* n'est pas explicitement donné dans l'énoncé mais fait partie de la tâche globale de conception de l'algorithme : elle sera nécessairement effectuée au cours de chacune des trois questions selon l'énoncé d'Alex. Pour les questions 1 et 3, il s'agit de déterminer la forme générique des équations, alors que pour la question 2, la tâche porte plus spécifiquement sur la reconnaissance d'équations faisant partie d'une famille déjà déterminée. En relation avec la classification piagétienne utilisée pour la situation n°1, les questions 1 et 3 donnent à répertorier les équations *en compréhension,* c'est-à-dire déterminer les caractéristiques communes s'appliquant aux objets qui composent la classe, et la question 2 les classent en *extension*, soit en précisant des éléments auxquels s'appliquent ces caractéristiques (cf. §9.2).

Le type de tâches T_2, *résoudre sous forme littérale une équation* n'est pas détaillé dans les questions posées. Alex mentionne simplement, durant l'entretien, à propos de la résolution des équations $x^2 = a$:

> 97. Al : […] Pour les plus futés, ils vont voir tout de suite que c'est de la forme $x^2 = a$. Ils vont voir tout de suite qu'il y a une condition sur a. Ce théorème, sur les solutions de $x^2 = a$, je le serine depuis…qu'on a fait les équations.

Il indique ainsi que le traitement de cette équation a déjà été effectué au cours de cette année scolaire. (cf. progression d'Alex, § 10.2).

Quant au type de tâches T_3, *concevoir un algorithme permettant d'automatiser la résolution d'équations*, il est donné à effectuer dans l'intitulé des questions 1 et 3. Remarquons que le terme « algorithme » est utilisé par l'ensemble des professeurs comme synonyme de « programme » et que de ce fait, la tâche T_4 n'est pas dissociée de la tâche T_3. Enfin, la tâche T_5, *utiliser le programme réalisé pour résoudre les équations proposées,* est présente dans les questions 2 et 3 sous la forme « *faire fonctionner l'algorithme pour ces équations* » et « *résoudre les autres équations à l'aide de ce nouvel algorithme* ». De plus, un feed-back est prévu par le professeur qui indique, ligne 116, « *Je leur ferai vérifier aussi à la main* ». L'enseignant envisage de confronter les résultats donnés par la machine et ceux obtenus en environnement papier-crayon, donnant ainsi tout son sens à la tâche T_5.

- ***Choix des équations***

L'enseignant a choisi des équations similaires à celles suggérées par nous en annexe A14. Il en propose dix, en variant la nature des coefficients et des formes proposées (cf. tableau 114) dont :
- cinq sont données sous la forme $(a + b)(cx + d) = 0$, avec 3 cas où b est nul ;
- trois sont de la forme $x^2 = a$, avec a positif ou négatif ;
- les deux dernières $x^2 - 10x + 25 = 0$ et $7x - x^2 = 0$ sont à transformer, par la reconnaissance d'une identité remarquable ou par un facteur commun avant d'être reconnues de la forme $(a + b)(cx + d) = 0$.

Notons que les trois équations 2, 4 et 10 du tableau 114 doivent être reconnues de la première forme, ce qui peut engendrer une difficulté pour l'élève influencé par les *ostensifs* de ces équations comme l'absence de parenthèses, l'absence du terme en b, la présence de nombres rationnels en écriture à virgule ou fractionnaire, etc.
Pour la forme $x^2 = a$, les deux cas a positif et a négatif sont considérés, ce qui oblige l'élève à inclure une structure de test dans l'algorithme.
Pour finir, nous soulignons le cas intéressant de l'équation 9, pour laquelle l'élève peut choisir de la résoudre avec le second algorithme, sans transformation, en entrant comme paramètre $2{,}07^2$ ou avec le premier algorithme après transformation sous la forme produit $(x - 2{,}07)(x + 2{,}07) = 0$. Ce cas fait alors le lien entre les deux techniques de résolution utilisées dans la situation n°3 et peut permettre d'amorcer une vision unifiée des techniques de résolution des équations du second degré.

Analyse de l'OD de la situation n°2 de la trame projetée TP_3

Comme pour la situation n°2, l'organisation didactique n'est pas discutée avec le chercheur. Nous pouvons considérer que la raison en le manque de temps, en fin de l'entretien mais aussi une certaine latitude d'ajustement que se laisse Alex durant la séance. Le manque de *repères didactiques* (Haspékian, 2005) dû à la nouveauté de l'inclusion de l'algorithmique dans l'enseignement des mathématiques peut aussi être à l'origine de ceci : le professeur est encore en apprentissage, concernant la gestion des séances comportant de l'algorithmique.

10.6 Bilan : comparaison des trames projetées

D'après la figure 24 de la section 6.2.2 résumant la méthodologie employée, ce bilan correspond à la flèche blanche numérotée ①, c'est-à-dire à la comparaison des trames projetées TP_1, TP_2 et TP_3 entre elles.
Nous présentons un bilan situation par situation.

10.6.1 Situation n°1

Le tableau qui suit présente les principaux choix des différents professeurs quant aux éléments modulables de la situation n°1. Ont été indiquées en gras les principales différences.

	Éléments	Éléments modulables		
		Choix d'Annabelle (TP_1)	Choix de Maurice (TP_2)	Choix d'Alex (TP_3)
OM	Équations	Choix de **19** équations à classer		Choix de **28** équations à classer
	Type de tâches	- *Première consigne* : Classer les équations **selon des critères à déterminer (T_I)** - *Seconde consigne* (5 minutes plus tard) : Classer les équations **selon leur mode de résolution (T_R)**	*Une seule consigne donnée dès le départ :* Classer les équations **selon leur mode de résolution (T_R)**	*Une seule consigne donnée dès le départ :* Classer les équations **selon des critères à déterminer (T_I)**
OD	Généralités	Séance d'une heure en **classe entière**		Séance d'une heure en **demi-classe**
	Phase 1	*Taille et composition des groupes :*		
		Groupes de 3 élèves puis regroupement de deux groupes de 3 élèves en un groupe de 6 élèves Constitution des groupes **définie à l'avance** par les professeurs qui choisissent de les rendre hétérogènes		Groupes de 3 à 4 élève Constitution des groupes **libre**, les élèves se placent par affinité
		Choix de donner des indications aux élèves pendant la phase 1 :		
		Non évoqué		Alex prévoit de ne pas donner d'indications.
	Phase 2	*Choix de réaliser une synthèse en fin de phase :*		
		Pas de synthèse en fin de séance mais des commentaires au fur et à mesure de la présentation des affiches par le rapporteur du groupe		**Synthèse** en fin de séance

Tableau 115 : Comparaison des éléments modulables de la situation n°1 des TP n°1, 2 et 3

Une première constatation peut être faite dès à présent : tout ce qui a été proposé comme étant modulable par le chercheur a été discuté (hormis le choix de donner des indications aux élèves pendant la phase de recherche) et a engendré des choix différents.
Par rapport aux OM retenues, Annabelle et Maurice qui travaillent ensemble, se sont accordés sur le choix des équations et leur nombre mais ont divergé sur le type de tâches. Ce choix du type de tâches a été le plus problématique pour l'ensemble des professeurs, puisqu'il existe, comme déjà dit plus haut, deux objectifs pour cette séance de catégorisation. Le premier

objectif est de faire ressortir les représentations qu'ont les élèves des équations, donc d'axer le travail des élèves sur la recherche de critères pour classifier les équations. Ce premier objectif oriente vers le type de tâches T_I. Le second objectif est de déterminer des classes d'équations selon leur mode de résolution, donc d'axer le travail des élèves sur la recherche de techniques de résolution, en les amenant à distinguer les équations polynomiales du premier et du second degré. Ce second objectif conduit au type de tâches T_R. Un dilemme s'est présenté aux professeurs : proposer le type de tâches T_I a l'avantage de permettre d'interroger l'objet « équation ». En effet, l'acte de mettre deux équations dans la même catégorie peut impliquer de se poser la question : *ces deux équations vont dans la même catégorie car elles ont des caractéristiques communes. Quelles sont donc les caractéristiques d'une équation ?* On en arrive à interroger plus ou moins directement la définition d'une équation. En revanche, proposer le type T_I présente l'inconvénient de ne pas faire avancer le temps didactique vers les situations n°2 et n°3 qui proposent de résoudre des équations. Au contraire, choisir le type de tâches T_R occulte la phase d'interrogation de l'objet « équation » et mais dirige directement l'élève vers leur résolution. La présence implicite de ces deux objectifs a conduit les trois professeurs à choisir trois options différentes : Maurice a adopté le type de tâches T_R, Annabelle, le type T_I puis T_R, et enfin Alex, T_I. Ce choix du type de tâches n'est pas indépendant du choix des équations comme nous allons le voir maintenant.

Annabelle et Maurice, travaillant de concert, ont retenu les mêmes équations. Elles sont au nombre de 19, alors qu'Alex en a gardées 28. Ce nombre moindre d'équations pour les deux premiers enseignants peut éventuellement s'expliquer par le dispositif retenu : ayant choisi de fonctionner en classe entière et avec un double système de groupes, ces derniers ont peut-être souhaité limiter le nombre d'équations afin de mieux contrôler le temps. En effet, un trop grand nombre d'équations aurait pu nuire aux échanges intra groupes et compliquer la restitution à la classe, alors que les contraintes de temps pour Alex sont moins fortes ici, puisque la séance est effectuée en demi-classe et avec un dispositif de travail en groupe plus simple.

Nous rappelons que les enseignants ont à choisir les équations qu'ils vont proposer et que nous leur avons proposé un choix de base de 40 équations (cf. A11) dans lequel ils peuvent puiser. Détaillons le choix de ces équations :

<table>
<tr><th></th><th>Choix d’Annabelle et de Maurice</th><th>Choix d’Alex</th></tr>
<tr><td>Équations du premier degré</td><td>10 équations</td><td>12 équations</td></tr>
<tr><td>Communes</td><td colspan="2">$-1000x = 0$; $-1000 + x = 0$
$\sqrt{2} + x = 3$; $\pi x + 3 = 4$
$3x - \frac{1}{4} = \frac{x}{4} - 2$
$7(x+2) + 4(x-3) = 0$</td></tr>
<tr><td>Différentes</td><td>$1000x = 0$
$-\frac{x}{5} = 1$
$1{,}8x - 3 = 2{,}5x + 7{,}4$
$(3-4x) - (2x-1) = 0$</td><td>$x + 3 = 0$
$\frac{2x}{7} = 0$
$\frac{10x}{0{,}001} = 4$
$-3 = 5x + 1$
$3x - 5 = 3 - 10x$
$\sqrt{2}x - 1 = 4 - \sqrt{3}x$</td></tr>
<tr><td>Équations du second degré</td><td>7 équations</td><td>16 équations</td></tr>
<tr><td>Communes</td><td colspan="2">$(3-4x)(2x-1) = 0$; $3x(x + \sqrt{5}) = 0$
$x^2 = 7$; $\frac{x^2}{27} = 0{,}01$
$9x^2 - 16 = 0$
$x^2 - 8x + 15 = 0$</td></tr>
<tr><td>Différentes</td><td>$x^2 + 3x = \frac{7}{2}$</td><td>$x^2 = -4$; $\sqrt{3}x^2 = -2$
$x^2 = (2{,}07)^2$; $\frac{x^2}{7} = 21$
$3 = 2 - x^2$
$(x+1)^2 = 9$
$x^2 + 6x + 9 = 0$
$x^2 - 8x + 15 = -1$
$x^2 + 6x = 0$
$x^2 - 8x + 15 = 15$</td></tr>
<tr><td>Équations non polynomiales</td><td>$\sqrt{x} + 2 = 3$; $-\frac{5}{x} = 1$</td><td></td></tr>
</table>

Tableau 116 : Comparaison des équations choisies par les trois enseignants pour la situation n°1

L’analyse de ce tableau permet de constater que les trois professeurs ont opté pour un nombre équivalent d’équations polynomiales du premier degré (10 et 12) et que les équations retenues sont quasiment similaires. Ces équations sont effectivement choisies de manière à trouver soit l’inconnue dans un seul membre de l’égalité, soit dans les deux membres. De plus, la diversité de choix des nombres déterminés (nombres négatifs, nombres décimaux en écriture à virgule, nombres rationnels en écriture fractionnaire, nombres irrationnels) proposée par le chercheur est perçue par Annabelle, Maurice et Alex qui n’hésitent pas à retenir de telles équations, ce qui tend à montrer que ces enseignants expérimentés connaissent les difficultés des élèves quant à la nature des nombres.

En revanche pour le second degré, les choix diffèrent. Si nous remarquons que les équations retenues par Annabelle et Maurice sont incluses dans le choix d’Alex, à une équation près, le nombre d’équations pour Alex est nettement supérieur (16 contre 7). Pour les six équations communes, les professeurs ont favorisé les formes suivantes :

- deux équations $(ax + b)(cx + d) = 0$, avec *a, b, c, d* entiers positifs, négatifs ou nuls ou irrationnels ;
- deux équations $ax^2 = b$, avec *a, b* entiers, fractionnaires ou décimaux en écriture à virgule ;
- une équation $ax^2 - b = 0$, avec *a, b* entiers et carrés parfaits, transformable par une identité remarquable ;

- une équation $ax^2 + bx + c = 0$, avec *a, b, c* entiers, mais où les coefficients ne sont pas directement ceux d'une identité remarquable.

De ce choix commun, nous analysons que les professeurs ont cherché à diversifier les formes que l'on peut rencontrer pour les équations du second degré, comme les formes produit nul de deux expressions du premier degré et des équations où le terme en x est absent. Les cinq premières équations font partie du *savoir enseigné* aux élèves à ce stade de leur scolarité, par contre la dernière équation $x^2 - 8x + 15 = 0$ est d'un type plus général, dont la résolution est systématisée au niveau de la classe de première générale du lycée, par la technique du discriminant. Cependant, en classe de seconde, lorsque la forme canonique est fournie aux élèves, la résolution d'une telle équation est au programme de l'année.

Les équations supplémentaires que propose Alex comportent des équations de la forme $ax^2 = b$ ou s'y ramenant, possédant ou ne possédant pas de solutions réelles (contrairement aux six équations communes qui en possèdent toutes), une équation de la forme $(ax + b)^2 = c$, deux équations pouvant se ramener à une identité remarquable de la forme $x^2 + 2ax + a^2$ et enfin deux équations se ramenant à $x^2 + ax = 0$. Ce supplément d'équations du second degré choisies par Alex tend à montrer deux points de vue différents quant à la façon de considérer l'expérimentation. Il semblerait que la façon d'envisager les situations suivantes (n°2 et n°3) ait influé sur le choix des équations et sur leur nombre. En effet, rappelons qu'Annabelle et Maurice pensent qu'il est prématuré de réaliser la situation n°3, consacrée à la conception d'algorithmes pour résoudre des équations du second degré, alors qu'Alex la voit comme une finalité de l'expérimentation.

Pour Annabelle et Maurice, le second degré est traité en seconde en relation avec l'utilisation de représentations graphiques de fonctions et la systématisation de la résolution des équations du second degré ne se fait qu'en classe de première. Ce que corroborent les propos suivants (cf. annexe A16) de Maurice et d'Annabelle, à propos de la situation n°3 :

> 83. Ma : Alors moi en fait, j'ai une réserve … sur la partie $x^2 = a$. Autant, pour $ax + b = 0$, je suis complètement convaincu de l'intérêt, mais ce qui me pose question, quand moi j'enseigne $x^2 = a$, je passe presque systématiquement soit par le graphique, soit par la factorisation …
> 84. An : Oui, moi aussi.
> 85. Ma : Si tu veux pour les faire réfléchir sur ne pas oublier la seconde racine, c'est là que je trouve la courbe ou la factorisation intéressantes.
> […]
> 122. Ma : Pour moi, ton activité, là, c'est une excellente activité de début de première. Déjà, il y a de l'algorithmique en première et quand on fait les équations du second degré, comme mise au point, avant de faire la forme canonique, avant tout ça, l'algorithme là, oui. Là vraiment, je vois un sens. En plus la forme canonique, c'est la mise en forme toujours de la même façon de faire, ce serait vraiment très bien.

Pour Alex, en revanche, l'explicitation du second degré et de la forme canonique fait partie des préconisations du programme de seconde (cf. A19) :

> 7. C : […] Dans le nouveau programme (*de seconde*), il y a bien la forme canonique ?
> 8. Al : Oui, on est en plein dedans. On est dans un truc intéressant : forme factorisée, forme canonique…

Il y a ici une différence de lecture et d'interprétation des programmes officiels. Nous relevons en effet une ambiguïté à ce sujet dans le programme de seconde. D'une part, nous lisons dans le secteur *Équations* du domaine *Fonctions* que les élèves doivent être capables de *résoudre une équation se ramenant au premier degré* (MEN, 2009a). D'autre part, dans ce même domaine, il est attendu que soient étudiées les *fonctions polynômes de degré 2* mais il est précisé dans les commentaires du même programme, qu'*il n'est pas attendu de savoir mettre sous forme canonique un polynôme de degré 2.* De plus, le document *Ressources pour la classe de seconde* consacré aux fonctions (MEN, 2009b) énonce, dans la rubrique *Connaissance des fonctions polynômes du second degré* :

> Lorsqu'il s'agira pour un élève de donner les variations d'une fonction polynôme du second degré quelconque, il pourra par exemple prendre appui sur le fait – établi en cours – qu'une fonction polynôme de degré 2 est soit croissante puis décroissante, soit le contraire. Il ne lui restera plus alors qu'à trouver pour quel nombre réel il y a changement de variation. Si la forme canonique est disponible (soit parce que l'expression de la fonction est mise naturellement sous cette forme, soit parce que l'élève identifie qu'il en a besoin et qu'il l'obtient en utilisant un logiciel de calcul formel), il pourra en déduire à la fois l'extremum, la valeur en laquelle il est atteint et son caractère (minimum ou maximum). [...] (p.12)

Ces propos semblent confirmer que l'étude des fonctions polynomiales de degré 2 inclut la rencontre de la forme canonique en classe de seconde mais que celle-ci doit être enseignée ni de manière systématique, ni sous la forme littérale d'une identité du type :

$$ax^2 + bx + c = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a}.$$

Au contraire, la citation ci-dessus indique que la forme canonique est à proposer avec des nombres déterminés et dans des cas où elle est utile. Pour l'obtenir, l'enseignant peut proposer diverses techniques, comme l'obtenir à l'aide d'un logiciel de calcul formel ou encore fournir la forme canonique et proposer de vérifier qu'elle est bien équivalente à la forme donnée initialement. Il ne s'agit pas d'exercer les élèves à un haut degré de technicité mais de *faire travailler l'intelligence du calcul, [de] donner des occasions de raisonner. Il est important de développer une aptitude à anticiper la forme de l'expression utile pour résoudre un problème* (MEN, ibid.).

Pour conclure, nous pouvons considérer que les trois professeurs ont une interprétation possible et conforme mais différente du programme de seconde. Pour Annabelle et Maurice, il s'agit de plonger les expressions algébriques du second degré dans le domaine fonctionnel et de travailler les équations en lien avec les différents registres (au sens de Duval) relatifs aux fonctions. Pour Alex, il s'agit de considérer les équations du second degré comme des *équations se ramenant au premier degré* (MEN, 2009a), par factorisation, du moins pour celles qui possèdent des solutions réelles, cette factorisation passant éventuellement par une forme canonique.

Nous pouvons ainsi interpréter, par la profusion d'équations du second degré qu'il propose, qu'Alex souhaite montrer que ces équations prennent leur place dans un type d'équations plus général, une catégorie supérieure au sens de l'inclusion piagétienne : les équations polynomiales. C'est ce que corroborent ces propos, qu'il a nous rapporté lors d'une conversation en aparté : « *Finalement, ce qu'il faut que les élèves arrivent à comprendre, c'est que toutes les équations polynomiales ne se résolvent, algébriquement je veux dire, que si on arrive à les mettre sous forme de produits d'équations du premier degré* ». Annabelle et

Maurice les proposent au contraire avec parcimonie, considérant que les élèves de seconde ne les maîtrisent pas encore suffisamment pour qu'on puisse les « banaliser ».
En ce qui concerne les OD, nous pouvons commencer par relever, comme annoncé au chapitre 1 (cf. 1.2.2.2) que celles-ci ne sont pas indépendantes des OM retenues et qu'elles sont fortement imbriquées (Chevallard, 1999). Nous avons vu en effet ci-dessus que le choix d'effectuer la situation n°1 en classe entière induit un nombre d'équations plus restreint ainsi qu'un double système de travail en groupes, alors que le choix effectuer un travail en demi-classe aboutit à un nombre plus grand d'équations à classer et un travail en groupes plus classique. De plus, nous relevons une autre différence, toujours inhérente à ces choix, sur la synthèse, l'institutionnalisation, au sens de Brousseau à mener ici en fin de séance. Annabelle et Maurice prévoient de commenter au fur et à mesure les affiches des différents groupes, quitte à en laisser quelques-unes de côté, et à choisir les affiches les plus représentatives. C'est ce qu'exprime Annabelle dans les passages suivants (cf. A16), lors de la constitution de la trame projetée :

> 194. C : Par contre, pour passer les affiches …au point de vue timing ?
> 195. An : Oui…
> 196. C : Si vous ne passez pas toutes les affiches, c'est pas grave. Vous en choisirez quelques-unes, vous regarderez les classements qu'ils ont faits…
> 197. An : Oui, c'est pas un problème. Au bout d'un moment, tout se recoupe…
> […]
> 208. C : C'est pour ça, est-ce vous voulez faire un petit bilan à la fin ou est-ce que vous allez le faire au fur et à mesure des affiches ?
> 209. An : Ah non, je ne me vois pas faire un petit bilan à la fin mais je le ferai au fur et à mesure.

Au contraire, Alex souhaite prendre un temps pour réaliser cette institutionnalisation, comme formulé ci-dessous (cf. A19) :

> 31. C : Dans la discussion finale, tu vas intervenir …
> 32. Al : Dans la discussion, c'est moi qui serais le grand ordonnancier !
> 33. C : Oui, bien sûr. Mais peut-être avant, pour créer les catégories, tu vas répondre à leurs questions… C'est toi qui vois… Est-ce que tu les laisses vraiment classifier à leur idée ? Tu guides sur le nombre de catégories ?
> 34. Al : Moi, je serais assez pour les laisser vraiment complètement libres… mais après enfoncer le clou et leur expliquer…

Les termes qu'il utilise ici « *la discussion finale*, *après … leur expliquer* » montrent qu'il prévoit ce moment en fin de séance. L'organisation de la séance en demi-classe en est d'ailleurs une conséquence, puisqu'Alex précise, à ce propos, *parce que la discussion sinon, on n'aura pas le temps* (ligne 24, A19). Alex envisage de réaliser une institutionnalisation en fin de séance, permettant ainsi une décontextualisation des connaissances qui auront émergé sur les équations au moment des phases d'action, pendant le travail de groupes, et de formulation, pendant la mise en commun. Pour Alex, cette dernière phase d'institutionnalisation semble indispensable pour assurer le passage de connaissances reliées à une situation vécue individuellement et contextualisée à un savoir décontextualisé. Annabelle et Maurice ne perçoivent apparemment pas cette phase comme une nécessité.

Pour conclure sur la situation n°1, s'il semble à première vue que les différences entre les choix effectués par les trois enseignants sont mineures, l'analyse ci-dessus montre qu'elles révèlent d'interprétations différentes du programme de seconde et par suite, de l'enseignement du calcul algébrique.
Étudions les choix des professeurs en les mettant en relation avec les différents niveaux de l'échelle de codétermination didactique de Chevallard (2002). Cet outil nous permet d'analyser les conditions et les contraintes auxquelles sont soumis les enseignants, en situant comment se structurent les connaissances algébriques. La figure ci-dessous montre les préconisations du programme de seconde en vigueur (MEN, 2009a) relativement au *domaine* « Fonctions ». Seuls ont été répertoriés les *secteurs d'étude* évoqués dans la situation n°1.

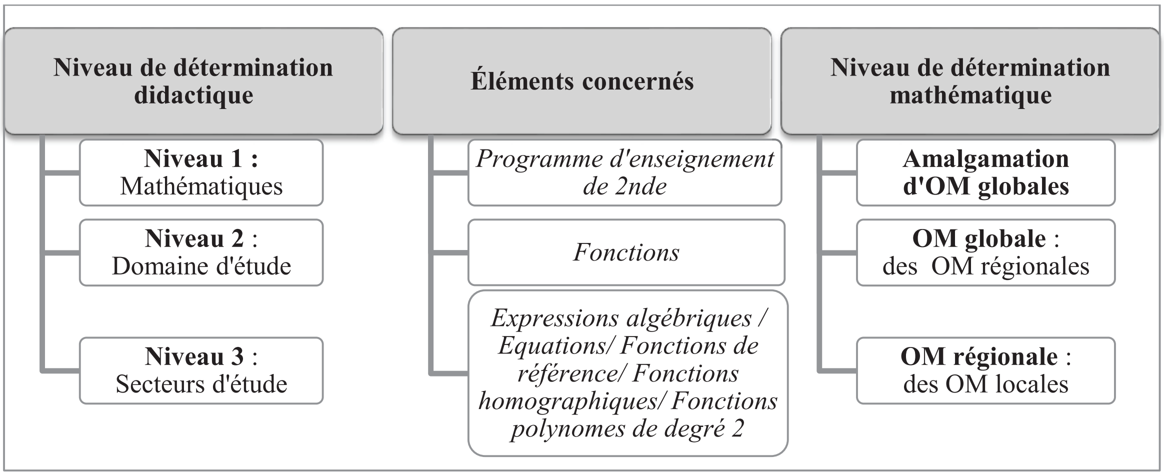


Figure 117 : Échelle de codétermination pour le domaine Fonctions du programme de la classe de seconde (MEN, 2009a)

Les choix des trois professeurs montrent, quant à leur façon de convoquer le calcul algébrique, qu'ils se soumettent au programme imposé par la noosphère. Cependant, leur interprétation en diffère et de ce fait, les professeurs s'imposent des contraintes différentes : Pour Annabelle et Maurice, les équations, situées au niveau 3 de l'échelle comme *secteur d'étude*, sont enseignées en considérant qu'elles sont plongées le *domaine d'étude* des fonctions. Tous deux semblent vouloir insister sur le registre fonctionnel associé aux équations, comme nous l'avons montré ci-dessus par l'analyse de leurs propos d'une part, et par le choix d'équations polynomiales et non polynomiales. En effet, leur choix des équations $\sqrt{x}+\ 2=3$ et $-\frac{5}{x}=1$ relève de trois autres *secteurs* évoqués par le programme, ceux de l'étude des fonctions de référence et homographiques et celui des expressions algébriques. De plus, en reprenant les propos précédents de Maurice : « *quand j'enseigne x² = a, je passe presque systématiquement soit par le graphique, soit par la factorisation* » (cf. ligne 83, A16), nous interprétons qu'il réalise une amalgamation d'OM locales, où un type de tâches donné fait appel à des techniques différentes qui s'expriment dans des registres différents.
Pour Alex, les contraintes sont différentes : les équations polynomiales ne semblent pas rattachées systématiquement au *domaine d'étude* « fonctions ». Elles sont plongées dans un *domaine* parallèle, non présent dans les programmes, à un niveau 2 qui se nommerait « calcul algébrique ». Ce niveau ferait appel à des OM locales, comme le type de tâches « résoudre des équations polynomiales » qui demande des techniques de factorisation permettant de *se ramener au premier degré*, selon les termes du programme (MEN, 2009a). Ainsi Alex semble

opérer une réorganisation des niveaux présentés ci-dessus, ce qui reste néanmoins compatible avec le programme qui préconise dans le bandeau d'entête d'étudier des problèmes pour *progresser dans la maîtrise du calcul algébrique* (MEN, ibid.).
Il reste à analyser a posteriori comment les OM et les OD décrites ci-dessus sont mises en œuvre par les enseignants et si ceux-ci choisissent d'y effectuer des modifications, et éventuellement, dans quelle mesure les performances des élèves sont conditionnées par ces choix.

10.6.2 Situation n°2

La comparaison des éléments modulables pour la constitution de la situation n°2 entre les trames des enseignants ne laisse apparaître à première vue que peu de différences, comme le montre le tableau récapitulatif ci-dessous. La seule différence notable est la réalisation de la dernière phase de la situation (cf. §9.3.3) qui consiste à déterminer la fonction d'un algorithme pré-écrit, qu'Alex choisit de donner aux élèves sous forme d'un travail à la maison et qu'Annabelle et Maurice occultent. Nous faisons l'hypothèse que le fait de reléguer la fin de la situation n°2, telle qu'elle était prévue initialement pas le chercheur, en travail à la maison ou de ne pas la réaliser du tout, est lié *au temps des horloges* d'une part, et à la place que les enseignants entendent donner à l'algorithmique dans leur enseignement, d'autre part. En effet, à plusieurs reprises lors des entretiens, ces enseignants insistent sur le fait que les programmes sont longs, qu'ils sont en retard sur leur progression (cf. Annabelle, annexe A16, ligne 115) et que l'algorithmique ne fait pas partie de leurs priorités (cf. Maurice, A6, ligne 8).

	Éléments	Éléments modulables	
		Choix d'Annabelle et Maurice (TP_1 et TP_2)	Choix d'Alex (TP_3)
OM	Type de tâches	- *Choix retenu d'atteindre l'objectif en deux temps* : premier temps, réaliser un programme pour résoudre $ax + b = c$ et second temps, réaliser un programme pour résoudre $ax + b = cx + d$.	- *Choix retenu d'atteindre l'objectif en deux temps* : premier temps, réaliser un programme pour résoudre $ax + b = c$ et second temps, réaliser un programme pour résoudre $ax + b = cx + d$.
	Équations	- Choix de **11** équations du 1er degré : **5** de la forme $ax + b = c$ et **6** de la forme $ax + b = cx + d$.	- Choix de **10** équations du 1er degré : **6** de la forme $ax + b = c$ et **4** de la forme $ax + b = cx + d$.
OD	Généralités	- *Choix du logiciel* : Algobox - *Choix de faire travailler les élèves seuls ou de constituer des binômes* : en binômes	- *Choix du logiciel* : Algobox - *Choix de faire travailler les élèves seuls ou de constituer des binômes* : non évoqué
	Déchiffrer un algorithme et en donner sa fonction	***- Choix de ne pas réaliser cette phase***	***- Choix de réaliser cette phase en travail à la maison***

Figure 118 : Comparatif des trames projetées des enseignants pour la situation n°2

Cependant, une analyse plus fine des fiches d'énoncé pour les élèves, réalisées par les enseignants d'après une proposition du chercheur (cf. annexe A12), permet de relever des différences notables. Précisons que ces énoncés ont été finalisés par les enseignants seuls, après l'entretien de constitution de la trame projetée.

Énoncé de la fiche élève pour la situation n°2 de Maurice et d'Annabelle	**Énoncé de la fiche élève pour la situation n°2 d'Alex**
1. *Réaliser un algorithme sur le logiciel Algobox permettant de résoudre les trois premières équations ci-dessous,* ***sans les transformer au préalable****.* 2. *Signaler par une * les équations similaires. Faire fonctionner l'algorithme pour ces équations.* 3. *Comment peut-on résoudre les équations restantes avec un autre algorithme ? Le construire et résoudre les autres équations à l'aide de ce nouvel algorithme.* *Équation 1 : $x + 3 = 0$ *Équation 2 : $2x - 3 = 4$ *Équation 3 : $3 - 2x = -2$ Équation 4 : $2 + x = 5x$ Équation 5 : $2x + 3 = 3x + 1$ Équation 6 : $8 - x = \sqrt{2}$ Équation 7 : $\frac{7}{2}x + 3 = \frac{2}{3}$ Équation 8 : $\frac{7}{2}x + \frac{2}{5} = \frac{8}{3} + \frac{1}{2}x$ Équation 9 : $3 = 2x + 1$ Équation 10 : $3x + 2 = 5 + 3x$ Équation 11 : $1{,}8x - 3 = 2{,}5x + 7{,}4$	*Réaliser sur Algobox un (ou des) algorithme(s) permettant de résoudre les équations ci-dessous.* *Résoudre les équations proposées à l'aide de votre algorithme. Indiquer à côté de chaque équation, sa ou ses solutions, si elles existent.* Équation 1 : $x + 3 = 0$ Équation 2 : $-1000x = 0$ Équation 3 : $-1000 + x = 0$ Équation 4 : $\sqrt{2} + x = 3$ Équation 5 : $\frac{10x}{0{,}001} = 4$ Équation 6 : $\pi x + 3 = 4$ Équation 7 : $3x - 5 = 3 - 10x$ Équation 8 : $3x - \frac{1}{4} = \frac{x}{4} - 2$ Équation 9 : $\sqrt{2}x - 1 = 4 - \sqrt{3}x$ Équation 10 : $7(x + 2) + 4(x - 3) = 0$

Figure 119 : Comparaison des fiches d'énoncé de la situation n°2

Rappelons que les trois enseignants ont choisi de réaliser la situation en deux étapes, en demandant de réaliser un algorithme et un programme, dans un premier temps, pour résoudre les équations de la forme $ax + b = c$, et dans un second temps pour résoudre celles de la forme $ax + b = cx + d$. L'énoncé d'Alex apparaît plus ouvert que celui d'Annabelle et de Maurice : la possibilité est laissée aux élèves de ne réaliser qu'un seul algorithme qui permette la résolution de toutes les équations proposées, moyennant quelques transformations de base de celles-ci.

L'énoncé plus fermé d'Annabelle et Maurice présente d'autres avantages :

- la constitution du premier algorithme ne nécessite pas de réaliser de test sur la nullité de a, si l'on considère que l'équation $ax + b = c$ est bien du premier degré. Ainsi, la tâche des élèves reste-t-elle concentrée sur la constitution principale de la structure de l'algorithme, en en dégageant les éléments à partir de la résolution littérale de l'équation. C'est ce que nous avons nommé la *première transposition* dans la section 4.4 ;
- la constitution du second algorithme apparaît comme un prolongement, une complexification du premier et la *reprise* faite ici directement après le premier algorithme peut permettre d'asseoir les concepts algorithmiques mis en œuvre précédemment ;
- ce second algorithme peut être réalisé en deux temps. L'algorithme peut d'abord être conçu pour résoudre des équations du type $ax + b = cx + d$ avec $a \neq c$. La présence de l'équation 10 ($3x + 2 = 5 + 3x$) permet de montrer l'incomplétude de cet algorithme qui pourra ensuite être complété en ajoutant un test sur l'égalité des paramètres a et c et en adaptant les solutions en sortie de l'algorithme.

Ainsi, si l'énoncé d'Alex présente les avantages d'un problème ouvert, celui d'Annabelle et Maurice montre une progressivité dans l'apprentissage de la constitution d'un algorithme que l'on améliore pas à pas.
Notons de plus que l'énoncé de gauche permet de faire le lien avec la situation n°1 de catégorisation des équations, où il est demandé dans la question 2 de mettre dans la même catégorie les équations présentant les mêmes caractéristiques que les trois premières.
Enfin, le choix des équations proposées n'est pas anodin non plus pour le déroulement de la séance. Nous avons vu ci-dessus comment le choix de l'équation $3x + 2 = 5 + 3x$ peut amener les élèves à considérer toute la *famille des instances du problème*, selon une expression de Modeste (2012, p.25) et produire ainsi un algorithme complet. La proposition de l'équation 10 d'Alex, $7(x+2)+4(x-3)=0$, peut également présenter l'intérêt de montrer aux élèves que moyennant une transformation basique de l'équation, celle-ci se résout suivant la *même technique* que les précédentes.
L'analyse des séances réalisées de la situation n°2 montrera au chapitre 11 l'impact de ces choix sur les élèves.
Pour finir, notons que les enseignants n'ont pas inscrit dans les fiches proposées la tâche de résolution « à la main » des équations, le chercheur ne les a pas non plus incités à le faire. Cette tâche aurait permis une comparaison des solutions obtenues en environnements papier-crayon et informatique, servant de validation pour les algorithmes conçus par les élèves. Nous analyserons si cette tâche apparaît cependant et comment elle est utilisée.

10.6.3 Situation n°3

Rappelons qu'Annabelle et Maurice n'ont pas retenu cette troisième situation. Il n'y a donc pas de comparaison possible.

CHAPITRE 11 - ANALYSE DES SÉQUENCES RÉALISÉES

Ce chapitre présente l'analyse a posteriori de l'ensemble des séances réalisées par les trois enseignants, selon la *méthodologie des quatre composantes* de Bronner (cf. §1.3 et §6.5). Rappelons que nous avons choisi dans ce chapitre, contrairement au précédent, de présenter les analyses par situation plutôt que par professeur. Ce choix est guidé par la volonté d'insister en amont sur la logique de la trame choisie par chacun des professeurs et en aval par les résultats obtenus pour chaque situation. Cette façon de croiser la présentation permet également de croiser les analyses. Nous résumons ci-dessous les différentes séances effectuées. Lorsque que la séance est notée avec un seul chiffre, elle a lieu en classe entière. Sinon, elle a lieu en demi-classe et est alors répétée deux fois. Notons que pour la situation n°2, une seule séance en demi-classe a été réalisée pour la classe d'Annabelle.

	Professeur Annabelle	Professeur Maurice	Professeur Alex
Situation n°1	Séance 1	Séance 1	Séance 1.1 Séance 1.2
Situation n°2	Séance 2.1	Séance 2.1 Séance 2.2	Séance 2.1 Séance 2.2
Situation n°3			Séance 3.1 Séance 3.2

Tableau 120 : Résumé des séances réalisées par chacun des professeurs

D'autre part, relativement à la méthodologie de travail présentée au chapitre 6, les sections 11.1 à 11.3 constituent les analyses correspondant à la flèche noire notée ❷ (cf. figure 24, §6.2.2) qui symbolise l'analyse de chaque séquence réalisée SR_i ($1 \leq i \leq 3$) dans chacune des trois classes des enseignants, relativement à leur *trame projetée* respective TP_i. Les comparaisons entre les éléments SR_i ($1 \leq i \leq 3$) sont réalisées par situation au chapitre 12.

11.1 Situation n°1

La situation n°1 a été expérimentée par les trois enseignants. L'unité de temps retenue par les enseignants est une séance « classique » d'une durée d'une heure. Pour les professeurs Annabelle et Maurice, elle se déroule en classe entière alors qu'Alex a choisi de la réaliser en demi-classe. C'est pourquoi deux séances (notées séances 1.1 et 1 .2) sont analysées pour cet enseignant.

11.1.1 Classe d'Annabelle : séance 1

Mettant en œuvre la méthodologie des quatre composantes (cf. §1.3 et §6.5), détaillons les étapes E_1 à E_4. La transcription de la séance est donnée en annexe A25.

11.1.1.1 Étape E_1

La séance est découpée en phases auxquelles nous associons leurs fonctions et la durée.

Phase		Fonction	Forme du travail	Temps	Lignes de transcription
Phase 0		Accueil et mise en route	Collectif	00 :00 à 1 :32 **Durée : 1min32s**	1 à 3
Phase 1		Présentation de la situation n°1 Passation des consignes	Collectif	1 :32 à 4 :07 **Durée : 2min35s**	4 à 7
Phase 2		Première phase de recherche	Groupes de 2 à 3 élèves (12 groupes)	4 :07 à 15 :30 **Durée : 11min23s**	8 à 31
Phase 3		Seconde phase de recherche Réalisation des affiches	Groupes de 5 à 6 élèves (6 groupes)	15 :30 à 33 :45 **Durée : 18min55s**	32 à 44
Phase 4		Restitution du travail	Collectif avec un rapporteur par affiche au tableau	35 :00 à 50 :10 **Durée totale : 15min10s**	45 à 158
	Sous phase 4.1	Échanges sur l'affiche 1-An		35 :00 à 43 :50 **Durée : 8min50s**	45 à 97
	Sous phase 4.2	Échanges sur l'affiche 2-An		43 :50 à 45 :28 **Durée : 1min38s**	98 à 13
	Sous phase 4.3	Échanges sur l'affiche 3-An		45 :28 à 50 :10 **Durée : 4min42s**	133 à 158

Tableau 121 : Les différentes phases de la séance 1 d'Annabelle

11.1.1.2 Étape E_2

Décrivons les praxéologies mathématiques élaborées par les élèves dans cette séance.

Types de tâches observés

Dès la deuxième minute du début de séance, le type de tâches premier que les élèves devront accomplir est donné par la consigne orale du professeur Annabelle de la façon suivante (ligne 4, annexe A25) :

> Quel est votre travail ? Voilà les 19 équations qui sont là. Voilà, votre travail est le suivant : c'est de proposer une classification des équations, d'accord ? Il n'est pas demandé de résoudre les équations, si

> vous ne souhaitez pas les résoudre, ne les résolvez pas mais ce n'est pas interdit non plus … La classification sera ensuite restituée sur des affiches, et vous viendrez ensuite par groupes, avec un rapporteur nous expliquer pourquoi vous avez classé vos équations de telle manière ou de telle autre.

Ce type de tâches est conforme à ce qu'Annabelle a prévu dans la trame projetée TP_1. Il a été noté T_I (cf. §10.4.1) et est caractérisé comme suit : *classer des équations selon des critères à déterminer.*

Une précision apparait plus tard dans la séance, donnée par Annabelle au bout de huit minutes (lignes 23 à 25, annexe A25) :

> An : *(A toute la classe mais dans le brouhaha) :* La classification doit se faire selon la méthode que vous employez pour résoudre l'équation.
> E : C'est-à-dire ?
> An : Dans la méthode que vous employez pour résoudre l'équation. Il y a différentes méthodes de résolution.

Ici encore, Annabelle reste attachée à ce qu'elle a prévu dans l'élaboration de sa trame projetée où elle avait émis le souhait de préciser la tâche des élèves, transformant alors la tâche T_I en la tâche T_R définie par : *classer des équations selon leur mode de résolution.*

Analyse a posteriori des affiches

Les élèves ont été réunis en six groupes de 5 à 6 élèves chacun et ont donc produits six affiches, numérotées 1-An à 6-An. Une analyse détaillée de ces six affiches est réalisée ici, précisant ainsi les praxéologies mathématiques élaborées. Il est à noter que ces analyses sont complétées pour les affiches 1-An à 3-An par le verbatim de la séance 1 du professeur Annabelle (cf. annexe A25) et que faute de temps, les rapporteurs des trois affiches 4-An à 6-An n'ont pu venir exposer leur classement au tableau. Aussi, les trois dernières analyses proposées sont-elles moins complètes et plus hypothétiques.

- **Analyse de l'affiche 1-An (cf. annexe A26)**

La colonne de gauche du tableau correspond à la transcription telle quelle de l'affiche ci-dessus, la colonne de droite indique une caractérisation des critères des groupements analysés par le chercheur. Le classement a été réalisé selon le sens (1) du verbe classer : réaliser des catégories.

Transcription de l'affiche 1-An		Caractéristiques des groupements (point de vue du chercheur)
1er groupe	1 ; 3 ; 15	Équations du premier degré comportant le coefficient 1000.
2e groupe	10 ; 11 ; 12	Équations comportant des écritures fractionnaires (où l'inconnue est sous la forme x, x^2 ou l'inverse de x).
3e groupe	6 ; 7 ; 14	Équations (où l'inconnue est présente sous la forme x ou $\sqrt{x}$) et comportant des irrationnels : racines carrées et pi.
4e groupe	5, 8	Équations du premier (8) et du second degré (5) comportant des parenthèses.
5e groupe	4 ; 13	Équations de la forme $ax + b = cx + d$.
6e groupe	16 ; 17	Équations somme et produit de $(ax + b)$ et $(cx + d)$ avec les mêmes coefficients a, b, c et d.
7e groupe	2 ; 9 ; 18 ; 19	Équations du second degré dont deux (9 et 18) se ramènent à la forme $x^2 = a$ et deux (2 et 19) ne peuvent se mettre sous la forme d'une identité remarquable ni ne possèdent de facteur commun.

Tableau 122 : Caractérisation des groupements de l'affiche 1-An

D'après une première analyse des groupements réalisés par ces élèves, ceux-ci n'ont manifestement pas ici cherché à résoudre les équations pour réaliser leur classement. Ils ont donc cherché à effectuer le type de tâches T_I (*Classer des équations selon des critères à déterminer*) plutôt que le type de tâches T_R (*Classer des équations selon leur mode de résolution*).
Ce classement relève principalement de deux techniques :
- la technique τ_{13}, *grouper les équations selon la nature des nombres déterminés* pour les groupements 1, 2, 3 et 6 ;
- la technique τ_{12}, *grouper les équations polynomiales du premier degré d'une part et les équations du second degré d'autre part* pour les groupements 5 et 7.
L'environnement technologico-théorique relevé dans l'analyse a priori de la situation n°1 situent ces techniques sur des connaissances de la notion de degré et de la nature des différents types de nombres.
Cependant, ces connaissances s'avèrent erronées, ou en cours de construction et incomplètes. Pour la notion de degré par exemple, on peut remarquer que :
- les deux équations non polynomiales 12 ($\frac{-5}{x} = 1$) et 14 ($\sqrt{x} + 2 = 3$) n'ont pas été identifiées comme telles ;
- la définition du degré d'un polynôme est incomplète. Les élèves utilisent une définition qui s'apparente à « le degré d'un polynôme est la valeur de l'exposant de la plus grande puissance de *x* de coefficient non nul », omettant que cette définition ne peut s'appliquer que lorsque la forme du polynôme est développée et réduite. Ainsi, les équations 17($(3 - 4x)(2x - 1) = 0$) et 19 ($x^2 + 3x = \frac{7}{2}$) sont rangées dans deux classes différentes alors que la classe de l'équation 19 est caractérisée – par le groupe d'élèves lui-même – par « *[la classe où] il y a des x², des x et des nombres* » (cf. ligne 96, annexe A25). Nous notons ici un indice d'une conception *pseudo-structurale* des expressions polynomiales.
Quant à la connaissance de la nature des différents types de nombres déterminés dans les équations proposées, la constitution des groupes d'équations montre que ce groupe d'élèves différencie les nombres en trois catégories : celle des nombres entiers, celle des nombres décimaux et rationnels non entiers et enfin celle des nombres irrationnels. Cette distinction montre que les élèves ont conscience de l'existence d'ensembles de nombres ayant des propriétés différentes, même si cette catégorisation n'est pas particulièrement pertinente ici, s'agissant de catégoriser des équations.
Montrons le raisonnement du rapporteur, Antoine, pour le 2e groupe de l'affiche 1-An :

57. Antoine : Oui, voilà ! On peut ça … Le groupe n°2 c'est le groupe des équations **10** ($\frac{x^2}{27} = 0{,}01$), **11** ($-\frac{x}{5} = 1$) et **12** ($\frac{-5}{x} = 1$) où il y a des fractions avec *x*.
58. An : Donc, en fait c'est marrant … mais tu as vu des fractions ?
59. E : la **19** ($x^2 + 3x = \frac{7}{2}$) et la **4** ($3x - \frac{1}{4} = \frac{x}{4} - 2$) ?
60. An : Bonne question : mais alors pourquoi ne pas avoir mis la **4** et la **19** dans ce groupe-là ?
61. Antoine : La fraction de la **19**, elle est après le signe « = » et pour la **4**, il y en a deux.
62. E : Oh !
63. An : Donc votre critère, c'est … il y a une seule fraction et en plus et en plus elle est à gauche ?
64. Antoine : Exactement.

L'élève raisonne ici en attribuant une même forme spatiale du type « $\frac{\blacksquare}{\bullet} = \blacklozenge$ » aux équations 10, 11 et 12.
Plus loin, on peut lire (cf. A25), par rapport au 3e groupe de l'affiche 1-An :

> 72. Antoine : Alors il y a l'équation **6** ($\sqrt{2} + x = 3$), l'équation **7** ($\pi x + 3 = 4$) et l'équation **14** ($\sqrt{x} + 2 = 3$).
> 73. An : Alors qui est-ce qui avait donné ce classement-là ?
> 74. Antoine : c'est Clément.
> 75. **41 :04** An : Alors Clément, tu peux expliquer ? Parce qu'Antoine est pas trop d'accord, il va avoir du mal à soutenir ton xxx
> 76. Clément : C'est spécial, on va dire. Il y a des racines carrées et il y a xxx, il y a des nombres spécials.
> 77. An : il y a des racines carrées donc c'est spécial ?
> 78. Clément : Ben oui, c'est des gros mots.

Le premier exemplaire cité, l'équation 6 ($\sqrt{2} + x = 3$) représente pour l'élève un bon prototype pour une catégorie comportant des « x » et des « nombres spéciaux », définition qu'il donne, semble-t-il, des irrationnels. Les autres exemplaires cités de cette catégorie, les équations 7 et 14, sont alors perçus comme semblables.

- **Analyse de l'affiche 2-An (cf. annexe A26)**

Le classement a été ici réalisé selon le sens (2) du verbe classer qui consiste à déterminer un ordre de rangement des équations par des critères définis par les élèves.
Suit la transcription des numéros ordonnés des équations : 1 ; 15 ; 3 ; 5 ; 17 ; 16 ; 8 ; 13 ; 19 ; 18 ; 7 ; 11 ; 12 ; 6 ; 14 ; 9 ; 2 ; 10 ; 4.
Même si les élèves n'ont pas constitué de catégories, nous pouvons recréer des classes en relevant des similitudes entre les équations consécutives, avec des points de rupture.

Caractéristiques des groupements (point de vue du chercheur)	
1 ; 15 ; 3	Équations du premier degré comportant le coefficient 1000.
5 ; 17	Équations sous la forme d'un produit nul deux facteurs polynomiaux du premier degré.
16 ; 8 ; 13	Équations du premier degré avec coefficients entiers ou décimaux nécessitant d'être réduites avant d'être résolues (présence de plusieurs termes en x).
19 ; 18	Équations du second degré où la 18 peut être résolue mentalement (mais la 19 nécessite une technique plus complexe et ne devrait pas être classée à ce niveau).
7	Équation du premier degré comportant le coefficient pi.
11 ; 12	Équations comportant une écriture fractionnaire semblable (l'une est une équation du premier degré, l'autre utilise l'inverse de x).
6 ; 14	Équations comportant une écriture semblable avec un radical (l'une est une équation du premier degré, l'autre utilise la racine carrée de x).
9 ; 2 ; 10	Équations du second degré pouvant se ramener à la forme $x^2 = a$ (pour 9 et 10) (la 2 nécessite une technique plus complexe et ne devrait pas être classée à ce niveau).
4	Équation du premier degré avec coefficients sous forme fractionnaire.

Tableau 123 : Caractérisation des groupements de l'affiche 2-An

Une première analyse des groupements réalisés par ces élèves et le verbatim de la séance permettent d'affirmer que les élèves ont cherché à résoudre les équations pour réaliser leur classement. Le rapporteur explique dès le début (cf. A25) :

> 98. **43 : 50** An : Est-ce que ce groupe-là peut passer au tableau ? Guilhem !
> 99. Guilhem : alors, on a fait un seul grand groupe en fait, on les a classées par ordre de difficulté pour nous à les résoudre.
> 100. An : Ah, c'est intéressant, ça
> 101. Guilhem : Pour nous, on est allé de la plus simple à la plus dure à résoudre.

Plus loin, il précise (ligne 112) « *qu'il aurait fallu toutes les faire et on n'a pas eu le temps : c'est à peu près* ». Il veut dire ici « il aurait fallu toutes les résoudre », ce qui signifie bien que les élèves ont partiellement ou totalement résolu les équations, du moins que leur démarche de classement relève bien du type de tâches T_R plutôt que du type de tâches T_I. En revanche, ni les traces écrites, ni les enregistrements ne permettent de savoir si les élèves ont déterminé eux-mêmes ce critère ou s'ils ont été influencés par la consigne de l'enseignante, donnée huit minutes après le début de séance et qui fait évoluer la tâche T_I en T_R.
Les élèves ont une représentation d'une équation comme d'un « objet mathématique à résoudre ». Ce classement relève principalement de la technique τ_{21} : *ordonner les équations de la plus simple à résoudre à la plus difficile, selon qu'elles comportent des transformations plus ou moins expertes à effectuer.*
Nous remarquons que le classement « par ordre de difficultés » donné par ces élèves est influencé par la forme structurale et procédurale des équations, mais aussi par la présence des paramètres choisis dans ces équations, comme on peut le voir dans le passage suivant (cf. A25) :

> 104. An : La dernière équation ($3x - \frac{1}{4} = \frac{x}{4} - 2$) est-elle très difficile à résoudre ?
> 105. Guilhem : Je pense qu'il faut être plus attentif que par exemple pour la **18** ($x^2 = 7$)
> 106. An : Rien que par curiosité, est-ce que tu peux me donner les solutions de la **18** ?
> 107. Guilhem : c'est « -7 », non c'est « racine de -7 » et « racine de 7 ».
> 108. An : Il me dit que c'est « racine de 7 » et « racine de -7 », ça vous va ?
> 109. Guilhem : Non, non « - racine de 7 »
> 110. An : Donc effectivement, quand on t'aide un petit peu, tu y arrives …

Cet extrait permet d'induire que des technologies sous-jacentes sont à la base du classement effectué par ce groupe d'élèves et que ceux-ci sont capables de s'y référer. Nous relevons par exemple une connaissance correcte de la nature et de la forme d'une expression algébrique (l'élève rapporteur est capable de donner les solutions d'une équation de la forme $x^2 = a$), la capacité à modifier une équation pour obtenir une écriture équivalente (pour la transformation d'une équation du type $ax + b = cx + d$) et un savoir en cours d'acquisition sur les radicaux (l'élève admet que la racine carrée d'un nombre négatif n'existe pas).
Nous repérons que ces élèves placent dans les équations « les plus difficiles à résoudre » les équations 10 ($\frac{x^2}{27} = 0{,}01$) et 4 ($3x - \frac{1}{4} = \frac{x}{4} - 2$) alors que les équations 13 ($1{,}8x - 3 = 2{,}5x + 7{,}4$) et 18 ($x^2 = 7$) sont placées plutôt au début, dans les équations « plus faciles à résoudre ». L'élève Guilhem exprime que l'équation 13 lui demande « plus d'attention ». Ce constat amène à conclure qu'ici la présence des écritures fractionnaires semble prédominante par rapport à la technique à utiliser pour résoudre ce type d'équations. Cependant, rien n'indique chez cet élève une conception pseudo-structurale erronée. Au

contraire, il est capable de considérer tour à tour l'aspect structural puis procédural de l'équation, à bon escient.

- **Analyse de l'affiche 3-An (cf. annexe A26)**

Le classement est réalisé selon le sens (1) du verbe classer.

Transcription de l'affiche 3-An			**Caractéristiques des groupements (point de vue du chercheur)**	
Groupe 1	Partie 1	10 ; 18	Équations du second degré	Équations du type $ax^2 = b$.
	Partie 2	3 ; 5 ; 15 ; 16 ; 17		Équations du premier degré (3, 15) et du second degré (5, 17) de la forme « produit nul » (sauf la 16 qui est une somme).
	Partie 3	2 ; 9 ; 19		Autres équations du second degré (de type $ax^2 + bx + c = d$, avec b et d éventuellement nuls).
Groupe 2		1 ; 4 ; 6 ; 7 ; 8 ; 11 ; 12 ; 13 ; 14	Équations du premier degré	Équations polynomiales du premier degré avec inclusion des équations 12 et 14 comportant l'inverse de x et la racine carrée de x.

Figure 124 : Caractérisation des groupements de l'affiche 3-An

Une première analyse des groupements réalisés par ces élèves et le verbatim de la séance (cf. A25) montrent que ceux-ci ont sans doute cherché à résoudre les équations, partiellement du moins, pour réaliser leur classement. Le rapporteur explique dès le départ :

> 133. E : Pour le groupe 1, la première partie, c'est la **10** ($\frac{x^2}{27} = 0{,}01$) et la **18** ($x^2 = 7$), elles sont spéciales avec un x^2 et un autre … chiffre. On a juste à faire une racine pour obtenir le résultat. Voilà. Après la deuxième partie, c'est celles où elles sont déjà factorisées …

La précision donnée « *On a juste à faire une racine pour obtenir le résultat* » signifie bien que les élèves ont partiellement ou totalement résolu les équations, du moins que leur démarche de classement relève bien du type de tâches T_R plutôt que du type de tâches T_I. Toutefois ni les traces écrites, ni les enregistrements ne permettent de savoir si les élèves ont déterminé eux-mêmes ce critère ou s'ils ont été influencés par la consigne de l'enseignante, qui modifie la tâche T_I en T_R.

Ce classement relève principalement de la technique τ_{16} : *grouper les équations selon qu'une résolution directe est possible ou qu'une transformation de l'équation est nécessaire à sa résolution.*

L'environnement technologico-théorique sur lequel se base ce groupe d'élèves repose sur des notions listées et explicitées ci-dessous. Les élèves sont capables de mettre en œuvre leurs connaissances de ces concepts, avec quelques erreurs.

Leur classification relève clairement de la notion de degré d'un polynôme : ce groupe d'élèves a classé les équations selon « deux groupes » que le rapporteur définit par « *le groupe 1, c'est celui avec les x^2 et le groupe 2, c'est celui sans les x^2* » (ligne 141 du verbatim de l'annexe A25).

Deux types d'erreurs dans le classement de ces élèves sont observés.

Le premier type d'erreurs est la présence d'équations du premier degré dans le groupe 1, partie 2, puisqu'on y trouve les équations 3 ($-1000x = 0$), 15 ($1000x = 0$) et 16 ($(3 - 4x) - (2x - 1) = 0$). Cet amalgame montre que les élèves associent des équations comme par exemple la 16 ci-dessus et la 17 ($(3 - 4x)(2x - 1) = 0$) où les ostensifs

parenthèses prédominent ici sur la structure somme ou produit. Relevons également dans cette même « partie 2 » l'association des équations 3 ($-1000x = 0$) et 5 ($3x(x+\sqrt{5}) = 0$) alors que la première est du premier degré et la seconde du second degré. Il existe une technologie sous-jacente à ce regroupement, les équations 3 et 5 sont considérées toutes deux comme « produit nul de deux expressions algébriques ». L'élève rapporteur les qualifie de « *déjà factorisées, il y a un premier terme et « égal zéro »* (ligne 135). À cette phrase, on peut associer la règle « lorsqu'un produit de deux facteurs est nul, l'un ou l'autre des facteurs est nul », règle que ces élèves semblent savoir appliquer aussi bien à une équation du type $ax = 0$ qu'à une équation de la forme $(ax + b)(cx + d) = 0$.
Le second type d'erreurs est la présence d'équations non polynomiales dans le groupe 1 : les deux équations non polynomiales (12 et 14) n'ont pas été identifiées comme telles, et la notion de degré n'est donc pas pertinente ici.
Pour les équations du premier degré, cataloguées dans « le groupe 2 », l'élève rapporteur qualifie ces équations « *de somme et il n'y a pas de x² quand on développe* ». C'est ce qui fait office de technologie pour sa reconnaissance des équations du premier degré, comme le montre l'extrait du verbatim ci-dessous. Nous remarquons que cette définition convient pour les équations 1, 4, 6, 7, 8 et 13 mais qu'elle est erronée pour l'équation 11 qui n'est pas une somme et pour les équations 12 et 14 qui ne sont pas des polynômes.

144. E : Voilà. Pour le groupe 2, là normalement, on a juste à faire, à changer de place le x …
145. An : … à isoler le x
146. E : Oui, à isoler le x et réduire, on résout normalement
147. An : Donc tu as mis la **1** ($-1000 + x = 0$) ; la **4** ($3x - \frac{1}{4} = \frac{x}{4} - 2$) ; la **6** ($\sqrt{2} + x = 3$) ; la **7** ($\pi x + 3 = 4$) ; la **8** ($7(x+2) + 4(x-3) = 0$) ; la **11** ($-\frac{x}{5} = 1$) ; la **12** ($\frac{-5}{x} = 1$) ; la **13** ($1{,}8x - 3 = 2{,}5x + 7{,}4$) ; la **14** ($\sqrt{x} + 2 = 3$)
148. An : Alors, juste la **8**, c'est quoi ? Quand tu regardes le membre de gauche …

49 :40 *(Sonnerie)*

149. An : On ne bouge pas ! Vous attendez une seconde
150. E : C'est une somme et il n'y a pas de x^2 quand on développe.

Notons que malgré les quelques erreurs, cette catégorisation est structurée par rapport à des critères dépassant les premières constatations de forme et d'ostensifs. De plus, les élèves sont capables de présenter plusieurs niveaux hiérarchiques dans leur classement, proposant pour le groupe 1, trois sous-parties. Contrairement aux deux affiches précédentes, il n'y a pas de préoccupation ici de la nature des nombres qui constituent les coefficients des équations.

Les analyses des trois affiches suivantes sont plus approximatives puisque les élèves n'ont pas pu, faute de temps, passer au tableau pour exposer leur classement.

- **Analyse de l'affiche 4-An (cf. annexe A26)**

Le classement est réalisé selon le sens (1) du verbe classer.

Transcription de l'affiche 4-An		Caractéristiques des groupements (point de vue du chercheur)
1er groupe	4 ; 13	Équations de la forme $ax + b = cx + d$ avec coefficients décimaux et fractionnaires.
2e groupe	5 ; 17	Équations de la forme produit nul de 2 facteurs du premier degré.
3e groupe	8 ; 16	Équations de la forme $(ax + b) \pm (cx + d) = 0$ avec coefficients entiers.
4e groupe	10 ; 11 ; 12	Équations comportant des écritures fractionnaires (inconnue sous la forme x, x^2 ou $1/x$).
5e groupe	Identités remarquables : 2 ; 9 ; 18 ; 19	Équations polynomiales du second degré sous forme développée d'une identité remarquable (reconnaissance correcte pour 9 et 18, et erronée pour 2 et 19).
6e groupe	1 ; 3 ; 15	Équations du premier degré avec 1000 comme coefficient.
7e groupe	6 ; 7 ; 14	Équations comportant des irrationnels : racines carrées et pi.

Tableau 125 : Caractérisation des groupements de l'affiche 4-An

L'analyse des groupements proposés ci-dessus montrent que les élèves ont utilisé des critères de différentes nature : on trouve des groupes d'équations, comme le 1er ou le 2e où c'est une technique de résolution similaire qui semble avoir été le critère de discrimination, alors que le 4e groupe semble s'être constitué d'après le schéma « $\frac{\blacksquare}{\bullet} = \blacklozenge$ ». Plus loin, les 6e et 7e groupes semblent être constitués par la similarité des équations relativement à la nature des coefficients. Il est donc difficile ici de savoir si les élèves ont cherché ou non à résoudre les équations pour réaliser leur classement. D'après le nombre important de critères relevés, leur démarche de catégorisation paraît davantage relever du type de tâches T_I.
Ce classement relève principalement de trois techniques :
- la technique τ_{13}, *grouper les équations selon la nature des nombres déterminés* pour les groupements 1, 4, 6 et 7 ;
- la technique τ_{12}, *grouper les équations polynomiales du premier degré d'une part et les équations du second degré d'autre part* pour les groupements 3 et 5, bien que ces dénominations de « premier degré » et « second degré » ne soient pas utilisées par les élèves.
- la technique τ'_{14}, *grouper les équations polynomiales du second degré selon qu'elles soient ou non transformables directement par des formules d'identités remarquables* que nous introduisons ici (elle n'a pas été prévue lors de l'analyse a priori) et qui permet de caractériser le groupement 5.

Les équations-identités
Précisons à ce stade ce que recouvre pour les élèves la catégorie « identités remarquables ». Il s'agit des équations données sous les formes suivantes :
- $a^2x^2 + 2abx + (b^2 + c) = c$
- $a^2x^2 - b^2 = 0$
- $(ax + c)^2 - b^2 = 0$, où *a, b* et *c* sont des nombres réels déterminés,

Ce sont des équations du second degré possédant des solutions réelles et qui peuvent se factoriser en utilisant une des trois identités remarquables qui sont au programme de la classe de troisième (MEN, 2008a) : $a^2 + 2ab + b^2 = (a + b)^2$,$a^2 - 2ab + b^2 = (a - b)^2$ou $a^2 -$

$b^2 = (a + b)(a - b)$. Nous notons désormais *équations-identités*, pour des commodités d'écriture, les équations définies ci-dessus et la technique τ'_{14} sera nommée, de façon plus concise : *grouper les équations du second degré selon qu'elles soient ou non des équations-identités.*

Nous faisons également l'hypothèse que les groupements 2 et 5 relèvent de la technique τ_{16}, *grouper les équations selon qu'une résolution directe est possible ou qu'une transformation de l'équation est nécessaire à sa résolution* puisque le 2e groupe est constitué d'équations de la forme « produit nul de deux expressions algébriques du premier degré » où l'on peut résoudre l'équation sans autre transformation en appliquant la règle du produit nul. Le 5e groupe est qualifié « d'identités remarquables » par les élèves, ce qui laisse supposer que ceux-ci connaissent les formules permettant de les transformer de somme en produit (même si la constitution des équations de ce groupe est erronée).
Des remarques précédentes, on peut déduire que l'environnement qui tient lieu de bloc technologico-théorique pour les techniques utilisées est basé sur l'identification de la nature des nombres déterminés des équations, sur la reconnaissance de formes algébriques comme des expressions polynomiales du premier degré, des identités remarquables ou du produit de deux expressions du premier degré. Les connaissances de ces notions restent fragiles, puisque par exemple les deux équations 12 et 14 n'ont pas été identifiées comme non polynomiales. Ce sont d'autres critères que les élèves retiennent quand ils doivent les catégoriser, comme leur forme spatiale ou la présence d'un radical.
Notons également le nombre relativement important de groupes d'équations que ces élèves ont constitués. Ils sont au nombre de sept ici, ce qui dénote de réelles difficultés quant à la capacité de ce groupe d'élèves à concevoir les « objets équations ». Le grand nombre de classes montre l'incapacité des élèves à se détacher de la forme apparente des expressions algébriques, comme si chaque expression algébrique était complètement différente des autres. C'est ce qu'on peut rattacher ici à une conception *pseudo-structurale* de Sfard et al. (1994) que nous avons déjà définie mais dont une autre définition convient particulièrement à ce qui vient d'être développé ici :

> When the signs on the paper do not seem to stand for any conceivable entity different from the signs themselves, *the signifier becomes the signified.* In other words, the student focuses on symbolic expressions as such, without looking for their hidden sense. There is a long list of behaviors which can be regarded as indicative of such direct, one-dimensional, approach to algebraic formulae. Here is a collection of phenomena which constitute the syndrome called pseudostructural conception. (p.286)[155]

[155] Lorsque les signes sur le papier ne semblent pas présenter une entité différente que de concevoir les signes pour eux-mêmes, le signifiant devient le signifié. En d'autres termes, l'élève se concentre sur les expressions symboliques en tant que telles, sans chercher leur sens caché. Il y a une longue liste de comportements qui peuvent être considérés comme une indication d'une telle approche, directe, à une seule dimension, des formules algébriques. Voici une collection de phénomènes qui constituent le syndrome appelé *conception pseudo-structurale.*

- **Analyse de l'affiche 5-An (cf. annexe A26)**

Le classement est réalisé selon le sens (1) du verbe classer.

Transcription de l'affiche 5-An		Caractéristiques des groupements (point de vue du chercheur)
Par développement	5 ; 8 ; 16	8 et 16 : équations du premier degré que l'on résout après développement (distributivité) et réduction. 5 : équation de type « produit nul de deux facteurs du premier degré » : n'appartient pas à cette catégorie.
Par factorisation	2 ; 9	Équations du second degré (la 9 est constituée d'une identité remarquable, la 2 ne se réduit pas à une identité remarquable).
= 0	3 ; 15	Équations du premier degré du type « $ax = 0$ ».
Soit x = 0	17	Équation de type « produit nul de deux facteurs du premier degré ».
Reste	4 ; 6 ; 7 ; 10 ; 11 ; 13 ; 14 ; 18	Les équations non classées ont pour particularités : - 4 ; 6 ; 7 ; 11 ; 13 : équations du premier degré avec coefficients fractionnaires, décimaux ou irrationnels. - 10 ; 18 : équations du second degré de la forme $ax^2 = b$. - 14 : équation comportant la racine carrée de x
		Les équations 1, 12 et 19 n'ont pas été prises en compte.

Tableau 126 : Caractérisation des groupements de l'affiche 5-An

Comme dit pour l'affiche précédente, cette analyse est plus approximative puisque les élèves n'ont pas pu passer au tableau. Cependant, comme on le verra dans l'étape E_3, la caméra fixe a filmé ce groupe pendant la constitution de leur affiche (cf. annexe A25, lignes 33 à 44), ce qui a permis de relever quelques éléments supplémentaires pour l'analyse. Les groupements proposés ci-dessus laissent supposer que les élèves ont une démarche de classement qui relève plutôt du type de tâches T_R plutôt que du type de tâches T_I. En effet, les termes utilisés, « par développement » ou « par factorisation », permettent de présumer que c'est la résolution qui s'opère de ces façons.

Néanmoins cette classification est très confuse et peu explicite. Par exemple, la classe nommée « = 0 » signifie-t-elle que la solution des équations est le nombre zéro ou que le second membre de l'équation est nul ? Remarquons que les deux interprétations conviennent ici puisque les équations de cette catégorie sont du premier degré et du type « $ax = 0$ » (avec $a = 1000$ ou -1000). Mais comme il existe une catégorie dénommée « soit $x = 0$ », il est difficile de trancher. Les équations non classées, dans le groupement intitulé « reste », sont nombreuses et comportent toutes des coefficients de nature décimale, fractionnaire, irrationnelle. On y trouve également les équations de la forme $ax^2 = b$ et l'équation où l'inconnue est sous la forme $\sqrt{x}$. Des équations ont été oubliées, notamment celle où l'inconnue est au dénominateur ($\frac{1}{x}$).

Les techniques de classement sont ici difficilement perceptibles, et les quelques informations apportées par le verbatim ne permettent pas non plus de trancher. Une technique proche de la technique τ_{16} : *grouper les équations selon qu'une résolution directe est possible ou qu'une transformation de l'équation est nécessaire à sa résolution* a été utilisée mais que son intitulé serait plutôt :

τ'_{16} : *grouper les équations selon que leur résolution s'effectue par développement ou par factorisation.*

Une autre technique de classement peut avoir été partiellement mise en œuvre, la technique τ_{17} : *grouper les équations selon la nature des nombres solutions de celles-ci.* On peut en effet penser que le classement « $x = 0$ » constitue à mettre ensemble les équations admettant zéro pour solution, bien qu'il soit difficile de l'affirmer sans autre explication.
De ces analyses sur les techniques de classement, nous pensons que l'environnement technologico-théorique est basé pour ce groupe d'élèves sur la reconnaissance de formes algébriques comme pouvant être développées ou factorisées. La différence entre le concept d'expression algébrique et celui d'équation ne semble pas nettement identifiée. Pour le développement, les connaissances s'appuient (sans doute) sur les règles de calcul comme la distributivité et pour la factorisation des polynômes de degré 2, sur la reconnaissance d'une identité remarquable. Ici, ces savoirs ne sont pas bien installés, puisque par exemple l'équation 5 ($3x(x+\sqrt{5})=0$) a été identifiée dans la catégorie des équations « [dont les solutions s'obtiennent] par développement ». Le bloc technologico-théorique est ici très ténu.
Ces élèves ont laissé beaucoup d'équations de côté et ont réalisé des associations difficiles à analyser pour pouvoir catégoriser leurs groupements. Ce qui est certain, c'est qu'ils s'attachent à une forme *pseudo-structurale*, pleine de symboles et vide de sens, comme le montre le premier groupement nommé « par développement » où les élèves considèrent ensemble les équations 5 ($3x(x+\sqrt{5})=0$) et 16 ($(3-4x)-(2x-1)=0$) .

- **Analyse de l'affiche 6-An (cf. annexe A26)**

Le classement est réalisé selon le sens (1) du verbe classer.

	Transcription de l'affiche 6-An		**Caractéristiques des groupements (point de vue du chercheur)**
G1	Addition de ( )	8 ; 16	Équations du premier degré que l'on résout après développement (distributivité) et réduction.
G2	Inverse	3 ; 15	$-1000x = 0$ et $1000x = 0$ sont qualifiées d'équations « inverses ».
G3	Identitée remarquable	9 ; 18	Équations du second degré se ramenant à la forme $x^2 - a^2 = 0$.
G4	Nb bisard	4 ; 7	Équations du premier degré dont les coefficients sont pi ou des nombres fractionnaires.
G5	Virgule	10 ; 13	Équations du premier degré (13) et du second degré (10) dont les coefficients sont pi ou des coefficients décimaux en écriture décimale.
G6	Ressemble à une identitée	2 ; 19	Équations du second degré de la forme $x^2 + bx + c = d$ ne pouvant pas se ramener sous la forme $x^2 + 2ax + a^2 = 0$ d'une identité remarquable.
G7	Déjà résolu	1	Équation du premier degré ($-1000+x=0$) de résolution peut-être évidente pour les élèves.
G8-G9	Simple distributivité	5 ; 17	Équations de type « produit nul de deux facteurs du premier degré ».
G10	Reste inconnu		Les équations 6 ; 11 ; 12 ; 14 n'ont pas été classées. Ce sont soit des équations du premier degré avec fractions ou racines, soit des équations qui contiennent l'inverse de x ou la racine de x.

Tableau 127 : Caractérisation des groupements de l'affiche 6-An

Les groupements proposés ci-dessus laissent supposer que les élèves ont une démarche de classement qui relève plutôt du type de tâches T_I plutôt que du type de tâches T_R. En effet, les intitulés utilisés, « addition de parenthèses » ou « [présence de nombres à] virgule » ou « simple distributivité » laissent présumer que les élèves ont ici davantage considéré les équations comme des formes algébriques qu'il faut caractériser selon des critères vus en cours.

Ce classement relève principalement de trois techniques :

- la technique τ_{11}, *grouper les équations somme ou différence d'une part et les équations produit ou quotient d'autre part* pour les groupements 1, 8-9 ;
- la technique τ_{13}, *grouper les équations selon la nature des nombres déterminés* pour les groupements 2, 4, 5 ;
- la technique τ'_{14}, *grouper les équations du second degré selon qu'elles soient ou non des équations-identités* pour les groupements 3 et 6.

Le bloc technologico-théorique sur lequel s'appuient ces techniques repose sur la reconnaissance de formes algébriques comme somme ou produit de deux polynômes du premier degré, ou encore comme identités remarquables. Comme pour l'affiche précédente (5-An), nous considérons que la différence entre le concept d'expression algébrique et celui d'équation n'est pas nettement identifiée. Un exemple pour corroborer cette affirmation est l'appellation de la catégorie G8-G9 de « simple distributivité », catégorie qui contient les équations 5 ($3x\left(x+\sqrt{5}\right)=0$) et 17 ($(3-4x)(2x-1)=0$). Ces équations étant données sous la forme d'un produit nul de deux polynômes du premier degré, pour les résoudre, il suffit d'appliquer la règle « $AB = 0 \Leftrightarrow A = 0$ ou $B = 0$ ». Mais les élèves ne voyant pas dans une équation la finalité de sa résolution se réfère à une expression algébrique, qui peut être développée, suivant la règle de (double) distributivité qu'ils semblent connaître.

Nous remarquons aussi que la notion de degré est absente de ce classement. Les équations du second degré sont assimilées à des identités remarquables ou « ressemblant à des identités remarquables ». De plus, les équations du premier degré se répartissent dans six groupes différents, où le critère principal est la nature des nombres déterminés des équations : les élèves possèdent donc une certaine connaissance en acte des différents ensembles de nombres. Notons également que les deux équations non polynomiales (12 et 14) n'ont pas été identifiées comme telles mais ont été placées, au milieu d'autres, dans un groupe à part, le groupe 10, comme des équations « restant inconnues ».

Comme pour l'affiche 4-An, le grand nombre de classes montre l'incapacité des élèves à se détacher de la forme apparente des expressions algébriques. Nous pouvons encore qualifier ici de conception *pseudo-structurale*, au sens de Sfard, la compréhension de l'objet « équation ».

Synthèse de l'analyse des six affiches 1-An à 6-An

L'analyse a posteriori des affiches permet de donner, de façon plus synthétique, les techniques réellement utilisées par les élèves pour réaliser le classement des équations :

<table>
<tr><th></th><th>Tâche T_I : classer les équations selon des critères à déterminer</th><th>Tâche T_R : classer les équations selon leur mode de résolution</th></tr>
<tr><td rowspan="4">Sens (1) du verbe classer</td><td colspan="2">Techniques apparues qui ne demandent pas de résoudre les équations (même partiellement) avant les groupements</td></tr>
<tr><td>τ_{11} : Grouper les équations comme somme ou produit.
τ_{12} : Grouper les équations selon le premier ou le second degré.
τ_{13} : Grouper les équations selon la nature des nombres déterminés.
τ'_{14} : Grouper les équations du second degré selon qu'elles soient ou non des équations-identités</td><td></td></tr>
<tr><td colspan="2">Techniques qui demandent de résoudre les équations (à la main ou mentalement) entièrement ou partiellement avant les groupements</td></tr>
<tr><td>τ_{16} : Grouper les équations selon une résolution directe ou non.</td><td>τ_{16} : Grouper les équations selon une résolution directe ou une transformation nécessaire.
τ'_{16} : Grouper les équations selon que leur résolution s'effectue par développement ou par factorisation.
τ_{17} : Grouper les équations selon la nature des nombres solutions de celles-ci.</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Sens (2) du verbe classer</td><td colspan="2">Techniques qui demandent de résoudre les équations (à la main ou mentalement) entièrement ou partiellement avant les groupements</td></tr>
<tr><td></td><td>τ_{21} : Ordonner les équations selon qu'elles comportent des transformations plus ou moins expertes à effectuer.</td></tr>
</table>

Tableau 128 : Synthèse des techniques utilisées pour la séance 1 de la classe d'Annabelle

Les techniques mises en œuvre dans cette classe sont conformes à celles qui avaient été déterminées a priori, sauf pour les deux techniques τ'_{14} et τ'_{16} qui n'avaient pas été envisagées. De plus, des techniques envisagées a priori ne sont pas apparues, comme τ_{15} (*Grouper les équations selon leur nombre de solutions*) et τ_{22} (*Ordonner les équations de la plus simple à résoudre à la plus difficile, selon que les techniques pour les résoudre sont acquises ou non par l'élève*). Afin de comparer les techniques et technologies mises en œuvre, résumons les analyses précédentes. Le tableau qui suit présente par affiche, le sens donné au verbe classer, la tâche T_I ou T_R réalisée, les techniques utilisées par les différents groupes, le nombre de classes d'équations formées et l'environnement technologico-théorique sur lequel les élèves se sont appuyés pour former ces classes. Enfin, une indication est donnée sur la conception qu'ont les élèves des équations par rapport à un aspect *procédural*, *structural* ou une conception *pseudo-structurale* erronée au sens de Sfard et al (1991, 1994). Ces vocables sont appliqués si l'analyse de l'affiche produite ou des propos tenus par l'élève rapporteur lors de la mise en commun ont permis de relever des indices montrant ces tendances. Par exemple :

- pour l'affiche 6-An, les élèves font une catégorie intitulée « addition de parenthèses », nous notons ici la seule considération de caractéristiques externes, visibles de l'équation donnée, ce qui relève d'une conception *pseudo-structurale* des équations ;
- au contraire pour l'affiche 2-An, l'élève rapporteur justifie ses choix en recourant aux technologies sous-jacentes, il fait part de sa maîtrise dans la reconnaissance de l'aspect *structural* d'une équation de la forme $x^2 = a$ et est capable d'en donner les solutions.

Numéro de l'affiche		**1-An**	**2-An**	**3-An**	**4-An**	**5-An**	**6-An**
Sens du verbe classer		Former des classes (1)	Ordonner (2)	Former des classes (1)	Former des classes (1)	Former des classes (1)	Former des classes (1)
Type de tâches T_I ou T_R		T_I	T_R	T_R	T_I	T_R	T_I
Techniques[156]		(τ_{12}), τ_{13}	τ_{21}	τ_{16}	τ_{13}, $(\tau_{12}$, τ'_{14}, $\tau_{16})$	τ'_{16}, (τ_{17})	τ_{11}, τ_{13}, τ'_{14}
Nombre de classes formées		7	–––	2 dont une formée de 3 sous-classes	7	5	9
Environnement technologico-théorique	Notion de degré	×		×			
	Identités remarquables				×		×
	Nature et forme d'une expr. algéb.		×	×		×	×
	Nature des coef. des équ.	×	×		×		×
	Techniques résol. équ. 1er degré			×			×
	Techniques résol. équ. 2nd degré		×	×			
	Règle du produit nul			×	×		
Conceptions selon Sfard		Pseudo-structurale	Structur. Procédur.	Structurale Procédurale	Pseudo-structurale	Pseudo-structurale	Pseudo-structurale

Tableau 129 : Résumé des praxéologies relatives aux types de tâches T_I et T_R (classe d'Annabelle)

Une première lecture horizontale de ce tableau permet de relever que :
- la majorité des groupes (5 sur 6) a compris le verbe classer dans le sens (1) « former des classes » ;
- autant de groupes ont choisi d'effectuer la tâche T_I que la tâche T_R ;
- les techniques les plus fréquemment utilisées sont les techniques τ_{12} (*grouper les équations polynomiales du premier degré d'une part et les équations du second degré d'autre part*), τ_{13} (*grouper les équations selon la nature des nombres déterminés*) et τ_{16} (*grouper les équations selon qu'une résolution directe est possible ou qu'une transformation de l'équation est nécessaire à sa résolution*) ;
- le nombre de classes (hormis le groupe de l'affiche 2-An qui n'a pas fait de classes) est assez élevé (entre 5 et 9 classes) sauf pour un groupe (affiche 3-An) ;
- dans le bloc *logos* sur lequel les élèves appuient leurs techniques, sur les six affiches, on retrouve 4 fois la nature des nombres déterminés des équations, 4 fois la nature et la forme d'une expression algébrique, et 3 fois la notion de degré ;
- les conceptions *pseudo-structurales* des équations sont assez fréquentes.

Une lecture verticale du tableau permet quelques corrélations, en particulier entre la nature des nombres déterminés dans les équations et une conception *pseudo-structurale* de celles-ci. La nature des nombres déterminés semble influer fortement sur le choix d'un mode de classement : les élèves procèdent en repérant si les nombres déterminés sont des entiers, des

[156] Les techniques utilisées de façon minoritaire sont indiquées entre parenthèses

décimaux, des écritures fractionnaires ou des irrationnels et rangent dans une même catégorie les équations correspondantes. Nous remarquons que ce procédé amène à un nombre assez conséquent de catégories différentes, les élèves ne percevant pas d'autres relations entre les équations proposées que les nombres déterminés qui y figurent. Si les élèves sont ainsi arrêtés par leur perception première et unique de la nature des nombres déterminés, ils seront difficilement en mesure de voir d'autres aspects plus représentatifs d'une équation, en particulier sa nature et sa forme, aspects qui permettent d'élaborer des stratégies de résolution.
Pour conclure, on peut résumer ici les différents critères de tri des équations que nous avons relevés.
- les groupes d'élèves ayant effectué la tâche T_I, c'est-à-dire cherchant à faire des groupements d'équations selon des critères qui leur sont propres, ont choisi : premier ou second degré, nature des nombres déterminés des équations, nature et forme d'une expression algébrique (somme, produit, …), reconnaissance d'identités remarquables, présence ou non de parenthèses, second membre nul ou non, présence ou non de l'inconnue explicitement au carré (x^2) ;
- les groupes d'élèves ayant effectué la tâche T_R, c'est-à-dire cherchant à faire des groupements d'équations selon les techniques pour les résoudre, ont considéré : premier ou second degré, microtechniques de résolution différentes pour classer les équations du premier degré, techniques de résolution des équations particulières du second degré (ces équations particulières étant du type : produit nul de deux expressions du premier degré, facteur commun, expression factorisable par une identité remarquable, terme en x de coefficient nul,…).
Ces différences entre techniques seront analysées au chapitre 12, en y incluant les affiches des autres classes où l'expérimentation s'est déroulée.

11.1.1.3 Étape E_3

En partant de la trame réalisée en étape E_1, décrivons l'organisation didactique en relevant les faits notables et les états et changements d'état durant la séance en ce qui concerne le milieu, le contrat, le temps didactique ainsi que le topos de l'élève et celui du professeur. Considérant les phases déterminées dans l'étape E_1, nous allons analyser la séance en prenant un grain plus fin et en utilisant les outils cités ci-dessus.

Phase 0 : Accueil et mise en route

La phase 0 constitue l'entrée dans la situation avec la mise en place du contexte et des premiers éléments du milieu, à savoir qu'un travail dans le domaine des équations va être proposé. Le lien est fait avec un travail précédent, le *test zéro* qui consistait à résoudre des équations. Par rapport au contrat didactique, Annabelle envoie un message aux élèves lorsqu'elle précise les résultats du test : « *C'est pour voir où vous en êtes au niveau des équations. Un petit commentaire, par rapport à ça : c'était légèrement mieux qu'en début d'année mais je n'ai pas non plus été béate d'admiration devant les résultats que j'ai obtenus.* » (cf. ligne 3 de l'annexe A25). Elle leur signifie ainsi qu'ils ont encore à apprendre au sujet des équations et que ceci fait partie du contrat.

À noter également l'aparté faite avec le chercheur en début de séance, où Annabelle confirme une décision d'organisation du travail en groupes hétérogènes, décision qui avait été prise lors de l'élaboration de la trame projetée TP1.

Phase 1 : Présentation de la situation n°1. Passation des consignes.

La phase 1 constitue la première rencontre avec l'organisation mathématique visée et la description de la tâche demandée. Le milieu mis en place est à la fois matériel – avec la distribution des cartons sur lesquels sont inscrites les équations – et mathématique avec la donnée de la consigne, constituée par le type de tâches T_I : *classer les équations selon des critères à déterminer*. Le topos de l'élève se limite à la compréhension de la tâche demandée, cela relève ici du topos du professeur de donner un contrat précis. Durant deux minutes, Annabelle expose la tâche demandée et précise le contrat de travail en groupes. Dans cette première phase, elle ne formule pas de critères pour classer les équations, conformément à ce qu'elle avait décidé lors de l'élaboration de TP1. Nous relevons cependant qu'elle rappelle la raison d'être de l'objet équation : « être résolue », comme l'indique le passage suivant (ligne 4) : « *Votre travail est le suivant : c'est de proposer une classification des équations, d'accord ? Il n'est pas demandé de résoudre les équations, si vous ne souhaitez pas les résoudre, ne les résolvez pas mais ce n'est pas interdit non plus …* ». Annabelle précise également que la tâche de classification sera suivie d'une tâche de justification de cette classification : « *un rapporteur [viendra] nous expliquer pourquoi vous avez classé vos équations de telle manière ou de telle autre* », c'est-à-dire que des critères de classement sont attendus et doivent émerger.

La demande de certains élèves de *comment* (ligne 5) classer les équations permet de saisir que la tâche leur est dévolue et qu'ils s'interrogent sur les critères de classement. La réponse d'Annabelle : « *comme tu veux* » (ligne 6) les renvoie à une détermination personnelle du choix des catégories.

À quatre minutes du début de la séance (ligne 7), Annabelle donne à l'élève Matthieu la tâche T_R à résoudre plutôt que la tâche T_I. Nous nous interrogeons sur la raison de ce traitement particulier qui fait que cet élève a un topos personnalisé : peut-être est-ce un bon élève et Annabelle considère qu'il peut aller « droit au but », c'est-à-dire que son temps didactique peut avancer plus rapidement, parce que cet élève a une représentation correcte d'une équation et qu'il peut directement passer à la classification de celles-ci selon le but recherché : *classer les équations selon leur mode de résolution*. Ce commentaire reste hypothétique, il n'a pas été possible de retrouver quel était l'élève Matthieu, vu que la classe d'Annabelle comporte quatre élèves qui se prénomment ainsi.

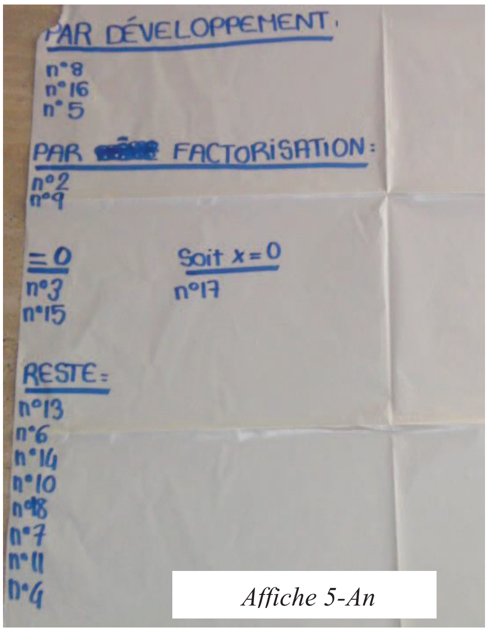
Phase 2 : Première phase de recherche

La phase 2 débute à la 5^e minute de la séance (ligne 8) et dure 11,5 minutes. Sa fonction est le premier travail de recherche en groupes de 3 élèves. Remarquons que cette recherche appartient complètement au topos de l'élève, l'enseignante n'intervenant pratiquement pas dans les groupes. Nous découpons la phase 2 en deux sous-phases 2.1 et 2.2 qui correspondent aux moments précédant et suivant l'intervention d'Annabelle à la 8^e minute du début de la séance, lorsqu'elle reformule la consigne, transformant la tâche T_I en la tâche T_R. La sous-phase 2.1 a une durée de 4 minutes et la sous-phase 2.2 de 7,5 minutes.

La phase 2.1 constitue la recherche de critères de catégorisation des équations et la phase 2.2 la recherche de la catégorisation selon les méthodes de résolution des équations données. Il est à noter que la reformulation de la consigne est donnée dans le brouhaha, les élèves étant déjà investis dans leur recherche. Certains groupes n'en ont pas tenu compte, soit parce qu'ils avaient déjà une idée de type de classification, soit parce qu'ils n'ont pas entendu la précision donnée par le professeur ou encore certains n'ont-ils pas saisi la nuance. Cependant cette seconde consigne a été utile pour les quelques groupes qui n'arrivaient pas à démarrer la tâche à réaliser. Ce changement de contrat, par la donnée de la seconde consigne, amène un changement de point de vue des élèves. Un témoin en est la caméra fixe qui pointe vers les trois élèves d'un même groupe (ceux-ci échangent entre eux mais également avec un groupe à proximité). Pendant la phase 2.1, nous relevons en effet des notions mathématiques qui alimentent le milieu comme les notions de racines, de soustraction, d'addition de termes et de multiplication de facteurs : la recherche de critères se base d'abord sur l'aspect structural des équations. Puis, pendant la phase 2.2, des critères retenant des aspects plus procéduraux apparaissent comme le montre cette intervention d'un élève (ligne 15) : « *Madame, j'ai une question : est-ce que par exemple je peux diviser par x directement ?* » ou encore celle-ci (ligne 27) : « *Tu mets le +15 de l'autre côté* ».
Pour conclure, dans cette deuxième phase le professeur a provoqué une avancée du temps didactique en modifiant la consigne et cette avancée a permis d'ajouter au milieu de certains élèves de nouvelles notions, comme les identités remarquables (ligne 30) ou indirectement la notion de degré (ligne 19) : « *tu mets ensemble celles qui ont des x et ensemble celles qui ont des x^2* ». Pour certains élèves, le passage de T_I à T_R a permis de tenir compte à la fois de l'aspect structural et procédural des équations.

Phase 3 : Seconde phase de recherche. Réalisation des affiches.
Le début de la phase 3 est caractérisé, à la 16^{e} minute de la séance, par une intervention d'Annabelle qui reprécise le contrat de cette nouvelle étape : passer d'un travail de groupes à 3 élèves à un travail de groupes à 6 élèves. Le contrat sous-entend également que les élèves des deux groupes réunis doivent trouver un accord entre eux sur la classification (ligne 32) : « *Il faut qu'il n'y ait qu'une affiche par groupe. On est d'accord ?* ». Argumenter pour expliciter son classement fait donc partie du topos de l'élève. Compte tenu de ce nouveau contrat, le milieu se modifie, qu'il s'agisse du milieu social, avec la fusion des groupes deux par deux, le milieu matériel, avec l'apport des classements constitués par chacun des sous-groupes ou encore le milieu immatériel, avec la diffusion des critères entre les élèves de deux groupes.
Durant cette troisième phase, la caméra fixe filme les échanges entre deux groupes réunis et les propos des élèves sont transcrits ci-dessous (lignes 33 à 44 de l'annexe A25). L'objectif est ici d'analyser de manière dynamique les échanges entre les deux sous-groupes de 3 élèves de manière à comprendre comment ceux-ci se sont accordés pour passer de leurs deux classifications à une seule. Les commentaires – succincts – des élèves ont permis de retrouver l'affiche constituée, il s'agit de l'affiche 5-An. Cette affiche et le verbatim sont reproduits ici pour plus de commodité de lecture :

33. **16 : 29** *(La caméra fixe filme les groupes 11 et 12 réunis en un seul. Les élèves s'installent et regroupent leurs cartons. Une affiche leur est distribuée ainsi qu'un feutre).*
34. E_1 : Alors, comment vous avez fait ? Comment vous les avez groupées ?
35. E_2 : Nous on a fait par additions, par soustractions, et aussi quand c'est égal à zéro, et aussi des multiplications et des xxx …
36. E_1 : Nous on a fait par factorisation, par développement et …
37. E_2 : Bon, on vote ?
38. E_3 : on mélange nos cas de figure ? Vous avez combien de groupes, vous ?
39. **23 : 22** E_1 : on va commencer par celles qu'on est sûr que c'est ça. *(Les cartons sont manipulés par différents élèves du groupe qui s'expriment peu, mais trient plusieurs fois les cartons, faisant et défaisant les groupements d'équations constitués.)*
40. **28 : 03** *(Un des membres du groupe prend l'initiative de commencer l'affiche. Sur les cinq élèves du groupe, deux élèves surtout prennent des décisions quant au classement.)*
41. E : Tu mets la **2** ($x^2 - 8x + 15 = 0$) et la **9** ($9x^2 - 16 = 0$) ensemble.
42. *(L'équation produit de deux expressions du premier degré (n°17) pose problème).*
43. E (*qui écrit sur l'affiche*) : Et comme méthode, j'écris quoi ?
44. **33 : 45** *(L'affiche est terminée et est apportée au professeur qui la colle au tableau avec les autres. Il s'agit de l'affiche 5-An)*



Affiche 5-An

Les images de la vidéo et sa transcription ci-dessus montrent des élèves passifs, qui n'entrent que peu dans le jeu de la communication. Ils échangent mollement, ne sachant pas comment s'organiser. Le visionnage de la vidéo montre que leur manque d'implication semble davantage relever d'un manque de connaissances que d'un manque d'intérêt. Leurs connaissances leur semblent si peu solides qu'ils n'envisagent pas pouvoir confronter leurs points de vue. Aussi se découragent-ils très vite quand ils s'aperçoivent que leurs catégories sont différentes. Au bout de douze minutes, une élève prend l'initiative d'un classement, qu'elle réalise à l'aide d'une autre élève. Les trois autres éléments du groupe bavardent entre eux. Le travail de mise en commun et d'échanges a eu lieu a minima et la production est très limitée, ce que confirme l'analyse de l'affiche réalisée dans l'étape E_2.

Phase 4 : Restitution du travail

La dernière phase a été définie à l'étape E_1 comme restitution du travail de groupes et mise en commun des différentes catégorisations trouvées. Elle débute à la 35e minute de la séance et dure un quart d'heure. Après avoir rappelé le contrat déterminé pour cette phase : « *Alors, maintenant, un rapporteur va venir au tableau pour expliquer comment et pourquoi vous avez fait ce partage des équations* » (ligne 45), l'enseignante sous-entend le travail collectif qui est attendu pour cette restitution par les propos suivants : « *Quand vous avez une question à poser, vous levez le doigt* » (ligne 46). Annabelle envoie successivement trois rapporteurs au tableau, ce qui correspond au découpage des sous-phases 4.1, 4.2 et 4.3.

Dans cette phase, le milieu est augmenté des interactions entre le rapporteur du groupe, le professeur et les autres élèves qui interviennent pour apporter soit des connaissances mathématiques, soit leur approbation ou leur désapprobation sur les classements rapportés, comme le montre des interjections comme *Non !* (ligne 49) ou *Oh !* (ligne 62). Notons que le topos de l'élève qui joue le rôle du rapporteur du groupe est différent de celui qu'il avait à l'intérieur de son groupe lorsqu'il participait à l'élaboration des catégories d'équations. En effet c'est à lui que revient la responsabilité de définir, de nommer les classes formées. Nous constatons en effet, pour la première ou la troisième affiche par exemple, que les élèves n'ont pas donné de titre à leurs groupements, ils les ont simplement numérotés (1er groupe, 2e groupe, etc.). La mise en commun oblige l'élève rapporteur à verbaliser ce que contiennent les différents groupes d'équations et ainsi à donner plus clairement les différents critères de classement. Le rapporteur au tableau se trouve en situation de formulation qui l'oblige à justifier et à donner un titre à ses différents groupes d'équations : les critères utilisés pour définir ces groupes deviennent alors explicites. Nous retrouvons cet étiquetage par exemple chez le premier rapporteur Antoine, lorsqu'il formule :
- à la ligne 57, « *le groupe 2, c'est le groupe […] où il y a des fractions avec x* » ;
- aux lignes 82 et 84 : « *[pour le groupe 4], les équations ont la même forme ; c'est a fois « x plus b »*[157] ;
- à la ligne 86 : « *[pour le groupe 5], c'est parce qu'il y a un nombre de chaque côté* » ;
- à la ligne 88 : « *[pour le groupe 6], il y a la même structure* »;
- à la ligne 96 : « *Et pour le dernier groupe, c'est parce qu'il y a des x², des x et des nombres* ».

Cette formulation est également notable pour le troisième rapporteur au tableau comme le montre les extraits ci-dessous du verbatim :
- ligne 133 : « *Pour le groupe 1, la première partie, […] elles sont spéciales avec un x² et un autre chiffre » ;*
- ligne 135 : « *[Pour le groupe 1, partie 2], elles sont déjà factorisées, il y a un premier terme et « égal zéro » ;*
- ligne 141 : « *Le groupe 1, c'est celui avec les x² et le groupe 2, c'est celui sans les x²* ».

Cette verbalisation aide à conscientiser le rapporteur et les autres élèves à la pertinence des critères de classification, par le biais de feed-back qui apparaissent et qui permettent de faire évoluer les formulations de l'élève rapporteur.
Le topos de l'élève rapporteur est également différent du topos des autres élèves de la classe : le rapporteur a un rôle de synthèse, dans le sens où il étiquette les classes formées et les autres élèves ont un rôle d'analyse, dans le sens où ils vérifient si chaque équation d'une classe donnée répond à l'étiquette attribuée.

Sous-phase 4.1 : Échanges sur l'affiche 1-An

La sous-phase 4.1 dure près de 9 minutes et il semble qu'Annabelle souhaiterait faire avancer plus rapidement le temps de ce groupe mais qu'elle n'y parvient que difficilement, les critères de classement des élèves étant très ambigus. Cette volonté d'aller de l'avant se retrouve par exemple dans des expressions comme : « *C'est spécial … Mais on va continuer* » (ligne 65),

[157] L'expression « *c'est a fois « x plus b* » correspond à : $a(x + b)$.

« Je suis d'accord avec toi, Matthieu xxx. Mais on va continuer. Alors, Antoine, après ? » (ligne 69).

Dans cette sous-phase, nous relevons 51 échanges : le rapporteur Antoine intervient 13 fois, le professeur 25 fois et d'autres élèves 13 fois. Ce décompte permet de constater qu'Annabelle, malgré son souhait de voir avancer le temps de ce groupe, laisse les élèves interagir avec elle et le rapporteur. Par exemple, ce premier échange qui permet d'aboutir à la rectification de l'intitulé du 1[er] groupement d'équations :

> 47. Antoine : Pour le premier groupe, on a pris toutes celles qui donnaient x égal 1000
> 48. An : Donc pour le premier groupe, tu as pris toutes celles qui donnaient x égal 1000, donc les équations **1**$(-1000 + x = 0)$, **3** $(-1000x = 0)$ et **15** $(1000x = 0)$.
> 49. E : Non !
> 50. An : Est-ce que quelqu'un veut intervenir à ce niveau-là ou pas ?
> 51. E : Pour la **3**, c'est pas, « -1 sur 1000 » ?
> 52. An : la **3** est-ce que c'est « -1 sur 1000 » le résultat ?
> 53. E : Non, c'est « 0 sur 1000 »
> 54. An : et si x égal « 0 sur 1000 » …
> 55. E : alors x égal 0
> 56. An : Dans ce cas, le classement « x = 1000 », on le garde mais a priori, ce n'est pas forcément le bon résultat. Donc Antoine, on aurait pu baptiser ton premier groupe, le groupe des équations « où 1000 apparaît ». Parce que « x = 1000 », on n'est pas trop …
> 57 : Antoine : Oui, voilà ! On peut, çà […]

Les gestes professionnels d'Annabelle qui interviennent ici sont des gestes de *maintien* d'*atmosphère* et d'*étayage*, au sens de Bucheton. En effet, Annabelle autorise la prise de parole d'autres élèves et leur permet de s'engager dans le débat. De plus, elle les accompagne pour les amener à une solution correcte. Le milieu s'est ici enrichi des connaissances des élèves qui amènent Annabelle à formuler un intitulé exact de la première catégorie d'équations. L'intonation particulière d'Antoine, relevée dans la vidéo à la ligne 57 quand il formule *« on peut, **çà** »*, montre qu'il est convaincu que son étiquette « x = 1000 » n'était pas valable et qu'il adhère à la nouvelle formulation. Par rapport aux connaissances exposées ici, notons qu'Annabelle opère un geste de *reprise*, au sens de Larguier puisqu'elle saisit ici une occasion de rappeler une technique de résolution des équations du type : $ax = 0$ où a est un nombre fixé.

Pointons qu'Annabelle utilise ces gestes de *reprise*, de *maintien* d'*atmosphère* et d'*étayage* à plusieurs reprises dans toute la phase 4. Elle encourage les élèves qui participent au débat (par exemple « *bonne question* », ligne 60, ou « *c'est intéressant, ça* »*,* ligne 100).

Par rapport aux conceptions véhiculées sur les savoirs algébriques, plusieurs termes employés par Antoine corroborent les analyses faites dans l'étape E_2 sur l'affiche 1-An. On peut relever, à la ligne 57, qu'Antoine voit que « *le groupe 2, c'est le groupe […] où il y a des fractions avec x* », ensuite à la ligne 82 : « *[pour le groupe 4], les équations ont la même forme* », puis à la ligne 84 : « *c'est a fois « x plus b »* et enfin à la ligne 88 : « *[pour le groupe 6], il y a la même structure* ». Antoine insiste donc sur l'aspect *structural* des équations considérées et se base sur cet aspect pour justifier les catégories formées. Cependant, on voit apparaître également une conception *pseudo-structurale*, comme déjà développé dans l'étape E_2 (lignes

57, 61, 72, 88). Notons qu'Annabelle tente de pousser l'élève rapporteur vers l'aspect *procédural* des expressions algébriques, dans cet extrait du verbatim :

> 84. Antoine : La **5** ($3x(x + \sqrt{5} = 0)$ c'est a fois « x plus b » et la **8** ($7(x + 2) + 4(x - 3) = 0$**)**, il y a deux fois : a fois « x plus b »
> 85. An : Donc ce groupe, c'est parce qu'on peut développer, on peut distribuer un nombre devant.

Antoine est sur l'aspect structural des équations, Annabelle sur l'aspect procédural de celles-ci. La réponse d'Annabelle n'est pas ici en adéquation avec la représentation qu'a cet élève des équations données. L'enseignante tente de de faire entrer l'élève dans le type de tâches T_R où le contrat stipule que les équations doivent être classées selon leur mode de résolution, ce qui nécessite de tenir compte des deux aspects, structural et procédural. Mais Antoine n'est pas capable de l'entendre à ce moment donné et reste dans sa conception.

Sous-phase 4.2 : Échanges sur l'affiche 2-An

La sous-phase 4.2 dure moins de 2 minutes. 35 échanges sont relevés : le rapporteur Guilhem intervient 8 fois, le professeur 17 fois et d'autres élèves 9 fois. Le temps accordé à ce groupe est très court, sans doute parce que le professeur voit la fin de la séance approcher et souhaite envoyer un troisième rapporteur au tableau. Néanmoins, le nombre d'échanges relevé, y compris le nombre d'interventions d'élèves autres que le rapporteur, montre que le contrat établi en début de phase 4 est toujours respecté, à savoir que autres élèves sont autorisés et incités à intervenir dans le dialogue entre le professeur et le rapporteur. Cependant, le professeur reprend ici la main, probablement dans le but de faire avancer le temps didactique et de lancer les élèves sur la résolution des équations. D'ailleurs, cela semble se confirmer par deux interventions d'Annabelle qui vont dans ce sens : à la ligne 106, *est-ce que tu peux me donner les solutions de la 18 ($x^2 = 7$)* puis à la ligne 113, *la 19 ($x^2 + 3x = \frac{7}{2}$), est-ce qu'il y a quelqu'un dans le groupe qui sait la résoudre.* Pour comparer, notons qu'à la phase 4.1 (lignes 49 à 55), ce n'est pas l'enseignante qui initie la résolution d'équations, mais un élève de la classe. En revanche, dans la phase 4.2, Annabelle mène plus nettement le débat, elle fait partie du milieu et y ajoute des connaissances mathématiques. Remarquons qu'elle ne donne pas directement ces connaissances mais qu'elle donne des indices et, avec un jeu de questions-réponses, amène les élèves à formuler cette connaissance. Le topos de l'enseignante prend plus de place, celui de l'élève se trouve alors réduit. Les gestes professionnels qu'Annabelle met en œuvre ici sont des gestes de *tissage,* où l'on peut voir sa préoccupation à opérer la transition vers la prochaine séance qui consistera à résoudre des équations et également des gestes d'*étayage* qui consistent ici à accompagner les élèves en les amenant à approfondir et à contrôler leurs réponses. Par exemple dans ce passage, nous voyons une certaine forme d'étayage :

> 106. An : Rien que par curiosité, est-ce que tu peux me donner les solutions de la **18** ($x^2 = 7$) ?
> 107. Guilhem : c'est « -7 », non c'est « racine de -7 » et « racine de 7 ».
> 108. An : Il me dit que c'est « racine de 7 » et « racine de -7 », ça vous va ?
> 109. Guilhem : Non, non « - racine de 7 ».
> 110. An : Donc effectivement, quand on t'aide un petit peu, tu y arrives …

L'étayage se fait ici non pas par une correction directe d'Annabelle des propos de Guilhem (*racine de -7*), elle se contente de répéter ses propos, mais la vidéo permet d'entendre à son intonation sa désapprobation à la façon de prononcer : « *ça vous va ?* », intonation qu'elle accompagne d'une gestuelle évocatrice de la déconvenue, mettant ses deux poings sur les hanches.
Ainsi, dans l'extrait ci-dessus, Annabelle reprend les propos erronés de l'élève Guilhem qui rectifie alors sa réponse. Nous notons, en utilisant la typologie de Bronner (1997) sur *les rapports personnels des élèves aux objets racine carrée et nombre réel* (cf. §2.5), que Guilhem oscille entre les catégories **CP-N** et une catégorie plus évoluée **CF** ou **CN** (le dialogue ci-dessus ne permet pas de trancher entre les deux). Il semble en effet capable de concevoir une racine carrée d'un nombre non carré parfait ($\sqrt{7}$) mais s'affranchit difficilement du théorème en acte erroné : $\sqrt{-a} = -\sqrt{a}$.
Dans ce second extrait, bien qu'il s'agisse encore d'une forme d'étayage, la démarche d'Annabelle est différente :

> 113. An : La **19**, $x^2 + 3x = \frac{7}{2}$: est-ce qu'il y a quelqu'un dans le groupe qui sait la résoudre ?
> 114. Guilhem : Il me faudrait un papier
> 115. An : Qu'est-ce que tu ferais, Matthieu ?
> 116. Matthieu : je ferais 7/2 sur 3 et après … xxx … j'aurais mis $x^2 + x$ …
> 117. An : Est-ce que tu peux me dire $x^2 + 3x$, qu'est-ce que c'est comme expression ?
> 118. E : C'est une somme.
> 119. An : il y a combien de termes dans cette somme ?
> 120. E : Deux.
> 121. An : Il y a donc deux termes dans cette somme. C'est quoi les termes ?
> 122. E : x^2 et $3x$.
> 123. An : Et donc ce sont des blocs. Et alors tu es en train de diviser par 3, c'est pas gênant, Matthieu ?
> 124. Matthieu : Si, c'est gênant
> 125. An : Ben oui, c'est gênant.

Elle ne se contente plus ici de répéter les propos de l'élève pour montrer sa désapprobation, elle le pousse à analyser l'équation. Son questionnement le conduit à reprendre la notion de somme d'expressions algébriques pour l'opposer à celle de produit. Ainsi, pour expliquer qu'on ne peut diviser $x^2 + 3x$ par 3, revient-elle sur la structure de cette expression algébrique. Le topos du professeur prend maintenant le dessus sur celui de l'élève, le topos de l'élève peut encore s'exprimer, mais de manière moins autonome qu'au début des échanges de la phase 4.
L'analyse de l'équation $x^2 + 3x = \frac{7}{2}$ n'est cependant pas terminée et se poursuit grâce à l'intervention d'un autre élève de la classe qui fait émerger une autre idée, celle de la factorisation de l'équation, conséquence des propos précédents qui amènent à constater que la somme ne permet pas d'aboutir à la résolution. L'échange se poursuit alors entre Annabelle et deux élèves autres que le rapporteur :

> 126. E1 : il faut faire $x(x + 3) = \frac{7}{2}$.
> 127. E2 : Ca n'avance pas à grand-chose
> 128. An : Et pourquoi ça n'avance pas à grand-chose ?
> 129. E2 : À cause du 7/2, on peut rien faire
> 130. An : Il aurait fallu avoir quoi quand on transforme ?

> 131. E : il faut que ce soit égal à zéro
> 132. An : il faut que ce soit égal à zéro. Bon d'accord.

Annabelle poursuit son étayage qui amène ici au rappel d'une technologie qui justifie la technique de résolution d'une équation produit nul. Elle fait émerger la différence de traitement des équations : $(ax+b)(cx+d)=0$ et $(ax+b)(cx+d)\neq 0$. La technologie sous-jacente et qui ne sera finalement pas formulée, ni par l'enseignante, ni par les élèves est « un produit de facteurs est nul si et seulement si l'un des facteurs est nul ».

Sous-phase 4.3 : Échanges sur l'affiche 3-An

La sous-phase 4.3 dure environ 5 minutes. Nous relevons 23 échanges : le rapporteur intervient 11 fois, le professeur 12 fois et aucun autre élève n'intervient. Ce décompte permet d'observer un changement de topos : ce ne sont plus les élèves de la classe qui sont chargés de valider les critères de classement donnés par le rapporteur, Annabelle prend ce rôle à son compte. Deux hypothèses sont émises quant à ce changement : l'approche de la fin de séance et la volonté de faire verbaliser l'élève rapporteur sur la constitution des classes d'équations. En effet, l'affiche commentée (cf. analyse de l'affiche 2-An dans l'étape E_2) est ici pertinente et élaborée selon les attentes du professeur. C'est-à-dire qu'elle permet d'avancer dans le temps didactique par la proposition d'une classification d'équations constituée de telle manière qu'à chaque classe formée, on peut associer une technique de résolution commune qui pourra s'algorithmiser dans les séances à venir.

Le rapporteur explicite que les classes d'équations ont été créées en se situant sur l'aspect structural des équations comme le montre ses propos, en ligne 133 : « *elles sont spéciales avec un x^2 et un autre … chiffre* », puis en ligne 135 : *« elles sont déjà factorisées, il y a un premier terme et « égal zéro »*, et en ligne 141 : « *Le groupe 1, c'est celui avec les x^2 et le groupe 2, c'est celui sans les x^2* ». Mais cet élève est également capable de se placer sur l'aspect procédural des équations pour justifier ses choix, quand il formule en ligne 133 : « *on a juste à faire une racine pour obtenir le résultat* » (pour des équations du type $ax^2 = b$) ou en ligne 147 : « *[on a juste] à isoler le x et réduire, on résout normalement* » (pour des équations du type $ax + b = cx + d$).

L'enseignante prend le temps d'analyser le contenu de chaque classe en opérant des rétroactions lorsqu'une erreur est détectée. Pressée par le temps, elle laisse passer quelques erreurs de classement (cf. analyse de l'affiche 3-An en étape E_2). Notons que sa démarche reste toujours dans des gestes d'étayage en fournissant des indices au rapporteur qui le guident vers une rectification de sa réponse. Néanmoins, ni cette réponse ne lui est soufflée, ni l'erreur n'est complètement relevée et corrigée. Pour exemple, ce passage où Annabelle réalise une rétroaction sur la classification proposée. En effet l'équation 16 avait été placée dans le groupe des équations du second degré :

> 153. An : Et la **16** ($(3-4x)-(2x-1)=0$) ?
> 154. E : La **16**, il faut multiplier par -1 en changeant $2x-1$
> 155. An : Est-ce qu'il y aurait des x^2 ?
> 156. E : Non
> 157. An : c'était juste une question …

L’enseignante reste en retrait par rapport à l’erreur relevée et laisse l’élève faire le cheminement seul pour comprendre que cette équation est mal classée, par rapport aux critères qu’il a donnés. Cette attitude peut s’expliquer de deux manières : d’une part, la sonnerie a retenti et la séance est terminée, d’autre part, Annabelle peut penser que le rapporteur étant un bon élément, cette remarque suffit à lui faire comprendre qu’il s’est trompé sur cette équation.

Terminons cette analyse sur un retour sur le topos du professeur en phase 4. Annabelle est davantage dans l’expectative en sous-phase 4.1, elle attend que le rapporteur du groupe expose les critères de son classement, puis valide ou non le critère en le reformulant si nécessaire, tout en faisant intervenir les élèves de la classe. Dans la phase 4.2, elle mène le jeu en lançant les élèves sur des techniques de résolution d’équations et la reprise de technologies associées, en laissant encore d’autres élèves que le rapporteur participer. Enfin en phase 4.3, elle prend complètement la main pour établir un dialogue entre elle et le rapporteur, valider implicitement la classification proposée (il n’y a pas de critiques sur le classement, hormis le relevé de quelques erreurs), afin de garder la maîtrise de l’avancée du temps didactique et du temps des horloges.

Pour résumer les propos exposés ci-dessus sur les états du milieu, du temps didactique, du topos du professeur et de celui des élèves, suit un tableau récapitulatif.

Phases	Début numéro ligne	Début instant	Fonction	Évolution du milieu	Temps didactique / Topos du prof	Topos de l’élève
0	1	00 : 00	Accueil et mise en route	Annonce d’un travail dans le domaine des équations		S’améliorer dans le domaine des équations
1	4	01 : 32	Présentation de la situation Passation des consignes	- Les consignes - Le matériel constitué des cartons	Organiser la situation Proposer de rechercher un classement de manière ouverte	Comprendre la tâche demandée et l’envisager
2.1	8	04 : 10	Première phase de recherche Travail en groupes de 3 élèves	Notions mathématiques (racines, addition, soustraction, multiplication, etc.)		Rechercher des critères de classification des équations en groupe
2.2	23 (Caméra mobile) 11 (Caméra fixe)	08 : 03 09 : 24		Notions mathématiques supplémentaires (identités remarquables, …)	Proposer un changement de type de tâches (vers la résolution d’équations)	Rechercher une classification des équations selon leur mode de résolution

3	32	15 : 30	Seconde phase de recherche Réalisation de l'affiche	- Passage de 3 à 6 élèves - Diffusion des critères de classification entre les deux sous-groupes - Affiche	Rappeler la consigne de travail en groupes et de constitution de l'affiche	S'accorder sur la classification et réaliser l'affiche en groupe de six
4	45	35 : 00	Restitution du travail	- Affiches de tous les groupes au tableau - Interactions rapporteur/prof/ élèves - Techniques/ Technologies amenées par le prof et des élèves.	- Rappeler la consigne de participation au débat - Valider ou invalider les classements.	- Rapporteur : expliciter la classification de son groupe - Autres élèves : commenter et critiquer la classification
4.1	47	35 : 30	Échanges sur l'affiche 1-An			
4.2	98	43 : 50	Échanges sur l'affiche 2-An		Lancer les élèves sur la résolution des équations	
4.3	133	45 : 28	Échanges sur l'affiche 3-An			

Tableau 130 : Récapitulatif du milieu, du temps didactique et des topos (séance 1 d'Annabelle)

11.1.1.4 Étape E_4

Cette dernière étape d'analyse de la séance n°1 d'Annabelle a pour objectif de relever quelques *événements didactiques* (Bronner, 2006, 2009), ayant un caractère de *prévisibilité* ou de *problématicité*. Nous relevons dans cette étape trois événements particuliers :
- un premier événement imprévu et problématique : l'avènement des « gros mots » ;
- un deuxième événement imprévu et non problématique : le choix des trois affiches proposées par le professeur à l'analyse de la classe ;
- un troisième événement prévisible et plus ou moins problématique (selon les élèves) : la gestion de l'avancée du temps didactique vers la résolution d'équations.

Les éléments relevés ici sont choisis par rapport à notre thématique de recherche, d'autres événements sont également remarquables mais nous avons limité notre étude à ce qui nous semble pertinent pour étayer notre problématique. Détaillons ces trois événements et les caractères de *prévisibilité* ou de *problématicité* annoncés.

Premier événement : l'avènement des « gros mots »

L'événement se situe pendant la phase 4 de restitution du travail, lors de la sous-phase 4.1, au cours de la 42e minute de la séance. Cet événement est remarquable quant aux conceptions véhiculées. Il s'agit du passage suivant qui a déjà été analysé une première fois dans l'étape E_2 mais que nous proposons ici de reprendre avec une autre approche :

> 72. Antoine : Alors il y a l'équation **6** ($\sqrt{2} + x = 3$), l'équation **7** ($\pi x + 3 = 4$) et l'équation **14** ($\sqrt{x} + 2 = 3$).
> 73. An : Alors qui est-ce qui avait donné ce classement-là ?
> 74. Antoine : c'est Clément.

> 75. **41 :04** An : Alors Clément, tu peux expliquer ? Parce qu'Antoine est pas trop d'accord, il va avoir du mal à soutenir ton xxx
> 76. Clément : C'est spécial, on va dire. Il y a des racines carrées et il y a xxx, il y a des nombres spécials.
> 77. An : il y a des racines carrées donc c'est spécial ?
> 78. Clément : Ben oui, c'est des gros mots.
> 79. An : Ça, « des gros mots », c'est mon mot à moi, celui-là …Donc il y a des gros mots dedans ?
> 80. Clément : Oui.

La catégorie proposée par les élèves du groupe d'Antoine (3^{e} groupe de leur classement) comporte trois équations comportant des nombres irrationnels. Outre l'équation 14 qui n'est pas une équation polynomiale, les équations 6 et 7 sont de la forme $ax + b = c$ mais ce n'est pas ce critère que les élèves ont retenu, sinon ils y auraient adjoint, par exemple, l'équation 1 ($-1000 + x = 0$). Le critère « visible » ici peut s'expliquer par la typologie de Bronner (1997). Ce groupe d'élèves semble relever d'un des modèles **CP** ou **CF** où les nombres irrationnels comme ici $\sqrt{2}$, π ou $\sqrt{x}$ n'existent pas en tant que nombres mais comme « des nombres spéciaux », « des gros mots » qu'il faut considérer « à part ». L'intégration des nombres irrationnels comme *objets nombres* n'est pas encore réalisée.

De plus, le fait de qualifier cet événement d'*imprévu-problématique* tient de l'attitude de l'enseignante qui favorise un rapport complexe avec ces objets. Elle utilise apparemment ce vocable de « gros mots » avec ses élèves pour désigner les nombres irrationnels puisqu'elle précise ici que *c'est son mot à elle.* D'ailleurs, elle utilise déjà cette expression dans l'entretien de constitution de la trame projetée (cf. annexe A16) :

> 3. C : Chacun a des équations sur la table et ces équations, ils les classent, j'ai essayé de faire varier les nombres comme $-1000x = 0$ ou $1000 - x = 0$, des trucs avec des nombres irrationnels…
> 4. An : des gros mots !

On peut penser que cette expression génère quelque chose de flou pour les élèves et ne les aide pas à surmonter la difficulté qu'est de considérer les irrationnels comme des nombres « comme les autres ». Cependant cette attitude peut s'expliquer par un geste de compréhension du professeur qui sait que ces nombres sont difficiles pour les élèves et qui leur montre sa compassion. Ou encore, peut-être Annabelle place-t-elle ces nombres dans une catégorie à part, puisque résoudre une équation du premier degré comportant des radicaux nécessite une démarche purement algébrique par rapport à la résolution d'équations similaires, sans radicaux. Par exemple, l'équation $\sqrt{2} + x = 3$ se résout généralement par une technique du type « on peut soustraire le même nombre à chaque membre de l'égalité » alors que pour résoudre $2 + x = 3$, on peut passer par une démarche arithmétique.

Aussi, même si cette expression de « gros mots » vise à dédramatiser les nombres irrationnels, l'effet produit – parce que cette expression n'est pas explicitée – peut-il être inverse à celui attendu et peut être qualifié de *problématique*, au sens où il peut *provoquer une perturbation au niveau du projet didactique de l'enseignant* (Bronner, 2006). En effet, le fait de ne pas amener les élèves à considérer les irrationnels comme des nombres « ordinaires » peut générer des difficultés dans la mise en place de techniques de résolution, où le domaine d'utilisation se verrait restreint à une certaine catégorie de nombres déterminés (les rationnels).

Deuxième événement : le choix des trois affiches

L'événement « choix des trois affiches par le professeur » est concentré sur la phase 4 de restitution du travail. Il est caractéristique, pour les gestes professionnels de l'enseignante qu'il permet de relever et d'analyser. Tout d'abord, par rapport au type de tâches choisi et au sens du verbe classer, Annabelle a choisi pour la restitution l'affiche 1-An où une catégorisation est réalisée selon le type de tâches T_I, l'affiche 2-An où un ordonnancement est réalisé selon T_R et enfin l'affiche 3-An où une catégorisation est effectuée selon le type de tâches T_R. Nous qualifions cet événement d'*imprévu*, puisque ce choix n'a pas été réalisé a priori. En effet, à l'issue de la séance, Annabelle nous a confié, voyant qu'elle n'aurait pas suffisamment de temps pour écouter les rapporteurs des six affiches réalisées, qu'elle avait procédé à un choix basé sur des affiches différentes, tant par leur structure de classement que par la pertinence plus ou moins grande de celui-ci. Nous observons ici un geste professionnel expert du professeur, capable de s'adapter au *temps des horloges*, tout en préservant un apprentissage constructif, ce que Bucheton (2004) nomme *le geste de contrôle des dimensions spatio-temporelles* (cf. §1.3.2). Effectivement, non seulement les trois types de la typologie sont mis en commun et analysés mais de plus, l'enseignante les propose à ses élèves dans un ordre croissant de pertinence :

- la première affiche (1-An) présente un classement confus, comportant des erreurs, présentant un grand nombre de classes et restant sur un aspect structural inadapté ;
- la deuxième affiche (2-An) présente un ordonnancement des équations, cependant plus pertinent que le précédent par rapport à l'objectif de classement selon le mode de résolution ;
- la troisième affiche (3-An) amène une catégorisation congruente à la constitution d'algorithmes dans les séances à venir, présentant un classement conforme au mode de résolution des équations proposées.

Ceci montre que cet événement *imprévu* n'est pas *problématique*, au sens où le choix des affiches et l'ordre de passage des rapporteurs réalisé par Annabelle permettent une avancée du temps didactique.

Troisième événement : la gestion de l'avancée du temps didactique

Ce troisième événement que nous nommons « gestion de l'avancée du temps didactique vers la résolution d'équations » n'est pas concentré sur une phase précise du déroulement de la séance, mais est présent en filigrane tout au long de celle-ci. Il montre un geste professionnel d'Annabelle ayant la constante préoccupation de faire avancer le temps didactique en direction du projet global, déterminé lors de la constitution a priori de la *trame projetée*. Cet événement est *prévisible*, en ce sens que le projet consiste en un travail sur la résolution d'équations. Il était donc prévisible que l'enseignante porte son attention sur l'avènement de ce thème. Le caractère de *problématicité* est difficilement quantifiable ici, cet événement aura pu en effet apparaître comme non problématique pour certains élèves ayant des connaissances suffisantes sur les objets équations et ayant traité la tâche T_R ou au contraire sera apparu comme problématique pour d'autres dont les connaissances sont fragiles et qui sont restés sur la tâche T_I.

Étayons ces analyses par quelques faits, relevés dans le verbatim (cf. annexe A25).

Tout d'abord, comme déjà souligné dans l'étape E_3, l'enseignante provoque – pour une raison non identifiée – une avancée du temps didactique vers la résolution d'équations pour un élève particulier, prénommé Matthieu, à quatre minutes du début de la séance pendant la phase 1 (ligne 7), alors que les consignes données au reste de la classe sont de les regrouper « *comme les élèves le veulent, comme ils en ont envie* » (ligne 6).

> 7. **04 : 07** (*Précision donnée à un seul élève)* An : Alors je répète, Matthieu, je t'ai demandé une classification plutôt dans la manière où tu pourrais pouvoir résoudre ces équations.

Puis la consigne de classer les équations selon leur mode de résolution est donnée à toute la classe huit minutes après le début de la séance, soit quatre minutes après le début de la recherche en groupes de 3 élèves (phase 2). Notons ici qu'Annabelle est en conformité avec la décision prise lors de la constitution de la trame projetée où elle avait prévu de donner la tâche T_R cinq minutes après la tâche T_I (cf. §10.4.1 : analyse des trames projetées TP1 et TP2). Elle le précise comme suit dans l'entretien de constitution de cette trame (cf. annexe A16) :

> 175. Annabelle : Moi je dirais d'abord « vous avez des équations et vous les classez »…
> 176. Maurice : Et après tu dis « dans le but d'une résolution » ?
> 177. Chercheur : Oui, plus tard.
> 178. Annabelle : Cinq minutes après, pas trois quarts d'heure après, bien sûr… Si tu les laisses s'enferrer dans leur truc, c'est pas la peine.

La volonté d'Annabelle de faire avancer le temps didactique vers la résolution d'équations se confirme ici lors de la séance réalisée puisque l'enseignante avance encore un peu le temps des horloges, tenant de justesse les cinq minutes prévues.
Les quelques indices relevés lors de la première phase de recherche par groupes de 3 élèves (cf. analyse de la phase 2 dans l'étape E_3) ont montré que le passage de la tâche T_I à la tâche T_R a provoqué, pour certains élèves, une avancée du temps didactique. En effet, la tâche T_I conduit les élèves vers l'aspect structural des équations, le classement des équations sans critère particulier orientant les élèves vers l'observation et la prise en compte de leur structure globale. La tâche T_R, quant à elle, mène plutôt les élèves vers l'aspect procédural des équations, puisque le classement *dans le but d'une résolution* incite les élèves à résoudre les équations, du moins quelques-unes, les amenant à s'intéresser au côté opérationnel de celles-ci. Finalement, lancer les élèves sur la tâche T_I puis T_R pousse certains élèves à considérer la dualité structurale et procédurale des équations.
Pendant la phase 4 de restitution du travail, on relève que la résolution d'équations est évoquée à six reprises, soit de l'initiative d'Annabelle, soit de celle d'un élève. Lors de la phase 4.1, se produit une intervention d'élève reprise par l'enseignante :

> 51. E : Pour la **3** ($-1000x = 0$), c'est pas, « -1 sur 1000 » ?
> 52. An : la **3** est-ce que c'est « -1 sur 1000 » le résultat ?
> 53. E : Non, c'est « 0 sur 1000 »
> 54. An : et si x égal « 0 sur 1000 » …
> 55. E : alors x égal 0

Puis pendant la phase 4.2, Annabelle suggère de résoudre certaines des équations données à deux reprises : « *Rien que par curiosité, est-ce que tu peux me donner les solutions de la* ***18*** ($x^2 = 7$) » (ligne 106) puis : « *La* ***19***, $x^2 + 3x = \frac{7}{2}$, *est-ce qu'il y a quelqu'un dans le groupe*

qui sait la résoudre » (ligne 113). Pour l'équation 18, elle fera préciser les solutions et pour l'équation 19, elle amènera les élèves vers un mode de résolution.
Enfin pour la dernière sous phase 4.3, c'est l'élève rapporteur qui initie la résolution, à trois reprises lorsqu'il énonce :
- « *On a juste à faire une racine pour obtenir le résultat* », à la ligne 111 pour résoudre des équations du type $x^2 = a$ (première partie du groupe 1 d'équations) ;
- « *Donc pour la troisième partie [du groupe 1d'équations], c'est celles qui faut factoriser et après, avec « égal à zéro », on fait les deux termes* », à la ligne 143 pour résoudre les équations du type $(ax)^2 - b^2 = 0$ ou encore $x^2 + 2ax + b = 0$;
- « *Pour le groupe 2, là normalement, on a juste à faire, à changer de place le x, [...] à isoler le x, et réduire, on résout normalement* », aux lignes 145 à 147 pour résoudre les équations du premier degré.
Tout au long de la séance, le temps didactique avance donc vers la résolution d'équations, mettant peu à peu en évidence les deux aspects qui doivent être considérés pour la mettre en œuvre : l'aspect *structural* qui permet d'identifier globalement de quel type d'équations il s'agit, puis l'aspect *procédural* qui permet d'appliquer une technique de résolution à un type d'équations reconnu.
Cependant, nous pouvons faire l'hypothèse que, de façon individuelle, chacun des élèves n'aura pas perçu de la même manière cette avancée du temps didactique. Par exemple l'élève Antoine, rapporteur de l'affiche 1-An, n'aura sans doute pas compris toutes les subtilités du classement proposé par le rapporteur de l'affiche 3-An. C'est pourquoi nous qualifions cet événement comme plus ou moins *problématique* pour les élèves. Ceci permet de déboucher sur une confortation de l'hypothèse H2, à savoir la grande disparité des connaissances des élèves en algèbre élémentaire, certains étant capables de considérer les aspects complémentaires, structural et procédural, des équations, d'autres ayant des conceptions pseudo-structurales de celles-ci.
Ainsi, afin de réduire les écarts constatés dans les connaissances des élèves, peut-on proposer une modification de la constitution de l'expérimentation spécifique. Il serait sans doute bénéfique d'ajouter un temps de reprise de cette séance de classification lors d'une séance ultérieure. Les élèves auraient à leur disposition l'affiche 3-An et leur tâche consisterait à comprendre le classement proposé et corriger les quelques erreurs présentes. Cette nouvelle situation de formulation permettrait d'asseoir pour chaque élève les deux aspects, structural et procédural, des équations avant de les lancer sur une tâche d'algorithmisation des différents types d'équations répertoriés, proposés dans les situations n°2 et n°3.

11.1.2 Classe de Maurice : séance 1

De la même manière que pour la première séance d'Annabelle, nous utilisons la méthodologie des quatre composantes (cf. §1.3 et §6.5) pour analyser la séance 1 de Maurice. Il est nécessaire de préciser ici que la séance n'a pu être filmée et que nous n'avons pu y assister. En revanche, nous avons récupéré les affiches produites par les élèves et un entretien a été réalisé le lendemain de la séance, où Maurice nous a relaté le déroulement de celle-ci (cf. annexe A27). Seules les deux premières étapes de la méthodologie de Bronner sont respectées, puisque l'accès direct aux propos de l'enseignant et des élèves n'a pu avoir lieu. De ce fait, les étapes E_3 et E_4 sont traitées ici ensemble et plus succinctement.

11.1.2.1 Étape E_1

Le discours de Maurice (cf. lignes 14-19 et 121, annexe A27) permet de découper la séance en trois phases ainsi que de donner des précisions sur le nombre de groupes ainsi que sur la phase de restitution, comme indiqué dans le tableau suivant :

Phase		Fonction	Forme du travail	Temps
Phase 1		- Présentation de la situation n°1 et passation des consignes - Première phase de recherche	- Collectif - Groupes de 2 à 3 élèves (11 groupes)	**Durée : 15min**
Phase 2		-Seconde phase de recherche Réalisation des affiches	- Groupes de 3 à 7 élèves (6 groupes)	**Durée : 15min**
Phase 3		Restitution du travail	Collectif avec un rapporteur par affiche au tableau	**Durée totale : 15min**
	Sous phase 3.1	Échanges sur l'affiche 1-Ma		
	Sous phase 3.2	Échanges sur l'affiche 2-Ma		
	Sous phase 3.3	Échanges sur l'affiche 3-Ma		
	Sous-phase 3.4	Échanges sur l'affiche 4-Ma		Durée : 3 minutes après la sonnerie

Tableau 131 : Les différentes phases de la séance 1 de Maurice

11.1.2.2 Étape E_2

Afin de décrire les praxéologies mathématiques élaborées par les élèves dans cette séance, commençons par mentionner les propos de Maurice (cf. annexe A27) pour la passation de la consigne.

Type de tâches observé

Conformément à ce qui a été prévu dans sa trame projetée TP_2 (cf. §10.4.1), le choix de Maurice s'est orienté dès le début de la séance vers le type de tâches T_R, comme on peut le constater dans ses propos :

> 91. C : Alors au début, tu as lancé ta consigne …
> 92. Ma : Je les ai mis par trois et j'ai distribué les cartons. Certains ont été très décontenancés.
> 93. C : Ah bon !
> 94. Ma : Oui, certains étaient avec leurs cartons et puis euh … alors j'ai répété la consigne simplement et ils m'ont demandé : « mais Monsieur, il faut les classer comment ? ». Je lui ai dit : « mais tu as écouté ce que je t'ai dit, réfléchis … j'ai dit : Notre but, c'est de les résoudre. Voilà, donc c'est en fonction de cette résolution qu'il faut que tu les classes.
> 95. C : Oui.
> 96. Ma : Après, je n'ai rien dit de différent.

Maurice indique bien ici qu'il demande aux élèves d'effectuer le type de tâches T_R : *Classer des équations selon leur mode de résolution.*

Analyse a posteriori des affiches

Suivant le même dispositif de la classe d'Annabelle, les élèves de Maurice ont été réunis en six groupes de 3 à 7 élèves chacun et ont produits six affiches, numérotées 1-Ma à 6-Ma. Une analyse détaillée de ces six affiches est réalisée ici, précisant ainsi les praxéologies mathématiques élaborées. L'ordre dans lequel est présenté ces affiches est celui choisi par le professeur pour les présenter à la classe dans la phase 3 de restitution (pour les affiches 1-Ma à 4-Ma, les deux dernières n'ont pas été débattues). Ces analyses sont complétées par les propos rapportés de Maurice (cf. annexe A27). Les numéros des équations qui apparaissent sont ceux proposés par les professeurs Maurice et Annabelle en annexe A17.

- **Analyse de l'affiche 1-Ma (cf. annexe A28)**

Le classement est réalisé ici selon le sens (1) du verbe classer : réaliser des catégories.

Transcription de l'affiche 1-Ma		**Caractéristiques des groupements (point de vue du chercheur)**
I-1	2 ; 5 ; 9 ; 17	Équations du second degré dont le second membre est nul. Si les équations 5 et 17 sont des équations produit de facteurs du 1er degré, l'équation 9 demande une factorisation (identité remarquable) et l'équation 2 nécessite une factorisation plus complexe.
I-2	1 ; 3 ; 8 ; 15 ; 16	Équations du premier degré dont le second membre est nul.
II-1	10 ; 18 ; 19	Équations du second degré dont le second membre est non nul. La complexité de résolution de l'équation 19 est comparable à celle de l'équation 2.
II-2	4 ; 6 ; 7 ; 11 ; 12 ; 13 ; 14	Équations du premier degré dont le second membre est non nul. On relève deux erreurs : les équations 12 et 14 (dont un membre contient respectivement l'inverse de x et la racine de x) ne sont pas polynomiales du premier degré.

Tableau 132 : Caractérisation des groupements de l'affiche 1-Ma

Une première analyse des groupements réalisés, appuyée par les propos rapportés par Maurice (cf. annexe A27), montrent que les élèves ont cherché, du moins partiellement, à résoudre les équations. Ils semblent donc effectuer le type de tâches T_R plutôt que T_I. Cependant, même si la catégorisation présentée est conforme aux classes déterminées – hormis les erreurs portant sur les équations 12 et 14 du groupement II-2, il semble qu'elle ne se révèlera pas complètement opérationnelle pour les équations ainsi triées. En effet, séparer d'emblée les équations dont le second membre est nul des autres n'a pas particulièrement de pertinence, du point de vue de la résolution. Pour la résolution des équations du premier degré en particulier, ce groupe d'élèves place dans deux catégories différentes des équations du type : $(ax + b) + (cx + d) = 0$ (comme l'équation 16) et celles du type : $ax + b = cx + d$ (comme l'équation 13). Si nous étudions précisément les techniques que l'on peut associer à la résolution de ces deux types d'équations, nous pouvons noter les différences suivantes pour leur résolution respective :

- pour les équations $(ax + b) + (cx + d) = 0$, il est nécessaire de transposer les nombres déterminés dans le second membre de l'équation ;
- pour les équations $ax + b = cx + d$, il est nécessaire de transposer les nombres déterminés dans l'un des membres de l'équation et les inconnues dans l'autre membre de celle-ci.

Ainsi, il existe bien une variante dans la technique de résolution de ces équations, mais rien ne permet d'affirmer que les élèves ont considéré cette différence. Par exemple, l'équation 11 ($-\frac{x}{5} = 1$), bien que son second membre ne soit pas nul, aurait pu se résoudre en transposant uniquement des nombres déterminés dans le membre de droite. D'autre part, Maurice précise que le rapporteur du groupe *a utilisé le mot « factorisation »* pour les équations égales à zéro (ligne 44, annexe A27), ce qui accentue la non-pertinence de cette distinction pour les équations du premier degré.

De la même manière, pour la résolution des équations du second degré, les deux équations 2 ($x^2 - 8x + 15 = 0$) et 19 ($x^2 + 3x = \frac{7}{2}$) possèdent des techniques de résolution semblables, alors que l'une possède un second membre nul et l'autre pas. Pour un élève de seconde ne connaissant pas la technique dite du discriminant, la résolution passe par la mise en évidence d'une identité remarquable que l'on factorise ensuite par une autre identité remarquable, lorsque c'est possible, et aboutit à un produit nul de facteurs du second degré. Par exemple, pour $x^2 - 8x + 15 = 0$, on passe par les étapes suivantes :

$$x^2 - 8x + 16 - 1 = 0$$
$$(x-4)^2 - 1 = 0$$
$$(x-4-1)(x-4+1) = 0$$
$$(x-5)(x-3) = 0$$

C'est ce que Maurice a expliqué à l'un des élèves de ce groupe, Victorien, après la fin du cours :

> 56. Ma : Alors il a attendu la fin de l'heure et il m'a demandé et je lui ai montré qu'on peut faire apparaître une identité remarquable. Ah ça, ça lui a plu. Il m'a demandé : alors, on peut faire ça tout le temps ?

Ce développement tend à montrer que la classification ne s'est pas vraiment faite en répondant au type de tâches T_R uniquement, avec l'apparition du critère « équations égales à zéro » mais que qu'on est sur un type de tâches hybride, entre T_I et T_R, puisque les élèves font apparaître des critères qui leur sont propres.

Quant au choix des techniques, étant donné que les deux principales catégories formées prennent en considération les équations dont le second membre est nul ou non nul, les élèves s'appuient ici sur une technique dérivée de la technique τ_{13}, *grouper les équations selon la nature des nombres déterminés*, en la considérant dans un sens un peu différent de celui utilisé pour les analyses des affiches de la classe d'Annabelle, puisqu'ils ne s'intéressent qu'au nombre particulier « zéro ». Aussi nommerons-nous cette technique τ'_{13} : *grouper les équations selon que leur second membre est nul ou non.* Apparaissent ensuite des sous-catégories, relevant principalement de la technique τ_{12}, *grouper les équations polynomiales du premier degré d'une part et les équations du second degré d'autre part.*

L'environnement technologico-théorique sur lequel se base ce groupe d'élèves repose clairement sur la notion de degré d'un polynôme : l'affiche 1-Ma présente des titres pour les catégories proposées, titres dans lesquels le terme « degré » est présent. Aucune erreur de classement des équations polynomiales selon leur degré n'a été relevée, y compris lorsque les équations du second degré se présentent sous la forme d'un produit de deux facteurs du premier degré et où le terme « x^2 » n'est pas visible. En revanche, les deux équations non polynomiales (12 et 14) n'ont pas été identifiées comme telles, et la notion de degré n'est pas pertinente dans ce cas.

Par rapport aux conceptions structurale ou procédurale de Sfard sur les expressions algébriques, il semble d'après leur classement, que ces élèves soient capables de s'appuyer sur chacun de ces deux aspects, mais sans plus de données, il est difficile de préciser davantage ce point, et les explications de Maurice ne le permettent pas non plus.
Notons, pour finir que ce groupe d'élèves a proposé une classification hiérarchisée, proposant deux groupes composés chacun de deux sous-groupes. Cette capacité à structurer des classes utilisant la relation d'inclusion est remarquable, en ce sens qu'elle montre une certaine maîtrise dans la capacité à catégoriser.

- **Analyse de l'affiche 2-Ma (cf. annexe A28)**

Le classement est réalisé selon le sens (1) du verbe classer.

Transcription de l'affiche 2-Ma		**Caractéristiques des groupements (point de vue du chercheur)**
Équations à plusieurs résultats	10 ; 17 ; 18	Équations du second degré se ramenant « visiblement » à la forme $x^2 = a$ ($a > 0$) ou produit nul de deux facteurs du premier degré.
Équations à résultat unique	1 ; 2 ; 4 ; 6 ; 7 ; 8 ; 9 ; 11 ; 13 ; 14 ; 16	Équations du premier degré ayant une seule solution. On relève 3 erreurs : les équations 2 et 9 sont du second degré et possèdent deux solutions réelles, et l'équation 14 n'est pas polynomiale, elle contient $\sqrt{x}$.
Équations égales à zéro	3 ; 5 ; 15	Groupement comportant à la fois des équations de type « produit nul de facteurs du premier degré » et des équations du type $ax = 0$.
Équations 12 et 19 non classées.		Les équations 12 et 19 n'ont pas été classées. La 12 comporte l'inverse de x et la 19 est une équation du second degré ne pouvant se ramener à une identité remarquable, ni ne possédant de facteur commun (comme la 2).

Tableau 133 : Caractérisation des groupements de l'affiche 2-Ma

Étant donné les deux premiers titres choisis par ces élèves pour nommer leurs catégories, « Équations à plusieurs résultats » et « Équations à résultat unique », il semble qu'ils aient pris en considération le type de tâches T_R, puisque le vocable « résultat » se rattache à la résolution des équations. Néanmoins, la présence de la troisième classe dénommée « Équations égales à zéro » amène à penser que le choix du critère « classer les équations selon leur mode de résolution » ne leur semble pas suffisant pour réaliser une classification des équations données. Nous constatons comme pour le groupe précédent, que les élèves, partis sur une classification selon T_R, réalisent une incursion dans la tâche T_I. Le cas particulier des « équations égales à zéro » pose question et nous leur consacrons une analyse plus poussée (cf. étape 4, §11.1.2.3).
La technique principale utilisée pour réaliser ce classement est la technique τ_{15}, *grouper les équations selon leur nombre de solutions.* Cependant, comme pour l'affiche 1-Ma, le classement prend en considération les « équations égales à zéro », les élèves ont donc utilisé aussi la technique τ'_{13}, *grouper les équations selon que leur second membre est nul ou non.*
L'environnement technologico-théorique sur lequel se base ce groupe d'élèves relève de différentes notions mathématiques, comme :

- la nature et forme d'une expression algébrique. Une illustration en est que la classification proposée met dans la même catégorie (« équations à résultat unique ») des équations comme $-1000x = 0$ ou $\sqrt{2} + x = 3$ ou encore $1{,}8x - 3 = 2{,}5x + 7{,}4$;
- des techniques de résolution des équations du premier degré (réduction, transposition, …). Les équations précédentes permettent d'exemplifier ce point ;

- des techniques de résolution d'équations particulières du second degré. Par exemple, les élèves sont capables de classer $x^2 = 7$ ou encore $(3 - 4x)(2x - 1) = 0$ dans les « équations admettant plusieurs résultats ».

La notion de degré, en revanche, n'apparaît pas dans la formulation des intitulés des classes constituées par ce groupe. Il est difficile de savoir pour ce groupe d'élèves si un lien existe entre le nombre de solutions d'une équation polynomiale et le degré d'un polynôme. Rien dans l'affiche produite ni dans les propos de Maurice n'ont permis de l'affirmer (cf. lignes 102-103, annexe A27). En revanche, comme la notion de degré d'un polynôme n'est pas évoquée par ce groupe, il est licite de classer les deux équations 12 ($\frac{-5}{x} = 1$) et 14 ($\sqrt{x} + 2 = 3$) dans la catégorie des « équations à résultat unique ». Cependant, seule l'équation 14 a été classée dans cette catégorie, l'équation 12 ayant été omise.
Quant au bloc technologique auquel les élèves se réfèrent pour l'utilisation de la technique τ'_{13}, il s'agit de la règle dite du produit nul ($AB = 0 \Leftrightarrow A = 0$ ou $B = 0$). Cette règle n'est cependant utilisée de manière ni efficace, ni systématique, puisque la catégorie nommée « équations égales à zéro » ne contient pas toutes les équations de la forme $ax = 0$ ou $(ax + b)(cx + d) = 0$ de la liste donnée (il manque l'équation 17). D'autre part, par rapport à leur logique de classement, qui consiste au départ à rechercher les équations admettant soit plusieurs solutions, soit une solution unique, cette catégorie n'est pas pertinente puisqu'on y trouve des équations de ces deux types.
Enfin, comme pour l'affiche précédente, nous ne conclurons pas sur les conceptions selon Sfard, n'ayant pas assez d'éléments.

- **Analyse de l'affiche 3-Ma (cf. annexe A28)**

Le classement est effectué selon le sens (1) du verbe classer.

Transcription de l'affiche 3-Ma		**Caractéristiques des groupements (point de vue du chercheur)**
Équations du second degré	2 ; 5 ; 9 ; 10 ; 17 ; 18 ; 19	Toutes les équations polynomiales du second degré sont listées, sans omission.
Équations simples (affines)	1 ; 3 ; 4 ; 6 ; 7 ; 8 ; 11 ; 13 ; 15 ; 16	Toutes les équations polynomiales du premier degré sont listées, sans omission.
Autres équations	12 ; 14	Les deux équations non polynomiales sont données (termes en $1/x$ et $\sqrt{x}$).

Tableau 134 : Caractérisation des groupements de l'affiche 2-Ma

Il est difficile ici, sans plus d'explications (les commentaires de Maurice ne permettent pas de trancher), de déterminer si ce groupe d'élèves traite bien le type de tâches T_R, c'est-à-dire si ces élèves ont choisi de classer en deux catégories distinctes les équations du premier et du second degré parce qu'ils savent que les techniques pour les résoudre sont différentes ou s'ils se sont contentés de les regrouper ensemble uniquement par rapport à la notion de degré. Néanmoins l'utilisation du terme « équations simples » est peut-être à considérer comme une ellipse grammaticale pour désigner les « équations du premier degré simples à résoudre », auquel cas les élèves les auraient bien classées en fonction de leur mode de résolution.
Les techniques utilisées pour réaliser ce classement sont τ_{14}, *grouper les équations polynomiales d'une part et les non polynomiales d'autre part* et τ_{12}, *grouper les équations polynomiales du premier degré d'une part et les équations du second degré d'autre part.*

Notons que ce groupe est le seul – y compris en considérant les élèves de la classe d'Annabelle – à avoir repéré la présence des deux équations non polynomiales et à les avoir considérées dans une classe à part, ce qui dénote une réelle compréhension de la notion de degré, notion présente dans leur environnement technologico-théorique. Ajoutons qu'aucune erreur n'est présente dans le classement donné. Cet environnement contient également :

- la nature et forme d'une expression algébrique ;
- la notion de fonctions affines que les élèves associent aux équations du premier degré, lorsqu'ils désignent la classe « équations simples (affines) ».

Cette capacité à faire le lien entre des expressions de la forme « $ax + b$ » et le registre fonctionnel associé « $x \rightarrow ax + b$ » montre que les élèves considèrent ici l'aspect structural des équations données. L'aspect procédural peut également être considéré comme présent chez ce groupe d'élèves qui est capable de mettre dans la catégorie des équations du second degré des équations comme $(3 - 4x)(2x - 1) = 0$. Cela suppose qu'un début de procédure de développement, peut-être mental, a été effectué pour déterminer le degré de cette équation.
Pointons pour finir la prégnance de l'organisation mathématique et didactique de leur professeur quant à l'enseignement des expressions algébriques du premier degré. Nous pouvons en effet noter, chez ces élèves, que des liens sont présents entre registres algébrique et fonctionnel. Rappelons que Maurice insiste particulièrement sur les différents registres des expressions algébriques dans son enseignement.

- **Analyse de l'affiche 4-Ma (cf. annexe A28)**

Il semblerait que le classement ait ici été réalisé selon les deux sens (1) et (2) du verbe classer. En effet, les élèves ici ont proposé un ordre de rangement des équations, mais ont quand même réalisé des classes. Ils ont indiqué sur une même ligne les équations « qui sont aussi faciles à résoudre les unes que les autres ». Les passages à la ligne marquent des points de rupture, pour des équations plus difficiles à résoudre que celles de la ligne précédente.

Transcription de l'affiche 4-Ma	**Numéro des classes**	**Caractéristiques des groupements (point de vue du chercheur)**
3 ; 15	1	Équations du premier degré de la forme $ax = 0$
1 ; 6 ; 7 ; 11 ; 12	2	Équations de la forme $ax = b$ ou $a/x = b$ ou $ax + b = c$
4 ; 13	3	Équations du premier degré de la forme $ax + b = cx + d$
8 ; 16	4	Équations du premier degré de la forme $k(ax + b) + q(cx + d) = 0$
5 ; 17	5	Équations du second degré de la forme $(ax + b)(cx + d) = 0$
14	6	Équation où l'inconnue est sous la forme $\sqrt{x}$
9 ; 10 ; 18	7	Équations du second degré de la forme $ax^2 + b = c$
2 ; 19	8	Équations du second degré de la forme $ax^2 + bx + c = 0$ ne pouvant ramener à une identité remarquable, ni ne possédant de facteur commun.
Classement par type de résolution dans l'ordre de facilité		

Tableau 135 : Caractérisation des groupements de l'affiche 4-Ma

Le titre donné par les élèves à leur ordonnancement d'équations : *Classement par type de résolution dans l'ordre de facilité*, annonce qu'ils ont effectué le type de tâches T_R. De plus, les propos rapportés par Maurice sur les concepteurs de cette affiche (cf. lignes 26 à 39 de l'annexe A27) le confirment : les élèves ont plusieurs fois mentionné l'expression « *il n'y a* *aucun calcul à faire* » en commentant leurs premières catégories formées, ce qu'il faut comprendre « *il n'y a aucun calcul à faire pour résoudre ces équations* ». La formulation « *par ordre de facilité* » a également été explicitée par le rapporteur au professeur Maurice, l'élève ayant précisé qu'il considère les équations du premier degré comme les plus simples à résoudre (cf. ligne 28 à 40, annexe A27).

D'après les caractéristiques des groupements relevées dans le tableau 135 et complétés par les propos de Maurice, les principales techniques utilisées pour réaliser ce classement sont :

- la technique τ_{21}, *ordonner les équations, de la plus simple à résoudre à la plus difficile, selon qu'elles comportent des transformations plus ou moins expertes à effectuer* ;
- la technique τ_{22}, *ordonner les équations de la plus simple à résoudre à la plus difficile, selon que les techniques pour les résoudre sont acquises ou non par l'élève* ;
- la technique τ_{12}, *grouper les équations polynomiales du premier degré d'une part et les équations du second degré d'autre part.*

Nous remarquons que les élèves ont utilisé à la fois les techniques τ_{21} et τ_{22} puisqu'ils ont différencié le nombre de transformations à effectuer pour parvenir à résoudre les équations (comme on peut le voir sur le choix des types d'équations du premier degré des classes 1 à 4). Ils ont également tenu compte du fait qu'ils possèdent des techniques éprouvées ou non pour résoudre les équations proposées (voir la classe 8, dernière classe, qui contient des équations du second degré que les élèves n'ont pas encore appris à résoudre).

Les subtilités de ce classement, où l'on note une véritable progressivité dans la difficulté de la résolution des équations proposées montrent un environnement technologico-théorique riche, sur lequel se base ce groupe d'élèves, incluant :

- la nature et forme d'une expression algébrique. La classification proposée montre de façon pertinente la différence de traitement dans la résolution des équations selon leur type. Par exemple, pour les équations du premier degré, les élèves font la distinction entre les équations du type $ax + b = c$ (classe 2 du tableau 82) et les équations du type $ax + b = cx + d$ (classe 3). Celles de la classe 3 demande une démarche algébrique plus experte, étant donné que l'inconnue est présente dans les deux membres de l'équation ;
- la notion de degré. Les équations du premier et du second degré sont placées dans des classes distinctes ;
- des techniques de résolution des équations du premier degré (réduction, transposition, …). La distinction que les élèves sont capables de faire entre les équations classées dans les catégories 1 à 4 du tableau 82 laisse penser que ces techniques sont utilisées ;
- des techniques de résolution d'équations particulières du second degré. Par exemple, les élèves classent $x^2 = 7$ ou encore $(3 - 4x)(2x - 1) = 0$ dans deux classes distinctes (classes 7 et 5 respectivement). Sans doute considèrent-ils que leurs techniques de résolution sont différentes.

Les huit catégories déterminées sont construites sur des critères logico-mathématiques, se détachant des signes visibles extérieurs des équations. De plus, nous n'observons aucune confusion dans la logique de classement de ce groupe d'élèves.

Enfin, sur les conceptions selon Sfard, au vu de la pertinence et de la progressivité du classement, nous pouvons faire l'hypothèse de la compréhension des expressions algébriques dans leur aspect structural et procédural. Il semble que ce soient ces deux aspects des équations qui ont déterminé les caractéristiques des classes. Par exemple, pour distinguer les classes 2 et 3 comportant respectivement les équations du type $ax + b = c$ et $ax + b = cx + d$, les élèves ont considéré leur *structure* (par exemple reconnaissant que les équations 1 : $-1000 + x = 0$ et 11 : $\frac{-x}{5} = 1$ sont de la forme $ax + b = c$) mais aussi la *procédure* pour les résoudre : celles du type $ax + b = cx + d$ demande une transposition et une réduction des termes comportant l'inconnue alors que celles du type $ax + b = c$ ne l'exigent pas.

- **Analyse de l'affiche 5-Ma (cf. annexe A28)**

Le classement relève du sens (2) du verbe classer : les élèves ont déterminé un ordre de rangement des équations selon le critère : « *Classé par ordre de facilité !!* ».
La transcription ordonnée des numéros des équations est donnée ci-dessous :
15 ; 3 ; 1 ; 18 ; 11 ; 12 ; 14 ; 6 ; 5 ; 17 ; 16 ; 4 ; 8 ; 7 ; 13 ; 9 ; 10 ; 19 ; 2.
Les élèves n'ont pas constitué de catégories, mais nous avons recréé des classes en recherchant des similitudes et des points de rupture entre les équations consécutives, comme indiqué dans le tableau 136 ci-dessous.

Caractéristiques des groupements (point de vue du chercheur)	
15 ; 3 ; 1	Équations du premier degré comportant le coefficient 1000.
18	Équation du second degré de la forme $x^2 = a$, $a > 0$ pouvant être résolue mentalement.
11 ; 12	Équations comportant une écriture fractionnaire semblable (l'une est une équation du premier degré de type $ax + b = c$, l'autre utilise l'inverse de x).
14 ; 6	Équations comportant une écriture semblable avec un radical (l'une est une équation du premier degré de type $ax + b = c$, l'autre utilise la racine carrée de x).
5 ; 17	Équations du second degré sous la forme d'un produit nul deux facteurs polynomiaux du premier degré.
16 ; 4 ; 8 ; 7 ; 13	Équations du premier degré avec coefficients entiers, décimaux, irrationnels ou en écriture fractionnaire. L'inconnue est présente dans les deux membres des équations (sauf pour la 7 qui comporte le nombre déterminé pi)
9 ; 10	Équations du second degré se ramenant à la forme $x^2 = a$, après transformation.
19 ; 2	Équations 2nd degré ne pouvant ramener à une identité remarquable, ni ne possédant de facteur commun (qu'un élève de seconde ne sait pas encore résoudre, à ce niveau de sa scolarité).

Tableau 136 : Caractérisation des groupements de l'affiche 5-Ma

Comme pour l'affiche 4-Ma, le commentaire écrit par les élèves au bas de l'affiche 5-Ma : « *Classé par ordre de facilité* » laisse penser qu'ils ont effectué leur ordonnancement des équations selon le type de tâches T_R. Lors de l'entretien, le professeur Maurice a précisé que les concepteurs de cette affiche ne sont pas passés au tableau lors de la mise en commun, faute de temps (cf. lignes 66 à 84, annexe A27). Les analyses qui suivent restent donc hypothétiques. L'indication de Maurice, ligne 67 : « c*elui-là, c'est un groupe qui est plus faible* », ajoutée à la caractérisation des groupements faite dans le tableau 136 ci-dessus, permettent cependant de conforter l'impression d'un classement moins pertinent que celui, par exemple, de l'affiche précédente (cf. figure 80).
La principale technique utilisée pour réaliser ce classement semble principalement être la technique τ_{22} : *ordonner les équations de la plus simple à résoudre à la plus difficile, selon que les techniques pour les résoudre sont acquises ou non par l'élève*. En effet, ces élèves ont placé les deux équations 2 et 19 à la fin de leur classement, ce qui indique que ce sont pour

eux les deux équations les plus difficiles à résoudre : ceci est pertinent puisque ce sont deux équations du second degré que les élèves de seconde n'ont pas encore appris à résoudre. De plus, les premières équations de leur classement sont polynomiales du premier degré, de la forme $ax + b = 0$ et font bien partie des équations dont les élèves disposent de techniques éprouvées pour les résoudre, à ce stade de leur scolarité. On peut s'étonner de trouver très haut dans la liste (en 4^{e} position) l'équation 18 ($x^2 = 7$), suivie d'autres équations du premier degré du type $ax + b = cx + d$. Maurice précise que la position de cette équation est certainement liée au fait que le cours actuel porte sur la fonction « carré » : « *On est juste dans la leçon sur les carrés* » (cf. ligne 83, annexe A27), ce qui a pu influencer positivement les élèves sur la reconnaissance de cette équation, puisqu'elle est en cours d'étude.

Une autre technique semble émerger de ce classement, la technique τ_{13}, *grouper les équations selon la nature des nombres déterminés*. Effectivement, les élèves semblent avoir été influencés par les nombres déterminés puisque les équations comportant le coefficient 1000 sont mises en avant, ou encore un regroupement des équations comportant un radical.

Des remarques précédentes et des caractéristiques de groupement dégagés dans le tableau 84, nous déduisons que l'environnement qui tient lieu de bloc technologico-théorique pour les techniques utilisées est basé sur la notion de degré d'une équation et sur la nature et la forme des formes algébriques proposées (par exemple, les élèves rangent à la suite les équations 5 et 17, produit nul de deux expressions du premier degré). Il est difficile d'apporter ici d'autres précisions, sans plus de commentaires sur cette affiche. Cependant, le classement des deux équations 12 et 14 non polynomiales est notable : chacune d'elle a été couplée avec l'équation du premier degré qui lui ressemble, par la similitude des coefficients déterminés. L'équation 12 ($\frac{-5}{x} = 1$) suit la 11 ($\frac{-x}{5} = 1$) et l'équation 14 ($\sqrt{x} + 2 = 3$) précède la 6 ($x + \sqrt{2} = 3$). Pour réaliser leur classement, les élèves s'appuient sur des critères autres que la manière de résoudre les équations, comme leur forme spatiale ou la présence d'un radical. Par rapport aux conceptions structurale ou procédurale de Sfard sur les expressions algébriques, il est difficile de préciser ce point, sans plus de données, étant donné que ces élèves n'ont pas participé à la mise en commun. Les explications de Maurice ne le permettent pas non plus.

- **Analyse de l'affiche 6-Ma (cf. annexe A28)**

Le classement est réalisé ici selon le sens (1) du verbe classer.

Transcription de l'affiche 6-Ma	Caractéristiques des groupements (point de vue du chercheur)
Plusieurs solutions de x : 2 ; 5 ; 9 ; 10 ; 17 ; 18 ; 19	Équations polynomiales du second degré de type : - $(ax + b)(cx + d) = 0$ - $ax^2 + b = c$ - $ax^2 + bx + c = d$
Une seule solution de x : 1 ; 3 ; 4 ; 6 ; 7 ; 8 ; 11 ; 12 ; 13 ; 14 ; 15 ; 16	Équations polynomiales du premier degré de type : - $ax + b = c$ - $ax + b = cx + d$ - $m(ax + b) + n(cx + d) = 0$ Équations non polynomiales de type : $\frac{a}{x} = b$ et $\sqrt{x} + a = b$

Tableau 137: Caractérisation des groupements de l'affiche 6-Ma

Nous ne possédons pas d'information sur le travail de ce groupe, Maurice ayant simplement mentionné durant l'entretien post-séance que le rapporteur du groupe n'a pas eu le temps de passer au tableau. Aussi les réflexions ayant conduit à la constitution de cette affiche restent-elles hypothétiques. Les deux titres choisis par les élèves de ce groupe : « Plusieurs solutions de x » et « Une seule solution de x », pour désigner leurs catégories, évoquent clairement qu'ils ont considéré le type de tâches T_R, puisque le vocable « solution » se rattache à la résolution des équations.
Par rapport aux types de techniques utilisées, la principale est la technique τ_{15} : *grouper les équations selon leur nombre de solutions*.
L'environnement technologico-théorique sur lequel se base ce groupe d'élèves résulte de différentes notions mathématiques, comme :

- la nature et forme d'une expression algébrique. Une illustration en est que la classification proposée met dans deux catégories différentes des équations du type $ax + b = cx + d$ et $(ax + b)(cx + d) = 0$;
- des techniques de résolution des équations du premier degré (réduction, transposition, …) ;
- des techniques de résolution d'équations particulières du second degré. Par exemple, les élèves sont capables de classer $x^2 = 7$ ou encore $(3 - 4x)(2x - 1) = 0$ dans les équations ayant « plusieurs solutions de x ».

Comme pour le groupe de l'affiche 2-Ma, la notion de degré n'apparaît pas dans l'appellation des intitulés des classes. De prime abord, la dénomination utilisée peut sembler plus conforme à celle d'équations du premier ou du second degré, puisque les équations ne sont pas toutes polynomiales (équations 12 et 14). En revanche, les élèves admettent – a priori sans vérification – que des équations comme la 2 ($x^2 - 8x + 15 = 0$) ou la 19 ($x^2 + 3x = \frac{7}{2}$) ont « plusieurs solutions » alors que les équations polynomiales du second degré peuvent n'admettre qu'une seule ou aucune solution réelle.
Quant aux conceptions des expressions algébriques au sens de Sfard, nous ne concluons pas, n'ayant pas assez d'éléments pour le faire. Peut-être pouvons-nous avancer que ces élèves ont certainement une conception structurale des équations, vu la distinction faite en deux catégories, mais il est difficile de préciser davantage, sans autres éléments.

Synthèse de l'analyse des six affiches 1-Ma à 6-Ma

L'analyse a posteriori des affiches permet de réaliser une synthèse des techniques utilisées par les élèves pour effectuer le classement des équations :

	Tâche T_R : classer les équations selon leur mode de résolution
Sens (1) du verbe classer	***Techniques apparues qui ne demandent pas de résoudre les équations (même partiellement) avant les groupements***
	τ_{12} : Grouper les équations selon le premier ou le second degré. τ_{13} : Grouper les équations selon la nature des nombres déterminés τ'_{13} : Grouper les équations selon que le second membre est nul on non. τ_{14} : Grouper les équations polynomiales d'une part et les non polynomiales d'autre part.
	Techniques qui demandent de résoudre les équations (à la main ou mentalement) entièrement ou partiellement avant les groupements
	τ_{15} : Grouper les équations selon leur nombre de solutions.
Sens (2) du verbe classer	***Techniques qui demandent de résoudre les équations (à la main ou mentalement) entièrement ou partiellement avant les groupements***
	τ_{21} : Ordonner les équations selon qu'elles comportent des transformations plus ou moins expertes à effectuer. τ_{22} : Ordonner les équations selon que les techniques pour les résoudre sont acquises ou non par l'élève.

Tableau 138 : Synthèse des techniques utilisées pour la séance 1 de la classe de Maurice

Les techniques utilisées dans cette classe sont conformes à celles qui ont été déterminées a priori, sauf pour la technique τ'_{13} qui n'avait pas été envisagée. Nous remarquons également que des techniques envisagées a priori ne sont pas apparues, comme τ_{11} : *grouper les équations somme ou différence d'une part et les équations produit ou quotient d'autre part* ou encore τ_{17} : *grouper les équations selon la nature des nombres-solutions de celles-ci.* Afin de comparer les techniques et technologies mises en œuvre, résumons les analyses précédentes, comme pour la classe d'Annabelle.

Numéro de l'affiche		**1-Ma**	**2-Ma**	**3-Ma**	**4-Ma**	**5-Ma**	**6-Ma**
Sens du verbe classer		Former des classes (1)	Former des classes (1)	Former des classes (1)	Ordonner (2) / Classer (1)	Ordonner (2)	Former des classes (1)
Type de tâches T_I ou T_R		T_I/T_R	T_I/T_R	T_R	T_R	T_R	T_R
Techniques[158]		(τ_{12}), τ'_{13}	τ_{15}, τ'_{13}	τ_{12}, τ_{14}	τ_{12}, τ_{21}, τ_{22}	τ_{13}, τ_{22}	τ_{15}
Nombre de classes formées		2 classes (et 2 sous-classes)	3	3	(8)[159]	–––	2
Environnement technologico-théorique mathématique	Notion de degré	×		×	×	×	
	Nature et forme d'une expr. algéb.	×	×	×	×	×	×
	Nature coef. équ.					×	
	Techniques de résol. équ.1er degré		×		×		×
	Techniques de résol. équ. 2nd degré		×		×		×
	Règle du produit nul		×		×		
Conceptions selon Sfard		*Pas de conclusion possible*	*Pas de conclusion possible*	Structurale Procédurale	Structurale Procédurale	*Pas de conclusion possible*	Structurale (?)

Tableau 139 : Résumé des praxéologies relatives aux types de tâches T_I et T_R (classe de Maurice)

[158] Les techniques utilisées de façon minoritaire sont indiquées entre parenthèses.
[159] Les parenthèses signifient ici qu'on ne peut pas vraiment considérer qu'il s'agisse de 8 classes dans le même sens que les autres affiches, puisque les élèves ont procédé par ordonnancement des équations.

Une première lecture horizontale de ce tableau permet de relever que :
- la majorité des groupes a compris le verbe classer dans le sens (1) « former des classes » ;
- bien que la consigne était d'effectuer la tâche T_R, deux groupes l'ont effectué partiellement en y incluant une part de la tâche T_I ;
- les techniques les plus fréquemment utilisées sont les techniques τ_{12} : *grouper les équations polynomiales du premier degré d'une part et les équations du second degré d'autre part* et τ'_{13} : *grouper les équations selon que le second membre est nul ou non* ;
- le nombre de classes constituées pour les classements est assez faible (entre 2 et 3 classes) sauf pour les groupes qui ont procédé à un ordonnancement (affiches 4-Ma et 5-Ma) ;
- dans le bloc *logos* sur lequel les élèves appuient leurs techniques, on retrouve 6 fois la nature et la forme d'une expression algébrique, 3 fois la notion de degré et une seule fois la nature des nombres déterminés des équations.

Une lecture verticale du tableau permet quelques corrélations, en particulier entre la nature et la forme d'une expression algébrique et le petit nombre de classes formées. Lorsque les élèves sont capables de caractériser une expression algébrique, nous pouvons constater que sa nature équationnelle est prédominante sur la forme somme ou produit que celle-ci peut prendre ou encore sur la nature des nombres déterminés.

Terminons par un listing des critères de classification rencontrés pour la classe de Maurice.

Les critères de classification relatifs à la tâche T_I sont : premier ou second degré, second membre nul ou non, équations polynomiales ou non, nature des nombres déterminés des équations, nature et forme d'une expression algébrique.

Pour les critères relatifs à la tâche T_R : premier ou second degré, une ou plusieurs solutions, microtechniques de résolution différentes pour classer les équations du premier degré, techniques de résolution des équations particulières du second degré (équations du type : produit de deux expressions du premier degré, facteur commun, identités remarquables, terme en x de coefficient nul).

11.1.2.3 Étapes E_3 et E_4

Rappelons que la séance n'ayant pu être filmée, les étapes E_3 et E_4 de la méthodologie des quatre composantes de Bronner sont ici traitées simultanément et de façon plus succincte. Les phases de la séance établies en étape E_1 ne peuvent ici être affinées. Néanmoins, il reste possible, en utilisant les éléments de séance données par Maurice, de préciser quelques états et changements d'état durant la séance en ce qui concerne le milieu, le contrat, le temps didactique ainsi que le topos de l'élève et celui du professeur.

Durant la phase de présentation de la situation n°1 et de passation des consignes, Maurice installe un premier milieu, à la fois matériel et mathématique par la donnée des équations sur papier cartonné ainsi que par la consigne qui lance les élèves vers le type de tâches T_R : *classer les équations selon leur mode de résolution*, comme il nous l'indique dans le passage suivant (cf. A27) :

> 95. Ma : Oui, certains étaient avec leurs cartons et puis euh … alors j'ai répété la consigne simplement et ils m'ont demandé : « mais Monsieur, il faut les classer comment ? ». Je lui ai dit : « mais tu as écouté ce que je t'ai dit, réfléchis … j'ai dit : Notre but, c'est de les résoudre. Voilà, donc c'est en fonction de cette résolution qu'il faut que tu les classes.
> 96. C : Oui.

> 97. Ma : Après, je n'ai rien dit de différent. […]

Maurice a modifié ici le contrat prévu par la trame projetée TP2, où il avait initialement prévu de laisser un temps pour que les élèves trouvent eux-mêmes des critères de classification, comme il le précisait dans les propos échangés avec le chercheur et Annabelle : « *Vous m'avez convaincu maintenant si tout de suite après… Je suis convaincu de l'intérêt aussi qu'ils le fassent à leur façon* » (cf. ligne 185, annexe A16). Finalement, Maurice revient à sa posture initiale, c'est-à-dire qu'il donne dès le début de la séance un critère de classement. Cette différence au niveau du type de tâches induit un contrat et un milieu différents de ceux qu'Annabelle propose dans sa classe. Une première comparaison des affiches amène la constatation que les affiches produites dans la classe de Maurice sont de qualité supérieure à celles de la classe d'Annabelle : nous pouvons déjà souligner que les classements obtenus dans la classe de Maurice sont plus pertinents et plus opérationnels pour la résolution des équations, que les classements obtenus dans la classe d'Annabelle (hormis l'affiche 3-An). En particulier, nous notons la pertinence des affiches 3-Ma et 4-Ma. L'affiche 3-Ma est remarquable pour sa structure globale de classification qui sépare les équations polynomiales des autres et, parmi les équations polynomiales, distingue celles du premier et du second degré. L'affiche 4-Ma, quant à elle, montre une grande finesse de compréhension des microtechniques adaptées à chacune des équations proposées. Nous constatons que le milieu construit en fin de séance est riche, plus riche que dans la classe d'Annabelle.

Nous nous devons cependant de modérer ces assertions, le profil de ces deux classes étant différent aux dires de leur professeur. En effet, lors de la constitution des trames projetées, Annabelle signale : « *Tu ne vas pas être déçue … avec mes élèves* » (ligne 28, A16), ce qui signifie qu'elle considère que sa classe est particulièrement faible. Au contraire, Maurice indique dès le début de l'entretien (cf. A27) qu'il n'a pas *d'élèves faibles* (ligne 1), que *le niveau est plutôt bon* (ligne 3) et que la majorité d'entre eux *veut aller en S* (ligne 7).

Relativement au type de tâches, un autre point ressort particulièrement dans l'analyse des propos de Maurice. Il s'agit d'un type de tâches que nous pouvons qualifier d'inhabituel, qui décontenance les élèves et le professeur. Maurice le souligne par trois fois dans l'entretien post-séance :

- « *Je les ai mis par trois et j'ai distribué les cartons. Certains ont été très décontenancés.* » (ligne 93) ;
- « *Donc au niveau des groupes, ça a été beaucoup de bruit, beaucoup de contestations. J'ai trouvé qu'au début …il a fallu que je me mette en colère pour qu'ils se mettent au travail.* » (ligne 9) ;
- « *J'avais pas l'impression que ça marchait bien. J'avais l'impression d'un truc un peu stérile … dans leurs recherches.* » (ligne 107).

Classer des équations s'avère en effet un type de tâches qui ne fait pas partie de l'habitus du professeur ni des élèves. En classe de seconde, les tâches habituelles relatives au concept d'équation sont plutôt de mettre un problème en équation ou de résoudre une équation, soit algébriquement, soit graphiquement, en utilisant une fonction numérique associée. Maurice signale que ses élèves sont *très scolaires* (ligne 111), ce qui peut expliquer leur désappointement lors de la réalisation de ce travail. Maurice ne semble pas très à l'aise non

plus, il semble déstabilisé par rapport à sa posture habituelle, comme il l'indique, ligne 123, par « *Je ne sais pas comment Annabelle a géré ça, mais moi, j'ai été complètement dépassé* ».
Relativement au topos de l'élève, nous considérons que la phase de recherche en groupes lui appartient complètement, l'enseignant n'intervenant pratiquement pas dans les groupes, comme il le signale ici (cf. A27) :

> 116. C : Ils t'ont quand même posé des questions pendant que tu tournais, pendant la recherche ? Ils faisaient leur truc et ils ne s'occupaient pas de toi ?
> 117. Ma : Oui [ils ne s'occupaient pas de moi].

Maurice mentionne cependant qu'un groupe, le groupe 2-Ma, lui a demandé de l'aide pendant la recherche. Suit la transcription de leur échange, reconstituée par Maurice (cf. A27) :

> 97. Ma : […] Il y en a qui m'ont appelé et qui m'ont dit : « Monsieur, on ne s'en sort pas ». Je leur ai demandé : « Quelle est votre idée pour le moment ? ». Ils m'ont dit : « On essaie de trouver celles qui ont les mêmes solutions ». Alors, je lui ai dit : « Réfléchis. Est-ce que tu crois que c'est ça l'objectif ? ». J'ai essayé de les faire changer d'idée. Ça ne me paraissait pas très réalisable…
> 98. C : Oui, parce que finalement, il n'y en avait sans doute que deux : $1000x = 0$ et $-1000x = 0$ qui avaient les mêmes solutions …
> 99. Ma : Je leur ai dit : « Mais vous trouvez que c'est évident de chercher ça ? Mais alors, vous allez les prendre toutes et vous allez toutes les résoudre pour savoir ? ». Alors ça les a fait réfléchir … Je leur ai demandé : « À votre avis, ça pourrait vous servir à quoi de savoir qu'elles ont les mêmes solutions ? ». Alors, ils sont partis sur autre chose.

Maurice indique ici comment il a modifié le milieu pour ce groupe, en interagissant avec les élèves pour les orienter vers un classement plus pertinent des équations. Mais il précise que c'est le seul groupe pour lequel il a influencé la constitution de la classification, les autres groupes ayant opéré seuls.
Pour conclure sur cette première séance de Maurice, nous relevons un *événement didactique*, au sens de Bronner (2006) ayant un caractère *prévisible* et *problématique*, il s'agit de la difficulté particulière de compréhension des « équations égales à zéro ». En effet, nous relevons pour les affiches1-Ma et 2-Ma que la classification des équations est parasitée par la prise en compte de ce facteur. Les élèves du groupe 1 ont en effet utilisé la technique τ'_{13} « *Grouper les équations selon que leur second membre est nul ou non* » comme technique première pour constituer leur classement. L'affiche produite montre qu'un premier tri des équations est effectué en considérant les équations dont un des deux membres est nul (dites « égales à zéro » par les élèves) à zéro, puis ce premier tri étant fait, les équations sont séparées selon leur degré. Les élèves du groupe 2, quant à eux, procèdent différemment : comme premier critère de tri, ils retiennent le nombre de solutions des équations et séparent les équations ayant une seule solution des équations en ayant plusieurs. Cependant, ils ressentent la nécessité d'ajouter une classe supplémentaire, celle « des équations égales à zéro » qui admettent pourtant soit une, soit plusieurs solutions.
Nous nommons cet événement, ***l'avènement de la classe des équations égales à zéro***, et nous le qualifions de *prévisible* et de *problématique*. Expliquons dans un premier temps le caractère de *prévisibilité*. Dans le programme de la classe de troisième du collège, nous lisons dans le secteur *Équations et inéquations du premier degré*, l'étude du thème « *Résoudre une équation mise sous la forme A(x).B(x) = 0, où A(x) et B(x) sont deux expressions du premier*

degré de la même variable x » (MEN, 2008a). Nous retrouvons l'équivalent de cet item dans le programme de seconde en vigueur dans le secteur *Équations, repris,* au sens de Larguier, sous un intitulé légèrement différent : « *Résoudre une équation se ramenant au premier degré* » (MEN, 2009a). Ce type de tâches est associé à la technologie pouvant s'énoncer : « $A \times B = 0 \Leftrightarrow A = 0 \; ou \; B = 0$ » où A et B sont des nombres indéterminés.
La résolution des équations polynomiales de degré 2 apparaît donc comme un type de tâches découvert au collège et repris au lycée et nous pouvons voir une contrainte de niveau « secteur » de l'échelle de codétermination didactique, dans les programmes. Cette demande institutionnelle forte est, semble-t-il, prise en compte par les professeurs dans leur enseignement, ce que corroborent les deux affiches produites 1-Ma et 2-Ma. Pour appliquer la règle ci-dessus dans le cas d'expressions algébriques, les élèves doivent vérifier deux conditions : l'un des membres est un produit de facteurs et l'autre membre est nul. Or, l'intitulé que les élèves de Maurice ont donné à leur groupement est « équations égales à zéro ». Cette appellation montre que, des deux conditions, l'une est plus prégnante que l'autre, comme nous pouvons le vérifier en listant quelques équations de cette catégorie pour le groupe de l'affiche 1-Ma ($x^2 - 8x + 15 = 0$, $(3 - 4x)(2x - 1) = 0$, $(3 - 4x) - (2x - 1) = 0$ et $-1000x = 0$). Ces exemples d'équations nous montrent que la condition « produit de facteurs » n'est pas toujours respectée.
En revanche, pour le groupe de l'affiche 2-Ma, la catégorie « équations égales à zéro » contient uniquement : $3x\left(x + \sqrt{5}\right) = 0$, $-1000x = 0$ et $1000x = 0$. Dans ce cas, les deux conditions sont respectées mais la prégnance de l'apprentissage du repérage des équations de la forme « produit nul » est visible et cette catégorie ne s'intègre pas dans celle des équations du premier ou du second degré. Les savoirs sur les équations ne s'imbriquent pas les uns dans les autres, ils se juxtaposent. Ainsi ce savoir est-il *problématique* dans le sens où il relève d'un cas typique d'un double obstacle, à la fois didactique et épistémologique. Nous le qualifions de didactique en raison de la prégnance du second membre nul, liée à présentation didactique de la technologie associée ($Si \; A \; \times B = 0 \; alors \; A = 0 \; ou \; B = 0$). Et il est également épistémologique, en ce sens où s'opère une transition arithmétique-algèbre. En effet, l'apprentissage de la technologie débute en l'appliquant à des nombres indéterminés (*A* et *B*) pour passer à une utilisation à des expressions algébriques (*A(x)* et *B(x)*). Les savoirs sont découpés, *élémentarisés* (Chevallard, 1992b) et les élèves vont devoir passer cet obstacle pour *unifier* leur représentation des équations.

11.1.3 Classe d'Alex : séance 1.1

Comme pour les précédentes, nous analysons la première séance d'Alex par la méthodologie des quatre composantes de Bronner. Rappelons qu'Alex a choisi de réaliser cette séance en demi-classe (cf. constitution de TP3, § 10.5.1). Aussi nous trouvons-nous deux analyses, dans cette section et dans la suivante. Les séances ont été filmées et sont transcrites en annexes A29 et A30.

11.1.3.1 Étape E_1

Un premier découpage en phases indique les fonctions de celle-ci ainsi que le temps passé dans le tableau ci-dessous (cf. annexe A29).

Phase		Fonction	Forme du travail	Temps	Lignes de transcription
Phase 1		Présentation de la situation n°1 Passation des consignes	Collectif	0 :00 à 2 :00 **Durée : 2min**	1
Phase 2		Phase de recherche	Groupes de 3 à 4 élèves (4 groupes)	2 :00 à 9 :46 **Durée : 7min46s**	2 à 10
Phase 3		Réalisation des affiches		9 :46 à 22 :12 **Durée : 12min26s**	11 à 21
Phase 4		Restitution du travail	Collectif avec un rapporteur par affiche au tableau	22 :12 à 44 :48 **Durée totale : 22min36s**	22 à 170
	Sous phase 4.1	Échanges sur l'affiche 1-1-Al		22 :12 à 29 :35 **Durée : 7min23s**	22 à 82
	Sous phase 4.2	Échanges sur l'affiche 2-1-Al		29 :35 à 35 :36 **Durée : 6min01s**	83 à 111
	Sous phase 4.3	Échanges sur l'affiche 3-Al		35 :36 à 39 :25 **Durée : 3min49s**	112 à 139
	Sous-phase 4.4	Échanges sur l'affiche 4-1-Al		39 :25 à 44 :48 **Durée : 5min23s**	140 à 170
Phase 5		Débat Institutionnalisation	Collectif	44 :48 à 49 :51 **Durée : 5min03s**	171 à 203

Tableau 140 : Les différentes phases de la séance 1-1 d'Alex

11.1.3.2 Étape E_2

Nous décrivons dans cette étape les praxéologies mathématiques observées.

Types de tâches observés

Dès le début de la séance, le professeur Alex donne, par une consigne orale, le type de tâches que les élèves ont à accomplir de la façon suivante (ligne 1, annexe A29 :

> Vous allez recevoir une enveloppe avec à l'intérieur 28 petits bristols dessus avec 28 équations différentes du premier ou du deuxième degré. C'est ce sur quoi je vous ai fait travailler tout à l'heure. Et je demande, par groupe, de les classer. Chacun des groupes aura un rapporteur qui viendra expliciter le classement de ces équations. D'accord ? Donc vous choisissez par groupe un rapporteur … On va vous donner une grosse feuille sur laquelle vous allez expliciter votre choix, je vais vous donner un crayon pour pouvoir écrire dessus … Vous retournez vos tables et vous commencez à travailler… Commencez par étaler toutes vos équations …

Ce type de tâches est conforme à ce qu'Alex a prévu dans la trame projetée TP$_3$. Il correspond à T$_I$, *classer des équations selon des critères à déterminer.*
Une remarque peut être faite dès à présent, sur une précision d'Alex à propos de la tâche à effectuer. En effet, à la sixième minute du début de la séance, celui-ci précise à l'ensemble des élèves le sens du verbe classer (ligne 6, A29) :

> Je vous rappelle que le but du jeu, c'est quand même de déterminer les catégories, telles qu'à la fin, vous disiez : « dans cette catégorie-là, on a mis ce type d'équations, deuxième catégorie, on a une autre nature d'équations, troisième catégorie, … ainsi de suite … ». D'accord ? Et ensuite, justifiez pourquoi ça fait une catégorie.

C'est le sens (1) du verbe classer, tel que nous l'avons défini précédemment, qu'Alex indique ici, c'est-à-dire qu'il indique aux élèves qu'il attend une catégorisation des équations et non pas un ordonnancement de celles-ci. Cette précision va amener les élèves à concevoir des catégories d'équations et contrairement aux professeurs Annabelle et Maurice, aucune affiche ne présente un ordonnancement de celles-ci comme nous allons le constater dans l'analyse qui suit.

Analyse a posteriori des affiches
Les élèves ont travaillé en quatre groupes de 3 à 4 élèves chacun. Les affiches produites 1-1-Al à 4-1-An sont examinées ainsi que les commentaires des rapporteurs lors de la mise en commun. (cf. A29).

- **Analyse de l'affiche 1-1-Al (cf. annexe A31)**

Le classement a été réalisé selon le sens (1) du verbe classer : réaliser des catégories.

Transcription de l'affiche 1-1-Al		**Caractéristiques des groupements (point de vue du chercheur)**	
1er degré			
$x + a$; $x - a$; $a - x$	1 ; 6 ; 8	Gr1	Équations du premier degré de la forme $mx + p = q$ avec $m = \pm 1$.
$ax + b$; $ax - b$	7 ; 11 ; 14 ; 24	Gr2	Équations du premier degré de la forme $mx + p = qx + r$ avec $m \neq 1$.
$\frac{ax}{b} = c$	2 ; 26	Gr3	Équations du premier degré de la forme $mx = q$ avec m coefficient en écriture fractionnaire.
Les inclassables	5 ; 17 ; 23 ; 28	Gr4	Équations du premier degré comportant des coefficients irrationnels (5) ou dont le second membre est nul (23, 28). L'équation 17 est un produit nul de deux expressions du premier degré.
2nd degré			
Identités remarquables	3 ; 4 ; 9 ; 12 ; 19 ; 22	Gr5	Équations du second degré transformables par identités remarquables : 4, 9, 12, 19. Les équations 3 et 22 ne le sont pas. Elles sont de la forme : $x^2 - 8x + 15 = a$. ($a = 15$ ou 0). L'équation 19 est de la même forme avec $a = -1$.
$x^2 = c$	13 ; 18 ; 20	Gr6	Équations du second degré de la forme $x^2 = c$.
Quotients	10 ; 25	Gr7	Équations du second degré de la forme $ax^2 = c$ avec a coefficient en écriture fractionnaire.
Les inclassables	15 ; 16 ; 21 ; 27	Gr8	Équations du second degré dont les coefficients sont des irrationnels (16, 27) ou de forme non identifiée par les élèves (15 : $3 = 2 - x^2$ et 21 : $x^2 + 6x = 0$).

Tableau 141 : Caractérisation des groupements de l'affiche 1-1-Al

Une première observation du tableau ci-dessus et les premières paroles du rapporteur du groupe, « *On a fait, en fait, deux grosses catégories, le premier degré et le second degré et dans ces catégories, on en a fait des plus petites* » (ligne 23), permettent de déterminer que la principale technique utilisée pour réaliser cette tâche est la technique τ_{12}, *grouper les équations polynomiales du premier degré d'une part et les équations du second degré d'autre part*.

Pour former les sous-catégories, nous relevons les techniques utilisées suivantes :

- τ_{16}, *grouper les équations selon qu'une résolution directe est possible ou qu'une transformation de l'équation est nécessaire à sa résolution* pour les groupements Gr1-2-3-5-6-7 *;*
- τ'_{14}, *grouper les équations du second degré selon qu'elles soient ou non des équations-identités*. Les élèves ont en effet créés une classe (Gr5) nommée « identités remarquables ».

Si nous considérons les trois premières sous-classes d'équations du premier degré, nous pouvons supposer que la technique τ_{16} a été utilisée. En effet, il semble que les élèves aient distingué des microtechniques de résolution de ces équations pour les trier :

- pour le groupement Gr1, les équations de la forme $\pm x + p = q$ sont résolues par transposition des nombres déterminés ou de l'inconnue (*al jabr* ou *al muqubala*, selon Al-Khawarizmi, Cf. §2.2.4) ;
- pour le groupement Gr2, les équations de la forme $mx + p = qx + q$ sont résolues par transposition de l'inconnue dans un membre et des nombres déterminés dans l'autre membre (*al muqabala*, ibid.) ;
- pour le groupement Gr3, les équations de la forme $\frac{ax}{b} = c$ sont résolues par simplification des coefficients en multipliant ou divisant les deux membres de l'équation (*al hatt*, ibid.) ;
- pour le groupement Gr6 (équations $x^2 = c$), une technique peut être de vérifier si $c > 0$ puis de déterminer les deux solutions de la forme $\sqrt{c}$ ou $-\sqrt{c}$;
- pour les équations du groupement Gr7, la technique précédente peut être utilisée après avoir simplifié les coefficients par division ou multiplication.

Un indice laisse penser que les élèves du groupe ont évoqué entre eux la résolution des équations pour les classer, il s'agit du passage (ligne 63) où le rapporteur Lucas, en évoquant le classement de l'équation 20 ($x^2 = (2{,}07)^2$), mentionne : « *si on enlève les carrés, ça fait x* = ... ». Bien qu'il ne termine pas sa phrase, ces propos semblent indiquer que la résolution des équations a fait partie des critères de catégorisation dans son groupe de travail.

L'environnement technologico-théorique associé à ces techniques comporte donc des connaissances de la notion de degré, des savoirs supposés de techniques de résolution des équations du premier et du second degré citées ci-dessus et également des connaissances sur les formules d'identités remarquables. La notion de degré d'un polynôme semble comprise, une seule erreur par rapport à ce critère existe, pour le classement de l'équation 17 qui n'est pas reconnue comme du second degré, alors qu'elle est un produit nul de deux expressions du premier degré. En ce qui concerne la classe nommée « identités remarquables » (Gr5), si les élèves de ce groupe citent correctement les quatre équations 4, 9, 12, 19 dont la forme se ramène à $(x + a)^2 = 0$ ou $(x + a)^2 = b^2$ ou $a^2x^2 - b^2 = 0$, ils ajoutent à leur classement deux équations qui ne sont pas des *équations-identités* ($x^2 - 8x + 15 = 15$ et $x^2 - 8x + 15 = 0$).

Il est clair que ces élèves sont capables de se détacher des signes « visibles » des équations, comme la nature des nombres en présence, pour réaliser leur classement. Par exemple, ils considèrent l'équation 1 ($1000 - x = 0$) et l'équation 6 ($\sqrt{2} + x = 3$) comme faisant partie d'un même groupement (Gr1). Leur classement se révèle opérationnel pour la résolution des équations, malgré quelques erreurs de classement et quelques équations non classées. Par exemple, le classement des équations 3 ($x^2 - 8x + 15 = 15$) et 22 ($x^2 - 8x + 15 = 0$) dans le groupe des « identités remarquables » (Gr5) présente une erreur : nous émettons l'hypothèse que l'équation 19($x^2 - 8x + 15 = -1$) représentant pour ces élèves un bon prototype cette catégorie, les deux équations citées ci-dessus sont alors perçues comme semblables. C'est ce que le rapporteur signifie par ces propos : « *En fait, la 19 et la 22, elles vont ensemble* » (ligne 57).

Pour conclure, remarquons que ce groupe s'attache à l'aspect *structural* des équations, au sens de Sfard, pour réaliser leur classification. Ils ont en effet donné des titres à leurs catégories indiquant la structure des équations classées (comme $x + a$, $a - x$, $ax + b$, $x^2 = c$…), ce qui montre que ces élèves les considèrent comme des objets dont on peut décrire la forme. De plus, le rapporteur du groupe fait allusion tout au long de son interrogation au tableau à ces formes génériques, montrant ainsi que ces dénominations n'ont pas été données a posteriori mais qu'elles ont réellement servi à constituer la classification. D'autre part, les sous-classes de la catégorie « 1^er^ degré » semblent avoir été conçues par rapport à leur technique de résolution, comme vu plus haut, ce qui laisse entendre que l'aspect *procédural* des équations, au sens de Sfard, a aussi été pris en compte.

- **Analyse de l'affiche 2-1-Al (cf. annexe A31)**

Le classement a été réalisé selon le sens (1) du verbe classer : réaliser des catégories.

Transcription de l'affiche 2-1-Al			**Caractéristiques des groupements (point de vue du chercheur)**
Catégorie 1	1^er^ degré	1 ; 2 ; 7 ; 8 ; 11 ; 14 ; 17 ; 23 ; 24 ; 26 ; 28	Équations du 1^er^ degré dont les coefficients sont des entiers (1, 8, 11, 14, 23, 28), des décimaux (26), des nombres en écriture fractionnaire (2, 24) ou le nombre pi (7). Une équation n'est pas du 1^er^ degré : l'équation produit n°17.
Catégorie 2	Identités remarquables	4 ; 9 ; 12 ; 21	Équations du 2^nd^ degré transformables directement par identités remarquables. Il manque la 19 et la 21 n'en est pas une.
Catégorie 3		5 ; 6 ; 16 ; 27	Équations 1^er^ ou 2^nd^ degré avec coefficients irrationnels sous forme de racines carrées.
Catégorie 4	2^nd^ degré	3 ; 10 ; 13 ; 15 ; 18 ; 19 ; 20 ; 22 ; 25	Équations du 2^nd^ degré de la forme : - $ax^2 = b$ (10, 13, 15, 18, 20, 25) - $ax^2 + bx + c = 0$ (3, 19, 22)

Tableau 142 : Caractérisation des groupements de l'affiche 2-1-Al

En analysant ce tableau, nous déterminons les trois techniques suivantes utilisées pour réaliser ce classement :

- la technique τ_{12}, *grouper les équations polynomiales du premier degré d'une part et les équations du second degré d'autre part* (catégories 1 et 4) ;

- la technique τ_{13}, *grouper les équations selon la nature des nombres déterminés* (catégorie 3) ;
- la technique τ'_{14}, *grouper les équations du second degré selon qu'elles soient ou non des équations-identités* (catégorie 2).

Quant à l'environnement technologico-théorique dont découlent ces techniques, la classification relève principalement de trois notions : celle de degré d'un polynôme, celle d'identité remarquable et enfin celle de la nature des différents types de nombres. La notion de degré d'un polynôme semble en voie d'acquisition, les équations sont convenablement positionnées dans les catégories « premier degré » et « second degré », sauf l'équation 17 qui est un produit de deux expressions du premier degré. Les élèves reconnaissent le second degré uniquement lorsque l'inconnue apparaît sous la forme x^2. Nous notons également la difficulté pour ces élèves de reconnaitre le degré d'une équation lorsque celle-ci comporte des irrationnels, sous forme de racines carrées. Dès le début de la recherche, ce groupe est confronté à cette difficulté, comme le rapportent leurs échanges (cf. ligne 9, A29) :

> E1 : Les racines, on les met où ? On fait un groupe ?
> E2 : Les racines, je sais pas où on les met…
> E3 : On les met dans le second degré ou pas ?
> E1 : Les racines, je ne sais vraiment pas où les mettre !

Relativement à la catégorie 3, les équations 5 ($\sqrt{2}x - 1 = 4 - \sqrt{3}x$) et 6 ($\sqrt{2} + x = 3$) ne sont pas identifiées comme étant du premier degré, ni les équations 16 ($\sqrt{3}x^2 = -2$) et 27 ($3x(x + \sqrt{5}) = 0$) comme étant du second degré. La présence des racines carrées bloque les élèves qui sont alors incapables de « voir » au-delà de ces signes. Par rapport à la typologie de Bronner sur les rapports personnels des élèves aux nombres réels (1997, Cf. §2.5), nous pouvons avancer que ces élèves ont une conception **CP** (carrés parfaits) ou **CF** (conceptions formelles) des racines carrées. En effet, il ne leur est pas possible de classer les équations comportant des racines dans le premier ou le second degré parce que les racines n'ont pas encore acquis le statut de nombre : ces équations ne peuvent alors être rangées au milieu de celles qui comportent des nombres déterminés entiers, décimaux ou rationnels. Au contraire, l'équation 7 ($\pi x + 3 = 4$), comportant l'irrationnel π, ne bloque pas les élèves qui reconnaissent l'équation comme étant du premier degré. Deux hypothèses peuvent être émises à ce propos : soit ce nombre fait partie de leur champ numérique acquis, étant donné qu'il est rencontré plus tôt dans la scolarité, au début des années collège, donc mieux accepté comme nombre, soit π est confondu avec la valeur décimale 3,14, ce qui correspondrait à une conception **CA** selon Bronner, où la différenciation entre la valeur exacte d'un nombre réel et ses valeurs approchées ne se fait pas.

La compréhension de la notion d'identité remarquable est, elle aussi, incomplète. Si quelques équations où l'on peut utiliser des identités ont bien été perçues, il semble que les critères utilisés ne soient pas fiables. En effet, les élèves reconnaissent l'équation 4 ($x^2 + 6x + 9 = 0$) comme faisant partie de cette catégorie mais y ajoutent l'équation 21 ($x^2 + 6x = 0$). De la même manière, l'équation 19 ($x^2 - 8x + 15 = -1$) n'est pas reconnue comme *équation-identité* et est placée dans la même catégorie que les équations 3 ($x^2 - 8x + 15 = 15$) et 22 ($x^2 - 8x + 15 = 0$).

Ces dernières remarques tendent à montrer que ces élèves aient une certaine conception p*seudo-structurale* des équations polynomiales, au sens de Sfard.

- **Analyse de l'affiche 1-1-Al (cf. annexe A31)**

Le classement a été réalisé selon le sens (1) du verbe classer : réaliser des catégories.

Transcription de l'affiche 3-1-Al			**Caractéristiques des groupements (point de vue du chercheur)**
Catégorie 1	$ax + b$	1 ; 8 ; 23	Équations de la forme $ax + b = 0$ avec coefficients entiers.
Catégorie 2	quotient	2 ; 10 ; 25 ; 26	Équations du premier et du second degré de la forme $ax = b$ ou $ax^2 = b$ avec coefficients en écriture fractionnaire.
Catégorie 3		6 ; 7 ; 9 ; 13 ; 16 ; 18	Équations du premier degré avec coefficients irrationnels (6 et 7) ou équations du second degré pouvant se ramener sous la forme $x^2 = a$.
Catégorie 4		12 ; 17 ; 27 ; 28	Équations « produit nul avec deux facteurs du premier degré » (17 et 27) ou équations du premier (28) ou du second degré (12) : toutes possèdent des parenthèses.
Catégorie 5		5 ; 11 ; 14 ; 15 ; 20 ; 24	Équations du premier degré (5, 11, 14, 24) de la forme $ax + b = cx + d$ ou équations du second degré (15, 20) pouvant se ramener sous la forme $x^2 = a$.
Catégorie 6		3 ; 4 ; 19 ; 21 ; 22	Équations du second degré de la forme $ax^2 + bx + c = d$ dont certaines sont transformables par des identités remarquables (4, 19), d'autres ont un facteur commun (3, 21). La 22 n'est pas résoluble avec les techniques évoquées ici.

Tableau 143 : Caractérisation des groupements de l'affiche 3-1-Al

Une première analyse de ce tableau montre des catégories confuses et difficiles à caractériser. Le rapporteur, lors de la mise en commun (cf. A29, lignes 112 à 139), n'apporte que très peu d'éléments pour expliciter les catégories formées. Pour réaliser ce classement, il semble que les élèves aient utilisé les techniques suivantes :

- la technique τ_{12}, *grouper les équations polynomiales du premier degré d'une part et les équations du second degré d'autre part* (catégories 1 et 6) ;

- la technique τ_{13}, *grouper les équations selon la nature des nombres déterminés* (catégories 2 et 3).

En revanche, les critères de constitution des catégories 4 et 5 sont difficilement interprétables. Peut-être la présence de parenthèses a-t-elle été le critère pour la catégorie 4, puisque toutes les équations sélectionnées en comportent. Pour la catégorie 5, le rapporteur explique (ligne 136, annexe A29) : « *C'est celle où il y a des x de chaque côté, en fait. Il y en a deux qui sont pas dedans* ». Nous pouvons interpréter que le rapporteur évoque les équations du premier degré (5, 11, 14, 24) de la forme $ax + b = cx + d$ par l'expression « *il y a des x de chaque côté* » et où deux équations se sont glissées par erreur, les équations 15 et 20 du second degré.
Le bloc technologico-théorique est par conséquent tout aussi difficile à identifier. Les élèves semblent s'appuyer sur la notion de degré, mais comme quatre catégories sur six comportent des équations de degré 1 et 2, leur savoir semble anecdotique et non opérationnel. Il est clair ici que d'autres facteurs entrent en jeu pour constituer les classements, facteurs liés à la forme extérieure des équations, ce qui nous permet d'avancer une conception *pseudo-structurale* des équations où prédomine l'emplacement de l'inconnue, dans l'un des deux membres ou dans

les deux, ou encore la présence de parenthèses ou de nombres déterminés sous forme d'écriture fractionnaire, de racines carrées, etc.
Les élèves sont fortement influencés par les ostensifs des équations : la catégorie 2 a été constituée en groupant toutes les équations de même forme spatiale « $\frac{\bullet}{\blacksquare} = \blacklozenge$ », la catégorie 3 est formée de toutes les équations qui comportent un radical et dans la catégorie 4 sont placées les équations comportant des parenthèses.

- **Analyse de l'affiche 4-1-Al (cf. annexe A31)**

Le classement a été réalisé selon le sens (1) du verbe classer : réaliser des catégories.

Transcription de l'affiche 4-1-Al			**Caractéristiques des groupements (point de vue du chercheur)**
Catégorie 1	Identités remarquables 2nd degré	2 ; 4 ; 12 ; 22	Équation du 1er degré (2). Équations du 2nd degré dont une n'est pas transformable par identité remarquable (22).
Catégorie 2	Produit	17 ; 23 ; 27 ; 28	Équations sous forme d'un produit nul du 1er degré (23) ou du 2nd degré (23, 27). Erreur sur la 28 qui est une somme du 1er degré.
Catégorie 3	Division	2 ; 24 ; 26	Équations du 1er degré avec nombres déterminés sous forme fractionnaire.
Catégorie 4	2nd degré	3 ; 9 ; 10 ; 13 ; 15 ; 16 ; 18 ; 19 ; 20 ; 21 ; 25	Équations du 2nd degré du type : - $ax^2 + bx + c = 0$ (3, 19, 21) - $ax^2 = b$ (9, 10, 13, 15, 16, 18, 20, 25) Les équations 9 et 19 se résolvent en utilisant une identité remarquable.
Catégorie 5	1er degré	1 ; 5 ; 6 ; 7 ; 8 ; 11 ; 14	Équations du 1er degré avec nombres déterminés entiers (1, 8, 11, 14) ou irrationnels (5, 6, 7).

Tableau 144 : Caractérisation des groupements de l'affiche 4-1-Al

L'analyse du tableau montre que les techniques utilisées sont :
- la technique τ_{12}, *grouper les équations polynomiales du premier degré d'une part et les équations du second degré d'autre part* (catégories 4 et 5) ;
- la technique τ'_{14}, *grouper les équations du second degré selon qu'elles soient ou non des équations-identités* (catégorie 1) ;
- partiellement la technique τ_{11}, *grouper les équations somme ou différence d'une part et les équations produit ou quotient d'autre part* pour les catégories 2 et 3. En effet, si nous relevons une catégorie « produit » et « division », nous ne relevons pas de catégorie « somme » ;
- partiellement la technique τ_{13}, *grouper les équations selon la nature des nombres déterminés* (catégorie 3).

Pour cette dernière technique, nous affirmons qu'elle n'a été que « partiellement » employée en raison de sa seule utilisation relative aux écritures fractionnaires des nombres déterminés des équations. En outre, les équations du premier degré comportant des irrationnels ne sont pas considérées dans une catégorie différente des équations du premier degré comportant des coefficients entiers (catégorie 5).
Le bloc technologico-théorique sous-jacent à ces différentes techniques est composé des notions de degré, de nature et forme d'une expression algébrique (somme, produit ou quotient), d'identité remarquable et enfin d'ensemble de nombres. Néanmoins, ces

connaissances sont encore en cours de construction, comme en témoignent les erreurs relevées dans le classement. Concernant la notion de degré, la première catégorie formée était au départ intitulée : « Identités remarquables. 1er degré » (cf. figure 96 ci-dessus). C'est au cours de la mise en commun que le rapporteur corrige « 1er degré » en « 2nd degré », comme le montre cet extrait (cf. annexe A29) :

> 140. Mathilda : Alors, la première catégorie, c'est les identités remarquables, en fait c'est le second degré.
> 141. Al : Alors, pourquoi il y a écrit premier, alors ?
> 142. Mathilda : Parce que c'est une erreur …
> 143. Al : Alors corrige (*Mathilda corrige sur l'affiche en vert*) et enlève le s à degré …

Il semble que le rapporteur ait profité du débat sur les affiches précédentes pour rectifier cette erreur. La notion d'identité remarquable pose problème par rapport à la notion de degré : ces élèves ne paraissent pas réussir à intégrer facilement les équations transformables par identités dans les équations du premier ou du second degré. Cette notion ne semble d'ailleurs pas non plus solidement acquise : la catégorie 1 comporte deux équations (2 et 22) qui ne résolvent pas à l'aide d'identités et les équations 9 et 19 ont été omises. Si l'équation 2 ($\frac{2x}{7} = 0$) semble y avoir été placée par erreur de recopie (ligne 160, A29, le rapporteur précise : « *Non, elle n'est que dans les quotients* »), en revanche l'équation 22 ($x^2 - 8x + 15 = 0$) ne devrait pas figurer dans cette catégorie. Quant à la forme et à la nature des expressions algébriques, les élèves confondent somme et produit, comme l'atteste la catégorie 2 intitulée « produit », où se côtoient les équations 27 ($3x\left(x + \sqrt{5}\right) = 0$) et 28 ($7(x + 2) + 4(x - 3) = 0$).

Relativement à la nature des nombres, les catégories constituées 3 et 5 nous permettent d'avancer deux points quant aux conceptions de ce groupe d'élèves. La catégorie 3 dénommée « division » comporte les trois équations du premier degré $\frac{2x}{7} = 0$, $\frac{10x}{0{,}001} = 4$ et $3x - \frac{1}{4} = \frac{x}{4} - 2$, alors que les équations 5 ($\sqrt{2}x - 1 = 4 - \sqrt{3}x$) et 6 ($\sqrt{2} + x = 3$) sont situées dans la catégorie 5 des « équations du premier degré ». Ces classements indiquent que les nombres en écriture fractionnaire n'ont pas encore acquis complètement le statut de nombre, les élèves semblent rester à une conception de type **CP** ou **CA** au sens de la typologie de Bronner (1997, Cf. §2.5) : les quotients d'entiers nécessitent qu'on y effectue une *division* (vocable utilisé ici) pour prendre le sens de nombre (par exemple, $\frac{1}{4}$ existe quand on l'écrit 0,25 après avoir effectué la division de 1 par 4). En revanche, les élèves ne constituent pas de catégorie particulière pour les équations du premier degré comportant des coefficients irrationnels, celles-ci étant intégrées dans la même catégorie que les équations du premier degré ayant des coefficients entiers.

D'autre part, les équations 10 ($\frac{x^2}{27} = 0{,}01$) et 25 ($\frac{x^2}{7} = 21$) ont été situées dans la catégorie 4 des « équations du second degré ». Pour ces élèves, ce qui est prédominant ici n'est plus la *division*, mais le degré 2 de l'inconnue.

Ainsi, nous concluons que, devant une équation comme $\frac{2x}{7} = 0$, les élèves « voient » une structure de la forme « $\frac{\bullet}{\blacksquare} = \blacklozenge$ », alors que face à une équation comme $\frac{x^2}{7} = 21$, ils l'interprètent sous la forme : « $ax^2 = b$ ». Ces élèves sont capables de s'attacher à des critères comme rechercher le degré et considérer la forme et la nature des équations, bien qu'ils associent des équations en considérant leur forme visible extérieure (comme la présence d'un trait de fraction).

Pour conclure, les élèves restent davantage sur un aspect *structural* des équations, au sens de Sfard. Les propos du rapporteur semblent l'indiquer dans cet extrait (cf. A29) où le professeur Alex tente de faire préciser la catégorie 4 :

> 163. Al : [...] Alors ça, pour vous, la 10 ($\frac{x^2}{27} = 0{,}01$), c'est de la même nature que la 21 ($x^2 + 6x = 0$) ? Par exemple je peux résoudre cette équation-là (*la 10*) avec le même théorème que cette équation-là (*la 21*) ? C'est ça, ce que vous affirmez finalement…
> 164. Mathilda : Non, on affirme juste que c'est du second degré.
> 165. Al : Vous affirmez juste que c'est du second degré … [...] C'est du second degré, on est bien d'accord !

Le rapporteur s'en tient à la structure *statique*, *instantanée et intégrative* d'une équation du second degré et ne cherche pas à voir l'aspect procédural, *dynamique, séquentiel et détaillé*[160] (Sfard, 1991) vers lequel le professeur essaie de l'engager, en tentant de le lancer sur la résolution des équations mentionnées.

Synthèse de l'analyse des quatre affiches 1-1-Al à 4-1-Al

Une synthèse des techniques utilisées dans cette séance pour réaliser le classement des équations est effectuée dans le tableau ci-dessous :

	Tâche T_I : classer les équations selon des critères à déterminer
Sens (1) du verbe classer	***Techniques apparues qui ne demandent pas de résoudre les équations (même partiellement) avant les groupements***
	τ_{11} : Grouper les équations comme somme ou produit. τ_{12} : Grouper les équations selon le premier ou le second degré. τ_{13} : Grouper les équations selon la nature des nombres déterminés. τ'_{14} : Grouper les équations du second degré selon qu'elles soient ou non des équations-identités.
	Techniques qui demandent de résoudre les équations (à la main ou mentalement) entièrement ou partiellement avant les groupements
	τ_{16} : Grouper les équations selon une résolution directe ou non.

Tableau 145 : Synthèse des techniques utilisées pour la séance 1-1 de la classe d'Alex

Les techniques mises en œuvre dans cette classe sont conformes à celles qui avaient été déterminées a priori, sauf la technique τ'_{14} qui n'avait pas été envisagée. Suit un tableau qui résume par affiche, les analyses précédentes.

[160] Extrait et traduit de la citation : Whereas the structural conception is static, instantaneous, and integrative, the procedural is dynamic, sequential, and detailed. (Sfard, 1991, p.4)

Numéro de l'affiche		**1-1-Al**	**2-1-Al**	**3-1-Al**	**4-1-Al**
Sens du verbe classer		Former des classes (1)	Former des classes (1)	Former des classes (1)	Former des classes (1)
Type de tâches T_I ou T_R		T_I	T_I	T_I	T_I
Techniques[161]		τ_{12}, (τ'_{14}, τ_{16})	τ_{12}, τ_{13}, τ'_{14}	τ_{12}, τ_{13}	(τ_{11}, τ_{13}), τ_{12}, τ'_{14}
Nombre de classes formées		2 classes formées de 4 sous-classes	4	6	5
Environnement technologico-théorique	Notion de degré	×	×	×	×
	Identités remarquables	×	×		×
	Nature et forme d'une expr. algéb.	×			×
	Nature coef. équ.		×	×	×
	Techniques de résol. équ.1er degré	×			
	Techniques de résol. équ. 2nd degré	×			
Conceptions selon Sfard		Structurale Procédurale	Pseudo-structurale	Pseudo-structurale	Structurale

Tableau 146 : Résumé des praxéologies relatives aux types de tâches T_I et T_R (classe d'Alex, séance 1.1)

Une première analyse des deux tableaux ci-dessus montre que :
- les quatre groupes ont compris le verbe classer dans le sens (1) « former des classes » ;
- les quatre groupes ont effectué la tâche T_I ;
- les quatre groupes ont utilisé la technique τ_{12}, *grouper les équations polynomiales du premier degré d'une part et les équations du second degré d'autre part*, et trois groupes ont utilisé les techniques τ_{13}, *grouper les équations selon la nature des nombres déterminés* et τ'_{14}, *grouper les équations selon qu'elles soient ou non des équations-identités* ;
- dans le bloc *logos* sur lequel les élèves appuient leurs techniques, on retrouve 3 fois la nature des nombres déterminés des équations, 3 fois la notion d'identité remarquable et 4 fois la notion de degré.

Rappelons que le professeur Alex a lui-même précisé le sens du verbe classer comme le sens à utiliser dans la tâche de classement et qu'il a choisi de donner le type de tâches T_I à réaliser, insistant auprès des élèves pour qu'ils constituent eux-mêmes leurs critères de classement. Ces consignes expliquent pourquoi les élèves se sont tous engagés de cette façon dans leur travail.

D'autre part, nous constatons que l'aspect *procédural* des équations n'est que peu apparu, ce qui ne signifie pas qu'il ait été complètement absent des réflexions ou des raisonnements des élèves, mais plutôt qu'aucun indice de sa présence n'a été trouvé. De ce fait, il semble que les élèves se soient peu engagés dans la résolution des équations.

Pour finir, résumons les critères rencontrés pour réaliser la classification des équations : premier ou second degré, nature des nombres déterminés des équations, nature et forme d'une expression algébrique (produit, quotient…), reconnaissance d'identités remarquables, microtechniques de résolution différentes pour classer les équations du premier degré, présence ou non de parenthèses, présence de l'inconnue dans les deux membres de l'équation ou non.

[161] Les techniques indiquées entre parenthèses apparaissent de façon minoritaire

11.1.3.3 Étape E_3

Rappelons que nous décrivons ici l'organisation didactique en partant des phases déterminées en étape E_1, selon la méthodologie annoncée : les évolutions du milieu, du contrat, du temps didactique, des topos élève et professeur sont ici analysés.

Phase 1 : Présentation de la situation n°1. Passation des consignes.

Cette première phase, très courte (2 minutes) consiste à entrer dans la situation en mettant en place le contexte et les premiers éléments du milieu. Le professeur Alex a prévenu les élèves qu'ils travailleraient en groupes de 3 à 4 élèves, ainsi la mise en route est-elle rapide. Après avoir effectué un bref *tissage* (Bucheton, 2004) avec la séance précédente, précisant en ligne 1 : « *C'est ce sur quoi je vous ai fait travailler tout à l'heure* », Alex précise le type de tâches à réaliser en ces termes : « *Je demande, par groupe, de les classer [les 28 équations différentes du premier ou du deuxième degré.* » Il reste dans le contrat établi lors de la constitution de la trame projetée (cf. TP3, §10.5.1) où le type de tâches T_I : « *classer les équations selon des critères à déterminer* » a été décidé. Dans le milieu mis en place, nous relevons des éléments matériels constitués des cartons sur lesquels sont inscrites les équations et des affiches servant de supports aux classements, des éléments organisationnels avec le travail en groupes et enfin mathématiques avec la précision d'Alex de travailler sur des *équations du premier ou du deuxième degré*. Alex explicite l'organisation didactique, ajoutant qu'une tâche de justification fera suite à la tâche de classification : *« Chacun des groupes aura un rapporteur qui viendra expliciter le classement de ces équations. […] On va vous donner une grosse feuille sur laquelle vous allez expliciter votre choix. »* Nous notons l'insistance d'Alex sur l'émergence de critères de classement des équations. Pour cette phase, le topos du professeur est la donnée d'un contrat clair et celui des élèves comporte la compréhension de la tâche et de l'organisation du travail, la désignation d'un rapporteur et l'étalement des équations sur la table (« *Commencez par étaler toutes vos équations* », ligne 1).

Phase 2 : Phase de recherche

La phase 2 débute dès la 2^{e} minute de la séance et dure 7 minutes. Sa fonction est un travail de recherche en groupes de 3-4 élèves.

Sous-phase 2.1 : Dévolution de la tâche

Dès la mise au travail, la consigne est interrogée par un élève : « *il faut les classer comment* » (ligne 2), montrant que la tâche commence à prendre sens et qu'il se sent responsable de son accomplissement. La réponse d'Alex, ci-dessous, lui précise qu'il doit rechercher lui-même des critères de catégorisation :

> 2. **02 : 38** E : Monsieur, il faut les classer comment ?
> 3. Al : Il n'est pas question de les classer de la numéro 1 à la numéro 28, hein ? (*Rires dans la classe*). Vous les classez selon vos critères à vous … Vous les classez en fonctions de critères que vous, vous décidez être importants.

Remarquons que l'enseignant utilise l'humour dans sa réponse, cette posture incite à un climat de travail détendu. Nous découpons la phase 2 en deux sous-phases 2.1 et 2.2 qui correspondent aux moments précédant et suivant l'intervention d'Alex à la 6e minute du début de la séance, lorsqu'il précise le sens du verbe classer, comme suit :

> 6. **06 : 02** Al : Je vous rappelle que le but du jeu, c'est quand même de déterminer les catégories, telles qu'à la fin, vous disiez : « dans cette catégorie-là, on a mis ce type d'équations, deuxième catégorie, on a une autre nature d'équations, troisième catégorie, … ainsi de suite … ». D'accord ? Et ensuite, justifiez pourquoi ça fait une catégorie.

Alex indique de cette façon que « classer » doit être compris dans le sens de « créer des catégories » et non pas « ordonner ». C'est pour cette raison qu'aucun groupe ne comprend ce verbe dans son second sens, et contrairement aux classes des professeurs Annabelle et Maurice, aucune affiche n'est conçue en ordonnant les équations. D'autre part, Alex utilise à plusieurs reprises des termes comme *catégorie*, *type, nature* d'équations : l'insistance du professeur favorise l'aspect structural des équations plutôt que leur aspect structural.

Sous-phase 2.2 : Recherche de critères

La phase 2.2 consiste en la recherche de critères de catégorisation des équations. Le passage de la caméra dans les différents groupes d'élèves montre que cette recherche est située entièrement dans le topos de l'élève, le professeur n'intervenant que très peu dans les groupes. Durant cette phase, le milieu est enrichi de notions mathématiques comme les notions de structure des équations du premier degré (ligne 8 : « *là, c'est a + x et là, c'est a – x…* »), de racines carrées (ligne 8 : « *Les racines, on les met où ? On fait un groupe ?* »). Les élèves recherchent des critères de groupement des équations, se basant principalement sur l'aspect structural de celles-ci, comme le montre par exemple cette réflexion d'une élève : « *toutes celles qui sont égales à zéro* » (ligne 7) ou encore : « *Alors on sépare en deux : second degré et après premier degré* » (ligne 4). Les quelques commentaires d'élèves glanés ne comportent pas de réflexion sur l'aspect procédural des équations, ce qui ne veut pas dire que cet aspect n'ait pas été pris en considération, mais l'analyse des affiches (cf. étape 2) laisse bien apparaitre que l'aspect structural a été privilégié.

Phase 3 : Suite de la phase de recherche et réalisation des affiches.

La phase 3 débute à la 10e minute de la séance par une intervention d'Alex qui reprécise le contrat de cette nouvelle phase : constituer les affiches. Ce contrat demande également qu'une argumentation soit préparée à l'intérieur de chaque groupe pour expliciter la création des classes, comme Alex le spécifie : « *Je vous rappelle aussi, quand le rapporteur va venir au tableau, qu'il doit justifier pourquoi la catégorie une telle a été créée* » (ligne 12).

Le topos des élèves contient donc la préparation d'une argumentation pour justifier le classement des équations. Ce nouveau contrat fait évoluer le milieu qui s'enrichit d'une verbalisation intra-groupes des critères constitués.

La panne de la caméra fixe n'a pas permis de filmer la réalisation de l'affiche d'un des groupes. En revanche la caméra mobile donne de saisir quelques instants de la constitution des affiches, durant lesquels le professeur passe de groupe en groupe pour s'assurer de l'avancement du travail : il contrôle ainsi les *dimensions spatio-temporelles* (Bucheton, 2004), et en particulier le *temps des horloges* pour avoir suffisamment de temps pour la phase de restitution. Il précise, groupe après groupe, le contrat de justification des critères par des paroles qu'il répète, comme : « *Tu dois être capable d'expliciter toutes tes catégories* ». Durant cette troisième phase, les élèves continuent à peaufiner leurs critères de classement en même temps qu'ils distribuent les cartons contenant les équations dans les catégories formées. Par exemple, dans le groupe de Jean-Stéphane (cf. affiche 3-1-Al, annexe A29), les échanges suivants sont entendus :

> 15. E : Ah, mais celle-là (*en montrant l'équation 20 :* $(x^2 = (2{,}07)^2)$ *de la catégorie 5 constituée)*, elle est toute simple ! Ça fait $x = 2{,}07$ … Je ne l'aurais pas mise là, parce que les autres ont des x des deux côtés (*il montre la 24 (*$3x - \frac{1}{4} = \frac{x}{4} - 2$*) et la 14 (*$3x - 5 = 3 - 10x$*)*).

Cet extrait du verbatim montre plusieurs points, en particulier la bonne dévolution de la tâche et l'importance du topos de l'élève. Nous notons également un critère de classification, « mettre ensemble les équations comportant l'inconnue dans les deux membres » et la discussion sur la pertinence d'y inclure l'équation $x^2 = (2{,}07)^2$. Cette interrogation n'a, semble-t-il, pas abouti puisque l'affiche 3-1-Al contient cette même catégorie.

Phase 4 : Restitution du travail

Cette phase consiste en la mise en commun des différentes catégorisations déterminées dans les groupes. Elle débute à la 23e minute de la séance et dure une vingtaine de minutes. Une fois les quatre affiches accrochées au tableau, Alex appelle successivement les quatre rapporteurs, ce qui correspond aux sous-phases 4.1 à 4.4.

Dans cette phase, le milieu est augmenté des interactions entre le rapporteur du groupe et le professeur. Nous notons que le professeur instaure un dialogue privilégié avec les quatre rapporteurs, tour à tour, les autres élèves de la classe n'étant que peu invités à participer au débat. Le topos de l'élève rapporteur est donc très différent de celui des autres élèves de la classe, le premier étant chargé de caractériser les classes formées, alors que les seconds doivent simplement écouter, avec un topos réduit. Le topos du professeur a une place importante : Alex prend à sa charge de valider ou d'invalider les classements et le contrat qu'il instaure est d'apporter une sorte de correction commentée des classements proposés. Du début à la fin de cette phase, Alex mène nettement le débat, il fait partie du milieu et y apporte des connaissances mathématiques, comme nous allons le voir en détail dans l'analyse des sous-phases.

Sous-phase 4.1 : Échanges sur l'affiche 1-1-Al

La sous-phase 4.1 dure 7,5 minutes. Dans cette sous-phase, 61 échanges sont dénombrés : le rapporteur Lucas intervient 27 fois, le professeur 32 fois et d'autres élèves 2 fois seulement. Ce décompte permet de constater qu'Alex instaure une relation presque exclusive avec le rapporteur.

Lucas présente les différentes classifications qui sont examinées au fur et à mesure par Alex. Comme déjà vu dans l'étape E_2, les formulations de Lucas indiquent qu'il se base essentiellement sur l'aspect *structural* des équations pour justifier les classes formées. Nous relevons en effet :

- à la ligne 23, « *On a fait, en fait, deux grosses catégories, le premier degré et le second degré* » et « *on a mis x + a et x – a* » ;
- à la ligne 27, « *on a trouvé ax + b et ax - b* » ;

- à la ligne 43, « *il y a les « ax divisé par b »* ;
- à la ligne 49, « *Dans le second degré, on a fait celle avec des identités remarquables* » ;
- à la ligne 61, « *Ensuite, il y a* $x^2 = c$ » ;
- à la ligne 67, « *Et après, celle avec les quotients* ».

Au fil de l'énumération des classes, l'attitude d'Alex évolue. Au départ, il se contente de demander confirmation d'un classement : « *Oui, là, c'est bien ax – b avec a égal 1/4. C'est bien ce que tu voulais dire ou pas ?* » (ligne 32), ou, par des gestes d'*étayage*, il amène Lucas à rectifier une erreur, comme dans ce passage :

> 51. Lucas : la 22 ($x^2 - 8x + 15 = 0$)
> 52. Al : la 22, c'est une identité remarquable ?
> 53. Lucas : Ben, euh … non !
> 54. Al : Il y a un os dans le potage, là !
> 55. Lucas : Oui.

Ensuite, l'attitude d'Alex change, il pousse l'élève rapporteur, une première fois, vers l'aspect *procédural* des équations, afin de lui montrer que ses catégories ne sont pas disjointes. Il effectue ainsi une rétroaction sur les productions sur affiche, partie constituante du milieu :

> 67. Lucas : Et après, celles avec les quotients, la 25 ($\frac{x^2}{7} = 21$) et la 10 ($\frac{x^2}{27} = 0{,}01$).
> 68. Al : Elles ne sont pas de la même nature que $x^2 = c$?
> 69. Lucas : Si … Euh, non (*Soupir*)
> 70. Al : Vous pouvez l'aider, les autres… Il n'est pas tout seul. Vous avez travaillé ensemble ! Vous pensez que $\frac{x^2}{7} = 21$, c'est pas la même chose que $x^2 = c$? Étrange…, ça fait bien : $x^2 = 21\times7$ … donc le c, vous l'avez bien, là, non ? Et la 10 ?
> 71. Lucas : Ah, oui, c'est la même chose !

Puis, Alex montre une seconde fois l'aspect *procédural* des équations, en utilisant l'équation $3 = 2 - x^2$:

> 72. Al : […] Vous pensez que celles-là sont inclassables ? Par exemple, la 15 ($3 = 2 - x^2$) : vous transposez $-x^2$ de l'autre côté, ça fait x^2 et vous transposez 3 de l'autre côté, ça fait bien $x^2 = -1$ et je retrouve $x^2 = c$… au moins pour celle-là.

Enfin, en amenant le rapporteur sur l'aspect *procédural*, Alex lui permet d'enrichir le milieu en y ajoutant des connaissances sur les notions de distributivité, de développement et de factorisation. Nous remarquons que ce sont d'autres élèves que le rapporteur qui interviennent ici et ajoutent encore au milieu, par leur interaction avec le professeur, un lien entre l'aspect *structural* (notion de degré) et *procédural* (distributivité) des expressions algébriques.

> 72. Al : […] Pour celle-là, la 27 ($3x(x + \sqrt{5}) = 0$), ça c'est quoi ? C'est quoi tout le monde ?
> 73. E1 : c'est de la distributivité.
> 74. Al : Si je fais de la distributivité, je retombe sur quoi ?
> 75. E2 : sur du second degré.

Nous notons alors une avancée du temps didactique, par les interactions entre les élèves et le professeur, et qui ont permis de réunir les deux aspects, *structural* et *procédural*, des équations. Également, une autre avancée se produit pour la catégorisation des équations avec la conclusion d'Alex indiquant : « *Donc, là, dans tes catégories, il y a un tas de choses effectivement, mais l'essence même de toutes ces catégories, c'est qu'en fait, on peut en faire moins* ... » (ligne 82). La réunion des deux aspects des équations amène à la conclusion que certaines équations, d'apparence différente, sont de même nature que d'autres, par le biais d'une transformation, d'un développement ou d'une factorisation. C'est un point qui permettra par la suite d'entrer dans l'algorithmisation de la résolution des équations : reconnaître que des équations sont équivalentes par le biais de transformations est une aide à leur résolution.

Sous-phase 4.2 : Échanges sur l'affiche 2-1-Al

La sous-phase 4.2 dure 6 minutes et comporte 28 échanges : le rapporteur Mathilde intervient 11 fois, le professeur 15 fois et d'autres élèves 2 fois. Les interventions d'Alex sont beaucoup plus longues que celles de Mathilde, ce qui montre un topos important par rapport à celui de l'élève. Le professeur prend ici nettement la main et apporte lui-même des connaissances mathématiques dans le milieu. Celles apportées par le groupe de Mathilde sont les notions de degré, de racine carrée et d'identité remarquable. Durant la restitution de l'affiche 2-1-Al, Mathilde se contente de répéter le titre des quatre catégories formées sans ajouter d'argument. Alex y ajoute les notions suivantes : addition et multiplication d'expressions algébriques (ligne 91), distributivité (ligne 91), formules d'identités remarquables (ligne 97), équations particulières du second degré ($x^2 = c$, ligne 111).

De plus, par deux fois, Alex évoque la résolution d'équations (lignes 91et 111), comme indiqué en gras dans les passages ci-dessous :

> 91. Al : Est-ce que celle-là et celle-là [*il montre les équations **17** :* $(3-4x)(2x-1)=0$*) et **28** :* $7(x+2)+4(x-3)=0$] sont de la même nature ? Déjà en termes d'écriture, non … J'espère que vous ne confondez pas … une multiplication et une addition. Après, est-ce que c'est la même nature, **en termes de résolution** … Entre les deux, il y a quand même un monde … Ici [*la **28***], il y a un vrai calcul à faire, avec quoi ? … Là tu peux sortir ton argument de distributivité ! Alors que celle-là [*la **17***], elle est directement exploitable.
> […]
> 111. Al : … par exemple, la ***25*** ($\frac{x^2}{7}=21$) et là, la fameuse catégorie dont Lucas avait parlé avec $x^2 = c$, est-ce que c'est la même nature que, par exemple, quelque chose comme ça [*il montre la **22** :* $x^2-8x+15=0$] ? **En termes de résolution**, pas glop, pas glop ! Ça [*la **25***], vous savez faire en seconde mais ça [*la **22***], faudra attendre l'an prochain… Vous voyez que le second degré, effectivement, ça fait partie d'une catégorie, mais à l'intérieur du second degré, il y a des catégories qui vous sont accessibles ou pas.

Alex tente une avancée du temps didactique vers la résolution d'équations, mais sans insister. Il émet une technologie pour résoudre l'équation $7(x+2)+4(x-3)=0$ (la distributivité), mais il ne propose aucune technique pour résoudre les quatre équations qu'il évoque. Il termine le bilan de cette affiche en validant la catégorie « second degré » déterminée par les élèves et en indiquant que celle-ci comporte des sous-catégories, résultant de techniques de résolution différentes.

Sous-phase 4.3 : Échanges sur l'affiche 3-1-Al

La sous-phase 4.3 dure moins de quatre minutes et 26 échanges ont lieu : le rapporteur Jean-Stéphane s'exprime 12 fois, le professeur 14 fois et aucun autre élève n'intervient dans leur dialogue. La courte durée consacrée à cette affiche peut s'expliquer comme la volonté de garder le contrôle du temps. Nous avons vu, lors de la constitution de la trame projetée (cf. TP3, §10.5.1), qu'Alex souhaite faire un bilan terminal, il est donc possible qu'il accélère le mouvement à cette fin. Nous pouvons également supposer que la qualité médiocre de l'affiche produite (comme vu dans l'analyse détaillée en étape E_2), ne permet pas une avancée convenable du temps didactique, ce qui conduit Alex à abréger le temps d'exposition. Le topos de l'élève s'en trouve extrêmement réduit. Les six catégories formées par les élèves sont passées rapidement en revue. Nous notons que les notions d'équation du premier degré de la forme $ax + b = 0$ (ligne 114), ou encore de forme quotient d'une expression algébrique (ligne 118), évoquées par le rapporteur font déjà partie du milieu. Rien de plus n'est apporté par cette affiche, aussi Alex se contente-t-il ici d'invalider les catégories, sans solliciter le rapporteur pour des explications supplémentaires. La critique des catégories non pertinentes (catégories 3 à 5) s'accompagne d'images humoristiques : « *vous mélangez des torchons et des serviettes et vous essayez de faire un drap* » (ligne 125), Alex parle de *mathématiques baroques* (ligne 127), de *caméra cachée* (ligne 131), du *groupe des cadors* (ligne 139). Ce geste du professeur peut être un moyen de mettre à distance ce qui a été fait, de dédramatiser les erreurs.

Sous-phase 4.4 : Échanges sur l'affiche 4-1-Al

Le temps passé sur la restitution de cette affiche est de 5,5 minutes, avec 30 échanges se répartissant également entre le rapporteur Mathilda et le professeur. Alex continue de mener le débat mais les interactions avec le rapporteur sont ici plus nombreuses qu'avec le rapporteur du groupe précédent. Au lieu de valider ou d'invalider directement les catégories proposées par Mathilda, Alex questionne l'élève et lui demande des précisions ou des reformulations au sujet de ses classes d'équations. Le topos de l'élève rapporteur a de nouveau une place plus importante. Nous relevons par exemple les questions suivantes du professeur :

- « *Pourquoi est-il écrit premier, alors ?* » en évoquant le degré des expressions apparaissant sous forme d'identités remarquables (ligne 141) ;
- « *Il y a un produit, là ?* » (ligne 151), « *c'est quoi cette opération entre les deux ?* » (ligne 155) pour demander une précision sur la nature ou la forme d'une équation donnée.

Alex prend le temps de comprendre le critère de catégorisation de chaque classe puis d'analyser le contenu des classes en opérant des rétroactions lorsqu'une erreur est détectée. Ceci lui permet d'ajouter dans le milieu des connaissances mathématiques ou d'en préciser certaines qui avaient déjà été évoquées par les groupes d'élèves précédents, comme le degré d'une équation, la forme (*somme de produits*, ligne 157) d'une expression algébrique, la précision du vocabulaire (*quotient* au lieu de *division*, ligne 159).

Alex tente de nouveau une avancée du temps didactique vers la résolution d'équations, comme le montre cet échange :

> 163. Al : […] Alors ça, pour vous, la **10** [$\frac{x^2}{27} = 0{,}01$] c'est de la même nature que la **21** [$x^2 + 6x = 0$]? Par exemple je peux résoudre cette équation-là [*la 10*] avec le même théorème que cette équation-là [*la 21*] ? C'est ça, ce que vous affirmez finalement…
> 164. Mathilda : Non, on affirme juste que c'est du second degré.

L'élève Mathilda reste dans le contrat établi au départ par le professeur, consistant à établir des critères ouverts de classification. Mathilda demeure sur un aspect *structural* des équations (second degré) alors qu'Alex tente, en vain, de la diriger vers les techniques de résolution de ces deux équations. Le professeur décide de ne pas insister.

Phase 5 : Débat- Institutionnalisation

Cette dernière phase dure cinq minutes. Il y a 32 échanges, dont 17 interventions d'Alex. Notons que 11 élèves différents au moins interviennent, sur un total de 15 élèves. Les interventions de ces élèves contrastent avec la phase 4 où l'ensemble de la classe écoute, sans se manifester, les propos échangés entre le professeur et les différents rapporteurs. Les quelques bavardages, entendus çà et là durant la phase 4, peuvent même laisser penser que les élèves ne sont pas attentifs. La participation massive des élèves lors de la phase 5 montre qu'il n'en est rien. Cette dernière phase, ayant pour fonction de débattre sur la pertinence des classements proposés et permettant d'institutionnaliser les notions d'équations travaillées dans cette situation, peut alors remplir complètement son rôle. Le topos des élèves se trouve de nouveau équilibré par rapport à celui du professeur, il a de nouveau possibilité de s'exprimer. Les premiers mots du professeur en début de cette phase incitent les élèves à prendre la parole : « *Alors, c'est quoi … quand on fait la synthèse de toutes vos catégories. Alors, c'est quoi l'essence de ce qu'on vous demandait ?* » (ligne 171).
Notons que le caractère *non routinier* du type de tâches ressort en ces termes : « *c'est dur à classer* » (ligne 172), ce qu'Alex acte. Les élèves font alors eux-mêmes la synthèse des affiches débattues comme le montre ce passage :

> 174. Valentine : Il y aura plus de 4 catégories, il y aura le second degré et le premier degré et après, il y aura plusieurs sous-catégories.
> 175. Al : Vous avez entendu ce qu'a dit Valentine ? Elle a dit qu'au départ, il y aura du premier degré et du second degré, et qu'à l'intérieur de ces catégories, il y aura plusieurs sous –catégories.
> 176. Clémence : Mais au départ, ce qui importe c'est que ce sont des équations du premier degré ou du deuxième degré …

Parmi les connaissances que le professeur apporte dans le milieu, nous notons qu'Alex institutionnalise que les équations du premier degré peuvent toutes s'écrire sous la forme $ax + b = 0$ (ligne 85), en partant des trois exemples $\frac{2x}{7} = 0$, $\sqrt{2} + x = 3$ et $3x - 5 = 3 - 10x$. Il se positionne sur ici l'aspect *structural* des équations du premier degré. Pour montrer que ces trois équations sont toutes de ce type, il mentionne la *transposition* (lignes 181 et 189) : il glisse donc vers l'aspect *procédural* des équations. Nous remarquons qu'Alex ne considère pas la résolution de telles équations, il se contente d'institutionnaliser sur la forme générale que celles-ci peuvent prendre.
Relativement au second degré, l'institutionnalisation qu'il réalise est différente. Il commence par présenter deux équations différentes : $\sqrt{3}x^2 = -2$ et $x^2 - 8x + 15 = 0$ et, après avoir

convenu avec les élèves qu'elles sont bien du second degré, il indique que leur résolution relève de techniques différentes (lignes 193 et 195). Puis, il poursuit sur la technique de résolution d'une troisième équation du second degré : $(3 - 4x)(2x - 1) = 0$ (ligne 203). Le milieu s'est alors enrichi de cette synthèse et le temps didactique a avancé. En fin de séance, Alex met en œuvre un geste de *tissage* ; sa préoccupation à opérer la transition vers la prochaine séance est perceptible :

> 203. Al : […] Alors ensuite, le but du jeu, vous écoutez, là … les phases 2 et 3, ça va être de faire le lien entre ce que vous venez de faire là, les catégories et le fait de faire des algorithmes pour résoudre ces équations, quel que soit le cas de figure dans lequel vous vous trouvez. Donc ça, ça sera l'objet des séances 2 et 3 dès mercredi prochain, d'accord ?

Pour conclure, notons que le professeur n'institutionnalise pas sur la résolution des équations. Il préfère sans doute insister sur la différence entre le premier et le second degré avant d'aborder ce point, étant donné que la phase de restitution lui a révélé le *vide didactique* (Bronner, 1997, 2007) visible de la notion de degré. L'institution EN propose en effet de définir cette notion, un peu tardivement, au niveau de la classe de première scientifique du lycée, alors qu'elle est utilisée dès la classe de troisième du collège.

Résumé de l'étape E_3

Pour résumer les propos exposés ci-dessus sur le milieu, le temps didactique, le topos du professeur et celui des élèves, suit un tableau récapitulatif.

Phases	Début numéro ligne	Début instant	Fonction	Évolution du milieu	Temps didactique / Topos du prof	Topos de l'élève
1	1	00 : 00	Présentation de la situation. Passation des consignes.	- Consignes - Équations de degré 1 et 2 - Matériel constitué des cartons et des affiches	Organiser la situation. Proposer une recherche de classement de manière ouverte	- Comprendre la tâche demandée - Nommer un rapporteur. - Étaler les équations.
2.1	2	02 : 00	Travail en groupes de 3-4 élèves. Phase de dévolution. Phase de recherche.	Notions mathématiques (premier et second degré, racines, structure des équations)	Préciser la consigne : sens du verbe classer comme catégoriser	Rechercher des critères de classification des équations en groupe
2.2	6	06 : 02				
3	11	09 : 46	Suite de la phase de recherche et réalisation de l'affiche.	L'affiche entre dans le milieu. Notions mathématiques (Idem ci-dessus, identités remarquables, …)	Lancer les élèves sur la constitution de l'affiche et l'explicitation des catégories	Réaliser l'affiche en groupe

4	22	22 : 12	Restitution du travail	- Affiches de tous les groupes au tableau	Valider ou invalider les classements.	Rapporteur : expliciter la classification de son groupe
4.1			Échanges sur l'affiche 1-1-Al	- Interactions rapporteur/prof/ élèves		Autres élèves : commenter la classification
4.2	83	29 : 35	Échanges sur l'affiche 2-1-Al	- Techniques/ Technologies amenées par le prof et les élèves. (structure des équations, procédures de résolution)	Lancer les élèves sur la résolution des équations	
4.3	112	35 : 36	Échanges sur l'affiche 3-1-Al			Autres élèves : écouter les commentaires du professeur sur les classifications
4.4	140	39 : 25	Échanges sur l'affiche 4-1-Al		Lancer les élèves sur la résolution des équations	
5	171	44 : 48	Débat, institutionnalisation	- Structure générale d'une équation du 1er degré : $ax + b = 0$ - Techniques différentes de résolution des équations du 2nd degré	Institutionnaliser les catégories 1er et 2nd degré. Expliquer en quoi catégoriser amène à la résolution des équations	Déterminer une classification pertinente à partir des classements proposés

Tableau 147 : Récapitulatif du milieu, du temps didactique et des topos (séance 1-1 d'Alex)

11.1.3.4 Étape E_4

Dans cette dernière étape, nous relevons quelques *événements didactiques* (Bronner, 2006, 2009), ayant un caractère de *prévisibilité* ou de *problématicité*. Deux événements particuliers ont retenu notre attention, par rapport à notre problématique de recherche :

- un premier événement prévisible et problématique, les conceptions des racines carrées ;
- un second événement imprévu et problématique, les conceptions des identités remarquables.

Premier événement : les conceptions des racines carrées

L'événement a lieu pendant la phase 4 de restitution du travail puis pendant la phase 5 de bilan. Il a déjà été évoqué mais nous le reprenons ici sous un autre angle. Lors de la phase 4, nous relevons le dialogue suivant entre le professeur Alex et Mathilde :

> 97. Al : […] Ensuite, la catégorie 3, vous avez fait une catégorie spéciale avec les ?
> 98. Mathilde : Avec les racines carrées.
> 99. Al : Donc pour vous, la racine carrée est une entité étrange, venue d'ailleurs !
> 100. Mathilde : Non … (*rires*)
> 101. Al (*en riant*) : Donc les racines … la **5** ($\sqrt{2}x - 1 = 4 - \sqrt{3}x$), la **6** ($\sqrt{2} + x = 3$), la **27** ($3x(x + \sqrt{5}) = 0$) et la **16** ($\sqrt{3}x^2 = -2$) … Donc, dès qu'il y a une racine carrée, oups !
> 102. Mathilde : Mais c'est parce qu'on ne savait pas où les mettre …
> 103. Al : Au passage, une question. Là, avec la racine carrée, est-ce que ça (*en montrant la 6*) ça ne fait pas partie de quelque chose que tu as déjà prédéfini ?

> 104. Mathilde : Euh …
> 105. Al : Ca là, c'est du premier degré ? Vous êtes d'accord ? C'est du premier degré … sauf qu'effectivement, la racine carrée de 2, ce n'est pas un nombre facile à manipuler pour vous ! Mais, on est dans la première catégorie ! D'accord ?

Comme déjà analysé dans l'étape E_2, les élèves de ce groupe ont une conception **CP** ou **CF (**typologie de Bronner, 1997) des racines carrées : ils sont en effet dans l'incapacité de ranger les équations possédant des coefficients avec des radicaux dans le premier ou dans le second degré et créent une troisième catégorie. L'intégration de ces nombres irrationnels comme *objets nombres* n'est pas encore réalisée. L'attitude du professeur Alex est alors de les aider à franchir cet obstacle et de leur signifier leur erreur, tout en reconnaissant la difficulté qu'engendrent ces nombres. Il utilise l'expression : « *effectivement, racine carrée de 2, ce n'est pas un nombre facile à manipuler pour vous* ». Cependant, il les incite à « voir » dans l'équation $\sqrt{2} + x = 3$ une équation du premier degré, plutôt qu'une racine carrée.
Néanmoins cette « monstration » n'est pas suffisante puisqu'à la phase 5, nous transcrivons :

> 189. Al : […] Est-ce que cette équation-là (*il montre la **22** :* $x^2 - 8x + 15 = 0$), elle est de la même nature que celle-là (*il montre la **16** :* $\sqrt{3}x^2 = -2$) ?
> 190. E : Non, dans celle-là, il y a des racines …
> 191. Al : Si vous séparez en premier degré et second degré, pour moi, c'est deux équations du second degré !
> 192. E : Oui, mais il y a des racines …dans l'une et pas dans l'autre !
> 193. Al : Mais qu'est-ce que j'ai dit tout à l'heure sur les racines ? C'est effectivement des nombres particuliers, mais c'est pas quelque chose … Regarde, là (*il montre l'équation* $\sqrt{3}x^2 = -2$) Si tu divises, ça fait $x^2 = \frac{-2}{\sqrt{3}}$ … Et $\sqrt{3}$, c'est un nombre comme $\frac{3}{4}$ ou -10 ! Donc, là entre ça et ça (*il montre les 16 et 22*), il y a quelque chose de différent, en termes de catégorie ? Ben, les deux sont du second degré ! On est bien d'accord … Julie ?
> 194. Julie : Oui.

Ce passage montre que l'obstacle de la racine carrée apparaît de nouveau : il empêche l'élève de « voir » l'équation comme étant du second degré. Cette conception **CP** ou **CF** de la racine carrée a été décrite dans des travaux de recherche (Bronner, 1997, Larguier, 2009) et constitue un obstacle récurrent et persistant, c'est ce qui fait que cet événement peut être qualifié de *prévisible*. De plus, nous le caractérisons de *problématique* puisque les techniques de résolution déterminées pour des types d'équations données pourraient ne pas être opérationnelles pour des nombres déterminés irrationnels.
Notons pour finir que le professeur tente d'inclure la catégorie des nombres comportant des radicaux dans l'ensemble des nombres réels, selon son expression : « $\sqrt{3}$*, c'est un nombre comme* $\frac{3}{4}$ *ou* -10 ». Son attitude est à l'opposé de celle d'Annabelle qui considère ces nombres comme des « *gros mots* ». Nous constatons que l'une ou l'autre attitude ne semble rien changer, à court terme, dans les conceptions des élèves.

Second événement : les conceptions des identités remarquables
L'événement se déroule pendant la phase 4 de restitution du travail du groupe de l'affiche 2-1-Al. Lors du passage en revue des différentes catégories constituées, le rapporteur indique :

> 91. Al : […] Alors, ensuite, passons au deuxième degré.
> 92. Mathilde : Alors mais non, d'abord, on a les identités remarquables.
> 93. **31 : 36** Al : Les identités remarquables, si c'est pas du second degré … je veux bien me faire curé…
> 94. Mathilde : Oui… *(rires)*

Mathilde considère ici deux catégories d'équations disjointes : celle des « identités remarquables » et celle du « second degré ». Rappelons que la catégorie « identités remarquables » recouvre pour les élèves la catégorie des équations données sous la forme $a^2x^2 + 2abx + (b^2 + c) = c$ ou $a^2x^2 - b^2 = 0$ ou encore $(ax + c)^2 - b^2 = 0$, où a, b et c sont des nombres réels déterminés, c'est-à-dire des équations du second degré possédant des solutions réelles et qui peuvent se factoriser en utilisant une des identités remarquables : $a^2 + 2ab + b^2 = (a + b)^2$ ou $a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$. Rappelons également que nous avons nommé *équations-identités*, ces équations.
Mathilde n'envisage pas d'inclure les *équations-identités* dans la catégorie des équations du second degré. Il semble que la notion de degré soit étrangère à sa catégorie dénommée « identités remarquables », ce qui découvre ici un indice d'une conception *pseudo- structurale* des expressions algébriques, au sens de Sfard.
Nous retrouvons une seconde fois, lors de la restitution de l'affiche 4-1-Al, un événement analogue, avec une autre élève, Mathilda :

> 140. Mathilda : Alors, la première catégorie, c'est les identités remarquables, en fait c'est le second degré.
> 141. Al : Alors, pourquoi il y a écrit premier ?
> 142. Mathilda : Parce que c'est une erreur …
> 143. Al : Alors corrige (*Mathilda corrige sur l'affiche en vert*) et enlève le s à degré …

L'affiche de son groupe comporte des catégories parmi lesquelles nous trouvons « premier degré », « second degré » et « identités remarquables-premier degré ». C'est au moment de la restitution que Mathilda propose de changer l'intitulé « identités remarquables-premier degré » en « identités remarquables-second degré ». Le rapporteur semble donc avoir tiré profit de la remarque du professeur à propos de l'affiche 2-1-Al. Cependant, il ressort que les *équations-identités*, ici encore, ne trouvent pas leur place parmi le premier ou le second degré, puisque ces élèves ont constitué une catégorie à part. Dans les deux cas, les notions de degré et d'identités remarquables se juxtaposent, sans que les élèves ne parviennent à trouver un lien entre les deux.
Nous pouvons expliquer ce phénomène par l'organisation des enseignements : les identités remarquables sont au programme de la classe de troisième du collège et c'est en seconde, au lycée, qu'apparaît pour la première fois la notion de second degré. Suit un tableau comparatif des enseignements de ces notions, tels qu'ils apparaissent dans les programmes (MEN, 2008a et MEN, 2009a).

Programme / Titre du bandeau	Contenu	Capacités
Classe de 3^e / Nombres et Calculs	**Écritures littérales** Identités remarquables	- Connaître les identités : $(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$ $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$ *- Les utiliser dans les deux sens sur des exemples numériques ou littéraux simples.*
	Équations du premier degré	*- Mettre en équation un problème du premier degré ou s'y ramenant* *- Résoudre une équation mise sous la forme A(x).B(x) =0, où A(x) et B(x) sont deux expressions du premier degré*
Classe de 2^{nde} / Fonctions	**Expressions algébriques** Transformations d'expressions algébriques en vue d'une résolution de problème.	Développer, factoriser des expressions polynomiales simples.
	Équations Résolution graphique et algébrique d'équations.	-Mettre un problème en équation. - Résoudre une équation se ramenant au premier degré.
	Études de fonctions Fonctions polynômes de degré 2.	Connaître les variations des fonctions polynômes de degré 2

Tableau 148: Comparaison des enseignements de la notion d'équation en 3^e et en 2^{nde}

Si le terme « degré 2 » apparaît dans le programme institutionnel de la classe de seconde, celui-ci ne prévoit pas clairement l'enseignement de la notion de degré d'un polynôme. En termes de praxéologie, nous pouvons dire que la notion de degré ne fait pas partie des outils technologiques à disposition des enseignants et des élèves. Les professeurs de seconde ne considèrent donc pas comme une contrainte institutionnelle d'expliciter que l'outil « identités remarquables », plongé dans le secteur des équations, produit des expressions polynomiales de degré 2. L'intégration des savoirs anciens dans les savoirs nouveaux n'ayant pas lieu, il s'ensuit pour certains élèves une simple juxtaposition de ces savoirs.

11.1.4 Classe d'Alex : séance 1.2

Cette section constitue l'analyse de la même situation que ci-dessus ave la seconde partie de la classe de seconde d'Alex. La séance a été filmée et est retranscrite en annexe A30.

11.1.4.1 Étape E_1

Le tableau ci-dessous présente un découpage de la séance en phases.

Phase		Fonction	Forme du travail	Temps	Lignes de transcription
Phase 1		Présentation de la situation n°1 Passation des consignes	Collectif	0 :00 à 1:10 **Durée : 1min10s**	1à 5
Phase 2		Phase de recherche et de réalisation des affiches	Groupes de 3 à 4 élèves (5 groupes)	1 :10 à 23 :00 **Durée : 21min50s**	6 à 95
Phase 3		Restitution du travail	Collectif avec un rapporteur par affiche au tableau	23 :00 à 42 :09 **Durée totale : 19min09s**	96 à 230
	Sous phase 3.1	Échanges sur l'affiche 1-2-Al		22 :12 à 28 :31 **Durée : 5min31s**	96 à 137
	Sous phase 3.2	Échanges sur l'affiche 2-2-Al		28 :31 à 30 :40 **Durée : 2min09s**	138 à 158
	Sous phase 3.3	Échanges sur l'affiche 3-2-Al		30 :40 à 34 :55 **Durée : 2min15s**	159 à 203
	Sous-phase 3.4	Échanges sur l'affiche 4-2-Al		34 :55 à 39 :18 **Durée : 4min23s**	204 à 222
	Sous-phase 3.5	Échanges sur l'affiche 5-2-Al		39 :18 à 42 :09 **Durée : 2min51s**	223 à 230
Phase 4		Débat Institutionnalisation	Collectif	42 :09 à 44 :00 **Durée : 1min51s**	231 à 236

Tableau 149 : Les différentes phases de la séance 1-2 d'Alex

11.1.4.2 Étape E_2

Décrivons les praxéologies mathématiques observées.

Types de tâches observés

En moins de deux minutes, le professeur Alex donne oralement le type de tâches de la façon suivante (ligne 1, annexe A30) :

> Sur vos tables, vous avez une grande enveloppe qui contient 28 bristols sur lesquels il y a une équation numérotée. Vous avez un quart d'heure à vingt minutes pour classer ces équations en fonction de critères que votre groupe va faire. D'accord ? Alors, je vous ai mis une grande feuille blanche pour écrire vos catégories afin que vous puissiez venir les expliciter et ensuite on mettra en commun toutes vos catégories et je conclurai. Voilà le travail que vous avez à faire. Donc, sur la grande feuille blanche, vous mettez les catégories : catégorie n°1, catégorie n°2, … et vous écrivez simplement les numéros des équations.

Comme pour la séance 1.1, le type de tâches est conforme à T_I, *classer des équations selon des critères à* déterminer, ce qui a été prévu dans la trame projetée TP3 et de la même manière, Alex précise le sens du verbe classer, à comprendre comme « catégoriser plutôt qu' « ordonnancer ».

Analyse a posteriori des affiches

Les 18 élèves ont travaillé en cinq groupes de 3 à 4 élèves chacun et ont produit cinq affiches, 1-2-Al à 5-2-An, qui sont analysées en utilisant également les commentaires des rapporteurs. (cf. annexe A30).

- **Analyse de l'affiche 1-2-Al (cf. annexe A31)**

Le classement a été réalisé selon le sens (1) du verbe classer : réaliser des catégories.

Transcription de l'affiche 1-2-Al		Caractéristiques des groupements (point de vue du chercheur)
Catégorie 1	13 ; 15 ; 18	Équations du 2nd degré du type : $ax^2 + b = 0$ possédant des solutions réelles (18) ou non (13, 15).
Catégorie 2	5 ; 6 ; 16	Équations du 1er degré (5, 6) ou du 2nd degré (16) dont les coefficients sont des irrationnels (racines carrées).
Catégorie 3	17 ; 27 ; 28	Équations produit nul de deux facteurs du 1er degré (17, 27) ou somme nulle de termes du 1er degré (28).
Catégorie 4	10 ; 25 ; 26	Équations du 1er degré (26) ou 2nd degré (10, 25) dont les coefficients sont des rationnels en écriture fractionnaire.
Catégorie 5	1 ; 2 ; 7 ; 8 ; 11 ; 14 ; 23 ; 24	Équations du 1er degré dont les coefficients sont entiers ou rationnels. (Est incluse l'équation 7 qui comporte le coefficient pi).
Catégorie 6	3 ; 4 ; 9 ; 12 ; 19 ; 20 ; 21 ; 22	Équations du 2nd degré : $ax^2 + bx + c = 0$ avec b ou c éventuellement nuls. Certaines sont factorisables directement par une identité remarquable (4, 9, 12, 19, 20), d'autres non (3, 21, 22).

Tableau 150 : Caractérisation des groupements de l'affiche 1-2-Al

D'après le contenu des catégories, différentes techniques sont utilisées par ce groupe pour effectuer T_I :

- τ_{12}, *grouper les équations polynomiales du premier degré d'une part et les équations du second degré d'autre part* (catégories 1, 5 et 6) ;

- τ_{13}, *grouper les équations selon la nature des nombres déterminés* (catégories 2 et 4).

La catégorie 5 est assez confuse, elle a été construite en utilisant la technique τ'_{13}, *grouper les équations selon que leur second membre est nul ou non*, ce que nous pouvons comprendre par les propos du rapporteur : « *parce qu'on va faire avec égal zéro* » (cf. ligne 113, A30).

De plus, la technique τ_{15}, *grouper les équations selon leur nombre de solutions,* a été partiellement utilisée. En effet, certaines équations du second degré proposées (équations 13 et 16) ne possèdent pas de solutions réelles et le rapporteur mentionne avoir considéré ce critère pour créer la catégorie 1, ce que montrent ses propos : « *on ne peut pas les résoudre, parce que un carré, ça ne peut pas être négatif* » (ligne 98). Pointons que la catégorie 1 comporte des erreurs sur les équations répertoriées.

Pour finir une dernière technique est utilisée pour constituer la catégorie 6, la technique τ'_{14}, *grouper les équations polynomiales du second degré selon qu'elles soient ou non des équations-identités* (catégorie 2), ce que le rapporteur désigne par « les identités remarquables » (ligne 132).

Dans l'environnement technologico-théorique associé à ces techniques, nous trouvons la notion de degré, la nature et la forme des expressions algébriques, la notion d'identité remarquable ainsi que quelques techniques de résolution des équations du second degré du type $x^2 = c$, ou du type $(ax + b)(cx + d) = 0$. Les connaissances des élèves sont fragiles, notamment la reconnaissance des formes produit ou somme d'expressions polynomiales de degré 1, comme le montre l'erreur de la catégorie 3. De plus, notons que les échanges entre le rapporteur et le professeur montrent qu'une autre confusion existe :

> 110. Al : **24 : 55** Catégorie 3 : les équations **17** ($(3-4x)(2x-1)=0$), **27** ($3x\left(x+\sqrt{5}\right)=0$) et **28** ($7(x+2)+4(x-3)=0$)
> 111. Élise : C'est des développements.
> 112. Al : C'est des développements. Ça veut dire que… pour résoudre ces équations, il faut développer ?
> 113. Élise : Non, parce qu'on va faire avec égal zéro …
> 114. Al : Comment ça ?
> 115. Élise : Ben, quand on a ça, on fait euh …Par exemple pour la **28**, on fait $7(x+2)=0$ et $4(x-3)=0$.
> 116. Es : Non ! C'est une addition !
> 117. Al : C'est un plus, là ! Quand une somme est égale à zéro, on n'a pas un des deux termes égal à zéro …
> 118. Élise : Non, mais ça marche pour les deux autres !
> 119. Al : Ah, oui mais ça veut dire que tu mélanges les choux-fleurs et les betteraves !

Ces élèves transposent la technologie « $A \times B = 0 \Rightarrow A = 0 \ ou \ B = 0$» au cas erroné : « $A + B = 0 \Rightarrow A = 0 \ ou \ B = 0$ ».
La notion de degré d'une équation polynomiale est correctement convoquée pour les catégories 5 et 6, mais elle ne semble pas opérationnelle pour ces élèves, qui juxtaposent des classes d'équations où ce critère n'apparaît pas (catégories 2, 3 et 4) et où se côtoient des équations de degré 1 et 2. Relativement à la classe nommée « identités remarquables » par le rapporteur (catégorie 6), il semble que les élèves de ce groupe fassent l'amalgame entre « forme d'identités remarquables » et « second degré ».
Les élèves ne sont manifestement pas capables de se détacher des signes ostensifs des équations, comme la nature des coefficients. Par exemple, les catégories 2 et 4 ont été créées par rapport aux coefficients qui sont des racines carrées ou des rationnels en écriture fractionnaire. Ce classement relève d'associations par des structures spatiales communes (du type $\frac{■}{●} = ◆$ ou $\sqrt{\quad}$), comme l'indiquent les propos d'un élève du groupe : «*je les mets ensemble parce qu'il y a des racines. J'aime bien les racines !* » (ligne 9).
Pour terminer sur les conceptions des équations, au sens de Sfard, ces élèves semblent capables de se fixer tour à tour sur leur aspect *structural* ou *procédural*, comme le montre cet extrait :

> 9. E : Celle-là, regarde [*en montrant l'équation* ***20*** *:* $x^2 = (2{,}07)^2$], c'est a² - b² parce que si tu fais passer ça, là … ça fait un moins. Et un carré moins un carré, c'est une identité remarquable, ça !

C'est en effet par une *procédure* que l'élève propose de transformer l'équation en transposant le terme 2,07² dans le membre de gauche et il considère ensuite la *structure* de l'équation obtenue, sous la forme de la différence de deux carrés. Mais nous relevons également des indices d'une conception *pseudo-structurale* chez ce groupe d'élèves, avec la confusion donnée plus haut d'une forme somme et d'une forme produit (équation 28).

- **Analyse de l'affiche 2-2-Al (cf. annexe A31)**

Le classement a été réalisé selon le sens (1) du verbe classer : réaliser des catégories.

Transcription de l'affiche 2-2-Al			**Caractéristiques des groupements (point de vue du chercheur)**
Catégorie 1	1er degré	5 ; 6 ; 7 ; 11 ; 14 ; 24 ; 26	Équations du 1er degré avec second membre non nul
Catégorie 2	2nd degré	3 ; 10 ; 12 ; 13 ; 15 ; 16 ; 18 ; 19 ; 20 ; 25	Équations du 2nd degré avec second membre non nul
Catégorie 3	Factorisée	17 ; 27	Équations produit nul de 2 facteurs du 1er degré
Catégorie 4	1er degré avec second membre égal à zéro	1 ; 2 ; 8 ; 23 ; 28	Équations du 1er degré avec second membre nul
Catégorie 5	Identités remarquables	4 ; 9	Équations du 2nd degré factorisables par une identité remarquable
Catégorie 6	2nd degré avec second membre égal à zéro	21 ; 22	Équations du 2nd degré avec second membre nul

Tableau 151 : Caractérisation des groupements de l'affiche 2-2-Al

En analysant les groupements proposés, quatre techniques prédominent :
- la technique τ_{12}, *grouper les équations polynomiales du premier degré d'une part et les équations du second degré d'autre part* (catégories 1, 2, 4, 5 et 6) ;
- la technique τ'_{13} : *grouper les équations selon que leur second membre est nul ou non.* (catégories 1, 2, 4, 6) ;
- la technique τ'_{14}, *grouper les équations polynomiales du second degré selon qu'elles soient ou non des équations-identités* (catégorie 5) ;
- la technique τ_{11}, *grouper les équations somme ou différence d'une part et les équations produit ou quotient d'autre part* pour la catégorie 3. Cette dernière technique n'est utilisée que partiellement, puisqu'il n'y a pas de catégorie nommée « somme » ou « développement ».

Le bloc technologico-théorique est clairement identifiable. La classification s'appuie principalement sur les notions de degré d'un polynôme, d'identité remarquable, de nature et de forme d'une expression algébrique. Les catégories constituées ne comportent pas d'erreur par rapport aux critères établis, même si ceux-ci ne sont pas complètement pertinents, comme le critère « second membre nul » qui pas opérationnel dans le cadre de la résolution de ces équations. Remarquons simplement que la catégorie 5, nommée « identités remarquables » aurait pu contenir davantage d'équations (les équations 12, 19, 20 par exemple).

À propos des catégories, le rapporteur indique, lors de la phase de restitution, que les catégories 1 et 4 sont deux sous-parties de la catégorie des équations du premier degré (lignes 138 à 144). L'élève réorganise de la même manière les catégories 2 et 6 en deux sous-catégories d'une catégorie nommée « équations du second degré » (lignes 144 à 148).

Ces dernières remarques montrent la capacité de ce groupe à hiérarchiser leur classement en considérant des propriétés logico-mathématiques. Enfin, d'après les conceptions de Sfard, les élèves de ce groupe considèrent nettement l'aspect *structural* des équations pour réaliser leur classement. Des indices en sont donnés par l'élève rapporteur qui qualifie les équations ainsi :

premier degré (ligne 138), *premier degré égal à zéro* (ligne 142), *équations factorisées* (ligne 151).

- **Analyse de l'affiche 3-2-Al (cf. annexe A31)**

Le classement a été réalisé selon le sens (1) du verbe classer : réaliser des catégories.

Transcription de l'affiche 3-2-Al		**Caractéristiques des groupements (point de vue du chercheur)**
Catégorie 1	7 ; 11 ; 14 ; 24 ; 26 ; 23	Équations du 1er degré dont les coefficients sont rationnels (sauf 7) et avec second membre non nul (sauf 23). L'équation 7 comporte le coefficient pi.
	1 ; 2 ; 8 ; 28	Équations du 1er degré avec second membre nul. Il manque l'équation 23.
	5 ; 6	Équations du 1er degré dont les coefficients sont des irrationnels (racines carrées)
Catégorie 2	3 ; 4 ; 9 ; 17 ; 19 ; 21 ; 27	Équations du 2nd degré diverses. Certaines sont avec second membre nul (4, 9, 17, 21, 27).
	10 ; 18 ; 20 ; 25	Équations 2nd degré de la forme $ax^2 = b$ possédant deux solutions réelles.
	13 ; 15 ; 16	Équations 2nd degré de la forme $ax^2 = b$ sans solutions réelles.
	12 ; 22	Équations du 2nd degré (la 12 est factorisable à l'aide d'une identité remarquable, la 22 n'est pas dans le savoir enseigné des élèves).

Tableau 152 : Caractérisation des groupements de l'affiche 3-2-Al

En analysant le tableau ci-dessus et les commentaires du rapporteur du groupe lors de la restitution (cf. annexe A30, lignes 159 à 201), nous reconstituons que les techniques suivantes ont été utilisées pour la création des catégories :

- la technique τ_{12}, *grouper les équations polynomiales du premier degré d'une part et les équations du second degré d'autre part* (catégories 1 et 2) ;

- la technique τ'_{13}, *grouper les équations selon que leur second membre est nul ou non.* (catégorie 1, parties 1 et 2) ;

- la technique τ_{13}, *grouper les équations selon la nature des nombres déterminés* (catégorie 1, partie 3) ;

- la technique τ_{17}, *grouper les équations selon la nature des nombres-solutions de celles-ci* (catégorie 1) ;

- la technique τ_{16}, *grouper les équations selon qu'une résolution directe est possible ou qu'une transformation de l'équation est nécessaire à sa résolution* (catégorie 2, parties 1 et 2) ;

- la technique τ_{15}, *grouper les équations selon leur nombre de solutions* (catégorie 2, parties 2 et 3).

Nous remarquons que les trois dernières techniques reposent sur la résolution des équations, ce qui montre que les élèves ont considéré la résolution comme critère de classement. Les propos des élèves le corroborent : « $x^2 = 7$, *ça fait racine de 7* » (ligne 12), « *y a juste à transposer et à diviser* » (ligne 169), « *C'est déjà factorisé et il y a deux solutions* » (lignes 184-185).

Le bloc technologico-théorique est riche. Il contient les notions de degré, de nature des nombres, de nature et de forme d'expressions algébriques (identité remarquable, somme, produit), de techniques de résolution des équations du premier degré et d'équations du second degré particulières (sous forme de produit nul de facteurs du premier degré, ou *d'équations-identités*). Relativement aux notions convoquées sur la nature des nombres, notons que la partie 3 de la première catégorie contient des équations du premier degré avec des coefficients comportant des radicaux. Cependant, ces élèves n'ont pas occulté le critère « premier degré », le rapporteur indiquant qu'elles font partie d'une sous-catégorie « *où le résultat sera avec des racines carrées mais on a toujours du premier degré* » (lignes 178-179). Il ne semble pas ici qu'il y ait une conception erronée de la racine carrée, contrairement à d'autres groupes étudiés précédemment. La conception de ces élèves des racines carrées peut être considérée de type **CN** (conception comme nombre) selon la typologie de Bronner (1997), mais cette conception n'est pas encore unifiée (**CNU**), les élèves ressentant le besoin de situer les équations comportant des radicaux dans une catégorie « à part ».

Les techniques utilisées montrent que ces élèves s'appuient à la fois sur les aspects *structural* et *procédural* des équations au sens de Sfard : ils en observent la structure (le degré, la forme produit ou somme, …) puis entrent dans des procédures de transformation des équations en vue de les résoudre. Pour exemplifier, reportons des propos des élèves de ce groupe pendant la phase de recherche (ligne 12) :

> E2 : Et ça [*en montrant les équations **19** :* $x^2 - 8x + 15 = -1$ *et **22** :* $x^2 - 8x + 15 = 0$], c'est des identités remarquables.
> E1 : C'est les mêmes !
> Jimmy : Non ! Là, c'est 0 et là, c'est -1 !
> **10 :19** E1 : Là [*en montrant l'équation 22*], on peut factoriser : $\left(x - \sqrt{15}\right)^2 = 0$ … C'est a² - 2ab + b².
> E2 : Oui, ben justement … Si ça [*elle montre le nombre 15*] c'est $\sqrt{15}^2$, alors 2ab, ça fait $2 \times \sqrt{15} \times x$, ça fait pas 8*x* ! Enfin, ça m'étonnerait ! (*rires*). Et si on prend 8*x*, 8, c'est 2×4, donc on devrait avoir 16.

Un élève reconnait la structure d'une identité remarquable dans l'expression $x^2 - 8x + 15$, il mentionne : « *c'est a² – 2ab + b²* ». Un autre élève entre alors dans le détail de l'expression : « *8x, 8, c'est 2×4, donc on devrait avoir 16* », montrant qu'au besoin, il est possible de « descendre » dans l'expression pour ne considérer que l'un de ses termes en particulier et d'accéder ainsi à la procédure nécessaire à sa transformation en $a^2 - 2ab + b^2 = (a - b)^2$.

Pour conclure ce classement est basé sur des critères logico-mathématiques.

- **Analyse de l'affiche 4-2-Al (cf. annexe A31)**

Le classement a été réalisé selon le sens (1) du verbe classer : réaliser des catégories.

Transcription de l'affiche 4-2-Al			Caractéristiques des groupements (point de vue du chercheur)
Catégorie 1	Identités remarquables	4 ; 9 ; 20	Équations du 2^{nd} degré factorisables par une identité remarquable.
Catégorie 2	Équations 2^{nd} degré	3 ; 16 ; 18 ; 19 ; 21 ; 22 ; 27	Équations du 2^{nd} degré diverses : de la forme $ax^2 = b$ (16, 18), ou $x^2 - 8x + 15 = c$ (3, 19, 22) ou $ax^2 + bx = 0$ (21, 27)
Catégorie 3	Quotients	2 ; 10 ; 24 ; 25 ; 26	Équations du 1^{er} degré (2, 24, 26) ou du 2^{nd} degré (10) avec coefficients rationnels en écriture fractionnaire
Catégorie 4	Produits	12 ; 17 ; 23	Équations du 1^{er} degré (23) ou du 2^{nd} degré (12, 17) sous formes diverses
Catégorie 5	Impossible	13 ; 15	Équations du 2^{nd} degré de la forme $ax^2 = b$ sans solution. Il manque l'équation 16
Catégorie 6	$ax + b$ ou $ax - b$	1 ; 5 ; 6 ; 7 ; 8 ; 11 ; 14 ; 28	Équations du 1^{er} degré. Il manque les équations 23, 24 et 26

Tableau 153 : Caractérisation des groupements de l'affiche 4-2-Al

Si nous conjuguons les éléments de ce tableau aux propos du rapporteur en annexe A30 (lignes 204 à 221), nous pouvons en déduire que les techniques suivantes ont été utilisées :

- la technique τ_{12}, *grouper les équations polynomiales du premier degré d'une part et les équations du second degré d'autre part* (catégories 2 et 6) ;
- la technique τ'_{14}, *grouper les équations du second degré selon qu'elles soient ou non des équations-identités* (catégorie 1) ;
- partiellement la technique τ_{11}, *grouper les équations somme ou différence d'une part et les équations produit ou quotient d'autre part* pour les catégories 3 et 4. En effet, si nous relevons une catégorie « produit » et « quotient », nous ne relevons pas de catégorie « somme » ;
- partiellement la technique τ_{15}, *grouper les équations selon leur nombre de solutions* (catégorie 5). Remarquons que les élèves s'intéressent aux équations n'admettant pas de solutions réelles, mais que le critère « posséder une ou deux solutions » n'apparaît pas dans leur classification.

Le bloc technologico-théorique se compose des notions de degré, de nature et forme d'une expression algébrique (somme, produit ou quotient) et d'identité remarquable. La multiplicité des techniques utilisées pour réaliser le classement indique des connaissances des élèves quant aux notions citées ici. Néanmoins, cette même multiplicité montre une juxtaposition des savoirs, sans hiérarchisation. Par exemple, les élèves juxtaposent les classes des *équations-identités*, des équations du second degré sans solutions réelles (classe des « impossibles ») à celle du second degré. Ils ne conscientisent pas l'inclusion des deux premières dans la troisième. Leur compréhension de ces notions ne prend pas encore suffisamment de sens pour être capable de réaliser cette hiérarchisation.

Quant aux aspects *structural* et *procédural* des équations, nous pouvons dire que les élèves les considèrent tour à tour, en considérant les propos suivants relevés pendant la phase de recherche (lignes 17 à 93) :

> 47. E1 : Celle-là, par exemple … [*en montrant l'équation* ***28*** : $7(x+2)+4(x-3)=0$], ça fait … 11*x* moins …
> 48. Marine : Alors 7*x* plus 4*x* … 11*x* et 14 moins 12 … 2. Donc 11*x* = 2, *x* = 11/2 … Ça fait pas zéro.

Cet échange montre que les élèves s'attachent ici à l'aspect *procédural* de l'équation en indiquant une suite d'opérations à effectuer. En revanche, pour les propos suivants :

> 83. Marine : […] Et la **6** [$\sqrt{2}+\ x=3$], tu la mets dans « *ax* + *b* »
> 84. E1 : La **1** [$1000-x=0$], c'est « *ax* + *b* », mais avec un moins … (*rires)*
> 85. Marine : Fais une autre catégorie …
> 86. E1 : Mais non, c'est pareil « *ax* + *b* » ou « *ax* - *b* » …
> 87. E2 : Alors j'écris « *ax* + *b* ou *ax* - *b* ».

nous notons que les élèves se placent par rapport à l'aspect *structural* des équations : elles sont considérées comme un objet dont on peut décrire la forme et avec lequel on va pouvoir faire de nouveaux calculs.

- **Analyse de l'affiche 5-2-Al (cf. annexe A31)**

Le classement a été réalisé selon le sens (1) du verbe classer : réaliser des catégories.

Transcription de l'affiche 5-2-Al		**Caractéristiques des groupements (point de vue du chercheur)**
Catégorie 1	4 ; 22	Équations du 2nd degré. L'équation 4 est factorisable directement par une identité remarquable mais pas la 22.
Catégorie 2	3 ; 4 ; 9 ; 12 ; 19 ; 20	Équations du 2nd degré. Elles sont factorisables directement par une identité remarquable, sauf la 3.
Catégorie 3	13 ; 15 ; 16 ; 18	Équations du 2nd degré de la forme $ax^2 = b$.
Catégorie 4	5 ; 6	Équations du 1er degré dont les coefficients sont irrationnels (racines carrées).
Catégorie 5	2 ; 10 ; 25 ; 26	Équations du 1er degré (2, 26) ou 2nd degré (10, 25) dont les coefficients sont des rationnels en écriture fractionnaire.
Catégorie 6	1 ; 5 ; 7 ; 8 ; 11 ; 14 ; 23 ; 24	Équations du 1er degré.
Équations non classées	*17 ; 21 ; 22 ; 23 ; 27 ; 28*	- Équations du 2nd degré : produit nul de 2 facteurs du premier degré (17, 27) ; équation factorisable par *x* (21) ; équation plus complexe (22). - Équations du 1er degré (23, 28).

Tableau 154 : Caractérisation des groupements de l'affiche 5-2-Al

Notons que le rapporteur indique, en arrivant au tableau : « *Alors, en fait les catégories 1 et 2, c'est la même* » (ligne 222, annexe A30) et indique que les deux catégories sont une seule, nommée « identités remarquables ». L'analyse du tableau ci-dessus et des commentaires du rapporteur du groupe lors de la restitution (lignes 222 à 230) permettent de déterminer les techniques qui suivent pour la constitution des classes :

- la technique τ_{12}, *grouper les équations polynomiales du premier degré d'une part et les équations du second degré d'autre part* (catégories 1, 2, 3 et 6) ;
- la technique τ_{13}, *grouper les équations selon la nature des nombres déterminés* (catégories 4 et 5) ;
- la technique τ'_{14}, *grouper les équations du second degré selon qu'elles soient ou non des équations-identités* (catégories 1 et 2).

Nous relevons que cette classification est confuse. De plus, les élèves ont classé deux fois certaines équations dans deux catégories différentes (équations 4 et 5) et six autres ont été omises.
Le bloc technologico-théorique contient les notions de degré, de nature des nombres et d'identité remarquable. Les connaissances des élèves au sujet de la notion d'identité remarquable sont approximatives. En effet, durant la phase de recherche, nous transcrivons : « *Ça (en montrant l'équation 21 :* $x^2 + 6x = 0$ *) c'est (a – b)(a + b) et ça, (en montrant l'équation 22 :* $x^2 - 8x + 15 = 0$ *), c'est (a – b)² … Et ça (en montrant l'équation 4 :* $x^2 + 6x + 9 = 0$ *), c'est pareil que la 21* » (ligne 6). Par ailleurs, ces propos montrent des erreurs répétées sur les formes algébriques, ce qui est significatif d'une certaine conception *pseudo-structurale* de celles-ci, une vague ressemblance de structure étant suffisante à ces élèves pour conclure.

Synthèse de l'analyse des cinq affiches 1-2-Al à 5-2-Al

Les techniques utilisées dans cette séance pour réaliser le classement des équations sont répertoriées ci-dessous :

	Tâche T_I : classer les équations selon des critères à déterminer
Sens (1) du verbe classer	***Techniques apparues qui ne demandent pas de résoudre les équations (même partiellement) avant les groupements***
	τ_{11} : Grouper les équations comme somme ou produit. τ_{12} : Grouper les équations selon le premier ou le second degré. τ_{13} : Grouper les équations selon la nature des nombres déterminés. τ'_{13} : Grouper les équations selon que leur second membre est nul ou non. τ'_{14} : Grouper les équations du second degré selon qu'elles soient ou non des équations-identités
	Techniques qui demandent de résoudre les équations (à la main ou mentalement) entièrement ou partiellement avant les groupements
	τ_{15} : Grouper les équations selon leur nombre de solutions. τ_{16} : Grouper les équations selon une résolution directe ou non. τ_{17} : Grouper les équations selon la nature de leurs nombres-solutions.

Tableau 155 : Synthèse des techniques utilisées pour la séance 1-2 de la classe d'Alex

Suit un tableau qui résume par affiche, les analyses précédentes.

Numéro de l'affiche		**1-2-Al**	**2-2-Al**	**3-2-Al**	**4-2-Al**	**5-2-Al**
Sens du verbe classer		Former des classes (1)	Former des classes (1)	Former des classes (1)	Former des classes (1)	Former des classes (1)
Type de tâches T_I ou T_R		T_I	T_I	T_I	T_I	T_I
Techniques[162]		τ_{12}, τ_{13}, (τ'_{13}, τ'_{14}, τ_{15})	τ_{12}, τ'_{13}, (τ_{11}, τ'_{14})	τ_{12}, τ'_{13}, (τ_{13}, τ_{15}, τ_{16}, τ_{17})	τ_{11}, τ_{12}, τ'_{14}, (τ_{15})	τ_{12}, τ_{13}, τ'_{14},
Nombre de classes formées		6	6	2 classes (et 3 sous-classes)	6	6
Environnement technologico-théorique	Notion de degré	×	×	×	×	×
	Identités remarquables	×	×		×	×
	Nature et forme d'une expr. algéb.	×	×	×	×	×
	Nature coef. équ.			×	×	×
	Techniques résol. équ.1er degré			×	×	
	Techniques résol. équ. 2nd degré	×		×		
Conceptions selon Sfard		Struct. Procéd Pseudo-structurale	Structurale	Structurale Procédurale	Structurale Procédurale	Pseudo-structurale

Tableau 156 : Résumé des praxéologies relatives aux types de tâches T_I et T_R en lien (classe d'Alex, séance 1.2)

L'analyse de ces deux tableaux permet de dégager que le rappel du professeur sur le verbe classer à comprendre dans le sens (1) et la consigne précisant le type de tâches T_I à effectuer ont été entendus par les élèves. Nous notons que de nombreuses techniques ont été utilisées pour réaliser les classements et en particulier que la technique τ_{12}, *grouper les équations polynomiales du premier degré d'une part et les équations du second degré d'autre part* a été utilisée systématiquement, bien qu'elle n'ait pas exclu d'autres critères de classement. D'autres techniques sont particulièrement usitées comme τ'_{14}, *grouper les équations selon qu'elles soient ou non des équations-identités,* la prégnance de cette notion étant forte dans cette classe. De plus, les élèves se réfèrent tous à la forme des expressions algébriques pour constituer leur classement, et sont nombreux à considérer la nature des nombres déterminés qui les composent. Quelques groupes utilisent les différences entre les microtechniques de résolution des équations du premier degré pour les classer et des techniques de résolution d'équations particulières du second degré pour classer ces dernières.

11.1.4.3 Étape E_3

D'après les phases déterminées en étape E_1, nous décrivons ici l'organisation didactique en analysant les évolutions du milieu, du contrat, du temps didactique, des topos élève et professeur durant la séance.

Phase 1 : Présentation de la situation n°1. Passation des consignes.

En moins de deux minutes, le professeur Alex présente la situation aux élèves (cf. ligne 1, A30) en mettant en place le contexte, les différentes phases de la séance et les premiers éléments du milieu. La consigne précise également le type de tâches T_I : « *Vous avez un quart d'heure à vingt minutes pour classer ces équations en fonction de critères que votre groupe*

[162] Les techniques indiquées entre parenthèses sont utilisées de façon minoritaire

va faire », en conformité au contrat de la trame projetée (cf. TP3, §10.5.1). Le milieu est constitué d'un milieu matériel (cartons sur lesquels sont inscrites les équations et affiches), de l'organisation en travail de groupes et enfin d'un milieu mathématique par la donnée d'équations à classer. L'organisation didactique est donnée de façon tout aussi concise, avec la durée prévue pour le temps de recherche en groupes (« *un quart d'heure à vingt minutes* »), l'annonce de la phase suivante où la restitution du travail est prévue (« *on mettra en commun toutes vos catégories* ») et Alex annonce une phase d'institutionnalisation en fin de séance (« *et je conclurai* »). Pour cette première phase, les topos du professeur et de l'élève sont partagés en la donnée d'un contrat clair pour le premier et l'écoute des consignes et de leur compréhension pour les seconds. Très vite, les élèves adhèrent à la tâche et les élèves questionnent le professeur sur le nombre de catégories à constituer (lignes 2 à 5) : la situation est dévolue aux élèves et ceux-ci s'engagent dans la tâche. Comme dans l'autre demi-classe, Alex insiste sur le sens du verbe classer qui doit être pris dans le sens de « créer des catégories » plutôt que dans le sens « ordonner », lorsqu'il précise : « *Si vous voulez faire 10 catégories, vous le faites mais vous les expliciter…* ».

Phase 2 : Phase de recherche et de réalisation des affiches

La phase 2 débute dès la 2e minute de la séance et dure une vingtaine de minutes.

La phase 2 comporte deux sous-phases ayant deux fonctions différentes : la recherche de critères de classification des équations proposées puis la production d'une affiche qui synthétise cette recherche et propose un classement des équations en plusieurs catégories, selon des critères que les élèves doivent être capables de formuler. Les sous-phases n'apparaissent pas clairement ici, le professeur n'ayant pas formulé la consigne de passage de la recherche à la constitution de l'affiche. Durant cette phase, la caméra mobile (lignes 6 à 16) passe de groupe en groupe pour déterminer les éléments du milieu mathématique qui apparaissent tandis que la caméra fixe (lignes 17 à 93) filme la recherche complète d'un groupe (le groupe de l'affiche 4). Le topos de l'élève occupe une place prépondérante, celui du professeur étant réduit à rappeler le *temps des horloges* de temps à autre. Dès le début de la recherche des critères de classement, les interactions des élèves entre eux enrichissent le milieu de notions mathématiques, comportant des concepts ou des techniques proches de la notion d'équations. Notons que les élèves oscillent en permanence entre l'aspect *structural* et l'aspect *procédural* des équations. Pour l'aspect structural, nous relevons plusieurs expressions où il est sollicité. Par exemple :

- pour reconnaître des *équations-identités* par l'utilisation des identités remarquables du type $(a-b)(a+b)$ et $(a-b)^2$ (ligne 6) ou encore « *un carré moins un carré, c'est une identité remarquable* » (ligne 9) ;
- pour caractériser les équations du premier degré (« *c'est le truc $x + a = 0$* », ligne 6) ;
- pour caractériser différents types d'équations, « *ça c'est premier degré égal à zéro et ça c'est second degré égal à zéro* » (ligne 16).

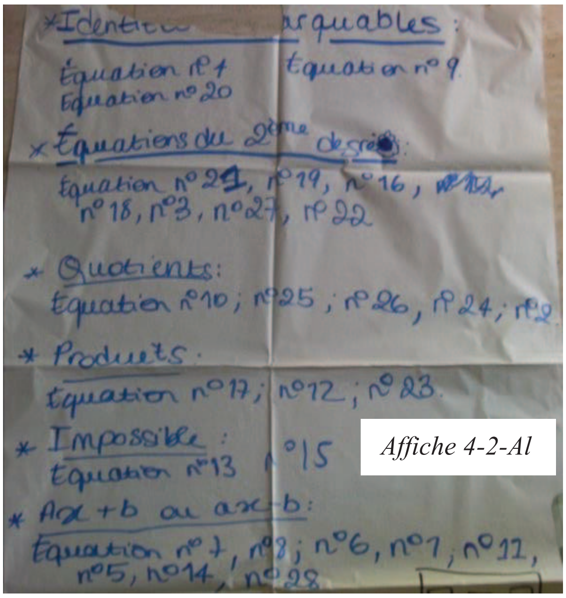
De la même manière, l'aspect procédural est convoqué à maintes reprises :

- pour mentionner une technique de transposition, comme le montre ce passage : « *Celle-là,* $\sqrt{2} + x = 3$*, si tu passes de l'autre côté, ça fait* $3 - \sqrt{2}$ » (ligne 8) ;
- pour préciser une factorisation d'une équation du second degré par facteur commun, « *Pour* $x^2 + 6x = 0$*, tu mets x en facteur …ça va avec les factorisations* » (ligne 9) ou encore

« *Pour* $x^2 - 8x + 15 = 15$, *tu peux faire passer 15 de l'autre côté, et ça fait zéro. Et après, tu fais x facteur de x moins 8* » (ligne 12),
- pour se ramener à une forme connue $x^2 = c$, où c est un nombre négatif, « $3 = 2 - x^2$, *ça fait* $x^2 = 2 - 3$, *donc* $x^2 = -1$ *et on la met avec les impossibles* » (ligne 12).

Recherche des critères de groupement des équations

En filmant le groupe de l'affiche 4-2-Al (affiche ci-contre), la caméra fixe nous permet d'accéder à la dynamique de recherche des critères de classification jusqu'à la réalisation de l'affiche et non plus seulement au côté statique de l'analyse argumentée de la production terminée. Ce côté dynamique nous permet de percevoir que la recherche des critères constitue une tâche complexe pour ces élèves. Nous pouvons noter les différents critères qui apparaissent au fur et à mesure dans leur discours :



Affiche 4-2-Al

- (1) classer par rapport aux *équations-identités* (ligne 17, « *On n'a qu'à chercher les identités remarquables* » ;
- (2) classer par rapport à la nature des nombres-solutions (ligne 31, « *Et si on classait celles qui font des racines ?* » et ligne 42, « *On pourrait faire une catégorie avec celles qui donnent x = 0 ?* » ;
- (3) classer selon qu'une technique de factorisation est applicable ou non (ligne 46, « *Sinon, on fait les factorisables et les non factorisables* ») ;
- (4) classer les équations selon leur degré (ligne 53, « *on fait premier et deuxième degré, sinon* » et ligne 83, « *tu la mets dans « ax + b* ») ;
- (5) classer les équations selon leur forme (ligne 75, « *fais une catégorie « quotient » et une catégorie « produit* ») ;
- (6) classer les équations selon qu'elles admettent ou non des solutions réelles (ligne 76, « *Et une autre catégorie « impossible* ») ;
- (7) classer les équations selon que le second membre est nul ou non (ligne 88, « *on n'a pas fait de catégorie « égal à zéro* »).

Par rapport au classement final de l'affiche 4-2-Al, les critères (2), (3), (7) n'ont pas été retenus.

L'idée de classer selon le degré de l'équation surgit au bout de 5 minutes de recherche active et semble être un déclencheur pour les élèves. C'est à partir de ce moment qu'ils commencent à créer des catégories effectives et à y ranger les équations, sous la forme de tas de cartons qu'ils disposent sur la table (ligne 55). La notion de degré est entrée dans le milieu en obtenant l'adhésion des élèves du groupe. Cette notion est alors opérationnelle, puisqu'elle permet aux élèves de commencer à constituer l'affiche.

Néanmoins, ces élèves ne sont pas capables de hiérarchiser les catégories « premier et second degré » en formant des sous-classes où pourraient s'insérer les autres catégories formées. Ils se contentent de les juxtaposer, malgré les propos qui suivent :

> 56. E2 : Mais attention, mélangez pas *(celles du second degré)* avec mes identités remarquables !
> 57. Marine : Mais elles sont quand même du deuxième degré …

Cette réflexion de Marine n'est pas prise en compte par le groupe et l'affiche finale comporte deux catégories distinctes « second degré » et « identités remarquables ».
Pour finir, notons que cette recherche est complètement dans le topos de l'élève, les élèves ne sollicitent qu'une seule fois le professeur (ligne 34) qui les renvoie à une détermination personnelle du choix des catégories.

> 34. Marine : Monsieur ! On doit faire le classement sur les équations ou sur le résultat de l'équation ?
> 35. Al : Comme vous voulez !

Phase 3 : Restitution du travail

Cette phase consiste en la mise en commun des différentes catégorisations déterminées dans les différents groupes, par une confrontation des affiches. Elle débute à la 23^{e} minute de la séance et dure une vingtaine de minutes. Les cinq affiches sont commentées tour à tour par un rapporteur de chaque groupe.
Alex gère cette phase de la même manière que dans l'autre demi-classe, c'est-à-dire qu'il privilégie un dialogue en tête-à-tête avec chaque rapporteur. Les autres élèves sont très peu sollicités. Le topos de l'élève rapporteur est d'apporter une formulation et une justification du choix des critères, alors que celui des autres élèves est simplement d'être dans une écoute attentive. C'est ce contrat que donne Alex au début de cette phase, par ces mots :

> 95. Al : […] Maintenant tout le monde regarde …et on inventorie ce qu'on fait les groupes. Et tout le monde réfléchit en même temps que ceux qui passent au tableau.

Le topos du professeur prend ici une place importante : c'est le professeur Alex qui se charge de valider ou d'invalider les classements. Dans cette phase, le milieu est augmenté des interactions entre le rapporteur du groupe et le professeur. De plus, comme Alex mène le débat, il fait partie de ce milieu en y ajoutant des connaissances mathématiques afin de provoquer une avancée du temps didactique. Nous détaillons ceci dans l'analyse des sous-phases.

Sous-phase 3.1 : Échanges sur l'affiche 1-2-Al

Ces échanges durent 5,5 minutes et sont au nombre de 40 échanges : le rapporteur Élise intervient 16 fois, le professeur 27 fois et d'autres élèves 4 fois. Comme ce décompte l'indique, la relation d'Alex et du rapporteur est privilégiée. Cependant les autres élèves sont réellement attentifs, et ils manifestent leur présence par de petits rires qui retentissent dans la classe, à chaque fois qu'Alex fait un trait d'humour.
Le rapporteur expose les catégories en leur donnant un titre ou en formulant un critère de classement et Alex égrène les équations une à une pour valider on non l'appartenance de l'équation à la catégorie. Les formulations des critères sont les suivants :
- à la ligne 98, la catégorie des équations « *qu'on ne peut pas résoudre* » ;
- à la ligne 101, la catégorie des équations « *qui contiennent des racines carrées* » ;
- aux lignes 111-113, la catégorie des « *développements, …, qu'on va faire avec égal zéro* » ;
- à la ligne 124, la catégorie du « *premier degré* ».

- à la ligne 131, la catégorie des « *identités remarquables* ».

Le professeur tente d'amener le rapporteur à s'interroger sur la pertinence de certaines classes formées. Par exemple,

> 103 : Al : Ca veut dire que quand il y a des racines carrées, c'est un type d'équations particulières ?
> 104. Élise : …
> 105. Al : Trois petits points, point d'interrogation … (*rires dans la classe*)

Ou encore vers une rectification des erreurs de classement de certaines équations, comme ici :

> 132. Élise : Ce sont des identités remarquables.
> 133. Al : Ce sont des identités remarquables ? Par exemple : $x^2 - 8x + 15 = 0$, c'est une identité remarquable ?
> 134. Es : Non !
> 135. E : Non, parce qu'il y a 15 !

Un bilan final est donné par Alex sur la pertinence de ce classement sous la forme suivante :

> 136. Al : Il y a des choses bizarres ! Alors, vous avez vu ici les différentes catégories que vos camarades du premier groupe ont nommées … Ça se chevauche … violemment ! D'accord ? Merci Élise.

Alex conclut ici sur le manque de cohérence de la constitution des classes qu'il signale comme non disjointes, en utilisant l'expression « *ça se chevauche violemment* ». Il ajoute ainsi dans le milieu un élément que les élèves de ce groupe n'ont pas pris en considération : la constitution de catégories nécessite la création d'un système hiérarchique de classes et de sous-classes.

Sous-phase 3.2 : Échanges sur l'affiche 2-2-Al

La sous-phase 3.2 dure 2 minutes et comporte une vingtaine d'échanges entre le rapporteur Julie et le professeur Alex. Le groupe de Julie a déjà écrit sur l'affiche un titre pour chacune des catégories et le rapporteur réorganise, durant le temps d'exposition et avec l'aide d'Alex, les catégories proposées en les hiérarchisant. C'est que ce nous pouvons conclure de ces échanges, où Julie reconstitue une catégorie « premier degré » en y incluant deux sous–catégories :

> 138. Julie : Alors, premier groupe, premier degré.
> 139. Al : Alors, première catégorie, premier degré. Ce sont les équations du premier degré, si je comprends bien ! Et, elles y sont toutes là ?
> 140. Julie : Non, non. Après, il y a une sous-partie.
> 141. Al : Ah, il y a une sous -partie !
> 142. Julie : C'est la catégorie « premier degré égal à zéro ».
> 143. Al : donc là, vous me faites une quatrième catégorie avec du premier degré égal à zéro. Donc, pour vous, les catégories 1 et 4, c'est deux catégories différentes ?
> 144. Julie : Ben, oui. C'est une catégorie avec des sous-parties.

Julie procède ensuite de la même façon (lignes 145 à 148), où elle regroupe deux catégories de l'affiche en une catégorie « second degré » dans laquelle est inclut deux sous-catégories. La remarque d'Alex, en fin de la restitution de l'affiche précédente a donc provoqué une avancée du temps didactique vers une classification hiérarchisée dont cette élève tire profit.

Alex valide les regroupements que Julie fait en manifestant son approbation par des interjections comme *D'accord !* Notons qu'il n'insiste pas ici pour signaler que les deux dernières catégories auraient pu être incluses dans les précédentes. En revanche, il relève une expression de Julie, « *[les équations] qu'on peut résoudre immédiatement* », qu'il répète et fait répéter. Peut-être a-t-il la volonté d'amorcer ici une progression du temps didactique vers la résolution d'équations.

Sous-phase 3.3 : Échanges sur l'affiche 3-2-Al

La sous-phase 4.3 dure deux minutes et 45 échanges ont lieu. Les élèves de ce groupe demandent au professeur de pouvoir envoyer deux rapporteurs simultanément au tableau, Mélanie et Jimmy. Le professeur accepte avec une pointe d'humour : « *Ah oui, pour faire un cerveau ?* » (ligne 158), ce qui maintient les élèves dans un climat détendu. C'est principalement Mélanie qui commente la classification proposée. Le topos de cette élève a une place relativement importante par rapport à celui du professeur, elle est en effet capable d'expliciter ses catégories avec l'aide de ce dernier, en ajoutant d'elle-même dans le milieu des connaissances mathématiques qui n'ont pas encore surgi. Par exemple, c'est elle qui apporte les premières justifications sur la résolution d'équations (« *la première sous-partie … y a juste à transposer et à diviser…* », ligne 169). Alex reprend l'idée de résoudre les équations, ligne 178, quand il précise « *Le résultat sera effectivement avec des racines carrées* », en mentionnant les équations du premier degré comportant des nombres déterminés irrationnels. Mélanie enchaîne avec les équations factorisées du second degré qu'elle identifie comme *ayant deux solutions* (ligne 185).

Ainsi, à la fin de cette sous-phase, les élèves ont-ils conforté cette avancée du temps didactique vers la résolution d'équations et sur la nécessité de présenter des catégories hiérarchisées selon le premier et le second degré, contenant chacune des sous-catégories qui sont créées par rapport à des techniques de résolution. Alex valide leur classement en indiquant au reste de la classe : « *Donc tout le monde a vu leurs deux catégories différentes ?* » (ligne 201).

Sous-phase 3.4 : Échanges sur l'affiche 4-2-Al

Le temps passé sur la restitution de cette affiche est de 4,5 minutes, avec une vingtaine d'échanges se répartissant également entre le rapporteur Marine et le professeur. Alex mène plus nettement le débat qu'avec le groupe précédent, le topos de l'élève a ici moins de place pour s'exprimer. Alex relève dans les catégories proposées les manques (« *La catégorie des identités remarquables est à mon avis sous-représentée par rapport au panel* », ligne 210), les erreurs (« *Ça et ça, c'est pas la même nature* », ligne 211) ou encore les catégories non pertinentes (« *Dès qu'il y a des quotients pour vous, c'est une catégorie à part ?* », ligne 213). Notons que l'affiche présentée ici ne se place pas par rapport à la résolution des équations. Celle-ci n'est mentionnée à aucun moment, ni par le professeur, ni par le rapporteur.

Sous-phase 3.5 : Échanges sur l'affiche 5-2-Al

La restitution dure moins de trois minutes et 8 échanges ont lieu entre le professeur et Clara, le rapporteur de ce dernier groupe. Notons ici encore, comme pour le groupe de l'affiche 2-2-Al, que le rapporteur a profité de l'avancée du temps didactique vers une hiérarchisation des catégories pour regrouper deux catégories en une seule comme l'indique ce passage : « *Alors, en fait les catégories 1 et 2, c'est la même … ça se ressemble* » (ligne 222). Le topos du professeur prend ici nettement le dessus sur celui de l'élève. Alex, voulant contrôler le temps des horloges, mène ici complètement le débat et laisse peu l'élève s'exprimer. Il termine même la validation de la classification par un long monologue (ligne 229) pour avoir le temps de faire un bilan final. Dans ses interventions apparaissent les notions de premier et de second degré, indiquant que chaque équation aurait pu se trouver dans l'une ou dans l'autre de ces deux catégories.

Phase 4 : Institutionnalisation

Cette dernière phase dure moins de deux minutes, mais n'est pas dénuée d'intérêt pour autant. Comme il reste très peu de temps avant la fin de la séance, Alex demande à la volée le classement qui semble le plus pertinent. Cette façon de solliciter les élèves relance l'intérêt du débat. Les élèves approuvent en chœur l'affiche 3-2-Al, argumentant qu'elle est la seule des cinq affiches proposant un classement hiérarchique en deux classes principales « premier degré » et « second degré » et comportant des sous-classes. Alex institutionnalise qu'un « bon » classement est un classement de ce type. Il insiste également sur la forme générale que peut prendre une équation du second degré en partant de trois exemples :

> 235. Al : […] Alors effectivement du second degré de ce type-là [*il montre l'équation* **3** *:* $x^2 - 8x + 15 = 15$] ou de ce type là [*il montre l'équation* ***4 :*** $x^2 + 6x + 9 = 0$] ou de ce type là [*il montre l'équation* ***18*** *:* $x^2 = 7$], c'est toujours du second degré … mais les processus de raisonnement et de résolution ne sont pas les mêmes … mais on manie le même concept.

Les trois exemples choisis relèvent d'une technique de résolution différente, ce qu'Alex pointe. Le milieu s'est alors enrichi de cette synthèse et Alex provoque en fin de séance une avancée du temps didactique. Il termine la séance en soulevant encore deux points, d'une part en *tissant* (Bucheton ,2004) cette séance avec les prochaines :

> 235. Al : […] Alors l'enjeu des deux séances suivantes, qui vont être liées à l'algorithmique, ça sera que sur les ordinateurs, vous ayez la possibilité de créer un algorithme qui vous permette de résoudre toutes les équations.

Et d'autre part, en revenant sur les équations du premier degré :

> 235. Al : […] Vendredi prochain ce sera celles du premier degré, aussi bien celle-là [*il montre la* ***1 :*** $1000 - x = 0$], que celle-là là [*il montre la* ***8 :*** $x + 3 = 0$] ou que celle-là là [*il montre la* **5** : $\sqrt{2}x - 1 = 4 - \sqrt{3}x$]. Alors que vous avez fait des catégories avec les racines carrées … mais en fait, c'est des nombres comme les autres !

Cette dernière *reprise* (Larguier, 2009) sur les racines carrées est une tentative de conférer le statut de nombre aux racines carrées, pour les élèves qui n'ont pas encore acquis le stade **CN** relativement au système numérique qu'ils utilisent (Bronner, 1997).

Résumé de l'étape E_3

Suit un tableau récapitulatif ayant pour fonction de résumer les états du milieu, du temps didactique, du topos du professeur et des élèves, selon les phases.

Phases	Début numéro ligne	Début instant	Fonction	Évolution du milieu	Temps didactique / Topos du prof	Topos de l'élève
1	1	00 : 00	Présentation de la situation. Passation des consignes.	- Consignes - Équations - Matériel constitué des cartons et des affiches	Organiser la situation Proposer une recherche de classement de manière ouverte	Comprendre la tâche demandée
2	6	01 : 50	Travail en groupes de 3-4 élèves. Phase de dévolution et de recherche. Production des affiches.	Notions mathématiques (premier et second degré, racines carrées, structure des équations, identités remarquables, techniques de résolution, …)	- Préciser la consigne : sens du verbe classer comme catégoriser - Lancer les élèves sur la constitution de l'affiche et l'explicitation des catégories	- Rechercher des critères de classification des équations en groupe. - Réaliser l'affiche - Expliciter les critères des catégories formées
3	94	22 : 00	Restitution du travail	- Affiches de tous les groupes au tableau - Interactions rapporteur/prof/ Élèves	Valider ou invalider les classements	Rapporteur : expliciter la classification de son groupe
3.1	96	23 : 42	Échanges sur l'affiche 1-2-Al		Préciser que le classement attendu est hiérarchisé	Autres élèves : écouter les commentaires sur les classifications
3.2	138	28 : 31	Échanges sur l'affiche 2-2-Al	- Techniques/ Technologies amenées par le prof et les élèves. (structure des équations, procédures de résolution)		
3.3	156	30 : 40	Échanges sur l'affiche 3-2-Al		Lancer les élèves sur la résolution des équations	
3.4	201	34 : 55	Échanges sur l'affiche 4-2-Al			
3.5	222	39 : 18	Échanges sur l'affiche 5-2-Al			
4	231	42 : 09	Institutionnalisation	Classement des équations du 2nd degré selon des techniques différentes de résolution	Institutionnaliser les catégories 1er et 2nd degré Expliquer en quoi catégoriser amène à la résolution des équations	Déterminer une classification pertinente à partir des classements proposés

Tableau 157 : Récapitulatif du milieu, du temps didactique et des topos (séance 1-2 d'Alex)

11.1.4.4 Étape E_4

Relevons ici un *événement didactique* (Bronner, 2006, 2009), un événement particulier mis en lumière à caractère prévisible et problématique que nous nommerons *l'influence de la conception des irrationnels sur la compréhension du concept d'équation*. Le problème de l'insertion des racines carrées dans le système numérique des élèves a déjà évoqué à plusieurs reprises, mais nous le reprenons ici sous un angle plus intégrateur.

Nous avons déjà analysé les conceptions de certains élèves des nombres irrationnels, dans l'étape E_2. Intéressons-nous ici en particulier à la conception de l'élève Élise (affiche 1-2-Al) au sujet des nombres irrationnels. Ci-dessous, se trouvent deux extraits des échanges de cette élève avec le professeur Alex lors de la phase de restitution de l'affiche.

Extrait n°1 : racine de 2	***Extrait n°2 : pi***
106. Élise : Racine carrée de 2, ça fait 2. 107. Al : Racine carrée de 2, ça fait 2 ? (*rires dans la classe*) 108. Élise : Ah non, non ! J'ai rien dit … Je sais pas ce que ça fait … 109. Al : Racine de 2, ça fait 1,4 et derrière il y a des décimales illimitées…	126. Al : […] J'ai juste à essayer de comprendre comment pi, vous le mettez dans une catégorie et $\sqrt{2}$, ça vous pose un autre problème… 127. Élise : Parce que pi, c'est 3,14 ! 128. Al : Et il n'y a pas des choses après ? 129. Élise : Oui, mais on ne prend que 3,14.

Figure 158 : Extraits comparés de verbatim sur les nombres irrationnels (séance -2 d'Alex)

L'extrait n°1 semble montrer une conception **CF** (conception formelle, Bronner, 1997) du nombre $\sqrt{2}$: l'élève paraît faire un amalgame entre les nombres 2 et $\sqrt{2}$. Il est possible qu'il y ait une confusion avec la règle suivante : « pour comparer deux nombres positifs, on peut comparer leurs carrés », et l'élève en déduit, par un théorème en actes qu'« élever au carré permet d'*éliminer* la racine carrée », autrement dit que l'opérateur « mettre au carré » est l'opérateur inverse l'opérateur « prendre la racine carrée ». De plus, la fin de l'extrait n°1 et l'extrait n°2 montrent également chez cette élève une conception **CA** (conception approchée, Bronner, ibid.) des irrationnels. Ces nombres ne se mettent à exister que lorsqu'une valeur approchée en a été déterminée et cette valeur approchée est alors confondue avec la valeur exacte. Ces conceptions pourraient n'être vues comme un obstacle que lorsque les élèves ont à travailler dans le domaine numérique. L'analyse qui va suivre des trois extraits suivants vise à montrer que l'obstacle créé par ces conceptions erronées touche un domaine plus vaste que le domaine numérique, et que c'est l'ensemble du domaine numérico-algébrique qui est concerné.

Le propos suivants sont tirés de la phase de recherche :

Extrait n°3	***Extrait n°4***	***Extrait n°5***
9. E3 : Et celles-là [*en montrant les équations* ***5*** *:* $\sqrt{2}x - 1 = 4 - \sqrt{3}x$*;* ***6*** *:* $\sqrt{2} + x = 3$ *et* ***16*** *:* $\sqrt{3}x^2 = -2$], je les mets ensemble parce qu'il y a des racines. J'aime bien les racines !	8. E2 : Celle-là [*en montrant l'équation* ***5*** *:* $\sqrt{2}x - 1 = 4 - \sqrt{3}x$], on pourrait la mettre à part, parce que le résultat, il sera avec des racines carrées … Et celle-là aussi [*en montrant l'équation* ***6*** : $\sqrt{2} + x = 3$], parce que si tu passes de l'autre côté, ça fait $3 - \sqrt{2}$.	60. E3 : [*en montrant l'équation* ***6*** *:* $\sqrt{2} + x = 3$] Ça, c'est facile … 61. Marine : C'est quoi comme … base ? 62. E3 : Ça fait $3 - \sqrt{2}$, c'est du premier degré, quoi ! 63. Marine (*en la rangeant sur le tas des équations du premier degré*) : On met des racines avec tout … On les met pas forcément à part …

Figure 159 : Extraits comparés de verbatim sur la considération des racines carrées dans les équations (séance 2-1 d'Alex)

Ces extraits tendent à montrer que cohabitent au sein d'une même classe des conceptions bien différentes des irrationnels et que ces conceptions influent sur la façon de considérer les équations qui comportent des radicaux dans leurs coefficients. L'extrait n°3 est issu du groupe d'Élise, responsable des propos des extraits n°1 et n°2, extraits montrant des conceptions **CF** et **CA** des irrationnels. L'extrait n°3 souligne des élèves restant sur une forme figurale des équations, où la présence de coefficients comportant des racines carrées est suffisante pour considérer ces équations dans une catégorie *à part*, sans chercher à en considérer d'autres caractéristiques. Ici, la présence de nombres irrationnels bloque l'émergence des notions d'équation et de degré, qui n'apparaissent pas du tout. La mise en relation des extraits 1 à 3 permet d'envisager qu'une conception erronée ou partielle des irrationnels peut « parasiter » la notion d'équation. Par ailleurs, dans l'extrait n°4, une autre conception est visible : les élèves sont capables de résoudre les équations données, mais l'obtention de solutions irrationnelles leur fait considérer ces équations *à part*. Les notions d'équation et de degré, d'abord prises en compte, sont ensuite occultées. Enfin, l'extrait n°5 montre des élèves qui savent résoudre les équations données et qui intègrent les irrationnels dans l'ensemble des réels, comme leurs propos l'expriment : « *On met des racines avec tout … On les met pas forcément à part* ». Ce « *tout* » désigne les différentes catégories d'équations que les élèves ont créées. Cette expression traduit que les nombres irrationnels ont pris le statut de « nombre ordinaire » et que la notion de degré est primordiale par rapport à la nature des nombres déterminés, relativement au concept d'équation.

Ainsi ces extraits permettent-ils d'entrevoir une influence de la conception des nombres sur la capacité à considérer et à résoudre une équation. Les conceptions erronées des irrationnels ne vont pas rester isolées, provoquant des erreurs ou des obstacles uniquement dans le domaine numérique, mais elles vont contribuer à des conceptions erronées dans le domaine algébrique, en raison de la forte imbrication des ces deux domaines. Finissons par ce dernier extrait, issu de la discussion entre les élèves ayant constitué l'affiche 1-2-Al et dont l'extrait n°3 ci-dessus provient également :

> 9. E2 : Et celle-là [*en montrant l'équation* ***3*** *:* $x^2 - 8x + 15 = 15$] ?
> E1 : Alors, si je fais passer 15, ça fait zéro (*en faisant le geste de transposer le 15 dans le membre de droite*)... […] ça fait racine carrée de 8*x* ... Et c'est une identité remarquable

Pour résoudre l'équation $x^2 - 8x + 15 = 15$, les élèves indiquent la procédure suivante :

$$x^2 - 8x + 15 = 15$$
$$x^2 - 8x = 0$$
$$x^2 = 8x$$
$$x = \sqrt{8x}$$

Nous constatons ici un cas typique de conception **CF** (Bronner, 1997) où l'opérateur « carré » est *éliminé* en faisant fonctionner l'opérateur « racine carrée ». La présence de l'inconnue au carré déclenche chez l'élève ce processus et provoque une confusion dans la résolution de l'équation. C'est donc bien le manque de compréhension du concept de racine carrée qui est à la base de cette technique erronée, même si d'autres facteurs interviennent.
Pour terminer, nous qualifions cet événement de *prévisible* en raison des nombreux travaux de recherche (Bronner, 1997, Larguier, 2009) qui ont montré que ces conceptions de la racine carrée constituent un obstacle et nous le caractérisons de *problématique* puisque ces conceptions peuvent engendrer des techniques de résolution erronées, liées à ces conceptions.

Le bilan de la situation n°1 est effectué en chapitre 12 (section 12.1).

11.2 Situation n°2

Comme la situation n°1, la situation n°2 a été expérimentée par les trois enseignants. L'unité de temps retenue par les enseignants est ici encore une séance d'une durée d'une heure. Pour les trois professeurs, elle se déroule en salle informatique et en demi-classe.

11.2.1 Classe d'Annabelle : Séance 2

Détaillons les étapes E_1 à E_4 de la méthodologie des quatre composantes pour cette séance d'Annabelle, dont la transcription est donnée en annexe A32. Notons qu'une seule séance en demi-classe a pu être accomplie, avec 16 élèves présents, des circonstances extérieures à l'expérimentation[163] ayant empêché la réalisation de cette même séance dans l'autre demi-classe.

11.2.1.1 Étape E_1

Étant donné que le professeur a découpé la situation n°2 en deux étapes (cf. §10.4.2), apparaissent deux catégories de tâches relativement aux types de tâches T_i [164] ($1 \leq i \leq 5$). Nous utilisons désormais les notations suivantes :

- t'_i ($1 \leq i \leq 5$) pour les tâches relatives à la catégorie d'équations $ax + b = c$;
- t_i ($1 \leq i \leq 5$) pour les tâches relatives à la catégorie d'équations $ax + b = cx + d$.

Ce découpage en phases est basé sur les interventions du professeur, signifiant aux élèves l'avancée du travail en cours. Cependant, le travail en binômes se poursuit selon le rythme de chacun et certains groupes peuvent être en avance ou en retard sur les temps indiqués. Notons que la phase 9 n'a pas été effectuée par tous les élèves, beaucoup d'élèves ayant consacré la fin de la séance à terminer le premier algorithme.

---

[163] Le lycée a organisé une journée banalisée sur l'orientation, le jour prévu de l'expérimentation : tous les cours ont été supprimés.

[164] Nous rappelons que les types de tâches sont :
- **T_1** sont *reconnaissance d'un type d'équations et écriture sous une forme générique* ;
- **T_2**, *résolution sous forme littérale d'une équation paramétrée* ;
- **T_3**, *conception d'un algorithme permettant d'automatiser la résolution d'une équation d'une forme déterminée ;*
- **T_4**, *écriture d'un programme, traduisant dans un langage informatique, l'algorithme issu d'une tâche de type T_3* ;
- **T_5**, *utilisation d'un programme informatique pour effectuer une résolution d'équation.*

Phase	Fonction	Forme du travail	Temps	Lignes de transcription
Phase 1	Accueil et présentation de la situation n°2.Tissage avec situation n°1. Passation des consignes de la situation n°2.	Collectif	00 :00 à 02 :45 **Durée : 2min45s**	1 à 2
Phase 2	Première phase de recherche, en lien avec les quatre tâches t'_1, t'_2, t'_3 et t'_4.	Binômes	2 :45 à 10 :14 **Durée : 7min29s**	3 à 25
Phase 3	Institutionnalisation de la structure de l'algorithme.	Collectif	10 :14 à 11 :42 **Durée : 1min28s**	26 à 27
Phase 4	Recherche de t'_1et institutionnalisation relative à cette tâche.	Collectif	11 :42 à 13 :30 **Durée : 1min48s**	28 à 54
Phase 5	Deuxième phase de recherche : tâches t'_2, t'_3 et t'_4.	Binômes	13 :30 à 28 :02 **Durée : 14min32s**	54 à 91
Phase 6	Institutionnalisation des concepts de paramètre et d'inconnue.	Collectif	28 :02 à 31 :30 **Durée : 3min28s**	92 à 106
Phase 7	Institutionnalisation relative à t'_2.	Collectif	31 :30 à 33 :50 **Durée : 2min20s**	106 à 125
Phase 8	Troisième phase de recherche : tâches t'_3 et t'_4 (simultanément) et t'_5.	Binômes	33 :50 à 44 :35 **Durée : 10min45s**	125 à 163
Phase 9	Quatrième phase de recherche (éventuelle) : tâches t_1 à t_5	Quelques binômes	44 :35 à 48 :40 **Durée : 4min05s**	164 à 212

Tableau 160 : Les différentes phases de la séance 2 d'Annabelle

11.2.1.2 Étape E_2

Analysons l'organisation mathématique effective de la séance 2 d'Annabelle. Nous nous appuyons pour cette analyse sur la transcription de la séance (cf. annexe A32), sur la fiche d'énoncé distribuée aux élèves et remplie par eux (cf. A18) et sur les éléments l'analyse de la trame projetée TP1 (cf. §10.4.2).

Types de tâches observées

Conformément à sa trame projetée, le professeur Annabelle propose d'emblée deux tâches globales en différenciant deux types d'équations sur la feuille distribuée et basées sur deux algorithmes différents. Elle donne aux élèves une consigne relative à la constitution d'un algorithme de résolution des équations de la forme $ax + b = c$ sous la forme suivante : « *je vous laisse réfléchir à comment faire un algorithme qui me permettrait de résoudre les trois premières équations qui sont sur votre feuille* » (ligne 1). Ce n'est qu'au bout d'une dizaine de minutes de recherche de cette première tâche globale que l'enseignante fait référence explicitement à la tâche t'_1, *reconnaître que des équations peuvent s'écrire sous la forme générale* $ax + b = c$, en ces termes (ligne 28) :

> 28. An : Il faudrait que je regarde comment sont fichues ces équations, entre guillemets, la « tête » de ces équations. Est-ce que quelqu'un pourrait m'expliquer quelle est la « tête » de ces équations ?

La consigne relative à t'_2, *résoudre sous forme littérale l'équation* $ax + b = c$ est annoncée par le professeur Annabelle, au bout d'un quart d'heure (ligne 57) :

> 57. An : Il faudrait commencer à regarder comment résoudre l'équation $ax + b = c$ en gardant les lettres… Je pense que ce serait une belle aide.

Cette consigne est reprise une seconde fois au moment de l'institutionnalisation, une demi-heure après le début de la séance (ligne 106).
Le professeur ne donne pas de consigne précise pour la réalisation effective de l'algorithme et du programme (tâches t'$_3$, *concevoir un algorithme permettant d'automatiser la résolution d'une équation du type* $ax + b = c$ et t'$_4$, *écrire un programme traduisant l'algorithme de la tâche t'$_3$*). Annabelle considère sans doute que la tâche est claire pour tous, étant donné qu'elle constitue le but de la situation, et que celui-ci est précisé sur la feuille d'énoncé. Elle effectue néanmoins une reformulation de la consigne à la 32e minute de la séance (ligne 106) :

> 106. Et maintenant, je voudrais qu'elle *[la machine]* me ressorte, pouf ! de manière miraculeuse, sans que je n'ai à faire aucun calcul, la valeur de *x*.

La consigne pour effectuer la dernière tâche t'$_5$, *utiliser le programme réalisé pour résoudre les équations proposées*, n'est pas donnée explicitement par Annabelle, sans doute pour la même raison que ci-dessus. D'ailleurs l'enseignante renvoie les élèves à l'énoncé, précisant, à la 38e minute de la séance, la tâche t'$_5$ sous la forme (ligne 145) suivante :

> 145. An : S'il vous plait, là … J'ai demandé de marquer des étoiles pour les équations que vous pouvez résoudre avec le premier algorithme. […]

En effet, les « étoiles » servent à indiquer les équations qui peuvent être résolues à partir du premier algorithme (cf. annexe A18). Aucune consigne relative à la deuxième tâche globale « *constituer d'un algorithme de résolution des équations de la forme* $ax + b = cx + d$ » n'est donnée à l'ensemble de la classe, ce qui représente un choix conscient du professeur. En effet, Annabelle nous indique en aparté, après le premier quart d'heure de recherche (ligne 55) :

> 55. An *(tout bas et en aparté avec le chercheur)* : Je préfère bien faire le premier algorithme plutôt que de faire les deux …Si on n'arrive pas à finir, c'est pas grave.

Se rendant compte que la recherche du premier algorithme prend du temps, l'enseignante privilégie la compréhension de la méthode plutôt que la production à tout prix. Elle n'oblige pas les élèves à effectuer les deux tâches mais les encourage cependant à ébaucher la seconde, par des propos comme :
- ligne 92, « *après, il y a l'étape suivante et j'aimerais bien que vous la voyez…* » ;
- ligne 125, « *Il y en a qui sont beaucoup plus avancés que ça.* » ;
- ligne 164, « *vous en êtes à la question 3 ?*».

Nous verrons dans la suite de l'analyse que peu d'élèves ont effectué la seconde tâche.
Un autre type de tâches apparaît, *résoudre en environnement papier-crayon les trois premières équations* de la feuille d'énoncé. Ce type de tâches est prescrit par l'enseignante dès la seconde minute de la séance :

> 2. An : Donc, je pense que la méthode, pour aller le plus vite possible, ça serait d'abord d'essayer de les résoudre correctement à la main et ensuite d'essayer de créer un petit algorithme qui me permettrait de voir, d'arriver à l'ensemble des solutions sans avoir à faire un tas de calculs.

Notons qu'elle n'avait évoqué cette tâche ni lors de la constitution de la trame projetée, ni sur la feuille d'énoncé prévue. Annabelle envoie un élève au tableau, Julien, pour effectuer ces trois résolutions à la huitième minute de la séance (lignes 18-19). Nous revenons plus en détail sur l'impact de la prescription de cette tâche dans l'analyse des techniques ci-dessous.

Techniques et environnement technologico-théorique observés

Déterminons les techniques apparues, relativement aux tâches relevées ci-dessus ainsi que le bloc *logos* leur correspondant.

Remarquons que l'enseignante laisse réfléchir les élèves durant sept minutes (phase 2) sur la tâche globale de réalisation d'un algorithme qui résout les trois premières équations. Elle ne suggère pas dans ce premier temps le découpage en sous-tâches. Les élèves tentent alors d'imaginer des techniques pour réaliser la tâche, comme cet élève qui échange avec le professeur (lignes 13 à 16) :

> 13. E (*Dans un binôme*) : J'aurais voulu mettre ici « x prend la valeur –3 »… Parce que la solution pour la première ($x + 3 = 0$), ça fait $x = - 3$…
> 14. An : Oui, mais …
> 15. E : Ben oui, si on met -3 à chaque fois, ça marche pas !
> 16. An : Ah, ben non ! Il ne servirait pas à grand-chose ton algorithme, là… Il faudrait qu'il puisse résoudre plusieurs équations …

L'élève comprend le but de la situation puisqu'il veut entrer dans le programme la solution de la première équation. Mais il se rend compte que -3 n'est pas la solution des deux équations suivantes, sans avoir la capacité de passer à l'étape de généralisation pour déterminer une forme qui conviendrait aux trois équations.

Un autre élève détermine deux sous-catégories pour ces trois équations : « *Alors là il y en a deux sortes : il y a la première ($x + 3 = 0$), et ensuite, il y a les deux autres ($2x – 3 = 4$ et $3 – 2x = -2$)* » (ligne 22), sans aller plus loin. La plupart des élèves ne parvenant pas à décomposer la tâche globale, Annabelle décide alors d'intervenir pour suggérer la tâche t'_1.

Dans la suite, nous séparons dans l'analyse des techniques et technologies, les deux tâches notées t'_i (cf. questions 1 et 2 de l'énoncé, annexe A18) et t_i (question 3) puisque le professeur les présentent ainsi dans son OM.

- ***Organisations mathématiques relatives aux tâches t'_1 et t_1 (de type T_1) : Reconnaissance et écriture littérale d'un type d'équations***

Le professeur initie la tâche t'_1 en demandant *quelle est la « tête » de ces équations*, selon son expression et s'en suit le dialogue suivant (lignes 29 à 47) :

> 29. E_1 : Moi, je sais … ax plus ou moins b.
> 30. An : Est-ce que le plus ou le moins change quelque chose ?
> 31. E_2 : … est égal à zéro ?
> 32. An : Alors égal à zéro, ça irait pour ce cas-là (*elle montre $x + 3 = 0$ au tableau*).
> 33. E_3 : ou à c ?
> 34. E_4 : ou à y ?
> 35. An : On met plutôt c, c'est juste parce qu'on continue l'alphabet… (*elle écrit $ax + b = c$ au tableau*). Donc en fait, j'ai ces trois équations, Manon me dit que je peux les écrire comme ça. Julien, est-ce que tu peux me donner, dans ce cas-là (*elle montre $x + 3 = 0$*), quelle serait la valeur de a ?
> 36. Julien : Ben, -3 …
> 37. An : a serait -3. Tout le monde est d'accord ?

> 38. Es (*en chœur*) : Non !
> 39. E : Non, c'est 1.
> 40. An : a c'est le nombre qui est devant l'inconnue x. Devant l'inconnue x, j'ai rien, donc c'est ?
> 41. Julien : zéro ?
> 42. An : 0 multiplié par x, ça vaut combien ?
> 43. Julien : zéro.
> 44. An : Donc tu sais très bien que lorsque je veux retrouver le x, il faut que je multiplie par 1. Donc, tu essaies de ne pas te tromper Julien, s'il te plaît, merci ! Alors le b, ça va être combien ?
> 45. Julien : 3
> 46. An : Le c ?
> 47. Julien : zéro

Cet extrait indique que la technique τ_1 décrite en analyse a priori (cf. §9.3.2), *repérer les termes comportant la lettre x, substituer des lettres aux nombres déterminés et uniformiser les écritures obtenues*, est appliquée ici, avec un certain nombre de difficultés. En particulier, nous relevons les points d'achoppement suivants, qui montrent les éléments technologico-théoriques sous-jacents restant incomplets pour ces élèves :
- la conception d'une soustraction comme ajout de l'opposé, où l'élève E_1 propose l'écriture $ax \pm b$ pour les membres de gauche des trois premières équations ($x + 3$ est vu comme $ax + b$ et $2x – 3$ comme $ax – b$) ;
- la différenciation entre paramètre et inconnue. Pour Julien, les lettres *a, b, c* et x ne semblent pas avoir un rôle différent puisqu'il propose la valeur de la solution comme valeur du paramètre a ;
- l'absence du coefficient multiplicatif 1, dans une expression comme $x + 3$, confondu avec l'absence du coefficient additif. Julien attribue à a la valeur 0, au lieu de 1.
La gestion des *ostensifs* et des *non-ostensifs* est simultanée et délicate pour ce dernier point. Annabelle justifie la valeur du coefficient a en revenant aux règles : $0 \times x = 0$ et $1 \times x = x$ mais Julien éprouve des difficultés à comprendre que « rien » peut être égal à 1, plutôt qu'à 0 (lignes 40 et 41).
Le geste du professeur Annabelle est à noter : après que la forme ax + b = c a été identifiée, elle effectue un retour vers les deux premières équations (lignes 35 à 47 et lignes 48 à 53) pour instancier les valeurs des paramètres *a, b, c*. Elle amène ainsi la preuve que cette forme générique convient. Sa conclusion est également à signaler : « *Donc finalement, je vais pouvoir entrer dans la machine a, b, c et lorsqu'elle connaîtra a, b, c, a priori, elle connaîtra l'équation* » (ligne 54). Annabelle indique ainsi trois éléments :
- elle institutionnalise la forme générique $ax + b = c$;
- elle institutionnalise la manière de nommer une équation de cette forme, en relation avec les *actions élémentaires* compréhensibles par la machine et par le logiciel de programmation Algobox ;
- elle relie la sous-tâche t'_1 à la tâche globale, permettant à l'élève de ne pas perdre le fil.
Cette intervention de l'enseignante se poursuit par l'institutionnalisation des concepts de *paramètre* et d'*inconnue*. Annabelle insiste davantage sur le concept de paramètre, considérant sans doute que celui d'inconnue est plus familier aux élèves. Suit la retranscription de ses propos (ligne 100) :

> 100. An : […] C'est vrai que ça variait d'un exercice à l'autre, mais dans un exercice, quand tu veux résoudre une équation, le *a*, le *b*, le *c*, ils sont fixes, ils ne bougent plus. Donc, c'est pour ça que ton terme de variable, il ne me va pas. Comment on appelle *a, b* et *c* ? Vous ne l'avez jamais entendu… ça s'appelle des paramètres. Des paramètres, ce sont des valeurs, des nombres que l'on va fixer au début d'un problème. Mais il arrive souvent, par exemple en physique, ils utilisent beaucoup les paramètres, il arrive souvent qu'on donne des formules avec, au lieu de mettre la valeur du paramètre, à la place, on met une lettre de manière à pouvoir changer le paramètre quand on le souhaite. Par exemple, je ne sais pas si vous avez fait des exercices où il y a de la pression, où on s'intéresse à la pression, au lieu de mettre la pression dans la pièce dans laquelle vous êtes à un moment, vous mettez P et suivant l'exercice, P va valoir une certaine valeur ou une autre valeur. […] Donc là, c'est un peu le cas. Les paramètres *a, b* et *c*, ils vont être fixés au début mais au départ, j'ai voulu mettre des lettres pour pouvoir résoudre ces trois équations sans problème, en trouvant la valeur de *a, b* et *c*.

Après avoir réfuté la proposition d'un élève qui donnait le terme de *variable* pour désigner *a, b, c*, Annabelle énonce la définition ci-dessus du paramètre. L'enseignante s'appuie sur un exemple issu des sciences physiques pour faire comprendre le concept. Sa définition rejoint celle donnée au §2.2.1 par Chevallard (1989) qui désigne un paramètre comme *variable du système dont les valeurs sont supposées connues*. Ce chercheur (ibid.) souligne également la possibilité d'accéder à la modélisation d'un système par son utilisation. C'est bien ce dont il s'agit ici, puisque nous aboutissons à la modélisation d'équations du premier degré. Annabelle amène donc ici des éléments technologico-théoriques qui justifient la forme générique $ax + b = c$.

Toujours concernant la tâche t'_1, nous avons recueilli les productions des 16 élèves concernant la partie 2 de la question 2 de la fiche d'énoncé. En effet cette question stipule de *signaler par une étoile les équations similaires*. L'analyse a priori a montré (cf. §10.4.2) que cette question fait partie du type de tâches T_1 de reconnaissance d'un type d'équations données. Suivent les résultats des productions d'élèves relativement à cette question[165] :

		Équations à reconnaître du type ax + b = c						***Équations à reconnaître comme n'étant pas du type ci-contre***				
Numéro de l'équation		**1**	**2**	**3**	**6**	**7**	**9**	**4**	**5**	**8**	**10**	**11**
Question 2 (partie 1)	**Nb élèves (réponse juste)**	-	-	-	12	9	12	10	11	11	12	11
	Nb élèves (réponse fausse)	-	-	-	0	3	0	2	1	1	0	1
	Nb élèves (absence réponse)	-	-	-	4	4	4	4	4	4	4	4

Tableau 161 : Réponses fournies par les élèves à la tâche de type T_1 (question 2, séance 2 d'Annabelle)

Pour la question 2, partie 1, la reconnaissance des équations de la forme $ax + b = c$ comporte des erreurs. La plupart des élèves trient correctement les équations appartenant à cette catégorie, exception faite de l'équation 7 ($\frac{7}{2}x + 3 = \frac{2}{3}$) qui n'est pas reconnue par 3 élèves comme faisant partie de cette catégorie et l'équation 4 ($2 + x = 5x$) qui est vue au contraire comme y appartenant par 2 élèves. Nous pouvons émettre les hypothèses suivantes, en lien avec les résultats obtenus pour la situation n°1 :

[165] Un exemple de production d'élève est donné en annexe A33.

- les élèves n'ont pas reconnu l'équation 7 en raison de la présence de coefficients sous forme fractionnaire. Les élèves remplacent un nombre par une lettre : par exemple, $\frac{7}{2}$ est vu comme $\frac{a}{b}$, comme le quotient de deux nombres qui reste à effectuer, et non pas comme un nombre *a unique*, résultat de ce quotient.
- l'erreur sur l'équation 4 peut être interprétée de la façon suivante : la présence de trois termes (2, x et $5x$) fait assimiler l'équation à la catégorie ◆x ± ● = ■, oubliant que le membre de droite est en fait de la forme ■x. Nous sommes dans le cas d'une conception *pseudo-structurale* de l'équation.

En ce qui concerne la tâche t_1, nous ne disposons que peu de traces écrites. Comme vu plus haut, l'enseignante n'a pas insisté pour presser les élèves à effectuer le second algorithme, privilégiant une compréhension approfondie du premier. Quelques élèves (4 ou 5 sur les 18) ont cependant réalisé cette seconde tâche, et nous avons recueilli les productions de Pierre et Manon, représentatives de ce sous-groupe :

Equation 8 : $\frac{7}{2}x+\frac{2}{5}=\frac{8}{3}+\frac{1}{2}x$ a b d c – Equation 9 : $3=2x+1$ Equation 10 : $3x+2=5+3x$ a b d c Equation 11 : $1{,}8x-3=2{,}5x+7{,}4$ a b c d	b a c d Equation 4 : $2+x=5x+0$ a b c d Equation 5 : $2x+3=3x+1$
Production de Pierre	**Production de Manon (1)**

Figure 162 : Productions d'élèves d'Annabelle montrant l'engagement dans la tâche t_1 (question 3)

Tous deux ont su généraliser et identifier la forme $ax + b = cx + d$. En particulier, les productions montrent que Pierre ne commet pas d'erreur pour l'équation 8, lors de la substitution des valeurs $(\frac{8}{3}, \frac{1}{2})$ par les paramètres (d, c) dans cet ordre. De la même manière pour l'équation 5, Manon attribue les paramètres (c, d) aux valeurs (5, 0). Elle reconnaît la forme générique, malgré l'absence du terme constant d auquel elle attribue la valeur 0.

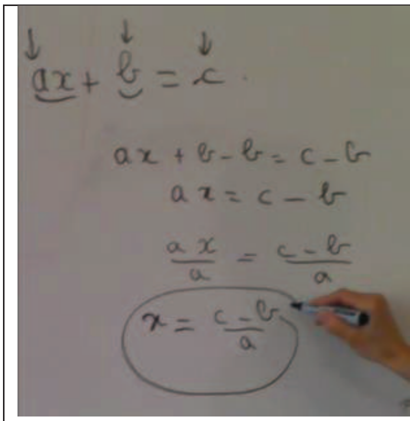
- ***Organisations mathématiques relatives aux tâches t'₂ et t₂ (de type T₂) : Résolution littérale d'une équation***

Pour la tâche t'_2, la production de Marylou suit, montrant les difficultés d'ordre *pseudo-structurale* (Sfard, 1991) de cette élève :

$ax+b=c$ $\cancel{x=\frac{b+c}{a}}$
Production de Marylou

Figure 163 : Production d'une élève d'Annabelle montrant l'engagement dans la tâche t'_2

Suite à l'erreur relevée (barrée ci-dessus) dans la copie de Marylou, Annabelle propose au tableau la résolution de l'équation littérale $ax + b = c$. Nous donnons ci-dessous la trace écrite laissée au tableau :



Trace écrite d'Annabelle

Figure 164 : Trace écrite au tableau du professeur Annabelle relativement à la tâche t'_2

Suit également le dialogue entre le professeur et l'élève Marylou pour mettre au point ce résultat :

> 110. An (*en écrivant au tableau*) : […] Qu'est-ce que c'est cette opération (*en montrant $ax + b$*) ?
> 111. Marylou : …
> 112. An : Produit ou somme ?
> 113. Marylou : Somme.
> 114. An : Somme. Et les deux termes ?
> 115. Marylou : ax et b
> 116. An : Bon, maintenant, à la fin, je ne veux plus avoir que « x égal quelque chose ». Avant d'avoir « x égal quelque chose », là j'ai deux paquets, on va enlever le paquet qui peut se disjoindre… Comment on peut enlever le b, en faisant quelle opération ?
> 117. E : En faisant « c moins b »
> 118. An : En faisant « c moins b ». Je vous rappelle, pour ceux qui ne savent pas, on soustrait b de chaque côté pour garder l'égalité *(en écrivant au tableau)*
> 119. An : Maintenant, l'opération que j'ai là, ça va être quoi Marylou (*en montrant ax*) ?
> 120. Marylou : un produit
> 121. An : le produit que quoi par quoi ?
> 122. Marylou : a par x
> 123. An : Tu ne voudrais que x … comment est-ce que je fais pour enlever le a … qui est multiplié ?
> 124. Marylou : On divise.
> 125. An : je divise par a. Si tu veux tu peux faire ça *(elle écrit $\frac{ax}{a} = \frac{c-b}{a}$)*… les a se simplifient et finalement j'obtiens ça. (*voir figure 164*).

Les gestes de l'enseignante sont composés d'un mélange de justifications technologico-théoriques et d'images évoquant les techniques à appliquer. Par exemple pour justifier que l'équation $ax + b = c$ est équivalente à l'équation $ax = b - c$, l'enseignante rappelle que le membre de gauche est la somme de deux termes (lignes 110 à 115), qu'elle illustre ensuite par *deux paquets que l'on peut disjoindre* (ligne 116). Elle propose alors *d'enlever le b*, puis revient à un élément technologique de *soustraire b pour garder l'égalité* (ligne 118). Notons qu'Annabelle n'évoque pas le cas où l'équation n'est pas du premier degré, c'est-à-dire lorsque le paramètre a est nul. Notons que la justification de la technique de résolution littérale de l'équation $ax + b = c$ aurait nécessité la précision de la non nullité du paramètre a, pour s'assurer du degré 1 de cette équation. L'enseignante l'a peut-être volontairement passé sous silence afin que les élèves n'incluent pas une condition « si $a \neq 0$ » dans l'algorithme, ce qui l'aurait complexifié. Annabelle souhaite sans doute construire un algorithme modulable, que les élèves améliorent pas à pas, ce que montre l'enchaînement des questions de la fiche d'énoncé. Nous revenons plus loin sur ce point.

En ce qui concerne la tâche t_2 pour constituer le second algorithme, nous relevons la production de Manon, qui réalise sans aide la résolution suivante :

$$2 + x = 5x + 0$$
$$b + ax = cx + d$$
$$ax = cx + d - b$$
$$ax - cx = d - b$$
$$x = \frac{d-b}{a-c}$$

Production de Manon (2)

Figure 165 : Production d'une élève d'Annabelle montrant l'effectuation de la tâche t_2

La démarche de Manon consiste, à partir d'un exemple particulier d'équation ($2 + x = 5x + 0$), à extraire la forme générale, puis à résoudre l'équation obtenue par transposition successive des termes constants puis des termes en x. Elle montre sa capacité de *généralisation* et de *modélisation* des équations du premier degré. Notons que Manon ne prend pas en compte le cas où a et c sont égaux ; elle n'a d'ailleurs pas donné de réponse sur sa copie pour la solution de l'équation 10 ($3x + 2 = 5 + 3x$), alors qu'elle a reconnu que cette équation est de ce même type, comme l'atteste sa copie :

Equation 9 : $3 = 2x + 1$	Solution 9: ......$x = 1$..........
Equation 10 : $\overset{a}{3x} + \overset{b}{2} = \overset{d}{5} + \overset{c}{3x}$	Solution 10: ....
Equation 11 : $\overset{a}{1{,}8x} - \overset{b}{3} = \overset{c}{2{,}5x} + \overset{d}{7{,}4}$	Solution 11: ..$x = 14{,}857143$..

Production de Manon (3)

Figure 166 : Production d'une élève d'Annabelle montrant la non-prise en compte du cas a =c (tâche t_2)

- ***Organisations mathématiques relatives aux tâches t'_3 - t_3 (de type T_3 : Conception d'un algorithme) et aux tâches t'_4 - t_4 (de type T_4 : écriture d'un programme)***

Les éléments techniques et technologico-théoriques apportés par Annabelle sont importants pour la constitution des algorithmes. En effet, Annabelle passe plusieurs moments à expliciter la décomposition en *actions élémentaires* nécessaires et qui fondent l'algorithme. En particulier, dans ce passage :

> 26. An : […] Donc, est-ce que vous avez compris le truc ? J'ai une équation. En gros, je veux …. On ne va pas rentrer l'équation, comme ça en bloc dans la machine. Ça peut se faire …. Il y a certains logiciels qui le font. Mais là sous Algobox, je peux rentrer des indications à l'ordinateur qui expliqueront cette équation que j'ai au départ, et je veux que l'ordinateur, sans que je sache ce qu'il fait par derrière, ça m'est un peu égal, me donne le résultat. Vous avez compris le principe ? Donc en gros, je veux expliquer à l'ordinateur…. lui donner des instructions pour qu'il sache que cette équation m'intéresse (*elle montre x + 3 = 0 au tableau*) et lorsque je lui aurai donné ces instructions-là, je veux alors qu'il me donne la solution, sachant que ce qui est au milieu *(elle barre en même temps au tableau)* ne m'intéresse pas. La seule chose quoi m'intéresse … c'est quelqu'un qui veut juste connaître le résultat … il n'en a rien à faire de comment on a trouvé ce résultat. Le problème, c'est que … comme la machine, elle n'est pas créée, vous vous devez apprendre à la machine à créer le résultat.

L'enseignante reprend ici les fonctions de base d'un algorithme, explicitant qu'on ne peut *rentrer l'équation, comme ça en bloc dans la machine*. Elle évoque implicitement les systèmes de calcul formel en précisant que *certains logiciels le font*. Elle précise également la *non-congruence* entre la résolution d'une équation en environnement papier-crayon et en environnement algorithmique selon deux axes :
- la nécessité de *transposer* l'équation de départ et de déterminer les instructions à donner à la machine pour qu'elle la reconnaisse (« *lui donner des instructions pour qu'il sache que cette équation m'intéresse* ») ;
- le tri et la *transposition* (Balacheff, 1994) à réaliser dans les étapes de résolution de l'équation en papier-crayon, de manière à programmer le calcul de la solution (« *lorsque je lui aurai donné ces instructions-là, je veux alors qu'il me donne la solution, sachant que ce qui est au milieu ne m'intéresse pas.* »). Annabelle accompagne alors le geste à la parole en barrant au tableau les étapes intermédiaires de la résolution :

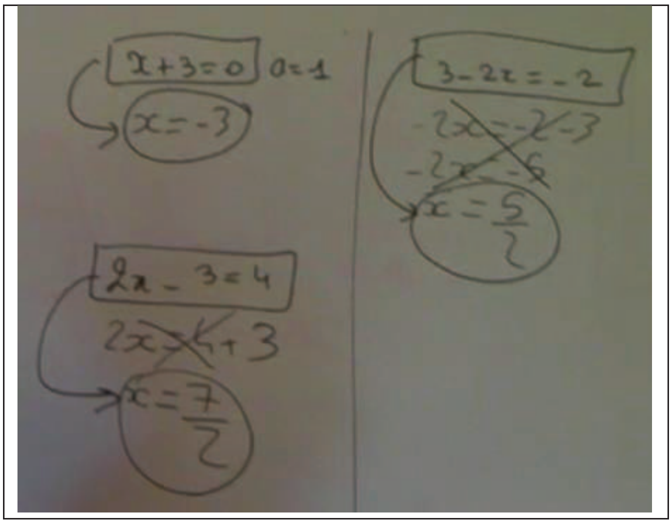


Figure 167 : Trace écrite d'Annabelle montrant la non-congruence de la résolution d'équations en environnements papier-crayon et algorithmique

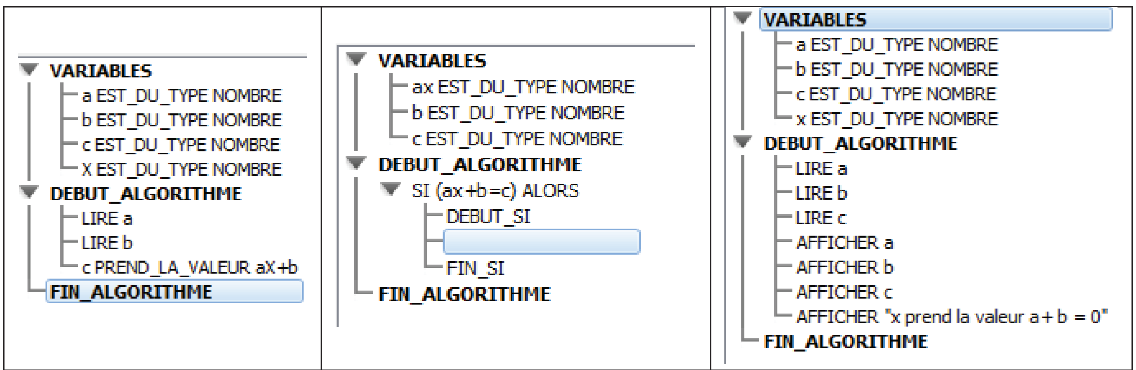
En donnant ainsi ces trois exemples, Annabelle permet la dévolution du problème aux élèves et leur laisse la tâche de généralisation. Néanmoins, pour certains, le transfert ne se fait pas et l'enseignante précise de nouveau cette tâche pour le binôme d'Alexis et Marylou en ces termes (lignes 81 à 89) :

> 81. An : Lorsque j'ai calculé pour *a* = 1, *b* = 3 et *c* = 0, je trouve *x* égal -3 …
> 82. Alexis : Oui …
> 83. An : Pour *a* = 2, *b* = -3 et *c* = 4, je trouve *x* égal 7/2 … Et la troisième …
> 84. Alexis : Pour *a* = -2, *b* = 3 et *c* = -2, on trouve *x* égal 5/2.
> 85. An : Donc, pour chaque équation, tu me donnes des valeurs différentes pour *a, b, c*… C'est la raison pour laquelle tu as écrit « lire a, b et c » …
> 86. Alexis : Oui …
> 87. An : Maintenant, chaque fois, tu as fait un calcul différent pour déterminer *x*. Quel est le calcul qu'on peut rentrer, en gardant *a, b* et *c,* pour que la machine, lorsque tu lui donnes *a, b* et *c* puisse donner *x* directement ?
> 88. Alexis : Euh…
> 89. An : Elle ne sait pas le résoudre la machine, c'est toi qui dois lui apprendre …

L'enseignante revient sur la solution différente obtenue pour chaque triplet *a, b, c* afin que les élèves comprennent que cette solution est fonction de ces paramètres. Elle souligne l'importance des actions élémentaires que peut faire la machine (« *c'est toi qui dois lui apprendre* ») et explique le décentrage nécessaire (ligne 128) pour donner les instructions « *C'est toi qui va rentrer a … La machine, tu lui parles et c'est toi qui lui donnes des ordres. Donc tu vas lui dire de lire les valeurs a, b et c*. » Dans sa formulation, elle donne en même temps des éléments technologico-théoriques propres à la programmation. Plus tard, elle est amenée à rappeler la définition d'une variable informatique ainsi que la spécificité du langage Algobox pour utiliser ces variables (ligne 163) :

> 157. An : Une variable, c'est une boîte dans laquelle on met des nombres, en fait. Au départ, quand tu crées une variable, il y a zéro. Et ensuite, tu peux faire changer la valeur. Donc en fait ici, on va prendre cette structure : « affecter valeur à variable » où tu vas dire, dans la case que j'ai appelée *x*, on va mettre ce calcul-là. Du coup, dans la case où j'ai calculé *x*, j'aurai la solution qui sera dedans. Et tu pourras l'afficher.

La définition de la variable informatique donnée par Annabelle est conforme à celle de Modeste (2012), comme une variable qui *joue le rôle d'un emplacement en mémoire en pouvant changer de valeur au cours du temps* (cf. §4.4).
Malgré ces rappels d'éléments technologico-théoriques, nous rencontrons des erreurs, comme les productions qui suivent, et que nous avons filmées durant le déroulement de la séance :



Production A	**Production B**	**Production C**

Figure 168 : Productions d'élèves montrant les difficultés de conception de l'algorithme (équation ax + b = c)

Les trois productions montrent à la fois :

- un problème d'identification des *actions élémentaires* pour la machine. Pour la production B, l'élève indique la variable « ax », au lieu de séparer la déclaration de a et x, ce qui montre sa difficulté à différencier les concepts de paramètre et d'inconnue. De plus, les explications de l'enseignante n'ont pas suffi à lui faire comprendre que $ax + b = c$ n'est pas une instruction élémentaire pour le logiciel ;
- la non-congruence entre la résolution en environnement en papier-crayon et la transposition nécessaire en langage de programmation, ce que nous pouvons interpréter dans les productions B et C où l'équation de départ est présente (pour la production C, l'élève se reprend – lignes 156, 157 – et indique qu'il a voulu écrire $ax + b = c$) ;
- une instrumentation inachevée, où des élèves peinent encore avec le langage, en confondant les instructions entre elles. Par exemple, la production A où l'élève cherche à écrire le signe « = » de l'équation $ax + b = c$ en utilisant l'instruction « prend la valeur ».

Les productions ci-dessus (cf. figure 168) sont réalisées en cours de séance. Annabelle passant de groupe en groupe pour rectifier au besoin les erreurs, six binômes sur huit produisent finalement un programme correct comme les exemples ci-dessous :

VARIABLES a EST_DU_TYPE NOMBRE b EST_DU_TYPE NOMBRE c EST_DU_TYPE NOMBRE x EST_DU_TYPE NOMBRE **DEBUT_ALGORITHME** LIRE a LIRE b LIRE c x PREND_LA_VALEUR (c-b)/a AFFICHER x **FIN_ALGORITHME**	**VARIABLES** X EST_DU_TYPE NOMBRE a EST_DU_TYPE NOMBRE b EST_DU_TYPE NOMBRE c EST_DU_TYPE NOMBRE **DEBUT_ALGORITHME** LIRE a LIRE b LIRE c c PREND_LA_VALEUR c-b X PREND_LA_VALEUR c/a AFFICHER X **FIN_ALGORITHME**
Production de Cindy et Clément	**Production de David et Lucas**

Figure 169 : Programmes de la séance 2 d'Annabelle relevés sur clef UBS (algorithme de résolution d'équations de la forme ax + b = c)

Notons la particularité de la production de David et Lucas que l'enseignante relève en ligne 91 (« *Ah, il est pas mal ton programme !* »). Ces élèves ont en effet *réduit* la *distance* (Haspekian, 2005) entre la résolution de l'équation en environnement papier-crayon et en environnement algorithmique. Nous notons d'une part, leur maîtrise des variables informatiques, où ils se montrent capables de réutiliser une variable informatique (c) et de lui attribuer une autre valeur ($c – b$) alors que l'égalité mathématique n'est pas *congruente* ici (c n'est pas égal à $c – b$). D'autre part, en déchiffrant ce programme, nous pouvons suivre la démarche algébrique des élèves :

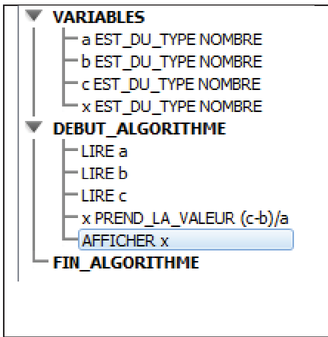
$ax + b = c$

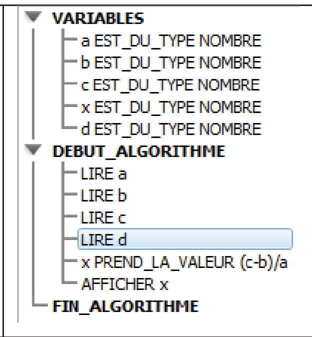
$ax = \boldsymbol{c - b}$ **→ $\boldsymbol{c - b}$ est nommé $\boldsymbol{c}$,** soit $ax = c$

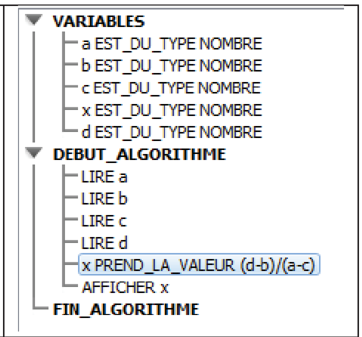
$$x = \frac{c}{a}$$

Cette technique est remarquable, en ce sens qu'elle montre une autre généralisation de l'équation de départ, sous la forme $ax = B$. Les élèves ont ici fait un pas supplémentaire dans leur compréhension de la résolution des équations du premier degré, puisqu'ils ne distinguent plus de microtechniques. Les techniques se trouvent unifiées, les savoirs ne sont plus morcelés, ils s'intègrent les uns aux autres. Ces éléments vont dans le sens d'une

consolidation de l'hypothèse H3, où nous voyons comment pour certains élèves, le détour par l'algorithmique et la programmation les oblige à revisiter leurs connaissances des concepts d'algèbre élémentaire. Nous reprenons plus loin cette idée de programme *congruent* ou *non congruent* avec la séance 2 de Maurice, en la développant (cf. § 11.2.2.2).
L'établissement de ce premier algorithme est un pas vers la compréhension de l'algorithme complet, où des boucles de tests sont nécessaires.
Pour exemplifier ceci, suit la technique de l'élève Pierre, qui a terminé le second algorithme. Nous avons reconstitué étape par étape, à partir du film de la séance, sa technique permettant de transformer le premier algorithme pour obtenir le second.







1er algorithme	Ajout de la variable *d* et de sa lecture	Modification de la solution *x* et obtention du 2nd algorithme

Figure 170 : Transformation du 1er programme par l'élève Pierre, pour obtenir le 2nd

Sa démarche de transformation du premier algorithme en le second montre que Pierre a compris la structure commune globale de ces algorithmes : il ne recommence pas l'algorithme à partir du début, il s'appuie sur le premier pour écrire le second. Cependant, nous n'avons pas d'indice permettant de savoir si Pierre a compris que le second programme permet aussi de résoudre les équations résolues avec le premier, autrement dit, en transposant, que toutes les équations de la fiche d'énoncé se résolvent suivant la même technique. Ici encore, le programme obtenu est correct dans le cas où $a \neq c$. L'intervention du professeur au sujet de l'équation 10 permet au binôme de comprendre la complexification nécessaire de leur algorithme par l'introduction d'une boucle de test (lignes 195 à 208) :

195. An : *(venant voir le binôme de Pierre)* Tout marche ou pas ?
196. Pierre : Pour l'instant oui. Sauf celle-là, mais je pense que c'est parce qu'on a le dénominateur égal zéro (*il montre l'équation 10, $3x + 2 = 5 + 3x$).*
197. An : Oui, donc ton algorithme il est pas bon pour celle-là. Qu'est-ce qu'il va falloir faire comme cas ?
198. E1 : Un test « Si … ».
199. An : Si quoi ?
200. Pierre : « Si $a - c = 0$ » …
201. An : Oui, « Si $a - c = 0$ », alors tu vas faire une certaine chose … à voir ; alors finalement, ton algorithme, il traitait une certaine chose : Si a est ?
202. Pierre : …
203. An : Si $a - c$ est comment ?
204. Pierre : Positif ou négatif …
205. An : Donc différent de zéro. On est d'accord, ce que tu voulais dire, c'est qu'il n'y a pas le zéro dedans ?

> 206. Pierre : Oui !
> 207. An : Donc là, il suffit que tu intègres une boucle : « Si $a - c \neq 0$ alors … ». Et différent, c'est « != » sur l'ordinateur. C'est pour ça que je t'ai dit : « fais-les toutes » parce que je savais que tu allais être en échec pour la 10.
> 208. Pierre : En échec (*rires*), c'est un grand mot, Madame !

Dans cet extrait, Pierre est capable justifier le cas particulier de l'équation 10 où $a = c$, en précisant que la solution $\frac{d-b}{a-c}$ ne convient pas, en raison de l'annulation du dénominateur. Si cet extrait ne nous donne pas d'indice pour savoir si Pierre connaît la solution de l'équation dans ce cas, sa production écrite le donne :

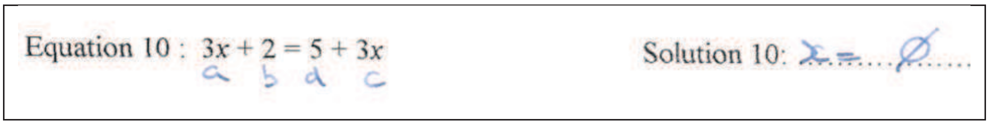

Equation 10 : $3x + 2 = 5 + 3x$
a b d c
Solution 10: x = …∅……

Figure 171 : Production de Pierre pour l'équation 10 (séance 2 d'Annabelle)

Même si l'écriture proposée ($x = \varnothing$) est incorrecte, cet élève sait manifestement que l'équation n'a pas de solution. Notons qu'il reste un dernier cas à considérer dans la constitution de l'algorithme complet, celui de la différenciation des cas $b = d$ (une infinité de solutions) et $b \neq d$ (pas de solution).

Pour conclure, le cas de Pierre est un cas particulier, puisque seul son binôme (sur 8) a pu terminer la situation n°2, telle qu'elle a été proposée par Annabelle. Il est manifeste que l'unité de temps d'une séance d'une heure est trop courte pour l'ensemble des élèves de cette classe. Pour être bénéfique et permettre aux élèves de réaliser des liens entre l'environnement algorithmique et l'environnement papier-crayon, une seconde séance aurait été nécessaire.

- ***Organisations mathématiques relatives aux tâches t'_5 et t_5 (de type T_5) : Utilisation d'un programme***

Les résultats ci-dessous confirment que 6 binômes sur 8 ont réalisé le premier algorithme et un seul binôme, le second. Nous avons séparé la question 2 de la fiche d'énoncé en deux parties :

- partie 1 : *Signaler par une étoile les équations similaires (tâche de type T_1)*. Cette partie est analysée plus haut *;*
- partie 2 : *Faire fonctionner l'algorithme pour ces équations (tâche de type T_5).*

La question 3 correspond partiellement à la tâche t_5.

Les productions des élèves donnent les résultats suivants[166] :

[166] Un exemple de production d'élève est donné en annexe A33.

	Solution à déterminer avec le 1er algorithme – Questions 1 et 2 (partie 2)						**Solution à déterminer avec le 2nd algorithme – Question 3**				
Équation	**1**	**2**	**3**	**6**	**7**	**9**	**4**	**5**	**8**	**10**	**11**
Réponse attendue[167]	-3	3,5	2,5	6,586*	-0,667*	1	0,5	2	0,756*	pas de sol	14,857*
Nb élèves	16	16	16	11	6	8	2	2	2	1	2
Réponse erronée 1					0,667	-1					
Nb élèves (1)					2	2					
Réponse erronée 2						2,5					
Nb élèves (2)						1					
Absence réponse				5	8	5	14	14	14	15	14

Tableau 172 : Réponses fournies par les élèves aux tâches de type T_5, séance 2 d'Annabelle

Pour la partie 2 de la question 2, les élèves ayant conçu un algorithme correct parviennent à l'utiliser, hormis les quelques réponses erronées pour les équations 7 et 9 qui sont difficilement explicables, sans autres données.

Pour la question 3, le cas particulier de Pierre est intéressant : il montre comment cet élève utilise ses connaissances sur les équations et sur les nombres pour effectuer une rétroaction entre les objets algébriques et algorithmiques. Nous retranscrivons une partie du dialogue (lignes 178 à 184) avec son binôme (élève E1) lors de la recherche des solutions de l'équation 11, à l'aide du second algorithme (cf. figure 170) :

> 178. Pierre : La **11** ($1{,}8x - 3 = 2{,}5x + 7{,}4$), c'est 1,8 puis -3 puis 2,5 puis 7,4.
> 179. E1 : Ça marche pas !
> 180. Pierre : Comment tu sais que ça marche pas ?
> 181. E1 : Je trouve pas pareil, j'ai fait le calcul … Madame ? Ça marche pas !
> 182. An : Fais voir ton calcul ? … Ton calcul est juste pourtant. *(part voir un autre groupe)*
> 183. Pierre *(corrige seul une erreur de syntaxe* : *la virgule dans un nombre décimal se nomme par un point sous Algobox)* : Eh bien voilà !
> 184. E1 : Mais c'est quoi cette valeur … (*il voit -14,857143 à l'écran*) Il faudrait une touche MATH-FRACTION !

Les deux élèves contrôlent le résultat obtenu avec le programme informatique en effectuant une vérification « à la main ». Ils font davantage confiance à leur calcul « manuel » plutôt qu'à celui obtenu avec l'ordinateur, comme l'atteste leurs propos :

- en ligne 181 : « *Je trouve pas pareil, j'ai fait le calcul ... Madame ? Ça marche pas !* ». En parallèle, Pierre a effectué le calcul en environnement papier-crayon et a trouvé la valeur $\frac{-10{,}4}{0{,}7}$ dont il a ensuite déterminé une valeur approchée à la calculatrice. La comparaison des deux résultats l'aide à détecter une erreur de syntaxe, portant sur l'entrée des valeurs des paramètres au clavier (la virgule d'un nombre décimal doit être entrée sous la forme d'un point) ;
- en ligne 184 : « *Mais c'est quoi cette valeur… Il faudrait une touche MATH-FRACTION !* ». Voyant à l'écran que la solution est -14,857143, l'élève E1 la compare avec la solution trouvée par Pierre et déplore que le logiciel Algobox ne possède pas une fonction permettant

[167] Les réponses étoilées sont des valeurs approchées, données par le logiciel qui les propose avec 8 chiffres significatifs. Nous les avons arrondies ici au millième, par commodité de lecture.

de retrouver la fraction rationnelle, à partir d'une valeur approchée, comme le fait une calculatrice avec la touche « Math-fraction ».
Ces deux élèves sont donc capables de *transposer* les concepts algébriques d'un environnement papier-crayon à un environnement informatique, de raisonner soit dans l'un, soit dans l'autre et même de comparer les performances d'un logiciel de programmation avec celles d'une calculatrice. Pour eux, la *transparence* entre les registres et entre les outils semble totale et ce travail leur permet de reprendre leurs connaissances sur les équations et de les unifier dans un système plus large de modélisation algébrique. Ces propos viennent corroborer l'hypothèse H3. Il resterait à vérifier si ces élèves ont compris que les équations résolues par le premier algorithme peuvent l'être par le second et donc que les deux catégories d'équations déterminées au départ n'en font qu'une.

11.2.1.3 Étape E_3

En nous basant sur le découpage en phases de l'étape E_1, nous analysons l'organisation didactique de la séance, en particulier les évolutions du milieu, du contrat, du temps didactique et des topos élève et professeur.

Phase 1 : Accueil et présentation de la situation n°2

La séance se déroule en salle informatique où les élèves sont placés par deux devant un ordinateur. L'enseignante commence par donner le but de la séance : *« Le but est de créer des machines à résoudre des équations* » (ligne 2). Elle utilise le vocable *machine*, qu'elle utilise comme synonyme d'*algorithme* et qu'elle reprend ensuite tout au long de la séance, laissant entendre l'automatisation de la procédure de résolution de certaines catégories d'équations. Elle indique d'ailleurs qu'un algorithme permettrait *d'arriver à l'ensemble des solutions sans avoir à faire un tas de calculs*. Elle opère un *tissage* (Bucheton, 2004) entre les situations n°1 et n°2, où elle rappelle le travail de catégorisation effectué au cours de la séance précédente (ligne 2). Elle annonce qu'elle a réalisé elle-même un *certain tri d'équations*, qu'elle présente ici *deux catégories d'équations* et *qu'aujourd'hui, on va essayer de les résoudre*. Annabelle met ainsi en place les premiers éléments du milieu, le milieu matériel avec la fiche d'énoncé comportant 11 équations, le milieu informatique avec l'ordinateur pourvu du logiciel Algobox et le milieu numérico-algébrique avec le travail annoncé de la résolution d'équations à l'aide d'un algorithme. Elle précise ensuite le contrat didactique en indiquant de *faire un algorithme qui permette de résoudre les trois premières équations* et *d'essayer de les résoudre correctement à la main*. Comme dit en étape E_2, cette dernière tâche n'était pas prévue dans sa trame projetée et nous voyons en phases 3 et 4, l'impact de cette décision. Du point de vue du topos, la responsabilité du professeur est de présenter la tâche globale à réaliser et celle de l'élève de l'accepter.

Phase 2 : Première phase de recherche (tâche globale)

Annabelle renvoie rapidement les élèves sur la tâche algorithmique, alors que ceux-ci ont tendance à vouloir passer directement à la tâche de programmation. Elle répète plusieurs fois qu'il faut *réfléchir avant d'aller sur l'ordinateur*. Elle insiste ainsi sur la phase conceptuelle de la structure de l'algorithme. Cette étape est une phase de dévolution. En effet, en ligne 11, un élève demande s'il *faut faire un algorithme pour les trois* premières équations, ce qui

permet à l'enseignante de préciser la définition d'un algorithme non-instancié, au sens de Modeste (2012) : « *La machine à résoudre les équations, ça doit être une machine qui quand même, en résout plus d'une !* ». C'est ce moment qu'Annabelle choisit pour envoyer l'élève Julien résoudre les trois premières équations ($x + 3 = 0$, $2x – 3 = 4$ et $3 – 2x = -2$) au tableau. Notons qu'elle ne commente pas les résultats obtenus, se contentant d'un « *très bien !* », à l'égard de Julien qui les résout de façon correcte (lignes 18-19).
Le milieu s'enrichit alors d'une définition implicite d'un algorithme non-instancié et de la résolution de trois équations. Notons qu'Annabelle ne donne pas d'indication sur l'utilité de cette résolution, elle laisse les élèves continuer à réfléchir sur la tâche globale de conception d'un algorithme. Sa démarche consiste à poser des jalons, sur lesquels elle va s'appuyer par la suite (phase 3) pour expliciter la structure de l'algorithme. Le topos du professeur se compose d'un accompagnement dans la dévolution de la tâche globale à l'élève, celui de l'élève de s'approprier la tâche.
Annabelle met fin à cette première phase de recherche, après avoir constaté que l'exposition au tableau de la résolution des trois premières équations incite les élèves à résoudre les autres « à la main », ce qui n'était pas son intention (ligne 25).

Phase 3 : Institutionnalisation de la structure de l'algorithme

Nous avons vu en étape E_2 comment Annabelle ajoute dans le milieu les éléments de structure de l'algorithme, montrant la différence entre la résolution d'équations en environnement papier-crayon et les éléments qu'il convient de conserver pour *transposer* cette résolution à toute instance de la même famille d'équations. Elle utilise dans cette phase les trois équations résolues au tableau par Julien, en tentant de dégager ce qui est spécifique à la structure de l'algorithme. Nous notons qu'elle réalise son institutionnalisation de la structure sans avoir proposé aux élèves d'effectuer les sous-tâches t'_1 et t'_2 : elle conserve ici encore le travail sur la tâche globale, en essayant de conserver au topos de l'élève une large place. Elle reprécise alors le contrat en mentionnant que réaliser l'algorithme, c'est *apprendre à la machine à créer le résultat*. Annabelle s'assure de l'adhésion des élèves au contrat en demandant : « *Est-ce que jusque-là, j'ai été claire pour tout le monde ?* ». Elle garde ainsi les élèves engagés dans la situation.

Phase 4 : Recherche de la tâche t'_1 et institutionnalisation relative à cette tâche

À 12 minutes du début de la séance, Annabelle propose, en oral collectif, de déterminer la forme générique des trois premières équations, sachant que plusieurs binômes l'ont déjà trouvée. Une discussion s'engage entre l'enseignante et des élèves pour écrire cette forme $ax + b = 0$ ou $ax + b = c$ ou $ax + b = y$. C'est l'enseignante qui tranche pour la forme $ax + b = c$ (cf. événement étape E_4) et elle justifie cette décision en montrant que les trois premières équations peuvent s'écrire sous cette forme. Pour ce faire, elle demande à Julien d'instancier les paramètres *a, b, c* en leur donnant les valeurs des coefficients des équations. Dans cette phase d'institutionnalisation, Annabelle montre que pour donner à l'ordinateur une équation du type $ax + b = c$, il est équivalent de lui donner les valeurs de trois paramètres *a, b* et *c*. Nous voyons encore ici l'importance de la résolution « à la main » des trois premières équations – traces écrites qui restent au tableau (cf. figure 173) – et sur laquelle l'enseignante s'appuie, pour effectuer pas à pas la *transposition* entre les environnements papier-crayon et algorithmique.

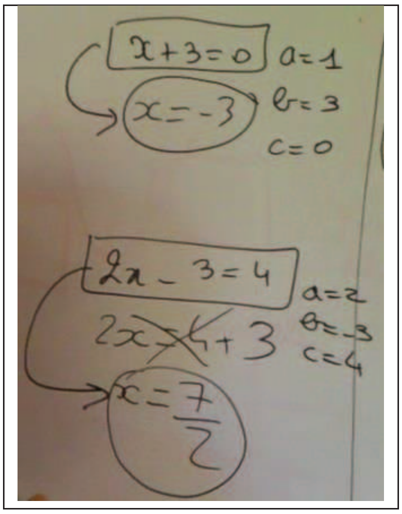


Figure 173 : Trace écrite d'Annabelle pour la forme générique des premières équations

Le temps didactique a avancé par la donnée de la forme générique $ax + b = c$. Le topos du professeur est de guider les élèves vers la généralisation et la modélisation des trois premières équations du premier degré, celui de l'élève de dégager ce qui est commun aux trois équations afin de procéder à cette généralisation.

Phase 5 : Deuxième phase de recherche

À 15 minutes du début de la séance, Annabelle donne la consigne spécifique de résoudre l'équation paramétrée, en indiquant de *commencer à regarder comment résoudre l'équation* $ax + b = c$ *en gardant les lettres* (ligne 57). Cette tâche est ajoutée dans le contrat à ce moment précis de la séance. La transcription montre qu'au moins deux binômes (lignes 63-72 et 73-78) réussissent cette tâche sans aide et qu'ils sont allés plus loin, puisqu'ils vérifient que l'algorithme fonctionne sur les trois premières équations. Leur vérification consiste à comparer la réponse obtenue par le programme et la solution obtenue « à la main », toujours présente au tableau. Leur satisfaction est grande lorsque le résultat est identique comme l'atteste les exclamations « *Wouah ! Ça marche* » (ligne 70), ou « *Madame, ça y est, ça marche !* » (ligne 73) ou encore « *C'est génial !* » (ligne 78). Ici encore, malgré la consigne spécifique sur la résolution de l'équation paramétrée, Annabelle ne revoit pas le contrat à la baisse, elle fait en sorte que cette consigne reste un indice pour la conception globale de l'algorithme, en ne donnant pas la résolution de cette équation. Cette deuxième phase de recherche dure 15 minutes, pendant lesquelles certains élèves auront terminé le premier algorithme demandé (questions 1 et 2 de la fiche d'énoncé) et d'autres n'auront pas encore déterminé la forme générale de la solution de l'équation $ax + b = c$. Dans le topos de l'enseignante, nous retrouvons donc l'adaptation du professeur devant l'hétérogénéité de sa classe. Nous notons les *gestes d'étayage* de l'enseignante qui encourage (*Ah, il est pas mal ton programme !,* ligne 91), soutient (*Vas-y*, ligne 63), bouscule (*Je veux la réponse à ma question !*, ligne 79) pour garder les élèves mobilisés dans leur tâche. Quant au topos de l'élève, reste à sa charge de rechercher l'algorithme, sachant que le cœur de celui-ci est la solution de l'équation $ax + b = c$.

Phase 6 : Institutionnalisation des concepts de paramètre et d'inconnue

Annabelle décide de faire le point sur les différents types de lettres qui composent l'équation $ax + b = c$ en distinguant les paramètres *a, b, c* de l'inconnue *x*. Elle nous a confié à la fin de la séance avoir improvisé cette institutionnalisation, qui lui a semblé intéressante pour asseoir cette nouvelle connaissance, mise en jeu tout au long de la séance. Le milieu s'enrichit de la définition du *paramètre*, en le comparant avec l'*inconnue* et la *variable*. Cette phase se conclut par le retour sur l'algorithme à concevoir : « *à partir de là, je connais et je vais donner à la machine ces trois lettres* » et sur la structure et le langage de programmation du logiciel : « *quelle est la structure dans Algobox pour demander les trois lettres… les trois valeurs a, b et c ?* » (ligne 104). Le discours de l'enseignante a pour but de permettre à l'élève de relier les notions de paramètre et d'inconnue à la structure de l'algorithme à concevoir : les paramètres sont des données d'entrée alors que l'inconnue est une donnée de sortie de l'algorithme. En lien avec l'hypothèse H3, nous faisons ici le constat que le détour par l'algorithmique et la programmation oblige à approfondir certains concepts algébriques.

De plus, le topos d'Annabelle contenant la clarification de concepts algébriques en jeu dans la classification et la résolution d'équations, l'enseignante vient ici conforter l'hypothèse H1, puisque cette notion de paramètre n'intervient pas explicitement dans le programme officiel de seconde : Annabelle semble penser cependant que son introduction est une façon d'approfondir les connaissances algébriques des élèves. De plus, elle leur signifie que cette connaissance peut s'avérer utile également en sciences physiques, lorsqu'elle donne l'exemple de la pression. Un grand silence est d'ailleurs perceptible dans la classe à ce moment de la séance, les élèves s'étant tous arrêtés dans leur tâche pour écouter attentivement le professeur. Ce geste d'Annabelle va également dans le sens de l'hypothèse H4, en montrant comment un professeur autorise, par ce choix d'institutionnaliser le concept de paramètre, un apprentissage et une compréhension affinée de cet objet de l'algèbre.

Phase 7 : Institutionnalisation relative à la tâche t'_2

Dans cette courte phase (2min20s), l'enseignante s'appuie sur l'élève Marylou pour proposer l'institutionnalisation de la solution de l'équation littérale $ax + b = c$. Le choix de cette élève est sans doute motivé par les difficultés que rencontre Marylou (cf. étape E_2, figure 163) pour comprendre la priorité dans laquelle s'effectuent les transformations. Le topos d'Annabelle contient donc la reprise d'éléments techniques et technologico-théoriques de résolution d'une équation du premier degré. Ce qui reste à la charge de l'élève est de comprendre la démonstration et également de déterminer comment utiliser la solution de cette l'équation pour structurer l'algorithme. C'est que signifie Annabelle à la fin de la démonstration par les propos : « *Donc finalement, si je rentre a, b, c, si je donne cette formule-là à la machine, elle pourra me rendre x…* » (ligne 125). Nous remarquons qu'Annabelle renvoie une fois de plus les élèves sur la tâche de conception de l'algorithme, ce qu'elle n'a manqué de faire à aucune de ses interventions.

Notons pour finir ses gestes de *maintien d'atmosphère*, où elle s'assure du maintien des élèves dans la recherche de la tâche, en tentant de prévenir le découragement :

- « *Tu as quand même eu l'idée qu'il faut isoler le x. Là, tu l'as mal isolé. On va essayer.* » (ligne 110) ;
- « *Bon, ceux qui étaient complètement bloqués, vous le faites.* » (ligne 125).

Phase 8 : Troisième phase de recherche (tâches t'_i pour $3 \leq i \leq 5$)

Cette phase consiste en la dernière recherche de l'algorithme de résolution des équations $ax + b = c$ et sa programmation sur le logiciel Algobox. En raison de la grande hétérogénéité des élèves, cette phase sera pour certains la dernière de la séance, ils parviendront seulement à terminer les questions 1 et 2 de la fiche d'énoncé. Pour d'autres, comme l'élève Pierre, une phase supplémentaire aura lieu, pour aborder la question 3.

Durant cette phase, Annabelle circule de binôme en binôme pour répondre aux questions et contrôler l'écriture du programme, selon les besoins de chacun. Elle intervient sur :

- le vocabulaire algébrique. Le terme *solution* ne semble pas connu d'un élève (ligne 126) ;
- la structure de l'algorithme. L'enseignante reprend ses explications sur l'utilisation de la solution littérale (ligne 159) ;
- la structure et les instructions élémentaires d'un programme, comme la définition d'une variable informatique (ligne 163), « lire » (ligne 128), « afficher » (ligne 144), « affecter une valeur à une variable » (ligne 161) ;
- la syntaxe du langage Algobox, « sqrt » (ligne 146), le parenthésage nécessaire pour la valeur « (c – b) /a » (lignes 141 et 149).

En fin de phase, le milieu s'est enrichi des programmes des élèves. Nous notons que le topos de l'élève contient entièrement la réalisation la question 2 (tâche de type T_5 d'utilisation du programme), dans laquelle l'enseignante n'intervient pas. Celle-ci demande simplement aux élèves de ne pas oublier de marquer les équations qu'ils peuvent résoudre avec le premier algorithme (ligne 145). Elle leur laisse entièrement la responsabilité de ce travail.

Phase 9 : Quatrième phase de de recherche (tâches t_i pour $1 \leq i \leq 5$)

Durant les cinq dernières minutes de la séance, pendant que la plupart des élèves terminent les tâches t'_i ($3 \leq i \leq 5$), Pierre et quelques élèves débutent les tâches t_i. L'enseignante intervient dans au moins trois binômes dont nous disposons de traces de transcription :

- lignes 164 à 172, où un groupe identifie les équations restantes sous la forme générique $ax + b = cx + c$. Les élèves rectifient après le passage du professeur ;
- lignes 173 à 175, où un second groupe les nomme $ax + b = a'x + b'$;
- lignes 176 à 182, où un troisième groupe, celui de Pierre, a identifié la forme $ax + b = cx + d$ et a déjà programmé sa résolution.

Ayant achevé la première tâche globale sur les équations $ax + b = c$, ces trois groupes généralisent sans difficulté la forme des équations $ax + b = cx + d$ pour les équations restantes.

Faute de temps, les trois binômes ne terminent pas le travail, sauf le binôme de Pierre. Il est fort probable qu'avec un peu de temps supplémentaire, ces autres élèves auraient pu aboutir à la conception du second algorithme, comme le montre la production inachevée qui suit :

```
VARIABLES
  x EST_DU_TYPE NOMBRE
  a EST_DU_TYPE NOMBRE
  b EST_DU_TYPE NOMBRE
  c EST_DU_TYPE NOMBRE
  d EST_DU_TYPE NOMBRE
DEBUT_ALGORITHME
  LIRE a
  LIRE b
  LIRE c
  LIRE d
  b PREND_LA_VALEUR b-d
  c PREND_LA_VALEUR c-a

  AFFICHER x
FIN_ALGORITHME
```

Figure 174 : Production inachevée d'un binôme montrant l'engagement dans la tâche t_4

Le début de cet algorithme, permettant de résoudre les équations de la forme $ax + b = cx + d$, montre une structure similaire au premier algorithme. La ligne manquante s'écrirait « x prend la valeur b/c ». C'est la sonnerie qui a arrêté le travail et quelques minutes de plus auraient sans doute permis aux élèves de terminer.

Durant cette dernière phase, nous avons suivi le dialogue entre Pierre et son binôme (lignes 183 à 194), comme analysé en étape E_2, qui montre les rétroactions qu'effectuent ces élèves entre le domaine algorithmique et le domaine algébrique, s'appuyant sur leurs connaissances en résolution d'équations du premier degré. Ces rétroactions sont permises, entre autres, par les lettres *a, b, c, d, x* qui font la liaison entre les deux domaines, puisqu'elles sont variables mathématiques dans l'environnement papier-crayon du domaine algébrique et variables informatiques dans l'environnement informatisé du domaine algorithmique. Le topos de l'élève, du moins pour ce binôme, occupe une grande place, le rôle du professeur étant restreint à valider leurs propos et à les aider à pointer l'équation n°10 qui est un cas particulier, ce qu'Annabelle signale par son intervention : « *Tout marche ou pas ?* » (ligne 195). Elle conclut par « *C'est pour ça que je t'ai dit : « fais-les toutes » parce que je savais que tu allais être en échec pour la 10* » (ligne 207). Cette conclusion montre des choix des organisations mathématique et didactique de la séance, préparée par Annabelle : elle a souhaité que les élèves complexifient l'algorithme au fur et à mesure, pour modéliser les équations du premier degré en généralisant de plus en plus, passant des équations $ax + b = c$ ($a \neq 0$) aux équations $ax + b = cx + d$ en considérant d'abord $a \neq c$ puis $a = c$.

Synthèse de l'étape E_3

Phases	Début numéro ligne	Début instant	Fonction	Évolution du milieu	Temps didactique / Topos du prof	Topos de l'élève
1	1	00 : 00	- Accueil et présentation de la situation n°2. - Tissage avec situation n°1. - Passation des consignes de la situation n°2.	- Notion d'algorithme et de résolution d'équations - Feuille d'énoncé avec équations - Logiciel Algobox	- Donner l'enjeu de la situation	- Se remémorer la situation n°1 - Accepter la situation n°2

2	3	02 : 45	Première phase de recherche, en lien avec les quatre tâches t'_1, t'_2, t'_3 et t'_4.	- Interactions binôme/prof - Techniques de résolution d'équations du premier degré - Définition d'un algorithme non instancié	- Accompagner les élèves dans la dévolution de la situation n°2 - Corriger la résolution des premières équations	- S'approprier l'enjeu de la situation n°2 - Résoudre les premières équations « à la main »
3	26	10 : 14	Institutionnalisation de la structure de l'algorithme.	Éléments de structure de l'algorithme	- Expliquer la structure de l'algorithme	- Comprendre la structure de l'algorithme
4	28	11 : 42	Recherche de t'_1 et institutionnalisation relative à cette tâche.	- Forme $ax + b = c$ - Substitution des lettres par les nombres déterminés des équations	- Donner et expliquer la forme générique	- Comprendre que la forme générique convient pour les trois premières équations
5	55	13 : 30	Deuxième phase de recherche : tâches t'_2, t'_3 et t'_4.	- Technique/ Technologie de résolution d'une équation du 1^er^ degré - Notions d'algorithmique et de programmation	- Amener les élèves à résoudre l'équation littérale pour concevoir l'algorithme - S'adapter à l'hétérogénéité du public	- Comprendre que la solution de l'équation littérale est le cœur de l'algorithme
6	92	28 : 02	Institutionnalisation des concepts de paramètre et d'inconnue.	- Définition d'une inconnue, d'un paramètre, d'une variable	- Clarifier les concepts ci-contre	- S'approprier les différents concepts et les mettre en relation avec l'algorithme à concevoir
7	106	31 : 30	Institutionnalisation relative à t'_2.	- Technique/ Technologie de résolution d'une équation du 1^er^ degré - Somme, produit d'une expression algébrique - Variables informatiques/ mathématiques	- Donner et expliquer la solution générique de l'équation $ax + b = c$	- Comprendre la démonstration - Comprendre comment utiliser la solution de l'équation pour structurer l'algorithme
8	125	33 : 50	Troisième phase de recherche : tâches t'_3 et t'_4 (simultanément) et t'_5.	- Algorithme/ programme de résolution des équations de la forme $ax + b = c$	- Aider les élèves en retard - Valider ou invalider les algorithmes/ programmes proposées par les élèves	- Déterminer l'algorithme de résolution des équations de la forme générique - Programmer l'algorithme sous Algobox - Obtenir les solutions des différentes équations à l'aide du programme réalisé

9	154	44 : 35	Quatrième phase de recherche : tâches t_1 à t_5	- Algorithme/ programme de résolution des équations de la forme $ax + b = cx + d$	- Aider les élèves en retard - Valider ou invalider les algorithmes/ programmes proposées par les élèves - Faire émerger le cas $a = c$	- Déterminer l'algorithme de résolution des équations de la forme générique - Programmer l'algorithme sous Algobox - Obtenir les solutions des différentes équations à l'aide du programme réalisé

Tableau 175 : Récapitulatif du milieu, du temps didactique et des topos (séance 2 d'Annabelle)

11.2.1.4 Étape E_4

Nous pointons seulement deux *événements didactiques* (Bronner, 2006, 2009) particuliers parmi les mille que nous pourrions donner sur cette séance très riche :
- un premier événement imprévu et plus ou moins problématique selon les élèves, *le choix des lettres pour l'écriture de l'équation littérale* ;
- un second événement, prévisible et non problématique, *le retour permanent de l'enseignante à la tâche globale de réalisation de l'algorithme.*

Explicitons ces événements et leur caractère de prévisibilité et de problématicité.

Premier événement : le choix des lettres pour l'écriture de l'équation littérale

A la douzième minute du début de la séance, une discussion s'engage entre l'enseignante et des élèves pour décider du choix de la forme générique des trois premières équations ($x + 3 = 0$, $2x – 3 = 4$ et $3 – 2\ x = -2$). Suit la transcription du passage considéré (lignes 28 à 38) :

28. **11 : 42** An : Il faudrait que je regarde comment sont fichues ces équations, entre guillemets, la « tête » de ces équations. Est-ce que quelqu'un pourrait m'expliquer quelle est la « tête » de ces équations ? Je pense que vous pouvez en avoir une idée …
29. E_1 : Moi, je sais … *ax* plus ou moins *b.*
30. An : Est-ce que le plus ou le moins change quelque chose ?
31. E_2 : … est égal à zéro ?
32. An : Alors égal à zéro, ça irait pour ce cas-là (*elle montre $x + 3 = 0$ au tableau*).
33. E_3 : ou à *c* ?
34. E_4 : ou à *y* ?
35. An : On met plutôt *c*, c'est juste parce qu'on continue l'alphabet… (*elle écrit $ax + b = c$ au tableau*). Donc en fait, j'ai ces trois équations, Manon me dit que je peux les écrire comme ça. Julien, est-ce que tu peux me donner, dans ce cas-là (*elle montre $x + 3 = 0$*), quelle serait la valeur de *a* ?
36. Julien : Ben, -3 …
37. An : *a* serait -3. Tout le monde est d'accord ?
38. Es (*en chœur*) : Non !

Cet extrait montre que le choix du nom des lettres pour substituer les nombres déterminés des équations n'est pas chose aisée pour les élèves et qu'il ne s'agit pas seulement, comme le dit l'enseignante, *juste de continuer l'alphabet*.

La proposition $ax + b = 0$ peut s'interpréter par une tentative de donner une forme générale à l'équation $x + 3 = 0$; l'enseignante fait alors remarquer que cette forme n'englobe pas les deux autres équations, $2x - 3 = 4$ et $3 - 2x = -2$, ce qui s'entend sans transformation préalable de celles-ci. Nous pouvons aussi émettre l'hypothèse que cette écriture a été proposée par un élève qui fait l'amalgame avec l'apprentissage du signe des expressions de la forme $ax + b$, inclus dans le programme de seconde (MEN, 2009a) et dont une technique consiste à effectuer le calcul de la valeur qui annule $ax + b$ pour obtenir le tableau de signes de cette expression.

D'autre part, la proposition $ax + b = y$ peut être interprétée de plusieurs manières :

- comme une non-différentiation entre les concepts d'inconnue et de paramètre ;
- comme une méconnaissance des conventions – qui restent la plupart du temps implicites pour l'élève – de noter les paramètres avec les premières lettres de l'alphabet et les inconnues avec les dernières ;
- comme une confusion avec la notation analytique d'une droite $y = ax + b$, dont l'apprentissage se situe également au niveau de la classe de seconde.

L'expression de l'enseignante, *juste continuer l'alphabet*, laisse entendre que les trois nombres *a, b, c* ont la même fonction dans l'équation et que x en possède une autre, mais la suite de l'extrait laisse penser que c'est bien ce point qui achoppe. En effet, alors qu'est noté au tableau ceci :

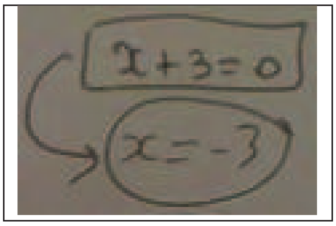


Figure 176 : Extrait des traces écrites du tableau d'Annabelle (séance 2)

l'élève Julien, à qui le professeur demande la valeur de a dans cette équation, lui répond celle de x. Il semble, du moins pour cet élève, que le nom d'une lettre ou d'une autre n'ait pas de signification particulière. Il est possible que cette erreur provienne d'un obstacle didactique dû aux premières rencontres de l'élève avec les lettres, au collège. En effet, nous pouvons lire dans un document d'accompagnement du collège (MEN, 2008b) :

> Le choix de recourir à une lettre est le fruit d'une convention. Dans la classe, l'utilisation par les élèves de lettres différentes pour désigner une même variable est un point d'appui important pour montrer que le choix des lettres n'a pas d'influence sur la solution du problème. (p.2-3)

Au collège, les élèves résolvent des équations du premier ou du second degré, à une seule inconnue, dont les coefficients sont des nombres déterminés et le nom de l'inconnue n'a guère d'importance. Suivent quelques exemples donnés dans des manuels récents de troisième, qui suivent ces recommandations de la noosphère :

Résolution d'équations **80** Résoudre les équations suivantes : **a)** $5x^2=30$; **b)** $9x^2-121=0$; **c)** $(x-5)^2=75$; **d)** $(x+1)^2=0$; **e)** $2x^2-72=0$; **f)** $(y+1)^2=25$. **81** Résoudre les équations suivantes après avoir factorisé à l'aide d'une identité remarquable : **a)** $x^2+14x+49=0$; **b)** $y^2-12y+36=0$; **c)** $4x^2-20x+25=0$; **d)** $24z+16+9z^2=0$. **82** Résoudre les équations produits suivantes : **a)** $(3x+4)(x-7)(14-7x)=0$; **b)** $(2-3x)(5x-15)\left(x-\frac{3}{2}\right)=0$.	**Résoudre des équations-produits** **29** Résoudre les équations suivantes. **a)** $25x^2+10x+1=0$ **b)** $9x^2-12x+4=0$ **c)** $x^2+2x+1=0$ **d)** $16x^2-8x+1=0$ **30** Résoudre les équations suivantes. **a)** $a^2-9=0$ **b)** $4a^2-1=0$ **c)** $25-9a^2=0$ **31** Résoudre les équations suivantes. **a)** $9x^2=6x-1$ **b)** $4x^2+12x=-9$ **c)** $a^2=7$ **d)** $4a^2=3$ **e)** $a^2=-3$ **f)** $a^2=0$
Diabolo 2008, troisième, Hachette (Chapitre *Équations*, p.87)	**Triangle 2008, troisième, Hatier (Chapitre *Équations*, p.137)**

Figure 177 : Exemples de manuels proposant des choix de lettres différents pour désigner l'inconnue

Nous observons pour ces deux exemples que les manuels proposent ici comme nom d'inconnue *x, y, z* ou encore *a*. Certains élèves, comme Julien peuvent éprouver des difficultés à dépasser cet obstacle, et transformer *en actes* (Vergnaud, 1990) l'assertion « on peut choisir n'importe quel nom de lettre pour désigner l'inconnue » en « on peut remplacer n'importe quelle valeur par n'importe quelle nom de lettre ». Ceci peut bloquer l'accès à la *modélisation* d'équations du premier degré (et du second), puisque cette généralisation comporte nécessairement des paramètres. C'est peut-être une des raisons qui a poussé l'enseignante à effectuer l'institutionnalisation du concept de paramètre, afin de différencier le rôle des lettres dans l'équation générique $ax + b = c$, dépassant ainsi les exigences du programme de seconde. Ainsi, nous pouvons conclure que cet événement concernant le nom des lettres est beaucoup plus large qu'un simple problème d'écriture, et que c'est tout *l'aspect structural* des équations qui est convoqué ici ; les difficultés à comprendre les subtilités de choix de noms des lettres peuvent être problématiques pour certains élèves et être un frein à la *modélisation* de ces équations.

Second événement : le retour permanent de l'enseignante à la tâche globale de réalisation de l'algorithme

Il s'agit ici d'un événement répétitif de la séance qui consiste pour l'enseignante à constamment ramener les élèves à la tâche globale de conception d'un algorithme de résolution d'équation. Nous nous référons au découpage en phases vu précédemment pour situer les interventions de l'enseignante à ce propos. Si nous « lisons la séance » en prenant pour filtre les types de tâches (tâche globale ou sous-tâches spécifiques) en jeu à chaque phase, nous analysons cet événement de la façon suivante :

En phase 1, Annabelle annonce la tâche globale, sous la forme de *création de machines à résoudre des équations* (ligne 2). Durant la phase 2, elle laisse les élèves s'approprier cette tâche, sans précision sur la technique à envisager pour y parvenir. Elle se contente d'envoyer au tableau un élève résoudre à la main les premières équations (ligne 17), sans indiquer le but de cette sous-tâche. En phase 3, elle institutionnalise la structure globale de l'algorithme à

partir des trois exemples de résolution (entrer l'équation, sortir la solution, ligne 26), mais toujours sans entrer dans le détail des sous-tâches à effectuer. Ce n'est qu'en phase 4 qu'Annabelle propose la première sous-tâche t'_1 de détermination de la forme générique des premières équations (ligne 28), phase qui se termine par la conclusion que les coefficients de l'équation sont les entrées de l'algorithme (ligne 54). En phase 5, l'enseignante indique la sous-tâche t'_2 de résolution de l'équation littérale de la forme $ax + b = c$ (ligne 87) mais elle formule la question en rattachant la nécessité de cette résolution au besoin d'obtenir la solution de l'équation en sortie de l'algorithme. La phase 6 voit de nouveau un retour sur la tâche globale, où l'enseignante explicite les concepts d'inconnue et de paramètre, permettant à l'élève de relier ces concepts à la structure de l'algorithme à mettre en place. En phase 7, la résolution de l'équation littérale est institutionnalisée et Annabelle renvoie une fois de plus les élèves sur la tâche de conception de l'algorithme (ligne 125). La phase 8 consiste principalement à la compréhension de la structure de l'algorithme et à l'écriture du programme sous Algobox.
Ces éléments montrent comment l'enseignante relie les sous-tâches à la tâche globale. Elle ne revoit pas le contrat didactique à la baisse, ce qui aurait pu être le cas si elle avait proposé un découpage en sous-tâches successives, qui auraient pu sembler aux élèves indépendantes les unes des autres. Sa démarche n'est pas analytique, elle permet de garder une vue d'ensemble du problème à traiter. Les retours à la tâche globale qu'elle instaure après chaque sous-tâche effectuée permettent aux élèves de garder le sens du travail entrepris et ne pas en perdre le fil.

11.2.2 Classe de Maurice : Séance 2

Précisons que les deux séances en demi-classe n'ont pu être filmées et que nous n'avons pu y assister. Cependant, le professeur Maurice nous a accordé un entretien (cf. annexe A34) pour nous exposer le déroulement de celles-ci. L'enseignant nous a également fourni les productions des élèves, dont un exemple est donné en annexe A35 et quelques programmes sous Algobox relevés sur clef USB. Pour l'analyse, les étapes de la méthodologie des quatre composantes de Bronner sont reconstituées, à partir des dires du professeur et des documents en notre possession. Les étapes E_3 et E_4 sont traitées ici ensemble et plus succinctement.

11.2.2.1 Étape E_1

Rappelons que comme les professeurs Annabelle et Maurice travaillent ensemble, leur trames projetées sont similaires (cf. §10.4.2) et de ce fait, nous avons utilisé les mêmes notations pour les tâches de la situation n°2 :
- t'_i $(1 \leq i \leq 5)$ pour les tâches relatives à la catégorie d'équations $ax + b = c$;
- t_i $(1 \leq i \leq 5)$ pour les tâches relatives à la catégorie d'équations $ax + b = cx + d$.

La feuille d'énoncé à laquelle nous faisons référence est identique à celle de la classe d'Annabelle (cf. annexe A18).
La séance 2 a été réalisée deux fois de suite, en demi-classe, par le professeur Maurice. Le découpage proposé ci-dessous est très approximatif et valable pour les deux séances. Il est reconstitué a posteriori, d'après les propos de l'enseignant. Les indications de temps ne sont pas fournies, l'enseignant ne les ayant pas données. De plus, comme pour la classe d'Annabelle, la phase 5 n'a pas été effectuée par tous les élèves, la plupart d'entre eux n'ayant réalisé que le premier algorithme demandé.

Phase	Fonction	Forme du travail
Phase 1	Présentation de la situation n°2 et passation des consignes.	Collectif
Phase 2	Première phase de recherche, en lien avec les quatre tâches t'$_1$, t'$_2$, t'$_3$ et t'$_4$ (question 1 de l'énoncé).	Binômes et quelques élèves seuls
Phase 3	Institutionnalisation des concepts de paramètre et d'inconnue.	Collectif
Phase 4	Deuxième phase de recherche : tâches t'$_i$ (question 2 de l'énoncé).	Binômes et quelques élèves seuls
Phase 5	Troisième phase de recherche éventuelle : tâches t$_i$ (question 3 de l'énoncé).	Quelques binômes ou élèves seuls

Tableau 178 : Les différentes phases de la séance 2 de Maurice

11.2.2.2 Étape E$_2$

Pour l'analyse de l'OM de la séance 2 de Maurice, nous nous basons sur les éléments donnés par l'enseignant lors de l'entretien (cf. annexe A34) ainsi que les fiches des élèves. Ces éléments sont mis en regard de la trame projetée TP2 (cf. §10.4.2).

Types de tâches apparues

Les propos de Maurice laissent entendre que les deux tâches globales de recherche d'un algorithme résolvant les équations du type $ax + b = c$ puis $ax + b = cx + d$ ont été réalisées telles qu'elles étaient prévues a priori dans la trame projetée. Les sous-tâches t'$_i$ ($1 \leq i \leq 5$) relatives à la première tâche globale sont apparues pour pratiquement tous les élèves, comme le laisse supposer les traces écrites relevées (cf. un exemple de production en annexe A35). En revanche, tous les élèves n'ont pas effectué la seconde tâche globale, le professeur ayant privilégié la compréhension et l'achèvement, pour tous, du premier algorithme. C'est ce que traduisent ses propos ci-dessous (ligne 59 à 62 de l'annexe A34) :

> 59. C : Alors combien de temps ça a pris pour la première phase, pour le premier algorithme ?
> 60. Ma : Il y en a certains qui n'ont pas dépassé cette première phase.
> 61. C : Ils sont allés quand même tous jusqu'à écrire l'algorithme de la première phase et la question 2, rechercher celles qui sont pareilles ?
> 62. Ma : Alors, j'essaie de me rappeler … Honnêtement, je me suis préoccupé de gérer le premier algorithme, s'ils avaient fait l'algorithme qui permettait de résoudre les trois premières équations.… Ceux qui sont passés à la question 3 se sont gérés tous seuls, ils ont fonctionné en roue libre. J'ai vérifié sur l'ordinateur ce qu'ils étaient en train de faire, mais honnêtement, je ne sais pas s'ils l'ont fait…

Nous voyons dans l'analyse des techniques ci-après comment les élèves ayant abordé cette seconde tâche l'ont gérée. D'autre part, de la même manière qu'Annabelle, le professeur Maurice indique qu'il a proposé le type de tâches *résoudre en environnement papier-crayon les trois premières équations* de la feuille d'énoncé, alors que ce travail n'était prévu ni dans la trame projetée TP2, ni dans l'énoncé fourni aux élèves. Maurice précise qu'il a évoqué cette tâche de la façon suivante (lignes 65 à 70) :

> 65. C : Pour le début, Annabelle a dit : « les trois premières équations, commencez par les résoudre à la main ! ». Et toi ?
> 66. Ma : Ah oui, moi aussi ! C'est-à-dire que ceux qui n'y sont pas arrivés, que je voyais les bras croisés, je leur ai dit : « Mais commencez par les résoudre à la main ! ».

67. C : Ah, tu ne l'as pas imposé à tous dès le départ ?
68. Ma : Non, il y en a qui se sont lancés directement. Aux autres, j'ai dit : « Vous n'y arriverez pas tant que vous ne les aurez pas faites à la main ! ». Et comme il y en a qui l'ont fait et qui y sont arrivés, ça m'a permis de dire : « Vous voyez, ceux qui l'ont fait à la main, ça leur a donné des idées pour faire l'algorithme… »
69. C : Donc le fait d'ajouter ça, ça a débloqué certains, mais tu ne l'as pas imposé à tous.
70. Ma : Oui, oui.

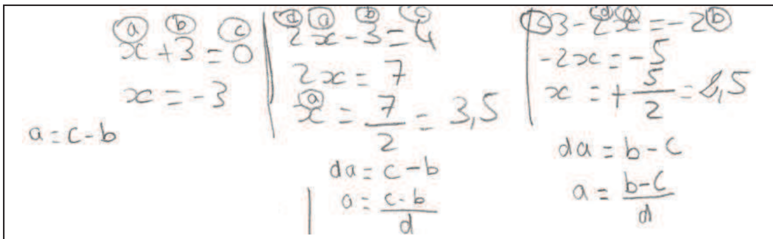
Ainsi, contrairement à Annabelle qui a imposé cette tâche à tous dès le début de la recherche, Maurice l'a prescrite aux élèves qui ne parvenaient pas à débuter le travail. Nous analysons dans les techniques ci-dessous, comment les élèves ont utilisé ce travail pour avancer dans leur travail.

Techniques et environnement technologico-théorique relevés

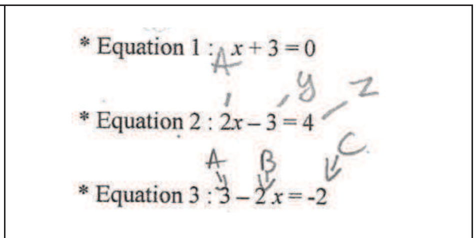
Déterminons les techniques apparues, relativement aux tâches relevées ci-dessus ainsi que le bloc *logos* leur correspondant.

- ***Organisations mathématiques relatives aux tâches t'_1 et t_1 (de type T_1) : Reconnaissance et écriture littérale d'un type d'équations***

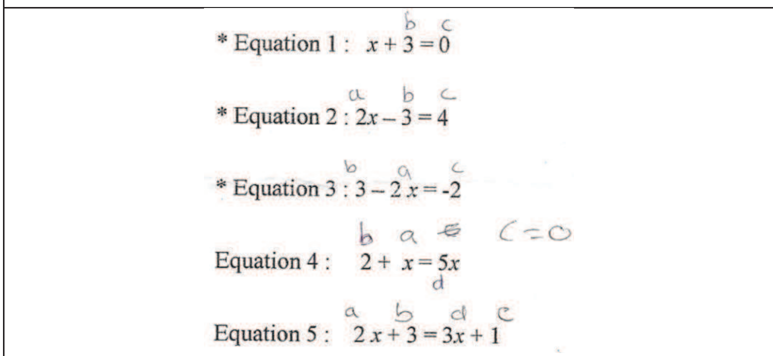
En ce qui concerne la tâche t'_1, nous avons relevé les productions suivantes, choisies pour leur représentation des productions de l'ensemble des élèves.



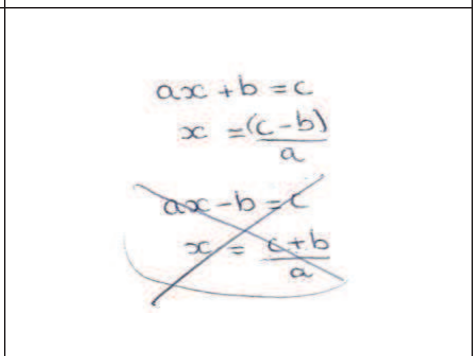
Production de Manon



Production de Florent



Production de Camille



Production de Victorien

Figure 179 : Exemples de recherche de la forme génériques des premières équations (Séance 2 de Maurice)

Nous retrouvons la technique τ_1 décrite en analyse a priori (cf. §9.3.2) et les mêmes difficultés que dans les classes d'Annabelle et d'Alex. En particulier, nous avions découpé la technique pour donner la forme générique d'une série d'équations données en trois parties :

(1) le repérage des termes comportant l'inconnue x ;

(2) la substitution des lettres aux nombres déterminés ;

(3) l'uniformisation des écritures obtenues.

Ces quatre élèves semblent comprendre les points (1) et (2) avec la particularité de Manon qui change l'inconnue x par la lettre a : néanmoins cette nouvelle notation est stable pour les trois les équations, ce qui semble conférer à a le statut particulier d'inconnue. D'ailleurs par la suite, Manon exprime a en fonction des autres lettres. C'est le point (3) qui est délicat pour les élèves, qui parviennent difficilement à uniformiser les écritures trouvées pour déterminer une forme générique unique :

- Manon note les trois premières équations $x + 3 = 0$, $2x - 3 = 4$ et $3 - 2x = -2$ sous les formes respectives $a + b = c$, $da + c = b$ et $da + b = c$ et ne va pas plus loin dans sa généralisation ;
- Florent code la 2ème équation $Ax + y = z$ et la 3ème $A+ Bx = C$. Il n'écrit rien de plus sur sa copie ;
- Camille a, quant à elle, une écriture unique pour les premières équations. Elle note la première $x + b = c$, les deux suivantes $ax + b = c$, ce qui peut laisser entendre que a vaut 1 pour la première équation. Notons que pour l'équation 3, l'élève pense à inverser les lettres pour $3 - 2x$ qu'elle code $b + ax$ (et non pas $a + bx$). De plus, la quatrième équation est codée $ax + b = dx + c$ avec $c = 0$, comme l'élève l'indique sur sa copie. Nous constatons ainsi que Camille a uniformisé l'écriture générique des cinq premières équations et sans doute a-t-elle compris que cette écriture est valable pour toutes celles de la fiche, ce que corroborent les paroles de Maurice : « *Et il y en a qui sont passés tout de suite au second modèle …* » (ligne 41).
- Victorien, après avoir déterminé deux écritures génériques différentes (sans doute avait-il écrit au départ $x + 3 = 0$ sous la forme $ax + b = c$ et $2x - 3 = 4$ comme $ax - b = c$) se ravise, barre et choisit une seule forme, $ax + b = c$.

En ce qui concerne les éléments technologico-théoriques relatifs à cette technique, il est difficile de savoir ce qui a été dégagé par les élèves ou le professeur, sans plus de précision sur la séance. Néanmoins, nous pouvons affirmer que l'enseignant a évoqué la notion de paramètre comme il l'indique dans l'entretien post-séance (ligne 74), à l'occasion de la constitution de l'algorithme, afin de déterminer quelles étaient les données en entrée.

Pour terminer sur la tâche t'$_1$, les productions des 30 élèves concernant la partie 2 de la question 2 de la fiche d'énoncé ont été dépouillées et les résultats suivants ont été relevés :

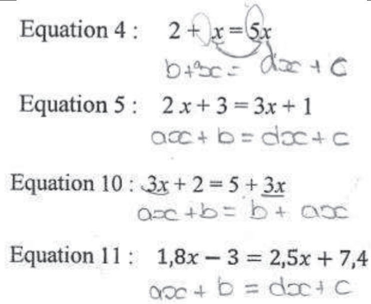
<table>
<tr><th colspan="2"></th><th colspan="6">Équations à reconnaître du type ax + b = c</th><th colspan="5">Équations à reconnaître comme n'étant pas du type ci-contre</th></tr>
<tr><th colspan="2">Numéro de l'équation</th><th>1</th><th>2</th><th>3</th><th>6</th><th>7</th><th>9</th><th>4</th><th>5</th><th>8</th><th>10</th><th>11</th></tr>
<tr><td rowspan="3">Question 2 (partie 1)</td><td>Nb élèves (réponse juste)</td><td>-</td><td>-</td><td>-</td><td>11</td><td>10</td><td>11</td><td>11</td><td>12</td><td>12</td><td>12</td><td>12</td></tr>
<tr><td>Nb élèves (réponse fausse)</td><td>-</td><td>-</td><td>-</td><td>1</td><td>2</td><td>1</td><td>1</td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>Nb élèves (absence réponse)</td><td>-</td><td>-</td><td>-</td><td>18</td><td>18</td><td>18</td><td>18</td><td>18</td><td>18</td><td>18</td><td>18</td></tr>
</table>

Tableau 180 : Réponses fournies par les élèves à la tâche t'$_1$ (question 2), séance 2 de Maurice

Nous rappelons que cette question porte sur la reconnaissance des équations similaires aux trois premières. Moins de la moitié des élèves (12 sur 30) ont répondu à cette question, sans doute parce que le professeur n'a pas particulièrement insisté sur cette question, comme il le signale lui-même durant l'entretien (cf. ligne 62). Pour ceux qui ont réalisé cette tâche, peu d'erreurs sont à signaler. Notons que, comme dans la classe d'Annabelle, l'équation 7 ($\frac{7}{2}x + 3 = \frac{2}{3}$) est celle qui est le moins bien reconnu comme faisant partie de la catégorie des équations de la forme $ax + b = c$, ce qui nous avons expliqué par un obstacle du coefficient en écriture fractionnaire, vu comme le quotient de deux nombres et non comme un nombre qui reste à calculer.

En ce qui concerne la tâche t_1, la production de Camille en figure 179 montre une première élève ayant déterminé la forme générique recherchée, $ax + b = cx + d$. Ci-dessous, nous avons relevé les extraits de productions d'Hugo et d'Alexandra, représentatives des traces écrites des élèves de la classe :

Transcription :
$2 + x = 5x$
1 2 5
$ax + \beta = \# x$



Production d'Hugo	**Production d'Alexandra**

Figure 181 : Productions d'élèves de Maurice montrant l'engagement dans la tâche t_1 (question 3)

La production d'Hugo montre sa tentative de déterminer une forme générique pour l'équation 4, où il utilise les symboles ($a,\beta,\#$) pour désigner ses coefficients. Les traces écrites d'Hugo ne permettent pas de savoir s'il a déterminé une forme générique similaire pour les équations suivantes. En revanche, la production d'Alexandra montre une élève qui a modélisé les équations rencontrées, puisque les équations 4, 5, 10 et 11 sont reconnues sous la forme $ax + b = cx + d$. Nous relevons une erreur pour l'équation 10, où il aurait fallu écrire $ax + b = d + ax$ ($b \neq d$).

- ***Organisations mathématiques relatives aux tâches t'_2 et t_2 (de type T2) : Résolution littérale d'une équation***

Suite aux propos de Maurice (cf. ligne 69), nous avons relevé comment des élèves parviennent à utiliser la résolution d'une équation particulière pour dégager la résolution de l'équation littérale $ax + b = c$ (tâche t'_2) :

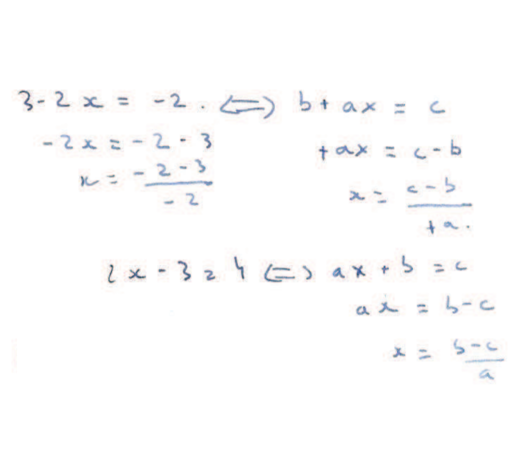
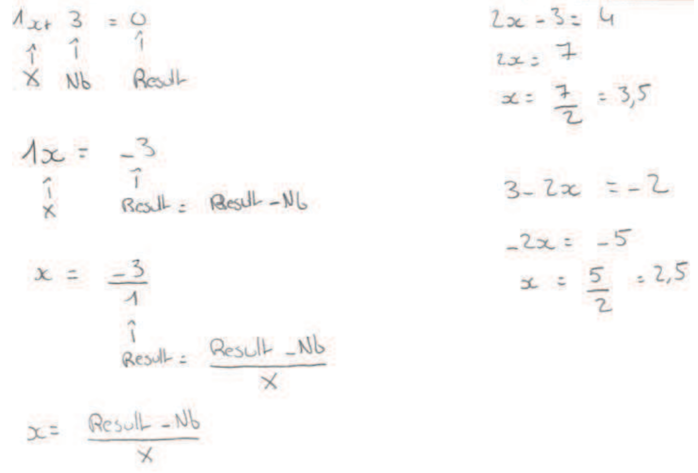
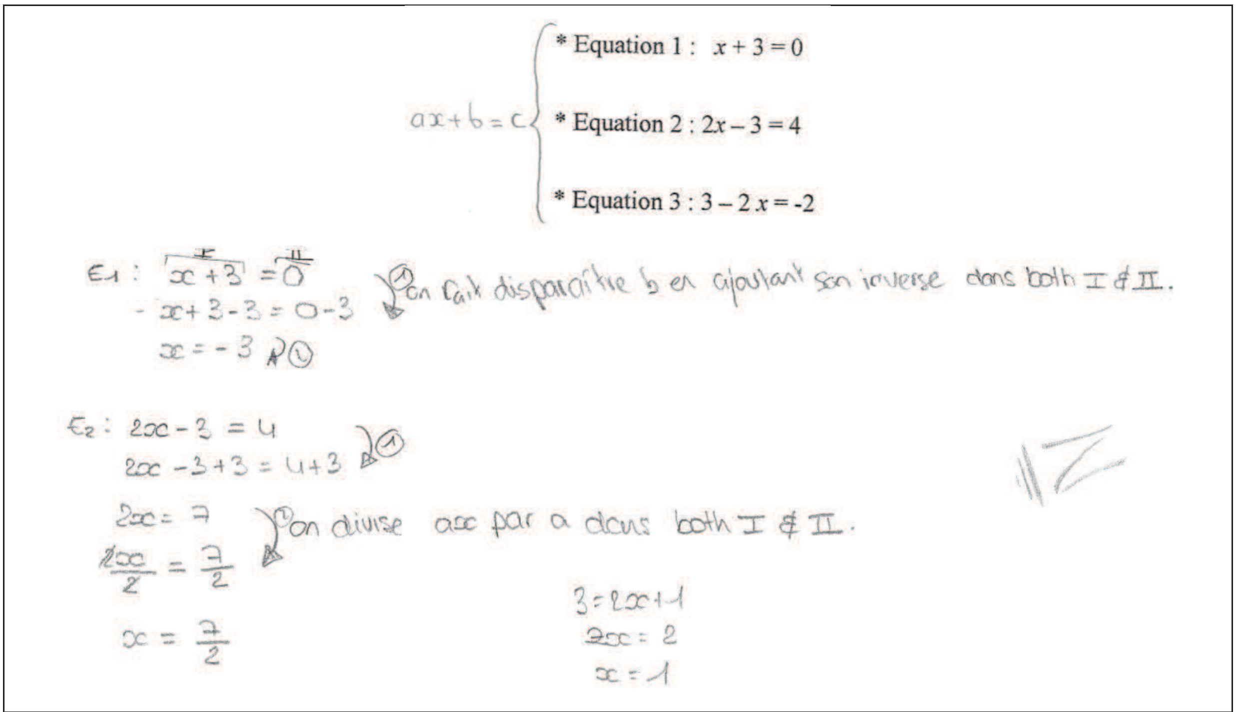
	
Production de Bilal	**Production de Loïc**

Figure 182 : Production d'élèves de Maurice montrant l'engagement dans la tâche t'_2

L'élève Bilal considère les deux équations 3 – 2x = -2 et 2x – 3 = 4 et il résout la première. Il détermine alors une forme générique pour ces deux équations ($ax + b = c$) qu'il résout sous forme littérale, en recopiant pas à pas la démonstration « chiffrée ». Notons l'erreur de transposition qu'il commet la seconde fois, lorsqu'il ne s'appuie plus sur une démonstration « chiffrée ».

L'élève Loïc, quant à lui, commence par considérer l'équation $x + 3 = 0$, remplace les nombres déterminés de cette équation par les paramètres (X, Nb, Result), résout l'équation pas à pas, en remplaçant au fur et à mesure les nombres déterminés par les paramètres pour obtenir la solution finale, en fonction des trois paramètres X, Nb et Result. Nous émettons l'hypothèse que les deux équations de droite servent de vérification de la formule obtenue. Notons la capacité de cet élève à généraliser à partir d'un exemple très particulier, comme la soustraction 0 – 3 qu'il laisse apparente sous la forme Result – Nb et la division par 1 qu'il n'oublie pas, en écrivant $\frac{-3}{1}$, ce qu'il généralise alors en $\frac{\text{Result}-\text{Nb}}{\text{X}}$. De plus, il semble que Loïc raisonne de manière algébrique mais qu'il soit en même temps capable d'une pensée algorithmique, puisqu'il nomme le paramètre « Result » plusieurs fois de suite avec des valeurs différentes, comme il le ferait avec une variable informatique qui prend des valeurs différentes au cours du temps. Nous verrons que ces hypothèses sont corroborées par le programme que cet élève a réalisé.

D'autres élèves, comme Alexandra ci-dessous, montrent qu'ils s'appuient sur un bloc technologico-théorique relatif à la résolution d'équation :



$ax+b=c$
* Equation 1 : $x + 3 = 0$
* Equation 2 : $2x - 3 = 4$
* Equation 3 : $3 - 2x = -2$

E1 : $\overset{I}{x+3} = \overset{II}{0}$
$- x + 3 - 3 = 0 - 3$
$x = -3$ ①

① on fait disparaître b en ajoutant son inverse dans both I & II.

E2 : $2x - 3 = 4$
$2x - 3 + 3 = 4 + 3$ ①
$2x = 7$
$\frac{2x}{2} = \frac{7}{2}$
$x = \frac{7}{2}$

① on divise ax par a dans both I & II.

$3 = 2x + 1$
$2x = 2$
$x = 1$

Production d'Alexandra[168]

Figure 183 : Production d'Alexandra montrant la démarche de résolution des équations du type ax + b = c (Séance 2 de Maurice)

L'élève reconnaît les trois premières équations sous la forme $ax + b = c$. Ensuite elle fait référence aux paramètres a et b dans les justifications de sa technique de résolution. Nous relevons deux erreurs dans ces justifications :
- l'opposé de b est appelé son inverse ;
- la division par a ne concerne pas seulement le terme ax mais aussi le terme de droite.

Malgré ces erreurs, ses résultats sont justes. Notons que le professeur Maurice mentionne lors de l'entretien post-séance : « *au début de l'année, quand on a revu les équations, moi je reviens systématiquement aux trucs avec les flèches …* » (ligne 48). Il est probable que les flèches visibles dans la production d'Alexandra soient les flèches que cite Maurice.
Pour la tâche t_2, *résoudre l'équation littérale $ax + b = cx + d$*, nous proposons ci-dessous quatre productions d'élèves qui recouvrent les cas relevés dans les différentes copies, parmi ceux ayant réussi la tâche t_1 (11 sur 30), c'est-à-dire qui ont déterminé la forme générique ci-dessus.

[168] Signalons que l'expression « both I & II » signifie que l'élève applique la même transformation dans le membre de gauche (noté I) et ans le membre de droite (noté II) de l'équation.

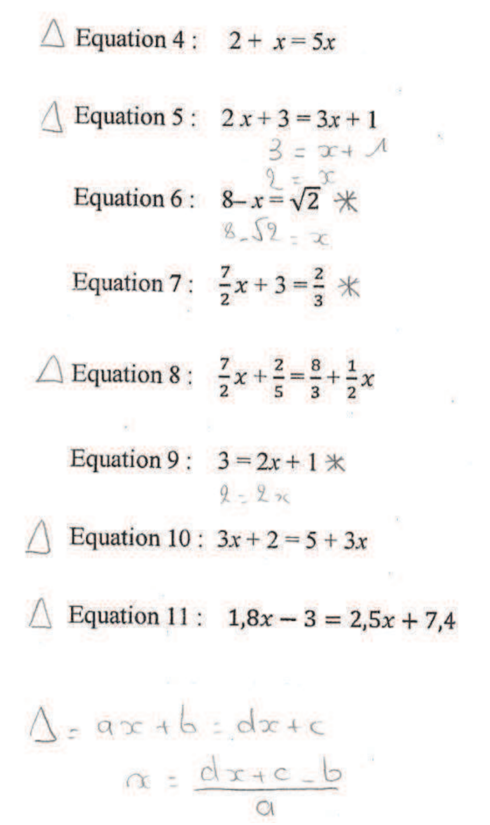
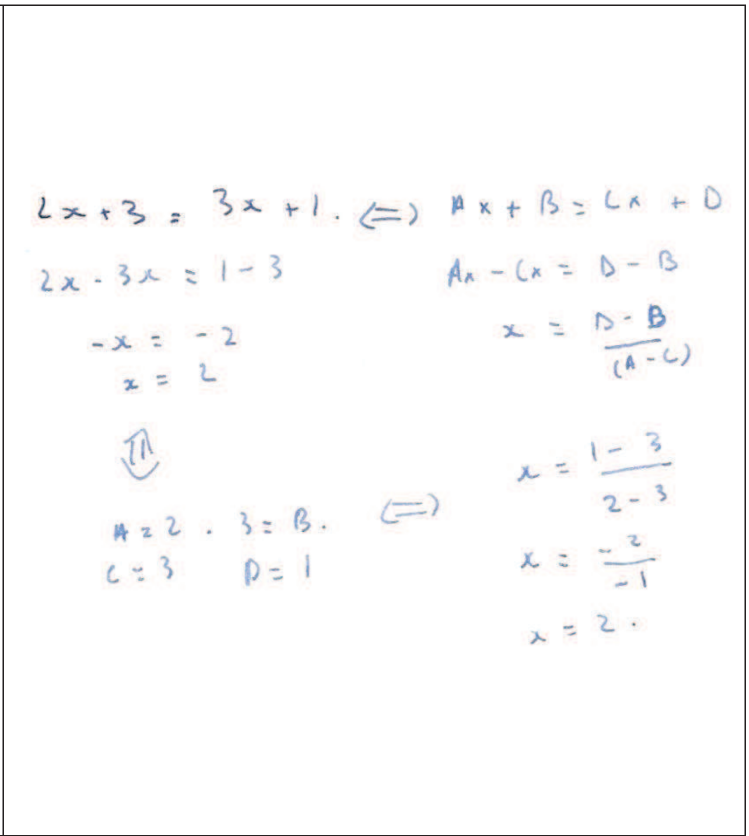
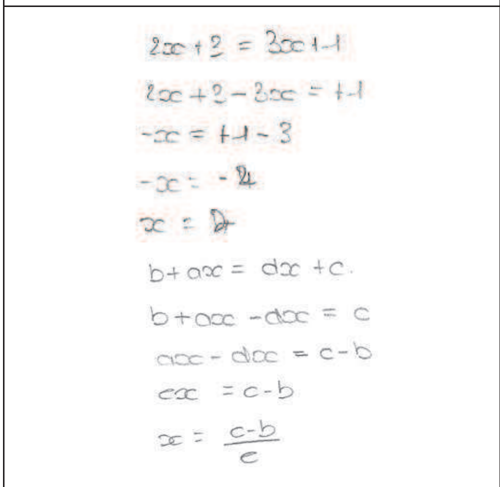
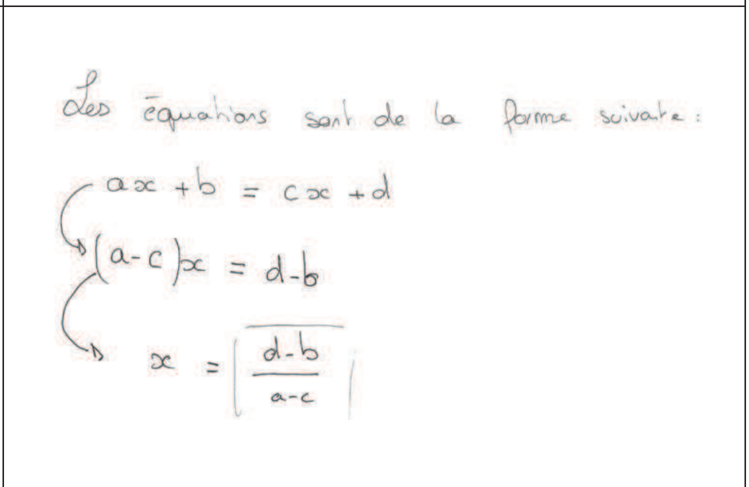
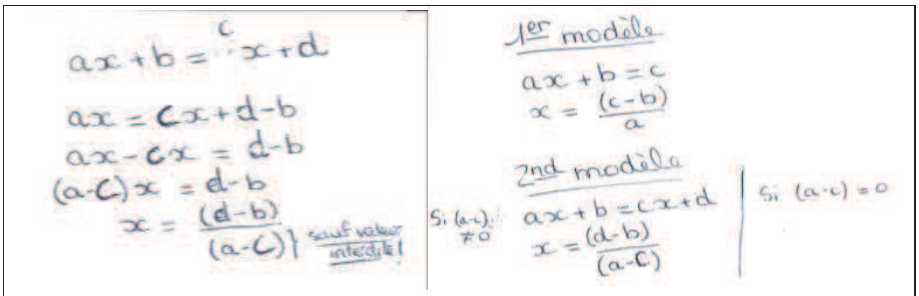
	
Production de Coraline	**Production de Bilal**
	
Production d'Alexandra	**Production d'Aliaume**

Figure 184 : Production d'élèves de Maurice montrant l'effectuation de la tâche t_2 (séance 2)

Les élèves Coraline et Alexandra ne parviennent pas à résoudre l'équation littérale. Coraline a bien identifié la forme générique des équations 4, 5, 8, 10 et 11, ce qu'elle désigne par le symbole « Δ ». Elle résout cependant l'équation $ax + b = dx + c$, sans tenir compte du terme en x dans le membre de droite, comme si « dx » était un paramètre. Alexandra fait une erreur du même type : si elle transpose correctement les termes en x dans le membre de gauche ($ax - dx$) et les autres nombres dans celui de droite ($c - b$), elle ne parvient pas ensuite à factoriser sous la forme $(a - d)x$ et écrit le membre de gauche sous la forme cx. Nous sommes confrontée ici à une élève, qui n'est pas au stade d'« *acceptance of lack of closure* », concept défini par Collis et repris par Maguire et Neill (2007) (cf. §2.2.3), c'est-à-dire l'élève

privilégie l'aspect procédural calculatoire et ne conçoit pas encore que $a - d$ est un nombre que l'on peut manipuler. Elle cherche à le « calculer » et à le réduire sous une forme *concaténée*, au sens de Bardini (2003, Cf. §2.2.3).
La démarche de Bilal est différente. Il s'appuie sur la résolution de l'équation particulière $2x + 3 = 3x + 1$ pour « calquer » celle de l'équation littérale $\text{A}x + \text{B} = \text{C}x + \text{D}$. Il procède ensuite à une vérification de sa formule, en instanciant les paramètres A, B, C, D aux quatre coefficients de l'équation qui lui a servi de « modèle ».
Aliaume, qualifié de « théoricien » par Maurice, résout l'équation littérale qu'il a déterminée, sans aucun appui numérique et en sautant des étapes.
La diversité de ces procédures, justes ou erronées, va dans le sens d'une confortation de l'hypothèse H2, puisque devant une tâche algébrique non routinière, où l'algèbre est travaillé comme *objet*, nous notons la grande hétérogénéité des compétences des élèves. En effet, sur les 30 élèves de cette classe, 11 sont capables de modéliser des équations du premier degré sous la forme $ax + b = cx + d$, 6 d'entre eux résolvent cette équation correctement et un seul pense à la discussion selon la nullité ou non du coefficient de x. Il s'agit de l'élève Victorien, qualifié lui aussi de théoricien par son professeur, dont la production suit :



Production de Victorien

Figure 185 : Production d'un élève de Maurice montrant la prise en compte du cas a =c (tâche t_2)

Victorien indique que la solution est obtenue « sauf valeur interdite » et précise ensuite qu'il distingue les cas où a – c et nul ou non. Cependant, il n'y a aucune trace sur sa copie de la solution de l'équation dans le cas où a = c, et l'enseignant n'a donné aucune indication à ce sujet. Il qualifie également les deux formes génériques qu'il a déterminées de « modèle », ce qualificatif montre que cet élève semble avoir conscience qu'il est en train de généraliser, de modéliser ici ce qu'il a appris jusqu'à présent sur les équations du premier degré et qu'il ainsi déterminé les principaux éléments des algorithmes à réaliser.

- ***Organisations mathématiques relatives aux tâches t'_3 - t_3 (de type T_3 : Conception d'un algorithme) et aux tâches t'_4 - t_4 (de type T_4 : écriture d'un programme)***

Analyse des programmes des élèves

Nous n'avons que très peu d'éléments sur les techniques et les justifications technologico-théoriques apportés par le professeur Maurice pour la phase de constitution des deux algorithmes et des deux programmes. Durant l'entretien post-séance, l'enseignant nous a précisé simplement quelques points :
- ligne 12, « *notre plus grand problème a été davantage le manque d'entraînement sur l'algorithmique que le problème lui-même* » ;

- ligne 26, « *des élèves au début de cette séance n'avaient pas encore compris ce qu'est un algorithme* » ;
- ligne 28, « *il y en a qui avaient écrit comme algorithme : « résoudre ax + b = 0* » ;
- ligne 74, « *quelques-uns n'avaient pas compris qu'il fallait que l'ordinateur lise* ».

Les réflexions de Maurice laissent entendre que l'*instrumentation* de ses élèves n'est pas achevée, ou du moins pas dans un état suffisamment avancé pour qu'ils effectuent seuls les tâches attendues de la situation n°2. Il semble que Maurice ait passé du temps – tout comme nous avons pu l'observer directement dans les classes d'Alex et d'Annabelle – pour expliciter ce qu'est une *action élémentaire* pour l'ordinateur et comment *transposer* l'équation de départ et sa résolution en environnement papier-crayon de manière à ce que l'ordinateur en donne la solution.

Maurice nous a fourni huit programmes, relevés sur clef USB pendant la séance 2, les choisissant pour leur originalité (ligne 6, « *je trouvais que c'était original par rapport à ce qu'on attendait* »). Nous les présentons ici en séparant les programmes résolvant les premières équations de la fiche d'énoncé et ceux résolvant les suivantes.

VARIABLES x EST_DU_TYPE NOMBRE a EST_DU_TYPE NOMBRE b EST_DU_TYPE NOMBRE I EST_DU_TYPE NOMBRE DEBUT_ALGORITHME LIRE a LIRE b LIRE I I PREND_LA_VALEUR I-b I PREND_LA_VALEUR I/a x PREND_LA_VALEUR I AFFICHER x FIN_ALGORITHME	VARIABLES x EST_DU_TYPE NOMBRE a EST_DU_TYPE NOMBRE B EST_DU_TYPE NOMBRE R EST_DU_TYPE NOMBRE DEBUT_ALGORITHME LIRE a LIRE B LIRE R R PREND_LA_VALEUR R-B R PREND_LA_VALEUR R/a x PREND_LA_VALEUR R AFFICHER x FIN_ALGORITHME	VARIABLES w EST_DU_TYPE NOMBRE y EST_DU_TYPE NOMBRE x EST_DU_TYPE NOMBRE z EST_DU_TYPE NOMBRE DEBUT_ALGORITHME LIRE z LIRE y LIRE w w PREND_LA_VALEUR w-y x PREND_LA_VALEUR w/z AFFICHER x FIN_ALGORITHME
Production de Thomas	**Production d'Hugo**	**Production d'Adrien et Anaïs**
VARIABLES X EST_DU_TYPE NOMBRE Nb EST_DU_TYPE NOMBRE Result EST_DU_TYPE NOMBRE x1 EST_DU_TYPE NOMBRE DEBUT_ALGORITHME LIRE X LIRE Nb LIRE Result Result PREND_LA_VALEUR Result-Nb Result PREND_LA_VALEUR Result/X x1 PREND_LA_VALEUR Result AFFICHER "x =" AFFICHER x1 FIN_ALGORITHME	VARIABLES a EST_DU_TYPE NOMBRE b EST_DU_TYPE NOMBRE c EST_DU_TYPE NOMBRE x EST_DU_TYPE NOMBRE DEBUT_ALGORITHME LIRE a LIRE b LIRE c x PREND_LA_VALEUR (c-b)/a AFFICHER x FIN_ALGORITHME	VARIABLES Xfacteur EST_DU_TYPE NOMBRE egal EST_DU_TYPE NOMBRE Sumx EST_DU_TYPE NOMBRE DEBUT_ALGORITHME LIRE Xfacteur LIRE Sumx LIRE egal egal PREND_LA_VALEUR (egal-Sumx)/Xfacteur AFFICHER egal FIN_ALGORITHME
Production de Loïc	**Production de Coraline et Alexandra**	**Production d'Aliaume**

Figure 186 : Programmes de résolution de l'équation ax + b = c (élèves de Maurice- séance 2)

Ces programmes sont corrects relativement à leur structure globale et ils résolvent tous les équations 1, 2, 3, 6, 7 et 9 de la fiche d'énoncé. De plus, si le problème considéré est de résoudre les équations du premier degré de la forme $ax + b = c$, ces programmes fonctionnent pour *toute instance de la famille* de ces équations, puisque dans ce cas, le cas où a est nul n'a pas à être considéré. Toutefois Maurice ne nous a pas indiqué si ce problème a été soulevé. Nous avons juxtaposé les 6 productions du tableau ci-dessus afin de pouvoir les comparer plus aisément. Nous pouvons classer ces productions en deux catégories :

- *type congruent* : les productions d'Hugo, de Thomas, d'Adrien/Anaïs et de Loïc gardent dans leur programme des étapes de la résolution algébrique en environnement papier-crayon. Leur démarche montre bien le lien que ces élèves font entre les tâches de types T_2 et T_3 ;
- *type non-congruent* : les productions d'Alexandra/Coraline et d'Aliaume sont *non-congruentes* avec la démarche de résolution algébrique et ne conservent que la solution finale.

Nous avons déjà rencontré dans la classe d'Annabelle des élèves de *type congruent*, qui parviennent à réduire la *distance* (Haspekian, 2005) entre les environnements papier-crayon et algorithmique. En utilisant les notations du programme de l'élève Thomas (cf. figure 186), nous schématisons la rencontre de ces environnements :

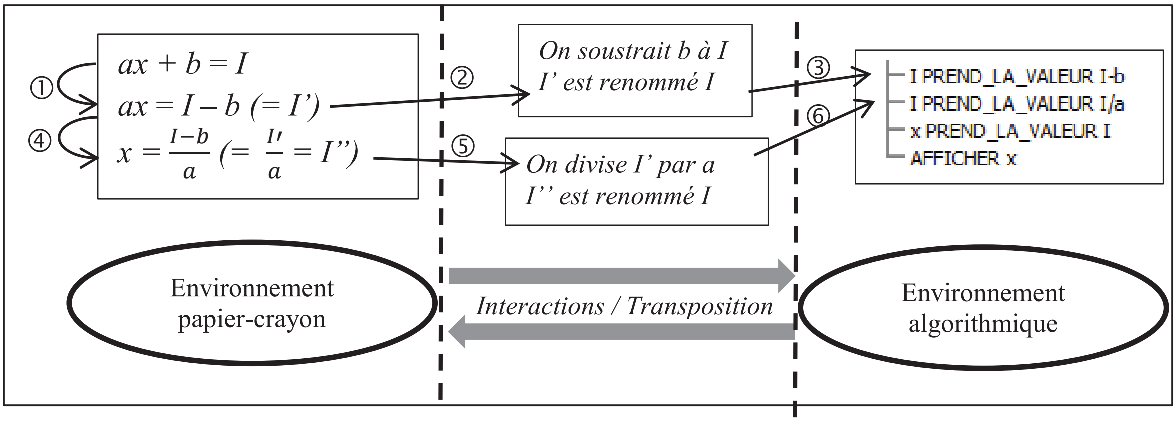


Figure 187 : Interactions entre les environnements papier-crayon et algorithmique pour la résolution de l'équation ax + b = I (Élève Thomas- Programme de type congruent)

Nous avons fléché les étapes successives de résolution de l'équation et de *transposition* qui s'opèrent au fur et à mesure pour passer d'un environnement à l'autre. Les notations I' et I'' sont introduites par nous, pour montrer le lien entre ces deux cadres. Les élèves réduisent l'équation pour la ramener au type $ax = I$: tout se passe comme s'ils calculaient au fur et à mesure le résultat obtenu pour le membre de droite pour ne l'exprimer que sous un seul nombre, qui se nomme de nouveau I après chaque étape. Finalement, le fait de pouvoir appeler de nouveau I le membre de droite, après chaque étape, permet aux élèves d'accéder à *l'aspect structural* d'une expression algébrique : par exemple, en écrivant $I - b$ sous la forme I, les élèves visualisent que l'ordinateur « calcule pour eux » l'expression $I - b$ et leur retourne un nombre « unique » que l'on nomme I. L'expression $I - b$ est alors « visualisée » comme le résultat de la soustraction et non plus seulement comme une opération inachevée, qui reste à faire. D'autre part, nous remarquons que les élèves utilisent une technique de programmation, qui consiste à réutiliser une variable informatique (I) pour lui attribuer des valeurs successives, dépendant de la valeur précédente de la variable informatique.

Pour les programmes de type *non-congruent*, nous ne retrouvons pas cette démarche algébrique. Les élèves font abstraction des étapes successives de résolution qui disparaissent dans l'écriture de l'algorithme. Leur programme est plus synthétique et laisse apparaître une plus grande distance entre les deux environnements.

Analyse du choix des noms des variables informatiques

Suite à la remarque de Maurice : « *Je trouve ça intéressant, la façon qu'ils ont de traduire le statut des lettres* » (ligne 107), nous analysons le choix des élèves pour désigner les paramètres et inconnues :

- Thomas et Hugo utilisent des notations similaires pour écrire un programme identique qui résout les équations $ax + b = I$ ou $ax+ b = R$. Les lettres choisies pour le membre de gauche[169] font sans doute référence à l'habitude de nommer les fonctions affines sous la forme $f(x) = ax + b$.
- Adrien et Anaïs ont utilisé les dernières lettres de l'alphabet et ont nommé l'équation générique $zx + y = w$ alors que Coraline & Alexandra la nomme $ax + b = c$. L'habitude voulant qu'on nomme l'inconnue x en mathématiques lorsqu'elle est unique, les élèves n'ont pas confondu les lettres w, y et z ou a, b, c avec x dans le traitement des équations.
- Loïc et Aliaume utilisent des noms pour les paramètres qui leur sont propres et qui sont évocateurs de leur statut. Loïc nomme l'équation *(X)x + (Nb) = (Result)* et Aliaume l'écrit *(Xfacteur)x + (Sumx) = (egal)*. Nous avons vu en figure 186 que Loïc utilise déjà ces notations lors de la résolution de l'équation littérale. Le coefficient de l'inconnue est nommé « *X* » par l'un et « *Xfacteur* » par l'autre, pour rappeler le rôle particulier que joue ce paramètre que l'on multiplie par x. Le second terme du membre de gauche s'appelle « *Nb* » ou « *Sumx* », ce qui lui confère le statut d'un nombre que l'on ajoute au terme en x. Enfin le paramètre de droite est nommé « *Result* » ou « *egal* », évoquant l'annonce du résultat d'une opération, ce qui montre une considération de l'aspect procédural de l'équation : cette dernière notation n'est d'ailleurs pas sans rappeler que les élèves ont parfois des difficultés à considérer l'égalité comme une relation d'équivalence (cf. §2.2.2).

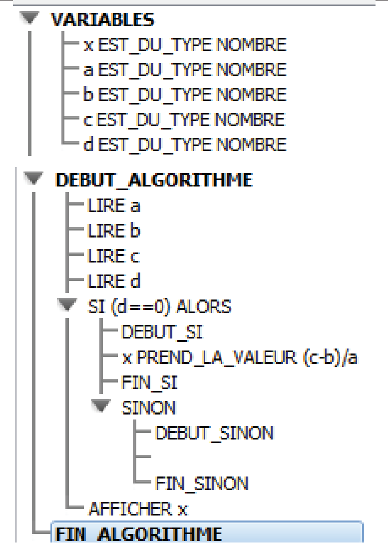
Pour le choix de notation de l'inconnue, 4 élèves sur 6 la nomment « *x* », alors que Loïc l'appelle « *x1* » et Aliaume « *egal* ». Le choix de Loïc semble basé sur le passage de x comme inconnue en début de résolution à sa valeur déterminée (*x1*) à la fin de la résolution de l'équation. Notons, qu'au point de vue de la programmation, la variable *x1* est inutile et que le programme aurait été plus concis si Loïc avait écrit directement l'instruction « Afficher Result ». C'est d'ailleurs ce que fait Aliaume, qui réalise un programme optimisé, en un minimum d'instructions.

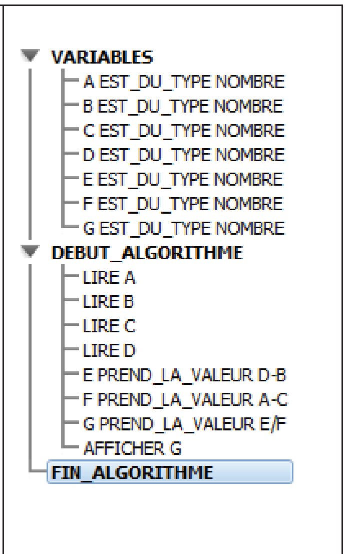
Ce court développement sur le choix des notations des paramètres et inconnues vient étayer l'hypothèse H3, en montrant comment les élèves interrogent leurs connaissances sur les objets gravitant autour du concept d'équation : il y a plus ici qu'une question de notation, les noms choisis sont évocateurs du sens donné par les élèves à ces objets, et c'est le *détour* par l'algorithmique qui permet leur *reprise*.

[169] Quant au nom du membre de droite, *R* ou *I*, nous n'avons pas réussi à trouver la moindre idée sur l'origine de ces lettres …

Analyse de programmes de résolution des équations ax + b = cx + d

En ce qui concerne les tâches t_3 et t_4, Maurice nous a fourni les deux programmes suivants :





Production de Camille et Hugo	**Production de Bilal**

Figure 188 : Programmes de résolution de l'équation ax + b = cx +d (élèves de Maurice- séance 2)

Selon les dires du professeur Maurice (lignes 97 à 100), les élèves Camille et Hugo réalisent un seul programme pour résoudre les deux équations $ax + b = c$ et $ax + b = c + dx$. Par ailleurs, la production de Camille, reproduite en figure 179, montre bien qu'elle choisit ces notations pour les deux équations génériques à déterminer. Si nous considérons que la ligne manquante s'écrit « x prend la valeur $(c - b) /(a - d)$ », le programme de gauche de la figure 188 aurait pour *algorithme informatisé* (cf.§4.4) :

Entrer *a, b, c, d*

Si d = 0, $x = \frac{c-b}{a}$

Sinon $x = \frac{c-b}{a-d}$

Sortir *x*

À partir de là, le pas à franchir pour comprendre que ces deux équations génériques sont en fait une seule n'est plus très grand mais aurait nécessité une *reprise* dans une séance ultérieure, où le professeur Maurice aurait pu montrer que toutes les équations proposées dans la fiche d'énoncé se modélisent en une seule catégorie et se résolvent avec une technique similaire.

Le programme de Bilal, quant à lui, fait écho à la résolution que celui-ci a effectué en environnement papier-crayon, reproduite en figure 184. Nous avons reproduit dans le schéma ci-dessous une partie de sa production en papier-crayon et de son programme informatique, afin de dégager les interactions entre ces deux environnements. De la même manière que dans le cas de Thomas, évoqué pour la résolution de $ax + b = c$, nous qualifions de programme de *congruent*, puisque nous y retrouvons des étapes de la résolution papier-crayon.

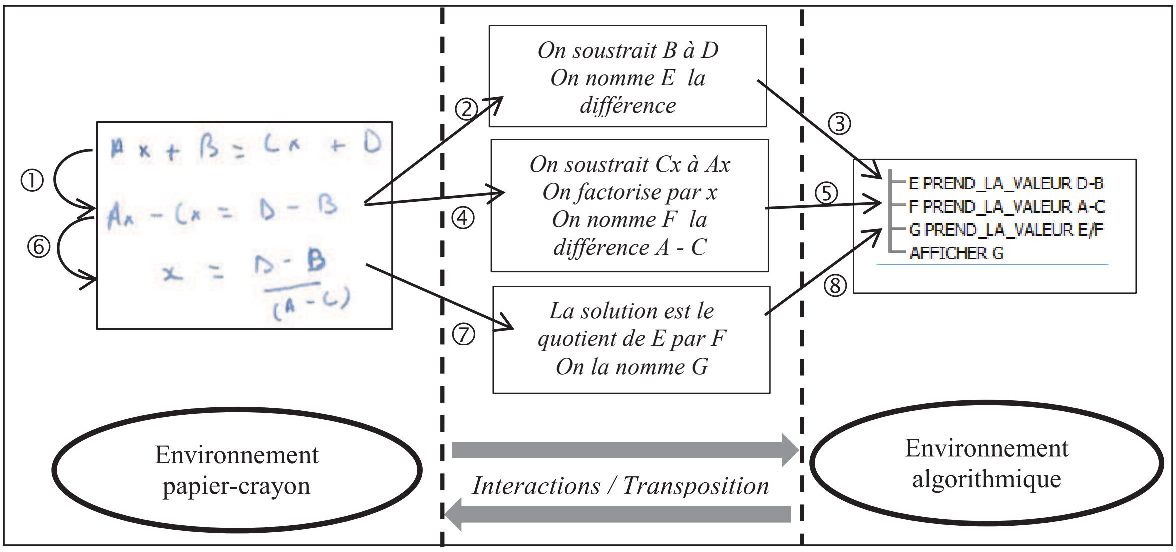


Figure 189 : Interactions entre les environnements papier-crayon et algorithmique pour la résolution de l'équation ax + b = cx + d (Élève Bilal- Programme de type congruent)

Les flèches représentent les étapes successives qui s'opèrent pour passer d'un environnement à l'autre, sans que ce découpage ne soit chronologique. De la même manière que pour l'élève Thomas, nous pouvons conclure à l'accès au double *aspect procédural et structural* des expressions algébriques simples par le biais des instructions de type « G prend la valeur E/F » : nous pouvons penser que l'élève Bilal considère ici l'expression E/F à la fois comme un calcul à effectuer et comme le résultat G de ce calcul. Remarquons que Bilal aurait pu réutiliser des variables déjà créées, son programme n'est pas optimisé : cette démarche privilégie le *sens* algébrique de la résolution d'équations plutôt que la *technique* de programmation.
Pour finir, notons qu'aucun élève ne mentionne le cas où l'équation est dégénérée ($a = c$) et que le professeur Maurice n'y fait pas référence non plus.

- ***Organisations mathématiques relatives aux tâches t'_5 et t_5 (de type T_5) : Utilisation d'un programme***

Rappelons que, relativement aux questions posées dans la fiche d'énoncé, la tâche t'_5 correspond à la question 2 partie 2 et la tâche t_5 correspond à la question 3.
Les productions des élèves donnent les résultats suivants[170] :

	Solution à déterminer avec le 1er algorithme – Questions 1 et 2 (partie 2)						***Solution à déterminer avec le 2nd algorithme – Question 3***				
Équation	**1**	**2**	**3**	**6**	**7**	**9**	**4**	**5**	**8**	**10**	**11**
Réponse attendue[171]	-3	3,5	2,5	6,586*	-0,667*	1	0,5	2	0,756*	pas de sol	14,857*
Nb élèves	27	27	27	5	5	5	4	4	1	3	0
Absence réponse	3	3	3	25	25	25	26	26	29	27	30

Tableau 190 : Réponses fournies par les élèves aux tâches de type T_5, séance 2 de Maurice

[170] Un exemple complet de production d'élève est donné en annexe A35.
[171] Les réponses étoilées sont des valeurs approchées, données par le logiciel qui les propose avec 8 chiffres significatifs. Nous les avons arrondies ici au millième, par commodité de lecture.

Notons que contrairement à la classe d'Annabelle, il n'y a pas de réponse erronée : soit la réponse est juste (mais il y en a peu), soit il y a absence de réponse. Nous ne pouvons donc analyser davantage cette dernière tâche, n'ayant pas d'autres éléments.

11.2.2.3 Étapes E_3 et E_4

En raison de l'absence du chercheur durant la séance de Maurice, les étapes E_3 et E_4 de la méthodologie des quatre composantes de Bronner sont ici traitées simultanément et de façon succincte. Nous ne précisons pas davantage les phases établies en étape E_1, mais en nous basant sur les éléments de séance données par Maurice (cf. A34), nous formulons quelques hypothèses sur les vraisemblables états du milieu, du contrat, du temps didactique ainsi que le topos de l'élève et celui du professeur, au cours de cette séance.

Durant la phase 1 de présentation de la situation n°2 et de passation des consignes, Maurice installe le milieu matériel et informatique : il distribue aux élèves la fiche d'énoncé (ligne 12, annexe A34), il les installe *en binômes, avec un poste informatique pour deux, sauf certains qui sont des solitaires, qui refusent le travail à deux* (ligne 26). Il précise le contrat, conforme à celui de la trame projetée : « *j'ai insisté sur le fait qu'on veuille que le programme sache résoudre les équations* » (ligne 30).

Au cours de la phase 2 de recherche du premier algorithme, Maurice ajoute dans le milieu la tâche de résolution des trois premières équations de la fiche. Il précise un topos différent selon les binômes où certains se chargent seuls de la constitution de l'algorithme (« *il y en a certains, ça ne leur a posé aucun problème. Ils s'y sont mis tout de suite.* », ligne 30) et d'autres sollicitent l'aide du professeur (« *en discutant un peu, [Imane] a compris ce qu'on attendait* », ligne 74). Cependant, la recherche de l'algorithme semble bien rester à la charge des élèves. En effet, Maurice mentionne :

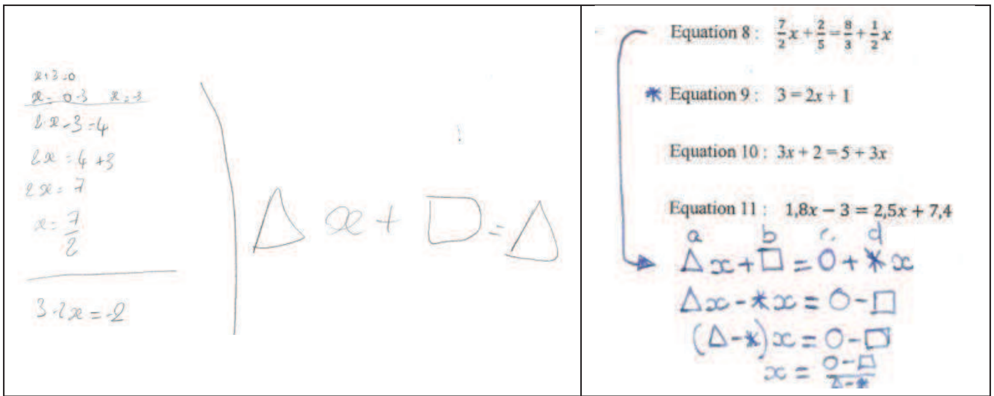
> 45. Ma : […] Et ce qui m'a plu dans ce travail, c'est qu'il y eu des échanges entre les groupes… Parce que je n'ai pas pu être derrière chacun et il y a eu une aide ponctuelle. Mais c'était plus … ce n'était pas le côté théorique de la chose, c'était plus au niveau technique de l'algorithmique.

Les élèves ont cherché, se sont entraidés et Maurice indique qu*'à un moment presque tous sont arrivés à écrire le premier programme* (ligne 74). Nous en déduisons que le temps didactique a avancé pour tous les élèves jusqu'à la reconnaissance de la forme générique $ax + b = c$ pour la première catégorie d'équations et à la constitution d'un algorithme les résolvant. Le professeur précise cependant ne pas avoir effectué la résolution littérale de cette équation au tableau et avoir ajouté au milieu (en phase 3) la définition d'un paramètre. Notons que Maurice est le seul des trois professeurs à ne pas avoir institutionnalisé la forme et la résolution de l'équation générique, probablement en raison d'une classe d'un niveau supérieur. Nous en déduisons que le topos des élèves a pu largement s'exprimer et que le professeur a joué un rôle principalement d'étayage, de validation et de soutien. Enfin, nous ne disposons que trop peu d'éléments pour analyser le déroulement des deux dernières phases, si ce n'est que les quelques élèves les ayant abordées l'ont fait en prenant eux-mêmes en charge les tâches à effectuer (« *Ceux qui sont passés à la question 3 se sont gérés tous seuls, ils ont fonctionné en roue libre.* », ligne 62).

Pour conclure sur cette séance de Maurice, nous relevons un *événement didactique*, au sens de Bronner (2006) ayant un caractère imprévu et non problématique, que nous nommons *l'utilisation de la lettre comme boîte à nombres*. Nous avons en effet relevé ces propos de Maurice durant l'entretien post-séance (lignes 75 à 80) :

> 75. C : Regarde ici, il y a des symboles (*voir figure 191 ci-dessous*).
> 76. Ma : Ah mais ça, c'est mon truc ! Je fais ça très souvent … Je fais des boîtes et après, on met des choses dans les boîtes.
> 77. C : Ça fait le lien entre les variables informatiques et les variables mathématiques…
> 78. Ma : Je le fais surtout pour gérer les problèmes de signes. C'est-à-dire pour comprendre que *a* peut être un nombre négatif, je remplace *a* par une boîte. Alors dans la boîte, il y a aussi le signe … Donc après, je le fais avec *a*. Ça permet d'expliquer que dans *a*, il y a le signe aussi. Parce que sinon, *a* est toujours positif pour eux … et –*a* est négatif.
> 79. C : Donc tu te positionnes entre la lettre qui représente un nombre et la case informatique dans laquelle on peut mettre un nombre …
> 80. Ma : Et je leur dis toujours, les lettres, c'est comme les boîtes … Comme je dessine un triangle ou un rond, le nombre est à l'intérieur ! Donc quand il y a un signe moins devant la lettre, ça vous prend l'opposé. Mais ça, c'est des trucs de collège…

Deux élèves, Constance et Anaëlle ont utilisé les « boîtes » dans leur production :



Production de Constance	**Production d'Anaëlle**

Figure 191 : Productions d'élèves utilisant des "boîtes à nombres" (séance 2 de Maurice)

Maurice explique qu'il est à l'origine de ces notations et que ce sont des *trucs de collège*. Maurice a en effet enseigné une dizaine d'années au collège avant d'enseigner en lycée et précise qu'il y présentait l'introduction des lettres, lors de la transition arithmétique-algèbre, par le biais de « boîtes », symbolisées par un triangle, un rond ou toute forme suggérant un contenant, dans lequel un nombre puisse être inséré. Pour exemplifier, schématisons la technique de Maurice pour l'introduction des paramètres d'une équation du premier degré :

$$-2x+3=\,-4 \longrightarrow -2x+\boxed{3}=-4 \longrightarrow \bigcirc x+\square=\Delta \longrightarrow ax+b=\,c$$

Figure 192 : Schématisation de la technique de Maurice pour l'introduction des lettres en algèbre

Maurice indique qu'il *reprend systématiquement* les notions d'équations en début de seconde, en utilisant les objets ci-dessus. Cette schématisation permet une transition progressive, allant du cadre numérique au cadre algébrique et permettant, dans le domaine des équations, de modéliser celles-ci, en proposant une forme générale de leur expression. Notons que les deux élèves ci-dessus se sont approprié cette image mentale de la lettre comme « boîte qui contient un nombre ». L'élève Anaëlle est même à un stade avancé de cette symbolisation, puisqu'elle écrit au-dessus de chaque « boîte » une lettre *a, b, c* ou *d*. Le schéma ci-dessus montre une abstraction progressive du concept et un passage de l'aspect *procédural* à un aspect plus *structural* de l'objet « équation ». La boîte apparait alors comme un objet intermédiaire qui ne représente pas un nombre mais qui contient un nombre. Cette image semble profitable aux élèves qui l'utilisent pour déterminer la forme générique des équations, mais également leur facilite sans doute la *transposition* de l'environnement papier-crayon vers l'environnement algorithmique. En effet, nous avons vu (cf. §4.4) qu'une variable informatique est un emplacement de mémoire physique de l'ordinateur, repéré par une adresse binaire, dans lequel il est possible de stocker une valeur numérique, alphanumérique, booléenne, etc. Ceci est à rapprocher de la « boîte » qui contient un nombre et qui est repéré par son nom (par exemple ○ puis *a*). Ces analyses ne sont pas sans faire penser aux travaux de recherche d'Haspekian (2005) sur le tableur, qui constate une certaine *matérialisation* de la variable mathématique lorsqu'elle est transposée en *variable-cellule* dans un tableur et où la « case » de la feuille de tableur est *une référence matérielle que certains élèves peuvent voir comme une boîte* (Haspekian, 2005, p.95).

11.2.3 Classe d'Alex : Séance 2.1

Suivant la méthodologie des quatre composantes, détaillons pour cette séance les étapes E_1 à E_4. Sa transcription est donnée en annexe A36.

11.2.3.1 Étape E_1

Suit le découpage de la séance 2.1 d'Alex où nous notons que la détermination des différentes phases n'est pas simple, car celles-ci ne se succèdent pas linéairement, d'une part par rapport aux tâches que nous avions envisagées[172] et d'autre part, par rapport aux différents moments de la situation. Les différentes tâches de la situation sont notées ici t_i ($1 \leq i \leq 5$) pour les tâches relatives à la catégorie d'équations $ax + b = cx + d$, relativement aux types de tâches T_i ($1 \leq i \leq 5$) définis dans l'analyse à priori (cf. §9.3.2).

Par exemple, nous avons pu différencier la phase d'institutionnalisation de la phase de recherche pour la tâche t_1, mais nous n'avons pas différencié ces moments pour les tâches suivantes, car l'organisation didactique ne l'a pas permis, les éléments de recherche et d'institutionnalisation se faisant en aller-retour, ou encore parce que certaines tâches s'effectuent simultanément.

[172] Pour l'intitulé des types de tâches T_1 à T_5, se reporter au §9.4.3.

Phase	Fonction	Forme du travail	Temps	Lignes de transcription
Phase 1	Accueil et mise en route du logiciel. Tissage avec situation n°1. Présentation de la situation n°2.	Collectif	00 :00 à 05 :15 **Durée : 5min15s**	1 à 7
Phase 2	Objectif de la situation n°2 Passation des consignes avec précisions sur l'objectif.	Collectif	5 :15 à 9 :40 **Durée : 4min25s**	8 à 19
Phase 3	Première phase de recherche, en lien avec la tâche t_1	Binômes	9 :40 à 22 :45 **Durée : 13min05s**	20 à 110
Phase 4	Institutionnalisation relative à t_1.	Collectif	22 :45 à 25 :00 **Durée : 2min15s**	111 à 115
Phase 5	- Deuxième phase de recherche : tâche t_2 avec consigne spécifique. - Institutionnalisation relative à t_2.	Collectif	25 :00 à 31 :34 **Durée : 6min34s**	116 à 148
Phase 6	- Troisième phase de recherche : tâches t_3 et t_4 simultanément (recherche de l'algorithme et du programme). - Institutionnalisation relative à t_3.	Binômes/ collectif	31 :34 à 46 :20 **Durée : 14min46s**	149 à 174
Phase 7	Quatrième phase de recherche : tâche t_5 (exécution du programme).	Binômes	46 :20 à 53 :00 **Durée : 6min40s**	174 à 203

Tableau 193 : Les différentes phases de la séance 2.1 d'Alex

11.2.3.2 Étape E_2

Nous analysons dans cette étape l'organisation mathématique de la séance 2.1, c'est-à-dire que nous prenons en considération les types de tâches, techniques et éléments technologico-théoriques apparus, en les mettant en regard des prévisions de la trame projetée d'Alex (cf. §10.4.2).

Types de tâches observées

Un premier point d'importance est à mentionner. Il s'agit de la transformation effectuée par Alex, dès le début de la séance du type de tâches : « Réaliser un programme pour résoudre des équations du 1er degré de la forme $ax + b = 0$ » en le type de tâches « Réaliser un programme pour résoudre des équations du 1er degré de la forme $ax + b = cx + d$ ». En effet, au cours de l'élaboration de sa trame projetée (cf. §10.5.2), Alex fait le choix de réaliser la reconnaissance des équations du premier degré sous la forme $ax + b = 0$. Dans ce cas de figure, pour les équations qui ne se trouvent pas directement sous cette forme, les élèves ont à réaliser une transformation – en environnement papier-crayon – des équations données : « *Ce qui veut dire qu'en amont, ils transformeront l'équation pour qu'elle soit dans le bon cas* » (cf. propos d'Alex, ligne 88, annexe A19).

Finalement, lors de la séance effective, en phase 2, Alex évoque implicitement ce changement de tâche dans les termes suivants (cf. annexe A36, ligne 11) :

> 11. Alors, une chose importante, plus que le fait de devoir résoudre des équations à la chaîne, la question que vous devez vous posez, c'est quelle est la forme générale de ce qu'on veut vous faire résoudre. Voilà ! Et si c'est pas la forme générale, comment je peux faire pour la faire devenir une espèce de forme générale que je vais pouvoir entrer dans l'algorithme.

En aparté, hors caméra, Alex justifie ce changement en indiquant que *de faire programmer une forme plus générale pour le but poursuivi* a *plus de sens*. Nous interprétons ces propos comme la volonté de l'enseignant de faire comprendre que les équations du premier degré ne font qu'une seule et unique catégorie du type $ax + b = cx + d$, en *intégrant* les microtechniques différentes de résolution selon la valeur des coefficients des équations (par exemple, celles utilisées si c et d sont nuls). C'est ici que la *reprise* des équations du premier degré prend tout son sens. Cette reprise prend en considération différentes formes de ces équations ainsi que les microtechniques isolées qui ont été vues au collège : le passage par l'algorithmique devrait permettre une vision unificatrice de ces notions.

La succession des types de tâches prévus dans la trame d'ingénierie a été effective. Par rapport aux sept phases décrites dans le tableau 193, nous avons noté les points suivants :

- la consigne relative à la tâche t_1, *reconnaître que les équations données peuvent s'écrire sous la forme générale* $ax + b = cx + d$, apparaît à la phase 2, ligne 11, à la huitième minute de la séance, comme mentionné dans l'extrait ci-dessus. Elle est donnée à toute la classe à ce moment mais Alex la précise, circulant de binôme en binôme en ces termes : « *ax + b égal quoi ?* » (lignes 41 ou 69) ;
- celle relative à t_2, *résoudre sous forme littérale l'équation* $ax + b = cx + d$ est annoncée par le professeur Alex en phase 5, au bout de 25 minutes, sous la forme suivante :

> 117. Al : Oui, il faut essayer de résoudre ça, dans le cas général, quel que soit a, quel que soit b, c et d. vous allez voir, ce n'est pas si simple que ça. Donc avant de faire les assoiffés sur Algobox, résolvez-moi ça, résolvez-moi $ax + b = cx + d$, qui est maintenant le substrat mathématique que vous allez devoir programmer ensuite sur Algobox. Mais résolvez-le d'abord.

- les consignes pour réaliser les tâches t_3, *concevoir un algorithme permettant d'automatiser la résolution d'une équation du type* $ax + b = cx + d$ et t_4, *écrire un programme traduisant l'algorithme issu de la tâche* t_3 apparaissent simultanément au début de la phase 6, au bout de 32 minutes :

> 149. Al : oui $a \neq c$. Alors maintenant, il vous reste à faire quoi ? Et bien vous avez quand même à programmer ça, d'accord ? Et si on prend cette condition-là, il va bien falloir, à un moment qu'elle sorte de votre algorithme. Vous avez capté ?

Notons que le type de tâches global a été donné à la première minute de la séance par Alex, sous la forme : « *je vous distribue une liste d'équations et cette liste d'équations, vous allez devoir la résoudre avec un algorithme que vous allez créer sur Algobox* » (ligne 1), mais l'apparition de ce type de tâches en début de séance s'apparente davantage à l'objectif à atteindre, toute l'organisation mathématique étant à construire pour atteindre cet objectif. En revanche, au début de la phase 6, les organisations nécessaires sont en place et les tâches t_4 et t_5 peuvent être envisagées par les élèves. Nous revenons plus loin, avec l'étude des techniques, sur la différenciation faite par le professeur Alex entre algorithme et programme.

- la consigne pour effectuer la dernière tâche de type T_5, *utiliser le programme réalisé pour résoudre les équations proposées*, apparaît nettement en phase 7, à 47 minutes du début de la séance, où Alex annonce : « *Alors là après, vous me résolvez toutes vos équations* » (ligne 172).

Outre les types de tâches prévues, nous notons également qu'un autre type apparaît chez quelques élèves, alors que le professeur ne les a pas incités à l'effectuer. Il s'agit de *résoudre en environnement papier-crayon tout ou partie des équations* de la feuille d'énoncé. Cette

tâche apparaît à la ligne 8, où l'élève Thomas résout la première équation ($x + 3 = 0$). Cette tâche n'apparaît pas de façon isolée ; les écrits relevés indiquent que 6 élèves sur 15 ont résolu quelques équations « à la main ». Bien que le professeur insiste pour signifier que ce n'est pas le travail attendu (« *Mais, c'est pas ce que je veux !* », ligne 8), certains élèves l'effectuent quand même. Nous ne pouvons qu'émettre des hypothèses sur ce comportement, n'ayant pas interrogé directement ces élèves mais il est possible que les élèves se soient lancés dans une tâche de résolution d'équations du premier degré « à la main », qui leur est coutumière et quelque part, rassurante et également parce qu'elle fait partie du contrat didactique habituel.
Par ailleurs, la prescription de cette tâche aurait présenté un réel intérêt en ayant permis en fin de séance, une comparaison entre les résultats fournis par le programme et les résultats obtenus en environnement papier-crayon. Des rétroactions auraient alors pu permettre de détecter des erreurs éventuelles dans l'exécution du programme (erreurs sur l'identification des paramètres a, b, c, d) ou dans la conception de l'algorithme (erreurs dans le calcul de la solution, prise en compte des cas où la solution n'est pas unique) ou encore dans la résolution « à la main » de ces équations et ainsi d'exercer un aller-retour plus conséquent entre les objets de l'algorithmique et ceux de l'algèbre.

Techniques et environnement technologico-théorique observés
Pour chacune des tâches mentionnées ci-dessus, nous allons déterminer, dans la mesure où les données recueillies le permettent, si les techniques prévisionnelles dégagées en section 9.3.2 sont effectivement élaborées, si elles apparaissent suffisamment compréhensibles et enfin si elles sont justifiées, c'est-à-dire si les éléments théoriques qui constituent les formes de justification de ces techniques sont présents et adaptés ou simplement implicites.

- ***Organisations mathématiques relatives à la tâche t_1 (de type T_1) : Reconnaissance et écriture littérale d'un type d'équations***

Seulement deux minutes après l'annonce de la consigne relative à la tâche de type T_1, des élèves se lancent sur le logiciel pour élaborer des débuts de programmes comme ceux de la figure 194 ci-dessous :

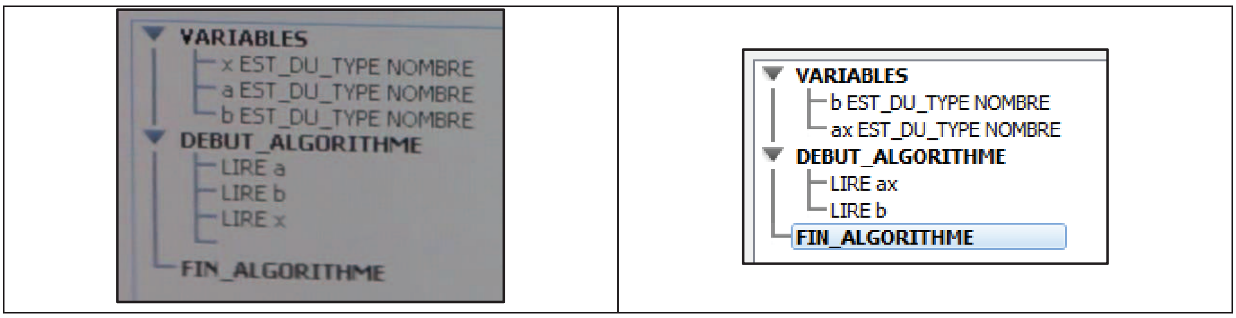


Figure 194 : Productions d'élèves d'Alex montrant l'engagement en environnement TICE (tâche t_1)

D'autres, comme Julie et Lucas, travaillent en environnement papier-crayon et produisent :

Production de Julie	Production de Lucas
Equation 1 : $x+3=0$ $ax+b=c$ Equation 2 : $-1000x=0$ $ax=c$ Equation 3 : $-1000+x=0$ Equation 4 : $\sqrt{2}+x=3$ Equation 5 : $\frac{10x}{0{,}001}=4$ $\frac{ax}{b}=c$ Equation 6 : $\pi x+3=4$ $ax+b=c$	Equation 1 : $\overset{x}{x}+\overset{a}{3}=\overset{b}{0}$ Equation 8 : $\overset{ax}{3x}-\overset{b}{\frac{1}{4}}=\overset{cx}{\frac{x}{4}}-\overset{d}{2}$ $= 3x-\frac{x}{4}=\frac{1}{4}-2$

Figure 195 : Productions d'élèves d'Alex montrant l'engagement en environnement papier-crayon (t_1)

Quel que soit l'environnement choisi par les élèves, la technique pour reconnaître un type d'équations et l'écrire avec des paramètres est en partie conforme à la technique τ_1 : *repérer les termes comportant la lettre x, substituer des lettres aux nombres déterminés et uniformiser les écritures obtenues* (cf. §9.3.2). En effet, si les élèves sont bien capables de remplacer les nombres par des lettres, les productions ci-dessus montrent qu'ils ne sont pas en mesure d'uniformiser les écritures littérales qu'ils obtiennent ou autrement dit, de comprendre *l'aspect structural* (Sfard, 1991) des formes d'équations étudiées. Par exemple, la production de Julie montre que celle-ci considère que les équations $x+3=0$ et $\pi x+3=4$ peuvent toutes deux s'écrire sous la forme $ax+b=c$, mais elle ne conçoit pas que l'équation $\frac{10x}{0{,}001}=4$ puisse également s'écrire sous cette forme, puisqu'elle donne ici : $\frac{ax}{b}=c$. De même Lucas, qui donne pour l'équation $3x-\frac{1}{4}=\frac{x}{4}-2$ la forme générale $ax+b=cx+d$, attribue à l'équation $x+3=0$ une autre forme ($x+a=b$).

De plus, nous avons retranscrit le long échange ci-dessous entre le professeur Alex et un élève, afin de pointer la difficulté à aboutir à la forme $ax + b = cx + d$ (cf. annexe A36).

> 53. Al : Attends, attends. Alors effectivement tu as vu que celle-là et celle-là, c'est de quel type ?
> 54. E : C'est $ax + b$
> 55. Al : $ax + b$ égal quoi ?
> 56. E : $ax + b$ égal c.
>
> […]
>
> 63. Al : Et là (*en montrant* $3x-5=3-10x$) [que vaut c] ?
> 64. E : $3-10x$
> 65. Al : Alors c, tu dis que c'est $3-10x$?
> 66. E : Non ! Euh …
> 67. Al : Est-ce que je ne peux pas étendre ce que tu viens de dire « $ax + b = c$ » à quelque chose de plus vaste ?
> 68. E : Euh …
> 69. Al : $ax + b$ égal quoi ?

70. E : Je sais pas … Euh, égal $c + d$?
71. Al : Alors égal $c + d$, là tu n'as plus de variable ! Si tu me dis $c + d$ … Regarde, tu m'as dit $ax + b$ (*Alex pointe au fur et à mesure son doigt sur l'équation n° 8 :* $3x - \frac{1}{4} = \frac{x}{4} - 2$ *montrant successivement a =3, x et b =* $-\frac{1}{4}$). Donc là, c fois quoi ?
72. E : c fois 1 sur 4 …
73. Al : Non, non, non. Dans le cas général, $ax + b$ égal ?
74. E : égal c
75. Al : Non !
76. E : Moins 2.
77. Al : Non, -2 est une constante et ça c'est quoi (*en montrant* le terme $\frac{x}{4}$) ?
78. E : …
79. Al : C'est la même chose qu'à gauche, sauf que … Exprime-le avec les …Exprime-le avec c et d.
80. E : Alors c divisé par d.
81. Al : Non, c ça va être quoi, ça va être un quart ?
82. E : Oui !
83. Al : Qu'est-ce que tu me chantes avec …
84. E : Ah, oui c'est cx !
85. Al : Oui, cx et ça, ça va être quoi (*en montrant* le terme -2) ?
86. E : d
87. Al : Donc en fait, qu'est-ce que t'as fait ? T'es parti d'une équation $ax + b = 0$, puis $ax + b = c$, pour arriver à quelque chose de beaucoup plus important, qui est $ax + b$ égal quoi ?
88. **16 : 03** E : Euh égal … $cx + d$

Dans cet extrait, l'élève reconnaît que le membre de droite de l'équation $3x - \frac{1}{4} = \frac{x}{4} - 2$ est de la forme $ax + b$, mais est incapable d'identifier que le second membre est également de cette même forme. Il semble qu'il ait complètement occulté la lettre x dans ce cas. Cette difficulté peut être hypothétiquement attribuée à un environnement technologico-théorique manquant, comme la méconnaissance de la règle portant sur le produit de fractions ($\frac{x}{4} = \frac{1}{4} \times x$) ou encore la différenciation entre les concepts de paramètre et d'inconnue, puisqu'il propose (ligne 80) d'écrire $\frac{x}{4}$ sous la forme $\frac{c}{d}$.

Au cours d'un autre échange, nous pointons une difficulté supplémentaire :

43. Al : Oui, $ax + b = c$. alors pour la huitième ($3x - \frac{1}{4} = \frac{x}{4} - 2$) ? Si là (*en montrant* $3x - \frac{1}{4}$), j'ai $ax + b$, alors là (*en montrant* $\frac{x}{4} - 2$), j'ai quoi ?
44. E : $cx - d$?
45. Al : $cx - d$. alors, je vois ce que tu veux dire ! Mais c'est équivalent de dire : $cx + d$. Tu vois ou pas ?
46. E : Ouais !

L'élève comprend ici que la structure du membre de droite est identique à celle du membre de gauche, et que les lettres représentant les paramètres ne doivent pas être similaires (c et d au lieu de a et b) mais il se laisse tromper par l'objet o*stensif* « moins » sans parvenir à accéder à l'objet *non-ostensif* $cx + d$ (Bosch et Chevallard, 1999, Cf. §2.3.4).

De ces quelques exemples, nous pouvons dégager quelques difficultés à appliquer la technique τ_1 pour effectuer la tâche t_1, portant sur :

- la conception des nombres rationnels (en particulier, un nombre en écriture fractionnaire est vu comme deux nombres différents, séparés par un trait de fraction : écriture de $\frac{10}{0{,}001}$ comme $\frac{a}{b}$) ;
- la non-écriture du coefficient 1 devant x dans une expression comme $x + 3$ et où cette absence du « 1 » donne l'illusion de l'absence d'un coefficient. Nous pouvons rattacher ceci à une incomplétude de technologie relative aux règles de calculs numérico-algébriques, en particulier $1\times x = x$;
- la conception d'une soustraction comme ajout de l'opposé ($3x - 2$ est vu comme $ax - b$ et non pas comme $ax + b$) ;
- la différenciation entre paramètre et inconnue.

L'intitulé même de ces difficultés montre les éléments technologico-théoriques sous-jacents à la technique τ_1 et qui font défaut à certains élèves.

En conclusion, remplacer un nombre donné par une lettre est envisageable pour la plupart de ces élèves, ils gèrent convenablement les *ostensifs*, mais beaucoup ne sont pas capables d'uniformiser leur écriture et de la généraliser et donc d'accéder ici aux *non-ostensifs* qui permettent d'aboutir à la forme $ax + b = cx + d$.

Comme le souligne Bosch et Chevallard (ibid.), la gestion des ostensifs et des non-ostensifs est simultanée et renvoie aussi bien au plan technique qu'à l'environnement technologico-théorique.

- ***Organisations mathématiques relatives à la tâche t_2 (de type T2) : Résolution littérale d'une équation***

Comme dit précédemment, la technique τ_2 repose sur la technique de résolution d'une équation du 1^er^ degré (transposition, réduction, …) effectuée sous forme littérale. Suivent deux exemples de productions d'élèves obtenues quelques minutes après qu'Alex ait lancé la tâche t_2 :

$ax+b = cx+d$ $\frac{a}{x} - = \frac{c}{x} -$ $\frac{x}{a} + = \frac{x}{c} +$	formule -> $ax + b = \cancel{cx} + d$ $\Rightarrow \frac{x}{x} = c + d - a - b$ $\Rightarrow \cancel{x} = c + d - a - b$
Production d'Anne	**Production d'Émile**

Figure 196 : Productions d'élèves d'Alex montrant l'engagement dans la tâche t_2

Pour pallier les difficultés d'ordre *pseudo-structurale* (Sfard, 1991) que nous pouvons repérer dans la figure 196 ci-dessus, Alex propose alors de remémorer la technique de résolution d'une équation du premier degré de la forme $ax + b = cx + d$. Suivent ses propos :

> 120. Al : […] Qu'est-ce que vous faisiez en quatrième lorsque vous résolviez $2x + 3 = 5x - 1$? La méthode pour résoudre ça, elle est partie aux oubliettes ?
> 121. E : On passe les x d'un côté et les constantes de l'autre.
> 122. Al : Je passe les x d'un côté et les constantes de l'autre… Et voilà ! Donc ça fait quoi là (pour $ax + b = cx + d$) ? Ça fait $ax - cx$ égal quoi ?

> 123. E : égal $d - b$.
> 124. Al : (*en écrivant au tableau*) : Oui, $ax - cx = d - b$. Et maintenant ?
> 125. E : Maintenant, c'est fini, ça fait x égal …
> 126. Al : (*en écrivant au tableau*) Il y a une factorisation à faire : $(a - c)x = d - b$. D'accord ? Oui ou non ?
> 127. Es : Oui !
> 128. Al : Et après ?
> 129. E : $\frac{d-b}{a-c}$, enfin $x = \frac{d-b}{a-c}$.

Pour ce faire, Alex choisit un exemple générique et demande aux élèves de retrouver la technique de résolution à partir de cet exemple. Il applique alors la technique donnée par l'élève, « *On passe les x d'un côté et les constantes de l'autre* », non pas à cet exemple générique mais à la forme générale $ax + b = cx + d$. Alex déroule ainsi la suite de la technique, en oral collectif, pour aboutir à la solution $\frac{d-b}{a-c}$. Notons que l'enseignant ne précise pas le terme « *passer* » et la technologie associée à la transposition. Il utilise également la notion de factorisation, sans revenir sur la technologie qui la fonde, la propriété de distributivité.

La discussion sur l'existence de cette solution en fonction de la valeur des paramètres est initiée par le professeur :

> 130. Al : Alors sans aucune précaution, j'écris ça ! Oui ? Mathilda dit oui. Donc là, tout va bien dans le meilleur des mondes !
> 131. **28 : 50** Lucas : avec a et c différents de zéro.
> 132. Al : alors, vous avez entendu ce qu'a dit Lucas ? Lucas vient de dire a et c différents de zéro.
> 133. E : Ah oui !
> 134. Al : Est-ce que c'est intéressant ou pas ? Alors, si $a = 0$ et $c = 0$, on a effectivement $a - c = 0$.
> 135. Valentine : Il faut pas que les deux soient simultanément nuls.
> 136. Al : Vous avez entendu ce que vient de dire Valentine ? Il faut pas que les deux soient simultanément nuls.
> 137. Valentine : et s'il n'y en a qu'un qui est égal à zéro ?
> 138. Al : S'il y en a un qui est égal à zéro, est-ce que ça pose problème ?
> 139. Es : Non.

Dans cet extrait, nous notons que la technique n'est pas justifiée. Il est dit que $a - c$ ne peut être nul mais sans en préciser la technologie sous-jacente. Ce dernier passage, ci-dessous, achève la démonstration relative à la tâche t_2 :

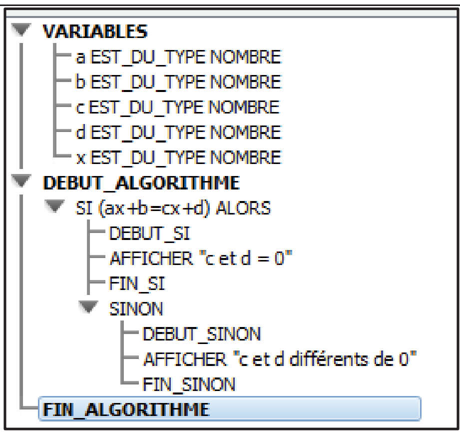
> 147. Al : La condition fondamentale est que vous devez avoir $a \neq c$. Vous avez entendu là ? si a est égal à c, on ne peut pas … […] Donc en fait, regardez ici, il y a quelque chose de fondamental, c'est que mon équation de départ, $ax + b = cx + d$, elle n'existe, elle ne peut être exploitable que si quoi ?
> 148. E : si $a \neq c$

Cette dernière phrase d'Alex contient une ambiguïté. L'équation $ax + b = cx + d$ *existe et est exploitable* même si $a = c$, c'est la solution de l'équation qui n'est pas unique dans ce cas, l'équation admettant soit une infinité de solutions, soit aucune. En fin de séance, le professeur Alex nous a expliqué ne pas avoir voulu insisté sur ces deux cas particuliers, pour ne pas complexifier l'algorithme avec deux structures alternatives imbriquées. Cependant ceci l'amène, dans un souci de simplification, à utiliser une formulation erronée.

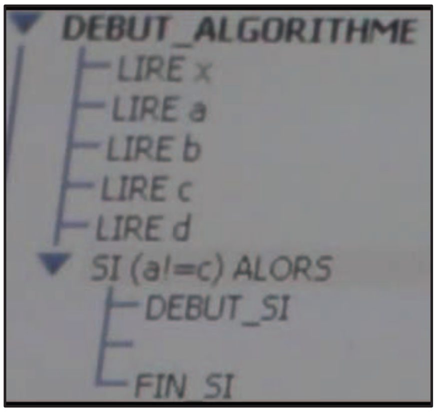
- ***Organisations mathématiques relatives aux tâches t_3 (de type T_3 : Conception d'un algorithme) et t_4 (de type T_4 : écriture d'un programme)***

Les techniques τ_3 et τ_4 associées aux tâches t_3 et t_4 sont basées sur la décomposition en *actions élémentaires* de la résolution littérale de l'équation $ax + b = cx + d$, susceptibles d'être comprises par une machine. Une *première transposition* doit se faire à partir des éléments de la résolution de cette équation, puis une *seconde transposition* de l'algorithme a lieu pour l'écrire dans un langage de programmation (cf. figure 14, § 4.4). Étant donné l'OM du professeur, nous présentons l'analyse simultanée de ces tâches puisque des allers-retours permanents se sont produits entre les deux. Il est alors difficile de considérer si les difficultés apparues sont inhérentes à l'une plutôt qu'à l'autre, chacune d'elle pouvant s'expliquer de plusieurs manières, comme nous allons l'exemplifier.

Dans les débuts de programme qui suivent (cf. lignes 150 et 156, annexe A36), nous relevons plusieurs difficultés d'ordre *algorithmique* ou de la *programmation* :



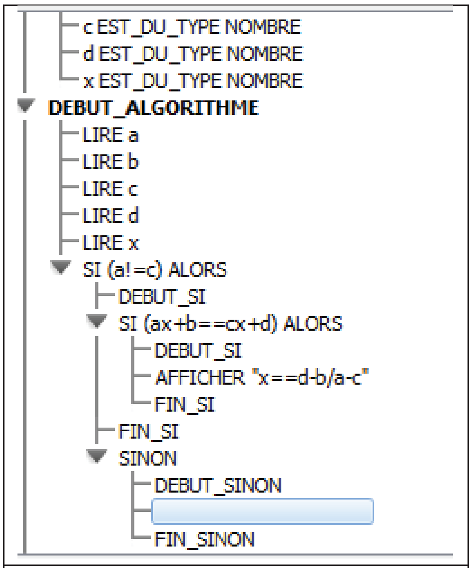
Production A



Production B

Figure 197 : Productions de deux élèves montrant l'engagement dans les tâches t_3 et t_4

Dans la production A, d'une part, en donnant comme condition l'équation à résoudre ($ax + b = cx + d$), l'élève ne parvient pas à décomposer les étapes de la résolution en *actions élémentaires* que la machine est susceptible de comprendre, et d'autre part, il ne comprend pas la sortie attendue, puisqu'il considère que celle-ci porte sur la nullité ou non des paramètres c et d de l'équation. De plus, dans les deux productions, une difficulté apparaît au début de l'algorithme, certains élèves ne perçoivent pas la nécessité d'entrer la valeur des paramètres de l'équation (production A), d'autres ne comprennent pas ce qui est nécessaire et suffisant dans cette entrée, comme dans la production B où l'instruction « Lire x » est présente. Exhibons un troisième début de programme, élaboré durant la même phase de recherche (phase 6) :



Production C

Figure 198 : Production d'un binôme montrant les difficultés de conception de l'algorithme de la situation n°2

Nous retrouvons les difficultés développées ci-dessus sur les données en entrée de l'algorithme et sur la présence de l'équation à résoudre comme condition du test. Notons que ces élèves ont compris la nécessité du test portant sur la différence des coefficients a et c, mais ils n'ont pas compris que ce test est suffisant à établir l'existence et l'unicité de la solution de l'équation. De plus, une difficulté apparaît dans les étapes de traitement : la production C montre un amalgame entre le calcul effectif de la solution de l'équation $\frac{d-b}{a-c}$ et la sortie de l'algorithme. Les deux actions ne sont pas séparées l'une de l'autre, les élèves ici encore ignorent ce qui est *élémentaire* pour la machine. D'autre part, une difficulté syntaxique apparaît : une erreur est présente dans l'écriture de la fraction solution, sans doute en raison de la *pseudo-transparence* (Artigue, 1995) entre l'écriture spatiale de la solution ($\frac{d-b}{a-c}$) et sa transposition nécessaire pour le programme informatique sous forme linéarisée et parenthésée, $(d-b)/(a-c)$. Les éléments technologico-théoriques manquants ici peuvent être attribués non seulement au domaine de la programmation, mais se trouvent aussi être du domaine numérico-algébrique, comme les règles de priorité des opérations des opérations usuelles.

Remarquons qu'au départ, l'algorithme est un *outil*, au sens de Douady, pour résoudre des équations du premier degré, où l'algèbre apparaît alors comme *objet*. Cependant, il s'opère un *glissement* (Modeste, 2012, p.64) de l'algorithme utilisé comme outil : les exemples donnés ci-dessus montrent que c'est toute la structure d'un algorithme qui est convoquée, témoignant ainsi d'un travail sur celui-ci en tant qu'*objet*. Ce qui manque à ces élèves pour appliquer la technique τ_3 sont des éléments technologico-théoriques du domaine algorithmique, constitués ici de la structure de contrôle d'un algorithme reposant *sur la logique mathématique, les règles de raisonnement et les propriétés des objets en jeu* (Modeste, 2012, p.63). Ce sont les termes employés par Modeste lorsqu'il fait référence au paradigme *AM-objet* (cf. §9.3). Notons que l'expression « *propriétés des objets en jeu* » marque bien la dualité de compréhension de ces objets dans le domaine algorithmique mais aussi algébrique. Par exemple, l'écriture de l'instruction « Lire x », peut dénoter un manque de compréhension soit

dans la construction de l'algorithme, soit dans la compréhension de la syntaxe, soit encore dans la compréhension du statut des différentes lettres qui composent l'équation. Les trois raisons ici sont fortement imbriquées, la compréhension du statut de x comme inconnue induit la compréhension qu'il ne fait pas partie des données en entrée et que la machine n'a pas à le « lire ».
Ces éléments viennent étayer l'hypothèse H3 en révélant comment le *détour* par l'algorithmique et la programmation oblige les élèves à réinterroger les objets de l'algèbre : qu'est-ce qu'une inconnue ? une équation ? la ou les solutions d'une équation ?
Pour conclure, notons que le professeur Alex s'assure que la tâche de programmation est achevée pour chaque binôme, en vérifiant que le programme de chacun est d'une forme équivalente à la forme suivante :

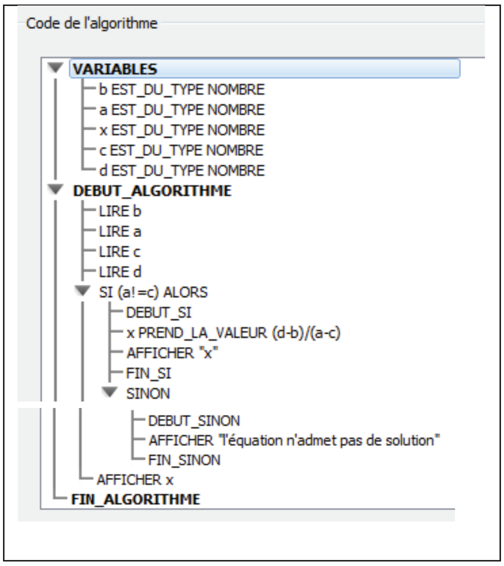


Figure 199 : Programme de Florent et Thomas, vérifié par le professeur Alex (séance 2.1)

Nous avons déjà précisé, pour la tâche t_2, que le professeur ne souhaite pas complexifier l'algorithme par deux tests conditionnels imbriqués et qu'il néglige ici la différenciation des cas $b = d$ (une infinité de solutions) et $b \neq d$ (pas de solution). Néanmoins ces deux cas sont vus lors de la tâche de déchiffrage d'un algorithme pré-écrit (cf. §.11.2.3). Notons de plus qu'il subsiste une erreur dans le programme ci-dessus (cf. figure 199), malgré la vérification du professeur. La dernière ligne du programme « Afficher x » devrait figurer dans la première alternative du test, à savoir juste après « Afficher "x" ». Cette erreur, liée aux règles de logique, est sans conséquence ici, puisqu'aucune des 10 équations proposées par Alex ne vérifie $a= c$ et par suite, la seconde alternative du test n'est pas vérifiée.

- ***Organisations mathématiques relatives à la tâche t_5 (de type T_5) : Utilisation d'un programme***

Comme vu en analyse a priori (cf. §9.3), la technique τ_5 consiste en l'identification des paramètres *a, b, c* et *d* de l'équation, puis en l'exécution du programme – en entrant au clavier les instanciations de ces paramètres et en lisant les réponses sur l'écran –, puis en l'interprétation de ces réponses comme solutions de l'équation instanciée.

Le professeur Alex étant passé dans chaque binôme pour rectifier les erreurs au besoin, les élèves réalisent la dernière tâche t_5 à l'aide d'un programme correct au final. Cependant, les résultats relevés sur les copies sont les suivants :

Équation	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**
Réponse attendue[173]	-3	0	1000	1,586*	0,0004	0,318*	0,615*	-0,636*	1,589*	-0,182*
Nb élèves (réponse juste)	14	11	12	4	4	2	6	4	4	1
Réponse erronée 1		1000		0,7	-0,00016	3,49	pas de sol	1,75	0,28	-1,66
Nb élèves (réponse 1)		2		5	4	2	4	2	2	3
Réponse erronée 2					-0,44	-0,3		-0,58	1,27	-8,66
Nb élèves (réponse 2)					1	1		1	1	2
Nb élèves (absence de réponse)	1	2	3	6	6	10	5	8	8	9

Tableau 200 : Réponses fournies par les élèves à la tâche t_5, séance 2.1 d'Alex

Les erreurs relevées portent sur l'identification des paramètres à instancier pour chaque équation donnée. Donnons quelques exemples significatifs de ces erreurs. Pour l'équation 4, $\sqrt{2} + x = 3$, les cinq élèves ayant donné comme réponse 0,7 ont entré dans le programme $a = 1$, $b = \sqrt{2}$, $c = 3$ et $d = 0$ (au lieu de $a = 1$, $b = \sqrt{2}$, $c = 0$ et $d = 3$). Cette erreur peut être imputée à une simple erreur de lecture, puisque les coefficients a et b sont correctement identifiés. Les erreurs sur les autres équations correspondent également à ce type d'inversion, sauf pour l'équation 5, $\frac{10x}{0{,}001} = 4$, où la production de Julie (cf. figure 195) nous permet de comprendre le résultat -0,00016 :

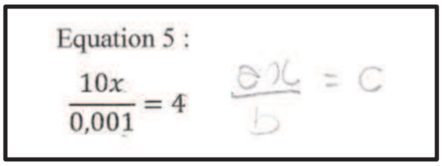


Figure 201 : Extrait d'une production montrant des erreurs d'identification des paramètres

Le résultat précédent est obtenu pour un quart des élèves, qui ont entré comme valeurs des paramètres $a = 10$, $b = 0{,}001$, $c = 4$ et $d = 0$. Nous notons ici qu'aucune rétroaction ne s'est produite entre l'équation $ax + b = cx + d$ et sa résolution en tâche t_2 et l'adaptation des nombres déterminés de l'équation 5 pour correspondre à cette forme. À chaque nombre « visible » de l'équation est affectée une lettre, dans l'ordre alphabétique. Ici encore nous pouvons conclure sur la prégnance des *ostensifs*, les élèves ne parvenant pas à accéder aux *non-ostensifs* du concept étudié. Une analyse similaire se dégage de la production de Mélanie :

[173] Les réponses étoilées sont des valeurs approchées, données par le logiciel qui les propose avec 8 chiffres significatifs. Nous les avons arrondies ici au millième, par commodité de lecture.

Equation 1 : $x + 3 = 0$ $x = -3$	Solution 1: -3
Equation 2 : $-1000x = 0$ $x = \frac{0}{-1000} = 0$	Solution 2: 0
Equation 3 : $-1000 + x = 0$ $x = -1000$	Solution 3: 1000
Equation 4 : $\sqrt{2} + x = 3$ $x = \frac{3}{\sqrt{2}}$	Solution 4: 0,70710678

Figure 202 : Extrait de la production de Mélanie pour la tâche t_5

Cette élève, qui a résolu les premières équations « à la main » au début de la séance (ses résultats apparaissent à côté des équations), les résout avec son programme en fin de séance (résultats indiqués en solution 1, 2, …). Les solutions « à la main » et « par le programme » des équations 3 et 4 sont différentes, ce qui ne semble pas perturber l'élève. Il apparaît que pour Mélanie, la *distance* créée par l'instrument (Haspekian, 2005) soit trop grande pour qu'elle puisse faire le lien entre l'aspect algorithmique et l'aspect algébrique des équations traitées, ce qui va dans le sens contraire de l'hypothèse H3, du moins pour cette élève. Nous reprenons et développons ce point plus loin, dans l'étape E_4 (cf. troisième événement).
Pour conclure, notons que l'algorithme qui était *objet* pour les tâches t_3 et t_4 prend dans cette dernière tâche le statut d'*outil* pour résoudre certaines équations du premier degré et rejoint le paradigme *AI-outil*, au sens de Modeste (2012), défini en section 9.3.

11.2.3.3 Étape E_3

Décrivons l'organisation didactique en analysant les évolutions du milieu, du contrat, du temps didactique, des topos élève et professeur durant la séance, en fonction des phases déterminées en étape E_1.

Phase 1 : Accueil et mise en route du logiciel. Présentation de la situation n°2.
La séance se déroule en salle informatique et le professeur Alex la débute par la demande d'ouvrir le logiciel Algobox sur chaque poste. Il présente rapidement l'objectif général : « *Je vous distribue une liste d'équations et cette liste d'équations, vous allez devoir la résoudre avec un algorithme que vous allez créer sur Algobox* » (cf. ligne 1, A36). Il met ainsi en place les premiers éléments du milieu, milieu matériel avec le logiciel Algobox et la feuille comportant les équations et milieu algorithmico-algébrique avec la donnée d'un algorithme à créer sur une catégorie d'équations. Notons le geste de *tissage* (Bucheton, 2004) qu'Alex réalise en articulant la situation n°2 avec la situation n°1, lorsqu'il précise : « *Vous avez vu, la fois dernière, on avait divisé en deux, plus ou moins, les équations en deux catégories. Ben, voilà la première catégorie.* » La précision que le travail à réaliser porte sur les équations du premier degré n'est pas donnée. L'organisation du travail en binômes n'est pas évoquée par l'enseignant, ce mode de fonctionnement semble habituel aux élèves qui s'assoient spontanément par deux devant un poste informatique. L'essentiel des cinq minutes de cette toute première phase est consacrée à la mise en route du logiciel : recherche sur Internet, téléchargement, ouverture, etc. Le professeur passe de poste en poste pour aider à une

installation rapide. Notons cependant que ce temps n'est pas négligeable et qu'il ampute d'autant le temps de recherche de la situation proprement dite. Du point de vue du topos, les responsabilités diffèrent mais sont partagées : les élèves ont à leur charge l'installation du logiciel sur leur poste et Alex celle de les y aider. A priori, nous pourrions annoncer un topos très important pour l'élève, lorsqu'Alex annonce l'objectif de la séance, « *vous allez devoir résoudre [les équations] avec un algorithme que vous allez créer sur Algobox* », mais la suite de la séance nous montre des exigences revues à la baisse.

Phase 2 : Objectif de la situation n°2 et précisions sur cet objectif

C'est dans cette phase de quatre minutes qu'Alex précise le contrat de la séance. Dans un monologue de deux minutes, il commence par recentrer les élèves sur la tâche algorithmique, indispensable pour passer à la tâche de programmation. En effet, même si Alex a souhaité dès le départ que le logiciel Algobox fasse partie du milieu des élèves, il insiste sur la nécessité de concevoir l'algorithme avant de le programmer et de séparer les deux tâches, en ces termes : « *Avant de partir sur Algobox pour faire votre … algorithme, vous devez réfléchir aux équations que vous avez sous le nez. D'accord ? Alors réfléchir aux équations que vous avez à résoudre, il n'est pas question…* » (ligne 8).

Alex précise également le milieu mathématique en indiquant que le travail porte sur les équations du premier degré et leur résolution : « *Moi, ce que je veux, au regard de ces dix équations, que vous me trouviez un process de résolution, via Algobox, de toutes les équations du premier degré* » (ligne 8). Il s'appuie ensuite sur le travail d'un élève, Matthieu, qui a résolu la première équation en environnement papier-crayon pour s'assurer de la dévolution du problème à l'ensemble des élèves. Cette dévolution comporte une précision sur la définition d'un algorithme qui correspond à un *algorithme non-instancié*, selon Modeste. En effet, ce dernier donne la définition suivante :

> Un algorithme instancié est une représentation d'un algorithme, non pas générique et pour toute instance, mais au contraire exprimée sur une instance précise. Ce n'est pas un algorithme, au-sens où il n'exprime pas une méthode générique de résolution de problème. (Modeste, 2012, p.245)

Alex insiste sur ce concept d'algorithme *instancié* et *non instancié* par les propos suivants :

> 12. Al : vous avez entendu ce que vient de dire Clémence ? « Je dois faire ça direct pour chaque équation »… alors, je vais réfuter ça : vous avez 10 équations, alors vous allez pondre 10 algorithmes ?
> 13. Es : Non !
> 14. Al : Non. À la fin, je n'en veux qu'un ! Je veux un algorithme pour toutes les équations que vous avez. Voilà, ce que je veux !
> 15. E : Ah ! (*étonné*)
> 16. Al : Donc, il est hors de question de faire un algorithme pour résoudre $x + 3 = 0$, et ainsi de suite.

Le milieu s'enrichit donc de cette définition d'un algorithme. De plus, comme indiqué en étape E_2, Alex donne alors une consigne relative à la tâche t_1 (reconnaître que les équations données peuvent s'écrire sous la forme générale $ax + b = cx + d$) à la huitième minute de la séance, ce qu'il énonce : « *la question que vous devez vous posez, c'est quelle est la forme générale de ce qu'on veut vous faire résoudre* » (ligne 11). Le topos du professeur est ici prépondérant par rapport à celui de l'élève, Alex met en place la situation, précise le contrat, les élèves ayant la charge d'écouter et de s'approprier ses propos, en vue d'une dévolution de la tâche.

Phase 3 : Recherche d'une forme générique des équations données (tâche de type T_1)

Cette phase débute dix minutes après le début de la séance et dure treize minutes. L'étape E_2 a montré que les élèves s'engagent dans la tâche soit en environnement papier-crayon, soit en environnement informatique. Dans le premier cas, les élèves substituent les nombres déterminés par des lettres (cf. figure 195, §11.2.1.2) et dans le second cas, ils utilisent la plage de déclaration des variables du logiciel pour y consigner des lettres (cf. figure 194, §11.2.1.2). Notons qu'Alex ne dissuade pas les élèves d'utiliser le logiciel dans cette phase, mais lorsqu'il questionne des élèves l'utilisant, il revient systématiquement à la feuille d'énoncé. Les gestes professionnels d'Alex sont principalement ici des gestes d'*étayage* (Bucheton, 2004) où il accompagne les binômes dans leur recherche, en les aidant à approfondir leur réflexion et à déterminer la forme générique des équations données. Nous relevons en ce sens des propos d'Alex lorsqu'il s'adresse à un binôme en particulier : « *Est-ce que je ne peux pas étendre ce que tu viens de dire « ax + b = c » à quelque chose de plus vaste ?* » (ligne 67) ou encore à un autre : « *Si vous avez une équation de ce type-là (ax + b = cx + d), est-ce qu'elle est aussi de ce type-là (x + 3 = 0) ?* » (ligne 104).
Huit minutes après le début de cette phase, l'enseignant relance la recherche, s'adressant à toute la classe, en orientant les élèves de la façon suivante (ligne 95) :

> À part deux groupes, vous êtes tous partis dans le type des trois premières équations. Je vous rappelle que l'enjeu de cet exo, c'est de résoudre avec un algorithme les 10 équations que vous avez là. C'est-à-dire que quand vous essayez de travailler avec $x + 3 = 0$, ce n'est pas une équation assez vaste pour englober toutes celles que je veux. Dans cette équation, il y a ce nombre-là qui est assez particulier (*il montre le 0*), il y a, à mon avis, d'autres équations qui sont plus porteuses de la finalité de ce que je veux vous faire trouver. D'accord ?

Dans cette relance, Alex propose implicitement une technique pour déterminer la forme générique des équations, celle de considérer l'équation « la moins particulière » de la liste proposée, d'y substituer les nombres déterminés par des lettres puis de vérifier si toutes les équations de la liste sont conformes à cette écriture. Les élèves reprennent alors leur recherche.
Le milieu est augmenté des interactions des binômes avec l'enseignant et des interactions des élèves entre eux où les notions de résolution d'équations, de paramètres surviennent. Les topos des élèves et de l'enseignant se partagent entre la recherche de la forme générique des équations données pour les premiers et le contrôle et la validation des réponses pour le second.

Phase 4 : Institutionnalisation de la forme générique des équations données (tâche t_1)

À 23 minutes du début de la séance, le professeur Alex propose l'institutionnalisation de la forme générique des équations. Il effectue ici une nette avancée du temps didactique en fixant cette forme : « *C'est effectivement une équation du premier degré avec à gauche une expression du type ax + b et à droite une expression du type cx + d et on est dans les équations du premier degré* » (ligne 113). Au milieu s'ajoute donc la forme de l'équation à

considérer pour réaliser l'algorithme. Alex précise à nouveau le contrat didactique avec cette nouvelle donnée sur un exemple générique ($x + 3 = 0$) : « *Quand on va vous demander sur Algobox de lire a, b, c, d et bien, je vais rentrer c = 0, d = 0 et je vais rentrer a = 1, b = 3 et votre process doit sortir x = -3* » (ligne 115). Dans cette phase d'institutionnalisation, le topos du professeur prédomine, celui de l'élève est dans l'écoute et la compréhension de la synthèse effectuée par le professeur, ce qui est conforme au contrat didactique habituel. Nous pouvons même ajouter qu'Alex effectue en partie le travail des élèves. En effet, en ligne 113, la forme générique de l'équation est juste institutionnalisée ($ax + b = cx + d$) qu'Alex indique déjà une partie de la structure de l'algorithme à réaliser (*lire a, b, c, d … et sortir x*).
La phase s'achève avec l'avènement de la tâche suivante, c'est-à-dire la résolution de l'équation $ax + b = cx + d$. Alex sollicite les élèves et les amène à exprimer que, pour réaliser l'algorithme une étape leur manque : celle de la résolution littérale de l'équation ci-dessus (ligne 116).

Phase 5 : Recherche de la résolution de l'équation générique (tâche t_2)

Ici encore, nous notons une modification du contrat didactique où un découpage de la tâche à accomplir par les élèves est opéré par Alex. Celui-ci le présente comme une étape intermédiaire avant de concevoir l'algorithme : « *Donc avant de faire les assoiffés sur Algobox, résolvez-moi ça, résolvez-moi ax + b = cx + d* ». La résolution de l'équation paramétrée qu'il ajoute dans le contrat leur est alors dévolue. Alex laisse ici un temps très court de recherche individuelle de l'ordre de deux minutes avant de terminer la résolution en oral collectif et reprend très rapidement la main. Nous analysons deux raisons possibles de cette attitude, ne s'excluant pas mutuellement :
- le professeur juge que la tâche est trop difficile pour les élèves, ce qu'il indique par ailleurs dans l'expression « *vous allez voir, ce n'est pas si simple que ça* » (ligne 117) ;
- il souhaite faire avancer plus rapidement le temps didactique pour avoir le temps matériel de passer à la conception de l'algorithme et à sa programmation sur Algobox durant la séance.

Alex institutionnalise alors le résultat suivant (cf. étape E_2) : « si $a \neq c$, l'équation $ax + b = cx + d$ admet pour solution $\frac{d-b}{a-c}$ », avec la collaboration de quelques élèves (Mathilda, Valentine, Lucas, Jean-Stéphane). Notons que sa démarche fait appel à la *mémoire didactique* des élèves (Matheron, 2000) puisqu'il leur propose de se remémorer la technique de résolution d'une équation du premier degré *comme ils le faisaient en quatrième* (ligne 120). En effet, pour Matheron, l'enseignant, en général, a une *représentation* de la mémoire des élèves *de ce qu'il estime pouvoir être mobilisé* par eux : en particulier la moins susceptible d'oubli est *la mémoire des notions et techniques qui relèvent des classes de niveau inférieur* (ibid., p.22). C'est bien le cas d'Alex ici, qui demande à ses élèves de se remémorer les *gestes* d'une technique apprise au collège.
Pour conclure, dans cette phase Alex provoque une nouvelle avancée du temps didactique. Il amène des connaissances mathématiques dans le milieu, en y ajoutant la règle ci-dessus.

Phase 6 : Recherche de l'algorithme et du programme (tâches t_3 et t_4)

Durant cette phase d'une quinzaine de minutes, l'enseignant se déplace de binôme en binôme pour des gestes d'*étayage* (Bucheton, 2004), où il apporte son aide en contrôlant les algorithmes et validant des réponses. Au tout début de la phase 6, Alex semble croire à une transparence totale entre la démonstration qu'il vient d'effectuer et l'algorithme conceptuel à construire, c'est-à-dire entre *l'algorithme mathématique* et *l'algorithme informatisé* tels que nous les avons définis en section 4.4. Nous faisons cette hypothèse en analysant ses propos (ligne 149) :

> 149. Al : oui $a \neq c$. Alors maintenant, il vous reste à faire quoi ? Et bien vous avez quand même à programmer ça, d'accord ? Et si on prend cette condition-là, il va bien falloir, à un moment qu'elle sorte de votre algorithme. Vous avez capté ?

Pour Alex, déterminer par un raisonnement mathématique, que l'équation $ax + b = cx + d$ admet une unique solution $\frac{d-b}{a-c}$ lorsque $a \neq c$, est équivalent à donner la structure de l'algorithme, puisqu'*il ne reste plus qu'à programmer*. Mais d'après les programmes en cours d'écriture relevés dans cette phase (cf. étape E_2, figures 197 et 198), certains des élèves ont transposé cette démonstration sous la forme : « si l'équation s'écrit $ax + b = cx + d$ alors $x = \frac{d-b}{a-c}$ », ou encore « si l'équation s'écrit $ax + b = cx + d$ alors $a \neq c$ ». Comme vu dans l'étape E_2, les règles de la logique sont indispensables à la conception d'un algorithme et d'un programme et c'est ce qui semble faire défaut à ces élèves, ainsi que la décomposition en *actions élémentaires* compréhensibles par une machine. En particulier, la notion de *condition* dans la structure alternative d'un algorithme n'est pas comprise ici. Dans un algorithme informatisé ou un programme informatique, cette *condition* est constituée d'un booléen, c'est-à-dire une expression comportant au moins une variable informatique et un opérateur de comparaison, et pouvant prendre la valeur « vrai » ou « faux » (cf. §4.4). L'amalgame entre l'implication mathématique « si (proposition 1) alors (proposition 2) » semble être à l'origine de l'erreur dans l'écriture de cette condition. En effet, dans une implication mathématique, une proposition est tout énoncé cohérent dont on peut dire sans ambiguïté qu'il est soit vrai soit faux. Il y a là une *transposition informatique*, au sens de Balacheff à effectuer et un phénomène de *pseudo-transparence* (Artigue, 1995) entre le « si » informatique et le « si » mathématique. Nous pouvons conclure ici que les organisations mathématique et didactique de l'enseignant, en ne distinguant pas clairement les tâches de conception de l'algorithme et de programmation, contribuent à engendrer ce type de difficultés, caractérisées par des mélanges entre objets mathématiques et objets informatiques.

À la 38e minute de la séance, la phase 6 se conclut par l'institutionnalisation de l'algorithme, sous forme d'oral dialogué, entre le professeur et des élèves (ligne 157) :

> 157. Al (*à toute la classe*) : Écoutez ! Tous ceux qui commencent leur condition par « Si $ax + b = cx + d$ », mathématiquement ce n'est pas valide. Si vous avez « lire a, lire b, lire c, lire d », alors je vais rentrer $a = 1$ et $c = 1$ … Je vous signale que si $a = 1$ et $c = 1$, votre équation, elle n'existe même pas puisque regardez, je suis en porte-à-faux de ma condition d'existence. D'accord ? (*Alex regarde l'heure puis enchaîne*) Ma première condition, c'est forcément $a \neq c$. Alors, c'est quoi votre expression ? « Si $a \neq c$ », qu'est-ce qu'on fait faire ? Ça va être x prend la valeur $\frac{d-b}{a-c}$. Voilà le résultat final. Et sinon, qu'est-ce qui va se passer ?
> 158. E : Sinon, $a = c$.
> 159. Al : Oui, sinon $a = c$. Et qu'est-ce qui faut écrire ?
> 160. E : pas de solution.
> 161. Al : Oui, on fait écrire « l'équation n'a pas de solution ».

Le début de son intervention (ligne 157) semble indiquer que le professeur veuille réfuter une condition incorrecte (« si $ax + b = cx + d$ » au lieu de « si $a \neq c$ ») et laisser aux élèves un temps supplémentaire de recherche. Mais Alex effectue un contrôle du temps et nous faisons l'hypothèse que, considérant la fin de la séance proche, il choisit de faire avancer le *temps didactique* en donnant la forme de l'algorithme à programmer. C'est ainsi qu'il enchaîne par l'institutionnalisation de cet algorithme, sous la forme « *Si $a \neq c$ », qu'est-ce qu'on fait faire ? Ça va être x prend la valeur $\frac{d-b}{a-c}$. Voilà le résultat final.*» Le langage qu'il utilise est un *pseudo-code* que Modeste (2012, p.24) définit comme *un langage intermédiaire, inspiré des instructions des langages informatiques mais libéré de certaines contraintes et manipulant directement les objets mathématiques* (cf. §4.4). Alex utilise en effet les termes de lecture/écriture qui relèvent de la programmation et il n'indique pas de déclaration de variables à effectuer, ce qui montre ici plutôt une considération mathématique de la nature des variables *a, b, c* et *d* plutôt qu'informatique.

Le milieu est donc augmenté dans cette phase de notions d'algorithmique et de programmation et de la réalisation, pour la plupart des binômes, d'un programme sous le logiciel Algobox (cf. étape 2, figure 199) donnant la solution des équations de la forme $ax + b = cx + d$. Les interactions entre les binômes et l'enseignant ont été importantes pour arriver à ce résultat, le topos de l'élève n'ayant pu s'exprimer qu'avec le soutien constant du professeur. Même s'il est vrai que les élèves produisent des résultats, les responsabilités du professeur (lignes 157, 159) sont très importantes : c'est lui qui donne l'algorithme et le programme à bon nombre d'élèves.

Phase 7 : Recherche de la solution des équations à l'aide du programme (tâche t_5)

La dernière phase dure sept minutes. Remarquons la grande hétérogénéité des binômes à ce stade. En effet, la transcription de la séance montre que cette phase a commencé un peu plus tôt pour certains binômes (lignes 165 à 173) qui ont déjà résolu les premières équations avant que le professeur ne lance la consigne (ligne 174). D'autres au contraire sollicitent encore le professeur pour une aide à la programmation de l'algorithme (lignes 175 à 182).

D'autre part, cette dernière phase se termine dans la précipitation mais les élèves restent encore trois minutes après la fin de la séance pour faire « tourner » leur programme et obtenir les solutions des équations. Nous en déduisons l'intérêt des élèves pour ce travail et notons même l'enthousiasme de certains, en particulier par la dernière interjection de l'extrait ci-dessous (lignes 168 à 171) :

> 168. *(Un binôme fait exécuter le programme)* E1 : alors pour la première [$x + 3 = 0$], tu rentres $a = 1$, $b = 3$, $c = 0$ et $d = 0$.
> 169. E2 : Et ça marche, ça donne -3 ! Pour la deuxième [$-1000x = 0$], $a = -1000$, *b* c'est 1 ?
> 170. E1 : Non, c'est 0.
> 171. E2 : Ah oui, 0. $c = 0$ et $d = 0$. Et ça fait $x = 0$. Putain, c'est pratique ! […]

Un retour s'effectue du domaine algorithmique vers le domaine algébrique. Les variables informatiques *a, b, c, d* et *x* de la phase précédente retrouvent leur statut mathématique de paramètre et d'inconnue. La nouvelle transposition effectuée dans ce sens semble s'effectuer en toute *transparence*, du moins pour le binôme de l'extrait ci-dessus.

Le topos de l'élève occupe toute la place, le professeur n'intervient pas pour cette dernière tâche, se contentant d'apporter son aide à certains élèves en retard sur le temps de la séance.
Le milieu s'enrichit de la précision apportée aux concepts d'équation, de paramètre, d'inconnue et de solution. Ajoutons que même si la notion de *paramètre* ne fait pas l'objet d'une institutionnalisation explicite du professeur et si celui-ci ne donne pas ce vocabulaire, cette notion est travaillée par la différence de statut que les élèves sont capables de lui attribuer en fin de séance.
Comme prévu dans la *trame projetée* d'Alex (cf. §10.5.2), la séance se termine par la donnée d'un travail à faire à la maison consistant en la détermination de la fonction d'un algorithme, déjà écrit sur papier (cf. énoncé en annexe A22). Le travail réalisé est analysé plus loin (cf. §. 11.2.5).

Synthèse de l'étape E_3

Phases	Début numéro ligne	Début instant	Fonction	Évolution du milieu	Temps didactique / Topos du prof	Topos de l'élève
1	1	00 : 00	- Accueil et mise en route du logiciel. - Tissage avec situation n°1. - Présentation de la situation n°2.	- Notion d'algorithme et de résolution d'équations - Feuille d'énoncé avec équations - Logiciel Algobox	- Donner l'enjeu de la situation - Aider à l'installation du logiciel	- Se remémorer la situation n°1. - Installer le logiciel Algobox.
2	8	05 : 15	- Objectif de la situation n°2. - Phase de dévolution. - Passation de la consigne pour la tâche t_1	- Notion d'équations du premier degré - Définition d'un algorithme non instancié	- Préciser l'algorithme attendu - Lancer les élèves sur la tâche t_1	Écouter et comprendre les explications du professeur
3	20	09 : 40	Phase de recherche en binôme d'une forme générique des équations données (tâche t_1)	- Interactions binôme/prof - Techniques/ Technologies amenées par le prof et les élèves sur la structure des équations du 1er degré.	Valider ou invalider les formes d'équations proposées par les élèves	Déterminer une forme générique des équations du 1er degré
4	111	22 : 45	Institutionnalisation de la forme générique	Forme $ax + b = cx + d$	Donner et expliquer la forme générique	Écouter et comprendre les explications du professeur
5	117	25 : 00	- Phase de recherche de la résolution de l'équation générique - Institutionnalisation (relative à t_2)	Technique/ Technologie de résolution d'une équation du 1er degré	Amener les élèves à comprendre la résolution et la discussion selon les paramètres	- Résoudre l'équation générique - Comprendre la discussion sur les paramètres

6	149	31 : 34	- Phase de recherche de l'algorithme (tâche t_3) - Phase de recherche du programme sur Algobox (tâche t_4) - Institutionnalisation (relative aux tâches t_3 et t_4)	- Le logiciel entre pleinement dans le milieu - Notions d'algorithmique et de programmation - Algorithme/ programme de résolution des équations du 1er degré	- Valider ou invalider les algorithmes/ programmes proposées par les élèves - Institutionnaliser l'algorithme/ le programme	- Déterminer l'algorithme de résolution des équations de la forme générique - Programmer l'algorithme sous Algobox
7	174	46 : 20	Phase de recherche des solutions des équations proposées à l'aide du programme réalisé	- Variables informatiques/ mathématiques - Inconnue/ solution/ paramètre	Aider les élèves en retard	- Obtenir les solutions des différentes équations à l'aide du programme réalisé

Tableau 203 : Récapitulatif du milieu, du temps didactique et des topos (séance 2-1 d'Alex)

11.2.3.4 Étape E_4

Lors de cette dernière étape, nous relevons trois *événements didactiques* (Bronner, 2006, 2009) particuliers :
- un premier événement imprévu et problématique, *l'amalgame entre objets mathématiques et algorithmiques* ;
- un deuxième événement prévisible et problématique, *la rencontre de la non-congruence entre les environnements algébrique et algorithmique* ;
- un troisième événement imprévu et plus ou moins problématique selon les élèves, *l'absence de rétroaction entre les objets algorithmiques et algébrique.*

Premier événement : l'amalgame entre objets mathématiques et algorithmiques

Pour ce premier événement, nous examinons les causes possibles de cet amalgame, du côté professeur. Nous avons déjà noté, en étape E_2, l'explication erronée du professeur Alex sur la condition de la structure alternative. Ceci se produit trois fois au cours de la séance :
- en ligne 147, « *Donc en fait, regardez ici, il y a quelque chose de fondamental, c'est que mon équation de départ, ax + b = cx + d, elle n'existe, elle ne peut être exploitable que si [a ≠ c]* » ;
- en ligne 155, « *Lucas, cette condition-là (a ≠ c), c'est celle qui permet de faire exister l'équation de ce type-là (ax + b = cx + d). Donc ça veut dire que c'est la condition, le point de départ de la résolution.* » ;
- en ligne 159, « *Tous ceux qui commencent leur condition par « Si ax + b = cx + d », mathématiquement ce n'est pas valide. Si vous avez « lire a, lire b, lire c, lire d », alors je vais rentrer a = 1 et c = 1… Je vous signale que si a = 1 et c = 1, votre équation, elle n'existe même pas puisque regardez, je suis en porte-à-faux de ma condition d'existence.»*

Bien entendu, le professeur Alex sait que l'équation $ax + b = cx + d$ existe, que les coefficients a et c soient égaux ou non ; c'est sa formulation qui est ambigüe ici. Nous nous sommes interrogée sur l'origine de cette ambigüité et avons émis l'hypothèse qu'elle est consécutive d'un amalgame entre les domaines des mathématiques et de l'algorithmique. En particulier, la ligne 159, transcrite ci-dessus devient correcte, en remplaçant le mot « mathématiquement » par « algorithmiquement » et le mot « équation » par « solution ». Ces erreurs répétées de formulation sont peut-être dues à un manque de maîtrise de l'enseignement de l'algorithmique, plongé dans celui des mathématiques. Le professeur, qui s'est formé par lui-même sur l'algorithmique comme il nous l'a confié, débute dans cet enseignement, mis en place en classe de seconde seulement un an avant l'expérimentation. Alex ne possède sans doute pas suffisamment les concepts de base de l'algorithmique pour les transférer à leur enseignement. Nous tombons ici sur l'un des problèmes de l'intégration de ce nouveau domaine dans la discipline des mathématiques : le confier à des professeurs n'ayant pas reçu ce type de formation dans leur cursus initial ou en formation continue est problématique. Le rapport Kahane (2000), intitulé *Informatique et enseignement des mathématiques*, indique les rapports privilégiés qu'entretiennent les mathématiques avec l'algorithmique et la programmation, et préconise de former les enseignants en mathématiques à cette discipline. Si cette formation fait défaut, le rapport Kahane indique :

> L'enseignant se trouve placé dans une situation qui n'est pas habituelle pour lui : ne pas pouvoir expliquer ce qui se passe réellement, parce que l'explication est inaccessible à l'étudiant, ou parce qu'il ne la connaît pas, ou parce qu'elle dépend de la façon particulière dont fonctionne telle implantation du logiciel. (p.10)

Nous pouvons penser que les amalgames relevés ci-dessus dans les propos d'Alex manifestent ce besoin de formation. C'est pour cette raison que cet événement peut être qualifié d'*imprévu,* car ni les amalgames de l'enseignant n'ont été anticipés par le chercheur, ni le besoin de formation n'a été déclaré par l'enseignant, à notre connaissance. Cet événement est également *problématique* par rapport au manque de netteté des concepts d'algorithmique véhiculés par le professeur et qui pourraient engendrer une conception faussée de ceux-ci par les élèves.

Deuxième événement : la rencontre de la non-congruence entre les environnements algébrique et algorithmique

Nous avons déjà mentionné, en particulier pour la classe de Maurice (cf. §11.2.2.2), des programmes d'élèves de type *congruent* et de type *non congruent*. Rappelons que ce que nous nommons un *programme de type congruent* est un programme informatique qui conserve des traces des étapes de la résolution algébrique effectuée en environnement papier-crayon, en opposition à un *programme de type non congruent* où la démarche algébrique ne se retrouve pas ou très peu. Nous nous intéressons dans cet événement à une catégorie d'élèves, rencontrés dans la classe d'Alex, dont les programmes se situent à la marge de ces deux types. En effet, certains des programmes réalisés comportent des erreurs liées à la compréhension des éléments algorithmiques ou de programmation. Ces erreurs tendent à montrer une des limites de l'expérimentation : si l'*instrumentation* (Rabardel, 1995) des élèves n'est pas suffisamment achevée, la *transposition* algorithmique/algèbre peut ne pas s'opérer. La production C ci-dessous, relevée à la 40e minute de la séance, résume à peu près toutes les erreurs commises par les élèves et nous pouvons ainsi la considérer comme *générique*. Cette production a déjà été présentée en figure 198 mais nous l'utilisons ici pour dégager un autre angle d'analyse.

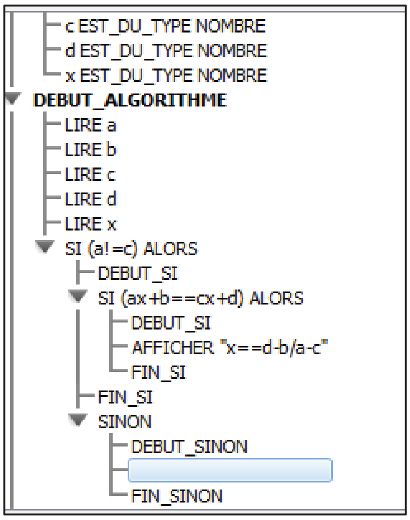


Figure 204 : Production C- Programme en cours d'écriture d'un binôme lors de la séance 2.1 d'Alex

Les quatre erreurs que nous notons dans ce programme sont :
- l'instruction « Lire x » alors que la variable x doit apparaître en écriture ;
- la boucle conditionnelle « Si (ax + b = = cx + d) alors » ;
- l'affichage de la solution comme un message (ce que l'on reconnaît par la présence des guillemets) et non comme une variable ;
- l'absence de parenthèses pour l'écriture linéarisée de la solution.

Outre les difficultés qui peuvent être liées à une difficulté de compréhension des objets algébriques, comme nous l'avons pointé en étape E_2, nous relevons des erreurs dues à une connaissance approximative des concepts de base de l'algorithmique mais aussi de la syntaxe du logiciel. Les élèves tentent ci-dessus de « plaquer » leurs connaissances algébriques comme langage pour le logiciel, alors que celles-ci demandent à être *transposées* ici *informatiquement* (Balacheff, 1994). L'*instrumentation* n'est ici pas aboutie, ces élèves ne déterminent pas ce qu'est une action élémentaire pour la machine, ils n'ont pas encore acquis la capacité de décentration nécessaire, ni le langage pour dialoguer avec le logiciel. Comme le dit Balacheff (ibid., p.18), il ne s'agit pas *d'un simple processus de traduction d'un système de représentation vers un autre*, il y a un réel travail de transposition à effectuer pour passer du résultat mathématique « si $a \neq c$, l'équation $ax + b = cx + d$ admet pour solution $\frac{d-b}{a-c}$ » à la formulation algorithmique associée. Il n'y a en effet sur ce point pas de *transparence*, au sens d'Artigue, entre la démarche mathématique de résolution de l'équation et la démarche algorithmique. Les étapes successives de résolution de l'équation littérale, telles que les connaissent les élèves, sont rappelées ici :

$$ax + b = cx + d$$
$$ax - cx = d - b$$
$$(a - c)x = d - b$$
$$si\ a \neq c \qquad x = \frac{d-b}{a-c}$$

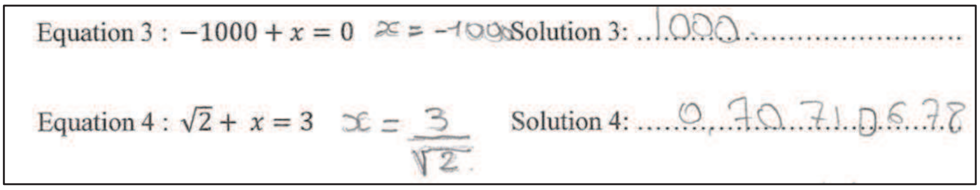
D'une part, ces étapes sont « perdues » lors de la constitution de l'algorithme : il ne subsiste que la dernière ligne. D'autre part, la condition « si $a \neq c$ » arrive à la fin de la résolution « à la main », alors qu'elle est nécessaire tout au début de l'algorithme. Il y a toute une *reconstruction* nécessaire à envisager pour concevoir l'algorithme à partir de la résolution de l'équation. Il n'y a donc pas *congruence* entre le *registre* « mathématique à la main » et le *registre* algorithmique, au sens de Duval (1995). Ceci peut expliquer pourquoi certains élèves (cf. figure 198) ajoutent la condition « si $ax + b = cx + d$ alors » ; ils sont à la recherche d'une certaine conformité avec l'équation de départ. Drijvers (2002) souligne :

> Afin d'établir cette relation entre technique machine, conception mentale et travail papier-crayon, il est important que les élèves perçoivent une *congruence* entre les trois aspects. Il faut qu'ils soient capables de lier l'image mentale, la façon traditionnelle de résoudre et l'approche du SCF. En même temps, ces trois composantes différentes peuvent se compléter et ainsi stimuler leurs développements respectifs. Il faut donc nous assurer que les conceptions mentales le SCF et le travail papier-crayon se soutiennent et fusionnent dans une conception complète. (p.241)

Bien que Drijvers soutienne ces propos dans le cas de l'utilisation d'un CAS (SCF = système de calcul formel), il nous semble légitime de les étendre à l'utilisation d'un logiciel d'algorithmique et de programmation. Dans la production C de la figure 204, les élèves ont bien compris l'enjeu de la tâche globale et, même si le programme est erroné et nécessite l'aide du professeur à ce stade, les élèves se sont interrogés sur les objets en jeu dans une équation du premier degré : leur conception mentale de ces objets s'est enrichie.
Pour finir, cet événement est qualifié ici de *prévisible*, de par les nombreux travaux de recherche (Rabardel, Balacheff, Artigue, Drijvers) sur la transposition informatique. Le caractère de *problématicité* vient du fait que si cette transposition ne s'opère pas, l'objectif visé d'un approfondissement de la compréhension des objets algébriques peut être avorté.

Troisième événement : l'absence de rétroaction sur la liaison entre les résultats donnés par les deux démarches algorithmique et algébrique

Lors de la dernière phase de la séance, lorsque le programme fonctionne sur pratiquement tous les postes, les élèves l'exécutent pour les dix équations fournies. L'absence d'institutionnalisation pour transférer les objets de l'algorithmique vers les objets de l'algèbre est un évènement remarquable en ce sens qu'il peut se révéler *problématique* pour la reprise des concepts algébriques.
Afin d'expliciter ces propos, revenons sur la production de Mélanie donnée en figure 202, dont nous reproduisons un extrait ci-dessous :


Equation 3 : $-1000 + x = 0$ $x = -1000$ Solution 3: ..1000......................

Equation 4 : $\sqrt{2} + x = 3$ $x = \frac{3}{\sqrt{2}}$ Solution 4: 0,70710678

Figure 205 : Exemple de l'absence de rétroaction entre les productions algébriques et les objets algorithmiques

Comme précisé dans l'étape E_2, les résultats obtenus « à la main » (à gauche) et avec le programme (à droite) sont différents. L'élève Mélanie n'a pas effectué de feed-back pour comparer les solutions obtenues, opérant comme si une « frontière étanche » existait entre la solution trouvée en environnement papier-crayon et celle déterminée en environnement informatique. Ce manque de rétroaction peut s'expliquer de plusieurs façons. Nous pouvons

bien entendu considérer que le temps lui a manqué puisque cette tâche se situe en fin de séance. Nous pouvons aussi évoquer le manque de *congruence* entre les deux environnements, qui peut entraîner chez cette élève une non-reconnaissance de la même tâche effectuée dans deux registres différents (cf. deuxième événement). Mais cette attitude dénote peut-être également une surcharge cognitive, due à la recherche de l'algorithme et à l'écriture du programme qui demandent de traiter bon nombre d'informations. Le temps d'*instrumentation* (Rabardel, 1995) n'étant sans doute pas achevé pour cette élève et la tâche de constitution d'un algorithme n'étant pas routinière, Mélanie y consacre une grande part de sa mémoire de travail.
Cette analyse nous conduit à proposer une modification de la situation n°2 :
- par la modification des consignes, avec la demande expresse de comparer les solutions des équations obtenues en environnements papier-crayon et informatique ;
- par l'institutionnalisation du programme réalisé, avec la reprise de sa fonction.
En effet, la situation, telle qu'elle est proposée ne produit pas de feed-back ; c'est l'élève qui, par ses connaissances personnelles, doit avoir l'idée de l'effectuer. La simple consigne « comparer les solutions obtenues à la main et avec le logiciel » aurait probablement permis à Mélanie d'exercer ce feed-back et de faire ainsi le lien entre les objets algorithmiques et les objets algébriques en jeu. D'autre part, une institutionnalisation du programme, réalisée par le professeur, et revenant sur sa fonction de résolution des équations du premier degré, aurait également donné la possibilité à l'élève de mettre au jour le lien entre les deux environnements. Drijvers (2003) souligne d'ailleurs le rôle fondamental du professeur dans la construction des genèses instrumentales :

> The teacher played an important role in the instrumental genesis. […] Whole-class demonstrations and discussions proved to be important for collective instrumentation; this aspect of instrumentation should have received more attention in the teaching experiments. Furthermore, a new didactical contract had to be established concerning the relation between by-hand work and machine work, and between numerical-graphical methods and algebraic methods.[174](p.18)

Cet auteur indique l'importance de l'institutionnalisation pour favoriser l'émergence collective des genèses d'instrumentation et sur le rôle que l'enseignant doit jouer pour activer la compréhension de la relation entre les objets issus des environnements papier-crayon et informatique.

11.2.4 Classe d'Alex : Séance 2.2

Nous analysons dans cette section la séance du second groupe de la classe d'Alex, toujours suivant la méthodologie des quatre composantes et dont la transcription est donnée en annexe A37. En étape E_4, un point de comparaison sera effectué entre les séances 2.1 et 2.2.

[174] L'enseignant joue un rôle important dans la genèse instrumentale. […] Des démonstrations et des discussions en classe entière se sont révélées importantes pour l'instrumentation collective ; cet aspect de l'instrumentation aurait dû recevoir plus d'attention dans les expériences d'enseignement. En outre, un nouveau contrat didactique devrait être établi en ce qui concerne la relation entre le travail à la main et le travail avec la machine, et entre les méthodes numériques, graphiques et méthodes algébriques.

11.2.4.1 Étape E_1

L'étape E_1 détermine le découpage suivant de la séance. Comme pour la séance 2.1, ce découpage est délicat car nous notons des allers-retours entre les phases de recherche et de synthèse, les phases de recherche en binômes et en oral collectif. De plus, nous notons de grandes disparités dans l'avancement du travail des différents binômes. Les changements de phase sont décrétés quand la plupart des élèves sont « installés » dans la recherche de la tâche mentionnée dans le tableau ci-dessous.

Phase	Fonction	Forme du travail	Temps	Lignes de transcription
Phase 1	Accueil et mise en route du logiciel. Tissage avec situation n°1. Présentation de la situation n°2.	Collectif	00 :00 à 04 :30 **Durée : 4min30s**	1 à 4
Phase 2	Objectif de la situation n°2 Passation des consignes avec précisions sur l'objectif.	Collectif	04 :30 à 07 :31 **Durée : 3min01s**	5 à 8
Phase 3	Première phase de recherche, en lien avec les tâches t_1 et t_2	Binômes	07 :31 à 22 :40 **Durée : 15min09s**	9 à 141
Phase 4	- Institutionnalisation relative à la tâche t_1 - Deuxième phase de recherche de t_2 et institutionnalisation	Collectif	22 :40 à 27 :40 **Durée : 5min**	141 à 167
Phase 5	- Troisième phase de recherche : tâches t_3 et t_4 simultanément	Binômes	27 :40 à 38 :56 **Durée : 11min16s**	168 à 187
Phase 6	Quatrième phase de recherche : tâche t_5 (exécution du programme)	Binômes	38 :56 à 51 :30 **Durée : 12min34s**	188 à 228

Tableau 206 : Les différentes phases de la séance 2.2 d'Alex

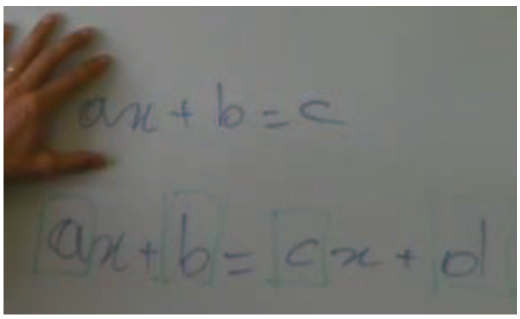
11.2.4.2 Étape E_2

Analysons les organisations mathématiques apparues au cours de la séance 2.2.

Types de tâches observées

De la même manière que pour la séance 2.1, Alex incite les élèves à choisir la forme $ax + b = cx + d$, de préférence à la forme $ax + b = 0$ ou $ax + b = c$ pour la conception de l'algorithme de résolution des équations proposées. Rappelons que ceci n'était pas son choix initial lors de l'élaboration de la trame projetée (cf. §10.5.2). Alors qu'Alex n'avait pas justifié dans la séance 2.1 cette préférence, il est amené à le préciser ici, après qu'une élève[175] a fait le choix de la forme $ax + b = c$ (ligne 142, A37) :

> 142. Al : *(à toute la classe)* […] Bon, pour la plupart des groupes, excepté Marine qui a voulu prendre une autre posture, qui n'est pas fausse non plus … Marine a voulu faire la programmation de ce type d'équations, $ax + b = c$, c'est-à-dire tout transformer en amont pour arriver à ça, donc de la transposition, de la réduction au même dénominateur, pour dire que la forme générique, c'est celle-là *(il montre $ax + b = c$ au tableau)*. Sauf que je lui disais que ça induisait beaucoup d'erreurs potentielles. Donc, il y en a qui



[175] Il s'agit de l'élève Marine, dont la production est donnée en figure 208.

> ont déjà travaillé, Mélanie, Julie, Élise, sur l'écriture la plus difficile de vos 10 équations qui est une écriture de ce type-là (*il montre ax + b = cx + d au tableau*). […]

Alex justifie le choix de la forme $ax + b = cx + d$ par l'intérêt d'obtenir la solution d'une équation de manière automatique avec un algorithme : cette forme étant plus générale que celle $ax + b = c$, elle permet ne pas réaliser de calculs en amont, en environnement papier-crayon. Par exemple, si la forme $ax + b = c$ est retenue pour l'algorithme, pour entrer les coefficients *a, b, c* de l'équation $3x - \frac{1}{4} = \frac{x}{4} - 2$, il est nécessaire de la transformer « à la main » en une équation équivalente, comme $\frac{11}{4}x - \frac{1}{4} = -2$. D'une part, l'intérêt de l'algorithme est amoindri si une partie des calculs doit être effectuée en amont avant de pouvoir l'utiliser et d'autre part, Alex souligne les difficultés calculatoires pouvant intervenir lors de cette réduction.
Les cinq types de tâches décomposés dans la trame d'ingénierie apparaissent détaillés ci-dessous.
Pour la tâche t_1, *reconnaître que les équations données peuvent s'écrire sous la forme générale ax + b = cx + d,* Alex ne donne pas de consigne particulière, mais celle-ci apparaît à l'intérieur des binômes, quelquefois avec l'aide du professeur. La première apparition est en phase 3, ligne 9, à la huitième minute de la séance, comme mentionné ci-dessous :

> 9. Al (*en s'adressant à un binôme*) : Est-ce que ce n'est pas plus intéressant de travailler sur une forme plus complexe ? Parce que … est-ce que si tu sais résoudre ça (*en montrant l'équation 1,* $+3 = 0$), tu sauras résoudre ça (*en montrant l'équation 8,* $3x - \frac{1}{4} = \frac{x}{4} - 2$) ?

Le professeur Alex passe ensuite de binôme en binôme pour aider à l'émergence de la forme générale *ax + b = cx + d.*
La consigne relative à la tâche t_2, *résoudre sous forme littérale l'équation ax + b = cx + d,* est donnée à un premier binôme en phase 3 au bout de douze minutes : « *Est-ce que ça tu sais résoudre ?* » (ligne 62), puis à un second binôme à la 17^{e} minute : « *Alors résous ça maintenant* » (ligne 113) et enfin est reprise pour toute la classe en phase 4 au bout de 22 minutes, sous la forme : « *Alors comment on fait pour résoudre ce type d'équations du premier degré ?* » (ligne 142).
Les consignes de réalisation des tâches de conception de l'algorithme et du programme sous Algobox (tâches t_3 et t_4) apparaissent simultanément au début de la phase 5, au bout de 27 minutes et sont données à la classe :

> 168. Al : […] Alors ici, si je pars de cette équation-là (*il montre ax + b = cx + d au tableau)*, je me dis que c'est la forme générique d'un instrument qui contient pratiquement toutes les équations, comment faire pour avoir un algorithme qui me ponde la solution ? Voilà l'enjeu maintenant de vos 20 dernières minutes. Action ! Programmez-moi un algorithme qui, évidemment me demande les valeurs de *a, b, c, d* et puis … […]

Enfin, la consigne relative à la dernière tâche t_5, *utiliser le programme réalisé pour résoudre les équations proposées*, est donnée par Alex au groupe entier en phase 6, à 42 minutes du début de la séance : « *Allez maintenant, si votre algorithme marche, vous devez me balancer* *les dix équations que vous avez-là et me trouver les dix solutions.* » (ligne 210). Notons que plusieurs binômes se sont déjà engagés dans cette tâche avant l'injonction du professeur.

De la même manière que pour la séance 2.1, le type de tâches *résoudre en environnement papier-crayon tout ou partie des équations* de la feuille d'énoncé, apparaît chez plusieurs élèves. Nous avons relevé que 5 élèves sur les 16 présents ont résolu les premières équations sur la feuille à leur disposition. Cependant, contrairement à la séance 2.1, le professeur ne fait ici aucune remarque à ce sujet.

Techniques et environnement technologico-théorique observés

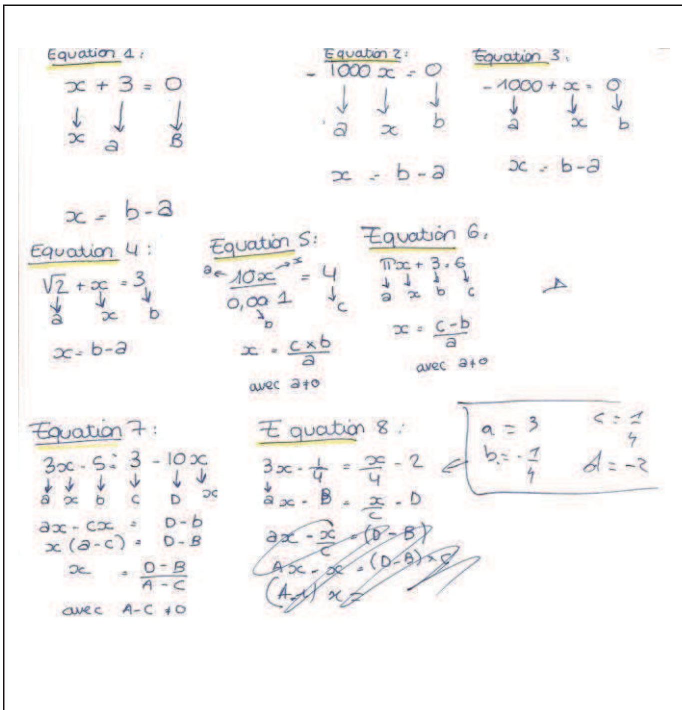
Déterminons les techniques apparues relativement aux types de tâches ci-dessus, ainsi que les éléments technologico-théoriques associés, que nous avons pu relever soit au cours de la séance, soit dans les traces écrites des élèves.

- ***Organisations mathématiques relatives à la tâche t_1 (de type T_1) : Reconnaissance et écriture littérale d'un type d'équations***

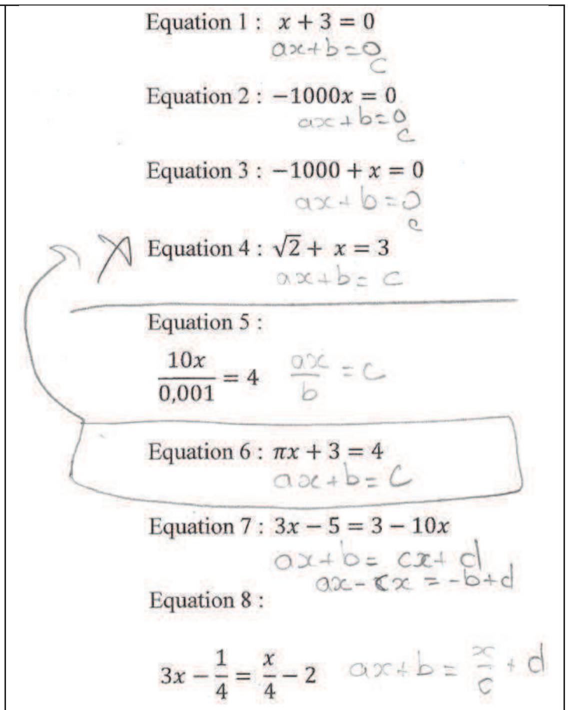
Dès la cinquième minute de la séance, les élèves se lancent dans la recherche de la forme générique des équations données. Cette recherche s'effectue essentiellement en environnement papier-crayon, suite à l'intervention du professeur (ligne 5) :

> 5. Al : […] C'est peut-être pas la peine de sauter, comme un mort de faim, sur Algobox. Je vous signale que tant que vous n'aurez pas réfléchi à ce sur quoi vous devez travailler et programmer, le travail sur Algobox n'a pas de sens. D'accord ?

Suivent quelques extraits de productions d'élèves et leur analyse. Ces productions ont été choisies parce qu'elles permettent de voir à peu près tous les types de réponse. Les productions similaires ne sont pas présentées.



Production de Marion



Production de Mélanie

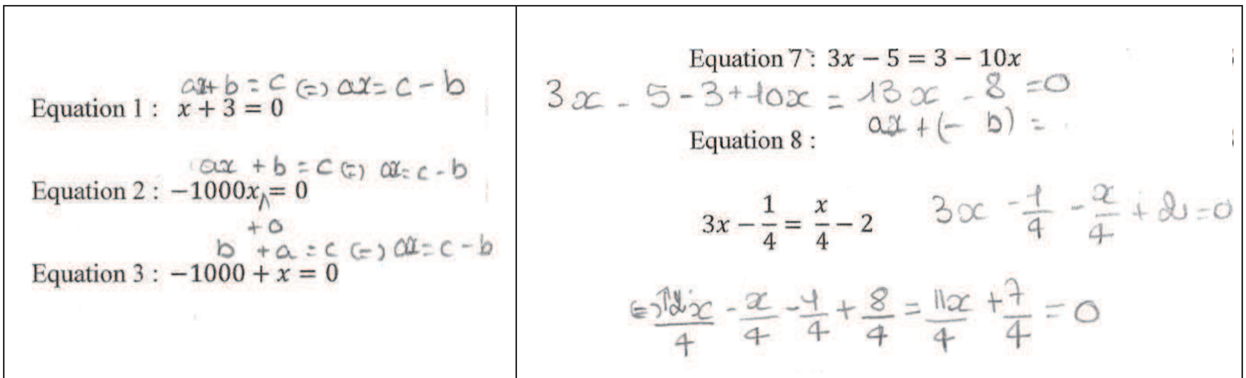
Figure 207 : Extraits des productions de Marion et de Mélanie en recherche de la tâche t_1

La technique τ_1, *repérer les termes comportant la lettre x, substituer des lettres aux nombres déterminés et uniformiser les écritures obtenues* (cf. §9.3.2) n'aboutit pas entièrement pour Marion et Mélanie qui ne parviennent pas à donner une écriture littérale qui englobe tous les cas de figure des équations proposées. Pour les huit équations ci-dessus, Marion définit cinq catégories $x + a = b$, $\frac{ax}{b} = c$, $ax + b = c$, $ax + b = cx + d$ et $ax - b = \frac{x}{c} - d$ qu'elle ne parvient manifestement à uniformiser. Mélanie, quant à elle en détermine quatre : $\frac{ax}{b} = c$, $ax + b = c$, $ax + b = cx + d$ et $ax + b = \frac{x}{c} + d$. Ces deux productions sont présentées parallèlement parce qu'elles montrent que ces élèves ont compris l'enjeu de la situation mais qu'elles restent bloquées par leurs conceptions sur les nombres et par la méconnaissance des propriétés des opérations. En particulier, nous notons pour l'environnement technologico-théorique :

- la confusion entre l'addition et la multiplication. Marion attribue en effet la même forme, $x + a = b$, aux équations 2 et 3 ;
- la difficulté à donner le statut de nombre aux nombres en écriture fractionnaire. Pour les équations 5 et 8, les deux élèves voient les nombres $\frac{10}{0{,}01}$ et $\frac{1}{4}$ comme quotient de deux nombres.

Parmi les différences entre ces deux productions, Marion connaît la technique de résolution d'une équation du premier degré – que cette dernière contienne l'inconnue dans ses deux membres ou non – technique qu'elle est capable de décliner sous forme littérale, sans oublier les conditions sur la nullité des dénominateurs. Mélanie quant à elle, uniformise les trois catégories $x + a = b$, $ax + b = 0$ et $ax + b = c$ (pour les équations 1 à 4 et 6) pour n'en donner qu'une seule, $ax + b = c$. Elle montre ainsi sa capacité à mobiliser des propriétés en acte sur l'élément neutre de la multiplication (utilisation de $1 \times x = x$). Enfin, nous retrouvons dans sa production son cheminement de pensée, où elle a donné les trois premières équations sous la forme $ax + b = 0$, puis la 4e sous la forme $ax + b = c$. Elle a sans doute ensuite effectué une rétroaction pour transformer le second membre « 0 » en « *c* », comme l'indique les traces de sa production[176].

La production de Marine a également retenu notre attention :



Production de Marine

Figure 208 : Extrait de la production de Marine en recherche de la tâche t_1

[176] Nous pouvons voir la lettre « *c* » sous le terme « 0 » pour les trois premières équations de la production de Mélanie (Cf. figure 207).

Marine explique sa procédure au professeur en ces mots :

> 120. Al : Alors, Marine, elle les résout toutes !
> 121. Marine : Non, j'essaie de les transformer pour les mettre sous la même forme.
> 122. Al : Oui, c'est une manière de …
> 123 Marine : Oui, j'essaie de montrer qu'elles s'écrivent toutes : $ax + b = c$. […]

La technique de Marine est conforme à la technique τ_1 et l'élève montre sa capacité, non seulement à substituer les nombres par des lettres, mais aussi à déterminer l'aspect *structural* commun à toutes ces équations. Aux équations 1, 2 et 3, elle attribue la forme $ax + b = c$ et non pas la forme $x + b = c$, montrant ainsi qu'elle a conscience que le coefficient a de x vaut 1 lorsqu'il n'est pas exprimé. De la même manière, elle conçoit que l'équation 2 peut se mettre la forme $ax + b = c$, où le terme b est nul, ce qu'elle signale ci-dessus en indiquant « + 0 » sous l'équation 2. Ceci dénote un savoir en acte sur l'existence des éléments neutres de la multiplication et de l'addition, éléments technologico-théoriques que Marine utilise ici. Enfin, Marine transforme les équations 7 et 8 en équations équivalentes de manière à retrouver la forme $ax + b = c$. Pour l'équation 7, elle mobilise un savoir sur la soustraction et l'ajout de l'opposé d'un nombre lorsqu'elle parvient à transformer l'expression $13x - 8$ en $ax + (-b)$. Pour l'équation 8, elle mobilise ses connaissances sur la réduction au même dénominateur des fractions.

Nous pouvons conclure en donnant le résultat général suivant : si la plupart des élèves de cette classe parviennent à attribuer la forme $ax + b = cx + d$ aux équations 7 à 9, ils ne réussissent pas à l'étendre aux équations 1 à 6. Les élèves éprouvent une réelle difficulté à déterminer une forme générique qui englobe tous les cas de figure, pour les 9 premières équations. Ils restent en effet sensibles aux *ostensifs* de ces équations, en séparant les équations en fonction de la nature des coefficients, selon leur ensemble d'appartenance. C'est ce que montrent, par exemple, les productions de Marion et Mélanie (cf. figure 207) où une nouvelle forme est donnée à l'équation 5 ($\frac{ax}{b} = c$) : ces élèves ne peuvent l'assimiler aux formes précédemment attribuées aux équations 1 à 4 ($x + a = b$ ou $ax + b = c$). Notons ici l'articulation avec la situation n°1 où le même problème a été évoqué, lors de la classification des équations : bon nombre d'élèves avaient alors formé un grand nombre de catégories, déterminées par la nature des coefficients des équations. Un autre passage du verbatim permet de corroborer ce résultat (lignes 19 à 28) :

> 19. Al : Alors, c'est quoi la constante à droite là (*il pointe le doigt sur l'équation 9 :* $\sqrt{2}x - 1 = 4 - \sqrt{3}x$) ?
> 20. E : c'est 4
> 21. Al : Oui et le coefficient en x, c'est quoi ?
> 22. E : racine de 3
> 23. Al : Oui, plutôt, moins racine de 3 … Et là (*en montrant la 1 :* $x + 3 = 0$), à droite, le coefficient en x, c'est quoi ?
> 24. E : Euh …
> 25. Al : A ton avis ?
> 26. E : C'est 1 ?
> 27. Al : Non, à gauche, c'est 1 … mais à droite, c'est zéro ! Regarde là, c'est comme si il y avait $0x + 0$.
> 28. E : Ah mais oui !

Ici encore, l'élève ne perçoit pas que l'équation 1 peut se mettre sous la même forme générale que l'équation 9. Ce qui semble le gêner est le statut des nombres 0 et 1. En effet, « l'absence ostensive » d'un nombre déterminé dans une équation du type $ax + b = cx + d$ peut se traduire par la valeur de ce nombre soit égale à 0, soit égale à 1. Ci-dessus, dans l'équation $x + 3 = 0$, le coefficient a vaut 1 et le coefficient c vaut 0 alors que ni l'un, ni l'autre ne sont « visibles » : les ostensifs sont un obstacle à la compréhension des non-ostensifs. Remarquons que c'est lorsque le professeur donne les éléments technologiques associés à cette technique d'attribution des valeurs aux lettres (« *c'est comme si il y avait 0x + 0* », ligne 27) que l'élève comprend (« *Ah, mais oui !* », ligne 28).

- ***Organisations mathématiques relatives à la tâche t_2 (de type T2) : Résolution littérale d'une équation***

Hormis la production de Marion (cf. figure 207) qui comporte des résolutions littérales, aucun écrit n'aboutit à la résolution de l'équation $ax + b = cx + d$. Les traces écrites montrent que les élèves ont recopié la démonstration donnée par le professeur au tableau durant la phase d'institutionnalisation (cf. ligne 164, annexe A37). Nous proposons un long échange (lignes 62 à 105) sur lequel nous revenons ci-après, et que nous avons choisi de ne pas tronquer pour montrer les difficultés que représente cette résolution littérale pour un élève.

62. Al : Regarde, c'est quoi, l'expression là ? Tu es bien d'accord que c'est du $ax + b = cx + d$. Est-ce que ça tu sais résoudre ?
63. E : Ben, on fait que passer !
64. Al : Fais comme tu dis, fait que passer !
65. E : Avec ça (*en montrant une des équations*) ?
66. Al : Non, non, avec ça ! Ça (*en montrant $ax + b = cx + d$*), c'est la forme générale ! Allez, vas-y, résous-moi ça, trouve-moi x dans ce cas général.
67. E : Ben là, ça fait euh …
68. Al : comment tu fais en 4^e …quand tu as $3x + 5 = 5x + 2$? Comment tu fais en 4^e ? Parce que c'est 4^e, ça ?
69. E : Ben, je fais avec les chiffres, moi !
70. Al : Avec des chiffres ! Attends, mais c'est pas grave … T'es en seconde, là ! C'est quoi la phrase ? Tu mets …
71. E : Ben, je fais comme ça, là (*montrant des allers-retours de part et d'autre du signe d'égalité de l'équation*)
72. Al : Oui, tu transposes cx de l'autre côté …Dans votre langage, vous dites, je passe ça de l'autre côté !
73. E : (*rires*) Et il va devenir négatif … (*L'élève écrit $ax - cx = d - b$ sur sa copie*)
74. Al : Voilà, ça fait … Et après, tu factorises par …
75. E : par x
76. Al : Et ensuite ?
77. E : Mais je peux pas faire, ça ! J'ai pas de chiffres !
78. Al : C'est pas grave ! Tu as $x(a - c) = -b + d$. Donc, ça fait x égal quoi ?
79. E : Ça fait $x = -b + d$ ou $a - c = -b + d$.
80. Al : Ah oui ! Pour qu'un produit de facteurs soit nul …
81. E : Ah oui, c'est pas ça ! Je sais pas !
82. Al : Quand tu as $3x = 2$, x égal quoi ? 2/3 ?
83. E : Ben oui …
84. Al : Donc ici, ça fait quoi ?
85. E : Mais je n'y arrive pas avec les lettres ! J'ai besoin de chiffres, moi.

86. Al : Considère ça comme un coefficient. Si $a - c$ ça te pose problème, mets $k \times x$ ...
87. E : On fait $x(a - c) = ax - cx$.
88. Al : Ben non, t'es pas plus avancé, ça fait ce qu'il y a juste au-dessus !
89. E : Ah oui ! Mais je vois pas ce qu'on peut faire là ! Il y a pas de zéro.
90. Al : Et diviser de chaque côté ? Qu'est-ce qui te chagrine là ?
91. E : Je ne vois pas …
92. **14 : 12** Al : Ce que je veux à la fin, c'est x égal tant !
93. E : Oui, mais j'ai pas de zéro.
94. Al : On s'en moque ! Quand tu as $3x = 2$, tu n'as pas de zéro et pourtant, on dit x égal 2/3 !
95. E : Oui, mais là... on les connaît pas eux.
96. Al : Mais c'est pas grave ! Quel est le problème là-dedans ?
97. E : C'est ça le problème !
98. Al : Tu penses que c'est ça le problème ?
99. E : Ben oui, parce qu'après je saurais résoudre …
100. Al : Ce que tu voudrais avoir ici, c'est quoi ? (*en montrant le second membre de* $x(a - c) = -b + d$)
101. E : Un chiffre !
102. Al : Si j'écris $x \times 3 = 7$, c'est ce que tu as écris, là … À quoi est égal x ?
103. E : À 7 sur 3.
104. Al : Eh bien maintenant oublie les chiffres et dis-moi là à quoi est égal x …
105. E : À $\frac{-b+d}{a-c}$.

Cet échange indique que l'élève connaît et sait mettre en application la technique de résolution d'une équation du premier degré lorsqu'elle est « chiffrée ». Toutefois, à plusieurs reprises l'élève exprime qu'il ne peut pas résoudre une équation sous forme littérale (lignes 77, 85, 95, 101). Les techniques de transposition (ligne 71) et de factorisation (ligne 75) lui permettent d'aboutir à l'équation $x(a - c) = -b + d$ mais il ne peut poursuivre. Une explication peut en être donnée par le manque d'« *acceptance of lack of closure* » (cf. §2.2.3), comme déjà observé dans la classe de Maurice, qui indique que l'élève souhaite obtenir une expression *fermée*, exempte de signe opératoire pour continuer son calcul. C'est par le détour d'un exemple générique qu'Alex parvient à convaincre l'élève qu'il peut travailler sur cette forme. Nous ajoutons une explication supplémentaire à cette difficulté : l'absence de lien avec la technologie sous-jacente. L'élève semble agir par automatisme, sans retour à la justification de la technique, justification que lui souffle pourtant le professeur en ligne 90 : « *Et diviser de chaque côté ?* ».

Alex reprend cette même technique pour l'ensemble de la classe au début de la phase 4 et initie la discussion sur l'existence de cette solution en fonction de la valeur des paramètres (lignes 156 à 167) :

156. Al : […] Vous ne vous posez pas la question des instruments mathématiques sur lesquels vous travaillez ?
157. Marine : Il faut que $a \neq 0$ et $c \neq 0$ …
158. Al : Vous avez entendu ce qu'a dit Marine ? Elle dit : il faut que $a \neq 0$ et $c \neq 0$ …
159. Marine : Non, non, il faut que $a - c \neq 0$.
160. Al : Attends ! Sa première pensée était $a \neq 0$ et $c \neq 0$. Ça suffit à votre avis ou pas ?
161. Es : Non ! c'est $a - c \neq 0$

> 162. Al : il faut évidemment que a – c soit différent de zéro (*il l'écrit au tableau*). Et donc c'est équivalent à quoi ?
> 163. Es : $a \neq$ c
> 164. Al : Et oui, ça veut dire que $a \neq$ c (*il l'écrit au tableau*). Et voilà une première condition qui fait que cette solution-là peut exister.
> 165. Al : Au passage, Élise, quand on a $x + 3 = x + 7$, vous voyez bien qu'on a un problème … Si je vous demande de résoudre $x + 3 = x + 7$ (*équation qu'il écrit au tableau*), si vous transposez de chaque côté, ça fait quoi ? Ça fait : $x - x = 7 - 3$ et ça fait $0 = 4$; il y a un os dans le potage, non ?
> 166. Es : Oui.
> 167. Al : Vous voyez ici, il y a un vrai problème. On a $a = 1$, $c = 1$ (*il montre les coefficients au tableau*) … Vous voyez bien ici qu'il faut vraiment se poser la question de l'existence de l'instrument mathématique sur lequel on travaille. D'accord ?

Cet extrait montre la prise en compte du cas $a = c$ pour la résolution de l'équation $ax + b = cx + d$. Alex l'explicite par un exemple générique en proposant de résoudre l'équation $x + 3 = x + 7$ (ligne 165). Nous notons qu'il effleure les technologies sous-jacentes sans aller au fond des choses. Plutôt que de conclure sur le fait que l'égalité « 0 = 4 » signifie que l'équation $x + 3 = x + 7$ n'a pas de solution, il indique qu'il y a « *un os dans le potage* » ou encore « *un vrai problème* ». Le professeur ne souhaite pas, du moins dans un premier temps, distinguer les cas $b = d$ et $b \neq d$, ce qu'il indique au chercheur en ces termes : *« J'ai laissé tomber b – d égal zéro, mais ça peut être intéressant…* » (ligne 170). Nous pensons que ce choix résulte de la conjonction de plusieurs paramètres comme la difficulté pour les élèves de comprendre ces cas particuliers, celle de faire apparaître une double boucle de structure alternative dans l'algorithme et enfin, une contrainte de *temps des horloges*, où la réalisation du programme risque d'être compromise si ces cas sont évoqués. Nous pouvons donc mentionner ici un choix didactique du professeur, qui est d'ailleurs conforme aux préconisations du programme où la *complexification* progressive d'un algorithme simple est évoquée, faisant *écho à […] de nouveaux questionnements sur la nature de l'objet étudié.* (cf. §9.3)

- ***Organisations mathématiques relatives aux tâches t_3 (de type T_3 : Conception d'un algorithme) et t_4 (de type T_4 : écriture d'un programme)***

L'OM du professeur Alex présente les deux tâches t_3 et t_4 simultanément, aussi ferons-nous de même puisqu'il est alors difficile de différencier ce qui relève de l'algorithmique de ce qui relève de la programmation. La technique τ_3 associée à t_3, basée sur la décomposition en *actions élémentaires* de la résolution littérale de l'équation $ax + b = cx + d,$ nécessite une *première transposition* de la résolution mathématique de l'équation (cf. §4.4). Le passage de t_3 à t_4 nécessite une *seconde transposition*, qui tient de la *conversion*, au sens de Duval entre le registre de l'algorithmique et celui de la programmation. La sélection des éléments nécessaires et suffisants à la constitution de la structure de l'algorithme se révèle être, comme pour la séance 2.1, une tâche délicate pour les élèves. Nous relevons des difficultés :
- sur la détermination de l'entrée de l'algorithme. En ligne 174, une élève déclare *ax, b, cx* et *d* comme paramètres d'entrée ;
- sur la structure alternative. En ligne 175, un binôme interroge l'enseignant pour demander si la condition du test s'écrit $ax + b = cx + d$. D'autres élèves s'interrogent sur la structure d'un tel test (« *on cherche … à dire que c'est si a $\neq$c. On sait pas comment faire…* », ligne 178) ;

- sur le traitement à effectuer. En ligne 182, l'enseignant précise à un binôme la solution à calculer (« *Si a* $\neq$ *c, ça veut dire que cette formule existe, alors programme-là !* ») ;
- sur l'affectation des variables (lignes 185 et 193) ;
- sur la sortie de l'algorithme (« *Je vous rappelle que l'algorithme, il ne peut pas afficher quelque chose que vous ne lui avez pas demandé de calculer avant !* », ligne 193).

Les tâches ayant été simultanées, les écueils relevés peuvent être attribués au manque de compréhension de la structure d'un algorithme conceptuel, ou encore au langage et aux contraintes de programmation du logiciel. Par exemple, en ligne 175, l'intervention de l'élève peut s'expliquer comme une difficulté, soit à déterminer la structure alternative mentionnée, soit à comprendre ce qu'est une *condition* dans un programme informatique et la forme que celle-ci peut prendre pour être comprise par la machine. De la même manière, en ligne 193, les paroles du professeur peuvent s'adresser aussi bien à l'élève qui a omis le calcul de la solution de l'équation dans le traitement de l'algorithme ou à celui qui ne possède pas la compréhension des *actions élémentaires* dans un programme (différentiation entre affectation d'une valeur à une variable et affichage de cette valeur). Concernant l'environnement technologico-théorique relatif à l'algorithmique, nous avons déjà vu (cf. séance 2.1) que celui-ci repose sur *la logique mathématique, les règles de raisonnement et les propriétés des objets en jeu* (Modeste, 2012, p.63) et nous constatons que ces éléments n'apparaissent ici que de manière implicite.

Un autre exemple des difficultés rencontrées est donné par la production de l'élève Marine :

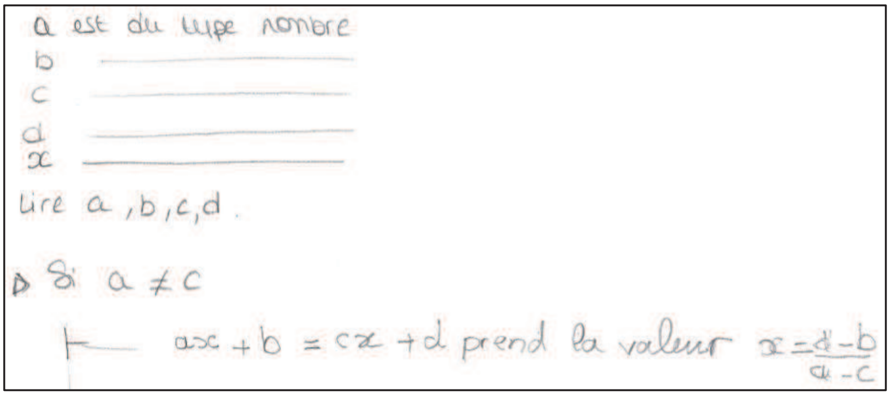


Figure 209 : Production de Marine indiquant les difficultés à comprendre la structure du programme à réaliser

L'instruction *d'affectation* d'une valeur à une variable est mal comprise et il semble ici qu'il s'agisse d'un problème de syntaxe lié au langage de programmation où l'expression « prend la valeur » est perçue par l'élève « peut s'écrire » ou « est équivalente à ». Le temps de l'*instrumentation* n'est pas encore achevé pour cette élève.

En ce qui concerne les éléments technologico-théoriques relatifs à cette tâche de programmation, Alex évoque en actes le concept d'*action élémentaire* pour une machine à deux reprises :
- en ligne 193, « *tous ceux qui ont mis « Afficher x = (d - b)/(a - c) », vous n'aurez rien ! Parce qu'avant, vous devez dire « affecter x à la variable un tel* » ;
- en ligne 224, « *tu risques pas d'avoir grand-chose, parce que ta variable n'est pas affichée. D'accord ? tu sais, Algobox, c'est aussi stupide que … trois petits points.* »

Par ces deux interventions, le professeur insiste sur les actions que comprend la machine. Il fait également appel à la mémoire des élèves pour les notions d'affectation (« *Rappelez-vous* », ligne 184) ou de structure alternative (« *on n'a pas fait les propriétés conditionnelles ?* », ligne 178), sans reprise toutefois de ces concepts. Alex a effectivement traité ces concepts depuis deux ou trois mois comme l'atteste sa progression (cf. § 10.2) et Matheron (2000, p.22) souligne que les professeurs considèrent légitime de solliciter la mémoire des élèves lorsqu'elle *se rapporte à un enseignement récent, mais pas trop, car il faut avoir laissé aux élèves le temps d'acquérir les techniques relatives au nouveau savoir enseigné*. Alex considère qu'il est licite de solliciter ici la *mémoire didactique* de la classe sur ces concepts déjà étudiés.

Comme pour la séance 2.1, nous notons un *glissement* (Modeste, 2012, p.64) de l'algorithme qui est présenté au début de la séance comme un *outil* pour résoudre des équations du premier degré et qui devient à ce moment de la séance (phase 5) un *objet* sur lequel on travaille. Citons Modeste (ibid.) :

> D'autre part, il faut noter que lorsque nous parlons de mouvement ou de glissement de l'outil vers l'objet, il ne s'agit pas de dire que l'activité algorithmique est linéaire ou à sens unique. Il y a clairement des allers-retours permanents, comme dans l'activité mathématique, entre outil et objet. Simplement, il nous semble que le mouvement global est un mouvement de l'outil vers l'objet, au sens où tout outil soulève des questions qui portent sur lui-même et font de lui un objet d'étude. (p.64)

En effet, au cours de la phase 5, des questions surgissent sur la *correction* et la *terminaison* de l'algorithme (cf. §9.3), comme dans l'extrait ci-dessous où Alex indique que l'algorithme produit une réponse valide en considérant un test alternatif sur l'égalité des coefficients *a* et *c* (*correction*) et il mentionne que celui-ci donne une réponse après un nombre fini d'étapes (*terminaison*).

> 176. Al : Tout à l'heure, vous m'avez dit vous-même que la condition la plus importante, c'était celle-là (*il montre* $a \neq$ c *sur le tableau*), c'est celle-là qui va prévaloir, donc mon algorithme, il va commencer par ça ! Et si j'ai a = c, c'est même pas la peine que j'aille plus loin, Clémentine ! Si a = c, c'est fini, moi je sais que cette équation-là, elle a pas de solution. Donc, si $a \neq$ c, il y a un protocole, sinon, l'algorithme il est fini …

C'est bien l'algorithme en tant qu'*objet* qui est considéré ici par Alex.

La tâche t_4 s'achève par la vérification du professeur des programmes réalisés, binôme par binôme. Suit un exemple de programme où subsiste une erreur, malgré les vérifications effectuées.

```
1  VARIABLES
2  a EST_DU_TYPE NOMBRE
3  b EST_DU_TYPE NOMBRE
4  c EST_DU_TYPE NOMBRE
5  d EST_DU_TYPE NOMBRE
6  x EST_DU_TYPE NOMBRE
7  DEBUT_ALGORITHME
8  LIRE a
9  LIRE b
10  LIRE c
11  LIRE d
12  SI (a!=c ET a-c!=0) ALORS
13    DEBUT_SI
14  x PREND_LA_VALEUR (d-b)/(a-c)
15    FIN_SI
16  SINON
17     DEBUT_SINON
18  AFFICHER "Impossible"
19     FIN_SINON
20  AFFICHER x
21  FIN_ALGORITHME
```

Figure 210 : Programme du binôme Rebecca et Camille de la séance 2.2 d'Alex (relevé sur clef USB)

L'erreur commise est l'emplacement de l'instruction « Afficher x » qui devrait se trouver entre les lignes 14 et 15. En effet, située à la fin, cette instruction produira une erreur dans le cas où $a = c$. Une difficulté sur les règles de logique est notable ici. De plus, en ligne 12, d'autres binômes ont simplement inscrit la condition « si $a \neq c$ alors…», le binôme Rebecca-Camille est le seul à avoir inscrit cette double condition qui, si elle n'est pas fausse, est inutile. Nous y voyons une difficulté portant sur la compréhension des règles de négation de la logique et de comparaison des nombres : les élèves n'ont manifestement pas perçu ici l'équivalence entre « la différence entre a et c est non nulle » et « les nombres a et c sont différents ». Cette remarque entérine le fait que des règles de logique font partie du bloc *logos* pour l'environnement algorithmique.

- ***Organisations mathématiques relatives à la tâche t_5 (de type T_5) : Utilisation d'un programme***

De la même manière qu'à la séance 2.1, l'enseignant a rectifié au besoin le programme informatique de chaque binôme et pour effectuer cette dernière tâche, les programmes sont tous corrects. Les résultats relevés pour les 10 équations sont les suivants :

Équation	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**
Réponse attendue[177]	-3	0	1000	1,586*	0,0004	0,318*	0,615*	-0,636*	1,589*	-0,182*
Nb élèves (réponses justes)	9	9	9	5	3	4	9	3	3	3
Réponse erronée 1								-0,58	-15,7	
Nb élèves (réponse 1)								2	2	
Nb élèves (absence réponse)	7	7	7	11	13	12	7	11	11	13

Tableau 211 : Réponses fournies par les élèves à la tâche T_5, séance 2.2 d'Alex

[177] Les réponses étoilées sont des valeurs approchées, données par le logiciel qui les propose avec 8 chiffres significatifs. Nous les avons arrondies ici au millième, par commodité de lecture.

Notons que pour les 16 élèves présents, l'absence de réponses est beaucoup plus élevée que pour la première demi-classe (cf. séance 2.1). Ceci s'explique par le fait que les élèves ont ici rempli spontanément une feuille par binôme plutôt qu'une feuille par personne[178]. Le peu de réponses obtenues pour les dernières équations (8 à 10) témoigne d'une fin de séance précipitée et relève d'un travail inachevé plutôt que d'une incompréhension de la tâche à effectuer. En revanche, les nombreuses absences de réponse pour les équations 4, 5 et 6 peuvent être développées. Pour les équations 4 ($\sqrt{2}+\ x=3$) et 6 ($\pi x+3=4$), la syntaxe du langage Algobox a sans doute été un frein à l'écriture des coefficients $\sqrt{2}$ et π. Nous notons d'ailleurs qu'Alex donne la syntaxe de π avec une erreur (MathPI, ligne 214, alors que la syntaxe correcte est Math.PI). Des élèves (lignes 215 et 216) décident alors de passer à l'équation suivante. Les non-réponses pour l'équation 5 ($\frac{10x}{0{,}001}=4$) sont certainement d'une autre nature, comme vu en séance 2.1, où nous avons souligné la difficulté des élèves à reconnaître dans ce cas la forme générique $ax + b = cx + d$. L'environnement technologico-théorique manquant est ici basé sur des connaissances sur les fractions et sur leurs propriétés, en particulier les élèves n'attribuent pas le statut de nombre à une écriture fractionnaire.
Le cas particulier de l'équation 10, $7(x+2)+4(x-3)=0$, qui n'est pas proposée sous la forme $ax + b = cx + d$, nécessite une suite de transformations pour pouvoir entrer les coefficients *a, b, c, d* dans le programme, ce qui fait dire au professeur (ligne 210) :

> 211. Al (*à toute la classe*) : Attention, la dixième équation, elle n'est pas sous cette forme ! Il y aura *un* calcul pour la faire devenir sous cette forme-là. Et c'est ces coefficients que vous rentrerez là.

Observons alors la compréhension de deux élèves, suite à cette consigne :

Production de Rebecca	Equation 10 : $7(x+2)+4(x-3)=0$ Solution 10: .... $(ax+c)$ $(xb-d)$
Production de Marine	Equation 10 : $7(x+2)+4(x-3)=0$ Solution 10: -0,18 18 18 18 $7x+14+4x-12=0$ $11x+2=0$

Figure 212 : Production de deux élèves d'Alex pour l'équation 10 (séance 2.2)

Rebecca recherche l'équation 10 sous la forme générique « ($ax + c$) … ($xb - d$) » et ne parvenant pas à identifier les coefficients pour retrouver la forme $ax + b = cx + d$, elle abandonne. En revanche, Marine développe et réduit, sans erreur, l'équation 10. Elle substitue sans doute ensuite le quadruplet des coefficients (*a, b, c, d*) à (11, 2, 0, 0) puisque la solution indiquée sur la copie est exacte (cf. figure 212 où la *solution 10* en valeur approchée est obtenue avec le programme).

[178] Parmi les non-réponses, nous n'avons pu identifier la part des élèves ayant répondu sur la feuille du binôme (une feuille pour deux) et la part de ceux qui ne savaient vraiment pas répondre.

Nous déduisons, de ces deux productions extrêmes, comment peut se passer la rétroaction entre les objets de l'algorithmique/programmation et les objets de l'algèbre. Pour Marine, les allers-retours entre l'environnement papier-crayon et l'environnement informatique se produisent, montrant ici une *transparence* entre les deux environnements. Pour cette élève, le *détour* par l'algorithmique lui permet d'unifier sa vision des équations du premier degré et de considérer qu'elles font partie de la même *catégorie*, dans le sens où elles se résolvent toutes selon le même algorithme. Ces éléments corroborent l'hypothèse H3. Cependant, ce travail n'est pas suffisant pour une élève comme Rebecca, qui ne parvient pas encore à accéder aux *non-ostensifs* du concept étudié.

11.2.4.3 Étape E_3

Dans cette étape, nous exposons l'organisation didactique en analysant les évolutions du milieu, du contrat, du temps didactique, des topos élève et professeur durant la séance, en fonction des phases déterminées en étape E_1.

Phase 1 : Accueil et mise en route du logiciel. Présentation de la situation n°2.

Comme pour la séance 2.1, Alex tente de placer rapidement les élèves par binôme sur un poste informatique et les aide à installer le logiciel Algobox. Cette installation et le démarrage du logiciel nécessite cependant plus de quatre minutes. Alex présente l'objectif de la séance en ces termes : « *Je vous distribue une liste de 10 équations du premier degré et vous devez trouver* ***un*** *algorithme qui vous résolve* ***toutes*** *ces équations*.» (cf. ligne 1, A37). L'intonation d'Alex est insistante sur les mots « un » et « toutes », dans le but de signifier aux élèves le travail attendu. Le professeur situe ainsi le milieu, ajoutant au milieu matériel composé de l'ordinateur équipé du logiciel Algobox et de la feuille comportant les équations, le milieu algébrique des équations du premier degré à résoudre. Durant cette phase, le topos du professeur comporte une aide manipulatoire aux élèves pour installer le logiciel et celui de l'élève comporte la compréhension de ces explications.

Phase 2 : Objectif de la situation n°2 et précisions sur cet objectif

Le contrat de la séance est précisé par l'enseignant, durant cette phase de trois minutes (ligne 5) :

> 5. Al : Allez, vous commencez à réfléchir là. C'est peut-être pas la peine de sauter, comme un mort de faim, sur Algobox. Je vous signale que tant que vous n'aurez pas réfléchi à ce sur quoi vous devez travailler et programmer, le travail sur Algobox n'a pas de sens. D'accord ? Réfléchissez d'abord à comment … Je vous rappelle l'enjeu de cette séance, c'est qu'à la fin, votre algorithme soit capable de résoudre toutes les équations, les dix équations que vous avez sous le nez. D'accord ?

Alex précise par ces termes la nécessité de concevoir un algorithme avant de passer à la phase de programmation. Ses intentions sont de réaliser la dévolution du problème aux élèves en donnant ce qui est de leur responsabilité, par des termes comme « *ce sur quoi vous devez travailler* », « *réfléchissez* », « *votre algorithme* ». Une élève, Clémentine, lui permet de préciser la tâche lorsque celle-ci demande s'il est possible de « faire plusieurs algorithmes » (ligne 6). Comme pour la séance 2.1, il est question d'expliquer aux élèves que l'algorithme à effectuer doit être *non-instancié*, c'est-à-dire exprimer une *méthode générique de résolution* *de problème* (Modeste, 2012). Alex oriente les élèves vers la réflexion de la forme des équations proposées (ligne 7) et enrichit ainsi le milieu :

> 7. Al : Alors, moi je veux un algorithme (*il montre « un » avec son pouce*). La question de Clémentine, elle est porteuse de sens, en ce sens que ... est-ce que l'équation comme le type **1** ($x + 3 = 0$) ou le type **10** ($7(x+2)+4(x-3)=0$)… Il y a quand même de sacrées différences, d'accord ?

Le topos du professeur est très important, celui-ci tente de gagner du temps, sur le *temps des horloges*, en guidant la réflexion des élèves. En particulier, il les incite à observer une équation moins particulière que la première en ces termes (ligne 7) :

> La question que j'induis est alors : est-ce que ça vaut le coup de travailler sur l'expression 1, qui est vraiment l'expression de base, ou vous creusez le ciboulot sur des expressions plus compliquées ?

Phase 3 : Première phase de recherche (en lien avec les tâches t_1 et t_2)

Cette phase débute à la 8^e^ minute du début de la séance et dure quinze minutes. Comme lors de la séance 2.1, les élèves s'engagent dans la tâche soit en environnement papier-crayon (lignes 9 à 49), soit en environnement informatique, avec le logiciel Algobox (lignes 52 à 54). Au début de la séance, le professeur Alex préconise de ne pas utiliser directement Algobox, « *C'est peut-être pas la peine de sauter, comme un mort de faim, sur Algobox*. » (ligne 5) et il réitère ici sa demande, « *Clémentine, faut qu'elle tripote la souris ! Non, non, prends un crayon…*» (ligne 51).

Durant cette phase et afin que les élèves déterminent les équations sous la forme générique $ax + b = cx + d$, Alex réalise un fort *étayage* (Bucheton, 2004) dans chaque binôme où il passe. Il semble préférer ici un étayage individuel à un étayage collectif, en aidant chacun à approfondir sa propre réflexion. Il gère le temps de la façon suivante :

- un premier échange a lieu avec un binôme d'une durée de près de trois minutes (lignes 9 à 49) ;
- six minutes avec un deuxième binôme (lignes 52 à 112) ;
- moins d'une minute avec un troisième groupe (lignes 113 à 118) ;
- enfin près de cinq minutes dans un quatrième binôme où se trouve l'élève Marine (lignes 120 à 141).

Alex tente d'apporter à chaque binôme les éléments dont il a besoin. Pour le premier binôme, le débat porte sur la détermination générique du membre de droite de l'équation, sachant que le membre de gauche est de la forme $ax + b$. Pour le second binôme qui a trouvé la forme générique, il s'agit davantage de guider les élèves sur la résolution de l'équation littérale $ax + b = cx + d$. Pour le troisième binôme, Alex indique simplement l'étape suivante à accomplir (« *Maintenant résous ça dans le cas général*. », ligne 115). Enfin pour le quatrième binôme, son interaction avec l'élève Marine porte sur le choix de la forme générique la plus judicieuse pour réaliser un algorithme : la discussion porte sur les formes $ax + b = c$ et $ax + b = cx + d$ (cf. étape E_2).

Notons que durant cette phase, Alex ne s'adresse qu'une seule fois à l'ensemble de la classe, à la 10^e^ minute, en ces termes (ligne 119) :

> 119. Al (*à toute la classe*) : Et, je vous signale au passage qu'à la fin, votre algorithme doit pondre la chose suivante : « x = tant ». Pour vos 10 équations, la fin de votre algorithme doit être : « si mon

> équation admet des solutions, ça doit être ça »… Donc, quand j'en vois qui commence à dire : « Lire x », ça n'a pas de sens ! « Lire x », ça voudrait dire qu'il faudrait qu'on donne une valeur à x, ce qui n'est pas vrai, puisque c'est justement ce qu'on demande à l'algorithme de faire. D'accord ?

Son intervention a un double objectif, d'une part, de repréciser le contrat – concevoir un algorithme qui donne les solutions des équations – et d'autre part de préciser la signification des instructions de « lecture » d'un programme. Notons que la liaison, faite ici par le professeur entre l'inconnue mathématique x et la variable informatique associée, montre bien que le fait de s'interroger sur les instructions à donner à x permet de se questionner sur l'objet « inconnue ». Le transfert algèbre/algorithmique s'opère et le détour par l'algorithmique permet d'interroger les connaissances en algèbre. Ces remarques confortent encore ici l'hypothèse H3.

De plus, dans cette intervention, le professeur ne décompose pas la tâche *globale* en une succession de sous-tâches (tâche t_1, puis t_2, puis t_3, etc.). Il laisse aux élèves ce travail de décomposition ainsi comme le montrent ses différentes interventions. Les conséquences sont que le temps didactique n'avance pas de façon uniforme pour l'ensemble des élèves et que le milieu de chacun contient des éléments différents, dans cette phase du moins. Outre les interactions des binômes avec l'enseignant et des interactions des élèves entre eux, le milieu voit s'ajouter les notions de forme d'équation, de coefficients et paramètres des équations et de résolution d'équation. Le topos des élèves se compose de la recherche de la forme générique des équations données (et pour certains de la résolution littérale de cette équation) et celui de l'enseignant du contrôle et de la validation des réponses.

Phase 4 : Institutionnalisation de la forme générique des équations données (tâche t_1). Deuxième phase de recherche de t_2 et institutionnalisation.

Avec le même timing que pour la séance 2.1, le professeur Alex propose, après 23 minutes, l'institutionnalisation relative à la tâche t_1. Comme déjà dit dans l'étape E_2, l'enseignant propose la forme $ax + b = cx + d$ plutôt que la forme $ax + b = c$, pour réaliser l'algorithme, reprenant pour la classe les arguments du dialogue avec l'élève Marine. Alex fait ainsi avancer le temps didactique en ajoutant au milieu la forme générique des équations à résoudre. Voyant sans doute le *temps des horloges* défiler, Alex enchaîne rapidement sur la question de la résolution d'une telle équation : « *Alors comment on fait pour résoudre ce type d'équations du premier degré ?* » (ligne 142). Il précise ici le contrat didactique, en y incluant une sous-tâche, la tâche nommée par nous t_2. Alex prend nettement la main ici, il procède par oral collectif, glanant les réponses des élèves à la volée. Son topos est prédominant et les réponses des élèves sont suggérées par un *effet Topaze*, selon Brousseau, comme le montre cet échange :

> 158. Marine : Il faut que $a \neq 0$ et $c \neq 0$ …
> 159. Al : Vous avez entendu ce qu'a dit Marine ? Elle dit : il faut que $a \neq 0$ et $c \neq 0$ …
> 160. Marine : Non, non, il faut que $a - c \neq 0$.
> 161. Al : Attends ! Sa première pensée était $a \neq 0$ et $c \neq 0$. Ça suffit à votre avis ou pas ?
> 162. Es : Non ! c'est $a - c \neq 0$
> 163. Al : il faut évidemment que $a - c$ soit différent de zéro (*il l'écrit au tableau*).

Le savoir sous-jacent disparaît, Alex ne fait pas référence aux éléments du bloc-technologico-théorique qui aurait pu justifier pourquoi le terme a – c doit être non nul. La tâche des élèves est ici transformée par Alex qui négocie l'adhésion des élèves. Cette posture peut se justifier par la volonté d'Alex de laisser une part de la séance à la constitution de l'algorithme et du programme. La phase 4 s'achève avec l'institutionnalisation suivante : « *si a* $\neq$ *c, voilà une première condition qui fait que cette solution-là* ($x = \frac{d-b}{a-c}$) *peut exister* » (ligne 164). Une nouvelle avancée du temps didactique a été effectuée ici, avec ce dernier résultat.

Phase 5 : Troisième phase de recherche (tâches t_3 et t_4 simultanément avec consigne spécifique)

À la 28[e] minute de la séance, le professeur Alex engage les élèves simultanément dans les tâches de conception de l'algorithme et de la programmation (cf. étape E_2) en ces termes : « *si je pars de cette équation-là (il montre ax + b = cx + d au tableau), [...], comment faire pour avoir un algorithme qui me ponde la solution ?* » (ligne 168). Alex annonce également le nouveau contrat didactique pour cette nouvelle phase : « *Voilà l'enjeu maintenant de vos 20 dernières minutes. Action !* », indiquant ainsi aux élèves qu'il leur passe la main et qu'il attend qu'ils exécutent la tâche demandée, comme le réalisateur d'un film demande aux acteurs de jouer. Contrairement à la phase 4, le topos des élèves peut alors de nouveau s'exprimer pleinement, le professeur reprenant ses gestes d'*étayage* auprès de chaque binôme. Alex circule de binôme en binôme pour contrôler l'écriture du programme sous Algobox. Il intervient successivement dans cinq binômes, soit pour préciser une difficulté dans la structure de programme comme la lecture des variables (ligne 174), ou l'écriture de la condition du test (ligne 176) ou encore l'affectation d'une valeur à une variable (ligne 185), soit pour une difficulté syntaxique (signe « différent », ligne 173). Comme déjà évoqué dans l'étape E_2, afin d'ajouter au milieu les notions citées ci-dessus d'algorithmique et de programmation, Alex fait appel à la *mémoire didactique* de la classe (Matheron, 2000) en évoquant des tâches déjà effectuées dans l'année en cours : « *Mais Mélanie, on n'a pas fait les propriétés conditionnelles ?* » (ligne 179) et « *Vous ne vous rappelez pas, quand on a fait « f(x) = tant », qu'on faisait « affecter un truc » ?* » (ligne 182). Notons qu'Alex ne réalise pas de phase d'institutionnalisation de l'algorithme, comme il a pu le faire lors de la séance 2.1 mais il vérifie un par un les programmes réalisés par les élèves (cf. étape E_2).

Phase 6 : Recherche de la solution des équations à l'aide du programme (tâche t_5)

De la même manière que pour la séance 2.1, l'avancée dans la tâche globale est à ce stade différente selon les binômes : certains binômes, comme celui de Mélanie teste le programme en complète autonomie (lignes 194 à 208), alors que d'autres en sont encore à la constitution du programme (ligne 193). Le topos du professeur est réduit, Alex n'intervient pas pour cette dernière tâche, se contentant d'apporter son aide aux élèves en retard sur le temps de la séance (Élise, ligne 224). Au contraire, le topos des élèves occupe une grande place, ceux-ci ayant la charge de faire « tourner » le programme obtenu pour les dix équations données. Notons que cette dernière tâche n'a rien d'un travail « presse-bouton » et qu'elle nécessite une réelle réflexion de l'élève sur les objets algébriques en relation. Le dialogue qui suit entre deux élèves d'un même binôme (lignes 188 à 208) montre cette réflexion :

188. (*Le binôme de Mélanie fait tourner le programme avec l'équation 7,* $3x - 5 = 3 - 10x$). E_1 *(en dictant à son binôme les valeurs à entrer dans le programme)* : Vas-y, $a = 3$, $b = -5$, $c = -10$, $d = 3$.
189. E_2 : 0,61 … Mais je sais pas si c'est le bon résultat.
190. E_1 : Faudrait qu'on vérifie… On essaie avec une autre, la première *(x + 3 = 0).* Alors, *a* c'est 1, *b* c'est 3, *c* c'est 0 et *d* c'est quoi ? Il n'y en a pas, on met quoi ?
191. E_2 : ben zéro
192. E_1 : Ah oui, c'est bon ! C'est -3.
193. […]
194. E_1 (*pour l'équation 2, -1000x = 0*) : Alors $a = -1000$, $b = 0$, $c = 0$, $d = 0$.
195. E_2 : Ça fait zéro, c'est faux, ça, c'est pas zéro !
196. E_1 : Ben si ! tu divises 0 par -1000 et ça fait zéro.
197. E_2 : Ah oui, je croyais que c'était un plus…
198. E_1 : *(pour l'équation 3, -1000 + x = 0)* $a = 1$, $b = -1000$, $c = 0$, $d = 0$.
199. E_2 : Ça fait mille, c'est bon.
200. E_1 : *(pour l'équation 4,* $\sqrt{2} + x = 3$) $a = 1$, $b = \sqrt{2}$ …
201. E_2 : c'est sqr(2).
202. E_1 : Oui, et $c = 3$ et $d = 0$.
203. E_2 : Non, regarde … On s'est trompées, c'est $c = 0$ et $d = 3$.
204. E_1 : Et pourquoi ?
205. E_2 : Regarde, là, il n'y a pas de *x* … et *c*, c'est celui qui est avec *x*.
206. E_1 : Ah oui, d'accord.
207. E_2 : Donc ça fait 1,5857 … On marque 1,59 ?
208. E_1 : Ouais !

Les deux élèves testent leur programme, l'une dictant à l'autre les valeurs à entrer au clavier[179]. Dans cette phase, grâce à leurs connaissances anciennes mises en jeu sur la résolution d'équation, une rétroaction se produit entre le résultat fourni par le logiciel et la solution de l'équation obtenue « à la main ». Nous pouvons comprendre ceci par l'emploi des expressions « *c'est bon* » et par la vérification de la ligne 196, « *tu divises 0 par -1000 et ça fait zéro.* ». De plus, l'identification des valeurs informatiques *a, b, c, d* aux coefficients des équations se fait en gardant le contrôle algébrique : les élèves sont capables de s'autocorriger en ligne 205 pour déterminer le coefficient en *x*. La *transparence* semble, à ce stade, totale entre l'environnement algorithmique et l'environnement numérico-algébrique. Si le milieu contenait déjà les concepts d'équation, de paramètre, d'inconnue et de solution, ceux-ci se trouvent ici *repris*, au sens de Larguier (2009) et approfondis.
Ici encore, le détour par l'algorithmique permet de s'interroger sur ces concepts, les considérant en tant qu'objets sur lesquels l'algorithmique opère. Cette reprise allie *l'ancien et le nouveau* (Larguer, 2009), c'est-à-dire que les connaissances anciennes sur les équations du premier degré vues au collège sont réactivées, puis en les plongeant de façon nouvelle comme *objets* dans un environnement algorithmique, ces connaissances sont *homogénéisées*. Ces réflexions sont en lien avec l'hypothèse H3, où nous postulons que l'utilisation de l'algorithmique, comme outil pour enseigner des concepts algébriques, peut faciliter l'apprentissage de ces concepts.

[179] Se reporter à l'annexe A9 pour le fonctionnement du logiciel.

Comme pour la séance 2.1, la séance se termine par la donnée d'un travail à réaliser à la maison (cf. énoncé en annexe A22) concernant la détermination de la fonction d'un algorithme, déjà écrit sur papier et que nous analysons plus loin.

Synthèse de l'étape E_3

Phases	Début numéro ligne	Début instant	Fonction	Évolution du milieu	Temps didactique / Topos du prof	Topos de l'élève
1	1	00 : 00	- Accueil et mise en route du logiciel. - Présentation de la situation n°2.	- Notion d'algorithme et de résolution d'équations - Feuille d'énoncé avec équations - Logiciel Algobox	- Donner l'enjeu de la situation - Aider à l'installation du logiciel	- Installer le logiciel Algobox.
2	5	04 : 30	- Objectif de la situation n°2 - Phase de dévolution de la tâche globale	- Notion d'équations du premier degré - Définition d'un algorithme non instancié	- Préciser l'algorithme attendu - Lancer les élèves sur la tâche globale	Écouter et comprendre les explications du professeur
3	9	07 : 31	Phase de recherche en binôme d'une forme générique des équations données et de leur résolution (tâches t_1 et t_2)	- Interactions binôme/prof - Techniques/ Technologies amenées par le prof et les élèves sur la structure et la résolution des équations du 1er degré	- Valider ou invalider les formes d'équations proposées par les élèves. - Valider ou invalider la solution de l'équation	- Déterminer une forme générique des équations du 1er degré - Résoudre l'équation proposée
4	142	22 : 40	- Institutionnalisation de la forme générique - Recherche de la résolution de l'équation générique et institutionnalisation (tâche t_2)	- Forme $ax + b = cx + d$ - Technique/ Technologie de résolution d'une équation du 1er degré	- Donner et expliquer la forme générique - Amener les élèves à comprendre la résolution et la discussion selon les paramètres	- Écouter et comprendre les explications du professeur (forme générique, discussion sur les paramètres) - Résoudre l'équation générique
5	167	27 : 40	Phase de recherche de l'algorithme et du programme (tâches t_3 et t_4)	- Le logiciel entre pleinement dans le milieu - Notions d'algorithmique et de programmation - Algorithme/ programme de résolution des équations du 1er degré	- Valider ou invalider les algorithmes/ programmes proposées par les élèves	- Déterminer l'algorithme de résolution des équations de la forme générique - Programmer l'algorithme sous Algobox

6	210	41 : 30	Phase de recherche des solutions des équations proposées à l'aide du programme réalisé	- Variables informatiques/ mathématiques - Inconnue/ solution/ paramètre	Aider les élèves en retard	Obtenir les solutions des différentes équations à l'aide du programme réalisé

Tableau 213 : Récapitulatif du milieu, du temps didactique et des topos (séance 2-2 d'Alex)

11.2.4.4 Étape E_4

Les événements à relever étant en grande partie semblables à ceux de la séance 2.1, nous n'évoquons ici qu'un seul *événement didactique* (Bronner, 2006, 2009), que nous nommons *les changements d'organisations du professeur Alex*. Ce nouvel événement est basé sur la comparaison des deux séances 2.1 et 2.2 et concerne deux changements de posture du professeur Alex :

- le premier changement concerne la modification de forme générique qu'effectue le professeur sur le choix de l'équation littérale $ax + b = cx + d$, plutôt que $ax + b = c$. Cet événement peut être qualifié de *non prévisible* puisque le professeur Alex, dans sa trame projetée (cf. §10.5.2), avait initialement décidé de présenter l'algorithme de résolution des équations du premier degré sous la forme littérale $ax + b = c$ *;*
- le second changement concerne l'organisation mathématique et didactique des deux séances successives.

En ce qui concerne le premier changement, nous avons évoqué en étape E_2 cette modification mais nous le reprenons ici sous un aspect différent. Nous avons souligné que les raisons apparentes de ce changement sont données par Alex lui-même, lorsqu'il indique aux élèves (ligne 142) qu'il aurait fallu *tout transformer en amont pour arriver à ça* (en mentionnant les dix équations données) et que cela aurait induit *beaucoup d'erreurs potentielles.* Cette réponse d'Alex peut ainsi être située sur l'échelle de codétermination didactique (Chevallard, 2002) au niveau du *secteur d'étude* des équations du premier degré (cf. §1.2.3). Nous pouvons également expliquer ce changement de tâches en nous plaçant au niveau de la *discipline*, en considérant la récente décision (2008) de l'institution EN d'inscrire dans les programmes du lycée une part d'algorithmique à enseigner dans le domaine des mathématiques. En effet, le changement de posture du professeur fait écho à ce que Haspekian (2005) nomme le *manque de repères didactiques*. Bien que les propos qui suivent s'appliquent à l'introduction du tableur dans l'enseignement des mathématiques en classe de cinquième du collège, nous pouvons faire un parallèle avec les réflexions de ce chercheur et les appliquer ici au cas d'Alex qui semble chercher ses *repères didactiques* sur l'algorithmique :

> Ce manque de repères s'accompagne parfois d'une prise d'informations pour des tentatives ultérieures d'intégration du tableur : Dan recueille des informations pendant T1[180] sur les genèses instrumentales, puis, elle « tire des leçons de cette première expérience » pour les séances tableur suivantes. Il y a donc apprentissage du professeur au niveau de ses propres erreurs. Le professeur prend des repères « instrumentaux ». (Haspekian, 2005, p.188)

[180] Dan est l'enseignant de la classe de 5e ayant expérimenté l'ingénierie du chercheur Haspekian et la séance T1 est la première séance de prise en main du tableur.

De la même manière que l'enseignant Dan, mentionné dans la citation ci-dessus, Alex *a tiré les leçons* de la première séance, et a procédé à un ajustement de celle-ci, en modifiant l'organisation mathématique et didactique de la seconde séance. Nous avons comparé des deux tableaux des étapes E_1 de ces séances ci-dessous et marqué en caractères gras les différences apparentes :

Phase	Fonction	Forme du travail	Durée	Fonction	Forme du travail	Durée
	Séance 2.1			**Séance 2.2**		
1	Accueil et mise en route du logiciel. Tissage avec situation n°1. Présentation de la situation n°2.	Collectif	5min15s	Accueil et mise en route du logiciel. Tissage avec situation n°1. Présentation de la situation n°2.	Collectif	4min30s
2	Objectif de la situation n°2 Passation des consignes avec précisions sur l'objectif	Collectif	4min25s	Objectif de la situation n°2 Passation des consignes avec précisions sur l'objectif	Collectif	3min01s
3	Première phase de recherche, en lien avec la tâche t_1	Binômes	13min05s	Première phase de recherche, en lien avec les tâches t_1 **et t_2**	Binômes	15min09s
4	Institutionnalisation relative à t_1	Collectif	**2min15s**	- Institutionnalisation relative à t_1 - Deuxième phase de recherche de t_2 et institutionnalisation	Collectif	**5min**
5	- Deuxième phase de recherche : tâche t_2 avec consigne spécifique - Institutionnalisation	Collectif	**6min34s**			
6	- Troisième phase de recherche : tâches t_3 et t_4 simultanément **- Institutionnalisation relative à t_3**	**Binômes/ collectif**	**14min46s**	- Troisième phase de recherche : tâches t_3 et t_4 simultanément	**Binômes**	**11min16s**
7	Quatrième phase de recherche : tâche t_5 (exécution du programme)	Binômes	**6min40s**	Quatrième phase de recherche : tâche t_5 (exécution du programme)	Binômes	**12min34s**
			53min			51min30

Figure 214 : Comparaison de l'étape E_1 pour les séances 2.1 et 2.2 d'Alex

La comparaison de ces organisations montre une mise en situation un peu plus rapide pour la seconde séance (deux minutes de moins pour les phases 1 et 2), ce temps étant reporté sur le type de tâches T_1, *reconnaitre et écrire littéralement un type d'équations*. Pour la seconde séance, la phase de recherche de T_2, *résoudre une équation sous forme littérale*, et celle d'institutionnalisation de la résolution sont raccourcies de plus de trois minutes ainsi que la phase de conception de l'algorithme et d'écriture du programme (tâches t_3 et t_4). Six minutes supplémentaires sont alors dégagées pour la tâche t_5, *utiliser un programme pour résoudre une équation*. Nous constatons, par le relevé de ces durées, que le professeur Alex a raccourci certaines phases pour dégager du temps pour la phase finale en laissant ainsi plus de place à celle-ci, lorsque le domaine algorithmique et le domaine algébrique s'imbriquent par l'entrée des coefficients des équations dans le programme et la sortie de la solution. Nous notons également une différence sur les moments de la séance : contrairement à la première séance, Alex ne dissocie plus nettement les tâches t_1 et t_2 et également, il ne réalise plus l'institutionnalisation de l'algorithme. Nous émettons l'hypothèse que ce changement de rythme correspond à une volonté de consacrer davantage de temps à la tâche t_5 et ainsi permettre aux élèves de faire le lien entre les deux environnements papier-crayon et informatique. En effet, le découpage de la tâche globale de la situation n°2 peut être schématisé en fonction des environnements prédominants des sous-tâches qui la composent de la façon suivante :

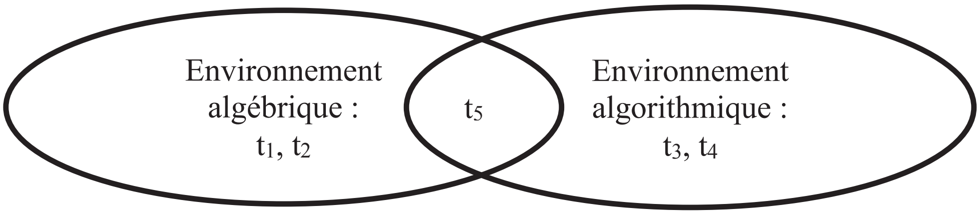


Figure 215 : Environnement prédominant des tâches t_1 à t_5 de la situation n°2

La tâche de type T_5 est celle qui permet de faire une correspondance plus explicite entre les objets algorithmiques et les objets algébriques, lorsque le domaine algorithmique et le domaine algébrique s'imbriquent par l'entrée des coefficients des équations dans le programme et la sortie de la solution. Alex ajuste sans doute la seconde séance pour parvenir à ce lien entre les objets. Néanmoins, la séance reste trop courte pour qu'il arrive à institutionnaliser les résultats obtenus en fin de cette tâche. Une comparaison effective entre les solutions obtenues « à la main » et en environnement informatique aurait permis d'asseoir encore davantage les concepts d'équation, de paramètre, de solution, etc.

11.2.5 Classe d'Alex : Fin de la situation n°2 en travail maison

Dans sa trame projetée (cf. §10.5.2), Alex propose de réaliser la description de la fonction d'un algorithme sous la forme d'un travail à la maison (cf. annexe A22). La fonction de cet algorithme est la résolution des équations sous la forme $ax + b = cx + d$.

Notons qu'Alex décide de maintenir ce travail, alors qu'il a modifié la tâche globale des élèves réalisée en classe sous cette même forme (plutôt que sous la forme $ax + b = 0$, comme il l'avait initialement prévu). À la fin de la séance 2.1, le professeur nous a confié : « *c'est un moyen d'enfoncer le clou, et de plus, ils ont une trace écrite de l'algorithme qu'ils ont fait en classe* ». Alex voit ce travail à réaliser à la maison comme une *reprise*, au sens de Larguier (2009), du travail en classe, *reprise* qui n'est pas ici *à l'identique*, puisque l'algorithme fourni est enrichi du cas $a = c$ et $b = d$ que le professeur a volontairement laissé de côté durant les séances 2.1 et 2.2. Nous sommes alors en conformité avec les préconisations de *complexification progressive* d'un algorithme, indiqué dans le programme d'accompagnement sur l'algorithmique (MEN, 2009c). L'intérêt de la trace écrite est également souligné par le professeur Alex. En effet, les élèves ayant tous travaillé directement sur l'ordinateur, nous avons constaté qu'aucun d'entre eux ne garde trace du travail réalisé lors des séances 2.1 et 2.2. Ainsi, le travail à la maison permet-il de reconstituer et de consolider ce travail en classe.

L'analyse de quelques productions écrites est proposée ci-dessous. Notons que nous ne disposons que de 19 copies d'élèves (sur 31) : l'enseignant ayant précisé que le travail ne serait pas noté, une partie des élèves ne l'a pas rendu.

Les notations utilisées dans cette section sont T_6 (*déterminer la fonction d'un algorithme pré-écrit*) pour désigner le type de tâches et t_6 pour désigner la tâche spécifique de ce travail maison (ici permettant de résoudre une liste d'équations du premier degré).

Nous reproduisons le corps du programme proposé aux élèves ci-dessous, par commodité de lecture :

```
DEBUT_ALGORITHME
  LIRE a
  LIRE b
  LIRE c
  LIRE d
  SI (a!=c) ALORS
    DEBUT_SI
    x PREND_LA_VALEUR (d-b)/(a-c)
    AFFICHER x
    FIN_SI
    SINON
      DEBUT_SINON
      SI (b==d) ALORS
        DEBUT_SI
        AFFICHER "tout nombre est solution"
        FIN_SI
        SINON
          DEBUT_SINON
          AFFICHER "pas de solution"
          FIN_SINON
      FIN_SINON
FIN_ALGORITHME
```

Figure 216 : Corps du programme pour la tâche de type T_6

L'analyse des productions indique que ces élèves comprennent la technique τ_6 (cf. §9.2.2.3), c'est-à-dire comment exécuter un programme pas à pas en instanciant les valeurs à l'entrée de l'algorithme. Suivent la production de Lucas, représentative des résultats des autres élèves (18 élèves sur 19 présentent les mêmes résultats), et la production de Charlotte, qui ne semble pas comprendre la fonction du test dans une boucle.

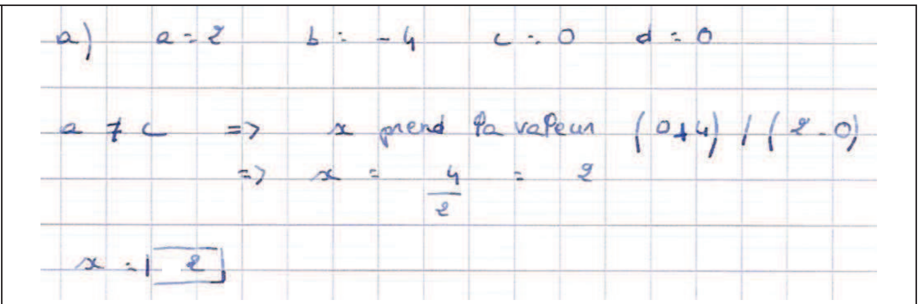
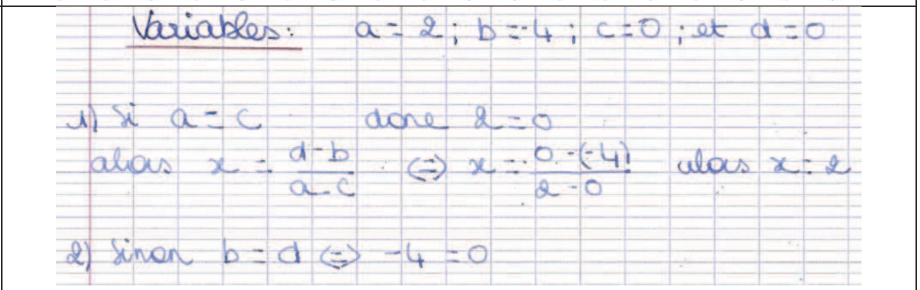
Production de Lucas	
Production de Charlotte	

Figure 217 : Productions de deux élèves d'Alex (Tâche t_6, question 1.a)

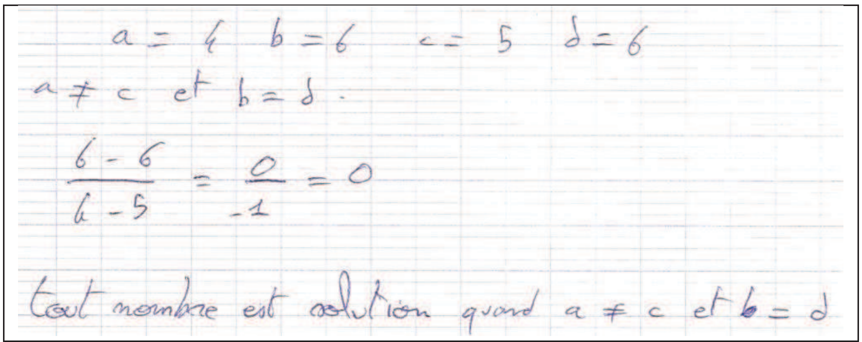
Charlotte rencontre ici plusieurs difficultés :

- elle ne comprend pas la syntaxe « a != c » du test de la première boucle (qui signifie $a \neq c$ et non pas $a = c$) ;

- elle ne tient pas compte de la véracité du test pour choisir la séquence d'instructions correspondante puisqu'elle effectue successivement les instructions relatives au « si » et au « sinon ».

L'environnement technologico-théorique manquant à Charlotte repose sur la compréhension de la structure d'un algorithme et du langage de programmation du logiciel Algobox. Il est clair que pour cette élève la phase d'*instrumentation* est loin d'être achevée.

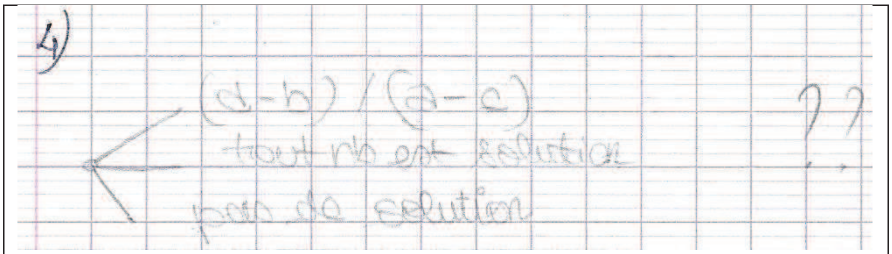
Si les deux premières questions de l'exercice (cf. annexe A22) consistent à exécuter le programme en ayant choisi des valeurs en entrée (par exemple question 1.a, figure 217), la question 3 est plus complexe, puisqu'elle demande d'appliquer la phase (2) de la technique τ_6 (cf. §9.3.3), soit de déterminer des valeurs *a, b, c* et *d* en entrée de manière à exécuter une séquence d'instructions particulières (ici faire afficher « tout nombre est solution »). Suit une illustration des difficultés rencontrées par 7 élèves sur les 18 :



Production de Jimmy

Figure 218 : Production d'un élève d'Alex (tâche t_6, question 3)

Jimmy a perçu l'une des conditions nécessaires à l'affichage de « tout nombre est solution », celle de $b = d$, mais il se perd dans la structure des boucles de tests imbriquées. L'élève ne perçoit pas que la double boucle de test induit une sortie du programme comportant trois issues : soit $x = \frac{d-b}{a-c}$, soit « tout nombre est solution », soit « pas de solution ». En effet, il propose ci-dessus deux sorties simultanées du programme (« 0 » et « tout nombre est solution »). Comme pour Charlotte, nous pouvons conclure sur une phase d'*instrumentation* non achevée pour cet élève, bien qu'il soit plus avancé dans sa compréhension puisqu'il réussit les deux premières questions, contrairement à Charlotte. Notons également que la double boucle de test du registre informatique est *non-congruente* au registre algébrique, puisqu'elle traduit trois cas disjoints, ce qui est une difficulté supplémentaire pour l'élève. En revanche, d'autres élèves (10 sur 19) comme Julie perçoivent ce triple choix ainsi que l'atteste l'organigramme ci-dessous :



Production de Julie

Figure 219 : Production d'une élève d'Alex (tâche t_6, question 4)

Cependant Julie ne parvient pas à déterminer la fonction de l'algorithme, comme en témoigne les points d'interrogation de sa production. Elle n'a pas cherché à mettre en relation les valeurs en entrée et en sortie de l'algorithme. Sur les 19 copies récupérées, 10 élèves répondent à la dernière question, dont 5 répondent comme Lucas, 3 comme Fanny, les productions de Manon et de Romane restant singulières :

Production de Lucas	4) L'algorithme sert à résoudre des équations.
Production de Fanny	4- Cet algorithme sert à trouver la valeur de x en fonction de a, b, c et d pour l'équation $f(x) = \frac{d-b}{a-c}$
Production de Manon	4. La fonction de cet algorithme est $f(x)_x = \frac{d-b}{a-c}$ soit sous forme $ax - cx = d - b$ ou $ax - cx + b = d$
Production de Romane	4. L'algorithme renvoi la solution de l'équation : $ax + b = cx + d$. . En effet si $a \neq c$: l'équation équivaut à $\frac{d-b}{a-c}$. . Si $a = c$ et $b = d$ l'équation équivaut à $ax + b = ax + b$ Donc tout nombre est solution. . Si $a = c$ et $b \neq d$ l'équation $ax + b = cx + b$ devient : $b = d$ Donc il n'y a pas de solution.

Figure 220 : Production de quatre élèves d'Alex (tâche t_6, question 4)

Ces 10 élèves ont sans doute fait le rapprochement avec la séance 2.1 ou 2.2 qu'ils ont suivie, où ils ont effectivement déterminé un algorithme qui *résout des équations*. Mais Lucas ne va pas plus loin. Fanny, quant à elle, exprime clairement la sortie de l'algorithme dans le cas où $a \neq c$, en étant capable de donner la solution *en fonction* des valeurs d'entrée. Nous supposons que cette locution, « en fonction de », lui fait écrire $f(x) = \frac{d-b}{a-c}$ au lieu de $x = \frac{d-b}{a-c}$. Manon, comme Fanny, semble être gênée par la formulation de l'énoncé « quelle est la *fonction* de cet algorithme » qui lui fait rechercher une fonction *f*, au sens mathématique du terme. Elle parvient cependant à retrouver deux étapes de la résolution littérale, en remontant de la solution $x = \frac{d-b}{a-c}$ aux deux étapes précédentes, $ax - cx = d - b$ puis $ax - cx + b = d$ mais n'achève pas son raisonnement. Pour finir, la production de Romane montre que l'élève maîtrise le logiciel de programmation et qu'elle a compris la fonction de l'algorithme. Elle est capable d'expliciter les trois cas en s'affranchissant du langage de programmation et en revenant dans le registre algébrique. Elle apporte même une justification aux deux cas particuliers ($a = c$, $b = d$) et ($a = c$, $b \neq d$) en réécrivant l'équation littérale sous la forme adéquate. Pour Romane, la transposition entre les deux registres s'effectue, avec une apparence de *transparence* totale. En revanche, elle n'explicite pas comment elle retrouve l'équation $ax + b = cx + d$ à partir de la solution. Cependant, Romane est la seule élève

parvenant à ce résultat et nous en concluons que les deux tâches de type *concevoir un algorithme et l'écrire* et *déterminer la fonction d'un algorithme pré-écrit* sont complémentaires et nécessitent d'être travaillées toutes deux, la compréhension de l'une n'induisant pas la compréhension de l'autre.
Enfin, nous notons que l'effectuation de cette seconde activité de la situation n°2 n'apporte que peu d'éléments de compréhension supplémentaires sur la résolution des équations, puisque la majorité des élèves ne répondent pas correctement à la dernière question. Si la tâche n'est pas inintéressante du point de vue algorithmique, avec le travail réalisé sur la structure d'un algorithme, les élèves n'ont manifestement pas fait le lien avec la résolution des équations du premier degré, ni avec le travail réalisé lors des séances 2.1 et 2.2.

Le bilan de la situation n°2 est effectué en chapitre 12 (en section 12.2).

11.3 Situation n°3

Rappelons que seul le professeur Alex a accepté d'expérimenter cette situation. Celle-ci s'est déroulée en deux séances d'une heure, en demi-classe et en salle informatique.

11.3.1 Classe d'Alex : Séance 3.1

Toujours suivant la même méthodologie, nous détaillons les étapes E_1 à E_4 de cette séance, dont la transcription est donnée en annexe A39. Précisons que seulement 12 élèves sont présents. 5 groupes ont été formés : 3 binômes et deux groupes de 3 élèves[181].

11.3.1.1 Étape E_1

Nous adaptons ici les notations de la situation n°2 pour cette nouvelle situation. En effet, apparaissent ici deux catégories de tâches, relativement aux types de tâches T_i [182] ($1 \leq i \leq 5$) :

- les tâches t'_i ($1 \leq i \leq 5$) pour les tâches relatives à la catégorie d'équations $(ax + b)(cx + d) = 0$;
- les tâches t_i ($1 \leq i \leq 5$) pour les tâches relatives à la catégorie d'équations $x^2 = a$.

Nous avons rythmé les changements de phase par les interventions du professeur, adressées à l'ensemble de la classe. Mais ce découpage est arbitraire, certains groupes pouvant être en retard ou en avance sur les moments indiqués. En particulier, la phase 7 n'a pas été abordée par tous les groupes, certains ayant seulement achevé la phase 6 en fin de séance.

Phase	Fonction	Forme du travail	Temps	Lignes de transcription
Phase 1	- Accueil et mise en route du logiciel. - Distribution de la fiche d'énoncé	Collectif/ Individuel	00 :00 à 04 :30 **Durée : 4min30s**	1 à 6
Phase 2	- Tissage avec la situation n°2 - Tissage avec la leçon en cours (polynômes du second degré) - Présentation de la situation n°3 - Lancement sur la tâche t'_1	Collectif	04 :30 à 06 :26 **Durée : 1min56s**	7 à 11
Phase 3	Première phase de recherche : tâches t'_1 et t'_2	Groupes de 2 ou 3 élèves	06 :26 à 11 :23 **Durée : 4min57s**	12 à 54
Phase 4	Deuxième phase de recherche : tâches t'_3 et t'_4 (simultanément)	Groupes de 2 ou 3 élèves	11 :23 à 20 :18 **Durée : 8min55s**	55 à 101
Phase 5	- Institutionnalisation de la forme des équations (t'_1) et résolution de l'équation littérale (t'_2) - Éléments pour la transposition informatique de la résolution	Collectif	20 :18 à 24 :10 **Durée : 3min52s**	101 à 105

[181] En raison de problèmes sur le réseau informatique, tous les ordinateurs ne fonctionnaient pas. Certains élèves se sont donc groupés par trois autour d'un même poste informatique.

[182] Nous rappelons que les types de tâches $\mathbf{T_1}$ sont *reconnaissance d'un type d'équations et écriture sous une forme générique* ; $\mathbf{T_2}$, *résolution sous forme littérale d'une équation paramétrée* ; $\mathbf{T_3}$, *conception d'un algorithme permettant d'automatiser la résolution d'une équation d'une forme déterminée ;* $\mathbf{T_4}$, *écriture d'un programme, traduisant dans un langage informatique, l'algorithme issu d'une tâche de type T_3* ; et $\mathbf{T_5}$, *utilisation d'un programme informatique pour effectuer une résolution d'équation.*

Phase 6	Troisième phase de recherche : tâches t'$_3$ et t'$_4$ (simultanément) et t'$_5$.	Groupes de 2 ou 3 élèves	24 :10 à 37 :10 **Durée : 13min**	106 à 125
Phase 7	Quatrième phase de recherche : tâches t$_1$ à t$_5$	Quelques groupes	37 :10 à 43 :50 **Durée : 6min40s**	125 à 178

Tableau 221 : Les différentes phases de la séance 3.1 d'Alex

11.3.1.2 Étape E$_2$

Afin d'analyser l'OM effective de la séance 3.1 d'Alex, nous nous appuyons sur la transcription de la séance (cf. annexe A39), sur la fiche d'énoncé complétée par les élèves (cf. A23) et sur les éléments d'analyse de la trame projetée TP3 (cf. §10.5.3).

Types de tâches observées

Alex débute la séance par la présentation de la tâche globale de réalisation d'algorithmes pour la résolution d'équations du second degré, en procédant à une « relecture » de l'énoncé proposé aux élèves (cf. A23) de la façon suivante :

> 11. Al : […] Et donc là, vous êtes dans une posture où vous avez trois équations à résoudre … il faut trouver un algorithme qui fait que, quand je remplis certaines conditions, je suis capable de trouver les solutions de $(4x+3)(2x-1)=0$, etc. Et ensuite l'extension, … eh bien regardez la deuxième question : il va falloir trouver quelque chose de même type que ces trois-là et après, il va y avoir le piège suprême… […]

Il enchaîne sur la tâche t'$_1$, *reconnaître que les équations données peuvent s'écrire sous la forme générale à déterminer* ($ax + b$)($cx + d$) = 0*,* qu'il présente en ces termes :

> 11. Al : […] Alors comment faire pour résoudre les trois premières équations ? Déjà, réfléchissons sur leur nature. Est-ce que ces trois-là se ressemblent ? Si oui, on va peut-être essayer de voir de quel type c'est, sinon …Mais vous êtes bien d'accord que si l'on a mis des astérisques pour ces trois-là, forcément, c'est que … à part du Rimel et du rouge à lèvres, c'est pareil !

Alex précise par des termes humoristiques que les trois premières équations de la fiche d'énoncé sont de même *nature*, qu'elles font partie de la même catégorie, catégorie qui reste à identifier.

La tâche t'$_2$, *résoudre sous forme littérale l'équation* ($ax + b$)($cx + d$) = 0*,* suit rapidement la première et est initiée par le professeur par la question : « *C'est quoi le théorème pour résoudre la première équation, par exemple ?* » (ligne 20).

Les tâches t'$_3$ et t'$_4$ ne sont pas dissociées et elles apparaissent pour certains groupes, sans que le professeur n'ait besoin de les donner expressément, puisqu'elles sont centrales pour la réalisation de la tâche globale. Pour d'autres groupes, le professeur incite à les effectuer :

- en ligne 27, « *Y a plus qu'à programmer ça sur Algobox !* » ;
- en ligne 42, « *Alors vous pouvez programmer maintenant* » ;
- en ligne 57, « *Donc voilà le process, il n'y a plus qu'à programmer, d'accord ?* » ;

La tâche t'$_5$, *utiliser le programme réalisé pour résoudre les équations proposées*, se produit et est effectuée selon deux objectifs. Le premier est de vérifier que le programme réalisé fonctionne (lignes 106, 133-134), en entrant les coefficients de la première équation et en obtenant les deux solutions. Le second objectif est de résoudre les équations à l'aide du programme (question 2 et fin de la question 3 de la fiche). Les productions des élèves montrent que cette tâche a été effectuée pour une grande partie des groupes. Nous l'analysons ci-dessous dans les techniques apparues.

La seconde tâche globale, *concevoir un algorithme pour résoudre les équations de la forme* $x^2 = a$, est amorcée par deux groupes sur les cinq, qui parviennent à effectuer les sous-tâches t_1 à t_4, sans d'ailleurs parvenir à concevoir un programme correct, comme nous l'analysons plus loin.

Notons que la tâche de type T_0 de résolution des équations « à la main » qu'Alex a prévue dans sa trame projetée n'est finalement pas proposée aux élèves. Cependant, quelques productions d'élèves montrent que cette tâche a été effectuée pour quelques équations. Nous le détaillons ci-après.

Techniques et environnement technologico-théorique observés

- ***Organisations mathématiques relatives aux tâches t'_1 et t_1 (de type T_1) : Reconnaissance et écriture littérale d'un type d'équations***

Comme dit ci-dessus, la tâche t'_1 est rapidement suggérée par l'enseignant et la technique pour déterminer la forme générique des trois premières équations de la fiche élève consiste à *repérer que l'équation est sous la forme d'un produit nul de deux facteurs d'expressions algébriques du premier degré* puis à *substituer les nombres déterminés par une lettre, autre que x* (cf. § 9.4.3). Le dialogue suivant entre le binôme de Mathilde et Iris et l'enseignant illustre comment cette technique s'applique :

> 32. Al (*En s'adressant au binôme de Mathilde et Iris*) : D'accord. Donc ici, là, c'est de quelle forme $4x + 3$?
> 33. Mathilde : $ax + b$
> 34. Al : Très bien ! Et ça, c'est de quelle forme (*en montrant* $2x - 1$) ?
> 35. Mathilde : $ax - b$
> 36. Al : Non. Alors déjà, c'est pas le même *a* …
> 37. Iris : Ah ! $cx - d$
> 38. Al : Alors là, tu peux dire $cx + d$ avec $d = -1$. D'accord ? Donc ça, ça fait $ax + b$ multiplié par $cx + d$

Dans ce court extrait, deux difficultés sont pointées, l'une est relative au choix des lettres de la forme générique (une même lettre ne peut être utilisée deux fois dans une même expression pour désigner deux paramètres différents), l'autre tient au manque d'uniformité des formes proposées pour les expressions du premier degré ($ax + b$ pour la première et $cx - d$ pour la seconde). Ces difficultés montrent les insuffisances du bloc *logos* associé sur les concepts de paramètre et de soustraction comme ajout de l'opposé.

Hormis la copie de Jean-Stéphane, les élèves n'ont pas gardé trace de leur détermination de la forme générique $(ax + b)(cx + d) = 0$. L'extrait ci-dessous indique que la reconnaissance a été faite mais également que cet élève semble faire l'amalgame entre la forme d'une équation et sa résolution, comme en témoigne la construction boiteuse de sa phrase.

les trois premières équation sont en forme de deux facteurs. =0 si et si un des 2 facteur au moins =0 $(ax+b)x(cx+d)=0$
Production de Jean-Stéphane (1)

Figure 222 : Extrait d'une production d'élève montrant l'engagement dans la tâche t'1 (séance 3.1 d'Alex)

Rappelons que la tâche t'_1 se complète de la reconnaissance des équations de la liste fournie appartenant à la même catégorie que les trois premières (question 2 de la fiche élève). Il y a deux équations (autres que les équations 1, 2 et 3) qui sont présentées sous la forme d'un produit nul, les équations 7 et 10. Pour les élèves ayant répondu à cette question (8 sur 12), aucune erreur n'est à signaler sur la reconnaissance de ces équations de la catégorie des équations « produit nul ». Notons que, guidés par les questions successives de l'énoncé et n'ayant pas terminé la question 3, les élèves ne prennent pas en compte les équations 6, 8 et 9 : sans doute une question spécifique (cf. §10.5.3) et une séance supplémentaire auraient-elles été nécessaires pour s'y attarder.

En ce qui concerne la tâche t_1 (reconnaissance des équations du type $x^2 = a$) nous ne disposons guère de traces écrites, hormis celles de Jean-Stéphane qui sollicite le professeur (ligne 235) pour lui montrer son *modèle* d'équations, comme il le nomme. D'autres élèves (4 sur 12) comme Émile indique sur leur copie que les équations 4, 5, 9 sont du même type – par de petits tirets –, mais sans en indiquer la forme générique.

éq. sous fourme $x^2 = C$	- Equation 4 : $x^2 = 7$ - Equation 5 : $x^2 = -4$ Equation 6 : $x^2 - 10x + 25 = 0$ *Equation 7 : $-\frac{1}{4}x\left(\frac{1}{2}x + 9\right) = 0$ Equation 8 : $7x - x^2 = 0$ - Equation 9 : $x^2 = (2{,}07)^2$ *Equation 10 : $-0{,}1x(900 - 0{,}1x) = 0$
Production de Jean-Stéphane (2)	**Production d'Émile**

Figure 223 : Productions d'élèves d'Alex montrant l'engagement dans la tâche t_1 (question 3)

- ***Organisations mathématiques relatives aux tâches t'_2 et t_2 (de type T_2) : Résolution littérale d'une équation***

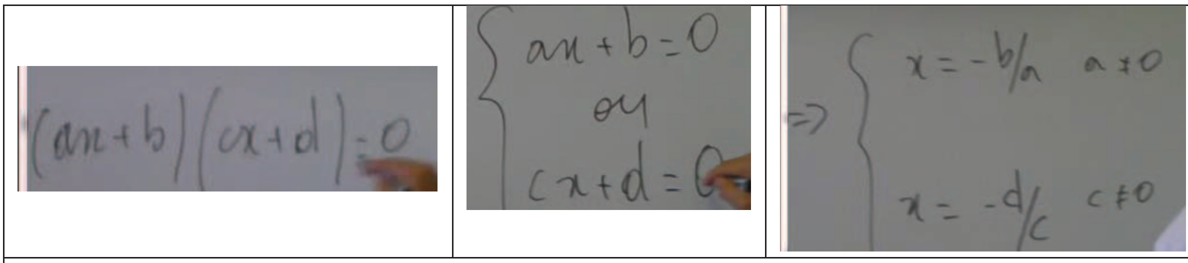
La résolution littérale de l'équation $(ax + b)(cx + d) = 0$ repose sur la règle (R) « $AB = 0 \Leftrightarrow A = 0$ *ou* $B = 0$ » qu'Alex ne manque pas de faire préciser aux élèves :

> 28. **09 : 20** Al (*à toute la classe*) : […] Alors, les trois premières équations avec astérisques, ce sont des produits de facteurs. Et si ce sont des produits de facteurs, c'est quoi le théorème, Mathilde ou Iris ?
> 29. Mathilde : Alors on fait $x = 0$ dans le premier et $x = 0$ dans l'autre.
> 30. Al : Non, $4x + 3 = 0$ ou $2x - 1 = 0$. Parce que si tu fais $x = 0$ dans le premier facteur, ici par exemple (*il montre* $(4x + 3)$ *dans l'équation* $(4x + 3)(2x - 1) = 0$), ça fait 3 !
> 31. Mathilde : Ah, oui ! C'est ce que je voulais dire…

Même si Mathilde évoque ici un lapsus, les deux tâches « résoudre une équation dont l'inconnue est x » et « substituer à x la valeur 0 » sont assez fréquemment confondues, comme nous l'avons analysé lors du test diagnostique (cf. figure 78, §8.3). Le rappel de la justification de la technique de résolution donnée par Alex est nécessaire, du moins pour quelques élèves. Nous ajoutons que Mathilde dénote ici un indice d'une conception *pseudo-structurale* des expressions algébriques, au sens de Sfard, de par sa confusion entre $x = 0$ et $4x + 3 = 0$.
Certains élèves ont des difficultés pour résoudre l'équation littérale, comme le montre l'extrait suivant :

46. **11 : 53** Al *(dans un autre groupe)* : $ax + b = 0$, ça fait x égal combien ? Dans la formule générale ? Tu ne vas pas revenir à la première équation…
47. E : Ça fait $\frac{b}{a}$?
48. Al : Non, $\frac{-b}{a}$. D'accord ?
49. E : Oui.
50. Al : Et $cx + d = 0$, ça fait x égal combien ?
51. E : Ça fait $\frac{-d}{c}$?
52. Al : Oui. Et est-ce que ça, ça existe tout le temps ?
53. E : Non.
54. Al : Non, il faut mettre comme condition $a \neq 0$ et $c \neq 0$. Donc voilà le process, il n'y a plus qu'à programmer, d'accord ?

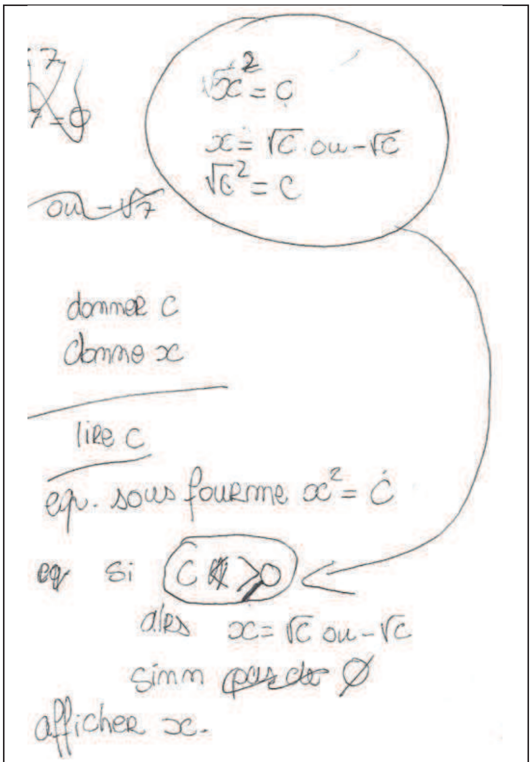
Dans cet extrait, deux passages ont retenu notre attention. Le premier (lignes 46 à 48) montre la difficulté pour cet élève à résoudre l'équation sous forme littérale $ax + b = 0$. La réflexion d'Alex, « *Tu ne vas pas revenir à la première équation* », laisse entendre que l'élève cherche à résoudre les équations en conservant des nombres déterminés. L'erreur sur la solution ($\frac{b}{a}$ au lieu de $-\frac{b}{a}$) montre que les automatismes de transposition ou ajout de l'opposé ne sont pas installés. Le second passage est la dernière phrase d'Alex qui indique les conditions d'existence des solutions de l'équation $(ax + b)(cx + d) = 0$. Comme nous l'avons signalé dans l'analyse a priori (cf. §9.4.3), ce point de vue engendre des difficultés de considération des cas particuliers de l'équation. En effet, considérer le cas [$a \neq 0$ et $c \neq 0$] amène à examiner la négation de cette condition et à étudier quelles sont alors les solutions de l'équation dans ce cas. Comme déjà dit, cette étude nous semble complexe pour des élèves de seconde, d'autant plus que si la situation traite des équations du second degré (comme l'annonce Alex en ligne 11, « *on est dans le second degré* »), la condition [$a \neq 0$ et $c \neq 0$] est un préambule.
La tâche que le professeur Alex cherche à effectuer est finalement « résoudre les équations du type $(ax + b)(cx + d) = 0$ » plutôt que « résoudre les équations du second degré du type $(ax + b)(cx + d) = 0$ ». Nous voyons, dans la suite de l'analyse, l'implication de cette différence de tâches dans la conception de l'algorithme. Suit la trace écrite laissée au tableau par Alex, concernant la démonstration des solutions de l'équation $(ax + b)(cx + d) = 0$, où nous remarquons que le cas [$a = 0$ ou $c = 0$] n'est pas évoqué.



Trace écrite d'Alex

Figure 224 : Trace écrite au tableau du professeur Alex relativement à la tâche t'_2

En ce qui concerne la tâche t_2 de résolution de l'équation $x^2 = a$, deux groupes sur les cinq l'effectuent, le groupe de Jean-Stéphane et le groupe de Lucas.
Pour le groupe de Jean-Stéphane, nous disposons de leur trace écrite :



Production du groupe de Jean-Stéphane (1)

Figure 225 : Production d'élèves d'Alex montrant l'effectuation de la tâche t_2

La technique pour obtenir les solutions de l'équation $x^2 = a$ n'apparaît pas dans cette production. Sans doute ce résultat fait-il partie du savoir de ces élèves, le professeur nous ayant précisé l'avoir déjà institutionnalisé auparavant (cf. §10.5.3). Le professeur s'attarde dans le groupe (lignes 135 à 145) pour insister sur la condition d'existence des solutions, condition que les élèves ont identifiée.
Pour le groupe de Lucas, nous disposons de l'intervention d'Alex (lignes 147 à 167) et de la discussion qui s'engage entre les élèves à l'intérieur du groupe (lignes 169 à 177). L'extrait suivant montre que la technique de résolution de l'équation $x^2 = a$ n'est pas connue de l'élève qui semble s'en tenir au théorème erroné : $x^2 = a \Rightarrow x = \sqrt{a}$. Cette impression est corroborée par la réponse de l'élève au professeur en ligne 158. Cette conception formelle de type **CF**,

selon la typologie de Bronner (cf. §2.5), consiste à considérer que l'opérateur « prendre la racine carrée » est l'opérateur inverse l'opérateur «mettre au carré ». La question de l'enseignant « *Ou bien quoi ?* » est une tentative vaine de faire retrouver à l'élève la solution négative de l'équation. Remarquons que le professeur ne relève pas l'erreur de l'élève qui répond « -4 » au lieu de « - $\sqrt{4}$ ».

> 151. Al : Lucas, comment tu résous $x^2 = 4$?
> 152. Lucas : On fait racine de 4
> 153. Al : Ou bien quoi ?
> 154. Lucas : -4 ?
> 155. Al : Alors dans le cas général ?
> 156. Lucas : c'est un carré et un carré ne peut pas être négatif.
> 157. Al : Donc là, ça y est. Vous êtes en train de traiter ce type d'équations (*il montre $x^2 = 7$ et $x^2 = -4$ sur la feuille d'énoncé*) et le signe qui est à droite est fondamental. Donc là (*il montre $x^2 = 7$*), je vais avoir le droit d'utiliser quoi ?
> 158. Lucas : La racine carrée.

Le professeur ne perçoit pas dans la dernière réponse de Lucas, ***la** racine carrée*, que celui-ci ne considère pas la solution négative de l'équation. À l'environnement technologico-théorique fait défaut la démonstration ou le rappel des solutions d'une équation du type $x^2 = a$, lorsque a est positif, que l'enseignant aurait pu rappeler à ce moment. L'algorithme établi par Lucas (cf. figure 227) montre que ce résultat lui manque.

- ***Organisations mathématiques relatives aux tâches t'_3 - t_3 (de type T_3 : Conception d'un algorithme) et aux tâches t'_4 - t_4 (de type T_4 : écriture d'un programme)***

Relativement aux tâches t'_3 et t'_4 de conception de l'algorithme et du programme de résolution des équations $(ax + b)(cx + d) = 0$, relevons les techniques et le bloc logos associé, convoqués durant la séance. Notons que plusieurs difficultés, prévues lors de l'analyse a priori de la situation n°3 (cf. 9.4.3), apparaissent. Nous relevons principalement :
- la *transposition* de la démonstration en environnement papier-crayon à celle de l'algorithme et du programme, avec les *actions élémentaires* à déterminer ;
- les règles de logique inhérentes à la considération des cas où l'équation est ou n'est pas du second degré (discussion sur la nullité des paramètres a et c).

Pour le premier point, la décomposition *en actions élémentaires* pour la machine pose problème pour l'affichage des solutions et l'enseignant intervient comme suit :

> 103. Al : Là, il y a un problème, en fait inhérent au logiciel … Vous êtes bien d'accord qu'il faut rentrer la condition sur a et la condition sur c. Le problème, c'est qu'à un moment, il faut affecter à la variable x la valeur $\frac{-b}{a}$ et affecter à la variable x la valeur $\frac{-d}{c}$. Sauf qu'Algobox ne comprend pas quand vous affectez à x la valeur $\frac{-b}{a}$ et qu'à la ligne suivante, vous affectez à x la valeur $\frac{-d}{c}$, il ne comprend pas. Ça veut dire qu'il faut absolument que, dans vos déclarations de variable, vous fassiez quoi ? Que vous ne déclariez pas la variable x, parce que x, on ne s'en sert pas. En revanche, déclarez x1 et déclarez x2. Et appelez celle-là, x1 et celle-là x2. Comme ça le logiciel ne pourra pas confondre les deux…

Alex évoque ici la *non-congruence* entre les solutions de l'équation déterminées en environnement papier-crayon, déterminées sous la forme $x = \frac{-b}{a}$ ou $x = \frac{-d}{c}$ pour la tâche t'_2 (cf.

figure 224) et leur transposition en le programme informatique, que des élèves écrivent de cette façon :

x prend la valeur –b/a
x prend la valeur –d/c
Afficher x

Le professeur suggère de déclarer deux variables informatiques x1 et x2 pour contourner la difficulté, indiquant un problème *inhérent au logiciel.* Même si cette technique est licite, l'expression est mal choisie puisqu'il s'agit d'une contrainte inhérente à la nature d'une variable informatique, où l'affectation d'une nouvelle valeur à une variable « écrase » la précédente. De plus, il est possible d'utiliser la variable x deux fois de suite sous la forme :

x prend la valeur –b/a
Afficher x
x prend la valeur –d/c
Afficher x

La technique de l'enseignant évite de recourir à cette donnée technologique, ce qui aurait pu asseoir les connaissances des élèves à ce sujet. Suivent les deux sortes programmes conçus par les élèves, celui de gauche, du groupe de Jean-Stéphane que les élèves ont conçu seuls et où une seule variable x apparaît, et celui de droite que nous retrouvons pour les quatre autres groupes constitués, qui ont été influencés par le discours ci-dessus d'Alex, où deux variables x1 et x2 sont utilisées :

```
VARIABLES
  x EST_DU_TYPE NOMBRE
  a EST_DU_TYPE NOMBRE
  b EST_DU_TYPE NOMBRE
  c EST_DU_TYPE NOMBRE
  d EST_DU_TYPE NOMBRE
DEBUT_ALGORITHME
  LIRE a
  LIRE b
  LIRE c
  LIRE d
  SI (a!=0) ALORS
    DEBUT_SI
    x PREND_LA_VALEUR -(b/a)
    FIN_SI
    SINON
      DEBUT_SINON
      AFFICHER "Il n'y a pas de solutions"
      FIN_SINON
  AFFICHER x
  SI (c!=0) ALORS
    DEBUT_SI
    x PREND_LA_VALEUR -(d/c)
    FIN_SI
    SINON
      DEBUT_SINON
      AFFICHER "Il n'y a pas de solutions"
      FIN_SINON
  AFFICHER x
FIN_ALGORITHME
```

Production du groupe de Jean-Stéphane (2)

```
VARIABLES
  b EST_DU_TYPE NOMBRE
  a EST_DU_TYPE NOMBRE
  c EST_DU_TYPE NOMBRE
  d EST_DU_TYPE NOMBRE
  x1 EST_DU_TYPE NOMBRE
  x2 EST_DU_TYPE NOMBRE
DEBUT_ALGORITHME
  LIRE a
  LIRE b
  LIRE c
  LIRE d
  SI (a!=0) ALORS
    DEBUT_SI
    SI (c!=0) ALORS
      DEBUT_SI
      x1 PREND_LA_VALEUR -b/a
      x2 PREND_LA_VALEUR -d/c
      FIN SI
    AFFICHER x1
    AFFICHER x2
    FIN_SI
    SINON
      DEBUT_SINON
      AFFICHER "il n'y a pas de solution"
      FIN_SINON
FIN ALGORITHME
```

Production des autres groupes

Figure 226 : Programmes de la séance 3.1 d'Alex relevés sur clef USB (algorithme de résolution d'équations de la forme (ax + b)(cx + d) = 0)

La lecture de ces deux programmes nous amène à la deuxième difficulté, sur les règles de logique. Tout d'abord, même si les deux programmes ci-dessus sont erronés, au sens où ils ne répondent pas à toute instance de la famille des équations du type $(ax + b)(cx + d) = 0$, ils

fonctionnent correctement pour les équations proposées dans la fiche d'énoncé, puisque toutes vérifient la condition [$a \neq 0$ et $c \neq 0$]. Les algorithmes sous-jacents à ces programmes ne sont donc pas valides, mais les tests effectués, par le biais des équations proposées, ne le décèlent pas. Nous retrouvons ici l'intérêt de dissocier la conception de l'algorithme de l'écriture du programme, du moins au niveau de la classe de seconde et pour un premier apprentissage de ces concepts. En effet, nous relevons des erreurs de logique dans les deux programmes ci-dessus. Le programme de gauche est erroné dans les cas où [$a = 0$ ou $c = 0$], puisqu'il donne comme réponse « il n'y a pas de solution », même si l'équation est par exemple de la forme $(ax + b)d = 0$, avec $a \neq 0$ et $c = 0$. Le programme de droite est erroné dans les mêmes cas : par exemple, si $a = 0$ et $c \neq 0$, la réponse donnée est « il n'y a pas de solution », alors que l'équation est de la forme $b(cx + d) = 0$. De plus, il comporte une erreur supplémentaire, puisque le cas $c = 0$ n'est pas pris en charge par le programme.
Pour pallier ces difficultés, comme annoncé en analyse a priori (cf. § 9.4.3) une *première transposition* de la démonstration littérale aurait été utile, sous la forme d'un algorithme *informatisé* (cf. §4.4) :
- Si $a \neq 0$ et $c \neq 0$, deux solutions $\frac{-b}{a}$ et $\frac{-d}{c}$;
- Si $a = 0$ ou $c = 0$, l'équation n'est pas du second degré, utiliser un autre algorithme.

Ici, l'écriture directe du programme masque la réflexion sur les règles de logique nécessaires à la conception de l'algorithme. Nous revenons plus en détail sur ces difficultés en étape E_4.
Pour le second algorithme à concevoir (tâches t_3 et t4) de résolution des équations $x^2 = a$, les groupes de Jean-Stéphane et Lucas produisent les programmes suivants :

VARIABLES c EST_DU_TYPE NOMBRE x EST_DU_TYPE NOMBRE DEBUT_ALGORITHME LIRE c SI (c>=0) ALORS DEBUT_SI x PREND_LA_VALEUR sqrt(c) FIN_SI SINON DEBUT_SINON x PREND_LA_VALEUR -sqrt(c) FIN_SINON AFFICHER x FIN_ALGORITHME	VARIABLES a EST_DU_TYPE NOMBRE x EST_DU_TYPE NOMBRE DEBUT_ALGORITHME SI (a>=0) ALORS DEBUT_SI x PREND_LA_VALEUR sqrt(a) AFFICHER x FIN_SI SINON DEBUT_SINON AFFICHER " l'équation n'admet pas de solutions" FIN_SINON FIN_ALGORITHME
Production du groupe de Jean-Stéphane (3)	**Production du groupe de Lucas**

Figure 227 : Programmes de la séance 3.1 d'Alex relevés sur clef USB (algorithme de résolution d'équations de la forme $x^2 = a$)

Les erreurs relevées sont de deux natures différentes, erreur liée à la structure d'un algorithme ou d'un langage de programmation pour la production de gauche et erreur mathématique pour la production de droite.
En effet, pour la production du groupe de Jean-Stéphane, alors que la résolution de l'équation littérale est correcte (cf. figure 225), la *transposition informatique*, au sens de Balacheff, n'est pas convenablement effectuée. Ces élèves semblent avoir traduit la structure de la forme « si C alors (P_1 ou P_2) » par l'instruction « si C alors P_1 sinon P_2 » où C représente une condition et P_1, P_2 deux propositions.

Quant à la production du groupe de Lucas, la structure du programme est correcte, le « sinon » renvoie bien au cas où le paramètre a est négatif, contrairement à la production précédente. Cependant, comme vu plus haut pour la résolution littérale, la solution négative de l'équation n'est pas prise en compte. Notons une dernière erreur présente dans ce programme, l'omission de l'instruction « lire a ». Il est probable que le programme ayant été réalisé à quelques minutes de la sonnerie, les élèves n'aient pas eu le temps de l'achever.

- ***Organisations mathématiques relatives aux tâches t'_5 et t_5 (de type T_5) : Utilisation d'un programme***

Pour les douze élèves présents, nous avons relevé leurs réponses sur la fiche d'énoncé[183] et les résultats obtenus sont donnés ci-dessous, en ce qui concerne les solutions des équations, obtenues en faisant fonctionner le(s) programme(s) réalisé(s) :

	Solutions à déterminer avec le 1^er^ algorithme – Questions 1 et 2 (partie 2)					***Solutions à déterminer avec le 2^nd^ algorithme – Question 3***			***Solutions à déterminer avec le 1^er^ algorithme et transformation préalable des équations***		
Équation	**1**	**2**	**3**	**7**	**10**	**4**	**5**	**9**	**6**	**8**	**9**
Réponse attendue[184]	-0,75 0,5	0 -2,236*	0,333 -0,318*	0 -18	0 9000	2,646* -2,646*	Pas de solution	2,07 -2,07	5	0 7	2,07 -2,07
Nb élèves	12	12	12	7	7	0	4				
Réponse erronée (1)						2,646					
Nb élèves (1)						2					
Valeur exacte « à la main » (2)						$\sqrt{7}$; $-\sqrt{7}$					
Nb élèves (2)						3					
Absence réponse				5	5	7	8	12	12	12	12

Tableau 228 : Réponses fournies par les élèves à la tâche t_5, séance 3.1 d'Alex

Les douze élèves donnent la réponse correcte et attendue pour les trois premières équations, ce qui montre qu'ils utilisent leur programme (plus ou moins corrigé par le professeur) de façon convenable pour trouver les solutions des équations de la forme $(ax + b)(cx + d) = 0$. L'instanciation de valeurs numériques aux paramètres a, b, c, d n'est pourtant pas immédiate pour certains élèves, comme pour Mathilda, ainsi que le rapportent les extraits suivants :

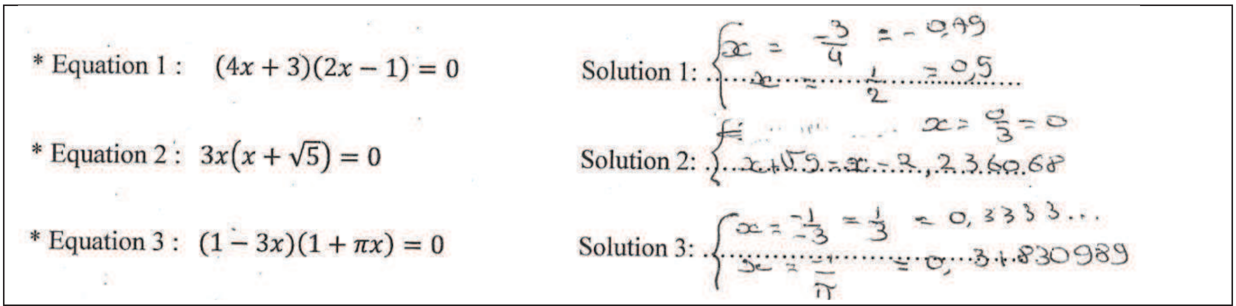
> 122. Al (*Dans le binôme de Mathilda*) : Dis-moi, Mathilda, $3x$ facteur de …. On est bien d'accord que c'est de la forme $ax + b$? Alors $3x$, c'est bien entendu $3x + 0$ … Qu'est-ce que tu me racontes que $b = 1$ … Est-ce que j'ai $3x + 1$? Non ! Et ensuite … dans $x + \sqrt{5}$, c c'est 1 et d c'est $\sqrt{5}$. D'accord ?
> […]
> 126. Al : Alors Mathilda, après quatre points sur $ax + b$, tu continues de penser, quand tu vois $1 – 3x$, que a c'est le premier nombre et b le deuxième …
> 127. Mathilda : Ah oui, d'accord ! C'est 3…
> 128. Al : Comment ?

[183] Un exemple de production d'élève est donné en annexe A41.
[184] Les réponses étoilées sont des valeurs approchées, données par le logiciel qui les propose avec 8 chiffres significatifs. Nous les avons arrondies ici au millième, par commodité de lecture.

> 129.Mathilda : Non, -3 !

Nous retrouvons des difficultés déjà répertoriées pour la situation n°2 et la *reprise* dans cette troisième situation ne semble pas vaine. De ces exemples, nous pouvons dégager une incomplétude de l'environnement technologico-théorique, comme :
- les règles $1\times x = x$ et $0 + x = x$ issues des propriétés des éléments neutres de l'addition et de la multiplication (Mathilda interprète difficilement les coefficients égaux à 0 ou à 1) ;
- la commutativité de l'addition et la conception d'une soustraction comme ajout de l'opposé (Mathilda ne perçoit pas que $1 - 3x = -3x + 1$).

Enfin, pour cette dernière tâche, quelques copies d'élèves (4 sur 12) montrent qu'une rétroaction s'est faite entre le résultat fourni par le programme et les solutions déterminées « à la main » comme la copie d'Iris par exemple ci-dessous. En effet, les solutions sont données de deux façons : sous forme de valeur exacte (sauf pour la seconde équation où la solution $-\sqrt{5}$ n'apparaît pas) et sous forme d'écriture à virgule, exacte ou approchée, telle que la donne le logiciel Algobox.



Production d'Iris

Figure 229 : Production d'une élève d'Alex montrant la comparaison entre les solutions obtenues en environnements papier-crayon et algorithmique

Pour finir, aucun élève ne donne les réponses exactes pour la tâche t_5 puisque les deux programmes obtenus sont erronés. Signalons que trois élèves ont donné les valeurs exactes des solutions de l'équation $x^2 = 7$, sans doute parce qu'ils les connaissent par ailleurs.

11.3.1.3 Étape E3

Reprenant le découpage de la séance selon l'étape E1, nous analysons les évolutions du milieu, du contrat, du temps didactique et des topos élève et professeur.

Phase 1 : Accueil et mise en route du logiciel

Comme pour la situation n°2, la séance se déroule en salle informatique, en demi-classe, et les élèves sont placés par deux ou trois devant un ordinateur. L'enseignant aide les élèves à installer le logiciel Algobox sur les postes informatiques et distribue les fiches d'énoncé dont le titre précise : *l'objectif est de réaliser sur Algobox des algorithmes permettant de résoudre les équations ci-dessous* (cf. annexe A23). Il met ainsi en place les premiers éléments du milieu. Les élèves prennent rapidement connaissance de l'énoncé et cherchent à programmer immédiatement. L'enseignant rappelle alors qu'une recherche en papier-crayon s'avère nécessaire et ajoute au milieu *l'envers de la feuille comme feuille de brouillon* (ligne 6). De cette façon, l'enseignant renvoie les élèves à la tâche algorithmique, qui précède celle de programmation. Il précise également ainsi le contrat didactique en indiquant que le programme réalisé sur Algobox doit s'accompagner d'une recherche en environnement papier-crayon. Dans cette phase, le topos du professeur consiste en la mise en place des premiers éléments de la situation et celui de l'élève à les accepter.

Phase 2 : Présentation de la situation n°3

Alex procède à un *tissage* (Bucheton, 2004) avec la situation n°2, en rappelant l'algorithme réalisé pour la résolution des équations du premier degré. En faisant appel à la *mémoire didactique* (Matheron, 2000) de la classe, il rappelle brièvement le but de l'algorithme déjà conçu, produire les solutions des équations, puis précise le contrat de cette nouvelle séance, en explicitant qu'est attendue la conception d'algorithmes pour résoudre des équations du second degré. Il donne une première piste concernant la question 1 de l'énoncé, *réaliser un algorithme sur le logiciel Algobox permettant de résoudre les trois premières équations, sans les transformer au préalable,* en indiquant de réfléchir sur la *nature* de ces équations, de chercher leurs *ressemblances*, et qu'elles sont *pareilles* (ligne 11). Au milieu installé en phase 1 vient s'ajouter les concepts d'équation du second degré, de résolution d'équation et d'algorithme. Du point de vue du topos, la responsabilité du professeur est de présenter la tâche globale aux élèves, de leur dévoluer et celle des élèves de s'y engager.

Phase 3 : Première phase de recherche (tâches t'_1 et t'_2)

Alex indique aux élèves qu'ils connaissent des techniques de résolution « à la main » par la formulation : « *vous avez déjà résolu des tonnes d'équations de ce type-là sans algorithmique* » (ligne 12) et les sollicitent pour indiquer le *théorème pour résoudre ces équations* (ligne 16). Il cherche manifestement à faire avancer le temps didactique, considérant que les connaissances à mettre en œuvre font partie des acquis des élèves. Le topos du professeur est de faire appel à la *mémoire didactique* (Matheron, 2000) des élèves en évoquant des tâches déjà effectuées et celui de l'élève de se remémorer ces tâches et de faire le lien avec la tâche présente à effectuer. À 9 minutes du début de la séance, Alex procède à l'institutionnalisation de la forme des trois premières équations : « *les trois premières équations avec astérisques, ce sont des produits de facteurs* ». Cependant, il ne donne pas à l'ensemble de la classe la forme générique $(ax + b)(cx + d) = 0$, laissant aux élèves la charge de la déterminer. Sous forme d'oral dialogué, il rappelle tout d'abord la technologie « *pour qu'un produit de facteurs soit nul, il faut que l'un des deux soit nul* » (ligne 25) servant de justification à la technique générale de résolution des équations-produits, technique qu'il rappelle en utilisant l'exemple de la première équation, $(4x + 3)(2x - 1) = 0$, et en indiquant simplement : « $4x + 3 = 0$ *ou* $2x - 1 = 0$ » (ligne 30). Le topos du professeur consiste à guider les élèves vers la modélisation des trois premières équations du second degré et vers leur résolution, celui de l'élève de dégager ce qui est commun à ces trois équations afin de procéder à cette modélisation et cette résolution. Durant cette phase, le milieu s'enrichit des interactions entre chaque groupe et l'enseignant, celui-ci gérant l'hétérogénéité en amenant à chacun les éléments nécessaires à leur avancement dans la tâche. C'est ainsi qu'au groupe de Mathilda et de Mélanie (lignes 14 à 25), il rappelle la règle [$A \times B = 0 \Rightarrow$

$A = 0$ ou $B = 0$], à celui de Jean-Stéphane, il prodigue des encouragements pour commencer à programmer, et pour celui de Mathilde, il aide à déterminer la forme générique.

Phase 4 : Deuxième phase de recherche (tâches t'_3 et t'_4)

L'enseignant ayant circulé de groupe en groupe au cours de la phase 2 pour valider la forme des trois premières équations et la résolution littérale de l'équation $(ax + b)(cx + d) = 0$, la plupart des élèves s'engagent dans la recherche simultanée de l'algorithme et du programme sous Algobox. Certains groupes mènent cette tâche en toute autonomie (lignes 55 à 84), d'autres sollicitent l'aide du professeur (lignes 85, 89 à 93, 94 à 101). Le milieu voit s'ajouter de nouvelles interactions entre l'enseignant et chacun des groupes mais aussi des éléments d'algèbre et d'algorithmique. Citons par exemple :

- la résolution de l'équation littérale $ax + b = 0$ (ligne 67) ;
- le concept de solution d'une équation (lignes 82-84, 85, 91- 92) ;
- la structure et les instructions élémentaires d'un programme, comme la déclaration d'une variable informatique (ligne 93), la lecture d'une variable (ligne 56), l'affichage d'une variable (lignes 74, 81), l'affectation d'une valeur à une variable (lignes 93, 101), la structure alternative (lignes 57, 89, 97-99).
- la syntaxe du langage Algobox pour le signe ≠ (ligne 86-88).

Nous retrouvons, dans le topos du professeur, l'adaptation nécessaire devant l'hétérogénéité de sa classe, comme dans la phase précédente, ainsi que la clarification des notions ci-dessus. Quant au topos des élèves, reste à leur charge la recherche de l'algorithme, même si le professeur apporte son aide aux plus fragiles.

Phase 5 : Institutionnalisation relative aux tâches t'_1 et t'_2. Éléments de transposition de la résolution

Cette courte phase consiste en un bilan qu'effectue le professeur, en fixant la forme de l'équation générique $(ax + b)(cx + d) = 0$ et en donnant les deux solutions de cette équation paramétrée lorsque a et c sont non nuls. Cette intervention provoque une avancée du temps didactique. Notons que l'enseignant ne revient pas sur la technique, ni la technologie relative à cette résolution. Il enchaîne alors sur la *transposition informatique* (Balacheff, 1994) de cette résolution « à la main » et indique aux élèves un procédé pour que le logiciel affiche les deux solutions de l'équation (cf. étape E_2), répondant ainsi aux difficultés de certains groupes. Relativement à leur topos respectif, il revient au professeur d'expliciter les différences entre la résolution de l'équation « à la main » et les contraintes de programmation, et il est à la charge de l'élève de les comprendre. Le milieu se voit ainsi augmenté d'une technique de programmation, pour afficher successivement les deux solutions de l'équation.

Phase 6 : Quatrième phase de recherche (tâches t'_3-t'_4 et t'_5)

Après la mise au point de l'enseignant en phase précédente, la recherche reprend. Pour certains élèves, il s'agit de poursuivre les tâches t'_3 et t'_4, utilisant à profit l'institutionnalisation de la phase 5, pour d'autres de s'engager dans la tâche t'_5. Cette dernière tâche, conçue au départ pour utiliser le programme réalisé et obtenir ainsi les solutions des équations, est transformée par certains élèves (ligne 82-84) et par Alex lui-même (ligne 106) pour vérifier la validité des programmes. En effet, en ligne 84 par exemple, où l'élève, voyant s'afficher à l'écran les solutions -0,75 et 0,5 pour la première équation $(4x+3)(2x-1)=0$, s'exclame : « *Alors … ça ferait … -3 sur 4 … -0,75 donc c'est bon !* ». Sa démarche est de contrôler la (première) solution donnée à l'écran en réalisant probablement mentalement le calcul de la solution de $4x+3 = 0$, sous la forme $\frac{-3}{4}$. Il identifie ensuite $\frac{-3}{4}$ à -0,75 pour conclure que son programme fonctionne. Ainsi dans cette phase, le milieu s'enrichit des programmes des élèves mais également du retour sur les équations où les objets les composant sont interrogés. Le topos de l'enseignant se compose de la validation des programmes et de leur correction, comme pour la phase 4. Notons que le professeur prend la main, à ce stade de la séance, pour corriger lui-même les programmes qui ne fonctionnent pas encore. Sans doute cette posture permet-elle aux élèves d'effectuer la tâche t'_5, même si la détermination complète du programme a échoué.

Phase 7 : Cinquième phase de recherche (tâches t_1 à t_5)

Durant les sept dernières minutes de la séance, pendant que trois groupes terminent les tâches t'_i $(3 \leq i \leq 5)$, deux autres groupes débutent la tâche globale de conception d'un algorithme de résolution des équations du type $x^2 = a$ (tâches t_i, $1 \leq i \leq 5$). Nous avons vu en étape E_2 que si le groupe de Jean-Stéphane détermine la forme générique de ces équations et leur résolution, le groupe de Lucas semble dans une conception *pseudo- structurale* de ces équations. En effet, en guise de forme générique de l'équation $x^2 = 7$, Lucas propose $a^2 + b = 0$, puis pour résoudre $x^2 = 4$, il donne les solutions $\sqrt{4}$ et -4, et enfin pour résoudre $x^2 = -4$, il commence par transformer l'équation en $x^2 + 4 = 0$ (lignes 150 à 163). Le milieu comporte les concepts de carré, de racine carrée, mais ceux-ci ne sont pas acquis de la même manière par tous. Bien que la résolution de cette équation – sur des valeurs numériques – soit au programme de la classe de troisième du collège (cf. §7.3), sa *reprise* en classe de seconde n'est pas vaine, et un temps supplémentaire aurait été nécessaire pour que cette tâche soit profitable à tous.

Synthèse de l'étape E_3

Phases	Début numéro ligne	Début instant	Fonction	Évolution du milieu	Temps didactique / Topos du prof	Topos de l'élève
1	1	00 : 00	- Accueil et mise en route du logiciel. - Distribution de la fiche d'énoncé	- Logiciel Algobox - Feuille d'énoncé avec équations - Notion d'algorithme et de résolution d'équations - Feuille brouillon	- Mettre en place les premiers éléments de la situation	Accepter la situation n°3

2	7	04 : 30	- Tissage avec la situation n°2 - Tissage avec la leçon en cours (polynômes du second degré) - Présentation de la situation n°3 - Lancement sur la tâche t'_1	- Équations du second degré - Résolution de ces équations	- Accompagner les élèves dans la dévolution de la situation n°3	- S'approprier l'enjeu de la situation n°3 - S'engager dans la première question
3	12	06 : 26	Première phase de recherche : tâches t'_1 et t'_2	- Interactions groupe/prof - Technique/ technologie de résolution des équations- produits nuls	- Guider les élèves vers la modélisation des trois premières équations du second degré et vers leur résolution - S'adapter à l'hétérogénéité des groupes	Dégager la forme commune des trois équations afin de procéder à leur généralisation et à leur résolution
4	55	11 : 23	Deuxième phase de recherche : tâches t'_3 et t'_4 (simultanément)	- Résolution de l'équation littérale $ax + b = 0$ - Solution d'une équation - Structure d'un algorithme / d'un programme	- Clarifier les concepts ci-contre	- Déterminer l'algorithme de résolution des équations de la forme $(ax + b)(cx + d) = 0$ - Programmer l'algorithme sous Algobox
5	102	20 : 18	- Institutionnalisation de la résolution de l'équation littérale (t'_2) - Éléments pour la transposition informatique de la résolution	- Résolution de l'équation littérale $(ax + b)(cx + d) = 0$ - Variable informatique/ Affectation d'une valeur à une variable / Affichage d'une variable	- Clarifier les concepts propres à la programmation ci-contre - Préciser une technique pour programmer les deux solutions de l'équation	- Comprendre les différences entre la résolution « à la main » et les contraintes de programmation
6	106	24 : 10	Troisième phase de recherche : tâches t'_3 et t'_4 (simultanément) et t'_5.	- Algorithme/ programme de résolution des équations de la forme $(ax + b)(cx + d) = 0$ - Objets d'une équation (paramètres, inconnue, solution)	- Aider les élèves en retard - Valider ou invalider les algorithmes/ programmes proposées par les élèves	- Obtenir les solutions des différentes équations à l'aide du programme réalisé
7	135	37 : 10	Quatrième phase de recherche : tâches t_1 à t_5			

Tableau 230 : Récapitulatif du milieu, du temps didactique et des topos (séance 3.1 d'Alex)

11.3.1.4 Étape E_4

Pour cette séance, nous relevons un *événement didactique* (Bronner, 2006, 2009) problématique, relatifs aux gestes du professeur dans sa gestion de l'algorithmique face

aux difficultés des élèves et que nous nommons ***l'avènement des conditions*** des équations du type $(ax + b)(cx + d) = 0$.
Cet événement se rapporte à la première tâche globale à effectuer, soit concevoir un algorithme de résolution des équations du type $(ax + b)(cx + d) = 0$. Nous avons vu en étape E_2 que le souci d'Alex est de présenter de solutions sous la forme $\frac{-b}{a}$ et $\frac{-d}{c}$, avec la précision que ces quotients existent seulement lorsque a et c sont non nuls. Or, le contrat n'est pas clair ici. Il est nécessaire de savoir à quelle *famille* se réfère le type d'équations $(ax + b)(cx + d) = 0$: s'il s'agit d'équations du second degré, la condition « a et c sont non nuls » est un préambule à la recherche de l'algorithme. Cet algorithme résoudra alors toute *instance* de la famille d'équations du second degré de la forme $(ax + b)(cx + d) = 0$ et renverra (par exemple) l'exécutant du programme à un autre algorithme si l'équation n'est pas du second degré. Autant est-il licite d'évoquer le cas où $a = c$, pour les équations du premier degré de la forme $ax + b = cx + d$, (puisque l'équation reste du premier degré dans ce cas), autant la considération de $[a = 0$ ou $c = 0]$ donne une équation qui, d'emblée, n'est pas du second degré. Bien entendu, cette subtilité n'est pas perçue par les élèves d'Alex et cette remarque pourrait sembler superflue si elle ne posait pas de problème de sens et de logique. En effet, nous relevons :
- un problème de sens, puisque les objets sur lesquels les élèves travaillent sont mal définis (équations de quel degré ?) ;
- un problème de justesse mathématique. Il est fort probable qu'Alex n'ait pas voulu s'encombrer des cas particuliers des équations du premier degré dans la considération des équations du type $(ax + b)(cx + d) = 0$. Pour simplifier la tâche des élèves, il a dû considérer que ces équations n'avaient pas de solution dès que a ou c est nul (ce qui est faux)[185]. Il a sans doute voulu faire programmer la proposition suivante,

$$(P_1)\begin{cases} Si\ [a \neq 0\ et\ c \neq 0]\ alors\ \left[x_1 = \frac{-b}{a}; x_2 = \frac{-d}{c}\ et\ afficher\ x_1; x_2\right] \\ \quad Si\ [a = 0\ ou\ c = 0]\ alors\ [\ afficher\ "pas\ de\ solution"] \end{cases}$$

- un problème de logique mathématique. En ligne 125, Alex corrige lui-même le programme des élèves pour obtenir le programme ci-dessous.

[185] Alex a déjà procédé de cette manière, lors de la situation n°2, pour l'équation $ax + b = cx + d$. Lorsque $a = c$, il a choisi de ne pas distinguer les cas $b = d$ et $b \neq d$ pour ne pas insérer une série de boucles de tests imbriquées dans l'algorithme. Lorsque $a = c$, le programme affichait alors « l'équation n'a pas de solution ». Il est possible qu'il ait voulu copier cette démarche.

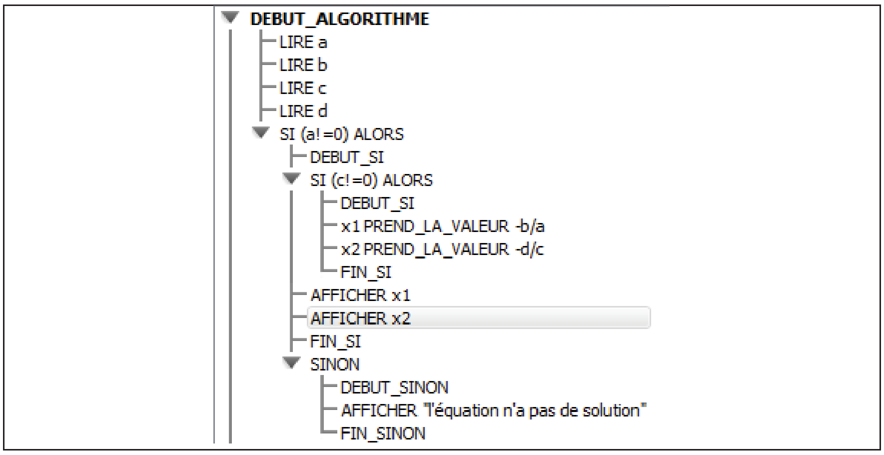


Figure 231 : Programme d'un élève corrigé par le professeur Alex (séance 3.1)

Or, il n'y pas équivalence entre la proposition (P_1) précédente et la proposition (P_2) qui suit et qui représente la proposition programmée ci-dessus, une fois les boucles de test « mises à plat » :

$$(P_2)\begin{cases} Si\ [a \neq 0\ et\ c \neq 0]\ alors\ \left[x_1 = \frac{-b}{a}; x_2 = \frac{-d}{c}\ et\ afficher\ x_1; x_2\right] \\ Si\ [a \neq 0\ et\ c = 0]\ alors\ [\ afficher\ x_1; x_2\ (non\ définis)] \\ Si\ [a = 0\ ]\ alors\ [\ afficher\ "pas\ de\ solution"] \end{cases}$$

Étant donné que les élèves ne considèrent pas d'équations telles que $[a = 0\ ou\ c = 0]$, le programme ci-dessus leur donne une réponse juste, bien que le programme ne soit pas entièrement correct.

Nous pouvons interpréter que l'enseignant a voulu, par souci de simplification pour les élèves, et pour ne pas avoir à manipuler tous les cas particuliers, faire programmer la proposition (P_1). Puis, en raison d'une *genèse instrumentale* (Rabardel, 1995) trop sommaire, la *transposition informatique* de cette proposition l'a conduit à la proposition (P_2). Comme déjà mentionné en analyse de la situation n°2, sauf parcours particulier, les professeurs de mathématiques du secondaire n'ont pas reçu dans leur cursus de formation spécifique en algorithmique et ils manquent de *repères didactiques* (Haspekian, 2005) pour mener des situations mêlant mathématiques et algorithmique. En partant des savoirs *à enseigner* et savoirs *pour enseigner*, Chevallard et Cirade (2010) ont également développé les concepts de praxéologies *pour la profession* qui englobent les praxéologies *pour enseigner* (dont les praxéologies *didactiques* font partie), elles-mêmes comportant les praxéologies *à enseigner*. Citons leurs propos :

> Or, pour enseigner des mathématiques, il y a, parmi les savoirs pertinents, des savoirs *mathématiques* qui ne sont pas des mathématiques *à enseigner* : le premier outil pour enseigner des mathématiques, *ce sont les mathématiques elles-mêmes*. Pour cette raison, nous placerons d'abord dans une catégorie unique, ouverte, celle *des praxéologies pour la profession*, l'ensemble des praxéologies dont la profession peut avoir avantage à s'équiper. Bien entendu, cette catégorie contient la sous-catégorie des praxéologies *à enseigner* ; mais elle est loin de s'y réduire : au plan mathématique, elle inclut ainsi les connaissances indispensables pour *identifier* les praxéologies à enseigner. (p.3)

Par exemple, les règles de la logique et la structure d'un algorithme vues ci-dessus font partie des savoirs pertinents *pour enseigner* des concepts d'algorithmique en mathématiques. Pour conclure, Alex suit les prescriptions du programme institutionnel et s'adapte en s'auto-formant. Mais l'auto-formation a ses limites et si une initiation à l'algorithmique doit perdurer dans l'enseignement des mathématiques et si les professeurs de mathématiques continuent à en avoir la charge, la *profession* trouverait *avantage à s'équiper* de savoirs algorithmiques. Une formation initiale et continue devrait être installée pour ce domaine : *l'équipement praxéologique du professeur* (Chevallard et Cirade, ibid.) en serait alors complété.

11.3.2 Classe d'Alex : Séance 3.2

Analysons cette toute dernière séance, toujours selon la même méthodologie. La transcription sur laquelle nous nous appuyons se situe en annexe A40. Seize élèves sont présents, répartis en huit binômes, chacun de ces binômes ayant un poste informatique à sa disposition.

11.3.2.1 Étape E_1

Nous conservons ici les notations de la séance 3.1, à savoir t'_1 à t'_5, pour les tâches relatives à la catégorie d'équations $(ax + b)(cx + d) = 0$ et t_1 à t_5, pour les tâches relatives à la catégorie d'équations $x^2 = a$. Également, les différentes phases font référence à des interventions du professeur mais certains binômes peuvent être en retard ou en avance sur les phases annoncées. En particulier, tous ne s'engagent pas dans la phase 8.

Phase	Fonction	Forme du travail	Temps	Lignes de transcription
Phase 1	- Accueil et distribution de la fiche d'énoncé - Tissage avec la situation n°2 - Première phase de recherche : résolution des premières équations « à la main » (tâche de type T_0)	Collectif/ Individuel	00 :00 à 07 :08 **Durée : 7min08s**	1 à 14
Phase 2	- Correction de la première équation - Reprise sur les équations-produits nuls	Collectif	07 :08 à 08 :45 **Durée : 1min37s**	15 à 17
Phase 3	Deuxième phase de recherche : tâches t'_1 et t'_2	Binômes	08 :45 à 11 :40 **Durée : 2min55s**	18 à 22
Phase 4	Institutionnalisation de la forme des équations (t'_1) et résolution de l'équation littérale (t'_2)	Collectif	11 :40 à 13 :38 **Durée : 1min58s**	23 à 40
Phase 5	- Mise en route du logiciel Algobox - Éléments pour la transposition informatique de la résolution	Binômes/ Collectif	13 :38 à 18 :39 **Durée : 5min01s**	41 à 51
Phase 6	Troisième phase de recherche : tâches t'_3 et t'_4.	Binômes	18 :39 à 25 :00 **Durée : 6min21s**	52 à 65
Phase 7	- Quatrième phase de recherche : tâche t'_5 - Bilan sur la question 2 (reconnaissance des équations-produits nuls)	Binômes/ Collectif	25 :00 à 36 :00 **Durée : 11min**	66 à 107
Phase 8	Cinquième phase de recherche : tâches t_1 à t_5	Quelques binômes	36 :00 à 45 :10 **Durée : 9min10s**	108 à 144

Tableau 232 : Les différentes phases de la séance 3.2 d'Alex

11.3.2.2 Étape E_2

L'OM effective de la séance est analysée en s'appuyant sur la transcription de la séance (cf. annexe A40), sur la fiche d'énoncé complétée par les élèves (cf. A23) ainsi que sur l'analyse de la trame projetée TP3 (cf. §10.5.3).

Types de tâches observées

En raison d'une panne du réseau informatique, Alex lance les élèves sur la tâche de type T_0, *résoudre les premières équations en environnement papier-crayon*, et sur la réflexion de la réalisation d'un algorithme conceptuel de résolution de ces équations. Il présente ainsi la tâche globale de la situation n°3 : « *une fois que j'ai rentré mon algorithme sur Algobox, être capable de résoudre le plus d'équations possibles, parmi les dix que vous avez. C'est ça l'enjeu* » (ligne 1). Rapidement, il découpe cette tâche globale en proposant la première sous-tâche t'_1, *reconnaître que les équations données peuvent s'écrire sous la forme générale à déterminer* $(ax + b)(cx + d) = 0$, de la façon suivante :
- « *Avoir en tête quel type de choses je pourrais programmer sur Algobox* » (ligne 1) ;
- « *Il faut essayer de formaliser ces trois équations pour les programmer* » (ligne 11) ;
- « *Vous allez réfléchir à quelle serait la forme générale de ce type d'équations, égales à zéro* » (ligne 19).

Une fois la forme générale déterminée, la reconnaissance des équations de cette forme est questionnée et la tâche, demandée en question 2 de la fiche élève, est reprise par l'enseignant : « *Ce que vous avez à faire, c'est allez voir les autres qui correspondent exactement à cet algorithme* » (ligne 103).

Une douzaine de minutes après le début de la séance, Alex propose d'effectuer la tâche t'_2, *résoudre sous forme littérale l'équation* $(ax + b)(cx + d) = 0$*,* en s'appuyant sur la résolution de la première équation :

> 27. Al : […] Là (*en montrant la résolution de la première équation au tableau*), qu'est-ce que vous avez fait … vous avez transposé. Ici, vous avez la première solution « -3 sur 4 ». Ça va être quoi, par rapport à celle-là (*en montrant l'équation (ax + b)(cx + d) = 0 au tableau*) ?

Les tâches t'_3 et t'_4 apparaissent, initiées par l'enseignant sous la forme « *Voilà ce qu'il va falloir essayer de programmer sur Algobox* » (ligne 39), « *Bon, allez-y sur Algobox* » (ligne 40), « *Maintenant vous me programmez ça* » (lignes 41-51).

La tâche t'_5, *utiliser le programme réalisé pour résoudre les équations proposées*, est également inscrite dans la fiche élève et est effectuée, d'une part pour vérifier, sur la première équation, que le programme fonctionne correctement, et d'autre part pour déterminer les solutions des autres équations de même type.

La prescription pour la seconde tâche globale, *concevoir un algorithme pour résoudre les équations de la forme* $x^2 = a$*,* est donnée par Alex à dix minutes de la fin de la séance, mais elle n'est pas suivie d'effet.

> 107. Al : […] Vous voyez que ces trois équations avec astérisques plus la 7 et la 10 sont effectivement du même acabit. D'accord ? Le problème, c'est qu'il en reste encore 5 autres qu'on ne peut pas résoudre par cet algorithme-là. Donc maintenant le but du jeu, c'est d'essayer de trouver un algorithme capable de résoudre, par l'exemple l'équation 4.

Certains groupes ne l'effectuent pas, parce qu'ils n'ont pas terminé le premier algorithme demandé, d'autres parce qu'ils ne parviennent pas à comprendre ce qui est attendu.

Techniques et environnement technologico-théorique observés

- ***Organisations mathématiques relatives à la tâche de type T_0 : Résolution « à la main » des équations***

Nous commençons par cette tâche, puisqu'elle est explicitement demandée par le professeur en début de séance. Certains élèves comme Camille (cf. ligne 10) ou encore Eva ou Jimmy, comme le montre leur copie ci-dessous, peinent pour la résolution des premières équations.

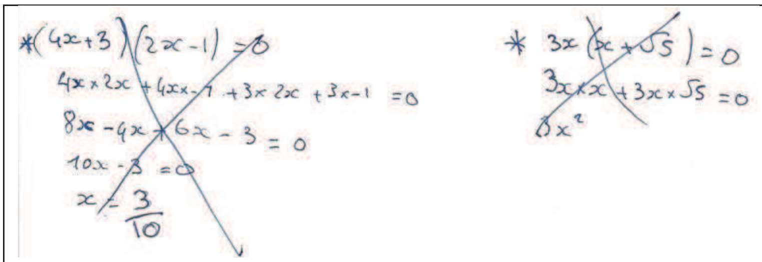
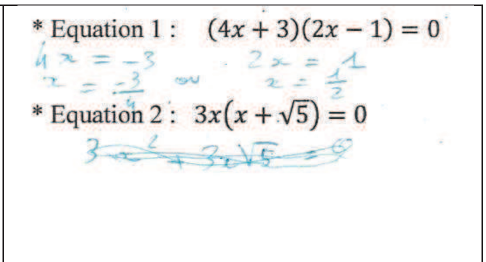
	
Production d'Eva	**Production de Jimmy**

Figure 233 : Extrait de productions d'élèves montrant les difficultés à résoudre la tâche de type T_0 (séance 3.2 d'Alex)

Ces élèves utilisent comme technique le développement de l'expression algébrique puis sa réduction. La copie d'Eva montre des développements corrects mais le calcul « $4x \times 2x = 8x$ » est erroné, entraînant un résultat faux. Notons la particularité de la production de Jimmy, qui identifie un produit de facteurs nul, lorsqu'il est présenté avec les deux couples de parenthèses et des nombres déterminés entiers (équation 1) alors que la seconde équation est développée. Les *ostensifs* semblent ici un obstacle pour cet élève, qui ne reconnait pas un produit de facteurs, peut-être en raison de l'absence de parenthèses pour le premier facteur mais aussi de la présence de la racine carrée dans le second facteur.
C'est sans doute l'intervention du professeur en ligne 14 : « *C'est le théorème de troisième, pour qu'un produit de facteurs soit nul, il faut qu'il y en ait l'un des deux qui soit nul* », qui fait réagir les élèves et barrer leurs premiers écrits (cf. figure 254 ci-dessus). Alex justifie la technique par cette technologie, qui aurait d'ailleurs due être énoncée dans le sens réciproque, *si un produit de facteurs est nul, c'est que l'un au moins de ces facteurs est nul*. Il ajoute à cette justification des arguments pour tenter de convaincre les élèves de ne pas développer :

> 15. Al : Évidemment, c'est pas la peine de développer, sinon vous allez au casse-pipe ! Alors, gardez cette forme-là, sous la forme d'un produit de facteurs… parce que c'est ça l'important, un produit de facteurs, parce que ça, c'est du premier degré (*il montre $4x + 3$*), ça c'est du premier degré (*il montre $2x - 1$*), c'est plié ! Si vous développez ça, vous allez au massacre... […] En développant, on trouve $8x^2 + 2x - 3 = 0$ (*il l'écrit au tableau*) et quand on regarde dans le blanc des yeux cette expression… vous avez beau avoir des lentilles colorées, c'est pas très attirant. D'accord ? Alors, ça (*il montre $8x^2 + 2x - 3 = 0$*), c'est inexploitable !

Ses arguments font appel à des savoirs enseignés au collège : « toute équation du premier degré est soluble par addition ou multiplication, par transposition, etc.», à la règle énoncé ci-dessus (si un produit de facteurs est nul, c'est que l'un au moins de ces facteurs est nul) et au constat de la forme développée d'une équation du second degré est *inexploitable*, du moins par les techniques connues en classe de seconde. Il est à noter que sur 16 élèves, une dizaine résout correctement les trois premières équations « à la main ».

Bien que l'enseignant ait demandé de résoudre seulement les trois premières équations « à la main », quelques élèves (8 sur 16) résolvent les autres équations de la fiche distribuée. Recensons leurs productions par type d'équations.

- Pour les équations 4, 5 et 9 ($x^2 = 7$, $x^2 = -4$ et $x^2 = 2{,}07^2$), nous relevons trois productions, révélatrices des conceptions de ces huit élèves :

Equation 4 : $x^2 = 7$ $x^2-7=0$ Equation 5 : $x^2 = -4$ $x^2+4=0$ $(x+2)(x-2)$	Equation 4 : $x^2 = 7 \iff x = \sqrt{7}$ Equation 5 : $x^2 = -4 \iff x = -\sqrt{4}$
Production de Rebecca (1)	**Production de Clara (1)**

Equation 4 : $x^2 = 7$	Solution 4: …$x = \sqrt{7}$ ou $x = -\sqrt{7}$
Equation 5 : $x^2 = -4$	Solution 5: …impossible un carré n'est pas négatif.
Equation 9 : $x^2 = (2{,}07)^2$	Solution 9: …$x = 2{,}07$…………
Production de Mélanie	

Figure 234 : Extrait de productions d'élèves montrant la résolution des équations 4, 5 et 9 (séance 3.2 d'Alex)

Rebecca a une conception *pseudo-structurale* de ce type d'équations, comme en témoigne ses tentatives de résolution des équations 4 et 5. Sa technique consiste à donner une équation équivalente dont l'un des membres est nul puis à transformer par une identité remarquable. Elle ne parvient pas à transformer ces deux équations : nous pouvons percevoir une conception **CP** (carré parfait) de Bronner (1997, cf. §2.5) où 7 ne possède pas de racine carrée. Comme déjà dit pour la situation n°1, la conjonction des deux objets, équation et racine carrée, présente des difficultés particulières, où les conceptions erronées viennent interférer sur ces deux objets. (cf. §11.1.4)

Clara possède quant à elle une conception **CF** (ibid.) des racines carrées, utilisant pour résoudre ces équations un théorème en actes « pour éliminer le carré, on prend la racine carré ».

Mélanie indique par des tirets qu'elle met les trois équations 4, 5 et 9 dans la même catégorie. Elle semble dans une conception **CN** (nombre) de la racine carrée au vu de ses deux premières résolutions. Cependant l'équation 9 montre que sa conception des équations du second degré reste incomplète, la présence de l'*ostensif* « ² » dans chaque membre de l'équation lui fait utiliser une technique d'équilibrage de l'équation, comme elle le ferait pour le premier degré, en supprimant le carré, à gauche et à droite du signe d'égalité.

- Pour les équations 6 et 8 ($x^2 - 10x + 25 = 0$ et $7x - x^2 = 0$), les productions des huit élèves sont justes et similaires à celle de Clara ci-dessous :

Equation 6 : $x^2 - 10x + 25 = 0$

$\Leftrightarrow x^2 - 10x + 5^2 = 0$

$\Leftrightarrow (x-5)^2 = 0$

$\Leftrightarrow x = 5$

Equation 8 : $7x - x^2 = 0$

$\Leftrightarrow x(7-x) = 0$

$\Leftrightarrow x = 0$ ou $x = 7$

Production de Clara (2)

Figure 235 : Extrait de production d'élève montrant la résolution des équations 6 et 8 (séance 3.2 d'Alex)

Ces élèves montrent une bonne maîtrise des techniques de transformation d'une équation du second degré soit par recherche d'un facteur commun, soit par reconnaissance d'une identité remarquable dont ils connaissent la forme factorisée équivalente. Ils semblent avoir acquis que la forme la plus adéquate pour résoudre une équation polynomiale de degré 2 est la forme factorisée, lorsque celle-ci est possible.

- ***Organisations mathématiques relatives aux tâches t'_1 et t_1 (de type T_1) : Reconnaissance et écriture littérale d'un type d'équations***

Rappelons la technique pour reconnaître la forme générique des premières équations, donnée en analyse a priori : *repérer que l'équation est sous la forme d'un produit nul de deux facteurs d'expressions algébriques du premier degré* puis *substituer les nombres déterminés par une lettre, autre que x* (cf. § 9.4.3). La production de Rebecca ci-dessous montre que cette technique est incomplète, puisqu'il y manque une uniformisation des lettres désignant les paramètres.

* Equation 1 : $(\overset{a}{4}x + \overset{b}{3})(\overset{c}{2}x - \overset{d}{1}) = 0$ Solution 1: ...$x_1 = -0{,}75$ et x_2...

$\begin{cases} 4x+3=0 \\ 2x-1=0 \end{cases}$ $\begin{cases} x = \frac{-3}{4} \\ x = \frac{1}{2} \end{cases}$

* Equation 2 : $\underset{a}{3x}(x + \underset{b}{\sqrt{5}}) = 0$ Solution 2: $x_1 = 0$.....$x_2 = -\sqrt{5}$.......

$\begin{cases} 3x=0 \\ (x+\sqrt{5})=0 \end{cases}$ $\begin{cases} x=\frac{0}{3} \\ x=-\sqrt{5} \end{cases}$

2 facteurs = 0

$(ax+b)(cx+d)=0$

$\begin{cases} ax+b=0 \\ cx+d=0 \end{cases}$ $\begin{cases} x = \frac{-b}{a} \\ x = \frac{-d}{c} \end{cases}$

$ax(x+b)=0$

$\begin{cases} ax=0 \\ x+b=0 \end{cases}$ $\begin{cases} x = \frac{0}{a} \\ x = -b \end{cases}$

Production de Rebecca (2)

Figure 236 : Production d'une élève d'Alex montrant l'engagement dans la tâche t'_1 (séance 3.2)

Les lettres indiquées au-dessus ou au-dessous des équations 1 et 2 montrent que l'élève a reconnu un produit de deux facteurs égal à zéro (noté « *2 facteurs = 0* »). En revanche, elle n'a pas reconnu la même forme pour ces deux équations. Sans doute est-elle gênée, dans la seconde équation par l'absence des *ostensifs* 0 et 1, donnés ici en gras, dans l'équation 2 : $(3x + \mathbf{0})(\mathbf{1}x + \sqrt{5}) = 0$. Ces difficultés montrent une insuffisance du bloc *logos* associé, relativement aux propriétés des éléments neutres de l'addition et de la multiplication. Pour Rebecca, ces équations ne sont pas du même type ; elle le dit en ligne 24, lors de son intervention :

> 23. Al : […] la deuxième équation, c'était $3x(x+\sqrt{5})=0$ (*il l'écrit au tableau*). Donc vous voyez une différence, déjà, par rapport à ce qui précède, qu'est-ce qui se passe … dans le premier facteur ? Rebecca ?
> 24. Rebecca : Il n'y a pas de « + b » ou « – b ».
> 25. Al : Vous avez entendu, en plus ça doit vous aider, il n'y a pas le fameux « + b ». Donc dans ce cas-là, vous avez $b = 0$.

La dernière phrase du professeur « *Donc dans ce cas-là, vous avez b = 0* » est loin d'être une évidence pour Rebecca, qui a séparé les équations 1 et 2 en deux familles distinctes. Notons néanmoins que Rebecca est capable de résoudre les deux équations littérales qu'elle a elle-même déterminées, en utilisant la propriété d'un produit nul.

La tâche t'_1 de reconnaissance d'équations appartenant à la catégorie des équations-produits nuls est complétée par la question 2 de la fiche élève, où les élèves doivent reconnaitre que les équations 7 et 10 font partie des équations-produits nuls. Treize élèves sur seize répondent convenablement à cette question, ce score n'étant pas étonnant puisque la question est corrigée oralement par l'enseignant (ligne 107).

Pour finir, nous ne disposons pas de traces de la réalisation de la tâche t_1 (reconnaissance des équations du type $x^2 = a$), ni dans les productions d'élèves, ni dans les propos retranscrits. Cependant, certains élèves ont abordé cette tâche, puisqu'ils ont résolu les équations 4 et 5 ($x^2 = 7$ et $x^2 = -4$), comme nous l'avons vu pour la tâche de type T_0. Ils ont alors certainement reconnu ce type d'équations, mais ils ne sont pas passés à la phase de généralisation et de recherche de la forme générique.

- ***Organisations mathématiques relatives à la tâche t'_2 (de type T_2) : Résolution littérale d'une équation***

La technique d'Alex pour expliciter la résolution de l'équation littérale $(ax + b)(cx + d) = 0$ consiste à utiliser un exemple générique et à substituer les nombres déterminés par les lettres, opérant ainsi une généralisation, ce que laisse transparaître l'extrait ci-dessous.

> 25. Al : […] Donc, par extension, à votre avis, quel va être le cas général de ce type d'équations. Julie ?
> 26. Julie : $ax + b$ facteur de $cx + d$ égal zéro.
> 27. Al (*en l'écrivant au tableau*) : Alors ça, vous êtes bien d'accord que si je configure un algorithme avec un type d'équations comme ça, je vais pouvoir, si je note *a, b, c* et *d*, je vais pouvoir trouver les solutions. Vous êtes bien d'accord ? Là (*en montrant la résolution de la première équation au tableau*), qu'est-ce que vous avez fait … vous avez transposé. Ici, vous avez la première solution « -3 sur 4 ». Ça va être quoi, par rapport à celle-là (*en montrant l'équation (ax + b)(cx + d) = 0 au tableau*) ?
> 28.E : …
> 29. Al : C'est quoi la solution de $ax + b = 0$?

30. E : $\frac{-b}{a}$
31. Al : Et l'autre (*en montrant cx + d*) ?
32. E : $\frac{-d}{c}$

Ensuite, de la même manière que pour la séance 3.1, Alex évoque « les conditions », sans préciser exactement de quelles conditions il s'agit, ni ce qu'il advient lorsqu'elles ne sont pas remplies :

35. Al : Alors, c'est quoi les conditions, Fanny ?
36. Fanny : *a* et *c* différents de zéro.
37. Al : Très bien. Alors effectivement, vous devez avoir forcément *a* et *c* différents de zéro. Vous êtes d'accord ?
38. Es : Oui.
39. Al : Voilà ce qu'il va falloir essayer de programmer sur Algobox.
40. Al : Si vous programmez ce type de solutions, il vous faut évidemment nommer ces conditions-là et il n'y a plus qu'à nommer *a, b, c* et *d*. Si *a* et *c* sont différents de zéro, eh bien, c'est terminé, d'accord ? Bon, allez-y sur Algobox.

Lors de l'analyse de la séance 3.1 (cf. §11.3.2, étape E_4), nous avons déjà relevé les conséquences de l'incomplétude de cette démonstration pour l'élaboration de l'algorithme. Nous voyons ci-après dans l'étude des tâches t'_3 et t'_4, que les difficultés sont les mêmes.
Pour finir, notons que la tâche t_2 de résolution de l'équation $x^2 = a$ n'est abordée par aucun élève.

- ***Organisations mathématiques relatives aux tâches t'_3 (de type T_3 : Conception d'un algorithme) et t'_4 (de type T_4 : écriture d'un programme)***

Nous n'analysons ici que les techniques et le bloc *logos* relatifs aux tâches t'_3 et t'_4 de conception de l'algorithme et du programme de résolution des équations $(ax + b)(cx + d) = 0$, puisqu'aucun élève n'a abordé la question des équations de la forme $x^2 = a$. Nous retrouvons les mêmes difficultés que dans la séance 3.1, portant d'une part sur la *transposition* informatique de la résolution littérale de l'équation $(ax + b)(cx + d) = 0$, dont les *actions élémentaires* sont *non-congruentes* avec celles réalisées en environnement papier-crayon, et d'autre part sur les règles de logique apparaissant lors de la considération de la nullité des paramètres *a* et *c*.
Contrairement à la séance 3.1 Alex anticipe les difficultés des élèves en ce qui concerne la *conversion* de la démonstration littérale (où les deux solutions sont déterminées sous la forme $x = \frac{-b}{a}$ ou $x = \frac{-d}{c}$) en *action élémentaire* pour le programme sous la forme $x_1 = \frac{-b}{a}$ et $x_2 = \frac{-d}{c}$, sous les deux conditions $a \neq 0$ et $c \neq 0$. En effet, il leur indique cette technique avant qu'ils ne commencent à programmer :

50. Al : […] Vous avez entendu ce qu'a dit Julie ? Algobox, si vous lui dites, « Affecter à x la valeur –b/a » et la ligne suivante, « Affecter à x la valeur –d/c », le pauvre Algobox va jouer des castagnettes. Donc, pour que vous n'ayez pas de problème, en fait, il y a deux variables à nommer. Vous avez capté ? Il n'est pas capable de reconnaître deux x différents.

Comme déjà signalé pour la séance précédente (cf. 11.3.1), cette remarque est inexacte, et sans doute l'instrumentation d'Alex n'est-elle pas suffisamment achevée pour expliquer différemment ce problème. La technique que l'enseignant propose est valide, mais ce n'est pas la seule technique possible.
Alex indique également une procédure erronée (cf. analyse en étape E_4 de la séance 3.1), en préconisant l'utilisation de boucles imbriquées pour traiter la condition [$a \neq 0$ et $c \neq 0$]. Certains élèves suivent cette préconisation, comme le montre les trois programmes ci-dessous :

```
VARIABLES
  a EST_DU_TYPE NOMBRE
  b EST_DU_TYPE NOMBRE
  c EST_DU_TYPE NOMBRE
  d EST_DU_TYPE NOMBRE
  x1 EST_DU_TYPE NOMBRE
  x2 EST_DU_TYPE NOMBRE
DEBUT_ALGORITHME
  LIRE a
  LIRE b
  LIRE c
  LIRE d
  SI (a!=0) ALORS
    DEBUT_SI
    x1 PREND_LA_VALEUR -b/a
    AFFICHER x1
    FIN_SI
  SI (c!=0) ALORS
    DEBUT_SI
    x2 PREND_LA_VALEUR -d/c
    AFFICHER x2
    FIN_SI
    SINON
      DEBUT_SINON
      AFFICHER "Pas de solutions "
      FIN_SINON
FIN ALGORITHME
```

Production du binôme Julie-Clémentine

```
VARIABLES
  x1 EST_DU_TYPE NOMBRE
  x2 EST_DU_TYPE NOMBRE
  a EST_DU_TYPE NOMBRE
  b EST_DU_TYPE NOMBRE
  c EST_DU_TYPE NOMBRE
  d EST_DU_TYPE NOMBRE
DEBUT_ALGORITHME
  LIRE a
  LIRE b
  LIRE c
  LIRE d
  SI (a!=0) ALORS
    DEBUT_SI
    x1 PREND_LA_VALEUR -b/a
    FIN_SI
    SINON
      DEBUT_SINON
      SI (c!=0) ALORS
        DEBUT_SI
        x2 PREND_LA_VALEUR -d/c
        FIN_SI
        SINON
          DEBUT_SINON
          AFFICHER "pas de sloution"
          FIN_SINON
      FIN_SINON
  AFFICHER x1
  AFFICHER x2
FIN_ALGORITHME
```

date

Production n°1 du binôme Clara-Estelle

```
VARIABLES
  x1 EST_DU_TYPE NOMBRE
  x2 EST_DU_TYPE NOMBRE
  a EST_DU_TYPE NOMBRE
  b EST_DU_TYPE NOMBRE
  c EST_DU_TYPE NOMBRE
  d EST_DU_TYPE NOMBRE
DEBUT_ALGORITHME
  LIRE a
  LIRE b
  LIRE c
  LIRE d
  SI (a!=0) ALORS
    DEBUT_SI
    x1 PREND_LA_VALEUR -b/a
    FIN_SI
    SINON
      DEBUT_SINON
      AFFICHER "pas de solution"
      FIN_SINON
  SI (c!=0) ALORS
    DEBUT_SI
    x2 PREND_LA_VALEUR -d/c
    FIN_SI
    SINON
      DEBUT_SINON
      AFFICHER "pas de solution"
      FIN_SINON
  AFFICHER x1
  AFFICHER x2
FIN_ALGORITHME
```

Production n°2 du binôme Clara-Estelle

Figure 237 : Programmes de résolution d'équations-produits nuls avec boucles de tests imbriquées (séance 3.2 d'Alex)

Ces programmes montrent les difficultés à comprendre les règles de logique rencontrées, avec l'utilisation de deux boucles de test imbriquées. Outre que les trois productions ci-dessus ne sont pas exactes, puisqu'elles considèrent qu'il n'y a pas de solution si a ou c sont nuls, nous notons des particularités, détaillées dans la suite. Prenons les notations suivantes :

- C1 : condition $a \neq 0$
- C2 : condition $c \neq 0$
- P1 : $x_1 = \frac{-b}{a}$
- P2 : $x_2 = \frac{-d}{c}$
- P3 : pas de solutions

Il est probable que le professeur Alex ait voulu faire programmer, par souci de simplification, l'algorithme suivant : si l'équation ne vérifie pas la condition [$a \neq 0$ et $c \neq 0$], elle ne possède pas de solutions (comme déjà évoqué en étape E_4 du §11.3.1). Ceci s'exprime, avec les notations ci-dessus :

Si [C1 et C2] alors [P1 et P2] sinon P3 **(1)**

Cependant, les productions ci-dessus ne correspondent pas à ce test. En effet, la production de Julie/Clémentine donne :

[Si C1 alors P1] , [Si C2 alors P2 sinon P3] **(2)**

Et la production n°1 de Clara/Estelle se traduit par :

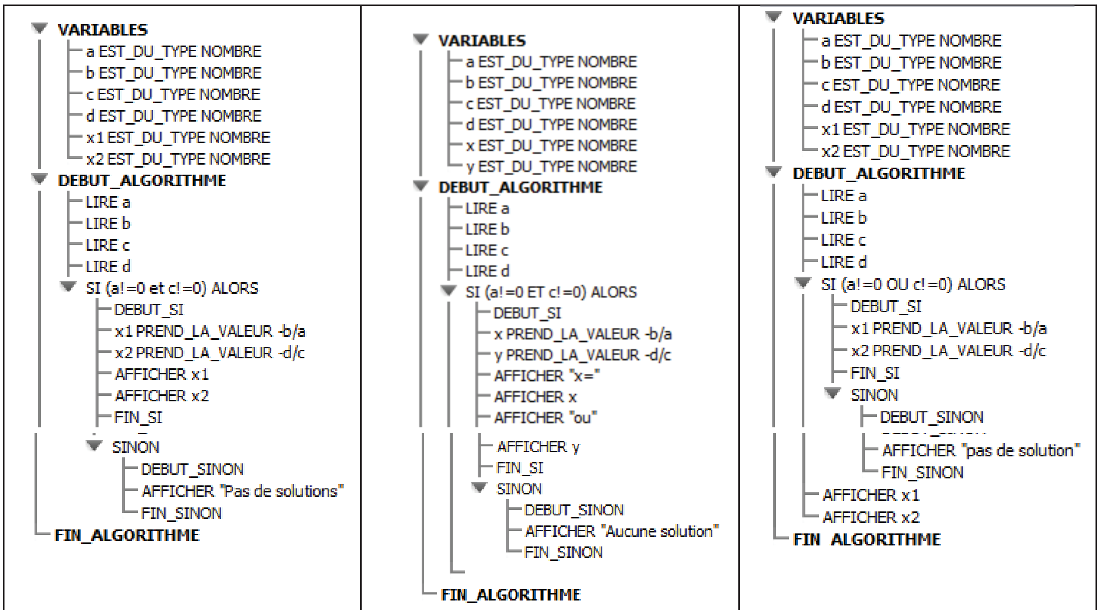
Si C1 alors P1 sinon [Si C2 alors P2 sinon P3] **(3)**

Après que le professeur leur a expliqué que ce programme comporte une erreur en ces termes : « *tu vas afficher l'une des solutions, sinon, tu vas afficher l'autre* » (ligne 142), les deux élèves le modifient pour obtenir la production n°2 :

[Si C1 alors P1 sinon P3] , [Si C2 alors P2 sinon P3] **(4)**

Les propositions logiques (2), (3) et (4) ne sont pas équivalentes entre elles et ne sont pas équivalentes à la proposition (1). Néanmoins, étant donné que toutes les équations proposées vérifient les conditions C1 et C2, les programmes utilisant les propositions (1), (2) et (4) fonctionnent pour ces équations.

D'autres élèves, comme ceux-ci-dessous, réalisent une seule boucle conditionnelle, en utilisant l'opérateur logique « et », d'autres encore utilisent le « ou » :



Production du binôme Jimmy-Romane	Production du binôme Marine-Fanny	Production du binôme Charlotte-Coline

Figure 238 : Programmes de résolution d'équations-produits nuls avec une seule boucle de test (séance 3.2 d'Alex)

Les deux productions de Jimmy/Romane et Marine/Fanny correspondent à ce que l'enseignant cherche à faire programmer (proposition notée **(1)** ci-dessus). En revanche, la production de Charlotte/Coline montre une confusion entre les connecteurs logiques « et » et « ou ». Leur algorithme se résume à :

Si [C1 ou C2] alors [P1 et P2] sinon P3 **(5)**

Notons que l'apprentissage de ces concepts entre complètement dans le programme de la classe de seconde de 2009, qui a vu s'ajouter – par rapport à celui de 2000 –, une rubrique intitulée *Raisonnement et langage mathématiques*, et où est préconisée une initiation aux règles de logique :

> À l'issue de la seconde, l'élève devra avoir acquis une expérience lui permettant de commencer à distinguer les principes de la logique mathématique de ceux de la logique du langage courant […]. (MEN 2009a, p.1)

En particulier, les élèves sont entraînés *à utiliser correctement les connecteurs logiques « et », « ou » et à distinguer leur sens des sens courants de « et », « ou » dans le langage usuel* (ibid.p.10). A ce sujet, la production de Marine/Fanny est intéressante, elle montre deux élèves qui commencent à maîtriser ces concepts : celles-ci font la distinction entre les deux connecteurs logiques « et » et « ou ». En effet, elles utilisent le « et » dans la condition *[C1 et C2]*, puis lors de l'affichage des deux solutions, elles utilisent ensuite le « ou » pour signifier que l'une ou l'autre des valeurs calculées sont solutions de l'équation.

- ***Organisations mathématiques relatives à la tâche t'₅ (de type T₅) : Utilisation d'un programme***

La tâche t'_5 peut être analysée par le relevé des réponses des élèves sur leur fiche d'énoncé[186] qui sont données ci-dessous :

	Solutions à déterminer avec le 1^er^ algorithme – Questions 1 et 2 (partie 2)					***Solutions à déterminer avec le 2^nd^ algorithme – Question 3***			***Solutions à déterminer avec le 1^er^ algorithme et transformation préalable des équations***		
Équation	**1**	**2**	**3**	**7**	**10**	**4**	**5**	**9**	**6**	**8**	**9**
Réponse attendue[187]	-0,75 0,5	0 -2,236*	0,333 -0,318*	0 -18	0 9000	2,646* -2,646*	Pas de solution	2,07 -2,07	5	0 7	2,07 -2,07
Nb élèves	13	13	10	13	13	0	0	0	6	6	
Réponse erronée (1)			3 -3,142*								
Nb élèves (1)			3								
Calcul « à la main » (2)						$\sqrt{7}$ ou $\sqrt{7}$; $-\sqrt{7}$	Rép fausse ou « Pas de sol »	2,07 ou 2,07 ; -2,07			
Nb élèves (2)						6	6	5			
Absence réponse	3	3	3	3	3	10	10	11	10	10	16

Tableau 239 : Réponses fournies par les élèves à la tâche de type T_5, séance 3.2 d'Alex

Le second algorithme de résolution des équations de la forme $x^2 = a$ n'a pas été réalisé dans ce groupe et les quelques réponses obtenues résultent de calculs réalisés en environnement papier-crayon, ce que nous avons indiqué dans le tableau ci-dessus et analysé pour la tâche de type T_0. Pour le premier algorithme, les élèves dans leur ensemble l'utilisent convenablement

[186] Un exemple de production d'élève est donné en annexe A41.

[187] Les réponses étoilées sont des valeurs approchées, données par le logiciel qui les propose avec 8 chiffres significatifs. Nous les avons arrondies ici au millième, par commodité de lecture.

pour déterminer les solutions des équations 1, 2, 3, 7 et 10. Notons que pour l'équation 3 ($(1-3x)(1+\pi x)=0$), trois élèves ont inversé les coefficients a et b ainsi que c et d, en entrant dans le programme les coefficients dans leur ordre d'apparition.
Comme observé pour la séance 3.1, cette dernière tâche a permis une rétroaction pour quelques élèves entre les solutions déterminées « à la main » et celles données par le programme. Par exemple, dans cet extrait de la transcription :

> 66. E1 : On le teste ?
> 67. E2 : Oui (*équation 1 :* $(4x+3)(2x-1)=0$). On entre *a*. C'est … 4
> 68. E1 : *b*, c'est 3… *c* c'est 2 et *d* c'est -1
> 69. E2 : Ça fait -0,75 et 0,5.
> 70. E1 : Et c'est ça ?
> 71. E2 : Ouais ! -0,75, c'est – ¾. Ça marche. Et un demi, c'est 0,5.

La comparaison entre les solutions ($\frac{-3}{4}; \frac{1}{2}$) déterminées en début de séance « à la main » et celles données par le programme sous la forme (-0,75 ; 0,5) oblige les élèves à passer de la représentation des nombres en écriture fractionnaire à celle donnée en écriture décimale à virgule. L'expression de l'élève « *ça marche* » montre qu'il a acquis que les deux écritures représentent le même nombre et que par suite, son programme est correct.

11.3.2.3 Étape E_3

Phase 1 : Présentation de la situation n°3 et résolution des premières équations « à la main »

Les élèves se placent par deux devant un ordinateur et constatent que le réseau informatique du lycée est en maintenance. Le professeur trouve alors une solution de remplacement en proposant de résoudre les premières équations en environnement papier-crayon, précisant que l'objectif de cette résolution est *d'avoir en tête quel type de choses on pourrait programmer sur Algobox pour pouvoir être capable de résoudre le plus d'équations possibles* (ligne 1). Le contrat didactique porte alors sur cette recherche. Par son discours et son accompagnement dans la tâche des élèves, Alex amène dans le milieu mathématique les concepts d'équation, de résolution, de degré et des éléments technologiques comme la règle du produit nul. Le milieu matériel se compose de la feuille d'énoncé qui doit être utilisée sur l'envers pour inscrire y les traces de la recherche (ligne 2). Il opère un *tissage* (Bucheton, 2004) avec la situation n°2, où il demande aux élèves de se remémorer la séance de réalisation d'un programme pour résoudre des équations du premier degré. Le topos du professeur consiste à installer les premiers éléments de la situation n°3 de manière à faciliter la tâche de l'élève, qui lui, a la responsabilité de résoudre les premières équations et d'en dégager une technique générale et systématique, qui puisse lui servir pour concevoir l'algorithme.

Phase 2 : Reprise sur les équations-produits nuls

Au bout de sept minutes après le début de la séance, Alex corrige la résolution de la première équation $(4x + 3)(2x - 1) = 0$ au tableau. Il ajoute au milieu les notions de forme développée et de forme factorisée, avec des éléments techniques sur les polynômes du second degré comme : « *c'est ça l'important, un produit de facteurs, parce que ça [chacun des facteurs], c'est du premier degré* » (ligne 15) qu'il oppose à la forme développée, qu'il qualifie d'*inexploitable* (ligne 17). La correction de la première équation a donc pour fonction de remémorer la technique de résolution d'une équation-produit nul, elle a le rôle d'exemple générique, et les élèves ont pour contrat de résoudre les deux suivantes (*Si vous savez faire ça, vous savez faire les deux autres*, ligne 17). Le rôle du professeur est de rappeler cette technique. À charge de l'élève de se remémorer ces savoirs et de comprendre la distinction entre forme factorisée et forme développée.

Phase 3 : Phase de recherche des tâches t'_1 et t'_2

Durant cette phase, le professeur Alex relance les élèves dans la tâche de recherche *de la forme générale de ce type d'équations* (ligne 19). Notons qu'il ajoute dans le contrat, l'interdiction de concevoir l'algorithme directement à l'aide du logiciel Algobox (le réseau informatique fonctionnant à nouveau) et l'obligation de réfléchir en environnement papier-crayon. Plusieurs binômes l'ayant déterminé, il finit par ajouter dans le milieu la forme générale qu'il exprime en langage naturel, par l'expression « *tout produit de deux facteurs égaux à zéro* » (ligne 21). Il fait ainsi avancer le temps didactique. Reste à la charge des élèves, en binômes, de convertir ce registre en un registre d'expressions algébriques et de réaliser ainsi la modélisation de ce type d'équations.

Phase 4 : Institutionnalisation relative à la tâche t'_1. Résolution de l'équation paramétrée (tâche t'_2)

L'enseignant décide ici encore d'une avancée du temps didactique en institutionnalisant la forme générique des trois premières équations, sous la forme $(ax + b)(cx + d) = 0$. Il poursuit sous forme d'oral dialogué vers la résolution littérale de cette équation, ajoutant ainsi ces éléments au milieu. Les conditions a et c non nuls étant données, le professeur oriente les élèves vers la recherche du programme sur Algobox. Il leur indique également la structure de l'algorithme à programmer sous la forme : « *Si vous programmez ce type de solutions, il vous faut évidemment nommer ces conditions-là et il n'y a plus qu'à nommer a, b, c et d. Si a et c sont différents de zéro, eh bien, c'est terminé* » (ligne 40). Il autorise en fin de phase les élèves à passer sur l'ordinateur, leur précisant le contrat de réaliser le programme.

Phase 5 : Mise en route du logiciel Algobox. Éléments de transposition de la résolution

Après avoir aidé certains élèves à installer le logiciel, Alex poursuit par un échange avec quelques élèves sur la *transposition informatique* (Balacheff, 1994) de cette résolution « à la main ». Alex tente de faire trouver aux élèves ce que ne peut pas faire le logiciel, et les réponses obtenues vont dans le sens d'un manque d'*instrumentation* du logiciel. Par exemple, Marine ne comprend pas la question et mentionne les astérisques des trois premières équations (ligne 43), un autre élève pense que le logiciel ne gère pas le connecteur logique « ou » (ligne 45), un autre encore qu'il ne connaît pas le signe « moins » (ligne 47). Alex ajoute alors au milieu une technique pour calculer et afficher les deux solutions de l'équation mais aussi des instructions élémentaires d'un programme comme la déclaration d'une variable informatique et l'affectation d'une valeur à une variable (ligne 50). Le professeur se charge ici d'une partie de la programmation, considérant sans doute qu'il ne s'agit que d'un problème d'écriture *inhérent au logiciel*, selon son expression (ligne 42), mais il laisse aux élèves la transposition de l'écriture de la condition [*a* et *c* non nuls]. Nous revenons sur cette instrumentation dans l'étape E_4.

Phase 6 : Phase de recherche des tâches t'₃ et t'₄

Pour effectuer ces tâches, certains binômes fonctionnent en autonomie, et d'autres sollicitent l'aide du professeur, comme celui de Jimmy (lignes 52-58) ou celui de Julie (ligne 59 à 64). Le milieu est ainsi augmenté des interactions entre l'enseignant et des binômes mais aussi d'éléments de programmation, comme la structure d'une boucle de test et d'affichage d'une variable (ligne 65). Le topos de l'enseignant comporte donc la gestion de l'hétérogénéité de sa classe et l'aide différenciée à apporter à chacun, selon leur degré d'avancement. Les élèves, quant à eux, réalisent le programme, avec une plus ou moins grande autonomie. En fin de phase, le milieu se voit augmenter des programmes plus ou moins achevés de chacun des binômes.

Phase 7 : Phase de recherche de la tâche t'₅. Bilan

La recherche se poursuit. La plupart des binômes entreprennent la tâche t'_5, en utilisant la tâche de deux manières : vérifier le bon fonctionnement du programme pour la première équation, puis déterminer les solutions des équations de la même catégorie à l'aide de l'algorithme. Ainsi la manipulation des paramètres *a, b, c, d* et l'instanciation nécessaire à l'entrée des coefficients des équations dans le programme permet-elle d'ajouter au milieu les notions de paramètre et de solution (en actes). Le retour de l'algorithmique vers l'algèbre est effectué grâce au bilan du professeur en fin de phase, pour déterminer quelles équations répondent à l'algorithme conçu par les élèves :

> 101. Al *(à toute la classe)* : Vous regardez, tous ? Cet algorithme-là a résolu combien d'équations sur vos 10 équations ?
> 102. E : les trois premières ?
> 103. Al : Donc, ça m'a résolu mes trois premières équations. Ce que vous avez à faire, c'est allez voir les autres qui correspondent exactement à cet algorithme…
> 104. Coline : Il y a la 7 !
> 105. Al : Oui, et quoi d'autre, Coline ?
> 106. Coline : la 10.
> 107. Al : Oui, la 10. Vous voyez que ces trois équations avec astérisques plus la 7 et la 10 sont effectivement du même acabit.

Ce bilan permet aux élèves d'ajouter au milieu l'aspect *structural* des équations proposées, après être passés par l'aspect *procédural* pour les résoudre. Cette remarque va dans le sens de l'hypothèse H3, où le détour par l'algorithmique permet d'interroger les objets de l'algèbre, en permettant aux élèves de considérer tour à tour les deux aspects, *structural* et *procédural*, des expressions algébriques.

La phase se termine par un nouveau pan du contrat didactique : la recherche d'un algorithme permettant de résoudre les équations qui ne sont pas du type « équation-produit nul ». Un binôme, celui de Marine et Fanny, est plus avancé et recherche les équations qui peuvent, à l'aide d'une transformation, être résolues par le premier algorithme. Nous analysons le cas de ces élèves en étape E_4.

Phase 8 : Phase de recherche des tâches t_1 à t_5

Les neuf dernières minutes de la séance sont consacrées par la majeure partie des binômes à terminer le premier programme ou à le corriger (lignes 137-143) après intervention du professeur. Aucun élève ne parvient, contrairement à la séance 3.1, au stade de détermination de l'algorithme de résolution des équations du type $x^2 = a$ (tâches t_i, $1 \leq i \leq 5$). En revanche le binôme de Marine et Fanny propose une adaptation du premier algorithme conçu, pour résoudre les équations restantes de la fiche d'énoncé. Nous analysons leurs propos en étape E_4. Le milieu comporte donc en cette dernière phase tous les éléments mathématiques et algorithmiques déterminés dans les phases précédentes. Le contrat didactique annoncé par le professeur : « *essayer de trouver un algorithme capable de résoudre, par l'exemple l'équation 4* » (ligne 107) n'est pas respecté. Sans doute, une séance supplémentaire, détachée de celle-ci aurait été plus profitable à cette recherche.

Synthèse de l'étape E_3

Phases	Début numéro ligne	Début instant	Fonction	Évolution du milieu	Temps didactique / Topos du prof	Topos de l'élève
1	1	00 : 00	- Accueil et présentation de la situation n°3 - Tissage avec la situation n°2 - Première phase de recherche : résolution des premières équations « à la main » (T_0)	- Feuille d'énoncé avec équations - Feuille brouillon - Concept de degré, de résolution d'équations -Éléments technologiques (règle d'un produit nul)	- Installer les premiers éléments de la situation (éléments ci-contre)	- Résoudre les premières équations - En dégager une technique générale et systématique, qui puisse lui servir pour concevoir l'algorithme.
2	15	07 : 08	- Correction de la première équation - Reprise sur les équations-produits nuls	- Équations du premier, du second degré - Résolution de ces équations - Forme développée, forme factorisée	- Corriger la première résolution – Faire le point sur les éléments ci-contre	- Comprendre la correction - Résoudre les deux équations suivantes « à la main »
3	18	08 : 45	Deuxième phase de recherche : tâches t'_1 et t'_2	- Interactions binômes /prof - Forme générale des premières équations en langage naturel	- Guider les élèves vers la modélisation des trois premières équations et vers leur résolution	Dégager la forme commune des trois équations afin de procéder à leur généralisation et à leur résolution

4	23	11 : 40	Institutionnalisation de la forme des équations (t'$_1$) et résolution de l'équation littérale (t'$_2$)	- Forme générale des premières équations $(ax + b)(cx + d) = 0$ - Résolution de l'équation littérale $(ax + b)(cx + d) = 0$ - Structure de l'algorithme - Logiciel Algobox	- Indiquer la forme générale ci-contre ainsi que les solutions de l'équation littérale	- Comprendre la forme structurale de l'équation générique - Comprendre l'algorithme conceptuel d'obtention des deux solutions de l'équation
5	41	13 : 38	- Mise en route du logiciel Algobox - Éléments pour la transposition informatique de la résolution	- Variable informatique/ Affectation d'une valeur à une variable - Technique pour programmer les deux solutions de l'équation	- Clarifier les concepts propres à la programmation ci-contre - Préciser une technique pour programmer les deux solutions de l'équation	- Comprendre les différences entre la résolution « à la main » et les contraintes de programmation
6	52	18 : 39	Troisième phase de recherche : tâches t'$_3$ et t'$_4$.	- Interactions binômes / prof - Algorithme/ programme de résolution des équations de la forme $(ax + b)(cx + d) = 0$ - Structure d'une boucle de test et affichage d'une variable	- S'adapter à l'hétérogénéité des groupes - Valider ou invalider les algorithmes/ programmes proposées par les élèves	- Programmer l'algorithme sous Algobox
7	66	25 : 00	- Quatrième phase de recherche : tâche t'$_5$ - Bilan sur la question 2 (reconnaissance des équations-produits nuls)	- Objets d'une équation (paramètres, inconnue, solution) - Aspect structural des équations	- Faire un bilan sur les équations résolues par le premier algorithme - Lancer les élèves sur la recherche du second algorithme	- Obtenir les solutions des différentes équations à l'aide du programme réalisé
8	108	36 : 00	Cinquième phase de recherche : tâches t$_1$ à t$_5$	-Transformation d'expressions algébriques (pour un binôme)	- Aider les élèves en retard	- Transformer les équations restantes (pour un binôme)

Tableau 240 : Récapitulatif du milieu, du temps didactique et des topos (séance 3.2 d'Alex)

11.3.2.4 Étape E$_4$

Pour cette séance, nous relevons les trois *événements didactiques* (Bronner, 2006, 2009) suivants :

- ***la résolution des équations à la main (tâche T$_0$)*** : événement imprévu qui survient en début de séance en raison d'une panne du réseau informatique et qui conditionne un changement d'organisation mathématique et didactique, par rapport aux précédentes séances d'Alex (séances 2.1, 2.2 et 3.1) ;

- ***le défaut d'instrumentation du professeur***, événement problématique, dans le sens où il vient complexifier la tâche de l'élève ;
- ***les transformations des expressions algébriques***, événement survenant dans un binôme particulier, au moment de la recherche d'un second algorithme pour résoudre les équations restantes.

Premier événement : la résolution des équations à la main (tâche T_0)

Ce premier événement représente un bouleversement par rapport aux pratiques de l'enseignant pour les trois séances précédentes. En effet Alex, qui laissait les élèves utiliser le logiciel Algobox dès le début des séances, est ici dans l'obligation de changer son organisation devant la panne de réseau. Nous avons mis en regard les deux séances 3.1 et 3.2, en fonction du temps consacré à chaque phase, afin de les comparer.

<table>
<tr><th></th><th colspan="2">Séance 3.1</th><th colspan="2">Séance 3.2</th></tr>
<tr><th>Durée (min)</th><th>Phase</th><th>Fonction</th><th>Phase</th><th>Fonction</th></tr>
<tr><td>0-2</td><td rowspan="2">Phase 1</td><td rowspan="2">Mise en route logiciel</td><td rowspan="3">Phase 1</td><td rowspan="3">Tâche de type T_0 : Résolution premières équations « à la main »</td></tr>
<tr><td>2-4</td></tr>
<tr><td>4-6</td><td>Phase 2</td><td>Tâche t'_1</td></tr>
<tr><td>6-8</td><td></td><td></td><td>Phase 2</td><td>Reprise sur équations-produits</td></tr>
<tr><td>8-10</td><td rowspan="2">Phase 3</td><td rowspan="2">Tâches t'_1 et t'_2</td><td rowspan="2">Phase 3</td><td rowspan="2">Tâches t'_1 et t'_2</td></tr>
<tr><td>10-12</td></tr>
<tr><td>12-14</td><td rowspan="4">Phase 4</td><td rowspan="4">Tâches t'_3 et t'_4</td><td>Phase 4</td><td>Institutionnalisation (t'_1) / Tâche t'_2</td></tr>
<tr><td>14-16</td><td rowspan="2">Phase 5</td><td rowspan="2">- Mise en route logiciel
- Éléments transposition informatique</td></tr>
<tr><td>16-18</td></tr>
<tr><td>18-20</td><td rowspan="4">Phase 6</td><td rowspan="4">Tâches t'_3 et t'_4</td></tr>
<tr><td>20-24</td><td rowspan="2">Phase 5</td><td rowspan="2">- Institutionnalisation (t'_1) / Tâche t'_2
- Éléments transposition informatique</td></tr>
<tr><td>22-24</td></tr>
<tr><td>24-26</td><td rowspan="7">Phase 6</td><td rowspan="7">Tâches t'_3, t'_4 et t'_5</td></tr>
<tr><td>26-28</td><td rowspan="5">Phase 7</td><td rowspan="5">- Tâche t'_5
- Bilan sur reconnaissance des équations-produits nuls</td></tr>
<tr><td>28-30</td></tr>
<tr><td>30-32</td></tr>
<tr><td>32-34</td></tr>
<tr><td>34-36</td></tr>
<tr><td>36-38</td><td rowspan="5">Phase 8</td><td rowspan="5">Tâches t_1 à t_5</td></tr>
<tr><td>38-40</td><td rowspan="3">Phase 7</td><td rowspan="3">Tâches t_1 à t_5</td></tr>
<tr><td>40-42</td></tr>
<tr><td>42-44</td></tr>
<tr><td>44-46</td><td colspan="2"></td></tr>
</table>

Figure 241 : Comparaison de l'étape E_1 pour les séances 3.1 et 3.2 d'Alex

Le changement le plus important, et qui conditionne toute la suite, est la tâche de type T_0 de résolution « à la main » des trois premières équations suivantes de la fiche d'énoncé :

Équation 1 : $(4x+3)(2x-1)=0$

Équation 2 : $3x\left(x+\sqrt{5}\right)=0$

Équation 3 : $(1-3x)(1+\pi x)=0$.

Cette tâche donnée dès le début de la séance 3.2, en attendant que le réseau fonctionne de nouveau, trouve toute sa place et se trouve être le fil conducteur de toute la séance. En effet, celle-ci permet à l'enseignant de :

- faire le constat que tous les élèves ne reconnaissent pas ce type d'équations comme équation-produit nul (lignes 9-10) ;
- rappeler la technologie sous-jacente à la technique de résolution de telles équations (ligne 14) ;
- reprendre les notions de formes développée et factorisée (ligne 15) ;
- considérer l'aspect structural des équations 1, 2, 3 pour accéder à leur forme générique (lignes 23-25) ;
- proposer la résolution de l'équation littérale $(ax + b)(cx + d) = 0$, en s'appuyant sur la résolution des équations 1, 2 et 3 (ligne 27) ;
- vérifier, grâce aux solutions obtenues « à la main » pour l'équation 1, que le programme fonctionne (ligne 71).

La réflexion d'Alex, à la neuvième minute de la séance, semble montrer qu'il considère l'importance de cette phase de réflexion en environnement papier-crayon, avant de réaliser le programme sur Algobox :

> 18. **08 : 45** E : Ça y est Monsieur, il y a de nouveau Internet !
> 19. Al : Non, non, non, c'est très bien qu'il n'y ait pas Internet, on va faire semblant *(que le réseau soit encore indisponible)*… Parce que les morts de faim sur l'ordi … Alors maintenant, avant de commencer à télécharger Algobox comme des fous furieux, après avoir résolu les deux autres équations (*à la main*), vous allez réfléchir à quelle serait la forme générale de ce type d'équations, égales à zéro.

Même si le réseau fonctionne de nouveau, Alex souhaite que les élèves résolvent les trois premières équations à la main, puis déterminent la forme générique de ces équations. En organisant la situation de cette façon, il accorde une plus grande importance à la partie conceptuelle de l'algorithme et accorde une place amoindrie à la programmation proprement dite. Également, il permet aux élèves de s'appuyer sur les connaissances (plus ou moins abouties) anciennes et de partir de celles-ci pour les reprendre, les élargir, les généraliser et en incorporer de nouvelles. Nous constatons de plus, dans le tableau ci-dessus, que l'organisation de la séance 3.2 amène à bilan, réalisé en fin de réalisation de l'algorithme de résolutions des équations-produits nuls, qu'un bilan collectif est proposé à l'ensemble de la classe sur la reconnaissance de ces équations.

Deuxième événement : le défaut d'instrumentation du professeur

Nous avons déjà évoqué ce problème sous une autre appellation au cours de l'analyse de la séance 2.2 du professeur Alex (cf. §11.2.4, étape E_4) sous le nom de *l'amalgame entre objets mathématiques et algorithmiques*. Le défaut d'instrumentation du professeur se confirme et devient ici problématique : il relève plus généralement du manque de formation déjà pointé de cet enseignant mais dont nous faisons l'hypothèse qu'il est plus général, et qu'il concerne une part non négligeable des enseignants. Nous relevons au cours de la séance deux manques d'instrumentation, au sujet de :

- l'affectation de valeurs à une variable, « *si vous lui dites, « Affecter à x la valeur –b/a » et la ligne suivante, « Affecter à x la valeur –d/c », le pauvre Algobox va jouer des castagnettes. […] Il n'est pas capable de reconnaître deux x différents.* » (ligne 50) ;

- les conditions multiples dans les structures alternatives, « *Le problème, c'est qu'il y a deux conditions. Tu ne peux pas mettre deux conditions.* » (ligne 53) ; « *il faut que tu fasses les deux conditions qui se suivent, sinon c'est trop compliqué.* » (ligne 61).

Nous ne revenons pas ici sur le détail des analyses des procédures engendrées par les contraintes que le professeur ajoute au logiciel, elles ont été étudiées précédemment[188]. Ce qui nous intéresse ici sont les implications pour l'apprentissage. Dans le cas de l'affectation de valeurs à une variable, ce n'est pas tant le programme résultant des préconisations du professeur qui est problématique, il n'y a pas de différences notables entre les deux blocs d'instructions suivants,

x prend la valeur –b/a Afficher x x prend la valeur –d/c Afficher x	et :	x1 prend la valeur –b/a x2 prend la valeur –d/c Afficher x1 Afficher x2

ni au point de vue de la *congruence* avec la résolution en environnement papier-crayon, ni au point de vue de la programmation, où il suffit de déclarer une variable de plus dans le programme de droite. Ce qui est inopportun, c'est que l'enseignant ne mentionne pas le programme de gauche, simplement par manque de pratique, mais véhiculant ainsi des conceptions faussées de la programmation, lorsqu'il précise *qu'Algobox n'est pas capable* de le faire.

Le second cas est semblable, Alex ne connaît pas suffisamment les fonctionnalités du logiciel pour indiquer que des conditions multiples s'écrivent avec des connecteurs logiques « et » et « ou ». Bien que certains élèves les utilisent (lignes 55-56), il persiste à considérer que *c'est trop compliqué*. Certes, le fait d'obtenir un programme concis n'est pas l'objectif recherché pour cette situation, ni ne fait partie des recommandations du programme institutionnel qui précise : « *la classe de seconde est une classe de détermination et il ne s'agit pas d'y former des programmeurs [...]* » (MEN, 2009c). Le problème ici est que la succession des deux boucles de test imbriquées (cf. étape E_2, technique associée à la tâche t'_4) ne donne pas l'équivalence avec la condition comportant le connecteur logique « et ». Ici, ce sont des conceptions erronées sur des règles de logique qu'Alex véhicule, par un manque de connaissances des concepts de programmation.

En conclusion, les formulations ambiguës qu'Alex emploie à plusieurs reprises et les approximations faites sur les règles de logique nous amènent à penser qu'il existe un manque dans la formation des enseignants dans les deux domaines de la logique et de l'algorithmique. Comme déjà évoqué pour la séance précédente, le manque de repères mathématiques et didactiques dû à l'introduction récente de ces domaines dans l'enseignement secondaire pose problème et le cas d'Alex n'est sans doute pas un cas isolé, qui doit être pris en considération dans la formation initiale et continue des enseignants. Pour la formation initiale, le rapport Kahane précisait déjà en l'an 2000 :

> Pour les professeurs de collège et lycée, il nous semble nécessaire, au vu de ce que nous avons esquissé plus haut, de développer la mise en place de licences comprenant un enseignement d'informatique. Cet

[188] Pour l'affectation des valeurs aux variables, se reporter à la section 11.3.1, étape E_2. Pour les conditions multiples dans les structures alternatives, se reporter aux sections 11.3.1, étape E_4 et 11.3.2, étape E_2.

> enseignement devrait comprendre une partie obligatoire (par exemple algorithmique et programmation) et pourrait comporter une partie optionnelle avec d'autres aspects informatiques. (Kahane, 2000, p.20)

Troisième événement : les transformations des expressions algébriques

Ce dernier événement survient dans le binôme de Marine et Fanny. À deux reprises, le professeur intervient dans leur groupe pour répondre à leurs questions. La première intervention se situe à 27 minutes du début de la séance, les élèves sont en avance sur l'ensemble de la classe. Elles ont terminé le premier algorithme de résolution des équations de la forme $(ax + b)(cx + d) = 0$ et cherchent les équations qui peuvent être résolues à l'aide de cet algorithme.

> 75. **27 : 00** Al (*dans le groupe de Fanny et Marine*) : Alors, question 2, quelles sont celles qui, sans les transformer, correspondent au premier type ? Sans les transformer ?
> 76. Marine : La 7 ($-\frac{1}{4}x\left(\frac{1}{2}x+9\right)=0$) et la 10 ($-0{,}1x(900-0{,}1x)=0$).
> 77. Al : Oui. Et avec transformation … immédiate ?
> 78. Marine : Celle-là (la 8, $7x - x^2 = 0$) … mais je trouve 0 et 7 et la machine 0 et 0,142…

Les élèves ont factorisé l'équation 8, $7x - x^2 = 0$, sous la forme $x(7 - x) = 0$ et ont appliqué leur algorithme. Marine ne comprend pas pourquoi le programme ne lui donne pas les mêmes solutions que celles trouvées « à la main ». L'intervention du professeur l'aide à comprendre son erreur (inversion des paramètres *c* et *d*), qu'elle corrige ensuite. Ce qui est marquant ici, c'est que l'élève pense à transformer l'expression en une expression équivalente pour utiliser l'algorithme de résolution des équations-produits.

La seconde intervention du professeur a lieu 36 minutes après le début de la séance et les élèves s'interrogent sur le second algorithme à concevoir. Elles font part à l'enseignant de leurs réflexions :

> 108. **36 : 00** Al (*Dans le binôme de Marine et Fanny*) : Vous avez parlé de transformation pour pouvoir faire fonctionner cet algorithme pour les autres équations. Là, qu'est-ce que vous êtes en train de faire quand vous faites ça ?
> 109. Marine : Ben la même chose …
> 110. Al : Alors vous faites bien une transformation, mais qui est pas de la même nature … Là, c'est une transformation avec quoi ?
> 111. Fanny : Avec *x* en facteur…
> 112. Al : Donc c'est quoi ?
> 113. Marine : C'est une factorisation.
> 114. Al : Et c'est quel théorème ?
> 115. Marine : Quel théorème ?
> 116. Al : Il n' y en a pas 36 pour ça … Qu'est-ce que vous faisiez en 4ème et 3ème ?
> 117. Marine : Factorisation par un facteur commun
> 118. Al : Très bien ! Et là (*en montrant sur leur feuille* $x^2-\sqrt{7}^2=(x-\sqrt{7})(x+\sqrt{7})=0$), qu'est-ce que vous avez fait ?
> 119. Fanny : Ben, factoriser avec une identité remarquable.
> 120. Al : Alors ce que vous êtes en train de soulever ? Est-ce que via deux types de transformation, je ne peux pas toujours me ramener toujours à ça ? Presque !
> 121. Marine : Mais alors, là aussi (*en montrant l'équation 6,* $x^2-10x+25=0$) !

Marine et Fanny ont compris que, moyennant une *transformation* des équations, par des techniques qu'elles sont capables d'identifier, comme la recherche d'un facteur commun ou l'application d'une identité remarquable, il est possible de se ramener au produit de deux facteurs du premier degré. Le ton de surprise qu'elles emploient tend à montrer que ce fait est pour elles une découverte, et qu'elles n'avaient pas encore intégré cette généralisation. Bien entendu, il reste les équations du second degré n'admettant pas de solutions réelles qui n'entrent pas dans cette catégorie, ce que le professeur sous-entend par son interjection en ligne 120 : « *presque !* » qu'il ne détaille pas davantage. La fin de leur discussion revient encore sur les *transformations* :

> 122. Marine : Donc, c'est pas la peine d'en faire un autre en fait, il faut juste transformer.
> 123. Al : Avec transformation, en fait, il contient tout !
> 124. Marine : Et on ne pourrait pas faire un algorithme qui transforme les expressions ?
> 125. Al : C'est difficile … Dans 10 ans, quand vous serez ingénieur en informatique, peut-être !
> 126. Marine : C'est ma destinée…
> 127. Al : En attendant, faites-en un autre pour résoudre celles-là (*il montre* $x^2 = 7$ *et* $x^2 = -4$) sans les transformer !

Marine souhaiterait déterminer un algorithme permettant de transformer automatiquement les expressions algébriques pour les factoriser. Le détour par l'algorithmique a ici provoqué l'effet escompté pour ces élèves, qui réalisent que le passage d'une forme développée à une forme factorisée suit des règles strictes que l'on peut *automatiser*. Pour ces élèves une généralisation s'est opérée : la multitude des microtechniques de résolution apprises au cours de leur scolarité se trouvent unifiées ici en une technique plus vaste. Alex les renvoie alors à la conception du second algorithme permettant de résoudre les équations de la forme $x^2 = a$, sans doute pour considérer le cas où une équation du second degré n'admet pas de solutions réelles. Nous avons ici une confortation de l'hypothèse H3, où nous voyons comment la reprise de l'algèbre par le biais de l'algorithmique permet de consolider et d'étendre les savoirs de ces élèves. Cette « découverte » des deux élèves aurait pu être reprise pour l'ensemble de la classe avec profit, lors d'une séance ultérieure.

Nous proposons un bilan de la situation n°3 dans le chapitre suivant (section 12.2).

11.4 Entretien spécifique post-expérimentation

11.4.1 Présentation de l'entretien

Comme présenté dans le chapitre consacré à la méthodologie (cf. §6), l'objectif principal de cet entretien terminal vise une évaluation du dispositif par chaque enseignant expérimentateur. Comme pour le premier entretien, la méthodologie utilisée s'appuie sur les principes de base de *l'entretien d'explicitation* de Vermesch et le questionnement du chercheur est semi-directif, avec des questions guides préparées. Les thèmes abordés reprennent en partie les thèmes du premier entretien mais en s'intéressant ici au rapport de chaque enseignant à l'expérimentation qui s'est déroulée, du point de vue :
- de la construction de savoirs algébriques, algorithmiques et de l'articulation des deux ;
- des programmes ;
- de l'élève ;
- des organisations mathématique et didactique de l'expérimentation.

Il est annoncé aux enseignants que l'entretien se déroule en quatre parties et que les questions portent sur les contenus mathématiques, sur l'organisation de l'expérimentation menée dans leur classe, sur les apprentissages des élèves et qu'enfin un bilan est demandé par rapport au travail effectué ensemble. Ces questions suivent la trame suivante, mais ne sont pas obligatoirement toutes posées, ni exactement dans cet ordre, selon les réponses des professeurs :

Partie 1 : les contenus mathématiques
(Thème 1. Construction des savoirs algébriques, algorithmiques et de l'articulation des deux)
Q1.1. *Comment avez-vous perçu le travail que nous avons construit ensemble par rapport à l'apprentissage des mathématiques ?*
(Thème 2. Point de vue des programmes)
Q1.2. *Par rapport aux programmes actuels ?*
(Thème 1. Construction des savoirs algébriques, algorithmiques et de l'articulation des deux)
Q1.3. *Par rapport à l'enseignement de l'algèbre ?*
Q1.4. *Par rapport à celui de l'algorithmique ?*
Q1.5. *Et l'un par rapport à l'autre ? (Articulation des deux)*
Q1.6. *Par rapport à la résolution d'équations du premier et du second degré ?*

Partie 2 : Organisations mathématique et didactique de l'expérimentation
(Thème 3. Point de vue de l'organisation mathématique et didactique de l'expérimentation)
Q2. *En tant que professeur de mathématiques, que pouvez-vous dire sur les choix des organisations mathématique et pédagogique proposées et choisies réellement ?*

Partie 3 : l'apprentissage des élèves
(Thème 4. Point de vue de l'élève)
Q3.1. *Y a-t-il des points qui vous ont surpris, par rapport aux réactions des élèves, notamment sur leur motivation, mais aussi sur leurs procédures, leurs connaissances (anciennes et en construction) ? En particulier y a-t-il des points que vous ne vous attendiez pas à rencontrer ou au contraire des points que vous étiez certains, de par votre expérience, voir surgir ?*
Q3.2. *Pensez-vous qu'un travail de ce type plus suivi, sur une plus longue période pourrait améliorer les compétences des élèves en algèbre ? En « résolution d'équations du premier et du second degré » ?*

Partie 4 : bilan et évaluation
(Éventuellement les quatre thèmes, selon les réponses des enseignants)
Q4. *Si c'était à refaire, le referiez-vous ? Sous la même forme ou non ? Que garderiez-vous et que changeriez-vous plus particulièrement, par rapport au contenu ? Par rapport aux choix didactiques ?*

11.4.2 Analyse a priori de l'entretien

Comme pour l'entretien pré-expérimentation, nous choisissons une analyse thématique de cet entretien.

Thème 1 : construction des savoirs algébriques, algorithmiques et de l'articulation des deux

Pour ce premier thème, cinq questions sont posées, construites pour aller du général au particulier, où les enseignants sont interrogés sur l'impact de l'expérimentation relativement aux apprentissages. La première question (Q1.1) « sur l'apprentissage des mathématiques » est volontairement globale pour permettre aux enseignants de s'exprimer librement sur le travail réalisé, dans le sens où nous cherchons à analyser s'ils évoquent davantage le domaine algébrique ou le domaine algorithmique ou l'interrelation des deux. Également cette question ouverte peut permettre aux enseignants de proposer une éventuelle transposition de l'expérimentation dans d'autres domaines. Les questions Q1.3 et Q1.6 sont posées si l'enseignant n'aborde pas spontanément le domaine algébrique et la résolution d'équations. Des indices sont ici recherchés pour savoir si les professeurs considèrent que les concepts algébriques mis en œuvre dans l'expérimentation ont été travaillés comme *objets* et comment les techniques de résolution des différentes équations proposées ont été *reprises* et approfondies pour amener les élèves à les intégrer dans des praxéologies plus complètes. La question Q1.4 porte sur la construction des savoirs en algorithmique, puisque même si l'objectif de l'expérimentation est de faire fonctionner l'algèbre comme *objet* sur l'*outil* algorithmique, une réciprocité existe, et un travail sur les *objets* de l'algorithmique a aussi été entrepris. Enfin, la question Q1.5 interroge l'enseignant sur l'interrelation algèbre-algorithmique dans l'expérimentation, c'est-à-dire que nous cherchons des indicateurs sur la liaison des deux domaines, c'est-à-dire comment la construction des concepts de l'un des domaines s'appuie et interagit sur l'autre. Cette dernière question pourra apporter plus particulièrement des éléments de réponse à l'hypothèse H3, où les professeurs devraient ici s'exprimer sur la facilitation ou au contraire les difficultés supplémentaires qu'a introduites l'utilisation de l'algorithmique, relativement à la résolution d'équations algébriques en environnement traditionnel papier-crayon.

Thème 2 : point de vue des programmes

Une seule question est posée ici sur ce thème (Q1.2). Nous avions en effet déjà recueilli lors du premier entretien des éléments du rapport personnel des enseignants aux programmes institutionnels, en ce qui concerne la place de l'algèbre et l'introduction de l'algorithmique. Nous cherchons ici, avec cette question, des éléments sur l'adéquation de l'expérimentation menée par rapport au programme institutionnel, vue par chaque enseignant. Ces réponses interrogeront ainsi l'hypothèse H1, en considérant la place de l'algèbre dans l'expérimentation, du point de vue du programme officiel de la classe de seconde.

Thème 3 : point de vue des organisations mathématique et didactique

Les questions Q2 et Q4 permettent d'aborder les organisations mathématique et didactique de l'expérimentation et de revenir plus particulièrement sur le contenu des situations n°1 à 3. Les éléments recueillis, augmentés des analyses des différentes séquences réalisées, pourront aider à constituer le bilan de l'OM et de l'OD de chaque situation à proprement parler, mais aussi des articulations entre elles. Les réponses des enseignants étayeront les hypothèses H3 et H4, en questionnant comment ces professeurs, par rapport à leurs conditions et contraintes, considèrent l'association algèbre-algorithmique, en particulier si celle-ci apporte plus de gain qu'elle ne génère d'obstacles, ou encore si le temps passé sur ce type de travaux est chronophage relativement aux bénéfices d'apprentissage pour les élèves.

Thème 4 : point de vue des élèves

Les questions Q3.1 et Q3.2 visent à recueillir le rapport des enseignants à l'expérimentation du point de vue des apprentissages et des difficultés des élèves. Pour ces deux points, les réponses attendues le sont relativement aux trois pôles algèbre, algorithmique et interrelation des deux. Particulièrement, les professeurs pourront ici évoquer :

- les difficultés récurrentes dans le domaine algébrique rencontrées lors de l'expérimentation et éventuellement les apprentissages nouveaux ;
- les apprentissages et difficultés spécifiques de l'introduction de l'algorithmique, aussi bien pour les concepts de l'algorithmique que ceux de la programmation ;
- les connaissances nécessaires pour transposer les concepts algébriques en environnement informatisé et les difficultés de ce transfert.

L'analyse des réponses de ce dernier thème pourra constituer un nouveau point d'appui pour étayer l'hypothèse H3.

11.4.3 Analyse a posteriori des entretiens

De la même manière que pour le premier entretien, nous exposons quelques « morceaux choisis » des entretiens d'Annabelle, de Maurice et d'Alex constitués par des phrases ou des expressions-clefs par rapport au thème abordé, qui reflètent le point de vue de chaque professeur. Les cases vides des tableaux correspondent à des points qui n'ont pas été abordés.

Les trois tableaux sont présentés à la suite puis viennent l'analyse et la comparaison des rapports des enseignants à l'expérimentation selon les différents thèmes. Comme pour l'entretien pré-expérimentation, nous présentons les réponses des enseignants par domaine algébrique, algorithmique ou en interrelation.

Notons que cette analyse correspond à la flèche blanche, numérotée ③ (cf. figure 24, §6.2.2) de la méthodologie exposée au chapitre 6, c'est-à-dire que nous comparons les éléments EP_i ($1 \leq i \leq 3$) entre eux.

Dépouillement des entretiens par thème

L'entretien d'Annabelle est transcrit en annexe A42.

Professeur Annabelle[189]		
Thème 1 Construction des savoirs	Algorith-mique	*« j'en avais fait pas mal, par rapport à ce qui a été fait, ça a été un plus, mais ça n'a pas changé grand-chose »* *« C'est une activité de type « si … alors », c'est intéressant, je n'en ai pas fait tant que ça. »*
	Algèbre	*« J'ai utilisé l'idée du « moule » de l'équation »* *« on reprenait le fait qu'une équation du second degré, on peut la résoudre si on arrive à la factoriser. »*
	Interrela-tion AA	*« c'est pas révolutionnaire »*
Thème 2 Programmes	Algorith mique	*« Notre but, ce n'est pas de leur apprendre où il faut mettre la virgule dans le programme ! »*
	Algèbre	*« ils [Les programmes] fuient tout calcul maintenant. »* *« Tout ce qui est algèbre est sorti des programmes. »*
	Interrela-tion AA	
Thème 3 OM et OD de l'expérimenta tion	Algorith-mique	*« si ça avait été fait plus tôt dans l'année, ça aurait été plus intéressant. »*
	Algèbre	*- « cette situation [de classification des équations], je vais la garder par la suite, avec ou sans algorithmique. »* *- « ça aurait été pas mal de faire une synthèse de tout ça… [de la classification]»*
	Interrela-tion AA	*« tu as ajouté l'algorithmique [à l'algèbre], ça, c'est à la mode ! »*
Thème 4 Élèves	Algorith-mique	
	Algèbre	*- « pour l'évaluation finale, il y en a certains qui avaient un peu plus l'idée de ce qu'il fallait mettre, c'était quand même un peu mieux …»* *- « Maintenant, ils savent chercher le degré … Ils ont plus l'idée de factoriser, de développer… »*
	Interrela-tion AA	

Figure 242 : Entretien pré-expérimentation du professeur Annabelle : quelques éléments

L'entretien de Maurice est retranscrit en annexe A43.

[189] Interrelation AA signifie interrelation Algorithmique / Algèbre.

Professeur Maurice		
Thème 1 Construction des savoirs	Algorithmique	*« dans ce cadre assez réduit, l'algorithmique a été utile »* *« [Résoudre des équations du 1er degré avec un algorithme], c'est pas évident, ça a un intérêt pour l'algorithmique »*
	Algèbre	- *« … synthèse… »* - *« intérêt pour le statut des lettres, des paramètres etc. […] et le statut de l'égalité aussi »*
	Interrelation AA	- *« à la lecture des résultats, je pense que c'est une excellente façon de lier la partie mathématique et la partie algorithmique »* - *« [Utile] à la compréhension des mécanismes de résolution d'équations »* - *« la partie résolution d'équations éclaire l'algorithmique et réciproquement. »*
Thème 2 Programmes	Algorithmique	*« ce n'est pas une partie où l'algorithmique est simplement « plaquée », ce n'est pas étudié pour l'algorithmique seul, ça a un intérêt. »*
	Algèbre	*« on le trouve de moins en moins dans les manuels [la résolution des équations du 1er degré], sauf mêlé au fonctionnel »*
	Interrelation AA	
Thème 3 OM et OD de l'expérimentation	Algorithmique	- *« c'est une introduction pour l'algorithmique »* - *« en demi-classe, c'était bien, sinon j'aurais pas pu gérer tout le monde. »*
	Algèbre	*« à envisager pour l'année prochaine, juste avant une synthèse sur la résolution des équations du premier degré. »*
	Interrelation AA	*« c'est un travail qu'on aurait pu faire au premier trimestre, mais pas tout à fait au début de l'année. »*
Thème 4 Élèves	Algorithmique	*« pour certains, [ils croyaient que] l'ordinateur allait répondre à leur place, que s'ils rentraient l'équation ax + b = c, la solution allait sortir toute seule »*
	Algèbre	*« La première séance [classification des équations] était intéressante, mais elle était peut-être plus intéressante pour nous que pour les élèves eux-mêmes »*
	Interrelation AA	

Figure 243 : Entretien pré-expérimentation du professeur Maurice : quelques éléments

Pour le professeur Alex, la transcription de l'entretien se trouve en annexe A44.

Professeur Alex		
Thème 1 Construction des savoirs	Algorithmique	*« je pense qu'il y a quand même un gros problème, au niveau du lien entre le texte en français et l'algorithmique »*
	Algèbre	*« tu prends le problème à l'envers et ça, je trouve que c'est intéressant et je me demande si on ne pourrait pas penser cette posture-là pour plus de choses. »*
	Interrelation AA	*« Ce que l'on a fait, premier ou second degré en seconde, comme on a fait [l'articuler avec l'algorithmique], pour moi c'est l'essentiel. »*
Thème 2 Programmes	Algorithmique	
	Algèbre	
	Interrelation AA	*« travailler là-dessus [l'algèbre], lier ça avec de l'algorithmique, on est aux confins des dernières instructions ministérielles. »*
Thème 3 OM et OD de l'expérimentation	Algorithmique	
	Algèbre	*« C'est possible que je réutilise [la classification des équations], avant même de commencer à faire du travail sur les équations »* *« comme il n'y a pas eu d'institutionnalisation, il y a eu un trou avec la séance sur l'algorithmique.».*
	Interrelation AA	*« Je pense que si on avait fait ça en classe entière, et si on n'avait pas fait d'algorithmique derrière… ça n'aurait pas eu vraiment de sens. Les élèves se sont pris au jeu, parce qu'ils étaient en petits groupes »*
Thème 4 Élèves	Algorithmique	*« Finalement, la pensée c'est moi quoi la suggérait… donc intérêt formatif, pas grand-chose finalement. »*
	Algèbre	*« quand un élève classe ça parce qu'il y a une racine carrée, […] ça bascule en amont sur des notions qu'on pourrait penser complètement séparées des instruments sur lesquels on travaille, en l'occurrence le 1er ou le 2nd degré. »*
	Interrelation AA	*« je dois dire que très peu d'élèves faisaient d'abord des maths avant de faire de l'algorithmique »*

Figure 244 : Entretien post-expérimentation du professeur Alex : quelques éléments

Analysons ces tableaux selon les thèmes définis en section 11.4.2. Nous séparons l'analyse en les trois domaines algèbre, algorithmique et interrelation entre les deux, dans la mesure où les réponses des enseignants se prêtent à faire cette distinction.

Le rapport de l'enseignant à l'expérimentation du point de vue de la construction des savoirs mathématiques (algébriques et algorithmiques)

Le professeur Alex est le seul à avoir répondu de façon d'abord générale à cette question, en s'intéressant à la démarche engagée dans l'expérimentation. Son expression de « *prendre le problème à l'envers* » (cf. ligne 2, A44) reflète l'idée de types de tâches *non routiniers*, pour lesquels les concepts mathématiques sont interrogés d'une manière inhabituelle. Alex évoque *un certain formatage de la pensée*, ce que nous pourrions traduire par l'*habitus* des enseignants, qui ne leur permet pas de « sortir » de leurs pratiques d'enseignement.

- *Domaine algorithmique*

Pour la construction de savoirs algorithmiques, Alex expose la difficulté à acquérir une *pensée algorithmique*, c'est-à-dire *une façon d'aborder un problème en essayant de systématiser sa résolution*[190]. C'est ainsi que nous comprenons ses propos lorsqu'il indique : *« je pense qu'il y a quand même un gros problème, au niveau du lien entre le texte en français et l'algorithmique. »*. Il retient de l'expérimentation que la détermination de la structure d'un algorithme à partir d'un texte mathématique n'est pas une tâche aisée, dans le sens qu'elle demande une *transposition* (cf. §4.4). Maurice et Annabelle s'accordent à penser que la

[190] Au sens de Hart, et repris par Modeste (cf. §4.3, note de bas de page n°74).

situation n°2 est une situation intéressante pour travailler quelques concepts algorithmiques, comme les structures alternatives, citées par Annabelle.

- *Domaine algébrique*

Pour le professeur Maurice, la situation n°2 de l'expérimentation proposée constitue une *synthèse* qui aide *à la compréhension des mécanismes de résolution d'équations* (cf. ligne 6, A43) et également qui permet de reprendre l'apprentissage de concepts comme *le statut des lettres, des paramètres [...] et le statut de l'égalité* (cf. ligne 10, A43). Annabelle évoque davantage la situation n°1, avec la catégorisation des équations qui participe à la compréhension que chaque équation relève d'un « modèle » (cf. §9.4.1), ce qu'Annabelle nomme un *moule de l'équation* (cf. ligne 6, A42).

- *Interrelation algèbre-algorithmique*

La co-construction de savoirs algébriques et algorithmiques semble indéniable à Maurice et Alex, ce que traduisent leurs propos : « *la partie résolution d'équations éclaire l'algorithmique et réciproquement.* » (cf. ligne 12, A43) et « *ce que l'on a fait, premier ou second degré en seconde, comme on a fait [l'articuler avec l'algorithmique], pour moi c'est l'essentiel.* » (cf. ligne 15, A44). Annabelle, quant à elle, considère que la liaison des deux domaines *n'est pas révolutionnaire*.

Pour conclure sur ce premier point, les trois enseignants s'accordent sur le fait que l'expérimentation a permis globalement une reprise de concepts algébriques, en les considérant comme *objets*, et que des techniques de résolution ont été approfondies. Cependant, les différentes situations ne sont pas vues de la même façon par chacun des enseignants : si l'introduction de l'outil informatique dans la situation n°2 est considérée comme *essentielle* pour Alex et Maurice pour effectuer ces reprises, Annabelle lui préfère la situation n°1 de catégorisation des équations.

Le rapport de l'enseignant à l'expérimentation du point de vue des programmes institutionnels

Peu d'éléments ont été apportés par les enseignants relativement à l'adéquation de l'expérimentation aux programmes institutionnels. Ceux-ci ont repris pour le domaine algébrique les mêmes propos généraux que ceux déjà rapportés lors de l'entretien pré-expérimentation (cf. §10.1.3), regrettant la faible place de l'algèbre dans ces programmes. Pour la place de l'expérimentation, les enseignants sont partagés ; Alex et Maurice pensent qu'elle est conforme aux programmes (« *c'est en plein dans ce qu'on attend de nous, [les enseignants]* », cf. ligne 5, A44). En revanche, Annabelle exprime que : « *avec ton activité, tu es à contre-courant de ce qui est en train de se passer ! Sauf que tu as ajouté l'algorithmique, ça, c'est à la mode !* » (cf. ligne 58, A42).

Ces réponses opposées s'expliquent, puisque les premiers s'appuient sur la résolution d'un problème utilisant l'algorithmique – ce qui est une des préconisations des programmes –, et que la seconde considère que le travail *sur l'algèbre pour l'algèbre* (cf. ligne 60, A42) ne fait plus partie de ces mêmes programmes.

Le rapport de l'enseignant à l'expérimentation du point de vue des organisations mathématique et didactique de celle-ci

Deux points ressortent des entretiens :

- Les enseignants ont jugé que l'expérimentation, qui a eu lieu au cours des mois d'avril et mai, était placée trop tardivement dans leur progression annuelle. Ils l'auraient plutôt située au premier trimestre, du moins pour les situations n°1 et n°2. Relativement au domaine algébrique, les trois enseignants indiquent que la première situation de classification *aurait dû être lancée plus tôt pour la réinvestir plus tôt* (Annabelle) et *juste avant une synthèse sur la résolution des équations du premier degré* (Maurice). Alex souhaite la réutiliser l'année suivante *avant même de commencer à faire du travail sur les équations*. Cependant Maurice ne referait pas la situation n°1 mais passerait directement à la situation n°2. Annabelle et Maurice précisent également que la situation n°2 peut être programmée assez tôt dans l'année, parce qu'elle peut constituer une *introduction pour l'algorithmique.*
- Une institutionnalisation de la classification des équations a manqué entre les situations n°1 et n°2 selon les enseignants Alex et Annabelle. D'après Alex, *il y a eu un trou avec la séance sur l'algorithmique* et Annabelle ajoute que *ça aurait été pas mal de faire une synthèse de tout ça*. Une institutionnalisation à partir d'un classement correct des équations aurait été nécessaire, reprenant les objets qui constituent une équation et distinguant premier et second degré. Comme nous l'avions signalé lors de l'analyse de la situation n°1 pour le professeur Annabelle (cf. §11.1.1.4), ce temps de reprise de la situation de classification aurait été bénéfique pour asseoir les connaissances ainsi mises au jour. Cette reprise aurait pu être proposée à partir d'une des affiches constituées par l'un des groupes d'élèves, en proposant alors la tâche de comprendre le classement proposé puis de corriger les erreurs relevées. Ainsi, cette institutionnalisation permettrait-elle de décontextualiser les connaissances des élèves sur les équations proposées en leur donnant un caractère universel de savoir non relié à une situation spécifique, ce qui constituerait un point d'appui avant d'accomplir la tâche d'algorithmisation des différents types d'équations répertoriés.

Ces deux points constituent des éléments de réponse aux hypothèses H3 et H4. Pour H4, les enseignants montrent ici des invariants dans leurs gestes professionnels du point de vue de la temporalité, plaçant la reprise des équations du premier degré au début du premier trimestre, afin de pouvoir y faire référence durant toute l'année. Les propos de Maurice conforte l'hypothèse H3, indiquant que l'utilisation de l'algorithmique liée à la programmation semble aider les élèves à approfondir leurs conceptions de l'équation et de sa résolution (cf. annexe A43) :

> 63. M : Pour les équations du premier degré oui. Rien que le fait de mieux comprendre le statut des paramètres dans une équation du premier degré, je pense que oui.
> 64. C : Tu penses que le passage à l'algorithmique permet effectivement de mieux comprendre la résolution des équations ?
> 65. M : Oui, vraiment…

Pour conclure, les enseignants auraient souhaité que l'expérimentation se fonde davantage dans leur progression, de façon à pouvoir y intégrer les concepts algébriques révélés.

Le rapport de l'enseignant à l'expérimentation du point de vue des élèves

- *Domaine algorithmique*

Les discours des enseignants véhiculent ici des éléments différents. Pour Alex, les situations n°2 et n°3 sur l'introduction de l'algorithmique ont nécessité d'être fortement guidées pour aboutir aux résultats escomptés : *« la pensée c'est moi quoi la suggérait… donc intérêt formatif, pas grand-chose finalement. »* (cf. A44, ligne 13). Pour Annabelle, la situation n°2 a simplement permis une reprise de concepts algorithmiques vus précédemment : « *C'était pour mettre en valeur des méthodes, donc si ça avait été fait plus tôt dans l'année, ça aurait été plus intéressant.* » (cf. A42, ligne 4). En revanche pour Maurice, cette même situation a permis aux élèves de travailler une activité où l'algorithmique/programmation est outil pour résoudre un problème mathématique : « *Pour une fois, ce n'est pas une partie où l'algorithmique est simplement « plaquée »* (cf. A43, ligne 8).

La jeunesse de l'introduction de l'algorithmique dans les programmes de la classe de seconde explique sans doute en partie ces divergences de points de vue sur l'intérêt de cette intégration : les enseignants n'ont pas de *repères didactiques* pour considérer ce type de question.

- *Domaine algébrique*

Pour les apprentissages et difficultés des élèves en algèbre, la situation n°1 est évoquée à plusieurs reprises par Alex et Annabelle. Alex revient sur les difficultés rencontrées, relativement à la prise en compte de la nature des nombres constituant les coefficients des équations pour classer celles-ci (cf. A44, ligne 36) :

> Déjà, le statut de la variable, c'est pas si clair que ça pour eux, la preuve, c'est pas sur la variable sur laquelle ils réfléchissent quand ils veulent classer les équations, c'est sur les nombres périphériques.

Annabelle, quant à elle, insiste sur les apprentissages mis en place (cf. A42, ligne 32) :

> Mais à la fin de l'année, c'était un peu mieux … Je me servais du principe de la classification pour leur dire « *tant que vous ne savez pas dans quel « moule » se trouve l'équation, ne faites rien, de toute façon vous n'allez faire que des bêtises* ». Maintenant, ils savent chercher le degré… Ils ont plus l'idée de factoriser, de développer… J'ai réinvesti la catégorisation…

Pour Maurice, cette situation *était intéressante, mais elle était peut-être plus intéressante pour [les enseignants] que pour les élèves eux-mêmes* (cf. A43, ligne 16). Maurice souligne plutôt l'intérêt pour l'enseignant de récolter les représentations et conceptions des élèves au sujet du concept d'équation et des objets qui gravitent autour de ce concept. Pour lui, les apprentissages algébriques des élèves ne sont pas probants, contrairement à la situation n°2.

11.4.4 Bilan des entretiens spécifiques post-expérimentation

Les éléments d'analyse de la section précédente permettent d'avancer un bilan de l'expérimentation, du point de vue des professeurs expérimentateurs. Nous retenons que les enseignants considèrent que le travail sur le concept d'équation a toute sa place en classe de seconde, ainsi que la reprise des techniques de résolution des équations polynomiales du premier et du second degré, en dehors de toute situation contextualisée où l'algèbre est utilisée comme *outil*. En particulier, un approfondissement du concept d'équation passe par la

compréhension de la notion de *paramètre*. Celui-ci peut être introduit, travaillé et institutionnalisé à partir des situations n°2 et n°3, où une *modélisation* des équations (cf. §9.4.1) est proposée, modélisation nécessaire à la conception d'un algorithme de résolution des équations d'un même *modèle*.
En revanche, les différentes situations ne sont pas vues comme ayant le même intérêt pour l'enseignement et l'apprentissage de l'algèbre. Pour Alex et Annabelle, la situation n°1 de classement des équations est plébiscitée pour des classes de niveau moyen, voire faible, mais les situations n°2 et n°3 sont estimées difficiles. Pour Maurice, la situation n°1 est considérée comme superflue pour une classe de bon niveau, alors que la situation n°2 est regardée comme véhiculant des connaissances supplémentaires. La situation n°3 reste problématique pour Maurice et Annabelle, qui la juge prématurée en seconde. Maurice revient sur les raisons de son refus d'expérimenter la situation n°3 en ces termes (cf. A43, ligne 32) :

> M : Oui, j'y ai réfléchi. Je pense que le second degré, on ne le traite pas de la même façon. Il me semble qu'à la fin de la seconde, la résolution théorique des équations du second degré, c'est quelque chose qui est plus difficile à mettre en place. Non … Au moment de l'apparition de la forme canonique, retrouvée par le calcul, là, ça me paraît une bonne chose …de s'appuyer sur … en plus, ça peut anticiper la démonstration où tu transformes la forme canonique en forme factorisée.

Maurice n'a pas retenu l'idée de déterminer des sous-catégories pour les équations du second degré en concevant des algorithmes de résolution des équations du type $(ax + b)(cx + d) = 0$ ou $x^2 = a$, tels que nous les avons présentés en situation n°3. Pour lui, le seul algorithme possible semble être celui qui résolve *toute instance de la famille des équations du second degré*, au sens de Modeste. C'est la raison pour laquelle il préfère reporter ce travail en début de classe de première.

CHAPITRE 12 - BILAN

Ce dernier chapitre constitue principalement le bilan de *l'expérimentation didactique spécifique*. En particulier, une analyse plus globale est proposée pour chacune des situations n°1 à 3, en offrant un comparatif des éléments recueillis et analysées pour chacune d'elles, aussi bien concernant l'apprentissage des élèves que l'enseignement des professeurs. Relativement à la méthodologie détaillée au chapitre 6, le bilan exposé correspond à la fois à la flèche blanche, notée ② (cf. figure 24, §6.2.2), c'est-à-dire aux comparaisons effectuées entre les éléments SR_i ($1 \leq i \leq 3$) et à la flèche noire, notée ❹ d'évaluation globale du dispositif. Le chapitre se termine par un retour sur les hypothèses de recherche.

12.1 Situation n°1 : La catégorisation des équations

Résumons les résultats obtenus pour l'ensemble des trois classes d'Annabelle, Maurice et Alex pour la situation n°1. Le tableau ci-dessous donne les principales techniques utilisées par les élèves pour réaliser leur classement et qui ont été relevées d'après les affiches (cf. §11.1). Plusieurs techniques peuvent être comptabilisées pour chaque affiche.

Techniques utilisées pour le classement	Nombres d'affiches (sur 21)			
	Anna-belle (sur 6)	Mau-rice (sur 6)	Alex (sur 9)	Total
τ_{11} : Grouper les équations, somme ou différence d'une part et les équations produit ou quotient d'autre part.	1		1	2
τ_{12} : Grouper les équations polynomiales du premier degré d'une part et les équations du second degré d'autre part.		2	9	11
τ_{13} : Grouper les équations selon la nature des nombres déterminés (entiers, décimaux, rationnels, irrationnels, …).	3	1	4	8
τ'_{13} : Grouper les équations selon que le second membre est nul on non.		2	2	4
τ_{14} : Grouper les équations polynomiales d'une part et les non polynomiales d'autre part.		1		1
τ'_{14} : Grouper les équations du second degré selon qu'elles soient ou non des équations-identités	1		4	5
τ_{15} : Grouper les équations selon leur nombre de solutions.		2		2
τ_{16} : Grouper les équations selon qu'une résolution directe est possible ou qu'une transformation de l'équation est nécessaire à sa résolution.	1			1
τ'_{16} : Grouper les équations selon que leur résolution s'effectue par développement ou par factorisation.	1			1
τ_{21} : Ordonner les équations de la plus simple à résoudre à la plus difficile, selon qu'elles comportent des transformations plus ou moins expertes à effectuer.	1	1		2
τ_{22} : Ordonner les équations de la plus simple à résoudre à la plus difficile, selon que les techniques pour les résoudre sont acquises ou non par l'élève.		2		2

Figure 245 : Récapitulatif des techniques utilisées pour le classement des d'équations (situation n°1)

Le tableau ci-dessus permet de visualiser des différences selon les classes des enseignants. Deux points nous semblent particulièrement significatifs, que nous exposons ici.
Pour le premier point, Maurice, qui qualifie sa classe de « bon niveau », voit un très faible nombre d'élèves considérant la nature des nombres déterminés des équations comme un critère de classement, alors que les élèves d'Alex et d'Annabelle, déclarés d'un niveau plus faible, considèrent pour près de la moitié d'entre eux ce critère de classement comme pertinent. Il semble donc se confirmer (cf. situation n°1, §11.1) que les faibles connaissances des élèves dans le domaine numérique rejaillissent sur le domaine algébrique.

L'influence des conceptions des nombres en écriture fractionnaire et des irrationnels sur l'objet équation

Nous avons analysé que les élèves classant les équations en fonction de la nature des nombres déterminés possèdent des conceptions erronées sur ces nombres. Les conceptions les plus rencontrées sont :
- considérer les nombres en écriture fractionnaire comme deux entiers indépendants, séparés par un trait de fraction, et non pas comme le quotient de ces deux nombres ;
- ne pas intégrer les irrationnels sous forme de racine carrée dans l'ensemble des réels (cf. typologie de Bronner, §2.5).

L'intégration de ces nombres comme *objets nombres* n'est pas encore réalisée. Ces conceptions n'impactent pas seulement le domaine numérique mais engendrent des difficultés dans le domaine algébrique. La présence de ces nombres dans une équation occulte chez certains élèves la notion de degré. Citons l'exemple de cette élève qui ne se résout pas à ranger l'équation $\sqrt{2} + x = 3$ ni dans la catégorie des équations du premier degré, ni dans celle du second degré, parce que celle-ci possède une racine carrée. Ou de cet autre élève qui hésite entre les deux catégories, parce que « $\sqrt{2}$ *provient de la résolution de l'équation* $x^2 = 2$ ». Le degré de l'équation n'étant pas pris en compte, l'utilisation de techniques de résolution devient problématique. Ces résultats vont dans le sens de l'hypothèse H2 d'une grande variabilité de la capacité des élèves à décontextualiser les équations des problèmes où elles sont rencontrées et à les considérer comme des objets.

L'influence des reprises de l'enseignant sur les conceptions des équations

Le second point que nous relevons dans le tableau est la considération du degré d'une équation comme un critère de classement chez tous les élèves d'Alex, alors qu'il est minoritaire dans les deux autres classes. Également, les élèves d'Alex utilisent le classement des équations selon qu'elles soient ou non des *équations-identités* (cf. §11.1.1), c'est-à-dire des équations du second degré factorisables par l'utilisation d'une identité remarquable en un produit nul de deux polynômes du premier degré. Nous faisons l'hypothèse que cette différence de score peut être imputée à la *reprise* de la résolution des équations du second degré qui a déjà été effectuée par Alex au moment de l'expérimentation, mais pas encore revue par les deux autres enseignants, comme le montre leur progression annuelle en section 10.2. Ce point peut être considéré comme un élément de réponse à l'hypothèse H4, même si nous ne considérons plus ici strictement l'expérimentation menée, mais nous pouvons

constater que des choix d'organisation mathématique et didactique des enseignements ont une influence sur les possibilités d'apprentissage des élèves.
Afin de poursuivre notre analyse de la situation n°1, un diagramme est réalisé à partir du tableau précédent, indiquant le pourcentage des techniques utilisées dans les classements des élèves. Lorsque plusieurs techniques ont été majeures pour un classement donné, elles ont été comptabilisées, aussi le total excède-t-il 100%.

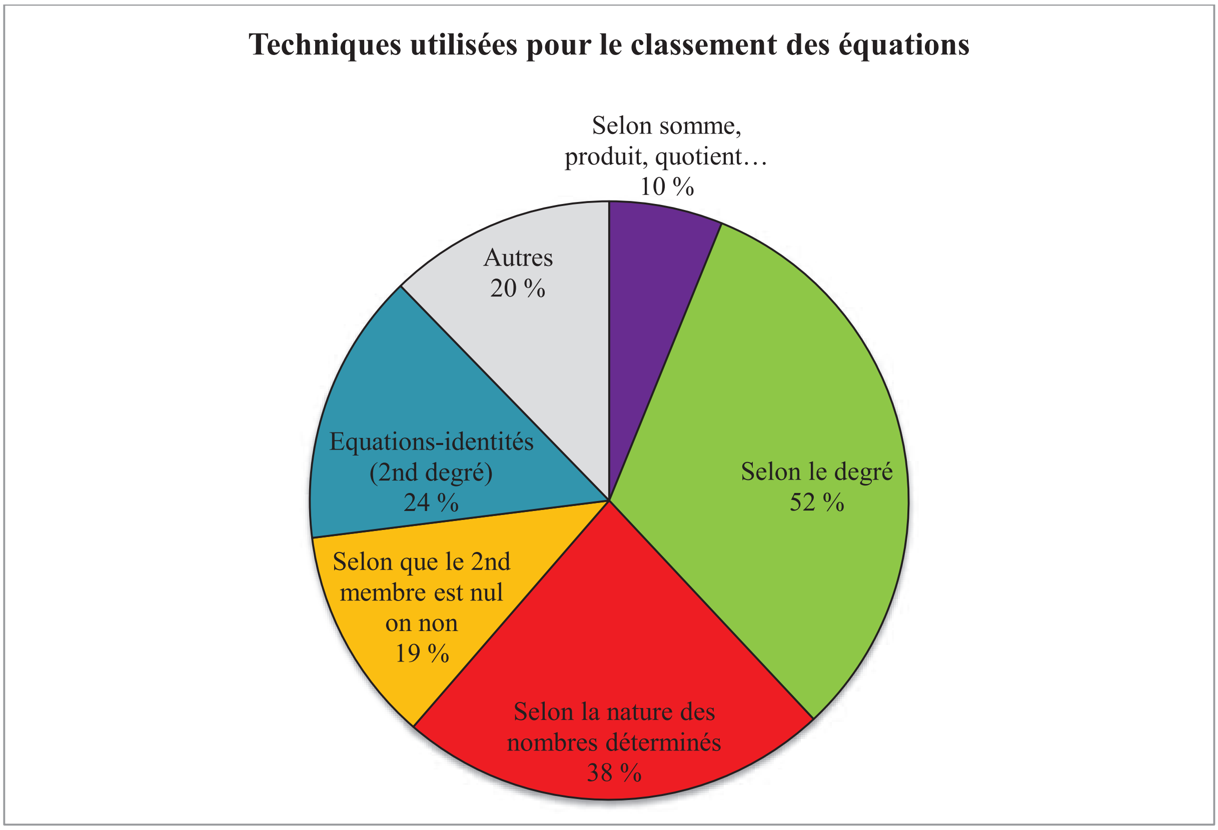


Figure 246 : Répartition des techniques utilisées pour le classement des équations (plusieurs techniques possibles par classement)

Ce diagramme met en évidence deux nouveaux points :

La juxtaposition des savoirs enseignés

Les élèves ont souvent utilisé plusieurs techniques pour classer les équations. Nous relevons que deux tiers des affiches comportent plus de deux techniques de classement différentes. Si le critère du degré de l'équation est souvent présent, il est couplé avec d'autres critères comme la nature des nombres déterminés, les équations-identités ou les équations présentant un membre nul. Des savoirs issus du collège comme les notions d'identité remarquable ou la règle du produit nul restent des connaissances juxtaposées qui ne s'imbriquent pas les unes dans les autres. Les organisations mathématiques ponctuelles vues lors des premiers apprentissages de la résolution des équations ne sont pas suffisamment reprises ni synthétisées en organisations mathématiques locales, où les différentes techniques pourraient alors être unifiées sous une même technologie. Nous avons corroboré ces résultats par l'étude des manuels de troisième et de seconde (cf. §7.2) qui montrent la juxtaposition de ces techniques. D'autre part, les savoirs présentés par la noosphère sont souvent énoncés indifféremment dans les domaines numérique et algébrique, ce qui peut se révéler problématique. Prenons l'exemple du programme de troisième sur les identités remarquables. Celui-ci indique que leur connaissance doit être accompagnée d'une utilisation *dans les deux sens sur des exemples numériques ou littéraux simples* (MEN, 2008a). Ainsi les élèves voient-ils en classe de troisième aussi bien l'utilisation de l'identité $(a + b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab$ pour l'exemple $\left(\sqrt{2}+3\right)^2 = 11 + 6\sqrt{2}$ qu'avec celui-ci : $(x + 2)^2 = x^2 + 4x + 4$. L'obstacle épistémologique de la transition arithmétique-algèbre peut ressurgir ici avec la non-compréhension de la différence des objets sur lesquels est appliquée cette identité : l'objet « identité » peut occulter les objets en jeu dans ces égalités. Ces savoirs parcellaires nécessiteraient d'être davantage synthétisés, unifiés à un moment donné de la scolarité pour une utilisation raisonnée lors de la résolution d'équations.

La méconnaissance du concept d'équation

Une seconde interprétation peut être donnée du phénomène ci-dessus de création de classes d'équation sous la forme d'équations-identités ou encore d'équations sous forme de somme, produit ou quotient. Il s'agit de la confusion entre le concept d'*équation* et celui d'*expression algébrique*, les intitulés des classes montrant cet amalgame. Bosch et Chevallard (2012, p.28) indiquent que le terme d'*expression algébrique* est devenu un véritable fourre-tout dans les programmes institutionnels. Ces auteurs s'appuient sur Drouhard (cf. §2.2.2) pour donner la définition d'une expression algébrique comme *un énoncé symbolique qui exprime un certain programme de calcul*. Les élèves ont classé les équations comme ils auraient classé des expressions algébriques, en oubliant la spécificité du signe d'égalité dans une équation (cf. usages n°4 et n°5 du signe d'égalité, §2.2.2). Cet amalgame montre que certains élèves ne différencient pas les deux concepts (cf. affiche 6-An, §11.1.1.2).

En guise de conclusion pour la situation n°1

Les entretiens post-expérimentation ont permis de connaître le point de vue des enseignants sur la situation n°1. Ils ont tous convenu qu'elle leur a permis de relever les représentations des élèves sur le concept d'équation, et que malgré leur expérience d'enseignant chevronné, aucun d'entre eux n'avait pris la mesure des conceptions des élèves. Pour deux d'entre eux, enseignant dans une classe moyenne, voire faible, la classification en deux catégories, premier et second degré, a permis un premier tri dans les techniques de résolution des équations, à condition de réinvestir le concept de degré ensuite. Nous ajoutons que la situation n°1 amène à considérer l'aspect *structural* d'une équation, cet aspect permettant d'identifier globalement de quel type d'équations il s'agit, puis l'aspect *procédural* entre en jeu, surtout lors des situations n°2 et n°3 rendant possible l'application d'une technique de résolution à un type d'équations reconnu. Cet enchaînement des deux aspects constitue la base de l'*algorithmisation* des techniques de résolution.

La situation n°1 permet un travail sur le concept d'équation et une reprise de sa définition et de ses caractéristiques : s'interroger sur ce concept en tant qu'o*bjet* (Douady, 1986), hors de tout contexte, constitue une complémentarité par rapport à l'utilisation qui en est habituellement faite dans les problèmes où elle est *outil*. Nous proposons en section 12.4 une amélioration du dispositif de l'expérimentation pour mieux faire ressortir ce point.

12.2 Situations n°2 et 3 : L'algorithmique et la programmation pour la résolution d'équations

Une modélisation des équations dans un micro-monde

Nous avons vu comment la situation n°1 permet un travail sur la *catégorisation* des équations. Les situations n°2 et n°3 offrent, quant à elles, un travail sur la *modélisation* des équations, ce qui consiste en la détermination d'une équation *paramétrée* qui couvre tous les cas de figure d'une liste d'équations donnée (cf. § 9.4.1). Cette modélisation est permise par l'introduction de l'algorithmique et de l'outil informatique, comme Balacheff (1994) l'exprime :

> L'expression computationnelle des objets d'enseignement pour leur inscription dans un dispositif informatique dédié à l'apprentissage n'est pas le résultat d'un simple processus de traduction d'un système de représentation vers un autre, mais celui d'un véritable processus de modélisation et donc de théorisation des objets d'enseignement et de leurs conditions d'existence. (p.10)

Balacheff précise que l'introduction de l'outil informatique va remettre en question *l'écologie des savoirs enseignés*, dans le sens où elle *conduit à l'explicitation de contenus d'enseignement jusque-là non-dits, voire à la création de nouveaux objets d'enseignements* (ibid.). C'est bien ce qui se produit dans le cadre de notre expérimentation où le *détour* par l'algorithmique permet de considérer les équations comme *objets* de l'algèbre sur lesquels on s'interroge. Ce détour est à rapprocher d'un *micro-monde* dont Capponi et Laborde (1995) donnent la définition suivante :

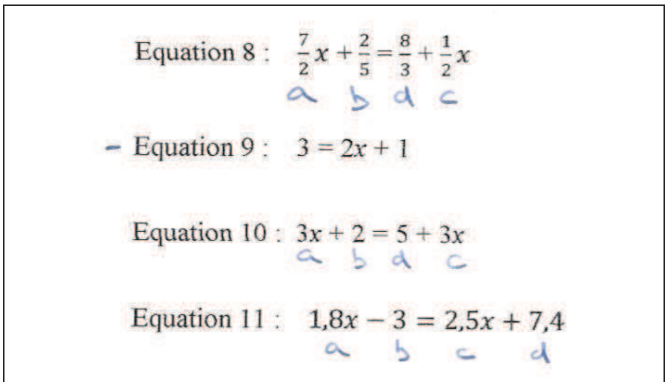
> Un micro-monde est une création d'un monde de réalités artificielles fournissant un modèle (au sens des logiciens) d'une théorie. Ce monde comporte des objets sur lesquels on peut agir grâce à des actions, on peut aussi créer de nouveaux objets. Une fois créés, les objets ont un comportement régulé par la théorie sous-jacente au modèle. Même si l'utilisateur du micro-monde peut agir sur ces objets, ces derniers présentent donc une certaine autonomie, de la même manière qu'on ne peut faire n'importe quoi avec un objet matériel. (p. 265).

Capponi et Laborde utilisent cette définition du micro-monde pour caractériser le logiciel de géométrie dynamique Cabri-géomètre. Nous effectuons ici le parallèle avec le logiciel de programmation Algobox qui se comporte comme tel, puisqu'il est possible de créer des représentations d'un objet théorique et d'agir sur ses représentations. La comparaison ne peut cependant être totale, la conception de Cabri-géomètre est *dédiée* à la manipulation d'objets géométriques et à l'exploration de leurs propriétés, alors qu'un logiciel quelconque de programmation n'est pas spécialement dédié au domaine algébrique. Néanmoins, ce parallèle permet de comprendre comment s'est créée une nouvelle représentation des objets de l'algèbre, dans le cadre de l'algorithmique et de la programmation. Comme vu dans le chapitre de présentation de la problématique (cf. §5), Laborde (2003) utilise le terme de *médiation* de l'outil informatique pour définir le rapport dialectique qui existe entre l'action et la signification mathématique. L'accès aux objets mathématiques abstraits, non *ostensifs,* se fait par l'intermédiaire de registres sémiotiques (Duval, 1993) où l'utilisation de signes en donne des *ostensifs* (Chevallard et Bosch, 1999). Ainsi l'algorithmique et la programmation forment un micro-monde pour le domaine algébrique, où il est possible d'explorer et d'expérimenter sur des objets de l'algèbre, comme s'ils étaient des objets *matériels*.

Des indicateurs de la prise en compte de l'aspect objet des équations

Outre la mise en place elle-même des situations qui sont conçues pour permettre la prise en compte de l'aspect objet des équations, nous avons relevé lors de l'analyse des séquences des indicateurs montrant l'émergence de cette prise en compte par les élèves. Citons quelques exemples :

- l'utilisation en actes de *paramètres* pour écrire sous une appellation unique différentes équations données ;



Production de Pierre (classe d'Annabelle, situation n°2)

Figure 247 : Élève considérant des équations du premier degré sous une forme générique

- l'utilisation du terme *modèle* d'une équation lors de la recherche d'une forme générique d'équation correspondant à une liste donnée ;

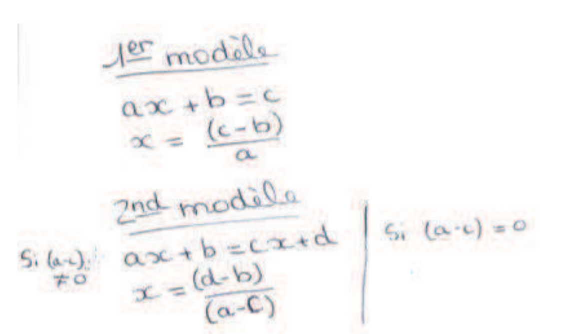
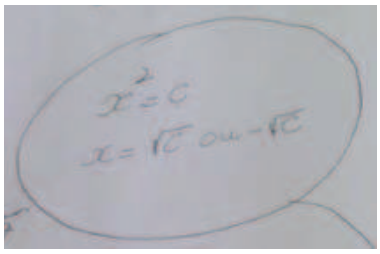
	**Jean-Stéphane** (*au professeur*) : On a fait un modèle. **Alex** : Ah, vous avez fait un modèle ! Alors, (*en regardant la feuille de l'élève, ci-contre)* le modèle, c'est $x^2 = c$… 
Production de Victorien (classe de Maurice, situation n°2)	**Production de Jean-Stéphane (classe d'Alex, situation n°3)**

Figure 248 : Production d'élèves considérant la modélisation des équations

- la compréhension par certains élèves que la *transformation d'équations*, par factorisation ou développement, permet de retrouver une forme générique où des techniques de résolution connues et identifiées peuvent alors être appliquées. En particulier, l'élève Marine (cf. classe d'Alex, §11.3 .2.4) dans l'extrait ci-dessous évoque l'automatisation, l'*algorithmisation* des procédures de transformation des expressions algébriques, dans le but de les factoriser :

L'élève Marine évoque le premier algorithme qu'elle a conçu pour résoudre les équations du type (ax + b)(ax + d) = 0 et s'interroge sur la résolution de x² = 7 par le programme. Elle a écrit $x^2 - 7 = (x - \sqrt{7})(x + \sqrt{7})$ *sur sa copie et commente :* **Marine** : Donc, c'est pas la peine d'en faire un autre en fait, il faut juste transformer. **Alex** : Avec transformation, en fait, il contient tout ! **Marine** : Et on ne pourrait pas faire un algorithme qui transforme les expressions ?
Production de Marine et dialogue avec le professeur Alex (situation n°3)

Figure 249 : Exemple d'élève évoquant la transformation des équations

Pour Marine une généralisation s'est opérée : la pluralité des microtechniques de résolution apprises au cours de sa scolarité se trouve unifiée ici en une technique plus générale.
C'est clairement le *détour* par l'algorithmique qui provoque ces considérations des objets de l'algèbre. Ces exemples montrent que le travail engagé va bien au-delà de la simple résolution d'équations du premier ou du second degré : les objets de l'algèbre sont réinterrogés, revisités, allant jusqu'à l'étude *de nouveaux objets* comme souligné par Balacheff, et en particulier l'étude du concept de *paramètre*. Nous nous arrêtons sur ce concept dans le paragraphe suivant.

L'émergence du concept de paramètre

Nous avons cité Chevallard en section 2.2.1 qui précisait dès 1989 l'intérêt didactique de l'introduction du concept de paramètre dans l'enseignement de l'algèbre élémentaire, en nommant ce concept *la force de l'algèbre*, et en affirmant que s'interroger sur les paramètres d'un système est une façon d'entrer dans la *modélisation algébrique*. Le détour par l'algorithmique permet d'accéder à ce concept de paramètre, en en réalisant une certaine *matérialisation,* comme vu plus haut, au sein d'un programme informatique.
Cependant les *paramètres* sont qualifiés *d'objets paramathématiques* (Chevallard et Joshua, 1982)[191], définis comme des notions qui ne font pas l'objet d'un enseignement mais qui sont nécessaires à l'enseignement et à l'apprentissage d'autres concepts mathématiques. En sus des paramètres, nous pouvons citer les variables, les inconnues, les expressions algébriques, … Chaachoua et al. (2012) indiquent à propos de ces notions :

> Le développement des notions paramathématiques […] est très important pour pouvoir contrôler complètement l'activité impliquant les expressions, les propositions et les fonctions algébriques. Dans l'enseignement actuel, ce développement est disparate, instable, et présente de nombreuses lacunes. (p.270)

Bosch et Chevallard (2012) soulignent que la notion de paramètre en particulier n'a pas toujours été absente des programmes institutionnels et qu'elle existait dans les programmes du lycée jusque dans les années 1980. C'est ensuite que *les paramètres furent déclarés, selon une expression pittoresque du programme, « indésirables en seconde ». Or, cette disparition forcée, fruit d'une évolution mal régulée du curriculum, constituait une dénaturation de « l'art algébrique », même à un niveau élémentaire* (ibid., p.34).

[191] Chevallard, Y. et Joshua, MA. (1982). Un exemple d'analyse de la transposition didactique : la notion de distance. *Recherches en Didactique des Mathématiques, 3.2*, p. 157-239.

Nous rejoignons ces points de vue, considérant l'importance de ce concept pour l'entrée dans l'algèbre élémentaire et le côté problématique de son occultation dans les programmes institutionnels. En effet, ces mêmes programmes présentent des formulations comportant, en abondance, des paramètres. Citons-en quelques-uns :
- dans le programme de troisième : *Connaître et utiliser la relation* $y = ax + b$ *entre les coordonnées* (x, y) *d'un point M qui est caractéristique de son appartenance à la droite représentative de la fonction linéaire* $x \longmapsto ax + b$ (MEN, 2008a) ;
- dans le programme de seconde : *Donner le tableau de signes de* $ax + b$ *pour des valeurs numériques données de a et b* (MEN, 2009a) ;
- dans le programme de première S : *Sens de variation des fonctions* αu, *[...], la fonction u étant connue et* α *un réel* (MEN, 20010a).
Même s'il est précisé dans le programme de seconde, par exemple, que le tableau de signes doit être donné pour des valeurs numériques, comment l'enseignant peut-il procéder à son institutionnalisation sans faire apparaître de paramètres ?
Ainsi, puisque ces paramètres vivent dans l'institution EN, pourquoi ne pas leur donner un réel statut, de manière à ne pas rester constamment dans l'implicite ? L'expérimentation menée a montré que l'introduction de la définition de ce concept est possible (cf. Annabelle, §11.2.1.2) et compréhensible par les élèves. Maurice souligne quant à lui que la situation n°2 était intéressante *rien que par le fait de mieux comprendre le statut des paramètres dans une équation du premier degré* (cf. annexe A43, ligne 63), montrant subséquemment l'importance qu'il accorde à ce concept.

12.3 Sur l'introduction de l'algorithmique et de la programmation

Nous proposons dans cette section quelques éléments de bilan au sujet de l'introduction de l'algorithmique et de la programmation dans l'expérimentation menée. Nous reprenons des éléments plus spécifiques à l'algèbre dans la section 12.6.3.

La réciprocité : utilisation de l'algèbre comme outil pour apprendre les objets de l'algorithmique et de la programmation
L'introduction d'une part d'algorithmique et de programmation pour la résolution de certaines équations du premier et du second degré n'avait nettement pas pour objet de créer un résolveur général de ces équations, efficace et robuste, mais seulement quelques algorithmes dont le fonctionnement puisse constituer une référence pour un élève engagé dans une démarche d'apprentissage des objets de l'algèbre. Cependant, les situations n°2 et n°3 ont permis également de construire et de renforcer les connaissances des élèves sur les objets de l'algorithmique et de la programmation. Le professeur Maurice le souligne : « *pour l'algorithmique, c'est pas évident, ça a un intérêt* » (cf. annexe 43, ligne 8). En particulier, la structure d'un algorithme et d'un programme, la notion de test alternatif, les concepts de variable informatique, d'entrée-sortie des données ont été travaillées. Notons que pour l'algorithmique et la programmation, la situation n°3 est une *reprise* de la situation n°2, pratiquement à l'identique, c'est-à-dire que les structures des nouveaux algorithmes à

produire sont les mêmes que pour la situation n°2. En outre, les élèves du professeur Alex ont réalisé avec un peu plus de facilité ces seconds algorithmes, dans le sens où la structure globale de l'algorithme (données en entrée, données en sortie, corps de l'algorithme) a été plus facilement et plus rapidement déterminée. Néanmoins, si ces situations ont permis d'asseoir quelques principes de base de l'algorithmique et de la programmation, nous exprimons un bémol sur ce constat. En effet, le défaut *d'instrumentation* de beaucoup d'élèves a été un frein au travail mathématique visé, comme nous le développons dans le paragraphe suivant.

Nécessité d'une familiarisation avec l'algorithmique et d'une genèse instrumentale

Certains des problèmes rencontrés lors de l'expérimentation ont semblé se poser en termes de familiarité nécessaire avec les concepts algorithmiques et de programmation, et en particulier avec le logiciel informatique Algobox. Nous mentionnons ici deux points liés entre eux :

- la *première transposition* (cf. §4.4) nécessaire à la conception d'un algorithme à partir de la résolution d'un problème en environnement papier-crayon a provoqué un détournement de l'attention de certains élèves du problème visé, en raison de la *pseudo-transparence* (Artigue, 1997) des environnements papier-crayon et algorithmique et de la *non-congruence* de ces deux environnements. Nous avons cité par exemple la « disparition » des étapes intermédiaires de la résolution d'une équation en environnement papier-crayon lors de l'écriture de l'algorithme (cf. figure 250), que certains élèves ont contourné en réintroduisant des étapes dans l'écriture de leur programme (cf. figure 186, classe de Maurice, §11.2.2.2).

Résolution en environnement papier-crayon ($a \neq c$)	Algorithme en pseudo-code
$ax + b = cx + d$ $\cancel{ax - cx = d - b}$ $\cancel{(a - c)x = d - b}$ $x = \frac{d - b}{a - c}$	Données en entrée : *a, b, c, d* Donnée en sortie : $\frac{d-b}{a-c}$

Figure 250 : Non-congruence entre les environnements papier-crayon et informatisé

- la *seconde transposition* nécessaire à la conception du programme informatique à partir d'un algorithme a fait davantage ressortir les problèmes de compréhension d'un nouveau langage, sans oublier les problèmes liés aux contraintes du logiciel utilisé. Ces contraintes sont illustrées ci-dessous par le passage de l'algorithme au programme, où le logiciel ne permet pas l'affichage direct d'une expression à calculer. Le logiciel n'accepte pas l'instruction « afficher *–b/a* », ce qui oblige à passer par une variable intermédiaire. Ceci induit ici une non-congruence entre l'algorithme conçu et le programme informatique.

Résolution en environnement papier-crayon ($ac \neq 0$)	Algorithme informatisé en pseudo-code	Programme Informatique sous Algobox
$(ax + b)(cx + d) = 0$ $ax + b = 0$ *ou* $cx + d = 0$ $x = \frac{-b}{a}$ *ou* $x = \frac{-d}{c}$	Données en entrée : *a, b, c, d* Données en sortie : $\frac{-b}{a}$; $\frac{-d}{c}$	Variables *a, b, c, d, x* Lire *a, b, c, d* *x* prend la valeur *–b/a* Afficher *x* *x* prend la valeur *–d/c* Afficher *x*

Figure 251 : Non-congruence entre l'algorithme et le programme sous Algobox

La cohérence globale de la situation a été perdue de vue par certains élèves qui ne possédaient pas les premiers concepts de base de l'algorithmique, ni n'étaient suffisamment instrumentés pour l'utilisation du logiciel Algobox. Les observations menées dans les différentes classes ont montré que le nombre de manipulations élémentaires liées à des questions de communication avec l'environnement informatique vient parasiter les rétroactions qui auraient été intéressantes d'un point de vue mathématique. Laborde (2003) indique que l'acquisition d'une genèse instrumentale est lente et complexe et que les premiers schèmes mis en place ne sont pas les plus efficaces. De plus, les schèmes impliquent une certaine connaissance mathématique :

> The use of technology in mathematics by students was analyzed from an instrumental perspective […]. The mentioned research papers provide examples that show that the instrumental genesis takes place over a long period of time and that the first schemes constructed by the learner are not the most effective. What also appears is that the schemes involve some mathematical knowledge. A double question arises from these observations: What are the relevant tasks allowing both the development of instrumentation schemes and of mathematical knowledge? [192]

L'équilibre entre les deux pôles, développer les schèmes et asseoir des connaissances mathématiques, est délicat à trouver, ce qu'a confirmé l'expérimentation conduite. Maurice exprime cependant que pour lui, la situation n°2 a permis de travailler sur les deux tableaux : « *la partie résolution d'équations éclaire l'algorithmique et réciproquement.* » (cf. ligne 12, A43).

D'autre part, pour conclure sur les deux paragraphes ci-dessus, nous pouvons aller plus loin dans notre réflexion en considérant notre choix d'articuler étroitement la connaissance mathématique et instrumentale. Nous avons présenté la seconde dans un cadre mathématique spécifique, et pour que la connaissance instrumentale perdure, il serait également intéressant de la décontextualiser et de l'institutionnaliser, en s'appuyant sur la dialectique objet/outil (Douady, 1986).

[192] L'utilisation de la technologie en mathématiques par les élèves a été analysée dans une perspective instrumentale […]. Les travaux de recherche mentionnés sont des exemples qui montrent que la genèse instrumentale se déroule sur une longue période de temps et que les premiers schèmes construits par l'apprenant ne sont pas les plus efficaces. Ce qui apparaît aussi, c'est que les schèmes impliquent une certaine connaissance mathématique. Une double question se pose à partir de ces observations : Quelles sont les tâches pertinentes permettant à la fois le développement de systèmes d'instrumentation et de la connaissance ?

12.4 Pour une reprise de l'expérimentation

Prenant en considération nos analyses et en incluant le bilan des professeurs expérimentateurs, nous proposons une reprise de la séquence en conservant les points positifs et en réaménageant des parties des organisations mathématiques ou didactiques. Nous n'indiquons que les points principaux d'un nouveau scénario d'expérimentation, qui serait encore à affiner par la suite. Cette démarche a pour fonction de résumer l'essentiel d'une reconstruction des trois situations et de leurs articulations.

	Reprise de l'expérimentation proposée et ajouts (en italiques)	Modifications et justifications
En amont de la situation n°1	Premiers concepts d'algorithmique (actions élémentaires, structure d'un algorithme, structures alternatives avec condition) et de programmation (variables informatiques, instructions, tests) avec prise en main d'un logiciel de programmation (apprentissage du langage spécifique).	Plusieurs séances sont nécessaires pour la mise en place de ces premiers concepts. Les enseignants expérimentateurs en avaient réalisé 2 ou 3, ce qui ne semble pas suffisant, au vue des résultats (et pour une majorité d'élèves)
Situation n°1	Faire classer des équations comportant un mélange d'équations polynomiales du premier et du second degré, sous des formes diverses (factorisées, développées,…).	Pour faire avancer plus rapidement le temps didactique, vers une classification des équations permettant de faire émerger des techniques de résolution, la consigne précise que le critère de classification porte « sur la façon de les résoudre » et que le verbe « classer » est pris dans le sens de former des catégories et non pas d'ordonnancer.
Situation n°1bis	*- A partir d'une catégorisation réalisée par un groupe d'élèves, proposer une correction des classes d'équations.* *- Institutionnaliser le nouveau classement déterminé.*	L'institutionnalisation doit permettre aux élèves de débattre sur leur représentation première des équations et d'y revenir. Elle porte sur les objets qui gravitent autour d'une équation : qu'est-ce qu'une équation ? que sont ses coefficients ? qu'est-ce que résoudre une équation ? qu'est-ce qu'une équation équivalente à une autre ? qu'est-ce le degré d'une équation polynomiale ? quelles sont les techniques pour résoudre une équation du premier degré ? du second degré ?
Situation n°2	*- Faire résoudre en environnement papier-crayon quelques équations du premier degré données sous des formes diverses.* - Faire concevoir un algorithme pour résoudre des équations du premier degré (choisies parmi les précédentes), données sous la forme $ax + b = c$, où a, b c sont des nombres déterminés. Déterminer la structure de cet algorithme puis le programmer. *- Institutionnaliser le concept de paramètre.* - Faire concevoir un algorithme pour résoudre des équations du premier degré, données sous la forme $ax + b = cx + d$ où a, b, c, d sont des nombres déterminés. Déterminer la structure de	La résolution des équations en environnement papier-crayon permet des contrôles et des rétroactions : - contrôler si le programme fonctionne et le valider ; - contrôler si les résolutions « à la main » sont justes ; - comparer les résultats obtenus et interpréter les différences (valeur exacte « à la main » et approchée « à la machine » par exemple). Le choix de l'OM et de l'OD d'Annabelle et Maurice est retenu (cf. §10.4.2) parce qu'il permet de concevoir le second algorithme en

	cet algorithme puis le programmer. *- Institutionnaliser sur la forme générique d'une équation du premier degré (ax + b = cx + d) et sa résolution. Faire apparaître que la forme ax + b = c en est un cas particulier.* *- Proposer des équations du premier degré qu'il faut transformer au préalable (en environnement papier-crayon) pour appliquer le programme de résolution des équations de la forme ax + b = cx +d.*	prenant appui sur le premier, en le complexifiant. La proposition d'une équation vérifiant $a = c$ est proposée de manière à obliger l'élève à considérer le test $a = c$ et à ajouter une structure alternative à l'algorithme. L'objectif est de montrer ici que moyennement quelques transformations élémentaires (développement, réduction), toute équation du premier degré s'écrit sous cette même forme.
Situation n°2bis	*Proposer un mélange d'équations du premier et du second degré et demander de résoudre celles qu'il est possible de résoudre avec le programme de la situation n°2 (de résolution des équations de la forme ax + b = cx + d).*	Reprise de la situation n°1 sur la catégorisation : approfondir les concepts travaillés lors de la première situation et faire le lien avec la résolution de ces équations, en faisant émerger qu'une même technique de résolution est applicable pour toutes (quelle que soit la nature des coefficients). Différencier 1^er^ et 2^nd^ degré.
Situation n°3	*- Faire résoudre en environnement papier-crayon des équations du second degré données sous les formes (ax + b)(cx +d) = 0 et x² = a ou s'y ramenant par des transformations simples.* - Faire concevoir un algorithme pour résoudre des équations du second degré, données sous la forme *(ax + b)(cx +d) = 0*, où *a, b c, d* sont des nombres déterminés. Déterminer la structure de cet algorithme puis le programmer. *- Proposer une liste d'équations du second degré et demander de résoudre celles qu'il est possible de résoudre avec le programme précédent.* - Faire concevoir un algorithme pour résoudre des équations du second degré, données sous la forme $x^2 = a$ où a est un nombre déterminé. Déterminer la structure de cet algorithme puis le programmer. *- Institutionnaliser sur la résolution des équations de la forme (ax + b)(cx + d) = 0 en faisant apparaître que la forme x² = a en est un cas particulier lorsque a est positif ou nul.* *- Proposer une liste d'équations du second degré et demander de résoudre celles qu'il est possible de résoudre avec les deux programmes précédents.*	La résolution en environnement papier-crayon a le même objectif de contrôle et de rétroaction que dans la situation n°2. Par transformations simples, nous entendons celles qui ne font pas appel à la recherche de la forme canonique (ce n'est pas au programme de seconde). Le choix de l'OM et de l'OD d'Alex est globalement retenu (cf. §10.5.3). Les équations des listes seront proposées sous les formes *(ax + b)(cx +d) = 0* ou $x^2 = a$, ou s'y ramenant moyennant une factorisation par application d'une identité remarquable ou la recherche d'un facteur commun. L'institutionnalisation permet de montrer la technologie sous-jacente aux deux techniques de résolution et d'englober ces techniques On montrera quelques équations du second du second degré qui possèdent des solutions réelles et dont on ne connaît pas de technique pour les factoriser systématiquement : peut déboucher sur la forme canonique, en actes.

Figure 252 : Une proposition de reprise de l'expérimentation

Il manque dans ce tableau la déclinaison des situations en séances de cours et leur inclusion dans la progression et la programmation annuelle d'un enseignant. Rappelons que les trois professeurs expérimentateurs ont analysé que la situation n°1 peut être placée très tôt dans l'année, puisqu'elle constitue en quelque sorte une reprise de toutes les équations vues au collège et que cette situation pourrait servir de référence pour chaque nouvelle équation devant être résolue. La situation peut être placée d'après les enseignants assez tôt dans l'année, mais les résultats de l'expérimentation nous laissent penser qu'une introduction aux premiers concepts de l'algorithmique et de la programmation ainsi qu'une instrumentation assez solide d'un logiciel de programmation doivent être réalisées au préalable, pour ne pas freiner l'émergence des concepts algébriques.

12.5 Sur les professeurs expérimentateurs

Nous proposons un bilan en trois points. Le premier point concerne le rapport personnel des enseignants expérimentateurs du point de vue de la place de l'algèbre dans leur enseignement, et le deuxième, du point de vue du temps nécessaire à la mise en place de situations alliant TICE et connaissances mathématiques. Le troisième point débouche sur les conditions nécessaires à la demande institutionnelle d'intégration de l'algorithmique dans l'enseignement des mathématiques.

Bilan des analyses des entretiens pré et post-expérimentation au sujet de l'algèbre
Globalement, nous retenons des bilans effectués (cf. §101.4 et §11.4.4) que les enseignants expérimentateurs considèrent que la place de l'algèbre dans les derniers programmes du lycée a diminué et que cette situation ne peut perdurer sans impacter les possibilités d'apprentissage des élèves. Toute opportunité de faire de l'algèbre leur semble bonne à prendre et l'expérimentation leur est apparue comme une occasion supplémentaire de reprendre ou de mettre en place des praxéologies algébriques. Décontextualiser les concepts algébriques vus dans d'autres champs des mathématiques leur semble nécessaire et ils le pratiquent régulièrement. Quelques différences existent dans le choix des contenus algébriques à reprendre en classe de seconde, en particulier la place à accorder aux polynômes du second degré. Pour Annabelle et Maurice, l'étude de ces polynômes est à plonger systématiquement dans le domaine fonctionnel, en reliant les registres algébrique et graphique dans l'apprentissage, alors qu'Alex considère que les connaissances sur le second degré seront plus abouties si le registre algébrique est examiné, à un moment donné, séparément du domaine fonctionnel. Annabelle et Maurice estiment que cette séparation des registres est plus pertinente au niveau de la classe de première.

L'évocation perpétuelle du temps
Nous avons comptabilisé, pour les différents entretiens, le nombre de fois où les professeurs expérimentateurs ont cité le *temps* nécessaire à la mise en place de situations comportant des technologies informatiques. Annabelle mentionne le temps 13 fois, Maurice 15 fois et Alex 7 fois. Le temps ou plutôt le manque de temps est pratiquement systématiquement évoqué dès qu'il est question d'intégration des TIC dans l'enseignement des mathématiques. Annabelle résume en ces termes cet état de fait : « *tout le temps passé sur ordinateur, tu l'auras en moins ailleurs.* » (cf. annexe A5, ligne 14). Les enseignants allèguent la longueur des programmes institutionnels mais aussi le temps de *genèse instrumentale* nécessaire pour une utilisation pertinente des outils technologiques dans l'apprentissage de concepts mathématiques. D'autre part, les enseignants évoquent également la multiplicité des

demandes institutionnelles au sujet de ces outils : l'intégration des calculatrices graphiques, de logiciels de géométrie dynamique, de tableurs et désormais de l'algorithmique est préconisée par la noosphère. Le temps d'enseignement ne s'est pas accru et chacun de ces outils demande une instrumentation spécifique. Aussi les enseignants se voient-ils en perpétuelle course contre la montre pour « boucler » les enseignements d'une année scolaire. Ce n'est pas qu'ils remettent en cause l'utilité de l'introduction de ces outils, c'est plutôt qu'ils s'interrogent sur leur intégration dans le temps qui leur est imparti. Ces réflexions amènent au paragraphe suivant sur la formation, initiale et continue, à envisager pour réussir cette intégration du numérique.

Nécessité d'une formation des professeurs à l'algorithmique et à la programmation

Nous pouvons lire dans un dossier de l'Éducation Nationale sur les TICE que l*a quasi-totalité des enseignants (88 %) ont acquis leurs connaissances et compétences dans le domaine des TIC par l'auto-formation*[193] (Alluin, 2010). Bien que les trois professeurs expérimentateurs aient mentionné qu'une présentation de l'algorithmique et de la programmation leur a été faite en début d'année par un formateur IREM, avec l'exemple de la dichotomie pour la recherche des zéros d'une équation, nous pouvons avancer que l'essentiel de leur formation en ces domaines est autodidacte et « autodidactique ». Les enseignants se sont forgés seuls leurs premiers gestes professionnels et *les praxéologies pour enseigner* (Chevallard et Cirade, 2010) dans ces deux domaines (comme déjà indiqué dans les analyses des situations n°2 et n°3, cf. §11.2.3.4 et §11.3.1.4). Nous avons ainsi pu noter que certains choix dans les techniques mises en œuvre pour la conception des algorithmes et des programmes n'étaient pas les plus simples, ni les plus judicieux, et contenaient même quelques erreurs. Le manque de savoirs de référence au sujet de la science algorithmique dans les domaines précités a induit un manque dans les praxéologies didactiques mises en place pour enseigner. Pour que l'algorithmique et la programmation s'installent de façon pérenne au sein de l'enseignement des mathématiques, une formation initiale et continue de ces domaines pourrait être envisagée pour *en équiper la profession*. Il nous semble que cette formation devrait contenir non seulement des *savoirs savants pour enseigner,* concernant les bases de l'algorithmique, de la programmation et également de la logique, mais aussi des *savoirs didactiques pour enseigner,* particulièrement sur la *transposition informatique* et sur l'identification de types de tâches à la fois *simples et critiques*, selon une expression de Laborde (2003), permettant d'allier algorithmique/programmation et mathématiques. Citons ce chercheur :

> Evaluating the complexity of a task with technology requires taking into account not only the conceptual difficulties but also the use of the technology by the students. This is not easy and the wrong a priori evaluation by the teacher of the complexity of the task often comes from an absence of reference about students' behavior in the tasks.[194] (p.5)

[193] Enquête réalisée en 2008 sur près de 2500 enseignants de collège et de lycée, toutes disciplines confondues.

[194] L'évaluation de la complexité d'une tâche comportant de la technologie nécessite de prendre en compte non seulement les difficultés conceptuelles mais aussi l'utilisation de la technologie par les élèves. Ce n'est pas facile et la mauvaise évaluation a priori par l'enseignant de la complexité de la tâche provient souvent d'une absence de référence sur le comportement des élèves dans ce type de tâches.

Laborde évoque le *manque de références* des enseignants, même expérimentés, sur les types de tâches à proposer aux élèves dans une situation d'apprentissage mêlant mathématiques et TICE. Une formation pour les enseignants pourrait alors contenir un choix de tâches propices à un apprentissage conjoint de concepts mathématiques et algorithmiques, et nécessiterait de développer des praxéologies associées pour une réelle intégration, de manière à ce que la technique ne se réduise pas à quelques gestes mécaniquement appris, mais puisse se justifier par des éléments technologico-théoriques.

12.6 Retour sur les hypothèses

Nous avons relevé tout au long des analyses des indicateurs, permettant de donner des éléments de réponse à nos hypothèses de recherche (cf. §5.5). Nous présentons un bilan de ces indicateurs.

12.6.1 Hypothèse H1 : sur la reprise par l'enseignant de l'algèbre comme objet

Nous considérons deux aspects dialectiques dans les éléments de réponse à cette première hypothèse : la dénaturation de l'enseignement de l'algèbre et la volonté de rester conforme aux programmes institutionnels.

La dénaturation de l'enseignement de l'algèbre

Les trois enseignants avec lesquels nous avons travaillé ont exprimé, lors des entretiens, une impression de *régression* de l'enseignement de l'algèbre en seconde, et au lycée de façon plus générale, du point de vue des programmes institutionnels. Annabelle évoque une place qui est *faible et peu claire*, Alex exprime que *tout ce qui est calculatoire est en train en passer désuétude* et Maurice qu'il y a *une perte de compétences de technicité* (cf. §10.1.3). Ainsi que nous l'avons déjà signalé en section 10.1.3, leur jugement rejoint celui de chercheurs comme Chevallard et Bosch (2012) et Assude et al. (2012), qui évoquent ce même problème dans le cadre de l'enseignement de l'algèbre au collège. Les premiers déplorent des enseignements curriculaires qui proposent une *algèbre dénaturée*, et les seconds évoquent un *émiettement des notions*, *des types de tâches isolées, un rabattement sur des types de tâches portant sur les techniques de calcul, sans autre finalité et une non-visibilité des éléments technologiques* (ibid., p.53).

Ces constats sur le collège semblent également valables au niveau du lycée. Les nouveaux programmes mis en place en 2009 pour la classe de seconde préconisent de mettre l'algèbre au service de la résolution de problèmes et de la présenter conjointement au domaine fonctionnel (cf. §5.1). En soi, cette volonté de présenter et de travailler l'algèbre dans un champ conceptuel vaste est une démarche intéressante et riche. Néanmoins, l'absence d'un domaine algébrique sérié donne l'impression aux enseignants de pratiquer un *saupoudrage* de quelques techniques algébriques, comme le signale Maurice (cf. annexe A6) et de ne pas présenter de praxéologies algébriques *complètes* au sens de Bosch et al. (2004). Nous reprenons cette idée pour la deuxième hypothèse.

La volonté de se conformer aux programmes institutionnels

Ainsi, ces trois enseignants chevronnés de la classe de seconde jugent que le programme actuel de la classe de seconde n'autorise pas une étude de l'algèbre satisfaisante. Cependant, ces enseignants considèrent comme un point positif ces préconisations des programmes institutionnels de ne plus « faire de révisions » (algébriques ou numériques) en début d'année. Citons Maurice :

> 30. Maurice : […] À une époque, j'ai enseigné en seconde où il y avait toutes ces révisions en début d'année et on arrivait à la Toussaint où on n'avait rien vu de nouveau. C'était pénible, extrêmement pénible. Donc je comprends qu'on ne passe pas… mais d'un autre côté, il y a des nécessités. (cf. annexe A6)

Cet enseignant signifie qu'il adhère aux nouveaux programmes, mais ajoute qu'il y a *des nécessités* à reprendre certaines praxéologies algébriques pour les consolider et les approfondir. Ce qui ressort également des analyses des entretiens, c'est l'attachement des enseignants aux programmes institutionnels et comment ils vont chercher à se conformer à ces programmes, même s'ils ne sont pas complètement en accord avec leurs contenus. C'est ainsi qu'ils « composent » en acceptant de plonger l'algèbre dans des cadres divers, fonctionnel et géométrique en particulier, mais en effectuant des reprises décontextualisées de l'algèbre quand ils le jugent nécessaire. Ils proposent dans leur progression annuelle quelques séquences (cf. §10.2, tableau 101) où l'algèbre est travaillée de manière décontextualisée. Ces séquences portent sur la factorisation et le développement d'expressions algébriques et sur la résolution des équations et inéquations du premier et du second degré.

En synthèse

Les enseignants se conforment au programme institutionnel d'algèbre de la classe de seconde qui préconise de *toujours situer le calcul algébrique dans la perspective d'une résolution de problème* (MEN, 2009b, p.13), mais ils émettent des réserves sur son apprentissage si l'algèbre n'est pas ensuite décontextualisée, comme nous laissons Alex l'exprimer ci-dessous :

> 26. Alex : […] Mais en même temps, ça induit le fait que ça fait un champ d'exploration qui est tellement vaste, que face à des élèves qui sont mono-tâches, on a du mal à tout sérier en fait… Et quand on a du mal à tout sérier, il y a un pan qui est privilégié, ça va être le pan géométrique, par exemple, et comme ce pan géométrique va avoir une dimension trop importante par rapport au pan algébrique, il va y avoir une espèce de déséquilibre qui va s'instaurer. […] c'est très riche, c'est très vaste, le champ d'étude est vraiment maximum, mais qui est capable vraiment de suivre ça, avec l'histoire mathématique qu'ils ont et qui vient du collège ? (cf. annexe A7)

Outre ces doutes formulés face à cette place accordée à l'algèbre, l'expérimentation a montré que les enseignants sont prêts, lorsqu'ils en ont l'occasion, à travailler et à institutionnaliser des concepts algébriques, à l'image d'Annabelle qui a clarifié le concept de paramètre (cf. §11.2.1), alors que celui-ci est une notion habituellement *paramathématique* (Chevallard (1985a) des programmes institutionnels du lycée.

12.6.2 Hypothèse H2 : sur la capacité des élèves à considérer l'algèbre comme objet

Nous donnons deux axes de réponse à cette deuxième hypothèse : d'une part, nous concluons sur la difficulté des élèves à révéler l'algèbre en tant qu'objet, relativement à l'utilisation qu'ils en font en tant qu'outil, et d'autre part, nous montrons que cette difficulté à conceptualiser les objets algébriques provient sans doute également de praxéologies incomplètes ou ponctuelles, qui ne sont pas unifiées en praxéologies locales ou régionales.

Les difficultés des élèves à révéler l'algèbre comme objet

Les résultats du test diagnostique effectué sur un échantillon de 160 élèves de fin de seconde (cf. §8.3.4) nous ont permis d'avancer la grande disparité de la capacité des élèves à s'approprier les notions algébriques du programme de seconde et également des programmes antérieurs du collège, mais également un niveau majoritairement insuffisant d'acquisition de ces notions. Nous avons analysé que les élèves connaissent quelques techniques isolées, qu'ils appliquent lorsque l'algèbre est contextualisée, en résolvant par exemple une équation issue de l'égalité de Pythagore ou des rapports de Thalès. Néanmoins, rappelons que 6 élèves sur 10 (pour cet échantillon) échouent dans la plupart des tâches algébriques de ce test et ces faibles résultats nous confortent dans l'idée que les notions algébriques vues localement, et contextualisées, ne sont pas suffisantes pour comprendre les objets de l'algèbre. De nombreuses erreurs ont été relevées sur la confusion de l'application des techniques de résolution des équations ou sur les objets qui gravitent autour du concept d'équation, comme le signe d'égalité et les opérations d'addition et de multiplication sur tout type de nombre. Nous avons vu comment *le jeu formel d'écritures sur les fractions et les radicaux* (Chevallard, 1985b), entremêlé au jeu formel d'écritures des expressions algébriques, vient encore complexifier le travail de l'élève sur la résolution d'équations.

Le classement des équations dans la situation n°1 nous a également permis de dévoiler une grande disparité dans les conceptions des élèves devant une tâche algébrique non routinière sur l'objet équation. Les productions (cf. affiches en annexes A26, A28, et A31) ont montré de grandes différences entre des élèves capables de considérer les aspects complémentaires, structural et procédural, des équations, et d'autres ayant des conceptions pseudo-structurales de celles-ci (cf. §11.1.1 et §11.2.2*)*, où seuls les *ostensifs* en présence semblent importer. Parmi ces ostensifs, citons encore une fois la nature des nombres, coefficients des équations. Le bilan effectué en section 12.1 a montré que 38% des élèves (sur une centaine ayant participé à l'expérimentation) considèrent que la nature des coefficients est un critère pertinent de classement des équations. D'autres encore confondent l'objet « équation » avec celui d'« expression algébrique », ce qui est perceptible avec des classements utilisant des formes spécifiques comme somme, produit ou encore identité remarquable. Enfin, notons que plus le niveau des élèves est faible, plus le nombre de catégories créées est important (cf. affiche 6-An, annexe A26) : ces élèves n'ayant ni de représentation du concept d'équation, ni de praxéologies suffisamment complètes pour appréhender les équations, leur reconnaissance reste basée sur quelques ostensifs. Les élèves sont ainsi arrêtés par leur perception et ne sont pas en mesure de considérer d'autres aspects plus représentatifs d'une équation, ce qui leur permettrait ensuite d'élaborer des stratégies de résolution.

Des praxéologies incomplètes et qui restent ponctuelles

Nous avons conforté une partie de notre hypothèse en exhibant quelques éléments qui montrent que les élèves ne parviennent pas à révéler l'algèbre comme objet, par rapport à l'utilisation qu'ils en font comme outil. Cependant, un autre point de vue est apparu dans nos analyses. Même quand l'algèbre est travaillée dans sa dimension objet, la conceptualisation des notions algébriques peut s'avérer inopérante, en raison de praxéologies incomplètes ou qui restent ponctuelles.

Notre étude sur les manuels scolaires (cf. §7) a corroboré cette incomplétude, montrant comment une succession de types de tâches et de techniques associées, portant sur la résolution de certains types d'équations du second degré, peut aboutir à une juxtaposition d'organisations mathématiques ponctuelles, sans réelle articulation entre elles et sans que les éléments technologiques sous-jacents soient toujours pris en compte. Un exemple en a été donné sur la résolution des équations du type $x^2 = a$, avec a positif, où les justifications de certains manuels n'englobent pas ce cas avec la résolution des équations du type $(ax + b)(cx + d) = 0$. Le bloc *praxis* est détaché du bloc *logos*, ce qui ne permet pas aux élèves d'unifier leurs savoirs à l'aide d'éléments technologico-théoriques adéquats.

Pour conclure

Les difficultés des élèves pour considérer les objets de l'algèbre montrent la nécessité d'une formation en algèbre différente, avec des reprises de praxéologies plus complètes. La conceptualisation des objets algébriques ne peut se faire sans réelle prise en compte de ces objets dans l'enseignement. La reprise proposée de l'expérimentation en section 12.4 (cf. situation n°1bis) tente de prendre en compte certains objets de l'algèbre, dont ceux qui restent *paramathématiques* (équation, inconnue, paramètre, …) ou *protomathématiques* (savoir qu'on a terminé une factorisation ou une simplification dans une expression algébrique, par exemple), selon une terminologie de Chevallard (1985a). Mais ce n'est bien entendu pas en une seule situation que ces objets peuvent être appréhendés.

12.6.3 Hypothèse H3 : sur l'introduction de l'algorithmique pour l'apprentissage de l'algèbre

Cette troisième hypothèse est étayée par quelques éléments de réponse. Nous explicitons quelques indicateurs relevés durant les séquences expérimentales. En particulier, comment l'utilisation de l'algorithmique liée à la programmation aide à mieux enseigner et apprendre les objets de l'algèbre, et ce que la programmation ajoute à l'algorithmique. Puis nous analysons comment la pseudo-transparence peut freiner ou favoriser l'accès aux concepts et comment une instrumentation assez poussée s'avère nécessaire pour que des rétroactions entre les environnements papier-crayon et informatisé puissent se produire.

L'algorithmique : une aide à l'enseignement et à l'apprentissage de concepts algébriques

Nous avons déjà donné quelques indicateurs de cette utilisation de l'algorithmique dans la section 12.2. Nous les reprenons ici avec un autre angle, pour montrer la construction de la conceptualisation des objets algébriques.

Un outil pour enseigner l'algèbre

Le détour par l'algorithmique a incité Annabelle à institutionnaliser les différents types de lettres qui composent une équation, paramètre et inconnue (§11.2.1). Cette institutionnalisation a fait suite au questionnement des élèves sur la façon de faire connaître les équations du type $ax + b = c$ à l'ordinateur. La différentiation du rôle des lettres a permis de relier les notions de paramètre et d'inconnue à la structure de l'algorithme à concevoir : les paramètres sont des données d'entrée (les *connues* de Descartes) alors que l'inconnue est une donnée de sortie de l'algorithme. La structure de l'équation aide à comprendre la structure de l'algorithme, et réciproquement. Annabelle conclut : « *je vais pouvoir entrer dans la machine a, b, c et lorsqu'elle connaîtra a, b, c, a priori, elle connaîtra l'équation* » (cf. annexe A32).

Un outil pour apprendre l'algèbre

Donnons l'exemple de l'élève Aliaume (cf. §11.2.2). Celui-ci doit déterminer une forme générique pour une liste d'équations de la forme $ax + b = c$. Aliaume utilise des noms pour les paramètres, évocateurs de leur statut. Il nomme l'équation *(Xfacteur)x + (Sumx) = (egal)*. Le coefficient de l'inconnue est nommé « *Xfacteur* », pour rappeler le rôle que joue ce paramètre que l'on multiplie par x. Le second terme du membre de gauche s'appelle « *Sumx* », ce qui lui confère le statut d'un nombre que l'on ajoute au terme en x. Enfin le paramètre de droite est appelé « *egal* », évoquant l'annonce du résultat d'une opération. Ces notations sont plus qu'un simple choix de vocabulaire et dénotent bien le sens attribué à ces objets. Elles permettent à l'élève de retrouver facilement de quel paramètre il s'agit, lorsqu'il manipule une équation avec des coefficients déterminés. C'est bien ici encore le détour par l'algorithmique qui autorise cette démarche.

Ce que la programmation ajoute à l'algorithmique

Montrons l'intérêt de lier la programmation à l'algorithmique et ne pas simplement concevoir un algorithme qui pourrait être utilisé en environnement papier-crayon, comme par exemple nous pouvons le faire pour la résolution générale des équations du second degré, avec la technique du discriminant. Nous avons indiqué en section 12.2 comment la programmation permet l'exploration des objets de l'algèbre, comme s'ils étaient des objets *matériels*. Les coefficients des équations sont considérés un à un, nommés, *manipulés*, entrés au clavier pour être lus par le logiciel. Ils prennent une dimension presque « palpable ». Prenons l'exemple de l'élève Pierre (cf. §11.2.1) qui, ayant programmé un algorithme de résolution des équations de la forme $ax + b = cx + d$, cherche à en vérifier la justesse en effectuant « à la main » la résolution de l'équation $1{,}8x - 3 = 2{,}5x + 7{,}4$. Il en détermine la solution exacte, puis en donne une solution approchée à la calculatrice pour pouvoir la comparer avec la solution fournie par son programme, celle-ci étant obtenue en entrant au clavier le quadruplet des coefficients de l'équation (1,8 ; -3 ; 2,5 ; 7,4). Ainsi une rétroaction se produit, permettant de contrôler le traitement algébrique, et la comparaison des solutions obtenues permet une validation, à la fois de la validité du programme informatique et de la justesse de la résolution de l'équation. La *transposition* de concepts algébriques d'un environnement papier-crayon à un environnement informatisé permet à cet élève d'approfondir ses connaissances sur le calcul équationnel, en l'obligeant à généraliser, par l'introduction des paramètres, la forme d'une équation du premier degré ainsi que sa résolution.

Comment la pseudo-transparence peut freiner ou favoriser l'accès aux concepts

Mais tous les élèves n'ont pas l'aisance ni pour les calculs équationnels, ni pour structurer un algorithme ou un programme. Cependant, même pour les élèves d'un niveau faible, la situation de concevoir un algorithme/programme résolvant des équations les pousse à s'interroger sur les objets de l'algèbre. Par exemple, nous avons analysé qu'une erreur récurrente (cf. §11.2.3) consiste à donner en entrée du programme l'instruction « lire x » où x est la variable informatique définie pour contenir la ou les solutions de l'équation. Cette erreur peut être imputée à un défaut de compréhension de la structure d'un algorithme, ou de la syntaxe du logiciel de programmation, ou encore du statut des différentes lettres qui composent l'équation. Il y a là un phénomène de pseudo-transparence pour l'équation $ax + b = c$, où nous devons considérer (« lire ») *tous* les objets en question, soit a, b, c et x, pour résoudre l'équation dans un dispositif papier-crayon, alors que seules les valeurs des paramètres a, b, c sont à « faire lire » par le programme informatique. Faire cette erreur conduit l'élève à s'interroger sur le statut différent de la lettre x comme inconnue, ce qui induit la compréhension que x ne fait pas partie des données en entrée et que la machine n'a pas à le « lire ». Nous sommes là dans le cas où la *distance instrumentale* (Haspekian, 2005) favorise la compréhension des objets d'une équation. Nous avons également rencontré des cas où elle ne le permet pas, comme l'élève Mélanie (cf. §11.2.3) qui résout « à la main » l'équation $-1000 + x = 0$ et trouve la solution erronée -1000, alors que le programme lui donne 1000 comme réponse. Mélanie conserve les deux réponses, montrant ainsi que la *distance* créée par l'instrument est trop grande pour faire le lien entre l'aspect algorithmique et l'aspect algébrique des équations traitées : il n'y a pas ici de rétroaction possible.

Nécessité d'une instrumentation assez poussée

Nous avons déjà mentionné en section 12.3 comment la *double transposition* (cf. §4.4), permettant de passer d'une résolution « mathématique » d'un problème à la conception d'un programme informatique qui se charge de cette résolution, nécessite une instrumentation assez poussée.

En conclusion

Les rétroactions entre l'environnement papier-crayon et l'environnement informatique peuvent se produire lorsque les premières bases de l'algorithmique alliées à une instrumentation d'un logiciel de programmation ont été suffisamment travaillées. Lorsque ces conditions (variables selon les élèves) sont remplies, le *détour* par l'algorithmique permet de s'interroger sur des objets de l'algèbre élémentaire. Cependant, ce détour ne s'avère pas suffisant pour certains élèves. Prenons l'exemple des élèves Rebecca et Marine (cf. §11.2.4) qui cherchent à faire fonctionner le programme (qu'elles ont conçu) donnant les solutions des équations de la forme $ax + b = cx + d$, pour le cas particulier de l'équation $7(x+2)+4(x-3)=0$. Marine développe et réduit l'équation pour pouvoir considérer le quadruplet des coefficients (a, b, c, d) à entrer dans le programme et obtenir la solution. En revanche, Rebecca ne parvient pas à accéder aux *non-ostensifs* de l'équation à résoudre et ne pense pas à développer pour se ramener à la forme générique ci-dessus. Marine réussit à faire ce qui n'est pas encore à la portée de Rebecca, à savoir unifier sa vision des équations du premier degré et considérer qu'elles font partie de la même *catégorie*, dans le sens où elles se résolvent toutes selon le même algorithme.

12.6.4 Hypothèse H4 : sur les différences et les invariants des OM et OD des enseignants pour l'enseignement de l'algèbre

Pour cette dernière hypothèse, nous considérons des indicateurs pour les axes suivants : montrer des invariants et montrer des différences sur les différents choix d'organisation des enseignants, et comment ces choix conjugués aux conditions et contraintes d'exercice du métier impactent les possibilités d'apprentissage des élèves, dans les domaines de l'algèbre et de l'algorithmique.

Des invariants dans la pratique des enseignants

Rappelons que nos trois professeurs expérimentateurs sont des professeurs chevronnés, ayant une pratique de plus de 15 ans en lycée. Les invariants que nous allons dégager tiennent obligatoirement compte de ce paramètre. Nous faisons l'hypothèse que des professeurs débutants n'auraient pas ces mêmes invariants.

Une relative prise en compte des difficultés d'apprentissage des élèves

Les enseignants connaissent les conceptions des élèves qui vont se développer en lien avec les organisations mathématiques qu'ils mettent en œuvre dans leur pratique. Dans l'entretien post-expérimentation où la question des erreurs des élèves leur est posée, les professeurs montrent que ces erreurs sont répertoriées. Maurice indique : « *Les erreurs qu'ils ont faites, ce sont des erreurs que j'attendais* » (cf. annexe A43) en évoquant l'existence d'obstacles épistémologiques et didactiques comme le statut des lettres ou celui du signe d'égalité. Alex cite les problèmes liés à la transposition, avec les confusions entre addition et multiplication, et les erreurs sur les identités remarquables avec la non-prise en compte de la non-linéarité de la fonction « carré » (cf. annexe A44).
De plus, nous avons analysé que les trois enseignants conditionnent leurs choix d'organisation aux difficultés d'apprentissage qu'ils prévoient. Nous pouvons citer par exemple la situation n°3 sur le second degré refusée par Annabelle et Maurice, parce que jugée trop complexe et prématurée, conjuguée à une lecture du programme de seconde qui leur laissent entendre que l'étude du second degré est à approfondir en classe de première (cf. § 10.6.1).
Cependant, lorsque ces mêmes professeurs sont « sortis » de leurs organisations mathématiques et didactiques habituelles, les difficultés des élèves les surprennent. Ainsi, nous notons que pour la situation n°1 de catégorisation des équations, Alex concède avoir pris *une grosse claque*, Annabelle mentionne qu'elle a été *affolée*, dans le sens où les représentations que les élèves ont des équations leur était complètement étrangères.
Pour le domaine algorithmique, Maurice précise son étonnement devant des élèves qui écrivent un programme avec la seule instruction *« résoudre ax + b = c » et qui attendent … en disant « non, ça marche pas* » (cf. annexe A43). Comme dit en section 12.5, le *manque de références* (Laborde, 2003) et le *manque de repères didactiques* (Haspekian, 2005) des enseignants, même expérimentés, sur les difficultés des élèves dans les situations d'apprentissage mêlant mathématiques et TICE est problématique et nécessiterait une réflexion pour la formation initiale et continue des enseignants. En effet, si les professeurs

repèrent bien la difficulté d'apprentissage de ces notions, ils n'ont en général pas pris conscience de la nature de ces difficultés.

L'adéquation de l'avancée du temps didactique avec le temps d'apprentissage

Plusieurs faits montrent que la considération de l'avancée du temps didactique est une préoccupation constante chez ces enseignants :

- l'OM et l'OD complexe proposée par Maurice et Annabelle pour la situation n°1 de classement d'équations (avec des groupes de taille modulable pour une plus grande interaction), permet aux élèves d'agir, de formuler, d'échanger et fait avancer la connaissance vers une catégorisation adéquate. L'avancée du temps didactique est permise par le choix des affiches proposées au débat chez Annabelle (cf. §11.1.1.4) et par l'institutionnalisation finale chez Alex (cf. §11.1.3.3) ;
- le choix d'Annabelle et de Maurice de ne pas insister, durant la séance, sur le second algorithme de la situation n°2 (résolution des équations $ax + b = cx + d$), jugeant que l'avancement des connaissances sera plus probant en s'attardant sur le premier algorithme (résolution des équations $ax + b = c$). Cette prise en compte du temps est également visible chez Alex pour la situation n°3, où celui-ci privilégie un travail approfondi sur le premier algorithme à concevoir (résolution des équations $(ax + b)(cx + d) =0$), ne pressant pas les élèves à chercher un second algorithme pourtant planifié dans son organisation prévisionnelle ;
- les reprises faites au besoin sur des connaissances des classes antérieures, à chaque fois que les enseignants voient ressurgir un point mal assimilé, comme Annabelle qui pour la situation n°1 revient sur la résolution des équations du type $ax = 0$ ou $x^2 = a$, ou encore Alex qui, pour la situation n°2, fait appel à la *mémoire didactique* (Matheron, 2000) des élèves pour résoudre une équation du type $ax + b = cx + d$, en leur demandant de se remémorer ce qu'ils faisaient en classe de quatrième. Les enseignants ajoutent, la plupart du temps, aux techniques de ces reprises de types de tâches des éléments technologiques qui viennent les justifier. Pour les connaissances du domaine algébrique, la pratique commune de ces enseignants est de ne pas se contenter pas des savoir-faire de leurs élèves, ils essaient aussi de s'assurer de leurs savoirs.

Ralentir au besoin, adapter le rythme d'apprentissage sont des préoccupations constantes de ces professeurs expérimentés.

Des différences sur les savoirs pouvant impacter les apprentissages

Cependant des différences existent, qui peuvent impacter sur les possibilités d'apprentissage des élèves. Les différences relevées sur des choix d'organisation portent essentiellement sur les situations où l'algèbre et l'algorithmique apparaissent de façon conjointe et nous émettons l'hypothèse qu'elles sont reliées à des différences de *savoirs pour enseigner* (Chevallard et Cirade, 2010), dans les domaines de l'algorithmique et de la programmation, et par incidence, dans le domaine de la logique, comme nous l'avons déjà évoqué.

Nous avons ainsi noté comment la plus ou moins grande connaissance de ces domaines peut impacter les possibilités d'apprentissage des élèves, à l'instar du professeur Alex qui amalgame les objets de l'algèbre et ceux de la programmation (cf. §11.3.2.4), ou qui ne

traduit pas de manière correcte les règles de la logique dans un environnement informatisé (cf. §11.3.1.4).
Par ailleurs, l'analyse comparative des trames projetées (élaborés par Annabelle et Maurice d'autre part et Alex d'autre part) a montré pour la situation n°2 (cf. §10.6.2) des différences de choix des organisations mathématiques et didactiques. La trame d'Annabelle et Maurice montre une réflexion didactique plus importante sur les possibilités d'apprentissage des élèves : elle présente une progressivité dans l'élaboration de l'algorithme, qui va se complexifier au fur et à mesure de l'introduction successive d'équations nécessitant de le reprendre pour lui faire résoudre *toutes les familles d'instance du problème* (Modeste, 2012). En revanche, la trame de la situation n°2 réalisée par Alex se présente comme un problème ouvert, mais trop complexe pour être compris d'emblée par les élèves. Les conséquences de ces choix ont été une meilleure dévolution de la situation pour les élèves d'Annabelle et de Maurice, et par suite, une plus grande autonomie et une plus grande réussite dans la recherche des algorithmes. Maurice exprime en ces termes cette dévolution : « c*e qui m'a surpris, c'est que certains, que je pensais perdus au début de la séance, à la fin ils s'en sont bien sortis* » (cf. annexe A34) alors qu'Alex mentionne : « *la pensée c'est moi quoi la suggérait… donc intérêt formatif, pas grand-chose finalement* » (cf. annexe A44). Ces différences de réussite, évoquées par les enseignants eux-mêmes, peuvent être impactées à ces différents choix d'organisation.

Pour conclure

Ces professeurs expérimentés montrent une réflexion de l'organisation globale des programmes au niveau du collège et du lycée, en argumentant sur la place de l'algèbre à ces niveaux. Ils connaissent les principaux obstacles épistémologiques et didactiques que rencontrent les élèves en algèbre et prennent en compte ces dimensions dans leurs choix d'organisations mathématique et didactique. La finalité de l'expérimentation a été comprise comme permettant d'accéder à la conceptualisation de concepts algébriques, délaissés par les programmes institutionnels. Ces professeurs ont cependant reconnu avoir été bousculé par les propositions du chercheur, à l'image d'Alex qui s'exprime à propos de la situation n°1 de catégorisation : « *On est quand même dans un certain formatage de la pensée et tout d'un coup, tu prends le problème à l'envers* » (cf. annexe A44). D'autre part, nous avons constaté des différences entre ces enseignants sur les savoirs savants concernant les bases de l'algorithmique, de la programmation et également de la logique, qui ont impacté sur les choix d'organisation des situations mêlant algèbre et algorithmique, ceux-ci ayant conditionné les possibilités d'apprentissage des élèves.

CONCLUSION

La problématique de la reprise de l'enseignement de l'algèbre élémentaire, par l'introduction de l'algorithmique, nous a amené à soulever plusieurs questions à l'origine de ce travail. Nous reprenons les grands principes de cette expérimentation et les réponses apportées aux hypothèses de recherche. Nous détaillons ensuite les limites de cette étude, quelles nouvelles questions sont soulevées et quelles perspectives peuvent être envisagées.

Un travail spécifique sur l'algèbre

L'expérimentation a permis de réaliser un travail spécifique sur l'algèbre. Les analyses de ce travail ont montré que les élèves ont pu améliorer ou du moins reprendre leur conceptualisation des objets de l'algèbre gravitant autour du concept d'équation, même si des écarts importants subsistent dans les évolutions de chacun des élèves. Le fait que l'expérimentation ait consisté à réaliser des tâches non routinières a permis de *prendre le problème à l'envers*, comme l'a souligné l'un des professeurs expérimentateurs. Nous interprétons ces propos comme une façon d'enseigner l'algèbre « différemment » et comme une façon pour les enseignants de sortir de leurs pratiques ordinaires. En effet, dans la situation n°1, les élèves ne résolvent pas des équations, ils les classent. Dans les situations n°2 et n°3, les élèves ne résolvent pas non plus des équations particulières comme ils le font habituellement, ils cherchent un modèle de résolution qui s'applique à toute une famille d'équations. Enseignants et élèves « regardent » les équations avant de chercher à les résoudre. Ils s'attachent à considérer chaque composant d'une équation, les coefficients en présence, la place de l'inconnue, le signe d'égalité, les transformations possibles à effectuer. Deux aspects d'une équation sont *mis en relation* lors de la tâche de conception d'un algorithme de résolution d'une catégorie d'équations : l'aspect *structural*, lorsque qu'est déterminée la forme générique de l'équation et l'aspect *procédural* lorsqu'est déterminée sa technique de résolution. Ces allers-retours entre les deux aspects sont un point-clef de l'expérimentation. C'est permettre d'accéder à la *réification* d'un concept selon Sfard (1991). En effet, pour ce chercheur, la réification d'un concept devient possible lorsque sont proposées des tâches d'un *niveau supérieur*. La considération d'une catégorie d'équations sous leur forme générique, avec l'introduction de paramètres, est un type de tâches d'un niveau supérieur de conceptualisation. Sfard (ibid.) l'explique comme la thèse du « cercle vicieux » :

> The thesis of the "vicious circle" implies that one ability cannot be fully developed without the other: on one hand, a person must be quite skillful at performing algorithms in order to attain a good idea of the "objects" involved in these algorithms; on the other hand, to gain full technical mastery, one must already have these objects, since without them the processes would seem meaningless and thus difficult to perform and to remember[195]. (p.32)

---

[195] La thèse "du cercle vicieux" implique qu'une capacité ne peut pas être entièrement développée sans l'autre : d'une part, une personne doit être très habile dans l'exécution des algorithmes afin atteindre une bonne idée "des

Ainsi, c'est en proposant de travailler les objets d'une équation que les élèves parviennent à mieux en comprendre les techniques de résolution. Ce travail spécifique sur l'algèbre ne nous semble pas faire partie des préoccupations des concepteurs de programmes, où l'algèbre est de plus en plus réduite à quelques pratiques de calcul.

Retour synthétique aux questions de recherche

Ces questions concernent :

- le rapport des enseignants au programme institutionnel, sur la nécessité de considérer l'algèbre, non seulement comme un outil pour résoudre des problèmes mais aussi comme un objet à étudier (hypothèse H1) ;
- le rapport des élèves à la considération des concepts algébriques dans leur dimension objet (hypothèse H2) ;
- l'apport de l'algorithmique liée à la programmation pour l'enseignement et l'apprentissage de concepts algébriques (hypothèse H3) ;
- l'impact des choix d'organisations mathématiques et didactiques, dans l'expérimentation, sur les apprentissages des élèves (hypothèse H4).

Nous revenons ici sur les éléments de réponse que nous avons apportés.

- Relativement à l'hypothèse H1 : malgré leur réserve exprimée sur le programme institutionnel de la classe de seconde pour la place accordée à l'algèbre, les enseignants suivent ce programme, c'est-à-dire qu'ils utilisent l'algèbre dans le cadre fonctionnel ou géométrique. Cependant, ces professeurs expérimentés ajoutent à cette préconisation du programme des reprises de praxéologies algébriques, en décontextualisant l'algèbre des problèmes issus d'autres domaines mathématiques ;
- Relativement à l'hypothèse H2 : nombreuses sont les conceptions erronées des élèves et de grandes disparités existent dans leurs capacités à comprendre les objets de l'algèbre. Les difficultés les plus fréquentes sont les conceptions pseudo-structurales des expressions algébriques, la confusion entre les expressions algébriques et les équations, et l'incapacité à considérer les non-ostensifs pour le choix de techniques de résolution d'équation, avec la prédominance de considération d'ostensifs comme la nature des coefficients de ces équations. La méconnaissance de la nature des nombres vient complexifier la conceptualisation de l'objet équation. Il émerge de ces résultats la nécessité pour les élèves d'une formation en algèbre différente, avec des reprises de praxéologies plus complètes et plus globales ;
- Relativement à l'hypothèse H3 : dans l'expérimentation testée, l'algorithmique et la programmation permettent aux enseignants de considérer les objets des équations. Nous avons montré comment l'association de la programmation à l'algorithmique s'avère bénéfique pour permettre aux élèves de *matérialiser* les objets algébriques et ainsi en réaliser une représentation dans un micro-monde. Cependant, les rétroactions entre l'environnement papier-crayon et l'environnement informatique ne sont effectives que si d'une part, les premiers concepts de l'algorithmique sont suffisamment installés et d'autre part, si la genèse instrumentale d'un logiciel de programmation est assez avancée ;

---

objets" impliqués dans ces algorithmes ; d'autre part, pour acquérir la pleine maîtrise technique, il faut déjà avoir ces objets, car sans eux les processus semblent vides de sens et ainsi difficiles à exécuter et à mémoriser.

- Relativement à l'hypothèse H4 : nous avons relevé des choix différents de la part des enseignants dans les organisations mathématiques et didactiques des situations proposées à l'expérimentation. Nous avons montré que des choix d'organisations approximatives peuvent résulter d'un manque de savoirs *pour enseigner*, pour les domaines de l'algorithmique et de la programmation (considérées comme des disciplines informatiques à part entière) et aussi dans le domaine de la logique. Également, ces choix différents montrent, au niveau des enseignants, d'une part des interprétations différentes du programme institutionnel et d'autre part un manque de connaissances des obstacles épistémologiques et didactiques de la *pensée algorithmique* en développement chez les élèves. Nous revenons au paragraphe suivant sur le concept de pensée algorithmique. Il résulte de tous ces facteurs des différences dans les possibilités d'apprentissage des élèves.

Une pensée algorithmique versus une pensée mathématique

Les situations n°2 et n°3 de notre expérimentation proposent un type de problèmes mathématiques dont est recherchée une résolution algorithmique pour toutes les instances du problème posé. La résolution algorithmique et son écriture dans un environnement informatique nécessitent une *transposition*. Nous pensons que la complexité de cette transposition vient non seulement de la *non-congruence* entre les environnements papier-crayon et informatisé, comme nos analyses le montrent, mais également d'une *pensée algorithmique* qui n'est pas contenue entièrement dans la *pensée mathématique*. Cette idée est développée par Modeste (2012) qui précise qu'une *activité mathématique est centrée sur la résolution de problèmes* et que lorsque la pensée algorithmique est considérée *en tant que pensée mathématique parmi d'autres,* elle est alors *une approche particulière de certains problèmes mathématiques* (p. 47). Cependant, Modeste montre, en s'appuyant sur les travaux de Knuth[196], que l'essor de la science informatique a fait évoluer la pensée algorithmique, et qu'il faut tenir compte de cette évolution pour reconsidérer cette forme de pensée. Pour ce chercheur, la différence essentielle réside dans le fait que la pensée algorithmique, vue comme pensée mathématique, *ne questionne pas l'efficacité des algorithmes qu'elle produit,* et *qu'elle n'utilise pas la notion de variable informatique*, ce qui renvoie à la notion de *complexité* d'un algorithme et à l'opération d'*affectation* (cf. §.4.3). Nous rejoignons Modeste quant à la nécessité de considérer une pensée algorithmique qui ne soit pas complètement incluse dans la pensée mathématique.

> Il nous semble donc que, pour aborder la pensée algorithmique, il soit indispensable d'appréhender simultanément les deux points de vue, intra-mathématique mais aussi extra-mathématique. (Modeste, 2012, p.53)

Il nous apparaît en effet, après avoir mené cette expérimentation, qu'ajouter un point de vue informatique (donc extra-mathématique) permet de prendre en considération une dimension qui n'existe pas en environnement mathématique usuel en papier-crayon, et qui induit un mode de pensée différent. L'existence de cette pensée spécifique nous semble être un élément

[196] Référence citée par Modeste :
Knuth, D. E. (1985). Algorithmic thinking and mathematical thinking. The American Mathematical Monthly, 92 (1), 170-181. (Rééd. avec corrections (1996) Algorithms in Modern Mathematics and Computer Science. In Selected Papers on Computer Science, 87-114)

didactique important qui permet de mieux comprendre la transposition qui se produit lors de la recherche d'algorithmes pour résoudre un problème. Une recherche serait à mener pour conceptualiser cette *pensée algorithmique*.

Limites du travail de recherche

Nous considérons quelques points pour les limites de cette recherche, concernant le dispositif expérimental et l'évaluation de ce dispositif.

Le côté « local » de l'expérimentation proposée

L'ingénierie proposée dans ce travail est locale, elle se déroule sur quelques séances isolées. Les enseignants expérimentateurs ont eux-mêmes regretté que les séances ne soient pas mieux intégrées à leur progression. En effet, la réalisation des séquences s'étant faite en marge de la progression des enseignants, ceux-ci sont restés sur l'impression que leurs élèves n'en ont pas tiré les bénéfices escomptés.

Par ailleurs, nous sommes consciente que cette ingénierie a été réalisée dans un environnement privilégié, avec des classes de niveau correct et avec des enseignants volontaires et investis dans l'utilisation des nouvelles technologies. Cependant, même dans ce cas, l'ingénierie proposée a été assujettie aux contraintes et conditions institutionnelles, et les acteurs se sont heurtés aux problèmes de congruence avec l'enseignement usuel. Également, les professeurs ont été confrontés à des problèmes de manque de savoirs de référence pour eux-mêmes et de savoirs didactiques pour l'enseignement de l'algorithmique et de la programmation. Donc, même si l'étude a été réduite, les problèmes soulevés semblent aller au-delà de ces études singulières pour penser des utilisations de l'algorithmique et pour penser la formation nécessaire des enseignants.

D'autre part, en dépit de la réflexion préalable menée, les premiers scénarios didactiques construits nécessitent des remaniements. Confrontés aux analyses a posteriori, nous relevons que ceux-ci ne se prêtent pas suffisamment aux conditions requises pour permettre la dévolution d'un réel travail mathématique aux élèves ; ils tendent à minimiser la complexité du travail qui reste à faire à l'élève et à sous-estimer les besoins mathématiques du travail instrumenté. Nous en proposons une modification en section 12.4. Il resterait à tester la robustesse de la nouvelle séquence proposée, en l'intégrant dans une programmation annuelle des enseignants.

La considération du logiciel de programmation Algobox

Même si nous proposons en annexe (cf. A9) une étude succincte des fonctionnalités du logiciel de programmation et de l'intérêt didactique de celui-ci, une étude comparative aurait pu être menée sur divers logiciels de programmation proposés dans le document de ressources de la classe de seconde (MEN, 2009c). Cette étude comparative aurait pu déboucher sur le choix d'un logiciel plus adapté pour l'étude menée, en particulier si nous considérons les difficultés rencontrées pour l'instrumentation de cet outil. Cependant, ce logiciel constituait le choix des enseignants expérimentateurs et les élèves avaient commencé un travail de genèse instrumentale sur ce logiciel : changer de logiciel en cours d'année scolaire n'aurait peut-être pas été pertinent. L'idée de cette étude est malgré tout à retenir pour des investigations futures.

La mesure de l'impact de l'expérimentation
Si la mesure de l'impact de l'expérimentation a été prise en compte côté enseignant, avec en particulier les entretiens post-expérimentation où les enseignants ont exprimé leur point de vue, elle n'a été que partielle côté élève. En effet, même si nous avons analysé les productions et les discours des élèves durant les séances d'expérimentation et que nous en avons dégagé des indicateurs de la prise en compte de l'aspect objet des équations (cf. §12.2), une étude plus poussée de cet impact aurait pu être menée, en comparant sur un plus long terme les impacts de ces considérations dans les connaissances des élèves. En particulier, il aurait été intéressant de mesurer la capacité des élèves à résoudre des équations dans le cadre de problèmes issus de domaines mathématiques fonctionnels ou géométriques, pour confronter les aspects outil et objet des équations.

Perspectives
Pour conclure, nous donnons trois pistes de réflexion relativement à un prolongement de ce travail de recherche, relativement aux conditions nécessaires à un enseignement de l'algorithmique viable et enfin nous finissons par un plaidoyer pour un enseignement de l'algèbre repensé dans les futurs programmes institutionnels.

Relativement à ce travail de recherche
Outre les quelques pistes avancées dans les paragraphes précédents, nous proposons deux pistes pour un prolongement de ce travail de recherche. Il s'agirait de reprendre l'expérimentation proposée, en y intégrant les résultats de la recherche menée (cf. §12.4), pour en tester les effets et la robustesse sur :
- des populations d'élèves plus variées. Nous avons en effet étudié la population d'élèves de seconde d'un seul lycée. Il serait intéressant de considérer d'autres types d'établissement (milieux ruraux, urbains, dits « difficiles », etc.) ;
- des populations d'enseignants différentes. Les enseignants ayant participé à l'expérimentation sont des enseignants chevronnés. L'étude pourrait également considérer des professeurs débutants ou des professeurs stagiaires, par exemple.

Les résultats obtenus permettraient de considérer, sur une échelle plus vaste, quelles sont les adaptations à apporter, pour que l'expérimentation proposée soit viable dans des contextes différents, autrement dit de considérer de façon plus globale, quelles en sont les conditions et les contraintes.

Relativement à l'enseignement de l'algorithmique
Nous avons noté lors des entretiens les réticences des enseignants à intégrer l'algorithmique dans leurs pratiques. En effet, l'algorithmique introduite dans l'enseignement des mathématiques au lycée peut sembler « plaquée » par les professeurs et représente pour eux un supplément de formation à donner aux élèves, alors qu'eux-mêmes ne sont pas formés à cette discipline, venue (en partie) du monde de l'informatique. Nous avons déjà évoqué que pour assurer la viabilité de l'intégration de l'algorithmique et de la programmation, un *équipement praxéologique* de la profession serait nécessaire, équipement comportant à la fois des savoirs savants et des savoirs pour enseigner (cf. §12.5). Notre propos, dans cette conclusion, porte plutôt sur le bien-fondé de l'intégration de ces deux domaines dans cet

équipement praxéologique. Si nous reprenons la conclusion de la revue *Recherches en didactiques de mathématiques* sur l'algèbre (Coulange et al., 2012), la question est posée de la pertinence de l'intégration de logiciels divers, où les auteurs soulignent que les raisons institutionnelles principalement évoquées en sont *la motivation et la modernité dans un contexte de « crise » de l'école* ainsi que *la volonté d'adapter les apprentissages aux besoins (marché du travail) souvent peu théoriques, en matière d'utilisation de logiciels* (p.349). Nous rejoignons ce point de vue. Cependant, même si l'algorithmique alliée à la programmation apparaît dans les programmes institutionnels comme une formation citoyenne, elle ne nous semble pas suivre tout à fait le même courant que *les logiciels de plus en plus raffinés, embarquant de plus en plus de mathématiques* (ibid.). En effet, contrairement aux logiciels très sophistiqués fonctionnant comme des *boîtes noires* (cf. §3.7) et comportant des modules de plus en plus complexes de calcul, l'intérêt de l'approche par l'algorithmique est justement de faire abstraction de la surenchère de toutes les fonctions complexes que l'on trouve par exemple dans une calculatrice de calcul formel, pour revenir sur les quatre opérations de base. Comme nous l'avons montré dans ce travail, l'élève, devant la tâche de concevoir un algorithme et un programme dans un environnement informatique, se voit dans une situation de décomposer chacune de ses actions en *actions élémentaires* (cf. §4.4). Cette décomposition passe par une réflexion nécessaire sur les objets mathématiques en jeu dans la tâche à effectuer et oblige les élèves à revenir sur leurs conceptions de ces objets. D'autre part, nous avons vu que la programmation offre un nouveau *registre*, au sens de Duval, de représentation pour les objets de l'algèbre. Bien entendu, nous n'oublions pas la genèse instrumentale nécessaire à tout outil introduit dans l'apprentissage, et celle-ci ne va pas de soi. Il n'est pas non plus question dans nos propos de faire des élèves des programmeurs avertis, mais d'utiliser l'algorithmique et la programmation dans des situations d'apprentissage ciblées, s'intégrant, et non pas se surajoutant, dans un programme d'enseignement de l'algèbre. Et notre étude montre, même si elle est ponctuelle, que cela est possible dans le cadre des conditions et contraintes de la réforme actuelle.

Relativement à l'enseignement de l'algèbre

Nous avons montré comment l'évolution des derniers programmes institutionnels de la classe de seconde va vers un affaiblissement de l'enseignement de l'algèbre élémentaire (cf. §5.1). Cet affaiblissement a également été constaté pour le collège par de nombreux chercheurs (Bosch et Chevallard, 2012, Assude et al., 2012). La démonstration de l'utilité de l'algèbre n'est pourtant plus à faire, que ce soit pour comprendre les mathématiques de l'enseignement supérieur ou la modélisation nécessaire aux disciplines scientifiques ou économiques. Nous prônons une reprise des curricula algébriques du collège et du lycée, pour qu'un domaine algébrique soit de nouveau mis en place, ou du moins un domaine numérico-algébrique, considérant le lien fort qu'entretiennent les domaines de l'algèbre et du numérique. Les contenus de ce domaine pourraient prendre en compte de façon plus marquée qu'aujourd'hui les dimensions objet et outil de l'algèbre (avec une étude spécifique de certains objets considérés aujourd'hui comme *para ou proto-mathématiques*) et proposer, par le biais de parcours d'étude et de recherche des praxéologies algébriques qui ne soient pas simplement ponctuelles mais qui s'agglomèrent en praxéologies locales puis régionales.

Au terme de cette recherche, nous sommes consciente de n'avoir pu fournir des éléments de réponse à toutes les questions que nous avions envisagées au départ. Notre travail contribue néanmoins à donner quelques pistes pour une reprise de l'enseignement de l'algèbre, en mettant en avant *la diminution de l'offre scolaire d'algèbre*, selon une expression de Bosch et Chevallard (2012). Nous avons également tenté d'y ajouter des éléments pour l'enseignement de l'algorithmique et en particulier pour intégrer cette science au sein de l'enseignement des mathématiques.

RÉFÉRENCES BIBLIOGRAPHIQUES

OUVRAGES, REVUES ET ARTICLES AYANT TRAIT À LA DIDACTIQUE DES MATHEMATIQUES

Artaud, M. (1997). Introduction à l'approche écologique du didactique. L'écologie des organisations mathématiques et didactiques. In *actes de la IXe école d'été de didactique des mathématiques*, 101-139.

Artigue, M. (1990). Ingénierie didactique. *Recherches en didactique des mathématiques, 9*(3)*,* 281-308.

Artigue, M. (1997). Le logiciel Dérive comme révélateur de phénomènes didactiques liés à l'utilisation d'environnements informatiques pour l'apprentissage. *Educational Studies in Mathetatics, 33*(2)*,* 133-169.

Artigue, M. (2005). L'intelligence du calcul. Dans *Actes de l'Université d'été de Saint-Flour, France : le calcul sous toutes ses formes.* Récupéré le 20 aout 2010 du site : http://www3.ac-clermont.fr/pedago/maths/pages/site_math_universite/CD-UE/Menu_pour_Internet.htm

Artigue, M. (2012). Enseignement et apprentissages de l'algèbre. Communication présentée à la conférence nationale sur l'enseignement des mathématiques à l'école primaire et au collège. Lyon. Récupérée le 01 novembre 2012 du site : http://educmath.ens-lyon.fr/Educmath/dossier-manifestations/conference-nationale/contributions/conference-nationale-artigue-1

Assude, T., Coppé, S. et Pressiat, A. (2012). Tendances de l'enseignement de l'algèbre élémentaire au collège. Atomisation et réduction. Dans J.L Dorier, A. Robert, L. Coulange, J.P. Drouhard (dirs.), *Enseignement de l'algèbre élémentaire. Bilan et perspectives. Recherches en didactique des mathématiques*. Grenoble : La pensée Sauvage. H-S, 41-62.

Balacheff, N. (1994). Didactique et intelligence artificielle. *Recherches en didactique des mathématiques, 14*(1), 9-42.

Bardini, C. (2003). *Le rapport au symbolisme algébrique : une approche didactique et épistémologique,* Thèse de doctorat, Université Paris 7.

Baron, M., Guin, D. et Trouche, L. (2007). *Environnements informatisés et ressources numériques pour l'apprentissage. Conception et usages, regards croisés.* Paris : Lavoisier.

Bednarz, N. (2011). Recherche collaborative en didactique des mathématiques : une entrée avec les enseignants sur les questions de la profession. Communication présentée à la 16ème école d'été de didactique des mathématiques. Carcassonne. Récupérée le 19 juillet 2012 du site :http://www.ardm.asso.fr/ee16/documents/cours/theme1-complet/cours-Bednarz-complet/

Bednarz, N. et Desgagné, S. (2005). Médiation entre recherche et pratique en éducation : faire de la recherche "avec" plutôt que "sur" les praticiens. *Revue des sciences de l'éducation. 31*(2), 245-258. Récupéré du site : http://id.erudit.org/iderudit/012754ar

Berté, A., Delpérié, F., Desnavres, C., Foulquier, L., Lafourcade, J. et Mauratille, M.-C. (2009). Groupe didactique des mathématiques de l'IREM d'Aquitaine. Problèmes et équations du premier degré en quatrième. *APMEP. 481*, 303-319.

Bessot A. et Nguyen C. T. (2003). La prise en compte des notions de boucle et de variable. *Petit x*. n°62, 7-32.

Bloedy-Vinner, H. (1994). The Analgebraic Mode of Thinking - the Case of the Parameter. Dans *Eighteenth International Conference for the Psychology of Mathematics Education.* Lisbon, Portugal, Program Committee of PME. 18-2, 88-95.

Bosch, M. et Chevallard, Y. (1999). La sensibilité de l'activité mathématique aux ostensifs : objet d'étude et problématique. *Recherches en didactique des mathématiques. 19*(1), 77-123. http://yves.chevallard.free.fr/spip/spip/IMG/pdf/Sensibilite_aux_ostensifs.pdf

Bosch, M. et Chevallard, Y. (2012). L'algèbre entre effacement et réaffirmation. Aspects critiques de l'offre scolaire d'algèbre. Dans J.L Dorier, A. Robert, L. Coulange, J.P. Drouhard (dirs.), *Enseignement de l'algèbre élémentaire. Bilan et perspectives. Recherches en didactique des mathématiques*. Grenoble : La pensée Sauvage. H-S, 9-40.

Bosch, M., Fonseca, C., et Gascón, J. (2004). Incompletitud de las organizaciones matemáticas locales en las instituciones escolares. *Recherches en didactique des mathématiques. 24*(2.3), 205-250.

Booth, L. (1984). Erreurs et incompréhension en algèbre élémentaire. *Petit x* n°5, 5-17.

Bronner, A. (1997). *Étude didactique des nombres réels, idécimalité et racine carrée*. (Thèse de doctorat non publiée, Université J. Fourier, Grenoble).

Bronner, A. et al. (2003). Faire ou ne pas faire des mathématiques. Des outils d'étude. Exemple dans le cas de l'étude du signe du binôme. Dans J. Coulomb, J. Douaire, R. Noirfalise (dir.) *Faire des maths en classe ? Didactique et analyse des pratiques enseignantes*. Paris : INRP – ADIREM.

Bronner, A. et Larguier, M. (2004). Le rôle du langagier dans la construction des savoirs mathématiques. Dans *Actes du 9ème Colloque AIRDF*, août 2004. Québec. Récupéré le 24 novembre 2011 du site :
http://www.colloqueairdf.fse.ulaval.ca/actes/index.php?action=par_auteur

Bronner, A. (2006). *Installation et régulation par l'enseignant de l'espace parole-pensée-actions-relations. Gestes d'étude, gestes professionnels, événements et ajustements.* Journées d'études IVDA 2005. Presse universitaires de Franche-Comté.

Bronner, A. (2007). *La question du numérique : le numérique en questions.* Habilitation à diriger des recherches. Montpellier : Université Montpellier 2.

Bronner, A. (2009). L'analyse du travail didactique du professeur dans la classe. Dans Bucheton (dir.), *L'agir enseignant : des gestes professionnels ajustés*. Toulouse : Octarès.

Brousseau, G. (1986a). Fondements et méthodes de la didactique des mathématiques. *Recherches en didactique des mathématiques, 7* (2). Grenoble : La Pensée sauvage.

Brousseau, G. (1986b). *Théorisation des phénomènes d'enseignement des mathématiques.* (Thèse de doctorat, Université de Bordeaux 1).

Brousseau, G. (1998). *Théorie des situations didactiques.* Grenoble : La Pensée Sauvage.

Brousseau, G. (2010a). Introduction au cours 1. Cours 2010-2011. Récupéré le 12 Janvier 2012 du site : http://guy-brousseau.com/111/introduction/

Brousseau, G. (2010b). Les situations mathématiques, propriétés et composantes. Cours 2010-2011. Récupéré le 11 Janvier 2012 du site : http://guy-brousseau.com/1023/cours-2010-les-situations-mathematiques-proprietes-et-composantes/

Bucheton, D. (2004, aout). Présentation et problématique du symposium : la réflexivité des langages, instruments de travail du professeur et des élèves. Dans *Actes du 9ème colloque de* *l'Association Internationale pour la Recherche en Didactique du Français (AIRDF).* Québec. Récupéré du site : http://www.colloqueairdf.fse.ulaval.ca/actes/index.php?action=par_auteur#B

Canet, JF. (1994). *Exemple d'utilisation d'un système de mathématiques symboliques.* Mémoire de DEA. Montpellier : Université Montpellier 2.

Capponi B. et Laborde C. (1995). *Cabri-classe, apprendre la géométrie avec un logiciel.* Archimède : Grenoble.

Chabert, JL. (2010). *Histoires d'algorithmes. Du caillou à la puce.* Paris : Belin.

Chaachoua, H., Chiappini, G., Pedemonte, B., Croset, M .J. et Robotti, E. (2012). Introdution de nouvelles representations dans deux environnements pour l'apprentissage de l'algèbre : Alnuset et Aplusix. Dans J.L Dorier, A. Robert, L. Coulange, J.P. Drouhard (dirs.), *Enseignement de l'algèbre élémentaire. Bilan et perspectives. Recherches en didactique des mathématiques*. Grenoble : La pensée Sauvage. H-S, 253-281.

Chevallard, Y. (1982). Pourquoi la transposition didactique ? Dans *Actes du Séminaire de didactique et de pédagogie des mathématiques* de l'IMAG, Université scientifique et médicale de Grenoble. (p. 167-194). http://yves.chevallard.free.fr/spip/spip/IMG/pdf/Pourquoi_la_transposition_didactique.pdf

Chevallard Y. (1985a). *La transposition didactique*. Grenoble : La pensée sauvage.

Chevallard, Y. (1985b). Le passage de l'arithmétique à l'algèbre dans l'enseignement des mathématiques au collège - Première partie. L'évolution de la transposition didactique. *Petit x* n°5, 51-94.

Chevallard, Y. (1988). La dialectique entre études locales et théorisation : le cas de l'algèbre dans l'enseignement du second degré. Dans G. Vergnaud, G. Brousseau et M. Hulin (dirs.), *Didactique et acquisition des connaissances scientifiques* (p. 305-323). Grenoble : La Pensée sauvage.

Chevallard, Y. (1989). Le passage de l'arithmétique à l'algèbre dans l'enseignement des mathématiques au collège - Deuxième partie. Perspectives curriculaires : la notion de modélisation. *Petit x* n°19, 43-75.

Chevallard, Y. (1990). Le passage de l'arithmétique à l'algèbre dans l'enseignement des mathématiques au collège - Troisième partie. Voies d'attaque et problèmes didactiques. *Petit x* n°23, 5-38.

Chevallard, Y. (1992a). Intégration et viabilité des objets informatique dans l'enseignement des mathématiques. Dans B. Cornu (dir.), *L'ordinateur pour enseigner les mathématiques*. (p. 183-203). Paris : Presses Universitaires de France. http://yves.chevallard.free.fr/spip/spip/IMG/pdf/Integration_et_viabilite_des_objets_informatiques.pdf

Chevallard, Y. (1992b). Concepts fondamentaux de la didactique : Perspectives apportées par une approche anthropologique. *Recherches en Didactique des Mathématiques, 12*(1), 73-112.

Chevallard, Y. (1994a). Enseignement de l'algèbre et transposition didactique. Dans *Actes du Séminaire de l'Associazione Mathesis*, Université de Turin, Vol. 52, 2. Récupéré du site http://seminariomatematico.dm.unito.it/rendiconti/cartaceo/52-2/175.pdf

Chevallard, Y. (1994b). Les processus de transposition didactique et leur théorisation. Dans Arsac et al. (dir.) *La transposition didactique à l'épreuve*. (p. 83-122).Grenoble : La Pensée Sauvage.

Chevallard, Y. (1995). La fonction professorale : esquisse d'un modèle didactique. Communication présentée à la 8ème école d'été de didactique des mathématiques. Saint-Sauves. Récupéré du site : http://yves.chevallard.free.fr/spip/spip/IMG/pdf/La_fonction_professorale.pdf

Chevallard, Y. (1996). Les outils sémiotiques du travail mathématique. *Petit x* n°42, 33-57.

Chevallard, Y. (1997). Familière et problématique, la figure du professeur. *Recherches en Didactique des Mathématiques, 17*(3), 17-54.

Chevallard, Y. (1998, mai). *À propos des TICE : transmission et appropriation du savoir, nouveaux rôles de l'enseignant, organisation de l'établissement.* Communication présentée à l'université d'été, *Les TICE : vers une transformation des pratiques pédagogiques et de l'organisation de l'établissement*. Toulouse. Récupéré le 06 aout 2010 du site : http://yves.chevallard.free.fr/spip/spip/article.php3?id_article=32

Chevallard, Y. (1999). L'analyse des pratiques enseignantes en théorie anthropologique du didactique. *Recherches en Didactique des Mathématiques, 19*(2), 221-266.

Chevallard, Y. (2002). Organiser l'étude. 3. Ecologie & régulation. Dans *Actes de la 11ème école d'été de didactique des mathématiques* (p. 41-56). Grenoble : La Pensée Sauvage.

Chevallard, Y. (2005, septembre). La didactique dans la cité avec les autres sciences. Dans A. Bronner et C. Amade-Escof (dir.), *Actes du Symposium de didactique comparée : Généricité et spécificités didactiques.* Réseau international de recherche en Éducation et Formation (REF). Montpellier.

Chevallard, Y. (2008a). *Didactique fondamentale.* Enseignement donné en licence de sciences de l'éducation en 2008-2009 à l'université de Provence. Récupéré du site personnel de Y. Chevallard : http://yves.chevallard.free.fr/spip/spip/IMG/pdf/Didactique_fondamentale_2008-2009_3_.pdf

Chevallard, Y. (2008b). *Journal du séminaire TAD/IDD. Théorie anthropologique du didactique & ingénierie didactique du développement.* Récupéré du site : http://www.aix-mrs.iufm.fr/formations/filieres/mat/data/fdf/2008-2009/journal-tad-idd-2008-2009-8.pdf

Chevallard, Y. et Cirade, G. (2010). Les ressources manquantes comme problème professionnel. Dans G. Gueudet et L. Trouche (dirs.) *Ressources vives. Le travail documentaire des professeurs en mathématiques* (pp. 41-55). Rennes : PUR et Paris : INRP. Récupéré du site : http://yves.chevallard.free.fr/spip/spip/article.php3?id_article=183

Chopin, M.P. (2007). *Le temps didactique dans l'enseignement des mathématiques.* (Thèse de doctorat, Université Victor Segalen Bordeaux 2).

Coppé, S. et Grugeon, B. (2009, juin). Le calcul littéral au collège. Quelle articulation entre sens et technique ? Dans *Actes du 16ème colloque national CORFEM*. Caen.

Coulange, L., Dorier, J.L., Drouhard, J.P. et Robert, A. (2012). Enseignement de l'algèbre élémentaire. Bilan et perspectives. *Recherches en didactique des mathématiques*. H-S. Grenoble : La pensée Sauvage.

Cuoco, A. et Goldenberg, P. (2003, juin). CAS and curriculum: Real improvement or déja vu all over again? Communication présentée à The Third Computer Algebra in Mathematics Education Symposium. Reims, France. Récupéré le 10 aout 2010 du site :

http://www.lkl.ac.uk/research/came/events/reims/

Desgagné, S. (1997). Le concept de recherche collaborative : l'idée d'un rapprochement entre chercheurs universitaires et praticiens enseignants. *Revue des sciences de l'éducation*. *23*(2), 371-393. Récupéré du site : http://id.erudit.org/iderudit/03192ar

Demonty, I. et Vlassis, J. (2002). *L'algèbre par des situations problèmes au début du secondaire* (p.15-31). Bruxelles : De Boeck.

Douady, R. (1986). Jeux de cadres et Dialectique outil-objet. *Recherches en didactique des mathématiques*, *7*(2), 5-31.

Drijvers, P. (2002). L'algèbre sur l'écran, sur le papier et la pensée algébrique. Dans D. Guin et L. Trouche (dir.), *Calculatrices symboliques. Transformer un outil en instrument de travail mathématique : un problème didactique* (p 215-242). Grenoble : La Pensée Sauvage.

Drijvers, P. (2003). *Learning algebra in a computer algebra environment. Design research on the understanding of the concept of parameter*. Doctoral dissertation. Utrecht : CD-β press. Récupéré du site : www.fi.uu.nl/~pauld/dissertation

Duval, R. (1993). Registres de représentation sémiotique et fonctionnement cognitif de la pensée. *Annales de didactique et de sciences cognitives. 5*. 37-65. IREM de Strasbourg

Duval, R. (1995). S*émiosis et pensée humaine : Registres sémiotiques et apprentissages intellectuels.* Berne : Peter Lang.

Duval, R. (2002). Comment décrire et analyser l'activité mathématique ? Cadres et registres. Dans *Actes de la journée en hommage à Régine Douady* (p 83-105). Paris : IREM de Paris 7. Récupéré du site : http://tecfa.unige.ch/tecfa/teaching/staf26/staf26-02-03.html

Duval, R. (2007). La conversion des représentations : un des deux processus fondamentaux de la pensée. Dans J. Baillé (dir.), *Conversion, du mot au concept* (p 9-45). Grenoble : PUG.

Elbaz-Vincent, P. (2002). Un système de calcul formel comme assistant de « l'instrumentation » raisonnée. Dans D. Guin et L. Trouche (dir.), *Calculatrices symboliques. Transformer un outil en instrument de travail mathématique : un problème didactique* (p 55-88). Grenoble : La Pensée Sauvage.

Filloy, E. et Rojano, T. (1984). From an arithmetical to an algebraic thought (a clinical study with 12-13 year olds). Dans *Proceedings of the Sixth Meeting for the Psychology of Mathematics Education-North American Chapter.* Wisconsin, USA : Wisconsin University.

Guin, D. et Trouche, L. (dir.) (2002). *Calculatrices symboliques. Transformer un outil en un instrument du travail mathématique : un problème didactique.* Grenoble : La Pensée Sauvage.

Grugeon, B. (1995). *Étude des rapports personnels et des rapports institutionnels à l'algèbre élémentaire dans la transition entre deux cycles d'enseignement : B.E.P. et Première G.* (Thèse de doctorat, université Paris 7).

Grugeon, B. (2000). Une structure d'analyse multidimensionnelle en algèbre élémentaire : conception, exploitation et perspectives. Dans *Actes des journées de formation de formateurs. Boisseron, juin 1999.* Montpellier : IREM, Université de Montpellier 2.

Grugeon, B., Coulange, L. et Larue, V. (2003) Familles de situations d'interactions en algèbre élémentaire : deux exemples. Dans *Actes du Colloque ITEM, juin 2003*. Reims : IUFM de Reims.

Grugeon, B., Chenevotot-Quentin, F., Delozanne, É. et Pilet, J. (2012). Diagnostic et parcours différenciés d'enseignement en algèbre élémentaire. *Recherches en Didactique des Mathématiques, Hors-série Algèbre*.

Haspekian, M. (2005). *Intégration d'outils informatiques dans l'enseignement des mathématiques. Étude du cas des tableurs.* (Thèse de doctorat, université Paris 7).

Jean, S. (2000). *PÉPITE : un système d'assistance au diagnostic de compétences.* (Thèse de doctorat, université du Maine). http://liris.cnrs.fr/stephanie.jean-daubias/these_HTML/2.html

Kieran, C. (1992). The learning and teaching of school algebra. Dans Douglas A. Grouws (dir.), *Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning*. (p 390-419). New York : Macmillan.

Kieran, C. et Chalouh, L. (1993). Prealgebra : The Transition from Arithmetic to Algebra. Dans *Research Ideas for the Classroom: Middle Grades Mathematics,* Douglas T. Owens, editor (Reston, VA: NCTM, 1993), 179.

Kieran, C. (2008). What do students struggle with when first introduced to algebra symbols? Dans *National Council of Teachers of Mathematics Research Brief*. Récupéré du site : http://www.nctm.org/news/content.aspx?id=12332.

Kuzniak, A. (2005). La théorie des situations didactiques de Brousseau. *Repères-IREM. 61*. 19-35.

Laborde, C. (2003). *The design of curriculum with technology : Lessons from projects based on dynamic geometry environments.* Reaction to A. Cuoco & P. Goldenberg's presentation "CAS and curriculum : Real improvement or déjà vu all over again ?" CAME Symposium, Reims. Récupéré du site : http://www.lkl.ac.uk/came/events/reims/

Larguier, M. (2005). *Les reprises des domaines numérique et algébrique en classe de seconde.* Mémoire de Master de recherche 2. Montpellier : Université Montpellier 2.

Larguier, M. (2009). *La construction de l'espace numérique et le rôle des reprises en classe de seconde : un problème de la profession.* (Thèse de doctorat, Université Montpellier 2).

Linchevski, L. et Sfard, A. (1994). Between arithmetic and algebra: in the search of a missing link. The case of equations and inequalities. *Rendiconti Del Seminario Matematico Universia Torino*. *52*/3, 279-307.

MacGregor, M et Stacey, K. (1999). A flying start to algebra. *Teaching Children Mathematics, 6*/2, 78-86.
http://staff.edfac.unimelb.edu.au/~Kayecs/publications/1999/MacGregorStacey-AFlying.pdf

Maguire, T. et Neill, A. (2007). Algebraic Thinking Concept Map, *Assessment Resource Banks,* Ministry of Education, Wellington, New Zealand.
http://arb.nzcer.org.nz/supportmaterials/maths/concept_map_algebraic.php

Margolinas, C. (2000). La production des faits en didactique des mathématiques. Dans *Actes du séminaire du LIREST* (p 33-55). Cachan : E.N.S.

Margolinas, C. (2004). *Points de vue de l'élève et du professeur. Essai de développement de la théorie des situations didactiques.* Habilitation à diriger des recherches, Université de Provence.

Matheron, Y. (2000). *Une étude didactique de la mémoire dans l'enseignement des mathématiques au collège et au lycée. Quelques exemples.* (Thèse de doctorat, Université Aix-Marseille 1).

Mercier, A. (1992). *L'élève et les contraintes temporelles de l'enseignement, un cas en calcul algébrique* (Thèse de doctorat, Université Bordeaux 1).

Modeste, S. , Gravier, S. et Ouvrier-Buffet, C. (2010). Algorithmique et apprentissage de la preuve. *Repères IREM, 70*, 51-71. Tropiques.

Modeste, S. (2012). *Enseigner l'algorithme pour quoi ? Quelles nouvelles questions pour les mathématiques ? Quels apports pour l'apprentissage de la preuve ?* (Thèse de doctorat, Universit de Grenoble).

Nguyen, C-T. (2005). *Étude didactique de l'introduction d'éléments d'algorithmique et de programmation dans l'enseignement mathématique secondaire à l'aide de la calculatrice,* (Thèse de doctorat, Université Joseph Fourier, Grenoble).

Nicaud, J-F., Delozanne, E. et Grugeon, B. (2002). Logiciels pour l'apprentissage de l'algèbre. *Sciences et techniques éducatives*, *9*(1-2). Cachan : Lavoisier.

Rabardel, P. (1995). *Les hommes et les technologies. Approche cognitive des instruments contemporains*. Paris : Armand Colin.

Radford, **L.** (1992). Diophante et l'algèbre pré-symbolique. *L'Ouvert*. n°68, 1-13. Strasbourg : IREM de Strasbourg.

Rodet, L. (1878). *L'algèbre d'Al-Kwarizmi et les méthodes indienne et grecque* (p 37-66). Paris : Imprimerie Nationale. Consulté sur le site : http://gallica.bnf.fr/ark:/12148/

Roditi, E. (2005). *Les pratiques enseignantes en mathématiques : entre contraintes et liberté pédagogiques*. Paris : L'Harmattan.

Robert, A. (2010). La double approche didactique et ergonomique pour l'analyse des pratiques d'enseignants de mathématiques. Dans F. Vandebrouck (dir.), *La classe de mathématiques : activités des élèves et pratiques des enseignants* (p 59-68). Toulouse : Octarès.

Sensevy, G. (2001). Théories de l'action et action du professeur. Dans Baudouin, J.M. et Friedrich, J. (dir.) *Théories de l'action et éducation* (p 203-224). Genève : De Boeck.

Sensevy, G. (2007). Des catégories pour décrire et comprendre l'action didactique. Dans G. Sensevy et A. Mercier (dir.), *Agir ensemble* : *l'action didactique conjointe du professeur et des élèves* (p 13-49). Rennes : Presses universitaires de Rennes.

Schneuwly, B. (2010) « Sensevy G. et Mercier A. (dir.). Agir ensemble : l'action didactique conjointe du professeur et des élèves ». *Revue française de pédagogie*. Consulté le 09 janvier 2012. http://rfp.revues.org/906

Sfard, A. (1991). On the dual nature of mathematical conceptions: Reflections on processes and objects as dìfferent sides of the same coin. *Educational Studies in Mathematics, 22,* 1-36.

Trouche, L. (2005). Des artefacts aux instruments, une approche pour guider et intégrer les usages des outils de calcul dans l'enseignement des mathématiques. Dans *Actes de l'Université d'été de Saint-Flour.*
http://www3.ac-clermont.fr/pedago/maths/pages/site_math_universite/CD-UE/Menu_pour_Internet.htm

Trouche, L. (2002). Genèse instrumentale : aspects individuels et collectifs. Dans D. Guin et L. Trouche (dir.), *Calculatrices symboliques. Transformer un outil en instrument de travail mathématique : un problème didactique* (p 243-275). Grenoble : La Pensée Sauvage.

Vergnaud, G. (1986a). Long terme et court terme dans l'apprentissage de l'algèbre. Dans *Actes du premier colloque franco-allemand de didactique*. Grenoble : La Pensée Sauvage.

Vergnaud, G. (1986b). Psychologie du développement cognitif et didactique des mathématiques : un exemple, les structures additives. *Revue Grand N, 38*, 21-40.

Vergnaud, G., Cortès, A. et Favre-Artigue, P. (1988) : Introduction de l'algèbre auprès de débutants faibles, Problèmes épistémologiques et didactiques. Dans *Actes du colloque de*

Sèvres, Didactique et acquisition des connaissances scientifiques (p 259-288). Grenoble : La Pensée Sauvage.
Vergnaud, G. (1990). La théorie des champs conceptuels. *Recherches en Didactique des Mathématiques, 10*(2-3), 133-170.

RAPPORTS DE MISSION ET D'ENQUETES

Alluin, F. (2010). Les technologies de l'information et de la communication (TIC) en classe au collège et au lycée : éléments d'usages et enjeux. Les dossiers n°197. MEN-DEPP. Paris. http://cache.media.education.gouv.fr/file/197/18/9/Dossier197_158189.pdf
Bodin, A. (2009). L'étude PISA pour les mathématiques. Résultats français et réactions. *La Gazette des mathématiciens*, n°120, p 53-67. Société Mathématique de France.
Bourny, G., Braxmeyer, N., Dupé, C., Remond, M., Robin, I. et Rocher, T. (2000). *Les compétences des élèves français à l'.épreuve d'une évaluation internationale. Premiers résultats de l'enquête PISA 2000.* Les dossiers n°137. MEN. Bureau de l'évaluation des élèves, p 126-147. http://www.educ-eval.education.fr/pdf/dossier137/dossier137.pdf
Bourny, G., Fumel, S., Dupé, C et Rocher, T. (2001). Les élèves de 15 ans – Premiers résultats d'une évaluation internationale des acquis des élèves. Note d'information 01.52, MEN- DEPP. http://www.educ-eval.education.fr/pdf/ni0152.pdf
Bourny, G., Fumel, S., Monnier, A-L., Rocher, T. (2004). Les élèves de 15 ans – Premiers résultats d'une évaluation internationale des acquis des élèves. Note d'information 04.12, MEN- DEPP. http://educ-eval.education.fr/pdf/eva0412.pdf
Bourny, G. et Brun, A. (2007). Les élèves de 15 ans – Premiers résultats de l'évaluation internationale PISA 2006 en culture scientifique. Note d'information 07.42, MEN-DEPP. http://media.education.gouv.fr/file/97/2/20972.pdf
Brun, A., Fumel, S., Hoyé, F. et Peylet, D. (2008). L'évolution des acquis des élèves de 15 ans en culture mathématique et en compréhension de l'écrit. Premiers résultats de l'évaluation internationale PISA 2006. Note d'information 08.08, MEN- DEPP. http://educ-eval.education.fr/pdf/ni2008/ni0808.pdf
Fourgous, J-M. (2009). Rapport de la mission : *Réussir l'école numérique*. http://www.missionfourgous-tice.fr/
Kahane, J-P. (2000). Commission de réflexion sur l'enseignement des mathématiques, *Rapport informatique et enseignement des mathématiques*. Récupéré sur le site : http://smf4.emath.fr/Enseignement/CommissionKahane/
Kahane, J-P. (2001). Commission de réflexion sur l'enseignement des mathématiques, *Rapport d'étape sur le calcul.* http://smf4.emath.fr/Enseignement/CommissionKahane/
MEN (2007). Ministère de l'Éducation nationale, enseignement supérieur et recherche. *L'évaluation internationale PISA 2003 : compétences des élèves français en mathématiques, compréhension de l'écrit et sciences*. Les dossiers n°180, pp. Direction de l'évaluation, de la prospective et de la performance.
OCDE (2001). Connaissances et compétences : des atouts pour la vie. Premiers résultats de PISA 2000 - MEN- DEPP., p 75-103 et p 126-147. O.C.D.E.
http://www.educ-eval.education.fr/pdf/pisa2001.pdf

RERS (2009) Repères et références statistiques sur les enseignements, la formation et la recherche. Ministère de l'Éducation nationale et le ministère de l'Enseignement supérieur et de la Recherche, p 218-220.
http://www.education.gouv.fr/cid21641/reperes-et-references-statistiques.html
Salines, M et Vrignaud, P. (2001) Apprécier et certifier les acquis des élèves en fin de collège : brevet et évaluations-bilans, p 57-91. Rapport pour le Haut conseil de l'Evaluation de l'Ecole. http://educ-eval.education.fr/pdf/rapportsv.pdf

PROGRAMMES SCOLAIRES

MEN (1971). Circulaire du 09 avril 1971. Comité universitaire d'information pédagogique. *L'Éducation, n°* 101, p 20. Paris : SEVPEN.
MEN (1998). Programme d'enseignement de la classe de Troisième. BO hors série n°10 du 15 octobre 1998. CNDP. Paris.
ftp://trf.education.gouv.fr/pub/edutel/bo/1998/hs10/hs10vol2.pdf
MEN (1999). Programme d'enseignement de la classe de Seconde. Mathématiques. BO hors série n°6 du 12 aout 1999. CNDP. Paris.
MEN (2000). Ministère de l'Éducation nationale. Programmes de l'enseignement de mathématiques en classe de première S. BO hors-série n° 7 du 31 août 2000. Paris.
MEN (2001). Programme d'enseignement des mathématiques et programme de spécialité mathématiques en terminales S et ES. BO hors série n° 4 du 30 août 2001. CNDP. Paris. http://www.education.gouv.fr/bo/2001/hs4/default.htm
MEN (2002a). Programme d'enseignement des mathématiques et des sciences pour les certificats d'aptitude professionnelle. BO hors-série n°5 29 aout 2002. DESCO. Paris.
ftp://trf.education.gouv.fr/pub/edutel/bo/2002/hs5/math.pdf
MEN (2006). Ministère de l'Éducation nationale. Les nombres au collège, ressources pour les classes de 6e, 5e, 4e, et 3e du collège. EduSCOL. DGESCO. Paris.
MEN (2008a). Ministère de l'Éducation nationale. Programmes du collège. Programmes de l'enseignement de mathématiques. BO spécial n° 6 du 28 août 2008. Paris.
http://media.education.gouv.fr/file/special_6/52/5/Programme_math_33525.pdf
MEN (2008b). Ministère de l'Éducation nationale. Du numérique au littéral au collège, ressources pour les classes de 6e, 5e, 4e, et 3e du collège. EduSCOL. DGESCO. Paris.
http://eduscol.education.fr/cid45766/ressources-pour-faire-la-classe-au-college-et-au-lycee.html
MEN (2008c). Ministère de l'Éducation nationale. Horaires et programmes d'enseignement de l'école primaire ; BO hors série n° 3 du19 juin 2008.
http://www.education.gouv.fr/bo/2008/hs3/programme_CE2_CM1_CM2.htm
MEN (2009a). Ministère de l'Éducation nationale. Programme de mathématiques de la classe de seconde générale et technologique. Bulletin officiel n° 30 du 23 juillet 2009.
http://media.education.gouv.fr/file/30/52/3/programme_mathematiques_seconde_65523.pdf
MEN (2009b). Ministère de l'Éducation nationale. Ressources pour la classe de seconde, *Fonctions ;* EduSCOL, DGESCO.

http://eduscol.education.fr/cid45766/ressources-pour-faire-la-classe-au-college-et-au-lycee.html

MEN (2009c). Ministère de l'Éducation nationale. Ressources pour la classe de seconde*, Algorithmique ;* EduSCOL, DGESCO. http://eduscol.education.fr/cid45766/ressources-pour-faire-la-classe-au-college-et-au-lycee.html

MEN (2010a). Ministère de l'Éducation nationale. Programme de mathématiques de la classe de première de la série scientifique ; Bulletin officiel n° 9 du 30 septembre 2010.

MEN (2010b). Ministère de l'Éducation nationale. Programme de mathématiques de la classe de première de la classe de première des séries ES et L ; Bulletin officiel n° 9 du 30 septembre 2010.

MEN (2011a). Programme d'enseignement des mathématiques et programme de spécialité mathématiques en terminale S. BO hors-série n° 8 du 13 octobre 2011. CNDP. Paris. http://www.education.gouv.fr/pid25535/bulletin_officiel.html?cid_bo=57529

MEN (2011b). Programme d'enseignement des mathématiques et programme de spécialité mathématiques en terminale ES et terminale spécialité L. BO hors-série n° 8 du 13 octobre 2011. CNDP. Paris.

MEN (2011c). Programme d'enseignement des mathématiques en première et terminale STI2D et STL. BO hors-série n° 3 du 07 mars 2011 et n°8 du 13 octobre 2011. CNDP. Paris.

MEN (2012). Ministère de l'Éducation nationale. Ressources pour la classe de première générale de technologique. *Analyse*. DGESCO. http://eduscol.education.fr/ressources-maths

MEN (2013). Ministère de l'Éducation nationale. *Le calcul sous toutes ses formes au collège et au lycée*. DGESCO – IGEN. http://eduscol.education.fr/ressources-maths

Ministry of Education, **Ontario** (2005). The Ontario Curriculum Grades 9 and 10. Mathematics, p 39-40. http://www.edu.gov.on.ca/eng/curriculum/secondary/math910curr.pdf

Potier, F. et Werner, B. (2013). Cours de l'École Polytechnique *Algorithmique et Programmation*. INF431. Récupéré le 03 mars 2013 du site : http://www.enseignement.polytechnique.fr/informatique/INF431/X11-2012-2013/inf431-poly.pdf

MANUELS SCOLAIRES

Cinq sur cinq (1999). Mathématiques Troisième. Hachette.
Déclic (2010). Mathématiques. Seconde. Hachette.
Diabolo (2008). Mathématiques Troisième. Hachette.
Dimathème (1999). Mathématiques Troisième. Didier.
Dimathème (2008). Mathématiques Troisième. Didier.
Indice (2004). Mathématiques Seconde. Bordas.
Indice (2009). Mathématiques Seconde. Bordas.
Math (1999). Mathématiques Troisième. Bordas.
Math (2000). Mathématiques Seconde. Belin.
Math (2006). Mathématiques Seconde, Antibi. Nathan.
Math (2010). Mathématiques Seconde, Antibi. Nathan.
Math'x (2005). Mathématiques Seconde. Didier.
Math'x (2010). Mathématiques Seconde. Didier.
Odyssée (2010). Mathématiques Seconde. Hatier.
Phare (2008). Mathématiques Troisième. Hachette.
Prisme (2012). Mathématiques Troisième. Belin.
Pythagore (1999). Mathématiques Troisième. Hatier.
Pythagore (2000). Mathématiques Seconde. Hatier.
Pyramide (2000). Mathématiques Seconde. Hachette.
Repères (2010). Mathématiques Seconde. Hachette.
Sésamaths (2012). Le manuel de troisième. Magnard. Consultable en ligne : http://mep-outils.sesamath.net/manuel_numerique/
Symbole (2010). Mathématiques Seconde. Belin.
Transmath (1999). Mathématiques Troisième. Nathan.
Transmath (2000). Mathématiques Seconde. Nathan.
Transmath (2004). Mathématiques Seconde. Nathan.
Trapèze (1999). Mathématiques Troisième. Bréal.
Triangle (1999). Mathématiques Troisième. Hatier.
Triangle (2008). Mathématiques Troisième. Hatier.
Triangle (2012). Mathématiques Troisième. Hatier.

TABLE DES ILLUSTRATIONS

Figure 1: Articulation entre les différents domaines en jeu dans la recherche menée 8

Figure 2 : Résumé des divers éléments du cadrage théorique utilisé...................................... 26

Figure 3 : Découpage multidimensionnel du savoir algébrique selon Grugeon 52

Tableau 4 : Typologie des rapports personnels des élèves aux irrationnels selon Bronner 56

Figure 5 : Transpositions didactique et informatique (Chevallard, 1982, Balacheff, 1994).... 64

Figure 6 : Exemple de phénomène de pseudo-transparence sur tableur (écriture linéaire parenthésée non spatialisée) 65

Figure 7 : Exemple de phénomène de pseudo-transparence sur calculatrice Texas instruments TI-Nspire (écriture linéaire parenthésée spatialisée)... 65

Figure 8 : Exemple d'écriture spatiale sur le logiciel Aplusix.. 66

Figure 9 : Exemple de simplification automatique des expressions algébriques et numériques, valeurs exactes et valeurs approchées sur calculatrice Texas instruments Voyage 200 71

Figure 10 : Exemple de simplification automatique des racines carrées sur calculatrice Texas instruments Voyage 200 72

Figure 11 : Exemple de simplification des racines carrées sur le logiciel Algobox (cf. annexe A9)... 73

Figure 12 : Extrait de l'abrégé du calcul par le Jabr et la Muqabala, Al-Khwarizmi 76

Figure 13 : Programme de test de primalité d'un entier sous Algobox 83

Figure 14 : Double transposition de la résolution d'un problème mathématique en vue de sa programmation 85

Tableau 15: Place de l'algorithmique dans les programmes de mathématique du lycée durant la contre-réforme 91

Tableau 16: Place de l'algorithmique dans les programmes de mathématique du lycée durant la post contre-réforme 93

Tableau 17: Place de l'algorithmique dans les programmes de mathématique du lycée d'aujourd'hui 94

Tableau 18 : Comparaison des habitats mathématiques d'utilisation de l'algorithmique selon les filières 96

Figure 19 : Résolution d'une équation ax + b = c, l'une exacte, l'autre erronée, sur deux machines différentes.. 99

Figure 20 : Programme sous Algobox donnant les solutions de l'équation ax + b = c 100

Tableau 21 : Extraits du domaine "Fonctions" du programme de seconde de 2009.............. 105

Figure 22 : Positionnement de l'expérimentation didactique spécifique............................... 120

Tableau 23 : Les types des données du recueil et leurs fonctions... 129

Figure 24 : Synthèse des analyses du dispositif expérimental 131

Figure 25 : Choix de présentation des analyses des TPi et SRi 132

Figure 26 : Taux de réussite au BAC du lycée Pompidou de Castelnau le Lez 133
Figure 37 : Énoncé du problème des pommiers (Enquête PISA 2000) 152
Tableau 38 : Grille descriptive du problème des pommiers (PISA) selon les composantes de la compétence algébrique de Grugeon 153
Figure 39 : Énoncé du problème de la marche à pied (Enquête PISA 2003)........................ 155
Tableau 40 : Grille descriptive du problème de la marche à pied selon les composantes de la compétence algébrique de Grugeon 156
Figure 41 : Profil des classes de seconde ayant participé au test diagnostique...................... 159
Figure 42 : Énoncé de l'exercice 1 du test diagnostique 161
Tableau 43 : Analyse de l'OM de l'exercice 1 162
Tableau 44 : Grille descriptive de l'exercice 1 selon les composantes de la compétence algébrique de Grugeon 163
Figure 45 : Énoncé de l'exercice 2 du test diagnostique 164
Tableau 46 : Analyse de l'OM de l'exercice 2 165
Tableau 47 : Grille descriptive de l'exercice 2 selon les composantes de la compétence algébrique de Grugeon 165
Figure 48 : Énoncé de l'exercice 3 du test diagnostique 166
Tableau 49: Analyse de l'OM de l'exercice 3 167
Tableau 50: Grille descriptive de l'exercice 3 selon les composantes de la compétence algébrique de Grugeon 167
Figure 51 : Énoncé de l'exercice 4 du test diagnostique 168
Tableau 52 : Analyse de l'OM de l'exercice 4 169
Tableau 53: Grille descriptive de l'exercice 4 selon les composantes de la compétence algébrique de Grugeon 170
Figure 54 : Énoncé de l'exercice 4 du test diagnostique 170
Tableau 55 : Analyse de l'OM de l'exercice 5 172
Tableau 56: Grille descriptive de l'exercice 5 selon les composantes de la compétence algébrique de Grugeon 173
Figure 57 : Énoncé de l'exercice 6 du test diagnostique 173
Tableau 58 : Analyse de l'OM de l'exercice 6 175
Tableau 59: Grille descriptive de l'exercice 6 selon les composantes de la compétence algébrique de Grugeon 176
Tableau 60 : Inventaire des types de tâches du domaine numérico-algébrique du test diagnostique 178
Tableau 61 : Inventaire des types de tâches du domaine géométrique du test diagnostique . 178
Tableau 62: Répartition des critères des composantes de la compétence algébrique mis en jeu dans les exercices 179

Figure 63 : Comparaison du taux de réussite moyen au test diagnostique selon le type d'exercice 180

Figure 64 : Comparaison du taux de réussite moyen au test diagnostique dans les domaines algébrique et géométrique 181

Figure 65 : Pourcentages de réussite comparés des items algébriques et géométriques 182

Figure 66 : Taux de corrélation entre la réussite en algèbre et en géométrie 184

Figure 67 : Taux moyen de réussite des 160 élèves pour les tâches algébriques par type 185

Figure 68 : Taux moyen de réussite des 160 élèves selon les types de traitement algébrique de Grugeon 186

Figure 69 : Mesure de la compétence du rapport arithmétique / algèbre 187

Figure 70 : Productions d'élèves utilisant une démarche arithmétique 187

Figure 71 : Productions d'élèves utilisant une démarche algébrique 188

Figure 72 : Résultats des items relatifs à la résolution d'équations du 1er degré 189

Figure 73 : Erreurs d'élèves sur les résolutions d'équations de l'exercice 2 190

Figure 74 : Difficultés de résolution d'une équation du type ax = 0 ou ax = bx 191

Figure 75 : Exemples de productions correctes permettant de déterminer DE (Exercice 5, question 3) 192

Figure 76 : Exemple de production montrant une erreur de transformation algébrique (Exercice 5, question 3) 192

Figure 77 : Résultats des items de résolution d'équations de degré 2 193

Figure 78 : Productions d'élèves utilisant la forme développée pour résoudre l'équation $(3x + 1)^2 - 4 = 0$ 194

Figure 79 : Un exemple de conception procédurale des équations 195

Figure 80 : Erreur sur la factorisation de l'expression algébrique de l'exercice 4 195

Figure 81 : Exemples de productions sur la résolution d'une équation du type $x^2 + a^2 = b^2$, dans le cadre géométrique 196

Figure 82 : Un exemple d'inadaptation de la technique de résolution de l'équation proposée 199

Figure 83 : Jeu d'équations sur fiches cartonnées mis à disposition de chaque groupe d'élèves. 201

Figure 84 : Affiches récoltées et présentées au tableau 201

Tableau 85 : Inventaire des techniques possibles en fonction du sens donné au verbe « classer » 204

Tableau 86 : Les OM du type de tâches T_I selon de sens donné au verbe « classer » 207

Tableau 87 : Résumé des éléments imposés et modulables de la situation n°1 prévus dans la trame d'ingénierie 208

Figure 88 : Exemple de fonctionnalité du logiciel Algobox (test) 213

Tableau 89 : types de tâches et de techniques pour la situation n°2 217

Tableau 90 : Résumé des éléments imposés et modulables de la situation n°2 prévus dans la trame d'ingénierie 224

Tableau 91 : Technique τ_1 associée aux tâches de type T_1 (situation n°3)........ 231

Tableau 92 : Tâches de type T_2 (situation n°3) avec indications de la technique τ_2 associée 232

Tableau 93 : Type de tâches T_3 (situation n°3) avec indications de la technique τ_3 associée 233

Tableau 94 : Exemples de programmes de résolution d'équations du second degré sous Albogox 235

Tableau 95 : Techniques τ_5 associée aux tâches de type T_5 (situation n°3) 236

Tableau 96 : Résumé des éléments imposés et modulables de la situation n°3 prévus dans la trame d'ingénierie 238

Figure 97 : Choix des équations du second degré pour la situation n°3 (trame d'ingénierie) 239

Figure 98 : Entretien pré-expérimentation du professeur Annabelle : quelques éléments..... 244

Figure 99 : Entretien pré-expérimentation du professeur Maurice : quelques éléments........ 245

Figure 100 : Entretien pré-expérimentation du professeur Alex : quelques éléments 246

Tableau 101 : Progression des enseignants expérimentateurs dans leur classe de seconde... 252

Tableau 102 : Les choix des éléments modulables de la situation n°1 dans les trames projetées TP_1 et TP_2 254

Figure 103 : Équations proposées par le chercheur (situation n°1)........ 255

Figure 104 : Équations choisies par les enseignants An et Ma (situation n°1) 256

Tableau 105 : Modification de l'inventaire des techniques associées au type de tâches T_I et T_R d'après les trames projetées TP_1 et TP_2........ 260

Tableau 106: Les choix des éléments modulables de la situation n°2 dans les trames projetées TP_1 et TP_2 263

Figure 107 : Consignes des professeurs Annabelle et Maurice pour la situation n°2........ 264

Tableau 108 : Comparaison de la résolution de l'équation $x^2 = a$ 267

en environnement papier-crayon et algorithmique........ 267

Tableau 109 : Les choix des éléments modulables de la situation n°1 dans la trame projetée TP_3........ 269

Figure 110 : Équations choisies par l'enseignant Al (situation n°1)........ 270

Tableau 111 : Les choix des éléments modulables de la situation n°2 dans la trame projetée TP_3........ 274

Figure 112 : Choix des équations du 1er degré d'Alex pour la situation n°2........ 277

Tableau 113 : Les choix des éléments modulables de la situation n°3 dans la trame projetée TP_3........ 278

Tableau 114 : Comparaison des fiches d'énoncé fournis par les enseignants 279

Tableau 115 : Comparaison des éléments modulables de la situation n°1 des TP n°1, 2 et 3282

Tableau 116 : Comparaison des équations choisies par les trois enseignants pour la situation n°1 284

Figure 117 : Échelle de codétermination pour le domaine Fonctions du programme de la classe de seconde (MEN, 2009a) 288

Figure 118 : Comparatif des trames projetées des enseignants pour la situation n°2 289

Figure 119 : Comparaison des fiches d'énoncé de la situation n°2 290

Tableau 120 : Résumé des séances réalisées par chacun des professeurs 293

Tableau 121 : Les différentes phases de la séance 1 d'Annabelle 294

Tableau 122 : Caractérisation des groupements de l'affiche 1-An 295

Tableau 123 : Caractérisation des groupements de l'affiche 2-An 297

Figure 124 : Caractérisation des groupements de l'affiche 3-An 299

Tableau 125 : Caractérisation des groupements de l'affiche 4-An 301

Tableau 126 : Caractérisation des groupements de l'affiche 5-An 303

Tableau 127 : Caractérisation des groupements de l'affiche 6-An 304

Tableau 128 : Synthèse des techniques utilisées pour la séance 1 de la classe d'Annabelle.. 306

Tableau 129 : Résumé des praxéologies relatives aux types de tâches T_I et T_R (classe d'Annabelle) 307

Tableau 130 : Récapitulatif du milieu, du temps didactique et des topos (séance 1 d'Annabelle) 318

Tableau 131 : Les différentes phases de la séance 1 de Maurice 323

Tableau 132 : Caractérisation des groupements de l'affiche 1-Ma 324

Tableau 133 : Caractérisation des groupements de l'affiche 2-Ma 326

Tableau 134 : Caractérisation des groupements de l'affiche 2-Ma 327

Tableau 135 : Caractérisation des groupements de l'affiche 4-Ma 328

Tableau 136 : Caractérisation des groupements de l'affiche 5-Ma 330

Tableau 137: Caractérisation des groupements de l'affiche 6-Ma 331

Tableau 138 : Synthèse des techniques utilisées pour la séance 1 de la classe de Maurice... 333

Tableau 139 : Résumé des praxéologies relatives aux types de tâches T_I et T_R (classe de Maurice) 333

Tableau 140 : Les différentes phases de la séance 1-1 d'Alex 338

Tableau 141 : Caractérisation des groupements de l'affiche 1-1-Al 339

Tableau 142 : Caractérisation des groupements de l'affiche 2-1-Al 341

Tableau 143 : Caractérisation des groupements de l'affiche 3-1-Al 343

Tableau 144 : Caractérisation des groupements de l'affiche 4-1-Al 344

Tableau 145 : Synthèse des techniques utilisées pour la séance 1-1 de la classe d'Alex 346

Tableau 146 : Résumé des praxéologies relatives aux types de tâches T_I et T_R (classe d'Alex, séance 1.1) 347

Tableau 147 : Récapitulatif du milieu, du temps didactique et des topos (séance 1-1 d'Alex) 356

Tableau 148: Comparaison des enseignements de la notion d'équation en 3e et en 2nde 359
Tableau 149 : Les différentes phases de la séance 1-2 d'Alex 360
Tableau 150 : Caractérisation des groupements de l'affiche 1-2-Al 361
Tableau 151 : Caractérisation des groupements de l'affiche 2-2-Al 363
Tableau 152 : Caractérisation des groupements de l'affiche 3-2-Al 364
Tableau 153 : Caractérisation des groupements de l'affiche 4-2-Al 366
Tableau 154 : Caractérisation des groupements de l'affiche 5-2-Al 367
Tableau 155 : Synthèse des techniques utilisées pour la séance 1-2 de la classe d'Alex 368
Tableau 156 : Résumé des praxéologies relatives aux types de tâches T_I et T_R en lien (classe d'Alex, séance 1.2) 369
Tableau 157 : Récapitulatif du milieu, du temps didactique et des topos (séance 1-2 d'Alex) 376
Figure 158 : Extraits comparés de verbatim sur les nombres irrationnels (séance -2 d'Alex)377
Figure 159 : Extraits comparés de verbatim sur la considération des racines carrées dans les équations (séance 2-1 d'Alex) 378
Tableau 160 : Les différentes phases de la séance 2 d'Annabelle 381
Tableau 161 : Réponses fournies par les élèves à la tâche de type T_1 (question 2, séance 2 d'Annabelle) 385
Figure 162 : Productions d'élèves d'Annabelle montrant l'engagement dans la tâche t_1 (question 3).. 386
Figure 163 : Production d'une élève d'Annabelle montrant l'engagement dans la tâche t'_2 .. 386
Figure 164 : Trace écrite au tableau du professeur Annabelle relativement à la tâche t'_2 387
Figure 165 : Production d'une élève d'Annabelle montrant l'effectuation de la tâche t_2 388
Figure 166 : Production d'une élève d'Annabelle montrant la non-prise en compte du cas a =c (tâche t_2) 388
Figure 167 : Trace écrite d'Annabelle montrant la non-congruence de la résolution d'équations en environnements papier-crayon et algorithmique 389
Figure 168 : Productions d'élèves montrant les difficultés de conception de l'algorithme (équation ax + b = c) 390
Figure 169 : Programmes de la séance 2 d'Annabelle relevés sur clef UBS (algorithme de résolution d'équations de la forme ax + b = c)... 391
Figure 170 : Transformation du 1er programme par l'élève Pierre, pour obtenir le 2nd 392
Figure 171 : Production de Pierre pour l'équation 10 (séance 2 d'Annabelle)...................... 393
Tableau 172 : Réponses fournies par les élèves aux tâches de type T_5, séance 2 d'Annabelle 394
Figure 173 : Trace écrite d'Annabelle pour la forme générique des premières équations 397
Figure 174 : Production inachevée d'un binôme montrant l'engagement dans la tâche t_4 400

Tableau 175 : Récapitulatif du milieu, du temps didactique et des topos (séance 2 d'Annabelle) 402
Figure 176 : Extrait des traces écrites du tableau d'Annabelle (séance 2) 403
Figure 177 : Exemples de manuels proposant des choix de lettres différents pour désigner l'inconnue 404
Tableau 178 : Les différentes phases de la séance 2 de Maurice 406
Figure 179 : Exemples de recherche de la forme génériques des premières équations (Séance 2 de Maurice) 407
Tableau 180 : Réponses fournies par les élèves à la tâche t'_1 (question 2), séance 2 de Maurice 408
Figure 181 : Productions d'élèves de Maurice montrant l'engagement dans la tâche t_1 (question 3) 409
Figure 182 : Production d'élèves de Maurice montrant l'engagement dans la tâche t'_2 410
Figure 183 : Production d'Alexandra montrant la démarche de résolution des équations du type ax + b = c (Séance 2 de Maurice) 411
Figure 184 : Production d'élèves de Maurice montrant l'effectuation de la tâche t_2 (séance 2) 412
Figure 185 : Production d'un élève de Maurice montrant la prise en compte du cas a =c (tâche t_2) 413
Figure 186 : Programmes de résolution de l'équation ax + b = c (élèves de Maurice- séance 2) 414
Figure 187 : Interactions entre les environnements papier-crayon et algorithmique pour la résolution de l'équation ax + b = I (Élève Thomas- Programme de type congruent) 415
Figure 188 : Programmes de résolution de l'équation ax + b = cx +d (élèves de Maurice- séance 2) 417
Figure 189 : Interactions entre les environnements papier-crayon et algorithmique pour la résolution de l'équation ax + b = cx + d (Élève Bilal- Programme de type congruent) 418
Tableau 190 : Réponses fournies par les élèves aux tâches de type T_5, séance 2 de Maurice 418
Figure 191 : Productions d'élèves utilisant des "boîtes à nombres" (séance 2 de Maurice) .. 420
Figure 192 : Schématisation de la technique de Maurice pour l'introduction des lettres en algèbre 420
Tableau 193 : Les différentes phases de la séance 2.1 d'Alex 422
Figure 194 : Productions d'élèves d'Alex montrant l'engagement en environnement TICE (tâche t_1) 424
Figure 195 : Productions d'élèves d'Alex montrant l'engagement en environnement papier-crayon (t_1) 425
Figure 196 : Productions d'élèves d'Alex montrant l'engagement dans la tâche t_2 427
Figure 197 : Productions de deux élèves montrant l'engagement dans les tâches t_3 et t_4 429
Figure 198 : Production d'un binôme montrant les difficultés de conception de l'algorithme de la situation n°2 430

Figure 199 : Programme de Florent et Thomas, vérifié par le professeur Alex (séance 2.1) 431
Tableau 200 : Réponses fournies par les élèves à la tâche t_5, séance 2.1 d'Alex 432
Figure 201 : Extrait d'une production montrant des erreurs d'identification des paramètres. 432
Figure 202 : Extrait de la production de Mélanie pour la tâche t_5 433
Tableau 203 : Récapitulatif du milieu, du temps didactique et des topos (séance 2-1 d'Alex) 440
Figure 204 : Production C- Programme en cours d'écriture d'un binôme lors de la séance 2.1 d'Alex 442
Figure 205 : Exemple de l'absence de rétroaction entre les productions algébriques et les objets algorithmiques 443
Tableau 206 : Les différentes phases de la séance 2.2 d'Alex.. 445
Figure 207 : Extraits des productions de Marion et de Mélanie en recherche de la tâche t_1 . 447
Figure 208 : Extrait de la production de Marine en recherche de la tâche t_1 448
- sur la sortie de l'algorithme (« Je vous rappelle que l'algorithme, il ne peut pas afficher quelque chose que vous ne lui avez pas demandé de calculer avant ! », ligne 193). 453
Figure 209 : Production de Marine indiquant les difficultés à comprendre la structure du programme à réaliser 453
Figure 210 : Programme du binôme Rebecca et Camille de la séance 2.2 d'Alex (relevé sur clef USB)... 455
Tableau 211 : Réponses fournies par les élèves à la tâche T_5, séance 2.2 d'Alex 455
Figure 212 : Production de deux élèves d'Alex pour l'équation 10 (séance 2.2) 456
Tableau 213 : Récapitulatif du milieu, du temps didactique et des topos (séance 2-2 d'Alex) 463
Figure 214 : Comparaison de l'étape E_1 pour les séances 2.1 et 2.2 d'Alex.......................... 464
Figure 215 : Environnement prédominant des tâches t_1 à t_5 de la situation n°2 465
Figure 216 : Corps du programme pour la tâche de type T_6 466
Figure 217 : Productions de deux élèves d'Alex (Tâche t_6, question 1.a)............................. 466
Figure 218 : Production d'un élève d'Alex (tâche t_6, question 3)... 467
Figure 219 : Production d'une élève d'Alex (tâche t_6, question 4) 467
Figure 220 : Production de quatre élèves d'Alex (tâche t_6, question 4) 468
Tableau 221 : Les différentes phases de la séance 3.1 d'Alex.. 471
Figure 222 : Extrait d'une production d'élève montrant l'engagement dans la tâche t'1 (séance 3.1 d'Alex).. 473
Figure 223 : Productions d'élèves d'Alex montrant l'engagement dans la tâche t_1 (question 3) 473
Figure 224 : Trace écrite au tableau du professeur Alex relativement à la tâche t'_2............. 475
Figure 225 : Production d'élèves d'Alex montrant l'effectuation de la tâche t_2 475
Figure 226 : Programmes de la séance 3.1 d'Alex relevés sur clef USB............................. 477

(algorithme de résolution d'équations de la forme (ax + b)(cx + d) = 0).............................. 477

Figure 227 : Programmes de la séance 3.1 d'Alex relevés sur clef USB (algorithme de résolution d'équations de la forme x^2= a) 478

Tableau 228 : Réponses fournies par les élèves à la tâche t_5, séance 3.1 d'Alex 479

Figure 229 : Production d'une élève d'Alex montrant la comparaison entre les solutions obtenues en environnements papier-crayon et algorithmique.. 480

Tableau 230 : Récapitulatif du milieu, du temps didactique et des topos (séance 3.1 d'Alex) 484

Figure 231 : Programme d'un élève corrigé par le professeur Alex (séance 3.1) 486

Tableau 232 : Les différentes phases de la séance 3.2 d'Alex.. 487

Figure 233 : Extrait de productions d'élèves montrant les difficultés à résoudre la tâche de type T_0 (séance 3.2 d'Alex) 489

Figure 234 : Extrait de productions d'élèves montrant la résolution des équations 4, 5 et 9 (séance 3.2 d'Alex) 490

Figure 235 : Extrait de production d'élève montrant la résolution des équations 6 et 8 (séance 3.2 d'Alex) 491

Figure 236 : Production d'une élève d'Alex montrant l'engagement dans la tâche t'_1 (séance 3.2)... 491

Figure 237 : Programmes de résolution d'équations-produits nuls avec boucles de tests imbriquées (séance 3.2 d'Alex)... 494

Figure 238 : Programmes de résolution d'équations-produits nuls avec une seule boucle de test (séance 3.2 d'Alex).. 495

Tableau 239 : Réponses fournies par les élèves à la tâche de type T_5, séance 3.2 d'Alex 496

Tableau 240 : Récapitulatif du milieu, du temps didactique et des topos (séance 3.2 d'Alex) 501

Figure 241 : Comparaison de l'étape E_1 pour les séances 3.1 et 3.2 d'Alex 502

Figure 242 : Entretien pré-expérimentation du professeur Annabelle : quelques éléments... 510

Figure 243 : Entretien pré-expérimentation du professeur Maurice : quelques éléments...... 511

Figure 244 : Entretien post-expérimentation du professeur Alex : quelques éléments.......... 512

Figure 245 : Récapitulatif des techniques utilisées pour le classement des d'équations (situation n°1).. 517

Figure 246 : Répartition des techniques utilisées pour le classement des équations (plusieurs techniques possibles par classement) 519

Figure 247 : Élève considérant des équations du premier degré sous une forme générique.. 522

Figure 248 : Production d'élèves considérant la modélisation des équations....................... 522

Figure 249 : Exemple d'élève évoquant la transformation des équations 523

Figure 250 : Non-congruence entre les environnements papier-crayon et informatisé 525

Figure 251 : Non-congruence entre l'algorithme et le programme sous Algobox 526

Figure 252 : Une proposition de reprise de l'expérimentation 528

Étude didactique de la reprise de l'algèbre par l'introduction de l'algorithmique au niveau de la classe de seconde du lycée français

Résumé

La récente réforme des lycées en France de 2009 s'est accompagnée d'un changement de programmes en mathématiques. Relativement à la classe de seconde, deux sujets nous questionnent : d'une part, la nouvelle place de l'algèbre, désormais plongée dans le domaine fonctionnel, lui conférant un rôle essentiellement d'*outil*, et d'autre part l'introduction d'une familiarisation avec l'algorithmique.

De par l'intérêt de lier ces deux sujets, ce travail de thèse propose une étude didactique de la *reprise* de l'algèbre élémentaire en classe de seconde, et plus particulièrement des objets gravitant autour du concept d'équation, objets dont nous cherchons à affiner le sens par le *détour* de l'algorithmique.

Nous situant dans le cadre de la théorie anthropologique du didactique de Chevallard, nous étudions les conditions et les contraintes de cette reprise. Au travers d'une ingénierie didactique mise en place avec la collaboration de trois enseignants de lycée, nous montrons comment la reprise de concepts d'algèbre élémentaire par le biais de l'algorithmique induit pour les élèves un *geste de généralisation,* tout en réalisant une certaine *matérialisation* des objets algébriques, en les manipulant au sein d'un programme informatique. Pour les enseignants, cette ingénierie provoque un questionnement sur les praxéologies de leur enseignement de l'algèbre, suscité par des tâches non routinières de *catégorisation* et de *modélisation* des équations. Enfin, nous mettons en évidence la question de l'intégration du domaine de l'algorithmique dans la discipline des mathématiques et le besoin d'une formation des professeurs pour assurer la viabilité de cet enseignement.

Mots-clés

didactique des mathématiques, classe de seconde, algèbre élémentaire, concept d'équation, résolution d'équation, algorithmique, algorithme, programmation, transposition didactique et informatique

Didactic study of algebra resumption by the introduction of algorithmics in French "classe de seconde" (9^{th}-10^{th} grade in US High School)

Abstract

The recent French schools reform (2009) was accompanied by a change in mathematics curriculum. With respect to the "classe de seconde" (9^{th}-10^{th} Grade in US High School), two subjects question us: first, the new positioning of algebra, now part of the functional domain, giving it a primary role of tool, and on the other hand, the introduction of algorithmic concepts.

Through the value of combining these two subjects, this thesis proposes a didactic study of the resumption of elementary algebra in "classe de seconde", and especially of the objects orbiting around equation concept, objects of which we search to refine the meaning, through the detour of algorithmics.

Positioned within the anthropological theory of the didactic by Chevallard, we study the conditions and constraints of this resumption. Through a didactic engineering implementation in collaboration with three high school teachers, we show how the resumption of basic algebra concepts through algorithmics induced for students a gesture of generalization, while achieving some materialization of algebraic objects, manipulating them in a computer program. For teachers, this engineering induces a questioning of their praxeology teaching algebra, generated by non-routine tasks of equations categorization and modeling. Finally, we highlight the challenge of integrating algorithmics domain within mathematics discipline and the need for teachers to be trained, to ensure the viability of this teaching.

Keywords

mathematics education, "classe de seconde" (9^{th}-10^{th} Grade US), elementary algebra, concept of equation, equation solving, algorithmics , algorithm , programming, computer and didactic transposition

Collège Doctoral du Languedoc-Roussillon

THÈSE

Pour obtenir le grade de Docteur

Délivré par UNIVERSITE MONTPELLIER 2

Préparée au sein de l'école doctorale
Information, structures et systèmes
et de l'unité de recherche LIRDEF

Spécialité : Didactique des mathématiques

Présentée par Nathalie BRIANT

Étude didactique de la reprise de l'algèbre par l'introduction de l'algorithmique au niveau de la classe de seconde du lycée français

Soutenue le 10 décembre 2013

Volume des annexes

UNIVERSITÉ MONTPELLIER 2
SCIENCES ET TECHNIQUES

TABLE DES ANNEXES

Annexes A1 à A4 : Test diagnostique 3
A1. Énoncé du test diagnostique donné aux élèves en fin de seconde 4
A2. Passation des consignes du test diagnostique de fin de seconde 8
A3. Codage des items pour dépouillement du test diagnostique de fin de seconde 9
A4. Résultats détaillés du test diagnostique de fin de seconde 13

Annexes A5 à A8 : Premier entretien avec les professeurs expérimentateurs 15
A5. Entretien pré-expérimentation : enseignante Annabelle 16
A6. Entretien pré-expérimentation : enseignant Maurice 18
A7. Entretien pré-expérimentation : enseignant Alex 23

Annexes A9 à A21 : Préparation de l'expérimentation 29
A8. Énoncé d'un test d'Annabelle sur les équations du premier degré 30
A9. Présentation du logiciel Algobox 31
A10. Diaporama de la trame d'ingénierie 40
A11. Proposition d'équations du premier et du second degré (trame d'ingénierie : situation n°1) 42
A12. Proposition d'un énoncé pour la situation n°2 (trame d'ingénierie du chercheur - équations du premier degré) 43
A13. Proposition de description d'un algorithme (trame d'ingénierie : situation n°2) 44
A14. Proposition d'un énoncé pour la situation n°3 (trame d'ingénierie du chercheur - équations du second degré) 45
A15. Exemples de programmes sous Algobox pour la situation n°3 46
A16. Entretien d'Annabelle et de Maurice pour l'adaptation de la trame d'ingénierie en la trame projetée (TP1 et TP2) 47
A17. Équations choisies par les professeurs Annabelle et Maurice (Situation n°1 – Séance 1) 60
A18. Énoncé de l'activité de la situation 2 par les professeurs Annabelle et Maurice (Situation n°2 – Séance 2) 61
A19. Entretien d'Alex pour l'adaptation de la trame d'ingénierie en la trame projetée (TP3) 62
A20. Équations choisies par le professeur Alex (Situation n°1 – Séances 1.1 et 1.2) 71
A21. Énoncé de l'activité 1 de la situation 2 par le professeur Alex (Situation n°2 – Séance 2) 72
A22. Énoncé de l'activité 2 de la situation 2 par le professeur Alex (Situation n°2 – Travail maison) 73

A23. Énoncé de l'activité de la situation 3 par le professeur Alex (Situation n°3 – Séance 3) 74

Annexes A22 à A39 : Réalisation de l'expérimentation 75
A24. Codage des transcriptions pour les séances filmées ou les entretiens audio 76
A25. Transcription de la séance 1 du professeur Annabelle (situation n°1) 77
A26. Transcription des affiches des élèves du professeur Annabelle 85
A27. Transcription de la séance 1 du professeur Maurice (situation n°1) 92
A28. Transcription des affiches des élèves du professeur Maurice (Situation n°1 – Séance 1) 101
A29. Transcription de la séance 1.1 du professeur Alex (situation n°1) 107
A30. Transcription de la séance 1.2 du professeur Alex (situation n°1) 118
A31. Transcription des affiches des élèves du professeur Alex (Situation n°1 – Séance 1.1 et 1.2) 131
A32. Transcription de la séance 2 du professeur Annabelle (situation n°2) 140
A33. Exemple d'une production d'élève pour la situation n°2 de la classe d'Annabelle 150
A34. Transcription de la séance 2 du professeur Maurice (situation n°2) 151
A35. Exemple d'une production d'élève pour la situation n°2 de la classe de Maurice .. 159
A36. Transcription de la séance 2.1 du professeur Alex (situation n°2) 160
A37. Transcription de la séance 2.2 du professeur Alex (situation n°2) 170
A38. Exemple d'une production d'élève pour la situation n°2 de la classe d'Alex 180
A39. Transcription de la séance 3.1 du professeur Alex (situation n°3) 181
A40. Transcription de la séance 3.2 du professeur Alex (situation n°3) 190
A41. Exemple d'une production d'élève pour la situation n°3 de la classe d'Alex 196

Annexes A40 à A43 : Entretien terminal avec les professeurs expérimentateurs 198
A42. Entretien post-expérimentation : enseignante Annabelle 199
A43. Entretien post-expérimentation : enseignant Maurice 203
A44. Entretien post-expérimentation : enseignant Alex 207

Annexes A1 à A4 : Test diagnostique

Le sujet
Le dépouillement

A1. Énoncé du test diagnostique donné aux élèves en fin de seconde

NOM : .... **Orientation en septembre 2010 :** ....
Prénom : ....

Le test comporte deux parties : une partie algébrique et une partie géométrique. Vous pouvez traiter les exercices dans l'ordre que vous souhaitez. Si vous avez besoin d'écrire un calcul, un raisonnement, de faire schéma ou autre, utilisez les cases nommées « brouillon », même si ce que vous écrivez est incomplet. **La calculatrice est autorisée.**

PARTIE ALGÉBRIQUE

Exercice 1

Dans une classe de seconde a été donné l'exercice suivant :« *Développer et réduire l'expression littérale* :
$(2\,x - 5)^2 - 7\,(3\,x + 5)$ »

Voici les résultats trouvés par trois élèves :

Marc : $4\,x^2 - x + 60$
Sophie : $4\,x^2 - 41\,x - 10$
Nadine : $4\,x^2 - 21\,x - 210$

Le tableau ci-dessous donne les résultats des valeurs prises par chacune des 4 expressions précédentes lorsqu'on choisit $x = 10$, pour la colonne 3, puis lorsqu'on choisit $x = 2$, pour la colonne 4.

Expressions	x	$x = 10$	$x = 2$
Expression du texte	$(2\,x - 5)^2 - 7\,(3x + 5)$	- 20	- 76
Expression trouvée par Marc	$4\,x^2 - x + 60$	450	74
Expression trouvée par Sophie	$4\,x^2 - 41x - 10$	-20	- 76
Expression trouvée par Nadine	$4\,x^2 - 21x - 210$	-20	- 236

1) Peut-on déduire des quatre résultats calculés pour $x = 10$ que l'un des trois élèves s'est trompé ? Si oui, lequel et en est-on sûr ?

....
....
....
....

2) Peut-on déduire des quatre résultats calculés pour $x = 2$ qu'un autre des trois élèves s'est trompé ? Si oui, lequel et en est-on sûr ?

....
....
....
....
....

3) Prouver que l'élève qui reste a trouvé la bonne réponse :

....
....
....
....

Exercice 2

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les deux équations suivantes :

$2(x - 1) + 5x = 3x + 4 - 2(x + 1)$

$4(2x + 5) - 3x = x - 4 + 2(x + 12)$

Exercice 3

Rappel :

x^2 est le produit de deux facteurs : x et x.
$x - 9$ est la somme de deux termes : x et (-9).
$\frac{3}{x}$ est le quotient du numérateur 3 par le dénominateur x.
$x\,(x + 9)$ est le produit de deux facteurs : x et $x + 9$.
$x^2 + x(x + 9)$ est la somme de deux termes : x^2 et $x(x + 9)$.
$\frac{x-1}{x+3}$ est le quotient du numérateur $x - 1$ par le dénominateur $x + 3$.

1) Parmi les expressions suivantes, entourer celles qui sont écrites sous la forme d'une somme.

$3x + 4$ $\quad x(x + 1)$ $\quad x(x + 3) - 4$ $\quad x + (x - 1)(x + 2)$ $\quad (2x - 1)^2$ $\quad 2x(x - 3) + 3(x - 1)$

2) Parmi les expressions suivantes, entourer celles qui sont écrites sous la forme d'un produit.

$3x + 4$ $\quad x(x + 1)$ $\quad x(x + 3) - 4$ $\quad x + (x - 1)(x + 2)$ $\quad (2x - 1)^2$ $\quad 2x(x - 3) + 3(x - 1)$

3) Quelle est la forme de l'expression suivante : $\frac{4}{x+3} - \frac{3}{x}$?

....

....

Écrire cette expression sous la forme d'un quotient.

....

....

....

Exercice 4

On considère, pour tout x réel, l'expression $A(x) = (3x + 1)^2 - 4$

1) Développer et réduire $A(x)$.

2) Reprendre l'expression initiale et factoriser $A(x)$.

....

....

....

3) Compléter le tableau ci-dessous, en suivant les consignes suivantes :

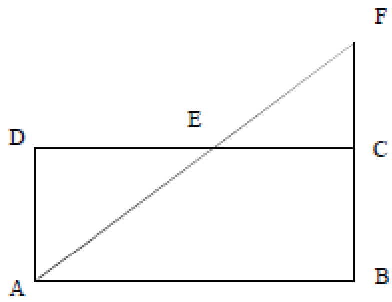
Pour chaque ligne, vous devez choisir la forme de $A(x)$ qui vous permet de faire le travail demandé le plus simplement possible, et effectuer le calcul dans la colonne correspondante. Mettre une croix dans les deux autres colonnes.

Travail à faire	**Forme initiale** $\mathbf{A(x) = (3x + 1)^2 - 4}$	**Forme développée**	**Forme factorisée**
Calculer $A(-\frac{1}{3})$			
Calculer $A(\sqrt{2})$ On donnera le résultat sous la forme a + b $\sqrt{2}$ où a et b sont des entiers.			
Résoudre $A(x) = 0$			

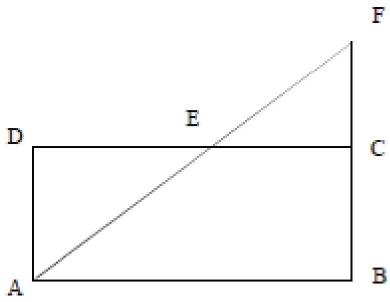
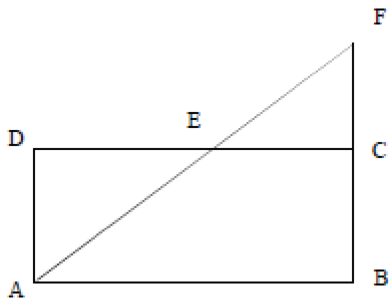
PARTIE GÉOMÉTRIQUE

<u>Exercice 5</u>

On considère la figure ci-contre où :
ABCD est un rectangle ;
Les points A, E et F sont alignés ;
Les points B, C et F sont alignés ;
AE = 5 ;
EF = 4,5 ;
FC = 2,7.



Pour chaque question, ***repasser en couleur sur la figure*** les points, segments, droites…. utilisés pour la démonstration.

Question	**Figure**	**Démonstration** *Faire apparaître les différentes étapes de la démonstration.*
1) Démontrer que EC = 3,6		
2) Calculer DE		

<u>Exercice 6</u>

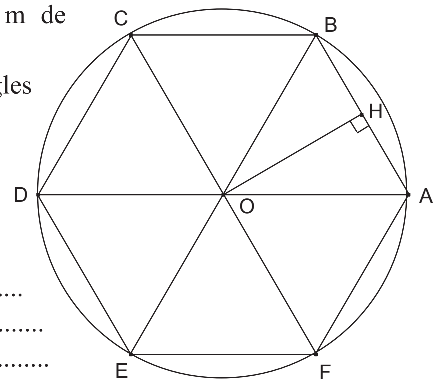
Dans cet exercice, on veut calculer les aires d'un carré et d'un hexagone régulier de même périmètre (120 m).
Les deux parties sont indépendantes.

Partie A : Étude du carré

Calculer la longueur d'un côté puis l'aire d'un carré de 120 m de périmètre.

……
……
……
……

Partie B : Étude de l'hexagone régulier



La figure ci-contre représente un hexagone régulier ABCDEF de 120 m de périmètre.

Il est inscrit dans un cercle de centre O. Il est constitué de six triangles équilatéraux.

Le segment [OH] est une hauteur du triangle équilatéral OAB.

1) Calculer la longueur AB du côté de l'hexagone régulier

....

....

....

....

2) En déduire AH puis la valeur exacte de OH. *(On justifiera chacune des deux réponses)*

....

....

....

....

....

....

....

3) Calculer la valeur exacte de l'aire du triangle OAB.

....

....

....

....

4) Calculer la valeur exacte puis la valeur arrondie à 10 m² près de l'aire de l'hexagone régulier de 120 m de périmètre.

....

....

....

....

A2. Passation des consignes du test diagnostique de fin de seconde

Bonjour,
Je me présente, je m'appelle Nathalie Briant et je débute une thèse portant, entre autres, sur la comparaison des acquisitions des élèves en algèbre et en géométrie au niveau de la classe de seconde.
Afin d'avoir une première idée des compétences basiques des élèves dans ces deux domaines, je sollicite votre collaboration pour faire passer en cette fin d'année ce petit test sur une de vos heures de cours.
Bien entendu, je ne vous demande pas de corriger les copies, je vous demande simplement de les remettre à Annabelle qui me les transmettra. De plus, si vous le souhaitez, je vous enverrai les résultats de ce test.
D'autre part, j'aurais besoin de quelques renseignements à propos du profil de votre classe pour affiner mes comparaisons. Ces questions sont posées ci-dessous et cette fiche sera rendue avec le paquet de copies.
Un grand merci pour votre collaboration.
Nathalie Briant

QUELQUES QUESTIONS SUR LE PROFIL VOTRE CLASSE DE SECONDE

Nom et prénom du professeur (facultatif) : ....
Adresse mail (pour les résultats – facultatif) : ....
Nombre d'élèves de la classe : ....
Quelles sont les options (MPI, SES, ...) des élèves de la classe : ....
Comment qualifieriez-vous le niveau global de la classe en mathématiques :
Très mauvais – Mauvais – Moyen – Assez bon – Bon – Très bon
Quelle est la moyenne de la classe en mathématiques à chaque trimestre :
- Premier trimestre : ..../20. Écart-type faible ou élevé ? ....
- Second trimestre : ..../20. Écart-type faible ou élevé ? ....
- Troisième trimestre : ..../20. Écart-type faible ou élevé ? ....

CONSIGNES DE PASSATION POUR LE PROFESSEUR :
Tester la capacité à répondre en un temps limité n'est pas un objectif de cette évaluation ; il est donc nécessaire que les élèves se sentent en confiance. Cependant si des questions surgissent durant l'évaluation, aucun élément susceptible d'orienter les réponses ne peut être fourni. Le test est individuel.

➔ Le professeur lit à haute voix le préambule, qui se trouve également sur la fiche élève :

Le test comporte deux parties : une partie algébrique et une partie géométrique. Vous pouvez traiter les exercices dans l'ordre que vous souhaitez. Si vous avez besoin d'écrire un calcul, un raisonnement, de faire schéma ou autre, utilisez les cases nommées « brouillon », même si ce que vous écrivez est incomplet. ***La calculatrice est autorisée.***

➔ Le professeur précise que le test est prévu pour une durée de 50 minutes.

➔ Enfin, le professeur donne quelques précisions sur les exercices proposés :

POUR LA PARTIE ALGÉBRIQUE :

Pour l'exercice 1 : Bien préciser **qu'au début de l'exercice**, on ne demande pas de répondre à la question « Développer et réduire l'expression littérale : $(2x - 5)^2 - 7(3x + 5)$». Les élèves doivent seulement répondre aux questions 1, 2 et 3 de cet exercice.

POUR LA PARTIE GÉOMÉTRIQUE :

Insister sur le fait que pour les deux exercices**, l'accent sera mis sur la justesse de la démonstration**, c'est-à-dire qu'on attend des élèves qu'ils citent les théorèmes et les propriétés qu'ils utilisent et que toutes les étapes des démonstrations demandées doivent apparaître sur la copie, rédigées de façon claire.

A3. Codage des items pour dépouillement du test diagnostique de fin de seconde

Exercice 1

	ITEM	COMPÉTENCE COMPOSANTE ÉVALUÉE	RÉPONSE	CODE
1)	1	Exploitation de résultats pour tester des identités.	Oui avec argumentation sur le fait que le résultat trouvé avec l'expression du texte et celui trouvé par Marc ne sont pas égaux	1
			Oui avec argumentation absente ou erronée	6
			Autre réponse	9
			Absence de réponse	0
2)	2	Exploitation de résultats pour tester des identités.	Oui avec argumentation sur le fait que le résultat trouvé avec l'expression du texte et celui trouvé par Nadine ne sont pas égaux	1
			Oui avec argumentation absente ou erronée	6
			Autre réponse	9
			Absence de réponse	0
3)	3	Concevoir que la preuve exige un calcul littéral.	L'élève a engagé un calcul littéral à partir de l'expression donnée dans le texte	1
			L'élève argumente à partir d'exemples (ceux déjà vus ou avec de nouveaux calculs)	6
			Autre réponse	9
			Absence de réponse	0
	4	Mener un calcul littéral de développement.	Calcul littéral bien conduit	1
			Calcul littéral engagé et terminé par le résultat attendu mais dont le manque de détails amène à douter que l'élève l'ait réellement conduit entièrement	3
			Calcul littéral engagé mais erreur dans les calculs	6
			Autre réponse (dont les réponses basées sur des exemples numériques)	9
			Le code 0 ne sera pas utilisé dans le cas d'un élève qui n'a pas pensé à recourir à un calcul littéral. Il ne peut être considéré comme quelqu'un ne sachant pas effectuer le calcul.	0

Exercice 2

	ITEM	COMPÉTENCE COMPOSANTE ÉVALUÉE	RÉPONSE	CODE
1)	5	Résoudre une équation du premier degré.	4/6 ou 2/3	1
			Calcul littéral engagé et abouti avec erreur de calcul	3
			Calcul littéral engagé avec plusieurs erreurs (de signes ; de calcul ; de distributivité)	6
			Autre réponse	9
			Absence de réponse	0
2)	6	Résoudre une équation du premier degré.	0	1
			Calcul littéral engagé et abouti avec erreur de calcul	3
			Calcul littéral engagé et abouti avec erreur sur la	6

			résolution finale $2x = 0$ ou $5x = 3x$	
			Autre réponse	9
			Absence de réponse	0

Exercice 3

	ITEM	COMPÉTENCE COMPOSANTE ÉVALUÉE	RÉPONSE	CODE
1)	7	Reconnaître la forme d'expressions. (sous forme de somme d'expressions algébriques).	Réponse juste : $3x + 4$; $x + (x - 1)(x + 2)$; $x(x + 3) - 4$; $2x(x - 3) + 3(x - 1)$	1
			Trois réponses correctes sur quatre sans réponse erronée.	2
			Autre réponse	9
			Absence de réponse	0
2)	8	Reconnaître la forme d'expressions (produit d'expressions algébriques.)	Réponse juste : $x(x+1)$; $(2x-1)^2$	1
			Réponse incomplète : $x(x+1)$	3
			Autre réponse	9
			Absence de réponse	0
3)	9	Reconnaître la forme d'une expression présentée sous la forme de la différence de deux quotients d'expressions algébriques	Réponse juste : somme ou différence	1
			Réponse donnée : quotient	3
			Autre réponse	9
			Absence de réponse	0
	10	Appliquer une technique de réduction au même dénominateur pour transformer une expression rationnelle.	Réponse juste : $\frac{x-9}{x(x+3)}$	1
			Calcul littéral engagé et abouti avec erreur de calcul	3
			Autre réponse	9
			Absence de réponse	0

Exercice 4

	ITEM	COMPÉTENCE COMPOSANTE ÉVALUÉE	RÉPONSE	CODE
1)	11	Développer et réduire une expression polynomiale du second degré.	Réponse juste : $9x^2+ 6x – 3$	1
			Réponse avec erreur dans l'identité remarquable	6
			Autre réponse	9
			Absence de réponse	0
2)	12	Factoriser une expression polynomiale du second degré.	Réponse juste : $(3x – 1)(3x + 3)$	1
			Réponse avec oubli de prendre $\sqrt{4}$	6
			Autre réponse	9
			Absence de réponse	0
3)	13	Identifier la forme la plus adéquate (développée, factorisée, canonique) d'une expression polynomiale du second degré en vue de la résolution du problème donné.	Réponse juste : forme initiale	1
			Autre réponse	9
			Absence de réponse	0
	14	Calculer à l'aide de la calculatrice ou non la valeur prise par une expression littérale lorsqu'on substitue une valeur numérique à la place de la variable. (nombre rationnel)	Réponse juste : -4	1
			Réponse juste avec une autre forme	2
			Autre réponse	9
			Absence de réponse	0
	15	Identifier la forme la plus adéquate (développée, factorisée, canonique) d'une expression polynomiale du second degré en vue de la résolution du problème donné.	Réponse juste : forme développée	1
			Autre réponse	9
			Absence de réponse	0
	16	Calculer à l'aide de la calculatrice ou non la valeur prise par une expression littérale lorsqu'on substitue une valeur numérique à la place de la variable. (nombre irrationnel)	Réponse juste : $15 + 6\sqrt{2}$	1
			Réponse juste avec une autre forme	2
			Autre réponse	9
			Absence de réponse	0
	17	Identifier la forme la plus adéquate	Réponse juste : forme factorisée	1

		(développée, factorisée, canonique) d'une expression polynomiale du second degré en vue de la résolution du problème donné.	Autre réponse	9
			Absence de réponse	0
	18	Résoudre une équation produit de deux facteurs du premier degré.	Réponse juste : 1/3 ; -1	1
			Réponse erronée par mauvaise manipulation algébrique des équations du premier degré obtenues	3
			Autre réponse	9
			Absence de réponse	0

Exercice 5

	ITEM	COMPÉTENCE COMPOSANTE ÉVALUÉE	RÉPONSE	CODE
1)	**19**	Reconnaître une situation de référence.	Théorème de Pythagore dans le triangle EFC cité ou illustré par l'utilisation de couleurs.	1
			Réponse fausse	9
			Absence de réponse	0
	20	Mettre en œuvre une connaissance	Calculs corrects	1
			Utilisation de la valeur 3,6 pour calculer EC.	6
			Autre réponse	9
			Absence de réponse	0
	21	Rédiger une démonstration.	Rédaction satisfaisante	1
			Rédaction incomplète (par exemple : oubli des conditions d'utilisation).	3
			Autre réponse	9
			Absence de réponse	0
2)	**22**	Reconnaître une situation de référence.	Théorème de Thalès pour les triangles EFC et EAD.	1
			Autre choix qui permet d'aboutir.	2
			Autre réponse	9
			Absence de réponse	0
	23	Mettre en œuvre une connaissance	Calculs corrects	1
			Erreur dans le calcul algébrique	6
			Autre réponse	9
			Absence de réponse	0
	24	Rédiger une démonstration.	Rédaction satisfaisante	1
			Rédaction incomplète (par exemple : oubli des conditions d'utilisation).	3
			Autre réponse	9
			Absence de réponse	0

Exercice 6

	ITEM	COMPÉTENCE COMPOSANTE ÉVALUÉE	RÉPONSE	CODE
A)	**25**	Mettre en œuvre une connaissance sur le lien entre périmètre et longueur du côté d'un carré.	Réponse juste : 30 m	1
			Réponse fausse	9
			Absence de réponse	0
	26	Mettre en œuvre une connaissance sur la formule donnant l'aire d'un carré en fonction de la longueur de son côté.	Réponse juste : 900 m²	1
			Autre réponse	9
			Absence de réponse	0
B)	**27**	Mettre en œuvre une connaissance sur le lien	Réponse juste : 20 m	1

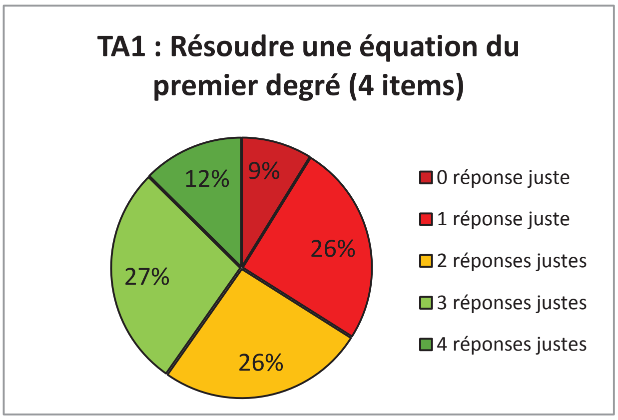
1)		entre périmètre et longueur du côté d'un hexagone régulier.	Autre réponse	9
			Absence de réponse	0
2)	**28**	Mettre en œuvre une connaissance sur la hauteur d'un triangle équilatéral et la rédiger.	Référence à la hauteur et à la médiane du triangle OAB et réponse AH = 10 m	1
			Réponse AH = 10 m sans justification	3
			Autre réponse	9
			Absence de réponse	0
	29	Reconnaître une situation de référence et rédiger une démonstration.	Théorème de Pythagore dans le triangle OHA ou OHB	1
			Autre réponse	9
			Absence de réponse	0
	30	Mettre en œuvre une connaissance et un calcul.	Rédaction satisfaisante et réponse OH = $10\sqrt{3}$ m	1
			Rédaction incomplète (par exemple : oubli des conditions d'utilisation).	3
			Erreur sur la valeur exacte ou calcul valeur approchée seul pour OH	6
			Autre réponse	9
			Absence de réponse	0
3)	**31**	Mettre en œuvre une connaissance (aire d'un triangle)	Réponse juste, contextualisée ou non	1
			Autre réponse	9
			Absence de réponse	0
	32	Effectuer un calcul en substituant des valeurs à des lettres-étiquettes.	Réponse juste : $100\sqrt{3}$ m²	1
			Réponse approchée seule : 173,2	3
			Autre réponse	9
			Absence de réponse	0
4)	**33**	Elaborer une démarche pour déterminer l'aire d'un hexagone régulier.	Réponse juste : 6 × Aire(OAB)	1
			Autre réponse	9
			Absence de réponse	0
	34	Effectuer un calcul exact et arrondi en substituant les valeurs dans la formule précédente	Réponse juste : $600\sqrt{3}$ m² ≈ 1040 m²	1
			Erreur sur la valeur exacte ou calcul valeur approchée seul	6
			Autre réponse	9
			Absence de réponse	0

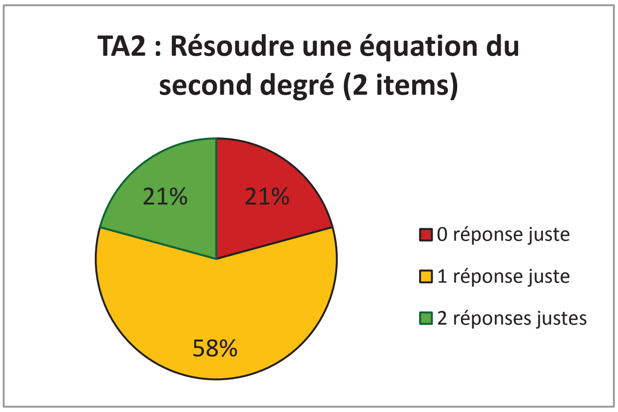
A4. Résultats détaillés du test diagnostique de fin de seconde

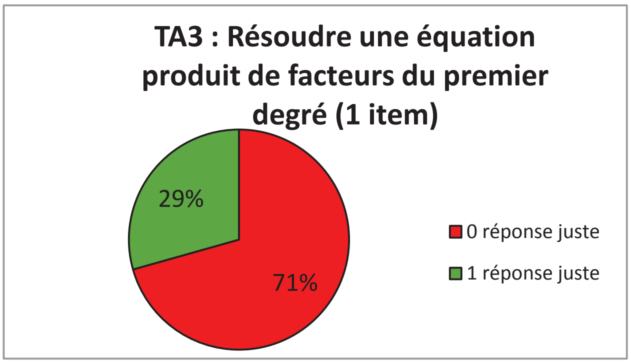
Rappelons pour la partie algébrique du test les différents types de tâches données :

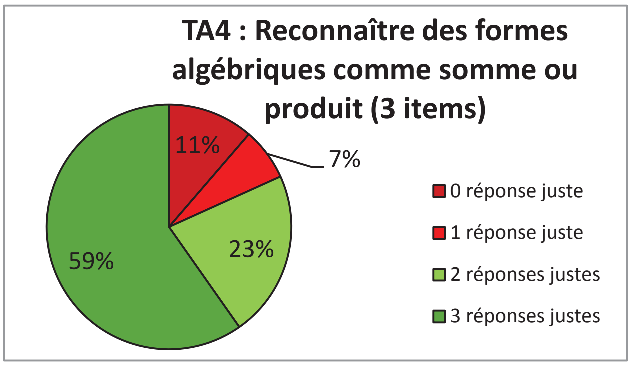
Compétence/ Capacité algébrique évaluée	Exercice et question considérée
TA_1 : Résoudre une équation du premier degré dans R ou s'y ramenant	Ex2, Q1 - Q2, items 5 et 6 Ex5, Q2, item 23 Ex6, QA, item 25
TA_2 : Résoudre dans R une équation du second degré de la forme $x^2 = a$ (a réel donné) ou s'y ramenant	Ex5, Q1, item 20 Ex6, Q2, item 30
TA_3 : Résoudre dans R une équation produit de deux facteurs du premier degré	Ex4, Q3c, item 18
TA_4 : Reconnaître des formes algébriques comme somme ou produit	Ex3, Q1 - Q2, items 7 et 8 Ex3, Q3a, item 9
TA_5 : Réduire une expression algébrique rationnelle	Ex3, Q3b, item 10
TA_6 : Développer une expression algébrique comportant une identité remarquable	Ex1, Q3, item 4 Ex4, Q1, item 11
TA_7 : Factoriser une expression algébrique en utilisant une identité remarquable	Ex4, Q2, item 12
TA_8 : Substituer une valeur numérique à une lettre dans une expression algébrique	Ex4, Q3a - Q3b, items 14 et 16 Ex6, QA, item 26 et QB3, items 32 et 34
TA_9 : Interpréter la non-équivalence de deux expressions algébriques	Ex1, Q1 - Q2 items 1 et 2
TA_{10} : Prouver l'équivalence de deux expressions algébriques	Ex1, Q3, item 3
TA_{11} : Identifier la forme la plus adéquate d'une expression algébrique en vue de la réalisation d'un calcul ou de la résolution d'une équation	Ex3, Q3a - Q3b, items 13, 15 et 17

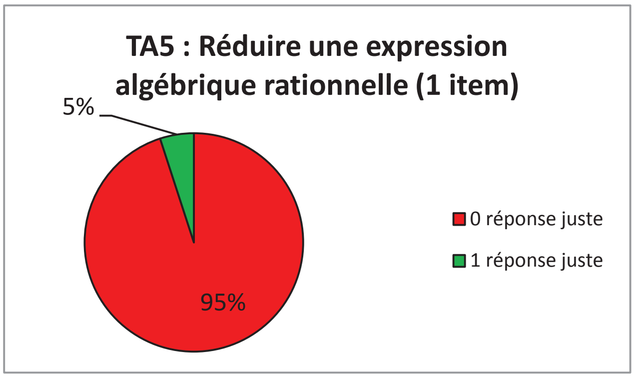
Les graphiques qui suivent indiquent le nombre de réponses exactes par item pour les 160 élèves de fin de seconde ayant passé le test diagnostic.

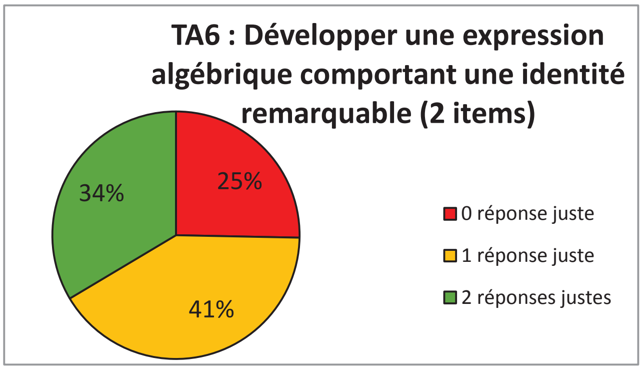


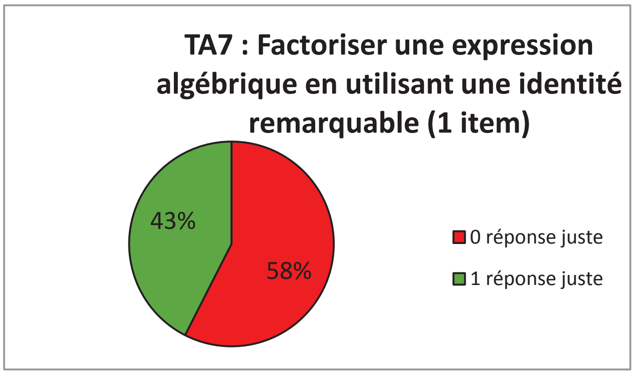


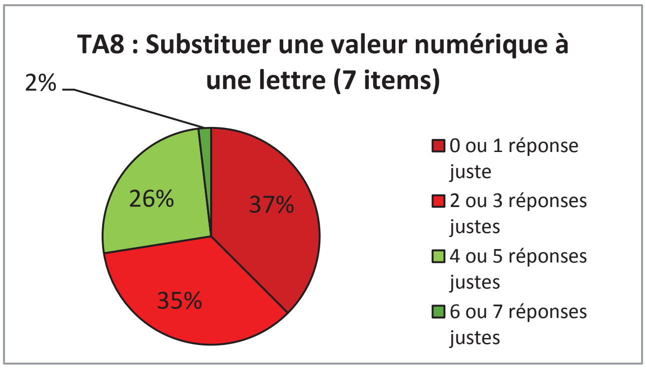

TA3 : Résoudre une équation produit de facteurs du premier degré (1 item)
29%
71%
0 réponse juste
1 réponse juste

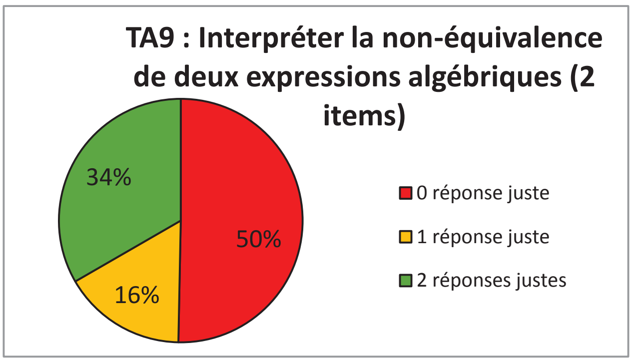

TA4 : Reconnaître des formes algébriques comme somme ou produit (3 items)
11%
7%
23%
59%
0 réponse juste
1 réponse juste
2 réponses justes
3 réponses justes

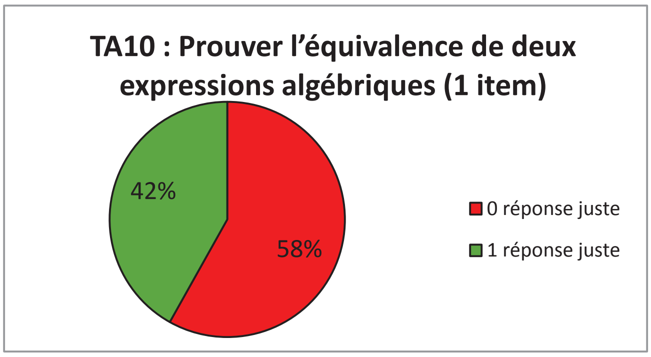

TA5 : Réduire une expression algébrique rationnelle (1 item)
5%
95%
0 réponse juste
1 réponse juste

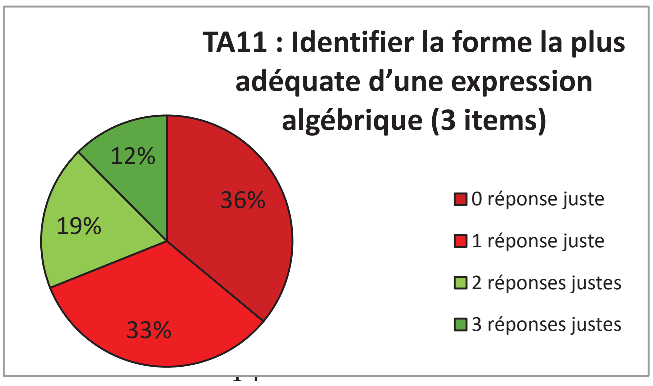

TA6 : Développer une expression algébrique comportant une identité remarquable (2 items)
34%
25%
41%
0 réponse juste
1 réponse juste
2 réponses justes


TA7 : Factoriser une expression algébrique en utilisant une identité remarquable (1 item)
43%
58%
0 réponse juste
1 réponse juste


TA8 : Substituer une valeur numérique à une lettre (7 items)
2%
26%
37%
35%
0 ou 1 réponse juste
2 ou 3 réponses justes
4 ou 5 réponses justes
6 ou 7 réponses justes


TA9 : Interpréter la non-équivalence de deux expressions algébriques (2 items)
34%
50%
16%
0 réponse juste
1 réponse juste
2 réponses justes


TA10 : Prouver l'équivalence de deux expressions algébriques (1 item)
42%
58%
0 réponse juste
1 réponse juste


TA11 : Identifier la forme la plus adéquate d'une expression algébrique (3 items)
12%
36%
19%
33%
0 réponse juste
1 réponse juste
2 réponses justes
3 réponses justes

Annexes A5 à A8 : Premier entretien avec les professeurs expérimentateurs

Les trois entretiens pré-expérimentation des professeurs

A5. Entretien pré-expérimentation : enseignante Annabelle

Interview d'Annabelle réalisé le 21/01/11 : professeur expérimenté en lycée depuis 15 ans

Question 1 (correspond à la question 4 du questionnaire de l'entretien générique pré-expérimentation)

1. Chercheur : *Les nouveaux programmes de seconde ont changé. Que penses-tu de la place accordée à l'algèbre ? Te semble-t-elle différente de la place qu'elle occupait dans les programmes précédents ? Si oui, en quoi ?*
2. Annabelle : Je pense que elle est plus faible et que sa place n'est pas très claire, donc il faut se forcer parfois pour aller vers des calculs qui étaient plus ciblés sur les anciens programmes où l'on avait clairement des parties, d'après moi, plus calculatoires. C'est une manière un peu dangereuse d'aborder la chose parce que les élèves sont de moins en moins entraînés à ça.

Question 2 (correspond à la question 5 du questionnaire de l'entretien générique pré-expérimentation)

3. Chercheur : *Penses-tu changer ta pratique d'enseignement de l'algèbre par rapport à ces changements ? Si oui, comment ?*
4. Annabelle : Ce n'est pas par rapport au nouveau programme que petit à petit tu changes ta pratique d'enseignement, tu changes par le fait que tu utilises de plus en plus les TICE. Donc je dirais que le nouveau programme m'a fait re-regardé de nouveau le programme mais c'est plus par rapport à tout ce qu'on a à côté, par rapport aux outils qu'on a à côté qu'on change plus sa pratique d'enseignement. Je fais beaucoup plus de calculs à partir des fonctions, maintenant, ce que je faisais moins au début.
5. C : *tu fais de l'algèbre à partir des fonctions ?*
6. Annabelle : Oui, c'est ça, de plus en plus.

Question 3 (correspond à la question 1 du questionnaire de l'entretien générique pré-expérimentation)

7. Chercheur : *A propos de l'introduction de l'algorithmique dans le programme de seconde, qu'en penses-tu, globalement ?*
8. Annabelle : C'est intéressant, mais toujours pareil, c'est du temps, du temps qu'on n'a plus à côté. Donc, disons, que moi personnellement, c'est une partie qui m'intéresse donc c'est positif pour moi mais après le bénéfice que vont en retirer les élèves, je ne sais pas trop encore... Mais est-ce que c'est vraiment fait pour tous les élèves, est-ce que vraiment les élèves de STG en ont besoin ? Je n'en sais rien. Mais c'est intéressant.

Question 4 (correspond à la question 2 du questionnaire de l'entretien générique pré-expérimentation)

9. Chercheur : *De quelle façon as-tu l'intention de le suivre ? Dans quels domaines mathématiques ? Sous quelle forme ? Avec quelle fréquence ?*
10. Annabelle : En fréquence : ce n'est pas ma priorité, c'est quand j'ai du temps. Mais j'ai déjà fait des séances sur Algobox, en faisant la notion de variables, ensuite la notion de condition (si ... alors ... sinon), et ensuite je ferai « tant que » donc faire des séances algorithmiques pures.
11. C : *Tu y inclus un domaine mathématique dedans ou tu détaches ces séances ?*
12. Annabelle : Cela dépend. La dernière fois, j'ai fait une activité où il fallait déterminer, à partir d'un algorithme, si un point appartenait à une médiatrice ou pas, mais sans nommer le terme « médiatrice ». L'algorithme était donné : Calculer la distance OA et calculer la

distance OB. On demandait si le point O appartenant ou non à une certaine droite et à la fin quelle était cette droite. C'était dans le cadre de ma leçon sur le repérage. Là c'était calé sur la leçon, mais souvent c'est extérieur à la leçon en cours. Mais on peut faire les deux. Je pense qu'il ne faut pas se focaliser uniquement sur la leçon. Au début, c'est tellement simple ce qu'on fait qu'on ne peut pas se canaliser sur la leçon.

13. C : *Y a-t-il des domaines mathématiques qui te semblent plus propices que d'autres pour y introduire de l'algorithmique ?*
14. Annabelle : Oui, l'algèbre, je pense. C'est quand même le domaine le plus calculatoire. Après cela dépend ce que l'on veut en faire : on peut faire les fonctions, faire des tracés de courbes mais après ... c'est quand même assez calculatoire ... à part les tracés de courbes. Après cela dépend du temps qu'on y passe. Le problème, c'est le temps. Parce que tout le temps que l'on passe sur l'ordinateur ... les élèves sont lents sur un ordinateur. Donc tout le temps passé sur ordinateur, tu l'auras en moins ailleurs.
15. C : *Et tu y as déjà un peu répondu mais as-tu déjà commencé à l'enseigner dans tes classes ?*
16. Annabelle : Oui, j'ai déjà fait 3 ou 4 séances.
17. C : *C'est sous quelle forme, en module ? En demi-groupes ? Chaque élève sur un ordinateur ?*
18. Annabelle : Oui, au début c'était en module, chaque élève sur un ordinateur. Mais maintenant qu'ils connaissent Algobox, cela m'arrive en classe de leur donner un algorithme et comme ils savent faire, je projette Algobox au tableau et cela devient plus concret pour eux. Mais au début, c'est indispensable qu'ils aillent sur ordinateur et qu'ils manipulent, sinon ils ne vont rien comprendre.

Question 5 (correspond à la question 3 du questionnaire de l'entretien générique pré-expérimentation)

19. Chercheur : *Quel(s) logiciels d'algorithmique as-tu expérimenté ? As-tu des préférences ?*
20. Annabelle : L'an dernier Scratch et cette année Algobox. Algobox est plus dans la structure mathématique ou plutôt la structure algorithmique ; Scratch a une structure intéressante mais je dirais que cela leur amène moins la structure d'un algorithme avec la déclaration des variables, je trouve que c'est moins parlant. Algobox c'est vraiment une structure algorithmique classique. Ce n'est pas compliqué, c'est un langage assez naturel mais reste une structure algorithmique.
21. C : *As-tu testé des algorithmes sur calculatrice ?*
22. Annabelle : Non, c'est compliqué. D'abord le langage est en anglais. On s'est posé la question et jusqu'à présent ...je ne me suis pas lancée. Ce serait bien parce que c'est un outil qu'ils ont tout le temps avec eux mais le langage est du Basic, ce n'est pas de l'algorithmique facile. Je pourrais me lancer mais déjà qu'ils ne connaissent pas du tout la calculatrice en début d'année, il y a déjà tout à faire sur les fonctions, toute la partie graphique. Je ne suis pas contre, mais je n'ai pas eu le courage de m'y lancer ...

Question 6 (correspond à la question 6 du questionnaire de l'entretien générique pré-expérimentation)

23. Chercheur : *Penses-tu qu'on pourrait lier l'apprentissage de l'algèbre et celui de l'algorithmique ? Pour quels types de problème par exemple ?*
24. Annabelle : Oui, je pense. Ne serait-ce que des problèmes sur les priorités opératoires, sur les enchaînements de fonctions ... En algèbre, je n'ai pas encore imaginé de problèmes, mais je crois que ça pourrait se faire.

Fin de l'entretien. La question 7 n'a pas été posée, faute de temps.

A6. Entretien pré-expérimentation : enseignant Maurice

Interview de Maurice réalisé le 04/02/11 : professeur expérimenté en lycée depuis une quinzaine d'années. L'ordre des questions a été modifié, par rapport à l'entretien d'Annabelle.

Question 1

1. Chercheur : *Dans les nouveaux programmes de Seconde, une part d'algorithmique a été introduite dans le programme de seconde, qu'en penses-tu, globalement ?*
2. Maurice : Je trouve ça très intéressant. Je pense que ça intéresse les élèves, souvent même certains élèves faibles. La hiérarchie des élèves n'est pas la même pour l'algorithmique que pour le reste. Moi, j'aime bien ça, même si au début, j'étais pas convaincu. Il y a certains élèves pour qui c'est très, très simple, c'est-à-dire qu'ils font ça déjà … Ils regardent ce qu'on fait de façon méprisante, trouvant que ce qu'on fait est trop facile … D'où la difficulté de prévoir des séquences pour tout le monde. Donc ça c'est une chose. Ensuite, pour ceux pour qui c'est nouveau, je pense que c'est intéressant … Le problème, c'est que je me pose la question de l'utilité pour les gens qui ne vont pas être des scientifiques, d'autant plus que l'outil informatique, plus on l'utilise, moins on se sert de programmation, puisqu'on utilise déjà des choses qui sont toutes programmées. Et je ne vois pas l'intérêt de programmer, mis à part pour les scientifiques. Le commun des mortels, le technicien va utiliser des logiciels qui sont déjà construits. L'outil informatique, ils n'en ont pas de réticence, mais franchement la programmation … ça un intérêt parce qu'effectivement, ça fait référence à de la logique, ça c'est intéressant, mais cette logique, on l'utilise, on la manipule aussi dans la géométrie, dans des choses qui me paraissent plus intéressantes au niveau mathématique … Je trouve ça un peu sec … Et pour que ce soit efficace, c'est beaucoup de temps et qu'on n'a plus pour le reste. Donc je trouve que c'est du temps … Pour les classes scientifiques, ça a un intérêt pour plus tard. Mais finalement, les scientifiques peuvent acquérir ces compétences assez rapidement, plus tard, en post bac, plus tard sans qu'on ait besoin de le faire faire à tout le monde.
3. Chercheur : En fait, j'ai lu que s'ils voulaient le faire faire à tout le monde, comme tu dis, c'est parce qu'ils voulaient rendre les gens plus citoyens devant l'informatique, avec une petite formation pour qu'ils arrêtent de croire que tous les objets, les outils électroniques dont on dispose et qui sont autour de nous fonctionnent par magie …
4. Maurice : Ah oui. C'est vrai que, rien que tout à l'heure je faisais de l'algorithmique et à la limite, pour certains, même après plusieurs séances… je demandais de construire un algorithme qui donnait le prix de photocopies, sachant que les 20 premières sont à 10 centimes et ensuite à 8 centimes… Il y a une élève qui m'a fait un algorithme où elle rentrait le nombre de photocopies et ensuite le prix et elle s'étonnait que ça ne suffise pas… Elle trouvait bizarre que le logiciel ne lui donne pas directement la réponse. Donc c'est vrai que …
5. Chercheur : Oui, donc c'est ça, il faut voir là une nécessaire prise de conscience… montrer que c'est en fait accessible à tous, que c'est pas magique ce qui est à l'intérieur des machines …
6. Maurice : Ben oui, mais quand je pense au temps que ça nécessite…

Question 2

7. Chercheur : Justement, par rapport au temps, *de quelle façon as-tu l'intention de le suivre dans le programme de seconde ? Dans quels domaines mathématiques ? Sous quelle forme ? Avec quelle fréquence ? Et est-ce que tu as déjà commencé ?*
8. Maurice : Alors, on a déjà commencé, mais je dois dire que c'est dans un but purement… je me soumets au programme, point final. Franchement, si je savais qu'on ne me reprocherait pas de ne pas le faire, je ne le ferais pas…

9. Chercheur : Malgré l'intérêt que tu décris ?
10. Maurice : Oui, je pense en maths qu'il y a d'autres parties du programme qui me paraissent intéressantes, il y a d'autres démarches plus fructueuses que ça… Ca me paraît là encore, des maths appliquées, et la réflexion, je préfèrerais l'avoir sur autre chose… Je suis catastrophé de voir en particulier la disparition de la géométrie, pratiquement. C'était la partie que je préférais… j'adorais enseigner la géométrie et là, j'en suis complètement privé, je suis frustré. Et là, maintenant, ils arrivent du collège avec une notion très vague des démonstrations et on n'en fait pratiquement plus en seconde… Et ce c'est même plus prévu dans les nouveaux programmes de première S et de terminale S. Je les ai regardé les programmes, il n'y a presque rien… Je préfèrerais les faire travailler là-dessus. Donc je fais de l'algorithmique parce qu'il faut en faire, c'est tout.
11. Chercheur : Est-ce que tu penses la même chose des logiciels de géométrie dynamique, comme GeoGebra ?
12. Maurice : Ah non ! Je parlais de l'algorithmique. Par contre, l'utilisation de l'outil informatique pour la géométrie, là je suis à fond. Ce qu'on faisait dans le cadre des TP, je pense que ça c'est fructueux, hormis les problèmes de temps. Je ne remets pas en cause l'utilisation de l'outil informatique… du tableur, du vidéoprojecteur. J'ai de plus en plus d'élèves qui me rendent leur devoir tapé à l'ordinateur, y compris les figures géométriques avec GeoGebra. Je leur demande de faire quand même les figures à la main, mais ils tiennent à le faire à l'ordinateur. Pour les conjectures et tout ça, je trouve ça très bien. C'est l'algorithmique qui me pose problème.
13. Chercheur : Donc, tu dis que tu vas suivre les programmes de façon règlementaire pour l'algorithmique. Est-ce que tu vois des domaines mathématiques plus pertinents pour faire fonctionner l'algorithmique ?
14. Maurice : Oui, les suites.
15. Chercheur : Les suites, mais c'est en première ?
16. Maurice : Oui, en seconde, mis à part une initiation, la technique, …
17. Chercheur : les déclarations de variables ?
18. Maurice : Oui. Quand je parcours le manuel qu'on a, en seconde, moi je ne trouve pas d'exercices motivants. Autant en première, oui. Mais en seconde, quand je vois les problèmes qu'on leur fait faire, c'est motivant pour maîtriser l'outil, mais je ne vois pas trop ce que ça apporte. Par exemple, créer un algorithme pour définir si un triangle est rectangle quand j'ai rentré les longueurs des trois côtés, … je ne trouve pas ça très intéressant. En revanche, la résolution de l'équation du second degré en première, au lieu de leur faire rentrer bêtement un programme dans la calculatrice sans leur expliquer comment il fonctionne, là, là oui… Sauf qu'en première S, j'ai pas commencé (*l'algorithmique*). On a travaillé sur les vecteurs, et c'est tellement un problème les vecteurs, c'est une course contre la montre perpétuelle et l'algorithmique je l'ai juste commencé avec Euler. Et justement mon but, c'est, quand je vais monter cette séquence (*sur les équations du second degré*), c'est de montrer l'intérêt de l'algorithmique, non pas sur un petit truc évident… surtout que l'algorithme (*pour le second degré*), il est simple, mais ce sera, il me semble, avec un peu plus d'intérêt. Mais en seconde, je n'ai pas vu d'exercices qui me semblent, moi, motivants.

Question 3

19. Chercheur : *Quel(s) logiciels d'algorithmique as-tu expérimenté ? As-tu des préférences ?*
20. Maurice : Uniquement Scratch et Algobox.
21. Chercheur : Et tu as une préférence ?
22. Maurice : En fait, j'ai découvert Algobox cette année, j'ai travaillé sur Scratch l'année dernière. Je trouve qu'Algobox correspond davantage à ce qu'on fait sur le papier. Pour le

passage de la réflexion sur le papier à la mise en forme, la programmation, il est génial. Scratch, c'est un produit ludique… Mais j'ai beaucoup aimé pour la séance que tu as vue chez Annabelle sur les expressions algébriques. Là, j'en ai vu l'intérêt, ça a plu aux élèves et j'en ai été content. Mais maintenant que j'ai gouté à Algobox, je trouve que c'est… bien, mais j'en ai pas essayé d'autres.

Question 4

23. Chercheur : Ok, un autre domaine maintenant. *Les nouveaux programmes de seconde ont changé. Que penses-tu de la place accordée à l'algèbre ? Te semble-t-elle différente de la place qu'elle occupait dans les programmes précédents ? Si oui, en quoi ?*
24. Maurice : Je trouve surtout que… est-ce que c'est différent… Je crois qu'on accentue ce qui s'est passé dans les programmes précédents, c'est-à-dire la perte de compétences de technicité. C'est-à-dire on survole, il y a aucune technicité. Quand on regarde les différents livres, les exercices sont de plus en plus élémentaires… Moi qui aie enseigné les programmes antérieurs, ça correspond à ce que je demandais, je pense que les exercices en algèbre, les résolutions d'équations et les factorisations demandées aujourd'hui correspondent à ce qu'on trouvait dans le premier Terracher de quatrième. Le premier Terracher de quatrième était trop difficile, mais je l'ai pratiqué, mais il y avait déjà les identités remarquables qu'ils ont supprimées ensuite du programme de quatrième et il y avait des factorisations qu'on ne demande plus aujourd'hui au niveau de la seconde. Je sais bien qu'il y a aujourd'hui des logiciels de calcul formel, mais je ne les ai jamais utilisés avec mes élèves… Je m'inquiète de ça… J'en comprends la nécessité de signaler cette… En fait, je comprends qu'avant, le passage par une sorte de virtuosité, c'est un grand mot, dans les calculs était indispensable, même pour les simples techniciens, pour les futurs utilisateurs de formules. Les logiciels vont faire maintenant ces calculs-là, donc mis à part ceux qui vont faire des études scientifiques, on n'a plus besoin de la même technicité. Je l'admets. Mais en revanche, ce que je constate et qui m'inquiète beaucoup, c'est que les élèves des classes scientifiques maintenant, avant d'être arrêtés par le concept lui-même et par l'abstraction, sont arrêtés à chaque étape, par la technique du calcul. Alors qu'avant, ils n'avaient pas ce problème. Donc ils ont à faire face à la fois à la difficulté de la notion nouvelle, mais avec toutes les étapes du calcul. Ce manque de technicité est accentué par ce nouveau programme de seconde. Ce qui est bien, c'est que c'est dispersé, c'est vrai qu'il n'y a pas tellement de chapitres consacrés à l'algèbre, c'est saupoudré sur toute l'année, ce que je conçois, mais quand je regarde les livres, c'est squelettique, ce qu'on nous demande. Je trouve que les compétences sont insuffisantes. Mes élèves, quand je leur annonce que le test va être sans calculatrice, c'est la catastrophe. Et je vois en première S, une bonne première S, j'ai des élèves qui sont en difficulté, non pas parce qu'ils ne comprennent pas les notions de première, mais parce qu'ils ont des problèmes en calcul, à tous les niveaux !
25. Chercheur : calcul numérique ou calcul algébrique ?
26. Maurice : Oui, c'est pareil, même sur des nombres. Et le calcul mental, c'est terminé ! Certains s'en sortent très bien. Mais pour la majorité des élèves, il y a un recul très net. Et le nouveau programme de seconde ne conforte pas ça. Et alors en plus, je trouve une certaine incohérence…il n'y a plus de réflexion sur la nature des nombres, plus du tout ! Je ne sais pas si les élèves sont censés l'inventer mais les calculs sur les réels, sur les rationnels, on n'en fait plus ! Et en plus, j'ai vu sur les nouveaux programmes de première S et de terminale S, il n'y a plus aucune mention de ça. Ils vont devoir attendre la Faculté pour se rendre compte qu'il existe des nombres de différente nature ?
27. Chercheur : il ne reste que l'arithmétique en TS spé maths, où on raisonne sur des entiers …

28. Maurice : Il n'y a que ça. Sinon, il n'y a plus aucune réflexion là-dessus. Et plus rien non plus sur les puissances, plus rien sur les écritures scientifiques, … je ne suis pas sûr que les profs de physique le fassent… Quand j'ai fait les limites en première, pour les introduire, je l'ai fait avec la calculatrice. Il fallait trouver une limite en 3, il fallait faire apparaître une liste de nombres qui se rapprochaient de 3. C'étaient des nombres de la forme $3 + 10^{-x}$. J'ai eu les trois quarts de la classe qui n'ont rien compris, il a fallu que je réexplique les puissances. Et c'était pas ça le but. Pour moi, c'était juste un outil. Ma séance a été bousillée par le fait, je voulais simplement leur montrer la limite. Or ce qui les a obnubilés, c'était comment j'arrivais à utiliser ce 10^{-x} et à quoi ça correspondait ! Mais c'est pas de leur faute… On n'a pas traité les écritures scientifiques, on n'a pas révisé les racines carrées… On les voit les racines carrées, mais on n'a pas fait de chapitre, pour le moment, sur les factorisations, sur les identités remarquables. Quand on en rencontre une (*racine carrée*), on rappelle ce que c'est mais c'est dans les exercices, et il y en a plein qui les oublie aussitôt. Donc en algèbre, ça n'améliore rien, au contraire.

Question 5

29. Chercheur : *Penses-tu changer ta pratique d'enseignement de l'algèbre par rapport à ces changements ? Si oui, comment ? Par exemple, est-ce que tu vas quand même faire des séances de révision, un travail sur par exemple les identités remarquables ?*
30. Maurice : Je ne sais pas, parce que ce que je suggèrerais, ça va aller complètement à l'encontre des nouveaux programmes… Par exemple pour les équations du second degré, l'idée du programme ça va être, je rentre l'équation dans le logiciel et il va me donner la réponse ! C'est ce que je comprends… en même temps je comprends d'un autre côté… À une époque, j'ai enseigné en seconde où il y avait toutes ces révisions en début d'année et on arrivait à la Toussaint où on n'avait rien vu de nouveau. C'était pénible, extrêmement pénible. Donc je comprends qu'on ne passe pas… mais d'un autre côté, il y a des nécessités. On ne peut pas se forcer à tout saupoudrer… Faire des révisions quand ça devient nécessaire, je le conçois. Mais la factorisation, par exemple, ça ne me paraît pas anodin… Même si le logiciel est capable de le faire. Quand même, pour des futurs scientifiques, il y a une technicité à comprendre, pour comprendre les choses, tout simplement.
31. Chercheur : les formules ne doivent pas avoir l'air de « formules magiques »…
32. Maurice : Et je me rappelle, en tant qu'élève, la difficulté du travail de passer du degré 2 ou 3 au degré n, toutes les difficultés de calcul quand on introduit les coefficients avec les C_n^p … Alors quand, en plus, tu n'as pas la pratique du travail à la main, mais comment ils vont faire ? Là encore, est-ce que ce sont les machines qui vont le faire ? Il y a bien un moment où il faut comprendre comment ça fonctionne et là, je ne sais pas comment ils vont faire !
33. Chercheur : Donc, toi tu penses quand même faire des révisons d'algèbre, sur les factorisations, sur …?
34. Maurice : Oui, dans le cadre de l'accompagnement. J'ai une douzaine d'élèves. Je leur ai demandé les parties du programme dont ils avaient horreur, ce qu'ils détestaient, et sur quoi ils voulaient travailler dans un premier temps. Et là, j'ai fait des fiches. Par exemple, sur les fonctions, j'ai fait faire des calculs d'images. J'y ai mis des carrés, des racines carrées, etc. pour leur faire faire des calculs. Au début, ça n'a pas été l'enthousiasme, mais ce que j'ai apprécié, c'est que certains élèves, qui deux séances après, m'ont dit : « on continue là-dessus, je n'y arrive pas encore bien… ». Et sous prétexte de travailler les fonctions, on a travaillé sur des identités remarquables et sur les factorisations. Donc en accompagnement, je pense qu'il est possible de rectifier le tir pour certains. Mais en accompagnement, je n'ai pas les meilleurs et les meilleurs ont des compétences quand

même assez limitées… On peut limiter la casse mais ceux qui sont bons ne viennent pas en accompagnement de maths et donc ils ne reverront pas ces notions. Et pour les bons élèves, les identités remarquables, c'est encore laborieux. Dans le cadre des fonctions du second degré, on devrait en faire beaucoup plus. Là, je suis en train de les faire travailler sur la géométrie. Je viens de poser des exercices avec des points dont les coordonnées sont des racines carrées. Ils vont devoir utiliser les identités remarquables…

35. Chercheur : D'accord. Donc tu vas « spiraler » l'algèbre ?
36. Maurice : Je vais spiraler l'algèbre !

Question 6

37. Chercheur : *Penses-tu qu'on pourrait lier l'apprentissage de l'algèbre et celui de l'algorithmique ? Pour quels types de problème par exemple ?*
38. Maurice : Je n'ai pas réfléchi à ça. Je t'ai expliqué mes réserves par rapport à l'algorithmique. Mis à part cette séance que j'avais faite avec Annabelle (*sur les expressions algébriques et le logiciel Scratch*) où là j'avais vu l'utilité, mais c'est assez anecdotique, par rapport à l'idée que j'ai de ce que mes élèves de seconde devraient maîtriser. Ce que j'ai oublié de dire, c'est que j'ai une grosse angoisse en ce moment, parce que je me suis rendu compte que je n'ai pas fait de séance sur les équations et les inéquations… Là je viens de faire des exercices avec des coordonnées, où il faut trouver des relations vectorielles, donc ça amène à des équations du premier degré. J'ai plein d'élèves qui ne maîtrisent pas les équations du premier degré. Avant, on faisait ça au premier trimestre. Cette année, on a fait des statistiques, des probabilités, on a beaucoup travaillé la calculatrice, on a fait des trucs graphiques avec les fonctions. Les équations du premier degré, on en a fait quelques-unes mais rien d'automatique. Résultat, j'ai des élèves qui ne maîtrisent pas du tout les équations du premier degré : c'est la première fois que ça m'arrive ! Je me suis rendu compte de ça cette semaine, quand on a fait ce travail sur les coordonnées. Donc évidemment, on va travailler sur les équations du premier degré maintenant. Quand on va faire la multiplication d'un vecteur par un réel, il va y en avoir. Mais est-ce qu'à la fin de cette séquence, est-ce qu'ils auront maîtrisé les équations du premier degré ? Eh bien non ! En particulier celles avec des quotients, … Non ! Et l'algorithmique, pour l'appliquer… Honnêtement, pour donner du sens aux opérations, … pour le moment je ne vois pas. Quand je regarde les activités proposées dans les livres, ça ne me séduit pas… Je n'en vois pas qui me motivent.

Fin de l'entretien.

A7. Entretien pré-expérimentation : enseignant Alex

Interview d'Alex réalisé le 08/04/11 : professeur expérimenté en lycée depuis 15 ans. L'ordre des questions a été modifié, par rapport à l'entretien d'Annabelle mais est identique à l'ordre des questions posées à Maurice.

Question 1

1. Chercheur : *Dans les nouveaux programmes de Seconde, une part d'algorithmique a été introduite dans le programme de seconde, qu'en penses-tu, globalement ?*
2. Alex : Au départ, j'ai eu du mal à rentrer dans cette nouvelle notion parce que je trouvais que c'était… difficile de mettre en lien du langage pur avec du langage mathématique. Et en fait, je me suis aperçu à la longue que je m'étais trompé, que finalement c'était en fait un substrat intéressant à travailler avec les élèves, pour essayer de finaliser une connaissance mathématique. En fait, je m'aperçois que leurs difficultés en algorithmique ne viennent pas forcément de la notion de programmation, parce qu'une fois qu'ils connaissent le langage, ça se passe bien, mais c'est plutôt le basculement entre la connaissance mathématique et l'écriture via un autre langage de cette notion qui est difficile. Et c'est ce que je pense qui à mon avis, met un gros zoom sur la difficulté qu'ils ont à formaliser jusqu'au bout une idée mathématique. En fait, je trouve que c'est un substrat assez idéal pour mettre en abîme ce qu'ils maîtrisent totalement et ce qu'ils ne maîtrisent pas totalement. Alors après, la variété des exercices possibles là-dessus, ça donne une palette importante et j'ai été plutôt favorablement surpris, alors qu'au départ, j'avais plutôt du mal avec ce nouvel instrument. Mais je vois en fait toute la difficulté qu'il y a à être capable d'avoir une intuition mathématique et la difficulté de la mettre en forme via un autre langage. Et ça, je trouve ça assez passionnant et porteur de choses qui sont plus vastes que la césure entre les deux. Simplement le langage mathématique et le langage algorithmique, il y a entre les deux une espèce d'espace en devenir, qui est le cœur de la connaissance mathématique, au sens complet du terme.
3. C : Ce que tu dis me fait penser à ce que j'ai entendu hier au cours d'une conférence. Ce qui fait la différence avec les mathématiques classiques, dans l'enseignement de l'algorithmique est le fait de ce n'est pas seulement enseigner les boucles, les tests, mais de vraiment mettre les élèves sur les machines, et qu'ils programment dans un langage ou un autre, ça n'a pas beaucoup d'importance, ce type de langage… Mais ça leur permet d'aller jusqu'au bout de leur idée mathématique et de ne pas en rester au stade de prémices : le fait qu'à la fin le programme marche ou ne marche pas, permet d'affiner la compréhension de la notion mathématique qui est derrière.
4. Alex : Mais en fait, ce n'est pas à ce niveau-là que je le disais. Le fait que le programme ne marche pas… en fait, le programme peut ne pas marcher pour un tas de raisons. Pour toute la partie langage, c'est de la technique, c'est comme la voiture, il manque une bougie, tu la changes et voilà, ça marche. Ce que je voulais dire, c'est qu'est-ce que qu'on doit mettre en avant pour pouvoir traduire une notion en algorithmique ? L'algorithme, c'est déjà la phase finale. Le creuset de la réflexion de l'élève, c'est de se demander, mathématiquement, j'ai besoin de quoi, comment l'agencer pour que ça ait un sens, pour que lorsque j'utilise le langage algorithmique, il faut que je traduise, que je fasse un lien entre la notion mathématique et sa traduction en algorithmique. Finalement, il y a trois espaces, c'est le lien entre le premier et le deuxième qui me paraît fondamental. C'est comme agencer une pensée, et ensuite la traduire en espagnol. C'est pas si difficile si tu connais la grammaire espagnole… Par contre, agencer une pensée dans la langue espagnole, sans calquer ce qui ce passe dans le langage français, ce n'est pas si simple que

ça. Je vois que même des élèves très bons, s'ils savent quelle formule utiliser, il manque ce petit lien qui ne sait pas, il y a de l'incomplétude.

5. C : Il faut absolument être capable de décomposer une tâche en toutes les sous-tâches mathématiques élémentaires si on veut être capable d'en faire un algorithme et s'il te manque un petit truc, un petit lien dans ta compréhension d'un concept, tu ne pourras pas programmer.
6. Alex : C'est ça, exactement que je veux dire. Et c'est là, je vois que finalement, pour quelqu'un comme moi, et je pense que ça doit faire ça à tous les profs, ça apparaît d'une évidence absolue. Sans doute par notre formation, par notre expérience… Mais pour les élèves, c'est encore un autre monde, c'est autre chose que de résoudre un simple exercice, c'est une dimension supérieure… de difficultés. On peut être très bon en mathématiques pures, très bon en programmation, mais tant que le lien ne se fait pas entre les deux, on ne peut pas faire grand-chose. Et l'enjeu sur l'algorithmique, c'est comment faire pour que ce lien se fasse. Et avec le peu d'heures qu'on a, c'est difficile.

Question 2

7. Chercheur : Je vais rebondir sur ce peu d'heures... *De quelle façon as-tu l'intention de le suivre ? Sous quelle forme ? Avec quelle fréquence ?*
8. Alex : Oui, j'ai commencé bien sûr. Au départ, je n'ai rien fait pendant les deux premiers mois parce que je n'avais pas de salle info. Mais après les élèves du lycée professionnel sont partis en stage et j'ai pu récupérer une salle info tous les mercredis et tous les vendredis où j'ai justement les élèves de seconde en demi-classe. Donc à partir de la Toussaint, j'en ai fait une heure par semaine, donc ça fait six séances de deux heures. Depuis Noël, j'y vais moins, mais là, je vais recommencer. C'est en fonction de mes objectifs, que j'en fais ou pas. Quand, par exemple, je fais un devoir et qu'il a été catastrophique, je ne me vois pas faire de l'algorithmique alors qu'il y a des reprises de points de cours qui me paraissent essentiels. Mais autrement, ça c'est fait de façon plutôt fluide. J'étais en salle info, avec un poste par élève et le logiciel Algobox était installé. On a commencé directement à travailler avec des objectifs très simples.
9. C : Il y a des domaines mathématiques que tu as privilégiés ?
10. Alex : Non, non. Ce qu'il m'apparaît intéressant, c'est que justement dans le programme de seconde, tu peux l'utiliser pour tout. Alors, après, la géométrie dans l'espace, pas vraiment… la simulation, tu peux en faire avec Algobox, mais c'est assez compliqué. Dans les objectifs de seconde, il y a aussi la dichotomie, je trouve ça difficile pour eux. Je vais le tenter, je vais le faire dans les prochains jours, mais je pense que c'est difficile pour eux, en termes de concept mathématique. Mais autrement, par exemple, les vecteurs, longueur d'un vecteur, colinéarité… le substrat mathématique sur lequel ils travaillent n'est pas trop compliqué et à programmer, quelques boucles, quelques conditions, c'est assez formateur pour eux. J'ai commencé avec les vecteurs, les révisions sur la géométrie… Avant de commencer stricto sensu en mathématiques, j'ai d'abord fait des exemples sur les différentes occurrences du logiciel, avec des si, des tant que, et tout ça… avec des exemples très très simples, et après, je l'ai réutilisé dans mon cours et dans les exercices à traiter.
11. C : Donc tu as détaché un peu les fonctions du logiciel…
12. Alex : J'ai fait d'abord une première entité, pour montrer ce qu'on peut faire avec Algobox avec des exemples très simples. Comme faire un algorithme qui montre qu'un nombre est pair. C'est simple mais on explique la déclaration de variables, la lecture, l'affectation et comment fonctionne un peu le langage, comme le signe égal, où il en faut deux… On rentre dans le langage, en programmant des choses simples. Après j'ai fait des choses un peu plus conséquentes comme montrer qu'un système linéaire admet des

solutions ou pas, comment montrer que des droites sont parallèles, comment montrer si un point est sur la courbe représentative d'une fonction. Voilà comment s'est goupillée ma progression…

Question 3

13. Chercheur : *Quel(s) logiciels d'algorithmique as-tu expérimenté ?*
14. Alex : Je n'ai fait que Algobox. En fait, comme je suis aussi formateur associé à l'IUFM, j'ai aussi utilisé Scratch pour des stagiaires en CAPES de maths. Mais ce logiciel m'a semblé « trop joueur » pour des élèves. Je trouve qu'il est assez difficile aussi, même s'il a des avantages certains sur les blocs, en termes de quotients. Je trouve qu'Algobox est très austère, janséniste. Il n'y a pas à s'amuser avec ça…
15. C : Annabelle m'a dit que tu peux paramétrer Scratch et elle avait enlevé tout le côté rigolo des animations, des cris d'animaux, des bonhommes qui se baladent… De manière à ne travailler qu'avec les blocs. Mais elle dit que c'est assez long à faire…
16. Alex : Oui, je trouve qu'Algobox a un langage plus immédiat même s'il ne respecte pas trop le langage mathématique. Par exemple, pour le quotient, il faut tout mettre en lignes, avec des parenthèses, c'est pas…
17. C : Comme dans Excel ou dans une calculatrice…
18. Alex : Oui, c'est pareil. Et finalement, je pense qu'il y a plus de ressources sur Internet sur Algobox que sur Scratch … Alors que paradoxalement Algobox n'était pas dans les programmes d'accompagnement. Alors que maintenant Algobox est exigible en leçons de CAPES.
19. C : Hier et avant-hier, j'ai rencontré des informaticiens qui disaient qu'Algobox était très loin de ce qu'on fait dans le supérieur et que c'était juste bien pour le lycée parce qu'après , quand on programme en C, en Java, en Python, c'est très éloigné… Quant à Scratch, ils ne sont pas pour… Et la calculatrice, tu as déjà essayé ?
20. Alex : Non. La calculatrice, ça me paraît… c'est peut-être une idée que je me fais… mais le fait de me dire, je vais sur l'ordinateur, je vais chercher un langage et un logiciel… il y a quelque chose de valorisant pour les élèves. Mais c'est peut-être une vue de l'esprit que je me suis faite… Je vois mieux la programmation sur ordinateur. J'ai jamais testé sur la calculatrice.

Question 4

21. Chercheur : Maintenant on va parler d'algèbre. *Les nouveaux programmes de seconde ont changé. Que penses-tu de la place accordée à l'algèbre ? Te semble-t-elle différente de la place qu'elle occupait dans les programmes précédents ? Si oui, en quoi ?*
22. Alex : L'algèbre, moi je trouve que c'est en train en passer discrètement en désuétude, tout ce qui est calculatoire, tout ce qui est résolution, tout ça… Le problème, c'est qu'on tombe dans une illusion, qui est complètement fantasmatique, en ce sens qu'on a l'impression qu'on n'en a plus besoin, alors que c'est quelque chose dont on a toujours besoin, quel que soit le niveau. Et, je trouve que les élèves qu'on récupère maintenant ont plus en plus de mal à calculer, sont de plus en plus mauvais en algèbre. Et donc, on passe notre temps à essayer de faire des mises à niveau, mais finalement, je pense qu'il y a une perte de connaissances au fur et mesure que les années passent. Je me souviens, quand j'ai commencé, il y a 20 ans, ou même il y a 10 ans, on ne passait pas des heures sur factorisation, développement et résolution, parce qu'on sentait que c'était acquis. Aujourd'hui en terminale S, on peut trouver des élèves qui ont du mal à résoudre une équation. Il faut dire qu'ils sont le produit de notre société, de l'Éducation Nationale… Elle a mis ça de côté en disant que c'était pas exigible. D'ailleurs les sujets de Bac fournissent les factorisations, les petites choses pour faire sauter les difficultés… On est

quand même dans une forme d'illusion. Après sont venus se greffer tous les logiciels de calcul formel pour essayer d'asseoir des intuitions, des trucs comme ça… Je suis peut-être de la vieille école, mais je trouve que c'est quelque chose qui est en train de passer en désuétude et c'est dommage.

23. C : Et tu penses qu'il y a encore un changement dans le nouveau programme de seconde par rapport au précédent, sur ce peu de place, comme tu dis, accordée à l'algèbre ?
24. Alex : Bien, je pense qu'on est dans la… le problème, c'est que l'algèbre, maintenant on essaie de la mettre en lien avec la géométrie, on essaie de modéliser des choses, ce qui, à mon avis, est très intéressant. On bombarde avec trois ou quatre types d'électrons différents un même concept. Ça, ça m'apparaît intéressant …
25. C : Dans le cadre fonctionnel, aussi …
26. Alex : Oui, oui, avec les fonctions aussi. Je trouve que c'est très riche. On peut faire de la calculatrice, du logiciel, des reprises de cours, on peut faire… Mais en même temps, ça induit le fait que ça fait un champ d'exploration qui est tellement vaste, que face à des élèves qui sont mono-tâches, on a du mal à tout sérier en fait… Et quand on a du mal à tout sérier, il y a un pan qui est privilégié, ça va être le pan géométrique, par exemple, et comme ce pan géométrique va avoir une dimension trop importante par rapport au pan algébrique, il va y avoir une espèce de déséquilibre qui va s'instaurer. C'est-à-dire, pour un substrat d'exercices qui est très vaste… par exemple, pour introduire la notion de fonction, quand on fait une figure dans laquelle on inscrit un rectangle, avec des aires variables et tout ça… c'est très riche, c'est très vaste, le champ d'étude est vraiment maximum, mais qui est capable vraiment de suivre ça, avec l'histoire mathématique qu'ils ont et qui vient du collège ? C'est difficile. Même si on est au cœur des mathématiques quand on est au croisement d'idées, de concepts. Les mathématiques, ce n'est pas du saucissonnage…

Question 5

27. Chercheur : *Par rapport à ta pratique d'enseignement, tu fais, tu l'as dit, des points de reprise, de remise à niveau, est-ce que tu peux m'en dire un peu plus sur ces reprises ? Est-ce que tu révises des notions de collège ? Par exemple, tu as parlé de systèmes 2-2 … Quelle place et quel temps tu y consacres ?*
28. Alex : En fait, c'est à la carte. C'est en fonction des classes. Quand tu as une bonne classe, tu vas plus vite. Mais dans les classes classiques, il y a une forte hétérogénéité… on se retrouve avec une quinzaine d'élèves, pour qui de toute façon l'exercice fonctionnera bien et les autres qui sont dans une certaine forme d'attentisme. Quand on change un nombre pour un autre… il y a une mécanisation de la pensée qui s'est faite chez eux et cette mécanisation n'est pas porteuse de sens. C'est-à-dire qu'ils sont capables de pondre la formule $a^2 - b^2$, sauf que le lien avec une réalité mathématique ne se fait pas. C'est comme quelqu'un qui utiliserait un mot en français sans en connaître le sens profond et qui ne serait pas capable de l'utiliser à bon escient dans une conversation. C'est exactement ça… Je suis un peu pessimiste, dans le sens où je pense que c'est difficile de faire basculer un élève ailleurs que dans la croyance qu'il s'est fait pendant des années. Sa croyance est faite de formules et on voit bien que ça ne s'inscrit pas dans un réel. Quand il est face à un exercice, il connaît $a^2 - b^2$ parfaitement, mais le lien entre ce qu'il a au tableau, la tâche qu'on lui a assigné… et bien la mayonnaise ne prend pas entre ces trois choses. On a beau décortiquer, via différents substrats, comme démontrer ce que c'est, $a^2 - b^2$ géométriquement, il manque toujours quelque chose… Après, je ne sais pas pourquoi ça ne s'imprime pas, mais je trouve que j'ai peu de prise sur la capacité qu'ils auraient à faire ce lien entre ces trois choses. Que ce soit à travers des activités de géométrie, des calculs bêtes, on a beau faire des reprises, on a beau leur montrer : « tiens là il manque le double

produit… ». Je pense qu'ils n'ont pas la réalité mathématique de ce que ça signifie. Donc pas la complétude, pour eux, c'est du hasard. Avec les années, je vois que j'ai du mal à faire basculer vers la connaissance les élèves qui sont dans la panade… Faire des exercices au kilomètre, je sens bien que ça ne sert pas à grand-chose, faire des reprises des cours, faire des reprises de démonstration ou voir les résolutions d'équations liées à d'autres problèmes de lieux géométriques, … c'est compliqué !

29. C : Même quand on fait $(a + b)^2$ de façon géométrique, ils disent « ah oui, bien sûr ! » et dans l'exercice qui va suivre où ils vont l'utiliser dans un autre contexte, ils oublieront de nouveau le double produit…
30. Alex : Oui, complètement. Il y a vraiment une difficulté de « croyance ». Il y a des choses inscrites depuis le collège… mais ils ne font pas de liens. Il n'y a pas qu'un seul champ qui est biaisé. Il y a aussi le champ des puissances, cette difficulté sur l'algèbre vient de plusieurs champs mal explorés. Mais j'imagine que les profs de collège pourraient dite la même chose et qu'on pourrait remonter comme ça à la maternelle (*rires*)… Je pense que derrière ça, c'est tout le calculatoire qui est mal géré… Déjà en CM1, il y a des enfants qui ne font pas la différence entre l'addition et la multiplication et des parents qui considèrent que ce n'est pas grave de ne pas savoir ses tables de multiplication… Je crois que si tu ne maîtrises pas la base, tout devient très aléatoire et en particulier sur le calcul. L'algèbre c'est bien le prolongement, via x et y, du calcul arithmétique. Et pour les fractions, on peut dire pareil… Quand tu vois que pour transformer $\frac{x}{2}+\frac{13x}{7}$, il a la moitié de la classe qui décroche…
31. C : la pratique des nombres se perd …
32. Alex : Et quand tu vois que dans le nouveau programme de seconde, ils ont supprimé les ensembles de nombres, c'est passé à la trappe ! C'est comme si on disait, tu vas manier un moteur, mais le moteur tu ne le regardes pas, tu ne regardes que la carrosserie ! Ça, je trouve que c'est dommage… Et en TS, pourtant, les nombres, on travaille dessus.
33. C : Oui, les spé maths ont l'arithmétique…
34. Alex : Oui, l'arithmétique, c'est quand même assez fondamental.

Question 6

35. Chercheur : *Penses-tu qu'on pourrait lier l'apprentissage de l'algèbre et celui de l'algorithmique ? Pour quels types de problème par exemple ? Qu'est-ce que cela pourrait apporter aux élèves ?*
36. Alex : J'imagine que oui… L'articulation est porteuse de sens. On est dans le lien entre des mathématiques, du langage et ce fameux espace entre les deux, qui serait l'intersection, l'interpénétration entre les deux mondes. C'est dans cet espace où se passent l'apprentissage, la connaissance et surtout l'inscription dans une culture mathématique pérenne, chez l'élève… de ce que sont vraiment les mathématiques. Lier les deux, cela peut permettre de mettre en abîme et à plat leurs connaissances. À partir de là, si on réussit à le rendre pérenne, on pourra faire passer toutes les choses périphériques, comme par exemple, comment approximer racine de deux… Quand ce lien entre les deux mondes est fait, on doit pouvoir rentrer au cœur des choses moins classiques… Je pense que ce ne sera pas accessible à tous les élèves. Quand on parle de cet espace entre le langage mathématique et le langage algorithmique, il y a le mot langage dedans… Déjà, le langage, il y a une distance à franchir, à faire franchir aux deux concepts pour qu'ils se rejoignent… Et le langage, ce n'est pas quelque chose qui est universel. Que signifie le langage mathématique pour un élève en difficultés par rapport à un élève qui comprend ? Comme la notion .d'équation de droite, par exemple… On voit que c'est tellement vaste, tellement peu… univoque : qu'est-ce que signifie « $y = ax + b$ » ? Cela révèle des réalités mathématiques et des univers mentaux complètement personnels et qui sont difficiles à

manier dans une classe constitués d'individus. Ça veut dire pour certains qu'un point appartient à une droite… Il y a une pluralité de pensées, il y a une variété de lectures de la notion de langage pour un concept donné. Cela voudrait dire que la différence entre langage mathématique et langage algorithmique… l'espace entre les deux ne peut pas, lui non plus, être univoque. Ça veut dire comment va-t-on le rendre univoque, pour en faire une entité… C'est-à-dire que la création de ce nouvel espace va engendrer une vision à plusieurs facettes de cet espace puisque les élèves n'ont pas la même vision d'un concept.

37. C : Quand tu dis un point appartient à une droite, il y a des élèves qui penseront à l'équation de droite « y = ax + b » et d'autres qui resteront dans un cadre purement géométrique d'une droite avec un point dessus, et même pour quelques-uns, dans une représentation où la droite est une ligne matérielle sur laquelle on place un point qui a une certaine épaisseur… Et tout ça cohabite dans une même classe.
38. Alex : Et la difficulté est de faire un seul monde avec tout ça.
39. C : Dans le travail que je vais te proposer, j'ai essayé de limiter le domaine de l'algèbre et de le sortir du cadre fonctionnel. Je t'en parlerai plus tard.

Fin de l'entretien.

Annexes A9 à A21 : Préparation de l'expérimentation

Un test d'Annabelle
Le logiciel Algobox
La constitution de la trame d'ingénierie
La constitution de la trame projetée de chaque professeur

A8. Énoncé d'un test d'Annabelle sur les équations du premier degré

Le test qui suit a été réalisé dans la classe de seconde du professeur Annabelle, à son initiative et dans le cadre de sa progression (Cf. §10.2), pour évaluer les connaissances de ses élèves. Nous avons eu accès aux copies des élèves, que nous utilisons en partie au paragraphe 7.2.

NOM : ………………………………………………….   Classe : ………
Prénom : ………………………………………………

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

1. $3x + 4 = 7x + 1$

2. $\sqrt{2}x - 1 = 4 - \sqrt{3}x$

3. $x^2 - 7 = 0$

4. $11 = 5x^2 + 2$

5. $x^2 + 6x + 9 = 0$

6. $x^2 + 3x = 0$

A9. Présentation du logiciel Algobox

Généralités

Algobox est un logiciel de programmation, libre et gratuit, développé en 2009 par Pascal Brachet, professeur de mathématiques au lycée Bernard Palissy à Agen. L'auteur le définit lui-même comme un *logiciel pédagogique d'aide à la création et à l'exécution d'algorithmes*[197]. Programmer avec Algobox est plus simple qu'avec un langage traditionnel, créer un script consiste à assembler des *briques* de contrôles, de variables, de tests, etc. En effet, le principe de ce logiciel est que le code de l'algorithme se construit pas à pas grâce à des instructions de base pré-écrites que l'on insère, comme des « briques » dans le corps du programme.

Une présentation simplifiée de l'interface du logiciel est donnée ici.

À l'ouverture du logiciel, l'écran ci-dessous s'affiche :

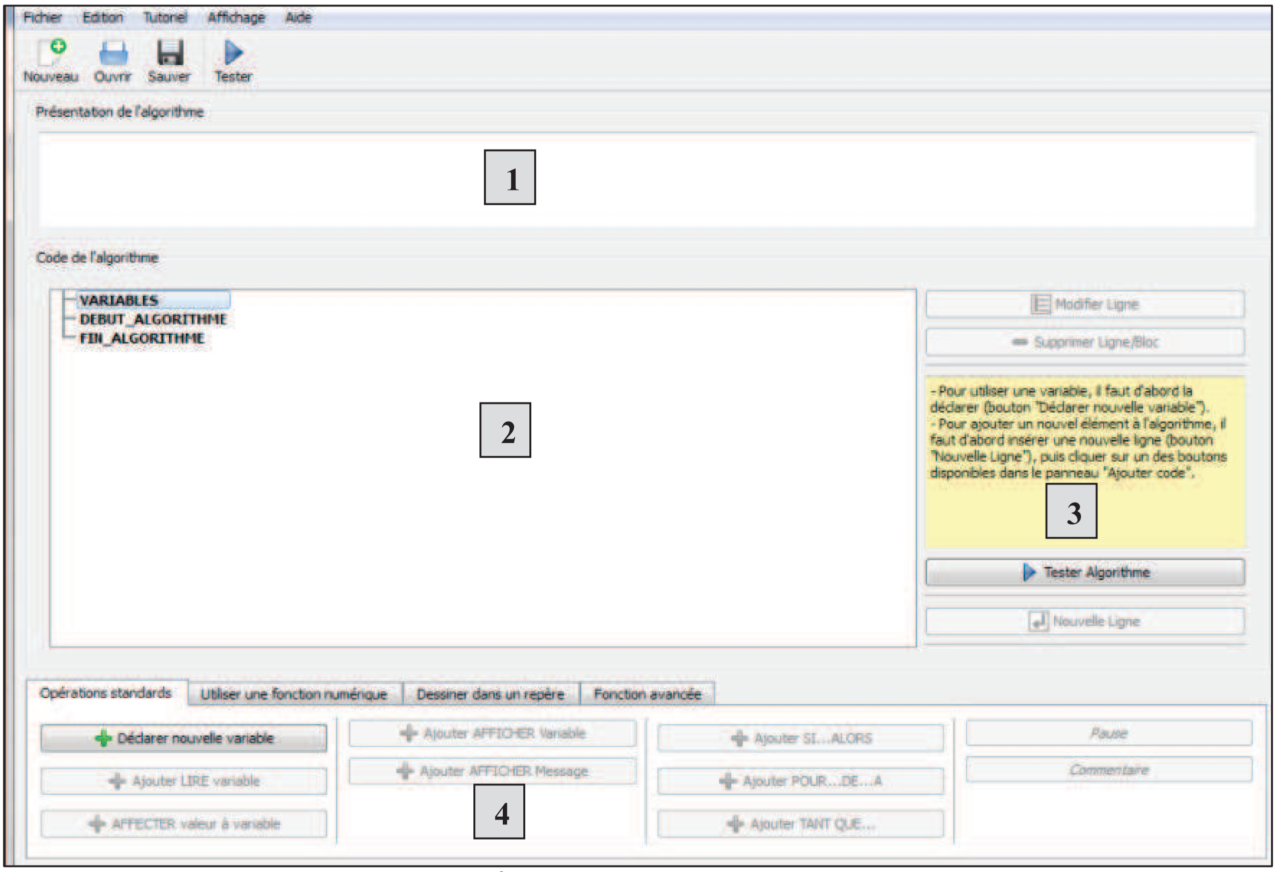


Figure 1-A9 : Écran d'accueil du logiciel Algobox

Décrivons brièvement la fonction de chaque zone de l'écran, que nous avons numérotée ici de 1 à 4.

- ***Zone 1*** : cet emplacement permet d'indiquer le titre de l'algorithme, sa fonction, etc. en langage naturel. L'écriture dans cette zone est facultative ;
- ***Zone 2*** : aire des scripts. Les instructions de programmation de la zone 4 sont accessibles par des « clics » sur les boutons correspondants et les instructions sélectionnées apparaissent dans la zone 2. C'est donc dans cette zone que s'écrit le programme ;

[197] Voir son site à l'adresse : http://www.xm1math.net/algobox/

- ***Zone 3*** : zone d'information et de correction sur les objets et onglets d'accès aux scripts de programmation. C'est également dans cette zone que se trouve le bouton « *tester l'algorithme* » permettant de lancer l'exécution du programme. Une autre fenêtre s'ouvre alors où se trouvent les résultats du programme, comme nous le verrons plus loin ;
- ***Zone 4*** : liste des instructions de programmation pour les objets, par catégorie. Il y a quatre catégories :
    - les *opérations standards*, correspondant aux instructions de base comme la déclaration des variables, la lecture/écriture, les structures conditionnelles et alternatives ;
    - *l'utilisation d'une fonction numérique*, permettant d'insérer une fonction. Les principales fonctions mathématiques étudiées au lycée sont intégrées au logiciel ;
    - le *dessin dans un repère*, conduisant à une représentation graphique ;
    - la *fonction avancée*, autorisant la programmation récursive.

La catégorie des *opérations standards* comporte les boutons que nous avons reproduits ci-dessous :

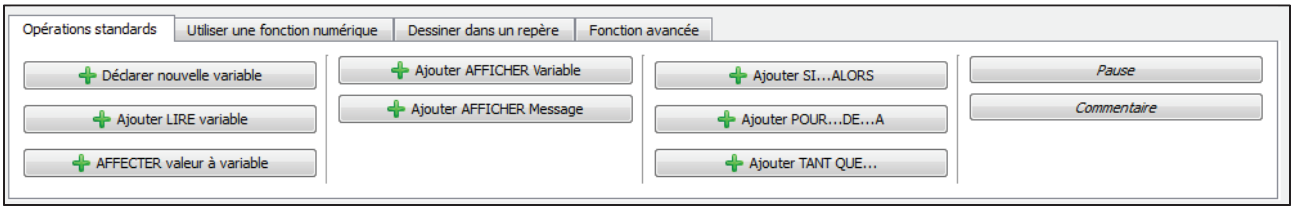
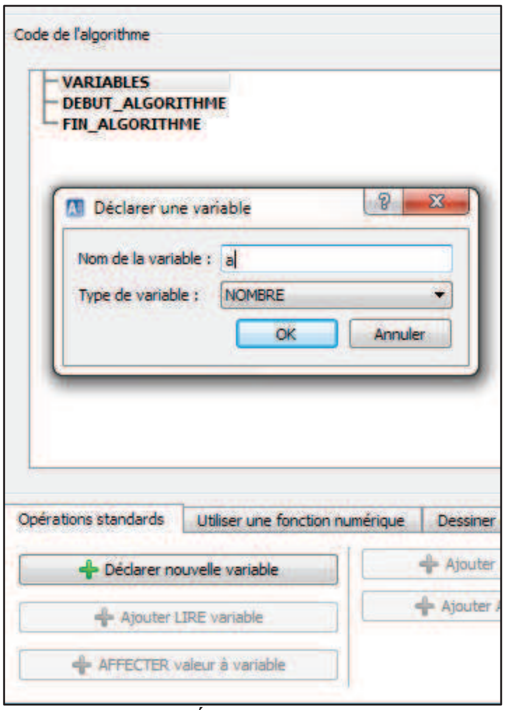
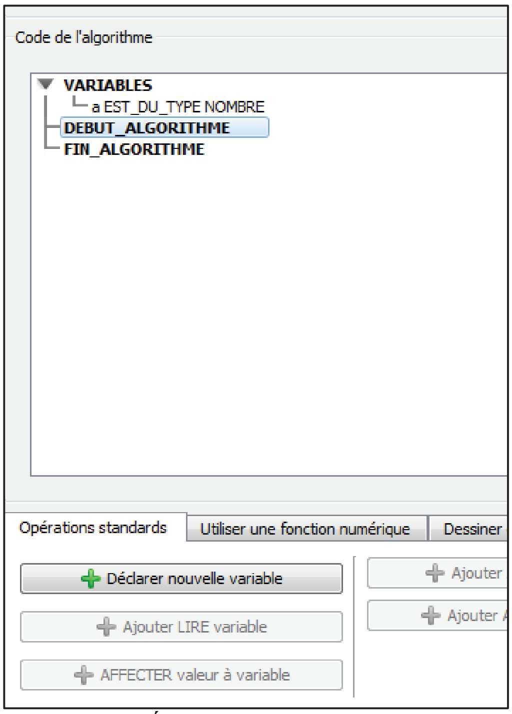


Figure 2-A9 : La liste des opérations standards d'Algobox

Afin que l'élève puisse se concentrer sur la structure de l'algorithme et non sur l'acquisition de la syntaxe, une des caractéristiques du logiciel est que certains des « boutons » ci-dessus ne sont pas accessibles à tout instant. Par exemple, à l'ouverture du logiciel, la feuille de travail proposée est celle de la *figure 1-A9* de la page précédente, c'est-à-dire que seul le bouton « *déclarer nouvelle variable* » est accessible. Les types de variables existants sont les *nombres*, les *chaînes* (de caractères) et les *listes*. Notons que l'utilisateur n'*écrit* pas, à proprement parler, dans la zone 2 le script du programme. Chaque instruction lui est fournie par l'intermédiaire d'un bouton à cliquer ou d'une fenêtre annexe à remplir, ce qui permet d'éviter certaines erreurs de syntaxe. Par exemple, pour déclarer la variable *a* comme nombre, nous procédons comme suit (Cf. figure 3-A9 ci-dessous) :
- un clic sur le bouton « *déclarer nouvelle variable* » permet d'ouvrir la fenêtre de l'étape 1 ;
- la variable (ici *a*) est entrée au clavier ;
- un clic sur « ok » donne la fenêtre de l'étape 2, où « *a est du type nombre* » a été inscrit automatiquement par le logiciel.



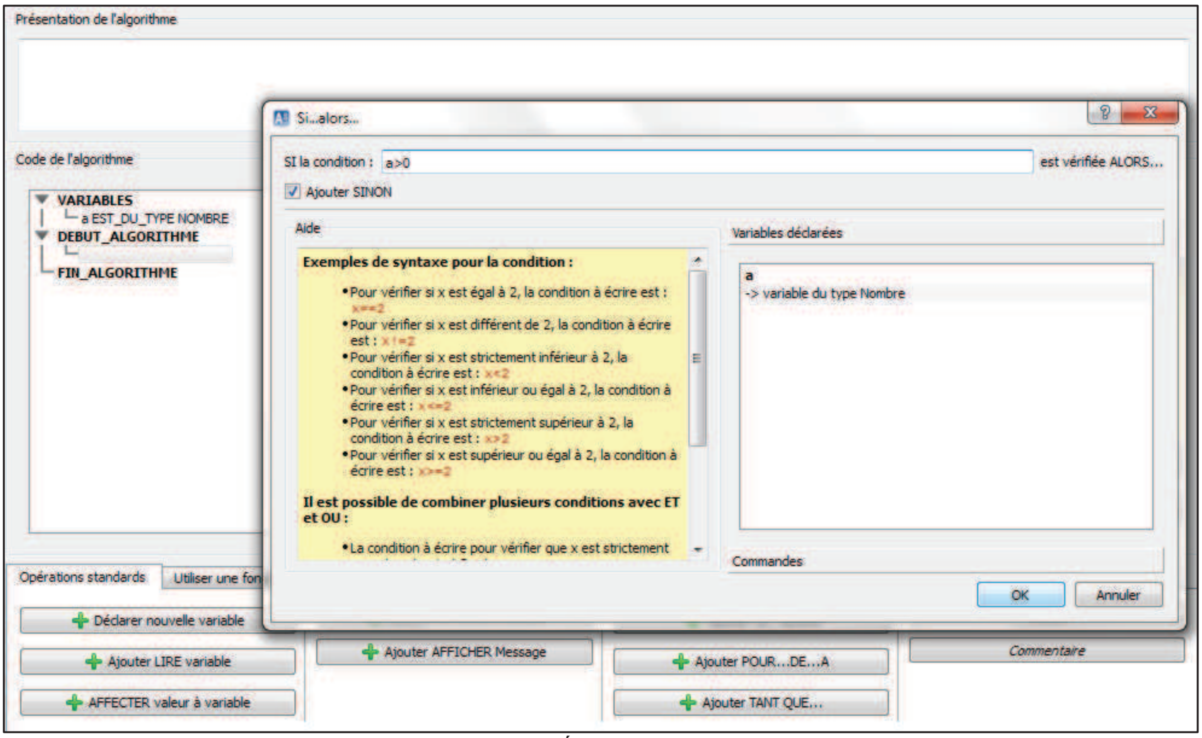
Étape 1



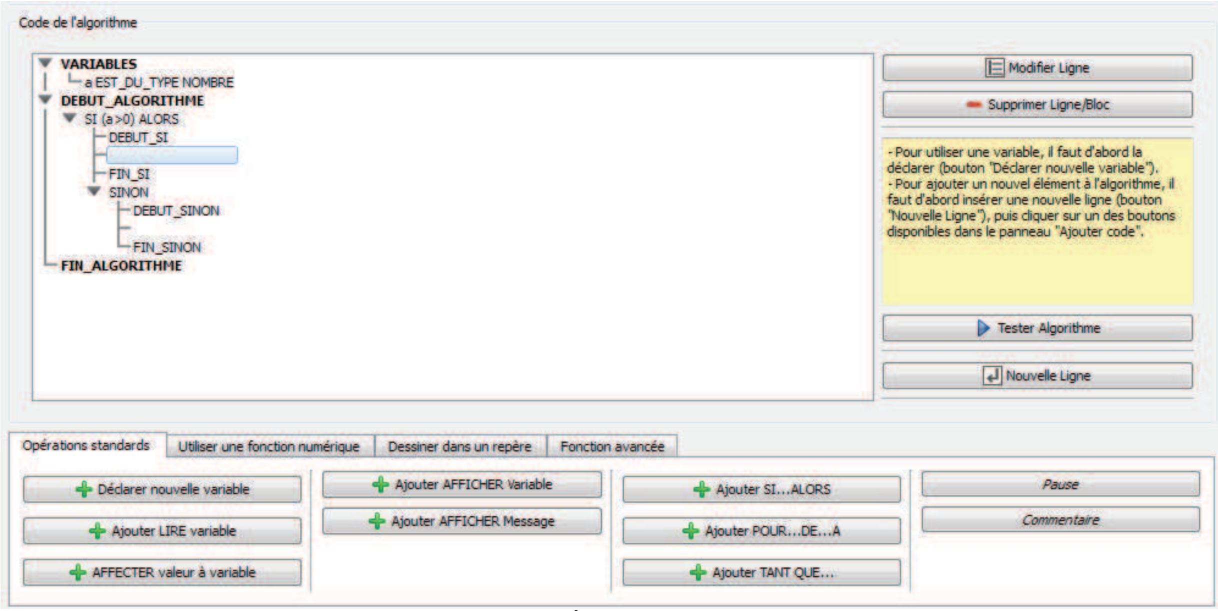
Étape 2

Figure 3-A9 : Insertion d'une variable dans le script d'un programme

Le corps du programme est entré de la même façon. Par exemple, pour entrer une structure alternative « *si… alors… sinon* », les étapes 1 et 2 sont données ci-dessous.



Étape 1



Étape 2

Figure 4-A9 : Insertion d'une structure alternative dans le script d'un programme

Comme montré dans l'étape 1 de la figure 4 ci-dessus, dès que l'utilisateur doit entrer lui-même un objet au clavier, des éléments de syntaxe lui sont systématiquement rappelés. L'étape 2 indique le résultat de l'action à l'écran, où nous constatons que le logiciel utilise l'*indentation*[198], ce qui permet une meilleure lisibilité de la structure alternative.

Un exemple de programmation

Nous allons détailler sur un exemple les actions effectuées par l'utilisateur qui permettent d'aboutir à un programme et à son exécution. L'exemple choisi est l'obtention des solutions de l'équation $ax + b = cx + d$, où a, b, c, d sont des nombres réels fixés. Cet exemple est l'un des algorithmes travaillés dans l'expérimentation menée dans le cadre de cette recherche.

Les cinq variables a, b, c, d et x sont définies du type nombre, comme indiqué en figure 3, en répétant cinq fois la même procédure. On obtient dans la zone 2 de l'écran le code ci-dessous :

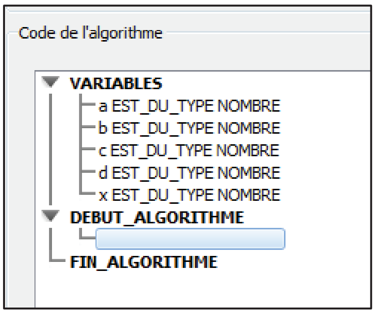


Figure 5- A9 : Déclaration des variables pour la résolution des équations $ax + b = cx + d$

Les différentes variables étant définies, l'« *écriture* » du programme proprement dite peut commencer. En cliquant sur le bouton « *ajouter lire variable* », une fenêtre contextuelle s'ouvre pour indiquer le nom de la variable à lire, comme suit :

[198] L'indentation consiste, en informatique, en l'ajout de tabulations ou d'espaces dans un fichier, pour une meilleure lecture et compréhension du code. Définition donnée par Wikipédia le 22 juin 2013 sur le site : http://fr.wikipedia.org/wiki/Indentation

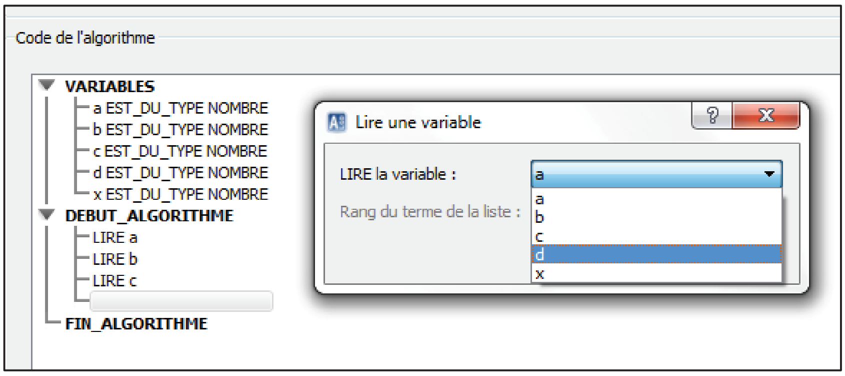


Figure 6- A9 : Lecture des variables a, b, c, d pour la résolution des équations ax + b = cx + d

Après l'ajout d'une « *nouvelle ligne* » (par un clic sur le bouton de la zone 3), nous insérons la structure alternative « *si… alors… sinon…* », comme indiqué en figure 4 :

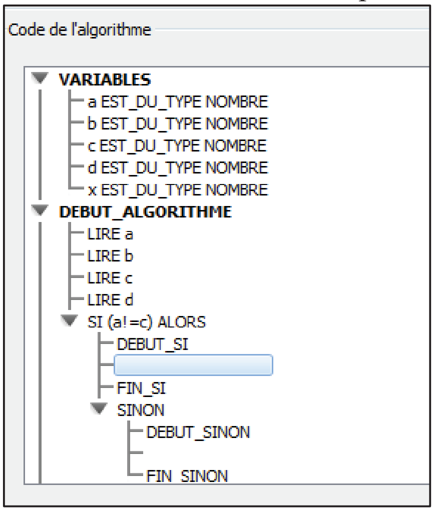


Figure 7- A9 : Ajout de la structure alternative « si… alors… sinon… » pour la résolution des équations ax + b = cx + d

La condition $a \neq c$ a pour syntaxe « a != c » pour le logiciel Algobox. Les commandes s'imbriquent alors les unes sous les autres dans la zone 2 pour créer le script du programme.

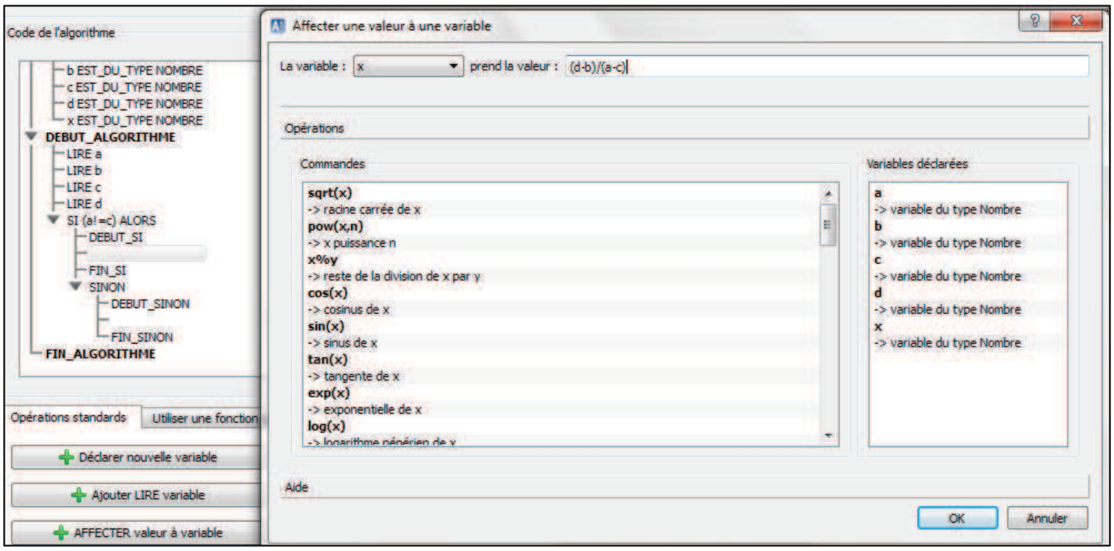


Figure 8- A9 : Affectation de la solution de l'équation ax + b = cx + d à la variable x si a≠ c

La figure 8 ci-dessus montre la commande d'affectation d'une valeur à une variable, avec l'ouverture d'une fenêtre contextuelle : l'écriture de la fraction $\frac{d-b}{a-c}$ requiert une écriture linéaire parenthésée, comme sur une calculatrice classique. Nous notons ici la non-transparence avec l'écriture mathématique usuelle. Le logiciel affiche cette valeur avec la même écriture linéaire dans la zone 2, comme suit :

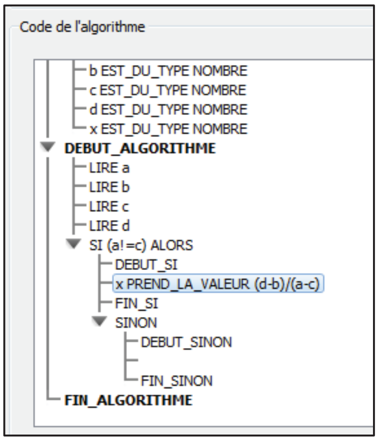


Figure 9- A9 : Affichage dans la zone 2 de l'affectation

La suite de l'écriture du programme se poursuit de la même manière, avec ouverture de fenêtres contextuelles pour les boutons « *afficher variable* » ou « *afficher message* » pour aboutir à la forme ci-dessous (figure 10). Notons que l'imbrication de deux structures alternatives est nécessaire à la construction de la fin du programme, pour inclure les cas $b = d$ et $b \neq d$. La syntaxe pour le test $b = d$ est $b == d$.

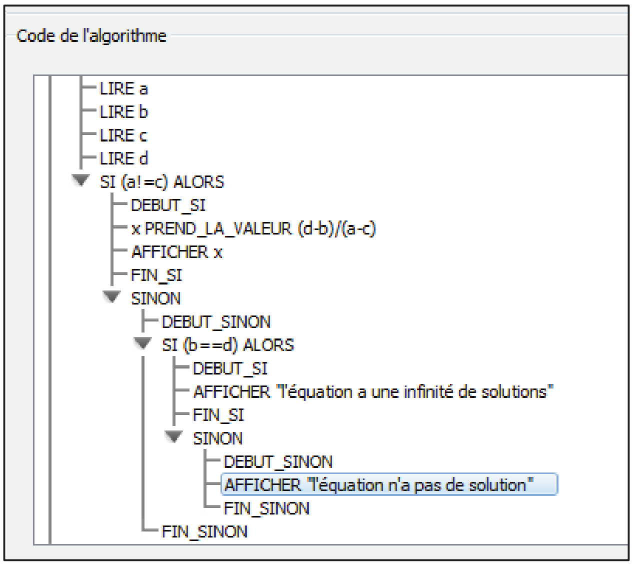


Figure 10- A9 : Script complet du programme tel qu'il apparaît à l'écran

Le programme est alors prêt à être exécuté. Un « clic » sur le bouton « *tester l'algorithme* » dans la zone 3 permet cette action. Une nouvelle fenêtre s'ouvre, qui reprend le code de l'algorithme. Nous verrons plus loin que cette reprise a une utilité dans le fonctionnement dans le mode *pas à pas* du programme.

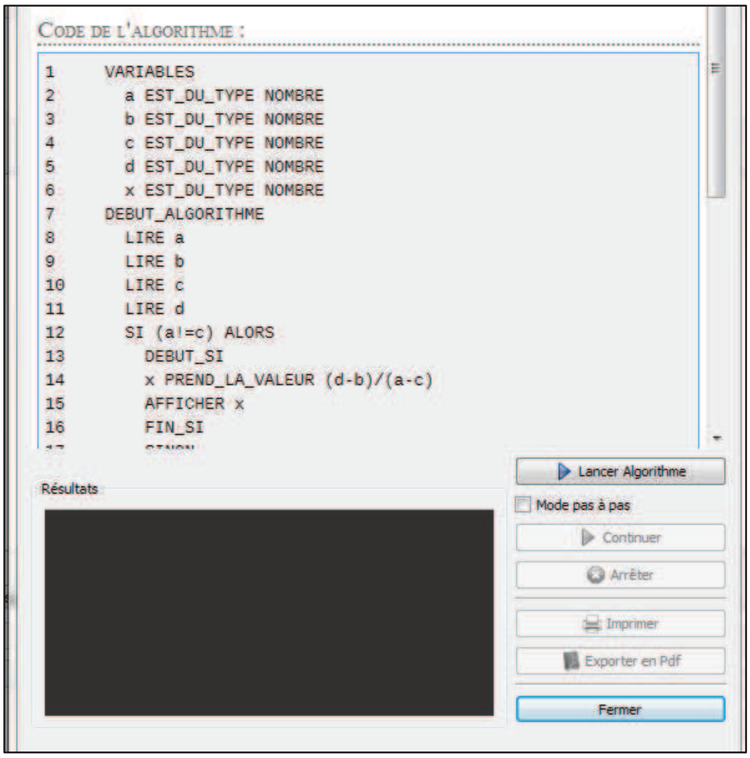


Figure 11- A9 : Fenêtre contextuelle pour tester le programme réalisé

Le bouton « *lancer algorithme* » permet alors son exécution.

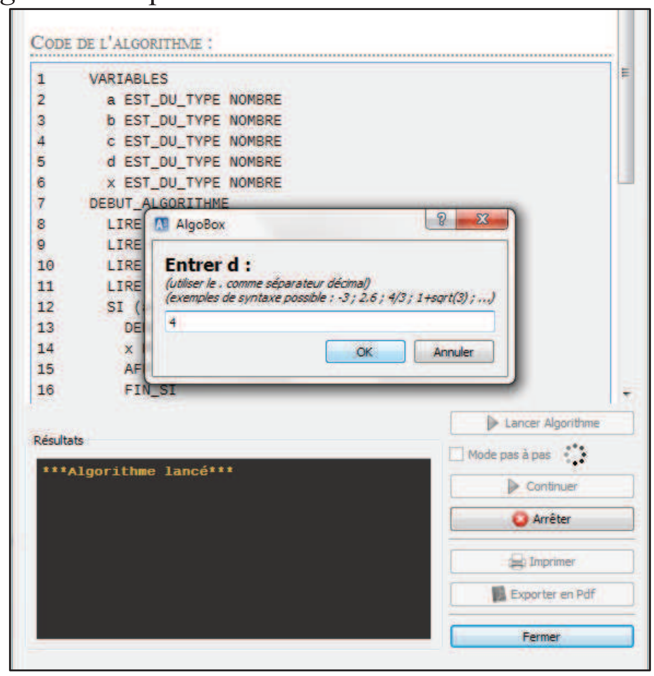


Figure 12- A9 : Entrée des variables a, b, c, d dans le programme

Le programme demande d'entrer les variables *a, b, c, d*. Dans l'exemple ci-dessus, nous avons choisi $a = 1$, $b = 2$, $c = 3$ et $d = 4$. Ces variables entrées au clavier par l'utilisateur, la sortie s'affiche dans l'écran noir de la fenêtre, comme ci-dessous (la valeur -1 est affichée à l'écran).

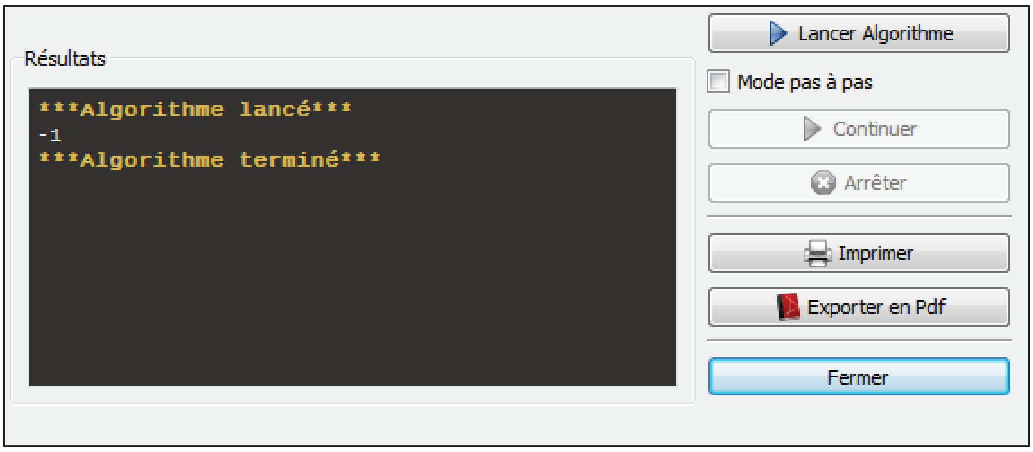


Figure 13- A9 : Fenêtre contextuelle ouverte lors de l'exécution du programme

Il suffit alors de changer les valeurs numériques attribuées à *a*, *b*, *c* ou d en lançant de nouveau le programme pour que celui-ci calcule la solution de la nouvelle équation considérée.

Mode pas à pas

Le mode pas à pas permet de visualiser les valeurs affectées aux variables. De plus, ce mode permet en cas d'erreur de conception de l'algorithme ou d'erreur de syntaxe de situer la ou les lignes de code concernées. La figure 14 montre le déroulement du mode pas à pas en ayant entré les valeurs $a = 1$, $b = 2$, $c = 3$ et $d = 4$.

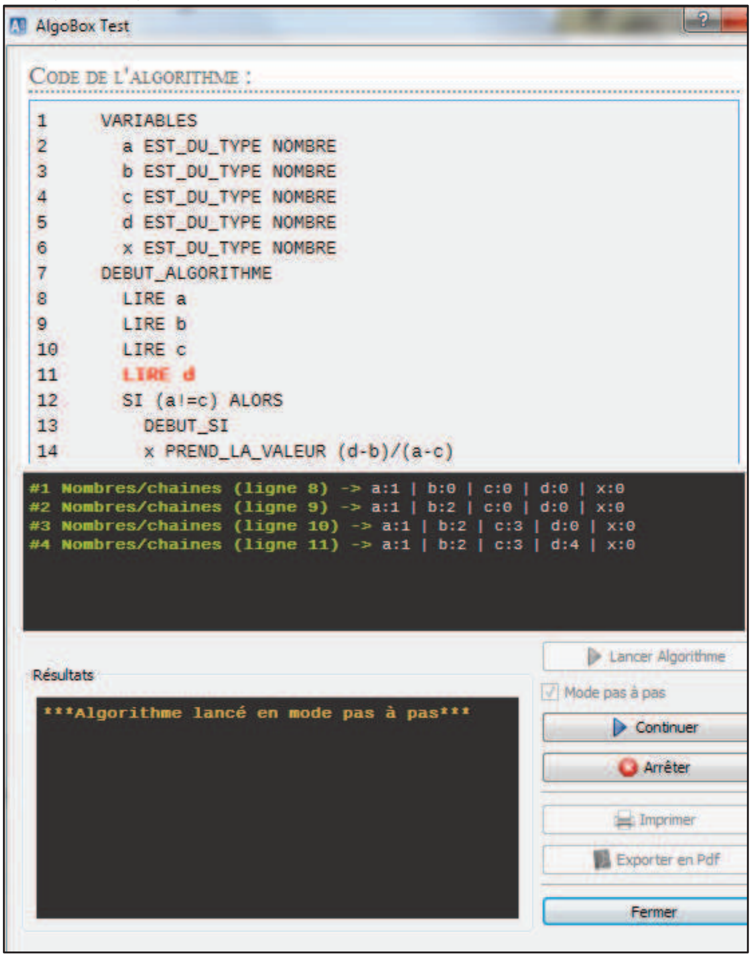


Figure 14- A9 : Mode pas à pas pour l'exécution du programme

Les variables sont initialisées à zéro par le logiciel et elles prennent ensuite les valeurs saisies au clavier. Le premier cadre en noir sous le code donne, ligne par ligne, la valeur des variables. C'est ainsi qu'à la ligne 1, la variable a prend la valeur 1, valeur que l'utilisateur a entrée au clavier, alors que les autres variables sont à zéro. A la ligne 4, les valeurs des variables sont $a = 1$, $b = 2$, $c = 3$, $d = 4$ et $x = 0$ après saisie au clavier. De plus, la ligne de code en cours de traitement s'affiche en rouge de manière à situer le déroulement du programme en cours.

Avantages et limites du logiciel

Nous comparons, sur certains aspects, le fonctionnement du logiciel Algobox et d'un logiciel de géométrie dynamique comme Cabri Géomètre ou encore le logiciel libre Geogebra. En effet, l'une des particularités de ces logiciels de géométrie dynamique est qu'ils permettent la manipulation directe des figures, en ce sens que d'un simple clic, des objets géométriques sont insérés sur la feuille de travail. Ainsi, de la même manière que l'utilisateur de Cabri Géomètre ou de GeoGebra se concentre sur les objets géométriques en relation et non pas sur la précision des tracés à effectuer, l'utilisateur d'Algobox a une activité centrée sur la réflexion du choix des instructions et de leurs articulations plutôt que sur la syntaxe de lignes de code. Nous tentons une analogie entre la construction pas à pas d'un algorithme sous Algobox, où l'on *manipule* les éléments qui structurent un algorithme (entrée/sortie, traitement, etc.) avec la présence et l'utilisation d'expressions algébriques, et la construction pas à pas d'une figure géométrique sous Cabri ou Geogebra. De plus, dans les deux cas, la manipulation exige des règles mathématiques strictement respectées. Bien entendu, l'utilisation de tels logiciels, que ce soit en géométrie ou en algorithmique, ne dispense pas d'un apprentissage de ces outils, de manière à transformer un *artefact* en *instrument*, avec les double processus d'*instrumentation* et d'*instrumentalisation*, en faisant référence aux travaux de Rabardel (1995).

A10. Diaporama de la trame d'ingénierie

L'objectif de ce diaporama est de présenter un découpage possible des trois situations en termes de séances, ce qui correspond à une unité de temps plus habituelle des professeurs, ceci dans le but qu'ils s'approprient plus rapidement les situations.
On retrouve les trois situations décrites précédemment déclinées de la façon suivante :

- Situation n°1 : première séance ;
- Situation n°2 : deuxième séance et première phase de la troisième séance ;
- Situation n°3 : seconde phase de la troisième séance et quatrième séance.

Ce découpage en séances est à considérer comme une base de travail avec les enseignants et il leur est présenté comme tel, en leur précisant bien que le nombre de séances n'est qu'un exemple.
Pendant l'entretien avec les différents professeurs, les quatre diapositives qui suivent leur ont été présentées ainsi que des exemples d'équations, des fiches d'énoncés et des algorithmes réalisés sur différents logiciels, comme Scratch et Algobox. Quelques-uns de ces éléments complémentaires sont donnés en annexes A11 à A15.

Ébauche des séances de l'expérimentation (1/4)

3 à 4 séances dans chaque classe avec le même scénario (adapté à la demande de chaque enseignant)

- **Première séance**
  - Travail en classe entière (ou demi-classe ?): groupes de 3 à 4 élèves
  - Matériel :
    - Équations polynomiales du premier et du second degré à classer présentées sur cartons individuels manipulables (un carton par équation);
    - Une affiche pour collecter les classifications
  - Consigne : *Proposer une classification des équations suivantes. Il n'est pas demandé de les résoudre mais ce n'est pas interdit non plus.*
  - Restitution en grand groupe avec débat sur les différentes classifications.

Objectif : Reconnaissance de formes algébriques (forme développée, forme factorisée; formes polynômiales de degré 1 et 2)

Ébauche des séances de l'expérimentation (2/4)

- **Deuxième séance**
  - Travail en salle informatique (en binômes ?) (demi-classe ?)
  - Matériel :
    - un poste informatique (seul ou pour deux ?) ;
    - Une fiche d'énoncé comportant des équations du premier degré de la forme ax + b = c.
  - Consigne : *Suite à la classification des équations réalisées lors de la séance précédente, nous n'allons conserver que celles du premier degré et vous allez les résoudre en élaborant un algorithme qui permette de réaliser cette tâche pour toutes les équations proposées. Réaliser ensuite votre algorithme sur le logiciel Bidule et vérifier les réponses obtenues.*
  - Exemples de logiciels : Scratch, Algobox.

Objectifs :

→ **Émergence de la différence entre paramètre et inconnue**

→ **Reprise de techniques/technologie associées au type de tâches « Résoudre une équation du type ax + b = c »**

Ébauche des séances de l'expérimentation (3/4)

- **Troisième séance**
  - Travail en classe entière en binômes

  Première phase
  - Matériel : Un algorithme écrit sur papier (logiciel Scratch, Algobox, etc.)
  - Consigne : *Voici un algorithme construit à l'aide du logiciel Bidule. Expliciter quelle est sa fonction. Le faire fonctionner pour quelques exemples permettant de tester les différentes parties de l'algorithme présenté. Le travail sera rendu sur feuille (un écrit par binôme).*

  Objectif : Reprise de techniques/technologie associées au type de tâches « Résoudre une équation du type ax + b = cx + d »

  Seconde phase
  - Matériel : Une liste d'équations du type $x^2 = a$ (ou s'y ramenant)
  - Consigne : *On s'intéresse maintenant aux équations du 2^nd degré suivantes. Les résoudre et écrire à la main un algorithme permettant de les résoudre toutes. Le travail est relevé en fin d'heure.*

  Objectif : Reprise de techniques/technologie associées au type de tâches « Résoudre une équation du type $x^2 = a$ »

Ébauche des séances de l'expérimentation (4/4)

- **Quatrième séance**
  - Travail en classe entière (ou en demi-classe en salle info ?)

  Première phase
  - Reprise sur les équations du second degré du type $x^2 = a$ (ou s'y ramenant) et construction en commun (au vidéoprojecteur ?) de l'algorithme à l'aide du logiciel Bidule (Scratch ; Algobox ; etc.)

  Seconde phase
  - Matériel : Une liste d'équations du type (ax + b)(cx + d) = 0 (ou s'y ramenant) avec variation de la nature des paramètres.
  - Consigne : *On s'intéresse maintenant aux équations du 2^nd degré suivantes. Quelle méthode pour les résoudre ?*

Objectif : Faire émerger que toute résolution d'équation peut « s'automatiser » et donc « s'algorithmiser », une fois la reconnaissance de forme effectuée.

Les quatre diapositives servant de base de travail pour l'élaboration de la trame projetée

A11. Proposition d'équations du premier et du second degré (trame d'ingénierie : situation n°1)

Équation 1 : $x + 3 = 0$

Équation 2 : $7 - x = 0$

Équation 3 : $1000x = 0$

Équation 4 : $-1000x = 0$

Équation 5 : $-1000 + x = 0$

Équation 6 : $\sqrt{2} + x = 3$

Équation 7 : $-\frac{x}{5} = 1$

Équation 8 : $\frac{2x}{7} = 0$

Équation 9 : $\frac{10x}{0{,}001} = 4$

Équation 10 : $2x - 5 = 9$

Équation 11 : $\pi x + 3 = 4$

Équation 12 : $-3 = 5x + 1$

Équation 13 : $3x - 5 = 3 - 10x$

Équation 14 : $1{,}8x - 3 = 2{,}5x + 7{,}4$

Équation 15 : $3x - \frac{1}{4} = \frac{x}{4} - 2$

Équation 16 : $\sqrt{2}x - 1 = 4 - \sqrt{3}x$

Équation 17 : $7(x + 2) + 4(x - 3) = 0$

Équation 18 : $(3 - 4x) - (2x - 1) = 0$

Équation 19 : $(3 - 4x)(2x - 1) = 0$

Équation 20 : $3x\left(x + \sqrt{5}\right) = 0$

Équation 21 : $x^2 = 7$

Équation 22 : $x^2 = -4$

Équation 23 : $x^2 = (2{,}07)^2$

Équation 24 : $\frac{x^2}{27} = 0{,}01$

Équation 25 : $x^2 - 5 = 7$

Équation 26 : $\sqrt{3}x^2 = -2$

Équation 27 : $7x^2 = 7$

Équation 28 : $\frac{x^2}{7} = 21$

Équation 29 : $11 = 5x^2 + 2$

Équation 30 : $3 = 2 - x^2$

Équation 31 : $(x + 1)^2 = 9$

Équation 32 : $9x^2 - 16 = 0$

Équation 33 : $9x^2 - 7 = 0$

Équation 34 : $x^2 + 6x + 9 = 0$

Équation 35 : $x^2 + 6x = 0$

Équation 36 : $x^2 - 8x = 0$

Équation 37 : $x^2 - 8x + 15 = -1$

Équation 38 : $x^2 - 8x + 15 = 0$

Équation 39 : $x^2 + 3x = \frac{7}{2}$

Équation 40 : $x^2 + 3x = 0$

A12. Proposition d'un énoncé pour la situation n°2 (trame d'ingénierie du chercheur - équations du premier degré)

Nom(s) : ……………………….. Prénom(s) : ……………………….

Résoudre les équations proposées à l'aide de votre algorithme. Indiquez à côté de chaque équation, sa ou ses solutions, si elles existent.

Équation 1 : $x + 3 = 0$ Solution 1: ……………………………….
Équation 2 : $7 - x = 0$ Solution 2: ……………………………….
Équation 3 : $1000x = 0$ Solution 3: ……………………………….
Équation 4 : $-1000x = 0$ Solution 4: ……………………………….
Équation 5 : $-1000 + x = 0$ Solution 5: ……………………………….
Équation 6 : $\sqrt{2} + x = 3$ Solution 6: ……………………………….
Équation 7 : $-\frac{x}{5} = 1$ Solution 7: ……………………………….
Équation 8 : $\frac{2x}{7} = 0$ Solution 8: ……………………………….
Équation 9 : $\frac{10x}{0{,}001} = 4$ Solution 9: ……………………………….
Équation 10 : $2x - 5 = 9$ Solution 10: …………………………….
Équation 11 : $\pi x + 3 = 4$ Solution 11: …………………………….
Équation 12 : $-3 = 5x + 1$ Solution 12: …………………………….
Équation 13 : $3x - 5 = 3 - 10x$ Solution 13: …………………………….
Équation 14 : $1{,}8x - 3 = 2{,}5x + 7{,}4$ Solution 14: …………………………….
Équation 15 : $3x - \frac{1}{4} = \frac{x}{4} - 2$ Solution 15: …………………………….
Équation 16 : $\sqrt{2}x - 1 = 4 - \sqrt{3}x$ Solution 16: …………………………….
Équation 17 : $7(x + 2) + 4(x - 3) = 0$ Solution 17: …………………………….
Équation 18 : $(3 - 4x) - (2x - 1) = 0$ Solution 18: …………………………….

A13. Proposition de description d'un algorithme (trame d'ingénierie : situation n°2)

Voici un algorithme construit à l'aide du logiciel Algobox. Le faire fonctionner pour quelques exemples de valeurs de a, b, c et d bien choisies, permettant de tester les différentes parties de l'algorithme présenté. En déduire quelle est la fonction de cet algorithme. Le travail sera rendu sur feuille : on présentera les exemples choisis et on explicitera la fonction de l'algorithme.

Code de l'algorithme

```
VARIABLES
  a EST_DU_TYPE NOMBRE
  b EST_DU_TYPE NOMBRE
  c EST_DU_TYPE NOMBRE
  d EST_DU_TYPE NOMBRE
  x EST_DU_TYPE NOMBRE
DEBUT_ALGORITHME
  LIRE a
  LIRE b
  LIRE c
  LIRE d
  SI (a!=c) ALORS
    DEBUT_SI
    x PREND_LA_VALEUR (d-b)/(c-a)
    AFFICHER x
    FIN_SI
    SINON
      DEBUT_SINON
      SI (b==d) ALORS
        DEBUT_SI
        AFFICHER "tout nombre est solution"
        FIN_SI
        SINON
          DEBUT_SINON
          AFFICHER "pas de solution"
          FIN_SINON
      FIN_SINON
FIN_ALGORITHME
```

A14. Proposition d’un énoncé pour la situation n°3 (trame d’ingénierie du chercheur - équations du second degré)

On s’intéresse aux équations du 2nd degré suivantes.
Classer les équations en plusieurs catégories et déterminer un ou plusieurs algorithmes permettant de les résoudre.

Équation 1 : $(3-4x)(2x-1)=0$
Équation 2 : $3x\left(x+\sqrt{5}\right)=0$
Équation 3 : $x^2+6x=0$
Équation 4 : $x^2=7$
Équation 5 : $x^2=-4$
Équation 6 : $x^2=(2{,}07)^2$
Équation 7 : $\frac{x^2}{27}=0{,}01$
Équation 8 : $x^2-5=7$
Équation 9 : $\sqrt{3}x^2=-2$

Équation 10 : $7x^2=7$
Équation 11 : $\frac{x^2}{7}=21$
Équation 12 : $11=5x^2+2$
Équation 13 : $3=2-x^2$
Équation 14 : $(x+1)^2=9$
Équation 15 : $x^2+6x+9=0$
Équation 16 : $x^2-8x=0$
Équation 17 : $x^2-8x+15=-1$
Équation 18 : $x^2-8x+15=15$

A15. Exemples de programmes sous Algobox pour la situation n°3

Résolution de l'équation littérale $x^2 = a$	**Résolution de l'équation littérale $(ax + b)(cx + d) = 0$**	**Résolution de l'équation littérale $(ax + b)(cx + d) = 0$ avec $a \neq 0$ et $c \neq 0$**
1 VARIABLES 2 a EST_DU_TYPE NOMBRE 3 x EST_DU_TYPE LISTE **4 DEBUT_ALGORITHME** 5 LIRE a 6 SI (a<0) ALORS **7 DEBUT_SI** 8 AFFICHER "pas de solution" **9 FIN_SI** 10 SINON **11 DEBUT_SINON** 12 SI (a==0) ALORS **13 DEBUT_SI** 14 AFFICHER "une seule solution : 0" **15 FIN_SI** 16 SINON **17 DEBUT_SINON** 18 x[1] PREND_LA_VALEUR sqrt(a) 19 x[2] PREND_LA_VALEUR -sqrt(a) 20 AFFICHER "deux solutions : " 21 AFFICHER x[1] 22 AFFICHER "et" 23 AFFICHER x[2] **24 FIN_SINON** **25 FIN_SINON** **26 FIN_ALGORITHME**	**1 VARIABLES** 2 a EST_DU_TYPE NOMBRE 3 b EST_DU_TYPE NOMBRE 4 c EST_DU_TYPE NOMBRE 5 d EST_DU_TYPE NOMBRE 6 x1 EST_DU_TYPE NOMBRE 7 x2 EST_DU_TYPE NOMBRE **8 DEBUT_ALGORITHME** 9 LIRE a 10 LIRE b 11 LIRE c 12 LIRE d 13 SI (a!=0 ET c!=0) ALORS **14 DEBUT_SI** 15 x1 PREND_LA_VALEUR -b/a 16 x2 PREND_LA_VALEUR -d/c 17 AFFICHER x1 18 AFFICHER x2 **19 FIN_SI** 20 SI (a==0 ET c!=0) ALORS **21 DEBUT_SI** 22 SI (b!=0) ALORS **23 DEBUT_SI** 24 x2 PREND_LA_VALEUR -d/c 25 AFFICHER x2 **26 FIN_SI** 27 SINON **28 DEBUT_SINON** 29 AFFICHER "tout nombre est solution" **30 FIN_SINON** **31 FIN_SI** 32 SI (a!=0 ET c==0) ALORS **33 DEBUT_SI** 34 SI (d!=0) ALORS **35 DEBUT_SI** 36 x1 PREND_LA_VALEUR -b/a 37 AFFICHER x1 **38 FIN_SI** 39 SINON 40 DEBUT_SINON 41 AFFICHER "tout nombre est solution" **42 FIN_SINON** **43 FIN_SI** 44 SI (a==0 ET c==0) ALORS **45 DEBUT_SI** 46 SI (b==0 OU d==0) ALORS **47 DEBUT_SI** 48 AFFICHER "tout nombre est solution" **49 FIN_SI** 50 SINON **51 DEBUT_SINON** 52 AFFICHER "pas de solution" **53 FIN_SINON** **54 FIN_SI** **55 FIN_ALGORITHME**	**1 VARIABLES** 2 a EST_DU_TYPE NOMBRE 3 b EST_DU_TYPE NOMBRE 4 c EST_DU_TYPE NOMBRE 5 d EST_DU_TYPE NOMBRE 6 x1 EST_DU_TYPE NOMBRE 7 x2 EST_DU_TYPE NOMBRE **8 DEBUT_ALGORITHME** 9 LIRE a 10 LIRE b 11 LIRE c 12 LIRE d 13 SI (a!=0 ET c!=0) ALORS **14 DEBUT_SI** 15 x1 PREND_LA_VALEUR -b/a 16 x2 PREND_LA_VALEUR -d/c 17 AFFICHER x1 18 AFFICHER x2 **19 FIN_SI** 20 SINON **21 DEBUT_SINON** 22 AFFICHER "l'équation n'est pas du second degré" **23 FIN_SINON** **24 FIN_ALGORITHME**

Exemples de réalisation de programmes sous Algobox

A16. Entretien d'Annabelle et de Maurice pour l'adaptation de la trame d'ingénierie en la trame projetée (TP1 et TP2)

Interview réalisé le 15/04/2011.

Les abréviations de C comme chercheur, An pour Annabelle et Ma pour Maurice seront utilisées pour désigner les interlocuteurs.

1. C : Alors je vous explique. Nous allons essayer de monter ensemble 3 ou 4 séances, au choix, c'est vous qui allez le déterminer. Mon idée est que je vous présente une trame de scénario et c'est vous qui l'affinez selon votre sensibilité, vos possibilités, votre histoire, ce que vous avez envie de faire, où vous en êtes, etc. Donc un scénario à adapter à la demande de chaque enseignant. L'idée est de faire travailler les élèves sur la reconnaissance des équations, des formes algébriques, des formes polynomiales de degré 1 et 2. J'avais imaginé, mais vous pouvez adapter, si vous voulez que ce soit en classe entière, si vous voulez que ce soit en demi-classe, comment ce serait le plus profitable, et vous choisissez, c'est vous qui décidez. Alors, voilà l'idée : c'est un travail que j'avais imaginé en classe entière, mais on peut changer. Il s'agit de mettre les élèves par groupes de 3-4 et de proposer une classification d'équations selon la consigne : « *Classer les équations. Il n'est pas demandé de les résoudre mais ce n'est pas interdit non plus* ». Le matériel, voilà je vous le montre, voici les équations, mais vous pouvez les changer. Je vous prépare le matériel dont vous avez besoin. Vous avez juste à me donner votre choix d'équations. Ici vous avez des exemples.
2. Ma : Chacun a donc un set d'équations à trier.
3. C : Chacun a des équations sur la table et ces équations, ils les classent, j'ai essayé de faire varier les nombres comme - 1000x = 0 ou 1000 – x = 0, des trucs avec des nombres irrationnels…
4. An : des gros mots !
5. Ma : des fractions, pas des fractions…
6. C : des racines, pas des racines…
7. Ma : Il y a des équations avec *x* en dénominateur ?
8. C : Non, je n'ai mis que des équations polynomiales de degré 1 ou 2.
9. Ma : Ah, que des polynomiales.
10. C : Vous voyez comment les élèves classifient ces équations, ce qu'ils mettent ensemble... C'est pour voir ce qui ressort de leur représentation.
11. Ma : Alors juste une question : il n'y a donc aucune équation rationnelle, même si juste pour la mettre de côté... Par exemple, s'il y a un demi ($\frac{1}{2}x$) pour ne pas confondre avec ça ($\frac{1}{2x}$), on pourrait...
12. C : …la mettre de côté. Elle fait partie d'une autre catégorie.
13. Ma : Oui, d'une autre famille… Ce ne serait pas inclus dans l'algorithme.
14. C : Ce serait une bonne idée d'en mettre une.
15. An : Et la durée, c'est une heure ?
16. C : Oui, c'est ce que j'ai pensé. Les élèves classent les équations. Sur une grande affiche, je rappellerai toutes les équations avec leur numéro et pour la restitution, sur leur propre affiche, les élèves font le classement. On accroche toutes les affiches au tableau et un rapporteur vient au tableau et le prof lui demande d'expliquer pourquoi ils ont mis certaines équations ensemble, donc d'expliquer leur classement. Chaque groupe passe et à la fin, le choix est laissé à l'enseignant de la synthèse. Comment vous la voyez ?
17. An : Je ne sais pas…

18. Ma : Qu'est-ce que tu attends là ?
19. C : Justement, j'aimerais ne vous présenter que le scénario basique et regarder les différentes adaptations des enseignants… par rapport à mon travail de thèse.
20. Ma : Ah d'accord, OK. Le but n'est pas de faire la séance idéale mais de voir comment chaque enseignant procède.
21. C : Oui, c'est de voir comment chaque enseignant gère ça. Mais c'est aussi que les élèves arrivent mieux à la fin de l'année à manipuler les équations.
22. C : Je vous demanderais aussi de faire passer un pré-test et un test final pour voir si cela a changé quelque chose… Je peux vous montrer quelques résultats du test diagnostique que j'ai fait passer dans votre lycée à la fin de l'an dernier. Pour les équations du premier degré, pour cette première équation : $2(x - 1) + 5x = 3x + 4 - 2(x + 1)$, il y a eu 44 % de réussite et pour celle-ci : $4(2x + 5) - 3x = x - 4 + 2(x + 12)$, 48 % de réussite. On pouvait se poser la question de savoir si une reprise des équations du premier degré était nécessaire, alors qu'elles sont traitées en 4^{e} et 3^{e} au collège …
23. An : Tu vois Maurice, c'est pour ça que je t'ai dit qu'il fallait qu'on le fasse.
24. Ma : Au dernier contrôle, le genre d'équations que tu as donné, mes élèves ne les font pas non plus.
25. C : Voilà donc j'aimerais qu'on travaille ensemble là-dessus, d'essayer d'intégrer l'algorithmique en laissant un peu de souplesse dans l'adaptation du scénario. Je suis aussi partie sur les formes polynomiales du 1^{er} et du 2^{nd} degré avec comme objectif que les élèves sachent résoudre des équations du premier et du second degré et fassent la distinction entre les inconnues et les paramètres, même si on ne leur donne pas ce vocabulaire…
26. Ma : Oui, oui, au moins qu'ils voient le rôle de chacun.
27. C : Donc la première séance, ce serait de prendre leur représentation des équations, de voir comment ils se situent et d'aboutir éventuellement en fin de séance à une distinction entre le premier et le second degré et qu'il y a des subtilités dans la résolution des équations. Par exemple, pour le premier degré, il y a des cas différents, tout ne se résout pas de la même façon, selon qu'il y a un x dans un membre seulement ou s'il est présent dans les deux membres de l'équation. Pour la restitution en grand groupe, jusqu'où aller dans le débat ?
28. An : Tu ne vas pas être déçue … avec mes élèves.
29. C : Ce n'est pas grave … On peut voir des choses très intéressantes.
30. Ma : Comme l'importance des coefficients ? Je pense qu'ils sont obsédés par les coefficients…
31. C : Donc c'est la première séance. Je voudrais vous montrer les équations que j'ai proposées. Il y en a trop… On peut piocher là-dedans. Il faudrait savoir combien vous voulez en garder ? Et pourquoi pas proposer des équations avec d'autres paramètres, ou si d'autres vous semblent plus pertinentes, par exemple une ou deux avec un x en dénominateur …c'est peut-être pas mal …
32. An : Je ne sais pas si ça vaut la peine de rajouter ce niveau de difficultés là, ceci dit …
33. Ma : Le problème, c'est que les fonctions homographiques sont au programme de seconde et que voilà, c'est une chose à laquelle ils seront confrontés, même si c'est pour les mettre de côté.
34. C : Elles peuvent apparaître à la première séance et ne plus apparaître après.
35. Ma : Voilà.
36. C : Parce que si je vous montre la trame, à la première séance, on trie les équations du premier et second degré et les autres. Pour la deuxième séance, c'est une séance en salle informatique en binômes ou seuls.
37. Ma : c'est pas mal en binôme.

38. C : C’est vous qui choisissez …
39. À la deuxième séance en salle info, on crée un algorithme qui sait résoudre des équations du premier degré. Alors, ma première idée était de résoudre des équations de la forme $ax + b = c$.
40. Ma : il peut y avoir c nul ou non nul …
41. C : Oui, mon idée était de les traiter ensemble pour insister sur le fait qu’il n’y ait qu’un seul x dans un des membres de l’équation et que ce n’est pas important d’avoir pour le second membre « égal 0 » ou « égal un autre nombre ». L’idée est de reprendre la technique pour résoudre ce type d’équations et de la faire programmer sur Algobox.
42. C : (*En montrant le programme ci-dessous réalisé sur Algobox*)

```
Résolution des équations du type : ax + b = 0
VARIABLES
  a EST_DU_TYPE NOMBRE
  b EST_DU_TYPE NOMBRE
  x EST_DU_TYPE NOMBRE
DEBUT_ALGORITHME
  LIRE a
  LIRE b
  SI (a!=0) ALORS
    DEBUT_SI
     x PREND_LA_VALEUR -b/a
     AFFICHER "-b/a="
     AFFICHER x
     FIN_SI
     SINON
       DEBUT_SINON
       SI (b==0) ALORS
         DEBUT_SI
         AFFICHER "tout nombre est solution"
         FIN_SI
         SINON
           DEBUT_SINON
           AFFICHER "pas de solution"
           FIN_SINON
       FIN_SINON
 FIN_ALGORITHME
```

J’ai fait ce programme qui résout les équations du type $ax + b = 0$ mais les élèves ne vont pas tous voir quand on teste l’algorithme qu’on peut résoudre, par exemple une équation comme $2x + 1 = 3$ avec cet algorithme en prenant $a = 2$ et $b = 1 – 3 = -2$; ils peuvent ne pas voir qu’on calcule b de tête… Ou alors on leur fait programmer $ax + b = c$ et les élèves entrent a, b et c.

43. An : Moi, je préfèrerais la deuxième façon …
44. Ma : C’est marrant parce que tu parles de ce zéro depuis un moment … Ils ont subi le choc des équations du second degré et c’est pour ça qu’ils se focalisent sur ce zéro et justement, si on veut avancer, il faudrait que ce soit $ax + b = c$ et pas $ax + b = 0$.
45. C : Pas de souci, on part là-dessus. Qu’est-ce que t’en penses, Annabelle ?
46. An : D’accord pour moi aussi.
47. An : Alors c’est à eux de créer l’algorithme ?
48. C : Oui, oui.
49. An : Et ils peuvent y arriver ?
50. C : Il faudra sans doute donner un coup de main …
51. An : Au départ, on leur donne des équations du premier degré ?
52. C : Oui. On part des équations qu’on a données à la première séance de tri, en en enlevant encore pour qu’il n’y en ait pas trop. Les équations seront écrites sur une feuille que les élèves ont à rendre. J’ai préparé un premier jet de consigne pour la feuille d’énoncé (voir annexe A12): *Réaliser avec Algobox un ou des algorithmes permettant de résoudre les*

équations ci-dessous. Résoudre les équations proposées à l'aide de votre algorithme et indiquer à côté de chaque équation sa ou ses solutions, si elles existent.

53. C : Ma première idée était de proposer à la première séance info de programmer des équations du type $ax + b = c$ et à la séance suivante des équations du type $ax^2 + b = c$. Parce que justement, les élèves les résolvent de la même façon … et les aider à les différencier.
54. Ma : Attends, ici la confrontation de ces deux équations me trouble. Parce que en fait pour moi, c'est a priori c'est pas factorisable ($ax^2 + b = c$), ou du moins c'est une factorisation compliquée. Mais au départ, on les traite de la même façon, ça ne devient différent qu'à la fin.
55. C : Mais justement dans un cas il n'y a qu'une solution et là il y en a deux. Dans le test diagnostique que j'ai fait, il y a 50% des élèves qui ne trouvent qu'une solution à $x^2 = 7$ … la racine de 7 et encore, pour ceux qui savent la résoudre en pensant à une racine carrée …
56. Ma : Mais le problème, c'est que l'erreur n'est pas au niveau de la transformation, c'est que le programme de troisième n'est absolument pas assimilé, ce n'est pas dans tout le travail de transformation auparavant.
57. An : la transformation $x^2 = -\frac{b}{a}$ est la même …*(pour l'équation* $ax^2 + b = 0$)
58. Ma : c'est la même que celle-là (*pour l'équation* $ax + b = 0$). Celle-là, ils la font naturellement. En fait, le problème c'est …
59. An : quand ils arrivent à la fin …
60. Ma : c'est quand ils arrivent à la fin. Donc si tu veux, dans la résolution, … J'essaie de voir comment moi je fais, c'est difficile…
61. C : Oui ...
62. Ma : Des fois je sens et je ne sais pas l'exprimer. Pour traiter les équations, au moment de l'algorithme …
63. C : Justement au moment de passer à l'algorithme, il faut avoir compris que celle-là admet une solution, et celle-là deux, en général …
64. An : Mais pour l'algorithme, tu fais quoi, il faut les avoir distinguées avant l'algorithme ?
65. C : Mais oui, tu fais deux algorithmes différents.
66. Ma : Ah, tu fais deux algorithmes différents !
67. C : Ah oui !
68. Ma : Ah d'accord, C'est ça qui me troublait … Je me disais que ça …
69. C : Oui, ça serait trop compliqué sinon. Donc, je récapitule, à la deuxième séance, je pensais qu'on ne traiterait que les équations du premier degré comme celles-là (*de la forme* $ax + b = c$). À la deuxième séance, j'avais imaginé, en classe entière, en binômes, mais on peut le faire en demi-classe, c'est le prof qui est au tableau avec son vidéoprojecteur et qui montre un algorithme déjà programmé avec Algobox, et la consigne serait : *Voici un algorithme construit à l'aide du logiciel Algobox. Expliciter quelle est sa fonction. Le faire fonctionner pour quelques exemples permettant de tester les différentes parties de l'algorithme présenté. Le travail sera rendu sur feuille (un écrit par binôme).*On leur donne un algorithme qui fait (voir annexe A13)… (*le chercheur montre l'algorithme construit sur l'ordinateur, qui résout des équations du type* $ax + b = cx + d$). Alors on a au début : « lire a », « lire b », lire « c », « lire d » …et après « alors *x* prend la valeur $\frac{d-b}{a-c}$.
70. Ma : Whaou ! Et sans mettre le titre de l'algorithme, ils doivent retrouver ce qu'il fait ?
71. C : Oui.
72. Ma : Fais voir, fais voir …Pour le gamin, s'il arrive à voir ça …
73. C : Oui ?
74. Ma : Mais il aura fait l'autre algorithme avant …

75. C : Oui, il aura fait l'autre avant, celui de $ax + b = 0$. Mais on peut aussi mettre des étapes, comme de proposer des valeurs de *a, b, c, d* pour que les élèves le fassent fonctionner à la main, et aussi leur demander de trouver des valeurs pour que l'algorithme passe par toutes les boucles… Je reprends, j'avais donc pensé faire une séance en deux parties : une première partie où on leur donne l'algorithme projeté au tableau et aussi sur papier (*algorithme qui résout des équations de la forme* $ax + b = cx + d$) puis une seconde partie où on leur demanderait de construire un algorithme sur papier qui permette de résoudre que des équations de la forme $x^2 = a$. La consigne serait : *On s'intéresse maintenant aux équations du 2^nd^ degré suivantes. Les résoudre à la main et écrire un algorithme permettant de les résoudre toutes*. On ne demande ici que la structure de l'algorithme, même s'il n'est pas dans le langage de programmation d'Algobox, parce que ça fait aussi partie du programme de savoir l'écrire d'abord sur papier. Je pensais donc découper la séance en deux phases. Vous en pensez quoi ?
76. An : Les équations, elles sont comment ?
77. C : C'est celles-là. (*Le chercheur montre les équations suivantes :* $x^2 = 7$ *;* $x^2 = -4$ *;* $x^2 = (2{,}07)^2$ *;* $\frac{x^2}{27} = 0{,}01$ *;* $x^2 - 5 = 7$ *;* $\sqrt{3}x^2 = -2$ *;* $7x^2 = 7$ *;* $\frac{x^2}{7} = 21$ *;* $11 = 5x^2 + 2$ *;* $3 = 2 - x^2$; $9x^2 - 16 = 0$ *;* $9x^2 - 7 = 0$). Mon objectif ici est que l'élève sache les résoudre et qu'il différencie les cas où x^2 égal un nombre positif et x^2 égal un nombre négatif. Donc il y a une boucle ici à faire dans l'algorithme. Ensuite, il y aurait une troisième séance …mais ça va peut-être être un peu long ?
78. An : Oui, c'est intéressant, mais on n'aura pas le temps de tout faire, c'est sûr.
79. C : Donc dernière séance, faire programmer avec les contraintes du logiciel l'algorithme réalisé sur papier la séance précédente (*forme* $x^2 = a$) en première partie, soit tous ensemble avec le prof au tableau qui le réalise au vidéo projecteur sous la dictée des élèves, puis une deuxième partie, mais j'ai peur que ce soit trop long, on s'intéresse aux équations du second degré qu'on n'a pas encore traité comme celles-là … . (*Le chercheur montre les équations suivantes :* $(x + 1)^2 = 9$; $x^2 + 6x + 9 = 0$; $x^2 + 6x = 0$; $x^2 - 8x = 0$; $x^2 - 8x + 15 = -1$; $x^2 - 8x + 15 = 0$; $x^2 + 3x = \frac{7}{2}$; $x^2 + 3x = 0$).
80. An : A aucun moment, on n'a parlé de développer, de factoriser ?
81. C : Non, mais peut-être faut-il une reprise nécessaire entre deux séances pour faire un bilan ?
82. An : Alors là en fait, il y a des équations qu'on n'a jamais résolues ?
83. C : Oui, $x^2 - 8x + 15 = 0$ par exemple.
84. Ma : Alors moi en fait, j'ai une réserve … sur la partie $x^2 = a$. Autant, pour $ax + b = 0$, je suis complètement convaincu de l'intérêt, mais ce qui me pose question, quand moi j'enseigne $x^2 = a$, je passe presque systématiquement soit par le graphique, soit par la factorisation …
85. An : Oui, moi aussi.
86. Ma : Si tu veux pour les faire réfléchir sur ne pas oublier la seconde racine, c'est là que je trouve la courbe ou la factorisation intéressantes. C'est pas d'isoler x^2, c'est l'obsession de la factorisation.
87. C : C'est de faire par exemple pour $x^2 = 7$, d'abord $x^2 - 7 = 0$ puis $(x - \sqrt{7})(x + \sqrt{7}) = 0$, ...
88. Ma : Et si tu veux après, graphiquement … C'est vrai en seconde ou en STG, comme ils ont vu ça comme ça en collège, quand on le fait graphiquement, on se ramène tout le temps à $\sqrt{a}$ et $-\sqrt{a}$ pour résoudre $x^2 = a$. Mais quand même ensuite, chez moi c'est presque systématique de faire factoriser.
89. C : Donc tu proposerais plutôt $x^2 = 7$ et $9x^2 - 16 = 0$ ensemble ?

90. Ma et An : Oui !
91. C : Donc tu donnes la règle : on met sous la forme d'un produit de facteurs du premier degré et on utilise quand un produit de facteurs est nul, alors l'un des facteurs est nul.
92. An : Oui, toujours les faire factoriser.
93. Ma : Oui, le fait d'isoler x^2 et puis de le traiter comme ça, c'est l'idéal quand ils ont dépassé ce stade, mais le problème, c'est que si on insiste trop sur cet aspect-là, ils vont isoler x^2 aussi dans des cas comme ça ($x^2 - 8x + 15 = -1$). Je pense que de les faire travailler sur ce type d'équations comme ça, tant qu'elles ne sont pas maîtrisées, les factorisations non plus, je trouve que c'est dangereux de leur faire résoudre des équations $x^2 = a$ de cette façon-là. En STG, c'est moins un problème, puisqu'on ne les fait plus factoriser, pratiquement, on leur fait faire ça graphiquement. Donc, ils les résolvent de cette façon. Mais en seconde, je trouve ça franchement, je trouve ça …
94. An : Ils font ça, ils mettent les x^2 et les x d'un côté et ils factorisent …
95. C : OK. À partir de là, expliquez-moi ce qu'on fait.
96. Ma : Ah, il faut qu'on réfléchisse.
97. C : Alors, je vous ai montré la trame et comment fait-on maintenant ? Comment on met en forme ? En fait, moi aussi j'ai toujours fait factoriser $x^2 = a$ par $(x - \sqrt{a})(x + \sqrt{a}) = 0$, mias pour moi justement, ça n'empêchait pas quand je proposais celles-ci, pour faire l'algorithme, de faire programmer les solutions $\sqrt{a}$ et $-\sqrt{a}$.
98. Ma : Eh oui, je comprends…
99. C : C'était donc une catégorie d'équations. Et quand on a $x^2 - a^2$ c'est $(x - a)(x + a)$ qu'il faut faire, c'est une autre catégorie. Quand on a celle-là ($x^2 + 3x = 0$), c'est la factorisation par x et pour moi, c'est encore une catégorie. C'est une fois que les élèves ont reconnu la forme, qu'ils procèdent par une technique de résolution qui est toujours la même pour une forme donnée. Quand je vois les équations, je dois déjà reconnaître leur forme…
100. Ma : Ce que tu me dis là, moi j'accroche… Mais le $x^2 = a$ non, j'accroche pas.
101. An : Non, c'est pas pareil…
102. C : Pourquoi ?
103. Ma : Parce que quand tu isoles le x^2, tu ne fais pas de factorisation …
104. C : Mais pourquoi vous dites qu'on isole le x^2 ? Quand on va programmer l'algorithme, on va demander de donner comme solutions $\sqrt{a}$ et $-\sqrt{a}$. On peut les obtenir par factorisation ces deux solutions, plutôt que par une règle qui dirait « les solutions de $x^2 = a$ sont $-\sqrt{a}$ et $\sqrt{a}$ », ça n'empêche pas. Mais au moment de programmer les solutions, c'est bien ça qu'il faut rentrer dans l'algorithme ? Ça n'empêche pas d'avoir trouvé les solutions par factorisation …
105. An : Ah, oui. On regarde si a est positif ou négatif …
106. Ma : Ah bon si c'est prévu comme ça.
107. C : Non, encore une fois c'est souple. Si vous préférez mettre ensemble ….
108. Ma : Non je ne remets pas en cause ce que tu as prévu, j'essaie d'imaginer … quand ils auront cherché l'algorithme ici (*équations $ax + b = 0$*), le problème est que quand ils vont être ici (*équations $x^2 = a$*) ….
109. C : Oui …
110. Ma : Bien sûr, mais ceux qui vont considérer $x^2 = a$, et ils vont dire ensuite si a est négatif, je dis telle chose et si a est positif, je dis autre chose. À ce moment-là, ils n'ont pas du tout la référence à la factorisation. Tu vois c'est ça. Les bons, si tu leur donnes tel quel … tu penses à l'algorithme par la factorisation. Mais eux, je pense qu'ayant fait l'autre avant, ils vont isoler x^2, puis les bons, ils vont arriver au bon résultat. Mais à la fin de la séance, ils auront associé ce type d'équation à « j'isole le x^2 » et si c'est positif de l'autre côté, on a deux racines solutions. Ce sera cette façon de résoudre et la factorisation

n'aura pas été du tout évoquée. Sauf si on les aiguille, mais ça ne sera pas du tout naturel après avoir fait les équations $ax + b = 0$.

111. C : D'accord, donc tu voudrais mettre ensemble quel type d'équations ? Toutes celles du second degré ?

112. Ma : Oui.

113. C : Mais alors comment tu les fais programmer ?

114. Ma : Ben oui, c'est ça, je ne sais pas …

115. An : Trois séances pour moi qui suis à la bourre, ça me fait beaucoup …

116. C : Et combien tu pourrais en faire ?

117. An : Deux maximums, et toi Maurice ?

118. Ma : Deux. Mais j'en reviens à ce x^2. C'est vrai que pour des équations $ax^2 + b = c$, c'est pas une hérésie de leur faire isoler x^2 … Mais dès qu'il y a x^2 et x dans la présentation de l'équation, c'est terminé, on ne peut plus faire ça. En fait, $ax^2 + b = c$ ce serait comme une série à part, une sorte d'équations intermédiaires …

119. C : Je vais te montrer, j'ai fait un programme global qui prend en charge toute sorte d'équations. Mais je ne sais pas si c'est intéressant pour les élèves … Le voilà.
(Le chercheur montre sous Algobox le programme transcrit ci-dessous)

```
Résolution des équations du second degré selon leur "forme"
VARIABLES
a EST_DU_TYPE NOMBRE
x EST_DU_TYPE LISTE
réponse EST_DU_TYPE CHAINE
b EST_DU_TYPE NOMBRE
DEBUT_ALGORITHME
AFFICHER "Équation de la forme x² = a ?"
LIRE réponse
SI (réponse=="oui") ALORS
DEBUT_SI
LIRE a
SI (a<0) ALORS
DEBUT_SI
AFFICHER "pas de solution"
FIN_SI
SINON
DEBUT_SINON
SI (a==0) ALORS
DEBUT_SI
AFFICHER "une seule solution : 0"
FIN_SI
SINON
DEBUT_SINON
x[1] PREND_LA_VALEUR sqrt(a)
x[2] PREND_LA_VALEUR -sqrt(a)
AFFICHER "deux solutions : "
AFFICHER x[1]
AFFICHER " et "
AFFICHER x[2]
FIN_SINON
FIN_SINON
FIN_SI
SINON
DEBUT_SINON
AFFICHER "Équation de la forme (x-b)² = a ?"
LIRE réponse
SI (réponse=="oui") ALORS
DEBUT_SI
LIRE a
LIRE b
SI (a==0) ALORS
DEBUT_SI
```

```
AFFICHER "une seule solution : "
AFFICHER b
FIN_SI
SINON
DEBUT_SINON
x[1] PREND_LA_VALEUR sqrt(a)+b
x[2] PREND_LA_VALEUR -sqrt(a)+b
AFFICHER "deux solutions : "
AFFICHER x[1]
AFFICHER " et "
AFFICHER x[2]
FIN_SINON
FIN_SI
SINON
DEBUT_SINON
AFFICHER "Équation du type ax²+bx = 0 ?"
LIRE réponse
SI (réponse=="oui") ALORS
DEBUT_SI
LIRE a
LIRE b
x[1] PREND_LA_VALEUR 0
x[2] PREND_LA_VALEUR -b/a
AFFICHER x[1]
AFFICHER " et "
AFFICHER x[2]
FIN_SI
SINON
DEBUT_SINON
AFFICHER "Équation du type x² +2ax+a² = 0 ? "
LIRE réponse
SI (réponse=="oui") ALORS
DEBUT_SI
LIRE a
x[1] PREND_LA_VALEUR -a
AFFICHER "une seule solution"
AFFICHER x[1]
FIN_SI
SINON
DEBUT_SINON
AFFICHER "si l'équation n'est pas d'un des types précédents, alors je ne sais pas résoudre ..."
FIN_SINON
FIN_SINON
FIN_SINON
FIN_SINON
FIN_ALGORITHME
```

120. C : On peut chercher la forme d’une équation et on a sa résolution selon son type. J’ai regroupé ici plusieurs algorithmes. Et à la fin on a à la sortie *« si l'équation n'est pas d'un des types précédents, alors je ne sais pas résoudre ...* »

121. An : Oui, sauf que t’as pas mis le cas $b^2x^2 + 2abx + a^2 = 0$.

122. C : J’ai choisi de ne pas en mettre dans les équations que j’ai proposées, en considérant qu’ils le feraient en première. Donc j’ai proposé des équations avec $b = 1$. Mon idée aussi c’est quand ils résolvent celle-ci : $x^2 - 8x + 16 = 0$ avec l’algorithme ci-dessus, d’arriver à la question de comment on peut résoudre celle-là : $x^2 - 8x + 15 = 0$ sachant que je sais résoudre : $x^2 - 8x + 16 = 0$.

123. Ma : Pour moi, ton activité, là, c’est une excellente activité de début de première. Déjà, il y a de l’algorithmique en première et quand on fait les équations du second degré, comme mise au point, avant de faire la forme canonique, avant tout ça, l’algorithme là, oui. Là vraiment, je vois un sens. En plus la forme canonique, c’est la mise en forme toujours de la même façon de faire, ce serait vraiment très bien. Mais là, honnêtement

pour le carré, je ne le sens pas du tout, dans la généralisation. Après, éventuellement, celles avec uniquement avec x^2. Mais dans l'apport pour les gamins, soit il faudrait faire beaucoup de séances, mais en une séance ou deux séances, arriver à leur faire comprendre à la fois ce qu'il faut qu'ils aient compris dans la tête et en plus l'aspect algorithmique et de classement … je trouve que c'est trop lourd et moi, je ne me vois pas arriver à expliquer, à mettre en forme et à en tirer parti. En revanche, cette idée-là, ça me fait penser pour l'algorithmique en première en début d'année à la mise en forme canonique, au travail de classification des équations.

124. An : À la rigueur, ça pourrait être une des premières séances de première …
125. Ma : une des premières séances de l'année.
126. C : On peut le faire l'année prochaine. Tu as une première S l'année prochaine ?
127. An : Moi, j'ai pas de première, peut-être une première ES …
128. Ma : Les premières ES ont les équations du second degré aussi …Les premières S ont moins de difficultés avec ça au départ donc ça pourrait être intéressant de le faire en première ES.
129. C : Et là, vous garderiez la partie premier degré ?
130. Ma et An : Non, non.
131. C : Et pour les classes de seconde ?
132. Ma : Ah oui, en seconde, je la sens bien.
133. An : Ah oui et la classification des équations aussi.
134. Ma : Ah oui et à la limite pour voir que ces équations-là (*du second degré*) ne rentreraient pas dans le schéma de l'algorithme qu'on a créé.
135. C : Et que pour celles-là, il faut faire autrement …
136. Ma : Oui, mais là franchement, le second degré, je ne le sens pas du tout.
137. An : Le problème c'est ceux qui sont très forts, en binômes ou en trinômes, c'est eux qui font tout.
138. Ma : Mais je les mettrai tout seuls.
139. An : Moi aussi, même pour la classification.
140. C : Oui. Alors, on récapitule ? Donc cette année en seconde, on fait quoi ?
141. Ma : alors en première séance, le classement.
142. C : Comme ça, avec les affiches, par groupes ? Mais est-ce qu'on fait un bilan à la fin ? Les élèves viennent tour à tour commenter leur affiche ?
143. Ma : Combien on en donne d'équations ?
144. C : Et bien justement, combien pensez-vous qu'il soit judicieux d'en mettre ?
145. Ma : Il en faut quand même pas mal …
146. An : Je dirais 24-25, parce que s'il y en a trois qui se battent en duel …
147. C : Il faut quand même penser qu'il doit rester du temps pour regarder celles qu'ils ont mis ensemble. Je vous préparerai une grande affiche avec celles que vous aurez choisies.
148. Ma : Alors quand ils les auront classées, on demandera parmi celles-là quelles sont celles qu'on peut résoudre en utilisant toujours la même méthode ? Quelles sont celles pour lesquelles la résolution est presque automatique ?
149. C : Peut-être cela peut faire partie de la consigne ce que tu proposes là ?
150. Ma : On pourrait dire qu'on voudrait concevoir un algorithme qui pourrait résoudre de façon automatique certaines de ces équations. Parmi celles-là, quelles sont celles qui leur paraissent simples à résoudre ? Ça leur permettrait peut-être de penser à isoler celles qui sont du premier degré.
151. C : Donc là, tu orientes presque en disant premier ou second degré.
152. Ma : Non, je ne leur dis pas …
153. C : Mais peut-être qu'ils vont quand même mettre des équations du premier degré avec des équations du second degré.

154. An : Mais avec l'algorithmique sur Algobox, c'est quand même essentiel, tu travailles avec des valeurs approchées …
155. C : Oui, mais bon …
156. An : Mais si, si tu leur donnes le droit de remplacer, ils sont xxx. Moi, ça me gêne, ça.
157. C : Mais il suffit peut-être de dire clairement aux élèves : n'oubliez pas qu'Algobox travaille en valeurs approchées et au lieu de vous donner $\sqrt{2}$, il vous donne 1,414 … C'est sûr que ça aurait été mieux si le logiciel donnait les valeurs exactes, mais je crois que l'intérêt est d'abord de reconnaître ce qui est a, ce qui est b, etc. dans une équation pour rentrer les coefficients dans Algobox. Par exemple pour $7 - x = 1$ qu'il faut identifier à $ax + b = c$, reconnaître que a c'est -1, que b c'est 7 et que c c'est 1, c'est important. Tu rentres les valeurs exactes. Ça aurait été mieux si Algobox travaillait en valeurs exactes, mais franchement, pour moi, ce n'est pas le problème là.
158. Ma : Oui, tu as prévu des coefficients comme racine de 2, par exemple …
159. C : Alors pour la première séance ?
160. Ma : Pour la présentation, je leur dirais bien qu'il y a une masse d'équations et qu'on aimerait bien qu'ils les classent mais avec un but en plus … Parce que sinon, ils pourraient dire on va mettre celles-là ensemble parce qu'il y a des racines carrées. Voilà !
161. C : Oui, mais justement…
162. An : Oui, justement j'aimerais bien voir ce qu'ils voient, eux.
163. C : Oui, faire ressortir leur représentation des équations…
164. Ma : Oui, mais alors là pour toi, c'est évident quand tu dis classement…
165. An : Non, non, tu ne sais pas comment ils vont les classer…
166. Ma : Oui, mais justement, tu es d'accord avec moi, il faut que nos consignes soient claires. Si on leur dit simplement « vous les classez », sans leur préciser les classer dans quel but…
167. An : Moi j'attends, je circule et je regarde ce qu'ils font pendant cinq minutes.
168. Ma : Alors il est tout à fait légitime à ce moment-là qu'un élève te mette les racines carrées ensemble.
169. An : Et pourquoi ce serait pas légitime ?
170. Ma : Mais moi je pense au temps. Notre but, c'est xxx
171. An : Et bien moi, je les laisse faire. Ce premier classement, ça va être fait en 30 secondes. Et après… tu les arrêtes.
172. C : Après tu leur donnes le but. Mais tu les laisses faire au départ. Moi, je crois que c'est important de laisser sortir ce qu'ils pensent.
173. Ma : Moi je trouve que la consigne n'est pas claire.
174. An : Mais justement…
175. Ma : Quand on dit « vous avez des équations et vous les classez », c'est « vous les classez dans le but d'une résolution », en ajoutant ça.
176. An : Moi je dirais d'abord « vous avez des équations et vous les classez »…
177. Ma : Et après tu dis « dans le but d'une résolution » ?
178. C : Oui, plus tard.
179. An : Cinq minutes après, pas trois quarts d'heure après, bien sûr… Si tu les laisses s'enferrer dans leur truc, c'est pas la peine.
180. C : C'est intéressant parce que finalement tous les deux vous n'allez pas faire pareil. C'est intéressant de voir ce que vous allez dire, ce que ça va changer de le dire tout de suite ou pas… Donc toi Maurice tu le dirais tout de suite ?
181. Ma : Ah oui, oui, oui, je le dirais tout de suite. J'ai détesté ça quand j'étais élève, avoir des consignes qui étaient floues. Je voulais bien que ça soit compliqué, mais à condition que ça soit clair. Si j'étais élève, on me demande de les classer, si je ne sais pas

pourquoi… Peut-être à l'époque, je n'aurais pas réagi pareil mais me connaissant, j'aurais refusé, à la limite j'aurais dit mais je les classe pour quoi ?

182. An : Mais c'est que cinq minutes et tu ne le fais pas tout seul.
183. C : Et ça s'appelle quand même des « équations »…
184. Ma : Oui…
185. An : Mais après, effectivement, on le reformule en disant…
186. Ma : Non mais vous m'avez convaincu maintenant si tout de suite après… Je suis convaincu de l'intérêt aussi qu'ils le fassent à leur façon…
187. An : On pourra aussi tout de suite analyser si une racine carrée c'est un problème dans une équation, qu'est-ce qu'on cherche à faire dans une équation, racine carrée de 2 c'est quoi pour les élèves, c'est un nombre… Est-ce que racine carrée de 2 va être le problème dans l'équation ?
188. C : Et oui, si toi tu ajoutes que racine de 2 c'est un nombre comme un autre, c'est enfin leur faire prendre conscience que… En fait, racine de 2 n'a peut-être pas encore le statut de nombre pour eux.
189. An : Par contre, en orientant vers un classement dans le but de résoudre, est-ce qu'il va sortir ce classement ?
190. C : On peut se le demander … Alors c'est Ok pour cette séance ?
191. An : Oui, je la sens bien.
192. Ma : Moi aussi.
193. C : Alors en classe entière ?
194. An : Oui, ça se gèrera…
195. C : Par contre, pour passer les affiches …au point de vue timing ?
196. An : Oui…
197. C : Si vous ne passez pas toutes les affiches, c'est pas grave. Vous en choisirez quelques-unes, vous regarderez les classements qu'ils ont faits…
198. An : Oui, c'est pas un problème. Au bout d'un moment, tout se recoupe…
199. C : Est-ce que vous allez demander un titre pour chaque classe ? Ou est-ce que vous ne le demanderez qu'à l'oral ?
200. An : On peut voir comment ça tourne. Forcément, il y aura un titre, même sous-entendu, …
201. C : Mais est-ce que vous voulez le voir écrit sur l'affiche ?
202. An : Je ne sais pas, il ne faut pas que ça les bloque non plus les titres…
203. Ma : Oui, qu'ils ne savent pas expliquer…
204. An : Oui, ils classent par paquets…
205. C : Le rapporteur le dira oralement, c'est plus facile. Donc je vous envoie mes équations pour donner une idée et après vous faites un choix ?
206. An : Là-dedans, il n'y a rien qui me choque...
207. C : Il faut choisir le nombre d'équations aussi… Pensez-y pour le bilan. S'il faut en regarder 25 ou 28 et voir où ils les ont classées, et ça pour chaque groupe…
208. An : ça va faire beaucoup… C'est un problème de temps.
209. C : C'est pour ça, est-ce vous voulez faire un petit bilan à la fin ou est-ce que vous allez le faire au fur et à mesure des affiches ?
210. An : Ah non, je ne me vois pas faire un petit bilan à la fin mais je le ferai au fur et à mesure.
211. Ma : C'est peut-être une idée farfelue mais je verrais bien que chaque groupe fasse un premier classement dans un premier temps et que dans une deuxième phase, les groupes se mettent deux par deux pour comparer leur classement. Simplement, pour qu'il y ait ce phénomène de réflexion « tiens vous avez classé comme ça, nous on a classé comme ça ».

212. C : Déjà se mettre d'accord à quatre pour les classer, ça ne va pas être simple… Mais c'est une bonne idée.
213. Ma : Ce dont j'ai peur, c'est que dans le groupe de quatre, il y en ait un qui prenne le dessus et puis que les autres acceptent …
214. An : Il faut les faire avant les groupes. Normalement, on dit que le pur équilibre, c'est trois, c'est pas quatre …
215. C : Vous avez combien d'élèves ?
216. An : Si on fait trois, avec ton idée Maurice, ils sont 35 …
217. C : Ça fait 11 ou 12 groupes, on ne passera pas 12 affiches…
218. Ma : C'est pour ça, si on fait dans un premier temps des groupes de trois, et ensuite, on regroupe deux groupes de trois, ils se mettent d'accord par six en faisant une synthèse et en comparant leur classement et ça fait six affiches.
219. An : J'en ai pas mal à séparer des joyeux lurons …
220. C : Donc le bilan se fait au fur et à mesure des affiches ?
221. An : Oui. Donc on fait comme ça, des groupes de trois puis des groupes de six et une affiche par groupe de six.
222. Ma : Mais tu vas devoir faire beaucoup de cartons pour les équations …
223. C : On peut peut-être limiter le nombre d'équations à 20 ?
224. An : Oh oui, 20 c'est bien.
225. Ma : Oh oui, d'accord.
226. C : Je vous envoie le fichier avec les 40 équations (voir annexe A11) et vous choisissez.
227. Ma : J'en mettrai une de la forme $(ax + b)(cx + d) = 0$ et une de la forme $(ax + b) + (cx + d) = 0$. J'en mettrai aussi une avec une fraction rationnelle, comme par exemple : $\frac{3x + 7}{5} = 4$. Je n'en vois pas comme celle-là.
228. C : Il faut les regarder de près … C'est pour ça que je vous envoie le fichier, à aménager selon vos souhaits.
229. An : Et après ?
230. C : Pour la séance 2 ?
231. An : Oui, je ne vais faire que deux séances.
232. C : Oui, bon… Alors tu ne veux algorithmiser que le premier degré ?
233. An : Oui, je crois que … j'ai peur que ça les embrouille. Par contre, $ax + b = c$, ça me paraît pas mal, plutôt que $ax + b = 0$?
234. Ma : Oui, moi je préfère $ax + b = c$.
235. C : Oui, effectivement, le c c'est peut-être mieux parce que ça montre que zéro n'est pas particulier pour une équation du premier degré…Et qu'est-ce qu'on fait des équations de la forme $ax + b = cx + d$? On peut proposer en travail à la maison l'algorithme sur papier qui résout les équations de ce type et les élèves doivent dire ce que cet algorithme fait. Comme ils auront déjà fait en classe l'algorithme pour $ax + b = c$, ça devrait être possible … Vous le donnez à faire à la maison et je le corrige.
236. Ma : Oui, c'est bien.
237. An : Alors, c'est comment ? Il faut qu'ils comprennent …
238. C : Attends, je te le montre. *(Le chercheur montre sous Algobox le programme transcrit ci-dessous)*

```
VARIABLES
  a EST_DU_TYPE NOMBRE
  b EST_DU_TYPE NOMBRE
  c EST_DU_TYPE NOMBRE
  d EST_DU_TYPE NOMBRE
  x EST_DU_TYPE NOMBRE
DEBUT_ALGORITHME
```

```
 LIRE a
 LIRE b
 LIRE c
 LIRE d
 SI (a!=c) ALORS
   DEBUT_SI
   x PREND_LA_VALEUR (d-b)/(a-c)
   AFFICHER x
   FIN_SI
   SINON
     DEBUT_SINON
     SI (b==d) ALORS
       DEBUT_SI
       AFFICHER "tout nombre est solution"
       FIN_SI
       SINON
         DEBUT_SINON
         AFFICHER "pas de solution"
         FIN_SINON
     FIN_SINON
FIN_ALGORITHME
```

(Problème de son sur la caméra. Reprise cinq minutes plus tard de l'enregistrement.)

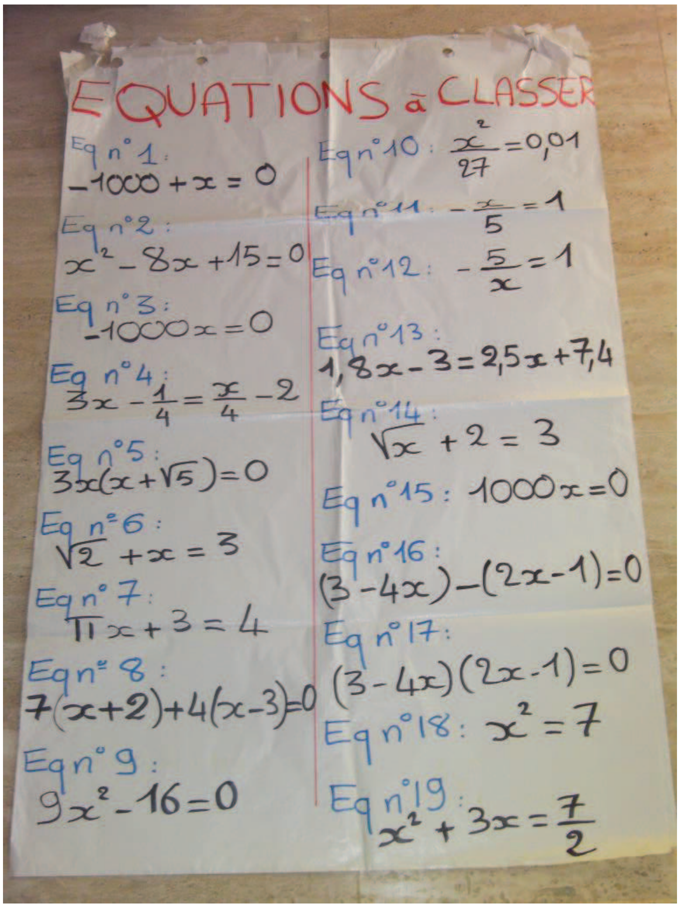
239. C : Donc vous êtes partant pour faire ces deux séances dans vos classes de seconde ?
240. An : Oui, mais le second degré, je ne le sens pas …
241. Ma : Par contre, en première ES, ce serait bien, en début d'année.
242. C : Je vous envoie le scénario d'après ce qu'on a dit et je mets tout ça au propre. Je vais vous donner aussi une autorisation de filmer. On fixe les dates ?
243. An : Le jeudi de la rentrée pour la première séance *(des vacances de Pâques)* et pour la deuxième séance le lundi et le mardi. Mais je te le dis, toutes les séances marchent mieux dans le premier groupe …
244. C : Merci à tous les deux.

(Fin de l'entretien).

A17. Équations choisies par les professeurs Annabelle et Maurice (Situation n°1 – Séance 1)

Rappelons que les professeurs Annabelle et Maurice travaillent ensemble pour préparer l'ensemble des cours d'une classe de niveau commun. Suit ici la liste des équations qu'ils ont retenues à partir des équations proposées par le chercheur en annexe A11 et une photographie de l'affiche réalisée par le chercheur afin de faciliter la discussion lors de la mise en commun à la fin de la situation n°1. Cette affiche est accrochée au tableau dès le début de la recherche, en même temps que les cartons individuels portant chacun une équation sont distribués aux élèves.

Équation 1 : $-1000 + x = 0$
Équation 2 : $x^2 - 8x + 15 = 0$
Équation 3 : $-1000x = 0$
Équation 4 : $3x - \frac{1}{4} = \frac{x}{4} - 2$
Équation 5 : $3x(x + \sqrt{5}) = 0$
Équation 6 : $\sqrt{2} + x = 3$
Équation 7 : $\pi x + 3 = 4$
Équation 8 : $7(x + 2) + 4(x - 3) = 0$
Équation 9 : $9x^2 - 16 = 0$
Équation 10 : $\frac{x^2}{27} = 0{,}01$
Équation 11 : $-\frac{x}{5} = 1$
Équation 12 : $\frac{-5}{x} = 1$
Équation 13 : $1{,}8x - 3 = 2{,}5x + 7{,}4$
Équation 14 : $\sqrt{x} + 2 = 3$
Équation 15 : $1000x = 0$
Équation 16 : $(3 - 4x) - (2x - 1) = 0$
Équation 17 : $(3 - 4x)(2x - 1) = 0$
Équation 18 : $x^2 = 7$
Équation 19 : $x^2 + 3x = \frac{7}{2}$



Affiche comportant les équations à classer (classes de Maurice et d'Annabelle)

A18. Énoncé de l'activité de la situation 2 par les professeurs Annabelle et Maurice (Situation n°2 – Séance 2)

Nom(s) : ……………………….. Classe : ....
Prénom(s) : ……………………….

L'objectif est de réaliser sur Algobox des algorithmes permettant de résoudre les équations ci-dessous.

4. *Réaliser un algorithme sur le logiciel Algobox permettant de résoudre les trois premières équations ci-dessous,* ***sans les transformer au préalable****.*
5. *Signaler par une * les équations similaires. Faire fonctionner l'algorithme pour ces équations.*
6. *Comment peut-on résoudre les équations restantes avec un autre algorithme ? Le construire et résoudre les autres équations à l'aide de ce nouvel algorithme.*

Le travail à rendre à la fin de l'heure sur la fiche.

* Équation 1 : $x + 3 = 0$	Solution 1: …………………….........….
* Équation 2 : $2x - 3 = 4$	Solution 2: ……………………………….
* Équation 3 : $3 - 2x = -2$	Solution 3: ……………………………….
Équation 4 : $2 + x = 5x$	Solution 4: ……………………………….
Équation 5 : $2x + 3 = 3x + 1$	Solution 5: ……………………………….
Équation 6 : $8 - x = \sqrt{2}$	Solution 6: ……………………………….
Équation 7 : $\frac{7}{2}x + 3 = \frac{2}{3}$	Solution 7: ……………………………….
Équation 8 : $\frac{7}{2}x + \frac{2}{5} = \frac{8}{3} + \frac{1}{2}x$	Solution 8: ……………………………….
Équation 9 : $3 = 2x + 1$	Solution 9: ……………………………….
Équation 10 : $3x + 2 = 5 + 3x$	Solution 10: ……………………………....
Équation 11 : $1{,}8x - 3 = 2{,}5x + 7{,}4$	Solution 11: …………………………….

A19. Entretien d'Alex pour l'adaptation de la trame d'ingénierie en la trame projetée (TP3)

Interview réalisé le 08/04/2011.

Les abréviations de C comme chercheur, Al pour Alex sont utilisées pour désigner les interlocuteurs.

1. C : (*En montrant le diaporama de la trame d'ingénierie*) Voilà ce que j'avais pensé faire avec toi. Mais c'est très succinct parce que je veux justement te laisser une latitude d'adaptation, que tu puisses changer comme tu le veux… Et tu peux très bien me dire : « ça, ça ne me convient pas, je trouve que ce n'est pas utile », cela fera partie de mon analyse de voir les différences sur un même substrat que je propose et qui n'est pas complètement détaillé, de la façon dont les enseignants se l'approprient, les différences dont ils envisagent de mener la séance. Et pendant la séance, voir les différences d'interaction avec les élèves et d'essayer de mesurer ce que dit l'un, l'influence que ça a sur le groupe classe, ce que ne dit pas l'autre, l'influence que ça a. Ensuite j'essayerai d'analyser ces différentes mises en œuvre, les différentes façons de mener la séance … Voir ce que cela induit sur l'apprentissage des élèves. C'est cette double approche, enseignant et interaction avec ses élèves par rapport à un savoir amené, que j'aimerais analyser. La première séance, je l'avais imaginée en classe entière, en travail de groupes, mais si tu préfères en demi-classe, c'est modulable. Il s'agit de mettre les élèves par groupes de 3-4 et de proposer une classification d'équations selon la consigne : « *Classer les équations. Il n'est pas demandé de les résoudre mais ce n'est pas interdit non plus* ».
2. Al : La première chose, je pense qu'ils sont tellement formatés « équations et résolution », je pense que « classer des équations », ils vont avoir très envie de les résoudre …
3. C : Mais ce n'est pas gênant, ça fait partie de …
4. A : Oui, oui.
5. C : Les résoudre, ça peut les aider à les classifier …
6. Al : Ah, oui, peut-être.
7. C : Celle-ci, je ne vais pas le résoudre comme celle-là, donc je ne vais pas la mettre dans la même catégorie. On se limite aux équations du premier et du second degré, conformément au programme de seconde. Alors, je te montre des idées d'équations à classifier… Il y en a beaucoup, on n'est pas obligé de tout mettre. Ce que j'ai aussi imaginé, et qui est modulable, ce sont des équations avec un champ numérique de paramètres entiers, relatifs, rationnel, irrationnels… Voici ces équations, il y en a du premier et du second degré, des équations où les nombres déterminés sont sous forme fractionnaire, en écriture à virgule, avec des irrationnels, des rationnels, des équations qui sont déjà factorisées, d'autres pas, des équations du second degré qu'on sait résoudre en seconde : identités remarquables, avec un facteur apparent et enfin des équations du second degré qu'on ne sait pas encore résoudre en seconde. Dans le nouveau programme, il y a bien la forme canonique ?
8. Al : Oui, on est en plein dedans. On est dans un truc intéressant : forme factorisée, forme canonique …
9. C : Alors ces équations, je ne voulais pas leur donner les équations sur une feuille mais que les élèves puissent les manipuler, donc de les écrire sur des bristols individuellement. Les élèves, par petits groupes de 3-4 pourraient les déplacer, les comparer … en espérant faire émerger que le x est l'inconnue et que le reste, les nombres déterminés sont des paramètres. Donc derrière, il y aurait l'idée de faire émerger la notion de « famille d'équations ». On ferait donc d'abord une classification par groupes de 3-4. Pour le

matériel de mise en commun, j'ai pensé à une affiche par groupe, où les élèves recopieront leur classement.

10. Al : Juste une question : est-ce que ces deux équations pour toi, elles sont dans la même catégorie ? (*Alex montre les équations* $\sqrt{2} + x = 3$ *et* $7 - x = 0$)
11. C : Pour moi, oui … Mais justement, ça m'intéresse de voir ce qu'ils vont faire …
12. Al : Oui, il y a des choses à dire ici.
13. C : La première, elle se ramène à $ax + b = c$ et la deuxième à $ax + b = 0$.
14. Al : Non, mais je pense que pour eux, ces deux-là n'auront pas forcément le même statut parce qu'il y a $\sqrt{2}$.
15. C : Oui, complètement !
16. Al : le problème, c'est le statut de $\sqrt{2}$ … Mais comme on ne fait plus les ensembles de nombres …
17. C : Mais justement, faire émerger tout ça, même si on ne fait plus les nombres, le mettre à plat.
18. Al : Oui, ils ont déjà rencontré $\sqrt{2}$ … Déjà comme l'hypoténuse d'un carré de côté 1 …
19. C : Et oui ! Donc tu en choisis parmi les 40 ? On les laisse chercher par groupe, que tu choisis ou tu les laisses se mettre par affinité… c'est toi qui voit … Donc sur les bristols, j'aurai numéroté les équations …
20. Al : Donc tu préfères une affiche ou on écrit sur le tableau ? Mais les affiches, tu veux les récupérer, c'est ça ?
21. C : Oui, ce serait bien pour moi. Mais surtout ça permet pour chaque groupe d'accrocher son affiche au tableau. Chaque groupe présente son affiche…
22. Al : Ah d'accord, on met ça au tableau et on discute …
23. C : C'est ça ! Chacun défend son choix.
24. Al : Alors ça, il faut que ça aille très vite parce que la discussion sinon, on n'aura pas le temps … Le problème, le mercredi matin, c'est que les élèves arrivent en retard.
25. C : On peut caler ça un autre jour …
26. Al : Ou alors on le fait en demi-classe ?
27. C : Ah oui, on peut le faire en demi-classe.
28. Al : Le mercredi à 11h30. À mon avis, les deux demi-groupes sont à voir. Le premier groupe est moins … fort, et le deuxième est beaucoup plus …
29. C : D'accord, et on aura plus de temps pour la discussion.
30. Al : Je pense que ça serait plus riche, et ça fait moins de choses à gérer. Et moi, dans ton scénario, j'ai le droit d'intervenir, pour les aider ? Pour leur dire si c'est juste ou pas ? Ou je les laisse mariner ?
31. C : Dans la discussion finale, tu vas intervenir …
32. Al : Dans la discussion, c'est moi qui serais le grand ordonnancier !
33. C : Oui, bien sûr. Mais peut-être avant, pour créer les catégories, tu vas répondre à leurs questions… C'est toi qui vois… Est-ce que tu les laisses vraiment classifier à leur idée ? Tu guides sur le nombre de catégories ?
34. Al : Moi, je serais assez pour les laisser vraiment complètement libres… mais après enfoncer le clou et leur expliquer… Et il faudra penser aussi à mettre en place le rapporteur, ce sera à lui d'expliciter tout ça, en tant que porte-parole du groupe…
35. C : Oui…
36. Al : Il aura intérêt à avoir une rhétorique solide…
37. C : Je peux t'envoyer mon tas d'équations pour que tu me dises celles qui te plaisent et que tu veux garder ?
38. Al : Oui, bien sûr.
39. C : Et même d'autres qui n'y sont pas… C'est ouvert…

40. Al : Oui, il y en a que tu n'as pas mis comme $(1 - x)^2 = 0$ ou $(1 - x)^2 = -5$ ou $(1 - x)^2 = 25$. Ces trois-là sont embêtantes…
41. C : Je peux te laisser choisir les équations ?
42. Al : Oui, oui, ça marche ! On fait la première séance mercredi et l'autre demi-groupe vendredi ?
43. C : On fait comme ça. Tu vois l'idée, c'est de montrer qu'il y différentes sortes d'équations qu'on ne va pas résoudre de la même manière, et de faire émerger la différence entre paramètre et inconnue. Finalement, tous les nombres déterminés des équations n'ont pas…
44. Al : … le même statut…
45. C : Oui, et on peut regrouper des équations même si les nombres déterminés sont 3 ou $\sqrt{2}$, est-ce qu'on va arriver là, à ce qu'ils voient qu'elles sont du type ax + b = 0. Jusqu'où vont-ils aller ? Vont-ils faire des catégories différentes ou pas pour les types $ax + b = 0$, $ax + b = c$, $ax + b = cx + d$ et pareil pour le second degré ?
46. Al : Oui …
47. C : On va voir où ils en sont dans leur représentation des équations.
48. Al : Et il y a aussi un truc important …. Pour eux, résoudre une équation… ça n'a pas de sens pour certains. C'est-à-dire quand ils résolvent une équation comme $1 - x = 0$, quand ils trouvent une solution fausse, comme $x = -1$, ça n'a pas de sens pour eux de remplacer x par -1 pour voir si ça fonctionne …
49. C : Exactement.
50. Al : Ça montre que, déjà en amont, le substrat mathématique est biaisé. Donc, comment tisser une vraie connaissance mathématique sur déjà une idée qu'ils se font … Donc en fait, ce que tu veux faire émerger, c'est qu'il y a deux catégories, celles du premier degré et celles du second degré et que dans chaque catégorie, il y a des sous-catégories …
51. C : C'est ça … Et que l'on ne résout pas ces équations de la même manière … Qu'il y a justement un algorithme pour résoudre chaque type d'équations.
52. Al : Oui, un protocole de résolution pour chaque sorte … C'est ce que je leur dis : « vous avez une équation à résoudre, vous devez faire un check-up !» Est-ce que je suis du premier degré, est-ce que la forme est factorisée ? Est-ce que je suis du second degré ? Est-ce que c'est de la forme $a^2 - b^2$? Est-ce que je suis dans un type : « un carré égal un nombre positif « ? En fait, ce check-up qui est une trame assez précise, ils ne le font jamais… Est-ce que j'ai un facteur commun, est-ce que j'ai l'équivalence avec ce qui précède ? Ça me permet de rebondir sur les équivalences d'équations … Est-ce que l'équation précédente est équivalence à la précédente. Ça nous fait basculer sur la logique sur laquelle ils ont de sacrées difficultés …
53. C : Oui... Deux équations équivalentes ont même ensemble de solutions. À quel âge un élève est-il capable de comprendre ça ? À mon avis, pas au moment où on lui présente … au moment de la quatrième…
54. C : Donc à la fin de la première séance, tu seras intervenu sur la classification. Et pour la deuxième séance, on ne garde que les équations du premier degré et on donne la consigne : *Réaliser avec Algobox un algorithme permettant de résoudre toutes les équations ci-dessous. Résoudre les équations proposées à l'aide de votre algorithme et indiquer à côté de chaque équation sa ou ses solutions, si elles existent.*
55. Al : Est-ce qu'entre les deux séances, je leur dirai de réfléchir à ça ? Ou pas ?
56. C : Qu'en penses-tu ?
57. Al : Je pense que ça sera très hétérogène … Il y en aura certains qui auront déjà leur algorithme et d'autres qui n'auront rien pondu.

58. C : En fait, j'avais envie de voir le passage du monde mathématique vers le monde informatique, avec son langage … Peut-être leur proposer de les résoudre à la main à la maison, avant la séance ?
59. Al : Peut-être essayer de ne présenter que des équations du premier degré … et montrer que c'est une forme mathématique bien précise, c'est-à-dire on a le « théorème mathématique » : $ax + b = 0$ équivalent à $x = -\frac{b}{a}$ avec a non nul … Et ça, ce serait ce qu'ils auraient à modéliser pour le premier degré …
60. C : Oui, c'est ça. Alors est-ce qu'on demande de résoudre quelques équations de ce type à la maison avant la deuxième séance, dans des cas particuliers ?
61. Al : Le problème, c'est que je l'ai déjà fait, je suis dans les tableaux de signe et $ax + b = 0$, ils savent que ça fait $-\frac{b}{a}$.
62. C : Mais même quand ils vont voir les équations comme celles-ci : $3x - 5 = 3 - 10x$ ou $\sqrt{2}x - 1 = 4 - \sqrt{3}x$ (*en montrant l'annexe A12 qui ne comporte que des équations du premier degré*) ? Est-ce qu'ils vont reconnaître qu'elles sont toutes de la forme $ax + b = 0$ justement ? Est-ce que ça ne permettrait pas de faire ce premier pas vers …
63. Al : De toute façon, pour faire la classification, je pense qu'il y en aura pas mal qui auront été résolues … Après, est-ce que je rebondis dessus ou pas ? Je crois que c'est la part d'impondérable qu'il faut laisser ?
64. C : C'est-à-dire, en leur en faisant résoudre quelques-unes à la maison entre les deux séances ?
65. Al : Non, non. Cette part d'impondérable, elle vient de cette première heure… C'est-à-dire s'ils vont ou non les résoudre. S'ils les résolvent, le travail est déjà préparatoire pour la seconde séance. S'ils en n'ont pas résolu une seule, ce qui m'étonnerait, j'embrayerais sur un travail à la maison. Mais je pense qu'ils en auront résolu plusieurs.
66. C : L'idée, c'est donc de les amener à réaliser l'algorithme. Je te le montre : (*En montrant le programme ci-dessous réalisé sur Algobox*)

```
Résolution des équations du type : ax + b = 0
VARIABLES
  a EST_DU_TYPE NOMBRE
  b EST_DU_TYPE NOMBRE
  x EST_DU_TYPE NOMBRE
DEBUT_ALGORITHME
  LIRE a
  LIRE b
  SI (a!=0) ALORS
    DEBUT_SI
     x PREND_LA_VALEUR -b/a
     AFFICHER "-b/a="
     AFFICHER x
     FIN_SI
     SINON
       DEBUT_SINON
       SI (b==0) ALORS
         DEBUT_SI
         AFFICHER "tout nombre est solution"
         FIN_SI
         SINON
           DEBUT_SINON
           AFFICHER "pas de solution"
           FIN_SINON
       FIN_SINON
 FIN_ALGORITHME
```

67. C : Il y a donc les trois cas : *a* est nul et *b* est nul ou bien *a* est nul et *b* est nul et enfin *a* non nul.

68. Al : Je pense qu'ils vont avoir du mal à trouver les trois cas …parce que je n'ai pas discuté sur les valeurs de a et de b…
69. C : C'est pas grave, même s'ils n'écrivent que :

    Lire a
    Lire b
    Afficher –b/a

    Et alors leur proposer de rentrer a = 0 pour voir …
70. Al : Oui, il y a moyen de réfuter facilement …Ici, c'est bien pour la fonctionnalité de faire programmer :

    Lire a
    Lire b
    x prend la valeur –b/a
    Afficher « –b/a = »
    Afficher x
71. C : oui, c'est mieux pour qu'ils ne perdent pas le fil … Est-ce qu'il y a possibilité de récupérer leur travail sur clé USB ?
72. Al : Oui, bien sûr, pas de problème.
73. C : Une fois le programme fait, leur faire résoudre les équations… Et il y en a qui ne seront pas directement sous la forme $ax + b = 0$. Est-ce que là, ils ne vont pas dire : il faut que je fasse un autre programme pour résoudre les équations du type : $ax + b = c$ et encore un autre pour $ax + b = cx + d$?
74. Al : Ah oui …
75. C : C'est ça que j'aimerais voir et aussi comment tu vas intervenir à ce moment-là.
76. Al : Oui, mais cette question-là, elle n'a pas lieu d'être parce que si, au bout de ta synthèse de la première heure, tu dis que toutes les équations se ramènent à l'équation de base $ax + b = 0$ …
77. C : Oui, ça dépend où on va arriver à la synthèse…
78. Al Oui, c'est ça.
79. C : Mais est-ce qu'on va vraiment arriver là ?
80. Al : Je ne sais pas. Mais l'enjeu, il est là ! Voir que derrière la complexité de tous les cas de figure, voir qu'il n'y en a qu'une … on est dans l'enjeu. Après pour $x^2 = a$ ou $x^2 = a^2$, on n'est pas dans la même chose. À mon avis, le carré, c'est beaucoup plus complexe …
81. C : C'est sûr… Mais là, c'est de la reprise avec de l'algorithmique de choses qu'ils sont censés savoir. Sauf que là, quand ils vont avoir à résoudre des équations avec leur programme, si tu arrives à la fin de ta synthèse à dire : « toutes ces équations sont de la forme $ax + b = 0$. », c'est là qu'on verra s'ils ont vraiment compris, parce que les équations ne seront pas directement sous cette forme …
82. Al : Est-ce que le logiciel fonctionne pour $a = \sqrt{2}$ et $b = -3$, par exemple ?
83. C : Oui, mais ça donne des valeurs approchées.
84. Al : Oui, c'est approché. Mais c'est pas grave …
85. C : Là, j'avais pensé donner une feuille sur laquelle les équations sont résolues par l'algorithme …pour récupérer une trace …
86. Al : C'est difficile la trace écrite … Est-ce que ça peut être uniquement l'algorithme écrit sous Algobox ?
87. C : Si je récupère l'algorithme et la feuille, je devrais retrouver ce qu'ils ont fait, ce que vaut a et ce que vaut b …
88. Al : Ce qui veut dire qu'en amont, ils transformeront l'équation pour qu'elle soit dans le bon cas. C'est sûrement possible, ça …

89. C : Voilà, ça c'était pour la deuxième séance. Elle ne se termine pas par une mise en commun mais par une résolution d'équations. Et ensuite, la troisième séance (*en montrant la diapositive ci-dessous*) :

Ébauche des séances de l'expérimentation (3/4)

- **Troisième séance**
  - Travail en classe entière en binômes

  Première phase
  - Matériel : Un algorithme écrit sur papier (logiciel Scratch, Algobox, etc.)
  - Consigne : *Voici un algorithme construit à l'aide du logiciel Bidule. Expliciter quelle est sa fonction. Le faire fonctionner pour quelques exemples permettant de tester les différentes parties de l'algorithme présenté. Le travail sera rendu sur feuille (un écrit par binôme).*

  Objectif : Reprise de techniques/technologie associées au type de tâches « Résoudre une équation du type ax + b = cx + d »

  Seconde phase
  - Matériel : Une liste d'équations du type $x^2 = a$ (ou s'y ramenant)
  - Consigne : *On s'intéresse maintenant aux équations du 2nd degré suivantes. Les résoudre et écrire à la main un algorithme permettant de les résoudre toutes. Le travail est relevé en fin d'heure.*

  Objectif : Reprise de techniques/technologie associées au type de tâches « Résoudre une équation du type $x^2 = a$ »

90. Al : alors il y a deux phases …

91. C : Finalement, j'aurais bien supprimé la première phase … C'était à faire une heure, mais vu ce que tu me dis, ça va être trop long. C'était ma première idée mais … vu comment tu vois les choses, cette phase n'a plus lieu d'être. C'était pour donner un algorithme tout fait –ça fait partie des programmes – et de demander ce qu'il fait, en le testant pour différentes valeurs. Je te le montre (*en montrant le programme ci-dessous réalisé sous Algobox*) :

```
VARIABLES
a EST_DU_TYPE NOMBRE
b EST_DU_TYPE NOMBRE
c EST_DU_TYPE NOMBRE
d EST_DU_TYPE NOMBRE
x EST_DU_TYPE NOMBRE
DEBUT_ALGORITHME
LIRE a
LIRE b
LIRE c
LIRE d
SI (a!=c) ALORS
DEBUT_SI
x PREND_LA_VALEUR (d-b)/(a-c)
AFFICHER x
FIN_SI
SINON
DEBUT_SINON
SI (b==d) ALORS
DEBUT_SI
AFFICHER "tout nombre est solution"
FIN_SI
SINON
DEBUT_SINON
AFFICHER "pas de solution"
FIN_SINON
FIN_SINON
FIN_ALGORITHME
```

92. C : Il faut le lire et le « décoder » … Mais je pense que …
93. Al : Tu le fais photocopier, tu leur donnes et pour la fois suivante, tu demandes ce qu'il produit et tu demandes de le faire tourner sur quelques exemples.
94. C : Ah oui !
95. Al : À mon avis, un petit travail à faire à la maison, entre la séance 2 et la séance 3 … Avec des valeurs que tu choisis, comme π ou 2/3 …
96. C : Et oui, c'est une bonne ici ce que tu me proposes là ! Donc, on attaquerait directement la séance 3 par la deuxième phase. Je pensais peut-être leur faire écrire un algorithme à la main, mais c'est peut-être à modifier … qui résolvent un certain type d'équations du second degré. Ce serait des équations comme celles-ci :

Équation 21 : $x^2 = 7$
Équation 22 : $x^2 = -4$
Équation 23 : $x^2 = (2{,}07)^2$
Équation 24: $\frac{x^2}{27} = 0{,}01$
Équation 25 : $x^2 - 5 = 7$
Équation 26 : $\sqrt{3}x^2 = -2$

Équation 27 : $7x^2 = 7$
Équation 28 : $\frac{x^2}{7} = 21$
Équation 29 : $11 = 5x^2 + 2$
Équation 30 : $3 = 2 - x^2$
Équation 32 : $9x^2 - 16 = 0$
Équation 33 : $9x^2 - 7 = 0$

Est-ce que tu penses que c'est judicieux qu'elles soient toutes de ce type ?
97. Al : Non ! Il faut leur mettre du poil à gratter…Pour les plus futés, ils vont voir tout de suite que c'est de la forme $x^2 = a$. Ils vont voir tout de suite qu'il y a une condition sur a. Ce théorème, sur les solutions de $x^2 = a$, je le serine depuis …qu'on a fait les équations.
98. C : Donc on passe directement à la séance 4 (*montrant la diapositive*) :

Ébauche des séances de l'expérimentation (4/4)

- **Quatrième séance**
  - Travail en classe entière (ou en demi-classe en salle info ?)

  Première phase
  - Reprise sur les équations du second degré du type $x^2 = a$ (ou s'y ramenant) et construction en commun (au vidéoprojecteur ?) de l'algorithme à l'aide du logiciel Bidule (Scratch ; Algobox ; etc.)

  Seconde phase
  - Matériel : Une liste d'équations du type $(ax + b)(cx + d) = 0$ (ou s'y ramenant) avec variation de la nature des paramètres.
  - Consigne : *On s'intéresse maintenant aux équations du 2nd degré suivantes. Quelle méthode pour les résoudre ?*

Objectif : Faire émerger que toute résolution d'équation peut « s'automatiser » et donc « s'algorithmiser », une fois la reconnaissance de forme effectuée.

99. Al : Je pense que, si tu as voulu faire un truc du type $ax + b = 0$ pour qu'ils aient le même substrat, je pense qu'il faut faire de la même manière tous les substrats possibles pour le second degré ! Parce que $x^2 = a$, ce n'est pas si riche que ça, finalement ….
100. C : Non, sauf qu'ils oublient à chaque fois la racine négative …
101. Al : Oui.
102. C : D'accord. C'est peut-être bête de faire deux phases….
103. Al : Je crois qu'il faut y aller directement : « Est-ce que je suis capable de faire un algorithme avec $ax^2 + bx + c = 0$? ». Je pense qu'il faut ça aussi.
104. C : Oui, mais est-ce qu'il faut aussi partir directement avec ces exemples-là ? En ajoutant bien sûr les précédents (*équations 21 à 33 ci-dessus) :*

Equation 31 : $(x + 1)^2 = 9$

Equation 34 : $x^2 + 6x + 9 = 0$
Equation 35 : $x^2 + 6x = 0$
Equation 36 : $x^2 - 8x = 0$
Equation 37 : $x^2 - 8x + 15 = -1$
Equation 38 : $x^2 - 8x + 15 = 0$
Equation 39 : $x^2 + 3x = \frac{7}{2}$
Equation 40 : $x^2 + 3x = 0$

105. C : Donc tu partirais avec toutes celles du second degré ?
106. Al : Ah mais là, ça devient hyper compliqué !
107. C : Eh oui, c'est hyper compliqué ! C'est pour ça que je …
108. Al : c'est pour ça que tu voulais le faire en deux temps … couper en deux …
109. C : Oui. C'est pour ça que je voulais te laisser choisir les équations et que le choix n'est pas anodin. Ça dépend jusqu'où tu veux aller. Il y a carrément un autre prof qui m'a dit, que quand il faut utiliser la forme canonique, il ne voulait pas le proposer (*équations 38 et 39*) en seconde. C'est pour cette raison que j'ai proposé ce découpage en séances, c'est pour que les profs puissent « se servir » dans ces propositions.
110. Al : Le problème, c'est qu'ici $ax^2 = b$, à mon avis pour les plus faibles, je pense qu'ils vont les confondre, de par la proximité de la forme, avec $ax = b$.
111. C : Mais oui, justement …
112. Al : Oui, c'est porteur de sens puisque pour eux, ils vont écrire $x^2 = b/a$ et ce sera fini …
113. C : On pourrait le faire en une seule séance, mais en proposant un découpage selon le type d'équations ?
114. Al : Oui, c'est bien ça.
115. C : On pourrait proposer de construire plusieurs algorithmes, un pour résoudre les équations du second degré déjà factorisées, un pour les équations du second degré ne comportant pas de terme en x et donner quelques équations du second degré non factorisées … où une factorisation est possible, soit par un facteur commun, soit par une identité remarquable, soit par la forme canonique. Je te montre ce qu'on a construit avec Maurice et Annabelle pour le premier degré (Voir l'annexe A18).

1. *Réaliser un algorithme sur le logiciel Algobox permettant de résoudre les trois premières équations ci-dessous,* ***sans les transformer au préalable****.*
2. *Signaler par une * les équations similaires. Faire fonctionner l'algorithme pour ces équations.*
3. *Comment peut-on résoudre les équations restantes avec un autre algorithme ? Le construire et résoudre les autres équations à l'aide de ce nouvel algorithme.*

*Équation 1 :	$x + 3 = 0$	Équation 7 :	$\frac{7}{2}x + 3 = \frac{2}{3}$
*Équation 2 :	$2x - 3 = 4$	Équation 8 :	$\frac{7}{2}x + \frac{2}{5} = \frac{8}{3} + \frac{1}{2}x$
*Équation 3 :	$3 - 2x = -2$	Équation 9 :	$3 = 2x + 1$
Équation 4 :	$2 + x = 5x$	Équation 10 :	$3x + 2 = 5 + 3x$
Équation 5 :	$2x + 3 = 3x + 1$	Équation 11 :	$1{,}8x - 3 = 2{,}5x + 7{,}4$
Équation 6 :	$8 - x = \sqrt{2}$		

116. Al : On pourrait faire quelque chose de similaire … Pour les trois premières équations, on prendrait des équations sous forme d'un produit de facteurs du premier degré, ce qui permettrait de réinvestir ce qu'on a fait en séance 2. On en ajoute quelques-unes dans le texte qu'ils doivent reconnaître et résoudre à l'aide du logiciel… Je leur ferai vérifier aussi à la main …

117. C : Et puis, pour le second algorithme, proposer des équations du type $x^2 = a$. Les élèves doivent déjà reconnaître ce type puis construire l'algorithme …

118. Al : OK, je mets ça en forme et je te l'envoie. (Cf. l'annexe A23 qui constitue l'énoncé à distribuer aux élèves lors de la séance 3)

Fin de l'entretien.

A20. Équations choisies par le professeur Alex (Situation n°1 – Séances 1.1 et 1.2)

On rappelle que le professeur Alex a choisi de réaliser la situation n°1 en demi-classe, donc en deux séances de 55 minutes chacune. Suit ici la liste des équations qu'il a retenues à partir des équations proposées par le chercheur en annexe A9 et une photographie de l'affiche réalisée par le chercheur afin de faciliter la discussion lors de la mise en commun à la fin de la situation n°1. Cette affiche est accrochée au tableau dès le début de la recherche, en même temps que les cartons individuels portant chacun une équation sont distribués aux élèves.

Équation 1 : $1000 - x = 0$

Équation 2 : $\frac{2x}{7} = 0$

Équation 3 : $x^2 - 8x + 15 = 15$

Équation 4 : $x^2 + 6x + 9 = 0$

Équation 5 : $\sqrt{2}x - 1 = 4 - \sqrt{3}x$

Équation 6 : $\sqrt{2} + x = 3$

Équation 7 : $\pi x + 3 = 4$

Équation 8 : $x + 3 = 0$

Équation 9 : $9x^2 - 16 = 0$

Équation 10 : $\frac{x^2}{27} = 0{,}01$

Équation 11 : $-3 = 5x + 1$

Équation 12 : $(x+1)^2 = 9$

Équation 13 : $x^2 = -4$

Équation 14 : $3x - 5 = 3 - 10x$

Équation 15 : $3 = 2 - x^2$

Équation 16 : $\sqrt{3}x^2 = -2$

Équation 17 : $(3 - 4x)(2x - 1) = 0$

Équation 18 : $x^2 = 7$

Équation 19 : $x^2 - 8x + 15 = -1$

Équation 20 : $x^2 = (2{,}07)^2$

Équation 21 : $x^2 + 6x = 0$

Équation 22 : $x^2 - 8x + 15 = 0$

Équation 23 : $-1000x = 0$

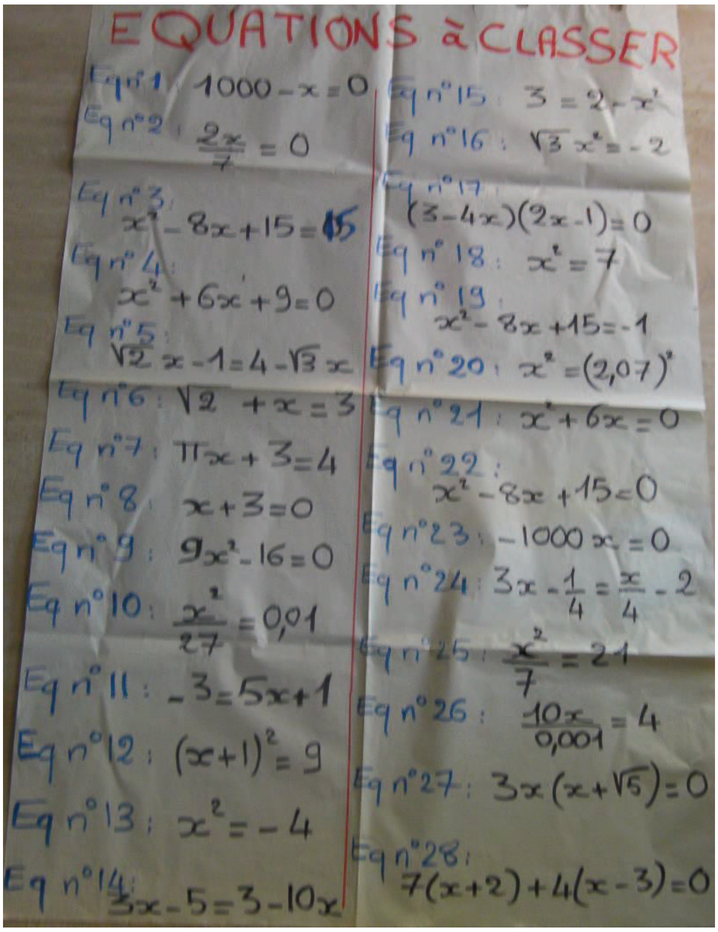
Équation 24 : $3x - \frac{1}{4} = \frac{x}{4} - 2$

Équation 25 : $\frac{x^2}{7} = 21$

Équation 26 : $\frac{10x}{0{,}001} = 4$

Équation 27 : $3x\left(x + \sqrt{5}\right) = 0$

Équation 28 : $7(x+2) + 4(x-3) = 0$



A21. Énoncé de l'activité 1 de la situation 2 par le professeur Alex (Situation n°2 – Séance 2)

Nom : ……………………….. Classe : ...
Prénom : ……………………….

Réaliser sur Algobox un (ou des) algorithme(s) permettant de résoudre les équations ci-dessous.
Résoudre les équations proposées à l'aide de votre algorithme. Indiquer à côté de chaque équation, sa ou ses solutions, si elles existent.

Équation 1 : $x+3=0$ Solution 1: ……………………………….

Équation 2 : $-1000x=0$ Solution 2: ……………………………….

Équation 3 : $-1000+x=0$ Solution 3: ……………………………….

Équation 4 : $\sqrt{2}+ x=3$ Solution 4: ……………………………….

Équation 5 : $\frac{10x}{0{,}001}=4$ Solution 5: ……………………………….

Équation 6 : $\pi x+3=4$ Solution 6: …………………………….

Équation 7 : $3x-5=3-10x$ Solution 7: …………………………….

Équation 8 : $3x-\frac{1}{4}=\frac{x}{4}-2$ Solution 8: …………………………….

Équation 9 : $\sqrt{2}x-1=4-\sqrt{3}x$ Solution 9: …………………………….

Équation 10 : $7(x+2)+4(x-3)=0$ Solution 10: …………………………….

A22. Énoncé de l'activité 2 de la situation 2 par le professeur Alex (Situation n°2 – Travail maison)

Voici un algorithme construit à l'aide du logiciel Algobox :

```
Code de l'algorithme

▼ VARIABLES
  ├ a EST_DU_TYPE NOMBRE
  ├ b EST_DU_TYPE NOMBRE
  ├ c EST_DU_TYPE NOMBRE
  ├ d EST_DU_TYPE NOMBRE
  └ x EST_DU_TYPE NOMBRE
▼ DEBUT_ALGORITHME
  ├ LIRE a
  ├ LIRE b
  ├ LIRE c
  ├ LIRE d
  ▼ SI (a!=c) ALORS
    ├ DEBUT_SI
    ├ x PREND_LA_VALEUR (d-b)/(a-c)
    ├ AFFICHER x
    ├ FIN_SI
    ▼ SINON
      ├ DEBUT_SINON
      ▼ SI (b==d) ALORS
        ├ DEBUT_SI
        ├ AFFICHER "tout nombre est solution"
        ├ FIN_SI
        ▼ SINON
          ├ DEBUT_SINON
          ├ AFFICHER "pas de solution"
          └ FIN_SINON
      └ FIN_SINON
└ FIN_ALGORITHME
```

1. Faire fonctionner cet algorithme (« à la main ») dans les différents cas donnés ci-dessous et indiquer sur la copie les résultats obtenus :

- **a.** a = 2 ; b = -4 ; c = 0 ; d = 0
- **b.** a = 2 ; b = -4 ; c = 0 ; d = 5
- **c.** a = 2 ; b = -4 ; c = 1 ; d = 5
- **d.** a = 2 ; b = -4 ; c = 2 ; d = 5

2. Donnez deux autres exemples de valeurs de a, b, c et d de votre choix et testez-les sur l'algorithme.

3. Donnez un exemple de valeurs de a, b, c et d qui permette de faire afficher « tout nombre est solution ».

4. Déduire des questions précédentes quelle est la fonction de cet algorithme.

Le travail sera rendu sur feuille.

A23. Énoncé de l'activité de la situation 3 par le professeur Alex (Situation n°3 – Séance 3)

Nom(s) : ……………………….. Classe : ....
Prénom(s) : ……………………….

L'objectif est de réaliser sur Algobox des algorithmes permettant de résoudre les équations ci-dessous.

1. *Réaliser un algorithme sur le logiciel Algobox permettant de résoudre les trois premières équations ci-dessous,* ***sans les transformer au préalable****.*
2. *Signaler par une * les équations similaires. Faire fonctionner l'algorithme pour ces équations.*
3. *Comment peut-on résoudre les équations restantes avec un autre algorithme ? Le construire et résoudre les autres équations à l'aide de ce nouvel algorithme.*

Le travail à rendre à la fin de l'heure sur la fiche.

* Équation 1 : $(4x+3)(2x-1)=0$ Solution 1: …………………….........….

* Équation 2 : $3x\left(x+\sqrt{5}\right)=0$ Solution 2: ……………………………….

* Équation 3 : $(1-3x)(1+\pi x)=0$ Solution 3: ……………………………….

Équation 4 : $x^2=7$ Solution 4: ……………………………….

Équation 5 : $x^2=-4$ Solution 5: ……………………………….

Équation 6 : $x^2-10x+25=0$ Solution 6: ……………………………….

Équation 7 : $-\frac{1}{4}x\left(\frac{1}{2}x+9\right)=0$ Solution 7: ……………………………….

Équation 8 : $7x-x^2=0$ Solution 8: ……………………………….

Équation 9 : $x^2=(2{,}07)^2$ Solution 9: ……………………………….

Équation 10 : $-0{,}1x(900-0{,}1x)=0$ Solution 10: ……………………………...

Annexes A22 à A39 : Réalisation de l'expérimentation

La transcription des séances
Les productions des élèves

A24. Codage des transcriptions pour les séances filmées ou les entretiens audio

Les transcriptions présentées dans les annexes sont de deux types : des entretiens audio avec les professeurs et des séances de classe de 55 minutes filmées sur un support vidéo. Certaines séances ont été filmées à l'aide de deux caméras, l'une mobile filmant l'ensemble des élèves, ou quelques élèves en particulier ou le professeur, l'autre fixe, filmant un groupe particulier pendant la phase de recherche.

Les conventions de transcription adoptées sont données ci-dessous.
- les locuteurs sont désignés par le code suivant :
  - An = le professeur Annabelle ;
  - Ma = le professeur Maurice ;
  - Al = le professeur Alex ;
  - C = le chercheur ;
  - E = un ou des élèves qui s'expriment et dont le prénom n'est pas identifié ;
  - E_1, E_2, … = élèves différents qui échangent des propos à la suite les uns des autres ;
  - Antoine, Guilhem, etc. = élèves dont le prénom est identifié ;
  - Es = plusieurs élèves qui parlent à l'unisson.
- les tours de parole ont été numérotés ;
- … : pause dans le discours (la longueur de la pause n'est pas évaluée) ou interruption de parole ;
- xxx = le transcripteur ne parvient pas à décoder ce qui est dit.

Pour les séances filmées à l'aide de deux caméras, la différenciation de la transcription de la caméra fixe et de celle de la caméra mobile est signalée à l'aide de lignes horizontales tracées pour montrer une remontée du temps et un trait de bordure gauche.
Pour une plus grande facilité de lecture, les ajouts suivants ont été réalisés dans les transcriptions :

- *(entre parenthèses)* : quelques indications indispensables à la compréhension sont apportées à l'intérieur des tours de parole. En particulier les indications comme *(dans un groupe), (à l'intérieur d'un binôme), (à toute la classe)* précisent si les échanges se font entre les élèves d'un même groupe, entre le professeur et quelques élèves ou si les propos sont adressés à l'ensemble de la classe ;
- quelques indications du temps écoulé sont données en caractères gras ;
- quelques photos tirées des enregistrements vidéo ont été ajoutées pour illustrer les propos ;
- les numéros des équations mentionnées dans le texte sont indiqués en caractères gras et les équations ont été rappelées systématiquement entre parenthèses ;
- les phases et sous-phases déterminées dans l'étape E_1 (méthodologie des quatre composantes de Bronner, 2006) de l'élaboration de la trame de séance sont indiquées en italique et en caractères gras.

A25. Transcription de la séance 1 du professeur Annabelle (situation n°1)

Séance filmée le 12/05/2011.
Pour le codage, se reporter à l'annexe A24. Pour différencier la transcription de la caméra fixe à celle de la caméra mobile, des lignes horizontales ont été tracées pour montrer une remontée du temps (ici de 06 :15 à 35 : 00) et la transcription de la caméra fixe est indiquée par un trait de bordure gauche.

➔ ***Phase 0***
An *(en aparté avec le chercheur) :* J'ai mélangé les niveaux des élèves pour faire des groupes hétérogènes

1. **00 : 30**
   An : Je vous présente Madame Briant. Madame Briant a travaillé pendant quelques années au lycée Pompidou et maintenant elle travaille à la fac dans un secteur qui s'occupe de la pédagogie, ou plutôt la didactique des maths.
2. An : Cécile, tu te mets avec Alexis. J'espère que Louis va arriver …
3. An : Dans ce cadre-là, vous avez déjà fait un test qui s'appelait le test zéro, vous avez essayé de résoudre des équations, je viens de lui donner le paquet *[de copies]*, je vous avais dit que ce n'était pas noté. C'est pour voir où vous en êtes au niveau des équations. Un petit commentaire, par rapport à ça : c'était légèrement mieux qu'en début d'année mais je n'ai pas non plus été béate d'admiration devant les résultats que j'ai obtenus.
4. **01 : 32**

➔ ***Phase 1***

An : Aujourd'hui, Madame Briant vient de vous mettre sur les tables une enveloppe avec des cartons sur lesquels il y a marqué des équations. Donc, quel est votre travail ? Voilà, les 19 équations qui sont là. Voilà, votre travail est le suivant : c'est de proposer une classification des équations, d'accord ? Il n'est pas demandé de résoudre les équations, si vous ne souhaitez pas les résoudre, ne les résolvez pas mais ce n'est pas interdit non plus … La classification sera ensuite restituée sur des affiches, et vous viendrez ensuite par groupes, avec un rapporteur nous expliquer pourquoi vous avez classé vos équations de telle manière ou de telle autre. Juste je finis et après vous poserez des questions. Pour qu'il y ait moins de groupes, dans un premier temps, vous allez travailler 3 par 3, sauf dans les groupes où il n'y a que 2 élèves. Ensuite, quand je vous le dirais, vous regrouperez le groupe 1 et le groupe 2, les groupe 3 et le groupe 4, etc. donc vous ferez des paquets un peu plus gros avec a priori 6 élèves. D'accord ? C'est à ce moment-là qu'on vous passera l'affiche pour marquer les équations pour faire le tri des équations. C'est-à-dire qu'à la fin j'aurais 6 groupes de 6 personnes et donc j'aurais mes affiches qui apparaitront ensuite. Quand vous avez le groupe de 6, vous désignez un rapporteur qui viendra expliquer le classement. C'est clair ? Donc vous vous mettez au travail, vous prenez vos fiches et vous essayer de classer les équations.

5. **03 : 38**
   Es : Comment ?
6. An : Comme tu as envie. Tu les regroupes comme tu veux.
7. **04 : 07 (***Précision donnée à un seul élève)*
   An : Alors je répète, Matthieu, je t'ai demandé une classification plutôt dans la manière où tu pourrais pouvoir résoudre ces équations.

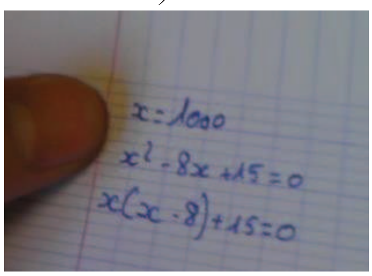
➔ ***Phase 2***

(Transcription de la caméra fixe sur un seul groupe (le 12) de 06 : 15 à 15 : 00)

8. **07 : 11** *(Les élèves discutent sur l'équation n°2 : $x^2 - 8x + 15 = 0$.)* E : Il y a une racine, je crois.
9. **08 : 00** *(Les élèves discutent avec le groupe qui se trouve placé à côté d'eux et échangent leurs points de vue. Les propos sont difficilement audibles et la transcription est incomplète)*
   E_1 *(du groupe 12) :* Vous avez fait comment ?
10. E_2 *(du groupe d'à côté) :* On a fait le plus simple : par soustraction et addition et par multiplication.
11. **09: 24** Es *(entre eux, autour du groupe 12, s'interpelant d'un groupe à l'autre)* Tu les classes comment ?
12. E_1 : Tu les classes si elles se résolvent avec les mêmes étapes
13. E_2 : Nous on a fait deux groupes, un avec addition-soustraction, l'autre avec multiplication-division.
14. E_3 : Moi, j'ai mis les x^2 à part
15. **10 : 59**: E *(du groupe 12)* : Madame, j'ai une question : est-ce que par exemple je peux diviser par x directement ?
16. An : On ne vous demande pas de les résoudre, on te demande de les classer. Tu réunis celles qui, a priori, auraient la même méthode pour les résoudre. Ce n'est pas le même travail qu'hier. Tu classes : celle-là, j'ai envie de la mettre avec celle-là parce qu'elles se ressemblent …
17. E : J'aurais pu choisir de faire ça ou alors de faire ça, alors ça sert à quoi … je comprends pas !
18. **13 : 00** An : Sortez une feuille de brouillon pour écrire les équations que vous avez mises ensemble pour les discuter.
19. E : tu mets ensemble celles qui ont des x et ensemble celles qui ont des x^2

(Transcription de la caméra mobile qui filme quelques instants choisis dans la classe, parmi les groupes, de 06 : 15 à 35 : 00)

20. **06 : 15** *(Le professeur circule dans les groupes et répond aux questions)*
21. E : Il faut en faire combien des groupes ?
22. An : C'est vous également qui le déterminez.
23. **08 : 03** An : *(à toute la classe mais dans le brouhaha) :* La classification doit se faire selon la méthode que vous employez pour résoudre l'équation.
24. E : C'est-à-dire ?
25. An : Dans la méthode que vous employez pour résoudre l'équation. Il y a différentes méthodes de résolution.
26. **12 :52** *(Deux élèves essaient de résoudre l'équation 2 : $x^2 - 8x + 15 = 0$)*
27. E_1 : Tu mets le +15 de l'autre côté
28. E_2 : Non, ça ne sert à rien de faire ça
29. E_1 : Non, tu as raison, ça sert à rien
30. E_2 : Ça ne sert à rien, tu as mal factorisé en fait, parce que tu as le +15. C'est pas une identité remarquable. Tu dois arriver à une identité remarquable, tu dois prendre tout ça et arriver à $a^2 + b^2 + 2ab$. Tu dois mettre $\sqrt{15}$ …



31. E_1 : Alors il faut prendre a = x … *(Les élèves renoncent.)*

➔ ***Phase 3***

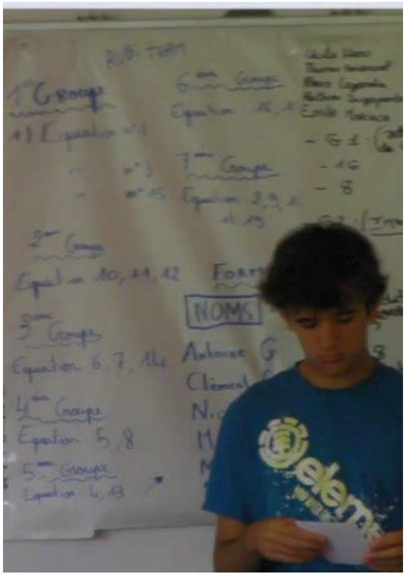
32. **15 : 30** An : Stop. Silence, attendez 30 secondes, ne parlez pas pendant 30 secondes… Le groupe 1 se met avec le groupe 2, le groupe 3 avec le groupe 4, etc. On va vous distribuer l'affiche. Cette affiche, vous allez marquer le classement, le numéro des équations que vous avez classées. Ce classement peut se faire avec un titre ou ne pas se faire avec un titre ; vous faites ce que vous voulez. Il faut qu'il n'y ait qu'une affiche par groupe. On est d'accord ? À la fin, quand vous aurez constitué l'affiche, il faudra également que vous ayez un rapporteur qui soit désigné pour venir expliquer votre classement sur l'affiche. D'accord ? Je vous laisse 5 à 10 minutes pour faire ça.

33. **16 : 29** *(La caméra fixe filme les groupes 11 et 12 réunis en un seul de 16 : 29 à 33 : 45. Les élèves s'installent et regroupent leurs cartons. Une affiche leur est distribuée ainsi qu'un feutre).*
34. E_1 : Alors, comment vous avez fait ? Comment vous les avez groupées ?
35. E_2 : Nous on a fait par additions, par soustractions, et aussi quand c'est égal à zéro, et aussi des multiplications et des xxx …
36. E_1 : Nous on a fait par factorisation, par développement et ….
37. E_2 : Bon, on vote ?
38. E_3 : on mélange nos cas de figure ? Vous avez combien de groupes, vous ?
39. **23 : 22** E_1 : on va commencer par celles qu'on est sûr que c'est ça. *(Les cartons sont manipulés par différents élèves du groupe qui s'expriment peu, mais trient plusieurs fois les cartons, faisant et défaisant les groupements d'équations constitués.)*
40. **28 : 03** *(Un des membres du groupe prend l'initiative de commencer l'affiche. Sur les cinq élèves du groupe, deux élèves surtout prennent des décisions quant au classement.)*
41. E : Tu mets la **2** ($x^2 - 8x + 15 = 0$) et la **9** **(**$9x^2 - 16 = 0$**)** ensemble.
42. *(L'équation produit de deux expressions du premier degré (n°17) pose problème).*
43. E (*qui écrit sur l'affiche*) : Et comme méthode, j'écris quoi ?
44. **33 : 45** *(L'affiche est terminée et est apportée au professeur qui la colle au tableau avec les autres. Il s'agit de l'affiche 5-An)*

➔ ***Phase 4***

➔ ***Sous-phase 4.1***

45. **35 : 00** An : Ca y est ? Alors, maintenant, un rapporteur va venir au tableau pour expliquer comment et pourquoi vous avez fait ce partage des équations. Alors, un premier rapporteur ... Antoine.
46. An : alors quelles sont les équations que vous avez commencé par grouper ? Quand vous avez une question à poser, vous levez le doigt. Antoine, tu as les 19 équations affichées au tableau.



(Affiche 1-An et sa transcription : Antoine G ; Clément G ; Nico M ; Mat L ; Manon S ; Sasha)

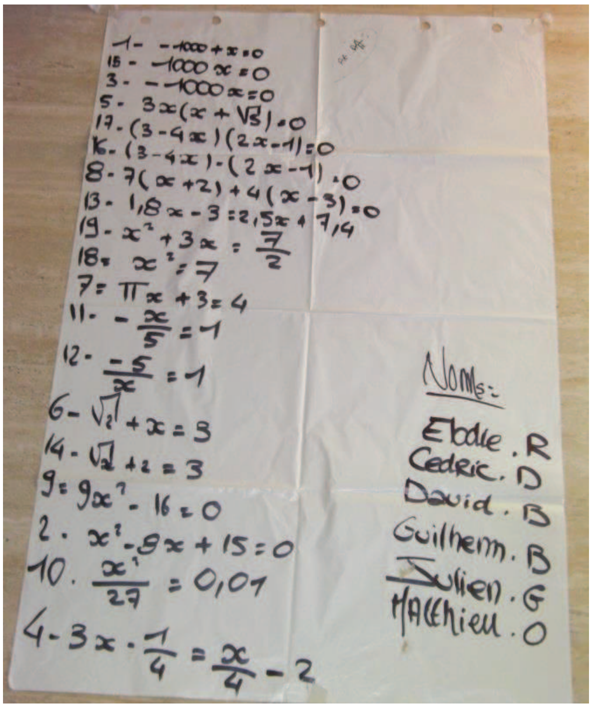
1er groupe	1 ; 3 ; 15
2e groupe	10 ; 11 ; 12
3e groupe	6 ; 7 ; 14
4e groupe	5, 8
5e groupe	4 ; 13
6e groupe	16 ; 17
7e groupe	2 ; 9 ; 18 ; 19

47. Antoine : Pour le premier groupe, on a pris toutes celles qui donnaient x égal 1000
48. An : Donc pour le premier groupe, tu as pris toutes celles qui donnaient x égal 1000, donc les équations **1** $(-1000 + x = 0)$, **3** $(-1000x = 0)$ et **15** $(1000x = 0)$.
49. E : Non !
50. An : Est-ce que quelqu'un veut intervenir à ce niveau-là ou pas ?
51. E : Pour la **3**, c'est pas, « -1 sur 1000 » ?
52. An : la **3** est-ce que c'est « -1 sur 1000 » le résultat ?
53. E : Non, c'est « 0 sur 1000 »
54. An : et si x égal « 0 sur 1000 » …
55. E : alors x égal 0
56. An : Dans ce cas, le classement « x = 1000 », on le garde mais a priori, ce n'est pas forcément le bon résultat. Donc Antoine, on aurait pu baptiser ton premier groupe, le groupe des équations « où 1000 apparaît ». Parce que « x=1000 », on n'est pas trop …
57. **39 :00** Antoine : Oui, voilà ! On peut ça … Le groupe n°2 c'est le groupe des équations **10** $(\frac{x^2}{27} = 0{,}01)$, **11** $(-\frac{x}{5} = 1)$ et **12** $(\frac{-5}{x} = 1)$ où il y a des fractions avec x
58. An : Donc, en fait c'est marrant … mais tu as vu des fractions ?
59. E : la **19** $(x^2 + 3x = \frac{7}{2})$ et la **4** $(3x - \frac{1}{4} = \frac{x}{4} - 2)$?
60. An : Bonne question : mais alors pourquoi ne pas avoir mis la **4** et la **19** dans ce groupe-là ?
61. Antoine : La fraction de la **19**, elle est après le signe « = » et pour la **4**, il y en a deux.
62. E : Oh !
63. An : Donc votre critère, c'est … il y a une seule fraction et en plus et en plus elle est à gauche ?

64. Antoine : Exactement
65. An : C'est spécial … Mais on va continuer. Pour le groupe 3 ?
66. **40 :22** Matthieu : Je suis pas d'accord là !
67. An : Laquelle ?
68. Matthieu : La **19**. Si on fait $x^2 + 3x - \frac{7}{2} = 0$, alors la fraction est à gauche !
69. An : Alors là, tu la transformes un petit peu. Antoine les regarde sans les avoir transformer. Mais je suis d'accord avec toi, Matthieu xxx. Mais on va continuer. Alors, Antoine, après ?
70. **40 :50** Antoine : Je suis pas d'accord, là. C'est Clément qui a voulu le faire comme ça.
71. An : C'est pas grave, tu nous exposes ce qu'a fait le groupe.
72. Antoine : Alors il y a l'équation **6** ($\sqrt{2} + x = 3$), l'équation **7** ($\pi x + 3 = 4$) et l'équation **14** ($\sqrt{x} + 2 = 3$).
73. An : Alors qui est-ce qui avait donné ce classement-là ?
74. Antoine : c'est Clément.
75. **41 :04** An : Alors Clément, tu peux expliquer ? Parce qu'Antoine est pas trop d'accord, il va avoir du mal à soutenir ton xxx
76. Clément : C'est spécial, on va dire. Il y a des racines carrées et il y a xxx, il y a des nombres spécials.
77. An : il y a des racines carrées donc c'est spécial ?
78. Clément : Ben Oui, c'est des gros mots.
79. An : Ca, « des gros mots », c'est mon mot à moi, celui-là …Donc il y a des gros mots dedans ?
80. Clément : Oui.
81. **41 :31** An : Après, tu as réunis la **5** ($3x\left(x + \sqrt{5}\right) = 0$) et la **8** ($7(x + 2) + 4(x - 3) = 0$) ? La **5**, il y a aussi un gros mot dedans, mais bon… Pourquoi ?
82. Antoine : la forme est la même.
83. An : Tu regardes tes deux équations : qu'est-ce que tu appelles la forme est la même entre la **5** et la **8** ?
84. Antoine : La **5**, c'est *a* fois « *x* plus *b* » et la **8**, il y a deux fois : *a* fois « *x* plus *b* »
85. An : Donc ce groupe, c'est parce qu'on peut développer, on peut distribuer un nombre devant. Après ?
86. **42 :29** Antoine : Le cinquième groupe, les équations **4** ($3x - \frac{1}{4} = \frac{x}{4} - 2$) et **13** ($1{,}8x - 3 = 2{,}5x + 7{,}4$), c'est parce qu'il y a un nombre de chaque côté
87. An : D'accord, il y a deux membres de chaque côté.
88. **43 :00** Antoine : Pour le groupe 6, il y a la même structure. Il y a un nombre *x* et les mêmes 2*x* et 4*x* dans les deux équations
89. An : Guilhem n'est pas trop d'accord avec toi …comme moi. Tu entends mon enthousiasme …Qu'est-ce que tu fais comme remarque Guilhem ?
90. Guilhem : c'est pas des facteurs dans les deux
91. An : Dans la **16** ($(3 - 4x) - (2x - 1) = 0$), c'est quoi comme équation ?
92. Guilhem : c'est des termes
93. An : Et dans la **17** ($(3 - 4x)(2x - 1) = 0$) ?
94. Antoine : Mais c'est parce que c'est les mêmes nombres. Pour le dernier groupe, c'est pas moi qui l'aie fait.
95. An : Mais assume ! Tu es dans le groupe.
96. **43 :43** Antoine : Et pour le dernier groupe ($x^2 - 8x + 15 = 0$; $9x^2 - 16 = 0$; $x^2 = 7$; $x^2 + 3x = \frac{7}{2}$) , c'est parce qu'il y a des x^2, des x et des nombres.

97. An : D’accord, OK.

→ *Sous-phase 4.2*



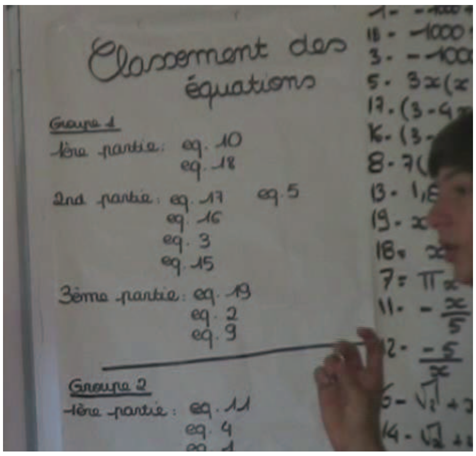
(Affiche 2-An et sa transcription : Elodie R ; Cédric D ; David B ; Guilhem B ; Julien G ; Matthieu O)

1 ; 15 ; 3 ; 5 ; 17 ; 16 ; 8 ; 13 ; 19; 18 ; 7 ; 11 ; 12 ; 6 ; 14 ; 9 ; 2 ; 10 ; 4

98. **43 : 50** An : Est-ce que ce groupe-là peut passer au tableau ? Guilhem !
99. Guilhem : alors, on a fait un seul grand groupe en fait, on les a classées par ordre de difficultés pour nous à les résoudre.
100. An : Ah, c’est intéressant, ça
101. Guilhem : Pour nous, on est allé de la plus simple à la plus dure à résoudre.
102. An : Donc pour toi la plus simple, c’est -1000 + x = 0 parce qu’elle ne te pose aucun problème. Donc toutes les équations avec les 1000 … Je vais quand même me permettre de faire un petit commentaire …
103. Guilhem : Il y a peut-être des incohérences …
104. **44 :50** An : La dernière équation ($3x - \frac{1}{4} = \frac{x}{4} - 2$) est-elle très difficile à résoudre ?
105. Guilhem : Je pense qu’il faut être plus attentif que par exemple pour la **18** ($x^2 = 7$)
106. An : Rien que par curiosité, est-ce que tu peux me donner les solutions de la **18** ?
107. Guilhem : c’est « -7 », non c’est « racine de -7 » et « racine de 7 »
108. An : Il me dit que c’est « racine de 7 » et « racine de -7 », ça vous va ?
109. Guilhem : Non, non « - racine de 7 »
110. An : Donc effectivement, quand on t’aide un petit peu, tu y arrives …
111. **45 :43** An : Et la **19**, pour voir ? Elle est assez haut dans les résolutions.
112. Guilhem : En fait, personnellement, je ne l’aurais pas mise là, mais il aurait fallu toutes les faire et on n’a pas eu le temps : c’est à peu près voilà.
113. An : La **19**, $x^2 + 3x = 7/2$: est-ce qu’il y a quelqu’un dans le groupe qui sait la résoudre ?
114. Guilhem : Il me faudrait un papier
115. An : Qu’est-ce que tu ferais, Matthieu ?
116. Matthieu : je ferais 7/2 sur 3 et après … xxx … j’aurais mis $x^2 + x$ …

117. An : Est-ce que tu peux me dire $x^2 + 3x$, qu'est-ce que c'est comme expression ?
118. E : C'est une somme
119. An : il y a combien de termes dans cette somme ?
120. E : Deux
121. An : Il y a donc deux termes dans cette somme. C'est quoi les termes ?
122. E : x^2 et $3x$
123. An : Et donc ce sont des blocs. Et alors tu es en train de diviser par 3, c'est pas gênant, Matthieu ?
124. Matthieu : Si, c'est gênant
125. An : Ben oui, c'est gênant.
126. E_1 : il faut faire $x(x + 3) = 7/2$
127. E_2 : Ca n'avance pas à grand-chose
128. An : Et pourquoi ça n'avance pas à grand-chose ?
129. E_2 : À cause du 7/2, on peut rien faire
130. An : Il aurait fallu avoir quoi quand on transforme ?
131. E : il faut que ce soit égal à zéro
132. An : il faut que ce soit égal à zéro. Bon d'accord. Donc vous avez fait un classement par ordre de difficultés. Euh, le groupe du fond ?

→ Sous-phase 4.3



(Affiche 3-An et sa transcription : Robin G ; Manon G ; Lucas T ; Marie S ; Matthieu B ; Valentine M)

Groupe 1	Partie 1	10 ; 18
	Partie 2	3 ; 5 ; 15 ; 16 ; 17
	Partie 3	2 ; 9 ; 19
Groupe 2		1 ; 4 ; 6 ; 7 ; 8 ; 11 ; 12 ; 13 ; 14

133. **45 :28** E : Pour le groupe 1, la première partie, c'est la **10** ($\frac{x^2}{27} = 0{,}01$) et la **18** ($x^2 = 7$), elles sont spéciales avec un x^2 et un autre … chiffre. On a juste à faire une racine pour obtenir le résultat. Voilà. Après la deuxième partie, c'est celles où elles sont déjà factorisées …
134. An : Alors **17** ($(3 - 4x)(2x - 1) = 0$), … je regarde simplement…, **16** ($(3 - 4x) - (2x - 1) = 0$), **3** ($-1000x = 0$) et **15** ($1000x = 0$) et **5** ($3x\left(x + \sqrt{5}\right) = 0$
135. E : Elles sont déjà factorisées, il y a un premier terme et « égal zéro » pour les quatre. Après, la troisième partie …
136. An : Tu as **19** ($x^2 + 3x = \frac{7}{2}$), la **2** ($x^2 - 8x + 15 = 0$) et **9** ($9x^2 - 16 = 0$)
137. E : Alors, celles-là elles ont des x^2, il faut les factoriser pour avoir un résultat sans x^2.
138. **48 :28** An : Excuse-moi, le premier groupe 1, je l'ai pas … c'était quoi ?
139. E : Celui-là ?

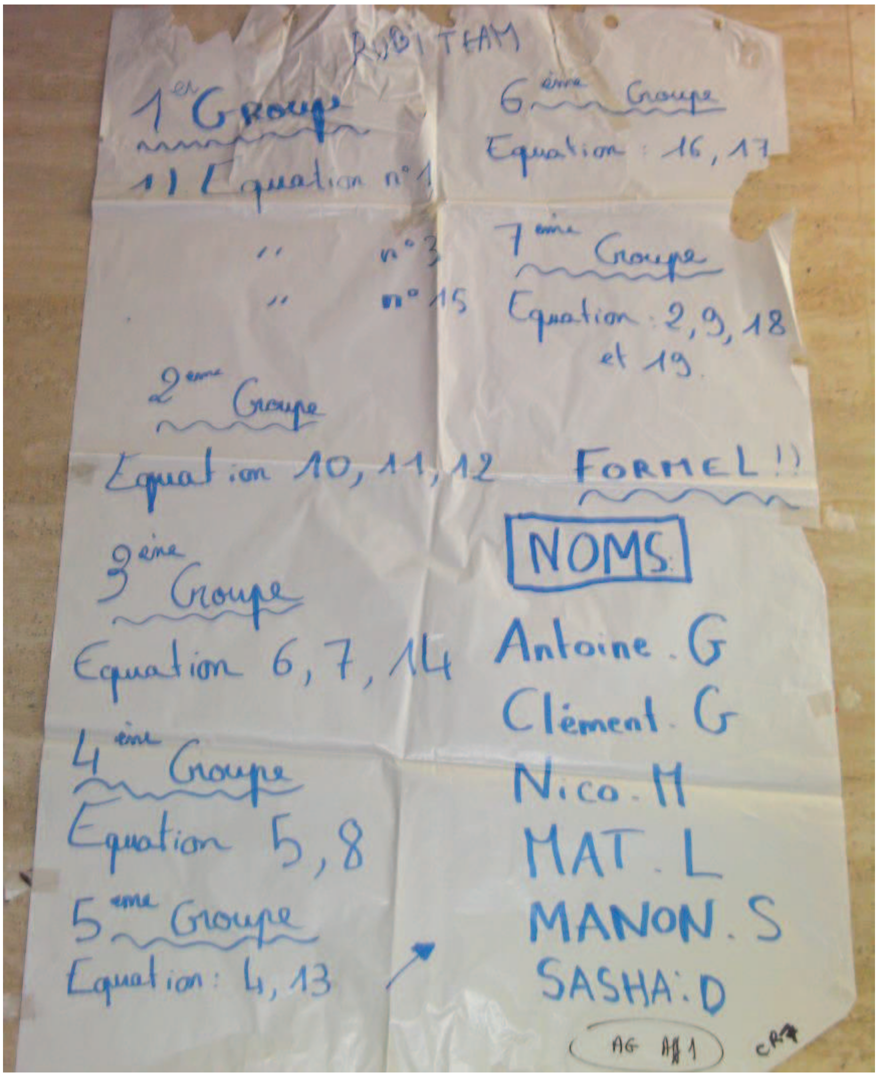
140. An : Non, les grands groupes, groupe 1 et groupe 2, c'est quoi la différence entre les deux ?
141. E : Le groupe 1, c'est celui avec les x^2 et le groupe 2, c'est celui sans les x^2
142. An : D'accord, excuse-moi, je n'avais pas entendu.
143. **48 :46** E : Donc pour la troisième partie, c'est celles qui faut factoriser et après, avec « égal à zéro », on fait les deux termes … voilà.
144. An : Donc il y a plus de travail, a priori …
145. E : Voilà. Pour le groupe 2, là normalement, on a juste à faire, à changer de place le x …
146. An : … à isoler le *x*
147. E : Oui, à isoler le *x* et réduire, on résout normalement
148. An : Donc tu as mis la **1** ($-1000 + x = 0$) ; la **4** ($3x - \frac{1}{4} = \frac{x}{4} - 2$) ; la **6** ($\sqrt{2} + x = 3$) ; la **7** ($\pi x + 3 = 4$) ; la **8** ($7(x + 2) + 4(x - 3) = 0$) ; la **11** ($-\frac{x}{5} = 1$) ; la **12** ($\frac{-5}{x} = 1$) ; la **13** ($1{,}8x - 3 = 2{,}5x + 7{,}4$) ; la **14** ($\sqrt{x} + 2 = 3$)
149. An : Alors, juste la **8**, c'est quoi ? Quand tu regardes le membre de gauche …
150. **49 :40** *(Sonnerie)*
151. An : On ne bouge pas ! Vous attendez une seconde
152. E : C'est une somme et il n'y a pas de x^2 quand on développe.
153. An : Et la **16** ($(3 - 4x) - (2x - 1) = 0$) ?
154. E : La **16**, il faut multiplier par -1 en changeant 2x – 1
155. An : Est-ce qu'il y aurait des x^2 ?
156. E : Non
157. An : c'était juste une question …
158. **50 :10** An : je vous rappelle que pour mardi prochain, vous avez des exercices…

(Sortie. Fin de la transcription.)

A26. Transcription des affiches des élèves du professeur Annabelle

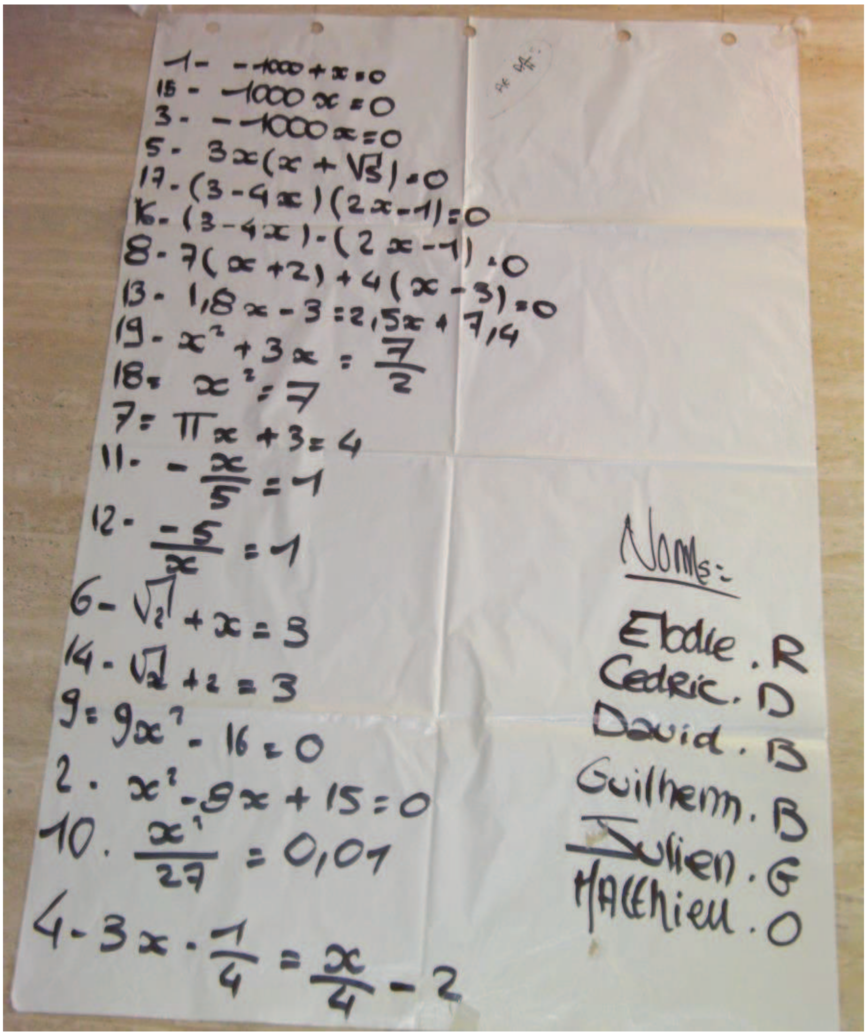
Afin de pouvoir comparer les affiches entre elles et selon les différents professeurs, les numéros des affiches seront codés. Par exemple pour le professeur Annabelle, on codera l'affiche 1 par 1-An, l'affiche 2 par 2-An, etc.

Affiche 1-An : Antoine G ; Clément G ; Nico M ; Mat L ; Manon S ; Sasha D



Transcription de l'affiche 1-An	
1er groupe	1 ; 3 ; 15
2e groupe	10 ; 11 ; 12
3e groupe	6 ; 7 ; 14
4e groupe	5, 8
5e groupe	4 ; 13
6e groupe	16 ; 17
7e groupe	2 ; 9 ; 18 ; 19

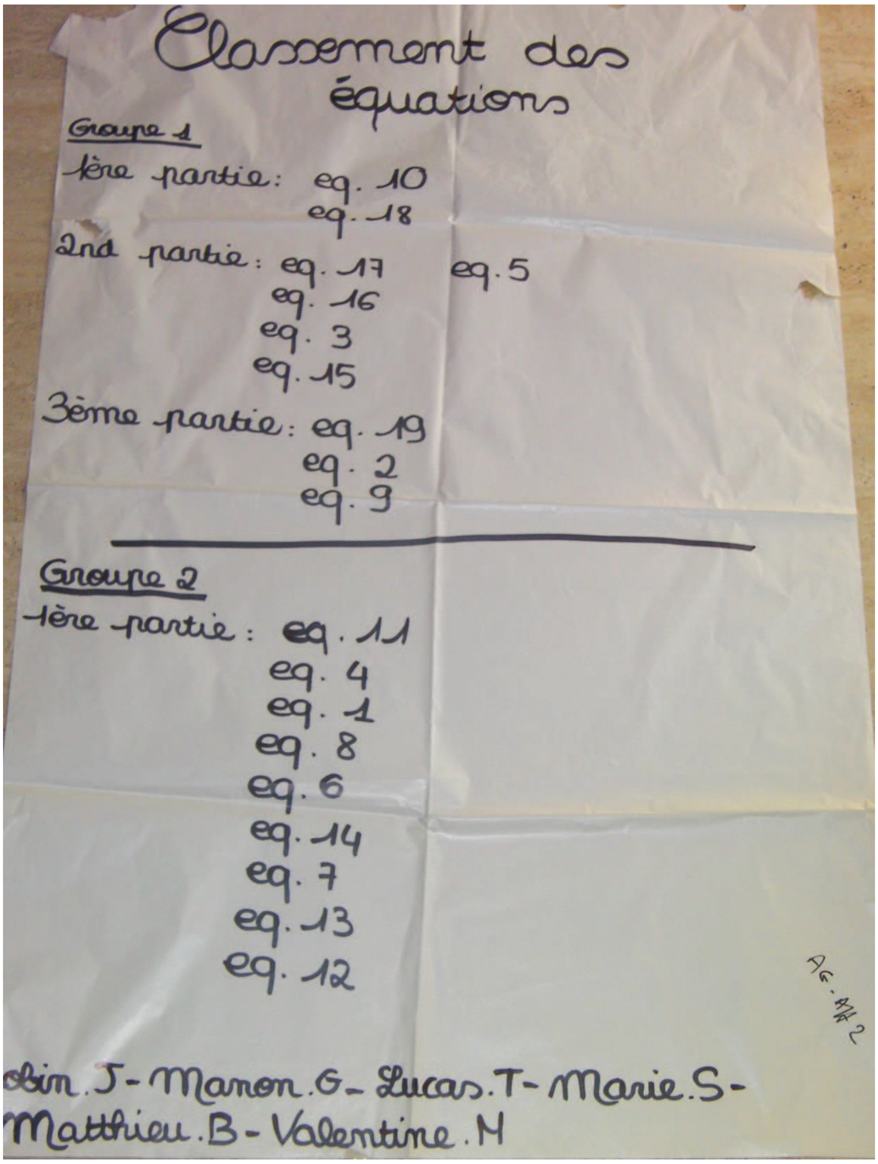
Affiche 2-An : Elodie R ; Cedric D ; David B ; Guilhem B ; Julien G ; Matthieu O



Transcription de l'affiche 2-An :

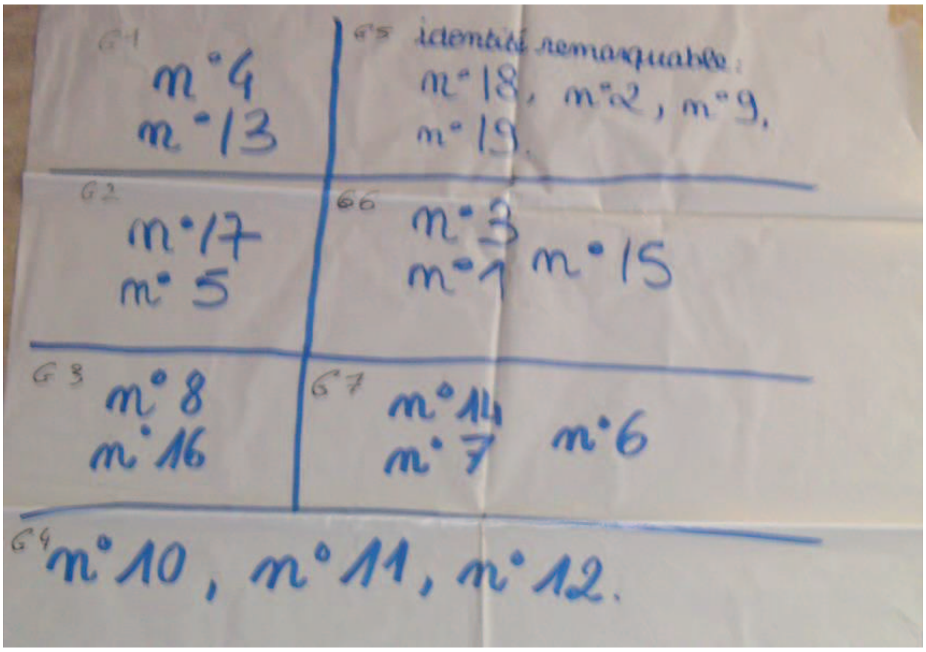
1 ; 15 ; 3 ; 5 ; 17 ; 16 ; 8 ; 13 ; 19 ; 18 ; 7 ; 11 ; 12 ; 6 ; 14 ; 9 ; 2 ; 10 ; 4.
(*Transcription ordonnée des numéros des équations*)

Affiche 3-An : Robin G ; Manon G ; Lucas T ; Marie S ; Matthieu B ; Valentine M



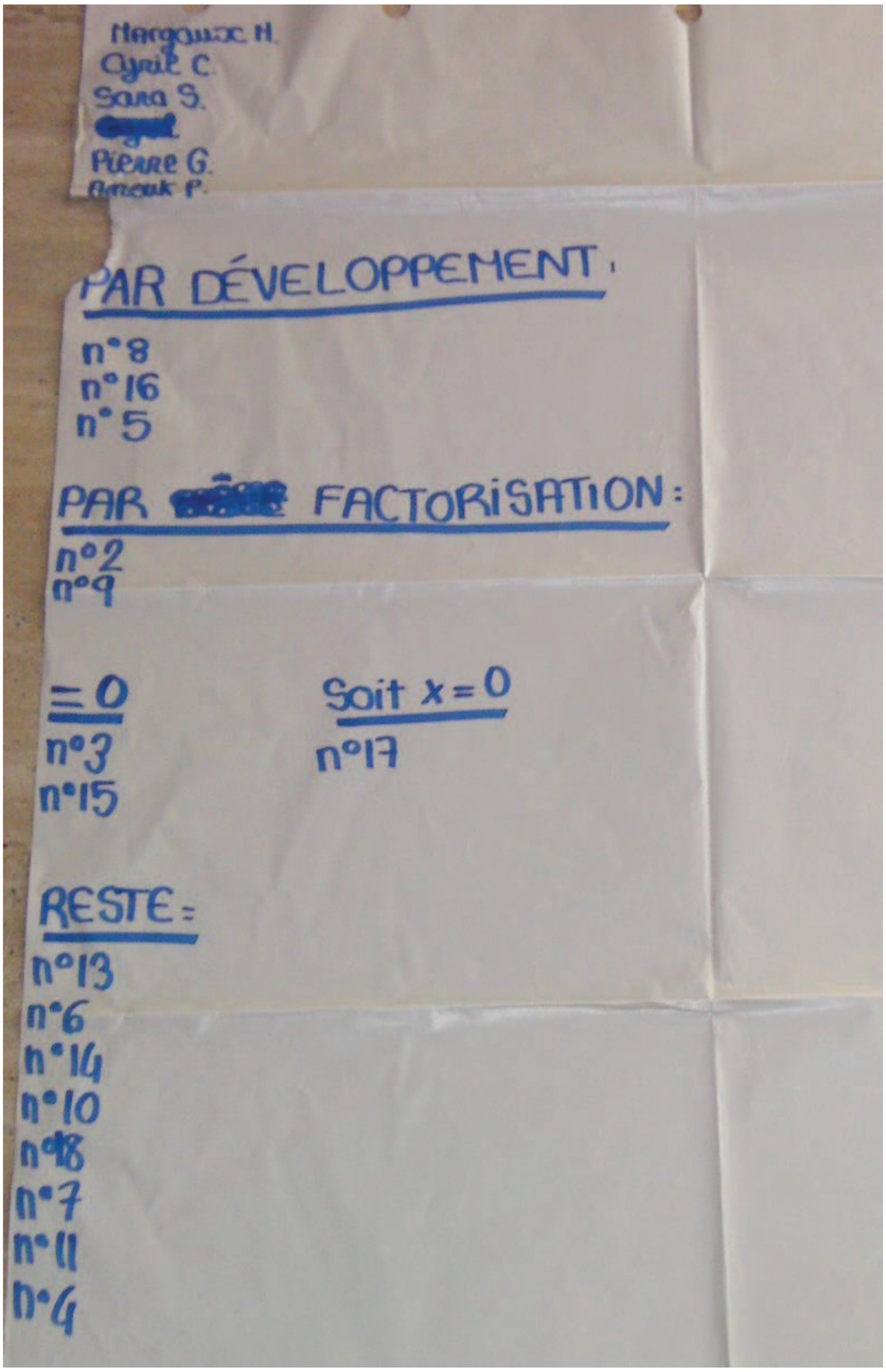
Transcription de l'affiche 3-An		
Groupe 1	Partie 1	10 ; 18
	Partie 2	3 ; 5 ; 15 ; 16 ; 17
	Partie 3	2 ; 9 ; 19
Groupe 2		1 ; 4 ; 6 ; 7 ; 8 ; 11 ; 12 ; 13 ; 14

Affiche 4-An : Cindy L ; Lisa M ; Matthias R ; Marylou P ; Romain S ; Pascal S



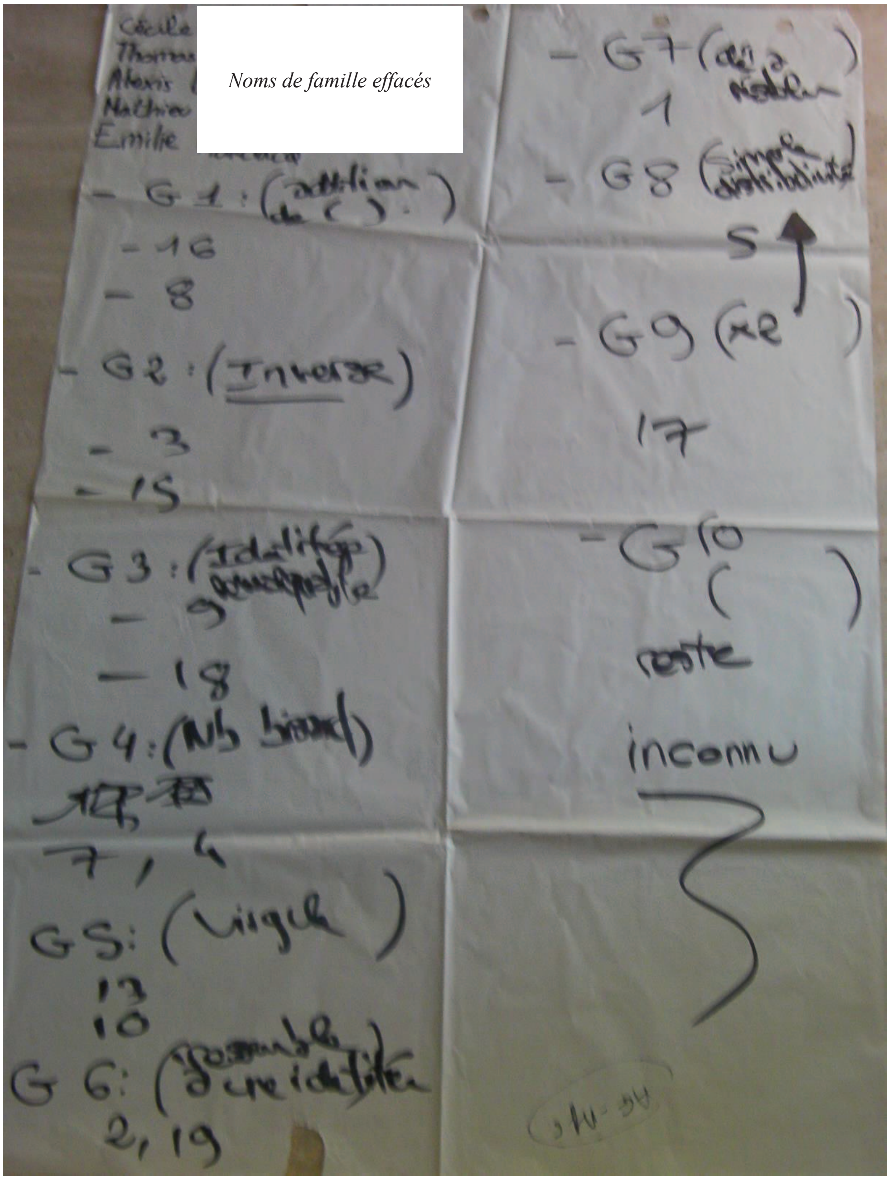
Transcription de l'affiche 4-An	
1er groupe	4 ; 13
2e groupe	5 ; 17
3e groupe	8 ; 16
4e groupe	10 ; 11 ; 12
5e groupe	Identités remarquables : 2 ; 9 ; 18 ; 19
6e groupe	1 ; 3 ; 15
7e groupe	6 ; 7 ; 14

Affiche 5-An : Margaux H ; Cyril C ; Sara S ; Pierre G ; Anouk P



Transcription de l'affiche 5-An	
Par développement	5 ; 8 ; 16
Par factorisation	2 ; 9
= 0	3 ; 15
Soit x = 0	17
Reste	4 ; 6 ; 7 ; 10 ; 11 ; 13 ; 14 ; 18

Affiche 6-An : Cécile M. ; Thomas B. ; Alexis L. ; Mathieu I. ; Emilie M.



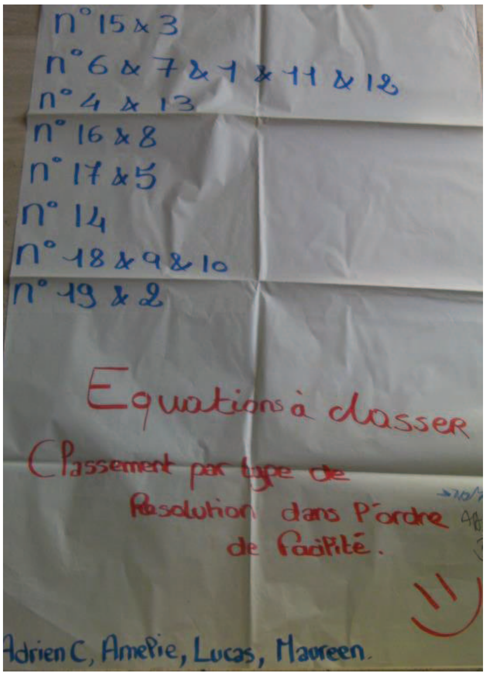
	Transcription de l'affiche 6-An	
G1	Addition de ( )	8 ; 16
G2	Inverse	3 ; 15
G3	*Identitée* remarquable	9 ; 18
G4	Nb *bisard*	4 ; 7
G5	virgule	10 ; 13
G6	Ressemble à une *identitée*	2 ; 19
G7	Déjà résolu	1
G8-G9	Simple distributivité	5 ; 17
G10	Reste inconnu	

A27. Transcription de la séance 1 du professeur Maurice (situation n°1)

La séance s'est déroulée le 13/05/2011 et n'a pu être filmée. Un entretien post-séance a été réalisé et enregistré le 14/05/2011 et est retranscrit ci-dessous. Le professeur Maurice a apporté les affiches réalisées par les groupes et elles sont commentées, ainsi que le travail et le comportement des élèves durant la séance.

1. Ma : Les groupes de trois ont été formés d'un bon élément, une tête, un moyen et un plus faible. Même si dans certains groupes, il n'y en avait pas vraiment de très faibles, parce que je n'en ai pas vraiment des élèves faibles.
2. C : C'est comme ça qu'Annabelle a aussi formé ses groupes. Et le niveau de ta classe est plutôt bon ?
3. Ma : Oui, le niveau est plutôt bon.
4. C : c'est une option MPI ?
5. Ma : Non, ça n'existe plus, ce sont des classes indifférenciées maintenant.
6. C : Ah, oui, c'est vrai …
7. Ma : Mais ils sont du niveau de l'ancienne option MPI, la majorité veut aller en S. Donc des élèves qui ont du mal à être intéressés à autre chose que leurs propres idées. Quand quelqu'un pose une question, généralement les autres n'écoutent pas ce qu'il dit, soit parce qu'ils pensent qu'ils ont compris ou alors que ce n'est pas assez intéressant. C'est ça tout le temps.
8. C : Ah, oui !? !
9. Ma : Donc au niveau des groupes, ça a été beaucoup de bruit, beaucoup de contestations. J'ai trouvé qu'au début …il a fallu que je me mette en colère pour qu'ils se mettent au travail.
10. **01 : 07** C : Pourtant elles ont l'air drôlement intéressantes les affiches …
11. Ma : À côté de ça, ce sont des élèves scolaires, donc quand j'ai mis la pression après ils ont travaillé, mais sous la pression.
12. C : Mais quand j'ai vu le résultat (*des affiches*), je pensais que ça s'était bien passé …
13. Ma : Et bien non, j'ai trouvé que non. Ce qu'il y a, c'est qu'à certains endroits, quand je les ai regroupés en groupes de six, il y avait trois élèves dans le groupe vraiment actifs et qui se disputaient et les trois autres qui bavardaient et qui ne s'occupaient pas du tout de l'affiche.
14. C : Hou là ! Et pourquoi justement y a-t-il des affiches avec seulement trois noms ici et quatre ici ?
15. Ma : Là où il y en a trois et quatre (*Affiches 4-Ma et 5-Ma*), c'est parce qu'ils n'ont pas réussi à se mettre d'accord. Ils allaient se battre alors je les ai autorisés : ils sont venus me voir en disant : « Monsieur, on ne peut pas se mettre d'accord ». Je leur ai dit : « alors prenez une affiche chacun et puis on verra ».
16. C : Et pourquoi, il n'y a quand même que six affiches ?
17. Ma : C'est parce que j'avais un nombre impair de groupes de trois. Donc il y a un groupe de trois que j'ai réparti dans la deuxième phase et j'ai dit à chacun : « vous avez fait un classement, vous allez le défendre auprès de vos camarades chacun dans un groupe différent ».
18. C : Ah, d'accord, c'est pour ça qu'ici il y a quatre noms … et ici sept noms...
19. Ma : J'ai pu faire passer quatre groupes au tableau.
20. C : Ah, c'est bien …

21. Ma : Le problème, c'est qu'un des groupes a été incapable de … d'expliquer, de justifier. Ceux-là ne sont pas passés (*Affiches 5-Ma et 6-Ma*), et ceux-là oui (*Affiches 1-Ma à 4-Ma*),
22. **03 : 25** C : Ah, d'accord.
23. Ma : Ce que peux te dire, en particulier, attends que je regarde… À un moment, ils ont eu une idée bizarre (*le groupe de l'affiche 3-Ma*), c'est de regarder les équations qui avaient les mêmes solutions. *(L'enseignant y revient plus longuement aux lignes 97 à 102)*
24. C : Ah bon !
25. Ma : Alors, je leur ai dit : mais alors vous allez les résoudre les équations pour savoir ?
26. **04 : 09** Ma : Et celui-là *(groupe de l'affiche 4-Ma)*, c'était juste à la fin, ça avait sonné : il n'a presque rien dit… Eux sont partis sur les résolutions.

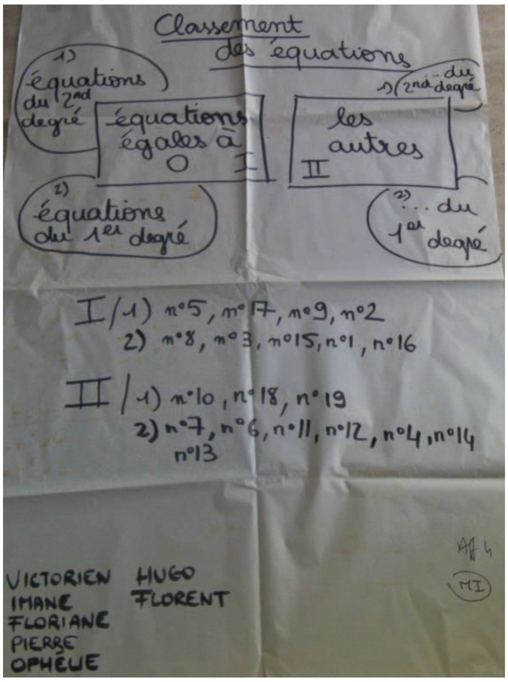


Affiche 4-Ma et sa transcription :

Classement par type de résolution dans l'ordre de facilité
3 ; 15
1 ; 6 ; 7 ; 11 ; 12
4 ; 13
8 ; 16
5 ; 17
14
9 ; 10 ; 18
2 ; 19

27. C : Alors finalement ils ont classé par ordre de facilité ?
28. Ma : Alors oui, je t'explique ce que c'est. Alors ce qu'ils ont trouvé facile … Il y a des équations là-dedans où il n'y a aucun calcul à faire …
29. C : Ah c'est ce que je me demandais …
30. Ma : Celle-là, pour eux, il n'y a aucun calcul à faire (*il montre la 15 : $1000x = 0$*)
31. C : Et ils ne se trompaient pas ?
32. Ma : Non, non. C'étaient des bons. Ils disaient, on voit tout de suite que $x = 0$. Alors là, il n'y a aucun calcul à faire. Et même-là (*en montrant les équations 6 ; 7 ; 1 ; 11 et 12*), pour eux il n'y a non plus aucun calcul à faire, tout ça c'est pareil …
33. C : 6 ($\sqrt{2} + x = 3$), 7 ($\pi x + 3 = 4$) et 1 ($-1000 + x = 0$) par exemple …
34. Ma : ils trouvent que c'est évident …
35. C : Même pour 6 et 7 ? Pour eux, c'est évident …
36. Ma : oui.
37. C : La 11 ($-\frac{x}{5} = 1$) et la 12 ($\frac{-5}{x} = 1$), c'est pareil ?
38. Ma : Ils trouvent que c'est évident. Après réflexion avec les autres, ils ont dit que c'était peut-être pas si facile …
39. C : Ensuite, la 4 ($3x - \frac{1}{4} = \frac{x}{4} - 2$) et la 13 ($1{,}8x - 3 = 2{,}5x + 7{,}4$) … Ils l'ont justifié comment ?
40. **05 :30** Ma : Ils ne l'ont pas écrit mais après, ils me l'ont dit « c'est du premier degré ».

41. C : Par contre, sur cette affiche-là (*en montrant l'affiche 1-Ma*), ils ont commencé par écrire les degrés tout de suite.



Affiche 1-Ma et sa transcription :

I- Équations égales à zéro
- 1- Équations du 2^{nd} degré
- 2- Équations du 1^{er} degré

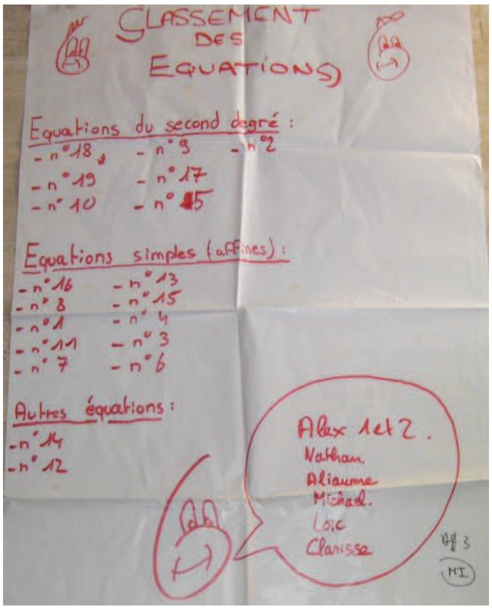
II- Les autres
- 1- Équations du 2^{nd} degré
- 2- Équations du 1^{er} degré

I-1	2 ; 5 ; 9 ; 17
I-2	1 ; 3 ; 8 ; 15 ; 16
II-1	10 ; 18 ; 19
II-2	4 ; 6 ; 7 ; 11 ; 12 ; 13 ; 14

42. Ma : Mais ça c'est l'œuvre d'un seul, Victorien. Dans son groupe de trois, il n'y avait pratiquement que lui qui travaillait et quand ils se sont réunis à six, c'est lui qui a …écrit l'affiche.
43. C : Et comment il t'a expliqué pourquoi celles qui sont égales à zéro sont tellement différentes des autres ? Est-ce qu'il te l'a justifié, ça ?
44. Ma : Pour « égal à zéro », il a utilisé le mot « factorisation ».
45. **06 :30** C : Par exemple, la 5 ($3x(x+\sqrt{5})=0$) elle est déjà factorisée
46. Ma : donc pour lui, c'est clair …
47. C : la 17 ($(3-4x)(2x-1)=0$) elle est déjà factorisée, la 9 ($9x^2-16=0$) elle n'est pas factorisée mais il doit savoir le faire …
48. Ma : Oui
49. C : et la 2 ($x^2-8x+15=0$)… Là il s'est trompé, par contre.
50. Ma : Je vais te dire. C'est un élève qui est venu me parler de la méthode pour factoriser quand c'est du second degré et que ce n'est pas une identité remarquable.
51. C : Ah oui ?
52. Ma : Il voulait savoir, ça le travaillait beaucoup et il a voulu que je le lui explique comment on faisait. Et il travaille en plus… Il m'a dit que son prof de 3^e lui a montré le système de Cramer avec les déterminants pour les systèmes 2-2 et il m'a reproché de ne pas l'avoir fait cette année. Je lui ai répondu qu'à mon avis, son prof de 3^e avait perdu son temps …
53. C : Ah oui !!!
54. Ma : Je lui ai dit qu'il y a plein de choses qu'on peut faire en 3^e et ça n'est même pas enseigné en terminale …Pour moi je lui ai que ça n'avait aucun intérêt à ce niveau.
55. C : Et tu lui as expliqué qu'on peut faire 15 = 16 – 1 ?
56. Ma : Alors il a attendu la fin de l'heure et il m'a demandé et je lui ai montré qu'on peut faire apparaître une identité remarquable. Ah ça, ça lui a plu. Il m'a demandé : alors, on peut faire ça tout le temps ? Mais il essaie tout le temps … C'est un gamin qui, à mon

avis, ne s'entend bien qu'avec des adultes et s'entend mal avec les autres et il n'est pas surdoué mais précoce, et surtout très motivé. Il aime bien aller plus loin.

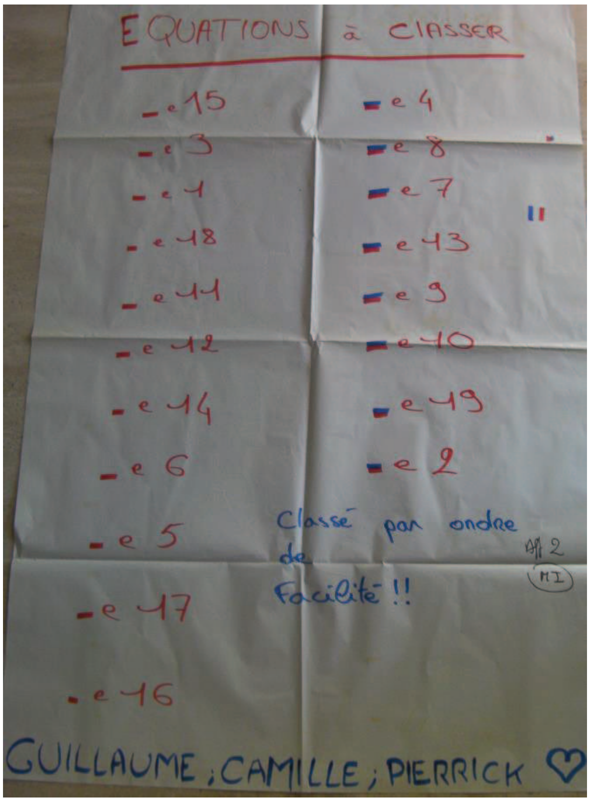
57. C : C'est ce qu'il ne connaît pas qui l'intéresse…
58. Ma : Il est hyper rigoureux et soigné. Il essaie de faire la rédaction parfaite. Il cherche à utiliser les quantificateurs…
59. Ma : donc cette affiche (*1-Ma*), c'est le travail d'un seul élève. Par contre, les autres, c'est un travail collectif.
60. **09 :02** C : alors explique-moi, celle-là (*Affiche 3-Ma*). Est-ce qu'ils sont passés au tableau ?



Affiche 3-Ma et sa transcription :

Équations du second degré	2 ; 5 ; 9 ; 10 ; 17 ; 18 ; 19
Équations simples (affines)	1 ; 3 ; 4 ; 6 ; 7 ; 8 ; 11 ; 13 ; 15 ; 16
Autres	12 ; 14

61. Ma : Là en fait, ils sont passés en troisième, et comme eux (*Affiche 1-Ma*) avaient déjà parlé de degré et qu'il ne restait pas beaucoup de temps, je voulais en faire passer une autre, je leur ai demandé la philosophie de leur classement et il m'a dit : c'est d'abord second degré puis les équations affines, c'est lui qui les a appelé comme ça, on sait toutes les résoudre …
62. C : Ah, c'est bien ! Et ils ont bien dégagé les deux qui n'étaient pas du même type … La 12 ($-\frac{5}{x} = 1$) et la 14 ($\sqrt{x} + 2 = 3$), ils ont vu qu'elles ne faisaient pas partie de la même famille … Ah oui, et la consigne que tu as donné, finalement ?
63. Ma : J'ai fait ce qu'on avait décidé, j'ai donné la consigne « pour résoudre », mais pas tout de suite. Au début, je n'ai rien dit.
64. C : J'ai l'impression qu'on ne retrouve pas, comme chez Annabelle, les équations qui ont les mêmes types de coefficients, comme les racines carrées ou des fractions …
65. Ma : je crois qu'ils ont fait la différence entre $\sqrt{x}$ et $\sqrt{5}$, par exemple …
66. C : J'ai eu un doute sur un des groupes pour ça …C'est celui-là (*Affiche 5-Ma*)
67. Ma : Celui-là, c'est un groupe qui est plus faible.



Affiche 5-Ma et sa transcription :

Classé par ordre de facilité !!
15 ; 3 ; 1 ; 18 ; 11 ; 12 ; 14 ; 6 ; 5 ; 17 ; 4 ; 8 ; 7 ; 13 ; 9 ; 10 ; 19 ; 2

68. C : Je voulais te demander si le classement se lisait en lignes ou en colonnes ?
69. Ma : Je n'ai pas eu le temps de leur demander, ils ne sont pas passés au tableau.
70. C : Il y a un code couleur …
71. Ma : C'est pour faire joli, ça n'a aucune signification. C'est le secrétaire, Pierrick qui a fait ça. Je lui ai posé la question, et c'est ce qu'il m'a dit.
72. C : a priori, je pense que ça se lit en colonnes …La 15 ($1000x = 0$) et la 3 ($-1000x = 0$), elles sont semblables plus que la 15 et la 4 ($3x - \frac{1}{4} = \frac{x}{4} - 2$).
73. Ma : Et les deux dernières ce serait la 19 ($x^2 + 3x = \frac{7}{2}$) et la 2 ($x^2 - 8x + 15 = 0$)… Oui, ça correspond, ça doit se lire en colonnes.
74. C : Mais alors leur classement n'est pas idiot …
75. Ma : Tu vois, Guillaume, … c'est lui le « bon », mais c'est pas … très bien quand même par rapport à d'autres…
76. C : Ah, c'est ça qui m'a étonné chez eux, la 14 ($\sqrt{x} + 2 = 3$) est placée avant la 6 ($\sqrt{2} + x = 3$). Regarde …
77. Ma : Ah mon avis, eux, ils n'ont pas vu la différence …
78. C : Elles sont à la suite mais elles sont au même niveau. Ils ont vu une racine et ils les ont mis ensemble. Elles sont ensemble parce qu'il y a une racine.

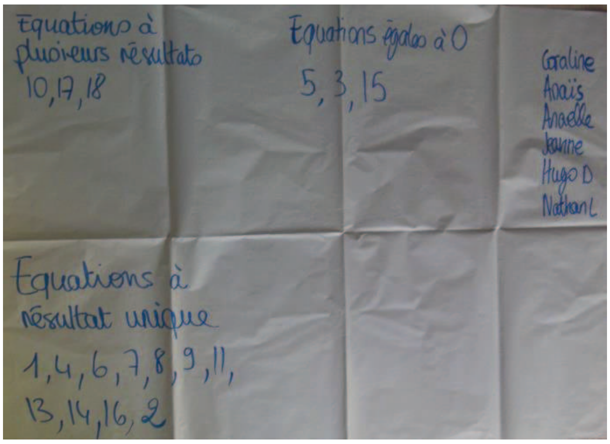
Tu as vu l'ordre qu'ils donnent ici : la 5 ($3x(x + \sqrt{5}) = 0$), la 17 ($(3 - 4x)(2x - 1) = 0$) et la 16 ($(3 - 4x) - (2x - 1) = 0$) ?

79. Ma : ils ont mis la 16 après … Ils sont moins bons que les autres ...
80. C : La 5 et la 17 sont les équations factorisées du 2nd degré et la 16 est du 1er degré. Ils ne font pas la différence entre le 1er et le 2nd degré. Ils ont regardé la valeur des coefficients et du coup, elles vont ensemble parce qu'elles se ressemblent.
81. Ma : Ensuite 4 ($3x - \frac{1}{4} = \frac{x}{4} - 2$) avec 8 ($7(x + 2) + 4(x - 3) = 0$).
82. C : Pourquoi pas 16 avec 8 ? Ah, elles ne sont pas loin quand même, elles sont à la suite… Par contre celle qui contient pi (*équation 7*), elle est loin dans le classement global alors

qu'elle est du 1er degré. Celle du 1er degré avec les nombres décimaux (*équation 13*) est loin aussi. Ensuite c'est la 9 ($9x^2 - 16 = 0$) puis la 10 ($\frac{x^2}{27} = 0{,}01$) qui sont du second degré …

83. Ma : C'est parce que c'est au carré. Ils ont mis devant toutes celles qui n'avaient pas de carré apparent, et comme on apprend davantage des équations comme la 17 et la 5 qui sont reconnues, des équations du 2nd degré mais déjà factorisées. Quand il y a des carrés, ça devient … On est juste dans la leçon sur les carrés. Entre parenthèses, dans cette classe, juste avant cette séance, j'ai fait un test... On avait fait la leçon sur la fonction carrée, on avait vu les équations, les inéquations, on avait fait des exercices en classe, mais pas encore les exercices à la maison corrigés. Ça a été une telle surprise, c'était un contrôle où il y avait une partie sur les droites qu'on avait traitées avant et je leur avais dit qu'il y aurait une partie sur la fonction carrée. Cela revenait donc à faire quelque chose sur la leçon du jour, pas plus. Ça a été une catastrophe ! C'est-à-dire que même les très bons, par exemple $x^2 < 7$ ça donne $x < \sqrt{7}$. Et pourtant j'avais insisté … Et même Victorien !
84. C : Et tu l'avais fait en classe avec la courbe de la fonction ?
85. Ma : Et oui ! Je ne l'avais d'ailleurs fait qu'avec la courbe. On en avait d'ailleurs parlé avec Annabelle… En fait ça dépend des années : il y a des années j'insiste plus sur la factorisation, et d'autres années, j'insiste plus sur la courbe. Cette année j'avais choisi de le faire avec la courbe uniquement. Je n'avais eu pas le temps de le faire avec la factorisation. Ils avaient eu à faire des exercices à la maison, mais on ne les avait pas corrigés. Ça a été la catastrophe sur cette partie-là !
86. C : Tu avais mis des égalités aussi ?
87. **16 :14** Ma : Oui, j'avais donné $x^2 = 121$. Il y a un tiers de la classe qui s'est planté… Les autres ont trouvé les deux racines. Mais avec les inégalités, non … Et j'ai demandé à Victorien : « et tu as utilisé la courbe ? ». Il m'a dit : « ah oui, la courbe, c'est vrai ! J'y ai pas pensé ! ».
88. C : Comme quoi, c'est pas si naturel !
89. Ma : En revanche, j'avais marqué $x^2 > -2^2$. Alors là, ça les a fait réfléchir et ils s'en sont plutôt mieux tirés. Il y en a qui ont mis : « $S = \mathbb{R}$ ». C'est curieux, hein ?
90. C : Alors « un carré est toujours positif », ça passe mieux …
91. Ma : Mais il y en a encore beaucoup qui ne font pas la différence entre -2^2 et $(-2)^2$. Il y a eu des erreurs encore là-dessus. Pour beaucoup.
92. **17 :25** C : Alors au début, tu as lancé ta consigne …
93. Ma : Je les ai mis par trois et j'ai distribué les cartons. Certains ont été très décontenancés.
94. C : Ah bon !
95. Ma : Oui, certains étaient avec leurs cartons et puis euh … alors j'ai répété la consigne simplement et ils m'ont demandé : « mais Monsieur, il faut les classer comment ? ». Je lui ai dit : « mais tu as écouté ce que je t'ai dit, réfléchis … ». J'ai dit : « Notre but, c'est de les résoudre. Voilà, donc c'est en fonction de cette résolution qu'il faut que tu les classes ».
96. C : Oui.
97. Ma : Après, je n'ai rien dit de différent. Il y en a qui m'ont appelé et qui m'ont dit : « Monsieur, on ne s'en sort pas ». Je leur ai demandé : « Quelle est votre idée pour le moment ? ». Ils m'ont dit : « On essaie de trouver celles qui ont les mêmes solutions ». Alors, je lui ai dit : « Réfléchis. Est-ce que tu crois que c'est ça l'objectif ? ». J'ai essayé de les faire changer d'idée. Ça ne me paraissait pas très réalisable…
98. C : Oui, parce que finalement, il n'y en avait sans doute que deux : $1000x = 0$ et $-1000x = 0$ qui avaient les mêmes solutions …

99. Ma : Je leur ai dit : « Mais vous trouvez que c'est évident de chercher ça ? Mais alors, vous allez les prendre toutes et vous allez toutes les résoudre pour savoir ? ». Alors ça les a fait réfléchir … Je leur ai demandé : « À votre avis, ça pourrait vous servir à quoi de savoir qu'elles ont les mêmes solutions ? ». Alors, ils sont partis sur autre chose.
100. C : Ah d'accord. C'était quel groupe ?
101. Ma : C'est ceux qui sont avec Anaëlle. C'est un groupe qui marche bien (*groupe de l'affiche 2-Ma*)… C'est ce groupe-là. D'ailleurs, ils vont sur les résultats, tu vois ?



Affiche 2-Ma et sa transcription :

Équations à plusieurs résultats	10 ; 17 ; 18
Équations à résultat unique	1 ; 2 ; 4 ; 6 ; 7 ; 8 ; 9 ; 11 ; 13 ; 14 ; 16
Équations égales à zéro	3 ; 5 ; 15

102. **19 :03** C : Oui, en effet. Est-ce que tu les as fait discuter sur la formulation « équations à plusieurs résultats, équations à résultat unique » et sur « équations du second degré, équations du premier degré ». Est-ce qu'ils ont fait le lien que quand c'est du second degré, ça fait plusieurs solutions ?
103. Ma : Écoute, franchement, j'ai eu beaucoup de mal à rentrer dans leur raisonnement. Parce que quand j'arrivais dans un groupe, donc, soit il n'y avait pas de discussion et il y en avait un qui faisait tout seul, soit ils étaient incapables de m'expliquer de quoi ils … « Mais on ne peut pas vous expliquer ! ». J'avais un mal fou à comprendre qu'elle était leur idée …
104. C : À l'intérieur du petit groupe de trois ?
105. Ma : Oui.
106. C : Mais après ?
107. Ma : J'avais pas l'impression que ça marchait bien. J'avais l'impression d'un truc un peu stérile … dans leurs recherches.
108. C : Oui.
109. **19 :57** Ma : Et après, c'est au moment de l'exposé, je me suis rendu compte qu'il y avait eu un certain …
110. C : … une certaine réflexion, quand même !
111. Ma : Ben oui ! C'est passé … Mais je n'ai pas trouvé un enthousiasme pour ce travail … par exemple pour le groupe d'Anaëlle… Ils n'ont pas bien travaillé, mais ils sont très scolaires. Alors que la classe d'Annabelle, ils ne le sont pas.
112. **21 : 19** C : Annabelle en a un qui est excellent. Eh bien, lui, il s'est ennuyé. Mais dans la séance d'après, sur l'algorithmique, il s'est éclaté. Alors peut-être que la prochaine séance passera mieux, pour tes élèves.
113. Ma : De toute façon, j'ai une classe, tous les profs le disent, qui est absolument désagréable. Il n'y a pas d'enthousiasme, il n'y a pas de feed-back. Au début, j'ai cru que j'avais une mauvaise classe. Et au premier trimestre quand je faisais un contrôle, j'étais étonné d'avoir de bonnes notes.
114. C : Je comprends, j'ai déjà eu ce profil …

115. Ma : Tu expliques quelque chose, tu ne sais pas si tu les ennuies, s'ils ont compris, s'ils n'ont pas compris, si … Aucune expression sur leur visage. Ils ne partagent pas, éventuellement ils bavardent. Tu as l'impression qu'ils ont décroché mais c'est parce qu'ils ont fait le travail. Mais ce que je soupçonne aussi c'est qu'ils sont très suivis à la maison. « Je ne suis pas en classe, de toute façon, on m'expliquera à la maison ».

116. C : Ils t'ont quand même posé des questions pendant que tu tournais, pendant la recherche ? Ils faisaient leur truc et ils ne s'occupaient pas de toi ?

117. **23 :00** Ma : Oui. Et même quelquefois, quand je fais des TD, je demande : « qui a besoin de moi ? ». Personne ne répond …

118. C : Ah oui ! (*rires*)

119. Ma : Je dis : « Bon, ben, je peux partir ? Personne n'a besoin de moi ? Pas de questions ? ». Il y en a plein qui ne posent pas de questions. Ils ne feront rien, mais ils ne poseront pas de questions … Il y a des fois, j'ai l'impression d'être de trop !

120. C : Ah oui, incroyable ! Alors sinon, combien de temps ont duré les trois phases ?

121. Ma : Ça a été : 15, 15 et 15. Un peu moins de 15 minutes pour la fin, je crois. Ça a sonné… Je me suis laissé avoir parce qu'ils n'avaient pas terminé les affiches. Ils disaient : « Monsieur, on n'a pas terminé ! ». Donc pour certains, il a fallu que je leur arrache. C'est ceux qui faisaient des petits dessins (*Affiches 3-Ma, 5-Ma et 6-Ma*). En fait, je pensais qu'ils avaient terminé, mais j'ai attendu 5 minutes avant l'exposé … Donc ça a été 15 minutes, 15 minutes puis 10 minutes avant la sonnerie et 2-3 minutes après la sonnerie, mais là c'était difficile …

122. C : Je pensais à quelque chose… Est-ce que tu as demandé au groupe d'Anaëlle (*Affiche 2-Ma*) pourquoi ils n'ont pas positionné l'équation 19 ($x^2 + 3x = \frac{7}{2}$) ?

123. Ma : Je ne sais pas comment Annabelle a géré ça, mais moi, j'ai été complètement dépassé. En plus, c'était pas facile pour moi de voir … Leurs cartons étaient tout mélangés, ils changeaient en permanence, c'était difficile de voir ce qu'ils faisaient …

124. C : En fait, Annabelle les a laissé faire pendant les deux phases de recherche. Et c'est vraiment après, pendant la restitution, qu'elle a essayé de poser les questions. Mais en gros, regarder émerger leurs classements… c'était trop … Annabelle a plutôt rappelé les résultats des affiches après, pendant la séance d'algorithmique. Mais c'est vrai que sur le coup, c'est difficile … Annabelle a fait pendant le bilan des remarques, à poser des questions au pied levé, comme par exemple, « pourquoi est-ce que tu as mis ensemble la 16 et la 17 ? En quoi elles se ressemblent ? ».

125. Ma : J'ai essayé et j'ai eu comme réponse « c'est pas moi, c'est lui qui l'a fait ! ».

126. C : Ah, oui et quand tu demandais à l'autre ?

127. **26 :17** Ma : j'avais comme réponses : « je ne me rappelle pas … c'est comme ça … je sais pas expliquer … »

128. C : Ah bon ! Pourtant les classements, il y a des explications à leurs choix !

129. Ma : Par exemple, ceux qui ont mis « par ordre de facilité » (*Affiche 4-Ma*), quand le rapporteur est passé au tableau, franchement, c'était pas très clair. Il a fallu que je pose des questions. Il disait : « C'est parce que c'est plus facile ». Alors je demandais : « Mais pourquoi c'est plus facile, dites-moi ! Pourquoi vous avez mis celle-là en premier ? ». Alors il disait : « Alors celle-là, c'est parce qu'il y a aucun calcul. »

130. C : Ah, voilà !

131. Ma : Alors comme l'autre était déjà passé (*le groupe de l'affiche 1-Ma*), je l'avais fait passé en premier parce que c'était le plus clair et qu'il avait tout bien en tête (*sans doute Victorien*). Une fois que lui avait expliqué, alors ça a donné des idées aux autres pour légitimer leur classement.

132. C : Et est-ce qu'il y a des groupes qui ont fait des changements dans leur classement quand ils ont vu les autres passer ?

133. **27 :33** Ma : Non, non. La seule chose que j'ai apprécié, c'est qu'au moment de l'exposé, ils ont été relativement attentifs.
134. C : Ah oui, ils ont joué le jeu …
135. Ma : Quand il y en avait un qui venait au tableau, il y avait une certaine attention et ça n'est pas souvent … dans cette classe. Je suis souvent obligé de punir.
136. C : Après tu enchaînes sur quoi ?
137. Ma : Je ne vais pas avoir le temps de faire le petit contrôle maintenant. Je pourrais le faire plus tard.
138. C : Fais-le après, pourquoi pas.
139. Ma : Mais on va travailler sur les fonctions du second degré. Ça aura un peu …
140. C : Ça peut être intéressant justement de voir si …en le donnant en post test finalement … Après avoir travaillé sur le second degré, après avoir fait ça, on pourrait voir si les résultats sont …
141. Ma : Oui, parce que là, aujourd'hui, il fallait que j'avance sur les fonctions polynômiales du second degré et leurs courbes, avec l'ordinateur et tout … Si leur avait fait faire le test, encore une fois je me serais arrêté au plein milieu et il me fallait ça en fait.
142. C : Il faut un petit quart d'heure … Il faut pas longtemps…
143. **29 :10** Ma : Oui, mais tu sais, c'était pour arriver à la forme canonique, il fallait que je puisse conclure pour ne pas avoir à recommencer encore. J'avais vraiment besoin de la séance pour arriver aux tableaux de variation. C'est demain que je fais la séance avec l'algorithmique.
144. C : Tu as tes deux demi-groupes à la suite ?
145. Ma : Oui, oui.
146. C : Annabelle l'a fait et j'ai vu des choses intéressantes… Justement, tu comptes les mettre en binômes ou les faire travailler seuls ?

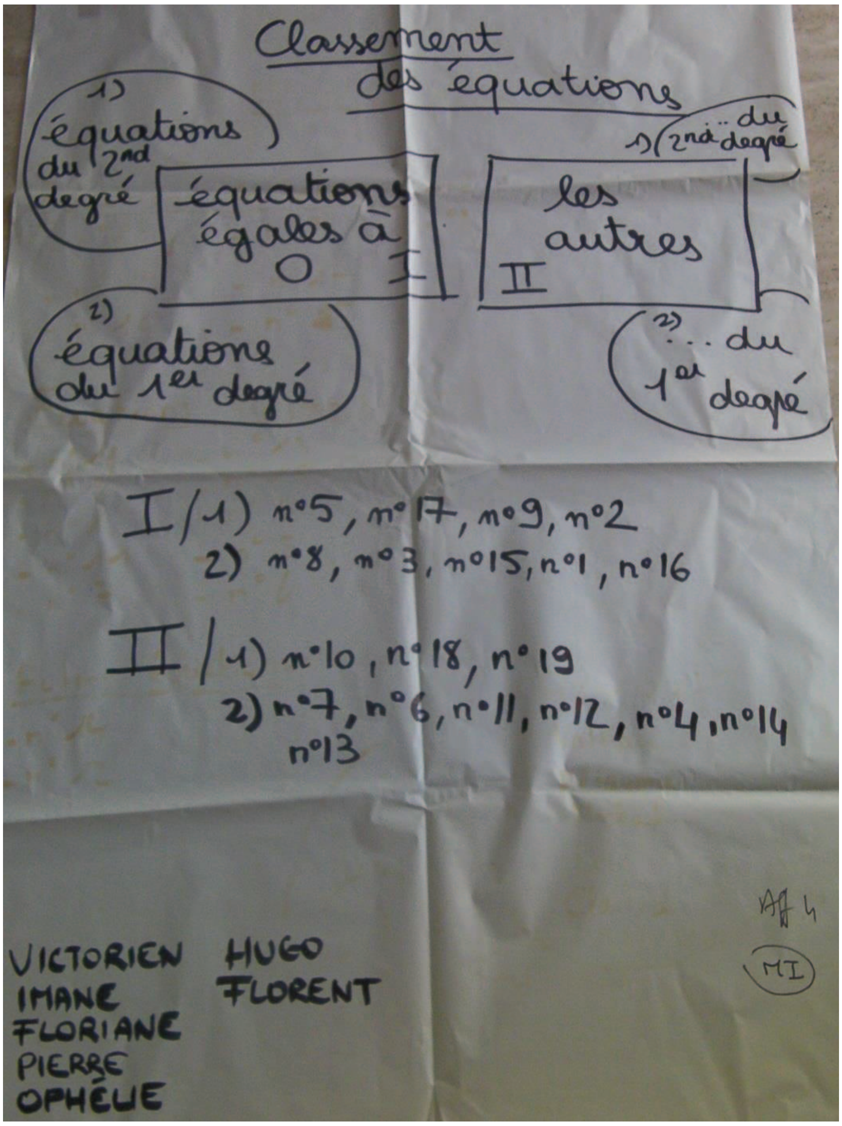
Pause : conversation sur d'autres sujets (devoirs maison, les difficultés des élèves en première S, les nouveaux programmes de collège, ...).

147. **40 :15** Ma : Ça peut être intéressant à deux, pour qu'ils avancent plus vite…
148. C : Oui, ça peut être intéressant, parce qu'ils vont échanger, surtout s'il y en a un plus « théoricien » et l'autre plus « bidouilleur ».
149. Ma : Avec ce que j'ai fait en algorithmique, pour l'instant, certains ont bien compris, mais d'autres pas du tout et donc les mettre par deux, c'est bien, parce que l'un expliquera à l'autre. Au moins, l'autre, en voyant faire, il comprendra mieux…
150. C : Oui, oui… C'est pas plus mal…

Fin de l'entretien.

A28. Transcription des affiches des élèves du professeur Maurice (Situation n°1 – Séance 1)

Affiche 1-Ma : Victorien ; Hugo ; Imane ; Florent ; Floriane ; Pierre ; Ophélie

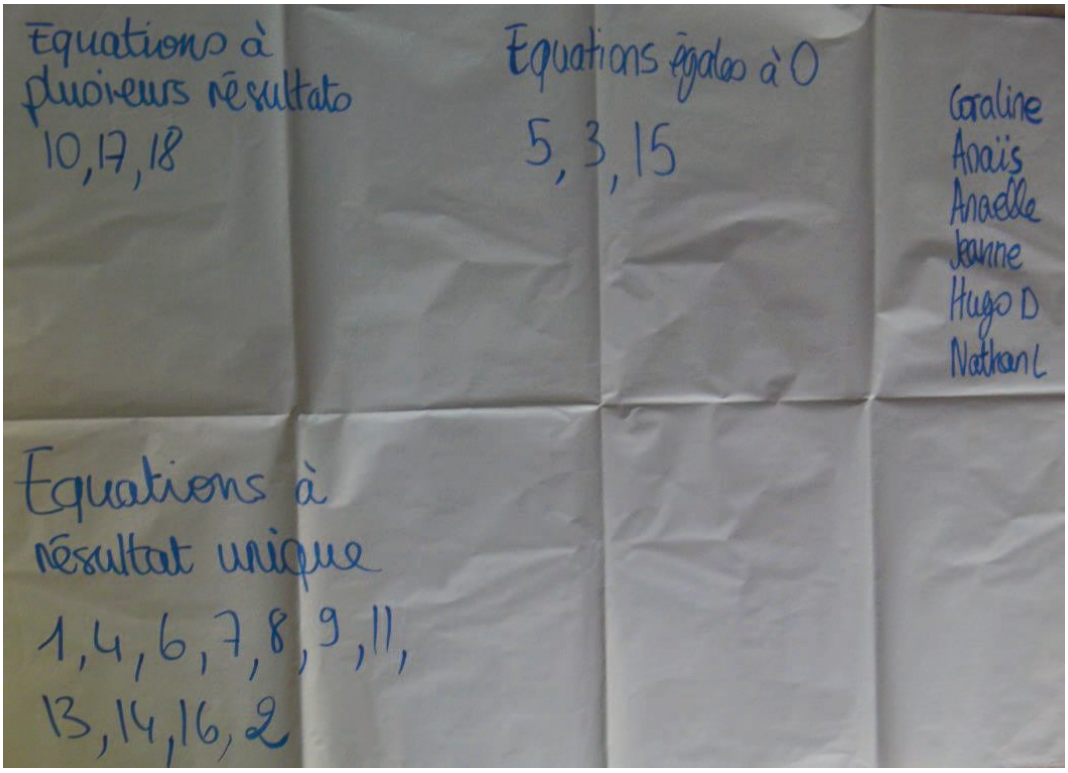


Transcription de l'affiche 1-Ma :

<table>
<tr><td>1- Équations du 2^{nd} degré</td><td rowspan="2">I- Équations égales à zéro</td><td rowspan="2">II- Les autres</td><td>1- Équations du 2^{nd} degré</td></tr>
<tr><td>2- Équations du 1^{er} degré</td><td>2- Équations du 1^{er} degré</td></tr>
</table>

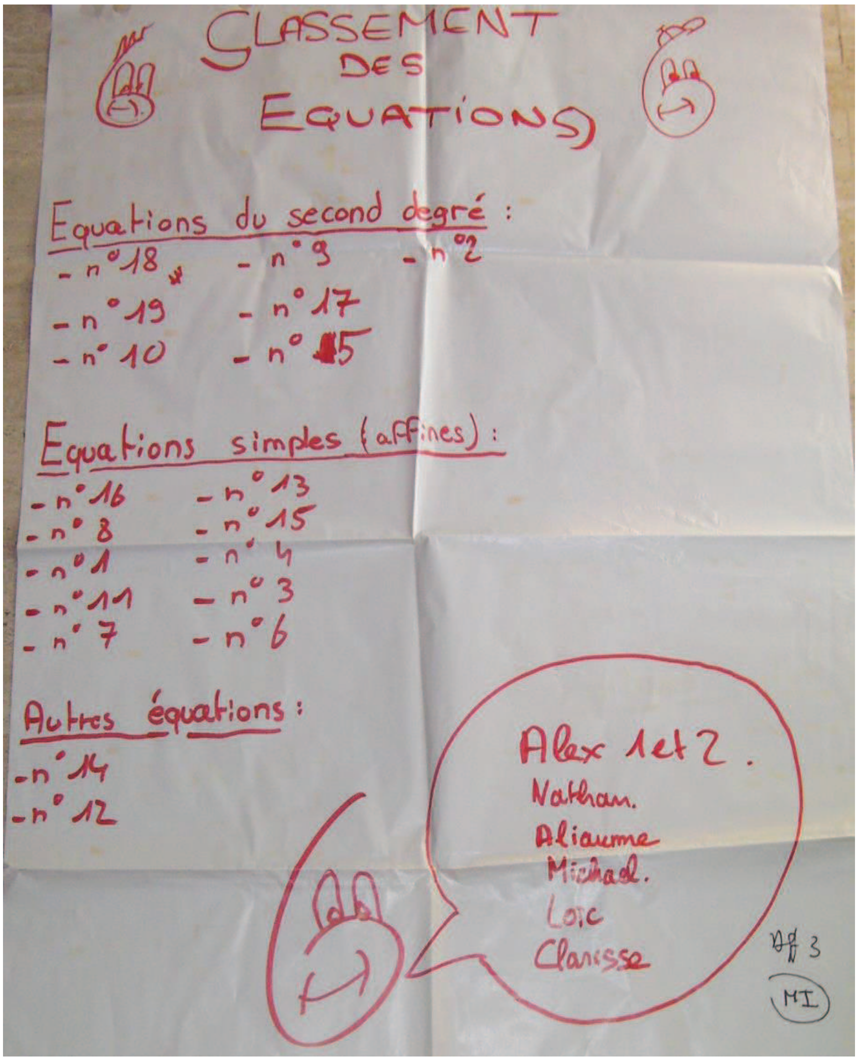
I-1	2 ; 5 ; 9 ; 17
I-2	1 ; 3 ; 8 ; 15 ; 16
II-1	10 ; 18 ; 19
II-2	4 ; 6 ; 7 ; 11 ; 12 ; 13 ; 14

Affiche 2-Ma : Coraline ; Anaïs ; Anaëlle ; Jeanne ; Hugo D ; Nathan L



Transcription de l'affiche 2-Ma	
Équations à plusieurs résultats	10 ; 17 ; 18
Équations à résultat unique	1 ; 2 ; 4 ; 6 ; 7 ; 8 ; 9 ; 11 ; 13 ; 14 ; 16
Équations égales à zéro	3 ; 5 ; 15

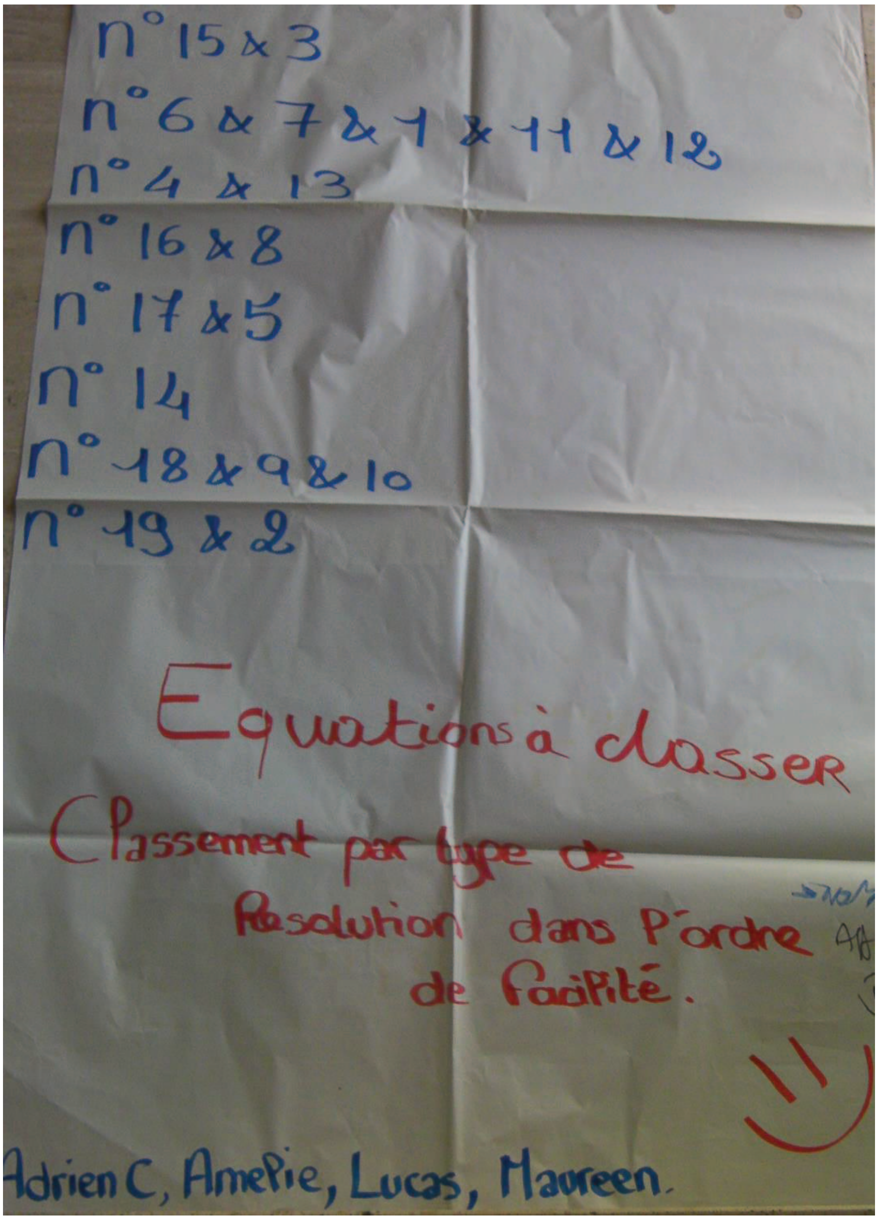
Affiche 3-Ma : Alex1 ; Alex2 ; Nathan ; Aliaume ; Michael ; Loic ; Clarisse



Transcription de l'affiche 3-Ma :

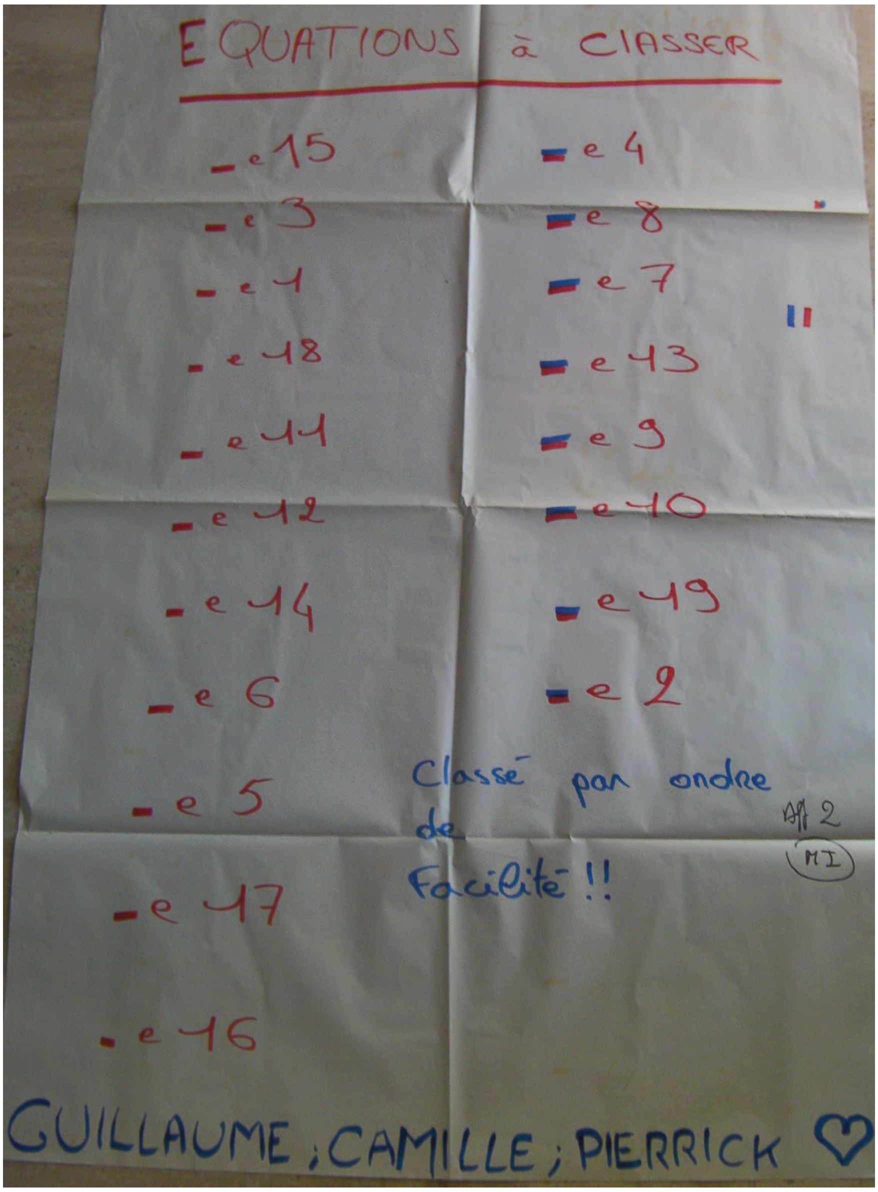
Équations du second degré	2 ; 5 ; 9 ; 10 ; 17 ; 18 ; 19
Équations simples (affines)	1 ; 3 ; 4 ; 6 ; 7 ; 8 ; 11 ; 13 ; 15 ; 16
Autres	12 ; 14

Affiche 4-Ma : Adrien C ; Amélie ; Lucas ; Maureen



Transcription de l'affiche 4-Ma
Classement par type de résolution dans l'ordre de facilité
3 ; 15
1 ; 6 ; 7 ; 11 ; 12
4 ; 13
8 ; 16
5 ; 17
14
9 ; 10 ; 18
2 ; 19

Affiche 5-Ma : Guillaume ; Camille ; Pierrick



Transcription de l'affiche 5-Ma :

Classé par ordre de facilité !!

15 ; 3 ; 1 ; 18 ; 11 ; 12 ; 14 ; 6 ; 5 ; 17 ; 4 ; 8 ; 7 ; 13 ; 9 ; 10 ; 19 ; 2

Affiche 6-Ma : Manon, Rémi, Constance, Théo, Thomas, Bilal

Transcription de l'affiche 6-Ma :

Plusieurs solutions de x	Une seule solution de x
2 ; 5 ; 9 ; 10 ; 17 ; 18 ; 19	**1 ; 3 ; 4 ; 6 ; 7 ; 8 ; 11 ; 12 ; 13 ; 14 ; 15 ; 16**

A29. Transcription de la séance 1.1 du professeur Alex (situation n°1)

Séance filmée le 13/04/2011.
Pour le codage, se reporter à l'annexe A24.
Notes :
- Pour cette séance, la caméra fixe n'a pas fonctionné, seule la transcription de la caméra mobile est réalisée.
- Lors de la phase 2, quelques bribes de conversation dans les groupes sont relevées à la volée par la caméra mobile, qui circule de groupe en groupe. Afin de bien distinguer les différents groupes, la numérotation des échanges a été préférée par groupes, plutôt que par individu.

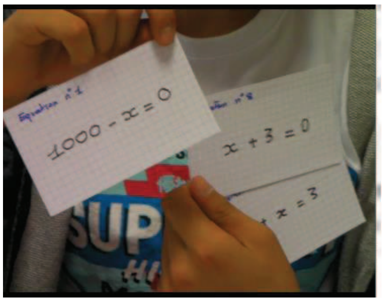
→ ***Phase 1***

1. **00 : 00**
   Al : Vous allez recevoir une enveloppe avec à l'intérieur 28 petits bristols dessus avec 28 équations différentes du premier ou du deuxième degré. C'est ce sur quoi je vous ai fait travailler tout à l'heure. Et je demande, par groupe, de les classer. Chacun des groupes aura un rapporteur qui viendra expliciter le classement de ces équations. D'accord ? Donc vous choisissez par groupe un rapporteur … On va vous donner une grosse feuille sur laquelle vous allez expliciter votre choix, je vais vous donner un crayon pour pouvoir écrire dessus … Vous retournez vos tables et vous commencez à travailler… Commencez par étaler toutes vos équations …
   02 : 00

→ ***Phase 2***

2. **02 : 38** E : Monsieur, il faut les classer comment ?
3. Al : Il n'est pas question de les classer de la numéro 1 à la numéro 28, hein ? (*Rires dans la classe*). Vous les classez selon vos critères à vous … Vous les classez en fonctions de critères que vous, vous décidez être importants.
4. *Dans le groupe de Mathilde (affiche 2-1-Al), on entend : « premier degré ..., second degré ..., premier degré, ... ». On voit les élèves trier les équations, les manipuler et les séparer en deux catégories.*
   E_1 : Alors on sépare en deux : second degré et après premier degré.
   E_2 : Alors, on fait comment, on sépare en deux ?
   E_1 : Attends, celles-là aussi elles sont du premier degré (*elle montre les équations 1 :* $1000 - x = 0$ *et 11 :* $-3 = 5x + 1$). On les met toutes en colonne.
   E_2 : Ça, c'est bon… Là, j'ai mis le second degré. (*On voit les équations 25 :* $\frac{x^2}{7} = 21$*, 18 :* $x^2 = 7$).
   E_3 : Les racines, on les met dans un groupe à part ?
   E_1 : On les met à part, d'accord.
5. **04 : 13** Al : Vous ne collez pas les étiquettes sur l'affiche, vous recopiez les numéros pour que le rapporteur puisse expliquer pourquoi vous les mettez dans telle ou telle catégorie !
6. **06 : 02** Al : Je vous rappelle que le but du jeu, c'est quand même de déterminer les catégories, telles qu'à la fin, vous disiez : « dans cette catégorie-là, on a mis ce type d'équations, deuxième catégorie, on a une autre nature d'équations, troisième catégorie, … ainsi de suite … ». D'accord ? Et ensuite, justifiez pourquoi ça fait une catégorie.

7. **07 :00** *Dans le groupe de Lucas (affiche 1-1-Al, les élèves se concertent pour trier les équations :*



E_1 : Est-ce que vous pensez que ces équations, on les met ensemble (*l'élève montre les équations ci-contre : 1, 6 et 8*) ? Parce que là, c'est $a + x$ et là, c'est $a – x$…
E_2 : Oui, c'est pareil, c'est juste le signe qui change …
E_3 : Faut aussi regarder si elles sont égales à zéro ou pas.
E_1 : Ah, monsieur ! On a un nombre de catégories limitées ou pas ?
Al : Non, tu crées toi-même tes propres catégories. Et bien sûr, dans chaque catégorie, il n'y a pas forcément un nombre égal d'équations.
E_3 : Regarde, toutes celles qui sont égales à zéro ...

8. **07 : 56** Al : Je vous laisse encore dix minutes pour faire votre classement, parce qu'après, on va dépouiller tout ça …
9. **08 : 30** *Dans le groupe de Mathilde (affiche 2-1-Al), on entend l'échange suivant* :
E_1 : Les racines, on les met où ? On fait un groupe ?
E_2 : Les racines, je sais pas où on les met…
E_3 : On les met dans le second degré ou pas ?
E_1 : Les racines, je ne sais vraiment pas où les mettre !
10. **09 : 12** Al (*en s'adressant aux élèves du groupe de Jean-Stéphane (affiche 3-1-Al)*) : Ce sont vos catégories, là ? Alors notez, catégorie 1, catégorie 2, etc. et notez les numéros de vos équations.

➔ Phase 3

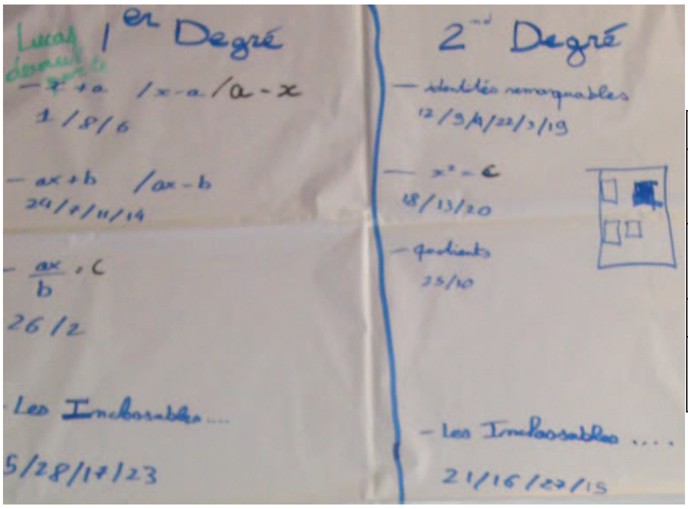
11. **09 : 46** Al (*à toute la classe*) : Allez-y, commencez à rédiger les affiches.
12. **10 : 24** Al : Vous écoutez, là ? Quand vous faites le récapitulatif de vos catégories, mettez simplement le numéro de l'équation, parce qu'on va mettre à gauche, le récapitulatif des équations avec leur numéro. Je vous rappelle aussi, quand le rapporteur va venir au tableau, qu'il doit justifier pourquoi la catégorie une telle a été créée.
13. **12 : 03** Al (*en s'adressant aux élèves du groupe de Mathilde*) : Allez, commencez à faire vos catégories, là. Il y en a déjà qui ont presque fini…
14. **13 : 12** Al : (*en s'adressant aux élèves du groupe de Lucas*) : Allez, dépêchez-vous. Lucas, commence à rédiger… Vous avez deux catégories, vous ? Une catégorie premier degré et une second degré.
Lucas : Et on a des sous-catégories aussi … On est les seuls à avoir fait ça !
Al : Allez-y, c'est pas grave !
15. *Dans le groupe de Jean-Stéphane (affiche 3-1-Al), on entend un élève dire* :
E : Ah, mais celle-là (*en montrant l'équation 20 :* $x^2 = (2{,}07)^2$ *de la catégorie 5 constituée)*, elle est toute simple ! Ça fait $x = 2{,}07$ … Je ne l'aurais pas mise là, parce que les autres ont des x des deux côtés (*il montre la 24 et la 14*).
16. **16 : 14** Al : Vous avez cinq minutes, dernier carat, pour finaliser. Après j'envoie quelqu'un au tableau. Allez !
17. **16 : 40** Al (*en s'adressant aux élèves d'un groupe*) : Alors qui est le rapporteur dans ce groupe ? C'est toi ? Alors, tu es capable d'expliciter toutes tes catégories ?
E : Euh, peut-être pas trop les dernières …
Al : Réfléchis-y encore …
18. **17 : 15** Al (*en s'adressant aux élèves d'un autre groupe*) : C'est qui est le rapporteur dans votre groupe ?
E : C'est moi …
Al : Tu dois être capable d'expliciter toutes tes catégories, hein ? Dépêchez-vous, dans cinq minutes, j'envoie un premier groupe.

19. **19 : 10** Al : Ca y est, vous avez fait votre classement ? Vous rangez les bristols dans les enveloppes … et vous me les rendez.
20. **20 : 45** Al (*en répondant aux élèves d'un groupe*) : Oui, si vous avez envie de faire la synthèse à deux, vous pouvez … A deux, on est plus fort !
21. **21 : 31** *Le professeur accroche les affiches au tableau.*

→ Phase 4

→ Sous-phase 4.1

22. **22 : 12** Al : Alors, qui passe en premier ? Allez, Lucas … Le groupe de Lucas commence. Vas-y, explicite.



(Affiche 1-1-Al et sa transcription : Groupe de Lucas)

Premier degré		Second degré	
$x + a$; $x - a$; $a - x$	1 ; 6 ; 8	Identités remarquables	3 ; 4 ; 9 ; 12 ;19 ; 22
$ax + b$; $ax - b$	7 ; 11 ; 14 ; 24	$x^2 = c$	13 ; 18 ; 20
$ax/b = c$	2 ; 26	Quotients	10 ; 25
Les inclassables	5 ; 17 ; 23 ; 28	Les inclassables	15 ; 16 ; 21 ; 27

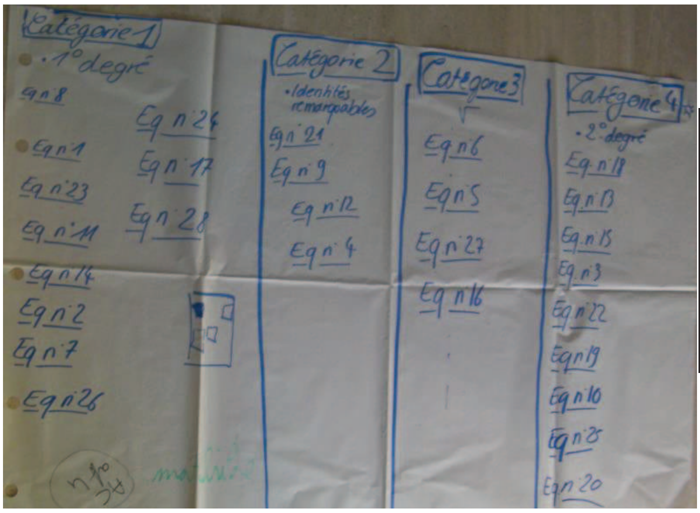
23. **22 : 24** Lucas : On a fait, en fait, deux grosses catégories, le premier degré et le second degré et dans ces catégories, on en a fait des plus petites. Dans le premier degré, on a mis $x + a$ et $x - a$, donc la 1 ($1000 - x = 0$), la 8 ($x + 3 = 0$) et la 6 ($\sqrt{2} + x = 3$).
24. Al : Juste un petit détail, tu me dis $x - a$, mais ça, c'est plutôt $a - x$ …
25. Lucas : Ah, oui, $a - x$ aussi …
26. Al : Alors, rajoute, peut-être $a - x$… *(Lucas ajoute alors, en noir sur l'affiche ci-dessus, $a - x$ sur la première ligne, à gauche).* Ensuite ?
27. Lucas : Ensuite, on a trouvé $ax + b$ et $ax - b$. Donc la 24 ($3x - \frac{1}{4} = \frac{x}{4} - 2$).
28. Al : Ça c'est du $ax + b$ … ou $ax - b$?
29. Lucas : Ben, pour cette partie (*il montre le membre de gauche*) … (*Rires dans la classe*)
30. Al : Donc, c'est $ax - b = ax - b$?
31. Lucas : Non, $ax - b$ et euh …

32. Al : Oui, là (*membre de gauche*), c'est bien $ax - b$ avec a égal 1/4. C'est bien ce que tu voulais dire ou pas ?
33. Lucas : Oui … Ben oui.
34. Al : Bon !
35. **23 : 39** Lucas : La 7 ($\pi x + 3 = 4$), la 11($-3 = 5x + 1$) …
36. Al : Ça, c'est $ax + b$ égal quelque chose … Donc vous, vous n'avez pris que la première partie ? Parce que là, (*la 7*) c'est $ax + b = c$ … Ensuite la 14 ($3x - 5 = 3 - 10x$) ?
37. Lucas : Ben, c'est …
38. Al : La 14, tu dis que ce serait la même chose que celle-là … la 24 ($3x - \frac{1}{4} = \frac{x}{4} - 2$) ?
39. Lucas : Oui …
40. Al : Ben, c'est ce que tu as dit ?
41. Lucas : Oui, mais …non.
42. Al : Non, mais d'accord… Ensuite ?
43. Lucas : Ensuite, il y a les « *ax* divisé par *b* », la 26 ($\frac{10x}{0{,}001} = 4$) et la 2 ($\frac{2x}{7} = 0$).
44. Al : Oui …
45. Lucas : c'est égal à c … Et ensuite, celles qu'on a pas du tout réussi à classer. La 5 ($\sqrt{2}x - 1 = 4 - \sqrt{3}x$), la 28 ($7(x + 2) + 4(x - 3) = 0$), la 17 ($(3 - 4x)(2x - 1) = 0$) et la 23 ($-1000x = 0$).
46. **24 : 53** Al : Alors là, vous avez manié tout le premier degré ?
47. Lucas : Oui.
48. Al : D'accord … Bon, le second degré ?
49. Lucas : Dans le second degré, on a fait celle avec des identités remarquables : la 12 ($(x + 1)^2 = 9$), la 9 ($9x^2 - 16 = 0$), la 4 ($x^2 + 6x + 9 = 0$)…
50. Al : Oui …
51. Lucas : la 22 ($x^2 - 8x + 15 = 0$)
52. Al : la 22, c'est une identité remarquable ?
53. Lucas : Ben, euh … non !
54. Al : Il y a un os dans le potage, là !
55. Lucas : Oui.
56. Al : Ensuite, la 19 ($x^2 - 8x + 15 = -1$), c'est une identité remarquable ?
57. Lucas : En fait, la 19 et la 22, elles vont ensemble.
58. Al : La 19 et la 22, elles ont de la même nature ?
59. Lucas : Oui …
60. Al : Oui ? Ensuite …
61. Lucas : Ensuite, il y a $x^2 = c$. La 18 ($x^2 = 7$), la 13 ($x^2 = -4$) et la 20 ($x^2 = (2{,}07)^2$).
62. Al : Oui … Pour la dernière, tu englobes le carré ? tu poses $c = (2{,}07)^2$?
63. **26 : 05** Lucas : Oui, c'est parce que si on enlève les carrés, ça fait $x =$ … Ah, oui, oui, d'accord. Oui, j'englobe les carrés !
64. Al : Tu penses que tu as le droit d'enlever les carrés, comme ça ?
65. Lucas : Non, on englobe le carré dans *c*.
66. Al : Bon, d'accord.
67. Lucas : Et après, celle avec les quotients, la 25 ($\frac{x^2}{7} = 21$) et la 10 ($\frac{x^2}{27} = 0{,}01$)
68. Al : Elles ne sont pas de la même nature que $x^2 = c$?
69. Lucas : Si … Euh, non (*Soupir*)
70. Al : Vous pouvez l'aider, les autres… Il n'est pas tout seul. Vous avez travaillé ensemble ! Vous pensez que $\frac{x^2}{7} = 21$ c'est pas la même chose que $x^2 = c$? Étrange… $\frac{x^2}{7} = 21$, ça fait bien $x^2 = 21 \times 7$ … donc le *c*, vous l'avez bien, là, non ? Et la 10 ?

71. Lucas : Ah, oui, c'est la même chose !
72. Al : Vous comprenez ce que je veux dire ? … Et ensuite, les inclassables : 15 ($3 = 2 - x^2$), 16 ($\sqrt{3}x^2 = -2$), 21 ($x^2 + 6x = 0$), 27 ($3x(x + \sqrt{5}) = 0$). Vous pensez que celles-là sont inclassables ? Par exemple, la 15 : vous transposez -x^2 de l'autre côté, ça fait x^2 et vous transposez 3 de l'autre côté, ça fait bien $x^2 = -1$ et je retrouve $x^2 = c$… au moins pour celle-là. Pour celle-là, la 27, ça c'est quoi ? C'est quoi tout le monde ?
73. E_1 : c'est de la distributivité.
74. Al : Si je fais de la distributivité, je retombe sur quoi ?
75. E_2 : sur du second degré.
76. Al : Et le second degré, il faut le fuir comme la peste ! Donc, là ici, est-ce que ce n'est pas déjà une bonne configuration ? Est-ce que ça ne fait pas partie (*la 27*) d'une catégorie dont il a parlé… ou pas ? Il n'y en a pas d'autre de cette nature-là ? Par exemple celle-ci : (*il montre la 17 (*$(3 - 4x)(2x - 1) = 0$) … C'est pas de la même nature ?
77. Lucas : Celle-là (*la 17*) elle est développée.
78. Al : Celle-là, elle est développée ? Aouououh !
79. Lucas : Ah, non, non, non ! Elle est factorisée justement !
80. Al : Celle-là est factorisée (*il montre la 17*) et celle-là ne l'est pas (*il montre la 27*) ? Gloups, j'ai un problème de déglutition … elles sont factorisées toutes les deux, en fait. Donc tes inclassables, elles n'ont pas vraiment lieu d'être…D'accord ?
81. Lucas : Oui.
82. Al : Donc, là, dans tes catégories, il y a un tas de choses effectivement, mais l'essence même de toutes ces catégories, c'est qu'en fait, on peut en faire moins …

→ ***Sous-phase 4.2***

83. **29 : 35** Al : Deuxième personne au tableau, deuxième rapporteur… C'est … Mathilde ? Alors le deuxième groupe a fait quatre catégories. Vas-y, Mathilde !



(Affiche 2-1-Al et sa transcription : Groupe de Mathilde)

Catégorie 1	1er degré	1 ; 2 ; 7 ; 8 ; 11 ; 14 ; 17 ; 23 ; 24 ; 26 ; 28
Catégorie 2	Identités remarquables	4 ; 9 ; 12 ; 21
Catégorie 3	Racine carrée	5 ; 6 ; 16 ; 27
Catégorie 4	2nd degré	3 ; 10 ; 13 ; 15 ; 18 ; 19 ; 20 ; 22 ; 25

84. Mathilde : Alors, dans la première catégorie, on a mis le premier degré …
85. Al : les équations du premier degré, donc ? Donc la 1 ($1000 - x = 0$), la 8 ($x + 3 = 0$), la 23 ($-1000x = 0$), la 11 ($-3 = 5x + 1$), la 14 ($3x - 5 = 3 - 10x$), la 2 ($\frac{2x}{7} = 0$), la 26 ($\frac{10x}{0{,}001} = 4$), la 24 ($3x - \frac{1}{4} = \frac{x}{4} - 2$), la 17 ($(3 - 4x)(2x - 1) = 0$) et la 28 ($7(x + 2) + 4(x - 3) = 0$). D'accord … bon. Alors, déjà, première question, celle-là et celle-là (*il montre les équations 17 et 28*), est-ce que vous pensez que c'est la même nature ?
86. Mathilde : Non …

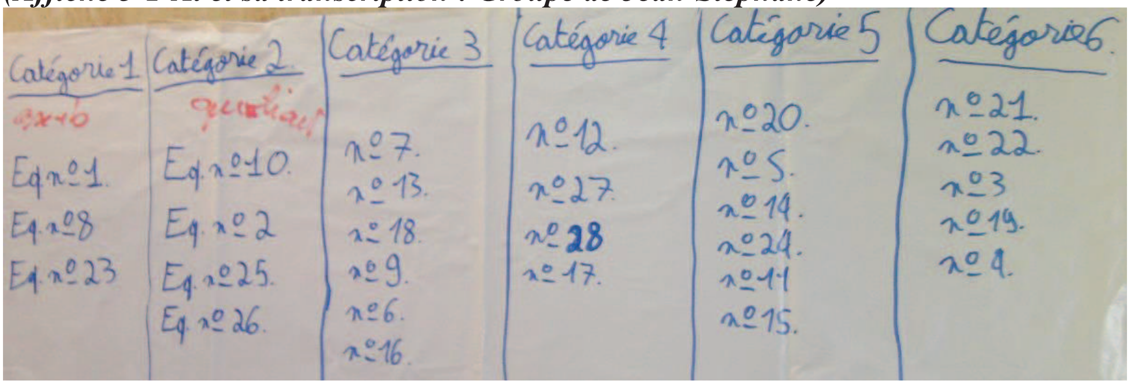
87. Al : À votre avis ?
88. E : Oui.
89. Al : Qui a dit oui ?
90. E : Euh, non …
91. Al : Est-ce que celle-là et celle-là (*il montre les équations 17 et 28*) sont de la même nature ? Déjà en termes d'écriture, non … J'espère que vous ne confondez pas … une multiplication et une addition. Après, est-ce que c'est la même nature, en termes de résolution … Entre les deux, il y a quand même un monde … Ici (*la 28*), il y a un vrai calcul à faire, avec quoi ? … Là tu peux sortir ton argument de distributivité ! Alors que celle-là (*la 17*), elle est directement exploitable, après ... on va voir…. Toutes celles-là ont donc l'air d'être du premier degré. Alors, ensuite, passons au deuxième degré.
92. Mathilde : Alors mais non, d'abord, on a les identités remarquables.
93. **31 : 36** Al : Les identités remarquables, si c'est pas du second degré … je veux bien me faire curé…
94. Mathilde : Oui …(*rires*)
95. Al : Même si c'est du premier degré déguisé, effectivement, …Alors 21 ($x^2 + 6x = 0$), ça, c'est une identité remarquable ?
96. Mathilde : Euh …
97. Al : Non ? alors, vous écoutez tous, là ? La 21, c'est pas du tout une identité remarquable … Je vous rappelle que les identités remarquables, c'est $a^2 - b^2$, $(a + b)^2$, $(a - b)^2$. Donc mauvaise pioche ! La 9 ($9x^2 - 16 = 0$), est-ce que c'est une identité remarquable … Ça semble déjà nettement mieux … La 12 ($(x + 1)^2 = 9$), effectivement, ça, c'en est une … et la 4 ($x^2 + 6x + 9 = 0$), est-ce c'en est une ? directement, non … Mais c'est effectivement, $a^2 + 2ab + b^2$ … D'accord ? Donc la 21, c'est une scorie ! Ensuite, la catégorie 3, vous avez fait une catégorie spéciale avec les ?
98. Mathilde : Avec les racines carrées.
99. Al : Donc pour vous, la racine carrée est une entité étrange, venue d'ailleurs !
100. Mathilde : Non … (*rires*)
101. Al (*en riant*) : Donc les racines … la 5 ($\sqrt{2}x - 1 = 4 - \sqrt{3}x$), la 6 ($\sqrt{2} + x = 3$), la 27 ($3x\left(x + \sqrt{5}\right) = 0$) et la 16 ($\sqrt{3}x^2 = -2$) … Donc, dès qu'il y a une racine carrée, oups !
102. Mathilde : Mais c'est parce qu'on ne savait pas où les mettre …
103. Al : Au passage, une question. Là, avec la racine carrée, est-ce que ça (*en montrant la 6*) ça ne fait pas partie de quelque chose que tu as déjà prédéfini ?
104. Mathilde : Euh …
105. Al : Ca là, c'est du premier degré ? Vous êtes d'accord ? C'est du premier degré … sauf qu'effectivement, la racine carrée de 2, c'est pas un nombre facile à manipuler pour vous ! Mais, on est dans la première catégorie ! D'accord ? Et la numéro 27 ? Ici, c'est pareil ! C'est un produit de facteurs égal à zéro … C'est pas parce qu'il y a $\sqrt{5}$ dedans que tu n'es pas dans du « $ax + b = 0$ ». D'accord ? Alors la catégorie 4, avec le soleil … Je ne sais pas ce que ça signifie … Alors, c'est quoi la catégorie 4 ?
106. Mathilde : C'est le second degré …
107. Al : C'est le second degré, donc dès qu'il y a un carré … c'est une catégorie complète. Donc la 18 ($x^2 = 7$), oui, ensuite la 13 ($x^2 = -4$), oui…, la 15 ($3 = 2 - x^2$), oui…
108. Mathilde : la 23 ($-1000x = 0$), la 22 ($x^2 - 8x + 15 = 0$)
109. Al : Oui …
110. Mathilde : la 19 ($x^2 - 8x + 15 = -1$)
111. Al : Oui, la 10 ($\frac{x^2}{27} = 0{,}01$), oui …, la 25 ($\frac{x^2}{7} = 21$) et la 20 ($x^2 = (2{,}07)^2$)… Le problème, c'est qu'à l'intérieur de tout ça, effectivement c'est du second degré, mais on

n'a pas les mêmes instruments … C'est-à-dire que par exemple, la 25 et là, la fameuse catégorie dont Lucas avait parlé avec $x^2 = c$, est-ce que c'est la même nature que, par exemple, quelque chose comme ça (*il montre la 22 :* $x^2 - 8x + 15 = 0$)? En termes de résolution, pas glop, pas glop ! Ça, vous savez faire en seconde mais ça, faudra attendre l'an prochain… Vous voyez que le second degré, effectivement, ça fait partie d'une catégorie, mais à l'intérieur du second degré, il y a des catégories qui vous sont accessibles ou pas. D'accord ? Bien ! Suivant ! Il nous reste dix minutes, là …

➔ Sous-phase 4.3

112. **35 : 36** Al : Vas-y, Jean-Stéphane …

(Affiche 3-1-Al et sa transcription : Groupe de Jean-Stéphane)



Catégorie 1	*ax* + *b*	1 ; 8 ; 23
Catégorie 2	quotient	2 ; 10 ; 25 ; 26
Catégorie 3		6 ; 7 ; 9 ; 13 ; 16 ; 18
Catégorie 4		12 ; 17 ; 27 ; 28
Catégorie 5		5 ; 11 ; 14 ; 15 ; 20 ; 24
Catégorie 6		3 ; 4 ; 19 ; 21 ; 22

113. Al : Alors, première catégorie, tu me dis : équations 1 ($1000 - x = 0$), 8 ($x + 3 = 0$) et 23 ($-1000x = 0$). Alors, ça, c'est quel type d'équations ?
114. Jean-Stéphane : Alors, c'est du *ax* + *b* …
115. Al : C'est *ax* + *b* = 0 ?
116. Jean-Stéphane : Oui, oui, c'est ça !
117. Al : D'accord ! Donc la 23, la 8 et la 1, pour vous, ça fait une entité … Ensuite, catégorie 2 …
118. Jean-Stéphane : La 10 ($\frac{x^2}{27} = 0{,}01$), la 2 ($\frac{2x}{7} = 0$), la 25 ($\frac{x^2}{7} = 21$) et la 26 ($\frac{10x}{0{,}001} = 4$). Ça, c'est avec les quotients
119. Al : Donc la première, c'est du *ax* + *b*, on va dire, la $2^{\text{ème}}$ c'est avec les quotients …
120. Jean-Stéphane : Oui.
121. Al : Ensuite, la catégorie 3 ?
122. Jean-Stéphane : La 7 ($\pi x + 3 = 4$), la 13 ($x^2 = -4$), la 18 ($x^2 = 7$), la 9 ($9x^2 - 16 = 0$), la 6 ($\sqrt{2} + x = 3$) et la 16 ($\sqrt{3}x^2 = -2$).
123. Al : Et c'est quoi le point commun alors ?
124. Jean-Stéphane : C'est euh …c'est nul !
125. Al : C'est vous qui avez fait ça, je ne suis pas responsable de … Alors, en un mot, vous mélangez des torchons et des serviettes et vous essayez de faire un drap, quoi !
126. Jean-Stéphane : Euh, oui

127. Al : Étrange ! Là, vous êtes … dans des mathématiques assez baroques, hein …

128. Jean-Stéphane (*rires*) : Alors c'est la catégorie de … Ça n'existe pas, ça !

129. **37 : 28** Al : Alors, la catégorie 4 ? 12 ($(x+1)^2 = 9$), 27 ($3x(x+\sqrt{5}) = 0$), 28 ($7(x+2)+4(x-3) = 0$), 17 ($(3-4x)(2x-1) = 0$) …

130. Jean-Stéphane : euh …

131. Al : Bon, il y a une caméra cachée, là ! Ensuite, catégorie 5 ?

132. Jean-Stéphane : 20 ($x^2 = (2{,}07)^2$), 5 ($\sqrt{2}x - 1 = 4 - \sqrt{3}x$), 14 ($3x - 5 = 3 - 10x$), 24 ($3x - \frac{1}{4} = \frac{x}{4} - 2$) …

133. Al : 14 et 24, pourquoi pas ? Ensuite …

134. Jean-Stéphane : 11 ($-3 = 5x + 1$) et 15 ($3 = 2 - x^2$) …

135. Al : 11 et 15 ?

136. Jean-Stéphane : C'est celle où il y a des *x* de chaque côté, en fait. Il y en a deux qui sont pas dedans, en fait.

137. Al : C'est-à-dire que vous avez la catégorie particulière d'avoir des *x* à gauche … et celles qui ont des *x* à droite, quel que soit le degré …

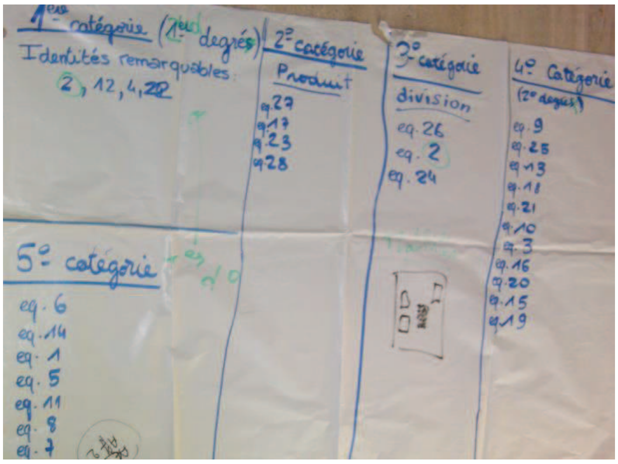
138. *(Rires dans la classe).*

139. Al : Et la catégorie 6 ? 21 ($x^2 + 6x = 0$), 22 ($x^2 - 8x + 15 = 0$), 3 ($x^2 - 8x + 15 = 15$), 19 ($x^2 - 8x + 15 = -1$) et 4 ($x^2 + 6x + 9 = 0$). Les 19, 22 et la 3, c'est parce qu'il y a $x^2 - 8x + 15$, mais à part ça, je ne vois pas … Bon merci ! C'était le groupe des « cadors », là ... Et Mathilda, le dernier groupe ? Tes copines t'encouragent vivement…

→ ***Sous-phase 4.4***

140. **39 : 25**

(Affiche 4-1-Al et sa transcription : Groupe de Mathilda)



Catégorie 1	Identités remarquables 2nd degré	2 ; 4 ; 12 ; 22
Catégorie 2	Produit	17 ; 23 ; 27 ; 28
Catégorie 3	Division	2 ; 24 ; 26
Catégorie 4	2nd degré	3 ; 9 ; 10 ; 13 ; 15 ; 16 ; 18 ; 19 ; 20 ; 21 ; 25
Catégorie 5	1er degré	1 ; 5 ; 6 ; 7 ; 8 ; 11 ; 14

Mathilda : Alors, la première catégorie, c'est les identités remarquables, en fait c'est le second degré.

141. Al : Alors, pourquoi il y a écrit premier, alors ?

142. Mathilda : Parce que c'est une erreur …

143. Al : Alors corrige (*Mathilda corrige sur l'affiche en vert*) et enlève le s à degré … D'accord. Alors 2 ($\frac{2x}{7} = 0$), 12 ($(x+1)^2 = 9$), 4 ($x^2 + 6x + 9 = 0$) et 22 ($x^2 - 8x + 15 = 0$). Si vous mettez la 2 … ça veut dire que l'équation 2 est de la même nature que la 12 ? Vous me faites la même chose que le groupe des cadors, tu mets du second degré avec du premier degré. Déjà, si tu me dis second degré avec identité

remarquable … Si là, tu vois une identité remarquable (*pour la 2*), je pense qu'il faut aller chez Afflelou !
144. Mathilda : (*Rires*)
145. Al : pour une identité remarquable, il y a au moins deux termes … Deuxième catégorie …
146. Mathilda : les produits.
147. Al : Alors les produits ! Vous, vous avez fait des catégories en fonction des opérations entre les expressions. C'est ça ?
148. Mathilda : Euh …
149. Al : Je ne sais pas, je traduis …
150. Mathilda : Oui, oui, c'est ça.
151. Al : Alors, la 27 ($(3-4x)(2x-1)=0$) et la 17 ($3x\left(x+\sqrt{5}\right)=0$) … Oui. La 23 ($-1000x=0$) … Il y a un produit, là ?
152. Mathilda : Ben oui.
153. Al : Oui, il y a un produit entre -1000 et *x*. Mais est-ce que c'est de la même nature que ça (*en montrant la 17*) ?
154. Mathilda : Non.
155. Al : Et la dernière, la 28 ($7(x+2)+4(x-3)=0$) … Vous me faites un produit ici, mais c'est quoi cette opération entre les deux ?
156. Mathilda : C'est un plus, c'est une addition.
157. Al : Donc là, ça, c'est pas un produit, c'est une somme de produits … Oui ou non ?
158. Mathilda : Oui.
159. Al : **41 : 25** Donc, là, votre catégorie de produits, elle joue des castagnettes ! Après la troisième, la division… Je traduis, ce sont des quotients. Alors, 26 ($\frac{10x}{0{,}001}=4$), 2 ($\frac{2x}{7}=0$) … et 24 ($3x-\frac{1}{4}=\frac{x}{4}-2$). Tiens, au passage, la 2, vous l'avez mise deux fois… Elle y est deux fois ?
160. Mathilda : Non, elle n'est que dans les quotients.
161. Al : Bon. Et les 24 et 26, c'est des quotients ?
162. Mathilda : Euh, oui …
163. Al : Bien tiré par les cheveux, oui, il y a ¼ , il y a $\frac{x}{4}$… Ça peut, mais… Bon ! La quatrième catégorie, second degré. Donc 9 ($9x^2-16=0$), 25 ($\frac{x^2}{7}=21$), 18 ($x^2=7$), 13 ($x^2=-4$), 21 ($x^2+6x=0$), 10 ($\frac{x^2}{27}=0{,}01$)… Alors ça, pour vous, la 10 c'est de la même nature que la 21 ? Par exemple je peux résoudre cette équation-là (*la 10*) avec le même théorème que cette équation-là (*la 21*) ? C'est ça, ce que vous affirmez finalement…
164. Mathilda : Non, on affirme juste que c'est du second degré.
165. Al : Vous affirmez juste que c'est du second degré … Alors, 3 ($x^2-8x+15=15$) et 16 ($\sqrt{3}x^2=-2$)… la 20 ($x^2=(2{,}07)^2$), la 15 ($3=2-x^2$) et la 19 ($x^2-8x+15=-1$)… C'est du second degré, on est bien d'accord ! Effectivement, … la question est de savoir, … oui c'est bien du second degré. En termes de catégories, celle-là, elle a l'air de se tenir un peu plus que celles que vous avez donné avant. D'accord ? La 5ème catégorie ? C'est quoi ?
166. Mathilda : C'est le premier degré.
167. Al : Ça, c'est du premier degré ?
168. Mathilda : Oui.
169. Al : Alors, attendez, je regarde. La 6 ($\sqrt{2}+x=3$), la 14 ($3x-5=3-10x$), la 1 ($1000-x=0$), la 5 ($\sqrt{2}x-1=4-\sqrt{3}x$), la 11($-3=5x+1$), la 8 ($x+3=0$), la 7

($\pi x + 3 = 4$)… Ça, c'est effectivement une catégorie qui me paraît valide. La question est de savoir, est-ce qu'il n'y en avait pas plus dedans ? D'accord ?
170. Mathilda : Oui.

→ *Phase 5*

171. **44 : 48** Al : Alors, c'est quoi … quand on fait la synthèse de toutes vos catégories. Alors, c'est quoi l'essence de ce qu'on vous demandait ? Jean-Stéphane (*qui demande la parole*) ?
172. Jean-Stéphane : C'est dur à classer.
173. Al : C'est dur à classer. Mais encore ?
174. Valentine : Il y aura plus de 4 catégories, il y aura le second degré et le premier degré et après, il y aura plusieurs sous-catégories.
175. Al : Vous avez entendu ce qu'a dit Valentine ? Elle a dit qu'au départ, il y aura du premier degré et du second degré, et qu'à l'intérieur de ces catégories, il y aura plusieurs sous –catégories.
176. Clémence : Mais au départ, ce qui importe c'est que ce sont des équations du premier degré ou du deuxième degré …
177. Al : Alors, à votre avis, est-ce qu'il y a une différence fondamentale entre celle-là (*il montre la 6 :* $\sqrt{2} + x = 3$) et celle-là (*il montre la 2 :* $\frac{2x}{7} = 0$) ? Oui ou non ?
178. Es : Non !
179. Al : Est-ce qu'il y a une différence … déjà en termes d'écriture ? Et est-ce qu'il y a une différence en termes de substrat mathématique ?
180. E : Il y en a une égale à 3 et l'autre égale à 0…
181. Al : Oui, mais si vraiment c'est le 3 qui vous gêne, vous transposez le 3 et ça fait bien $x + \sqrt{2} - 3 = 0$. Est-ce que vous voyez ce que je veux dire ? C'est-à-dire, qu'en fait, entre ça et ça, mathématiquement, il n'y a pas de différence. C'est-à-dire, qu'on peut se ramener à quoi comme équation ? Sur quoi vous travaillez, depuis … belle lurette !
182. E : Une équation cartésienne … Oh non, je n'ai rien dit !
183. Al : une équation cartésienne ! C'est effectivement ce qu'a dit Clémence, c'est quoi Clémence ? Là toutes ces équations du premier degré, dont vous me parlez, c'est quoi ? Quelle que soit les façons de les écrire, on est dans quoi ?
184. Clémence : $ax + b = 0$.
185. Al : On est dans du « $ax + b = 0$ ». Alors, est-ce que ça (*il montre la 14 :* $3x - 5 = 3 - 10x$), c'est du $ax + b = 0$?
186. Es : Non !
187. Al : Clémence ?
188. Clémence : Oui, si on transpose …
189. Al : Effectivement, si on transpose, on est dans du $ax + b = 0$. Mais vous voyez qu'il y a quand même du travail à faire, avant d'arriver à du $ax + b = 0$… Après, le second degré ? **47 :07** Est-ce que cette équation-là (*il montre la 22 :* $x^2 - 8x + 15 = 0$), elle est de la même nature que celle-là (*il montre la 16 :* $\sqrt{3}x^2 = -2$)?
190. E : Non, dans celle-là, il y a des racines …
191. Al : Si vous séparez en premier degré et second degré, pour moi, c'est deux équations du second degré !
192. E : Oui, mais il y a des racines …dans l'une et pas dans l'autre !
193. Al : Mais qu'est-ce que j'ai dit tout à l'heure sur les racines ? C'est effectivement des nombres particuliers, mais c'est pas quelque chose … Regarde, là (*il montre l'équation* $\sqrt{3}x^2 = -2$). Si tu divises, ça fait $x^2 = \frac{-2}{\sqrt{3}}$ … Et $\sqrt{3}$, c'est un nombre comme ¾ ou -10 !

Donc, là entre ça et ça (*il montre les 16 et 22*), il y a quelque chose de différent, en termes de catégorie ? Ben, les deux sont du second degré ! On est bien d'accord … Julie ?

194. Julie : Oui.
195. Al : La seule petite chose qui diffère, c'est quoi ? C'est que ça (*il montre la 22*), vous savez résoudre ou pas ?
196. E : Ben non !
197. Al : Ben non ! Si on ne vous donne pas un équivalent de cette expression-là, vous ne savez pas résoudre … En revanche, ça (*il montre la 16*)… D'accord ? Mais on est bien dans la même catégorie. Après, effectivement, suivant les niveaux, vous aurez peut-être du mal à résoudre telle ou telle équation… Après, est-ce qu'il y a autre chose… qu'on n'a pas soulevé ?
198. E : J'ai une question sur le développement. Par exemple, la numéro 17 ($(3-4x)(2x-1)=0$) …
199. Al : Tu voudrais la développer ? (*La sonnerie retentit*). Alors si tu la développes, tu vas arriver à quoi ?
200. E : À du second degré.
201. Al : Oui, à un polynôme du second degré. Facile ou difficile à résoudre ?
202. E : Dur …
203. Al : Extrêmement dur, parce qu'il va être comme celui-là (*il montre la 22*)… En fait, quand tu as une forme factorisée, surtout quand tu as zéro de l'autre côté, il ne vaut mieux pas développer. D'accord ? **49 : 05.** Alors ensuite, le but du jeu, vous écoutez, là … les phases 2 et 3, ça va être de faire le lien entre ce que vous venez de faire là, les catégories et le fait de faire des algorithmes pour résoudre ces équations, quel que soit le cas de figure dans lequel vous vous trouvez. Donc ça, ça sera l'objet des séances 2 et 3 dès mercredi prochain, d'accord ? Merci.

   49 : 51 *Fin de la séance.*

A30. Transcription de la séance 1.2 du professeur Alex (situation n°1)

Séance filmée le 15/04/2011.
Pour le codage, se reporter à l'annexe A24.
Notes :
- On rappelle que deux caméras filment simultanément. La caméra mobile filme l'ensemble de la classe et la caméra fixe filme un seul groupe pendant toute la durée de la recherche. Pour différencier la transcription de la caméra fixe à celle de la caméra mobile, des lignes horizontales ont été tracées pour montrer une remontée du temps (ici de 01 : 12 à 21 : 30) et la transcription de la caméra fixe est indiquée par un trait de bordure gauche.
-- Lors de la phase 2, quelques bribes de conversation dans les groupes sont relevées à la volée par la caméra mobile, qui circule de groupe en groupe. Afin de bien distinguer les différents groupes, la numérotation des échanges a été préférée par groupes, plutôt que par individu.

→ ***Phase 1***

57. **00 : 00** Al : Sur vos tables, vous avez une grande enveloppe qui contient 28 bristols sur lesquels il y a une équation numérotée. Vous avez un quart d'heure à vingt minutes pour classer ces équations en fonction de critères que votre groupe va faire. D'accord ? Alors, je vous ai mis une grande feuille blanche pour écrire vos catégories afin que vous puissiez venir les expliciter et ensuite on mettra en commun toutes vos catégories et je conclurai. Voilà le travail que vous avez à faire. Donc, sur la grande feuille blanche, vous mettez les catégories : catégorie n°1, catégorie n°2, … et vous écrivez simplement les numéros des équations.

58. **00 : 48** Marine : On en fait combien des catégories ?
59. Al : Comme tu veux. Eh, Marine … tu peux n'en faire qu'une : les équations ! *(Rires).*
60. E : Combien doit-on faire de catégories ?
61. **01 :10** Al : Vous écoutez, là ? Il n'y a pas de … Vous faites comme vous voulez. Si vous voulez faire 10 catégories, vous le faites mais vous les expliciter… Si vous voulez en mette deux, au hasard, … Allez, action !

→ ***Phase 2***

62. **01 :50** ***Dans le groupe de Clara (affiche 5-2-Al),*** *des propos sont échangés et on voit les élèves trier les équations et les manipuler.*

E1 : Ça (*en montrant l'équation 21* : $x^2 + 6x = 0$) c'est (a – b)(a + b) et ça, (*en montrant l'équation 22 :* $x^2 - 8x + 15 = 0$), c'est (a – b)² …
E2 : Oui, c'est ça !
E1 : Et ça (*en montrant l'équation 8 :* $x + 3 = 0$), c'est le truc *x* + *a* = 0 …
E 3 : Et ça (*en montrant l'équation 4 :* $x^2 + 6x + 9 = 0$), c'est pareil que la 21...

E_2 : Et ça et ça, c'est pareil (*en montrant les équations 10 :* $\frac{x^2}{27} = 0{,}01$ *et 25 :* $\frac{x^2}{7} = 21$)…

63. **03 : 11** ***Dans le groupe d'Élise (affiche 1-2-Al),*** *on voit les élèves trier les équations et les manipuler.*

E_1 : Ça (*en montrant l'équation 1 :* $1000 - x = 0$), c'est simple … C'est a – b = 0 …
E_2 : Et là aussi (*en montrant l'équation 23 :* $-1000x = 0$), c'est simple.
E_3 : C'est quoi simple ?
E_1 : C'est quand il y a rien à faire …
E_3 : Ça (*en montrant l'équation 12 :* $(x + 1)^2 = 9$), c'est une simple.

64. **03 : 34** ***Dans le groupe de Clara (affiche 5-2-Al)*** *:*

E_1 : Ça (*en montrant l'équation 28 :* $7(x + 2) + 4(x - 3) = 0$), c'est égal à zéro …
E_2 : Celle-là (*en montrant l'équation 5 :* $\sqrt{2}x - 1 = 4 - \sqrt{3}x$), on pourrait la mettre à part, parce que le résultat, il sera avec des racines carrées … Et celle-là aussi (*en montrant l'équation 6* : $\sqrt{2} + x = 3$), parce que si tu passes de l'autre côté, ça fait 3 - $\sqrt{2}$.

65. **04 : 37** ***Dans le groupe d'Élise (affiche 1-2-Al)*** *:*

E_1 : Celle-là, regarde (*en montrant l'équation 20 :* $x^2 = (2{,}07)^2$), c'est a² - b² parce que si tu fais passer ça, là … ça fait un moins. Et un carré moins un carré, c'est une identité remarquable, ça !
E_2 : Celle-là (*en montrant l'équation 19 :* $x^2 - 8x + 15 = -1$) aussi c'est pareil, c'est une identité remarquable !
E_1 : Alors, -1, ça fait +1 (*en faisant le geste de transposer le -1 dans le membre de gauche*)... Oui.
E_2 : Et celle-là (*en montrant l'équation 3 :* $x^2 - 8x + 15 = 15$).
E_1 : Alors, si je fais passer 15, ça fait zéro (*en faisant le geste de transposer le 15 dans le membre de droite*)...
E_2 : Et ça va avec ça (*en montrant l'équation 21 :* $x^2 + 6x = 0$).
E_1 : ça fait racine carrée de 8*x* (*en regardant la 3*)... Et c'est une identité remarquable.
E_2 : Et celle-là (*en montrant l'équation 26 :* $\frac{10x}{0{,}001} = 4$), elle est chelou *(rires)* ! je la mets avec les fractions…
E_3 : Et celles-là (*en montrant les équations 5 :* $\sqrt{2}x - 1 = 4 - \sqrt{3}x$ *; 6 :* $\sqrt{2} + x = 3$ *et 16 :* $\sqrt{3}x^2 = -2$), je les mets ensemble parce qu'il y a des racines. J'aime bien les racines !
E_2 : Et là (*en montrant l'équation 7 :* $\pi x + 3 = 4$), il y a pi !
E_1 : **06 : 06** Alors, celle-là (*en montrant l'équation 11 :* $-3 = 5x + 1$), tu fais passer -3, là et ça fait +4 (*en faisant le geste de transposer le -3 dans le membre de droite*)... et 4, c'est 2 au carré … Et quand on le fait passer à gauche … Ah ! C'est une simple, ça !
E_2 : Et celle-là (*en remontrant l'équation 21 :* $x^2 + 6x = 0$), on n'a pas décidé où on la met ?
E_1 : je sais pas, ça !
E_2 : Tu mets *x* en facteur !
E_1 : Ah, oui, c'est vrai ! Du coup, ça va avec les factorisations ! (*Elle la range avec les équations 19 et 22*)

66. **07 : 50** ***Dans le groupe de Julie (affiche 2-2-Al)*** *:*

E_1 : Qu'est-ce que tu fais ?
E_2 : Je sépare celles qui sont développées de celles qui sont factorisées …
E_1 : Mais les développées, ce serait peut-être possible de les factoriser ?
E_2 : Ah, oui ! On peut essayer …
E_1 : Celle-là (*en montrant l'équation 22 :* $x^2 - 8x + 15 = 0$), on peut pas ….
E_2 : Ah, non, il y a le 15 …

67. Al *(répondant à une question)* : On n'est pas obligé d'écrire un nom pour les catégories, mais celui qui passera au tableau, le rapporteur devra être capable de les expliciter : pour telle catégorie, j'ai pris ce critère-là et ce critère-là …

68. **09 : 10** ***Dans le groupe de Jimmy (affiche 3-2-Al)*** *:*

E_1 : On met celles qui sont égales à zéro ensemble (*met la 17 :* $(3-4x)(2x-1)=0$ *et la 27 :* $3x(x+\sqrt{5})=0$ *ensemble sur la table*).
E_2 : Celle-là (*en montrant l'équation 18 :* $x^2=7$), ça fait racine de 7…
E_1 : Et celle-là (*en montrant l'équation 13 :* $x^2=-4$), c'est pas possible.
E_2 : Alors on la met dans … les impossibles ?
E_1 : Et celle-là (*en montrant l'équation 10 :* $\frac{x^2}{27}=0{,}01$), ça fait x^2 égale quelque chose… Donc, ça va avec ça (*en la posant sur l'équation 18 :* $x^2=7$).
E_2 : Et ça (*en montrant l'équation 25 :* $\frac{x^2}{7}=21$), ça fait 21× 7… donc ça va là aussi. C'est ça ?
E_1 : Oui… (*elle la pose sur l'équation 18 :* $x^2=7$).
E_2 : Et ça (*en montrant les équations 19 :* $x^2-8x+15=-1$ *et 22 :* $x^2-8x+15=0$), c'est des identités remarquables.
E_1 : C'est les mêmes !
Jimmy : Non ! Là, c'est 0 et là, c'est -1 !
10 :19 E_1 : Là (*en montrant l'équation 22 :* $x^2-8x+15=0$), on peut factoriser : $\left(x-\sqrt{15}\right)^2=0$… C'est $a^2 - 2ab + b^2$.
E_2 : Oui, ben justement … Si ça (*elle montre 15*) c'est $\sqrt{15}^2$, alors 2ab, ça fait $2\times\sqrt{15}\times x$, ça fait pas $8x$! Enfin, ça m'étonnerait ! (*rires*). Et si on prend $8x$, 8, c'est 2×4, donc on devrait avoir 16 …
E_1 : Et ici (*en montrant l'équation 9 :* $9x^2-16=0$), on peut factoriser ?
E_2 : Oui, c'est une identité remarquable.
E_1 : Et celle-là (*en montrant l'équation 4 :* $x^2+6x+9=0$), on peut factoriser ?
E_2 : Oui, là ça marche, ça fait $(x+3)$ … On la met avec la 9.
Jimmy : Et il y en a une autre, là ! (*en montrant l'équation 3 :* $x^2-8x+15=15$)
E_1 : Là, tu peux faire passer 15 de l'autre côté, et ça fait zéro. Et après, tu fais x facteur de x moins 8.
E_2 : Oui, c'est ça. On la met avec les autres.
E_1 : **11 : 50** Ensuite, celle-là (*en montrant l'équation 15 :* $3=2-x^2$)…
E_2 : Ça fait $x^2=2-3$ donc $x^2=-1$.
E_1 : On la met avec les impossibles (*elle la place avec l'équation n°13*).

13. **12 : 06** Al (*à toute la classe*): Allez, il vous reste un peu plus de cinq minutes …
14. ***Toujours dans le groupe de Jimmy (affiche 3-2-Al)*** *:*

E_1 : Là (*en montrant l'équation 16 :* $\sqrt{3}x^2=-2$), ça, tu le passes de l'autre côté, donc ça fait x^2 égal quelque chose *(elle la pose sur l'équation 15).*
E_2 : Non, non, non … Regarde, ça fait un truc négatif !
E_1 : Ah oui (*rires*) !
E_2 : Alors on la met là (*avec le tas des impossibles*)
E_1 : Celle-là (*en montrant l'équation 12 :* $(x+1)^2=9$).
Jimmy : On en a déjà vu une comme ça !
E_1 : Non, justement, c'était pas pareil ! Si on développe … ça fait $x^2 + 2x + 1 = 9$ … donc on sait pas la factoriser … On la met où ?

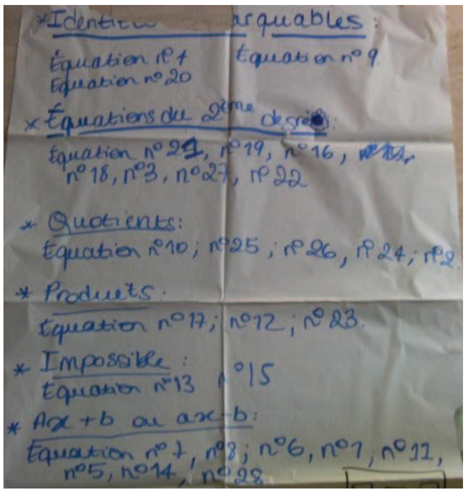
15. **17 : 47** Al : Allez, encore cinq minutes et c'est fini …
16. ***Dans le groupe de Julie (affiche 2-2-Al)*** *:*

E : Alors, ça c'est premier degré égal à zéro et ça c'est second degré égal à zéro…

(Transcription de la caméra fixe sur un seul groupe (le groupe de Marine, affiche 4-2-Al) de 01 : 12 à 21 : 30)

17. **01 : 12** Marine : On n'a qu'à chercher les identités remarquables …
19. E_1 : Ça, c'est une identité remarquable (*en montrant l'équation 17 :* $(3-4x)(2x-1)=0$) !
20. E_2 : Montre … Non !
21. E_1 : Si ! Regarde : Tu peux faire ça égal zéro (*en montrant* $3-4x$) ou bien ça égal zéro (*en montrant* $2x-1$)
22. **02 : 06** E_2 : Ah, ben oui ! Et ça, c'est pas une identité remarquable, ça (*en montrant l'équation 4 :* $x^2+6x+9=0$) ?
23. Marine : Si, c'est une identité remarquable, c'est le développement d'une identité remarquable.
24. E_1 : Mais comment tu le vois ?
25. Marine : ça fait, euh …3^2, donc c'est $2\times3\times x$ …
26. E_1 : $2\times3\times x$ …
27. Marine : Oui, ça fait $6x$. Regarde *(en montrant les termes sur le carton)* : a^2+b^2, ça fait x^2+3^2 …donc, ça fait bien $(x+3)^2$ et c'est une identité remarquable …
28. E_1 : Ah, oui d'accord !
29. **03 : 18** E_1 : Et celle-là (*en montrant l'équation 25* : $\frac{x^2}{7}=21$)… Ici ça fait 3.
30. E_2 : Ça fait $x^2=3$, donc racine de 3 …
31. E_1 : Et si on classait celles qui font des racines ?
32. Marine : Mais on les classe sur les équations ou sur le résultat des équations ?
33. E_3 : Tu les classes comme tu veux !
34. **03 : 24** Marine : Monsieur ! On doit faire le classement sur les équations ou sur le résultat de l'équation ?
35. Al : Comme vous voulez !
36. Marine : tiens, celle-là (*en montrant l'équation 2 :* $\frac{2x}{7}=0$), ça fait $x=0$. On n'a qu'à chercher toutes celles qui font $x=0$ …
37. E_3 : Tiens regarde, celle-là (*en montrant l'équation 1 :* $1000-x=0$), ça fait bien $x=1000$?
38. Marine : Euh … $x=-1000$, non ! $x=1000$. Oui, c'est ça !
39. E_3 : Mais on la met dans quelle catégorie, alors ?
40. Marine : Nulle part ! Pour l'instant je sais pas …
41. E_2 : Bon, on a déjà une catégorie avec des identités remarquables … Quoi d'autre ?
42. E_1 : On pourrait faire une catégorie avec celles qui donnent $x=0$?
43. Marine : Oui, on peut faire ça … On en a déjà une (*en montrant l'équation 2*) !
44. E_1 : Oh, regarde, il y en a une avec pi (*en montrant l'équation 7 :* $\pi x+3=4$) !
45. E_2 : En fait, c'est super compliqué … Peut-être que le résultat de certaines donne les coefficient des autres (*rires*) !
46. **05 : 22** E_1 : Sinon, on fait les factorisables et les non factorisables …
47. E_1 : Celle-là, par exemple … (*en montrant l'équation 28 :* $7(x+2)+4(x-3)=0$), ça fait … $11x$ moins …
48. Marine : Alors $7x$ plus $4x$ … $11x$ et 14 moins 12 … 2. Donc $11x=2$, $x=11/2$ … Ça fait pas zéro.
49. E_2 : Et elle (*en montrant l'équation 8 :* $x+3=0$), elle fait …
50. Marine : -3 !

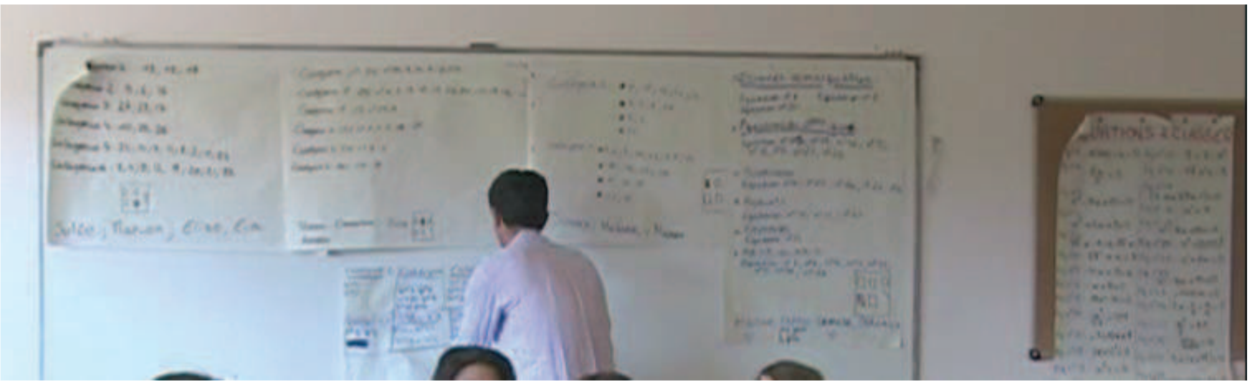
51. E$_2$: Ben voilà, ça, c'est les faciles !
52. E$_3$: Elle va avec la 28 et la 1 …
53. **06 : 31** Marine : C'est basique ! Ah, mais on fait premier et deuxième degré, sinon !
54. E$_3$: Ah oui !
55. Marine : Je prends les « premier degré » et tu prends (*en s'adressant à l'élève E$_2$*) les « second degré » …(*Les élèves trient alors les équations du second et du premier degré, en faisant deux tas sur la table*)
56. E$_2$: Mais attention, mélangez pas *(celles du second degré)* avec mes identités remarquables !
57. Marine : Mais elles sont quand même du deuxième degré …
58. E$_1$: Et celle-là (*en montrant l'équation 20 :* $x^2 = (2{,}07)^2$) ?
59. Marine : C'est une identité remarquable ! Ça fait $x^2 - (2{,}07)^2 = 0$ … Ça fait a² - b² !
60. E$_3$: (*en montrant l'équation 6 :* $\sqrt{2} + \ x = 3$) Ça, c'est facile …
61. Marine : C'est quoi comme … base ?
62. E$_3$: Ça fait $3 - \sqrt{2}$, c'est du premier degré, quoi !
63. Marine (*en la rangeant sur le tas des équations du premier degré*) : On met des racines avec tout … On les met pas forcément à part …
64. **08 : 24** Marine : allez, on fait l'affiche. Alors tu écris …
65. E$_2$: Je fais des colonnes ?
66. E$_1$: Non, tu écris « groupe 1, groupe 2, … »
67. Marine : Alors, groupe 1, identités remarquables … (*Les élèves vérifient les équations pour les mettre dans cette catégorie*)
68. E$_1$: Celle-là, c'est impossible, celle-là, c'est produit …On peut pas faire une catégorie des non classées ? (*rires*)
69. **10 :42** Al : Alors là, votre première catégorie, ce sont les identités remarquables ?
70. E$_2$: Oui !
71. Al : Faites attention que tout doit tenir sur la feuille ! Vous en avez combien des catégories ?
72. E$_2$: On sait pas encore !
73. E$_1$: alors, catégorie 2, équations du second degré … (*E$_2$ écrit*)
74. E$_3$: Mets la 17, la 13, la 19 … (*elle dicte*)



75. Marine : après, fais une catégorie « quotient » et une catégorie « produit »…
76. E$_2$: Et une autre « impossible »…
77. E$_1$: Et pour les autres ?
78. Marine : les simples ?
79. E$_2$: J'écris « *ax* + *b* » …
80. Marine : Mais celle-là (*en montrant l'équation 23 :* $-1000x = 0$) c'est un produit alors ? … C'est 1000 fois *x* !
81. E$_2$: Je la mets dans les produits ?
82. E$_1$: Mais c'est facile, ça !
83. Marine : Allez, mets-là dans les produits …Et la 6, tu la mets dans « *ax* + *b* »
84. E$_1$: La 1, c'est « *ax* + *b* », mais avec un moins … (*rires*)
85. Marine : Fais une autre catégorie …
86. E$_1$: Mais non, c'est pareil « *ax* + *b* » ou « *ax* - *b* » …
87. E$_2$: Alors j'écris « *ax* + *b* ou *ax* - *b* » …
88. Marine : Tiens, on n'a pas fait de catégorie « égal à zéro » !
89. E$_2$: Non !

90. Marine : Il reste la 22. C'est une équation du second degré, ça !
91. E_2 : Je l'écris …
92. **20 :50** Marine : Et celle-là, la 28. On a dit que ça fait $11x + 2$, donc … c'est « $ax + b$ ».
93. **21 :30** *Marine part accrocher l'affiche au tableau.*

94. **22 : 00** Al : Bon, ça y est ? (*Les groupes se succèdent au tableau pour accrocher leur affiche*)

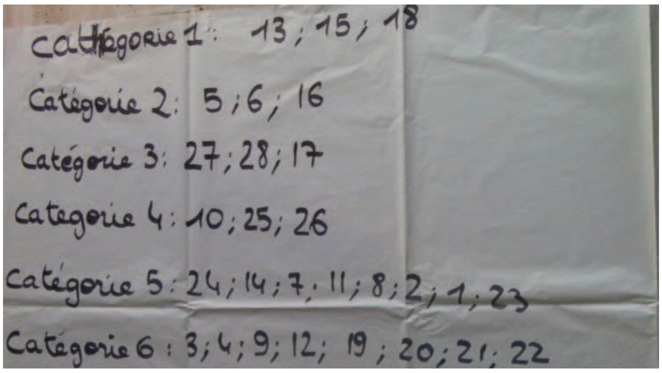


95. **23 : 00** Al : Bon, maintenant on se calme et qui passe au tableau pour expliciter ? Bon, Élise, passe au tableau ! Maintenant tout le monde regarde …et on inventorie ce qu'on fait les groupes. Et tout le monde réfléchit en même temps que ceux qui passent au tableau.

→ Phase 3

→ Sous-phase 3.1

96. **23 : 42** ***(Affiche 1-2-Al et sa transcription : Groupe d'Élise)***



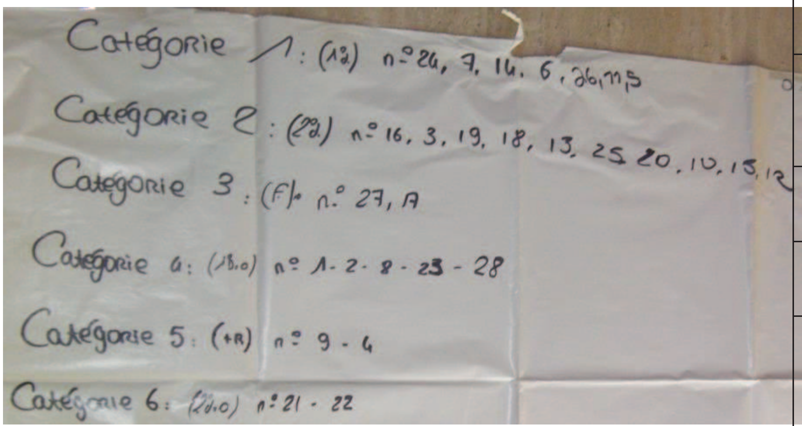
Catégorie 1	13 ; 15 ; 18
Catégorie 2	5 ; 6 ; 16
Catégorie 3	17 ; 27 ; 28
Catégorie 4	10 ; 25 ; 26
Catégorie 5	1 ; 2 ; 7 ; 8 ; 11 ; 14 ; 23 ; 24
Catégorie 6	3 ; 4 ; 9 ; 12 ; 19 ; 20 ; 21 ; 22

97. Al : Alors, vous regardez là ! Catégorie 1 : La 13 ($x^2 = -4$), la 15 ($3 = 2 - x^2$) et la 18 ($x^2 = 7$). Donc, ça pour vous, ça fait une catégorie… Comment vous l'appelleriez cette catégorie ?
98. Élise : Ben, en fait, je pense que déjà $x^2 = 7$, ça va pas … Les autres, on ne peut pas les résoudre, parce que un carré, ça ne peut pas être négatif.
99. Al : Donc, ça, ça serait la catégorie des équations du second degré, à part la 18, qui ne sont pas résolvables.
100. Élise : Oui, la 18, elle est résolvable.
101. Al : **24 : 30** Pourquoi pas ! Alors après … Catégorie 2 : les 5 ($\sqrt{2}x - 1 = 4 - \sqrt{3}x$), 6 ($\sqrt{2} + x = 3$) et 16 ($\sqrt{3}x^2 = -2$). Donc là, c'est la catégorie où il n'y a que des racines, c'est ça ?
102. Élise : Voilà !

103. Al : Ça veut dire que quand il y a des racines carrées, c'est un type d'équations particulières ?
104. Élise : …
105. Al : Trois petits points, point d'interrogation … (*rires dans la classe*)
106. Élise : Racine carrée de 2, ça fait 2.
107. Al : Racine carrée de 2, ça fait 2 ? (*rires dans la classe*)
108. Élise : Ah non, non ! J'ai rien dit … Je sais pas ce que ça fait …
109. Al : Racine de 2, ça fait 1,4 et derrière il y a des décimales illimitées…
110. Al : **24 : 55** Catégorie 3 : les équations 17 ($(3-4x)(2x-1)=0$), 27 ($3x\left(x+\sqrt{5}\right)=0$) et 28 ($7(x+2)+4(x-3)=0$)
111. Élise : C'est des développements.
112. Al : C'est des développements. Ça veut dire que …pour résoudre ces équations, il faut développer ?
113. Élise : Non, parce qu'on va faire avec égal zéro …
114. Al : Comment ça ?
115. Élise : Ben, quand on a ça, on fait euh …Par exemple pour la 28, on fait $7(x+2)=0$ et $4(x-3)=0$.
116. Es : Non ! C'est une addition !
117. Al : C'est un plus, là ! Quand une somme est égale à zéro, on n'a pas un des deux termes égal à zéro …
118. Élise : Non, mais ça marche pour les deux autres !
119. Al : Ah, oui mais ça veut dire que tu mélanges les choux-fleurs et les betteraves !
120. Al **26 : 25** Je continue, catégorie 5 … Alors 7 ($\pi x+3=4$), 14 ($3x-5=3-10x$), 24 ($3x-\frac{1}{4}=\frac{x}{4}-2$) … Oui … 11 ($-3=5x+1$), 8 ($x+3=0$), 2 ($\frac{2x}{7}=0$) … Oui, ça a l'air plus cohérent, ça ! Ensuite 1 ($1000-x=0$) et 23 ($-1000x=0$). Alors, ça, ça serait quoi ?
121. Élise : Euh …
122. Al : C'est toutes celles qui … sont de quel degré ? Sans racine carrée, bien sûr !
123. Élise : Euh …
124. E : premier degré !
125. Élise : C'est ça ?
126. Al : Ah, mais moi, je n'ai pas à me prononcer sur le fait que c'est bon ou pas … J'ai juste à essayer de comprendre comment pi, vous le mettez dans une catégorie et $\sqrt{2}$, ça vous pose un autre problème…
127. Élise : Parce que pi, c'est 3,14 !
128. Al : Et il n'y a pas des choses après ?
129. Élise : Oui, mais on ne prend que 3,14.
130. Al : (*très étonné*) Ah, on ne prend que 3,14 pour pi ! Tu vas au Palais de la Découverte … il y a un mur entier de décimales !
131. **27 : 43 Al :** Catégorie 6. Les 3 ($x^2-8x+15=15$), 4 ($x^2+6x+9=0$), 9 ($9x^2-16=0$) … Ensuite 12 ($(x+1)^2=9$), 19 ($x^2-8x+15=-1$), 20 ($x^2=(2{,}07)^2$), 21 ($x^2+6x=0$), 22 ($x^2-8x+15=0$).
132. Élise : Ce sont des identités remarquables.
133. Al : Ce sont des identités remarquables ? Par exemple : $x^2-8x+15=0$, c'est une identité remarquable ?
134. Es : Non !
135. E : Non, parce qu'il y a 15 !

136. Al : Il y a des choses bizarres ! Alors, vous avez vu ici les différentes catégories que vos camarades du premier groupe ont nommées … Ça se chevauche … violemment ! D'accord ? Merci Élise.
137. **28 : 31** Al : Deuxième groupe … Julie !

→ Sous-phase 3.2
(Affiche 2-2-Al et sa transcription : Groupe de Julie)



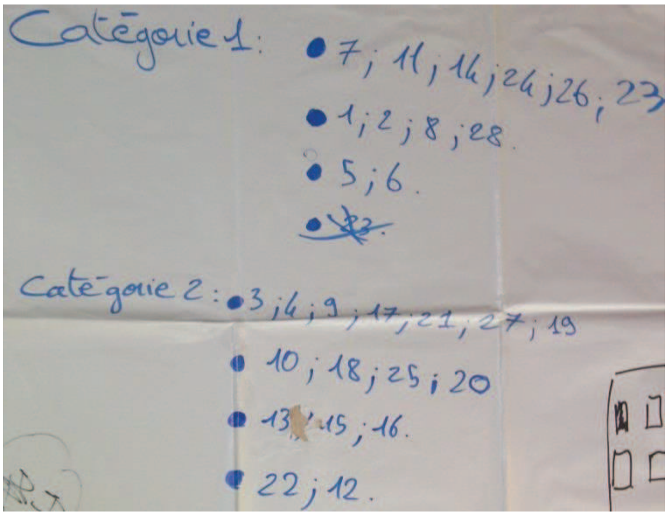
Catégorie 1	1^{er} degré	5 ; 6 ; 7 ; 11 ; 14 ; 24 ; 26
Catégorie 2	2^{nd} degré	3 ; 10 ; 12 ; 13 ; 15 ; 16 ; 18 ; 19 ; 20 ; 25
Catégorie 3	Factori-sées	17 ; 27
Catégorie 4	1^{er} degré = 0	1 ; 2 ; 8 ; 23 ; 28
Catégorie 5	Identités remar-quables	4 ; 9
Catégorie 6	2^{nd} degré= 0	21 ; 22

138. Julie : Alors, premier groupe, premier degré.
139. Al : Alors, première catégorie, premier degré : 5 ($\sqrt{2}x - 1 = 4 - \sqrt{3}x$), 6 ($\sqrt{2} + x = 3$), 7 ($\pi x + 3 = 4$), 11 ($-3 = 5x + 1$), 14 ($3x - 5 = 3 - 10x$), 24 ($3x - \frac{1}{4} = \frac{x}{4} - 2$) et 26 ($\frac{10x}{0,001} = 4$). Ce sont les équations du premier degré, si je comprends bien ! Et, elles y sont toutes là ?
140. Julie : Non, non. Après, il y a une sous-partie.
141. **29 : 00** Al : Ah, il y a une sous -partie !
142. Julie : C'est la catégorie « premier degré égal à zéro ».
143. Al : donc là, vous me faites une quatrième catégorie avec du premier degré égal à zéro, donc. Alors, 1 ($1000 - x = 0$), 2 ($\frac{2x}{7} = 0$), 8 ($x + 3 = 0$), 23 ($-1000x = 0$), 28 ($7(x + 2) + 4(x - 3) = 0$). Donc, pour vous, les catégories 1 et 4, c'est deux catégories différentes ?
144. Julie : Ben, oui. C'est une catégorie avec des sous-parties.
145. **29 : 47** Al : Ensuite, catégorie 2, le second degré. Donc il y a toutes celles du second degré ?
146. Julie : Non (*rires*).
147. Al : Donc ça veut dire qu'il y a aussi une sous –partie du second degré pour celles qui sont égales à zéro ! C'est la catégorie …
148. Julie : la catégorie 6.
149. **30 : 00** Al : D'accord. Ensuite, la catégorie 3 : 27 ($3x(x + \sqrt{5}) = 0$) et 17 ($(3 - 4x)(2x - 1) = 0$). C'est la catégorie quoi ?
150. Julie : Qu'on peut résoudre immédiatement.
151. E : celles qui sont factorisées.
152. Al : Alors qui sont factorisées ou qu'on peut résoudre immédiatement ?

153. Julie : Qui sont déjà factorisées et qu'on peut résoudre immédiatement.
154. **30 : 35** Al : D'accord. Et la catégorie 5, la 9 ($9x^2 - 16 = 0$) et la 4 ($x^2 + 6x + 9 = 0$)
155. Julie : C'est les identités remarquables.

→ ***Sous-phase 3.3***
156. **30 : 40** Al : D'accord. Alors le suivant … qui est le rapporteur, … Jimmy !
157. Jimmy : On peut venir à deux, Monsieur ?
158. Al : Ah, oui, pour faire un cerveau ? (*rires*)

(Affiche 3-2-Al et sa transcription : Groupe de Jimmy)



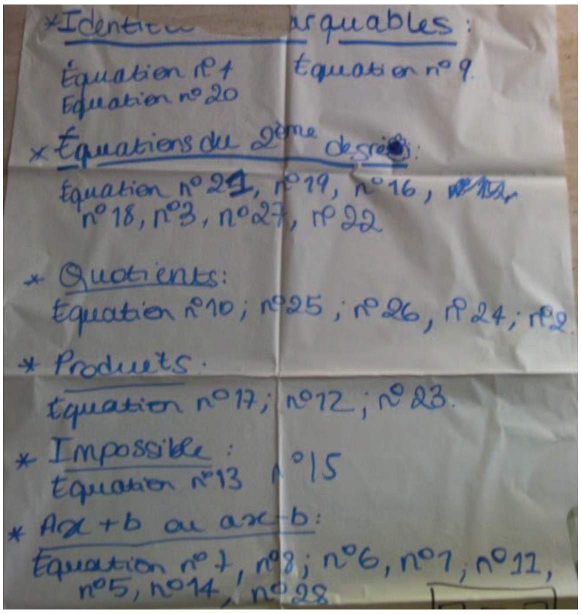
Catégorie 1	7 ; 11 ; 14 ; 24 ; 26
	1 ; 2 ; 8 ; 28
	5 ; 6
Catégorie 2	3 ; 4 ; 9 ; 17 ; 19 ; 21 ; 27
	10 ; 18 ; 20 ; 25
	13 ; 15 ; 16
	12 ; 22

159. *(Jimmy et Mélanie vont au tableau. En arrivant au tableau, Jimmy barre l'équation 23 qui était située en bas de la catégorie 1 et l'inscrit dans le premier sous-groupe*)
160. Al : Ah, déjà de la triche ! Alors vous, vous avez fait deux catégories et à l'intérieur des catégories, vous avez fait des sous-groupes.
161. Jimmy : Oui.
162. Al : Alors, première catégorie : 7 ($\pi x + 3 = 4$), 11 ($-3 = 5x + 1$), 14 ($3x - 5 = 3 - 10x$)
163. Mélanie : La première grosse catégorie, c'est le premier degré et la deuxième grosse catégorie, c'est le second degré.
164. Al : D'accord, et à l'intérieur, vous avez différencié différents types d'expressions. Alors, la première sous-partie, c'est …
165. Mélanie : c'est les simples !
166. Al : la catégorie simple ? C'est quoi, ça ?
167. Mélanie : C'est qu'il y a pas besoin de faire grand-chose pour …
168. Al : C'est le théorème de « y a pas besoin de faire grand-chose », je ne le connais pas !
169. Mélanie : y a juste à transposer et à diviser …
170. Al : Il y a juste à faire une transposition et une division, c'est ça ?
171. Mélanie : Voilà !
172. Al : Je finis de vérifier … La 23 ($-1000x = 0$)… oui. Ensuite ?
173. Mélanie : C'est celles qui sont égales à zéro.
174. Al : Alors, 1 ($1000 - x = 0$), 2 ($\frac{2x}{7} = 0$), 8 ($x + 3 = 0$), 28 ($7(x+2) + 4(x-3) = 0$)

Est-ce que quand tu as ça (*il montre la 2*) égal à zéro … est-ce que tu as plus à faire que ce que tu as dit précédemment ?
175. Mélanie : Non.
176. Al : Non ! Vous avez entendu ? Là, leur première sous-catégorie, c'était celle où il n'y a pas grand-chose à faire … (*Rires dans la classe*). Pour résoudre $\frac{2x}{7} = 0$, il n'y a pas grand-chose à faire … **32 : 33** Équations 5 ($\sqrt{2}x - 1 = 4 - \sqrt{3}x$) et 6 ($\sqrt{2} +\ x = 3$)…
177. Mélanie : Là, il y a des racines.
178. Al : Donc, c'est le fait d'avoir des racines carrées ? Le résultat sera effectivement avec des racines carrées …
179. Mélanie : Mais on a toujours du premier degré.
180. **32 : 53** Al : D'accord. Ensuite, catégorie 2 …C'est le second degré. Alors, première partie du second degré, c'est quoi ?
181. Mélanie : C'est là où il faut factoriser, ou c'est des identités remarquables…
182. Al : Alors 3 ($x^2 - 8x + 15 = 15$), 4 ($x^2 + 6x + 9 = 0$), 9 ($9x^2 - 16 = 0$), 17 ($(3 - 4x)(2x - 1) = 0$), 21 ($x^2 + 6x = 0$), 27 ($3x\left(x + \sqrt{5}\right) = 0$). Là, il faut factoriser ? Mais ces deux-là (*il montre les 17 et 27*), elles sont effectivement du second degré, mais est-ce qu'il y a quelque chose à faire ? Vous dites, il y a à factoriser …
183. Mélanie : Non !
184. Al : C'est déjà factorisé. Là (*il montre la 9*), il y a quelque chose à faire, mais ici, c'est déjà factorisé.
185. Mélanie : Oui. Et il y a deux solutions…
186. Al : Oui. Ensuite, la 10 ($\frac{x^2}{27} = 0{,}01$), 18 ($x^2 = 7$), 25 ($\frac{x^2}{7} = 21$), 20 ($x^2 = (2{,}07)^2$).
187. Mélanie : Là, il y a juste à faire …
188. Al : Juste à faire quoi ?
189. Jimmy : C'est simple !
190. Mélanie : (*rires*) Oui !
191. Al : C'est simple ? Moi, je vous parie une tonne de cacahuètes, que celle-là (*il montre la 20*), vous vous plantez pour la résoudre ! C'est pas si simple que ça ! (*rires*). Donc la deuxième sous-catégorie, c'est le second degré simple … **34 : 00** Bon, la troisième sous-catégorie ? 13 ($x^2 = -4$), 15 ($3 = 2 - x^2$), 16 ($\sqrt{3}x^2 = -2$) …
192. Mélanie : C'est les impossibles !
193. Al : Donc c'est le second degré impossible à résoudre. Mmm. Et celles-là ? **34 : 38** 12 ($(x + 1)^2 = 9$) et 22 ($x^2 - 8x + 15 = 0$)
194. Jimmy : C'est quand on sait pas faire …
195. Al : Ça … (*en montrant la 12*), tu sais pas faire ?
196. Mélanie : Ben si, il faut faire … euh …
197. Al : Ben, c'est pas une identité remarquable, ça ?
198. Jimmy : Si mais après …
199. Al : C'est pas $(x + 1)^2 - 3^2$?
200. Jimmy : on n'y a pas pensé …
201. Al : D'accord ? Donc tout le monde a vu leurs deux catégories différentes ? **34 : 55** Alors, le groupe suivant, qui est-ce qui vient ? Marine ?

→ ***Sous-phase 3.4***
202. Marine : Est-ce que je peux changer un truc ?
203. Al : Allez, vas-y … Puisque les autres l'ont fait ! (*Marine barre l'équation n°15 de la catégorie des « équations du second degré » pour l'ajouter à la catégorie des équations « impossibles »*)

(Affiche 4-2-Al et sa transcription : Groupe de Marine)



Catégorie 1	Identités remarquables	4 ; 9 ; 20
Catégorie 2	Équations 2nd degré	3 ; 16 ; 18 ; 19 ; 21 ; 22 ; 27
Catégorie 3	Quotients	2 ; 10 ; 24 ; 25 ; 26
Catégorie 4	Produits	12 ; 17 ; 23
Catégorie 5	Impossible	13 ; 15
Catégorie 6	ax+b ou ax-b	1 ; 5 ; 6 ; 7 ; 8 ; 11 ; 14 ; 28

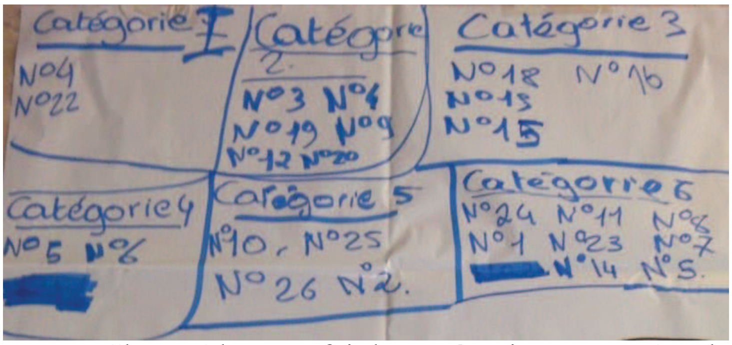
204. Al : Alors, elles ont fait 6 catégories. Marine, première catégorie : la 4 ($x^2 + 6x + 9 = 0$), la 9 ($9x^2 - 16 = 0$) et la 20 ($x^2 = (2{,}07)^2$). Il n'y a que celles-là qui sont des identités remarquables ?
205. Marine : Ben, pour nous, oui …(*Rires dans la classe*)
206. Al : Par exemple, celle-là (*il montre la 12 :* $(x + 1)^2 = 9$) ce n'est pas une identité remarquable ?
207. Marine : Ben si !
208. Al : Celle-là là (*il montre la 10 :* $\frac{x^2}{27} = 0{,}01$), c'est pas une identité remarquable ?
209. Marine : Oui …
210. Al : La catégorie des identités remarquables est à mon avis sous-représentée par rapport au panel !
211. **36 : 27** Al : Équations du second degré. Alors 21 ($x^2 + 6x = 0$), 19 ($x^2 - 8x + 15 = -1$) … Ça et ça, c'est pas la même nature ! Au passage, la 19, c'est une identité remarquable aussi ! Ici, si tu transposes, on obtient $x^2 - 8x + 16$ alors que pour la 21, non. Là, on est dans la factorisation par *x*. D'accord ?
212. Marine : Oui …
213. Al : Ensuite, 18 ($x^2 = 7$), 3 ($x^2 - 8x + 15 = 15$), 27 ($3x(x + \sqrt{5}) = 0$). Pour la 18, on est en plein dans une identité remarquable, sauf que b ce sera $\sqrt{7}$ … Et 27, elle est déjà factorisée … L'art du chevauchement … **37 : 25** Alors, les quotients : 10 ($\frac{x^2}{27} = 0{,}01$), 25 ($\frac{x^2}{7} = 21$), 26 ($\frac{10x}{0{,}001} = 4$) … Dès qu'il y a des quotients pour vous, c'est une catégorie à part ?
214. Marine : Non, mais c'est parce qu'on ne savait pas trop où les mettre … Fallait faire des catégories, alors on a fait la catégorie des quotients !
215. Al : Non, mais je ne dis rien … Mais j'en aurais mis en rose, en vert et en rouge, vous auriez fait les catégories des couleurs ! **37 : 52** Ensuite, catégorie des produits : 17 ($(3 - 4x)(2x - 1) = 0$), 12 ($(x + 1)^2 = 9$) … C'est un produit, ça ? …
216. Marine : … (*Rires*)
217. Al : C'est une identité remarquable … et 23 ($-1000x = 0$) …

218. Marine : Ah, ce 23, on s'est bien demandé où le mettre …
219. Al : C'est une classification tout à fait baroque ! **38 : 20** Impossibles : 13 ($x^2 = -4$) et 15 ($3 = 2 - x^2$)…. La 16 ($\sqrt{3}x^2 = -2$), j'eusse aimé la voir ici, si c'est bien une catégorie … **38 : 30** Et ensuite les équations du type *ax* + *b* ou *ax* – *b* … égales quoi ? 7, 8, 6, 1, 12, 5, 14 et 28 … Oui … D'accord.
220. Marine : On a vu par exemple que si on développait, par exemple pour la 28, ça faisait 7*x* + 14 + … Ça finit par faire *ax* + *b* …
221. Al : Bien ! Effectivement … Mais brutalement, cette expression par rapport à celle-là (*il montre la 1*) on est bien d'accord que c'est pas la même… Mais effectivement ça se résout de la même façon … Merci. Dernier groupe … Clara ?

→ Sous-phase 3.5

222. **39 : 18**

(Affiche 5-2-Al et sa transcription : Groupe de Clara)



Catégorie 1	4 ; 22
Catégorie 2	3 ; 9 ; 12 ; 19 ; 20
Catégorie 3	13 ; 15 ; 16 ; 18
Catégorie 4	5 ; 6
Catégorie 5	2 ; 10 ; 25 ; 26
Catégorie 6	1 ; 5 ; 7 ; 8 ; 11 ; 14 ; 24

Clara : Alors, en fait les catégories 1 et 2, c'est la même … ça se ressemble …
223. Al : Alors on va regrouper la 1 et la 2 et l'appeler I (*il corrige sur l'affiche*) … Alors 4 ($x^2 + 6x + 9 = 0$), 22 ($x^2 - 8x + 15 = 0$) … Ensuite 19 ($x^2 - 8x + 15 = -1$), 9 ($9x^2 - 16 = 0$) … Mais c'est quoi cette catégorie ?
224. Clara : Les identités remarquables …
225. Al : Les identités remarquables ?
226. Clara : Oui …
227. **40 : 07** Al : Alors catégorie 3, donc la catégorie 2… La 18 ($x^2 = 7$) … Donc là, la 18 pour vous, ce n'est pas une identité remarquable ? Vous regardez, là ? Si vous prenez la 15 ($3 = 2 - x^2$) par exemple … Si vous transposez, vous avez un carré égal à un nombre négatif … C'est … Clara ?
228. Clara : C'est du second degré.
229. Al : C'est du second degré … Oui, on peut voir ça comme ça … Et la 16 ($\sqrt{3}x^2 = -2$), c'est la même chose … **40 : 58** Ensuite catégorie 4, équations 5 ($\sqrt{2}x - 1 = 4 - \sqrt{3}x$) et 6 ($\sqrt{2} + x = 3$) : c'est toujours avec le fameux problème des racines carrées, c'est ça ? Dès que vous voyez une racine carrée, il faut la fuir … **40 : 58** Catégorie 5, c'est 10 ($\frac{x^2}{27} = 0{,}01$), 25 ($\frac{x^2}{7} = 21$), 26 ($\frac{10x}{0{,}001} = 4$) et 2 ($\frac{2x}{7} = 0$). Au passage, la 10, c'est une identité remarquable, comme la 25 … et les 2 et 26 sont du premier degré… **41 : 20** Et la sixième catégorie, 1 ($1000 - x = 0$), 24 ($3x - \frac{1}{4} = \frac{x}{4} - 2$), 8 ($x + 3 = 0$), 23 ($-1000x = 0$), 7 ($\pi x + 3 = 4$), 14 ($3x - 5 = 3 - 10x$) … Ça a l'air d'être du premier degré, ça, non ? Et enfin, la question que je me pose, c'est pourquoi il y a la numéro 5 dans cette catégorie-là et aussi dans la catégorie n°4 … Finalement quand il y a des racines, ce serait pas aussi du premier degré ? Bon, des choses à ajouter ?
230. Clara : …

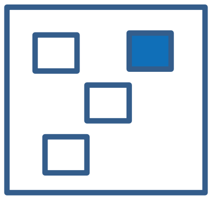
→ *Phase 4*

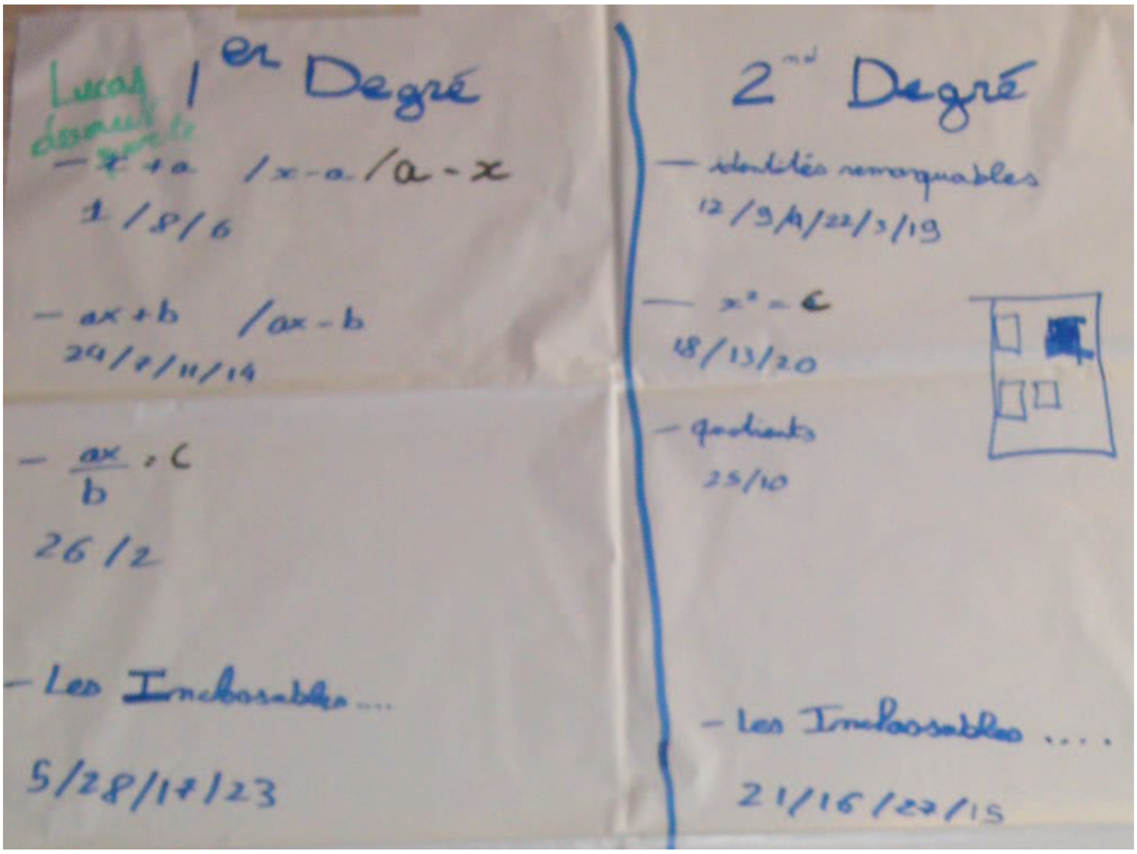
231. Al : **42 : 09** Merci ! Bilan des courses, c'est quoi ? À votre avis, quel est le classement le plus proche de la réalité ?
232. Es : (*en chœur*) Mélanie !
233. Al : Donc, effectivement, c'est eux qui sont le plus proches … Pourquoi ?
234. E : Parce qu'il n'y a que deux catégories….
235. Al : Oui, il n'y a que deux catégories, c'est quoi ? Et ils ont raison aussi dans le sens où il y a des sous-catégories mais, il y a du premier degré et il y a du second degré… Alors effectivement du second degré de ce type là (*il montre l'équation 3*) ou de ce type là (*il montre l'équation 4*) ou de ce type là (*il montre l'équation 18*), c'est toujours du second degré … mais les processus de raisonnement et de résolution ne sont pas les mêmes … mais on manie le même concept. Alors l'enjeu des deux séances suivantes, qui vont être liées à l'algorithmique, ça sera que sur les ordinateurs, vous ayez la possibilité de créer un algorithme qui vous permette de résoudre toutes les équations. Vendredi prochain ce sera celles du premier degré, aussi bien celle-là (*il montre la 1*), que celle-là là (*il montre la 8*) ou que celle-là là (*il montre la 5*). Alors que vous avez fait des catégories avec les racines carrées … mais en fait, c'est des nombres comme les autres !
236. **44 : 00** *Sonnerie. Fin de la séance.*

A31. Transcription des affiches des élèves du professeur Alex (Situation n°1 – Séance 1.1 et 1.2)

Les affiches des deux séances 1.1 et 1.2 seront numérotées séparément, sous la forme suivante : pour l'affiche 1 de la séance 1.1, on notera « 1-1-Al » et pour l'affiche 1 de la séance 1.2, on notera « 1-2-Al », etc.
Les emplacements marqués en bleu sur les schémas comme celui-ci-contre indiquent la place du groupe dans la salle de classe, le tableau étant situé sur le côté supérieur du carré.

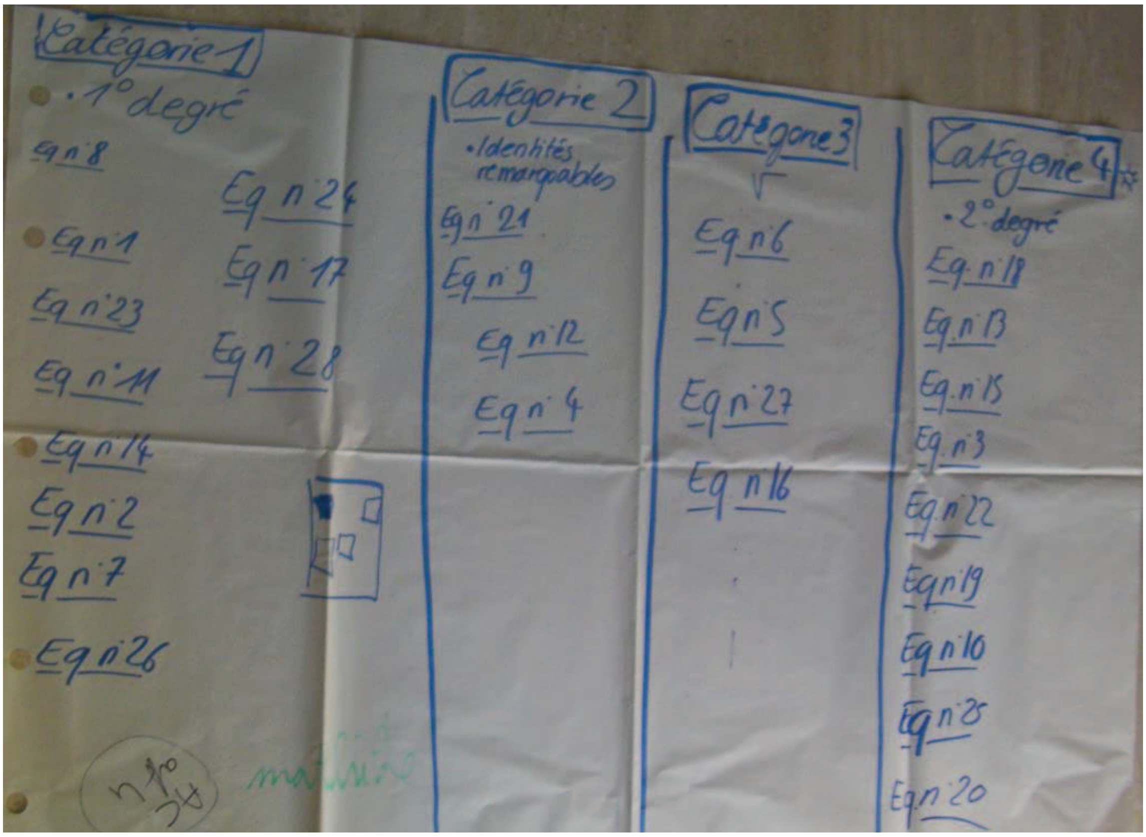
Affiche 1-1-Al : Groupe de Lucas





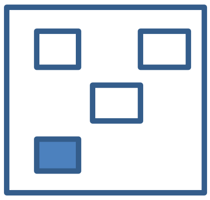
Transcription de l'affiche 1-1-Al			
Premier degré		Second degré	
$x + a$; $x - a$; $a - x$	1 ; 6 ; 8	Identités remarquables	3 ; 4 ; 9 ; 12 ; 19 ; 22
$ax + b$; $ax - b$	7 ; 11 ; 14 ; 24	$x^2 = c$	13 ; 18 ; 20
$ax/b = c$	2 ; 26	Quotients	10 ; 25
Les inclassables	5 ; 17 ; 23 ; 28	Les inclassables	15 ; 16 ; 21 ; 27

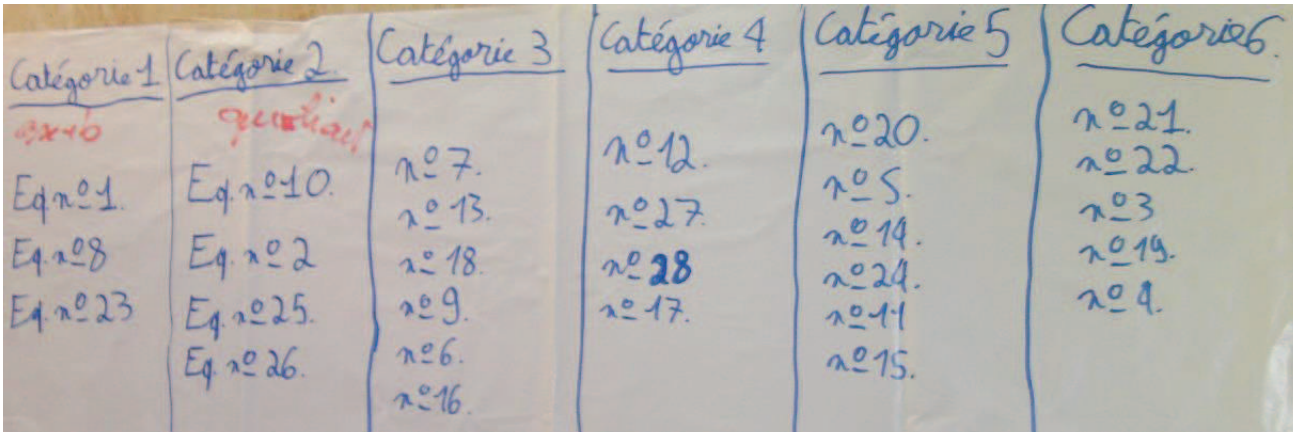
Affiche 2-1-Al : Groupe de Mathilde



Transcription de l'affiche 2-1-Al		
Catégorie 1	1er degré	1 ; 2 ; 7 ; 8 ; 11 ; 14 ; 17 ; 23 ; 24 ; 26 ; 28
Catégorie 2	Identité remarquable	4 ; 9 ; 12 ; 21
Catégorie 3		5 ; 6 ; 16 ; 27
Catégorie 4	2nd degré	3 ; 10 ; 13 ; 15 ; 18 ; 19 ; 20 ; 22 ; 25

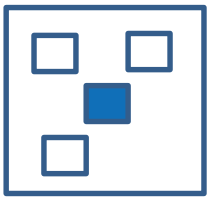
Affiche 3-1-Al : Groupe de Jean-Stéphane

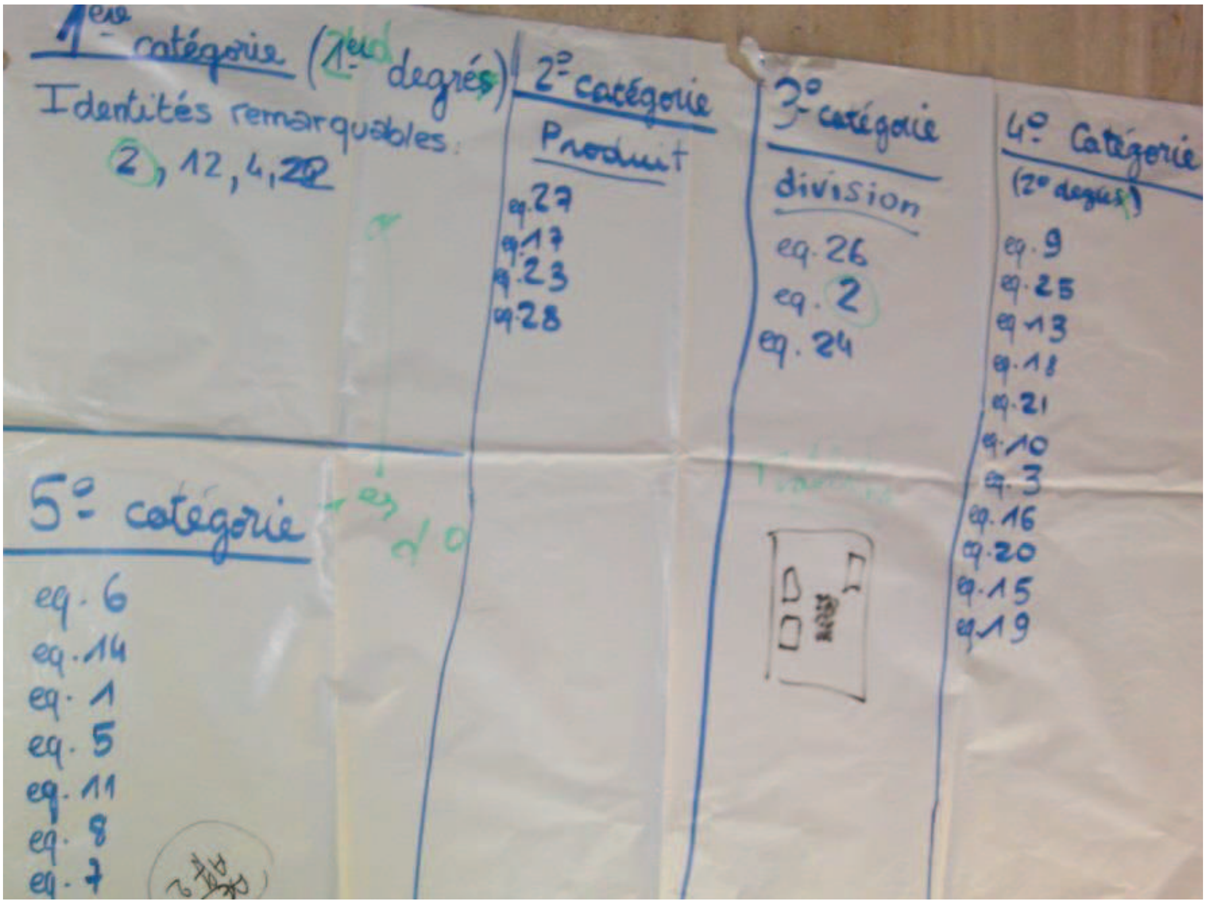




Transcription de l'affiche 3-1-Al		
Catégorie 1	*ax* + *b*	1 ; 8 ; 23
Catégorie 2	quotient	2 ; 10 ; 25 ; 26
Catégorie 3		6 ; 7 ; 9 ; 13 ; 16 ; 18
Catégorie 4		12 ; 17 ; 27 ; 28
Catégorie 5		5 ; 11 ; 14 ; 15 ; 20 ; 24
Catégorie 6		3 ; 4 ; 19 ; 21 ; 22

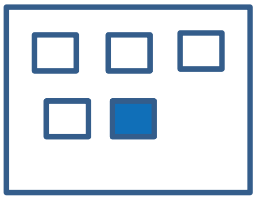
Affiche 4-1-Al : Groupe de Mathilda

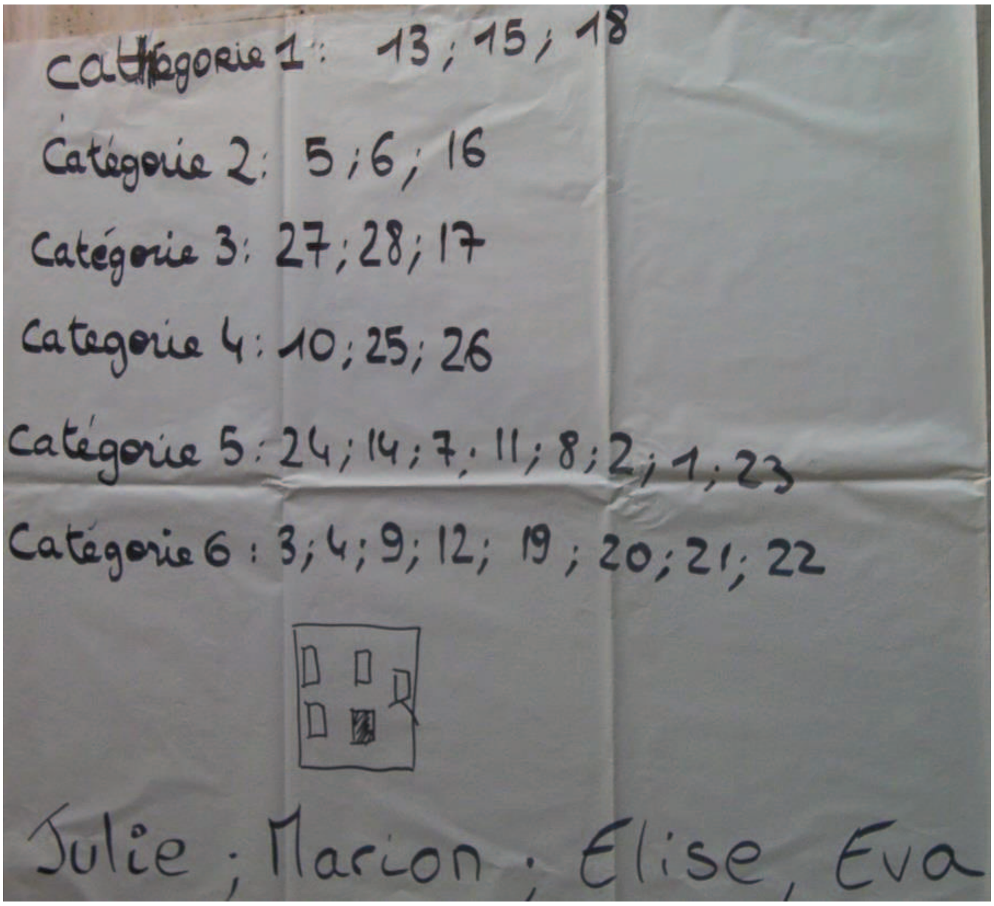




Transcription de l'affiche 4-1-Al		
Catégorie 1	Identités remarquables 2^{nd} degré	2 ; 4 ; 12 ; 22
Catégorie 2	Produit	17 ; 23 ; 27 ; 28
Catégorie 3	Division	2 ; 24 ; 26
Catégorie 4	2^{nd} degré	3 ; 9 ; 10 ; 13 ; 15 ; 16 ; 18 ; 19 ; 20 ; 21 ; 25
Catégorie 5	1^{er} degré	1 ; 5 ; 6 ; 7 ; 8 ; 11 ; 14

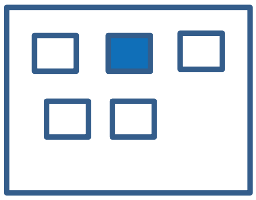
Affiche 1-2-Al : Groupe d'Élise (et Julie ; Marion ; Eva)

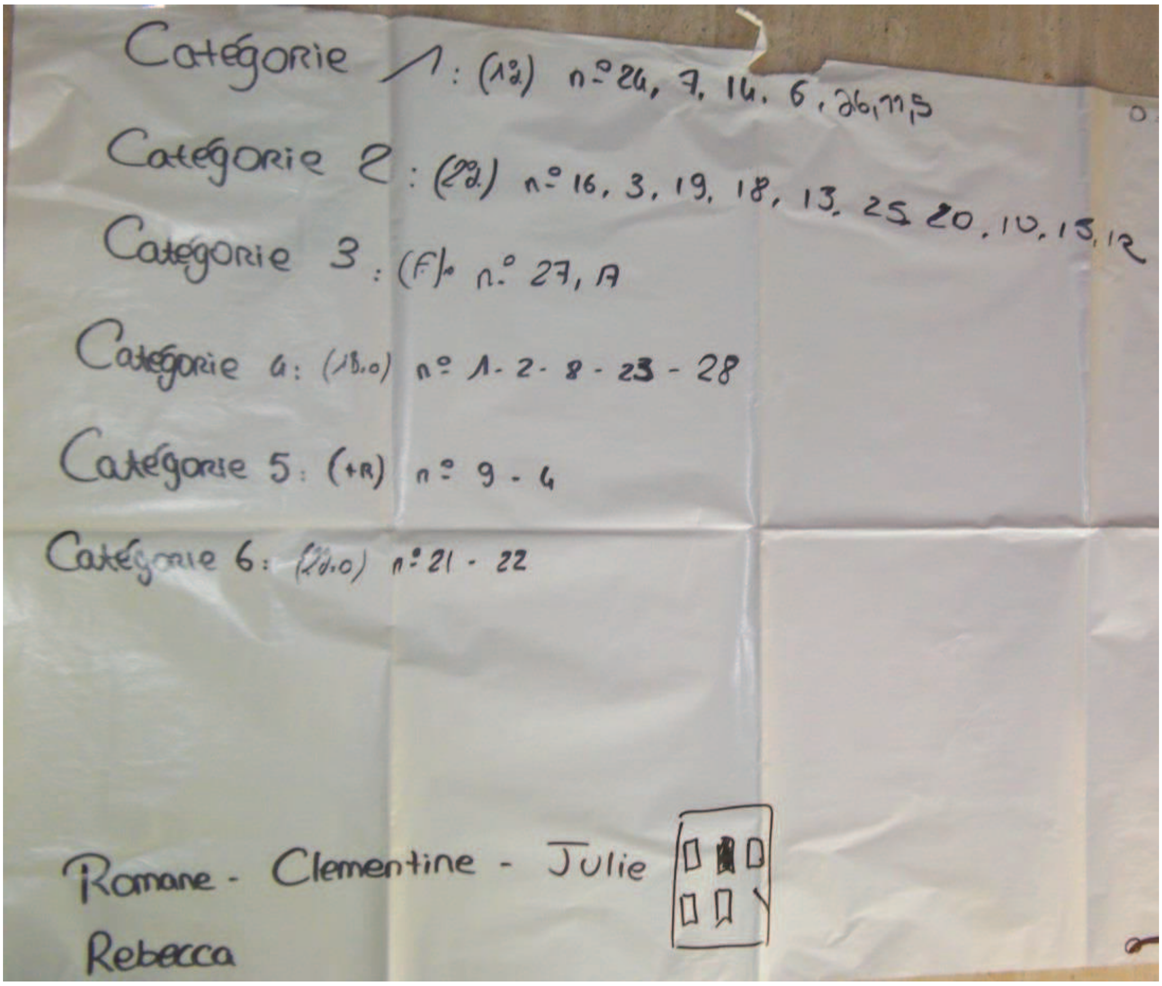




Transcription de l'affiche 1-2-Al	
Catégorie 1	13 ; 15 ; 18
Catégorie 2	5 ; 6 ; 16
Catégorie 3	17 ; 27 ; 28
Catégorie 4	10 ; 25 ; 26
Catégorie 5	1 ; 2 ; 7 ; 8 ; 11 ; 14 ; 23 ; 24
Catégorie 6	3 ; 4 ; 9 ; 12 ; 19 ; 20 ; 21 ; 22

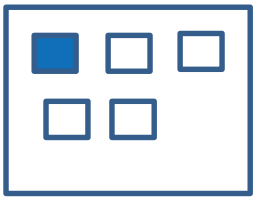
Affiche 2-2-Al : Groupe de Julie (et Romane ; Clémentine ; Rebecca)

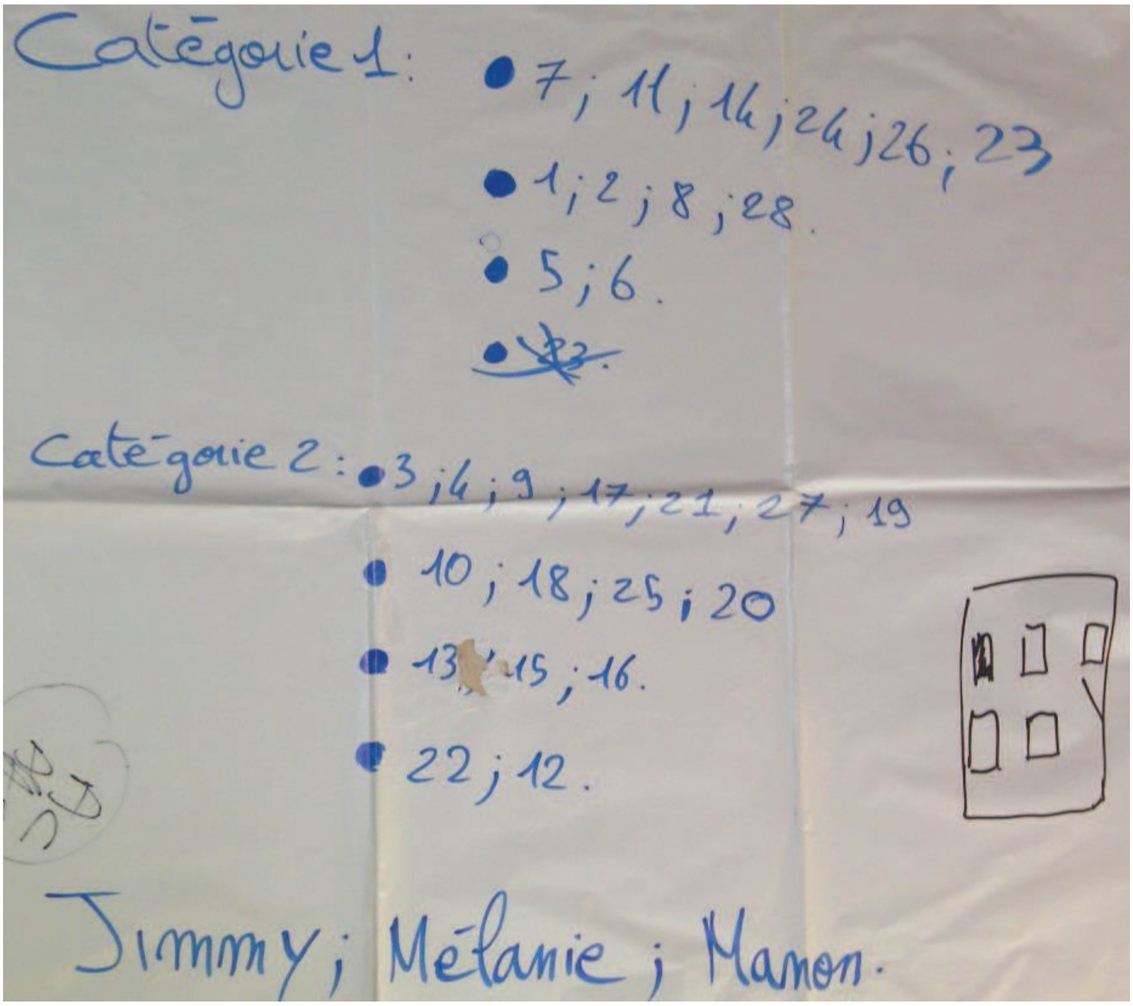




Transcription de l'affiche 2-2-Al		
Catégorie 1	1er degré	5 ; 6 ; 7 ; 11 ; 14 ; 24 ; 26
Catégorie 2	2nd degré	3 ; 10 ; 12 ; 13 ; 15 ; 16 ; 18 ; 19 ; 20 ; 25
Catégorie 3	Factorisée	17 ; 27
Catégorie 4	1er degré avec second membre égal à zéro	1 ; 2 ; 8 ; 23 ; 28
Catégorie 5	Identités remarquables	4 ; 9
Catégorie 6	2nd degré avec second membre égal à zéro	21 ; 22

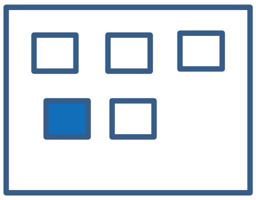
Affiche 3-2-Al : Groupe de Jimmy (et Mélanie ; Manon)

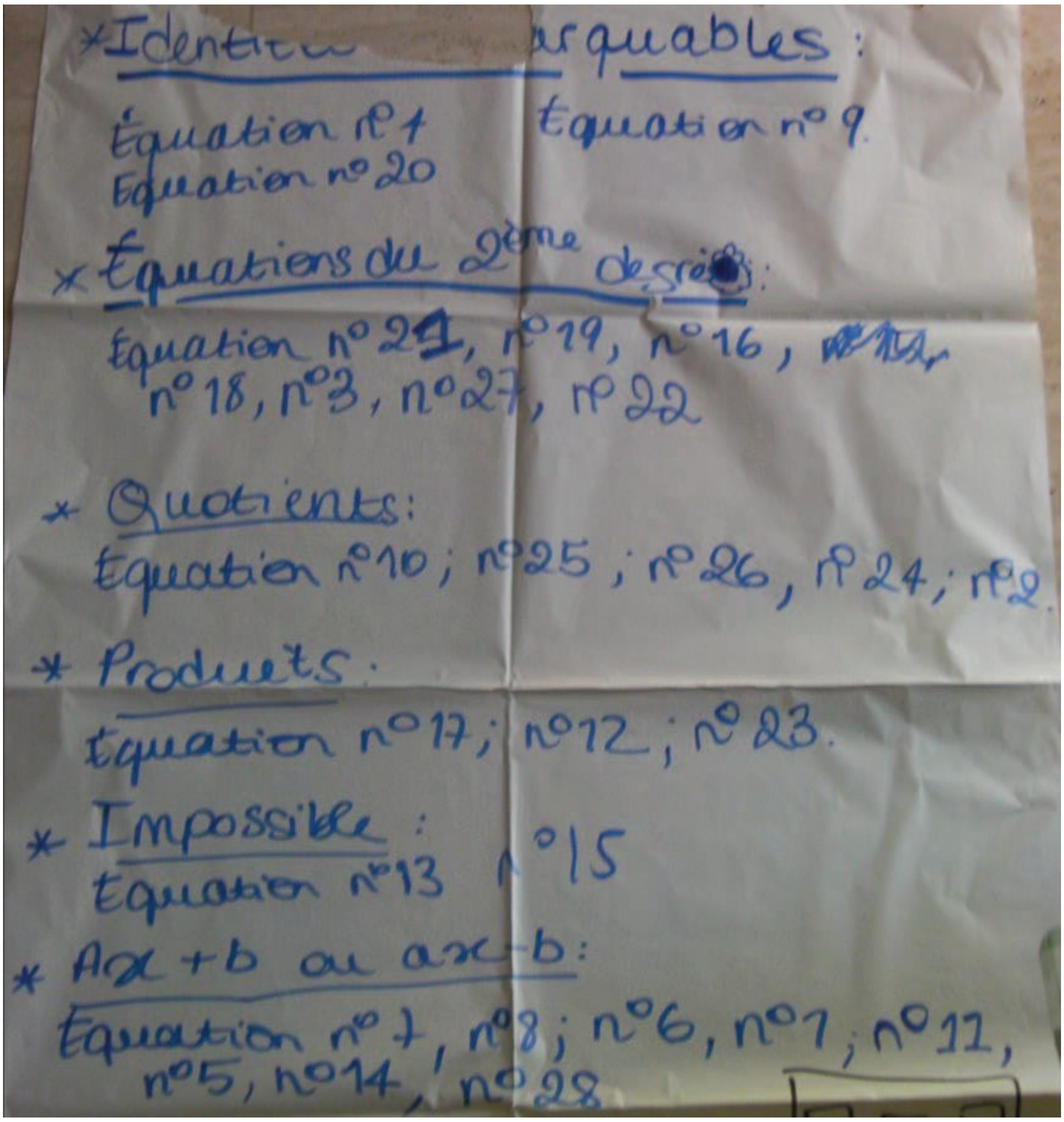




Transcription de l'affiche 3-2-Al	
Catégorie 1	7 ; 11 ; 14 ; 24 ; 26 ; 23
	1 ; 2 ; 8 ; 28
	5 ; 6
Catégorie 2	3 ; 4 ; 9 ; 17 ; 19 ; 21 ; 27
	10 ; 18 ; 20 ; 25
	13 ; 15 ; 16
	12 ; 22

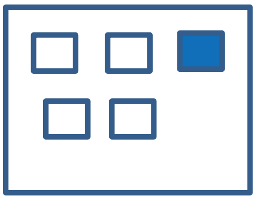
Affiche 4-2-Al : Groupe de Marine (et Fanny ; Camille ; Coline)

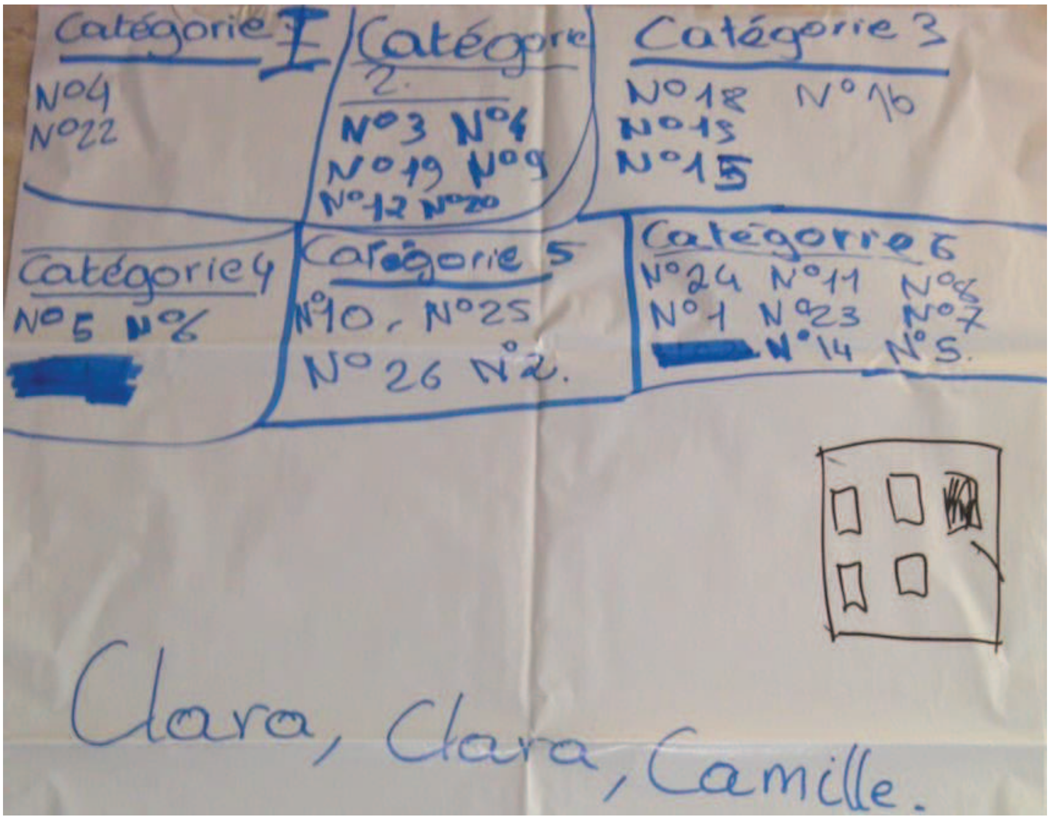




Transcription de l'affiche 4-2-Al		
Catégorie 1	Identités remarquables	4 ; 9 ; 20
Catégorie 2	Équations 2nd degré	3 ; 16 ; 18 ; 19 ; 21 ; 22 ; 27
Catégorie 3	Quotients	2 ; 10 ; 24 ; 25 ; 26
Catégorie 4	Produits	12 ; 17 ; 23
Catégorie 5	Impossible	13 ; 15
Catégorie 6	$ax + b$ ou $ax - b$	1 ; 5 ; 6 ; 7 ; 8 ; 11 ; 14 ; 28

Affiche 5-2-Al : Groupe de Clara (et Camille ; Clara2)





Transcription de l'affiche 5-2-Al	
Catégorie 1	4 ; 22
Catégorie 2	3 ; 4 ; 9 ; 12 ; 19 ; 20
Catégorie 3	13 ; 15 ; 16 ; 18
Catégorie 4	5 ; 6
Catégorie 5	2 ; 10 ; 25 ; 26
Catégorie 6	1 ; 5 ; 7 ; 8 ; 11 ; 14 ; 24
Non classées	17 ; 21 ; 22 ; 23 ; 27 ; 28

A32. Transcription de la séance 2 du professeur Annabelle (situation n°2)

Séance filmée le 16/05/2011.
Pour le codage, se reporter à l'annexe A24.
La feuille d'énoncé à laquelle se réfère Annabelle est située en annexe A18.
Note : Une seule caméra a été utilisée pour cette séance.

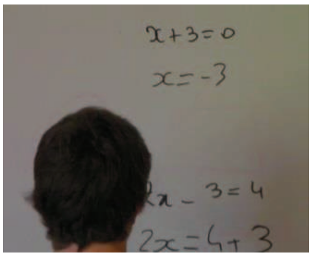
→ ***Phase 1***

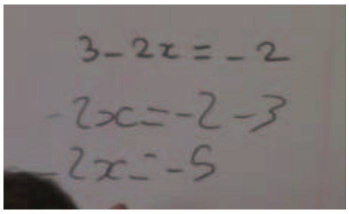
1. **00 : 00** *An distribue les feuilles et installe les élèves sur un poste informatique*.
2. **00 : 39** An : Bon, avec tout ça, écoutez-moi 30 secondes avant que je vous laisse travailler. Le but en fait... On va appeler ça une machine à résoudre des équations. Le but est de créer des machines à résoudre des équations. Jeudi, on a essayé de vous faire trier des équations … je dirais avec un succès plus ou moins grand. Vous avez trié les équations... à votre manière. Maintenant, pour les résoudre les équations, on est obligé d'avoir un certain tri. C'est-à-dire que pour quand on va résoudre une équation, a priori, c'est ce qu'on essaie de voir avec vous, comment est votre représentation de l'équation, … pour résoudre une équation, il faut vous dire : « Ah ! je suis en train de voir ça, donc c'est comme ça que je fais. » Tant qu'on n'est pas arrivé là, on va avoir beaucoup de mal à résoudre des équations. Aujourd'hui, on va essayer de résoudre un certain type, donc une catégorie comme on avait fait jeudi … Nous, on vous a mis une certaine catégorie d'équations … D'ailleurs attention, il y en a peut-être même plus d'une ! Il y a deux types de catégories d'équations sur cette feuille. D'abord, on va vous demander de trouver une machine … Alors, la machine, c'est quoi ? C'est un algorithme … Un algorithme qui me permet de résoudre les trois premières équations, c'est-à-dire les trois équations qui sont avec les étoiles (*en se référant à la feuille d'énoncé en annexe A18*). Donc, je pense que la méthode, pour aller le plus vite possible, ça serait d'abord d'essayer de les résoudre correctement à la main et ensuite d'essayer de créer un petit algorithme qui me permettrait de voir, d'arriver à l'ensemble des solutions sans avoir à faire un tas de calculs. Quand même, réfléchissez, quand on fait un algorithme, en général, on va rentrer des nombres … Vous savez très bien que toutes les équations n'ont pas les mêmes solutions, ça va dépendre de certains nombres. Réfléchissez un peu, je vous laisse réfléchir à comment faire un algorithme qui me permettrait de résoudre les trois premières équations qui sont sur votre feuille. Allez, je vous laisse travailler…**02 : 45**

→ ***Phase 2***

3. **03 : 15** An : Allez, au travail.
4. **03 : 30** An : Donc, avant d'aller sur l'ordinateur, il faut réfléchir … Matthieu, je répète, avant d'aller sur l'ordinateur, tu vas réfléchir ! Parce que faire un algorithme sans avoir réfléchi 30 secondes au problème …
5. E : c'est une catastrophe !
6. An : Ou alors t'es super doué …
7. **04 : 00** *Des élèves ouvrent Algobox sur leur poste informatique.*
8. **04 : 34** An : Julien, je répète, d'abord, il faut trouver la solution de comment on pourrait faire.
9. **05 : 35** E : Madame ?
10. An : Oui …
11. E : Il faut faire un algorithme pour les trois ?
12. An : Oui, un algorithme qui marche pour les trois ! La machine à résoudre les équations, ça doit être une machine qui quand même, en résout plus d'une … Sinon, c'est pas la peine !

13. **05 : 20** E (*Dans un binôme*) : J'aurais voulu mettre ici « x prend la valeur –3 » … Parce que la solution pour la première ($x + 3 = 0$), ça fait $x = -3$…
14. An : Oui, mais …
15. E : Ben oui, si on met -3 à chaque fois, ça marche pas !
16. An : Ah, ben non ! Il ne servirait pas à grand-chose ton algorithme, là… Il faudrait qu'il puisse résoudre plusieurs équations …
17. **07 : 13** An *(a écrit au tableau les trois premières équations)* : Tiens, Julien, viens résoudre les trois premières équations.
18. Julien (*au tableau, résout, puis écrit les trois solutions $x = -3$, puis $x = 7/2$, puis $x = 5/2$)*

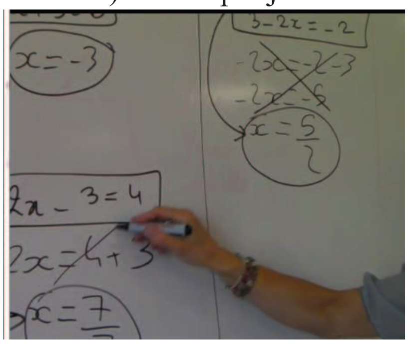




19. **08 :10** An : Très bien !
20. **08 :24** (*Dans un autre binôme*) E : Je ne sais pas comment on fait ici …Il faut isoler x.
21. An : Et oui, il faut isoler x.
22. E : Alors là il y en a deux sortes : il y a la première ($x + 3 = 0$), et ensuite, il y a les deux autres ($2x – 3 = 4$ et $3 – 2x = -2$). C'est ça ?
23. An : Non, tu peux les faire marcher ensemble. J'aimerais mieux … Parce que tu comprends, si tu commences à faire des cas … Là, on va essayer de faire une machine à équations qui résout les trois. Effectivement, tu as raison. Tu peux faire une machine à équations qui ne résout que la première et une autre qui résout les deux autres … Mais on va essayer de cumuler au départ… Mais ceci dit, si tu veux, tu peux essayer de faire un truc qui résout celle-là, et ensuite ce sera assez facile à modifier … D'accord ?
24. E : Oui.
25. **09 : 04** An : Antoine, je ne t'ai pas demandé de résoudre toutes les équations… Tu poses ton stylo et tu réfléchis à l'algorithme que je t'ai demandé.

→ *Phase 3*

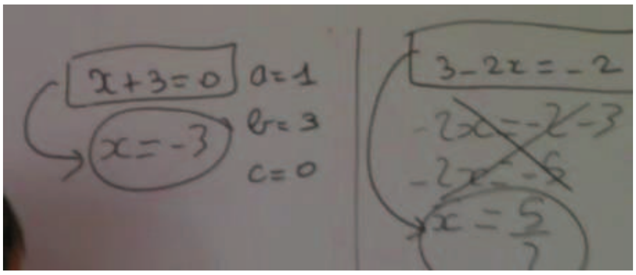
26. **10 : 14** An : Bon, je crois qu'il faut que j'intervienne… Donc, est-ce que vous avez compris le truc ? J'ai une équation. En gros, je veux …. On ne va pas rentrer l'équation, comme ça en bloc dans la machine. Ça peut se faire …. Il y a certains logiciels qui le font. Mais là sous Algobox, je peux rentrer des indications à l'ordinateur qui expliqueront cette équation que j'ai au départ, et je veux que l'ordinateur, sans que je sache ce qu'il fait par derrière, ça m'est un peu égal, me donne le résultat. Vous avez compris le principe ? Donc en gros, je veux expliquer à l'ordinateur…. lui donner des instructions pour qu'il sache que cette équation m'intéresse (*elle montre $x + 3 = 0$ au tableau*) et lorsque je lui aurai donné ces instructions-là, je veux alors qu'il me donne la solution, sachant que ce qui est au milieu *(elle barre en même temps comme ci-contre)* ne m'intéresse pas. La seule chose quoi m'intéresse … c'est quelqu'un qui veut juste connaître le résultat … il n'en a rien à faire de comment on a trouvé ce résultat. Le problème, c'est que … comme la machine, elle n'est pas créée, vous vous devez apprendre à la machine à créer le résultat. Est-ce que jusque-là, j'ai été claire pour tout le monde ?



27. Es (*en chœur*) : Oui !

→ *Phase 4*

28. **11 : 42** An : Il faudrait que je regarde comment sont fichues ces équations, entre guillemets, la « tête » de ces équations. Est-ce que quelqu'un pourrait m'expliquer quelle est la « tête » de ces équations ? Je pense que vous pouvez en avoir une idée …
29. E_1 : Moi, je sais … *ax* plus ou moins *b.*
30. An : Est-ce que le plus ou le moins change quelque chose ?
31. E_2 : … est égal à zéro ?
32. An : Alors égal à zéro, ça irait pour ce cas-là (*elle montre* $x + 3 = 0$ *au tableau*).
33. E_3 : ou à *c* ?
34. E_4 : ou à *y* ?
35. An : On met plutôt *c*, c'est juste parce qu'on continue l'alphabet… (*elle écrit* $ax + b = c$ *au tableau*). Donc en fait, j'ai ces trois équations, Manon me dit que je peux les écrire comme ça. Julien, est-ce que tu peux me donner, dans ce cas-là (*elle montre* $x + 3 = 0$), quelle serait la valeur de *a* ?
36. Julien : Ben, -3 …
37. An : *a* serait -3. Tout le monde est d'accord ?
38. Es (*en chœur*) : Non !
39. E : Non, c'est 1.
40. An : *a* c'est le nombre qui est devant l'inconnue *x*. Devant l'inconnue *x*, j'ai rien, donc c'est ?
41. Julien : zéro ?
42. An : 0 multiplié par *x*, ça vaut combien ?
43. Julien : zéro.
44. An : Donc tu sais très bien que lorsque je veux retrouver le *x*, il faut que je multiplie par 1. Donc, tu essaies de ne pas te tromper Julien, s'il te plaît, merci ! Alors le *b*, ça va être combien ?
45. Julien : 3
46. An : Le *c* ?
47. Julien : zéro
48. **13 : 10** An : Encore à toi, Julien, parce que tu as eu un petit échec ici. Pour la deuxième équation ($2x – 3 = 4$), le *a* ça va être combien ?



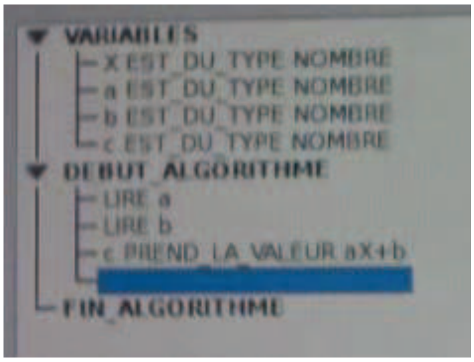
49. Julien : 2
50. An : Le *b* ?
51. Julien : -3
52. An : Et le *c* ?
53. Julien : 4
54. **13 : 30** An : D'accord ? Donc finalement, je vais pouvoir entrer dans la machine *a, b, c* et lorsqu'elle connaîtra *a, b, c*, a priori, elle connaîtra l'équation.

→ ***Phase 5***

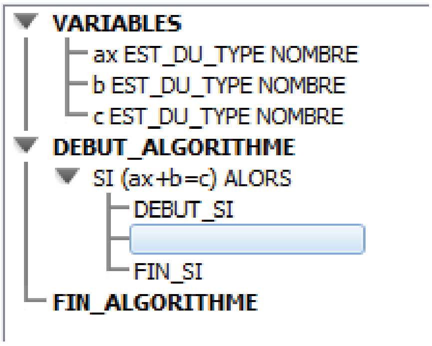
À vous de faire un petit programme qui permet de trouver la valeur de *x* qui correspond … Je vous laisse réfléchir maintenant, je vous ai donné une indication...

55. An *(tout bas et en aparté avec le chercheur)* : Je préfère bien faire le premier algorithme plutôt que de faire les deux …Si on n'arrive pas à finir, c'est pas grave.
56. **14 : 30** An (*à un élève*) : Attention, il faut que ta machine, elle marche pour tous les *a, b, c*…

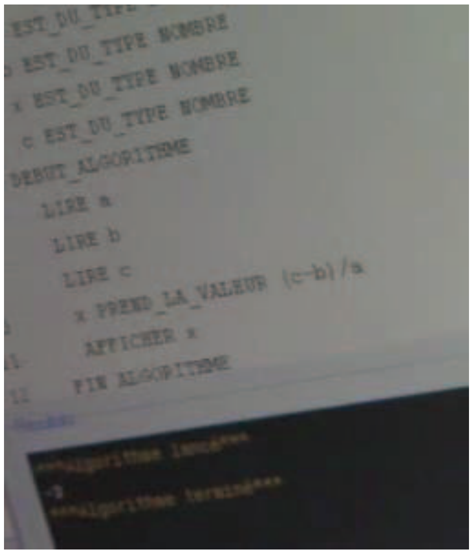
57. **15 : 15** An (*à toute la classe et après avoir vu le début de programme ci-contre*) : Il faudrait commencer à regarder comment résoudre l'équation $ax + b = c$ en gardant les lettres… Je pense que ce serait une belle aide.



58. **17 : 11** An (*à un élève qui est en train d'écrire le programme ci-contre*) : Je le répète, ce que je voudrais, c'est qu'à la fin, j'ai une machine qui me sorte la valeur de *x*.

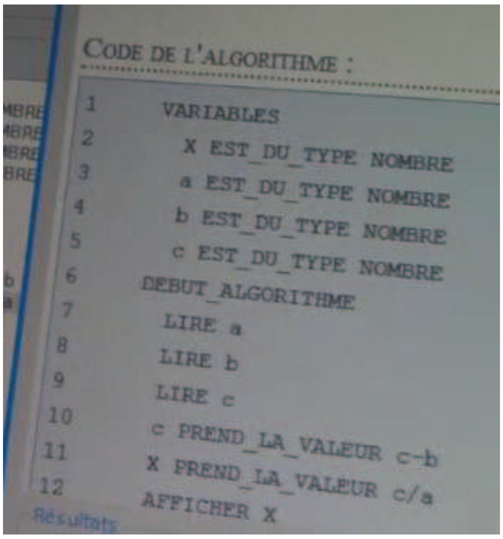


59. E : Oui, mais est-ce que je suis bien parti ou quoi ?
60. An : Déjà, au départ, tu as créé un nombre *ax* ?
61. E : Ah, non, c'est *a* d'abord.
62. An : Il faut que tu corriges… Alors, qu'est-ce qu'on a dit déjà … c'est qu'il faut que l'ordinateur connaisse l'équation. Donc si tu veux que l'ordinateur connaisse l'équation, il faut que tu lui donnes des nombres … Les nombres que j'ai demandés à Julien tout à l'heure combien vaut *a*, combien vaut *b,* combien vaut *c*…L'ordinateur doit connaître déjà ça ! On est d'accord ?
63. **18 : 25** An (*dans un autre binôme qui a travaillé sans aide)* : Tu as fait marcher ton programme et ça marche pas, c'est ça ? Alors, lance ton algorithme …Teste les deux premières. Vas-y, ça n'explosera pas en tout cas …Alors, *a* égal combien ?



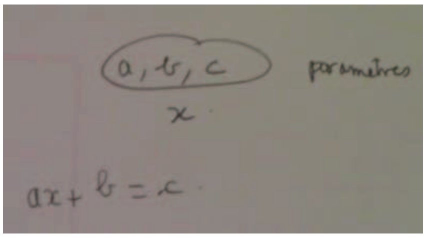
64. E1 : *a,* c'est 1 …
65. An : Cette peur des machines, c'est incroyable !
66. E1 : Mais j'aime pas les ordi …
67. An : Mais n'empêche que t'as réussi quand même. Allez, *b* égal …
68. E1 : 3. Et *c* c'est ?
69. E2 : C'est zéro …
70. E1 : Ça sort -3 ! Wouah ! Ça marche …
71. An : Essaie les autres et passe à la question 2.
72. E1 : D'accord.
73. **21 : 24** (*Dans un autre binôme*) E1 : Madame, ça y est, ça marche ! Allez, on le fait tourner pour la deuxième …
74. E2 : *a* vaut 2, b vaut –3 et *c* vaut 4.
75. E1 : Ça fait 3,5.
76. E2 : La troisième ($3 – 2\,x = -2$) *a* vaut -2, b vaut 3 et *c* vaut 4…. Ça fait -0,5
77. E1 : Ah, là par contre, ça marche pas !
78. E2 : Je me suis trompé de ligne en fait ! C'est *a* vaut -2, b vaut 3 et *c* vaut -2… Ça fait 2,5. C'est génial ! Je suis trop un beau gosse.
79. **22 : 48** (*Dans un autre binôme*) An : si, au lieu de prendre des valeurs pour *a, b, c*, tu gardes les valeurs *a, b, c*, combien va valoir *x* ? Je t'ai posé une question, Alexis, ne fuis pas … Je veux la réponse à ma question !
80. Alexis : Je n'ai pas compris la question !

81. An : Lorsque j'ai calculé pour $a = 1$, $b = 3$ et $c = 0$, je trouve x égal -3 …
82. Alexis : Oui …
83. An : Pour $a = 2$, $b = -3$ et $c = 4$, je trouve x égal 7/2 … Et la troisième …
84. Alexis : Pour $a = -2$, $b = 3$ et $c = -2$, on trouve x égal 5/2.
85. An : Donc, pour chaque équation, tu me donnes des valeurs différentes pour *a, b, c*… C'est la raison pour laquelle tu as écrit « lire a, b et c » …
86. Alexis : Oui …
87. An : Maintenant, chaque fois, tu as fait un calcul différent pour déterminer *x*. Quel est le calcul qu'on peut rentrer, en gardant *a, b* et *c* pour que la machine, lorsque tu lui donnes *a, b* et *c* puisse donner *x* directement ?
88. Alexis : Euh…
89. An : Elle ne sait pas le résoudre la machine, c'est toi qui dois lui apprendre … Tu retournes ta feuille, Marylou, tu retournes ta feuille aussi et tu résous $ax + b = c$. Tu essaies de trouver *x* égal …
90. **26 : 13** An (*à toute la classe*) : Quand vous avez fini le premier algorithme, vous continuez !
91. **27 : 20** An (*dans un autre binôme*) : Ah, il est pas mal ton programme *(voir ci-contre)* ! Tu continues maintenant.



→ *Phase 6*

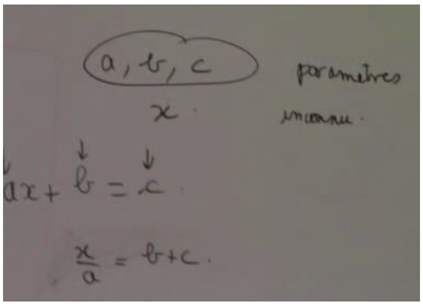
92. **28 : 02** An *(à toute la classe)* : Pour ceux qui n'y sont pas encore arrivés, parce qu'après, il y a l'étape suivante et j'aimerais bien que vous la voyez… Donc, je répète, tout le monde écoute parce que c'est intéressant au niveau du vocabulaire aussi … A moins que …il y en ait qui sache comment ça s'appelle… Est-ce que quelqu'un sait, par hasard, comment s'appellent *a, b* et *c* ?
93. E : Des variables ?
94. An : alors, pour toi, c'est des variables. Moi, je dirais pas que ce ne sont pas des variables.
95. E : D'accord !
96. An : Il y a deux types de choses : il va y avoir ça (*en montrant les lettres a, b, c au tableau*) et il va y avoir ça (*en montrant la lettre x*). Matthias, tu dis que *a, b, c* sont des variables, la propriété d'une variable, c'est quoi en fait … Dans le mot « variable », il y a quoi ?
97. E1 : C'est qu'il y a d'autres nombres qui font changer sa valeur ?
98. An : Et qu'est-ce que tu me dis, toi ?
99. E2 : une variable, ça varie …
100. **28 : 50** An : Oui, ça varie, on va prendre ça, c'est moins compliqué. Dans « variable », il y a « ça varie ». Tout le monde écoute ! C'est vrai que ça variait d'un exercice à l'autre, mais dans un exercice, quand tu veux résoudre une équation, le *a*, le *b*, le *c*, ils sont fixes, ils ne bougent plus. Donc, c'est pour ça que ton terme de variable, il ne me va pas. Comment on appelle *a, b* et *c* ? Vous ne l'avez jamais entendu… ça s'appelle des paramètres. Des paramètres, ce sont des valeurs, des nombres que l'on va fixer au début d'un problème. Mais il arrive souvent, par exemple en physique, ils utilisent beaucoup les paramètres, il arrive souvent qu'on donne des formules avec, au lieu de mettre la valeur du paramètre, à



la place, on met une lettre de manière à pouvoir changer le paramètre quand on le souhaite. Par exemple, je ne sais pas si vous avez fait des exercices où il y a de la pression, où on s'intéresse à la pression, au lieu de mettre la pression dans la pièce dans laquelle vous êtes à un moment, vous mettez P et suivant l'exercice, P va valoir une certaine valeur ou une autre valeur. Il va être fixé au début de l'exercice mais la formule que vous avez eu dans le cours au départ, c'était une formule où P n'était pas marqué, de manière à pouvoir prendre n'importe quelle valeur pour n'importe quel exercice. Donc là, c'est un peu le cas. Les paramètres *a, b* et *c*, ils vont être fixés au début mais au départ, j'ai voulu mettre des lettres pour pouvoir résoudre ces trois équations sans problème, en trouvant la valeur de *a, b* et *c.* Est-ce que ça, c'est clair ? **30 : 39**

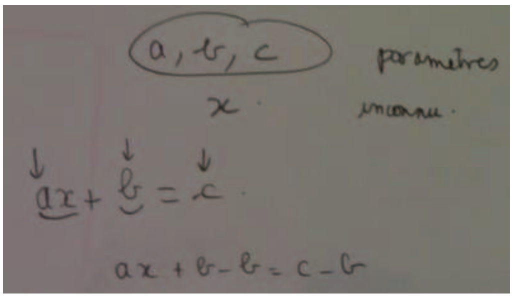
101. Es : Oui !
102. An : Et *x*, comment ça s'appelle ?
103. E : l'inconnue !
104. An : L'inconnue, oui. *x* c'est l'inconnue, c'est ce que je cherche. Donc à partir de là, je connais et je vais donner à la machine ces trois lettres, et quelle est la structure dans Algobox pour demander les trois lettres… les trois valeurs *a, b* et *c* ?
105. E : « Lire ».
106. **31 : 09** An : Oui, « lire *a*, lire *b*, lire *c* ». Et maintenant, je voudrais qu'elle me ressorte, pouf ! de manière miraculeuse, sans que je n'ai à faire aucun calcul, la valeur de *x*. Donc avant de la ressortir, sans que je sache ce qu'elle fasse, comme c'est moi qui le programme, il va falloir que je sache ce qu'elle va faire derrière moi.

→ *Phase 7*



31 : 30 Comment est-ce que je peux résoudre cette équation (*ax + b = c*) en gardant *a, b* et *c* ? Qu'est-ce qu'il faut faire ? Marylou ?

107. Marylou : *x* divisé par *a*
108. An : Tu me dis *x* divisé par *a* ? Continue …
109. Marylou : égal *b + c*
110. An (*en l'écrivant au tableau*) : T'as l'impression que c'est juste, ça ? On va le faire calmement … Il faut isoler le *x* … Tu as quand même eu l'idée qu'il faut isoler le *x*. Là, tu l'as mal isolé. On va essayer … Qu'est-ce que c'est cette opération (*en montrant ax + b*) ?
111. Marylou : …
112. An : Produit ou somme ?
113. Marylou : Somme.
114. An : Somme. Et les deux termes ?
115. Marylou : *ax* et *b*
116. An : Bon, maintenant, à la fin, je ne veux plus avoir que « *x* égal quelque chose ». Avant d'avoir « *x* égal quelque chose », là j'ai deux paquets, on va enlever le paquet qui peut se disjoindre … Comment on peut enlever le *b*, en faisant quelle opération ?
117. E : En faisant « *c* moins *b* »

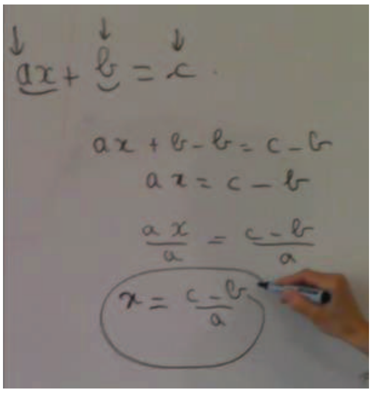


118. An : En faisant « *c* moins *b* ». Je vous rappelle, pour ceux qui ne savent pas, on soustrait *b* de chaque côté pour garder l'égalité (*voir ci-contre, en écrivant au tableau)*
119. **33 : 05** An : Maintenant, l'opération que j'ai là, ça va être quoi Marylou (*en montrant ax*) ?
120. Marylou : un produit
121. An : le produit que quoi par quoi ?

122. Marylou : *a* par *x*

123. An : Tu ne voudrais que *x* … comment est-ce que je fais pour enlever le *a* … qui est multiplié ?

124. Marylou : On divise.



125. An : je divise par a. Si tu veux tu peux faire ça *(elle écrit* $\frac{ax}{a} = \frac{c-b}{a}$ *)*… les a se simplifient et finalement j'obtiens ça. Donc finalement, si je rentre *a, b, c,* si je donne cette formule-là à la machine, elle pourra me rendre x… Bon, ceux qui étaient complètement bloqués, vous le faites. Il y en a qui sont beaucoup plus avancés que ça. **33 : 50**

→ Phase 8

126. **35 : 00** E : Madame, marquer la solution, ça veut dire écrire la réponse ?

127. An : Oui.

128. **35 : 54** An (*en aidant un binôme*) : « a prend la valeur », tu crois ? Il ne faut pas affecter une valeur à *a*, il faut lire *a* ici. C'est toi qui va rentrer *a* ... La machine, tu lui parles et c'est toi qui lui donnes des ordres. Donc tu vas lui dire de lire les valeurs *a, b* et *c*. Et après ?

129. E : On doit dire « lire b » et « lire c ».

130. An : Oui. Alors une fois qu'ils sont lus, il faut sortir *x*. Et *x* il vaut combien ?

131. E : 1

132. An : Comment ça, *x* vaut 1 ?

133. E : Non, il vaut -3 …

134. An : Ou bien 7/2 ou bien 5/2. Ça dépend des valeurs *a, b* et *c* que tu as entrées. Donc pour sortir *x* … on vient de le faire au tableau …

135. E : Pour sortir *x*, on fait *c* – *b* divisé par *a.*

136. An : Oui, voilà ! alors qu'est-ce qui va prendre cette valeur ?

137. E : C'est *a* ?

138. An : Non, c'est pas *a* ! C'est la solution de l'équation…

139. E : C'est *x*

140. An : Alors tu ne l'as pas déclaré, déclare-le. Attention, t'as oublié un truc-là. Quand on écrit *c* – *b* divisé par *a* en ligne, c'est comme sur la calculatrice, il faut faire attention à …

141. E : Aux parenthèses.

142. An : Oui.

143. E : Après, on met « lire *x* ».

144. An : Non, il faut l'afficher ! Si tu mets « lire », il va te demander combien vaut *x*. Alors, essaie le programme maintenant …

145. **37 : 16** An (*à toute la classe*) : S'il vous plait, là … J'ai demandé de marquer des étoiles pour les équations que vous pouvez résoudre avec le premier algorithme. Parce que quand elles y seront toutes (*les réponses*), je ne verrai plus ce que vous avez résolu.

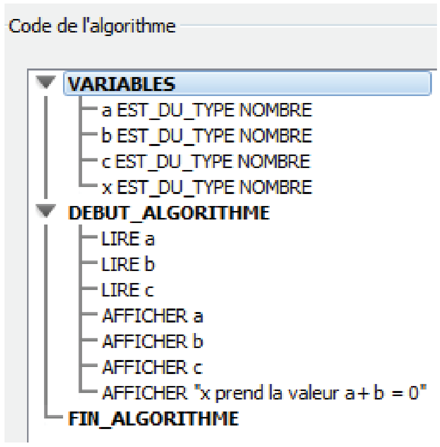
146. **39: 05** An *(à un élève)* : Racine carrée, c'est « sqrt ». C'est marqué dans les commentaires. C'est racine en anglais.

147. **40 : 00** An (*dans un autre binôme*) : Manon, tu es sûre que ça marche ? Tu l'as testé ?

148. Manon : Non, je ne trouve pas comme au tableau.

149. An : Tu as oublié les parenthèses ici. Fais « modifier la ligne ».

150. **42 : 00** *(Voir ci-contre)* E : Madame, j'y arrive pas !

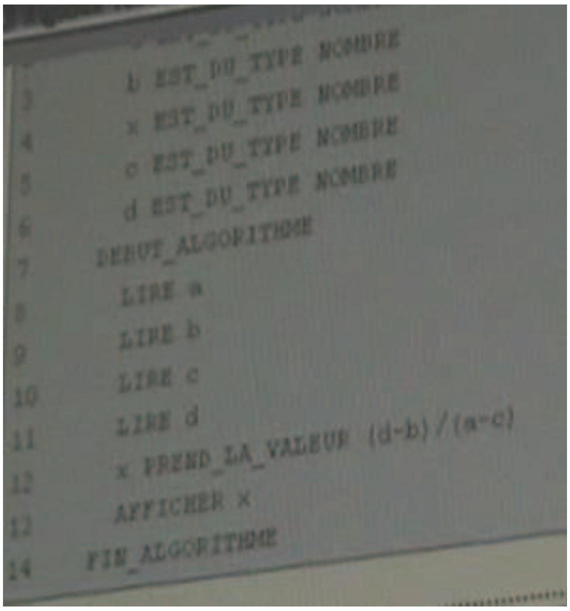


151. An : Là, tu es en train de … Tu as fait « lire quelque chose », mais là, tu es en train de les faire afficher. C'est-à-dire que si tu as rentré 1, 2, 3, la machine va te ressortir 1, 2, 3. Est-ce que c'est vraiment très intéressant ?
152. E *(rires)* : Non !
153. An : On peut demander de faire afficher ce qu'on a donné ! Mais bon... T'es d'accord pour supprimer ces trois lignes ?
154. E : Oui !
155. An : Ensuite … Tu dis « *x prend la valeur a + b = 0* ». Déjà, d'où tu le sors ça ? C'est quoi qu'il fallait mettre ?
156. E : Ah non, en fait, j'ai mis 0 à la place de *c*. Je voulais écrire *a + b = c*.
157. An : Tu voulais recopier l'équation, c'est *ax + b = c* ?
158. E : Oui.
159. An : Et qu'est-ce qu'on avait dit en fait ? Qu'est-ce qu'il fallait que tu prennes comme valeur de *x* ? *(Elle se déplace au tableau pour montrer la solution littérale de l'équation ax + b =c)*. Quand on a fait les calculs, on a résolu l'équation et on a trouvé ça (*en montrant* $x = \frac{c-b}{a}$). Donc il fallait que tu mettes cette valeur, oui ?
160. E : Oui !
161. An : Donc il te fallait affecter à une variable cette valeur … Tu sais que les variables, en fait c'est des boîtes dans lesquels on peut rentrer des valeurs et qu'on peut faire évoluer les valeurs. On te l'a expliqué, ça ?
162. E : Ah oui !
163. An : Une variable, c'est une boîte dans laquelle on met des nombres, en fait. Au départ, quand tu crées une variable, il y a zéro. Et ensuite, tu peux faire changer la valeur. Donc en fait ici, on va prendre cette structure : « affecter valeur à variable » où tu vas dire, dans la case que j'ai appelée *x*, on va mettre ce calcul-là. Du coup, dans la case où j'ai calculé *x*, j'aurai la solution qui sera dedans. Et tu pourras l'afficher.

→ Phase 9

164. **44 : 35** An (*dans un autre binôme*) : vous en êtes à la question 3 ?
165. E : Quand on a $\frac{c-b}{a-c}$, est-ce qu'on peut enlever les *c* ?
166. An : Non …
167. E : Parce qu'on a un moins, là ?
168. An : Oui… C'est quand on a une multiplication qu'on peut simplifier.
169. E : Ah oui ! J'étais pas sûr.
170. An : Mais il n'y a pas un *d* quelque part ? Oui, tu as *c* et *c*, là (*l'élève a écrit sur sa copie : ax + b = cx + c*). Tu es sûr que c'est deux fois le même ? Tu n'aurais pas dû l'appeler autrement ?
171. E : Si, si !
172. An : Sinon, ton idée est bonne …
173. **45 : 17** An (*dans un autre binôme*) : Vous en êtes où ?
174. E : Au trois (*à la question 3*). Mais j'arrive pas à faire les « prime » sur Algobox (*l'élève a écrit sur sa copie : ax + b = a'x + b'*).
175. An : Eh bien, appelle-les *c* et *d*.

176. **45 : 30** (*dans le binôme de Pierre qui a réalisé le programme ci-contre*)
Pierre : Alors, équation 5 ($2\,x + 3 = 3x + 1$), c'est 2, 3, 3, 1.



177. E1 : Ça fait 2.
178. Pierre : La 11 ($1{,}8x - 3 = 2{,}5x + 7{,}4$), c'est 1,8 puis -3 puis 2,5 puis 7,4.
179. E1 : Ça marche pas !
180. Pierre : Comment tu sais que ça marche pas ?
181. E1 : Je trouve pas pareil, j'ai fait le calcul … Madame ? Ça marche pas !
182. An : Fais voir ton calcul ? … Ton calcul est juste pourtant. *(part voir un autre groupe)*
183. Pierre *(corrige seul une erreur de syntaxe : la virgule dans un nombre décimal se nomme par un point sous Algobox)* : Eh bien voilà !
184. E1 : Mais c'est quoi cette valeur … (*il voit -14,857143 à l'écran*) Il faudrait une touche MATH-FRACTION !
185. Pierre : La 10 ($3x + 2 = 5 + 3x$), attention, c'est *a, b, d, c* !
186. E1 : *(il entre a = 3, b = 2, c = 3 et d = 5 au clavier)* : Ah, ah, ça marche pas !
187. Pierre : Mais c'est parce que c'est divisé par zéro !
188. E1 : T'es futé !
189. Pierre : Je vais réessayer dans le doute … *(il entre a = 3, b = 2, c = 3 et d = 5 au clavier et le programme indique : « erreur de calcul »).* Madame ?
190. E1 : Essaie la 8 ($\frac{7}{2}x + \frac{2}{5} = \frac{8}{3} + \frac{1}{2}x$).
191. Pierre : Alors $a = \frac{7}{2}$, $b = \frac{2}{5}$, $c = \frac{1}{2}$ *et* $d = \frac{8}{3}$. Ça donne une valeur approchée… On a bientôt fini !
192. E1 : Je vérifie (*il fait le calcul à la main et vérifie à la calculatrice si la fraction obtenue* $\frac{34}{45}$ *est égale au résultat sur l'écran*) … Ça marche, environ 0,7.
193. Pierre : Et la 4 ($2 + x = 5x$) ?
194. E1 : Ah, exact !
195. An : *(venant voir le binôme de Pierre)* Tout marche ou pas ?
196. Pierre : Pour l'instant oui. Sauf celle-là, mais je pense que c'est parce qu'on a le dénominateur égal zéro.
197. **46 :20** An : Oui, donc ton algorithme il est pas bon pour celle-là. Qu'est-ce qu'il va falloir faire comme cas ?
198. E1 : Un test « Si … ».
199. An : Si quoi ?
200. Pierre : « Si $a - c = 0$ » …
201. An : Oui, « Si $a - c = 0$ », alors tu vas faire une certaine chose … à voir ; alors finalement, ton algorithme, il traitait une certaine chose : Si *a* est ?
202. Pierre : …
203. An : Si $a - c$ est comment ?
204. Pierre : Positif ou négatif …
205. An : Donc différent de zéro. On est d'accord, ce que tu voulais dire, c'est qu'il n'y a pas le zéro dedans ?
206. Pierre : Oui !

207. An : Donc là, il suffit que tu intègres une boucle : « Si $a - c \neq 0$ alors … ». Et différent, c'est « != » sur l'ordinateur. C'est pour ça que je t'ai dit : « fais-les toutes » parce que je savais que tu allais être en échec pour la 10.
208. Pierre : En échec (*rires*), c'est un grand mot, Madame !
209. **46 : 00** *Sonnerie*
210. Pierre : Oh non ! J'ai pas fini ! Je voulais faire le test…
211. An : Vous rendez les feuilles et vous enregistrez les programmes, s'il vous plait !
212. **48 : 40** *Fin de la séance.*

A33. Exemple d'une production d'élève pour la situation n°2 de la classe d'Annabelle

$2 + x = 5x + 0$

$b + ax = cx + d$

$ax = cx + d - b$

$ax - cx = d - b$

$x = \frac{d-b}{a-c}$

Nom(s) : . ... Classe : 2nd 4

Prénom(s) : ...Manon............

L'objectif est de réaliser sur Algobox des algorithmes permettant de résoudre les équations ci-dessous.

1. *Réaliser un algorithme sur le logiciel Algobox permettant de résoudre les trois premières équations ci-dessous, **sans les transformer au préalable.***
2. *Signaler par une * les équations similaires. Faire fonctionner l'algorithme pour ces équations.*
3. *Comment peut-on résoudre les équations restantes avec un autre algorithme ? Le construire et résoudre les autres équations à l'aide de ce nouvel algorithme.*

Le travail à rendre à la fin de l'heure sur la fiche.

$ax = c - b$

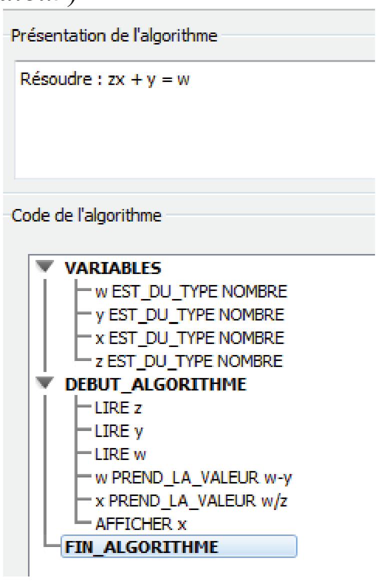
$x = \frac{c-b}{a}$

* Equation 1 : $x + 3 = 0$	Solution 1: ...x = -3......
* Equation 2 : $2x - 3 = 4$	Solution 2: ...x = 3,5......
* Equation 3 : $3 - 2x = -2$	Solution 3: ...x = 2,5......
Equation 4 : b a c d $2 + x = 5x + 0$	Solution 4: ...x = -0,5......
Equation 5 : a b c d $2x + 3 = 3x + 1$	Solution 5: ...x = -2......
* Equation 6 : $8 - x = \sqrt{2}$	Solution 6: ...x = 6,5857864......
* Equation 7 : $\frac{7}{2}x + 3 = \frac{2}{3}$	Solution 7: ...x = -0,6666667...
Equation 8 : a b d c $\frac{7}{2}x + \frac{2}{5} = \frac{8}{3} + \frac{1}{2}x$	Solution 8: ...x = -0,7555556
* Equation 9 : $3 = 2x + 1$	Solution 9: ...x = 1......
Equation 10 : a b d c $3x + 2 = 5 + 3x$	Solution 10: ....
Equation 11 : a b c d $1{,}8x - 3 = 2{,}5x + 7{,}4$	Solution 11: ...x = 14,857143......

A34. Transcription de la séance 2 du professeur Maurice (situation n°2)

Les deux séances en demi-classe se sont déroulées les 19 et 20/05/2011 et n'ont pu être filmées. Un entretien post-séance a été réalisé et enregistré le 30/05/2011 et est retranscrit ci-dessous. Le professeur Maurice a apporté les copies d'élèves ainsi que les programmes réalisés sous Algobox durant les deux séances. Le dialogue entre le chercheur et l'enseignant est transcrit ci-dessous. La feuille d'énoncé à laquelle se réfère Maurice est située en annexe A18.

1. Ma : Je t'ai apporté les algorithmes des élèves. Il doit y en avoir un ou deux qui se ressemblent mais il doit y en avoir un ou deux qui sont originaux avec des trucs intéressants.
2. C : Ah oui, ça semble intéressant, ça !
3. Ma : Oui, mais je ne sais plus trop les noms… Regarde Adrien et Anaïs…
4. C : Alors, Adrien et Anaïs… (*Le chercheur ouvre le fichier et le programme ci-dessous est affiché à l'écran de l'ordinateur*)

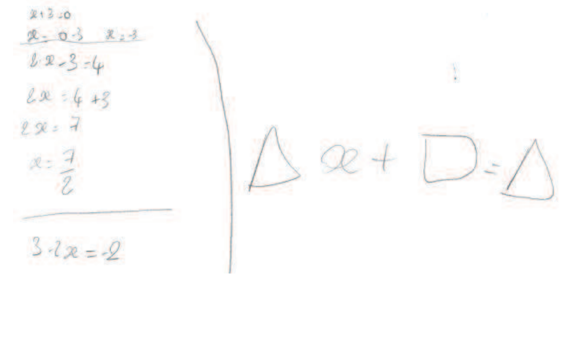
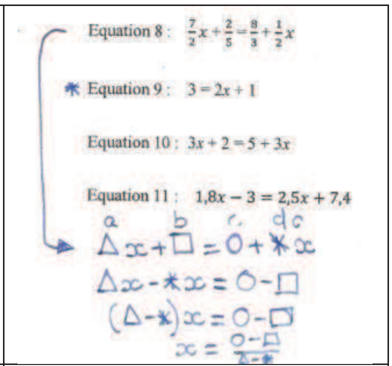


5. C : Ah, oui ! en effet ! Et comment ça s'est passé ? Ils se sont débrouillés tous seuls ou tu les as aidés ?
6. Ma : Ils se sont débrouillés. D'ailleurs pour la majorité, ils se sont débrouillés tous seuls. C'est-à-dire que ceux qui ont fait des choses, quand je trouvais que c'était original par rapport à ce qu'on attendait, j'ai enregistré. Voilà.
7. C : Alors, ça c'est pour faire les trois premières équations ?
8. Ma : Oui, oui.
9. C : Alors ils ont codé $zx + y = w$… Donc ils ont dit, première étape, je soustrais « w prend la valeur w – y » et deuxième étape, je divise « x prend la valeur w/z ». Mais tu as travaillé beaucoup sur l'algorithmique, pour que tes élèves pensent à ça ?
10. Ma : Non, non. Mais je trouve qu'ils ont fait des choses très originales.
11. C : On va essayer de reconstituer le déroulement de la séance, si tu veux bien…
12. Ma : Alors comme je l'avais dit, je leur ai donné le papier et notre plus grand problème a été davantage le manque d'entraînement sur l'algorithmique que le problème lui-même.
13. C : D'accord …
14. Ma : C'est qu'on n'a pas fait beaucoup d'algorithmique …

15. C : Tu n'en as pas fait beaucoup des séances avant celle-là ?
16. Ma : Non, non, j'en ai fait trois, quatre …
17. C : Tu me passeras ta progression ?
18. Ma : Oui, oui, mais tu sais, c'est la même que celle d'Annabelle : c'est les mêmes cours qu'on donne sous forme de photocopies, les mêmes exercices, les mêmes contrôles, on a fait exactement la même chose. Je pense qu'Annabelle a fait une séance de plus en algorithmique… Je dois dire que j'ai eu du mal à gérer les séances d'algorithmique, parce que j'ai eu des énormes différences entre les élèves qui progressaient très vite et d'autres pas du tout. Je pense qu'il y en a certains qui n'ont rien compris à l'algorithmique et il y en a d'autres qui n'avaient pas besoin de mes cours, qui étaient déjà plus avancés…
19. C : Mais c'est quoi le profil de ta classe ?
20. Ma : Plutôt S, c'est une bonne classe. Ils vont presque tous en première S. Il y avait juste une dizaine d'élèves moyens ou en difficultés. La majorité de la classe était tout à fait au niveau, des élèves glandeurs et pas sympa mais qui tous ont traversé le collège avec beaucoup de facilités. Ils pensaient pouvoir traverser la seconde de la même façon. En particulier, au troisième trimestre, j'ai eu une chute brutale des notes, parce qu'ils ne travaillaient pas. Au premier trimestre, j'ai presque 14 de moyenne, puis 12 au second puis 10 au troisième. Ce qui me prouve que c'était de leur part un manque de travail, c'étaient des profils individuels en dent de scie, c'est-à-dire qu'après une mauvaise note à un devoir, ils en avaient une très bonne au devoir suivant.
21. C : Il y en a combien qui vont en S ?
22. Ma : Sur 34, il y en a plus de la moitié qui vont en S, mais d'autres qui auraient pu y aller, ont choisi volontairement ES ou L. Beaucoup n'avaient pas la motivation, ils avaient trop l'habitude de la facilité et beaucoup avaient des problèmes avec les jeux sur ordinateur.
23. C : Des problèmes d'addiction ?
24. Ma : Oui ! Ils passent trop de temps sur l'ordinateur et le temps scolaire est réduit…
25. C : Alors finalement comment ça s'est déroulé cette séance ?
26. Ma : Alors, travail en binômes, avec un poste informatique pour deux, sauf certains qui sont des solitaires, qui refusent le travail à deux. Cette élève par exemple (*en montrant la copie d'Imane qui ne présente que la résolution des trois premières équations à la main*) qui généralement est toute seule … elle a des problèmes relationnels …De plus elle fait partie des élèves qui au début de cette séance n'avaient pas encore compris ce qu'est un algorithme.
27. C : Ah oui !
28. Ma : Et d'ailleurs, il y en a qui avaient écrit comme algorithme : « résoudre ax + b = 0 ».
29. C : Oui, c'est ce que j'ai vu aussi chez Alex et Annabelle ! Mais c'est normal quelque part ! Pour eux, un ordinateur, ça fait tout, tout seul. Ça montre bien l'image de boîte noire qu'ils en ont.
30. Ma : C'est un des intérêts de la chose aussi ! Je leur disais : « Tu crois qu'il va le lire tout seul ton ordinateur ? Comment va-t-il lire l'équation ? ». J'ai distribué la feuille et j'ai insisté sur le fait qu'on veuille que le programme sache résoudre les équations. Bon, il y en a certains, ça ne leur a posé aucun problème. Ils s'y sont mis tout de suite. Il y en a certains qui sont passés rapidement à la deuxième phase et certains sont allés directement à la deuxième phase.
31. C : Ah oui !
32. Ma : Ce sont ceux qui sont les plus à l'aise, qui ont l'habitude de la programmation…
33. C : Ils ont tout de suite vu le truc plus général ?
34. Ma : Oui. Tu verras…
35. C : Donc, la consigne …
36. Ma : je leur ai bien dit d'utiliser le dos de la feuille comme brouillon et de ne pas l'effacer.

37. C : Ah super !
38. Ma : Tu auras des recherches intéressantes … Ceux qui sont doués pour l'algorithmique ne le sont pas forcément en maths, d'ailleurs … Regarde celui-ci par exemple, Victorien, c'est un théoricien …
39. C : Ah oui, il a appelé ça « modèle » : premier modèle, second modèle …
40. Ma : Et il y en a qui sont passés tout de suite au second modèle … Victorien, là, il n'était pas initié en algorithmique, mais il s'en est bien sorti. Le fait d'être bon en théorie doit aider … Je n'ai pas mis son programme, il était juste mais sans originalité, donc je ne l'ai pas enregistré… Il était vexé d'ailleurs !
41. C : Parce qu'il était content de son travail ?
42. Ma : Il est toujours content de son travail.
43. C : À propos d'être « content » Comment tu les a vu réagir à ce propos pendant la séance ? Parce que ça m'a vraiment frappé chez Annabelle et Alex, leur jubilation que l'algorithme marche…
44. Ma : Ah oui, c'est vrai. Et ce qui m'a plu dans ce travail, c'est qu'il y eu des échanges entre les groupes… Parce que je n'ai pas pu être derrière chacun et il y a eu une aide ponctuelle. Mais c'était plus … ce n'était pas le côté théorique de la chose, c'était plus au niveau technique de l'algorithmique. En particulier, cette jubilation, c'est pour des élèves qui étaient le plus en difficultés au départ. Donc, quand ça marchait, ils voulaient me montrer et il fallait que je regarde que ça marchait ! Et ce qui m'a surpris aussi, c'est que certains, que je pensais perdus au début de la séance, à la fin ils s'en sont bien sortis. Je pense que leur problème, c'était l'écueil en algorithmique, plus que l'aspect théorique.
45. C : Parce que justement, sur l'aspect théorique, il semble que ta classe soit vraiment meilleure, différente des classes d'Alex et d'Annabelle que j'ai pu voir … Annabelle et Alex se sont mis au tableau pour leur résoudre l'équation littérale …
46. Ma : Je ne l'ai pas du tout fait ! Je n'ai rien écrit au tableau…
47. C : Et quand tu passais dans les binômes, tu les aidais ?
48. Ma : J'intervenais, je leur demandais comment ils faisaient. Mais il y a une chose et Annabelle n'est pas forcément d'accord, mais au début de l'année, quand on a revu les équations, moi je reviens systématiquement aux trucs avec les flèches …
49. C : Ah, oui ?
50. Ma : J'ajoute, je divise … Alors, au début toute la classe râle, « Mais pourquoi on fait ça ? C'est nul ; je connais une méthode bien plus simple ! ». Ou encore « Mais vous m'embrouillez, moi je comprends rien avec ce que vous faites ! ». Mais, moi, j'insiste, au début, je le fais systématiquement. Alors, ensuite, il y a un certain nombre d'élèves qui y viennent et ensuite c'est le contraire, ils n'osent plus ne pas justifier chaque ligne. Alors à continuer à formaliser comme ça, et même quand je ne l'écris pas, de leur faire dire, je pense que ça les a aidé là… à savoir ce qu'il fallait qu'ils fassent. Donc, c'est pour ça que je pense que j'ai pas eu de problèmes, trop de problèmes dans les étapes … Et en plus, quand je le fais, je ne commence pas par les équations mais par les inéquations, parce que c'est là que c'est le plus utile …
51. **17 : 34** C : Et oui, les différentes étapes sont indispensables …
52. Ma : Au début, je le fais avec les inéquations et ensuite, je montre que c'est la même chose avec les équations. Et comme on a fait ça pas mal, ça les a …
53. C : Tu le fais quand, ça ?
54. Ma : En octobre, au premier trimestre, quand on travaille sur les inégalités. C'est-à-dire qu'à un moment, il faut traiter les intervalles, on en a besoin pour le sens de variations. Et ça me semble absurde de commencer les intervalles sans voir leur utilité. Donc pour les introduire, je me sers des inéquations. Donc, je fais des résolutions d'inéquations,

j'introduis les intervalles …Parce qu'en troisième, ils colorient les demi-droites ou les segments mais ils ne donnent pas la traduction.
55. C : Donc là tu formalises…
56. Ma : Oui, c'est à ce moment-là que je le fais. Et tout au long de l'année, ces histoires de flèches, même quand je l'écris pas, pratiquement systématiquement je dis : « on multiplie des deux côtés … » Je n'utilise pas « on fait passer de l'autre côté … ».
57. C : Alex dit : « je transpose »….
58. Ma : Je fais ça en S, mais pas en seconde. Transposer, c'est un terme correct, mais c'est pas assez clair pour les élèves. Il y en a encore beaucoup qui pour diviser par un nombre change son signe …
59. C : Alors combien de temps ça a pris pour la première phase, pour le premier algorithme ?
60. Ma : Il y en a certains qui n'ont pas dépassé cette première phase.
61. C : Ils sont allés quand même tous jusqu'à écrire l'algorithme de la première phase et la question 2, rechercher celles qui sont pareilles ?
62. Ma : Alors, j'essaie de me rappeler … Honnêtement, je me suis préoccupé de gérer le premier algorithme, s'ils avaient fait l'algorithme qui permettait de résoudre les trois premières équations.… Ceux qui sont passés à la question 3 se sont gérés tous seuls, ils ont fonctionné en roue libre. J'ai vérifié sur l'ordinateur ce qu'ils étaient en train de faire, mais honnêtement, je ne sais pas s'ils l'ont fait…
63. C : Je vois qu'il y a pas mal d'étoiles … donc beaucoup ont fait les questions 1 et 2…
64. Ma : Ça a bien marché, ils n'ont pas perdu leur temps !
65. C : Pour le début, Annabelle a dit : « les trois premières équations, commencez par les résoudre à la main ! ». Et toi ?
66. Ma : Ah oui, moi aussi ! C'est-à-dire que ceux qui n'y sont pas arrivés, que je voyais les bras croisés, je leur ai dit : « Mais commencez par les résoudre à la main ! ».
67. C : Ah, tu ne l'as pas imposé à tous dès le départ ?
68. Ma : Non, il y en a qui se sont lancés directement. Aux autres, j'ai dit : « Vous n'y arriverez pas tant que vous ne les aurez pas faites à la main ! ». Et comme il y en a qui l'ont fait et qui y sont arrivés, ça m'a permis de dire : « Vous voyez, ceux qui l'ont fait à la main, ça leur a donné des idées pour faire l'algorithme… »
69. C : Donc le fait d'ajouter ça, ça a débloqué certains, mais tu ne l'as pas imposé à tous.
70. Ma : Oui, oui.
71. C : Alors qu'Annabelle l'a imposé à tous. Tu n'as pas fait de point final ?
72. Ma : Non, non.
73. C : Ni de recentrage pendant la séance ?
74. Ma : Ah si ! J'ai parlé des paramètres. C'est-à-dire que ce problème de lecture, pour les quelques-uns qui n'avaient pas compris qu'il fallait que l'ordinateur lise… Mais il y a eu une situation de déblocage, à un moment presque tous sont arrivés à écrire le premier programme. Même Imane, alors qu'au début, elle ne savait pas … elle n'avait pas compris ce qu'il fallait que l'ordinateur fasse au départ. Et en discutant un peu, elle a compris ce qu'on attendait. D'ailleurs, j'y pense, il y en a partout de l'algorithmique et en ES il n'y a pas de dédoublement de classe : il faut faire algo, tableur, calculatrice, tout ça en classe entière ! C'est lourd ! Il faut qu'on fasse de l'informatique à 35 !
75. C : Regarde ici, il y a des symboles (*voir productions ci-dessous*).

	
Production de Constance	**Production d'Anaëlle**

76. Ma : Ah mais ça, c'est mon truc ! Je fais ça très souvent … Je fais des boîtes et après, on met des choses dans les boîtes.
77. C : Ça fait le lien entre les variables informatiques et les variables mathématiques…
78. Ma : Je le fais surtout pour gérer les problèmes de signes. C'est-à-dire pour comprendre que a peut être un nombre négatif, je remplace a par une boîte. Alors dans la boîte, il y a aussi le signe … Donc après, je le fais avec a. Ça permet d'expliquer que dans a, il y a le signe aussi. Parce que sinon, a est toujours positif pour eux … et $–a$ est négatif.
79. C : Donc tu te positionnes entre la lettre qui représente un nombre et la case informatique dans laquelle on peut mettre un nombre …
80. Ma : Et je leur dis toujours, les lettres, c'est comme les boîtes … Comme je dessine un triangle ou un rond, le nombre est à l'intérieur ! Donc quand il y a un signe moins devant la lettre, ça vous prend l'opposé. Mais ça, c'est des trucs de collège…
81. C : On regarde quelques algorithmes ?
82. Ma : Oui, alors celui d'Aliaume (*voir ci-dessous*) …

```
VARIABLES
  Xfacteur EST_DU_TYPE NOMBRE
  egal EST_DU_TYPE NOMBRE
  Sumx EST_DU_TYPE NOMBRE
DEBUT_ALGORITHME
  LIRE Xfacteur
  LIRE Sumx
  LIRE egal
  egal PREND_LA_VALEUR (egal-Sumx)/Xfacteur
  AFFICHER egal
FIN_ALGORITHME
```

83. C : Alors … « Xfacteur », c'est le coefficient de x, « egal » c'est le nombre de l'autre membre et « Sumx », c'est le nombre que l'on ajoute à x. Donc ça résout les équations : $Xfacteur \times x + Sumx = egal$.
84. Ma : Si je l'ai choisi, parce que finalement il est classique, c'est à cause des dénominations …
85. C : Oui, c'est amusant … Et il a compris qu'une variable peut prendre une autre valeur (pour la variable *egal*).
86. Ma : Lui, c'est un vrai programmeur, il sait ce qu'il fait.
87. C : Il est hyper-synthétique, il crée directement le nombre minimum de variables. Lui, son algorithme est optimisé.
88. Ma : Regarde celui de Coraline et Alexandra (*voir ci-dessous*).

```
VARIABLES
  a EST_DU_TYPE NOMBRE
  b EST_DU_TYPE NOMBRE
  c EST_DU_TYPE NOMBRE
  x EST_DU_TYPE NOMBRE
DEBUT_ALGORITHME
  LIRE a
  LIRE b
  LIRE c
  x PREND_LA_VALEUR (c-b)/a
  AFFICHER x
FIN_ALGORITHME
```

89. C : Ah celui-là, il est avec des notations classiques…
90. Ma : Et celui-ci (*voir ci-dessous*) de Florent et Pierre :

```
VARIABLES
  A EST_DU_TYPE NOMBRE
  B EST_DU_TYPE NOMBRE
  C EST_DU_TYPE NOMBRE
  D EST_DU_TYPE NOMBRE
  E EST_DU_TYPE NOMBRE
  F EST_DU_TYPE NOMBRE
  G EST_DU_TYPE NOMBRE
DEBUT_ALGORITHME
  LIRE A
  LIRE B
  LIRE C
  LIRE D
  E PREND_LA_VALEUR D-B
  F PREND_LA_VALEUR A-C
  G PREND_LA_VALEUR E/F
  AFFICHER G
FIN_ALGORITHME
```

91. C : C'est intéressant parce que c'est le deuxième algorithme. Il y a beaucoup plus de variables que nécessaire, mais on retrouve bien leur démarche.
92. Ma : Oui, oui.
93. C : Tu penses qu'ils n'ont choisi de n'en faire qu'un ou tu n'as pris que le deuxième ?
94. Ma : Je n'ai pris que le deuxième … Quand le premier était classique, je ne l'ai pas enregistré.
95. C : Ensuite, Hugo et Camille (*ci-dessous*).

```
VARIABLES
  x EST_DU_TYPE NOMBRE
  a EST_DU_TYPE NOMBRE
  b EST_DU_TYPE NOMBRE
  c EST_DU_TYPE NOMBRE
  d EST_DU_TYPE NOMBRE
DEBUT_ALGORITHME
  LIRE a
  LIRE b
  LIRE c
  LIRE d
  SI (d==0) ALORS
    DEBUT_SI
    x PREND_LA_VALEUR (c-b)/a
    FIN_SI
    SINON
      DEBUT_SINON

      FIN_SINON
  AFFICHER x
FIN_ALGORITHME
```

96. C : Ils ont pensé au test… Alors si $d = 0$ …
97. Ma : Je pense qu'ils n'ont pas terminé, leur « sinon » est vide !
98. C : Ça m'intéressait de voir qu'ils avaient pensé à faire les deux algorithmes en un.
99. Ma : Je me rappelle … Ils voulaient faire, si $d = 0$, alors la solution est $\frac{c-b}{a}$ et sinon, ils voulaient chercher la solution de l'équation $ax + b = dx + c$ …

100. C : Ah ! Ils ont pensé à intégrer les deux familles d'équations dans le même algorithme.

101. Ma : Et celui de Hugo (*ci-dessous*) …

```
VARIABLES
  x EST_DU_TYPE NOMBRE
  a EST_DU_TYPE NOMBRE
  B EST_DU_TYPE NOMBRE
  R EST_DU_TYPE NOMBRE
DEBUT_ALGORITHME
  LIRE a
  LIRE B
  LIRE R
  R PREND_LA_VALEUR R-B
  R PREND_LA_VALEUR R/a
  x PREND_LA_VALEUR R
  AFFICHER x
FIN_ALGORITHME
```

102. Ma : Ce que j'ai bien aimé, c'est qu'il reprend la variable R deux fois …

103. C : Ah oui, on retrouve sa démarche algébrique dans son découpage. On retrouve les lignes qu'on écrit au fur et à mesure quand on résout… Alors le suivant, Loïc …

```
VARIABLES
  X EST_DU_TYPE NOMBRE
  Nb EST_DU_TYPE NOMBRE
  Result EST_DU_TYPE NOMBRE
  x1 EST_DU_TYPE NOMBRE
DEBUT_ALGORITHME
  LIRE X
  LIRE Nb
  LIRE Result
  Result PREND_LA_VALEUR Result-Nb
  Result PREND_LA_VALEUR Result/X
  x1 PREND_LA_VALEUR Result
  AFFICHER "x ="
  AFFICHER x1
FIN_ALGORITHME
```

104. C : « Result », c'est ce qui correspond à *c*… C'est le résultat …

105. Ma : « Nb » c'est le *b* et « X » c'est le coefficient de *x*, c'est *a (si on se ramène à* $ax + b = c$*)*

106. C : Et « x1 », c'est la solution de l'équation.

107. Ma : Je trouve ça intéressant, la façon qu'ils ont de traduire le statut des lettres …

108. C : Oui, on voit qu'ils font la différence entre paramètre et inconnue.

109. Ma : Oui …

110. C : Ils n'ont pas le vocabulaire, mais ils ont compris de quoi il s'agit. Mais pourquoi, ils ont pris une variable « x1 » ?

111. Ma : *x* c'est le nom générique de l'inconnue et « x1 » c'est la valeur de la solution. Ils n'utilisent pas la lettre *x* …

112. C : Non, c'est juste pour l'affichage…

113. Ma : Ça veut dire qu'il a compris.

114. C : Et le dernier, Thomas (*voir ci-dessous*)

```
VARIABLES
  x EST_DU_TYPE NOMBRE
  a EST_DU_TYPE NOMBRE
  b EST_DU_TYPE NOMBRE
  I EST_DU_TYPE NOMBRE
DEBUT_ALGORITHME
  LIRE a
  LIRE b
  LIRE I
  I PREND_LA_VALEUR I-b
  I PREND_LA_VALEUR I/a
  x PREND_LA_VALEUR I
  AFFICHER x
FIN_ALGORITHME
```

115. C : Il a pris une variable intermédiaire, I. C'est comme celui d'Hugo, on voit les étapes successives de son raisonnement.
116. **43 : 57** Ma : En fait, il s'est intéressé chaque fois à ce qu'il y avait de l'autre côté.
117. C : C'est ça.
118. Ma : En fait, il s'est dit : « il faut que je sache ce qu'il y a de l'autre côté ». Donc à chaque étape, il regarde ce qu'il y a dans le membre de droite.
119. C : Il a soustrait b à chaque membre, donc à droite, il y a I – b. Ensuite il divise par a chaque membre, donc il y a à droite I/a…
120. Ma : Ça traduit petit à petit qu'à gauche, il va apparaître x…
121. C : Je pense que ton histoire de boîtes, les reprises que tu fais au début d'année ne sont pas étrangères à ces résultats.
122. Ma : C'est vrai que j'y passe beaucoup de temps. Je te laisse aussi leurs copies pour que tu voies leurs recherches.
123. C : Merci pour tout.

A35. Exemple d'une production d'élève pour la situation n°2 de la classe de Maurice

Nom(s) : .... Classe : 2°8

Prénom(s) : Amaëlle ....

L'objectif est de réaliser sur Algobox des algorithmes permettant de résoudre les équations ci-dessous.

1. *Réaliser un algorithme sur le logiciel Algobox permettant de résoudre les trois premières équations ci-dessous,* ***sans les transformer au préalable.***
2. *Signaler par une * les équations similaires. Faire fonctionner l'algorithme pour ces équations.*
3. *Comment peut-on résoudre les équations restantes avec un autre algorithme ? Le construire et résoudre les autres équations à l'aide de ce nouvel algorithme.*

Le travail à rendre à la fin de l'heure sur la fiche.

* Equation 1 : $x+3=0$	Solution 1: $x=-3$
* Equation 2 : $2x-3=4$	Solution 2: $x=3{,}5$
* Equation 3 : $3-2x=-2$	Solution 3: $x=2{,}5$
Equation 4 : $2+x=5x$	Solution 4: ....
Equation 5 : $2x+3=3x+1$	Solution 5: ....
* Equation 6 : $8-x=\sqrt{2}$	Solution 6: $x\approx 6{,}6$
* Equation 7 : $\frac{7}{2}x+3=\frac{2}{3}$	Solution 7: $x\approx -0{,}66$
Equation 8 : $\frac{7}{2}x+\frac{2}{5}=\frac{8}{3}+\frac{1}{2}x$	Solution 8: ....
* Equation 9 : $3=2x+1$	Solution 9: $x=1$
Equation 10 : $3x+2=5+3x$	Solution 10: ....
Equation 11 : $1{,}8x-3=2{,}5x+7{,}4$	Solution 11: ....

$$\overset{a}{\triangle}x+\overset{b}{\square}=\overset{c}{\bigcirc}+\overset{d}{*}x$$

$$\triangle x - * x = \bigcirc - \square$$

$$(\triangle - *)x = \bigcirc - \square$$

$$x=\frac{\bigcirc-\square}{\triangle-*}$$

A36. Transcription de la séance 2.1 du professeur Alex (situation n°2)

Séance filmée le 20/04/2011.
Pour le codage, se reporter à l'annexe A24.
La feuille d'énoncé à laquelle se réfère Alex est située en annexe A21.
Note : Une seule caméra a été utilisée pour cette séance.

→ *Phase 1*

1. **00 : 00** Al : Vous vous installez et vous allez chercher Algobox… Bon, je vous distribue une liste d'équations et cette liste d'équations, vous allez devoir la résoudre avec un algorithme que vous allez créer sur Algobox. Voilà l'enjeu de la séance. Allez d'abord chercher Algobox sur Internet et … Vous avez vu, la fois dernière, on avait divisé en deux, plus ou moins, les équations en deux catégories. Ben, voilà la première catégorie. À la rentrée, on fera la deuxième catégorie. Allez, téléchargez-moi ça rapidement, là…
2. **01 : 44** Al : (*en aidant un binôme*) Descends … appuie sur « téléchargement »
3. **02 : 05** Al : (*à un autre binôme*) Non, c'est pas « ouvrir », c'est « enregistrer ». Vous devez d'abord l'enregistrer et une fois que c'est enregistré, vous devez le « dézipper ».
4. **02 : 22** Al : Tout le monde est prêt, là ?
5. **02 : 55** Al : (*à un troisième binôme*) Non, non, vous allez d'abord à « téléchargement ». puis vous enregistrez.
6. **03 : 53** Al : (*à un élève*) Ça y est, tu es dessus ?
7. **04 : 18** Al : Maintenant, avant de … avant de tripoter Algobox dans tous les sens, vous vous penchez sur les équations que vous avez sous le nez. Elles sont de différentes natures. Je veux que vous trouviez …(*le professeur est interrompu par l'arrivée de deux retardataires*) … xxx (*inaudible*)

→ *Phase 2*

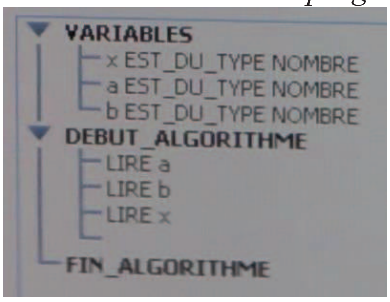
8. **05 : 15** Al : Bon, vous commencez à réfléchir. Alors attendez, là. J'en vois qui sont tout de suite partis sur Algobox. Avant de partir sur Algobox pour faire votre … algorithme, vous devez réfléchir aux équations que vous avez sous le nez. D'accord ? Alors réfléchir aux équations que vous avez à résoudre, il n'est pas question … Vous écoutez là ? Tiens, voilà ce que je ne veux pas ! (*il prend la feuille d'un élève, Thomas*). Thomas résout l'équation. D'accord, donc c'est bien, c'est très bien même ! Mais, c'est pas ce que je veux ! Moi, ce que je veux, au regard de ces dix équations, que vous me trouviez un process de résolution, via Algobox, de toutes les équations du premier degré. Et qu'avant de les résoudre là,… pour les trois quarts d'entre vous, je sais bien que vous savez résoudre une équation du premier degré, j'aimerais que vous puissiez me dire justement … que vous vous penchiez sur la façon avec laquelle, en réfléchissant via un algorithme, on peut toutes les traiter. D'accord ? Parce que là, Thomas, il a résolu l'équation $x + 3 = 0$ et tout le monde sait que la solution, c'est $x = -3$. Le problème est : « qu'est-ce qu'on fait sur Algobox pour que ça me ponde -3 ? » Et qu'est-ce qui se passe si à la place de $x + 3$, j'ai $7x + 2$? Vous voyez l'enjeu ou pas ? L'enjeu, il est bien plus important que de résoudre stricto sensu $x + 3 = 0$. D'accord ?
9. **06 : 53** E : M'sieur, j'ai pas mon mot de passe !
10. Al : Mettez-vous tous les deux, là !
11. **07 : 48** Al : Juste une remarque. Tout votre travail, vous l'enregistrez sur le bureau avec vos noms. Alors, une chose importante, plus que le fait de devoir résoudre des équations à la chaîne, la question que vous devez vous posez, c'est quelle est la forme générale de ce qu'on veut vous faire résoudre. Voilà ! Et si c'est pas la forme générale, comment je peux

faire pour la faire devenir une espèce de forme générale que je vais pouvoir entrer dans l'algorithme.

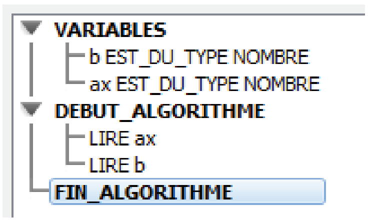
12. **08 : 52** Al : vous avez entendu ce que vient de dire Clémence ? « Je dois faire ça direct pour chaque équation »… alors, je vais réfuter ça : vous avez 10 équations, alors vous allez pondre 10 algorithmes ?
13. Es : Non !
14. Al : Non. À la fin, je n'en veux qu'un ! Je veux un algorithme pour toutes les équations que vous avez. Voilà, ce que je veux !
15. E : Ah ! (*étonné*)
16. Al : Donc, il est hors de question de faire un algorithme pour résoudre $x + 3 = 0$, et ainsi de suite.
17. E : Faut réfléchir !
18. Al : Ah là oui ! À mon avis, avant de se mettre sur Algobox, faut réfléchir…
19. **09 : 40** E (*à son binôme*) : en fait c'est un algorithme général qu'il veut.

→ ***Phase 3***

20. **10 : 19** *Dans un binôme, on voit à l'écran le début de programme suivant :*

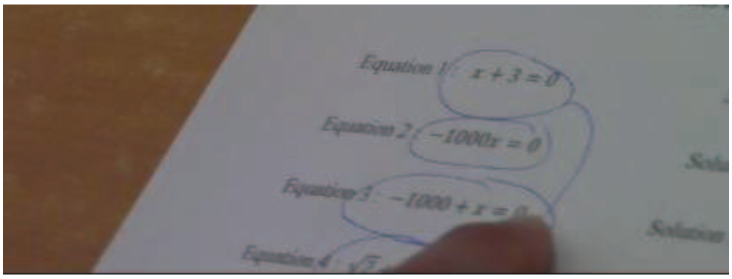


21. **10 : 46** (*Dans un autre binôme, avec ci-dessous le début du programme*) Al : Qu'est-ce qui t'intéresse ici, c'est *ax* ou *ax* + *b* ?



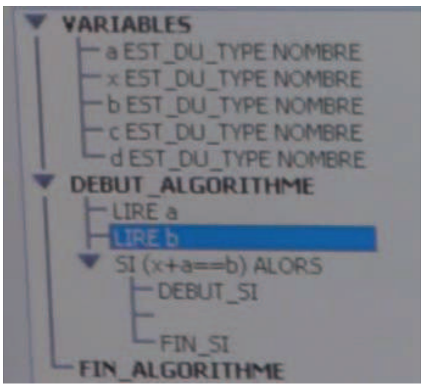
22. E : C'est *ax* + *b*.
23. Al : Voilà, mais est-ce que c'est une lecture ? Est-ce que je dois lire *ax* + *b* ?
24. E : Non.
25. Al : Je dois plutôt faire quoi ?
26. E : L'affecter ?
27. Al : Oui, le calculer…
28. E : Donc on écrit directement *ax* + *b*, pas *ax* et *b* ?
29. Al : Mais déjà, là, dans la déclaration des variables, tu écris *ax* est du type nombre. Déjà, là ça ne m'intéresse pas … Le problème, c'est qu'il te manque … Regarde, si tu mets *ax*, Algobox ne va pas comprendre, *x* n'est pas déclaré et *a* n'est pas déclaré. Algobox va te mettre « erreur de syntaxe ». Donc, là, tu as déclaré *b*, déclare le reste !
30. E : Alors *a* …
31. Al : Oui, effectivement *a* et après ?
32. E : *x*
33. Al : Voilà. Alors déjà, j'ai mes trois expressions. Donc, j'ai *ax* + *b*. Après … Affecter une valeur à une variable…
34. E : Mais là, on affecte 1 ?

35. Al : Comment ça, 1 ?
36. E : …
37. Al : (*en montrant la feuille d'énoncé*) : Jusque-là (*en montrant les 6 premières*), c'est quoi comme type d'équations ?
38. E : C'est pas les mêmes…
39. Al : Elles sont de quelle forme ?
40. E : $ax + b$
41. Al : $ax + b$ égal quoi ?
42. E : $ax + b$ égal c.
43. **12 : 51** Al : Oui, $ax + b = c$. alors pour la huitième ($3x - \frac{1}{4} = \frac{x}{4} - 2$) ? Si là (*en montrant* $3x - \frac{1}{4}$), j'ai $ax + b$, alors là (*en montrant* $\frac{x}{4} - 2$), j'ai quoi ?
44. E : $cx - d$?
45. Al : $cx - d$. alors, je vois ce que tu veux dire ! Mais c'est équivalent de dire : $cx + d$. Tu vois ou pas ?
46. E : Ouais !
47. Al : Donc, ça veut dire quoi ? Ça veut dire tu viens de trouver une forme extrêmement importante, donc $ax + b = cx + d$. Alors comment on fait pour résoudre $ax + b = cx + d$? Regarde, dans celle-là (*il montre* $x + 3 = 0$), ce serait quoi c et d ?
48. E : zéro et zéro.
49. Al : tu vois là, rien qu'en réfléchissant là-dessus, tu as trouvé une forme qui englobe non seulement les 6 premières mais les autres aussi. Essayez de me programmer ça. Ca y est, vous avez sérié ce qu'il fallait.
50. **14 : 15** (*Un autre binôme appelle le professeur*) E : On voudrait savoir comment programmer $b + (-a)$…
51. Al : Eh bien, tu mets b plus parenthèses ($-a$). Mais, je te signale, dans tout l'exercice, l'enjeu, c'est être capable de résoudre, avec un algorithme, toutes ces équations.
52. E : Oui, mais dans un algo…
53. Al : Attends, attends. Alors effectivement tu as vu que celle-là et celle-là, c'est de quel type ?
54. E : C'est $ax + b$
55. Al : $ax + b$ égal quoi ?
56. E : $ax + b$ égal c.
57. Al : Bon, alors ici, c égal quoi (*en montrant* $x + 3 = 0$)?

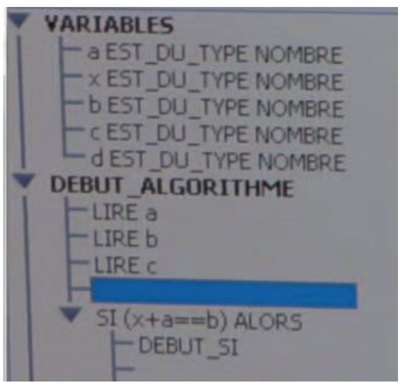


58. E : zéro
59. Al : Et là (*en montrant* $\sqrt{2} + x = 3$) ?
60. E : 3
61. Al : Et là (*en montrant* $\pi x + 3 = 4$) ?
62. E : 4
63. Al : Et là (*en montrant* $3x - 5 = 3 - 10x$) ?
64. E : $3 - 10x$
65. Al : Alors c, tu dis que c'est $3 - 10x$?
66. E : Non ! Euh …
67. Al : Est-ce que je ne peux pas étendre ce que tu viens de dire « $ax + b = c$ » à quelque chose de plus vaste ?
68. E : Euh …
69. Al : $ax + b$ égal quoi ?
70. E : Je sais pas … Euh, égal $c + d$?

71. Al : Alors égal *c* + *d*, là tu n'as plus de variable ! Si tu me dis *c* + *d* … Regarde, tu m'as dit *ax* + *b* (*Alex pointe au fur et à mesure son doigt sur l'équation n° 8 :* $3x - \frac{1}{4} = \frac{x}{4} - 2$ *montrant successivement a =3, x et b =* $-\frac{1}{4}$). Donc là, *c* fois quoi ?
72. E : *c* fois 1 sur 4 …
73. Al : Non, non, non ; Dans le cas général, *ax* + *b* égal ?
74. E : égal *c*
75. Al : Non !
76. E : Moins 2.
77. Al : Non, -2 est une constante et ça c'est quoi (*en montrant* le terme $\frac{x}{4}$) ?
78. E : …
79. Al : C'est la même chose qu'à gauche, sauf que … Exprime-le avec les …Exprime-le avec *c* et *d*.
80. E : Alors *c* divisé par *d*.
81. Al : Non, *c* ça va être quoi, ça va être un quart ?
82. E : Oui !
83. Al : Qu'est-ce que tu me chantes avec …
84. E : Ah, oui c'est *cx* !
85. Al : Oui, *cx* et ça, ça va être quoi (*en montrant* le terme -2) ?
86. E : *d*
87. Al : Donc en fait, qu'est-ce que t'as fait ? T'es parti d'une équation *ax* + *b* = 0, puis *ax* + *b* = *c*, pour arriver à quelque chose de beaucoup plus important, qui est *ax* + *b* égal quoi ?
88. **16 : 03** E : Euh égal … *cx* + *d*
89. Al : Donc qu'est-ce que ça veut dire, ça ? Est-ce que ça, ce n'est pas une forme générique de toutes celles que tu as à résoudre ? Tu vois ce que je veux dire ?
90. E : Ouais, ouais !
91. Al : Donc, là, au lieu de programmer *ax* + *b* = 0 ou *ax* + *b* = *c*, est-ce que l'enjeu, c'est pas quelque chose que tu viens de nommer, *ax* + *b* = *cx* + *d* ? Ça veut dire que tu aurais plus de choses à nommer, à introduire en termes de variables que simplement *a, b* et *c*.
92. E : Oui, oui.
93. Al : Alors vas-y !
94. **17 : 20** *La caméra mobile prend le programme en cours d'écriture à la volée dans un binôme*

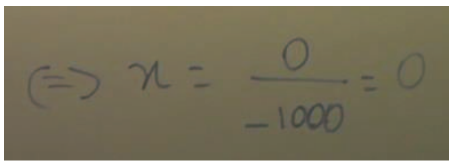


à 17 : 20 min



à 17 : 23 min

95. **17 : 40** Al : Et vous écoutez tous là, j'ai un scoop ! L'équation $-1000x = 0$, la solution, c'est pas $\sqrt{1000}$, hein ? D'accord ? Je vous rappelle au passage (*il écrit au tableau en même temps, voir l'extrait ci-*



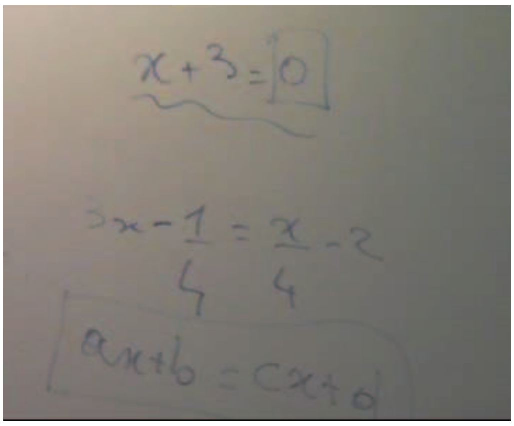
contre), ça, c'est équivalent à x égal zéro divisé par moins mille et ça, ça fait zéro ! Donc, Mathilda qui trouve $\sqrt{1000}$, c'est mal barré, là !

Juste, un détail, là. À part deux groupes, vous êtes tous partis dans le type des trois premières équations. Je vous rappelle que l'enjeu de cet exo, c'est de résoudre avec un algorithme les 10 équations que vous avez là. C'est-à-dire que quand vous essayez de travailler avec $x + 3 = 0$, ce n'est pas une équation assez vaste pour englober toutes celles que je veux. Dans cette équation, il y a ce nombre-là qui est assez particulier (*il montre le 0*), il y a, à mon avis, d'autres équations qui sont plus porteuses de la finalité de ce que je veux vous faire trouver. D'accord ?

96. **21 : 12** Al (*s'adressant à un binôme en particulier*) : Il vous faut trouver une équation qui englobe tous les cas de figures… Laquelle ? Celle-là ? (*non visible*) Ce sont les plus complètes qui sont importantes. Si je sais résoudre celle-là, je suis capable de résoudre les autres a priori. Ça, c'est quoi, C'est quel type, ça ?
97. E : Premier degré.
98. Al : Oui et c'est quoi la forme générale du premier degré ?
99. E *: ax + b*
100. Al : *ax + b,* oui et ça, c'est quoi ?
101. E : c'est encore du premier degré, *ax + b.*
102. Al : ce n'est plus les mêmes lettres. C'est quoi ?
103. E : *cx + d.*
104. Al : Si vous avez une équation de ce type-là (*ax + b = cx + d)*, est-ce qu'elle est aussi de ce type-là ($x + 3 = 0$) ? Que vaut *c* ?
105. E : zéro.
106. Al : Et *d* ?
107. E : à 3.
108. Al : Ah non ! *ax + b = cx + d.* On a *a* = 1, *b* = 3, *c* égal combien ?
109. E : *c* = 0
110. Al : Et *d* = 0. Quand tu as *cx + d* = $0 \times x + 0 = 0 + 0 = 0$. Donc l'enjeu de tout ça, c'est d'être capable de programmer *ax + b = cx + d.* C'est clair ?

➔ ***Phase 4***

111. **22 : 45** Al : Alors, vous regardez là ? On est en train de désembrouiller un peu tout ça et effectivement, je répète la chose suivante, ceux dont le substrat de la réflexion est $x + 3 = 0$ … celle-là, elle est trop pauvre pour donner des idées. En revanche, effectivement l'équation 7, la 8 ou la 9, regardez par exemple : $3x - \frac{1}{4} = \frac{x}{4} - 2$, celle-là elle est plus porteuse de sens, parce que, vous voyez bien qu'ici, à gauche, j'ai quoi ? J'ai quelque chose du type *ax + b*, et à droite j'ai quelque chose du type quoi ?
112. E : *cx + d*
113. Al : *cx + d.* (*Il écrit au tableau : ax + b = cx + d*). Alors, c'est quoi ? C'est effectivement une équation du premier degré avec à gauche une expression du type *ax + b* et à droite une expression du type *cx + d* et on est dans les équations du premier degré. La question est de savoir si cette équation-là englobe celle-là (*en montrant* $x + 3 = 0$) ? On est bien d'accord ? Moi si je commence à réfléchir sur un process qui traite toutes les équations, il faut que celle-là englobe celle-ci.



Quel est le cas particulier, là pour *cx + d*, par rapport à $x + 3 = 0$?

114. E : C'est c et d égaux à zéro.
115. **24 : 00** Al : Oui, c et d égal zéro. Donc ça veut dire que si j'arrive à programmer ça, quand on va vous demander sur Algobox de lire *a, b, c, d* et bien, je vais rentrer $c = 0$, $d = 0$ et je vais rentrer $a = 1$, $b = 3$ et votre process doit sortir $x = -3$. Vous voyez ce que je veux dire ? Là, je vois bien où vous êtes coincés. C'est-à-dire qu'effectivement, vous avez tous plus ou moins vu que l'équation la plus fondamentale des 10, c'était une équation de ce type-là (*il montre celle au tableau de l'extrait présenté ci-dessus*). Vous êtes d'accord ? Le problème, c'est qu'avant de passer sur Algobox, il faut d'abord … faire quoi ?

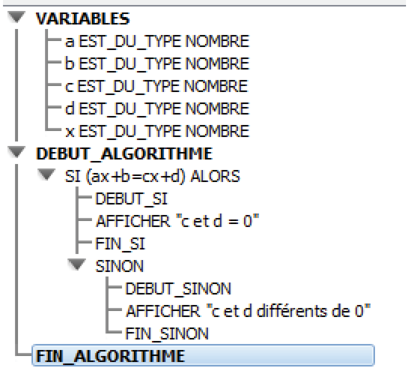
→ ***Phase 5***

116. E : la résoudre !
117. **25 : 00** Al : Oui, il faut essayer de résoudre ça, dans le cas général, quel que soit a, quel que soit *b, c* et d. vous allez voir, ce n'est pas si simple que ça. Donc avant de faire les assoiffés sur Algobox, résolvez-moi ça, résolvez-moi $ax + b = cx + d$ *(Alex écrit l'équation au tableau)*, qui est maintenant le substrat mathématique que vous allez devoir programmer ensuite sur Algobox. Mais résolvez-le d'abord. Jean-Stéphane (*qui lève le doigt*) ?
118. Jean-Stéphane : C'est pas $a + c$ …
119. Al : Attends, attends ! Fais voir … alors ça, c'est une pure horreur. Regarde, si tu transposes *cx* de l'autre côté, tu risques pas d'avoir un « plus » … et même chose pour l'autre !
120. **25 : 56** Al : Alors à quoi c'est équivalent, ça ? Mélanie, on ne te demande pas de résoudre les équations, on te demande de résoudre celle que je viens de mettre au tableau, là ! Qu'est-ce que vous faisiez en quatrième lorsque vous résolviez $2x + 3 = 5x - 1$? La méthode pour résoudre ça, elle est partie aux oubliettes ?
121. E : On passe les x d'un côté et les constantes de l'autre.
122. Al : Je passe les x d'un côté et les constantes de l'autre… Et voilà ! Donc ça fait quoi là (pour $ax + b = cx + d$) ? Ca fait $ax - cx$ égal quoi ?
123. E : égal $d - b$.
124. Al : (*en écrivant au tableau*) Oui, $ax - cx = d - b$. Et maintenant ?
125. E : Maintenant, c'est fini, ça fait x égal …
126. Al : (*en écrivant au tableau*) Il y a une factorisation à faire : $(a - c)x = d - b$. D'accord ? Oui ou non ?
127. Es : Oui !
128. Al : Et après ?
129. E : $\frac{d-b}{a-c}$, enfin $x = \frac{d-b}{a-c}$.
130. Al : (*en écrivant au tableau* $x = \frac{d-b}{a-c}$) Alors sans aucune précaution, j'écris ça ! Oui ? Mathilda dit oui. Donc là, tout va bien dans le meilleur des mondes !
131. **28 : 50** Lucas : avec a et c différents de zéro.
132. Al : alors, vous avez entendu ce qu'a dit Lucas ? Lucas vient de dire a et c différents de zéro.
133. E : Ah oui !
134. Al : Est-ce que c'est intéressant ou pas ? Alors, si $a = 0$ et $c = 0$, on a effectivement $a - c = 0$.
135. Valentine : Il faut pas que les deux soient simultanément nuls.
136. Al : Vous avez entendu ce que vient de dire Valentine ? Il faut pas que les deux soient simultanément nuls.
137. Valentine : et s'il n'y en a qu'un qui est égal à zéro ?
138. Al : S'il y en a un qui est égal à zéro, est-ce que ça pose problème ?
139. Es : Non.

140. Jean-Stéphane : Mais si $a - c = 0$, ça veut dire que $x = d - b$, tout simplement ! Ah non, c'est pas ça !
141. Al : Va jusqu'au bout de ce que tu veux dire …
142. Jean-Stéphane : Si $a - c = 0$, ça marche pas cette équation ! C'est ça que je comprends pas en fait…
143. Al : Regardez, $a - c = 0$, c'est la condition d'existence. Alors ça veut dire quoi ? Il faut que $a - c$ soit comment pour que cette expression-là existe ?
144. Es : différent de zéro !
145. Al : Alors il faut que $a - c \neq 0$ … ce qui signifie quoi en termes de a et de c ? Jean-Stéphane, va au bout du raisonnement, $a - c \neq 0$, c'est équivalent à quoi ?
146. E : $a \neq c$
147. Al : (*en écrivant au tableau*) $a \neq c$. La condition fondamentale est que vous devez avoir $a \neq c$. Vous avez entendu là ? si a est égal à c, on ne peut pas … Tout à l'heure, vous m'avez parlé de (0 ; 0). Au passage, si $a = 1$ et $c = 1$, c'est pareil ! Pour (2 ; 2), (3 ; 3), ($\sqrt{3}$; $\sqrt{3}$) c'est pareil aussi ! Donc en fait, regardez ici, il y a quelque chose de fondamental, c'est que mon équation de départ, $ax + b = cx + d$, elle n'existe, elle ne peut être exploitable que si quoi ?
148. E : si $a \neq c$.

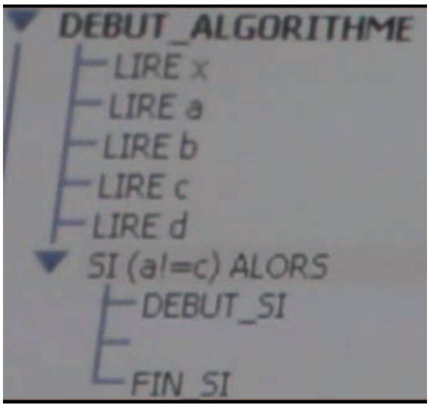
→ *Phase 6*

149. **31 : 34** Al : oui $a \neq c$. Alors maintenant, il vous reste à faire quoi ? Et bien vous avez quand même à programmer ça, d'accord ? Et si on prend cette condition-là, il va bien falloir, à un moment qu'elle sorte de votre algorithme. Vous avez capté ?
150. **32 : 20** Florent : Monsieur, c'est bon, ça ? (*en montrant le programme ci-contre*) Et comment on fait le signe « différent » ?

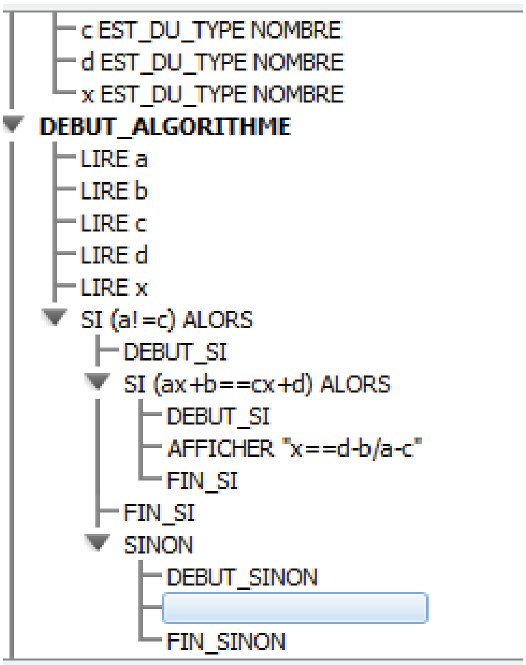


151. Al : tu vas dans …Mais attends, qu'est-ce que tu as écrit, là ? Si $ax + b = cx + d$, déjà je suis tranquille, l'algorithme ne peut pas faire ça !
152. **32 : 50** (*s'adressant à toute la classe*) Al : vous écoutez tous, là ? Si vous utilisez dans Algobox la condition « Si $ax + b = cx + d$ », il ne comprend pas. Il y a déjà des choses à faire. La condition « Si $ax + b = cx + d$ » n'est pas possible, parce que ça veut dire que là, tu rentrerais la condition fondamentale d'existence Or, ta première condition, c'est quoi, évidemment ? Si $a \neq c$. Alors « différent », vous savez comment ça s'écrit ?
153. Es : Non !
154. Al : « Point d'exclamation égal ». C'est bizarre mais c'est comme ça.
155. **35 : 09** Al : Lucas, cette condition-là, c'est celle qui permet de faire exister l'équation de ce type-là ($ax + b = cx + d$). Donc ça veut dire que c'est la condition, le point de départ de la résolution. Donc la première condition à rentrer dans ton algorithme, c'est ça ! Si $a \neq c$, alors la solution, ça va être ça (*il montre* $\frac{d-b}{a-c}$). Et c'est ça ce qu'il va falloir renvoyer, et si cette condition n'est pas vraie, alors il faut renvoyer le « sinon ».

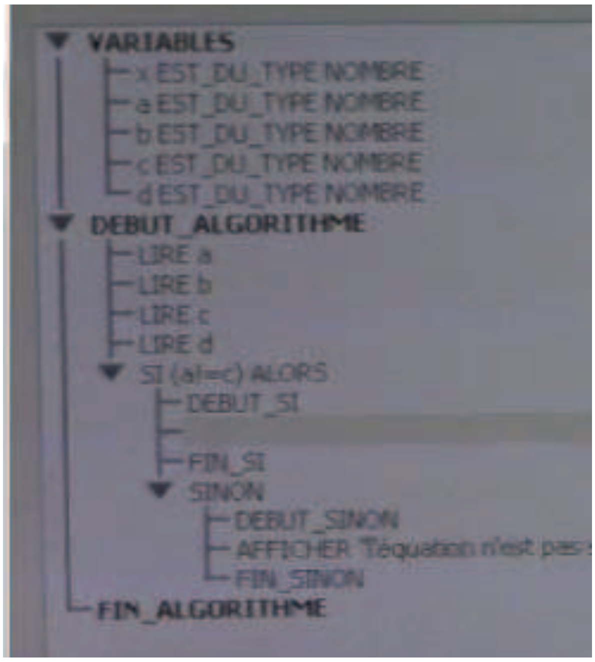
156. *Un binôme appelle le professeur. Ci-contre, le début du programme qu'ils ont constitué.*



Al : Alors maintenant, il faut calculer $\frac{d-b}{a-c}$. Alors après, est-ce que vous avez mis une condition sinon ?
157. E : Non.
158. Al : Si vous ne mettez pas de sinon… votre « si » s'arrête là. Il faut le contraire : si cette condition-là n'est pas vérifiée, l'équation elle n'existe même pas. D'accord ? Mais, à votre avis, est-ce que je dois lire *x* ? *x* c'est ma solution ! Donc c'est pas possible !
159. **37 : 25** Al (*à toute la classe*) : Écoutez ! Tous ceux qui commencent leur condition par « Si $ax + b = cx + d$ », mathématiquement ce n'est pas valide. Si vous avez « lire *a*, lire *b*, lire *c*, lire *d* », alors je vais rentrer $a = 1$ et $c = 1$ … Je vous signale que si $a = 1$ et $c = 1$, votre équation, elle n'existe même pas puisque regardez, je suis en porte-à-faux de ma condition d'existence. D'accord ? (*Alex regarde l'heure puis enchaîne*) Ma première condition, c'est forcément $a \neq c$. Alors, c'est quoi votre expression ? « Si $a \neq c$ », qu'est-ce qu'on fait faire ? Ça va être *x* prend la valeur $\frac{d-b}{a-c}$. Voilà le résultat final. Et sinon, qu'est-ce qui va se passer ?
160. E : Sinon, $a = c$.
161. Al : Oui, sinon $a = c$. Et qu'est-ce qui faut écrire ?
162. E : pas de solution.
163. Al : Oui, on fait écrire « l'équation n'a pas de solution ».
164. *Suivent des productions d'élèves qui manipulent le logiciel pendant les explications du professeur.*



Production d'un premier binôme à 39 :20



Production d'un second binôme à 41 : 58

165. **43 : 38** Al : Je vous signale au passage qu'il y a quand même quelque chose de fondamental, c'est que, Florent me le faisait remarquer, c'est quoi les solutions que vous avez ?
166. Florent : des décimaux.
167. Al : Ce sont des décimaux, mais quelquefois avec des suites décimales illimitées, donc ce sont des valeurs approchées. Avec l'algorithme d'Algobox, vous ne pouvez pas avoir les valeurs exactes que vous auriez lorsque vous faites une démonstration effective.
168. **44 :26** *Un binôme fait exécuter le programme.*
E1 : alors pour la première, tu rentres a = 1, b = 3, c = 0 et d = 0.
169. E2 : Et ça marche, ça donne -3 ! Pour la deuxième, a = -1000, b c'est 1 ?
170. E1 : Non, c'est 0.
171. E2 : Ah oui, 0. c = 0 et d = 0. Et ça fait x = 0. Putain, c'est pratique ! Pour la troisième ($-1000 + x = 0$), a c'est -1000 et b c'est ... Ah non, non, a c'est -1 et b c'est -1000. C'est x = 1000.
172. E1 : Pour la 4 ($\sqrt{2} + x = 3$), il y a une racine, c'est un truc bizarre …
173. E2 : c'est « sqrt », je crois.

→ *Phase 7*

174. **46 : 46** Al (*à toute la classe*) : Racine, c'est « sqrt » et pi, c'est « Math.PI ». Alors là après, vous me résolvez toutes vos équations.
175. *Un binôme n'ayant pas réussi à écrire le programme appelle le professeur*
E : Monsieur, on a un petit problème …
176. Al : Un problème de quoi ?
177. E : On n'y arrive pas ;
178. Al : Attendez, qu'est-ce que vous avez là ? « Afficher $a - c \neq 0$ ». Moi ce que je veux, c'est résoudre mon équation, non ?
179. E : Ben oui.
180. Al : Alors, c'est quoi mon équation ? qu'est-ce qu'il faut que j'affiche moi ? Il faut affecter la variable … c'est quoi la solution de l'équation ?
181. E : c'est x égal $\frac{d-b}{a-c}$.

182. Al : C'est ma solution. Et maintenant, qu'est-ce qu'il faut que je fasse ? Il faut que je lui fasse afficher la variable que je viens de calculer, sinon, il ne va rien me sortir… Mais je subodore que vous n'avez pas mis de « sinon » ? Parce que, qu'est-ce qui se passe, votre équation, il faut quand même la résoudre lorsqu'il n'y a pas de solution. *(le professeur écrit lui-même le programme sur le poste informatique des élèves).* Maintenant, testez-moi ça.
183. E : Pour la première, c'est a égal x ?
184. Al : Pour entrer a, tu entres x ?
185. E : Ben, y a pas de chiffre devant x !
186. Al : Et bien justement, c'est combien ?
187. E : C'est 1 !
188. Al : Eh oui, c'est mieux, ça !
189. E : b c'est 3, c c'est zéro et d y en a pas donc c'est zéro. Ça fait -3…
190. **50 : 43** *Sonnerie*
191. E : Mais, monsieur, notre algorithme, y marche pas !
192. Al : Qu'est-ce qui ne marche pas ?
193. E : Qu'est-ce qu'on met quand il n'y pas b ou c ou d ?
194. Al : Regarde la première, a ...
195. E : c'est 3.
196. Al : Mais non, c'est pas 3, c'est le coefficient en x, … c'est 1.
197. E : Ah !
198. Al : Après, b c'est 3, c c'est zéro et d c'est zéro.
199. E : Ah, d'accord.
200. Al : Regarde, $cx + d$, comme t'as rien derrière, forcément, $c = 0$ et $d = 0$. Donc si, si, votre algorithme fonctionne.
201. **53 : 00** Al (*à toute la classe*) : Quand vous avez fini, vous enregistrez votre algorithme. Je vous donne, pour le lundi de la rentrée un petit sujet sur l'algorithmique à faire *(voir annexe A22).* Vous me rendez ça rédigé pour le lundi de la rentrée.
202. E : Monsieur ! Comment on fait pour le dernier (*fait référence à l'équation 10 :* $7(x+2)+4(x-3)=0$) ?
203. **54 : 00** Al : Ah oui, le dernier n'est pas forcément sous la bonne forme. Il faut le ramener sous la forme $ax + b = 0$ …

Fin de la séance

A37. Transcription de la séance 2.2 du professeur Alex (situation n°2)

Séance filmée le 22/04/2011 en salle informatique.
Pour le codage, se reporter à l'annexe A24.
La feuille d'énoncé à laquelle se réfère Alex est située en annexe A21.
Note : Une seule caméra a été utilisée pour cette séance.

→ Phase 1

1. **00 : 00** Al : Vous vous installez …Tu te mets là. Je vous distribue une liste de 10 équations du premier degré et vous devez trouver un algorithme qui vous résolve *toutes* ces équations. Voilà l'objet de votre réflexion.
2. **01 : 05** Al : Ça y est, vous avez Algobox ?
3. **02 : 22** Al : (*à un élève qui fait les manipulations au fur et à mesure*) Tu vas sur Internet … Tu vas dans téléchargement … Tu prends le zippé… Tu l'enregistres …sur le bureau.
4. **02 : 47** Al : Bon, tout le monde a Algobox là ? Dès que vous l'avez, vous réfléchissez … par rapport au fait que l'algorithme vous permette … de résoudre les équations.

→ Phase 2

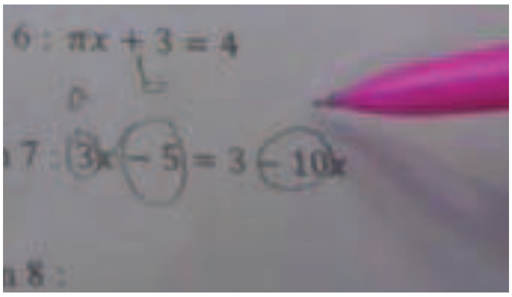
5. **04 : 30** Al : Allez, vous commencez à réfléchir là. C'est peut-être pas la peine de sauter, comme un mort de faim, sur Algobox. Je vous signale que tant que vous n'aurez pas réfléchi à ce sur quoi vous devez travailler et programmer, le travail sur Algobox n'a pas de sens. D'accord ? Réfléchissez d'abord à comment … Je vous rappelle l'enjeu de cette séance, c'est qu'à la fin, votre algorithme soit capable de résoudre toutes les équations, les dix équations que vous avez sous le nez. D'accord ?
6. **05 : 10** Clémentine : On ne peut pas en faire plusieurs ?
7. Al : Alors, moi je veux un algorithme (*il montre « un » avec son pouce*). La question de Clémentine, elle est porteuse de sens, en ce sens que ... est-ce que l'équation comme le type 1 ou le type 10 … Il y a quand même de sacrées différences, d'accord ? La question que j'induis est alors : est-ce que ça vaut le coup de travailler sur l'expression 1, qui est vraiment l'expression de base, ou vous creusez le ciboulot sur des expressions plus compliquées ? Voilà ! (*Le professeur passe de binôme en binôme*)
8. **06 :05** Al : Les deux Clara, ce n'est pas la peine de vouloir programmer à mon avis, ça … Il vaut mieux se poser la question de comment je fais pour résoudre mes équations… Surtout qu'en plus, ce que tu as programmé, ça ne va te servir en rien !

→ Phase 3

9. **07 : 31** (*en s'adressant à un binôme*) Al : Est-ce que ce n'est pas plus intéressant de travailler sur une forme plus complexe ? Parce que … est-ce que si tu sais résoudre ça (*en montrant la 1*), tu sauras résoudre ça (*en montrant la 8*) ?
10. E : Ben non …
11. Al : En revanche, est-ce que si tu sais résoudre ça (*en montrant la 9*), tu sauras résoudre ça (*en montrant la 1*) ?
12. E : Ben oui !
13. Al : Pourquoi ? Ça, c'est plus …
14. E : C'est plus compliqué.
15. Al : Oui, si tu veux, ça (*la 9*) c'est plus compliqué que ça (*la 1*) ? Alors, quelle est la différence entre ça et ça ?
16. E : Euh …
17. Al : C'est qu'à droite du égal, il y a quoi ?
18. E : Ben là, il y a un zéro et là non.

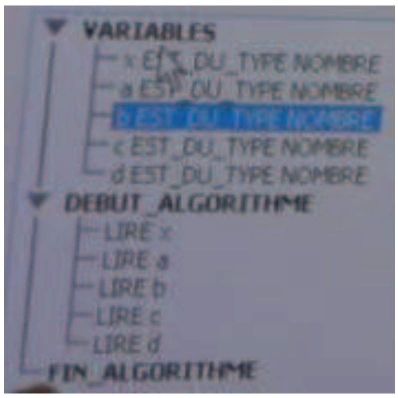
19. Al : Alors, c'est quoi la constante à droite là (*il pointe le doigt sur l'équation 9 :* $\sqrt{2}x - 1 = 4 - \sqrt{3}x$) ?
20. E : c'est 4
21. Al : Oui et le coefficient en x, c'est quoi ?
22. E : racine de 3
23. Al : Oui, plutôt, moins racine de 3 … Et là (*en montrant la 1 :* $x + 3 = 0$), à droite, le coefficient en x, c'est quoi ?
24. E : Euh …
25. Al : A ton avis ?
26. E : C'est 1 ?
27. **08 : 58** Al : Non, à gauche, c'est 1 … mais à droite, c'est zéro ! Regarde là, c'est comme si il y avait $0x + 0$ …
28. E : Ah mais oui !
29. Al : Maintenant, essaie de voir avec cette expression-là, si tu ne peux pas … Regarde, ici (*en montrant le membre de gauche de l'équation 9*) c'est quoi, c'est du …
30. E : $ax + b$
31. Al : Oui. Et ça, c'est quoi (*en montrant le membre de droite de l'équation 9*) ?
32. E : $ax + b$
33. Al : Ah non, change les lettres …
34. E : Alors $b + ax$
35. Al : Mais non, regarde, à gauche b c'est -1 et à droite, b ça serait 4 …Change les lettres !
36. E : Oui, ok, j'en mets des …
37. Al : Oui, mais quoi ? Vas-y, accouche !
38. E : (*rires*) J'en mets d'autres ?
39. Al : Ben oui ! Après a et b, y a quoi ?
40. E : (*rires*) c et d !
41. Al : Ah …t'es forte ! Donc à gauche, c'est du $ax + b$ et de l'autre côté, ça va être du
42. E : c ...
43. **09 : 51** Al : $cx + d$. Alors regarde la première. Qu'est-ce qui va se passer ? c, ça va être quoi ?
44. E : zéro
45. Al : Et d ?
46. E : zéro
47. Al : Donc, zéro et zéro. Donc, si tu sais résoudre ça (*la 9*), en rentrant *a, b, c, d*, tu sauras résoudre ça.
48. E : Ok, d'accord.
49. Donc l'enjeu … essaie de trouver une forme … Pose-là déjà ton équation $ax + b = cx + d$ puis essaie d'en trouver les solutions.
50. E : Ok, merci. (*Alex va vers un autre binôme*)
51. **10 : 15** Al : Clémentine, faut qu'elle tripote la souris ! Non, non, prends un crayon …
52. Al (*en se penchant sur un programme en cours d'écriture*) : Alors « bx est du type nombre ». C'est quoi, ça ?
53. E : des fois, il y a des x d'un seul côté et des fois des deux côtés !
54. Al : Alors, là tu vois, t'as trouvé quelque chose ! Des fois, comme tu dis, il y a des x de ce côté et d'autre fois, il y a des x de l'autre côté. Alors, le « dx » que tu as mis là, il correspond à quoi ?
55. E : Alors là, ça serait *ax (l'élève montre le terme 3x de l'équation 7 :* $3x - 5 = 3 - 10x$*)*, après ce serait *b (en montant le terme -5)…*

56. Al (*en entourant au fur et à mesure les nombres et en écrivant les lettres, voir image ci-contre)* : alors là, ça serait *a* … ça, ça serait *b,* ça, ça serait ...



57. E : *d*
58. Al : *c* … merci !
59. E : mais non, c'est ça le *c (en montant le terme « 3 »)*
60. Al : De toute façon que je l'appelle *c* ou *d*, c'est pas grave ! L'important, c'est que tu nommes tes coefficients. Même chose ici (*Alex pointe le crayon sur l'équation 8,* $3x - \frac{1}{4} = \frac{x}{4} - 2$*).* Là, tu aurais, a = 3, $b = -\frac{1}{4}$, $c = \frac{1}{4}$ et d = -2… Tu vois ce que je veux dire ? C'est secondaire les noms … Et donc, maintenant, ça veut dire quoi ? Ça veut dire que si tu sais faire ça, tu sais faire quoi ? Je ne comprends pas le « dx » …
61. **12 :00** E : ben c'est pour compenser le « ax » !
62. Al : Mais non ! Regarde, c'est quoi, l'expression là ? Tu es bien d'accord que c'est du $ax + b = cx + d$. Est-ce que ça tu sais résoudre ?
63. E : Ben, on fait que passer !
64. Al : Fais comme tu dis, fait que passer !
65. E : Avec ça (*en montrant une des équations*) ?
66. Al : Non, non, avec ça ! Ça (*en montrant* $ax + b = cx + d$), c'est la forme générale ! Allez, vas-y, résous-moi ça, trouve-moi x dans ce cas général.
67. E : Ben là, ça fait euh …
68. Al : comment tu fais en 4^e …quand tu as $3x + 5 = 5x + 2$? Comment tu fais en 4^e ? Parce que c'est 4^e, ça ?
69. E : Ben, je fais avec les chiffres, moi !
70. Al : Avec des chiffres ! Attends, mais c'est pas grave … T'es en seconde, là ! C'est quoi la phrase ? Tu mets …
71. E : Ben, je fais comme ça, là (*montrant des allers-retours de part et d'autre du signe d'égalité de l'équation*)
72. Al : Oui, tu transposes cx de l'autre côté …Dans votre langage, vous dites, je passe ça de l'autre côté !
73. E : (*rires*) Et il va devenir négatif … (*L'élève écrit* $ax - cx = d - b$ *sur sa copie*)
74. Al : Voilà, ça fait … Et après, tu factorises par …
75. E : par x
76. Al : Et ensuite ?
77. E : Mais je peux pas faire, ça ! J'ai pas de chiffres !
78. Al : c'est pas grave ! Tu as $x(a - c) = -b + d$. Donc, ça fait x égal quoi ?
79. E : Ça fait $x = -b + d$ ou $a - c = -b + d$.
80. **13 :26** Al : Ah oui ! Pour qu'un produit de facteurs soit nul …
81. E : Ah oui, c'est pas ça ! Je sais pas !
82. Al : Quand tu as $3x = 2$, x égal quoi ? 2/3 ?
83. E : Ben oui …
84. Al : Donc ici, ça fait quoi ?
85. E : Mais je n'y arrive pas avec les lettres ! J'ai besoin de chiffres, moi.
86. Al : Considère ça comme un coefficient. Si $a - c$ ça te pose problème, mets $k \times x$ ...
87. E : On fait $x(a - c) = ax - cx$.
88. Al : Ben non, t'es pas plus avancé, ça fait ce qu'il y a juste au-dessus !
89. E : Ah oui ! Mais je vois pas ce qu'on peut faire là ! Il y a pas de zéro.

90. Al : Et diviser de chaque côté ? Qu’est-ce qui te chagrine là ?
91. E : Je ne vois pas …
92. **14 : 12** Al : Ce que je veux à la fin, c’est *x* égal tant !
93. E : Oui, mais j’ai pas de zéro.
94. Al : On s’en moque ! Quand tu as $3x = 2$, tu n’as pas de zéro et pourtant, on dit *x* égal 2/3 !
95. E : Oui, mais là... on les connaît pas eux.
96. Al : Mais c’est pas grave ! Quel est le problème là-dedans ?
97. E : C’est ça le problème !
98. Al : Tu penses que c’est ça le problème ?
99. E : Ben oui, parce qu’après je saurais résoudre …
100. Al : Ce que tu voudrais avoir ici, c’est quoi ? (*en montrant le second membre de* $x(a-c) = -b + d$)
101. E : Un chiffre !
102. Al : Si j’écris $x×3 = 7$, c’est ce que tu as écris, là … À quoi est égal *x* ?
103. E : À 7 sur 3.
104. Al : Eh bien maintenant oublie les chiffres et dis-moi là à quoi est égal *x* …
105. E : À $\frac{-b+d}{a-c}$.
106. **15 :22** Al : Mais cette écriture-là, est-ce que c’est toujours valable ?
107. E : Ben oui …
108. Al : C’est toujours valable ?
109. E : Ben oui normalement …
110. Al (*en écrivant sur un coin de la feuille de l’élève, l’équation x + 7 = x – 3*) : Vas-y, résous.
111. E : Ben on fait passer … ça fait $x – x = 10$. Ça va pas, là !
112. Al : Tu sens le poil à gratter là ? Tu vois qu’il y a un problème pour cette équation … Il y a peut-être quelque chose à élucider.
113. **16 : 47** Al (*dans un autre binôme où l’équation ax + b = cx + d apparaît sur la feuille*) : Alors résous ça maintenant.
114. E : Oui mais *a*, on l’a !
115. Al : Mais on s’en moque ! Imagine que tu ne l’aies pas… Maintenant résous ça dans le cas général.
116. E : Mais je ne dois pas faire un « si » ?



117. Al : Non, non. Pour le moment, t’es pas en train de faire l’algorithme. Pour le moment, ce que tu as rempli (*voir copie écran ci-contre*) … la plupart des choses sont vraies mais il y a x … Je te signale que c’est ce que tu cherches, x … c’est la solution !
118. E : Ah oui !
119. **17 : 17** Al (*à toute la classe*) : Et, je vous signale au passage qu’à la fin, votre algorithme doit pondre la chose suivante : « x = tant ». Pour vos 10 équations, la fin de votre algorithme doit être : « si mon équation admet des solutions, ça doit être ça »… Donc, quand j’en vois qui commence à dire : « Lire x », ça n’a pas de sens ! « Lire x », ça voudrait dire qu’il faudrait qu’on donne une valeur à x, ce qui n’est pas vrai, puisque c’est justement ce qu’on demande à l’algorithme de faire. D’accord ?
120. **18 : 03** Al : Alors, Marine, elle les résout toutes !
121. Marine : Non, j’essaie de les transformer pour les mettre sous la même forme.
122. Al : Oui, c’est une manière de …

123. Marine : Oui, j'essaie de montrer qu'elles s'écrivent toutes : $ax + b = c$. Et après, je sais pas …

124. Al : Donc là, en fait, tu es en train de faire un processus pour avoir du $ax + b =c$. Est-ce que c'est la forme la plus riche ? Est-ce que tu n'as pas une forme immédiatement plus parlante que le fait de ramener tout à $ax + b =c$. À ton avis ? Regarde …Celles-là (*il montre les équations 7, 8, 9*)

125. Marine : Elles ont des x des deux côtés, mais …je ne peux pas faire pareil avec celles-là (*elle montre les équations 1 à 6*) …

126. Al : Pourquoi ?

127. Marine : Ben, j'aurais pas des x des deux côtés …

128. Al : Alors, le problème de ta posture, c'est que … si tu programmes l'algorithme pour $ax + b = c$, le problème, c'est que tu ne pourras pas programmer quelque chose comme ça (*il montre l'équation 8,* $3x - \frac{1}{4} = \frac{x}{4} - 2$).

129. Marine : Non, mais …

130. Al : En amont, tu auras un travail important à faire…

131. Marine : Je ferais $3x - \frac{x}{4} - \frac{1}{4} + 2 = 0$ …

132. Al : On est bien d'accord, qu'avant d'arriver à cette forme $ax + b = c$, t'as un sacré travail de réduction au même dénominateur, de développement, … Pourquoi pas ? Mais le but du jeu, c'est peut-être de faire le minimum d'opérations. Je dis pas que ton raisonnement est faux, sauf qu'en amont, il induit que tu aies plein d'opérations à faire, de simplifications, … Tu vois ?

133. Marine : Ok

134. Al : donc la question, c'est effectivement, est-ce qu'il n'y pas quelque chose de plus simple, de plus global, qui te permette immédiatement, sans aucun calcul, poum ! tu puisses avoir la résolution. Parce que tu vois, quand tu as un calcul comme ça (*il montre l'équation 8*), toi, ton passage à $ax + b = c$, il peut coller aux dents ! Réduction au même dénominateur, transposition, … ça, c'est du travail mathématique qui induit des possibilités d'erreurs importantes. Est-ce que ce serait pas plus simple, alors là, j'influence carrément ton jugement, de dire : j'ai ce coefficient-là, celui-là, celui-là et celui-là (*il pointe successivement les quatre coefficients de l'équation 8*), je rentre ces quatre-là et instantanément, j'ai la solution ! Tu vois ce que je veux dire … Sans aucune transformation en amont à faire.

135. Marine : Ok

136. Al : Mais ta posture n'est pas invalide, elle est intéressante. Mais à mon avis, elle demande trop de travail.

137. Marine : Mais on peut le faire faire par l'algorithme ça ou pas (*en parlant des calculs pour amener l'équation* $3x - \frac{1}{4} = \frac{x}{4} - 2$ *sous la forme $ax + b =c$)* ?

138. Al : Ah, ben non, justement, ça tu peux pas ! C'est pour ça, qu'en fait, moi, ce que je te propose, c'est d'évacuer tout le côté calculatoire qui est un peu difficile et d'avoir à entrer que des coefficients.

139. Marine : De toute façon, il y a un moment où il va falloir le calculer après … Enfin, je ne vois pas …

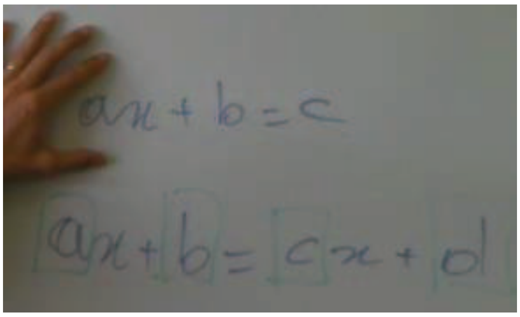
140. **21 : 46** Al : C'est l'algorithme qui va le faire ! À un moment, tu as raison, il va falloir résoudre une équation, tu as raison. Mais laquelle ? Est-ce qu'il vaut mieux résoudre $ax + b = c$, en sachant qu'avant tu t'es tapée 10 minutes de transformation pour arriver à une forme comme ça, sans être absolument sûre que tes coefs *a, b, c* sont justes ! Parce que c'est bien ça le problème, c'est le calcul ! Ou alors, le but du jeu, c'est de faire zéro calcul et de te dire que les équations les plus complexes sont du type $ax + b = cx + d$ ... Est-ce qu'il ne vaut pas mieux que je résolve ça … Qu'est-ce que j'aurais à rentrer si je

sais résoudre ça ? J'aurais à rentrer *a, b, c* et *d*. Et si j'ai bien fait ma résolution et si mon algorithme fonctionne, il me sortira « x = tant ». Tu vois ce que je veux dire ?

141. Marine : Oui.

→ ***Phase 4***

142. **22 : 40** Al : *(à toute la classe)* Bon vous regardez tous, là ? Pour que vous ayez une part de programmation … Bon, pour la plupart des groupes, excepté Marine qui a voulu prendre une autre posture, qui n'est pas fausse non plus … Marine a voulu faire la programmation de ce type d'équations, *ax + b = c,* c'est-à-dire tout transformer en amont pour arriver à ça, donc de la transposition, de la réduction au même dénominateur, pour dire que la forme générique, c'est celle-là (*il montre ax + b = c au tableau)*. Sauf que je lui disais que ça induisait beaucoup d'erreurs potentielles. Donc, il y en a qui ont déjà travaillé, Mélanie, Julie, Élise, sur l'écriture la plus difficile de vos 10 équations qui est une écriture de ce type-là (*il montre ax + b = cx + d au tableau)*. Alors, j'ai vu *ax + b = ax + b*, n'est-ce pas Mélanie ? C'est pas les mêmes coefficients, donc on ne peut pas les appeler de la même façon. En revanche, une fois qu'on a sérié ce type d'équations, la question c'est comment la résoudre ? Alors comment on fait pour résoudre ce type d'équations du premier degré ? Alors Rebecca (*qui lève le doigt*) ?

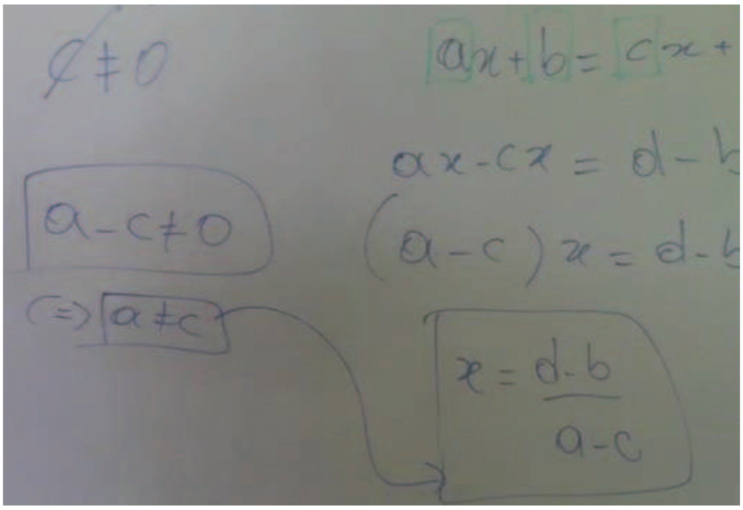


143. **23 : 44** Rebecca : On met *b* de l'autre côté.
144. Al : alors, « *b* de l'autre côté », ça s'appelle de la transposition, oui … Ensuite ?
145. Rebecca : la même chose avec *cx*
146. Al (*en écrivant au tableau* $ax - cx = d - b$) : Ensuite ?
147. Rebecca : Ben, on fait les calculs…
148. Al : On fait les calculs…Ce que je veux à la fin, c'est « *x* égal tant ».
149. Élise : On fait $x = \frac{d-b}{a-c}$.
150. Al : Donc là, ce qu'elle vaut dire, ce n'est pas exploitable directement, il faut factoriser par quoi ?
151. E : par *x*
152. Al : Il faut factoriser par *x*, oui (*en écrivant au tableau* $(a - c)x = d - b$) . D'accord ? Alors maintenant comment je fais pour résoudre ça ? Est-ce que j'ai des problèmes mathématiques ? Marine suggère quoi …
153. Marine : $x = \frac{d-b}{a-c}$
154. Al (*en écrivant au tableau* $x = \frac{d-b}{a-c}$) : Alors qui est d'accord avec ça ? Personne n'a de problème ? Clémentine ?
155. Clémentine : je pensais pareil.
156. Al : Tu pensais pareil … Donc tout va bien dans le meilleur des mondes. Mélanie ? Vous ne vous posez pas la question des instruments mathématiques sur lesquels vous travaillez ?
157. Marine : Il faut que $a \neq 0$ et $c \neq 0$ …
158. **26 : 00** Al : Vous avez entendu ce qu'a dit Marine ? Elle dit : il faut que $a \neq 0$ et $c \neq 0$ …
159. Marine : Non, non, il faut que $a - c \neq 0$.
160. Al : Attends ! Sa première pensée était $a \neq 0$ et $c \neq 0$. Ça suffit à votre avis ou pas ?
161. Es : Non ! c'est $a - c \neq 0$

162. Al : il faut évidemment que a – c soit différent de zéro (*il l'écrit au tableau*). Et donc c'est équivalent à quoi ?

163. Es : $a \neq$ c

164. Al : Et oui, ça veut dire que $a \neq$ c (*il l'écrit au tableau*). Et voilà une première condition qui fait que cette solution-là peut exister.



Trace écrite au tableau à 26 : 47

165. Al : Au passage, Élise, quand on a $x + 3 = x + 7$, vous voyez bien qu'on a un problème … Si je vous demande de résoudre $x + 3 = x + 7$ (*équation qu'il écrit au tableau*), si vous transposez de chaque côté, ça fait quoi ? Ça fait : $x - x = 7 - 3$ et ça fait $0 = 4$; il y a un os dans le potage, non ?

166. Es : Oui.

167. Al : Vous voyez ici, il y a un vrai problème. On a $a = 1$, $c = 1$ (*il pointe les coefficients au tableau, montrant l'équation $x + 3 = x + 7$*) … Vous voyez bien ici qu'il faut vraiment se poser la question de l'existence de l'instrument mathématique sur lequel on travaille. D'accord ?

→ ***Phase 5***

168. **27 :40** Alors ici, si je pars de cette équation-là (*il montre $ax + b = cx + d$ au tableau)*, je me dis que c'est la forme générique d'un instrument qui contient pratiquement toutes les équations, comment faire pour avoir un algorithme qui me ponde la solution ? Voilà l'enjeu maintenant de vos 20 dernières minutes. Action ! Programmez-moi un algorithme qui, évidemment me demande les valeurs de *a, b, c, d* et puis … je vous signale au passage, qu'il faut quand même faire attention à la chose suivante … moi, la condition $ax + b = cx + d$, j'en ai absolument rien à faire … Pourquoi ? Quelle est la condition la plus importante, le fait de trouver une solution à mon équation ou le fait d'avoir cette condition d'existence que a doit être différent de c ?

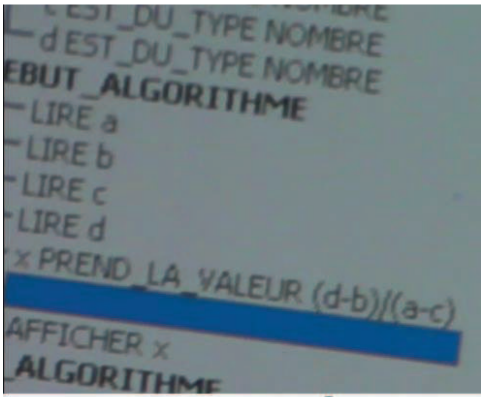
169. E : la condition d'existence ?

170. Al : C'est évidemment la condition d'existence qui est primordiale, qui prévaut par rapport à … tiens, je vais résoudre une équation ! Vous êtes d'accord ? Donc avant de commencer à programmer, ayez en tête que la chose la plus importante de toute cette structure, c'est qu'effectivement, je dois avoir quelque chose sur *a* et *c*. D'accord ? Action !

171. **29 :11** Al (*tout bas et en aparté au chercheur*) : J'ai laissé tomber $b - d$ égal zéro, mais ça peut être intéressant…

172. E : Comment on écrit « différent » ?

173. Al : « Différent », vous écoutez là, « différent » dans le langage Algobox, ça s'écrit « point d'exclamation égal ».
174. **30 :20** Al (*en se penchant sur le programme d'Élise*) : il y a quelque chose que je ne comprends pas, Élise … Qu'est-ce que tu as avec ton *bx*, ton *cx* et tout ça, là ? Élise, est-ce que, quand tu résous une équation, quand tu as trouvé 3*x*, est-ce que tu essaies de calculer 3*x* … tu le connais pas *x* ! Donc « Lire bx » ou « Lire cx », ça n'a aucun sens, puisque *x* tu ne le connais pas ! Ben vas-y, lance ton algorithme, tu vas voir… De plus, « cx », il ne le comprend pas, parce que c'est la juxtaposition de deux variables.
175. **31 : 43** E (*un autre binôme*) : la condition, c'est pas « $ax + b = cx + d$ » ?
176. Al : Tout à l'heure, vous m'avez dit vous-même que la condition la plus importante, c'était celle-là (*il montre a* $\neq$ c *sur le tableau*), c'est celle-là qui va prévaloir, donc mon algorithme, il va commencer par ça ! Et si j'ai a = c, c'est même pas la peine que j'aille plus loin, Clémentine ! Si a = c, c'est fini, moi je sais que cette équation-là, elle a pas de solution. Donc, si a $\neq$ c, il y a un protocole, sinon, l'algorithme il est fini …
177. **32 :27** Al (*au binôme Mélanie et Manon, extrait ci-contre*) : Je vous signale que vous dites *a, b, c, d*, d'accord … Et alors *x* prend la valeur $\frac{d-b}{a-c}$ … Je me suis permis pendant cinq minutes de faire une petite digression … Mélanie et Manon, … pour que tu appliques cette formule et que tu ne sais même pas si elle existe !



178. Mélanie : Mais justement, c'est pour ça qu'on cherche … à dire que c'est si a $\neq$ c. On sait pas comment faire …
179. Al : Mais Mélanie, on n'a pas fait les propriétés conditionnelles ? Non ?
180. Mélanie : Si !
181. Al : Ben évidemment que vous l'avez fait ! C'est « si ... alors » !
182. **33 : 33** Al (*à un autre binôme*) : Bon, alors tu as écrit « si a $\neq$ c », c'est très bien. Alors est-ce que ça (*il montre au tableau* $\frac{d-b}{a-c}$), ça existe ? Qu'est-ce qu'il faut faire ? Ta variable x, elle a été déclarée avant, donc qu'est-ce qu'il faut que tu fasses maintenant ? La résolution de l'équation, elle est possible et la solution, c'est ça ! T'as pas mis x dans tes déclarations de variables ? Si $a \neq$ c, ça veut dire que cette formule existe, alors programme-là ! Vous ne vous rappelez pas, quand on a fait « f(x) = tant », qu'on faisait « affecter un truc » ? Le premier groupe se rappelait de tout ça !
183. E : Monsieur, il faut des parenthèses ou pas ?
184. Al : Et oui, il en faut sinon ça marche pas.
185. **35 : 07** Al (*à toute la classe) :* Rappelez-vous quand on a fait les affectations …
186. **35 : 25** E : (*appelle le professeur pour son binôme*) Monsieur, pour l'équation 8 ($3x - \frac{1}{4} = \frac{x}{4} - 2$), xxx (*les élèves tentent de transformer l'équation donnée et éprouvent des difficultés à manipuler les fractions*)
187. Al : Mais c'est parce que tu n'as même pas besoin de faire tout ça ! Là, tu es en train de vouloir résoudre mathématiquement ça, alors que je te demande de le faire via l'algorithme … C'est pas ce que je t'ai demandé. C'est-à-dire que moi, là-dedans, il faut que tu me dises que a = 3, $b = -\frac{1}{4}$, $c = \frac{1}{4}$ et $d = -2$. Et c'est celle-là que j'ai à résoudre, parce que tout ça, j'en ai même plus besoin, j'ai même pas besoin de le faire ! Tu vois ce que je veux dire ? Donc ça, ça va être un cas particulier et comme tu vas demander à ton algorithme ces valeurs-là, il va te sortir la suite. Tu vois ?

→ ***Phase 6***

188. **38 : 56** (*Le binôme de Mélanie fait tourner le programme avec l'équation 7,* $3x - 5 = 3 - 10x$). E_1 *(en dictant à son binôme les valeurs à entrer dans le programme)* : Vas-y, $a = 3$, $b = -5$, $c = -10$, $d = 3$.
189. E_2 : 0,61 … Mais je sais pas si c'est le bon résultat.
190. E_1 : Faudrait qu'on vérifie… On essaie avec une autre, la première *(x + 3 = 0).* Alors, a c'est 1, b c'est 3, c c'est 0 et d c'est quoi ? Il n'y en a pas, on met quoi ?
191. E_2 : ben zéro
192. E_1 : Ah oui, c'est bon ! C'est -3.
193. **40 : 00** Al (*à toute la classe) :* Je vous rappelle que l'algorithme, il ne peut pas afficher quelque chose que vous ne lui avez pas demandé de calculer avant ! Donc tous ceux qui ont mis « Afficher x = (d - b)/(a - c) », vous n'aurez rien ! Parce qu'avant, vous devez dire « affecter x à la variable un tel »…
194. **40 : 50** (*Dans le binôme de Mélanie, pour l'équation 2, -1000x = 0*) E_1 : Alors $a = -1000$, $b = 0$, $c = 0$, $d = 0$.
195. E_2 : Ça fait zéro, c'est faux, ça, c'est pas zéro !
196. E_1 : Ben si ! tu divises 0 par -1000 et ça fait zéro.
197. E_2 : Ah oui, je croyais que c'était un plus…
198. E_1 : *(pour l'équation 3, -1000 + x = 0)* $a = 1$, $b = -1000$, $c = 0$, $d = 0$.
199. E_2 : Ça fait mille, c'est bon.
200. E_1 : *(pour l'équation 4,* $\sqrt{2} + x = 3$) $a = 1$, $b = \sqrt{2}$ …
201. E_2 : c'est sqr(2)
202. E_1 : Oui, et $c = 3$ et $d = 0$.
203. E_2 : Non, regarde … On s'est trompées, c'est $c = 0$ et $d = 3$.
204. E_1 : Et pourquoi ?
205. E_2 : Regarde, là, il n'y a pas de x … et c, c'est celui qui est avec x.
206. E_1 : Ah oui, d'accord.
207. E_2 : Donc ça fait 1,5857 … On marque 1,59 ?
208. E_1 : Ouais !
209. **41 : 05** Al (*dans un binôme*) : Ah non, celle-là (*il mentionne l'équation 10 :* $7(x + 2) + 4(x - 3) = 0$), il faut que tu la développes d'abord et que tu la mettes sous la forme *ax +b = cx + d.* Tant qu'elle n'est pas sous cette forme, l'algorithme ne peut pas la prendre.
210. **41 : 30** Al (*à toute la classe*) : Attention, la dixième équation, elle n'est pas sous cette forme ! Il y aura *un* calcul pour la faire devenir sous cette forme-là. Et c'est ces coefficients que vous rentrerez là. Allez maintenant, si votre algorithme marche, vous devez me balancer les dix équations que vous avez-là et me trouver les dix solutions.
211. **42 : 40** (*Dans le binôme de Mélanie, pour l'équation 5,* $\frac{10x}{0{,}001} = 4$) E1 : Ensuite, pour a, tu mets 10 … Euh non, c'est $\frac{10}{0{,}001}$. Et $b = 0$, $c = 0$, $d = 4$.
212. E_2 : Ça fait 0,0004. Ensuite (*pour l'équation 6 :* $\pi x + 3 = 4$), a c'est pi …
213. E_1 : Monsieur, c'est comment pi ?
214. Al : (*en épelant*) c'est « MathPI ».
215. E_1 : Ça ne marche pas, j'ai essayé minuscule, majuscule, ça marche pas, ça fait erreur !
216. **44 : 20** E_2 : Bon, on fait le suivant ?
217. E_1 : Oui (*pour l'équation 6,* $3x - 5 = 3 - 10x$) $a = 3$, $b = -5$, $c = -10$ et $d = 3$. Mais on l'a déjà trouvée !
218. E_2 : Tant pis, c'est xxx

219. **45 : 00** Al (*à toute la classe*) : Pour tout le monde, vous écoutez là, pi c'est ça : « Math.PI » (*en épelant*) et je rappelle aussi que la racine carrée, c'est sqrt. Et autre chose, vous voyez bien que vous avez des solutions sous forme comment ?

220. E : xxx

221. Al : Ce sont des valeurs approchées, donc forcément vous n'avez pas les valeurs exactes.

222. **47 : 18** Al (*à toute la classe*) : Vous devez mettre la condition négative dans la boucle « si ». En ce sens que si *a* est égal à *c*, il faut quand même qu'il me ressorte une occurrence, non ? Élise ?

223. Élise : Ça marche pas !

224. Al : Et pourquoi ça marche pas… Tu as oublié les parenthèses autour de $a - c$ et de $d - b$. ça c'est une première chose… Pauvre Algobox ! et après, tu risques pas d'avoir grand-chose, parce que ta variable n'est pas affichée. D'accord ? tu sais, Algobox, c'est aussi stupide que … trois petits points.

225. **47 : 52** (*La sonnerie retentit*) : Alors vous écoutez, là ? Vous mettez sur votre bureau l'algorithme que vous avez pondu, vous rendez les feuilles à Nathalie et vous n'éteignez pas l'ordinateur. Et pour la rentrée, je vous donne un exercice à rendre sur feuille sur l'algorithmique… *(voir annexe A22).* Vous enregistrez le programme sur votre bureau.

226. E : Monsieur, c'est noté ?

227. Al : Non, ce n'est pas noté, c'est pour faire des recherches. C'est pour le lundi de la rentrée. Vous me donnez vos feuilles, là ?

228. E : J'ai pas rempli la feuille, on en a fait une pour deux…

51 : 30 *Fin de la séance*

A38. Exemple d'une production d'élève pour la situation n°2 de la classe d'Alex

G1

Nom : ... .

Classe : ...

Prénom : ...Emil...................

Réaliser sur Algobox un (ou des) algorithme(s) permettant de résoudre les équations ci-dessous.
Résoudre les équations proposées à l'aide de votre algorithme. Indiquer à côté de chaque équation, sa ou ses solutions, si elles existent.

Equation 1 : $x + 3 = 0$ — Solution 1: ... $x = -3$ ...

Equation 2 : $-1000x = 0$ Solution 2: ... $x = 0$ ...

Equation 3 : $-1000 + x = 0$ — Solution 3: ... $x = 1000$ ...

Equation 4 : $\sqrt{2} + x = 3$ — Solution 4: ... $x = 1,58$ ...

Equation 5 : $\dfrac{10x}{0,001} = 4$ Solution 5: ... $x = 0,0004$ ...

Equation 6 : $\pi x + 3 = 4$ Solution 6: ... $x = 0,31$ ...

Equation 7 : $3x - 5 = 3 - 10x$ Solution 7: ... 0,61 ...

Equation 8 : $3x - \dfrac{1}{4} = \dfrac{x}{4} - 2$ → $ax + b = cx + d$! → solution Solution 8: ... 0,63 ...

Equation 9 : $\sqrt{2}x - 1 = 4 - \sqrt{3}x$ Solution 9: ... 1,58 ...

Equation 10 : $7(x + 2) + 4(x - 3) = 0$ Solution 10: ... 0,18 ...

formule → $ax + b = cx + d$

$\Rightarrow \dfrac{x}{x} = c + d - a - b$

$\Rightarrow x = c + d - a - b$

$ax + b = cx + d$

$ax - cx = d - b$

$(a - c)x = d - b$

$x = \dfrac{d - b}{a - c}$

A39. Transcription de la séance 3.1 du professeur Alex (situation n°3)

Séance filmée le 24/05/2011 en salle informatique.
Pour le codage, se reporter à l'annexe A24.
La feuille d'énoncé à laquelle se réfère Alex est située en annexe A23.
Note : Une seule caméra a été utilisée pour filmer cette séance.

→ Phase 1

107. **00 : 00** *Les élèves s'installent par deux devant un poste informatique et ouvrent le logiciel Algobox. Le professeur aide les élèves à ouvrir le fichier et à le télécharger.*
108. **02 : 12** Al (*en distribuant la fiche d'énoncé*): Alors, maintenant réfléchissez à ce que vous avez sous le nez.
109. **02 : 40** Al : Alors, comme d'habitude, vous êtes comme des morts de faim et vous sautez sur Algobox … Moi, je vous conseille …
110. E : Monsieur ? J'arrive pas à le télécharger …
111. Al : Alors, fais ouvrir et enregistrer …
112. **03 : 13** Al : Mais je vous rappelle la chose suivante, ne commencez pas, comme des morts de faim, à vouloir programmer des choses sur Algobox. Réfléchissez d'abord au substrat sur lequel vous devez travailler ! Alors, utilisez l'envers de votre feuille comme feuille de brouillon. D'accord ?

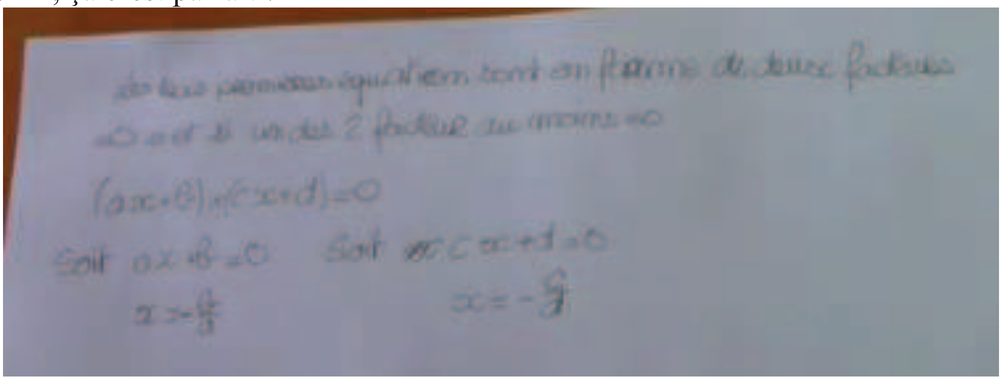
→ Phase 2

113. **04 : 30** Al (*en s'adressant à toute la classe*) : Alors, vous vous rappelez ce que vous aviez résolu la fois dernière ? Vous aviez fait un algorithme qui permettait de résoudre toutes les équations du type $ax + b = cx + d$. Vous vous rappelez de ça ?
114. Es : Oui !
115. Al : Qu'est-ce qu'il fallait faire ? Il fallait nommer *a, b, c, d*, les rentrer, et votre algorithme vous donnait immédiatement la solution. Alors, il y avait des conditions … Vous vous rappelez ?
116. Es : Non…
117. **05 : 30** Al : Vous ne vous rappelez pas ? À la limite, c'est pas grave. Là, est-ce que c'est du premier degré ? Vous voyez bien qu'ici, vous voyez bien que si vous développez tout ça, on est dans le second degré… Donc, je vous signale au passage que les choses que vous aviez à apprendre pour le début de la semaine, c'était déjà commencer à … se plonger un peu dans le second degré. Et donc là, vous êtes dans une posture où vous avez trois équations à résoudre … il faut trouver un algorithme qui fait que, quand je remplis certaines conditions, je suis capable de trouver les solutions de $(4x + 3)(2x - 1) = 0$, etc. Et ensuite l'extension, … eh bien regardez la deuxième question : il va falloir trouver quelque chose de même type que ces trois-là et après, il va y avoir le piège suprême … Forcément, s'il n'y a pas de piège, c'est pas intéressant ! Alors comment faire pour résoudre les trois premières équations ? Déjà, réfléchissons sur leur nature. Est-ce que ces trois-là se ressemblent ? Si oui, on va peut-être essayer de voir de quel type c'est, sinon …Mais vous êtes bien d'accord que si l'on a mis des astérisques pour ces trois-là, forcément, c'est que … à part du Rimel et du rouge à lèvres, c'est pareil !

→ Phase 3

118. **06 : 26** Al *(en s'adressant à toute la classe)* : Au passage, vous avez déjà résolu des tonnes d'équations de ce type-là sans algorithmique, d'accord ?
119. Es : Oui, oui.
120. Al : *(en s'adressant uniquement au binôme de Mathilda)* D'accord Mathilda ?
121. Mathilda : Oui.

122. Al : Et c’est quoi le théorème que tu utilises ?
123. Mathilda : a² + b²
124. Al : Regarde, il y a des facteurs et tu dis a² + b² ? Gloups … Mélanie, tu peux l’aider ?
125. Mélanie : Oui…
126. Al : C’est quoi le théorème pour résoudre la première équation, par exemple ?
127. Mathilda : C’est x = 0 ou …
128. Al : C’est pas x, c’est quoi ?
129. Valentine : xxx
130. Mathilda : Ah oui, c’est A = 0 ou B= 0…. C’est A × B = 0.
131. Al : Oui, ou comme dit Valentine, il faut qu’il y ait un des facteurs qui soit égal à zéro. Alors, c’est quoi le théorème ?… C’est « pour qu’un produit de facteurs soit nul, il faut que l’un des deux soit nul ». Alors, qu’est-ce que tu me chantes avec a² + b² ?
132. **08 : 06** Al (*en allant voir un autre groupe qui présente la production ci-dessous à Alex*) : Ah, ça c’est parfait !

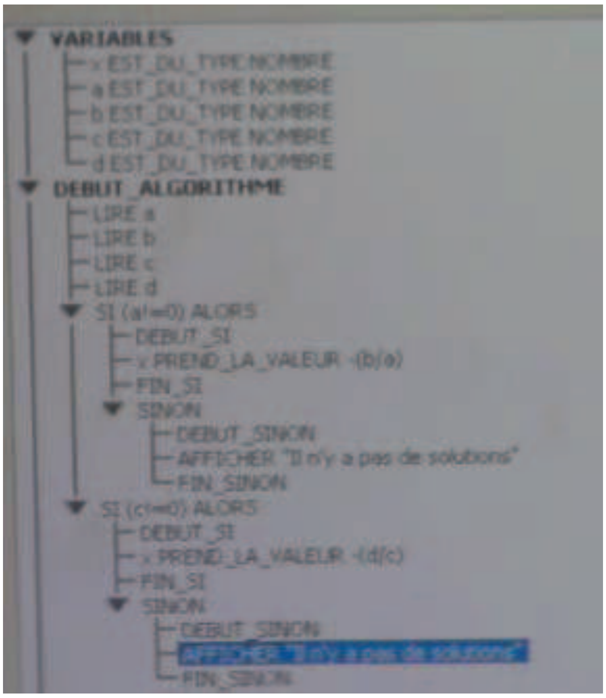


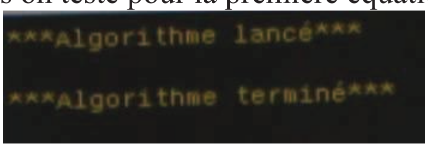
133. Voilà ce qu’il faut que tu programmes ! Y a plus qu’à programmer ça sur Algobox !
134. **09 : 20** Al (*à toute la classe*) : Bon, alors vous avez pas mal désembrouillé les choses ! Alors, les trois premières équations avec astérisques, ce sont des produits de facteurs. Et si ce sont des produits de facteurs, c’est quoi le théorème, Mathilde ou Iris ?
135. Mathilde : Alors on fait x = 0 dans le premier et x = 0 dans l’autre.
136. Al : Non, $4x + 3 = 0$ ou $2x - 1 = 0$. Parce que si tu fais x = 0 dans le premier facteur, ici par exemple (*il montre* $(4x + 3)$ *dans l’équation* $(4x + 3)(2x - 1) = 0$), ça fait 3 !
137. Mathilde : Ah, oui ! C’est ce que je voulais dire…
138. **09 : 40** Al : (*En ne s’adressant qu’au binôme de Mathilde et Iris*) D’accord. Donc ici, là, c’est de quelle forme $4x + 3$?
139. Mathilde : $ax + b$
140. Al : Très bien ! Et ça, c’est de quelle forme (*en montrant* $2x - 1$) ?
141. Mathilde : $ax – b$
142. Al : Non. Alors déjà, c’est pas le même a …
143. Iris : Ah ! $cx – d$
144. Al : Alors là, tu peux dire $cx + d$ avec d = -1. D’accord ? Donc ça, ça fait $ax + b$ multiplié par $cx + d$ … Et c’est quoi les solutions de $ax + b = 0$?
145. Iris : x égal $\frac{-b}{a}$
146. Al : Et la deuxième ?
147. Mathilde : x égal $\frac{-d}{c}$
148. Al : Voilà ! Alors vous pouvez programmer maintenant.
149. **10 : 54** Al (*Dans le groupe de Jean-Stéphane*) : Je vous signale au passage que ça … là, il faut prendre des précautions …
150. Jean-Stéphane : Oui, il faut que a et d ne soient pas égaux à zéro.
151. Al : Très bien ! Ça, il va falloir évidemment le mettre…

152. **11 : 53** Al *(dans un autre groupe)* : $ax + b = 0$, ça fait x égal combien ? Dans la formule générale ? Tu ne vas pas revenir à la première équation…
153. E : Ça fait $\frac{b}{a}$?
154. Al : Non, $\frac{-b}{a}$. D'accord ?
155. E : Oui.
156. Al : Et $cx + d = 0$, ça fait x égal combien ?
157. E : Ça fait $\frac{-d}{c}$?
158. Al : Oui. Et est-ce que ça, ça existe tout le temps ?
159. E : Non.
160. Al : Non, il faut mettre comme condition $a \neq 0$ et $c \neq 0$. Donc voilà le process, il n'y a plus qu'à programmer, d'accord ?

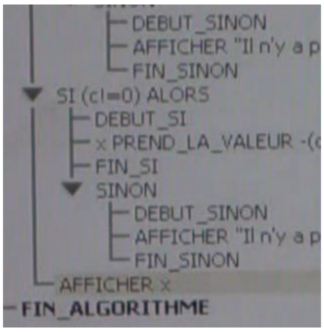
→ ***Phase 4***

161. **11 : 23** *(dans un groupe, les élèves écrivent le début du programme ci-contre et échangent)*
162. E1 : Non, n'écris pas « lire x ». Tu n'écris que « lire a, b, c, d » parce que x, c'est ce que tu cherches.

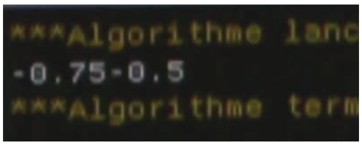


163. E2 : Il faut faire un test … J'écris quoi ?
164. E1 : Il faut mettre a et d différents de zéro
165. E2 : Je ne sais pas quoi mettre comme condition…
166. E1 : Écris si a « point d'exclamation égal » zéro alors …
167. E2 : Alors quoi ?
168. E1 : « ax + b = 0 »
169. E2 : Non, c'est pas ça ! C'est « x = -b/a ».
170. E1 : Ah, oui !
171. E2 : Et pour le « sinon », tu écris « pas de solution »
172. E1 : Et on fait la même chose avec l'autre. Si c différent de zéro, …
173. E2 : Ah, mais on a fait une erreur là, c'est x égal $\frac{-d}{c}$ la solution (*ils ont écrit* $\frac{-c}{d}$ *sur leur feuille*)
174. E1 : Ah oui ! Pourquoi le prof a dit « très bien » ?
175. E2 : Il l'a pas vu !
176. E1 : Alors c'est « si d différent de zéro alors x prend la valeur –d/c »
177. **18 : 24** E1 : Alors on teste pour la première équation. Tu rentres 4, 3, 2, 1 …
178. *L'écran affiche* : 

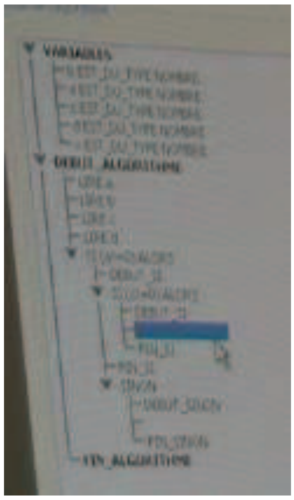
179. E2 : Il n'y a rien qui sort ! On n'a rien demandé d'afficher !
180. E1 : On ajoute « Afficher » … Euh … « Afficher x » ?
181. E2 : Ben oui !



182. E1 : Je re-teste… Ça fait -0,5 ...
183. E2 : Il n'en sort qu'une. C'est bizarre !
184. E1 : C'est la deuxième qui est sortie, la première n'est pas sortie.
185. E2 : Il faut afficher un deuxième x…
186. E1 : Je sais pas !
187. E2 : Il faut mettre « afficher x » entre la première et la deuxième *(l'élève le place avant le second test).*
188. E1 : On recommence : 4, 3, 2, 1 …
189. *L'écran affiche* :



190. **20 : 00** E2 : Alors … ça ferait … -3 sur 4 … -0,75 donc c'est bon !
191. Al (*Dans un autre groupe*) : Ta condition, elle est fausse ! C'est pas « ax + b = 0 » … c'est si $a \neq 0$ et $c \neq 0$, alors on a ça et ça (*il montre* $\frac{-b}{a}$ *et* $\frac{-d}{c}$) … C'est la solution ! Il va falloir modifier, là !
192. Bérénice (*en levant le doigt*) : Monsieur, c'est quoi « différent » ?
193. Al : Qui peut le dire à Bérénice ? Mélanie ?
194. Mélanie : C'est « point d'exclamation égal ».
195. Al (*Dans un autre groupe*) : Alors vous avez quoi comme condition ?
196. E : $a \neq 0$ et $c \neq 0$
197. Al : Oui. Alors vous avez quoi comme première solution ?
198. E : x égal $\frac{-b}{a}$
199. Al : Mais attention, là … Il va falloir qu'il y ait deux valeurs. Il va falloir faire sortir les deux solutions. On va les appeler x1 et x2, on va déclarer deux nouvelles variables, x1 prend la valeur de la première solution et x2 la valeur de la deuxième et après les faire afficher. D'accord ?

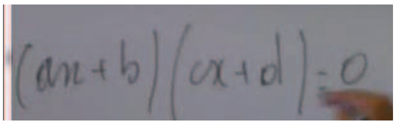


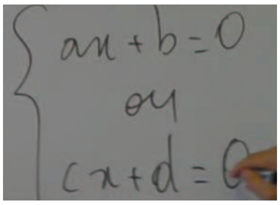
200. **19 : 00** (*Dans un autre groupe*) E : Monsieur, la condition, c'est « Si ax + b = 0 » ?
201. Al : Non, non, $ax + b = 0$ ne m'intéresse pas !
202. E : C'est $a = 0$?
203. Al : Voilà, soit tu commences par la condition « si $a = 0$, alors il n'y a pas de solution » … A votre avis, est-ce que ce n'est pas mieux de dire « si $a \neq 0$ et $c \neq 0$, alors » comme ça, Hop ! J'ai terminé.
204. E : Et on ajoute un « sinon » ?
205. Al : Vas-y … Mets « si $a \neq 0$» et un autre « si » …Tu écris « si $c \neq 0$ », alors qu'est-ce qu'on écrit, qu'est-ce qui se passe si les deux sont différents de zéro ?
206. E : Il n'y a pas de solution.

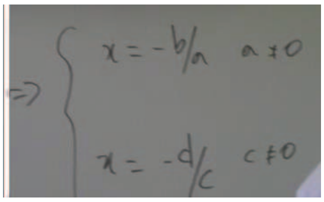
207. Al : Mais bien sûr que si ! Regarde, s'ils sont différents de zéro, ça veut dire que ça, ça existe ! Alors il faut « affecter à la variable x, ça ! ». Sauf que vous avez x et x ! Là, il y a un petit problème ! Le problème, c'est qu'Algobox ne va pas comprendre !

→ ***Phase 5***

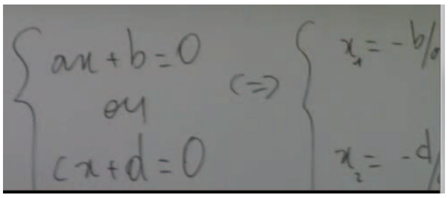
208. **20 : 18** (*à toute la classe*) Al : Vous regardez tous, là ? Vous êtes arrivés à cette posture-là … (*en écrivant au tableau en même temps*) et donc vous êtes arrivés à x égal $\frac{-b}{a}$ avec $a \neq 0$ et x égal $\frac{-d}{c}$ avec $c \neq 0$.







209. Al : Là, il y a un problème, en fait inhérent au logiciel … Vous êtes bien d'accord qu'il faut rentrer la condition sur a et la condition sur c. Le problème, c'est qu'à un moment, il faut affecter à la variable x la valeur $\frac{-b}{a}$ et affecter à la variable x la valeur $\frac{-d}{c}$. Sauf qu'Algobox ne comprend pas quand vous affectez à x la valeur $\frac{-b}{a}$ et qu'à la ligne suivante, vous affectez à x la valeur $\frac{-d}{c}$, il ne comprend pas. Ça veut dire qu'il faut absolument que, dans vos déclarations de variable, vous fassiez quoi ? Que vous ne déclariez pas la variable x, parce que x, on ne s'en sert pas. En revanche, déclarez x1 et déclarez x2. Et appelez celle-là, x1 et celle-là x2. Comme ça le logiciel ne pourra pas confondre les deux…



210. E : Monsieur, on a trouvé une autre technique !

211. Al : Alors, qu'est-ce que vous avez fait ? Ah d'accord, vous avez séparé a ≠ 0 et c ≠ 0. Les autres ont traité a ≠ 0 et c ≠ 0, en même temps… Alors, faites-le tourner et cherchez quels sont les points communs avec les autres équations.

→ ***Phase 6***

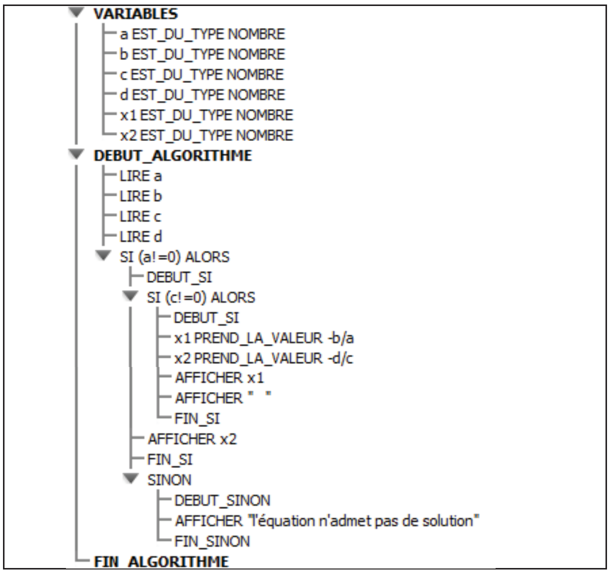
212. **24 : 10** (*Dans un autre groupe*) Al : Alors, c'est bête et méchant ! Moi je teste l'algorithme … Par exemple la première équation, c'est 4, 3, 2 et -1 … Alors, il ne sort rien !

213. E : Ah oui !

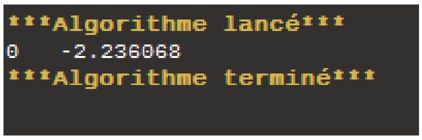
214. Al : Vous avez mis les bonnes valeurs, mais à aucun moment, vous ne lui demandez d'afficher des valeurs ! Il manque la ligne « afficher la variable x1 » et la ligne « afficher la variable x2 ». Sinon, il ne renvoie rien ! Un algorithme, si tu ne lui dis pas fais-ci, fais-ça, il ne renvoie rien.

215. **24 : 50** Al *(à toute la classe)* : Je vous rappelle que la racine c'est « sqrt » et que pi, c'est « Math.PI ».

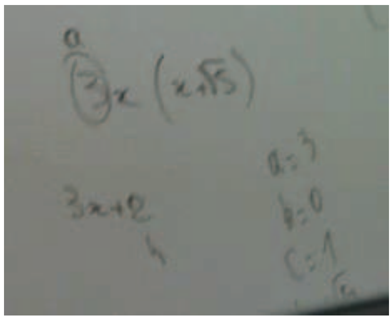
216. **25 :00** (*Des élèves échangent dans un autre binôme autour du programme ci-dessous*)



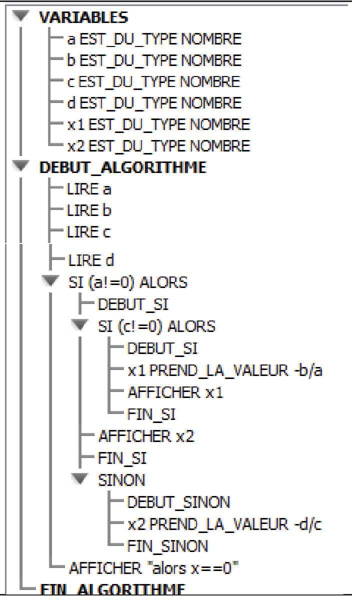
217. E1 : Alors, pour la deuxième (*équation* $3x(x+\sqrt{5})=0$), c'est *a* = 1, *b* = 1 …
218. E2 : Non, c'est *a* = 3, *b* = 0
219. E1 : Ah oui !
220. E2 : Et *c* = 1, *d* = $\sqrt{5}$ …Ça s'écrit « sqrt(5) »

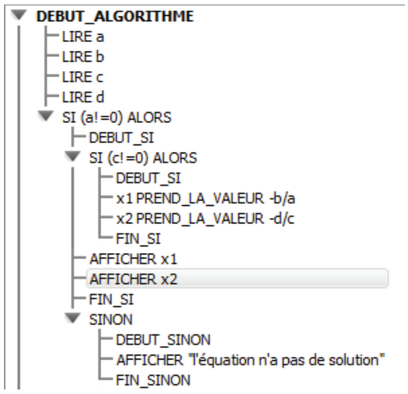


221. E1 : (*L'écran affiche 0 et -2,236068*) Je ne sais pas si c'est bon … On va tester avec la troisième (*équation* $(1-3x)(1+\pi x)=0$)
222. E2 : Alors *a* c'est ….
223. E1 : C'est 1
224. E2 : Mais non, c'est -3, c'est *ax* …
225. E1 : Ah mais oui ! *b* c'est 1 …
226. E2 : *c* c'est pi … Comment on fait pi déjà ?
227. E1 : C'est Math.PI, il l'a dit le prof.



228. Al (*Dans le binôme de Mathilda*) : Dis-moi, Mathilda, 3*x* …. On est bien d'accord que c'est de la forme *ax* + *b* ? Alors 3*x*, c'est bien entendu 3*x* + 0 … Qu'est-ce que tu me racontes que *b* = 1 … Est-ce que j'ai 3*x* + 1 ? Non ! Et ensuite … dans $x+\sqrt{5}$, *c* c'est 1 et *d* c'est $\sqrt{5}$. D'accord ? *(Il écrit au tableau en même temps, voir ci-contre)*
229. **30 :50** Al (*Dans un groupe qui a produit l'algorithme de gauche, page suivante, Alex prend les commandes et corrige pour transformer l'algorithme pour obtenir celui de droite*) : Là, dans votre « sinon », ça veut dire que ces conditions-là sont fausses. Donc ça veut dire que là, *a* = 0 et *c* = 0, donc x2 n'existe pas ! Il faut déplacer la ligne « x2 prend la valeur -d/c » … (*Il le corrige*). Là, vous êtes à l'intérieur de la condition, donc il faut l'écrire ici. Et dans le sinon, je veux afficher le message « l'équation n'a pas de solution ». (*Il le corrige*). D'accord ? Et votre truc « alors x ==0 », c'est … pas ça, d'accord ? Maintenant testons. Alors la première ($(4x+3)(2x-1)=0$) … *a* = 4, *b* = 3, *c* = 2 et *d* = -1. Et ça n'affiche rien ! Il vous manque une chose, c'est quoi là ?
230. E : …
231. Al : Dans l'algorithme, il y a bien x1 et x2 … Mais maintenant, il faut faire quoi ? Il faut évidemment les afficher, il ne les ressort pas. Donc « Afficher x1 » et « Afficher x2 » (*Il corrige le programme*). Sinon, il garde précieusement ces deux valeurs …



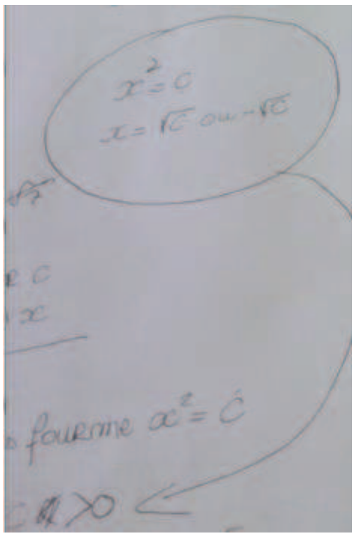


Programme d'un groupe	*Correction du professeur*

232. **33 : 56** (*Dans le binôme de Mathilda*) Al : Alors Mathilda, après quatre points sur $ax + b$, tu continues de penser, quand tu vois $1 - 3x$, que a c'est le premier nombre et b le deuxième …
233. Mathilda : Ah oui, d'accord ! C'est 3…
234. Al : Comment ?
235. Mathilda : Non, -3 !
236. **36 : 01** (*Dans un autre groupe*) Al : Alors, je corrige, c'est faux, là … Tu dois faire « x1 prend la valeur –b/a » et après ?
237. E : « x2 prend la valeur –d/c ».
238. Al : Oui, et après, vous affichez le message, « il n'y a pas de solution ».
239. E : On teste *(la première)*… $a = 4$, $b = 3$, $c = 2$ et $d = -1$…. Ça fait -0,75 et 0,5.
240. Al : Bon, ça c'est juste. Maintenant, testez les deux autres et après, essayez de voir lesquelles sont du même acabit.

→ *Phase 7*

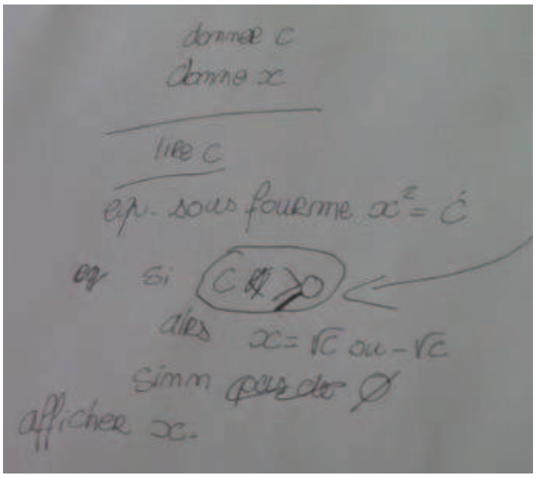
241. **37 : 10** (*Dans le groupe de Jean-Stéphane qui lève le doigt*)
242. Jean-Stéphane : On a fait un modèle.
243. Al : Ah vous avez fait un modèle. Alors, le deuxième … Alors *(en regardant la feuille de l'élève, ci-contre)* le modèle, c'est $x^2 = c$. Vous pensez que ce modèle-là, il existe toujours ? Vous pensez qu'il n'y a pas de condition ?



244. Jean-Stéphane : Je suis pas sûr…
245. Al : Allez, quoi !
246. Jean-Stéphane : Ben justement, si c est plus grand que zéro (*l'élève montre qu'il l'a écrit sur sa copie*)
247. Al (*en entourant comme ci-contre*) : Si ça, ça n'est pas couplé avec ça, ça n'existe pas … Donc la condition fondamentale pour que tu puisses écrire ça, c'est que c soit supérieur à zéro. Alors supérieur ou égal à zéro … Après, si $c = 0$, $\sqrt{0}$, c'est quoi ?
248. Jean-Stéphane : Zéro
249. Al : Donc, si c est supérieur ou égal à zéro, il n'y a pas

de souci (*il modifie* $c > 0$ *en* $c \geq 0$ *sur la copie de l'élève*).

144. Al : Alors effectivement, voilà le concept, voilà l'algorithme (*en approuvant la production ci-contre de Jean-Stéphane*). Alors effectivement, vous pouvez résoudre la 4 ($x^2 = 7$), la 5 ($x^2 = -4$) … Est-ce que je peux en faire une autre ?



145. E : Eh bien, celle-là (*il montre l'équation 9,* $x^2 = (2{,}07)^2$).

146. Al : Parfait !

147. **39 : 00** Al (*Dans le groupe de Lucas*) : Alors, vous avez reconnu les autres, d'une nature différente ?

148. E : Oui, celles-là (*il montre les équations 4 et 5*)

149. Al : Effectivement, donc ça veut dire quoi ? Qu'il faut essayer de les traiter… Tu as reconnu ce qu'il fallait. Le problème ici, pour $x^2 = 7$ … Est-ce qu'on n'en a pas déjà résolu, des comme ça ? Vous ne vous en rappelez pas ?

150. Lucas : On fait $a^2 + b = 0$?

151. Al : Lucas, comment tu résous $x^2 = 4$?

152. Lucas : On fait racine de 4

153. Al : Ou bien quoi ?

154. Lucas : -4 ?

155. Al : Alors dans le cas général ?

156. Lucas : c'est un carré et un carré ne peut pas être négatif.

157. Al : Donc là, ça y est. Vous êtes en train de traiter ce type d'équations (*il montre* $x^2 = 7$ *et* $x^2 = -4$ *sur la feuille d'énoncé*) et le signe qui est à droite est fondamental. Donc là (*il montre* $x^2 = 7$), je vais avoir le droit d'utiliser quoi ?

158. Lucas : La racine carrée.

159. Al : Et là ?

160. Lucas : xxx

161. Al : Alors qu'est-ce qu'il va falloir faire ? Dire que ce deuxième type d'équations est $x^2 = a$ et …

162. Lucas : Et est-ce que là, on n'a pas le droit de transposer 4 de l'autre côté ?

163. Al : Et ça fait $x^2 + 4 = 0$? Qu'est-ce que tu veux faire avec ça ? $a^2 + b^2 = 0$… T'es pas plus avancé !

164. Lucas : xxx

165. Al : Non, elle n'admet pas de solution ! Un carré est toujours positif, -4 est un nombre négatif. Tu ne peux pas trouver de x vérifiant ça. Donc, il va falloir que ton algorithme, il traite en même temps celui-là et celui-là ! Quelle est la condition-là ?

166. Lucas : C'est a positif ?

167. Al : Et quand a est positif, c'est quoi les solutions ?

168. **41 : 34** Al (*à toute la classe)* : Il est bien évident que l'algorithme que vous avez utilisé pour le produit de facteurs du premier degré égal à zéro ne vous permet pas de résoudre $x^2 = 7$. Il faut évidemment en prendre un autre !

169. **42 : 03** (*Dans le groupe de Lucas, les élèves échangent*) E1 : T'as trouvé pour le deuxième ?

170. E2 : Oui, $x^2 = a$, mais si a est positif.

171. E1 : Donc, il y a juste à déclarer a…

172. E2 : Oui, et x aussi. Et tu dois ajouter « si » … « si $a \geq 0$, alors $x^2 = a$ ». Mais comment on met le carré ? On fait x fois x ?

173. E1 : Alors $x^2 = a$ » ? T'es sûre de ça ? Mais non, c'est plutôt $x = \sqrt{a}$ …
174. E2 : Ça revient au même !
175. E1 : Mais non ! C'est x qu'on cherche, pas x^2 !
176. E2 : Ah, ben oui !
177. E1 : Sinon, on écrit : « l'équation n'a pas de solution ».
178. **43 : 50** (*Sonnerie*) Al : Vous rendez les feuilles et vous n'éteignez pas les ordinateurs pour qu'on récupère les programmes.

A40. Transcription de la séance 3.2 du professeur Alex (situation n°3)

Séance filmée le 25/05/2011 en salle informatique.
Pour le codage, se reporter à l'annexe A24.
La feuille d'énoncé à laquelle se réfère Alex est située en annexe A23.
Note : Une seule caméra a été utilisée pour cette séance.

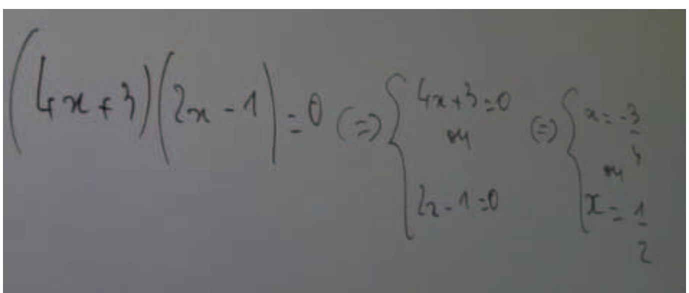
Précision : Une panne du réseau informatique a lieu au moment où débute la séance. Les élèves sont dans l'incapacité de télécharger le logiciel Algobox sur leur poste. Le professeur décide de faire résoudre les trois premières équations à la main.

→ Phase 1

1. **00 : 00** Al : Allez, action ! Je vous rappelle que le but du jeu, ce n'est pas que de résoudre les équations (*c'est-à-dire « à la main »).* C'est évidemment d'avoir en tête quel type de choses je pourrais programmer sur Algobox pour pouvoir, une fois que j'ai rentré mon algorithme sur Algobox être capable de résoudre le plus d'équations possibles, parmi les dix que vous avez. C'est ça l'enjeu. D'accord ?
2. **01 : 26** Al : Toutes les traces de recherche, vous les mettez sur l'envers de votre feuille, servez-vous en comme d'un brouillon. Je rappelle aussi, pour les amnésiques, que la séance d'avant, on avait … résolu quoi ? Des équations de type quoi ?
3. E : Des simples !
4. Al : Oui, des simples, du premier degré. Du type $ax + b$ égal ?
5. E : $cx + d$
6. Al : Oui, $ax + b = cx + d$. Vous vous rappelez ?
7. E : Oui.
8. **02 : 27** Al : Vous devez au moins vous rappeler le théorème qui est à votre disposition, on l'a manié au moins 200 fois ! Non ?
9. **03 : 12** Al (*en s'adressant au groupe de Pauline*) : Pauline, si vous développez, vous vous retrouvez avec un polynôme du second degré. Et un polynôme du second degré, xxx, Donc, ça veut dire quoi, ça veut dire que la forme (*des trois premières équations*), elle est déjà exploitable.
10. **03 : 24** Al (*en s'adressant au groupe de Camille*) : Camille, si tu commences à déprimer parce que je te demande de résoudre ça (*il montre la première équation*), là je suis un peu inquiet quant à ton passage en première, tu vois !... Il y a un seul théorème pour résoudre ça. Je l'ai fait au moins 50 fois !
11. **04 : 00** Al : Alors, essayez de résoudre les trois premières, celles avec des astérisques, et quand vous les avez résolues, essayez de voir comment faire pour programmer ça avec Algobox… Élise, tu es coincée, toi aussi ? Il faut essayer de formaliser ces trois équations pour les programmer.
12. **06 : 20** Al : Alors, c'est quoi le théorème (*pour résoudre les trois premières équations*) ?
13. E : xxx
14. Al : Ah oui ! C'est le théorème de troisième, pour qu'un produit de facteurs soit nul, il faut qu'il y en ait l'un des deux qui soit nul. D'accord ?

→ Phase 2

15. **07 :08** Al : Bon, tout le monde est arrivé à ça ou pas, pour la première équation ? (*Il résout la première équation au tableau*). Des théorèmes, il n'y en a pas 36 ! Si vous commencez à vous dire que



vous devez développer pour arriver à un polynôme du second degré… ça commence à me… hérisser le poil ! Évidemment, c'est pas la peine de développer, sinon vous allez au casse-pipe ! Alors, gardez cette forme-là, sous la forme d'un produit de facteurs… parce que c'est ça l'important, un produit de facteurs, parce que ça, c'est du premier degré (*il montre 4x + 3*), ça c'est du premier degré (*il montre 2x - 1*), c'est plié ! Si vous développez ça, vous allez au massacre...

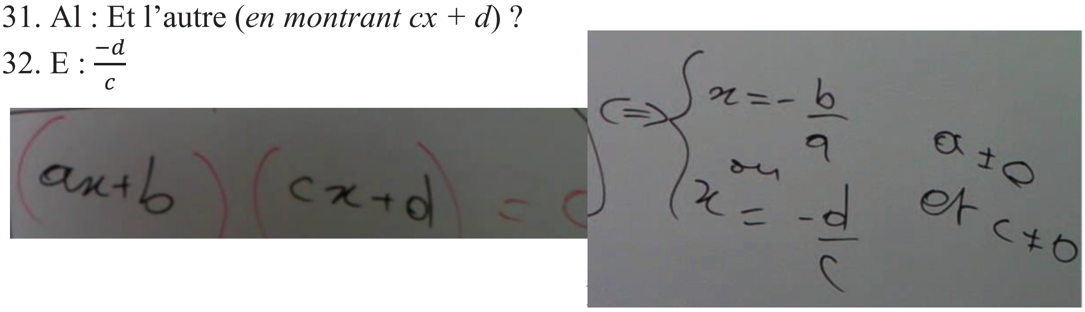
16. E : xxx
17. Al : La première chose que tu as faite, c'est quand même ça ! En développant, on trouve $8x^2 + 2x - 3 = 0$ (*il l'écrit au tableau*) et quand on regarde dans le blanc des yeux cette expression … vous avez beau avoir des lentilles colorées, c'est pas très attirant. D'accord ? Alors, ça (*il montre* $8x^2 + 2x - 3 = 0$), c'est inexploitable ! Alors ça veut dire quoi ? Si vous savez faire ça, vous savez faire les deux autres, enfin j'espère…

→ *Phase 3*

18. **08 : 45** E : Ça y est Monsieur, il y a de nouveau Internet !
19. Al : Non, non, non, c'est très bien qu'il n'y ait pas Internet, on va faire semblant… Parce que les morts de faim sur l'ordi … Alors maintenant, avant de commencer à télécharger Algobox comme des fous furieux, après avoir résolu les deux autres équations (*à la main*), vous allez réfléchir à quelle serait la forme générale de ce type d'équations, égales à zéro. Donc la forme générale, c'est exactement le pendant de ce qu'on avait fait pour les équations du type $ax + b = cx + d$. Vous vous en souvenez ou pas ?
20. Es : Oui !
21. **09 : 37** Al : Donc il faut trouver la forme générale de tout produit de deux facteurs égaux à zéro... Et ensuite, il va falloir me trouver les conditions.
22. **11 : 10** Al : Alors, Mélanie, c'est le bulldozer ! Elle a résolu les 10 équations et c'est fini ! Le but du jeu, c'était pas ça … Je comprends que tu aies pris du plaisir, mais…

→ *Phase 4*

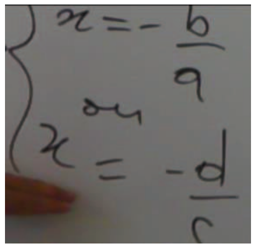
23. **11 : 40** Al : Bon, vous regardez-là ? Donc ici, la deuxième équation, c'était $3x\left(x+\sqrt{5}\right) = 0$ (*il l'écrit au tableau*). Donc vous voyez une différence, déjà, par rapport à ce qui précède, qu'est-ce qui se passe … dans le premier facteur ? Rebecca ?
24. Rebecca : Il n'y a pas de « + *b* » ou « – *b* ».
25. Al : Vous avez entendu, en plus ça doit vous aider, il n'y a pas le fameux « + *b* ». Donc dans ce cas-là, vous avez $b = 0$. D'accord ? Donc, par extension, à votre avis, quel va être le cas général de ce type d'équations. Julie ?
26. Julie : $ax + b$ facteur de $cx + d$ égal zéro.
27. Al (*en l'écrivant au tableau*) : Alors ça, vous êtes bien d'accord que si je configure un algorithme avec un type d'équations comme ça, je vais pouvoir, si je note *a, b, c* et *d*, je vais pouvoir trouver les solutions. Vous êtes bien d'accord ? Là (*en montrant la résolution de la première équation au tableau*), qu'est-ce que vous avez fait … vous avez transposé. Ici, vous avez la première solution « -3 sur 4 ». Ça va être quoi, par rapport à celle-là (*en montrant l'équation (ax + b)(cx + d) = 0 au tableau*) ?
28. E : …
29. Al : C'est quoi la solution de $ax + b = 0$?
30. E : $\frac{-b}{a}$
31. Al : Et l'autre (*en montrant* $cx + d$) ?
32. E : $\frac{-d}{c}$



33. Al : Et après, on passe à la programmation, c'est ça ?
34. Fanny : Non, il y a des conditions.
35. Al : Alors, c'est quoi les conditions, Fanny ?
36. Fanny : *a* et *c* différents de zéro.
37. Al : Très bien. Alors effectivement, vous devez avoir forcément *a* et *c* différents de zéro. Vous êtes d'accord ?
38. Es : Oui.
39. Al : Voilà ce qu'il va falloir essayer de programmer sur Algobox.
40. **13 : 28** Al : Si vous programmez ce type de solutions, il vous faut évidemment nommer ces conditions-là et il n'y a plus qu'à nommer *a, b, c* et *d.* Si *a* et *c* sont différents de zéro, eh bien, c'est terminé, d'accord ? Bon, allez-y sur Algobox.

➔ ***Phase 5***

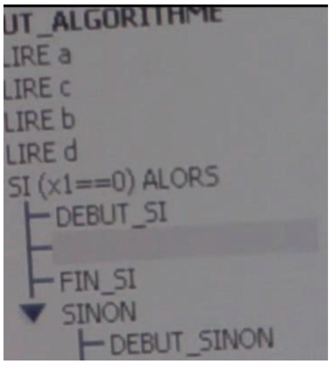
41. **15 : 30** (*Les élèves installent Algobox sur leur poste informatique*) Al : Tout le monde l'a ? Maintenant vous me programmez ça. Allez !
42. **16 : 00** Al : Juste un détail. Vous regardez tous ? Ça, c'est inhérent au logiciel Algobox. Vous avez vu ce que j'ai fait … J'ai écrit $(ax + b)(cx + d) = 0$ et j'ai écrit ça (*il montre les deux solutions sous la forme ci-contre*). À votre avis, quel problème je vais avoir sur Algobox ? À votre avis ? Marine ?



43. Marine : Il faut mettre des petites étoiles pour les trois ?
44. Al : Oui… On va réclamer une deuxième chance… on peut mettre une petite fleur aussi… À votre avis, qu'est-ce qui va être impossible pour Algobox à gérer ?
45. E : Le « ou » ?
46. Al : Non, c'est pas ça.
47. E : Le « moins » ?
48. Al : Non.
49. Julie : Que le *x* soit égal à deux valeurs ?
50. Al : Très bien. Vous avez entendu ce qu'a dit Julie ? Algobox, si vous lui dites, « Affecter à x la valeur –b/a » et la ligne suivante, « Affecter à x la valeur –d/c », le pauvre Algobox va jouer des castagnettes. Donc, pour que vous n'ayez pas de problème, en fait, il y a deux variables à nommer. Vous avez capté ? Il n'est pas capable de reconnaître deux x différents.
51. **18 : 39** Al : Programmez-moi ça.

➔ ***Phase 6***

52. **19 : 50** Jimmy : *(qui appelle le professeur)* La condition, c'est « si … alors … » ?
53. Al *(s'adressant au groupe de Jimmy)*: Le problème, c'est qu'il y a deux conditions. Tu ne peux pas mettre deux conditions. Donc tu vas avoir un premier « si » pour celle-là ($a \neq 0$) et pas forcément un « sinon » tout de suite, et il faut mettre un deuxième si pour celle-là ($c \neq 0$).
54. E : On ne peut pas mettre un « et » dans le « si » ?
55. Al : Essayez de voir s'il accepte « si $a \neq 0$ et $c \neq 0$ » …
56. E : Oui, oui, ça marche.
57. Al : Est-ce qu'il accepte aussi le « ou » ?
58. E : Oui, oui.
59. **20 : 15** Al *(en contrôlant le début de programme ci-contre dans le groupe de Julie)* : Julie, tu as écris « si x1 = 0 » … x1 c'est le résultat d'un calcul, x1 c'est *–b/a*, donc ta condition, elle n'est pas sur x1, elle est sur *a*.



60. Julie : Alors il faut que je marque « si $a \neq 0$ »
61. Al : Oui, et ensuite, il faut que tu fasses les deux conditions qui se suivent, sinon c'est trop compliqué. Tu mets un deuxième si, avec comme condition $c \neq 0$ … Donc, avec $a \neq 0$ et $c \neq 0$, tu es sûre d'avoir quoi … comme solutions ?
62. Julie : …
63. Al : Tu as les conditions $a \neq 0$ et $c \neq 0$, donc tu peux lui dire x1 est égal à –b/a et ça, ça sera la première solution de ton équation.
64. Julie (*en aparté à son binôme*) : Il y a le « sinon » qui me gêne et j'arrive pas à le gérer …
65. **24 :18** Al : « Affecter une valeur à une variable », c'est bien mais vous savez qu'un algorithme, c'est bête et discipliné, il faut quand même lui renvoyer l'ordre de faire quoi ? De renvoyer la variable. Donc d'afficher x1 et x2. D'accord ?

→ ***Phase 7***

66. **25 : 00** (*Un premier groupe d'élèves teste son programme donné ci-contre*) E1 : On le teste ?

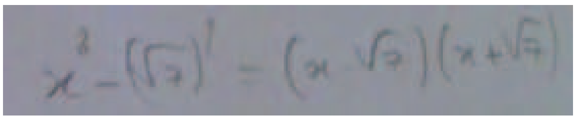
```
│ ├─d EST_DU_TYPE NOMBRE
│ ├─x1 EST_DU_TYPE NOMBRE
│ └─x2 EST_DU_TYPE NOMBRE
▼ DEBUT_ALGORITHME
│ ├─LIRE a
│ ├─LIRE b
│ ├─LIRE c
│ ├─LIRE d
│ ▼ SI (a!=0) ALORS
│   ├─DEBUT_SI
│   ▼ SI (c!=0) ALORS
│   │ ├─DEBUT_SI
│   │ ├─x1 PREND_LA_VALEUR -b/a
│   │ ├─x2 PREND_LA_VALEUR -d/c
│   │ └─FIN_SI
│   ├─AFFICHER x1
│   ├─AFFICHER x2
│   └─FIN_SI
└─FIN_ALGORITHME
```

67. E2 : Oui. On entre *a*. C'est … 4
68. E1 : *b*, c'est 3… *c* c'est 2 et *d* c'est -1
69. E2 : Ça fait -0,75 et 0,5.
70. E1 : Et c'est ça ?
71. E2 : Ouais ! -0,75, c'est – ¾. Ça marche. Et un demi, c'est 0,5.
72. E1 : La deuxième, on met quoi pour le *b* ?
73. E2 : C'est 3*x*... Ça fait zéro.
74. **26 : 20** Al (*à toute la classe*) : Pour ceux qui ont terminé et pour qui l'algorithme fonctionne, vous avez la suite …
75. **27 : 00** Al (*dans le groupe de Fanny et Marine*) : Alors, question 2, quelles sont celles qui, sans les transformer, correspondent au premier type ? Sans les transformer ?
76. Marine : La 7 ($-\frac{1}{4}x\left(\frac{1}{2}x+9\right)=0$) et la 10 ($-0{,}1x(900-0{,}1x)=0$).
77. Al : Oui. Et avec transformation … immédiate ?
78. Marine : Celle-là (la 8, $7x - x^2 = 0$) … mais je trouve 0 et 7 et la machine 0 et 0,142…
79. Al : Fanny, tu trouves quoi … 0 et $\sqrt{7}$? *x* fois 7, ça fait bien 7*x* ?
80. Fanny : Oui…
81. Al : *x* fois – *x*, ça fait bien – x^2 ?
82. Fanny : Oui.
83. Al : Alors, pourquoi, tu mets 0 ou $\sqrt{7}$?
84. Fanny : Et bien j'hésitais, parce que la machine …
85. Al : Mais non, là, c'est comme si tu avais écrit $x(\sqrt{7}-x)=0$. Ta factorisation n'est pas bonne, là !
86. Fanny : Ah oui !
87. Al : Tu as la racine qui est en trop. Cette racine carrée, c'est une scorie !
88. Marine : Alors pourquoi le programme ne trouve pas 7 ? Alors … (*en faisant tourner le programme,* j'ai mis 1 *(pour a)* … 0 *(pour b)*…7 *(pour c)* ... -1 *(pour d)*
89. Al : Ah !
90. Marine : Ah non ! C'est 1, 0, -1 et 7 ! Ça marche !
91. Al : Ah c'est marrant, hein !
92. (*Dans le groupe de Julie et Clémentine*) E1 : Alors question 2, il y a la 7. Tu rentres -1/4 pour *a*, 0 pour *b*, puis ½ et 9 …
93. E2 : Ça fait quoi ? 0 et -18.
94. E1 : Il y a la 10 aussi… 0,1 pour *a*, 0 pour *b*, puis -0,1 pour *c* et 900 …
95. E2 : Voilà, 0 et 9000.

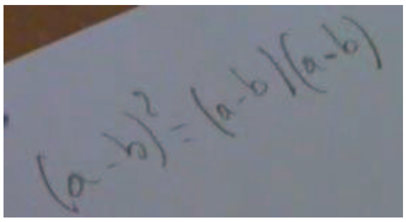
96. **30 : 00** Al *(à toute la classe)* : Je vous signale que vous avez une partie 2 et une partie 3 à faire aujourd'hui !
97. *(Dans un autre groupe)* E1 : pour la première 4*(pour a)* … 3 *(pour b)*…2*(pour c)* ... -1 *(pour d)*…
98. E2 : Ça fait -0,75 et 0,5. C'est pareil.
99. E1 : Monsieur, c'est comment « racine carrée » ?
100. Al : C'est « sqrt(...) »
101. **31 : 13** Al *(à toute la classe)* : Vous regardez, tous ? Cet algorithme-là a résolu combien d'équations sur vos 10 équations ?
102. E : les trois premières ?
103. Al : Donc, ça m'a résolu mes trois premières équations. Ce que vous avez à faire, c'est allez voir les autres qui correspondent exactement à cet algorithme…
104. Coline : Il y a la 7 !
105. Al : Oui, et quoi d'autre, Coline ?
106. Coline : la 10.
107. Al : Oui, la 10. Vous voyez que ces trois équations avec astérisques plus la 7 et la 10 sont effectivement du même acabit. D'accord ? Le problème, c'est qu'il en reste encore 5 autres qu'on ne peut pas résoudre par cet algorithme-là. Donc maintenant le but du jeu, c'est d'essayer de trouver un algorithme capable de résoudre, par l'exemple l'équation 4.

→ Phase 8

108. **36 : 00** Al (*Dans le binôme de Marine et Fanny*) : Vous avez parlé de transformation pour pouvoir faire fonctionner cet algorithme pour les autres équations. Là, qu'est-ce que vous êtes en train de faire quand vous faites ça ?
109. Marine : Ben la même chose …
110. Al : Alors vous faites bien une transformation, mais qui est pas de la même nature … Là, c'est une transformation avec quoi ?
111. Fanny : Avec x en facteur…
112. Al : Donc c'est quoi ?
113. Marine : C'est une factorisation.
114. Al : Et c'est quel théorème ?
115. Marine : Quel théorème ?
116. Al : Il n' y en a pas 36 pour ça … Qu'est-ce que vous faisiez en 4ème et 3ème ?
117. Marine : Factorisation par un facteur commun
118. Al : Très bien ! Et là (*en montrant l'écrit ci-contre*), qu'est-ce que vous avez fait ?



119. Fanny : Ben, factoriser avec une identité remarquable.
120. Al : Alors ce que vous êtes en train de soulever ? Est-ce que via deux types de transformation, je ne peux pas toujours me ramener toujours à ça ? Presque !
121. Marine : Mais alors, là aussi (*en montrant l'équation 6*, $x^2-10x+25=0$) !
122. Al : Alors là, ça va être un peu plus compliqué, parce que je ne vais pas avoir tout à fait la même chose.
123. Marine : Ça va être une identité remarquable aussi !
124. Al : Oui, très bien, c'est une identité remarquable aussi, mais ça ne va pas être du $a^2 - b^2$. ça va être quoi ?
125. Marine: Eh ben $(a-b)^2$.
126. Al : Mais ce sont des choses déguisées : $(a-b)^2$ ça fait quoi ?
127. Marine : Eh bien $(a-b)(a-b)$.
128. Fanny : C'est pas plutôt $(a-b)(a+b)$?



129. Marine : Mais non, c'est pas « plus » !
130. Al : Mettre au carré, c'est mettre deux fois le même facteur ! Donc en fait, votre algorithme de départ, en fait, il contient tout.
131. Marine : Donc, c'est pas la peine d'en faire un autre en fait, il faut juste transformer.
132. Al : Avec transformation, en fait, il contient tout !
133. Marine : Et on ne pourrait pas faire un algorithme qui transforme les expressions ?
134. Al : C'est difficile … Dans 10 ans, quand vous serez ingénieur en informatique, peut-être !
135. Marine : C'est ma destinée…
136. Al : En attendant, faites-en un autre pour résoudre celles-là (*il montre* $x^2 = 7$ *et* $x^2 = -4$) sans les transformer !
137. **41 : 24** (*Dans un autre binôme*) E : Monsieur, il marche pas !
138. Al : Vas-y. Essaie la première…
139. E : *a* c'est 4, *b* c'est 3, *c* c'est 2 et *d* c'est 1 ou – 1 ?
140. Al : C'est -1
141. E : Ça affiche -0,75 et 0

```
VARIABLES
  x1 EST_DU_TYPE NOMBRE
  x2 EST_DU_TYPE NOMBRE
  a EST_DU_TYPE NOMBRE
  b EST_DU_TYPE NOMBRE
  c EST_DU_TYPE NOMBRE
  d EST_DU_TYPE NOMBRE
DEBUT_ALGORITHME
  LIRE a
  LIRE b
  LIRE c
  LIRE d
  SI (a!=0) ALORS
    DEBUT_SI
    x1 PREND_LA_VALEUR -b/a
    FIN_SI
    SINON
      DEBUT_SINON
      SI (c!=0) ALORS
        DEBUT_SI
        x2 PREND_LA_VALEUR -d/c
        FIN_SI
        SINON
          DEBUT_SINON
          AFFICHER "pas de sloution"
          FIN_SINON
      FIN_SINON
  AFFICHER x1
  AFFICHER x2
FIN_ALGORITHME
```

142. Al : C'est parce qu'il y a le « si » et le « sinon » à la suite… C'est-à-dire que tu dois prendre les deux … En fait, ici tu dois pas mettre de « sinon », parce que tu vas afficher l'une des solutions, sinon, tu vas afficher l'autre.
143. E : Ah oui …*(L'élève corrige son programme)*
144. **45 : 10** *(Sonnerie)* Al : Bon, vous me donnez les feuilles et attendez avant de fermer les ordinateurs.

A41. Exemple d'une production d'élève pour la situation n°3 de la classe d'Alex

Nom(s) : …………… Classe : 2°1

Prénom(s) : Emil

L'objectif est de réaliser sur Algobox des algorithmes permettant de résoudre les équations ci-dessous.

1. *Réaliser un algorithme sur le logiciel Algobox permettant de résoudre les trois premières équations ci-dessous,* ***sans les transformer au préalable****.*
2. *Signaler par une * les équations similaires. Faire fonctionner l'algorithme pour ces équations.*
3. *Comment peut-on résoudre les équations restantes avec un autre algorithme ? Le construire et résoudre les autres équations à l'aide de ce nouvel algorithme.*

Le travail à rendre à la fin de l'heure sur la fiche.

* Equation 1 : $(4x+3)(2x-1)=0$	Solution 1: -0,75 et 0,5
* Equation 2 : $3x(x+\sqrt{5})=0$	Solution 2: 0 et -2,24
* Equation 3 : $(1-3x)(1+\pi x)=0$	Solution 3: 0,33 et -0,32
- Equation 4 : $x^2=7$	Solution 4: 2,64
- Equation 5 : $x^2=-4$	Solution 5: ∅
Equation 6 : $x^2-10x+25=0$	Solution 6: ………………
*Equation 7 : $-\frac{1}{4}x\left(\frac{1}{2}x+9\right)=0$	Solution 7: 0 et -18
Equation 8 : $7x-x^2=0$	Solution 8: ………………
- Equation 9 : $x^2=(2,07)^2$	Solution 9: ………………
*Equation 10 : $-0,1x(900-0,1x)=0$	Solution 10: 0 et 9000

Annexes A40 à A43 : Entretien terminal avec les professeurs expérimentateurs

Les trois entretiens post-expérimentation des professeurs

A42. Entretien post-expérimentation : enseignante Annabelle

Entretien réalisé le 23/06/11.

Partie 1 : les contenus mathématiques

1. C : **Q1.1.** *Comment as-tu perçu le travail que nous avons construit ensemble par rapport à l'apprentissage des mathématiques ?*
2. An : Je pense que ce travail était intéressant, mais arrivait un peu tard dans l'année, par rapport à ce qu'on a fait en février-mars. Ça aurait été plus intéressant si on avait pu le faire au premier trimestre. Bon il y avait les contingences … C'était intéressant, mais du coup ça n'a pas amené tout ce que ça aurait pu amener si … ça a été fait un peu dans l'urgence, on a casé ça comme on a pu et ça aurait été plus intéressant si on l'avait fait plus tôt. Je suis quasiment persuadée que … du coup, sur la répercussion pour les élèves, je vais avoir un peu de mal à analyser la chose.
3. C : **Q1.3-Q1.4** *Qu'est-ce que tu as pensé de ce travail par rapport à l'enseignement de l'algèbre, par rapport à celui de l'algorithmique et le lien de l'un par rapport à l'autre ?*
4. An : Par rapport à l'algorithmique, vu que j'en avais fait pas mal, par rapport à ce qui a été fait, ça a été un plus, mais ça n'a pas changé grand-chose, disons que c'était un plus… C'était pour mettre en valeur des méthodes, donc si ça avait été fait plus tôt dans l'année, ça aurait été plus intéressant. Euh …par rapport à l'algèbre, j'ai bien aimé cette histoire de classification des équations. Je l'ai évoqué après en cours, ça !
5. C : Ah !
6. An : J'ai utilisé l'idée du « moule » de l'équation. Ça, je l'ai repris et ça, cette situation, je vais la garder par la suite, avec ou sans algorithmique.
7. C : La séance où l'on classe les équations ?
8. An : Oui, mettre en valeur les équations, voir les conceptions des équations, ça, ça me paraît intéressant. Après, comme j'ai pas pu faire l'algorithmique avec les deux groupes, …
9. C : Oui, c'est difficile d'avoir une vue d'ensemble… C'est mal tombé…
10. An : Oui, mais j'ai eu l'impression pour l'évaluation finale qu'il y en a certains qui avaient un peu plus l'idée de ce qu'il fallait mettre, que c'était quand même un peu mieux…
11. C : Est-ce que tu peux m'expliquer comment tu l'as reprise, cette classification des équations ?
12. An : Quand j'avais une équation à résoudre, je leur demandais : « alors, ça se comporte comment ? » Et donc, j'avais à peu près la distinction entre premier et second degré.
13. C : Plus nette qu'avant ?
14. An : Un peu plus nette… Après, on reprenait le fait qu'une équation du second degré, on peut la résoudre si on arrive à la factoriser. En fait, c'était surtout savoir dans quelle catégorie les mettre… quand j'ai fait la fonction carré, on a pu revoir ça.
15. C : Donc ça, ça t'a semblé intéressant ? Ce n'est pas quelque chose qu'on fait fréquemment…
16. An : Non, mais je crois que c'est pas mal.
17. C : **Q1.5-Q1.6** *Et l'articulation de l'un par rapport à l'autre ?* Est-ce que tu as trouvé que l'algorithmique apportait quelque chose à la résolution d'équations ? Est-ce que tu as eu l'impression que ça permettait une meilleure compréhension de ce qu'était une résolution d'équation du premier degré ?
18. An : Je ne sais pas … Honnêtement, ça leur a plu, … après, c'est pas révolutionnaire, mais je ne peux pas dire que ça n'a pas amené quelque chose mais je sais pas trop dans quelle mesure, si tu me demandais un pourcentage … je ne sais pas la force que ça a eu. Ça vient

dans un processus d'assimilation… Peut-être qu'un jour, quand ils feront les équations du second degré, ça aidera … Tu vois, c'est pas flagrant. Je ne peux pas dire que ça n'ait pas d'intérêt, je pense que ça peut être intéressant pour certains. J'ai une classe qui est très vivante…

19. C : Oui, j'ai vu …
20. An : Mais après dans les résultats, elle est hyper décevante, donc… C'est pour ça que je suis en retrait, parce que même quand je pense qu'ils ont compris quelque chose, en devoir ils font n'importe quoi, parce qu'ils n'ont rien bossé. Voilà, mais pourtant en classe…
21. C : Oui, j'ai vu, ils s'investissent…
22. An : Oui, mais en classe et à côté, rien ! C'est pour ça que j'ai du mal à évaluer l'impact de ce que je fais, mais ça, c'est pas seulement par rapport à ton activité, c'est tout au long de l'année. Mon bilan, c'est que je ne sais pas du tout ce que j'ai fait avancer. On finit à 8 de moyenne… Ah ça, pour être actifs en classe…

Partie 2 : Organisations mathématique et didactique de l'expérimentation

23. C : **Q2** *Et par rapport à l'organisation choisie, par exemple de faire la séance de la catégorisation des équations en classe entière plutôt qu'en demi-classe ?*
24. An : L'organisation, c'était bien… C'était bien en classe entière pour le tri. Mon seul regret, c'est de ne pas avoir pu faire passer les deux demi-groupes (*pour la situation n°2*)…
25. C : Oui, c'est dommage.
26. An : C'était bien les groupes de 3 puis de 6 pour la séance du tri, ça tournait bien.
27. C : Et justement, par rapport aux deux séances, tu n'as pas l'impression qu'entre la séance de tri et la séance d'algorithmique, il aurait fallu faire une sorte de bilan, après qu'ils aient classifié ? Ou tu pensais que c'était mieux de les laisser cheminer seuls ?
28. An : Ça aurait été bien de faire une synthèse peut-être … C'est pour ça que je dis qu'ils n'ont pas eu assez de temps, que j'avais l'impression de tout faire dans l'urgence. Oui, ça aurait été pas mal de faire une synthèse de tout ça…
29. C : Et tu serais revenue sur quoi ?
30. An : Eh bien, comment faire une classification un peu plus correcte.
31. C : En fait, synthétiser les commentaires que tu faisais pour chaque affiche …
32. An : Oui, il n'y avait pas encore assez d'ordre dans les affiches… Ça aurait été bien de faire un bilan ou alors de faire deux heures pour avoir le temps de faire ce bilan. Oui, il aurait fallu faire une reprise… Mais à la fin de l'année, c'était un peu mieux … Je me servais du principe de la classification pour leur dire « *tant que vous ne savez pas dans quel « moule » se trouve l'équation, ne faites rien, de toute façon vous n'allez faire que des bêtises* ». Maintenant, ils savent chercher le degré … Ils ont plus l'idée de factoriser, de développer… J'ai réinvesti la catégorisation… J'ai été plus convaincue par l'histoire de la classification que par l'algorithmique…
33. C : A propos de l'algorithmique, comme tu avais expliqué la différence entre inconnue et paramètre, est-ce que ça tu as eu l'occasion de le réinvestir ?
34. An : Non, j'ai pas eu l'occasion. Mais c'était pas mal, ça…

Partie 3 : l'apprentissage des élèves

35. C : **Q3.1** *Y a-t-il des points qui t'ont surprise, par rapport aux réactions des élèves, notamment sur leur motivation, mais aussi sur leurs procédures, leurs connaissances ? En particulier y a-t-il des points que tu ne t'attendais pas à rencontrer ou au contraire des points que tu étais certaine, de par ton expérience, voir surgir ?*

36. An : Pas vraiment, non… Ils ont toujours la même attitude, c'est-à-dire faire n'importe quoi au début et quand tu les pousses un peu, ils se mettent à réfléchir…Il y en a un, Pierre, qui a bien accroché mais les autres …
37. C : Ils sont passifs …
38. An : C'est un problème qu'on va avoir de plus en plus, je crois.
39. C : Puisque tu dis que tu veux refaire la classification des équations, est-ce que là, tu n'as pas été surprise parce qu'ils voyaient dans une équation, justement ?
40. An : Ah bien si ! Ça m'a affolé même ! Pour moi, pour mon enseignement, ça a été très formateur, après pour eux, je ne sais pas, mais pour moi, ça l'a été … de voir à quel point ils étaient à côté de la plaque !
41. C : Moi aussi, ça m'a étonné que ce soit à ce point-là !
42. An : Ça a été formateur pour moi ! Ça a au moins ce mérite-là.
43. C : C'est pour ça que tu penses le refaire, et tu disais plus tôt dans l'année ?
44. An : Ah oui, pour moi, il faut le faire très rapidement.
45. C : Dès qu'on aborde le premier degré…
46. An : Oui, et insister dès le départ sur le « moule » à équations.
47. C : **Q3.2.** *Penses-tu qu'un travail de ce type plus suivi, sur une plus longue période pourrait améliorer les compétences des élèves en algèbre ?*
48. An : Oui ! Je pense que oui mais il aurait fallu le lancer plus tôt et le réinvestir plus tôt. Pas spécifiquement faire plus de séances de ce style mais…en commençant plus tôt, le réinvestir plus tôt.
49. C : Donc pas forcément en faire plus …
50. An : A partir du moment où tu as fait la séance du tri, tu l'évoques à chaque occasion quand tu résous une équation : on a des x ou des x au carré ? On a une somme ou un produit ?
51. C : **Q1.2** Alors justement, *par rapport aux équations du premier degré dont la résolution est au programme de troisième, est-ce que ça t'a gênée qu'on refasse ça, par rapport au programme actuel, alors que c'est du niveau troisième ?*
52. An : Ah mais non ! puisque c'est pas acquis. Non, ça m'aurait gênée si ça avait été acquis…
53. C : Ils n'en reparlent plus dans le programme de seconde actuel, c'est pas évoqué qu'il faut retravailler les équations du premier degré.
54. An : Non mais, ils fuient tout calcul maintenant. Tu as vu les programmes de première S, dès qu'il y a une difficulté, ils disent : « on prend la calculatrice », donc laisse tomber ! Je pense qu'ils vont revenir dessus mais actuellement, sur le calcul formel, ils sont en train de complètement se planter.
55. C : Tu penses que ça va s'inverser ?
56. An : Les profs de prépa ont sorti une pétition …S'ils ne savent pas calculer la dérivée, c'est pas grave, on leur donne la dérivée … Et tout est comme ça ! Tout ce qui est algèbre est sorti des programmes. Avec ton activité, tu es à contre-courant de ce qui est en train de se passer !
57. C : On est d'accord !
58. An : Sauf que tu as ajouté l'algorithmique, ça, c'est à la mode ! Mais au niveau des programmes…
59. C : Oui, tu as vu que tout ce qui est algèbre est fondu dans les fonctions !
60. An : Non, c'est fondu tout court ! Il ne faut plus faire de l'algèbre pour de l'algèbre…
61. C : Tu penses que c'est un problème ?
62. An : C'est une catastrophe ! On perd de la crédibilité… Mais d'après moi, on va y revenir.

Partie 4 : bilan et évaluation

63. C : **Q4.** *Si c'était à refaire, est-ce que tu le referais ?*
64. An : Oui, mais plus tôt.
65. C : *Sous la même forme ou non ?*
66. An : Sûr pour la classification. Pour l'algorithmique, pourquoi pas ? C'est une activité de type « si … alors », c'est intéressant, je n'en ai pas fait tant que ça.
67. C : Et l'utilisation d'Algobox ?
68. An : Algobox est très critiqué, parce que eu pas assez « informatique »… Mais j'y ai réfléchi. Tu ne peux pas avoir la même vision pour ceux qui vont faire la spécialité « sciences du numérique » de terminale S et les autres élèves. Notre but, ce n'est pas de leur apprendre où il faut mettre la virgule dans le programme ! Donc Algobox, c'est suffisant pour nos élèves … Notre but, c'est qu'ils sachent écrire un algorithme, … Algobox est très commode pour ça. D'ailleurs, je ne sais pas si tu as vu, dans les accompagnements de 1S, ils ont mis Algobox dedans.
69. C : Avec Algobox, on peut déjà comprendre la structure d'un algorithme.
70. An : J'ai déjà fait des simulations sur Excel, sur Algobox, c'est déjà pas mal de voir ces deux façons différentes… On n'est pas là pour en faire des informaticiens.
71. C : Merci pour tout.

Fin de l'entretien

A43. Entretien post-expérimentation : enseignant Maurice

Entretien réalisé le 23/06/11.

Partie 1 : les contenus mathématiques

1. C : **Q1.1-** *Comment as-tu perçu le travail que nous avons construit ensemble par rapport à l'apprentissage des mathématiques ?*
2. M : Tu peux préciser ta question ?
3. C : **Q1.3-Q1.4-Q1.5** *Par rapport à l'enseignement de l'algèbre, par rapport à celui de l'algorithmique et le lien de l'un par rapport à l'autre, comment as-tu perçu ce travail ?*
4. M : Au départ, je n'étais pas persuadé, j'étais … je ne savais pas, je n'avais pas d'idée préconçue. Mais à la lecture des résultats, je pense que c'est une excellente façon de lier la partie mathématique et la partie algorithmique. Là, je pense que dans ce cadre assez réduit, l'algorithmique a été utile. Je …
5. C : Utile à l'apprentissage des maths ?
6. M : Oui, et à la compréhension des mécanismes de résolution d'équations. Oui, et je pense que c'est quelque chose qui est bien plus en synthèse qu'en introduction, …
7. C : Oui, donc ça avait sa place là …
8. M : Même si c'est un travail qu'on aurait pu faire au premier trimestre, mais pas tout à fait au début de l'année. Ça ne peut pas être une activité de révision tout à fait au début. En revanche, après avoir revu la pratique des équations en début de seconde, je pense que c'est une bonne chose en synthèse. Par exemple, à envisager pour l'année prochaine, juste avant une synthèse sur la résolution des équations du premier degré. Avoir pratiqué d'abord des exemples concrets, apprendre la technique, et avant de distribuer une feuille de synthèse, avoir fait …ça ! En même temps, c'est une introduction pour l'algorithmique, c'est pas évident, ça a un intérêt, donc moi je trouve que c'était bien … Pour une fois, ce n'est pas une partie où l'algorithmique est simplement « plaquée », ce n'est pas étudié pour l'algorithmique seul, ça a un intérêt.
9. C : Oui, un intérêt pour l'algèbre …
10. M : Et aussi le statut des lettres, des paramètres etc., ce qui à mon avis est un gros problème justement de compréhension, je crois que … et le statut de l'égalité aussi.
11. C : Ça fait ressortir tout ça de façon pointue …
12. M : Et en même temps, sur un problème qui est relativement simple. Rien que déjà le début… l'équation $ax + b = c$ avec la place des paramètres … un petit algorithme qui est relativement simple à mettre en place et qui ajoute … Et là, la partie résolution d'équations éclaire l'algorithmique et réciproquement. Je trouvais que c'était bien.
13. C : **Q1.2** *Est-ce que tu crois qu'on est dans les programmes actuels quand on fait ce genre de choses ?*
14. M : Oui, je crois que oui. Oui, sans aucun doute
15. C : Y compris la première séance ? Le classement des équations ?
16. M : … Je ne sais pas. La première séance n'a pas été pour moi une très grande réussite. La deuxième séance a été très bien. La première séance était intéressante, mais elle était peut-être plus intéressante pour nous que pour les élèves eux-mêmes, c'est-à-dire pour ce qu'ils en ont sorti. Nous, ça permet de mieux comprendre ce qui se passe dans leur tête, mais en revanche je suis pas certain que … Et puis j'avais une classe qui n'a pas joué le jeu. Peut-être qu'avec une autre classe, ça aurait été différent.
17. C : Tu vois, c'est marrant, parce que pour Annabelle, c'est exactement le contraire. Pour elle, la séance sur le classement des équations a beaucoup mieux fonctionné que celle sur l'algorithmique.
18. M : Pour ma classe, ce qu'ils ont fait n'était pas illogique…

19. C : Vous n'avez pas eu le même profil de classe, donc c'est normal que vous n'ayez pas le même ressenti. Sinon, je te demandais si tu pensais que c'était bien au programme, parce qu'ils proposent tout avec l'algorithmique, sauf de l'algèbre, tu as remarqué ?
20. M : Mais je pense que c'est moins spectaculaire que les probabilités, pour les simulations, tu en as besoin, ou bien en géométrie où tu peux faire apparaître des choses animées …c'est plus attractif, peut-être. En algèbre, il a y a quand même les résolutions d'équations par dichotomie …
21. C : Oui, mais c'est encore dans le cadre fonctionnel…
22. M : Cette année, je ne suis pas dans les clous, j'en ai pas fait assez de l'algorithmique, mais je ne sais pas où j'aurais pu prendre le temps ! On a eu une formation avec un type de chez Texas, j'étais très impressionné, c'était très bien, mais où trouve-t-il le temps ? Je suis très admiratif, j'ai beaucoup aimé ce qu'il a fait … Avec les lacunes de nos élèves, j'ai pas l'impression de perdre mon temps en classe ! Comment il trouve le temps de faire tout ça… Moi, la dichotomie, je ne sais pas quand j'aurais pu trouver le temps, ça prend du temps, je ne vois pas quelle séance j'aurais pu remplacer, une qui aurait été inutile…
23. C : L'activité que j'ai proposée, contrairement à la dichotomie qui est dans un cadre fonctionnel, fait fonctionner l'algèbre pour elle-même et non pas comme outil au service de … des fonctions en l'occurrence ici. C'est pour ça que je te demandais si tu avais l'impression d'être resté dans le programme ou pas.
24. M : Vu mon hostilité au nouveau programme, je ne suis pas une référence… Je pense que les élèves ont besoin de structure, et qu'on leur en donne de moins, ça peut convenir à certains esprits mais je refuse de penser que ça convient à tout le monde. En tout cas, moi, ça ne convient pas et en tant qu'élève, je pense que ça ne m'aurait pas convenu du tout. J'ai besoin de choses structurées et je trouve qu'on déstructure de plus en plus. Et je trouve ça très dommage.
25. C : Et il y a autre chose, même si les résolutions d'équations du premier degré sont au programme de fin de quatrième et troisième, ça t'as semblé légitime de le faire quand même en seconde ? Par rapport au programme de seconde ?
26. M : Oui. Et on le trouve de moins en moins dans les manuels, sauf mêlé au fonctionnel, toujours par le fonctionnel et on demande en plus à la calculatrice de donner les solutions. C'est ce qu'on trouve systématiquement. C'est pour ça quand on regarde les compétences acquises avec les nouveaux programmes … d'accord, je veux bien un déplacement des compétences, je l'accepte… mais il faut que ce soit remplacé par d'autres compétences. Mais quelles sont les compétences de plus ? Peut-être dans la compréhension des fonctions ? C'est-à-dire, en ce qui concerne mes élèves, comme ils ont une certaine habitude de l'utilisation de la calculatrice, pour l'interprétation des courbes, il y a peut-être quelque chose de ce côté-là … et encore. Et aussi, ils ont quelques notions de probabilités qu'ils n'avaient pas avant, mais après pour tout le reste, c'est …
27. C : C'est tout ce que tu vois sur les contenus ?
28. M : C'est peut-être pas dans les clous du programme, mais ça fait partie des choses que je continuerai à faire…
29. C : Et tu ne penses pas que ce serait possible d'aborder les équations du second degré de la même façon, avec l'algorithmique, en fin de seconde ?
30. M : Non, pour moi autant en début de première oui, mais pas en fin de seconde.
31. C : Même après avoir fait les fonctions du second degré, les paraboles … ? Ça continue à te sembler prématuré ?
32. M : Oui, j'y ai réfléchi. Je pense que le second degré, on ne le traite pas de la même façon. Il me semble qu'à la fin de la seconde, la résolution théorique des équations du second degré, c'est quelque chose qui est plus difficile à mettre en place. Non … Au moment de l'apparition de la forme canonique, retrouvée par le calcul, là, ça me paraît une bonne

chose …de s'appuyer sur … en plus, ça peut anticiper la démonstration où tu transformes la forme canonique en forme factorisée (*avec les paramètres*), tu sais cette démonstration où les élèves décrochent en première ES ou S…

33. C : Oui
34. M : Et bien là, sur des exemples de polynômes, leur faire anticiper la forme canonique, en leur demandant de créer un algorithme, là ça peut être intéressant…
35. C : Ça la ferait peut-être passer cette fameuse démo…
36. M : Voilà, mais en première, pas en seconde.

Partie 2 : Organisations mathématique et didactique de l'expérimentation

C : **Q2** *Et par rapport à l'organisation choisie, qu'est-ce que tu en as pensé ? Par exemple de faire la séance de la catégorisation des équations en classe entière plutôt qu'en demi-classe ?*

37. M : Toute la classe en groupes de trois puis de six, tout ça, ça a été gérable, pour la première séance même si je n'étais pas satisfait de la séance. En revanche, heureusement que la séance sur l'algorithmique était en demi-classe, parce que j'ai du mal à gérer mon temps pour chacun, c'est toujours frustrant de ne pas arriver à contrôler suffisamment… en demi-classe, c'était bien, sinon j'aurais pas pu gérer tout le monde.
38. C : C'est un problème d'organisation pour toi ?
39. Mon problème personnel, c'est que j'ai du mal à les laisser en autonomie, soit je suis trop directif et là ce n'est pas très bon…Ou alors si je ne suis pas directif, j'ai du mal à faire des …
40. C : Mais vu les productions, elle a bien marché ta séance ?
41. M : Oui, mais il y en a beaucoup qui ont travaillé tout seuls et pour certains élèves, je n'ai pas pu donner de validation. Je n'ai pas non plus pu faire de conclusion.

Partie 4 : bilan et évaluation

42. C : **Q4.1** *Si c'était à refaire, est-ce que tu le referais ?* **Q4.2** *Sous la même forme ou non ?* Alors là tu m'as déjà répondu …
43. M : Le classement d'équations non, mais la séance sur l'algorithmique et les équations du premier degré, oui.

Partie 3 : l'apprentissage des élèves

44. C : **Q3.1** *Y a-t-il des points qui t'ont surpris, par rapport aux réactions des élèves, notamment sur leur motivation, mais aussi sur leurs procédures, leurs connaissances ? En particulier y a-t-il des points que tu ne t'attendais pas à rencontrer ou au contraire des points que tu étais certaine, de par ton expérience, voir surgir ?*
45. M : Il y a ceux dont je t'ai parlé, le fait que pour certains, l'ordinateur allait répondre à leur place, que s'ils rentraient l'équation $ax + b = c$, la solution allait sortir toute seule…
46. C : Ah, oui, ça, ça t'as surpris ?
47. M : Ah, oui, oui, j'ai trouvé ça naïf, ça m'a surpris, je ne m'attendais pas à ce que ils tapent « résoudre $ax + b = c$ » et qu'ils attendent … en me disant « non, ça marche pas ».
48. C : ça c'est marrant...
49. M : Les erreurs qu'ils ont faites, ce sont des erreurs que j'attendais …
50. C : De par ton expérience …
51. M : Oui et tous les problèmes de statut des lettres, de l'égalité, c'est quelque chose qui m'a toujours intéressé et j'ai toujours compris que les élèves aient des problèmes avec ça. Mais dans l'enseignement qu'on en fait, le signe égal a tout un tas de statuts différents, on passe … là-dessus
52. C : Ça reste implicite…au collège ou après.

53. M : C'est comme d'ailleurs le problème des inégalités, avec les inclusions des intervalles. C'est une évidence pour nous mais ça ne l'est pas du tout pour eux.
54. C : Par exemple, si $x < 2$ alors $x \leq 2$ …
55. M : Oui ou encore, si $x \in [-2 ; 2]$ alors on attend $x^2 \in [0 ; 4]$. Si un élève met $x^2 \in [0 ; 5]$, c'est juste aussi, mais ce n'est pas la réponse attendue, alors on dit que c'est faux, alors qu'il a raison.
56. C : Il pourrait aussi répondre $x^2 \in \mathbb{R}$, ce serait juste aussi…
57. M : Il y a un tas d'implicites là-dedans
58. C : il faudrait dire le plus petit intervalle, au sens de l'inclusion.
59. M : Oui.
60. C : Dans cette classe-là, il y en a encore qui soustrait 3 au lieu de diviser par 3, par exemple ?
61. M : Non, non, très peu… voire pas du tout
62. C : **Q3.2.** *Penses-tu qu'un travail de ce type plus suivi, sur une plus longue période pourrait améliorer les compétences des élèves en algèbre en général, et en résolution d'équations du premier degré ?*
63. M : Pour les équations du premier degré oui. Rien que le fait de mieux comprendre le statut des paramètres dans une équation du premier degré, je pense que oui.
64. C : Tu penses que le passage à l'algorithmique permet effectivement de mieux comprendre la résolution des équations ?
65. M : Oui, vraiment… Et je travaille aussi sur les formes somme et produit d'une expression algébrique, c'est important aussi.
66. C : As-tu quelque chose à ajouter ?
67. M : Non.
68. C : Merci, Maurice

Fin de l'entretien

A44. Entretien post-expérimentation : enseignant Alex

Entretien réalisé le 17/06/11.

Partie 1 : les contenus mathématiques

1. C : **Q1.1-** *Comment as-tu perçu le travail que nous avons construit ensemble par rapport à l'apprentissage des mathématiques, de façon générale ?*
2. Al : J'ai trouvé que c'était très intéressant parce que ça mettait en abîme des questions qu'on ne se pose pas. La classification des équations, c'est un truc sur lequel j'avais jamais réfléchi parce que ça me paraissait évident. Ça me paraissait évident qu'un élève de seconde soit capable de voir une équation du premier degré, du deuxième, de pas mélanger les deux, de savoir la direction à prendre pour les utiliser ou les simplifier, mais en fait …non, je me suis aperçu que c'était pas du tout clair dans leur tête, mais peut-être que c'était pas clair dans leur tête non plus parce que je ne m'étais pas penché dessus. Ça m'a vraiment questionné sur mon enseignement et sur la façon de recevoir ce qu'on fait. C'est possible que j'utilise ce que tu as fait l'an prochain, avant même de commencer à faire du travail sur les équations, en disant voilà des instruments, qu'est-ce qu'on peut faire pour essayer de trouver des points communs, pour essayer de les classer. Et après, en tirer des conséquences sur mon enseignement. Mais à mon avis, c'est une piste intéressante. Ce que je me pose comme question, c'est qu'on n'est pas forcé d'avoir ce type de point de vue et on n'est pas formé pour essayer de biaiser la posture. On est quand même dans un certain formatage de la pensée et tout d'un coup, tu prends le problème à l'envers et ça, je trouve que c'est intéressant et je me demande si on ne pourrait pas penser cette posture-là pour plus de choses. Ce sont les deux faces d'un même miroir et qui fait que la frontière disparaît. Et ça fait quelque chose de plus fondu et qui, à mon avis, est plus riche.
3. C : Oui, oui, je comprends. Je l'ai ressenti comme toi. Nous, quand on voit une équation, tout de suite, on voit le degré… mais les élèves, ce n'est pas ça qu'ils voient.
4. C : **Q1.2** *Et par rapport aux programmes actuels, comment as-tu perçu ce travail ?*
5. Al : Ah, je pense que c'est en plein dans ce qu'on attend de nous, c'est pas une entité séparée, juste pour ta thèse, ça fait partie intégrante, …travailler là-dessus, lier ça avec de l'algorithmique, on est aux confins des dernières instructions ministérielles. À mon avis, c'est pas séparé de ce qu'attendent les inspecteurs de la formation.
6. C : Mais justement, par rapport à l'algèbre, ils préconisent de la noyer dans l'analyse et on fait de l'algèbre quand on fait de l'analyse. Quand on étudie une fonction, si on rencontre une équation, on va la résoudre… alors que là ma posture était différente puisque je faisais de l'algèbre pour faire de l'algèbre. Est-ce que ça ne te semble pas aller à l'encontre des nouveaux programmes ?
7. Al : Alors après, on pourrait lier ça à des problèmes de géométrie, ou croiser avec … comme les instructions demandent de le faire … peut-être que c'est plus vaste, c'est plus porteur. Tu ne fais pas de l'algèbre pour faire de l'algèbre, tu le réinscris dans … Ça, à mon avis, ce serait possible si on se voyait avant, pour l'intégrer dans un chemin … Là ça faisait quand même « plaqué » parce que … enfin, ça tombait bien, on était là-dedans … mais ça faisait quand même « plaqué » et si on s'était vu avant, bien en amont, on aurait pu prévoir une progression qui aurait pu intégrer ta posture …
8. C : D'accord. Tu l'aurais vu s'intégrer dans un problème de géométrie ou d'analyse …
9. Al : Oui. Alors, après justement, quand tu intègres ça avec de la géométrie, avec des calculs d'aires, des trucs comme ça, on aurait eu les cas de figures que tu attendais, en cherchant une aire égale à tant ou tant. Peut-être que la richesse viendra aussi de cette

intégration des deux à la fois, pas de façon plaquée. Enfin c'est aussi une question de temps…

10. C : **Q1.4-** *Et comment l'as-tu perçu par rapport à l'apprentissage de l'algorithmique ?*
11. Al : Par rapport à l'apprentissage de l'algorithmique, je trouve que c'est une posture très intéressante pour croiser plusieurs choses. Alors après, je pense que le substrat sur lequel ils ont travaillé, c'était des choses suffisamment faciles pour qu'ils y arrivent mais je pense que, après avoir travaillé sur d'autres thèmes avec eux, je pense qu'il y a quand même un gros problème, au niveau du lien entre le texte en français et l'algorithmique. Généralement, ce texte en français, il est sur un substrat mathématique, mais le premier réflexe qu'ont les élèves, c'est de sauter sur la machine. Alors, c'est un problème de société, c'est lié à la sur-dimension de la machine dans leur vie, le portable, les mp3, tout ça… alors je dois dire que très peu d'élèves faisaient d'abord des maths avant de faire de l'algorithmique… les plus intuitifs, si. Mais ceux qui étaient dans une espèce de ventre mou des mathématiques avec un niveau pas transcendant, ce saut forcené sur la machine faisait qu'il n'y avait pas d'infusion de la pensée pour faire surgir du texte les mathématiques nécessaires à faire l'algorithme. Alors ça, j'ai pas vu d'évolution, peut-être qu'il faut du temps... Je trouve que c'est trop scindé. Nous, on va dire : « voilà un sujet, réfléchissez sur ce sujet pour construire l'algorithme ». Si on ne les cadre pas, si on les laisse en autonomie, le premier réflexe des trois quarts des élèves, c'est « je vais sur la machine et je vais introduire mes variables ». Ils bidouillent deux, trois trucs, mais comme il n'y pas eu en amont de réflexion mathématique, d'infusion intellectuelle via le prisme de leur pensée et de leur histoire ou de leur culture mathématique … ce dont je t'avais parlé lors du premier interview, cette espèce de lien qui devrait se créer entre les deux, eh bien, il ne se fait pas, ou très rarement… parce que ce sont des gens qui ont une bonne intuition. L'exemple de Jean-Pascal, tu te rappelles ?
12. C : Oui …
13. Al : Lui, tu vois, j'ai voulu qu'il passe en première S… Alors qu'il n'a que 10 de moyenne générale. C'est l'archétype du mec qui prend le texte et via son intuition et les idées bouillonnantes qu'il a, même s'il a du mal à les finaliser par la rigueur, lui … il arrive à créer ce lien. Pour les autres élèves, je suis obligé d'être directif … Je demande : « c'est quoi cette formule, d'où ça sort, qu'est-ce qu'on peut en faire ... ». Finalement, la pensée c'est moi quoi la suggérait… donc intérêt formatif, pas grand-chose finalement. Et donc, je pense que ça doit être un travail à long terme, c'est pas gagné.
14. C : **Q1.5** *Et le fait d'avoir articulé l'algèbre avec l'algorithmique ?* Parce que là encore quand on regarde les documents d'accompagnement des programmes, tu as remarqué il y algorithmique avec les fonctions, les probas, la géométrie, mais pas beaucoup avec l'algèbre… Qu'est-ce que tu en penses ?
15. Al : Je pense que c'est bien, je pense que l'algorithmique, ça se prête à tout mélanger… Après, il y a des limites… un degré de complexité à ne pas dépasser : quand on te dit, résoudre une équation par dichotomie, pour moi c'est une hérésie en seconde … C'est trop compliqué. Je sais qu'il y a un tas de collègues qui l'ont fait mais les trois quarts ne l'ont pas fait. Ce que l'on a fait, premier ou second degré en seconde, comme on a fait, pour moi c'est l'essentiel. Tu ne serais pas venue, je l'aurais fait, peut-être sous une autre forme mais je l'aurais fait. En revanche, des choses plus complexes, c'est pas pour des élèves de seconde. Mais l'algorithmique, ce qui est bien, c'est que tu peux tout mélanger. Alors, pourquoi dans les textes, ça n'a pas été stipulé ? Peut-être que c'est plus tendance de faire de la géométrie ? Je ne suis pas sûr que ce soit un oubli …

Partie 2 : Organisations mathématique et didactique de l'expérimentation

16. C : **Q2** *Et par rapport à l'organisation choisie, qu'est-ce que tu as pensé des choix qu'on a pris ? Par exemple de faire la séance de la catégorisation des équations en demi-classe plutôt qu'en classe entière ? De faire un TP d'algorithmique après la catégorisation ?*
17. Al : Je pense que c'était la bonne organisation. Je pense que comme c'est quand même un enjeu fondamental, qui revient à la mode, qui perdure en 1ère S, 1ère ES et qui continue en terminale…
18. C : L'algorithmique tu veux dire ?
19. Al : Oui, oui mais aussi l'algèbre, moi je pense que c'est bien de faire ça en demi-groupe et de voir ce qu'il en sort. Je pense que si on avait fait ça en classe entière, et si on n'avait pas fait d'algorithmique derrière, on n'aurait pas forcément … ça n'aurait pas eu vraiment de sens. Les élèves se sont pris au jeu, parce qu'ils étaient en petits groupes, tranquillement, on n'était pas dans l'urgence, tu ne gères pas 35 élèves de la même façon. En demi-groupe, pour l'algorithmique, c'est l'idéal.
20. C : Une question me vient, qui est venue dans les réactions à chaud de toi et des deux autres enseignants : est-ce qu'il n'aurait pas fallu faire, entre la séance des affiches et des étiquettes et la séance d'algorithmique, un bilan. Est-ce que tu ne l'aurais pas fait ?
21. Al : Non, je ne l'ai pas fait. Mais je pense qu'en fait, il a manqué. Quand ils ont eu fait leur petit classement qui était complètement baroque, pour certains, effectivement je n'ai pas mis un coup d'imprimatur derrière, d'institutionnalisation… Je pense qu'il l'était.
22. C : Oui…
23. Al : Oui, parce qu'après, il y en a toujours qui n'avaient pas les idées claires, qu'est-ce qu'on doit résoudre, quelle forme on prend, est-ce que c'est bien toujours la même chose et la preuve, dans les deux groupes, j'ai quand même dû prendre les rênes pour dire : « qu'est-ce qu'on a fait la fois dernière, qu'est-ce qu'on a classé ? » Et justement le substrat des équations que tu avais donné c'était bien, mais comme il n'y a pas eu d'institutionnalisation, il y a eu un flottement, qui est venu de ça. C'est-à-dire, je n'ai pas continué ce que tu avais fait ...
24. C : Je m'étais demandé si c'était nécessaire (*entre les deux premières séances*) et positif…
25. Al : En TS, peut-être pas, ils ont une autonomie plus grande, mais en seconde, ils ont encore besoin de la parole de l'adulte et qui fait que … la pensée écrite et affichée avec rigueur, c'est là-dessus qu'ils vont s'accrocher. Si tu laisses, parce que c'est un peu comme ça que ça s'est fait, on a regardé toutes les catégories qui ont été faites, il y en a qui avaient fait des catégories avec les fractions, avec les racines …
26. C : Alors c'est vrai que tu as dit quelques petites choses, là…
27. Al ; J'ai dit quelques petites choses mais je n'ai pas dit : « maintenant, …vous prenez vos cahiers…, et voilà les identifications possibles, les transformations, à quel objet ça appartient,… ». Donc effectivement, après j'étais à la bourre sur le reste. Mais comme c'est un enjeu qui est important, je pense qu'il faut être hyper attentif à cette progression de la pensée. Il y a eu un trou avec la séance sur l'algorithmique.
28. C : Et quand tu as fait le cours sur le second degré, tu as eu l'occasion d'en reparler de la classification ?
29. Al : Oui, oui, je l'ai fait à plusieurs reprises, quand on a fait le second degré et quand on avait des équations avec les aires en géométrie ou en analyse avec les variations. Après, il ne faut pas négliger que tu avais un statut extérieur …et ce que tu faisais, bien sûr, ils se sont pris au jeu, mais c'était hors du temps, hors contexte, hors institution, qui fait que si tu intègres ça dans ta progression, je pense qu'il y a un enjeu sur lequel ils accrochent plus. Cette posture-là a induit de l'investissement mais si j'avais dit, il y a un devoir là-dessus, ils se seraient creusés plus le ciboulot…
30. C : C'est sûr ! Bon, voilà pour l'organisation.

Partie 3 : l'apprentissage des élèves

31. C : **Q3.1** *Y a-t-il des points qui t'ont surpris, par rapport aux réactions des élèves, notamment sur leur motivation, mais aussi sur leurs procédures, leurs connaissances ? En particulier y a-t-il des points que tu ne t'attendais pas à rencontrer ou au contraire des points que tu étais certain, de par ton expérience, voir surgir ?*
32. Al : La grosse claque, parce que je pense que c'est vraiment ça, c'est le classement des équations. Je pense que la culture mathématique, c'est quand même lié à la notion de langage. Quand tu parles d'une équation du premier degré, c'est du langage usuel, mais moi la claque que j'ai prise, c'est que finalement, ça n'a pas forcément de réalité intellectuelle chez eux, ou de réalité mathématique. C'est-à-dire que… finalement, l'image mentale qu'ils se font de cet instrument mathématique est trop loin de la mienne et comme elle est trop loin, je ne peux pas influer sur les choses sur lesquelles ils font des erreurs et je ne peux pas influer sur… Peut-être que ça met ça en exergue… quand un élève classe ça parce qu'il y a une racine carrée, c'est n'importe quoi, mais ça bascule en amont sur des notions qu'on pourrait penser complètement séparées des instruments sur lesquels on travaille, en l'occurrence le premier ou le second degré. Ça veut dire qu'en amont, la notion de racine carrée par exemple, est complètement à « réinventorier »... Ça veut dire, par exemple, que le chapitre sur les nombres qu'ils ont laissé tomber, c'est une grosse connerie !
33. C : Avec ce travail, on arrive aussi à s'interroger sur la nature des nombres…
34. Al : Pour les élèves, il y a quelque chose de complètement biaisé… Zéro virgule un, racine de deux, un quart, dix-huit, moins deux, pour eux, c'est pas la même essence, alors que c'est la même essence. Et cette compréhension erronée du substrat sur lequel on travaille, les nombres, x c'est un nombre… c'est complètement vrillé !
35. C : Et quand on dit : » soit x un nombre », qu'est-ce qu'ils voient ?
36. Al : Ils ne voient pas la même chose que nous, c'est sûr. Déjà, le statut de la variable, c'est pas si clair que ça pour eux, la preuve, c'est pas sur la variable sur laquelle ils réfléchissent quand ils veulent classer les équations, c'est sur les nombres périphériques, c'est assez baroque. Pour nous finalement, et c'est ça que ton expérimentation soulève, pour tout un tas de notions, il y a de l'implicite chez nous, qui n'est pas explicite chez eux. On pense que c'est bien formaté, que ça se fait de cette façon-là … Et ça l'est pour les élèves sérieux, mais chez les élèves en difficultés, qui sont finalement ceux qui nous intéressent le plus, c'est pas fait ! Il y aurait des choses sur lesquelles il faudrait réfléchir.
37. C : Et ce n'est pas fait même pour le premier degré. Alors que c'est censé être débuté en $4^{\text{ème}}$. C'est la troisième année qu'ils le voient. Je craignais que l'un de vous, toi ou Annabelle ou Maurice me disent que faire un truc sur le premier degré, ce n'est pas dans le programme… Mais aucun de vous trois n'a eu cette réaction.
38. Al : Mais non, parce que je pense qu'en fait, je ne sais pas si c'est conscient ou inconscient, c'est comme… je vais encore revenir à la notion de langage… quand un mot n'est pas compris, on va chercher sa définition dans le dictionnaire. Ce qui n'est pas le cas en mathématiques. Quand une entité n'est pas comprise, on ne revient pas aux fondamentaux…. et au fur et à mesure que les années avancent, on crée sur ces choses qui sont incomprises finalement, on crée de nouvelles choses, on crée une entité, qui serait la pensée, la culture, sur un substrat, un principe qui est biaisé au départ. Et c'est pour ça qu'on n'arrive pas à remettre « sur le droit chemin » les élèves en difficultés, parce que dès le départ, l'image mentale qu'ils se sont fait d'un instrument est complètement fausse.
39. C : **Q3.1** *Et il y a des points que tu étais certain, de par ton expérience, voir surgir ?*
40. Al : Oui, tous les problèmes de transposition, avec $3x$ au lieu de $3 + x$, c'est récurrent, ça fait 20 ans que ça dure, toutes les erreurs sur les identités remarquables, $(a + b)^2$ c'est pas

(a + b) (a – b), c'est pas non plus $a^2 + b^2$, ça n'a pas changé depuis 20 ans. Mais nous, on faisait les mêmes erreurs.

41. C : **Q3.2.** *Penses-tu qu'un travail de ce type plus suivi, sur une plus longue période pourrait améliorer les compétences des élèves en algèbre en général, et en résolution d'équations du premier degré ?*
42. Al : Je pense que ce serait intéressant mais on manque d'heures. Il faut faire clairement des choix. Ça bouffe du temps. À mon avis, c'est intéressant sur le long terme mais le fait que tu sois venue, ça m'a empêché de faire l'échantillonnage, j'aurais pu le faire avec une semaine de plus. Bon, c'est pas grave… Mais en termes de temps, ça m'en a bouffé pas mal… C'est pas vain, mais un inspecteur qui passera dira : « ah, vous n'avez pas fait ça, ni ça » … Mais si on va au bout de cette idée pour qu'il y ait une adéquation entre le langage, l'image mentale, les représentations mathématiques, ça demande plus d'une semaine.

Partie 4 : bilan et évaluation

43. C : **Q4.** *Si c'était à refaire, est-ce que tu le referais ? Sous la même forme ou non ?*
44. Al : Ah, évidemment ! Dans le sens où je pense que je vais utiliser ce qu'on a fait ensemble. Et ce qui m'intéresse, c'est de l'intégrer dans un chemin fluide… Si tu veux revenir l'année prochaine …
45. C : Ce serait bien que je vienne te voir sur ces séances-là, intégrées dans ta progression. Là, je ne serai plus l'élément perturbateur pour tes élèves, je serai juste là pour observer … parce que là, ils le savaient plus ou moins que j'avais apporté les affiches, les étiquettes,…
46. Al : Ah, oui, oui, ils étaient au courant !
47. C : Ça serait plus coulé et ça serait très intéressant pour moi.
48. Al : Et comme ça serait pris en amont de choses qui sont quand même fondamentales, je pense que ça aurait plus d'impact. Après, à quel moment de l'année le faire…
49. C : Et tu garderais l'ensemble, avec l'algorithmique ?
50. Al : Pour le lier avec l'algorithmique... De toute façon, les deux se prêtent bien au jeu, donc c'est intéressant de croiser les chemins. Après, est-ce que j'aurais le temps de faire l'algorithmique, je ne sais pas, mais en tout cas, le substrat même de la réflexion, la classification, tout ça, je pense que ça, oui, je récupèrerai ça. Pour l'algorithmique, c'est plus incertain, ça dépendrait de paramètres que je ne peux pas maîtriser maintenant. Ça dépendrait de ma progression, de quel type de classe c'est, est-ce que je ne rame pas à chaque fois que je les emmène sur l'ordi… mais le lien entre les deux m'apparaît important. Après quel serait le retour avec un cheminement dans une progression annuelle, parce que le cheminement se fait aussi via l'algorithmique, je ne sais pas, je ne peux pas te répondre…
51. C : En tout cas, merci pour tout le temps que tu m'as consacré.

Fin de l'entretien