

Méthodes numériques probabilistes en grande dimension pour le contrôle stochastique et problèmes de valorisation sur les marchés d'électricité

Nicolas Langrené

Univ. Paris Diderot (Paris 7) Sorbonne Paris Cité, LPMA, FiME, EDF

Soutenance de thèse, 5 mars 2014



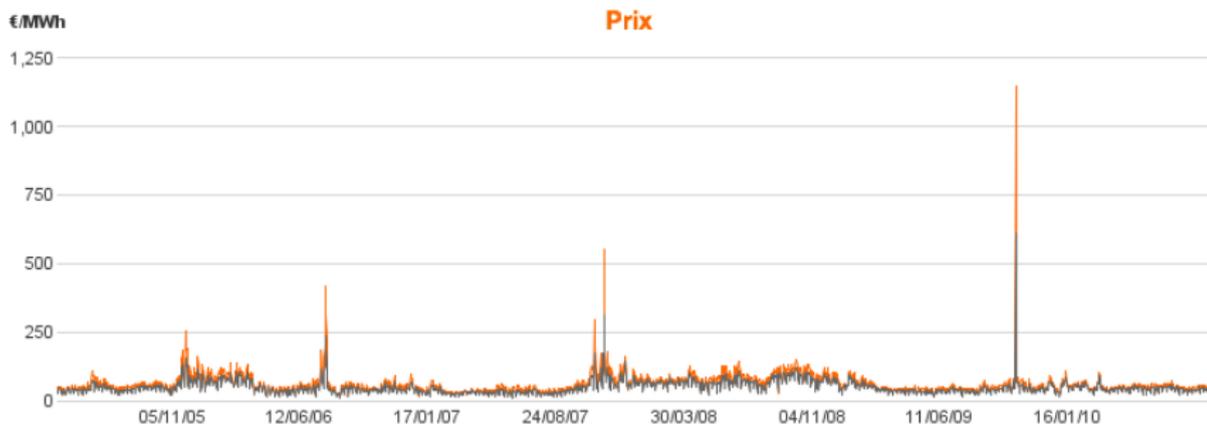
Plan

- 1** Un modèle structurel risque-neutre pour la valorisation et la couverture de produits dérivés sur l'électricité avec R. Aïd et L. Campi
- 2** Un algorithme probabiliste pour la résolution de problèmes de commutation optimale en grande dimension avec R. Aïd, L. Campi et H. Pham
- 3** Un algorithme numérique pour la résolution des équations de HJB totalement non-linéaires via EDSRs à sauts négatifs avec I. Kharroubi et H. Pham

Plan

- 1** Un modèle structurel risque-neutre pour la valorisation et la couverture de produits dérivés sur l'électricité avec R. Aïd et L. Campi
- 2 Un algorithme probabiliste pour la résolution de problèmes de commutation optimale en grande dimension avec R. Aïd, L. Campi et H. Pham
- 3 Un algorithme numérique pour la résolution des équations de HJB totalement non-linéaires via EDSRs à sauts négatifs avec I. Kharroubi et H. Pham

Modélisation du prix d'électricité



Modèles à forme réduite

Stipuler directement une dynamique stochastique autonome

Modèles structurels

Relier le prix à d'autres variables d'état : demande, capacités de production, prix des énergies, prix du CO_2 , ...

Nouveau modèle structurel

Prix (en Euro /MWh)

$i=1,2,3$ technologies

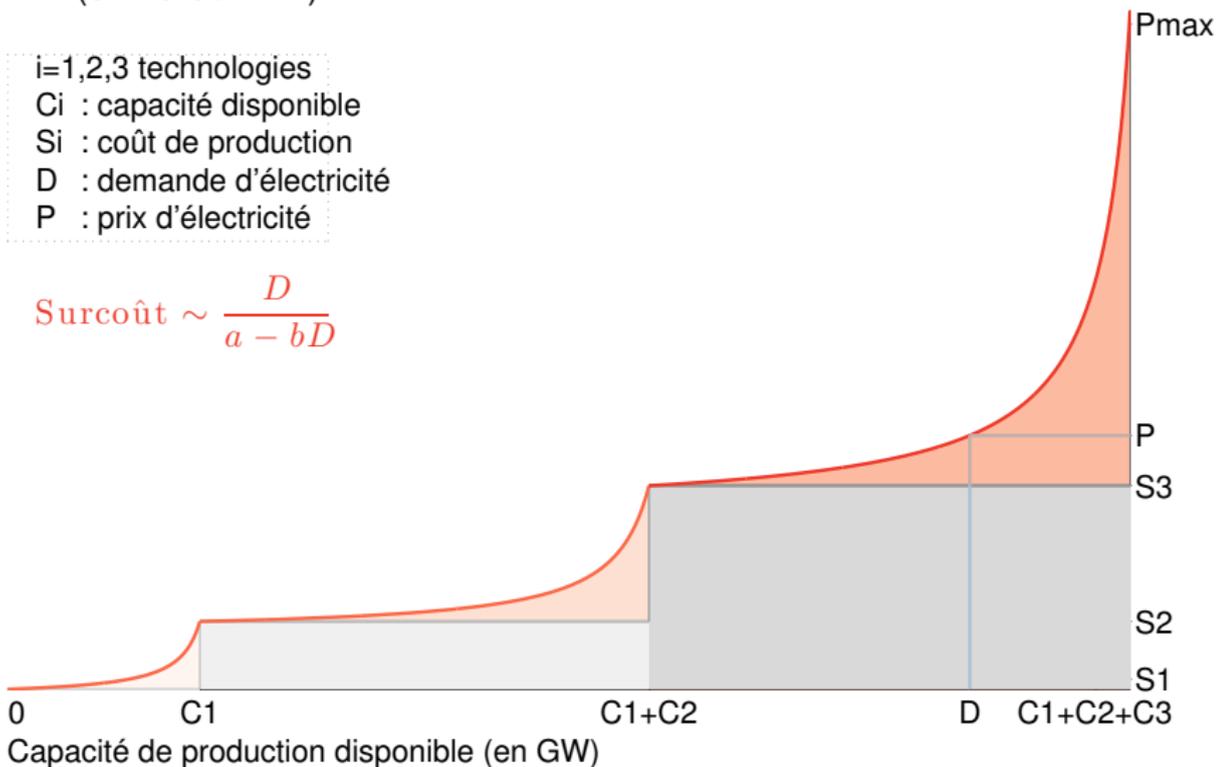
C_i : capacité disponible

S_i : coût de production

D : demande d'électricité

P : prix d'électricité

$$\text{Surcoût} \sim \frac{D}{a - bD}$$



Critère de couverture

S_t Risque prix \longrightarrow couvrable ✓

C_t, D_t Risque volume \longrightarrow non couvrable ✗

\implies Marché incomplet

Choix d'un critère de couverture

Sur-réplication, Indifférence d'utilité, Moyenne-variance, ...

\implies Minimisation du risque local

Séparation des actifs contingents entre une **partie couvrable** et une **partie non couvrable**

- Partie couvrable \longrightarrow couverture dynamique standard
- Partie non couvrable \longrightarrow inchangée (neutralité au risque résiduel)

Exemple

Valorisation d'un **contrat à terme sur l'électricité**

$$F_t^e(T) = \sum_{i=1}^n h_i G_i^T(t, C_t, D_t) F_t^i(T)$$

$$G_i^T(t, C_t, D_t) = \mathbb{E}_t \left[g \left(\sum_{k=1}^n C_T^k - D_T \right) \mathbf{1}_{\left\{ \sum_{k=1}^{i-1} C_T^k \leq D_T \leq \sum_{k=1}^i C_T^k \right\}} \right]$$

Exprimable via l'intégrale de Goodwin-Staton incomplète étendue :

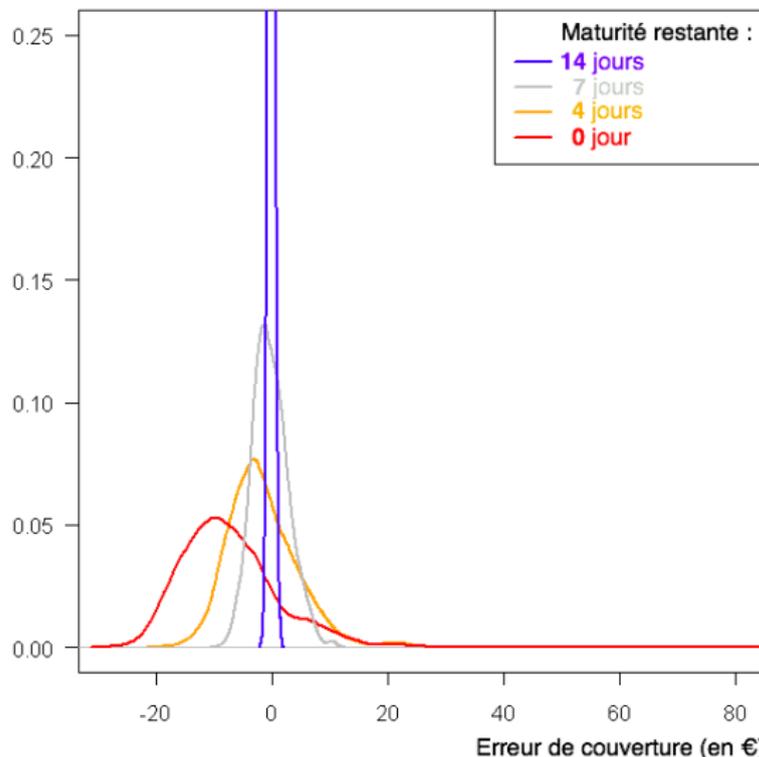
$$\tilde{g}(x, y; \nu) = \int_x^\infty \frac{1}{(y+z)^\nu} e^{-z^2} dz$$

(Développements en série + récurrences + asymptotiques pour $|y|$ grand)

Test de couverture

Contrat à terme d'électricité + couverture par contrats à terme de combustibles

Distribution de l'erreur de couverture



- Loin de la maturité :
le risque prix domine
⇒ Couverture parfaite
- Proche de la maturité :
le risque volume domine
⇒ Couverture inefficace

Résumé (1/3)

et extensions

- **Nouveau modèle structurel** pour le prix d'électricité
 - ⇒ Étude, valorisation et couverture (théorique et numérique) de dérivés électriques, calibration, tests numériques, ...
- **Extensions**
 - ⇒ **Autres actifs contingents** : option sur différence $P_T - h_i S_T^i$, sur contrat à terme $F^e(T)$ (possibilité d'inclure des contrats à terme sur électricité parmi les actifs de couverture)
 - ⇒ **Autre critère de couverture**
(ex : indifférence d'utilité, cf. [Campi, Benedetti, 2013])
 - ⇒ **Autre application** : valorisation de centrale électrique (optimisation des investissements en centrales électriques...)

Plan

- 1 Un modèle structurel risque-neutre pour la valorisation et la couverture de produits dérivés sur l'électricité avec R. Aïd et L. Campi
- 2 Un algorithme probabiliste pour la résolution de problèmes de commutation optimale en grande dimension avec R. Aïd, L. Campi et H. Pham
- 3 Un algorithme numérique pour la résolution des équations de HJB totalement non-linéaires via EDSRs à sauts négatifs avec I. Kharroubi et H. Pham

Commutation optimale

- $X^{t,x} : \begin{cases} dX_s^{t,x} = b(s, X_s^{t,x}) ds + \sigma(s, X_s^{t,x}) .dW_s \\ X_t^{t,x} = x \end{cases}$
- stratégie $\alpha = (\tau_n, \iota_n)_{n \in \mathbb{N}}$, $\iota_n \in \mathbb{I}_q = \{i_1, i_2, \dots, i_q\}$
- $I_s^\alpha = \iota_n$, $\tau_n \leq s < \tau_{n+1}$
- gain $f(s, X_s^{t,x}, I_s^\alpha)$ vs. coût $k(\tau_n, \zeta_n)$, $\zeta_n = \iota_n - \iota_{n-1}$

$$v(t, x, i) = \sup_{\alpha \in \mathcal{A}_{t,i}} \mathbb{E} \left[\int_t^\infty f(s, X_s^{t,x}, I_s^\alpha) ds - \sum_{\tau_n \geq t} k(\tau_n, \zeta_n) \right]$$

Programmation Dynamique

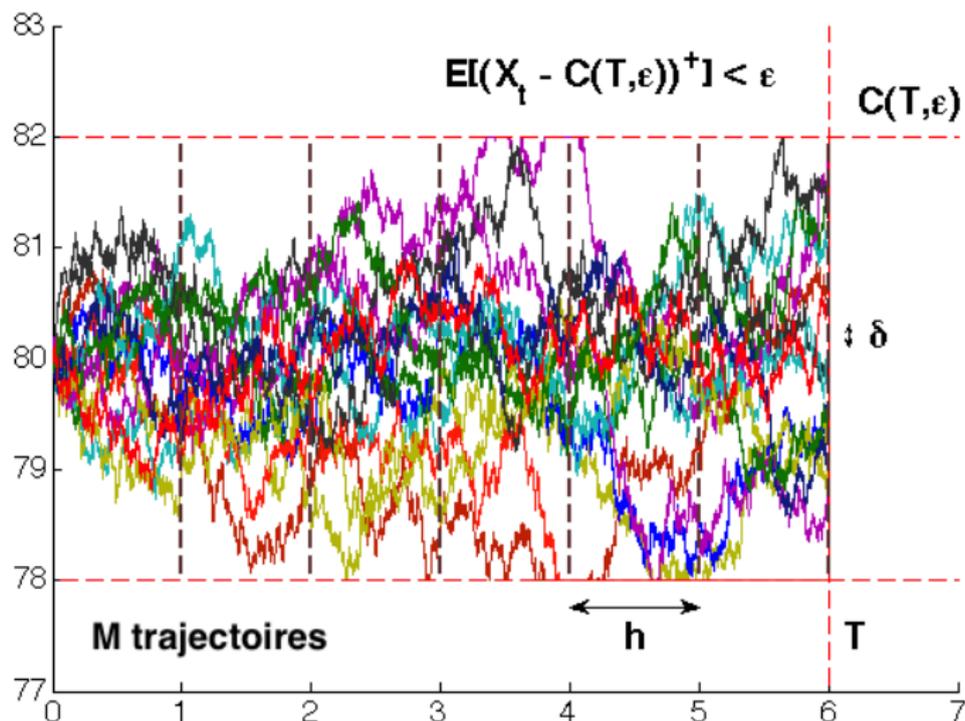
$$v(t, x, i) = \sup_{\alpha \in \mathcal{A}_{t,i}} \mathbb{E} \left[\int_t^\infty f(s, X_s^{t,x}, I_s^\alpha) ds - \sum_{\tau_n \geq t} k(\tau_n, \zeta_n) \right]$$

Principe de programmation dynamique

$\forall \tau \geq t$ temps d'arrêt,

$$v(t, x, i) = \sup_{\alpha \in \mathcal{A}_{t,i}} \mathbb{E} \left[\int_t^\tau f(s, X_s^{t,x}, I_s^\alpha) ds - \sum_{t \leq \tau_n \leq \tau} k(\tau_n, \zeta_n) + v(\tau, X_\tau^{t,x}, I_\tau^\alpha) \right]$$

Approximations



Méthode des moindres carrés

Principe de programmation dynamique

$$\bar{v}_\Pi (T, x, i) = g (T, x, i)$$

$$\bar{v}_\Pi (t_n, x, i) = \max_{j \in \mathbb{I}_q} \left\{ hf (t_n, x, j) - k (t_n, i, j) + \Phi_j^{t_n, x} (\bar{v}_\Pi) \right\}$$

$$\Phi_j^{t_n, x} (\bar{v}_\Pi) = \mathbb{E} \left[\bar{v}_\Pi (t_{n+1}, \bar{X}_{t_{n+1}}, j) \mid \bar{X}_{t_n} = x \right]$$

Comment calculer les espérances conditionnelles ?
(quantification, calcul de Malliavin, **régression empirique**,...)

⇒ cf. tests comparatifs de [Bouchard, Warin, 2011]

Approximation : Régression empirique par moindres carrés

$$\Phi_j^{t_n, x}(\varphi) \rightsquigarrow \hat{\Phi}_j^{t_n, x}(\varphi) : \min_{\lambda \in \mathbb{R}^K} \sum_{m=1}^M \left[\left(\varphi(t_{n+1}, \bar{X}_{t_{n+1}}^m, i) - \sum_{k=1}^K \lambda_k e_k(\bar{X}_{t_n}^m) \right)^2 \right]$$

Complexité

Schéma final

$$\hat{v}_{\Pi}(T, x_m, i) = g(T, x_m, i)$$

$$\hat{v}_{\Pi}(t_n, x_m, i) = \max_{j \in \mathbb{I}_q} \left\{ hf(t_n, x_m, j) - k(t_n, i, j) + \hat{\Phi}_j^{t_n, x_m}(\hat{v}_{\Pi}) \right\}$$

Complexité algorithmique

$$\mathcal{O}(q^2 \times N \times M)$$

q = nb commutations , N = nb pas de temps , M = nb traj. MC
Ou $\mathcal{O}(q \times N \times M)$ sous certaines hypothèses

Complexité mémoire

stockage du faisceau de trajectoires $\Rightarrow \mathcal{O}(N \times M)$

Nouvelle méthode de réduction de mémoire $\Rightarrow \mathcal{O}(N + M)$

Convergence théorique

Base locale de fonctions constantes par morceaux

$$e_k(x) = \mathbf{1}\{x \in B_k\}$$

$(B_k)_{1 \leq k \leq K}$ hypercubes $\subset \mathbb{R}^d$, partitionnant le domaine, de côtés de longueur δ

Vitesse de convergence complète

$$\left\| \max_{i \in \mathbb{I}_q} |v(0, x, i) - \hat{v}_\Pi(0, x, i)| \right\|_{L_p} \leq C_p \left\{ \boxed{(1+|x|) e^{-\bar{\rho}T}} + \boxed{\varepsilon} + \right. \\ \left. \boxed{\left(1+|x|^{\frac{3}{2}}\right) \sqrt{h}} + \boxed{\frac{\delta}{h}} + \boxed{\frac{C_p}{h\sqrt{M}} \frac{1+C(T,\varepsilon)}{P^{1-\frac{1}{p\sqrt{2}}}} \left(1 + \frac{1}{\sqrt{MP^{\frac{1}{p\sqrt{2}}}}}\right)} \right\}$$

où $P = P(T, \delta, \varepsilon) = \min_{t_n \in \Pi, B_k \subset \mathcal{D}} \mathbb{P}(\bar{X}_{t_n} \in B_k)$

Application aux investissements en centrales électriques

Modélisation des facteurs aléatoires

Capacité de production C_t

Capacité installée (contrôlée) \times taux de disponibilité
(Ornstein-Uhlenbeck + saisonnalités $\rightarrow [0, 1]$)

Demande d'électricité D_t

saisonnalités déterministes + Ornstein-Uhlenbeck

Prix d'électricité P_t

Modèle structurel précédent \Rightarrow les nouvelles centrales font baisser les prix (loi de l'offre et la demande)

Prix de combustibles S_t (CO₂ compris)

Browniens géométriques cointégrés : $dS_t = \Xi S_t dt + \Sigma S_t dW_t$

Application aux investissements en centrales électriques

Modélisation des facteurs aléatoires

Capacité de production C_t

Capacité installée (contrôlée) \times taux de disponibilité
(Ornstein-Uhlenbeck + saisonnalités $\rightarrow [0, 1]$)

Demande d'électricité D_t

saisonnalités déterministes + Ornstein-Uhlenbeck

Prix d'électricité P_t

Modèle structurel précédent \Rightarrow les nouvelles centrales font baisser les prix (loi de l'offre et la demande)

Prix de combustibles S_t (CO₂ compris)

Browniens géométriques cointégrés : $dS_t = \Xi S_t dt + \Sigma S_t dW_t$

Application aux investissements en centrales électriques

Modélisation des facteurs aléatoires

Capacité de production C_t

Capacité installée (contrôlée) \times taux de disponibilité
(Ornstein-Uhlenbeck + saisonnalités $\rightarrow [0, 1]$)

Demande d'électricité D_t

saisonnalités déterministes + Ornstein-Uhlenbeck

Prix d'électricité P_t

Modèle structurel précédent \Rightarrow les nouvelles centrales font baisser les prix (loi de l'offre et la demande)

Prix de combustibles S_t (CO₂ compris)

Browniens géométriques cointégrés : $dS_t = \Xi S_t dt + \Sigma S_t dW_t$

Application aux investissements en centrales électriques

Modélisation des facteurs aléatoires

Capacité de production C_t

Capacité installée (contrôlée) \times taux de disponibilité
(Ornstein-Uhlenbeck + saisonnalités $\rightarrow [0, 1]$)

Demande d'électricité D_t

saisonnalités déterministes + Ornstein-Uhlenbeck

Prix d'électricité P_t

Modèle structurel précédent \Rightarrow les nouvelles centrales font baisser les prix (loi de l'offre et la demande)

Prix de combustibles S_t (CO₂ compris)

Browniens géométriques cointégrés : $dS_t = \Xi S_t dt + \Sigma S_t dW_t$

Application aux investissements en centrales électriques

Fonction objectif

ζ GW de nouvelle centrale de type j

Coût $\kappa(\zeta) = \kappa_f + \zeta \times \kappa_p$

Production $O_t = \min(\text{production maximale, demande restante})$

Revenu $(P_t - \tilde{S}_t)^+ - \kappa_m$

Gain total $\int_0^\infty e^{-\rho s} \left(O_s (P_s - \tilde{S}_s)^+ - \kappa_m \right) ds - \kappa(\zeta)$

Fonction objectif

$$v(t, x, i) = \sup_{\alpha \in \mathcal{A}_{t,i}} \mathbb{E} \left[\sum_{j=1}^{d'} \int_t^\infty e^{-\rho s} \left(O_s^j (P_s - \tilde{S}_s^j)^+ - \kappa_m^j \right) ds - \sum_{\tau_n \geq t} e^{-\rho \tau_n} \kappa^j(\zeta^j) \right]$$

Exemple numérique

2 technologies

technologie de "base" $S_0^1 = 40\text{€/MWh}$, vol.5%,

$$I_0^1 = 67\text{GW}, \kappa_p^1 = 2.00 \cdot 10^9\text{€/GW}$$

technologie de "pointe" $S_0^2 = 80\text{€/MWh}$, vol.15%,

$$I_0^2 = 33\text{GW}, \kappa_p^2 = 0.24 \cdot 10^9\text{€/GW}$$

$$S_t^2 - 2S_t^1 \text{ stationnaire}, D_0 = 70\text{GW}$$

Paramètres numériques

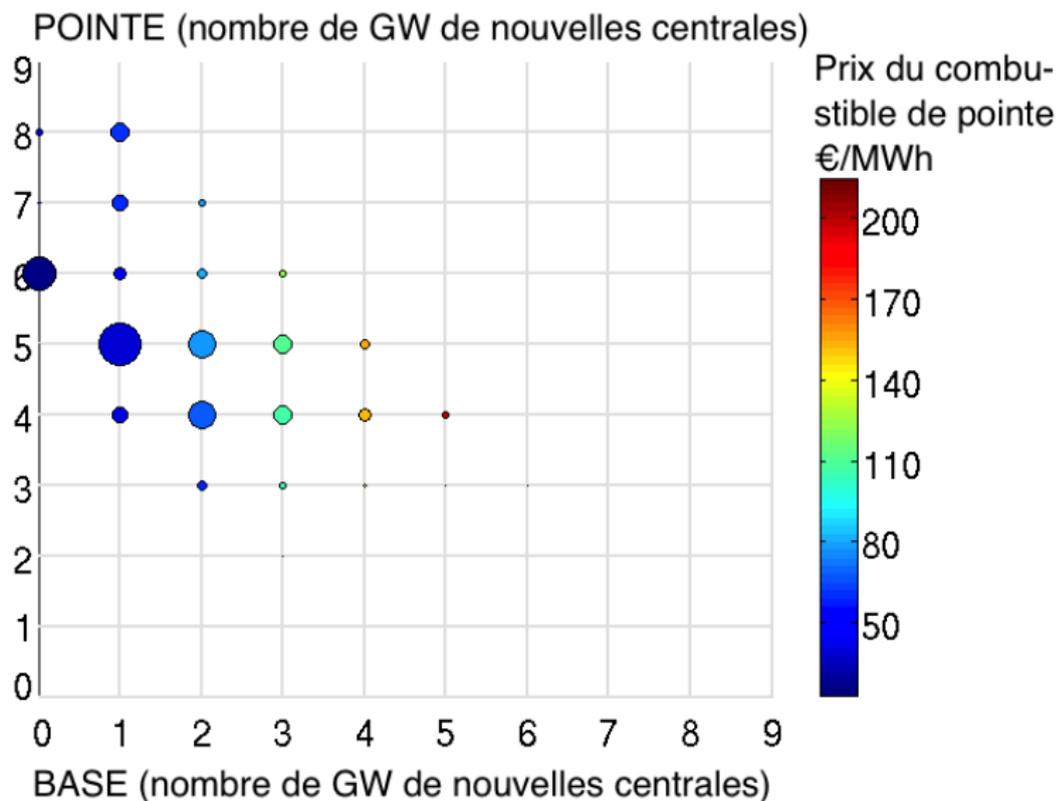
$T = 40$ ans (+20 ans pour les valeurs terminales)

$h = 1/730$ (2 points par jour), investissements 1 fois par an

$b = 2^6 = 64$ fonctions de base, linéaire par morceaux

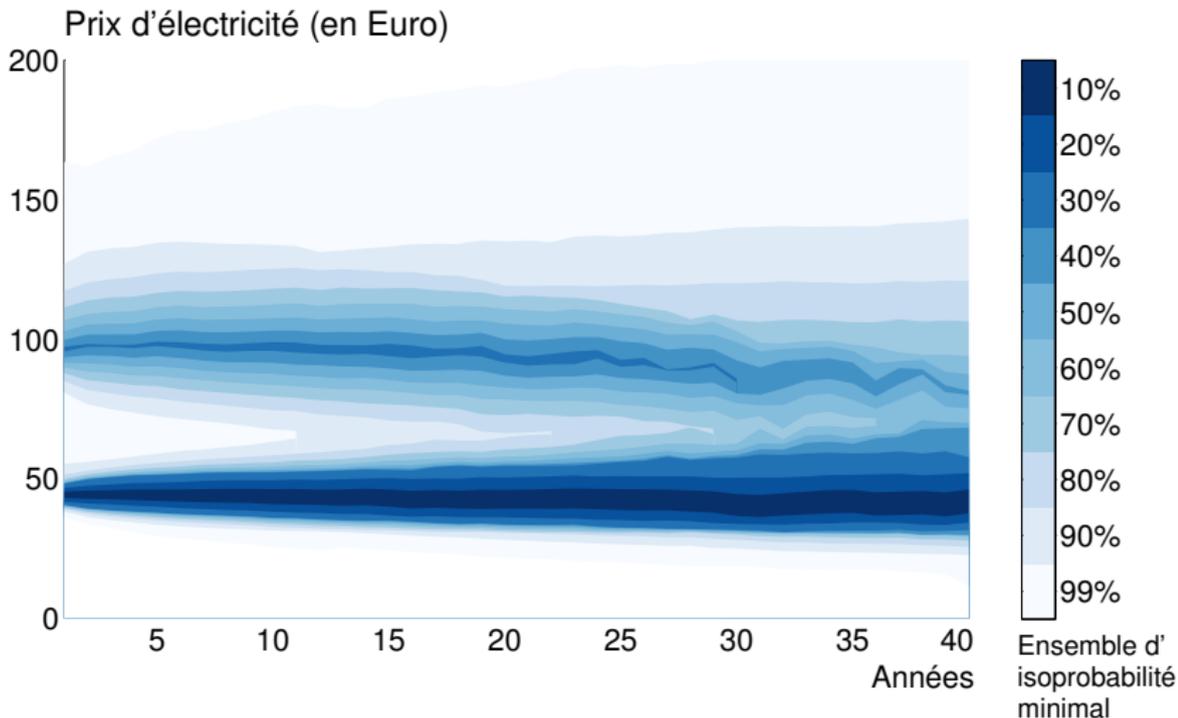
$M = 5000$ trajectoires de Monte Carlo

Parc installé final



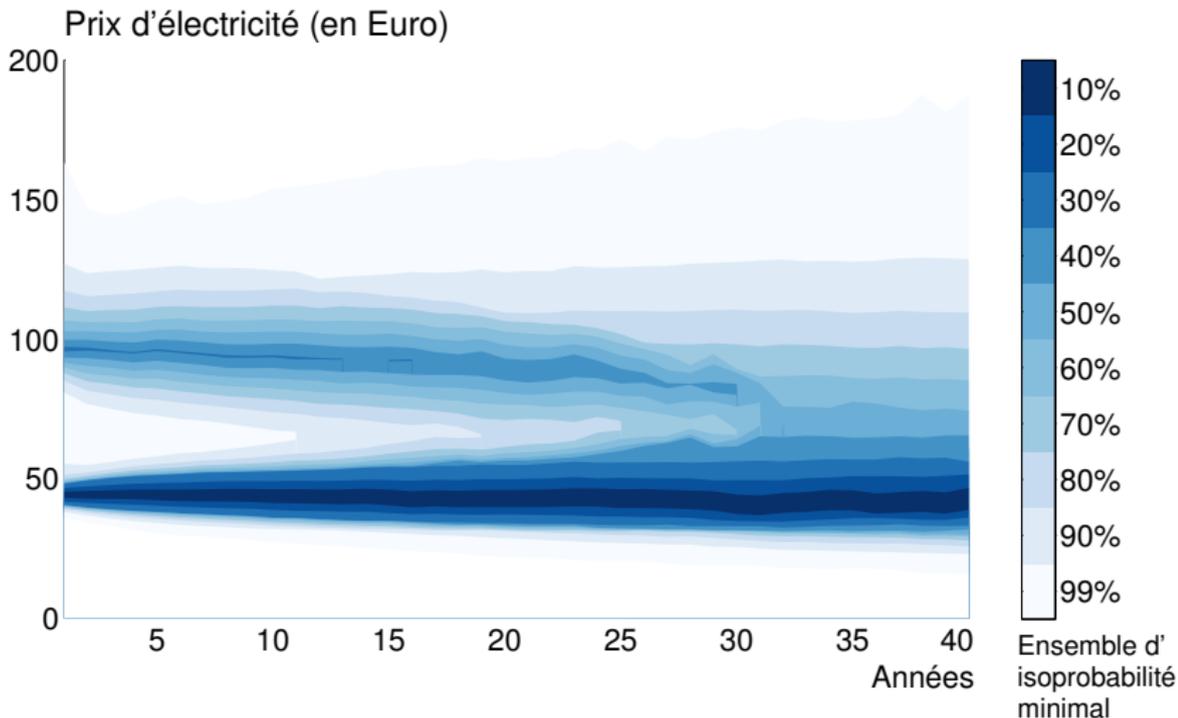
Distribution du prix d'électricité

Évolution temporelle **sans nouvelles centrales**



Distribution du prix d'électricité

Évolution temporelle avec nouvelles centrales (choisies optimalement)



Résumé (2/3)

- **Algorithme probabiliste** pour la commutation optimale
 - ⇒ Efficace en nombre d'opération et en consommation mémoire (algorithme de **réduction de mémoire**)
 - ⇒ Utilisable en **grande dimension**
 - ⇒ Étude théorique complète (**vitesse de convergence**)
- Application aux **investissements en centrales électriques**
 - ⇒ Pour chaque type de centrale, fournit le nombre de GW à installer chaque année, en fonction des aléas
 - ⇒ Peut être utilisé pour calculer les **subventions** nécessaires pour les énergies renouvelables

Plan

- 1 Un modèle structurel risque-neutre pour la valorisation et la couverture de produits dérivés sur l'électricité avec R. Aïd et L. Campi
- 2 Un algorithme probabiliste pour la résolution de problèmes de commutation optimale en grande dimension avec R. Aïd, L. Campi et H. Pham
- 3 Un algorithme numérique pour la résolution des équations de HJB totalement non-linéaires via EDSRs à sauts négatifs avec I. Kharroubi et H. Pham

Problèmes de contrôle stochastique généraux

avec contrôle du générateur f ET de la dérive b ET de la volatilité σ

Formulation

$$dX_s^\alpha = b(X_s^\alpha, \alpha_s) ds + \sigma(X_s^\alpha, \alpha_s) dW_s$$
$$v(t, x) = \sup_{\alpha \in \mathcal{A}} \mathbb{E}^{t,x} \left[\int_t^T f(X_s^\alpha, \alpha_s) ds + g(X_T^\alpha) \right]$$

Équation de HJB totalement non-linéaire

$$\frac{\partial v}{\partial t} + \sup_{a \in \mathcal{A}} \left\{ b(x, a) \cdot D_x v + \frac{1}{2} \text{tr} \left(\sigma \sigma^\top(x, a) D_x^2 v \right) + f(x, a) \right\} = 0$$
$$v(T, x) = g(x), \quad x \in \mathbb{R}^d \quad \text{sur } [0, T) \times \mathbb{R}^d$$

Problème : Comment simuler le processus contrôlé ?

Représentation probabiliste (1/3)

Randomisation du contrôle

Mesure aléatoire de Poisson $\mu_A(dt, da)$ sur $\mathbb{R}_+ \times A$, $\perp W$
associée au processus ponctuel marqué $I \leftrightarrow (\tau_i, \zeta_i)_i$, à valeurs dans A

$$I_t = \zeta_i, \tau_i \leq t < \tau_{i+1}$$

Problème randomisé non contrôlé

$$dX_s = b(X_s, I_s) ds + \sigma(X_s, I_s) dW_s$$

$$v(t, x, a) = \mathbb{E}^{t, x, a} \left[\int_t^T f(X_s, I_s) ds + g(X_T) \right]$$

EDSR linéaire

$$Y_t = g(X_T) + \int_t^T f(X_s, I_s) ds - \int_t^T Z_s dW_s - \int_t^T \int_A U_s(a) \tilde{\mu}_A(ds, da)$$

$$Y_t \leftrightarrow v(t, X_t, I_t)$$

Représentation probabiliste (2/3)

Contrainte sur les sauts

$$U_t(a) = v(t, X_t, a) - v(t, X_t, l_{t-})$$

Comment retomber sur l'équation de HJB initiale ?

⇒ Ajouter la contrainte $U_t(a) \leq 0 \quad \forall (t, a)$!

EDSR à sauts négatifs

Solution minimale (Y, Z, U, K) de

$$Y_t = g(X_T) + \int_t^T f(X_s, l_s, Y_s, Z_s) ds - \int_t^T Z_s dW_s \\ + K_T - K_t - \int_t^T \int_A U_s(a) \tilde{\mu}_A(ds, da), \quad 0 \leq t \leq T$$

sous la contrainte $U_t(a) \leq 0 \quad \forall (t, a)$

Représentation probabiliste (3/3)

Lien avec les équations de HJB totalement non-linéaires

(X, I) markovien $\Rightarrow \exists v = v(t, x, a)$ s.t. $Y_t = v(t, X_t, I_t)$

Lemme clé

$v = v(t, x, a)$ ne dépend pas de a !

$\hookrightarrow v = v(t, x)$

Théorème

$v = v(t, x)$ est solution de l'équation de HJB

$$\frac{\partial v}{\partial t} + \sup_{a \in A} \left\{ b(x, a) \cdot D_x v + \frac{1}{2} \text{tr} \left(\sigma \sigma^\top(x, a) D_x^2 v \right) + f(x, a, y, \sigma^\top(x, a) \cdot D_x v) \right\} = 0$$

$$v(T, x) = g(x) \quad , \quad x \in \mathbb{R}^d \quad \text{sur } [0, T] \times \mathbb{R}^d$$

Preuve : cf. [Kharroubi, Pham, 2012]

Remarque : Aucune hypothèse d'ellipticité uniforme n'est nécessaire !

Schéma numérique

$$U_t(a) = v(t, X_t, a) - v(t, X_t, l_{t-}) \leq 0 \quad \forall (t, a)$$

$$\Rightarrow v(t, X_t, l_{t-}) \geq \sup_{a \in A} v(t, X_t, a)$$

$$\Rightarrow \text{Minimal solution } v(t, X_t, l_{t-}) = \sup_{a \in A} v(t, X_t, a)$$

$$v(t, X_t, l_t) - v(t, X_t, l_{t-}) \longleftrightarrow K_t - K_{t-}$$

Schéma numérique rétrograde

$$Y_N = g(X_N)$$

$$Z_i = \mathbb{E}_i \left[Y_{i+1} \Delta W_i^\top \right] / \Delta t$$

$$Y_i = \mathbb{E}_i \left[Y_{i+1} + f(X_i, l_i, Y_{i+1}, Z_i) \Delta t \right]$$

$$Y_i = \text{ess sup}_{A \in \mathcal{A}_i} \mathbb{E}_{i,A} [Y_i]$$

où $\mathbb{E}_{i,A}[\cdot] := \mathbb{E}[\cdot | X_i, l_i = A]$

Erreur de discrétisation

Vitesse de convergence

Hypothèses supplémentaires

- b et σ bornés
- $f = f(x, a, y)$ convexe en y
- $f(., ., 0)$ et g bornés

Théorème

$$0 \leq v(t, x) - v^{\Delta t}(t, x, a) \leq \begin{cases} C |\Delta t|^{\frac{1}{6}} & \text{si } f = f(x, a) \\ C |\Delta t|^{\frac{1}{10}} & \text{sinon} \end{cases}$$

Implémentation

Calcul des espérances conditionnelles

Encore une fois, choix de la **régression empirique** :

⇒ simple, rapide

⇒ fournit un estimateur paramétrique du contrôle optimal

Approximation (rappel)

$$\mathbb{E}[U | \mathcal{F}_{t_i}] = \arg \inf_{V \in \mathbf{L}(\mathcal{F}_{t_i}, \mathbb{P})} \mathbb{E}[(V - U)^2]$$

$$\hat{\mathbb{E}}[U | \mathcal{F}_{t_i}] = \arg \inf_{V \in \mathcal{S}} \frac{1}{M} \sum_{m=1}^M (V_m - U_m)^2$$

où $\mathcal{S} \subset \mathbf{L}(\mathcal{F}_{t_i}, \mathbb{P})$

Intervalle de confiance empirique

1^{er} algorithme ("Tsitsiklis - van Roy")

$$\hat{Y}_N = g(X_N)$$

$$\hat{Y}_i = \hat{\mathbb{E}}_i \left[\hat{Y}_{i+1} + f_i(X_i, I_i) \Delta t \right]$$

$$\hat{Y}_i = \sup_{A \in \mathcal{A}_i} \mathbb{E}_{i,A} \left[\hat{Y}_i \right]$$

Biais positif (modulo erreur de Monte Carlo & biais de régression)

2^{eme} algorithme ("Longstaff - Schwartz")

$$\hat{\alpha}_i = \arg \sup_{A \in \mathcal{A}_i} \mathbb{E}_{i,A} \left[\hat{Y}_i \right]$$

$$\hat{X}_{i+1} = b(\hat{X}_i, \hat{\alpha}_i) \Delta t + \sigma(\hat{X}_i, \hat{\alpha}_i) \Delta W_i$$

$$\hat{v}(t_0, x_0) = \frac{1}{M} \sum_{m=1}^M \left[\sum_{i=1}^N f(\hat{X}_{i+1}, \hat{\alpha}_i) \Delta t + g(\hat{X}_N) \right]$$

Biais négatif (modulo erreur de Monte Carlo)

Application

Modèle à volatilité incertaine et/ou corrélation incertaine

Modèle avec 2 actifs

$$dS_t^i = \sigma_i S_t^i dW_t^i, \quad i = 1, 2$$

$$\langle dW_t^1, dW_t^2 \rangle = \rho dt$$

$\sigma_i \in [\sigma_{\min}, \sigma_{\max}]$ aléatoire, incertain

$\rho \in [\rho_{\min}, \rho_{\max}]$ aléatoire, incertain

Prix de sur-réplication d'une option

$\Phi = \Phi(T, S_T^1, S_T^2)$ à l'échéance

$$\mathbf{Q} = \left\{ \mathbb{Q} \leftrightarrow (\sigma_1^{\mathbb{Q}}, \sigma_2^{\mathbb{Q}}, \rho^{\mathbb{Q}}) \text{ à valeurs dans } [\sigma_{\min}, \sigma_{\max}]^2 \times [\rho_{\min}, \rho_{\max}] \right\}$$

$$P_0^+ = \sup_{\mathbb{Q} \in \mathbf{Q}} \mathbb{E}^{\mathbb{Q}} [\Phi(T, S_T^1, S_T^2)], \quad P_0^- = \inf_{\mathbb{Q} \in \mathbf{Q}} \mathbb{E}^{\mathbb{Q}} [\Phi(T, S_T^1, S_T^2)]$$

Différence d'options sur écart $S_1(T) - S_2(T)$ $S_2(0) = 50$, $K_1 = -5$, $K_2 = 5$, $T = 0.25$, $\sigma_1 = 0.4$, $\sigma_2 = 0.3$, ρ incertaine

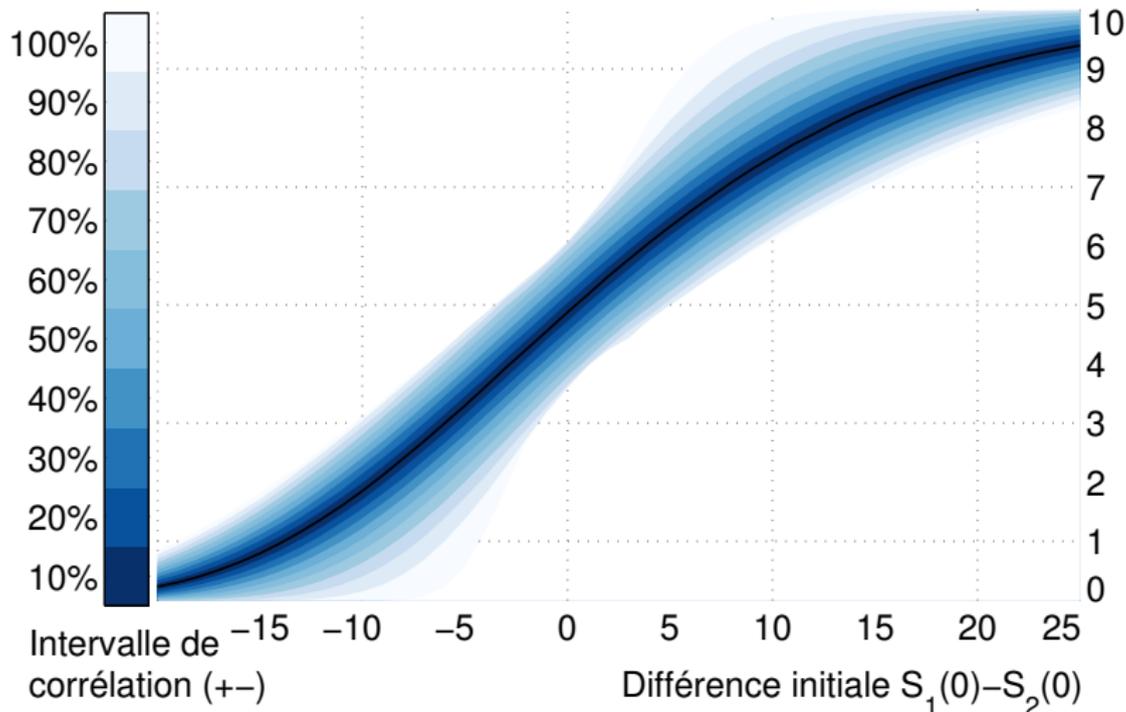
$$\Phi = (\mathbf{S}_1(\mathbf{T}) - \mathbf{S}_2(\mathbf{T}) - \mathbf{K}_1)^+ - (\mathbf{S}_1(\mathbf{T}) - \mathbf{S}_2(\mathbf{T}) - \mathbf{K}_2)^+$$

Base de fonctions de régression

$$\phi(t, s_1, s_2, \rho) = (K_2 - K_1) \times \mathcal{S}(\beta_0 + \beta_1 s_1 + \beta_2 s_2 + \beta_3 \rho + \beta_4 \rho s_1 + \beta_5 \rho s_2)$$
$$\mathcal{S}(x) = 1 / (1 + \exp(-x))$$

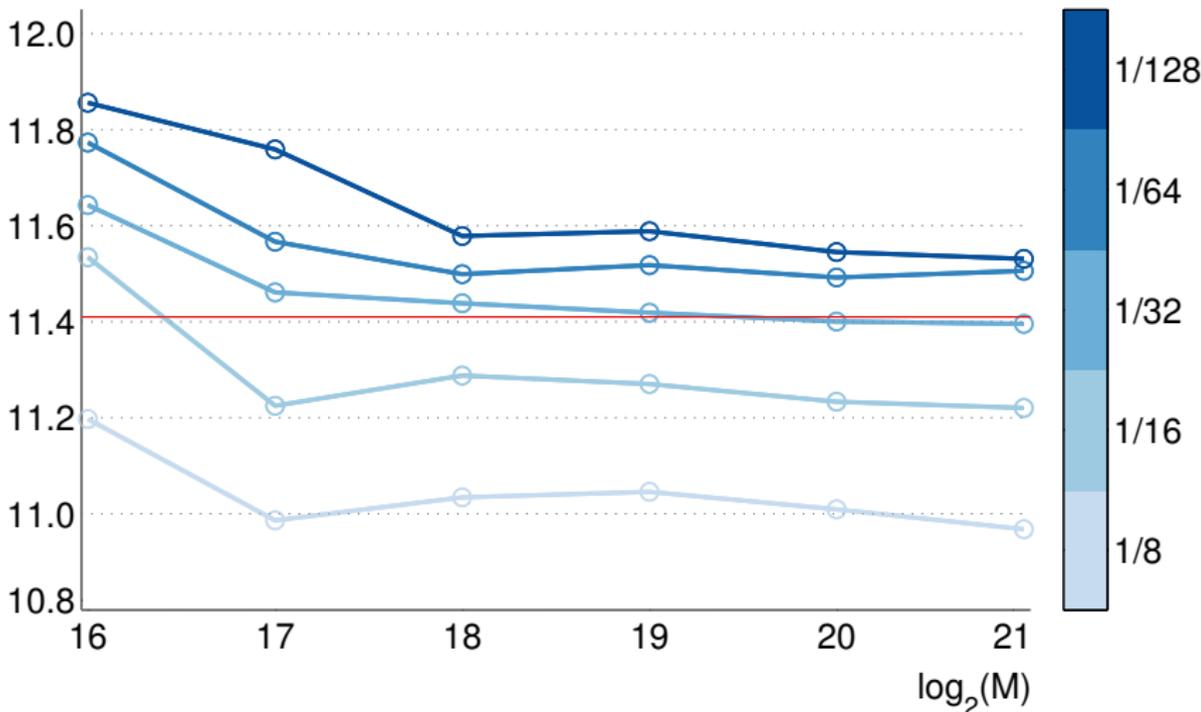
 \Rightarrow Contrôle optimal de type bang-bang

$$\rho^*(t, s_1, s_2) = \arg \max_{\alpha} \phi(t, s_1, s_2, \rho) = \rho_{\max} \quad \text{si } \beta_3 + \beta_4 s_1 + \beta_5 s_2 \geq 0$$
$$= \rho_{\min} \quad \text{sinon}$$

Différence d'options sur écart $S_1(T) - S_2(T)$ $S_2(0) = 50$, $K_1 = -5$, $K_2 = 5$, $T = 0.25$, $\sigma_1 = 0.4$, $\sigma_2 = 0.3$, ρ incertainePrix de l'option $(S_1(T) - S_2(T) - K_1)^+ - (S_1(T) - S_2(T) - K_2)^+$ 

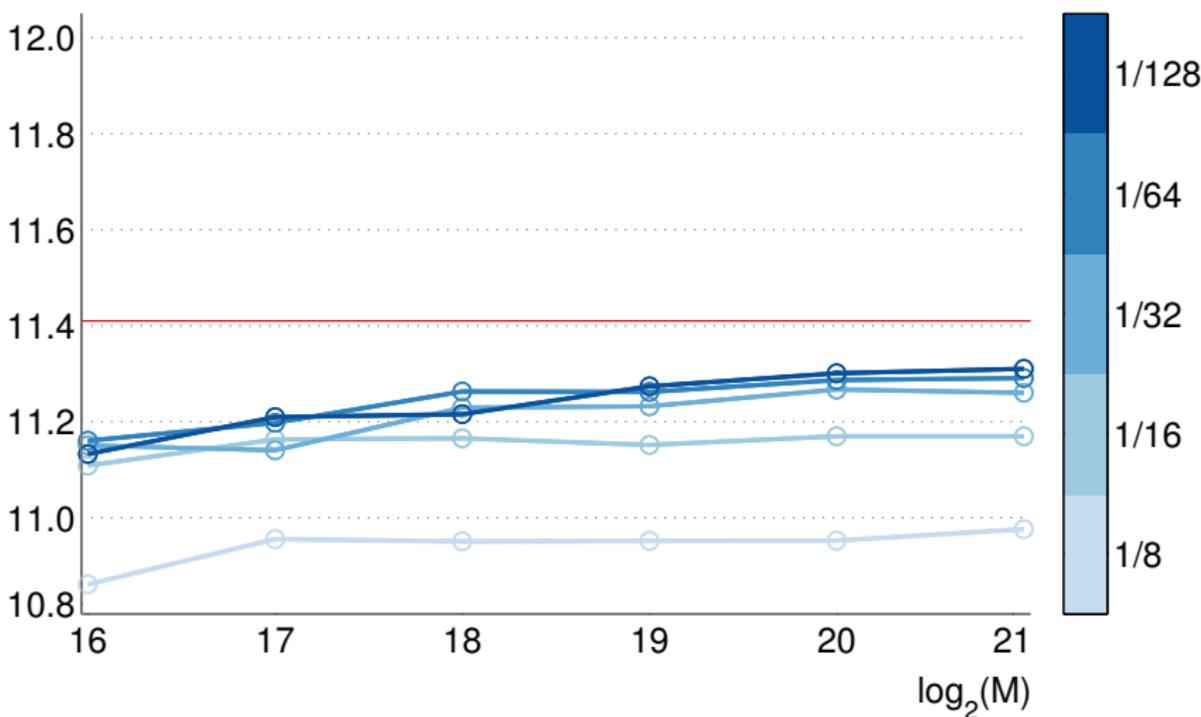
Différence de surperformeurs $(S_2(T) - K_1 S_1(T))^+ - (S_2(T) - K_2 S_1(T))^+$
 $S_i(0) = 100$, $K_1 = 0.9$, $K_2 = 1.1$, $T = 1$, σ_i incertaines $\in [0.1, 0.2]$, $\rho = -0.5$

Estimation du prix de sur-réplication : 1^{er} algorithme (TvR +) Δt



Différence de surperformeurs $(S_2(T) - K_1 S_1(T))^+ - (S_2(T) - K_2 S_1(T))^+$
 $S_i(0) = 100$, $K_1 = 0.9$, $K_2 = 1.1$, $T = 1$, σ_i incertaines $\in [0.1, 0.2]$, $\rho = -0.5$

Estimation du prix de sur-réplication : 2^{ème} algorithme (LS -) Δt



Résumé (3/3)

- **Algorithme probabiliste** pour problèmes généraux de contrôle stochastique (plus généralement, pour les **EDSR contraintes / HJB totalement nonlinéaire**)
 - ⇒ Facile à utiliser, efficace, adapté à la grande dimension
 - ⇒ Étude théorique de l'**erreur de discrétisation (vitesse)**
- Application à la sur-réplication d'option sous **volatilités/corrélations incertaines**
- Extensions de l'approche probabiliste par randomisation/optimisation
 - ⇒ Aux **jeux stochastiques** (équations de HJB-Isaacs)
 - ⇒ Aux **jeux à champs moyens**

Articles



R. Aïd and L. Campi and N. Langrené

A structural risk-neutral model for pricing and hedging power derivatives
Mathematical Finance, vol.23, n.3, pp.387-438, 2013



R. Aïd and L. Campi and N. Langrené and H. Pham

A probabilistic numerical method for optimal multiple switching problem
in high dimension
Accepted for publication in SIAM Journal on Financial Mathematics



I. Kharroubi and N. Langrené and H. Pham

Discrete time approximation of fully nonlinear HJB equations via BSDEs
with nonpositive jumps



I. Kharroubi and N. Langrené and H. Pham

A numerical algorithm for fully nonlinear HJB equations : an approach by
control randomization