



**HAL**  
open science

# Étude des phénomènes d'instabilités en présence d'une suspension dans l'écoulement de Taylor-Dean

Ahmed Daimallah

► **To cite this version:**

Ahmed Daimallah. Étude des phénomènes d'instabilités en présence d'une suspension dans l'écoulement de Taylor-Dean. Autre. Université de Bretagne occidentale - Brest; Université des Sciences et de la Technologie Houari-Boumediène (Algérie), 2013. Français. NNT : 2013BRES0018 . tel-00945793

**HAL Id: tel-00945793**

**<https://theses.hal.science/tel-00945793>**

Submitted on 13 Feb 2014

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



**COUTUTELLE DE THÈSE Réalisée entre  
UNIVERSITÉ DES SCIENCES ET DE LA TECHNOLOGIE  
HOUARI BOUMEDIENE-ALGER**

pour obtenir le titre de  
**DOCTEUR DE L'UNIVERSITÉ DES SCIENCES ET DE LA TECHNOLOGIE  
HOUARI BOUMEDIENE**  
*Discipline : "Physique"*  
*Spécialité : "Energétique et Mécanique des Fluides"*

**ET**

**UNIVERSITÉ DE BRETAGNE OCCIDENTALE**  
*sous le sceau de l'Université européenne de Bretagne*

pour obtenir le titre de  
**DOCTEUR DE L'UNIVERSITÉ DE BRETAGNE OCCIDENTALE**  
*Mention : Mécanique des Matériaux, des Structures et des Fluides*  
**École Doctorale (SICMA)**

présentée par

**Ahmed DAIMALLAH**

Réalisée en Cotutelle entre l'USTHB-Alger et  
l'UBO - Brest

**Etude des phénomènes d'instabilités  
en présence d'une suspension dans  
l'écoulement de Taylor-Dean**

**Thèse soutenue publiquement le 21/09/2013**

devant le jury composé de :

Président : M. Mohamed BENYETTOU, Professeur à l'USTO, Oran

Rapporteurs : M. Jean-Paul DECRUPPE, Professeur à l'Université de  
Lorraine, Metz

M. Vaclav SOBOLIK, Professeur à l'Université La Rochelle

Examineurs : M. Mourad BALISTROU, Maître de Conférences HDR-  
Université de Boumerdes

M. Mostapha TARFAOUI, Enseignant-Chercheur HDR-  
ENSIETA, Brest

M. Mouloud TRIBECHE, Professeur à l'USTHB, Alger

Co-Directeurs de thèse :

M. Ahcene BOUABDALLAH, Professeur à l'USTHB, Alger

M. Blaise NSOM, Professeur à l'Université de Bretagne  
Occidentale, Brest

*A Mes Très Chers Parents*

*A mes Chers Frères et mes Chères Sœurs*

## *Remerciements*

Cette thèse a été réalisée dans le cadre d'une Cotutelle entre le Laboratoire de Thermodynamique et Système Energétique de la Faculté de Physique, USTHB/ Bab Ezzouar (Algérie) et le Laboratoire Brestois de Mécanique et des systèmes de l'UBO/Brest (France).

Je tiens à exprimer ma profonde reconnaissance au Pr Ahcene BOUABDALLAH, Directeur du LTSE/USTHB, pour avoir dirigé ce travail et également pour sa disponibilité ainsi que ses encouragements qu'il n'a cessé de me prodiguer. Je suis heureux de pouvoir lui exprimer mes sincères remerciements.

Je remercie sincèrement le Pr Blaise NSOM de l'UBO/Brest pour avoir co-dirigé ce travail, pour ces précieux conseils et sa gentillesse. Qu'il trouve ici le témoignage de ma profonde reconnaissance.

Toute ma gratitude va à Monsieur Mohamed BENYETTOU, Professeur à l'USTO/Oran, qui malgré ses multiples responsabilités m'a fait l'honneur de présider ce Jury.

J'exprime toute mes remerciement à MM. Jean-Paul DECRUPPE, Professeur à l'Université de Lorraine, Mouloud TRIBECHÉ, Professeur à l'USTHB ainsi que Mostafa TARFAOUI, Enseignant-Chercheur HDR, à l'ENSTA-Bretagne d'avoir bien voulu consacré leurs temps à examiner ce travail.

J'exprime mes vifs remerciements à MM. Vaclac SOBOLIK Professeur à l'Université de La Rochelle et également à Mourad BALISTROU, Maître de Conférences à l'UMBB/Boumerdes pour l'intérêt qu'ils ont porté à ce travail et d'avoir accepté de participer à ce jury.

Mes remerciements vont également à tous les membres du Laboratoire LTSE/USTHB et LBMS/Brest pour leur amitié et leurs soutiens quotidiens durant toute la durée de l'élaboration de ce modeste travail.

Mes pensées vont également à tous ceux qui m'ont soutenu et encouragé dans les moments difficiles pendant ces années, je les remercie vivement.

## *Table des matières*

|                            |   |
|----------------------------|---|
| Nomenclature               |   |
| Introduction générale..... | 1 |

### **Première Partie : Revue bibliographique sur les phénomènes d'instabilités dans les écoulements rotatifs : Systèmes d'écoulement de Taylor-Couette et Taylor-Dean**

#### *Chapitre 1 : Phénomènes d'instabilités des écoulements rotatifs en fluides homogènes newtoniens*

|   |    |
|---|----|
| Introduction.....   | 3  |
| 1.1 Instabilités centrifuges en fluides parfaits.....                           | 4  |
| 1.2 Fluides visqueux.....   | 6  |
| 1.2.1 Régime de base.....   | 6  |
| 1.2.2 Régime perturbé.....  | 12 |
| 1.3 Approche du phénomène de la stabilité linéaire et analyse non linéaire..... | 17 |
| 1.4 Approche expérimentale.....   | 19 |
| 1.5 Etude de la stabilité.....  | 24 |
| 1.5.1 Paramètres de contrôle.....   | 24 |
| 1.5.2 Phénoménologie.....   | 25 |
| 1.5.3 Diagramme de stabilité.....   | 27 |
| 1.5.4 Effets sur la stabilité de l'écoulement de Taylor-Couette.....            | 29 |
| 1.6 Conclusion.....   | 39 |

#### *Chapitre 2 : Phénomènes d'instabilités des écoulements rotatifs en fluides complexes*

|  |    |
|--|----|
| Introduction.....                                    | 40 |
| 2.1 Instabilités centrifuges dans les solutions..... | 40 |
| 2.1.1 Solutions de polymère.....                     | 40 |

|   |    |
|---|----|
| 2.1.1.1 Solution très diluée.....   | 40 |
| 2.1.1.2 Solution viscoélastique.....  | 40 |
| 2.1.2 Suspension.....   | 45 |
| 2.1.2.1 Suspension de sphère.....   | 45 |
| 2.1.2.2 Suspension de fibres.....   | 48 |
| 2.2 Conclusion.....   | 50 |
| <b><i>Chapitre 3 : Travaux théoriques sur les instabilités des écoulements rotatifs</i></b> |    |
| 3.1 Théories linéaires .....  | 51 |
| 3.2 Théories non-linéaires.....   | 52 |
| 3.3 Théories des bifurcations.....  | 53 |

## **Deuxième Partie : Etude Théorique**

### ***Chapitre 4 : Etude théorique de la stabilité hydrodynamique d'une suspension dans le système de Taylor-Couette cylindrique***

|  |    |
|--|----|
| Introduction.....  | 55 |
| 4.1 Equation gouvernant l'écoulement .....   | 55 |
| 4.2 Résolution du problème de la stabilité .....   | 66 |
| 4.2.1. Approche du problème par la méthode de Galerkin.....                                    | 66 |
| 4.2.1.1 Approche en première approximation .....   | 70 |
| 4.2.1.2 Cas de la stabilité marginale $\sigma = 0$ .....                                       | 71 |
| 4.2.1.3 Premier cas particulier : fluide simple (concentration nulle $A = 0$ ) .....           | 72 |
| 4.2.1.4 Deuxième cas particulier : présence de particules en suspension ( $A \neq 0$ ).....    | 73 |
| 4.2.1.4.1 Diagramme de stabilité marginale et effet de la concentration .....                  | 74 |
| 4.2.1.4.2 Effet du diamètre adimensionnel $\phi$ sur l'instabilité axiale de type Taylor ..... | 83 |
| 4.2.1.4.3 Effet du rapport de densité $\varepsilon$ sur l'instabilité primaire .....           | 85 |
| 4.2.1.4.4 Effet de la concentration de la suspension sur le nombre d'onde critique $k_c$ ..... | 87 |

|  |     |
|--|-----|
| 4.2.1.5 Cas général.....   | 89  |
| 4.2.1.5.1 Diagrammes de stabilité marginale et effet de la concentration.....                    | 91  |
| 4.2.1.5.2 Effet du diamètre adimensionnel $\phi$ sur l'instabilité de Taylor.....                | 96  |
| 4.2.1.5.3 Effet du rapport de densité $\varepsilon$ sur l'instabilité de Taylor.....             | 98  |
| 4.2.1.5.4 Effet de la concentration A de la suspension sur le nombre d'onde critique $k_c$ ..... | 102 |
| 4.3 Conclusion.....  | 103 |

## **Troisième Partie : Etude Expérimentale**

### *Chapitre 5 : Techniques de mesure et conditions expérimentales*

|   |     |
|---|-----|
| 5.1 Les principales méthodes de mesures.....            | 105 |
| 5.1.1 Méthodes optiques.....                            | 105 |
| 5.1.2 Méthodes de mesure globale.....                   | 105 |
| 5.1.3 Méthodes de mesure locale.....                    | 106 |
| 5.2 Protocole expérimental et conditions d'essais.....  | 108 |
| 5.2.1 Montage de Taylor-Couette et de Taylor-Dean.....  | 108 |
| 5.2.2 Système d'inclinaison .....                       | 110 |
| 5.2.3 Entraînement des cylindres .....                  | 111 |
| 5.2.4 Mesure de la vitesse de rotation.....             | 111 |
| 5.2.5 Mesure de la température .....                    | 112 |
| 5.2.6 Anneaux de garde.....                             | 112 |
| 5.2.7 Caractérisation de la suspension.....             | 114 |
| 5.2.8 Technique de visualisation .....                  | 119 |
| 5.2.9 Procédure d'essai et paramètres de contrôle ..... | 119 |
| 5.3 Conclusion.....                                     | 121 |

## ***Chapitre 6 : Mise en évidence et caractérisation des instabilités dans le système d'écoulement de Taylor-Dean d'un fluide à seuil d'écoulement***

|   |            |
|---|------------|
| Introduction .....  | 122        |
| 6.1 Apparition des instabilités .....   | 123        |
| 6.1.1 Coefficient de dispersion.....  | 124        |
| 6.1.2 Effet du facteur d'aspect radial $\Gamma'$ .....  | 124        |
| 6.1.3 Effet de la concentration des particules .....  | 126        |
| 6.1.4 Angle d'inclinaison des cellules de Taylor-Dean.....                                      | 129        |
| 6.2 Effet de limitations axiales (effet de bords).....  | 130        |
| 6.2.1 Deux bords tournants .....  | 130        |
| 6.2.1.1 Effet du facteur d'aspect radial.....   | 130        |
| 6.2.1.2 Effet de la concentration de la suspension.....   | 131        |
| 6.2.1.3 Angle d'inclinaison des cellules de Taylor-Dean.....                                    | 134        |
| 6.2.2.1 Cas de deux Bords fixes.....  | 135        |
| 6.2.2.2 Angle d'inclinaison des cellules de Taylor-Dean.....                                    | 137        |
| 6.2.2.3 Combinaison entre Bord fixe et bord mobile.....   | 138        |
| 6.2.3.1 Angle d'inclinaison des cellules de Taylor-Dean.....                                    | 142        |
| 6.2.4 Combinaison entre bord fixe et bord libre.....  | 143        |
| 6.2.4.1 Angle d'inclinaison des cellules de Taylor-Dean.....                                    | 147        |
| 6.2.5 Combinaison entre bord mobile et bord libre.....  | 148        |
| 6.2.5.1 Angle d'inclinaison des cellules de Taylor-Dean.....                                    | 151        |
| 6.2.6 Récapitulation $Tac = f(\Gamma')$ pour différentes concentrations C de la suspension..... | 153        |
| 6.3 Conclusion.....   | 153        |
| <br>  |            |
| <b><i>Conclusion générale et perspectives.....</i></b>  | <b>156</b> |
| <b><i>Références bibliographiques.....</i></b>  | <b>160</b> |
| <b><i>Table des figures.....</i></b>  | <b>170</b> |
| <b><i>Liste des tableaux.....</i></b>   | <b>179</b> |
| <b><i>Annexes.....</i></b>  | <b>180</b> |



# **Nomenclature**

## Nomenclature

### Symboles

|                                     |  |
|-------------------------------------|--|
| $M_c$                               | Moment cinétique   |
| $R_1$                               | Rayon du cylindre intérieur  |
| $R_2$                               | Rayon du cylindre extérieur  |
| H                                   | Hauteur des cylindres  |
| d                                   | Espace annulaire entre les deux cylindres  |
| $\vec{V}$                           | Champ des vitesses   |
| $\bar{V}$                           | Champ moyen des vitesses   |
| $\bar{P}$                           | Champ moyen de la pression   |
| $V_r, V_\theta, V_z$                | Composante de la vitesse moyenne radiale, tangentielle et axiale   |
| $V_{fr}^*, V_{f\theta}^*, V_{fz}^*$ | Composante des vitesses de la phase fluide   |
| $V_{pr}^*, V_{p\theta}^*, V_{pz}^*$ | Composantes des vitesses associées à la nature de la phase des particules dans les directions $r^*$ , $\theta^*$ et $z^*$ respectivement |
| $u', v', w'$                        | Composantes de la vitesse de perturbation correspondante de la phase fluide  |
| $u'_p, v'_p, w'_p$                  | Composantes de la vitesse de perturbation correspondante de la phase particule   |
| $u(r), v(r), w(r)$                  |  |
| $u_p(r), v_p(r), w_p(r)$            | Expressions associées aux perturbations correspondantes  |
| $a_p(r)$                            |  |
| $p'$                                | Champ de pression perturbé   |
| $P^*$                               | Pression   |
| $t^*$                               | Temps  |
| $x$                                 | Variable réduite dans la direction radiale   |
| $T_s$                               | Nombre de Taylor selon J. T. Stuart, $T_s = Re^2 \delta$   |
| Ta                                  | Nombre de Taylor selon A. Bouabdallah, $Ta = \sqrt{T_s}$   |
| T                                   | Nombre de Taylor selon Chandrasekhar   |
| Ta <sub>c</sub>                     | Nombre de Taylor critique  |

## Nomenclature

|            |   |
|------------|---|
| $k$        | Nombre d'onde axiale  |
| $k_c$      | Nombre d'onde axial critique  |
| $f_c$      | Fréquence critique  |
| $Re$       | Nombre de Reynolds classique  |
| $Re_i$     | Nombre de Reynolds associé au cylindre intérieur.   |
| $Re_o$     | Nombre de Reynolds associé au cylindre extérieur  |
| $De$       | Nombre de Dean  |
| $D_h$      | Diamètre hydraulique  |
| $R_c$      | Rayon de courbure   |
| $q_1$      | Nombre d'onde axiale de Taylor-Dean   |
| $T_{c1}$   | Nombre de Taylor correspondant à l'apparition de l'onde stationnaire de Taylor $T_{c1} = \sqrt{(T_s)_{c1}}$ |
| $T_{c2}$   | Nombre de Taylor correspondant à l'apparition des ondes azimutales ou wavy mode                             |
| $T_F$      | Nombre de Taylor correspondant à l'apparition du régime de fluctuations                                     |
| $T'c$      | Nombre de Taylor correspondant à l'apparition du régime de fluctuations                                     |
| $T_D$      | Nombre de Taylor correspondant à l'apparition de la turbulence complètement développée                      |
| $T_{ce}$   | Nombre de Taylor critique dans le cas de deux cylindres excentrique   |
| $T_{c0}$   | Nombre de Taylor critique dans le cas de deux cylindres concentriques                                       |
| $We$       | Nombre de Weissenberg   |
| $t_{v,e}$  | Temps de relaxation de la solution  |
| $E$        | Nombre élastique  |
| $F^*$      | Trainée de stokes   |
| $T_\theta$ | Température du fluide   |
| $C$        | Concentration massique des disques  |
| $A$        | Concentration massique des particules sphériques  |
| $n$        | Nombre de densité de particules   |
| CG1        | Cônes coaxiaux ayant le sommet orienté vers le haut   |
| CG2        | Cônes coaxiaux ayant le sommet est orienté vers le bas  |

Lettres grecques

|                     |  |
|---------------------|--|
| $\Omega_1$          | Vitesse angulaire du cylindre intérieur  |
| $\Omega_2$          | Vitesse angulaire du cylindre extérieur  |
| $\Gamma$            | Facteur d'aspect axial   |
| $\Gamma'$           | Facteur d'aspect radial  |
| $\mu'$              | Rapport des vitesses   |
| $\rho$              | Masse volumique du fluide  |
| $\nu$               | Viscosité cinématique du fluide  |
| $\sigma$            | Facteur d'amplification de la perturbation   |
| $\eta$              | Rapport de rayon   |
| $\delta$            | Jeu radial   |
| $\beta$             | Rapport entre la vitesse de pompage et la vitesse de rotation du cylindre intérieur  |
| $\tau'$             | Rapport des débits dû à la pompe et au cylindre intérieur tournant selon Ait Aider   |
| $\tau'_c$           | Rapport des débits critique dû à la pompe et au cylindre intérieur tournant selon Ait Aider  |
| $\tau_s$            | Temps de diffusion visqueuse   |
| $\tau_{des}$        | Temps caractéristique d'advection du fluide sous l'action de la force centrifuge sur une distance $d$ dans la direction radiale (temps de déstabilisation) |
| $\varepsilon_{ec}$  | Valeur de l'excentricité   |
| $\varepsilon'$      | Rapport dynamique  |
| $\overline{\sigma}$ | Tenseur des contraintes  |
| $\dot{\gamma}$      | Taux de cisaillement   |
| $\rho_f$            | Masse volumique du fluide  |
| $\rho_p$            | Masse volumique des particules solides   |
| $\alpha_p$          | Fraction volumique de particules solides   |
| $\phi^*$            | Diamètre dimensionnel des particules solides   |

## Nomenclature

|               |   |
|---------------|---|
| $\alpha_f$    | Fraction volumique du fluide                                |
| $\varepsilon$ | Rapport de densité  |
| $\tau$        | Contrainte de cisaillement                                  |
| $\tau_0$      | Contrainte seuil d'écoulement                               |
| $\mu$         | Viscosité apparente du fluide                               |
| $\phi$        | Diamètre adimensionnel des particules                       |
| $\phi'$       | Diamètre des orifices de vidange du dispositif expérimental |

# **Introduction Générale**

## INTRODUCTION GENERALE

L'étude des phénomènes d'instabilités demeure primordiale pour résoudre les problèmes posés par la maîtrise et le contrôle des processus industriels et elle est également essentielle quand il s'agit d'expliquer leurs mécanismes et propriétés.

Les instabilités hydrodynamiques sont en fait le reflet de la compétition entre les différentes forces de tendances opposées agissant sur le fluide en mouvement. Dans le cas des instabilités centrifuges qui nous intéressent, ici, les forces en question relèvent principalement de la viscosité et de l'inertie. Lorsque le mouvement est lent, les forces de viscosité l'emportent et l'écoulement est alors purement circulaire. Au fur et à mesure que la vitesse de rotation s'accroît ce qui se traduit par une modification du régime et de la structure du mouvement caractérisée par des brisures de symétrie successives appelées instabilités. Ce régime transitoire se termine par l'établissement du chaos puis le développement de la turbulence. D'une façon générale, les instabilités centrifuges apparaissent dans les écoulements confinés entre deux surfaces courbées concentriques (cylindres, ellipsoïdes, cônes, sphères,...). Cette situation phénoménologique peut se compliquer lorsqu'on considère cet écoulement en présence de particules en suspension.

En effet, la présence de particules solides non solubles dans un fluide correspond à la réalité des écoulements que l'on rencontre aussi bien dans l'industrie (procédés) que dans la nature. Cette problématique est d'évidence plus complexe car elle tient compte des processus de déclenchement des instabilités signalés précédemment auquel on ajoute la rhéologie des suspensions qui introduit les modifications spécifiques aux lois de comportement de l'écoulement.

Dans notre travail, on s'intéresse à l'écoulement de Taylor-Couette confiné entre deux cylindres totalement remplis d'une suspension de particules (sphères rigides) et aussi à l'écoulement de Taylor-Dean qui se développe entre deux cylindres horizontaux partiellement remplis d'une suspension de particules (disques rigides).

Les écoulements de suspensions dans ces deux systèmes (Taylor-Couette et Taylor-Dean) présentent un intérêt considérable dans les techniques de rhéométrie (Koos, 2012), la culture de cellules animales (Haut, 2003), le traitement sanguin en médecine (Ameer, 1999), le génie des procédés et l'industrie chimique (Ogihara, 2002), les procédés d'électro-galvanisation de

l'acier (Chen et al, 1990 ; Komoda, 1983), la fabrication du papier et l'industrie textile (Skali, 1991). Entre autre, ils trouvent également une application dans les procédés de filtration. Ainsi, dans les stations de dessalement, le problème majeur rencontré est celui de l'obturation des pores des membranes par les dépôts de calcaire. Wereley et al (2002) et Schwile et al (2002) ont montré l'efficacité de la membrane qui améliore d'avantage le transfert de masse lorsqu'on fait tourner le cylindre intérieur et la filtration est maximale dans le régime des tourbillons de Taylor.

Ce travail est organisé en trois parties :

La première partie est consacrée à une revue bibliographique sur les phénomènes d'instabilité dans les écoulements rotatifs de type Taylor-Couette et Taylor-Dean. Elle est subdivisée en trois chapitres. Le premier chapitre porte sur les phénomènes d'instabilité des écoulements rotatifs en fluides homogènes Newtoniens. Le deuxième chapitre présente les phénomènes d'instabilité des écoulements rotatifs en fluides complexes. Le troisième chapitre donne un aperçu sur les travaux théoriques dédiés aux instabilités des écoulements rotatifs.

La deuxième partie se focalise sur l'étude théorique de l'instabilité de Taylor-Couette de suspensions sphériques. Ce quatrième chapitre qui présente une théorie linéaire de la stabilité hydrodynamique d'une suspension dans le système de Taylor-Couette cylindrique. La résolution des équations de la stabilité linéaire par la méthode de Galerkin nous a permis d'établir le diagramme de stabilité valable au voisinage du seuil critique  $Tc_1$  de l'apparition de la première instabilité en fonction du nombre d'onde axiale et du facteur d'amplification ou d'amortissement de l'onde pour une concentration donnée.

La troisième partie est dédiée à l'étude expérimentale de l'instabilité de Taylor-Dean de suspensions de disques ; elle est composée des chapitres cinquième et sixième. Ainsi, le cinquième chapitre est consacré à la description du dispositif expérimental et des conditions d'essai adoptées pour effectuer nos mesures. Le sixième chapitre consiste à l'analyse des résultats obtenus expérimentalement. En particulier, on examine l'effet de la concentration de la suspension et la hauteur de remplissage sur l'apparition des instabilités dans le système de Taylor-Dean. En outre, on s'intéresse aux effets des limitations axiales (effet de bords) sur le déclenchement du mode primaire d'instabilité dans le système de Taylor-Dean.

L'ensemble de nos recherches s'achève par une conclusion générale synthétisant les principaux résultats obtenus et l'on propose des perspectives permettant l'approfondissement des résultats précédents.



# **Première partie**

**Revue bibliographique sur les phénomènes  
d'instabilités dans les écoulements rotatifs : Systèmes  
d'écoulement de Taylor-Couette et Taylor-Dean**

# **Chapitre 1**

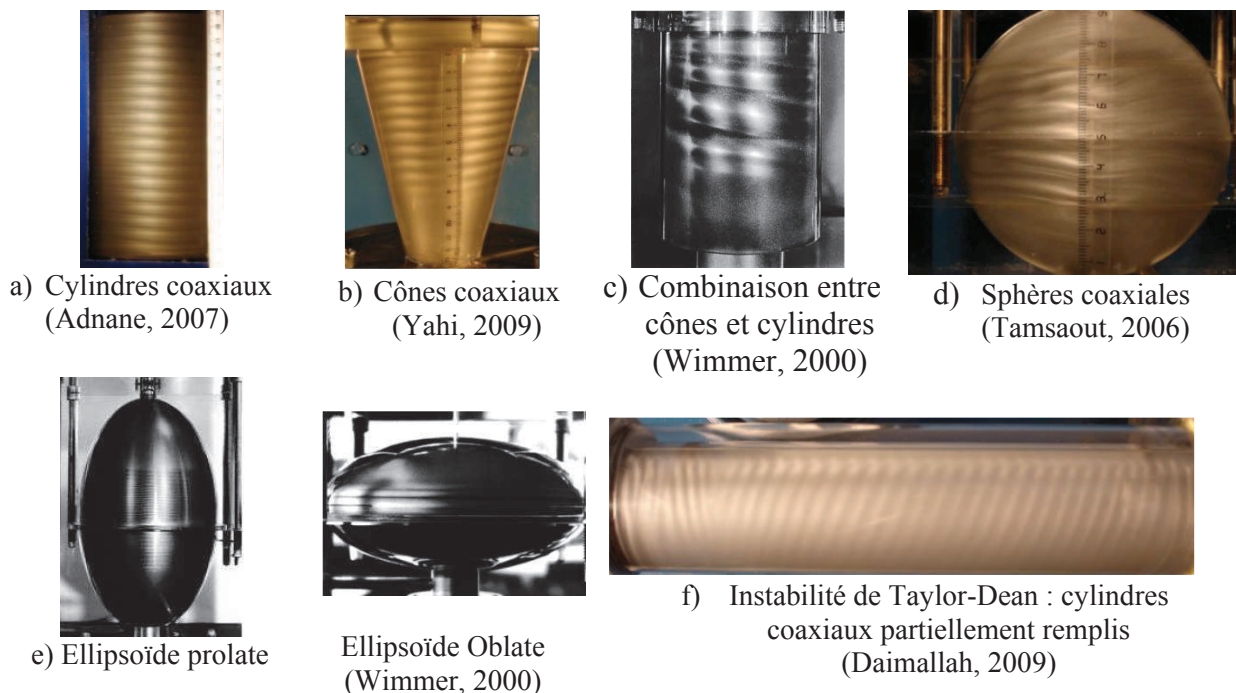
## **Phénomènes d'instabilités des écoulements rotatifs en fluides homogènes newtoniens**

## Phénomènes d'instabilités des écoulements rotatifs en fluides homogènes newtoniens

### Introduction

L'écoulement entre deux cylindres coaxiaux horizontaux a été intensivement étudié sur le plan fondamental et il est fréquemment employé dans les applications industrielles. Ce type de mouvement est connu sous le nom d'écoulement de Taylor-Couette lorsque l'espace annulaire vertical compris entre les deux cylindres coaxiaux en rotation est totalement rempli par le fluide et écoulement de Taylor-Dean lorsque l'espace annulaire horizontal est partiellement rempli. Ces systèmes sont très riches phénoménologiquement en raison de l'apparition successive des instabilités liées à la transition vers le régime chaotique puis la turbulence.

L'existence d'un mouvement perturbé se traduit par l'apparition d'une onde axiale au sein de l'écoulement remonte aux travaux fondateurs de Taylor (1923) effectués en 1923 et dont il est le premier à avoir mis en évidence l'existence de cette instabilité (fig1.1a). Par la suite, ce type de phénomène a été généralisée pour différentes géométries tel que l'écoulement entre cônes coaxiaux (fig.1.1b), combinaison entre cône et cylindre (fig.1.1c), sphères coaxiales (fig.1.1d), oblate ou prolate ellipsoïdes (fig.1.1e), cylindres coaxiaux horizontaux partiellement remplis par le liquide (fig.1.1f), etc ...



**Figure 1.1 :** Généralisation des phénomènes d'instabilités de type Taylor-Couette dans différents dispositifs d'écoulement

De nombreux travaux de recherche sont menés dans ce domaine et une rencontre internationale organisée tous les deux ans est entièrement consacrée à ce système d'écoulement, en l'occurrence « International Couette-Taylor Workshop » dont la 18<sup>ème</sup> s'est tenue au mois de Juin 2013 à Twente aux Pays-Bas. Ce domaine continue à susciter l'intérêt des chercheurs malgré le nombre considérable de travaux théoriques, expérimentaux et numériques qui lui ont été consacrés.

Dans ce qui suit, on présente les principaux résultats théoriques, expérimentaux et numériques établis dans le système d'écoulement de Taylor-Couette.

### 1.1 Instabilités centrifuges en fluides parfaits

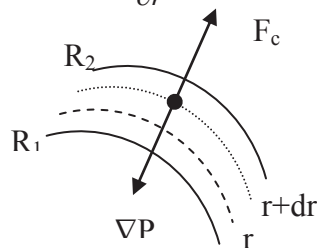
- **Critère de stabilité de Rayleigh** (Lord Rayleigh, 1916)

L'instabilité d'un écoulement correspond à la transition du mouvement de l'état de base stable à l'état perturbé. Cette transition est le résultat d'une perturbation du champ de vitesse et de la pression au sein du fluide. Pour caractériser le domaine d'existence du phénomène d'instabilité, on fait appel aux paramètres régissant l'écoulement. On distingue deux cas :

- Cas de l'écoulement d'un fluide parfait : l'action de la viscosité est négligée dans les équations du mouvement.

L'instabilité d'un écoulement circulaire résulte d'un déséquilibre entre la force centrifuge et le gradient de pression centripète. Pour déterminer l'état stable ou instable d'un écoulement, il est nécessaire d'observer la forme du déplacement infinitésimal d'une particule fluide dans la direction radiale.

On considère une particule fluide en mouvement circulaire sur une ligne de courant de rayon de courbure  $r$ , ayant une vitesse orthoradiale  $V = \Omega(r)r$  et elle est sous l'action d'une force dérivant d'un gradient de pression  $\frac{\partial P}{\partial r}$ .



**Figure 1.2 :** Schéma des forces appliquées sur la particule fluide

En raison de l'absence de dissipation visqueuse dans cette analyse, le moment cinétique de la particule est conservé et s'écrit comme suit :  $M_c = Vr = \Omega r^2$  (1.1)

Pour identifier le caractère stable ou instable d'un écoulement, il est nécessaire d'observer la forme du déplacement infinitésimal d'une particule fluide dans la direction radiale, c'est-à-dire, de la position  $r$  où la vitesse est  $\Omega(r)$  à la position  $r + dr$  où la vitesse angulaire est  $\Omega(r + dr)$ .

Deux cas peuvent se présenter :

- Lorsque le moment cinétique  $M_c = M_c(r + dr)$  en  $r + dr$  est supérieur à celui en  $r$ ,  $M_c(r)$ , le gradient de pression en  $r + dr$  aura tendance à ramener la particule fluide à sa position initiale : le mouvement est dit stable.
- Si  $M_c(r + dr) < M_c$ , la force centrifuge agissant sur la particule fluide est supérieure au gradient de pression centripète environnant, et la particule s'écarte de sa position d'équilibre dans la direction de  $r$  croissant, l'écoulement est alors instable.

Ce raisonnement peut se traduire par le critère de stabilité de Rayleigh (Rayleigh, 1916) qui s'écrit comme suit :

$$\text{L'écoulement est stable si, } \frac{d|M_c|}{dr} > 0 \quad (1.2)$$

Pour un fluide parfait, le critère de Rayleigh  $\frac{d|M_c|}{dr} > 0$ , qui est la formulation du premier critère d'instabilité se traduit par :  $\frac{d}{dr}|\Omega r^2| \geq 0$  (1.3)

Dans le cas d'un écoulement entre deux cylindres coaxiaux de rayon intérieur  $R_1$  et extérieur  $R_2$ , en mouvement de rotation avec une vitesse angulaire  $\Omega_1$  et  $\Omega_2$ , cette condition de stabilité se traduit par l'inégalité suivante :  $\Omega_1 R_1^2 - \Omega_2 R_2^2 \geq 0$  (1.4)

Ce critère de stabilité de Rayleigh indique que l'écoulement dans la configuration rotor/stator avec seul le cylindre intérieur tournant ( $\Omega_1 \neq 0$ ,  $\Omega_2 = 0$ ) correspond à un mouvement qui est fondamentalement instable, alors que dans le cas du seul cylindre extérieur tournant ( $\Omega_1 = 0$ ,  $\Omega_2 \neq 0$ ) le mouvement est globalement stable.

b) Dans le cas d'un fluide visqueux, le critère de Rayleigh ne permet pas de prédire les instabilités du mouvement en raison de la présence du frottement visqueux qui a un effet stabilisant. Dans ces conditions, il est nécessaire :

- L'approche théorique qui consiste à appliquer la théorie de la stabilité linéaire aux équations du mouvement pour prédire l'évolution de l'instabilité au voisinage du seuil critique de son apparition.
- L'approche expérimentale permet d'élaborer le diagramme de stabilité pour situer les régions d'écoulement stable et instable.

La description des régimes d'écoulement se base sur les valeurs des paramètres de contrôle qui sont des nombres sans dimensions, à savoir, soit le nombre de Reynolds ou soit le nombre de Taylor qui sont fonction de la vitesse linéaire  $V_1 = \Omega_1 R_1$  du cylindre tournant, l'espace annulaire étant  $d = R_2 - R_1$  et  $\nu$  la viscosité cinématique du fluide.

## 1.2 Fluides visqueux

Les configurations généralement étudiées dans la littérature concernent le dispositif de Taylor-Couette (cylindres coaxiaux), de Dean (conduite courbe) et de Taylor-Dean qui peut se concevoir comme l'association des deux précédents. On s'intéresse, ici, plus particulièrement la stabilité de ces trois types d'écoulement.

### 1.2.1 Régime de base

#### a) Ecoulement de Taylor-Couette

On considère l'écoulement d'un fluide newtonien, incompressible, de densité  $\rho$  et de viscosité cinématique  $\nu$  entre deux cylindres coaxiaux tournants, les cylindres intérieur de rayon  $R_1$  et extérieur de rayon  $R_2$  pouvant être en rotation, respectivement, à des vitesses angulaires  $\Omega_1$  et  $\Omega_2$  en Co- ou Contra-rotation.

#### • Equations générales du mouvement

Les équations de conservation de la quantité de mouvement et de la masse pour un fluide newtonien incompressible de densité constante et qui s'expriment comme suit :

$$\begin{cases} \frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + (\vec{V} \cdot \nabla) \vec{V} = -\frac{1}{\rho} \nabla P + \nu \Delta \vec{V} \\ \nabla \cdot \vec{V} = 0 \end{cases} \quad (1.5)$$

Avec  $p$  la pression,  $\vec{V}$  le champ des vitesses des particules fluides et  $t$  le temps.

Dans le système de coordonnées cylindriques  $(r, \theta, z)$ , les équations régissant le mouvement du champ hydrodynamique  $\vec{V}$  ( $V_r, V_\theta, V_z$ ) et  $P$  se développent selon la forme suivante :

- **Equation de conservation de la masse**

$$\frac{\partial V_r}{\partial r} + \frac{V_r}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial V_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial V_z}{\partial z} = 0 \quad (1.6)$$

- **Equation de conservation de la quantité de mouvement**

$$\begin{cases} \frac{DV_r}{Dt} - \frac{V_\theta^2}{r} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial r} + \nu \left( \Delta V_r - \frac{V_r}{r^2} - \frac{2\partial V_\theta}{r^2 \partial \theta} \right) \\ \frac{DV_\theta}{Dt} + \frac{V_r V_\theta}{r} = -\frac{1}{\rho} \frac{1}{r} \frac{\partial P}{\partial \theta} + \nu \left( \Delta V_\theta - \frac{V_\theta}{r^2} - \frac{2\partial V_r}{r^2 \partial \theta} \right) \\ \frac{DV_z}{Dt} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial z} + \nu \left( \Delta V_z - \frac{V_z}{r^2} - \frac{2\partial V_z}{r^2 \partial \theta} \right) \end{cases} \quad (1.7)$$

Où :  $\frac{D}{Dt}$  désigne la dérivée particulaire qui est de la forme :

$$\frac{D}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t} + V_r \frac{\partial}{\partial r} + \frac{V_\theta}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} + V_z \frac{\partial}{\partial z} \quad (1.8)$$

Et  $\nabla^2 = \Delta$  désigne le Laplacien lié aux coordonnées cylindriques.

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \quad (1.9)$$

L'écoulement de base de Couette circulaire est stationnaire  $\left( \frac{\partial}{\partial t} = 0 \right)$  et axisymétrique  $\left( \frac{\partial}{\partial \theta} = 0 \right)$ .

Lorsque les cylindres sont infiniment longs  $\left( \Gamma = \frac{H}{d} \ll 1 \right)$ , on peut négliger les effets de bord et admettre que la composante axiale de la vitesse  $V_z = 0$ . L'écoulement est alors axialement homogène  $\left( \frac{\partial}{\partial z} = 0 \right)$ .

Le champ hydrodynamique de l'écoulement est décrit par le champ moyen de vitesse  $\bar{V}(0, V_\theta, 0)$  et de pression  $\bar{P}(r, z)$ .

Dans ce type d'écoulement le champ de pression est constant le long de la circonférence.

Les conditions aux limites associées au système d'équations (1.6) et (1.7) doivent satisfaire à la propriété de non glissement du fluide au niveau des parois cylindriques, à savoir :

$$\begin{cases} r = R_1, & V_\theta(R_1) = \Omega_1 R_1, & V_r = V_z = 0 \\ r = R_2, & V_\theta(R_2) = \Omega_2 R_2, & V_r = V_z = 0 \end{cases} \quad (1.10)$$

Tenant compte des conditions aux limites données par l'expression (1.10), le profil de vitesse moyenne décrivant le mouvement de base est donnée par :

$$\bar{V}_\theta(r) = A'r + \frac{B'}{r} \quad (1.11)$$

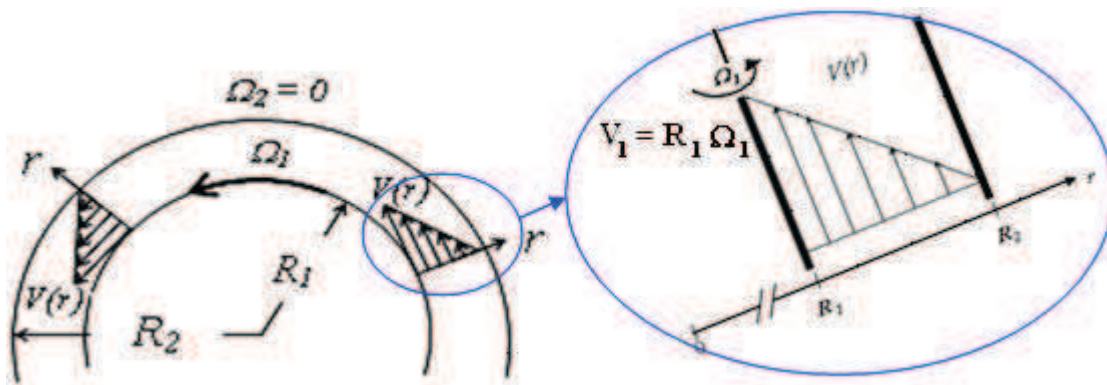
$$\text{Avec : } A' = \frac{\Omega_2 R_2^2 - \Omega_1 R_1^2}{R_2^2 - R_1^2}, \quad B' = (\Omega_2 - \Omega_1) \frac{R_1^2 R_2^2}{R_2^2 - R_1^2} \quad (1.12)$$

Dans l'approximation d'un faible espace annulaire ( $\frac{d}{R_1} \ll 1$ ) le profil de vitesse moyenne se simplifie et devient :

$$\bar{V}_\theta = \Omega_1 R_1 [1 - (1 - \mu')x] \quad (1.13)$$

Avec  $x = \frac{r - R_1}{d}$ , avec  $0 \leq x \leq 1$  et  $\mu' = \frac{\Omega_2}{\Omega_1}$  le rapport des vitesses.

Lorsque le cylindre intérieur est seul en rotation,  $\Omega_2 = 0$ ,  $\mu' = 0$ , on a :



**Figure 1.3 :** Représentation du profil de vitesse moyenne de l'écoulement de base de Couette



### b) Ecoulement de Dean

Ce type de mouvement concerne l'écoulement dans une conduite courbe. C'est un écoulement de type Poiseuille dans une conduite courbe formée par deux surfaces cylindriques coaxiales fixes sous l'action d'un gradient de pression azimuthal. Le profil de vitesse moyenne du mouvement de base est décrit par l'expression suivante :

$$\bar{V}_\theta(r) = Mr \ln\left(\frac{r}{R_1}\right) + C_1 r + \frac{C_2}{r} \quad (1.14)$$

Avec :

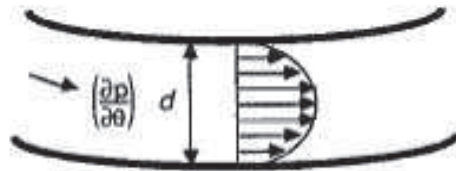
$$C_1 = -\frac{R_2^2}{R_2^2 - R_1^2} \ln\left(\frac{R_2}{R_1}\right) \quad (1.15)$$

$$C_2 = \frac{R_1^2 R_2^2}{R_2^2 - R_1^2} \ln\left(\frac{R_2}{R_1}\right) \quad (1.16)$$

$M$  est lié au gradient azimuthal de la pression  $P$  :  $M = \frac{1}{2\rho\nu} \frac{\partial P}{\partial \theta}$  (1.17)

Dans l'approximation d'un faible espace annulaire ( $\frac{d}{R_1} \ll 1$ ), le profil de vitesse moyenne se réduit à la forme suivante :

$$\bar{V}_\theta = \bar{V}_\theta x(1-x) \quad (1.18)$$

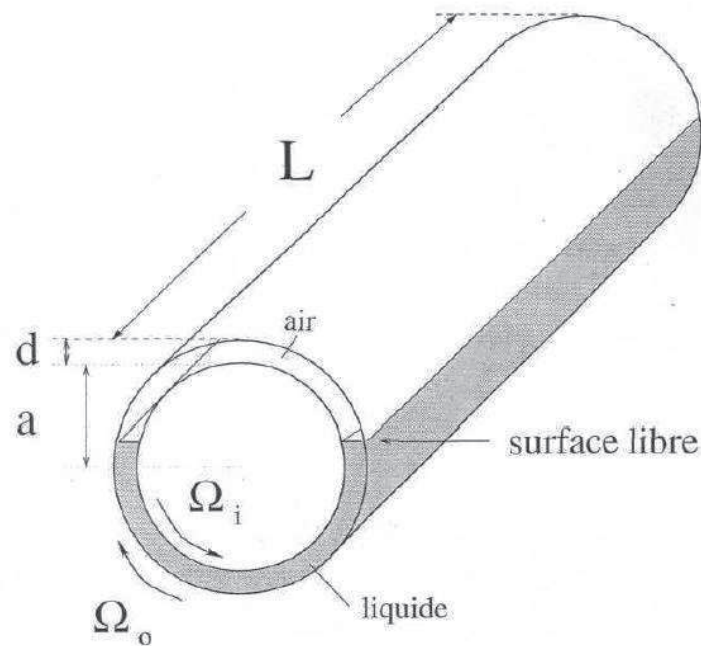


**Figure 1.4 :** Schématisation du profil de l'écoulement moyen de Dean (Yong and Shaqfeh, 1994)

### c) Ecoulement de Taylor-Dean

L'écoulement de Taylor-Dean concerne le mouvement d'un fluide situé dans l'espace annulaire compris entre deux cylindres coaxiaux en position horizontale. L'espace annulaire

est partiellement rempli par le liquide, ce qui produit deux surfaces libres, qui ne sont pas traversées par le fluide. Contrairement à l'écoulement de Taylor-Couette, celui de Taylor-Dean ne présente pas de symétrie axiale due à la rotation. Cet écoulement résulte de la superposition d'un écoulement de Couette courbe généré par la rotation des cylindres et d'un écoulement de retour de type Poiseuille du fait de l'existence d'un gradient de la pression dans la direction azimutale.



**Figure 1.5** : Schématisation du système d'écoulement de Taylor-Dean (Bot, 1998)

Loin des extrémités des cylindres, l'écoulement de base est supposé stationnaire et bidimensionnel. Cet écoulement peut être décomposé en deux parties : une zone de recirculation située au voisinage des surfaces libres et une zone d'écoulement dans le volume tel que le champ de vitesse est décrit par l'expression suivante :

$$\bar{V}_\theta(r) = A'r + \frac{B'}{r} + Mr \ln\left(\frac{r}{R_1}\right) + C_1 r + \frac{C_2}{r} \quad (1.19)$$

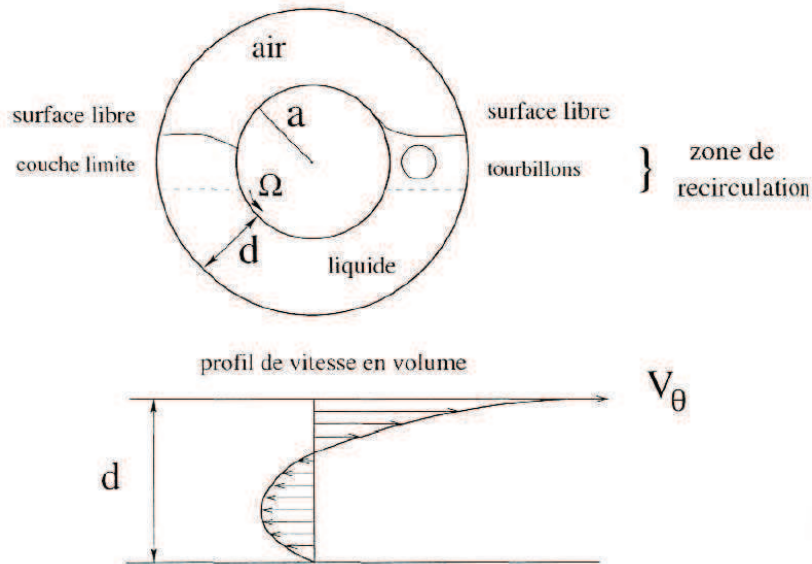
Celui-ci correspond à une superposition de l'écoulement de Taylor-Couette et de l'écoulement de Dean.

Dans l'approximation d'un faible espace annulaire ( $\frac{d}{R_1} \ll 1$ ), le profil de vitesse peut se réduire à l'expression suivante :

$$\bar{V}_\theta(r) = \Omega_1 R_1 [3(1 - \mu')x^2 - 2(2 + \mu')x + 1] \quad (1.20)$$

Avec :  $x = \frac{(r - R_1)}{d}$  la nouvelle variable radiale telle que  $0 \leq x \leq 1$

$\mu' = \frac{\Omega_2}{\Omega_1}$  le rapport de vitesses angulaires.



**Figure 1.6 :** Schéma de l'écoulement de base pour un cylindre extérieur au repos (Bot, 1998).

L'existence des tourbillons de recirculation sous la surface libre, qui peuvent même osciller a été établi analytiquement (Chen et al, 1990 ; Mutabazi, 1990) selon un développement en puissance de  $\frac{d}{a}$  et raccordement à la solution dans le volume.

La brisure de symétrie de rotation dans le système de Taylor-Dean est marquée par des comportements différents des deux surfaces libres. En effet, lorsque le cylindre extérieur est maintenu fixe, on note alors le développement d'un écoulement de type couche limite sur l'une des surfaces, alors que l'autre surface génère une séquence de tourbillons amortis (Voir figure 1.6).

## 1.2.2 Régime perturbé

### a) Instabilité de Taylor-Couette

Les premières tentatives d'études de l'écoulement d'un fluide visqueux entre deux cylindres coaxiaux en rotation sont à l'origine de la naissance de la rhéologie. En effet, Newton (1687) s'est intéressé à la mesure de la viscosité en utilisant un dispositif constitué de deux cylindres tournants. Plus tard, Stokes (1848) a mené une étude de l'écoulement d'un fluide entre deux cylindres concentriques. Il a montré que l'écoulement devient instable lors de la mise en rotation du cylindre intérieur. En 1881, Margules(1881) apparaît être le premier qui a montré que l'écoulement entre deux cylindres coaxiaux pourrait être utilisé pour mesurer la viscosité.

En 1884, Couette (1890) a mis au point le premier viscosimètre constitué de deux cylindres coaxiaux en s'inspirant des travaux de Margules qui a mis en évidence le processus de frottement exercé par le fluide sur les parois des cylindres.

Plus tard, Mallock (1888) réalisa un modèle de viscosimètre et a observé des caractéristiques similaires à celles trouvées par M. Couette. Toutefois, ces deux auteurs n'ont pas expliqué le phénomène qu'ils ont observé.

En 1916, Rayleigh (1916) a tenté d'effectuer une étude de la stabilité linéaire pour un fluide parfait compris entre deux cylindres coaxiaux en rotation. Son travail s'est limité au fluide parfait et lui a permis d'énoncer le critère de stabilité à l'aide d'une expression appelée discriminant de Rayleigh qui porte son nom. En 1923, Taylor (1923) fut le premier à mettre en évidence l'existence d'une instabilité de l'écoulement entre deux cylindres coaxiaux, structurée sous forme de rouleaux stationnaires axisymétriques. Ces rouleaux se développent lorsque la force centrifuge prédomine sur le gradient radial de pression. Par la suite, de nombreux travaux théoriques et expérimentaux ont été menés dans ce domaine afin de caractériser l'évolution de la stabilité de l'écoulement vers la turbulence (Diprima, 1960 ; Chandrasekhar, 1961 ; Swinney, 1981 ; Bouabdallah, 1980), entre autres.

- **Equation du mouvement de l'écoulement perturbé**

L'étude de la stabilité linéaire de l'écoulement de Couette nous permet de déterminer les valeurs critiques du paramètre de contrôle ainsi que les caractéristiques de l'instabilité au voisinage du seuil de son apparition en fonction du nombre d'onde et selon la nature

stationnaire ou instationnaire de la perturbation. On superpose une perturbation à l'écoulement laminaire de base et ce, par décomposition du champ hydrodynamique en mouvements moyen et perturbé tel que :

$$V_r = u'(r, z, t), V_\theta = \bar{V}(r) + v', V_z = w', P = \bar{P} + p'$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial u'}{\partial t} + \frac{\bar{V}}{r} \frac{\partial u'}{\partial \theta} - 2 \frac{\bar{V}}{r} v' &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p'}{\partial r} + \nu \left[ \Delta u' - \frac{u'}{r^2} - \frac{2}{r^2} \frac{\partial v'}{\partial \theta} \right] \\ \frac{\partial v'}{\partial t} + \frac{\bar{V}}{r} \frac{\partial v'}{\partial \theta} + \left[ \left( \frac{d}{dr} + \frac{1}{r} \right) \bar{V} \right] u' &= -\frac{1}{\rho} \frac{1}{r} \frac{\partial p'}{\partial \theta} + \nu \left[ \Delta v' - \frac{v'}{r^2} + \frac{2}{r^2} \frac{\partial u'}{\partial \theta} \right] \\ \frac{\partial w'}{\partial t} + \frac{\bar{V}}{r} \frac{\partial w'}{\partial \theta} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p'}{\partial z} + \nu \Delta w' \end{aligned} \quad (1.21)$$

En supposant que les différentes perturbations sont axisymétriques et indépendantes de  $\theta$ , le système d'équations (1.19) se réduit à la forme suivante :

$$\begin{aligned} \frac{\partial u'}{\partial t} - 2 \frac{\bar{V}}{r} v' &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p'}{\partial r} + \nu \left[ \Delta u' - \frac{u'}{r^2} \right] \\ \frac{\partial v'}{\partial t} + \left( \frac{d\bar{V}}{dr} + \frac{\bar{V}}{r} \right) u' &= \nu \left[ \Delta v' - \frac{v'}{r^2} \right] \\ \frac{\partial w'}{\partial t} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p'}{\partial z} + \nu \Delta w' \end{aligned} \quad (1.22)$$

Aussi, pour un écoulement axisymétrique, l'équation de continuité se réduit à forme suivante :

$$\frac{\partial u'}{\partial r} + \frac{u'}{r} + \frac{\partial w'}{\partial z} = 0 \quad (1.23)$$

Les conditions aux limites associées au mouvement sont :  $u' = v' = w' = 0$  à  $r = R_1$  et  $r = R_2$

En se plaçant en géométrie infinie (cylindres infiniment long).

Par analyse de la perturbation en modes normaux en se limitant au mode fondamental du développement de Fourier, on cherche une solution des équations ci-dessus (1.20) et (1.21) qui sont de la forme suivante :

$$\begin{aligned} u' &= u(r) e^{\sigma^* t} \cos(k^* z) \\ v' &= v(r) e^{\sigma^* t} \cos(k^* z) \\ w' &= w(r) e^{\sigma^* t} \sin(k^* z) \\ p' &= p(r) e^{\sigma^* t} \cos(k^* z) \end{aligned} \quad (1.24)$$

Avec  $k^*$  est le nombre d'onde de la perturbation dans la direction axiale et  $\sigma^*$  est une constante pouvant être complexe.

En utilisant les expressions (1.24) pour la perturbation, les équations du mouvement (1.21) et (1.22) deviennent :

$$\nu \left( DD_* - k^{*2} - \frac{\sigma^*}{\nu} \right) u + 2 \frac{\bar{V}}{r} v = \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial r} \quad (1.25.a)$$

$$\nu \left( DD_* - k^{*2} - \frac{\sigma^*}{\nu} \right) v - (D_* \bar{V}) u = 0 \quad (1.25.b)$$

$$\nu \left( DD_* - k^{*2} - \frac{\sigma^*}{\nu} \right) w = -\frac{kp}{\rho} \quad (1.25.c)$$

$$D_* u = -kw \quad (1.25.d)$$

Avec :

$$D = \frac{d}{dr} \quad (1.26)$$

$$D_* = \frac{d}{dr} + \frac{1}{r}$$

Tout d'abord, on tire l'expression de  $w$  de l'expression (1.25.d) et l'on injecte dans l'équation (1.25.c), on obtient :

$$\frac{\nu}{k^2} \left( DD_* - k^{*2} - \frac{\sigma^*}{\nu} \right) D_* u = \frac{p}{\rho} \quad (1.27)$$

Cette expression de  $\frac{p}{\rho}$  transforme l'équation (1.25.a) en :

$$\frac{\nu}{k^2} \left( DD_* - k^{*2} - \frac{\sigma^*}{\nu} \right) (DD_* - k^{*2}) u = 2 \frac{\bar{V}}{r} v \quad (1.28)$$

Dans le cas d'un espace annulaire faible  $\eta \rightarrow 1$ , Nous pouvons admettre l'approximation

$$D_* \approx D$$

Effectuant alors le changement de variable  $x = \frac{r - R_1}{R_2 - R_1}$  (1.29)

Où  $r$  est compté à partir du cylindre intérieur

Définissant les paramètres suivants :

$$- \text{ Coefficient d'amplification de l'onde, sans dimension : } \sigma = \frac{\sigma^* d^2}{\nu} \quad (1.30)$$

$$- \text{ Nombre d'onde adimensionnel : } k = \frac{k^*}{d} \quad (1.31)$$

Les équations du mouvement adimensionnelles se réduisent à la forme suivante :

$$(D^2 - k^2 - \sigma)(D^2 - k^2)u = (1 + \alpha' x)v \quad (1.32.a)$$

$$(D^2 - k^2 - \sigma)v = -Tk^2u \quad (1.32.b)$$

$$\text{ où } D = \frac{d}{dx}$$

$$\text{ Et } \alpha' = -(1 - \mu')$$

Avec les transformations précédentes, le nombre de Taylor est à présent défini par :

$$T = -\frac{4A'\Omega_1}{\nu^2}(R_2 - R_1)^4 \quad (1.33)$$

Dans le cas de la stabilité marginale ( $\sigma = 0$ ), le système d'équations (1.32.a, 1.32.b) se réduit à la forme suivante :

$$(D^2 - k^2)^2 u = (1 + \alpha' x)v \quad (1.34.a)$$

$$(D^2 - k^2)v = -Tk^2u \quad (1.34.b)$$

Les conditions aux limites associées aux équations ci-dessus sont définies comme suit :

$$u = Du = v = 0 \quad \text{pour } x = 0 \text{ et } x = 1 \quad (1.35)$$

Dans le système d'écoulement de Taylor-Couette, les modes stationnaires sont axisymétriques (rouleaux ou vortex de Taylor) et les modes oscillants sont non axisymétriques (ondes azimutales). Lorsque le cylindre intérieur est tournant, le nombre d'onde axiale a été évalué à  $k_c = 3.12$  correspondant au nombre de Taylor critique est  $T_{c1} = 1715$  qui est la meilleure prédiction assurée par Chandrasekhar (Chandrasekhar, 1961).

## b) Instabilité de Dean

L'instabilité de l'écoulement dans une conduite courbe, appelée également instabilité de Dean, résulte d'un déséquilibre entre la force centrifuge et le gradient de pression radial

donnant naissance à une paire de cellules symétriques et contra-rotatives appelées cellules de Dean qui se développent au niveau du coude du canal (voir figure 1.7).

En procédant de la même manière, autrement dit lorsque l'on superpose à l'écoulement de base une petite perturbation stationnaire, axisymétrique et périodique en  $z$ , on obtient le système d'équations régissant la stabilité marginale suivant :

$$\begin{cases} (D^2 - k^2)^2 u = x(1-x)v & (1.36.a) \\ (D^2 - k^2)v = 72k^2 D_e^2 (1-2x)u & (1.36.b) \end{cases}$$

Les résultats de la stabilité de l'écoulement de Dean sont généralement donnés en fonction du nombre d'onde axiale  $k$  et du nombre de Dean  $D_e$  qui est donné par la formule suivante :

$$D_e = \text{Re} \sqrt{\frac{D_h}{R_c}} \quad (1.37)$$

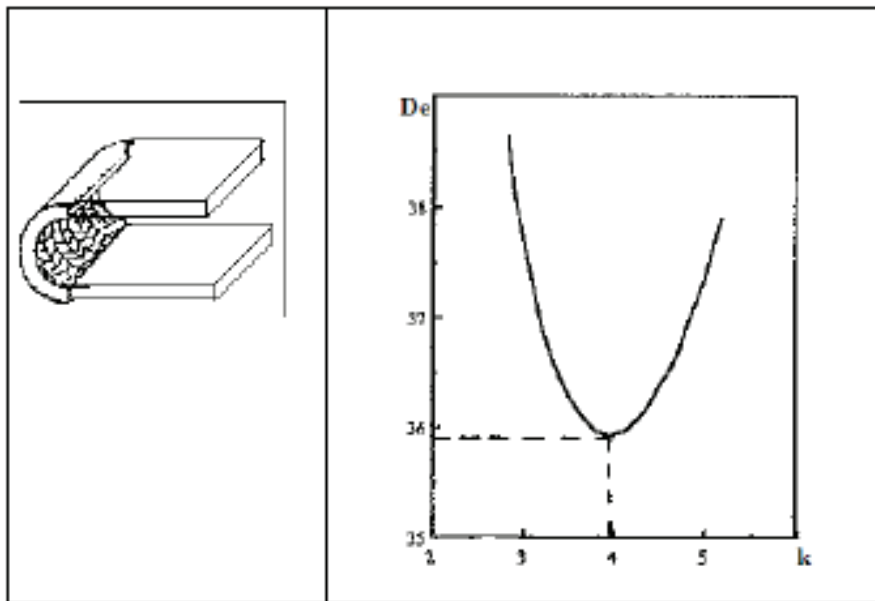
$$\text{Re} : \text{Nombre de Reynolds } \text{Re} = \frac{\bar{U} D_h}{\nu} \quad (1.38)$$

$\bar{U}$  : Vitesse moyenne de l'écoulement

$\nu$  : Viscosité cinématique du fluide

$D_h$  : Diamètre hydraulique

$R_c$  : Rayon de courbure



**Figure 1.7 :** Courbe de stabilité marginale de l'instabilité de Dean  
(Tirée de Gibson et Cook, 1974)



### c) Instabilité de Taylor-Dean

En procédant de la même manière que précédemment, la stabilité de l'écoulement de Taylor-Dean s'obtient en superposant au champ de base obtenu une petite perturbation axisymétrique stationnaire et périodique le long de l'axe  $oz$ , on obtient le système d'équations de la stabilité marginale suivant :

$$\left\{ \begin{array}{l} (D^2 - k^2)^2 u = [1 - (1 - \mu')x + \lambda x(1 - x)]v \\ (D^2 - k^2)v = -Tk^2 \left[ 1 - \frac{\lambda}{1 - \mu'}(1 - 2x) \right] u \end{array} \right. \quad (1.39.a)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} (D^2 - k^2)^2 u = [1 - (1 - \mu')x + \lambda x(1 - x)]v \\ (D^2 - k^2)v = -Tk^2 \left[ 1 - \frac{\lambda}{1 - \mu'}(1 - 2x) \right] u \end{array} \right. \quad (1.39.b)$$

$$\text{Avec : } \quad \lambda = \frac{6\bar{V}}{R_1\Omega_1} \quad (1.40)$$

### 1.3 Approche du phénomène de la stabilité linéaire et analyse non linéaire

L'analyse de la stabilité linéaire de l'écoulement d'un fluide visqueux permet de déterminer les paramètres du seuil critique (nombre de Taylor critique en fonction du nombre d'onde critique) et d'identifier la nature stationnaire ou instationnaire de la bifurcation.

Les résultats des premières investigations menées par Diprima (1959), Hughes et Reid (1964), Sparrow et al (1965) ont abouti aux courbes de stabilité marginale pour l'écoulement de Taylor-Couette et de Dean. Ils ont obtenu des points de Codimension 2 : lieu de compétition entre deux modes d'instabilités de natures différentes dans le diagramme d'états.

Raney et Chang (1971) (voir aussi Drazin and Reid (1982)) ont établi l'existence de modes oscillatoires axi-symétriques dans l'écoulement de Taylor-Dean.

Les travaux intensifs menés par Mutabazi et al (1990;1988;1989) ont permis de montrer l'existence de cinq branches d'instabilité : trois stationnaires et deux oscillatoires axisymétriques et non-axisymétriques.

Chen and Chang (1992) ont présenté une étude paramétrique de la stabilité linéaire de l'écoulement de Taylor-Dean dans un large intervalle des deux paramètres gouvernants le problème. Ces paramètres sont le rapport de la vitesse angulaire du cylindre extérieur à celle du cylindre intérieur et le rapport de pompage et des vitesses de rotation mentionné ici par  $\lambda$ . Ils ont fourni une topologie décrivant la nature de l'instabilité. En effet, Ils ont confirmé les résultats expérimentaux de Mutabazi et al (1988 ; 1990 ; 1991). A partir de l'étude de la stabilité de l'écoulement de Taylor-Dean dans un espace annulaire horizontal partiellement

remplis pour  $\lambda = -3$ , ils ont conclu que l'instabilité n'est pas nécessairement symétrique. Ces auteurs soulignent l'existence possible d'existence d'une sorte d'interaction entre les modes axisymétrique et oscillatoire.

En particulier, la courbe neutre  $m = 0$  pour  $\beta^* = -3.667$  présentée par Hughes et Reid (1964) est remplacée par la courbe neutre à  $m = 5$  qui est uni-module et plus stable. De plus, ils ont indiqué qu'en général le mode d'instabilité tel que  $m$  grand correspond à une stabilité élevée et de faible nombre d'onde axial.

Kachoyan (1987) a mené une investigation approfondie sur la topologie des courbes neutres dans l'écoulement de Taylor-Dean et a obtenu un nouveau type de courbes neutres. Il s'agit des courbes neutres qui se coupent pour  $\beta \geq +3$ . Il a employé le critère de Rayleigh pour donner une explication de ce nouveau phénomène.

Chen (1993) a effectué une étude de la stabilité linéaire tridimensionnelle de l'écoulement de Taylor-Dean avec un espace annulaire arbitraire. Ils ont fait varier le rapport de rayon  $\eta$  et le rapport entre la vitesse de pompage et la vitesse de rotation du cylindre intérieur. Dans ces conditions, il a pu démontrer que les modes non axisymétriques sont dominants dans le système d'écoulement pour  $0.25 \leq \eta \leq 1$  et  $-4 \leq \beta \leq -2.2$  et pour lequel le nombre d'onde azimutal  $m$  varie entre 0 et 5 ondes. Il a trouvé également que l'état le plus stable se produit lorsque le mode non axisymétrique tend à se convertir en mode axisymétrique lorsque  $\beta$  varie. L'état le plus stable est associé à la plus petite longueur d'onde axiale. Le nombre d'onde azimutal  $m$  décroît lorsque  $\eta$  s'accroît. Ceci signifie qu'un espace annulaire large favorise les modes non axisymétriques de longueur d'onde azimutale élevée.

Laure et Mutabazi (1994) ont examiné la stabilité linéaire et faiblement non linéaire de l'écoulement de Taylor-Dean. Le problème traité concerne la contra-rotation des deux cylindres avec des vitesses de rotation différentes. Ils ont détecté deux nouvelles branches oscillatoires pour  $\mu' < 0.31$  et  $0.3 < \mu' < 0.585$ . Ces résultats sont en bon accord avec ceux de Chen (1993). Ils ont obtenu que la présence des modes oscillatoires non axisymétriques dépend du signe du coefficient anisotropique dans la direction azimutale.

Dans l'analyse faiblement non linéaire, ils ont montré que la transition vers les modes oscillatoires ou stationnaires est supercritique. Ils supposent que le caractère non isotrope du système est responsable de l'existence des modes inclinés et ont calculé les coefficients

d'anisotropie. Ils ont établi les équations d'amplitude qui décrivent la dynamique des solutions bifurquées.

Ils ont étudié la stabilité des ondes linéaires, par rapport aux perturbations de grandes longueurs d'onde par une analyse de la dynamique de phase et ils ont inclus la généralisation des critères d'instabilité d'Eckhaus et de Benjamin-Feir liés aux systèmes anisotropes bidimensionnels.

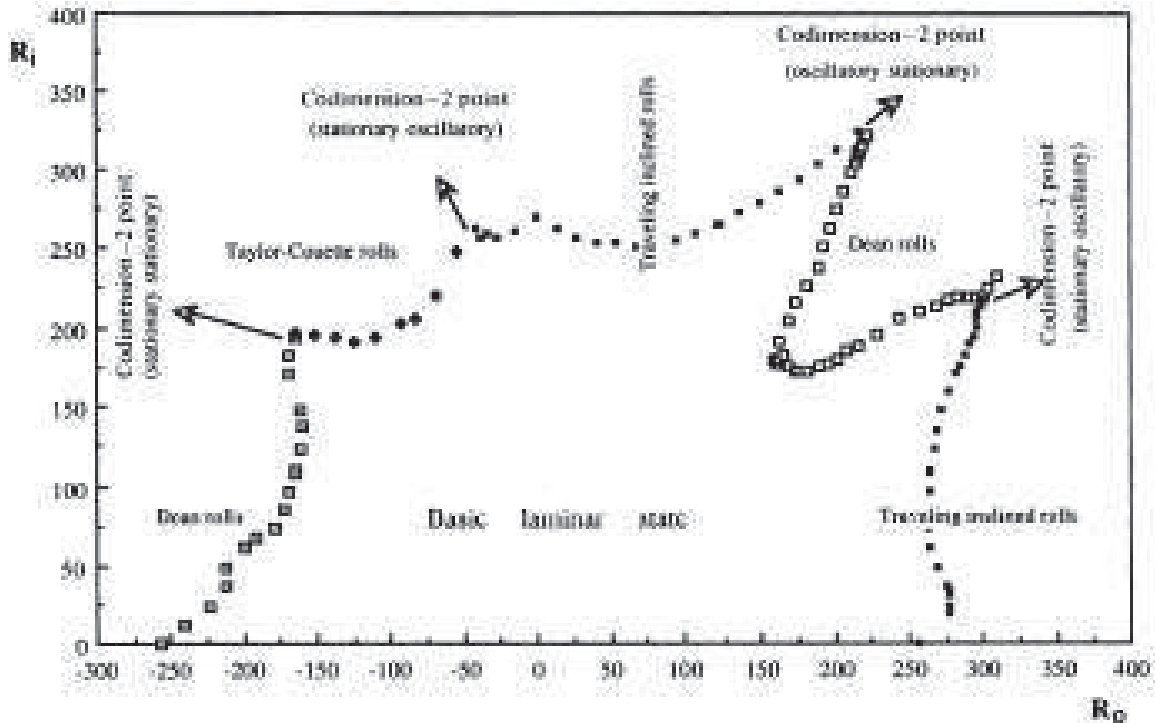
#### 1.4 Approche expérimentale

Les premières investigations expérimentales de l'instabilité de Taylor-Dean remontent aux travaux de Brewster et Nissan (1958). Ces auteurs se sont intéressés à la distribution approchée du champ de vitesse et de pression loin des surfaces libres dans le cas où seul le cylindre intérieur est en rotation.

L'année suivante, Brewster et al (1959) ont modifié le dispositif expérimental, en associant un pompage extérieur de liquide autour de l'espace annulaire. Ils ont mis en évidence les instabilités de type Taylor-Couette, Dean et d'autres de type nouveau.

Mutabazi et al (1988 ; 1990) ont mené une investigation expérimentale et théorique intensive de l'écoulement de Taylor-Dean. Par analogie avec l'écoulement de Taylor-Couette ils ont analysé les différentes combinaisons possibles concernant la rotation, la co-rotation et la contra-rotation des deux cylindres pour un espace annulaire remplis au 2/3 de sa hauteur.

Ils ont montré qu'il existe différents états d'instabilité qui dépendent de la direction de rotation des cylindres, et ont récapitulé leurs résultats par un diagramme de stabilité dans l'espace des paramètres  $(R_o, R_i)$  avec  $R_o, R_i$  sont les nombres de Reynolds liés à chacun des deux cylindres extérieur et intérieur respectivement (voir figure 1.8).



**Figure 1.8** : Diagramme des transitions d'écoulement primaire dans l'espace ( $R_i$ ,  $R_o$ )

(Tiré de Mutabazi et al (1988))

Le diagramme d'états montre l'existence de cinq branches d'instabilités primaires distinctes : trois stationnaires et deux oscillatoires. Ces branches se coupent selon quatre points de Codimensions 2. Les états d'instabilité manifestés au seuil sont soit axisymétriques stationnaires, soit non axisymétriques propagatifs.

Dans le cas où seul le cylindre intérieur est en rotation ( $Re_i \neq 0$ ,  $Re_o = 0$ ), les rouleaux propagatifs sont inclinés de  $20^\circ$  par rapport à la verticale et se déclenchent pour un nombre de  $Re_{ic} = 260$ , le nombre d'onde axial critique  $k_c = 4.8$  correspond à la fréquence critique  $f_c = 19$ .

Ces auteurs ont étendu leurs investigations aux états d'instabilités supérieures (Mutabazi et al 1990 ; 1991). Ils ont observé des défauts ponctuels (création ou annulation de rouleaux dans les motifs de rouleaux propagatifs).

Comme l'illustre la figure 1.8 pour  $R_o \in [-45, 50]$  et lorsque  $R_i$  augmente, une modulation spatio-temporelle du motif se développe avec une longueur d'onde correspondant à 3 rouleaux. La fréquence de cette modulation est très inférieure à celle des rouleaux et produit

des modulations de leur taille. Lorsque  $R_i$  augmente encore, des défauts se manifestent dans l'enveloppe de modulation, et le système transite alors vers un régime chaotique.

Une modulation avec une longueur d'onde de deux rouleaux est observée pour  $R_o \in [50, 160]$  (voir figure 1.8). Lorsque  $R_i$  augmente et pour  $R_o \in [205, 250]$ , les rouleaux de Dean stationnaires se mettent à dériver comme le montre la figure 1.8 (Mutabazi et al 1993; 1995).

Au voisinage du point de codimension 2, ces rouleaux de Dean stationnaires subissent un dédoublement de longueur d'onde.

Les auteurs ont interprété ce phénomène par le déclenchement d'une instabilité de dérive due à la résonance entre le mode fondamental et son deuxième harmonique.

Degen et al (1996) ont observé un régime d'intermittence spatio-temporelle lorsque le cylindre intérieur est fixe et le cylindre extérieur est en rotation. Mutabazi et al (1991) et Tennakoom (1996) ont obtenu que la modulation de la vitesse de rotation à deux fois la fréquence du mode oscillant est capable de générer des modes stationnaires. Par la suite, Mutabazi et Andereck (1991) ont examiné expérimentalement l'écoulement de Taylor-Dean avec un cylindre extérieur tournant et un cylindre intérieur fixe. Ils ont mis en évidence une transition de l'état instationnaire des rouleaux vers un état stationnaire lorsque le paramètre de contrôle  $Ta$  (nombre de Taylor) augmente. Cette transition de rouleaux instationnaires à l'état stationnaire a été observée en convection pour un mélange binaire de l'eau et de l'alcool éthylique dans un récipient rectangulaire (Walden et al, 1885), et aussi dans un récipient annulaire (Ohlsen et al, 1990).

Une étude expérimentale de la transition vers le régime chaotique dans le système d'écoulement de Taylor-Dean a été effectuée par Bot et al (1998; 1999). Le système de Taylor-Dean utilisé est de type rotor-stator. Ils ont observé différents états de la stabilité en fonction de  $Re$  (voir figure 1.9). Le mode primaire se produit à  $Re_c = 260 \pm 2$  donnant naissance à des rouleaux propagatifs inclinés avec un nombre d'onde axial  $q_1 = 4.8 \pm 0.1$  et une fréquence critique  $f_1 = (18.9 \pm 0.05)$  Hz correspondant à une vitesse de dérive  $V_d = 24.7$  au seuil.

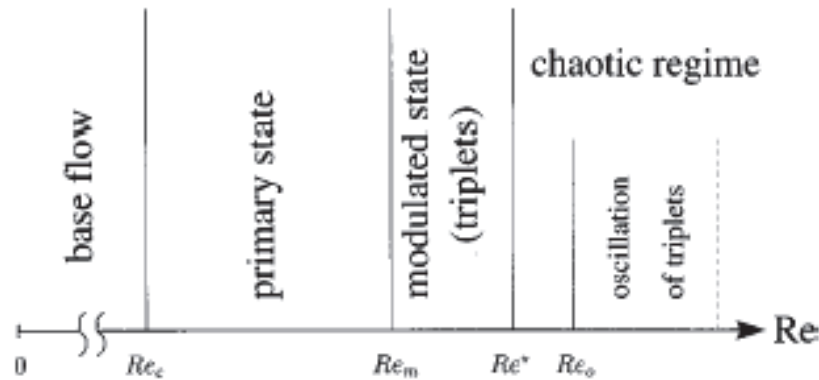


Figure 1.9 : Séquence des états observés

( $Re_c = 260 \pm 2$ ,  $Re_m = 292 \pm 2$ ,  $Re^* = 307 \pm 3$ ,  $Re_0 = 315 \pm 3$ ) (D'après Bot et al 1998)

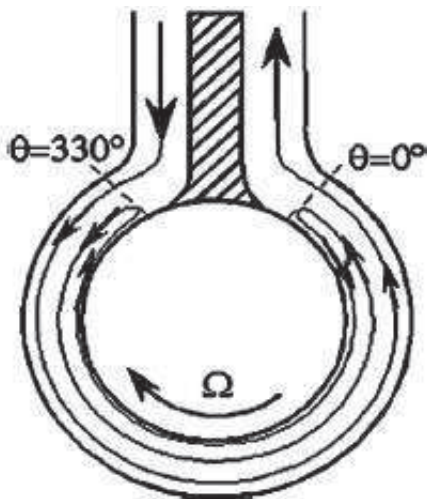
Le mode secondaire (mode triplet) appelé aussi modulation de rouleaux propagatifs inclinés se développe pour une valeur du nombre de Reynolds critique  $Re_c = 292 \pm 2$ , un nombre d'onde  $q_2 = 1.7 \pm 0.1$  et une fréquence  $f_2 = (1.1 \pm 0.05)$  Hz au seuil. L'origine de l'appellation « triplet » provenant du fait que la valeur du rapport entre  $q_1$  et  $q_2$ , est tel que  $\frac{q_1}{q_2} = 2.8$  qui est proche de 3.

Dans le mode primaire la fréquence  $f_1$  augmente de façon monotone et le nombre d'onde  $q_1$  est presque constant alors que la fréquence  $f_2$  varie très faiblement avec le nombre de Reynolds  $Re$ .

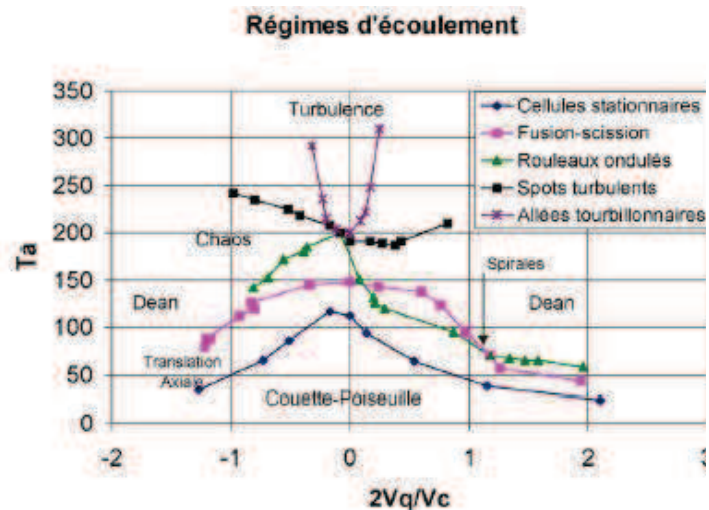
- Pour  $Re > Re^* = 307 \pm 3$ , les triplets subissent des perturbations le long de la longueur d'onde résultant des collisions entre les deux triplets.
- Pour  $Re > Re_0 = 315$ , le diagramme spatio-temporel est constitué par des régions d'oscillations régulières séparés par des domaines désordonnés (des défauts et des sources).

Lorsque  $Re$  s'accroît, des sources se produisent et des collisions entre les triplets se produisent. C'est pourquoi, ces auteurs ont examiné la dynamique des défauts spatio-temporels qui apparaissent dans le motif de rouleaux inclinés propagatifs (Bot et al, 1998 ; 2000), correspondant à la bifurcation primaire et du mode triplet (voir figure 1.9). Ils ont constaté que les défauts sont les principaux responsables de la désorganisation des structures et donc du désordre du système d'écoulement.

Ait Aider et al (2005) ont présenté les résultats d'une étude expérimentale ayant porté sur la transition vers la turbulence d'un écoulement produit dans un système constitué de deux cylindres coaxiaux ouvert transversalement. L'écoulement est induit par l'effet combiné de la rotation du cylindre intérieur et celui provenant de l'extérieur sous l'action d'une pompe. Ce type d'écoulement est appelé écoulement de Taylor-Dean ouvert (voir figure 1.10). Ils ont montré que la première déstabilisation de l'écoulement est azimutale et se manifeste pour  $Ta = 12$  sous forme de deux tourbillons axiaux situés l'un à  $\theta = 0^\circ$  et l'autre à  $\theta = 330^\circ$ . Les rouleaux propagatifs inclinés de  $20^\circ$  par rapport à la verticale apparaissent aux environs de  $Ta = 130$ . Au-delà de  $Ta = 200$ , l'écoulement devient alors chaotique. Ils ont établi une courbe de stabilité  $(Ta_c, \tau')$  qui est illustrée par la figure 1.11, ayant la même allure que celle prévue par la théorie (avec  $\tau'$  désignant le rapport des débits dû à la pompe et au cylindre intérieur tournant). La courbe présente un maximum lorsqu'on atteint la valeur  $\tau'_c = -0.17$ . Cette valeur est particulièrement proche de celle obtenue par Chandrasekhar ( $\tau'_c = -0.166$ ). De plus, ils ont mis en évidence la propagation en diagonale des rouleaux émis à partir de vortex en coin à l'entrée, les rouleaux ondulés dans la partie centrale, les spots turbulents et les allées tourbillonnaires.



**Figure 1.10 :** Schéma du système d'écoulement de Taylor-Dean (d'après Ait Aider et al, 2005)



**Figure 1.11 :** Cheminement de l'écoulement de Taylor-Dean ouvert vers la turbulence (d'après Ait Aider et al, 2005)

## 1.5 Etude de la stabilité

Comme nous venons de le souligner, l'analyse de la stabilité est similaire pour les trois types d'écoulement envisagés.

Nous allons développer le cas de Taylor-Couette.

### 1.5.1 Paramètres de contrôle

On distingue deux paramètres de contrôle régissant l'écoulement :

#### a) Nombre de Reynolds

Il est défini par le rapport entre les forces d'inertie et les forces visqueuses.

$$\text{Re} = \frac{V_1 d}{\nu} \quad (1.41)$$

Où :  $V_1 = \Omega_1 R_1$  : vitesse linéaire du cylindre intérieur tournant.

$d = R_2 - R_1$  : largeur de l'espace annulaire compris entre les deux cylindres.

$\Omega_1$  : Vitesse angulaire de rotation du cylindre intérieur.

$\nu$  : Viscosité cinématique du fluide.

#### b) Nombre de Taylor

Il résulte de la combinaison du nombre de Reynolds Re et du facteur géométrique  $\delta = \frac{d}{R_1}$ .

Par définition, le nombre de Taylor est le rapport entre deux temps caractéristiques, à savoir le temps de diffusion visqueuse  $\tau_s = \frac{d^2}{\nu}$ , dû au transfert de vortacité sur la distance d (temps de stabilisation) et le temps caractéristique d'advection du fluide ( $\tau_{des}$ ) sous l'action des forces centrifuges sur la même distance d dans la direction radiale (temps de déstabilisation).

L'évaluation de  $\tau_{des}$  se détermine par application de la loi fondamentale de la dynamique qui exprime la force centrifuge exercée sur une particule, projetée sur l'axe radial.

$$m \frac{d^2 r}{dt^2} = m \frac{V_1^2}{r} \quad (1.42)$$



En faisant apparaître les caractéristiques temporelle, spatiale et de la vitesse  $V_1$  exprimées à l'aide de  $\tau_{des}$ ,  $d$  et  $V_1$ , on obtient :

$$\frac{d}{\tau_{des}^2} = \frac{V_1^2}{R_1} \quad (1.43)$$

$$\text{D'où l'on tire : } \tau_{des} = \frac{\sqrt{dR_1}}{V_1} \quad (1.44)$$

Le paramètre de contrôle pour les géométries courbes, s'exprime en fonction des caractéristiques de l'écoulement par :

$$Ta = \frac{V_1 d}{\nu} \sqrt{\frac{d}{R_1}} = \text{Re} \sqrt{\frac{d}{R_1}} = \text{Re} \sqrt{\delta} \quad (1.45)$$

Avec :  $\delta = \frac{d}{R_{1\max}}$  jeu radial.

Il se présente comme un nombre de Reynolds modifié. Ce nombre a été introduit par Bouabdallah (1980), en utilisant le nombre de Taylor selon Stuart, comme suit :

$$T_s = \text{Re}^2 \delta \quad (1.46)$$

$$\text{d'où } Ta = \sqrt{T_s} = \frac{V_1 d}{\nu} \sqrt{\frac{d}{R_1}} \quad (1.47)$$

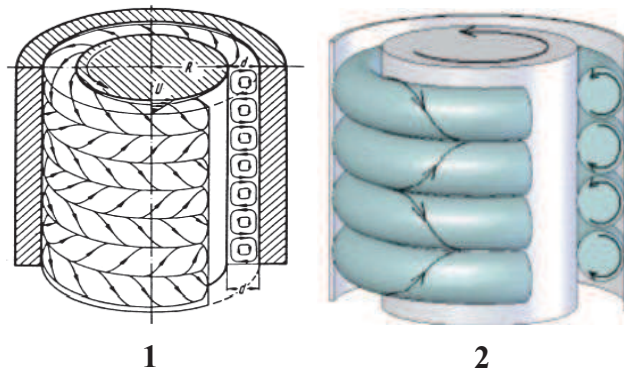
### 1.5.2 Phénoménologie

Une succession de différents modes d'instabilité se développe dans le système d'écoulement de Taylor-Couette en fonction de la variation du cylindre tournant :

#### a) Première instabilité

Cette instabilité marquée par le développement de structures tourbillonnaires de forme torique qui occupent la largeur de l'espace annulaire est connu sous le nom de cellules de Taylor (ou vortex de Taylor).

Taylor (1923) a montré que le seuil critique d'apparition des cellules de Taylor est atteint théoriquement pour une valeur de  $Tc_1 = 41.2$  et expérimentalement pour une valeur de  $Tc_1 = 41.32$ . Par la suite, des études théoriques menées par Diprima (1960) et aussi par Chandrasekhar (1962) ont permis de vérifier les résultats obtenus par Taylor.

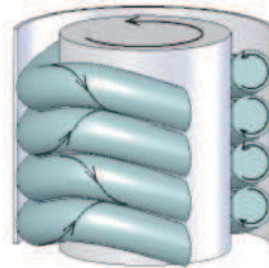


**Figure 1.12 :** Ecoulement tourbillonnaire axisymétrique (Taylor vortex flow)

Représentation des cellules de Taylor entre deux cylindres concentriques ((1) (d'après Schlichting, 1979); (2) d'après Domański, 2006))

### b) Deuxième instabilité

L'instabilité secondaire correspond à l'apparition des tourbillons ondulés azimutalement (wavy vortex flow) et correspond à une brisure de symétrie des vortex de Taylor (figure 1.13)



**Figure 1.13 :** Ecoulement tourbillonnaire ondulé (Wavy Vortex Flow) (d'après Domański, 2006))

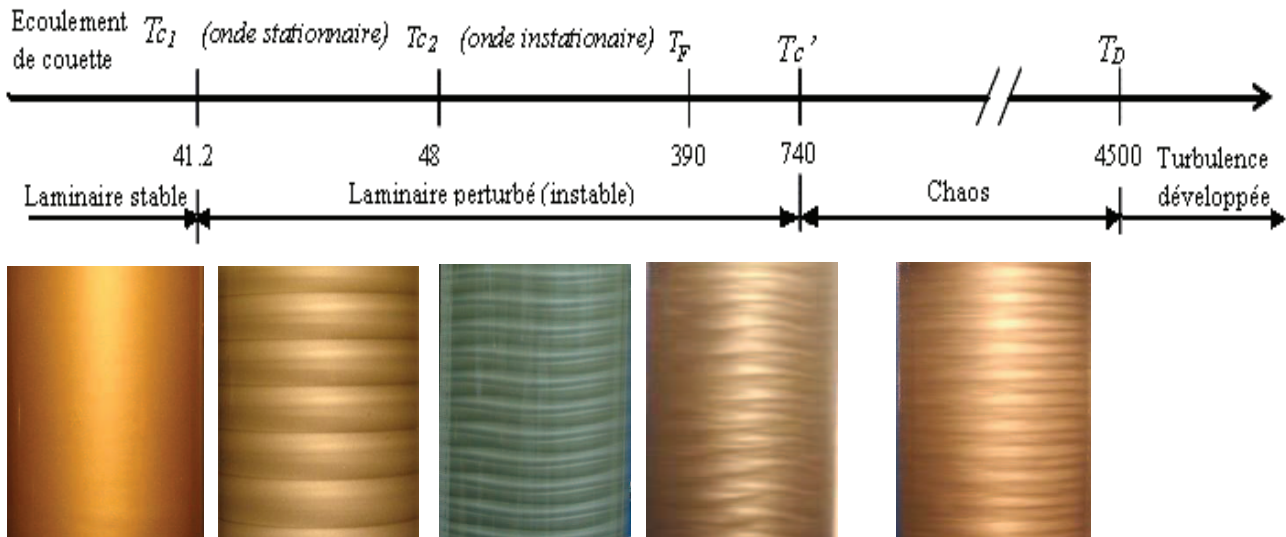
### c) Régime chaotique (turbulence naissante)

D'après Swinney et al et Bouabdallah (1980), ils ont montré que l'onde azimutale disparaît vers  $Ta = 740$ , et un régime chaotique ou pré-turbulent s'établit. Les visualisations montrent que l'écoulement conserve sa périodicité spatiale le long de l'axe des cylindres : présence de l'onde de Taylor.

### d) Régime de turbulence développée

Le régime de la turbulence complètement développée s'établit pour une valeur de  $Ta_c > 4500$ . Ce régime est marqué par la persistance de l'onde axiale qui se maintient indéfiniment malgré que la vitesse de rotation imposée au cylindre tournant soit élevée.

Les différentes transitions du régime laminaire vers la turbulence développée dans le système d'écoulement de Taylor-Couette, pour un espace annulaire mince  $\delta = 0.1$ , sont illustrées sur la figure 1.14.



**Figure 1.14:** Structures associées au régime d'écoulement d'après Bouabdallah (1980).

$0 \leq Ta < T_{c1}$  : Écoulement laminaire de base.

$Ta = T_{c1} = 41.2$  : Apparition de l'onde axiale stationnaire (cellule de Taylor).

$Ta = T_{c2} = 48$  : Apparition de l'onde azimutale instationnaire (wavy mode).

$Ta = T_F = 390$  : Apparition des fluctuations chaotiques (fréquences à spectre large).

$Ta = T'_c = 740$  : Disparition de l'onde azimutale, déclenchement du chaos.

$Ta = T_D = 4500$  : Disparition des fréquences à spectre large et développement de la turbulence.

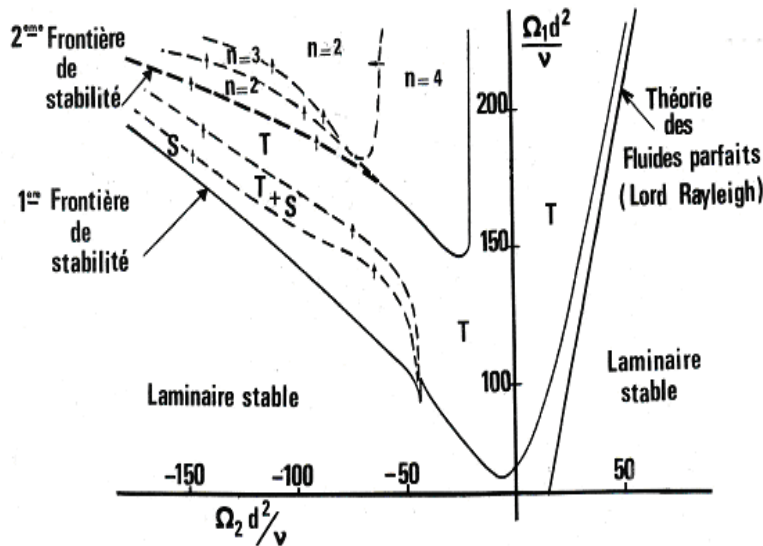
### 1.5.3 Diagramme de stabilité

C'est en 1965 que Coles a étudié systématiquement les différents régimes d'instabilités d'un fluide visqueux qui lui a permis de tracer un diagramme de stabilité dans le plan des nombres de Reynolds associés

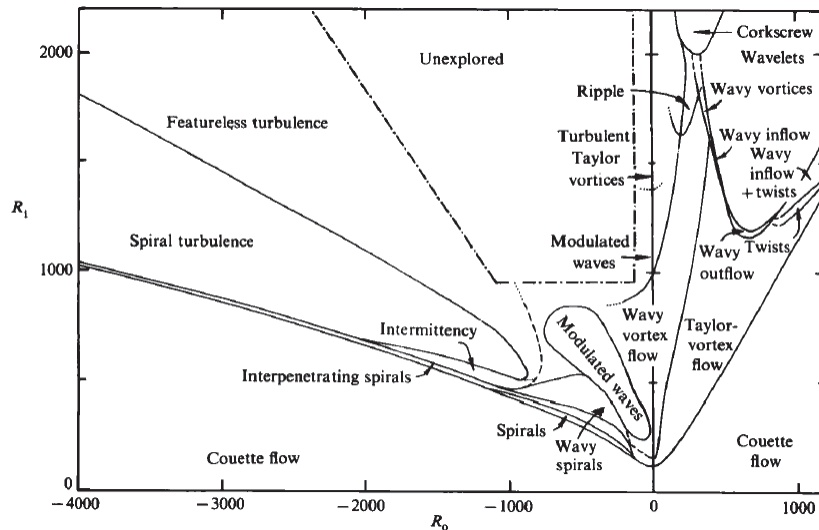
$$\text{Re}_o = \frac{\overline{V}_o d}{\nu} \quad (1.48)$$

$$\text{et } \text{Re}_i = \frac{\overline{V}_i d}{\nu} \quad (1.49)$$

Par la suite Andereck (1986) a étendu les observations de Coles (1965) pour élaborer un diagramme de stabilité comportant plus de détails sur les régimes d'écoulement mettant en évidence les frontières des différentes structures d'ondes et leurs caractéristiques et les différentes zones de transition d'un mode d'instabilité à un autre (voir figure 1.15).



**Figure 1.15 :** Diagramme de stabilité d'après Coles (1965) - (T) : Mouvement périodique en (z) stationnaire ou cellules de Taylor. (S) : Mouvement spiral (z) ou mouvement non-axisymétrique simple. (n) :  $m = 2, 3, 4$  nombre d'ondes circumférentielles associées au mouvement doublement périodique ( $\theta, z$ ) instationnaire.



**Figure 1.16:** Diagramme de stabilité d'après Andereck et al (1986)

### 1.5.4 Effets sur la stabilité de l'écoulement de Taylor-Couette

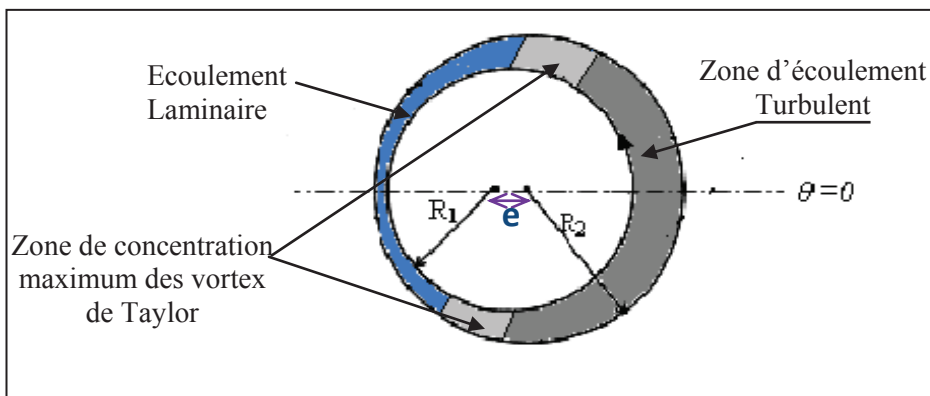
La stabilité de l'écoulement de Taylor-Couette est sensible à divers paramètres d'influence de nature variée tels que les effets géométrique, dynamique, rhéologique, etc....

#### a) Facteurs géométriques

Ces facteurs d'influence des incidences sur la nature et la structure du mouvement.

##### a.1) Effet de l'excentricité

L'écoulement entre deux cylindres excentriques se rencontre généralement dans le domaine de la tribologie et plus particulièrement en lubrification hydrodynamique. Dans ce type d'écoulement, les études menées ont montré la coexistence de trois régimes d'écoulement dans le même espace annulaire et pour une même vitesse de rotation  $\Omega_1$  donnée du cylindre intérieur tournant (voir figure 1.17).



**Figure 1.17:** Ecoulement entre deux cylindres excentriques : Palier de transmission des vitesses (Stuart, 1986)

C'est Stuart (1986) qui a effectué pour la première fois une étude analytique dans ce type d'écoulement. Malgré la complexité des calculs, il est parvenu à établir une expression du nombre de Taylor critique  $T_{ce}$  qui tient compte de l'effet de l'excentricité :

$$T_{c_e} = T_{c_0}(1 + 2.62\varepsilon_{ec}^2) \quad (1.50)$$

Avec :

$T_{c_0}$  : Valeur du nombre de Taylor critique dans le cas de deux cylindres concentriques

$\varepsilon_{ec}$  : Valeur de l'excentricité  $0 \leq \varepsilon_{ec} \leq 1$

De plus, l'étude effectuée par Cole (1976) montre que la valeur du nombre de Taylor critique  $Tc_e$  pour une excentricité  $\varepsilon_{ec} = 0.25$ , est de 10% supérieure à celle obtenue dans le cas de cylindres concentriques en rotation.

Pour la même excentricité  $\varepsilon_{ec} = 0.25$ , Diprima et Stuart (1969) ont obtenu une valeur de Taylor critique  $Tc_e$  supérieure de 8% à la valeur réelle alors que Vohr (1968) a trouvé que celle-ci est supérieure de 12%. Ces résultats sont confirmés également par Weinstein (1977) qui montre que la valeur critique de  $Tc_e$  semble 8% plus grande que  $Tc_1$ .

La figure 1.18 illustre la variation du nombre de Taylor critique  $Tc_1$ , en fonction de l'excentricité  $\varepsilon_{ec}$ , résumant l'ensemble des travaux théoriques et expérimentaux.

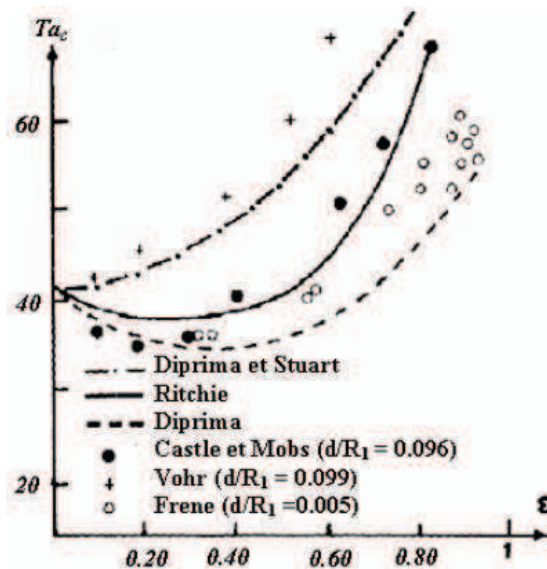


Figure 1.18 : Variation du nombre de Taylor critique  $Tc$  en fonction de l'excentricité  $\varepsilon_{ec}$

### a.2) Effet de la rugosité

Wang et Tsai (1986) ont examiné l'effet de la rugosité dans un système d'écoulement constitué de deux cylindres concentriques rugueux. La rotation du cylindre intérieur met en jeu un couple et des forces instables, dépendant de la taille de l'espace annulaire et du rapport

des rayons  $\eta = \frac{R_1}{R_2}$ , de l'amplitude des aspérités et particulièrement du nombre caractérisant la

rugosité des cylindres intérieur et extérieur  $n$  et  $m$  respectivement. Ils tirent la conclusion que l'apparition de tout couple instable peut être retardé ou empêché à condition que  $n^*$  soit différent de  $m^*$ . Il est possible de réduire au minimum le couple stable (régulier) par une augmentation de  $n^*$  ou une diminution de  $m^*$  et de  $n^*$ , (notamment la valeur associée à  $n^*$ ).

**a.3) Effet de la largeur de l'espace annulaire**

Sparrow et al (1964) ont analysé expérimentalement l'effet du rapport des rayons  $\eta = \frac{R_1}{R_2}$  sur l'apparition de la première instabilité lorsque le cylindre intérieur est tournant et le cylindre extérieur est maintenu fixe. Ils ont obtenu que le nombre de Taylor critique décroît en fonction de  $\eta$ , ce qui indique que le déclenchement de la première instabilité est relativement accéléré dans le cas d'un espace annulaire mince.

Bouabdallah (1980) a utilisé la technique de Polarographie pour analyser la transition laminaire-turbulent dans divers espaces annulaires : mince, intermédiaire et large. Il constate que, pour des espaces annulaires mince et moyen, le processus de transition vers la turbulence semble presque identique, alors que pour un intervalle plus large, il remarque une différence notable comme l'illustre le tableau 1.1.

| Configuration géométrique<br>Nombre de Taylor caractéristique | d/R <sub>1</sub> =0.048 | d/R <sub>1</sub> =0.10 | d/R <sub>1</sub> =0.22 |
|---|-------------------------|------------------------|------------------------|
| Tc <sub>1</sub> (onde axiale)                                 | 41                      | 41                     | 42                     |
| Tc <sub>2</sub> (wavy mode)                                   | 44                      | 49                     | 90                     |
| T <sub>F</sub> (fluctuation)                                  | 80                      | 400                    | 900                    |
| T <sub>c</sub> '(chaos)                                       | 320                     | 700                    | 1250                   |
| T <sub>D</sub> (Turbulence développée)                        | 2000                    | 4500                   | 9000                   |

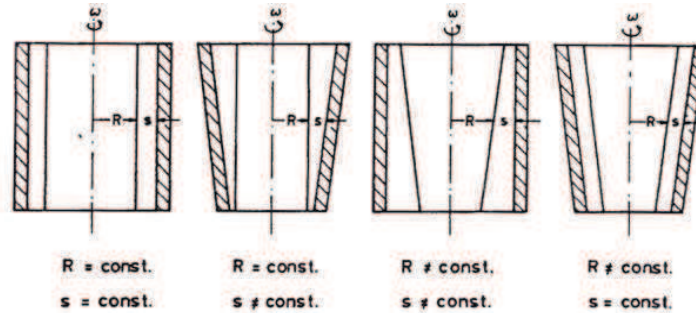
**Tableau 1.1** : Seuil critique des différents régimes d'instabilités pour divers configurations (tiré de la thèse de Bouabdallah, 1980)

Diprima et al (1984) ont examiné analytiquement l'effet de la variation de l'espace annulaire sur les instabilités dans le système de Taylor-Couette de type rotor-stator. Lorsque  $\eta$  décroît dans l'intervalle  $0.65 < \eta < 1$ , ils ont obtenu ce qui suit :

- Une diminution du nombre des modes normaux instables pour une valeur donnée du nombre de Taylor.
- L'existence d'une valeur critique du rapport de rayon  $\eta$  au dessous de laquelle le déclenchement de l'instabilité axisymétrique se fait pour des valeurs élevées du nombre de Taylor.

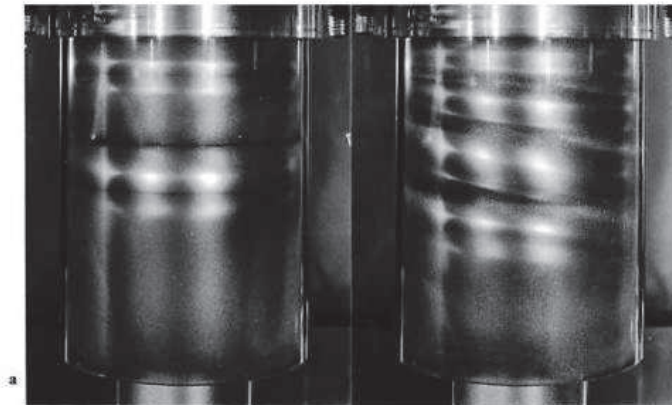
Wimmer (2000) a examiné l'effet de la géométrie sur les conditions d'apparition des instabilités hydrodynamiques. Il a procédé à différentes combinaison de configurations

cylindriques et coniques (voir figure 1.19). Dans tous les cas considérés, l'élément intérieur est mis en rotation et l'extérieur est maintenu fixe.



**Figure 1.19 :** Combinaison géométrique entre cylindres et cônes (Wimmer, 2000)

Les résultats obtenus montrent que la forme des cellules qui se développent dans l'espace annulaire ainsi que leur seuil critique d'apparition dépend sensiblement de la géométrie considérée (voir figure 1.20).

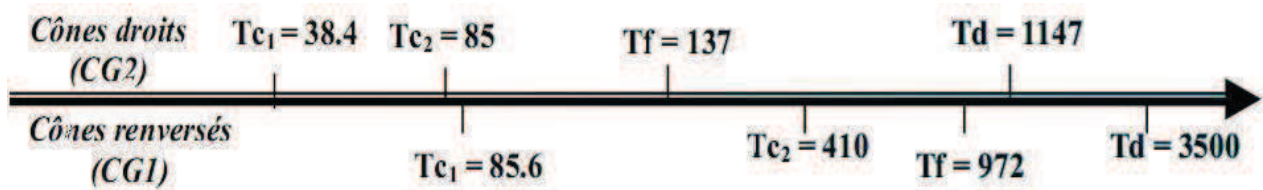


**Figure 1.20:** Visualisation des cellules de Taylor dans la combinaison Cône-Cylindre (a)- Trois cellules dans le système cylindrique, (b)- Mouvement hélicoïdal descendant dans le système Cône-Cylindre (Wimmer, 2000)

#### a.4) Cas de deux cônes coaxiaux

Dans le cas d'un écoulement entre deux cônes coaxiaux ayant le sommet orienté vers le haut (CG1), Noui-Mehidi (1992) obtient que la vorticité tourbillonnaire calculée à partir du champ de vitesse indique que le mouvement est plus intense comparativement au cas où le sommet est orienté vers le bas (CG2). C'est pourquoi le seuil critique correspondant à l'apparition des instabilités n'est pas le même dans les deux configurations (CG1) et (CG2) (figure 1.21).

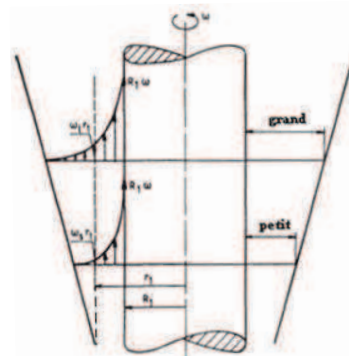




**Figure 1.21:** Comparaison des valeurs critiques du nombre de Taylor d'un écoulement entre cônes coaxiaux en position CG1 et CG2  $\delta=0.30$  (d'après Noui Mehidi (1992))

#### a.5) Cas d'un cylindre dans un cône

L'écoulement de base est laminaire et tridimensionnel. L'écoulement secondaire se développe en raison d'un déséquilibre entre les forces centrifuges et le gradient de pression centripète. La figure (1.22) illustre les profils de vitesse. Il apparaît clairement une différence de profil de vitesse entre le petit et le large espace annulaire, résultant des modifications des forces centrifuges et du champ de pression en fonction de l'angle de conicité.



**Figure 1.22 :** Représentation des profils de vitesse dans l'entrefer entre cylindre et cône (Wimmer, 1988)

#### a.6) Cas d'un cône dans un cylindre

Les modes obtenus dans cette configuration d'écoulement dépendent de l'angle de conicité. Les premières cellules sont observées au milieu des positions axiales et correspondent à une largeur moyenne de l'espace annulaire. Les modes obtenus dans cette configuration d'écoulement dépendent de l'angle de conicité.

### a.7) Effet de la hauteur de remplissage et de la surface libre

Cole (1976) a étudié l'effet d'une hauteur finie de remplissage sur l'apparition des ondes axiales et azimutales. Il a obtenu que la première instabilité (bifurcation supercritique) est sensiblement affectée par le facteur d'aspect axial si  $\Gamma < 7.5$ . En particulier, si  $\Gamma$  diminue d'avantage, il met en évidence deux autres bifurcations surcritique et subcritique. De plus, il a montré que le wavy-mode est retardé lorsque la hauteur de remplissage décroît. Ce résultat est confirmé par Mahamdia et al (2005). Par ailleurs, Watanabe et al (2005) ont simulé numériquement l'écoulement près de la surface libre. Ils représentent le profil de vitesse dans une section azimutale avec augmentation linéaire de la vitesse de rotation en fonction du temps.

### a.8) Effet de bords

L'analyse des effets de bords sur l'instabilité de Taylor-Couette a beaucoup attiré l'intérêt des chercheurs sur le plan expérimental notamment pour des rapports d'aspect assez grands (Cole, 1965 ; Snyder, 1968) et aussi sur le plan numérique (Jones, 1982; Antonijoan et Sanchez, 2002). La structure de l'écoulement peut être fortement modifiée par les parois terminales. Loin de celles-ci, l'écoulement est dit géostrophique : la force centrifuge est contrebalancée par le gradient de pression et il ne se produit aucun écoulement radial tant que les vitesses angulaires sont suffisamment faibles : la viscosité parvient alors à dissiper l'énergie des particules fluides. Au voisinage immédiat des disques terminaux, l'écoulement géostrophique devient perturbé. En effet, en raison de l'adhérence du fluide à la paroi, le profil de vitesse azimutal développé dans cette zone diffère de celui de la zone géostrophique. Il se produit un déséquilibre entre la force centrifuge et le gradient de la pression déclenchant un effet de pompage centripète ou centrifuge. Les écoulements développés au voisinage des parois terminales sont classés dans la famille des écoulements de type Eckman et Von Karman-Bödewat.

Pour une géométrie finie, les bords peuvent influencer fortement les transitions d'ordre supérieur puisque les tourbillons se développent au voisinage des bords. Par exemple, le régime des tourbillons ondulants de Taylor est atteint pour des vitesses de rotation plus élevées dans le cas des cylindres courts comparativement au cas des cylindres infiniment long (Cole, 1976).

Czarny(2003) et Czarny et al (2003) ont réalisé une étude numérique de l'effet du confinement axial pour analyser le phénomène d'interaction entre la couche des frontières terminales (bords) et l'instabilité centrifuge (tourbillons permanents et tourbillons ondulants de Taylor) dans une configuration de faible rapport d'aspect. Ils ont employé différentes combinaisons entre les bords, à savoir :

- **Les deux bords fixes ( $\Omega_e = 0$ )**

Les auteurs ont constaté que les tourbillons de Taylor prennent naissance au niveau des bords fixes et se propagent vers le milieu du système en fonction du rapport dynamique

$$\varepsilon' = \frac{Re}{Re_c}$$

- **Les deux bords tournants avec le cylindre intérieur ( $\Omega_e = \Omega_i$ )**

Les auteurs ont obtenu que les tourbillons d'Eckman se propagent à partir du bord mobile mais avec une couche d'Eckman plus intense et qui est orientée vers le cylindre extérieur.

- **Deux bords tournants avec le cylindre intérieur**

Développement d'un tourbillon assez large et aplati près des bords.

- **Bords tournants avec le cylindre extérieur**

Apparition d'un faible tourbillon du côté du cylindre extérieur.

## b) Effet de la surface libre

La structure des tourbillons au voisinage des bords a tendance à changer sensiblement avec la position azimutale. Cole (1976) a montré que les parois terminales influent sur les paramètres caractéristiques des régimes d'instabilité et plus particulièrement lorsque

$\Gamma = \frac{H}{d} < 10$ . Ce résultat est confirmé par Sobolik et al (2000). Dans une géométrie de

Taylor-Couette finie, les modes anormaux ont été observés pour la première fois par Benjamin et Mullin (1978). Ils ont notamment montré que ces modes sont robustes et persistent même en présence d'une force extérieure, à savoir, le champ magnétique axial. Ouali (2009) a étudié expérimentalement l'effet combiné du confinement géométrique axial et de l'inclinaison sur l'écoulement de Taylor-Couette. Il a utilisé différentes combinaisons au niveau des bords (fixes, mobiles ou alternés). Il a constaté que les bords n'affectent pas le

déclenchement de la première et la deuxième instabilité. En revanche, la nature et la structure du mouvement sont modifiées de manière significative par l'inclinaison du dispositif expérimental.

### c) Effet de l'inclinaison

Dibes et Bouabdallah (2005) ont mené une étude expérimentale qui traite de l'influence de l'angle d'inclinaison  $\alpha$  et du facteur d'aspect axial  $\Gamma$  sur l'apparition de la première et la deuxième instabilité. Ils ont montré que le nombre critique de Taylor correspondant à l'apparition de la première instabilité  $Tc_1$  n'est affectée ni par l'inclinaison  $\alpha$  ni par le taux de remplissage  $\Gamma$  dans le cas d'un écoulement en charge (sans surface libre).

En revanche, lorsque la surface est libre, les nombres de Taylor critique  $Tc_1$  et  $Tc_2$  correspondant à l'apparition de la première et deuxième instabilité varient selon une loi linéaire ou exponentielle selon l'importance de la valeur du facteur d'aspect.

Adnane et al (2007) ont élaboré un diagramme de stabilité dans le plan des nombres d'onde  $(n, m)$ . Dans ces conditions, les chemins de la bifurcation sont précisés à l'aide du nombre d'onde axiale  $n$  et le nombre d'onde azimutale  $m$  qui donnent un aperçu original de l'évolution structurale en régime de transition laminaire-turbulent sous incidence des effets de la surface libre (voir figure 1.23 et figure 1.24).

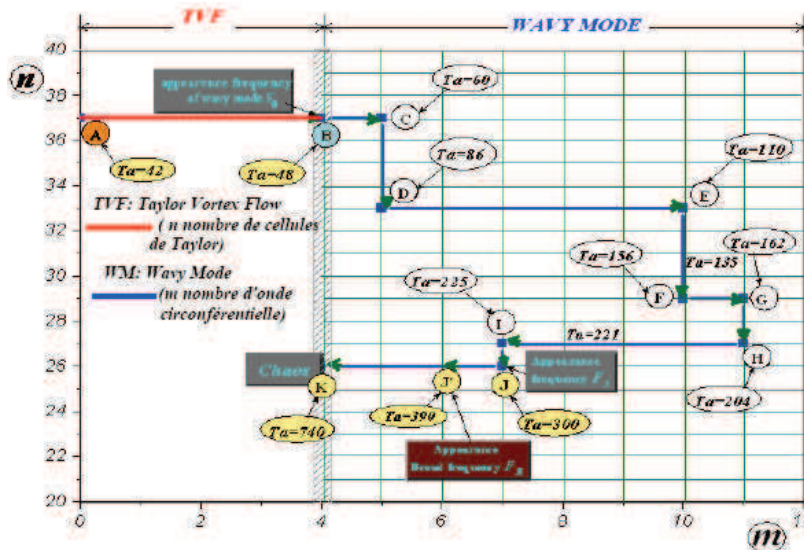


Figure 1.23 : Diagramme de bifurcation dans le plan d'ondes  $(n, m)$  pour  $\Gamma = 37$  (Adnane et al, 2007)

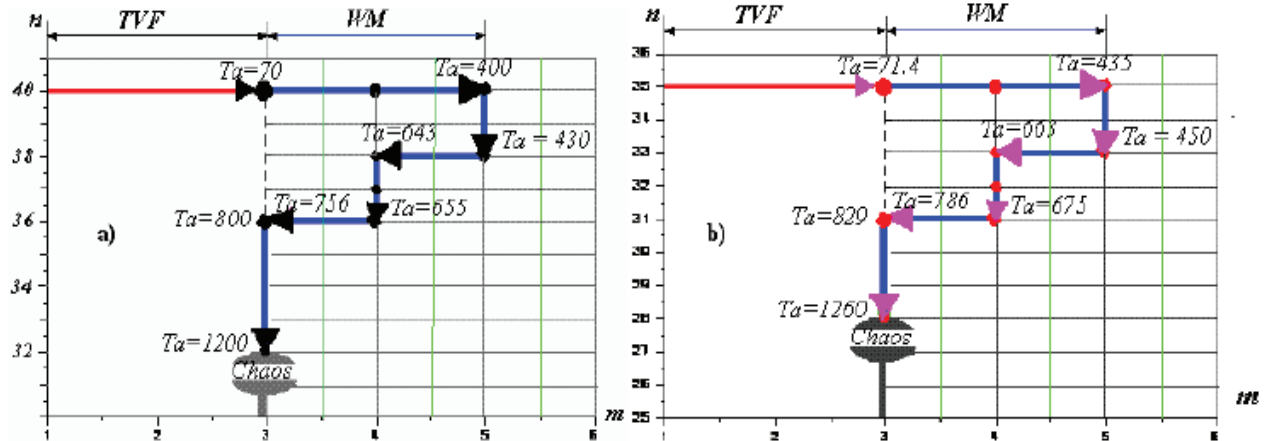
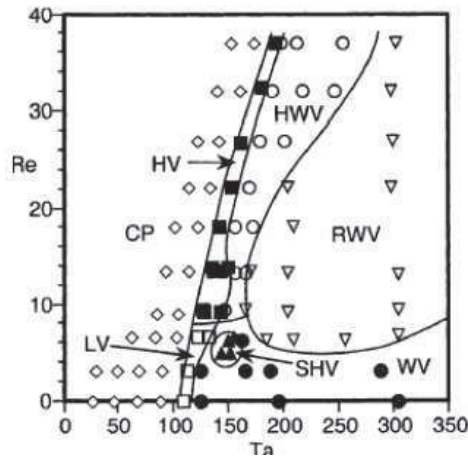


Figure 1.24 : Diagramme de bifurcation dans le plan d'ondes  $(n, m)$  pour a)  $\Gamma = 40$  (écoulement en charge) et b)  $\Gamma = 34$  (surface libre) (Adnane et al, 2007)

#### d) Effet du débit axial et radial

Goldstein (1937) est le premier auteur à s'intéresser à l'étude d'un écoulement circulaire de type Couette superposé à un écoulement axial de type Poiseuille (Kataoka, 1986). Diprima (1960) et Chandrasekhar (1962) ont également considéré ce cas pour un espace annulaire mince. Par la suite, Hasson et Martin (1977) ont généralisé cette recherche pour des espaces annulaires relativement larges dans le cadre d'une théorie linéaire de la stabilité. Les résultats obtenus montrent que la présence d'un écoulement axial a tendance à stabiliser l'écoulement de Couette. Ces travaux ont été confirmés expérimentalement par Snyder (1962) et Donnelly (1960).

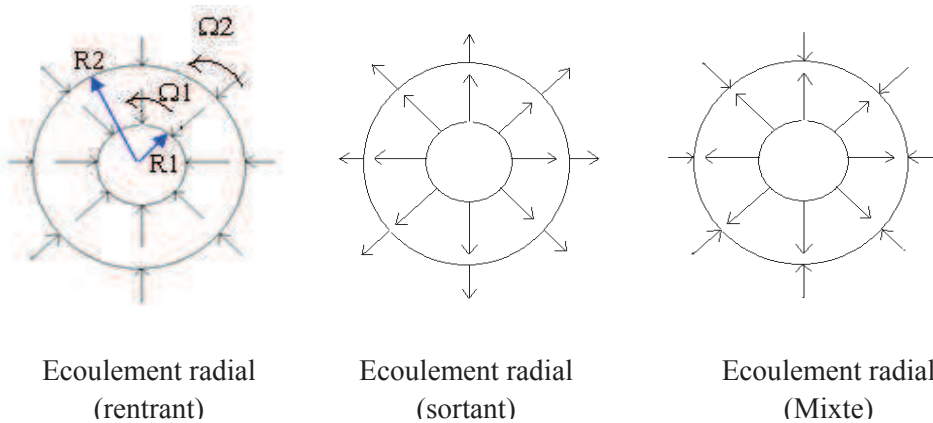
Les résultats obtenus par Lueptow et al (1992) montrent que la superposition d'un débit axial à l'écoulement de Couette circulaire génère de nombreux régimes d'écoulement qui dépendent du nombre de Taylor  $Ta$  et du nombre de Reynolds  $Re$  relatif à l'écoulement axial (voir figures 1.25 et 1.26).



**Figure 1.25:** Les régimes d'écoulements observés dans le cas d'un écoulement de Taylor-Couette avec un débit axial imposé (Lueptow et al, 1992)

L'effet d'un débit radial sur l'écoulement de Couette circulaire a été étudié par Min and Lueptow (1994). Ils ont considéré différentes configurations associées à l'écoulement radial (voir figure 1.26). Les résultats obtenus montrent que la direction du débit radial influe considérablement sur la stabilité de l'écoulement, à savoir :

- Cas d'un écoulement radial rentrant : le mouvement est stabilisé (inward flow configuration).
- Cas d'un écoulement sortant : le mouvement est déstabilisé (outward flow configuration).

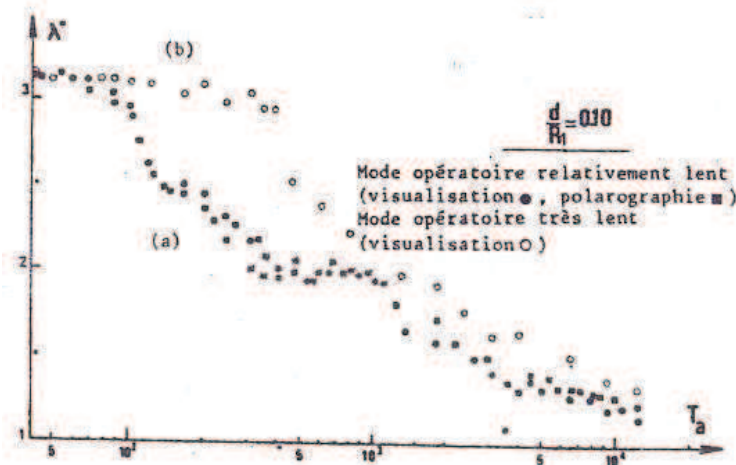


**Figure 1.26 :** Différentes configurations d'un écoulement radial (Min and Lueptow, 1994)

Il est à souligner que l'écoulement radial mixte n'a pas encore fait l'objet d'une étude théorique ou expérimentale.

### e) Effet de l'accélération

Coles (1965) a réalisé des expériences de visualisation en s'intéressant à l'évolution des structures d'instabilités à partir des nombres d'onde axiale  $n$  et circonférentielle  $m$  en fonction de  $Ta$ . Il a remarqué qu'il existe plusieurs structures possibles de l'écoulement  $(n, m)$  pour un même nombre de  $Ta$ . Ces observations ont été confirmées par Bouabdallah par polarographie (voir figure 1.27) (Bouabdallah, 1980).



**Figure 1.27** : Variation du nombre d'onde axial et influence de la mise en régime des vitesses (Bouabdallah, 1980).

Koschmeider (1979) a examiné l'effet de l'accélération régulière et brusque du cylindre intérieur sur la longueur d'onde axiale. Il a constaté que la longueur d'onde axiale de la première instabilité n'est pas affectée par l'accélération. Par contre, elle est sensible aux changements des conditions initiales dans le régime des tourbillons ondulants de Taylor (wavy mode). Nakamura et al (1990) et aussi Watanabe et al (2005) ont examiné l'effet de la mise en régime des vitesses à  $\Omega_1$ . Ils ont trouvé que pour une augmentation brusque de  $\Omega_1$ , le nombre de cellules qui apparaissent dans l'écoulement est 6 alors que pour une augmentation quasi-statique le nombre de ces structures est 5.

## 1.6 Conclusion

Cette brève synthèse des travaux antérieurs montre que l'apparition des instabilités centrifuges est relativement sensible aux différents paramètres à savoir, la modification de la géométrie, l'inclinaison du système d'écoulement, l'accélération du cylindre tournant, le débit axial et radial, etc.... Par conséquent, ces paramètres peuvent accélérer ou retarder l'apparition des instabilités de l'écoulement de Taylor-Couette.

## **Chapitre 2**

### **Phénomènes d'instabilités des écoulements rotatifs en fluides complexes**



# Phénomènes d'instabilités des écoulements rotatifs en fluides complexes

## Introduction

Les écoulements naturels et industriels sont rarement constitués d'une eau pure, celles-ci contiennent généralement des particules solides en solution ou en suspension.

La présence d'additifs dans l'écoulement se traduit généralement par une modification du comportement du fluide et donc de la stabilité de l'écoulement considéré.

Nous allons présenter les principaux travaux qui existent dans la littérature sur les instabilités centrifuges relatives aux solutions homogènes d'une part, et des suspensions d'autre part.

## 2.1 Instabilités centrifuges dans les solutions

### 2.1.1 Solutions de polymère

#### 2.1.1.1 Solution très diluée

La présence de polymère dans le liquide en mouvement modifie généralement son comportement à concentration infinitésimale et le liquide reste newtonien mais sa viscosité augmente. Le traitement des instabilités centrifuges est exactement le même que celui présenté dans le chapitre 1. Dans cette gamme de concentration les polymères sont utilisés pour développer des techniques de mesure. Ainsi, Decruppe (1988) et Decruppe et al (1991) ont mis au point une technique de mesure du Taylor critique par biréfringence d'écoulement dans une solution très diluée de polymère.

#### 2.1.1.2 Solution viscoélastique

Pour des solutions diluées et semi-diluées, le comportement rhéologique de la solution devient complexe. En adoptant l'analyse de Benbalkacem (2009) et Latrache (2005), nous pouvons présenter les caractéristiques de l'écoulement et les instabilités observées dans le dispositif de Taylor-Couette de la manière suivante :

### i) Caractéristique de l'écoulement

Le tenseur de contrainte en coordonnées cylindriques dans le système de Couette viscoélastique est donné par la forme suivante:

$$\boldsymbol{\sigma} = \begin{pmatrix} \sigma_{rr} & \sigma_{r\theta} & \sigma_{rz} \\ \sigma_{\theta r} & \sigma_{\theta\theta} & \sigma_{\theta z} \\ \sigma_{rz} & \sigma_{z\theta} & \sigma_{zz} \end{pmatrix} \quad (2.1)$$

Les valeurs des contraintes normales :  $\sigma_{rr}$ ,  $\sigma_{\theta\theta}$  et  $\sigma_{zz}$  sont différentes, cet effet d'anisotropie conduit à les caractériser par les deux contraintes associées  $N_1, N_2$ .

$$N_1 = \sigma_{\theta\theta} - \sigma_{rr} \quad (2.2)$$

$$N_2 = \sigma_{rr} - \sigma_{zz} \quad (2.3)$$

On définit la première contrainte normale :  $N_1$  qui est la différence entre la contrainte normale dans la direction de l'écoulement et celle dans la direction du gradient de vitesse. La deuxième contrainte :  $N_2$  qui est la différence entre la contrainte normale dans la direction du gradient de vitesse et celle dans la direction neutre. De façon générale, les contraintes normales sont nécessairement des fonctions paires du taux de cisaillement  $\dot{\gamma}$ , les premiers termes non nuls de leurs développement seront donc des termes en  $\dot{\gamma}^2$  (Owsald, 2005). Il en sera de même pour les différences normales  $N_1$  et  $N_2$ .

Le nombre de Reynolds critique est défini par :

$$\text{Re} = \frac{t_v}{t_a} \quad (2.4)$$

Avec :  $t_v = \frac{\rho e^2}{\mu(\dot{\gamma})}$  est le temps de diffusion visqueuse dépendant du taux de cisaillement  $\dot{\gamma}$ , et

$t_a = \frac{e}{\Omega R_i}$  est le taux d'advection dans la direction azimutale.

On introduit le nombre de Weissenberg, calculé à partir du temps de relaxation de la solution :

$$\text{We} = t_{v,e} \cdot \dot{\gamma} \quad (2.5)$$

$t_{v,e}$  étant le temps de relaxation de la solution.

On peut également construire le nombre élastique qui est le rapport des effets élastiques sur les effets inertiels, ou bien le rapport du temps de relaxation sur le temps de dissipation visqueuse :

$$E = \frac{W_e}{\text{Re}} = \frac{t_{v,e}}{t_v} \dot{\gamma} \quad (2.6)$$

Les fluides viscoélastiques sont généralement obtenus par l'ajout d'un polymère à longues chaînes moléculaires dans un solvant newtonien. Sous l'effet d'un cisaillement, la solution obtenue présente des comportements non newtoniens comme la rhéofluidification où l'apparition de différences de contraintes normales induites par l'allongement des macromolécules dans l'écoulement. Ces propriétés viscoélastiques modifient considérablement la nature et les caractéristiques des instabilités (régimes d'écoulement) observées pour un fluide newtonien (Benbalkacem, 2009).

Dans ce qui suit, nous présentons une récapitulation des travaux antérieurs sur les instabilités dans le système de Couette-Taylor en présence de fluides viscoélastiques.

Les travaux menés sur l'écoulement de Taylor-Couette viscoélastique traitent l'effet de la viscoélasticité sur l'instabilité primaire. Lorsque le cylindre extérieur est au repos, on distingue essentiellement trois types d'instabilité selon le nombre élastique  $E$  du fluide viscoélastique : pour de faibles valeurs de  $E$  l'instabilité est de nature inertielle ; pour des valeurs moyennes de  $E$ , l'instabilité est de nature inertio-élastique ; pour de grandes valeurs de  $E$ , l'instabilité est de nature purement élastique.

## ii) Instabilité inertielle

Pour des nombres élastiques  $E$  très petit, l'instabilité primaire qui se développe dans ce cas est identique à celle observée pour un fluide newtonien (rouleaux de Taylor : écoulement stationnaire et périodique dans la direction axiale). Cependant, le nombre de Taylor critique et le nombre d'onde sont différents. Ginn et Denn (1969) ont considéré un modèle de fluide du second ordre (fluide de type Oldroyd-B) pour prédire la stabilité dans le cas d'une faible viscoélasticité (faibles concentrations). Ils ont obtenu que le nombre de Taylor critique augmente et le nombre d'onde diminue (augmentation de la taille des rouleaux). Beavers et Joseph (1974) ont mené une étude expérimentale en utilisant des solutions de polyacrilamide

dans un mélange eau-glycérol. Ils ont mis en évidence une forte diminution du nombre d'onde (jusqu'à un facteur de 3). Aussi, Karlson et Sokolov ont examiné des solutions de faibles concentrations de polymère. Ils ont constaté qu'une faible viscoélasticité conduit à une stabilisation du mouvement et l'élargissement de la taille des cellules de Taylor correspondant à une diminution du nombre d'onde.

### iii) Instabilité inertio-élastique

Dans le cas d'un fluide ayant un nombre élastique  $E$  moyen, les effets élastiques et inertiels sont comparables. Pour ce type de fluide, l'instabilité primaire n'est plus purement inertielle. Il se développe des modes non-axisymétriques instationnaires (motif formé d'ondes spirales, ruban,...). Ce régime est le résultat de la modification de l'instabilité inertielle par l'élasticité, d'où l'apparition des modes instationnaires. Groisman et Steinberg (1998) ont examiné la transition entre le régime inertiel, où la force centrifuge qui est à l'origine de la déstabilisation, et le régime élastique. Pour des valeurs du nombre d'élasticité  $E$  inférieure à  $E_c \approx 0,22$ , ils ont observé que le premier mode d'instabilité est caractérisé par des rouleaux de Taylor avec des nombres de Taylor, pratiquement constant, et sans modification du nombre d'onde axial (instabilité inertielle). Le deuxième mode d'instabilité se développe sous forme de deux spirales contra-propagatives superposées de même amplitude, et le troisième mode est sous forme de deux spirales contra-propagatives d'oscillations désordonnées, ces deux dernières correspondant à des instabilités inertio-plastiques. C'est ainsi que, Baumer et Muller (1999) ont observé un régime comparable à celui obtenu par Groisman et Steinberg (1998). La déstabilisation observée pour des solutions de concentrations plus élevées sont accompagnée d'un comportement assez complexe (modification du nombre d'onde) et permet de constater que la rhéofluidification joue un rôle déstabilisant sur l'écoulement. Avgousti (1993) a présenté des travaux numériques pour des fluides de type Oldroyd-B et de type Maxwell. Il a conclu que les instabilités inertio-élastiques les plus instables correspondent à des modes non-axisymétriques. Crumeyrolle et al (2002) ont utilisé différentes concentrations de polyoxyéthylène. Leurs résultats indiquent que, pour de faibles concentrations, l'apparition de l'instabilité dans l'écoulement de Couette peut être retardé jusqu'à des valeurs du nombre de Taylor supérieures de 10 à 15% par rapport à la valeur critique caractérisant un écoulement newtonien, et que les effets élongationnels pourraient être à l'origine de ce comportement. Pour des concentrations très élevées, ils ont montré que

l'écoulement de Couette circulaire se déstabilise vers des régimes plus complexes voire quasi-turbulent.

#### iv) Instabilité élastique

Lorsque le nombre élastique  $E$  du fluide prend des valeurs importantes. Le premier régime qui est observé est caractérisé par des oscillations très ordonnées, et qui est le résultat d'une instabilité purement élastique. Les effets élastiques deviennent prépondérants par rapport aux effets inertiels. En menant des expériences sur du polyisobutylène avec une concentration de 1000 ppm. Larson et al (1990) ont observé les instabilités purement élastiques et ont constaté que ces instabilités élastiques déclenchent à très faible nombre de Taylor ( $Ta = 10^{-6}$ ). Elles se présentent sous forme de rouleaux irréguliers. Leurs résultats théoriques sont en bon accord avec les résultats expérimentaux. Aussi, ils ont utilisé des liquides de type Boger, non rhéofluidifiants dans des solvants très visqueux (de 100 à 1000 fois la viscosité de l'eau). Ils ont obtenu que les modes d'instabilités qui apparaissent dans ce type de fluide viscoélastique sont différents des vortex de Taylor stationnaire. Groisman and Steinberg (1998) ont examiné le cas de solutions ayant un nombre élastique  $E$  élevé. Leurs résultats montrent que l'instabilité primaire est sous forme d'ondes radiales se propageant avec une fréquence  $f$ . L'instabilité secondaire se déclenche brutalement sous forme d'oscillations désordonnées, la fréquence des spirales de transition est proche de la valeur des fréquences obtenus par Larson et al (1990) dans leurs prédictions théoriques sur les instabilités purement élastiques. Aussi, l'existence de l'instabilité purement élastique formée de modes non-axisymétriques dans l'écoulement de Taylor-Couette viscoélastique a été confirmé par plusieurs travaux théoriques (Joo and Shaqfeh, 1992a ; Creymerolle et al 2003 ; Creymerolle et al 2005).

Joo and Shaqfeh (1991;1992b) ont montré que l'écoulement de Dean et l'écoulement de Taylor-Dean d'un fluide d'Oldroyd-B sont instable dans certain régimes de paramètre d'écoulement dans la limite du seuil de petite nombre de Reynolds. De plus, ils ont obtenu que la direction du gradient de la pression relative à la rotation du cylindre contrôle les caractéristiques de l'instabilité : un gradient de pression appliqué le long de la rotation du cylindre déstabilise l'écoulement, alors s'il est appliqué perpendiculairement à la rotation l'écoulement est substantiellement stabilisé. Aussi, Joo and Shaqfeh(1994), ont montré que certain modes non symétriques sont plus instable que les modes axisymétriques lorsque le

cisaillement par la rotation du cylindre intérieur est la force dominante entraînant l'écoulement.

### 2.1.2 Suspension

Une suspension se caractérise par la présence physique de particules solides macroscopiques dans le liquide suspendant (solvant) qui est lui-même newtonien. Le fluide en écoulement est le siège de trois types d'interaction : liquide-particule solide, particule-particule et liquide-paroi. Les particules généralement étudiées ont une forme facile à modéliser : sphères, fibres rigides ou ellipsoïdes.

#### 2.1.2.1 Suspension de sphère

A très faible concentration ( $A < 0,1$ ), la suspension est newtonienne mais sa viscosité augmente selon la loi d'Einstein :

$$\mu = \mu_0 (1 + 2,5A) \quad (2.7)$$

Les instabilités se traitent alors comme pour un liquide newtonien homogène (voir chapitre 1).

A faible concentration, la suspension peut être étudiée de deux manières différentes :

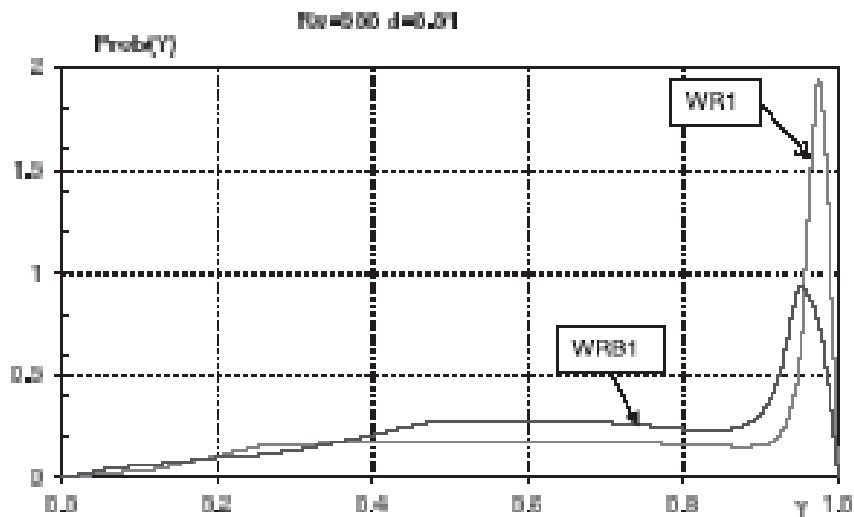
- En rhéologie, on ignore les deux espèces en présence et on observe un comportement viscoplastique de la suspension. Nsom (1987) a étudié la stabilité de l'écoulement de Taylor-Couette d'un fluide de Bingham. Il a analysé l'effet du seuil d'écoulement sur le champ des vitesses. En particulier, il a montré que l'augmentation du nombre de Bingham modifié « P » déplace la position des valeurs maximales des composantes de la vitesse au voisinage du cylindre intérieur. Récemment, Soleimani & Sadeghy (2011a, 2011b) ont mené une étude numérique sur l'instabilité de l'écoulement de Taylor-Dean en considérant un fluide de comportement Binghamien dans un entrefer large.

- La suspension peut être également étudiée dans le cas d'un écoulement diphasique où les équations de conservation sont écrites pour les deux espèces en présence et la stabilité découle de la résolution du problème de dynamique décrit par ce système. Nsom (1987), a représenté les particules selon des trièdres trirectangles en mouvement dans l'eau et il a quantifié la stabilisation de l'écoulement de Couette-Taylor par les particules.

Drozdov (2002) a étudié numériquement l'écoulement d'une suspension de petites particules solides dans le système de Taylor-Couette à parois intérieure et extérieure ondulés.

Il a montré que les surfaces ondulatoires du rotor et du stator contribuent de manière assez significative à la formation des structures selon un tourbillon toroïdal pour une période donnée liée à la rotation. En outre, ils ont montré que la déformation des parois des deux cylindres (WRB1) produit des vortex supplémentaires ayant une intensité plus grande que celle des vortex de Taylor à partir de la même consommation d'énergie. Par conséquent, le processus de mixage et d'homogénéisation des particules a tendance à s'améliorer lorsqu'on agit avec la déformation des deux parois au lieu d'une seule paroi déformée.

En effet, la probabilité de dépôt de particules sur la paroi extérieure semble diminuer d'environ deux fois dans le cas WRB1 par rapport au cas WR1 (figure 2.1).



**Figure 2.1 :** Distribution limite de la densité de probabilité de présence de particules selon la coordonnée radiale  $Y = (r - R_1) / (R_2 - R_1)$ . Les calculs sont effectués pour  $d = 0.01$  pour le nouveau mixeur (WRB1) et le mixeur avec surface intérieure cylindrique (WR1) (Drosdov, 2002)

Med Ali et al (2002) ont examiné la stabilité hydrodynamique d'une suspension de particules solides (particules de forme sphérique) dans l'écoulement de Taylor-Couette. Le problème a été abordé à la fois théoriquement et expérimentalement. Les résultats théoriques révèlent que le système devient instable lorsque la concentration en particules augmente alors que l'expérience montre l'inverse puisque l'écoulement a tendance à devenir stable si la concentration en suspension s'accroît.

Wereley et al (2002) ont étudié expérimentalement l'écoulement d'un fluide contenant une suspension de particules dans un système de filtration tournant. Le dispositif expérimental

est constitué d'un cylindre intérieur tournant doté de pores et un cylindre extérieur fixe. Ils ont utilisé la technique de PIV et la PTV pour mesurer la vitesse de la phase fluide et des particules. Ils ont montré que le champ des vitesses des particules et du fluide est similaire, ce qui indique que la structure en vortex entraîne rapidement les particules. En l'absence d'un écoulement radial, le profil de la concentration de particules dans le système montre que les particules se déposent sur le cylindre intérieur poreux mais cette couche de concentration devient plus petite lorsque la vitesse d'écoulement radial s'accroît ce qui indique que les vortex de Taylor dans l'écoulement redistribuent les particules. Aussi, les vortex contribuent à la distribution uniforme des particules dans l'espace annulaire.

Les particules forment une épaisse couche de « cake » sur la paroi du cylindre intérieur. Cependant, pour une valeur critique du nombre de Taylor qui est en relation avec la vitesse de rotation du cylindre intérieur, au dessus de laquelle les particules seront emportées par la circulation des vortex.

Schwile et al (2002) ont examiné expérimentalement les paramètres d'influences pour optimiser la conception d'un système de filtration à cylindres tournants. Ils ont trouvé que le dépôt des particules sur le filtre dépend de la vitesse de rotation, de l'écoulement du filtrat radial, des dimensions des particules et de l'espace annulaire. Ils ont constaté qu'une meilleure filtration est obtenue pour des dimensions des pores du filtre plus petites que le diamètre des particules, un faible espace annulaire entre les cylindres et une vitesse de rotation élevée. L'ordre de grandeur de la force de cisaillement doit être plus élevé que la traînée de Stokes pour minimiser la formation du « cake ».

Sengho Lee et Lueptow (2003) ont développé une nouvelle méthode utilisant une membrane en osmose inverse tournante pour contrôler la formation de calcaire des sels solubles ( $\text{CaSO}_4$ ). L'avantage de cette membrane osmose tournante est la réduction de la polarisation de la concentration et d'éviter l'obturation de la membrane grâce à la présence des instabilités dans l'écoulement de Taylor-Couette. Ils ont estimé que pour une vitesse de rotation  $\Omega = 3\text{tr/s}$  de la membrane osmose tournante, le flux d'infiltration reste constant pour un facteur de volume de concentration (en régime VCF) de 4.2. Par contre, le flux d'infiltration décroît progressivement en fonction de l'augmentation du VCF pour une membrane irrotationnelle. Ceci est dû à l'apparition des tourbillons de Taylor dans la Reverse Osmosis (RO) tournante qui induit un volume de cristallisation croissant et empêche le dépôt des particules de calcaire sur la surface de la membrane. Les effets anti-calcaire dans la RO



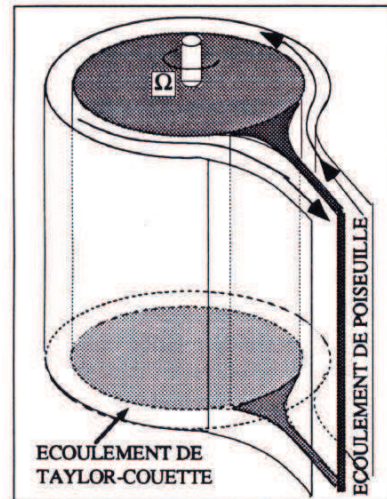
tournante croit avec l'augmentation de la vitesse de rotation et dépend de la pression transmembrane.

Sangho Lee & Lueptow (2004) se sont intéressés à l'influence des conditions opératoires sur la performance de la membrane osmose inverse tournante. Ils ont utilisé un modèle théorique pour analyser l'effet de la pression de la transmembrane, la vitesse de rotation, le débit d'écoulement, la concentration, la réjection, la récupération et l'énergie de consommation théorique. Ils ont trouvé que le flux et la réjection augmente en fonction de l'augmentation de la pression de la transmembrane et de la vitesse de rotation et le régime d'écoulement en vortex améliore les performances de la filtration.

Lim Edwin et al (2005) ont étudié analytiquement la dynamique d'une suspension de particules dans un écoulement entre deux cylindres excentriques. Ils ont utilisé l'équation Lagrangienne du mouvement pour un écoulement à vorticité non nulle. Ils ont analysé les conditions pour lesquelles les effets de sustentation deviennent utiles en régime stationnaire. L'importance de la force de trainée et de sustentation est illustrée à travers une solution exacte de l'équation du mouvement proposé. Ils ont caractérisé l'intervalle des paramètres pour les effets de sustentation stationnaire sont utiles et mesurables. Les résultats obtenus peuvent être validés par les mesures des forces lagrangiennes (qui peuvent être évaluées avec des instrumentations couramment disponibles).

### 2.1.2.2 Suspension de fibres

Dans un dispositif de Couette-Taylor, Skali (1991) et Skali et al (2010) ont observé que lorsqu'on passe du régime circulaire de Couette au régime turbulent, la pâte à papier passe d'un état d'agrégat à un état totalement dispersé dans l'entrefer. Cette interaction entre le régime d'écoulement de la suspension et l'état de dispersion des fibres dans une suspension concentrée a été également modélisée par Nsom (1995). Ce dernier, par un modèle de mécanique interne, trouve que dans le régime circulaire de base, la concentration en fibre est maximum au voisinage du cylindre extérieur alors qu'à l'apparition des tourbillons de Taylor, on obtient deux pics de concentration. Une autre variante de l'écoulement de Taylor-Dean consiste à joindre à l'écoulement de Taylor-Couette un pompage tangentiel (voir figure 2.2).



**Figure 2.2 :** Système d'écoulement superposant un écoulement de Poiseuille à un profil de Couette cylindrique (Tiré de la thèse de Skali Lami (1991))

Skali Lami (1991) a mis en évidence les propriétés de l'écoulement de la pâte à papier en utilisant des suspensions de fibres synthétiques calibrées. Pour cela, il a employé un dispositif de large espace annulaire et un cylindre extérieur fixe. Il a observé que les modes symétriques apparaissant au seuil d'apparition des instabilités est en bon accord avec les résultats théoriques de Jankowski et Takeuchi (1976) sur la limite de la stabilité dans le cas d'un espace annulaire large de l'écoulement de Dean. Il a effectué des mesures électrochimiques pour étudier la stabilité du mouvement en fonction du paramètre empirique appelé « Pseudo nombre de Taylor » dépendant du nombre de Taylor, largeur de l'espace annulaire, rapport d'aspect de longueur de fibre et de la concentration. Il a montré que pour une largeur d'espace annulaire donnée, utilisant ce paramètre, la courbe de stabilité marginale de toutes les suspensions qu'il a utilisé coïncide avec la courbe de stabilité marginale de l'eau. Nsom (1998) a considéré théoriquement la même configuration d'écoulement. Il a utilisé l'équation de fluide anisotrope d'Ericksen (1960), il a confirmé les résultats de Skali Lami.

Dans le même modèle d'Ericksen, Nsom a examiné les caractéristiques de fibres, la taille de l'entrefer et de la concentration dans un écoulement de Dean (Nsom, 1996) dans le cas d'un écoulement de Couette-Poiseuille provenant de la superposition d'un gradient de pression axiale à l'écoulement tangentiel de Couette (Nsom, 1995).

## 2.2 Conclusion

Les éléments bibliographiques précédents ont permis de mettre en lumière les mécanismes et les propriétés attachés à la stabilité des écoulements rotatifs en fluides complexes. En particulier, on a constaté que la stabilité de l'écoulement viscoélastique de Taylor-Couette dépend du nombre élastique  $E$ . En effet, lorsque le cylindre extérieur est au repos, on distingue trois types d'instabilités selon le nombre élastique  $E$  du fluide viscoélastique : instabilité inertielle pour une faible valeur de  $E$ , instabilité inertio-élastique pour des valeurs moyenne de  $E$  et une instabilité purement élastique pour de grandes valeurs de  $E$ . En outre, le comportement viscoélastique du fluide stabilise l'écoulement et affecte le nombre d'onde (diminution du nombre d'onde).

De la même façon, il a été établi que les particules en suspension contribuent de manière significative à la stabilisation d'écoulements rotatifs.

## **Chapitre 3**

### **Travaux théoriques sur les instabilités des écoulements rotatifs**

## Travaux théoriques sur les instabilités des écoulements rotatifs

### 3.1 Principales méthodes d'investigation

#### 3.1.1 Les études théoriques

Il existe trois classes d'études théoriques : linéaires, non-linéaires et celles aux bifurcations, par ordre chronologique d'application au problème de Taylor-Couette.

##### 3.1.1.1 Les théories linéaires

Par celle-ci, l'écoulement de Couette est superposé à une petite perturbation, admettant une forme à variables séparées :  $f(r)e^{i(st+m\theta+kz)}$  où  $t$  désigne le temps,  $s$  est une constante et  $r$  la coordonnée radiale dans un plan horizontal.

Les équations de Navier-Stokes et la condition d'adhérence aux parois des cylindres, imposées au champ résultant, en négligeant les termes quadratiques du mouvement secondaire, définissant un problème aux valeurs propres :

$$F(k, T, m, d) = 0 \quad (3.1)$$

La stabilité de l'écoulement est caractérisée par l'évanescence de la perturbation dans le temps. L'amplitude de celle-ci n'est pas accessible, du fait que la solution de (3.1) est déterminée à une constante multiplicative près.

La première résolution de (3.1) fut proposée par Taylor (1923) dans le cas de l'entrefer étroit. Le champ est décomposé en une série de Fourier-Bessel.

Cette forme de la solution transforme le problème aux valeurs propres ci-dessus en un système infini d'équations homogènes, dont les inconnues sont les coefficients de la série.

La condition de nullité du déterminant de ce système détermine les paramètres critiques  $T_c$  et  $K_c$ , caractérisant la transition. Chandrasekhar (1961) utilise la même méthode avec les fonctions circulaires.

Synge a soulevé le problème de la taille du déterminant, inhérent à cette approche dite des fonctions d'essai, en faisant apparaître une fonction de courant dans (3.1).

La méthode de Galerkin (Diprima, 1960), asymptotique et aux variations permettent également un traitement moins lourd que celui des fonctions d'essais.

Lin présente une revue générale des théories linéaires utilisées dans notre problème. Notons enfin l'étude numérique réalisée par Krueger et al(1966).

Certes que méthodes linéaires, du fait qu'elles négligent les effets d'interaction entre l'écoulement principal et le mouvement secondaire, ne sont pas apte à prédire la séquence des états d'écoulement, mais elles déterminent de façon satisfaisante les transitions. Leur usage n'est pas abandonné, et elles continuent de servir (Blennerhassett, 1979).

### 3.1.1.2. Les théories non-linéaires

Les théories non-linéaires ont été introduites par Stuart (1960) et Watson (1960) ;elles furent complétées par Davey (1962) et Davey et al (1968).

Au cours du temps, la forme exponentielle admise par les théories linéaires pour la perturbation, rend non négligeable, en régime supercritiques, la présence dans les équations de Navier-Stokes, des termes quadratiques du mouvement secondaire.

Ces effets non-linéaires donnent naissance à une suite infinie d'harmoniques et à une distorsion du mouvement moyen. Ce dernier transfère de l'énergie, en permanence aux harmoniques ; le mode fondamental, joue le rôle de « catalyseur ».

En fait, ces effets non-linéaires se mesurent par une amplitude  $A_0$ , qui multiplie la forme admise par les théories linéaires pour la vitesse de la perturbation. En écrivant qu'à l'équilibre, la dissipation visqueuse est compensée par le transfert d'énergie précédent, l'équation suivante est établie pour l'amplitude :

$$\frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} A_0^2 = \sigma A_0^2 - a_1 A_0^4 \quad (3.2)$$

Pour un état d'écoulement déterminé par un nombre de Taylor

$$T = T + \xi, \quad \xi > 0 \quad (3.3)$$

Davey(1962) donne la solution de (3.2), à l'ordre 1, sous la forme suivante :

$$A_0^2 = \frac{\sigma}{a_1} \quad (3.4)$$

$a_1$  étant un réel positif.

Swinney et Gollub (1981) montrent qu'alors, l'amplitude du mode fondamental est de l'ordre  $\xi^{\frac{1}{2}}$ .

Celles du premier harmonique et du mouvement principal sont en  $\xi^{\frac{3}{2}}$ , ainsi de suite.

Les méthodes non-linéaires permettent également d'accéder au couple agissant sur le cylindre extérieur (Eagles, 1971 ; 1974) ; son expression générale est valable en Tourbillon de Taylor et en Tourbillon ondulé de Taylor, elle est de la forme la suivante :

$$G = KRg_0 + g_1 + g_2 \quad (3.5)$$

Avec

$$K = \frac{\pi Lev^2 (1 + \beta)}{2(1 - \beta)^2} \quad (3.6)$$

$$R = \left[ \frac{(1 + \beta)}{2(1 - \beta)} \right]^{\frac{1}{2}} T^{\frac{1}{2}} \quad (3.7)$$

$$g_0 = -\frac{8}{(1 + \beta)^2} \quad (3.8)$$

$$g_1 = F_1'(R_1) \begin{pmatrix} -a_0 \\ a_1 \end{pmatrix} \quad (3.9)$$

$$g_2 = \left[ F_3'(R_1) - \left( \frac{a_4}{a_1} \right) F_1'(R_1) \right] \beta^2 \quad (3.10)$$

Où  $F_1'(R_1)$ ,  $F_3'(R_1)$  et les constantes  $a_i$  sont données en (Bilgenand Boulos, 1973).

L'approche numérique des méthodes non-linéaires est proposée par Neitzel (1984) et Diprima et al (1969).

### 3.1.1.3 Les théories aux bifurcations

Les théories non-linéaires décrites ci-dessus, étudient la stabilité d'une petite perturbation de forme imposée, et dont l'amplitude obéit à une équation préétablie dans l'écoulement de Couette. Les théories aux bifurcations recherchent les solutions engendrées par l'instabilité d'un état d'écoulement donné et les séquences ultérieures du mouvement. Et ce, hors toute hypothèse sur l'évolution et la structure finale de l'écoulement.

Ainsi, l'établissement des équations qui déterminent les solutions bifurquées à la première transition s'effectue en utilisant une perturbation ayant la forme suivante :  $(\vec{u}(r, z), p(r, z))$ ; elle est supposée périodique en  $z$  (et pas nécessairement sinusoïdale) (Kirchgassner and Sorger, 1969).

L'écoulement résultant est soumis aux équations générales (non-linéaires) de Navier-Stokes et de continuité, et à la condition d'adhérence aux parois des cylindres.

Velte (1966) démontre l'existence des solutions de ce problème dans un appareillage infiniment long.

L'étude présentée par Guiraud et Ioss (1968) et par Ioss (1969 ; 1971) établit pour l'amplitude de la perturbation une équation identique à celle des théories non-linéaires.

L'étude en géométrie finie est présentée par Benjamin (1978a ; 1978b), qui met en évidence, outre les diverses bifurcations, le phénomène d'hystérésis dans certaines conditions.

En fait, des résultats plus complets sont obtenus dans les références (Marsden, 1977 ; Laughlin and Martin, 1975 ; Landford, 1977 ; Ruelle, 1976) pour le problème de Rayleigh-Bénard.

Les équations de Navier-Stokes et de la chaleur sont écrites pour l'écoulement résultant, en négligeant les termes non-linéaires d'ordre supérieur à 2. La fonction de courant et de la température sont développées en série de Fourier selon les variables d'espace  $x$  et  $z$ .

Les coefficients de ces séries ne dépendent que de  $x$ ,  $y$  et  $z$ , fonctions uniquement du temps. Ces fonctions qui sont liées à l'amplitude du mouvement convectif, définissent l'espace de phases du problème. Elles obéissent à un système d'équations différentielles ordinaires non-linéaires dans lesquelles le temps ne figure pas explicitement. Dans ce modèle, les auteurs mettent en évidence :

- Les régimes Tourbillon de Taylor et Tourbillon ondulé de Taylor.
- Un régime non-périodique, analogue à la turbulence, admettant un attracteur étrange.
- L'influence des conditions initiales sur l'évolution de l'écoulement.
- Une étude générale de la stabilité de l'écoulement par les théories aux bifurcations peut être consultée en (Joseph, 1976a ; 1976b).



# **Deuxième Partie**

## **Etude Théorique**

## **Chapitre 4**

### **Etude théorique de la stabilité hydrodynamique d'une suspension dans le système de Taylor- Couette cylindrique**

## Etude théorique de la stabilité hydrodynamique d'une suspension dans le système de Taylor-Couette cylindrique

### Introduction

Le présent travail porte sur une tentative théorique qui s'intéresse au problème de la contradiction posé par Ali and Lueptow (2002) concernant l'effet stabilisant de la suspension qu'ils trouvent dans l'expérience et l'effet déstabilisant de la suspension en théorie.

Pour cela, on s'est basé sur les travaux de ces auteurs pour formuler les équations régissant la stabilité de l'écoulement dans le cadre d'une théorie linéaire de la stabilité. Ces équations sont valables dans l'approximation du faible espace annulaire et ont pour but la prévision de la première instabilité : onde axiale stationnaire de type Taylor.

Nous avons introduit des coefficients associées aux forces s'exerçant sur les particules solides et le fluide afin d'optimiser les forces d'interaction entre les particules en suspension et le fluide.

A cet effet, nous avons utilisé une méthode variationnelle telle que la méthode de Galerkin pour résoudre le problème aux valeurs propres ayant servi d'établir le diagramme de stabilité liée au nombre d'onde axiale au voisinage de l'état critique du déclenchement de la première instabilité.

### 4.1 Equation gouvernant l'écoulement

Les équations gouvernant l'écoulement sont basées sur la formulation traditionnelle de deux fluides appropriés pour une concentration diluée de particules rigides mono-dispersées (Ungarish, 1993).

Dans cette formulation, les équations de Navier-Stokes et de continuité sont utilisées pour la phase fluide et aussi pour la phase particules dispersées. Nous tenons compte des hypothèses suivantes :

- L'écoulement est stationnaire ;
- Le fluide est incompressible ;

- Les cylindres sont infiniment long ;
- L'écoulement est axisymétrique.

La forme dimensionnelle de l'équation de continuité et des équations de quantité de mouvement de la phase fluide s'écrivent comme suit :

**- Equation de continuité :**

$$\frac{1}{r^*} \frac{\partial}{\partial r^*} (r^* V_{fr}^*) + \frac{\partial V_{fz}^*}{\partial z^*} = 0 \quad (4.1)$$

**- Equation de quantité de mouvement**

$$\frac{\partial V_{fr}^*}{\partial t^*} + V_{fr}^* \frac{\partial V_{fr}^*}{\partial r^*} - \frac{V_{f\theta}^{*2}}{r^*} + V_{fz}^* \frac{\partial V_{fr}^*}{\partial z^*} = \nu \left[ \frac{\partial}{\partial r^*} \left( \frac{1}{r^*} \frac{\partial}{\partial r^*} (r^* V_{fr}^*) \right) + \frac{\partial^2 V_{fr}^*}{\partial z^{*2}} \right] - \frac{1}{\rho_f} \frac{\partial P^*}{\partial r^*} - \frac{\lambda_{1,r} n F_r^*}{\rho_f} \quad (4.2)$$

$$\frac{\partial V_{f\theta}^*}{\partial t^*} + V_{fr}^* \frac{\partial V_{f\theta}^*}{\partial r^*} + \frac{V_{fr}^* V_{f\theta}^*}{r^*} + V_{fz}^* \frac{\partial V_{f\theta}^*}{\partial z^*} = \nu \left[ \frac{\partial}{\partial r^*} \left( \frac{1}{r^*} \frac{\partial}{\partial r^*} (r^* V_{f\theta}^*) + \frac{\partial^2 V_{f\theta}^*}{\partial z^{*2}} \right) \right] - \frac{\lambda_{1,\theta} n F_\theta^*}{\rho_f} \quad (4.3)$$

$$\frac{\partial V_{fz}^*}{\partial t^*} + V_{fr}^* \frac{\partial V_{fz}^*}{\partial r^*} + V_{fz}^* \frac{\partial V_{fz}^*}{\partial z^*} = \nu \left( \frac{1}{r^*} \frac{\partial}{\partial r^*} \left( r^* \frac{\partial V_{fz}^*}{\partial r^*} \right) + \frac{\partial^2 V_{fz}^*}{\partial z^{*2}} \right) - \frac{1}{\rho_f} \frac{\partial P^*}{\partial z^*} - g - \frac{\lambda_{1,z} n F_z^*}{\rho_f} \quad (4.4)$$

$(V_{fr}^*, V_{f\theta}^*, V_{fz}^*)$  sont les composantes des vitesses de la phase fluide qui s'expriment respectivement en fonction des variables  $r^*, \theta^*$  et  $z^*$ . De plus, on pose  $t^*$  qui représente le temps,  $P^*$  est la pression,  $\rho_f$  la densité du fluide et  $n$  est le nombre de densité de particules.

La forme dimensionnelle de l'équation de continuité et des équations de quantité de mouvement de la phase particules se présente comme suit :

**-Equation de continuité**

$$\frac{\partial \alpha_p}{\partial t^*} + \frac{1}{r^*} \frac{\partial}{\partial r^*} (\alpha_p r^* V_{pr}^*) + \frac{\partial (\alpha_p V_{pz}^*)}{\partial z^*} = 0 \quad (4.5)$$

**- Equations de quantité de mouvement**

$$\frac{\partial V_{pr}^*}{\partial t^*} + V_{pr}^* \frac{\partial V_{pr}^*}{\partial r^*} - \frac{V_{p\theta}^{*2}}{r^*} + V_{pz}^* \frac{\partial V_{pr}^*}{\partial z^*} = -\frac{1}{\rho_p} \frac{\partial P^*}{\partial r^*} + \frac{\lambda_{s,r} n F_r^*}{\alpha_p \rho_p} \quad (4.6)$$

$$\frac{\partial V_{p\theta}^*}{\partial t^*} + V_{pr}^* \frac{\partial V_{p\theta}^*}{\partial r^*} + \frac{V_{pr}^* V_{p\theta}^*}{r^*} + V_{pz}^* \frac{\partial V_{p\theta}^*}{\partial z^*} = \frac{\lambda_{s,\theta} n F_{\theta}^*}{\alpha_p \rho_p} \quad (4.7)$$

$$\frac{\partial V_{pz}^*}{\partial t^*} + V_{pr}^* \frac{\partial V_{pz}^*}{\partial r^*} + V_{pz}^* \frac{\partial V_{pz}^*}{\partial z^*} = -\frac{1}{\rho_p} \frac{\partial P^*}{\partial z^*} - g + \frac{\lambda_{s,z} n F_z^*}{\alpha_p \rho_p} \quad (4.8)$$

$(V_{pr}^*, V_{p\theta}^*, V_{pz}^*)$  sont les composantes des vitesses associées à la nature de la phase des particules dans les directions  $r^*$ ,  $\theta^*$  et  $z^*$  respectivement.

On pose

$\mu$  : la viscosité dynamique du fluide.

$\rho_p$  : la densité de particules solides.

$\alpha_p$  : la fraction volumique de particules solides qui est défini par l'expression  $\alpha_p = \frac{n\pi\phi^{*3}}{6}$

$\phi^*$  : est le diamètre de particules solides

$\alpha_f$  : est la fraction volumique du fluide telle que  $\alpha_f + \alpha_p = 1$

$\varepsilon = \frac{\rho_p}{\rho_f}$  : rapport de densité

On se place dans les conditions d'une suspension fortement diluée ( $\alpha_f \gg \alpha_p$ ), et, donc on suppose que  $\alpha_f$  peut être égale à l'unité.

Par ailleurs, on peut noter que :  $F^*$  est la trainée de Stokes qui est donnée par l'expression suivante :

$$F_i^* = 3\pi\mu\phi^* (V_{fi}^* - V_{pi}^*) + \frac{\rho_f \pi (\phi^*)^3}{12} \frac{\partial}{\partial t^*} (V_{fi}^* - V_{pi}^*) \quad \text{pour } i = r, \theta, z \quad (4.9)$$

Les coefficients  $\lambda_{lr}, \lambda_{l\theta}, \lambda_{lz}$  et  $\lambda_{sr}, \lambda_{s\theta}, \lambda_{sz}$  sont des coefficients correctifs des forces entre les particules solides et la phase fluide. Ils sont introduits pour modéliser l'importance des forces appliquées dans les directions  $r, \theta$  et  $z$  et seront déterminés par la suite.

Les équations sont adimensionalisées par utilisation des variables réduites suivantes :

$$r = \frac{r^*}{d}, \quad z = \frac{z^*}{d}, \quad \phi = \frac{\phi^*}{d}$$

$$\frac{V_{jr}}{V_{jr}^*} = \frac{V_{j\theta}}{V_{j\theta}^*} = \frac{V_{jz}}{V_{jz}^*} = \frac{1}{\Omega_1 r_1} \quad (\text{avec } j = f, p) \quad (4.10)$$

$$P = \frac{P^*}{\rho_f \Omega_1^2 r_1^2}, \quad t = \frac{t^*}{\tau}$$

$d = r_2 - r_1$  qui désigne l'espace annulaire entre les deux cylindres. Quant à  $r_1$  et  $r_2$  sont respectivement les rayons des cylindres intérieur et extérieur.

$\tau = \frac{d^2}{\nu}$  : est l'échelle de temps visqueux caractéristique du problème.

$\text{Re} = \frac{\Omega_1 r_1 d}{\nu}$  : est le nombre de Reynolds.

$\nu$  : est la viscosité cinématique du fluide.

On effectue une analyse de la stabilité linéaire en admettant que l'on peut décomposer le champ hydrodynamique en champ moyen et champ perturbé tels que :

$$\begin{aligned} V_{fr} &= u'(r, z, t), \quad V_{f\theta} = \bar{V}(r) + v'(r, z, t), \quad V_{fz} = w'(r, z, t) \\ V_{pr} &= u'_p(r, z, t), \quad V_{p\theta} = \bar{V}(r) + v'_p(r, z, t), \quad V_{pz} = w'_p(r, z, t) \end{aligned} \quad (4.11)$$

$$P = \bar{P} + p'(r, z, t), \quad \alpha_p = A + \alpha'_p(r, z, t)$$

On pose  $A$  : est la concentration des particules dans l'état non perturbé. On cherche les perturbations selon les expressions de la forme suivante :

$$\begin{aligned} \frac{u'}{u(r)} &= \frac{v'}{v(r)} = \frac{w'}{w(r)} = e^{(ikz + \sigma t)} \\ \frac{u'_p}{u_p(r)} &= \frac{v'_p}{v_p(r)} = \frac{w'_p}{w_p(r)} = e^{(ikz + \sigma t)} \end{aligned} \quad (4.12)$$

$$\frac{p'}{\omega(r)} = e^{(ikz + \sigma t)}, \quad \frac{a'_p}{a_p(r)} = e^{(ikz + \sigma t)}$$

Avec :  $u(r), v(r), w(r), u_p(r), v_p(r), w_p(r)$  et  $a_p(r)$  qui représentent les expressions radiales associées aux perturbations correspondantes.

Le paramètre  $\sigma = \sigma_r + i\sigma_i$  est un coefficient temporel qui correspond à une amplification ou un amortissement selon le signe positif ou négatif respectivement de  $\sigma_r$ .

Le nombre d'onde  $k$  et le facteur d'amplification  $\sigma$  sont adimensionalisés comme suit :

$$k = k^* d \quad \text{et} \quad \sigma = \sigma^* \tau \quad (4.13)$$

En injectant les relations (4.11) et (4.12) dans les équations gouvernantes de l'écoulement non dimensionné (relation 4.1 à relation 4.4).

On procède ensuite à la linéarisation des équations du mouvement par élimination des termes d'ordre supérieur à « 1 ». Ceci conduit à la forme finale des équations de la stabilité qui, pour la phase fluide s'écrivent comme suit :

$$(DD_* - k^2 - \sigma - \lambda_{1,r}(\frac{18A}{\phi^2} + \frac{A\sigma}{2}))u(r) + 2 \operatorname{Re} \frac{\bar{V}}{r} v(r) = \operatorname{Re}(D\omega(r)) - \lambda_{1,r}(\frac{18A}{\phi^2} + \frac{A\sigma}{2})u_p(r) \quad (4.14)$$

$$(DD_* - k^2 - \sigma - \lambda_{1,\theta}(\frac{18A}{\phi^2} + \frac{A\sigma}{2}))v(r) - \operatorname{Re}(D_*\bar{V})u(r) = -\lambda_{1,\theta}(\frac{18A}{\phi^2} + \frac{A\sigma}{2})v_p(r) \quad (4.15)$$

$$(DD_* - k^2 - \sigma + \frac{1}{r^2} - \lambda_{1,z}(\frac{18A}{\phi^2} + \frac{A\sigma}{2}))w(r) = ik \operatorname{Re} \omega(r) - \lambda_{1,z}(\frac{18A}{\phi^2} + \frac{A\sigma}{2})w_p(r) \quad (4.16)$$

$$D_*u(r) = -ikw(r) \quad (4.17)$$

Les symboles  $D$  et  $D_*$  représentent les opérateurs suivantes,

$$D(\ ) = \frac{d}{dr}(\ ), D_*(\ ) = \frac{d}{dr}(\ ) + \frac{1}{r}(\ ) \quad (4.18)$$

De plus, on pose :

$$l = \frac{18A}{\phi^2} + \frac{A\sigma}{2} \quad (4.19)$$

Les équations (4.14) à (4.17) deviennent :

$$(DD_* - k^2 - \sigma - \lambda_{1,r}l)u(r) + 2 \operatorname{Re} \frac{\bar{V}}{r} v(r) = \operatorname{Re}(D\omega(r)) - \lambda_{1,r}lu_p(r) \quad (4.20)$$

$$(DD_* - k^2 - \sigma - \lambda_{1,\theta}l)v(r) - \operatorname{Re}(D_*\bar{V})u(r) = -\lambda_{1,\theta}lv_p(r) \quad (4.21)$$

$$(DD_* - k^2 - \sigma + \frac{1}{r^2} - \lambda_{1,z}l)w(r) = ik \operatorname{Re} \omega(r) - \lambda_{1,z}lw_p(r) \quad (4.22)$$

$$D_*u(r) = -ikw(r) \quad (4.23)$$

Dans la suite, on effectue un traitement similaire des équations de la phase particules (relation 4.5 à relation 4.8), on obtient ainsi les expressions du champ de vitesse perturbé pour la phase solide ou particules  $u_p(r)$ ,  $v_p(r)$  et  $w_p(r)$  qui s'écrivent comme suit :

$$u_p(r) = \left( \frac{\lambda_{s,r} P_0 (\sigma + \lambda_{s,\theta} P_0)}{2 \text{Re}^2 \frac{\bar{V}(r)}{r} D_* \bar{V}(r) + (\sigma + \lambda_{s,r} P_0)(\sigma + \lambda_{s,\theta} P_0)} \right) u(r) + \left( \frac{2 \text{Re} \bar{V}(r) \lambda_{s,\theta} P_0}{r \left( 2 \text{Re}^2 \frac{\bar{V}(r)}{r} D_* \bar{V}(r) + (\sigma + \lambda_{s,r} P_0)(\sigma + \lambda_{s,\theta} P_0) \right)} \right) v(r) - \left( \frac{\text{Re}(\sigma + \lambda_{s,\theta} P_0) D\omega(r)}{\varepsilon \left( 2 \text{Re}^2 \frac{\bar{V}(r)}{r} D_* \bar{V}(r) + (\sigma + \lambda_{s,r} P_0)(\sigma + \lambda_{s,\theta} P_0) \right)} \right) \quad (4.24)$$

$$v_p(r) = - \frac{\text{Re} D_* \bar{V}(r) \lambda_{s,r} P_0}{(\sigma + \lambda_{s,r} P_0)(\sigma + \lambda_{s,\theta} P_0) + 2 \text{Re}^2 \frac{\bar{V}(r)}{r} D_* \bar{V}(r)} u(r) + \frac{\text{Re}^2 D_* \bar{V}(r) D\omega(r)}{\varepsilon \left( (\sigma + \lambda_{s,r} P_0)(\sigma + \lambda_{s,\theta} P_0) + 2 \text{Re}^2 \frac{\bar{V}(r)}{r} D_* \bar{V}(r) \right)} + \frac{\lambda_{s,\theta} P_0 (\sigma + \lambda_{s,r} P_0)}{\left( (\sigma + \lambda_{s,r} P_0)(\sigma + \lambda_{s,\theta} P_0) + 2 \text{Re}^2 \frac{\bar{V}(r)}{r} D_* \bar{V}(r) \right)} v(r) \quad (4.25)$$

$$w_p(r) = \frac{\lambda_{s,z} P_0}{(\sigma + \lambda_{s,z} P_0)} w(r) - \frac{ik \text{Re}}{\varepsilon (\sigma + \lambda_{s,z} P_0)} \omega(r) \quad (4.26)$$

$$\text{Avec : } P_0 = \frac{18}{\phi^2 \varepsilon} + \frac{\sigma}{2\varepsilon} \quad (4.27)$$

En injectant les expressions de  $u_p(r)$ ,  $v_p(r)$  et  $w_p(r)$  dans les équations (4.20) à (4.22), on aboutit à ce qui suit. D'abord, l'équation (4.20) devient :

$$(DD_* - k^2 - \sigma - \lambda_{l,r} l) u(r) + 2 \text{Re} \frac{\bar{V}}{r} v(r) = \left[ \begin{array}{l} \left( \frac{\lambda_{s,r} P_0 (\sigma + \lambda_{s,\theta} P_0)}{2 \text{Re}^2 \frac{\bar{V}(r)}{r} D_* \bar{V}(r) + (\sigma + \lambda_{s,r} P_0)(\sigma + \lambda_{s,\theta} P_0)} \right) u(r) \\ \left( \frac{2 \text{Re} \bar{V}(r) \lambda_{s,\theta} P_0}{r \left( 2 \text{Re}^2 \frac{\bar{V}(r)}{r} D_* \bar{V}(r) + (\sigma + \lambda_{s,r} P_0)(\sigma + \lambda_{s,\theta} P_0) \right)} \right) v(r) \\ - \left( \frac{\text{Re}(\sigma + \lambda_{s,\theta} P_0) D\omega(r)}{\varepsilon \left( 2 \text{Re}^2 \frac{\bar{V}(r)}{r} D_* \bar{V}(r) + (\sigma + \lambda_{s,r} P_0)(\sigma + \lambda_{s,\theta} P_0) \right)} \right) \end{array} \right] \quad (4.28)$$



Ensuite, après réarrangement, l'équation (4.28) devient :

$$\begin{aligned}
 & \left[ DD_* - k^2 - \sigma - \lambda_{1,r} l \left( 1 - \frac{\lambda_{s,r} P_0 (\sigma + \lambda_{s,\theta} P_0)}{2 \text{Re}^2 \frac{\bar{V}(r)}{r} D_* \bar{V}(r) + (\sigma + \lambda_{s,r} P_0) (\sigma + \lambda_{s,\theta} P_0)} \right) \right] u(r) \\
 &= -2 \text{Re} \frac{\bar{V}}{r} \left[ 1 + \frac{\lambda_{1,r} \lambda_{s,\theta} l P_0}{((\sigma + \lambda_{s,r} P_0) (\sigma + \lambda_{s,\theta} P_0) + 2 \text{Re}^2 ((\frac{\bar{V}}{r}) D_* \bar{V}))} \right] v(r) \\
 &+ \text{Re} \left[ 1 + \frac{\lambda_{1,r} l (\sigma + \lambda_{s,\theta} P_0)}{\varepsilon ((\sigma + \lambda_{s,r} P_0) (\sigma + \lambda_{s,\theta} P_0) + 2 \text{Re}^2 ((\frac{\bar{V}}{r}) D_* \bar{V}))} \right] D\omega(r)
 \end{aligned} \tag{4.29}$$

L'équation (4.21) se transforme en la suivante :

$$(DD_* - k^2 - \sigma - \lambda_{1,\theta} l)v(r) - \text{Re}(D_* \bar{V})u(r) =$$

$$\begin{aligned}
 & \left[ \begin{aligned}
 & - \left\{ \frac{\text{Re} D_* \bar{V}(r) \lambda_{s,r} P_0}{(\sigma + \lambda_{s,r} P_0) (\sigma + \lambda_{s,\theta} P_0) + 2 \text{Re}^2 \frac{\bar{V}(r)}{r} D_* \bar{V}(r)} \right\} u(r) \\
 & - \lambda_{1,\theta} l \left\{ \frac{\lambda_{s,\theta} P_0 (\sigma + \lambda_{s,r} P_0)}{((\sigma + \lambda_{s,r} P_0) (\sigma + \lambda_{s,\theta} P_0) + 2 \text{Re}^2 \frac{\bar{V}(r)}{r} D_* \bar{V}(r))} \right\} v(r) \\
 & + \left\{ \frac{\text{Re}^2 D_* \bar{V}(r)}{\varepsilon ((\sigma + \lambda_{s,r} P_0) (\sigma + \lambda_{s,\theta} P_0) + 2 \text{Re}^2 \frac{\bar{V}(r)}{r} D_* \bar{V}(r))} \right\} D\omega(r)
 \end{aligned} \right]
 \end{aligned} \tag{4.30}$$

Après réarrangement, l'équation (4.30) s'exprime comme suit :

$$\begin{aligned}
& \left[ DD_* - k^2 - \sigma - \lambda_{1,\theta} l \left( 1 - \frac{\lambda_{s,\theta} P_0 (\sigma + \lambda_{s,r} P_0)}{(\sigma + \lambda_{s,r} P_0)(\sigma + \lambda_{s,\theta} P_0) + 2 \operatorname{Re}^2 \frac{\bar{V}(r)}{r} D_* \bar{V}(r)} \right) \right] v(r) = \\
& \operatorname{Re} D_* \bar{V} \left[ 1 + \frac{\lambda_{1,\theta} \lambda_{s,r} l P_0}{(\sigma + \lambda_{s,r} P_0)(\sigma + \lambda_{s,\theta} P_0) + 2 \operatorname{Re}^2 \frac{\bar{V}(r)}{r} D_* \bar{V}(r)} \right] u(r) \\
& - \left[ \frac{\lambda_{1,\theta} l \operatorname{Re}^2 D_* \bar{V}}{\varepsilon ((\sigma + \lambda_{s,r} P_0)(\sigma + \lambda_{s,\theta} P_0) + 2 \operatorname{Re}^2 ((\frac{\bar{V}}{r}) D_* \bar{V}))} \right] D \omega(r)
\end{aligned} \tag{4.31}$$

L'équation (4.22) est modifiée comme suit :

$$\left[ DD_* - k^2 - \sigma + \frac{1}{r^2} - \lambda_{1,z} l \left( 1 - \frac{\lambda_{s,z} P_0}{(\sigma + \lambda_{s,z} P_0)} \right) \right] w(r) = ik \operatorname{Re} \left( 1 + \frac{\lambda_{1,z} l}{\varepsilon (\sigma + \lambda_{s,z} P_0)} \right) \omega(r) \tag{4.32}$$

De l'équation (4.23), on tire l'expression de  $w(r)$  qui est de la forme suivante :

$$w(r) = -\frac{1}{ik} D_* u = \frac{i}{k} D_* u \tag{4.33}$$

En injectant l'équation (4.33) dans l'équation (4.32), on aboutit à la forme :

$$\left[ DD_* - k^2 - \sigma + \frac{1}{r^2} - \lambda_{1,z} l \left( 1 - \frac{\lambda_{s,z} P_0}{(\sigma + \lambda_{s,z} P_0)} \right) \right] D_* u = k^2 \operatorname{Re} \left( 1 + \frac{\lambda_{1,z} l}{\varepsilon (\sigma + \lambda_{s,z} P_0)} \right) \omega(r) \tag{4.34}$$

De l'équation (4.34) on tire l'expression de  $\omega(r)$  qui est de la forme ci-après :

$$\omega(r) = \frac{\varepsilon (\sigma + \lambda_{s,z} P_0) \left[ DD_* - k^2 - \sigma + \frac{1}{r^2} - \lambda_{1,z} l \left( \frac{\sigma}{\sigma + \lambda_{s,z} P_0} \right) \right] D_* u}{k^2 \operatorname{Re} (\varepsilon (\sigma + \lambda_{s,z} P_0) + \lambda_{1,z} l)} \tag{4.35}$$

En remplaçant l'expression de  $\omega(r)$  (relation (4.35)) dans les équations (4.29) et (4.31), on aboutit à ce qui suit. D'abord, l'équation (4.29) devient :

$$\begin{aligned}
 & \left[ D^4 u + \frac{2}{r} D^3 u - \left( \frac{3}{r^2} + (k^2 + \sigma) + \frac{\lambda_{1,z} l \sigma}{\sigma + \lambda_{s,z} P_0} \right) D^2 u \right. \\
 & \left. + \left( \frac{3}{r^3} - \frac{1}{r} \left( k^2 + \sigma + \frac{\lambda_{1,z} l \sigma}{\sigma + \lambda_{s,z} P_0} \right) \right) D u \right. \\
 & \left. + \left( -\frac{3}{r^4} + \frac{1}{r^2} \left( k^2 + \sigma + \frac{\lambda_{1,z} l \sigma}{\sigma + \lambda_{s,z} P_0} \right) \right) u \right] \\
 & - \left[ \left( D^2 + \frac{1}{r} D - \left( k^2 + \sigma + \frac{1}{r^2} + \lambda_{1,r} l \right) \right) \left( (\sigma + \lambda_{s,r} P_0) (\sigma + \lambda_{s,\theta} P_0) + 2 \operatorname{Re}^2 \frac{\bar{V}(r)}{r} D_* \bar{V}(r) \right) \right. \\
 & \left. + \lambda_{1,r} \lambda_{s,r} l P_0 (\sigma + \lambda_{s,\theta} P_0) \right] u(r) \\
 & = 2 \operatorname{Re} \frac{\bar{V}}{r} \left[ (\sigma + \lambda_{s,r} P_0) (\sigma + \lambda_{s,\theta} P_0) + 2 \operatorname{Re}^2 \frac{\bar{V}}{r} D_* \bar{V} + \lambda_{1,r} \lambda_{s,\theta} l P_0 \right] v(r)
 \end{aligned} \tag{4.36}$$

Pour réduire la taille des équations, on pose :

$$q_0 = \frac{\varepsilon(\sigma + \lambda_{s,z} P_0)}{k^2(\varepsilon(\sigma + \lambda_{s,z} P_0) + \lambda_{1,z} l)} \tag{4.37}$$

$$q_1 = k^2 + \sigma + \frac{\lambda_{1,z} l \sigma}{\sigma + \lambda_{s,z} P_0} \tag{4.38}$$

$$q_2 = (\sigma + \lambda_{s,r} P_0) (\sigma + \lambda_{s,\theta} P_0) \tag{4.39}$$

Donc, l'équation (4.36) se réduit à la forme suivante :

$$L_1 u(r) = 2 \operatorname{Re} \frac{\bar{V}}{r} \left[ q_2 + 2 \operatorname{Re}^2 \frac{\bar{V}}{r} D_* \bar{V} + \lambda_{1,r} \lambda_{s,\theta} l P_0 \right] v(r) \tag{4.40}$$

Avec :

$$\begin{aligned}
L_1 = & q_0 \left[ q_2 + 2 \operatorname{Re}^2 \frac{\bar{V}}{r} D_* \bar{V} + \frac{\lambda_{1,r} l (\sigma + \lambda_{s,\theta} P_0)}{\varepsilon} \right] \left[ D^4 + \frac{2}{r} D^3 \right] \\
& - \left[ q_0 \left( q_2 + 2 \operatorname{Re}^2 \frac{\bar{V}}{r} D_* \bar{V} + \frac{\lambda_{1,r} l (\sigma + \lambda_{s,\theta} P_0)}{\varepsilon} \right) \left( \frac{3}{r^2} + q_1 \right) + q_2 + 2 \operatorname{Re}^2 \frac{\bar{V}}{r} D_* \bar{V} \right] D^2 \\
& + \left[ q_0 \left( q_2 + 2 \operatorname{Re}^2 \frac{\bar{V}}{r} D_* \bar{V} + \frac{\lambda_{1,r} l (\sigma + \lambda_{s,\theta} P_0)}{\varepsilon} \right) \left( \frac{3}{r^3} - \frac{1}{r} q_1 \right) - \frac{q_2 + 2 \operatorname{Re}^2 \frac{\bar{V}}{r} D_* \bar{V}}{r} \right] D \\
& + \left[ q_0 \left( q_2 + 2 \operatorname{Re}^2 \frac{\bar{V}}{r} D_* \bar{V} + \frac{\lambda_{1,r} l (\sigma + \lambda_{s,\theta} P_0)}{\varepsilon} \right) \left( -\frac{3}{r^4} + \frac{q_1}{r^2} \right) \right. \\
& \left. + \left( q_2 + 2 \operatorname{Re}^2 \frac{\bar{V}}{r} D_* \bar{V} \right) + \left( k^2 + \sigma + \frac{1}{r^2} + \lambda_{1,r} l \right) - \lambda_{1,r} \lambda_{s,r} l P_0 (\sigma + \lambda_{s,\theta} P_0) \right]
\end{aligned} \tag{4.41}$$

On procède de la même manière pour l'équation (4.31), on aboutit à ce qui suit :

$$\begin{aligned}
& \operatorname{Re} D_* \bar{V} \left[ \lambda_{1,\theta} l \frac{q_0}{\varepsilon} \left( \begin{array}{l} D^4 u + \frac{2}{r} D^3 u - \left( \frac{3}{r^2} + q_1 \right) D^2 \\ + \left( \frac{3}{r^3} - \frac{1}{r} q_1 \right) D \\ + \left( -\frac{3}{r^4} + \frac{q_1}{r^2} \right) \end{array} \right) - \left[ q_2 + 2 \operatorname{Re}^2 \frac{\bar{V}}{r} D_* \bar{V} + \lambda_{1,\theta} \lambda_{s,r} l P_0 \right] \right] u(r) \\
= & \left[ - \left( q_2 + 2 \operatorname{Re}^2 \frac{\bar{V}}{r} D_* \bar{V} \right) D^2 - \frac{\left( q_2 + 2 \operatorname{Re}^2 \frac{\bar{V}}{r} D_* \bar{V} \right)}{r} D \right. \\
& \left. + \left( \left( q_2 + 2 \operatorname{Re}^2 \frac{\bar{V}}{r} D_* \bar{V} \right) \left( k^2 + \sigma + \frac{1}{r^2} \right) + \lambda_{1,\theta} l \left( q_2 + 2 \operatorname{Re}^2 \frac{\bar{V}}{r} D_* \bar{V} - \lambda_{s,\theta} P_0 (\sigma + \lambda_{s,r} P_0) \right) \right) \right] v(r)
\end{aligned} \tag{4.42}$$

On pose :

$$L_2 = D_* \bar{V} \left[ \lambda_{1,\theta} l \frac{q_0}{\varepsilon} \left( \begin{array}{l} D^4 u + \frac{2}{r} D^3 u - \left( \frac{3}{r^2} + q_1 \right) D^2 \\ + \left( \frac{3}{r^3} - \frac{1}{r} q_1 \right) D \\ + \left( -\frac{3}{r^4} + \frac{q_1}{r^2} \right) \end{array} \right) - \left[ q_2 + 2 \operatorname{Re}^2 \frac{\bar{V}}{r} D_* \bar{V} + \lambda_{1,\theta} \lambda_{s,r} l P_0 \right] \right] \tag{4.43}$$

$$L_0 = -\left(q_2 + 2\text{Re}^2 \frac{\bar{V}}{r} D_* \bar{V}\right) D^2 - \frac{\left(q_2 + 2\text{Re}^2 \frac{\bar{V}}{r} D_* \bar{V}\right)}{r} D + \left(\left(q_2 + 2\text{Re}^2 \frac{\bar{V}}{r} D_* \bar{V}\right) \left(k^2 + \sigma + \frac{1}{r^2}\right) + \lambda_{1,\theta} l \left(q_2 + 2\text{Re}^2 \frac{\bar{V}}{r} D_* \bar{V} - \lambda_{s,\theta} P_0 (\sigma + \lambda_{s,r} P_0)\right)\right) \quad (4.44)$$

Finalement, l'équation (4.42) se simplifie considérablement comme suit :

$$L_2 \text{Re} u(r) = L_0 v(r) \quad (4.45)$$

**-Approximation du faible espace annulaire (small gap configuration)  $\delta \ll 1$**

Tenant compte du changement de variable définit comme suit :

$$r^* = R_1 + xd \quad \text{avec} \quad r = \frac{r^*}{d} = \frac{R_1}{d} + x = \frac{R_1}{d} \left(1 + x \frac{d}{R_1}\right) \quad (4.46)$$

De plus,  $\frac{d}{R_1} = \delta$  tel que  $\delta = 0.1 \ll 1$

$r = \frac{r^*}{d} = \frac{R_1}{d} (1 + x\delta) = \frac{1}{\delta} (1 + x\delta)$ . Ceci entraîne l'approximation suivante  $\frac{1}{r} = \delta (1 - x\delta + \dots)$

Tenant compte de cette approximation, les expressions  $L_0, L_1$  et  $L_2$  se réduisent à la forme suivante :

$$L_0 = -q_2 D^2 + \left(q_2 (k^2 + \sigma) + \lambda_{1,\theta} l \left(q_2 - \lambda_{s,\theta} P_0 (\sigma + \lambda_{s,r} P_0)\right)\right) \quad (4.47)$$

$$L_1 = \left[ \begin{array}{l} q_0 \left[ q_2 + \frac{\lambda_{1,r} l (\sigma + \lambda_{s,\theta} P_0)}{\varepsilon} \right] D^4 - \left[ q_0 q_1 \left( q_2 + \frac{\lambda_{1,r} l (\sigma + \lambda_{s,\theta} P_0)}{\varepsilon} \right) + q_2 \right] D^2 \\ + \left[ q_2 (k^2 + \sigma) + \lambda_{1,r} l \left( q_2 - \lambda_{s,r} P_0 (\sigma + \lambda_{s,\theta} P_0) \right) \right] \end{array} \right] \quad (4.48)$$

$$L_2 = D \bar{V} \left[ \lambda_{1,\theta} l \frac{q_0}{\varepsilon} (D^4 u - q_1 D^2) - \left[ q_2 + \lambda_{1,\theta} \lambda_{s,r} l P_0 \right] \right] \quad (4.49)$$

Finalement, le système d'équations de la stabilité à résoudre devient relativement simple :

$$\left\{ \begin{array}{l} L_1 u(x) = 2T_s \bar{V} \left[ q_2 + \lambda_{1,r} \lambda_{s,\theta} l P_0 \right] v(r) \end{array} \right. \quad (4.50a)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} L_2 u(x) = L_0 v(r) \end{array} \right. \quad (4.50b)$$

$$\text{Avec : } Ta = \text{Re} \sqrt{\delta} \quad \text{et} \quad Ts = Ta^2 \quad (4.51)$$

Où  $\bar{V}$  représente la vitesse tangentielle dans l'écoulement de Couette au voisinage de la première instabilité telle que :  $\bar{V} = 1 - x$  (4.52)

Les conditions aux limites associées au problème sont :

$$u = v = Du \quad \text{en } x = 0 \quad \text{et } x = 1 \quad (4.53)$$

## 4.2 Résolution du problème de la stabilité

On procède à la résolution du système d'équation de la stabilité (équ. 4.50a et 4.50b) par la méthode de Galerkin qui a été utilisé par plusieurs auteurs notamment Diprima (1960), Bouabdallah (1980), etc.... C'est une méthode d'intégration analytique qui consiste à rechercher une solution approchée d'une équation différentielle, à partir d'une erreur résiduelle associée à cette équation. De cette façon, on cherche une solution qui doit contenir assez de constantes inconnues pour que, d'une part, on puisse ajuster les conditions aux limites et que, d'autre part, certains de ces paramètres puissent optimiser la solution.

### 4.2.1 Approche du problème par la méthode de Galerkin

On propose un choix de la base d'approximation de la solution sous la forme d'un développement en série de puissance qui vérifie à l'avance les conditions aux limites :

-Composante radiale :

$$u = \sum_{n=1}^N \alpha_n u_n \quad (4.54)$$

$$\text{avec : } u_n = x^2(1-x)^2 x^{n-1} \quad (4.55)$$

-Composante tangentielle :

$$v = \sum_{n=1}^N \beta_n v_n \quad (4.56)$$

$$\text{avec : } v_n = x(1-x)x^{n-1} \quad (4.57)$$

On vérifie bien que les conditions aux limites du problème sont satisfaites.

$$u_n = v_n = Du_n \quad \text{en } x = 0 \quad \text{et } x = 1 \quad (4.58)$$

- *Evaluation des résidus associés au système d'équations (4.50a, 4.50b) :*

Posons :

$$\varepsilon = \sum_{n=1}^N \varepsilon_n \quad (4.59)$$

$\varepsilon$  est une erreur commise dans l'approximation en remplaçant la solution approchée 4.54 et 4.55 dans les équations à résoudre :

Soit :

$$L_1 u = L_1 \sum_{n=1}^N \alpha_n u_n = \sum_{n=1}^N \alpha_n L_1 u_n \quad (4.60)$$

De même :

$$L_2 u = L_2 \sum_{n=1}^N \alpha_n u_n = \sum_{n=1}^N \alpha_n L_2 u_n \quad (4.61)$$

Et aussi :

$$L_0 v = L_0 \sum_{n=1}^N \beta_n v_n = \sum_{n=1}^N \beta_n L_0 v_n \quad (4.62)$$

**-Résidus associés à l'équation (4.50a) :**

La composante d'ordre  $n$  liée à la première équation :

$$\varepsilon_n^{(1)} = \sum_{n=1}^N \alpha_n L_1 u_n - 2T_s \bar{V} \left( q_2(r) + \lambda_{1r} \lambda_{s,\theta} l P_0 \right) \sum_{n=1}^N \beta_n v_n \quad (4.63)$$

**-Résidus associés à l'équation (4.50b) :**

De même, la composante d'ordre  $n$  liée à la deuxième équation :

$$\varepsilon_n^{(2)} = \sum_{n=1}^N \alpha_n L_2 u_n - \sum_{n=1}^N \beta_n L_0 v_n \quad (4.64)$$

On cherche à minimiser les erreurs associées à  $\varepsilon_n^{(1)}$  et  $\varepsilon_n^{(2)}$  sur le support d'approximation :

$$D = \{0,1\}.$$

Il s'agit maintenant d'optimiser les valeurs de  $\alpha_n$  et  $\beta_n$  pour minimiser les erreurs commises dans chacune des équations du système à résoudre :

Pour cela, il y a lieu de faire une remarque qui découle des propriétés intégrales liées au produit interne, à savoir, si l'on a deux fonctions  $f$  et  $g$  qui sont définis sur l'intervalle d'approximation  $0 \leq x \leq 1$ , on a alors :

$$\langle f | g \rangle = \int_0^1 f \cdot g dx = 0, \text{ Si } f = 0, \forall g = g(x) \quad x \in [0,1] \quad (4.65)$$

Justification de cette propriété :

$$f = \varepsilon_n^{(1)} \text{ si } n \text{ est choisit grand, l'erreur résiduelle tend alors vers la nullité : } \varepsilon_n^{(1)} \rightarrow 0, \\ \text{entraînant ainsi : } \langle \varepsilon_n^{(1)} | u_m \rangle = 0 \quad (4.66)$$

La méthode de Galerkin qui se traduit par la minimisation des erreurs permet d'écrire :

$$\langle \varepsilon_n^{(1)} | u_m \rangle = 0 \quad (4.67)$$

$$\text{Explicitement, cela signifie que } \langle \varepsilon_n^{(1)} | u_m \rangle = \int_0^1 \varepsilon_n^{(1)} u_m dx = 0 \quad (4.68)$$

Ceci se traduit par le fait que l'erreur est perpendiculaire à la base de décomposition choisie  $u_m$ . Dans ces conditions, on a :

$$\int_0^1 \left[ \left( \sum_{n=1}^N \alpha_n L_1 u_n \right) - 2T_s \sum_{n=1}^N \beta_n \bar{V} (q_2 + \lambda_{1,r} \lambda_{s,\theta} l P_0) v_n \right] u_m dx = 0 \quad (4.69)$$

$$\sum_{n=1}^N \alpha_n a_{nm} - 2T_s \sum_{n=1}^N \beta_n b_{nm} = 0 \quad (4.70)$$

Avec :

$$a_{nm} = \int_0^1 (L_1 u_n) u_m dx \quad \text{et} \quad b_{nm} = \int_0^1 \left[ \bar{V} (q_2 + \lambda_{1,r} \lambda_{s,\theta} l P_0) v_n \right] u_m dx \quad (4.71)$$

Ensuite, on étend le calcul précédent à l'équation (4.50a). En utilisant la notion de produit scalaire, on a

$$\langle \varepsilon_n^2 | v_m \rangle = 0 \Leftrightarrow \langle \varepsilon_n^2 | v_m \rangle = \int_0^1 \varepsilon_n^2 v_m dx = 0 \quad (4.72)$$



Autrement dit on a :

$$\int_0^1 \left[ \sum_{n=1}^N \alpha_n L_2 u_n - \sum_{n=1}^N \beta_n L_0 v_n \right] v_m dx = 0 \quad (4.73)$$

Soit encore,

$$\sum_{n=1}^N \alpha_n \int_0^1 (L_2 u_n) v_m dx - \sum_{n=1}^N \beta_n \int_0^1 (L_0 v_n) v_m dx = 0 \quad (4.74)$$

$$c_{nm} = \int_0^1 (L_2 u_n) v_m dx \quad \text{et} \quad d_{nm} = \int_0^1 (L_0 v_n) v_m dx \quad (4.75)$$

On est ramené à calculer les coefficients de la matrice de Galerkin G telle que l'on ait :

$$\underbrace{\begin{pmatrix} a_{nm} & -2Tsb_{nm} \\ c_{nm} & -d_{nm} \end{pmatrix}}_G \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_n \\ \beta_1 \\ \beta_m \end{pmatrix} = 0 \quad (4.76)$$

Une condition nécessaire d'existence d'une solution (solution non triviale) consiste à imposer que le déterminant de Cramer précédent est nul ( $\det G = 0$ ).

$$\det G = 0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} a_{nm} & -2Tsb_{nm} \\ c_{nm} & -d_{nm} \end{vmatrix} = 0 \quad (4.77)$$

Avec :

$$a_{nm} = \int_0^1 (L_1 u_n) u_m dx \quad b_{nm} = \int_0^1 \left[ \bar{V} (q_2 + \lambda_{l,r} \lambda_{s,\theta} l P_0) v_n \right] u_m dx \quad (4.78)$$

$$C_{nm} = \int_0^1 (L_2 u_n) v_m dx \quad d_{nm} = \int_0^1 (L_0 v_n) v_m dx \quad (4.79)$$

#### 4.2.1.1 Approche en première approximation

L'estimation de la solution consiste à réaliser une approximation du 1<sup>er</sup> ordre :  $n = m = 1$  de la méthode de Galerkin. Ceci se traduit par la relation matricielle très simple :

$$\underbrace{\begin{pmatrix} a_{11} & 2Ts b_{11} \\ c_{11} & d_{11} \end{pmatrix}}_G \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \beta_1 \end{pmatrix} = 0 \quad (4.80)$$

Explicitement, les conditions d'existence de la solution ou condition de Cramer s'écrit :

$\alpha_1 \neq 0$  ,  $\beta_1 \neq 0$  entraînant le déterminant nul de G :

$$\det G = 0 \quad (4.81)$$

$$\text{Soit: } a_{11} d_{11} - 2Ts b_{11} c_{11} = 0 \quad (4.82)$$

$$\text{d'où: } Ts = \frac{a_{11} d_{11}}{2b_{11} c_{11}} \quad (4.83)$$

Dans ces conditions, on calcule les termes  $a_{11}$ ,  $b_{11}$ ,  $c_{11}$ ,  $d_{11}$  de la matrice de Galerkin tels que

$$a_{11} = \int_0^1 (L_1 u_1) u_1 dx \quad (4.84)$$

$$a_{11} = \int_0^1 (L_1 [x^2(1-x)^2]) (x^2(1-x)^2) dx \quad (4.85)$$

$$\begin{aligned} a_{11} = & \frac{4}{5} \left[ \frac{\varepsilon(\sigma + \lambda_{s,z} P_0)}{k^2(\varepsilon(\sigma + \lambda_{s,z} P_0) + \lambda_{1,z} l)} \right] \left[ (\sigma + \lambda_{s,r} P_0)(\sigma + \lambda_{s,\theta} P_0) + \frac{\lambda_{1,r} l (\sigma + \lambda_{s,\theta} P_0)}{\varepsilon} \right] \\ & + \frac{2}{105} \left[ \left( \frac{\varepsilon(\sigma + \lambda_{s,z} P_0)}{k^2(\varepsilon(\sigma + \lambda_{s,z} P_0) + \lambda_{1,z} l)} \right) \left( k^2 + \sigma + \frac{\lambda_{1,z} l \sigma}{\sigma + \lambda_{s,z} P_0} \right) \left( (\sigma + \lambda_{s,r} P_0)(\sigma + \lambda_{s,\theta} P_0) + \frac{\lambda_{1,r} l (\sigma + \lambda_{s,\theta} P_0)}{\varepsilon} \right) \right. \\ & \left. + (\sigma + \lambda_{s,r} P_0)(\sigma + \lambda_{s,\theta} P_0) \right] \quad (4.86) \\ & + \frac{1}{630} \left[ (\sigma + \lambda_{s,r} P_0)(\sigma + \lambda_{s,\theta} P_0)(k^2 + \sigma) + \lambda_{1,r} l \left( (\sigma + \lambda_{s,r} P_0)(\sigma + \lambda_{s,\theta} P_0) - \lambda_{s,r} P_0 (\sigma + \lambda_{s,\theta} P_0) \right) \right] \end{aligned}$$

$$b_{11} = \int_0^1 \left[ \bar{V} (q_2 + \lambda_{1,r} \lambda_{s,\theta} l P_0) v_1 \right] u_1 dx \quad (4.87)$$

$$b_{11} = \int_0^1 \left[ (1-x) \left( (\sigma + \lambda_{s,r} P_0) (\sigma + \lambda_{s,\theta} P_0) + \lambda_{l,r} \lambda_{s,\theta} l P_0 \right) x (1-x) \right] x^2 (1-x)^2 dx \quad (4.88)$$

$$b_{11} = \frac{1}{280} \left( (\sigma + \lambda_{s,r} P_0) (\sigma + \lambda_{s,\theta} P_0) + \lambda_{l,r} \lambda_{s,\theta} l P_0 \right) \quad (4.89)$$

$$C_{11} = \int_0^1 (L_2 u_1) v_1 dx \quad (4.90)$$

$$C_{11} = \frac{1}{140} \left[ (\sigma + \lambda_{s,r} P_0) (\sigma + \lambda_{s,\theta} P_0) + \lambda_{l,\theta} \lambda_{s,r} l P_0 \right] - \lambda_{l,\theta} l \frac{1}{\varepsilon} \left( \frac{\varepsilon (\sigma + \lambda_{s,z} P_0)}{k^2 (\varepsilon (\sigma + \lambda_{s,z} P_0) + \lambda_{l,z} l)} \right) \left( 4 + \frac{1}{15} \left( k^2 + \sigma + \frac{\lambda_{l,z} l \sigma}{\sigma + \lambda_{s,z} P_0} \right) \right) \quad (4.91)$$

$$d_{11} = \int_0^1 (L_0 v_1) v_1 dx \quad (4.92)$$

$$d_{11} = \int_0^1 (L_0 (x(1-x))) (x(1-x)) dx \quad (4.93)$$

$$d_{11} = \frac{1}{3} \left( (\sigma + \lambda_{s,r} P_0) (\sigma + \lambda_{s,\theta} P_0) \right) + \frac{1}{30} \left( (\sigma + \lambda_{s,r} P_0) (\sigma + \lambda_{s,\theta} P_0) (k^2 + \sigma) + \lambda_{l,\theta} l (q_2(r) - \lambda_{s,\theta} P_0 (\sigma + \lambda_{s,r} P_0)) \right) \quad (4.94)$$

La détermination des coefficients précédents permettent d'aborder l'étude de la stabilité marginale de l'écoulement.

#### 4.2.1.2 Cas de la stabilité marginale $\sigma = 0$

Tenant compte de la condition de stabilité marginale  $\sigma = 0$ , les termes  $a_{11}$ ,  $b_{11}$ ,  $c_{11}$  et  $d_{11}$  se réduisent à la forme suivante :

$$a_{11} = \frac{4}{5} \left( \frac{\varepsilon \lambda_{s,z} P_0}{k^2 (\varepsilon \lambda_{s,z} P_0 + \lambda_{l,z} l)} \right) \left[ \lambda_{s,r} \lambda_{s,\theta} P_0^2 + \frac{\lambda_{l,r} \lambda_{s,\theta} l P_0}{\varepsilon} \right] + \frac{2}{105} \left[ \left( \frac{\varepsilon \lambda_{s,z} P_0}{k^2 (\varepsilon \lambda_{s,z} P_0 + \lambda_{l,z} l)} \right) (k^2) \left( \lambda_{s,r} \lambda_{s,\theta} P_0^2 + \frac{\lambda_{l,r} \lambda_{s,\theta} l P_0}{\varepsilon} \right) + \lambda_{s,r} \lambda_{s,\theta} P_0^2 \right] + \frac{1}{630} \left[ \lambda_{s,r} \lambda_{s,\theta} P_0^2 k^2 \right] \quad (4.95)$$

$$a_{11} = \left( \frac{18}{\phi^2 \varepsilon} \right)^2 \left[ \frac{4}{5} \left( \frac{\lambda_{s,z}}{k^2 (\lambda_{s,z} + A \lambda_{l,z})} \right) (\lambda_{s,r} \lambda_{s,\theta} + \lambda_{l,r} \lambda_{s,\theta} A) + \frac{2}{105} \left[ \left( \frac{\lambda_{s,z}}{(\lambda_{s,z} + A \lambda_{l,z})} \right) (\lambda_{s,r} \lambda_{s,\theta} + \lambda_{l,r} \lambda_{s,\theta} A) + \lambda_{s,r} \lambda_{s,\theta} \right] + \frac{1}{630} (\lambda_{s,r} \lambda_{s,\theta} k^2) \right] \quad (4.96)$$

$$b_{11} = \frac{1}{280} (\lambda_{s,r} \lambda_{s,\theta} P_0^2 + \lambda_{l,r} \lambda_{s,\theta} l P_0) \quad (4.97)$$

$$b_{11} = \frac{1}{280} \left( \frac{18}{\phi^2 \varepsilon} \right)^2 (\lambda_{s,r} \lambda_{s,\theta} + \lambda_{l,r} \lambda_{s,\theta} A \varepsilon) \quad (4.98)$$

$$C_{11} = \frac{1}{140} \left[ \lambda_{s,r} \lambda_{s,\theta} P_0^2 + \lambda_{1,\theta} \lambda_{s,r} I P_0 \right] - \frac{\lambda_{1,\theta} \lambda_{s,z} I P_0}{k^2 (\varepsilon (\sigma + \lambda_{s,z} P_0) + \lambda_{1,z} I)} \left( 4 + \frac{k^2}{15} \right) \quad (4.99)$$

$$C_{11} = \left( \frac{18}{\phi^2 \varepsilon} \right)^2 \left[ \frac{1}{140} (\lambda_{s,r} \lambda_{s,\theta} + \lambda_{1,\theta} \lambda_{s,r} A \varepsilon) - \frac{\lambda_{1,\theta} \lambda_{s,z} A \varepsilon \phi^2}{18 k^2 (\lambda_{s,z} + A \lambda_{1,z})} \left( 4 + \frac{k^2}{15} \right) \right] \quad (4.100)$$

$$d_{11} = \frac{1}{3} (\lambda_{s,r} \lambda_{s,\theta} P_0^2) + \frac{1}{30} (\lambda_{s,r} \lambda_{s,\theta} P_0^2 k^2) \quad (4.101)$$

$$d_{11} = \frac{1}{30} \left( \frac{18}{\phi^2 \varepsilon} \right)^2 \lambda_{s,r} \lambda_{s,\theta} [10 + k^2] \quad (4.102)$$

La résolution de l'équation algébrique avec « det G » nous conduit à établir la relation suivante :

$$T_S = \frac{\left[ \frac{4 \left( \frac{\lambda_{s,z}}{k^2 (\lambda_{s,z} + A \lambda_{1,z})} \right) (\lambda_{s,r} \lambda_{s,\theta} + \lambda_{1,r} \lambda_{s,\theta} A) + \frac{2}{105} \left[ \left( \frac{\lambda_{s,z}}{(\lambda_{s,z} + A \lambda_{1,z})} \right) (\lambda_{s,r} \lambda_{s,\theta} + \lambda_{1,r} \lambda_{s,\theta} A) + \lambda_{s,r} \lambda_{s,\theta} \right]}{\left[ \frac{1}{30} \lambda_{s,r} \lambda_{s,\theta} (10 + k^2) \right]} \right] + \frac{1}{630} (\lambda_{s,r} \lambda_{s,\theta} k^2)}{2 \left[ \frac{1}{280} (\lambda_{s,r} \lambda_{s,\theta} + \lambda_{1,r} \lambda_{s,\theta} A \varepsilon) \right] \left[ \frac{1}{140} (\lambda_{s,r} \lambda_{s,\theta} + \lambda_{1,\theta} \lambda_{s,r} A \varepsilon) - \frac{\lambda_{1,\theta} \lambda_{s,z} A \varepsilon \phi^2}{18 k^2 (\lambda_{s,z} + A \lambda_{1,z})} \left( 4 + \frac{k^2}{15} \right) \right]} \quad (4.103)$$

#### 4.2.1.3 Premier cas particulier : fluide simple (concentration nulle $A = 0$ )

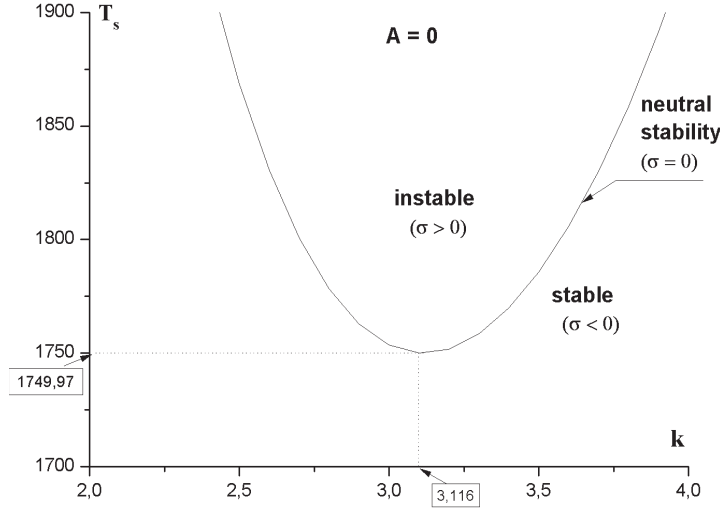
Tout d'abord, on considère le cas de concentration nulle ( $A = 0$ ) et tel que  $\lambda_{1,r} = \lambda_{1,\theta} = \lambda_{1,z} = \lambda_{s,r} = \lambda_{s,\theta} = \lambda_{s,z} = 1$ , qui correspond à l'écoulement de Taylor-Couette pour un fluide simple (sans suspension) ou écoulement monophasique.

On obtient l'expression suivante du nombre de Taylor  $T_S$  qui dépend du nombre d'onde  $k$  :

$$T_S = 653.33 \left[ \frac{4}{5k^2} + \frac{4}{105} + \frac{k^2}{630} \right] [(10 + k^2)] \quad (4.104)$$

La condition d'existence d'un état critique est obtenu pour  $\frac{dT_S}{dk} = 0$

Cette état correspond au seuil d'apparition des cellules de Taylor caractérisées par l'onde stationnaire coïncidant avec la valeur critique du nombre d'onde  $k = k_c = 3.116$  pour laquelle on évalue :  $T_S = T_{c1} = 1749.97$ .



**Figure 4.1 :** Courbe de stabilité marginale pour un fluide simple ou écoulement monophasique (concentration nulle de la suspension  $A = 0$ )

Ce résultat est comparable avec les résultats théoriques et expérimentaux obtenus par Chandrasekhar (1961), Coles (1965), Bouabdallah (1980), Recktenwald (1993) et Ali & Lueptow (2002) comme le montre le tableau 4.1.

| Auteur                  | $Tc_1$  |
|-------------------------|---------|
| Chandrasekhar (1961)    | 1715    |
| Coles* (1965)           | 1708    |
| Bouabdallah* (1980)     | 1708    |
| Rectenwald et al (1993) | 1746    |
| Ali & Lueptow (2002)    | 1746.02 |
| Ce travail              | 1749.97 |

**Tableau 4.1 :** Comparaison du nombre de Taylor critique  $Tc_1$  obtenu théoriquement et expérimentalement(\*)

L'incertitude relative commise sur le nombre de Taylor est de l'ordre :  $\frac{\Delta T}{T} \leq 2,4\%$  ce qui constitue une précision acceptable.

**4.2.1.4 Deuxième cas particulier : présence de particules en suspension ( $A \neq 0$ )**

En présence de particules solides en suspension ( $A \neq 0$ ), on pose  $\lambda_{1,r} = \lambda_{1,\theta} = \lambda_{1,z} = \lambda_{s,r} = \lambda_{s,\theta} = \lambda_{s,z} = 1$  (étude de Ali & Lueptow, 2002).

$$Ts = \frac{\left[ \frac{4}{5k^2} + \frac{2}{105} + \frac{1}{630}k^2 \right] \left[ \frac{1}{30}(10+k^2) \right]}{2 \left[ \frac{1}{280}(1+A\varepsilon) \right] \left[ \frac{1}{140}(1+A\varepsilon) - \frac{A\varepsilon\phi^2}{18k^2(1+A)} \left( 4 + \frac{k^2}{15} \right) \right]} \tag{4.105}$$

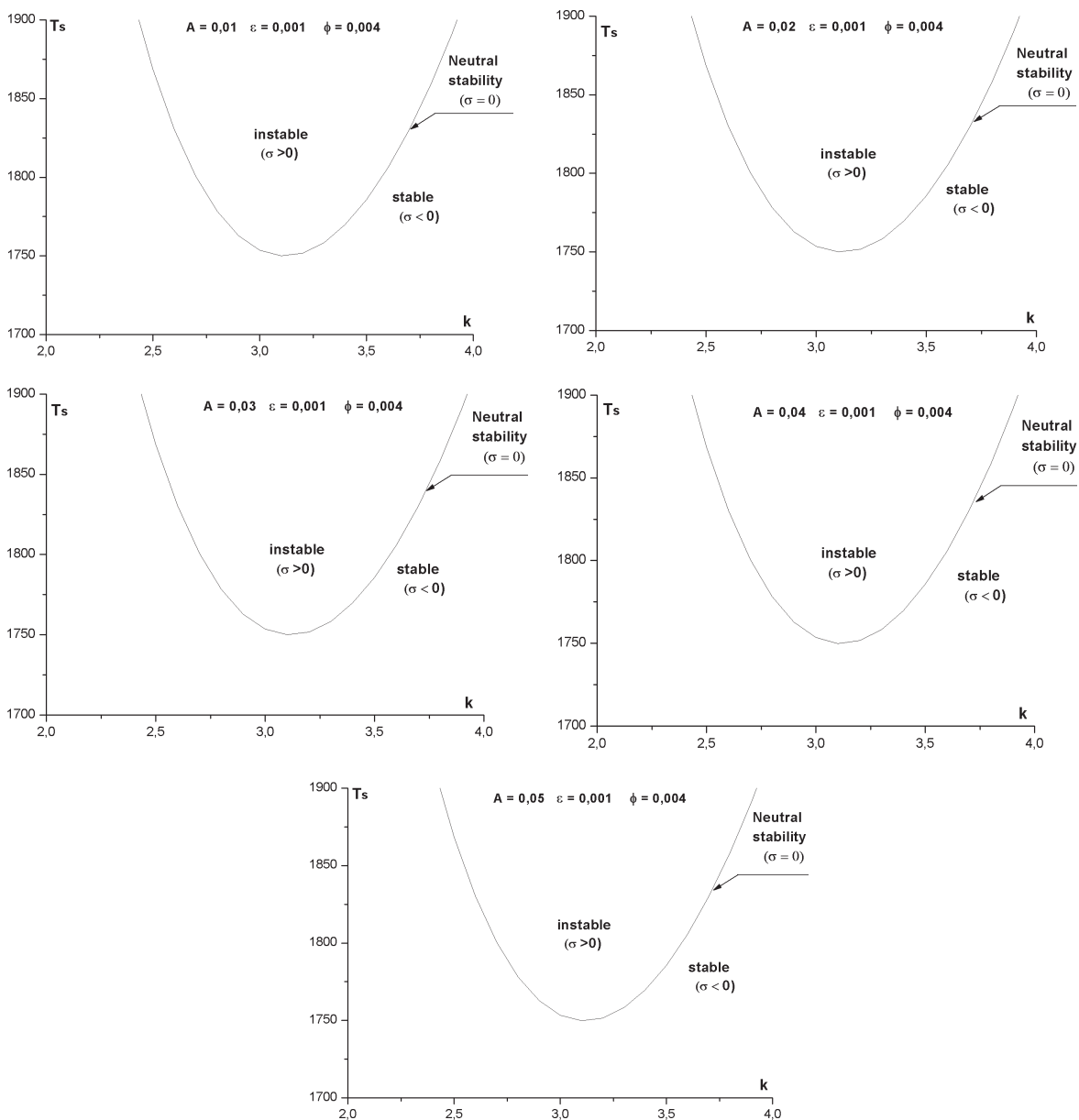
où  $\varepsilon$  et  $\phi$  sont respectivement le rapport de densité et le diamètre de particules adimensionnel.

On remarque que  $T_s$  dépend du nombre d'onde  $k$ , de la concentration  $A$  et des paramètres  $\varepsilon$  et  $\phi$ .

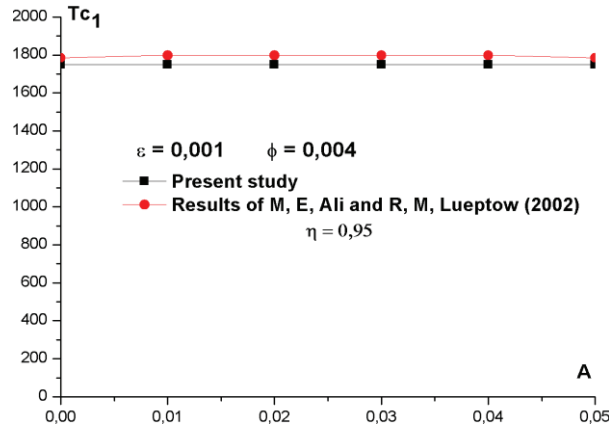
Dans ce qui suit, on présente les résultats des investigations liées aux différentes concentrations  $A$  et différentes valeurs du rapport de densité  $\varepsilon$ .

**4.2.1.4.1 Diagramme de stabilité marginale et effet de la concentration**

On présente, ci-dessous, l'ensemble des résultats obtenus pour tracer le diagramme de stabilité marginale ( $\sigma = 0$ ) en fonction de l'effet de la concentration  $A$ .



**Figure 4.2:** Courbes de stabilité marginale pour différentes concentrations  $A$  de la suspension ( $\varepsilon = 0.001, \phi = 0.004$ )



**Figure 4.3:** Variation du nombre de Taylor critique  $Tc_1$  en fonction de la concentration  $A$  de la suspension ( $\varepsilon=0.001$ ,  $\phi = 0.004$ )

Le tableau 4.2 donné ci-dessous récapitule la comparaison des nombres de Taylor critique  $Tc_1$  obtenus par Ali and Lueptow (2002) et notre étude pour  $\varepsilon=0.001$ ,  $\phi = 0.004$ .

| Concentration « A » | $Tc_1$ (Résultats de Ali and Lueptow (2002), $\eta=0.95$ ) | $Tc_1$ (notre étude) | précision |
|---------------------|--|----------------------|-----------|
| 0.01 %              | 1797,94  | 1749,94              | 2.74 %    |
| 0.02 %              | 1797,94  | 1749,90              | 2.74 %    |
| 0.03 %              | 1797,94  | 1749.87              | 2.74 %    |
| 0.04 %              | 1797,94  | 1749.83              | 2.74 %    |
| 0.05 %              | 1784,54  | 1749.80              | 1.98 %    |

**Tableau 4.2 :** Comparaison des nombres de Taylor critique  $Tc_1$  obtenus pour une suspension par Ali and Lueptow (2002) et notre étude réalisée pour  $\varepsilon=0.001$ ,  $\phi = 0.004$ .

L'examen de ces données montre que le nombre de Taylor critique  $Tc_1$  est pratiquement constant en fonction de la concentration de la suspension  $A$  pour un rapport de densité  $\varepsilon = 0.001$ .

En outre, on note une bonne concordance entre nos résultats et ceux obtenus par Ali and Lueptow (2002).

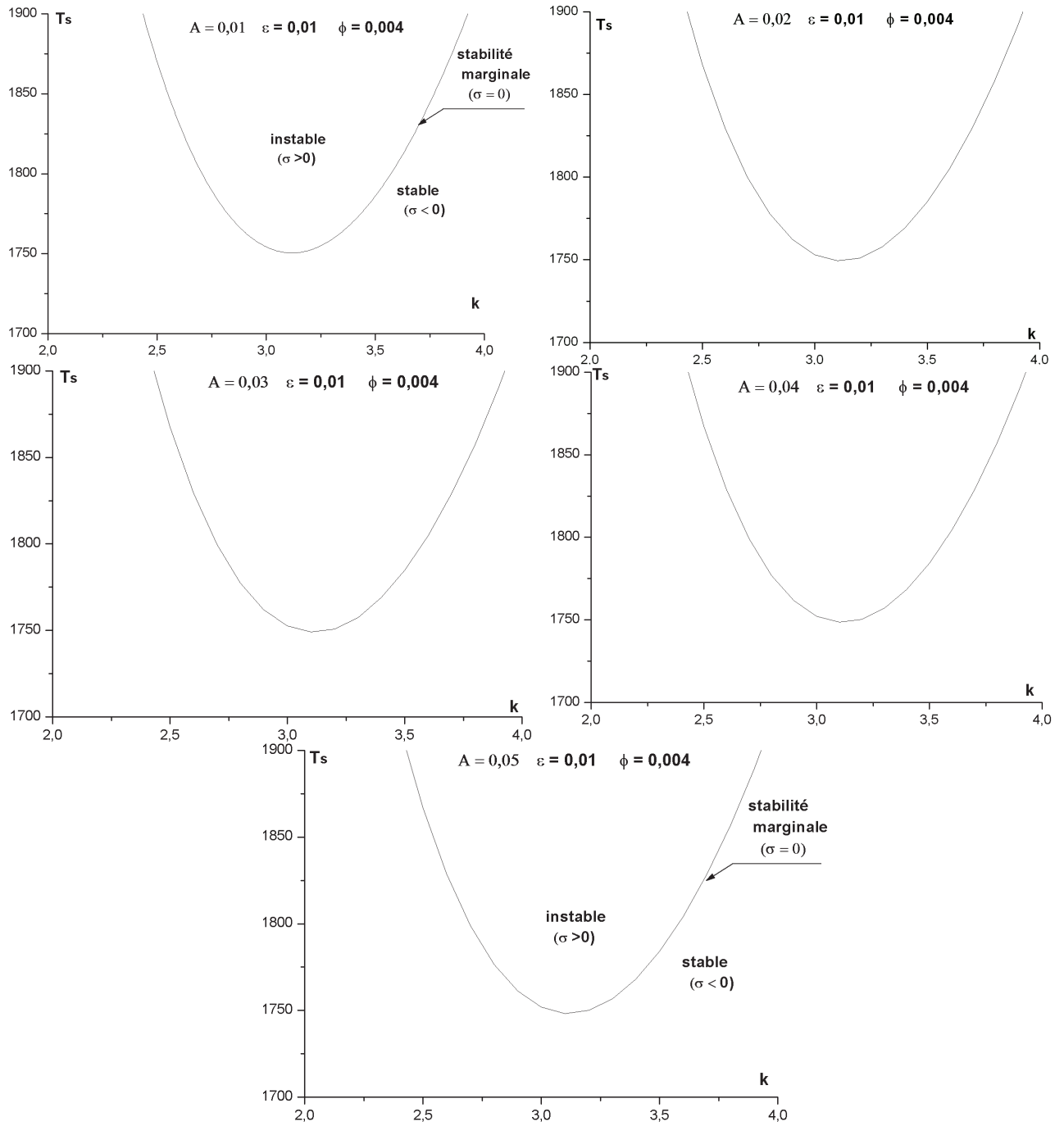
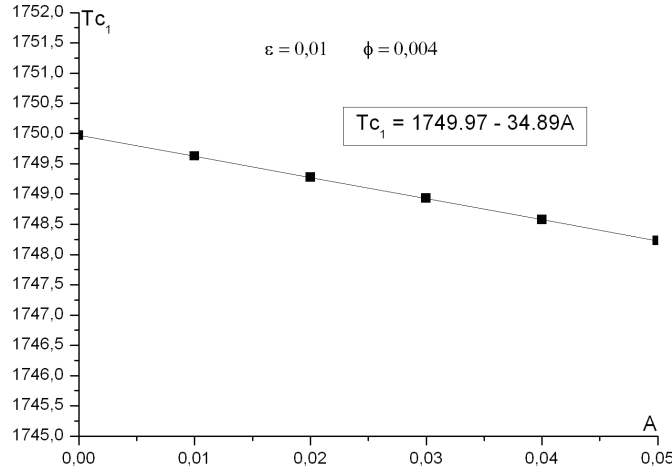


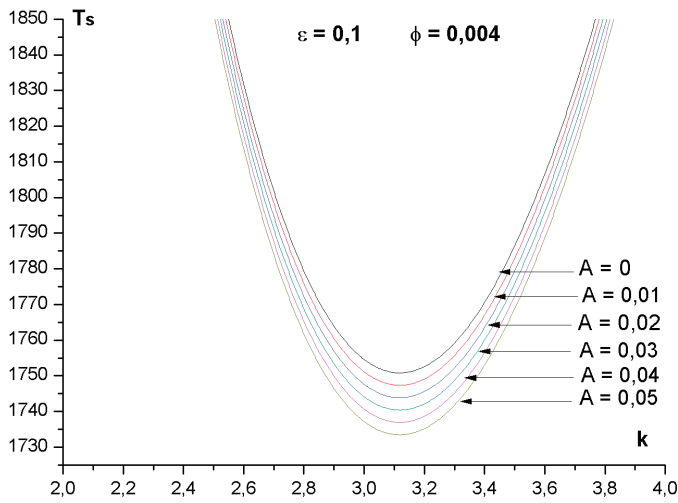
Figure 4.4 : Courbes de stabilité marginale pour différentes concentrations  $A$  de la suspension ( $\varepsilon = 0.01, \phi = 0.004$ )



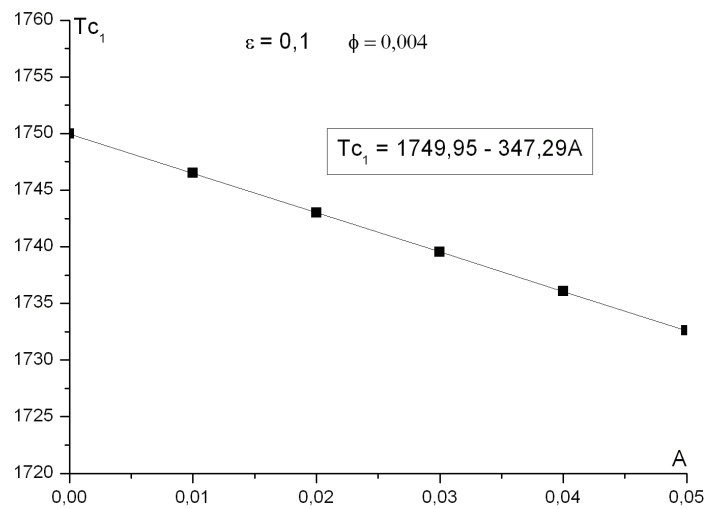


**Figure 4.5 :** Evolution du nombre de Taylor critique  $T_{c1}$  en fonction de la concentration  $A$  de la suspension ( $\epsilon = 0.01, \phi = 0.004$ )

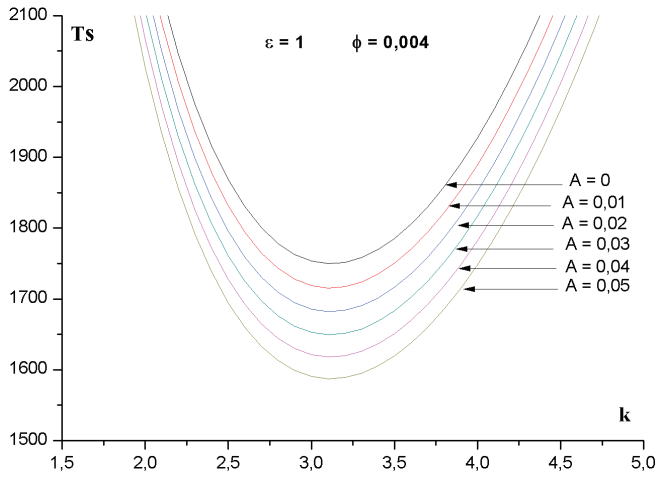
L'analyse de la figure 4.5 nous indique que le seuil critique d'apparition des cellules de Taylor est influencé par la concentration  $A$  de la suspension laquelle est marquée par une décroissance linéaire de  $T_{c1}$  en fonction de  $A$  pour un rapport de densité  $\epsilon = 0.01$ .



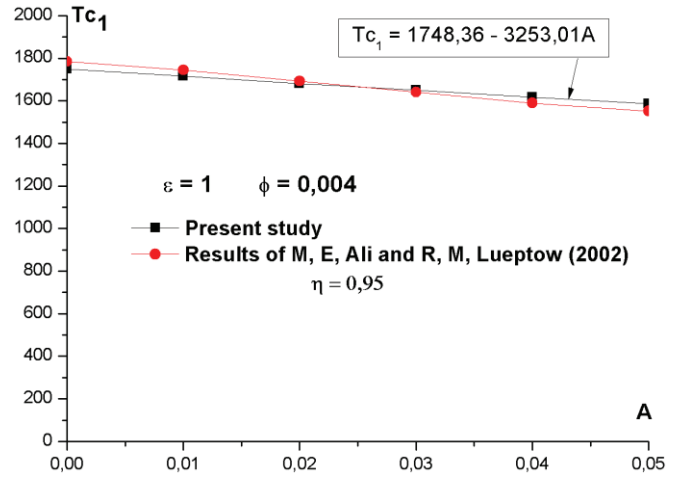
**Figure 4.6 :** Courbe de stabilité marginale pour différentes concentrations  $A$  de la suspension ( $\epsilon = 0.1, \phi = 0.004$ )



**Figure 4.7 :** Variation du nombre de Taylor critique  $T_{c1}$  en fonction de la concentration de la suspension ( $\epsilon = 0.1, \phi = 0.004$ )



**Figure 4.8 :** Courbe de stabilité marginale pour différentes concentrations A de la suspension ( $\epsilon = 1, \phi = 0.004$ )

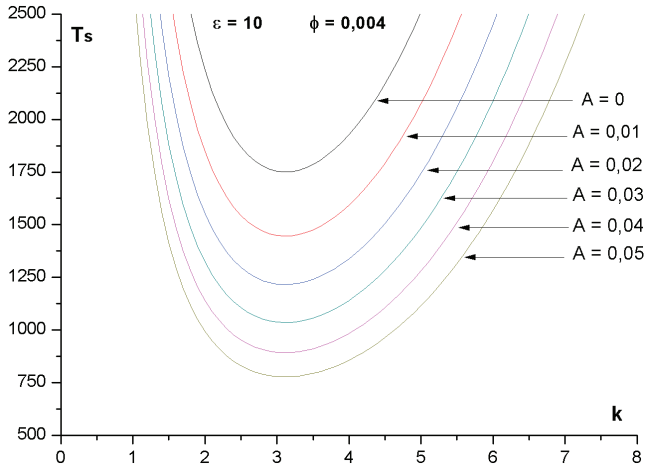


**Figure 4.9 :** Variation du nombre de Taylor critique  $T_{c1}$  en fonction de la concentration de la suspension ( $\epsilon = 1, \phi = 0.004$ )

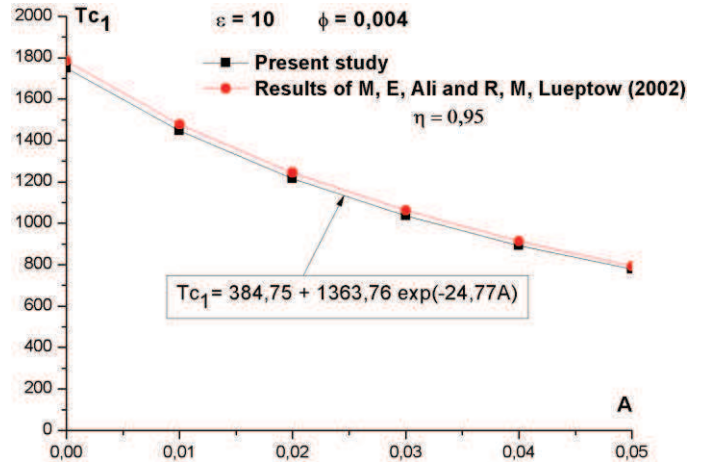
Dans le tableau ci-après, on présente une comparaison entre les nombres de Taylor critique  $T_{c1}$  obtenus par Ali and Lueptow (2002) et notre étude pour  $\epsilon = 1, \phi = 0.004$ .

| Concentration A | $T_{c1}$ (Résultats de Ali and Lueptow (2002), $\eta = 0.95$ ) | $T_{c1}$ (ce travail) | précision |
|-----------------|--|-----------------------|-----------|
| 0.01 %          | 1744.67  | 1715.49               | 1.70 %    |
| 0.02 %          | 1692.22  | 1682.02               | 0.60 %    |
| 0.03 %          | 1640.54  | 1649.52               | 0.54 %    |
| 0.04 %          | 1589.68  | 1617.95               | 1.70 %    |
| 0.05 %          | 1552.06  | 1587.28               | 2.21 %    |

**Tableau 4.3 :** Comparaison des nombres de Taylor critique  $T_{c1}$  obtenus pour une suspension par Ali and Lueptow (2002) et notre travail pour  $\epsilon = 1, \phi = 0.004$ .



**Figure 4.10 :** Courbe de stabilité marginale pour différentes concentrations A de la suspension ( $\epsilon = 10, \phi = 0.004$ )



**Figure 4.11 :** Variation du nombre de Taylor critique  $T_{c1}$  en fonction de la concentration de la suspension ( $\epsilon = 10, \phi = 0.004$ )

Le tableau 4.4 suivant présente une comparaison des nombres de Taylor critique  $T_{c1}$  pour une suspension obtenus par Ali and Lueptow (2002) et notre étude pour  $\epsilon = 10, \phi = 0.004$ .

| Concentration A | $T_{c1}$ (Résultats de Ali and Lueptow (2002), $\eta = 0.95$ ) | $T_{c1}$ (ce travail) | précision |
|-----------------|--|-----------------------|-----------|
| 0.01 %          | 1478,16  | 1446.26               | 2.20 %    |
| 0.02 %          | 1244,85  | 1215.27               | 2.43 %    |
| 0.03 %          | 1062,28  | 1035.50               | 2.58 %    |
| 0.04 %          | 913,22   | 892.85                | 2.28 %    |
| 0.05 %          | 793,13   | 777.28                | 2.03 %    |

**Tableau 4.4 :** Comparaison des nombres de Taylor critique  $T_{c1}$  obtenus pour une suspension par Ali and Lueptow (2002) et notre travail pour  $\epsilon = 10, \phi = 0.004$ .

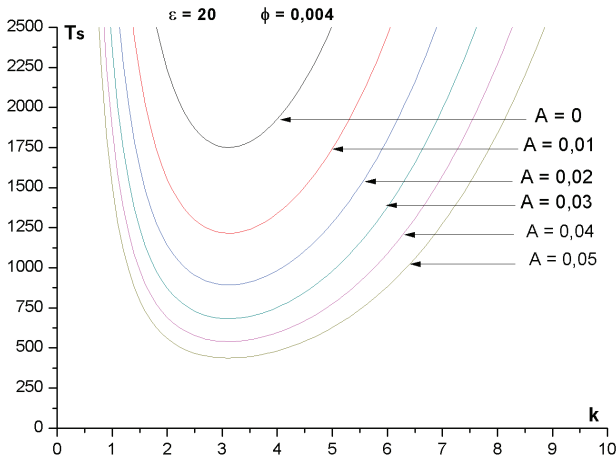


Figure 4.12 : Courbe de stabilité marginale pour différentes concentrations A de la suspension ( $\epsilon = 20, \phi = 0.004$ )

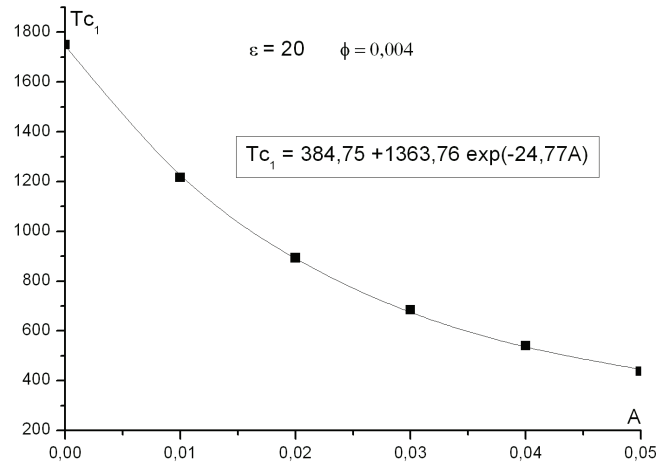


Figure 4.13 : Variation du nombre de Taylor critique  $T_{c1}$  en fonction de la concentration de la suspension ( $\epsilon = 20, \phi = 0.004$ )

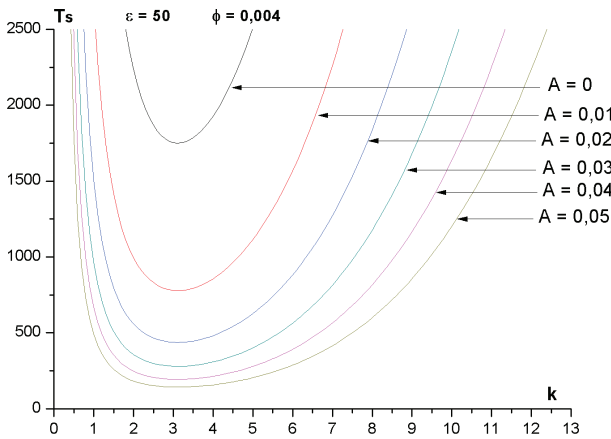


Figure 4.14 : Courbe de stabilité marginale pour différentes concentrations A de la suspension ( $\epsilon = 50, \phi = 0.004$ )

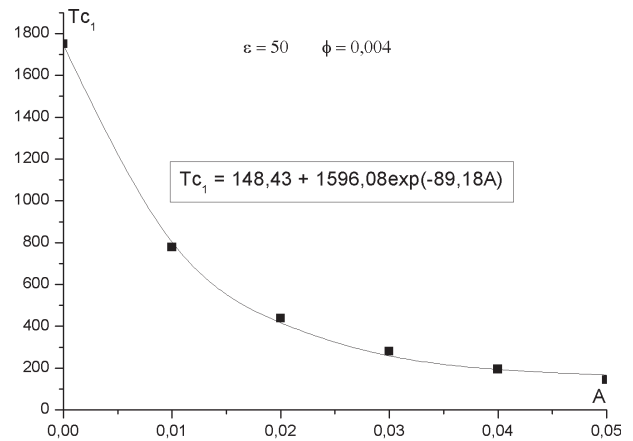


Figure 4.15: Variation du nombre de Taylor critique  $T_{c1}$  en fonction de la concentration de la suspension ( $\epsilon = 50, \phi = 0.004$ )

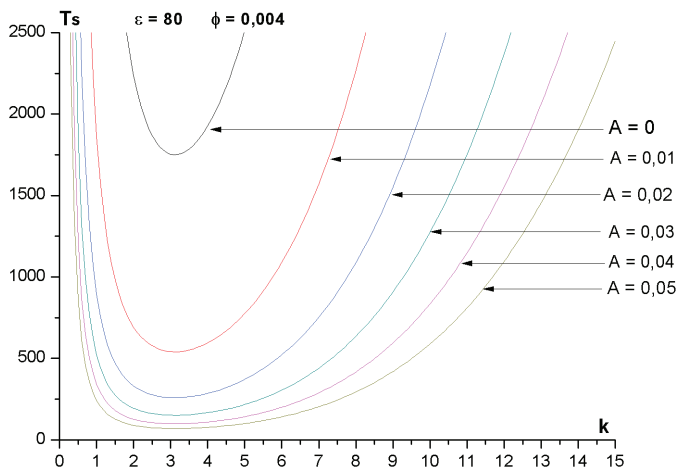


Figure 4.16 : Courbe de stabilité marginale pour différentes concentrations A de la suspension ( $\epsilon = 80, \phi = 0.004$ )

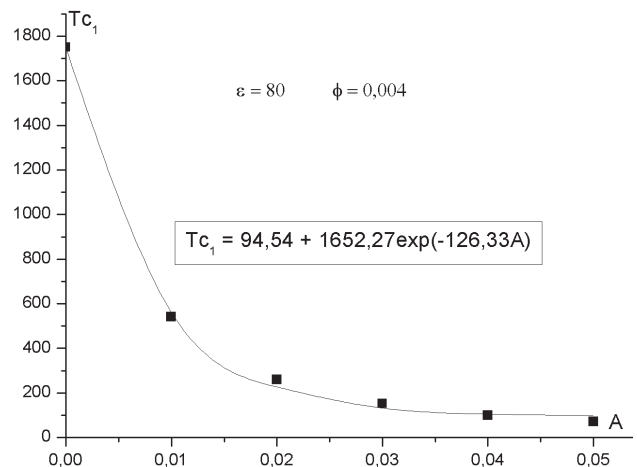


Figure 4.17 : Variation du nombre de Taylor critique  $T_{c1}$  en fonction de la concentration de la suspension ( $\epsilon = 80, \phi = 0.004$ )

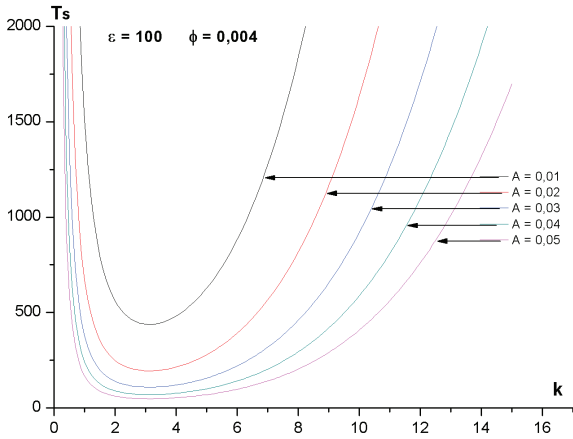


Figure 4.18 : Courbe de stabilité marginale pour différentes concentrations A de la suspension ( $\epsilon = 100, \phi = 0.004$ )

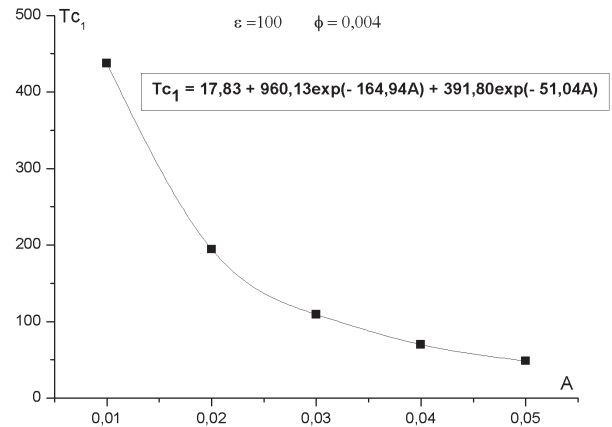


Figure 4.19 : Variation du nombre de Taylor critique  $T_{c1}$  en fonction de la concentration de la suspension ( $\epsilon = 100, \phi = 0.004$ )

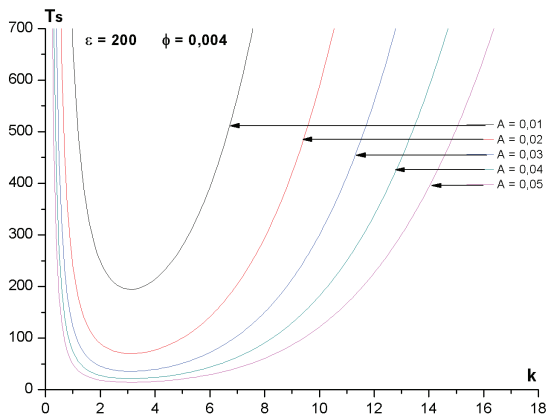


Figure 4.20 : Courbe de stabilité marginale pour différentes concentrations A de la suspension ( $\epsilon = 200, \phi = 0.004$ )

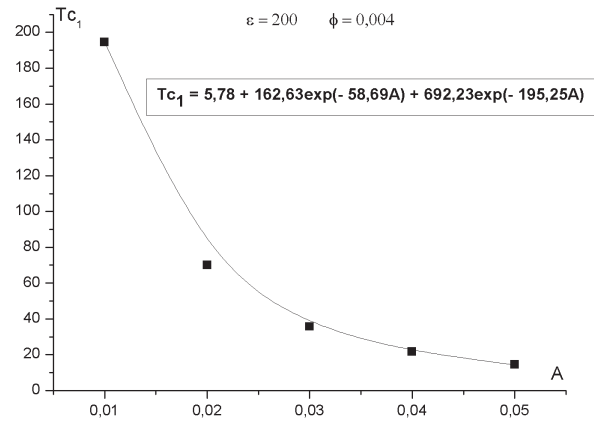


Figure 4.21: Variation du nombre de Taylor critique  $T_{c1}$  en fonction de la concentration de la suspension ( $\epsilon = 200, \phi = 0.004$ )

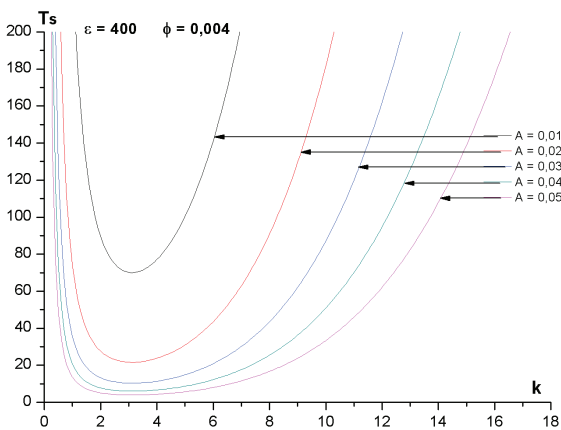


Figure 4.22 : Courbe de stabilité marginale pour différentes concentrations A de la suspension ( $\epsilon = 400, \phi = 0.004$ )

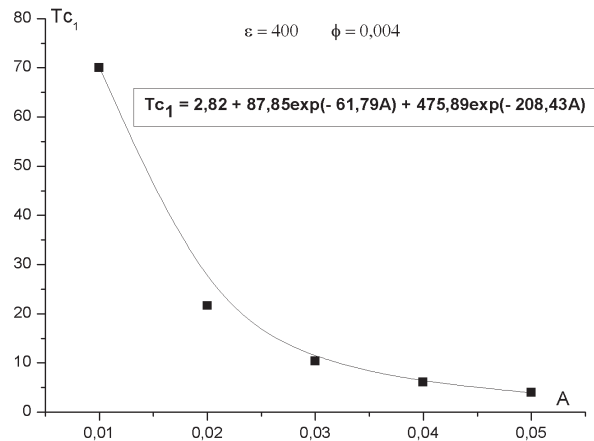


Figure 4.23: Variation du nombre de Taylor critique  $T_{c1}$  en fonction de la concentration de la suspension ( $\epsilon = 400, \phi = 0.004$ )

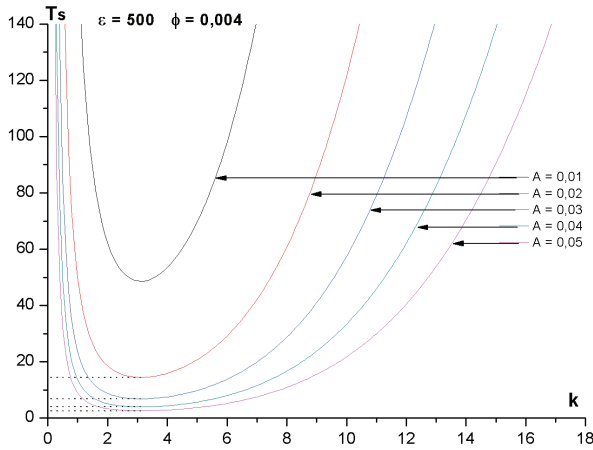


Figure 4.24: Courbe de stabilité marginale pour différentes concentrations A de la suspension ( $\epsilon = 500, \phi = 0.004$ )

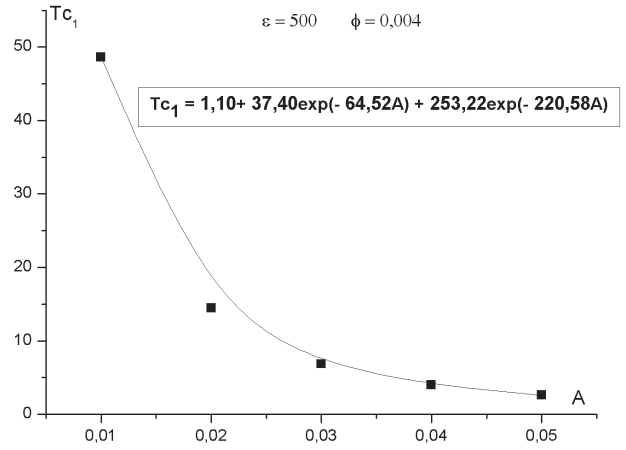


Figure 4.25 : Variation du nombre de Taylor critique  $T_{c1}$  en fonction de la concentration de la suspension ( $\epsilon = 500, \phi = 0.004$ )

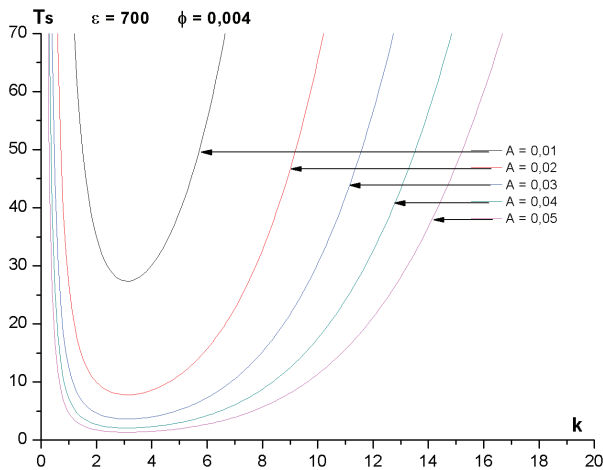


Figure 4.26 : Courbe de stabilité marginale pour différentes concentrations A de la suspension ( $\epsilon = 700, \phi = 0.004$ )

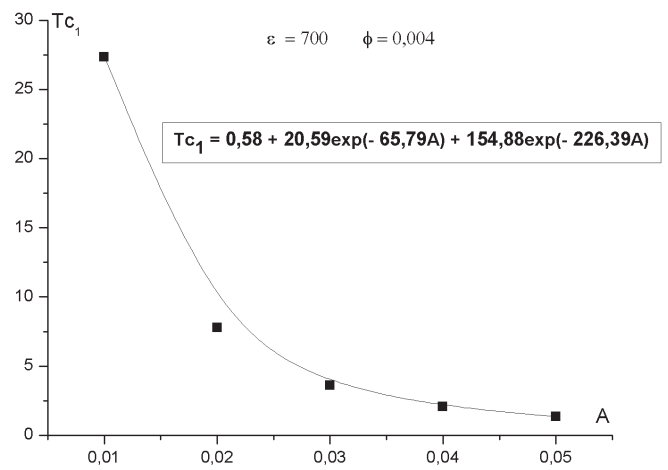


Figure 4.27 : Variation du nombre de Taylor critique  $T_{c1}$  en fonction de la concentration de la suspension ( $\epsilon = 700, \phi = 0.004$ )

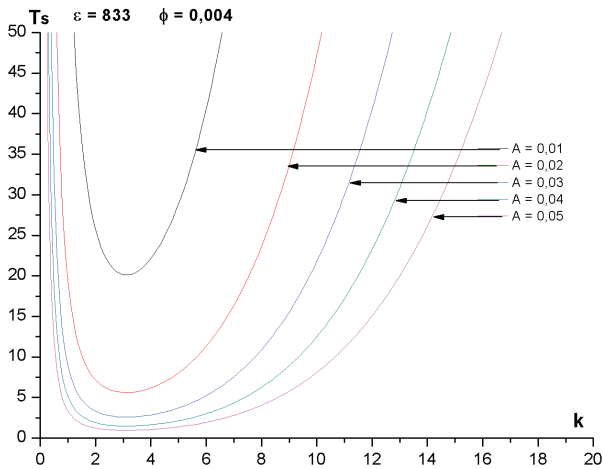


Figure 4.28 : Courbe de stabilité marginale pour différentes concentrations A de la suspension ( $\epsilon = 833, \phi = 0.004$ )

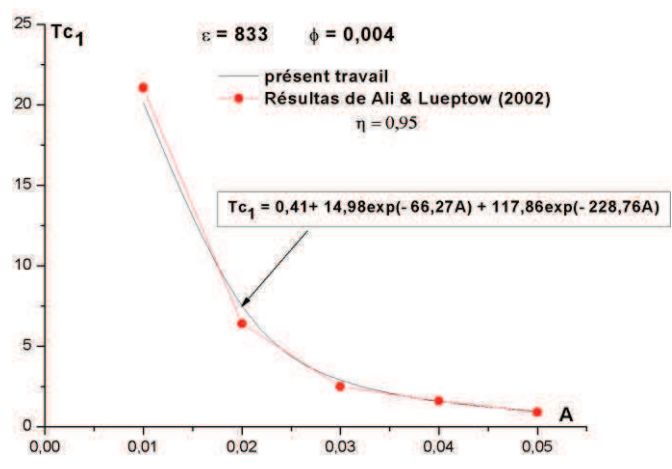
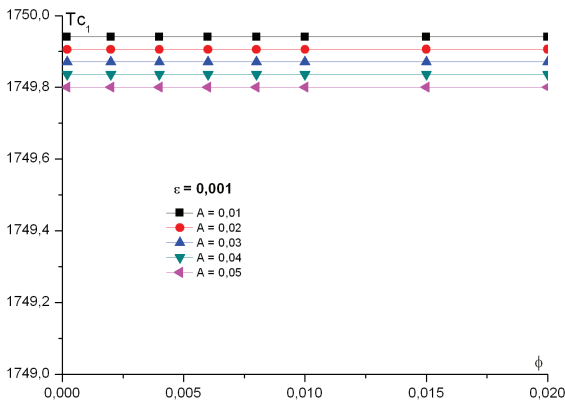


Figure 4.29 : Variation du nombre de Taylor critique  $T_{c1}$  en fonction de la concentration de la suspension ( $\epsilon = 833, \phi = 0.004$ )

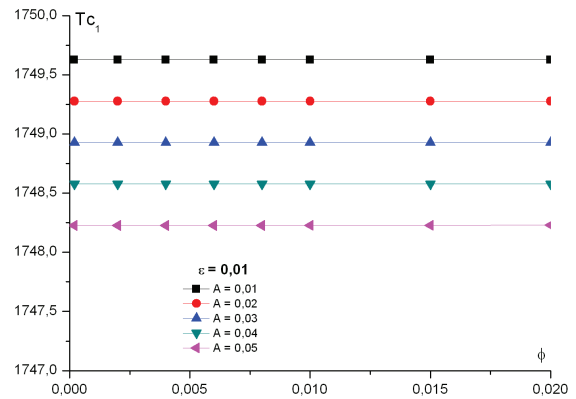
Au regard des résultats ci-dessus, on remarque que pour une faible valeur du rapport de densité  $\varepsilon$  ( $\varepsilon = 0.001$ ) le nombre de Taylor critique  $Tc_1$  est pratiquement constant en fonction de la concentration  $A$  de la suspension. Pour  $\varepsilon \geq 0.01$ , on note une décroissance de  $Tc_1$  en fonction de la concentration  $A$  de la suspension ce qui permet de constater que  $A$  a un effet déstabilisant sur l'écoulement. Pour  $\varepsilon$  défini dans l'intervalle  $[0.01, 1]$  la forme d'évolution de  $Tc_1$  en fonction de  $A$  est linéaire. Pour des valeurs élevées de  $\varepsilon$  ( $\varepsilon \geq 10$ ), on note une évolution sous forme exponentielle de  $Tc_1$  en fonction de  $A$ .

#### 4.2.1.4.2 Effet du diamètre adimensionnel $\phi$ sur l'instabilité axiale de type Taylor

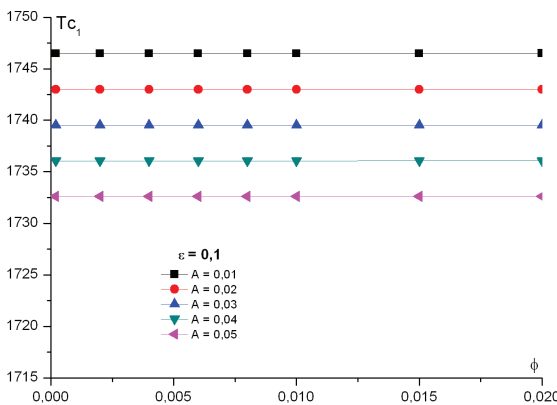
Dans ce qui suit, on présente l'évolution du nombre de Taylor critique  $Tc_1$  en fonction du diamètre des particules  $\phi$ .



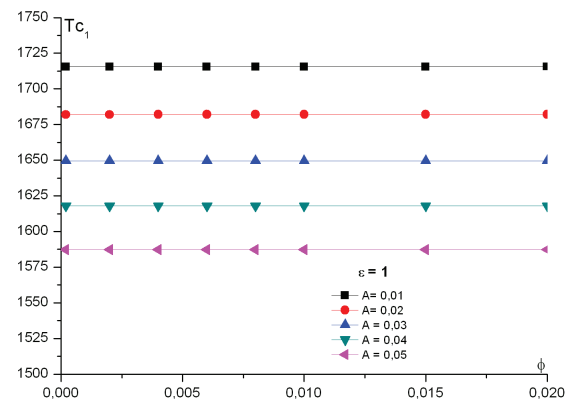
**Figure 4.30 :** Evolution de  $Tc_1$  en fonction du diamètre adimensionnel  $\phi$  de particules pour différentes concentrations  $A$  de la suspension ( $\varepsilon = 0.001$ )



**Figure 4.31 :** Evolution de  $Tc_1$  en fonction du diamètre adimensionnel  $\phi$  de particules pour différentes concentrations  $A$  de la suspension ( $\varepsilon = 0.01$ )



**Figure 4.32 :** Evolution de  $Tc_1$  en fonction du diamètre adimensionnel  $\phi$  de particules pour différentes concentrations  $A$  de la suspension ( $\varepsilon = 0.1$ )



**Figure 4.33 :** Evolution de  $Tc_1$  en fonction du diamètre adimensionnel  $\phi$  de particules pour différentes concentrations  $A$  de la suspension ( $\varepsilon = 1$ )

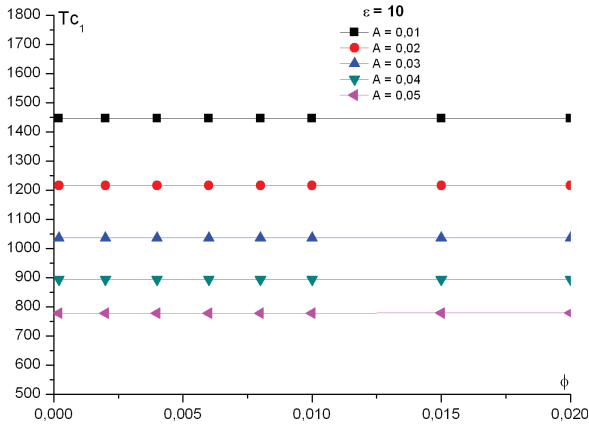


Figure 4.34 : Evolution de  $Tc_1$  en fonction du diamètre adimensionnel  $\phi$  de particules pour différentes concentrations  $A$  de la suspension ( $\epsilon = 10$ )

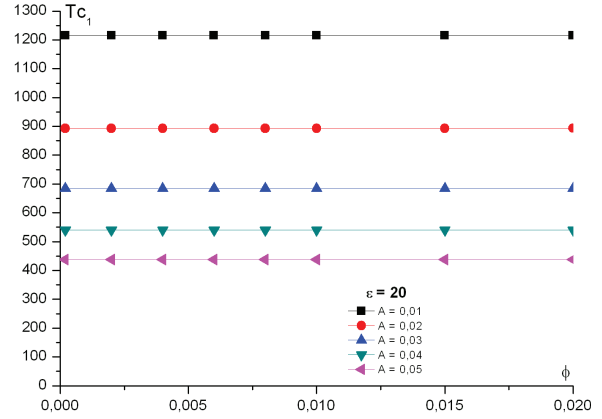


Figure 4.35 : Evolution de  $Tc_1$  en fonction du diamètre adimensionnel  $\phi$  de particules pour différentes concentrations  $A$  de la suspension ( $\epsilon = 20$ )

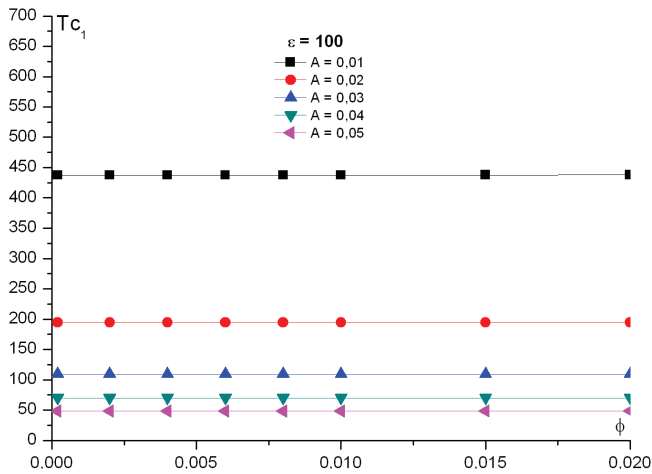


Figure 4.36 : Evolution de  $Tc_1$  en fonction du diamètre adimensionnel  $\phi$  de particules pour différentes concentrations  $A$  de la suspension ( $\epsilon = 100$ )

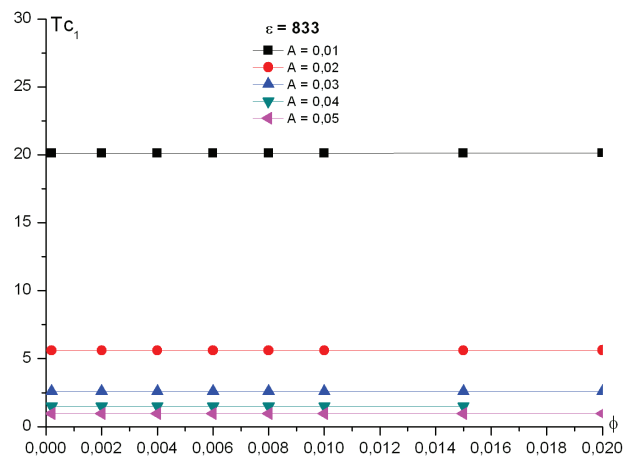


Figure 4.37 : Evolution de  $Tc_1$  en fonction du diamètre adimensionnel  $\phi$  de particules pour différentes concentrations  $A$  de la suspension ( $\epsilon = 833$ )

L'analyse des courbes donnant l'évolution du nombre de Taylor critique  $Tc_1$ , en fonction du diamètre adimensionnel de particules pour différentes concentrations de la suspension, indique que  $Tc_1$  est constant en fonction de  $\phi$  ce qui permet de constater que le seuil critique  $Tc_1$  d'apparition des cellules de Taylor n'est pas affecté par le diamètre  $\phi$  de particules.



4.2.1.4.3 Effet du rapport de densité  $\varepsilon$  sur l'instabilité primaire

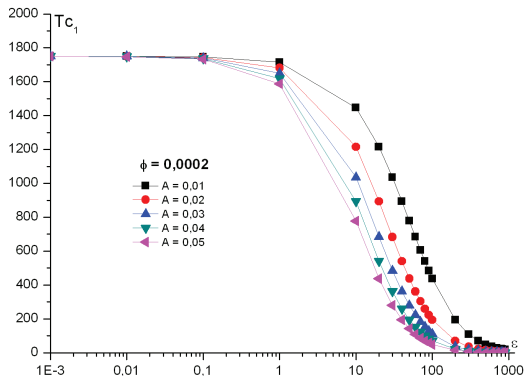


Figure 4.38 : Variation du nombre de Taylor critique  $T_{c1}$  en fonction du rapport de densité  $\varepsilon$  pour différentes concentrations  $A$  de la suspension ( $\phi = 0.0002$ )

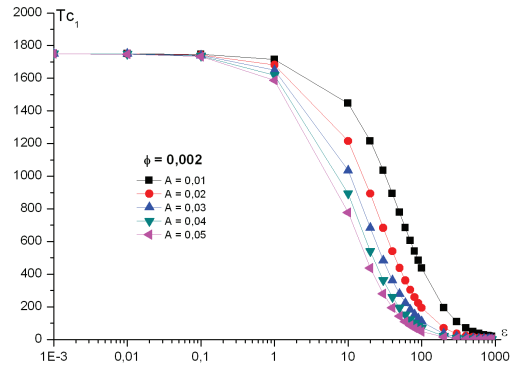


Figure 4.39 : Variation du nombre de Taylor critique  $T_{c1}$  en fonction du rapport de densité  $\varepsilon$  pour différentes concentrations  $A$  de la suspension ( $\phi = 0.002$ )

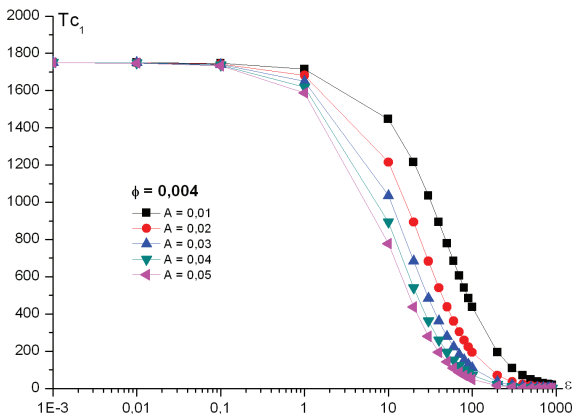


Figure 4.40 : Variation du nombre de Taylor critique  $T_{c1}$  en fonction du rapport de densité  $\varepsilon$  pour différentes concentrations  $A$  de la suspension ( $\phi = 0.004$ )

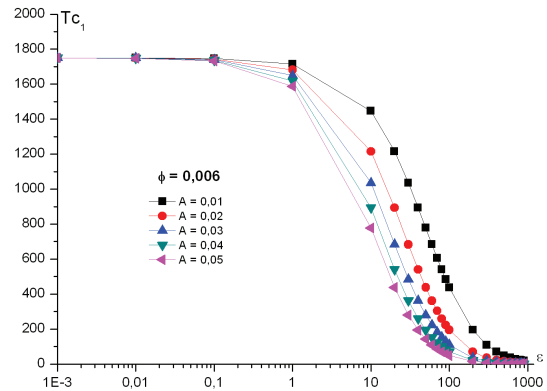


Figure 4.41 : Variation du nombre de Taylor critique  $T_{c1}$  en fonction du rapport de densité  $\varepsilon$  pour différentes concentrations  $A$  de la suspension ( $\phi = 0.006$ )

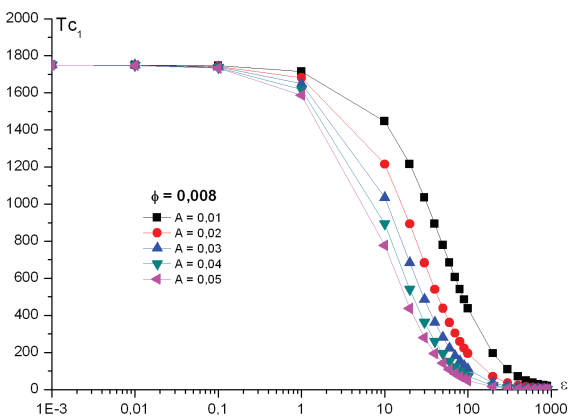


Figure 4.42 : Variation du nombre de Taylor critique  $T_{c1}$  en fonction du rapport de densité  $\varepsilon$  pour différentes concentrations  $A$  de la suspension ( $\phi = 0.008$ )

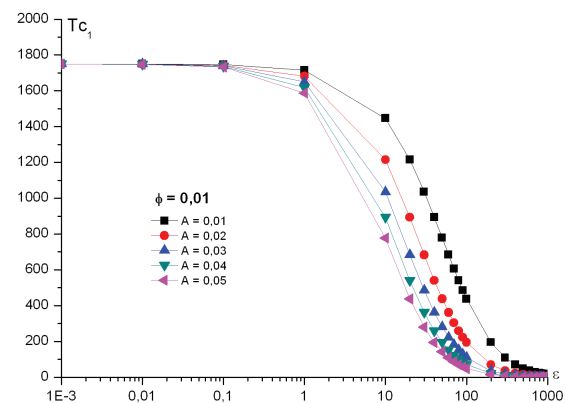
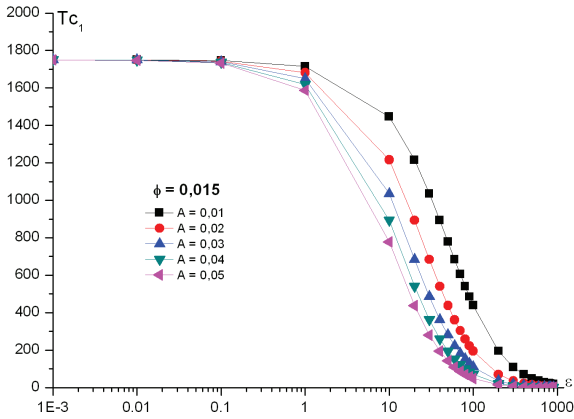
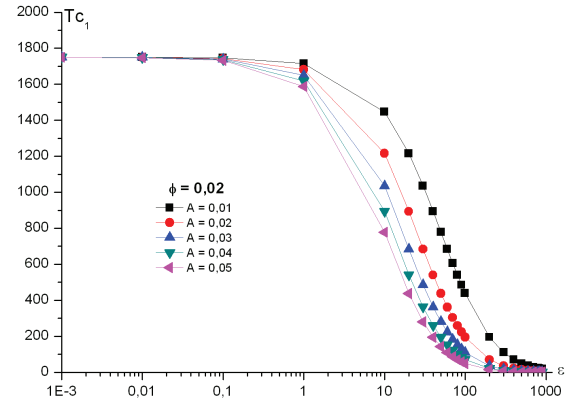


Figure 4.43 : Variation du nombre de Taylor critique  $T_{c1}$  en fonction du rapport de densité  $\varepsilon$  pour différentes concentrations  $A$  de la suspension ( $\phi = 0.01$ )



**Figure 4.44:** Variation du nombre de Taylor critique  $Tc_1$  en fonction du rapport de densité  $\varepsilon$  pour différentes concentrations  $A$  de la suspension ( $\phi = 0.015$ )

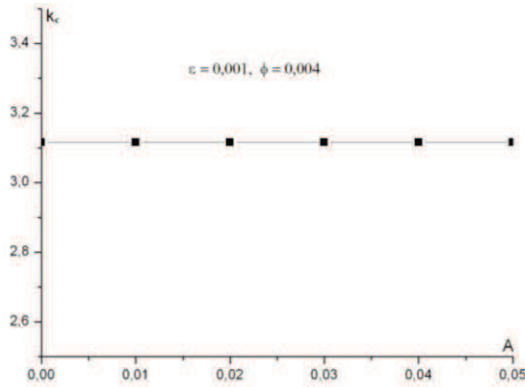


**Figure 4.45:** Variation du nombre de Taylor critique  $Tc_1$  en fonction du rapport de densité  $\varepsilon$  pour différentes concentrations  $A$  de la suspension ( $\phi = 0.02$ )

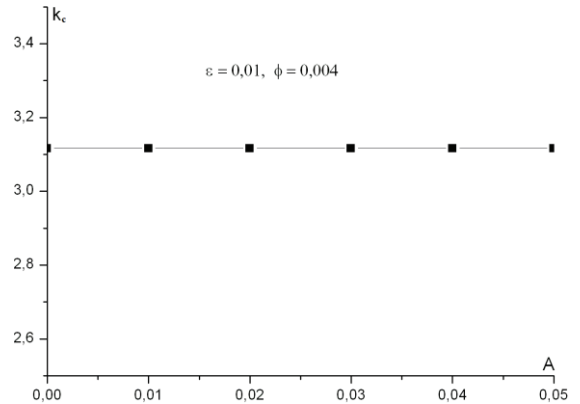
Les figures 4.38 à 4.45 présentent l'évolution du nombre de Taylor critique  $Tc_1$  en fonction du rapport de densité  $\varepsilon$  pour différentes concentrations  $A$  de la suspension. Au vu de ces résultats, on remarque que le nombre de Taylor critique  $Tc_1$  est influencé par la variation du rapport de densité  $\varepsilon$ . En effet, on note une décroissance de  $Tc_1$  en fonction de  $\varepsilon$ . Cette décroissance devient de plus en plus importante pour des valeurs élevées de  $\varepsilon$ .

4.2.1.4.4 Effet de la concentration de la suspension sur le nombre d'onde critique  $k_c$ 

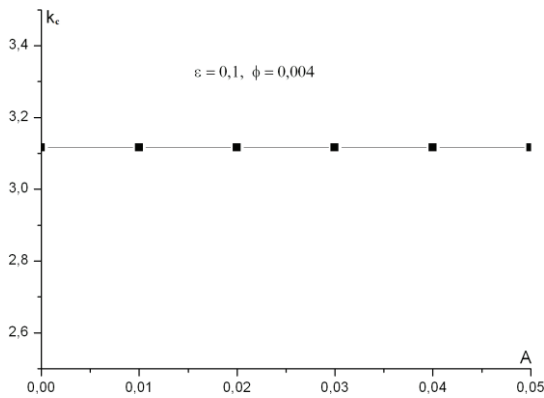
On présente nos résultats donnant l'évolution du nombre d'onde critique  $k_c$  en fonction de la concentration  $A$  pour un rapport de densité  $\varepsilon$  et de diamètre  $\phi$  fixe.



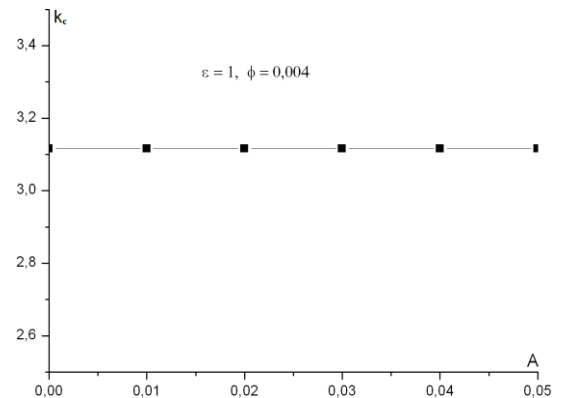
**Figure 4.46 :** Evolution du nombre d'onde critique  $k_c$  en fonction de la concentration  $A$  de la suspension ( $\varepsilon = 0.001$ ,  $\phi = 0.004$ )



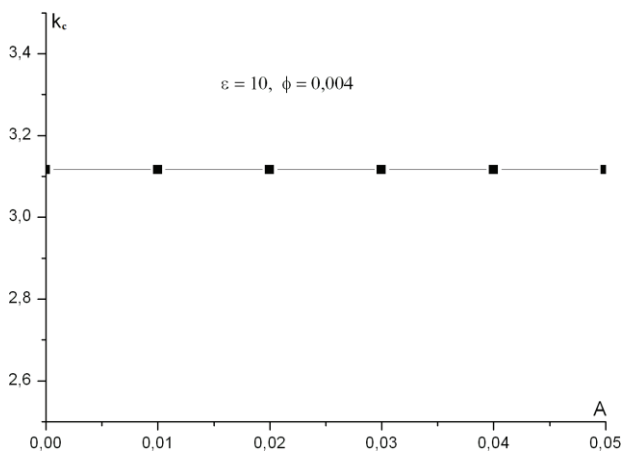
**Figure 4.47 :** Evolution du nombre d'onde critique  $k_c$  en fonction de la concentration  $A$  de la suspension ( $\varepsilon = 0.01$ ,  $\phi = 0.004$ )



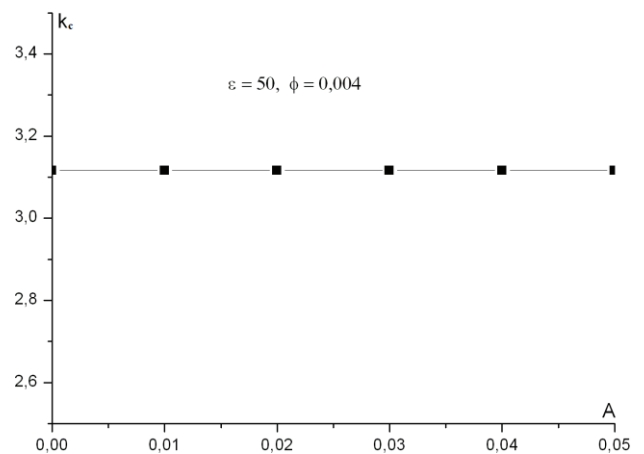
**Figure 4.48 :** Evolution du nombre d'onde critique  $k_c$  en fonction de la concentration  $A$  de la suspension ( $\varepsilon = 0.1$ ,  $\phi = 0.004$ )



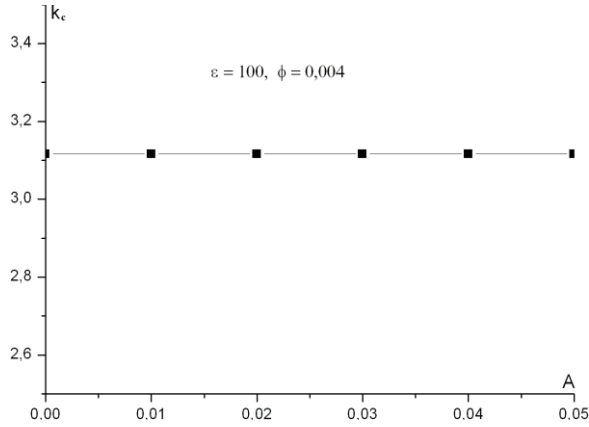
**Figure 4.49 :** Evolution du nombre d'onde critique  $k_c$  en fonction de la concentration  $A$  de la suspension ( $\varepsilon = 1$ ,  $\phi = 0.004$ )



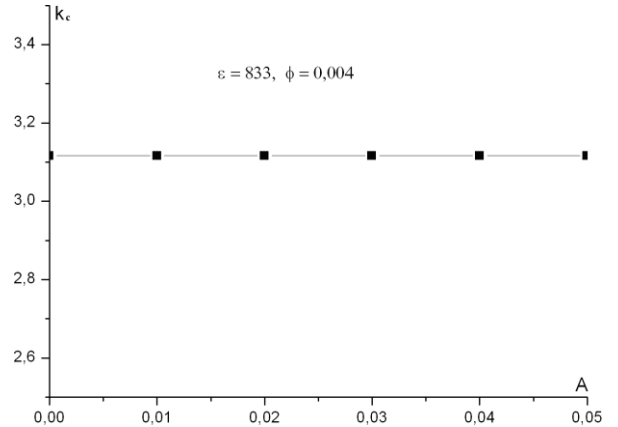
**Figure 4.50:** Evolution du nombre d'onde critique  $k_c$  en fonction de la concentration  $A$  de la suspension ( $\varepsilon = 10$ ,  $\phi = 0.004$ )



**Figure 4.51 :** Evolution du nombre d'onde critique  $k_c$  en fonction de la concentration  $A$  de la suspension ( $\varepsilon = 50$ ,  $\phi = 0.004$ )



**Figure 4.52:** Evolution du nombre d'onde critique  $k_c$  en fonction de la concentration  $A$  de la suspension ( $\varepsilon = 100$ ,  $\phi = 0.004$ )



**Figure 4.53:** Evolution du nombre d'onde critique  $k_c$  en fonction de la concentration  $A$  de la suspension ( $\varepsilon = 833$ ,  $\phi = 0.004$ )

Les figures 4.46 à 4.53 nous permettent de constater le nombre d'onde critique  $k_c$  n'est pas affecté par la variation de la concentration de la suspension  $A$ , du rapport de densité  $\varepsilon$  et du diamètre adimensionnel  $\phi$ .

La concentration de la suspension  $A$  n'a aucune influence sur la structure de l'écoulement, donc sur l'instabilité de Taylor du point de vue de sa taille (longueur d'onde) et est insensible à la concentration de la suspension  $A$ .

#### 4.2.1.5 Cas général

Dans le cas général qui correspond à la présence d'une suspension de particules, l'expression du nombre de Taylor  $Ts$  est une fonction des paramètres  $k$ ,  $A$ ,  $\varepsilon$ ,  $\phi$  et aussi des six coefficients  $\lambda_{l,r}$ ,  $\lambda_{l,\theta}$ ,  $\lambda_{l,z}$ ,  $\lambda_{s,r}$ ,  $\lambda_{s,\theta}$ ,  $\lambda_{s,z}$  qui sont à déterminer. La détermination de ces coefficients est effectuée par utilisation de la méthode de Newton-Raphson.

Les valeurs des coefficients précédents obtenus pour différentes valeurs du rapport de densité  $\varepsilon$  sont récapitulées dans le tableau suivant :

| $\varepsilon$ | $\lambda_{l,r}$ | $\lambda_{l,\theta}$ | $\lambda_{l,z}$ | $\lambda_{s,r}$ | $\lambda_{s,\theta}$ | $\lambda_{s,z}$ |
|---------------|-----------------|----------------------|-----------------|-----------------|----------------------|-----------------|
| 0.001         | 11.998          | 13.134               | 11.999          | - 11.998        | - 13.134             | - 11.999        |
| 0.01          | 11.986          | 13.134               | 11.999          | - 11.986        | - 13.134             | - 11.999        |
| 0.1           | 11.854          | 13.134               | 11.999          | - 11.854        | - 13.134             | - 11.999        |
| 1             | 21.519          | 13.134               | 11.999          | - 21.519        | - 13.134             | - 11.999        |
| 10            | 13.232          | 13.134               | 11.999          | - 13.232        | - 13.134             | - 11.999        |
| 20            | 13.175          | 13.134               | 11.999          | - 13.175        | - 13.134             | - 11.999        |
| 30            | 13.158          | 13.134               | 11.999          | - 13.158        | - 13.134             | - 11.999        |
| 40            | 13.149          | 13.134               | 11.999          | - 13.149        | - 13.134             | - 11.999        |
| 50            | 13.144          | 13.134               | 11.999          | - 13.144        | - 13.134             | - 11.999        |
| 60            | 13.141          | 13.134               | 11.999          | - 13.141        | - 13.134             | - 11.999        |
| 70            | 13.138          | 13.134               | 11.999          | - 13.138        | - 13.134             | - 11.999        |
| 80            | 13.136          | 13.134               | 11.999          | - 13.136        | - 13.134             | - 11.999        |
| 90            | 13.125          | 13.134               | 11.999          | - 13.125        | - 13.134             | - 11.999        |
| 100           | 13.124          | 13.134               | 11.999          | - 13.124        | - 13.134             | - 11.999        |
| 200           | 13.129          | 13.134               | 11.999          | - 13.129        | - 13.134             | - 11.999        |
| 300           | 13.127          | 13.134               | 11.999          | - 13.127        | - 13.134             | - 11.999        |
| 400           | 13.126          | 13.134               | 11.999          | - 13.126        | - 13.134             | - 11.999        |
| 500           | 13.126          | 13.134               | 11.999          | - 13.126        | - 13.134             | - 11.999        |
| 600           | 13.126          | 13.134               | 11.999          | - 13.126        | - 13.134             | - 11.999        |
| 700           | 13.125          | 13.134               | 11.999          | - 13.125        | - 13.134             | - 11.999        |
| 800           | 13.125          | 13.134               | 11.999          | - 13.125        | - 13.134             | - 11.999        |
| 833           | 13.125          | 13.134               | 11.999          | - 13.125        | - 13.134             | - 11.999        |

**Tableau 4.5** : Valeurs des coefficients  $\lambda_{l,r}$ ,  $\lambda_{l,\theta}$ ,  $\lambda_{l,z}$ ,  $\lambda_{s,r}$ ,  $\lambda_{s,\theta}$ ,  $\lambda_{s,z}$  pour différentes valeurs de  $\varepsilon$ .

L'évaluation des valeurs de  $\lambda$  en fonction de  $\varepsilon$  ont été effectuées avec une précision numérique de l'ordre de  $10^{-6}$ .

L'examen du tableau 4.5 montre que les valeurs associées au liquide  $\lambda_l$  et au solide  $\lambda_s$  sont symétriques ou opposés ( $\lambda_l \cong -\lambda_s$ ) et cela quelles que soient les directions  $r$ ,  $\theta$  et  $z$  considérées. On retrouve, ici, le principe de l'action et de la réaction qui est vérifié sur chaque particule.

En outre, il apparaît que les coefficients  $\lambda_l$  et  $\lambda_s$  varient sensiblement en fonction de  $\varepsilon$  et semble passer par un maximum autour de  $\varepsilon = 1$ . Cela signifie que le mécanisme de diffusion selon la direction radiale fonctionne différemment et devient prédominant si  $\varepsilon = 1$  devant les autres coefficients de  $\lambda_l$  et  $\lambda_s$ .

D'une façon générale, les coefficients  $\lambda_l$  et  $\lambda_s$  sont assez voisins et ne diffèrent que seulement de 10% entre eux.

A travers ces résultats importants, on peut s'expliquer les raisons qui sont à l'origine de l'efficacité d'échange massique ou de séparation de masse pour  $\varepsilon$  donné lorsqu'on pratique l'effet de porosité en paroi sur la suspension étudiée (voir travaux de Min & Lueptow (1994)).

Finalement les coefficients  $\lambda_l$  et  $\lambda_s$  mesurent l'intensité associée à chaque force selon la direction considérée.

A partir du tableau 4.5, on évalue :

Pour  $\varepsilon \neq 1$ , quel que soit la nature du matériau liquide ou solide, on note que :

$$\lambda_r + \lambda_\theta + \lambda_z = \lambda \cong 37, \text{ soit } \lambda_r/\lambda \cong \lambda_\theta/\lambda \cong \lambda_z/\lambda \cong 33\%$$

On en déduit une relation de distribution isotropique des forces.

En revanche, cette distribution n'est pas homogène et ne semble pas isotropique dans toutes les directions pour  $\varepsilon = 1$ .

Ainsi, on évalue :  $\lambda_r + \lambda_\theta + \lambda_z = \lambda \cong 46.6$

Soit en pourcentage  $\lambda_r/\lambda \cong 2\lambda_\theta/\lambda \cong 2\lambda_z/\lambda = 2 \times 25\%$

On évalue approximativement à environ 50% l'intensité globale liée au coefficient selon la direction radiale  $\lambda_r$  qui est de moitié et semble équirépartie 25% et 25% pour  $\lambda_\theta$  et  $\lambda_z$  respectivement.

4.2.1.5.1 Diagrammes de stabilité marginale et effet de la concentration

On présente les résultats liés au diagramme de stabilité marginale ( $\sigma = 0$ ) en fonction des variations de la concentration A.

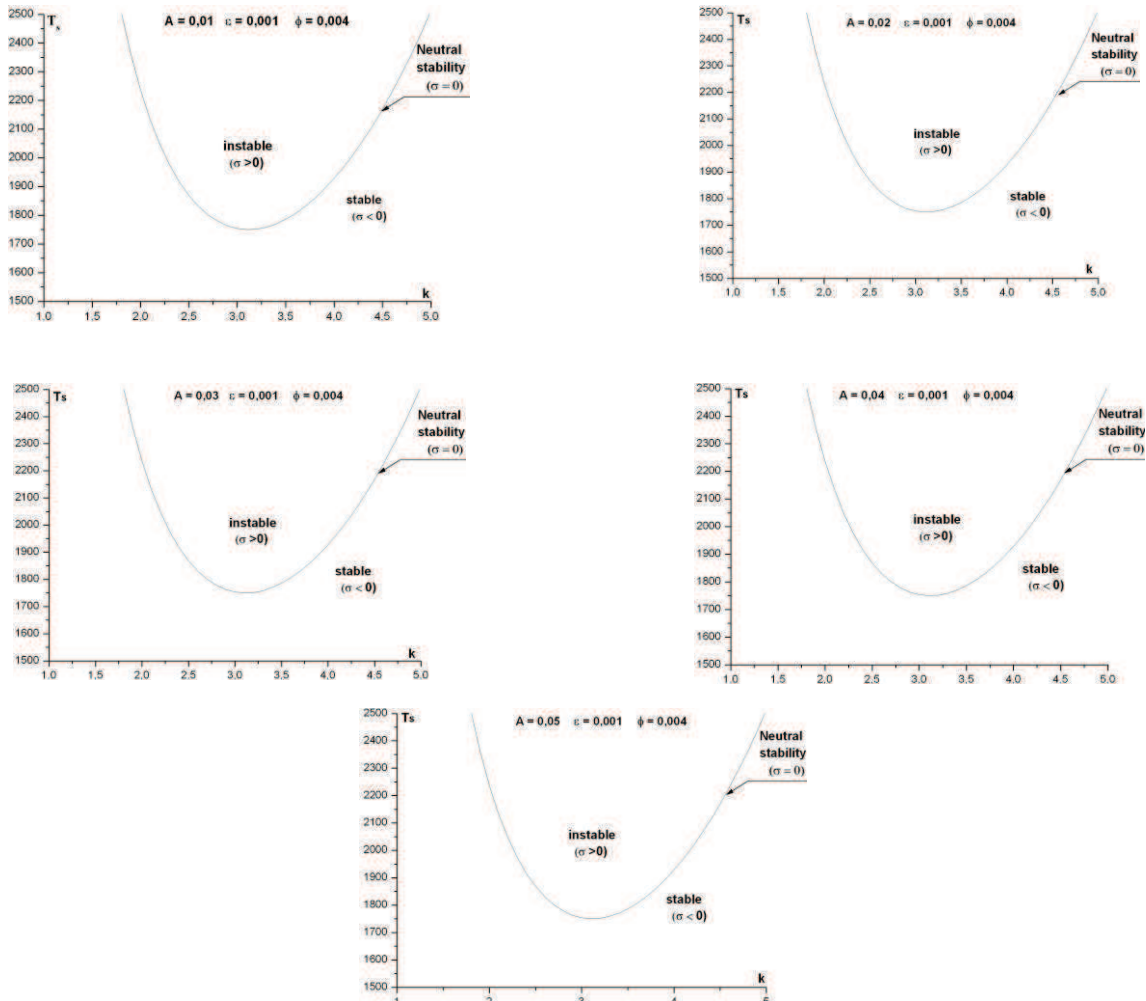


Figure 4.54 : Courbes de stabilité marginale pour différentes concentrations A de la suspension ( $\epsilon = 0.001, \phi = 0.004$ )

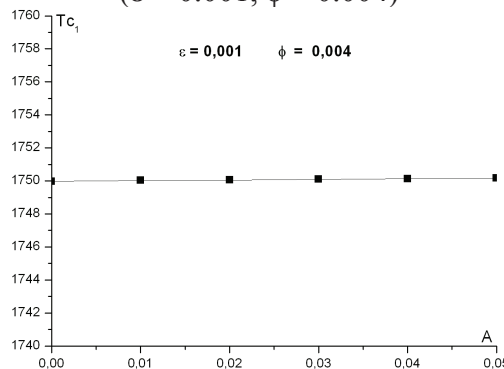


Figure 4.55: Variation du nombre de Taylor critique  $T_{c1}$  en fonction de la concentration A de la suspension ( $\epsilon = 0.001, \phi = 0.004$ )

De l'examen de ces résultats, on remarque que le seuil critique d'apparition des instabilités à  $T_{c1}$  n'est pas affecté par la concentration A de la suspension lorsque  $\epsilon$  est très faible ( $\epsilon = 0.001$ ).

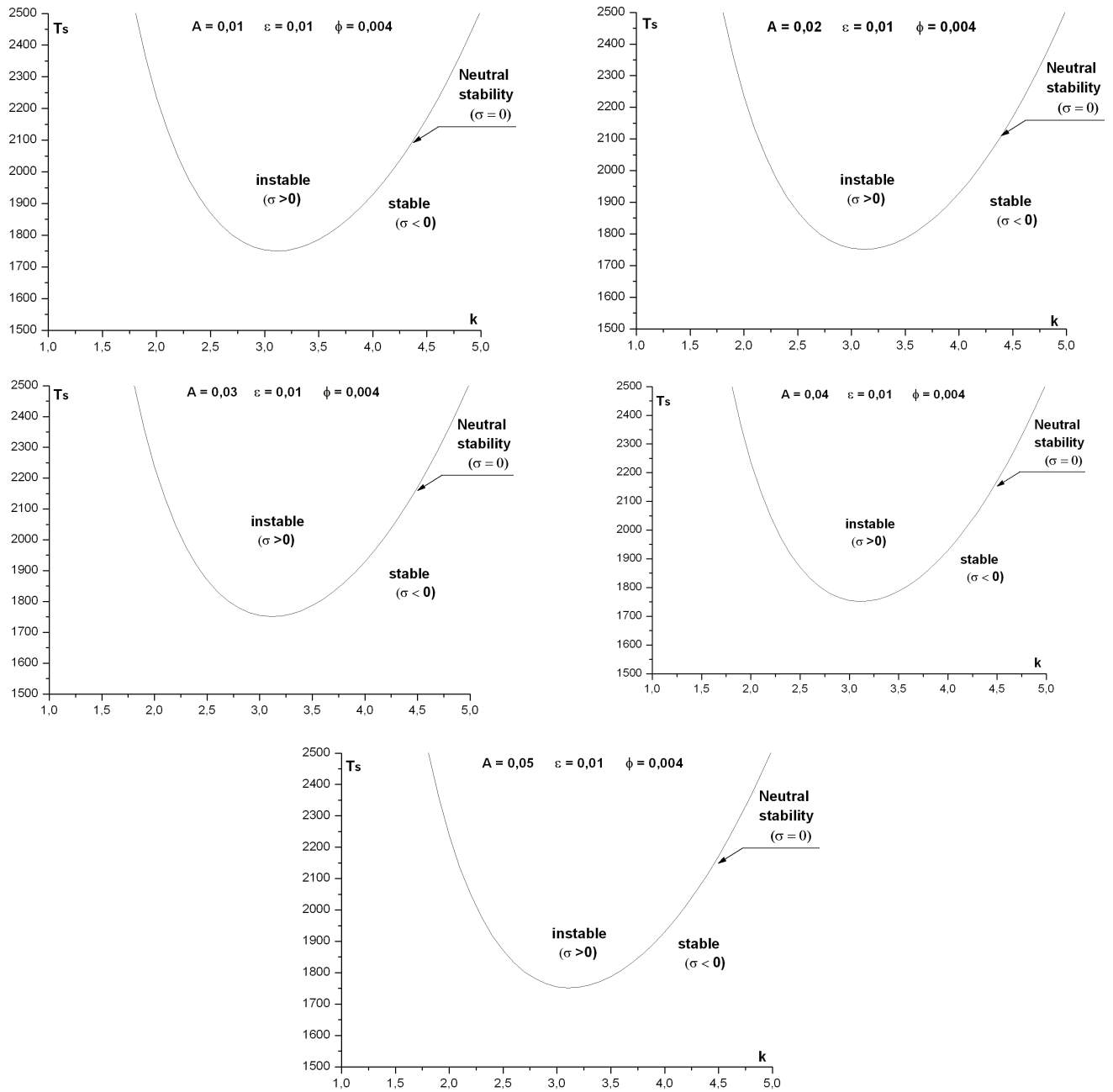
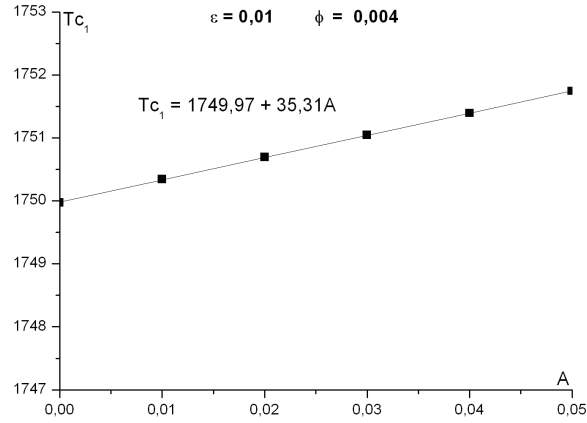
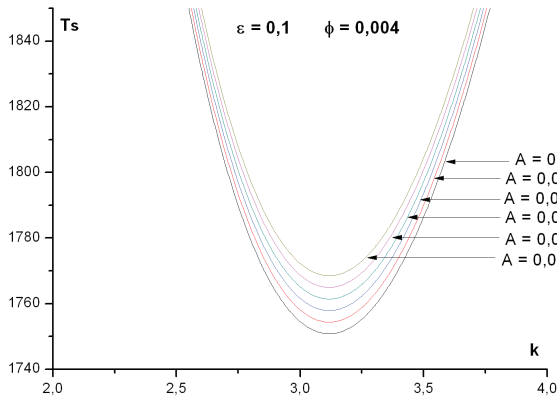


Figure 4.56 : Courbes de stabilité marginale pour différentes concentrations  $A$  de la suspension ( $\varepsilon = 0.01, \phi = 0.004$ )

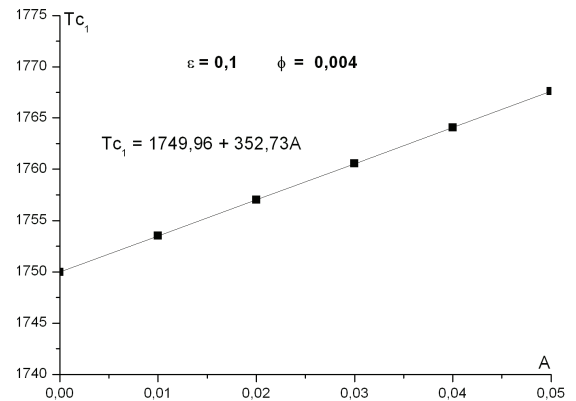




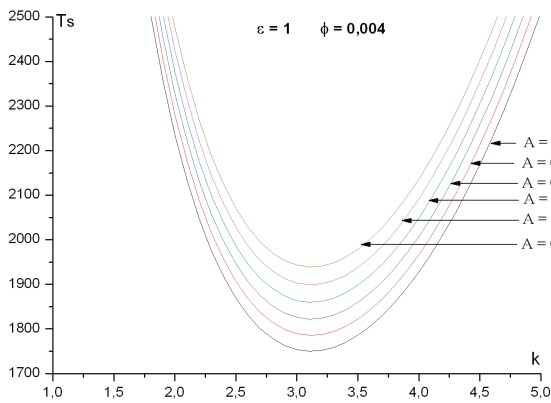
**Figure 4.57:** Variation du nombre de Taylor critique  $T_{c_1}$  en fonction de la concentration  $A$  de la suspension ( $\varepsilon = 0.01, \phi = 0.004$ )



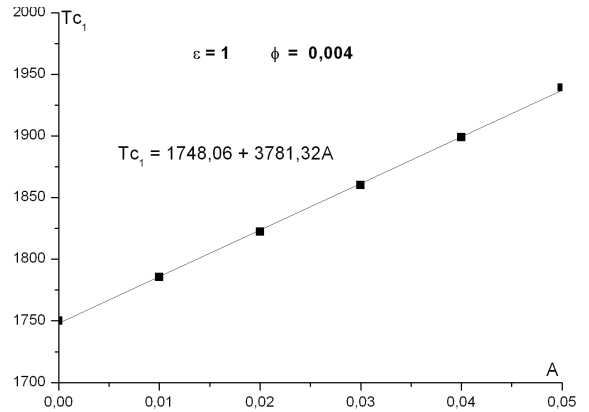
**Figure 4.58 :** Courbes de stabilité marginale pour différentes concentrations  $A$  de la suspension ( $\varepsilon = 0.1, \phi = 0.004$ )



**Figure 4.59:** Variation du nombre de Taylor critique  $T_{c_1}$  en fonction de la concentration  $A$  de la suspension ( $\varepsilon = 0.1, \phi = 0.004$ )



**Figure 4.60 :** Courbes de stabilité marginale pour différentes concentrations  $A$  de la suspension ( $\varepsilon = 1, \phi = 0.004$ )



**Figure 4.61:** Variation du nombre de Taylor critique  $T_{c_1}$  en fonction de la concentration  $A$  de la suspension ( $\varepsilon = 1, \phi = 0.004$ )

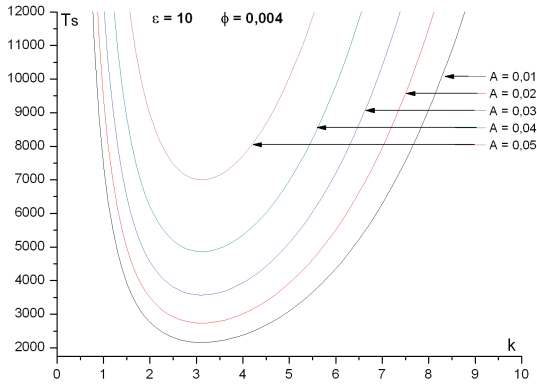


Figure 4.62 : Courbes de stabilité marginale pour différentes concentrations A de la suspension ( $\epsilon = 10, \phi = 0.004$ )

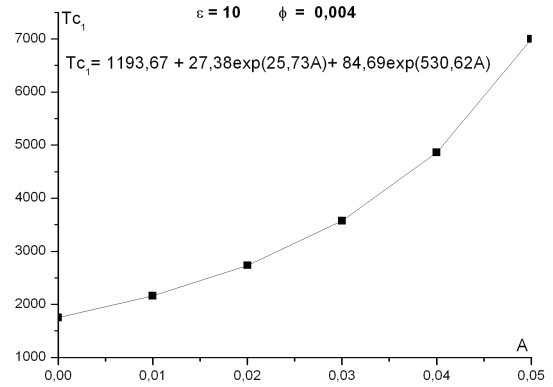


Figure 4.63: Variation du nombre de Taylor critique  $T_{c1}$  en fonction de la concentration A de la suspension ( $\epsilon = 10, \phi = 0.004$ )

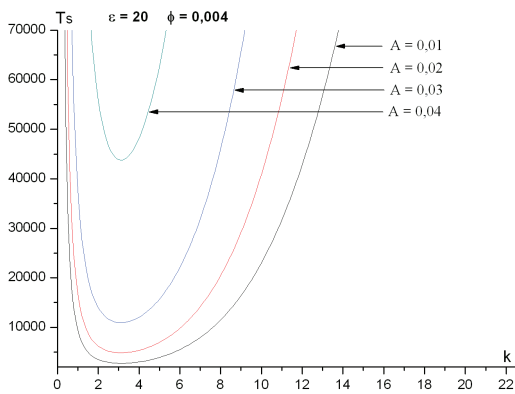


Figure 4.64 : Courbes de stabilité marginale pour différentes concentrations A de la suspension ( $\epsilon = 20, \phi = 0.004$ )

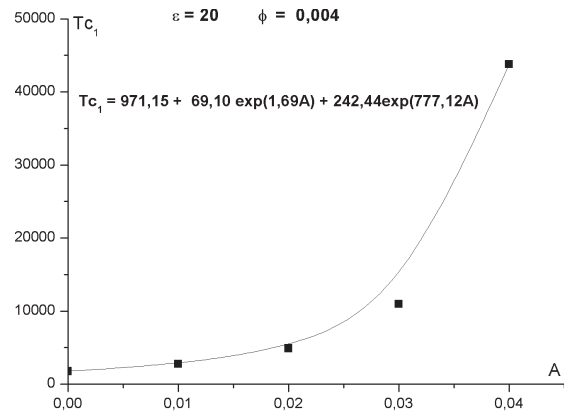


Figure 4.65: Variation du nombre de Taylor critique  $T_{c1}$  en fonction de la concentration A de la suspension ( $\epsilon = 20, \phi = 0.004$ )

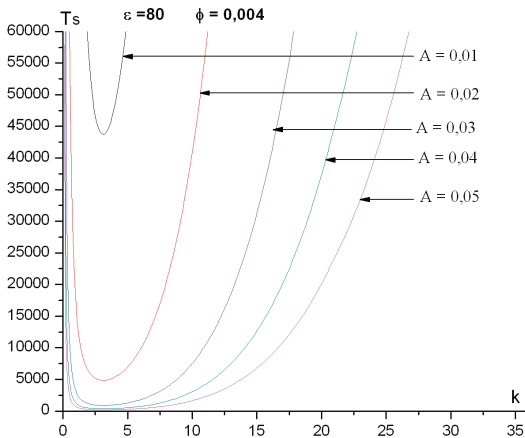


Figure 4.66 : Courbes de stabilité marginale pour différentes concentrations A de la suspension ( $\epsilon = 80, \phi = 0.004$ )

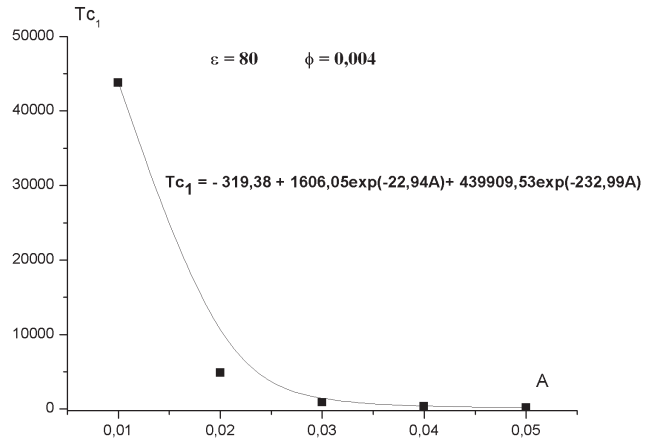


Figure 4.67: Variation du nombre de Taylor critique  $T_{c1}$  en fonction de la concentration A de la suspension ( $\epsilon = 80, \phi = 0.004$ )

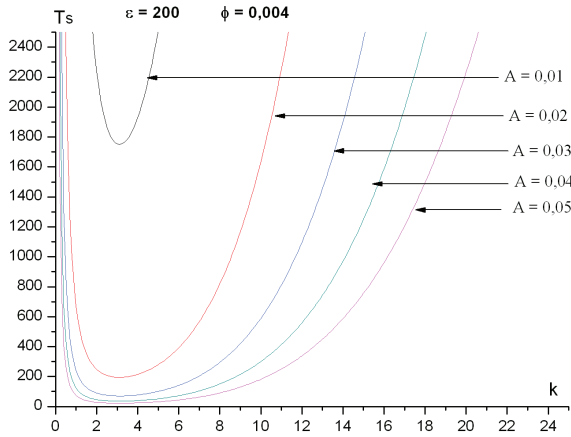


Figure 4.68 : Courbes de stabilité marginale pour différentes concentrations A de la suspension ( $\epsilon = 200, \phi = 0.004$ )

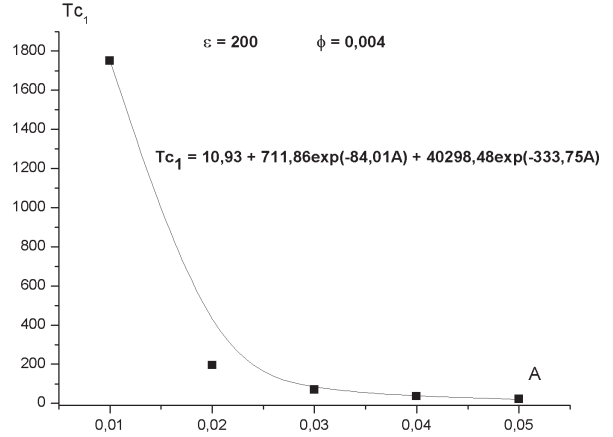


Figure 4.69: Variation du nombre de Taylor critique  $T_{c1}$  en fonction de la concentration A de la suspension ( $\epsilon = 200, \phi = 0.004$ )

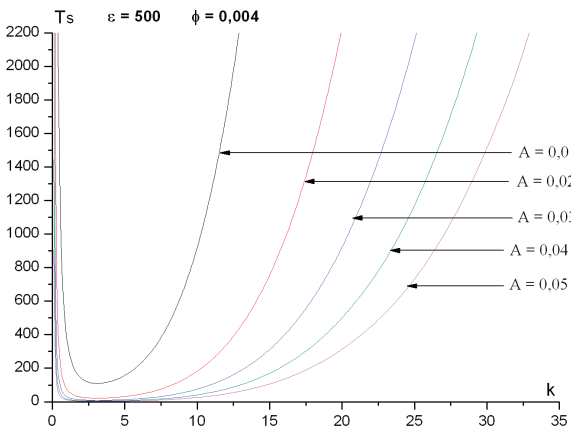


Figure 4.70 : Courbes de stabilité marginale pour différentes concentrations A de la suspension ( $\epsilon = 500, \phi = 0.004$ )

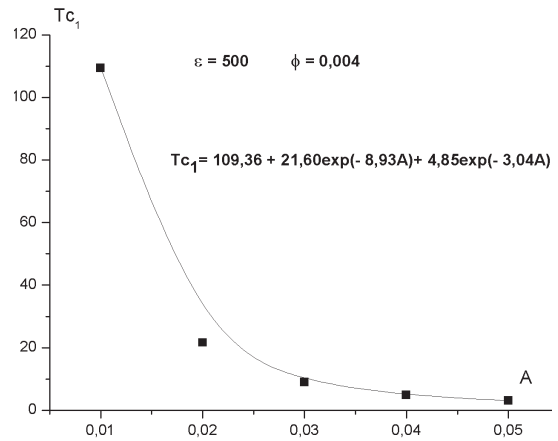


Figure 4.71: Variation du nombre de Taylor critique  $T_{c1}$  en fonction de la concentration A de la suspension ( $\epsilon = 500, \phi = 0.004$ )

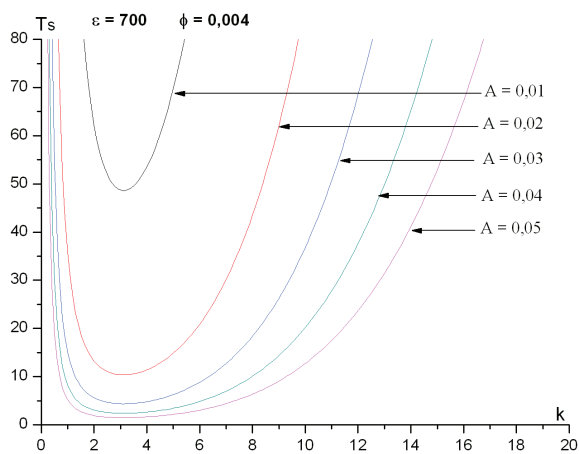


Figure 4.72 : Courbes de stabilité marginale pour différentes concentrations A de la suspension ( $\epsilon = 700, \phi = 0.004$ )

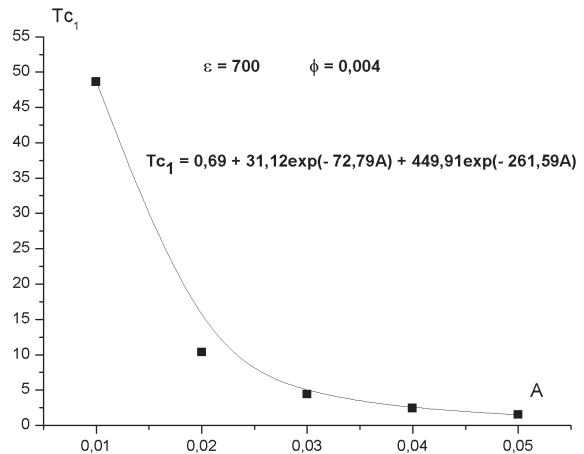


Figure 4.73: Variation du nombre de Taylor critique  $T_{c1}$  en fonction de la concentration A de la suspension ( $\epsilon = 700, \phi = 0.004$ )

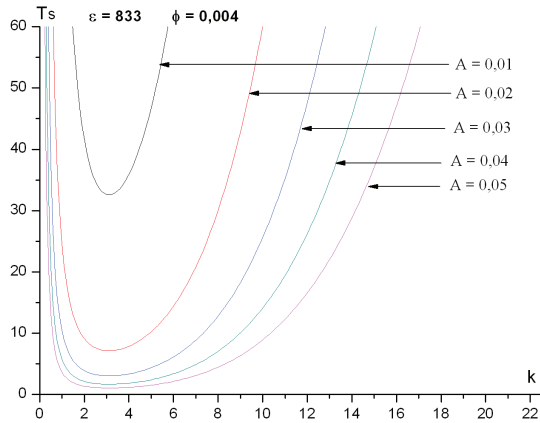


Figure 4.74 : Courbes de stabilité marginale pour différentes concentrations A de la suspension ( $\epsilon = 833, \phi = 0.004$ )

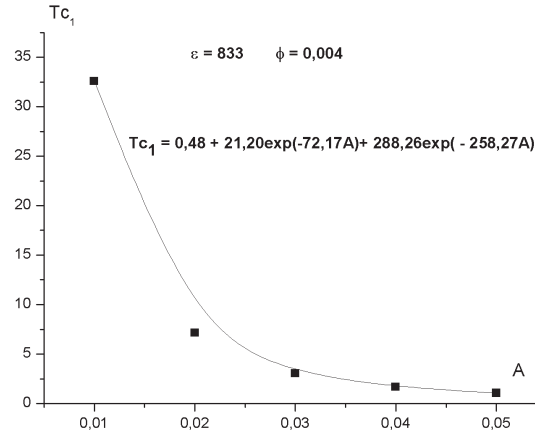


Figure 4.75: Variation du nombre de Taylor critique  $T_{c1}$  en fonction de la concentration A de la suspension ( $\epsilon = 833, \phi = 0.004$ )

#### 4.2.1.5.2 Effet du diamètre adimensionnel $\phi$ sur l'instabilité de Taylor

On donne ci-dessous les résultats relatifs à l'évolution du nombre de Taylor critique  $T_{c1}$ , en fonction de  $\phi$  soumis à l'influence de la concentration A à  $\epsilon$  donné.

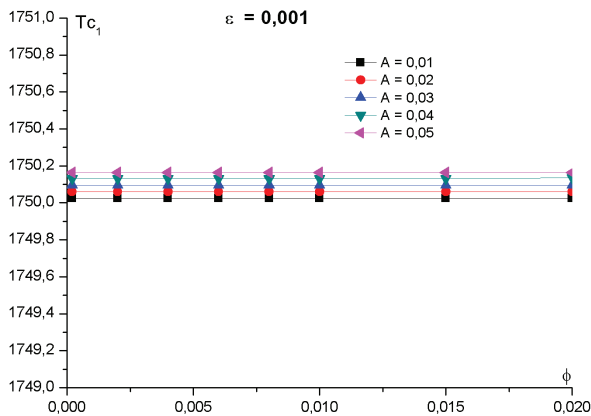


Figure 4.76 : Evolution de  $T_{c1}$  en fonction du diamètre adimensionnel  $\phi$  de particules pour différentes concentrations A de la suspension ( $\epsilon = 0.001$ )

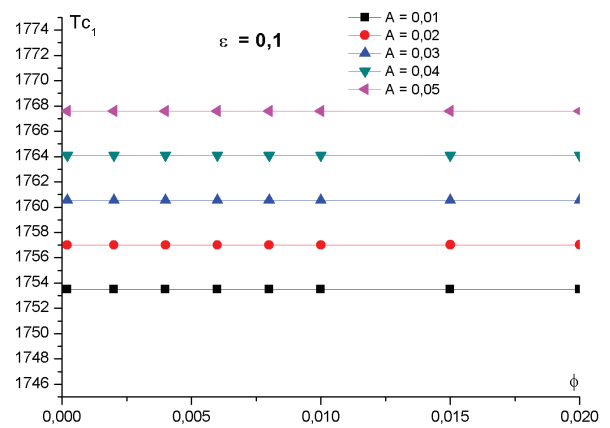


Figure 4.77 : Evolution de  $T_{c1}$  en fonction du diamètre adimensionnel  $\phi$  de particules pour différentes concentrations A de la suspension ( $\epsilon = 0.1$ )

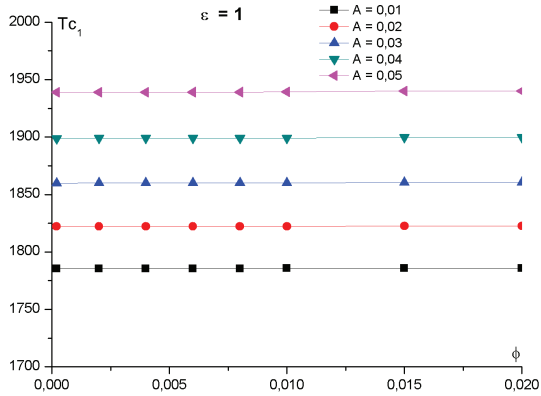


Figure 4.78 : Evolution de  $Tc_1$  en fonction du diamètre adimensionnel  $\phi$  de particules pour différentes concentrations  $A$  de la suspension ( $\epsilon = 1$ )

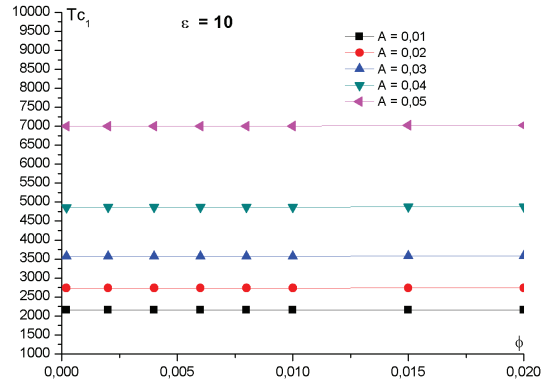


Figure 4.79 : Evolution de  $Tc_1$  en fonction du diamètre adimensionnel  $\phi$  de particules pour différentes concentrations  $A$  de la suspension ( $\epsilon = 10$ )

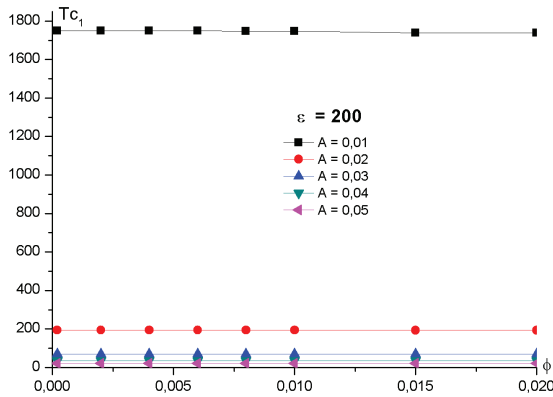


Figure 4.80 : Evolution de  $Tc_1$  en fonction du diamètre adimensionnel  $\phi$  de particules pour différentes concentrations  $A$  de la suspension ( $\epsilon = 200$ )

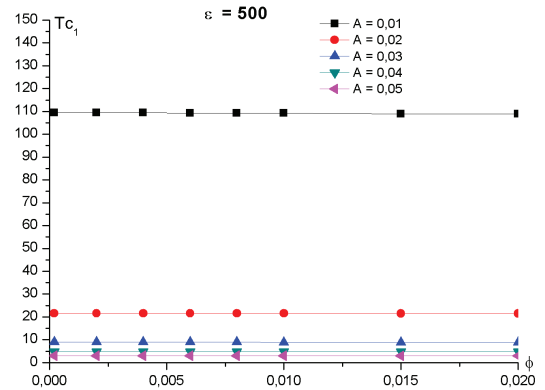


Figure 4.81 : Evolution de  $Tc_1$  en fonction du diamètre adimensionnel  $\phi$  de particules pour différentes concentrations  $A$  de la suspension ( $\epsilon = 500$ )

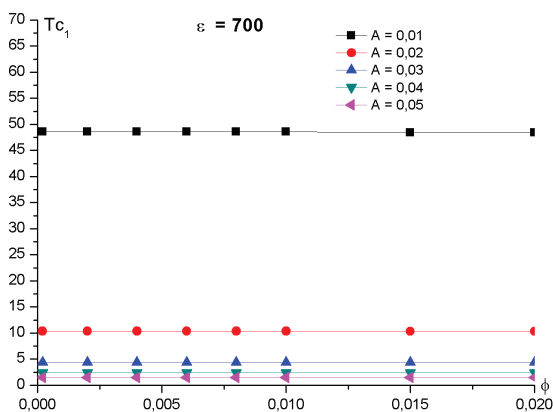


Figure 4.82 : Evolution de  $Tc_1$  en fonction du diamètre adimensionnel  $\phi$  de particules pour différentes concentrations  $A$  de la suspension ( $\epsilon = 700$ )

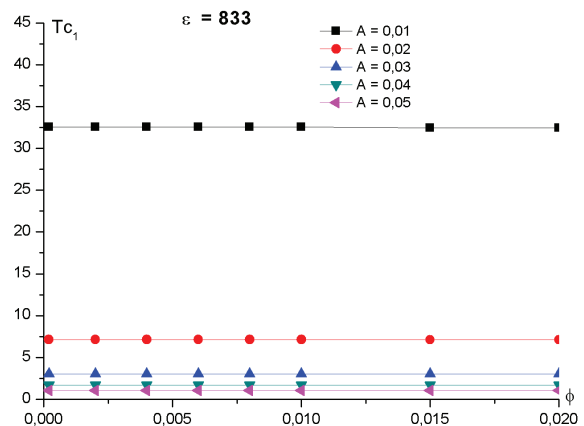


Figure 4.83 : Evolution de  $Tc_1$  en fonction du diamètre adimensionnel  $\phi$  de particules pour différentes concentrations  $A$  de la suspension ( $\epsilon = 833$ )

Considérons les figures 4.76 à 4.81, on remarque que le nombre de Taylor critique  $Tc_1$  est constant en fonction du diamètre adimensionnel  $\phi$  de particules ce qui permet de constater que la taille des particules n'affecte pas le seuil d'apparition de la première instabilité.

4.2.1.5.3. Effet du rapport de densité  $\epsilon$  sur l'instabilité de Taylor

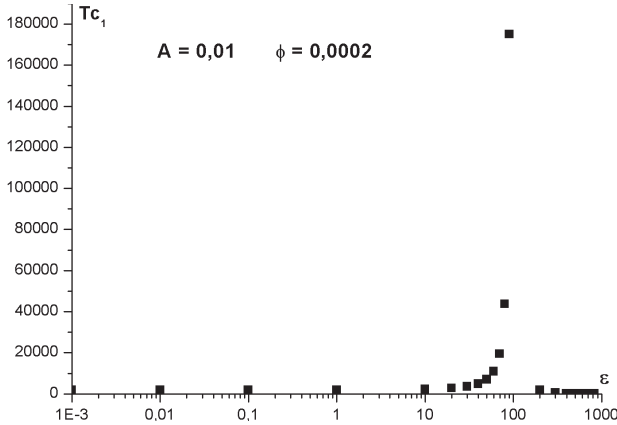


Figure 4.84 : Variation du nombre de Taylor critique  $Tc_1$  en fonction du rapport de densité  $\epsilon$  ( $A = 0.01, \phi = 0.0002$ )

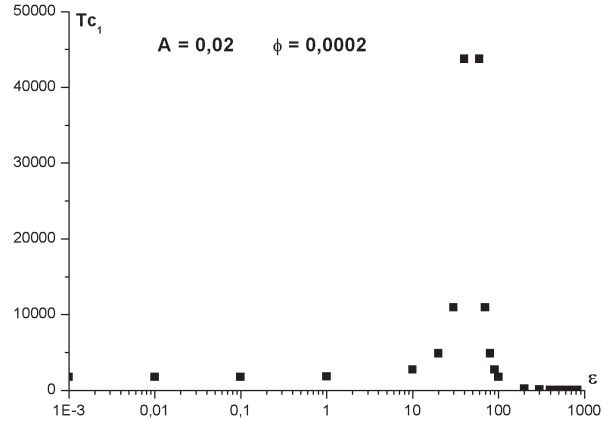


Figure 4.85 : Variation du nombre de Taylor critique  $Tc_1$  en fonction du rapport de densité  $\epsilon$  ( $A = 0.02, \phi = 0.0002$ )

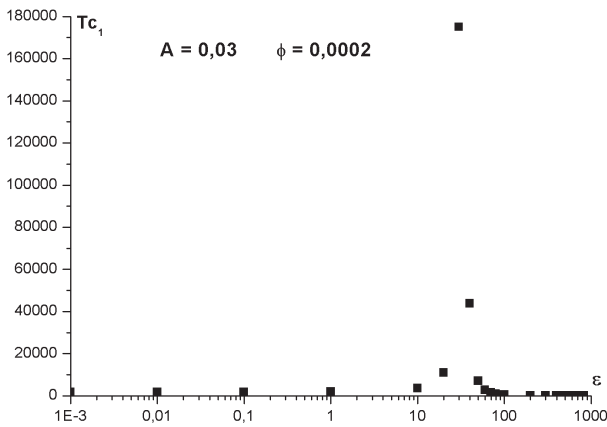


Figure 4.86 : Variation du nombre de Taylor critique  $Tc_1$  en fonction du rapport de densité  $\epsilon$  ( $A = 0.03, \phi = 0.0002$ )

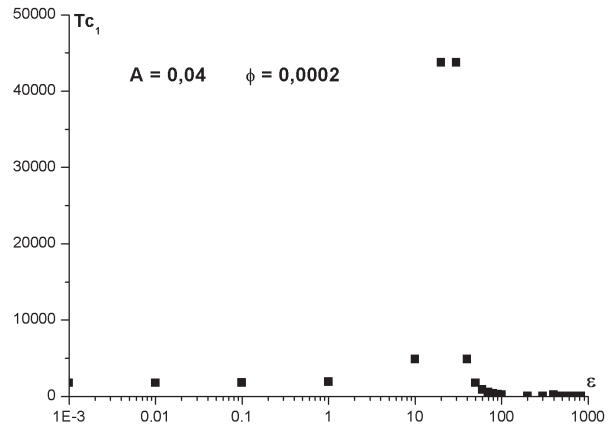


Figure 4.87 : Variation du nombre de Taylor critique  $Tc_1$  en fonction du rapport de densité  $\epsilon$  ( $A = 0.04, \phi = 0.0002$ )

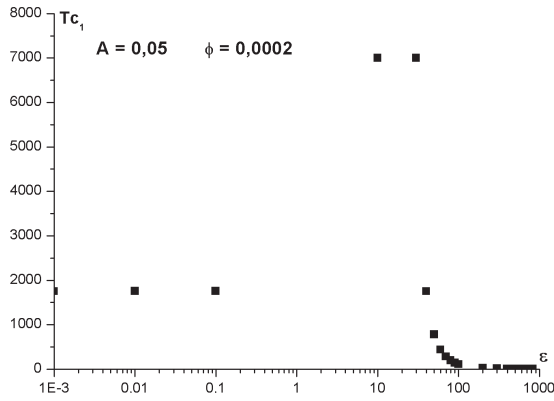


Figure 4.88 : Variation du nombre de Taylor critique  $T_{c1}$  en fonction du rapport de densité  $\epsilon$  ( $A = 0.05, \phi = 0.0002$ )

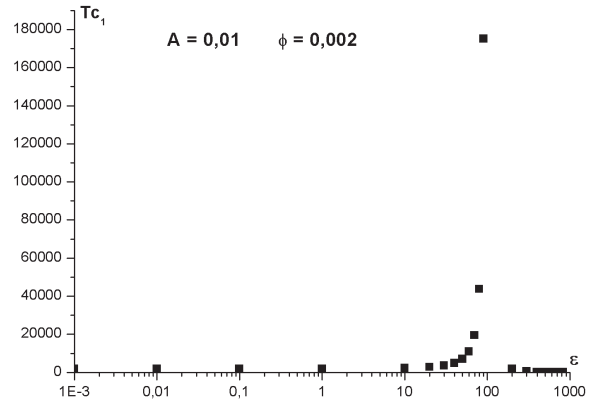


Figure 4.89 : Variation du nombre de Taylor critique  $T_{c1}$  en fonction du rapport de densité  $\epsilon$  ( $A = 0.01, \phi = 0.002$ )

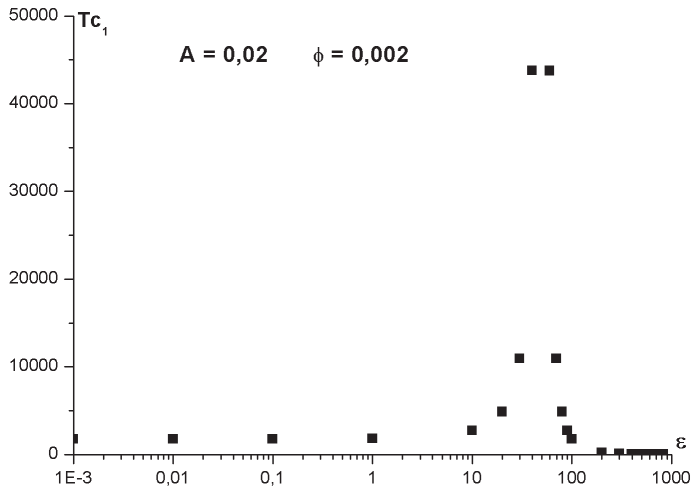


Figure 4.90 : Variation du nombre de Taylor critique  $T_{c1}$  en fonction du rapport de densité  $\epsilon$  ( $A = 0.02, \phi = 0.002$ )

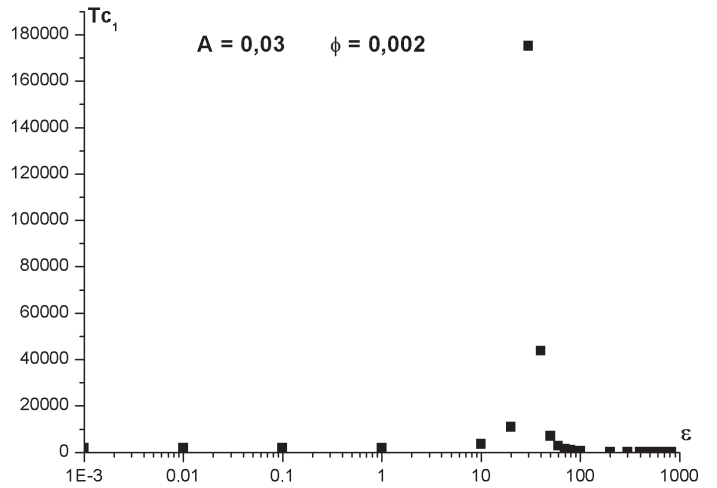


Figure 4.91 : Variation du nombre de Taylor critique  $T_{c1}$  en fonction du rapport de densité  $\epsilon$  ( $A = 0.03, \phi = 0.002$ )

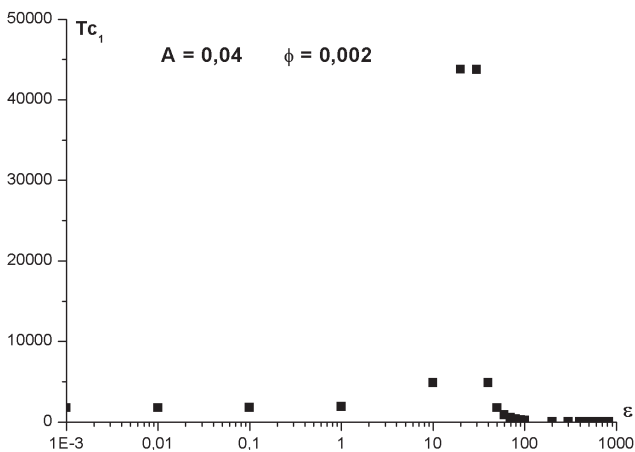


Figure 4.92 : Variation du nombre de Taylor critique  $T_{c1}$  en fonction du rapport de densité  $\epsilon$  ( $A = 0.04, \phi = 0.002$ )

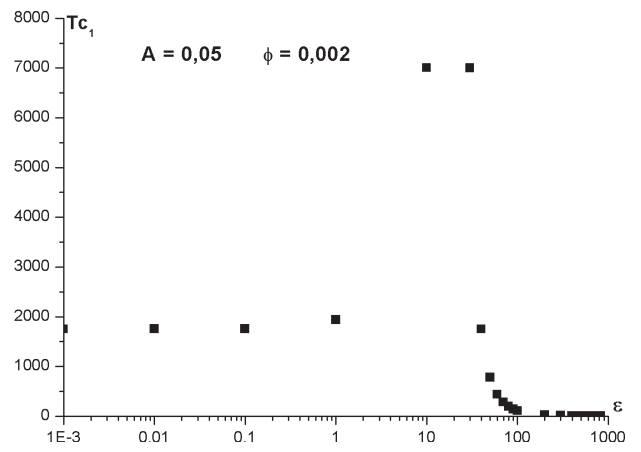


Figure 4.93 : Variation du nombre de Taylor critique  $T_{c1}$  en fonction du rapport de densité  $\epsilon$  ( $A = 0.05, \phi = 0.002$ )

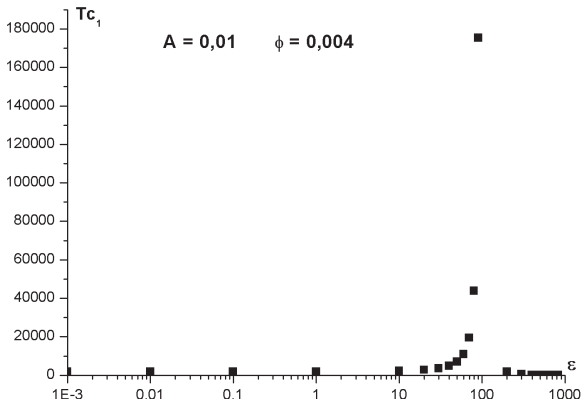


Figure 4.94 : Variation du nombre de Taylor critique  $T_{c1}$  en fonction du rapport de densité  $\epsilon$  ( $A = 0.01, \phi = 0.004$ )

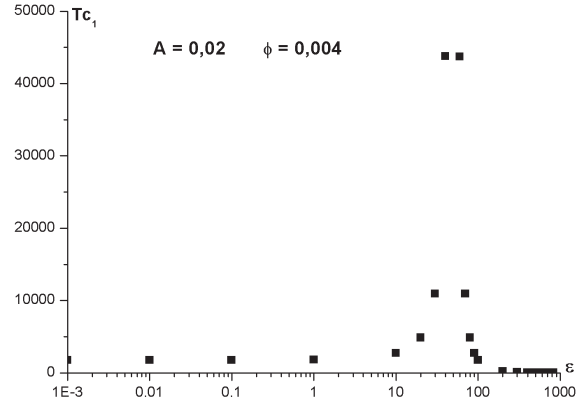


Figure 4.95 : Variation du nombre de Taylor critique  $T_{c1}$  en fonction du rapport de densité  $\epsilon$  ( $A = 0.02, \phi = 0.004$ )

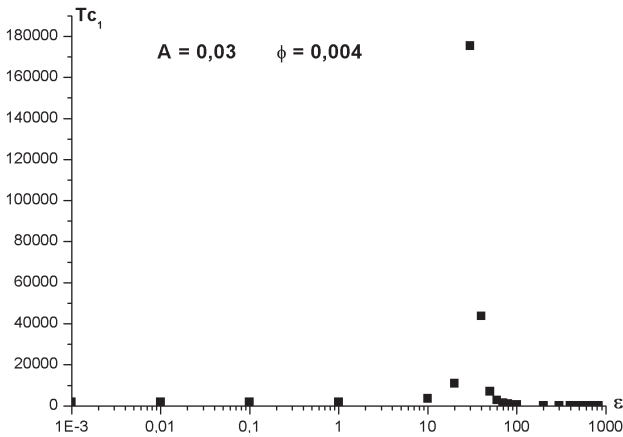


Figure 4.96 : Variation du nombre de Taylor critique  $T_{c1}$  en fonction du rapport de densité  $\epsilon$  ( $A = 0.03, \phi = 0.004$ )

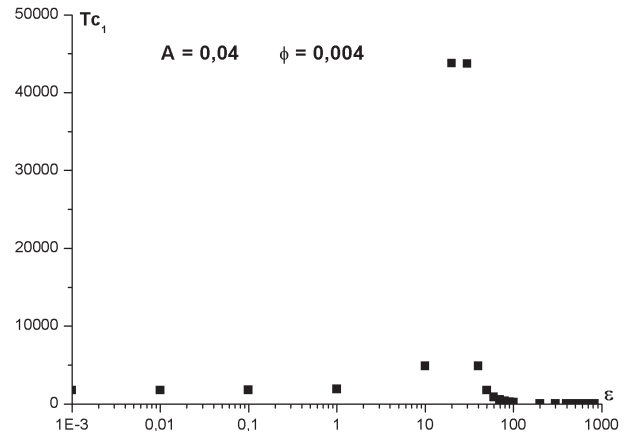


Figure 4.97 : Variation du nombre de Taylor critique  $T_{c1}$  en fonction du rapport de densité  $\epsilon$  ( $A = 0.04, \phi = 0.004$ )

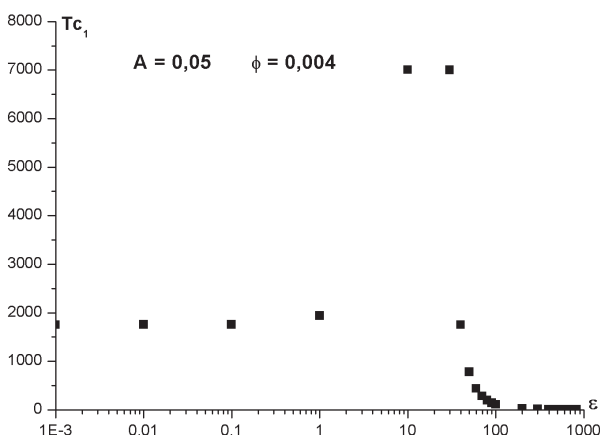


Figure 4.98 : Variation du nombre de Taylor critique  $T_{c1}$  en fonction du rapport de densité  $\epsilon$  ( $A = 0.05, \phi = 0.004$ )

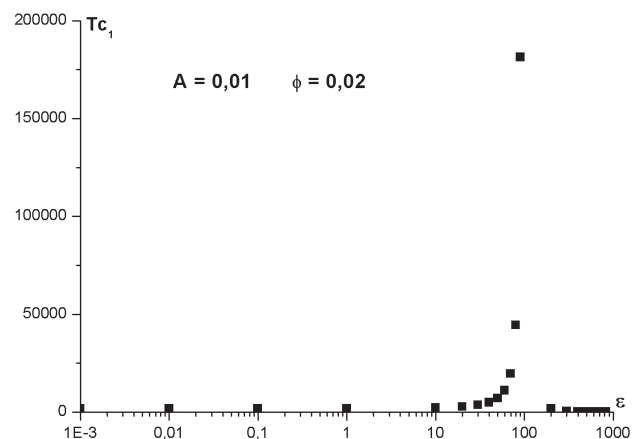
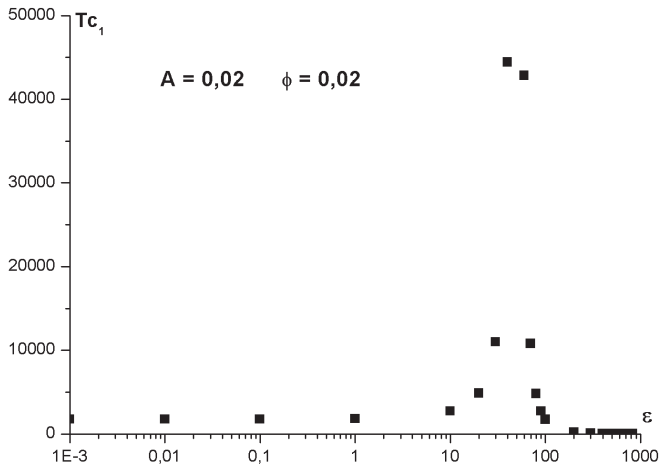
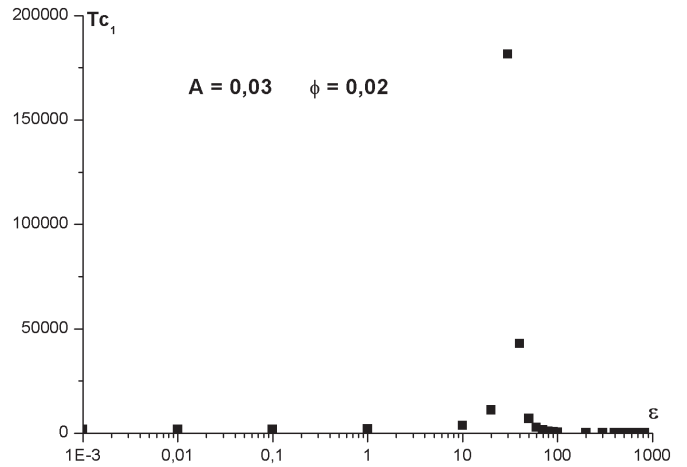


Figure 4.99 : Variation du nombre de Taylor critique  $T_{c1}$  en fonction du rapport de densité  $\epsilon$  ( $A = 0.01, \phi = 0.02$ )

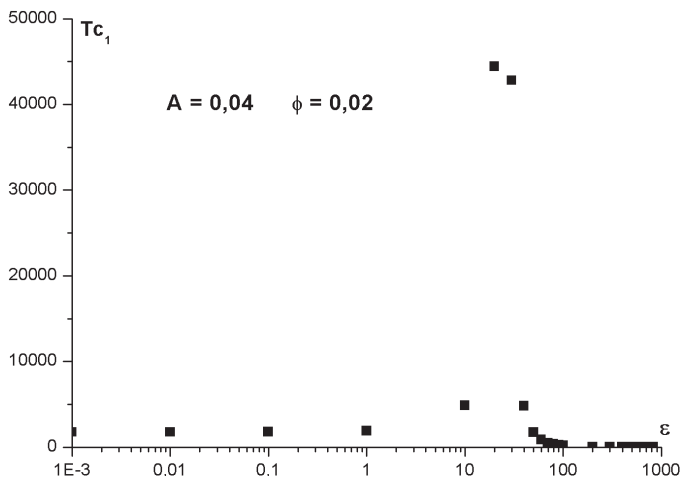




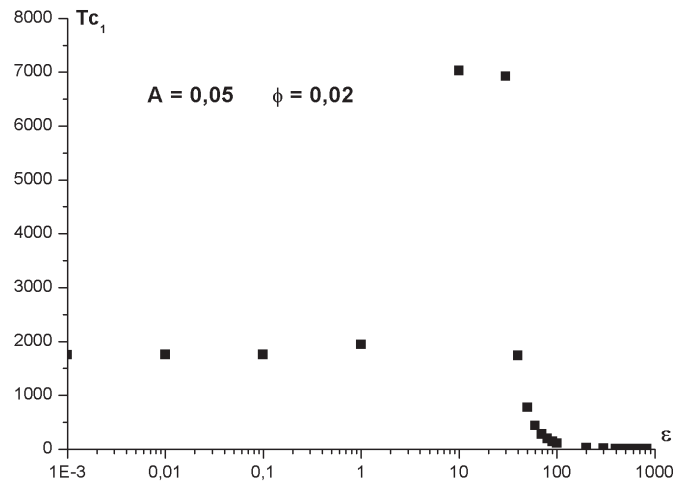
**Figure 4.100 :** Variation du nombre de Taylor critique  $Tc_1$  en fonction du rapport de densité  $\epsilon$  ( $A = 0.02, \phi = 0.02$ )



**Figure 4.101 :** Variation du nombre de Taylor critique  $Tc_1$  en fonction du rapport de densité  $\epsilon$  ( $A = 0.03, \phi = 0.02$ )



**Figure 4.102 :** Variation du nombre de Taylor critique  $Tc_1$  en fonction du rapport de densité  $\epsilon$  ( $A = 0.04, \phi = 0.02$ )



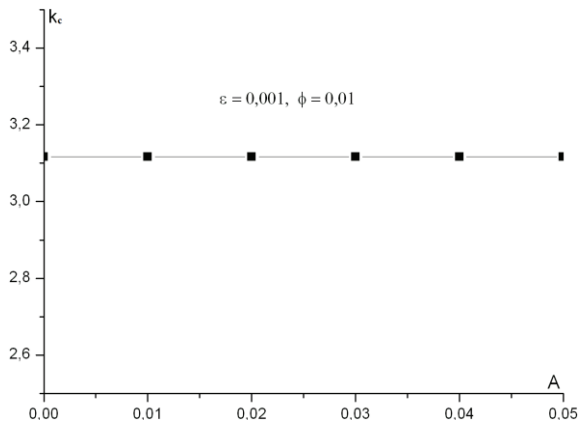
**Figure 4.103 :** Variation du nombre de Taylor critique  $Tc_1$  en fonction du rapport de densité  $\epsilon$  ( $A = 0.05, \phi = 0.02$ )

Au vu des résultats précédents, on remarque que le nombre de Taylor critique  $Tc_1$  s'accroît en fonction du rapport de densité «  $\epsilon$  » jusqu'à une valeur donnée de  $\epsilon$  ensuite il décroît. Cette variation de  $Tc_1$  dépend aussi de la concentration  $A$  de la suspension. L'analyse de ces résultats nous permet de constater que le seuil critique correspondant à l'apparition de la première instabilité est retardé par la concentration  $A$  et  $\epsilon$ , ce qui indique un effet stabilisant de la concentration  $A$  et  $\epsilon$  jusqu'à un état de saturation. Lorsque l'état de saturation est atteint, on note une décroissance de  $Tc_1$  en fonction de  $\epsilon$  et de la concentration  $A$  de la suspension ce qui signifie un effet déstabilisant du système par effets combiné de la concentration  $A$  et de  $\epsilon$ .

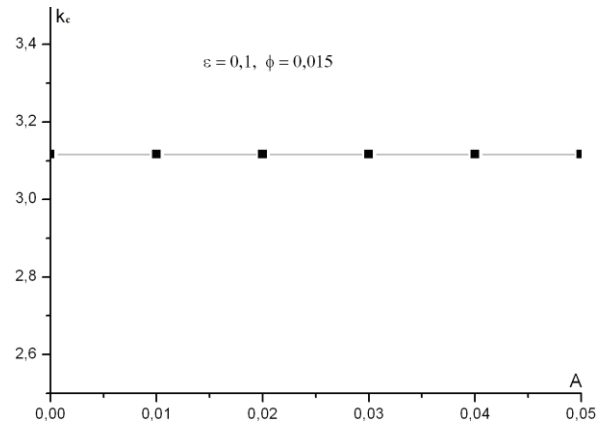
Au passage, on constate que le maximum relatif au pic associé à  $Tc_1$  en fonction de  $\varepsilon$  a tendance à s'élargir lorsque la concentration  $A$  augmente.

#### 4.2.1.5.4 Effet de la concentration $A$ de la suspension sur le nombre d'onde critique $k_c$

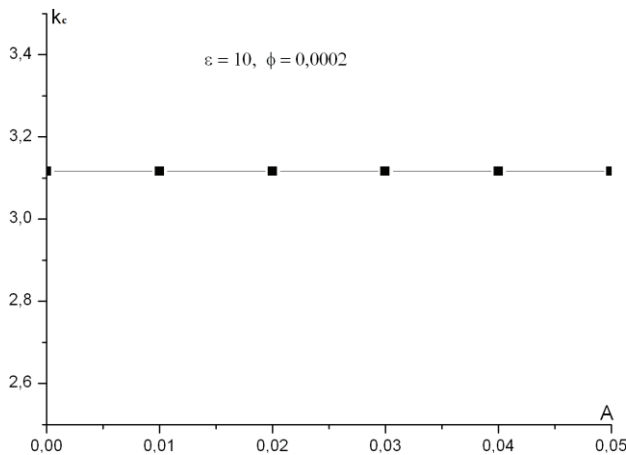
Dans ce qui suit, on a fixé le nombre de Taylor critique  $Tc_1$  et l'on cherche à évaluer l'influence des paramètres  $\varepsilon$  et  $\phi$  sur l'évolution du nombre d'onde critique  $k_c$  en fonction de la concentration  $A$  de la suspension.



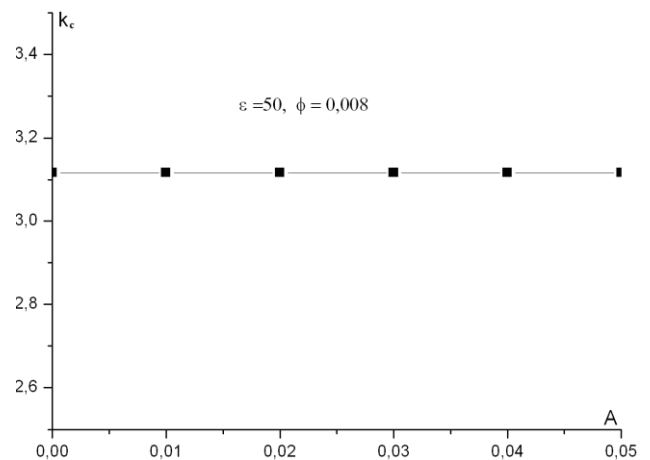
**Figure 4.104 :** Variation du nombre d'onde critique  $k_c$  en fonction de la concentration de la suspension ( $\varepsilon = 0.001, \phi = 0.01$ )



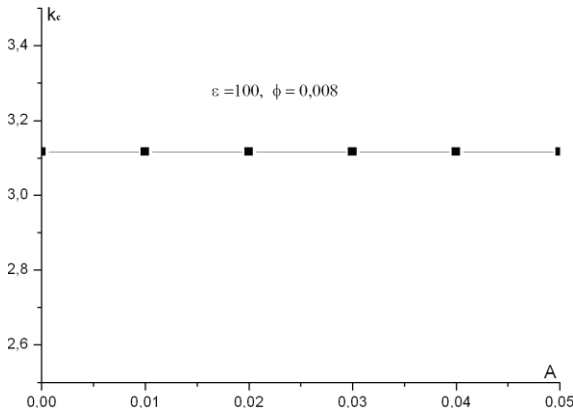
**Figure 4.105 :** Variation du nombre d'onde critique  $k_c$  en fonction de la concentration de la suspension ( $\varepsilon = 0.1, \phi = 0.015$ )



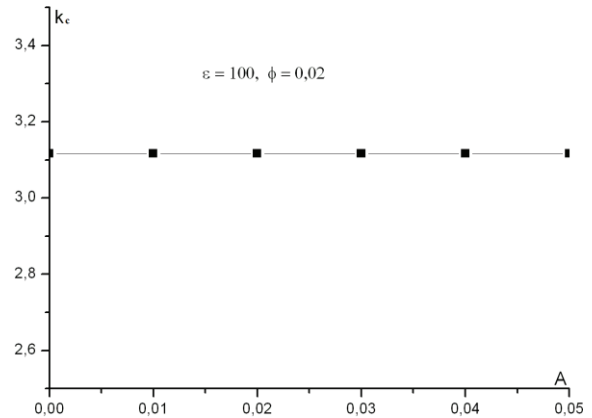
**Figure 4.106 :** Variation du nombre d'onde critique  $k_c$  en fonction de la concentration de la suspension ( $\varepsilon = 10, \phi = 0.0002$ )



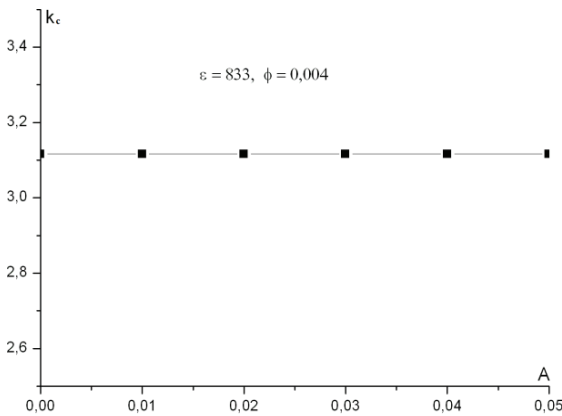
**Figure 4.107 :** Variation du nombre d'onde critique  $k_c$  en fonction de la concentration de la suspension ( $\varepsilon = 50, \phi = 0.008$ )



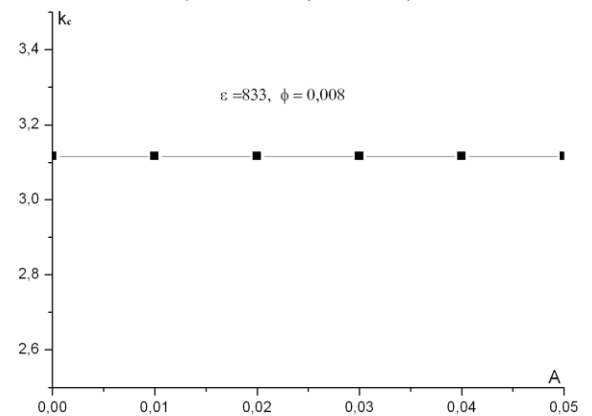
**Figure 4.108 :** Variation du nombre d'onde critique  $k_c$  en fonction de la concentration de la suspension ( $\varepsilon = 100, \phi = 0.008$ )



**Figure 4.109 :** Variation du nombre d'onde critique  $k_c$  en fonction de la concentration de la suspension ( $\varepsilon = 100, \phi = 0.02$ )



**Figure 4.110 :** Variation du nombre d'onde critique  $k_c$  en fonction de la concentration de la suspension ( $\varepsilon = 833, \phi = 0.004$ )



**Figure 4.111 :** Variation du nombre d'onde critique  $k_c$  en fonction de la concentration de la suspension ( $\varepsilon = 833, \phi = 0.008$ )

L'examen des figures (4.104 à 4.111) relève que dans tous les cas le nombre d'onde critique  $k_c$  est constant en fonction de la concentration  $A$  de la suspension ce qui indique que la concentration  $A$  de la suspension n'influe pas sur la structure de l'écoulement.

### 4.3 Conclusion

Grâce à la méthode de Galerkin combinée à la méthode de Newton-Raphson, on a pu résoudre le problème de la stabilité marginale d'un écoulement de suspension solide au voisinage de l'état critique  $Tc_1$ .

Dans le cas d'une concentration nulle ( $A = 0$ ), on a d'abord vérifié que le nombre de Taylor critique  $Tc_1$  est comparable avec les résultats théoriques et expérimentaux obtenus par Chandrasekhar (1961), Coles (1965), Bouabdallah (1980), Rectenwald et al (1993) et également avec ceux donnés par Ali & Lueptow (2002).

En présence d'un écoulement chargé d'une suspension ( $A \neq 0$ ), on compare systématiquement nos résultats obtenus avec ceux d'Ali & Lueptow (2002).

Dans ce cas, on établit le nombre de Taylor critique  $Tc_1$  qui décroît en fonction de la concentration de la suspension ce qui indique que la concentration de la suspension a un effet déstabilisant sur l'écoulement.

La détermination des valeurs des coefficients  $\lambda_{1,r}, \lambda_{1,\theta}, \lambda_{1,z}, \lambda_{s,r}, \lambda_{s,\theta}, \lambda_{s,z}$  a révélé que le nombre de Taylor critique  $Tc_1$  augmente en fonction de la concentration  $A$  dans un intervalle donné du rapport de densité  $\varepsilon$  ce qui permet de conclure que la concentration de la suspension a un effet stabilisant de l'écoulement dans cet intervalle de  $\varepsilon$ . Les résultats trouvés permettent de constater que le seuil critique d'apparition de la première instabilité  $Tc_1$  est retardé lorsque la concentration  $A$  de la suspension s'accroît. Ce résultat donne à penser que la concentration  $A$  et le rapport de densité  $\varepsilon$  ont un effet stabilisant sur l'écoulement jusqu'à un atteindre un état de saturation. Au-delà de cet état de saturation, on note une décroissance de  $Tc_1$  en fonction de la concentration  $A$  de la suspension.

En outre, le nombre de Taylor critique  $Tc_1$  n'est pas affecté par les variations du diamètre adimensionnel  $\phi$  de particules permettant d'en déduire que la taille des particules n'affecte pas le seuil d'apparition de la première instabilité. Par ailleurs, le nombre d'onde critique  $k_c$  reste constant en fonction de la concentration  $A$  signalant que la concentration  $A$  de la suspension n'a aucun effet sur la taille de la structure de l'onde de type Taylor.

Finalement, on conclut que le champ d'étude des fluides en suspension s'avère très intéressant par les résultats obtenus mais devient complexe quand il s'agit de l'approcher. C'est pourquoi, on propose ultérieurement de faire une modélisation qui tient compte de la réalité expérimentale au voisinage des parois tenant compte de la couche limite correspondante car il est très probable que la dynamique de la suspension ne procède pas également de la même façon à cœur de l'écoulement.

En réalité, il propose de séparer l'étude de l'écoulement en deux régions distinctes, à savoir,

- La première région ou région centrale qui peut être modélisée en première approximation selon un écoulement de Taylor-Couette quasi-monophasique.
- La seconde région qui est liée aux parois fixes ou en rotation obéit à une dynamique de type couche limite à laquelle on associe des relations analogues aux équations tribologiques pour décrire de façon réaliste l'écoulement diphasique (fluide en présence d'une suspension) au voisinage des parois.

# **Troisième Partie**

## **Etude Expérimentale**

# **Chapitre 5**

## **Techniques de mesure et conditions expérimentales**

## Les techniques de mesure et conditions expérimentales

### 5.1 Les principales méthodes de mesure

On distingue trois classes de méthodes de mesure : les méthodes optiques, de mesure globale et de mesure locale.

#### 5.1.1 Méthodes optiques

Les méthodes optiques permettent une description satisfaisante de la phénoménologie dans l'écoulement. Des efforts sont entrepris pour en tirer davantage de mesures quantitatives. Elles consistent à visualiser l'écoulement par introduction d'additifs appropriés qui peuvent être soit liquide (colorants) (Taylor, 1923), soit solide (paillettes d'aluminium...) (Coles, 1965).

Il est à noter que la visualisation demeure un outil important de contrôle qualitatif de l'écoulement auquel recourent d'autres méthodes que l'on combine avec cette méthode. Ainsi, Brändstater et Swinney (1987) ont utilisé des particules synthétiques (Kalliroscope) dans leur technique d'anémométrie laser.

#### 5.1.2 Méthodes de mesure globale

Elles se limitent essentiellement à la mesure de couple résistant actionnant sur le cylindre extérieur qui montre que cette grandeur dépend de la vitesse angulaire du rotor (Taylor, 1936 ; Donnelly, 1959 ; Donnelly et Simon, 1959). La courbe correspondante présente une rupture de comportement à l'apparition des instabilités. En régime laminaire de Couette, cette variation est donnée sous la forme suivante:

$$G = \frac{4\pi\mu\Omega_1 R_1^2 R_2^2}{R_2^2 - R_1^2} \quad (5.1)$$

En régime de Taylor vortex flow (tourbillon de Taylor) et à partir de mesures expérimentales, Donnelly et Simon (1959) ont déduit la relation empirique suivante :

$$G' = a\Omega_1^{-1} + b\Omega_1^{1,364} \quad (5.2)$$

Où  $a$  et  $b$  sont des constantes données.

Lorsque  $T \gg T_c$ , l'auteur obtient :

$$G'' = \rho \Omega_1^2 R_1^4 \left( \frac{\nu}{\Omega_1 R_1 d} \right)^2 \left( \frac{d}{R_1} \right)^4 \quad (5.3)$$

Un bon accord est enregistré entre les valeurs obtenues de ces mesures et les relations établies en théories non linéaires. Du fait qu'elles donnent une valeur moyenne, les méthodes de mesure du couple ne sont pas appropriées à une étude approfondie et structurée de l'écoulement. Celles-ci nécessitent en effet des mesures locales.

### 5.1.3 Méthodes de mesure locale

Les sondes utilisées dans les mesures locales perturbent l'écoulement ce qui rend la mise en œuvre des méthodes de mesures locales très délicates.

Une technique à ions ou méthode de la double couche a été proposée par Donnelly (1965) et Donnelly et al (1965) dont le principe est le suivant : une électrode annulaire, située à la surface du cylindre extérieur recueille le courant traversant le champ d'écoulement, préalablement rempli d'un liquide faiblement conducteur. Le courant mesuré est sensible à la composante radiale de la vitesse. Le principal inconvénient de cette méthode est de fournir des mesures relatives, du fait qu'elle ne permet pas de mesures en régime laminaire stable.

Des travaux menés par Snyder et Lambert (1966) et Snyder et Karlson (1964) consistent à placer en la paroi du cylindre extérieur une sonde à thermistance chauffée diffusant de la chaleur au sein du liquide. Entre l'état de mouvement et celui du repos, la variation relative de l'écart de température entre le liquide et la thermistance est proportionnelle à la puissance 1/3 du gradient de vitesse à sa surface.

Ainsi en tribologie, Frêne (1974) a utilisé la technique de l'anémométrie à film chaud qui est basée sur le même principe. L'inconvénient de cette méthode est la difficulté que présente l'isolement de l'élément chauffant, par rapport à la paroi.

Hocquart et al (1987) ont appliqué la biréfringence d'écoulement ou effet Maxwell au régime transitoire de l'écoulement de Taylor-Couette. Cette technique classique en mécanique des fluides (Hermans, 1966 ; Hocquart et al, 1985) utilise l'effet optique de solutions diluées



de polymères ayant la forme d'ellipsoïdes ou de bâtonnets. Le T. M. V. (Tobacco Mosaïque Virus) dans l'eau est la plus utilisée.

Dans le système de Couette, les particules sont soumises à la compétition entre les mouvements hydrodynamique et brownien d'où la non uniformité de la distribution des orientations des particules. L'analyse de ce phénomène a été effectuée par Hocquart (1982) qui présente une étude détaillée de ce phénomène.

L'anémométrie laser et la polarographie sont des techniques de mesures locales ayant largement contribué à la compréhension des transitions vers le chaos dans l'écoulement de Taylor-Couette. Le principe de l'anémométrie laser est le suivant (Shaw, 1982 ; Lorenzen, 1983) : des particules sphériques solides sont placées dans l'écoulement. L'appareillage est soumis à un faisceau lumineux.

L'exploitation de l'effet Doppler résultant permet de mesurer la composante radiale de la vitesse. Avec cette méthode, Brandäster et Swinney (1987) ont pu mettre en évidence, un attracteur étrange pour l'écoulement de Taylor-Couette.

L'application de la polarographie au problème de Taylor-Couette a été utilisée par différents auteurs, on cite Cognet (1971), Bouabdallah (1980), Cognet et al (1982), Park et al (1981) et Nissan et Nardassi (1963). Le principe de cette technique est le suivant : une électrode inattaquable est plongée dans un système oxydo-réducteur. Des précautions spécifiques permettent de restreindre l'origine du courant dû à un potentiel différent de celui d'équilibre de l'électrode, à :

- La diffusion des ions provenant d'un gradient de concentration élevé au niveau de l'électrode ;
- Leur transport, par écoulement de la solution.

La mesure du courant permet d'accéder au gradient de vitesse à la paroi. Cette méthode conduit à une détermination satisfaisante des paramètres critiques, de l'amplitude de la perturbation, de la vitesse de propagation des ondes circonférentielles et du coefficient de frottement moyen. Elle s'utilise bien dans les divers régimes d'écoulements (Bouabdallah, 1980) et dans l'étude de la réduction du frottement (Gorman, 1981).

## 5.2 Protocole expérimental et conditions d'essais

### 5.2.1 Montage de Taylor-Couette et de Taylor-Dean

Le dispositif expérimental utilisé est constitué de deux cylindres coaxiaux en plexiglas transparent, permettant de faire des mesures de visualisation par transmission, réflexion et aussi par Laser.

Ce dispositif est utilisé pour des expériences de Taylor-Couette lorsque les cylindres sont en position verticale et aussi pour des expériences de Taylor-Dean lorsque les cylindres sont en position horizontale. Le basculement entre position verticale et horizontale est assuré par un système d'inclinaison qui sera décrit ultérieurement.

Le cylindre extérieur est fixe de rayon intérieur  $R_2 = (47 \pm 0.1)$  mm et de hauteur  $L = (364 \pm 0.4)$  mm. Le cylindre extérieur est fixé en sa partie inférieure sur un palier inférieur en plexiglas. Un autre palier en aluminium contenant un roulement et joint spi est utilisé à la partie supérieure.

Le joint spi est utilisé pour assuré l'étanchéité du système d'écoulement.

Le cylindre intérieur tournant de rayon extérieur  $R_1 = (38 \pm 0.1)$  mm et de hauteur  $H = (360 \pm 4)$  mm est monté sur le palier inférieur en plexiglas à un roulement étanches, un joint spi et une bague en bronze. Le palier inférieur est fixé sur une plaque en acier inox.

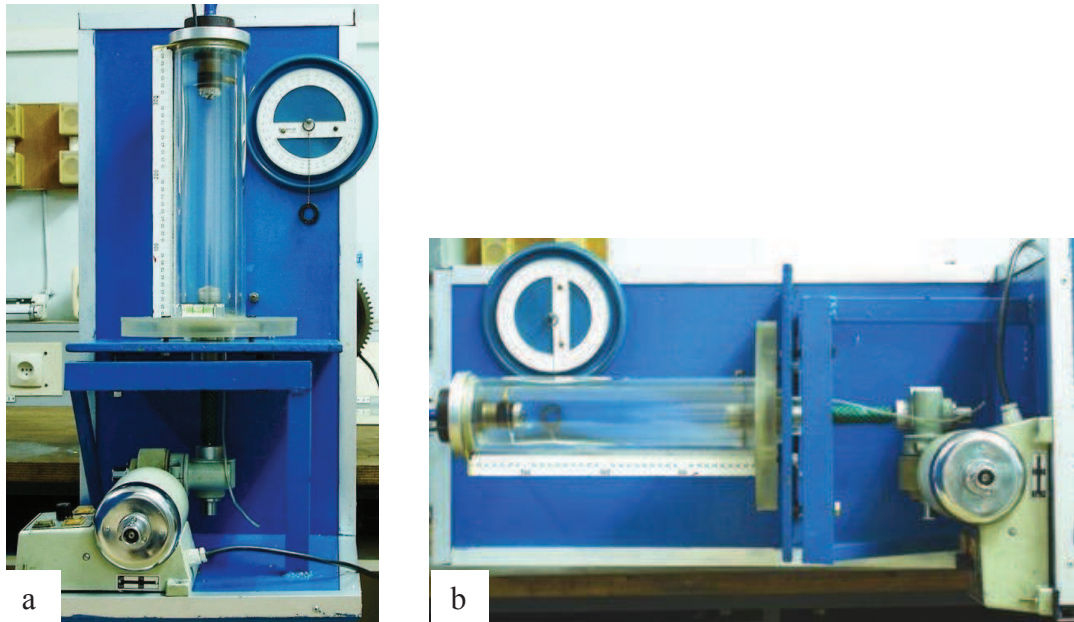
L'espace annulaire entre les deux cylindres où a lieu l'écoulement est  $d = R_2 - R_1 = (9 \pm 0.1)$  mm

définissant un jeu radial  $\delta = \frac{d}{R_1} = 0.237$ .

Ce système d'écoulement est considéré comme une configuration à espace annulaire relativement large.

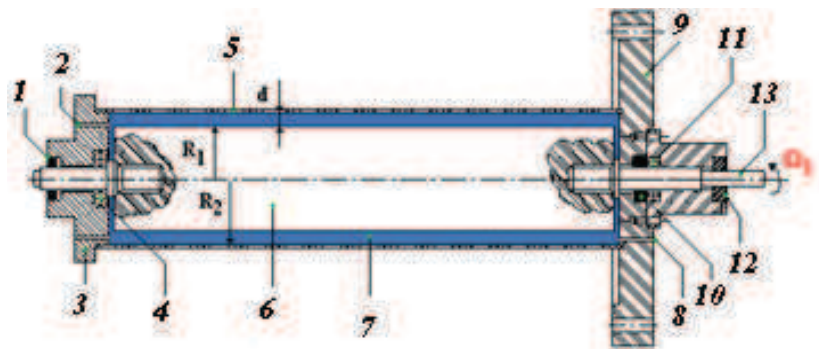
Le remplissage et la vidange du système d'écoulement sont effectués par deux orifices de diamètre  $\phi = (7 \pm 0.2)$  mm, l'un est percé au niveau de la partie supérieure et l'autre dans la partie inférieure. Un orifice supplémentaire est ajouté pour dégager d'éventuelles bulles d'air qui peuvent s'introduire éventuellement.

L'ensemble du système est renforcé par des semelles en caoutchouc pour amortir les vibrations mécaniques.

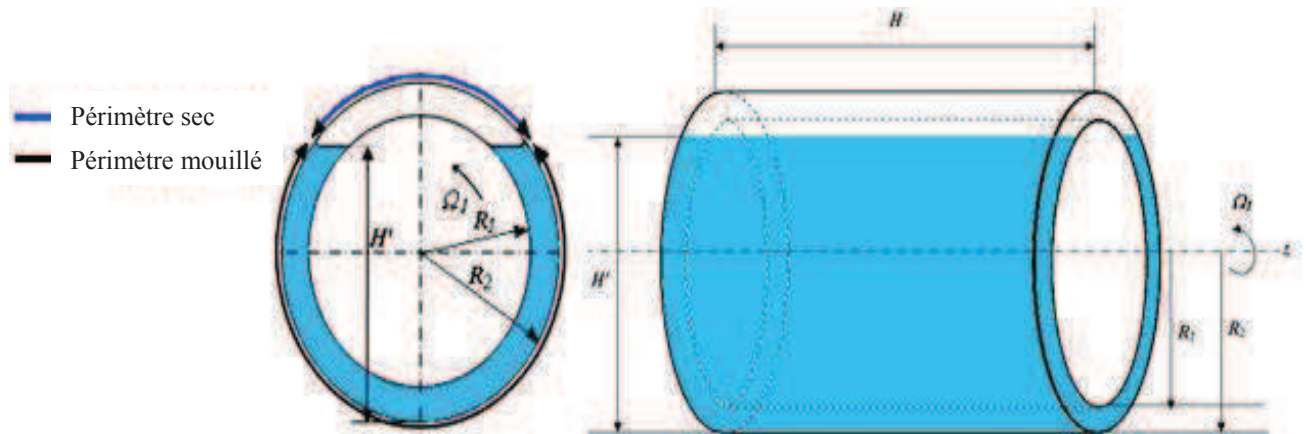


**Figure 5.1 :** Vue générale du dispositif expérimental  
 a) Système d'écoulement de Taylor-Couette    b) Système d'écoulement de Taylor-Dean

- 1 et 10 : Joint spi
- 2 et 8 : Trou de remplissage
- 3 : Palier supérieur
- 4 et 11 : Roulement cylindrique
- 5 : Cylindre extérieur
- 6 : Cylindre intérieur
- 7 : Fluide
- 9 : Palier inférieur
- 13 : Axe rotatif



**Figure 5.2 :** Schéma du dispositif expérimental



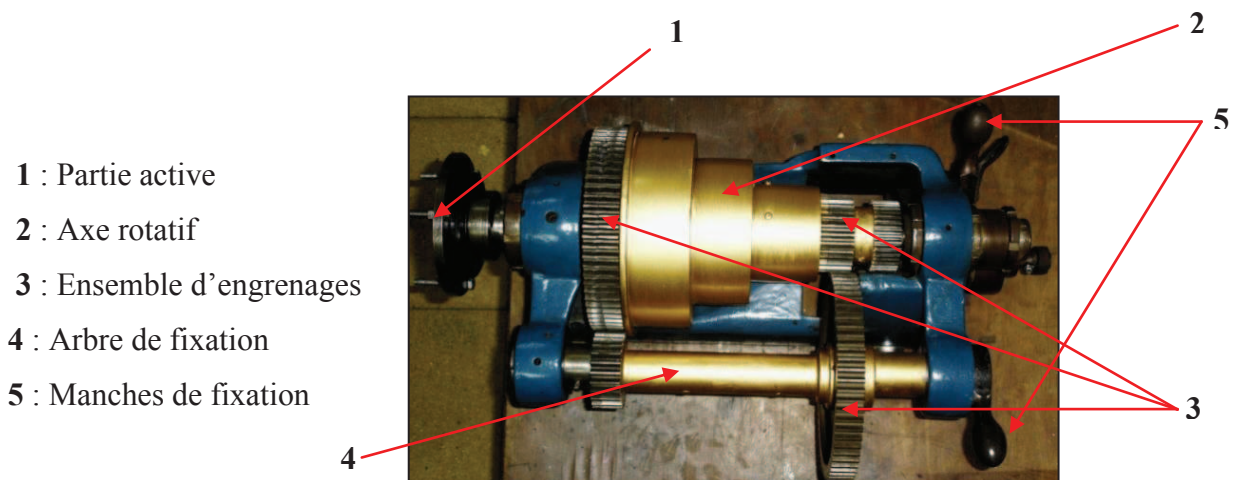
**Figure 5.3 :** Schématisation des caractéristiques du système d'écoulement

Le système est décrit par les paramètres géométriques suivants :

- Largeur de l'espace annulaire  $\delta = \frac{d}{R_1} = 0.237$ , avec  $d = R_2 - R_1$
- Le facteur d'aspect axial  $\Gamma = \frac{H}{d}$  qui est égal 40.
- Le facteur d'aspect radial  $\Gamma' = \frac{H'}{d}$ , avec  $H'$  est la hauteur de fluide. avec  $2.19 \leq \Gamma' \leq 10.44$ .

### 5.2.2 Système d'inclinaison

Comme l'illustre la figure 5.5, le système d'inclinaison est constitué d'un ensemble d'engrenage de transmission de vitesse permettant la rotation d'un axe rotatif. Ce dernier se termine par une partie active sur laquelle est fixé le dispositif expérimental. L'inclinaison du dispositif est commandée par des manches de fixation qui contrôlent le mouvement de l'arbre de fixation et donc celui de l'axe rotatif.



**Figure 5.4 :** Système d'inclinaison

### 5.2.3 Entraînement des cylindres

Le cylindre intérieur tournant est entraîné en rotation par un moteur à courant continu de type PROLABO constant MC100 de puissance  $P = 160$  watts à double bobinage fournissant une gamme de vitesses très stables avec un couple moteur constant (voir figure 5.5.a).

La transmission des vitesses est assurée par l'association de deux réducteurs de rapport de réduction 1/11 (voir figure (5.5.b)).

Le moteur muni des réducteurs est asservi par un variateur de vitesse intégré au système permettant d'obtenir des vitesses stables dans la plage  $[0.01 ; 20]$  tr/s.

La transmission de la vitesse de rotation du moteur vers le cylindre intérieur tournant est effectuée par un accouplement flexible (tube en caoutchouc) permettant d'absorber les éventuelles vibrations provenant du moteur.



Figure 5.5 : a) Moteur - b) Réducteur 1/11

### 5.2.4 Mesure de la vitesse de rotation

La vitesse de rotation du cylindre tournant est mesurée à l'aide d'un tachymètre digital portatif DT 2236 utilisant une diode optique par réflexion. La précision des mesures dûe au Tachymètre est  $\pm 0.1\%$  tr/min.

Pour mesurer la vitesse de rotation  $\Omega_1$ , on colle un ruban réfléchissant à l'extrémité supérieure de l'axe du cylindre tournant et l'on dirige sur le ruban un faisceau de lumière.



Figure 5.6 : Tachymètre digital

### 5.2.5 Mesure de la température

La température du fluide est mesurée en utilisant un capteur électronique à courant continu de type performant de précision inférieure à 1%.



Figure 5.7 : Thermomètre numérique

### 5.2.6 Anneaux de garde

Pour étudier les effets de bords sur la nature et la structure de l'écoulement, on a utilisé des anneaux de garde comme l'illustre la figure 5.8.

Les anneaux de garde peuvent être fixés au cylindre extérieur (bords fixes) ou bien solidaire du cylindre intérieur tournant (bords mobiles).

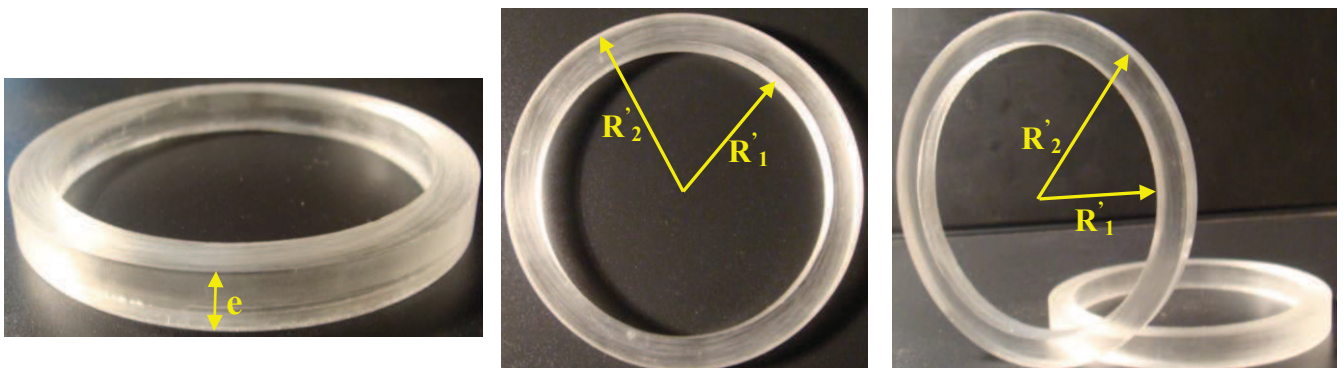


Figure 5.8 : Anneaux de garde

Les dimensions des deux types d'anneaux de garde sont donnés ci-dessous:

|             | $R'_1$ (mm)    | $R'_2$ (mm)    | $e$ (mm)    |
|-------------|----------------|----------------|-------------|
| Bord mobile | $38 \pm 0.1$   | $46.5 \pm 0.1$ | $9 \pm 0.1$ |
| Bord fixe   | $38.5 \pm 0.1$ | $47 \pm 0.1$   | $9 \pm 0.1$ |

**Tableau 5.1** : Dimensions des anneaux de garde

**a- Bords libres** : Ce cas d'étude correspond à la situation d'écoulement nominal, avec absence des anneaux de garde. Dans ce cas, il existe une hauteur  $h'$  entre les deux cylindres laissant circuler librement le fluide.

**b- Bords fixes** : Dans ce cas, les anneaux de garde sont fixés au cylindre extérieur et donc restent immobiles durant la rotation du cylindre intérieur (figure 5.9).



**Figure 5.9** : détail des anneaux de type bords fixes

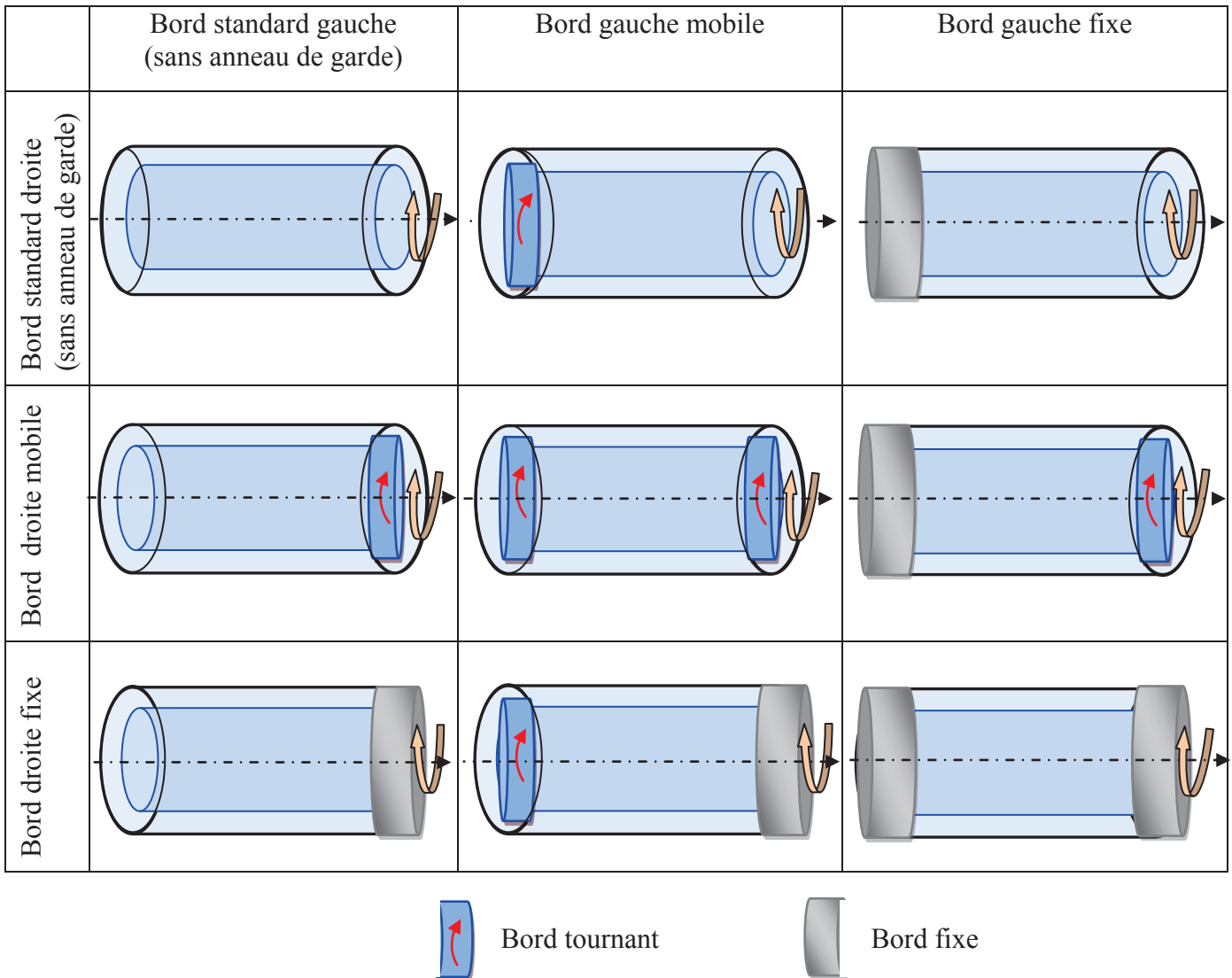
**c- Bords mobiles** : Dans cette situation, les anneaux sont solidaires du cylindre tournant et donc se mettent en rotation lorsque le cylindre intérieur tourne (figure 5.10).



**Figure 5.10** : Système d'écoulement avec bords mobiles

### d-Combinaisons entre les bords

Au cours de nos essais, nous avons procédé à l'analyse de différentes combinaisons entre les bords mobiles, fixes et libres comme l'illustre la figure 5.11



**Figure 5.11:** Schématisation des configurations de bords étudiées

### 5.2.7 Caractérisation de la suspension

La solution est un mélange de Simili essence et d'huile Chellala M (80/20). Des particules solides d'aluminium de taille de  $14 \mu\text{m}$  sont dispersées dans cette solution, à différentes concentration de la suspension dans l'intervalle allant de 0.1% à 0.6%. Cette intervalle de concentration est choisit pour assurer une observation clair de l'effet des particules solides sur le comportement rhéologique de la suspension et une quasi-homogénéité de la suspension (pas d'interaction entre les particules et pas de déposition des particules).



### a- Le liquide solvant

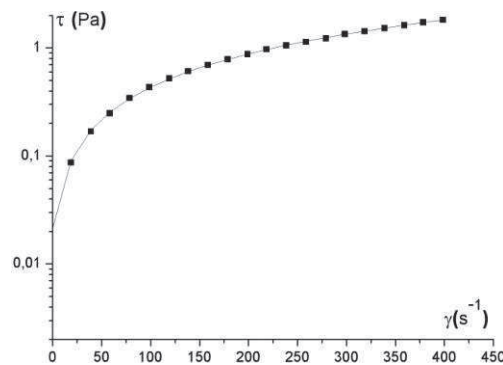
Les mesures rhéologiques sont réalisées en utilisant un rhéomètre AR2000 ayant un espace annulaire cylindrique (le rayon du rotor est de 14 mm et le rayon du stator est de 15 mm). Le rhéogramme présenté sur la figure 5.12 est obtenu pour le liquide solvant.

Le comportement rhéologique de ce liquide est viscoplastique obéit au modèle de Herschel Bulkley suivant la loi :

$$\tau = \tau_0 + K\dot{\gamma}^n \quad (5.4)$$

Avec  $\tau_0 = 0.022$  Pa, l'indice de consistance  $k = 0.0035$  Pa.s<sup>n</sup> et l'indice d'écoulement  $n = 1.064$ .

L'indice de puissance est supérieur à 1, donc le liquide solvant est rhéo-épaississant. La solution obtenue est transparente et stable, elle peut être utilisée comme un fluide modèle pour étudier expérimentalement les matériaux présentant ce type de comportement (Persoz, 1960).



**Figure 5.12** : Rhéogramme du liquide solvant (80/20 essence Simili + Chellala M)

### b- Rhéogramme de la suspension

Les rhéogrammes de la suspension sont présentés sur la figure 5.13, pour des concentrations de disque données dans l'intervalle 0.1% - 0.6%.

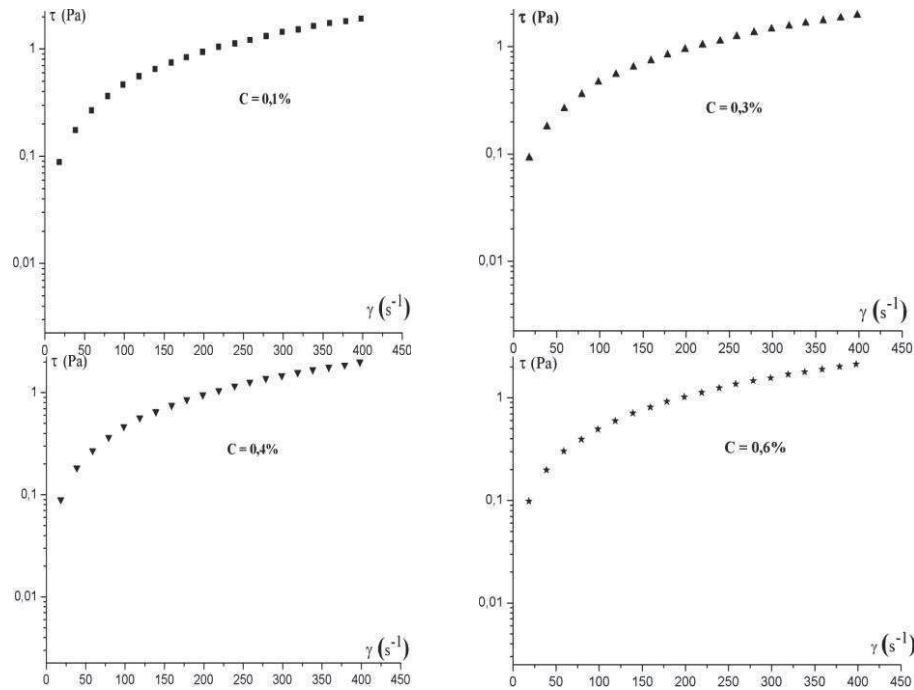


Figure 5.13 : Rhéogramme de la suspension pour différentes concentrations de particules

Globalement, on note une évolution non linéaire de la contrainte de cisaillement  $\tau$  en fonction de la vitesse de cisaillement  $\dot{\gamma}$ . Ces rhéogrammes montrent que le comportement de la suspension obéit au modèle de Herschel Bulkley (décrit par l'équation (5.4)).

**c- Viscosité apparente de la suspension et paramètres rhéologiques**

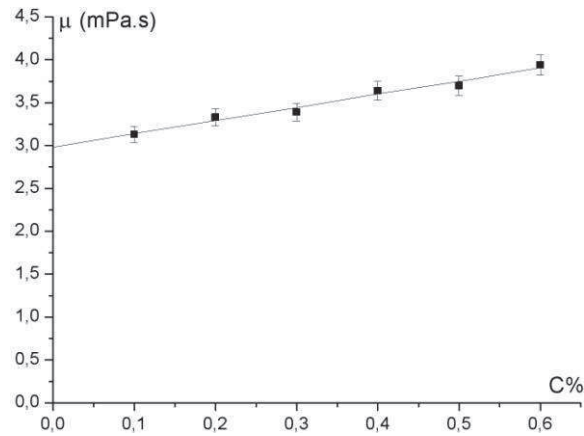
Par application de la méthode des moindres carrée à nos résultats expérimentaux, on trouve que l'indice de consistance de la suspension et le seuil d'écoulement sont pratiquement constants et égaux à leur valeur respective dans le liquide suspendant, comme le montre les figures 5.15 et 5.16, alors que la viscosité apparente de la suspension évolue linéairement en fonction de la concentration des disques selon la forme suivante (voir figure 5.14):

$$\mu = 2.98 + 1.5C \tag{5.5}$$

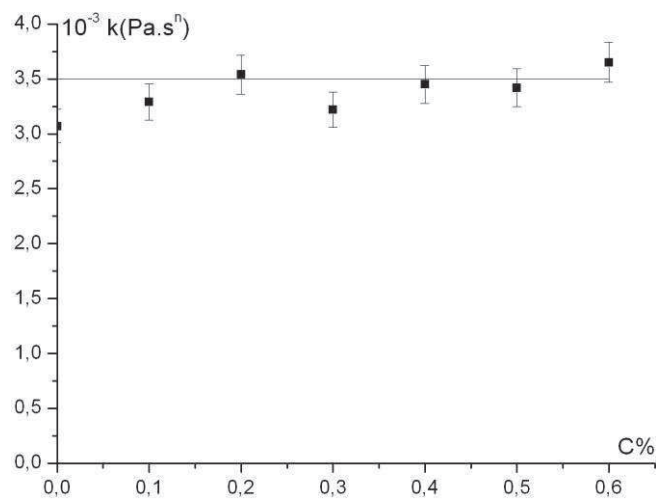
L'indice d'écoulement demeure sensiblement constant et voisin de  $n = 1$  dans l'intervalle considéré (voir figure 5.17). Il évolue comme suit :

$$n = 1.0624 + 0.0015C \tag{5.6}$$

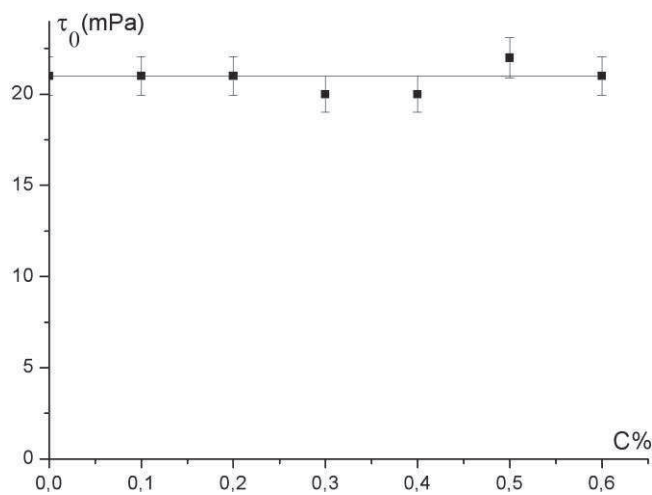
Le comportement rhéo-épaississant du liquide suspendant semble s'affirmer en présence de disque solide dans le milieu. En effet, lors de l'écoulement, les différents disques plans ne sont pas probablement tous alignés exactement selon le plan de cisaillement. Donc, cette distribution des disques plans ne facilite pas l'écoulement et par conséquent, elle augmente les effets de comportement dû au cisaillement épaississant.



**Figure 5.14 :** Variation de la viscosité en fonction de la concentration de la suspension



**Figure 5.15 :** Variation de l'indice de consistance  $k$  en fonction de la concentration de la suspension



**Figure 5.16 :** Variation du seuil d'écoulement en fonction de la concentration de la suspension

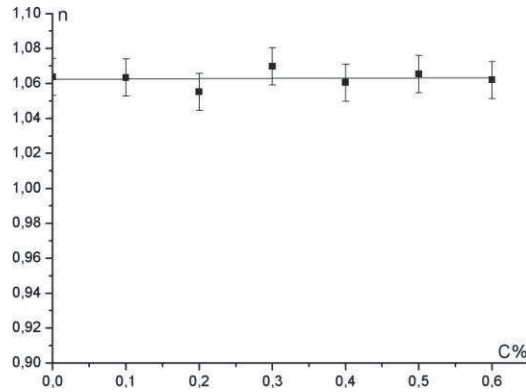


Figure 5.17 : Variation de l'indice de puissance n en fonction de la concentration de la suspension

**d- Effet de la température sur la viscosité apparente de la suspension**

Nous avons examiné l'effet de la température sur la viscosité apparente de la suspension dans l'intervalle des températures considérées  $T_\theta \in [17^\circ\text{C}, 35^\circ\text{C}]$ . Les résultats obtenus sont récapitulés sur la figure 5.18.

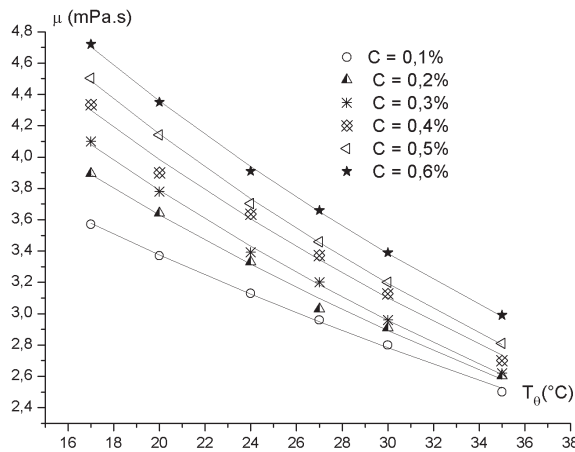


Figure 5.18 : Variation de la viscosité en fonction de la température pour différentes concentrations C de la suspension

De l'analyse de résultats présentés, ci-dessus, on peut déduire une loi expérimentale de l'évolution de la viscosité apparente en fonction de la température qui est de la forme :

$$\mu = a \exp(-bT_\theta) \tag{5.7}$$

Les valeurs des constantes a et b sont déterminées par un lissage des courbes expérimentaux (tableau 5.2).

|   | C = 0,1% | C = 0,2% | C = 0,3% | C = 0,4% | C = 0,5% | C = 0,6% |
|---|----------|----------|----------|----------|----------|----------|
| a | 4,972    | 5,726    | 6,218    | 6,585    | 6,998    | 7,227    |
| b | 0,019    | 0,023    | 0,025    | 0,025    | 0,026    | 0,025    |

Tableau 5.2 : Valeurs de a et b obtenues par lissage des valeurs expérimentales de la viscosité  $\mu$

### 5.2.8 Technique de visualisation

#### a) Instrumentation photométrique

Nous avons utilisé une caméra digitale de type Sony Cyber-Shot. La DSC-T20 à huit méga pixels qui est dotée d'un capteur couplé à un zoom optique 3x et un écran LCD 2.5 pouces comportant un stabilisateur d'image optique.

#### b) Procédé de visualisation par réflexion de la lumière

Ce mode d'observation procède par réflexion d'un faisceau lumineux diffusé par une source extérieure sur l'écoulement afin de mettre en évidence le régime et la structure associée au mouvement.

Ce procédé de visualisation utilise les rayons lumineux diffusés par une source sur l'écoulement qui se réfléchissent sur les particules métalliques pour donner naissance à des raies claires correspondant au maximum de la vitesse et ceux qui sont sombres correspondant à des minima (figure 5.19)



Figure 5.19 : Visualisation par réflexion de la lumière

### 5.2.9 Procédure d'essai et paramètres de contrôle

#### a) Condition de mise en régime des vitesses

Pour une géométrie donnée, l'expression du paramètre de contrôle ou nombre de Taylor  $Ta$  varie essentiellement en fonction de la vitesse de rotation  $\Omega_1$ .

Pour cela, nous avons adopté le même mode opératoire à chaque essai en procédant systématiquement selon une vitesse de rotation croissante  $\Omega_1$  de façon que la condition de mise en régime satisfait à l'inégalité suivante (condition du régime quasi-statique) :

$$\frac{\Delta\Omega_1}{\Omega_1} \leq 1\% \quad (5.8)$$

Cette condition est nécessaire pour une bonne reproductibilité des mesures laquelle est d'ailleurs assez proche de l'incertitude expérimentale mesurée sur la vitesse angulaire  $\Omega_1$ ,

soit :  $\frac{\Delta\Omega_1}{\Omega_1} \approx 1\%$  (Bouabdallah, 1980).

Le mode opératoire au cours de nos essais procède comme suit :

A partir du repos, en faisant augmenter quasi-statiquement la vitesse de rotation du cylindre intérieur on prend soin de respecter l'inégalité  $\frac{\Delta\Omega_1}{\Omega_1} \leq 1\%$  à chaque pas, puis on patiente quelques minutes afin de permettre à l'écoulement de se stabiliser dans l'état qu'il occupe et l'on observe l'apparition des phénomènes d'instabilités dans l'écoulement.

Lors de la détection d'un phénomène particulier, pour une vitesse de rotation  $\Omega_1$ , on note les mesures associées aux structures considérées et l'on prend une photographie de l'état de l'écoulement.

### b) Estimation de l'erreur sur le nombre de Taylor (Ta)

L'expression du nombre de Taylor est donnée par :

$$Ta = Re \sqrt{\frac{d}{R_1}} \quad (5.9)$$

$$\text{En prenant le logarithme : } \log Ta = \log Re + \log \sqrt{\frac{d}{R_1}} \quad (5.10)$$

$$\log Ta = \log Re + \frac{1}{2} \log(d) - \frac{1}{2} \log R_1 \quad (5.11)$$

On dérive cette expression :

$$\frac{dT_a}{Ta} = \frac{dRe}{Re} + \frac{1}{2} \frac{d(d)}{d} - \frac{1}{2} \frac{d(R_1)}{R_1} \quad (5.12)$$

L'évaluation physique permet d'admettre l'approximation  $dTa \approx \Delta Ta$

D'où :

$$\frac{\Delta Ta}{Ta} = \frac{\Delta Re}{Re} + \frac{1}{2} \frac{\Delta d}{d} + \frac{1}{2} \frac{\Delta R_1}{R_1} \quad (5.13)$$

$$\frac{\Delta Ta}{Ta} = \frac{\Delta Re}{Re} + \frac{1}{2} \left( \frac{\Delta d}{d} + \frac{\Delta R_1}{R_1} \right) \quad (5.14)$$

$$\text{Avec : } Re = \frac{V_1 d}{\nu} = \frac{\Omega_1 R_1 d}{\nu}$$

On procède de la même manière que précédemment pour Re, on obtient :

$$\frac{\Delta Re}{Re} = \frac{\Delta R_1}{R_1} + \frac{\Delta \Omega_1}{\Omega_1} + \frac{\Delta \nu}{\nu} + \frac{\Delta d}{d} \quad (5.15)$$

$$\text{Comme : } \Omega_1 = 2\pi N, \text{ on a : } \frac{\Delta \Omega_1}{\Omega_1} = \frac{\Delta N}{N} \quad (5.16)$$

$$\frac{\Delta Re}{Re} = \frac{\Delta N}{N} + \frac{\Delta \nu}{\nu} + \frac{\Delta R_1}{R_1} + \frac{\Delta d}{d} \quad (5.17)$$

Et donc :

$$\frac{\Delta Ta}{Ta} = \frac{\Delta N}{N} + \frac{\Delta \nu}{\nu} + \frac{3}{2} \left( \frac{\Delta R_1}{R_1} + \frac{\Delta d}{d} \right) \quad (5.18)$$

$$\text{on a:} \quad \frac{\Delta d}{d} = \frac{\Delta R_1}{R_1} + \frac{\Delta R_2}{R_2} \quad \text{et} \quad \frac{\Delta R_1}{R_1} = \frac{\Delta R_2}{R_2} \quad (5.19)$$

$$\text{donc :} \quad \frac{\Delta d}{d} = 2 \frac{\Delta R_1}{R_1} \quad (5.20)$$

Par conséquent :

$$\frac{\Delta Ta}{Ta} = \frac{\Delta N}{N} + \frac{\Delta \nu}{\nu} + \frac{3}{2} \left( 3 \frac{\Delta R_1}{R_1} \right) \quad (5.21)$$

$$\frac{\Delta Ta}{Ta} = \frac{\Delta N}{N} + \frac{\Delta \nu}{\nu} + \frac{9}{2} \frac{\Delta R_1}{R_1} \quad (5.22)$$

$$\text{En pratique, on mesure :} \quad \frac{\Delta N}{N} = 1\% \quad , \quad \frac{\Delta \nu}{\nu} = 2\% \quad \text{et} \quad \frac{\Delta R_1}{R_1} = \frac{\Delta R_2}{R_2} = 0.5\% \quad (5.23)$$

L'estimation globale de l'erreur systématique correspond exactement à l'indétermination sur l'évaluation de Ta, qui est alors :  $\frac{\Delta Ta}{Ta} = 3.75\% \approx 4\%$  (5.24)

Au passage, on note que l'incertitude sur le nombre de Reynolds est également proche du nombre de Ta et l'on évalue :  $\frac{\Delta Re}{Re} = 4.5\%$  (5.25)

Ces incertitudes sont acceptables dans les conditions de travail ainsi réalisées.

### 5.3 Conclusion

Précédemment, on a présenté une description du dispositif expérimental utilisé dans nos essais. Pour examiner l'effet de limitations axiales (effet de bord), on s'est servi d'anneaux de garde fixe et mobile. En outre, on a présenté la méthode de visualisation qui s'appuie sur le fluide en présence de la suspension compatible avec la technique optique utilisée par réflexion de la lumière.

A la lumière de la caractérisation rhéologique du fluide de travail en présence de la suspension, on a pu constater que le comportement rhéologique du fluide chargé de la suspension dans l'intervalle des concentrations considérées est de type viscoplastique qui est décrit par le modèle de Herschel Bulkley. Par ailleurs, l'examen de l'effet de la température sur la viscosité a permis de montrer que la viscosité suit une loi exponentielle décroissante en fonction de la température.

## **Chapitre 6**

**Mise en évidence et caractérisation des instabilités  
dans le système d'écoulement de Taylor-Dean d'un  
fluide à seuil d'écoulement**



## Mise en évidence et caractérisation des instabilités dans le système d'écoulement de Taylor-Dean d'un fluide à seuil d'écoulement

### Introduction

L'étude de la stabilité de l'écoulement de Taylor-Dean d'un fluide complexe est importante en vue de montrer si la présence d'une solution additive donnée dans l'eau contribue à stabiliser ou à déstabiliser l'écoulement. Dans ce domaine, la majorité des travaux est consacré à des solutions polymériques qui présentent un comportement viscoélastique.

Dans ces fluides, les deux constituants (solide et liquide) n'existent pas séparément. Ils forment un fluide relativement homogène, dont les équations constitutives peuvent être construites à partir d'une théorie microscopique ou d'une théorie des réseaux en fonction d'une concentration donnée du polymère. La présence de particules solides macroscopiques dans un liquide, constitue un autre objectif qui se rencontre dans plusieurs processus industriels telle que la fabrication du papier, traitement des eaux, les industries alimentaire et pharmaceutique (Ould Elaya et al, 2007 ; Loret et al, 2007). En fait, il diffère des solutions monophasiques car le milieu est le siège d'interactions entre ces différentes composantes et selon la nature, concentration relative et dimensions de particules, la suspension présente un comportement rhéologique qui peut être obtenue par rhéométrie ou par modélisation.

Dans le présent travail, on s'intéresse essentiellement à la stabilité de l'écoulement de Taylor-Dean soumise à l'influence d'une suspension de disques solides dans un liquide binaire (mélange de Simili et de Chellala M). Le protocole expérimental et la caractérisation de la suspension est étudié. Le comportement rhéologique de la suspension est viscoplastique et obéit au modèle de Herschel Bulkely (Watson, 2004 ; Loret, 2006).

Dans ce qui suit, on présente la caractérisation de l'apparition des instabilités de ce type de mouvement pour différents rapports d'aspect radial du système d'écoulement et pour

différentes concentrations de la suspension. Aussi, on examine l'effet de limitations axiales (effets de bord) sur l'apparition des instabilités dans le système d'écoulement de Taylor-Dean.

### 6.1 Apparition des instabilités

L'écoulement est laminaire pour les faibles vitesses de rotation du cylindre intérieur tournant. Les lignes de courant sont des cercles concentriques. Le régime d'écoulement est de type Couette circulaire, le fluide est entraîné de la région d'entrée à la région de sortie comme il est décrit par Chen et al (1990). A partir de cet écoulement de base, on fait varier la vitesse angulaire du cylindre intérieur quasi-statiquement dans l'intervalle considéré  $1.98 \text{ rad/s} \leq \Omega_1 \leq 8.09 \text{ rad/s}$  avec un pas  $\Delta\Omega_1$  tel que  $\frac{\Delta\Omega_1}{\Omega_1} \leq 0.01$  et on caractérise les phénomènes apparaissant dans le système d'écoulement par rapport au facteur d'aspect radial ou la concentration des particules.

On tient compte de la forme des particules pour effectuer des mesures précises du champ des vitesses, comme la position axiale des vitesses maximales correspond aux disques perpendiculaires à l'écoulement, alors que les vitesses minimales correspondent aux disques parallèles à l'écoulement. Pour une valeur donnée du facteur d'aspect radial  $\Gamma'$  et de la concentration  $C$ , le paramètre de contrôle de l'écoulement est le nombre de Taylor défini par :

$$Ta = \frac{\Omega_1 R_1 d}{\nu} \sqrt{\frac{d}{R_1}} \quad (6.1)$$

Avec :  $\nu$  est la viscosité dynamique de la suspension.

La valeur critique de  $Ta$  caractérisant l'apparition de l'instabilité dans le système d'écoulement est obtenue en utilisant la relation (6.1) pour une configuration d'écoulement donnée.

Le nombre de Taylor est proportionnel au nombre de Reynolds

$$Re = \frac{\Omega_1 R_1 (R_2 - R_1)}{\nu} \quad (6.2)$$

Selon la formule suivante :

$$Ta = Re \sqrt{\frac{(R_2 - R_1)}{R_1}} \quad (6.3)$$

### 6.1.1 Coefficient de dispersion

La précision entre les valeurs expérimentales et les valeurs théoriques de la fonction de corrélation est donnée par le calcul du coefficient de dispersion :

$$D\% = \frac{1}{N} \left( \sum_{i=1}^N \left( \frac{Ta_{c_{exp}} - Ta_{c_{thé}}}{Ta_{c_{exp}}} \right)^2 \right)^{\frac{1}{2}} \cdot 100 \quad (6.4)$$

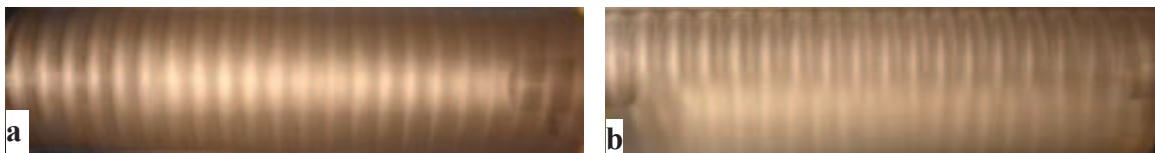
où  $N$  étant le nombre de points expérimentaux.

### 6.1.2 Effet du facteur d'aspect radial $\Gamma'$

Pour une concentration donnée dans l'intervalle étudié, la nature des structures apparaissant dans le système d'écoulement dépend de la variation du rapport d'aspect radial.

a)  $10.16 \leq \Gamma' \leq 10.44$  : le mouvement secondaire qui en résulte est la somme de l'écoulement de Couette de base et un écoulement de type vortex de Taylor stationnaire (Taylor, 1923). L'écoulement développe des cellules contrarotatives toroïdales adjacentes périodiquement espacées le long de l'axe des cylindres qui est superposé à l'écoulement de Couette de base (figure 6.1.a) ; le fluide est entraîné de la région d'entrée à la région de sortie. Cette instabilité est similaire à celle observée dans un système fermé.

b)  $9.85 \leq \Gamma' \leq 10.16$  : l'instabilité observée à la région de sortie est de type cellules d'ourlet (Necking Cell) (figure 6.1.b). La rotation du cylindre intérieur entraîne les couches adjacentes du fluide vers la surface libre, ce qui induit un gradient de pression dans la direction azimutale et donc le fluide recircule dans la région du volume intérieur induisant la formation des cellules d'ourlet (necking cell). Ce type d'instabilité a été obtenu expérimentalement et numériquement par Chen et al (1990) et aussi expérimentalement et numériquement par Ait Aider et al (2005 ; 2008).



**Figure 6.1:** (a) Cellules de Taylor  
 $\Gamma' = 10.16$ ,  $Ta_c = 90$ ,  $C = 0.2\%$   
 $Re_c = 185.68$

(b) cellules d'ourlet  
 $\Gamma' = 9.99$ ,  $Ta_c = 138$ ,  $C = 0.2\%$   
 $Re_c = 283.46$

c)  $8.22 \leq \Gamma' < 9.85$  : On observe le déclenchement d'une source d'instabilité, pour  $\Gamma'_c = 9,65$ , située au voisinage de la région de sortie au niveau de l'extrémité du système

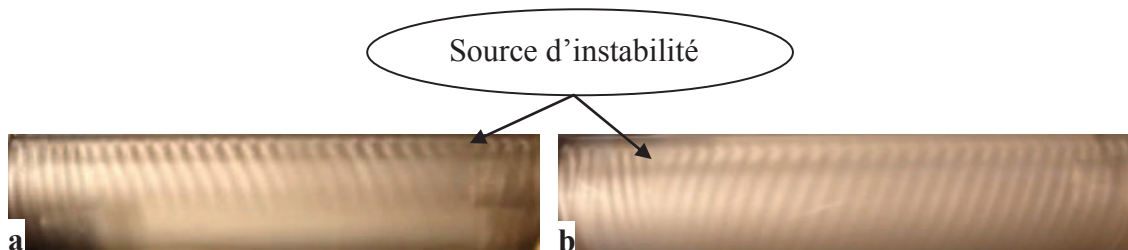
d'écoulement générant ainsi des rouleaux propagatifs inclinés se déplaçant vers le milieu du système d'écoulement (figure 6.2). L'apparition de la source d'instabilité et les ondes de Taylor-Dean résulte de la compétition entre les instabilités centrifuges de l'écoulement de Couette tangentiel et de l'écoulement de Poiseuille axial.

De plus, on note la coexistence d'une instabilité baroclinique dans la région d'entrée, située à l'extrémité du système d'écoulement (figure 6.3). En effet, le fluide est entrainé à l'intérieur du volume suivant un mouvement circulaire autour de l'axe du système, aux extrémités du système par la rotation du cylindre intérieur.

L'apparition de cette instabilité baroclinique est due à la compétition entre les deux effets suivants :

i/ Un gradient de pression interfacial agissant directement sur l'écoulement principal et qui est induit par la surface libre auquel on associe le gradient de densité à l'intérieur du système d'écoulement due à la présence de particules solides dans la suspension.

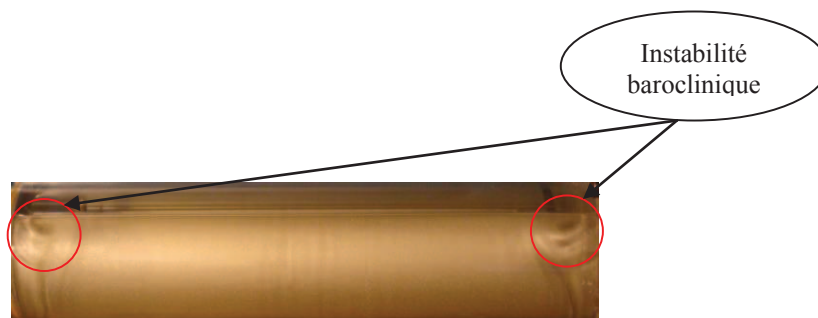
ii/ Le cisaillement due à la rotation du cylindre intérieur.



**Figure 6.2:** Apparition de la source d'instabilité générant des rouleaux propagatifs inclinés

a)  $\Gamma' = 9.22$ ,  $Ta_c = 160$ ,  $C = 0.2\%$   
 $Re_c = 329.35$

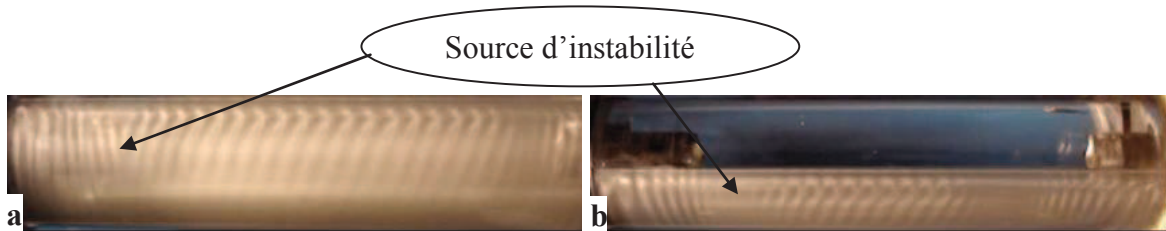
b)  $\Gamma' = 8.63$ ,  $Ta_c = 154$ ,  $C = 0.2\%$   
 $Re_c = 317.07$



**Figure 6.3 :** Apparition de l'instabilité baroclinique dans la région d'entrée au niveau des extrémités du système d'écoulement

$\Gamma' = 9.85$ ,  $Ta_c = 179$ ,  $C = 0.2\%$   
 $Re_c = 368.46$

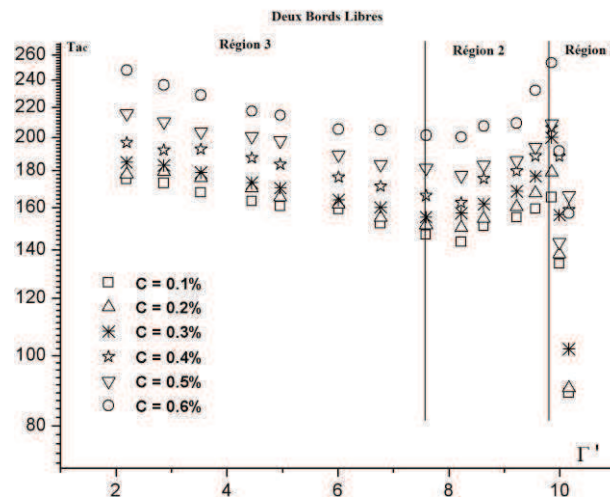
d/  $2.19 \leq \Gamma' < 8.22$  : la source d'instabilité générant des rouleaux propagatifs inclinés apparaît toujours (figure 6.4). Cette source d'instabilité se déplace alternativement de la gauche et de la droite vers la gauche. L'instabilité baroclinique disparaît pour  $\Gamma' \leq 7.82$ . Donc la valeur 7.82 est considérée comme une valeur seuil de l'écoulement pour fournir un cisaillement adéquat pour maintenir l'instabilité baroclinique.



**Figure 6.4.** La source d'instabilité et les rouleaux propagatifs inclinés apparaissent toujours  
 a)  $\Gamma' = 8.22$ ,  $Ta_c = 150$ ,  $C = 0.2 \%$   $Re_c = 308.77$   
 b)  $\Gamma' = 4.45$ ,  $Ta_c = 170$ ,  $C = 0.2 \%$   $Re_c = 349.93$

### 6.1.3 Effet de la concentration des particules

Pour un facteur d'aspect donné, dans l'intervalle étudié, la valeur du nombre de Taylor critique caractérisant l'apparition de l'instabilité dans le système d'écoulement dépend de la concentration des particules. En effet, ces valeurs critiques sont mesurées pour  $0.1 \leq C \leq 0.6$  et trois intervalles peuvent être identifiés suivant une variation non linéaire de  $Ta_c$  en fonction de  $\Gamma'$  comme le montre la figure 6.5.



**Figure 6.5 :** Variation du nombre de Taylor critique en fonction du facteur d'aspect radial  $\Gamma'$  pour les concentrations considérées  $C$  correspondant aux deux bords libres.

L'ajout de particules solides au milieu augmente la viscosité du fluide, induisant une augmentation de la friction interne avec la suspension et par conséquent une augmentation de la valeur critique de Taylor  $Ta_c$  par la concentration des particules solides.

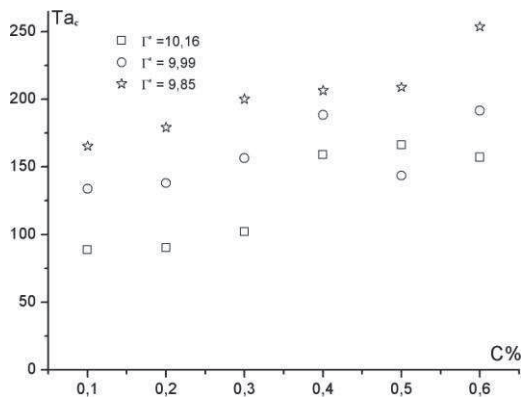
**a) Première région :** la décroissance de  $\Gamma'$  retarde l'apparition de la première instabilité ce qui est indiqué par une augmentation de  $Ta_c$  en fonction de la décroissance du rapport d'aspect  $\Gamma'$ . Ceci indique que la surface libre a un effet stabilisant (figure 6.6).

**b) Deuxième région :**  $Ta$  décroît en fonction de la décroissance de  $\Gamma'$ . Ce décroissance de  $Ta$  indique un effet déstabilisant du système. On note que pour cette région la présence de l'instabilité baroclinique située dans la région d'entrée au niveau des extrémités du système qui peut être responsable de cette déstabilisation (figure 6.7).

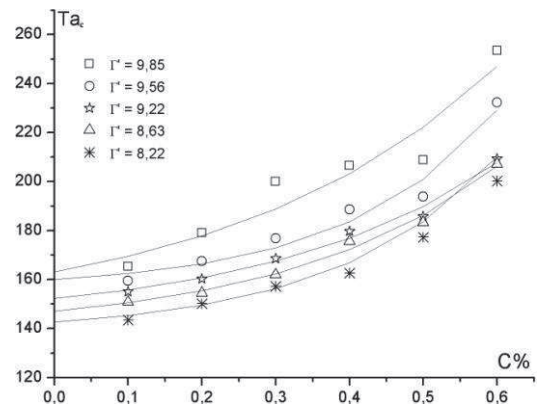
**c) Troisième région :** le rapport d'aspect  $\Gamma'$  prend de faibles valeurs. Une petite quantité du fluide est entraînée par la rotation du cylindre intérieur tournant, et donc l'écoulement devient stable. En effet,  $Ta$  augmente en fonction de la décroissance de  $\Gamma'$ .

Dans cette région l'instabilité baroclinique disparaît. Donc la surface libre a un effet stabilisant ce qui est marqué par l'augmentation des valeurs de  $Ta_c$  (figure 6.8).

De plus, on note une augmentation des valeurs de  $Ta_c$  en fonction de la concentration  $C$  pour tous les valeurs de  $\Gamma'$ .



**Figure 6.6 :** Variation du nombre de Taylor critique en fonction de la concentration  $C$  de particules dans la première région correspondant aux deux bords libres



**Figure 6.7 :** Variation du nombre de Taylor critique en fonction de la concentration  $C$  de particules dans la deuxième région correspondant aux deux bords libres

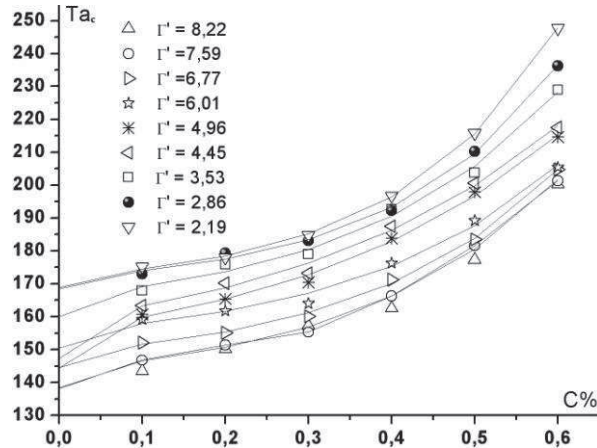


Figure 6.8 : Variation du nombre de Taylor critique en fonction de la concentration C de particules dans la troisième région correspondant aux deux bords libres.

De l'analyse de ces résultats, on peut déduire une loi expérimentale à partir des courbes expérimentales de la forme :  $Ta_c = a + b \exp(C\xi)$ .

Les valeurs des constantes a, b et  $\xi$  sont déterminées par un lissage des courbes expérimentales (tableaux 6.1 et 6.2).

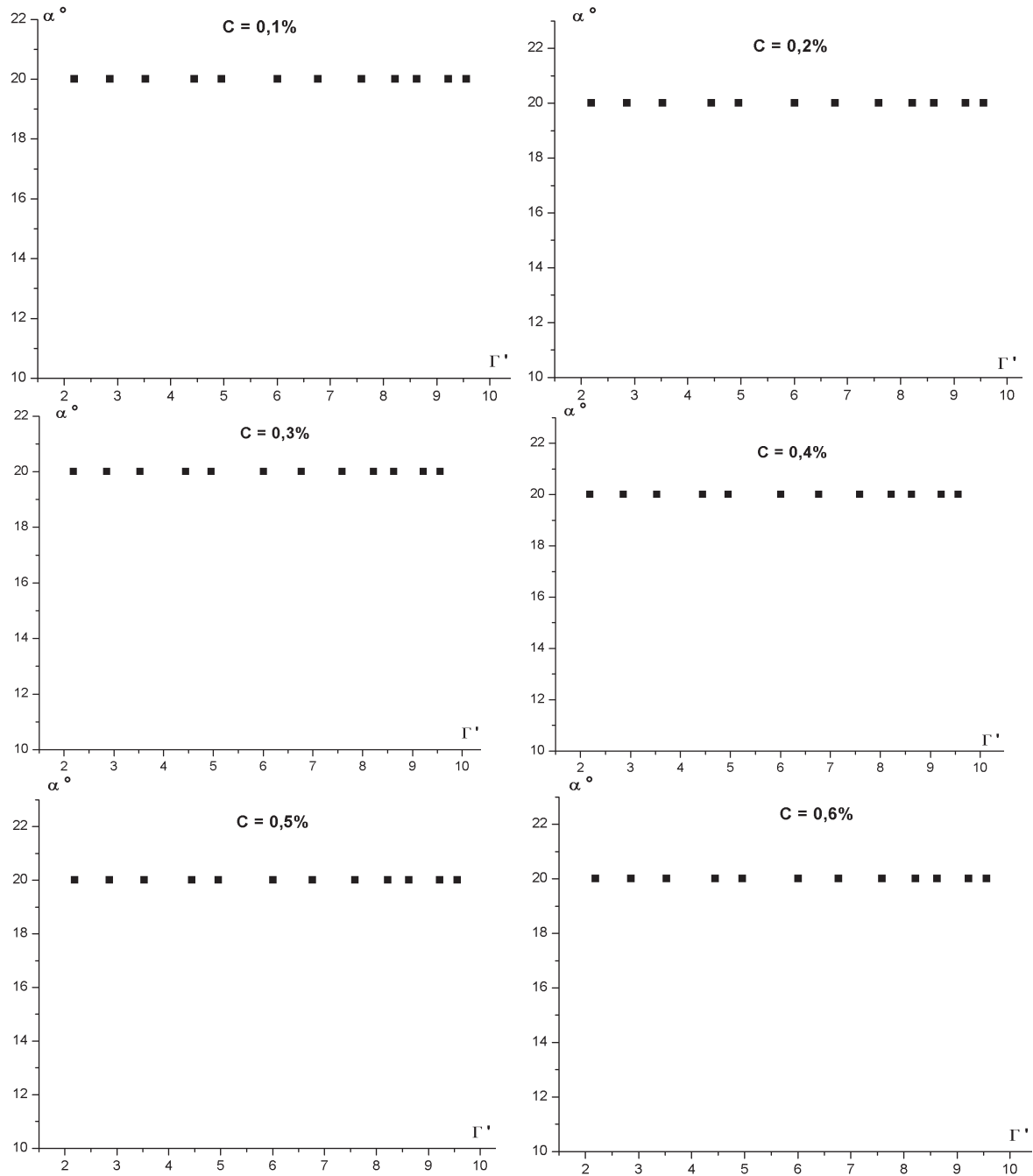
|       | $\Gamma' = 8.63$ | $\Gamma' = 9.22$ | $\Gamma' = 9.56$ | $\Gamma' = 9.85$ |
|-------|------------------|------------------|------------------|------------------|
| a     | 139              | 143              | 156              | 143              |
| b     | 8,09             | 9,27             | 3,92             | 20,20            |
| $\xi$ | 3,53             | 3,24             | 4,88             | 2,73             |
| D %   | 0,417            | 0,501            | 0,911            | 1,573            |

Tableau 6.1 : Détermination des paramètres a, b et  $\xi$  par lissage des valeurs critiques de  $Ta_c$  dans la deuxième région correspondant aux deux bords libres.

|       | $\Gamma' = 2.19$ | $\Gamma' = 2.86$ | $\Gamma' = 3.53$ | $\Gamma' = 4.45$ | $\Gamma' = 4.96$ | $\Gamma' = 6.01$ | $\Gamma' = 6.77$ | $\Gamma' = 7.59$ | $\Gamma' = 8.22$ |
|-------|------------------|------------------|------------------|------------------|------------------|------------------|------------------|------------------|------------------|
| a     | 169              | 168              | 160              | 147              | 144              | 150              | 145              | 138              | 138              |
| b     | 3,38             | 3,29             | 6,10             | 11,83            | 11,34            | 4,97             | 4,60             | 5,43             | 4,59             |
| $\xi$ | 5,25             | 5,04             | 4,02             | 2,97             | 3,05             | 4,02             | 4,28             | 4,09             | 4,33             |
| D %   | 0,1005           | 0,224            | 0,377            | 0,355            | 0,296            | 0,394            | 0,177            | 0,238            | 0,389            |

Tableau 6.2 : Détermination des paramètres a, b et  $\xi$  par lissage des valeurs critiques de  $Ta_c$  dans la troisième région correspondant aux deux bords libres.

## 6.1.4 Angle d'inclinaison des cellules de Taylor-Dean



**Figure 6.9:** Angle d'inclinaison des ondes de T-D en fonction du facteur d'aspect  $\Gamma'$  pour différentes concentrations  $C$  de la suspension correspondant aux deux bords libres.

Il apparait clairement que l'angle d'inclinaison des ondes de T-D par rapport à la verticale est constante ( $\alpha = 20^\circ$ ) et ce quelle que soit la valeur de  $\Gamma'$ .



## 6.2 Effet de limitation axiale (effet de bords)

Dans cette partie, nous allons étudier expérimentalement les effets de bords sur l'apparition des instabilités dans le système de Taylor-Dean, en examinant les combinaisons suivantes entre les bords :

- Deux bords mobiles ;
- Deux bords fixes ;
- Combinaison entre bord mobile et bord fixe ;
- Combinaison entre bord mobile et bord libre ;
- Combinaison entre bord libre et bord fixe.

A notre connaissance, le problème des effets de bords sur l'instabilité de Taylor-Dean n'a pas été examiné auparavant.

### 6.2.1 Deux bords tournants

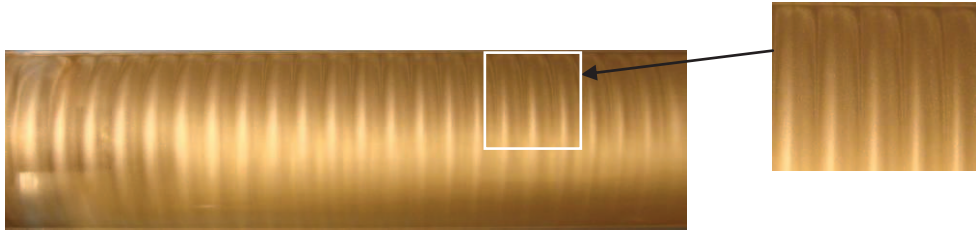
Dans cette section, on s'intéresse aux effets de rotation des deux bords sur l'apparition des instabilités dans le système de Taylor-Dean en fonction de la variation du facteur d'aspect radial  $\Gamma'$ . Les bords tournants sont solidaires du cylindre intérieur tournant comme le montre la figure 5.10 (voir chapitre 5).

#### 6.2.1.1 Effet du facteur d'aspect radial

Les résultats établis montrent que la forme de structures qui apparaissent dans le système d'écoulement dépend de la variation du facteur d'aspect radial  $\Gamma'$ . On a identifié trois régions distinctes:

- a)  $10.16 \leq \Gamma' \leq 10.44$  : on observe que l'instabilité qui se met en place dans cette région est de type vortex de Taylor stationnaire similaire à celle observée dans un système fermé (Bulkhalter et Koschmeider 1973).
- b)  $9.85 < \Gamma' \leq 10.16$  : on constate que la structure de l'écoulement qui s'est développée dans la région de sortie correspond à une instabilité de type necking cell (figure 6.10). Le liquide est entraîné par la rotation du cylindre intérieur vers la surface libre ce qui induit un gradient de pression dans la direction azimutale et, donc le liquide s'écoule vers l'intérieur du volume liquide formant ainsi les cellules d'Ourlet (Necking cell). Ce type

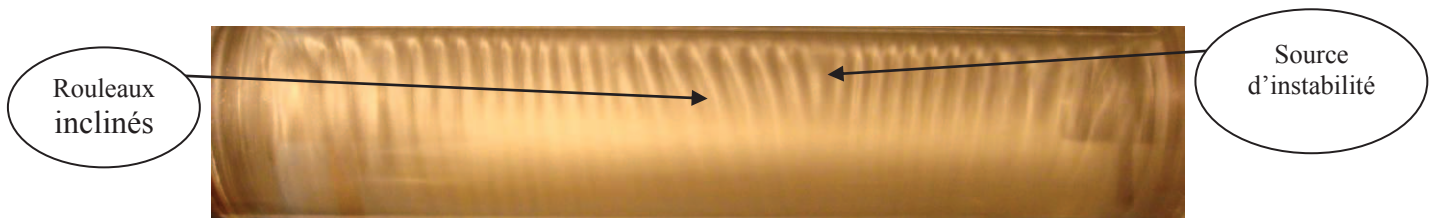
d'instabilité a été observé expérimentalement et numériquement par Chen et al (1990), puis également par Ait Aider et al (2005 ; 2008).



**Figure 6.10:** Cellule d'Ourlet (Necking cell)

$$\Gamma' = 9.99, Ta_c = 138, Re_c = 284.27, C = 0.2\%$$

- c)  $2.19 < \Gamma' < 9.85$  : on note l'apparition de rouleaux inclinés instationnaires, appelés ondes de Taylor-Dean, générée par une source d'instabilité localisé dans la région de sortie du système d'écoulement (figure 6.11). Le déclenchement de l'instabilité de Taylor-Dean devient marquée pour  $\Gamma'_c = 9,65$ . Ce type d'instabilité résulte de la compétition entre les instabilités centrifuges de l'écoulement de Couette et l'écoulement de Poiseuille (Mutabazi, 1995).

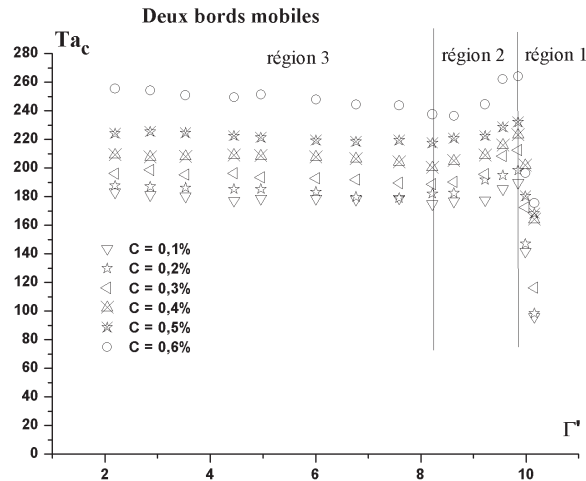


**Figure 6.11:** Instabilité de Taylor-Dean

$$\Gamma' = 8.22, Ta_c = 168.7, Re_c = 346.62, C = 0.2\%$$

### 6.2.1.2 Effet de la concentration de la suspension

Ici, on analyse l'effet de la concentration d'une suspension sur l'apparition des instabilités pour un facteur d'aspect  $\Gamma'$ . Les valeurs du nombre de Taylor critique sont mesurées dans l'intervalle de concentration  $0.1\% \leq C \leq 0.6\%$ .



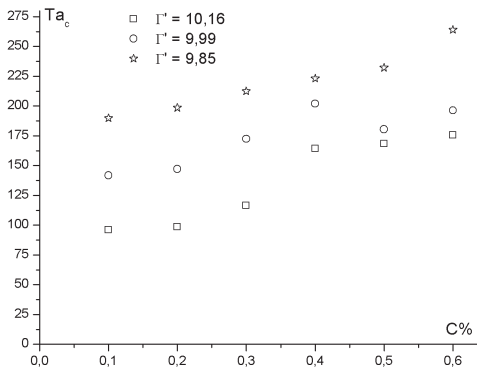
**Figure 6.12 :** Variation du nombre de Taylor critique en fonction du facteur d'aspect radial  $\Gamma'$  pour différentes concentrations  $C$  correspondant aux deux bords mobiles.

Il apparaît clairement que l'apparition des instabilités dans le système de Taylor-Dean dépend de la concentration de particules en suspension. La viscosité du fluide augmente par l'ajout de particules solides, provoquant ainsi une augmentation du cisaillement interne entre les particules conduisant à une augmentation du nombre de Taylor critique  $Ta_c$  par la concentration de la suspension ce qui indique que l'apparition de la première instabilité est retardée par la concentration des particules solides en suspension.

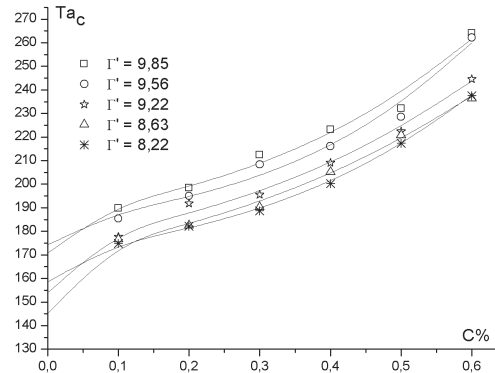
De plus, on note une évolution non linéaire de  $Ta_c$  en fonction du facteur d'aspect radial  $\Gamma'$ , on a identifié trois régions principales (figure 6.12) :

- **Région 1 :** Le nombre de Taylor critique  $Ta_c$  augmente en fonction de la décroissance de  $\Gamma'$ , ce qui indique que le taux de remplissage faible lié à la surface libre a un effet stabilisant.
- **Région 2 :** On note ici, également, une décroissance de  $Ta_c$  en fonction de la décroissance de  $\Gamma'$ . L'évolution de  $Ta_c$  indique un effet stabilisant sur le système d'écoulement. Cette région est une zone intermédiaire qui est marquée par la transition de la forme des instabilités apparaissant dans le système d'écoulement en forme de cellules d'ourlet (Necking Cell) vers la forme en rouleaux instationnaires inclinés (ondes de Taylor-Dean) en fonction de la diminution du facteur d'aspect radial  $\Gamma'$ , ou décroissance de la hauteur du liquide entre les deux cylindres. Cette transition peut être responsable de la déstabilisation de l'écoulement.
- **Région 3 :** Le nombre de Taylor critique varie sensiblement en fonction de la décroissance du facteur d'aspect radial  $\Gamma'$ . Dans cette région, une petite quantité de fluide est entraînée par la rotation du cylindre intérieur, et donc l'écoulement devient stable.

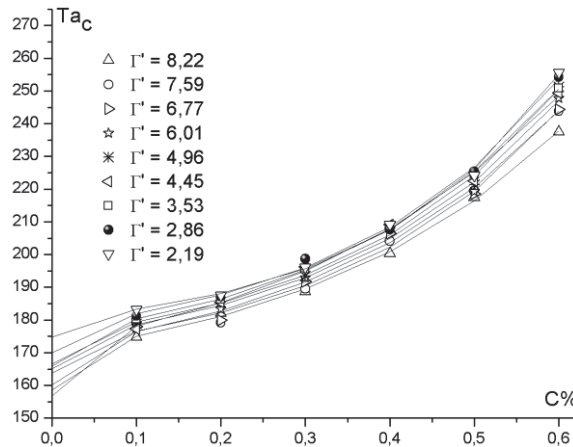
On présente dans ce qui suit la variation de  $Ta_c$  en fonction de  $C$  pour les trois régions considérées.



**Figure 6.13 :** Variation du nombre de Taylor critique en fonction de la concentration  $C$  de particules dans la première région pour deux bords mobiles



**Figure 6.14 :** Variation du nombre de Taylor critique en fonction de la concentration  $C$  de particules dans la deuxième région pour deux bords mobiles



**Figure 6.15 :** Variation du nombre de Taylor critique en fonction de la concentration  $C$  de particules dans la troisième région pour deux bords mobiles

De l'analyse de ces résultats, on peut déduire une loi de comportement à partir des courbes expérimentales de la forme :  $Ta_c = a + b \exp(C\xi)$ .

Les valeurs des constantes  $a$ ,  $b$  et  $\xi$  sont déterminées par un lissage des courbes expérimentales (tableaux 6.3 et 6.4).

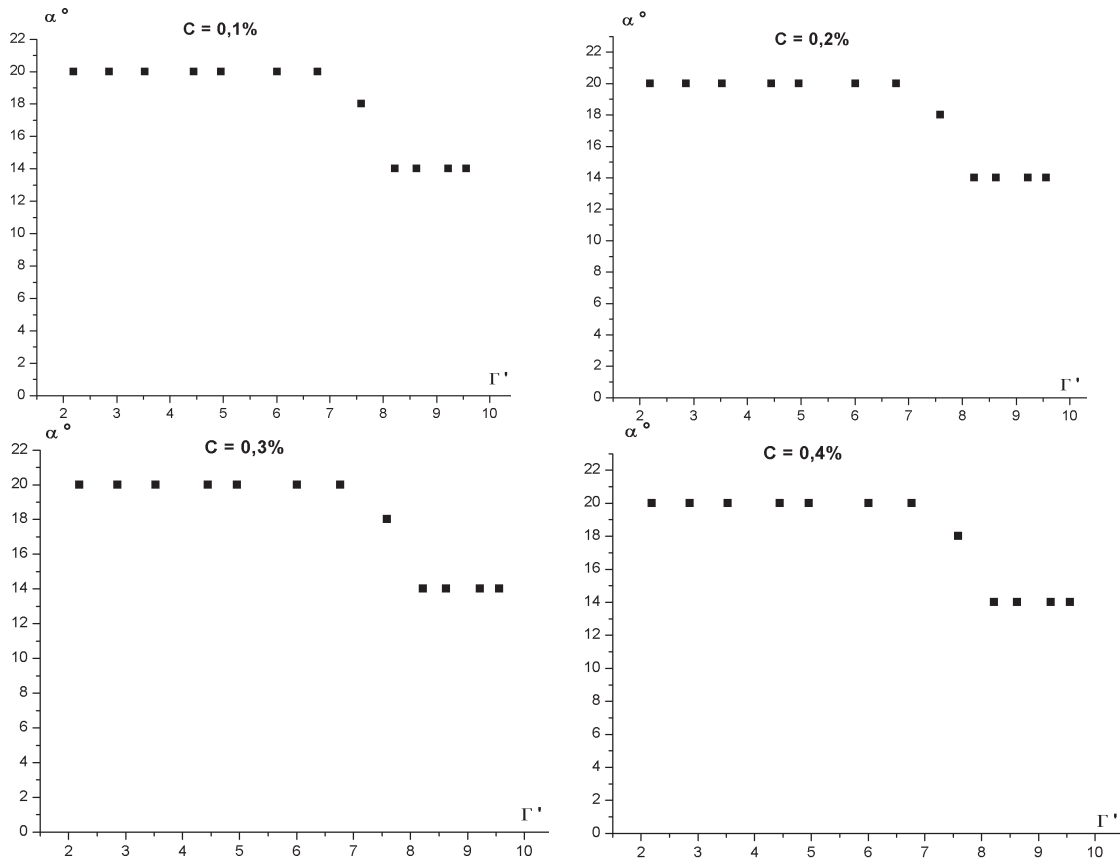
|       | $\Gamma' = 8,63$ | $\Gamma' = 9,22$ | $\Gamma' = 9,56$ | $\Gamma' = 9,85$ |
|-------|------------------|------------------|------------------|------------------|
| $a$   | 145,192          | 153,922          | 174,2847         | 170,8333         |
| $b$   | 24,300           | 20,506           | 9,748            | 15,532           |
| $\xi$ | 2,221            | 2,462            | 3,623            | 2,942            |
| $D\%$ | 0,282            | 0,478            | 0,644            | 0,622            |

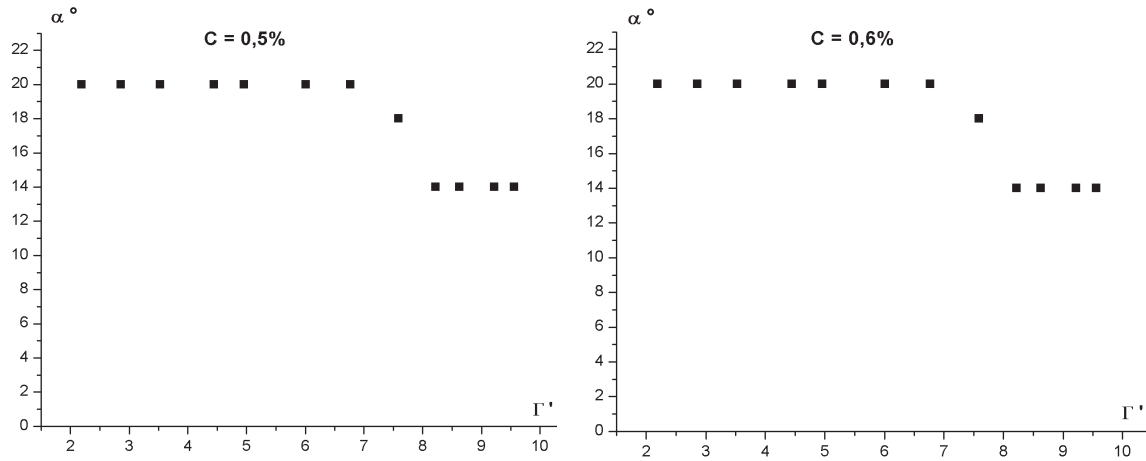
**Tableau 6.3 :** Détermination des paramètres  $a$ ,  $b$  et  $\xi$  par lissage des valeurs critiques de  $Ta_c$  dans la deuxième région correspondant aux deux bords mobiles

|       | $\Gamma' = 2.19$ | $\Gamma' = 2.86$ | $\Gamma' = 3.53$ | $\Gamma' = 4.45$ | $\Gamma' = 4.96$ | $\Gamma' = 6.01$ | $\Gamma' = 6.77$ | $\Gamma' = 7.59$ | $\Gamma' = 8.22$ |
|-------|------------------|------------------|------------------|------------------|------------------|------------------|------------------|------------------|------------------|
| a     | 174,762          | 169,987          | 165,903          | 156,747          | 166,656          | 165,005          | 160,222          | 163,801          | 158,582          |
| b     | 5,470            | 8,093            | 10,117           | 15,956           | 8,695            | 9,450            | 11,729           | 8,838            | 12,020           |
| $\xi$ | 4,477            | 3,894            | 3,542            | 2,914            | 3,776            | 3,600            | 3,275            | 3,678            | 3,142            |
| D%    | 0,203            | 0,267            | 0,077            | 0,272            | 0,294            | 0,341            | 0,411            | 0,398            | 0,148            |

**Tableau 6.4 :** Détermination des paramètres a, b et  $\xi$  par lissage des valeurs critiques de  $Ta_c$  dans la troisième région correspondant aux deux bords mobiles

### 6.2.1.3 Angle d'inclinaison des cellules de Taylor-Dean



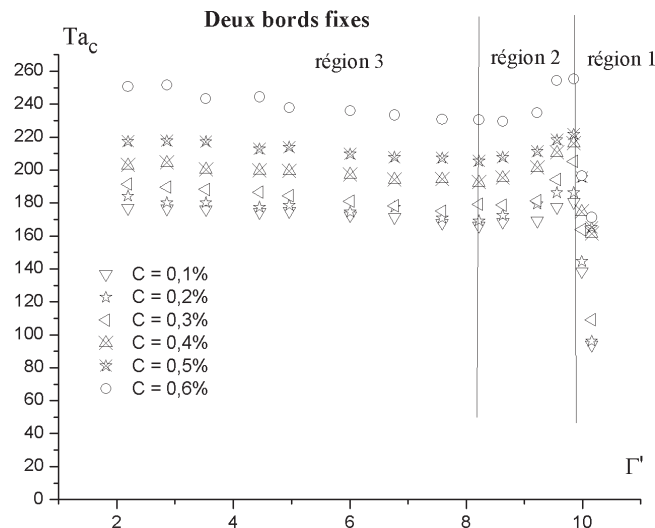


**Figure 6.16:** Angle d'inclinaison des ondes de T-D en fonction du facteur d'aspect  $\Gamma'$  pour différentes concentrations  $C$  de la suspension pour deux bords mobiles.

On remarque que les ondes de Taylor-Dean sont inclinées d'un angle de  $14^\circ$  par rapport à la verticale pour des valeurs de  $\Gamma'$  élevées qui se redressent à  $20^\circ$  par la suite pour des valeurs de  $\Gamma' \leq 6,77$ .

### 6.2.2.1 Cas de deux Bords fixes

Dans cette partie, on examine l'effet des deux bords fixes sur l'apparition des instabilités dans le système d'écoulement de Taylor-Dean.



**Figure 6.17 :** Variation du nombre de Taylor critique en fonction du facteur d'aspect radial  $\Gamma'$  pour différentes concentrations pour deux bords fixes.

Le nombre de Taylor critique  $Ta_c$  caractérisant le seuil d'apparition des instabilités évoluent non linéairement en fonction du facteur d'aspect radial  $\Gamma'$  (figure 6.17).

On subdivise cette évolution en trois régions : dans la première et la deuxième région  $Ta_c$  conserve la même forme d'évolution que dans le cas précédent (cas de deux bords mobiles). Dans la troisième région  $Ta_c$  s'accroît en fonction de la décroissance du facteur d'aspect radial  $\Gamma'$ .

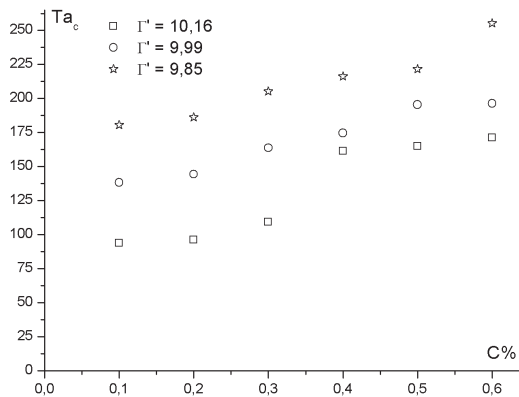


Figure 6.18 : Variation du nombre de Taylor critique en fonction de la concentration C de particules dans la première région pour deux bords fixes

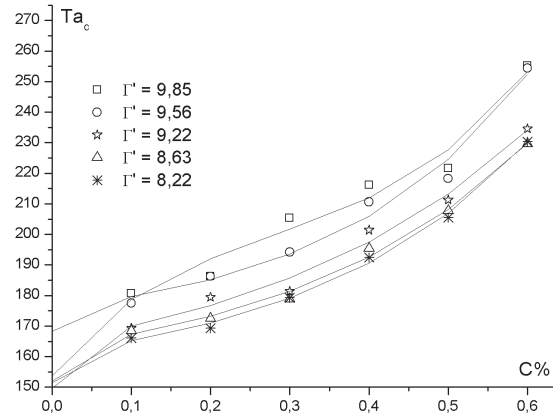


Figure 6.19 : Variation du nombre de Taylor critique en fonction de la concentration C de particules dans la deuxième région pour deux bords fixes

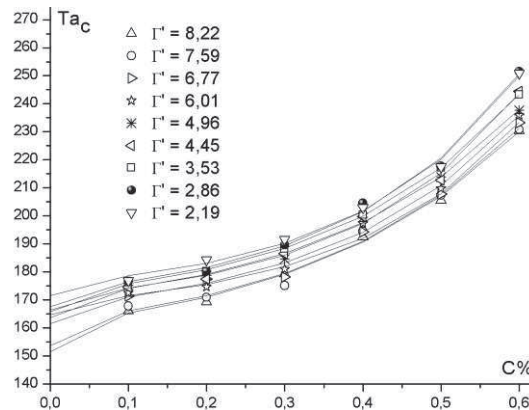


Figure 6.20 : Variation du nombre de Taylor critique en fonction de la concentration C de particules dans la troisième région correspondant aux deux bords fixes

L'analyse des résultats de la deuxième et de la troisième région ci-dessus nous permet de retrouver une évolution exponentielle de la forme :  $Ta_c = a + b \exp(C\xi)$ .

Les valeurs des constantes a, b et  $\xi$  sont déterminées par un lissage des courbes expérimentales (tableaux 6.5 et 6.6).

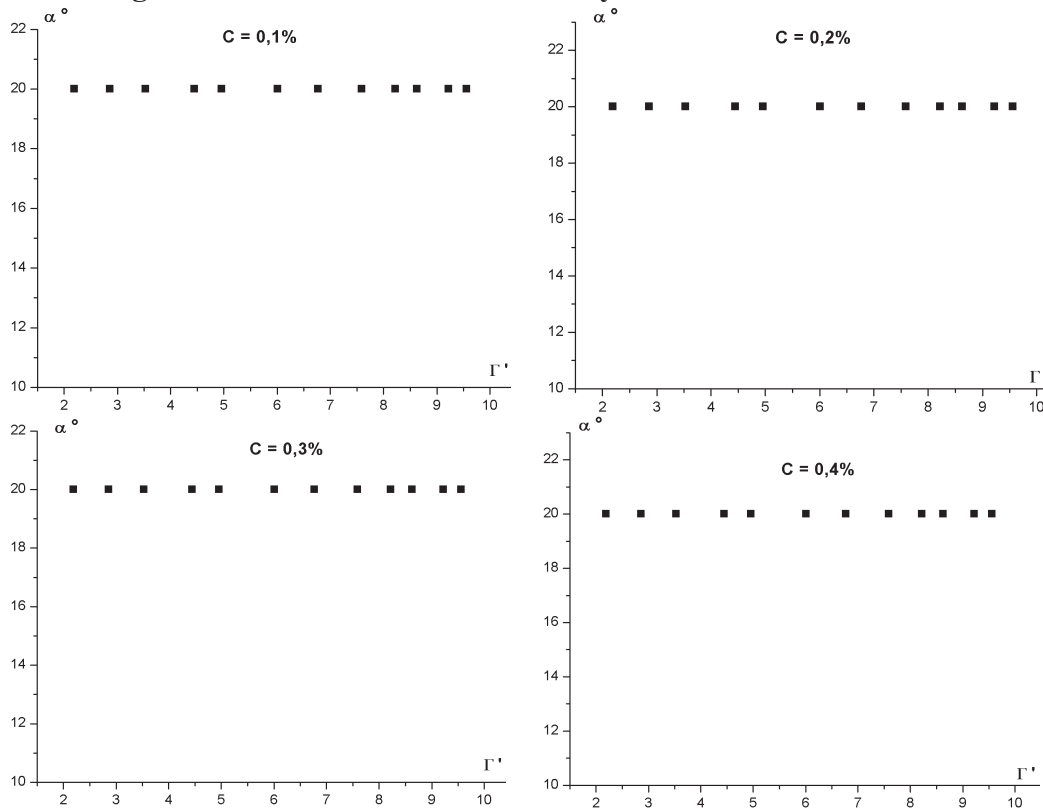
|       | $\Gamma' = 8.63$ | $\Gamma' = 9.22$ | $\Gamma' = 9.56$ | $\Gamma' = 9.85$ |
|-------|------------------|------------------|------------------|------------------|
| a     | 152,034          | 149,67           | 168,290          | 153,66           |
| b     | 11,063           | 15,324           | 7,574            | 21,470           |
| $\xi$ | 3,2492           | 2,845            | 4,0121           | 2,536            |
| D%    | 0,364            | 0,589            | 0,658            | 0,892            |

**Tableau 6.5 :** Détermination des paramètres a, b et  $\xi$  par lissage des valeurs critiques de  $Ta_c$  dans la deuxième région correspondant aux deux bords fixes

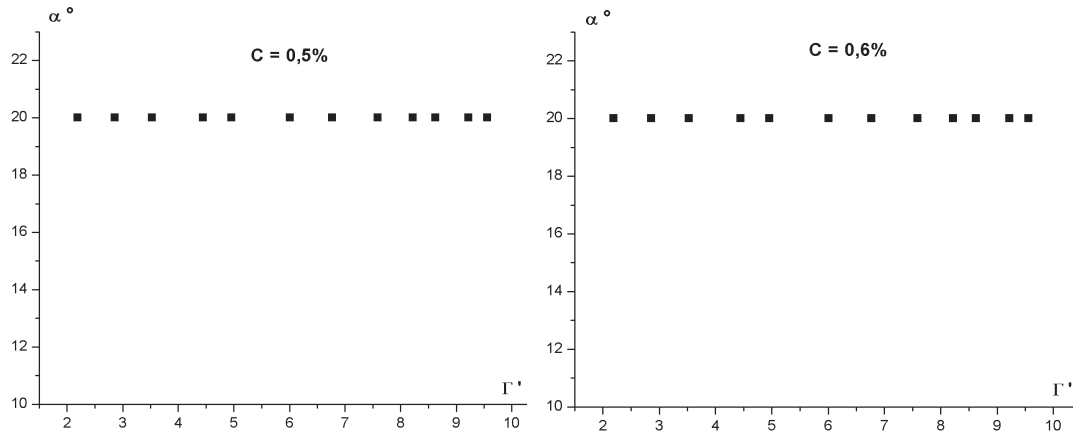
|       | $\Gamma' = 2.19$ | $\Gamma' = 2.86$ | $\Gamma' = 3.53$ | $\Gamma' = 4.45$ | $\Gamma' = 4.96$ | $\Gamma' = 6.01$ | $\Gamma' = 6.77$ | $\Gamma' = 7.59$ | $\Gamma' = 8.22$ |
|-------|------------------|------------------|------------------|------------------|------------------|------------------|------------------|------------------|------------------|
| a     | 171,495          | 167,639          | 165,723          | 166,385          | 163,584          | 161,585          | 164,693          | 153,697          | 151,492          |
| b     | 4,469            | 5,657            | 6,643            | 4,966            | 7,107            | 6,278            | 4,292            | 8,543            | 9,710            |
| $\xi$ | 4,774            | 4,478            | 4,095            | 4,575            | 3,912            | 4,118            | 4,621            | 3,676            | 3,484            |
| D%    | 0,329            | 0,354            | 0,803            | 0,32             | 0,264            | 0,392            | 0,432            | 0,549            | 0,274            |

**Tableau 6.6 :** Détermination des paramètres a, b et  $\xi$  par lissage des valeurs critiques de  $Ta_c$  dans la troisième région correspondant aux deux bords fixes

**6.2.2.2 Angle d'inclinaison des cellules de Taylor-Dean**







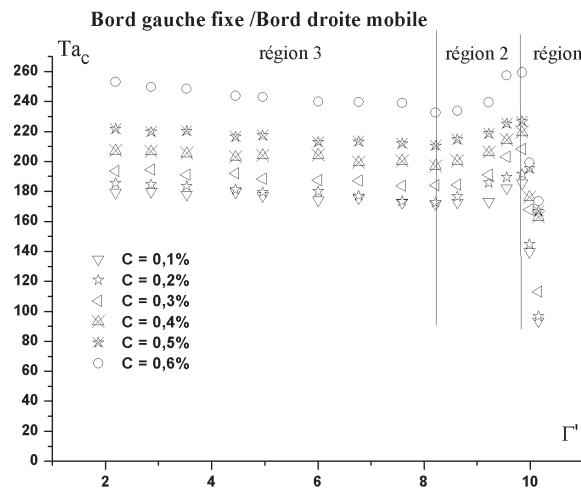
**Figure 6.21:** Angle d'inclinaison des ondes de T-D en fonction du facteur d'aspect  $\Gamma'$  pour différentes concentrations  $C$  de la suspension correspondant aux deux bords fixes

Etant donné les résultats précédents, on remarque que l'angle d'inclinaison des ondes de T-D par rapport à la verticale est constante ( $\alpha = 20^\circ$ ) et ceci, quelle que soit la valeur de  $\Gamma'$ .

### 6.2.3 Combinaison entre Bord fixe et bord mobile

Dans ce qui suit, on présente les résultats liés à la combinaison entre bord gauche fixe et bord droite mobile et inversement c.à.d. entre un bord droite fixe et un bord gauche tournant.

#### a) Bord gauche fixe et bord droite mobile



**Figure 6.22 :** Variation du nombre de Taylor critique  $Ta_c$  en fonction du facteur d'aspect radial  $\Gamma'$  pour différentes concentrations dans le cas d'un bord gauche fixe et un bord droite mobile.

On observe que le nombre de Taylor critique varie non linéairement en fonction du facteur d'aspect radial  $\Gamma'$  (figure 6.13). Cette forme d'évolution est similaire à celle obtenue pour le cas avec deux bords mobiles et aussi pour deux bords fixes.

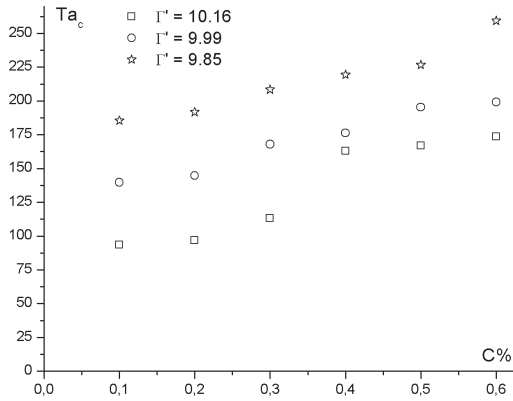


Figure 6.23. Variation du nombre de Taylor critique en fonction de la concentration C de particules dans la première région pour un bord gauche fixe et un bord droite mobile

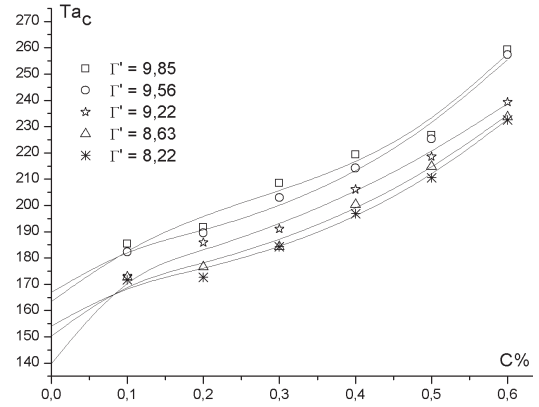


Figure 6.24. Variation du nombre de Taylor critique en fonction de la concentration C de particules dans la deuxième région pour un bord gauche fixe et un bord droite mobile

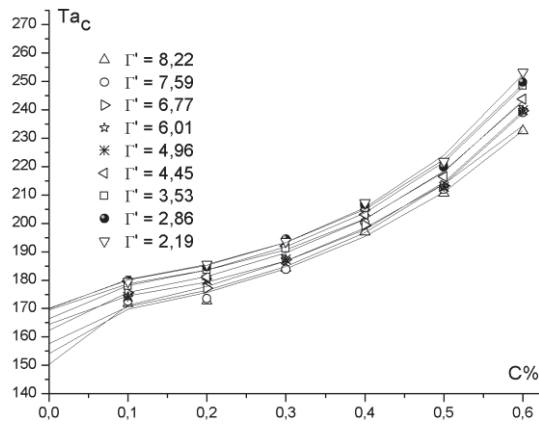


Figure 6.25 : Variation du nombre de Taylor critique en fonction de la concentration C de particules dans la troisième région pour un bord gauche fixe et un bord droite mobile

La forme d'évolution de  $Ta_c$  en fonction de la concentration C dans la deuxième et la troisième région est de forme exponentielle :  $Ta_c = a + b \exp(C\xi)$ .

Les valeurs des constantes a, b et  $\xi$  sont déterminées par un lissage des courbes expérimentales (tableaux 6.7 et 6.8).

|       | $\Gamma' = 8.63$ | $\Gamma' = 9.22$ | $\Gamma' = 9.56$ | $\Gamma' = 9.85$ |
|-------|------------------|------------------|------------------|------------------|
| a     | 150,310          | 139,772          | 166,913          | 163,516          |
| b     | 15,752           | 28,378           | 11,985           | 17,275           |
| $\xi$ | 2,790            | 2,081            | 3,334            | 2,807            |
| D%    | 0,338            | 0,381            | 0,527            | 0,732            |

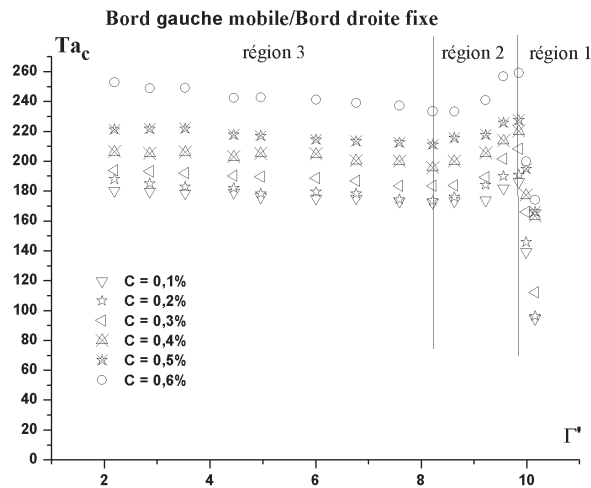
Tableau 6.7 : Détermination des paramètres a, b et  $\xi$  par lissage des valeurs critiques de  $Ta_c$  dans la deuxième région pour un bord gauche fixe et un bord droite mobile.

|       | $\Gamma' = 2.19$ | $\Gamma' = 2.86$ | $\Gamma' = 3.53$ | $\Gamma' = 4.45$ | $\Gamma' = 4.96$ | $\Gamma' = 6.01$ | $\Gamma' = 6.77$ | $\Gamma' = 7.59$ | $\Gamma' = 8.22$ |
|-------|------------------|------------------|------------------|------------------|------------------|------------------|------------------|------------------|------------------|
| a     | 170,083          | 169,913          | 166,492          | 169,492          | 162,330          | 158,718          | 164,524          | 157,568          | 154,130          |
| b     | 6,544            | 6,905            | 7,805            | 6,117            | 9,259            | 11,184           | 6,594            | 9,103            | 11,341           |
| $\xi$ | 4,220            | 4,061            | 3,911            | 4,149            | 3,603            | 3,281            | 4,050            | 3,646            | 3,225            |
| D%    | 0,234            | 0,287            | 0,173            | 0,309            | 0,333            | 0,448            | 0,281            | 0,484            | 0,381            |

**Tableau 6.8 :** Détermination des paramètres a, b et  $\xi$  par lissage des valeurs critiques de  $Ta_c$  dans la deuxième région pour un bord gauche fixe et un bord droite mobile.

**b) Bord gauche mobile et bord droite fixe**

Lorsqu'on inverse les bords entre la gauche et la droite, on observe qu'il n'y a pas d'influence sur le seuil d'apparition des cellules de Taylor-Dean.



**Figure 6.26 :** Variation du nombre de Taylor critique  $Ta_c$  en fonction du facteur d'aspect radial  $\Gamma'$  pour différentes concentrations dans le cas d'un bord gauche mobile et un bord droite fixe.

L'évolution de  $Ta_c$  en fonction de la concentration C dans les trois régions est donnée par les courbes ci-après.

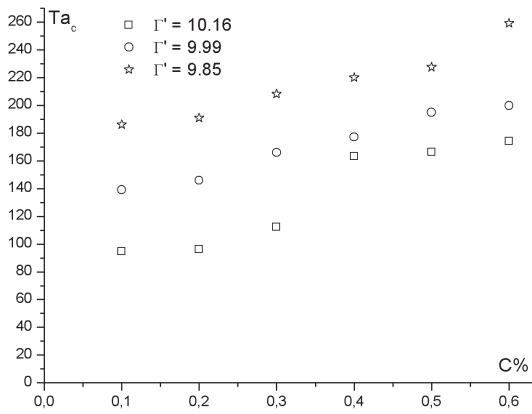


Figure 6.27 : Variation du nombre de Taylor critique en fonction de la concentration C de particules dans la première région pour bord gauche mobile et un bord droite fixe.

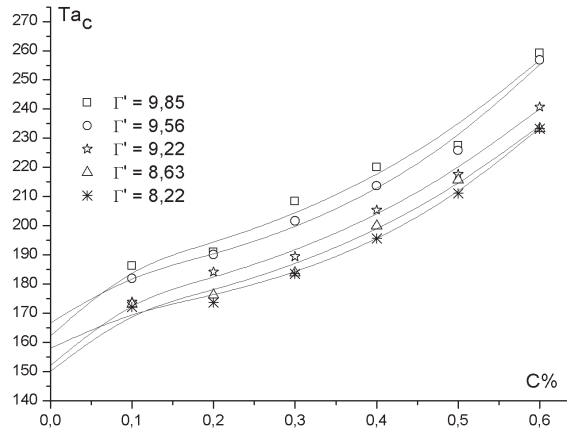


Figure 6.28 : Variation du nombre de Taylor critique en fonction de la concentration C de particules dans la deuxième région pour bord gauche mobile et un bord droite fixe.

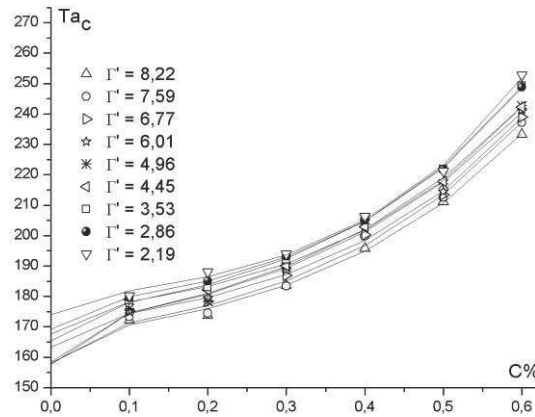


Figure 6.29 : Variation du nombre de Taylor critique en fonction de la concentration C de particules dans la troisième région pour bord gauche mobile et un bord droite fixe.

La forme d'évolution de  $Ta_c$  en fonction de la concentration C dans la deuxième et la troisième région est de forme exponentielle :  $Ta_c = a + b \exp(C\xi)$ .

Les valeurs des constantes a, b et  $\xi$  sont déterminées par un lissage des courbes expérimentales (tableaux 6.9 et 6.10).

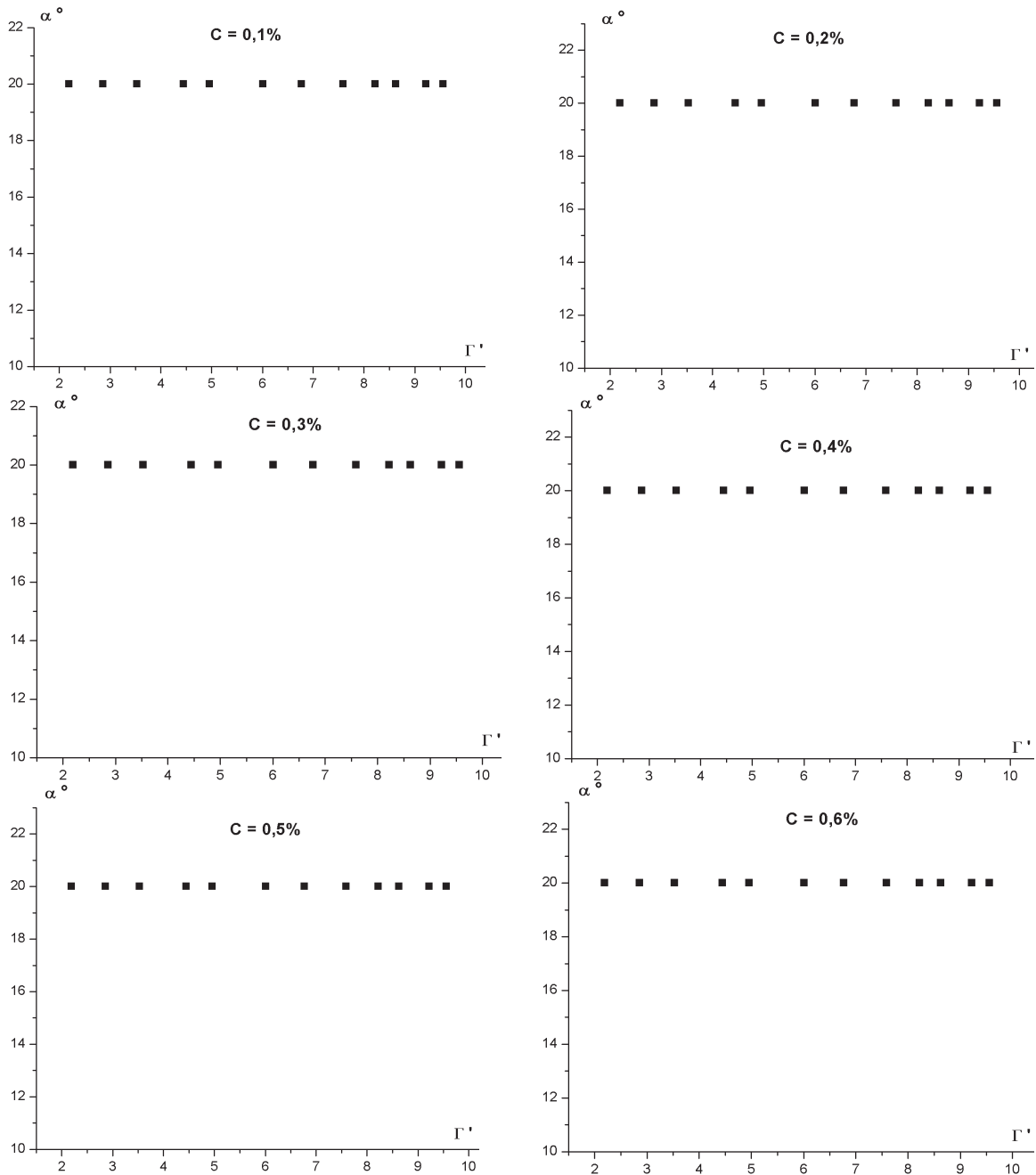
|       | $\Gamma' = 8.63$ | $\Gamma' = 9.22$ | $\Gamma' = 9.56$ | $\Gamma' = 9.85$ |
|-------|------------------|------------------|------------------|------------------|
| a     | 150,177          | 152,104          | 166,712          | 162,309          |
| b     | 15,801           | 17,451           | 11,924           | 18,357           |
| $\xi$ | 2,786            | 2,697            | 3,341            | 2,729            |
| D%    | 0,412            | 0,3479           | 0,428            | 0,712            |

Tableau 6.9 : Détermination des paramètres a, b et  $\xi$  par lissage des valeurs critiques de  $Ta_c$  dans la deuxième région pour un bord gauche mobile et un bord droite fixe.

|       | $\Gamma' = 2.19$ | $\Gamma' = 2.86$ | $\Gamma' = 3.53$ | $\Gamma' = 4.45$ | $\Gamma' = 4.96$ | $\Gamma' = 6.01$ | $\Gamma' = 6.77$ | $\Gamma' = 7.59$ | $\Gamma' = 8.22$ |
|-------|------------------|------------------|------------------|------------------|------------------|------------------|------------------|------------------|------------------|
| a     | 173,927          | 169,278          | 165,402          | 167,718          | 157,526          | 158,449          | 163,355          | 158,002          | 158,060          |
| b     | 5,001            | 7,079            | 8,688            | 7,090            | 12,315           | 11,597           | 7,558            | 9,282            | 8,728            |
| $\xi$ | 4,579            | 4,027            | 3,774            | 3,922            | 3,215            | 3,260            | 3,832            | 3,574            | 3,596            |
| D%    | 0,061            | 0,061            | 0,155            | 0,171            | 0,407            | 0,409            | 0,241            | 0,436            | 0,282            |

**Tableau 6.10** : Détermination des paramètres a, b et  $\xi$  par lissage des valeurs critiques de  $Ta_c$  dans la troisième région pour un bord gauche mobile et un bord droite fixe.

6.2.3.1 Angle d'inclinaison des cellules de Taylor-Dean



**Figure 6.30** : Angle d'inclinaison des ondes de T-D en fonction du facteur d'aspect  $\Gamma'$  pour différentes concentrations  $C$  de la suspension pour bord gauche mobile et un bord droite fixe.

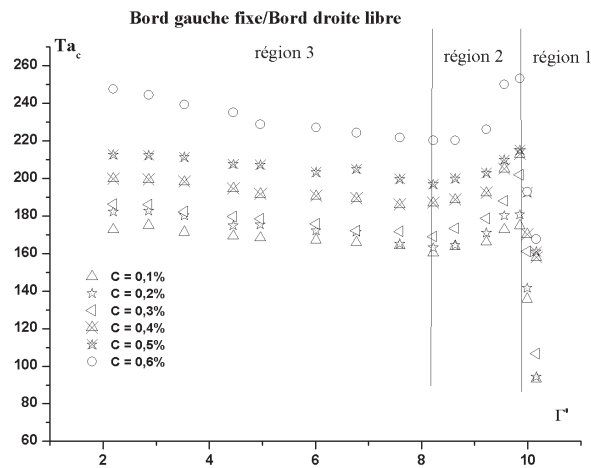
Au vu de ces résultats, on remarque que l'angle d'inclinaison des ondes de T-D par rapport à la verticale est constante ( $\alpha = 20^\circ$ ) et ceci, quelle que soit la valeur de  $\Gamma'$ .

#### 6.2.4. Combinaison entre bord fixe et bord libre

Dans cette partie, on se consacre à l'étude relative à la combinaison entre un bord gauche fixe et un bord droite libre et inversement c.à.d. entre un bord droite fixe et un bord gauche libre.

##### a) Bord gauche fixe et bord droite libre

On présente sur la figure suivante (6.31) la variation de  $Ta_c$  en fonction de  $\Gamma'$  pour différentes concentration  $C$  de la suspension.



**Figure 6.31** : variation du nombre de Taylor critique en fonction du facteur d'aspect radial  $\Gamma'$  pour différentes concentrations pour un bord gauche fixe et un bord droite libre.

On donne sur les figures suivantes la variation de  $Ta_c$  en fonction de la concentration  $C$  de la suspension.

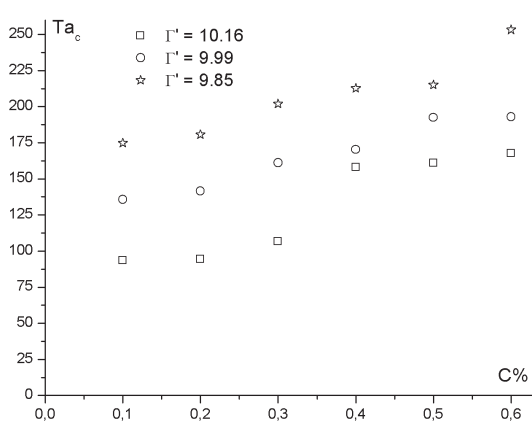


Figure 6.32 : Variation du nombre de Taylor critique en fonction de la concentration C de particules dans la première région pour bord gauche fixe et un bord droite libre

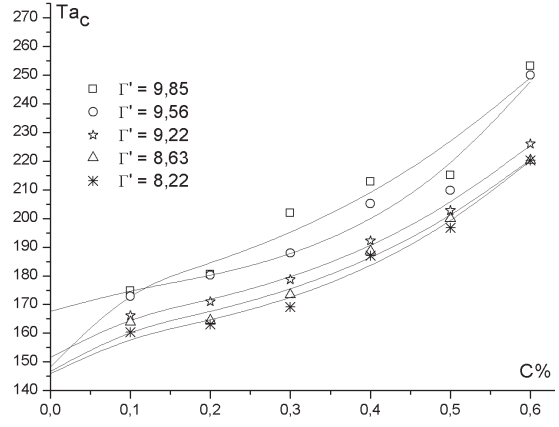


Figure 6.33 : Variation du nombre de Taylor critique en fonction de la concentration C de particules dans la deuxième région pour bord gauche fixe et un bord droite libre

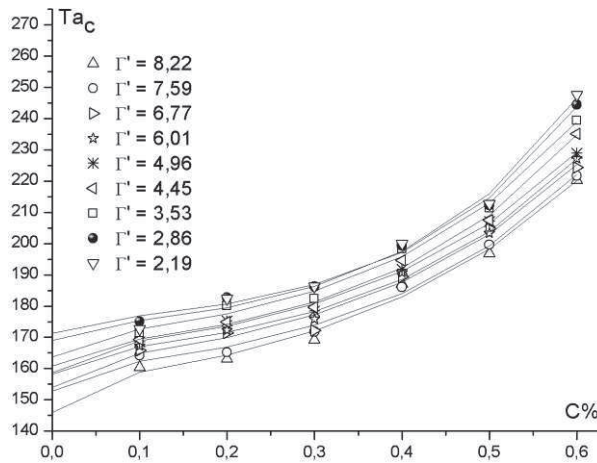


Figure 6.34 : Variation du nombre de Taylor critique en fonction de la concentration C de particules dans la troisième région pour bord gauche fixe et un bord droite libre

Comme précédemment, la forme d'évolution de  $Ta_c$  en fonction de la concentration C dans la deuxième et la troisième région est de forme exponentielle :  $Ta_c = a + b \exp(C\xi)$ .

Les valeurs des constantes a, b et  $\xi$  sont déterminées par un lissage des courbes expérimentales (tableaux 6.11 et 6.12).

|       | $\Gamma' = 8.63$ | $\Gamma' = 9.22$ | $\Gamma' = 9.56$ | $\Gamma' = 9.85$ |
|-------|------------------|------------------|------------------|------------------|
| a     | 146,652          | 151,502          | 167,618          | 148,258          |
| b     | 10,921           | 10,399           | 4,722            | 21,416           |
| $\xi$ | 3,184            | 3,269            | 4,718            | 2,5814           |
| D%    | 0,474            | 0,275            | 0,856            | 1,106            |

Tableau 6.11 : Détermination des paramètres a, b et  $\xi$  par lissage des valeurs critiques de  $Ta_c$  dans la deuxième région pour bord gauche fixe et un bord droite libre.

|       | $\Gamma' = 2.19$ | $\Gamma' = 2.86$ | $\Gamma' = 3.53$ | $\Gamma' = 4.45$ | $\Gamma' = 4.96$ | $\Gamma' = 6.01$ | $\Gamma' = 6.77$ | $\Gamma' = 7.59$ | $\Gamma' = 8.22$ |
|-------|------------------|------------------|------------------|------------------|------------------|------------------|------------------|------------------|------------------|
| a     | 169,061          | 171,329          | 163,672          | 160,801          | 158,644          | 158,246          | 154,046          | 152,859          | 145,915          |
| b     | 3,853            | 3,335            | 5,902            | 5,698            | 6,892            | 5,860            | 7,523            | 6,356            | 9,187            |
| $\xi$ | 5,001            | 5,128            | 4,243            | 4,271            | 3,875            | 4,106            | 3,744            | 3,979            | 3,481            |
| D%    | 0,457            | 0,698            | 0,425            | 0,289            | 0,278            | 0,318            | 0,556            | 0,374            | 0,522            |

Tableau 6.12 : Détermination des paramètres a, b et  $\xi$  par lissage des valeurs critiques de  $Ta_c$  dans la troisième région pour bord gauche fixe et un bord droite libre.

b) Bord gauche libre et bord droite fixe

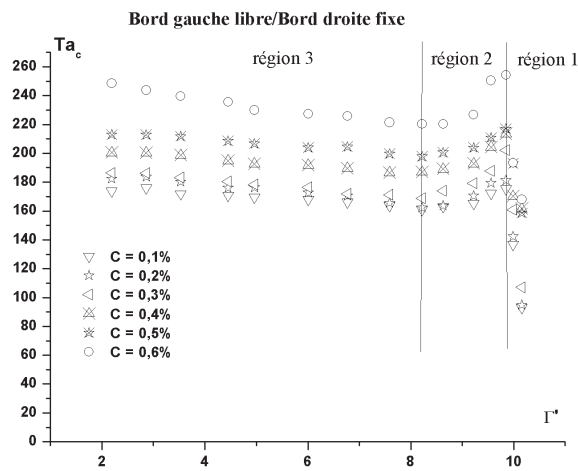


Figure 6.35 : variation du nombre de Taylor critique en fonction du facteur d'aspect radial  $\Gamma'$  pour différentes concentrations pour un bord gauche fixe et un bord droite libre

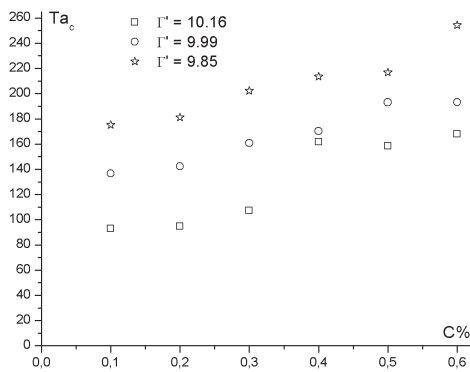


Figure 6.36 : Variation du nombre de Taylor critique en fonction de la concentration C de particules dans la première région pour bord gauche fixe et un bord droite libre

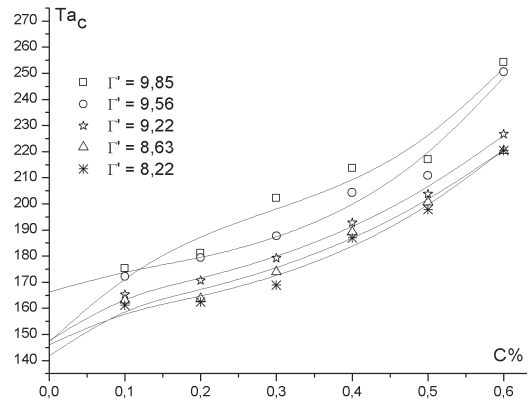
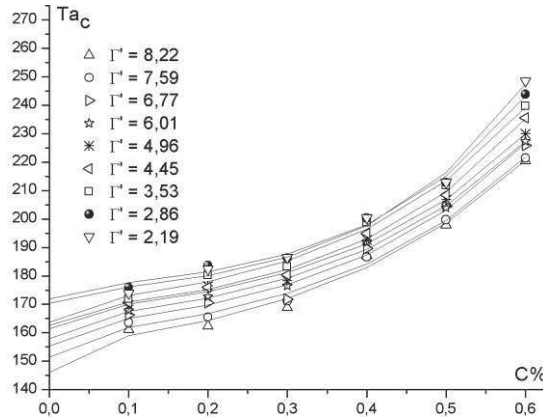


Figure 6.37 : Variation du nombre de Taylor critique en fonction de la concentration C de particules dans la deuxième région pour bord gauche fixe et un bord droite libre





**Figure 6.38 :** Variation du nombre de Taylor critique en fonction de la concentration C de particules dans la troisième région pour bord gauche fixe et un bord droite libre

La forme d'évolution de  $Ta_c$  en fonction de la concentration C dans la deuxième et la troisième région est de forme exponentielle :  $Ta_c = a + b \exp(C\xi)$ .

Les valeurs des constantes a, b et  $\xi$  sont déterminées par un lissage des courbes expérimentales (tableaux 6.13 et 6.14).

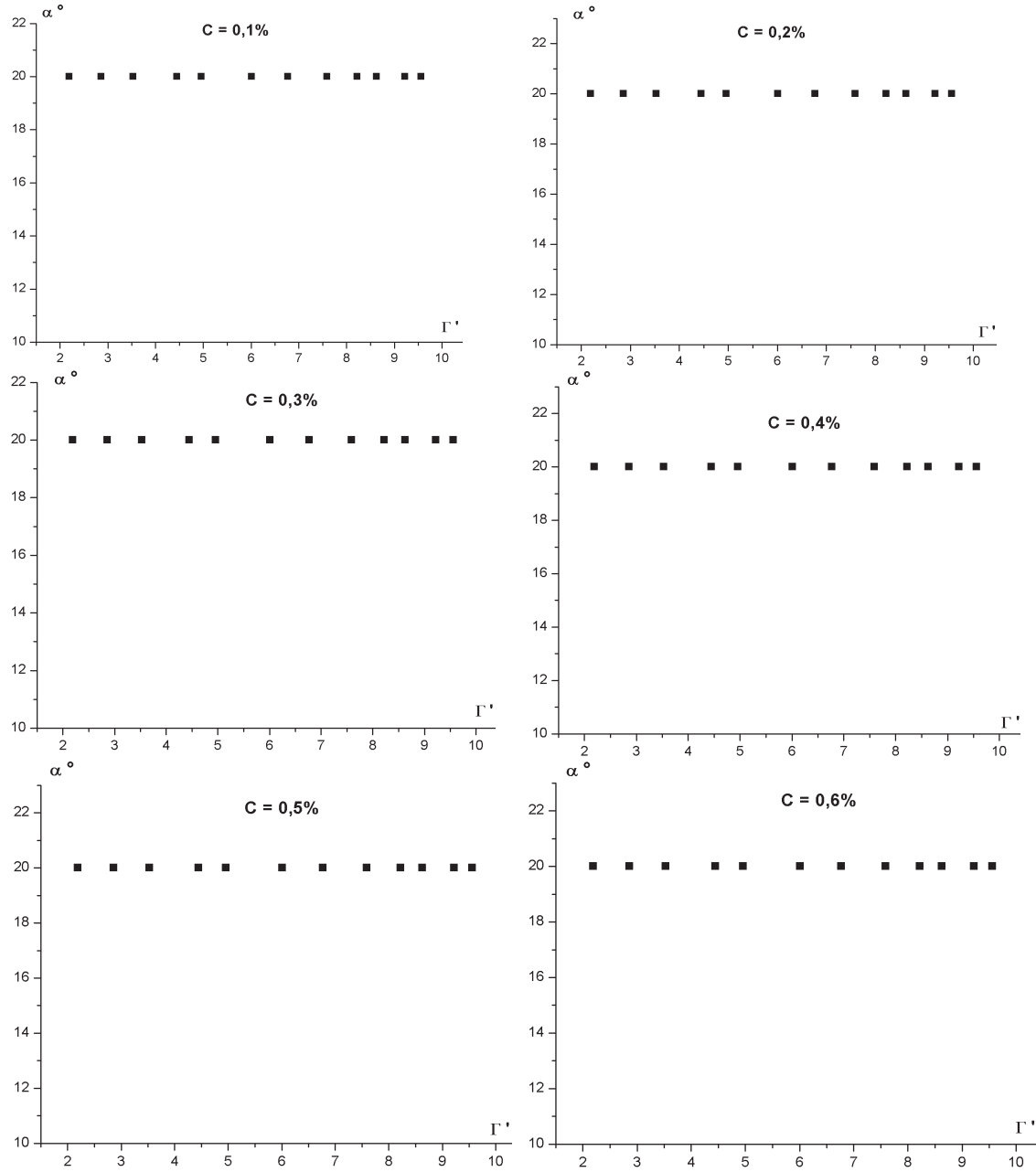
|       | $\Gamma' = 8.63$ | $\Gamma' = 9.22$ | $\Gamma' = 9.56$ | $\Gamma' = 9.85$ |
|-------|------------------|------------------|------------------|------------------|
| a     | 141,778          | 147,632          | 166,246          | 147,251          |
| b     | 14,149           | 12,929           | 5,053            | 22,546           |
| $\xi$ | 2,862            | 3,006            | 4,647            | 2,534            |
| D%    | 0,499            | 0,257            | 0,770            | 1,109            |

**Tableau 6.13 :** Détermination des paramètres a, b et  $\xi$  par lissage des valeurs critiques de  $Ta_c$  dans la deuxième région pour bord gauche fixe et un bord droite libre.

|       | $\Gamma' = 2.19$ | $\Gamma' = 2.86$ | $\Gamma' = 3.53$ | $\Gamma' = 4.45$ | $\Gamma' = 4.96$ | $\Gamma' = 6.01$ | $\Gamma' = 6.77$ | $\Gamma' = 7.59$ | $\Gamma' = 8.22$ |
|-------|------------------|------------------|------------------|------------------|------------------|------------------|------------------|------------------|------------------|
| a     | 170,345          | 171,819          | 163,764          | 162,693          | 161,391          | 157,941          | 155,377          | 151,453          | 146,073          |
| b     | 3,459            | 3,519            | 6,135            | 5,233            | 5,686            | 6,459            | 6,453            | 7,129            | 9,052            |
| $\xi$ | 5,172            | 5,015            | 4,182            | 4,383            | 4,151            | 3,955            | 4,003            | 3,8150           | 3,514            |
| D%    | 0,469            | 0,388            | 0,385            | 0,260            | 0,348            | 0,334            | 0,563            | 0,396            | 0,570            |

**Tableau 6.14 :** Détermination des paramètres a, b et  $\xi$  par lissage des valeurs critiques de  $Ta_c$  dans la troisième région pour bord gauche fixe et un bord droite libre.

## 6.2.4.1 Angle d'inclinaison des cellules de Taylor-Dean



**Figure 6.39 :** Angle d'inclinaison des ondes de T-D en fonction du facteur d'aspect  $\Gamma'$  pour différentes concentrations  $C$  de la suspension pour bord gauche fixe et un bord droite libre.

Tenant compte de ces résultats, on remarque que l'angle d'inclinaison des ondes de T-D par rapport à la verticale est constante ( $\alpha = 20^\circ$ ) et ce, quelle que soit la valeur de  $\Gamma'$ .

6.2.5 Combinaison entre bord mobile et bord libre

Cette partie états des résultats consacrés à l'analyse de l'effet de la combinaison entre un bord gauche mobile et un bord droite libre et inversement c.à.d. la combinaison entre un bord droite mobile et un bord gauche libre.

a) Bord gauche mobile et bord droite libre

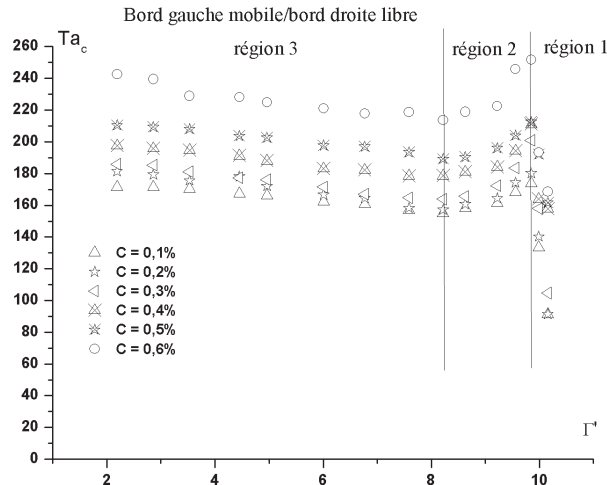


Figure 6.40: variation du nombre de Taylor critique en fonction du facteur d'aspect radial  $\Gamma'$  pour différentes concentrations pour un bord gauche mobile et un bord droite libre.

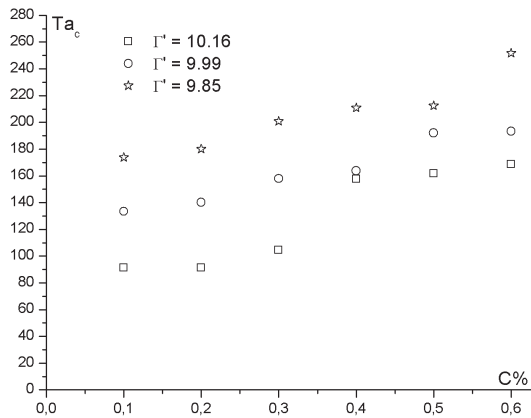


Figure 6.41 : Variation du nombre de Taylor critique en fonction de la concentration C de particules dans la première région pour un bord gauche mobile et un bord droite libre.

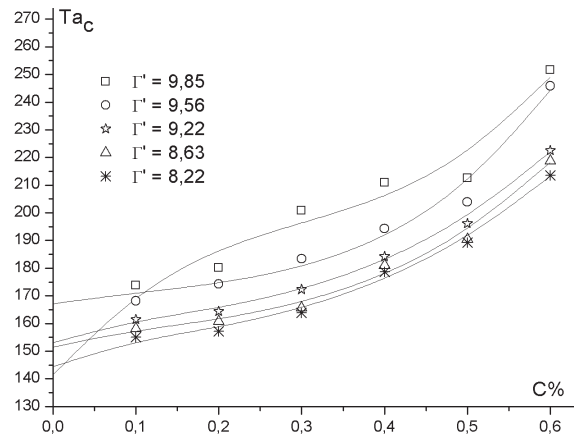


Figure 6.42 : Variation du nombre de Taylor critique en fonction de la concentration C de particules dans la deuxième région pour un bord gauche mobile et un bord droite libre.

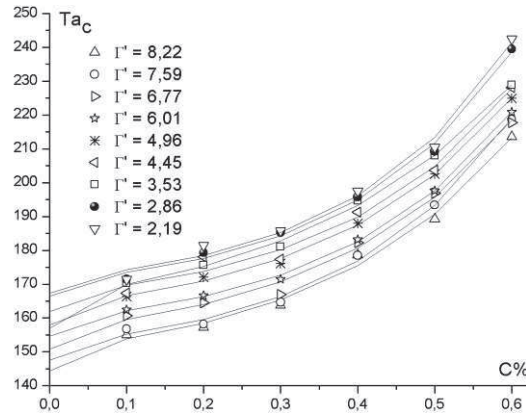


Figure 6.43 : Variation du nombre de Taylor critique en fonction de la concentration C de particules dans la troisième région pour un bord gauche mobile et un bord droit libre.

On retrouve que la forme d'évolution de  $Ta_c$  en fonction de la concentration C dans la deuxième et la troisième région est de forme exponentielle :  $Ta_c = a + b \exp(C\xi)$ .

Les valeurs des constantes a, b et  $\xi$  sont déterminées par un lissage des courbes expérimentales (tableaux 6.15 et 6.16).

|       | $\Gamma' = 8.63$ | $\Gamma' = 9.22$ | $\Gamma' = 9.56$ | $\Gamma' = 9.85$ |
|-------|------------------|------------------|------------------|------------------|
| a     | 151,550          | 153,091          | 167,176          | 152,033          |
| b     | 3,767            | 5,254            | 2,162            | 17,796           |
| $\xi$ | 4,790            | 4,290            | 5,955            | 2,796            |
| D%    | 0,464            | 0,258            | 0,713            | 1,241            |

Tableau 6.15 : Détermination des paramètres a, b et  $\xi$  par lissage des valeurs critiques de  $Ta_c$  dans la deuxième région pour un bord gauche mobile et un bord droit libre.

|       | $\Gamma' = 2.19$ | $\Gamma' = 2.86$ | $\Gamma' = 3.53$ | $\Gamma' = 4.45$ | $\Gamma' = 4.96$ | $\Gamma' = 6.01$ | $\Gamma' = 6.77$ | $\Gamma' = 7.59$ | $\Gamma' = 8.22$ |
|-------|------------------|------------------|------------------|------------------|------------------|------------------|------------------|------------------|------------------|
| a     | 167,358          | 166,520          | 156,931          | 161,905          | 157,934          | 154,593          | 150,773          | 147,550          | 144,422          |
| b     | 4,313            | 4,376            | 9,286            | 5,049            | 5,736            | 4,924            | 5,875            | 4,945            | 6,368            |
| $\xi$ | 4,739            | 4,670            | 3,413            | 4,279            | 4,097            | 4,335            | 4,070            | 4,449            | 3,967            |
| D%    | 0,482            | 0,341            | 0,195            | 0,550            | 0,184            | 0,136            | 0,429            | 0,314            | 0,396            |

Tableau 6.16 : Détermination des paramètres a, b et  $\xi$  par lissage des valeurs critiques de  $Ta_c$  dans la troisième région pour un bord gauche mobile et un bord droit libre.

b) Bord gauche libre et bord droite mobile

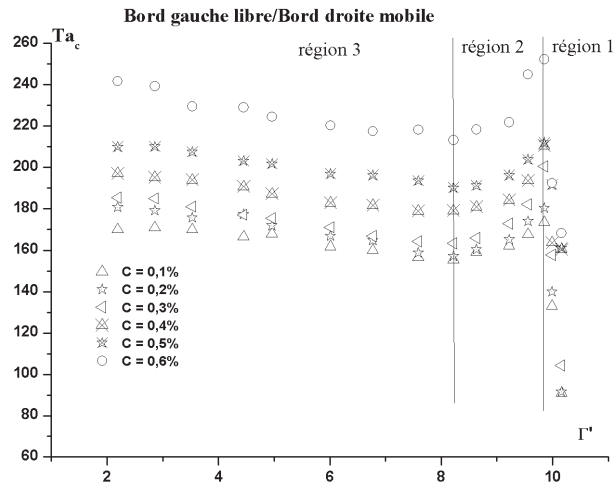


Figure 6.44: Variation du nombre de Taylor critique en fonction du facteur d'aspect radial  $\Gamma'$  pour différentes concentrations pour un bord gauche libre et un bord droite mobile.

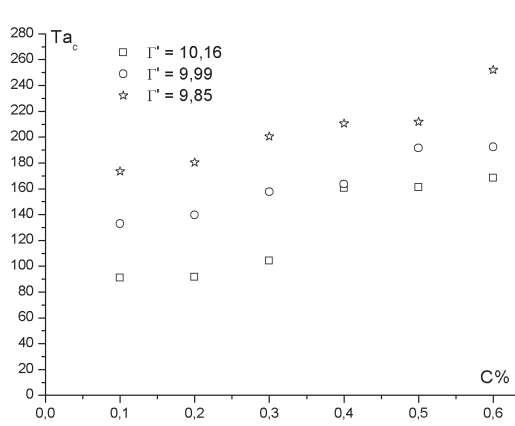


Figure 6.45: Variation du nombre de Taylor critique en fonction de la concentration  $C$  de particules dans la première région pour un bord gauche mobile et un bord droite libre.

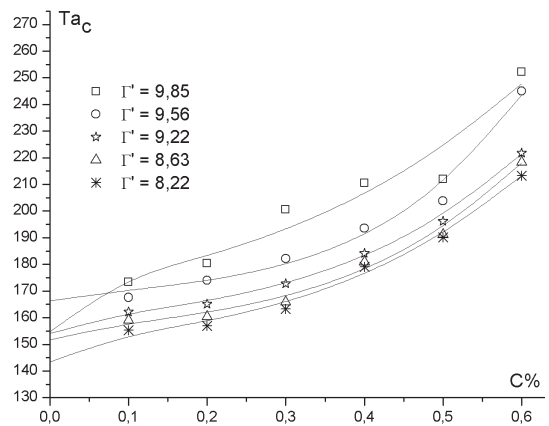


Figure 6.46: Variation du nombre de Taylor critique en fonction de la concentration  $C$  de particules dans la deuxième région pour un bord gauche mobile et un bord droite libre.

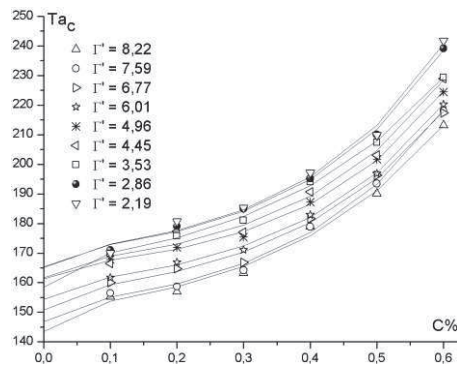


Figure 6.47: Variation du nombre de Taylor critique en fonction de la concentration  $C$  de particules dans la troisième région pour un bord gauche mobile et un bord droite libre.

On confirme une nouvelle fois que la forme d'évolution de  $Ta_c$  en fonction de la concentration  $C$  dans la deuxième et la troisième région est de forme exponentielle:

$$Ta_c = a + b \exp(C\xi).$$

Les valeurs des constantes  $a$ ,  $b$  et  $\xi$  sont déterminées par un lissage des courbes expérimentales (tableaux 6.17 et 6.18).

|       | $\Gamma' = 8.63$ | $\Gamma' = 9.22$ | $\Gamma' = 9.56$ | $\Gamma' = 9.85$ |
|-------|------------------|------------------|------------------|------------------|
| a     | 151,7264         | 154,088          | 166,316          | 154,769          |
| b     | 3,868            | 5,079            | 2,253            | 15,519           |
| $\xi$ | 4,734            | 4,306            | 5,888            | 2,984            |
| D%    | 0,440            | 0,234            | 0,656            | 1,266            |

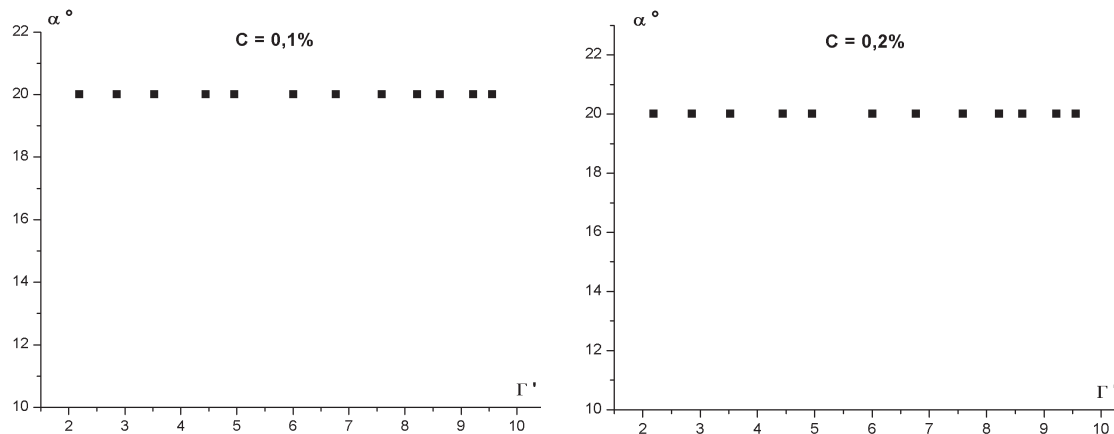
**Tableau 6.17 :** Détermination des paramètres  $a$ ,  $b$  et  $\xi$  par lissage des valeurs critiques de  $Ta_c$  dans la deuxième région pour un bord gauche mobile et un bord droite libre.

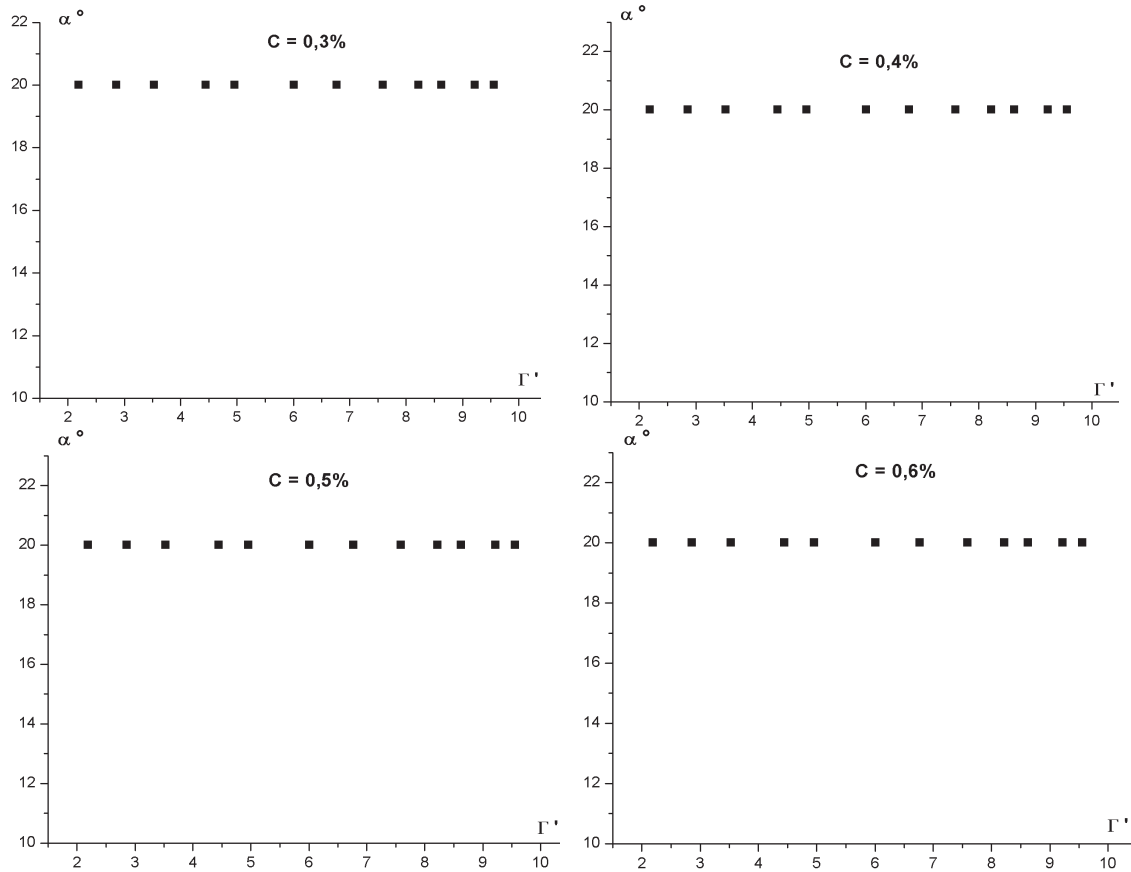
|       | $\Gamma' = 2.19$ | $\Gamma' = 2.86$ | $\Gamma' = 3.53$ | $\Gamma' = 4.45$ | $\Gamma' = 4.96$ | $\Gamma' = 6.01$ | $\Gamma' = 6.77$ | $\Gamma' = 7.59$ | $\Gamma' = 8.22$ |
|-------|------------------|------------------|------------------|------------------|------------------|------------------|------------------|------------------|------------------|
| a     | 165,148          | 165,407          | 158,433          | 161,724          | 161,244          | 154,350          | 150,760          | 146,814          | 143,484          |
| b     | 5,037            | 4,780            | 8,080            | 4,674            | 4,013            | 4,913            | 5,691            | 5,391            | 6,981            |
| $\xi$ | 4,509            | 4,545            | 3,620            | 4,431            | 4,599            | 4,327            | 4,113            | 4,309            | 3,836            |
| D%    | 0,5140           | 0,308            | 0,175            | 0,554            | 0,196            | 0,169            | 0,403            | 0,337            | 0,445            |

**Tableau 6.18 :** Détermination des paramètres  $a$ ,  $b$  et  $\xi$  par lissage des valeurs critiques de  $Ta_c$  dans la troisième région pour un bord gauche mobile et un bord droite libre.

### 6.2.5.1 Angle d'inclinaison des cellules de Taylor-Dean

On présente les observations relatives à l'évaluation de l'angle d'inclinaison  $\alpha$  des ondes de T-D en fonction du facteur d'aspect  $\Gamma'$  pour différentes concentrations  $C$  donnée.



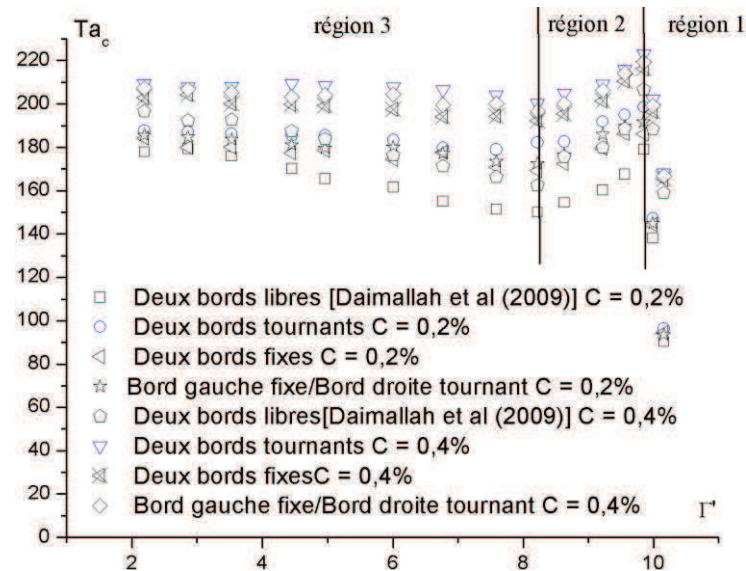


**Figure 6.48 :** Angle d'inclinaison des ondes de T-D en fonction du facteur d'aspect  $\Gamma'$  pour différentes concentrations  $C$  de la suspension pour un bord gauche mobile et un bord droite libre.

L'exploitation de ces résultats montre que l'angle d'inclinaison des ondes de T-D par rapport à la verticale est constant ( $\alpha = 20^\circ$ ) et ce, quelle que soit la valeur de  $\Gamma'$ .

### 6.2.6. Récapitulation $Ta_c = f(\Gamma')$ pour différentes concentrations $C$ de la suspension

La figure suivante (figure 6.49) présente une récapitulation des différents cas étudiés précédemment : bords mobiles, bords fixes, bord mobile/bord fixe, bord mobile/bord libre et bord fixe/bord libre.



**Figure 6.49:** variation du nombre de Taylor critique  $Ta_c$  en fonction du facteur d'aspect radial  $\Gamma'$  pour différentes concentrations de la suspension et pour les différentes combinaisons considérées.

A partir de l'analyse des résultats obtenus pour les différentes combinaisons considérées dans cette étude, il apparaît clairement que le nombre de Taylor critique obtenu pour deux bords tournants prend des valeurs élevées en fonction de la variation de  $\Gamma'$  comparativement aux autres combinaisons envisagées. Cette propriété montre que les bords mobiles ont un effet stabilisant sur l'écoulement dans le système de Taylor-Dean. En conséquence, la concentration de particules a un effet stabilisant, ce qui est marqué par une augmentation de  $Ta_c$  en fonction de la concentration de la suspension.

### 6.3. Conclusion

Nous avons effectué une étude expérimentale sur les conditions d'apparition des instabilités hydrodynamiques dans l'écoulement de Taylor-Dean d'une suspension de disques solides d'Aluminium dans un mélange de Simili-gazoline-Chellala M (80/20).

Aussi, nous avons examiné l'effet des bords tournants, bords fixes et bord fixe/bord mobile sur le déclenchement de l'instabilité primaire dans le système de Taylor-Dean. Les suspensions sont bien caractérisées. Ils ont un comportement viscoplastique suivant l'équation d'état de Herschel-Bulkley. A notre connaissance, aucune étude de la stabilité de



tous les systèmes hydrodynamiques tournant n'a été considérée pour ce modèle rhéologique. La variation de la viscosité apparente et des paramètres rhéologiques de la suspension en fonction de la concentration  $C$  sont déterminés à partir des rhéogrammes précédents. La viscosité apparente, l'indice de consistance et l'indice d'écoulement évoluent linéairement en fonction de la concentration  $C$  alors que le seuil d'écoulement reste assez constant avec la même valeur moyenne que pour le fluide suspendant.

L'apparition des instabilités est examinée en utilisant la technique de visualisation. Pour une concentration donnée, dans l'intervalle étudié, la nature des structures apparaissant dans le système d'écoulement dépend du rapport d'aspect radial  $\Gamma'$ , alors que pour une valeur du facteur d'aspect radial  $\Gamma'$  donné dans l'intervalle étudié, la valeur du nombre de Taylor critique  $Ta_c$  caractérisant l'apparition de l'instabilité dans le système d'écoulement dépend de la concentration des particules.

Nous avons établi que l'évolution de la valeur critique du nombre de Taylor  $Ta_c$  correspondant au déclenchement de la première instabilité est non linéaire en fonction du rapport d'aspect radial  $\Gamma'$ . En effet, on observe que son évolution se fait selon trois régions distinctes. Dans la première région, dans l'intervalle  $10.16 \leq \Gamma' \leq 10.44$ , la stabilité de l'écoulement est analogue à celle d'un système fermé. Pour  $10.16 \leq \Gamma' \leq 9.85$ , on note un effet stabilisant de l'écoulement en fonction du rapport d'aspect radial. Ceci est dû à l'effet de la surface libre. De plus, on note l'apparition des cellules d'ourlet (necking cell) dans la région de sortie. Dans la troisième région ( $8.22 \leq \Gamma' < 9.85$ ) une source d'instabilité apparaît pour  $\Gamma'_c = 9,65$ , qui est située à l'extrémité du système d'écoulement générant des rouleaux propagatifs inclinés avec la coexistence d'une instabilité baroclinique qui est responsable de la décroissance du nombre de Taylor critique caractérisant l'apparition de l'instabilité dans le système d'écoulement. Finalement, dans la quatrième région ( $2.19 \leq \Gamma' < 8.22$ ), l'instabilité a la forme de rouleaux propagatifs inclinés. De plus, l'instabilité baroclinique n'apparaît plus pour  $\Gamma' < 7.82$  induisant alors une augmentation du nombre de Taylor critique en fonction de la décroissance de  $\Gamma'$ , ce qui indique un effet stabilisant de la surface libre. De la même façon, on note une augmentation du nombre de Taylor critique  $Ta_c$  en fonction de la concentration, correspondant à un effet stabilisant des particules, comme  $Ta_c$  est décrit par une évolution exponentielle au niveau de la deuxième et la troisième région.

Le choix de la fonction exponentielle pour décrire l'évolution de  $Ta_c$  en fonction de  $C$  a été effectué en se basant sur le calcul du coefficient de dispersion  $D\%$  caractérisé par de

faibles valeurs ce qui indique une bonne concordance entre les valeurs expérimentale et la fonction théorique choisie.

L'analyse des effets de bords a permis de montrer que ceux-ci peuvent affecter significativement la loi de comportement de l'écoulement en présence d'une suspension entraînant la stabilisation de l'écoulement en présence de deux bords mobiles comparativement aux autres combinaisons des bords considérées dans cette étude.

De plus, il est montré que les bords n'affectent pas les structures qui apparaissent dans le système d'écoulement de type Taylor-Dean. Cependant, ils influencent le seuil d'apparition des instabilités qui est marqué par des valeurs élevées du nombre de Taylor critique  $Ta_c$  avec deux bords tournants entraînant un effet stabilisant des bords tournants.

Probablement nous avons mis en évidence que les cellules de T-D s'inclinent de  $\alpha = 20^\circ$  par rapport à la verticale pour la majorité des cas étudiées et ce, quelle que soit la valeur de  $\Gamma'$  et on enregistre une particularité pour le cas des deux bords mobiles pour lequel les ondes de T-D s'inclinent de  $\alpha = 14^\circ$  pour des valeurs élevées de  $\Gamma'$  ensuite elles se redressent à  $\alpha = 20^\circ$  lorsque  $\Gamma' \leq 6,77$ .

# **Conclusion générale et perspectives**

## Conclusion générale et perspectives

Le but de nos recherches a pour objectif principal d'étudier l'effet de la présence de particules en suspension sur les instabilités centrifuges de type Taylor-Couette et Taylor-Dean.

La première partie de ce travail s'est focalisé essentiellement sur l'analyse de la stabilité hydrodynamique d'une suspension solide (particules de forme sphérique) dans le système d'écoulement de Taylor-Couette. Au départ, on s'est basé sur les travaux de Ali and Lueptow (2002) comme modèle de référence pour formuler les équations régissant la stabilité de l'écoulement dans le cadre d'une théorie linéaire. Ces équations sont valables dans l'approximation d'un faible espace annulaire et l'on se limite uniquement à la prévision de l'instabilité de type Taylor : onde axiale stationnaire. Grâce à la combinaison des méthodes de Galerkin et de Newton-Raphson, on a pu résoudre le problème de la stabilité marginale d'un écoulement de suspension solide au voisinage de l'état critique  $Tc_1$  caractérisant l'apparition de l'onde axiale.

Pour le cas de concentration nulle ( $A = 0$ ), nous avons obtenu que le nombre de Taylor critique  $Tc_1$  est comparable avec les résultats théoriques et expérimentaux obtenus par plusieurs auteurs notamment, Chandrasekhar (1961), Coles (1965), Bouabdallah (1981), Rectenwald et al (1993) et Ali &Lueptow (2002).

Lorsqu'il y a présence d'une concentration de suspension  $A$  ( $A \neq 0$ ), on s'est proposé de comparer et discuter nos résultats avec ceux obtenus par Ali and Lueptow (2002).

Dans ce cas, le nombre de  $Tc_1$  décroît en fonction de la concentration  $A$  de la suspension ce qui indique que le paramètre  $A$  a un effet déstabilisant sur l'écoulement.

L'optimisation des valeurs des coefficients  $\lambda_{1,r}, \lambda_{1,\theta}, \lambda_{1,z}, \lambda_{s,r}, \lambda_{s,\theta}, \lambda_{s,z}$  qui modulent l'importance des forces qui s'exercent sur les particules en suspension et le fluide indique que le nombre de Taylor critique  $Tc_1$  augmente en fonction de la concentration  $A$  ce qui permet de constater que la concentration de la suspension a un effet stabilisant sur l'écoulement.

En effet, les résultats trouvés indiquent que le seuil critique d'apparition de la première instabilité  $Tc_1$  est retardé lorsque la concentration  $A$  de la suspension s'accroît. Cette propriété remarquable est mise en évidence par plusieurs auteurs.

Ceci suggère que la concentration  $A$  et le rapport de densité ont un effet stabilisant de l'écoulement jusqu'à atteindre l'état de saturation. Au-delà de cet état extrême, on note une décroissance de  $Tc_1$  en fonction de la concentration de la suspension. En outre, le nombre de Taylor critique  $Tc_1$  n'est pas affecté par les variations du diamètre adimensionnel  $\phi$  de particules ce qui permet d'en déduire que la taille des particules n'affecte pas le seuil d'apparition de la première instabilité.

Par ailleurs, le nombre d'onde  $k_c$  reste constant en fonction de la concentration  $A$  indiquant que la concentration  $A$  de la suspension n'a aucun effet sur la taille de la structure de l'onde de type Taylor.

La deuxième partie porte sur une étude expérimentale qui a permis d'analyser les effets de la concentration des particules en suspension (disques) et du facteur d'aspect radial  $\Gamma'$  sur l'apparition des instabilités dans le système d'écoulement de Taylor-Dean.

Le comportement rhéologique de la suspension utilisée est viscoplastique obéissant au modèle de Herschel Bulkley. A notre connaissance, aucune étude de la stabilité de tous les systèmes hydrodynamiques tournant n'a été considérée pour ce modèle rhéologique.

Dans ces conditions, les résultats obtenus permettent de constater que pour une concentration  $C$  donnée, dans l'intervalle étudié, la nature des structures qui apparaissent dans le système d'écoulement dépend du facteur d'aspect radial  $\Gamma'$ . Réciproquement, pour une valeur du facteur d'aspect  $\Gamma'$  pour le même intervalle considéré, la valeur du nombre de Taylor critique caractérisant l'apparition de l'instabilité dans le système d'écoulement dépend également de la concentration des particules.

On a établi également que l'évolution de la valeur critique du nombre de Taylor  $Ta_c$  relatif au déclenchement de la première instabilité est non linéaire en fonction du facteur d'aspect radial  $\Gamma'$ . Dans ces conditions, on a pu mettre en évidence que l'évolution de l'écoulement est caractérisée par trois régions distinctes. Dans la première région, correspondant à l'intervalle  $10.16 \leq \Gamma' \leq 10.44$ , la stabilité de l'écoulement est analogue à celle d'un système d'écoulement fermé. Pour  $10.16 \leq \Gamma' \leq 9.85$ , on note un effet stabilisant de l'écoulement en fonction du facteur d'aspect radial  $\Gamma'$ , ceci est dû à l'effet de la surface libre. En outre, on note l'apparition des cellules sous forme d'ourlet (Necking cell) dans la région de sortie. Dans la troisième région ( $8.22 \leq \Gamma' < 9.85$ ) on note l'apparition d'une source

d'instabilité qui s'établit pour  $\Gamma'_c = 9,65$  ; celle-ci se situe à l'extrémité du système d'écoulement générant des rouleaux propagatifs inclinés avec la coexistence d'une instabilité baroclinique qui est responsable de la décroissance du nombre de Taylor critique lié à l'apparition de l'instabilité dans le système d'écoulement. Finalement, dans la troisième région ( $2.19 \leq \Gamma' < 8.22$ ), l'instabilité se présente sous la forme de rouleaux propagatifs inclinés. De plus, l'instabilité baroclinique n'apparaît plus pour  $\Gamma' < 7.82$  correspondant à une augmentation du nombre de Taylor critique en fonction de la décroissance de  $\Gamma'$ , ce qui indique un effet stabilisant de la surface libre.

L'analyse des effets de bords a permis de montrer que ceux-ci peuvent affecter significativement la loi de comportement de l'écoulement en présence d'une suspension. Ces éléments de limitations de l'écoulement peuvent induire un mécanisme de stabilisation de l'écoulement en présence de deux bords mobiles comparativement aux autres combinaisons de bord qui ont été considérées dans cette étude.

Par ailleurs, on a observé que les bords n'affectent pas les structures qui apparaissent dans le système d'écoulement de type Taylor-Dean ainsi que la valeur de  $\Gamma'_c$  indiquant l'apparition des vortex ou rouleaux correspondants. Cependant, ils influencent le seuil d'apparition des instabilités caractérisé par des valeurs élevées du nombre de Taylor critique  $Ta_c$  avec deux bords tournants entraînant un effet stabilisant.

A la lumière des résultats précédents, il est à souligner que le seuil de déclenchement des ondes de Taylor-Dean est sensiblement marquée pour  $\Gamma'_c = 9,65$  et ceci, quel que soit le cas considéré (deux bords libres, deux bords tournants, deux bords fixes, combinaison entre bord mobile, bord libre ou bord fixe). Cette observation fondamentale permet d'annoncer que le déclenchement des rouleaux stationnaires de Taylor-Dean est réellement affecté par le facteur d'aspect radial  $\Gamma'$ .

D'une façon générale, on note une augmentation du nombre de Taylor critique  $Ta_c$  en fonction de la concentration  $C$ , signalant ainsi l'effet stabilisant de particules correspondant à une évolution exponentielle caractéristique de la deuxième et troisième région du mouvement.

Le choix de la fonction exponentielle pour décrire l'évolution de  $Ta_c$  en fonction de la concentration  $C$  a été effectué en se basant sur le calcul du coefficient de dispersion qui prend de faibles valeurs ce qui permet de conclure à bonne concordance entre les valeurs expérimentales et la loi de comportement théorique établie.

Enfin, la mesure de l'angle d'inclinaison des rouleaux de Taylor-Dean indique que les cellules de T-D s'inclinent de  $\alpha = 20^\circ$  par rapport à la verticale dans la majorité des cas considérés et ce, indépendamment de la valeur de  $\Gamma'$ . Toutefois, on enregistre une particularité pour le cas des deux bords mobiles pour lequel les rouleaux de T-D s'inclinent de  $\alpha = 14^\circ$  pour des valeurs élevées de  $\Gamma'$  ensuite elles se redressent jusqu'à  $\alpha = 20^\circ$  lorsque  $\Gamma' \leq 6,77$ .

### **Perspectives :**

L'ensemble de ces recherches appellent à un approfondissement théorique et expérimental. Au plan théorique, il s'agit d'étendre et d'appliquer la modélisation à la prévision de l'instabilité de Taylor-Dean soumise à l'influence de  $A$  et de  $\Gamma'$  notamment. Ce sera également une base de données importante pour valider le modèle numérique (CFD Fluent) que l'on mettra en place pour réaliser la prédiction des séquences d'instabilités en régime de transition laminaire-turbulent.

Au plan expérimental, il serait pertinent de prolonger la caractérisation des phénomènes d'instabilités dans l'écoulement de Taylor-Dean, par voie quantitative, principalement par analyse spectrale pour mettre en évidence les différentes contributions énergétiques liées aux mouvements secondaires en présence (mode primaire, triplet, instabilité barclinique, etc...) à leur apparition jusqu'au déclenchement du chaos.

# **Références Bibliographiques**



## Références Bibliographiques

**Adnane, M., (2007)**, « Effets de la mise en régime des vitesses sur les conditions d'apparition des instabilités et de la turbulence », Thèse de Magistère, UMBB, Algérie.

**Ait Aider, A., Skali, S., Brancher, J. P., (2005)**, « Visualisation de l'écoulement de Taylor-Dean ouvert », C. R. Mécanique, 333, 197-203.

**Ait Aider, A., (2008)**, "Instabilities and transition to chaos in flows between concentric cylinders", Int. Jour. of Chem. React. Eng. Vol. 6, A98.

**Ali, M. E., Mitra, D., Schwile, J. A. and Lueptow, R. M., (2002)**, "Hydrodynamic stability of a suspension in cylindrical Couette flow", Physics Of Fluids, Vol. 14, N°3.

**Ameer, G. A., Raghavan, S., Sasisekharan, R., Harmon, W., Cooney, C. L., Langer, R., (1999)**, "Regional Heparinization Via Simultaneous Separation and Reaction in a Novel Taylor-Couette Flow Device", Biotechnology and Bioengineering, Vol. 63, N° 5.

**Andereck, C. D., Liu, S. S. and Swinney H. L., (1986)**, "Flow regimes in a circular Couette system with independently rotating cylinders", J. Fluid Mech. (1986), Vol. 164, pp.155-183.

**Antonijoan, J. and Sanchez, J., (2002)**, "On stable Taylor vortices above the transition to wavy vortices", Physics of Fluids 14, 1661-1665.

**Avgousti M. and Beris A. N., (1993)**, "Non-axisymmetric modes in viscoelastic Taylor-Couette flow", J. Non-Newtonian Fluid Mech., 50: 251-255.

**Baumert, B. M. and Muller, S. J., (1999)**, "Axisymmetric and non-axisymmetric elastic and inertio-elastic instabilities in Taylor-Couette flow", J. Non-Newtonian Fluid Mech., 83:33-69.

**Benbalkacem (épouse Benmouffouk), G., (2009)**, « Viscoélasticité et écoulements de fluides structurés », Thèse de doctorat, Institut National Polytechnique de Lorraine, Université de Nancy-France.

**Beavers, G. S. and Joseph, D. D., (1974)**, "Tall Taylor cells in polyacrylamide solution", Phys. Fluids, 17: 650-651.

**Benjamin, T. B., (1978a)**, "Bifurcation Phenomena in Steady Flows of a Viscous Fluid. Part I. Theory", Proc. Roy. Soc. A 31, Vol. 359, 1-26.

**Benjamin, T. B., (1978b)**, "Bifurcation phenomena in steady flows of a viscous fluid. II. Experiments", Proc. R. Soc. Lond. A, 359, 27-43.

**Benjamin, T.B. et Mullin, T., (1978)**, "Bifurcation Phenomena in Steady flow of a viscous fluid II Experiments", J. Fluid Mech., Vol. 359, N°1696, 27-43.

- Bilgen, E. & Boulos, R., (1973)** “Functional Dependence of Torque Coefficient of Coaxial Cylinders on Gap Width and Reynolds Numbers”, *Trans ASME, J. Fluid Eng.* 95, 122-126.
- Blennerhassett, P.J., Hall, P., (1979)**, “Centrifugal instabilities of circumferential flows in finite cylinders: linear theory”. *Proc. Roy. Soc. Lond. A* 365, 191-207
- Bot, P., (1998)**, “Modes d’instabilités secondaires et supérieures dans le système de Taylor-Dean”, Thèse de Doctorat de l’Université du Havre, France.
- Bot, P., Cadot, O. and Mutabazi, I., (1998)**, “Secondary instability mode of a roll pattern and transition to spatiotemporal chaos in the Taylor-Dean system”, *Phys. Rev. E*, Vol. 58, N°3.
- Bot P., Mutabazi, I., (2000)**, « Dynamics of spatio-temporal defects in the Taylor-Dean system », *Eur. Phys. J. B* 13, 141-155.
- Bouabdallah, A., (1980)**, « Instabilité et turbulence dans l’écoulement de Taylor-Couette », Thèse de Doctorat, INPL Nancy-France.
- Brandstätter, A., Swinney, H. L., (1987)**, “Strange attractors in weakly turbulent Couette-Taylor flow”, *Phys. Rev. A.*, 35:2207–2220.
- Brewster, D. B. and Nissan, A. H., (1958)**, “The hydrodynamics of flow between horizontal concentric cylinders”, *Chem. Eng. Sci.* 7 215-221.
- Brewster, D. B., Grosberg, P. and Nissan, A. H., (1959)**, “The stability of viscous flow between horizontal concentric cylinders”, *Proc. Roy. Soc. London, A* (251): 76.
- Burkhalter, J. E. and Koschmieder E. L., (1973)**, "Steady supercritical Taylor vortex flow," *J. Fluid Mech.* 58, 547-560.
- Chandrasekhar, S., (1961)**, “hydrodynamic and hydromagnetic stability”, Oxford University Press.
- Chen, K. S., Ku, A. C., Chan, T. M. and Yang, S. Z., (1990)**, “Flow in half-filled annulus between horizontal concentric cylinders in relative rotation”, *J. Fluid Mech.*, 213:149.
- Chen, F. and Chang T. M., (1992)**, “Stability of Taylor-Dean flow in a small gap between rotating cylinders”, *J. Fluid Mech.*, 243:443.
- Chen, K. S., (1993)**, “Stability of Taylor-Dean flow in an annulus with arbitrary gap spacing”, *Phys. Rev. E*, 48:1036.
- Cognet, G., (1971)**, « Utilisation de la polarographie pour l’étude de l’écoulement de Couette », *Journal de Mécanique* N° 10,65-90.
- Cognet, G., Bouabdallah A. & Aider, A., (1982)**, « Stability in the Mechanics of continua », Ed. F. H. Schroeder, Springer Verlag, Berlin.
- Coles, D., (1965)**, “Transition in circular Couette flow”, *J. Fluid Mech.*, 21,385-425.

- Cole, J. A., (1974)**, "Taylor vortices with short rotating cylinders," J. Fluids Eng. 96, 69-70.
- Cole, J. A., (1976)**, "Taylor-vortex instability and annulus length effects", J fluid Mech, vol 75 Part1, pp1-15.
- Couette, M., (1890)**, « Etude sur les frottements des liquides », Ann. Chim. Phys. P433-510.
- Creymmerolle, O., Grisel, M., and Mutabazi, I., (2002)**, "Experimental study of inertioelastic Couette-Taylor instability modes in dilute and semidilute polymer solutions", Physics of Fluids, 14:1681-1688.
- Creymmerolle, O., Latrache, N., Ezersky, A., and Mutabazi, I., (2003)**, "Instability modes observed in a viscoelastic Couette-Taylor flow", Mécanique et Industrie, 4: 397-409.
- Creymmerolle, O., Latrache, N., Mutabazi, I. and Ezersky, A., (2005)**, "Instabilities with shear-thinning polymer solutions in the Couette-Taylor system", J. Physics, 14: 78-93.
- Czarny, O., (2003)**, « Contribution à l'étude numérique des écoulements en rotation avec parois application au système Taylor – Couette », Thèse de Doctorat, France.
- Czarny, O., Serre, E. Et Bontoux, P., (2003)**, "Interaction between Eckman pumping and the centrifugal instability in Taylor-Couette flow", Physics Of Fluids, Vol. 15, N°2 PP467-477.
- Daimallah, A., Bouabdallah, A., Nsom, B., Adnane M. & Alemany, A., (2009)**, "Onset of instabilities in Taylor-Dean flow in the presence of yield-stress fluid", Applied Rheology, Vol. 19, Issue 3, 33960-1, 33960-8.
- Davey, A., (1962)**, "The growth of Taylor vortices in flow between rotating cylinders", J. Fluid Mech., Vol. 14, Issue 3, pp336-368.
- Davey A., Diprima R. C., Stuart J. T., (1968)**, "On the instability of Taylor vortices", J.Fluid Mech.,Vol. 31, Issue 1, pp17-52.
- Decruppe, J. P., (1988)**, « Contribution à l'étude de la biréfringence d'écoulement à la transition écoulement de Couette-tourbillons de Taylor », Thèse de Doctorat de l'Université de Metz-France.
- Decruppe, J. P., Hocquart, R. and Cressely, R., (1991)**, "Experimental study of the induced flow birefringence of a suspension of rigid particles at the transition from Couette flow to Taylor vortex flow", Rheologica Acta, Vol. 30, issue 6, p. 575 – 580.
- Degen, M. M., Mutabazi, I. and Andereck, C. D., (1996)**, "Transition to weak turbulence via spatio-temporal intermittency in the Taylor-Dean system", Phys. Rev. E, 53: 3495.
- Dibes, A., (2005)**, « Effet de l'inclinaison du système d'écoulement sur l'apparition des instabilités de type Taylor-Couette », Mémoire de Magister, USTHB.
- Diprima, R. C., (1959)**, « The stability of viscous flow between concentric cylinders with a pressure gradient acting around the cylinders", J. Fluid Mech., 6:462.

- DiPrima, R. C., (1960),** “The stability of a viscous fluid between rotating cylinders with an axial flow,” *J. Fluid Mech.* 9, 621.
- Diprima, R.C. and Stuart, J.T., (1969),** “Nonlinear aspect of instability in flow between rotating cylinders”, *Proc of the 11<sup>th</sup> Congress of App. Mech.* pp1037-1044.
- Diprima, R. C., Eagles, P. M. and NG, B. S., (1984),** “The effect of radius ratio on the stability of Couette flow and Taylor vortex flow”. *Phys. Fluids*, **27**, 2403-2411.
- Domański, J., (2006),** “Determination of the parameters of fluid motion in Taylor-Couette flow”, *Tech. Sc., Pap. And Rep.*, N°9.
- Donnelly, R. J., (1958),** "Experiments on the Stability of Viscous Flow Between Rotating Cylinders : Torque Measurements", *Proc. Roy. Soc. A246*: 312-325.
- Donnelly, R. J. and Simon, N. J., (1960),** "An Empirical Torque Relation for Supercritical Flow Between Rotating Cylinders", *J. Fluid. Mech.* 7(Pt. 3): 401-418.
- Donnelly, R. J. and Tanner, D. J., (1965),** "Experiments on the Stability of Viscous Flow Between Rotating Cylinders IV. The Ion Technique", *Proc. Roy. Soc. A283*: 509-519.
- Donnelly, R. J. and Schwarz, K. W. (1965),** "Experiments on the Stability of Viscous Flow Between Rotating Cylinders VI. Finite Amplitude Experiments", *Proc. Roy. Soc. A283*: 531-556.
- Donnelly, R. J. et Fultz, D., (1960),** “Experiments on the stability of spiral flow between rotating cylinders”, *Proc. Nat. Acad. of Science USA*, Vol. 46, N° 8, p 1150-1154.
- Donnelly, R. J., (1992),** “Evolution of Instrumentation for Taylor–Couette flow”, *Ordered and Turbulent Patterns in Taylor–Couette flow*, 1-29.
- Drazin, P. G. & Reid, W. H., (1982),** “Hydrodynamic stability”, Cambridge University Press.
- Drozdov, S. M., (2002),** “A numerical investigation of a modified Couette-Taylor apparatus with application to industrial mixing”, *Theor. Comput. Fluid dynamics*, 16: 17-28.
- Eagles, P. M., (1971),** “On stability of Taylor vortices by fifth-order amplitude expansions”, *J. Fluid Mech.*, Vol. 49, Issue 3, pp529-550.
- Eagles, P. M., (1974),** “On the torque of wavy vortices”, *J. Fluid Mech.*, Vol. 62, Issue 1, pp1-9.
- Ericksen, J. L. (1960),** “Transversely isotropic fluids”, *Z. Kolloid*, 173, 117-122.
- Frêne, J., (1974),** « Régimes d'écoulement non laminaire en films minces : Application aux paliers lisses », Thèse Doctorat, Univ. Lyon-France.
- Gibson, R. D. and Cook, A. E., (1974),** "The stability of curved channel flow", *Quart. J. Mech. Appl. Math.*, vol. 27, 2, 1974, p.149-160.
- Ginn, R. F. and Denn, M. M., (1969),** “Rotational stability in viscoelastic fluids theory”, *AICHE J.*, 15: 450-454.

## Références Bibliographiques

- Gorman, M., Swinney, H. L., Rand & D. A., (1981)**, “Doubly periodic circular Couette flow: experiments compared with predictions from dynamics and symmetry”, *Phys. Rev. Lett.* 46, 992.
- Groisman, A. and Steinberg, V., (1998)**, “Mechanism of elastic instability in Couette flow of polymer solution”, *Phys. Fluids*, 10: 2451-2463.
- Guiraud, J. P., and Iooss, G., (1968)**, « Sur la stabilité des écoulements laminaires », *C. R. Acad. Sci. Paris*, I, 266, 1283-1286.
- Hasson M., Martin, B. W., (1977)**, *Proc. Royal Soc. Lond.*, A Vol. 382, pp352.
- Haut, B., Ben Amor, H., Coulon, L., Jacquet, A., Halloin, V., (2003)**, “Hydrodynamics and mass transfer in a Couette–Taylor bioreactor for the culture of animal cells”, *Chemical Engineering Science* 58, 777 – 784.
- Hermans, J. J. (1966)**, « Flow properties of disperse systems », ed. T. B. Drew and J. W. Hoopes, Academic press London
- Hocquart, R., (1982)**, « Contribution à l'étude du mouvement brownien de rotation libre et forcé », Thèse Doctorat, Metz-France.
- Hocquart, R., Cressely, R., Decruppe, J. P. and NSOM, B., (1985)**, « Rhéologie des solutions de polymères utilisés en récupération assistée du pétrole », Colloque de la R. C. P., Saint Croix aux mines, France.
- Hocquart, R., Decruppe, J. P., Nsom, B. and Cressely, R., (1987)**, “Synopsis of the 5<sup>th</sup> Taylor Vortex Working Party” Phoenix, USA.
- Hughes, T. H. and Reid W. H., (1964)**, “The effect of a transverse pressure gradient on the stability of Couette flow”, *Z. Angew. Math. Phys.*, 15:573.
- Iooss, G., (1969)**, « Application de la théorie des semi-groupes à l'étude de la stabilité des écoulements laminaires », *J. de Mécanique*, 8, 4, 477-507.
- Iooss, G., (1971)**, « Théorie non linéaire de la stabilité des écoulements laminaires dans le cas de l'échange des stabilités », *Arch. Rat. Mech. Anal.* 40, 3, 166-208.
- Jankowski, D.F. & Takeuchi, D.I., (1976)**, “The energy stability limit for flow in a curved channel”, *Trans. ASME E: Appl. Mech.*, 43 548-550.
- Jones, C. A., (1982)**, “On the flow between counter-rotating cylinders”, *J. Fluid Mech.* 120, 433-450.
- Joo, Y.L. & Shaqfeh, E. S. G., (1991)**, “Viscoelastic Poiseuille flow through a curved channel: A new elastic instability”, *Phys. Fluids A* 3, 1691-1694.
- Joo, Y. L. and Shaqfeh, E. S. G., (1992a)**, “The effects of inertia on the viscoelastic Dean and Taylor-Couette flow instabilities with application of coating flows”, *Phys. Fluids*, 4: 2415-2431.

- Joo, Y. L. & Shaqfeh, E. S. G. (1992b)**, “A purely elastic instability in Dean and Taylor-Dean flow”, *Phys. Fluids A* 4, 524-543.
- Joo, Y. L. & Shaqfeh, E. S. G. (1994)**, “Observations of purely elastic instability in the Taylor-Dean flow of a Boger fluid”, *J. Fluid Mech.*, 262, 27-73.
- Kachoyan, B. J., (1987)**, “Neutral curve behaviour in Taylor-Dean flow”, *J. Appl. Math. Phys.* Vol. 38.
- Kataoka, K., (1986)**, “Taylor vortices and instabilities in circular Couette flow”, Chap 9, *Fluid Dynamic Encyclopedia*.
- Kirchgässner, K., and Sorger P., (1969)**, “Branching analysis for the Taylor problem”, *Quart. J. Mech. Appl. Math.* 22, 183–209.
- Koos, E., Esperanza Linares-Guerrero, Melany L. Hunt and Christopher E. Brennen, (2012)**, “Rheological measurements of large particles in high shear rate flows”, *Phys. Fluids* 24, 013302.
- Koschmieder, E. L., (1979)**, “Turbulent Taylor vortex flow”, *J Fluid Mech.* 93:515-527.
- Lanford O., (1977)**, “Computer pictures of the Lorenz attractor”, *Turbulence Seminar*, Springer Verlag.
- Larson, R. G., Shaqfeh, E.S.G., and Muller, S. J., (1990)**, “A purely elastic instability in Taylor-Couette flow”, *J. Fluid Mech.*, 218: 573-600.
- Latrache, N., (2005)**, « Etude expérimentale des modes supérieurs des instabilités d'écoulements newtoniens ou viscoélastiques dans le système de Couette-Taylor », Doctorat de l'Université du Havre, France.
- Laure, P. and Mutabazi I., (1994)**, « Nonlinear analysis of instability modes in the Taylor-Dean system », *Phys. of Fluids*, 6:3630.
- Lim, Edwin A., Carlos Coimbra, F. M. and Kobayashi, Marcelo H., (2005)**, “Dynamics of suspended particles in eccentrically rotating flows”, *J. Fluid Mech.*, vol. 535, pp. 101-110.
- Lord Rayleigh, (1916)**, “On the dynamics of revolving fluids”, *Proceedings of the Royal Society of London*, A, 148-154.
- Lorenzen, A., Pfister & G. Mullin, T., (1983)**, “End effects on the transitions to time dependent motion in the Taylor experiment”, *Physics of Fluids*, 26.
- Loret, C., Frith, W. & Fryer, P. J., (2006)**, “Mechanical and structural properties of maltodextrin/agarose gels composites”, *Appl. Rheol.*, 16, 248-257.
- Lueptow, R. M., Docter, A. & Min, K., (1992)**, “Stability of axial flow in an annulus with a rotating inner cylinder”, *Physics Of Fluids*, Vol. 4, pp446-2455.
- Mahamdia, A., Bouabdallah A. & Skali, S. E., (2005)**, « Ecoulement de Taylor–Couette en géométrie finie et à surface libre », *The Canadian journal of Chemical Engineering*, Vol. 83.
- Mallok, A., (1888)**, “Determination of the viscosity of water”, *Proc. R. Soc. London*, Ser. A45 126-132.

## Références Bibliographiques

- Margules, M., (1881)**, “Über die bestimmung des reibung- und gleitungs-coefficient”, Wiener Berichte (second series) 83, 588-602.
- Marsden, J., (1977)**, “Attempts to relate the navier-stokes equations to turbulence”, Turbulence Seminar, Springer Verlag.
- Mc Laughlin, J. B., and Martin P., C., (1975)**, “Transition to turbulence in a statistically stressed fluid system”, Phys. Rev. A 12, 186-203.
- Min, K., Lueptow, R., (1994)**, “hydrodynamic stability of viscous flow between rotating porous cylinders with radial flow”, Phys. Of Fluids A , Vol. 6, N° 1 pp 144-151.
- Mutabazi, I., Hegseth, J. J., Andereck, C. D. and Weisfreid, J. E., (1988a)**, “Pattern formation in the flow between two horizontal concentric cylinders with a partially filled gap”, Phys. Rev. A, 38 : 4752.
- Mutabazi, I., Hegseth, J. J., Andereck, C. D. and Weisfreid, J. E., (1988b)**, “Pattern formation in the flow between two horizontal concentric cylinders with a partially filled gap”, Phys. Rev. A, 38: 4752.
- Mutabazi, I., Normand, C., Peerhossaini, H. and Weisfreid, J. E., (1989)**, “Oscillatory modes in the flow between two corotating cylinders with a partially filled gap”, Phys. Rev. A, 39:452.
- Mutabazi, I., (1990)**, “Etude théorique et expérimentale de l’instabilité centrifuge de Taylor-Dean”, Thèse de Doctorat, Université de Paris VII, France
- Mutabazi I., Hegseth J.J. and Andereck C.D., (1990)**, “Spatiotemporal pattern modulations in the Taylor-Dean system”, Phys. Rev. Lett., 64 1729-1732.
- Mutabazi I., Wesfreid, J.E., Hegseth J.J. and Andereck C. D., (1991a)**, “Recent experimental results in the Taylor-Dean system”, Eur. J. Mech. B/Fluids, 10, 239-245.
- Mutabazi I., Andereck C. D., (1991b)**, “Transition from time-dependent to stationary flow pattern in the Taylor-Dean system”, Phys. Rev. A, Vol. 44, N° 10.
- Mutabazi, I. and Andereck, C. D., (1993)**, “Drift instability and second harmonic generation in a one-dimensional pattern-forming system”, Phys. Rev. Lett., 70(10):1429.
- Mutabazi, I. and Andereck, C. D.,(1995)**, “Mode resonance and wavelength-halving instability in the Taylor-Dean system”, Phys. Rev. E, 51:4380.
- Nakamura, I., Toya, Y. et Yamashita, S., (1990)**, “An experiment on a Taylor vortex in a gap with a small aspect ratio, (bifurcation of flow in asymmetric system)” JSME Int. J. Ser. II Fluids 33, pp 685.
- Nissan, A. H., Nardacci, J. L. and Ho, C. Y., (1963)**, “The onset of different modes of instability for flow between rotating cylinders”, AICHE Journal, Vol. 9, issue 5, pp 620–624.

## Références Bibliographiques

- Noui-Mehidi, M. N., (1992)**, “Stabilité Hydrodynamique entre cônes coaxiaux tournants“, Thèse de Magister /USTHB-Algérie.
- Nsom B., (1987)**, « Transition laminaire-tourbillons de Taylor entre cylindres coaxiaux tournants en présence de particules sphériques rigides », Thèse de Doctorat, Université de Metz, France.
- Nsom, B., (1995)**, “Stability of Couette-Poiseuille flow of fiber suspensions”, Archives of Mechanics, 46(6), 1127-1141.
- Nsom, B., (1998)**, “Stability of Taylor-Dean flow of fiber suspensions”, Int. J. Appl. Mech. Eng., 3 185-204.
- Nsom B., (1996)**, « stability of fiber suspension flow in curved channel », J. Phys. II France 6 1483-1492.
- Ohlsen, D. R., Yamamoto, S. Y., Surko, C. M. and Kolodner, P., (1990)**, “Transition from traveling-wave to stationary convection in fluid mixtures”, Phys. Rev. Lett. 65, 1431-1434.
- Ogihara, T. & Nomura, M., (2002)**, « Continuous Synthesis of monodispersed alumina particles by the hydrolysis of metal alkoxide using a Taylor vortex », Kona N°2.
- Ouali, M., (2009)**, « Caractérisation de l'écoulement Taylor–Couette : effets du confinement géométrique axial et de la gravité », Mémoire de Magister, USTHB-Algérie.
- Ould Elaya, M. M. & Gunasekaran, S., (2007)**, “Rheology of sulfate suspensions and pre-thickened beverages used in diagnosis and treatment of dysphagia”, Appl. Rheol., 17 33137-1-33137-8.
- Owsald, P., (2005)**, “Rhéophysique ou comment coule la matière ?”, édition Belin.
- Park, K., Crawford, G. L., and Donnelly, R. J., (1981)**, “Determination of transition in Couette flow in finite geometries”, Phys. Rev. Lett. 47, 1448.
- Persoz, B., (1960)**, “Introduction à l'étude de la Rhéologie”, Dunod, Paris-France.
- Raney, D. C. and Chang, T. S., (1971)**, « Oscillatory modes of instability for flow between rotating cylinders with a transverse pressure gradient », Z. Angew. Math. Phys., 22: 680.
- Recktenwald, A., Lücke, M. and Müller, H. W., (1993)**, “Taylor vortex formation in axial through-flow : linear and weakly nonlinear analysis”, Phys. Rev. E 48, 4444.
- Ruelle, D., (1976)**, “The Lorentz attractor and the problem of turbulence”, Lecture notes in Mathematics, 563, Springer Verlag.
- Sangho Lee and Lueptow, R. M., (2003)**, « Control of scale formation in reverse osmosis by membrane rotation », Desalination 155, pp131-139.
- Sangho Lee and R. M. Lueptow, (2004)**, “Rotating reverse osmosis for water recovery in space: influence of operational parameters on RO performance”, Desalination 169, pp109-120.



- Schwile, J. A., Mitra, D. and Lueptow R. M., (2002)**, “Design parameters for rotating cylindrical filtration”, *Journal of Membrane Science* 204, pp 53-65.
- Shaw, R. S., Andereck, C. D., Reith, L. A., Swinney, H. L., (1982)**, “Superposition of travelling waves in the circular sytem”, *Phys. Rev. Lett*, 48, 1172.
- Skali, S., (1991)**, “Contribution à l'étude de l'écoulement de la pâte à papier: Interaction floculation-turbulence”, Thèse de Doctorat, Nancy-France.
- Skali, S., Frappier, G., Lartiges, B. S. and Skali, Lami S., (2010)**, « Floc Cohesive Force in Reversible Aggregation : A Couette Laminar flow Investigation », *Langmuir*, 26(13), 10474-10488.
- Snyder, H. A., (1962)**, “Experiments on the Stability of Spiral Flow at Low Axial Reynolds Numbers”, *Proc. R. Soc. London A* vol. 256 p198-214.
- Snyder, H. A., Karlson, S. K., (1964)**, “Experiments on the Stability of Couette Motion with a Radial Thermal Gradient”, *Phys. of Fluids* 7, 1696.
- Snyder, H. A., Lambert, R. B., (1966)**, “Harmonic generation in Taylor vortices between rotating cylinders”, *J. Fluid Mech.* 26, 545.
- Snyder, H. A., (1968)**, “Wave-number selection at finite amplitude in rotating Couette flow”, *J. Fluid Mech.* 35, part 2, 273-298.
- Sobolik, V., Izrar, B., Lusseyran, F. & Skali, S., (2000)**, “Interaction between the Ekman layer and the Couette –Taylor instability”, *Int. J. of Heat and Mass Transf.*, 43, pp4381-4393.
- Soleimani, M. and Sadeghy, k., (2011a)**, “Taylor-Dean instability of yield-stress fluids at large gaps”, *Journal of Non-Newtonian Fluid mechanics* 166, 607-613.
- Soleimani, M. and Sadeghy, k., (2011b)**, “Instability of Bingham fluids in Taylor-Dean flow between two concentric cylinders at arbitrary gap spacing”, *International Journal of Non-Linear Mechanics* 46, 931-937.
- Sparrow, Munro, E. M., W. D. and Jonson, V. K., (1964):** “Instability of the flow between rotating cylinder: the wide gap problem”, *J. Fluid Mech.* 20, pp 35-46.
- Sparrow, E. M. and Lin, S. H., (1965)**, “Hydrodynamic stability of a tangential flow between cylinders induced by rotation and external pumping”, *Phys. Fluids*, 8:229.
- Stokes, G. G., (1880):** “Mathematical and physical papers”, Cambridge U. P., England.
- Stuart, J. T., (1958)**, “On the non linear mechanics of hydrodynamic stability”, *J. Fluid Mech.* 4: 1-21.
- Swinney, H. L. and Gollub, J. P., (1981)**, “Topics in applied physics”, 45, Springer-Verlag.

- Tamsaout, T., (2006)**, «Effets des caractéristiques spatio-temporelles sur les conditions d'apparition des instabilités entre sphères coaxiales en rotations » Mémoire de magister, UMBB, Boumerdes/Algérie.
- Taylor, G. I., (1923)**, "Stability of a viscous liquid contained between two rotating cylinders", *Philos. Trans. R. Soc. London, Ser., A* 233 289-343.
- Tennakoon, S. G. T., Andereck, C. D., Hegseth J. J. and Riecke H., (1996)**, "Temporal modulation of travelling wave in the flow between rotating cylinders with broken azimuthal symmetry", *Phys. Rev. E*, 54:5053.
- Ungarish, M., (1993)**, "Hydrodynamics of Suspensions", Springer, Berlin.
- Velte, W., (1966)**, "Stabilitat und Verzweigung stationarer Losungen der Navier-Stokesschen Gleichungen beim Taylor problem", *Arch. Rat. Mech. Anal.* 22, 1-14 (1966).
- Vohr, J. H., (1968)**, "Experimental study of Taylor vortices and turbulence in flow between eccentric rotating cylinders", *J. Lub. Tech.*, 90, pp 285-296.
- Walden, R. W., kolodner, P., Passner, A., and Surko, C. M., (1985)**, "Traveling waves and chaos in convection in binary fluid mixtures", *Phys. Rev. Lett.*, 55, 496.
- Wang, C. Y. and Tsai, C. F., (1986)**, "Torque and forces resulting from the rotation of two longitudinally cylinders separated by a viscous fluid", *Phys. Fluids*, Vol. 29, N°3.
- Watanabe, T., Toya, Y. & Nakamura, (2005)**, "Development of surface flow between concentric cylinders with vertical axis", *J. Phys, Conf. Series* 14, pp 9-19.
- Watson, J. H., (2004)**, "The diabolical case of the recurring yield stress", *Appl. Rheol.*, 14, 40-45.
- Wereley, S. T., Aknour, A. and Lueptow, R. M., (2002)**, "Particle-fluid velocities and fouling in rotating filtration of a suspension", *Journal of Membrane Science* 209, pp469-484.
- Weinstein, M., (1977)**, "Wavy vortices in the flow between long eccentric rotating cylinders Linear theory", *Roy. Soc. London Ser. A* 354, 441-457.
- Wimmer, M., (1988)**, "Viscous flows and instabilities near rotating bodies", *Prog. Aerospace Sci.* Vol. 25, pp. 43-103.
- Wimmer, M., (2000)**, "Taylor vortices at different geometries", Springer-Verlag Berlin Heidelberg, LNP 549, pp. 194-212.
- Yahi, F., (2009)**, "Etude théorique et expérimentale des phénomènes de transition laminaire-turbulent dans l'écoulement entre cônes coaxiaux tournants », Mémoire de Magister, USTHB, Algérie.
- Yong, Y. L. and Shaqfeh, E. S. G., (1994)**, "Observation of purely elastic instabilities in the Taylor-Dean flow of a Boger fluid", *J. Fluid Mech.*, Vol. 262, pp. 27-73.

# **Table des figures**

## Table des figures

| Titre de la figure   | page |
|--|------|
| <b>Figure 1.1</b> : Généralisation des phénomènes d'instabilités de type Taylor-Couette dans différents dispositifs d'écoulement   | 3    |
| <b>Figure 1.2</b> : Schéma des forces appliquées sur la particule fluide   | 4    |
| <b>Figure 1.3</b> : Profil de vitesse moyenne dans l'écoulement de base de Couette   | 8    |
| <b>Figure 1.4</b> : Schématisation de l'écoulement de Dean (Yong and Shaqfeh, 1994)  | 9    |
| <b>Figure 1.5</b> : Géométrie du système d'écoulement de Taylor-Dean (Bot, 2000)   | 10   |
| <b>Figure 1.6</b> : Schéma de l'écoulement de base pour un cylindre extérieur au repos (Bot, 1998)   | 11   |
| <b>Figure 1.7</b> : Courbe de stabilité marginale de l'instabilité de Dean (Tiré de Gibson et Cook, 1974)  | 16   |
| <b>Figure 1.8</b> : Diagramme des transitions d'écoulement primaire dans l'espace ( $R_i$ , $R_o$ ) (Tiré de Mutabazi et al (1988))  | 20   |
| <b>Figure 1.9</b> : Séquence des états observés ( $Re_c = 260 \pm 2$ , $Re_m = 292 \pm 2$ , $Re^* = 307 \pm 3$ , $Re_0 = 315 \pm 3$ ) (d'après Bot et al, 1998)  | 22   |
| <b>Figure 1.10</b> : Schéma du système d'écoulement de Taylor-Dean (d'après Ait Aider et al, 2005)   | 23   |
| <b>Figure 1.11</b> : Cheminement de l'écoulement de Taylor-Dean ouvert vers la turbulence (d'après Ait Aider et al, 2005)  | 23   |
| <b>Figure 1.12</b> : Cellules de Taylor entre deux cylindres concentriques, ((1) (d'après Schlichting, 1979); (2) d'après Domański, 2006))   | 26   |
| <b>Figure 1.13</b> : Ecoulement tourbillonnaire ondulé (Wavy Vortex Flow) (d'après Domański, 2006))  | 26   |
| <b>Figure 1.14</b> : Structures associées au régime d'écoulement (d'après Bouabdallah (1980))  | 27   |
| <b>Figure 1.15</b> : Diagramme de stabilité d'après Coles (1965) - (T) : Mouvement périodique en (z) stationnaire ou cellules de Taylor. (S) : Mouvement spiral (z) ou mouvement non-axisymétrique simple. (n) : $m = 2, 3, 4$ nombre d'ondes circonférentielles associées au mouvement doublement périodique ( $\theta, z$ ) instationnaire | 28   |
| <b>Figure 1.16</b> : Diagramme de stabilité d'après Andereck et al (1986)  | 28   |
| <b>Figure 1.17</b> : Ecoulement entre deux cylindres excentriques : Palier de transmission des vitesses (Stuart, 1986)   | 29   |
| <b>Figure 1.18</b> : Variation du nombre de Taylor critique $Ta_c$ en fonction de l'excentricité $\varepsilon$   | 30   |
| <b>Figure 1.19</b> : Combinaison géométrique entre cylindres et cônes (Wimmer, 2000)   | 32   |
| <b>Figure 1.20</b> : Visualisation des cellules de Taylor dans la combinaison Cône-Cylindre (a)- Trois cellules dans le système cylindrique, (b)- Mouvement helicoidal descendant dans le système Cône-Cylindre (Wimmer, 2000)   | 32   |
| <b>Figure 1.21</b> : Comparaison des valeurs critiques du nombre de Taylor d'un écoulement entre cônes coaxiaux en position CG1 et CG2 $\delta=0.30$ (d'après Noui Mehidi (1992))  | 33   |
| <b>Figure 1.22</b> : Représentation des profils de vitesse dans l'entrefer entre cylindre et cône (Wimmer, 1988)   | 33   |
| <b>Figure 1.23</b> : Diagramme de bifurcation dans le plan d'ondes (n, m) pour $\Gamma = 37$ (Adnane et al, 2007)  | 36   |
| <b>Figure 1.24</b> : Diagramme de bifurcation dans le plan d'ondes (n, m) pour a) $\Gamma = 40$ (écoulement en charge) et b) $\Gamma = 34$ (surface libre) (Adnane et al, 2007)  | 37   |
| <b>Figure 1.25</b> : Les régimes d'écoulements observés dans le cas d'un écoulement de Taylor-Couette avec un débit axial imposé (Lueptow, 1992)   | 38   |
| <b>Figure 1.26</b> : Différentes configurations d'un écoulement radial (Min and Lueptow, 1994))  | 38   |
| <b>Figure 1.27</b> : Variation du nombre d'onde axial et influence de la mise en régime des vitesses (Bouabdallah, 1980).  | 39   |

|  |    |
|--|----|
| <b>Figure 2.1</b> : Distribution limite de la densité de probabilité de présence de particules selon la coordonnée radiale $Y = (r - R_1) / (R_2 - R_1)$ . Les calculs sont effectués pour $d = 0.01$ pour le nouveau mixeur (WRB1) et le mixeur avec surface intérieure cylindrique (WR1) (Drosdov, 2002) | 46 |
| <b>Figure 2.2</b> : Système d'écoulement superposant un écoulement de Poiseuille à un profil de Couette cylindrique (Tiré de la thèse de Skali Lami (1991))  | 49 |
| <b>Figure 4.1</b> : Courbe de stabilité marginale pour un fluide simple ou écoulement monophasique (concentration nulle de la suspension $A = 0$ )   | 73 |
| <b>Figure 4.2</b> : Courbes de stabilité marginale pour différentes concentrations $A$ de la suspension ( $\varepsilon = 0.001, \phi = 0.004$ )  | 74 |
| <b>Figure 4.3</b> : Variation du nombre de Taylor critique $Tc_1$ en fonction de la concentration $A$ de la suspension ( $\varepsilon = 0.001, \phi = 0.004$ )   | 75 |
| <b>Figure 4.4</b> : Courbe de stabilité marginale pour différentes concentrations $A$ de la suspension ( $\varepsilon = 0.01, \phi = 0.004$ )  | 76 |
| <b>Figure 4.5</b> : Evolution du nombre de Taylor critique $Tc_1$ en fonction de la concentration $A$ de la suspension ( $\varepsilon = 0.01, \phi = 0.004$ )  | 77 |
| <b>Figure 4.6</b> : Courbe de stabilité marginale pour différentes concentrations $A$ de la suspension ( $\varepsilon = 0.1, \phi = 0.004$ )   | 77 |
| <b>Figure 4.7</b> : Variation du nombre de Taylor critique $Tc_1$ en fonction de la concentration de la suspension ( $\varepsilon = 0.1, \phi = 0.004$ )   | 77 |
| <b>Figure 4.8</b> : Courbe de stabilité marginale pour différentes concentrations $A$ de la suspension ( $\varepsilon = 1, \phi = 0.004$ )   | 78 |
| <b>Figure 4.9</b> : Variation du nombre de Taylor critique $Tc_1$ en fonction de la concentration de la suspension ( $\varepsilon = 1, \phi = 0.004$ )   | 78 |
| <b>Figure 4.10</b> : Courbe de stabilité marginale pour différentes concentrations $A$ de la suspension ( $\varepsilon = 10, \phi = 0.004$ )   | 79 |
| <b>Figure 4.11</b> : Variation du nombre de Taylor critique $Tc_1$ en fonction de la concentration de la suspension ( $\varepsilon = 10, \phi = 0.004$ )   | 79 |
| <b>Figure 4.12</b> : Courbe de stabilité marginale pour différentes concentrations $A$ de la suspension ( $\varepsilon = 20, \phi = 0.004$ )   | 80 |
| <b>Figure 4.13</b> : Variation du nombre de Taylor critique $Tc_1$ en fonction de la concentration de la suspension ( $\varepsilon = 20, \phi = 0.004$ )   | 80 |
| <b>Figure 4.14</b> : Courbe de stabilité marginale pour différentes concentrations $A$ de la suspension ( $\varepsilon = 50, \phi = 0.004$ )   | 80 |
| <b>Figure 4.15</b> : Variation du nombre de Taylor critique $Tc_1$ en fonction de la concentration de la suspension ( $\varepsilon = 50, \phi = 0.004$ )   | 80 |
| <b>Figure 4.16</b> : Courbe de stabilité marginale pour différentes concentrations $A$ de la suspension ( $\varepsilon = 80, \phi = 0.004$ )   | 80 |
| <b>Figure 4.17</b> : Variation du nombre de Taylor critique $Tc_1$ en fonction de la concentration de la suspension ( $\varepsilon = 80, \phi = 0.004$ )   | 80 |
| <b>Figure 4.18</b> : Courbe de stabilité marginale pour différentes concentrations $A$ de la suspension ( $\varepsilon = 100, \phi = 0.004$ )  | 81 |
| <b>Figure 4.19</b> : Variation du nombre de Taylor critique $Tc_1$ en fonction de la concentration de la suspension ( $\varepsilon = 100, \phi = 0.004$ )  | 81 |
| <b>Figure 4.20</b> : Courbe de stabilité marginale pour différentes concentrations $A$ de la suspension ( $\varepsilon = 200, \phi = 0.004$ )  | 81 |
| <b>Figure 4.21</b> : Variation du nombre de Taylor critique $Tc_1$ en fonction de la concentration de la suspension ( $\varepsilon = 200, \phi = 0.004$ )  | 81 |

|  |    |
|--|----|
| <b>Figure 4.22</b> : Courbe de stabilité marginale pour différentes concentrations A de la suspension ( $\epsilon = 400, \phi = 0.004$ )   | 81 |
| <b>Figure 4.23</b> : Variation du nombre de Taylor critique $Tc_1$ en fonction de la concentration de la suspension ( $\epsilon = 400, \phi = 0.004$ )                                 | 81 |
| <b>Figure 4.24</b> : Courbe de stabilité marginale pour différentes concentrations A de la suspension ( $\epsilon = 500, \phi = 0.004$ )   | 82 |
| <b>Figure 4.25</b> : Variation du nombre de Taylor critique $Tc_1$ en fonction de la concentration de la suspension ( $\epsilon = 500, \phi = 0.004$ )                                 | 82 |
| <b>Figure 4.26</b> : Courbe de stabilité marginale pour différentes concentrations A de la suspension ( $\epsilon = 700, \phi = 0.004$ )   | 82 |
| <b>Figure 4.27</b> : Variation du nombre de Taylor critique $Tc_1$ en fonction de la concentration de la suspension ( $\epsilon = 700, \phi = 0.004$ )                                 | 82 |
| <b>Figure 4.28</b> : Courbe de stabilité marginale pour différentes concentrations A de la suspension ( $\epsilon = 833, \phi = 0.004$ )   | 82 |
| <b>Figure 4.29</b> : Variation du nombre de Taylor critique $Tc_1$ en fonction de la concentration de la suspension ( $\epsilon = 833, \phi = 0.004$ )                                 | 82 |
| <b>Figure 4.30</b> : Evolution de $Tc_1$ en fonction du diamètre adimensionnel $\phi$ de particules pour différentes concentrations A de la suspension ( $\epsilon = 0.001$ )          | 83 |
| <b>Figure 4.31</b> : Evolution de $Tc_1$ en fonction du diamètre adimensionnel $\phi$ de particules pour différentes concentrations A de la suspension ( $\epsilon = 0.01$ )           | 83 |
| <b>Figure 4.32</b> : Evolution de $Tc_1$ en fonction du diamètre adimensionnel $\phi$ de particules pour différentes concentrations A de la suspension ( $\epsilon = 0.1$ )            | 83 |
| <b>Figure 4.33</b> : Evolution de $Tc_1$ en fonction du diamètre adimensionnel $\phi$ de particules pour différentes concentrations A de la suspension ( $\epsilon = 1$ )              | 83 |
| <b>Figure 4.34</b> : Evolution de $Tc_1$ en fonction du diamètre adimensionnel $\phi$ de particules pour différentes concentrations A de la suspension ( $\epsilon = 10$ )             | 84 |
| <b>Figure 4.35</b> : Evolution de $Tc_1$ en fonction du diamètre adimensionnel $\phi$ de particules pour différentes concentrations A de la suspension ( $\epsilon = 20$ )             | 84 |
| <b>Figure 4.36</b> : Evolution de $Tc_1$ en fonction du diamètre adimensionnel $\phi$ de particules pour différentes concentrations A de la suspension ( $\epsilon = 100$ )            | 84 |
| <b>Figure 4.37</b> : Evolution de $Tc_1$ en fonction du diamètre adimensionnel $\phi$ de particules pour différentes concentrations A de la suspension ( $\epsilon = 833$ )            | 84 |
| <b>Figure 4.38</b> : Variation du nombre de Taylor critique $Tc_1$ en fonction du rapport de densité $\epsilon$ pour différentes concentrations A de la suspension ( $\phi = 0.0002$ ) | 85 |
| <b>Figure 4.39</b> : Variation du nombre de Taylor critique $Tc_1$ en fonction du rapport de densité $\epsilon$ pour différentes concentrations A de la suspension ( $\phi = 0.002$ )  | 85 |
| <b>Figure 4.40</b> : Variation du nombre de Taylor critique $Tc_1$ en fonction du rapport de densité $\epsilon$ pour différentes concentrations A de la suspension ( $\phi = 0.004$ )  | 85 |
| <b>Figure 4.41</b> : Variation du nombre de Taylor critique $Tc_1$ en fonction du rapport de densité $\epsilon$ pour différentes concentrations A de la suspension ( $\phi = 0.006$ )  | 85 |
| <b>Figure 4.42</b> : Variation du nombre de Taylor critique $Tc_1$ en fonction du rapport de densité $\epsilon$ pour différentes concentrations A de la suspension ( $\phi = 0.008$ )  | 85 |
| <b>Figure 4.43</b> : Variation du nombre de Taylor critique $Tc_1$ en fonction du rapport de densité $\epsilon$ pour différentes concentrations A de la suspension ( $\phi = 0.01$ )   | 85 |
| <b>Figure 4.44</b> : Variation du nombre de Taylor critique $Tc_1$ en fonction du rapport de densité $\epsilon$ pour différentes concentrations A de la suspension ( $\phi = 0.015$ )  | 86 |
| <b>Figure 4.45</b> : Variation du nombre de Taylor critique $Tc_1$ en fonction du rapport de densité $\epsilon$ pour différentes concentrations A de la suspension ( $\phi = 0.02$ )   | 86 |

|  |    |
|--|----|
| <b>Figure 4.46</b> : Evolution du nombre d'onde critique $k_c$ en fonction de la concentration A de la suspension ( $\varepsilon = 0.001$ , $\phi = 0.004$ )     | 87 |
| <b>Figure 4.47</b> : Evolution du nombre d'onde critique $k_c$ en fonction de la concentration A de la suspension ( $\varepsilon = 0.01$ , $\phi = 0.004$ )      | 87 |
| <b>Figure 4.48</b> : Evolution du nombre d'onde critique $k_c$ en fonction de la concentration A de la suspension ( $\varepsilon = 0.1$ , $\phi = 0.004$ )       | 87 |
| <b>Figure 4.49</b> : Evolution du nombre d'onde critique $k_c$ en fonction de la concentration A de la suspension ( $\varepsilon = 1$ , $\phi = 0.004$ )         | 87 |
| <b>Figure 4.50</b> : Evolution du nombre d'onde critique $k_c$ en fonction de la concentration A de la suspension ( $\varepsilon = 10$ , $\phi = 0.004$ )        | 87 |
| <b>Figure 4.51</b> : Evolution du nombre d'onde critique $k_c$ en fonction de la concentration A de la suspension ( $\varepsilon = 50$ , $\phi = 0.004$ )        | 87 |
| <b>Figure 4.52</b> : Evolution du nombre d'onde critique $k_c$ en fonction de la concentration A de la suspension ( $\varepsilon = 100$ , $\phi = 0.004$ )       | 88 |
| <b>Figure 4.53</b> : Evolution du nombre d'onde critique $k_c$ en fonction de la concentration A de la suspension ( $\varepsilon = 833$ , $\phi = 0.004$ )       | 88 |
| <b>Figure 4.54</b> : Courbes de stabilité marginale pour différentes concentrations A de la suspension ( $\varepsilon = 0.001$ , $\phi = 0.004$ )                | 91 |
| <b>Figure 4.55</b> : Variation du nombre de Taylor critique $Tc_1$ en fonction de la concentration A de la suspension ( $\varepsilon = 0.001$ , $\phi = 0.004$ ) | 91 |
| <b>Figure 4.56</b> : Courbes de stabilité marginale pour différentes concentrations A de la suspension ( $\varepsilon = 0.01$ , $\phi = 0.004$ )                 | 92 |
| <b>Figure 4.57</b> : Variation du nombre de Taylor critique $Tc_1$ en fonction de la concentration A de la suspension ( $\varepsilon = 0.01$ , $\phi = 0.004$ )  | 93 |
| <b>Figure 4.58</b> : Courbes de stabilité marginale pour différentes concentrations A de la suspension ( $\varepsilon = 0.1$ , $\phi = 0.004$ )                  | 93 |
| <b>Figure 4.59</b> : Variation du nombre de Taylor critique $Tc_1$ en fonction de la concentration A de la suspension ( $\varepsilon = 0.1$ , $\phi = 0.004$ )   | 93 |
| <b>Figure 4.60</b> : Courbes de stabilité marginale pour différentes concentrations A de la suspension ( $\varepsilon = 1$ , $\phi = 0.004$ )                    | 93 |
| <b>Figure 4.61</b> : Variation du nombre de Taylor critique $Tc_1$ en fonction de la concentration A de la suspension ( $\varepsilon = 1$ , $\phi = 0.004$ )     | 93 |
| <b>Figure 4.62</b> : Courbes de stabilité marginale pour différentes concentrations A de la suspension ( $\varepsilon = 10$ , $\phi = 0.004$ )                   | 94 |
| <b>Figure 4.63</b> : Variation du nombre de Taylor critique $Tc_1$ en fonction de la concentration A de la suspension ( $\varepsilon = 10$ , $\phi = 0.004$ )    | 94 |
| <b>Figure 4.64</b> : Courbes de stabilité marginale pour différentes concentrations A de la suspension ( $\varepsilon = 20$ , $\phi = 0.004$ )                   | 94 |
| <b>Figure 4.65</b> : Variation du nombre de Taylor critique $Tc_1$ en fonction de la concentration A de la suspension ( $\varepsilon = 20$ , $\phi = 0.004$ )    | 94 |
| <b>Figure 4.66</b> : Courbes de stabilité marginale pour différentes concentrations A de la suspension ( $\varepsilon = 80$ , $\phi = 0.004$ )                   | 94 |
| <b>Figure 4.67</b> : Variation du nombre de Taylor critique $Tc_1$ en fonction de la concentration A de la suspension ( $\varepsilon = 80$ , $\phi = 0.004$ )    | 94 |
| <b>Figure 4.68</b> : Courbes de stabilité marginale pour différentes concentrations A de la suspension ( $\varepsilon = 200$ , $\phi = 0.004$ )                  | 95 |
| <b>Figure 4.69</b> : Variation du nombre de Taylor critique $Tc_1$ en fonction de la concentration A de la suspension ( $\varepsilon = 200$ , $\phi = 0.004$ )   | 95 |

|  |    |
|--|----|
| <b>Figure 4.70</b> : Courbes de stabilité marginale pour différentes concentrations A de la suspension ( $\varepsilon = 500, \phi = 0.004$ )                                     | 95 |
| <b>Figure 4.71</b> : Variation du nombre de Taylor critique $Tc_1$ en fonction de la concentration A de la suspension ( $\varepsilon = 500, \phi = 0.004$ )                      | 95 |
| <b>Figure 4.72</b> : Courbes de stabilité marginale pour différentes concentrations A de la suspension ( $\varepsilon = 700, \phi = 0.004$ )                                     | 95 |
| <b>Figure 4.73</b> : Variation du nombre de Taylor critique $Tc_1$ en fonction de la concentration A de la suspension ( $\varepsilon = 700, \phi = 0.004$ )                      | 95 |
| <b>Figure 4.74</b> : Courbes de stabilité marginale pour différentes concentrations A de la suspension ( $\varepsilon = 833, \phi = 0.004$ )                                     | 96 |
| <b>Figure 4.75</b> : Variation du nombre de Taylor critique $Tc_1$ en fonction de la concentration A de la suspension ( $\varepsilon = 833, \phi = 0.004$ )                      | 96 |
| <b>Figure 4.76</b> : Evolution de $Tc_1$ en fonction du diamètre adimensionnel $\phi$ de particules pour différentes concentrations A de la suspension ( $\varepsilon = 0.001$ ) | 96 |
| <b>Figure 4.77</b> : Evolution de $Tc_1$ en fonction du diamètre adimensionnel $\phi$ de particules pour différentes concentrations A de la suspension ( $\varepsilon = 0.1$ )   | 96 |
| <b>Figure 4.78</b> : Evolution de $Tc_1$ en fonction du diamètre adimensionnel $\phi$ de particules pour différentes concentrations A de la suspension ( $\varepsilon = 1$ )     | 97 |
| <b>Figure 4.79</b> : Evolution de $Tc_1$ en fonction du diamètre adimensionnel $\phi$ de particules pour différentes concentrations A de la suspension ( $\varepsilon = 10$ )    | 97 |
| <b>Figure 4.80</b> : Evolution de $Tc_1$ en fonction du diamètre adimensionnel $\phi$ de particules pour différentes concentrations A de la suspension ( $\varepsilon = 200$ )   | 97 |
| <b>Figure 4.81</b> : Evolution de $Tc_1$ en fonction du diamètre adimensionnel $\phi$ de particules pour différentes concentrations A de la suspension ( $\varepsilon = 500$ )   | 97 |
| <b>Figure 4.82</b> : Evolution de $Tc_1$ en fonction du diamètre adimensionnel $\phi$ de particules pour différentes concentrations A de la suspension ( $\varepsilon = 700$ )   | 97 |
| <b>Figure 4.83</b> : Evolution de $Tc_1$ en fonction du diamètre adimensionnel $\phi$ de particules pour différentes concentrations A de la suspension ( $\varepsilon = 833$ )   | 97 |
| <b>Figure 4.84</b> : Variation du nombre de Taylor critique $Tc_1$ en fonction du rapport de densité $\varepsilon$ ( $A = 0.01, \phi = 0.0002$ )                                 | 98 |
| <b>Figure 4.85</b> : Variation du nombre de Taylor critique $Tc_1$ en fonction du rapport de densité $\varepsilon$ ( $A = 0.01, \phi = 0.0002$ )                                 | 98 |
| <b>Figure 4.86</b> : Variation du nombre de Taylor critique $Tc_1$ en fonction du rapport de densité $\varepsilon$ ( $A = 0.03, \phi = 0.0002$ )                                 | 98 |
| <b>Figure 4.87</b> : Variation du nombre de Taylor critique $Tc_1$ en fonction du rapport de densité $\varepsilon$ ( $A = 0.04, \phi = 0.0002$ )                                 | 98 |
| <b>Figure 4.88</b> : Variation du nombre de Taylor critique $Tc_1$ en fonction du rapport de densité $\varepsilon$ ( $A = 0.05, \phi = 0.0002$ )                                 | 99 |
| <b>Figure 4.89</b> : Variation du nombre de Taylor critique $Tc_1$ en fonction du rapport de densité $\varepsilon$ ( $A = 0.01, \phi = 0.002$ )                                  | 99 |
| <b>Figure 4.90</b> : Variation du nombre de Taylor critique $Tc_1$ en fonction du rapport de densité $\varepsilon$ ( $A = 0.02, \phi = 0.002$ )                                  | 99 |
| <b>Figure 4.91</b> : Variation du nombre de Taylor critique $Tc_1$ en fonction du rapport de densité $\varepsilon$ ( $A = 0.03, \phi = 0.002$ )                                  | 99 |
| <b>Figure 4.92</b> : Variation du nombre de Taylor critique $Tc_1$ en fonction du rapport de densité $\varepsilon$ ( $A = 0.04, \phi = 0.002$ )                                  | 99 |
| <b>Figure 4.93</b> : Variation du nombre de Taylor critique $Tc_1$ en fonction du rapport de densité $\varepsilon$ ( $A = 0.05, \phi = 0.002$ )                                  | 99 |



|   |     |
|---|-----|
| <b>Figure 4.94</b> : Variation du nombre de Taylor critique $Tc_1$ en fonction du rapport de densité $\varepsilon$ ( $A = 0.01, \phi = 0.004$ )         | 100 |
| <b>Figure 4.95</b> : Variation du nombre de Taylor critique $Tc_1$ en fonction du rapport de densité $\varepsilon$ ( $A = 0.02, \phi = 0.004$ )         | 100 |
| <b>Figure 4.96</b> : Variation du nombre de Taylor critique $Tc_1$ en fonction du rapport de densité $\varepsilon$ ( $A = 0.03, \phi = 0.004$ )         | 100 |
| <b>Figure 4.97</b> : Variation du nombre de Taylor critique $Tc_1$ en fonction du rapport de densité $\varepsilon$ ( $A = 0.04, \phi = 0.004$ )         | 100 |
| <b>Figure 4.98</b> : Variation du nombre de Taylor critique $Tc_1$ en fonction du rapport de densité $\varepsilon$ ( $A = 0.05, \phi = 0.004$ )         | 100 |
| <b>Figure 4.99</b> : Variation du nombre de Taylor critique $Tc_1$ en fonction du rapport de densité $\varepsilon$ ( $A = 0.01, \phi = 0.02$ )          | 100 |
| <b>Figure 4.100</b> : Variation du nombre de Taylor critique $Tc_1$ en fonction du rapport de densité $\varepsilon$ ( $A = 0.02, \phi = 0.02$ )         | 101 |
| <b>Figure 4.101</b> : Variation du nombre de Taylor critique $Tc_1$ en fonction du rapport de densité $\varepsilon$ ( $A = 0.03, \phi = 0.02$ )         | 101 |
| <b>Figure 4.102</b> : Variation du nombre de Taylor critique $Tc_1$ en fonction du rapport de densité $\varepsilon$ ( $A = 0.04, \phi = 0.02$ )         | 101 |
| <b>Figure 4.103</b> : Variation du nombre de Taylor critique $Tc_1$ en fonction du rapport de densité $\varepsilon$ ( $A = 0.05, \phi = 0.02$ )         | 101 |
| <b>Figure 4.104</b> : Variation du nombre d'onde critique $k_c$ en fonction de la concentration de la suspension ( $\varepsilon = 0.001, \phi = 0.01$ ) | 102 |
| <b>Figure 4.105</b> : Variation du nombre d'onde critique $k_c$ en fonction de la concentration de la suspension ( $\varepsilon = 0.1, \phi = 0.015$ )  | 102 |
| <b>Figure 4.106</b> : Variation du nombre d'onde critique $k_c$ en fonction de la concentration de la suspension ( $\varepsilon = 10, \phi = 0.0002$ )  | 102 |
| <b>Figure 4.107</b> : Variation du nombre d'onde critique $k_c$ en fonction de la concentration de la suspension ( $\varepsilon = 50, \phi = 0.008$ )   | 102 |
| <b>Figure 4.108</b> : Variation du nombre d'onde critique $k_c$ en fonction de la concentration de la suspension ( $\varepsilon = 100, \phi = 0.01$ )   | 103 |
| <b>Figure 4.109</b> : Variation du nombre d'onde critique $k_c$ en fonction de la concentration de la suspension ( $\varepsilon = 100, \phi = 0.02$ )   | 103 |
| <b>Figure 4.110</b> : Variation du nombre d'onde critique $k_c$ en fonction de la concentration de la suspension ( $\varepsilon = 833, \phi = 0.004$ )  | 103 |
| <b>Figure 4.111</b> : Variation du nombre d'onde critique $k_c$ en fonction de la concentration de la suspension ( $\varepsilon = 833, \phi = 0.008$ )  | 103 |
| <b>Figure 5.1</b> : Vue générale du dispositif expérimental<br>a) Système de Taylor-Couette    b) Système de Taylor-Dean                                | 109 |
| <b>Figure 5.2</b> : Schéma du dispositif expérimental   | 109 |
| <b>Figure 5.3</b> : Schématisation des caractéristiques du système d'écoulement   | 110 |
| <b>Figure 5.4</b> : Système d'inclinaison   | 110 |
| <b>Figure 5.5</b> : a) Moteur -    b) Réducteur 1/11  | 111 |
| <b>Figure 5.6</b> : Tachymètre digital  | 112 |
| <b>Figure 5.7</b> : Thermomètre numérique   | 112 |
| <b>Figure 5.8</b> : Anneaux de garde  | 112 |
| <b>Figure 5.9</b> : Système d'écoulement avec bords fixes   | 113 |
| <b>Figure 5.10</b> : Système d'écoulement avec bords fixes  | 113 |
| <b>Figure 5.11</b> : Schématisation des configurations étudiées   | 114 |
| <b>Figure 5.12</b> : Rhéogramme du liquide suspendant (80/20 essence Simili + Chellala M)   | 115 |

|  |     |
|--|-----|
| <b>Figure 5.13</b> : Rhéogramme de la suspension pour différentes concentrations de particules   | 116 |
| <b>Figure 5.14</b> : Variation de la viscosité apparente en fonction de la concentration de la suspension  | 117 |
| <b>Figure 5.15</b> : Variation de l'indice de consistance $k$ en fonction de la concentration de la suspension   | 117 |
| <b>Figure 5.16</b> : Variation du seuil d'écoulement en fonction de la concentration de la suspension  | 117 |
| <b>Figure 5.17</b> : Variation de l'indice de puissance $n$ en fonction de la concentration de la suspension   | 118 |
| <b>Figure 5.18</b> : Variation de la viscosité apparente en fonction de la température pour différentes concentrations $C$ de la suspension  | 118 |
| <b>Figure 5.19</b> : Visualisation par transmission de la lumière  | 119 |
| <b>Figure 6.1</b> : (a) Cellules de Taylor (b) cellules d'ourlet<br>$\Gamma' = 10.16, Ta_c = 90, C = 0.2\%$ , $\Gamma' = 9.99, Ta_c = 138, C = 0.2\%$<br>$Re_c = 185.68$ $Re_c = 283.46$   | 124 |
| <b>Figure 6.2</b> : Apparition de la source d'instabilité générant des rouleaux propagatifs inclinés<br>a) $\Gamma' = 9.22, Ta_c = 160, C = 0.2\%$ b) $\Gamma' = 8.63, Ta_c = 154, C = 0.2\%$<br>$Re_c = 329.35$ $Re_c = 317.07$   | 125 |
| <b>Figure 6.3</b> : Apparition de l'instabilité baroclinique dans la région d'entrée au niveau des extrémités du système d'écoulement, $\Gamma' = 9.85, Ta_c = 179, C = 0.2\%, Re_c = 368.46$                                      | 125 |
| <b>Figure 6.4</b> : La source d'instabilité et les rouleaux propagatifs inclinés apparaissent toujours<br>a) $\Gamma' = 8.22, Ta_c = 150, C = 0.2\%$ b) $\Gamma' = 4.45, Ta_c = 170, C = 0.2\%$<br>$Re_c = 308.77$ $Re_c = 349.93$ | 126 |
| <b>Figure 6.5</b> : Variation du nombre de Taylor critique en fonction du rapport d'aspect radial $\Gamma'$ pour les concentrations considérées $C$ pour deux bords libres   | 126 |
| <b>Figure 6.6</b> : Variation du nombre de Taylor critique en fonction de la concentration $C$ de particules dans la première région pour deux bords libres  | 127 |
| <b>Figure 6.7</b> : Variation du nombre de Taylor critique en fonction de la concentration $C$ de particules dans la deuxième région pour deux bords libres  | 127 |
| <b>Figure 6.8</b> : Variation du nombre de Taylor critique en fonction de la concentration $C$ de particules dans la troisième région pour deux bords libres.  | 128 |
| <b>Figure 6.9</b> : Angle d'inclinaison des ondes de T-D en fonction du facteur d'aspect $\Gamma'$ pour différentes concentrations $C$ de la suspension pour deux bords libres.  | 129 |
| <b>Figure 6.10</b> : Cellule d'Ourlet (Necking Cell), $\Gamma' = 9.99, Ta = 138, Re = 284.27, C = 0.2\%$   | 131 |
| <b>Figure 6.11</b> : Instabilité de Taylor-Dean, $\Gamma' = 8.22, Ta = 168.7, Re = 346.62, C = 0.2\%$  | 131 |
| <b>Figure 6.12</b> : Variation du nombre de Taylor critique en fonction du facteur d'aspect radial $\Gamma'$ pour différentes concentrations $C$ pour deux bords mobiles   | 132 |
| <b>Figure 6.13</b> : Variation du nombre de Taylor critique en fonction de la concentration $C$ de particules dans la première région pour deux bords mobiles  | 133 |
| <b>Figure 6.14</b> : Variation du nombre de Taylor critique en fonction de la concentration $C$ de particules dans la deuxième région pour deux bords mobiles  | 133 |
| <b>Figure 6.15</b> : Variation du nombre de Taylor critique en fonction de la concentration $C$ de particules dans la troisième région pour deux bords mobiles   | 133 |
| <b>Figure 6.16</b> : Angle d'inclinaison des ondes de T-D en fonction du facteur d'aspect $\Gamma'$ pour différentes concentrations $C$ de la suspension pour deux bords mobiles   | 135 |
| <b>Figure 6.17</b> : Variation du nombre de Taylor critique en fonction du facteur d'aspect radial $\Gamma'$ pour différentes concentrations pour deux bords fixes   | 135 |
| <b>Figure 6.18</b> : Variation du nombre de Taylor critique en fonction de la concentration $C$ de particules dans la première région pour deux bords fixes  | 136 |
| <b>Figure 6.19</b> : Variation du nombre de Taylor critique en fonction de la concentration $C$ de particules dans la deuxième région pour deux bords fixes  | 136 |
| <b>Figure 6.20</b> : Variation du nombre de Taylor critique en fonction de la concentration $C$ de particules dans la troisième région pour deux bords fixes   | 136 |

|   |     |
|---|-----|
| <b>Figure 6.21:</b> Angle d'inclinaison des ondes de T-D en fonction du facteur d'aspect $\Gamma'$ pour différentes concentrations C de la suspension pour deux bords fixes                                 | 138 |
| <b>Figure 6.22 :</b> Variation du nombre de Taylor critique Tac en fonction du facteur d'aspect radial $\Gamma'$ pour différentes concentrations dans le cas d'un bord gauche fixe et un bord droite mobile | 138 |
| <b>Figure 6.23 :</b> Variation du nombre de Taylor critique en fonction de la concentration C de particules dans la première région pour un bord gauche fixe et un bord droite mobile                       | 139 |
| <b>Figure 6.24 :</b> Variation du nombre de Taylor critique en fonction de la concentration C de particules dans la deuxième région pour un bord gauche fixe et un bord droite mobile                       | 139 |
| <b>Figure 6.25 :</b> Variation du nombre de Taylor critique en fonction de la concentration C de particules dans la troisième région pour un bord gauche fixe et un bord droite mobile                      | 139 |
| <b>Figure 6.26 :</b> Variation du nombre de Taylor critique Tac en fonction du facteur d'aspect radial $\Gamma'$ pour différentes concentrations dans le cas d'un bord gauche mobile et un bord droite fixe | 140 |
| <b>Figure 6.27 :</b> Variation du nombre de Taylor critique en fonction de la concentration C de particules dans la première région pour bord gauche mobile et un bord droite fixe                          | 141 |
| <b>Figure 6.28 :</b> Variation du nombre de Taylor critique en fonction de la concentration C de particules dans la deuxième région pour bord gauche mobile et un bord droite fixe                          | 141 |
| <b>Figure 6.29 :</b> Variation du nombre de Taylor critique en fonction de la concentration C de particules dans la troisième région pour bord gauche mobile et un bord droite fixe                         | 141 |
| <b>Figure 6.30 :</b> Angle d'inclinaison des ondes de T-D en fonction du facteur d'aspect $\Gamma'$ pour différentes concentrations C de la suspension pour bord gauche mobile et un bord droite fixe       | 142 |
| <b>Figure 6.31 :</b> variation du nombre de Taylor critique en fonction du facteur d'aspect radial $\Gamma'$ pour différentes concentrations pour un bord gauche fixe et un bord droite libre               | 143 |
| <b>Figure 6.32 :</b> Variation du nombre de Taylor critique en fonction de la concentration C de particules dans la première région pour bord gauche fixe et un bord droite libre                           | 144 |
| <b>Figure 6.33 :</b> Variation du nombre de Taylor critique en fonction de la concentration C de particules dans la deuxième région pour bord gauche fixe et un bord droite libre                           | 144 |
| <b>Figure 6.34 :</b> Variation du nombre de Taylor critique en fonction de la concentration C de particules dans la troisième région pour bord gauche fixe et un bord droite libre                          | 144 |
| <b>Figure 6.35 :</b> variation du nombre de Taylor critique en fonction du facteur d'aspect radial $\Gamma'$ pour différentes concentrations pour un bord gauche fixe et un bord droite libre               | 145 |
| <b>Figure 6.36 :</b> Variation du nombre de Taylor critique en fonction de la concentration C de particules dans la première région pour bord gauche fixe et un bord droite libre                           | 145 |
| <b>Figure 6.37 :</b> Variation du nombre de Taylor critique en fonction de la concentration C de particules dans la deuxième région pour bord gauche fixe et un bord droite libre                           | 145 |
| <b>Figure 6.38 :</b> Variation du nombre de Taylor critique en fonction de la concentration C de particules dans la troisième région pour bord gauche fixe et un bord droite libre                          | 146 |
| <b>Figure 6.39 :</b> Angle d'inclinaison des ondes de T-D en fonction du facteur d'aspect $\Gamma'$ pour différentes concentrations C de la suspension pour bord gauche fixe et un bord droite libre        | 147 |
| <b>Figure 6.40:</b> variation du nombre de Taylor critique en fonction du facteur d'aspect radial $\Gamma'$ pour différentes concentrations pour un bord gauche mobile et un bord droite libre              | 148 |
| <b>Figure 6.41 :</b> Variation du nombre de Taylor critique en fonction de la concentration C de particules dans la première région pour un bord gauche mobile et un bord droite libre                      | 148 |
| <b>Figure 6.42 :</b> Variation du nombre de Taylor critique en fonction de la concentration C de particules dans la deuxième région pour un bord gauche mobile et un bord droite libre                      | 148 |
| <b>Figure 6.43 :</b> Variation du nombre de Taylor critique en fonction de la concentration C de particules dans la troisième région pour un bord gauche mobile et un bord droite libre                     | 149 |
| <b>Figure 6.44 :</b> variation du nombre de Taylor critique en fonction du facteur d'aspect radial $\Gamma'$ pour différentes concentrations pour un bord gauche libre et un bord droite mobile             | 150 |

|   |     |
|---|-----|
| <b>Figure 6.45 :</b> Variation du nombre de Taylor critique en fonction de la concentration $C$ de particules dans la première région pour un bord gauche mobile et un bord droite libre                              | 150 |
| <b>Figure 6.46 :</b> Variation du nombre de Taylor critique en fonction de la concentration $C$ de particules dans la deuxième région pour un bord gauche mobile et un bord droite libre                              | 150 |
| <b>Figure 6.47 :</b> Variation du nombre de Taylor critique en fonction de la concentration $C$ de particules dans la troisième région pour un bord gauche mobile et un bord droite libre                             | 150 |
| <b>Figure 6.48 :</b> Angle d'inclinaison des ondes de T-D en fonction du facteur d'aspect $\Gamma'$ pour différentes concentrations $C$ de la suspension pour un bord gauche mobile et un bord droite libre           | 152 |
| <b>Figure 6.49 :</b> variation du nombre de Taylor critique $Ta_c$ en fonction du facteur d'aspect radial $\Gamma'$ pour différentes concentrations de la suspension et pour les différentes combinaisons considérées | 153 |

# Liste des tableaux

## Liste des tableaux

| Titre du Tableau   | page |
|--|------|
| <b>Tableau 1.1</b> : Seuil critique des différents régimes d'instabilités pour divers configurations (tiré de la thèse de Bouabdallah, 1980)   | 31   |
| <b>Tableau 4.1</b> : Comparaison du nombre de Taylor critique $Tc_1$ obtenu théoriquement et expérimentalement(*)  | 73   |
| <b>Tableau 4.2</b> : comparaison des nombres de Taylor critique $Tc_1$ obtenus pour une suspension par Ali and Lueptow (2002) et notre étude réalisée pour $\varepsilon = 0.001, \phi = 0.004$ | 75   |
| <b>Tableau 4.3</b> : Comparaison des nombres de Taylor critique $Tc_1$ obtenus pour une suspension par Ali and Lueptow (2002) et notre travail pour $\varepsilon = 1, \phi = 0.004$            | 78   |
| <b>Tableau 4.4</b> : Comparaison des nombres de Taylor critique $Tc_1$ obtenus pour une suspension par Ali and Lueptow (2002) et notre travail pour $\varepsilon = 10, \phi = 0.004$           | 79   |
| <b>Tableau 4.5</b> : Valeurs des coefficients $\lambda_{1,r}, \lambda_{1,\theta}, \lambda_{1,z}, \lambda_{s,r}, \lambda_{s,\theta}, \lambda_{s,z}$ pour différentes valeurs de $\varepsilon$   | 89   |
| <b>Tableau 5.1</b> : Dimensions des anneaux de garde   | 113  |
| <b>Tableau 5.2</b> : Valeurs de a et b obtenues par lissage des valeurs expérimentales de la viscosité $\mu$   | 118  |
| <b>Tableau 6.1</b> : Détermination des paramètres a, b et $\xi$ par lissage des valeurs critiques de $Ta_c$ dans la deuxième région pour deux bords libres                                     | 128  |
| <b>Tableau 6.2</b> : Détermination des paramètres a, b et $\xi$ par lissage des valeurs critiques de $Ta_c$ dans la troisième région pour deux bords libres                                    | 128  |
| <b>Tableau 6.3</b> : Détermination des paramètres a, b et $\xi$ par lissage des valeurs critiques de $Ta_c$ dans la deuxième région pour deux bords mobiles                                    | 133  |
| <b>Tableau 6.4</b> : Détermination des paramètres a, b et $\xi$ par lissage des valeurs critiques de $Ta_c$ dans la troisième région pour deux bords mobiles                                   | 134  |
| <b>Tableau 6.5</b> : Détermination des paramètres a, b et $\xi$ par lissage des valeurs critiques de $Ta_c$ dans la deuxième région pour deux bords fixes                                      | 137  |
| <b>Tableau 6.6</b> : Détermination des paramètres a, b et $\xi$ par lissage des valeurs critiques de $Ta_c$ dans la troisième région pour deux bords fixes                                     | 137  |
| <b>Tableau 6.7</b> : Détermination des paramètres a, b et $\xi$ par lissage des valeurs critiques de $Ta_c$ dans la deuxième région pour un bord gauche fixe et un bord droite mobile          | 139  |
| <b>Tableau 6.8</b> : Détermination des paramètres a, b et $\xi$ par lissage des valeurs critiques de $Ta_c$ dans la deuxième région pour un bord gauche fixe et un bord droite mobile.         | 140  |
| <b>Tableau 6.9</b> : Détermination des paramètres a, b et $\xi$ par lissage des valeurs critiques de $Ta_c$ dans la deuxième région pour un bord gauche mobile et un bord droite fixe          | 141  |
| <b>Tableau 6.10</b> : Détermination des paramètres a, b et $\xi$ par lissage des valeurs critiques de $Ta_c$ dans la troisième région pour un bord gauche mobile et un bord droite fixe        | 142  |
| <b>Tableau 6.11</b> : Détermination des paramètres a, b et $\xi$ par lissage des valeurs critiques de $Ta_c$ dans la deuxième région pour bord gauche fixe et un bord droite libre             | 144  |
| <b>Tableau 6.12</b> : Détermination des paramètres a, b et $\xi$ par lissage des valeurs critiques de $Ta_c$ dans la troisième région pour bord gauche fixe et un bord droite libre            | 145  |
| <b>Tableau 6.13</b> : Détermination des paramètres a, b et $\xi$ par lissage des valeurs critiques de $Ta_c$ dans la deuxième région pour bord gauche fixe et un bord droite libre.            | 146  |
| <b>Tableau 6.14</b> : Détermination des paramètres a, b et $\xi$ par lissage des valeurs critiques de $Ta_c$ dans la troisième région pour bord gauche fixe et un bord droite libre.           | 146  |
| <b>Tableau 6.15</b> : Détermination des paramètres a, b et $\xi$ par lissage des valeurs critiques de $Ta_c$ dans la deuxième région pour un bord gauche mobile et un bord droite libre        | 149  |
| <b>Tableau 6.16</b> : Détermination des paramètres a, b et $\xi$ par lissage des valeurs critiques de $Ta_c$ dans la troisième région pour un bord gauche mobile et un bord droite libre       | 149  |
| <b>Tableau 6.17</b> : Détermination des paramètres a, b et $\xi$ par lissage des valeurs critiques de $Ta_c$ dans la deuxième région pour un bord gauche mobile et un bord droite libre        | 151  |
| <b>Tableau 6.18</b> : Détermination des paramètres a, b et $\xi$ par lissage des valeurs critiques de $Ta_c$ dans la troisième région pour un bord gauche mobile et un bord droite libre       | 151  |

# ANNEXES

## A.1 Méthode de Newton-Raphson

De l'équation (4.96), on constate que  $T_s = f(k, \lambda_{l,r}, \lambda_{l,\theta}, \lambda_{l,z}, \lambda_{s,r}, \lambda_{s,\theta}, \lambda_{s,z})$ .

On développe un système d'équations non linéaire (7 Equations à 7 inconnus).

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{dT_s}{dk} = f_1(k, \lambda_{l,r}, \lambda_{l,\theta}, \lambda_{l,z}, \lambda_{s,r}, \lambda_{s,\theta}, \lambda_{s,z}) = 0 \\ \frac{dT_s}{d\lambda_{l,r}} = f_2(k, \lambda_{l,r}, \lambda_{l,\theta}, \lambda_{l,z}, \lambda_{s,r}, \lambda_{s,\theta}, \lambda_{s,z}) = 0 \\ \frac{dT_s}{d\lambda_{l,\theta}} = f_3(k, \lambda_{l,r}, \lambda_{l,\theta}, \lambda_{l,z}, \lambda_{s,r}, \lambda_{s,\theta}, \lambda_{s,z}) = 0 \\ \frac{dT_s}{d\lambda_{l,z}} = f_4(k, \lambda_{l,r}, \lambda_{l,\theta}, \lambda_{l,z}, \lambda_{s,r}, \lambda_{s,\theta}, \lambda_{s,z}) = 0 \\ \frac{dT_s}{d\lambda_{s,r}} = f_5(k, \lambda_{l,r}, \lambda_{l,\theta}, \lambda_{l,z}, \lambda_{s,r}, \lambda_{s,\theta}, \lambda_{s,z}) = 0 \\ \frac{dT_s}{d\lambda_{s,\theta}} = f_6(k, \lambda_{l,r}, \lambda_{l,\theta}, \lambda_{l,z}, \lambda_{s,r}, \lambda_{s,\theta}, \lambda_{s,z}) = 0 \\ \frac{dT_s}{d\lambda_{s,z}} = f_7(k, \lambda_{l,r}, \lambda_{l,\theta}, \lambda_{l,z}, \lambda_{s,r}, \lambda_{s,\theta}, \lambda_{s,z}) = 0 \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} \text{(A1)} \\ \text{(A2)} \\ \text{(A3)} \\ \text{(A4)} \\ \text{(A5)} \\ \text{(A6)} \\ \text{(A7)} \end{array}$$

On procède à la résolution de ce système d'équations par utilisation de la méthode de Newton-Raphson.

### A.1.1 Algorithme de la méthode de Newton-Raphson

La relation utilisée pour chaque itération  $i$  est la suivante :

$$X_{i+1} = X_i - A_i \cdot B_i \quad \text{(A.8)}$$

avec:

$$X_{(i+1)} = \begin{bmatrix} (k)_{i+1} \\ (\lambda_{l,r})_{i+1} \\ (\lambda_{l,\theta})_{i+1} \\ (\lambda_{l,z})_{i+1} \\ (\lambda_{s,r})_{i+1} \\ (\lambda_{s,\theta})_{i+1} \\ (\lambda_{s,z})_{i+1} \end{bmatrix} \quad \text{(A.9)}$$



$$X_i = \begin{bmatrix} (k)_i \\ (\lambda_{l,r})_i \\ (\lambda_{l,\theta})_i \\ (\lambda_{l,z})_i \\ (\lambda_{s,r})_i \\ (\lambda_{s,\theta})_i \\ (\lambda_{s,z})_i \end{bmatrix} \quad (\text{A.10})$$

$$A = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial k} & \frac{\partial f_1}{\partial \lambda_{l,r}} & \frac{\partial f_1}{\partial \lambda_{l,\theta}} & \frac{\partial f_1}{\partial \lambda_{l,z}} & \frac{\partial f_1}{\partial \lambda_{s,r}} & \frac{\partial f_1}{\partial \lambda_{s,\theta}} & \frac{\partial f_1}{\partial \lambda_{s,z}} \\ \frac{\partial f_2}{\partial k} & \frac{\partial f_2}{\partial \lambda_{l,r}} & \frac{\partial f_2}{\partial \lambda_{l,\theta}} & \frac{\partial f_2}{\partial \lambda_{l,z}} & \frac{\partial f_2}{\partial \lambda_{s,r}} & \frac{\partial f_2}{\partial \lambda_{s,\theta}} & \frac{\partial f_2}{\partial \lambda_{s,z}} \\ \frac{\partial f_3}{\partial k} & \frac{\partial f_3}{\partial \lambda_{l,r}} & \frac{\partial f_3}{\partial \lambda_{l,\theta}} & \frac{\partial f_3}{\partial \lambda_{l,z}} & \frac{\partial f_3}{\partial \lambda_{s,r}} & \frac{\partial f_3}{\partial \lambda_{s,\theta}} & \frac{\partial f_3}{\partial \lambda_{s,z}} \\ \frac{\partial f_4}{\partial k} & \frac{\partial f_4}{\partial \lambda_{l,r}} & \frac{\partial f_4}{\partial \lambda_{l,\theta}} & \frac{\partial f_4}{\partial \lambda_{l,z}} & \frac{\partial f_4}{\partial \lambda_{s,r}} & \frac{\partial f_4}{\partial \lambda_{s,\theta}} & \frac{\partial f_4}{\partial \lambda_{s,z}} \\ \frac{\partial f_5}{\partial k} & \frac{\partial f_5}{\partial \lambda_{l,r}} & \frac{\partial f_5}{\partial \lambda_{l,\theta}} & \frac{\partial f_5}{\partial \lambda_{l,z}} & \frac{\partial f_5}{\partial \lambda_{s,r}} & \frac{\partial f_5}{\partial \lambda_{s,\theta}} & \frac{\partial f_5}{\partial \lambda_{s,z}} \\ \frac{\partial f_6}{\partial k} & \frac{\partial f_6}{\partial \lambda_{l,r}} & \frac{\partial f_6}{\partial \lambda_{l,\theta}} & \frac{\partial f_6}{\partial \lambda_{l,z}} & \frac{\partial f_6}{\partial \lambda_{s,r}} & \frac{\partial f_6}{\partial \lambda_{s,\theta}} & \frac{\partial f_6}{\partial \lambda_{s,z}} \\ \frac{\partial f_7}{\partial k} & \frac{\partial f_7}{\partial \lambda_{l,r}} & \frac{\partial f_7}{\partial \lambda_{l,\theta}} & \frac{\partial f_7}{\partial \lambda_{l,z}} & \frac{\partial f_7}{\partial \lambda_{s,r}} & \frac{\partial f_7}{\partial \lambda_{s,\theta}} & \frac{\partial f_7}{\partial \lambda_{s,z}} \end{bmatrix}^{-1} \quad (\text{A.11})$$

$$B = \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \\ f_4 \\ f_5 \\ f_6 \\ f_7 \end{bmatrix} \quad (\text{A.12})$$

### A.1.2 Condition d'arrêt

$$\|X_{(i+1)} - X_i\| \leq \varepsilon, \quad \varepsilon = 10^{-6} \quad (\text{A.13})$$

## Production Scientifique

### B.1 Publication Internationale avec comité de lecture

**Daimallah, A., Bouabdallah, A., Nsom, B., Adnane, M. and Alemany, A. (2009)**, “Onset of instabilities in Taylor-Dean flow of yield-stress fluid”, Applied Rheology, Volume 19, Issue 3, 33960-1, 33960-8.

### B.2. Communications Scientifiques Internationales avec actes

**Daimallah, A., Adnane, M. & Bouabdallah, A.**, « Etude expérimentale des effets de la géométrie du système et d’une suspension de particules sur l’apparition des instabilités dans le système d’écoulement de Taylor-Dean », 5<sup>ème</sup> Colloque Internationale de Rhéologie, CIR’05, 22-23 novembre 2009, Les Andalouses-Oran, Algérie.

**Nsom, B., Daimallah, A., Baba Ahmed, I., Bouabdallah, A., Ravelo, B., Ndong, W., Latrache, N.& Ahmad,A.**, “Numerical Solution to BostwickConsistometer Test”, 5<sup>th</sup> International Symposium on Food Rheology and Structure, June 14-18, 2009 Zurich, Switzerland.

**Daimallah, A., Ouali, M. & Bouabdallah, A.**, “Endwall effects on the onset of instabilities in the Taylor-Dean flow system of yield-stress fluid”Annual European Rheology Conference, April 7-9, 2010, Göteborg, Sweden.

**Daimallah, A. & Bouabdallah,A.**, “Onset of Taylor vortex flow in the presence of suspension”, 18<sup>th</sup> International Couette-Taylor Workshop, June 24-25, 2013, University of Twente-Enschede, The Netherlands.

### B.3. Communication Scientifique Nationale

**Daimallah, A. & Bouabdallah, A.**,« Effet des particules en suspension sur la stabilité de l’écoulement de Taylor-Couette »,Congrès national de mécanique des fluides 25-26 Septembre 2012- USTHB – ALGER.

## RESUME DE LA THESE

La résolution analytique du problème de la stabilité d'une suspension solide (particules rigides de forme sphérique) dans le système de Taylor-Couette cylindrique a été menée. On s'est basé sur les travaux de Ali and Lueptow (2002) pour formuler les équations régissant la stabilité de l'écoulement dans le cadre d'une théorie linéaire. Ces équations sont valables dans l'approximation du faible espace annulaire et ont pour but la prévision de l'instabilité primaire. A cet effet, nous avons utilisé une méthode variationnelle telle que la méthode de Galerkin pour résoudre le problème aux valeurs propres conduisant à établir le diagramme de stabilité liée au nombre d'onde au voisinage de l'état critique du développement de la première instabilité. Tout d'abord, on a cherché à mettre au point les calculs dans le cas de l'écoulement de Taylor-Couette classique en se référant aux travaux de Ali and Lueptow (2002). Ensuite on a procédé à la résolution systématique des équations du mouvement et l'on cherche à déterminer le critère d'apparition des instabilités en présence de particules en suspension et l'on détermine simultanément les paramètres de couplage entre forces d'interaction liquide-solide. L'ensemble des travaux ainsi réalisés permettront de lever la contradiction fondamentale entre la théorie et l'expérience.

L'étude expérimentale a permis d'analyser les effets de la concentration des particules en suspension (disques) et du rapport d'aspect radial  $\Gamma'$  sur l'apparition des instabilités dans le système de Taylor-Dean. Le dispositif expérimental utilisé est constitué d'un cylindre intérieur tournant et le cylindre extérieur est maintenu fixe. Le comportement rhéologique du fluide utilisé est viscoplastique obéissant au modèle de Herschel Bulkley. L'apparition des instabilités est examinée en utilisant une technique de visualisation. Pour une concentration donnée dans l'intervalle étudié, la nature des structures apparaissant dans le système d'écoulement dépend  $\Gamma'$ , alors que pour une valeur donnée de  $\Gamma'$  dans l'intervalle étudié, la valeur du nombre de Taylor critique  $Ta_c$  dépend de la concentration des particules. Nous avons obtenu que le nombre de Taylor critique  $Ta_c$  correspondant au déclenchement de la première instabilité évolue non linéairement en fonction de  $\Gamma'$ . De plus, nous avons examiné expérimentalement les effets de limitation axiale (effet de bords) sur le déclenchement des instabilités dans le système de Taylor-Dean. Les résultats obtenus montrent que les bords tournants n'affectent pas le type de structures qui apparaissent dans le système d'écoulement de Taylor-Dean. Cependant, ils influencent le seuil critique d'apparition des instabilités qui est marquée par des valeurs élevées du nombre de Taylor critique pour des bords tournants ce qui indique un effet stabilisant des bords mobiles.

**MOTS-CLES :** *instabilité centrifuge, suspension, méthode de Galerkin, Taylor-Couette, Taylor-Dean, fluide viscoplastique, limitation axiale.*

## THESIS ABSTRACT

The analytical solution of the stability problem of a solid suspension (rigid spherical particles) in the system of cylindrical Taylor-Couette was conducted. We are based on the work of Ali and Lueptow (2002) to formulate the equations governing the stability of the flow in a linear theory. These equations are valid in the approximation of small gap configuration and aim to predict the primary instability. For this purpose, we used a variational method such as the Galerkin method to solve the eigenvalue problem leading to establish the stability diagram related to the wave number in the vicinity of the critical state of development of the first instability. First, we develop the calculations in the case of Taylor-Couette flow with reference to classic work of Ali and Lueptow (2002).

Then, we carried out a systematic solution of the equations of motion and we search to determine the criterion of onset of instabilities in the presence of suspended particles and coupling parameters are simultaneously determined from liquid-solid interaction force. All work carried out and will remove the fundamental contradiction between theory and experiment. The experimental study has analyzed the effect of the concentration of suspended particles (disks) and radial aspect ratio  $\Gamma'$  on the occurrence of instabilities in the Taylor-Dean flow system. The experimental device used consists of a rotating inner cylinder and the outer cylinder is stationary. The rheological behavior of the fluid is viscoplastic obeying to Herschel Bulkley model. The onset of instability is examined using a visualization technique. For a given concentration in the range studied, the nature of the structure appearing in the flow system depends on  $\Gamma'$ , while for a given value of  $\Gamma'$  in the range studied, the value of the critical Taylor number  $Ta_c$  depends on the particle concentration. We obtain that the critical Taylor number  $Ta_c$  corresponding to the onset of the first instability evolves nonlinearly versus  $\Gamma'$ . In addition, we examined experimentally the effect of axial limitation (endwall effects) on the onset of instabilities in the Taylor-Dean flow system. The results show that the rotating endwalls do not affect the type of structures that appear in the Taylor-Dean flow system. However, they influence the threshold of appearance of instabilities which is characterized by high values of the critical Taylor number for rotating endwalls indicating a stabilizing effect of the rotating endwalls.

**KEY WORDS:** *Centrifugal instability, suspension, Galerkin method, Taylor-Couette, Taylor-Dean, viscoplastic fluid, axial limitation.*