Le rôle du géométrique dans l'enseignement et l'apprentissage de l'algèbre linéaire

Ghislaine Gueudet

THESE

Pour obtenir le grade de

DOCTEUR DE L'UNIVERSITE
JOSEPH FOURIER – GRENOBLE 1

SPECIALITE : DIDACTIQUE DES MATHEMATIQUES

Présentée par Ghislaine GUEUDET-CHARTIER

SUJET DE LA THESE :

Rôle du géométrique dans l'enseignement et l'apprentissage de l'algèbre linéaire.

Soutenue le 21 novembre 2000

JURY :

Maria Alessandra MARIOTTI (Rapportrice)
Aline ROBERT (Rapportrice)
Colette LABORDE
Daniel PERRIN
Jean-Luc DORIER (Directeur de thèse)

Thèse préparée au sein de l'équipe de
Didactique Des Mathématiques, Laboratoire Leibniz - IMAG
Avec le soutien du
Laboratoire de didactique des mathématiques de l'Université de Rennes 1

REMERCIEMENTS

Un soir de juin 1997 à Rennes, Jean-Luc Dorier a accepté le pari de diriger cette thèse. Son soutien a été constant depuis. Ses conseils, ses suggestions et ses relectures attentives m'ont menée de la découverte de la didactique à l'accomplissement de ce travail. Je ne saurais le remercier suffisamment pour le temps qu'il m'a accordé.

Je remercie également Maria Alessandra Mariotti et Aline Robert qui m'ont aidée de leurs conseils à différents stades de ce travail, et ont accepté d'en être rapportrices.

Je remercie Colette Laborde qui a accepté de faire partie du jury ; ses suggestions faites dès le début de ce travail m'ont été profitables. Je remercie également Daniel Perrin d'avoir accepté de faire partie du jury, et de s'être penché attentivement sur un travail de didactique.

Je remercie plus généralement tous ceux qui ont prêté attention à ce travail, et avec lesquels j'ai eu de nombreuses et fructueuses discussions : Marc Rogalski, Raymond Duval ; à Grenoble, les membres de l'équipe DDM, mais également des équipes EIAH et CNAM ; à Rennes, les membres du laboratoire de didactique des mathématiques.

Je remercie tout particulièrement ces derniers. Le projet de cette thèse est né à l'IREM de Rennes, et grâce à Jean Houdebine qui m'a communiqué son enthousiasme. Les membres du laboratoire m'ont ensuite accompagnée dans la réalisation de ce projet.

J'ai bénéficié à Rennes d'un soutien dépassant largement le cadre du Laboratoire de didactique. Effectuer une thèse en occupant les fonctions d'enseignante à l'université n'est pas une chose facile ; ce travail serait encore loin de son terme si je n'avais pas pu bénéficier d'un allègement de service. Je remercie donc tous ceux qui m'ont permis d'obtenir celui-ci : les membres des syndicats et les prags qui se sont engagés à mes côtés, et les membres de l'UFR de mathématiques qui m'ont accordé un soutien actif.

Je remercie également ceux de mes collègues, rennais ou non, qui ont accepté de prendre le temps de répondre au questionnaire que je leur ai soumis. Je remercie de même les étudiants de CAPES et de maîtrise qui ont répondu au questionnaire et ont ensuite accepté d'être interviewés.

Je remercie toute l'équipe du secrétariat de l'UFR de mathématiques, que j'ai fréquemment sollicitée ces dernières années, et qui a montré une disponibilité et une bonne humeur constantes.

Je dois avouer par ailleurs qu'effectuer ce travail a été un grand plaisir. Je dois ceci à tous ceux que j'ai cités jusqu'à présent, mais également à l'accueil chaleureux dont j'ai bénéficié à Grenoble. Je remercie particulièrement Caroline et Jean-Luc Dorier pour leur hospitalité, ainsi que Killian, Rory et Lorcan qui ont enchanté mes séjours grenoblois. De nombreux autres membres du laboratoire m'ont véhiculée, hébergée et m'ont fait profiter de leur compagnie durant ces séjours ; je leur en suis extrêmement reconnaissante.

Quant aux parents, alliés et amis, qu'ils soient actuellement en métropole ou ailleurs, dont la présence ou le souvenir m'ont accompagnée à l'un ou l'autre moment de ce parcours, je les remercie chaleureusement. Je ne saurais tous les citer, et je me contenterai donc de nommer ici Léo, Owen, Ginette, et d'adresser un clin d'œil particulier à Pénélope…

TABLE DES MATIERES

INTRODUCTION

Les difficultés posées par l'enseignement de l'algèbre linéaire en DEUG sciences en France sont bien connues des enseignants de l'université. Elles ont déjà donné lieu à plusieurs recherches didactiques, dont l'essentiel est présenté dans le livre : « L'algèbre linéaire en question » (Dorier et al. 1997). Dans les opinions exprimées par des enseignants-chercheurs comme dans les travaux de didacticiens, la géométrie est fréquemment évoquée comme pouvant contribuer à une approche de l'algèbre linéaire accessible aux étudiants. Ainsi, dans son récent rapport d'étape sur l'enseignement de la géométrie, la commission de réflexion sur l'enseignement des mathématiques écrit :

« En fait, l'intérêt du lien entre algèbre linéaire et géométrie nous semble plutôt en sens inverse[1], dans le fait que la géométrie usuelle en dimensions 2 et 3 fournit un support intuitif pour travailler en dimension supérieure à 3, voire en dimension infinie (par exemple en analyse fonctionnelle), voire sur un anneau au lieu d'un corps (en algèbre commutative), etc. D'ailleurs, historiquement, la formalisation de l'algèbre linéaire n'est véritablement intervenue que lorsque l'on a abordé ces problèmes plus généraux. » (C.R.E.M. 2000, p.14)

Il nous semble que plusieurs des points mentionnés dans cette citation demandent à être éclaircis. Qu'appelle-t-on « géométrie usuelle en dimensions 2 et 3 » ? S'agit-il de géométrie vectorielle, analytique, ou de géométrie euclidienne (au sens historique du terme) ? Ou encore de la géométrie actuellement pratiquée dans l'enseignement secondaire ? Qu'est-ce qu'un « support intuitif » ? Cette notion est-elle simplement associée à la possibilité de visualisation ? Et à qui un tel support peut-il être utile ? A des mathématiciens, à des étudiants abordant les premières notions d'algèbre linéaire, à des étudiants plus avancés ... Quant à la dernière phrase citée ci-dessus, elle semble indiquer que l'analyse historique conduit à relativiser l'importance d'un éventuel support géométrique, est-ce réellement le cas ?

Apporter des éléments de réponse à ces questions demande selon nous une étude didactique précise ; c'est l'objet des travaux que nous présentons ici, et qui portent donc sur « le(s) rôle(s) du géométrique en algèbre linéaire ». Préciser ce qui relève du « géométrique », notamment en opposition à ce qui relèverait de l'algèbre linéaire et ne serait pas « géométrique » est l'un des enjeux de notre travail. Celui-ci est extrêmement délicat ; ainsi, Mariotti écrit, dans une discussion visant à préciser ce qu'est la géométrie, en tant que domaine mathématique :

« Dans certains cas, c'est simplement la tradition qui rend certains faits ou certaines idées « géométriques » ; par exemple, nous sommes habitués à considérer les espaces vectoriels comme des structures géométriques, mais à quel point ceci est-il dû au fait que ce concept provient d'une tradition géométrique ? » (Mariotti 1996, p.1)[2]

Ceci ne signifie pas que les enseignants considèrent l'intégralité de l'algèbre linéaire comme une théorie de nature géométrique, mais que c'est le cas pour au moins une partie de celle-ci. Citons un premier exemple, qui concerne les applications linéaires. Notre propre expérience d'enseignante dans un institut mathématique nous conduit à faire l'hypothèse qu'une majorité d'enseignants de l'université qualifient volontiers de « géométriques » les tâches et les propriétés portant sur les notions d'image et de noyau d'une application linéaire. En revanche,

---

[1] Cette citation est extraite d'une critique de la réforme des mathématiques modernes. Il s'agit d'une réaction allant à l'encontre de la présentation de la géométrie comme application de l'algèbre linéaire.

[2] La traduction est faite par nos soins.

ce qui relève du calcul matriciel ne le serait pas. Nous chercherons notamment à vérifier la validité de cette hypothèse, et à déterminer quelles caractéristiques des notions de noyau et d'image rendent celles-ci « géométriques ».

Nous allons cependant préciser dès maintenant ce que nous-même qualifierons de « géométrique ». Nous avons choisi, dans le cadre de ce travail, d'appeler « géométrie » une théorie qui a pour objet la modélisation de l'espace physique, et présente un lien spécifique avec la réalité[3]. Ce lien confère aux notions et aux propriétés relevant de cette géométrie l'aspect d'objets concrets, un caractère d'évidence intrinsèque. Ce choix de définition est restrictif ; il repose sur une référence au savoir enseigné (dans le secondaire en particulier) et non au savoir savant. En effet les géométries que nous serons amenés à considérer resteront apparentées à la géométrie vue dans le secondaire, et ce même si elles sont fondées sur l'algèbre linéaire. La caractéristique de lien avec l'espace physique ne serait sans doute plus pertinente si nous cherchions à déterminer, dans les mathématiques actuelles, quels domaines peuvent être désignés comme « géométrie »

Toute géométrie est évidemment « géométrique », et l'emploi, en algèbre linéaire, d'un exemple issu d'une géométrie est une forme de recours au géométrique. Mais nous considérerons également l'emploi de figures en algèbre linéaire comme une autre forme de recours au géométrique. En effet, le dessin est un objet matériel, qui confère à la figure[4] l'aspect concret qui caractérise selon nous le géométrique.

Nous ne qualifierons pas d'emblée de « géométriques » des notions ou propriétés d'algèbre linéaire. En effet, le lien avec la réalité nous semble alors moins immédiat que dans les deux cas cités ci-dessus : recours à une « géométrie », et emploi de dessins ; ce lien dépendra en particulier de l'usage de dessins par les enseignants et les étudiants. La notion de base, dans un contexte d'algèbre linéaire, est-elle « géométrique » ? On peut considérer que la réponse à cette question est affirmative, puisqu'on peut associer à la notion de base un dessin (trois flèches figurant trois vecteurs non coplanaires par exemple) conférant à celle-ci un caractère concret. Mais cet emploi du dessin est métaphorique : la dimension est a priori quelconque, et même dans le cas de la dimension trois, la nature des objets de l'espace vectoriel en jeu n'est pas précisée. Le lien avec la réalité n'est donc pas direct ; il existe cependant, et conduira sans doute des enseignants ou des étudiants à considérer la notion générale de base comme géométrique. De même, en revenant à l'exemple cité ci-dessus, un noyau ou une image d'application linéaire est un sous-espace vectoriel, et peut donc être représenté par un dessin comportant un parallélogramme ou un segment. C'est peut-être pour cette raison que les notions de noyau et d'image sont parfois qualifiées de « géométriques ». Cependant, dans ces exemples, le lien avec la réalité peut être mis en doute, et dépendre d'habitudes quant à l'usage de dessins en algèbre linéaire. C'est pourquoi nous avons choisi de ne pas considérer a priori certaines notions ou propriétés d'algèbre linéaire comme « géométriques ». Nous nous contenterons d'observer les positions exprimées en ce sens dans les manuels et par les enseignants.

Le recours au géométrique signifiera pour nous l'emploi d'une géométrie, ou l'emploi de dessins en algèbre linéaire ; nous devons toutefois éclaircir également la question de « l'intuition géométrique ». Nous avons donc dû retenir une méthodologie et un cadre théorique nous permettant notamment d'étudier une telle question ; nous allons maintenant présenter ceux-ci.

---

[3] Nous nous référons notamment ici aux travaux de Mariotti (1996).

[4] Pour la définition de figure, et la distinction entre figure et dessin, nous nous référons à Laborde et Capponi (1994) (voir chapitre 1, paragraphe 4.2.3).

Première approche et choix d'un cadre théorique

Nous avons dû dans un premier temps choisir une méthodologie d'attaque et dégager une organisation cohérente du foisonnement de questions qu'une simple approche naïve de ce thème faisait surgir. En ce qui concerne la méthodologie, nous nous sommes appuyée sur celle décrite dans Dorier (1997). Il écrit notamment :

« Il s'agit de disposer, dans un premier temps, d'une analyse historique de la genèse du savoir visé, établie de façon indépendante de l'analyse didactique, qui est cependant l'origine et le but de la recherche... Ce travail historique est en général conduit de façon parallèle avec les premières analyses didactiques et peut s'appuyer pour une part plus ou moins grande sur des recherches déjà existantes. De cette confrontation initiale ressortent les premières hypothèses didactiques, qui vont permettre d'éclaircir certaines difficultés d'apprentissage à un niveau global. Il s'ensuit une deuxième analyse didactique de ces difficultés visant à préciser et valider (ou invalider) ces hypothèses. » (Dorier 1997, p.26)

Le thème de notre travail nécessite une étude historique ; nous avons vu en effet que même un questionnement naïf comme celui que nous avons présenté ci-dessus conduit à s'interroger sur les interventions éventuelles du géométrique dans le processus qui a mené à l'algèbre linéaire moderne. Nous avons donc choisi de mener, parallèlement à une première approche didactique, une étude historique portant sur le rôle du géométrique dans la genèse de l'algèbre linéaire, en nous appuyant notamment sur les travaux de Dorier (1997).

Sans entrer dans la présentation que nous ferons des résultats de cette analyse, signalons dès à présent qu'elle nous a conduite à choisir de considérer dans la suite de notre étude non seulement l'algèbre linéaire proprement dite, mais également l'algèbre bilinéaire, voire l'analyse fonctionnelle. En particulier, pour l'étude des espaces euclidiens et celle des espaces de Hilbert, la question des interventions de la géométrie est fondamentale. Dans la suite de cette introduction, nous n'emploierons que le terme « algèbre linéaire », par souci de concision ; mais celui-ci recouvrira l'algèbre linéaire proprement dite, l'algèbre bilinéaire et le début de l'étude des espaces de Hilbert.

Quant à la seconde analyse didactique évoquée par Dorier, elle doit selon nous, pour notre thème de recherche, comporter une partie consacrée à l'étude de textes de savoir, et une partie expérimentale. En ce qui concerne les textes de savoir, il nous a semblé nécessaire d'examiner des manuels actuels destinés à l'enseignement supérieur français, mais également des manuels français plus anciens, et des manuels étrangers. Ceci nous permet en effet de constater ce qui est actuellement pratiqué dans l'enseignement d'algèbre linéaire, mais également d'observer d'autres approches possibles. Quant à la partie expérimentale, nous avons choisi de la faire reposer sur des questionnaires, et d'interroger les enseignants et les étudiants.

Par ailleurs, les points à examiner pour décrire et analyser les interventions du géométrique en algèbre linéaire nous ont semblé s'organiser selon trois axes principaux :

- Articulation géométrie-algèbre linéaire

  Cet axe comporte lui-même deux aspects : nature de la géométrie en jeu, et nature du recours à cette géométrie en algèbre linéaire, ou du recours à l'algèbre linéaire dans cette géométrie. Les questions relevant de cette direction d'étude portent sur le contenu des manuels examinés, sur les choix effectivement retenus par les enseignants pour leurs cours d'algèbre linéaire, mais également sur des choix qui seraient possibles, même si ceux-ci ne sont pas effectifs.

  Les principales questions que nous devrons aborder à ce sujet sont, selon nous :

  La géométrie étudiée dans l'enseignement secondaire est-elle ou peut-elle être utilisée en algèbre linéaire, et de quelle manière ?

Existe-t-il, ou pourrait-il exister, un cours de géométrie précédant l'algèbre linéaire et pouvant servir de support à l'introduction de celle-ci ? De quelle manière un tel support pourrait-il être mis à profit dans un cours d'algèbre linéaire : comme source d'exemples introductifs, comme illustration à la suite de l'énoncé d'un théorème ?

L'emploi d'un tel support, qu'il s'agisse de la géométrie du lycée ou d'une autre géométrie antérieure à l'algèbre linéaire, peut-il entraîner des difficultés spécifiques chez certains étudiants ?

Existe-t-il, ou pourrait-il exister, un cours de géométrie suivant l'algèbre linéaire, fondé sur celle-ci, et pouvant servir à clarifier certaines notions ou propriétés d'algèbre linéaire ?

- Emploi des dessins

  Ici, la question porte encore sur les manuels, les choix faits par les enseignants dans leur cours d'algèbre linéaire, les autres choix possibles, mais également sur les pratiques des étudiants. Elle comporte un aspect quantitatif, portant sur le nombre de dessins employés ou à employer. Elle demande également d'autres précisions, notamment en ce qui concerne ce que ces dessins illustrent : des situations en dimension inférieure à trois, ou dans un espace vectoriel quelconque, ou encore dans un espace vectoriel de fonctions, de polynômes ?

- Intuition géométrique

  On peut s'interroger sur les recours faits par les étudiants à l'intuition géométrique, et sur ceux que les enseignants attendent de leurs étudiants à ce sujet. Mais il faut avant tout préciser ce qu'est « l'intuition géométrique » ; une première analyse nous a en effet montré que différents sens étaient attribués à ce terme dans les propos mêmes des mathématiciens.

Nous avons ensuite choisi des outils didactiques théoriques permettant d'aborder ces différents points : des travaux portant sur l'évolution de notions enseignées, ou sur l'usage de dessins, nous ont ainsi été nécessaires. Il nous restait cependant d'une part à éclaircir la question de l'intuition géométrique, et d'autre part à nous doter d'un cadre permettant une approche commune des différents aspects évoqués, conférant ainsi une unité à notre travail. Ce sont les travaux de Fischbein (1987) qui nous ont fourni ces deux éléments, et constituent donc un des fondements essentiels de notre étude.

Organisation générale de la thèse

Les différentes remarques que nous avons exposées ci-dessus nous ont conduite à retenir l'organisation que nous présentons maintenant.

Dans le premier chapitre, nous évoquons tout d'abord un ensemble de travaux de didactique des mathématiques auquel notre étude se rattache. Il s'agit de recherches portant sur l'enseignement de l'algèbre linéaire, mais également d'une manière plus générale sur les l'enseignement supérieur et la transition avec le secondaire. Nous exposons ensuite l'essentiel de notre cadre théorique. L'une des possibilités de recours à la géométrie dans l'enseignement de l'algèbre linéaire est la présentation de certaines notions comme des prolongements, ou des élargissements, de notions rencontrées dans le cours de géométrie au lycée. Nous devons donc disposer d'outils d'analyse qui nous permettent de décrire l'évolution de ces notions, en repérant les continuités et les ruptures dans le passage de la géométrie à l'algèbre linéaire. Nous employons simultanément la notion de niveaux de conceptualisation (Robert 1997), et celle de praxéologie (Chevallard 1995), l'étude précise des tâches autour d'une notion nous permettant le repérage et la comparaison des différents niveaux. Une autre direction d'étude est la question de « l'intuition géométrique ». Ce sont les travaux de Fischbein (1987) à propos de l'intuition en mathématiques qui nous permettent de préciser ce que peut être une telle intuition, quelles peuvent être ses sources, quel(s) rôle(s) elle peut jouer, mais également quels en sont les dangers.

Nous formulons, à la fin de ce chapitre, des questions de recherche qui prolongent et précisent celles que nous avons déjà posées ci-dessus, ainsi que des hypothèses quant aux réponses à ces questions.

Les chapitres suivants sont consacrés à l'étude de nos différents axes de recherche : étude historique, choix de transposition, et expérimentations auprès des enseignants et des étudiants.

Dans le deuxième chapitre, nous présentons l'étude historique que nous avons réalisée.

Nous nous appuyons dans ce chapitre d'une part sur les travaux de Dorier (1997) à propos de la genèse de l'algèbre linéaire, et d'autre part sur l'étude faite par Fischbein (1987) de l'intuition en mathématiques, en particulier en ce qui concerne l'emploi de différents types de modèles. En nous penchant sur des œuvres de mathématiciens ayant contribué au processus d'élaboration de l'algèbre linéaire, nous relevons différents types de manifestations « d'intuition géométrique ».

Le troisième chapitre est consacré à l'étude des choix de transposition, ou plus précisément du rôle de la géométrie dans les choix de transposition retenus pour l'algèbre linéaire. Une fois l'algèbre linéaire élaborée sous sa forme moderne, s'est posée la question de son introduction dans l'enseignement, d'abord universitaire, puis secondaire. Cette question s'est trouvée naturellement associée à celle de l'articulation algèbre linéaire–géométrie.

Nous présentons les choix curriculaires qui ont été effectués, en nous appuyant sur des programmes et des manuels de lycée et de classes préparatoires datant de 1956 à nos jours.

Dans le quatrième chapitre, nous nous penchons sur ce qui est, ou pourrait être pratiqué dans l'enseignement actuel en DEUG sciences en France.

Nous étudions tout d'abord l'évolution de certaines notions, rencontrées en géométrie au lycée et qui sont encore présentes en algèbre linéaire, en algèbre bilinéaire, voire en analyse fonctionnelle. C'est le cas notamment des notions de base, d'orthogonalité, de projection, d'isométrie ... Du lycée à la maîtrise, les définitions de ces notions, les propriétés et les tâches les accompagnant peuvent être modifiées ; des propriétés et tâches nouvelles apparaissent. Ces notions sont en fait présentes à différents niveaux de conceptualisation ; nous relevons des éléments indiquant des continuités et des ruptures dans le passage d'un niveau à l'autre, dans le cours comme dans les tâches qui y sont associées, en nous appuyant sur différents manuels.

L'objectif de cette étude est notamment d'observer comment un enseignant de l'université peut faire appel, dans le cours d'algèbre linéaire, à des connaissances de géométrie du secondaire. Mais nous cherchons aussi à déterminer quels pourraient être les apports d'un cours de géométrie, ou même d'algèbre linéaire et bilinéaire limitée à la dimension trois précédant le cours d'algèbre linéaire générale. Nous tentons d'observer quelles propriétés et quelles tâches, qui ne sont pas rencontrées au lycée, pourraient être présentées de manière pertinente dans un cours préparant à l'algèbre linéaire et bilinéaire générale. Nous complétons cette étude par des analyses de manuels universitaires récents.

Le cinquième et dernier chapitre est consacré à la présentation et à l'analyse de deux questionnaires, l'un destiné aux enseignants de l'université et l'autre à des étudiants de maîtrise ou de CAPES.

Nous avons proposé à des enseignants-chercheurs de l'université un questionnaire nous permettant de préciser les deux aspects suivants :

- Rôle du géométrique dans le cours proposé par ces enseignants ;
- Attentes quant au recours au géométrique fait par les étudiants.

Nous cherchons en particulier à observer si l'enseignant considère qu'il peut utiliser certaines connaissances de géométrie du secondaire ; s'il pense qu'un cours de géométrie doit précéder celui d'algèbre linéaire, et quel contenu devrait avoir un tel cours. Par ailleurs, nous interrogeons les enseignants sur l'emploi de dessins dans leur cours, et celui qu'ils attendent des étudiants.

Nous avons également soumis un questionnaire à des étudiants ayant tous effectué une licence de mathématiques. Ce questionnaire nous permet d'étudier différents aspects d'un éventuel recours au géométrique par ces étudiants dans leur pratique de l'algèbre linéaire : emploi de dessins, appel à des connaissances issues de la géométrie vue au lycée… Nous notons de plus les liens apparaissant entre le type de recours au géométrique observé et les compétences de l'étudiant en algèbre linéaire.

Nous nous appuyons sur les travaux de Fischbein (1987) pour l'analyse des deux questionnaires.

Les résultats que nous dégageons nous permettent enfin de conclure en donnant des pistes pour des recherches ultérieures, mais également pour un enseignement d'algèbre linéaire mettant autant que possible à profit les interventions du géométrique.

CHAPITRE 1

CADRE THEORIQUE

Dans ce chapitre, nous évoquons tout d'abord un ensemble de travaux de didactique des mathématiques auquel notre étude se rattache. Il s'agit d'une part de recherches portant sur l'enseignement supérieur, qui montrent les spécificités de celui-ci et posent la question de la transition secondaire-supérieur. D'autre part, nous décrivons des travaux de didactique portant sur l'algèbre linéaire, et dans lesquels différents aspects du recoures éventuel au géométrique sont évoqués. Ceci nous conduit à mentionner certains éléments théoriques que nous emploierons dans notre étude. Nous décrivons ensuite l'essentiel du cadre théorique auquel nous aurons recours ; celui-ci s'appuie conjointement sur des travaux de didacticiens français, et sur des recherches de Fischbein portant notamment sur l'intuition en mathématiques.

Nous présentons enfin les différents axes de notre problématique, et les questions de recherche associées à ceux-ci.

1. Enseignement supérieur et transition secondaire – supérieur

De nombreux travaux de didactique des mathématiques portent sur l'enseignement supérieur ; ils ont notamment permis de préciser certaines spécificités de celui-ci, à propos des contenus enseignés comme des pratiques attendues des étudiants. Nous allons évoquer ici de tels travaux, pertinents pour notre étude. Certains établissent des résultats qui nous permettent de formuler de premières questions et hypothèses de travail ; d'autres présentent des cadres théoriques auxquels nous aurons recours.

1.1 Statut des notions enseignées

Robert (1998) présente différents éléments permettant d'analyser les notions enseignées, ou à enseigner, à l'université. Nous retenons ici ce qui concerne le statut de ces notions ; nous aurons également l'occasion d'aborder par ailleurs d'autres aspects qu'elle évoque.

Robert pose, à propos des nouvelles notions introduites à l'université, d'une part la question des relations qu'elles entretiennent avec des notions connues ; d'autre part la question des fonctions que ces nouvelles notions vont occuper. Ceci la conduit à distinguer différents caractères dépendant des réponses à ces questions ; la combinaison de ces caractères l'amène à distinguer plusieurs statuts possibles des notions concernées. Ainsi l'algèbre linéaire apparaît comme une notion *généralisatrice, unificatrice et porteuse d'un nouveau formalisme*. L'algèbre linéaire va en effet permettre d'unifier des domaines et des problèmes connus, mais de natures diverses : géométrie, fonctions polynômes, suites, etc. Cette unification permet en particulier de considérer l'algèbre linéaire comme une généralisation de chacun de ces domaines, généralisation qui s'accompagne nécessairement de la mise en place d'un formalisme nouveau. Nous pouvons cependant noter dès à présent que lorsque des enseignants tentent de présenter l'algèbre linéaire comme une généralisation de notions connues, c'est le plus souvent la géométrie qui est choisie comme point de départ, et non les polynômes ou les suites.

Un première question se pose à ce sujet : *l'algèbre linéaire peut-elle être présentée comme une généralisation de la géométrie vue dans le secondaire ?*

Nous supposons que la réponse à cette question est négative. En effet, si une telle présentation était retenue pour introduire l'algèbre linéaire, il en résulterait un degré de généralisation trop important. Considérons l'exemple de la notion de base. Le passage de la notion de base vue au lycée en dimension 2 ou 3 à la notion générale de base, dans un espace vectoriel pouvant être de dimension infinie, ne peut pas apparaître comme une extension « naturelle ». En effet, les élèves savent au lycée qu'une base du plan est un couple de vecteurs non colinéaires, qu'une base de l'espace est un triplet de vecteurs non coplanaires. Ces définitions sont spécifiques au contexte : en particulier, la dimension de l'espace concerné étant connue à l'avance, et le nombre de vecteurs donnés étant égal à cette dimension, seule la propriété d'indépendance linéaire y apparaît en germe. Le passage à la notion générale nécessitera l'introduction de la notion de famille génératrice, et donc un important glissement conceptuel.

Nous supposons donc que des enseignants qui souhaitent employer la géométrie comme point de départ à un cours d'algèbre linéaire feront précéder celui-ci d'un enseignement de géométrie spécifique. Ceci nous conduit à nous interroger sur le contenu d'un tel cours, contenu choisi par des enseignants ou contenu envisageable en dehors de ce que nous observerons effectivement. Mais les travaux de Robert nous permettent surtout de formuler la question suivante, complétant la précédente, qui ne portait que sur la géométrie vue au lycée : *l'algèbre linéaire, notion généralisatrice et unificatrice, peut-elle cependant être introduite comme une généralisation de la géométrie vectorielle du plan ou de l'espace ?*

1.2 Les exigences de flexibilité

Dans sa thèse, Alves Dias (1998) étudie l'articulation entre points de vue[1] paramétrique et cartésien en algèbre linéaire. Nous allons ici nous pencher sur certains des cadres théoriques qu'elle évoque : les schémas de Dubinsky et la réification de Sfard d'une part, les notions de cadre et de registre d'autre part. Nous aurons nous même recours à ces cadres théoriques. Nous retiendrons également, comme source d'hypothèses pour notre travail, la notion de flexibilité cognitive, soulignée par Alves Dias et présente dans les différents travaux qu'elle évoque. Elle écrit ainsi :

« De plus en plus, nous semble-t-il, en didactique des mathématiques, la flexibilité entre formes de connaissance et de représentation sémiotique tend à être reconnue comme une composante essentielle de la conceptualisation, et de l'efficacité du fonctionnement mathématique. » (Alves Dias 1998, p.5).

Ceci est particulièrement le cas dans les travaux ayant trait à l'enseignement supérieur ; en effet, à ce niveau apparaissent de nouvelles exigences en termes de flexibilité. Les étudiants doivent être ainsi capables de faire spontanément appel à un dessin pour appuyer leur

---

[1] Alves Dias retient la définition de point de vue donnée par Rogalski : des points de vue sont des manières différentes de regarder un objet mathématique.

raisonnement. Ils doivent pouvoir, pour résoudre un exercice, rechercher des exemples et des contre-exemples, qui seront éventuellement issus d'un domaine qui n'est pas évoqué dans l'énoncé. Ainsi en algèbre linéaire, un exercice formulé de manière théorique peut être résolu en apportant un contre-exemple portant sur une famille de polynômes, ou de fonctions. En ce qui concerne les points de vue paramétriques et cartésiens, les étudiants doivent par exemple pouvoir passer de la représentation paramétrique à un système d'équations cartésiennes d'un sous-espace vectoriel. Dans ces différents cas, les étudiants doivent être capables de faire appel à différentes formes de connaissance, et donc faire preuve de flexibilité.

Dans le même temps, l'emploi dans les enseignements de différentes formes de connaissance et de représentation sémiotique constitue un moyen de développer l'autonomie des étudiants, et de faire évoluer leurs pratiques vers les pratiques expertes de référence, celles des mathématiciens professionnels.

Ainsi, la nécessité pour les enseignants d'employer, dans leurs cours d'algèbre linéaire, différentes formes de connaissance et de représentation sémiotique n'est pas une hypothèse que nous formulons mais un fait avéré par différents travaux, notamment ceux de Alves Dias. En revanche, le recours au géométrique recouvre un ensemble de formes de flexibilité spécifiques : emploi simultané de dessins et de formulations théoriques, recherche d'exemples issus de l'ensemble des vecteurs du plan ou de l'espace pour résoudre un exercice d'algèbre linéaire générale. Préciser quelles formes de flexibilité relèvent du recours au géométrique en algèbre linéaire est un objectif de notre travail. Plusieurs directions d'étude se présentent ensuite. Nous chercherons à déterminer si *l'emploi de ces formes de flexibilité par les étudiants est associé à des compétences en algèbre linéaire*. Par ailleurs, cet emploi ne peut se faire spontanément, sans que les étudiants y soient incités par un enseignement adapté. Ceci nous conduit donc à poser également la question de l'emploi fait par les enseignants, dans leur cours d'algèbre linéaire, des différentes formes de connaissance et de représentation sémiotique relevant du recours au géométrique. Pour préciser cet emploi, ainsi que celui que l'on peut éventuellement observer dans les pratiques des étudiants, nous utiliserons notamment certains cadres théoriques présentés par Alves Dias, et que nous allons présenter maintenant.

1.2.1 Transition processus – objet

Différents modèles permettant d'étudier les processus psychologiques en jeu dans des mathématiques non élémentaires (Advanced mathematical thinking ; ces travaux sont donc en particulier pertinents dans le cas de l'enseignement supérieur) accordent une place centrale à la transition processus – objet. Ces modèles conduisent notamment à considérer plusieurs aspects d'un même concept ; la possibilité de passage d'un aspect à l'autre implique donc une capacité de flexibilité.

Les schémas de Dubinsky (Dubinsky 1991)

Le point de départ de Dubinsky est la notion d'abstraction réfléchissante développée par Piaget. Alors que Piaget utilise essentiellement cette notion pour décrire le développement des connaissances mathématiques chez des enfants, Dubinsky montre comment l'employer dans des études portant sur des mathématiques de niveau universitaire. Rappelons que Piaget distingue *l'abstraction empirique*, dans laquelle la connaissance découle d'expériences externes au sujet ; *l'abstraction pseudo-empirique*, également externe, mais dans laquelle est intervenue l'action du sujet ; et finalement *l'abstraction réfléchissante* qui est interne au sujet, et provient de l'action de celui-ci. Piaget emploie cette dernière, non seulement pour analyser des processus d'acquisition de connaissances, mais aussi pour des analyses épistémologiques : il examine notamment sous cet angle l'idée de « structures mères » développée par Bourbaki.

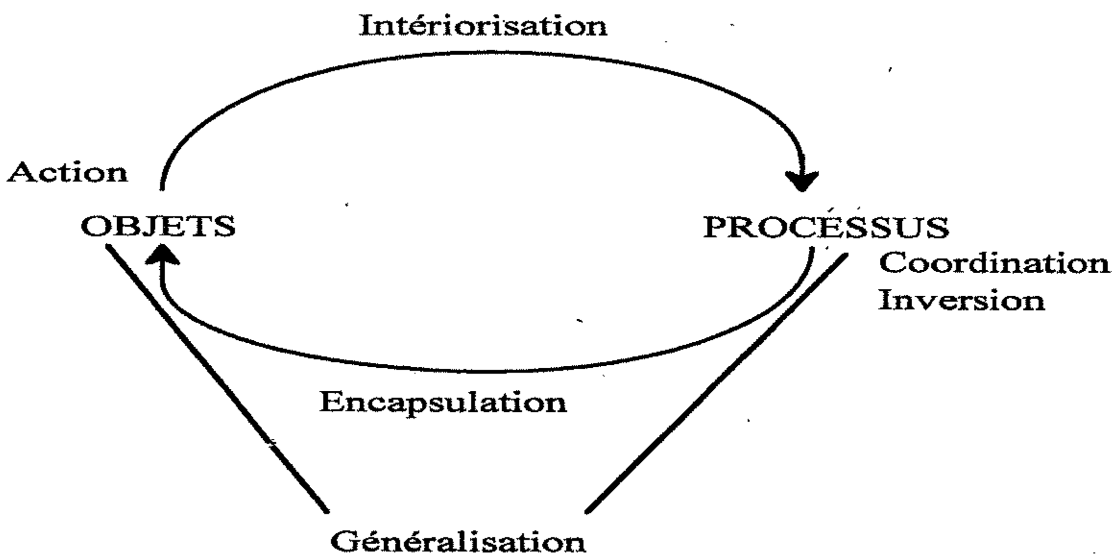
Dubinsky distingue différentes formes d'emploi de l'abstraction réfléchissante pour la construction de connaissances : *l'intériorisation, la coordination, l'encapsulation, la généralisation* et *l'inversion*. Les quatre premiers termes sont empruntés à Piaget, et le dernier est ajouté par Dubinsky lui-même. Lors de l'intériorisation, le sujet utilise l'abstraction réfléchissante à des fins de représentation, donc d'interprétation d'un phénomène observé. La coordination consiste à construire un nouveau processus en en combinant plusieurs ; l'inversion à construire un processus nouveau en inversant un processus connu. Il y a généralisation quand le champ d'application d'un ensemble de processus est élargi. Enfin l'encapsulation désigne la conversion d'un processus en objet, et permet l'élaboration de structures de plus en plus générales.

Dubinsky élabore à partir de ces notions un nouveau modèle de la connaissance mathématique. La notion centrale qu'il développe est celle de « schéma ».

« Un schéma est une collection plus ou moins cohérente d'objets et de processus. La tendance d'un sujet à invoquer un schéma pour comprendre, gérer, organiser ou interpréter une situation perçue comme problématique est sa connaissance d'un concept mathématique. » (Dubinsky 1991, p.102)

Lors d'une résolution de problème, si le schéma permet au sujet d'aboutir, Dubinsky dit que le problème a été assimilé par le schéma ; sinon, le schéma doit être adapté, et il va alors subir une évolution.

Dubinsky représente les schémas par la figure ci-dessous :



Les schémas comportent tout d'abord des objets : fonctions, vecteurs, espaces vectoriels… Le sujet peut effectuer des actions sur ces objets ; ces actions peuvent être intériorisées et deviennent alors des processus. L'intériorisation d'actions est donc un moyen de construire des processus ; mais de nouveaux processus peuvent aussi être obtenus à partir de processus existants, en inversant un processus, ou en en composant plusieurs. Par ailleurs, un processus, une fois assimilé, peut être converti en objet par encapsulation.

Ainsi, considérer des fonctions, qui sont d'abord rencontrées comme des processus, comme éléments d'un espace vectoriel exige de les regarder comme des objets, donc de procéder à une encapsulation. L'emploi de dessins, représentant les fonctions sous forme de vecteurs, peut-il servir de support dans ce cas ? Cette question reste à éclaircir ; mais la possibilité de considérer les fonctions (de même que les suites, ou les polynômes) comme des points, ou des vecteurs d'un espace a été déterminante dans la genèse de l'algèbre linéaire ; elle a permis ensuite le développement « d'intuitions géométriques » en analyse.

Dans la figure ci-dessus, Dubinsky note également la possibilité de généralisation, pour les objets comme pour les processus ; il donne malheureusement peu de détails sur cet aspect, qui nous semble déterminant, bien qu'il ne relève pas de la transition processus-objet.

La réification de Sfard (Sfard 1991)

Sfard affirme qu'à un même objet mathématique correspondent deux types de conceptions (dans les travaux de Sfard, un concept désigne la version « officielle » d'un objet mathématique, et une conception est ce qui y correspond chez un sujet donné). Elle distingue la conception structurelle, qui était privilégiée par exemple pendant la réforme des mathématiques modernes, de la conception opérationnelle, qui relève de l'action. Ainsi en algèbre linéaire, une projection peut apparaître comme un endomorphisme idempotent (conception structurelle), ou comme une application envoyant un vecteur sur celui qui lui correspond après décomposition sur deux sous-espaces supplémentaires (conception opérationnelle). De même, on peut considérer un plan comme le sous-espace engendré par deux vecteurs non colinéaires ; la conception correspondante est opérationnelle ; mais on peut aussi donner une définition axiomatique, structurelle, de la même notion.

Il s'agit selon Sfard de deux aspects inséparables d'une même notion.

Selon elle, dans l'histoire des mathématiques, la plupart des idées proviennent de conceptions opérationnelles ; elles relèvent ainsi plus des *processus* que des *objets*. Sfard distingue trois phases dans l'élaboration d'une notion mathématique : une phase *préconceptuelle*, où la notion est manipulée comme un processus ; une phase d'approche *opérationnelle* ; et finalement une phase *structurelle*, dans laquelle la notion acquiert pleinement le statut d'objet mathématique[2]. Sur le plan cognitif, elle recommande de présenter l'aspect opérationnel avant l'aspect structurel (contrairement à ce qui était pratiqué lors de la réforme des mathématiques modernes). Elle distingue, comme en ce qui concerne l'évolution historique, trois phases pour la formation d'un concept. Lors de la première, phase d'*intériorisation*, le sujet se familiarise avec les processus correspondant au concept visé. La deuxième phase est appelée phase de *condensation* ; durant cette phase, le sujet commence à considérer chaque processus comme un tout (ceci lui permet en particulier de combiner des processus, de les généraliser...). La dernière phase est la *réification*, lorsque la notion accède au statut d'objet autonome. Il serait tentant, en particulier à la lueur de l'interprétation historique de Sfard, de considérer que pour

[2] Ces distinctions portant sur le statut d'un objet mathématique peuvent être rapprochées de la dialectique outil-objet de Douady. Partant également d'une analyse épistémologique, celle-ci montre que les concepts mathématiques jouent alternativement le rôle d'outils dans des résolutions de problèmes, et d'objets dans des constructions mathématiques.

les notions en jeu en algèbre linéaire comme en géométrie, leur version géométrique se situe du côté préconceptuel, ou opérationnel, tandis que l'aspect algèbre linéaire, obtenu par réification, correspond à la phase structurelle. Mais ceci ne nous semble pas correspondre à la réalité de ces notions ; il existe, par exemple pour la notion de projection déjà citée, une conception opérationnelle et une conception structurelle en géométrie comme en algèbre linéaire.

La transition processus-objet intervient en algèbre linéaire, notamment lorsqu'il s'agit de considérer des fonctions, ou des suites, comme les points d'un espace vectoriel. Nous considérerons l'emploi par les étudiants d'un dessin vectoriel pour illustrer une propriété portant sur une famille de fonctions ou de suite comme un signe montrant qu'une encapsulation, au sens de Dubinsky, ou qu'une réification, au sens de Sfard, a été réalisée par ces étudiants. Nous avons limité à cet aspect précis notre recours aux travaux de Sfard et Dubinsky. Nous ne ferons donc référence à ceux-ci que dans une part limitée de notre étude. En revanche, nous ferons fréquemment appel aux notions que nous allons évoquer maintenant, et qui relèvent d'autres formes de flexibilité : les cadres et les registres.

1.2.2 Notions de cadre et de registre

Nous allons rappeler ici brièvement les définitions des notions de cadre et de registre. Nous expliquerons de quelle manière nous les employons dans notre travail, et nous tenterons de préciser les rapports entre le recours au géométrique et les changements de cadre ou de registre.

Notion de cadre

La notion de cadre, introduite par Douady dans sa thèse (1987), est issue de l'observation de l'activité du mathématicien. Douady note qu'un mathématicien, voulant résoudre un problème, consacre une part importante de son activité à donner à celui-ci diverses interprétations, notamment en utilisant des changements de « cadre ». Ici le mot est utilisé avec son sens mathématique, qui désigne l'environnement mathématique dans lequel va se situer la recherche correspondante : arithmétique, géométrie...L'histoire des mathématiques montre que de tels changements ont permis des avancées déterminantes. Douady propose donc une approche didactique théorique prenant en compte cette pratique, et pouvant servir à la fois à analyser des phénomènes d'enseignement et d'apprentissage, et à concevoir des scénarios pour les élèves. Elle définit les notions de cadre et de changement de cadre de la manière suivante :

« Un cadre est constitué des objets d'une branche des mathématiques, des relations entre les objets, de leurs formulations éventuellement diverses et des images mentales associées à ces objets et ces relations. Ces images jouent un rôle essentiel dans le fonctionnement comme outil des objets du cadre. Deux cadres peuvent comporter les mêmes objets et différer par les images mentales et la problématique développée. Par ailleurs, la familiarité, l'expérience peuvent conduire à des conflits entre ce qu'on attend et ce qui se produit effectivement, et par suite à renouveler les images, et à les faire évoluer. Le changement de cadres est un moyen d'obtenir des formulations différentes d'un problème qui sans être nécessairement tout à fait équivalentes, permettent un nouvel accès aux difficultés rencontrées et la mise en œuvre d'outils et techniques qui ne s'imposaient pas dans la première formulation. » (Douady 1992, p.135)

Cette notion a été utilisée depuis son introduction dans de nombreux travaux de didactique, portant notamment sur l'enseignement supérieur. Son origine, qui la relie directement à l'activité du mathématicien « expert », la rend peut-être encore plus pertinente à ce niveau, qu'il s'agisse de décrire les pratiques attendues des étudiants, ou de concevoir des scénarios d'enseignement.

En algèbre linéaire, il paraît naturel de distinguer le cadre algébrique et le cadre géométrique. Cependant une telle distinction ne peut rendre compte avec la finesse souhaitée des apports éventuels du « géométrique » pour l'enseignement de l'algèbre linéaire, même en précisant très exactement quelle est la géométrie en jeu dans le cadre géométrique. Par exemple, si l'on désigne par géométrie la géométrie affine euclidienne non théorisée (c'est le cas dans la thèse de Alves Dias), il pourrait être nécessaire, selon la question posée, de distinguer le cadre de la géométrie synthétique du cadre de la géométrie analytique. Il s'agit bien de cadres différents d'après la définition donnée ci-dessus ; on peut notamment remarquer que les images mentales associées, par exemple, à la somme de deux vecteurs du plan, ne sont pas les mêmes selon que ces vecteurs sont ou non donnés par leurs coordonnées.

Du côté de l'algèbre linéaire « théorique », on peut de même poser la question de la pertinence, pour notre étude, d'une éventuelle distinction entre le cadre de l'algèbre linéaire en dimension inférieure ou égale à trois et celui de l'algèbre linéaire générale. Ici encore les images mentales associées peuvent en effet être différentes.

Préciser les différents cadres à prendre en compte pour l'étude du recours au géométrique en algèbre linéaire constituera donc l'un de nos objectifs. Nous ne pouvons définir d'emblée un cadre qui serait considéré comme géométrique ; nous serons amenés à faire appel à plusieurs cadres de nature géométrique. Nous préciserons pour chacun d'entre eux les caractéristiques qui nous conduisent à le considérer comme géométrique. Par ailleurs, nous ferons référence dans notre travail à des cadres non géométriques, comme celui des fonctions ou celui des polynômes.

Notion de registre

La notion de registres de représentation sémiotique a été introduite en didactique par Duval. Celui-ci remarque dans un premier temps qu'il existe en mathématiques un paradoxe fondamental :

« D'une part, l'appréhension des objets mathématiques ne peut être qu'une appréhension conceptuelle et d'autre part, c'est seulement par le moyen de représentations sémiotiques qu'une activité sur des objets mathématiques est possible. » (Duval 1993, p.38)

L'emploi de représentations sémiotiques est central en mathématiques, puisqu'il constitue le seul moyen d'accès aux objets ; comme l'affirme Duval, il n'y a pas en mathématiques de *noésis* (appréhension conceptuelle d'un objet) sans *sémiosis* (production d'une représentation sémiotique). Or la sémiosis est souvent négligée dans l'enseignement. Duval propose, à l'aide de la notion de registre, une étude de la sémiosis et des moyens permettant d'élaborer un enseignement qui la favorise.

Il définit la notion de registre sémiotique de représentation de la manière suivante :

« Envisagés de ce point de vue, les systèmes sémiotiques doivent permettre d'accomplir les trois activités cognitives inhérentes à toute représentation. Tout d'abord, constituer une trace ou un assemblage de traces perceptibles qui soient identifiables comme *une représentation de quelque chose* dans un système déterminé. Ensuite, transformer les représentations par les seules règles propres au système de façon à obtenir d'autres représentations pouvant constituer un apport de connaissance par rapport aux représentations initiales. Enfin, convertir les représentations produites dans un système en représentations d'un autre système, de telle façon que ces dernières permettent d'expliciter d'autres significations relatives à ce qui est représenté. Tous les systèmes sémiotiques ne permettent pas ces trois activités cognitives fondamentales... Mais le langage naturel, les langues symboliques, les graphes, les figures géométriques etc. les permettent. Nous parlerons alors de registres de représentation sémiotique. » (Duval 1995 p.20)

Duval distingue donc trois activités liées à la sémiosis : la formation d'une représentation ; le traitement de cette représentation dans un même registre, et la conversion d'une représentation dans un autre registre. La possibilité de réaliser ces trois activités caractérise un système sémiotique qui est un registre. L'aspect « conversion », qui relève d'une forme de flexibilité, revêt une importance particulière, et est généralement absent de l'enseignement. Or selon Duval, il est fondamental pour la conceptualisation d'objets mathématiques de disposer de plusieurs registres de représentation coordonnés. Le choix d'un registre adapté peut permettre de réaliser d'importantes économies de traitement ; d'autre part, les différents registres jouent des rôles complémentaires, chacun ne représentant que certains aspects du concept en jeu, puisque la représentation implique une sélection. Mais c'est principalement la possibilité de coordination de plusieurs registres qui est selon Duval nécessaire pour la conceptualisation ; celle-ci permet notamment d'éviter de confondre un objet mathématique avec sa représentation, et favorise les apprentissages ultérieurs, en contribuant à rendre une notion disponible. Ceci pose le problème d'un enseignement adapté ; en effet, la tendance naturelle des élèves et des étudiants pousse ceux-ci à cloisonner les registres, et la conversion nécessite un apprentissage spécifique.

La nécessité de disposer de plusieurs registres, et de savoir effectuer des conversions pour passer de l'un à l'autre est peut-être encore plus sensible dans l'enseignement supérieur ; comme les changements de cadres, les conversions de registres font partie de l'activité usuelle du mathématicien « expert ». Elles constituent donc l'une des composantes de l'organisation des connaissances que les enseignants attendent des étudiants à l'université.

Nous évoquerons dans la partie suivante une thèse de didactique (Pavlopoulou 1994) portant sur l'algèbre linéaire et fondée sur la notion de registre. Nous avons exposé, dans l'introduction de notre travail, en quoi nous considérions que l'emploi de figures relevait du recours au géométrique en algèbre linéaire : la possibilité d'utiliser un dessin consitue un lien direct avec la réalité. Nous nous pencherons donc naturellement sur l'emploi du registre graphique en algèbre linéaire. Nous nous intéresserons également aux liens possibles entre l'emploi de ce registre et d'autres types d'intervention du géométrique.

Les différentes approches que nous avons présentées ci-dessus soulignent toutes des nécessités de flexibilité en mathématiques. La possibilité de considérer une notion mathématique à la fois comme un objet et comme un processus, les changements de cadres et de registres conduisent à prendre en compte différentes formes de connaissances et de représentation. Ceci s'applique à la présentation du savoir faite par les enseignants, mais également aux pratiques attendues des étudiants, dans lesquelles la nécessité de flexibilité devient particulièrement sensible au niveau de l'enseignement supérieur. Nous devrons donc en tenir compte, puisque c'est à ce niveau qu'est enseignée l'algèbre linéaire. D'autres spécificités apparaissent lorsque l'on considère précisément ces pratiques, et les tâches proposées aux étudiants ; nous allons examiner maintenant de telles spécificités.

1.3 Tâches et pratiques

Dans le premier paragraphe de cette partie, nous avons exposé des caractéristiques propres aux notions enseignées à l'université. Nous avons examiné au paragraphe suivant plusieurs travaux centrés sur différentes formes de flexibilité, et qui fournissent des outils d'analyse pour certains contenus mathématiques, mais également pour l'organisation des connaissances et les pratiques attendues des étudiants. Nous allons maintenant nous pencher sur des travaux abordant la spécificité de l'enseignement supérieur, et le problème de la transition secondaire-supérieur sous l'angle de ces pratiques.

1.3.1 Nouvelles attentes

Robert (1998) décrit différents types d'attentes concernant les pratiques des étudiants, et apparaissant comme nouvelles lorsque ceux-ci abordent l'enseignement supérieur. A ces attentes correspondent naturellement des difficultés éprouvées par les étudiants.

Un premier type d'attentes porte sur les démonstrations : à l'image des démonstrations données dans le cours, les démonstrations qu'un étudiant sera amené à fournir seront de plus en plus longues et complexes. Robert détaille différents éléments constitutifs de cette complexité. Elle note tout d'abord que les étudiants vont rencontrer de nouveaux problèmes ; elle donne l'exemple des problèmes d'unicité, mais surtout des problèmes d'existence, qui ne sont pas connus des lycéens. Elle montre également que la résolution d'un problème va amener les étudiants à opérer différentes formes de sélection : sélection des informations pertinentes, d'une part, et des résultats à justifier, en opposition à ceux qui peuvent être admis, d'autre part. Ce type de sélection est bien sûr déjà présent dans l'enseignement secondaire, mais il est généralement plus guidé. Par ailleurs les démonstrations vont conduire les étudiants à développer successivement plusieurs arguments, parfois imbriqués. Ils devront choisir seuls les théorèmes adéquats, qui ne sont pas nécessairement les théorèmes donnés dans le cours mais peuvent être obtenus par contraposition, ou par des modifications légères d'un énoncé. Il sera d'ailleurs fréquent que les étudiants soient amenés à raisonner par contraposition, ou par l'absurde. Donnons un exemple issu de l'algèbre linéaire.

L'exercice suivant est fréquemment donné en première année de DEUG.

Soit E un espace vectoriel, F et G deux sous-espaces vectoriels de E.

Montrer que $F \cup G$ est un sous-espace vectoriel de E si et seulement si F est inclus dans G ou G est inclus dans F.

Voici une démonstration qui peut être attendue d'un étudiant pour cet exercice :

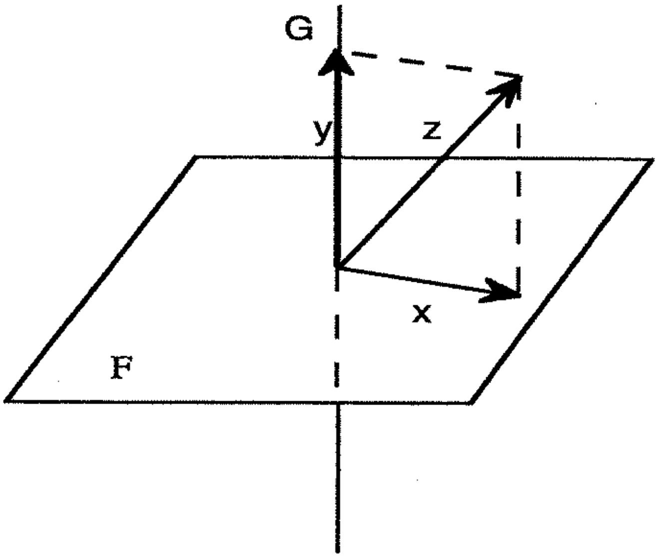
Supposons que F n'est pas inclus dans G, et G n'est pas inclus dans F. Nous allons montrer que $F \cup G$ n'est pas un sous-espace vectoriel de E.

Il existe un vecteur x non nul de F qui n'appartient pas à G, et un vecteur y non nul de G qui n'appartient pas à F. Notons $z=x+y$, et montrons que z n'appartient pas à $F \cup G$. Si z appartenait à F, on aurait $y=z-x$ qui appartiendrait à F car F est un sous-espace vectoriel ; or ceci est contraire aux hypothèses. On montrerait de même que z n'appartient pas à G. Il y a donc dans $F \cup G$ deux éléments dont la somme n'appartient pas à $F \cup G$: ce n'est pas un sous-espace vectoriel.

Pour écrire cette démonstration, un étudiant doit dans un premier temps passer à la contraposée du résultat demandé. Il doit penser que, pour montrer qu'un ensemble n'est pas un sous-espace vectoriel, on peut notamment prouver qu'il n'est pas stable par la somme ; ceci revient à faire une preuve d'existence : il existe deux éléments de l'ensemble dont la somme n'est pas dans l'ensemble. Il faut donc choisir deux éléments de telle manière que cette propriété soit vérifiée.

La démonstration de : z n'appartient pas à $F \cup G$ nécessite de prouver deux propriétés : z n'appartient pas à F et z n'appartient pas à G.

Cet exercice, qui est classique (on le rencontre dans la plupart des manuels et des feuilles de travaux dirigés de première année) conduit à une démonstration complexe. L'une des difficultés réside dans le choix des deux éléments appropriés, x et y. Ce choix peut être guidé par une représentation mentale, ou par l'emploi de la figure suivante :



On « voit » sur ce dessin que la somme $x+y$ n'appartient pas à la réunion (cet exercice peut d'ailleurs être vu comme portant sur la différence entre réunion et somme de sous-espaces). Le dessin joue ici le rôle d'aide à la résolution ; mais la mise en forme de la propriété vue sur le dessin implique un travail, qui comporte notamment une conversion de registre (du registre graphique au registre de l'écriture formelle) et la démonstration de : $x+y$ n'appartient pas à $F \cup G$, propriété qui semble évidente sur la figure mais nécessite une preuve dans le registre symbolique.

Nous pouvons noter dans cet exemple que les nouvelles exigences en matière de démonstration sont liées à une nécessité plus large d'organisation des connaissances. Or comme le note Robert :

« Les connaissances des étudiants sont atomisées, sans organisation, ni explicite ni implicite, il y a seulement une certaine accumulation de savoirs juxtaposés » (Robert 1998, p.152).

Ceci ne leur permet pas de répondre aux attentes d'organisation des enseignants, ni de disposer de la flexibilité dont nous avons souligné l'importance au paragraphe précédent.

Un dernier point signalé par Robert est la nécessité de travail personnel : la quantité de travail personnel attendu d'un étudiant est nettement plus importante que celle habituellement fournie par un lycéen. L'étudiant devrait travailler seul son cours, chercher de sa propre initiative les exercices qui ne sont pas faits en travaux dirigés. Ceci est rarement fait ; les étudiants privilégient l'acquisition de techniques, et sont encouragés dans cette direction par les sujets d'examen, qui portent la plupart du temps sur des exercices « types », leur permettant d'obtenir la moyenne alors que les connaissances correspondantes sont loin d'être maîtrisées.

Signalons que Robert propose, pour remédier à certaines des difficultés évoquées, des scénarios d'enseignement mettant à profit des situations de référence : problèmes que les étudiants rencontreront à plusieurs reprises, sous plusieurs angles, au cours de l'année. Elle recommande particulièrement ce type de dispositif pour favoriser l'acquisition des notions généralisatrices, unificatrices et formalisatrices, et propose notamment d'élaborer des activités sur les symétries et les projecteurs, « qu'on peut faire aborder en algèbre linéaire, puis en euclidien, puis en affine, puis en affine euclidien » (ibid., p.173). Il est possible d'imaginer des activités sur les symétries, ou les projecteurs, ayant comme point de départ les notions de symétrie ou de projection telles qu'elles sont présentées en géométrie affine euclidienne au lycée, et qui seront revues en algèbre linéaire, bilinéaire, voire en analyse fonctionnelle. Ainsi le calcul de la distance d'un point à un plan, rencontré en terminale S, pourrait être revu dans un cadre vectoriel puis élargi au calcul de la distance d'un vecteur à un hyperplan, ou à un sous-espace vectoriel quelconque. Ce calcul de distance, utilisant le projeté orthogonal reste pertinent dans les espaces de Hilbert ; il peut également être revu à l'occasion de problèmes portant sur des méthodes de moindre carrés. L'emploi de « situations de référence » rencontrées d'une part en algèbre linéaire et d'autre part dans une géométrie est donc un emploi possible du géométrique ; nous tenterons d'observer si un tel recours est effectivement proposé par des enseignants.

1.3.2 Du lycée à l'université : une différence de cultures ?

Les problèmes posés par la transition lycée-université sont au centre du travail de Praslon (2000). Il étudie dans sa thèse les continuités et les ruptures entre secondaire et supérieur en analyse et plus particulièrement sur la notion de dérivée. La question de l'emploi de la géométrie dans l'enseignement de l'algèbre linéaire ne se pose pas dans les mêmes termes, puisque l'algèbre linéaire n'est pas étudiée au lycée, et ne peut être considérée comme une simple généralisation, ou formalisation de la géométrie du secondaire. Cependant certains des aspects de la transition relevés par Praslon sont également pertinents pour notre étude. Selon lui, l'enseignement en DEUG relève d'une culture institutionnelle différente de celle du lycée. Utilisant le cadre théorique développé par Chevallard[3], il met en particulier à jour dans la transition des différences de pratiques qui montrent l'écart entre les deux cultures.

Une partie de cet écart provient des rôles nouveaux attribués au cours. Celui-ci occupe à l'université une place plus importante que dans le secondaire, en termes d'équilibre entre cours et exercices, mais aussi en ce qui concerne l'usage que les étudiants doivent faire du cours. Beaucoup de temps est consacré au cours magistral (qui ne comporte de plus que peu d'exemples dans bien des cas) ; ceci conduit, selon Praslon, à une accélération du temps didactique laissant peu de place à la routinisation des tâches. Les démonstrations données en

[3] Voir à ce sujet la partie 3 de ce chapitre.

cours servent de référence pour ce qui peut être attendu des étudiants : ils doivent pouvoir faire eux-mêmes des démonstrations semblables. D'ailleurs certains résultats, considérés comme partie intégrante du cours, ne sont rencontrés que sous forme d'exercices. En algèbre bilinéaire, c'est parfois le cas des résultats portant sur les projections et les symétries orthogonales : par exemple, le fait qu'un endomorphisme orthogonal et auto-adjoint d'un espace euclidien est une symétrie orthogonale peut être vu en séance de travaux dirigés, et être ensuite considéré comme un résultat connu. Praslon parle à ce sujet de relation dialectique cours-exercices à l'université, contrairement à la relation purement descendante mise en place au lycée. Le manque de coordination qui peut exister entre le cours magistral et les travaux dirigés, faits par des enseignants différents et souvent en l'absence d'un programme détaillé, constitue une difficulté supplémentaire. Par ailleurs, tous les énoncés donnés en cours n'ont pas le même statut : certains servent essentiellement à l'avancement du cours, alors que d'autres fournissent des techniques directement utilisables en exercices. Praslon, se référant à la distinction introduite par Douady, distingue énoncés « outils » et énoncés « objets ». Il observe qu'au lycée, les énoncés jouent essentiellement le rôle d'outils, tandis qu'en DEUG ils peuvent également apparaître dans leur dimension objet. Il est donc nécessaire que les étudiants fournissent le travail personnel nécessaire en ce qui concerne le cours, ce qui, comme le souligne Robert, n'est pas toujours le cas. Mais ils doivent de plus apprendre à développer une certaine autonomie vis-à-vis de ce cours, pour déterminer eux-mêmes l'intérêt des différents résultats énoncés.

Praslon pointe par ailleurs ce qu'il désigne comme des microruptures : il ne s'agit plus de pratiques totalement différentes, mais de ruptures fines dont l'accumulation va contribuer à creuser l'écart entre les deux cultures. Ainsi l'évolution du degré d'autonomie des étudiants ; la nécessité de distanciation par rapport aux techniques données, ou celle de développement de nouvelles méthodes sont source de telles microruptures. Ces différents aspects de la transition sont proches de ceux développés par Robert dans le travail que nous avons évoqué ci-dessus. Praslon note que cette évolution nécessaire n'est pas prise en charge par l'enseignement ; l'adaptation reste à la charge des étudiants. Il fait de plus l'hypothèse que :

« Les enseignants du supérieur sont souvent peu sensibles à la complexité des tâches qu'ils sollicitent de la part des étudiants, d'une part parce que ces tâches sont devenues pour eux peu à peu de plus en plus transparentes (phénomène de « naturalisation »), d'autre part parce qu'ils estiment parfois à tort que certaines sous-tâches dont elles se constituent sont déjà parfaitement « compilées » par l'étudiant au terme du lycée. » (Praslon 2000, p.52).

Nous rejoignons Praslon dans cette analyse ; il est possible que certains enseignants du supérieur méconnaissent les programmes et plus encore les pratiques de l'enseignement secondaire. Certains enseignants, qui connaissent le contenu de l'enseignement de géométrie fait dans le secondaire, peuvent aussi considérer que celui-ci ne peut pas être utilisé en algèbre linéaire. Nous poserons un questionnaire aux enseignants, notamment pour préciser ces points.

Nous avons examiné ici des travaux portant de manière générale sur l'enseignement supérieur et la transition secondaire-supérieur. Nous allons maintenant nous pencher sur des travaux portant spécifiquement sur l'algèbre linéaire, et dans lesquels nous relèverons des réponses partielles à certaines des questions que nous avons formulées en introduction.

2. Travaux de didactique sur l'algèbre linéaire et recours au géométrique

Parmi les travaux de didactique qui portent sur l'enseignement de l'algèbre linéaire, beaucoup évoquent le recours au géométrique, sous les différents aspects que nous avons mentionnés en introduction. Nous allons tenter ci-dessous de présenter l'essentiel des hypothèses et des résultats portant sur ce recours. Nous préciserons également comment notre travail s'articule avec ces recherches précédentes.

2.1 Des propositions d'enseignement (France)

2.1.1 Un enseignement de géométrie en terminale pour préparer à l'algèbre linéaire

Les programmes de lycée de 1986 marquent la fin de l'enseignement de l'algèbre linéaire dans le secondaire, y compris en classe de terminale scientifique. Dès 1987, Robert, Robinet et Tenaud proposent dans une brochure des exercices commentés de géométrie, destinés à des élèves de Terminale et permettant selon les auteurs de préparer ces élèves à l'algèbre linéaire, qu'ils rencontreront pour la première fois à l'université. Dans l'introduction de la brochure, les auteurs mentionnent deux directions essentielles quant à l'utilité d'un tel enseignement pour préparer à aborder l'algèbre linéaire :

- Donner aux élèves des représentations (figuratives) :

Les auteurs se déclarent favorables à l'emploi de représentations graphiques :

« pour se donner des idées », et écrivent : « souvent, la possibilité de se représenter les situations à l'aide du plan ou de l'espace est une aide à la résolution de problèmes. » (Robert et al., 1987, p.3).

Cette possibilité d'emploi de représentations revêt un aspect particulier en algèbre linéaire grâce au vocabulaire, qui est « en partie le même que celui de $\mathbb{R}^2$ ou $\mathbb{R}^3$ » (ibid., p.3). Ainsi l'un des objectifs de la brochure sera de familiariser les élèves avec les notions de droite, de plan, de vecteurs, afin de leur permettre notamment de « mettre des images sous les mots dans les cours ultérieurs sur les espaces affines et vectoriels » (ibid., p.3).

- Jeux de cadres

Les auteurs évoquent deux cadres distincts : l'analytique, et le vectoriel. Elles se proposent d'une part de familiariser les élèves avec le cadre vectoriel, et d'autre part de les habituer à pratiquer des changements de cadre, ce qui devrait selon elles faciliter l'apprentissage ultérieur de l'algèbre linéaire (elles ne détaillent toutefois pas pour quelle raison, ni de quelle manière).

La brochure est constituée de trois séries d'exercices corrigés et commentés, portant sur la géométrie euclidienne du plan et de l'espace, et comportant les deux aspects, vectoriel et analytique. Ces exercices conduisent à la manipulation d'équations de droites et de plans ; à l'étude des positions respectives de ceux-ci, et d'une manière générale à l'emploi de l'outil vectoriel pour résoudre des problèmes de géométrie.

La brochure étant destinée à des élèves de Terminale, son emploi éventuel dans des enseignements d'algèbre linéaire n'est pas évoqué.

2.1.2 Place de la géométrie dans l'enseignement d'algèbre linéaire expérimenté à Lille

Dès 1989, un enseignement d'algèbre linéaire est expérimenté à Lille, en première année de DEUG à dominante mathématiques. Parmi les principes fondant l'ingénierie choisie, Rogalski mentionne le rôle de la géométrie. Il écrit ainsi dans (Rogalski 1997, p.162) qu'il fait l'hypothèse qu'une pratique de la géométrie dans l'espace et de la géométrie cartésienne constitue un prérequis à l'étude de l'algèbre linéaire. Il fait référence au document que nous avons évoqué ci-dessus (Robert et al. 1987) et reprend des arguments similaires : la pratique de la géométrie permettra de « donner des « images » de certains concepts vectoriels ». Il est toutefois plus précis à propos de cet aspect, puisqu'il donne une liste de concepts concernés : sous-espaces, combinaisons linéaires, somme directe, ensemble des solutions d'un système linéaires, paramétrages linéaires, bases…

Par ailleurs, le contexte est ici différent de celui attaché au document précédent, puisqu'il s'agit de faire un enseignement d'algèbre linéaire, utilisant de la géométrie, et non un enseignement de géométrie préparant à l'algèbre linéaire, ce qui amène Rogalski à donner d'autres arguments concernant l'éventuel apport de la géométrie. Il mentionne ainsi la possibilité de changements de cadres, de points de vue, et écrit également que la pratique de la géométrie cartésienne donnerait aux élèves l'occasion de « rendre opératoires certaines manipulations ensemblistes qui seront utiles en algèbre linéaire » (il cite notamment la recherche de lieux géométriques, et la dualité de représentation, équations/paramétrage). En ce qui concerne les dessins, il recommande un apprentissage spécifique de « la pratique du dessin symbolique dans l'espace pour représenter des situations générales de l'algèbre linéaire ». Il signale en particulier la perte d'information attachée à la plupart des dessins employés en algèbre linéaire, et pose la question des activités à choisir pour familiariser les étudiants avec la pratique du dessin « non figuratif ».

Les choix de cours reposent sur ces principes. Ainsi, un enseignement de géométrie dans l'espace est donné comme préliminaire ; la feuille d'exercices correspondante, intitulée « introduction à l'algèbre linéaire », est extraite du document précédent (Robert et al. 1987). Un atelier (travail en petits groupes de 4 étudiants, sur une durée de deux heures) est consacré au double aspect équations/paramétrage dans la géométrie cartésienne de $\mathbb{R}^3$; il comporte des études de courbes et de surfaces, et un exercice sur l'appariement de formules et de dessins. Un travail spécifique porte sur l'interprétation des solutions d'un système linéaire (interprétation conduisant à l'emploi de vocabulaire géométrique), et le lien entre nombre d'équations et dimension de l'espace solution. Enfin, un atelier est consacré à l'emploi de représentations géométriques en algèbre linéaire ; lors de cet atelier sont proposés aux étudiants des exercices dans lesquels ils doivent dessiner des vecteurs, ou des sous-espaces vectoriels en faisant apparaître autant que possible les positions respectives de ceux-ci ; les étudiants doivent de plus préciser les éventuelles pertes d'informations liées à l'emploi du dessin.

Insistons sur le fait qu'il s'agit ici, comme dans le travail précédent, d'expériences d'enseignement qui ne sont pas fondées sur des travaux de didactique portant spécifiquement sur l'apport éventuel de la géométrie pour l'enseignement de l'algèbre linéaire. Nous retiendrons donc essentiellement les hypothèses qui y sont faites ; nous tenterons de tester celles-ci, mais également de savoir si elles reflètent des opinions communément répandues chez les enseignants.

2.2 Jeux de cadres et registres

2.2.1 Coordination de représentations sémiotiques

Nous avons donné au début de cette partie un bref aperçu de la théorie de Duval sur les registres de représentation sémiotique. Dans sa thèse, Pavlopoulou (1994) applique cette théorie dans le contexte de l'algèbre linéaire. Elle constate dans un premier temps les difficultés des étudiants à séparer les objets et leurs représentants ; en particulier le confusion entre un vecteur et sa représentation géométrique entraîne de nombreux problèmes. Or Duval, comme nous l'avons vu ci-dessus, soutient que pour ne pas confondre un objet et sa représentation :

> « Il est nécessaire de disposer de plusieurs représentations sémiotiques hétérogènes de cet objet et de les coordonner. » (Duval 1993).

En algèbre linéaire, on dispose effectivement de plusieurs types de représentation. Pavlopoulou distingue trois registres : le registre graphique (flèches), le registre des tableaux (coordonnées), et le registre de l'écriture symbolique. Ce dernier registre semble plus puissant que les autres, puisqu'il permet de représenter une plus grande variété de situations : en effet, le registre tableau ne permet de représenter que des situations en dimension finie, tandis que le registre graphique, selon Pavlopoulou, ne fournit « que de bonnes représentations d'un vecteur du plan ou de l'espace à trois dimensions. » (Pavlopoulou 1994, p.39). Mais il est cependant important d'utiliser dans certaines situations un registre moins puissant en termes de représentation ; Pavlopoulou souligne en particulier la possibilité de recours à des contre-exemples dans les registres graphiques ou tableau pour résoudre certains exercices. Par ailleurs, rappelons que selon Duval, la possibilité de coordination de registres apparaît comme fondamentale pour la conceptualisation.

Pavlopoulou étudie donc en détail la coordination des registres disponibles en algèbre linéaire, et tente de mettre en place des dispositifs permettant de favoriser cette coordination, en se centrant sur les notions de vecteur, de combinaison linéaire, de dépendance et d'indépendance linéaires. Elle montre que l'on peut trouver dans les manuels différentes approches, avec en particulier un recours variable au registre graphique, mais les problèmes de conversion de registres n'apparaissent en aucun cas comme des objectifs d'apprentissage.

Pavlopoulou propose un enseignement spécifique, destiné à des étudiants de mise à niveau, et constitué de séquences didactiques consacrées aux conversions. Ce travail semble avoir des conséquences très positives sur les pratiques des étudiants, non seulement pour les tâches de conversion, et la dissociation entre un vecteur et sa représentation « géométrique » mais également pour des questions plus générales.

Nous utiliserons par la suite les trois registres distingués par Pavlopoulou ; mais il est clair que le changement de registre ne peut constituer que l'un des aspects de l'intervention possible du géométrique en algèbre linéaire. La capacité des étudiants à associer à un énoncé proposé par exemple dans un registre symbolique des exemples formulés dans un registre graphique pourra guider ceux-ci dans leurs résolutions. A l'opposé, la difficulté qu'ils éprouvent éventuellement à séparer un vecteur et la représentation graphique de celui-ci pourra être source de problèmes. Mais nous pouvons dès à présent faire l'hypothèse que nous observerons, au moins dans certains cours d'algèbre linéaire le recours à une, ou des géométries formulées elles-mêmes dans un registre symbolique. Notre étude doit donc tenir compte de l'emploi du registre graphique, mais elle ne peut se limiter à celui-ci.

2.2.2 Articulation entre points de vue « cartésien » et « paramétrique »

Le point de départ de la thèse de Marlène Alves Dias, thèse à laquelle nous avons déjà fait allusion dans la partie précédente, est l'observation de difficultés rencontrées par les étudiants dans des tâches demandant d'articuler les points de vue cartésien et paramétrique. Adopter un point de vue paramétrique consiste à considérer un sous-espace donné comme sous-espace engendré par un ensemble de vecteurs. Dans le point de vue cartésien, un sous-espace est considéré comme un ensemble de vecteurs solutions d'un système d'équations linéaires. Ces points de vue peuvent s'exprimer dans plusieurs registres, et le passage de l'un à l'autre n'est pas réductible à une flexibilité sémiotique entre registres de représentation.

La notion de point de vue est celle que l'auteur retient pour rendre compte de la flexibilité nécessaire lors de cette articulation. Elle utilise cependant également les notions de cadre et de registre ; elle distingue quatre registres liés à son objet d'étude, qui ne comportent pas d'aspect graphique. Elle retient également cinq cadres : le cadre de l'algèbre linéaire, le cadre de la géométrie affine euclidienne, le cadre des systèmes linéaires, le cadre matriciel, et celui des déterminants. La géométrie affine euclidienne désigne dans ces travaux la géométrie des droites et plans travaillée dans l'enseignement secondaire. Le passage paramétrique - cartésien peut être travaillé dans ce cadre ; cependant, la limitation à deux ou trois dimensions rend les systèmes obtenus très simples ; de plus, l'auteur signale la présence dans ce cadre de moyens de contrôle et de techniques spécifiques, comme l'emploi d'un vecteur normal pour déterminer une équation cartésienne de plan dans l'espace, l'emploi d'un déterminant pour établir une équation cartésienne de droite dans le plan...

Alves Dias étudie la présentation faite de l'articulation cartésien – paramétrique dans différents manuels destinés à l'enseignement supérieur. Ceci la conduit notamment à observer la variabilité de la place accordée au cadre géométrique (rappelons que pour Alves Dias, le cadre géométrique est constitué par la géométrie affine euclidienne non théorisée) : celui-ci peut être totalement absent d'un ouvrage, ou constituer un cadre privilégié pour l'introduction de l'algèbre linéaire, ou encore intervenir à certains endroits spécifiques, comme l'étude des systèmes linéaires. Elle relève toutefois des constantes dans ces manuels, en ce qui concerne l'emploi du cadre géométrique : la « faible attention portée à la distinction entre caractéristiques vectorielles et affines. » (Alves Dias 1998, p.190) ; et l'absence de tentatives d'utilisation explicite d'un « soutien géométrique » au-delà de la dimension 3.

Alves Dias soumet des tests à des étudiants de DEUG mais également à des étudiants de maîtrise ; l'analyse des réponses lui permet en particulier de noter le faible recours au cadre géométrique, et le manque d'efficacité d'un tel recours lorsqu'il est fait par les étudiants.

Elle propose notamment l'exercice suivant (qui figurait dans les feuilles de travaux dirigés de l'université de Lille) :

On considère dans $\mathbb{R}^3$ les vecteurs suivants : $a=(2, 3, -1)$ $b=(1, -1, -2)$ $c=(5, 0, -7)$ $d=(0, 0, 1)$. Trouver une représentation cartésienne de l'intersection des sous-espaces engendrés par $\{a, b\}$ et $\{c,d\}$.

Dans cet exercice, on peut envisager de déterminer au préalable la dimension de l'intersection ; pour ce faire, il est notamment possible d'observer que l'on a affaire à deux plans vectoriels, non confondus, de l'espace, dont l'intersection est donc une droite. Par ailleurs, les étudiants peuvent avoir recours aux méthodes développées au lycée pour la détermination des équations cartésiennes des deux plans, c'est à dire employer soit des déterminants 3x3, soit des vecteurs normaux à chacun des deux plans. Or, dans les réponses considérées, seuls 5 étudiants sur un total de 122 ont recours au cadre géométrique ; de plus 4 de ces 5 étudiants commettent des erreurs : 3, qui ont bien identifié une droite, ne lui associent qu'une seule équation ; un autre caractérise un plan par deux équations.

Le même type de remarques peut être fait à propos des réponses des étudiants de maîtrise, mais également à propos des réponses à un autre exercice, portant sur une application linéaire En conclusion, même s'il ne s'agit pas là d'un objectif essentiel de l'auteur, le travail de Alves Dias montre que le recours au cadre géométrique (et ce, même pour une tâche se déroulant explicitement en dimension 3) n'est que très rarement utilisé spontanément par les étudiants ; de plus, son utilisation est loin d'être efficace.

Comme nous l'avons déjà indiqué, les notions de cadre et de registre sont pertinentes pour notre étude. Mais ces notions ne sont pas suffisantes pour décrire les différentes formes d'intervention du géométrique en algèbre linéaire. En particulier, l'analyse de « l'intuition géométrique », évoquée par de nombreux enseignants et qui est centrale pour notre étude ne peut se réduire à des questions de changements de cadre ou de registre. Elle semble plutôt proche de l'étude d'un « mode de pensée géométrique », notion présente dans plusieurs des travaux que nous allons évoquer maintenant.

2.3 Des travaux en Amérique du Nord

2.3.1 Le LACSG et les travaux de Harel

Depuis 1990 existe aux Etats-Unis le « Linear Algebra Curriculum Study Group » (LACSG), qui réunit des enseignants de différentes universités américaines. Les membres de ce groupe étudient l'enseignement de l'algèbre linéaire, et ont fait différentes propositions susceptibles de guider une éventuelle réforme. Ils suggèrent notamment une entrée dans l'algèbre linéaire fondée sur les matrices, et l'étude de $\mathbb{R}^n$; pour cette dernière étude, ils proposent une présentation géométrique, dans le cadre de $\mathbb{R}^n$, des notions de dépendance et d'indépendance linéaire, de base, d'application linéaire, de produit scalaire, etc.

Ils recommandent également que l'algèbre linéaire soit développée à partir de la résolution de problèmes portant sur des objets mathématiques connus, notamment de nature géométrique. Les travaux du LACSG contiennent de nombreuses propositions d'enseignement, de comptes rendus d'expériences ; mais l'approche choisie n'est généralement pas celle d'une recherche approfondie, soutenue par un cadre théorique. C'est cependant le cas dans les travaux de l'un des membres du groupe, Guershon Harel, dans lesquels la géométrie tient une place importante. Harel fait l'hypothèse de trois principes didactiques pouvant guider un enseignement d'algèbre linéaire. Tout d'abord le principe de concrétisation, que Harel formule ainsi :

« Pour qu'un étudiant soit capable d'abstraire une structure mathématique d'un modèle donné de cette structure, les éléments de ce modèle doivent être des entités conceptuelles aux yeux de l'étudiant ; c'est à dire que l'étudiant doit posséder des procédures cognitives qui peuvent prendre ces objets comme des données d'entrée. » (Harel, in Dorier et al. 1997, p. 220)

Pour être en accord avec ce principe, il faut donc que les étudiants puissent construire leur compréhension d'un concept dans un contexte concret. Harel confère à l'adjectif « concret » un sens particulier : un objet mathématique est concret pour un étudiant si celui-ci est une « entité conceptuelle » à ses yeux, c'est à dire si cet objet est suffisamment familier à l'étudiant pour qu'il puisse le prendre comme point de départ. Notons que Harel semble considérer toutes les figures géométriques comme des objets concrets ; il fait probablement l'hypothèse que le lien direct entre ces figures et la réalité fait d'une telle figure une entité conceptuelle, c'est à dire une donnée d'entrée possible, aux yeux de tous les étudiants.

Harel a expérimenté l'hypothèse du « principe de concrétisation » dans une université technologique ; le concept en jeu était celui d'espace vectoriel, et le contexte connu celui de la géométrie à deux et trois dimensions. Il a comparé les réponses à un test de deux groupes d'étudiants, suivant tous les deux le même cours classique d'algèbre linéaire (basé sur l'étude de $\mathbb{R}^n$), à raison de trois heures par semaine, mais auxquels étaient proposés des « travaux dirigés » différents (deux heures par semaine). Durant ces séances, le premier groupe rencontrait une grande variété d'exemples des notions abstraites vues en cours ; le second groupe voyait également de tels exemples pendant une heure, mais la seconde heure était entièrement consacrée à des illustrations géométriques des notions vues. Les réponses au test montrent, non seulement que les étudiants du second groupe ont plus volontiers recours à ce que Harel appelle « une description géométrique » de leurs solutions, mais également que ces solutions sont plus souvent justes que celles proposées par des étudiants du premier groupe, y compris lorsque le contexte est exclusivement algébrique. Harel conclut que « les étudiants du groupe B ont construit une image-concept supérieure de l'espace vectoriel » (ibid., p.224).

Suivant le même principe de concrétisation, Harel a testé un enseignement en lycée, visant à introduire des notions élémentaires d'algèbre linéaire dans le cadre de la géométrie du plan ou de l'espace. L'emploi de dessins permet selon l'auteur de rendre concrets pour les lycéens les espaces vectoriels limités à ces dimensions. Il a ainsi introduit, à partir de problèmes géométriques, les notions de génération, dépendance linéaire, base, dimension, etc. Il en conclut que cette approche se révélait efficace avec les lycéens.

Le deuxième principe que pose Harel est le principe de nécessité :

« Pour qu'un étudiant apprenne, il doit sentir une nécessité pour ce qu'on veut lui enseigner. Par nécessité, nous entendons une nécessité intellectuelle, par opposition à une nécessité sociale ou économique. » (ibid., p226).

Ce principe est fortement associé au troisième, le principe de généralisabilité :

« Quand on a affaire à un modèle concret, c'est à dire à un modèle qui satisfait le principe de concrétisation, les activités didactiques à l'intérieur de ce modèle doivent permettre et encourager la généralisabilité de ces concepts .» (ibid., p. 228).

Ces deux principes conduisent à examiner précisément les concepts pour lesquels l'approche géométrique sera pertinente ; il faudra que ces concepts n'aient pas, dans le contexte géométrique, de spécificités allant à l'encontre de leur représentativité pour le cas général, et que la généralisation des concepts géométriques correspondants apparaisse de plus comme nécessaires. Ainsi Harel note que la formule donnée, en dimension quelconque, pour le cosinus de deux vecteurs, généralise bien la formule valable dans le contexte géométrique ; mais elle n'est pas issue de la résolution d'un problème. Dans ce cas, la généralisation obtenue enfreint le principe de nécessité ; les étudiants ne créeront donc sans doute pas de nouveau concept correspondant, puisque celui-ci ne répond pas à un besoin intellectuel.

Harel, s'il se prononce clairement en faveur d'un recours important au géométrique, souligne le fait qu'il ne faudrait pas en conclure qu'un enseignement d'algèbre linéaire doit apparaître comme un genre de généralisation d'un enseignement préalable de géométrie. Il signale les dangers d'une telle approche :

« Quand la géométrie est introduite avant que les concepts algébriques aient été formés, beaucoup d'étudiants voient celle-ci comme le matériau à étudier. Ainsi ils restent limités au monde des vecteurs géométriques, et ne passent pas au cas général. » (Harel, in Dorier et al. 2000).

Selon lui, si les enseignants voient, de manière évidente, les correspondances entre l'algébrique et le géométrique, ce n'est pas le cas pour les étudiants ; ceci entraîne à prendre de nombreuses précautions pour l'utilisation de l'approche géométrique.

2.3.2 Niveaux de description en algèbre linéaire

Les difficultés conceptuelles rencontrées par les étudiants en algèbre linéaire peuvent notamment provenir de la nécessité d'emploi de différents types de langage, et de traduction d'un langage dans l'autre. Hillel étudie différents niveaux de langage utilisé pour décrire les vecteurs et les opérateurs. Il relève en particulier, dans une approche qui rejoint celle de Pavlopoulou, l'existence de trois types de langage en algèbre linéaire, et les nécessités de passage d'un type à l'autre. Il distingue ainsi :

- Le langage de la théorie générale
- Le langage de $\mathbb{R}^n$
- Le langage géométrique de l'espace à deux ou trois dimensions.

Il désigne ces langages, ou niveaux de description, par les termes : niveau abstrait, niveau algébrique, niveau géométrique (dans l'ordre donné ci-dessus). Ces langages, ou niveaux, ne sont pas de simples systèmes sémiotiques : ainsi plusieurs registres peuvent intervenir dans un même niveau : dans le niveau géométrique, on pourra observer l'emploi du registre graphique, mais également celui du registre de la langue naturelle. Par ailleurs, le terme de niveau n'indique pas ici une hiérarchie ; il est possible, selon Hillel, de passer d'un niveau à l'autre.

Etudiant les spécificités de chaque niveau, il souligne l'emploi métaphorique, dans la théorie générale, du langage géométrique. Or celui-ci est souvent associé à des figures, d'où l'usage métaphorique que les enseignants font de ces figures. Mais il est possible que les étudiants ne notent pas la métaphore, et restent attachés au sens concret de la figure. Hillel cite ainsi le cas d'étudiants qui, devant chercher la projection orthogonale de la fonction sinus sur l'espace des polynômes de degré inférieur ou égal à deux, cherchent :

« « le vecteur le plus près dans le plan », le plan dans ce cas, signifie littéralement le plan dans lequel est tracé le graphe de la fonction. » (Hillel, in Dorier et al. 1997, p.234).

Dans son étude des passages d'un niveau à l'autre, Hillel explique que le passage du niveau géométrique au niveau algébrique (ici $\mathbb{R}^2$ ou $\mathbb{R}^3$) se fait par le biais du choix d'un repère, et de l'emploi des coordonnées dans ce repère. Ainsi on passe du parallélogramme représentant la somme vectorielle à l'addition en termes de coordonnées, ou d'une application linéaire à sa matrice dans la base choisie. Le passage inverse : du niveau algébrique, en dimension inférieure à trois, au niveau géométrique, se fait par la procédure inverse. Toutefois, Hillel note que les couples ou les triplets de coordonnées pouvant également correspondre, dans un repère, à des points, il existe dans ce processus une ambiguïté entre points et vecteurs (ambiguïté accentuée par le fait qu'un vecteur apparaît comme un *point* de l'espace vectoriel considéré).

En ce qui concerne les passages entre niveau géométrique et niveau abstrait, ceux-ci ne peuvent s'effectuer, selon Hillel, que par le biais du niveau algébrique.

Nous pouvons noter que l'approche de Hillel met en avant, comme les travaux de Pavlopoulou et Alves Dias, une forme de flexibilité cognitive ; en effet le passage entre deux niveaux demande une telle flexibilité. Nous allons encore observer une forme différente de flexibilité dans les travaux de Sierpinska, que nous allons évoquer maintenant.

2.3.3 Différents modes de raisonnement en algèbre linéaire

Nous avons vu que, selon Hillel, trois types de langage coexistent en algèbre linéaire. Sierpinska élargi cette distinction, en parlant de différents modes de raisonnement. Elle distingue trois modes de raisonnement en algèbre linéaire :

- Le mode synthétique - géométrique
- Le mode analytique - arithmétique
- Le mode analytique - structurel.

Pour expliquer ce que sont ces trois modes, reprenons un exemple qu'elle propose. La résolution d'un système linéaire de trois équations à trois inconnues peut être vue comme l'étude de l'intersection de trois plans dans l'espace : on est alors dans le mode synthétique – géométrique. Elle peut être associée à la réduction d'une matrice à trois lignes et quatre colonnes ; cette approche appartient au mode analytique - arithmétique. Finalement, on peut la penser en termes de matrices singulières et régulières, et on sera alors dans le mode analytique – structurel.

Ces trois modes ne correspondent à aucune hiérarchie : tous trois sont nécessaires, leur interaction est fondamentale en algèbre linéaire. Sierpinska identifie dans le processus historique d'élaboration de l'algèbre linéaire des effets de l'application de la pensée analytique à la géométrie.

Dans l'algèbre linéaire moderne, la pensée analytique conduit, selon elle, « à ce souci de géométrisation au niveau structurel, une question importante étant : quelles sont les propriétés qui ne dépendent pas de la base dans l'espace vectoriel ? » (Sierpinska, in Dorier et al. 1997, p.254). Donc une étude analytique peut mener au mode synthétique – géométrique, quand on se pose la question de l'invariance en cas de changement de coordonnées.

D'autre part, le mode synthétique – géométrique est aussi lié au mode analytique – structurel car tous deux sont fondés sur des propriétés, des concepts, en opposition à des calculs.

Le choix du mode de raisonnement adapté à la résolution de l'un ou l'autre problème, le passage d'un mode à un autre sont difficiles pour les étudiants, qui, selon Sierpinska, se replient sur l'emploi de modes « mixtes ». Elle cite des exemples pour illustrer ces difficultés. Ainsi, lors de l'étude du nombre de solutions d'un système 3x3, interprété en termes d'intersection de trois plans se coupant suivant une droite, une étudiante déclare que le système a une solution unique, puisque la droite est unique. Cette erreur est une conséquence du choix du mode synthétique – géométrique, alors qu'il convenait ici de se placer dans le mode analytique – arithmétique. Sierpinska fait l'hypothèse que des activités spécifiques, conduisant l'étudiant à choisir un mode de raisonnement approprié, sans que celui-ci soit directement imposé comme c'est le plus souvent le cas, pourrait aider les étudiants à acquérir plus d'indépendance en algèbre linéaire. Elle recommande également de faire évoluer le mode analytique arithmétique vers ce qu'elle appelle la pensée « numérique », qui « distingue rigoureusement la définition d'une grandeur de la manière de calculer cette grandeur » (ibid. p.268). Ce choix conduirait notamment à réduire les interventions du mode synthétique -

géométrique. D'une manière générale, le géométrique n'est pas central dans cette partie du travail de Sierpinska, contrairement à ce que nous allons observer dans ceux de ses travaux que nous allons présenter maintenant.

2.3.4 Utilisation de Cabri-géomètre

Dans le prolongement du travail évoqué ci-dessus, Sierpinska et al. ont introduit l'usage de Cabri-géomètre. Différents travaux, notamment de Hillel et Sierpinska, étudient l'emploi de cet environnement pour l'introduction de certaines notions d'algèbre linéaire (Sierpinska et al., 1999 ; Sierpinska, in Dorier 2000). L'objectif est, selon les auteurs :

« D'ancrer les notions d'espace vectoriel, application linéaire, et vecteur propre dans des intuitions géométriques, en construisant grâce à Cabri – Géomètre un environnement approprié. » (Sierpinska et al., 1999, p.9)

Ainsi les auteurs proposent notamment à des étudiants des activités autour de la notion d'application linéaire (du plan, représenté par un écran de Cabri). Leur premier objectif est de conduire les étudiants à donner la définition formelle en termes de stabilité par addition et produit par un scalaire, à partir de propriétés constatées lors de manipulations avec Cabri. Ils proposent ainsi aux étudiants plusieurs applications, notées T, certaines linéaires, certaines semi-linéaires, d'autres ne vérifiant aucune propriété de stabilité ; les étudiants doivent formuler des observations à propos des liens entre T(kv) et T(v) d'une part, T(v+w) , T(v) et T(w) d'autre part.

Une fois la définition formelle donnée, ils travaillent sur le « problème du prolongement linéaire » : étant données les images par une application linéaire T de deux vecteurs non colinéaires du plan (la notion de base reste « intuitive », mais les étudiants savent décomposer un vecteur du plan suivant deux vecteurs non colinéaires), déterminer (et construire dans Cabri) l'image par T d'un vecteur v quelconque.

L'expérimentation de ces activités a en fait conduit à constater de nombreuses difficultés rencontrées par les étudiants ; certaines étaient dues à Cabri, mais d'autres relevaient uniquement du domaine de l'algèbre linéaire. Plus que l'élaboration d'un environnement approprié au développement d'intuitions géométriques en algèbre linéaire, ces travaux permettent donc d'observer des difficultés, provenant notamment du caractère géométrique du cadre employé. Sierpinska (in Dorier 2000) analyse celles-ci en termes de manifestations chez les étudiants d'un mode de pensée pratique, au lieu du mode de pensée théorique nécessaire en algèbre linéaire. Elle relève plusieurs types de manifestations de ce mode de pensée ; nous relèverons ici ceux qui sont directement liés à la géométrie.

Difficultés d'usage du langage

Sierpinska fait référence aux travaux de Vytgotsky, qui a souligné l'importance du langage écrit et les différences entre celui-ci et le langage oral. D'après Sierpinska :

« Explicite et élaboré, le langage écrit diffère des langages oraux et intérieurs par son caractère volontaire, et donc conscient, qui le relie étroitement à la pensée scientifique. » (Sierpinska, in Dorier 2000)

Les difficultés liées à l'emploi du langage intérieur se présentent donc d'une manière générale dans l'apprentissage du raisonnement scientifique ; c'est en particulier le cas en algèbre linéaire.

Ainsi, si dans des exercices portant sur les vecteurs géométriques, certains étudiants emploient bien les termes de « direction » ou « sens », mais utiliseront en dehors de ce contexte les termes « parallèles », « vont dans la même direction ». Les difficultés liées au langage sont particulièrement sensibles dans la manipulation de définitions. Sierpinska cite l'exemple d'un étudiant qui, devant donner une définition de l'égalité de vecteurs en utilisant les termes « parallèles » ou « parallélogramme », écrit : « Deux vecteurs sont égaux si ils sont parallèles. » (Sierpinska, in Dorier 2000)

Utilisation d'exemples prototypiques à la place des définitions

Sierpinska cite l'exemple d'étudiants qui, confrontés au « problème du prolongement linéaire » mentionné ci-dessus, font des remarques du type :

« Les applications linéaires sont des rotations, des homothéties, des projections, etc. et leurs combinaisons avec des paramètres constants… » (ibid.). De tels étudiants ne parviennent pas à déterminer l'image d'un vecteur quelconque, une fois données les images de deux vecteurs non colinéaires ; ils essaient d'identifier l'application T comme une transformation connue ou une combinaison de telles transformations et échouent.

Dans ces travaux, Sierpinska examine une forme de recours au géométrique sur laquelle nous ne nous pencherons pas nous-mêmes : l'utilisation de Cabri-géomètre comme support à l'introduction de l'algèbre linéaire. Il s'agit bien d'un recours au géométrique, selon le sens que nous avons attribué à ce terme : l'emploi d'un logiciel tel que Cabri permet d'établir un lien direct avec la réalité. Nous relevons cependant dans les travaux des Sierpinska la mention de difficultés qui ne sont pas liées au logiciel, mais à la géométrie affine du plan. Ainsi l'emploi de l'expression « vecteurs parallèles », dans un contexte d'algèbre linéaire, témoigne d'une confusion avec la géométrie affine. L'idée que les applications linéaires se réduisent aux applications géométriques connues montre que les étudiants n'ont pas encore encapsulé (Dubinsky 1991) la notion d'application linéaire, qu'ils considèrent uniquement comme un processus et non comme un objet. Nous faisons l'hypothèse que l'emploi du support visuel offert par Cabri peut entraîner cette difficulté : dans ce contexte, une application apparaît naturellement comme un processus. Visualiser la notion générale d'application linéaire semble par ailleurs difficile, même avec un logiciel adapté ; ceci explique que les étudiants se replient vers les applications géométriques connues.

2.4 Autres travaux

2.4.1 Enseignement de l'algèbre linéaire et structuration du savoir

Behaj étudie dans sa thèse (Behaj 1999) l'enseignement de l'algèbre linéaire sous l'angle de la structuration du savoir. D'après Behaj :

« Nous pouvons imaginer que lorsqu'une personne traite (en situation de résolution) ou reçoit (en situation de cours) une information (définition, ou théorème, ou propriété, etc.), elle l'insère, en général, de manière implicite dans :

une organisation de type « chronologique » : l'information va être classée à un endroit précis dans le champ de ses acquis antérieurs,

une organisation dite « topogénétique » : cette information va être reliée à un certain type d'applications (exemples, ou exercices, etc.) » (Behaj 1999, p.6)

La structuration est donc une organisation de faits et d'idées chez un individu, organisation qui va évoluer dans le temps. Pour élaborer un cours, un enseignant effectue une structuration du contenu qu'il doit enseigner.

Behaj étudie les structurations proposées par les enseignants, l'évolution des structurations correspondant aux mêmes éléments chez les étudiants, ainsi que les apports et les difficultés liés à différents types de structurations.

La géométrie apparaît ainsi lorsque, à l'occasion d'interviews d'enseignants - chercheurs, interviews menés dans l'objectif de préciser la structuration adoptée par ceux-ci en vue de leur enseignement, se pose la question de la dialectique ancien – nouveau. Behaj choisit ici une approche théorique proposée par Chevallard. Il rappelle que :

« Le savoir enseigné progresse suivant une dialectique de l'ancien et du nouveau.

- tout objet de savoir dont l'apprentissage est visé doit d'abord être présenté comme nouveau, cette nouveauté justifie le fait qu'il puisse être l'enjeu d'un apprentissage.
- il faut ensuite montrer que cet objet de savoir a une autre face : il s'inscrit dans la perspective de l' ancien univers de connaissances qu'il vient enrichir.

La dialectique ancien – nouveau apparaît comme une forme particulière, spéciale aux mathématiques, de ces impératifs généraux provenant de la nécessité de « mise en texte » du savoir. » (Behaj 1999, p.10)

En algèbre linéaire, se pose la question de l'emploi de la géométrie rencontrée au lycée, comme pouvant fournir le côté « ancien » correspondant au « nouveau » proposé en algèbre linéaire. Behaj interviewe des enseignants, et repère dans leurs réponses des éléments qui relèvent de la dialectique ancien – nouveau. Il observe notamment des choix de progression s'appuyant sur les exemples prototypiques de l'espace géométrique, de $\mathbb{R}^2$ et de $\mathbb{R}^3$. Notons que, parmi les cinq enseignants interviewés, trois mentionnent l'emploi de $\mathbb{R}^n$, sans qualifier celui-ci de géométrique ; leur objectif semble être de conduire « naturellement » les étudiants à $\mathbb{R}^n$, et leur approche reste essentiellement analytique. Seul un enseignant parle explicitement de géométrie, de dessin, et « d'esprit géométrique » chez certains étudiants ; ce point de vue apparaît d'ailleurs dans l'ensemble des propos de cet enseignant, et non pas uniquement en ce qui concerne l'aspect ancien – nouveau.

Le rôle de la géométrie n'est pas essentiel dans les travaux de Behaj. Cependant, les différences qu'il a pu noter dans les choix faits par les enseignants sont pertinents pour notre étude. Il rappelle que « dans le supérieur, le caractère plus flou des programmes suggère que le texte du savoir n'est pas très bien défini. » (ibid., p.12) Ceci le conduit à s' « attendre à voir l'enseignant jouer un rôle plus important, que ce soit pour fixer le texte du savoir lui-même, ou pour apporter dans son enseignement des variations locales non négligeables. » (ibid. p.12) Cette hypothèse est largement confirmée par les interviews. Or le rôle de la géométrie étudiée au lycée, mais aussi la place accordée à certaines notions d'algèbre linéaire à caractère « géométrique », n'apparaissent pas ou peu dans les programmes officiels ; on peut donc s'attendre à ce que l'enseignant joue un rôle prépondérant dans la mise en texte des savoirs correspondants, ceci entraînant éventuellement de grandes disparités d'un enseignant à l'autre.

2.4.2 Liens entre géométrie et algèbre linéaire

C'est dans les travaux de Dorier que la question des rapports entre géométrie et algèbre linéaire est posée sous la forme qui constitue le point de départ de notre recherche. Il souligne, d'une part, différentes interventions de la géométrie dans la genèse et l'évolution de l'algèbre linéaire ; nous aurons l'occasion de revenir en détail sur cet aspect dans le chapitre suivant.

Il étudie également l'aspect transposition didactique, qui lui permet de préciser la nature du lien entre l'algèbre linéaire et la géométrie dans le fonctionnement du savoir enseigné, et met à jour des difficultés précises liées à l'emploi du cadre géométrique en algèbre linéaire.

Transposition didactique

L'algèbre linéaire sous sa forme : théorie axiomatique des espaces vectoriels apparaît pour la première fois comme objet d'enseignement dans le cours de Calcul Différentiel et Intégral fait au niveau Licence par Cartan en 1939-1940 ; cette initiative sera suivie, et généralisée dès 1954. C'est un objectif d'analyse fonctionnelle qui guidera ces enseignements : l'espace euclidien doit mener, par un processus de généralisation, aux espaces de Hilbert. Ceci conduit notamment selon Dorier à minorer l'origine analytique de l'algèbre linéaire (déterminants, résolution de systèmes) pour accentuer le rapport à la géométrie, et ce bien que le cadre géométrique ait été insuffisant, d'un point de vue historique, pour le développement de concepts essentiels d'algèbre linéaire, comme celui de rang. Une seconde étape dans le processus de transposition intervient lorsque, afin de préparer ce cours de CDI, l'algèbre linéaire est introduite dans les premiers cycles des universités et en classes préparatoires. Comme les programmes de ces classes comportaient à l'époque l'étude du vecteur géométrique, pour les besoins de la mécanique (on distinguait alors vecteur lié, libre, et glissant), c'est le modèle du calcul vectoriel dans l'espace qui est choisi comme point d'entrée dans l'algèbre linéaire, accentuant encore l'importance de la géométrie. L'étape suivante sera constituée par l'introduction de l'algèbre linéaire dans les programmes de l'enseignement secondaire, au moment de la réforme des mathématiques modernes, en association avec la rénovation de l'enseignement de la géométrie. Nous n'entrons pas ici dans le détail des travaux de Dorier à ce sujet ; nous y reviendrons longuement dans les chapitres suivants. Nous nous contenterons de noter dès à présent que l'une des conséquences de ce processus de transposition est de situer l'introduction de l'algèbre linéaire dans le domaine de la géométrie. Or, comme le note Dorier :

« Le concept d'espace vectoriel n'a vraiment émergé dans le savoir savant qu'en rapport à des questions de dimension infinie en analyse fonctionnelle (et encore dans des espaces ne possédant pas de base dénombrable dense) ; or, au niveau du savoir enseigné, ce concept se trouve importé, par le processus de transposition didactique, dans le domaine de la géométrie, donc limité à la dimension trois. Comme dans le cas de la distance[4], cette importation est une solution technique au problème idéologique de l'apprentissage de l'abstrait à partir du concret, qui impose une certaine stratégie d'exposition ... Ainsi le concept d'espace vectoriel va trouver, dans cette transposition, un mode de fonctionnement très différent de celui qu'il avait pu avoir dans le savoir savant. »

(Dorier 1997 p.45).

---

[4] (Chevallard et Joshua 1982)

Finalement, l'algèbre linéaire disparaît des programmes de l'enseignement secondaire en 1986 ; mais la question du choix de la géométrie comme mode privilégié d'introduction de l'algèbre linéaire est simplement transférée à l'enseignement supérieur.

Difficultés liées à l'emploi du cadre géométrique en algèbre linéaire

Nous avons évoqué en introduction la question des difficultés spécifiques que pouvait entraîner le recours au géométrique en algèbre linéaire. Dorier en signale un certain nombre, qu'il désigne comme difficultés liées à l'emploi du « cadre géométrique », terme qui recouvre dans ses travaux la géométrie affine euclidienne du plan et de l'espace, présentée indépendamment de l'algèbre linéaire.

Il note ainsi les « erreurs récurrentes liées à la confusion linéaire/affine » (Dorier 1997, p.48) ; il est en effet fréquent d'entendre les étudiants parler de droites ou de plans vectoriels parallèles ; or cette propriété n'a de sens que dans le cas affine. Dès 1990, dans sa thèse, il a pu constater lors d'un test que dans les réponses à la question (issue de travaux de Robert) :

> *Vrai ou Faux*
>
> *Soient D_1, D_2, et D_3 trois droites de $\mathbb{R}^3$ distinctes deux à deux, alors*
>
> $D_1 + D_2 + D_3 = \mathbb{R}^3$.

plus du tiers des réponses manifestaient une confusion affine – vectoriel.

Or il semble extrêmement difficile d'expliciter pour les élèves les liens entre affine et vectoriel, en particulier au début de l'algèbre linéaire.

Dorier relève aussi des spécificités du cadre géométrique qui peuvent interférer avec l'algèbre linéaire. Il cite ainsi la technique, vue en terminale, de détermination de l'équation cartésienne d'un plan de l'espace à l'aide d'un vecteur normal (généralement déterminé par le produit vectoriel de deux vecteurs de base du plan). Dans cette technique, le plan est considéré comme l'orthogonal d'une droite ; comme le souligne Dorier :

« Elle court-circuite le concept de sous-espace engendré au profit de concepts plus élaborés. Or le sous-espace engendré est un concept plus élémentaire que la dualité dans l'organisation de l'algèbre linéaire. » (ibid. p. 50)

Enfin, Dorier note que l'emploi de représentations visuelles en algèbre linéaire étant limité à la dimension trois, l'intérêt de celles-ci est discutable, notamment pour certains concepts fondamentaux comme le rang, qui devient essentiellement pertinent dans des dimensions supérieures.

Ces observations conduisent Dorier à formuler un certain nombre d'hypothèses concernant l'emploi du cadre géométrique dans l'introduction de l'algèbre linéaire. Tout d'abord il rejette la présentation qui consiste à introduire les axiomes d'espace vectoriel en vérifiant ceux-ci sur les vecteurs géométriques. Les propriétés de ces vecteurs ne se résumant pas à l'aspect linéaire (pas plus que pour les polynômes, ou les fonctions), il convient de ne les utiliser qu'à titre d'illustration ; la présentation de l'algèbre linéaire comme généralisation des propriétés de l'espace géométrique est en particulier à proscrire. Dorier signale par ailleurs que la géométrie analytique paraît plus pertinente que la géométrie vectorielle pour préparer à l'algèbre linéaire : elle permet d'aborder des concepts importants d'algèbre linéaire (générateurs, intersection de sous-espaces), mais également d'étudier les équations linéaires, pour lesquelles le passage à des dimensions supérieures à trois semble naturel. En outre, Dorier note que les interactions entre algèbre linéaire et géométrie semblent plus fortes pour des concepts élaborés, comme celui de transformation linéaire, que pour les concepts élémentaires. Finalement, selon lui :

« Le cours d'algèbre linéaire peut être l'occasion d'enseigner de la géométrie à l'université, dans un rapport dialectique qui ne prend tout son sens qu'après un enseignement assez substantiel d'algèbre linéaire, qui pourra s'appuyer aussi sur d'autres cadres. » (ibid. p. 52)

Dorier ne recommande donc pas de faire précéder le cours d'algèbre linéaire d'un cours de géométrie, mais d'exploiter le rapport dialectique entre algèbre linéaire et géométrie affine en pratiquant des allers-retours entre les deux domaines.

2.5 Conclusion

Le recours au géométrique dans l'enseignement d'algèbre linéaire est spontanément évoqué par de nombreux enseignants. En ce qui concerne les enseignants français, on peut penser que cette idée provient du processus de transposition, qui a privilégié la géométrie vectorielle du plan et de l'espace comme support à l'introduction de l'algèbre linéaire. Toutefois, on retrouve le même type d'idées dans des travaux de mathématiciens Nord-Américains (en particulier dans les recommandations du LACSG) ; il ne peut donc s'agir uniquement des conséquences de choix de transposition. On observe dans l'essentiel des travaux examinés, deux éléments en faveur du recours au géométrique :

L'utilisation de dessins, d'images, du registre graphique ;

La généralisation à partir de quelque chose de connu, donc paraissant plus concret, et pouvant notamment servir de support à l'intuition.

Les travaux à caractère didactique soulignent de plus l'intérêt des changements de cadre, de registre, de niveau de description ou de mode de pensée : possibilités qui se rattachent à la nécessité de flexibilité signalée plus haut.

Toutefois, les différentes études, théoriques ou expérimentales identifient des difficultés dans le recours au géométrique.

Hillel et Pavlopoulou soulignent que l'emploi métaphorique de dessins peut induire des confusions chez les étudiants. Ceci rejoint certaines remarques de Rogalski, qui, dès le début de l'expérience menée à Lille, indiquait la nécessité d'un travail spécifique portant sur l'usage du dessin en algèbre linéaire. Les enseignants ressentent-ils cette nécessité, quels usages font-ils des dessins en algèbre linéaire, et quelles conséquences de ces usages peut-on observer chez les étudiants ? Nous tenterons d'apporter des éléments de réponse à ces questions.

La confusion vectoriel / affine, associée à l'emploi de figures ou plus généralement d'un support géométrique, est signalée par plusieurs auteurs. C'est l'un des aspects d'une difficulté essentielle : le choix d'un cours de géométrie affine comme support privilégié à l'introduction de l'algèbre linéaire risque de conduire certains étudiants à appliquer en algèbre linéaire certaines caractéristiques propres à la géométrie affine. De plus, le cadre de la géométrie à deux ou trois dimensions rencontrée dans l'enseignement secondaire est limité, et semble ne pas permettre d'introduire certains concepts centraux d'algèbre linéaire.

Nous trouvons dans les travaux de Dorier des hypothèses et des questions que nous allons tenter de tester et d'approfondir dans notre étude. Il recommande tout d'abord de proscrire la présentation de l'algèbre linéaire comme généralisation de la géométrie vectorielle du plan ou de l'espace connue au lycée. Ceci rejoint une hypothèse que nous avions faite auparavant en nous appuyant sur les travaux de Robert (1998). Selon Dorier, la géométrie analytique serait plus pertinente que la géométrie vectorielle pour introduire l'algèbre linéaire ; par ailleurs, les interactions entre géométrie et algèbre linéaire seraient plus fortes pour des concepts élaborés. Ceci nous conduit à formuler la question suivante : *existe-t-il un cours de géométrie qui pourrait constituer un support particulièrement propice à l'introduction de l'algèbre linéaire, ou de certaines parties, à préciser, de l'algèbre linéaire ?*

Ce ne seront donc peut-être pas les notions de géométrie « du lycée » qui serviront de support à une généralisation, mais des versions « évoluées » de ces notions, déjà modifiées par l'algèbre linéaire. Ceci nous amène à examiner le processus d'évolution, et de modification de notions de géométrie vues dans le secondaire par l'introduction de l'algèbre linéaire.

3. De la géométrie vers l'algèbre linéaire : traduire une évolution ?

L'une des formes possibles du recours au géométrique est l'emploi d'une géométrie, indépendante de l'algèbre linéaire, comme support à l'introduction de celle-ci. Cette géométrie est peu à peu modifiée par les notions introduites, jusqu'à pouvoir apparaître comme une application, voire comme une restriction à la dimension trois, de l'algèbre linéaire.

Il existe d'autres possibilités d'articulation entre géométrie et algèbre linéaire, et plusieurs géométries pouvant servir de point de départ. Nous examinerons plus particulièrement le cas où la géométrie retenue est celle vue au lycée. Nous serons dans tous les cas amenés à rendre compte de l'évolution d'un savoir ; nous allons donc naturellement examiner des éléments didactiques théoriques qui peuvent contribuer à décrire une telle évolution. Nous aborderons ici la notion de niveau de conceptualisation (Robert 1997), qui nous permettra de décrire l'évolution de certaines notions, rencontrées dans le cours de géométrie au lycée, et présentes en algèbre linéaire. Les propriétés, les théorèmes attachés à ces notions, et même les définitions sont modifiées dans ce processus ; nous interpréterons ces modifications en termes de niveaux de conceptualisation. De même les tâches associées à ces notions évoluent ; pour analyser cette évolution, nous aurons recours à la notion de praxéologie mathématique introduite par Chevallard (1995), et que nous présentons donc également ci-dessous. De plus, nous évoquerons brièvement la notion de rapport au savoir, à laquelle est rattachée la notion de praxéologie.

3.1 Niveaux de conceptualisation

La notion de niveau de conceptualisation, introduite par Robert, désigne :

« Un palier dans un champ de connaissances mathématiques (champ conceptuel), correspondant à une organisation cohérente d'une partie du champ, caractérisée par des objets mathématiques présentés d'une certaine façon, des théorèmes sur ces objets, des méthodes associées à ces théorèmes, et des problèmes que les élèves peuvent résoudre avec les théorèmes du niveau considéré. » (Robert, in Dorier et al. 1997, p.149).

Elle signale que des notions, des problèmes, peuvent être abordés à différents niveaux de conceptualisation.

Par exemple, pour la notion de base que nous avons déjà citée plus haut, celle-ci est tout d'abord définie au lycée comme deux vecteurs non colinéaires du plan, ou trois vecteurs non coplanaires de l'espace. En algèbre linéaire, il s'agira d'une famille libre et génératrice d'un espace vectoriel. En analyse fonctionnelle, on parlera de base de Schauder dans un espace de Banach pour désigner une famille libre engendrant un sous-espace dense. Il ne s'agit pas simplement de notions différentes, mais d'une même notion, celle de base, présente à trois niveaux de conceptualisation différents. Trois champs de connaissances mathématiques sont en effet en jeu ici : la géométrie vectorielle du plan et de l'espace, l'algèbre linéaire théorique, et les espaces fonctionnels. On peut observer, lors du changement de niveau, des continuités et des ruptures dans les définitions de la notion de base. Ainsi, la notion de famille libre est présente dans les trois cas, bien qu'elle soit implicite au premier niveau (dans le passage du deuxième au troisième niveau, c'est exactement la même notion).

En revanche, dans le premier cas, en l'absence de la notion de dimension, l'aspect générateur est occulté. Il devient ensuite essentiel ; puis, dans le cas d'un espace vectoriel normé, intervient de plus une composante topologique qui était absente auparavant. La notion de « base » a été modifiée par ce processus ; elle a été généralisée, et a acquis des propriétés nouvelles.

Le repérage des différents niveaux est délicat, et il ne suffit pas dans notre cas de considérer que la géométrie vectorielle vue au lycée forme un premier niveau, l'algèbre linéaire de DEUG un autre et l'étude des espaces fonctionnels, rencontrée en licence ou maîtrise un troisième. Robert montre ainsi que le programme de géométrie du lycée se situe généralement à un niveau élémentaire, non axiomatique, mais comporte également des objets et propriétés issus d'un niveau supérieur. En algèbre linéaire, on peut également citer la dualité, dont l'introduction conduit à un autre niveau de conceptualisation, car elle apporte un ensemble de notions et de propriétés nouvelles. Or la place accordée à cette introduction dans l'enseignement universitaire est très variable ; il faudra parfois attendre la préparation au CAPES ou à l'agrégation pour que la dualité soit abordée. Donc les différents niveaux de conceptualisation n'apparaissent pas comme de simples raffinements du programme d'enseignement, suivant la même progression que celui-ci. Nous ne tenterons pas de déterminer de manière exhaustive les niveaux en jeu depuis la géométrie du lycée jusqu'à l'étude des espaces fonctionnels. Nous nous pencherons plutôt, dans le chapitre 4, sur des notions et des problèmes qui peuvent être abordés à différents niveaux de conceptualisation, afin de préciser les continuités et les ruptures éventuelles. Ceci nous permettra notamment de dégager les liens entre l'algèbre linéaire et la géométrie vue dans l'enseignement secondaire, liens qui pourraient être soulignés lors de l'introduction de l'algèbre linéaire. Nous chercherons également à déterminer par ce biais les apports possibles d'un cours d'algèbre linéaire limitée à la dimension 3 précédant la présentation de la théorie complète. Pour étudier ces différentes possibilités, nous examinerons également les tâches portant sur les notions que nous aurons retenues. C'est pourquoi nous allons retenir le cadre théorique élaboré par Chevallard autour de la notion de rapport au savoir, et plus particulièrement de praxéologie ; en effet ce cadre permet une étude précise des tâches proposées aux étudiants.

3.2 Rapports institutionnels-rapports personnels

Chevallard développe une théorie anthropologique des savoirs, théorie dans laquelle la notion d'institution (qui désigne ici un système de pratiques sociales) est fondamentale.

Selon lui, tout savoir est attaché à au moins une institution ; donc :

« Un individu ne peut entrer en rapport avec un savoir qu'en entrant en relation avec une ou des institutions. » (Chevallard 1989, p.213).

Dans une institution I dans laquelle un savoir S est présent, se produit un découpage de S qui engendre un système d'objets de savoir O^S. Il existe pour chacun de ces objets un rapport institutionnel :

« Pour chacun de ces objets institutionnels de savoir O^S existe alors un rapport institutionnel $R_I(O^S)$. Le rapport institutionnel à O^S énonce, en gros, ce qui se fait dans I avec O^S, comment O^S y est mis en jeu ; ou encore, en termes plus imagés, ce qu'est le destin de O^S dans I. » (ibid., p.213)

Chevallard précise que ce rapport est un rapport idéal, qui n'est celui d'aucun sujet concret de l'institution. Les sujets développent, pour un objet donné, un rapport personnel qui dépendra notamment des différentes institutions dans lesquelles le sujet a été en rapport avec cet objet.

La notion de rapport personnel est définie de la manière suivante :

« Un individu X ne peut avoir, à un objet de savoir donné O^S, qu'un rapport personnel, lequel est un *émergent* d'un système de *relations institutionnelles*, relations ternaires où l'individu X entre avec l'objet de savoir O^S et un ou des agents de l'institution I. » (ibid., p.226)

Ce rapport évolue constamment ; selon Chevallard, ce sont les tâches qui seront accomplies par le sujet dans les différentes institutions qui seront déterminantes pour l'élaboration de ce rapport :

« Le rapport institutionnel à un objet, pour une position institutionnelle donnée, est façonné et refaçonné par l'ensemble des tâches que doivent accomplir, par des techniques déterminées, les personnes occupant cette position. C'est ainsi l'accomplissement des différentes tâches que la personne se voit conduite à réaliser tout au long de sa vie dans les différentes institutions dont elle est le sujet successivement ou simultanément qui conduira à faire émerger son rapport personnel à l'objet considéré. » (Bosch, Chevallard, 1999)

Pour les objets de la géométrie du lycée qui sont utilisés en algèbre linéaire, et modifiés par l'introduction de celle-ci, l'évolution peut donc être interprétée et décrite comme une évolution du rapport institutionnel à ces notions, suivant les différentes institutions en jeu : « lycée », « DEUG scientifique », puis éventuellement « maîtrise de mathématiques ». Cependant, pour les deux dernières institutions mentionnées, et en particulier en ce qui concerne le DEUG, la détermination du rapport institutionnel est délicate. En effet, c'est l'analyse du texte du savoir qui apparaît comme le principal moyen de détermination du rapport institutionnel.

Or si l'on peut considérer, dans l'enseignement secondaire, que le texte du savoir peut être approché par l'étude des programmes et des manuels, ce n'est pas le cas dans l'enseignement universitaire. Les programmes sont en effet remplacés par des plaquettes assez succinctes dans la plupart des universités ; quant aux manuels et cours polycopiés qui donnent plus de détails, nous verrons que leur contenu est très variable en ce qui concerne certaines des notions sur lesquelles nous nous penchons : ainsi les notions de symétrie, de projection, peuvent apparaître uniquement en exercice, et dans le cadre de la dimension inférieure ou égale à trois, ou à l'opposé faire l'objet d'une présentation théorique.

Ce sont en fait les exercices proposés aux étudiants dans les manuels et les feuilles de travaux dirigés, et les tâches correspondantes qui nous permettront d'approcher le rapport institutionnel. Nous présentons ci-dessous les éléments théoriques développés par Chevallard auxquels nous aurons recours pour étudier en détail ces tâches. Dans la suite de notre étude, nous ne formulerons pas nos observations en termes de rapports personnels ou de rapports institutionnels, bien que ces notions soient sous-jacentes dans les résultats que nous présenterons. Pour l'aspect institutionnel, nous avons retenu, outre les praxéologies que nous allons maintenant présenter, la notion de niveaux de conceptualisations. Pour l'aspect personnel, nous présentons dans la partie suivante un cadre théorique issu des travaux de Fischbein et qui nous permet de rendre compte de choix des enseignants et de comportements des étudiants.

3.3 Praxéologies

La notion de praxéologie mathématique permet une analyse fine des pratiques attendues des élèves et des étudiants dans les différentes institutions que nous rencontrerons, en rapport avec les notions que nous aurons retenues (notions rencontrées dans le cours de géométrie au lycée, et encore présentes dans le cours d'algèbre linéaire à l'université).

Une praxéologie, ou organisation praxéologique, est selon Chevallard un quadruplet $[T/\tau/\theta/\Theta]$. T représente un type de tâches, présent dans une institution donnée. τ , la technique, est une manière d'accomplir les tâches appartenant au type de tâches T. D'après Chevallard, il y a dans une institution donnée une seule technique, ou du moins un petit nombre de techniques, correspondant à une tâche donnée ; nous aurons l'occasion de revenir sur cette question dans la suite de notre étude. La partie $[T/\tau]$représente selon Chevallard le bloc *pratico-technique*, usuellement appelé savoir-faire.

θ, la technologie, est :

« Un *discours rationnel* – le *logos* – sur la technique – la *technê* -, discours ayant pour objet premier de *justifier* « rationnellement » la technique τ , en nous assurant qu'elle permet bien d'accomplir les tâches du type T, c'est à dire de réaliser ce qui est prétendu. » (Chevallard 1999, p.226)

Quant à la théorie , c'est également un discours, qui joue par rapport à la technologie le rôle que celle-ci joue par rapport à la technique : justifier, expliquer la technologie. Chevallard appelle *bloc technologico-théorique* la partie $[\theta/\Theta]$.

Toute praxéologie, relative à un type de tâches T donné, est attachée à une institution. Pour ce qui nous concerne ici, c'est à dire l'évolution de notions rencontrées en géométrie dès le lycée, il sera pertinent de comparer, pour un même concept, les praxéologies en jeu dans l'institution « enseignement secondaire », et celles qui apparaîtront dans les institutions « DEUG », voire « maîtrise de mathématiques ».

Ceci nous permettra de repérer les lien et les ruptures lors de changements de niveaux de conceptualisation. Nous pourrons ainsi dégager des possibilités en termes d'articulation algèbre linéaire-géométrie, et répondre à des questions du type : comment est-il possible de s'appuyer sur la géométrie du lycée dans un cours d'algèbre linéaire ? Peut-on envisager un cours de géométrie qui complète celui du lycée, et permette d'atténuer les ruptures entre les différents niveaux de conceptualisation ?

4. Choix d'un cadre théorique : l'intuition géométrique dans les travaux de Fischbein

L'intervention du géométrique en algèbre linéaire revêt de multiples aspects. Ce que nous avons présenté ci-dessus nous permet de tenir compte des éléments interprétables en termes de flexibilité, d'une part, et de ceux qui relèvent d'une évolution ayant pour point de départ la géométrie vue au lycée d'autre part. Il est donc important de disposer d'un cadre théorique qui nous permette de prendre en compte simultanément ces deux types de questionnement.

De plus, certains aspects importants de l'intervention du géométrique ne peuvent pas être décrits de manière satisfaisante en employant uniquement ces deux approches. Ainsi, l'emploi de figures en algèbre linéaire n'a été jusqu'à présent abordé que par le biais des registres ; or cette question ne peut se limiter à des problèmes de conversion de registre. Le même dessin peut être utilisé pour représenter une projection orthogonale sur un plan dans l'espace, et pour figurer la distance de la fonction sinus à l'espace des polynômes de degré inférieur ou égal à trois. Il est clair que ces deux usages du dessin ne relèvent pas de la même démarche ; nous devons donc disposer d'un cadre théorique qui nous permette de tenir compte de telles différences.

Par ailleurs, les enseignants – chercheurs déclarent souvent que les étudiants comprendraient plus facilement l'algèbre linéaire s'ils avaient développé « l'intuition géométrique » nécessaire ; ils présentent la géométrie comme pouvant fournir un « support intuitif » en algèbre linéaire[5]. Or ce qu'ils entendent par ce terme reste mal défini ; nous pouvons considérer que cette « intuition géométrique » englobe notamment tous les éléments que nous avons déjà mentionnés : l'emploi d'un dessin, d'une situation vue en géométrie au lycée, dans un problème d'algèbre linéaire relèvent de « l'intuition géométrique ».

C'est la théorie développée par Fischbein qui va nous permettre, d'une part de clarifier ce que désigne le terme « intuition géométrique », et d'autre part de disposer d'un cadre théorique englobant tous les éléments que nous avons mentionnés plus haut. Nous allons présenter en détail cette théorie ; afin de mieux situer les travaux de Fischbein et de montrer en quoi ceux-ci nous semblent nécessaires pour une étude portant sur l'intuition géométrique, nous allons au préalable aborder la question plus vaste de l'intuition en mathématiques.

4.1 L'intuition en mathématiques : de multiples sens

L'importance de l'intuition en mathématiques est fréquemment soulignée par les enseignants comme par les mathématiciens, y compris par les partisans d'une approche structurelle et formaliste. Ainsi Dieudonné reconnaît l'importance de l'intuition dans les travaux de mathématiciens brillants :

"Ces créateurs scientifiques se distinguent par une imagination très vive associée à une compréhension profonde du matériel qu'ils étudient. Cette combinaison mérite d'être appelée "intuition", bien qu'elle n'aie rien de commun avec la signification habituelle de ce mot dans le langage ordinaire, puisqu'elle s'applique à des "objets" qui n'ont en général aucune image dans le monde de nos sens." (Dieudonné 1974, p.70)

Il considère également que l'intuition doit être développée chez les élèves et les étudiants :

---

[5] Voir à ce sujet la citation p.1 (CREM 2000).

"L'objectif ultime de l'enseignement des mathématiques à n'importe quel niveau est certainement de donner à l'étudiant une "intuition" solide des objets mathématiques qu'il a à manipuler. Mais l'expérience montre que ceci ne peut être atteint qu'à travers une longue familiarisation avec le sujet et des tentatives répétées pour le comprendre sous tous les angles possibles."(ibid. p.74)

Ces deux citations ont un même auteur, et sont extraites d'un même article ; cependant le mot "intuition" prend dans chacune d'entre elles un sens différent, lié à l'activité à laquelle il est associé. L'intuition du créateur est pour Dieudonné une combinaison de compréhension et d'imagination ; il semble en revanche que dans le cas de l'étudiant, Dieudonné indique un moyen de développer la compréhension, mais ne fait aucune recommandation en ce qui concerne l'imagination. Dans cet article Dieudonné répond à un célèbre texte de Thom : "Les mathématiques modernes : une erreur pédagogique et philosophique ?" dans lequel Thom s'exprime lui aussi sur la question de l'intuition en mathématiques. Il critique la réforme des mathématiques modernes, et en particulier les dangers d'une présentation trop théorique et axiomatique de la géométrie, aux dépends de la géométrie euclidienne traditionnelle en écrivant :

"Tout mathématicien doté d'un tant soit peu d'honnêteté intellectuelle reconnaîtra que, dans chacune de ses démonstrations, il est capable d'attacher un sens à chacun des symboles qu'il manipule... l'hypothèse d'idées platoniciennes informant l'univers est, en dépit des apparences, la plus naturelle, et philosophiquement, la plus économique. Mais de ce monde des Idées, les mathématiciens n'ont à chaque instant qu'une vision incomplète et fragmentaire. De ce fait, toute démonstration est avant tout la révélation d'une nouvelle structure, dont les éléments gisaient séparés dans l'intuition, et dont le raisonnement reconstruit la genèse progressive... Car le monde des Idées excède infiniment nos possibilités opératoires, et c'est dans l'intuition que réside l'*ultime ratio* de notre foi en la vérité d'un théorème - un théorème étant avant tout, selon une étymologie aujourd'hui bien oubliée, l'objet d'une vision." (Thom 1972, p.230)

Dans ce texte apparaissent encore deux nouveaux sens du terme intuition, liés, comme dans le cas de Dieudonné, à l'activité mathématique en jeu.

En effet, selon Thom, l'intuition peut contenir les éléments d'une structure qui sera ensuite révélée par le raisonnement ; ainsi l'intuition apparaît presque comme faisant partie de l'inconscient du mathématicien. Mais elle est également proche d'une forme de conviction intime, lorsqu'il s'agit d'assurer la validité d'un résultat.

Ainsi les mathématiciens attribuent au terme intuition de multiples sens, ce qui a conduit certain d'entre eux à tenter une étude approfondie de cette notion, études dont nous allons donner maintenant quelques exemples.

Klein (1898) distingue intuition *naïve* et intuition *raffinée* ; il va jusqu'à attribuer à l'une et l'autre des causes racistes.

“ Il semblerait que l'intuition naïve de l'espace est à un haut degré un attribut prééminent de la race teutonique, tandis que le sens critique et purement logique est plus développé dans les races latines et hébraïques. ” (Klein, 1898).

Il a une conception hiérarchisée du rôle de ces deux intuitions ; l'intuition naïve intervient au début du développement d'une théorie : il cite l'exemple du calcul différentiel et de Newton, admettant l'existence de la vitesse d'un point mobile. En revanche chez Euclide, on trouve selon lui un exemple d'intuition raffinée ; Klein émet l'hypothèse que la géométrie d'Euclide a du être précédée d'un stade naïf de développement.

Pour lui, "l'intuition naïve manque de rigueur, tandis que l'intuition raffinée n'est pas du tout, à proprement parler, une intuition et tire plutôt son origine du développement logique d'axiomes regardés comme parfaitement rigoureux."

Nous pouvons noter que l'intuition raffinée, dont il soulignera l'importance n'est pas pour lui une intuition "à proprement parler".

On peut rapprocher les deux types d'intuitions distingués par Klein de ce que Bouligand appelle, dans son livre intitulé " Les aspects intuitifs de la mathématique " (Bouligand 1944) *intuition immédiate* et *intuition prolongée*. Selon Bouligand :

" Il s'effectue comme une sorte de travail étagé. Il y a des intuitions qui sont liées au souvenir d'objets concrets : tel est bien le cas de celles qui suscitent respectivement la notion de continuité, celle de rectilignité, celle de droite perpendiculaire à un plan ainsi qu'un grand nombre d'autres, d'origine géophysique par exemple. On peut les englober dans le terme : *intuition immédiate*. "(Bouligand 1944, p.15)

D'autre part, il existe un type d'intuition conduisant à des associations d'idées et permettant de " découvrir, soit l'équivalence de problèmes distincts au premier abord, soit des catégories d'objets différents quant à leur nature, mais cependant donnant lieu à un même système de relations "(Bouligand 1944, p.15) : il s'agit alors d'intuition prolongée. Bouligand distingue encore un autre type d'intuition qu'il appelle *contre-intuition*, et qui procède selon lui de l'esprit critique ; la contre-intuition suggère au chercheur des contre-exemples permettant d'éviter certains pièges dans l'élaboration d'une théorie.

Chez Bouligand comme chez Klein, on observe donc une opposition entre une forme " brute " d'intuition et une ou des formes plus élaborées. Cependant leurs points de vue sont sensiblement différents.

Le point de vue de Klein est plus épistémologique (à l'exception bien sûr des sous-entendus raciaux) : l'intuition naïve correspond à une forme primitive d'une théorie mathématique, elle est imparfaite et induit nécessairement des erreurs ; une fois la théorie élaborée, il n'y a plus de place pour celle-ci et intervient alors l'intuition raffinée, liée aux axiomes.

Bouligand propose une étude de nature psychologique, détaillant les caractéristiques de l'intuition. L'intuition prolongée est appelée ainsi car elle prolonge l'intuition immédiate, dans des domaines qui ne sont plus accessibles à nos sens ; ces deux types d'intuitions peuvent engendrer des erreurs ; et tous deux interviennent en mathématiques, même dans une théorie aboutie.

L'étude de l'intuition que Poincaré propose mêle les aspects psychologiques et épistémologiques. Il distingue dans un premier temps trois types d'intuition : l'intuition sensorielle, l'intuition généralisante, et l'intuition pure (Poincaré 1902). L'intuition sensorielle est rapidement limitée ; il écrit notamment :

"nous ne pouvons, par exemple, nous représenter le chiligone ; et cependant nous raisonnons par intuition sur les polygones en général, qui comprennent le chiligone comme cas particulier."(ibid p33).

Poincaré se penche donc en particulier sur l'intuition pure (à laquelle il a en fait également rattaché l'intuition généralisante).

Il existe selon lui deux sortes d'intuition pure : l'intuition du nombre pur, et celle des formes logiques pures.

L'intuition du nombre pur est une intuition infaillible, conséquence de la structure de l'esprit humain ; l'exemple central qu'en donne Poincaré est le principe de l'induction complète. Ce type d'intuition est très proche de l'intuition pure de Kant.

Le second type d'intuition pure est lié à la compréhension ; l'intuition des formes logiques pures est nécessaire pour l'invention mathématique : elle guide l'activité du mathématicien, qui ne peut se résumer à une simple application de la logique. Mais elle intervient aussi en dehors de l'activité d'invention, pour comprendre une théorie ou embrasser l'ensemble d'une démonstration.

Dans les quelques travaux que nous venons d'esquisser, il est frappant de constater que les auteurs partent d'abord d'un point de vue philosophique et se tournent peu à peu d'une manière plus ou moins marquée vers un point de vue psychologique ; ils tentent en fait de déterminer les origines possibles de l'intuition, les conditions de son existence. Il apparaît ainsi que l'aspect psychologique de l'étude de l'intuition est indispensable pour comprendre la nature et les rôles possibles de celle-ci.

Des travaux de mathématiciens sur l'intuition, celui de Poincaré est l'un des plus achevés ; cependant il reste très insuffisant pour le travail que nous voulons entreprendre, surtout dans l'optique d'une analyse dont les finalités sont didactiques.

Notre étude nécessite une définition précise de l'intuition géométrique, donc des facteurs qui conduiront à une telle intuition (qui la différencieront, par exemple, d'une intuition purement algébrique) et des critères permettant d'identifier les interventions de celle-ci.

C'est dans les travaux de Fischbein, en particulier en ce qui concerne les facteurs d'intuition, que nous avons trouvé un cadre suffisamment riche pour l'analyse des interventions de l'intuition géométrique dans des œuvres d'auteurs et d'époques variés, mais également chez les enseignants et les étudiants pratiquant l'algèbre linéaire.

4.2 Les travaux de Fischbein sur l'intuition

Fischbein a consacré une importante partie de ses travaux à l'analyse des mécanismes de l'intuition en mathématiques. L'essentiel de ceux-ci est présenté dans le livre " Intuition in science and mathematics " (Fischbein 1987) ; nous allons tenter de retracer ici les grandes lignes de la théorie qu'il y développe, en détaillant les points qui seront pertinents pour notre analyse. Nous serons également amenés à aborder une autre partie des travaux de Fischbein, dans laquelle il introduit et étudie la notion de concept figuratif (dont nous verrons que l'étude a été prolongée en didactique des mathématiques).

4.2.1 Rôle de l'intuition

Le besoin de certitudes

Selon Fischbein, le rôle essentiel de l'intuition est de répondre à notre besoin naturel de certitudes ; c'est ce besoin, élément incontournable de toute activité mentale, qui nous conduit à fabriquer des représentations et des interprétations apparemment évidentes.

" L'intuition n'est pas la principale source de connaissances certaines, mais elle semble l'être, parce que c'est exactement son rôle : créer l'apparence de certitude, conférer à différentes interprétations ou représentations un caractère de certitude intrinsèque et indiscutable. " (Fischbein 1987, p.12)[6]

Fischbein précise ce rôle en écrivant :

" L'intuition résume l'expérience, offre une représentation compactée et globale d'un groupe de données, pallie à l'insuffisance d'informations, introduit des interprétations significatives pour le comportement dans un processus de réflexion, et donc confère à l'activité mentale les qualités de continuité, de fermeté et d'efficacité qui caractérisent un comportement actif et adaptatif. Mais, dans le même temps, l'intuition reste une source d'erreurs potentielles, car elle ne constitue pas simplement un double de conditions données. Son rôle est d'offrir des

[6] Les citations extraites de (Fischbein 1987) sont traduites par nos soins.

représentations significatives sur le plan du comportement, structurées, intrinsèquement crédibles, même si ces qualités n'existent pas en fait dans la situation donnée. " (ibid., p.12)

Nous avons besoin de certitudes pour agir, quand bien même celles-ci ne seraient qu'apparentes.

Rôle de l'intuition en mathématiques

L'histoire des mathématiques, et les efforts des mathématiciens pour éviter de reposer sur des concepts intuitivement admis ont contribué à identifier les mécanismes intuitifs ; ainsi la recherche des fondements, notamment pour la géométrie, pose le problème de la nature des axiomes : propriétés "intuitivement évidentes", ou simples conventions ?

Nous avons vu dans ce qui précède des débats entre mathématiciens sur l'intuition, certains allant même jusqu'à préconiser l'emploi de celle-ci pour assurer la validité d'une démonstration.

Le rôle de l'intuition explique selon Fischbein pourquoi des mathématiciens, même partisans d'une approche axiomatique, utilisent dans leurs travaux des procédures de nature intuitive : il identifie là une expression du besoin de repères apparemment stables.

Le monde des mathématiques est " un monde de constructions mentales, régies par des lois formelles " ; la certitude intrinsèque offerte par les objets réels est remplacée en mathématiques par une certitude de type formel.

Cependant, selon Fischbein, qui se base sur les écrits de mathématiciens et sur le résultat de différentes études expérimentales, d'un point de vue psychologique un raisonnement mathématique productif ne peut reposer sur des bases purement formelles :

" Il semble que tout le système reste stérile s'il ne reste pas intimement en contact avec ses sources originales et authentiques. " (ibid., p.17)

Significations intuitives des concepts mathématiques

D'après Fischbein, on a toujours tendance à produire des interprétations complémentaires des concepts abstraits afin de conférer à ceux-ci la crédibilité nécessaire à un comportement productif.

Il cite l'exemple de la droite, particulièrement pertinent pour notre étude :

" Le concept de droite n'a pas de signification objective...c'est une convention, définie dans le cadre d'un certain groupe d'axiomes, qui peut être changé. Mais, par extrapolation (d'une signification dépendant du contexte à un concept universel) on en fait un concept absolu, on lui confère l'indiscutabilité d'un fait existant objectivement. " (Fischbein 1987, p.20)

C'est ce que Fischbein appelle " une signification intuitive " ; de même que la droite, tous les objets de la géométrie élémentaire ont une telle signification, qui leur confère une évidence semblable à celle des objets réels.

Structures axiomatiques et intuition

Toute structure axiomatique est associée à un modèle qui permet au raisonnement de s'appuyer sur des faits qui ont les qualités d'évidence de faits réels. Le modèle, qui possède une structure intrinsèque, est indispensable pour vérifier la validité d'un système axiomatique. Citons ici encore les propos de Fischbein :

" La structure axiomatique est l'état final atteint par un corpus mathématique après que ce corpus a été obtenu par d'autres moyens que la simple déduction… on construit un système d'axiomes en partant d'un ensemble particulier de concepts relativement familiers, possédant une structure interne (par exemple les points et les droites comme ceux-ci apparaissent dans la géométrie élémentaire) et on essaie de formuler des considérations générales sur cet ensemble de concepts. " (ibid., p.23)

Le modèle est donc indispensable pour déterminer les axiomes, faire les vérifications d'indépendance et de complétude, et suggérer les théorèmes importants qui seront associés au groupe d'axiomes.

Nous allons maintenant revenir en détail sur l'emploi de modèles comme facteurs d'intuition, emploi qui est central pour notre étude, et qui va au-delà de la détermination d'une structure axiomatique adéquate.

4.2.2 Les modèles comme facteurs d'intuition

Fischbein distingue de nombreuses sources possibles d'intuition ; nous présentons ici ce qui se rapporte à l'emploi de modèles, car c'est cet aspect qui est en jeu en algèbre linéaire, et va nous permettre de préciser et de décrire ce que l'on peut appeler « intuition géométrique ».

Les modèles constituent une source fondamentale de connaissances intuitives ; ils permettent de remplacer une notion par un substitut intuitivement acceptable.

Fischbein définit ainsi la notion de modèle :

"Un système B représente un modèle du système A si, sur la base d'un certain isomorphisme, une description ou une solution produite dans A admet un correspondant cohérent dans B et vice versa." (ibid., p.121)

Un modèle suggère des questions pertinentes, inspire des stratégies de résolution, permet de vérifier la validité d'un résultat ; un modèle sera efficace s'il est suffisamment fidèle à l'original (sur un plan structurel), et qu'il a cependant une relative autonomie par rapport à celui-ci.

Modèles abstraits et modèles intuitifs

Une première distinction peut être faite entre modèles abstraits et modèles intuitifs.

D'après Fischbein, les relations mathématiques sont habituellement des modèles abstraits pour une certaine réalité concrète.

Dans le cadre qui nous préoccupe, on peut dire par exemple que l'espace euclidien de dimension 3 est un modèle abstrait de l'espace ambiant.

Un modèle intuitif en revanche offre les caractéristiques d'une réalité concrète, bien qu'il dépasse souvent celle-ci ; notons cependant que ceci n'exclut pas qu'une théorie mathématique puisse jouer le rôle de modèle intuitif.

Ainsi un dessin représentant un plan dans l'espace peut intervenir comme un modèle intuitif de plan vectoriel, ou même de sous-espace vectoriel. Mais il est également possible d'utiliser la géométrie vectorielle du plan comme modèle intuitif pour l'algèbre linéaire en dimension 2, voire pour l'algèbre linéaire générale. Plus généralement, toute géométrie (selon le sens que nous avons attribué à ce terme en introduction) peut jouer le rôle de modèle intuitif, car présente l'aspect concret nécessaire à un tel modèle.

Modèles explicites et modèles implicites

Un modèle est explicite s'il est utilisé délibérément, pour aider à la compréhension et à la résolution de problèmes.

Un modèle implicite au contraire est produit spontanément, et utilisé de manière plus ou moins inconsciente par le sujet.

Cette distinction doit être examinée avec précaution ; il nous semble notamment possible qu'un modèle qui a été délibérément introduit lors d'un enseignement soit par la suite utilisé de manière inconsciente, hors du contexte initialement visé.

Modèles analogiques et modèles paradigmatiques

Une analogie se manifeste entre deux entités si celles-ci présentent certaines similarités, qui permettent d'en supposer d'autres.

Un modèle analogique et l'original auquel il est associé appartiennent à deux champs conceptuels différents ; pour être réellement efficace, un modèle analogique doit être suffisamment indépendant de l'original ; il pourra ainsi guider un questionnement sur l'original, suggérer des propriétés ou même des notions.

Fischbein oppose à la notion de modèle analogique celle de modèle paradigmatique, qui désigne une sous-classe de l'original, employée comme modèle.

Le modèle paradigmatique n'est pas indépendant de l'original ; il n'est pas non plus un simple exemple, car il doit pouvoir sembler représentatif pour l'ensemble de l'original. Il aide à la compréhension de l'original ; le sujet le garde ensuite à l'esprit et l'utilisera dans les résolutions de problèmes. C'est ce modèle qui permet à un concept d'être productif pour le sujet. Fischbein cite, pour expliquer la notion de modèle paradigmatique, l'exemple de la conjugaison des verbes français du premier groupe. Lorsque celle-ci est présentée aux élèves, on ne leur donne pas les terminaisons correspondant aux différents pronoms ; on soumet plutôt l'exemple d'un verbe, comme « chanter ». Le rappel de la règle se fait ensuite en faisant appel à cet exemple.

Nous montrons dans la suite de notre travail qu'une géométrie peut intervenir comme modèle analogique pour l'algèbre linéaire, s'il s'agit d'une science autonome, répondant à des lois propres, qui peuvent être basées sur un système d'axiomes, à condition que celui-ci soit indépendant de l'algèbre linéaire.

Mais nous verrons aussi parfois une géométrie, considérée comme simple application de l'algèbre linéaire, et employée comme modèle paradigmatique pour celle-ci.

L'ensemble des vecteurs "géométriques" de l'espace peut être ainsi employé comme exemple privilégié d'espace vectoriel de dimension 3, voire d'espace vectoriel général, c'est à dire comme modèle paradigmatique, ceci d'autant plus que tous les espaces vectoriels de même dimension sont isomorphes.

Fischbein souligne le fait que l'emploi d'un modèle quel qu'il soit comporte des risques ; la relative autonomie du modèle peut attirer l'attention sur des faits non pertinents ; même les modèles explicites comportent des composantes dont nous ne sommes pas toujours conscients et qui peuvent induire des erreurs.

Différents types de modèles analogiques

Fischbein distingue les analogies intramathématiques des analogies extramathématiques.

Dans une analogie intramathématique, il est possible que le modèle et l'original « n'utilisent aucun moyen intuitif explicite, mais seulement un symbolisme numérico-algébrique » (Fischbein 1987 p.129), c'est à dire soient tous deux représentés dans un registre numérique, et/ou algébrique.

Mais le cas qui retiendra notre attention ici est celui où le modèle analogique est de type intuitif, tandis que l'original est de type symbolique.

Une analogie extramathématique intervient quand le modèle n'appartient pas au domaine des mathématiques ; le plus souvent, il s'agira d'un dessin.

Ces deux derniers types d'analogies : intramathématique intuitif et extramathématique figuratif (par la suite, nous désignerons un tel modèle simplement comme modèle figuratif) sont fréquemment associées. En effet, un modèle mathématique intuitif sera souvent issu de la géométrie, et associé à des dessins.

L'histoire des mathématiques montre que cette association peut engendrer des processus de raisonnement incontrôlés et être donc source d'erreurs : la fonction de Weierstrass (continue partout et dérivable nulle part), la bijection entre un "segment" et un "carré", fournissent de tels exemples ; leur existence semblait exclue, à cause l'impossibilité d'y associer une représentation graphique.

Fischbein cite la représentation géométrique des nombres complexes comme exemple d'analogie intramathématique intuitive ; dans ce cas particulier, il affirme que le modèle géométrique[7] a servi à prouver la validité de l'original, et a facilité l'utilisation des nombres complexes, sous forme algébrique, en fournissant à l'esprit un support familier ; nous reviendrons sur cet exemple dans notre étude historique, en montrant comment il s'inscrit dans la genèse de l'algèbre linéaire.

En ce qui concerne la notion de modèle analogique, nous serons conduite à souligner un élément qui, bien que faisant partie de la définition même de modèle, est rarement mentionné par Fischbein : la réversibilité des rôles entre modèle et original. En effet, si une théorie mathématique joue pour une autre le rôle de modèle analogique à un certain moment, par exemple pour suggérer des propriétés pertinentes, il est fréquent que les propriétés de

---

[7] L'expression « modèle géométrique » est celle employée par Fischbein, qui ne précise pas quelles caractéristiques d'un modèle permettent de considérer celui-ci comme « géométrique ». Nous donnerons par la suite une définition précise de ce nous appellerons un « modèle géométrique ».

l'original mises à jour suggèrent à leur tour des propriétés du modèle ; on assiste alors à une inversion des rôles entre modèle et original, inversion que nous verrons se manifester à plusieurs occasions. Cette propriété est sous-entendue dans la définition de modèle, puisque celle-ci suppose l'existence d'un isomorphisme entre un système A et un système B, donc d'une correspondance bijective qui permet d'inverser les rôles de modèle et d'original.

4.2.3 Concepts figuratifs et figures géométriques

La question de l'emploi de modèles extramathématiques figuratifs nous conduit à mentionner d'autres travaux de Fischbein : ceux qui concernent les concepts figuratifs. Fischbein a développé cette notion lors d'études portant sur les processus mentaux en jeu dans le raisonnement géométrique. Il montre que les figures employées en géométrie ont simultanément des aspects visuels et conceptuels. Il donne différents arguments pour mettre en évidence la nature conceptuelle des figures :

- En géométrie (ou plus généralement en mathématiques) on ne se réfère pas à ces figures comme à de simples dessins, des objets matériels ;
- Elles représentent des objets parfaits : droite, cercle...
- Elles ne correspondent pas à des objets matériels existants ;
- Elles ont un caractère de généralité : elles évoquent une certaine forme, qui correspond à un nombre infini d'objets ;
- Les propriétés des figures sont imposées par des définitions mathématiques.

Ces figures ont donc bien des aspects conceptuels ; cependant elles sont également des images. Fischbein en conclut que :

« Les objets étudiés et manipulés dans le raisonnement géométrique sont des entités mentales, que nous appellerons *concepts figuratifs*, qui traduisent des propriétés spatiales (forme, position, taille), et, dans le même temps, ont des aspects conceptuels (abstraction, généralité, perfection). » (Fischbein 1993, p.143)

Pour l'efficacité du raisonnement géométrique, il est souhaitable que les aspects figuratifs et conceptuels fusionnent. Mariotti met en évidence dans sa thèse (1997) des difficultés et des conflits entraînés par une rupture entre les deux aspects ; elle montre la nécessité de la maîtrise simultanée du conceptuel et du figuratif, rejoignant ainsi les exigences de flexibilité que nous avons mentionnées plus haut.

Bien que les travaux de Fischbein, et ceux de Mariotti ne concernent que la géométrie, la notion de concept figuratif sera également pertinente en algèbre linéaire. Elle peut être exprimée en termes de modèles analogiques. Un concept figuratif résulte de l'association d'un dessin, élément d'un modèle figuratif, et d'un concept mathématique. Cette association est permise par l'existence d'une analogie entre le modèle figuratif et un modèle mathématique intuitif (ce dernier modèle offrant les caractéristiques d'une réalité concrète précisément grâce à cette analogie).

Les travaux Laborde et Capponi (1994) complètent l'étude des concepts figuratifs. Selon eux :

« La figure géométrique consiste en l'appariement d'un référent donné à tous ses dessins, elle est alors définie comme l'ensemble des couples formés de deux termes, le premier terme étant le référent, le deuxième étant un des dessins qui le représente ; le deuxième terme est pris dans l'univers de tous les dessins possibles du référent. Le terme figure géométrique renvoie dans cette acception à l'établissement d'une relation entre un objet géométrique et ses représentations possibles. Dans cette approche, les rapports entre un dessin et son référent construits par un sujet, lecteur ou producteur du dessin, constituent le signifié de la figure géométrique associé pour ce sujet. Ce signifié correspond à ce que Fischbein appelle *figural concept.* » (Laborde et Capponi, 1994, p.169)

Etudiant les rapports entre dessin et objet géométrique, ils soulignent des difficultés liées à l'interprétation du dessin : les possibilités d'interprétations sont multiples, elles dépendent du lecteur ; par ailleurs le dessin ne peut caractériser entièrement l'objet géométrique auquel il est associé.

Ceci les conduit à distinguer pour un dessin un *domaine de fonctionnement* : « ensemble des propriétés géométriques représentées par certaines propriétés spatiales du dessin » (ibid., p.171) et *un domaine d'interprétation*, qui désigne l'ensemble des propriétés spatiales du dessin qui peuvent être interprétées comme renvoyant à des propriétés géométriques. Nous nous référerons à ces travaux lors de l'étude de l'emploi de modèles figuratifs en algèbre linéaire.

5. Questions de recherche

Nous disposons désormais de tous les éléments théoriques nécessaires ; nous pouvons donc présenter nos questions de recherche, et l'organisation de notre étude.

Nous allons dans un premier temps définir, en nous appuyant sur les travaux de Fischbein, ce que nous appellerons « intuition géométrique ». Cette notion sera centrale dans différentes parties de notre travail : étude historique, détermination des attentes des enseignants et observation des pratiques des étudiants. Dans tous ces cas, nous chercherons à relever des manifestations d'intuition géométrique, ou des attentes de telles manifestations, chez les sujets concernés (nous pouvons en effet considérer les mathématiciens, les enseignants et les étudiants comme des sujets occupant différentes positions dans différentes institutions).

Conjointement aux questions portant sur l'intuition géométrique, nous étudierons l'articulation géométrie – algèbre linéaire sous l'angle de l'organisation de savoirs. Nous chercherons à dégager différentes organisations possibles ou existantes, dont les instanciations conduiront à des manifestations d'intuition géométrique.

5.1 L'intuition géométrique

Dans la suite de notre étude, nous désignerons comme interventions de l'intuition géométrique l'emploi fait par un sujet (mathématicien, enseignant ou étudiant) de modèles, analogiques ou paradigmatiques, issus d'une géométrie.

Ainsi nous ne parlerons d'intuition géométrique que dans les cas d'emploi d'un modèle intramathématique, et non pour des modèles extramathématiques directement issus de l'espace physique ; nous nommerons "intuition de l'espace" l'usage d'un tel modèle, dont nous n'approfondirons pas l'analyse.

Les mathématiciens sur les œuvres desquels nous nous sommes penchés, les enseignants de l'université et les étudiants font tous référence à des « géométries » très différentes. Pour les mathématiciens, il s'agit de ce qui était désigné comme géométrie à l'époque où leurs travaux ont été effectués. Pour les enseignants et les étudiants actuels, nous serons amenés à distinguer plusieurs types de géométries[8] ; dans tous les cas, ces géométries conservent un lien direct avec la réalité.

C'est ce qui permet à un modèle issu d'une géométrie de fournir au raisonnement un support qui semble concret ; c'est dans cette mesure que l'utilisation d'un tel modèle engendre une intuition, au sens de Fischbein.

5.2 Axes de recherche

5.2.1 L'intuition géométrique dans la genèse de l'algèbre linéaire

Afin de comprendre quel rôle a joué la géométrie dans le processus qui a mené à l'algèbre linéaire sous sa forme moderne, et de dégager ainsi notamment un éventail de possibilités d'interventions de l'intuition géométrique en algèbre linéaire, nous allons étudier les manifestations d'une telle intuition dans des œuvres de mathématiciens qui ont marqué la genèse de l'algèbre linéaire.

Les usages faits selon les auteurs seront très variés, et pourront s'apparenter aussi bien à la recherche d'un modèle symbolique pour la géométrie qu'à celle d'un modèle géométrique pour une théorie issue d'un autre domaine mathématique, ou d'un modèle symbolique valable pour une certaine géométrie et d'autres domaines mathématiques.

Nous tenterons de préciser les caractéristiques exactes du modèle géométrique en jeu, c'est à dire les notions et les propriétés retenues par l'auteur dans la géométrie à laquelle il fait référence. Nous étudierons alors la nature de ce modèle, et l'emploi qu'en fait l'auteur.

S'agit-il d'un modèle analogique, issu d'une géométrie indépendante de la théorie en cours d'élaboration ou d'exposition, ou d'un modèle paradigmatique, issu d'une géométrie qui apparaît comme une application privilégiée de cette théorie ?

Ce modèle est-il utilisé pour l'élaboration de la théorie, et dans ce cas, sert-il au choix des prémisses, à celui des théorèmes, voire dans les démonstrations ?

Il est également possible que le modèle soit utilisé à l'intention du lecteur, pour justifier la validité d'un résultat ou d'un raisonnement, ou pour aider à la compréhension.

En particulier lors de l'emploi d'un modèle analogique, nous chercherons à dégager les éléments sur lesquels porte l'analogie, et les propriétés suggérées par le modèle, ainsi que les éventuelles modifications apportées ensuite à l'original, dans le cas d'une inversion des rôles modèle-original.

5.2.2 Evolution de notions

Une fois l'algèbre linéaire établie sous sa forme moderne, un processus de transposition didactique a conduit au texte de savoir actuellement en place. Nous ferons une présentation succincte de ce processus, et du rôle qu'y a tenu la géométrie, afin de mieux comprendre les

---

[8] Ceci est à rapprocher des différentes géométries distinguées par Houdement et Kuzniak (2000).

choix faits actuellement pour l'articulation géométrie–algèbre linéaire. Nous étudierons ensuite cette articulation sous l'angle de l'évolution de concepts issus de la géométrie.

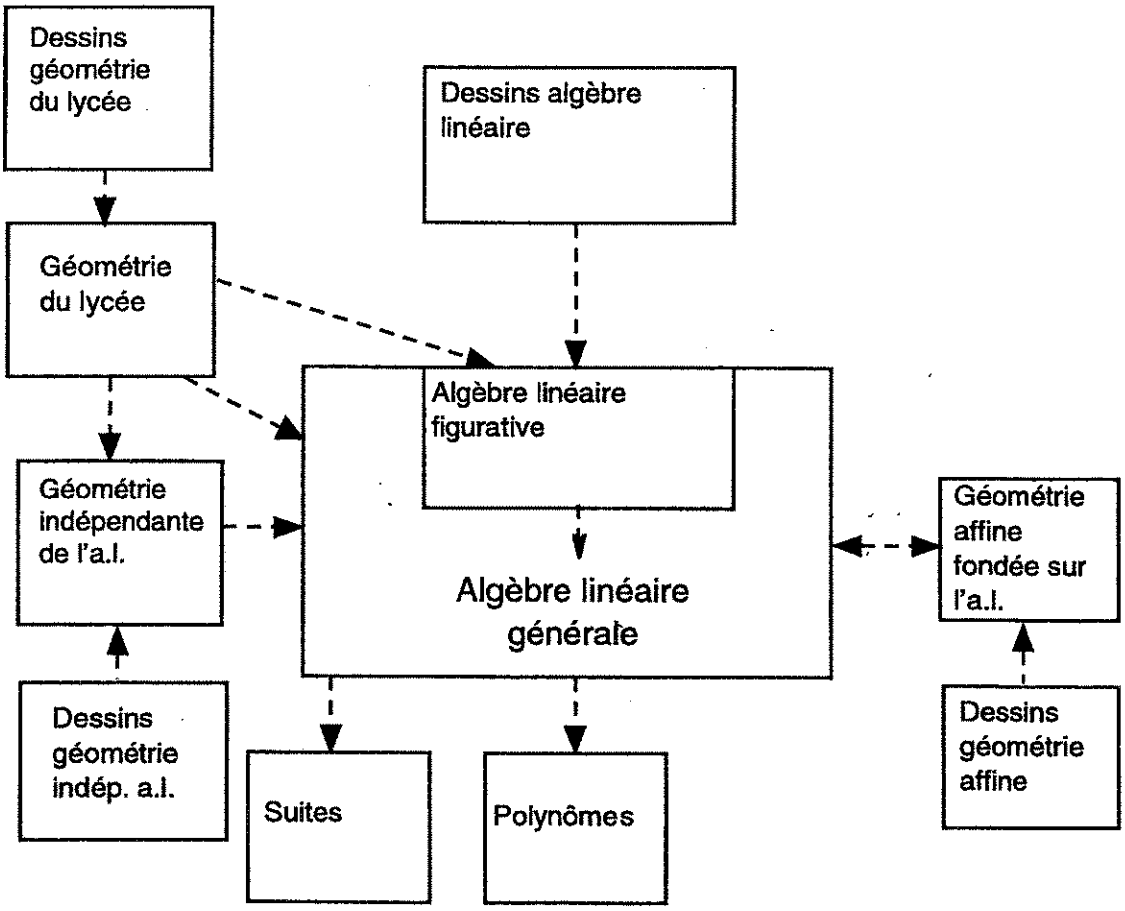
Nous avons décrit, dans la partie 3 de ce chapitre, différents cadres théoriques permettant d'étudier une évolution qui mènerait de la géométrie enseignée au lycée à l'algèbre linéaire. L'étude de cette évolution relève d'une analyse des savoirs, dans laquelle l'intuition géométrique n'est pas en jeu, mais qui pourra ensuite servir de support à l'observation des manifestations d'une telle intuition.

Nous utiliserons le cadre des niveaux de conceptualisation, et tenterons d'observer les continuités et les ruptures dans le passage d'un niveau à l'autre.

Pour réaliser cette étude, nous analyserons d'une part les programmes et les contenus de manuels, et d'autre part, en utilisant les praxéologies, l'évolution de tâches organisées autour d'une même notion.

5.2.3 L'intuition géométrique chez les enseignants et les étudiants

En faisant référence à la théorie de Fischbein, et en particulier à ce qui concerne l'emploi de modèles, nous faisons l'hypothèse de la présence, dans le cours proposé par les enseignants mais également dans les connaissances des étudiants, d'une structure *(S)* que nous représentons par la figure ci-dessous :



Le contenu de chaque élément de la figure, et la manière dont un élément peut servir de modèle pour un autre dépendront des choix faits par l'enseignant, lorsque nous utiliserons cette structure pour analyser de tels choix et les attentes qui y sont associées. Ils dépendront de l'étudiant concerné, lorsque nous nous pencherons sur les pratiques d'un tel étudiant. Les flèches signifient « peut servir de modèle pour » (d'où le choix de traits pointillés pour les représenter) ; nous serons en particulier amenés à souligner que certains éléments peuvent être absents dans les structures effectivement observées.

Différents types de modèles sont en jeu.

Tous les éléments libellés « dessins » sont des modèles analogiques figuratifs pour l'élément auquel ils sont associés. Tout élément associé à un tel modèle figuratif a de ce fait les caractéristiques d'un modèle intuitif, selon le sens attribué par Fischbein à ce terme.

Une géométrie indépendante de l'algèbre linéaire peut être présentée avant celle-ci, et être ensuite utilisée comme modèle analogique pour l'algèbre linéaire. Il peut s'agir d'une géométrie affine « à la Euclide », de calcul vectoriel, ou encore de géométrie analytique. La présentation d'une telle géométrie peut s'appuyer ou non sur des connaissances de géométrie du lycée, d'où la flèche reliant ces deux éléments.

La géométrie vue au lycée peut également être directement utilisée comme modèle analogique pour l'introduction de l'algèbre linéaire générale, ou pour une partie « figurative » de celle-ci (voir ci-dessous).

L'algèbre linéaire générale peut servir de modèle analogique symbolique pour les suites, les polynômes (mais aussi les espaces de fonctions que nous n'avons pas fait figurer sur le dessin pour ne pas surcharger celui-ci), et pour la géométrie affine fondée sur l'algèbre linéaire.

Un concept figuratif d'algèbre linéaire résulte de l'association d'un concept d'algèbre linéaire et d'un dessin. Nous appelons « algèbre linéaire figurative » l'ensemble des notions et propriétés intervenant dans un tel concept figuratif. Il s'agit d'un sous-ensemble de l'algèbre linéaire générale, qui peut servir pour celle-ci de modèle intuitif paradigmatique. Signalons que malgré le lien avec un modèle figuratif, l'algèbre linéaire figurative n'est pas une géométrie, notamment parce qu'elle n'a pas pour objet la modélisation de l'espace physique.

Par ailleurs la géométrie affine fondée sur l'algèbre linéaire peut également apparaître comme modèle paradigmatique pour celle-ci. Ces deux modèles paradigmatiques pourront être employés pour fournir des illustrations, après l'introduction d'une notion ou propriété d'algèbre linéaire, mais également pour présenter une notion nouvelle (rappelons ici l'exemple donné par Fischbein, à propos de la conjugaison des verbes français du premier groupe : la règle est présentée sur un cas particulier, comme le verbe « chanter », dont le cas sert ensuite de modèle paradigmatique pour cette conjugaison).

La relation « sert de modèle pour » est par ailleurs transitive : ainsi le modèle figuratif associé à l'algèbre linéaire générale peut également servir de modèle pour les suites, les polynômes ; l'algèbre linéaire figurative peut servir de modèle analogique pour des espaces de fonctions.

Situons la structure *(S)* par rapport aux notions de cadre et de registre.

Les différentes parties de cette structure ne correspondent pas toutes à des cadres. Les suites, les polynômes constituent des cadres ; les éléments formés de la réunion d'une géométrie et des dessins associés à celle-ci également. Mais l'algèbre linéaire figurative n'est pas un cadre, car elle n'est pas a priori un ensemble cohérent d'objets mathématiques et de relations entre ces objets. La théorie de Fischbein nous permet d'avoir une analyse plus fine que celle dont nous aurions disposé en termes de changements de cadres : en effet il nous semble important de pouvoir tenir compte de la nature du changement effectué. Ainsi, par exemple, le passage de la géométrie affine fondée sur l'algèbre linéaire vers celle-ci est d'une toute autre nature que le même passage effectué en sens inverse. En ce qui concerne les registres, tous les éléments libellés « dessins » relèvent du registre graphique. En revanche, dans les autres éléments peuvent intervenir différents registres : registre symbolique, registre tableaux etc.

Le fonctionnement de cette structure conduira notamment les étudiants à recourir à des modèles intuitifs : algèbre linéaire figurative, géométrie affine basée sur l'algèbre linéaire, géométrie rencontrée au lycée. Ce sont ces recours effectués par un sujet qui seront, selon la définition que nous avons donnée, des manifestations d'intuition géométrique.

Nous chercherons à décrire la structure proposée par différents enseignants. Nous faisons l'hypothèse, soutenue par les travaux de Behaj (1999), que nous verrons apparaître plusieurs structures différentes. Nous supposons également que nous pourrons noter l'influence, dans les choix des enseignants, du processus de transposition qui a gouverné à l'introduction de l'algèbre linéaire dans le savoir enseigné.

Nous tenterons par ailleurs d'observer les manifestations d'intuition géométrique chez les étudiants. Une telle intuition sera éventuellement fondée sur un modèle mal adapté (on peut ainsi imaginer qu'un étudiant utilise un modèle issu de la géométrie vue au lycée, alors qu'il aurait dû avoir recours à un modèle issu de l'algèbre linéaire figurative), et conduira à des difficultés. Ceci soulève la question du lien entre le modèle utilisé et les compétences d'un étudiant en algèbre linéaire, lien dont nous tenterons d'approfondir l'étude.

5.3 Questions

Les différents axes que nous avons évoqués ci-dessus doivent nous permettre d'apporter des éléments de réponse à un certain nombre de questions que nous allons présenter maintenant.

- **Quels types de recours à des modèles géométriques ou figuratifs sont faits, ou peuvent être faits en algèbre linéaire ?**

  Cette question est centrale, mais trop générale pour être traitée directement. Elle porte en effet simultanément sur les recours qui sont effectivement faits, et sur ceux qui pourraient être faits mais ne sont pas effectifs ; sur les choix des enseignants, les pratiques des mathématiciens et celles des étudiants. L'étude historique, et l'analyse de manuels d'autres époques ou d'autres pays nous permettront probablement d'observer des possibilités de recours différentes de ce qui est actuellement pratiqué dans les cours d'algèbre linéaire.

  Mais la réponse à cette question reposera essentiellement sur l'ensemble des réponses aux questions qui vont suivre, et qui peuvent pour la plupart être considérées comme des sous-questions de celle-ci.

- **L'algèbre linéaire peut-elle être présentée comme généralisation d'une géométrie (à préciser éventuellement) ?**

  Cette question rejoint des thèmes évoqués dans certains des travaux que nous avons présentés : ceux de Robert (1998), qui montrent que l'algèbre linéaire est une notion généralisatrice, unificatrice et porteuse d'un nouveau formalisme ; en effet l'aspect « unificateur » semble aller à l'encontre d'une introduction par la simple géométrie. Dorier (1997) montre quant à lui que l'importance du rôle attribué à la géométrie a été accentué par le processus de transposition, et était moindre dans le savoir savant. Nous prolongerons cette étude du processus de transposition pour déterminer ce qui peut relever de l'influence de celui-ci. La partie historique de notre étude permettra d'observer si des avancées déterminantes dans la genèse de l'algèbre linéaire ont reposé sur la seule géométrie, ou résultent plutôt d'interactions entre la géométrie et d'autres domaines.

- **Quels recours à la géométrie vue au lycée sont faits, ou peuvent être faits, dans un cours d'algèbre linéaire ?**

  Dans cette question nous abordons notre sujet sous l'angle de la transition secondaire-supérieur. L'étude de l'évolution de notions de géométrie rencontrées au lycée, et présentes dans le cours d'algèbre linéaire, nous permettra d'établir des possibilités quant au recours, en algèbre linéaire, à la géométrie enseignée dans le secondaire. L'analyse de manuels destinés à l'enseignement supérieur et les réponses à un questionnaire destiné aux enseignants nous montreront ce qui est effectivement pratiqué. Nous pourrons alors comparer ces pratiques avec les possibilités établies précédemment.

- **Certains recours à des modèles géométriques ou figuratifs en algèbre linéaire peuvent-ils entraîner des difficultés spécifiques ?**

  De telles difficultés ont déjà été soulignées, notamment dans les travaux de Harel (1997), Hillel (1997), Sierpinska (2000) et Dorier (1997). Nous chercherons plus particulièrement à observer si l'emploi de modèles issus d'une géométrie affine peut engendrer des problèmes en algèbre linéaire.

- **Certains recours à des modèles géométriques ou figuratifs peuvent-ils être profitables aux étudiants dans l'apprentissage et la pratique de l'algèbre linéaire, ou plus précisément, de certaines parties de l'algèbre linéaire ?**

  Des travaux antérieurs, notamment ceux de Robert (1998), de Alves Dias (1998) et Pavlopoulou (1994) ont déjà partiellement abordé cette question. Tous ces travaux montrent que différentes formes de flexibilité cognitive sont profitables aux étudiants, en particulier dans l'apprentissage et la pratique de l'algèbre linéaire. Ainsi un travail spécifique sur les conversions de registre, et notamment l'emploi du registre graphique semble pouvoir améliorer les performances des étudiants, y compris en algèbre linéaire générale. De même l'emploi de modèles géométriques dans un cours d'algèbre linéaire peut inciter les étudiants à faire eux-mêmes appel à des cas particuliers, issus par exemple de la géométrie vectorielle dans l'espace, pour résoudre des exercices d'algèbre linéaire générale.

  Nous chercherons à déterminer, à l'aide de l'étude de l'évolution de notions géométriques, si certaines parties de l'algèbre linéaire sont particulièrement propices à l'emploi d'un modèle géométrique, et si certains modèles géométriques (en particulier issus des géométries analytiques et vectorielles) semblent plus pertinents. Rappelons que Dorier (1997) note que les interactions entre géométrie et algèbre linéaire semblent plus fortes pour des concepts élaborés. On peut également supposer que l'étude des espaces euclidiens est un domaine où de telles interactions sont importantes.

Les réponses au questionnaire destiné aux étudiants nous permettront d'observer si ceux-ci ont recours à des modèles géométriques ou figuratifs, et dans quelles parties de l'algèbre linéaire. Nous chercherons alors à déterminer si un tel recours semble associé à de bonnes compétences en algèbre linéaire. Il est également possible que certains étudiants n'aient recours à aucun modèle géométrique ou figuratif dans leur pratique de l'algèbre linéaire sans rencontrer pour autant de difficultés spécifiques dans ce domaine.

L'ensemble de notre travail débouche naturellement sur une autre question fondamentale :

- **Comment élaborer un enseignement d'algèbre linéaire qui mette autant que possible à profit le recours au géométrique ?**

  Nous n'avons pas l'ambition ici de fournir une réponse définitive à cette question, mais d'apporter des éléments pouvant contribuer à la conception d'un tel enseignement. Nous évoquerons en conclusion un contenu possible pour un cours d'algèbre linéaire tenant compte des résultats que nous aurons établis. Mais la réalisation, et l'évaluation de l'impact d'un tel cours nécessiteraient des travaux ultérieurs.

CHAPITRE 2

GEOMETRIE ET INTUITION GEOMETRIQUE DANS LA GENESE DE L'ALGEBRE LINEAIRE

Nous allons adopter pour cette analyse une présentation chronologique.

Nous nous pencherons tout d'abord sur ce que Dorier (1997) appelle l'origine géométrique de l'algèbre linéaire, par opposition à l'origine analytique de celle-ci (systèmes linéaires, déterminants, matrices).

Nous examinerons ensuite le rôle de la géométrie dans les approches axiomatiques, notamment issues de l'analyse, qui conduisirent à l'émergence de l'algèbre linéaire moderne.

Nous ne retiendrons que les travaux dont la portée dépasse le simple cadre géométrique ; c'est en effet dans de tels travaux que l'on peut observer l'emploi d'un modèle géométrique, et/ou d'un modèle pour la géométrie.

Nous analyserons les interventions de l'intuition géométrique dans de tels travaux en utilisant l'approche exposée au chapitre précédent et le cadre que nous offre le travail de Fischbein.

1. Les origines : des projets de calcul géométrique

1.1 Gottfried Wilhem Leibniz

Selon Leibniz, l'intuition, qui seule donne accès à la véritable connaissance, désigne la capacité d'appréhension directe et immédiate d'un objet, appréhension qui sera assistée par des signes (il ne s'agit évidemment pas ici de l'intuition géométrique que nous avons définie au chapitre précédent).

Il n'est donc pas étonnant d'observer que Leibniz juge insatisfaisante la méthode cartésienne, consistant à représenter les objets géométriques par des coordonnées ; l'accès direct au concept, *l'intuition de l'objet* est alors impossible.

Ainsi Leibniz tente de développer une caractéristique géométrique, c'est à dire un système fondé sur des signes donnant directement accès aux objets géométriques avec leurs caractéristiques de position, et permettant par le calcul d'établir les propriétés des figures d'une manière telle que la signification géométrique reste toujours présente.

Nous allons tenter de comprendre ici quel est, plus précisément, le dessein de Leibniz, et par quelle méthode celui-ci compte l'atteindre.

Caractéristique géométrique et Caractéristique universelle

La recherche de la Caractéristique géométrique s'inscrit dans un projet plus vaste, celui de Caractéristique universelle, à propos de laquelle Leibniz écrit, dans le brouillon d'une lettre destinée au duc Jean Frédéric de Hanovre :

" J'ay quelque chose de plus grand que tout cela ... C'est cette langue ou caractéristique universelle, que j'ay coutume d'appeler le tableau des choses, l'inventaire des connoissances et le juge des controverses. C'est le grand organe de la raison qui portera aussi loin les forces de l'esprit que le microscope a poussé celles de la vue. " (Leibniz, trad. Echeverria 1995, p.14)

L'élaboration de cette langue permet à la science de se développer, et en retour le développement de la science permet de nouvelles évolutions de la langue ; cette possibilité d'échange et d'amélioration mutuelle est fondamentale dans l'approche de Leibniz.

La Caractéristique géométrique apparaît alors comme une application de la Caractéristique universelle ; cette application est centrale à cause de l'importance historique de la géométrie en tant que science. De plus le développement de la Caractéristique géométrique justifie la possibilité de la Caractéristique universelle, elle laisse supposer l'existence de propriétés encore plus générales.

La Caractéristique géométrique doit être une nouvelle géométrie, qui dépasse les précédentes, en particulier celles d'Euclide et de Descartes.

Cet objectif sera atteint de manière sûre si certains axiomes des géométries précédentes sont démontrés (Leibniz pensait que tous les axiomes d'Euclide étaient démontrables), si de meilleures définitions sont données (nous reviendrons ci-dessous à la question des définitions), et surtout si de nouveaux objets et problèmes géométriques sont créés.

La méthode de Leibniz

Le développement de la caractéristique se fait selon trois axes principaux.

Tout d'abord la recherche des meilleures définitions possibles ; la définition idéale doit mettre en évidence la possibilité de l'objet défini. Ainsi Leibniz donnera plusieurs définitions des notions de droite, de plan, de cercle... Ici nous pouvons noter une première intervention de l'intuition, liée au rapport à la réalité ; la définition choisie doit traduire au mieux l'intuition de l'objet, qui devient alors une notion intuitive, selon le sens attribué par Fischbein à ce terme. Il ne s'agit pas d'intuition géométrique comme nous l'avons définie ci-dessus, mais "d'intuition de l'espace", puisque le modèle est extramathématique, fourni par l'espace concret et non par une géométrie.

Le second axe est le choix des caractères : la recherche des meilleures notations permettant d'exprimer une notion ou une propriété.

Echeverria commente ainsi ce choix de caractères fait par Leibniz :

" Chacun des mots et des signes choisis pour nommer et pour désigner les notions géométriques est arbitraire, mais leur système ne l'est pas du tout ... les relations entre les caractères utilisés en géométrie doivent être conformes aux relations entre les notions géométriques correspondantes. Parfois on ne parviendra qu'à des conformités partielles, mais l'objectif est de pousser l'analyse et d'améliorer le système de signes en tentant d'atteindre l'isomorphisme entre le système de caractères et celui des notions géométriques qu'on est en train de formaliser. " (Leibniz, trad. Echeverria 1995, p.21)

L'intuition de l'espace intervient encore dans ce choix des caractères ; elle seule permet d'assurer le lien entre les caractères et les objets, et de tendre vers l'isomorphisme désiré ; la définition de modèle donnée par Fischbein s'applique clairement à cette démarche.

Le troisième axe de la démarche, une fois les caractères choisis, concerne le raisonnement qui va porter sur ceux-ci ; la combinaison de ces signes donnera des théorèmes, connus ou nouveaux, d'une manière que Leibniz veut entièrement rigoureuse et indépendante de l'intuition. Mais il ne procédera pas en fait à des combinaisons aveugles de signes ; celles qu'il utilise sont choisies par rapport à un objectif géométrique.

En employant les termes de Fischbein, on peut dire que le système des caractères est un modèle symbolique, algébrique associé par analogie à un modèle intuitif de nature géométrique ; c'est sur ce dernier modèle que repose la productivité du système, et donc l'ensemble de la théorie.

L'analogie doit permettre d'assurer un accès direct à l'objet, dépassant ainsi une simple correspondance comme lors de l'emploi de coordonnées cartésiennes.

La caractéristique géométrique

Dans une lettre adressée à Huygens en septembre 1679, Leibniz écrit à propos de la caractéristique géométrique :

" J'ay trouvé quelques éléments d'une nouvelle caractéristique, tout à fait différente de l'algèbre, et qui aura de grands avantages pour représenter à l'esprit exactement et au naturel, quoyque sans figure, tout ce qui dépend de l'imagination. L'algèbre n'est autre chose que la caractéristique des nombres ou des grandeurs. Mais elle n'exprime pas directement la situation, les angles, et le mouvement, d'où vient, qu'il est souvent difficile de réduire dans un calcul de ce qui est dans la figure, et qu'il est encor plus difficile de trouver des démonstrations et des constructions géométriques assez commodes lors même que le calcul de l'algèbre est tout fait. Mais cette nouvelle caractéristique suivant des figures de vue ne peut manquer de donner en même temps la solution et la construction et la démonstration géométrique, le tout d'une manière naturelle et par une analyse. " (Leibniz, trad. Echeverria 1995, p.257)

En fait la géométrie développée par Leibniz ne remplit pas ce programme parce qu'elle reste fondée sur la distance et ne prend pas en compte, notamment, les notions de sens et de direction. Mais Leibniz aura initié l'idée de la recherche d'un calcul géométrique intrinsèque. L'élaboration de sa théorie (il s'agit ici d'une géométrie) s'identifie à la recherche d'un modèle analogique symbolique pour l'espace physique, l'analogie portant sur les positions des objets et les relations entre ceux-ci. Pour Leibniz l'analogie de structure est obtenue par le choix des bons caractères ; grâce à l'isomorphisme entre caractères et objets géométriques, les combinaisons de caractères donneront ensuite des théorèmes géométriques.

Nous verrons ci-dessous que l'aspect : recherche d'un calcul géométrique intrinsèque basé sur une analogie de structures, et s'inscrivant dans un projet plus vaste, comme celui de la caractéristique universelle sera repris et prolongé par Grassmann (et ce bien que celui-ci n'aie pas connu, selon ses propres déclarations, la théorie de Leibniz), conduisant au développement de sa théorie de l'extension.

1.2 Interprétation géométrique des nombres complexes[1]

Nous avons vu dans le chapitre précédent que Fischbein cite la représentation géométrique des nombres complexes comme exemple de l'emploi d'un modèle analogique intuitif.

Rappelons que les principes de la représentation géométrique des nombres complexes furent découverts de manière indépendante par plusieurs scientifiques entre 1799 et 1828 ; on peut citer notamment Wessel, Buée ou Argand.

Avant eux Wallis (1673) avait proposé un modèle en termes de gains et pertes de surface sous la mer ; mais ce modèle n'était pas satisfaisant puisqu'il ne permettait pas d'interpréter correctement la multiplication. Cette proposition de modèle nous renvoie à ce que Fischbein désigne comme modèle-compromis : un modèle construit volontairement, mais mal adapté à l'original, et bloquant par ce fait le développement d'une intuition correcte.

Selon Fischbein, avant que la structure formelle associée aux nombres complexes ne soit dégagée, les mathématiciens cherchèrent un modèle analogique géométrique pour rendre ceux-ci intuitivement acceptables :

"D'une part, la cohérence interne d'une telle interprétation *(l'interprétation géométrique des complexes)* prouve que l'original - le système des nombres complexes - est aussi cohérent. D'autre part, il offre à l'esprit du mathématicien une impression de familiarité, une possibilité de manipulation consécutive à la structure visuelle de ce type de modèle, et ceci accroît encore l'acceptation intuitive de la réalité des nombres complexes." (Fischbein 1987, p.133)

Le rôle du modèle est donc double ici : il offre une possibilité de visualisation, mais surtout il légitime l'existence même des nombres complexes en fournissant pour ceux-ci une interprétation intuitive.

D'autre part, comme nous l'avons déjà signalé à la fin de la partie II, dans une analogie les places de " modèle " et " original " ne sont pas fixes ; au contraire, les deux théories ainsi mises en rapport seront tour à tour l'une pour l'autre facteur d'intuition. Ainsi, parmi les mathématiciens que nous avons cités ci-dessus, certains cherchaient en effet une représentation géométrique, c'est à dire un modèle analogique géométrique, pour les complexes ; mais d'autres poursuivaient un projet de calcul géométrique, dans un esprit semblable à celui de Leibniz, c'est à dire cherchaient un modèle analogique algébrique pour la géométrie du plan.

Ces deux recherches convergèrent vers le résultat que l'on sait ; le modèle géométrique légitima l'existence des nombres complexes, et les complexes permirent un calcul géométrique plan intrinsèque.

1.3 Sir William Rowan Hamilton

Sir William Rowan Hamilton découvrit les quaternions vers 1843. Cette découverte s'inscrivait elle aussi dans un projet de calcul géométrique du type de celui de Leibniz, se présentant en particulier comme une tentative de généralisation des quantités imaginaires à la dimension 3.

[1]Nous avons choisi ici d'employer le terme moderne de "nombres complexes". Rappelons qu'à l'époque on parlait de "quantités imaginaires".

Les textes de Hamilton sont particulièrement riches car ils exposent au lecteur, en plus de la théorie des quaternions, le cheminement même de l'auteur dans son processus de découverte.

Nous allons étudier ici l'interaction entre algèbre et géométrie dans la découverte des quaternions, puis les choix faits par Hamilton dans ses présentations successives de la théorie, choix qui le conduisirent à adopter comme nous le verrons un point de vue de plus en plus géométrique.

Nous tenterons ensuite d'analyser en termes d'intuition ces différentes interventions de la géométrie.

Interaction algèbre-géométrie dans la découverte des quaternions

Dans la préface des "Lectures on quaternions"(1853), Hamilton écrit à propos de sa propre découverte :

"Je sentis que le nouvel instrument pour l'application du calcul à la géométrie, que j'avais si longtemps cherché, était maintenant, au moins en partie, réalisé." (Hamilton, 1853 p.47)

La recherche des quaternions apparaît donc bien ici comme un projet de calcul géométrique du type de celui de Leibniz. Cependant l'objectif de Hamilton était différent de celui de Leibniz ; Hamilton n'était pas à la recherche d'une caractéristique géométrique, c'est à dire d'un nouveau moyen de fonder la géométrie, en démontrant par exemple les axiomes d'Euclide, mais d'un calcul géométrique, prolongeant ce que nous avons vu ci-dessus à propos des nombres complexes.

D'autre part Hamilton critique les représentations géométriques existantes pour les nombres complexes et négatifs, et souhaite trouver pour ceux-ci une interprétation qui dépende moins de la géométrie.

Selon lui, et suivant une idée inspirée par les théories de Kant, le moyen de parvenir à ce résultat est de considérer l'algèbre comme "la Science de l'Ordre dans la Progression", ou "Science du temps pur", le temps pur étant de même nature que l'espace étudié par la géométrie, qualifié d'espace pur.

Hamilton souligne donc très explicitement son intention de dépasser le domaine de la géométrie ; c'est l'association de cette volonté "algébrique" et de l'intuition géométrique qui le mènera à la découverte des quaternions (si l'on en croit en tout cas le récit de cette découverte, tel qu'il est présenté par Hamilton lui-même dans la préface des Lectures, sur laquelle nous allons nous pencher maintenant).

Hamilton développe donc d'abord, selon son projet, des relations de comparaison et des opérations portant sur des symboles interprétés comme moments de temps.

Il passe ensuite aux couples de tels moments, et définit pour ceux-ci des relations et des opérations semblables à celles portant sur les moments, ce qui lui permet de donner, ainsi qu'il le souhaitait, un sens à la racine carrée de -1.

Le processus utilisé porte alors uniquement sur les propriétés des lois ; comme Hamilton le souligne, il est indépendant de la notion d'espace.

L'idée d'un passage des couples aux triplets est naturelle, en dehors même de toute considération géométrique, et Hamilton tente dans un premier temps de développer un calcul sur ceux-ci en examinant les propriétés des lois ; mais la définition du produit de triplets résiste aux considérations purement algébriques. Quelles propriétés usuelles du produit de nombres (ou de couples) doit-on garder, lequelles peut-on abandonner ?

Hamilton fait une première tentative, considérant qu'un produit de deux triplets non nuls peut être nul ; il donne l'interprétation géométrique du produit qu'il a défini algébriquement.

Mais il est insatisfait du résultat obtenu, et en particulier de la possibilité de nullité du produit.

Il abandonne alors la recherche par des moyens purement algébriques ; il ne parle plus de moments de temps, mais de triplets interprétés géométriquement.

A partir de cette étape, on peut dire qu'il s'inscrit réellement dans un projet de calcul géométrique ; Hamilton écrit lui-même à propos des différentes tentatives qu'il décrit qu'elles avaient pour objectif :

"D'une part d'étendre à l'espace la construction géométrique de la multiplication des lignes ; et d'autre part de rendre plus entièrement définie ma conception des triplets algébriques." (Hamilton 1853, p.41)

La dernière des tentatives décrites devait aboutir à la découverte des quaternions. Hamilton considère alors les triplets comme des expressions de la forme $x+iy+jz$, et pose $i^2=-1$ par analogie avec les couples, et $j^2=-1$ par analogie avec la relation précédente ; il interprète cette dernière relation en termes de rotation.

Il cherche à déterminer la valeur du produit ij, sous la forme $ij= x+iy+jz$, en choisissant les coefficients à la lumière d'analogies géométriques. C'est ainsi qu'il en vient à supposer $ij=-ji$, et à appeler k ce produit ; dans un premier temps, k ne reçoit pas d'interprétation particulière. Mais k intervient dans les opérations, dans lesquelles il apparaît comme un " opérateur unitaire ", au même titre que i ou j ; ainsi les triplets apparaissent comme des formes dégénérées de quadruplets, appelés quaternions, et s'écrivant : $x+iy+jz+kw$.

Reste alors à donner une interprétation géométrique à ces expressions ; ceci va conduire Hamilton à considérer les segments comme des expressions de la forme $ix+jy+kz$, et les quaternions comme les produits de segments ; la partie scalaire (qui n'est pas encore désignée ainsi) représente un produit de longueurs, et le reste une ligne perpendiculaire au plan déterminé par les deux facteurs.

Différents modes d'exposition de la théorie des quaternions

La découverte des quaternions associe donc étroitement raisonnements algébriques et intuition géométrique. La théorie obtenue sera exposée à plusieurs reprises par Hamilton, selon plusieurs points de vue différents.

Dans l'article qui suivit immédiatement la découverte des quaternions en 1843, c'est le point de vue algébrique qui est adopté ; les quaternions sont présentés comme des combinaisons linéaires à coefficient réels de quatre éléments de base, et aucune interprétation géométrique n'est proposée.

Dix ans plus tard, dans les Lectures on Quaternions (Hamilton, 1853), les quaternions sont présentés comme quotients de segment orientés de l'espace ; mais la préface retrace le cheminement de l'auteur, en soulignant le point de vue algébrique. L'objectif de cette préface est clairement exposé par Hamilton :

" Ainsi je fus conduit, il y a de nombreuses années, à considérer l'algèbre comme la science du temps pur ; et un essai, contenant mes vues à ce sujet, fut publié en 1835. Si je reproduis maintenant certaines des opinions mises en avant dans cet essai, c'est simplement parce qu'elles peuvent aider le lecteur à adopter ce point de vue à propos des premiers éléments de l'algèbre, point de vue à partir duquel je passai progressivement aux conceptions plus géométriques qui font l'objet de ce volume. " (Hamilton 1853, p.2)

Hamilton a fait le choix d'une présentation géométrique, mais il désire toutefois que son lecteur découvre cette présentation en ayant en tête le point de vue algébrique ; c'est dans ce but qu'il parlera de moments de temps, ainsi que de couples et de n-uplets de moments. Mais assez rapidement, cette volonté d'utiliser l'interprétation temporelle pour se dégager de toute intervention de la géométrie sera abandonnée.

Dans les "Elements of quaternions" (Hamilton 1866), la présentation choisie est encore plus géométrique ; elle repose sur la notion de vecteur, défini comme une droite ayant une longueur et une direction ; les scalaires sont les quotients de deux vecteurs de même direction, et les quaternions des opérateurs transformant un vecteur en un autre vecteur. Les différents types de produits : vecteur-vecteur, scalaire-vecteur, quaternion-quaternion ... seront tous interprétés en termes de transformations géométriques.

Les quaternions et le modèle géométrique

Granger écrit à propos de Hamilton :

" C'est dans le contrepoint constant de l'interprétation géométrique et de l'interprétation algébrique des quaternions que se constitue chez lui ce nouveau style, dont le trait spécifique doit être alors recherché dans un magistral usage de l'intuition. "(Granger 1968, p.82)

Les deux aspects de l'œuvre de Hamilton décrits ci-dessus vont nous permettre de mieux comprendre et de prolonger ces propos, quant à l'usage qu'il fait de l'intuition d'abord en tant que chercheur puis dans l'exposition de sa théorie.

Hamilton cherche à construire une algèbre, c'est à dire à définir des opérations portant sur des objets abstraits et présentant des similarités avec les opérations usuelles sur les nombres. Mais il doit, pour le produit, choisir de conserver certaines propriétés et d'en abandonner d'autres ; c'est le modèle géométrique qui le guidera dans ce choix. Ce modèle géométrique sous-jacent n'est pas un modèle naïf, constitué de points ou de lignes ; le modèle employé par Hamilton est celui des transformations géométriques.

L'emploi de ce modèle lui permet de choisir parmi les propriétés du produit en abandonnant l'idée de commutativité ; le modèle des transformations légitime cet abandon.

C'est aussi ce modèle qui permet à Hamilton le passage des triplets aux quadruplets, par l'idée de rotation, caractérisée par trois paramètres, et suivie du produit par un réel.

En effet, comme l'écrit Dorier (1997) :

"Finalement, c'est en examinant les propriétés géométriques de la multiplication des complexes, qu'il fit un pas décisif vers la découverte des quaternions. Il mit en effet en relief le fait que cette multiplication se base sur le produit des longueurs de chaque vecteur et sur l'angle qu'ils forment. Essayant de transposer ces idées à la dimension trois, il comprit que l'angle de deux vecteurs n'était plus suffisant, mais qu'il fallait aussi considérer le plan dans lequel cet angle se dessine, autrement dit la rotation qui permet de passer d'une direction à l'autre. Or, si la longueur est en dimension trois comme deux une valeur unidimensionnelle, une rotation en dimension trois est déterminée par une direction (grandeur bidimensionnelle) et un angle (grandeur unidimensionnelle). Cette analyse le conduisit progressivement à penser qu'un calcul géométrique en dimension trois devait se fonder sur des quadruplets et non des triplets." (Dorier et al. 1997, pp.41-42)

Ainsi le quaternion sera considéré comme un opérateur, opérateur faisant lui-même partie d'un ensemble structuré d'opérateurs ; le quaternion n'est plus un élément isolé mais il fait partie d'un ensemble, il s'inscrit dans une structure.

Le modèle permet d'unifier les notions de quaternions et de vecteur, comme l'écrit Granger :

"Certes, la définition même du Quaternion en fait un opérateur sur les vecteurs. mais les quaternions se composent entre eux, et cette composition est au fond de même nature que l'opération d'un Quaternion sur un vecteur. L'opposition entre les deux êtres mathématiques est donc artificiellement entretenue par l'intuition géométrique, plutôt qu'elle ne correspond à une dualité essentielle. La réduction de cette hétérogénéité à l'intérieur du système va s'effectuer dans le sens de la tendance hamiltonienne la plus profonde, qui est de penser les êtres mathématiques comme opérateurs et non comme objets."(Granger 1968, p.88)

Ainsi Hamilton met à profit dans sa recherche un modèle analogique géométrique ; il faut souligner, d'une part comme nous l'avons dit plus haut que ce modèle est celui des transformations et non un modèle géométrique naïf, et d'autre part que Hamilton complète l'emploi de celui-ci par des considérations purement algébriques portant sur des caractères abstraits. Quant à ce qui a trait à l'exposition de sa théorie, nous avons vu que le modèle géométrique joue un rôle croissant dans les présentations successives.

Pourquoi Hamilton, qui visait à développer une théorie indépendante de la géométrie, a-t-il abandonné sa première présentation purement algébrique au profit de modèles géométriques ?

Il écrit à ce sujet que la présentation géométrique doit aider le lecteur à comprendre, et à employer les quaternions pour des applications géométriques. Il nous semble cependant que d'autres raisons, interprétables en termes d'intuition, guident ce choix.

Une première explication tient à l'emploi du modèle géométrique pour légitimer l'existence des objets définis en conférant à ceux-ci une certaine réalité. Hamilton souligne explicitement cet aspect, par exemple lorsqu'il écrit en note dans la préface des Lectures :

" Dans le passage que j'ai fait (dans la Septième lecture), des quaternions considérés comme réels (ou interprétés géométriquement) aux biquaternions considérés comme imaginaires (ou non interprétés géométriquement), mais suggérés symboliquement par la généralisation de la formule des quaternions, il sera perçu que j'ai employé une méthode de transition, de théorèmes prouvés dans des cas particuliers à des expressions supposées pour le cas général. " (Hamilton 1853, p.16)

L'interprétation géométrique rend les quaternions "réels" ; c'est ce qui pousse Hamilton à faire suivre ses raisonnements algébriques de leur version géométrique.

Par ailleurs, d'après la théorie de Fischbein sur le rôle des modèles dans le développement de l'intuition, le modèle géométrique associé aux quaternions est indispensable pour qu'un lecteur éventuel de la théorie de Hamilton puisse utiliser celle-ci de manière productive.

La géométrie avait été indispensable à Hamilton pour développer sa théorie ; la présentation purement algébrique de celle-ci l'appauvrissait en la figeant dans un aspect structurel restreignant le champ des nouvelles propriétés ou théorèmes possibles. C'est pourquoi il fallait associer aux quaternions un modèle géométrique qui assure la fécondité de ceux-ci, et c'est ce que Hamilton cherche à faire dans les Lectures, tout en rappelant le point de vue algébrique pour préserver l'indépendance de sa théorie vis-à-vis de la géométrie.

Le modèle adapté sera réellement dégagé dans les Eléments, où, comme nous l'avons rappelé ci-dessus, la théorie repose sur la notion de vecteur et les quaternions sont directement introduits comme opérateurs faisant passer d'un vecteur à un autre.

Hamilton ne cherche plus alors à se dégager d'une géométrie trop présente ; une fois le "bon" modèle trouvé, le problème de présentation de la théorie est résolu.

1.4 Conclusion

Les travaux que nous avons examinés ici présentent a priori des caractéristiques très différentes.

Leibniz est à la recherche d'un modèle symbolique, algébrique pour la géométrie. Ce modèle est constitué par des caractères, qui pourront être combinés entre eux. De telles combinaisons de caractères fourniront des propriétés qui, une fois traduites dans le domaine géométrique, seront autant de théorèmes de géométrie. Le point central ici est donc le choix des caractères ; Leibniz cherche à déterminer les meilleurs caractères possibles, il fait plusieurs tentatives en ce sens. Ce choix repose sur un modèle extramathématique fourni par l'espace physique.

Les travaux portant sur les nombres complexes sont essentiellement dirigés vers la recherche d'une interprétation géométrique de ceux-ci, représentation permettant de légitimer leur existence. Une fois dégagé le modèle analogique géométrique approprié, les complexes offrent la possibilité d'un calcul géométrique intrinsèque dans le plan.

Hamilton, qui fait référence à l'interprétation géométrique des complexes, se place cependant dans une optique très différente. Il ne cherche pas à déterminer un modèle géométrique, mais à élaborer une algèbre, ce qu'il appelle la science du temps pur. Il sera cependant conduit à utiliser la géométrie pour déterminer la structure sous-jacente ; l'algèbre ainsi obtenue fournira alors, comme dans le cas des complexes, la possibilité d'un calcul géométrique.

On voit cependant s'esquisser ici des traits communs à ces différentes approches.

Tout d'abord, l'objectif de calcul géométrique se traduit par un même effort pour tendre vers une présentation synthétique.

Notons que pour tous les auteurs évoqués, la géométrie est la science de l'espace physique, et comme telle est en rapport direct avec la réalité.

Cette géométrie va cependant leur permettre d'effectuer un premier pas vers ce que nous appellerions désormais la notion d'ensemble muni d'une structure.

En effet le modèle géométrique fournit la notion d'espace, puis la notion de point (dans l'ordre proposé par Leibniz, ce sont respectivement la première et la seconde des notions à considérer en géométrie) ; un modèle analogique symbolique pour la géométrie comportera donc, même implicitement, un ensemble et les éléments de cet ensemble.

Il sera ensuite muni d'une structure fondée par le modèle géométrique, le choix des propriétés des lois reposant sur celui-ci, même si l'articulation entre le modèle géométrique et le modèle symbolique s'effectue sur un mode différent chez chaque auteur.

Nous allons voir maintenant comment ce même mouvement se poursuit et s'accentue chez Grassmann.

2. Hermann Günther Grassmann

Dans la lecture épistémologique de la genèse de la théorie des espaces vectoriels qu'il propose, Dorier (1997) examine tout particulièrement l'œuvre de Hermann Grassmann.

Il écrit à ce propos :

" La *Théorie de l'extension* de Hermann Grassmann joue un rôle inclassable dans l'histoire de l'algèbre linéaire. Elle se fonde sur une certaine intuition de la géométrie, mais aussi prend dès le départ une position très formaliste... Le résultat en est une approche très générale, qui offre comme application un nouveau regard sur la géométrie, dans un sens très large, puisqu'englobant des aspects qui relèvent aussi bien de ce qu'on appelle aujourd'hui la géométrie affine, la géométrie vectorielle et la géométrie projective. " (Dorier et al. 1997, p.43)

De fait, l'examen de l'œuvre de Grassmann est fondamental pour notre étude ; d'une part, à cause de l'importance de ces travaux dans la genèse de l'algèbre linéaire, mais aussi à cause de l'usage très particulier que fait Grassmann de l'intuition géométrique.

Nous allons donner ici une lecture possible de l'Ausdehnunglehre de 1844 en présentant tout d'abord les déclarations de Grassmann sur l'usage qu'il fait de l'intuition dans cette œuvre, puis en analysant cet usage en termes d'intuition géométrique.

2.1 Grassmann et le contraste intuitif/formel

Grassmann souligne, dans l'Ausdehnunglehre de 1844, l'importance de l'intuition d'une part lors de sa propre découverte de la théorie des formes, et d'autre part pour la compréhension du lecteur ; il explique qu'il veut que celui-ci soit à tout moment capable " d'embrasser à chaque pas du développement l'orientation prise par sa progression. " Mais il insiste également sur le fait que la science qu'il obtient est entièrement indépendante de l'intuition qui a été à l'origine de sa découverte.

" Pour ne pas fatiguer le lecteur avec de continuelles abstractions et pour le mettre également en état, partant de choses connues, de se mouvoir avec plus de liberté et d'indépendance, je me rattache partout à la géométrie pour la déduction des concepts nouveaux, dont notre science constitue la base. Mais en posant toujours à la base le concept abstrait pour la déduction des vérités qui constituent le contenu de cette science, sans jamais me fonder sur une vérité démontrée en géométrie, j'obtiens cependant ainsi la science dans son contenu totalement pure et indépendante de la géométrie. " (Grassmann 1844 trad.Flament 1994, p.11)[2]

Grassmann affirme que dans la présentation de toute science, il y a deux développements : celui qui donne la matière, et celui qui donne la maîtrise de la matière. Dans son ouvrage, le premier est indépendant de la géométrie, et pour le second, il dit s'être " permis la plus grande liberté ". Notons que Grassmann considère la géométrie comme une science appliquée, et lorsqu'il se propose "d'ébaucher au moins vaguement un début purement scientifique de la géométrie elle-même ", indépendamment de la théorie des formes, il s'agit en fait pour lui de déterminer les bons axiomes, en fonction de l'intuition :

" Dans la géométrie il ne reste donc comme axiomes que les vérités qui sont tirées de l'intuition de l'espace [Anschauung des Rames]. Ces axiomes sont alors pris correctement s'ils donnent dans leur totalité l'intuition complète de l'espace et si aucun axiome n'est posé qui ne contribuerait pas à compléter cette intuition. " (ibid., p.24)

D'autre part, les fondements de la théorie des formes elle-même ne sont pas indépendants de l'intuition ; en particulier le concept de changement continu (stetige Änderung) qui est à la base de la théorie ne peut recevoir qu'une signification intuitive.

---

[2]Les citations de Grassmann en français sont extraites de [Flament 1994]

C'est ce que souligne Granger lorsqu'il écrit à propos de l'Ausdehnunglehre de 1844 :

" Les grandeurs introduites le sont directement sur un fond assez indistinct d'intuition géométrique, ou plus exactement d'une intuition du mouvement, dont serait abstraite la notion purement intellectuelle de changement. " (Granger 1968, p.93)

Cependant Grassmann a le sentiment d'avoir introduit là un concept pur, " et non une intuition spatio-temporelle travestie. Pour lui, l'apparence intuitive et géométrique de son exposé n'est jamais qu'une commodité d'expression, destinée à ne pas fatiguer le lecteur. "(Granger 1968, p.94). Notons que ce que Granger désigne ici comme intuition géométrique est différent du sens que nous avons attribué à ce terme, puisqu'ici le modèle sous-jacent est directement issu de la perception de l'espace et non d'une théorie mathématique.

Contrairement aux intentions affichées par Grassmann, les prémisses de la théorie des formes telle que celle-ci est exposée dans l'Ausdehnunglehre de 1844 sont de nature intuitive. Il faut toutefois souligner que le terme de prémisses, dans le cas de Grassmann, a un sens complexe car l'approche qu'il propose n'est pas axiomatique ; l'exposition de la théorie ne se fait pas sous la forme d'un énoncé de prémisses, suivi de propriétés logiquement déduites.

Dorier (1997), à la suite de Lewis (1977) analyse ainsi la démarche adoptée dans l'Ausdehnunglehre de 1844 :

" Grassmann a pris pour son compte l'usage du contraste comme moteur d'avancée de la pensée... la notion de contraste n'est pas un absolu mais au contraire une position relative qui fait systématiquement envisager les choses sous des angles opposés mais complémentaires, permettant par là même de faire avancer la réflexion, dans un processus dialectique." (Dorier et al. 1997, pp. 46-47)

Cette analyse s'applique en particulier au contraste entre intuitif et formel, qui est un élément essentiel dans l'élaboration de la théorie de l'extension. Grassmann poursuit un objectif de rigueur, tout en voulant expliciter les intuitions qui ont conduit au développement des notions et des propriétés.

Les prémisses intuitives apparaîtront à chaque stade de la théorie ; on observe en fait chez Grassmann un pôle intuitif et un pôle formel ; la théorie est développée par une mise en tension permanente de ces deux pôles.

Dans les propos de Grassmann que nous avons cités ci-dessus, nous retrouvons différents sens du terme intuition ; ici encore, c'est la théorie de Fischbein qui va nous permettre de clarifier les interventions de l'intuition géométrique dans l'Ausdehnunglehre.

2.2 Le modèle géométrique dans l'Ausdehnunglehre de 1844

Comme nous l'avons vu ci-dessus, Grassmann souligne explicitement dans l'Ausdehnunglehre l'importance de l'intuition et il mentionne l'analogie avec la géométrie comme facteur d'intuition. En réalité la géométrie joue de multiples rôles dans l'Ausdehnunglehre, comme le souligne Flament (1992) :

" On parle d'abord de la relation analogique entre une science pure, l'Ausdehnunglehre, et son application, ou forme concrète, la géométrie.

Les constructions géométriques sont ensuite introduites pour servir l'intuition.

Enfin, la géométrie est considérée pour elle-même dans la partie applications que l'on retrouve à la fin de chaque chapitre du livre. "(Flament 1992)

Chacun des trois rôles mentionnés par Flament peut être en fait interprété comme une utilisation d'un modèle entraînant le développement d'intuitions ; les différents types de modèles distingués par Fischbein vont donc nous permettre de préciser l'articulation entre géométrie et théorie des formes et les interventions de l'intuition géométrique.

Recherche d'un modèle analogique symbolique pour la géométrie et découverte de la théorie des formes.

Dans la préface de l'Ausdehnunglehre, Grassmann explique comment il a découvert celle-ci ; il était à la recherche d'une caractéristique géométrique, c'est à dire d'un modèle symbolique analogique de l'espace physique. Lorsqu'il parvient à ce modèle, il écrit notamment :

" Les formules se transformèrent en formules très simples et symétriques. La façon de les développer s'harmonisait avec le concept. "(Grassmann 1844, p.II)

Grassmann a obtenu l'analogie recherchée ; mais son modèle dépasse l'objectif fixé :

" Il apparut que l'Analyse que j'avais découverte ne se situait pas seulement, comme il me semblait au début, dans le domaine de la géométrie ; mais j'aperçus bientôt que j'avais atteint là le terrain d'une nouvelle science, dont la géométrie elle-même n'est qu'une application particulière. "(ibid., p.III)

La recherche d'un modèle analogique symbolique pour l'espace physique a conduit Grassmann à découvrir une science plus vaste, qui sera donc en particulier un modèle analogique symbolique pour la géométrie. Cette géométrie elle-même est déjà un modèle abstrait pour une réalité concrète : l'espace ; les lois de la géométrie proviennent de cette fonction.

Un modèle symbolique pour la géométrie sera donc analogique si ses lois sont semblables aux lois de la géométrie ; en outre celles-ci ne doivent pas être tirées de l'espace pour préserver l'indépendance du modèle.

Le modèle obtenu par Grassmann remplit toutes ces conditions, comme il l'écrit lui-même :

" En fait j'avais compris depuis longtemps qu'on ne peut pas considérer la géométrie comme une branche de la mathématique, mais plutôt que la géométrie fait référence à quelque chose qui est déjà donné dans la nature (c'est à dire l'espace) et qu'il devait y avoir par conséquent une branche de la mathématique qui tire d'elle même de façon purement abstraite des lois semblables comme celles qui, en géométrie, semblent reliées à l'espace. "(ibid., p.III)

La théorie des formes sera explicitement employée comme modèle symbolique de la géométrie à la fin de chaque chapitre, dans la partie consacrée aux applications. Par ailleurs l'analogie va permettre un renversement des rôles, et dans l'exposition de la théorie, ce sera la géométrie qui servira de modèle intuitif pour la théorie des formes, situation que nous avions déjà rencontrée pour les nombres complexes et les quaternions. Toutefois, la possibilité de considérer la géométrie soit comme une science indépendante, soit comme une application de la théorie des formes rend ici la situation très différente de celle que nous avons pu observer pour les nombres complexes.

Ainsi nous verrons la géométrie se manifester tantôt comme modèle analogique, tantôt comme modèle paradigmatique de la théorie des formes. Dans les deux cas elle entraînera bien entendu une visualisation, par l'utilisation de figures ou simplement du langage géométrique.

La géométrie comme application de la théorie des formes : un modèle paradigmatique

La géométrie apparaît comme modèle paradigmatique dans les exemples donnés tout au long de l'exposition de la théorie, à la suite de la définition d'une nouvelle notion ou de l'établissement d'une propriété, et dont l'auteur souligne souvent qu'ils sont destinés à soutenir l'intuition.

Ainsi dès l'introduction et l'exposition du concept de l'Ausdehnunglehre, Grassmann illustre les notions d'élément générateur et de changement continu en écrivant :

" Dans la théorie de l'espace c'est le point qui figure comme élément, le changement de lieu ou mouvement qui se présente comme son changement continu, et ce sont les différentes positions du point dans l'espace qui figurent ses différents états. "(ibid., p.XIII)

De même, dans le premier chapitre de la première section, Grassmann qui a défini notamment les formations d'extension, et les systèmes de différents échelons, propose immédiatement une illustration géométrique :

" Je veux soutenir l'intuition [Anschauung] par des considérations géométriques. Car il est clair que le système de deuxième échelon correspond au plan, et que le plan est pensé comme engendré en déplaçant tous les points d'une ligne dans une direction qui n'est pas contenue en elle. On obtient également tout l'espace infini comme le système du troisième échelon ... et la géométrie ne peut pas avancer plus loin, tandis que la science abstraite ne connaît pas de limite. "(ibid., p.15)

Nous nous limitons ici à ces deux exemples, mais chaque chapitre de l'Ausdehnunglehre en comporte un grand nombre.

Rappelons que, selon Fischbein, le rôle du paradigme est essentiel pour la compréhension, l'apprentissage et la résolution d'exercices ; c'est ce modèle que le sujet gardera présent à l'esprit, et qui permettra à un concept d'avoir une productivité semblable à celle d'un objet concret. Grassmann incite clairement le lecteur désireux de comprendre une nouvelle notion ou propriété à traduire celle-ci dans le domaine de la géométrie (traduction qui est la plupart du temps donnée explicitement dans l'ouvrage). En particulier, les notions primitives de changement continu (stetige Änderung) et d'élément générateur (erzeugendes Element) ne peuvent être appréhendées par le lecteur de l'époque que grâce à leur ancrage dans la géométrie.

Or comme le souligne Grassmann lui-même, le modèle géométrique est limité, en particulier par le nombre "d'échelons" (Stufe).

Ainsi on peut se demander si la généralité atteinte par Grassmann dans sa théorie ne risque pas d'être écrasée par le modèle géométrique, qui peut entraîner le lecteur de l'Ausdehnungmehre à ne retenir que les applications à la géométrie. Il est remarquable à cet égard de noter que les premières diffusions significatives des travaux de Grassmann se sont précisément limitées à leurs applications à la géométrie (voir ci-dessous).

La géométrie comme modèle analogique de la théorie des formes

C'est dans cet emploi de la géométrie que le renversement des rôles entre modèle et original se fait le plus sensible.

Grassmann est parvenu à la théorie des formes en cherchant un modèle analogique symbolique pour l'espace physique ; il a finalement obtenu une théorie plus vaste, dont l'application à l'espace fournit une géométrie. Mais, comme nous l'avons signalé ci-dessus, Grassmann décrit également une géométrie axiomatique "indépendante de la théorie des formes", et dont les axiomes sont des "vérités tirées de l'intuition de l'espace".

Il dispose ainsi d'une géométrie indépendante de sa théorie, géométrie qu'il va utiliser comme modèle analogique, modèle dont il décrit explicitement le rôle en disant que son développement va suivre une idée directrice qui est une analogie, pour que le lecteur puisse anticiper les différentes étapes grâce à ce fil conducteur.

Grassmann souligne à différents endroits du livre l'importance et le rôle de cette analogie ; il parle lui-même d'intuition, comme au début du deuxième chapitre de la première section :

" Nous partons d'abord de la géométrie pour obtenir l'analogie selon laquelle la science abstraite doit procéder, et pour avoir sous les yeux, tout de suite, une idée intuitive [anschauliche Idee] qui nous mènera sur les chemins inconnus et souvent pénibles du développement abstrait. "(ibid., p.33)

Il est clair ici que le rôle du modèle analogique est différent de celui du modèle paradigmatique : alors que ce dernier intervenait pour aider à la compréhension d'un concept ou d'une propriété introduits dans la théorie générale, pour conférer à ceux-ci, selon les termes de Fischbein, la productivité nécessaire, le modèle analogique intervient *avant* l'exposition d'un concept.

Il sert à préparer l'introduction d'une notion, à donner au lecteur la possibilité d'anticiper un développement théorique ; le modèle doit alors être suffisamment indépendant de "l'original".

Ainsi, lorsque Grassmann présente dans le premier chapitre de la première section la géométrie comme une science existant indépendamment de la théorie des formes, il fait usage, dans sa présentation, du concept de nombre. Or ce concept n'a pas encore été rencontré à ce stade de la théorie générale ; la notion de "grandeur de nombre" (Zahlengrösse) n'est définie que dans le quatrième chapitre, à partir de la division extérieure. Grassmann souligne cette anticipation en écrivant :

" Nous avons anticipé ici, pour donner tout de suite une vue d'ensemble, le concept du nombre dont il ne pouvait pas encore être question dans la science abstraite. "(ibid., p.29)

Le concept de nombre existe déjà dans la géométrie ; on peut donc s'attendre à ce qu'un concept analogue y corresponde dans la théorie des formes ; c'est ici un emploi caractéristique du modèle analogique. De même, au début du second chapitre, Grassmann qui veut introduire le concept de multiplication extérieure des segments et les propriétés de cette multiplication le fait d'abord dans le cas de la géométrie, puis écrit :

" Après avoir ainsi soumis à l'intuition [Anschauung] le concept de la multiplication pour la géométrie, nous pouvons revenir maintenant à notre science et poursuivre en elle le chemin purement abstrait et indépendant de toute considération d'espace. " (ibid., p.35)

L'analogie permet de supposer que les propriétés vues dans le cadre géométrique anticipent des propriétés générales ; celles-ci seront d'autant plus facilement comprises qu'elles sont alors attendues. Grassmann insiste encore ici sur le fait que ce modèle a un objectif uniquement pédagogique, et qu'en dépit de la présentation adoptée, sa théorie sera indépendante de la géométrie ; cependant on peut supposer que cette indépendance subsistera difficilement.

Inconvénients de l'utilisation de la géométrie comme modèle

Comme le souligne Fischbein, l'emploi d'un modèle intuitif comporte des risques ; que le modèle soit analogique ou paradigmatique, il peut introduire dans le processus cognitif des éléments parasites, propriétés du modèle qui ne sont pas pertinentes pour l'usage qui doit en être fait. Grassmann est conscient de ce fait ; il a su lui-même dépasser les limites du modèle géométrique, en se limitant à l'analogie structurelle, et il veut éviter l'introduction d'éléments parasites dans l'exposition de sa théorie tout en utilisant la géométrie pour soutenir l'intuition.

Ainsi, Grassmann emploie dans certains cas un vocabulaire géométrique, mais souligne que le lecteur doit se dégager de la signification concrète de celui-ci ; par exemple les grandeurs d'extension du premier échelon pourront être appelées segments (Strecke) ; Grassmann indique en note à ce propos qu'il ne faut pas s'attacher à la signification concrète de ces dénominations. Cependant il est clair que cet emploi du langage géométrique ne peut être anodin ; ainsi dans le chapitre 5 de la première section, l'application à la géométrie conduit Grassmann à écrire :

" Comme les théorèmes qui se laissent établir sur les projections et sur les systèmes de direction en géométrie sont déjà entièrement établis dans notre science sous la forme dans laquelle ils devaient être exprimés pour la géométrie, nous pouvons donc nous épargner ici leur répétition . " (ibid., p.91)

Le choix de vocabulaire est tel que les théorèmes dans le cadre général et leur traduction dans le seul cadre géométrique sont les mêmes. Il devient évidemment difficile dans ces conditions pour le lecteur de continuer à bien différencier géométrie et théorie des formes, et à limiter le rapprochement à la structure sur laquelle doit porter l'analogie.

Nous observons à nouveau une forte identification entre géométrie et théorie des formes, identification due notamment au langage utilisé, dans le premier chapitre de la deuxième section, lors de l'application à la géométrie :

" Si nous voulons appliquer à la géométrie les résultats obtenus dans ce chapitre, alors il nous suffit seulement d'imaginer des points à la place des éléments ; et si nous conservons ici avec la même signification les désignations introduites dans ce chapitre, notamment les désignations " poids, écart, grandeur élémentaire ", alors nous obtenons aussi les mêmes théorèmes. " (ibid., p.101)

La seule action que le lecteur effectue ici est donc d'imaginer des points à la place des éléments ; il n'est nullement évident qu'il contrôle ce remplacement imaginaire, et si Grassmann avait choisi le terme " point " pour désigner les éléments, toute possibilité d'un tel contrôle devenait exclue pour son lecteur.

Il arrive d'ailleurs à Grassmann lui-même d'employer dans un cadre général le mot "direction" (Richtung), réservé à la géométrie, à la place du mot "changement" (Änderung).

Par ailleurs l'Ausdehnunglehre comporte des dessins, qui sont utilisés tantôt pour illustrer une situation géométrique, par exemple dans des parties consacrées à l'application à la géométrie, tantôt dans le cadre de la théorie générale. Aucun commentaire particulier n'indique une différence de nature entre ces deux usages du dessin ; si Grassmann souligne comme nous l'avons vu ci-dessus que le nom de segment, attribué aux grandeurs d'extension, n'a aucune signification concrète, il représente ces segments par un trait sans aucune explication portant sur ce choix de représentation.

Si nous considérons, comme nous l'avons fait plus haut, un lecteur de la théorie des formes (indépendamment de ce qu'a réellement été le public de l'ouvrage), il lui sera donc extrêmement difficile d'utiliser la théorie des formes au-delà du simple cadre géométrique.

L'exemple de Peano que nous allons examiner maintenant va nous montrer d'une part l'importance de l'influence du modèle géométrique chez un lecteur de Grassmann, mais aussi d'autre part des facteurs qui permettent de limiter l'influence du modèle à l'analogie cherchée.

3. Giuseppe Peano

L'œuvre de Grassmann, d'un abord difficile, sera l'objet de critiques comme celle de Apelt, écrivant à Möbius :

" Le caractère essentiel de la connaissance mathématique, l'intuition, en semble être complètement bannie. Une telle Ausdehnunglehre abstraite, telle qu'il l'a cherchée, pourrait être développée uniquement à partir des concepts. Mais la source de la connaissance mathématique ne repose pas sur des concepts mais sur l'intuition." (Apelt cité par Flament 1994, p.13)

Cette remarque semble indiquer que les efforts déployés par Grassmann pour soutenir l'intuition de son lecteur n'ont manifestement pas atteint leur objectif (Möbius répondra d'ailleurs à Apelt qu'en effet, l'aspect intuitif fait totalement défaut à l'Ausdehnunglehre).

Mais cette réaction était marginale ; en fait l'Ausdehnunglehre fut essentiellement méconnue.

L'un des premiers mathématiciens à avoir pris la défense de Grassmann, et tenté de faire connaître la théorie de l'extension est Peano.

Il publie en 1888 : "*Calcolo geometrico secundo l'Ausdehnunglehre di H.Grassmann* ", livre dans lequel il développe la théorie de Grassmann restreinte au cadre géométrique.

Nous allons étudier ici le lien entre la géométrie et la théorie des formes dans le *Calcolo geometrico* mais aussi dans d'autres parties de l'œuvre de Peano, en soulignant les interventions de la géométrie, explicitées ou non par l'auteur.

3.1 Géométrie et théorie des formes chez Peano

Nous allons distinguer trois aspects de l'œuvre de Peano.

Tout d'abord le *Calcolo geometrico* et ses suites directes : *Gli elementi di Calcolo geometrico (1891)*, *Saggio di calcolo geometrico (1896)* ; puis les axiomatisations que Peano propose pour la géométrie, par exemple dans *I principii di geometrica, logicamente esposti (1889)*; *Sui fondamenti della geometria (1894)* ou *La geometria basata sulle idee di punto e distanza (1902)*, axiomatisations qui sont, comme nous le verrons, totalement indépendantes de la théorie des formes. Nous nous pencherons enfin sur l'article intitulé *Analisi della teoria dei vettori (1898)* article dans lequel Peano propose de fonder (au moins partiellement, et nous verrons dans quelle mesure) la géométrie sur la théorie des vecteurs.

Calcolo geometrico

Dans la préface du *Calcolo geometrico*, Peano explique ce qu'est selon lui le calcul géométrique, et quels sont les objectifs de son livre. Il écrit notamment :

" Le calcul géométrique présente des analogies avec la géométrie analytique ; ils diffèrent en ceci que, tandis que en géométrie analytique le calcul se fait sur des nombres qui déterminent les objets géométriques, dans cette nouvelle science le calcul s'effectue sur ces objets eux-mêmes. " (Peano 1888, préf. p.V)

Peano mentionne alors le projet de caractéristique géométrique de Leibniz ; en fait le projet de Peano est bien en deçà de celui de Leibniz ; ce dernier avait pour objectif de fonder une nouvelle géométrie, ce qui n'est pas le cas de Peano comme nous le verrons ci-dessous.

Peano cite également Möbius, Bellavitis, Hamilton et Grassmann. Il ajoute que la théorie de ce dernier contient toutes les autres, mais que son degré d'abstraction a empêché jusque-là sa diffusion, et même celle de ses applications à la géométrie ; d'où l'objectif du livre :

" L'objectif du présent livre est de les *(les applications à la géométrie)* exposer directement, et sous une forme accessible à tous ceux qui connaissent les fondements de la géométrie et de l'algèbre[3], basée sur quelques notations tirées de l'Ausdehnunglehre, et d'en développer les principales conséquences. " (ibid. p.VI)

L'essentiel est annoncé dans cette citation : Peano veut présenter les applications à la géométrie de la théorie des formes, d'une manière qui soit accessible au lecteur. Mais le calcul géométrique n'a en aucun cas pour objectif de fonder la géométrie ; au contraire les fondements de la géométrie apparaissent comme des prérequis.

Il ne s'agit donc pas ici de la partie " géométrique " de l'Ausdehnunglehre, dans laquelle nous avons vu que la géométrie jouait plusieurs rôles ; dans ce livre la géométrie est une science indépendante de la théorie des formes et n'apparaît pas comme application de celle-ci.

Il paraît également clair, à la lecture de cette citation, que la part de la théorie des formes qui sera présentée sera très restreinte ("quelques notations"). Il ne s'agit pas ici d'appliquer à la géométrie une théorie plus vaste, exposée préalablement ou supposée connue ; dans ce livre, Peano ne définira les objets de la théorie des formes que dans le cadre géométrique.

Ainsi il définit les formations de première espèce comme les expressions de la forme $mA+nB+\ldots$(A, B,... sont des points, et $m,n,\ldots$ sont des réels) et les vecteurs comme les formations de première espèce de la forme B-A (c'est à dire de masse nulle).

De même les formations de seconde espèce sont les expressions de la forme $ma+nb+\ldots$ où a et b sont des lignes ; pour la troisième espèce a et b représenteront des surfaces et pour la quatrième des volumes.

Les opérations définies par Grassmann : somme, produit extérieur, produit descendu etc... sont présentées sur ces objets.

Seul le dernier chapitre du livre propose une approche très générale et originale ; nous y reviendrons en détail dans le paragraphe suivant.

Gli elementi di Calcolo geometrico(1891), et *Saggio di calcolo geometrico (1896)* prolongent le *Calcolo geometrico.* Dans l'introduction de *Saggio di calcolo geometrico,* Peano rappelle ainsi le contenu du *Calcolo geometrico* :

" En partant de ces applications *(applications de la théorie des formes à la géométrie)* il me fut possible de reconstruire la théorie et de donner la définition des objets introduits en faisant simplement usage de la géométrie élémentaire " (Peano 1896, p.169)[4]

On retrouve là les deux aspects que nous avons soulignés : la géométrie élémentaire est un prérequis ; la théorie de Peano (qu'il désignera plus tard comme théorie des vecteurs) est construite à partir de cette géométrie.

---

[3] C'est nous qui soulignons

[4]Les numéros de page revoient aux œuvres complètes de Peano [Peano 1958] ; la traduction est effectuée par nos soins.

Axiomatisations de la géométrie

Peano propose successivement plusieurs axiomatisations de la géométrie ; celles que nous examinerons ici ne font pas intervenir les vecteurs. Nous n'exposerons pas le détail de ces différentes propositions ; nous nous contenterons de souligner dans celles-ci le rôle joué par le rapport avec l'espace physique et l'intuition de l'espace.

Dans la préface de *I principii di geometria, logicamente esposti (1889),* Peano pose les questions qui sous-tendront l'ensemble de ses travaux sur l'axiomatisation de la géométrie :

" Quels sont les objets géométriques qui peuvent être définis, et quels sont ceux que nous devons prendre sans définition ? Et parmi les propriétés, expérimentalement vraies, de ces objets, lesquelles devons-nous admettre sans démonstration, et lesquelles peuvent être déduites ? L'analyse de ces questions, qui appartiennent en même temps à la logique et à la géométrie, forme l'objet de cet article. " (Peano 1889, p.56)

Peano expose dans cet article les fondements de ce qu'il appelle " la géométrie de position ", qui ne contient pas de concept de mouvement. Il part pour cela des entités de point et de segment (retta limitata), qui seront les objets non définis dont il a été question plus haut, ainsi que de deux axiomes portant sur les segments et de trois axiomes sur l'égalité.

Peano explique ensuite très précisément ce qu'il entend par " définition " : un objet x est défini s'il est possible de former à partir d'objets connus une expression a qui vérifie a=x. Il précise alors que son choix des objets non définis n'est pas arbitraire ; il n'aurait pas pu fonder la géométrie, par exemple, sur les concepts de point et de droite.

De même, Peano expose en détail ce qu'il entend par une démonstration ; il critique le point de vue rationaliste, en citant Duhamel (1875) : "La déduction se fait par le sentiment de l'évidence, qui n'a besoin d'aucune règle, et ne peut être suppléé par aucune " et en disant que ce sentiment d'évidence n'a rien d'absolu, et qu'il peut varier suivant les démonstrations et les individus. C'est pourquoi il a choisi lui-même de s'appuyer sur les règles de la logique, règles dont il dit qu'il les a pour l'essentiel empruntées à Boole. La suite de l'article consiste en une liste de propriétés énoncées à l'aide de symboles logiques.

Nous voyons ici se manifester les deux aspects caractéristiques de l'œuvre de Peano.

Défenseur de la logique et de la méthode axiomatique, Peano s'élève contre les rationalistes.

Mais il garde une conception réaliste de la géométrie ; celle-ci est liée à l'espace physique dont elle traduit des propriétés expérimentalement vraies, et il y a donc dans les fondements de la géométrie des objets qui ne peuvent être définis.

Ce point de vue sera encore précisé dans la suite de ses travaux.

Dans *Sui fondamenti della geometria (1894)*, Peano écrit qu'il faut distinguer en géométrie les idées *primitives*, qui ne peuvent pas être définies, et les idées *dérivées* qui peuvent être définies (il rappelle le sens qu'il attribue au verbe définir).

Le nombre des idées primitives doit être aussi réduit que possible ; ces idées sont selon l'auteur des idées très simples, communes à tous les hommes, et qu'il faut avoir en tête en commençant l'étude de la géométrie, contrairement aux idées dérivées.

Peano fait référence à Pasch, et aux *Vorlesungen über neuere Geometrie (1882)*, mais là où Pasch utilisait trois notions primitives, lui ne va en employer que deux : le point et le segment. Le début de l'article reprend le contenu de *I principii di geometria, logicamente esposti (1889)* ; puis Peano ajoute ce qui concerne le mouvement.

Ainsi Peano cherche à élaborer une géométrie qui est un modèle abstrait de l'espace physique, et dont l'espace physique fournit un modèle intuitif extramathématique.

Les fondements de sa théorie, les idées primitives, qu'elles portent sur des objets ou sur des propriétés, sont fournies par l'emploi de ce modèle extramathématique ; le reste est une application de principes logiques.

Rappelons enfin que, bien que ces approches de la géométrie soient postérieures au *Calcolo Geometrico*, aucune référence à celui-ci n'apparaît dans les articles cités ci-dessus. Ceci n'est pas surprenant, puisque l'objectif du *Calcolo Geometrico* n'était nullement de fonder la géométrie.

Cependant nous allons voir maintenant que Peano a également écrit un article dans lequel il propose une approche de la géométrie à l'aide des vecteurs.

La géométrie fondée sur la théorie des vecteurs

Examinant l'axiomatisation progressive de l'algèbre linéaire, Moore écrit à propos de Peano, et plus particulièrement à propos de l'approche axiomatique développée dans le dernier chapitre du *Calcolo Geometrico* :

" L'une des raisons pour lesquelles l'axiomatisation des systèmes linéaires que Peano a proposée en 1888 eut un impact si limité est qu'un revirement important apparu dans son approche des vecteurs en 1898. Pendant les dix années qui précédaient, il avait traité les vecteurs en présupposant la géométrie, définissant classiquement un vecteur comme un segment orienté. Maintenant il inversait le processus, et décidait d'axiomatiser la géométrie en utilisant les vecteurs. " (Moore 1995, p.271)

Nous allons voir en effet que dans *Analisi della teoria dei vettori (1898)*, Peano fonde la géométrie sur les vecteurs ; mais il nous semble également important de souligner pour notre étude que dans cet article les vecteurs eux-mêmes sont définis à l'aide d'un modèle issu de l'espace physique.

Peano écrit en introduction :

" Pour exposer la théorie des vecteurs et le calcul géométrique nous avons présupposé de vastes connaissances de géométrie. Mon propos dans ce travail est d'examiner quelles idées sont rencontrées dans la théorie des vecteurs, et de les classer en idées primitives, qui sont obtenues par observation de l'espace physique, et en idées dérivées dont les définitions sont données ; et d'examiner quelles sont les propositions que nous devons prendre comme primitives, et quelles sont celles qui peuvent être déduites par des processus purement logiques sans autre recours à l'intuition [intuizione].

Ainsi la théorie des vecteurs est développée sans présupposer aucune étude géométrique précédente. Et donc avec cette théorie toute la géométrie peut être traitée ; il en résulte la possibilité théorique de substituer la théorie des vecteurs à la géométrie élémentaire elle-même. " (Peano 1898, p.185)

Nous retrouvons ici la séparation entre idées primitives et idées dérivées, et le fait que la théorie des vecteurs sera fondée sur l'observation de l'espace physique, observation que Peano lui-même désigne ici comme une intuition, puis par la suite comme intuition géométrique, et que nous avons nommée intuition de l'espace.

Les idées primitives choisies ici sont l'idée de point, et la relation " d'équidifférence ": a-b=c-d entre quatre points. Peano propose alors 11 axiomes, dont la vérité est selon lui basée sur l'observation de l'espace physique. Nous pouvons relever parmi ces axiomes les exemples suivants, pour lesquels Peano fait explicitement référence à une intuition qu'il désigne comme géométrique.

Les vecteurs sont les expressions de la forme b-a ; la somme d'un vecteur u et d'un point a est le point b tel que b-a=u. Peano prouve l'unicité de b ; à propos de l'existence, il dit qu'elle est une conséquence évidente de l'intuition géométrique (et il s'agit donc d'une proposition primitive).

De même lorsqu'au paragraphe suivant il se penche sur le produit d'un vecteur par un nombre entier, il attribue à l'intuition géométrique la propriété disant que le produit par un nombre du vecteur nul est le vecteur nul.

Pour passer au produit par un rationnel, il considère un entier a non nul et un vecteur u, u/a est le vecteur v vérifiant av=u ; là encore, l'existence de v repose sur l'intuition géométrique (Peano reporte l'extension aux irrationnels après l'exposition des idées de distance et de limite).

L'auteur définit ensuite la notion de produit interne de deux vecteurs, qui le conduira à la distance, lui permettant ainsi de déduire la géométrie métrique.

Il signale que cette déduction est possible, mais il ne l'effectue pas dans l'article ; en revanche il exposera en 1902 une axiomatisation de la géométrie fondée sur les notions de point et de distance, et qui montre donc la possibilité de cette déduction.

En termes modernes, on peut dire que dans *Analisi della teoria dei vettori*, Peano présente les axiomes d'un espace vectoriel euclidien de dimension 3 , auquel est associé un espace affine ; mais ici l'espace affine est l'espace physique, ses points ont une signification concrète, antérieure à l'espace vectoriel et qui fonde celui-ci.

L'intuition géométrique, la théorie des vecteurs et la géométrie

Comme nous l'avons déjà souligné plus haut, il existe pour Peano en géométrie des idées primitives, c'est à dire des objets qui ne peuvent être définis, ou des propriétés qui doivent être prises comme axiomes. Il faut choisir judicieusement ces idées, en particulier afin de réduire leur nombre autant que possible.

L'intuition qu'il désigne comme géométrique, et qui relève selon notre terminologie de l'intuition de l'espace, assure la vérité de ces idées.

D'après Peano, il est possible de donner différentes présentations axiomatiques de la géométrie, suivant les idées primitives choisies.

On peut notamment fonder la géométrie sur la théorie des vecteurs ; mais on peut également proposer un fondement de la géométrie indépendant des vecteurs, et déduire ceux-ci ensuite.

Peano n'indique pas de préférence pour l'une ou l'autre approche.

Par ailleurs, dans les deux cas, l'intuition de l'espace assurera la vérité des propositions primitives ; on ne peut donc pas dire qu'il y ait une approche qui soit plus intuitive que l'autre.

3.2 Dépasser le modèle géométrique ?

Dans les aspects de l'œuvre de Peano que nous avons examinés, nous n'avons pas encore observé d'interventions de l'intuition géométrique selon le sens que nous avons attribué à ce terme. Ceci provient du choix de limitation au cadre géométrique : l'ambition de Peano n'est pas de présenter une théorie générale, que l'on pourrait en particulier appliquer à la géométrie, mais une théorie faisant partie de la géométrie. Il ne sera donc pas conduit à employer des analogies avec la géométrie, ou à donner des exemples géométriques.

Peano utilise en deux occasions la théorie de Grassmann hors du cadre géométrique : dans le dernier chapitre du *Calcolo geometrico*, où il propose une définition axiomatique des *systèmes linéaires*, c'est à dire des espaces vectoriels, puis dans un article intitulé *Intégration par séries des équtions différentielles linéaires*, article dans lequel il utilise cette théorie des systèmes linéaires.

Nous allons examiner ici le contenu du dernier chapitre du *Calcolo geometrico*, et essayer de préciser en particulier le rôle qu'y joue la théorie géométrique que Peano a développée dans les chapitres précédents.

Le calcul géométrique et les systèmes linéaires : contenu du chapitre IX du "Calcolo geometrico".

La définition axiomatique de système linéaire porte uniquement sur les propriétés des lois ; elle ne comporte aucun vocabulaire géométrique, tout comme les définitions de dépendance et de dimension données ensuite. Rien ne peut laisser supposer que ces définitions proviennent d'une quelconque analogie avec la géométrie.

En revanche, les exemples qui suivent sont essentiellement tirés du "calcul géométrique" : si Peano cite les nombres réels et complexes, il met surtout l'accent sur les formations d'espèce quelconque de l'espace, les formations de première espèce d'une droite ou du plan, les vecteurs d'un plan ou de l'espace ; il signale que l'ensemble des points de l'espace ne constitue pas un système linéaire.

A la fin du chapitre, dans la partie intitulée "Applications", Peano donne également l'exemple des polynômes : l'ensemble des polynômes de degré inférieur ou égal à n est un système linéaire de dimension n+1, l'ensemble de tous les polynômes est un système linéaire de dimension infinie. On peut se demander si cet exemple, placé en dehors de l'exposé de la théorie, n'est pas plutôt relié à la fin du chapitre, qui appartient au champ de l'analyse.

Le vocabulaire du calcul géométrique est utilisé pour la première fois avec la définition des coordonnées ; d'ailleurs Peano souligne que la notion qu'il définit dans un cadre général coïncide, pour les formations de première espèce d'une droite, pour les vecteurs d'un plan etc...avec la définition de coordonnée vue auparavant.

La donnée de cette définition marque le début de l'emploi d'analogies avec ce qui a été vu dans les chapitres précédents, c'est à dire dans le cadre géométrique.

Il est clair que les coordonnées permettent d'étendre automatiquement tout résultat portant sur des objets géométriques appartenant à un système de dimension n à des objets généraux appartenant à un système de la même dimension. Mais elles permettent également de s'affranchir des limitations de dimension attachées aux objets géométriques. Ainsi Peano va pouvoir parler de limite dans un système linéaire ; en fait il semble que l'objectif principal de l'auteur dans ce chapitre soit de généraliser le calcul infinitésimal à des fonctions allant d'un système linéaire dans un autre, ce qui explique le titre du chapitre : "Trasformazioni di sistemi lineari".

Il va utiliser pleinement l'analogie permise par les coordonnées pour définir les dérivées successives, l'intégrale d'un "élément variable d'un système linéaire, fonction d'une variable réelle" en écrivant simplement que les définitions données et les théorèmes démontrés dans les chapitres précédents sont directement applicables.

Il donne ensuite la définition d'application linéaire, et les opérations sur les applications linéaires ; il souligne qu'il dispose alors d'un nouvel exemple de système linéaire : l'ensemble des applications linéaires d'un système A dans un système B.

Cette présentation est encore motivée par le même objectif de calcul différentiel : les opérations sur les applications linéaires vont lui permettre de définir l'exponentielle d'une application linéaire R, et donc de donner la solution d'une équation différentielle y'=Ry, où y est une fonction de $\mathbb{R}$ dans un système linéaire quelconque.

Origine des systèmes linéaires et influence du modèle géométrique

Le dernier chapitre du *Calcolo geometrico* n'est pas entièrement déconnecté des précédents : des exemples y sont donnés, des analogies faites en utilisant ce qui a été vu auparavant.

Toutefois ce chapitre reste à part dans le livre, et il n'est pas une conséquence "naturelle" des autres, comme l'écrit Dorier :

"Si on ne connaît pas le travail de Grassmann, il est difficile d'imaginer comment le dernier chapitre a pu être issu des seules idées développées auparavant, même si Peano s'applique à montrer comment ce qu'il a présenté de la théorie de Grassmann peut a posteriori s'interpréter dans l'approche axiomatique. De fait, l'approche axiomatique proposée par Peano est issue autant de sa lecture de l'Ausdehnunglehre que de ses propres travaux et réflexions autour des questions de logique et de formalisme en mathématique."(Dorier et al. 1997, p.63)

En effet la portée du calcul géométrique présenté par Peano est beaucoup trop limitée pour permettre une approche aussi générale, et il semble que l'origine de celle-ci, et de la présentation axiomatique, soit plutôt à chercher dans les travaux de Grassmann. L'intérêt de Peano pour le calcul différentiel lui permet également de donner à la suite de cette présentation des exemples et propriétés sortant du cadre purement géométrique. Le calcul géométrique développé dans les premiers chapitres servira alors de modèle analogique pour ces propriétés générales ; mais l'analogie, comme nous l'avons vu, porte sur les coordonnées dans une base. Ainsi le modèle sous-jacent, pour la partie géométrique comme pour la théorie générale, est simplement celui de $\mathbb{R}^n$, ce qui est paradoxal pour un livre dont l'objectif affiché était de présenter un calcul géométrique intrinsèque.

Par ailleurs, Dorier montre également que dans l'approche de Peano, il existe une ambiguïté sur le concept de dimension : étant donné un système linéaire à n dimensions, la théorie de Peano ne permet pas d'affirmer que celui-ci n'admet pas une base formée de moins de n éléments.

Dorier propose cette interprétation de ce défaut de la théorie :

"Dans l'approche de Peano, l'aspect de génération est occulté, l'axiomatisation suppose que le système est donné a priori. Ainsi le nombre de dimensions apparaît plus comme la limite des degrés de liberté au sein du système que comme une mesure d'extension. Ce point de vue est certainement renforcé par l'analogie avec le modèle géométrique. En effet les trois dimensions de l'espace géométrique sont plus couramment vues comme une limite du nombre de directions indépendantes que comme la mesure d'un accroissement progressif à partir d'un point puis d'une droite et enfin d'un plan." (Dorier et al. 1997, p.64)

Cette analyse peut être considérée du point de vue de l'approche psychologique de l'intuition.

Selon Fischbein, toute structure axiomatique est associée à un modèle (dans ce cas il s'agit d'un modèle analogique) permettant au raisonnement de s'appuyer sur des faits apparemment évidents. C'est le calcul géométrique qui joue ce rôle de modèle chez Peano. Mais ce calcul est lui-même associé, comme nous l'avons vu, au modèle de l'espace physique.

Ce dernier modèle, extramathématique, introduit des éléments parasites comme celui que mentionne Dorier, et entraîne des insuffisances dans la théorie.

Mais nous devons de plus souligner que cet attachement au modèle géométrique ne provient pas, selon nous, du choix de présentation géométrique fait par Peano.

L'une des sources probables du dernier chapitre du *Calcolo geometrico* est la lecture de Grassmann; et il est donc possible que le modèle qui agit ici soit le modèle géométrique proposé par Grassmann.

D'une part ce modèle conduit Peano à limiter l'essentiel de sa présentation à la géométrie. D'autre part, lorsque son intérêt pour le calcul différentiel et ses recherches sur la logique permettent à Peano de dépasser le cadre géométrique, ce modèle limite le développement de la théorie.

4. Autres approches axiomatiques

4.1 Salvatore Pincherle

Les différents travaux que nous avons examinés jusqu'à présent ont plusieurs traits en commun.

Leurs auteurs poursuivent un même objectif de recherche d'un calcul géométrique.

Cet objectif s'inscrit pour chacun dans un projet plus vaste : caractéristique universelle pour Leibniz, science du temps pur pour Hamilton, théorie générale des formes pour Grassmann, logique et axiomatique pour Peano.

L'existence de ce projet est fondamentale dans les travaux de ces auteurs ; cependant le modèle géométrique y reste la référence centrale (et il s'agit alors d'une géométrie directement liée à l'espace physique).

La notion d'ensemble muni d'une structure linéaire se dégage progressivement de ces différentes approches ; l'axiomatique proposée par Peano est très proche de la définition moderne d'espace vectoriel.

Le travail de Salvatore Pincherle s'inscrit dans la lignée de celui de Peano ; mais comme nous allons le voir ci-dessous, les résultats obtenus par Pincherle dépassent nettement ceux de Peano. Pincherle publie en 1901 un traité intitulé "*Le operazioni distributive e le loro applicazioni all'analisi*" ; l'objectif de Pincherle est l'étude de problèmes linéaires en analyse, en particulier d'équations différentielles. Il développe dans ce traité une théorie axiomatique de ce qu'il nomme les ensembles linéaires, en dimension finie comme en dimension infinie.

Cette théorie est beaucoup plus complète que celle de Peano ; d'une part Pincherle donne plus de résultats théoriques que Peano, et d'autre part il applique ceux-ci à un champ plus vaste. La théorie de Pincherle semble moins fondée sur la géométrie (bien qu'il soit, comme nous l'avons souligné ci-dessus, difficile d'identifier l'origine de l'axiomatique proposée par Peano), mais le langage géométrique y joue un rôle fondamental.

Nous allons essayer de dégager ici les caractéristiques du rôle de la géométrie dans ce traité.

Pincherle expose son objectif en introduction ; il souligne l'importance de la possiblité d'un calcul symbolique, dans différentes branches des mathématiques, et en particulier dans le cadre vectoriel (c'est à ce sujet qu'il cite Grassmann et Peano) ; un tel calcul permet selon lui des évolutions nouvelles de la théorie. Il souhaite donc développer un calcul symbolique portant sur les fonctions.

Pincherle va utiliser comme référence un modèle géométrique ; mais il s'agit d'une géométrie déjà structurée, une géométrie "linéaire" issue des travaux que nous avons examinés plus haut. Alors que Peano n'employait le terme "spazio" que pour désigner l'espace usuel de la géométrie élémentaire, Pincherle va immédiatement utiliser le terme "spazio lineari" dans un cadre général.

Il dit avoir remarqué dans un premier temps que, comme les fonctions analytiques d'une variable peuvent être caractérisées par un nombre dénombrable de paramètres, on peut considérer l'ensemble de leurs combinaisons linéaires comme un espace de dimension infinie, mais dénombrable : le terme d'espace est alors dégagé de toute relation avec un concept physique.

Cette approche, très originale pour l'époque, repose donc au départ sur une analogie de type analytique et sur la notion de coordonnées.

Mais Pincherle se tourne aussitôt vers la recherche d'un aspect synthétique ; il écrit :

"Les opérations distributives applicables aux fonctions d'une même classe se présentent alors comme une généralisation naturelle de ce que sont les homographies dans les espaces linéaires ayant un nombre fini de dimensions ; et ce concept, d'autant plus qu'il est doté d'une notation simple et expressive, permettra d'induire dans un mode synthétique, et avec l'aide d'une analogie continuelle avec la géométrie, de multiples relations de composition, de décomposition, de classification en groupes, de transformations de telles opérations." (Pincherle 1901, préface, iii)

(Les opérations distributives, comme les homographies, désignent ici des applications linéaires).

Il indique donc explicitement qu'il va employer le modèle géométrique, et que l'un des avantages de cet emploi est la possibilité d'une approche synthétique ; d'autre part les transformations joueront un rôle central dans l'analogie.

Dans le premier chapitre, Pincherle donne une définition axiomatique de la notion d'ensemble linéaire, qui sera également appelé "espace linéaire". Le premier exemple qu'il propose est celui des vecteurs de l'espace, exemple choisi , selon lui, pour "rendre intuitive la notion de système linéaire" (Pincherle 1901, p.4).

Ici le modèle géométrique est donc employé à l'intention du lecteur, pour servir l'intuition. Pincherle insiste sur cet usage, et en particulier sur l'emploi du langage géométrique. Il écrit notamment :

"L'étude des éléments des systèmes linéaires est particulièrement simplifiée avec le langage géométrique, auquel nous sommes conduits par les considérations suivantes. Dans le cas où n=2 ou 3, nous pouvons représenter l'ensemble linéaire avec les vecteurs d'un plan, ou de l'espace ordinaire, ayant une extémité commune en un point donné (*origine*). Chacun de ces vecteurs et alors caractérisé par la donnée de l'autre extrémité ; on peut alors de cette manière substituer l'ensemble des points à celui des vecteurs. Par analogie, les éléments de S peuvent alors être pensés comme des *vecteurs* ayant une extrémité commune ; S_n comme un ensemble (ou *espace*) de *vecteurs*, ou encore de *points*, à n dimensions." (Pincherle 1901, p.9)

On observe ici plusieurs interventions de l'intuition géométrique. Tout d'abord l'ensemble des vecteurs du plan ou de l'espace pointé est utilisé comme modèle pour un ensemble linéaire quelconque de dimension 2 ou 3 ; puis, "par analogie" on passe à l'ensemble le plus général, éventuellement même de dimension infinie.

L'emploi du langage géométrique est central dans le traité ; lorsque Pincherle examine les sous-espaces de dimension 1, 2 et $(n-1)$ d'un espace de dimension n, il nomme ceux-ci respectivement droite, plan et hyperplan. Plus précisément, il signale d'abord qu'un ensemble linéaire de dimension 1 "peut être pensé comme un ensemble de vecteurs ayant une origine commune et disposés selon une droite" ; il désigne alors un ensemble linéaire de dimension 1 par le terme de droite. Le même procédé conduit à nommer "plan" un ensemble linéaire de dimension 2.

Pour la dimension $(n-1)$, il n'est pas question de représentation géométrique, mais, selon les termes mêmes de Pincherle, de l'emploi du langage de l'hypergéométrie, qui conduit à désigner un sous-espace de dimension $(n-1)$ comme un hyperplan passant par l'origine. L'hyperplan fait l'objet d'une étude particulière, de type analytique, qui mène à donner l'équation d'un hyperplan.

On trouve donc chez Pincherle le vocabulaire qui est utilisé de nos jours en algèbre linéaire, ce qui n'était pas le cas dans les travaux de Grassmann, ni dans ceux de Peano.

Le terme de vecteur est dû à Hamilton ; ce terme joue un rôle essentiel dans les travaux de Hamilton, mais il n'apparaît que dans un cadre géométrique ; Grassmann utilise les mots "segment", "direction", "coordonnées" dans sa théorie générale, mais nous avons vu qu'il tente de garder une distance suffisante avec le modèle géométrique, qui semble le conduire à éviter un emploi systématique du langage géométrique. Quant à Peano, le seul terme géométrique qu'il emploie dans un cadre général est celui de coordonnées.

Pincherle emploie les mots "espace", "vecteur", "longueur", "direction", "coordonnées", "droite", "plan"... Ces termes apparaissent d'abord dans un cadre géométrique, lorsque Pincherle montre que "l'insieme di tutti vettori dello spazio ordinario" (l'ensemble de tous les vecteurs de l'espace ordinaire) vérifie bien les axiomes définissant un ensemble linéaire. Puis, par analogie (le terme est de Pincherle), ces mots seront employés dans le cadre d'un ensemble linéaire général.

Le vocabulaire géométrique est une des originalités du travail de Pincherle ; mais il faut rappeler que ce vocabulaire renvoie à une géométrie déjà linéarisée, et donc différente de celle qui servait de référence dans les travaux des auteurs cités ci-dessus. Pincherle dit clairement qu'il choisit d'employer le vocabulaire géométrique pour rendre plus intuitives les notions générales présentées ; le fait que les termes employés en géométrie puissent être utilisés dans le cas d'un ensemble linéaire quelconque apparaît comme conséquence d'une analogie "naturelle".

Il ne tente pas, comme le faisait par exemple Grassmann, de garder ses distances vis-à-vis du modèle géométrique ; en effet, son objectif étant le développement d'un calcul symbolique portant sur les fonctions, les concepts qu'il étudie ne risquent pas d'être limités par une approche trop géométrique.

4.2 Hermann Weyl

En 1918, Hermann Weyl donne dans son livre "Temps, Espace, Matière", dont l'objectif est de présenter une théorie de la relativité, une définition axiomatique des notions d'espace vectoriel et d'espace affine.

Les choix effectués par Weyl, en particulier en ce qui concerne l'usage qu'il fait de la géométrie dans ce livre, sont guidés par ses positions philosophiques, notamment sur le rôle de l'intuition ; dans la préface de l'édition française de 1958, Bouligand rappelle l'attrait de Weyl pour les idées de Husserl.

Le premier chapitre du livre, consacré à l'espace euclidien, commence par une présentation de la géométrie affine issue de l'intuition de l'espace. Celle-ci repose sur les notions d'égalité, que Weyl nomme également congruence, et de continuum. L'idée d'égalité est intimement liée à celle de transformation ; en effet, Weyl écrit :

"Lorsqu'une chose reste identique à elle-même, et qu'on peut imaginer qu'elle occupe une autre place S' que celle S où on la considère dans l'espace, on dira que S' est égal ou congruent à S"(Weyl 1918, p.9)

La transformation associée (celle qui envoie un point P de S sur le point P' de S' correspondant) est appelée une représentation congruente. Parmi ces représentations, Weyl distingue en particulier les translations ; une translation est caractérisée par le fait qu'elle transforme chaque droite d'une famille de droites parallèles en une droite de cette famille.

Ces résultats sont établis dans le premier paragraphe du chapitre, paragraphe que Weyl conclut en écrivant :

"L'intuition [Anschauung] nous ayant donné les notions nécessaires, nous entrons de suite dans le domaine de la mathématique déductive."(Weyl 1918, p.13)

Il désigne alors les translations de l'espace sous le nom de vecteurs ; l'application successive de deux translations est directement appelée somme de ces translations.

La somme permet de passer au produit par un entier positif ; la translation inverse de ***a*** est alors -***a***, ce qui conduit au produit d'un vecteur par un entier quelconque, puis par un rationnel, et par continuité au produit par un réel. Ceci permet alors de donner les axiomes, que Weyl désigne comme axiomes de la géométrie affine, et qui correspondent à la définition axiomatique moderne d'espace vectoriel ; toutefois Weyl se limite à la dimension finie, en ajoutant un axiome de dimension : "Il y a n vecteurs linéairement indépendants, mais $(n+1)$ sont linéairement dépendants" (Weyl 1918, p.15).

Ici le sens du terme vecteur a été élargi : la considération des combinaisons linéaires de un, deux ou trois vecteurs linéairement indépendants de l'espace se prolonge à un nombre quelconque de vecteurs ; dans ce passage, l'indépendance linéaire perd son sens géométrique pour reposer uniquement sur la définition formelle correspondante.

L'ensemble des combinaisons linéaires de n vecteurs linéairement indépendants est appelé une multiplicité vectorielle à n dimensions ; n sera bien entendu égal à 1 pour la droite, à 2 pour le plan et à 3 pour l'espace, mais, comme Weyl le souligne :

"Il sera utile pour avoir une géométrie affine générale de laisser n indéterminé, car on voit ici -comme nous le verrons plus loin encore pour la géométrie complète- que dans la structure logique de l'espace, rien ne nous oblige logiquement à nous en tenir au nombre n=3. Dans le système d'axiomes, ce nombre n=3 n'a pas une signification essentielle et nous devons passer sur elle dans une théorie déductive systématique." (Weyl 1918, p.15)

Weyl passe donc à une dimension finie quelconque ; ce qui lui permet ce passage, c'est la possibilité d'effectuer des combinaisons linéaires (il ne s'agit pas d'un point de vue analytique, le terme "coordonnées" n'est pas employé à ce stade de la théorie) et de définir la notion d'indépendance linéaire d'un nombre quelconque de vecteurs. Il obtient ainsi une théorie qu'il nomme une géométrie, et dans laquelle il emploiera le vocabulaire géométrique : *parallèle*, *coordonnées* ; il parle même de *parallélépipède* à n dimensions.

Pour justifier la possibilité d'une telle géométrie (à n dimensions, avec $n > 3$), Weyl cite d'abord l'exemple d'un mélange gazeux de quatre composants, puis celui d'une machine à calculer formée par des boules se déplaçant sur cinq barres. Mais l'exemple le plus important est selon lui la théorie des équations linéaires. Il montre d'abord que $\mathbb{R}^n$ vérifie bien son système d'axiomes, puis que l'ensemble des solutions dans $\mathbb{R}^n$ d'un système linéaire formé de ***h*** équations indépendantes est "une multiplicité vectorielle linéaire à ***n-h*** dimensions".

Rappelons qu'il s'agit encore, à cet endroit du livre, de donner des exemples justifiant la possibilité d'une géométrie à n dimensions ; tous les exemples donnés reposent sur un point de vue analytique, les exemples de $\mathbb{R}^n$ et des équations sont centraux.

Weyl signale alors qu'une démarche inverse aurait pu être envisagée :

"On aurait pu édifier le système d'axiomes et les conséquences formelles que nous en avons tirées, d'une manière très naturelle, en n'ayant recours qu'à la théorie des équations linéaires, sans l'aide de la géométrie. Il serait même utile - à certains égards - de développer la théorie des équations linéaires sur une base axiomatique, et ensuite d'appliquer celle-ci à la géométrie. Cette théorie serait utile pour un ensemble d'opérations auxquelles s'appliquent les axiomes, et pas seulement aux systèmes de valeurs de n variables." (Weyl 1918, p.20)

Notons ici que le terme "géométrie" apparaissant dans cette citation désigne la géométrie de l'espace, et non plus la géométrie à n dimensions.

Ainsi, si Weyl débute par une forme intuitive de la géométrie de l'espace, qui le guide vers le choix de ses axiomes, s'il nomme la théorie obtenue "une géométrie à n dimensions", il ne fait pas de la géométrie un point de départ obligé de la théorie, ni même un moyen de rendre cette théorie plus intuitive.

Il n'utilise d'ailleurs le terme intuition que dans un sens phénoménologique d'appréhension immédiate de la réalité (en particulier il ne souligne pas, comme le faisait par exemple Grassmann, que l'emploi de la géométrie peut servir l'intuition) . Ainsi lorsqu'il présente la géométrie métrique, il signale qu'il va avoir recours à l'intuition, pour établir "l'axiome métrique", qui est la définition d'un produit scalaire. Avoir recours à l'intuition selon lui est établir les propriétés du produit scalaire dans l'espace ; il ne nomme pas "intuition" la généralisation qu'il fait de ces propriétés, généralisation qui est immédiate grâce à l'emploi du terme de vecteur.

Le sens qu'il attribue au terme "intuition" apparaît clairement dans la citation suivante :

"De tout cela, il découle que la géométrie affine appliquée à l'espace entier ne nous apprend qu'une seule chose, c'est que celui-ci forme un *domaine linéaire à trois dimensions.* Tous les faits particuliers que l'intuition nous fournit [anschaulichen einzeltatsachen], et que nous avons mentionnés dans le paragraphe 1), ne sont que des déguisements de cette simple vérité."(Weyl 1918, p.20)

L'intuition dont parle Weyl relève de ce que nous avons appelé intuition de l'espace.

Weyl élabore dans un premier temps une géométrie issue de cette intuition, et donc en particulier limitée à la dimension 3.

Il utilise ensuite l'intuition géométrique proprement dite en élaborant une théorie générale à partir du modèle des translations, fourni par cette première géométrie. Les éléments essentiels donnés par le modèle sont les axiomes, ainsi que les propriétés des combinaisons linéaires.

Weyl souligne le fait qu'ils auraient tout aussi bien pu provenir des propriétés de $\mathbb{R}^n$. Toutefois, dans une telle approche, il n'aurait probablement pas été conduit à employer le même vocabulaire géométrique ; on peut alors légitimement s'interroger sur les conséquences possibles d'un tel changement de langage.

5. Les espaces fonctionnels

Les travaux que nous avons examinés dans les parties 1, 2 et 3 furent essentiellement méconnus (en dehors de l'œuvre de Hamilton qui entraîna un important courant de recherches sur les quaternions); c'est en particulier le cas de ceux qui développaient une théorie proche de l'algèbre linéaire moderne, c'est à dire ceux de Grassmann et Peano.

Les travaux que nous allons étudier maintenant eurent au contraire un important retentissement, et un rôle essentiel dans l'émergence de l'algèbre linéaire.

De 1880 à 1932, de nombreux mathématiciens, parmi lesquels on peut citer Fredholm, Hilbert, Fréchet, Riesz, Schmidt, Wiener, Hahn et Banach firent évoluer le traitement des problèmes linéaires en analyse ; leurs recherches conduisirent notamment à dégager la notion d'espace vectoriel de fonctions, présentée de façon axiomatique et qui joua un rôle central dans le développement de l'algèbre linéaire moderne.

Nous n'avons pas l'intention de retracer ici le détail de cette évolution[5], mais d'étudier le rôle que la géométrie a joué dans celle-ci, en particulier comme facteur d'intuition.

Il ne s'agit donc plus maintenant du développement d'un modèle pour la géométrie, porté ou non par un projet philosophique, mais de la recherche d'un modèle théorique en analyse.

Dans ce que nous avons vu jusqu'alors, seuls les travaux de Pincherle relèvent d'une telle approche ; ce sont d'ailleurs aussi ceux qui fournissent les résultats les plus proches de l'algèbre linéaire moderne.

Nous distinguerons deux courants dans les travaux portant sur les espaces fonctionnels : l'un axé sur l'étude des espaces topologiques et des espaces normés, et l'autre axé sur les espaces de Hilbert. Nous dégagerons ensuite les caractéristiques de l'intervention de modèles géométriques dans les travaux examinés.

5.1 Espaces topologiques et espaces normés

En 1906, Maurice Fréchet développe dans sa thèse une première approche des espaces fonctionnels topologiques, sans toutefois se pencher sur la structure algébrique de ceux-ci.

C'est autour de 1920 que seront données indépendamment par Wiener, Hahn et Banach les premières définitions axiomatiques d'espaces vectoriels (ou affines) normés.

Wiener, Hahn et Banach manifestent une volonté d'unification de différents champs fonctionnels qui les conduit à établir des listes d'axiomes. L'exposé de ceux-ci est suivi d'exemples géométriques, mais le rôle éventuel de la géométrie, notamment dans le choix des axiomes, n'est pas explicité.

[5]Pour une étude précise de cette question, voir [Dorier 1996].

Fréchet reprend vers 1925 les définitions axiomatiques citées ci-dessus ; en 1928, il publie un ouvrage intitulé *Les espaces abstraits et leur théorie générale considérée comme une introduction à l'analyse générale*, dans lequel il donnera notamment une définition d'espace vectoriel normé s'inspirant de celles citées ci-dessus.

Dans cet ouvrage, Fréchet dresse un bilan d'une partie importante de ses recherches, assorti de commentaires sur sa démarche. L'intuition géométrique y joue un rôle fondamental et significatif pour notre étude ; c'est pourquoi nous allons nous pencher plus précisément sur le contenu de ce livre.

Nous examinerons dans un premier temps les déclarations de Fréchet à propos de l'intuition ; puis nous analyserons l'emploi qu'il fait d'un modèle analogique géométrique.

Intuition et analogies

Fréchet souligne explicitement l'importance de l'intuition en mathématiques d'une part, et celle des analogies comme facteurs d'intuition d'autre part.

Dans "Les espaces abstraits", il relate la découverte faite par Cantor d'une correspondance biunivoque entre le plan et la droite, qui remettait en cause l'idée de dimension liée aux coordonnées cartésiennes, et souligne le fait que les mathématiciens ne pouvaient accepter une conclusion aussi contraire à l'intuition. Il écrit à ce propos :

"L'attitude des mathématiciens à cet égard nous montre une fois de plus qu'ils obéissent, souvent inconsciemment, à cette loi : s'il faut se méfier de l'intuition dans l'établissement de la preuve, c'est elle et non la logique qui doit nous guider dans la direction à donner à nos recherches. Entre deux définitions, l'une vague, intuitive, fournie par l'expérience, l'autre précise et rigoureuse, c'est à la première qu'il faut attacher notre préférence, si les conséquences de la seconde montrent qu'elle ne se borne pas à donner une forme mathématique précise à la première, si elle l'a altérée d'une façon essentielle." (Fréchet 1928, p.25)

Il ne sera donc pas surprenant de constater que Fréchet lui-même fait un usage important de l'intuition ; en particulier son choix de définitions sera guidé par l'intuition, comme il le rappellera à plusieurs reprises dans son livre.

Le rôle attribué à l'intuition est précisé dans la préface du même ouvrage, dans laquelle Fréchet fait siennes les opinions de plusieurs mathématiciens. Tout d'abord, puisque son intention est d'établir une théorie générale, il donne une justification de cette démarche en citant Moore :

"L'existence d'analogies entre les traits principaux de diverses théories implique l'existence d'une théorie générale dont ces théories particulières ne sont que des rameaux et qui les unifie en ce qui concerne ces traits principaux" (Moore, cité par Fréchet, 1928, p.16)

En rapprochant ces propos de l'approche de Fischbein, on peut les interpréter en disant qu'en présence de deux théories mathématiques, dont l'une peut jouer pour l'autre le rôle de modèle analogique, il est légitime de supposer l'existence d'un modèle théorique commun au deux. Déterminer ce modèle, c'est saisir l'essence même de l'analogie, débarrassée d'éventuels éléments parasites. Fréchet souligne ce point en écrivant que la logique ne peut servir à choisir entre différentes généralisations celles qui s'avèreront intéressantes ; il cite à ce propos un mémoire de Lebesgue :

"Si l'on renonçait à avoir des vues directes, géométriques, intuitives, si l'on était réduit à la pure logique qui ne permet pas de choisir entre tout ce qui est exact, on ne penserait guère à bien des questions et certaines notions ... nous échapperaient complètement." (Lebesgue, cité par Fréchet 1928,p.18)

Ainsi donc l'intuition, après avoir suggéré l'existence d'une généralisation, permet de choisir parmi celles que l'on aura obtenues ; on notera dans la citation de Lebesgue l'apparition du terme géométrique, qui est employé comme synonyme d'intuitif.

Ici, il existe différents modèles pour lesquels l'auteur va tenter d'élaborer une théorie commune : celui des suites, celui des fonctions ... Mais les analogies entre ceux-ci, en l'absence d'un modèle géométrique n'auraient sans doute pas pu suffire comme facteurs d'intuition ; en effet, et comme nous l'avons déjà noté plus haut, seul le modèle géométrique, par son lien direct avec l'espace physique, offre au raisonnement un support d'apparence concrète, ce qui est essentiel pour l'intuition.

Avant de nous pencher plus précisément sur cette hypothèse, il nous faut mentionner un autre aspect, que Fréchet lui-même désigne comme fondamental : le rôle du langage comme facteur d'intuition. En effet, une fois les analogies mises à jour, montrant l'existence d'objets plus généraux, il s'agit, dit Fréchet, de nommer ceux-ci. Le choix d'une bonne terminologie est fondamental ; Fréchet partage à ce sujet les vues de Poincaré, c'est à dire qu'il pense que si les noms des objets ont été bien choisis, la généralisation des propriétés de l'un des modèles est immédiate.

Choix d'un modèle géométrique

Comme nous l'avons dit ci-dessus, Fréchet dispose de différents objets mathématiques : fonctions, suites ... Mais ceux-ci ne suffisent pas à dégager une structure générale, et il va utiliser un modèle géométrique. Il semble que Fréchet soit d'abord conduit à ce modèle par des aspects analytiques des objets qu'il étudie, aspects qui suggèrent un rapprochement avec les coordonnées. Il écrit dans sa thèse :

" On peut considérer les nombres de la suite qui définit chacun de ses éléments comme les coordonnées de cet élément envisagé comme un point d'un espace (E_ω) à une infinité dénombrable de dimensions. Il y a plusieurs avantages à opérer ainsi. D'abord l'avantage qui se présente toujours quand on emploie le langage géométrique si propice à l'intuition par les analogies qu'il fait naître." (Fréchet 1906, p.39)

Ainsi la notion de coordonnées conduit à l'emploi d'un langage géométrique, et suggère donc des analogies avec la géométrie. L'importance du modèle géométrique va être renforcée par deux éléments essentiels.

D'abord, si Fréchet mentionne dans un premier temps les coordonnées, il écrit aussi :

"C'est un artifice inutile de substituer à la fonction une suite infinie de nombres, qui, d'ailleurs, peut être choisie de plusieurs façons" (Fréchet 1928, p.5)

Il souhaite donc développer une approche synthétique ; or cette dualité analytique/synthétique existe déjà en géométrie (où elle est même fondamentale !).

Fréchet veut pouvoir traiter directement les lignes (les courbes) sans employer de paramètres ou de coordonnées, tout comme les tenants du calcul géométrique voulaient pouvoir effectuer des calculs directement sur les entités géométriques.

Un rapprochement avec la géométrie, même basé sur une analogie d'origine analytique, permet donc de supposer l'existence d'une telle approche synthétique des fonctions.

D'autre part, Fréchet souhaite donner un sens au mot "près", et ceci entre des éléments de diverses natures. Il est donc naturel de considérer la référence de la géométrie, puisque c'est le seul domaine dans lequel ce terme ait un sens jusque là.

S'il souligne l'utilité des analogies suggérées par la géométrie, Fréchet tente de maîtriser la place du modèle géométrique ; il indique bien que son intention n'est pas de fonder la géométrie, qui ne devra apparaître que comme "un produit dérivé de l'Analyse générale" ; il insiste également sur le fait qu'il obtient avec son analyse des résultats sur les fonctions, résultats indépendants de la géométrie.

Emploi du modèle géométrique par Fréchet

L'emploi du modèle géométrique, et du langage associé, vont permettre à Fréchet d'atteindre ces différents objectifs.

Comme nous l'avons vu dans une des citations données ci-dessus, les fonctions (ou les suites), vont pouvoir ainsi être considérées comme les *points d'un espace.* Ce point de vue est fondamental ; la fonction acquiert ainsi un statut d'objet, élément d'un espace dont il convient de déterminer les propriétés, la structure.

Mais avant même la recherche de cette structure, un autre aspect central est dégagé : c'est la possibilité de considérer des transformations de l'espace considéré. Ainsi Fréchet souligne le fait que si l'on considère une suite comme un point d'un ensemble, la somme de la série associée apparaît comme une *fonction de point* ; ceci permet de se pencher sur des fonctions de fonctions, dont le rôle sera primordial en analyse.

L'aspect "transformations" est fondamental dans l'œuvre de Fréchet ; lorsque celui-ci donne, en 1928, une définition axiomatique d'espace affine abstrait (s'inspirant des travaux de Banach et de Wiener), il mentionne aussitôt la possibilité d'effectuer dans ces espaces des translations et des homothéties.

D'autre part la définition donnée par Fréchet de la dimension repose sur les transformations, car elle est basée sur la possibilité de trouver une homéomorphie, c'est à dire une correspondance bicontinue, entre deux ensembles.

Ce dernier point nous amène à examiner la question de la distance, et le rôle du modèle géométrique dans l'évolution de cette notion.

Fréchet propose tout d'abord une définition de la continuité qui fait de celle-ci une notion intuitive au sens de Fischbein : les éléments d'un ensemble qui sont "près" d'un élément sont transformés en éléments qui sont "près" de l'image de cet élément (les ensembles qu'il étudiera ne seront pas nécessairement linéaires, il considérera ainsi des cercles, des réunions de segments etc ...)

Cette définition de la continuité sera précisée en premier lieu pour des ensembles de l'espace euclidien (il s'agit ici de celui qui correspond à la géométrie élémentaire), pour lesquels elle reposera sur la notion de distance prise "au sens vulgaire".

Dans le cadre des espaces à un nombre fini de dimensions, (l'exemple central est alors un système physique dépendant de plusieurs paramètres), la notion de dimension n'a pas de signification intuitive, et Fréchet va définir celle-ci en utilisant l'analogie avec le modèle géométrique.

On peut, écrit-il, considérer les paramètres définissant les objets du système physique comme les coordonnées de cet objet ; deux objets seront proches si leurs coordonnées le sont. Mais cette définition nécessite alors l'emploi de plusieurs nombres ; Fréchet écrit à ce sujet :

"Ne pourrait-on, sans essayer d'introduire une distance géométrique, conserver l'avantage de brièveté que présentait l'emploi de la distance en repérant le degré de petitesse du groupe de nombres dont nous avons parlé au moyen d'un seul nombre ?" (Fréchet 1928, p.55)

Il propose différentes expressions utilisant les coordonnées, et aboutit à quatre caractéristiques communes :

1) $PQ=QP \geq 0$

2) PQ n'est nul que si P et Q ne sont pas distincts

3) P et Q sont proches quand PQ est petit

4) $PQ \leq PR+RQ$

(Fréchet 1928, p.55)

On note qu'il subsiste dans cette définition une composante intuitive : la propriété 3) dépend en effet entièrement du système étudié.

Cependant Fréchet est parvenu, tout en utilisant l'analogie avec la géométrie qui le guide vers une notion de proximité "intrinsèque", c'est à dire caractérisée par un seul nombre, à se détacher de la distance euclidienne ; il souligne que celle-ci n'a aucune raison d'être préférée à une autre en dehors du cadre géométrique.

Une nouvelle étape dans cette définition de la distance est franchie lors de l'étude des espaces dont le type de dimension peut être infini. Dans ce cadre la propriété 3) ci-dessus est remplacée par une condition de convergence : une suite de points (A_p) converge vers un point A si et seulement si la distance A_pA tend vers 0 "avec 1/p".

Là encore, la définition reste intuitive, puisque la notion de convergence n'est pas définie ; l'auteur précise même qu'un problème central à se poser dans les espaces de fonctions est l'existence d'une distance compatible avec une notion de convergence donnée au préalable.

Fréchet va ensuite se pencher sur des espaces moins généraux ; la seule notion de distance ne permettant pas, par exemple, de définir la différentielle "c'est à dire une fonctionnelle linéaire approchée de l'accroissement". Sa référence sera encore l'espace euclidien ; il cherche les caractéristiques de celui-ci qui pourraient être transposées dans le cadre des espaces de fonctions pour permettre une telle étude.

C'est ainsi qu'il parvient à la notion "d'espace affine abstrait", catégorie d'espaces métriques comportant des propriétés analogues à celles des champs de vecteurs, et associés à un champ de vecteurs abstrait. Il donne de cette dernière notion d'abord une définition axiomatique, proche de la définition moderne d'espace vectoriel normé ; puis il propose une seconde définition, plus géométrique, afin dit-il de mieux "mettre en évidence les analogies d'un champ de vecteurs abstrait avec un champ de vecteurs euclidien".

Cette seconde définition est constituée d'axiomes proches des axiomes d'Euclide ; on pourra noter par exemple : "Par deux points abstraits distincts il passe une droite abstraite" ; en effet la géométrie qui sert de référence à Fréchet est, comme il le précise lui-même, la géométrie élémentaire.

Même s'il cite les espaces euclidiens comme premier exemple d'espace affine abstrait, à aucun moment Fréchet ne suggère de fonder la géométrie sur la théorie qu'il a développée. Les espaces euclidiens comme les espaces de fonctions gardent des propriétés qui leurs sont propres et sont indépendantes du modèle théorique qui leur est commun.

L'approche de Fréchet demeure essentiellement topologique ; sa définition de "type de dimensions" est par exemple fondée sur les homéomorphies ; lorsqu'il étudie le type de dimension des ensembles géométriques, il écrit que les "types de dimensions" de la droite, du plan et de l'espace euclidien seront désignés *par convention* par les chiffres 1, 2, et 3. Même s'il précise ensuite qu'il y a un lien entre ces chiffres et le nombre de coordonnées d'un point, il ne développera jamais de notions du type famille libre, ou base.

De ce point de vue, les travaux que nous allons examiner maintenant ont un apport plus important que ceux de Fréchet en ce qui concerne la structure linéaire.

5.2 Les espaces de Hilbert

5.2.1 Equations intégrales

Entre 1900 et 1910, les équations intégrales donnèrent lieu à de nombreux travaux, en particulier ceux de Hilbert. Hilbert utilise pour cette étude une méthode inspirée des travaux de Fredholm, et consistant à ramener la résolution des certaines équations intégrales à celle d'un système linéaire infini, en utilisant un système orthogonal de fonctions.

Hilbert lui-même n'emploie pas au début de ses travaux le terme orthogonal (nous verrons ci-dessous que ce terme est introduit par Schmidt ; celui-ci est un élève de Hilbert, mais l'approche qu'il propose s'oppose comme nous le verrons à celle de son maître).

La méthode de Hilbert, basée sur l'analogie avec la dimension finie (et en particulier sur les propriétés des formes quadratiques) reste délibérément très analytique et ne comporte pas de point de vue géométrique.

Hilbert propose une approche beaucoup plus calculatoire que celle de Fredholm, et qui reste en retrait par rapport au formalisme introduit par celui-ci ; Hilbert cherche avant tout à donner des méthodes constructives.

Bien que l'apport de Hilbert soit fondamental pour ce champ de problèmes, il reste limité car il lui manque un point de vue unificateur, point de vue qui se dégagera de travaux se basant sur ceux de Hilbert et que nous allons examiner maintenant.

5.2.2 Frédéric Riesz

Le travail de Hilbert est repris par Riesz en 1907. Dans un premier temps, en lien avec la méthode que nous avons mentionnée ci-dessus, Riesz tente de déterminer si, étant donné un système orthogonal de fonctions, une suite de nombres de carrés sommable correspond aux coefficients de Fourier d'une certaine fonction (il parvient à établir le résultat correspondant).

En fait cette étude s'inscrit dans un projet plus vaste, que Riesz expose la même année dans les Comptes Rendus de l'Académie des Sciences, suite à la publication de notes de Fischer portant sur le travail de Riesz cité ci-dessus. L'objectif affiché par Riesz est "d'approfondir la méthode des coordonnées appliquée à l'étude des systèmes de fonctions sommables" (Riesz 1907, p.386).

Ici ce sont les constantes de Fourier qui apparaissent comme des coordonnées ; on retrouve, comme dans les travaux de Fréchet, une origine analytique à l'emploi du modèle géométrique. Ainsi la fonction apparaît comme un point, et "on parvenait à représenter l'ensemble des fonctions sommables comme un sous-ensemble de l'espace d'une infinité de dimensions." (Riesz 1907, p.386). Mais ce sous-ensemble ne peut être identifié ; en revanche, grâce au résultat établi plus haut sur la correspondance entre les suites et les fonctions de carré sommable, le lien s'impose pour ces dernières. Examinons ce qu'écrit Riesz à ce sujet :

> "Pour cette classe de fonctions on peut définir une notion de distance et l'on peut fonder sur cette notion une théorie géométrique des systèmes de fonctions, théorie qui ressemble à la géométrie synthétique. D'autre part, la notion de distance peut aussi être définie d'une manière simple pour un sous-ensemble de points de notre espace ; c'est pour l'ensemble des points dont la somme des carrés des coordonnées converge. Or, grâce au théorème sur l'intégration du produit de deux fonctions représentées par leurs constantes de Fourier, le lien entre ces deux notions de distance est très intime ; il permet de faire correspondre à cette géométrie synthétique des fonctions une géométrie analytique." (Riesz 1907, p.387)

Nous retrouvons ici de nombreux traits communs avec ce que nous avons dit du travail de Fréchet.

Tout d'abord l'importance de la notion de distance ; c'est la possibilité de définir deux distances, une pour chaque type d'objet : suites et fonctions, et le rapport qui s'impose alors entre les deux distances qui permettent une première unification.

C'est l'existence d'une distance qui fait que la théorie présentée est "géométrique", et qui justifie donc l'emploi d'analogies géométriques.

Ensuite nous observons, plus encore que dans le travail de Fréchet, la dualité analytique/synthétique. Riesz souhaite mettre en rapport les suites d'une part, et les fonctions d'autre part ; puisqu'il existe en géométrie un aspect analytique et un aspect synthétique, et que la notion de distance confère un caractère géométrique aux suites et aux fonctions, le rapport cherché se dessine naturellement.

(Riesz signale qu'au départ, c'est le côté analytique qu'il avait en vue, alors que Fischer développait le côté synthétique).

Riesz ne mentionne pas la géométrie élémentaire ; son approche est moins générale que celle de Fréchet, il se limite au cadre de l'analyse fonctionnelle, et ne cherche pas à élaborer un modèle théorique commun à l'analyse et à la géométrie élémentaire.

S'il emploie le terme "géométrique", l'usage qu'il fait du modèle géométrique reste implicite ; il repose essentiellement sur la dualité analytique-synthétique, et la possibilité de mettre en rapport suites et fonctions comme les deux volets, analytique et synthétique, d'une même théorie que Riesz désigne comme une géométrie.

L'analogie est probablement accentuée par le fait que Riesz, dès ses premiers travaux, emploie un vocabulaire géométrique, et en particulier le terme "orthogonalité". L'utilisation de ce terme est en fait due à Schmidt ; dans les travaux de celui-ci, l'aspect géométrique est déterminant comme nous allons le voir maintenant.

5.2.3 Ehrard Schmidt

Dans sa thèse, soutenue en 1905, Schmidt développe une généralisation de résultats dus à Hilbert, mais en utilisant une approche et un vocabulaire géométriques. Il y introduit, pour des fonctions de carré sommable, la notion d'orthogonalité, de norme, et donne dans ce cadre des propriétés analogues à des propriétés géométriques connues.

Dans un texte publié en 1908, Schmidt propose une approche semblable pour les suites de carré sommable (qu'il nomme "Funktion"). Il définit un produit scalaire entre deux telles suites (il n'emploie pas le terme produit scalaire), la norme associée, l'orthogonalité. Il montre la généralisation du théorème de Pythagore, dont il déduit que des suites orthogonales sont linéairement indépendantes.

Après avoir défini la convergence forte, Schmidt considère, parmi les ensembles de suites fermés, ceux qui ont la propriété de stabilité par combinaison linéaire ("lineares Funktiongebilde"), et plus particulièrement encore ceux qui pourront être munis d'une base formée d'un ensemble infini, mais dénombrable, de suites.

Schmidt définit l'orthogonalité de deux "lineare Funktiongebilde", et signale que dans le cas où l'on dispose d'une base, une suite sera orthogonale au sous-espace correspondant si et seulement si elle est orthogonale à chacune des suites de la base.

Il montre alors que toute suite D peut se décomposer en somme d'une suite appartenant à un ensemble linéaire de suites ("lineare Funktiongebilde") A de base donnée et d'une suite orthogonale à cet ensemble (il n'emploie pas ce terme), nommée "Perpendikelfunktion". En appliquant le théorème de Pythagore généralisé, il prouve que la norme de la "Perpendikelfunktion" réalise le minimum des normes des différences entre D et un élément de A, minimum qu'il désigne comme "l'éloignement" ("Entfernung") de D à A, sans faire toutefois référence à la notion de distance (Schmidt, 1908).

L'analogie avec la géométrie est constante dans l'approche de Schmidt ; elle repose sur l'emploi du langage géométrique (dans une note à son article publié en 1908, Schmidt dit qu'il tient cette présentation géométrique de Gehrard Kowalewski).

Schmidt écrit que la signification géométrique est encore plus claire, si l'on considère une suite comme un vecteur dans un espace de dimension infinie ; cependant, il n'emploie dans l'article ni le terme de vecteur, ni celui d'espace ("Raum").

Schmidt reste, dans sa thèse, dans le cadre des fonctions, et dans l'article mentionné ci-dessus, dans le cadre des suites. Il utilise (sans détailler de quelle manière) le modèle géométrique dans chacun de ces cadres. L'analogie repose au départ sur les notions d'orthogonalité et de norme ; ce qui est fondamental dans l'approche de Schmidt et distingue celle-ci, par exemple, des travaux de Riesz, c'est qu'elle conduit à prendre en compte la structure linéaire.

Les problèmes d'indépendance linéaire sont posés très tôt ; la notion de base, et celle d'ensemble linéaire de suites sont centrales.

Schmidt n'a pas l'ambition de développer une théorie générale comme celle de Fréchet ; le langage géométrique lui sert comme support à l'intuition dans les cadres qu'il considère, mais il ne cherche pas à obtenir des résultats qui pourraient s'appliquer en dehors de ces cadres.

Par ailleurs la dualité analytique/synthétique n'est pas un élément central de l'analogie chez Schmidt, au contraire de ce que nous avons observé dans le travail de Riesz ; la mise en rapport des suites et des fonctions n'apparaît pas chez Schmidt ni comme objectif ni comme conséquence de l'emploi du modèle géométrique.

5.3 Conclusion

Tout d'abord nous devons signaler que les deux courants que nous avons séparés ci-dessus : espaces topologiques ou normés, et espaces de Hilbert, sont en fait étroitement liés ; les mathématiciens que nous avons cités s'intéressaient à un même champ de problèmes, chacun connaissant et utilisant les contributions de la plupart des autres.

Toutefois, les approches rencontrées à propos des espaces topologiques et normés avaient une forme beaucoup plus générale et théorique que celles portant sur les espaces de Hilbert, qui visaient pour la plupart à répondre à des problèmes précis, et à réaliser des unifications restant dans le champ de l'analyse.

Il est significatif de noter à cet égard que si Hahn, Wiener et Banach proposent entre 1920 et 1922 des définitions axiomatiques d'espaces vectoriels normés, il faudra en revanche attendre 1927 pour que soit donnée par Von Neumann une définition axiomatique de l'espace de Hilbert.

D'autre part la première présentation axiomatique de la notion d'espace vectoriel (issue de ces courants de recherche) indépendamment de toute notion de norme ou de distance est due à Banach, en 1932 dans son livre : "Théorie des opérations linéaires" ; ceci peut être interprété comme une conséquence du plus grand degré de généralité de l'approche de celui-ci.

En ce qui concerne le rôle de la géométrie, nous retiendrons les points suivants, communs aux différentes approches :

- L'analogie avec un modèle géométrique s'impose du fait de la présence d'une distance ou d'une norme (cette dernière étant associée ou non à un produit scalaire).
- Le support principal de cette analogie est l'emploi du langage géométrique.
- Si l'analogie a fréquemment une origine analytique (coordonnées), elle permet le développement d'une approche synthétique et l'articulation des deux points de vue dans une théorie générale, ou limitée au champ de l'analyse, comme cela est le cas dans le cadre de la géométrie.
- L'aspect linéaire n'apparaît pas au premier plan, bien qu'il soit plus important dans les espaces de Hilbert du fait de l'orthogonalité.

Cependant les emplois du modèle géométrique que nous avons observés sont très divers.

Dans le travail de Schmidt, nous avons vu que l'analogie entre la géométrie et les ensembles de fonctions (ou de suites), analogie sur le rôle de laquelle l'auteur ne donne aucun commentaire explicite sert à suggérer l'existence de propriétés pour les fonctions semblables à des propriétés géométriques connues. C'est peut-être le cas le plus simple d'analogie, le rapport entre deux domaines suggère la possibilité de transférer des propriétés de l'un vers l'autre (ici il n'y a pas d'inversion entre modèle et original).

L'analogie employée par Riesz est plus complexe ; on peut la schématiser en disant que chez lui, il y a quatre domaines en jeu : la géométrie analytique et la géométrie synthétique d'une part ; les suites et les fonctions d'autre part. C'est le lien entre géométrie analytique et géométrie synthétique qui sert de modèle analogique pour le lien entre suites et fonctions.

Enfin dans le travail de Fréchet on assiste à la mise en place d'un modèle théorique commun pour plusieurs domaines analogues, dont celui de la géométrie. Fréchet ne fait pas de l'analogie un outil, mais un objet d'étude ; les axiomes qu'il propose sont les caractéristiques de cette analogie.

6. Conclusion

Cette analyse nous a permis de constater que l'intuition géométrique a joué un rôle déterminant dans la genèse de l'algèbre linéaire, intervenant à tous les stades du développement de la théorie, et de manières très diverses selon les époques, les auteurs, et les projets de ces auteurs.

Les recherches des mathématiciens dont le point de départ était de nature géométrique, comme Hamilton, Grassmann et Peano étaient soutenues par des projets philosophiques qui ont permis à chacun de ces auteurs de dépasser les limites du modèle géométrique qu'il employait, en particulier celle attachée aux trois dimensions de l'espace (notons que le modèle des rotations adopté par Hamilton ne fait que repousser le problème à la dimension 4). Mais les projets philosophiques qui ont nourri ces œuvres les ont rendues peu transmissibles, et l'impact de celles-ci resta limité.

Ce sont les approches issues de l'analyse fonctionnelle qui ont été déterminantes pour la théorie des espaces vectoriels et la diffusion de cette théorie. Dans ces approches s'est manifestée la volonté d'élaboration d'un modèle symbolique commun pour différents domaines, dont la géométrie. Cette recherche d'unification était fondamentale ; le modèle géométrique seul ne pouvait suffire à l'émergence de l'algèbre linéaire, même s'il a joué un rôle central dans ce processus.

Le modèle analogique géométrique employé dans ces travaux d'analyse fonctionnelle (issu d'une géométrie fort différente de celle qui servait de référence à Hamilton ou Grassmann), modèle dont nous avons cité ci-dessus les caractéristiques, joue donc un rôle fondamental en algèbre linéaire. Cependant ce modèle est plus naturellement associé à la notion d'espace vectoriel normé ou d'espace de Hilbert qu'à celle d'espace vectoriel.

CHAPITRE 3

CHOIX DE TRANSPOSITION

Nous avons relevé au chapitre précédent l'intervention de modèles géométriques dans le processus d'élaboration de l'algèbre linéaire. Au terme de ce processus, l'algèbre linéaire étant établie sous sa forme moderne, différents types de liens avec des modèles géométriques sont envisageables. Nous présentons des liens possibles, tels que certains mathématiciens les conçoivent dans leurs pratiques. Mais c'est surtout lorsqu'il s'agit d'enseignement que la question de l'articulation entre géométrie et algèbre linéaire est posée, et donne lieu notamment à des débats entre membres de la noosphère. Certaines des opinions exprimées à ce sujet gouvernèrent les choix de transposition effectués lors de l'introduction de l'algèbre linéaire à l'université, puis dans l'enseignement secondaire. L'examen des textes de programmes et de manuels correspondants permet de retracer l'évolution du lien entre algèbre linéaire et géométrie, dans l'enseignement secondaire et en classes préparatoires.

1. L'algèbre linéaire moderne et la géométrie

Nous allons nous pencher ici sur des textes écrits par des mathématiciens contemporains, pour étudier le lien établi par ceux-ci entre les deux domaines.

Dans les propos tenus par ces mathématiciens, nous séparerons ceux qui portent sur l'activité de recherche mathématique, qui relèvent de ce que nous nommons une "position savante", et ceux qui concernent l'articulation algèbre linéaire-géométrie dans l'enseignement. Ce dernier type de propos se rattache à l'aspect : transposition didactique que nous approfondissons dans la partie suivante ; ce sont des discours tenus par des membres de la noosphère, et nous les qualifierons donc de "position noosphérienne".

1.1 Position savante

Dans le savoir savant, l'algèbre linéaire n'est plus un objet d'étude : définitivement établie sous sa forme moderne, elle apparaît comme un puissant outil de résolution de problèmes issus de différents domaines des mathématiques.

Les opinions exprimées par les mathématiciens convergent pour souligner, d'une part, l'importance de l'algèbre linéaire comme outil de résolution de problèmes de géométrie, et d'autre part l'intuition géométrique induite par l'emploi de l'algèbre linéaire dans d'autres domaines des mathématiques, intuition que les travaux de Fischbein vont nous permettre de préciser.

En revanche la question des fondements de la géométrie suscite des divergences de points de vue ; pour les structuralistes, notamment Dieudonné, la géométrie est un chapitre de l'algèbre linéaire ; cette attitude entraînera de nombreuses réactions allant en sens contraire. Mais cette question sera en fait essentiellement débattue lorsqu'il s'agira d'enseignement.

L'algèbre linéaire et la résolution de problèmes de géométrie

Comme l'écrit Bkouche (1988), le domaine géométrique " se définit moins par les structures qui y interviennent que par les grandes problématiques autour desquelles il se construit." (Lehmann et Bkouche 1988, p. 488).

L'intérêt d'un formalisme sera alors de permettre l'étude de ces problématiques, et de faire émerger de nouveaux problèmes. On retrouve ici l'un des principaux objectifs de Leibniz, lors de sa recherche de la caractéristique géométrique : résoudre d'anciens problèmes de géométrie, mais également en faire émerger de nouveaux, ce que Bkouche nomme "la reconstruction du réel à partir du rationnel".

C'est également l'aspect : résolution de problèmes que souligne Marion (1979), en écrivant :

" L'appropriation opératoire et calculatoire par le domaine vectoriel des grands problèmes de la géométrie élémentaire s'est développée grâce à un outil fondamental : celui donné par l'algèbre linéaire et les groupes de transformations. Les opérations fondamentales, définies en termes purement algébriques, chassent définitivement (en tant que "démonstration", mais non comme composante heuristique), le recours aux critères variables de "l'intuition géométrique"...les axiomes relatifs à la "structure" d'espace vectoriel, d'espace vectoriel euclidien, etc ... n'ont pas pour fonction de définir un fondement mais essentiellement de délimiter un cadre théorique ayant un fonctionnement efficace." (Marion 1979, p. 17).

Selon Marion, l'intérêt des axiomes de l'algèbre linéaire n'est pas de fournir un fondement, en particulier pour la géométrie, mais d'élaborer un cadre permettant la résolution de problèmes, notamment de géométrie. Notons le rôle particulier qu'il attribue à « l'intuition géométrique » : celle-ci peut servir de « composante heuristique » (c'est à dire comme aide à la résolution, en fournissant des idées, des exemples), mais doit être exclue de la démonstration.

Cependant, Marion signale également les limites de l'emploi de l'algèbre linéaire comme outil de résolution de problèmes de géométrie. Il s'élève en particulier contre l'idée que le Programme d'Erlangen de Klein a définitivement clos la "géométrie élémentaire" comme domaine de recherche.

Le Programme d'Erlangen confère au rapport algèbre-géométrie un sens très précis.

En effet, selon Klein, une géométrie est caractérisée par la donnée d'un ensemble, et d'un groupe de transformations de cet ensemble. Ainsi la géométrie affine du plan est associée au groupe des transformations affines du plan, la géométrie euclidienne plane est associée au groupe des isométries du plan. Toutes les propriétés d'une géométrie donnée correspondront alors à des relations entre invariants de ce groupe ; or des méthodes connues permettent de définir tous ces invariants, et les relations (ou syzygies) associées.

Ainsi, et notamment pour Dieudonné, la "géométrie élémentaire" est une géométrie "fossile", rendue caduque par les résultats issus du Programme d'Erlangen. En effet, les théorèmes et propriétés de cette géométrie correspondent à des relations entre invariants de l'un des groupes correspondants : groupe des déplacements, groupe affine etc. Or la théorie des invariants comporte une méthode (dite « méthode symbolique ») permettant en principe la détermination de tous les invariants. Selon Dieudonné, cette méthode constitue donc une méthode générale de résolution de tous les problèmes de la géométrie élémentaire, et celle-ci ne peut donc plus susciter l'intérêt de mathématiciens. (Dieudonné 1966).

Marion s'oppose à ce point de vue. Il reprend les termes de Dieudonné et Bourbaki, qui parlent de « géométrie classique », « géométrie élémentaire », « géométrie affine », « géométrie euclidienne » et « géométrie projective » et disent que ces différentes appellations dissimulent toutes une même science : l'algèbre linéaire, qui rend obsolètes ces différentes géométries. Il conteste ceux-ci en rappelant l'existence d'autres types de géométries, comme la géométrie différentielle, mais surtout en écrivant que concevoir une géométrie comme un ensemble de points et un sous-groupe du groupe des permutations de ces points peut rendre compte « d'un aspect de la géométrique, mais pas de l'activité géométrique, en particulier pas des problèmes » (Marion 1979 p.21). En effet il n'est pas aisé d'attacher certains de ces problèmes à l'une des géométries citées ci-dessus (et donc à un groupe particulier), ce qui montre les limites de l'interprétation faite par Bourbaki du Programme d'Erlangen.

L' algèbre linéaire support de l'intuition géométrique

Nous avons vu ci-dessus que Marion souligne la possibilité offerte par l'algèbre linéaire de démonstrations en géométrie indépendantes de l'intuition. Toutefois il n'écarte pas la possibilité d'intervention de cette "intuition géométrique" ; en fait, la plupart des mathématiciens s'accordent à reconnaître l'importance de celle-ci tout en en limitant plus ou moins le rôle. De plus l'algèbre linéaire va apparaître comme un moyen d'induire une intuition de type géométrique dans des problèmes issus d'autres domaines des mathématiques.

C'est ce que souligne Bkouche en écrivant :

"La linéarisation de la géométrie permet en retour une géométrisation du linéaire et par cela même une géométrisation des divers domaines de la connaissance où intervient le linéaire...C'est la prise de conscience par les mathématiciens d'un caractère commun à ces divers domaines qui a conduit à l'algèbre linéaire telle que nous la connaissons aujourd'hui, construction unificatrice qui continue l'idéal d'une méthode universelle que l'on retrouve tout au long de l'histoire des mathématiques ; la représentation géométrique de l'algèbre linéaire issue de la représentation linéaire de la géométrie (et le terme même d'espace vectoriel en témoigne) a conduit alors à cette géométrisation universelle, nouveau principe unificateur induisant les transferts d'intuition." (Bkouche 1988, p.489).

Bkouche emprunte ici les termes "transfert d'intuition" et "géométrisation universelle" à Dieudonné, qui emploie ceux-ci dans son texte : "Domination universelle de la géométrie". Un "transfert d'intuition" permet au mathématicien, selon Dieudonné, de déterminer lorsqu'il aborde un problème nouveau quelles sont les questions qu'il doit se poser, et à quels résultats il peut s'attendre.

On retrouve donc ici le rôle attribué par Fischbein à un modèle intuitif analogique ; l'algèbre linéaire va servir d'intermédiaire, et permettre d'établir une analogie entre la géométrie et d'autres domaines mathématiques.

Le rôle du langage géométrique est primordial dans cette analogie ; Dieudonné le rappellera à plusieurs reprises, par exemple lorsqu'il écrit :

" Lorsque E. Schmidt, M. Fréchet et F. Riesz introduisirent un langage géométrique dans la théorie de l'espace de Hilbert, ils n'ajoutèrent pas beaucoup en substance aux travaux de Hilbert, mais l'interaction d'intuitions que leurs méthodes avaient rendues possibles fut sans aucun doute un facteur puissant dans le développement ultérieur de cette théorie." (Dieudonné 1974, p. 71).

L'étude que nous avons faite au chapitre précédent rejoint cette déclaration de Dieudonné, mais permet également de remarquer que ce qu'il désigne comme une simple "introduction du langage géométrique" était en fait un processus complexe, mettant en jeu différents modèles analogiques. Dieudonné ne souligne pas cette complexité sous-jacente au choix du langage ; selon lui, c'est l'aspect analytique et le passage à un nombre quelconque de coordonnées qui a conduit au développement d'un "langage conventionnel, dérivé de la géométrie ordinaire".

Pourtant, lorsqu'il détaille les avantages offerts en algèbre linéaire par l'emploi de ce langage, ce sont les aspects synthétiques qu'il souligne.

"C'est pourquoi il est aisé de comprendre pourquoi les mathématiciens ont hautement apprécié le langage géométrique, au point qu'ils ont très tôt procédé à sa généralisation à des domaines mathématiques qui en paraissaient très éloignés. L'un des exemples les plus anciens est celui de l'algèbre linéaire ; en mathématiques classiques, il s'agit de n-uplets de nombres réels ou complexes et de matrices à coefficients réels ou complexes ; en langage géométrique, cela devient des vecteurs et des applications linéaires, ce qui a permis une formulation si simple et si appropriée de tant de théorèmes qu'on l'étendit bientôt à l'algèbre linéaire au sens moderne, où les "scalaires" ne sont plus des nombres, mais des éléments d'un corps ou d'un anneau quelconque."

(Dieudonné 1981, p. 5).

Il ressort de ces propos de Dieudonné que le langage géométrique conduit au développement d'une algèbre linéaire synthétique, qui offre des possibilités de généralisation absentes de l'algèbre linéaire "des mathématiques classiques". Notons qu'ici Dieudonné souligne un type de généralisation particulier ; il n'insiste pas sur la nature des objets désignés sous le terme "vecteurs", et ne signale pas que ceux-ci peuvent en fait être des fonctions ou des polynômes. Ce qu'il signale, c'est la possibilité de choisir les scalaires dans un corps ou un anneau quelconque, possibilité qui fut réalisée après la plupart des travaux de mathématiciens que nous avons étudiés dans le chapitre précédent.

Dans de nombreux ouvrages, on rencontre la distinction entre l'aspect analytique : n-uplets, matrices et l'aspect synthétique de l'algèbre linéaire : vecteurs écrits symboliquement, applications linéaires ; cet aspect synthétique est alors qualifié de géométrique.

Ainsi, selon Revuz (1963), " l'esprit géométrique, c'est à dire le recours à des idées simples et puissantes de préférence à des calculs, anime l'algèbre linéaire lorsqu'on évite de faire intervenir trop vite la représentation matricielle " ; Ovaert et Verley (1981) nomment "aspect géométrique de l'algèbre linéaire" l'étude de l'action des endomorphismes.

Pham et Dillinger, dans la préface de leur livre "Algèbre linéaire"(1996), écrivent :

" Notre principal souci, que résume le slogan *dualité entre géométrie et calcul* est d'amener peu à peu les étudiants à maîtriser les allers-retours entre la pensée géométrique et le monde des calculs. L'algèbre linéaire présente un magnifique formalisme unificateur des deux façons de penser." (Pham et Dillinger, 1996)

Ils considèrent que l'algèbre linéaire est un "formalisme unificateur" de la géométrie et du calcul. Ils ne présentent pas l'algèbre linéaire comme un modèle théorique commun pour la géométrie et le calcul ; c'est à l'intérieur même de l'algèbre linéaire qu'ils distinguent une partie considérée comme géométrique, opposée à une partie calculatoire. Cette partie calculatoire correspond à tout ce qui peut être formulé dans le registre des tableaux et des équations : systèmes linéaires, matrices, vecteurs donnés par leurs coordonnées. L'autre partie est ce que nous avons déjà désigné ci – dessus comme l'aspect synthétique de l'algèbre linéaire, c'est à dire tout ce qui ne fait pas appel à des coordonnées.

Ce rapprochement entre aspect synthétique de l'algèbre linéaire et géométrie sans coordonnées (qui peut apparaître comme l'aboutissement du projet de caractéristique géométrique de Leibniz) s'est donc poursuivi, voire renforcé, jusqu'à nos jours. C'est à cet aspect de l'algèbre linéaire que font référence la plupart des auteurs qui affirment que celle - ci permet d'induire des « intuitions géométriques » dans d'autres domaines, et notamment en analyse.

Lors de l'introduction de l'algèbre linéaire dans les programmes de l'enseignement secondaire, si la question de l'intuition géométrique fut également abordée, c'est essentiellement le problème de l'articulation algèbre-géométrie et celui de la nature de la géométrie qui furent débattus comme nous allons le voir maintenant.

1.2 Position noosphérienne

La question de l'enseignement de la géométrie dans le secondaire donna lieu à de vifs débats au débuts des années 60, posant en particulier le problème du rôle que l'algèbre linéaire allait tenir dans cet enseignement.

Nous allons nous pencher maintenant sur trois livres, publiés en France entre 1963 et 1964 par des acteurs de la noosphère : "le Cours de l'A.P.M., II, Espaces vectoriels" (1963), de Germaine et André Revuz, "l'Enseignement de la géométrie" (1964) de Choquet et "Algèbre linéaire et géométrie élémentaire"(1964) de Dieudonné.

Ces trois livres ne sont pas des manuels d'enseignement ; ils sont écrits à destination des enseignants du secondaire, à une époque où l'algèbre linéaire, déjà enseignée dans le supérieur (à l'université comme en classes préparatoires) n'était pas vue au lycée, et où l'enseignement "classique" de la géométrie était en débat.

Nous allons tout d'abord décrire et analyser le contenu de ces ouvrages dans les trois tableaux qui suivent ; nous comparerons ensuite les points de vue qui en émergent au sujet de l'articulation entre géométrie et algèbre linéaire dans l'enseignement secondaire.

L'intérêt de ces ouvrages pour notre étude est central, car ils présentent des choix très différents, représentatifs des tendances de cette époque et des approches possibles.

1.2.1 Présentation des tableaux d'analyse

Contrairement aux livres que nous examinerons dans la suite de notre travail, les ouvrages de Revuz, Choquet et Dieudonné ne sont pas des manuels d'enseignement. Cependant, nous aurons recours au même type de tableaux dans nos différentes analyses. En effet, celles-ci seront menées dans un même objectif d'observation du recours au géométrique, sous les différentes formes que ce recours peut prendre, formes que nous avons représentées dans la structure *(S)* présentée au premier chapitre. Nous relèverons donc dans des tableaux :

- Les notions d'algèbre linéaire et bilinéaire présentées ;

  L'objectif de cette liste de notions est de renseigner sur le contenu de l'ouvrage concerné, et d'observer éventuellement par la suite si de fréquents recours au géométrique sont associés à un contenu spécifique, par exemple à l'étude des espaces euclidiens.

- La présence éventuelle de chapitres de géométrie précédant les chapitres consacrés à l'algèbre linéaire ;

  Cette entrée du tableau nous permettra de noter si la présentation choisie par l'auteur permet l'emploi, pour l'introduction de l'algèbre linéaire, d'un modèle issu d'une géométrie indépendante de celle-ci. Il faudra bien entendu ensuite, dans le cas où une telle possibilité existe, noter si elle est ou non exploitée dans la suite de l'ouvrage.

- Le lien fait entre calcul vectoriel et géométrie affine ;

  Ce lien sera également significatif en ce qui concerne l'articulation entre algèbre linéaire et géométrie. Une présentation structurelle peut par exemple conduire à considérer le calcul vectoriel comme une partie de l'algèbre linéaire, qui fonde ensuite la géométrie affine. Mais il est également possible que la géométrie affine soit présentée antérieurement à l'algèbre linéaire, et suivie du calcul vectoriel qui constituerait le pivot de l'articulation avec l'algèbre linéaire. Par ailleurs, la distinction entre le vectoriel et l'affine peut être plus ou moins soulignée ; en particulier, un amalgame peut être fait dans le cas où la géométrie est considérée comme une simple partie de l'algèbre linéaire. Ceci peut conduire à des ambiguïtés que nous relèverons.

- Le nombre de figures, et la nature du concept associé au dessin : propriétés de géométrie, propriétés d'algèbre linéaire en dimension 2 ou 3, propriétés d'algèbre linéaire générale ;

  L'emploi d'un dessin vectoriel pour illustrer une propriété de polynômes, ou d'algèbre linéaire dans un espace de dimension quelconque, nous renseigne sur le type de recours à des modèles figuratifs. En particulier, l'utilisation de dessins vectoriels pour représenter des situations se déroulant dans des espaces de fonctions ou de suites montre que l'algèbre linéaire, ou une partie de celle-ci, joue le rôle de modèle intermédiaire entre un modèle géométrique ou figuratif et les domaines concernés.

- La présence d'un discours explicite sur le lien entre algèbre linéaire et géométrie, et l'adéquation entre ce discours et le contenu effectif de l'ouvrage ;

  Un discours explicite nous renseigne sur les intentions de l'auteur, en matière de recours au géométrique. La comparaison avec les recours effectivement faits montre des possibilités de choix, en accord avec une position exprimée. Mais elle peut également mettre à jour des décalages, dont nous chercherons alors à identifier la cause.

- L'emploi d'un vocabulaire issu de la géométrie, hors calcul vectoriel. Nous désignerons par l'expression : « vocabulaire géométrique » des termes admettant une définition dans le cadre d'une géométrie euclidienne au sens historique du terme, c'est à dire ni vectorielle, ni analytique. Nous donnons le détail de cet emploi dans un tableau séparé, en relevant en particulier si les termes géométriques sont utilisés en dimension inférieure ou égale à trois, dans des espaces vectoriels généraux, ou encore dans des espaces de fonctions, de polynômes...

Les conclusions à tirer de cette étude du vocabulaire s'apparentent à celles que nous avons citées pour l'emploi de dessins, en particulier à propos de l'utilisation éventuelle d'une partie de l'algèbre linéaire comme modèle intermédiaire entre un modèle figuratif et un autre domaine mathématique.

1.2.2 Analyse du contenu des livres de Revuz, Choquet et Dieudonné

Revuz

Auteur(s)	André et Germaine Revuz
Titre	Le cours de l'A.P.M. II Espaces vectoriels
Editeur-Année	A.P.M, Paris, 1963
Public	Enseignants du secondaire
Organisation du livre	9 chapitres
Notions d'algèbre linéaire présentées	e.v, s.e.v., générateurs, familles libres, bases, supplémentaires, dimension, applications linéaires, matrices, dualité, réduction, déterminants, systèmes linéaires, formes bilinéaires, espaces euclidiens.
Chapitres de géométrie avant l'a.l.	non
Vocabulaire issu de la géométrie	26 termes issus de la géométrie, dont : 12 dans le cadre de la dimension ≤ 3 20 dans le cadre de l'algèbre linéaire théorique 3 dans d'autres cadres (fonctions, polynômes...)
Lien vectoriel-affine	Espace affine : ensemble sur lequel le groupe additif d'un espace vectoriel opère de façon simplement transitive (ici l'affine est donc fondé sur le vectoriel). Distinction vectoriel-affine soulignée.
Figures	2 figures, dont une dans $\mathbb{R}^2$ et une dans un espace quelconque.

Discours explicite sur le lien algèbre linéaire-géométrie	(*Préface*) " L'esprit géométrique, c'est à dire le recours à des idées simples et puissantes de préférence à des calculs, anime l'algèbre linéaire lorsqu'on évite de faire intervenir trop vite la représentation matricielle" (*Chapitre : espaces vectoriels*) "Les espaces vectoriels les plus simples et les premiers à avoir été considérés sont ceux qui sont liés à la géométrie euclidienne dans laquelle ils jouent un rôle essentiel (le théorème de Thalès, par exemple, exprime la distributivité de l'opération externe par rapport à l'opération interne : la somme vectorielle). Les éléments de ces espaces sont appelés vecteurs, d'où vient le terme d'espace vectoriel. Mais la structure d'espace vectoriel joue un rôle peut-être encore plus important en analyse, où la plupart des espaces fonctionnels qu'on considère sont des espaces vectoriels sur $\mathbb{R}$ ou **C**." (p.24) (*Chapitre : espaces affines*) "La notion d'espace vectoriel précède logiquement celle d'espace affine si, comme nous l'avons fait, on fait intervenir la première dans la définition de la seconde. Mais il est possible de procéder en sens inverse : c'est ce que fait l'exposé traditionnel de la géométrie élémentaire qui introduit d'abord un ensemble de points (le plan, l'espace), puis un groupe particulier de bijections (les translations au sens élémentaire du mot) qui est simplement transitif, et dont on montre ensuite que chaque translation est caractérisée par un *vecteur*, la composée de deux translations étant caractérisée par la *somme géométrique* des deux vecteurs correspondants" (p.95)
Adéquation discours-contenu du livre	Discours et contenu en adéquation. Point de vue essentiellement synthétique : Applications linéaires vues avant les matrices, peu d'exemples et exercices dans $\mathbb{R}^n$, équations linéaires présentées comme f(x)=y, où f est une application linéaire. Nombreux exemples et exercices issus de l'analyse.

Emploi du vocabulaire géométrique

Utilisé en dimension ≤ 3[1]	Utilisé en algèbre linéaire ou bilinéaire générale	Utilisé dans d'autres cadres (fonctions)
Espace, droite, parallèle, projection, translation, point, rotation, théorème de Thalès, plan, trièdre, demi-tour, symétrie.	Espace, droite, parallèle, projection, translation, point, rotation, orthogonal, angle, homothétie, barycentre, parallélogramme, milieu, segment, longueur, médiane, triangle, distance, isométrie, figures isométriques.	Espace, orthogonal, angle.

[1] Ceci correspond, pour ce livre, à une utilisation dans le cadre de $\mathbb{R}^2$ ou $\mathbb{R}^3$.

Choquet

Auteur(s)	Gustave Choquet
Titre	L'enseignement de la géométrie
Editeur-Année	Hermann, Paris, 1964
Public	Enseignants du secondaire
Organisation du livre	9 chapitres + 4 appendices
Notions d'algèbre linéaire présentées	Les notions d'espace vectoriel, sous-espace, base, dimension sont supposées connues ; elles font l'objet de rappels.
Chapitres de géométrie avant l'algèbre linéaire	Ce livre est entièrement consacré à la géométrie, il ne comporte pas de chapitres d'algèbre linéaire.
Vocabulaire géométrique	8 termes issus de la géométrie. Tous apparaissent dans le cadre de l'algèbre linéaire, limité à la dimension 3 ; 3 apparaissent de plus dans le cadre de l'algèbre linéaire théorique.
Lien vectoriel-affine	A un couple de points du plan est associé un vecteur libre (translation). On peut identifier les vecteurs libres aux éléments du plan pointé[2], bien que ces ensembles ne soient pas identiques. Ceci permet à l'auteur de montrer comment la géométrie qu'il présente permet de fonder l'algèbre linéaire. Les éléments du plan pointé sont appelés "points" jusqu'à la définition du produit scalaire ; ils sont ensuite appelés "vecteurs", sans précisions sur ce changement de terminologie.
Figures	16 figures, dont 13 illustrant des propriétés du plan, et 3 illustrant des propriétés de l'espace (toujours en géométrie, il n'y a pas de dessins figurant des situations d'algèbre linéaire).

[2] C'est à dire, une origine O étant fixée dans le plan, l'ensemble des vecteurs d'origine O du plan. Cet ensemble est supposé connu dès le début du livre de Choquet.

Discours explicite sur le lien algèbre linéaire-géométrie	(*Introduction*) "Pour le mathématicien, la façon la plus élégante, la plus profonde, la plus rapide, de définir le plan (ou l'espace), est de le définir comme espace vectoriel sur $\mathbb{R}$, à deux (ou trois) dimensions, muni d'un produit scalaire, c'est à dire d'une forme bilinéaire symétrique $u.v$ telle que $u.u > 0$ pour tout vecteur $u \neq 0$. C'est aussi la définition qui se prête le mieux à des généralisations fécondes (espaces $\mathbb{R}^n$, $\mathbb{C}^n$, espace de Hilbert...etc)... Le problème est moins simple aux âges intermédiaires, disons entre 13 et 16 ans. L'enfant commence à comprendre ce qu'est une démonstration ; chez certains s'éveille une véritable soif de logique, indiquant que le temps est venu d'aborder sérieusement le raisonnement déductif... Il est donc indispensable que le maître de ces enfants dispose d'une axiomatique sous-jacente complète... Il nous faut donc trouver une axiomatique simple, aux axiomes forts, c'est à dire donnant très vite accès à des théorèmes non évidents, et intuitifs, c'est à dire traduisant des propriétés de l'espace qui nous entoure faciles à vérifier." "On peut donc résumer ainsi la situation : nous connaissons une voie royale basée sur les notions "espace vectoriel et produit scalaire" mais ces notions ne peuvent être parachutées sans préparation, surtout à un âge où on ne possède pas bien la notion d'opération algébrique."
Adéquation discours-contenu du livre	Discours et contenu en adéquation . Définition d'un système d'axiomes pour la géométrie, dont on déduit que le plan (puis l'espace) pointé est un espace vectoriel.

Emploi du vocabulaire géométrique

Utilisé en algèbre linéaire, en dimension ≤ 3	Utilisé en algèbre linéaire ou bilinéaire générale
Espace, plan, droite, parallèle, projection, translation, cône, cylindre.	Espace, plan, droite.

Dieudonné

Auteur(s)	Jean Dieudonné
Titre	Algèbre linéaire et géométrie élémentaire
Editeur-Année	Hermann, Paris, 1964
Public	Enseignants du secondaire
Organisation du livre	7 chapitres, 4 annexes
Notions d'algèbre linéaire présentées	Espace vectoriel, sous-espace, supplémentaires, applications linéaires et multilinéaires (cadre général). Indépendance linéaire, bases, matrices, rang d'une application linéaire, espaces euclidiens, isométries, bases orthogonales (dimension 2 ou 3) *Les notions de famille génératrice et dimension ne sont pas abordées, la dimension faisant partie des axiomes.*
Chapitres de géométrie avant l'algèbre linéaire	Le chapitre 2 est intitulé : les axiomes de la géométrie euclidienne. Il présente une liste d'axiomes, correspondant à la définition de plan et d'espace euclidiens (au sens de l'algèbre linéaire).
Emploi du vocabulaire géométrique	33 termes issus de la géométrie, dont : 20 en algèbre linéaire limitée à la dimension 3, 26 en algèbre linéaire générale
Lien vectoriel-affine	La distinction n'est pas soulignée. Les éléments d'un espace vectoriel sont appelés vecteurs ou points ; une variété linéaire affine est l'image d'un sous-espace par une translation. La plupart des résultats sont donnés dans le cadre affine, avec certains cas particuliers pour les variétés affines passant par O.
Figures	Pas de figures.

Discours explicite sur le lien algèbre linéaire-géométrie	(*Introduction*) "...depuis les travaux de Grassman et Cayley entre autres, on dispose, en Géométrie élémentaire, comme l'a si bien dit Choquet, d'une route royale par laquelle, à partir d'axiomes extrêmement simples à énoncer tout s'obtient de la façon la plus directe en quelques lignes de calculs triviaux." "L'un des avantages de l'algèbre linéaire, c'est qu'elle permet de présenter tous les développements de la géométrie élémentaire d'une façon parfaitement rigoureuse et cela sans effort, alors que l'on sait trop bien que les systèmes d'axiomes proposés depuis la fin du siècle dernier et se rattachant étroitement à la tradition euclidienne, sont d'une telle complexité...qu'il est pratiquement impossible de les enseigner avant la Licence." "Ma dernière remarque générale concerne un aspect de la mathématique moderne en quelque sorte complémentaire de ses tendances unificatrices, à savoir sa capacité de dissocier ce qui était indûment confondu. Je pense surtout ici à la distinction entre propriétés géométriques de nature affine et propriétés de nature métrique. En Algèbre linéaire, cette distinction s'opère le plus simplement et le plus facilement du monde, les deux types de propriétés dépendant respectivement de deux groupes d'axiomes qui sont séparés dès le début." "J'ai cherché à résister à la tentation d'introduire prématurément les théories qui seront enseignées à l'université. Il me semble que la nature nous a heureusement fourni une ligne de démarcation toute tracée, en nous dotant de l'intuition géométrique pour les espaces à deux et trois dimensions ; il est donc possible de représenter graphiquement tous les phénomènes de l'algèbre linéaire limitée à ces dimensions (et bien entendu aux scalaires réels) et je me suis imposé strictement cette limitation." "Ce par contre à quoi je suis tout à fait opposé, c'est ce que j'appellerais la technique de l'échafaudage préalable. Sous prétexte que le système d'axiomes de l'algèbre linéaire est trop abstrait, on voudrait, avant de l'introduire, partir d'un autre système d'axiomes, réputé plus accessible, et en déduire ensuite les axiomes de l'Algèbre linéaire... le plus connu est sans doute le système d'axiomes proposé récemment par Choquet. Il ne se justifierait que si les notions qui sont à la base des axiomes du plan euclidien, addition des vecteurs, multiplication par un scalaire et produit scalaire de deux vecteurs, étaient extrêmement abstraites et difficiles à représenter graphiquement ; chacun sait qu'il n'en est rien, et quelques mois d'expériences sur papier quadrillé devraient suffire pour accoutumer l'élève à leur maniement, et le préparer à admettre sans hésitation que l'on fonde l'édifice algébrico-géométrique sur des propriétés dont il lui est facile de vérifier l'exactitude expérimentale."
Adéquation discours-contenu du livre	Adéquation pour : axiomes de l'algèbre linéaire présentés directement, puis géométrie fondée sur l'algèbre linéaire. Décalage sur la partie : intuition géométrique ; de nombreux résultats sont présentés dans le cadre de l'algèbre linéaire générale, et, lorsque la limitation à deux ou trois dimensions est respectée, aucun recours à l'intuition géométrique n'est proposé. En particulier il n'y a aucune figure, bien que la représentation graphique soit selon Dieudonné le fondement d'une telle intuition.

Emploi du vocabulaire géométrique

Utilisé en algèbre linéaire ou bilinéaire en dimension ≤ 3	Utilisé en algèbre linéaire ou bilinéaire générale
Espace, plan, point, translation, parallèle, homothétie, projection, symétrie, droite, demi-droite, orthogonal, similitude, isométrie, cercle, disque, rotation, retournement, déplacement, angle, bissectrice.	Espace, plan, point, translation, parallèle, homothétie, projection, symétrie, droite, demi-droite, orthogonal, similitude, isométrie, milieu, segment, parallélogramme, longueur, distance, sphère, boule, centre, rayon, diamètre, théorème de Pythagore, tangent, concentriques.

1.2.3 Comparaison des différentes tendances

Les auteurs des ouvrages que nous venons d'examiner sont d'accord sur la nécessité de promouvoir un enseignement d'algèbre linéaire dans le secondaire (même si Revuz ne s'exprime pas sur ce point, il lui semble au moins nécessaire que les enseignants du secondaire aient une connaissance suffisante de l'algèbre linéaire).

Mais les points de vue qu'ils adoptent sont sensiblement différents, en particulier en ce qui concerne le rôle de la géométrie.

Revuz ne prend pas parti sur l'articulation algèbre linéaire-géométrie ; il dit clairement, par exemple, que l'on peut choisir comme il le fait de présenter les espaces vectoriels avant les espaces affines, mais il signale également que l'approche inverse est possible, sans afficher de préférence pour l'une ou l'autre approche.

Il n'est pas question dans son livre d'un éventuel emploi de la géométrie dans l'enseignement de l'algèbre linéaire. Le cours d'algèbre linéaire qu'il propose est structuré de manière à préparer aux espaces de Hilbert ; d'où l'importance, qu'il souligne, de l'aspect intrinsèque, et les nombreux exemples tirés de l'analyse.

Les références explicites à la géométrie sont peu nombreuses, et apparaissent essentiellement sous forme d'exemples, à la suite d'une définition donnée dans le cadre de l'algèbre linéaire générale (15 exemples en dimension ≤ 3 comportent du vocabulaire géométrique).

Cependant de nombreux termes à caractère géométrique apparaissent dans ce livre, encore plus en algèbre linéaire "théorique" qu'en dimension inférieure ou égale à trois, ce qui est significatif sur la portée de l'analogie : celle-ci concerne bien l'algèbre linéaire générale. On observe dans le cours de Revuz des termes comme triangle, ou médiane, qui sont peu courants dans un cours d'algèbre linéaire (voir l'analyse de manuels au chapitre suivant). C'est également le seul des trois auteurs qui utilise du vocabulaire géométrique dans d'autres domaines (il s'agit ici d'espaces de fonctions). Notons à ce propos que deux des trois termes employés : « orthogonal » et « angle » relèvent des espaces euclidiens.

Il semble donc que Revuz emploie un modèle analogique géométrique, essentiellement destiné à servir en analyse, mais ce modèle reste implicite, et son utilisation est désignée comme le recours à "l'esprit géométrique".

L'objectif affiché par Choquet est nettement différent, puisqu'il s'agit, comme l'indique le titre de l'ouvrage, de l'enseignement de la géométrie.

La meilleure manière, pour un mathématicien, d'aborder la géométrie est d'employer l'algèbre linéaire ; mais un problème d'enseignement se pose puisque, selon Choquet, cette approche ne peut être utilisée pour des enfants de moins de 17 ans. Notons que Choquet ne signale pas de difficulté dans l'apprentissage de l'algèbre linéaire elle-même ; il n'aborde pas ce point, et se contente de s'opposer à un enseignement de la géométrie qui lui semble trop éloigné de l'intuition de l'espace pour des élèves de cet âge.

Il préconise donc d'employer un système d'axiomes plus intuitif, c'est à dire lié à des propriétés de l'espace correspondant à la perception visuelle, système qui permettra de faire émerger la structure vectorielle. Rappelons que dans son livre, les notions élémentaires d'algèbre linéaire sont supposées connues, on ne peut donc pas parler de l'emploi d'un modèle analogique géométrique pour l'algèbre linéaire, l'objectif étant réellement ici un enseignement de géométrie, dans lequel l'algèbre linéaire apparaît comme outil.

On rencontre dans le livre de nombreux termes de géométrie, mais ils désignent la plupart du temps des notions de la géométrie axiomatique de l'auteur ; seuls 8 de ces termes sont utilisés en algèbre linéaire, pour des dimensions ≤ 3, et 3 termes en algèbre linéaire théorique : plan, droite, et espace, d'emploi courant en algèbre linéaire.

Dieudonné partage l'avis de Choquet au sujet du mathématicien : "la voie royale" pour la géométrie est celle que fournit l'algèbre linéaire. En revanche, en ce qui concerne l'enseignement, il est tout à fait opposé à la démarche de Choquet, qu'il critique explicitement dans la préface de son livre en qualifiant de nuisible le système d'axiomes proposé par celui-ci (voir les remarques de Dieudonné dans le tableau ci-dessus). Choquet propose en effet une liste d'axiomes, classés en axiomes d'incidence et d'ordre, puis axiomes de structure affine, et enfin de structure métrique. Ainsi le premier axiome qu'il propose, et qui relève des axiomes d'incidence, est : « Le plan contient au moins deux droites, toute droite contient au moins deux points. ». Le premier axiome de structure affine est : « Au plan Π est associée une application d de $\Pi x\Pi$ dans R+, appelée distance et telle que : $d(x,y)=d(y,x)$ pour tous x, y de Π ; pour toute droite orientée D, tout x de D, et tout nombre positif l, il existe dans D un point y unique tel que $x \leq y$ et $d(x,y)=l$; $x\in [a,b] \Rightarrow d(a,x)+d(x,b)=d(a,b)$. » Nous ne donnerons pas ici l'intégralité de la liste d'axiomes ; ces deux exemples suffisent selon nous à traduire l'esprit de celle-ci. Il ne s'agit pas de la géométrie euclidienne, au sens historique du terme, mais les axiomes proposés par Choquet ont cependant pour objectif l'élaboration d'une théorie dont la portée est la modélisation du plan (puis de l'espace) physique. Ceci est tout à fait différent du point de vue de Dieudonné, pour lequel l'algèbre linéaire théorique doit être présentée d'emblée ; elle pourra ensuite servir (notamment) à fonder la géométrie.

Il ne semble pas à Dieudonné que l'algèbre linéaire à 2 ou 3 dimensions soit susceptible de poser des problèmes d'enseignement au lycée ; selon lui, pour ces dimensions existe une intuition géométrique (reposant sur des représentations visuelles, ce que nous avons désigné comme : intuition de l'espace) qui rend accessibles les "phénomènes de l'algèbre linéaire".

Rappelons qu'il n'utilise finalement pas cette approche dans le livre ; sa présentation de l'algèbre linéaire reste très structurelle.

Il emploie un nombre important de termes à caractère géométrique, mais ceux-ci apparaissent uniquement dans un cadre d'algèbre linéaire, et sont même plus employés en dimension quelconque qu'en dimension ≤ 3.

Même le chapitre 2, intitulé "les axiomes de la géométrie euclidienne" énumère en fait les axiomes intervenant dans la définition, fondée sur l'algèbre linéaire, d'un espace euclidien de dimension 2 ou 3. En fait ce que Dieudonné nomme "géométrie" est l'algèbre linéaire en dimension 2 ou 3 ; son objectif est avant tout l'enseignement de cette "structure fondamentale" que constitue l'algèbre linéaire.

1.3 Conclusion

Au moment de la réforme des mathématiques modernes (l'algèbre linéaire fut introduite dans les programmes de lycée en 1969, nous y reviendrons en détail dans la partie suivante), c'est le point de vue de Dieudonné qui fut retenu.

Cependant le débat sur les choix d'articulation entre algèbre linéaire et géométrie subsista.

On trouve ainsi dans le bulletin de l'A.P.M.E.P. un échange entre Lelong-Ferrand et Frenkel, échange dont nous citons ci-dessous de larges extraits, car il concerne précisément notre sujet.

En introduction de son article, Lelong-Ferrand écrit :

« Il y a, actuellement, une tendance à vouloir réduire la géométrie élémentaire à l'étude quelques propriétés de $\mathbb{R}^2$ facilement accessibles par le calcul ; cet abus de « géométrie analytique » risque de masquer le sens et la portée des résultats.

Un des grands avantages du raisonnement dit « géométrique » (qui dans ma pensée, englobe aussi bien le calcul vectoriel que la topologie) est d'être, souvent, indépendant du nombre de dimensions de l'espace considéré et valable en dimension infinie. Il serait donc bien regrettable qu'une modernisation mal comprise de l'enseignement mathématique aboutisse à un rétrécissement et à une perte de puissance. De plus, les calculs d'algèbre linéaire à 2 ou 3 dimensions ne sont pas toujours attractifs, et risquent de décourager les bons élèves comme les mauvais. »

(Lelong-Ferrand, 1970, p.215)

Elle donne alors différents résultats : caractérisation d'une application affine par préservation de l'alignement, de l'ordre des points et des milieux ; théorème de Thalès sous la forme : une projection de l'espace sur un plan suivant une droite est une application affine ; propriétés des isométries... Tous ces résultats, de nature géométrique, sont accompagnés de démonstrations elles aussi fondées sur la géométrie.

Frenkel répond à cet article en écrivant :

« La modernisation de l'enseignement mathématique ne consiste naturellement pas à substituer le calcul aux idées, mais à remplacer certaines théories par des théories plus puissantes et de portée plus générale. L'algèbre linéaire a fait irruption dans toute la mathématique (Algèbre non linéaire, Analyse, Mécanique, Topologie, Informatique, etc...). La géométrie élémentaire ne s'en distingue pas essentiellement, sinon par le vocabulaire (et encore !). La question est donc de savoir si c'est la géométrie qui doit servir d'introduction à l'algèbre linéaire ou l'inverse...je vais tenter d'illustrer l'idée suivante : il est plus sûr, plus efficace, de penser linéairement. » (Frenkel, 1970, p.225)

Il reprend alors des résultats semblables à ceux démontrés par Lelong-Ferrand, en les formulant de manière moins géométrique, et en basant toutes ses démonstrations sur l'algèbre linéaire ; à titre d'exemple, le théorème de Thalès apparaît comme un cas particulier du théorème : « Soient F et G deux sous-espaces d'un espace affine E, de dimensions complémentaires et dont l'intersection se réduit au point O. Alors la projection de E sur F parallèlement à G est une application affine de E sur F. »

L'article de Frenkel est lui-même suivi d'une réponse de Lelong-Ferrand, dont nous retenons le passage suivant :

« C'est une grande force des mathématiques de montrer que chaque problème particulier peut être situé dans un cadre plus général (qui peut d'ailleurs varier selon notre niveau de connaissances, et selon les progrès de la science) ; mais une chose aussi concrète que la géométrie élémentaire éclate en des cadres très divers, qui sont tous fondamentaux. De ce point de vue, l'exposé de M. Frenkel et le mien ne sont pas en opposition, mais se complètent : celui de M. Frenkel, qui vise à démontrer que la géométrie affine est une illustration de l'algèbre linéaire, suggère la construction de géométries sur un corps quelconque ; le mien est une introduction à l'analyse linéaire et aux espaces de Hilbert, dont on connaît l'importance et les nombreuses applications.

Par contre, il reste un problème de niveau, essentiellement pratique... Sans vouloir aucunement imposer mon point de vue, je crois cependant utile, sur un plan pédagogique, de voir une même théorie successivement sous deux aspects : dans une première phase constructive, la structure de l'espace[3] se dégage peu à peu de faits particuliers ; dans une deuxième phase, discursive, on donne un exposé axiomatique dont les élèves comprennent d'autant mieux l'intérêt qu'il permet de faire la synthèse de faits connus. » (Lelong-Ferrand, 1970, p.233).

Dans cet échange nous retrouvons les principales idées que nous avons évoquées ci-dessus.

Frenkel est partisan de la thèse structuraliste, dans laquelle la géométrie élémentaire est uniquement l'un des domaines mathématiques pour lesquels l'algèbre linéaire sert de modèle théorique.

Lelong-Ferrand semble d'abord critiquer uniquement le côté calculatoire de l'algèbre linéaire ; l'aspect synthétique de l'algèbre linéaire présente, comme le soulignait Revuz, les caractéristiques qu'elle attribue au raisonnement « géométrique ». C'est dans sa réponse à Frenkel que son point de vue est le plus explicite : elle préconise, comme le faisait Choquet, de partir d'abord de la géométrie pour dégager les structures, ce travail pouvant être effectué au lycée. La présentation de l'axiomatique sera ensuite faite dans l'enseignement supérieur.

---

[3] Il s'agit ici de la structure affine euclidienne.

Notons que dans le point de vue de Frenkel comme dans celui de Dieudonné, l'algèbre linéaire n'apparaît pas comme un sujet délicat à enseigner ; seule Lelong-Ferrand souligne ce problème pédagogique. En revanche elle n'envisage pas pour y remédier d'autre moyen qu'une entrée par la géométrie. Cette première réaction à l'encontre des choix effectués lors de la réforme des mathématiques modernes, qui venait alors de se mettre en place, sera suivie de prises de position allant dans le même sens. La présentation défendue par Dieudonné conduisait à introduire dès le lycée une algèbre linéaire formelle, la géométrie n'étant plus qu'une application de celle-ci. Ce choix fit l'objet de critiques de plus en plus nombreuses ; finalement, l'algèbre linéaire disparut des programmes de l'enseignement secondaire en 1986. Mais les débats que nous avons rapportés, et le processus de transposition associé, accentuèrent l'importance du lien entre algèbre linéaire et géométrie. Ainsi les difficultés constatées lors de la présentation de l'algèbre linéaire en première année de DEUG après 1986 suscitèrent dans de nombreuses universités des propositions allant dans le sens d'un enseignement préliminaire de géométrie, comme le recommandait Lelong-Ferrand. La question du contenu et de la pertinence d'un tel enseignement est au centre de notre étude, et nous y reviendrons dans les chapitres suivants. Nous pouvons cependant noter dès à présent un décalage entre « position savante » et « position noosphérienne », décalage que l'on retrouvera entre le savoir savant et le savoir enseigné. En effet, lorsqu'il s'agit de leurs pratiques, les mathématiciens envisagent l'algèbre linéaire comme un outil de résolution de problèmes de géométrie, ou comme un moyen d'induire une intuition géométrique dans d'autres domaines mathématiques. Ils mentionnent donc des liens avec la géométrie qui ne se réduisent pas simplement à l'emploi de l'algèbre linéaire comme modèle théorique pour la géométrie affine, et soulignent l'importance des autres domaines d'application de l'algèbre linéaire. C'est lorsqu'il est question d'enseignement, et parce l'introduction de l'algèbre linéaire était associée à la rénovation de l'enseignement de la géométrie, que le lien entre algèbre linéaire et géométrie est accentué. Ceci conduit à minorer l'importance des autres domaines mathématiques dans lesquels l'algèbre linéaire intervient et des autres liens possibles avec la géométrie.

2. Evolution de l'articulation entre algèbre linéaire et géométrie dans les programmes de classes préparatoires et de l'enseignement secondaire

Nous présentons ici une analyse rapide de l'évolution des choix curriculaires concernant l'articulation algèbre linéaire-géométrie dans des classes dans lesquelles sont enseignés les débuts de l'algèbre linéaire ; c'est à dire en classes préparatoires, en 1956 et de nos jours, et dans l'enseignement secondaire entre 1969 et 1985.

Nous allons examiner des textes de programmes, ainsi que des manuels correspondant à ces programmes, en ce qui concerne les principales périodes de l'enseignement en lycée (c'est à dire de la classe de seconde aux classes préparatoires) de l'algèbre linéaire. Nous verrons ainsi notamment se dégager les conséquences pour le savoir enseigné des débats rapportés dans la partie précédente.

2.1 Introduction de l'algèbre linéaire dans le programme des classes préparatoires

2.1.1 Le programme de 1956

Alors que les vecteurs étaient enseignés dans les classes préparatoires depuis 1905, l'algèbre linéaire ne fait son entrée dans les programmes de ces classes qu'en 1956.

Le titre « *Vecteurs* » demeure dans le programme ; il comprend l'étude des trois types de vecteurs : liés, glissants, ou libres, les opérations sur ces vecteurs, les changements de coordonnées, les produits scalaire, vectoriel et mixte.

Le titre « *Algèbre linéaire* » étant relativement court, nous avons choisi de le reproduire ici dans son intégralité.

V Algèbre linéaire

Etude des systèmes de deux ou trois équations linéaires à deux ou trois inconnues. Interprétation vectorielle à l'aide de la génération des vecteurs d'un plan au moyen de deux vecteurs et des vecteurs de l'espace au moyen de trois vecteurs. Déterminant du deuxième ordre et produit vectoriel de deux vecteurs d'un plan ; déterminant du troisième ordre et produit mixte de trois vecteurs.

Définition des matrices rectangulaires. Matrice d'une seule ligne ou d'une seule colonne. Produit à gauche par une ligne et à droite par une colonne. Interprétation par des formes linéaires, une combinaison linéaire de formes, une forme bilinéaire. Multiplication des matrices (Associativité).

Vecteurs à n coordonnées, réelles ou complexes, prises dans un corps.

Espace vectoriel de dimension n. *Bases*. *Sous-espace vectoriel* : tout sous-espace peut être défini par des vecteurs indépendants ; en le complétant par d'autres vecteurs indépendants on peut obtenir une base de l'espace.

Matrice carrée régulière : indépendance des lignes, indépendance des colonnes ; existence d'une solution unique pour le système d'équations linéaires correspondant ; existence d'une matrice inverse. Equivalence de ces diverses propriétés. Déterminant d'une matrice carrée ; le déterminant d'une matrice carrée régulière est différent de zéro et réciproquement.

Produit de deux matrices carrées, déterminant de ce produit.

Rang d'une matrice rectangulaire. Application à l'étude d'un système de formes linéaires et d'un système d'équations linéaires, cas d'un système d'équations homogènes.

Le contenu de ce programme porte essentiellement sur l'aspect analytique de l'algèbre linéaire : systèmes, matrices, déterminants. Les espaces vectoriels étudiés sont de dimension n, et leur étude est ramenée à celle de K^n (où K est un corps).

L'interprétation vectorielle des systèmes linéaires à deux ou trois équations et deux ou trois inconnues, l'interprétation du produit vectoriel en termes de déterminants 2x2 et celle du produit mixte en termes de déterminants 3x3 sont les seuls liens explicitement indiqués avec le chapitre sur les vecteurs.

Nous allons maintenant examiner la partie consacrée à l'algèbre linéaire dans un livre de mathématiques spéciales correspondant à ce programme.

2.1.2 Le Précis de Mathématiques Spéciales de Gouyon

Auteur(s)	R.Gouyon
Titre	Précis de Mathématiques Spéciales
Editeur-Année	Vuibert, Paris, 1958
Public	Elèves de classes préparatoires
Organisation du livre	6 « livres », 31 chapitres
Notions d'algèbre linéaire (a.l.) présentées	Espaces vectoriels à n dimensions, sous-espaces, familles libres, bases, sous-espace défini par des vecteurs, matrices, opérateurs linéaires, déterminants, systèmes linéaires.
Chapitres de géométrie avant l'a.l.	Deux chapitres : *Vecteurs*, et *Introduction à la géométrie analytique*.
Vocabulaire géométrique dans les chapitres d'a.l.	16 termes issus de la géométrie, un seul apparaît en algèbre linéaire générale, tous les autres sont employés en dimension ≤ 3.
Lien vectoriel-affine	Ce lien n'est pas explicité. La géométrie affine est vue avant l'algèbre linéaire. Dans le chapitre « *Vecteurs* », l'auteur écrit : « des relations de géométrie affine sont des relations se conservant par affinité ». L'algèbre linéaire n'est pas appliquée en géométrie affine, mais en géométrie projective.
Figures	Pas de figures dans le chapitre d'algèbre linéaire.
Discours explicite sur le lien algèbre linéaire-géométrie	Non.

Emploi du vocabulaire géométrique

Utilisé en dimension ≤ 3	Utilisé en algèbre linéaire ou bilinéaire générale
Espace, translation symétrie, similitude, coordonnées homogènes, point, droite, orthonormé, aire, parallélogramme, plan, parallèle, volume, triangle, trièdre, polygone.	Espace.

Ce livre apparaît comme tout à fait conforme au programme ; en particulier, l'approche faite de l'algèbre linéaire est très analytique. La définition de la notion d'espace vectoriel qui y est donnée est, à cet égard, significative :

« Considérons un ensemble d'éléments dont chacun est défini par une suite de *n* nombres d'un corps K :

$A = (a^1, a^2, \dots a^n)$, $B=(b^1, b^2, \dots b^n)$; généralisant la définition d'un vecteur par ses composantes cartésiennes, nous dirons que l'ensemble E_n des éléments de ce type est un espace vectoriel à n dimensions (les éléments A, B ... étant les vecteurs de cet espace) pourvu que soient définies :

l'égalité $A=B$ par les conditions $a^1=b^1 \dots a^n=b^n$

l'addition, par $A+B=(a^1+b^1, \dots a^n+b^n)$

la multiplication par un scalaire du corps K, par $\lambda A=(\lambda a^1, \dots \lambda a^n)$ » (Gouyon 1956, P. 106)

On trouve dans un autre chapitre la remarque suivante : « ...les vecteurs de la théorie des espaces vectoriels ne sont autre chose, rappelons-le, que des systèmes de nombres susceptibles des interprétations les plus diverses.» En effet, même si la définition donnée peut laisser supposer que l'auteur se limitera à l'étude d'espaces du type K^n, ce n'est pas le cas dans la suite du livre : il étudie notamment des espaces de polynômes, ou de fonctions. Mais ces espaces sont considérés comme munis d'une base a priori, donc leurs éléments peuvent être interprétés comme des suites de nombres.

L'ensemble des vecteurs du plan, ou de l'espace, sont cités comme exemples d'espaces vectoriels ; mais la géométrie n'est pas utilisée pour introduire des notions ou des propriétés d'algèbre linéaire.

L'algèbre linéaire occupe en fait dans ce livre une place mineure : il s'agit essentiellement de se doter d'un outil de calcul sur des « systèmes de nombres » ; l'objectif principal reste la résolution de problèmes de géométrie : recherche de lieux géométriques dans le plan ou l'espace, classification des coniques et des quadriques. Aucune présentation de la géométrie en dimension *n* n'est prévue par le programme, ce qui affaiblit naturellement le lien entre algèbre linéaire et géométrie. En effet, bien que les notions d'algèbre linéaire définies le soient dans le cadre des espaces de dimension *n*, elles ne seront employées en géométrie que pour des dimensions inférieures ou égales à trois.

2.2 L'algèbre linéaire dans l'enseignement secondaire au moment de la réforme des mathématiques modernes

2.2.1 Les programmes de lycée

Les programmes de la réforme, qui prévoient notamment que, contrairement à ce qui avait lieu auparavant, l'algèbre linéaire sera étudiée au lycée, sont entrés en vigueur en 1969 ; à quelques modifications mineures près, ils sont restés en vigueur jusqu'en 1981.

Nous nous intéresserons ci-dessous uniquement aux programmes des classes de seconde, première et terminale C ; nous nous basons pour ce qui suit sur un texte officiel datant de 1973.

La notion d'espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ est introduite en seconde C. Dans un premier temps, des espaces variés sont présentés aux élèves, sans que le vocabulaire soit introduit : l'ensemble des vecteurs du plan (qui ont été présentés en classe de quatrième comme classe d'équivalence de bipoints équipollents), puis $\mathbb{R}^2$, $\mathbb{R}^3$, et des espaces de fonctions. La définition axiomatique d'espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ est ensuite donnée ; et les notions de combinaison linéaire, indépendance linéaire, plan vectoriel, base d'un tel plan, coordonnées d'un vecteur du plan dans une base donnée sont présentées ; les élèves rencontrent enfin la notion d'application linéaire. Des exemples d'applications linéaires du plan sont étudiés, en particulier les homothéties (présentées comme le produit par une constante) et les projections sur une droite vectorielle suivant une autre droite vectorielle.

La notion d'application linéaire permet enfin de définir celle d'application affine ; il ne s'agit ici que d'applications affines d'un espace vectoriel, la notion d'espace affine ne figurant pas explicitement au programme. D'autre part la notion de produit scalaire de deux vecteurs du plan est définie, en tant que forme bilinéaire symétrique définie positive, et conduit à celle de plan euclidien.

Le programme de la classe de première C reprend tout d'abord la notion d'espace vectoriel, avec la définition axiomatique ; les élèves rencontrent ensuite les notions de sous-espace vectoriel, base, coordonnées et dimension (dans un cadre plus général qu'en seconde, puisque l'on va ici jusqu'à la dimension n). Puis ils abordent la notion de matrice d'une application linéaire du plan, et voient le lien entre composition des applications et multiplication de matrices 2x2.

La notion de produit scalaire est vue en dimension 2 et 3 ; les isométries du plan sont étudiées et classifiées, ainsi que les matrices correspondantes.

En classe de terminale C, sont présentées de plus les notions de sous-espaces supplémentaires et de sommes directes de sous-espaces, d'image et de noyau d'une application linéaire. Les élèves voient ensuite les notions d'application affine (générale), ils étudient les exemples des projections, des involutions, des translations et des homothéties de l'espace ; enfin ils abordent les isométries de l'espace, qui sont classifiées de la même manière que celles du plan l'avaient été en première.

On observe donc une progression qui va dans le sens d'une abstraction de plus en plus importante ; en seconde, il était encore admis d'employer une géométrie antérieure à l'algèbre linéaire, et qui pouvait servir à introduire celle-ci ; à partir de la classe de première, c'est l'algèbre linéaire qui fonde la géométrie. En terminale, très peu de nouveaux concepts d'algèbre linéaire sont introduits ; en revanche de nombreux résultats de géométrie vectorielle et affine (euclidienne ou non) sont établis en utilisant exclusivement l'algèbre linéaire.

Nous pouvons noter à cet égard que les notions et résultats d'algèbre linéaire apparaissent sous le titre « Géométrie et espaces vectoriels sur IR » en seconde ; « Géométrie vectorielle et géométrie affine » en première ; « Eléments de géométrie affine et euclidienne » en terminale. Il est encore plus significatif d'examiner les commentaires qui accompagnent les programmes.

Ainsi, pour la classe de seconde, il est stipulé qu'il s'agit de « dégager l'idée de structure d'espace vectoriel à partir de concepts géométriques simples, élaborés depuis la classe de quatrième ». Pour l'introduction de la locution « espace vectoriel », et de la notion de combinaison linéaire, le professeur est invité à « reprendre et à compléter les faits connus du plan et à les traduire en langage d'espace vectoriel ».

En revanche le commentaire du programme de première confère au terme géométrie un sens nouveau ; il désigne une notion clairement postérieure à l'algèbre linéaire. Nous allons en citer de larges extraits ci-dessous, car il concerne directement notre objet d'étude.

« Les chapitres qui suivent sont consacrés à la géométrie. Ce mot a recouvert longtemps une certaine description du monde physique, une énumération (parfois incomplètement explicitée) de propriétés que des raisons expérimentales lui faisaient attribuer, enfin, et c'est l'essentiel, l'étude des propriétés qui pouvaient être déduites des précédentes par un raisonnement logique. Il désigne dorénavant une construction mathématique, logique par nature, s'appuyant sur un système cohérent d'axiomes où interviennent au premier chef les structures algébriques (espaces vectoriels, groupes...) et topologiques (IR, IR^n,...).

C'est ce dernier sens qu'adopte définitivement le programme de Première, auquel le programme de Seconde ménageait une transition ; dès lors, faire appel à l'expérience pour décrire un plan, pour détailler les positions relatives d'une droite et d'un plan, pour définir l'orientation d'un plan, serait entretenir une confusion dommageable ; cependant un schéma, un diagramme, une figure soignée restent opportuns pour porter les notations, consigner les hypothèses, suggérer et guider une démarche déductive.

Le programme de Seconde et son commentaire ont souligné la variété des êtres mathématiques auxquels peut s'appliquer la structure d'espace vectoriel ; on conservera à la géométrie de Première ce même sens large, en ce qui concerne la structure d'espace affine, euclidien ou non ; c'est parfois en utilisant cette géométrie dans des domaines qui lui ont été récemment ouverts que bien des élèves trouveront une motivation pour une recherche attentive et féconde. » (Programmes de la classe de première C, 1973)

Il est donc explicite ici que la géométrie dont il est question, si elle est vectorielle, s'identifie à l'algèbre linéaire ; si elle est affine, est fondée sur l'algèbre linéaire ; elle sera caractérisée par des structures, et non par la nature des objets concernés.

On observe donc bien ici la mise en œuvre des idées de Dieudonné, telles que nous les avons exposées au chapitre précédent.

L'examen des manuels correspondants confirme cette tendance.

2.2.2 L'algèbre linéaire et la géométrie dans des manuels de l'enseignement secondaire entre 1969 et 1980

Nous examinons ci-dessous trois manuels : seconde, première et terminale C écrits par les mêmes auteurs et publiés dans la même collection entre 1972 et 1976. Nous avons choisi ces manuels car ils étaient à l'époque couramment employés en lycée, et sont donc représentatifs de ce qui était alors pratiqué.

Auteur(s)	A.THUIZAT et G.GIRAULT
Titre	Mathématique Seconde C et T
Editeur-Année	Technique et vulgarisation, Paris, 1972
Organisation du livre	5 chapitres (dont deux d'algèbre linéaire), 17 paragraphes
Notions d'algèbre linéaire (a.l.) présentées	Espace vectoriel, indépendance linéaire, famille génératrice, bases, coordonnées, applications linéaires, produit scalaire
Chapitres de géométrie avant l'a.l.	Non ; mais les propriétés de l'ensemble des vecteurs du plan (vu en classe de quatrième) sont présentées avant la définition générale d'espace vectoriel sur IR.
Vocabulaire géométrique dans les chapitres d'a.l.	9 termes issus de la géométrie, 4 apparaissent en algèbre linéaire générale, tous sont employés en dimension ≤ 3.
Lien vectoriel-affine	La notion d'espace affine est définie par rapport à un espace vectoriel de référence.
Figures	17 figures dans les chapitres d'algèbre linéaire ; 11 représentent des vecteurs (les autres sont des diagrammes de Venn, représentant des ensembles), 10 sont en dimension 2, une seule en dimension quelconque.
Discours explicite sur le lien algèbre linéaire-géométrie	Non.

Auteur(s)	A.THUIZAT et G.GIRAULT
Titre	Mathématique Première C, T et E.
Editeur-Année	Technique et vulgarisation, Paris, 1972
Organisation du livre	3 chapitres (dont un intitulé « géométrie vectorielle et géométrie affine », et comportant quatre paragraphes dont trois d'algèbre linéaire), 16 paragraphes.
Notions d'algèbre linéaire (a.l.) présentées	Rappels de Seconde, plus : sous-espace vectoriel, somme, somme directe, supplémentaire, dimension, matrice d'une application linéaire.
Chapitres de géométrie avant l'a.l.	Non.
Vocabulaire géométrique dans les chapitres d'a.l.	11 termes issus de la géométrie, 5 apparaissent en algèbre linéaire générale, tous sont employés en dimension ≤ 3.
Lien vectoriel-affine	La notion d'espace affine est définie par rapport à un espace vectoriel de référence.
Figures	Dans le chapitre « géométrie vectorielle et géométrie affine », quatre figures, dont trois figures vectorielles représentant des situations en dimension 2 et un diagramme figurant la composition d'applications linéaires.
Discours explicite sur le lien algèbre linéaire-géométrie	« La géométrie a été introduite, dans les classes élémentaires, par l'étude d'ensembles de points, nommés droite, plan, espace. Les axiomes adoptés pour ces ensembles en font un modèle mathématique traduisant certaines propriétés du monde physique. A partir de l'univers ainsi constitué, les notions de vecteur, puis de structure d'espace vectoriel, ont été dégagées en classe de Seconde. L'analyse des propriétés des espaces vectoriels a permis, revenant aux ensembles de points initiaux, d'approfondir l'étude de ceux-ci. Il est apparu que la notion d'espace vectoriel était beaucoup plus riche que ne le laissait prévoir son origine géométrique et que le cadre de ses applications débordait largement celui de l'espace physique. C'est pourquoi, en classe de Première, la structure d'espace vectoriel est définie d'abord axiomatiquement ; la définition des espaces affines en résulte. Les ensembles géométriques de points, cités plus haut, se présentent alors comme des espaces affines particuliers. »

Auteur(s)	A.THUIZAT et G.GIRAULT
Titre	Mathématique Classes Terminales C
Editeur-Année	Technique et vulgarisation, Paris, 1972
Organisation du livre	2 chapitres, 15 paragraphes
Notions d'algèbre linéaire (a.l.) présentées	Rappels de toutes les notions vues en seconde et en première, plus : image et noyau ; isométries.
Chapitres de géométrie avant l'a.l.	Non, le premier paragraphe est intitulé : « Généralités sur les structures, espaces vectoriels sur IR ».
Vocabulaire géométrique dans les chapitres d'a.l.	10 termes issus de la géométrie, dont 8 apparaissent aussi en algèbre linéaire générale (tous sont rencontrés en dimension ≤ 3).
Lien vectoriel-affine	La notion d'espace affine est définie par rapport à un espace vectoriel de référence.
Figures	38 figures dans les paragraphes d'algèbre linéaire, dont 34 figures vectorielles représentant des situations en dimension inféreure ou égale à trois, et 4 diagrammes de Venn.
Discours explicite sur le lien algèbre linéaire-géométrie	Non.

En ce qui concerne l'emploi du vocabulaire, nous faisons un unique tableau récapitulant les termes rencontrés dans les trois ouvrages consultés.

Emploi du vocabulaire géométrique

Utilisé en dimension ≤ 3	Utilisé en algèbre linéaire ou bilinéaire générale
Espace, plan, droite, translation, homothétie, rotation, isométrie, orthogonal, parallèle, projection, dilatation, symétrie, angle, orientation, trièdre.	Espace, plan, droite, translation, homothétie, rotation, isométrie, orthogonal.

Ces manuels sont conformes au contenu et à l'esprit du programme, tels que nous les avons présentés plus haut. La rénovation de l'enseignement de la géométrie y est effective : le terme même de géométrie désigne soit l'algèbre linéaire elle-même, soit une géométrie affine basée sur l'algèbre linéaire.

Il n'y a donc plus, en tout cas après la classe de seconde, de géométrie qui serait antérieure à l'algèbre linéaire, et pourrait être utilisée comme support à l'enseignement de celle-ci.

Les manuels que nous avons étudiés comportent peu de figures (ceci semble être également le cas des autres manuels de cette époque), et utilisent de plus des représentations ensemblistes : diagrammes de Venn, pour figurer des espaces et sous-espaces vectoriels.

Les commentaires de programmes ne signalaient pas de difficultés éventuelles dans l'apprentissage de l'algèbre linéaire, et dès la classe de première celle-ci est présentée sans préambule. Une progression est ménagée par la limitation, en classes de seconde et de première, à la dimension 2, et en classe de terminale à la dimension 3 pour les objets (essentiellement des transformations) qui sont étudiés dans le détail. Cependant les définitions semblent autant que possible données dans un cadre général.

L'objectif affiché de cet enseignement d'algèbre linéaire est de se doter d'un outil pour faire de la géométrie ; mais, comme nous avons pu l'observer, la géométrie qui est étudiée est en fait une partie de l'algèbre linéaire elle-même.

2.3 L'algèbre linéaire dans l'enseignement secondaire entre 1981 et 1985

A partir de 1981, d'importantes modifications sont faites au programme qui correspondait à la réforme des mathématiques modernes. L'algèbre linéaire disparaît en seconde ; quelques notions sont abordées en première, et elle n'est réellement étudiée qu'en terminale. Nous allons examiner ici les programmes de première S et de terminale C en vigueur à cette époque.

Le programme de première S prévoit l'introduction de quelques notions d'algèbre linéaire, dans un esprit qui est clairement précisé en préambule :

« Le professeur procédera à un rappel rapide (sans démonstration) des propriétés des opérations sur les vecteurs du plan. En vue de faciliter la communication, il donnera la définition d'un espace vectoriel et d'une application linéaire, un premier exemple d'application linéaire étant la projection vectorielle. Aucune théorie générale des espaces vectoriels et des applications linéaires n'est au programme ; il n'y aura pas lieu de donner d'autres exemples d'espaces vectoriels que les ensembles de vecteurs de la droite, du plan, de l'espace. L'intuition géométrique sera développée par l'emploi fréquent de figures, concernant aussi bien les ensembles de vecteurs que les ensembles de points. » (Programme de première S, 1981)

La suite du programme prévoit l'étude de la géométrie (vectorielle et affine) du plan puis de l'espace.

Les seules notions d'algèbre linéaire qui doivent être présentées aux élèves sont donc celles d'espace vectoriel et d'application linéaire ; elles sont présentées comme de simples facilités de vocabulaire.

L'algèbre linéaire fait en revanche l'objet d'une étude approfondie en classe de terminale C ; le programme comporte explicitement un titre « algèbre linéaire », contrairement à ce que nous avions observé dans le programme précédent.

Celui-ci prévoit notamment l'étude des notions de sous-espace vectoriel, famille génératrice, libre, base, dimension, application linéaire et matrice d'une telle application. Il y a donc dans ce programme tout ce qui était vu en algèbre linéaire de la seconde à la Terminale dans le programme précédent ; ceci va même plus loin, puisqu'il s'agit d'une étude générale en dimension n.

Le programme insiste sur l'étude du « modèle fondamental $\mathbb{R}^n$ » ; il n'y a plus, comme dans les programmes précédents, de limitation à la dimension 2 ou 3.

Le commentaire du programme stipule qu' « il s'agit avant tout de faciliter une attaque efficace de problèmes numériques ou géométriques ».

Nous allons maintenant examiner un ouvrage de terminale C correspondant à ce programme.

Auteur(s)	M.Gourion
Titre	Mathématique Terminales C et E
Editeur-Année	Fernand Nathan, Paris, 1983
Organisation du livre	11 chapitres, dont deux d'algèbre linéaire, et 8 de géométrie affine ;
Notions d'algèbre linéaire (a.l.) présentées	Espace vectoriel, sous-espace, famille génératrice, famille libre, bases, dimension, sous-espaces supplémentaires, applications linéaires, noyau, image, matrices, systèmes linéaires, isométries (le tout en dimension n).
Chapitres de géométrie avant l'a.l.	Non
Vocabulaire géométrique dans les chapitres d'a.l.	7 termes issus de la géométrie, six apparaissent en dimension ≤3 et six apparaissent dans un cadre général.
Lien vectoriel-affine	La notion d'espace affine n'est pas définie, conformément aux directives du programme ; on ne rencontre en effet que des espaces affines de dimension 1,2 ou 3 qui sont considérés comme les ensembles de points déjà connus ; on considère l'ensemble des vecteurs ayant ces points comme extrémités, et on dit qu'il s'agit de l'espace vectoriel associé.
Figures	2 figures vectorielles dans les paragraphes d'algèbre linéaire, illustrant les notions générales (dimension non fixée) de projection et symétrie vectorielles.
Discours explicite sur le lien algèbre linéaire-géométrie	Non.

Emploi du vocabulaire géométrique

Utilisé en dimension ≤ 3	Utilisé en algèbre linéaire ou bilinéaire générale
Espace, plan, droite, projection, isométrie, symétrie.	Espace, plan, droite, projection, symétrie, homothétie.

Ce livre comporte donc en particulier très peu de figures, et de vocabulaire géométrique dans les chapitres d'algèbre linéaire.

Ceci confirme les observations faites à la lecture du programme. A cette époque, contrairement à celle qui avait précédé, la notion générale d'espace affine n'est plus introduite. L'algèbre linéaire ne sert, en géométrie, qu'à fournir un vocabulaire adéquat lorsque l'on utilise l'ensemble des vecteurs associés à l'ensemble des points du plan ou de l'espace.

Or l'étude d'algèbre linéaire proposée va largement au-delà de ce qui serait nécessaire pour cet objectif. L'algèbre linéaire apparaît donc encore plus qu'auparavant comme un objet d'étude à part entière. Elle est présentée de manière structurelle, sans faire appel à un éventuel modèle issu d'une géométrie antérieure à l'algèbre linéaire ; il ne semble donc pas qu'un objectif de ce changement de programme puisse être d'induire une simplification en ce qui concerne l'enseignement de l'algèbre linéaire. La progression qui était ménagée auparavant grâce à la répartition sur trois ans de l'introduction de l'algèbre linéaire, et au lien souligné en classe de seconde avec l'ensemble des vecteurs du plan, ensemble connu dès la classe de quatrième, n'a fait ici l'objet d'une tentative de reproduction.

2.4 Le programme de mathématiques supérieures en 1995

A la suite de la période que nous venons d'examiner, l'algèbre linéaire a disparu des programmes de l'enseignement secondaire ; elle est désormais rencontrée pour la Première fois dans l'enseignement supérieur, à l'université ou en classes préparatoires. Il n'y a pas de textes de programmes officiels concernant ce qui doit être vu à l'université ; c'est pourquoi nous allons examiner un programme de classes préparatoires. Ceci nous permettra en outre de mesurer l'évolution effectuée depuis l'entrée, en 1956, de l'algèbre linéaire dans le programme de ces classes.

Nous avons choisi la classe de mathématiques supérieures MPSI ; nous n'étudierons pas de manuel correspondant, car nous analysons à la fin de ce chapitre plusieurs manuels actuels destinés à l'enseignement supérieur.

Ce programme souligne « l'importance capitale de l'algèbre linéaire » ; le contenu confirme ce commentaire, puisque l'algèbre linéaire figure dans différents titres du programme.

Tout d'abord sous le titre « structures algébriques usuelles », sont présentées dans un cadre général les notions d'espace vectoriel, sous-espace, application linéaire, supplémentaires et projecteur associé (on trouve dans cette même partie du programme les notions de groupe, d'anneau etc.).

Vient ensuite un titre « Algèbre linéaire et géométrie affine », en introduction duquel on trouve les consignes suivantes :

« L'objectif est double :

- Acquérir les notions de base sur les espaces vectoriels de dimension finie (indépendance linéaire, bases, dimension, sous-espaces vectoriels supplémentaires et projecteurs, rang), le calcul matriciel et la géométrie affine réelle (sous-espaces affines, barycentres, applications et transformations affines)
- Maîtriser les relations entre le point de vue géométrique (vecteurs et applications linéaires, points et applications affines) et le point de vue matriciel.

Il convient d'étudier conjointement l'algèbre linéaire et la géométrie affine et, dans les deux cas, d'illustrer les résultats et les notions par de nombreuses figures.» (Programme de la classe de MPSI, 1995)

Ce commentaire est à plusieurs égards pertinent pour notre étude. Il ne mentionne pas d'emploi de la géométrie pour introduire l'algèbre linéaire ; d'ailleurs les principales notions qui sont citées ensuite à cet endroit du programme ne sont pas nouvelles, car elles ont déjà été rencontrées lors de l'étude des structures (ce découpage correspond bien au déroulement effectif du cours, car les structures doivent être vues « en première période », et les espaces vectoriels de dimension finie « en deuxième période »). Mais il fait référence à la notion de « point de vue géométrique », qui peut concerner aussi bien la géométrie affine que l'algèbre linéaire, et qui est en fait l'aspect synthétique, opposé à l'aspect analytique.

Par ailleurs l'emploi de figures est encouragé. L'étude de la géométrie affine est fortement associée à celle de l'algèbre linéaire, le programme écartant même le choix d'un ordre de présentation : algèbre linéaire d'abord, puis géométrie basée sur celle-ci ; ou géométrie affine indépendante de l'algèbre linéaire , utilisée ensuite pour introduire celle-ci. Les deux doivent être vues simultanément ; ceci entraînant probablement une présentation structurelle de la géométrie affine.

Après l'étude complète de la dimension finie (notions de base, dimension, matrices, rang etc.), on retrouve de l'algèbre linéaire sous le titre : « Espaces vectoriels euclidiens et géométrie euclidienne ».

Le même commentaire que celui que nous avons cité ci-dessus, assorti le cas échéant des adjectifs « orthogonaux », « euclidien », figure au début de ce titre.

On retrouve la mention du « point de vue géométrique », et celle des figures.

Plusieurs éléments sont à retenir de ce rapide examen du programme. Tout d'abord la place prépondérante acquise par l'algèbre linéaire (pensons en particulier à ce qu'il en était dans le programme correspondant en 1956). Puis l'absence de toute indication allant dans le sens d'une étude géométrique préliminaire, qui pourrait soutenir l'introduction de l'algèbre linéaire (ce qui est une autre différence notable par rapport au programme de 1956) ; l'approche est résolument structurelle.

Enfin le rapprochement entre géométrie affine et algèbre linéaire, qui doivent être étudiées simultanément ; l'algèbre linéaire n'est même plus mentionnée comme un outil permettant de résoudre des problèmes de géométrie, comme c'était le cas dans les programmes de lycée avant 1986. C'est un objet d'étude fondamental, dont la géométrie affine est une autre forme. La distinction algèbre linéaire\géométrie semble moins pertinente que celle entre « le point de vue géométrique » et « le point de vue matriciel », c'est à dire la dualité synthétique\analytique.

3. Conclusion

Le processus que nous avons retracé ici montre comment le lien entre algèbre linéaire et géométrie a été accentué dans le savoir enseigné, par rapport au fonctionnement du savoir savant, et à l'évolution historique que nous avions décrite au chapitre précédent.

Nous avons également vu comment les réformes successives ont mené à l'enseignement d'une algèbre linéaire de plus en plus théorique, présentée d'une manière de moins en moins progressive, et occupant de plus en plus de place aux dépends de la géométrie.

Comme dans le livre de Dieudonné, « *Algèbre linéaire et géométrie élémentaire* », on observe dans les manuels de lycée, entre 1969 et 1985 de nombreuses définitions et propriétés données dans le cadre le plus général possible, contrairement aux intentions affichées par l'auteur, ou par le programme, en matière de limitation à des dimensions inférieures ou égales à trois.

Par ailleurs, dans ces manuels les chapitres intitulés « géométrie » comportent une part importante d'algèbre linéaire, et la géométrie affine présentée est fondée sur l'algèbre linéaire. Ainsi le manuel : « Mathématiques première C,D,E » (Thuizat, Giraud 1972) comporte un chapitre intitulé « géométrie vectorielle et géométrie affine ». Ce chapitre est composé de quatre paragraphes : espaces vectoriels sur IR ; coordonnées d'un vecteur et dimension d'un espace vectoriel ; matrice d'une application linéaire ; espaces affines de dimension 2 ou 3.

Cette tendance structurale a probablement participé à l'échec de la réforme engagée, et conduit notamment à la suppression de l'algèbre linéaire dans les programmes de l'enseignement secondaire.

Cependant la géométrie actuellement enseignée au lycée, bien que très différente de ce qui était vu lors de la réforme des mathématiques modernes, est encore marquée par les choix qui avaient été faits alors. Elle reste ainsi essentiellement linéaire ; les élèves ne rencontrent plus, par exemple, de transformations du plan qui ne soient pas affines, comme c'était le cas auparavant avec l'inversion. On observe particulièrement cette influence lorsqu'il s'agit de calcul vectoriel. De nombreuses notions, abordées dans le cours de calcul vectoriel au lycée, seront ensuite revues en algèbre linéaire ou bilinéaire à l'université : c'est le cas notamment des bases, des projections ou des isométries. Ceci est une piste qui peut permettre d'établir des liens entre ce qui est vu au lycée, et l'algèbre linéaire enseignée à l'université. C'est pourquoi nous allons étudier en détail au chapitre suivant l'évolution de telles notions.

CHAPITRE 4

GEOMETRIE ET ALGEBRE LINEAIRE DANS LES TEXTES DU SAVOIR ACTUELS

Dans ce chapitre, nous allons examiner des textes de savoir actuellement utilisés à l'université, en première et deuxième année de DEUG à dominante mathématiques. Nous chercherons tout d'abord à déterminer des liens, effectifs ou possibles, avec la géométrie vectorielle vue au lycée, dans le cours comme dans les exercices. Nous analyserons ensuite des manuels destinés aux étudiants de DEUG actuels, en utilisant le même type de grille que dans le chapitre précédent, et en examinant de plus les tâches proposées.

1. De la géométrie vers l'algèbre linéaire : traduire une évolution ?

Le passage de la géométrie vectorielle enseignée au lycée à l'algèbre linéaire et bilinéaire, voire ensuite à l'analyse fonctionnelle, peut être interprété, comme nous l'avons annoncé au premier chapitre, en termes de niveaux de conceptualisation. Nous allons maintenant, en nous centrant sur des notions élémentaires d'algèbre linéaire et bilinéaire dont certains aspects ont été abordés dans le cours de géométrie du lycée, tenter de décrire les caractéristiques du passage d'un niveau à l'autre. Pour mettre en évidence les continuités et les ruptures, nous comparerons les définitions données, les propriétés et théorèmes, mais également des types de tâches mettant en jeu les notions retenues. Nous nous pencherons dans ce dernier cas sur des types de tâches rencontrés à l'université, et présentant une parenté avec des types de tâches présents au lycée. Nous étudierons les praxéologies ponctuelles associées, pour déterminer les points communs et les différences des techniques et technologies correspondantes. Nous tenterons également de repérer des types de tâches qui auraient pu être présents au lycée, les techniques et technologies correspondantes étant disponibles, mais que l'on ne rencontre pas dans les manuels ; nous chercherons alors à expliquer leur absence. Nous ne prétendons pas à l'exhaustivité ; pour le choix de notions, nous nous sommes basés sur l'étude réalisée au chapitre précédent, et nous avons retenu des notions qui apparaissaient dans l'enseignement d'algèbre linéaire fait au lycée à l'époque de la réforme des mathématiques modernes et sont encore présentes au lycée actuellement, ou du moins peuvent apparaître comme des généralisations de notions présentes au lycée.

Nous nous basons pour cette étude sur les polycopiés de cours et d'exercices de l'Université de Rennes 1 de l'année 1997-1998, sur les exercices proposés dans les fiches de l'Université de Lille, et sur les livres « Algèbre linéaire » (Grifone 1990, Cépaduès Editions), « Précis de mathématiques » (Guinin, Aubonnet, Joppin 1994, Bréal) en ce qui concerne le supérieur. Pour l'enseignement secondaire, nous utilisons les ouvrages suivants : Dimathème seconde, première S, terminale S ; Fractale seconde, première S, terminale S, et Transmath seconde, première S, terminale S. Les définitions, propriétés et tâches mentionnées sont donc celles que nous avons relevées dans ces ouvrages ; si différentes définitions apparaissent, nous le signalons. Pour certaines des notions que nous abordons, l'analyse fonctionnelle conduit à développer un autre niveau de conceptualisation ; nous évoquons alors les enseignement de licence et de maîtrise correspondants, en nous basant sur les polycopiés de cours et d'exercices de l'Université de Rennes 1, et sur le livre « Analyse fonctionnelle » (Brezis 1983, Masson). Pour l'enseignement supérieur, nous avons retenu d'une part des ouvrages qui sont couramment utilisés à l'Université de Rennes 1 : polycopiés de cours et d'exercices, fiches de l'USTL, Grifone et Brezis. En effet l'un des objectifs de cette étude est de fournir un support à l'élaboration de questionnaires destinés aux étudiants de l'Université de Rennes 1 ; nous avons donc choisi de la baser sur des textes de savoir correspondant aux contenus que ces étudiants ont pu effectivement rencontrer. Par ailleurs, nous avons choisi le « Précis de mathématiques » (Guinin, Aubonnet, Joppin 1994, Bréal) afin d'observer une approche différente de celles qui figurent dans les ouvrages précédents : en effet ce livre, destiné aux classes préparatoires, propose un point de vue plus structurel. Pour l'enseignement secondaire, nous avons choisi d'employer trois collections différentes, couramment utilisées en lycée, afin de disposer d'un éventail de possibilités suffisamment vaste.

1.1 Famille libre, famille liée

1.1.1 Définition, propriétés

Définitions

La définition de famille libre est donnée en DEUG dans les ouvrages que nous avons consultés sous la forme (pour une famille finie) : une famille est libre si toute combinaison linéaire nulle des vecteurs de la famille a tous ses coefficients nuls. Une famille liée est une famille qui n'est pas libre.

Les termes : famille libre, famille liée, n'apparaissent pas dans le secondaire ; en revanche les notions de vecteurs colinéaires, vecteurs coplanaires, y sont définies (les vecteurs considérés appartiennent alors au plan ou à l'espace géométriques). On peut donc considérer que l'aspect : « famille liée » est prédominant dans le secondaire ; contrairement à la présentation effectuée dans le supérieur, il précède l'aspect « famille libre ». On parlera parfois de vecteurs non colinéaires, ou non coplanaires (en particulier lorsqu'il sera question de bases, comme nous le verrons dans la partie suivante) ; toutefois ces expressions n'apparaîtront que rarement, car la colinéarité et la coplanarité seront le plus souvent employées pour montrer le parallélisme de plans et de droites. Nous pouvons également noter que la dépendance linéaire renvoie dans le secondaire à deux termes ; il n'existe pas de mot commun pour les deux cas, et les deux définitions sont donc différentes.

La colinéarité est définie pour deux vecteurs non nuls donnés par des représentants $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sous la forme : $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont colinéaires équivaut à (AB) et (CD) sont parallèles ; de même la coplanarité est définie pour trois vecteurs u, v, et w par : si $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$ et $\overrightarrow{OC}$ sont respectivement des représentants de u, v et w ; u, v, et w sont coplanaires équivaut à O, A, B et C sont dans un même plan. Ainsi les définitions initiales données au lycée sont très liées à une configuration spatiale ; elles ne permettent de montrer que des vecteurs sont colinéaires ou coplanaires que dans le cas de configurations particulières (nous reviendrons sur ce point dans l'étude des types de tâches). Par ailleurs, même si l'on signale que plusieurs vecteurs peuvent être colinéaires ou coplanaires, les définitions sont données pour, respectivement, deux et trois vecteurs.

Propriétés et théorèmes

Nous relevons en DEUG les propriétés et théorèmes suivants, concernant les notions de familles libres ou liées :

- (P_{11}) Une famille est liée si et seulement si l'un des éléments de la famille s'écrit comme combinaison linéaire des autres ;
- (P_{12}) Une famille contenant une famille liée est liée ;
- (P_{13}) Une sous-famille d'une famille libre est libre ;
- (P_{14}) Une famille contenant le vecteur nul est liée.

On trouve, dans le cours de première S, des résultats apparentés à la propriété (P_{11}), et qui comme celle-ci suivent immédiatement la définition (de colinéarité ou de coplanarité) :

- Deux vecteurs non nuls $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont colinéaires si et seulement si il existe un nombre k tel que $\overrightarrow{AB} = k\overrightarrow{CD}$ [1].
- Si u, v et w sont trois vecteurs tels que u et v ne sont pas colinéaires, alors u, v, w sont coplanaires si et seulement si il existe des nombres a et b tels que w = au + bv.

On peut de même considérer que la propriété, vue en première S : « Si u et v sont colinéaires, alors u, v, w sont nécessairement coplanaires » est un cas particulier de la propriété (P_{12}) citée ci-dessus.

En revanche on ne trouve au lycée aucune propriété apparentée à (P_{13}) et (P_{14}). Ceci s'explique, pour (P_{13}), par le fait que, comme nous l'avons noté ci-dessus, l'aspect « famille libre », qui correspondrait à « vecteurs non colinéaires » ou « vecteurs non coplanaires », apparaît peu au lycée. De plus (P_{13}) peut apparaître comme une évidence spatiale : si trois vecteurs sont non coplanaires, il est clair que deux d'entre eux ne peuvent être colinéaires.

[1] Notons que la définition de colinéarité donnée dans le secondaire conduit à considérer comme une convention le fait que le vecteur nul est colinéaire à tous les autres vecteurs.

Quant à (P_{14}), elle n'est pas pertinente dans le cadre géométrique. Celui-ci, et l'utilisation de représentants pour les vecteurs, conduit même à remplacer (P_{14}) par la convention signalée en note.

1.1.2 Praxéologies

Nous allons tout d'abord présenter les types de tâches rencontrés en DEUG, et qui présentent une parenté, que nous expliquerons ensuite, avec des types de tâches vus au lycée. Le détail des techniques et technologies employées en DEUG est donné en annexe 1.

Autour de la notion de famille libre, nous n'avons observé qu'un type de tâches rencontré en DEUG et présentant une parenté avec certains types de tâches de lycée.

T_{libre} : déterminer si une famille est libre.

DEUG

Nous nous limiterons ici au cas d'un espace de dimension finie.

Les techniques employées varieront en fonction de l'espace étudié ; nous allons examiner l'exemple de $\mathbb{R}^n$, auquel on peut toujours se ramener par l'isomorphisme canonique (en supposant bien entendu que les notions correspondantes ont été rencontrées). Toutes les techniques évoquées ci-dessous peuvent donc être employées dans tout espace de dimension finie. Cependant, il existe des techniques spécifiques selon les objets étudiés : polynômes, suites, fonctions (voir annexe 1).

Exercice D1.1[2]
Déterminer si p vecteurs ($a_1, a_2, \ldots, a_p$) de $\mathbb{R}^n$ forment une famille libre de $\mathbb{R}^n$.

En général dans un tel exercice, on a $p \leq n$; dans le cas contraire, si l'on dispose de la définition de la dimension, il suffit de signaler que la famille est liée, car le nombre de vecteurs est supérieur à la dimension de l'espace.

Plusieurs techniques sont disponibles pour déterminer si la famille est libre :

- τ_S : emploi d'un système linéaire, dont les solutions sont les coefficients d'une combinaison linéaire nulle des vecteurs de la famille ;
- τ_{MC} et τ_{ML}: emploi d'une matrice, qui sera échelonnée selon les lignes ou selon les colonnes ;

[2] Nous noterons Dij le j-ème exercice de DEUG cité au paragraphe i, et Lij le j-ème exercice de lycée de la même partie.

- τ_D : calcul d'un déterminant, dans le cas où n = p.

Lycée

Etudier si des vecteurs du plan sont colinéaires, ou **si des vecteurs de l'espace sont coplanaires** pourrait être perçu comme une tâche du type T_{libre}, si l'on disposait dans l'institution "lycée" des éléments théoriques relatifs à la notion de famille libre.

Montrer que des vecteurs sont ou ne sont pas colinéaires peut se faire dès la classe de seconde, d'abord en utilisant des configurations particulières : dans un « vrai » triangle ABC, les points A, B et C n'étant pas alignés, $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ ne sont pas colinéaires.

Ensuite, une fois introduite la notion de coordonnées dans une base, les élèves peuvent montrer que deux vecteurs donnés par leurs coordonnées ne sont pas colinéaires car les coordonnées ne sont pas proportionnelles.

Ils peuvent utiliser directement cette propriété, ou employer la technique qui consiste à calculer le déterminant 2x2 de ces vecteurs (technique de type τ_D) ; les vecteurs donnés par leurs coordonnées sont colinéaires si et seulement si le déterminant est nul.

La technologie correspondante repose sur cette dernière propriété, qui est démontrée ; en fait il s'agit essentiellement d'une commodité d'écriture, permettant de ne pas distinguer les cas de nullité d'une des coordonnées. Le déterminant apparaît ici comme un élément relevant d'un niveau de conceptualisation supérieur, introduit dans un cas très restreint (il ne sera pas question de déterminant au-delà de la dimension 2).

Montrer que trois vecteurs de l'espace ne sont pas coplanaires peut se faire aussi à l'aide d'une configuration particulière : dans un « vrai » tétraèdre ABCD, les points A, B, C et D n'étant pas coplanaires, $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{AD}$ ne sont pas coplanaires.

Il est également possible de vérifier si des vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$ sont coplanaires en cherchant à déterminer s'il existe des coefficients x et y avec $\vec{w} = x\vec{u} + y\,\vec{v}$. Cette démarche est essentiellement proposée pour montrer que des vecteurs sont effectivement coplanaires, et lorsque la relation ci-dessus peut être déduite des propriétés d'une configuration particulière, avec la relation de Chasles par exemple. Ces techniques (emploi d'une configuration géométrique particulière), spécifiques du cadre géométrique, ne sont pas généralisables. On peut cependant rencontrer une sous-tâche qui conduit effectivement à la résolution d'un systèmes linéaire lorsqu'il s'agit de déterminer si des points sont coplanaires, comme dans l'exercice suivant :

Exercice L1.1 (Dimathème première S, p.228)
Les points A(2, -1, 5) , B(3, 1, 4), C(5, 0, 7) et D(1, 2, 6) sont-ils coplanaires ?

Une tâche de ce type pourra être accomplie à partir de la classe de terminale S en utilisant l'équation du plan contenant A, B et C et en déterminant si D appartient à ce plan ; nous reviendrons ci-dessous aux techniques de détermination d'une équation de plan ; celles-ci ne sont pas disponibles en classe de première.

La technique de résolution proposée dans le corrigé qui accompagne l'exercice consiste à déterminer les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{AD}$; après avoir constaté que les deux premiers vecteurs ne sont pas colinéaires, on écrit $\overrightarrow{AD} = a\overrightarrow{AB} + b\overrightarrow{AC}$ et on résout le système obtenu ; ce système n'ayant pas de solution, on peut conclure que les vecteurs ne sont pas coplanaires, donc les points non plus.

La technologie associée repose sur la définition de vecteurs coplanaires : les vecteurs $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AD}$ sont coplanaires si et seulement si les points A, B, C et D sont coplanaires, et sur le théorème : soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs non colinéaires de l'espace ; un vecteur $\vec{w}$ est coplanaire avec $\vec{u}$ et $\vec{v}$ si et seulement si il existe deux réels a et b avec $\vec{w} = a\vec{u} + b\vec{v}$.

Notons qu'ici on ne cherche pas à résoudre un système issu de l'égalité $a\vec{u} + b\vec{v} + c\vec{w} = 0$, comme on pouvait le faire en D1.1. Après avoir constaté que deux des vecteurs ne sont pas colinéaires, on cherche à déterminer si le troisième est combinaison linéaire de ceux-ci. Cette technique est difficilement utilisable en dimension supérieure à trois, dès que le nombre de vecteurs en jeu dépasse trois.

Nous observons donc que les techniques disponibles au lycée et à l'université sont très différentes ; ceci correspond à la différence constatée dans les définitions données. Celle du lycée repose sur une configuration géométrique, tandis que celle de l'université est fondée sur la notion de combinaison linéaire : il n'est pas surprenant de retrouver cet écart à propos des techniques. Par ailleurs, les techniques matricielles ne sont pas disponibles au lycée ; quant à l'emploi du déterminant, pratiqué au lycée dans le cas de deux vecteurs du plan, nous avons vu que la technologie associée était très différente de celle vue à l'université, et interdisait en particulier toute généralisation, ne serait-ce qu'à la dimension 3 (en effet la justification du fait que trois vecteurs sont non coplanaires si et seulement si le déterminant 3x3 correspondant est nul est beaucoup plus complexe que son analogue en dimension 2, si l'on ne dispose pas des propriétés d'une forme multilinéaire alternée).

1.2 Bases

1.2.1 Définition, propriétés

DEUG

Une base d'un espace vectoriel est définie comme une famille libre et génératrice de cet espace. Cette définition est valable en dimension finie comme en dimension infinie, les termes

« libre » et « génératrice » traduisent cependant en dimension infinie des propriétés différentes, comme nous l'avons déjà vu en ce qui concerne les familles libres.

Les propriétés et théorèmes suivants sont ensuite établis :

- (P_{21}) B est une base de E si et seulement si tout élément de E s'écrit de manière unique comme combinaison linéaire (finie) d'éléments de B (les coefficients de cette combinaison linéaire sont alors appelés composantes, ou coordonnées de cet élément) ;
- (P_{22}) Tout espace vectoriel non réduit au vecteur nul admet des bases ;
- (P_{23}) De toute famille génératrice on peut extraire une base ;
- (P_{24}) Toute famille libre peut être complétée en une base ;

Plus, en dimension finie :

- (P_{25}) Dans un espace vectoriel E de dimension finie sur un corps K, toutes les bases ont même cardinal. Ce nombre est appelé dimension de E sur K.
- (P_{26}) Dans un espace de dimension n, une famille libre a au plus n éléments ; si elle a n éléments, c'est une base.
- (P_{27}) Dans un espace de dimension n, une famille génératrice a au moins n éléments ; si elle a n éléments, c'est une base.

Licence-Maîtrise

Dans les espaces de Banach (espaces vectoriels normés complets), on introduit des bases vérifiant des propriétés particulières. On dit que $(e_n)_{n\geq 1}$ est une base de Schauder d'un espace de Banach E si pour tout u de E, il existe une suite $(u_n)_{n\geq 1}$ unique telle que $u = \sum_{i\geq 1} u_i e_i$. On retrouve donc ici la propriété d'existence d'une décomposition unique, devenue centrale puisqu'elle constitue la définition d'une telle base. En revanche la propriété d'existence (P_{22}) n'est pas valable dans le cas des bases de Schauder.

Lycée

La notion de base du plan est définie en classe de seconde comme un couple de vecteurs non colinéaires ; la notion de base de l'espace est définie en première comme un triplet de vecteurs non coplanaires. Cette notion est immédiatement associée à celle de repère de l'espace ou du plan : un repère est une base à laquelle on adjoint un point origine. Notons que la notion de repère orthonormal du plan avait déjà été vue en classe de troisième. Dans le manuel Hachette de troisième on trouve en note cette définition de repère orthonormal du plan : ce sont deux axes perpendiculaires, gradués avec la même unité. Nous reviendrons dans la partie suivante sur la notion de base orthonormée ; nous pouvons toutefois déjà remarquer que, comme les élèves rencontrent d'abord la notion de repère sous la forme « repère orthonormal », et que cette notion de repère et celle de base sont ensuite fortement associées, la notion de base non orthonormale semble peu naturelle.

Nous notons que, comme dans le cas des familles libres, la notion de base dans le cours de géométrie vectorielle du lycée renvoie à deux définitions distinctes, pour le plan et pour l'espace. Si le caractère « famille libre » apparaît en germe dans ces deux définitions, le caractère « famille génératrice » en est absent[3]. En effet, la dimension des espaces est connue a priori ici, bien que la notion même de dimension ne soit pas abordée. Le nombre de vecteurs fait ainsi partie de la définition de base.

Au lycée, la notion de base n'est pas évoquée à propos d'autres ensembles que l'espace (ou le plan) complet : on parle de vecteur directeur d'une droite, de couple de vecteurs directeurs d'un plan, mais le terme même de base n'est pas employé pour des objets du type sous-espace. Ceci accentue le fait que l'espace complet (ou le plan, en dimension 2) semble de nature tout à fait différente dans ce cadre géométrique de celle d'une droite ou d'un plan ; la structure commune n'est pas soulignée.

Parmi les propriétés vues en DEUG et citées ci-dessus, seules (P_{21}) et (P_{26}) présentent une parenté avec des propriétés du lycée. Ainsi, le théorème d'existence et d'unicité des coordonnées d'un vecteur sur une base est vu en seconde pour le plan et en première pour l'espace. Toutefois, la propriété (P_{21}) est une équivalence ; un seul des sens est vu au lycée, caractériser les bases par l'existence et l'unicité d'une décomposition n'y étant pas pertinent (voir l'étude de tâches qui suit). Dans le cas de (P_{26}), c'est seulement la partie « une famille libre de n vecteurs en dimension n est une base » qui est apparentée à la définition de base donnée au lycée.

Pour les autres propriétés, la connaissance a priori de la dimension, et l'absence de la notion de famille génératrice ne permet pas d'évoquer (P_{23}) , (P_{25}) , (P_{27}) . L'existence de bases, (P_{22}), n'est pas une propriété pertinente dans le cadre géométrique, elle semble évidente. La possibilité de compléter une famille libre (P_{24}) pourrait être évoquée ; mais comme nous le verrons en nous penchant sur les tâches, les bases sont fréquemment données à l'avance dans les exercices, on ne recherche pas de base possédant des caractéristiques particulières qui pourraient conduire à compléter, par exemple, un couple de vecteurs directeurs d'un plan. De

---

[3] Dans l'ensemble du cours de géométrie vectorielle du lycée, peu d'éléments renvoient à la notion de famille génératrice. On peut l'associer à celle de vecteur directeur d'une droite, ou de couple de vecteurs directeurs d'un plan, au vu de la caractérisation vectorielle de la droite par " l'ensemble des points M tels que $\overrightarrow{AM} = t\,\overrightarrow{AB}$ ", ou du plan par " l'ensemble des points M tels que $\overrightarrow{AM} = r\,\overrightarrow{AB} + s\,\overrightarrow{AC}$ " ; mais dans les deux cas il s'agit du cas particulier d'une base du sous-espace sous-jacent.

Les élèves ne rencontrent jamais dans le cours de géométrie du secondaire de famille génératrice qui ne soit pas une base ; ceci n'est pas surprenant, étant donné que le calcul vectoriel n'est enseigné qu'en tant qu'outil, et que la notion de dimension n'est pas abordée ; les dimensions manipulées sont faibles, et toujours connues d'avance.

plus, la possibilité de compléter une base reste une propriété peu pertinente en dimension inférieure ou égale à trois, étant donné le faible nombre de vecteurs en jeu.

1.2.2 Praxéologies

Nous relevons ici plusieurs types de tâches autour de la notion de base (en dehors du cadre euclidien, que nous étudierons à la partie suivante) ; certains présentent des parentés avec des types de tâches vus au lycée, tandis que d'autres, qui pourraient être rencontrés dans le secondaire ne le sont pas. Le détail des techniques et technologies pour les types de tâches de DEUG est donné en annexe 1.

T_{base}: Déterminer si des vecteurs donnés forment une base d'un espace vectoriel

DEUG

Cette tâche sera effectuée différemment selon que l'on connaît, ou non, la dimension de l'espace.

Si la dimension est connue (et finie), alors soit le nombre de vecteurs de la famille est différent de cette dimension et il suffit de faire cette remarque ; soit ce nombre est égal à la dimension, et il suffit de déterminer si la famille est libre, ou éventuellement génératrice (ce dernier cas de figure étant beaucoup plus rare). On est donc conduit à effectuer une sous-tâche du type **T_{libre} : déterminer si une famille est libre.**

Dans le cas où la dimension de l'espace est inconnue, il faut déterminer si la famille proposée est libre et génératrice ; le plus souvent il s'agira de montrer que l'on a bien affaire à une base, comme dans l'exercice suivant :

Exercice D2.1 (Grifone p.37)
Soit E l'espace vectoriel des suites de nombres réels et F l'ensemble des suites vérifiant la relation de récurrence :
$u_{n+2}= u_{n+1}+ 2u_n$
a) Montrer que F est un sous-espace vectoriel de E.
b) Montrer que les suites de termes généraux $a_n=(-1)^n$ et $b_n=2^n$ forment une famille libre de F.
c) Tenant compte du fait que les suites de F sont univoquement déterminées si l'on connaît u_0 et u_1, montrer que (a_n) et (b_n) forment une base de F.

Lycée

Dans les manuels que nous avons étudiés, nous n'avons rencontré le type de tâches : montrer que des vecteurs donnés forment une base de l'espace ou d'un plan que dans le cas de bases orthonormales, cas que nous examinons au paragraphe suivant .

On peut alors se demander pourquoi ce type de tâches est absent des manuels du secondaire, alors que les éléments technologico-théoriques permettant de développer les techniques nécessaires sont disponibles.

En effet, une base du plan étant définie comme un couple de vecteurs non colinéaires, et une base de l'espace comme un triplet de vecteurs non coplanaires; déterminer si des vecteurs forment une base pourrait être fait en vérifiant d'abord qu'on a bien le bon nombre de vecteurs, puis en étudiant s'ils sont non colinéaires ou non coplanaires.

L'absence de ce type de tâches tient au rôle de la notion de base au lycée : celle-ci a un statut d'outil, employé le plus souvent implicitement ; on dispose en général d'une base, donnée au départ, associée à un repère, et qui permet de caractériser des points ou des vecteurs par leurs coordonnées. Un choix de base adaptée peut éventuellement intervenir (mais ceci est très rare) pour une configuration géométrique particulière, mais celui-ci ne conduira pas à montrer que les vecteurs choisis forment une base, cette propriété étant généralement évidente au vu de la configuration. Ce qui manque ici est donc la raison d'être de ce type de tâches.

$T_{basesev}$: Déterminer une base d'un sous-espace

DEUG

Les techniques employées pour effectuer une tâche de ce type varieront selon la nature des objets considérés, et la manière dont le sous-espace est caractérisé ; nous allons examiner les principaux cas, en détaillant ceux qui peuvent présenter un lien avec la géométrie vue au lycée.

Déterminer une base d'un sous-espace donné par une famille génératrice.

Dans le cas d'un sous-espace de $\mathbb{R}^n$, les techniques employées sont des prolongements de celles que nous avons rencontrées pour le type de tâches T_{base}.

En effet, une base du sous-espace peut être extraite de la famille génératrice en effectuant une tâche du type T_{libre} : déterminer si la famille est libre, puis en supprimant ceux des vecteurs qui s'écrivent comme combinaison linéaire des autres.

Dans un cadre autre que $\mathbb{R}^n$, on peut soit se ramener à $\mathbb{R}^n$ par l'isomorphisme canonique, soit éliminer de la famille les vecteurs qui sont combinaison linéaire des autres, les relations de dépendance linéaire ayant été constatées directement ou par résolution d'un système linéaire.

Déterminer une base d'un sous-espace de $\mathbb{R}^n$ donné par une représentation paramétrique.

La technique consiste ici à transformer la représentation paramétrique de manière à faire apparaître les éléments du sous-espace comme combinaisons linéaires d'une famille de vecteurs donnés ; nous noterons cette technique τ_{CL}.

La famille trouvée est alors une famille génératrice du sous-espace, et on peut appliquer les techniques évoquées ci-dessus pour en déduire une base (s'il est clair que la famille est libre, il suffit alors de le justifier). Par exemple dans l'exercice suivant :

> Exercice D2.2 (Rennes, DEUG1)
>
> Vérifier que l'ensemble suivant est un sous-espace de $\mathbb{R}^3$ et en donner une base :
> $E=\{(\lambda+\mu,\lambda-\mu, \lambda+\mu), \lambda, \mu\in \mathbb{R}\}$.

On écrit alors : $E=\{(\lambda+\mu,\lambda-\mu, \lambda+\mu), \lambda, \mu \in \mathbb{R}\} =\{\lambda(1,1,1)+\mu(1,-1,1), \lambda, \mu \in \mathbb{R}\}$
$= \text{Vect}\{(1,1,1) ; (1,-1,1)\}$.
On a ainsi prouvé qu'il s'agit bien d'un sous-espace, grâce à la propriété qui affirme que l'ensemble des combinaisons linéaires d'une famille de vecteurs est un sous-espace vectoriel ; de plus, on a trouvé une famille génératrice de E.
La technique est donc l'écriture de vecteurs donnés par des paramètres comme combinaisons linéaires de vecteurs donnés : τ_{CL} .On justifie facilement qu'il s'agit d'une famille libre (on retrouve ici une sous-tâche élémentaire appartenant au type $\mathbf{T_{libre}}$), et on a ainsi la base cherchée.

Déterminer une base d'un sous-espace de $\mathbb{R}^n$ donné par des équations cartésiennes.

La technique consiste alors à se ramener à une représentation paramétrique ; on retrouve ainsi la tâche ci-dessus.

Cette technique se divise donc en deux sous-techniques : passage du cartésien au paramétrique, que nous noterons τ_{CP}, qui sera suivie de τ_{CL}.

Lycée

Au lycée, comme nous l'avons signalé, le terme de base n'apparaît pas pour des sous-espaces (plans ou droites en dimension 3, droites en dimension 2). Cependant les tâches :

Déterminer un vecteur directeur d'une droite, et **déterminer un couple de vecteurs directeurs d'un plan**, peuvent être considérées comme proches de $\mathbf{T_{basesev}}$ (déterminer une base d'un sous-espace).

Déterminer un couple de vecteurs directeurs d'un plan de l'espace

Dans le cas d'un plan, la détermination d'un couple de vecteurs directeurs se présente comme sous-tâche dans des exercices portant sur des configurations particulières ; la technique employée alors repose sur des propriétés géométriques de la configuration.

La représentation paramétrique d'un plan de l'espace ne fait pas partie des programmes du secondaire ; la tâche : détermination d'un couple de vecteurs directeurs d'un plan donné par une représentation paramétrique ne peut donc être proposée.

L'équation cartésienne d'un plan est vue en terminale S (voir ci-dessous les tâches reliées à la notion d'équation d'un sous-espace), associée à la propriété : le vecteur $\vec{n}$ (a,b,c) est normal au plan P d'équation ax+by+cz+d=0 ; l'ensemble des vecteurs directeurs de P est l'ensemble des vecteurs orthogonaux à $\vec{n}$, c'est à dire l'ensemble des vecteurs dont les coordonnées (x, y, z) vérifient ax+by+cz=0. Il suffit ensuite de trouver deux triplets non proportionnels vérifiant cette équation.

Les éléments théoriques connus en terminale S permettent donc bien de développer une technique et une technologie relatives au type de tâches : déterminer un couple de vecteurs directeurs d'un plan donné par une équation cartésienne.

Or ce type de tâches n'apparaît dans aucun des manuels que nous avons consultés ; comme dans le cas du type de tâches T_{base}, il n'a pas de raison d'être au lycée ; en particulier, il ne peut s'intégrer nulle part comme sous-tâche.

Déterminer un vecteur directeur d'une droite

Pour une droite du plan, donnée par une équation cartésienne de la forme ax+by+c=0, la technique de détermination d'un vecteur directeur consiste à écrire directement que la droite est dirigée par le vecteur $\vec{u}$ (-b,a) . La technologie associée repose sur le fait qu'une droite passant par un point A et dirigée par le vecteur $\vec{u}$ (-b,a) est l'ensemble des points M du plan tels que $\overrightarrow{AM}$ est colinéaire à $\vec{u}$; le déterminant 2x2 donne alors la forme de l'équation, et l'équivalence entre : ensemble de points du plan caractérisé par ax+by+c=0 , et droite dirigée par $\vec{u}$ (-b, a) .

Une autre technologie est vue en classe de première, après l'introduction du produit scalaire ; on dit alors que le vecteur $\vec{v}$ (a,b) est normal à la droite d'équation ax+by+c=0, et donc tout vecteur $\vec{u}$ orthogonal à $\vec{v}$ est un vecteur directeur de cette droite ; c'est en particulier le cas du vecteur (-b, a).

Les technologies disponibles, pour les droites du plan comme pour les plans de l'espace, renvoient donc à l'existence d'un produit scalaire. Elles sont en particulier distinctes de celles qui sont employées en DEUG pour accomplir $T_{basesev}$, puisque la théorie associée à cette tâche fait partie de l'algèbre linéaire, et non de l'algèbre bilinéaire. Quant à la théorie relative à la technologie vue au lycée, elle ne peut pas être explicitée puisqu'elle met en jeu la dualité, qui renvoie à un niveau de conceptualisation nettement supérieur.

Déterminer un vecteur directeur d'une droite de l'espace donnée par une représentation paramétrique.

La notion de représentation paramétrique d'une droite est vue en terminale S ; on rencontre alors la tâche : une droite étant donnée par une représentation paramétrique, déterminer un vecteur directeur de celle-ci.

Par exemple dans l'exercice suivant :

> Exercice L2.1
>
> Dans un repère, la droite D est définie par :
>
> $$\begin{cases} x=1-t \\ y=2t \\ z=3 \end{cases}$$
>
> Trouver un vecteur directeur de la droite D.

Cette tâche pourrait appartenir au type $T_{basesev}$, si la notion de base d'une droite et les éléments théoriques correspondants étaient connus dans l'institution "lycée".

Notons qu'elle s'effectue de manière immédiate, la technique consistant en une simple lecture des coordonnées du vecteur directeur dans la représentation paramétrique.

La technologie correspondante repose sur le fait que la droite passant par un point A et dirigée par le vecteur $\vec{u}$ est l'ensemble des points M du plan tels que $\overrightarrow{AM}=t\vec{u}$; où t décrit $\mathbb{R}$. Cette propriété se traduit sous forme d'un système dans lequel les coordonnées du vecteur directeur $\vec{u}$ sont les coefficients apparaissant en facteur devant le paramètre t.

T_{coord} : Déterminer les coordonnées d'un vecteur dans une base

DEUG

Une base $(e_1, e_2, ..., e_n)$ d'un espace de dimension finie E étant fixée, il s'agit de déterminer les coordonnées d'un vecteur u dans cette base. Quel que soit le cadre, la technique consiste alors à écrire que les coordonnées de u sont définies par : $u = x_1e_1+x_2e_2+ ...+ x_ne_n$. On en déduit un système linéaire dont les coordonnées cherchées sont solutions ; il s'agit ensuite de résoudre ce système, par une des techniques connues.

La technologie associée repose sur la définition de coordonnées, et sur les propriétés des systèmes linéaires.

Lycée

Au lycée, le calcul des coordonnées d'un vecteur dans une base est demandé le plus souvent :

- Lorsque le vecteur est du type $\overrightarrow{AB}$, A et B étant deux points donnés par leurs coordonnées. Il s'agit alors simplement de faire la différence des coordonnées des points ;

- Lorsque le vecteur est obtenu par des opérations : somme, produit par un réel, produit vectoriel à partir de vecteurs dont les coordonnées sont connues. Il s'agit d'appliquer les formules données en cours ;

- Lorsque le vecteur fait partie d'une configuration particulière : un parallélogramme par exemple ; ce cas est différent des deux précédents car alors la base fait partie de la figure au même titre que le vecteur dont on calcule les coordonnées, tandis qu'il s'agissait

ci-dessus d'exercices dans lesquels la donnée de la base (associée le plus souvent à un repère) est un préalable.

Plus rarement les élèves sont amenés à poser $\vec{t} = x\vec{u} + y\vec{v} + z\vec{w}$, les vecteurs étant donnés par leurs coordonnées dans une base.

Ainsi dans l'exercice suivant :

Exercice L2.2 (Fractale 1S, p.136) Les vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$ sont définis par leurs coordonnées : $\vec{u}$ (-2, 1, 3), $\vec{v}$ (3, -2, 1), $\vec{w}$ (1, -4, 5) . Calculer les trois nombres réels a, b, c pour que le vecteur (-5, -7, 16) puisse s'écrire $a\vec{u} + b\vec{v} + c\vec{w}$.

La tâche proposée ici ne peut être rattachée au type de tâches T_{coord}, puisqu'il n'est pas question de base ni de coordonnées dans la question posée.

Cependant la technique et la technologie associées sont les mêmes que s'il s'agissait de répondre à la question : déterminer les coordonnées de (-5, -7, 16) dans la base

$\{\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}\}$. Cette tâche semble issue d'un niveau de conceptualisation supérieur : la possibilité de décomposition repose sur le fait que les vecteurs $\{\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}\}$ forment une base de l'espace, mais ceci n'est pas signalé.

Notre brève étude montre que la notion de base, bien qu'étant introduite dans le secondaire, relève d'un niveau de conceptualisation supérieur à celui qui est en jeu dans les pratiques attendues des élèves de lycée. Elle s'efface de plus derrière la notion de repère, qui est systématiquement utilisée même lorsqu'il s'agit de vecteurs.

1.3 Orthogonalité, produit scalaire.

1.3.1 Définitions, propriétés

DEUG

La notion d'orthogonalité fait partie du vocabulaire introduit autour des formes bilinéaires symétriques (dont nous ne rappellerons pas ici la définition). Deux vecteurs u et v sont dits orthogonaux pour une forme bilinéaire symétrique ϕ si $\phi(u,v)=0$. L'orthogonal d'une partie F de E est défini comme l'ensemble des vecteurs de l'espace vectoriel E considéré qui sont orthogonaux à tous les vecteurs de F. Une base de l'espace E est dite orthogonale pour ϕ si les vecteurs qui la composent sont deux à deux ϕ-orthogonaux ; une telle base est dite orthonormale si de plus, quels que soient les vecteurs e_i et e_j de cette base, $\phi(e_i, e_j)=\delta_{ij}$.

Un produit scalaire est une forme bilinéaire symétrique définie positive ; à un produit scalaire est associée une norme, dite norme euclidienne. Rappelons que l'on appelle espace préhilbertien un espace vectoriel muni d'un produit scalaire, et espace euclidien un espace préhilbertien réel de dimension finie. Dans un espace euclidien E, la notion d'écart angulaire de deux vecteurs u et v est définie par : $\theta(u,v)=\mathrm{Arccos}\frac{<u, v>}{\|u\|.\|v\|}$.

Les notions de dimension de l'orthogonal, d'existence de base orthonormale et de produit scalaire sont fortement associées. Nous avons relevé, dans les ouvrages que nous avons consultés, les propriétés suivantes :

- (P_{31}) Quel que soit l'espace E de dimension finie et la forme bilinéaire ϕ, E admet des bases orthogonales pour ϕ.
- (P_{32}) L'existence de bases orthonormées pour ϕ sur E de dimension finie équivaut à ϕ est un produit scalaire sur E.

Dans le cas des espaces préhilbertiens

- (P_{33}) Toute famille orthogonale de vecteurs non nuls est libre.
- (P_{34}) Si F est un sous-espace vectoriel de dimension finie de E préhilbertien, F et son orthogonal sont supplémentaires.
- (P_{35}) Inégalité de Cauchy Schwarz : pour tous u, v d'un espace vectoriel E muni du produit scalaire $<,>$, on a $<u,v>^2 \leq ||u||^2\, ||v||^2$
- (P_{36}) Théorème de Pythagore : soient $(u_1, \ldots u_n)$ appartenant à un espace préhilbertien E et deux à deux orthogonaux, alors $||\, u_1 + \ldots + u_n||^2 = ||\, u_1||^2 + \ldots + ||\, u_n||^2$.

Dans le cas des espaces euclidiens

- (P_{37}) Soit un vecteur u d'un espace euclidien E muni d'une base orthonormée $(e_1, \ldots, e_n)$. Alors les coordonnées u_i de u sur la base B sont les produits scalaires de u avec les e_i : $u_i = <u,e_i>$
- (P_{38}) Soit B une base orthonormée d'un espace euclidien E. Alors le produit scalaire $<,>$ sur E est défini par : $<u,v> = u_1v_1 + \ldots. + u_nv_n$.

L'étude générale des espaces préhilbertiens n'est pas proposée dans les enseignements de DEUG de l'Université de Rennes 1. On peut considérer qu'elle relève d'un niveau de conceptualisation supérieur à celui en jeu dans l'étude des espaces euclidiens, la possibilité d'être en dimension infinie, avec un corps de base quelconque, modifiant l'ensemble de propriétés correspondantes.

Licence et Maîtrise

Les notions évoquées ici sont prolongées, en Licence et en Maîtrise par l'étude des espaces de Hilbert. L'espace de Hilbert est défini comme espace muni d'un produit scalaire (i.e. préhilbertien) et complet ; il va donc avoir toutes les propriétés des espaces préhilbertiens évoquées plus haut.

La notion de base Hilbertienne prolonge celle de base orthonormale : une base Hilbertienne d'un espace de Hilbert H est une suite d'éléments de H de norme 1, deux à deux orthogonaux, et qui engendrent un espace vectoriel dense dans H. Si (e_n) est une base Hilbertienne de H, tout vecteur u de H va pouvoir s'écrire comme combinaison linéaire (infinie) des e_n ; et les coordonnées de u seront, comme dans le cas d'un espace euclidien muni d'une base orthonormale, les produits scalaires $<u, e_n>$: ceci prolonge la propriété (P_{37}).

On trouve également, à ce nouveau niveau de conceptualisation, un prolongement du théorème de Pythagore (P_{36}) : l'égalité de Bessel-Parseval. Selon celle-ci, si un élément u d'un espace de Hilbert H admet une décomposition comme somme d'éléments de H deux à deux orthogonaux : $u = \sum_{i \geq 1} u_i$, alors $\| u \|^2 = \sum_{i \geq 1} \| u_i \|^2$.

Lycée

Le terme d'angle est employé très tôt (pour désigner une notion intuitive), dès l'école primaire ; les élèves apprennent en classe de sixième à mesurer les angles avec un rapporteur ; au collège, toutes les mesures d'angles sont faites en degrés, et sont limitées à des angles aigus, non orientés. C'est en classe de seconde qu'est introduite la notion d'angle orienté de vecteurs du plan, mesuré en radians[4].

Le terme de "perpendiculaire", comme celui d'angle, est employé dès l'école primaire dans l'expression "droites perpendiculaires", traduisant une notion intuitive. La mesure des angles conduit à le formaliser : deux droites sont perpendiculaires si elles font un angle de 90° (collège), ou de $\frac{\pi}{2}$ (lycée). On observe que peu à peu lui est substitué le terme d'orthogonal ; ce choix n'est pas toujours explicité ; certains ouvrages expliquent à propos des droites de l'espace que deux telles droites sont orthogonales si leurs parallèles menées par un même point sont perpendiculaires, ce qui permet de supposer que " perpendiculaire " s'applique à deux objets qui ont une intersection, tandis que " orthogonal " peut toujours s'appliquer, mais ce point n'est pas explicité.

Pour les vecteurs, c'est l'adjectif « orthogonaux » qui est exclusivement employé. Les notions de vecteurs orthogonaux (les droites supports de deux représentants de ces vecteurs sont orthogonales), de base orthogonale ou orthonormale sont définies en seconde dans le plan et en première dans l'espace, bien que la notion de repère orthonormé du plan ait déjà été introduite en classe de troisième comme nous l'avons dit plus haut.

La norme fait partie de la définition même de vecteur : la norme d'un vecteur est la longueur de celui-ci, c'est à dire la distance entre les extrémités de l'un de ses représentants (la notion de distance étant bien entendu ici tout aussi intuitive que celle d'angle).

Donc la définition du produit scalaire est ici postérieure à l'orthogonalité et à la norme correspondantes. Elle est vue en première, pour des vecteurs du plan et en terminale pour l'espace. Pour le plan, le programme demande que les quatre définitions suivantes soient données conjointement :

---

[4] Nous faisons ici référence au programme en vigueur en 1998. Cette notion n'est plus rencontrée en classe de seconde depuis la rentrée 1999.

1) $\vec{u} \cdot \vec{v} = 1/2(\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 - \|\vec{u}\|^2 - \|\vec{v}\|^2)$

2) $\vec{u} \cdot \vec{v} = xx'+yy'$ dans un repère orthonormal

3) $\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\|.\|\vec{v}\| \cos(\vec{u}, \vec{v})$

4) $\vec{u} \cdot \vec{v}$ = OA.OH ou -OA.OH, avec $\vec{OA}$ un représentant de $\vec{u}$ et H le projeté orthogonal de B sur la droite (OA), où B est tel que $\vec{OB}$ est un représentant de $\vec{v}$.

La définition 3) conduit à distinguer un cas particulier si l'un des deux vecteurs est nul ; on pose alors que le produit scalaire est nul.

On montre les propriétés de symétrie et de linéarité du produit scalaire (ces termes ne sont pas employés). En terminale, seule la deuxième définition : expression analytique dans un repère orthonormal est donnée.

Le rapprochement avec ce qui est enseigné en DEUG conduit à effectuer plusieurs constatations. Tout d'abord, l'étude des espaces munis d'une forme bilinéaire symétrique qui n'est pas un produit scalaire est très éloignée de la géométrie vue au lycée ; on peut même imaginer que les connaissances de lycée engendrent des difficultés pour cette étude. En effet, l'emploi de l'adjectif « orthogonal », ou de l'expression « vecteurs orthogonaux » risque d'évoquer en DEUG un concept figuratif de géométrie du lycée, qui conduira notamment les étudiants à refuser qu'un vecteur puisse être orthogonal à lui-même. Les propriétés (P_{31}) et (P_{32}) (existence de bases orthogonales, caractérisation d'un produit scalaire par l'existence de bases orthonormales), qui relèvent de ce cadre général d'étude de formes bilinéaires symétriques ne peuvent donc pas être proches de propriétés vues au lycée. De plus la propriété (P_{31}) n'est pas pertinente dans le cadre de la géométrie euclidienne de l'espace : l'existence de bases orthogonales apparaît comme une évidence spatiale.

En revanche, l'étude des espaces préhilbertiens, espaces de Hilbert et plus encore celle des espaces euclidiens apparaissent à plusieurs égards comme une généralisation de la géométrie euclidienne du secondaire.

Le théorème de Pythagore (P_{36}), puis l'égalité de Bessel-Parseval peuvent être considérés comme des prolongement directs du théorème de Pythagore vu au collège.

(P_{37}) : les coordonnées d'un vecteur dans une base orthonormale sont les produits scalaires avec les vecteurs de base est vue en classe de première en ce qui concerne les vecteurs du plan. (P_{38}) : l'expression analytique du produit scalaire dans une base orthonormale généralise les définitions données en première et en terminale.

Cette dernière observation conduit cependant à relever un écart : l'ordre de présentation des notions est différent, ce qui conduit certaines propriétés à être prises comme définitions et inversement. Lors de l'étude des espaces euclidiens en DEUG, c'est le produit scalaire qui est présenté en premier ; les notions d'orthogonalité et de norme en découlent, celle d'écart angulaire vient encore plus tard. Au lycée, ce sont au contraire la notion d'angle, la norme et l'orthogonalité qui sont d'abord rencontrées par les élèves (sous des formes intuitives) ; la définition du produit scalaire repose sur ces notions. Ainsi l'inégalité de Cauchy-Schwarz (P_{35}) qui pourrait être établie au lycée pour les vecteurs du plan n'y est pas pertinente, puisqu'elle conduit simplement à affirmer que la valeur absolue du cosinus est inférieure à 1. Signalons par ailleurs que la propriété (P_{35}) (une famille orthogonale de vecteurs non nuls est libre) correspond à une évidence spatiale : deux vecteurs orthogonaux ne peuvent être colinéaires, de même trois vecteurs deux à deux orthogonaux ne peuvent être coplanaires ; cette propriété ne pourrait donc pas être présentée au lycée.

1.3.2 Praxéologies

Malgré la présence, dans l'étude des espaces euclidiens qui est faite en DEUG, de propriétés qui généralisent des résultats vus au lycée en géométrie, on trouve peu de types de tâches de lycée présentant des parentés avec des types de tâches de DEUG. En effet, le produit scalaire est introduit au lycée à des fins d'étude de configurations géométriques ; comme l'orthogonalité, il intervient essentiellement dans des tâches liées aux caractéristiques spatiales d'une configuration. Nous n'avons donc relevé que deux types de tâches de DEUG présentant des liens avec des types de tâches de lycée.

$T_{baseorth}$: Montrer qu'une famille de vecteurs donnés forme une base orthogonale ou orthonormale d'un espace euclidien

DEUG

Généralement, pour ce type de tâches, on connaît la dimension n de l'espace, et on dispose d'une famille de n vecteurs (nous donnons cependant ci-dessous l'exemple d'un exercice dans lequel on montre de plus que le cardinal de la famille de vecteurs est égal à la dimension de l'espace).

Comme dans le cas du type de tâches T_{base}, il suffit alors de montrer que la famille est libre.

La propriété : une famille orthogonale dans un espace euclidien est une famille libre permet de conclure en effectuant simplement la tâche, que nous noterons T_{orth} : vérifier que la famille est orthogonale (ou orthonormale), en calculant les produits scalaires correspondants.

Le type de tâches $T_{baseorth}$ conduit donc à l'emploi d'une technique, que nous noterons τ_{PS}, et qui consiste à calculer des produits scalaires pour vérifier qu'ils sont nuls, ou égaux à 1 dans le cas où il faut de plus montrer que la famille est une base orthonormée (la mise en œuvre de cette technique implique alors l'emploi d'autres techniques pour le calcul de ces produits scalaires, qui peuvent par exemple être définis par des intégrales comme nous le verrons ci-dessous).

Cette technique est exactement celle (τ_{PS}) qui est associée à la tâche T_{orth} ; la différence entre $T_{baseorth}$ et T_{orth} se place au niveau du bloc technologico-théorique.

La technologie associée à $T_{baseorth}$ comprenant la propriété citée ci-dessus : dans un espace euclidien, une famille orthogonale est libre, propriété qui permet, dès que la tâche T_{orth} a été effectuée, de conclure que l'on a une base orthogonale.

On rencontre des tâches du type T_{orth} comme sous-tâches dans des exercices portant sur l'identification d'endomorphismes orthogonaux de $\mathbb{R}^3$ (nous reviendrons sur ces exercices dans la partie consacrée à ces automorphismes).

Exercice D3.1 Identifier un endomorphisme orthogonal de $\mathbb{R}^3$ caractérisé par sa matrice dans la base canonique.

Il faut tout d'abord justifier qu'il s'agit d'un endomorphisme orthogonal. La technique utilisée alors consiste à prouver que la famille des trois vecteurs colonnes de la matrice est une base orthonormale de $\mathbb{R}^3$ muni du produit scalaire usuel, en montrant que les produits scalaires de deux vecteurs colonnes distincts sont nuls, et que chacun de ces vecteurs est de norme 1 : on retrouve bien ainsi le type de tâches $T_{baseorth}$, et la technique τ_{PS} (la suite de l'exercice, soit l'identification précise de l'endomorphisme, ne nous concerne pas ici ; nous y reviendrons ci-dessous).

On rencontre également le type de tâches $T_{baseorth}$ dans des espaces de fonctions ou de polynômes, comme dans l'exemple suivant :

Exercice D3.2 (Rennes, DEUG2)

On définit une application de $\mathbb{R}_n[X] \times \mathbb{R}_n[X]$ dans $\mathbb{R}$ par :

$$<f, g> = \int_{-1}^{1} \frac{f(t)g(t)}{\sqrt{1-t^2}} dt$$

1) Montrer qu'on définit ainsi un produit scalaire.

2) Montrer que pour tout entier p, il existe une unique fonction polynôme T_p de degré p telle que T_p (cos u)=cos(pu) pour tout réel u.

3) Montrer que { T_p , $p \leq n$ } est une base orthogonale de ($\mathbb{R}_n[X]$, < , >).

Nous allons examiner uniquement la question 3) de cet exercice.

La technique ici consiste à calculer les produits scalaires $<T_i , T_j>$; en utilisant la formule donnée en 2) : T_p (cos u) = cos(pu) et en faisant le changement de variable t=cos u dans l'intégrale, on trouve que ces produits scalaires sont effectivement nuls pour $i \neq j$.

On a donc n+1 polynômes qui forment une famille orthogonale, donc libre ; ils constituent une base orthogonale.

Notons qu'ici, l'argument : famille orthogonale implique famille libre n'est pas nécessaire, puisqu'on sait déjà que les polynômes T_p étant de degré p, ils forment une famille libre de polynômes.

Le même exercice peut être posé en dimension infinie, en remplaçant $\mathbb{R}_n[X]$ par $\mathbb{R}[X]$; dans ce cas, il faut de plus montrer que la famille { T_p , $p \in \mathbb{N}$}engendre $\mathbb{R}[X]$, en utilisant la propriété : une famille { P_n , $n \in \mathbb{N}$} de polynômes dont le degré est égal à l'indice est une famille génératrice de $\mathbb{R}[X]$.

On rencontre même des tâches appartenant au type $T_{baseorth}$ en Licence ou en Maîtrise, dans des espaces de Hilbert, lorsqu'il faut prouver qu'une famille donnée est une base Hilbertienne d'un espace H.

La sous-tâche du type T_{orth} est effectuée comme dans le cas de la dimension finie avec la technique τ_{PS} ; il faut ensuite de plus prouver que l'espace engendré par la famille donnée est dense dans H.

Lycée

Une base orthonormale de l'espace est définie en terminale S comme un triplet de vecteurs de norme 1, et deux à deux orthogonaux. Cette définition permet d'accomplir une tâche du type $T_{baseorth}$, en se ramenant comme en DEUG à T_{orth} : montrer que la famille est orthonormale.

Ainsi dans l'exercice suivant :

Exercice L3.1 (Dimathème première S, p.228 ex.56) Soit $\vec{u} = (\frac{8}{9}, -\frac{4}{9}, \frac{1}{9})$, $\vec{v} = (\frac{1}{9}, \frac{4}{9}, \frac{8}{9})$, $\vec{w} = (-\frac{4}{9}, -\frac{7}{9}, \frac{4}{9})$. Montrer que $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ est une base orthonormale.

La tâche à accomplir est la même que la sous-tâche rencontrée dans l'exercice D3.1 ci-dessus ; elle est effectuée en employant la technique τ_{PS}.

Toutefois la technologie ne comporte pas de manière explicite au niveau du lycée le fait que des vecteurs deux à deux orthogonaux forment une base de l'espace car il ne sont pas coplanaires : ceci s'impose comme une évidence géométrique.

$T_{orthsev}$: Déterminer l'orthogonal d'un sous-espace

DEUG

L'orthogonal d'un sous-espace vectoriel est lui-même un sous-espace vectoriel ; il pourra être déterminé par une base, une représentation paramétrique ou un système d'équations cartésiennes.

On utilise pour ce type de tâches la propriété : l'orthogonal d'un sous-espace F est l'orthogonal d'une base de F ; si on ne dispose pas au départ d'une telle base, la première partie de cette tâche se ramène donc au type de tâches $T_{basesev}$, pour déterminer une base de F.

Il faut ensuite traduire la définition de l'orthogonal : un vecteur y appartient à l'orthogonal de F (ou d'une base de F) si pour tout x de la base trouvée, f(x, y)=0.

Pour un sous-espace de $\mathbb{R}^n$, ceci donne un système linéaire qui est un système d'équations cartésiennes du sous-espace $F^{\perp}$. En dehors du cadre de $\mathbb{R}^n$, on est ramené à une tâche semblable par l'emploi de l'écriture d'un vecteur de F sur une base.

Notons que dans le cas d'un espace euclidien, cette tâche est facilitée par la propriété : F et son orthogonal sont supplémentaires ; en particulier, la dimension de l'orthogonal est connue.

En revanche si la forme bilinéaire employée n'est pas un produit scalaire, ces mêmes propriétés et la conception "géométrique" de l'orthogonalité peuvent présenter une difficulté, si le résultat s'oppose à l'intuition géométrique.

Ainsi dans l'exercice suivant :

Exercice D3.4 (Rennes, DEUG2) Soit f la forme bilinéaire définie sur $\mathbb{R}^2$ par $f(x,y)=x_1y_1-x_2y_2$ et $F=\{x, x_1=x_2\}$. Déterminer une base de $F^{\perp}$.

Une base de F est (1,1) ; $F^{\perp}$est donc l'ensemble des y tels que $f((1,1),y)= y_1-y_2 =0$.

(La mise en œuvre des techniques évoquées ci-dessus est immédiate dans ce cas très simple).

Une base de $F^{\perp}$est donc (1,1) ; mais ce résultat est ici presque anecdotique par rapport au constat : $F=F^{\perp}$, qui apparaît choquant au point que certains étudiants proposeront la base

(1, -1).

Lycée

On retrouve les techniques évoquées ci-dessus au lycée lors de la recherche du vecteur normal à une droite dans le plan, ou à un plan dans l'espace, mais également lors de la détermination de l'équation cartésienne d'une telle droite ou d'un tel plan, le vecteur normal étant connu. Dans ces deux cas, les tâches à effectuer sont très simples, car les dimensions en jeu sont faibles.

1.4 Equation(s) d'un sous-espace de $\mathbb{R}^n$

1.4.1 Définitions, propriétés

DEUG

La notion de système d'équations cartésiennes d'un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$ est associée en DEUG à l'étude de la résolution de systèmes linéaires. Les propriétés centrales sont ici :

- (P_{41}) Dans $\mathbb{R}^n$ l'ensemble des solutions d'un système linéaire de la forme AX=0 est un sous-espace vectoriel ;
- (P_{42}) Réciproquement, tout sous-espace vectoriel F de $\mathbb{R}^n$ est l'ensemble des solutions d'un tel système, que l'on appelle système d'équations cartésiennes de F.

L'étude des systèmes linéaires et la notion de rang permettent de préciser le nombre minimal p d'équations d'un tel système :

- (P_{43}) Un système d'équations cartésiennes de F comporte au minimum (n-dimF) équations.

Les représentations paramétriques de sous-espaces sont utilisées en exercice, mais ne sont pas étudiées en cours dans les ouvrages que nous avons consultés.

Lycée

Au lycée, seules les notions d'équation cartésienne d'une droite dans le plan, d'équation cartésienne d'un plan dans l'espace, et de représentation paramétrique d'une droite dans l'espace sont présentées. En particulier, il n'est pas question de système d'équations cartésiennes, puisque dans les deux cas rencontrés, une seule équation est en jeu ; l'idée de recherche d'un nombre minimal d'équations n'intervient pas, on ne rencontre donc pas (P_{43}). La seule nuance sur ce point vient d'exercices portant sur la résolution de systèmes linéaires 3x3, interprétée comme l'étude de l'intersection de trois plans dans l'espace (voir ci-dessous). De même, la représentation paramétrique de droites dans l'espace met en jeu un seul paramètre.

Les propriétés (P_{41}) et (P_{42}) sont vues dans le cas particulier des droites du plan et des plans de l'espace.

Même si le prolongement, par l'augmentation du nombre de dimensions et donc de coordonnées, des équations vues au lycée à celles rencontrées en DEUG peut sembler naturel, les éléments vus au lycée sont très insuffisants pour parler d'un simple processus de généralisation.

1.4.2 Praxéologies

Nous avons observé, autour de la notion d'équations d'un sous-espace, deux types de tâches de DEUG présentant un lien avec des types de tâches de lycée[5].

$T_{éqsev}$: Déterminer des équations de sous-espaces

DEUG

On rencontre la tâche : déterminer un système d'équations cartésiennes représentant un sous-espace E de $\mathbb{R}^n$ lorsque ce sous-espace est caractérisé par une famille génératrice ou par une base.

Un système d'équations cartésiennes d'un tel sous-espace est un système linéaire dont l'ensemble solution est le sous-espace considéré.

Une technologie possible consiste à dire qu'un vecteur de coordonnées $(x_1, x_2, ..., x_n)$ appartient à E si et seulement si il est combinaison linéaire des vecteurs de la famille génératrice ou de la base donnée, c'est à dire si et seulement si le système linéaire à n équations dont les inconnues sont les coefficients d'une telle combinaison linéaire admet des solutions.

Cette technologie peut induire différentes techniques, dont l'objectif est de déterminer les conditions de compatibilité du système : on peut écrire et échelonner le système lui-même, ou utiliser la matrice augmentée correspondante, ou encore calculer des déterminants bordants ; nous n'entrerons pas dans le détail des sous-tâches associées.

(A chacune de ces sous-tâches correspond un bloc technologico-théorique fondé sur des propriétés des systèmes linéaires).

La même technologie de départ : traduction du fait que les éléments de E sont les combinaisons linéaires des vecteurs de la famille donnée peut conduire à une interprétation en termes de représentation paramétrique de E.

La technique correspondante consiste à donner un système d'équations paramétriques du sous-espace, et à éliminer les paramètres ; notons que cette technique n'est adoptée dans aucun des ouvrages que nous avons consultés.

---

[5] Une analyse détaillée de ces types de tâches (et d'autres que nous ne présentons pas ici) est faite dans (Alves Dias 1998)

Le type de tâches : déterminer une représentation paramétrique d'un sous-espace donné par une famille génératrice ne donne lieu à des exercices dans aucune de nos sources. En fait la recherche de représentations paramétriques intervient comme sous-tâche, souvent implicitement, comme lorsqu'il s'agit de trouver une base pour un sous-espace donné par des équations cartésiennes (voir ci-dessus).

Lors de l'étude des formes bilinéaires symétriques, on rencontre également le type de tâches : déterminer un système d'équations cartésiennes de l'orthogonal d'une partie. La technique consiste alors à déterminer, si besoin est, une base du sous-espace engendré par cette partie, et à écrire les équations traduisant le fait que les vecteurs de l'orthogonal sont ceux qui sont simultanément orthogonaux à tous les vecteurs de la base.

En fin de DEUG, il semble que le type de tâches : détermination d'un système d'équations cartésiennes d'un sous-espace soit passé au statut d'outil.

Les équations cartésiennes, au même titre qu'une base, apparaissent comme un moyen courant de caractérisation d'un sous-espace de $\mathbb{R}^n$. Ainsi en réponse à des questions du type : déterminer le noyau d'une application linéaire, ou d'une forme quadratique, déterminer les sous-espaces propres , ou l'image d'un endomorphisme de $\mathbb{R}^n$, il est fréquent d'attendre des équations de ces sous-espaces, obtenues par la traduction de la condition qui définit le sous-espace.

Lycée

Au lycée, on rencontre la tâche : *déterminer des équations cartésiennes de droites dans le plan*, et *déterminer des équations cartésiennes de plan dans l'espace* (rappelons à cette occasion, comme nous l'avons déjà noté ci-dessus, qu'il n'est pas question de système d'équations cartésiennes, mais d'une seule équation).

Si les éléments technologico-théoriques correspondants étaient disponibles, ces tâches pourraient être perçues comme se rattachant au type $T_{\text{éqsev}}$: déterminer des équations cartésiennes de sous-espaces, les droites et les plans étant alors considérés comme des sous-espaces. Notons qu'il s'agirait alors de sous-espaces affines, et non de sous-espaces vectoriels comme dans le type de tâches $T_{\text{éqsev}}$. Cependant les notions de sous-espace affine et de sous-espace vectoriel sont fortement associées ; toute technique de détermination d'un système d'équations pour un sous-espace vectoriel E peut se prolonger en technique de détermination d'un sous-espace affine ayant pour direction E.

C'est pourquoi nous allons étudier les deux types de tâches cités ci-dessus, et rencontrés dans l'institution lycée.

Détermination de l'équation cartésienne d'une droite dans le plan

Deux caractérisations principales des droites vont fournir des technologies pour le type de tâches que nous étudions.

En classe de seconde, une droite D est caractérisée par un point A, un vecteur directeur $\vec{u}$, et la propriété : D est l'ensemble des points M tels que $\overrightarrow{AM}$ est colinéaire à $\vec{u}$. Cette propriété peut alors être suivie d'un calcul de déterminant 2x2, ou d'un autre moyen de traduction de la colinéarité, établissant que la forme générale d'une équation de droite dirigée par un vecteur $\vec{u}$ (-b,a) est : ax+by+c=0.

La technique associée pourra intégrer ou non certains de ces éléments technologiques ; ainsi elle pourra comporter un calcul de déterminant, ou partir simplement de la forme de l'équation. Ce dernier cas sera le plus fréquent lorsque la tâche sera devenue routinière.

La seconde caractérisation pour une droite du plan est vue en classe de première ; elle repose sur le produit scalaire et la notion de vecteur normal à une droite : la droite D de vecteur normal $\vec{n}$ est l'ensemble des points M du plan qui vérifient $\overrightarrow{AM}\cdot\vec{n}=0$.

Cette propriété apparaît comme un élément technologique ; comme dans le cas où la droite est caractérisée par un point et un vecteur directeur, la technologie associée peut directement fournir une technique consistant à calculer le produit scalaire ci-dessus, ou être prolongée par la déduction de la forme de l'équation, qui ramène à une technique déjà vue. Il serait également possible de passer d'une forme de caractérisation de la droite à l'autre en déduisant un vecteur normal de la donnée d'un vecteur directeur, ou inversement.

Nous n'avons pas rencontré ce cas dans les manuels que nous avons consultés ; en fait, comme nous l'avons dit plus haut, lorsque la tâche est devenue routinière, la technique consiste à utiliser directement la forme de l'équation.

On trouve également des variantes de cette tâche, comme déterminer une équation d'une droite parallèle ou perpendiculaire à une autre droite (celle-ci étant elle-même donnée par une équation), passant par un point donné. Il faut alors d'abord déterminer un vecteur directeur ou normal de la droite cherchée, pour se ramener aux techniques vues ci-dessus.

La notion d'équations paramétriques d'une droite dans le plan est vue en terminale ; la tâche : déterminer un système d'équations paramétriques d'une droite du plan donnée par un point et un vecteur directeur ne figure que dans un des manuels que nous avons consultés, nous supposons donc qu'elle est peu proposée aux élèves. De plus elle s'effectue de manière immédiate, en écrivant la somme des coordonnées du point et de celles du vecteur, que multiplie un paramètre.

Déterminer une équation de plan dans l'espace

La forme d'une équation de plan dans l'espace est vue en terminale ; elle est associée au vecteur normal. La tâche : déterminer une équation pour un plan donné par un vecteur normal $\vec{n}$ et un point A est semblable à ce que nous avons vu ci-dessus à propos des droites dans le plan. La technologie associée repose sur l'interprétation du plan comme l'ensemble des points

M tels que le vecteur $\overrightarrow{AM}$ soit orthogonal au vecteur $\vec{n}$. Une première technique peut donc consister à traduire cette propriété comme une relation sur les coordonnées ; ou, comme pour les droites, la technologie peut se prolonger par l'établissement de la forme ax+by+cz=d pour l'équation d'un plan de vecteur normal $\vec{n}$ (a,b,c) , et la technique consistera alors simplement à déterminer la constante d en utilisant les coordonnées du point A.

Une fois que le produit vectoriel a été vu, on rencontre la tâche : déterminer une équation cartésienne d'un plan donné par trois points, ou un point et deux vecteurs directeurs. La technique associée consiste à déterminer un vecteur normal à l'aide du produit vectoriel, et à se ramener ainsi à la tâche précédente.

On trouve également des variantes de cette tâche, sous la forme : déterminer une équation pour un plan médiateur d'un segment ; déterminer une équation pour un plan orthogonal à un autre plan.

La notion d'équations paramétriques de plans n'est pas vue.

Une fois que la forme générale d'une équation de plan est connue, la détermination d'une telle équation peut aussi apparaître dans un chapitre consacré aux systèmes linéaires. Pour un plan caractérisé par trois points, la technique associée consistera à écrire que les coordonnées de ces trois points vérifient l'équation du plan, exprimée à l'aide de coefficients inconnus a, b, c, d. Ces coefficients seront alors pris parmi les solutions du système obtenu.

Il semble donc que les tâches rencontrées au lycée préparent très peu au type que nous avons désigné par $T_{éqsev}$.

D'une part ces tâches ne portent jamais que sur la détermination d'une équation ; le lien, fondamental, entre nombre d'équations et dimension, que l'on peut considérer comme une première approche de la dualité, n'est donc pas préparé.

D'autre part, la partie de la tâche que l'on pourrait considérer comme l'établissement de l'équation de la direction du sous-espace est occultée par les techniques mises en place, et en particulier par l'emploi du vecteur normal.

$T_{systlin}$: Identifier l'ensemble solution d'un système linéaire.

DEUG

L'enseignement d'algèbre linéaire comporte, dans les polycopiés ou manuels que nous avons étudiés, un chapitre consacré à l'étude et la résolution de systèmes linéaires.

Dans ces chapitres on rencontre des exercices dans lesquels on demande la nature de l'ensemble solution, que le système soit homogène ou non. Dans la plupart des cas, la question est formulée ainsi : quelle est la « nature géométrique » de l'ensemble solution ?

Les "natures géométriques" ainsi identifiables sont de quatre sortes : le vecteur nul (ou un point), une droite, un plan, ou un hyperplan, vectoriels ou affines. On parlera éventuellement de l'intersection d'un certain nombre d'hyperplans ; cependant l'adjectif « géométrique » n'est le plus souvent attribué qu'aux sous-espaces ci-dessus. Cet usage s'explique par le fait que ce sont exactement les sous-espaces qui interviennent dans des concepts figuratifs (l'hyperplan étant associé au même dessin que le plan dans l'espace).

La technologie que l'on rencontre le plus souvent repose sur la propriété liant le rang du système à la dimension de l'ensemble solution ; la technique correspondante consiste donc à déterminer le rang du système, en déduire la dimension de l'ensemble solution, et exprimer celle-ci en termes géométriques : dimension 1=droite, dimension 2=plan etc...

Une telle tâche peut également être rencontrée dans un chapitre consacré à la méthode de Gauss ; dans ce cas la notion de rang n'est pas nécessairement déjà disponible, et l'interprétation géométrique doit être précédée de la résolution du système.

Lycée

On rencontre au lycée un type de tâches proche de $T_{systlin}$; plus précisément, en terminale S, lors de l'étude de la méthode de Gauss pour un système à trois équations et trois inconnues, certains exercices présentent la résolution d'un tel système comme l'étude de l'intersection de trois plans.

Après la résolution, effectuée à l'aide de la méthode de Gauss (il faut évidemment ici effectuer une résolution complète, la notion de rang n'étant pas disponible), soit le système se réduit à une seule équation, et l'ensemble solution est un plan ; soit on trouve une solution unique et il s'agit d'un point ; soit encore le système se réduit à deux équations indépendantes ; c'est le seul cas pour lequel l'interprétation n'est pas immédiate. Il faut en effet dans ce cas passer à une représentation paramétrique de la droite, la notion d'équations cartésiennes d'une droite dans l'espace n'étant pas connue. C'est la seule occasion où nous avons pu observer au lycée ce passage cartésien-paramétrique.

On peut donc considérer le type de tâches $T_{systlin}$ comme un prolongement naturel de ce type de tâches du lycée ; les plans sont remplacés par des hyperplans, en nombre quelconque.

1.5 Projection, projection orthogonale

1.5.1 Définition, propriétés

DEUG

Dans les ouvrages que nous avons consultés, la notion de projection est définie de la manière suivante :

Soit E un espace vectoriel, et deux sous-espaces F et G supplémentaires dans E. Alors tout x de E se décompose de manière unique sous la forme $x = x_F + x_G$, et la projection sur F suivant G est l'application définie par $p_F(x) = x_F$.

Cette notion est dans un premier temps distinguée de celle de projecteur : un projecteur p dans un espace vectoriel E est un endomorphisme idempotent de E (c'est à dire vérifie pop = p). Les propriétés suivantes sont données après ces deux définitions :

- (P_{51}) Toute projection est linéaire ;
- (P_{52}) Toute projection est idempotente (ces deux propriétés reviennent à constater que toute projection est un projecteur) ;
- (P_{53}) Si p_F est la projection sur F suivant G, Ker p_F = G et Im p_F = Ker (p_F-Id) = F ;

De plus la notion de projection est associée à celle de symétrie : à p_F correspond une symétrie s_F, symétrie par rapport à F suivant G, et qui vérifie $s_F = 2\, p_F - Id$.

La notion de projection orthogonale est quant à elle rencontrée en deuxième année de DEUG lors de l'étude des espaces euclidiens ; il s'agit d'une projection sur un sous-espace F suivant l'orthogonal de F. Elle vérifié donc toutes les propriétés ci-dessus ; elle est de plus associée à la notion de distance à un sous-espace. Les propriétés suivantes, spécifiques au cadre euclidien, sont données en cours ou vues en exercices (E est un espace euclidien muni d'un produit scalaire $<,>$) :

- (P_{54}) Si p_F est la projection orthogonale sur F, $(e_1, \ldots e_p)$ une base orthonormée de F, u un vecteur de E, alors $p_F(u) = <u, e_1> e_1 + \ldots + <u, e_p> e_p$.
- (P_{55}) Si p_F est la projection orthogonale sur F, u un vecteur de E, alors la distance de u à F est $d(u,F) = \|u - p_F(u)\|$ (la distance étant définie comme $d(u,F) = \inf_{v \in F} d(u,v)$)

Licence-Maîtrise

Dans le cadre des espaces de Hilbert, des propriétés fondamentales sont liées à la projection sur un convexe fermé.

La projection d'un vecteur x est définie comme étant le vecteur y qui réalise le minimum des distances de x à z, z appartenant au convexe concerné ; la propriété essentielle est l'existence d'un vecteur réalisant ce minimum. Ici, il n'y a pas de possibilité de décomposition de l'espace : on projette sur un convexe, qui n'est pas nécessairement un sous-espace vectoriel ; il peut s'agir en outre d'un sous-espace de dimension infinie, qui n'admettra pas toujours de supplémentaire orthogonal. La notion de projection sur un convexe fermé, qui prolonge celle de projection orthogonale dans les espaces euclidiens, est donc fondée sur la notion de distance ; sa définition apparaît comme une généralisation de la propriété (P_{55}).

La propriété (P_{54}) est prolongée par une propriété semblable, dans laquelle la notion de base Hilbertienne remplace celle de base orthonormée.

Les propriétés (P_{51}) et (P_{52}) sont également directement généralisées : une projection sur un convexe fermé est linéaire et idempotente ; elle est de plus continue, propriété nouvelle liée aux aspects topologiques. Il est fréquent à ce niveau de rencontrer des questions portant sur la continuité des applications, comme dans l'exercice[6] : montrer la continuité d'une projection sur un sous-espace fermé de codimension finie.

Lycée (et collège)

La notion de projection sur une droite selon une direction est introduite en classe de quatrième. Cette projection agit bien entendu sur des points du plan ; la propriété essentielle de la projection est la conservation des milieux.

En seconde, le programme spécifie en commentaire à propos de la version vectorielle de la configuration de Thalès que le lien avec les projections n'est pas un objectif du programme (formulation ambigüe, ce lien n'est pas hors programme, mais on laisse aux enseignants la liberté de ne pas l'aborder) ; on trouve par exemple dans le manuel Hachette la propriété de conservation des relations de colinéarité par une projection, propriété qui précède l'énoncé du théorème de Thalès et est utilisée pour la démonstration de celui-ci ; mais certains enseignants ne mentionnent pas du tout les projections.

Si elle est abordée, la projection est associée à une configuration de Thalès : deux droites sécantes, coupées par deux droites parallèles. En fait la projection est pratiquement employée en tant que commodité de langage pour faire allusion à cette configuration.

En classe de seconde est également définie la notion de projection sur un plan selon une direction de droite dans l'espace ; mais cette notion est immédiatement suivie de celle de projection orthogonale, qui sera la seule utilisée par la suite (c'est à dire en seconde, mais aussi en première et en terminale). La projection joue plus le rôle d'outil de description de figure que celui d'application ; on n'étudiera jamais par exemple la composée d'une projection et d'une autre application.

---

6 Cet exercice, très classique, est ensuite fréquemment considéré comme un résultat de cours.

Dès le collège on parle de projeté orthogonal ; le projeté d'un point sur une droite est défini comme l'intersection de cette droite et de sa perpendiculaire menée par le point concerné.

On passe (en classe de quatrième) sans transition à la notion de projection orthogonale ; la projection n'est pas présentée comme une application, il s'agit d'une simple forme de langage naturelle : projeter un point, c'est faire sa projection, de même que translater un point, c'est faire sa translation (on peut noter que ce sont les seules applications dont le nom correspond ainsi directement à un verbe).

La projection orthogonale est introduite en vue de la définition du cosinus d'un angle, comme coefficient de proportionnalité entre la longueur d'un segment et la longueur du segment projeté ; la relation de proportionnalité, admise, est une première manifestation de la linéarité de la projection.

Le lien n'est pas fait entre la projection orthogonale et la distance d'un point à une droite, étudiée dans cette même classe de quatrième.

En troisième et en seconde, on parle de projection orthogonale sur un plan dans l'espace ; dans les exercices, c'est essentiellement le terme "projeté orthogonal" et non "projection" qui apparaît.

En classe de première, la projection orthogonale est utilisée dans l'une des définitions du produit scalaire. De plus, le programme mentionne la projection orthogonale d'un vecteur sur un axe, avec la propriété : la projection de $\vec{v}$ sur un axe dirigé par un vecteur unitaire $\vec{u}$ est $<\vec{u},\vec{v}>.\vec{u}$; toutefois plusieurs ouvrages scolaires omettent ce résultat, et il est donc possible qu'il soit peu enseigné en pratique.

Par certains aspects la présentation faite de la projection orthogonale se rapproche de ce qui sera vu dans les niveaux suivants : on parle de projection d'un vecteur, de projection dans l'espace, et on utilise même la linéarité de la projection.

Mais elle n'est pas considérée comme une application au même titre que les rotations ou les homothéties : il n'y a aucune étude systématique de l'éventuelle conservation par une projection orthogonale de l'alignement ou du parallélisme, ou encore de la composition entre projections.

La distance d'un point à une droite ou un plan dans l'espace est vue en Travaux Pratiques en terminale ; nous y reviendrons ci-dessous.

Le rapprochement avec ce qui est vu dans l'enseignement supérieur nous conduit à effectuer les constatations suivantes. On observe des liens entre les propriétés vues en DEUG et des propriétés connues au lycée, voire au collège, en ce qui concerne les projections orthogonales. La propriété (P_{54}) : coordonnées du projeté, en dimension 1 fait explicitement partie du programme de première S ; cependant, bien qu'elle soit citée dans les manuels, elle n'est pas utilisée par la suite en exercice. En ce qui concerne la distance, à une droite ou à un plan, nous avons noté deux présentations distinctes dans les manuels que nous avons étudiés. La distance d'un point M à une droite (ou un plan) peut être définie comme la distance de M à son projeté orthogonal sur la droite ; on montre ensuite, grâce au théorème de Pythagore, que cette distance est minimale. Mais il est également possible d'observer une présentation qui reprend les termes de la propriété (P_{55}).

En dehors du cadre euclidien, il n'y a que peu de lien entre les propriétés vues dans le supérieur et celles rencontrées dans le secondaire : (P_{53}), qui concerne des notions inconnues au lycée, ne peut être évoquée ; dans (P_{51}), on peut considérer que la linéarité de la projection est une généralisation du théorème de Thalès. Cependant, dans les manuels du supérieur que nous avons observés, ce lien n'est jamais fait. (P_{52}) : pop = p n'est pas pertinente dans le cadre géométrique.

Nous pouvons noter par ailleurs d'autres différences marquant une rupture entre les niveaux de conceptualisation en jeu : il est peu fréquent dans le secondaire que les projections considérées agissent sur des vecteurs ; l'association entre projection et symétrie, naturelle dans le supérieur, est absente dans le secondaire ; en fait on observe rarement la projection considérée comme une application agissant sur le plan ou l'espace, il est le plus souvent question du projeté d'un point. Seules les présences du produit scalaire et de la distance euclidienne assurent une certaine continuité dans le passage d'un niveau à l'autre.

1.5.2 Praxéologies

L'étude des tâches confirme la constatation ci-dessus : le seul type de tâches du supérieur lié à ce qui est vu dans le secondaire s'inscrit dans le cadre euclidien.

$T_{projorth}$: Calculer le projeté orthogonal et/ou la distance d'un vecteur à un sous-espace.

DEUG

Le calcul de la distance peut être ou non précédé d'une question portant sur le calcul du projeté ; un calcul de distance dans $\mathbb{R}^n$ ou dans des espaces de fonctions ou de polynômes conduira pratiquement systématiquement à un calcul préalable de projeté orthogonal.

Le calcul du projeté orthogonal se fait en utilisant une technologie qui repose sur la propriété (P_{53}) : les coordonnées du projeté de x sur F dans une base orthonormale de F sont les produits scalaires de x avec les vecteurs de la base, $p_F(x) = \sum_{i=1}^{p} \langle x,e_i\rangle e_i$.

La technique associée consistera donc à déterminer une telle base orthonormale (si on n'en dispose pas déjà) ; ainsi il est fréquent de rencontrer une telle tâche dans un exercice portant sur le procédé d'orthonormalisation de Schmidt. La suite de la technique se résume à un calcul de produits scalaires. La technologie associée au calcul de la distance repose alors sur la propriété suivante : la distance de x à F est la norme de la différence entre le vecteur x et son projeté orthogonal sur F.

La technique associée consiste à calculer soit $p_F(x)$, soit x- $p_F(x)$ comme nous l'avons indiqué ci-dessus (x- $p_F(x)$ peut être interprété comme le projeté orthogonal de x sur l'orthogonal de F) puis à calculer la norme de x- $p_F(x)$.

Ainsi dans l'exemple suivant :

> Exercice D5.1 (Grifone, ex.14 p.298)
>
> On considère $\mathbb{R}_3[X]$ muni du produit scalaire :
>
> $$<P, Q> = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{x^2}{2}} P(t)Q(t)dt$$
>
> Calculer la distance du polynôme x^3 à $\mathbb{R}_2[X]$.

La solution de cet exercice utilise une base orthonormale (e_1, e_2, e_3) de $\mathbb{R}_2[X]$ préalablement déterminée par le procédé de Schmidt. On écrit :

$p_{\mathbb{R}_2[X]}(x^3) = <x^3, e_1>e_1 + <x^3, e_2>e_2 + <x^3, e_3>e_3$ et on obtient ainsi $p_{\mathbb{R}_2[X]}(x^3) = 3x$ et

$d(x^3 , \mathbb{R}_2[X]) = \sqrt{6}$.

Lycée

On trouve en terminale S des exercices sur le calcul de la distance d'un point à une droite ou à un plan dans l'espace, et qui pourraient donc être rattachés au type de tâches T_{projorth}, s'ils étaient abordés à l'université.

Dans certains cas, la tâche proposée appelle la mise en œuvre de techniques proches de ce que nous avons décrit en DEUG, comme dans l'exercice suivant :

> Exercice L5.1 (Dimathème, terminale S, p.235)
>
> Soit (O, $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$) un repère orthonormal de l'espace.
>
> On donne le plan P d'équation 2x+y-z+3 = 0, et le point A(2 ; 2; 3).
>
> 1) Déterminer les coordonnées du projeté orthogonal H de A sur P.
>
> 2) Calculer la distance de A à P.

Le calcul des coordonnées du projeté est effectué par une technique proche de ce que nous avons décrit pour la détermination de l'expression analytique d'une projection ; cependant ici, comme nous l'avons souligné ci-dessus, il s'agit du projeté d'un seul point, la projection n'apparaît pas comme une application d'un ensemble dans un autre.

Les coordonnées de H sont déterminées par les propriétés : H appartient à P, et le vecteur $\overrightarrow{AH}$ est colinéaire au vecteur $\overrightarrow{n}$ normal à P. La distance cherchée est alors la norme du vecteur $\overrightarrow{AH}$.

Par ailleurs, on rencontre également au lycée une technique pour le calcul de la distance qui repose sur le produit vectoriel et n'est donc pas généralisable à des dimensions supérieures.

Ainsi, dans l'exemple suivant :

Exercice L5.2 (Terracher TS, p.347, Exercice résolu 2)
Montrer que la distance d'un point M à la droite D passant par A et de vecteur directeur $\overrightarrow{u}$ est calculée par : $d(M, D)=\dfrac{\|\overrightarrow{AM} \wedge \overrightarrow{u}\|}{\|\overrightarrow{u}\|}$

La technique employée consiste à calculer de deux manières distinctes l'aire du triangle AMB. La distance de M à la droite est la distance MH, où H est le projeté orthogonal de M sur D (ceci n'apparaît pas ici comme une définition, mais comme une propriété évidente). Or l'aire de AMB est égale à $\frac{1}{2}$ AB.MH d'une part, et à $\frac{1}{2}\|\overrightarrow{AM} \wedge \overrightarrow{AB}\|$ d'autre part, d'où la formule cherchée.

1.6 Automorphismes orthogonaux

1.6.1 Définition, propriétés

DEUG

Une notion fondamentale dans l'étude des espaces euclidiens est celle d'adjoint d'un endomorphisme ; suite à la définition de l'adjoint vont se dégager deux grandes classes d'endomorphismes dits " remarquables " : les endomorphismes orthogonaux et les endomorphismes symétriques ou autoadjoints.

Les automorphismes orthogonaux, définis comme les automorphismes qui sont inverses de leur propre adjoint, ont trois propriétés caractéristiques équivalentes :

- (P_{61}) La conservation du produit scalaire ;
- (P_{62}) La conservation de la norme ;
- (P_{63}) La transformation d'une base orthonormée en une base orthonormée.

Les automorphismes orthogonaux sont aussi caractérisés par leur matrice, inverse de sa transposée, et que l'on appelle matrice orthogonale ; et on montre que le déterminant d'un automorphisme orthogonal vaut 1 ou -1.

L'ensemble des automorphismes orthogonaux forme un groupe, appelé groupe orthogonal.

Au groupe orthogonal est associé le groupe spécial orthogonal (automorphismes orthogonaux dont le déterminant vaut 1) dont les éléments sont appelés des rotations. Les ouvrages que nous avons consultés proposent l'étude complète du groupe orthogonal en dimension 2 et 3.

En dimension 2, la classification est très simple : les automorphismes orthogonaux de déterminant 1 sont des rotations, et ceux de déterminant -1 des symétries orthogonales.

On définit l'angle d'une rotation, et la forme de la matrice correspondante est donnée.

On voit aussi la décomposition d'une rotation comme produit de symétries orthogonales.

En dimension 3, la classification repose sur la dimension du sous-espace invariant.

Les éléments du groupe spécial orthogonal sont -par définition- des rotations.

Ici (comme en dimension 2) le terme de rotation a un sens concret : à une rotation sont associés un axe et un angle, qu'il faudra savoir déterminer à partir de la matrice de la rotation.

On distingue parmi les rotations les demi-tours qui peuvent également être interprétés comme symétries orthogonales par rapport à une droite, et ont la propriété d'engendrer SO(E).

Les éléments de $O^-(E)$ sont les symétries orthogonales par rapport à un plan, appelées réflexions, et les composées de rotations et de réflexions (dont –Id) ; et on énonce la propriété :

- (P_{64}) Les réflexions engendrent le groupe orthogonal.

Lycée (et collège)

La première notion de cette classe rencontrée dans le cursus scolaire est celle de symétrie orthogonale (dans le plan).

Dès l'école primaire, des activités sont proposées autour de l'axe de symétrie éventuel d'une figure. Cette notion est revue et détaillée en classe de sixième ; les instructions du programme soulignent qu'il n'est pas question de parler d'application du plan dans lui-même, mais de mettre à jour les propriétés de symétrie d'une figure d'une part et de savoir représenter le symétrique d'une figure d'autre part, en abordant progressivement les propriétés de conservation des distances, de l'alignement, des angles et des aires.

C'est le même point de vue qui gouverne en cinquième l'étude de la symétrie centrale.

En classe de troisième les élèves étudient la composition de deux symétries orthogonales : le point de vue "application" est donc abordé à ce niveau.

Le terme symétrie orthogonale disparaît au lycée au profit de celui de réflexion ; le choix de ce terme peut provenir d'un souci de généralisation ultérieure, généralisation dans laquelle les propriétés importantes de la symétrie orthogonale dans le plan sont celles liées à sa caractéristique de symétrie par rapport à un hyperplan.

Quant au terme de symétrie centrale, il disparaît (sauf dans l'étude des fonctions, pour le graphe d'une fonction impaire ou plus généralement présentant un centre de symétrie) lors de l'étude des rotations.

Certaines rotations simples (quart de tour) sont rencontrées dès le collège ; leur étude est approfondie en seconde, où l'on regarde simultanément l'effet sur le parallélisme, l'alignement, les distances, les angles et les aires des rotations, réflexions, translations et homothéties (on retrouve ici la remarque déjà faite en introduction : il n'y a pas à ce niveau de séparation entre géométrie affine et affine euclidienne), ainsi que les images par ces transformations de droites, segments et cercles.

En classe de première sont abordées les composées de deux transformations (de même nature) prises dans la liste ci-dessus, ainsi que leurs réciproques.

Ces transformations ne font pas l'objet d'un enseignement obligatoire de terminale S ; en revanche le programme de la spécialité mathématiques leur réserve une place importante.

Il est stipulé dans le programme :

"Il s'agit d'approfondir et réorganiser les acquis des classes antérieures dans le cadre des isométries et des déplacements".

Les isométries sont définies par la conservation des distances, et les déplacements par celle des distances et des angles orientés ; on voit de plus que les isométries conservent le parallélisme, l'orthogonalité, le contact, les barycentres et les aires.

La conservation des barycentres peut être considérée comme une première approche de la linéarité ; mais cette propriété apparaît rarement comme outil dans les exercices.

On met à jour la propriété de stabilité par composition et réciproque des isométries et des déplacements ; il s'agit clairement d'une préparation à la notion de groupe. On trouve donc en germe l'idée de structure, d'ensemble de fonctions ; mais la structure sous-jacente est celle de groupe et non celle d'espace vectoriel.

Le programme comporte aussi l'étude de la décomposition d'une rotation en produit de réflexions et une ébauche de classification des isométries fixant un point et des déplacements.

La notion d'isométrie est peu évoquée dans les manuels et cours de DEUG que nous avons examinés. Le terme isométrie reçoit d'ailleurs deux définitions différentes : « isométrie vectorielle » peut être employé comme synonyme d'automorphisme orthogonal (Grifone), mais peut aussi désigner les applications conservant les différences de norme, c'est à dire les composées d'automorphismes orthogonaux et de translations. Quelle que soit la définition choisie, c'est la notion d'automorphisme orthogonal qui est centrale, et c'est autour de cette notion que nous allons observer des continuités et des ruptures avec l'étude au lycée des isométries.

Comme dans la plupart des cas que nous avons déjà examinés, l'étude effectuée au lycée se situe dans un cadre affine, tandis que celle de DEUG se déroule dans un cadre vectoriel. Une conséquence notable est ici la disparition de la notion de translation ; une translation n'est pas un automorphisme orthogonal, elle n'est donc plus associée naturellement en DEUG aux symétries et aux rotations.

Une autre différence essentielle réside dans le fait que les isométries ne sont rencontrées au lycée que dans le cadre du plan ; en particulier on n'y parle pas d'isométries de l'espace.

La définition donnée en DEUG d'automorphisme orthogonal, basée sur la notion d'adjoint, ne présente aucune parenté avec les notions vues au lycée. En revanche la propriété (P_{62}) (conservation de la norme) est proche de la définition d'isométrie (conservation des distances) vue dans le secondaire. La propriété de conservation du produit scalaire n'est pas énoncée au lycée ; elle pourrait être vue, en utilisant l'expression du produit scalaire en fonction des normes. Mais cette propriété n'est pas appelée à servir dans les exercices ; c'est sans doute ce qui explique son absence du cours.

La transformation d'une base orthonormée en une base orthonormée, et son équivalence avec les autres conditions, ne sont pas non plus évoquées au lycée alors qu'elles pourraient être aisément démontrées, sans doute pour des raisons semblables à celle citée à propos de la conservation du produit scalaire.

Nous avons déjà noté qu'une ébauche de classification est effectuée en terminale S, spécialité, pour les isométries qui conservent au moins un point. On peut considérer que cette classification préfigure l'étude systématique du groupe orthogonal. Cependant, dans l'étude du groupe orthogonal, la forme des matrices occupe une place centrale, tandis que la classification effectuée au lycée repose sur des caractéristiques spatiales (médiatrice d'un segment notamment).

La décomposition des rotations en produit de réflexions vue en terminale est un cas particulier de la propriété (P_{64}).

Nous pouvons remarquer par ailleurs qu'il est implicitement admis au lycée que les isométries sont des « transformations », c'est à dire des applications bijectives du plan. Ce résultat est en fait très difficilement justifiable si l'on n'utilise pas l'application vectorielle associée, et le fait que l'injectivité et la surjectivité sont équivalentes en dimension finie.

1.6.2 Praxéologies

Un seul type de tâches de DEUG présente des liens avec des tâches rencontrées au lycée. En effet, les isométries rencontrées au lycée sont des applications affines, agissant sur les points et non sur les vecteurs. Par ailleurs les types de tâches que nous avons observés le plus souvent au lycée consistent à déterminer des composées d'isométries, ou à étudier des configurations à l'aide d'isométries (planes).

T_{idorth} : Identifier un automorphisme orthogonal d'un espace euclidien orienté de dimension 2 ou 3 à partir de sa matrice dans la base canonique.

DEUG

Les éléments technologico-théoriques nécessaires sont fournis par l'étude du groupe orthogonal correspondant. Nous n'avons pas rencontré cette tâche en dimension 2 ; en dimension 3, elle est en revanche fréquemment proposée.

Une première partie de la technique consiste à vérifier que la matrice donnée représente bien un automorphisme orthogonal ; nous avons étudié cette technique dans le premier paragraphe de cette partie. Dans un deuxième temps, il faut calculer le déterminant de la matrice ; un déterminant égal à 1 montre qu'il s'agit d'une rotation ; pour un déterminant égal à -1, c'est une symétrie orthogonale, ou la composée d'une rotation et d'une telle symétrie.

Dans le cas d'une rotation, on détermine ensuite l'axe de celle-ci en cherchant l'ensemble des vecteurs invariants. On cherche alors l'angle θ de la rotation. La trace de la matrice est égale à $2\cos\theta + 1$ ce qui donne le cosinus de l'angle θ ; pour obtenir l'angle lui-même, la technique employée consiste à choisir un vecteur v de l'axe, et un vecteur u orthogonal à l'axe.

On calcule alors l'image de u , le sinus de l'angle est égal au déterminant de (u, r(u), v), divisé par les normes correspondantes. On obtient donc ainsi θ, ce qui achève de caractériser la rotation.

Dans le cas où le déterminant est égal à -1, on étudie l'ensemble des vecteurs invariants ; s'il s'agit d'un plan, l'automorphisme sera la symétrie orthogonale par rapport à ce plan. Si l'ensemble des vecteurs invariants est réduit au vecteur nul, on peut étudier l'opposée de la matrice donnée ; on est ainsi ramené à l'étude d'une rotation, qui se fait comme nous l'avons vu ci-dessus. L'application cherchée est la composée d'une rotation de même axe que la rotation trouvée, et d'angle $\theta+\pi$ (où θ est l'angle de la rotation trouvée), et de la symétrie orthogonale par rapport au plan orthogonal à l'axe de la rotation.

On peut également directement étudier la matrice donnée ; il faut alors déterminer l'ensemble des vecteurs transformés en leur opposé ; ce sera l'axe de la rotation, et l'orthogonal du plan de la symétrie. La trace de la matrice est égale à $2\cos\theta-1$, et la formule employée ci-dessus pour déterminer le sinus de l'angle de la rotation est encore valable ici.

Lycée

Dans certains exercices, portant sur l'identification d'une application f du plan donnée par son expression complexe $f(z)=az+b$, ou $f(z)=a\bar{z}+b$, avec $|a|=1$, on trouve l'élément technologique : recherche des points invariants par l'application, qui se rapproche de la recherche de Ker(f-Id), faite dans T_{idorth}.

L'identification est basée sur les propriétés :

- si $f(z)=az+b$ soit $a=1$, et c'est une translation ; sinon f est une rotation d'angle l'argument de a, et de centre le point d'affixe $b/(1-a)$.

- si $f(z)=a\bar{z}+b$, f est une réflexion ou la composée d'une réflexion et d'une translation ; il s'agit d'une réflexion si l'application possède des points invariants, l'ensemble des points invariants formant alors une droite.

La recherche des points invariants, dans le cas où $f(z)=a\bar{z}+b$, conduit, en identifiant les parties réelles et imaginaires, à résoudre un système d'inconnues x et y ; on aurait obtenu le même système en utilisant l'expression analytique.

Dans le manuel Transmath (1998), terminale S, Spécialité on trouve sous le titre "géométrie analytique" des exercices portant sur l'identification d'isométries du plan données par leur expression analytique (rappelons que de telles expressions ne sont pas au programme). Cette identification est alors guidée. Ainsi dans l'exercice suivant :

Exercice L6.1 (Transmath terminale S Spécialité, p.55)

Le plan orienté est muni d'un repère orthonormal direct $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

S est la transformation qui à tout point M de coordonnées (x ; y) associe le point M'(x' ; y') tel que :

$$\begin{cases} x' = -\frac{1}{2}x + \frac{\sqrt{3}}{2}y \\ y' = \frac{\sqrt{3}}{2}x + \frac{1}{2}y \end{cases}$$

a) Montrer que S admet une droite D de points invariants.

b) Montrer que, pour tout point M non situé sur D, la droite (MM') est perpendiculaire à D, et la milieu de [MM'] est situé sur D.

c) Déduisez-en la nature de S.

L'application S est une réflexion ; on reconnaît dans un premier temps qu'elle admet une droite de points invariants.

Il serait alors possible de vérifier qu'elle conserve les distances, et d'utiliser la classification des isométries : une isométrie qui conserve une droite point par point est une réflexion. Mais les calculs correspondants sont lourds, car le seul élément technologique permettant de prouver que f est une isométrie est la conservation des distances.

Nous n'avons pu observer nulle part au lycée la tâche : montrer qu'une application est une isométrie, tâche que l'on peut considérer comme proche de "montrer qu'une application est un automorphisme orthogonal".

Cette dernière tâche apparaissait en DEUG en tant que sous-tâche dans le type $T_{idautom}$ (identification d'un automorphisme orthogonal donné par sa matrice).

Mais en DEUG les éléments technologiques disponibles rendent cette tâche simple : il suffit par exemple de vérifier qu'une base orthonormale donnée est envoyée sur une autre base orthonormale, en utilisant comme nous l'avons vu plus haut les colonnes de la matrice de l'application, donnée dans la base canonique.

Revenons à l'exercice précédent et à l'identification, en terminale S, d'une isométrie (réflexion) donnée par son expression analytique ; la technique suggérée pour conclure consiste à prouver que si M' est l'image par f d'un point M, la droite D des points invariants est la médiatrice du segment [MM']. Cette technique est propre à l'institution "terminale S" ; nous ne l'avons pas rencontrée en DEUG, où l'argument : une base orthonormée donnée est envoyée sur une base orthonormée, permet de s'en dispenser (notons que cet argument est beaucoup moins proche de "l'intuition géométrique" de la symétrie que celui utilisé en terminale).

La description du groupe orthogonal en dimension 2, et surtout en dimension 3, telle qu'elle est faite en DEUG, repose sur la caractérisation des automorphismes orthogonaux par leur ensemble de vecteurs invariants. Cette caractérisation suffit à déterminer la nature d'un automorphisme orthogonal d'après la donnée de sa matrice ; une étude supplémentaire est ensuite nécessaire pour préciser les paramètres de l'application.

En terminale S (spécialité mathématiques), la classification des isométries du plan se fait de même d'après leur ensemble de points invariants. Mais cette classification ne fournit pas de technique simple d'identification d'une application donnée par son expression analytique puisque, comme nous l'avons souligné ci-dessus, montrer qu'une application est une isométrie entraîne des calculs lourds.

Ce sont alors d'autres caractérisations, plus "géométriques", qui seront employées : une réflexion est caractérisée de la manière que nous avons vue ci-dessus ; une rotation r sera caractérisée par le fait qu'elle admet un unique point invariant O, et que pour tout point M du plan, OM=Or(M), et $(\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{Or(M)}) = \theta$, où θ est l'angle de la rotation.

1.7 Conclusion

L'étude que nous venons d'effectuer met à jour des continuités et des ruptures entre la géométrie rencontrée dans l'enseignement secondaire et l'algèbre linéaire et bilinéaire vue à l'université. Elle montre également qu'un enseignement intermédiaire pourrait être envisagé pour renforcer les liens que nous avons observés : il pourrait s'agir d'un enseignement de géométrie vectorielle euclidienne, voire d'algèbre linéaire et bilinéaire en dimension inférieure ou égale à trois.

Avant d'examiner la question des apports éventuels d'un tel enseignement, rappelons les ruptures que nous avons observées.

Tout d'abord, l'enseignement du lycée se déroule dans le cadre de la géométrie affine euclidienne. L'aspect « affine » implique que l'élément premier est le point ; les sous-espaces considérés sont affines, les applications également, elles agissent presque uniquement sur des points. L'introduction du vecteur est liée à la notion de translation ; cette introduction entraîne des difficultés didactiques connues, par exemple en ce qui concerne la séparation entre un vecteur et un représentant de ce vecteur. L'objet premier reste le point ; le vecteur prend toutefois de l'importance après la définition du produit scalaire. L'affine et l'euclidien sont fortement associés, et leur séparation semblerait contraire à l'intuition dans ce cadre : l'orthogonalité, la norme y sont des notions naturelles.

De plus, au lycée, l'étude du plan et celle de l'espace sont effectuées séparément, avec des différences de vocabulaire (il s'agit notamment de « plan » et « d'espace », et non d'espaces de dimension 2 et 3, le terme dimension n'étant pas employé). De même dans l'espace, droites et plans apparaissent comme des objets de nature tout à fait différente de celle de l'espace complet, la structure commune n'est pas soulignée.

On est souvent amené à considérer l'effet d'une application sur une configuration géométrique ; mais les applications apparaissent peu comme objet d'étude à part entière (ce n'est le cas que pour les isométries).

D'une manière générale, les propriétés spatiales restent centrales, en particulier dans les exercices proposés, mais également dans les définitions et les propriétés données. Comme nous l'avons dit, l'étude des applications est liées à celle des configurations. De même, pour déterminer si des vecteurs sont colinéaires ou coplanaires, on attend souvent des élèves qu'ils utilisent une configuration géométrique particulière.

Par ailleurs, les types de tâches de DEUG que nous avons mentionnés parce qu'ils présentaient des liens avec des types de tâches rencontrés au lycée correspondent à des exercices élémentaires au niveau de l'université. Il est rare que de tels exercices fassent l'objet d'une étude approfondie en travaux dirigés, les contraintes de temps conduisant à passer rapidement à des tâches plus complexes. Ainsi à l'Université de Rennes 1, l'identification d'un endomorphisme orthogonal en dimension 3 faisait, en 1998-1999 l'objet d'environ deux heures de travaux dirigés ; des exercices plus théoriques, portant sur la notion d'endomorphisme adjoint, ou la réduction simultanée de formes quadratiques étaient privilégiés. Nous reviendrons sur ce point dans la partie suivante, dans laquelle nous allons examiner des manuels destinés aux étudiants de DEUG, en notant en particulier les exercices relevant des types de tâches que nous avons évoqués ci-dessus.

Un enseignement d'algèbre linéaire et bilinéaire, limité à la dimension trois pourrait-il atténuer ces ruptures ? Un tel enseignement permettrait sans doute de renforcer le lien entre ce qui est fait au lycée et ce qui est vu en DEUG sur certains points. Il permettrait d'autre part d'introduire des notions d'algèbre linéaire sans présenter d'emblée l'ensemble de la théorie. On pourrait, dans un tel enseignement, introduire notamment les notions de sous-espace vectoriel, famille libre, génératrice, application linéaire (en soulignant éventuellement projections, symétries), matrice d'une telle application, voire réduction d'endomorphismes, ainsi que l'étude des espaces euclidiens limités à la dimension 3, avec en particulier ce qui concerne les isométries. Mais la faiblesse des dimensions en jeu, et l'emploi de concepts figuratifs conférant aux propriétés spatiales une place centrale lorsque la dimension est ainsi limitée, même dans un enseignement d'algèbre linéaire, ne permettent sans doute pas de combler tous les écarts rappelés ci-dessus. Pour évaluer plus précisément ce qui pourrait ou ne pourrait pas être amélioré ainsi, nous allons examiner les propriétés que nous avons évoquées dans l'étude précédente.

Nous avons mentionné au total 31 propriétés vues en DEUG ; 17 d'algèbre linéaire, et 14 d'algèbre bilinéaire. Parmi ces propriétés, 15 sont au moins partiellement évoquées dans l'enseignement secondaire (7 en algèbre linéaire, et 8 en algèbre bilinéaire), c'est à dire que l'on trouve, au moins dans l'un des manuels du secondaire que nous avons examinés, un résultat pouvant être interprété comme un cas particulier de cette propriété.

Dans le cadre de l'algèbre linéaire (et bilinéaire) en dimension inférieure ou égale à trois, certaines de ces propriétés apparaissent comme des évidences spatiales ; d'autres ne semblent pas évidentes mais restent peu pertinentes, du fait de la limitation de dimension. Nous allons récapituler dans le tableau ci-dessous les propriétés évoquées dans l'enseignement secondaire, celles qui ne sont pas vues dans le secondaire mais sont évidentes spatialement ou rendues peu pertinentes du fait de la limitation à la dimension trois, et enfin celles qui ne correspondent à aucun de ces deux cas.

	Propriétés évoquées au lycée	Evidences spatiales, ou propriétés d'importance limitée par la dimension ≤ 3	Propriétés déjà pertinentes, non évoquées au lycée
Familles libres	(P_{11}) (P_{12})	(P_{13})	(P_{14})
Bases	(P_{21}) (P_{26})	(P_{22}) (P_{23}) (P_{24}) (P_{25}) (P_{27})	
Equations d'un sous-espace	(P_{41}) (P_{42})		(P_{43})
Projection	(P_{51})	(P_{52})	(P_{53})
Projection orthogonale	(P_{54}) (P_{55})		
Orthogonalité	(P_{35}) (P_{36}) (P_{37}) (P_{38})	(P_{31}) (P_{33}) (P_{34})	(P_{32})
Endomorphismes orthogonaux	(P_{62}) (P_{64})		(P_{61}) (P_{63})

Nous avons choisi l'ordre de présentation du tableau de manière à séparer algèbre linéaire et algèbre bilinéaire.

D'après ce tableau, 6 des 31 propriétés citées ne sont pas rencontrées dans le secondaire, et semblent déjà pertinentes dans le cadre de l'algèbre linéaire ou bilinéaire limitée à la dimension 3. Certaines de ces propriétés sont liées à des notions nouvelles, que l'on peut introduire en dimension inférieure ou égale à trois : (P_{14}) (une famille contenant le vecteur nul est liée) repose sur la définition générale de famille liée, qui n'est pas vue au lycée ; (P_{53}) concerne le noyau et l'image d'une projection ; (P_{32}) la notion générale de forme bilinéaire. Les autres propriétés ne nécessitent pas l'introduction de notions nouvelles : (P_{43}) (nombre minimum d'équations d'un sous-espace) pourrait être évoquée au lycée, si l'on présentait les équations cartésiennes de droites dans l'espace ; (P_{61}) et (P_{63}) (caractérisation des isométries vectorielles par conservation du produit scalaire et d'une base orthonormée) pourraient y être établies à propos des isométries affines.

Par ailleurs, les liens que nous avons mentionnés avec des propriétés vues au lycée sont des liens possibles. Certains d'entre eux concernent des résultats qui ne sont que brièvement évoqués au lycée, comme (P_{64}) : les coordonnées du projeté orthogonal d'un vecteur dans une base orthonormée. D'autres liens demandent une adaptation de la propriété de lycée correspondante : le passage d'une application affine à une application vectorielle par exemple. Enfin la plupart de ces liens ne sont sans doute pas soulignés par les enseignants de l'université[7] : ainsi, on peut supposer que le lien entre le Théorème de Thalès et la linéarité des projections est rarement mentionné. Un enseignement spécifique peut donc sembler nécessaire.

Il reste toutefois 10 des 31 propriétés évoquées qui restent peu, ou pas pertinentes, en dimension inférieure ou égale à trois. C'est le cas des propriétés d'existence : existence de bases, de bases orthogonales ((P_{22}), (P_{31})), d'un supplémentaire orthogonal (P_{34}), qui semblent intuitivement évidentes. Les propriétés liées à la notion de famille génératrice, (P_{23}) et (P_{27}), si elles ne correspondent pas à des évidences spatiales, sont en revanche d'un intérêt limité lorsque la dimension est faible. Ainsi la possibilité d'extraire une base d'un plan d'une famille génératrice de celui-ci (dans l'espace) revient simplement à constater qu'une telle famille contient nécessairement deux vecteurs non colinéaires. Notre liste de propriétés n'est bien sûr pas exhaustive ; mais le fait que près du tiers de celles-ci ne puissent être travaillées de manière significative lorsque la dimension est faible montre les limites des différents modèles de nature géométrique que nous avons distingués en nous appuyant sur les travaux de Fischbein (et auxquels nous adjoignons, ici, l'algèbre linéaire en dimension inférieure ou égale à trois).

En revanche, en ce qui concerne les tâches, la limitation du nombre de dimensions semble moins restrictive. En effet, toutes les tâches que nous avons citées pourraient être travaillées dans un enseignement d'algèbre linéaire limité à la dimension trois. Déterminer si une famille est libre, déterminer une base, ou un système d'équations d'un sous-espace, calculer la distance d'un vecteur à un sous-espace, identifier une isométrie à sa matrice sont des tâches qui peuvent donner lieu à des exercices dans un tel enseignement. De plus des tâches nouvelles pourraient être abordées, comme la détermination de la matrice dans une base donnée, du noyau ou de l'image d'un endomorphisme, ou même la réduction d'un tel endomorphisme. Ces tâches semblent essentiellement liées à un aspect analytique de l'algèbre linéaire (« le point de vue matriciel», selon les termes du programme de classes préparatoires). Cependant elles peuvent, selon nous, donner lieu à des exercices relevant de l'aspect synthétique, ou du moins à des exercices non calculatoires. Ainsi on retrouve la tâche « déterminer si une famille est libre » dans l'exercice « Soient u, v, w trois vecteurs deux à deux non colinéaires. La famille {u, v, w} est-elle libre ? ». Or cet exercice[8] peut être proposé dès que la notion de famille libre a été abordée, même si la dimension est limitée à trois.

Un tel travail permettrait de préparer aux tâches plus complexes qui sont proposées en algèbre linéaire générale.

Nous allons maintenant examiner des manuels universitaires actuels, en y relevant en particulier la présence des tâches que nous avons mentionnées ci-dessus.

[7] Ceci sera largement confirmé au chapitre suivant par notre questionnaire aux enseignants.

[8] Nous étudierons en détail cet exercice dans le chapitre suivant.

2. Analyses de manuels universitaires récents

Nous allons analyser ici six manuels récents destinés à des étudiants de premier cycle universitaire. Nous avons choisi quatre manuels français : *Algèbre première année*, de Liret et Martinais (Dunod, Paris, 1997) ; *Algèbre et géométrie deuxième* année des mêmes auteurs (Dunod , Paris 1999) ; *Algèbre linéaire*, de Grifone (Cepaduès éditions, Toulouse, 1990) ; *Algèbre linéaire*, de Pham et Dillinger (Diderot éditeur, Paris, 1996), un manuel américain : *Linear Algebra Through Geometry*, de Banchoff et Wermer (Springer-Verlag New-York, 1992), et un manuel allemand : *Lineare Algebra und Analytische Geometrie* de Schaal (Vieweg, Braunschweig 1976). Parmi ces livres, quatre sont, à notre connaissance, utilisés comme support au cours et conseillés comme référence aux étudiants dans le pays correspondant : Liret et Martinais, Grifone, Schaal. Les deux autres, de Pham et Dillinger d'une part et de Banchoff et Wermer d'autre part, semblent adopter une présentation originale ; ils seront probablement plus difficiles d'abord pour des étudiants qui souhaiteraient les étudier par eux-mêmes.

Nous avons retenu ces ouvrages car, comme nous le verrons dans l'analyse, les choix pour l'emploi de la géométrie dans le cours d'algèbre linéaire ou bilinéaire proposés par chacun sont sensiblement différents ; ils permettent de dégager différentes tendances qui peuvent se manifester de nos jours en premier cycle universitaire.

Pour chacun de ces ouvrages, nous allons employer pour l'analyse les mêmes tableaux qu'au chapitre précédent. De plus, en nous appuyant sur l'étude réalisée dans la première partie de ce chapitre[9], nous noterons dans les ouvrages français les exercices relevant de types de tâches que nous avons cités.

Notre étude des praxéologies nous a permis de déterminer neuf types de tâches rencontrés en premier cycle, qui peuvent apparaître comme des généralisations de tâches de lycée (cinq en algèbre linéaire, et quatre en algèbre bilinéaire) :

- Déterminer si une famille est libre (T_{libre})
- Déterminer une base d'un sous-espace ($T_{basesev}$)
- Déterminer les coordonnées d'un vecteur dans une base (T_{coord})
- Déterminer des équations cartésiennes de sous-espaces ($T_{éqsev}$)
- Identifier l'ensemble solution d'un système linéaire ($T_{systlin}$)
- Montrer qu'une famille forme une base orthogonale ou orthonormée de l'espace ($T_{baseorth}$)
- Déterminer une base de l'orthogonal d'un sous-espace ($T_{orthsev}$)

---

[9] Parmi les livres que nous allons analyser dans cette partie, seul celui de Grifone nous a servi dans notre étude de tâches. Il nous a cependant semblé intéressant de le reprendre ici, car ce livre propose un point de vue original, dans lequel la géométrie tient une place importante.

- Calculer la distance d'un vecteur à un sous-espace ($T_{projorth}$)
- Identifier une isométrie de $\mathbb{R}^2$ ou $\mathbb{R}^3$ donnée par une matrice (T_{idorth}).

Nous conclurons pour chaque manuel en tentant de décrire les caractéristiques de l'articulation algèbre linéaire (ou bilinéaire)-géométrie qui se dégagent de l'analyse.

2.1 Liret et Martinais, première année

2.1.1 Contenu

Auteur(s)	François Liret Dominique Martinais
Titre	Algèbre première année
Editeur-Année	Dunod, Paris, 1997
Public	Etudiants première année d'université
Organisation du livre	12 chapitres, dont 4 d'algèbre linéaire
Notions d'algèbre linéaire (a.l.) présentées	Matrices, systèmes linéaires, déterminants, e.v., s.e.v., familles libres, génératrices, bases, dimension, applications linéaires.
Chapitres de géométrie avant l'a.l.	Non.
Vocabulaire géométrique dans les chapitres d'a.l.	6 termes issus de la géométrie, tous apparaissent en algèbre linéaire générale.
Exercices présentant des types de tâches liés à la géométrie du lycée	Dans les quatre chapitres consacrés à l'algèbre linéaire (matrices, déterminants, espaces vectoriels, applications linéaires), il y a 67 exercices, dont 4 comportent des tâches liées à la géométrie du lycée.
Lien vectoriel-affine	Un chapitre est consacré à la géométrie affine dans $\mathbb{R}^n$, après l'algèbre linéaire. Les n-uplets sont alors considérés soit comme des vecteurs, soit comme des points.
Figures	Pas de figures dans les chapitres d'algèbre linéaire. 14 figures dans le chapitre de géométrie affine, dont 9 en dimension ≤ 3, et 5 en dimension quelconque.

Discours explicite sur le lien algèbre linéaire-géométrie	*(Chapitre : applications linéaires)* "Voici des applications linéaires utiles en géométrie." Cette phrase précède les définitions, dans le cadre de l'algèbre linéaire générale, des notions d'homothétie, projection et symétrie. Aucun détail n'est donné sur l'utilité en géométrie de ces applications. *(Chapitre : géométrie affine)* "Nous allons voir que les calculs et les résultats de l'algèbre linéaire dans I $\mathbb{R}^2$ et $\mathbb{R}^3$ rendent compte des propriétés affines de la géométrie du plan et de l'espace ordinaire." " Lorsque nous appelons "point" un élément de $\mathbb{R}^n$ cela signifie que cet élément peut se représenter comme un point de la géométrie, sur une figure plane dans le cas d'un point de $\mathbb{R}^2$, à l'aide d'une "figure dans l'espace" dans le cas d'un point de $\mathbb{R}^3$... Lorsque nous ne voudrons pas interpréter un élément v de $\mathbb{R}^n$ comme un point, nous dirons que v est un vecteur, comme d'habitude pour les éléments d'un espace vectoriel."
Adéquation discours-contenu du livre	La première partie du discours : "applications linéaires utiles en géométrie" s'explique à la lecture du chapitre de géométrie affine. En effet les projections, symétries et homothéties (plus les translations) sont revues alors comme applications affines de $\mathbb{R}^n$. Les seules figures représentant une situation dans $\mathbb{R}^n$ avec n quelconque illustrent les effets de ces applications.

Emploi du vocabulaire géométrique dans les chapitres d'algèbre linéaire

Utilisé en dimension ≤ 3	Utilisé en algèbre linéaire générale	Utilisé dans d'autres cadres
Espace, droite, homothétie, projection.	Espace, droite, homothétie, projection, symétrie, plan.	Espace, droite

2.1.2 Types de tâches

- Déterminer une base d'un sous-espace ($T_{basesev}$) : 1 exercice
- Déterminer les coordonnées d'un vecteur dans une base (T_{coord}) : 2 exercices
- Déterminer des équations cartésiennes de sous-espaces ($T_{éqsev}$) : 1 exercice

2.1.3 Conclusion

Dans ce livre, seules sont présentées les premières notions d'algèbre linéaire (ce qui est usuellement vu en première année d'université). Le point de vue choisi est essentiellement analytique : ainsi les matrices sont introduites avant les applications linéaires, et l'étude de la géométrie affine est limitée à $\mathbb{R}^n$.

Il n'y a dans ce livre aucun discours explicite au sujet d'un éventuel emploi de la géométrie dans un cours d'algèbre linéaire. Très peu de vocabulaire géométrique est employé (6 mots), peu d'exercices sont liés à la géométrie du lycée, et on ne trouve aucune figure dans les chapitres d'algèbre linéaire.

On peut donc dire que dans la présentation de l'algèbre linéaire qui est proposée ici on n'observe pas, ou très peu de recours à un modèle géométrique.

2.2 Liret et Martinais, deuxième année

2.2.1 Contenu

Auteur(s)	François Liret Dominique Martinais
Titre	Algèbre et géométrie deuxième année
Editeur-Année	Dunod, Paris, 1999
Public	Etudiants deuxième année d'université
Organisation du livre	11 chapitres, dont 6 d'algèbre linéaire ou bilinéaire.
Notions d'algèbre linéaire (a.l.) présentées	Somme, dualité, déterminant, réduction des endomorphismes, espaces euclidiens, endomorphismes d'espaces euclidiens, formes quadratiques.
Chapitres de géométrie avant l'a.l.	Non.
Vocabulaire géométrique dans les chapitres d'a.l.	15 termes issus de la géométrie, employés plutôt en dimension ≤ 3
Exercices présentant des types de tâches liés à la géométrie du lycée	6 exercices, sur un total de 137 dans les 6 chapitres d'algèbre linéaire ou bilinéaire.
Lien vectoriel-affine	L'étude des espaces affines euclidiens fait l'objet d'un chapitre, qui suit les deux chapitres consacrés aux espaces euclidiens. La notion générale d'espace affine y est présentée.
Figures	13 figures dans les chapitres d'algèbre linéaire et bilinéaire ; toutes illustrent des situations en dimension ≤ 3.

Discours explicite sur le lien algèbre linéaire-géométrie	*(Chapitre : Espaces affines euclidiens)* « Nous avons montré en première année comment l'algèbre linéaire de $\mathbb{R}^2$ et $\mathbb{R}^3$ permet de rendre compte de la géométrie affine du plan ou de l'espace. De même, nous allons voir que les propriétés métriques de la géométrie plane ou de la géométrie dans l'espace traduisent la structure d'espace euclidien en dimension 2 ou 3. »
Adéquation discours-contenu du livre	Discours et contenu en adéquation. Dans ce livre, la géométrie n'est pas ou peu employée en algèbre linéaire ; en revanche, l'algèbre linéaire est utilisée pour fonder la géométrie.

Emploi du vocabulaire géométrique dans les chapitres d'algèbre linéaire et bilinéaire

Utilisé en dimension ≤ 3	Utilisé en algèbre linéaire ou bilinéaire générale
Espace, plan, droite, homothétie, symétrie, isométrie, orthogonal, médiane, triangle, aire, parallélogramme, rectangle, point, rotation.	Espace, plan, droite, homothétie, symétrie, isométrie, projection.

2.2.2 Types de tâches

- Déterminer les coordonnées d'un vecteur dans une base (T_{coord}) : 1 exercice
- Déterminer une base de l'orthogonal d'un sous-espace ($T_{orthsev}$) : 2 exercices
- Calculer la distance d'un vecteur à un sous-espace ($T_{projorth}$) : 1 exercice
- Identifier une isométrie de $\mathbb{R}^2$ ou $\mathbb{R}^3$ donnée par une matrice (T_{idorth}) : 2 exercices

2.2.3 Conclusion

Dans ce livre, la géométrie semble plus présente que dans le précédent. On observe plus de vocabulaire géométrique, et de dessins. Les dessins, et les tâches liées à la géométrie du lycée, se trouvent essentiellement dans les chapitres d'algèbre bilinéaire. On peut dire cette fois que les auteurs ont recours à un modèle géométrique, en ce qui concerne le cours d'algèbre bilinéaire. En plus du vocabulaire et des dessins, ceux-ci ont en effet également choisi de présenter les espaces euclidiens avant les formes quadratiques quelconques.

Toutefois le rôle du modèle géométrique reste limité ; la plupart des définitions et propriétés sont données d'emblée dans un cadre général. L'une des raisons de la présence de vocabulaire géométrique est l'étude usuelle de la classification des isométries du plan et de l'espace. Il ne semble donc pas que les auteurs attachent une importance particulière à un support géométrique.

2.3 Pham et Dillinger

2.3.1 Contenu

Auteur(s)	Frédéric Pham et Hervé Dillinger
Titre	Algèbre linéaire
Editeur-Année	Diderot éditeur, Paris 1996
Public	Etudiants premier cycle et classes préparatoires
Organisation du livre	1 prologue, 4 chapitres, 3 appendices
Notions d'algèbre linéaire (a.l.) présentées	E.v., s.e.v., familles libres, génératrices, bases, dimension, systèmes linéaires, applications linéaires, matrices, déterminants, réduction.
Chapitres de géométrie avant l'a.l.	Non. Une partie du prologue présente une géométrie affine basée sur les notions de droite et de parallélisme (une géométrie d'extra-terrestre !), qui conduit au calcul vectoriel.
Vocabulaire géométrique dans les chapitres d'a.l.	16 termes issus de la géométrie, dont 6 utilisés en algèbre linéaire générale.
Exercices présentant des types de tâches liés à la géométrie du lycée	84 exercices, un seul comporte une tâche liée à la géométrie du lycée.
Lien vectoriel-affine	Dans le prologue, la géométrie affine conduit au calcul vectoriel. Dans le chapitre 2, la notion d'espace affine est définie à partir de l'espace vectoriel sous-jacent. Dans les exemples et les exercices, affine et vectoriel sont souvent mélangés sans précisions.
Figures	11 figures (hors prologue et appendices), toutes illustrent des situations en dimension ≤3.

Discours explicite sur le lien algèbre linéaire-géométrie	(Avertissement au lecteur) « Notre principal souci, que résume le slogan *dualité entre géométrie et calcul*, est d'amener peu à peu les étudiants à maîtriser les allers-retours entre la pensée géométrique et le monde des calculs. L'algèbre linéaire présente un magnifique formalisme unificateur entre ces deux façons de penser. » (Chapitre 0, Prologue) « L'intérêt du point de vue géométrique est clair dès que toute l'information peut être condensée par un dessin dans le plan. Il l'est déjà moins lorsque l'on est obligé à recourir à une figure dans l'espace à trois dimensions. Mais que faire lorsque le nombre de variables ne permet pas une représentation dans un espace de dimension 2 ou 3 ? » « La formulation [des axiomes de la géométrie] unanimement acceptée aujourd'hui est fondée sur l'algèbre linéaire. Elle présente l'avantage de faire apparaître de façon très naturelle les notions de plan, ou d'espace à trois dimensions, comme des cas particuliers d'espaces à n dimensions. Bien sûr si n est plus grand que trois, il n'est pas question de dessiner des figures. Mais lorsque vous aurez appris à remplacer votre intuition sensible du plan ou de l'espace par des raisonnements rigoureux basés sur les axiomes des espaces affines ou vectoriels, vous vous rendrez compte que ces raisonnements permettent de faire de la géométrie en dimension quelconque. » (Chapitre 2, à propos d'exercice où on demandait de dessiner) « Tous les exercices qui précèdent sont des exercices de mathématique impure, en ce sens qu'ils reposent sur une expérimentation graphique. Nous verrons dans les paragraphes suivants comment transformer ces recettes empiriques en discours mathématique cohérent, articulé selon une logique rigoureuse. »
Adéquation discours-contenu du livre	Discours et contenu en adéquation. Il y a dans le livre des exercices dans lesquels on demande à l'étudiant de faire un dessin ; tous se déroulent en dimension 2. Toutes les figures représentent des situations en dimension 2 ou 3 ; il n'y a pas d'usage métaphorique du dessin. Le passage à des dimensions ≥ 3 représente bien un « saut dans l'abstraction » ; il n'y a plus de dessins, mais des raisonnements rigoureux basés sur des axiomes.

Emploi du vocabulaire géométrique dans les chapitres d'algèbre linéaire

Utilisé en dimension ≤ 3	Utilisé en algèbre linéaire générale	Utilisé dans d'autres cadres
Espace, point, parallèle, projection, droite, demi-droite, plan, triangle, axe, parallélogramme, aire, longueur, volume, parallélépipède.	Espace, point, parallèle, projection, symétrie, homothétie.	Espace

2.3.2 Types de tâches

Un seul exercice comporte un des types de tâches que nous avons retenu : Identifier l'ensemble solution d'un système linéaire ($T_{systlin}$).

2.3.3 Conclusion

Ici l'emploi de la géométrie est un enjeu fondamental pour les auteurs. Nous n'avons cité dans le premier tableau que quelques extraits des discours tenus à ce sujet dans le livre ; il y en a bien d'autres, et les titres même des chapitres : "Espaces vectoriels et géométrie" (Chapitre 1), "Dualité entre géométrie et calcul" (Chapitre 2) sont très significatifs à cet égard.

L'emploi effectif de la "géométrie" (il faut bien entendu préciser le sens attribué à ce terme) dans le livre semble se présenter sous deux aspects distincts.

Tout d'abord une place importante est attribuée aux dessins, pour représenter des situations en dimension 2 (plus rarement 3). La particularité ici est la présence d'exercices demandant effectivement au lecteur de dessiner. Mais ces exercices sont qualifiés de "mathématique impure", et ont, selon les auteurs eux-mêmes, un statut d'expérimentation. Ensuite le lecteur est appelé à effectuer un "saut dans l'abstraction", l'objectif étant de "remplacer votre intuition sensible du plan ou de l'espace par des raisonnements rigoureux basés sur les axiomes des espaces affines ou vectoriels".

Ces raisonnements appartiennent encore selon les auteurs à une géométrie en dimension quelconque, notamment à cause de l'emploi du vocabulaire géométrique, mais surtout parce qu'ils se rattachent au "point de vue de la géométrie".

Il semble dans ce cas que le terme "géométrie" désigne en fait une approche synthétique de l'étude des espaces vectoriels ou affines, par opposition à ce qui est de l'ordre du calcul.

Les modèles en jeu ici sont donc d'une part un modèle figuratif, dont l'importance est soulignée surtout en dimension 2, éventuellement en dimension 3. Le recours à ce modèle pour des dimensions supérieures est explicitement écarté, les auteurs refusent un emploi métaphorique du dessin. D'autre part, l'algèbre linéaire synthétique est considérée comme géométrique, par opposition au point de vue analytique. Aucun de ces deux modèles ne peut donc être considéré comme géométrique, selon le sens que nous avons attribué à l'expression « modèle géométrique » : l'un est un modèle figuratif, et l'autre un modèle théorique, qui n'est pas relié à un modèle figuratif .

2.4 Grifone

2.4.1 Contenu

Auteur(s)	Joseph Grifone
Titre	Algèbre linéaire
Editeur-Année	Cepadues, Toulouse, 1990
Public	Etudiants premier cycle
Organisation du livre	9 chapitres, 7 appendices
Notions d'algèbre linéaire (a.l.) présentées	E.v., s.e.v., familles libres, génératrices, bases, dimension, systèmes linéaires, applications linéaires, matrices, déterminants, réduction, espaces euclidiens, formes bilinéaires, hermitiennes.
Chapitres de géométrie avant l'a.l.	Non.
Vocabulaire géométrique dans les chapitres d'a.l.	25 termes issus de la géométrie, dont 12 apparaissent dans un cadre d'algèbre linéaire générale.
Exercices présentant des types de tâches liés à la géométrie du lycée	204 exercices, dont 10 comportent des tâches liées à la géométrie du lycée.
Lien vectoriel-affine	Ce livre aborde la géométrie affine en appendice (III). L'auteur y écrit : "La notion d'espace affine a été introduite pour rendre compte des vecteurs issus de points différents." Un sous-espace affine est présenté comme l'image d'un sous-espace vectoriel par une translation.
Figures	62 figures (hors appendices), dont 8 illustrent des situations en dimension quelconque.

Discours explicite sur le lien algèbre linéaire-géométrie	*(Avant-propos)* "L'algèbre linéaire a sans doute une place spéciale parmi les disciplines enseignées en premier cycle...l'algèbre et la géométrie se mêlent constamment, l'imagination est sans cesse sollicitée et, de ce fait, elle est très utile à la formation de l'esprit mathématique." *(Chapitre : espaces vectoriels, après présentation de* $\mathbb{R}^2$ *et* $\mathbb{R}^3$*)* "L'exemple que l'on vient d'étudier est très utile, car il permet d'avoir présent à l'esprit un modèle géométrique qui peut servir de support à l'intuition. Cependant, il est important de comprendre que cette interprétation, même si elle est suggestive, n'est pas essentielle à la théorie. D'abord parce que nous ne considérons pas seulement des espaces de dimension 2 ou 3 comme $\mathbb{R}^2$ ou $\mathbb{R}^3$, mais aussi des espaces de dimension supérieure, comme $\mathbb{R}^n$, ou même infinie...dans ce cas, l'analogie avec les vecteurs de l'espace ordinaire risque de ne pas être d'un grand secours. D'autre part, on considérera aussi la multiplication des vecteurs par des nombres complexes...dans ce cas, l'interprétation géométrique de la loi de produit n'est pas évidente. Ceci dit, le support géométrique est particulièrement important en algèbre linéaire et, en règle générale, il ne faut pas se priver d'y faire appel."
Adéquation discours-contenu du livre	Discours et contenu en adéquation. En particulier, les espaces euclidiens sont présentés avant les formes quadratiques (l'auteur souligne ce choix en avant-propos), et en commençant par l'étude de $\mathbb{R}^2$ et $\mathbb{R}^3$; au-delà de la dimension 3, peu de références à la géométrie.

Emploi du vocabulaire géométrique dans les chapitres d'algèbre linéaire

Utilisé en dimension ≤ 3	Utilisé en algèbre linéaire ou bilinéaire générale	Utilisé dans d'autres cadres
Espace, orthogonal, longueur, droite, plan, projection, translation, rotation, angle, volume, triangle, cône, sens, parallélogramme, bissectrice, symétrie, aire, point, alignés, milieu, segment, repère, distance, théorème de Pythagore, isométrie.	Espace, orthogonal, longueur, droite, plan, projection, translation, rotation, angle, volume, triangle, cône.	Espace, orthogonal.

2.4.2 Types de tâches

- Déterminer une base d'un sous-espace donné par une représentation paramétrique ($T_{basesev}$) : 1 exercice
- Déterminer les coordonnées d'un vecteur dans une base (T_{coord}) : 3 exercices

- Déterminer des équations cartésiennes de sous-espaces ($T_{éqsev}$) : 3 exercices
- Déterminer une base de l'orthogonal d'un sous-espace ($T_{orthsev}$) : 1 exercice
- Calculer la distance d'un vecteur à un sous-espace ($T_{projorth}$) : 1 exercice
- Identifier une isométrie de $\mathbb{R}^2$ ou $\mathbb{R}^3$ (T_{idorth}) : 2 exercices.

2.4.3 Conclusion

Dans ce livre, l'auteur utilise significativement la géométrie, comme le montrent les différents indicateurs que nous avons retenus : 26 termes géométriques, 10 exercices liés à la géométrie du lycée, 62 figures.

Toutefois, Grifone émet des doutes quant à l'emploi d'analogies géométriques en dimension $\geq$ 4, et lorsque le corps de base est différent de $\mathbb{R}$; le contenu du livre reflète cette position. En effet, des situations dans $\mathbb{R}^2$ ou $\mathbb{R}^3$ sont utilisées à titre introductif, et des tâches liées à la géométrie sont proposées en dimension ≤ 3. Mais moins de la moitié du vocabulaire géométrique est utilisé dans un cadre général, et seuls 8 dessins sur les 62 présents illustrent des situations générales.

Le modèle géométrique, identifié ici à $\mathbb{R}^2$ et $\mathbb{R}^3$, est présenté avant les généralités, et semble pouvoir servir à une meilleure compréhension de l'algèbre linéaire en dimension ≤ 3 ; mais le recours à la géométrie, ou à une "intuition géométrique" au-delà de ces dimensions n'est pas envisagé.

2.5 Banchoff-Wermer

2.5.1 Contenu

Auteur(s)	Thomas Banchoff John Wermer
Titre	Linear Algebra through Geometry
Editeur-Année	Springer Verlag, New York, 1992
Public	Etudiants premier cycle (undergraduates)
Organisation du livre	8 chapitres
Notions d'algèbre linéaire (a.l.) présentées	E.v., s.e.v., familles libres, génératrices, bases, dimension, applications linéaires, matrices, systèmes linéaires, déterminants, réduction (la réduction n'est vue qu'en dimension ≤ 3), espaces euclidiens.
Chapitres de géométrie avant l'a.l.	Les quatres premiers chapitres sont intitulés respectivement : Vectors in the Line, The geometry of vectors in the plane, Vector Geometry in 3-space, et Vector geometry in n-space, $n \geq 4$. Ces chapitres ne comportent pas de présentation axiomatique, les notions d'algèbre linéaire citées ci-dessus y sont présentées, à l'exception de celles d'espace vectoriel, sous-espace vectoriel et famille génératrice.
Vocabulaire géométrique dans les chapitres d'a.l.	36 termes issus de la géométrie ; 24 sont utilisés en dimension 4, 4 dans un cadre général, et 2 dans d'autres cadres.
Lien vectoriel-affine	Ce lien reste implicite ; en particulier le terme "affine" n'est jamais employé. Les éléments des espaces considérés sont désignés indifféremment comme des points ou comme des vecteurs.
Figures	Ce livre comporte 92 figures, dont 5 illustrent des situations en dimension 4, et 2 des situations générales.

Discours explicite sur le lien algèbre linéaire-géométrie[10]	*(Préface)* "Dans ce livre nous conduisons l'étudiant à une compréhension de l'algèbre linéaire élémentaire en soulignant la signification géométrique de ce sujet. Notre expérience nous a convaincus que la meilleure manière pour l'étudiant d'apprendre les nouvelles idées de l'algèbre linéaire est d'enraciner celles-ci dans la géométrie usuelle à deux ou trois dimensions. Beaucoup de notions importantes d'algèbre linéaire apparaissent déjà dans ces dimensions de manière non triviale, et un étudiant familier de ces idées les étendra sans peine à des dimensions supérieures et à des sytèmes plus abstraits." *(Chapitre 2 : The geometry of vectors in the plane)* "Beaucoup des théorèmes familiers de la géométrie du plan apparaissent sous un nouvel angle quand nous les reformulons dans le langage des vecteurs. Ceci est particulièrement vrai pour les théorèmes qui sont usuellement exprimés dans le langage de la géométrie analytique, parce que la notation vectorielle nous permet d'utiliser un seul symbole pour désigner un couple de nombre qui représente les coordonnées d'un point. Ceci ne nous fournit pas seulement des notations simples pour exprimer des résultats importants, mais permet également de nous concentrer sur les propriétés algébriques des vecteurs." *(Chapitre 4 : Vector geometry in n-space, n≥4)* "Dans les chapitres précédents, nous avons vu comment le langage et les techniques d'algèbre linéaire peuvent unifier de vastes parties de la géométrie à 2 ou 3 dimensions. Ce qui était au départ une alternative pour traiter des problèmes de géométrie analytique est devenu un outil puissant pour étudier des phénomènes de plus en plus complexes, comme les vecteurs propres ou les formes quadratiques, qu'il serait difficile d'approcher autrement. Dans le cas des dimensions supérieures ou égales à 4, l'algèbre linéaire doit être utilisée presque depuis le début pour définir les concepts qui correspondent aux objets géométriques en dimension 2 ou 3. Nous ne pouvons pas visualiser ces phénomènes directement, mais nous pouvons utiliser des intuitions algébriques développées en dimension 2 et 3 pour nous guider dans l'étude d'idées mathématiques qui ne sont pas facilement accessibles."
Adéquation discours-contenu du livre	Adéquation sur : présentation des notions d'algèbre linéaire en dimension 2 ou 3 ; la plupart des notions sont effectivement présentées dans ces dimensions. Décalage sur : emploi de la géométrie usuelle, étude des propriétés algébriques des vecteurs. La "géométrie" qui est employée est en fait l'algèbre linéaire dans $\mathbb{R}^2$ ou $\mathbb{R}^3$. Les aspects analytiques restent prépondérants.

10 C'est nous qui traduisons.

Emploi du vocabulaire géométrique dans les chapitres d'algèbre linéaire

Utilisé en dimension ≤ 3	Utilisé en dimension 4	Utilisé en algèbre linéaire ou bilinéaire générale	Utilisé dans d'autres cadres
Espace, orthogonal, perpendiculaire, projection, longueur, droite, milieu, segment, angle, distance, point, plan, axe, sommet, rectangle, parallélogramme, parallèle, triangle, hauteur, symétrie, rotation, homothétie, parallélépipède, cube, théorème de Pythagore, rayon, cercle, radians, isométrie, carré, pente, courbe, ellipse, conique, hyperbole, volume.	Espace, orthogonal, perpendiculaire, projection, longueur, droite, milieu, segment, angle, distance, point, plan, axe, sommet, rectangle, parallélogramme, parallèle, triangle, hauteur, symétrie, rotation, homothétie, parallélépipède, cube.	Espace, perpendiculaire, projection, longueur	Espace, orthogonal.

2.5.2 Conclusion

Dans ce livre, les auteurs annoncent clairement leur intention d'employer la géométrie pour introduire l'algèbre linéaire. Ils soulignent deux aspects différents du lien algèbre linéaire-géométrie : tout d'abord l'étude des concepts d'algèbre linéaire en dimension 2 ou 3 doit permettre à l'étudiant de devenir familier avec ces concepts, et de les étendre à des dimensions supérieures, en particulier grâce à des "intuitions algébriques". Par ailleurs, l'algèbre linéaire modifie la géométrie en permettant une approche synthétique, ainsi que l'étude de phénomènes complexes. L'analyse du contenu du livre montre en effet la présence de modèles géométriques : de nombreux termes géométriques sont utilisés, ainsi que de nombreux dessins.

La géométrie qui est employée est une géométrie déjà modifiée par l'algèbre linéaire. Il s'agit en effet essentiellement de l'étude de $\mathbb{R}^2$ou $\mathbb{R}^3$euclidiens. La plupart des notions d'algèbre linéaire sont ainsi présentées dans $\mathbb{R}^2$ ou $\mathbb{R}^3$, à l'exception toutefois des notions d'espace vectoriel, sous-espace et famille génératrice. La même approche est ensuite prolongée pour n

≥ 4, en fait presque uniquement dans $\mathbb{R}^4$. Comme le montre l'étude du vocabulaire, l'essentiel des interventions de la géométrie se situe dans ces chapitres.

Lorsque l'on passe à l'étude des espaces vectoriels généraux (chapitre 5), l'aspect géométrique disparaît totalement : pas d'exercices liés à la géométrie, et le seul terme "géométrique" qui intervient est "espace", qui est effectivement incontournable. Ceci n'est pas surprenant, d'une part parce qu'une partie des notions fondamentales n'avait pas été abordée en dimension ≤ 3, mais surtout parce que les chapitres 2 à 4 portent essentiellement sur des notions euclidiennes. Ainsi les notions de projection et de symétrie ne sont vues que sous l'aspect : projection et symétrie orthogonale.

Dans le chapitre 6, qui porte sur les espaces euclidiens généraux, on retrouve l'intervention de la géométrie, dans le vocabulaire comme dans les exercices.

Ces deux chapitres (5 et 6) sont en fait extrêmement courts : ils représentent à peine un dixième de l'ensemble du livre.

Il semble en fait que l'idée de généralisation annoncée en introduction se concrétise essentiellement dans l'étude de $\mathbb{R}^4$ euclidien, en s'appuyant sur les modèles successifs de la droite, du plan et de l'espace.

2.6 Schaal

2.6.1 Contenu

Auteur(s)	Hermann Schaal
Titre	Lineare Algebra und Analytische Geometrie
Editeur-Année	Vieweg, Braunschweig 1976
Public	Etudiants découvrant l'algèbre linéaire, et enseignants du secondaire
Organisation du livre	3 chapitres, 12 sous-chapitres (Tome 1 d'une série en comportant trois ; tome 2 : espaces euclidiens et géométrie euclidienne, tome 3 : exercices)
Notions d'algèbre linéaire (a.l.) présentées	E.v., s.e.v., familles libres, génératrices, bases, dimension , applications linéaires, matrices, déterminants, systèmes linéaires, réduction.
Chapitres de géométrie avant l'a.l.	Non.
Vocabulaire géométrique dans les chapitres d'a.l.	6 termes issus de la géométrie ; tous apparaissent dans des exemples, donnés en dimension 2 ou 3.
Lien vectoriel-affine	La géométrie affine constitue le troisième chapitre du livre. Un espace affine est un ensemble dont les éléments sont appelés des points, et qui est associé à un espace vectoriel par l'application qui à un couple de points associe le vecteur correspondant.
Figures	Pas de figures dans les chapitres d'algèbre linéaire. 32 figures dans le chapitre de géométrie affine.

Discours explicite sur le lien algèbre linéaire-géométrie	*(Avant-propos)* "Il semble que ces derniers temps l'accent soit mis de plus en plus fortement sur un point de vue abstrait, et que certaines idées géométriques, essentielles dans les anciens enseignements, occupent une place de plus en plus réduite dans les nouveaux manuels. Pour aller à l'encontre de l'uniformité de ce courant et gagner en généralité, l'auteur s'est efforcé de ne pas présenter uniquement le point de vue structurel moderne avec les espaces vectoriels, les applications linéaires, les matrices et les formes quadratiques sur des corps quelconques, mais également d'utiliser cette théorie pour l'étude de la géométrie, aujourd'hui fréquemment délaissée, il a tenté de redonner une place importante à celle-ci par l'étude des géométries affine, euclidienne et projective. Ce choix comporte des avantages didactiques, car le matériau géométrique "concret" ou intuitif fournit une motivation (motiviert) pour les concepts abstraits, les concepts géométriques acquièrent par la construction structurelle l'exactitude souhaitable, et l'échange entre considérations concrètes et abstraites, comme entre les généralités et les applications, offre la possibilité d'un grand nombre d'exercices intéressants." *(Introduction)* "La deuxième partie du tome I est consacrée à l'étude de la géométrie affine à n dimensions sur un corps, et est fondée sur la théorie des espaces vectoriels développée dans la première partie. D'une part on obtient dorénavant de nombreuses applications dans les cas "intuitifs" n=2, n=3 avec K=ℝ, d'autre part la théorie des espaces vectoriels est maintenant motivée géométriquement." *(Chapitre 3 : géométrie affine)* "La géométrie affine concerne des ensembles de points, qui ne constituent pas eux-mêmes des espace vectoriels, mais qui, de par les couples de points, sont en liaison étroite avec un espace vectoriel de dimension n sur un corps K. Particulièrement pour K=ℝ et n=1, n=2 et n=3 on obtient les propriétés intuitives de la droite affine, du plan et de l'espace affine, qui apparaissent maintenant comme des cas particuliers d'une théorie plus vaste, avec la dimension et le corps voulus. Le développement historique prit le chemin inverse, allant vers l'abstraction depuis des constatations géométrique intuitives ; une compréhension profonde de la motivation et du formalisme de la théorie générale sera donc facilitée par une connaissance exacte de l'espace intuitif."
Adéquation discours-contenu du livre	Discours et contenu en adéquation. La géométrie occupe une part importante (environ la moitié) du livre. L'algèbre linéaire est présentée sous un angle structurel ; elle sert ensuite à fonder la géométrie affine, qui peut apparaître aussi comme une illustration des chapitres théoriques.

Emploi du vocabulaire géométrique dans les chapitres d'algèbre linéaire

Utilisé en dimension ≤3
Bipoints équipollents, translations, théorème de Thalès, plan, projection, segment orienté.

A propos du vocabulaire, notons cette spécificité du vocabulaire allemand de l'algèbre linéaire : la dimension du sous-espace propre associé à une valeur propre λ d'un endomorphisme est appelée "geometrische Vielfachheit", soit littéralement "multiplicité géométrique" de cette valeur propre, tandis que la multiplicité de λ en tant que racine du polynôme caractéristique est désignée comme "algebraische Vielfachheit" (multiplicité algébrique).

2.6.2 Conclusion

Le contenu de ce livre se rapproche de ce que nous avons observé au chapitre précédent lors de la réforme des mathématiques modernes en France. L'algèbre linéaire est présentée de manière structurelle, puis sert à fonder la géométrie. La différence réside essentiellement dans le point de vue exprimé par l'auteur : selon celui-ci, la présentation de la géométrie peut aider l'étudiant à progresser dans la compréhension de la théorie générale. L'auteur envisage donc un système d'échanges entre géométrie et algèbre linéaire, qui se rapproche de ce que nous avons exposé à propos de l'inversion des rôles modèle-original. Ici, la théorie générale est présentée en premier ; mais la géométrie est envisagée comme un modèle paradigmatique, les applications en géométrie aidant d'une part à comprendre la théorie générale, et d'autre part à justifier l'intérêt de celle-ci. Cependant le recours à ce modèle n'est pas explicité, il reste à la charge de l'étudiant.

2.7 Conclusion

Nous avons observé ici plusieurs types de recours à des modèles géométriques. Liret et Martinais en utilisent peu ; toutefois, comme des chapitres de géométrie suivent les chapitres d'algèbre linéaire, le point de vue qu'ils adoptent n'est pas très différent de celui de Schaal. Même s'ils n'expriment pas explicitement l'idée selon laquelle les applications à la géométrie pourront aider à la compréhension de la théorie générale, cet effet pourra peut-être se ressentir chez les étudiants. Pham et Dillinger soulignent l'importance du recours à un modèle figuratif en dimension 2, voire 3. Cependant, ils excluent l'intervention de celui-ci en dimensions supérieures, et parlent d'un « saut dans l'abstraction ». Ainsi, si le travail effectué en dimension inférieure à trois ménage une progression, on observe dans ce livre une rupture entre deux niveaux de conceptualisation. Grifone signale lui aussi qu'il considère que la portée du modèle géométrique qu'il emploie est limitée, en termes de dimension en particulier. Toutefois, on observe dans son livre un emploi métaphorique des dessins et du vocabulaire qui montre que le modèle géométrique est utilisé au-delà de la dimension 3. La rupture est moins nette que dans le livre de Pham et Dillinger. De même Banchoff et Wermer ménagent une progression, en présentant l'algèbre linéaire en dimension 1, 2, 3, puis 4 avant de passer à une dimension finie quelconque. Ceci leur permet de présenter de nombreuses notions et propriétés d'algèbre linéaire sans entrer directement dans la théorie générale. Ce choix va dans le sens des possibilités que nous avons envisagées dans la partie précédente, en étudiant des propriétés qui pouvaient être abordées en dimension ≤ 3. Mais dans le livre de Banchoff et Wermer, la continuité dans le passage d'une dimension à l'autre repose essentiellement sur un aspect analytique. D'autre part, il subsiste une rupture importante au moment du passage à une dimension finie quelconque. Il semblerait dans ce livre que les dimensions 1, 2, 3 et 4 forment un même niveau de conceptualisation, ou du moins des niveaux proches, et que la dimension finie quelconque forme un autre niveau, en rupture avec ce qui précède. Donc si les intentions des auteurs vont dans le sens de ce que nous avons commencé à envisager à la partie précédente, le contenu effectif du livre demanderait au moins des adaptations importantes, pour dépasser le simple aspect analytique, et atténuer autant que possible la rupture que nous avons soulignée.

D'autre part, en ce qui concerne les livres français, nous avons pu constater que, quel que soit le point de vue adopté, très peu de liens sont faits avec ce qui est vu au lycée. Les quatre ouvrages que nous avons examinés ne comportent que peu d'exercices menant à des types de tâches liés à la géométrie du lycée. Nous n'avons observé aucune mention explicite allant dans le sens d'un lien, rappelant, par exemple, des propriétés qui ont été vues dans le secondaire, ou présentant une propriété nouvelle comme un élargissement de quelque chose de connu. Même les livres qui tentent de ménager une progression, dans laquelle la géométrie apparaît comme importante, ne semblent pas tenter de mettre à profit la géométrie du lycée.

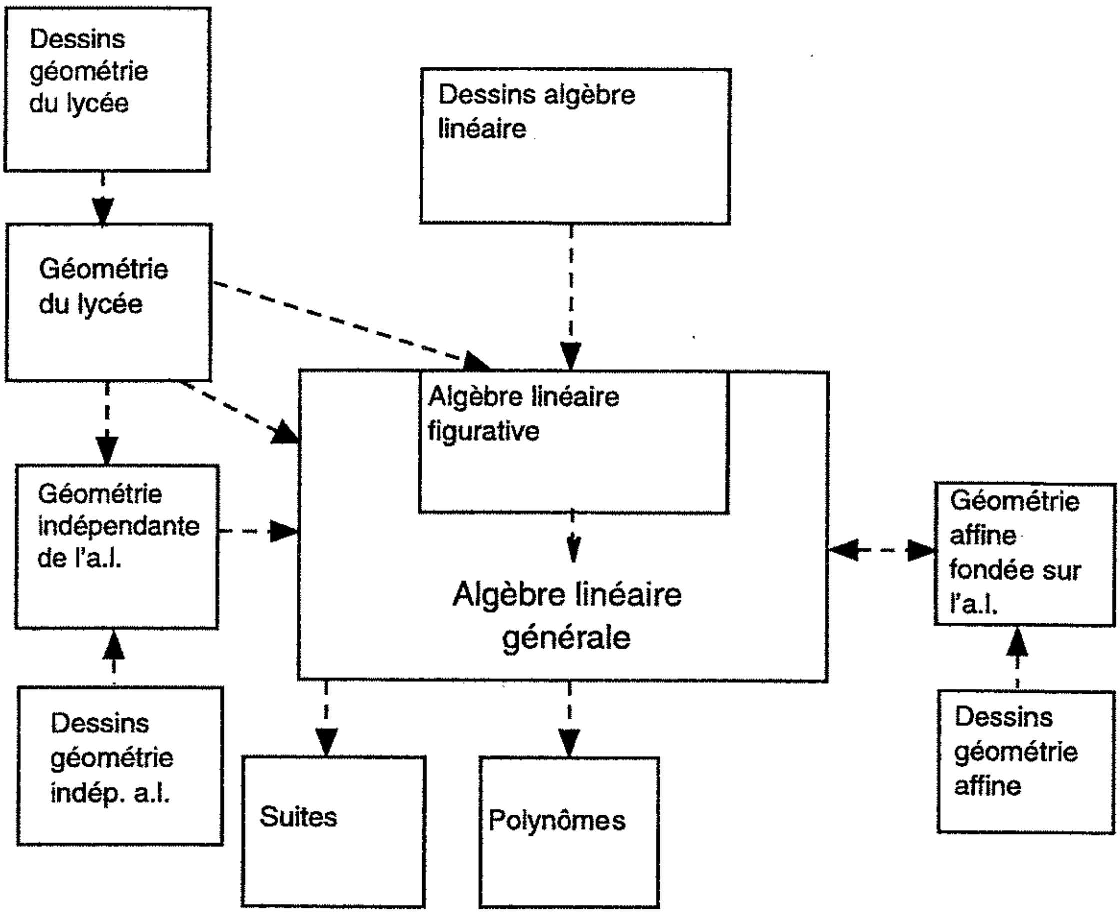
CHAPITRE 5

CHOIX DES ENSEIGNANTS ET PRATIQUES DES ETUDIANTS

Nous allons maintenant présenter la partie expérimentale de notre travail. Celle-ci relève plus du diagnostic que de l'expérimentation. En effet, nous souhaitions interroger d'une part les enseignants, et d'autre part des étudiants ayant un recul suffisant sur le rôle éventuel de la géométrie en algèbre linéaire, c'est à dire, selon nous, des étudiants titulaires d'une licence de mathématiques. Tenter un enseignement expérimental avec de tels étudiants était prématuré ; en effet, un enseignement de ce type doit être fondé sur une étude préalable, comme celle que nous présentons ici. Nous reviendrons plus loin sur cet aspect, ainsi que sur les tentatives envisageables en DEUG.

Les études que nous avons menées dans les chapitres précédents avaient notamment pour objectif de nous fournir un support pour l'élaboration de questionnaires, que ceux-ci soient destinés aux enseignants ou aux étudiants. Ainsi l'étude des choix de transposition nous a en particulier permis de dégager plusieurs possibilités quant à l'articulation entre algèbre linéaire et géométrie dans un cours d'algèbre linéaire. De même les analyses de manuels universitaires récents nous ont permis de mettre en évidence différentes possibilités de recours à des modèles géométriques. Nous avons par ailleurs décrit des liens possibles entre algèbre linéaire et géométrie du lycée grâce à notre étude de l'évolution de notions rencontrées en géométrie au lycée. De tels liens peuvent être délibérément soulignés par les enseignants dans leurs cours. Mais il est également possible que des connaissances de lycée interfèrent avec celles d'algèbre linéaire chez certains étudiants, indépendamment des choix effectués par l'enseignant.

Nous nous sommes donc appuyée pour l'élaboration des questionnaires sur les observations effectuées dans les chapitres 3 et 4. Nous avons également employé la structure issue des travaux de Fischbein, que nous avons présentée au premier chapitre, et que nous rappelons ici :



Cette structure permet selon nous, d'examiner et de décrire les principales interventions possibles de modèles géométriques ou figuratifs en algèbre linéaire et bilinéaire. Elle fait apparaître notamment les aspects mentionnés ci-dessus : articulation algèbre linéaire-géométrie dans un cours d'algèbre linéaire, et liens avec la géométrie du lycée. Elle permet également d'aborder la question des dessins employés par les enseignants et les étudiants, ainsi que celle du recours à des concepts figuratifs d'algèbre linéaire. Nous fairons appel à *(S)* tant dans l'élaboration que dans l'analyse des questionnaires.

1. Questionnaire aux enseignants

1.1 Présentation du questionnaire

1.1.1 Introduction

Le questionnaire destiné aux enseignants doit nous fournir des renseignements sur les deux axes suivants :

- Rôle du géométrique dans le cours proposé par ces enseignants. Nous avons vu au chapitre précédent divers recours à des modèles géométriques, dans des manuels récents destinés à l'enseignement supérieur. Nous avons également observé à cette occasion l'absence de liens, dans ces manuels, avec la géométrie vue au lycée. Nous chercherons donc à déterminer si ces mêmes caractéristiques se retrouvent dans les cours faits par les enseignants intervenant en algèbre linéaire en DEUG.
- Attentes quant au recours au géométrique fait par les étudiants.

Nous détaillons ci-dessous chacun des deux aspects.

1.1.1.1 Eléments d'analyse des choix et attentes des enseignants

Pour analyser les choix faits par les enseignants dans leur cours d'algèbre linéaire ou bilinéaire, nous faisons référence à la structure *(S)* rappelée ci-dessus.

Utilisation des connaissances de géométrie des étudiants issus de l'enseignement secondaire

L'enseignant considère-t-il que les étudiants de DEUG disposent de connaissances de géométrie utilisables dans le cours d'algèbre linéaire ?

Si c'est le cas, quelles sont ces connaissances, et l'enseignant les utilise-t-il effectivement dans son cours, et dans quel objectif ? Ceci revient à préciser le lien éventuel entre l'élément noté « géométrie du lycée » et les autres. Certaines notions et propriétés, vues en géométrie au lycée sont-elles utilisées comme modèle analogique ? Servent-elles alors à introduire des notions d'algèbre linéaire figurative, ou d'algèbre linéaire générale ? Il est également possible que les notions d'algèbre linéaire soient présentées d'abord, et que le lien avec ce qui a été vu au lycée soit souligné ensuite.

Choix de l'articulation algèbre linéaire - géométrie affine

Indépendamment des contraintes du programme en vigueur, l'enseignant considère-t-il que la géométrie étant une simple application de l'algèbre linéaire, elle doit être présentée après celle-ci, ou plutôt qu'il faut s'appuyer sur une géométrie indépendante de l'algèbre linéaire pour dégager progressivement les structures ?

Il s'agit là évidemment d'attitudes très extrêmes, et nous pouvons nous attendre à rencontrer des points de vue plus nuancés ; il faudra alors noter par exemple quelles propriétés géométriques sont jugées comme antérieures à l'algèbre linéaire. Ceci correspond, dans *(S)*, à préciser le contenu des cadres « géométrie affine indépendante de l'algèbre linéaire », et « géométrie affine fondée sur l'algèbre linéaire ».

Emploi de modèles géométriques, et de « l'algèbre linéaire figurative »

Nous considérons ici tous les modèles intervenant dans *(S)* et qui sont directement associés à un modèle figuratif : l'algèbre linéaire figurative, les deux types de géométries affines, et la géométrie vue au lycée. Nous tenterons de préciser le contenu de chacun de ces modèles, mais également le rôle joué par celui-ci. Nous avons dit au premier chapitre que l'algèbre linéaire figurative était un modèle paradigmatique (sous-classe de l'original, choisie comme représentative), tandis que la géométrie affine, indépendante de l'algèbre linéaire, est un modèle analogique (modèle indépendant de l'original). Cependant chacun de ces deux modèles peut à sa façon servir de support à l'introduction de nouvelles notions et propriétés, ou fournir des illustrations de celles-ci.

Changements de cadres et de registres

Nous avons rappelé dans notre premier chapitre des travaux de didactique montrant l'importance pour l'apprentissage des changements de cadre et de registre. Robert (1998) écrit à ce propos :

"Que ce soit pour une prise de sens initiale ou en cours d'apprentissage, réussir à organiser des passages entre un cadre connu et un cadre moins bien maîtrisé nous semble fondamental... Quant au travail sur les changements de registres, il amène à rendre explicites et à surmonter des difficultés de traduction entre différentes écritures qui sont souvent ignorées des enseignants et qui sont néanmoins indispensables à la compréhension des notions et à la résolution des problèmes."(Robert 1998)

Dans la structure *(S)*, chacun des modèles intramathématiques – c'est à dire tous ceux qui ne sont pas constitués de dessins – constitue un cadre. C'est donc le recours à ces modèles qui constituera un changement de cadre dans le cours proposé.

En ce qui concerne les registres, nous en distinguerons trois, en nous appuyant sur les travaux de Pavlopoulou (1994) : le registre de l'écriture symbolique, le registre des tableaux et le registre graphique. Nous nous pencherons plus particulièrement sur l'emploi de ce dernier registre, c'est à dire, dans *(S)*, sur l'emploi de modèles figuratifs.

Dessin, figure géométrique et algèbre linéaire

Dans un cours d'algèbre linéaire, les dessins peuvent être utilisés de manières très diverses, comme nous l'avons déjà noté lors de l'analyse des manuels (chapitres 3 et 4).

Nous avons évoqué ci-dessus le recours au registre graphique en algèbre linéaire, que nous formulons en termes d'emploi d'un modèle figuratif. Nous chercherons à préciser le contenu d'un tel modèle, mais également le rôle de celui-ci. Pour cela, nous nous appuierons sur les travaux de Fischbein à propos des concepts figuratifs, ainsi que sur les travaux de Laborde et Capponi (1994).

Rappelons que Laborde et Capponi interprètent la distinction entre dessin, figure géométrique et objet géométrique en termes de signifiant, référent et signifié :

"En tant qu'entité matérielle sur un support, le dessin peut être considéré comme un signifiant d'un référent théorique (objet d'une théorie géométrique comme celle de la géométrie euclidienne, ou de la géométrie projective)...les rapports entre un dessin et son référent construits par un sujet, lecteur ou producteur du dessin, constituent le signifié de la figure géométrique associé pour ce sujet." (Laborde et Capponi 1994 p.168)

Si l'enseignant utilise des dessins dans son cours d'algèbre linéaire, nous chercherons donc à savoir à quels référents théoriques il associe ces derniers, conduisant à quel signifié pour la figure géométrique. Notons que nous élargirons les propos de Laborde et Capponi, et la notion de concept figuratif, aux cas où le référent théorique n'est plus un objet géométrique mais un concept abstrait d'algèbre linéaire, voire un concept mettant en jeu des éléments d'un espace vectoriel lié à d'autres domaines des mathématiques : espaces de fonctions en particulier.

Les différents éléments que nous avons décrits ci-dessus doivent nous permettre de préciser l'emploi fait par les enseignants du « géométrique » dans leur cours. Nous cherchons par ailleurs à déterminer ce que les enseignants attendent des étudiants sur certains des points que nous avons mentionnés : recours à des modèles géométriques, changements de cadre et de registres, emploi de dessins. En particulier, quel peut être le rôle des modèles géométriques, et des dessins, dans la résolution d'exercices ? Les enseignants encouragent-ils l'emploi du registre graphique, souhaitent-ils au contraire que les étudiants l'évitent, ou émettent-ils du moins des réserves quant à cet emploi ? Il est possible que certains enseignants utilisent fréquemment des modèles géométriques, et des dessins, dans leur cours, mais considèrent que ceux-ci ne doivent pas intervenir dans la résolution d'exercices.

1.1.1.2 Comment accéder aux pratiques réelles des enseignants ?

Comme le lecteur peut le constater dans ce qui précède, de nombreux critères sont pertinents et nécessaires pour l'analyse du rapport algèbre linéaire-géométrie dans la pratique des enseignants ; cependant, nous sommes contraints de limiter la longueur de notre questionnaire pour ne pas décourager les enseignants d'y répondre.

D'autre part nous devons éviter les questions trop directes ou trop générales du type : *Quel emploi faites-vous de la géométrie dans votre cours d'algèbre linéaire ? Comment utilisez-vous les dessins ?* En effet, il est établi qu'un enseignant, même s'il souhaite répondre le plus honnêtement possible à de telles questions, aura de grandes difficultés à le faire.

Nous avons donc choisi de faire figurer dans le questionnaire des tâches permettant au lecteur de retrouver un contexte très proche d'une situation d'enseignement réelle.

Nous proposons en début de questionnaire des exercices classiques, accompagnés de solutions présentées comme venant d'étudiants ou d'enseignants ; ceci pour permettre à la personne interrogée de se situer aussitôt dans un contexte concret et familier.

Dans la suite, nous mentionnons des tâches et des propriétés précises ; le choix de celles-ci a été guidé par les remarques faites au chapitre précédent.

Nous avons en effet retenu des propriétés portant sur des notions manipulées dès le secondaire dans le cours de géométrie, mais qui sont présentes tout au long du cursus universitaire. Le questionnaire n'a pas été élaboré dans l'objectif d'une étude statistique, mais plutôt en vue d'une observation fine des pratiques des enseignants.

Les enseignants auxquels nous l'avons soumis disposaient pour le remplir du temps qui leur semblait nécessaire, et ce en dehors de notre présence.

1.1.2 Analyse a priori du questionnaire

Le questionnaire soumis aux enseignants comporte trois parties. La première porte sur les exercices : choix d'un corrigé à proposer à des étudiants, et appréciations sur une réponse faite par un étudiant. La seconde partie porte sur deux aspects de l'emploi de la géométrie dans les cours d'algèbre linéaire ou bilinéaire : lien avec la géométrie vue au lycée, et articulation avec la géométrie affine. Dans la troisième partie, nous interrogeons les enseignants sur l'usage qu'ils font des dessins.

Le texte complet du questionnaire est donné en annexe 2 ; nous rappelons ci-dessous le texte de chaque question avant l'analyse correspondante.

1.1.2.1 Partie I : Usage(s) de la géométrie dans un exercice d'algèbre linéaire ou bilinéaire

Notre objectif dans cette partie est de tester l'usage possible du dessin et de l'intuition géométrique dans un exercice d'algèbre linéaire ou bilinéaire, usage fait par l'enseignant, ou attendu des étudiants.

Question I 1) - Enoncé

L'exercice suivant est fréquemment posé à des étudiants de fin de deuxième année.

Soit E un espace euclidien, et p un projecteur de E.

Montrer que p est un projecteur orthogonal si et seulement si, pour tout x élément de E, $\|x\| \geq \|p(x)\|$.

La partie p orthogonal implique $\|x\| \geq \|p(x)\|$ est immédiate ; pour la réciproque, un enseignant peut notamment proposer à ses étudiants l'une des deux solutions suivantes, consistant à montrer que si p n'est pas orthogonal, il existe x appartenant à E et vérifiant : $\|p(x)\| > \|x\|$.

<u>Solution 1 :</u>

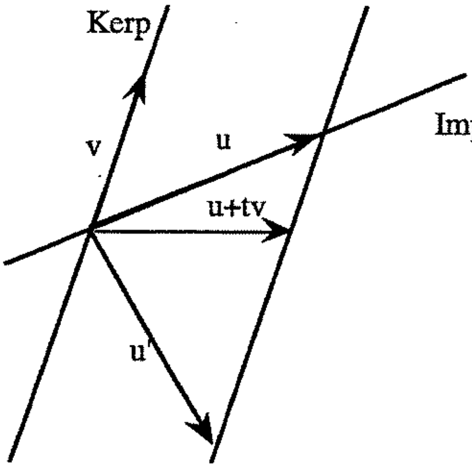
D'après l'hypothèse p non orthogonal, il existe u appartenant à Imp et v appartenant à Ker$p$ tels que $\langle u|v\rangle \neq 0$.

Cherchons x sous la forme $u+tv$; en effet, un tel vecteur vérifie $p(x)=u$, et il suffit donc de montrer qu'il existe des valeurs de t telles que $\|u\|>\|u+tv\|$.

On a : $<u+tv|u+tv>=||u||^2 + 2t<u|v> + t^2||v||^2$.

Supposons $<u|v> >0$, alors, si $t<0$ et $2<u|v> + t||v||^2>0$, c'est à dire pour t tel que :

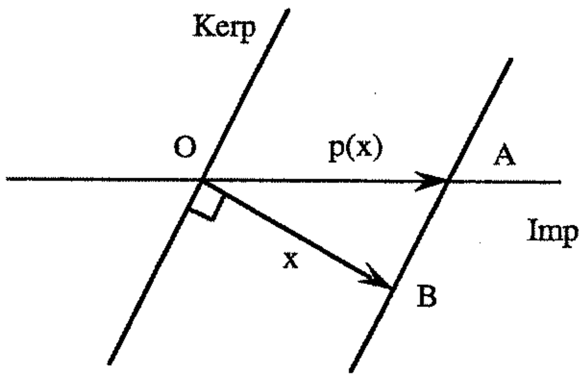
$0>t>-2\dfrac{<u|v>}{||v||^2}$, le vecteur $x=u+tv$ vérifie bien $||p(x)|| > ||x||$ (un argument semblable montre l'existence de x dans le cas $<u|v><0$).



Interprétation géométrique :

Tous les vecteurs u+tv se projettent en u.
Or ceux situés entre u et u' sont de norme strictement inférieure à la norme de u.

Solution 2 :



Soit x appartenant à l'orthogonal de Ker$p$, et n'appartenant pas à Imp (ceci est possible, puisque p n'est pas un projecteur orthogonal).

Alors le triangle OAB est rectangle, de côté x et d'hypothénuse $p(x)$.

D'après le théorème de Pythagore, on a donc $||p(x)|| > ||x||$.

a) Lequel de ces deux corrigés préfèreriez-vous proposer à des étudiants de deuxième année et pourquoi ?

b) Que pensez-vous de l'usage du dessin dans chaque solution ?

Question I 1) - Analyse

Comme nous l'avons signalé ci-dessus, nous avons choisi de débuter le questionnaire par des exercices, afin de permettre aux enseignants de se situer dans un contexte proche d'une situation d'enseignement. De plus, le premier exercice que nous leur soumettons est un exercice de seconde année de DEUG qui nécessite une vraie réflexion, ceci afin que la personne interrogée soit conduite à accorder au questionnaire une attention suffisante et ne puisse se contenter d'une réponse conventionnelle.

Nous avons choisi de soumettre aux enseignants deux solutions possibles pour cet exercice, faisant un usage complètement différent du dessin et du modèle géométrique.

Afin que leurs commentaires ne portent que sur ces questions, nous devions proposer des résolutions entièrement rigoureuses ; il ne s'agissait donc pas de réponses d'étudiants, mais de corrigés proposés par des enseignants : en particulier la solution 2 a été extraite textuellement d'un manuel destiné aux étudiants de deuxième année et de mathématiques spéciales (Précis, Vuibert).

(Cet exercice n'est pas pour les étudiants un exercice facile ; en particulier il repose sur une démonstration d'existence, ce qui leur pose toujours problème).

Les deux solutions sont concises, et peuvent être considérées comme "élégantes".

Solution 1

Il s'agit visiblement d'une solution reconstruite : on présente ici synthétiquement les résultats obtenus par un raisonnement analytique.

L'hypothèse "p non orthogonal" a été traduite par "il existe u dans Imp et v dans Ker$p$ qui ne sont pas orthogonaux", traduction sans doute la plus familière aux étudiants lorsqu'il s'agit d'utiliser en exercice le fait que deux sous-espaces vectoriels ne sont pas orthogonaux.

Ceci conduit naturellement à chercher le vecteur x sous la forme $u+tv$, afin d'utiliser les deux vecteurs nommés plus haut, et parce que l'on sait qu'un tel vecteur se projette toujours en u, quel que soit t. La difficulté est alors de trouver le coefficient t adapté.

A cet endroit de la réflexion, on peut supposer que l'auteur du corrigé s'est aidé d'un dessin, ou au moins d'une image mentale, qui lui a permis de rechercher un coefficient t tel que $u+tv$ soit orthogonal à v. Mais il est également possible qu'il se soit contenté du calcul du carré de la norme de $u+tv$: $<u+tv \mid u+tv>=||u||^2+2t<u \mid v>+t^2||v||^2$, donc pour que la norme de $u+tv$ soit inférieure à celle de u, il suffit de choisir t tel que la somme $2t<u \mid v>+t^2||v||^2$ soit négative.

La reconstruction et la présentation synthétique du corrigé ne permettent pas de connaître la méthode employée ; mais la présence du dessin suggère qu'il s'agit de la première.

Le dessin, donné ici à titre d'illustration, peut être supprimé sans conséquences majeures pour le corrigé. Il s'agit d'un dessin représentant une situation dans un espace quelconque, mais limitée à la dimension 2, dans le plan engendré par u et v.

Solution 2

Le dessin précède la solution. Il s'agit d'un dessin métaphorique, sur lequel Ker$p$ et Imp sont représentés par des droites figurant un sous-espace vectoriel de dimension quelconque, dans un espace euclidien général.

Le dessin renvoie à une situation géométrique familière : le triangle rectangle, et suggère l'emploi du théorème de Pythagore.

La solution proposée a visiblement été guidée par le dessin, qui a conduit en particulier à traduire l'hypothèse "p non orthogonal" par "il existe x appartenant à l'orthogonal de Ker$p$ et pas à Imp" ; elle emploie des termes très géométriques : "triangle", "hypothénuse" que l'on ne rencontre pas habituellement dans les manuels d'algèbre linéaire.

Si l'on supprime le dessin associé, la référence au triangle OAB est incompréhensible, et la qualification de $p(x)$ comme hypothénuse d'un triangle semble dénuée de sens ; donc le dessin fait partie intégrante de la preuve pour laquelle il joue un rôle essentiel.

Il faut souligner ici que les questions posées : *Ces corrigés sont-ils acceptables ?* et *Que pensez-vous de l'usage du dessin ?* sont présentées comme portant sur des résolutions dont la fonction est d'être proposées comme corrigés. Il ne s'agit donc pas de faire réagir les enseignants-chercheurs sur leurs pratiques en tant que mathématiciens, mais en tant qu'enseignants, sur ce qu'ils souhaitent proposer comme corrigé à leurs étudiants.

Un enseignant peut reprocher à la solution 2 de trop reposer sur le dessin, et d'utiliser des termes trop géométriques dans un contexte théorique. Il peut également considérer que cette solution, qui se déroule dans un cadre de géométrie affine, ne convient pas pour un problème d'algèbre bilinéaire générale. Il peut au contraire apprécier le côté synthétique de la solution, et l'appui de la géométrie.

Pour la solution 1, un enseignant peut regretter la présentation synthétique qui gomme la démarche de recherche, et considérer que le dessin n'ajoute rien au corrigé ; il peut au contraire trouver la présentation élégante, d'autant plus qu'elle est enrichie par l'interprétation géométrique, et apprécier la donnée d'un exemple explicite de vecteur vérifiant la propriété voulue, résultat d'un calcul.

Question I 2) – Enoncé

L'exercice suivant est fréquemment posé en première année d'université.

Si les vecteurs x, y, z sont deux à deux non colinéaires, peut-on affirmer que la famille $\{x, y, z\}$ est libre ?

a) Cet exercice est posé lors d'une séance de travaux dirigés.

Un étudiant vous appelle, et vous dit qu'il est persuadé que la réponse est affirmative, mais qu'il ne parvient pas à le démontrer.

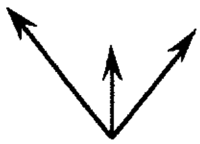
- Que lui dites-vous (précisément) pour l'aider à poursuivre ?

- Expliquez les raisons de votre choix pour l'aide ci-dessus :

b) Le même exercice est posé dans un contrôle. Sur sa copie, l'étudiant a écrit :

"Non. Les vecteurs dessinés ci-dessous donnent un contre-exemple."

et il a dessiné :



- Quelle note lui mettez-vous, sur cinq points ?

- Quelles remarques écrivez-vous sur la copie ?

-Expliquez ici la note choisie et les remarques mentionnées ci-dessus :

Question I 2) – Analyse

Il s'agit d'un exercice très classique au début du cours d'algèbre linéaire, et qui a déjà été utilisé dans des travaux de didactique examinant les dysfonctionnements dans l'utilisation de la définition formelle d'indépendance linéaire (Robert et Robinet 1989, Dorier 1990). Ces travaux ont permis d'observer que cet exercice pose problème à une majorité d'étudiants ; en effet, beaucoup d'entre eux pensent que la réponse est affirmative ; ils ne prennent pas d'exemples, et se lancent dans une démonstration formelle reposant sur la définition de famille libre. Ils peuvent ensuite ne pas aboutir, ou penser qu'ils ont abouti en fournissant une démonstration formelle fausse ; néanmoins si on leur demande d'illustrer la proposition en géométrie, ils produisent en général rapidement un contre-exemple qui les convainc que la conjecture est fausse mais qui ne leur permet toutefois pas de comprendre la faille dans leur éventuelle démonstration.

Notre intention est ici d'observer comment l'enseignant va se placer par rapport aux deux approches possibles : recherche d'une démonstration, ou recherche d'exemples, en particulier géométriques.

a) Comment aider en travaux dirigés un étudiant qui pense que la réponse est affirmative ?

Nous voulons observer si l'enseignant va rester dans l'idée d'une démonstration, ou suggérer à l'étudiant d'utiliser des exemples, en particulier géométriques, c'est à dire dans ce dernier cas inciter l'étudiant à utiliser un changement de cadre. Nous noterons d'autre part si l'enseignant propose l'utilisation d'un dessin, et a donc recours au registre graphique.

Nous demandons de plus à l'enseignant d'expliquer le conseil qu'il aura pu donner, afin d'éclairer sa réponse à la première question, et son point de vue sur l'activité de l'étudiant : ainsi un conseil du type "prenez des exemples" peut correspondre à l'idée que les exemples se présentant naturellement sont géométriques, et conduiront immédiatement à un contre-exemple.

b) Jusqu'où l'usage du dessin est-il acceptable ?

Nous soumettons ici aux enseignants une solution proposée par un étudiant, et reposant entièrement sur un dessin de nature métaphorique.

L'étudiant a représenté trois vecteurs sans aucune légende ; sur le dessin on peut supposer que les vecteurs sont coplanaires (condition indispensable pour qu'ils constituent un contre-exemple) mais rien ne permet de l'affirmer.

Notre objectif est ici d'observer comment se comporte l'enseignant face à l'implicite lié au dessin.

Nous demandons à l'enseignant de noter la réponse de l'étudiant. Le choix de note pouvant dépendre de nombreux facteurs extérieurs à notre problématique, nous retiendrons essentiellement pour notre analyse les remarques mentionnées et l'explication du choix de note.

Un enseignant peut considérer qu'au vu de la réponse, il n'est pas clair que l'étudiant a compris ; à l'opposé, il peut trouver cette réponse tout à fait correcte et acceptable.

Nous nous pencherons plus particulièrement sur des attitudes intermédiaires, où l'enseignant considère que l'étudiant a compris, mais juge sa réponse insuffisante.

L'explication donnée par l'enseignant devrait alors nous permettre de déterminer si l'enseignant critique l'implicite lié au dessin, et serait prêt à accepter comme réponse un autre dessin, moins ambigu, ou s'il estime nécessaire une explication accompagnant le dessin, ou encore s'il exige une démonstration.

1.1.1.2 Partie II : Usage(s) de la géométrie dans le cours d'algèbre linéaire

Questions II 1 a) et b) – Enoncés

Utilisation de la "géométrie du lycée" en algèbre linéaire ou bilinéaire : exemple des notions de base et de projection

a) Les bases

Au lycée, les élèves rencontrent les termes de "base" et "base orthogonale" dans le cadre du cours de géométrie du plan et de l'espace (pour la filière S).

Indiquez, en cochant la case correspondante, si vous êtes d'accord avec l'affirmation suivante :

Certaines connaissances, propriétés, pratiques, savoirs-faire... rencontrés au lycée à propos des bases et des bases orthogonales peuvent être utilisés en DEUG dans le cours d'algèbre linéaire ou bilinéaire. *oui* ☐ *non* ☐

Si vous avez répondu non, explicitez ci-dessous votre point de vue.

Si vous avez répondu oui, citez ci-dessous certaines des connaissances, propriétés, pratiques, savoirs-faire relatifs aux bases et vus au lycée qui vous semblent pouvoir être utilisés en DEUG dans le cours d'algèbre linéaire ou bilinéaire, en expliquant comment et dans quels contextes.

b) Les projections

Au lycée, les élèves rencontrent les termes de "projection" et "projection orthogonale" dans le cadre du cours de géométrie du plan et de l'espace (pour la filière S).

Indiquez, en cochant la case correspondante, si vous êtes d'accord avec l'affirmation suivante :

Certaines connaissances, propriétés, pratiques, savoirs-faire... rencontrés au lycée à propos des projections et des projections orthogonales peuvent être utilisés en DEUG dans le cours d'algèbre linéaire ou bilinéaire. *oui* ☐ *non* ☐

Si vous avez répondu non, explicitez ci-dessous votre point de vue.

Si vous avez répondu oui, citez ci-dessous certaines des connaissances, propriétés, pratiques, savoirs-faire relatifs aux projections et vus au lycée qui vous semblent pouvoir être utilisés en DEUG dans le cours d'algèbre linéaire ou bilinéaire, en expliquant comment et dans quels contextes.

Questions II 1 a) et b) – Analyse

L'étude faite au chapitre précédent nous a montré que certaines notions de géométrie connues dès l'enseignement secondaire se retrouvaient jusqu'au niveau de la maîtrise. Mais l'enseignement reçu à l'université modifie à chaque nouvelle étude de la notion les propriétés attachées à celle-ci : de nouvelles propriétés apparaissent, soit comme généralisations de propriétés connues dans le secondaire, soit entièrement nouvelles ; d'anciennes propriétés deviennent inefficaces, conduisant les étudiants à remettre en cause leurs conceptions antérieures.

Parmi les notions dont nous avons étudié l'évolution, nous avons retenu pour le questionnaire celles de base et de projection : ce sont des notions riches, qui apparaissent aussi bien en algèbre linéaire qu'en algèbre bilinéaire ou en analyse fonctionnelle ; nous avons notamment rappelé dans le chapitre IV l'importance de la projection orthogonale dans l'étude des espaces de Hilbert, et celle de la notion de base Hilbertienne.

Ces notions sont utilisées dès le lycée, et associées à de nombreuses propriétés tout au long du cursus universitaire.

L'objectif de cette question est de déterminer si les enseignants utilisent, dans leur cours d'algèbre linéaire et bilinéaire (première et deuxième année de DEUG) certaines des propriétés qui sont, ou qu'ils pensent être rencontrées au lycée dans le cours de géométrie. Nous avons signalé, dans le chapitre précédent, des liens possibles avec la géométrie vue au lycée ; nous chercherons à savoir ici si les enseignants que nous interrogeons soulignent certains de ces liens.

Question 1) a) : A propos des bases

Cas d'une réponse négative :

- Un enseignant peut répondre non à cette question parce qu'il estime ne pas avoir une connaissance suffisante des programmes du secondaire.
- Un enseignant peut répondre non à cette question, alors qu'il connaît les programmes du secondaire, soit parce qu'il considère qu'effectivement rien de ce qui est vu ne peut servir dans un enseignement d'algèbre linéaire ou bilinéaire, soit parce qu'il préfère ne pas utiliser ce qui pourrait servir, estimant que ces connaissances sont mal maîtrisées et risquent d'être mal employées par les étudiants.

Cas d'une réponse positive :

Dans le cas où l'enseignant répond oui, nous examinerons quelles sont les connaissances qu'il cite ; d'après ce que nous avons noté dans le chapitre III, il est possible de rencontrer les connaissances suivantes :

- Décomposition d'un vecteur sur une base, coordonnées : la décomposition existe et est unique ;
- Coordonnées d'un vecteur dans une base orthonormale : ce sont les produits scalaires avec les vecteurs de base ;
- Vecteurs colinéaires, vecteurs coplanaires ;
- Vecteur directeur d'une droite, couple de vecteurs directeur d'un plan ;
- Dimension ;
- Expression du produit scalaire et de la norme dans une base orthonormale.

Les enseignants peuvent également mentionner l'emploi de figures connues, comme le dessin habituellement associé à une base, ou une base orthonormale de l'espace.

Nous noterons en particulier si les enseignants mentionnent plus de connaissances liées aux bases, ou aux bases orthonormales.

Quant à l'emploi fait de ces connaissances, nous distinguerons essentiellement deux

cas :

- Connaissance employée en début de cours, comme point de départ d'une généralisation ;
- Connaissance employée comme exemple, après l'introduction d'une notion ou propriété générale.

Question 1) b) : A propos des projections

L'analyse de cette question est la même que celle de la précédente, portant sur les bases, sauf en ce qui concerne le cas d'une réponse positive.

<u>Cas d'une réponse positive :</u>

Dans le cas où l'enseignant répond oui, nous examinerons quelles sont les connaissances qu'il cite ; d'après ce que nous avons noté dans le chapitre précédent, il est possible de rencontrer les connaissances suivantes :

- La projection n'est pas une bijection ;
- La projection conserve les relations de colinéarité ;
- Le lien entre distance et projection orthogonale ;

- Les coordonnées du projeté d'un vecteur dans une base orthonormale sont les produits scalaires avec les vecteurs de la base

Les enseignants peuvent également mentionner les figures associées habituellement à la projection sur un plan, selon une direction de droite, ou à la projection orthogonale. Nous faisons l'hypothèse que certains citeront également la propriété caractéristique des projections : $pop=p$, bien que cette propriété ne soit pas connue des élèves de lycée.

Question I 2) -Enoncé

Articulation géométrie-algèbre linéaire

a) Le tableau ci-dessous contient une liste de savoirs appartenant au domaine de la géométrie affine ou affine euclidienne en dimension inférieure ou égale à trois.

Pour chacun d'entre eux, indiquez en cochant la case correspondante s'il doit être vu avant le cours d'algèbre linéaire (ou bilinéaire s'il s'agit de géométrie affine euclidienne), être intégré dans ce cours, ou être vu après l'algèbre linéaire ou bilinéaire, indépendemment des contraintes du programme habituel du secondaire et du supérieur (si vous pensez que ce savoir ne doit pas être vu, ne cochez aucune case de la ligne correspondante ; si vous pensez qu'il doit être vu plusieurs fois, cochez autant de cases qu'il est nécessaire) .

	Savoir	Avant l'algèbre linéaire ou bilinéaire	Fait partie de l'algèbre linéaire ou bilinéaire	Après l'algèbre linéaire ou bilinéaire
S1	Trois vecteurs (deux à deux non colinéaires) étant dessinés sur une feuille, écrire l'un d'eux comme combinaison linéaire des deux autres (en donnant des valeurs approchées des coefficients avec une calculatrice).			
S2	Déterminer une équation paramétrique d'un plan donné par un point et deux vecteurs et en déduire une équation cartésienne de ce plan.			
S3	Déterminer si trois vecteurs de l'espace sont coplanaires.			
S4	Déterminer l'expression analytique d'une symétrie du plan par rapport à une droite D_1 parallèlement à une droite D_2.			
S5	Déterminer la composée de deux rotations du plan de centres distincts.			
S6	Déterminer l'équation réduite d'une conique.			

b) Expliciter votre choix concernant au moins deux des item précédents.

Question I 2) - Analyse

Dans cette question, nous proposons aux enseignants des tâches de géométrie affine ; nous leur demandons, indépendamment de toute contrainte de programme de positionner la tâche en question par rapport au cours d'algèbre linéaire ou bilinéaire.

Nous avons choisi des tâches que l'on peut faire dans le cadre géométrique, ou en utilisant les outils de l'algèbre linéaire, afin d'observer les préférences des enseignants, et leur position entre géométrie antérieure à l'algèbre linéaire ou reposant sur celle-ci.

Nous n'avons pas voulu demander aux enseignants d'expliquer chacune de leurs réponses, ce qui serait trop long, pour les six propriétés soumises ; c'est pourquoi nous avons demandé des commentaires sur au moins deux réponses, afin d'accéder à des détails du point de vue des enseignants tout en maintenant un temps de réponse raisonnable.

Bien qu'il s'agisse ici de tâches, ou de types de tâches, nous avons retenu pour les enseignants les termes moins spécialisés de savoirs ou savoir-faire. Nous avons donc désignés ces tâches par S1, S2, S3, S4, S5, et S6 dans l'ordre du questionnaire.

La tâche S1 peut être effectuée, dans l'enseignement actuel, par des élèves de seconde, sans que le terme combinaison linéaire soit employé. On peut considérer qu'il s'agit déjà d'algèbre linéaire ; on peut noter que cette tâche est proposée en introduction au cours d'algèbre linéaire dans le livre *Algèbre Linéaire* de Pham (1996).

La tâche S2 ne fait pas partie actuellement du programme du secondaire, où les élèves ne disposent pour déterminer l'équation cartésienne d'un plan que de la méthode utilisant le vecteur normal. Un enseignant peut considérer qu'elle doit faire partie d'un cours de géométrie destiné à introduire l'algèbre linéaire, en abordant notamment le passage paramétrique-cartésien, ou au contraire qu'elle peut constituer une illustration de ce cours, en montrant la puissance des outils linéaires en géométrie.

La tâche S3 est théoriquement accessible à des élèves du secondaire (nous l'avons mentionnée au chapitre précédent à propos du type de tâches T_{libre}) ; dans la pratique, les outils dont ils disposent sont très limités : il leur faudrait considérer des représentants (d'origine O) des vecteurs en question, déterminer l'équation d'un plan passant par O et contenant deux des extrémités, et tester si les coordonnées de la troisième vérifient cette équation. De même que pour la tâche précédente, un enseignant peut donc considérer que cette tâche doit être vue avant l'algèbre linéaire, ou constitue une bonne application de celle-ci, en utilisant par exemple le déterminant.

La tâche S4 n'est pas vue dans le programme actuel du secondaire. Un enseignant peut considérer qu'il s'agit d'un exercice d'application de l'algèbre linéaire et de la notion de matrice, ou d'une introduction à cette même notion.

La tâche S5 fait partie du programme (1998) de la spécialité mathématique en terminale S, elle est faite en utilisant la décomposition des rotations comme produit de réflexions. Mais il est également possible de la considérer comme une application de l'étude de $O_2(\mathbb{R})$, en passant par la rotation vectorielle associée : $O_2^+(\mathbb{R})$ étant un groupe, la composée de deux rotations est une rotation, dont le produit des matrices donne l'angle.

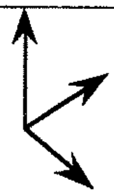
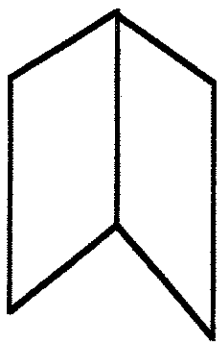
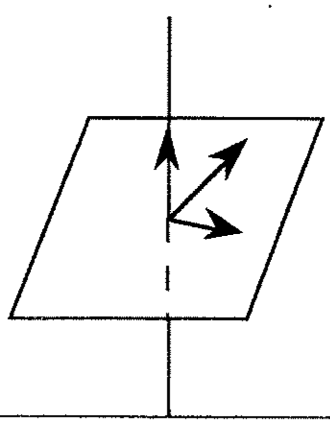
La tâche S6 ne fait pas partie du programme actuel du secondaire ; même lorsque les coniques étaient systématiquement étudiées dans la spécialité mathématique de terminale S, elle ne faisait pas partie des exercices habituellement proposés. Elle est souvent proposée en fin d'étude des espaces euclidiens, en lien avec la classification des formes quadratiques. Dans le cas d'une conique à centre, on diagonalise la matrice de la forme quadratique associée, et on obtient ainsi l'équation réduite et les axes de la conique. Il s'agit donc dans le programme actuel d'une application de l'algèbre bilinéaire ; toutefois, on peut aussi considérer qu'il est important de savoir déterminer l'équation réduite d'une conique en restant dans un cadre purement géométrique, puisque celle-ci est liée à des éléments géométriques : axes, centre etc. avant de le faire avec les outils de l'algèbre bilinéaire (quitte à le refaire ensuite).

1.1.1.3 Partie III : Rôle des dessins dans un cours d'algèbre linéaire, bilinéaire, ou d'analyse fonctionnelle.

Questions III 1) et III 2) - Enoncés

<u>A propos des figures :</u>

1) Pour chacune des figures ci-dessous, indiquez en cochant la case correspondante si vous l'utilisez dans votre cours d'algèbre linéaire, bilinéaire ou d'analyse fonctionnelle, et si oui, pour illustrer quelle notion ou propriété (vous pouvez indiquer plusieurs interprétations pour une même figure).

Figure	Utilisée	Cette figure illustre
	☐ oui ☐ non	
	☐ oui ☐ non	
	☐ oui ☐ non	

2) Si vous utilisez de plus d'autres figures, dessinez-les dans le tableau ci-dessous en indiquant ce qu'elles illustrent :

(Nous avons fait figurer à cet endroit un tableau permettant de faire cinq dessins et les interprétations correspondantes)

Questions III 1) et III 2) - Analyse

Comme nous l'avons noté en introduction, un dessin en algèbre linéaire est associé à un référent théorique, qui peut être un objet géométrique : illustration d'une propriété dans le cas particulier de l'espace géométrique. Mais il peut s'agir également d'un objet d'un espace vectoriel quelconque, dont la dimension peut être supérieure ou égale à quatre : ainsi deux droites sécantes, ou une droite coupant un plan peuvent représenter deux sous-espaces supplémentaires non nécessairement géométriques, voire même de dimension supérieure à deux.

Un dessin peut également figurer un élément d'un espace vectoriel rattaché à un autre domaine des mathématiques : une droite peut représenter l'ensemble des fonctions de la forme $x \to a\cos x$, où a est un paramètre réel.

Nous avons noté dans l'étude des manuels des différences importantes dans l'usage du dessin : certains livres, comme celui de Dieudonné, n'en comportent pas, alors que d'autres (Banchoff 1996) vont jusqu'à donner une représentation de la somme de vecteurs en dimension 4. Les dessins observés dans les manuels sont peu variés ; en revanche, un même dessin est associé à de nombreux référents et figures géométriques, ce qui peut entraîner des difficultés pour les étudiants.

L'objet de cette partie du questionnaire est l'étude de l'emploi fait par les enseignants des dessins dans leur cours d'algèbre linéaire, bilinéaire, ou d'analyse fonctionnelle.

Nous voulons observer si les enseignants font un usage important du registre graphique dans ces cours ; quelle est la variété des dessins employés et celles des figures géométriques (comme couple (dessin, objet)) pour un même dessin.

Nous avons donc soumis aux enseignants des exemples de dessins classiques, inspirés des manuels, en leur demandant s'ils les utilisaient, et pour illustrer quelles notions ou propriétés.

Nous noterons en particulier dans chaque cas si l'enseignant utilise le dessin pour représenter un exemple tiré de la géométrie, ou un cas plus général, en particulier pour suggérer une situation en dimension supérieure ou égale à quatre.

Le premier dessin se trouve fréquemment dans les cours d'algèbre linéaire ou bilinéaire. Il peut représenter en particulier :

- Une base (soit de l'espace géométrique, soit dans un cadre général ; nous ne signalerons plus dans la suite cette distinction, que nous ferons systématiquement).

Le dessin utilisé peut de plus suggérer qu'il s'agit d'une base orthogonale ou orthonormale ;

- Une famille liée, si l'on considère que le dessin est fait dans un plan.

Le deuxième dessin est moins courant, d'après ce que nous avons observé dans les manuels. Il peut intervenir pour illustrer :

- La propriété : "l'intersection de deux sous-espaces vectoriels est un sous-espace vectoriel" ;
- La formule de Grassmann : $\dim(E+F) = \dim E + \dim F - \dim(E \cap F)$;
- Deux sous-espaces vectoriels qui ne sont pas en somme directe ;
- L'ensemble solution d'un système linéaire de rang 2.

Le troisième dessin est aussi fréquent que le premier. Il peut représenter :

- La somme de deux sous-espaces ;
- Deux sous-espaces en somme directe ;
- Deux sous-espaces supplémentaires ; dans ce cas le dessin permet également l'interprétation en termes de supplémentaires orthogonaux ;
- Une projection sur un plan suivant une direction de droite, voire une projection orthogonale.

Dans la question III 2), nous demandions aux enseignants s'ils utilisent d'autres figures.

Notre hypothèse est que peu de figures apparaîtront alors ; on retrouvera éventuellement des variantes des dessins précédents complétés de pointillés pour indiquer une projection ou la décomposition d'un vecteur.

1.2 Analyse a posteriori du questionnaire aux enseignants

Nous avons soumis ce questionnaire à des enseignants et enseignants-chercheurs[1] (pour la plupart en poste à l'Université de Rennes 1) intervenant ou étant récemment intervenus dans des enseignements portant sur l'algèbre linéaire, l'algèbre bilinéaire ou l'analyse fonctionnelle. Nous avons ainsi interrogé des professeurs, maîtres de conférences, professeurs agrégés mais également des moniteurs. Ceux-ci ont donc des expériences diverses en matière d'enseignement ; ils sont également attachés à

[1] Nous qualifions d'enseignants les professeurs agrégés en poste à l'université, et dont le service statutaire ne comporte pas d'activité de recherche. Les autres personnels interrogés : professeurs, maîtres de conférence, attachés temporaires d'enseignement et de recherche, moniteurs, sont désignés par le terme d'enseignant-chercheur.

différentes équipes de recherche, relevant de domaines variés : géométrie algébrique, géométrie analytique, probabilités, analyse etc.

Nous avons recueilli 31 réponses. Nous citons ci-dessous des extraits de ces réponses ; en ce qui concerne la partie portant sur l'emploi de dessins, nous avons fait figurer en annexe 3 les dessins proposés par les enseignants, ainsi que les interprétations correspondantes.

Nous allons dans un premier temps commenter brièvement les données brutes recueillies à la lecture des réponses à chacune des questions posées ; nous exposerons ensuite les constats qui découlent de la mise en relation des réponses à différentes questions.

1.2.1 Analyse question par question

1.2.1.1 Question I 1) : caractérisation des projections orthogonales.

Nous retenons pour l'analyse des réponses à cette question les critères suivants :

- Solution retenue : préférence pour la solution 1 ou pour la solution 2.
- Avis exprimé sur les solutions proposées. Le choix d'une solution peut être fait par un enseignant qui apprécie certains éléments de celle-ci, ou par défaut, si l'enseignant rejette l'autre solution. Ces deux facteurs peuvent être simultanément présents dans une même réponse ; quant aux éléments qui entraînent l'adhésion ou le rejet, nous étudierons ceux-ci de manière plus détaillée ci-dessous.
- Avis exprimés sur les dessins accompagnant chacune des solutions. Nous avions demandé aux enseignants leur avis sur l'usage du dessin dans chacune des solutions proposées ; les avis exprimés peuvent donc souligner les avantages de l'un ou l'autre dessin, ou être au contraire critiques. Mais il est également possible que l'enseignant exprime un avis nuancé, soulignant les avantages et les inconvénients de l'un ou des deux dessins. Les critères que nous avons retenus : "Avis positif (resp. négatif) sur le dessin 1 (resp. 2)" peuvent donc être simultanément remplis par un même enseignant. (Dans tout ce qui suit nous appelons « dessin 1 » le dessin proposé dans la solution 1 et « dessin 2 » le dessin proposé dans la solution 2).

Nous donnons ci-dessous les données brutes correspondant à ces critères (31 enseignants ont répondu à cette question).

Critère (*Effectif total : 31)*	Effectif	Pourcentage
Préfère sol. 1	14	45 %
Préfère sol. 2	12	39 %
Avis positif sol.1	10	32 %
Avis positif sol.2	11	35 %
Avis négatif sol.1	8	26 %
Avis négatif sol.2	14	45 %
Avis positif dessin 1	17	55 %
Avis positif dessin 2	17	55 %
Avis négatif dessin 1	8	26%
Avis négatif dessin 2	7	23 %
Avis positif sur les deux dessins	12	39 %
Avis négatif sur les deux dessins	3	9 %

Nous pouvons constater au vu de ce tableau que les avis sont partagés ; il y a sensiblement autant d'enseignants se prononçant pour la première ou la deuxième solution (4 enseignants ont choisi de rejeter les deux solutions ; un enseignant dit qu'il apprécie les deux).

Parmi les 14 enseignants qui ont choisi la solution 1, 9 (64 %) signalent les avantages de cette solution, et 11 (79 %) soulignent des défauts de la solution 2.

Parmi les 12 enseignants qui ont choisi la solution 2, 9 (75 %) signalent les avantages de cette solution, et 5 (42 %) soulignent des défauts de la solution 1.

Il semble donc que l'attitude vis-à-vis de la solution 2 soit le principal critère de choix dans cette question, qu'il s'agisse de la retenir ou de la rejeter ; la solution 1 suscite en effet des avis moins tranchés.

Motifs du choix de solution

A propos des raisons évoquées pour le choix, nous pouvons faire les observations suivantes :

- Parmi les 9 enseignants qui choisissent la solution 1 et disent qu'ils apprécient celle-ci, 7 invoquent des raisons d'ordre pédagogique. Ils soulignent le fait que cette solution permet de manipuler le produit scalaire, que la démonstration est proche de celle rencontrée pour l'inégalité de Cauchy-Schwarz. Cette solution leur semble être " dans l'esprit du programme ", elle correspond à ce qui peut être attendu des étudiants. Aucun ne mentionne le dessin comme facteur de choix de cette solution.

- Parmi les 11 enseignants qui choisissent la solution 1 et formulent des critiques à l'encontre de la solution 2, 6 mentionnent la place, selon eux trop importante, occupée par le dessin. Ces six enseignants sont également ceux qui qualifient cette solution de peu rigoureuse ; selon eux, la démonstration fournie n'est pas acceptable parce qu'elle dépend du dessin. Ainsi un enseignant écrit : « Je ne considère pas la solution 2 comme une solution du problème, mais comme une simple visualisation du problème en dimension 2. » Les cinq autres enseignants qui rejettent la seconde solution invoquent différentes raisons. Deux enseignants écrivent que selon eux, le théorème de Pythagore est inconnu des étudiants dans un cadre général ; deux autres considèrent que la démarche adoptée relève de l'astuce et n'est pas assez naturelle ; enfin un enseignant critique le caractère affine de celle-ci. L'aspect affine n'est donc invoqué qu'une seule fois ; comme nous l'avions signalé dans l'analyse a priori, nous pensions rencontrer ce type de critique dans un nombre important de réponses. Or il ne semble pas que l'emploi d'un dessin comportant des points, et d'un texte mentionnant la notion de triangle rectangle suscite de nombreuses critiques ; cet aspect apparaît comme secondaire par rapport à l'usage qui est fait de ce dessin.
- Parmi les 9 enseignants qui choisissent la solution 2 parce qu'ils apprécient celle-ci, deux seulement mentionnent le dessin comme raison de leur choix. Cette solution est décrite le plus souvent comme simple, claire, sans que le dessin ou plus généralement le recours à la géométrie soit mentionné. Rappelons cependant qu'aucun enseignant ne mentionnait le dessin comme facteur de choix dans le cas de la première solution ; ce taux de 2 enseignants sur 9 peut donc tout de même sembler significatif.

Emploi des dessins

La question portant directement sur l'usage du dessin dans l'une ou l'autre solution permet d'une part de compléter les observations ci-dessus quant au motif du choix de solution (certains enseignants, qui n'avaient pas évoqué le dessin jusqu'alors, ont par exemple signalé à cet endroit que leur rejet de la deuxième solution provenait du rôle du dessin dans celle-ci). D'autre part, les réponses des enseignants à cette question nous renseignent sur le recours au dessin qu'ils proposent aux étudiants dans les résolutions d'exercices.

Avis négatifs

- 3 enseignants expriment des avis négatifs sur les deux dessins. L'un d'eux regrette que les dessins choisis ne représentent pas une situation dans l'espace, qui aurait été selon lui plus parlante. Les deux autres expriment une position de méfiance générale vis-à-vis de l'emploi de dessins ; ainsi l'un écrit : « L'inconvénient du dessin est que son caractère évident a tendance à remplacer dans l'esprit des étudiants la notion de preuve. » (Ces propos sont relatifs au dessin en général, et non pas à ceux qui sont proposés ici).

- Les autres avis négatifs exprimés sont de nature différente suivant le dessin. Le dessin 1 suscite des critiques portant sur son manque de clarté, et de lien direct avec la démonstration, qui le rend difficilement utilisable par les étudiants selon les enseignants concernés (5 enseignants) :

  « Le premier dessin est abstrait. On ne voit pas où intervient l'orthogonalité. »

  Pour le dessin 2 en revanche, les critiques portent sur l'implication excessive du dessin dans la preuve, ou sur les ambiguïtés que celui-ci peut engendrer. Trois enseignants évoquent ainsi un problème lié à la dimension : selon eux, l'emploi du dessin risque de faire croire aux étudiants que la situation se déroule en dimension 2. On trouve ainsi ces deux facteurs : ambiguïté, et implication excessive dans la preuve, dans la réponse suivante :

  « Il me semble que le dessin de la solution 2 risque d'induire en erreur : on n'est pas dans $\mathbb{R}^2$ malgré l'impression que l'on pourrait avoir... Dans la solution 2, le dessin sert de support et a une trop grande importance. »

  Les enseignants qui soulignent l'ambiguïté refusent donc ici un emploi métaphorique du dessin, qui pourrait induire les étudiants en erreur. Des étudiants qui considéreraient que ce dessin représente une situation en dimension 2, et non la situation générale dont il est question dans l'exercice risquent-ils par la suite de penser qu'une preuve donnée en dimension 2 suffit à justifier un résultat général ? C'est ce qui semble se dégager de ces réponses ; il s'agit d'une critique nouvelle à l'endroit de la solution 2.

Avis positifs

- Parmi les 12 enseignants qui émettent un avis positif sur les deux dessins, 8 écrivent qu'il est indispensable d'employer un dessin dans les deux cas. Ceci semble être l'expression d'une position générale de ces huit enseignants vis-à-vis de l'emploi de dessins, auquel ils sont très favorables. Cette position n'influe pas sur leur choix de solution ; en effet, parmi ces huit enseignants, un rejette les deux solutions proposées, trois préfèrent la solution 1 et quatre la solution 2. Ceci semble indiquer que ces enseignants, qui qualifient les dessins d'indispensables, leur attribuent des rôles différents.

  Les quatre autres enseignants qui donnent un avis positif sur les deux dessins le font dans le cadre de l'exercice proposé, avec des réponses du type : "Il est important de faire une interprétation géométrique dans les deux cas".

- 11 des 14 enseignants qui ont retenu la solution 1 ont signalé dans leur réponse à cette question que l'usage du dessin dans la première solution leur semblait très positif. On retrouve parmi ces enseignants les trois signalés ci-dessus, qui expriment de manière générale un avis favorable à l'emploi de dessins, et les quatre enseignants qui trouvent l'emploi du dessin positif pour chacune des solutions dans le cadre de cet exercice. Parmi les quatre autres enseignants, deux disent que le dessin permet d'expliquer le raisonnement, d'aider à la compréhension, et deux qu'il fournit une approche complémentaire ; l'un de ces derniers écrit : « Dans la première solution, le dessin apporte quelque chose de plus, et illustre bien le mélange intuition-abstraction qu'ils *(les étudiants)* doivent apprendre à maîtriser. »

Nous avons donc observé dans cette question les réponses d'une catégorie d'enseignants qui préfèrent la solution 1 pour un ensemble de raisons d'ordre pédagogique : la démarche peut être reproduite, le dessin n'induit pas de doute sur la validité de la preuve, il a simplement un rôle complémentaire d'aide à la compréhension (rappelons qu'il s'agissait de juger un corrigé à proposer aux étudiants).

Nous avons pu noter par ailleurs que s'exprimaient, dès cet endroit du questionnaire, des positions de principe sur l'emploi de dessins, que ce soit dans un sens favorable au recours à ceux-ci, ou à l'opposé pour souligner la méfiance nécessaire vis-à-vis d'un tel recours. L'examen des questions suivantes va nous permettre de compléter ces observations.

1.2.1.2 Question I 2) : Vecteurs deux à deux non colinéaires

Nous retenons pour l'analyse des réponses à cette question les différents critères que nous exposons ci-dessous ; le découpage de la question est tel que les éléments qui nous permettront de considérer que tel ou tel critère est vérifié peuvent provenir de différentes parties de la réponse.

- Note donnée à l'exercice. Rappelons que l'exercice est noté sur 5 points ; lorsque nous étudierons des corrélations entre la note attribuée et des données qualitatives, nous nous contenterons de séparer les enseignants qui attribuent une note en dessous de la moyenne (c'est à dire $\leq 2,5$) et ceux qui attribuent une note au-dessus de la moyenne.
- A propos des conseils donnés à l'étudiant en difficulté devant cet exercice, nous avons relevé deux types d'aide présents dans plusieurs réponses :

  - Enseignant qui conseille de faire un dessin (registre graphique)

  - Enseignant qui conseille de prendre un exemple dans $\mathbb{R}^2$ ou $\mathbb{R}^3$ (registre tableau)
- Doute sur la compréhension : nous qualifions ainsi les réponses dans lesquelles l'enseignant signale qu'il ne peut pas être sûr au vu de la réponse proposée que l'étudiant a compris l'exercice.
- Exercice compris : nous qualifions ainsi les réponses dans lesquelles l'enseignant écrit qu'il considère, au vu de la réponse fournie, que l'étudiant a visiblement compris l'exercice.
- Ambiguïté du dessin fourni : nous qualifions ainsi les réponses dans lesquelles l'enseignant signale que le dessin proposé par l'étudiant est trop ambigu, les trois

flèches dessinées ne représentant pas nécessairement trois vecteurs formant une famille liée.

- Manque une démonstration : nous qualifions ainsi les réponses dans lesquelles l'enseignant fait une remarque du type : " faites une démonstration ", mais aussi : " un dessin n'est pas une preuve " ; " la rédaction n'est pas assez rigoureuse " ; ou : " il est important en mathématiques d'apprendre à convaincre son lecteur ". Ces remarques indiquent un souci d'ordre pédagogique : l'étudiant doit non seulement connaître la réponse à la question, mais être capable de l'exposer d'une manière qui convainque son lecteur, ce qui n'est pas le cas, selon ces enseignants, de la réponse que nous avions proposée ici.

Les données sont rassemblées dans le tableau ci-dessous :

Critère *(Effectif total 30)*	Nombre de réponses	Pourcentage
Note ≤ 2	9	30 %
$2 <$ Note < 4	12	40 %
Note ≥ 4	9	30 %
Conseil registre graphique	17	57 %
Conseil registre tableau	7	23 %
Doute compréhension	3	10 %
Dessin ambigu	14	47 %
Manque une démonstration	20	67 %
Exercice compris	12	40 %

On peut constater à la lecture du tableau que les notes attribuées sont très variées : elles s'étalent en effet de 0 à 5 (moyenne : 2,7, écart type : 1,4). Comme nous l'avions noté dans l'analyse a priori, ce critère ne fournit cependant que peu d'information sur l'avis de l'enseignant : une réponse jugée médiocre pourra ainsi recevoir une note de 0 à 3 suivant le correcteur.

Il est plus significatif de remarquer que seulement 3 enseignants expriment explicitement un doute quant à la compréhension de l'exercice par l'étudiant. 12 enseignants écrivent même, soit dans les commentaires portés sur la copie, soit dans leurs explications à propos de la note, qu'ils sont sûrs que l'étudiant a compris. Le choix de note va donc s'expliquer essentiellement par l'écart entre la rédaction proposée par l'étudiant et celle qui est effectivement attendue.

La grande majorité (les deux tiers) des réponses comportent une remarque répondant au critère " manque une démonstration " : les enseignants faisant une telle remarque considèrent que la réponse, donnée sous forme de dessin, est insuffisante, et qu'elle doit être accompagnée d'une preuve formelle.

Les autres enseignants considèrent soit que la réponse est entièrement satisfaisante (5 enseignants), soit signalent simplement l'ambiguïté du dessin choisi (5 enseignants) ; ces derniers font des remarques du type : « précisez l'espace ».

A propos des conseils donnés, celui qui revient le plus souvent est : « faites un dessin ». Ce choix a pu être influencé par le contenu même du questionnaire. Nous notons toutefois que, parmi les 20 enseignants qui estiment ensuite qu'il manque une démonstration, 9 (45 %) conseillent à l'étudiant de faire un dessin. Ces 9 enseignants recommandent l'usage du dessin dans le processus de recherche mais n'acceptent pas qu'un simple dessin puisse constituer une réponse à cet exercice.

Si l'on considère en revanche les réponses des enseignants qui ne répondent pas au critère « manque une démonstration », on observe le conseil « faites un dessin » dans 8 des 10 réponses (80%)tandis que l'on retrouve ce conseil dans 8 des 10 réponses des enseignants ne répondant pas au critère " manque une démonstration " (80 %).

A l'issue de cette première analyse, nous distinguons donc ici trois groupes de réponses :

- Enseignants qui n'exigent pas une démonstration ; ils considèrent la réponse comme satisfaisante ou demandent simplement un dessin moins ambigu (10 enseignants)
- Enseignants qui conseillent à l'étudiant d'utiliser un dessin dans son processus de recherche, mais demandent un texte de démonstration accompagnant le dessin dans la réponse (9 enseignants)
- Enseignants qui demandent un texte de démonstration, et n'évoquent pas les dessins dans leurs conseils (11 enseignants).

1.1.1.3 Questions II 1) (a) et b)) : Emploi de la géométrie du lycée

Cette question se démarque par son objet du reste du questionnaire, puisqu'elle porte sur les liens possibles avec la géométrie vue au lycée. C'est l'étude menée dans le chapitre précédent qui nous a conduite à demander ici si certaines connaissances ou savoirs-faire de lycée, à propos des bases et des projections, étaient utilisables en DEUG. Nous avions en effet noté à cette occasion que certaines propriétés vues en DEUG, et même jusqu'à la maîtrise, pouvaient apparaître comme des généralisations de propriétés vues en géométrie au lycée. Nous souhaitions donc observer si celles-ci étaient employées par les enseignants de DEUG, afin notamment d'éviter que l'enseignement d'algèbre linéaire apparaisse complètement en rupture avec ce qui a été vu auparavant.

Les réponses ont été assez brèves ; les enseignants n'ont cité que peu de connaissances, et n'ont guère expliqué comment ils utilisaient les connaissances citées.

25 enseignants ont répondu à cette question[2]. 14 (56 %) d'entre eux disent employer des connaissances de lycée à propos des bases, et 18 (72 %) quand il s'agit des projections. Tous les enseignants qui font un lien avec le lycée en ce qui concerne les bases le font également pour les projections ; il reste donc 4 enseignants qui font le lien pour les projections et non pour les bases. Parmi ces 4 enseignants, 3 considèrent que les étudiants ont à la sortie du lycée une " intuition " de ce qu'est une projection, en particulier orthogonale, intuition éventuellement associée à un dessin, qui peut être mise à profit dans un cours de DEUG. Ils ne semblent pas attribuer à la notion de base cette même caractéristique " intuitive ". Cette différence entre base et projection peut s'expliquer notamment par le fait que la notion de base en dimension 2 ou 3 n'amène pas naturellement des propriétés non triviales ; tandis que l'on peut rencontrer dans les mêmes dimensions des propriétés des projections qui resteront fondamentales par la suite, comme celles liées aux notions d'image et de noyau d'une telle application.

Les 7 enseignants qui ne font référence à aucun savoir de lycée disent, soit qu'ils ne connaissent pas assez les programmes de lycée pour les utiliser dans leur cours, ou encore (certains avancent simultanément les deux arguments) qu'il est nécessaire de se méfier de l'emploi des connaissances de lycée. Certains enseignants, qui déclarent pourtant utiliser des connaissances de lycée, émettent les mêmes réserves. Les raisons qu'ils avancent sont de trois types distincts :

- Le point de vue du lycée et celui de l'université sont trop différents (ceci rejoint le problème de différences de cultures entre lycée et université, mentionné par Praslon dans sa thèse (Praslon 2000)).
- Les résultats vus au lycée n'ont pas été établis de manière rigoureuse.
- Les étudiants n'ont retenu que peu de choses de ce qui a été vu au lycée, il est donc risqué de supposer qu'une notion, propriété, etc. est connue, même si elle fait partie des programmes du secondaire.

Nous récapitulons dans le tableau ci-dessous les données chiffrées correspondant à des remarques indiquant de sérieuses réserves quant à l'utilisation de connaissances issues de l'enseignement secondaire (nous faisons figurer dans ce tableau la liste des différents cas rencontrés, ainsi que l'unique cas où plus d'un individu relève de deux catégories).

Nous observons en tout 8 enseignants qui déclarent connaître insuffisamment les programmes du secondaire ; bien que certaines des autres réponses puissent évoquer une telle méconnaissance (que penser, par exemple, d'un enseignant qui déclare que le noyau et l'image d'une projection sont des notions abordées au lycée ?), nous n'avons attribué le critère « méconnaissance des programmes » qu'à ces huit enseignants.

[2]Nous avons utilisé auprès de six enseignants une première version du questionnaire, dans laquelle cette question (et uniquement celle-ci) ne figurait pas, ce qui explique que le nombre de réponses est plus faible ici.

(Effectif total : 25)	
Nombre total d'enseignants qui émettent des réserves	13
Méconnaissance des programmes (explicite)	8
Les notions de lycée ne sont pas acquises	3
Les cultures lycée et université sont trop différentes	5
Les propriétés n'ont pas été vues rigoureusement au lycée	2
Ne connaît pas les programmes + les notions de lycée ne sont pas acquises	2

Comme nous l'avons dit ci-dessus, peu d'enseignants précisent comment ils utilisent les savoirs qu'ils ont éventuellement cités ; 5 parlent d'illustration en dimension 2 ou 3 de définitions ou de propriétés générales ; 4 écrivent que les connaissances de lycée peuvent servir de support à une généralisation.

4 enseignants évoquent l'emploi de dessins comme savoir-faire rencontré au lycée qui peut être prolongé en algèbre linéaire, qu'il s'agisse de bases ou de projections ; 3 citent l'intuition géométrique, uniquement à propos des projections comme nous l'avons noté plus haut.

A propos des bases, la propriété vue au lycée qui est le plus souvent citée comme pouvant être employée en DEUG est celle de décomposition d'un vecteur sur une base, associée à la notion de composantes (5 enseignants).

En ce qui concerne les projections, la propriété qui revient le plus souvent est le théorème de Pythagore (peut-être à cause du premier exercice du questionnaire), cité par 4 enseignants ; la notion de distance est évoquée par 2 enseignants.

D'une manière générale, il semble que cette question ait peu mobilisé les enseignants, qui y ont répondu avec beaucoup moins de détails que pour les autres questions. Rappelons que sur un total de 25 réponses, 13 enseignants expriment soit leur ignorance, soit de sérieuses réserves sur les connaissances venant du lycée.

L'utilisation des connaissances de lycée ne semble pas constituer, aux yeux des enseignants de DEUG, une question fondamentale ; ceux-ci tenteront peut-être de reconstruire ces connaissances, d'une manière qui leur paraîtra suffisamment rigoureuse, plutôt que de s'appuyer sur elles.

Ceci pose sous un autre angle le problème du recours à l'intuition géométrique. En effet, en utilisant ici encore la théorie de Fischbein, nous pouvons supposer qu'une telle intuition, en algèbre linéaire, nécessite l'existence d'un modèle géométrique. Or les enseignants ne semblent pas vouloir intégrer dans ce modèle des connaissances issues de l'enseignement secondaire ; ils vont donc devoir élaborer pour les étudiants un modèle entièrement nouveau. Même si cette tentative aboutit, on peut se demander quels seront les effets produits par la confrontation du nouveau modèle avec le(s) modèle(s) qui avaient été élaborés en géométrie au lycée. Nous aurons l'occasion de revenir sur ce point plus en détail dans l'analyse de notre questionnaire aux étudiants de CAPES et de maîtrise.

1.1.1.4 Question II 2) : articulation algèbre- géométrie

Nous proposions dans cette question 6 types de tâches de géométrie affine, ou affine euclidienne aux enseignants interrogés, en demandant s'ils devaient être vus avant, pendant ou après l'enseignement d'algèbre linéaire. Nous pouvons tout d'abord, comme pour les autres questions, relever la variété des points de vue exprimés. 29 enseignants et enseignants-chercheurs ont répondu à cette question ; nous récapitulons les réponses dans le tableau ci-dessous.

Savoir *(Effectif total 29)*	Avant l'algèbre linéaire	Fait partie de l'algèbre linéaire	Après l'algèbre linéaire
S1 (Décomposition graphique d'un vecteur)	17 (59 %)	14 (48 %)	0
S2 (Equations de plans)	18 (62 %)	15 (52 %)	5 (17 %)
S3 (Vecteurs coplanaires)	14 (48 %)	23 (79 %)	1 (3 %)
S4 (Expression analytique d'une symétrie)	18 (62 %)	12 (41 %)	6 (21 %)
S5 (Composée de deux rotations)	15 (52 %)	4 (14 %)	10 (34 %)
S6 (Equation réduite d'une conique)	10 (34 %)	9 (31 %)	10 (34 %)

Nous demandions également aux enseignants d'expliquer leur choix, pour au moins deux des item concernés.

En examinant, d'une part les choix effectués, d'autre part les justifications données, nous observons quatre attitudes regroupant l'essentiel des réponses.

Groupe 1 (4 enseignants) : géométrie indépendante de l'algèbre linéaire

Dans les réponses des enseignants de ce groupe, au moins cinq des six savoirs proposés sont considérés comme devant être vus avant l'algèbre linéaire (quant au savoir qui est éventuellement exclu, on trouve une fois S1 et deux fois S4).

Dans les explications données, les enseignants disent que la géométrie (ou la partie de la géométrie dont ces savoirs relèvent) doit être connue avant l'algèbre linéaire ; elle peut ensuite servir de " motivation " pour celle-ci.

Il s'agit ici d'une géométrie antérieure à l'algèbre linéaire, donc indépendante de celle-ci, et qui peut ensuite être utilisée comme support dans l'enseignement d'algèbre linéaire ; mais cet objectif pédagogique n'apparaît pas comme essentiel.

S'appuyer sur une géométrie antérieure à l'algèbre linéaire apparaît donc comme une attitude minoritaire ; ceci rejoint les constatations faites à la question précédente, dans laquelle la géométrie vue au lycée semblait peu utilisée par les enseignants.

Groupe 2 (10 enseignants) : certains des savoirs proposés peuvent être vus en introduction à l'algèbre linéaire ; d'autres en font partie.

Dans les réponses des enseignants de ce groupe, certains des savoirs proposés sont considérés comme devant être vus avant l'algèbre linéaire ; d'autres pendant ce cours, et au plus un après.

Les explications données se regroupent autour d'objectifs pédagogiques : certains des savoirs proposés peuvent être utilisés pour enseigner l'algèbre linéaire, donc ils doivent être vus avant ; d'autres savoirs sont plus simples à aborder avec les outils de l'algèbre linéaire, et sont donc considérés comme faisant partie de ce cours.

Les choix faits pour la répartition avant/pendant sont variés ; certains considèrent par exemple que la géométrie analytique, les calculs en coordonnées, doivent être vus avant ; d'autres que ce qui relève de la géométrie dans l'espace nécessite les outils de l'algèbre linéaire, tandis que la géométrie plane peut être vue avant.

Il ne s'agit plus ici d'une géométrie qui serait un objectif d'enseignement à part entière, mais de certains savoirs de géométrie qui vont être utilisés en algèbre linéaire, soit pour introduire des notions, soit pour illustrer des parties de cours.

Groupe 3 (6 enseignants) : géométrie comme partie ou application de l'algèbre linéaire

Dans les réponses des enseignants de ce groupe, certains des savoirs proposés sont considérés comme faisant partie de l'algèbre linéaire, et d'autres comme devant être vus après (et au plus un avant).

Les explications données montrent que ces enseignants considèrent qu'une part importante de la géométrie affine doit être fondée sur l'algèbre linéaire ; ils ne signalent aucun des savoirs proposés comme introduction possible à un cours d'algèbre linéaire, ou devant être vu indépendamment de celle-ci.

Groupe 4 (4 enseignants) : diversifier les points de vue

Dans les réponses des enseignants de ce groupe, l'essentiel des savoirs est signalé comme devant être vu au moins deux fois, soit avant et après, soit avant et pendant l'algèbre linéaire. Les arguments avancés convergent tous vers l'idée qu'il est utile de diversifier les points de vue sur un même objet d'enseignement.

1.1.1.5 Question III : emploi des figures

Dans cette question, nous proposions aux enseignants trois dessins, en leur demandant s'ils utilisaient ceux-ci, et avec quelle(s) interprétation(s) ; nous leur demandions d'autre part s'ils employaient d'autres dessins. Le nombre de dessins employés sera donc naturellement un critère à retenir ici. Les interprétations fournies pour un même dessins sont multiples, nous donnerons les plus fréquentes ci-dessous ; il nous semble également important de noter si le dessin est utilisé pour illustrer une situation d'algèbre linéaire générale, ou limitée à la dimension 3.

Nous retenons donc les critères suivants :

- Pour chacun des trois dessins proposés, est-il employé ou non par l'enseignant ?
- Y a-t-il d'autres dessins proposés ?
- L'enseignant propose-t-il, pour au moins l'un des dessins qu'il emploie, plusieurs interprétations différentes ?
- Les dessins sont-ils majoritairement associés à une situation en dimension ≤ 3, ou à une situation générale ? (Nous désignons ce critère par : interprétations abstraites, critère que nous considérerons comme vérifié si l'enseignant propose plus d'interprétations abstraites que concrètes).

28 enseignants ont répondu à cette partie du questionnaire ; nous donnons dans le tableau ci-dessous les effectifs correspondant à chaque critère.

Critère (*Effectif total 28)*	Nombre de réponses	Pourcentage
Emploie le dessin 1	23	82 %
Emploie le dessin 2	15	54 %
Emploie le dessin 3	20	71 %
Autres dessins proposés	16	57 %
Plusieurs interprétations	9	32 %
Interprétations abstraites	12	43 %

Nous pouvons remarquer, d'une part que le deuxième dessin semble être utilisé nettement moins couramment que les deux autres ; d'autre part que, malgré la forme de la question qui laissait ouverte la possibilité de donner plusieurs interprétations, moins du tiers des enseignants le font effectivement.

Nous ne donnons pas ici la matrice de corrélations associée, les coefficients étant pour la plupart trop faibles pour être représentatifs ; on peut cependant noter que le fait de donner plusieurs interprétations est corrélé positivement à tous les critères du type " emploi de dessins ", et en particulier à l'emploi du dessin 2. En revanche le fait d'illustrer plutôt des situations abstraites, ou des situations en dimension ≤ 3 (critère : interprétations abstraites) ne semble pas lié au nombre de dessins employés.

Examinons les interprétations rencontrées pour chaque dessin.

Dessin 1

Pour le premier dessin, nous avons relevé 8 interprétations différentes (nous distinguons toujours : cadre euclidien ou non, dimension ≤ 3 ou non), dont cinq sont données par au moins deux enseignants :

- Vecteurs du plan deux à deux non colinéaires (référence à l'exercice 1) : 7 enseignants
- Base de l'espace : 9 enseignants
- Base orthogonale ou orthonormée : 3 enseignants
- Base orthogonale ou orthonormée de l'espace : 3 enseignants
- Repère orthonormal de l'espace : 5 enseignants

Les variantes sont donc en fait peu nombreuses ; mises à part les références à l'exercice 1, la notion de base est toujours sous-jacente. On peut noter que la notion de base orthogonale dans un cadre général (dimension non précisée) est citée 3 fois, alors que la notion générale de base n'apparaît pas ici, n'étant citée qu'une fois.

Cette notion (base orthogonale) est par ailleurs la seule à être citée par plusieurs enseignants dans un cadre général, le quatre autres notions de la liste ci-dessus relevant de dimensions inférieures ou égales à 3.

Remarquons par ailleurs que, bien qu'il s'agisse explicitement d'un cours d'algèbre linéaire, 5 enseignants mentionnent la notion affine de repère.

Dessin 2

Pour le deuxième dessin, nous avons relevé 7 interprétations différentes. Seulement deux d'entre elles sont données par au moins deux enseignants :

- Intersection de plans : 8 enseignants
- Intersection de sous-espaces vectoriels : 5 enseignants

Ce dessin, qui est par ailleurs celui que les enseignants utilisent le moins, donne donc lieu à peu d'interprétations différentes. Il semble être utilisé plus souvent en dimension 3 que dans un cadre général, mais cette distinction est moins nette que pour le dessin 1.

Dessin 3

Pour le troisième dessin, nous avons relevé 18 interprétations différentes, dont sept sont données par au moins deux enseignants :

- Base orthogonale ou orthonormée de l'espace : 3 enseignants
- Base adaptée : 2 enseignants
- Théorème de la base incomplète : 2 enseignants
- Supplémentaire orthogonal : 3 enseignants
- Orthogonal d'un plan : 3 enseignants
- Vecteur orthogonal à un plan : 2 enseignants
- Projection : 2 enseignants

Ce dessin est celui qui donne donc lieu aux interprétations les plus variées ; celles-ci se regroupant toutefois autour de la notion de base d'une part, et de celle de supplémentaire orthogonal d'autre part.

3 des sept interprétations ci-dessus font référence à un cadre général , et 4 à un espace euclidien.

Autres dessins proposés

Rappelons que 16 enseignants proposent, dans le tableau fourni à cet effet, d'autres dessins qu'ils utilisent dans leurs enseignements d'algèbre linéaire. Ce sont au total 36 dessins qui figurent dans ces tableaux, soit une moyenne de 2,25 dessins par enseignant. Ce taux est faible ; le tableau fourni comportait 5 cases, ce n'est donc pas sa taille qui a limité les enseignants, ceux-ci n'ont effectivement pensé qu'à peu de dessins. Ceci peut s'expliquer en partie par le fait que la plupart des enseignants interrogés n'enseignaient pas l'algèbre linéaire au moment où ils ont rempli le questionnaire ; hors de ce contexte d'enseignement, il leur était peut-être difficile de se souvenir de leurs pratiques effectives. De plus il s'agissait de la dernière question posée ; il faut donc tenir compte de l'éventuelle lassitude de la personne interrogée. Cependant on peut légitimement supposer qu'une personne utilisant un grand nombre de dessins dans son cours d'algèbre linéaire peut, en peu de temps, remplir les cinq lignes du tableau.

Comme pour la question précédente, nous allons faire la liste des interprétations proposées par au moins 2 enseignants, en séparant algèbre linéaire et algèbre bilinéaire (rappelons que des exemples de dessins sont donnés en annexe 3).

- Symétries : 2 enseignants
- Projections : 3 enseignants
- Décomposition d'un vecteur, coordonnées : 2 enseignants
- Somme, supplémentaires : 3 enseignants
- Projection orthogonale : 4 enseignants
- Coniques, quadriques : 2 enseignants
- Rotation : 2 enseignants

Au total, 12 dessins ont été proposés pour illustrer des situations d'algèbre bilinéaire, et 14 en algèbre linéaire ; l'aspect euclidien ne semble donc pas susciter l'emploi d'un plus grand nombre de figures.

Les réponses à cette question nous permettent donc de noter plusieurs caractéristiques de l'emploi de dessins par les enseignants en algèbre linéaire. Tout d'abord, cet emploi de dessins est faible : en effet moins de 60 % des enseignants déclarent utiliser d'autres dessins que les trois que nous avions proposés ; de plus le nombre d'autres dessins proposés est peu élevé. A propos d'un éventuel recours plus important au dessin dans l'étude des espaces euclidiens, s'il est vrai que les interprétations proposées pour les dessins 1 et 3 mentionnent fréquemment l'orthogonalité, les réponses à la deuxième partie de la question ne montrent pas de tendance claire en ce sens. En revanche, il apparaît nettement que les dessins sont utilisés de préférence pour illustrer des situations en dimension inférieure ou égale à trois, puisque moins de la moitié des enseignants proposent pour les dessins 1 à 3, ou pour leur propres dessins, des interprétations générales du type : « sous-espace vectoriel » ; « théorème du rang », ou « relation de Grassmann ». Par ailleurs la plupart des notions illustrées font partie de l'ensemble de notions que nous avons examinées au chapitre 4, et sont donc en particulier rencontrées dès le secondaire : symétrie, projection, rotation, base, base orthogonale ... D'autres ne font plus partie du programme du secondaire, mais peuvent relever de la géométrie affine du plan ou de l'espace : coniques, quadriques, rotations dans l'espace par exemple. Certaines notions ou propriétés entièrement nouvelles d'algèbre linéaire, n'appartenant pas à la géométrie affine, sont citées, comme celles que nous avons évoquées ci-dessus ; mais elles sont moins nombreuses. Dans les deux parties de cette question, on trouve 72 interprétations portant sur des notions qui ont déjà été vues dans le secondaire, ou peuvent relever d'une géométrie affine, contre 42 interprétations portant sur des notions ou propriétés nouvelles d'algèbre linéaire. Naturellement, les dessins associés aux projections, symétries ou rotations diffèrent de ceux qui sont rencontrés dans le secondaire (et plus généralement de ceux qui peuvent être rencontrés en géométrie affine) : en particulier ils représentent des applications agissant sur des vecteurs et non sur des points. Cependant il semble que ce qui confère à ces notions leur particularité, et incite les enseignants à leur associer des dessins, est le fait qu'elles aient été, ou puissent être ultérieurement, rencontrées dans un cours de géométrie affine. Quant aux notions qui relèvent de l'algèbre linéaire générale, et ne peuvent être directement transposées en géométrie affine, elle donnent lieu à nettement moins de dessins ; ceci ne peut encourager les étudiants à avoir recours au dessin en algèbre linéaire.

1.2.2 Analyse de l'ensemble du questionnaire

Nous allons maintenant donner des éléments d'analyse portant simultanément sur différentes parties du questionnaire.

Nous laisserons de côté pour cette analyse que la partie II 1), portant sur l'emploi des connaissances du secondaire. En effet cette partie nous semble d'une nature différente des autres ; de plus, comme nous l'avons vu, elle a peu mobilisé les enseignants (nous avons par ailleurs fait différentes tentatives d'analyse, qui ont toutes révélé peu de corrélations entre les critères issus de cette partie et les autres).

Nous allons donc examiner ici conjointement les réponses aux parties I (exercices), II2) (articulation géométrie-algèbre linéaire) et III (dessins).

Nous donnons ci-dessous les critères que nous retenons pour confronter les résultats des différentes questions.

Dans la question I.1), nous avons constaté que le choix de solution fait par les enseignants reposait essentiellement sur leur avis sur la solution 2 ; de plus le rejet de cette solution semble le plus souvent motivé par l'emploi fait du dessin.

La plupart des enseignants qui choisissent la solution 1 expriment une certaine méfiance à l'égard de l'utilisation du dessin ; en particulier ils n'acceptent pas que celui-ci soit nécessaire pour la démonstration donnée. Rappelons qu'il s'agissait d'un corrigé à proposer à des étudiants ; le choix des enseignants s'effectue donc également en fonction de l'usage du dessin qu'ils vont attendre et accepter des étudiants.

Nous allons donc conserver dans cette question les deux critères :

- Préfère la solution 1 ;
- Préfère la solution 2 ;

qui nous semblent significatifs en termes d'emploi de figures.

Dans la question I2), nous avons dégagé trois catégories regroupant l'ensemble des réponses, catégories qui reposent essentiellement sur l'emploi du dessin :

- Emploi acceptable du dessin : enseignants qui acceptent la réponse donnée, ou conseillent simplement de faire un dessin moins ambigu,
- Dessin pour la recherche : enseignants qui conseillent d'utiliser un dessin pour chercher la solution, mais demandent un texte de démonstration avec la réponse,
- Pas de dessin évoqué : enseignants qui n'acceptent pas la réponse de l'étudiant, demandent un texte de démonstration et ne mentionnent pas les dessins dans leurs conseils.

Dans la question II2), nous avions distingué quatre groupes d'enseignants ; pour des questions d'effectifs, nous avons rassemblé les deux premiers de ces groupes (*géométrie antérieure à l'algèbre linéaire, indépendante de celle-ci,* et *certains des savoirs proposés peuvent être vus en introduction à l'algèbre linéaire*). Nous retenons en conséquence les critères suivants :

Avant : ce critère est vérifié si l'enseignant appartient à l'un des deux groupes mentionné ci-dessus.

Après : ce critère est vérifié si l'enseignant appartient au groupe que nous avions noté groupe 3 : *géométrie comme partie ou application de l'algèbre linéaire.*

(Certains enseignants ne remplissent donc ni l'un ni l'autre de ces critères).

Dans la question III, nous définissons un nouveau critère : " Emploi fréquent de dessins ". Nous dirons que ce critère est vérifié si l'enseignant déclare utiliser au moins trois dessins (nous totalisons les dessins utilisés parmi les trois que nous avons fait figurer dans le questionnaire et les autres dessins proposés par l'enseignant).

Nous conserverons par ailleurs le critère " plusieurs interprétations " (c'est à dire que, dans sa réponse, l'enseignant propose plusieurs interprétations pour au moins l'un des dessins qu'il dit utiliser) ; en effet, nous avions pu constater dans l'analyse des réponses à la question III que ce critère est significativement lié aux critères du type " emploi de dessins " que nous avions définis pour cette question.

Récapitulons l'ensemble des critères retenus :

- Solution préférée à l'exercice de la question I1) (projections) : ceci nous fournit deux critères (certains enseignants déclarant ne préférer aucune des deux solutions proposées), que nous désignerons par " Sol1 " et " Sol2 " ;
- Appartenance à l'un des groupes identifiés à la question I2) : emploi du dessin acceptable (noté " Dacce "), dessin pour la recherche (noté " Drech "), emploi du dessin critiqué, et non conseillé pour la recherche (noté " Dcrit ")
- Pour la question II2), critères « avant » et « après », concernant la place de la géométrie par rapport à l'algèbre linéaire

- Emploi fréquent de dessins, soit au moins 3 dessins à la question III (noté " Dfreq ")
- Plusieurs interprétations pour un même dessin à la question III (noté " Pint ")

La mise en rapport de ces critères ne peut bien entendu s'effectuer que pour les questionnaires des enseignants ayant répondu à chacune des questions concernées ; les données que nous présentons ci-dessous sont donc issues de l'analyse de 26 questionnaires.

Nous donnons ci-dessous la matrice de corrélations associée.

	Sol1	Sol2	Dacce	Drech	Dcrit	Avant	Après	Dfreq	Pint
Sol1	1								
Sol2	- 0,68	1							
Dacce	- 0,23	**0,33**	1						
Drech	0, 03	0,09	- 0,48	1					
Dcrit	0,19	**- 0,41**	- 0,48	- 0,53	1				
Avant	0,04	0,14	**0,53**	**-0,26**	**-0,26**	1			
Après	-0,22	0,01	**-0,32**	0,05	**0,26**	-0,62	1		
Dfreq	**- 0,28**	0,14	**0,36**	- 0,09	**- 0,26**	**0,35**	- 0,01	1	
Pint	**- 0,40**	0,16	**0,28**	- 0,13	- 0,13	0,18	- 0,11	0,53	1

Nous avons fait figurer en gras dans la matrice tous les coefficients de corrélation supérieurs ou égaux à 0,25 en valeur absolue et qui concernent des critères issus de questions différentes (en effet la présence de forts coefficients de corrélation entre critères issus d'une même question nous semble fournir moins de renseignements sur une attitude générale des enseignants interrogés).

Nous pouvons dans un premier temps noter que, parmi les trente coefficients de corrélation entre critères issus de questions différentes, treize sont supérieurs ou égaux à 0,25 en valeur absolue : il y a donc des liens significatifs entre critères issus de questions différentes.

Le choix de solution à l'exercice 1, l'emploi de dessins par les enseignants, et celui attendu des étudiants

Des réponses à la question I1), nous avons retenu l'opposition entre les enseignants qui choisissent la première solution et ceux qui préfèrent la deuxième. Il apparaît des corrélations importantes entre ces critères et ceux qui portent (plus directement en tout cas) sur l'emploi de dessins, c'est à dire ceux qui sont issus des questions I 2) et III.

Ainsi le choix de la solution 1 est nettement opposé au critère « Plusieurs interprétations », issu de la question III, et également, quoique dans une moindre mesure, au critère « Emploi fréquent de dessins » de cette même question. Le fait de proposer plusieurs interprétations pour un même dessin est en effet significatif d'une certaine confiance dans la capacité des étudiants à associer ensuite selon le contexte l'interprétation convenable au dessin ; ceci semble naturellement opposé à la crainte des ambiguïtés que le dessin peut véhiculer, crainte qui s'exprimait dans plusieurs réponses d'enseignants qui rejetaient la solution 2.

Le choix de la solution 2 quant à lui semble plutôt associé aux critères issus de la question I2), critères qui portent sur le rôle du dessin dans les productions des étudiants. Il est ainsi corrélé positivement avec le critère « dessin accepté », qui qualifie les réponses des enseignants pour lesquels l'emploi fait du dessin dans la réponse de l'étudiant à l'exercice 2 est correct ou du moins acceptable ; et négativement avec le critère « dessin critiqué ».

Cette association de critères : choix de la solution 2 dans l'exercice 1, et réponse de l'étudiant acceptée dans l'exercice 2 , nous semble caractériser une attitude favorable à l'emploi de dessins. Cette attitude ne va pas nécessairement dans le sens de l'emploi d'un grand nombre de dessins (notons que les corrélations entre « Sol2 » et « Dfreq » notamment sont très faibles) ; il s'agit plutôt d'enseignants qui sont prêts à accepter que le dessin joue un rôle prépondérant dans une preuve, et n'exigent pas une démonstration formelle, qui ne dépende pas de la figure.

L'articulation géométrie-algèbre linéaire et l'emploi de dessins

Dans la question II 2), nous avons comme en I1) retenu deux critères opposés : « géométrie avant l'algèbre linéaire », ou « géométrie après l'algèbre linéaire ».

Ces critères sont associés de manière significative à des critères portant sur l'emploi de dessins, qu'il s'agisse de la fréquence d'emploi de ceux-ci ou du rôle qu'ils seront appelés à jouer.

Il se dégage en particulier une opposition nette entre deux groupes de critères : « géométrie avant », « dessin accepté », et « dessin fréquent » d'une part ; « géométrie après » et « dessin critiqué » d'autre part.

Le rôle du dessin, l'emploi d'un modèle figuratif au sens de Fischbein, semble donc lié à l'articulation choisie entre géométrie et algèbre linéaire, c'est à dire à l'emploi d'un modèle géométrique (intramathématique, contrairement au modèle figuratif). Ces deux aspects du recours au géométrique, qui sont de natures différentes, ne sont pourtant pas indépendants.

Nous observons ainsi un groupe d'enseignants qui sont favorables à l'étude préalable d'au moins un certain nombre de savoirs de géométrie, et à l'emploi de ceux-ci ensuite comme support dans le cours d'algèbre linéaire ; et qui dans le même temps, sont prêts à accepter un recours important au dessin dans les résolutions d'exercices d'algèbre linéaire (recours important d'une part quant au rôle du dessin dans la preuve, et d'autre part quant au nombre de dessins employés).

Quant aux enseignants qui vérifient le critère que nous avons noté « Après », c'est à dire les enseignants qui semblent favorables à l'étude préalable de l'algèbre linéaire, la géométrie étant ensuite fondée sur celle-ci, nous pouvons noter tout d'abord qu'il ne semble pas y avoir parmi eux de tendance nette en ce qui concerne le nombre de dessins employé : le coefficient de corrélation avec le critère « Dfreq » est pratiquement nul, contrairement à ce que l'on observait pour le critère « Avant ». Ceci rejoint des constatations que nous avions pu faire lors des études de manuels : certains auteurs, qui font le choix de présenter d'abord l'algèbre linéaire, pour fonder ensuite la géométrie sur celle-ci, n'emploient aucun dessin, alors que d'autres qui font ce même choix en utilisent un grand nombre.

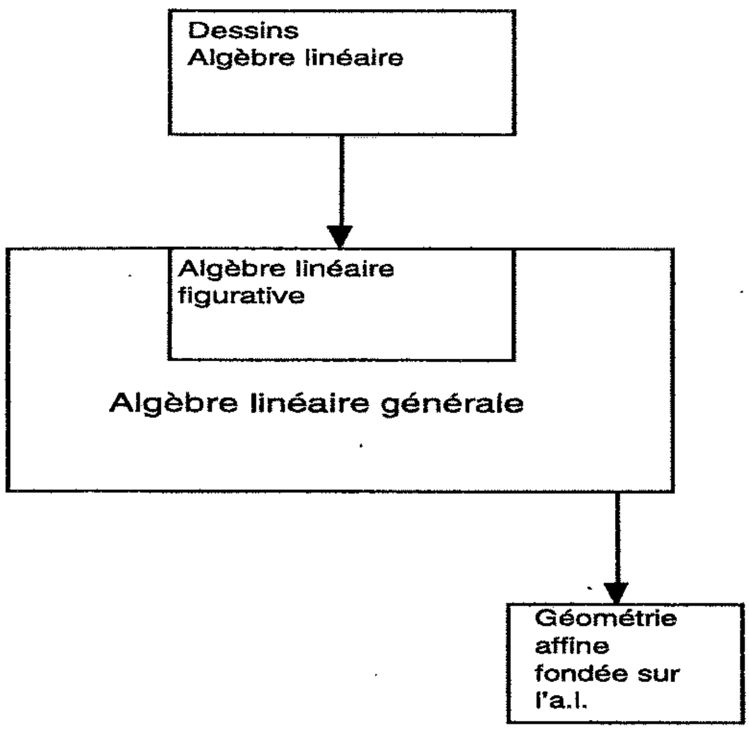
En revanche le critère « Après » est lié au critère « Dcrit », et opposé à « Daccep » : ces enseignants peuvent pour certains accepter un recours au dessin, à condition que celui-ci n'intervienne pas dans la preuve. Cinq enseignants vérifient le critère « Après », et cinq autres ne marquent pas de préférence entre « Avant » et « Après » ; or aucun de ces dix enseignants ne vérifie le critère « Daccep ».

1.3 Conclusion

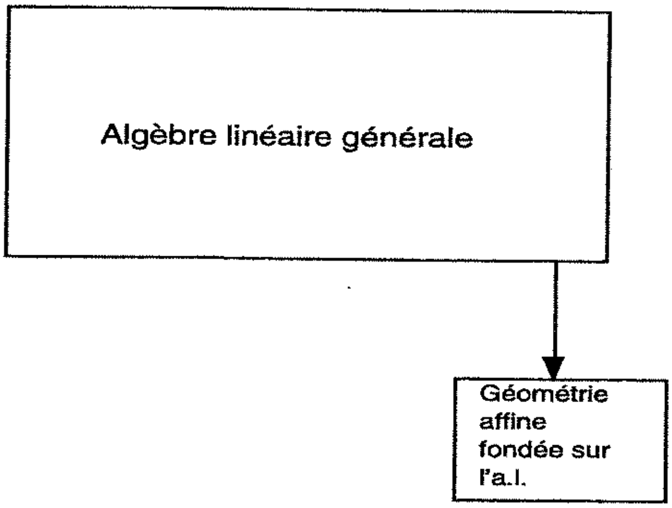
Les observations exposées ci-dessus nous permettent de caractériser plusieurs tendances possibles, regroupant l'essentiel des enseignants interrogés. Ces tendances correspondent à différentes structures du type *(S)* que nous avons rappelé dans la présentation du questionnaire.

Nous avons plus précisément relevé trois structures du type *(S)* :

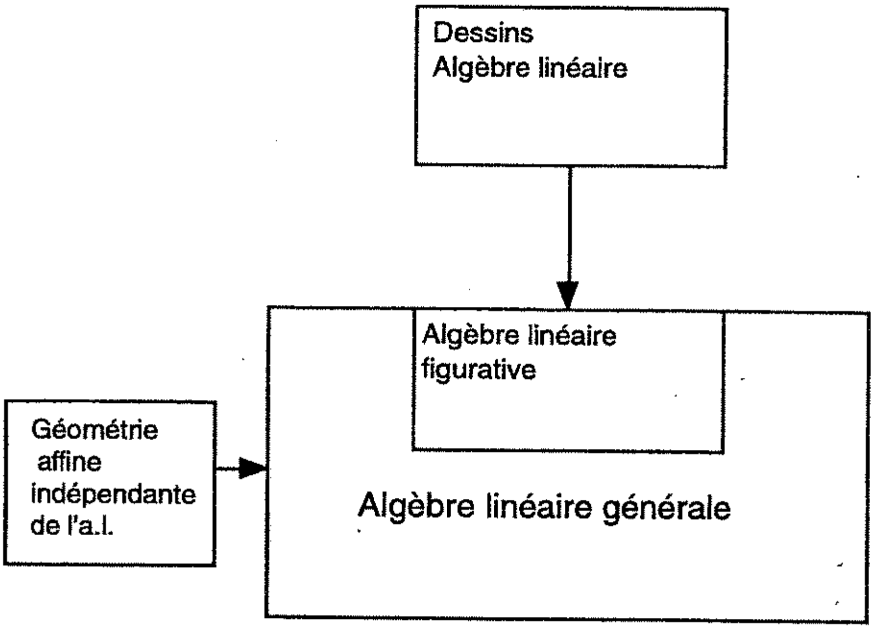
Structure (S1) : Emploi fréquent de dessins, et géométrie après l'algèbre linéaire



Structure (S2) : Dessins peu employés, et géométrie après l'algèbre linéaire



Structure (S3) : Emploi fréquent de dessins, et géométrie avant l'algèbre linéaire



Chacune des structures que nous avons représentées figure la position extrême d'une tendance : ainsi, les enseignants que nous avons rattachés à « géométrie avant l'algèbre linéaire » sont des enseignants qui choisissent de présenter une majorité des savoirs que nous avons proposés à la question II2) avant l'algèbre linéaire. Ceci ne signifie pas qu'ils ne présenteront pas d'autres savoirs de géométrie affine après l'algèbre linéaire, bien que nous n'ayons pas fait figurer le cadre correspondant sur *(S3)* par souci de clarté. De même, nous n'avons pas représenté de modèle figuratif dans *(S2)* ; ceci ne signifie pas que les enseignants qui s'y rattachent n'utilisent aucun dessin, mais qu'ils en emploient peu.

Nous n'avons pas fait figurer le cadre « géométrie du lycée », car nous avons écarté la question II1) de l'analyse globale. Par ailleurs, nous n'avons pas non plus mentionné les dessins correspondant aux différentes géométries, car notre questionnaire ne donnait pas de renseignements à cet égard.

Les enseignants se rattachant à la tendance représentée par *(S1)* (4 enseignants, sur les 26 dont nous avons pu employer les questionnaires dans l'analyse globale) utilisent dans leur cours une algèbre linéaire figurative, mais pas de géométrie affine indépendante de l'algèbre linéaire (ceci correspond par exemple à ce que nous avons observé dans le manuel (Grifone 1990)). Bien qu'ils emploient eux-mêmes un nombre important de dessins, ils sont réticents quant à l'usage de dessins par les étudiants.

Dans le cas de *(S2)* (8 enseignants), l'absence (ou le faible nombre) de dessins employés entraîne la disparition de ce que nous avons appelé « algèbre linéaire figurative », puisque celle-ci est fondée sur des concepts figuratifs d'algèbre linéaire. Il s'agit donc d'enseignants ayant peu ou pas recours au géométrique pour introduire l'algèbre linéaire ; c'est au contraire l'algèbre linéaire qui sera utilisée ensuite pour fonder la géométrie affine. (Ceci rejoint l'usage observé dans le livre de Dieudonné (1964)). Il n'est pas surprenant de constater qu'ils sont réticents à l'emploi de dessins par les étudiants.

Les enseignants se rattachant à la tendance représentée par *(S3)* (12 enseignants) utilisent dans leur cours une algèbre linéaire figurative. Ils emploient de nombreux dessins, et sont favorables à l'emploi de dessins par les étudiants. Ils se prononcent de plus en faveur du recours à une géométrie affine antérieure à l'algèbre linéaire. Signalons cependant que les programmes actuellement en vigueur à l'Université de Rennes 1 ne prévoient pas d'enseignement de géométrie affine précédant celui d'algèbre linéaire. Donc les seuls recours à une géométrie antérieure à l'algèbre linéaire que de tels enseignants, exerçant dans cette université, pourront effectivement réaliser, reposeront sur la géométrie vue dans le secondaire.

Il est possible que la répartition entre les différentes tendances soit très différente si l'on considère l'ensemble du corps enseignant. En effet, nous n'avons obtenu de réponses que de la part d'un faible nombre d'enseignants. De plus, ceux-ci étaient suffisamment intéressés par notre recherche pour consacrer une heure à remplir le questionnaire ; ils ne constituent donc probablement pas une population réellement représentative.

Toutefois, nous trouvons significatif le fait que la tendance *(S1)* ne comporte que 4 enseignants. Il semble ainsi que le phénomène dominant ici soit l'opposition entre des enseignants qui vont faire peu de dessins, présenter la géométrie après l'algèbre linéaire, être plutôt opposés à l'emploi de dessins par les étudiants et des enseignants utilisant beaucoup de dessins, favorables à un cours de géométrie affine précédant l'algèbre linéaire, et à l'emploi de dessins par les étudiants. Ceci rappelle fortement les positions de Dieudonné, d'une part, et de Choquet, d'autre part. Les enseignants que nous avons interrogés étaient d'âges variés (de 25 à 65 ans environ). Ont-ils cependant été suffisamment marqués par des choix bourbakistes, ou par la réforme des mathématiques modernes (certains l'ont vécue comme enseignants, d'autres comme élèves), pour que cela se ressente dans leur enseignement actuel ?

On peut trouver naturel qu'il n'existe pas une quatrième tendance, constituée d'enseignants qui seraient favorables à un cours de géométrie précédant le cours d'algèbre linéaire, mais ne feraient que peu de dessins. En effet le choix d'un cours introductif de géométrie peut témoigner du désir de disposer d'un support visuel ; la géométrie affine introductive ne doit pas être purement théorique, sinon elle ne pourra pas contribuer à rendre l'algèbre linéaire plus concrète. En revanche le fait qu'il n'y ait pas, dans *(S1)*, un plus grand nombre d'enseignants ne s'explique guère que par cette influence possible des débats et des choix faits lors de la réforme des mathématiques modernes, qui a conduit à une opposition entre une présentation purement théorique de l'algèbre linéaire et une entrée par la géométrie. Il existe cependant d'autres approches possibles ; la tendance *(S1)* en est une, mais elle semble toutefois encore assez proche de *(S2)*, en particulier en ce qui concerne la défiance à l'égard de l'emploi de dessins par les étudiants.

Ceci nous fournit des pistes pour l'élaboration d'enseignements expérimentaux qui seraient réellement innovants, du moins en ce qui concerne le recours au géométrique ; nous détaillerons ces possibilités par la suite.

Quoi qu'il en soit ces tendances traduisent des attitudes très différentes, dont les conséquences sur le contenu du cours proposé sont certainement importantes. Ceci rejoint l'étude de manuels universitaires récents, effectuée au chapitre précédent, qui avait mis à jour diverses possibilités de recours à des modèles géométriques dans un cours d'algèbre linéaire ou bilinéaire

Il est fondamental pour notre étude d'observer les conséquences de ces divers phénomènes dans les pratiques des étudiants. Nous avons donc également interrogé ceux-ci ; nous allons présenter maintenant les choix que nous avons retenus pour cette partie de notre travail, et les résultats que nous avons obtenus.

2. Questionnaire aux étudiants

2.1 Présentation du questionnaire aux étudiants

Nous avons choisi d'interroger des étudiants de CAPES et de maîtrise ; ceux-ci ont en effet suivi l'intégralité de l'évolution décrite dans le chapitre précédent. De plus ils ont été au contact de différents enseignants (ils peuvent avoir rencontré jusqu'à huit enseignants en algèbre linéaire et bilinéaire durant les deux années de DEUG), et sont susceptibles d'avoir employé différents manuels. L'année de licence permet une maturation des notions rencontrées en DEUG ; dans le même temps, les enseignements reçus au lycée demeurent suffisamment proches pour exercer une influence non négligeable sur les pratiques des étudiants. Toutefois il fallait que le questionnaire soit soumis en début d'année universitaire, car l'étude de la géométrie faite pendant la préparation au CAPES aurait pu fortement modifier les réponses des étudiants.

2.1.1 Que peut-on observer dans un questionnaire aux étudiants ?

En ce qui concerne les étudiants, nous souhaitons effectuer des observations qui nous renseignent sur les deux axes suivants :

- Rôle du géométrique dans les pratiques des étudiants. Ici encore, nous ferons référence à la structure *(S)* issue des travaux de Fischbein, en tentant de caractériser les attitudes des étudiants par des cas particuliers de *(S)*.
- Lien entre le recours au géométrique, et les compétences en algèbre linéaire. Certaines structures, issues de *(S)*, sont-elles associées à des compétences, ou au contraire à des lacunes en algèbre linéaire ?

Nous tenterons donc en particulier d'observer :

Les conséquences des changements de niveaux de conceptualisation observés dans le chapitre précédent

Les connaissances du lycée subsistent-elles, ou ont-elles été remplacées par le nouveau type d'approche rencontré dans le cours d'algèbre linéaire ? Dans le cas où des connaissances de lycée subsistent, constituent-elles un support, une aide, une référence, ou, au contraire, une difficulté pour l'approche de certaines notions d'algèbre linéaire ? Ceci revient à déterminer si l'étudiant a recours à un éventuel modèle issu de la géométrie rencontrée au lycée, et le lien entre ce recours et les compétences de l'étudiant en algèbre linéaire.

L'emploi de dessins.

Les étudiants utilisent-ils des dessins en algèbre linéaire ? Les mêmes questions se posent au sujet des dessins et au sujet des situations de référence : quels sont-ils, à quelles parties de l'algèbre linéaire ou bilinéaire se rapportent-ils, quel est leur rôle ? Il est en particulier intéressant d'examiner des cas critiques : emploi de dessins dans des situations en dimension supérieure ou égale à quatre, et dans des situations issues de cadres différents : espaces de polynômes, de fonctions... Nous chercherons donc à déterminer, pour certaines notions d'algèbre linéaire, si elles apparaissent dans un concept figuratif construit par l'étudiant concerné.

L'emploi de « l'algèbre linéaire figurative » comme modèle paradigmatique

Nous nous interrogeons ici simultanément sur le contenu de l'élément que nous avons désigné comme « algèbre linéaire figurative », et sur l'emploi de celui-ci par les étudiants. Supposons par exemple que l'on considère la notion de projection (en algèbre linéaire générale), comme relevant de l'algèbre linéaire figurative. Alors la projection sur un plan selon une droite dans l'espace peut servir de référence pour des propriétés des applications linéaires : image, noyau, valeurs propres. Ceci rejoint la notion de « situation de référence » évoquée par Robert (1998). Les étudiants utilisent-ils effectivement de telles références ? Sans avoir l'ambition de dresser une liste exhaustive de celles-ci, nous pouvons chercher à décrire certaines d'entre elles, et à déterminer à quelles parties de l'algèbre linéaire et bilinéaire elles se rapportent : sous-espaces vectoriels, applications linéaires, espaces euclidiens, pour déterminer si un modèle issu de l'algèbre linéaire figurative peut plus particulièrement être mis à profit dans certaines parties de l'algèbre linéaire. Nous chercherons également à déterminer le rôle de ce support. En particulier, peut-il servir pour comprendre des propriétés ou résoudre des exercices donnés dans un cadre plus général, notamment au-delà de la dimension 3 ?

Choix des conditions de passage

Nous avons choisi de poser aux étudiants un questionnaire sur table, puis de les rencontrer individuellement pour un entretien. Ce choix était motivé d'une part par des raisons pratiques : certains étudiants auraient en effet pu être rebutés par un questionnaire trop long ; mais nous avons retenu cette forme avant tout parce qu'il nous semblait que seul un entretien individuel nous permettrait d'accéder aux véritables pratiques des étudiants. Le questionnaire fournissait alors quelques éléments d'analyse, mais servait surtout de support à l'entretien (et cet entretien devait donc se dérouler peu de temps après le questionnaire, afin que les étudiants aient encore ce dernier en tête).

2.1.2 Analyse a priori du questionnaire et de l'entretien

Le questionnaire comporte trois parties : dans la première, nous proposons aux étudiants deux exercices d'algèbre linéaire. Dans la seconde, nous les interrogeons à propos de la notion de projection. Dans la troisième, nous leur demandons de manière plus directe leur avis sur le lien géométrie-algèbre linéaire. A l'entretien, nous demandons d'une part des précisions sur toutes ces parties, et d'autre part, deux dessins (nous désignerons par : « partie 4 » les questions portant sur les dessins).

Nous présentons en annexe 3 le texte complet du questionnaire et de l'entretien. Lorsque notre analyse portera sur une question particulière, nous rappellerons le texte de celle-ci.

Comme nous l'avons signalé ci-dessus, nous avons choisi cette forme : questionnaire, suivi d'un entretien non seulement pour de simples contraintes de temps mais aussi pour pouvoir observer l'emploi de la géométrie dans les pratiques réelles des étudiants.

A cet égard, et quelle que soit la partie du questionnaire concernée, l'utilisation de dessins sera fondamentale pour notre étude.

2.1.2.1 A propos de l'utilisation des dessins

Nous noterons ainsi systématiquement si un dessin a été employé ou non, et s'il a été fait spontanément ou sur demande lors de l'entretien ; lors de l'emploi d'un dessin, nous examinerons plus précisément les deux aspects suivants :

Caractère plus ou moins « affine » du dessin

Nous noterons si le dessin utilisé comporte des points (nous distinguerons un dessin ne comportant que des points et un dessin comportant des points comme extrémités de vecteurs), s'il y figure un repère, et si les vecteurs éventuellement tracés sont ou non de même origine. L'emploi d'un dessin affine ne nous permet pas d'affirmer que l'étudiant a recours à un modèle issu de la géométrie du lycée. Il est en effet possible, suivant le cursus de l'étudiant, que celui-ci ait suivi un cours de géométrie affine dans le supérieur : c'est le cas des étudiants venant de classes préparatoires, mais également d'autres comme ceux qui ont suivi le module « mathématiques pour le CAPES » en licence à l'Université de Rennes 1. Nous ne pouvons pas non plus totalement exclure le cas d'enseignants de l'université illustrant leur cours d'algèbre linéaire à l'aide de dessins que nous considérons comme « affines ».

Rôle du dessin

C'est l'entretien qui nous permet d'accéder à ce rôle. Suivant les parties du questionnaire : exercices, ou présentation des projections, nous noterons en particulier si le dessin est utilisé comme simple illustration, comme moyen de se rappeler une propriété, pour mieux comprendre un énoncé, pour chercher des exemples ou contre-exemples, ou encore comme source de conjectures.

Notons qu'il est également possible que le dessin soit effectué au brouillon, ou demeure sous forme d'image mentale, tout en fournissant la réponse au questionnaire ; l'entretien nous permettra de repérer de telles pratiques.

Nous noterons également pour tous les dessins employés pour illustrer des projections ou des symétries s'ils représentent une projection ou symétrie quelconque, ou bien une projection ou symétrie orthogonale.

2.1.2.2 Partie I : Les exercices

Les deux exercices choisis sont d'un niveau élémentaire, et ont été probablement rencontrés en séance de travaux dirigés. Ils concernent des parties différentes de l'algèbre linéaire et bilinéaire : familles libres d'une part, endomorphismes et matrices d'autre part.

Exercice 1
Soient u, v, w trois vecteurs deux à deux non colinéaires. La famille {u, v, w} est-elle libre ?

Rappelons que nous avons déjà employé et analysé cet exercice pour notre questionnaire aux enseignants.

Il peut être abordé en essayant de vérifier la définition formelle d'une famille libre, ou bien en donnant directement un contre-exemple. Dans le cas de l'emploi d'un contre-exemple, celui-ci peut être issu du calcul vectoriel dans le plan ou l'espace, ou rester formel (s'il s'agit par exemple de deux vecteurs non colinéaires et de leur somme), ou encore être énoncé dans le cadre analytique de $\mathbb{R}^2$ ou $\mathbb{R}^3$.

La résolution sera éventuellement accompagnée d'un dessin ; l'entretien permettra de déterminer si ce dessin a été à l'origine du contre-exemple fourni, ou s'il joue un simple rôle d'illustration. Notons que le dessin peut être également une source d'erreurs, si trois vecteurs deux à deux non colinéaires évoquent par exemple le dessin d'une base de l'espace.

Il s'agit d'un exercice très classique, habituellement proposé en première année de DEUG ; c'est une situation relativement élémentaire, dans laquelle nous pourrons observer si les étudiants disposent de représentations simples de situations de référence en dimension 2 ou 3, et s'ils utilisent celles-ci pour se donner une idée de la réponse, ou pour trouver un contre-exemple.

Exercice 2

Donner une matrice 4x4 qui représente une symétrie.

La forme de la question permet une grande variété de réponses : aucune contrainte n'est imposée sur les caractéristiques de la symétrie, ni sur celles de la matrice en dehors du fait qu'elle doit effectivement représenter une symétrie, et aucune demande explicite de justification n'est formulée.

Différentes démarches peuvent être adoptées pour fournir une matrice qui réponde à la question.

Celles-ci dépendent notamment de la caractérisation employée pour la notion de symétrie. Il peut s'agir d'une caractérisation de type formel : une symétrie est un endomorphisme vérifiant sos=Id, donc il suffit de donner une matrice dont le carré est égal à la matrice identité ; ou $s(x)= x_F-x_G$, si s est la symétrie par rapport à F parallèlement à G, ce qui donne soit les images des vecteurs d'une base de l'espace formée de vecteurs de F et de G, soit l'expression analytique de s, et permet donc de remplir la matrice.

Mais la caractérisation employée peut également être de nature beaucoup plus intuitive : les images des vecteurs de base, ou l'expression analytique d'une symétrie peuvent être ainsi utilisées directement, sans reposer sur une caractérisation formelle ; il faudra alors, lors de l'entretien, tenter de déterminer l'origine de ces propriétés. Elles peuvent notamment avoir été déduites de propriétés lues sur un dessin représentant l'effet d'une symétrie en dimension 2 ou 3.

Il est également possible de partir de la forme, connue, d'une matrice de symétrie dans $\mathbb{R}^2$ ou $\mathbb{R}^3$ et d'étendre celle-ci à la dimension 4, en rajoutant un coefficient égal à 1 ou −1 à la diagonale, et en complétant la matrice par des coefficients nuls, sans utiliser de caractérisation non matricielle pour les symétries de $\mathbb{R}^4$.

Nous chercherons donc lors de l'entretien, au cas où ces informations ne figurent pas sur le questionnaire, à déterminer quelle caractérisation (plus ou moins intuitive) de la symétrie a été employée pour remplir la matrice. Nous tenterons d'observer si des connaissances sur les symétries en dimension 2 ou 3 ont été utilisées et prolongées à la dimension 4 et en particulier si un dessin, ou une image mentale ont servi à rappeler ou à traduire ces connaissances.

2.1.2.3 Partie II : Les projections

Vous devez présenter à un étudiant de fin de première année de DEUG la notion de projection sur un sous-espace vectoriel, en expliquant ce qu'est une telle projection, et quelles sont ses propriétés. Ecrivez ci-dessous (et éventuellement au verso de cette page) tout ce que vous lui diriez à ce sujet.

Le choix de formulation de la question : explications à un étudiant de DEUG, devrait permettre l'expression de propriétés dont les étudiants se souviennent, sans prendre une forme trop rigide tendant de reproduire un cours « idéal ».

Il est possible qu'un étudiant intègre spontanément un dessin à ses explications.

Si l'étudiant n'a pas fait de dessin lors du questionnaire, nous lui demandons lors de l'entretien s'il associe un dessin à la notion de projection. Dans le cas d'une réponse positive, nous demandons s'il considère que certaines propriétés peuvent être lues sur ce dessin.

Nous faisons l'hypothèse que le dessin effectué figurera le plus souvent une projection orthogonale.

Quel que soit le dessin retenu, les propriétés qui peuvent y être lues sont celles que nous avions signalées au chapitre précédent : définition de la projection sur un sous-espace F suivant un supplémentaire G de F ; pop=p ; Kerp=G, Imp=F, Kerp et Imp sont en somme directe, F = Ker(p-Id). De plus sur un dessin représentant une projection orthogonale on peut lire des propriétés spécifiques à celle-ci : distance à un sous-espace, décomposition comme somme de vecteurs orthogonaux.

Les propriétés citées ci-dessus, ainsi que la définition de projection, peuvent être également mentionnées sans recours à un dessin.

2.1.2.4 Partie III : Généralités sur l'usage de la géométrie

Un étudiant de fin de première année de DEUG vous dit que, selon lui, la géométrie ne sert à rien dans les modules d'algèbre.

Vous lui répondez :

1) Evidemment, à quoi veux-tu que ça serve ? ☐

2) Tu as tort, ça sert beaucoup ☐

3) Ca n'est pas indispensable mais ca peut parfois être utile ☐

4) Tu changeras d'avis après la deuxième année de DEUG ☐

5) Tu changeras d'avis après la licence ☐

Indiquez votre ou vos choix en cochant la ou les cases correspondantes, et écrivez ci-dessous vos arguments.

Un étudiant considérant que la géométrie peut avoir une utilité en algèbre (réponses entre 2 et 5) pourra préciser ensuite à quels endroits du cours d'algèbre il a pu constater une utilisation de la géométrie, et en quoi celle-ci était alors utile.

Si ces précisions n'ont pas été données dans le questionnaire, nous les demandons lors de l'entretien ; nous noterons alors plus particulièrement si l'étudiant considère que la géométrie peut servir dans la première partie du cours d'algèbre linéaire, lors de l'introduction des notions d'espace vectoriel, sous-espace, famille libre, base ; ou dans la partie qui concerne les applications linéaires et les matrices, ou enfin dans la partie algèbre bilinéaire et étude des espaces euclidiens. Nous chercherons également à préciser ce qu'un étudiant désigne par « géométrie » dans ce contexte.

Nous mettons l'accent lors de l'entretien sur le rôle des dessins (mais ceci peut également conduire à discuter la question de situations géométriques de référence). Un étudiant peut considérer qu'un dessin est utile uniquement lors de l'introduction d'une notion ; il y fera éventuellement référence par la suite pour se souvenir de certaines propriétés. L'emploi de dessins peut également être plus systématique, pour aider à la compréhension d'un théorème mais également à la résolution d'un exercice.

Cette partie du questionnaire permet aussi de préciser quels souvenirs ont les étudiants de l'emploi de dessins par leurs enseignants : emploi plus ou moins fréquent, comme illustration après l'énoncé d'une notion générale ou comme support à l'introduction d'une notion.

2.1.2.5 Partie IV : Les dessins

Nous désignons ici par « Partie IV » la seconde partie de l'entretien, dans laquelle nous demandons aux étudiants d'illustrer par un dessin certaines propriétés ou notions d'algèbre linéaire, ou d'expliquer pourquoi ils ne peuvent trouver d'illustration qui leur paraisse satisfaisante.

1) Soient P, Q et R les trois polynômes définis par $P(X)= X$, $Q(X)=X^2$ et $R(X)=X^3$; la famille { P, Q, R} est libre.

Pour cette propriété deux principaux types d'illustration peuvent être proposés : un dessin figurant trois vecteurs non coplanaires, représentant une famille libre à trois éléments ; ou les courbes représentatives des fonctions polynômes associées. Dans ce derniers cas la liberté de la famille ne peut être mise en évidence par le dessin ; celui-ci illustre les polynômes choisis et non la propriété proposée. C'est pour éviter un recours trop fréquent à un dessin de ce type que nous avons proposé des polynômes de préférence à des fonctions ; toutefois la possibilité d'un tel dessin subsiste, car les polynômes et les fonctions polynômes sont très étroitement associés, et parfois même confondus, par les étudiants. Or l'idée de dessin, associée à celle de fonction, suggère celle de courbe représentative, même dans un cadre d'algèbre linéaire[3].

Par ailleurs, les étudiants peuvent considérer qu'aucun dessin ne peut être fait ici parce que les courbes représentatives ne traduisent pas la liberté de la famille, et qu'il leur semble abusif d'associer à des polynômes des dessins de vecteurs.

Nous avons choisi de demander un dessin associé à une propriété portant sur la notion de famille libre de préférence à la notion de base car nous faisons l'hypothèse que le concept figuratif correspondant à la notion de base est construit par une majorité d'étudiants (un dessin illustrant une base est en effet rencontré dès le lycée), ce qui n'est peut-être pas le cas de la notion de famille libre. Il est possible que la propriété « famille libre » soit immédiatement associée à celle de « base » et donc au dessin correspondant ; la situation d'entretien nous permettra d'observer une telle association. Mais la famille de polynômes choisie : $\{X, X^2, X^3\}$, n'est pas fréquemment rencontrée en tant que base, l'espace engendré ne faisant pas partie des sous-espaces « classiques » proposés aux étudiants ; le passage de « famille libre » à « base » n'est donc pas immédiat ici.

2) Un endomorphisme diagonalisable

Cette notion peut être illustrée par un premier type de dessin, se référant à la définition même d'endomorphisme diagonalisable : deux ou trois vecteurs formant une base, des vecteurs colinéaires aux précédents, associés à un commentaire du type : $f(e_1)=\lambda_1 e_1$, $f(e_2)=\lambda_2 e_2$...

La formulation de l'énoncé laisse également la possibilité de choisir un exemple précis d'endomorphisme diagonalisable, dans un espace de dimension inférieure ou égale à trois.

L'utilisation d'un tel exemple repose sur la connaissance de situations de référence de nature géométrique : les homothéties (voire l'identité), les projections et les symétries peuvent être connus comme endomorphismes diagonalisables et associées à un dessin

[3] Voir à ce sujet l'article de Hillel dans [Dorier 97]

(c'est pourquoi, lors de l'entretien si l'étudiant ne fait pas spontanément de dessin nous suggérons l'emploi d'un exemple particulier d'endomorphisme).

Un étudiant peut également ne proposer aucun dessin pour illustrer cette notion, s'il ne dispose ni de situation de référence, ni de figure plus généralement associée à la notion de vecteur propre.

2.2 Analyse a posteriori du questionnaire aux étudiants

Au total, 56 étudiants de CAPES et de maîtrise ont rempli le questionnaire ; 47 d'entre eux ont accepté de participer à l'entretien. Ce sont les réponses de ces 47 étudiants (questionnaire plus entretien) que nous allons employer pour l'analyse a posteriori. Rappelons que ces étudiants sont issus de divers cursus : classes préparatoires, DEUG ou licence de différentes universités. Tous ont normalement rencontré les notions et propriétés d'algèbre linéaire et bilinéaire qui sont en jeu dans ce questionnaire ; en revanche, ils peuvent avoir suivi ou non des enseignements de géométrie affine. D'autre part, ils sont susceptibles d'avoir rencontré des enseignants utilisant de diverses manières la géométrie dans leur cours d'algèbre linéaire. Nous ne pouvons donc pas établir d'historique, même sommaire, des enseignements reçus par les étudiants que nous interrogeons.

Nous allons tout d'abord examiner les réponses question par question ; nous présenterons ensuite les tendances se dégageant de l'ensemble du questionnaire.

2.2.1 Analyse question par question

Pour les deux exercices de la partie I, et pour la partie II du questionnaire, nous présentons tout d'abord les critères retenus pour l'analyse. Nous donnons ensuite les données brutes correspondantes : pourcentages de réponses correspondant à chaque critère, et corrélations entre critères. Pour affiner les observations provenant des données brutes, nous avons effectué des analyses en composantes principales, ainsi que des classifications hiérarchiques ascendantes (méthode « ward ») des individus concernés[4]. Les résultats de ces analyses sont donnés en annexe 4 ; ils n'ont cependant servi que de support pour notre recherche, le faible nombre d'individus nous permettant d'effectuer un retour systématique aux questionnaires remplis. Nous ne détaillons donc pas les résultats statistiques ; il nous semble plus intéressant de présenter les différents groupes d'étudiants que ces analyses nous ont conduite à distinguer dans chaque cas.

Les parties III et IV ne se prêtent pas à une étude statistique ; pour ces parties, nous présentons simplement les critères retenus et les données brutes correspondantes.

[4] Ces analyses ont été effectuées à l'aide du logiciel statistique « R ».

2.2.1.1 Partie 1, exercice 1

Exercice 1
Soient u, v, w trois vecteurs deux à deux non colinéaires. La famille {u, v, w} est-elle libre ?

Critères retenus

Pour l'analyse de l'exercice 1, nous retenons les critères suivants :

- *Réussite*
- *Niveau de justification* : nous distinguerons ici les réponses complètement justifiées, celles qui comportent un contre-exemple et dans lesquelles il ne manque que la justification du fait que les trois vecteurs choisis sont deux à deux non colinéaires (fait qui est par ailleurs explicitement signalé dans l'énoncé), et les autres réponses, dans lesquelles la justification est très incomplète (le cas d'absence totale de justification ne se rencontre pas). Nous n'examinerons les justifications fournies que dans les questionnaires où l'exercice a été réussi.
- *Représentation mentale* : nous noterons si les étudiants ont utilisé une image mentale dans la résolution de l'exercice. Il s'agit uniquement d'étudiants qui n'ont pas fait de dessin sur leur questionnaire, mais qui ont déclaré lors de l'entretien s'être représenté la situation.
- *Registre employé* : Nous retenons cinq types de registres possibles, dont certains peuvent être simultanément présents dans une même réponse : le registre graphique, le registre tableau, le registre de la langue naturelle, le registre symbolique de type « *u* », et le registre symbolique de type *AB* (c'est à dire faisant référence à des représentants de vecteurs). Le registre graphique correspond donc à l'emploi d'un dessin, le registre tableau à celui d'un contre-exemple dans $\mathbb{R}^2$ ou $\mathbb{R}^3$. Une réponse comme « dans un espace de dimension 2, trois vecteurs sont toujours liés » sera rattachée au registre de la langue naturelle. Une réponse comportant un contre-exemple du type {u,v,u+v} sera rattachée au registre symbolique u ; une réponse comportant des représentants de vecteurs : $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ sera rattachée au registre symbolique *AB*.

Premières constatations

Nous allons dans cette partie décrire les caractéristiques qui se dégagent d'une analyse brute des questionnaires. Donnons tout d'abord les effectifs correspondant à chacun des critères retenus.

Critère *(Effectif total : 47)*	Effectif	Pourcentage
Résultat juste	38	81%
Justification complète	7	15%
Vecteurs deux à deux non colinéaires non justifié	25	53%
Justification très incomplète	7	15%
Représentation mentale	12	25%
Registre graphique	15	32%
Registre tableau	18	38%
Registre langue naturelle	2	4%
Registre symbolique *u*	24	51%
Registre symbolique *AB*	4	8%

Taux de réussite

On peut constater à la lecture de ce tableau que le taux de réussite (81 %) est élevé ; cependant cet exercice étant élémentaire, on en retiendra surtout qu'un tel exercice pose encore problème à un étudiant sur cinq après une licence de mathématiques.

Par ailleurs, peu d'étudiants parmi ceux qui fournissent la bonne réponse en donnent une justification complète (15%).

Emploi de représentations

12 étudiants déclarent avoir employé une représentation mentale, qui leur a donné l'idée du contre-exemple choisi. En y ajoutant les 15 étudiants qui ont effectivement fait un dessin, nous pouvons affirmer que la résolution de cet exercice repose pour la plupart des étudiants (57%) sur une certaine forme d'intuition géométrique, que l'on peut rattacher à l'emploi d'un modèle analogique figuratif en utilisant les termes de Fischbein.

Autres critères

C'est l'emploi du registre symbolique *u* qui domine ; il s'agit en effet du registre de l'énoncé, les difficultés qu'éprouvent les étudiants à changer de registre expliquent donc ce choix.

Le registre tableau est lui aussi fréquemment employé (notons que tous les étudiants qui l'emploient donnent la bonne réponse ; en effet, il n'apparaît que dans des contre-exemples).

Nous allons maintenant étudier les liens entre les différents critères ; donnons tout d'abord la matrice des corrélations associées (les critères, donnés par des abréviations, sont présentés dans l'ordre du tableau ci-dessus).

	Réus	Just. cp.	Vect. non cl	Just. incp	Rep. ment	Reg. grap.	Reg. Tab.	Reg. lgnat	Reg. sy.*u*	Reg. sy. *AB*
Réus.	1									
Just. cp.	0.20	1								
Vect. non cl	**0.50**	-0.43	1							
Just. incp.	0.20	-0.17	**-0.43**	1						
Rep. ment.	0.04	-0.11	0.08	0.03	1					
Reg. grap.	0.22	-0.03	0.03	0.23	**-0.40**	1				
Reg. tab.	0.29	0.14	0.29	-0.22	0.11	**-0.38**	1			
Reg. lgnat.	0.10	**0.50**	-0.21	-0.09	0.12	-0.14	-0.17	1		
Reg. sy.*u*	**-0.37**	**-0.31**	-0.28	0.29	-0.11	**0.30**	**-0.84**	-0.21	1	
Reg. sy. *AB*	0.15	-0.13	0.15	0.09	-0.18	**0.44**	-0.25	-0.06	-0.01	1

Cette matrice comporte peu de coefficients de valeur absolue élevée (nous avons indiqué en gras les coefficients dont la valeur absolue dépasse 0,3). On note le fort coefficient négatif entre registre symbolique u et registre tableau ; ceci était prévisible, car les étudiants n'ont pas associé ces deux registres. Par ailleurs les deux étudiants ayant utilisé exclusivement la langue naturelle ont donné des réponses complètement justifiées (d'où le coefficient 0,504), les défauts de justification étant associés à l'emploi d'un contre-exemple.

Nous n'utiliserons les autres coefficients que pour étayer les remarques faites par observation directe des réponses.

Emploi de représentations et autres registres

Parmi les étudiants ayant employé un dessin ou une représentation mentale, 16 ont utilisé par ailleurs le registre symbolique *u*, 4 le registre symbolique *AB*, et 8 le registre tableau ; il ne semble donc pas que l'emploi d'une représentation influe de manière significative sur le choix du registre.

En revanche, le choix de certains registres semble conditionner l'emploi ou l'absence de représentations.

Les 4 étudiants ayant employé le registre symbolique *AB* ont tous fait un dessin : ils ont représenté un triangle *ABC* dont ils disent qu'il est non aplati, et ils expriment ensuite l'un des vecteurs comme différence des deux autres, soit par la relation de Chasles, soit avec un retour au registre symbolique u.

D'une manière générale, il semblerait que l'emploi du registre tableau soit peu associé à celui d'une représentation : seuls deux étudiants ont accompagné leur contre-exemple dans $\mathbb{R}^2$ d'un dessin, six déclarent s'être appuyés sur une image mentale tandis que 10 étudiants ont directement donné un contre-exemple dans $\mathbb{R}^2$ ou $\mathbb{R}^3$, auquel ils associaient uniquement un calcul en coordonnées. Ceci est confirmé par le coefficient de corrélation négatif entre registre graphique et registre tableau.

Emploi de représentations (images mentales ou dessin) et réussite

Parmi les 27 étudiants ayant utilisé une image mentale ou un dessin, seuls 3 ont donné une mauvaise réponse (11%) contre 6 étudiants parmi les 20 qui ont déclaré n'avoir utilisé aucune image (30%).

Les trois étudiants qui ont échoué malgré l'emploi d'une représentation ont associé à l'idée de famille de vecteurs deux à deux non colinéaires l'image d'une base de l'espace, d'où la conclusion : la famille est libre. C'est une difficulté habituelle dans l'emploi de représentations : ces étudiants ont retenu des propriétés non pertinentes de l'image qu'ils associaient à la représentation. Signalons que pour deux de ces étudiants, il s'agissait d'une simple représentation mentale, sans dessin.

Les autres étudiants ayant échoué ont pour la plupart utilisé la définition formelle de famille libre (et le registre symbolique *u*).

Justifications et registres

Parmi les étudiants ayant donné une justification complète, on trouve les deux étudiants qui ont utilisé le registre de la langue naturelle, trois étudiants ayant donné un contre-exemple dans $\mathbb{R}^2$ et un étudiant ayant employé le registre symbolique u. En fait, la plupart des étudiants qui donnent un contre-exemple ne jugent pas utile de démontrer que les vecteurs choisis sont bien deux à deux non colinéaires ; en effet, cette propriété peut sembler évidente, au vu d'un dessin, dans une situation du type {u, v, u+v} ou en lisant les coordonnées de deux vecteurs de $\mathbb{R}^2$.

De plus parmi les 7 étudiants qui ne précisent pas dans leur contre-exemple que les vecteurs choisis sont deux à deux non colinéaires, 4 utilisent le registre symbolique associé au registre graphique : ce sont des réponses du type {u, v, u+v}, accompagnées d'un dessin, et où la non-colinéarité peut paraître tellement évidente qu'elle n'a pas à être mentionnée.

Tendances observées

L'analyse en composantes principales, et la classification hiérarchique, ont servi de support aux regroupements que nous présentons ici.

Nous distinguons trois groupes d'étudiants, rassemblant au total 33 individus (soit environ 70% des étudiants interrogés, les autres n'appartenant pas clairement à une tendance identifiable).

Groupe 1 : Emploi d'un registre tableau sans registre graphique, avec une justification au moins partielle

15 étudiants font partie de ce groupe ; tous ont donné la bonne réponse en utilisant un contre-exemple dans $\mathbb{R}^2$ ou $\mathbb{R}^3$. Trois d'entre eux ont donné une justification complète et 12 ont simplement négligé de montrer que les vecteurs choisis étaient deux à deux non colinéaires, mais l'ont tout de même signalé ; 6 ont utilisé une représentation mentale (pour ces six, la justification n'était pas complète).

Groupe 2 : Emploi du registre graphique

Nous classons 11 étudiants dans ce groupe. Tous ont donné la bonne réponse, et utilisé le registre graphique. Aucun n'a donné de justification complète ; parmi eux se trouvent les quatre étudiants qui ont employé le registre symbolique AB, et 9 ont employé le registre symbolique u.

Groupe 3 : Echec et registre symbolique u

Ce groupe comporte 7 étudiants, qui ont tous échoué à l'exercice et utilisé le registre symbolique u. Deux d'entre eux se sont de plus appuyés sur des représentations mentales.

Conclusion

Plusieurs éléments ressortent de cette analyse. Tout d'abord la présence d'étudiants incapables de se dégager du registre formel de l'énoncé. Ces étudiants n'essaient visiblement pas de mettre la conjecture à l'épreuve d'exemples (correspondant ou non à des images), et échouent à l'exercice.

Ensuite, parmi les étudiants qui donnent la bonne réponse, l'analyse en composantes principales nous a permis de distinguer deux principaux groupes d'étudiants : un premier groupe proposant des réponses fondées sur le calcul, bien justifiées, et un second groupe donnant des réponses utilisant le registre graphique et moins bien justifiées.

Il est possible que dans ce second groupe se trouvent des étudiants qui ont bien compris et assimilé l'algèbre linéaire, et jugent que pour un exercice aussi élémentaire, un dessin accompagné d'un bref commentaire constitue une réponse suffisamment éloquente (voir à ce sujet ce que nous avons dit du même exercice, dans le questionnaire aux enseignants). Mais il peut y avoir dans le même groupe des étudiants qui, ayant perçu la réponse grâce à un dessin, sont incapables de formaliser celle-ci ; on peut se demander à quel point ces étudiants dépendent du dessin, et comment ils se comporteront face à un exercice dans lequel le dessin ne donne pas un accès direct à la solution, par exemple en dimension 4 (la question peut en particulier être posée à propos des étudiants qui emploient le registre symbolique AB, faisant ainsi référence à de la géométrie affine et non à de l'algèbre linéaire proprement dite).

Ce passage à la dimension 4 sera peut-être plus facilement réussi par les étudiants du premier groupe, s'ils continuent à utiliser des coordonnées.

Dans le premier groupe (utilisation de coordonnées) peuvent là encore se trouver des étudiants qui ont bien compris et assimilé l'algèbre linéaire, et choisissent un contre-exemple dans $\mathbb{R}^2$ ou $\mathbb{R}^3$ pour la simplicité de celui-ci. Mais il peut également y avoir dans ce groupe des étudiants se limitant au registre tableau par manque de compétences en algèbre linéaire formelle. De même l'absence d'emploi, par ces étudiants, du registre graphique peut provenir de la simplicité du contre-exemple ou d'une incapacité à manier des représentations en algèbre linéaire.

Il ne s'agit donc pas de conclure à une opposition entre des étudiants qui dessinent, mais manquent de rigueur, et des étudiants qui répondent correctement en employant le registre tableaux. L'examen des réponses aux autres parties du questionnaire et de l'entretien nous permettra de faire des distinctions suffisamment fines (voir le bilan du questionnaire, p.253).

2.2.1.2 Partie 1, exercice 2

Exercice 2
Donner une matrice 4x4 qui représente une symétrie.

Critères retenus

Pour analyser les réponses à l'exercice 2 nous avons retenu les critères suivants :

- *Réussite* : nous considérons que l'exercice a été réussi dès que le questionnaire comporte en réponse à la question posée une matrice qui est effectivement une matrice de symétrie (matrice dont le carré est l'identité), cela même en absence de toute justification.
- *Symétrie centrale* : nous désignons par ce critère la présence dans les réponses des étudiants (au questionnaire ou à l'entretien) du terme « symétrie centrale », ou « symétrie par rapport à O » pour caractériser l'application dont ils ont donné la matrice.
- *Symétrie Algèbre Linéaire* : nous désignons par ce critère la présence dans les réponses des étudiants (au questionnaire ou à l'entretien) de l'expression :

« symétrie suivant...par rapport à... », ou « symétrie orthogonale par rapport à » pour caractériser l'application dont ils ont donné la matrice. En effet de telles expressions ne peuvent provenir du cours de géométrie du lycée.

- *Dessin affine* : nous caractérisons ainsi les réponses des étudiants qui ont fait au questionnaire ou à l'entretien un dessin représentant une symétrie qui agit sur des points (un tel dessin comportera de plus fréquemment un système d'axes).
- *Dessin vectoriel* : nous caractérisons ainsi les réponses des étudiants qui ont fait un dessin au questionnaire ou à l'entretien, dessin représentant une symétrie qui agit sur des vecteurs.
- *Coordonnées* : ce critère nous servira à désigner les réponses des étudiants qui ont complété la matrice de la symétrie à partir de l'effet de celle-ci sur un élément de $\mathbb{R}^4$ représenté par ses coordonnées (x,y,z,t).
- *Base* : ce critère nous servira à désigner les réponses des étudiants qui ont complété la matrice de la symétrie à partir de l'effet de celle-ci sur les vecteurs d'une base de $\mathbb{R}^4$.

Nous avions initialement procédé à une analyse de cet exercice en examinant également d'autres critères, notamment l'emploi du registre graphique avant l'entretien, et l'emploi de la caractérisation des symétries par la relation *sos=Id*, critères que nous avions soulignés lors de l'analyse a priori. Mais ils ne correspondent en fait qu'à un faible effectif d'étudiants, et ne sont pas corrélés avec les autres variables ; c'est pourquoi nous avons choisi de ne pas les intégrer à l'analyse en composantes principales ; cependant nous aurons l'occasion par la suite de revenir en particulier sur l'interprétation de l'emploi de la propriété *sos=Id.*

Premières constatations

Donnons tout d'abord quelques résultats extraits de l'analyse brute des données.

Nous rassemblons dans le tableau ci-dessous les effectifs et les pourcentages correspondants à chacun des critères.

Critère *(Effectif total : 47)*	Effectif	Pourcentage
Réussite	41	87 %
Symétrie centrale	16	34 %
Symétrie AL	16	34 %
Dessin affine	9	19 %
Dessin vectoriel	11	23 %
Coordonnées	16	34 %
Base	17	36 %

Taux de réussite

L'exercice a été bien réussi, puisque seulement 6 étudiants ont échoué, c'est à dire n'ont donné aucune matrice, ou bien ont proposé une matrice qui n'était pas une matrice de symétrie.

Parmi ces étudiants, deux ont fait une confusion entre symétrie et matrice symétrique ; ils ont donné une matrice symétrique ne représentant pas une symétrie. Deux autres ont voulu généraliser à partir de souvenirs de la description du groupe orthogonal en dimension 2 ou 3 et ont donné des matrices contenant des expression du type $cos\theta$ et $sin\theta$ mais les applications obtenues étaient en fait des rotations.

Enfin deux étudiants ont dit qu'ils ne connaissaient pas de symétrie au-delà de la dimension 3, une étudiante allant jusqu'à écrire que le terme symétrie étant géométrique, on ne l'employait qu'en dimension 2 ou 3.

Symétrie centrale

La matrice que l'on retrouve le plus souvent dans les réponses est la matrice de –Id (matrice diagonale avec des termes – 1 sur la diagonale). Certains étudiants obtiennent cette matrice à partir de la caractérisation sos=Id, sans référence géométrique ; mais la plupart l'interprètent comme la matrice d'une symétrie centrale de centre un point O considéré comme origine. Or le terme symétrie centrale est peu ou pas utilisé en algèbre linéaire ou bilinéaire, comme nous avons pu le constater dans les analyses de manuels ; en revanche cette notion est longuement étudiée dans l'enseignement secondaire. On peut donc supposer que ces étudiants n'ont pas rencontré, ou ne se rappellent pas avoir rencontré une notion générale de symétrie en dimension quelconque ; ils font alors appel à des souvenirs du secondaire, la symétrie centrale leur paraissant plus simple à généraliser et à interpréter matriciellement (pour des raisons que nous discuterons ci-dessous) que les symétries qui ont pu être vues en dimension 2 ou 3 en algèbre linéaire ou bilinéaire.

Coordonnées ou base

Lors de l'étude de la représentation d'une application linéaire par une matrice, les étudiants apprennent que la matrice d'une application linéaire peut être déterminée à partir de l'expression analytique de l'application, en utilisant une relation du type MX=Y, ou en interprétant les colonnes de la matrice comme les images des vecteurs de base. Ici ces deux procédures ont été utilisées (par sensiblement le même nombre d'étudiants pour l'une ou l'autre) avec un argument du type : une symétrie centrale change le signe de toutes les coordonnées, ou envoie les vecteurs de base sur leurs opposés ; une symétrie change le signe d'une coordonnée et laisse les autres inchangées, ou transforme un vecteur en son opposé alors que les autres restent stables...

La première procédure est plus analytique, alors que la seconde conduit réellement à se représenter l'action de l'application sur les vecteurs de la base choisie ; nous verrons que ces critères sont intéressants en particulier à cause de corrélations importantes avec d'autres.

Dessin affine ou vectoriel

Seulement quatre étudiants avaient utilisé le registre graphique lors de leur réponse au questionnaire (2 affines, 2 vectoriels).

Lors de l'entretien, nous avons systématiquement demandé à chaque étudiant s'il pouvait associer un dessin à l'application dont il avait donné la matrice ; 16 étudiants ont alors fait un dessin (soit au total 42 % faisant un dessin), dont 7 dessins affines et 9 dessins vectoriels.

Les autres étudiants ont considéré que le fait que la situation ait lieu en dimension 4 les empêchait de fournir une illustration.

Nous allons maintenant examiner les liens possibles entre ces différents critères, en utilisant la matrice de corrélations correspondante.

	Réuss.	Sym. Cent.	Sym. AL	Dess. Aff.	Dess. Vect.	Coord.	Bas e
Réus.	1						
Sym. Cent	0,174	1					
Sym. AL	**0,300**	**-0,421**	1				
Dess. Aff	-0,100	-0,007	-0,235	1			
Dess. Vect.	0,231	-0,291	**0,663**	-0,269	1		
Coord.	**0,300**	**0,337**	-0,232	**0,449**	-0,291	1	
Base	0,190	-0,167	**0,580**	-0,254	**0,525**	**-0,541**	1

Nous avons fait figurer en caractères gras dans cette matrice tous les coefficients supérieurs à 0,3.

Certains coefficients négatifs sont des conséquences naturelles des choix de critères : ainsi, un étudiant parlant de symétrie centrale n'emploie pas l'expression « symétrie par rapport à...suivant... » ; de même un étudiant employant les images des vecteurs de base n'utilise pas l'expression analytique de la symétrie. Nous allons essentiellement nous intéresser à des corrélations entre critères de natures différentes : dessin, procédure employée pour remplir la matrice, symétrie choisie. Ceci nous amène en fait à effectuer deux regroupements de trois critères chacun.

Symétrie algèbre linéaire-Dessin vectoriel-Base

Ces trois critères présentent deux à deux des corrélations positives importantes. Ceci peut s'expliquer par le fait que des étudiants ayant une certaine familiarité avec la notion de symétrie dans un contexte d'algèbre linéaire ou bilinéaire vont sans doute fournir des réponses comportant au moins deux de ces trois facteurs. De tels étudiants emploient des termes et des procédures apprises à l'université, et qui n'ont pas été rencontrés dans le secondaire (en particulier dessin représentant une symétrie agissant sur des vecteurs n'est jamais rencontré au lycée).

Nous pouvons de plus noter que parmi les 16 étudiants répondant au critère « symétrie AL », 10 font un dessin (vectoriel) soit 62 %, alors que seulement 9 des 31 autres étudiants font un dessin (soit 29 %).

Symétrie centrale-Dessin affine-Coordonnées

Ces trois critères, qui sont également corrélés positivement, semblent caractériser à l'opposé des précédents des étudiants faisant appel à des souvenirs de lycée. La notion de symétrie centrale, comme le dessin affine associé, ne sont pas rencontrés dans les enseignements d'algèbre linéaire. Quant à la détermination de la matrice à l'aide de l'expression analytique de la symétrie, bien que rencontrée en DEUG, fait appel à la notion de coordonnées familière aux élèves de lycée. Le fait que le critère « coordonnées » soit positivement corrélé avec des critères clairement liés à la géométrie du lycée confirme cette interprétation.

Tendances observées

Les résultats de l'analyse en composantes principales étayent nos premières constatations, et nous amènent à distinguer les groupes suivants :

Groupe 1 (algèbre linéaire)

Ce groupe comporte 12 étudiants. Tous ont donné une matrice répondant à la question ; 11 ont utilisé les images des vecteurs de base pour compléter la matrice; 11 ont parlé de symétrie (éventuellement orthogonale) par rapport à un sous-espace et 8 y ont associé un dessin vectoriel (2 étudiants avaient fait ce dessin avant l'entretien).

Groupe 2 (géométrie affine)

Ce groupe comporte 16 étudiants. Ceux-ci, comme les précédents, ont réussi l'exercice. Ils répondent de plus à au moins un des trois critères « symétrie centrale », « dessin affine » ou « coordonnées ».

Autres groupes

On peut également observer un groupe d'étudiants ayant échoué et ne répondant à aucun des autres critères (5 étudiants), et un groupe d'étudiants ayant réussi mais dont les réponses ne comportent pas non plus d'éléments correspondant aux autres critères (4 étudiants). Parmi ces derniers étudiants, deux ont utilisé la caractérisation sos=Id, deux autres faisant appel à des souvenirs sur la forme de la matrice « c'est une matrice diagonale avec les 1 et des –1 ». Mais ils n'interprètent ni au questionnaire, ni à l'entretien, l'application obtenue comme symétrie par rapport à un sous-espace suivant une direction ; ils n'y associent pas non plus de dessin. Il semble donc que ces étudiants, malgré des connaissances manifestes sur les symétries en algèbre linéaire, manquent d'une représentation géométrique de l'action de la symétrie.

Conclusion

Le terme même de symétrie, employé dans l'énoncé, fait référence à un cadre géométrique (au sens le plus général du terme). La plupart des étudiants ont donc utilisé dans cet exercice un support géométrique, une exception notable étant constituée par les deux étudiants qui ne conçoivent pas de symétrie au-delà de la dimension 3, et par les quatre étudiants faisant uniquement référence à la forme de la matrice (diagonale avec des 1 et des –1, ou encore sos=Id) sans autre explication.

Nous pouvons considérer que 39 des 47 étudiants interrogés (soit 83 %) associent au terme symétrie une interprétation géométrique, dans le questionnaire ou à l'entretien, bien que l'exercice se déroule en dimension 4. Mais diverses interprétations sont possibles ; nous avons essentiellement distingué deux pôles, l'un qui semble issu de la géométrie du lycée avec la symétrie centrale, parfois accompagnée d'un dessin affine, et l'autre plus proche de l'algèbre linéaire ou bilinéaire, avec une symétrie par rapport à un sous-espace selon une direction, associée à un dessin vectoriel.

L'interprétation plus affine de la symétrie est associée à l'emploi des coordonnées pour remplir la matrice ; en effet la notion de coordonnées permet un passage de l'affine au vectoriel dont les étudiants n'ont probablement même pas conscience. Nous pouvons par ailleurs noter que dans les exercices portant sur les applications linéaires dans des espaces vectoriels de polynômes ou de fonctions, les coordonnées sont rarement employées pour déterminer une matrice ; cette méthode semble donc limitée au cadre de $\mathbb{R}^n$ et peu propice à la généralisation.

2.2.1.3 Partie II

Vous devez présenter à un étudiant de fin de première année de DEUG la notion de projection sur un sous-espace vectoriel, en expliquant ce qu'est une telle projection, et quelles sont ses propriétés. Ecrivez ci-dessous (et éventuellement au verso de cette page) tout ce que vous lui diriez à ce sujet.

Critères retenus

Pour l'analyse de la partie 2, nous retenons les critères suivants :

- *Pas de réponse au questionnaire :* certains étudiants n'avaient rien écrit à propos des projections dans le questionnaire ; leurs réponses à ce sujet ont donc été entièrement données à l'entretien.
- *Projection sur H suivant K ; pop=p ; supplémentaires ; matrice ; Ker(p-Id)=H ; application linéaire ; projection orthogonale :* ces différents critères caractérisent les réponses d'étudiants dans lesquelles la notion ou la propriété correspondante apparaît explicitement.

- *Dessin vectoriel, dessin affine :* Nous distinguerons par ces critères les réponses d'étudiants dans lesquelles la projection est illustrée par un dessin représentant des vecteurs (dessin vectoriel) ou des points (dessin affine).
- *Dessin fait à l'entretien :* Ce critère nous permet de distinguer les réponses dans lesquelles un dessin est spontanément utilisé de celles dans lesquelles le dessin n'a été fait que lors de l'entretien.

Premières constatations

Nous allons dans cette partie décrire les caractéristiques qui se dégagent d'une analyse brute des questionnaires ; dans la partie suivante, nous complèterons ces premières constatations par les résultats d'une analyse en composantes principales appliquée à nos données.

Donnons tout d'abord les effectifs correspondant à chacun des critères retenus.

Critère *(Effectif total : 47)*	Effectif	Pourcentage
Pas de réponse au questionnaire	15	32%
Projection sur H suivant K	14	30%
pop=p	22	47%
Projection orthogonale	30	64 %
Dessin vectoriel	27	57%
Dessin affine	20	42%
Dessin fait à l'entretien	33	70%
Supplémentaires	21	45%
Matrice	5	11%
Ker(*p-Id*)	11	23 %
Application linéaire	8	17%

Nous pouvons noter qu'un tiers environ des étudiants n'avaient donné aucune réponse au questionnaire ; il s'agissait pour certains d'un manque de temps, mais dans la majorité des cas ces étudiants ont déclaré à l'entretien n'avoir que très peu de souvenirs à propos des projections.

Peu d'étudiants avaient fait un dessin lors du questionnaire (30 %) ; en revanche tous en ont au moins fait un à l'entretien, soit affine, soit vectoriel (les critères affine et vectoriel sont donc exactement complémentaires).

Une part importante des étudiants mentionne les projections orthogonales, alors que celles-ci n'étaient pas mentionnées dans la question posée.

Nous allons maintenant étudier les liens entre les différents critères. Pour ceci, nous donnons tout d'abord une matrice extraite de la matrice des corrélations en supprimant les colonnes et les lignes dans lesquelles aucun coefficient ne dépassait 0,3 en valeur absolue.

Nous noterons en particulier que ceci écarte du tableau obtenu le critère « projection orthogonale ».

	Non rép.	Proj. H, K	pop=p	Dess. Vect.	Dess. Aff.	Ptés lycée	Dess. Entret.	Supp.	Matr.
Non rép.	1								
Dess. Vect.	**-0,334**	0,184	0,290	1					
Dess. Aff.	**0,334**	-0,184	-0,290	**-1**	1				
Ptés lycée	0,208	-0,074	**-0,324**	-0,261	0,261	1			
Dess. Entr.	**0,346**	0,017	-0,135	-0,184	0,184	-0,077	1		
Supp.	-0,248	**0,444**	**0,358**	**0,341**	**-0,341**	**-0,310**	-0,07	1	
Mat.	-0,236	-0,074	0,229	-0,122	0,122	-0,119	**-0,379**	-0,032	1
Ker	-0,163	-0,03	0,287	0,171	-0,171	-0,191	-0,079	**0,312**	0,135
App. Lin.	-0,189	-0,047	0,256	0,275	-0,275	-0,156	-0,2	0,048	**0,394**

Il semble se dégager de cette matrice deux groupes de critères, avec des corrélations positives relativement importantes à l'intérieur de chaque groupe et des corrélations négatives entre les deux groupes :

Projection sur H suivant K, pop=p, dessin vectoriel, supplémentaires, Ker(p-Id), application linéaire :

Tous ces critères sont corrélés positivement deux à deux. Ces corrélations étaient pour la plupart prévisibles : des étudiants parlant de projection sur un sous-espace suivant un autre vont être naturellement amenés à évoquer la notion de supplémentaire. Les propriétés *pop=p* et Ker(*p-Id*)=H sont des propriétés centrales vues dans le cours d'algèbre linéaire. Il est plus intéressant pour notre objectif de noter la corrélation positive avec ces différents éléments du critère : dessin vectoriel.

Ceci tendrait à montrer qu'une bonne connaissance des projections dans un cadre d'algèbre linéaire théorique s'accompagne d'une représentation vectorielle de celles-ci.

Non réponse, dessin affine, dessin fait à l'entretien :

Ici encore certaines corrélations positives étaient attendues : ainsi des étudiants n'ayant pas répondu lors du questionnaire ne peuvent faire le dessin qu'à l'entretien. Il s'agit visiblement d'étudiants auxquels la notion de projection dans un cadre d'algèbre linéaire n'est pas familière ; il est intéressant de constater que ceux-ci vont alors effectuer un dessin affine, sans doute en faisant appel à des connaissances du lycée.

Notons d'autre part que, comme nous l'avons dit ci-dessus, le critère « projection orthogonale » n'est que très peu corrélé avec les autres. Nous ne pouvons pas a priori le rapprocher de l'un des deux groupes de critères ci-dessus : en effet les projections orthogonales sont étudiées en algèbre bilinéaire, et même en analyse fonctionnelle, mais elles sont également connues dès le lycée. Le terme « projection orthogonale » peut donc aussi bien apparaître dans une réponse formelle, accompagné d'expressions comme « orthogonal d'un sous-espace », ou dans une réponse inspirée de souvenirs de lycée. C'est l'ACP qui va nous permettre d'effectuer ces distinctions.

Tendances observées

Les analyses statistiques ne montrent pas comme aux questions précédentes de réelle séparation entre des groupes identifiés, mais plutôt différentes tendances :

- Etudiants ne citant aucune propriété vue en algèbre linéaire sur les projections, et effectuant un dessin affine *(10 étudiants)* ;
- Etudiants effectuant un dessin affine (qui peut être issu de souvenirs de lycée), qui leur permet de retrouver des propriétés des projections vues en algèbre linéaire ou bilinéaire, comme *pop=p (6 étudiants)* ;
- Etudiants effectuant un dessin vectoriel illustrant une projection orthogonale, mais ne donnant que peu de propriétés de celle-ci (dans ces réponses on voit apparaître au plus l'un des critères : supplémentaire, ou *pop=p) (11 étudiants)* ;
- Etudiants effectuant un dessin vectoriel (qui peut également représenter une projection orthogonale, mais ceci n'est pas systématique) et donnant différentes propriétés des projections issues du cours d'algèbre linéaire *(13 étudiants)*

On observe certaines réponses n'appartenant à aucune de ces tendances, comme celles présentant des propriétés issues du cours d'algèbre linéaire et illustrées par un dessin affine ; mais elles regroupent tout de même la plus grande partie des étudiants (68 %).

Conclusion

Tout d'abord le fait que la plupart des dessins représentent des projections orthogonales (même si cette expression n'est pas employée dans ce que l'étudiant a écrit ou dit à l'entretien) n'est pas surprenant, puisqu'une telle illustration a nécessairement été rencontrée, dès le lycée mais aussi à l'université. De plus la projection orthogonale peut sembler à plus d'un titre l'exemple le plus simple de projection, d'où les nombreuses réponses le mentionnant. Il est difficile de dire si les réponses mentionnant certaines propriétés des projections orthogonales sont influencées ou non par des connaissances de lycée. Nous avons vu en effet dans le chapitre précédent que la plupart des propriétés vues en DEUG à propos des projections orthogonales sont déjà évoquées au lycée.

2.2.1.4 Partie III

Un étudiant de fin de première année de DEUG vous dit que, selon lui, la géometrie ne sert à rien dans les modules d'algèbre.

Vous lui répondez :

1) Evidemment, à quoi veux-tu que ça serve ?	☐
2) Tu as tort, ça sert beaucoup	☐
3) Ca n'est pas indispensable mais ca peut parfois être utile	☐
4) Tu changeras d'avis après la deuxième année de DEUG	☐
5) Tu changeras d'avis après la licence	☐

Indiquez votre ou vos choix en cochant la ou les cases correspondantes, et écrivez ci-dessous vos arguments.

Pour cette partie du questionnaire, nous présenterons uniquement les données brutes, la nature des questions posées se prêtant peu à une analyse statistique.

Critères

- *Cases cochées :* nous notons dans un premier temps la ou les cases cochées par l'étudiant, à propos de l'utilité éventuelle de la géométrie en algèbre linéaire. Afin de ne pas répéter les phrases complètes, nous utiliserons les raccourcis suivants, dans l'ordre des réponses proposées : *ne sert pas, sert beaucoup, sert parfois, après la deuxième année, après la licence.*
- *Notions évoquées :* notions d'algèbre linéaire ou bilinéaire pour l'étude desquelles la géométrie, selon l'étudiant interrogé, peut être utile. Nous retenons uniquement les notions qui ont été évoquées par au moins 5 étudiants : *projections, isométries*

(nous avons rassemblé sous l'étiquette isométries la mention par l'étudiant de rotations, symétries orthogonales, ou isométries en général), *quadriques.*

- *Rôle de la géométrie :* deux aspects de l'intervention du géométrique ont été signalés par les étudiants : le recours à des dessins, d'une part, et l'utilisation d'exemples pris en dimension 2 ou 3 d'autre part.
- *Emploi de dessins par les enseignants* : nous avons demandé aux étudiants lors de l'entretien si selon leurs souvenirs, leurs enseignants d'algèbre linéaire et bilinéaire de DEUG utilisaient des dessins ou non.

Présentation des données

Critère *(Effectif total : 47)*	Effectif	Pourcentage
Ne sert pas	1	2 %
Sert beaucoup	9	19 %
Sert parfois	23	49 %
Après la deuxième année	18	38 %
Après la licence	15	32 %
Projections	14	30 %
Isométries	25	53 %
Quadriques	10	21 %
Emploie des dessins	31	66 %
Emploie des exemples en dimension 2 ou 3	10	21 %
Les enseignants utilisaient des dessins	18	38 %

- La lecture de ce tableau montre tout d'abord que l'utilité de la géométrie en algèbre linéaire ne semble pas s'imposer, d'après les étudiants : c'est la réponse mitigée « la géométrie peut parfois servir » que l'on retrouve le plus souvent. Les discussions menées lors de l'entretien confirment ce fait. Peu de points précis concernant l'emploi de la géométrie sont spontanément évoqués par les étudiants, peut être parce que le terme « géométrie » leur semble trop vague. De plus, certains étudiants ont répondu à la question en pensant également à l'utilité éventuelle de l'algèbre en géométrie : c'est le cas des 15 étudiants qui répondent que la géométrie sert en algèbre après la licence. Ce sont en fait des étudiants ayant suivi en licence un module de géométrie affine ; ces étudiants disent que ce module leur a permis de voir qu'algèbre et géométrie étaient très liés, mais le lien est ici évoqué dans les deux sens. Parmi les neuf étudiants qui ont répondu que la géométrie sert beaucoup, une pensait également au lien en sens inverse : l'algèbre servant à présenter la géométrie. Dans les réponses des huit autres, on note des arguments précis à propos du rôle de la géométrie, comme : « En dimension n, c'est très abstrait, mais on peut parfois se ramener en dimension 2 ou 3 pour bien comprendre l'exo. » ; « Si on ne comprend pas physiquement ce qui se trouve derrière l'algèbre au début (en dimension 3 notamment), on ne comprend pas à quoi sert la gymnastique noyau-image-dimension-etc et on est perdu quand les dimensions deviennent infinies. » Dans les réponses de ces huit étudiants, la « géométrie » dont il est question semble apparentée à l'algèbre linéaire en dimension 2 ou 3.

- Peu de notions élémentaires d'algèbre linéaire (bases, sous-espaces) ont été citées par les étudiants. Le fait que les projections soient évoquées a probablement été influencé par le questionnaire, puisqu'elles faisaient l'objet de la seconde partie de celui-ci. En revanche, les notions d'algèbre bilinéaire : isométries, coniques ou quadriques ont été signalées spontanément. Notons qu'à propos de ces notions, l'ambiguïté subsiste : ne s'agit-il pas plutôt de notions de géométrie, pour l'étude desquelles l'algèbre linéaire peut servir ?
- Une majorité d'étudiants déclare employer des dessins. Ils signalent l'utilité de la visualisation, et mentionnent plusieurs rôles possibles du dessin : pour mieux comprendre un énoncé, pour se rappeler une propriété, pour aider à la résolution d'un exercice.
- En revanche, une minorité d'étudiants se souvient de dessins faits par les enseignants ; certains vont jusqu'à affirmer qu'ils se souviennent qu'il n'y avait pas de dessins dans les cours et travaux dirigés qu'ils ont suivis.

Conclusion

Nous retenons des réponses à cette question qu'il ne paraît pas clair, pour une majorité d'étudiants, que la géométrie soit utile en algèbre linéaire. C'est plutôt dans la partie : « étude des espaces euclidiens », que l'utilité de la géométrie, ou en tout cas le lien algèbre linéaire – géométrie est souligné. Quant aux étudiants qui déclarent que la géométrie leur paraît très utile en algèbre linéaire, il semble qu'ils désignent par « géométrie » l'algèbre linéaire ou bilinéaire limitée à la dimension 3.

Cependant les étudiants déclarent avoir recours à des dessins ; mais cet usage ne semble guère encouragé par les enseignants. Ceci peut paraître surprenant, au vu des réponses faites par les enseignants au questionnaire présenté dans la première partie de ce chapitre. Rappelons que 16 enseignants, sur les 26 dont nous avons pu retenir les questionnaires, déclarent employer fréquemment des dessins (4 se rattachent à la structure *(S1)* et 12 à *(S3)*). Il est possible que ce décalage entre les déclarations des enseignants et les souvenirs des étudiants provienne du fait que l'emploi de dessins n'est pas accompagné d'explications spécifiques. Ainsi les enseignants peuvent utiliser des dessins dans leur cours sans exposer les conventions de représentation correspondantes, et attendre que les étudiants dessinent sans les inciter explicitement à le faire. Ceci expliquerait que l'emploi de dessins ne fasse pas partie des souvenirs des étudiants.

2.2.1.5 Partie IV

Dans cette partie nous demandions aux étudiants (lors de l'entretien) s'ils pouvaient illustrer certaines propriétés ou notions d'algèbre linéaire par des dessins.

Nous nous contenterons pour ces questions d'une analyse des données brutes ; en effet nous n'avons retenu pour chaque dessin que peu de critères, entre lesquels les corrélations sont trop faibles pour aider à l'interprétation.

Par ailleurs nous faisons figurer, en annexe 6, des dessins fournis par les étudiants ainsi que les commentaires qui y sont associés.

Partie IV.1

1) Soient P, Q et R les trois polynômes définis par $P(X)=X$, $Q(X)=X^2$ et $R(X)=X^3$; la famille { P, Q, R} est libre.

Seulement 21 étudiants (soit moins de 47 %) proposent ici un dessin pour illustrer la propriété ; il y a donc de fortes résistances à représenter une famille libre de polynômes dans un registre graphique.

Plus précisément, 13 étudiants (28 %) ne tentent ni de dessiner, ni d'expliquer pourquoi un tel dessin ne peut être fait ; ils signalent en général que la notion de famille libre de polynômes ne leur évoque aucune représentation.

15 étudiants (32 %) parlent des courbes représentatives ; 3 d'entre eux dessinent effectivement de telles courbes, tandis que les 12 autres renoncent à faire un tel dessin, qui ne peut illustrer le fait que la famille est libre.

6 étudiants (13 %) font référence à l'espace $\mathbb{R}_3[X]$, et sont alors gênés par le fait que la situation se déroule en dimension 4 ; 5 d'entre eux font tout de même un dessin.

13 étudiants (28 %) font un dessin sans évoquer l'espace $\mathbb{R}_3[X]$ ou le problème de la dimension 4 ; 8 de ces étudiants disent que ce qu'ils représentent est une base.

Nous observons donc ici différents groupes d'étudiants, correspondant à différents types de problèmes posés par la tâche proposée.

Tout d'abord une majorité d'étudiants (28, soit 60 %) n'associe à la propriété aucune figure, ou bien une figure comportant les graphes des fonctions polynômes associées. 13 de ces étudiants ne donnent aucun argument pour justifier le fait qu'ils ne font pas de dessin ; il est possible que ces étudiants aient eux aussi pensé aux courbes représentatives, mais n'aient pas signalé cette réponse qu'il ne trouvaient pas pertinente.

Pour certains étudiants (au moins les 15 étudiants qui ont fait allusion aux courbes représentatives), la notion de polynôme, associée à celle de fonction polynôme, n'est donc pas passée du statut de processus à celui d'objet. Le polynôme est considéré comme une fonction, et associé en tant que tel à une représentation "dynamique" ; il n'apparaît pas comme un objet élément d'un espace vectoriel.

Parmi les étudiants qui ont proposé un dessin adéquat, 4 ont été gênés parce qu'ils considéraient les polynômes comme des éléments d'un espace de dimension 4, et 12 font le dessin après avoir interprété la famille de polynômes comme une base.

Il semble donc que la notion de famille libre ne soit pas pour ces étudiants naturellement associée à une figure, association qui permettrait par analogie de représenter une famille libre de polynômes par la même figure. En utilisant les termes de Fischbein, nous pouvons dire que ces étudiants n'ont pas construit de concept figuratif associé à la notion de famille libre. En revanche, la notion de base (au moins en dimension 3) semble bien être un tel concept figuratif ; le lien entre l'aspect conceptuel et le dessin est suffisamment fort pour que l'analogie permette aux étudiants d'employer ce dessin pour illustrer une situation qui se déroule dans un cadre non géométrique, et éventuellement en dimension 4.

Partie IV.2

Un endomorphisme diagonalisable

Dans cette partie la majorité des étudiants a fait un dessin (34 étudiants, soit 72 %) ; 21 de ces étudiants (62 %) ont de plus dessiné sans indications.

Il y a donc 13 étudiants (28 %) qui sont incapables d'associer une figure à la notion d'endomorphisme diagonalisable, et ce malgré les aides fournies. De tels étudiants sont en fait incapables de proposer un exemple d'endomorphisme diagonalisable : 11 d'entre eux n'en n'ont aucun exemple en tête, et les 2 autres proposent l'identité, qu'il ne savent pas illustrer par une figure, après avoir été guidés par nos conseils (« connaissez-vous des exemples d'endomorphismes diagonalisables », puis « connaissez-vous des exemples d'endomorphismes »).

D'autre part, on observe chez 8 des étudiants qui proposent un dessin des dysfonctionnements importants. Comme dans la partie IV.1, la notion de représentation graphique d'une fonction conduit certains à des représentations non adaptées au problème. En effet, quatre étudiants, ayant proposé l'identité comme exemple d'endomorphisme diagonalisable, y associent un dessin comportant deux axes et la première bissectrice, c'est à dire la courbe représentative de l'application identité de IR dans IR. D'autres font une représentation du même type, associée à une application déterminée par $f(x)=\lambda x$; deux étudiants proposent même une représentation en trois dimensions, illustrant une application linéaire de IR^2 dans IR.

Il n'y a donc que 26 étudiants qui proposent une illustration faisant référence à un cadre plus ou moins géométrique (géométrie vectorielle, affine, ou algèbre linéaire en dimension inférieure ou égale à 3). Parmi ceux-ci, 4 proposent un dessin illustrant le cas général d'endomorphisme diagonalisable, les autres choisissant de donner un exemple (un seul étudiant propose en exemple une rotation ; les autres exemples correspondent bien à des endomorphismes diagonalisables).

Nous donnons ci-dessous un tableau récapitulant les exemples choisis par les 22 étudiants illustrant un cas particulier, dans un cadre géométrique. Rappelons que nous avons fait figurer en annexe 6 des exemples de dessins, et les commentaires associés, correspondant aux différents types de réponses possibles.

Exemple choisi *(Effectif total : 22)*	Nombre d'étudiants	Pourcentage
Symétrie centrale	5	22,5 %
Symétrie par rapport à un plan	8	36 %
Homothétie	2	9 %
Identité	5	22,5 %
Projection	1	4,5 %
Rotation	1	4,5 %

Parmi les exemples autres que l'identité, ce sont les symétries par rapport à un plan et les symétries centrales qui sont le plus fréquemment citées. Ceci n'est pas étonnant, puisque la notion de symétrie avait été évoquée dans le questionnaire et l'entretien peu de temps auparavant. Notons cependant que bien que les projections aient été elles aussi abordées dans le questionnaire, seul un étudiant cite l'exemple de la projection. La question sur les projections n'avait pas été revue à ce stade de l'entretien ; ceci peut expliquer que les projections soient si peu citées. Mais il est également possible que les étudiants aient gardé de leur seconde année de DEUG le souvenir de la propriété : "toute matrice symétrique est diagonalisable", et considèrent qu'une symétrie a nécessairement une matrice symétrique (cette "propriété" est explicitement citée par un étudiant).

Par ailleurs, parmi les dessins proposés par ces étudiants, 9 sont affines et 13 vectoriels ; on trouve à peu près autant de dessins affines que de dessins vectoriels pour illustrer les symétries (symétrie centrale : 3 dessins affines et 2 vectoriels ; symétrie par rapport à un plan : 4 dessins affines et 4 dessins vectoriels). Ceci n'est pas surprenant, puisque de tels dessins (illustration d'une symétrie centrale ou d'une réflexion) sont courants dans l'enseignement secondaire.

Notons également que 5 étudiants tentent d'illustrer la notion générale d'endomorphisme diagonalisable ; tous parviennent à des résultats très discutables (les réponses de ces étudiants sont données en annexe).

2.2.2 Bilan du questionnaire

L'analyse question par question de notre questionnaire nous a permis d'éclairer des points précis, relatifs à chacune des parties du questionnaire et de l'entretien.

Nous allons maintenant tenter de déterminer les observations qui se dégagent de l'ensemble du questionnaire, pour apporter des éléments de réponses à nos interrogations initiales :

- Tendances repérées chez les étudiants, en termes de structure de type *(S)* observée ;

- Lien entre ces tendances et les compétences des étudiants en algèbre linéaire.

Nous allons donc tout d'abord présenter des tableaux récapitulatifs de chaque question et fournissant des renseignements sur ces deux aspects.

2.2.2.1 Tableaux de répartition des réponses

Lorsque cela est possible, nous utilisons dans les tableaux ci-dessous un critère que nous nommons "connaissances d'algèbre linéaire", critère qui dépendra de la question posée, mais qui indiquera dans chaque cas que l'étudiant concerné a manifesté certaines compétences en algèbre linéaire. D'autre part, lorsque la question se prête à une telle distinction, nous noterons si le dessin effectué est affine ou vectoriel.

Nous laissons de côté pour l'instant la partie III, de nature différente des autres ; nous confronterons plus loin les résultats de cette partie et les regroupements que nous aurons alors effectués.

Partie I, Exercice 1

Pour cet exercice, le critère "connaissances d'algèbre linéaire" correspondra simplement à "réponse juste à l'exercice".

Pas de dessin		*Dessin vectoriel*		*Dessin affine*	
Connaiss. AL	Pas de connaiss. AL	Connaiss. AL	Pas de connaiss. AL	Connaiss. AL	Pas de connaiss. AL
24	8	10	1	4	0

Partie I, Exercice 2

Pour cet exercice le critère "connaissances d'algèbre linéaire" correspondra aux réponses dans lesquelles la matrice proposée est autre que celle de -Id.

Pas de dessin		*Dessin vectoriel*		*Dessin affine*	
Connaiss. AL	Pas de connaiss. AL	Connaiss. AL	Pas de connaiss. AL	Connaiss. AL	Pas de connaiss. AL
5	22	10	1	1	8

Partie II (projections)

Pour cet exercice le critère "connaissances d'algèbre linéaire" correspondra aux réponses dans lesquelles figurent au moins 2 connaissances sur les projections qui n'ont pu être rencontrées qu'en algèbre linéaire. Ces connaissances correspondent à des critères que nous avons employés dans l'analyse de la question II : projection sur un sous-espace suivant un autre, noyau d'une projection, application idempotente, matrice, sous-espaces supplémentaires.

Dessin vectoriel		*Dessin affine*	
Connaiss. AL	Pas de connaiss. AL	Connaiss. AL	Pas de connaiss. AL
16	12	4	15

Partie IV dessin 1

Les questions de la partie IV ne se prêtant pas à une classification comportant un critère du type « connaissances d'algèbre linéaire ». Nous retiendrons des catégories spécifiques pour ces questions ; dans le cas de IV.1 nous noterons : les étudiants ne faisant pas de dessin ; les étudiants qui évoquent les courbes représentatives (qu'ils les dessinent ou non) ; les étudiants qui font un dessin en faisant référence à la notion de base ; les étudiants qui font directement un dessin pour illustrer la famille libre de polynômes.

Pas de dessin	Evoquent les courbes	Dessin d'une base	Dessin immédiat
14	15	13	5

Partie IV dessin 2

Ici nous retenons comme avant la catégorie des étudiants qui ne font pas de dessin ; nous reprenons la distinction entre dessin vectoriel et dessin affine ; et nous notons de plus le nombre de réponses dans lesquelles l'étudiant tente d'illustrer l'endomorphisme par un graphe.

Pas de dessin	Graphe	Dessin vectoriel	Dessin affine
13	8	17	9

2.2.2.2 *Nature des dessins, emploi de ceux-ci et connaissances en algèbre linéaire*

Nous observons ici les réponses faites aux questions 1 et 2 de la partie I, et à la partie II, en utilisant les critères évoqués dans les tableaux ci-dessus.

Le dessin nous permet de préciser la nature d'un éventuel modèle figuratif. Tous les étudiants font au moins un dessin dans les réponses à ces trois questions.

En ce qui concerne la nature des dessins employés, on remarque que :

- 13 étudiants (28 %) ne font que des dessins affines (lorsqu'ils dessinent)

- 22 étudiants (47 %) ne font que des dessins vectoriels
- 12 étudiants (25 %) font tantôt des dessins affines, tantôt des dessins vectoriels.

Si l'on observe les réponses faites par ces derniers (étudiants associant dessins affines et vectoriels), on remarque plus précisément :

- 2 étudiants faisant à l'exercice 1 des dessins de vecteurs qui peuvent être issus de connaissances du lycée (vecteurs n'ayant pas la même origine) ;
- 4 étudiants faisant un dessin affine pour la symétrie, et un dessin vectoriel pour la projection. On peut supposer que ces étudiants ont rencontré le dessin représentant la projection dans un cadre d'algèbre linéaire, tandis que pour la symétrie ils ont pu faire appel à leur souvenirs de lycée ;
- 5 étudiants font un dessin affine pour les projections, et un dessin vectoriel ailleurs. Ceci est plus surprenant que le cas précédent, car le dessin vectoriel associé aux projections est couramment employé en algèbre linéaire (il peut également illustrer la notion de sous-espaces supplémentaires, et plus généralement toute notion liée à la décomposition d'un vecteur comme somme de deux autres vecteurs appartenant à des sous-espaces donnés).

Nous allons maintenant observer le lien entre l'emploi des dessins et les connaissances en algèbre linéaire, en ce qui concerne les questions évoquées ci-dessus. Pour ces trois questions, nous avions défini un critère « connaissances en algèbre linéaire » ; nous désignerons le critère opposé par « lacunes en algèbre linéaire ». Ainsi « lacunes en algèbre linéaire » désignera pour l'exercice 1 une réponse fausse ; pour l'exercice 2, une réponse dans laquelle l'étudiant propose la matrice diagonale comportant des -1 sur la diagonale ; pour la partie II, une réponse dans laquelle l'étudiant ne cite pas au moins deux propriétés des projections qui n'ont pu être rencontrées qu'en algèbre linéaire.

Les lacunes en algèbre linéaire sont fortement associées à l'emploi de dessins affines, comme le montre le tableau ci-dessous :

	Nombre moyen de lacunes	Pourcentage
Lacunes en algèbre linéaire (global)	1,54	51,5 %
Lacunes en algèbre linéaire chez les étudiants ne faisant que des dessins vectoriels (22 éts.)	1,09	36,5 %
Lacunes en algèbre linéaire chez les étudiants faisant plus de 2 dessins vectoriels et aucun dessin affine (10 éts.)	0,9	30 %
Lacunes en algèbre linéaire chez les étudiants ne faisant que des dessins affines (13 éts.)	1, 85	62%
Lacunes en algèbre linéaire chez les étudiants faisant plus de 2 dessins affines et aucun dessin vectoriel (6 éts.)	2	66,7 %
Lacunes en algèbre linéaire chez les étudiants associant dessins affines et vectoriels (12 éts)	1,61	53,8 %

La lecture du tableau montre que les étudiants qui ne font que des dessins vectoriels ont moins de lacunes en algèbre linéaire que ceux qui ne font que des dessins affines (ces observations sont bien entendu à nuancer, du fait qu'elles ne portent que sur un petit nombre de questions , cependant, elles nous apparaissent déjà comme significatives). L'accroissement du nombre de dessins vectoriels correspond à une amélioration des résultats, tandis que l'accroissement du nombre de dessins affines correspond au contraire à une dégradation de ceux-ci.

Plus précisément, nous pouvons noter que :

- Parmi les étudiants qui dessinent peu (un seul dessin) :
- 9 répondent à au moins deux des critères « connaissances en algèbre linéaire », dont 2 font un dessin affine et 7 un dessin vectoriel (il y a en particulier trois étudiants dont les réponses sont entièrement correctes ; ces étudiants font un unique dessin, qui est vectoriel) ;
- 10 répondent à au moins deux des critères « lacunes en algèbre linéaire », dont 5 font un dessin affine et 5 un dessin vectoriel ;
- Parmi les étudiants qui font au moins deux dessins :
- 14 répondent à au moins deux des critères « connaissances en algèbre linéaire », dont 8 font au moins deux dessins vectoriels, 1 fait trois dessins affines, et 5 associent affine et vectoriel (il y a au total 24 dessins vectoriels, et 8 dessins affines dans les réponses de ces étudiants);
- 14 répondent à au moins deux des critères « lacunes en algèbre linéaire », dont 2 font des dessins vectoriels, 5 des dessins affines et 7 associent vectoriel et affine (il y a au total 14 dessins vectoriels et 17 dessins affines dans les réponses de ces étudiants).

Nous récapitulons ces résultats dans le tableau ci-dessous :

	≥ 2 « Connaissances AL »	≤ 1 « Connaissances AL »
≤ 1 dessin	2 affines 7 vectoriels	5 affines 5 vectoriels
≥ 2 dessins	1 affine 8 vectoriels 5 « mélanges »	5 affines 2 vectoriels 7 « mélanges »

2.2.2.3 Conclusion

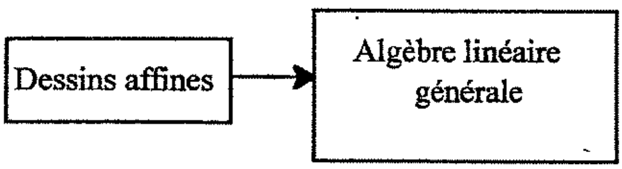
L'étude précédente montre différentes tendances en ce qui concerne le recours par des étudiants à des modèles géométriques en algèbre linéaire. Quant au lien avec les compétences de ces étudiants, il semble que le contenu du modèle figuratif en jeu soit plus lié à ces compétences que la fréquence du recours à un tel modèle.

En complétant les constatations précédentes par l'examen des réponses aux parties III et IV, nous relevons trois tendances principales chez les étudiants interrogés.

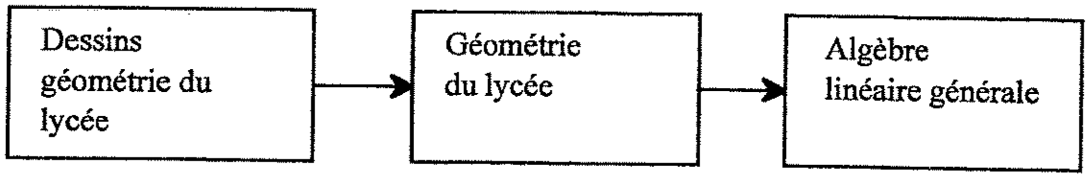
Etudiants utilisant en algèbre linéaire un modèle figuratif affine

Comme nous l'avons déjà signalé, 13 des étudiants interrogés n'ont fait que des dessins affines dans les parties I et II du questionnaire. 12 de ces étudiants n'ont pas fait de dessin, ou ont dessiné des courbes, à la première question de la partie IV (famille libre de polynômes) ; 10 n'ont pas fait de dessin, ou fait un dessin incorrect, à la seconde question de cette partie (endomorphisme diagonalisable). Aucun de ces étudiants ne déclare à la partie III que la géométrie est très utile en algèbre linéaire.

Chez ces étudiants, on observe donc une structure du type :



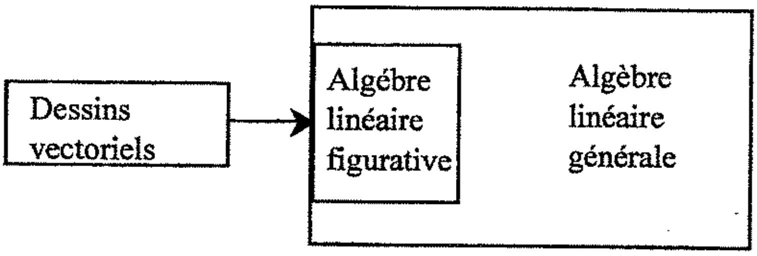
Le modèle figuratif en jeu n'est pas adapté au développement d'une intuition géométrique convenant à la pratique de l'algèbre linéaire. Il provient probablement de souvenirs de lycée ; nous faisons l'hypothèse qu'en fait la structure en jeu est du type suivant :



Certains étudiants font rarement appel au modèle figuratif, d'autres plus fréquemment, mais dans les deux cas, ils semblent éprouver des difficultés en algèbre linéaire. Nous ne pouvons bien entendu pas affirmer que la cause des difficultés de ces étudiants est le modèle inadapté que ceux-ci utilisent, ni qu'il s'agit d'étudiants généralement faibles, et manifestant donc des lacunes dans les divers registres en jeu. Il se peut en effet qu'il n'y ait aucune relation de cause à effet, mais seulement une concomitance de faits.

Etudiants utilisant fréquemment un modèle figuratif vectoriel

Certains étudiants (14) semblent avoir fréquemment recours à un modèle figuratif vectoriel, soit à une structure du type :



Ces étudiants déclarent effectivement tous à la partie III du questionnaire qu'ils utilisent des dessins. Ceci ne semble pas décisif en ce qui concerne d'éventuelles compétences en algèbre linéaire. 5 de ces étudiants répondent à au moins deux critères « lacunes en algèbre linéaire » pour les parties I et II du questionnaire. A la partie IV.1, 5 de ces étudiants mentionnent les courbes représentatives (un seul fait toutefois le dessin correspondant). Dans IV.2, 3 de ces étudiants appartiennent à la catégorie que nous avons notée « dysfonctionnement ». Il y a donc certains de ces étudiants dont les connaissances en algèbre linéaire semblent fragiles, au vu du questionnaire. A l'opposé, 7 de ces étudiants répondent à au moins deux critères « connaissances algèbre linéaire » des parties I et II, et ne manifestent aucun dysfonctionnement à la partie IV.

Etudiants utilisant parfois un modèle figuratif vectoriel et manifestant de bonnes connaissances d'algèbre linéaire

Nous avons observé 7 étudiants qui manifestent de réelles compétences en algèbre linéaire, et ont rarement recours, dans les deux premières parties de ce questionnaire, à des dessins. 3 de ces étudiants n'ont pas fait de dessin à la question IV.1 ; un seul n'a pas fait de dessin à la question IV.2. Aucun ne fait à ces questions de réponse évoquant des courbes représentatives. Il semble donc que ces étudiants disposent d'un modèle figuratif adapté, mais ne font éventuellement appel à celui-ci que dans des circonstances particulières, ici, lorsque cela leur est explicitement demandé. 2 de ces étudiants déclarent cependant à la partie III du questionnaire que la géométrie est très utile en algèbre linéaire ; ils parlent alors de « représentations mentales ». 4 déclarent dans cette même partie ne pas utiliser de dessins, ni d'exemples géométriques.

Il semble donc que l'emploi d'un modèle figuratif mal adapté, de type affine, soit lié à des difficultés en algèbre linéaire. Cependant, le recours fréquent à un modèle plus adapté n'est pas une garantie de bonne compréhension. Par ailleurs, certains étudiants développent des compétences en algèbre linéaire sans s'appuyer sur un modèle géométrique.

La présentation explicite, par les enseignants, d'un modèle géométrique adapté pourrait néanmoins dissuader certains étudiants d'avoir recours à un modèle figuratif affine, qui peut être issu de leurs connaissances de lycée faute d'avoir été remplacé ensuite. Nous allons revenir en détail sur de telles possibilités ci-dessous.

3. Conclusion

Avant d'évoquer le bilan de cette partie expérimentale, il nous semble important ici de revenir sur les spécificités de notre thème d'étude, et sur les contraintes méthodologiques engendrées par ces spécificités, en matière d'expérimentation. Il nous fallait d'une part nous pencher sur des enseignements s'étalant du lycée à la maîtrise de mathématiques. Ceci nous a conduite à considérer un processus long, correspondant à un contenu mathématique d'un volume important.

D'autre part, comme nous l'avons souligné dès le début, la question des interventions du géométrique en algèbre linéaire présente de multiples aspects, que nous voulions prendre en compte simultanément. Les travaux de Fischbein nous ont fourni un cadre théorique adapté. Les études de manuels nous ont ensuite procuré un support pour l'élaboration de questionnaires, aux enseignants comme aux étudiants. Afin de dégager éventuellement différentes tendances, il nous fallait interroger un nombre suffisant d'enseignants et d'étudiants. Nous avons finalement recueilli les réponses de 31 enseignants. Ceci ne constituait pas un échantillon permettant de mettre en œuvre des outils statistiques comme l'analyse implicative. Toutefois, il existe à notre connaissance peu d'études didactiques auxquelles un tel nombre d'enseignants du supérieur aient accepté de participer (certains n'ont d'ailleurs répondu qu'après des demandes insistantes et réitérées de notre part).

De même, le nombre d'étudiants ayant répondu au questionnaire et participé à un entretien (47 étudiants) a limité nos possibilités d'analyse statistique. Mais la formule d'entretien individuel, qui était indispensable dans notre cas, notamment pour accéder aux pratiques touchant à l'emploi de dessins, ne nous permettait pas matériellement d'interroger un plus grand nombre d'étudiants. En effet, nous devions rencontrer ceux-ci peu de temps après le test écrit, et chaque entretien durait environ une demi-heure.

Finalement, il nous semble qu'en dépit de ces contraintes, nous avons pu obtenir des résultats significatifs, ouvrant la voie à des recherches ultérieures.

En ce qui concerne les enseignants, nous avons observé l'opposition entre deux principaux types d'attitudes, où l'on retrouve l'influence des prises de position datant de la réforme des mathématiques modernes. Pourtant d'autres attitudes sont envisageables. Ainsi certaines tentatives sont faites dans des manuels ; mais le recours au géométrique n'y dépasse guère la dimension 3. Il nous semble que ces tentatives pourraient être prolongées, au-delà de cette dimension notamment.

Pour les étudiants, nous avons observé que l'emploi d'un modèle figuratif de type affine était associé à des difficultés en algèbre linéaire. Or les deux positions majoritaires chez les enseignants risquent d'entraîner l'emploi d'un tel modèle. En effet, la position que nous avons notée *(S2)*, de type structuraliste, implique une défiance à l'égard des dessins qui conduit les enseignants à en utiliser peu. Ainsi le modèle figuratif affine attaché à la géométrie du lycée ne sera pas remplacé, et les étudiants éprouvant le besoin d'employer un modèle figuratif risquent d'y faire appel. L'autre position, notée *(S3)*, regroupe des enseignants qui sont notamment favorables à un cours de géométrie affine précédant l'algèbre linéaire. Dans un tel cours, un modèle figuratif affine sera présenté aux étudiants, qui risquent alors d'y avoir recours y compris en algèbre linéaire. Il serait donc intéressant de tenter un enseignement d'algèbre linéaire utilisant un modèle figuratif vectoriel, sans qu'un modèle affine ait été introduit auparavant. Rappelons toutefois que nous avons observé que certains étudiants, utilisant un modèle figuratif vectoriel adapté, ont cependant des difficultés en algèbre linéaire tandis que d'autres qui réussissent mieux ne semblent pas avoir recours à un quelconque support de nature géométrique. Examiner de plus près les pratiques de ce dernier type d'étudiants pourrait faire l'objet d'une recherche spécifique, qui permettrait de déterminer si le dessin leur est utile à certains stades de leur apprentissage, et est ensuite intériorisé, ou s'il est simplement absent de leurs pratiques.

Par ailleurs, en ce qui concerne l'usage de dessins, plusieurs éléments nous montrent que la plupart des enseignants en utilisent peu, ou n'ont du moins pas développé de pratique spécifique quant à l'emploi de dessins en algèbre linéaire. En effet les réponses des enseignants au questionnaire montrent que le nombre de dessins que ceux-ci déclarent utiliser est faible, et que les notions illustrées sont soit déjà connues en géométrie au lycée, soit transférables en géométrie affine. Il semble donc que l'introduction de notions nouvelles d'algèbre linéaire ne soit pas ou soit peu accompagnée de dessins par les enseignants. Ceci est confirmé par les réponses des étudiants, qui d'une part déclarent majoritairement ne pas se souvenir d'emploi de dessins par les enseignants et d'autre part se réfèrent à des notions déjà connues dans le secondaire lorsqu'on leur demande de dessiner : base, symétrie centrale par exemple. Préciser ce qu'est l'usage effectif de dessins par les enseignants dans un cours d'algèbre linéaire est l'une des directions de recherche qu'il serait intéressant de poursuivre, en réalisant des observations en classe qui sont indispensables dans ce cas.

Par ailleurs, le questionnaire aux enseignants a montré que ceux-ci manifestent une nette défiance à l'égard de l'éventuel emploi, en algèbre linéaire, de connaissances issues de l'enseignement secondaire. Or nous avons vu dans le chapitre précédent que certains liens pourraient être exploités. Cette possibilité n'est pas encore mise à profit ; elle pourrait également donner lieu à des expérimentations ultérieures.

Nous allons maintenant détailler en conclusion les différentes perspectives et directions de recherche ouvertes à la suite de ce travail.

CONCLUSION

Nous allons conclure cette présentation de notre travail en développant essentiellement les perspectives ouvertes par celui-ci. Rappelons tout d'abord brièvement les résultats que nous avons obtenus. Les expérimentations présentées dans le chapitre 5 nous ont permis de constater que la majorité des enseignants semble se répartir, en ce qui concerne le recours au géométrique dans un cours d'algèbre linéaire, selon deux tendances opposées apparues à l'époque de la réforme des mathématiques modernes. L'une est une tendance structuraliste, qui consiste à retenir une présentation théorique de l'algèbre linéaire, sans cours de géométrie affine préalable visant à préparer celle-ci, et employant peu ou pas de dessins. La géométrie affine sera ensuite éventuellement abordée comme une application de l'algèbre linéaire. Dans l'autre tendance, les enseignants sont au contraire favorables à l'emploi de dessins, et à un cours de géométrie affine antérieur à l'algèbre linéaire. Il semble cependant que même les enseignants qui déclarent employer des dessins n'explicitent que peu l'usage de ceux-ci, ou au moins n'en soulignent pas suffisamment l'intérêt pour que les étudiants conservent le souvenir de ces dessins après la licence. Par ailleurs, nous avons constaté que peu d'enseignants exploitent la géométrie vue au lycée, qu'il s'agisse de souligner un lien avec l'algèbre linéaire ou de pointer au contraire une différence. D'un autre côté, le questionnaire aux étudiants a montré que certains d'entre eux font appel, en algèbre linéaire, à un modèle figuratif affine. Ceci n'est pas surprenant, au vu des résultats que nous venons d'évoquer. En effet, une présentation structuraliste de l'algèbre linéaire, dans laquelle aucun modèle figuratif nouveau n'est proposé, conduit nécessairement les étudiants cherchant un lien avec la géométrie à faire appel à leurs souvenirs de lycée et au modèle figuratif affine associé. L'autre choix de présentation peut également conduire les étudiants à employer un modèle figuratif affine, qui serait cette fois issu de l'enseignement de géométrie préalable. Or le questionnaire aux étudiants a montré que l'emploi d'un modèle affine était associé à des difficultés en algèbre linéaire. Il paraît donc nécessaire de tenter d'élaborer une approche s'écartant des deux tendances mentionnées ci-dessus.

Les résultats des chapitres précédents avaient d'une part pour fonction de nous guider dans la conception de questionnaires aux enseignants et aux étudiants. Ils nous ont d'autre part permis de mettre en évidence des possibilités de recours au géométrique qui sont peu, ou ne sont pas exploitées dans l'enseignement actuel. L'étude réalisée dans le chapitre 4 a ainsi montré que certaines propriétés et tâches liées à des notions rencontrées au lycée dans le cours de géométrie pourraient être présentées dans un cours d'algèbre linéaire limité à la dimension 3. Ceci fournirait notamment l'occasion de souligner les liens et les différences avec ce qui est vu au lycée, mais également de travailler des tâches d'algèbre linéaire qui conservent un aspect concret. Le risque existe toutefois qu'une rupture se présente lors du passage à une dimension quelconque, comme nous l'avons observé dans certains manuels. Limiter l'emploi de dessins à l'illustration de situations en dimension inférieure à 3 peut contribuer à cette rupture ; cette restriction n'est selon nous pas justifiée. Par exemple, un parallélogramme, habituellement employé pour figurer un plan dans un espace à trois dimensions, peut également représenter l'ensemble des polynômes de degré inférieur ou égal à trois dans $\mathbb{R}_4[X]$, ou plus généralement un hyperplan dans un espace de dimension n quelconque, voire même un sous-espace vectoriel quelconque. Il faut bien entendu dans ce cas préciser clairement les conventions de représentation, et inciter les étudiants à les employer eux-mêmes.

Une approche de l'algèbre linéaire employant un recours au géométrique différent des deux types de choix qui semblent actuellement majoritaires est donc envisageable ; nous allons détailler ci-dessous le contenu possible d'une telle approche. Nous nous pencherons également sur d'autres possibilités de recherches.

Notre travail avait pour objectif de réaliser une première étude didactique portant sur l'ensemble des aspects de l'intervention du géométrique en algèbre linéaire, et en particulier sur la question de l'intuition géométrique. Nous avons déjà rappelé les spécificités de ce thème, en particulier la nécessité de prise en compte d'un vaste contenu mathématique, allant du lycée à la maîtrise, et la multiplicité des aspects à considérer. Nous ne reviendrons pas ici sur les choix méthodologiques entraînés par ces contraintes. Nous allons nous appuyer sur l'ensemble des résultats évoqués ci-dessus pour envisager des prolongements possibles de notre travail.

L'étude que nous avons présentée demande à être complétée par d'autres recherches, portant éventuellement sur des questions plus précises qu'elle a mises en évidence. Elle peut également servir de support à des enseignements expérimentaux, à différents niveaux. D'autre part, elle a permis de dégager des pistes qui peuvent être exploitées dans un enseignement traditionnel.

1. Poursuivre le diagnostic

Réaliser une étude portant sur un grand nombre d'étudiants

Nous n'avons interrogé qu'un nombre restreint d'étudiants ; en effet, notre choix de réaliser des entretiens individuels auprès d'étudiants titulaires d'une licence de mathématiques nous a contrainte à nous adresser à un public constitué d'étudiants de CAPES ou de maîtrise de mathématiques. Des questions évidentes de proximité nous ont conduite à soumettre notre questionnaire à des étudiants de l'Université de Rennes 1 ; il fallait de plus que ceux-ci acceptent de nous répondre. Dans le cas d'un simple test écrit, ou encore d'un travail mené en collaboration dans différentes universités, il serait possible de réaliser une étude statistique, portant sur un échantillon d'étudiants plus vaste. Cela nécessiterait toutefois d'employer un questionnaire plus rapidement analysable, par exemple de type QCM, reposant sur des hypothèses que nous avons en partie contribué à fonder.

Réaliser une étude portant sur des étudiants de DEUG

Une autre manière d'accéder à un public plus vaste pourrait consister à interroger des étudiants de DEUG. L'intérêt d'un travail portant sur l'emploi de la géométrie par de tels étudiants dans leurs pratiques en algèbre linéaire dépasse bien entendu cette simple possibilité d'accès à un vaste échantillon. L'analyse globale que nous avons réalisée ici ne pouvait être effectuée qu'auprès d'étudiants disposant d'un recul suffisant sur l'algèbre linéaire. En revanche des études portant sur des questions plus ponctuelles (voir ci-dessous) peuvent donner lieu à des tests en deuxième, voire en première année de DEUG.

Approfondir l'étude de certains des thèmes évoqués

Notre choix d'envisager globalement les différents aspects de l'intervention du géométrique en algèbre linéaire et bilinéaire nous a conduite à effectuer une analyse générale, sans entrer dans le détail des différents points que nous avons évoqués. Il serait donc possible de poursuivre des études approfondies, portant sur des thèmes plus circonscrits. Plusieurs directions de recherche sont envisageables.

Ainsi le recours aux dessins et la formation de concepts figuratifs en algèbre linéaire peuvent donner lieu à des tests spécifiques. Rappelons que nous avons souligné, dans la partie précédente, la nécessité de réaliser des observations en cours et en travaux dirigés pour préciser ce qu'est l'emploi effectif de dessins par les enseignants en algèbre linéaire. Nous avons également noté l'intérêt de l'étude approfondie des pratiques des étudiants qui n'ont pas de difficultés spécifiques en algèbre linéaire, et ne semblent cependant pas faire appel à un modèle figuratif. D'une manière générale, affiner l'étude du recours au dessin, faite par les enseignants ou les étudiants, est un des prolongements naturels de notre travail.

Il serait par ailleurs possible de se centrer sur une notion, comme celles de symétrie, ou de projection, et d'examiner dans le détail l'enseignement de celles-ci, et les conceptions des étudiants. Ce dernier choix permettrait d'effectuer des analyses plus fines, notamment en observant des cours en amphi et des séances de travaux dirigés. Une telle méthodologie n'était pas matériellement envisageable dans le cadre du travail que nous avons fait ici, étant donnée l'étendue de notre champ d'observation a priori.

2. Concevoir des enseignements expérimentaux

Un enseignement complet en DEUG

Les résultats des analyses que nous avons menées ici peuvent servir de support à la conception d'un enseignement expérimental d'algèbre linéaire et bilinéaire se déroulant sur les deux années de DEUG à dominante mathématiques (mention MIAS). Un tel enseignement pourrait porter, en première année, sur l'étude de l'algèbre linéaire et bilinéaire en dimensions 2 et 3.

Une étude portant simultanément sur l'algèbre linéaire et les espaces euclidiens nous semble nécessaire pour mettre à profit l'intuition géométrique. Etant donnée l'expérience de la géométrie dont disposent les néobacheliers, il ne peut pas être naturel d'exclure, même dans un premier temps, les notions de norme d'un vecteur ou d'orthogonalité.

Comme nous l'avons vu dans les chapitres précédents, ceci permettrait d'aborder des concepts nouveaux sans exposer d'emblée l'ensemble de la théorie. Un certain nombre de propriétés peuvent être présentées dans le cadre de la dimension 2 ou 3, en soulignant les liens avec la géométrie vue au lycée, au sujet des bases, des projections, des isométries... De même la limitation de dimension permet de travailler des tâches non élémentaires, mais cependant moins abstraites que ce qui est pratiqué usuellement ; celles-ci ne donnent lieu habituellement qu'à peu d'exercices, comme nous l'avons constaté dans notre étude de manuels. Ainsi les tâches que nous avons signalées comme comportant des parentés avec des tâches de lycée pourraient être présentées comme un élargissement de ce qui est vu dans le secondaire et approfondies. Il ne s'agit pas ici de tenter d'empêcher toute rupture entre le secondaire et le supérieur, en faisant apparaître l'algèbre linéaire comme une généralisation de la géométrie vue dans le secondaire. Un tel choix ne correspondrait aucunement à la réalité ; par ailleurs, la rupture est non seulement inévitable mais sans doute également souhaitable, dans une certaine mesure. En termes de niveaux de conceptualisation, nous pouvons dire que le passage d'un niveau à l'autre ne peut s'apparenter à une progression sans discontinuités. Cependant souligner explicitement les continuités comme les ruptures attachées à ce changement de niveaux ne peut qu'être profitable aux étudiants.

Au delà de la référence à l'enseignement secondaire, la limitation de dimension permet de mettre à profit des modèles géométriques et figuratifs. Il ne s'agit pas uniquement de faire le lien avec la géométrie vue au lycée, mais également d'employer autant que possible des dessins. Comme nous l'avons déjà dit plus haut, il nous semble important de proposer aux étudiants un modèle figuratif vectoriel, pour éviter qu'ils aient recours au modèle affine de l'enseignement secondaire. Ce modèle vectoriel doit selon nous être utilisé également pour illustrer des situations se déroulant dans des espaces de polynômes ou de fonctions. En effet, la limitation à la dimension 2 ou 3 ne signifie pas, pour nous, une simple présentation de $\mathbb{R}^2$ et $\mathbb{R}^3$ euclidiens. Une limitation à ce cadre ne peut pas, selon nous, suffire à motiver un enseignement d'algèbre linéaire. Par ailleurs, il nous semble important de proposer aux étudiants un véritable modèle relevant de ce que nous avons désigné comme « algèbre linéaire figurative », et dépassant la simple géométrie du lycée à laquelle on aurait appliqué le vocabulaire de l'algèbre linéaire. Il s'agirait ici d'un ensemble de concepts, de propriétés et de situations fortement associés à des dessins : des concepts figuratifs d'algèbre linéaire et bilinéaire. Ainsi la notion de projection, la distance d'un vecteur à un sous-espace, l'exemple d'une rotation du plan comme endomorphisme n'admettant pas de vecteur propre... peuvent faire partie d'un tel modèle. Celui-ci peut ensuite servir comme modèle géométrique dans la présentation de l'algèbre linéaire et bilinéaire générale en deuxième année. L'emploi de ce modèle pourrait permettre d'éviter la rupture que nous avons pu observer dans certains manuels (Banchoff et Wermer (1992) ou Pham et Dillinger (1996) notamment) lors du passage à une dimension quelconque. En particulier, le recours au modèle figuratif peut être effectué quelle que soit la dimension finie considérée. Au delà même de sa partie figurative, l'algèbre linéaire et bilinéaire en dimension 2 ou 3 peut être employée dans un tel enseignement comme modèle paradigmatique pour la théorie générale.

Par ailleurs, si le découpage que nous proposons ici ne permet pas, pour des questions de temps, d'exposer l'intégralité de l'algèbre linéaire et bilinéaire en DEUG, il serait envisageable d'en présenter une partie en licence, notamment ce qui concerne la dualité, ou les formes quadratiques.

Un tel enseignement en DEUG pourrait donner lieu à une étude didactique visant à comparer les pratiques d'étudiants l'ayant suivi et celles d'un groupe témoin. Cependant on sait que la mise en place d'un enseignement expérimental produit des effets qui rendent délicate une telle comparaison. En particulier, les enseignants qui participent à une telle expérience s'y investissent probablement plus que dans un enseignement usuel, ce qui a un effet bénéfique sur les étudiants, quels que soient les choix de contenu retenus.

De plus la réalisation concrète d'une expérience aussi lourde, nécessitant un dispositif étalé sur deux ans, se heurte à des difficultés évidentes de mise en place.[1]

---

[1] En 1997-1998, nous avons participé à la mise en place d'un enseignement expérimental d'algèbre linéaire au premier semestre de la première année de DEUG MIAS de l'Université de Rennes 1. Mais les étudiants concernés devaient participer au même partiel (en Novembre) et au même examen (en Janvier) que les autres étudiants, ce qui restreignait beaucoup les possibilités de modifications par rapport à l'enseignement classique (Chartier et Escofier 1999).

Des activités en DEUG

Il serait plus facile matériellement de proposer en DEUG des activités s'étalant sur quelques séances de travaux dirigés, et dont la portée serait donc plus limitée. Ceci a déjà été pratiqué lors d'études didactiques précédentes, que nous avons mentionnées dans notre premier chapitre : comme l'expérience menée à Lille, qui comportait un atelier « algèbre linéaire et représentations géométriques » (Rogalski 1991), ou le travail de Sierpinska, Dreyfus et Hillel autour de la notion d'application linéaire, et l'introduction de celle-ci à l'aide de Cabri – Géomètre qui comporte également des activités dans lesquelles l'intervention du géométrique en algèbre linéaire est centrale (Sierpinska, Dreyfus et Hillel 1999).

Les thèmes que nous avons évoqués ci-dessus lorsque nous envisagions la possibilité de recherches ultérieures plus ciblées peuvent donner lieu à de telles activités. Ainsi il serait possible de concevoir une séquence portant sur des applications géométriques connues au lycée, présentées dans un cadre vectoriel, permettant d'introduire certaines propriétés géométriques des applications linéaires. Ces propriétés seraient ensuite interprétées algébriquement ; nous pensons ici en particulier à la caractérisation des applications linéaires par la conservation des parallélogrammes.[2]

Un travail sous forme d'activités serait également envisageable en lycée, où il s'agirait alors de séquences en géométrie visant à préparer à l'algèbre linéaire. Par exemple au sujet des notions de base et de famille libre, on pourrait proposer à des élèves de terminale S des exercices comportant les tâches que nous avons évoquées : déterminer si des vecteurs sont coplanaires, montrer que des vecteurs donnés forment une base de l'espace, etc.

Après le DEUG

Notre questionnaire aux étudiants a notamment rappelé que des difficultés en algèbre linéaire subsistaient, même chez des étudiants titulaires d'une licence de mathématiques. Il n'est donc pas superflu d'envisager des activités d'algèbre linéaire, utilisant la géométrie, après le DEUG, si un module de licence spécifique ou la préparation au CAPES le permettent. De telles activités peuvent être particulièrement profitables à des étudiants se destinant au CAPES. En effet, ceux-ci seront conduits à s'interroger sur la géométrie affine fondée sur l'algèbre linéaire, et sur les liens que celle-ci entretient avec la géométrie vue dans le secondaire. Par exemple, pour la leçon intitulée « Groupe des isométries du plan : décomposition d'une isométrie en produit de réflexions, groupe des déplacements, classification des isométries à partir de l'ensemble des points invariants » (première épreuve orale), quelles connaissances d'algèbre linéaire sont-ils en droit d'utiliser, et comment doivent-ils procéder s'ils souhaitent éviter autant que possible de dépasser les connaissances du secondaire ? Ainsi, montrer qu'une isométrie du plan est une bijection ne demande que quelques lignes si l'on dispose du théorème du rang, puisqu'une telle isométrie est évidemment injective, et donc bijective. Eviter le recours à ce théorème conduit à une démonstration beaucoup plus longue (à notre connaissance).

On peut envisager, en préparation au CAPES, un travail portant sur le recours au dessin en algèbre linéaire (travail qui pourrait être le point de départ d'une réflexion plus générale sur les figures en mathématiques). Il est également possible d'élaborer des séquences portant sur

---

[2] Nous travaillons actuellement à l'élaboration d'une telle séance d'activités, en collaboration avec Ousman Rabiou, de l'université de Niamey (Niger).

la notion de projection[3], sur les isométries... Ces activités, comme celles évoquées pour le DEUG, peuvent s'intégrer dans une recherche didactique ultérieure.

3. Modifications envisageables en DEUG

Il est également possible, sans entrer dans le cadre d'une recherche didactique, d'envisager des modifications de l'enseignement d'algèbre linéaire et bilinéaire en DEUG tenant compte des observations que nous avons faites dans notre travail, et ne bouleversant pas la structure de l'enseignement traditionnel.

Avant d'exposer celles-ci, rappelons que notre travail a notamment montré que les améliorations que l'on peut attendre de l'emploi de la géométrie en algèbre linéaire restent limitées. D'une part, l'étude du rôle de la géométrie dans la genèse de l'algèbre linéaire a rappelé que les différents modèles géométriques qui sont intervenus dans ce processus, s'ils ont été utiles, n'ont jamais été suffisants pour faire émerger la théorie générale. L'intervention d'autres domaines mathématiques, et en particulier de l'analyse, ont été indispensables à l'élaboration de l'algèbre linéaire moderne. C'est le processus de transposition qui a accentué le rôle du géométrique, en décalage avec le savoir savant. D'autre part, notre questionnaire aux étudiants a montré que certains d'entre eux ont rarement recours à des modèles géométriques et disposent cependant de bonnes connaissances d'algèbre linéaire. D'autres étudiants utilisent fréquemment un modèle figuratif vectoriel, et ont cependant des difficultés manifestes.

Cependant, les observations réalisées dans les analyses de manuels et lors du questionnaire aux enseignants suggèrent des modifications possibles. Celle-ci vont dans le sens de ce que nous avons présenté ci-dessus à propos d'un enseignement expérimental portant sur les deux années de DEUG. Sans modifier profondément ce qui est pratiqué actuellement, il serait possible de tenter une présentation plus progressive de l'algèbre linéaire, en ayant fréquemment recours à des situations en dimension 2 et 3. Ceci permettrait également de souligner les liens avec la géométrie vue au lycée. Notre questionnaire aux enseignants a clairement montré que ceux-ci utilisent peu les connaissances de géométrie des étudiants ; certains déclarent même ne pas connaître les programmes du secondaire.

D'autre part, nous avons observé différentes attitudes vis-à-vis de l'usage des dessins, fait par les enseignants, et attendu des étudiants. Il serait difficile matériellement d'harmoniser cet usage ; de plus ceci ne nous semble pas souhaitable, car rencontrer plusieurs points de vue est un enrichissement pour les étudiants. Nous avons pu constater d'autre part qu'un recours fréquent aux dessins n'est nullement lié avec la réussite en algèbre linéaire. En revanche, l'examen du questionnaire aux étudiants, et du décalage entre les déclarations des enseignants et les souvenirs des étudiants semble indiquer que l'emploi de dessins ne fait pas l'objet d'explications suffisantes de la part des enseignants. Ceux-ci pourraient sans doute expliciter plus l'usage qu'ils en font dans leur cours, et celui qu'ils recommandent aux étudiants pour les exercices (même s'il s'agit de dissuader les étudiants d'employer des dessins, si telle est l'opinion de l'enseignant concerné !). Les conventions de dessin pourraient elles aussi faire l'objet d'explicitations supplémentaires.

[3] De telles activités (reposant sur la notion de projection) ont déjà été mises en place par Robert dans un module de licence, à l'Université de Versailles-Saint Quentin en Yvelines (Robert 2000).

L'examen de ces modifications rejoint des difficultés générales, liées aux spécificités de l'enseignement supérieur, qui dépassent le cadre de l'algèbre linéaire et ont été mentionnées dans différents travaux de didactique. Ainsi atténuer la rupture avec l'enseignement secondaire est d'autant plus difficile que certains enseignants du supérieur ne tentent pas d'utiliser les connaissances des néobacheliers, voire ignorent les programmes du secondaire. Par ailleurs mettre en place une présentation qui permette aux étudiants d'assimiler progressivement les connaissances d'algèbre linéaire se heurte à un problème d'organisation, et de temps. Le DEUG comporte actuellement[4] quatre « semestres » de 12 semaines chacun. Le passage d'un semestre à l'autre est vécu par certains étudiants comme une véritable rupture. En effet, d'une part, l'organisation d'une session d'examen entre deux semestres engendre une période d'arrêt des enseignements. D'autre part, il n'est pas rare que certains sujets qui ont été traités rapidement en fin de semestre soient considérés comme acquis au semestre suivant. La mise en place d'une progression cohérente est extrêmement difficile dans de telles conditions. Ceci s'ajoute aux difficultés liées au temps d'apprentissage, et à la gestion de celui-ci par les étudiants.

Dans un avenir sans doute proche, l'accès libre des étudiants à des hypermédia du type « Université en ligne »[5] permettra peut-être à ceux-ci de s'attarder sur des tâches ou des situations présentées rapidement en cours et en travaux dirigés, en bâtissant ainsi leur propre progression. Il serait d'ailleurs intéressant, pour l'algèbre linéaire, que les étudiants disposent d'un produit permettant l'emploi de représentations, des conversions de registres, etc. Ceci représente un travail de conception important, dans lequel l'analyse didactique doit jouer un rôle déterminant.

Une autre solution au problème de temps consisterait à repousser une partie de l'enseignement de l'algèbre linéaire en licence. Cette possibilité ne pose pas les problèmes technologiques attachés à la précédente, mais elle se heurte à d'autres types de difficultés. En effet une telle proposition entraîne, d'après notre expérience personnelle, de vives réactions de la part de certains enseignants-chercheurs, hostiles à tout allègement du cours de licence actuel. Ainsi le contenu de l'enseignement d'algèbre linéaire en DEUG est resté sensiblement le même depuis trente ans, alors que l'algèbre linéaire a été supprimée des programmes du secondaire, et que le public étudiant s'est profondément modifié. Selon nous, une modification de programmes conduisant à repousser en licence une partie de l'algèbre linéaire n'est au moins pas à écarter d'emblée ; elle pourrait faire l'objet d'une étude didactique précise. Ceci dépasse bien entendu de beaucoup les modifications ponctuelles auxquelles ce paragraphe devait être consacré ; mais de telles modifications ponctuelles ne peuvent sans doute entraîner de véritables changements dans l'apprentissage et les pratiques des étudiants.

4. Retour sur les questions initiales

Nous avions, à la fin du premier chapitre, présenté les questions de recherche pour lesquelles notre travail devait fournir des éléments de réponse. Nous allons ici reprendre ces questions, montrer dans quelle mesure nous y avons répondu, et mentionner des recherches ultérieures qui pourraient permettre de compléter nos résultats (nous avons modifié l'ordre adopté pour les questions dans le chapitre 1).

[4] A l'Université de Rennes 1, mais aussi dans la majorité des universités françaises.

[5] Voir à ce sujet (Cazes et Jarraud 1999).

- **L'algèbre linéaire peut-elle être présentée comme généralisation d'une géométrie (à préciser éventuellement) ?**

  La réponse à cette question est clairement négative. D'une part, l'étude historique a notamment montré que les avancées déterminantes dans la genèse de l'algèbre linéaire n'ont jamais été issues de la seule géométrie. L'attachement trop fort à un modèle géométrique a au contraire freiné l'évolution de la théorie générale. D'autre part, l'étude du processus de transposition a confirmé que celui-ci a accentué le lien entre géométrie et algèbre linéaire. De plus, l'étude réalisée dans le chapitre 4 montre qu'une partie non négligeable de notions et propriétés d'algèbre linéaire ne peuvent être introduites de manière pertinente en se limitant à la dimension 3. Les apports possibles du géométrique en algèbre linéaire restent donc limités ; l'intérêt de l'algèbre linéaire réside notamment dans l'unification de plusieurs domaines, et l'emploi de ces différents domaines est donc nécessaire à l'introduction de l'algèbre linéaire.

- **Quels recours à la géométrie vue au lycée sont faits, ou peuvent être faits, dans un cours d'algèbre linéaire ?**

  En ce qui concerne les recours qui peuvent être faits, nous avons au chapitre 4 présenté une liste de propriétés d'algèbre linéaire présentant des liens avec des propriétés vues au lycée. Ces liens pourraient être soulignés par les enseignants. Nous avons de même examiné des tâches, qui pourraient être travaillées en algèbre linéaire limitée à la dimension 3, en montrant des parentés avec certaines tâches rencontrées au lycée. A propos des recours qui sont effectivement faits, le questionnaire soumis aux enseignants a montré que ceux-ci étaient peu nombreux, une part importante des enseignants de l'université manifestant une méconnaissance ou une défiance à l'égard de ce qui est vu dans le secondaire.

- **Certains recours à des modèles géométriques ou figuratifs en algèbre linéaire peuvent-ils entraîner des difficultés spécifiques ?**

  Nous avons observé dans le chapitre 5 que l'emploi d'un modèle géométrique issu de la géométrie vue au lycée, et d'un modèle figuratif affine, sont associés à des difficultés en algèbre linéaire. Quant aux difficultés éventuellement entraînées par le recours à d'autres modèles, qui seraient par exemple issus d'une géométrie affine présentée avant l'algèbre linéaire, l'observation de celles-ci nécessiterait une étude ultérieure, examinant une population d'étudiants ayant suivi un enseignement rendant un tel emploi de modèle possible. Par ailleurs les observations que nous avons effectuées dans le chapitre 4, en ce qui concerne les limites de l'emploi d'un modèle géométrique, montrent qu'un recours systématique à un tel modèle ne permet pas d'accéder à l'ensemble de la théorie générale.

- **Certains recours à des modèles géométriques ou figuratifs peuvent-ils être profitables aux étudiants dans l'apprentissage et la pratique de l'algèbre linéaire, ou plus précisément, de certaines parties de l'algèbre linéaire ?**

  Nous avons noté dans le chapitre 5 que certains étudiants, utilisant un modèle figuratif vectoriel, rencontraient cependant d'importantes difficultés en algèbre linéaire, tandis que d'autres étudiants ayant de bonnes connaissances d'algèbre linéaire ne semblaient pas faire appel à des dessins. Toutefois la présentation par les enseignants d'un modèle figuratif vectoriel permettrait aux étudiants qui souhaitent faire appel à des dessins d'éviter de se reporter à un modèle figuratif affine. Par ailleurs, il ne ressort pas de notre étude que certaines parties de l'algèbre linéaire sont particulièrement propices à la mise à profit de modèles géométriques ou figuratifs. L'étude historique avait effectivement montré l'importance du rôle joué par l'analyse fonctionnelle et l'étude des espaces de

Hilbert. Mais dans l'enseignement d'algèbre linéaire effectivement pratiqué, les dessins proposés par les enseignants illustrent des notions issues de l'ensemble de l'algèbre linéaire, même un emploi métaphorique du dessin semble plus volontiers accepté dans les espaces euclidiens. Quant à l'étude que nous avons réalisée dans le chapitre 4, elle montre que des possibilités d'emploi de modèles géométriques existent dans différentes partie de l'algèbre linéaire et bilinéaire.

- **Quels types de recours à des modèles géométriques ou figuratifs sont faits, ou peuvent être faits en algèbre linéaire ?**

  En ce qui concerne les recours qui sont effectivement faits, nous avons observé plusieurs tendances, tant chez les enseignants que chez les étudiants. Deux tendances opposées, liées aux choix de transposition faits lors de la réforme des mathématiques modernes, regroupent une majorité d'enseignants. Le choix d'une entrée directe dans la théorie générale, avec un faible recours à un modèle figuratif, est ainsi opposé à l'introduction préalable d'une géométrie affine pouvant ensuite servir de support, avec un recours plus fréquent au modèle figuratif. Nous avons également noté qu'une majorité d'enseignants emploie peu de dessins ; de plus, les dessins employés par les enseignants sont associés à des notions apparaissant également en géométrie affine. Il ne semble pas que les enseignants proposent explicitement aux étudiants un travail sur le dessin en algèbre linéaire. Par ailleurs, les attentes des enseignants en termes d'emploi de dessins par les étudiants sont très diverses. Il n'est donc pas surprenant d'observer également chez les étudiants différentes tendances quant à l'usage de modèles géométriques ou figuratifs, et que certains fassent appel à des modèles issus de la géométrie vue dans le secondaire. La question des recours effectivement faits, par les enseignants et les étudiants, à des modèles géométriques ou figuratifs, peut être affinée et complétée des études ultérieures que nous avons évoquées ci-dessus (partie 1 : poursuivre le diagnostic).

  En ce qui concerne les recours possibles, nous avons présenté au chapitre 4 un ensemble (non exhaustif) de propriétés et de tâches d'algèbre linéaire qui peuvent faire partie d' un modèle de nature géométrique élaboré à l'intention des étudiants. Par ailleurs un travail spécifique sur l'emploi de dessins en algèbre linéaire permettrait aux étudiants de disposer d'un modèle figuratif adéquat.

Quant à la dernière question que nous posions au premier chapitre :

- **Comment élaborer un enseignement d'algèbre linéaire qui mette autant que possible à profit le recours au géométrique ?**

Les possibilités d'expérimentations et de modifications de l'enseignement en DEUG que nous avons évoquées ci-dessus sont des tentatives de réponses à celle-ci. Il faudrait toutefois que celles-ci soient mises en place, et suivies d'une étude didactique appropriée, pour observer leurs conséquences effectives en termes de pratiques des étudiants.

BIBLIOGRAPHIE

ARTIGUE, M., CHARTIER, G. et DORIER, J-L. (2000) : Presentation of other research works, in Dorier (ed.) :*On the teaching of linear algebra,* Dordrecht : Kluwer Academic Publisher, 247-264.

BANACH, S. (1967/79) : *Œuvres,* 2 vols., Varsaw : Editions scientifiques de Pologne.

BANCHOFF, T et WERMER, J. (1991) *Linear Algebra through geometry,* New York : Springer Verlag.

BEHAJ, A. (1999) : *Eléments de structuration à propos de l'enseignement et l'apprentissage à long terme de l'algèbre linéaire,* Thèse de doctorat, Falculté des sciences Dhar el Mehraz, Université Sidi Mohamed ben Abdellah, Fès.

BOSCH, M. et CHEVALLARD, Y. (1999) : La sensibilité de l'activité mathématique aux ostensifs. Objet d'étude et problématique, *Recherches en Didactique des Mathématiques,* Vol.19.1, 77-124.

BETH, E.W. et PIAGET, J. (1961) : *Epistémologie mathématique et psychologie*, Paris : Presses universitaires de France.

BOULIGAND, G. (1944) : *Les aspects intuitifs de la mathématique*, Paris : Gallimard.

BREZIS, H. (1983) : *Analyse fonctionnelle,* Paris : Masson.

CASTELA, C. (1995) : Apprendre avec et contre ses connaissances antérieures – un exemple concret : celui de la tangente, *Recherches en Didactique des mathématiques,* vol 15.1, 7-47.

CAZES, C. et JARRAUD, P. (1999) : Un hypermédia pour l'enseignement des mathématiques en DEUG : quels changements dans l'apprentissage ? *Actes de la Xème école d'été de didactique des mathématiques, Houlgate.*

CHARTIER, G. et ESCOFIER, J-P. (1999) : *Enseignement de l'algèbre linéaire en première année de DEUG,* Séminaire de didactique des mathématiques de l'Université de Rennes 1.

CHEVALLARD, Y. (1985) : *La transposition didactique. Du savoir savant au savoir enseigné.* Editions la Pensée sauvage, Grenoble.

CHEVALLARD, Y. (1989) : Le concept de rapport au savoir, rapport personnel, institutionnel, officiel, *Actes du séminaire de Didactique des Mathématiques et de l'Informatique,* CNRS-IMAG, Université Joseph Fourier, Grenoble, 211-236.

CHOQUET, G. (1964) : *L'enseignement de la géométrie,* Paris : Hermann.

COUSQUER, E. et SACRE, C. (1994) : *Fiches pédagogiques DEUG A première année,* Université des sciences et technologies de Lille.

C.R.E.M.(Commission de réflexion sur l'enseignement des mathématiques) (2000) :

Rapport d'étape sur l'enseignement de la géométrie, *Bulletin Apmep n°430,* 571-599.

DESCARTES, R. (1951) : *Règles pour la direction de l'esprit*, trad. J.Sirven 2ième éd., Paris.

DIAS, M. (1998) : *Les problèmes d'articulation entre point de vue cartésien et paramétrique dans l'enseignement de l'algèbre linéaire,* Thèse de doctorat, Université de Paris VII.

DIEUDONNE, J. (1964) : *Algèbre linéaire et géométrie élémentaire,* Paris : Hermann 1964.

DIEUDONNE, J. (1966) : L'algèbre linéaire dans les mathématiques modernes, *Bulletin Apmep n°253*, 315-329.

DIEUDONNE, J. (1974) : Devons nous enseigner les "mathématiques modernes" ?, *Bulletin Apmep n°292*, 69-79.

DIEUDONNE, J. (1981) : *Domination universelle de la géométrie*, Irem Paris-Nord.

DOUADY, R. (1992) : Des apports de la didactique des mathématiques à l'enseignement, *Repères Irem vol 6,* 132-158.

DORIER, J.L. (1996) : Genèse des premiers espaces vectoriels de fonctions, *Revue d'histoire des mathématiques 2* , 149-191.

DORIER, J.L. et al. (1997) : *L'enseignement de l'algèbre linéaire en question,* Grenoble :

La Pensée sauvage éditions.

DORIER, J.L. (1997) : *Recherches en Histoire et en Didactique des Mathématiques sur l'algèbre linéaire. Perspective théorique sur leurs interactions.* Document d'habilitation, Université Joseph Fourier (Grenoble 1) *(non publié).*

DORIER, J.L. et al. (2000) : *On the teaching of linear algebra,* Dordrecht : Kluwer Academic Publisher.

DUBINSKY, E. (1991) : Reflective abstraction in advanced mathematical thinking, in D.Tall (ed.), *Advanced Mathematical Thinking,* Kluwer Academic Plublishers, 95-123.

DUVAL, R. (1993) : Registres de représentation sémiotique et fonctionnement cognitif de la pensée, *Annales de didactique et de sciences cognitives,* 5, IREM de Strasbourg, 37-65.

DUVAL, R. (1995) : *Sémiosis et pensée humaine*, Bern : Peter Lang.

DUVAL, R. (1998) : Signe et objet, trois grandes étapes dans la problématique des rapports entre représentation et objet, *Annales de didactique et sciences cognitives*, 6, IREM de Strasbourg, 139-163.

FISCHBEIN, E. (1987) : *Intuition in science and Mathematics, An Educational Approach,* Dordrecht : D.Reidel Publishing Company.

FISCHBEIN, E. (1993) : The theory of figural concepts, *Educational Studies in Mathematics,* Vol.24, n.2, 139-162.

FLAMENT, D. (1992) : La "lineale Ausdehnuglehre" (1844) de Hermann Günther Grassmann, in *1830-1930 : A Century of Geometry : Epistemology, History and Mathematics,* Lecture notes in Physics vol. 402, Berlin/New York/Paris : Springer, 205-221.

FLAMENT, D. (1994) : *Hermann Günther Grassmann, La science de la grandeur extensive, la lineale Ausdehnunglehre,* Paris : Blanchard. Traduction préfacée de (Grassmann 1844).

FRECHET, M. (1928) : *Les espaces abstraits et leur théorie considérée comme introduction à l'analyse générale,* Paris : Gauthier-Villars ; rééd, 1951.

FRENKEL, J. (1970) : Sur les « Notes de géométrie » de Mme Lelong-Ferrand, *Bulletin Apmep n°274,* 225-232.

GOURION, G. (1983) : *Mathématique Terminales C et E,* Paris : Fernand Nathan.

GOUYON, R. (1958) : *Précis de Mathématiques spéciales,* Paris : Vuibert.

GRANGER, G.G. (1968) *Essai d'une philosophie du style,* Paris : Librairie Armand Colin.

GRASSMANN, H. (1844) : *Die lineale Ausdehnunglehre,* Leipzig : Otto Wigand.

GRIFONE, J. (1990) : *Algèbre linéaire,* Toulouse : Cepaduès éditions.

GUININ, D., AUBONNET, F., JOPPIN, B. (1993) : *Précis de mathématiques, Algèbre 1* Rosny : Bréal

GUININ, D., AUBONNET, F., JOPPIN, B. (1993) : *Précis de mathématiques, Algèbre 2* Rosny : Bréal

HAMILTON, W.R. (1853) : *Lectures on Quaternions,* Dublin : Hodges and Smith.

HAMILTON, W.R. (1866) : *Elements of Quaternions,* 2 vols., Dublin, 1866 ; rééd., New York : Chelsea Publishing Company.

HAREL, G. (1997) : Sur trois principes d'apprentissage et d'enseignement : le cas de l'algèbre linéaire, in Dorier et al.: *L'enseignement de l'algèbre linéaire en question,* Grenoble : La Pensée sauvage éditions.

HILLEL, J. (1997) : Des niveaux de description et du problème de la représentation en algèbre linéaire, in Dorier et al.: *L'enseignement de l'algèbre linéaire en question,* Grenoble : La Pensée sauvage éditions.

HILBERT, D. (1912) : *Grunzüge einer allgemeinen Theorie der linearen Integralgleichungen,* Leipzig/Berlin : Teubner ; rééd. 1924 ; New-York : Chelsea, 1953.

HILBERT, D. (1923) : *Grundlagen der Geometrie,* 6ième éd., Berlin, Leipzig.

HOUDEMENT, C. et KUZNIAK, A. (2000) : Formation des maîtres et paradigmes géométriques, *Recherches en Didactique des Mathématiques,* Vol. 20.1, 89-116.

KLEIN, F. (1898) *Conférence sur les mathématiques,* Paris : Hermann.

KLEIN, F. (1974) *Le programme d'Erlangen,* Paris : Gauthier-Villars.

LABORDE, C. et CAPPONI, B. (1994) : Cabri-géomètre constituant d'un milieu pour l'apprentissage de la notion de figure géométrique, *Recherches en Didactique des Mathématiques,* Vol. 14.1.2, 165-210.

LELONG-FERRAND, J. (1970) : Notes de géométrie, *Bulletin Apmep n°274,* 215-224.

LEHMANN, D. et BKOUCHE, R. (1988) : *Initiation à la géométrie,* Paris : Presses universitaires de France.

LEIBNIZ, G.W. (1995) : *La caractéristique géométrique* , trad. J.Echeverria, Paris : Librairie philosophique J.Vrin.

LIRET, F. et MARTINAIS, D. (1997) : *Algèbre première année,* Paris : Dunod

LIRET, F. et MARTINAIS, D. (1999) : *Algèbre et géométrie deuxième année,* Paris : Dunod

MARION, J. (1979) : *Essai sur la géométrie*, Irem de Marseille.

MARIOTTI, M.A. (1996) : *The interaction between images and concepts in geometrical reasoning.* PhD Thesis, Universita di Pisa, Dipartimento di Matematica.

MOORE G.H. (1995) : The axiomatization of Linear Algebra : 1875-1940, *Historia mathematica* 22 , 262-303.

OVAERT, J.L. et VERLEY, J.L. (1981) : *Algèbre vol.1*, Paris : Fernand Nathan.

PAVLOPOULOU, K. (1994) : *Propédeutique de l'algèbre linéaire : la coordination des registres de représentation sémiotique,* Thèse de doctorat, Université Louis Pasteur (Strasbourg 1), prépublication de l'Institut de Recherche Mathématique Avancée.

PEANO, G. (1888) : *Calcolo geometrico secundo l'Ausdehnuglehre di H.Grassmann e precedunto dalle operazioni della logica deduttiva,* Torino : Fratelli Bocca Editori.

PEANO, G. (1958) : *Opere Scelte*, vol I, II, III, Roma : Edizioni Cremonese.

PHAM F. et DILLINGER H. (1996) : *Algèbre linéaire*, Paris : Diderot éditeur.

PINCHERLE, S. et AMALDI, U. (1901) : *Le operazioni distributive,* Bologne : Zanichelli.

POINCARE, H. (1902) : *La science et l'hypothèse*, Paris : Bibliothèque de philosophie scientifique, 1902.

POINCARE, H. (1905) : *La valeur de la science*, Paris : Bibliothèque de philosophie scientifique.

PRASLON, F. (2000) : *Continuités et ruptures dans la transition terminale S/DEUG sciences en analyse. Le cas de la notion de dérivée et son environnement*, Thèse de doctorat, Université de Paris 7 – Denis Diderot.

REVUZ, A. et G. (1963) : *Le cours de l'A.P.M., II, Espaces vectoriels* Paris : A.P.M.

RIESZ, F. (1907) : Sur une espèce de géométrie analytique des systèmes de fonctions sommables, *C.R. Acad. Sc.* 144, 1409-1411.

RIESZ, F. (1960) : *Œuvres complètes,* 2 vols., Paris : Gauthier-Villars.

ROBERT, A., ROBINET, J., et TENAUD, I. (1987) : *De la géométrie à l'algèbre linéaire,* Brochure 72, IREM de Paris VII.

ROBERT, A. (1997) : Niveaux de conceptualisation et enseignement secondaire, in Dorier et al.: *L'enseignement de l'algèbre linéaire en question,* Grenoble : La Pensée sauvage éditions.

ROBERT, A. (1998) : Outils d'analyse des contenus mathématiques à enseigner au lycée et à l'université, *Recherches en Didactique des Mathématiques,* vol 18.2, 139-189.

ROBERT, A. (2000) : *Connaissances actuelles et connaissances potentielles des étudiants de CAPES,* Séminaire de didactique de l'Université de Rennes 1 (*à paraître*).

ROGALSKI, M. (1991) : *Un enseignement d'algèbre linéaire en DEUG A première année,* Cahier de didactique des mathématiques 53, IREM de Paris VII.

ROGALSKI, M. (1997) : L'enseignement d'algèbre linéaire expérimenté à Lille, in Dorier et al.: *L'enseignement de l'algèbre linéaire en question,* Grenoble : La Pensée sauvage éditions.

SAPORTA, G. (1990) : *Probabilités, analyse de données et statistique,* Paris : éditions technip.

SCHAAL, H. (1976) : *Lineare algebra und analytische geometrie* Braunschweig : Vieweg.

SCHMIDT E. (1907) : Zur theorie der linearer und nichtlinearer Integralgleichungen, partie 1, *Math. Ann.* 63 , 433-467.

SCHMIDT E. (1907) : Zur theorie der linearer und nichtlinearer Integralgleichungen, partie 2, *Math. Ann.* 64 , 161-174.

SCHMIDT, E. (1908) : Über die Auflösung linearer Gleichungen mit unendlich vielen Unbekannten, *Palermo* 20, 53-77.

SFARD, A. (1991) : On the dual nature of mathematical conceptions : reflections on process and objects as different sides of the same coin, *Educational Studies in Mathematics,* Vol. 22.1, 1-36.

SIERPINSKA, A., DEFENCE, A., KHATCHERIAN, T. et SALDANHA, L. (1997) : A propos de trois modes de raisonnement en algèbre linéaire, in Dorier et al.: *L'enseignement de l'algèbre linéaire en question,* Grenoble : La Pensée sauvage éditions.

SIERPINSKA, A., DREYFUS, T., HILLEL, J. (1999) : Evaluation of a teaching design in linear algebra : the case of linear transformations, *Recherches en Didactique des mathématiques,* Vol. 19.1, 7-40.

SIERPINSKA, A. (2000) : On some aspects of students thinking in linear algebra, in Dorier (ed.) :*On the teaching of linear algebra,* Dordrecht : Kluwer Academic Publisher.

THOM, R. (1974) : Les mathématiques modernes : une erreur pédagogique et philosophique ?

L'âge de la science, III, n°3, p. 225-242.

THUIZAT, A. et GIRAULT, G. (1972) : *Mathématique Seconde C et T,* Paris : Technique et vulgarisation.

THUIZAT, A. et GIRAULT, G. (1972) : *Mathématique Première C, T, et E,* Paris : Technique et vulgarisation.

THUIZAT, A. et GIRAULT, G. (1972) : *Mathématique Classes Terminales C,* Paris : Technique et vulgarisation.

WEYL, H. (1958) : *Raum-Zeit -Matiere ,* Berlin : Springer, 1918, et trad. Jouvet-Leroy, Paris : Librairie scientifique Albert Blanchard.