

ALGORITHMES DE POURSUITE POUR L'ESTIMATION DE CANAL RADIO-MOBILE ET PERFORMANCES ASYMPTOTIQUES: APPLICATIONS POUR LES SYSTÈMES OFDM

HUAQIANG SHU

GROUPE TELICE, IEMN

06 NOVEMBRE 2013, VILLENEUVE D'ASCQ

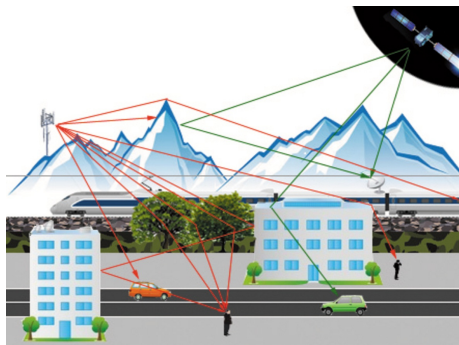
DIRECTRICE DE THÈSE: MME. MARTINE LIÉNARD
CO-ENCADRANT: M. ÉRIC PIERRE SIMON
M. LAURENT ROS (GIPSA LAB)

- 1 INTRODUCTION
- 2 ESTIMATION D'UN CANAL MONO-TRAJET EN MODULATION MONO-PORTEUSE
 - BOUCLE DE POURSUITE D'ORDRE 3 (RW3-CATL)
 - FILTRE DE KALMAN ASYMPTOTIQUE D'ORDRE 3 (RW3-KF)
- 3 APPLICATIONS DES ESTIMATEURS D'ORDRE 3 SUR UN SYSTÈME OFDM AVEC UN CANAL MULTI-TRAJET
 - RW3-LS-CATL
 - RW3-KF APPLIQUÉ SUR DES SYSTÈMES OFDM
- 4 CONCLUSION ET PERSPECTIVE

PLAN

- 1 INTRODUCTION
- 2 ESTIMATION D'UN CANAL MONO-TRAJET EN MODULATION MONO-PORTEUSE
 - BOUCLE DE POURSUITE D'ORDRE 3 (RW3-CATL)
 - FILTRE DE KALMAN ASYMPTOTIQUE D'ORDRE 3 (RW3-KF)
- 3 APPLICATIONS DES ESTIMATEURS D'ORDRE 3 SUR UN SYSTÈME OFDM AVEC UN CANAL MULTI-TRAJET
 - RW3-LS-CATL
 - RW3-KF APPLIQUÉ SUR DES SYSTÈMES OFDM
- 4 CONCLUSION ET PERSPECTIVE

CANAL RADIO-MOBILE



- Réflexion
- Diffraction
- Diffusion

⇒ Propagation Multi-trajet

SIGNAL REÇU AU RÉCEPTEUR

$$r_{\text{HF}}(t) = \sum_{l=1}^{L_t} \rho_l s_{\text{HF}}(t - \tau_l) + b_{\text{HF}}(t)$$

RÉPONSE IMPULSIONNELLE DU CANAL ÉQUIVALENT EN BANDE DE BASE

$$h(\tau) = \sum_{l=1}^{L_t} \alpha_l \delta(\tau - \tau_l) \quad \text{avec} \quad \alpha_l = \rho_l e^{j\theta_l}$$

CANAL RADIO-MOBILE



- Réflexion
- Diffraction
- Diffusion

⇒ **Propagation Multi-trajet**

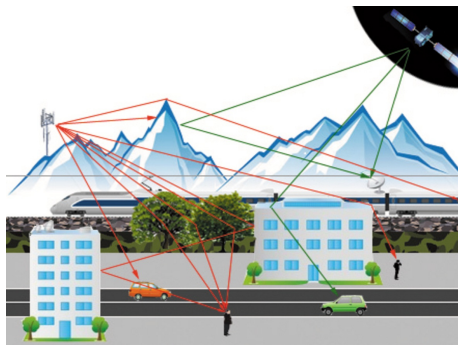
SIGNAL REÇU AU RÉCEPTEUR

$$r_{\text{HF}}(t) = \sum_{l=1}^{L_t} \rho_l s_{\text{HF}}(t - \tau_l) + b_{\text{HF}}(t)$$

RÉPONSE IMPULSIONNELLE DU CANAL ÉQUIVALENT EN BANDE DE BASE

$$h(\tau) = \sum_{l=1}^{L_t} \alpha_l \delta(\tau - \tau_l) \quad \text{avec} \quad \alpha_l = \rho_l e^{j\theta_l}$$

CANAL RADIO-MOBILE



- Réflexion
- Diffraction
- Diffusion

⇒ **Propagation Multi-trajet**

SIGNAL REÇU AU RÉCEPTEUR

$$r_{\text{HF}}(t) = \sum_{l=1}^{L_t} \rho_l s_{\text{HF}}(t - \tau_l) + b_{\text{HF}}(t)$$

RÉPONSE IMPULSIONNELLE DU CANAL ÉQUIVALENT EN BANDE DE BASE

$$h(\tau) = \sum_{l=1}^{L_t} \alpha_l \delta(\tau - \tau_l) \quad \text{avec} \quad \alpha_l = \rho_l e^{j\theta_l}$$

CANAL RADIO-MOBILE



- Réflexion
- Diffraction
- Diffusion

⇒ **Propagation Multi-trajet**

SIGNAL REÇU AU RÉCEPTEUR

$$r_{\text{HF}}(t) = \sum_{l=1}^{L_t} \rho_l s_{\text{HF}}(t - \tau_l) + b_{\text{HF}}(t)$$

RÉPONSE IMPULSIONNELLE DU CANAL ÉQUIVALENT EN BANDE DE BASE

$$h(\tau) = \sum_{l=1}^{L_t} \alpha_l \delta(\tau - \tau_l) \quad \text{avec} \quad \alpha_l = \rho_l e^{j\theta_l}$$

CANAL RADIO-MOBILE



- Réflexion
- Diffraction
- Diffusion

⇒ **Propagation Multi-trajet**

SIGNAL REÇU AU RÉCEPTEUR

$$r_{\text{HF}}(t) = \sum_{l=1}^{L_t} \rho_l s_{\text{HF}}(t - \tau_l) + b_{\text{HF}}(t)$$

RÉPONSE IMPULSIONNELLE DU CANAL ÉQUIVALENT EN BANDE DE BASE

$$h(t, \tau) = \sum_{l=1}^{L_t} \alpha_l(t) \delta(\tau - \tau_l(t)) \quad \text{avec} \quad \alpha_l(t) = \rho_l(t) e^{j\theta_l(t)}$$

AMPLITUDE COMPLEXE (MODÈLE ALÉATOIRE)

AC DU $l^{\text{ème}}$ TRAJET

$$\alpha_l(t) = \rho_l(t)e^{j\theta_l(t)}$$

- $\rho_l(t)$ suit la Loi de Rayleigh (NLOS) / Loi de Rice (LOS)
- $\theta_l(t)$ distribution uniformément entre $[0, 2\pi]$
- $\alpha(t) \sim \mathcal{CN}(0, \sigma_\alpha^2)$ complexe Gaussien

SPECTRE DOPPLER EN "U" (2-D)

SPECTRE DOPPLER UNIFORME (3-D)

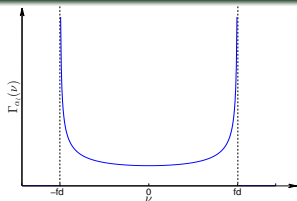
AMPLITUDE COMPLEXE (MODÈLE ALÉATOIRE)

AC DU $l^{\text{ème}}$ TRAJET

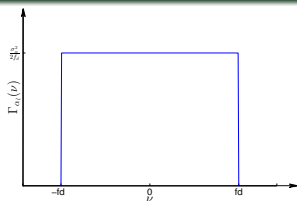
$$\alpha_l(t) = \rho_l(t)e^{j\theta_l(t)}$$

- $\rho_l(t)$ suit la Loi de Rayleigh (NLOS) / Loi de Rice (LOS)
- $\theta_l(t)$ distribution uniformément entre $[0, 2\pi]$
- $\alpha(t) \sim \mathcal{CN}(0, \sigma_\alpha^2)$ complexe Gaussien

SPECTRE DOPPLER EN "U" (2-D)



SPECTRE DOPPLER UNIFORME (3-D)



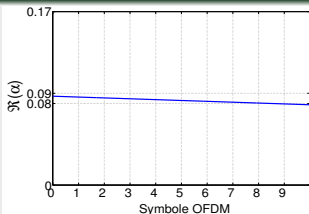
AMPLITUDE COMPLEXE (MODÈLE ALÉATOIRE)

AC DU $l^{\text{ème}}$ TRAJET

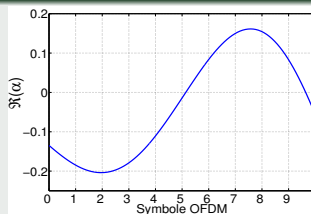
$$\alpha_l(t) = \rho_l(t)e^{j\theta_l(t)}$$

- $\rho_l(t)$ suit la Loi de Rayleigh (NLOS) / Loi de Rice (LOS)
- $\theta_l(t)$ distribution uniformément entre $[0, 2\pi]$
- $\alpha(t) \sim \mathcal{CN}(0, \sigma_\alpha^2)$ complexe Gaussien

VARIATION DE L'AC, $f_d T = 0.001$



VARIATION DE L'AC, $f_d T = 0.1$



MODULATION OFDM

- OFDM (*Orthogonal Frequency Division Multiplexing*)
 - N sous-porteuse orthogonaux
 - Préfixe cyclique \Rightarrow sans IES

MODÈLE DE TRANSMISSION

$$\mathbf{y}(k) = \mathbf{H}_{(k)} \mathbf{x}(k) + \mathbf{w}(k)$$

- $f_d T$ faible \Rightarrow Sans IEP

MATRICE DU CANAL

$$\mathbf{H}_{(k)} = \text{diag}\{\mathbf{F}\boldsymbol{\alpha}_{(k)}\}$$

MODULATION OFDM

- OFDM (*Orthogonal Frequency Division Multiplexing*)
 - N sous-porteuse orthogonaux
 - Préfixe cyclique \Rightarrow sans IES

MODÈLE DE TRANSMISSION

$$\mathbf{y}(k) = \mathbf{H}_{(k)} \mathbf{x}(k) + \mathbf{w}(k)$$

- $f_d T$ faible \Rightarrow Sans IEP

MATRICE DU CANAL

$$\mathbf{H}_{(k)} = \text{diag}\{\mathbf{F}\boldsymbol{\alpha}_{(k)}\}$$

MODULATION OFDM

- OFDM (*Orthogonal Frequency Division Multiplexing*)
 - N sous-porteuse orthogonaux
 - Préfixe cyclique \Rightarrow sans IES

MODÈLE DE TRANSMISSION

$$\mathbf{y}(k) = \mathbf{H}_{(k)} \mathbf{x}(k) + \mathbf{w}(k)$$

- $f_d T$ faible \Rightarrow Sans IEP

MATRICE DU CANAL

$$\mathbf{H}_{(k)} = \text{diag}\{\mathbf{F}\boldsymbol{\alpha}_{(k)}\}$$

MODULATION OFDM

- OFDM (*Orthogonal Frequency Division Multiplexing*)
 - N sous-porteuse orthogonaux
 - Préfixe cyclique \Rightarrow sans IES

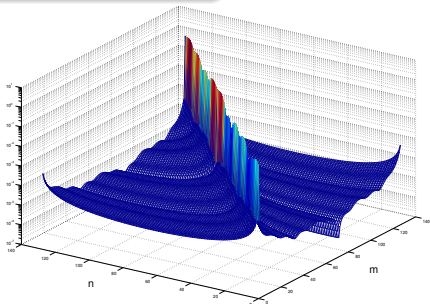
MODÈLE DE TRANSMISSION

$$\mathbf{y}(k) = \mathbf{H}(k)\mathbf{x}(k) + \mathbf{w}(k)$$

- $f_d T$ faible \Rightarrow Sans IEP

MATRICE DU CANAL

$$\mathbf{H}(k) = \text{diag}\{\mathbf{F}\boldsymbol{\alpha}(k)\}$$



ESTIMATION DE CANAL DANS UN SYSTÈME OFDM

- Pilote-Aided (Estimation + interpolation)

FILTRE DE KALMAN

- Auto-régressive (AR) :
 - AR1_{CM}-KF [Hijazi10][Simon12][Tugnait10] ;
modèle AR1 associé au critère "*Correlation Matching*", scénario $f_d T$ élevée
 - AR1_{MAV}-KF [Barbieri09][Ghandour-Haidar12] ;
modèle AR1 associé au critère "*Minimum Asymptotic Variance*", scénario $f_d T$ faible
- Marche-aléatoire (RW) :
 - RW_r-KF ($r = 1, 2, 3$) [Ghandour-Haidar12][Ros11][Shu13]
- Problème du KF : complexité

⇒ RW3-CATL (*3rd-order Random-Walk Complex Amplitude Tracking Loop*)

ESTIMATION DE CANAL DANS UN SYSTÈME OFDM

- Pilote-Aided (Estimation + interpolation)

FILTRE DE KALMAN

- Auto-régressive (AR) :

$AR1_{CM}$ -KF [Hijazi10][Simon12][Tugnait10] ;

modèle AR1 associé au critère "*Correlation Matching*", scénario $f_d T$ élevée

$AR1_{MAV}$ -KF [Barbieri09][Ghandour-Haidar12] ;

modèle AR1 associé au critère "*Minimum Asymptotic Variance*", scénario $f_d T$ faible

- Marche-aléatoire (RW) :

RW_r -KF ($r = 1, 2, 3$) [Ghandour-Haidar12][Ros11][Shu13]

- Problème du KF : complexité

⇒ RW3-CATL (*3rd-order Random-Walk Complex Amplitude Tracking Loop*)

ESTIMATION DE CANAL DANS UN SYSTÈME OFDM

- Pilote-Aided (Estimation + interpolation)

FILTRE DE KALMAN

- Auto-régressive (AR) :

$AR1_{CM}$ -KF [Hijazi10][Simon12][Tugnait10] :

modèle AR1 associé au critère "*Correlation Matching*", scénario $f_d T$ élevée

$AR1_{MAV}$ -KF [Barbieri09][Ghandour-Haidar12] :

modèle AR1 associé au critère "*Minimum Asymptotic Variance*", scénario $f_d T$ faible

- Marche-aléatoire (RW) :

RW_r -KF ($r = 1, 2, 3$) [Ghandour-Haidar12][Ros11][Shu13]

- Problème du KF : complexité

⇒ RW3-CATL (*3rd-order Random-Walk Complex Amplitude Tracking Loop*)

ESTIMATION DE CANAL DANS UN SYSTÈME OFDM

- Pilote-Aided (Estimation + interpolation)

FILTRE DE KALMAN

- Auto-régressive (AR) :

AR1_{CM}-KF [Hijazi10][Simon12][Tugnait10] :

modèle AR1 associé au critère "*Correlation Matching*", scénario $f_d T$ élevée

AR1_{MAV}-KF [Barbieri09][Ghandour-Haidar12] :

modèle AR1 associé au critère "*Minimum Asymptotic Variance*", scénario $f_d T$ faible

- Marche-aléatoire (RW) :

RW_r-KF ($r = 1, 2, 3$) [Ghandour-Haidar12][Ros11][Shu13]

- Problème du KF : complexité

⇒ RW3-CATL (*3rd-order Random-Walk Complex Amplitude Tracking Loop*)

ESTIMATION DE CANAL DANS UN SYSTÈME OFDM

- Pilote-Aided (Estimation + interpolation)

FILTRE DE KALMAN

- Auto-régressive (AR) :

$AR1_{CM-KF}$ [Hijazi10][Simon12][Tugnait10] :

modèle AR1 associé au critère "*Correlation Matching*", scénario $f_d T$ élevée

$AR1_{MAV-KF}$ [Barbieri09][Ghandour-Haidar12] :

modèle AR1 associé au critère "*Minimum Asymptotic Variance*", scénario $f_d T$ faible

- Marche-aléatoire (RW) :

RW_r-KF ($r = 1, 2, 3$) [Ghandour-Haidar12][Ros11][Shu13]

- Problème du KF : complexité

⇒ RW3-CATL (*3rd-order Random-Walk Complex Amplitude Tracking Loop*)

ESTIMATION DE CANAL DANS UN SYSTÈME OFDM

- Pilote-Aided (Estimation + interpolation)

FILTRE DE KALMAN

- Auto-régressive (AR) :

$AR1_{CM}$ -KF [Hijazi10][Simon12][Tugnait10] :

modèle AR1 associé au critère "*Correlation Matching*", scénario $f_d T$ élevée

$AR1_{MAV}$ -KF [Barbieri09][Ghandour-Haidar12] :

modèle AR1 associé au critère "*Minimum Asymptotic Variance*", scénario $f_d T$ faible

- Marche-aléatoire (RW) :

RW_r -KF ($r = 1, 2, 3$) [Ghandour-Haidar12][Ros11][Shu13]

- Problème du KF : complexité

⇒ RW3-CATL (*3rd-order Random-Walk Complex Amplitude Tracking Loop*)

ESTIMATION DE CANAL DANS UN SYSTÈME OFDM

- Pilote-Aided (Estimation + interpolation)

FILTRE DE KALMAN

- Auto-régressive (AR) :

$AR1_{CM}$ -KF [Hijazi10][Simon12][Tugnait10] :

modèle AR1 associé au critère "*Correlation Matching*", scénario $f_d T$ élevée

$AR1_{MAV}$ -KF [Barbieri09][Ghandour-Haidar12] :

modèle AR1 associé au critère "*Minimum Asymptotic Variance*", scénario $f_d T$ faible

- Marche-aléatoire (RW) :

RW_r -KF ($r = 1, 2, 3$) [Ghandour-Haidar12][Ros11][Shu13]

- Problème du KF : complexité

⇒ **RW3-CATL** (*3rd-order Random-Walk Complex Amplitude Tracking Loop*)

PLAN

- 1 INTRODUCTION
- 2 ESTIMATION D'UN CANAL MONO-TRAJET EN MODULATION MONO-PORTEUSE
 - BOUCLE DE POURSUITE D'ORDRE 3 (RW3-CATL)
 - FILTRE DE KALMAN ASYMPTOTIQUE D'ORDRE 3 (RW3-KF)
- 3 APPLICATIONS DES ESTIMATEURS D'ORDRE 3 SUR UN SYSTÈME OFDM AVEC UN CANAL MULTI-TRAJET
 - RW3-LS-CATL
 - RW3-KF APPLIQUÉ SUR DES SYSTÈMES OFDM
- 4 CONCLUSION ET PERSPECTIVE

MODÈLE ESPACE-ÉTAT ET RW3-KF

MODÈLE D'OBSERVATION

$$r(n) = \alpha(n) \cdot x(n) + v(n)$$

$$\Downarrow$$

$$y(n) = \alpha(n) + w(n)$$

- $v(n) \sim \mathcal{CN}(0, \sigma_v^2)$; $\sigma_w^2 = K_{\text{mod}} \sigma_v^2$

MODÈLE APPROCHÉ DE L'AC $\tilde{\alpha}(n)$: RW3

$$\tilde{\alpha}(n) = \tilde{\alpha}(n-1) + \delta(n-1) + \frac{1}{2} \xi(n-1),$$

$$\delta(n) = \delta(n-1) + \xi(n-1),$$

$$\xi(n) = \xi(n-1) + u(n)$$

- $\delta(n)$: la **pen**te de $\tilde{\alpha}(n)$
- $\xi(n)$: la pen
- $u(n) \sim \mathcal{CN}(0, \sigma_u^2)$: le bruit d'état.



MODÈLE ESPACE-ÉTAT DU RW3-KF

$$y(n) = \mathbf{S} \mathbf{a}(n) + w(n)$$

$$\mathbf{a}(n) = \mathbf{M} \mathbf{a}(n-1) + \mathbf{u}(n)$$

avec :

$$\mathbf{a}(n) = [\tilde{\alpha}(n) \quad \delta(n) \quad \xi(n)]^T,$$

$$\mathbf{S} = [1 \quad 0 \quad 0],$$

$$\mathbf{u}(n) = [0 \quad 0 \quad u(n)]^T,$$

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

MODÈLE ESPACE-ÉTAT ET RW3-KF

MODÈLE D'OBSERVATION

$$r(n) = \alpha(n) \cdot x(n) + v(n)$$

$$\Downarrow$$

$$y(n) = \alpha(n) + w(n)$$

- $v(n) \sim \mathcal{CN}(0, \sigma_v^2)$; $\sigma_w^2 = K_{\text{mod}} \sigma_v^2$

MODÈLE APPROCHÉ DE L'AC $\tilde{\alpha}(n)$: RW3

$$\tilde{\alpha}(n) = \tilde{\alpha}(n-1) + \delta(n-1) + \frac{1}{2} \xi(n-1),$$

$$\delta(n) = \delta(n-1) + \xi(n-1),$$

$$\xi(n) = \xi(n-1) + u(n)$$

- $\delta(n)$: la **pen**te de $\tilde{\alpha}(n)$
- $\xi(n)$: la pente de $\delta(n)$ (la **cour**bure de $\tilde{\alpha}(n)$)
- $u(n) \sim \mathcal{CN}(0, \sigma_u^2)$: le bruit d'état.



MODÈLE ESPACE-ÉTAT DU RW3-KF

$$y(n) = \mathbf{S} \mathbf{a}(n) + w(n)$$

$$\mathbf{a}(n) = \mathbf{M} \mathbf{a}(n-1) + \mathbf{u}(n)$$

avec :

$$\mathbf{a}(n) = [\tilde{\alpha}(n) \quad \delta(n) \quad \xi(n)]^T,$$

$$\mathbf{S} = [1 \quad 0 \quad 0],$$

$$\mathbf{u}(n) = [0 \quad 0 \quad u(n)]^T,$$

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

MODÈLE ESPACE-ÉTAT ET RW3-KF

MODÈLE D'OBSERVATION

$$r(n) = \alpha(n) \cdot x(n) + v(n)$$

$$\Downarrow$$

$$y(n) = \alpha(n) + w(n)$$

- $v(n) \sim \mathcal{CN}(0, \sigma_v^2)$; $\sigma_w^2 = K_{\text{mod}} \sigma_v^2$

MODÈLE APPROCHÉ DE L'AC $\tilde{\alpha}(n)$: RW3

$$\tilde{\alpha}(n) = \tilde{\alpha}(n-1) + \delta(n-1) + \frac{1}{2} \xi(n-1),$$

$$\delta(n) = \delta(n-1) + \xi(n-1),$$

$$\xi(n) = \xi(n-1) + u(n)$$

- $\delta(n)$: la **pen**te de $\tilde{\alpha}(n)$
- $\xi(n)$: la pen
- $u(n) \sim \mathcal{CN}(0, \sigma_u^2)$: le bruit d'état.



MODÈLE ESPACE-ÉTAT DU RW3-KF

$$y(n) = \mathbf{S}\mathbf{a}(n) + w(n)$$

$$\mathbf{a}(n) = \mathbf{M}\mathbf{a}(n-1) + \mathbf{u}(n)$$

avec :

$$\mathbf{a}(n) = [\tilde{\alpha}(n) \quad \delta(n) \quad \xi(n)]^T,$$

$$\mathbf{S} = [1 \quad 0 \quad 0],$$

$$\mathbf{u}(n) = [0 \quad 0 \quad u(n)]^T,$$

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

DU RW3-KF ASYMPTOTIQUE À LA RW3-CATL

ÉQUATIONS DU RW3-KF

Équations de prédiction

$$\hat{\mathbf{a}}_{(n|n-1)} = \mathbf{M}\hat{\mathbf{a}}_{(n-1|n-1)},$$

$$\mathbf{P}_{(n|n-1)} = \mathbf{M}\mathbf{P}_{(n-1|n-1)}\mathbf{M}^T + \mathbf{U},$$

Équations de mises à jour

$$\mathbf{K}_{(n)} = \frac{\mathbf{P}_{(n|n-1)}\mathbf{S}^T}{\mathbf{S}\mathbf{P}_{(n|n-1)}\mathbf{S}^T + \sigma_w^2},$$

$$\hat{\mathbf{a}}_{(n|n)} = \hat{\mathbf{a}}_{(n|n-1)} + \mathbf{K}_{(n)}v_{\varepsilon(n)},$$

$$\mathbf{P}_{(n|n)} = (\mathbf{I}_3 - \mathbf{K}_{(n)}\mathbf{S})\mathbf{P}_{(n|n-1)}$$

avec :

$$\text{la matrice du bruit d'état } \mathbf{U} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_u^2 \end{bmatrix},$$

$$\text{le gain de Kalman } \mathbf{K}_{(n)} = [k_{1(n)} \ k_{2(n)} \ k_{3(n)}]^T,$$

$$\text{le signal d'erreur } v_{\varepsilon(n)} \stackrel{\text{def}}{=} y(n) - \mathbf{S}\hat{\mathbf{a}}_{(n|n-1)},$$

les matrices de covariances de l'erreur de prédiction $\mathbf{P}_{(n|n-1)}$ et d'estimation $\mathbf{P}_{(n|n)}$.

En régime asymptotique ($n \rightarrow \infty$) :

$$\mathbf{K}_{(n)} = \mathbf{K}_{(n+1)} = \mathbf{K}_{(\infty)} \stackrel{\text{def}}{=} [k_1 \ k_2 \ k_3]^T$$

\Rightarrow *Filtre linéaire invariant dans le temps (LIT)*

PASSAGE VERS LA RW3-CATL

$$\mu_1 = k_1, \mu_2 = k_2 + \frac{1}{2}k_3, \mu_3 = k_3$$

$$v_{\text{Lag1}}(z) = \frac{v_{\varepsilon}(z)}{1 - z^{-1}},$$

$$v_{\text{Lag2}}(z) = \frac{v_{\varepsilon}(z)}{(1 - z^{-1})^2}$$

- En rangeant et transformant les équations de filtrage en Z, et en utilisant les équations ci-dessus, puis retransformer ces équations dans le temps, les équations itératives de la RW3-CATL sont trouvées.

DU RW3-KF ASYMPTOTIQUE À LA RW3-CATL

ÉQUATIONS DU RW3-KF

Équations de prédiction

$$\hat{\mathbf{a}}_{(n|n-1)} = \mathbf{M}\hat{\mathbf{a}}_{(n-1|n-1)},$$

$$\mathbf{P}_{(n|n-1)} = \mathbf{M}\mathbf{P}_{(n-1|n-1)}\mathbf{M}^T + \mathbf{U},$$

Équations de mises à jour

$$\mathbf{K}_{(n)} = \frac{\mathbf{P}_{(n|n-1)}\mathbf{S}^T}{\mathbf{S}\mathbf{P}_{(n|n-1)}\mathbf{S}^T + \sigma_w^2},$$

$$\hat{\mathbf{a}}_{(n|n)} = \hat{\mathbf{a}}_{(n|n-1)} + \mathbf{K}_{(n)}v_{\varepsilon(n)},$$

$$\mathbf{P}_{(n|n)} = (\mathbf{I}_3 - \mathbf{K}_{(n)}\mathbf{S})\mathbf{P}_{(n|n-1)}$$

avec :

$$\text{la matrice du bruit d'état } \mathbf{U} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_u^2 \end{bmatrix},$$

$$\text{le gain de Kalman } \mathbf{K}_{(n)} = [k_{1(n)} \ k_{2(n)} \ k_{3(n)}]^T,$$

$$\text{le signal d'erreur } v_{\varepsilon(n)} \stackrel{\text{def}}{=} y_{(n)} - \mathbf{S}\hat{\mathbf{a}}_{(n|n-1)},$$

les matrices de covariances de l'erreur de prédiction $\mathbf{P}_{(n|n-1)}$ et d'estimation $\mathbf{P}_{(n|n)}$.

En régime asymptotique ($n \rightarrow \infty$) :

$$\mathbf{K}_{(n)} = \mathbf{K}_{(n+1)} = \mathbf{K}_{(\infty)} \stackrel{\text{def}}{=} [k_1 \ k_2 \ k_3]^T$$

\Rightarrow *Filtre linéaire invariant dans le temps (LIT)*

PASSAGE VERS LA RW3-CATL

$$\mu_1 = k_1, \mu_2 = k_2 + \frac{1}{2}k_3, \mu_3 = k_3$$

$$v_{\text{Lag1}}(z) = \frac{v_{\varepsilon}(z)}{1 - z^{-1}},$$

$$v_{\text{Lag2}}(z) = \frac{v_{\varepsilon}(z)}{(1 - z^{-1})^2}$$

- En rangeant et transformant les équations de filtrage en Z, et en utilisant les équations ci-dessus, puis retransformer ces équations dans le temps, les équations itératives de la RW3-CATL sont trouvées.

DU RW3-KF ASYMPTOTIQUE À LA RW3-CATL

ÉQUATIONS DU RW3-KF

Équations de prédiction

$$\hat{\mathbf{a}}_{(n|n-1)} = \mathbf{M}\hat{\mathbf{a}}_{(n-1|n-1)},$$

$$\mathbf{P}_{(n|n-1)} = \mathbf{M}\mathbf{P}_{(n-1|n-1)}\mathbf{M}^T + \mathbf{U},$$

Équations de mises à jour

$$\mathbf{K}_{(n)} = \frac{\mathbf{P}_{(n|n-1)}\mathbf{S}^T}{\mathbf{S}\mathbf{P}_{(n|n-1)}\mathbf{S}^T + \sigma_w^2},$$

$$\hat{\mathbf{a}}_{(n|n)} = \hat{\mathbf{a}}_{(n|n-1)} + \mathbf{K}_{(n)}v_{\varepsilon(n)},$$

$$\mathbf{P}_{(n|n)} = (\mathbf{I}_3 - \mathbf{K}_{(n)}\mathbf{S})\mathbf{P}_{(n|n-1)}$$

avec :

$$\text{la matrice du bruit d'état } \mathbf{U} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_u^2 \end{bmatrix},$$

$$\text{le gain de Kalman } \mathbf{K}_{(n)} = [k_{1(n)} \ k_{2(n)} \ k_{3(n)}]^T,$$

$$\text{le signal d'erreur } v_{\varepsilon(n)} \stackrel{\text{def}}{=} y_{(n)} - \mathbf{S}\hat{\mathbf{a}}_{(n|n-1)},$$

les matrices de covariances de l'erreur de prédiction $\mathbf{P}_{(n|n-1)}$ et d'estimation $\mathbf{P}_{(n|n)}$.

En régime asymptotique ($n \rightarrow \infty$) :

$$\mathbf{K}_{(n)} = \mathbf{K}_{(n+1)} = \mathbf{K}_{(\infty)} \stackrel{\text{def}}{=} [k_1 \ k_2 \ k_3]^T$$

\Rightarrow *Filtre linéaire invariant dans le temps (LIT)*

PASSAGE VERS LA RW3-CATL

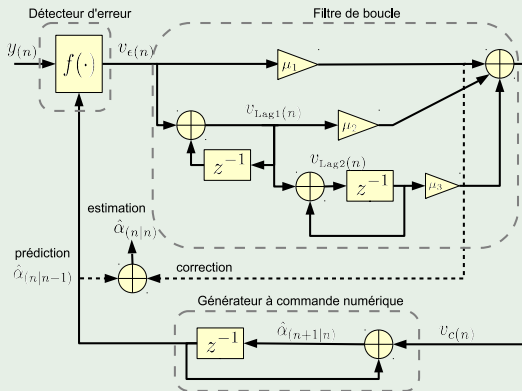
$$\mu_1 = k_1, \mu_2 = k_2 + \frac{1}{2}k_3, \mu_3 = k_3$$

$$v_{\text{Lag1}}(z) = \frac{v_{\varepsilon}(z)}{1 - z^{-1}},$$

$$v_{\text{Lag2}}(z) = \frac{v_{\varepsilon}(z)}{(1 - z^{-1})^2}$$

- En rangeant et transformant **les équations de filtrage** en Z, et en utilisant les équations ci-dessus, puis retransformer ces équations dans le temps, les équations itératives de la RW3-CATL sont trouvées.

STRUCTURE DE LA RW3-CATL

ÉQUATION DE LA RW3-CATL
(À PARTIR DU KF)signal d'erreur

$$v_\epsilon(n) = y(n) - \hat{\alpha}_{(n|n-1)}$$

Filtre de boucle

$$v_{Lag1}(n) = v_{Lag1}(n-1) + v_\epsilon(n)$$

$$v_{Lag2}(n) = v_{Lag2}(n-1) + v_{Lag1}(n)$$

$$v_c(n) = \mu_1 v_\epsilon(n) + \mu_2 v_{Lag1}(n) + \mu_3 v_{Lag2}(n-1)$$

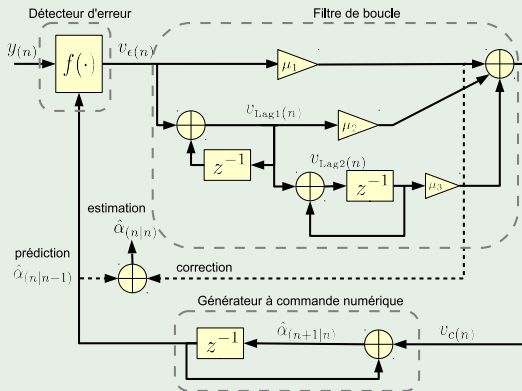
Générateur à commande numérique

$$\hat{\alpha}_{(n+1|n)} = \hat{\alpha}_{(n|n-1)} + v_c(n)$$

Estimation finale

$$\hat{\alpha}_{(n|n)} = \hat{\alpha}_{(n|n-1)} + \mu_1 v_\epsilon(n)$$

STRUCTURE DE LA RW3-CATL

ÉQUATION DE LA RW3-CATL
(À PARTIR DU KF)signal d'erreur

$$v_{\varepsilon}(n) = y(n) - \hat{\alpha}_{(n|n-1)}$$

Filtre de boucle

$$v_{\text{Lag1}}(n) = v_{\text{Lag1}}(n-1) + v_{\varepsilon}(n)$$

$$v_{\text{Lag2}}(n) = v_{\text{Lag2}}(n-1) + v_{\text{Lag1}}(n)$$

$$v_c(n) = \mu_1 v_{\varepsilon}(n) + \mu_2 v_{\text{Lag1}}(n) + \mu_3 v_{\text{Lag2}}(n-1)$$

Générateur à commande numérique

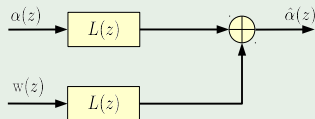
$$\hat{\alpha}_{(n+1|n)} = \hat{\alpha}_{(n|n-1)} + v_c(n)$$

Estimation finale

$$\hat{\alpha}_{(n|n)} = \hat{\alpha}_{(n|n-1)} + \mu_1 v_{\varepsilon}(n)$$

CARACTÉRISTIQUES DE LA RW3-CATL(1)

$$\begin{aligned}\hat{\alpha}(z) &= L(z) \cdot y(z) \\ &= L(z) \cdot \alpha(z) + L(z) \cdot w(z)\end{aligned}$$



FONCTION DE TRANSFERT EN BOUCLE FERMÉE DE LA RW3-CATL

$$L(z) = \frac{[(\mu_1 - \mu_2 + \mu_3)(1 - z^{-1})^2 + (\mu_2 - 2\mu_3)(1 - z^{-1}) + \mu_3]}{(1 - \mu_1)(1 - z^{-1})^3 + [(\mu_1 - \mu_2 + \mu_3)(1 - z^{-1})^2 + (\mu_2 - 2\mu_3)(1 - z^{-1}) + \mu_3]}$$

RÉPONSE FRÉQUENTIELLE $L(z = e^{j2\pi fT})$

- HYPOTHÈSE :**

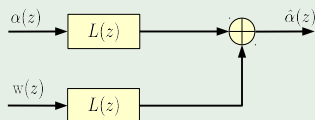
$$fT \ll 1 \implies z^{-1} \approx 1 - pT$$

$$(\text{avec } z = e^{pT} \text{ et } p = j\omega = j2\pi f)$$

RW3-CATL \iff FILTRE PASSE-BAS
D'ORDRE 3 ANALOGIQUE

CARACTÉRISTIQUES DE LA RW3-CATL(1)

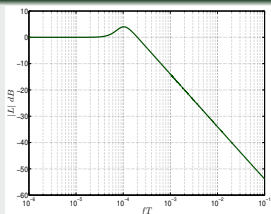
$$\begin{aligned}\hat{\alpha}(z) &= L(z) \cdot y(z) \\ &= L(z) \cdot \alpha(z) + L(z) \cdot w(z)\end{aligned}$$



FONCTION DE TRANSFERT EN BOUCLE FERMÉE DE LA RW3-CATL

$$L(z) = \frac{[(\mu_1 - \mu_2 + \mu_3)(1 - z^{-1})^2 + (\mu_2 - 2\mu_3)(1 - z^{-1}) + \mu_3]}{(1 - \mu_1)(1 - z^{-1})^3 + [(\mu_1 - \mu_2 + \mu_3)(1 - z^{-1})^2 + (\mu_2 - 2\mu_3)(1 - z^{-1}) + \mu_3]}$$

RÉPONSE FRÉQUENTIELLE $L(z = e^{j2\pi fT})$



● HYPOTHÈSE :

$$\begin{aligned}fT \ll 1 &\implies z^{-1} \approx 1 - pT \\ &\text{(avec } z = e^{pT} \text{ et } p = j\omega = j2\pi f)\end{aligned}$$

RW3-CATL \iff FILTRE PASSE-BAS
D'ORDRE 3 ANALOGIQUE

CARACTÉRISTIQUES DE LA RW3-CATL(2)

FONCTION DE TRANSFER DE LA RW3-CATL EN TERMES DE (μ_1, μ_2, μ_3)

$$L(z) = \frac{[(\mu_1 - \mu_2 + \mu_3)(1 - z^{-1})^2 + (\mu_2 - 2\mu_3)(1 - z^{-1}) + \mu_3]}{(1 - \mu_1)(1 - z^{-1})^3 + [(\mu_1 - \mu_2 + \mu_3)(1 - z^{-1})^2 + (\mu_2 - 2\mu_3)(1 - z^{-1}) + \mu_3]}$$

- La PLL d'ordre 3 est caractérisée par 3 paramètres :

la pulsation naturelle ω_n , le facteur d'amortissement ζ , le ratio de capacité m .

FONCTION DE TRANSFER DE LA RW3-CATL EN TERMES DE (ω_n, ζ, m)

$$L(z) = \frac{(m+2)\zeta\omega_n T \cdot (1 - z^{-1})^2 + (1 + 2m\zeta^2)(\omega_n T)^2 \cdot (1 - z^{-1}) + m\zeta(\omega_n T)^3}{(1 - z^{-1})^3 + (m+2)\zeta\omega_n T \cdot (1 - z^{-1})^2 + (1 + 2m\zeta^2)(\omega_n T)^2 \cdot (1 - z^{-1}) + m\zeta(\omega_n T)^3}$$

RELATION ENTRE LA PLL D'ORDRE 3 ET LA RW3-CATL

$$(m+2) \cdot \zeta \omega_n T = \frac{\mu_1 - \mu_2 + \mu_3}{1 - \mu_1}, \quad (1 + 2m\zeta^2) \cdot (\omega_n T)^2 = \frac{\mu_2 - 2\mu_3}{1 - \mu_1}, \quad m\zeta \cdot (\omega_n T)^3 = \frac{\mu_3}{1 - \mu_1}$$

CARACTÉRISTIQUES DE LA RW3-CATL(2)

FONCTION DE TRANSFER DE LA RW3-CATL EN TERMES DE (μ_1, μ_2, μ_3)

$$L(z) = \frac{[(\mu_1 - \mu_2 + \mu_3)(1 - z^{-1})^2 + (\mu_2 - 2\mu_3)(1 - z^{-1}) + \mu_3]}{(1 - \mu_1)(1 - z^{-1})^3 + [(\mu_1 - \mu_2 + \mu_3)(1 - z^{-1})^2 + (\mu_2 - 2\mu_3)(1 - z^{-1}) + \mu_3]}$$

- La PLL d'ordre 3 est caractérisée par 3 paramètres :

la pulsation naturelle ω_n , le facteur d'amortissement ζ , le ratio de capacité m .

FONCTION DE TRANSFER DE LA RW3-CATL EN TERMES DE (ω_n, ζ, m)

$$L(z) = \frac{(m+2)\zeta\omega_n T \cdot (1 - z^{-1})^2 + (1 + 2m\zeta^2)(\omega_n T)^2 \cdot (1 - z^{-1}) + m\zeta(\omega_n T)^3}{(1 - z^{-1})^3 + (m+2)\zeta\omega_n T \cdot (1 - z^{-1})^2 + (1 + 2m\zeta^2)(\omega_n T)^2 \cdot (1 - z^{-1}) + m\zeta(\omega_n T)^3}$$

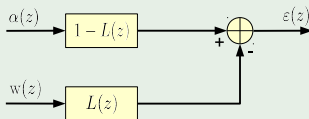
RELATION ENTRE LA PLL D'ORDRE 3 ET LA RW3-CATL

$$(m+2) \cdot \zeta \omega_n T = \frac{\mu_1 - \mu_2 + \mu_3}{1 - \mu_1}, \quad (1 + 2m\zeta^2) \cdot (\omega_n T)^2 = \frac{\mu_2 - 2\mu_3}{1 - \mu_1}, \quad m\zeta \cdot (\omega_n T)^3 = \frac{\mu_3}{1 - \mu_1}$$

ERREUR QUADRATIQUE MOYENNE DE LA RW3-CATL

- ERREUR D'ESTIMATION :

$$\begin{aligned}\varepsilon(z) &= \alpha(z) - \hat{\alpha}(z) \\ &= (1 - L(z)) \cdot \alpha(z) - L(z) \cdot w(z)\end{aligned}$$



EQM GLOBALE DE L'ESTIMATION

$$\begin{array}{ccc} & \textit{Dynamique} & \textit{Statique} \\ \sigma_\varepsilon^2 & = & \sigma_{\varepsilon\alpha}^2 + \sigma_{\varepsilon N}^2 \\ & \swarrow & \searrow \\ \int_{-\frac{1}{2T}}^{+\frac{1}{2T}} \Gamma_\alpha(f) \cdot |1 - L(e^{j2\pi fT})|^2 df & & \int_{-\frac{1}{2T}}^{+\frac{1}{2T}} \Gamma_N(f) \cdot |L(e^{j2\pi fT})|^2 df \\ \approx \frac{S_\alpha}{(m\zeta)^2 (f_n T)^6} & & \approx \sigma_N^2 \cdot \underline{2\pi f_n T \cdot \mathcal{B}(\zeta, m)} \end{array}$$

une contrainte est imposée sur le point $f = f_n$:

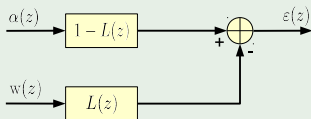
$$m^2(4\zeta^2 - 1) + 4 = 0$$

Bande équivalente de bruit

ERREUR QUADRATIQUE MOYENNE DE LA RW3-CATL

- ERREUR D'ESTIMATION :

$$\begin{aligned}\varepsilon(z) &= \alpha(z) - \hat{\alpha}(z) \\ &= (1 - L(z)) \cdot \alpha(z) - L(z) \cdot w(z)\end{aligned}$$



EQM GLOBALE DE L'ESTIMATION

$$\begin{aligned}\sigma_{\varepsilon}^2 &= \underbrace{\sigma_{\varepsilon\alpha}^2}_{\text{Dynamique}} + \underbrace{\sigma_{\varepsilon N}^2}_{\text{Statique}} \\ &\approx \frac{S_{\alpha}}{(m\zeta)^2 (f_n T)^6} + \sigma_N^2 \cdot \underline{2\pi f_n T \cdot \mathcal{B}(\zeta, m)}\end{aligned}$$

une contrainte est imposée sur le point $f = f_n$:

$$m^2(4\zeta^2 - 1) + 4 = 0$$

Bande équivalente de bruit

OPTIMISATION DE LA RW3-CATL

- Méthode des multiplicateurs de Lagrange

SOLUTION SOUS-OPTIMALE

$$m = 3.19$$

$$\zeta = 0.39$$

$$f_n = \frac{1}{T} \left(\frac{S_\alpha Q}{4\pi\sigma_w^2} \right)^{\frac{1}{7}}$$

EQM MINIMALE

$$\sigma_{\min}^2 = C \cdot (2\pi\sigma_w^2)^{\frac{6}{7}} \cdot (S_\alpha)^{\frac{1}{7}}$$

- spectre de Jakes :

$$S_\alpha = \frac{5}{16} (f_d T)^6 \cdot \sigma_\alpha^2$$

EQM MINIMALE POUR LE MODÈLE DE JAKES

$$\sigma_{\min}^2 (Jakes) = C \cdot (2\pi\sigma_w^2 \cdot f_d T)^{\frac{6}{7}} \left(\frac{5\sigma_\alpha^2}{16} \right)^{\frac{1}{7}}$$

OPTIMISATION DE LA RW3-CATL

- Méthode des multiplicateurs de Lagrange

SOLUTION SOUS-OPTIMALE

$$m = 3.19$$

$$\zeta = 0.39$$

$$f_n = \frac{1}{T} \left(\frac{S_\alpha Q}{4\pi\sigma_w^2} \right)^{\frac{1}{7}}$$



EQM MINIMALE

$$\sigma_{\min}^2 = C \cdot (2\pi\sigma_w^2)^{\frac{6}{7}} \cdot (S_\alpha)^{\frac{1}{7}}$$

- spectre de Jakes :

$$S_\alpha = \frac{5}{16} (f_d T)^6 \cdot \sigma_\alpha^2$$

EQM MINIMALE POUR LE MODÈLE DE JAKES

$$\sigma_{\min}^2 (Jakes) = C \cdot (2\pi\sigma_w^2 \cdot f_d T)^{\frac{6}{7}} \left(\frac{5\sigma_\alpha^2}{16} \right)^{\frac{1}{7}}$$

OPTIMISATION DE LA RW3-CATL

- Méthode des multiplicateurs de Lagrange

SOLUTION SOUS-OPTIMALE

$$m = 3.19$$

$$\zeta = 0.39$$

$$f_n = \frac{1}{T} \left(\frac{S_\alpha Q}{4\pi\sigma_w^2} \right)^{\frac{1}{7}}$$



EQM MINIMALE

$$\sigma_{\min}^2 = C \cdot (2\pi\sigma_w^2)^{\frac{6}{7}} \cdot (S_\alpha)^{\frac{1}{7}}$$

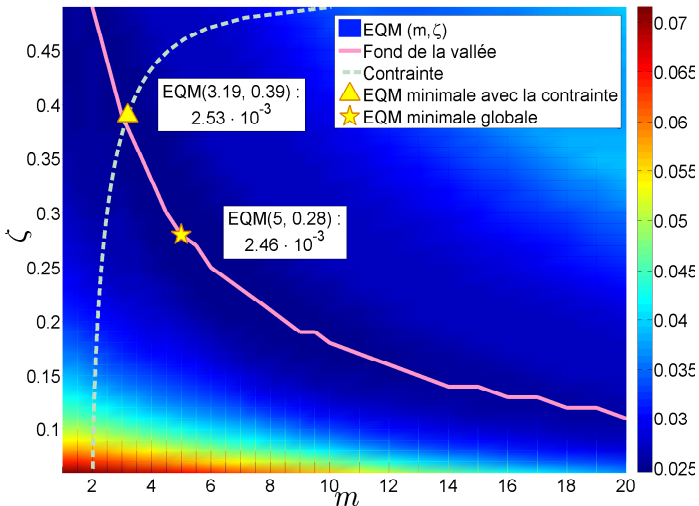
- spectre de Jakes :

$$S_\alpha = \frac{5}{16} (f_d T)^6 \cdot \sigma_\alpha^2$$

EQM MINIMALE POUR LE MODÈLE DE JAKES

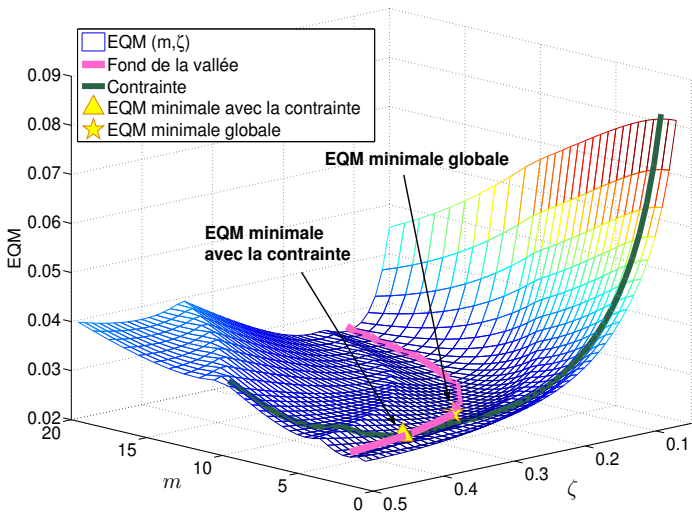
$$\sigma_{\min}^2 (Jakes) = C \cdot (2\pi\sigma_w^2 \cdot f_d T)^{\frac{6}{7}} \left(\frac{5\sigma_\alpha^2}{16} \right)^{\frac{1}{7}}$$

SOLUTION SOUS-OPTIMALE VS. SOLUTION OPTIMALE



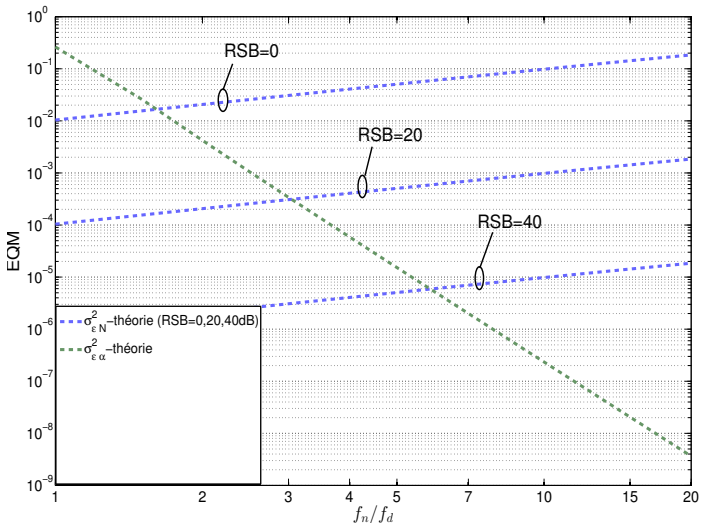
distribution de l'EQM sur le plan $m - \zeta$, pour $RSB=0dB, f_d T = 10^{-3}$

SOLUTION SOUS-OPTIMALE VS. SOLUTION OPTIMALE (2)

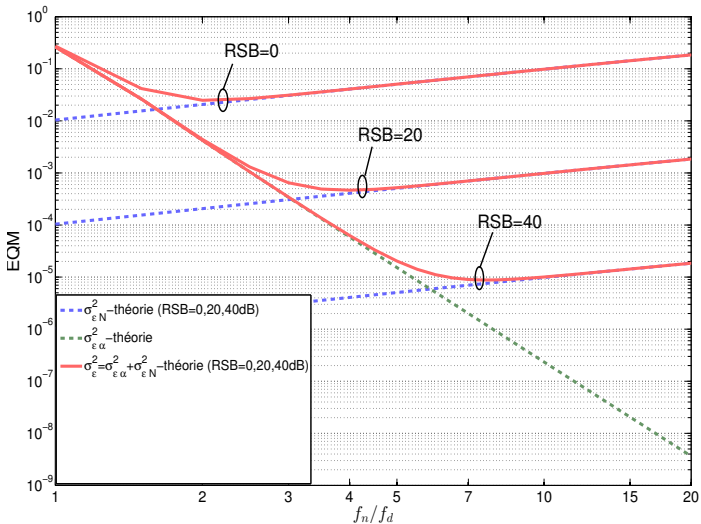


Vision en 3-D

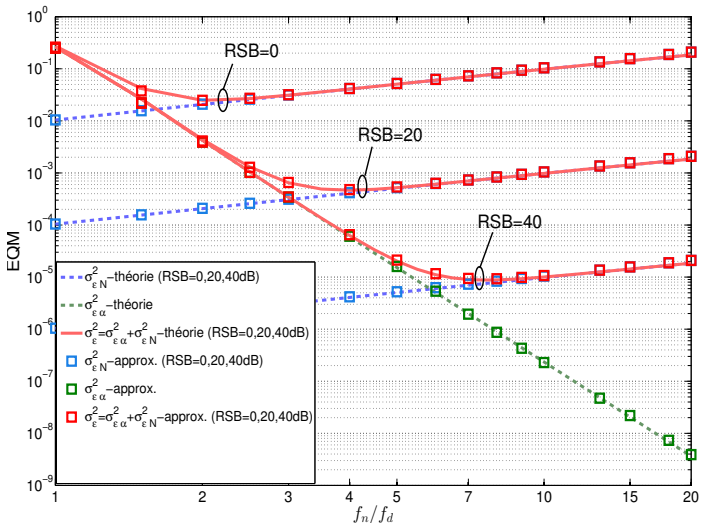
VALIDATION DE L'ANALYSE SUR L'EQM ASYMPTOTIQUE : THÉORIQUE VS. SIMULATION ($f_d T = 10^{-3}$)



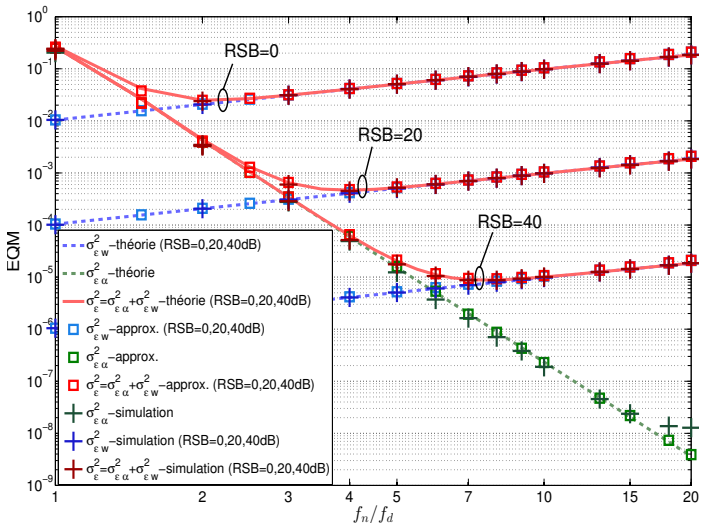
VALIDATION DE L'ANALYSE SUR L'EQM ASYMPTOTIQUE : THÉORIQUE VS. SIMULATION ($f_d T = 10^{-3}$)



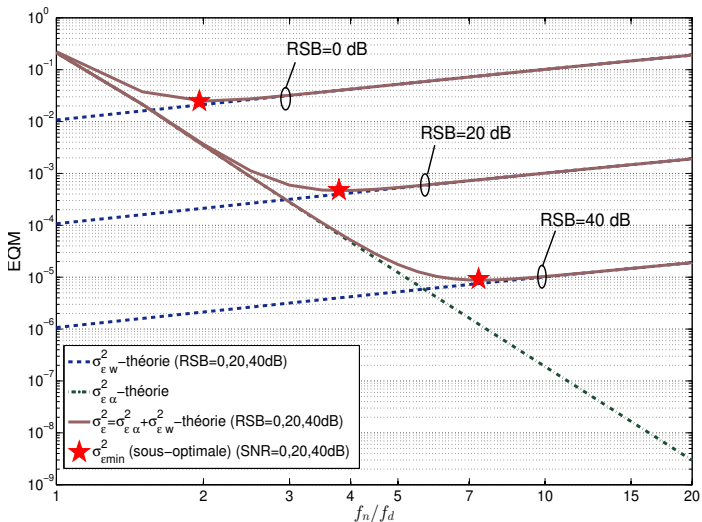
VALIDATION DE L'ANALYSE SUR L'EQM ASYMPTOTIQUE : THÉORIQUE VS. SIMULATION ($f_d T = 10^{-3}$)

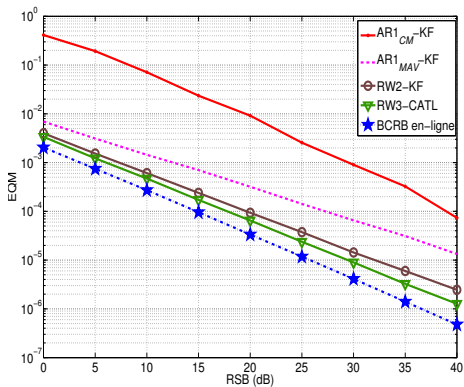
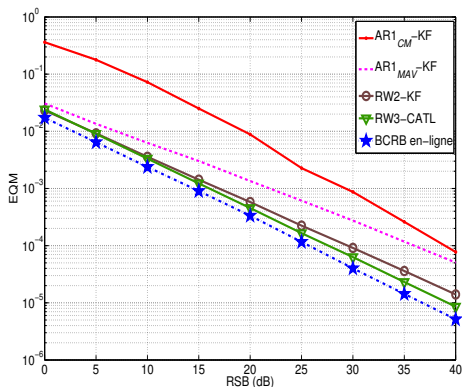


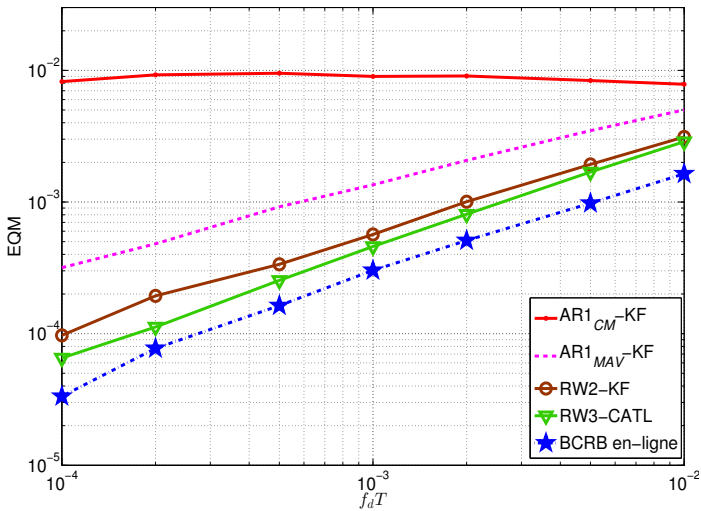
VALIDATION DE L'ANALYSE SUR L'EQM ASYMPTOTIQUE : THÉORIQUE VS. SIMULATION ($f_d T = 10^{-3}$)

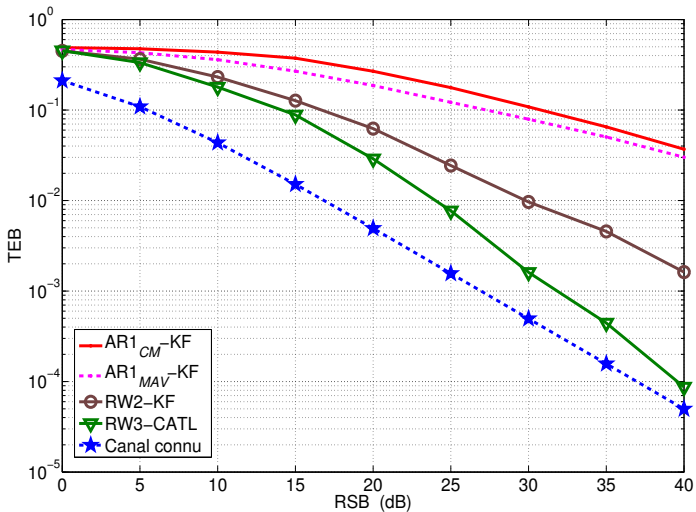


VALIDATION DE L'ANALYSE SUR L'EQM ASYMPTOTIQUE : THÉORIQUE VS. SIMULATION ($f_d T = 10^{-3}$)



SIMULATION : EQM vs. RSB ($f_d T = 10^{-3}$) $f_d T = 10^{-4}$  $f_d T = 10^{-3}$

SIMULATION : EQM vs. $f_d T$ (RSB = 20 DB)

SIMULATION : TEB vs. RSB ($f_d T = 10^{-3}$)

RW3-KF EN RÉGIME ASYMPTOTIQUE, ÉQUATION DE RICCATI

ÉQUATIONS DU RW3-KF

Équations de prédiction

$$\hat{\mathbf{a}}_{(n|n-1)} = \mathbf{M}\hat{\mathbf{a}}_{(n-1|n-1)},$$

$$\mathbf{P}_{(n|n-1)} = \mathbf{M}\mathbf{P}_{(n-1|n-1)}\mathbf{M}^T + \mathbf{U},$$

Équations de mises à jour

$$\mathbf{K}_{(n)} = \frac{\mathbf{P}_{(n|n-1)}\mathbf{S}^T}{\mathbf{S}\mathbf{P}_{(n|n-1)}\mathbf{S}^T + \sigma_w^2},$$

$$\hat{\mathbf{a}}_{(n|n)} = \hat{\mathbf{a}}_{(n|n-1)} + \mathbf{K}_{(n)}\mathbf{v}_{\mathcal{E}(n)},$$

$$\mathbf{P}_{(n|n)} = (\mathbf{I}_3 - \mathbf{K}_{(n)}\mathbf{S})\mathbf{P}_{(n|n-1)}$$

En régime asymptotique ($n \rightarrow \infty$) :

$$\mathbf{K}_{(n)} = \mathbf{K}_{(n+1)} = \mathbf{K}_{(\infty)} = [k_1 \quad k_2 \quad k_3]^T,$$

$$\mathbf{P}_{(n|n)} = \mathbf{P}_{(n+1|n+1)} = \mathbf{P}_{(\infty)} \stackrel{\text{def}}{=} \begin{bmatrix} P_{11} & P_{12} & P_{13} \\ P_{21} & P_{22} & P_{23} \\ P_{31} & P_{32} & P_{33} \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{P}'_{(n|n-1)} = \mathbf{P}'_{(n+1|n)} = \mathbf{P}'_{(\infty)} \stackrel{\text{def}}{=} \begin{bmatrix} P'_{11} & P'_{12} & P'_{13} \\ P'_{21} & P'_{22} & P'_{23} \\ P'_{31} & P'_{32} & P'_{33} \end{bmatrix}$$

ÉQUATION DE RICCATI ALGÈBRE (DARE)

$$\mathbf{P}'_{(\infty)} = \mathbf{M}\mathbf{P}'_{(\infty)}\mathbf{M}^T - \mathbf{M}\mathbf{P}'_{(\infty)}\mathbf{S}^T(\mathbf{S}\mathbf{P}'_{(\infty)}\mathbf{S}^T + \sigma_w^2)^{-1}\mathbf{S}\mathbf{P}'_{(\infty)}\mathbf{M}^T + \mathbf{U}$$

$$\Rightarrow \mathbf{P}'_{i,j} = f(k_1, k_2, k_3, \sigma_u^2)$$

RW3-KF EN RÉGIME ASYMPTOTIQUE, ÉQUATION DE RICCATI

ÉQUATIONS DU RW3-KF

Équations de prédiction

$$\hat{\mathbf{a}}_{(n|n-1)} = \mathbf{M}\hat{\mathbf{a}}_{(n-1|n-1)},$$

$$\mathbf{P}_{(n|n-1)} = \mathbf{M}\mathbf{P}_{(n-1|n-1)}\mathbf{M}^T + \mathbf{U},$$

Équations de mises à jour

$$\mathbf{K}_{(n)} = \frac{\mathbf{P}_{(n|n-1)}\mathbf{S}^T}{\mathbf{S}\mathbf{P}_{(n|n-1)}\mathbf{S}^T + \sigma_w^2},$$

$$\hat{\mathbf{a}}_{(n|n)} = \hat{\mathbf{a}}_{(n|n-1)} + \mathbf{K}_{(n)}\mathbf{v}_{\varepsilon(n)},$$

$$\mathbf{P}_{(n|n)} = (\mathbf{I}_3 - \mathbf{K}_{(n)}\mathbf{S})\mathbf{P}_{(n|n-1)}$$

En régime asymptotique ($n \rightarrow \infty$) :

$$\mathbf{K}_{(n)} = \mathbf{K}_{(n+1)} = \mathbf{K}_{(\infty)} = [k_1 \quad k_2 \quad k_3]^T,$$

$$\mathbf{P}_{(n|n)} = \mathbf{P}_{(n+1|n+1)} = \mathbf{P}_{(\infty)} \stackrel{\text{def}}{=} \begin{bmatrix} P_{11} & P_{12} & P_{13} \\ P_{21} & P_{22} & P_{23} \\ P_{31} & P_{32} & P_{33} \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{P}'_{(n|n-1)} = \mathbf{P}'_{(n+1|n)} = \mathbf{P}'_{(\infty)} \stackrel{\text{def}}{=} \begin{bmatrix} P'_{11} & P'_{12} & P'_{13} \\ P'_{21} & P'_{22} & P'_{23} \\ P'_{31} & P'_{32} & P'_{33} \end{bmatrix}$$

ÉQUATION DE RICCATI ALGÈBRE (DARE)

$$\mathbf{P}'_{(\infty)} = \mathbf{M}\mathbf{P}'_{(\infty)}\mathbf{M}^T - \mathbf{M}\mathbf{P}'_{(\infty)}\mathbf{S}^T(\mathbf{S}\mathbf{P}'_{(\infty)}\mathbf{S}^T + \sigma_w^2)^{-1}\mathbf{S}\mathbf{P}'_{(\infty)}\mathbf{M}^T + \mathbf{U}$$

$$\Rightarrow \mathbf{P}'_{i,j} = f(k_1, k_2, k_3, \sigma_u^2)$$

RW3-KF EN RÉGIME ASYMPTOTIQUE, ÉQUATION DE RICCATI

ÉQUATIONS DU RW3-KF

Équations de prédiction

$$\hat{\mathbf{a}}_{(n|n-1)} = \mathbf{M}\hat{\mathbf{a}}_{(n-1|n-1)},$$

$$\mathbf{P}_{(n|n-1)} = \mathbf{M}\mathbf{P}_{(n-1|n-1)}\mathbf{M}^T + \mathbf{U},$$

Équations de mises à jour

$$\mathbf{K}_{(n)} = \frac{\mathbf{P}_{(n|n-1)}\mathbf{S}^T}{\mathbf{S}\mathbf{P}_{(n|n-1)}\mathbf{S}^T + \sigma_w^2},$$

$$\hat{\mathbf{a}}_{(n|n)} = \hat{\mathbf{a}}_{(n|n-1)} + \mathbf{K}_{(n)}\mathbf{v}_{\varepsilon(n)},$$

$$\mathbf{P}_{(n|n)} = (\mathbf{I}_3 - \mathbf{K}_{(n)}\mathbf{S})\mathbf{P}_{(n|n-1)}$$

En régime asymptotique ($n \rightarrow \infty$) :

$$\mathbf{K}_{(n)} = \mathbf{K}_{(n+1)} = \mathbf{K}_{(\infty)} = [k_1 \quad k_2 \quad k_3]^T,$$

$$\mathbf{P}_{(n|n)} = \mathbf{P}_{(n+1|n+1)} = \mathbf{P}_{(\infty)} \stackrel{\text{def}}{=} \begin{bmatrix} P_{11} & P_{12} & P_{13} \\ P_{21} & P_{22} & P_{23} \\ P_{31} & P_{32} & P_{33} \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{P}_{(n|n-1)} = \mathbf{P}_{(n+1|n)} = \mathbf{P}'_{(\infty)} \stackrel{\text{def}}{=} \begin{bmatrix} P'_{11} & P'_{12} & P'_{13} \\ P'_{21} & P'_{22} & P'_{23} \\ P'_{31} & P'_{32} & P'_{33} \end{bmatrix}$$

ÉQUATION DE RICCATI ALGÈBRE (DARE)

$$\mathbf{P}'_{(\infty)} = \mathbf{M}\mathbf{P}'_{(\infty)}\mathbf{M}^T - \mathbf{M}\mathbf{P}'_{(\infty)}\mathbf{S}^T(\mathbf{S}\mathbf{P}'_{(\infty)}\mathbf{S}^T + \sigma_w^2)^{-1}\mathbf{S}\mathbf{P}'_{(\infty)}\mathbf{M}^T + \mathbf{U}$$

$$\Rightarrow \mathbf{P}'_{i,j} = f(k_1, k_2, k_3, \sigma_u^2)$$

RW3-KF EN RÉGIME ASYMPTOTIQUE, ÉQUATION DE RICCATI

ÉQUATIONS DU RW3-KF

Équations de prédiction

$$\hat{\mathbf{a}}_{(n|n-1)} = \mathbf{M}\hat{\mathbf{a}}_{(n-1|n-1)},$$

$$\mathbf{P}_{(n|n-1)} = \mathbf{M}\mathbf{P}_{(n-1|n-1)}\mathbf{M}^T + \mathbf{U},$$

Équations de mises à jour

$$\mathbf{K}_{(n)} = \frac{\mathbf{P}_{(n|n-1)}\mathbf{S}^T}{\mathbf{S}\mathbf{P}_{(n|n-1)}\mathbf{S}^T + \sigma_w^2},$$

$$\hat{\mathbf{a}}_{(n|n)} = \hat{\mathbf{a}}_{(n|n-1)} + \mathbf{K}_{(n)}\mathbf{v}_{\mathcal{E}(n)},$$

$$\mathbf{P}_{(n|n)} = (\mathbf{I}_3 - \mathbf{K}_{(n)}\mathbf{S})\mathbf{P}_{(n|n-1)}$$

En régime asymptotique ($n \rightarrow \infty$) :

$$\mathbf{K}_{(n)} = \mathbf{K}_{(n+1)} = \mathbf{K}_{(\infty)} = [k_1 \quad k_2 \quad k_3]^T,$$

$$\mathbf{P}_{(n|n)} = \mathbf{P}_{(n+1|n+1)} = \mathbf{P}_{(\infty)} \stackrel{\text{def}}{=} \begin{bmatrix} P_{11} & P_{12} & P_{13} \\ P_{21} & P_{22} & P_{23} \\ P_{31} & P_{32} & P_{33} \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{P}_{(n|n-1)} = \mathbf{P}_{(n+1|n)} = \mathbf{P}'_{(\infty)} \stackrel{\text{def}}{=} \begin{bmatrix} P'_{11} & P'_{12} & P'_{13} \\ P'_{21} & P'_{22} & P'_{23} \\ P'_{31} & P'_{32} & P'_{33} \end{bmatrix}$$

ÉQUATION DE RICCATI ALGÈBRE (DARE)

$$\mathbf{P}'_{(\infty)} = \mathbf{M}\mathbf{P}'_{(\infty)}\mathbf{M}^T - \mathbf{M}\mathbf{P}'_{(\infty)}\mathbf{S}^T(\mathbf{S}\mathbf{P}'_{(\infty)}\mathbf{S}^T + \sigma_w^2)^{-1}\mathbf{S}\mathbf{P}'_{(\infty)}\mathbf{M}^T + \mathbf{U}$$

$$\Rightarrow \mathbf{P}'_{i,j} = f(k_1, k_2, k_3, \sigma_u^2)$$

RW3-KF EN RÉGIME ASYMPTOTIQUE, ÉQUATION DE RICCATI

ÉQUATIONS DU RW3-KF

Équations de prédiction

$$\hat{\mathbf{a}}_{(n|n-1)} = \mathbf{M}\hat{\mathbf{a}}_{(n-1|n-1)},$$

$$\mathbf{P}_{(n|n-1)} = \mathbf{M}\mathbf{P}_{(n-1|n-1)}\mathbf{M}^T + \mathbf{U},$$

Équations de mises à jour

$$\mathbf{K}_{(n)} = \frac{\mathbf{P}_{(n|n-1)}\mathbf{S}^T}{\mathbf{S}\mathbf{P}_{(n|n-1)}\mathbf{S}^T + \sigma_w^2},$$

$$\hat{\mathbf{a}}_{(n|n)} = \hat{\mathbf{a}}_{(n|n-1)} + \mathbf{K}_{(n)}\mathbf{v}_{\mathcal{E}(n)},$$

$$\mathbf{P}_{(n|n)} = (\mathbf{I}_3 - \mathbf{K}_{(n)}\mathbf{S})\mathbf{P}_{(n|n-1)}$$

En régime asymptotique ($n \rightarrow \infty$) :

$$\mathbf{K}_{(n)} = \mathbf{K}_{(n+1)} = \mathbf{K}_{(\infty)} = [k_1 \quad k_2 \quad k_3]^T,$$

$$\mathbf{P}_{(n|n)} = \mathbf{P}_{(n+1|n+1)} = \mathbf{P}_{(\infty)} \stackrel{\text{def}}{=} \begin{bmatrix} P_{11} & P_{12} & P_{13} \\ P_{21} & P_{22} & P_{23} \\ P_{31} & P_{32} & P_{33} \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{P}_{(n|n-1)} = \mathbf{P}_{(n+1|n)} = \mathbf{P}'_{(\infty)} \stackrel{\text{def}}{=} \begin{bmatrix} P'_{11} & P'_{12} & P'_{13} \\ P'_{21} & P'_{22} & P'_{23} \\ P'_{31} & P'_{32} & P'_{33} \end{bmatrix}$$

ÉQUATION DE RICCATI ALGÈBRE (DARE)

$$\mathbf{P}'_{(\infty)} = \mathbf{M}\mathbf{P}'_{(\infty)}\mathbf{M}^T - \mathbf{M}\mathbf{P}'_{(\infty)}\mathbf{S}^T(\mathbf{S}\mathbf{P}'_{(\infty)}\mathbf{S}^T + \sigma_w^2)^{-1}\mathbf{S}\mathbf{P}'_{(\infty)}\mathbf{M}^T + \mathbf{U}$$

$$\Rightarrow \mathbf{P}'_{i,j} = f(k_1, k_2, k_3, \sigma_u^2)$$

CARACTÉRISTIQUES DU RW3-KF ASYMPTOTIQUE

RELATION APPROXIMATIVE ENTRE k_1, k_2, k_3 ET σ_u^2

$$k_1 \approx 2 \left(\frac{\sigma_u}{\sigma_w} \right)^{\frac{1}{3}},$$

$$k_2 \approx 2 \left(\frac{\sigma_u}{\sigma_w} \right)^{\frac{2}{3}} = \frac{k_1^2}{2},$$

$$k_3 \approx \frac{\sigma_u}{\sigma_w} = \frac{k_1^3}{8}$$

- 2 hypothèses ont été posées : $\omega_n T \ll 1$ et $P'_{11} \ll \sigma_w^2$, qui conduisent à :

$$0 < k_3 \ll k_2 \ll k_1 \ll 1$$

FONCTION DE TRANSFER DU RW3-KF

$$L(z) = \frac{(k_1 - k_2 + \frac{k_3}{2})(1 - z^{-1})^2 + (k_2 - \frac{k_3}{2})(1 - z^{-1}) + k_3}{(1 - k_1)(1 - z^{-1})^3 + (k_1 - k_2 + \frac{k_3}{2})(1 - z^{-1})^2 + (k_2 - \frac{k_3}{2})(1 - z^{-1}) + k_3}$$

$$k_1 \approx (m + 2) \zeta \omega_n T,$$

$$k_2 \approx (1 + 2m\zeta^2) (\omega_n T)^2,$$

$$k_3 \approx m\zeta (\omega_n T)^3$$



$$m = 2,$$

$$\zeta = 0.5,$$

$$\omega_n T = \frac{k_1}{2} = \left(\frac{\sigma_u}{\sigma_w} \right)^{\frac{1}{3}}$$

CARACTÉRISTIQUES DU RW3-KF ASYMPTOTIQUE

RELATION APPROXIMATIVE ENTRE k_1, k_2, k_3 ET σ_u^2

$$k_1 \approx 2 \left(\frac{\sigma_u}{\sigma_w} \right)^{\frac{1}{3}},$$

$$k_2 \approx 2 \left(\frac{\sigma_u}{\sigma_w} \right)^{\frac{2}{3}} = \frac{k_1^2}{2},$$

$$k_3 \approx \frac{\sigma_u}{\sigma_w} = \frac{k_1^3}{8}$$

- 2 hypothèses ont été posées : $\omega_n T \ll 1$ et $P'_{11} \ll \sigma_w^2$, qui conduisent à :

$$0 < k_3 \ll k_2 \ll k_1 \ll 1$$

FONCTION DE TRANSFER DU RW3-KF

$$L(z) = \frac{(k_1 - k_2 + \frac{k_3}{2})(1 - z^{-1})^2 + (k_2 - \frac{k_3}{2})(1 - z^{-1}) + k_3}{(1 - k_1)(1 - z^{-1})^3 + (k_1 - k_2 + \frac{k_3}{2})(1 - z^{-1})^2 + (k_2 - \frac{k_3}{2})(1 - z^{-1}) + k_3}$$

$$k_1 \approx (m + 2) \zeta \omega_n T,$$

$$k_2 \approx (1 + 2m\zeta^2) (\omega_n T)^2,$$

$$k_3 \approx m\zeta (\omega_n T)^3$$



$$m = 2,$$

$$\zeta = 0.5,$$

$$\omega_n T = \frac{k_1}{2} = \left(\frac{\sigma_u}{\sigma_w} \right)^{\frac{1}{3}}$$

CARACTÉRISTIQUES DU RW3-KF ASYMPTOTIQUE

RELATION APPROXIMATIVE ENTRE k_1, k_2, k_3 ET σ_u^2

$$k_1 \approx 2 \left(\frac{\sigma_u}{\sigma_w} \right)^{\frac{1}{3}},$$

$$k_2 \approx 2 \left(\frac{\sigma_u}{\sigma_w} \right)^{\frac{2}{3}} = \frac{k_1^2}{2},$$

$$k_3 \approx \frac{\sigma_u}{\sigma_w} = \frac{k_1^3}{8}$$

- 2 hypothèses ont été posées : $\omega_n T \ll 1$ et $P'_{11} \ll \sigma_w^2$, qui conduisent à :

$$0 < k_3 \ll k_2 \ll k_1 \ll 1$$

FONCTION DE TRANSFER DU RW3-KF

$$L(z) = \frac{k_1(1-z^{-1})^2 + k_2(1-z^{-1}) + k_3}{(1-z^{-1})^3 + k_1(1-z^{-1})^2 + k_2(1-z^{-1}) + k_3}$$

$$\begin{aligned} k_1 &\approx (m+2)\zeta\omega_n T, \\ k_2 &\approx (1+2m\zeta^2)(\omega_n T)^2, \\ k_3 &\approx m\zeta(\omega_n T)^3 \end{aligned}$$



$$\begin{aligned} m &= 2, \\ \zeta &= 0.5, \\ \omega_n T &= \frac{k_1}{2} = \left(\frac{\sigma_u}{\sigma_w} \right)^{\frac{1}{3}} \end{aligned}$$

EQM ASYMPTOTIQUE DU RW3-KF

EQM GLOBALE DE LA POURSUITE

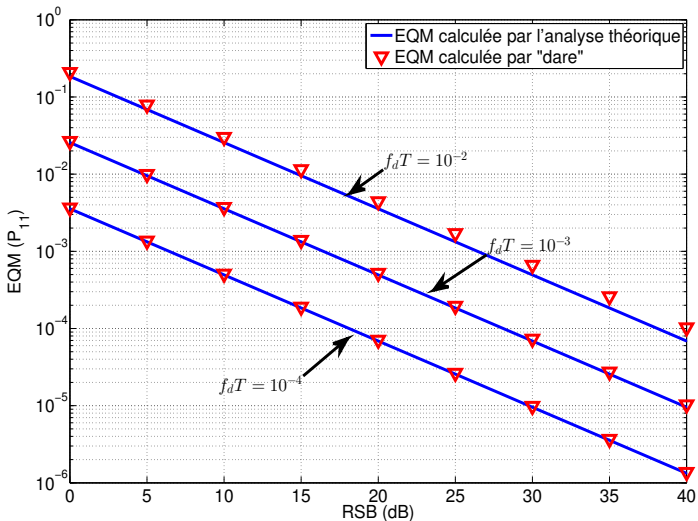
$$\begin{array}{ccc}
 & \text{Dynamique} & \text{Statique} \\
 \sigma_{\varepsilon}^2 & = & \sigma_{\varepsilon\alpha}^2 + \sigma_{\varepsilon w}^2 \\
 & \swarrow & \searrow \\
 \int_{-\frac{1}{2T}}^{+\frac{1}{2T}} \Gamma_{\alpha}(f) \cdot |1 - L(e^{j2\pi f T})|^2 df & & \int_{-\frac{1}{2T}}^{+\frac{1}{2T}} \Gamma_w(f) \cdot |L(e^{j2\pi f T})|^2 df \\
 \approx \frac{(2\pi)^6}{k_3^2} S_{\alpha} & & \approx \frac{5}{3} k_3^{\frac{1}{3}} \sigma_w^2
 \end{array}$$

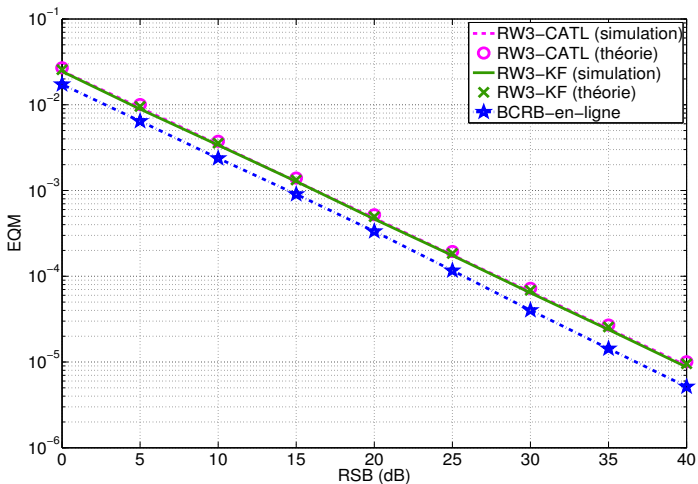
- $e^{-j2\pi f T} \approx 1 - j2\pi f T$ et $2\pi f_d T \ll k_3^{\frac{1}{3}} \approx \omega_n T \ll 1$ pour calculer $|1 - L(e^{j2\pi f T})|^2$.

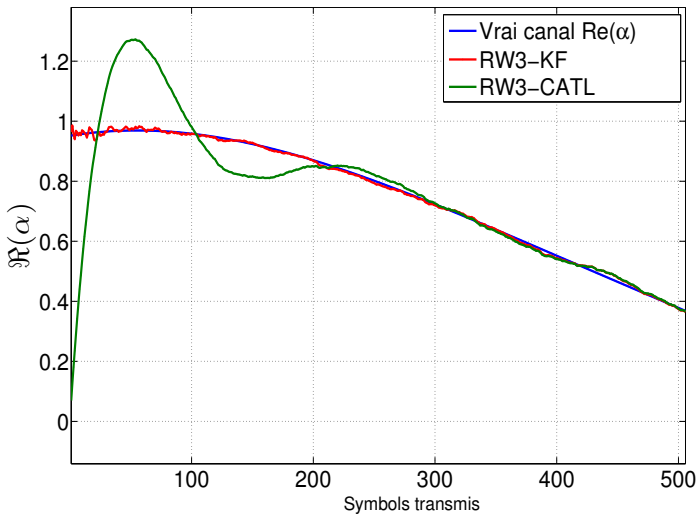
OPTIMISATION DU RW3-KF

$$\begin{aligned}
 \sigma_u^2 \text{ opt} &= \left[(2\pi)^{36} \cdot \left(\frac{18}{5} \cdot S_{\alpha} \right)^6 \cdot \sigma_w^2 \right]^{\frac{1}{7}}, \\
 \sigma_{\varepsilon}^2 \text{ min} &= 7 \cdot \left(\frac{5}{9} \pi \cdot \sigma_w^2 \right)^{\frac{6}{7}} \cdot S_{\alpha}^{\frac{1}{7}}
 \end{aligned}$$

VALIDATION DES SOLUTIONS D'ÉQUATION RICCATI



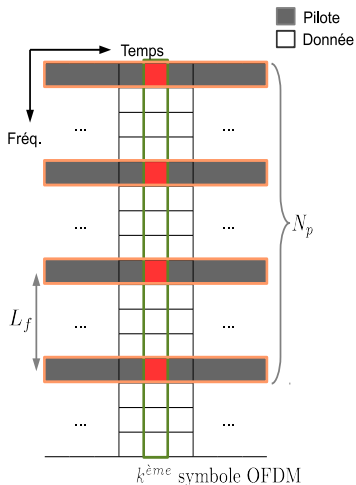
RW3-KF vs. RW3-CATL($m = 2, \zeta = 0.5$), $f_d T = 10^{-3}$ 

SIMULATION TRANSITOIRE ($f_d T = 10^{-3}$, RSB = 30 dB)

PLAN

- 1 INTRODUCTION
- 2 ESTIMATION D'UN CANAL MONO-TRAJET EN MODULATION MONO-PORTEUSE
 - BOUCLE DE POURSUITE D'ORDRE 3 (RW3-CATL)
 - FILTRE DE KALMAN ASYMPTOTIQUE D'ORDRE 3 (RW3-KF)
- 3 APPLICATIONS DES ESTIMATEURS D'ORDRE 3 SUR UN SYSTÈME OFDM AVEC UN CANAL MULTI-TRAJET
 - RW3-LS-CATL
 - RW3-KF APPLIQUÉ SUR DES SYSTÈMES OFDM
- 4 CONCLUSION ET PERSPECTIVE

ESTIMATION DE CANAL BASÉE SUR DES PILOTES



MODÈLE DES PILOTES

$$\begin{aligned}\mathbf{y}_{\mathbf{p}(k)} &= \text{diag}\{\mathbf{x}_{\mathbf{p}(k)}\} \mathbf{F}_{\mathbf{p}} \boldsymbol{\alpha}(k) + \mathbf{w}_{\mathbf{p}(k)} \\ &= \mathbf{X}_{(k)} \boldsymbol{\alpha}(k) + \mathbf{w}_{\mathbf{p}(k)}\end{aligned}$$

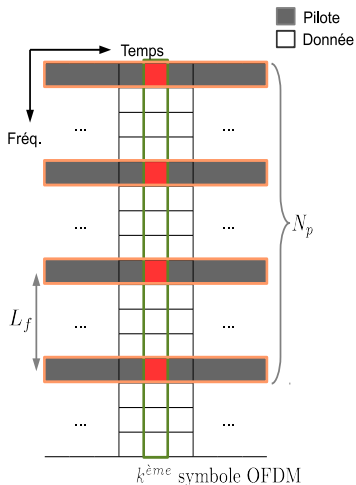
Positions des pilotes :

$$\mathcal{P} = \{n_p | n_p = (p-1)L_f + 1, p = 1, \dots, N_p\}$$

$$[\mathbf{F}_{\mathbf{p}}]_{n_p, l} = e^{-j2\pi(\frac{n_p-1}{N} - \frac{1}{2})\xi_l}, \quad n_p \in \mathcal{P}, \quad l = 1 \dots L_t.$$

- Pour chaque symbole OFDM, l'AC $\boldsymbol{\alpha}(k)$ est un vecteur de taille $L_t \times 1$.

ESTIMATION DE CANAL BASÉE SUR DES PILOTES



MODÈLE DES PILOTES

$$\begin{aligned} \mathbf{y}_{\mathbf{p}}(k) &= \text{diag}\{\mathbf{x}_{\mathbf{p}}(k)\} \mathbf{F}_{\mathbf{p}} \boldsymbol{\alpha}(k) + \mathbf{w}_{\mathbf{p}}(k) \\ &= \mathbf{X}(k) \boldsymbol{\alpha}(k) + \mathbf{w}_{\mathbf{p}}(k) \end{aligned}$$

Positions des pilotes :

$$\mathcal{P} = \{n_p | n_p = (p-1)L_f + 1, p = 1, \dots, N_p\}$$

$$[\mathbf{F}_{\mathbf{p}}]_{n_p, l} = e^{-j2\pi(\frac{n_p-1}{N}-\frac{1}{2})\check{t}_l}, \quad n_p \in \mathcal{P}, \quad l = 1 \dots L_t.$$

- Pour chaque symbole OFDM, l'AC $\boldsymbol{\alpha}(k)$ est un vecteur de taille $L_t \times 1$.

RW3-LS-CATL

- Même structure que la RW3-CATL, sauf le détecteur d'erreur

SIGNAL D'ERREUR

$$\mathbf{v}_{\varepsilon(k)} = f \left\{ \mathbf{y}_{\mathbf{p}(k)}; \hat{\boldsymbol{\alpha}}_{(k|k-1)} \right\}$$

$$\Downarrow \hat{\boldsymbol{\alpha}}_{\text{LS}(k)} = (\mathbf{X}_{(k)}^H \mathbf{X}_{(k)})^{-1} \mathbf{X}_{(k)}^H \mathbf{y}_{\mathbf{p}(k)}$$

$$\mathbf{v}_{\varepsilon(k)} = \hat{\boldsymbol{\alpha}}_{\text{LS}(k)} - \hat{\boldsymbol{\alpha}}_{(k|k-1)}$$

MODÈLE D'OBSERVATION DE LA RW3-LS-CATL

$$\hat{\boldsymbol{\alpha}}_{\text{LS}(k)} = \boldsymbol{\alpha}_{(k)} + \underline{\mathbf{w}_{\text{TL}(k)}}$$

bruit injecté dans la boucle

BRUIT DE BOUCLE

$$\mathbf{w}_{\text{TL}(k)} = (\mathbf{F}_{\mathbf{p}}^H \mathbf{F}_{\mathbf{p}})^{-1} \mathbf{F}_{\mathbf{p}}^H \text{diag}\{\mathbf{x}_{\mathbf{p}(k)}\} \mathbf{w}_{\mathbf{p}(k)}$$

Variance moyenne par trajet :

$$\sigma_{\text{TL}}^2 = \lambda_{\text{TL}} \cdot \frac{\sigma_{\mathbf{w}}^2}{N_{\mathbf{p}}} \quad (\lambda_{\text{TL}} \geq 1)$$

RW3-LS-CATL

- Même structure que la RW3-CATL, sauf le détecteur d'erreur

SIGNAL D'ERREUR

$$\mathbf{v}_{\boldsymbol{\varepsilon}(k)} = f \left\{ \mathbf{y}_{\mathbf{p}(k)}; \hat{\boldsymbol{\alpha}}_{(k|k-1)} \right\}$$

$$\Downarrow \hat{\boldsymbol{\alpha}}_{\text{LS}(k)} = (\mathbf{X}_{(k)}^H \mathbf{X}_{(k)})^{-1} \mathbf{X}_{(k)}^H \mathbf{y}_{\mathbf{p}(k)}$$

$$\mathbf{v}_{\boldsymbol{\varepsilon}(k)} = \hat{\boldsymbol{\alpha}}_{\text{LS}(k)} - \hat{\boldsymbol{\alpha}}_{(k|k-1)}$$

MODÈLE D'OBSERVATION DE LA RW3-LS-CATL

$$\hat{\boldsymbol{\alpha}}_{\text{LS}(k)} = \boldsymbol{\alpha}_{(k)} + \mathbf{w}_{\text{TL}(k)}$$

bruit injecté dans la boucle

BRUIT DE BOUCLE

$$\mathbf{w}_{\text{TL}(k)} = (\mathbf{F}_{\mathbf{p}}^H \mathbf{F}_{\mathbf{p}})^{-1} \mathbf{F}_{\mathbf{p}}^H \text{diag}\{\mathbf{x}_{\mathbf{p}(k)}\} \mathbf{w}_{\mathbf{p}(k)}$$

Variance moyenne par trajet :

$$\sigma_{\text{TL}}^2 = \lambda_{\text{TL}} \cdot \frac{\sigma_{\mathbf{w}}^2}{N_{\mathbf{p}}} \quad (\lambda_{\text{TL}} \geq 1)$$

RW3-LS-CATL

- Même structure que la RW3-CATL, sauf le détecteur d'erreur

SIGNAL D'ERREUR

$$\mathbf{v}_{\boldsymbol{\varepsilon}(k)} = f \left\{ \mathbf{y}_{\mathbf{p}(k)}; \hat{\boldsymbol{\alpha}}_{(k|k-1)} \right\}$$

$$\Downarrow \hat{\boldsymbol{\alpha}}_{\text{LS}(k)} = (\mathbf{X}_{(k)}^H \mathbf{X}_{(k)})^{-1} \mathbf{X}_{(k)}^H \mathbf{y}_{\mathbf{p}(k)}$$

$$\mathbf{v}_{\boldsymbol{\varepsilon}(k)} = \hat{\boldsymbol{\alpha}}_{\text{LS}(k)} - \hat{\boldsymbol{\alpha}}_{(k|k-1)}$$

MODÈLE D'OBSERVATION DE LA RW3-LS-CATL

$$\hat{\boldsymbol{\alpha}}_{\text{LS}(k)} = \boldsymbol{\alpha}_{(k)} + \underline{\mathbf{w}_{\text{TL}(k)}}$$

bruit injecté dans la boucle

BRUIT DE BOUCLE

$$\mathbf{w}_{\text{TL}(k)} = (\mathbf{F}_{\mathbf{p}}^H \mathbf{F}_{\mathbf{p}})^{-1} \mathbf{F}_{\mathbf{p}}^H \text{diag}\{\mathbf{x}_{\mathbf{p}(k)}\} \mathbf{w}_{\mathbf{p}(k)}$$

Variance moyenne par trajet :

$$\sigma_{\text{TL}}^2 = \lambda_{\text{TL}} \cdot \frac{\sigma_w^2}{N_p} \quad (\lambda_{\text{TL}} \geq 1)$$

PARAMÉTRAGE DE LA RW3-LS-CATL

PARAMÈTRES OPTIMISÉS

$$m = 3.19$$

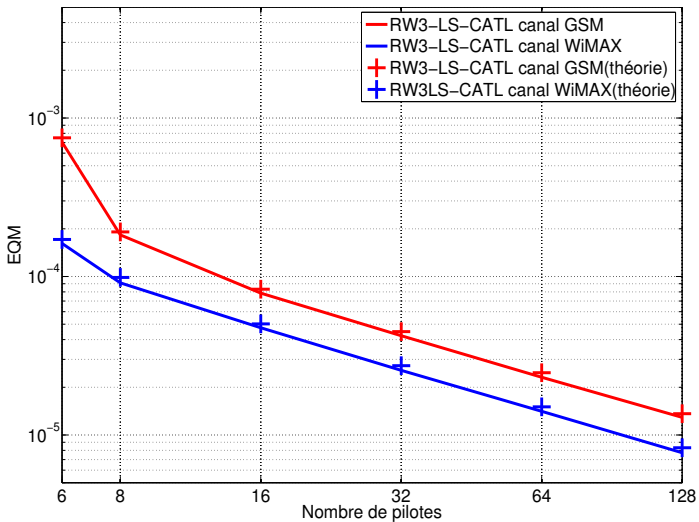
$$\zeta = 0.39$$

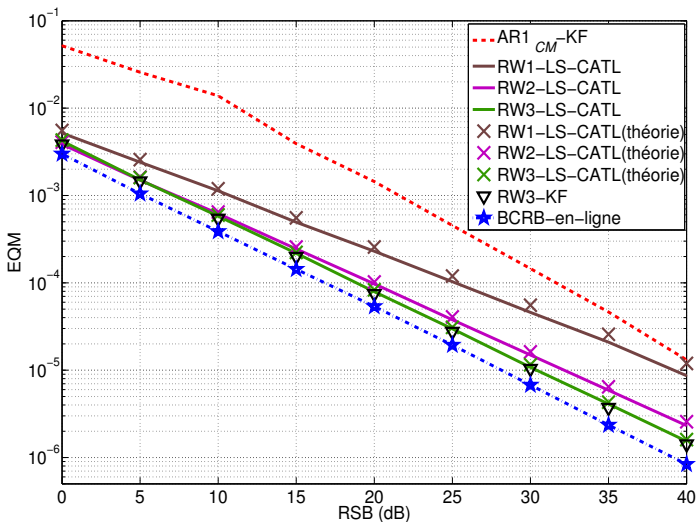
$$f_n = \frac{1}{T} \left(\frac{S_\alpha Q}{4\pi\sigma_{TL}^2} \right)^{\frac{1}{7}}$$

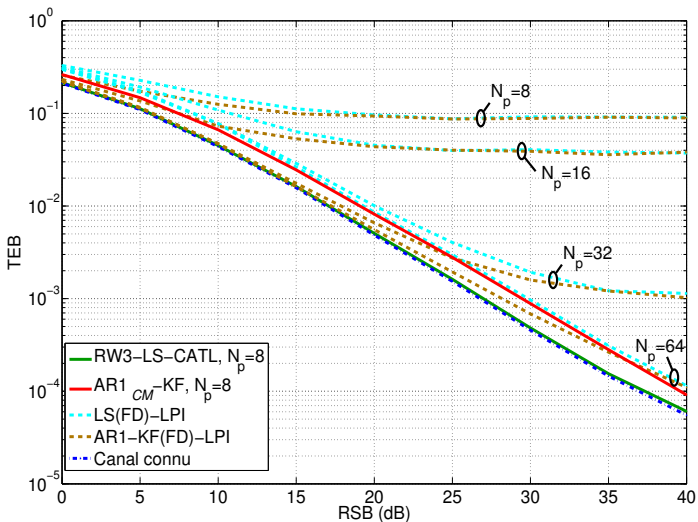


$$\sigma_{\varepsilon \min}^2 = C \cdot (2\pi\sigma_{TL}^2)^{\frac{6}{7}} \cdot (S_\alpha)^{\frac{1}{7}}$$

MSE vs. NOMBRE DES PILOTES



MSE vs. RSB ($f_d T = 10^{-3}$)

TEB vs. RSB ($f_d T = 10^{-3}$)

RW3-KF DANS LE CAS MULTI-TRAJET MULTI-PORTEUSE

- Paramètre à estimer : $\boldsymbol{\alpha}^{(k)}$ $L_t \times 1$

- Paramètre à régler : $\text{blkdiag}\{\mathbf{U}^{(1)} \dots \mathbf{U}^{(L_t)}\}$ avec $\mathbf{U}^{(l)} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_{u_l}^2 \end{bmatrix}$

- Gain de Kalman : $\hat{\mathbf{K}}_{\mathbf{e}^{(k)}}^{(k)}$ $3L_t \times N_p$
 \Downarrow Identité de Woodbury
 $3L_t \times L_t$ $\hat{\mathbf{K}}_{\mathbf{e}^{(k)}} \cdot (\mathbf{F}_p^H \mathbf{F}_p)^{-1} \mathbf{F}_p^H$ $L_t \times N_p$

$$\hat{\mathbf{K}}_{\mathbf{e}^{(k)}} = \hat{\mathbf{P}}_{(k|k-1)} \hat{\mathbf{S}}^H \left(\hat{\mathbf{S}} \hat{\mathbf{P}}_{(k|k-1)} \hat{\mathbf{S}}^H + (\mathbf{F}_p^H \mathbf{F}_p)^{-1} \sigma_w^2 \right)^{-1} \checkmark$$

- Exploiter que les éléments diagonaux de $(\mathbf{F}_p^H \mathbf{F}_p)^{-1} \sigma_w^2$

$$\hat{\mathbf{K}}_{\mathbf{e}^{(k)}} = \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{\mathbf{e}^{(k)}}^{(1)} & & \mathbf{O} \\ & \ddots & \\ \mathbf{O} & & \mathbf{K}_{\mathbf{e}^{(k)}}^{(L_t)} \end{bmatrix}$$

↘ Opérande LS

- Changer le modèle d'observation

$$\tilde{\mathbf{y}}_p^{(k)} \Rightarrow \hat{\boldsymbol{\alpha}}_{\text{LS}(k)} = (\mathbf{F}_p^H \mathbf{F}_p)^{-1} \mathbf{F}_p^H \tilde{\mathbf{y}}_p^{(k)}$$

$$\tilde{\mathbf{w}}_p^{(k)} \Rightarrow \mathbf{w}_{\text{LS}(k)} = (\mathbf{F}_p^H \mathbf{F}_p)^{-1} \mathbf{F}_p^H \tilde{\mathbf{w}}_p^{(k)}$$

- $\sigma_{\text{LS}l}^2 = E\{[\mathbf{w}_{\text{LS}(k)}]_l^* [\mathbf{w}_{\text{LS}(k)}]_l\}$
 $[(\mathbf{F}_p^H \mathbf{F}_p)^{-1} \sigma_w^2]_{l,l}$

- Traitement indépendant des trajets \Rightarrow Juxtaposition des KFs pour un seul trajet (RW3-KF approché)

RW3-KF DANS LE CAS MULTI-TRAJET MULTI-PORTEUSE

- Paramètre à estimer : $\boldsymbol{\alpha}^{(k)}$ $L_t \times 1$

- Paramètre à régler : $\text{blkdiag}\{\mathbf{U}^{(1)} \dots \mathbf{U}^{(L_t)}\}$ avec $\mathbf{U}^{(l)} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_{u_l}^2 \end{bmatrix}$

- Gain de Kalman : $\hat{\mathbf{K}}_{\mathbf{e}^{(k)}}^{(k)}$ $3L_t \times N_p$
 \Downarrow Identité de Woodbury
 $3L_t \times L_t$ $\hat{\mathbf{K}}_{\mathbf{e}^{(k)}} \cdot (\mathbf{F}_p^H \mathbf{F}_p)^{-1} \mathbf{F}_p^H$ $L_t \times N_p$

$$\hat{\mathbf{K}}_{\mathbf{e}^{(k)}} = \hat{\mathbf{P}}_{(k|k-1)} \hat{\mathbf{S}}^H \left(\hat{\mathbf{S}} \hat{\mathbf{P}}_{(k|k-1)} \hat{\mathbf{S}}^H + (\mathbf{F}_p^H \mathbf{F}_p)^{-1} \sigma_w^2 \right)^{-1} \checkmark$$

- Exploiter que les éléments diagonaux de $(\mathbf{F}_p^H \mathbf{F}_p)^{-1} \sigma_w^2$

$$\hat{\mathbf{K}}_{\mathbf{e}^{(k)}} = \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{\mathbf{e}^{(k)}}^{(1)} & & & \mathbf{O} \\ & \ddots & & \\ & & \ddots & \\ \mathbf{O} & & & \mathbf{K}_{\mathbf{e}^{(k)}}^{(L_t)} \end{bmatrix}$$

↘ Opérande LS

- Changer le modèle d'observation

$$\tilde{\mathbf{y}}_{\mathbf{p}^{(k)}} \Rightarrow \hat{\boldsymbol{\alpha}}_{\text{LS}(k)} = (\mathbf{F}_p^H \mathbf{F}_p)^{-1} \mathbf{F}_p^H \tilde{\mathbf{y}}_{\mathbf{p}^{(k)}}$$

$$\tilde{\mathbf{w}}_{\mathbf{p}^{(k)}} \Rightarrow \mathbf{w}_{\text{LS}(k)} = (\mathbf{F}_p^H \mathbf{F}_p)^{-1} \mathbf{F}_p^H \tilde{\mathbf{w}}_{\mathbf{p}^{(k)}}$$

- $\sigma_{\text{LS}l}^2 = E\{[\mathbf{w}_{\text{LS}(k)}]_l^* [\mathbf{w}_{\text{LS}(k)}]_l\}$
 $[(\mathbf{F}_p^H \mathbf{F}_p)^{-1} \sigma_w^2]_{l,l}$

- Traitement indépendant des trajets \Rightarrow Juxtaposition des KFs pour un seul trajet (RW3-KF approché)

RW3-KF DANS LE CAS MULTI-TRAJET MULTI-PORTEUSE

- Paramètre à estimer : $\alpha^{(k)}$ $L_t \times 1$

- Paramètre à régler : $\text{blkdiag}\{\mathbf{U}^{(1)} \dots \mathbf{U}^{(L_t)}\}$ avec $\mathbf{U}^{(l)} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_{u_l}^2 \end{bmatrix}$

- Gain de Kalman : $\hat{\mathbf{K}}_{\mathbf{e}^{(k)}}^{(k)}$ $3L_t \times N_p$
 \Downarrow Identité de Woodbury
 $3L_t \times L_t$ $\hat{\mathbf{K}}_{\mathbf{e}^{(k)}} \cdot (\mathbf{F}_p^H \mathbf{F}_p)^{-1} \mathbf{F}_p^H$ $L_t \times N_p$

$$\hat{\mathbf{K}}_{\mathbf{e}^{(k)}} = \hat{\mathbf{P}}_{(k|k-1)} \hat{\mathbf{S}}^H \left(\hat{\mathbf{S}} \hat{\mathbf{P}}_{(k|k-1)} \hat{\mathbf{S}}^H + (\mathbf{F}_p^H \mathbf{F}_p)^{-1} \sigma_w^2 \right)^{-1} \checkmark$$

- Exploiter que les éléments diagonaux de $(\mathbf{F}_p^H \mathbf{F}_p)^{-1} \sigma_w^2$

$$\hat{\mathbf{K}}_{\mathbf{e}^{(k)}} = \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{\mathbf{e}^{(k)}}^{(1)} & & & \mathbf{O} \\ & \ddots & & \\ & & \ddots & \\ \mathbf{O} & & & \mathbf{K}_{\mathbf{e}^{(k)}}^{(L_t)} \end{bmatrix}$$

↘ Opérande LS

- Changer le modèle d'observation

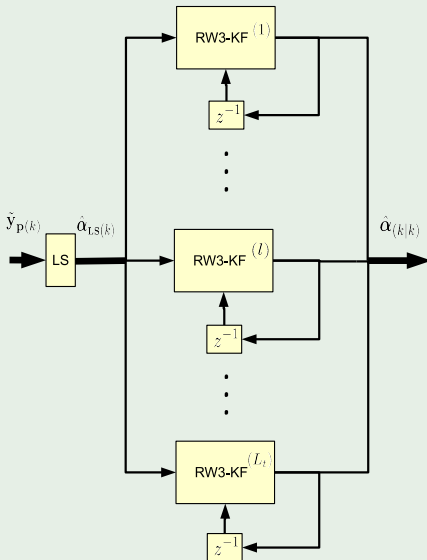
$$\tilde{\mathbf{y}}_{\mathbf{p}^{(k)}} \Rightarrow \hat{\alpha}_{\text{LS}(k)} = (\mathbf{F}_p^H \mathbf{F}_p)^{-1} \mathbf{F}_p^H \tilde{\mathbf{y}}_{\mathbf{p}^{(k)}}$$

$$\tilde{\mathbf{w}}_{\mathbf{p}^{(k)}} \Rightarrow \mathbf{w}_{\text{LS}(k)} = (\mathbf{F}_p^H \mathbf{F}_p)^{-1} \mathbf{F}_p^H \tilde{\mathbf{w}}_{\mathbf{p}^{(k)}}$$

- $\sigma_{\text{LS}l}^2 = E\{[\mathbf{w}_{\text{LS}(k)}]_l^* [\mathbf{w}_{\text{LS}(k)}]_l\}$
 $[(\mathbf{F}_p^H \mathbf{F}_p)^{-1} \sigma_w^2]_{l,l}$

- Traitement indépendant des trajets \Rightarrow Juxtaposition des KFs pour un seule trajet (RW3-KF approché)

JUXTAPOSITION DES KFs POUR UN SEUL TRAJET



MODÈLE ESPACE-ÉTAT PAR TRAJET

$$\hat{\alpha}_{LSl(k)} = \alpha_{l(k)} + \mathbf{w}_{LSl(k)},$$

$$\mathbf{a}_{l(k)} = \mathbf{M}\mathbf{a}_{l(k-1)} + \mathbf{u}_{l(k)}$$

↓

ÉQUATIONS DU RW3-KF (TRAJET l)

Équations de prédiction

$$\hat{\mathbf{a}}_{l(k|k-1)} = \mathbf{M}\hat{\mathbf{a}}_{l(k-1|k-1)},$$

$$\mathbf{P}_{(k|k-1)}^{(l)} = \mathbf{M}\mathbf{P}_{(k-1|k-1)}^{(l)}\mathbf{M}^T + \mathbf{U}^{(l)},$$

Équations de mise à jour

$$\mathbf{K}_{(k)}^{(l)} = \frac{\mathbf{P}_{(k|k-1)}^{(l)}\mathbf{S}^T}{\mathbf{S}\mathbf{P}_{(k|k-1)}^{(l)}\mathbf{S}^T + \sigma_{LSl}^2},$$

$$\hat{\mathbf{a}}_{l(k|k)} = \hat{\mathbf{a}}_{l(k|k-1)} + \mathbf{K}_{(k)}^{(l)}(\hat{\alpha}_{LSl(k)} - \mathbf{S}\hat{\mathbf{a}}_{l(k|k-1)}),$$

$$\mathbf{P}_{(k|k)}^{(l)} = (\mathbf{I}_r - \mathbf{K}_{(k)}^{(l)}\mathbf{S})\mathbf{P}_{(k|k-1)}^{(l)}$$

OPTIMISATION DU RW3-KF APPROCHÉ

OPTIMISATION DU RW3-KF APPROCHÉ

Trajet l :

$$\sigma_{u_l}^2 \text{ approx} = \left[\frac{3^{12}}{2^{18}} \cdot \sigma_{\text{LS}l}^2 \cdot (2\pi f_d T)^{36} \right]^{\frac{1}{7}} \cdot \sigma_{\alpha_l}^2 \quad \Rightarrow \quad \sigma_{\varepsilon_l}^2 \text{ approx} = \frac{35}{16} \cdot \left(\frac{16\pi}{9} \cdot \sigma_{\text{LS}l}^2 \cdot f_d T \right)^{\frac{6}{7}} \cdot (\sigma_{\alpha_l}^2)^{\frac{1}{7}}$$

EQM minimale globale :

$$\sigma_{\varepsilon}^2 \text{ approx} = \frac{1}{L_t} \sum_{l=1}^{L_t} \sigma_{\varepsilon_l}^2 \text{ approx}$$

LIENS ENTRE LE RW3-KF APPROCHÉ, LE RW3-KF ET LA RW3-LS-CATL

Si $\mathbf{F}_p^H \mathbf{F}_p = N_p \mathbf{I}_{L_t}$:Si $\sigma_{\alpha_l}^2 = \frac{\sigma_{\alpha}^2}{L_t}$ ($l = 1 \dots L_t$) :RW3-KF approché \Leftrightarrow RW3-KF (exact)RW3-KF approché \Leftrightarrow RW3-LS-CATL

OPTIMISATION DU RW3-KF APPROCHÉ

OPTIMISATION DU RW3-KF APPROCHÉ

Trajet l :

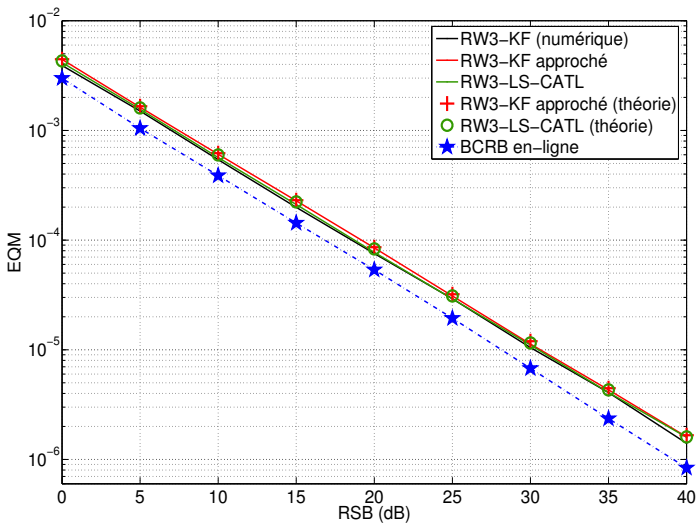
$$\sigma_{u_l}^2 \text{ approx} = \left[\frac{3^{12}}{2^{18}} \cdot \sigma_{LSl}^2 \cdot (2\pi f_d T)^{36} \right]^{\frac{1}{7}} \cdot \sigma_{\alpha_l}^2 \quad \Rightarrow \quad \sigma_{\varepsilon_l}^2 \text{ approx} = \frac{35}{16} \cdot \left(\frac{16\pi}{9} \cdot \sigma_{LSl}^2 \cdot f_d T \right)^{\frac{6}{7}} \cdot (\sigma_{\alpha_l}^2)^{\frac{1}{7}}$$

EQM minimale globale :

$$\sigma_{\varepsilon}^2 \text{ approx} = \frac{1}{L_t} \sum_{l=1}^{L_t} \sigma_{\varepsilon_l}^2 \text{ approx}$$

LIENS ENTRE LE RW3-KF APPROCHÉ, LE RW3-KF ET LA RW3-LS-CATL

Si $\mathbf{F}_p^H \mathbf{F}_p = N_p \mathbf{I}_{L_t}$:Si $\sigma_{\alpha_l}^2 = \frac{\sigma_{\alpha}^2}{L_t}$ ($l = 1 \dots L_t$) :RW3-KF approché \Leftrightarrow RW3-KF (exact)RW3-KF approché \Leftrightarrow RW3-LS-CATL

SIMULATION : EQM vs. RSB ($f_d T = 10^{-3}$)

COMPLEXITÉ DES ALGORITHMES

RW3-KF	RW3-KF approché	RW3-LS-CATL
$N_p^3 + 4L_t N_p^2 + (12L_t^2 + 4L_t + 1)N_p$	$12L_t^3 + 4L_t^2 + L_t + N_p$	$(N_p + 3)L_t$
$O(N_p^3)$	$O(L_t^3)$	$O(N_p)$

- Dans le cas où $N_p > L_t$, la complexité du RW3-KF approché \ll RW3-KF.
- RW3-LS-CATL reste l'algorithme le plus simple.

PLAN

- 1 INTRODUCTION
- 2 ESTIMATION D'UN CANAL MONO-TRAJET EN MODULATION MONO-PORTEUSE
 - BOUCLE DE POURSUITE D'ORDRE 3 (RW3-CATL)
 - FILTRE DE KALMAN ASYMPTOTIQUE D'ORDRE 3 (RW3-KF)
- 3 APPLICATIONS DES ESTIMATEURS D'ORDRE 3 SUR UN SYSTÈME OFDM AVEC UN CANAL MULTI-TRAJET
 - RW3-LS-CATL
 - RW3-KF APPLIQUÉ SUR DES SYSTÈMES OFDM
- 4 CONCLUSION ET PERSPECTIVE

CONCLUSION GÉNÉRALE

- Cas mono-trajet, mono-porteuse
 - RW3-CATL :
Caractéristiques, Optimisation (3-dimensions)
 - RW3-KF asymptotique :
Résolution de l'équation Riccati, Lien avec la RW3-CATL, Optimisation (1-dimension)
- Cas multi-trajet, OFDM (modulation multi-porteuse)
 - Application de la RW3-CATL dans un système OFDM (RW3-LS-CATL) :
Détecteur d'erreur LS
 - Application du RW3-KF dans un système OFDM :
Méthode alternative : RW3-KF approché

CONCLUSION GÉNÉRALE

- Cas mono-trajet, mono-porteuse
 - RW3-CATL :
Caractéristiques, Optimisation (3-dimensions)
 - RW3-KF asymptotique :
Résolution de l'équation Riccati, Lien avec la RW3-CATL, Optimisation (1-dimension)
- Cas multi-trajet, OFDM (modulation multi-porteuse)
 - Application de la RW3-CATL dans un système OFDM (RW3-LS-CATL) :
Détecteur d'erreur LS
 - Application du RW3-KF dans un système OFDM :
Méthode alternative : RW3-KF approché

CONCLUSION GÉNÉRALE

- Cas mono-trajet, mono-porteuse
 - RW3-CATL :
Caractéristiques, Optimisation (3-dimensions)
 - RW3-KF asymptotique :
Résolution de l'équation Riccati, Lien avec la RW3-CATL, Optimisation (1-dimension)
- Cas multi-trajet, OFDM (modulation multi-porteuse)
 - Application de la RW3-CATL dans un système OFDM (RW3-LS-CATL) :
Détecteur d'erreur LS
 - Application du RW3-KF dans un système OFDM :
Méthode alternative : RW3-KF approché

CONCLUSION GÉNÉRALE

- Cas mono-trajet, mono-porteuse
 - RW3-CATL :
Caractéristiques, Optimisation (3-dimensions)
 - RW3-KF asymptotique :
Résolution de l'équation Riccati, Lien avec la RW3-CATL, Optimisation (1-dimension)
- Cas multi-trajet, OFDM (modulation multi-porteuse)
 - Application de la RW3-CATL dans un système OFDM (RW3-LS-CATL) :
Détecteur d'erreur LS
 - Application du RW3-KF dans un système OFDM :
Méthode alternative : RW3-KF approché

PERSPECTIVES

- Application MIMO-OFDM
- Estimation conjointe (CFO, bruit de phase, etc.)
- Estimation robuste avec le filtre H_∞

CONTRIBUTIONS ET PUBLICATIONS

CONTRIBUTIONS DE LA THÈSE

- Estimateur simplifié d'ordre 3 (RW3-CATL)
- Lien entre le RW3-KF et la RW3-CATL
- Optimisation analytique de la RW3-(LS-)CATL
- Optimisation analytique du RW3-KF
- RW3-KF approché pour OFDM

- Shu, H. ; Ros, L. ; Simon, E. P., "Third-order complex amplitudes tracking loop for slow fading channel estimation", *19th International Conference on Telecommunications (ICT)*, 2012
- Shu, H. ; Ros, L. ; Simon, E. P., "Third-order Complex Amplitudes Tracking Loop for Slow to Moderate Flat Fading Channel On-Line Estimation", *IET Communication*
- Shu, H. ; Simon, E. P. ; Ros, L., "Third-order Kalman Filter : tuning and steady-state performance", *IEEE Signal Processing Letter*
- Shu, H. ; Simon, E. P. ; Ros, L., "Simplified Random-Walk-model-based Kalman filter for Slow to moderate Fading Channel Estimation in OFDM systems" article à soumettre à *IEEE Trans. Signal Process.*

Merci !