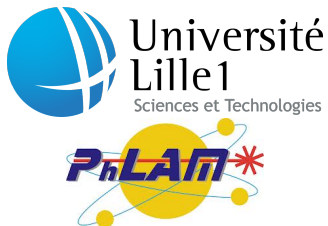


# Dynamique d'un gaz de bosons ultra-froids dans un milieu désordonné :

Effets des interactions sur la localisation et sur la transition d'Anderson



Benoît Vermersch  
sous la direction de  
Jean-Claude Garreau

23 septembre 2013  
Lille



# Un gaz de bosons ultra-froids (1)

- 1960 : Premier laser à Rubis



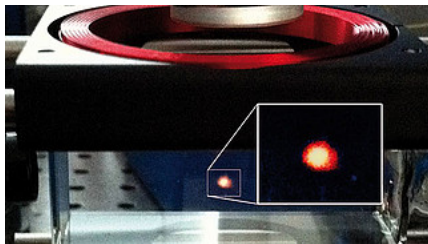
- 1980-1995 : Refroidissement et piégeage des atomes

# Un gaz de bosons ultra-froids (1)

- 1960 : Premier laser à Rubis

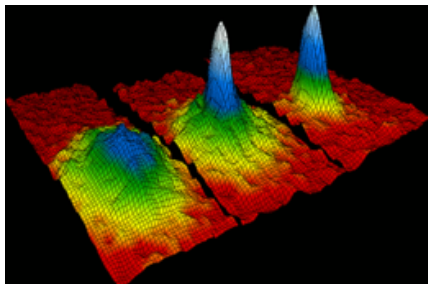


- 1980-1995 : Refroidissement et piégeage des atomes



## Un gaz de bosons ultra-froids (2)

- 1995 : Premier Condensat de Bose-Einstein

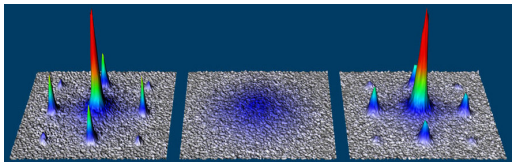


- 1 objet quantique macroscopique ( $> 10000$  atomes)

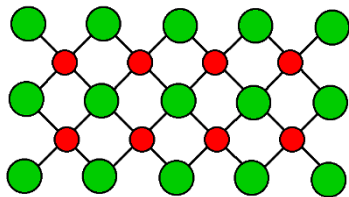


## Un gaz de bosons ultra-froids (3)

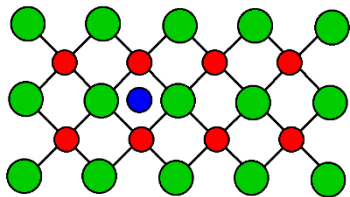
- Des phénomènes spectaculaires : Soliton [Becker *et al.*, 2008], Transition de Mott [Greiner *et al.*, 2002], ...



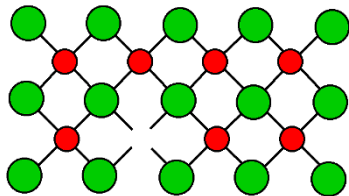
... dans un milieu désordonné



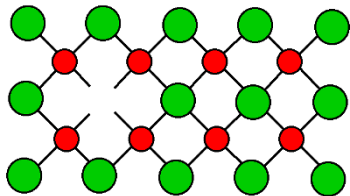
(a) perfect lattice



(b) interstitial impurity

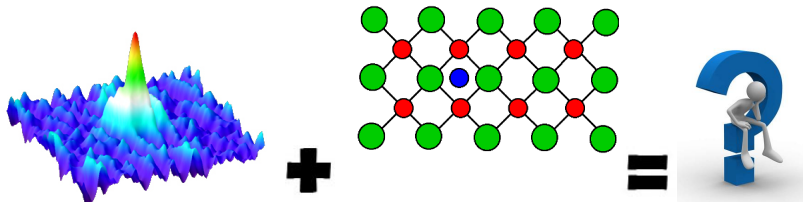


(c) cation vacancy



(d) anion vacancy

# Objectif de la thèse



# Sommaire

Localisation d'Anderson

Le système unidimensionnel

Le système tridimensionnel

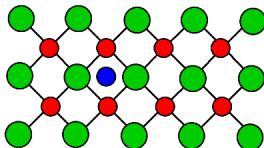
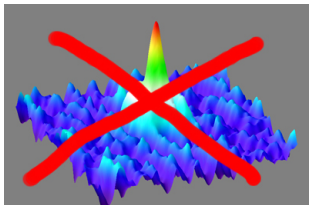
# Sommaire

Localisation d'Anderson

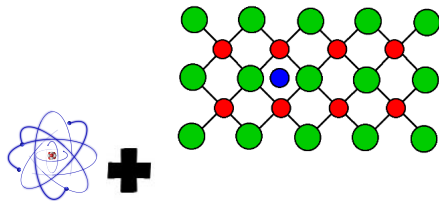
Le système unidimensionnel

Le système tridimensionnel

## 1.1 : Le cadre du problème



## 1.1 : Le cadre du problème



## 1.2 : Un phénomène non-intuitif

PHYSICAL REVIEW

VOLUME 109, NUMBER 5

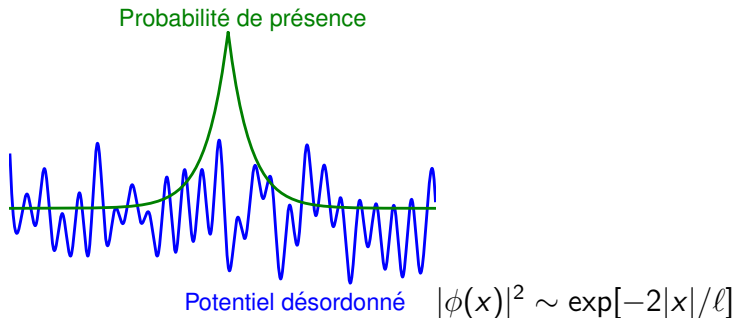
MARCH 1, 1958

### Absence of Diffusion in Certain Random Lattices

P. W. ANDERSON

*Bell Telephone Laboratories, Murray Hill, New Jersey*

(Received October 10, 1957)





## Explication 1D

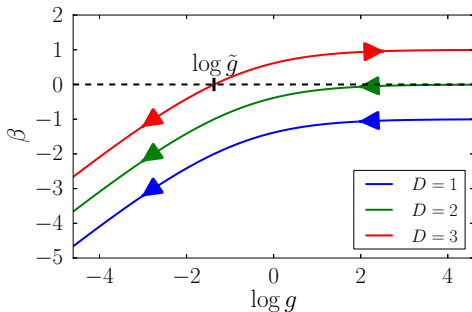
- *Cristal parfait* : Délocalisation du paquet
  
  
  
  
  
  
  
  
  
  
- *Cristal avec des défauts* : Interférences destructives → Localisation

## Rôle de la dimension

- Théorie d'échelle par “le gang des quatre” [Abrahams, Anderson, Licciardello et Ramakrishnan ]
- Comportement des systèmes électroniques de taille finie
- Conductance  $g \propto L^\beta$
- $\beta = d \log g / d \log L$

## Rôle de la dimension

- Théorie d'échelle par “le gang des quatre” [Abrahams, Anderson, Licciardello et Ramakrishnan ]
- Comportement des systèmes électroniques de taille finie
- Conductance  $g \propto L^\beta$
- $\beta = d \log g / d \log L$



## Exemple 2D

Sans désordre

Avec désordre

## 1.3 : Situations physiques

- Courant électrique dans les solides [Anderson, 1958]
- Ondes électromagnétiques et sonores [Chabanov *et al.*, 2000, Hu *et al.*, 2008].
- Ondes de matière (atomes froids)
  - Potentiel de tavelures optiques (speckle) [Billy *et al.*, 2008, Kondov *et al.*, 2011, Jendrzejewski *et al.*, 2012]
  - Réseaux bichromatiques [Roati *et al.*, 2008]
  - Rotateur pulsé [Chabé *et al.*, 2008]

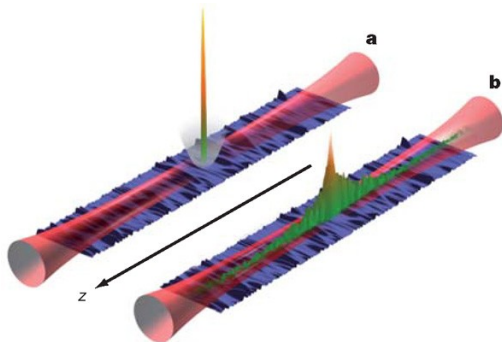
## 1.3 : Situations physiques

- Courant électrique dans les solides [Anderson, 1958]
- Ondes électromagnétiques et sonores [Chabanov *et al.*, 2000, Hu *et al.*, 2008].
- Ondes de matière (atomes froids)
  - Potentiel de tavelures optiques (speckle) [Billy *et al.*, 2008, Kondov *et al.*, 2011, Jendrzejewski *et al.*, 2012]
  - Réseaux bichromatiques [Roati *et al.*, 2008]
  - Rotateur pulsé [Chabé *et al.*, 2008]

## 1.3 : Situations physiques

- Courant électrique dans les solides [Anderson, 1958]
- Ondes électromagnétiques et sonores [Chabanov *et al.*, 2000, Hu *et al.*, 2008].
- Ondes de matière (atomes froids)
  - Potentiel de tavelures optiques (speckle) [Billy *et al.*, 2008, Kondov *et al.*, 2011, Jendrzejewski *et al.*, 2012]
  - Réseaux bichromatiques [Roati *et al.*, 2008]
  - Rotateur pulsé [Chabé *et al.*, 2008]

# Une expérience d'atomes froids (Institut d'Optique)





# Le rôle des interactions dans un CBE ?

- Collisions entre particules  $\leftrightarrow$  Interférences quantiques
  - Travail expérimental [Lucioni *et al.*, 2010]
  - Approche à plusieurs corps [Delande *et al.*, 2013]
  - Simulations numériques dans le régime de champ moyen [Flach, Shepelyansky, ..]
  - Études des excitations du condensat [Lugan *et al.*, 2007, Gaul & Müller, 2011]

# Le rôle des interactions dans un CBE ?

- Collisions entre particules  $\leftrightarrow$  Interférences quantiques
- Travail expérimental [Lucioni *et al.*, 2010]
- Approche à plusieurs corps [Delande *et al.*, 2013]
- Simulations numériques dans le régime de champ moyen [Flach, Shepelyansky, ..]
- Études des excitations du condensat [Lugan *et al.*, 2007, Gaul & Müller, 2011]

## Le rôle des interactions dans un CBE ?

- Collisions entre particules  $\leftrightarrow$  Interférences quantiques
- Travail expérimental [Lucioni *et al.*, 2010]
- Approche à plusieurs corps [Delande *et al.*, 2013]
- Simulations numériques dans le régime de champ moyen [Flach, Shepelyansky, ..]
- Études des excitations du condensat [Lugan *et al.*, 2007, Gaul & Müller, 2011]

## Le rôle des interactions dans un CBE ?

- Collisions entre particules  $\leftrightarrow$  Interférences quantiques
- Travail expérimental [Lucioni *et al.*, 2010]
- Approche à plusieurs corps [Delande *et al.*, 2013]
- Simulations numériques dans le régime de champ moyen [Flach, Shepelyansky, ..]
- Études des excitations du condensat [Lugan *et al.*, 2007, Gaul & Müller, 2011]

## Le rôle des interactions dans un CBE ?

- Collisions entre particules  $\leftrightarrow$  Interférences quantiques
- Travail expérimental [Lucioni *et al.*, 2010]
- Approche à plusieurs corps [Delande *et al.*, 2013]
- Simulations numériques dans le régime de champ moyen [Flach, Shepelyansky, ..]
- Études des excitations du condensat [Lugan *et al.*, 2007, Gaul & Müller, 2011]

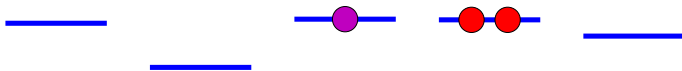
# Sommaire

Localisation d'Anderson

**Le système unidimensionnel**

Le système tridimensionnel

## 2.1 : L'équation d'Anderson-Schrödinger non-linéaire discrète



$$i\dot{\phi}_n = v_n\phi_n - \phi_{n+1} - \phi_{n-1} + g|\phi_n|^2\phi_n$$

- **Désordre** :  $v_n \in [-W/2, W/2]$  est aléatoire
- **Couplage** : normalisé à 1.
- **Interactions** : équation de Gross-Pitaevskii.
- $g = 0 \iff$  Localisation d'Anderson

## 2.2 : Stratégie 1 : Système de taille finie

- Destruction de la localisation aux temps très longs
- Conséquence : Caractérisation complète impossible
- Stratégie 1 : Système fini ouvert (absorbeur numérique)
- Influence de la condition initiale  $L_0$



Exemple avec  $W = 2$ ,  $L_0 = 7$

Localisé

$$g = 0$$

Chaotique

$$g \sim 10$$

Auto-piégé

$$g \sim 100$$

## 2.2 : Stratégie 1 : Système de taille finie

- Notre observable : *probabilité de survie*  $p(t) = \sum_n |\phi_n|^2$

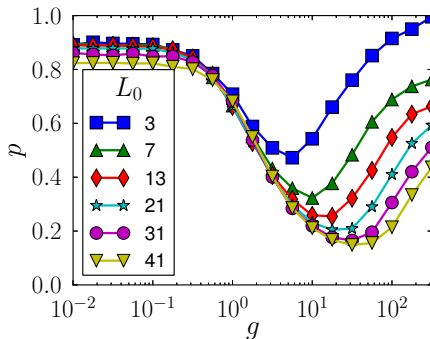
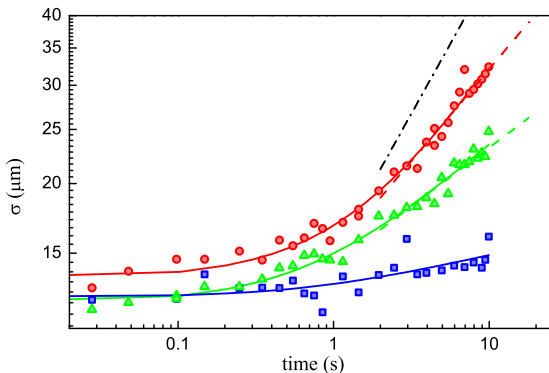


Figure:  $t = 10^5$   $W = 4$ .

3 régimes : quasi-localisé, chaotique et auto-piégé. (décrit également par [Laptyeva *et al.*, 2010])

## Expérience à Florence :

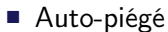
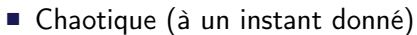


- Largeur du paquet :  $\sigma \propto t^\alpha$ ,  $\alpha \approx 0.2 - 0.4$  [Lucioni *et al.*, 2011]

## Comprendre ces 3 régimes :



$$i\dot{\phi}_n = (v_n + g|\phi_n|^2)\phi_n - \phi_{n+1} - \phi_{n-1}$$



## Comprendre ces 3 régimes :



$$i\dot{\phi}_n = (v_n + g|\phi_n|^2)\phi_n - \phi_{n+1} - \phi_{n-1}$$

- Localisé



- Chaotique (à un instant donné)

- Auto-piégé

## Comprendre ces 3 régimes :



$$i\dot{\phi}_n = (v_n + g|\phi_n|^2)\phi_n - \phi_{n+1} - \phi_{n-1}$$

- Localisé



- Chaotique (à un instant donné)



- Auto-piégé

## Comprendre ces 3 régimes :



$$i\dot{\phi}_n = (v_n + g|\phi_n|^2)\phi_n - \phi_{n+1} - \phi_{n-1}$$

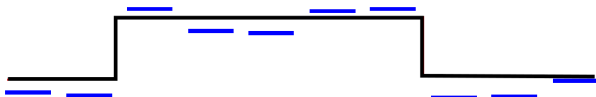
- Localisé



- Chaotique (à un instant donné)



- Auto-piégé



## Le régime auto-piégé :

- Argument énergétique :

$$E = E_{\text{int}} + E_{\text{pot}} + E_{\text{kin}}$$

- Travail dans une bande de Bloch :  $E_{\text{pot}} + E_{\text{kin}} < E_{\text{max}}$
- Si  $E_{\text{int}}(t = 0) > E_{\text{max}}$ ,  $E_{\text{int}}(t) = E - E_{\text{pot}} - E_{\text{kin}} > 0$



## Comprendre ces 3 régimes :



$$i\dot{\phi}_n = (v_n + g|\phi_n|^2) \phi_n - \phi_{n+1} - \phi_{n-1}$$

- Représentation en modes propres :

$$i\dot{d}_\nu = \epsilon_\nu d_\nu + g \sum_{\nu_1, \nu_2, \nu_3} l_{\nu, \nu_1, \nu_2, \nu_3} d_{\nu_1}^* d_{\nu_2} d_{\nu_3} \quad (1)$$

- Localisé : Populations sont stables
- Chaotique : Excitation de nouveaux modes
- Auto-piégé : Dynamique entre modes excités

## 2.3 : Stratégie 2 : Propriétés spectrales

- Objectif : Noter l'apparition des nouveaux modes
- → étudier l'apparition des fréquences correspondantes.
- Régime chaotique ?
- Avantages numériques considérables.

## 2.3 : Stratégie 2 : Propriétés spectrales

- Objectif : Noter l'apparition des nouveaux modes
- → étudier l'apparition des fréquences correspondantes.
- Régime chaotique ?
- Avantages numériques considérables.

## 2.3 : Stratégie 2 : Propriétés spectrales

- Objectif : Noter l'apparition des nouveaux modes
- → étudier l'apparition des fréquences correspondantes.
- Régime chaotique ?
- Avantages numériques considérables.

## 2.3 : Stratégie 2 : Propriétés spectrales

- Objectif : Noter l'apparition des nouveaux modes
- → étudier l'apparition des fréquences correspondantes.
- Régime chaotique ?
- Avantages numériques considérables.

## Définition d'une observable

- Représentation mode  $|\phi\rangle = \sum_{\nu} d_{\nu}|\nu\rangle$
- Nombre d'états : Nombre modes excités.

$$P = \frac{1}{\sum_{\nu} |d_{\nu}|^4}$$

- Régime localisé  $P = P(t = 0)$
- Régime chaotique : nouvelles fréquences
- Régime auto-piégé : Nombre fini de fréquences.

## Définition d'une observable

- Représentation mode  $|\phi\rangle = \sum_{\nu} d_{\nu}|\nu\rangle$
- Nombre d'états : Nombre modes excités.

$$P = \frac{1}{\sum_{\nu} |d_{\nu}|^4}$$

- Régime localisé  $P = P(t = 0)$
- Régime chaotique : nouvelles fréquences
- Régime auto-piégé : Nombre fini de fréquences.

## Définition d'une observable

- Représentation mode  $|\phi\rangle = \sum_{\nu} d_{\nu}|\nu\rangle$
- Nombre d'états : Nombre modes excités.

$$P = \frac{1}{\sum_{\nu} |d_{\nu}|^4}$$

- Régime localisé  $P = P(t = 0)$
- Régime chaotique : nouvelles fréquences
- Régime auto-piégé : Nombre fini de fréquences.



## Définition d'une observable

- Représentation mode  $|\phi\rangle = \sum_{\nu} d_{\nu}|\nu\rangle$
- Nombre d'états : Nombre modes excités.

$$P = \frac{1}{\sum_{\nu} |d_{\nu}|^4}$$

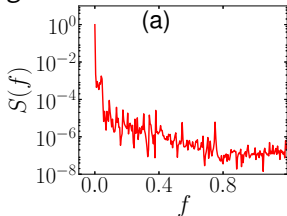
- Régime localisé  $P = P(t = 0)$
- Régime chaotique : nouvelles fréquences
- Régime auto-piégé : Nombre fini de fréquences.

# Définition d'une observable

- Spectre de puissance :  $S_f \propto |TF[P(t)]|^2$

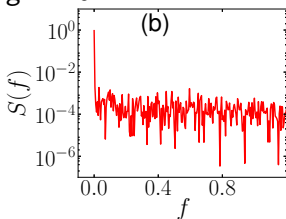
Localisé

$g \sim 1$



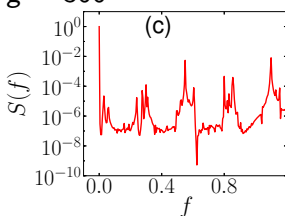
Chaotique

$g \sim 10$



Auto-piégé

$g \sim 300$



## Définition d'une observable

- Notre observable : Entropie spectrale

$$H = - \frac{\int df S_f \log S_f}{\log f_{\max}}$$

- Sinusoïde :  $S_f = \delta(f - f_0) \rightarrow H = 0$
- Bruit blanc :  $S_f = 1/f_{\max} \rightarrow H = 1$

## Définition d'une observable

- Notre observable : Entropie spectrale

$$H = - \frac{\int df S_f \log S_f}{\log f_{\max}}$$

- Sinusoïde :  $S_f = \delta(f - f_0) \rightarrow H = 0$
- Bruit blanc :  $S_f = 1/f_{\max} \rightarrow H = 1$

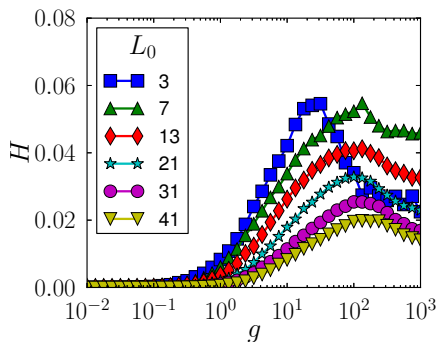
## Définition d'une observable

- Notre observable : Entropie spectrale

$$H = - \frac{\int df S_f \log S_f}{\log f_{\max}}$$

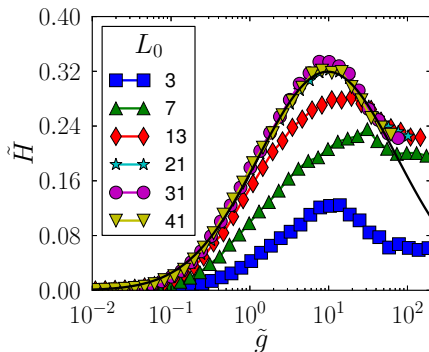
- Sinusoïde :  $S_f = \delta(f - f_0) \rightarrow H = 0$
- Bruit blanc :  $S_f = 1/f_{\max} \rightarrow H = 1$

# Résultats



- Les 3 régimes sont visibles

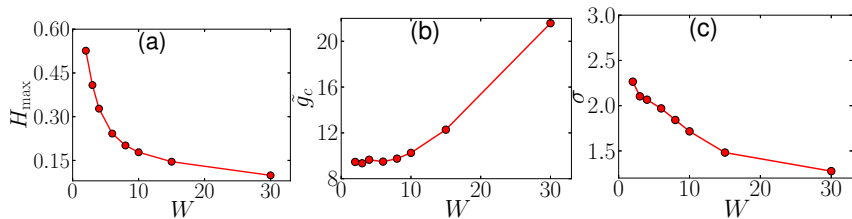
## Caractérisation complète du système



- Lois d'échelle  $\tilde{g} = gL_0^{-3/4}$ ,  $\tilde{H} = HL_0^{3/4}$  ( $L_0 \geq \ell(W)$ )
- Résonance log-normale  $\tilde{H} = H_{\max} \exp \left[ -\frac{(\log \tilde{g} - \log \tilde{g}_c)^2}{2\sigma^2} \right]$

# Caractérisation complète du système

## ■ et le désordre !





## Conclusion 1<sup>ère</sup> partie

### ■ Résultats :

- Description des régimes
- Mise en évidence de la nature chaotique
- Lois d'échelles
- Caractérisation complète  $L_0, g, W$
- Autre approche : longueur de localisation effective
- Effets de décohérence

### ■ Perspectives :

- Comprendre l'exposant de la loi d'échelle  $L_0^{-3/4}$
- Effets du bruit quantique
- Caractériser le régime de sous-diffusion

# Sommaire

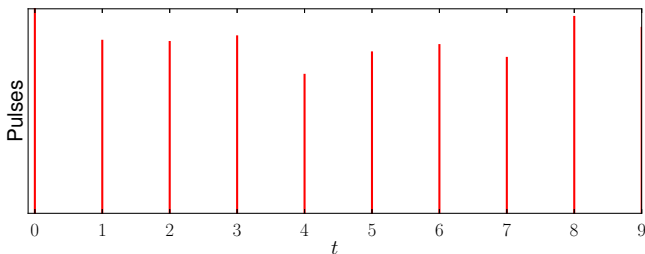
Localisation d'Anderson

Le système unidimensionnel

Le système tridimensionnel

### 3.1 : Le rotateur pulsé quasi-périodique

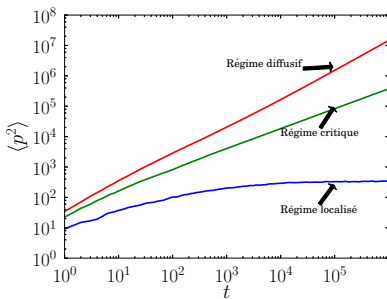
$$h = \frac{p^2}{2} + K \cos x (1 + \varepsilon \cos \omega_2 t \cos \omega_3 t) \sum_n \delta(t - n)$$



- Système équivalent au modèle d'Anderson 3D
- Localisation dynamique.

### 3.1 : Le rotateur pulsé quasi-périodique

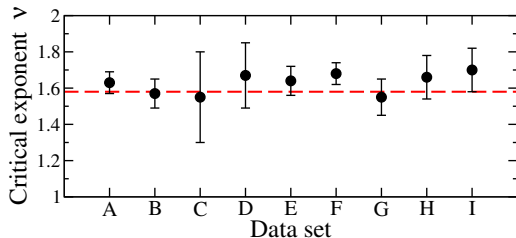
$$h = \frac{p^2}{2} + K \cos x (1 + \varepsilon \cos \omega_2 t \cos \omega_3 t) \sum_n \delta(t - n)$$



- Régime localisé petits  $(K, \epsilon)$   $\rightarrow$  Régime diffusif grands  $(K, \epsilon)$

## Résultats expérimentaux

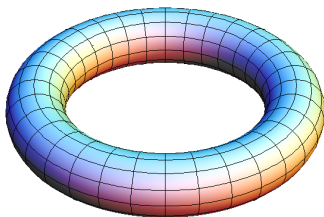
- Récente démonstration expérimentale de l'universalité de la transition d'Anderson [Lopez *et al.*, 2012]



- Résultats pour un gaz de particules isolées.
- Notre étude théorique : un condensat de Bose-Einstein

## 3.2 : L'effet des interactions

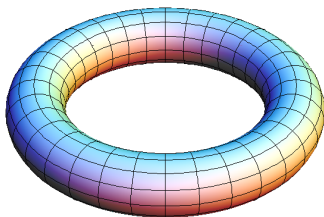
- un condensat de Bose-Einstein quasi-1D
- avec conditions aux bords  $2\pi$ -périodique.



- Dans le régime de faibles interactions :  $E_{\text{int}} \ll E_{\text{kin}}$
- Équivalence brisée avec le modèle d'Anderson 3D

## 3.2 : L'effet des interactions

- un condensat de Bose-Einstein quasi-1D
- avec conditions aux bords  $2\pi$ -périodique.



- Dans le régime de faibles interactions :  $E_{\text{int}} \ll E_{\text{kin}}$
- Équivalence brisée avec le modèle d'Anderson 3D

### 3.3 : Équations de Bogoliubov

- Le condensat est-il stable ?

$$\Psi = \sqrt{N}\phi + \sum_k b_k u_k + b_k^\dagger v_k^*$$

- Évolution du condensat (équation GP)

$$i\hbar d_t \phi = h\phi + g|\phi|^2 \phi$$

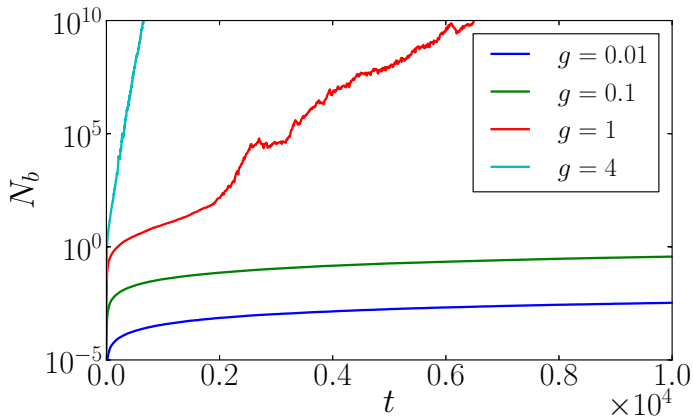
- Évolution de la fraction non-condensée [Castin & Dum, 1998] :

$$i\hbar d_t \begin{bmatrix} u_k \\ v_k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Q & \\ & Q^* \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h + 2g|\phi|^2 - \mu & g\phi^2 \\ -g\phi^{*2} & -h - 2g|\phi|^2 + \mu \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Q & \\ & Q^* \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_k \\ v_k \end{bmatrix}$$

- Nombre d'excitations  $N_b = \langle v_k | v_k \rangle$

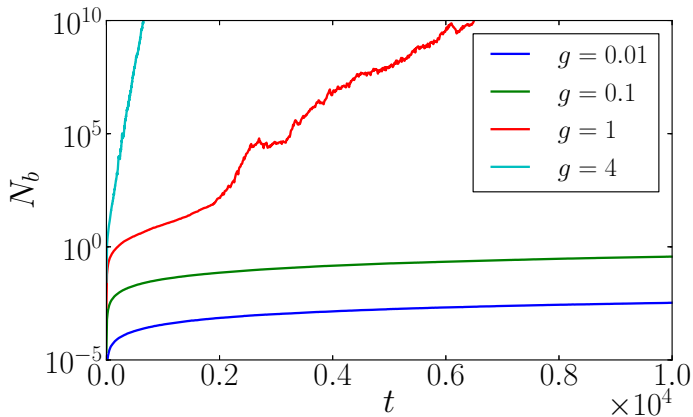


### 3.4 : Stabilité du condensat



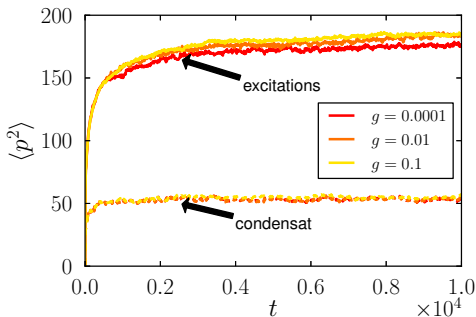
- Un condensat pulsé est stable pour les faibles forces d'interactions.

### 3.4 : Stabilité du condensat



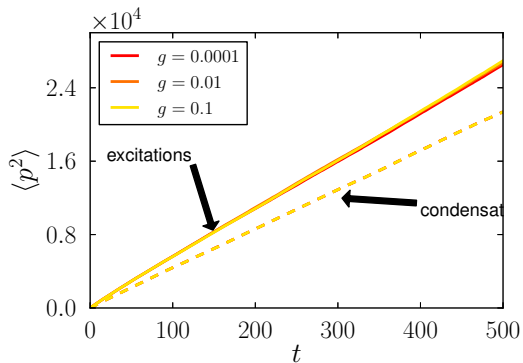
- Un condensat pulsé est stable pour les faibles forces d'interactions.

## Régime localisé



- Excitations sont aussi localisées  
[Lugan *et al.*, 2007, Gaul & Müller, 2011]

## Régime diffusif



## Propriétés critiques

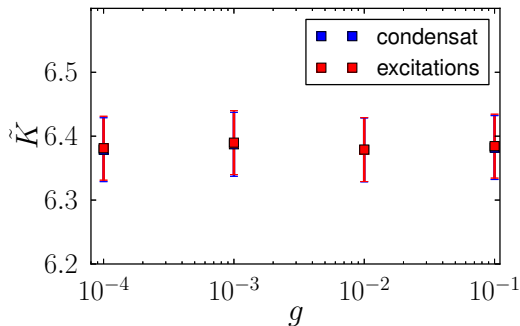
- Hypothèse :

$$\sigma^2 = t^\beta \mathcal{F} \left[ (K - \tilde{K}) t^\alpha \right],$$

- $\nu$  exposant critique pour longueur de cohérence  $\xi \sim |K - \tilde{K}|^{-\nu}$
- limites localisées et diffusives  $\Rightarrow$

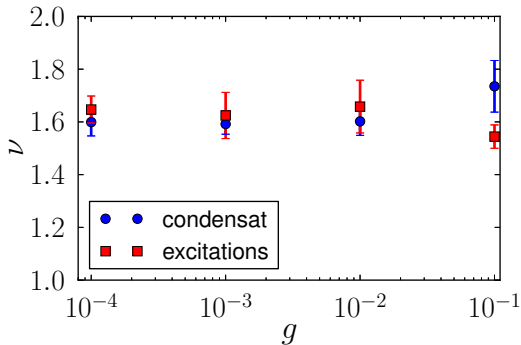
$$\sigma^2 = t^{2/3} \mathcal{F} \left[ (K - \tilde{K}) t^{1/3\nu} \right]$$

## Propriétés critiques



- Le condensat et les excitations possèdent le même paramètre de stochasticité critique  $\tilde{K}$

## Propriétés critiques



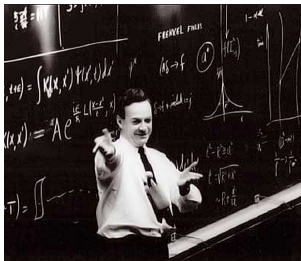
- valeur  $\nu = 1.6$  cohérente avec l'expérience sur des particules isolées
- Universalité de la transition d'Anderson : indépendance de  $\nu$  par rapport aux détails microscopiques
- Le concept s'applique aux quasi-particules de Bogoliubov

## Conclusion 2<sup>ème</sup> partie

- Le formalisme de Bogoliubov nous a permis de :
  - montrer la stabilité d'un condensat pulsé
  - mettre en évidence l'universalité de la transition d'Anderson pour un gaz de bosons ultra-froids
- Perspectives
  - Construire l'expérience
  - Caractériser le condensat pour des temps plus longs
  - Nouvelles approches théoriques : Wigner, Husimi tronquée, TEBD, théories Bogoliubov ordre supérieur
  - Construire l'expérience










# Le défi des simulateurs quantiques














- Comprendre des systèmes complexes à l'aide de petits systèmes, plus simples
- Quelques défis : Des systèmes encore plus complexes
  - Effet Hall Quantique.
  - Fermions Majorana
  - Théorie des jagues propres au modèle standard.

Merci

Merci pour votre attention

-  Anderson, P. W. (1958) *Physical Review*, **109** (5), 1492–1505.
-  Becker, C., Stellmer, S., *et al.* (2008) *Nature Physics*, **4** (6), 496–501.
-  Billy, J., Josse, V., *et al.* (2008) *Nature (London)*, **453**, 891–894.
-  Castin, Y. (2011).  
In : <http://www.phys.ens.fr/~castin/>.
-  Castin, Y. & Dum, R. (1998) *Physical Review A*, **57** (4), 3008–3021.
-  Chabanov, A. A., Stoytchev, M., *et al.* (2000) *Nature (London)*, **404** (6780), 850–853.
-  Chabé, J., Lemarié, G., *et al.* (2008) *Phys. Rev. Lett.* **101** (25), 255702.

-  Delande, D., Sacha, K., *et al.* (2013) *New Journal of Physics*, **15** (4), 045021.
-  Gaul, C. & Müller, C. (2011) *Physical Review A*, **83** (6), 063629–.
-  Greiner, M., Mandel, O., *et al.* (2002) *Nature (London)*, **415**, 39–44.
-  Hu, H., Strybulevych, A., *et al.* (2008) *Nature Phys.* **4**, 945–948.
-  Jendrzejewski, F., Bernard, A., *et al.* (2012) *Nature Physics*, **8** (5), 398–403.
-  Kondov, S. S., McGehee, W. R., *et al.* (2011) *Science*, **334** (6052), 66–68.
-  Lapyeva, T. V., Bodyfelt, J. D., *et al.* (2010) *EPL (Europhysics Letters)*, **91** (3), 30001.

-  Lopez, M., Clément, J.-F., *et al.* (2012) *Physical Review Letters*, **108** (9).
-  Lucioni, E., Deissler, B., *et al.* (2010) *Idea*, (x), 8.
-  Lucioni, E., Deissler, B., *et al.* (2011) *Physical Review Letters*, **106** (23), 230403.
-  Lugan, P., Clément, D., *et al.* (2007) *Physical Review Letters*, **99** (18), 180402–.
-  Roati, G., D’Errico, C., *et al.* (2008) *Nature*, **453** (7197), 895–8.

## Bonus



$$\hat{H} = \int d_x \hat{\Psi}^\perp(x) h(x, t) \hat{\Psi}(x) + \frac{g_{1D}}{2} \int d_x \hat{\Psi}^\perp(x) \hat{\Psi}^\perp(x) \hat{\Psi}(x) \hat{\Psi}(x)$$



$$h = \frac{p^2}{2} + K \cos x (1 + \varepsilon \cos \omega_2 t \cos \omega_3 t) \sum_n \delta(t - n)$$



$$\hat{\Psi} = \hat{a}_\phi \phi + \hat{\Psi}_\perp, \quad \langle \hat{\Psi}_\perp^\dagger \hat{\Psi}_\perp \rangle \ll \langle \hat{a}_\phi^\dagger \hat{a}_\phi \rangle$$



$$\hat{\Psi}_\perp = \frac{\hat{a}_\phi}{\sqrt{\hat{a}_\phi^\dagger \hat{a}_\phi + 1}} \sum_{k=1}^{\infty} b_k u_k + b_k^\dagger v_k^*$$



## Bonus



$$\hat{H} = \int d_x \hat{\Psi}^\perp(x) h(x, t) \hat{\Psi}(x) + \frac{g_{1D}}{2} \int d_x \hat{\Psi}^\perp(x) \hat{\Psi}^\perp(x) \hat{\Psi}(x) \hat{\Psi}(x)$$



$$h = \frac{p^2}{2} + K \cos x (1 + \varepsilon \cos \omega_2 t \cos \omega_3 t) \sum_n \delta(t - n)$$



$$\hat{\Psi} = \hat{a}_\phi \phi + \hat{\Psi}_\perp, \quad \langle \hat{\Psi}_\perp^\dagger \hat{\Psi}_\perp \rangle \ll \langle \hat{a}_\phi^\dagger \hat{a}_\phi \rangle$$

- [Castin, 2011]

$$\hat{\Psi}_\perp = \frac{\hat{a}_\phi}{\sqrt{\hat{a}_\phi^\dagger \hat{a}_\phi + 1}} \sum_{k=1}^{\infty} b_k u_k + b_k^\dagger v_k^*$$

## Bonus



$$\hat{H} = \int d_x \hat{\Psi}^\perp(x) h(x, t) \hat{\Psi}(x) + \frac{g_{1D}}{2} \int d_x \hat{\Psi}^\perp(x) \hat{\Psi}^\perp(x) \hat{\Psi}(x) \hat{\Psi}(x)$$



$$h = \frac{p^2}{2} + K \cos x (1 + \varepsilon \cos \omega_2 t \cos \omega_3 t) \sum_n \delta(t - n)$$



$$\hat{\Psi} = \hat{a}_\phi \phi + \hat{\Psi}_\perp \quad , \quad \langle \hat{\Psi}_\perp^\dagger \hat{\Psi}_\perp \rangle \ll \langle \hat{a}_\phi^\dagger \hat{a}_\phi \rangle$$

■ [Castin, 2011]

$$\hat{\Psi}_\perp = \frac{\hat{a}_\phi}{\sqrt{\hat{a}_\phi^\dagger \hat{a}_\phi + 1}} \sum_{k=1}^{\infty} b_k u_k + b_k^\dagger v_k^*$$



## Bonus



$$\hat{H} = \int d_x \hat{\Psi}^\perp(x) h(x, t) \hat{\Psi}(x) + \frac{g_{1D}}{2} \int d_x \hat{\Psi}^\perp(x) \hat{\Psi}^\perp(x) \hat{\Psi}(x) \hat{\Psi}(x)$$



$$h = \frac{p^2}{2} + K \cos x (1 + \varepsilon \cos \omega_2 t \cos \omega_3 t) \sum_n \delta(t - n)$$



$$\hat{\Psi} = \hat{a}_\phi \phi + \hat{\Psi}_\perp, \quad \langle \hat{\Psi}_\perp^\dagger \hat{\Psi}_\perp \rangle \ll \langle \hat{a}_\phi^\dagger \hat{a}_\phi \rangle$$

- [Castin, 2011]

$$\hat{\Psi}_\perp = \frac{\hat{a}_\phi}{\sqrt{\hat{a}_\phi^\dagger \hat{a}_\phi + 1}} \sum_{k=1}^{\infty} b_k u_k + b_k^\dagger v_k^*$$

## Propriétés critiques

- Assumption :

$$\sigma^2 = t^\beta \mathcal{F}[(K - K_c)t^\alpha],$$

- $\nu$  critical exponent for the coherence length  $\xi \sim |K - K_c|^{-\nu}$

$$\xi \propto \sigma \Rightarrow \mathcal{F}(y) \sim y^{2\nu} \quad , K < K_c$$

$$\xi \propto \sigma^2/t \Rightarrow \mathcal{F}(y) \sim y^\nu \quad , K > K_c$$

- localized limit :  $\sigma^2 \sim t^\beta [(K - K_c)t^\alpha]^{2\nu} \sim \text{cste}, \Rightarrow \beta - 2\alpha\nu = 0$
- diffusive limit :  $\sigma^2 \propto t^\beta \mathcal{F}[(K - K_c)t^\alpha]^\nu \sim t \Rightarrow \beta + \alpha\nu = 1$
- critical regime  $\sigma^2 = t^{2/3} \mathcal{F}[(K - K_c)t^{1/3\nu}]$  [?, Lopez *et al.*, 2012]

## Bonus

■  $\Lambda = \langle p^2 \rangle t^{-2/3} = F [(K - K_c)t^{1/3\nu}] \implies \left( \frac{d \log \Lambda}{dK} \right)_{K_c} \propto t^{1/3\nu}$

