Exploration analytique et expérimentale des interactions cohérence-turbulence au sein d'un écoulement de sillage

Fabien Thiesset

▶ **To cite this version:**

Fabien Thiesset. Exploration analytique et expérimentale des interactions cohérence-turbulence au sein d'un écoulement de sillage. Mécanique des fluides [physics.class-ph]. Université de Rouen, 2011. Français. NNT : . tel-00880987

HAL Id: tel-00880987

https://theses.hal.science/tel-00880987

Submitted on 7 Nov 2013

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Thèse

présentée à la

Faculté des Sciences & Techniques
de l'Université de Rouen

En vue de l'obtention du titre de

Docteur de l'Université de Rouen

Discipline : Physique
Spécialité : Mécanique des Fluides & Énergétique

par

Thiesset Fabien

Exploration analytique et expérimentale des interactions cohérence-turbulence au sein d'un écoulement de sillage

Soutenue le 7 Décembre 2011

Directrice de thèse : L. Danaila

Devant le jury composé de :

F. ANSELMET	Professeur, IRPHE, Marseille	Examinateur
R. A. ANTONIA	Émerite, University of Newcastle, Australia	Examinateur
L. DANAILA	Professeur, Coria, Rouen	Directrice
Y. GAGNE	Émerite, LEGI, Grenoble	Rapporteur
F. GODEFERD	Directeur de Recherche CNRS, LMFA, Lyon	Rapporteur
N. MAZELLIER	Maitre de Conférences, Prisme, Orléans	Examinateur
P. PARANTHOËN	Directeur de Recherche CNRS, Coria, Rouen	Examinateur
N. PETERS	Émerite, ITM, Aachen, Germany	Examinateur

Résumé Depuis les travaux de Townsend (1956), il est désormais largement admis qu'un mouvement organisé persiste dans la majorité écoulements cisaillés. Suivant la proposition de Townsend, Reynolds & Hussain (1972) apportent la première démarche analytique en développant, entre autres, les bilans énergétiques en "un point" du mouvement organisé et aléatoire. Cependant, un minimum de deux points est nécessaire afin de définir une échelle et décrire les processus énergétiques à chaque échelle. Pour cette raison, les équations de transport des statistiques en deux points furent initialement considérées par Taylor, Kármán & Howarth, Kolmogorov ou Yaglom. Ces derniers postulent que pour des Reynolds infinis, il existe une échelle où l'influence des structures cohérentes disparaît. Or, les nombres de Reynolds rencontrés en laboratoire ne sont pas suffisamment grands pour qu'une telle supposition soit avérée. La contribution énergétique du mouvement cohérent doit alors être dissociée du reste du champ fluctuant. Le premier objectif de cette thèse est d'affiner les théories existantes en proposant les bilans énergétiques en "deux points" prenant en considération le mouvement cohérent. Puis, à partir de diverses méthodes expérimentales mises en place au CORIA et de données issues d'une collaboration avec l'Université de Newcastle (Australie), l'écoulement de sillage est exploré. Les théories statistiques sont alors utilisées comme outil, afin de décrire l'écoulement avec un degré de complexité croissant. Les attentions se portent sur les interactions cohérence - turbulence, en termes de transport, de contribution énergétique ou de transfert d'énergie au sein de la cascade.

Abstract Since the pioneer work of Townsend (1956), it is now well known that a coherent motion persists in most of shear flows. Following the lines of Townsend's issues, Reynolds & Hussain (1972) provided the first analytical treatment by deriving the "one point" energy budget of the coherent and the random motion respectively. Nevertheless, at least two points must be considered to define a scale and describe the different energy mechanisms at each scale. To this end, transport equations of "two-points" statistics were initially considered by Taylor, Kármán & Howarth, Kolmogorov or Yaglom. These authors claimed that, in the limit of very large Reynolds numbers, there exists a scale beyond which the influence of large coherent structures is no more perceptible. In the meantime, the Reynolds numbers encountered in laboratory experiments are not sufficiently large so that this assumption may be verified. Therefore, the energy contribution of the large scales must be dissociated from the rest of the turbulent spectrum. First, this study aims at extend the previous theories by deriving "two-points" energy budgets which account for the coherent motion. Then, by means of different experiments made at the CORIA and some data arising from a collaboration with the University of Newcastle (Australia), the turbulent wake flow is explored. Statistical theories are thus invoked to describe this flow with an increasing degree of complexity. The interactions between the coherent and the random motion, in terms of transport, of energy contribution and energy transfer are particularly emphasized.

Remerciements

Je me tourne tout d'abord vers Luminita pour exprimer ma très vive reconnaissance. Merci de m'avoir permis de m'épanouir lors de cette thèse. Vous vous êtes fiée à votre "instinct maternel" alors que certains élaboraient de sombres présages à mon encontre. Merci pour votre immense gentillesse et votre très grande disponibilité.

Ensuite, mes remerciements s'adressent aux membres du jury, et tout d'abord Yves Gagne et Fabien Godeferd pour avoir étudié dans le détail mon manuscrit de thèse. Les discussions que nous avons eu lors de la soutenance auront été particulièrement enrichissantes. Je remercie également Nobert Peters de s'être déplacé depuis l'Allemagne pour présider le jury de thèse. Votre remarque sur le "boulevard de von Kármán" restera gravé dans ma mémoire. Un grand merci aussi à Nicolas Mazellier avec qui j'ai beaucoup aimé travailler et qui a bien voulu examiner ce travail de thèse. Merci de m'avoir transmis ton savoir-faire concernant la diffusion acoustique ultra-sonore et ton regard sur la turbulence en dehors des sentiers battus. Je suis également très reconnaissant à Pierre Paranthoën d'avoir accepté d'être membre du jury. Je tiens également à vous remercier de m'avoir fait profiter de votre expertise sur l'écoulement de sillage et l'anémométrie au fil chaud. Enfin, je dois dire un grand merci à Bob Antonia avec qui j'ai eu la chance de travailler lors de cette thèse. Mon voyage en Australie me laissera un souvenir inaltérable et j'espère que notre théorie sociologique du joueur de tennis, élaborée autour d'un succulent vin australien, ira à son terme. Je réfléchis déjà à une autre théorie à propos des conducteurs d'Alpha Roméo ! Toutes nos discussions qui dépassaient bien souvent le cadre de la science auront été passionnantes. Je regrette juste de ne pas connaitre la France aussi bien que vous ! Je remercie également Lexie, votre femme, pour son accueil très chaleureux à Nelson Bay.

Restons en Australie un moment. Merci à Lyazid pour avoir organisé ce voyage au pays des Kangourous, et pour ce barbecue digne d'un australien pure souche. Enfin, toute ma sympathie revient également à Nathan pour ces discussions contestataires sur la politique française, que nous avons échangées autour d'un bon Schnitzel burger, le tout à 12 000 km de la France.

Retour en France. Je souhaite tout d'abord remercier Gilles Godard de m'avoir prêté main forte afin de mettre en place le dispositif expérimental. Ce fut l'occasion de bien rigoler même si agencer les lasers au centième de millimètre n'est pas forcément la plus tordante de toutes les tâches. Un grand merci également à toute la clique des doctorants et post-doc du Coria. Merci à Guillaume Boutin, pour avoir supporté mon Tuperware sous pression dans le bureau. J'espère que ce petit cadeau t'aura fait plaisir ! Merci à Émeline, ton franc-parlé continuera à m'impressionner. Je n'oublierai pas non plus Jean François Krawczynski. Je garde un très agréable souvenir de la rédaction tardive du Phyisca D, ornementé d'un bon mac do, et qui se terminera le 14 Juillet par un joli feu d'artifice suivi d'une dégustation de Mojitos maisons en écoutant du bon son. Je me rappelle aussi de notre très doux passage par la Corse à l'occasion de l'école d'été de Cargese. Mon

colocataire momentané : Benjamin Duret est à cette occasion amicalement salué. Promis je te ramènerai une courgette géante. Merci aussi à Guillaume Lodier. Je garderai en mémoire nos observations ébahies du tourbillon de vidange confectionné par nos soins. Je te souhaite une très bonne continuation pour la fin de ta thèse. Mon attention se porte également à Thibault Ménard pour toutes nos discussions à propos du CAC40. Je salue chaleureusement également Elise Roulin pour nos discussions de science et d'ailleurs et surtout à propos des émissions de Jean-Claude Ameisen. Merci aussi à Jon d'avoir tenté de m'apprendre des mots ou expressions que j'oublie systématiquement. J'oublie certainement de remercier d'autres personnes du laboratoire, veuillez m'en excuser d'avance.

Ensuite, un grand merci à ma famille pour leur soutien depuis de très nombreuses années. Je remercie de tout mon cœur mes parents. Vous vous rappelez sans doute que j'avais les yeux tant ouverts à la naissance. Ce fut là ma première expérience sensorielle du monde que vous m'offriez. Je profite aujourd'hui encore de ce regard sur la Nature. Je fais également la promesse auprès de ma sœur d'établir le schéma cinétique des différentes céramiques d'ici peu. Je remercie aussi Charlie pour cette partie de pêche mémorable à moins d'un mois de la soutenance.

Et puis pour finir, j'adresse un très grand merci à Isabelle, sans qui il m'aurait été difficile de supporter le stress de la thèse. Tu m'as permis de m'extraire de mon travail au quotidien, tu m'as permis de penser à autre chose, de me faire sentir cette "légèreté de l'être". Je suis désolé de t'avoir abandonnée lors de la préparations des crêpes, mais c'est justement cela qui m'a permis de déduire la relation (4.22). Cette relation t'est totalement due, elle t'appartient.

Table des matières

Nomenclature **17**

Préambule **23**

Introduction Générale **25**

1 Considérations analytiques **35**
1.1 Bilan en un point . . . 36
1.1.1 Bilan de l'énergie cinétique totale . . . 36
1.1.2 Bilan de l'énergie cinétique cohérente et aléatoire . . . 38
1.2 Bilan en deux points . . . 40
1.2.1 Formulation générale . . . 40
1.2.2 Contexte localement homogène et isotrope . . . 42
1.2.3 Contexte localement axisymétrique . . . 45
1.2.4 Bilans à chaque échelle dissociant cohérence et turbulence . . . 47
1.3 Conclusion . . . 50

2 Dispositif Expérimental **53**
2.1 La soufflerie subsonique basse vitesse . . . 54
2.1.1 Le ventilateur axial . . . 54
2.1.2 Le convergent . . . 55
2.1.3 la veine d'essai . . . 56
2.1.4 Le sillage . . . 58
2.2 L'anémométrie au fil chaud . . . 58
2.2.1 Principe . . . 59
2.2.2 Influence des dérives en température . . . 60
2.2.3 Conditionnement des signaux . . . 61
2.2.4 Étalonnage des sondes en X (HWA-X) . . . 62
2.3 La Velocimétrie par Images de Particules . . . 64
2.3.1 Principe . . . 65
2.3.2 Estimation du déplacement des particules . . . 65
2.3.3 Choix des particules d'ensemencement . . . 66

2.3.4 Résolution spatiale . . . 67
2.3.5 PIV classique (PIV2C) - PIV rapide (TR-PIV2C) . . . 69
2.4 L'Anémométrie Doppler Laser . . . 71
2.4.1 Principe . . . 71
2.4.2 L'Anémométrie Doppler Laser 3 composantes (ADL3C) . . . 73
2.4.3 Correction du biais des mesures ADL . . . 73
2.5 La diffusion acoustique ultra-sonore . . . 74
2.5.1 Principe . . . 75
2.5.2 Dispositif expérimental de diffusion acoustique (AS) . . . 78
2.6 Conclusion . . . 79

3 Dynamique d'advection à une échelle 81
3.1 Estimation de la vitesse de convection . . . 81
3.1.1 Ajustement direct . . . 82
3.1.2 Corrélation spatio-temporelle . . . 84
3.2 Temps caractéristiques à un nombre d'onde . . . 85
3.2.1 Mise en évidence du mécanisme de balayage . . . 86
3.2.2 Identification du nombre de Strouhal . . . 88
3.2.3 Temps de balayage et de basculement . . . 90
3.2.4 Hypothèse de Taylor locale . . . 95

4 Bilan en un point en champ proche 97
4.1 Statistiques du champ de vitesse . . . 97
4.1.1 Comparaison des méthodes de mesures . . . 97
4.1.2 La longueur de recirculation . . . 101
4.2 Bilan de quantité de mouvement . . . 105
4.2.1 Projection sur l'axe x . . . 105
4.2.2 Projection sur l'axe y . . . 107
4.3 Bilan d'énergie cinétique turbulente . . . 108
4.3.1 Estimation du terme de dissipation . . . 109
4.3.2 Bilan d'énergie cinétique . . . 113
4.4 Bilan d'énergie cinétique cohérente et aléatoire . . . 115
4.4.1 Fluctuations cohérentes de la vitesse . . . 115
4.4.2 Fluctuations cohérentes de la pression . . . 118
4.4.3 Bilan d'énergie cinétique cohérente et aléatoire . . . 124
4.5 Conclusion . . . 128

5 Bilan en deux points dans le champ intermédiaire 131
5.1 Introduction . . . 131
5.2 Effet d'un mouvement organisé anisotrope sur l'isotropie locale . . . 132
5.3 Bilan à chaque échelle dans le sillage de différents obstacles . . . 162

5.3.1 Validation de l'hypothèse de similitude d'équilibre 162
5.3.2 Bilan à chaque échelle 165
5.3.3 Tendance à la loi asymptotique 4/5 et 4/3 173
5.3.4 Conclusion 175
5.4 Bilan à chaque échelle prenant en considération le mouvement organisé . . 177
5.5 Bilan à chaque échelle sous la forme axisymétrique 188

Conclusions et Perspectives **199**

A La Décomposition Empirique en Mode (EMD) **205**

B Méthode des éléments finis : Résolution de l'équation de Poisson **213**

Bibliographie **217**

Table des figures

1 (a) Allée de Bénard-von Kármán visualisée par le satellite LandSat 7, dans le sillage de l'île Alejandro Selkirk située au large du Chili. Source : NASA. (b) Aéroport de Sendaï (Japon) le 11 Mars 2011, sillage turbulent se formant après le passage du Tsunami. Source : Le Monde. 30

2 Visualisation expérimentale de l'Allée de Bénard-von Kármán. D'après le livre de Van Dyke [139] 31

3 Visualisation de la dégénérescence en trois dimensions de l'allée de Bénard-von Kármán. Le nombre de Reynolds est de 200. Il s'agit d'une vue de dessus, le cylindre est placé horizontalement et l'écoulement parcourt l'image de bas en haut. D'après Williamson [141] 32

1.1 Représentation schématique de l'axisymétrie 45

1.2 Imbrication des différents bilans énergétiques discutés dans cette étude . . 51

2.1 Vue de dessus de la soufflerie subsonique présente au Coria 54

2.2 Fonction transfert du ventilateur. ○ Mesures, —— fit linéaire 55

2.3 Profil vertical de vitesse moyenne longitudinale (a) et d'intensité de turbulence (b) 57

2.4 Mise en place du cylindre dans la soufflerie 59

2.5 Représentation schématique d'un fil chaud. 59

2.6 Étalonnage sans le système de régulation (a) Étalonnage avec le système de régulation (b) 61

2.7 Chaine de conditionnement analogique des signaux 62

2.8 Représentation schématique d'une sonde double en X 63

2.9 Table d'étalonnage d'une sonde double en X 63

2.10 Représentation schématique du système PIV. 64

2.11 (a) Réponse spectrale à un bruit blanc. Trait d'axe : Réponse -3dB ○ : $E_{uu}(k_x)$, □ $E_{vv}(k_x)$, —— sinus cardinal. (b) Réponse "physique" à un bruit blanc ○ : $\overline{(\Delta u)^2}$, □ $\overline{(\Delta v)^2}$, - - - - fonction créneau. 69

2.12 Procédure de synchronisation laser-camera pour le système PIV rapide . . 70

2.13 (a) Schéma descriptif de l'Anémométrie Doppler Laser (ADL). (b) Coïncidence des faisceaux laser sur un fil métallique de $80\mu m$ de diamètre. (c) Signaux typiques enregistrés sur les trois voies 72
2.14 Mise en place du haut-parleur et du microphone au sein de l'écoulement turbulent 76
2.15 Chaîne de mesure de diffusion acoustique 78
2.16 Coupe transversale des transducteurs. D'après [98] 79

3.1 Comparaison des fonctions de structure d'ordre 2 des composantes u (a) et v (b) calculées à partir de l'ADL3C : bruitées - - - - et non bruitées —— et calculées à partir de la PIV2C : ○ . $x = 7D$, $y = 0D$, $Re_D = 3600$. Le cadre en haut à gauche de chaque figure est la même fonction de structure mais dans une représentation log-log. 83
3.2 Valeur absolue du coefficient de corrélation spatio-temporelle de la composante u (a) et v (b) à une position $x = 7D$ et $y = 0D$, $Re_D = 3600$. —— : $r = U_c\tau$, - - - - : $r = \overline{U}\tau$ 84
3.3 (a) Spectre de vorticité brut (insert) et filtré (——) mesuré à $x = 50D$, $y = 0D$, $Re_D = 4800$, Spectre de l'amplitude du signal mesuré ·····. (b) —— Spectre de vorticité où l'axe des fréquences est transformé en vitesse, ○ Densité de probabilité de la composante U mesurée grâce au fil chaud, ····· ajustement Gaussien du spectre de vorticité. 87
3.4 Comparaison des moments d'ordre 1 et 2 calculés par le biais de la diffusion acoustique et par anémométrie au fil chaud. —— : $k_s = k_s$, ○ : $2\pi\mu_f/\overline{U}$, □ : $2\pi\sigma_f/\left(\overline{u^2}\right)^{1/2}$. $x = 50D$, $y = 0D$, $Re_D = 4800$ 88
3.5 (a) Identification de la fréquence du lâcher tourbillonnaire sur le spectre de vorticité. —— : spectre du nombre complexe, ····· : spectre d'amplitude. (b) Vérification de l'évolution du nombre de Strouhal en fonction de la vitesse amont U_0. ○ points expérimentaux, —— approximation linéaire : $f_{pic}D = 0.215U_0 - 0.02$. 89
3.6 (a) Corrélation du nombre complexe et de son amplitude en fonction de la séparation spatiale. ○ : $\rho_{\omega\omega}$; □ : $\rho_{|\omega||\omega|}$; —— Gaussienne. (b) Évolution des temps caractéristiques $\tau_c/\sqrt{\overline{u^2}}$ et $\tau_a/\sqrt{\overline{u^2}}$ en fonction du nombre d'onde pour différents nombres de Reynolds $Re_D = 3000, 4800, 6000$. —— : prédiction de Tennekes k_s^{-1} ; ····· : prédiction de Kolmogorov $k_s^{-2/3}$. . . . 91
3.7 Schématisation de l'effet du basculement-étirement sur un rouleau de vorticité. 93
3.8 Rapport τ_c/τ_a pour différents nombres d'onde et différents nombres de Reynolds $Re_D = 3000, 4800, 6000$, la ligne —— correspond à la valeur $\tau_c/\tau_a = 1.41$ déduites du modèle. 94

3.9 Comparaison des hypothèses de Taylor globale (——) et locale (· · · · · ·) à $x = 7D$, $y = 0D$ et $Re_D = 3600$ (ADL3C). (a) composante u et (b) composante v. Insert : représentation log-log. 96

4.1 Comparaison du moment d'ordre 1 à un nombre de Reynolds de 3600. PIV-2C (trait fin), TR-PIV2C (trait épais), et ADL3C (symboles) en $x = 2.2D$ (——, ○) ; $x = 3D$ (- - - -, □) ; $x = 3.8D$ (· · · · · ·, ♢). (a) $\overline{U}/U_0$, (b) $\overline{V}/U_0$ 98

4.2 Comparaison du moment d'ordre 2 à un nombre de Reynolds de 3600. PIV-2C (trait fin), TR-PIV2C (trait épais), et ADL3C (symboles) en $x = 2.2D$ (——, ○) ; $x = 3D$ (- - - -, □) ; $x = 3.8D$ (· · · · · ·, ♢). (a) $(\overline{u^2})^{1/2}/U_0$, (b) $(\overline{v^2})^{1/2}/U_0$. (c) $\overline{q^2}/U_0^2$. (d) $\overline{uv}/U_0^2$. 100

4.3 Comparaison des moments croisés d'ordre 3 à un nombre de Reynolds de 3600. PIV-2C (trait fin), TR-PIV2C (trait épais), et ADL3C (symboles) en $x = 2.2D$ (——, ○) ; $x = 3D$ (- - - -, □) ; $x = 3.8D$ (· · · · · ·, ♢). (a) $\overline{vq^2}/U_0^3$, (b) $\overline{uq^2}/U_0^3$. 101

4.4 Représentation schématique de la zone de recirculation se développant dans le champ proche du sillage de cylindre. La visualisation des instabilités de Kelvin Helmholtz est prodiguée par Prasad & Williamson [113]. 102

4.5 Normalisation des statistiques par la vitesse amont U_0 et l'axe longitudinal par la longueur de recirculation pour différents nombres de Reynolds. $Re_D = 2150$: —— (trait fin) PIV2C. $Re_D = 3600$: - - - - (trait fin) PIV2C, (trait épais) TR-PIV2C, ○ ADL3C. $Re_D = 5800$: · · · · · · (trait fin) PIV2C, (trait épais) TR-PIV2C, □ ADL3C. $Re_D = 8800$: — · — PIV2C. (a) $\overline{U}/U_0$. (b) $(\overline{u^2})^{1/2}/U_0$. (c) $(\overline{v^2})^{1/2}/U_0$. (d) $\overline{q^2}/U_0^2$ 104

4.6 Termes de la projection longitudinale du bilan de quantité de mouvement à un nombre de Reynolds de 3600 (PIV2C). Tous les termes sont normalisés par D/U_0^2. (a) Terme de transport de la vitesse moyenne $\overline{U_j}\frac{\partial \overline{U}}{\partial x_j}$. (b) Gradient des tensions de Reynolds $\frac{\partial \overline{uu_j}}{\partial x_j}$. (c) Gradient longitudinal de pression moyenne $\frac{\partial \overline{P}}{\partial x}$. (d) Terme visqueux $\nu\frac{\partial^2 \overline{U}}{\partial x_j^2}$. 106

4.7 Termes de la projection transversale du bilan de quantité de mouvement à un nombre de Reynolds de 3600 (PIV2C). Tous les termes sont normalisés par D/U_0^2. (a) Terme de transport de la vitesse moyenne $\overline{U_j}\frac{\partial \overline{V}}{\partial x_j}$. (b) Gradient des tensions de Reynolds $\frac{\partial \overline{vu_j}}{\partial x_j}$. (c) Gradient transversal de pression moyenne $\frac{\partial \overline{P}}{\partial y}$. (d) Terme visqueux $\nu\frac{\partial^2 \overline{V}}{\partial x_j^2}$ 108

4.8 Test d'isotropie locale sur les fonctions de structure d'ordre 2 en $x = 7D \equiv x - l_f = 4.4D$ sur la ligne centrale du sillage, à un nombre de Reynolds de 3600. · · · · · · $\overline{(\Delta u)^2}$, - - - - $\overline{(\Delta v)^2}$, —— $\overline{(\Delta w)^2}$, ○ relation (4.18). 112

4.9 Comparaison des estimations de la dissipation sur la ligne centrale du sillage à un nombre de Reynolds de 3600 en $x = 7D(\equiv x - l_f = 4.4D)$. (a) —— : $\alpha_{PIV}\bar{\epsilon}_{PIV}$, - - - - : $15\nu\overline{\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2}$, ○ : $15\nu\frac{\overline{(\Delta u)^2}}{r^2}$, ◁ : $\left(C_u^{-1}r^{-2/3}\overline{(\Delta u)^2}\right)^{3/2}$, + : $\frac{5}{4r}\left(6\nu\frac{\partial}{\partial r}\overline{(\Delta u)^2} - \overline{(\Delta u)^3}\right)$. (b) —— : $\alpha_{PIV}\bar{\epsilon}_{PIV}$, - - - - : $3\nu\overline{\left(\frac{\partial u_i}{\partial x}\right)^2}$, ○ : $3\nu\frac{\overline{\Delta q^2}}{r^2}$, + : $\frac{4}{3r}\left(2\nu\frac{\partial}{\partial r}\overline{\Delta q^2} - \overline{\Delta u \Delta q^2}\right)$ 113

4.10 Termes du bilan d'énergie cinétique turbulente mesurés par la PIV2C à un nombre de Reynolds 3600. Chaque terme est multiplié par D/U_0^3. (a) Advection $\frac{1}{2}\overline{U}_j\frac{\partial\overline{q^2}}{\partial x_j}$. (b) Production $\overline{u_iu_j}\frac{\partial\overline{U}_i}{\partial x_j}$. (c) Diffusion turbulente $\frac{\partial\overline{u_jq^2}}{\partial x_j}$. (d) Diffusion par la pression $\frac{\partial\overline{u_jp}}{\partial x_j}$. (d) Dissipation estimée par la relation $\alpha_{PIV}\bar{\epsilon}_{PIV}$ 114

4.11 Variance des fluctuations de vitesse totales, cohérentes et aléatoires issues de la technique TR-PIV2C à un nombre de Reynolds de 3600. (a) $\overline{v^2}/U_0^2$, (b) $\overline{u^2}/U_0^2$, (c) $\overline{\tilde{v}^2}/U_0^2$, (d) $\overline{\tilde{u}^2}/U_0^2$, (e) $\overline{v'^2}/U_0^2$, (f) $\overline{u'^2}/U_0^2$ 117

4.12 Variance des fluctuations de vitesse totales et cohérentes, normalisée par U_0^2 en $x = 7D \equiv x - l_f = 4.4D$ à un nombre de Reynolds de 3600. $\overline{u_\alpha^2}/U_0^2$: ○ ADL3C, —— (trait fin) PIV2C, —— (trait épais) TR-PIV2C. $\overline{\tilde{u_\alpha}^2}/U_0^2$: ◇ ADL3C, - - - - (trait fin) PIV2C, - - - - (trait épais) TR-PIV2C. (a) $u_\alpha = u$, (b) $u_\alpha = v$ 118

4.13 (a) Moyenne temporelle des fluctuations ordonnées de la pression, (b) par le biais de (4.30), (c) Coefficient de pression moyen calculé à partir du bilan de quantité de mouvement. 121

4.14 Champ de vorticité $\tilde{\omega}_z D/U_0$ (a et c) et du coefficient de pression (b et d) pour les phases $\phi = -\pi$ (a-b) et $-\pi/2$ (c-d). 122

4.15 Champ de vorticité $\tilde{\omega}_z D/U_0$ (a et c) et du coefficient de pression (b et d) pour les phases $\phi = 0$ (a-b) et $\pi/2$ (c-d). 123

4.16 Termes du bilan d'énergie cinétique cohérente normalisés par D/U_0^3 à un nombre de Reynolds de 3600 (TR-PIV2C). (a) Advection $\frac{1}{2}\overline{U}_j\frac{\partial}{\partial x_j}\overline{\tilde{q}^2}$, (b) Production $\overline{\tilde{u}_i\tilde{u}_j}\frac{\partial\overline{U}_i}{\partial x_j}$, (c) Diffusion par la pression $\frac{\partial\overline{\tilde{u}_j\tilde{p}}}{\partial x_j}$, (d) Diffusion cohérente $\frac{1}{2}\frac{\partial\overline{\tilde{q}^2}}{\partial x_j}$, (e) Terme de dissipation. 125

4.17 (a) Diffusion des fluctuations aléatoires par le champ cohérent $\frac{\partial\overline{\tilde{u}_i\left\langle u_i'u_j'\right\rangle}}{\partial x_j}$, (b) Production de fluctuations aléatoires par le champ cohérent $-\overline{\left\langle u_i'u_j'\right\rangle\frac{\partial\tilde{u}_i}{\partial x_j}}$. . 126

4.18 Termes du bilan d'énergie cinétique aléatoire normalisés par D/U_0^3 à un nombre de Reynolds de 3600 (TR-PIV2C). (a) Advection $\frac{1}{2}\overline{U}_j\frac{\partial\overline{q'^2}}{\partial x_j}$, (b) Production $\overline{u_i'u_j'}\frac{\partial\overline{U}_i}{\partial x_j}$, (c) Diffusion par la pression $\frac{\partial\overline{u_j'p'}}{\partial x_j}$, (d) Diffusion aléatoire $\frac{1}{2}\frac{\partial\overline{u_j'q'^2}}{\partial x_j}$, (e) Terme de dissipation 127

4.19 (a) Diffusion des fluctuations aléatoires par le champ cohérent $\frac{1}{2}\frac{\partial \overline{\tilde{u}_j \langle q'^2 \rangle}}{\partial x_j}$, (b) Production de fluctuations aléatoires par le champ cohérent $\overline{\left\langle u_i' u_j' \right\rangle} \frac{\partial \tilde{u}_i}{\partial x_j}$ . . . 128

5.1 (a) Termes du bilan énergétique en un point (5.1) sur la ligne centrale. □ $-\frac{1}{2}\overline{U}\frac{\partial \overline{q^2}}{\partial x}$, ○ $\bar{\epsilon}$, ♢ $\left(\overline{u^2} - \overline{v^2}\right)\frac{\partial \overline{U}}{\partial x}$. (b) Exposant de décroissance sur la ligne centrale ; ○ $log_{10}(\overline{q^2}/U_0^2)$, ◁ $log_{10}(\overline{u^2}/U_0^2)$, □ $log_{10}(\bar{\epsilon}D/U_0^3)$, ♢ $log_{10}(10^{-1}\lambda/D)$, △ $log_{10}(U_d^2/U_0^2)$, les droites pleines correspondent à une approximation linéaire. 163

5.2 (a) Fonctions de structure d'ordre 2 représentées en fonction $\widetilde{r} = r/\lambda$ pour $x/D = 50, 70, 90, 110$. - - - - : $f_u = \overline{(\Delta u)^2}/\overline{u^2}$ et —— $f_q = \overline{(\Delta q)^2}/\overline{q^2}$. (b) Fonctions de structure d'ordre 3 en fonction de $\widetilde{r} = r/\lambda$ pour $x/d = 50, 70, 90, 110$. - - - - : $g_u\widetilde{r}^{-1} = -\overline{(\Delta u)^3}R_\lambda\left(\overline{u^2}\right)^{-3/2}\widetilde{r}^{-1}$ et —— $g_q\widetilde{r}^{-1} = -\overline{\Delta u(\Delta q)^2}R_\lambda\left(\overline{q^2}\right)^{-3/2}\widetilde{r}^{-1}$ . . . 165

5.3 Fonctions de structure mesurées dans le sillage des 5 obstacles. (a) f_u. (b) f_q. ○ CC, □ SqC, ♢ ScC, ▷ P, + SS. Fonctions de structure calculées selon l'expression de Kurien & Sreenivasan[85] (ligne fine) et Aivalis *et al.* [1] (ligne épaisse). R_λ est approximativement le même ≈ 195. 168

5.4 Bilan à chaque échelle (5.16) dans le sillage de différents obstacles ($R_\lambda \approx$ 195). Lignes fines : Kurien & Sreenivasan [85] ; lignes épaisses : Aivalis *et al.* [1] ; symboles : expérience. ○ , — · — : G_u ; ▷, · · · · · · : D_u ; ♢, - - - - : I_u ; □, —— : $(G_u + D_u + I_u)$. (a) CC, (b) SqC, (c) ScC, (d) P, (e) SS . . . 171

5.5 Bilan à chaque échelle (5.17) dans le sillage des différents obstacles ($R_\lambda \approx$ 195). Lignes fine : Kurien & Sreenivasan [85] ; lignes épaisses : Aivalis *et al.* [1] model ; symboles : expérience. ○ , — · — : G_q ; ▷, · · · · · · : D_q ; ♢, - - - - : I_q ; □, —— : $(G_u + D_u + I_u)$. (a) CC, (b) SqC, (c) ScC, (d) P, (e) SS . . . 172

5.6 Evolution de la longueur de cross-over L_c en fonction de R_λ. —— : Aivalis *et al.* [1], - - - - : Kurien & Sreenivasan [85], ○ CC, □ SqC, ♢ ScC, ▷ P, + SS. (a) $L_c|_u/\lambda$, (b) $L_c|_q/\lambda$ . . . 173

5.7 (a) Approche à la loi 4/5. (b) Approche à la loi 4/3. ○ CC, □ SqC, ♢ ScC, ▷ P, + SS. Lignes fines : Kurien & Sreenivasan [85] ; lignes épaisses : Aivalis *et al.* [1] model —— : $m_u = m_q = 1.25$, - - - - : $m_u = m_q = 1.5$, · · · · · · : $m_u = m_q = 1.75$ . . . 175

A.1 (a) Diagramme de phase $x(t), y(t)$ du signal $x(t) = \alpha + sin(t)$. (b) Fréquence instantanée calculée par la relation (A.2) . . . 207

A.2 Décomposition EMD d'un signal obtenu par Anémométrie Doppler Laser (ADL) sur la ligne centrale d'un sillage de cylindre ($x = 7D$) . . . 210

A.3 Reconstruction du signal original. $X(t) - \sum_{i=1}^{n} c_i + r_n$ . . . 211

B.1 Domaine de calcul 214
B.2 Représentation schématique des fonctions de base. (gauche) différences finies, (droite) éléments finis (P1) 214

Nomenclature

Caractères Latins

$\mathcal{Q}$	Critère $\mathcal{Q}$
$\overline{I}, \overline{J}$	Niveau de gris moyen de l'image 1 et 2
$\overline{q^2} = \overline{u_i u_i}$	Énergie cinétique totale turbulente
$\overline{U}_i$	Composante moyenne de la vitesse orientée vers x_i
$\overrightarrow{e_x}, \overrightarrow{e_y}$	Vecteurs unitaires
$\overrightarrow{k}_s$	Nombre d'onde sondé par la méthode de diffusion acoustique
$\overrightarrow{n_a}$	Axe d'axisymétrie
$\overrightarrow{n}$	Direction normale
$\overrightarrow{n}_0, \overrightarrow{n}_r$	Vecteur normal au plan d'émission et de réception de l'onde acoustique
$\overrightarrow{r_x}, \overrightarrow{r_y}, \overrightarrow{r_z}$	Séparation spatiale orientée vers x, y et z respectivement
$\overrightarrow{r}$	Vecteur de séparation spatiale
$\overrightarrow{x_1}, \overrightarrow{x_2}$	Position des particules aux instants 1 et 2
$\overrightarrow{X}$	Point central entre $\overrightarrow{x}^+$ et $\overrightarrow{x}$
$\overrightarrow{x}$	Point d'origine pour le calcul des incréments
$\overrightarrow{x}^+$	Point séparé d'une distance $\overrightarrow{r}$ par rapport au point $\overrightarrow{x}$
$\tilde{u}_i$	Composante cohérente de la vitesse orientée vers x_i
$A_{cal}, B_{cal}, n_{cal}$	Constante d'étalonnage du fil chaud
c	Célérité du son dans le milieu sondé
C_ϵ	Constante de dissipation
C_R	Coefficient de contraction du convergent
C_u	Constante de similarité d'échelle de Kolmogorov

D Diamètre du cylindre

D_i Distance inter-franges

D_p Diamètre de la particule d'ensemencement

D_T Coefficient de diffusion de la température

d_w Diamètre du fil chaud

$E(k,r)$ Énergie cinétique turbulente au nombre d'onde k ou à la séparation spatiale r

$E1_w, E2_w$ Tension électrique aux bornes des fils chauds 1 et 2

E_w Tension électrique aux bornes du fil chaud

E_{uu} Spectre de la composante u

E_{vv} Spectre de la composante v

f Fréquence de l'onde acoustique diffusée

f_0 Fréquence de l'onde acoustique incidente

f_B Fréquence de Bragg

f_D Fréquence Doppler

$h(t)$ Transformée de Hilbert

h_c Coefficient de convection du fluide sur le fil chaud

$I(i,j)$ Niveau de gris de la fenêtre d'interrogation indicée par i et j de la première image

I_w Intensité électrique parcourant le fil chaud

$J(i,j)$ Niveau de gris de la fenêtre d'interrogation indicée par i et j de la seconde image

k Nombre d'onde

K_c Coefficient de perte de charge singulière du convergent

L_u Échelle intégrale longitudinale de l'écoulement turbulent

N_v Vitesse de rotation du ventilateur

P Pression statique divisée par la masse volumique du fluide

P_0 Pression acoustique incidente dont la fréquence est f_0

P_s Pression acoustique diffusée dont la fréquence est f

P_{in} Pression d'entrée du convergent

P_{out} Pression de sortie du convergent

P_{sing} Perte de charge singulière du convergent

Q_v Débit volumique dans la soufflerie

r Module du vecteur de séparation spatiale

r_j Séparation spatiale orientée vers x_j

R_v Rayon des aubes du ventilateur

R_w Résistance électrique du fil chaud

R_{IJ} Inter-corrélation des niveaux de gris entre les images 1 et 2

S Partie symétrique du tenseur de gradient de vitesse

S_w Surface du fil chaud

S_{in} Surface d'entrée du convergent

S_{out} Surface de sortie du convergent

T_f Température du fluide

T_w Température de surface du fil chaud

T_{film} Température de film

u_i' Composante aléatoire de la vitesse orientée vers x_i

U, V, W Vitesse de l'écoulement dans les directions x, y et z respectivement

U_0 Vitesse en amont du cylindre

U_c Vitesse de convection

u_i Composante fluctuante totale de la vitesse orientée vers x_i

U_i, U_j Vitesse instantanée orientée vers x_i et x_j respectivement

U_{cal} Vitesse du fluide lors de l'étalonnage du fil chaud

$v_f(t)$ Signal de référence filtré

V_{out} Vitesse de l'écoulement en sortie du convergent

Caractères Grecs

α_{PIV} Coefficient de correction de la dissipation effectuées par la PIV

$\beta_{U_{cal}}$ Angle entre la sonde fil chaud et l'écoulement

Δ_c Distance entre deux vecteurs vitesse obtenus par PIV

δk_s Incertitude sur le nombre d'onde sondé

Δt	Laps de temps entre deux impulsions laser
Δu_i	Incrément de vitesse dirigée vers i
δx	Incertitude sur la position
λ_f	Conductivité thermique du fluide évaluée à la température de film
λ_L	Longueur d'onde du laser
μ	Viscosité dynamique du fluide porteur
μ_a	Cosinus de l'angle entre l'axe d'axisymétrie et le vecteur séparation
ν	Viscosité cinématique du fluide
ω	Partie antisymétrique du tenseur de gradient de vitesse
ω°	Transformée de Fourier spatio-temporelle de la vorticité
$\omega_\perp$	Composante de vorticité normale au plan d'interférence
$\overline{\epsilon}$	Taux de dissipation moyen de la turbulence
$\phi(t)$	Phase du signal de référence
ρ	Masse volumique du fluide
ρ_p	Masse volumique de la particule d'ensemencement
$\rho_{u_\alpha u_\alpha}$	Coefficient de corrélation de la vitesse u_α
σ_I, σ_J	Écart-type des niveaux gris de l'image 1 et 2
τ_a	Temps caractéristique du module de la pression acoustique diffusée
τ_c	Temps caractéristique de la pression acoustique diffusée
τ_f	Temps caractéristique de l'écoulement
τ_p	Temps caractéristique de la particule d'ensemencement
τ_r^K	Temps caractéristique de Kolmogorov
τ_r^T	Temps caractéristique de Tennekes
Θ_a	Angle entre l'axe d'axisymétrie et le vecteur séparation
Θ_s	Angle entre le haut-parleur et le microphone
Θ_L	Angle entre les deux faisceaux lasers
$\widehat{\omega}$	Transformée de Fourier spatiale de la vorticité
$\zeta(\Theta_s)$	Facteur angulaire traduisant l'intensité de l'onde diffusée en fonction de l'angle

Nombres sans dimension

Nu_{d_w} Nombre de Nusselt basé sur le diamètre du fil chaud

Pr Nombre de Prandtl

Re_D Nombre de Reynolds basé sur le diamètre D du cylindre et la vitesse U_0

Re_{d_w} Nombre de Reynolds basé sur le diamètre du fil chaud

St Nombre de Stokes de la particule au sein de l'écoulement

St_D Nombre de Strouhal basé sur le diamètre du cylindre D

Sigles et Acronymes

ADL3C Anémométrie Doppler Laser 3 composantes

AS Méthode de Diffusion acoustique ultra-sonore

HWA-X Anémométrie au fil chaud en X

PDA Phase Doppler Anemometry

PIV2C Méthode de Velocimétrie par Images de Particule classique 2 composantes

RANS Reynolds Averaged Navier Stokes

TR-PIV2C Méthode de Velocimétrie par Images de Particule rapide 2 composantes

Préambule

"Sur les épaules de Darwin, sur les épaules des géants. Apprendre : inscrire le monde en nous et s'inscrire dans le monde. Reconstruire dans le langage de nos sensations, de nos émotions, de nos pensées, de nos souvenirs, de nos espoirs, de nos craintes ; reconstruire à partir des reflets que nous en percevons, l'évidence et l'étrangeté de ce que nous appelons la réalité. Joie d'apprendre, de découvrir, de transformer en présence familière ce qui semblait inaccessible, en connaissance ce qui était non seulement inconnu mais aussi souvent insoupçonné, en compréhension ce qui était incompréhensible, en souvenir ce dont nous ne connaissions même pas l'existence. - Il y a 3200 ans dans la Grèce antique, Epicure parle de la joie d'apprendre, de la joie de connaitre, de chercher à connaitre. *Dans toutes les occupations, la joie ne surgit qu'après des travaux accomplis avec effort. Mais en philosophie, le plaisir vient en même temps que la connaissance. Ce n'est pas une fois la recherche achevée que nous éprouvons la joie mais pendant la recherche elle-même.* Et au delà de la philosophie et de l'amour de la sagesse, en dehors même du domaine de la philosophie, ce peut être tout simplement le fait d'apprendre, d'aller à la recherche de la connaissance qui est en soit source de joie. Joie de découvrir, de se découvrir.

[...] Apprendre, mémoriser, s'approprier ses souvenirs est un processus dynamique fluide, mouvant. Si nous apprenons, c'est que quelque chose en nous change, a changé, continuera à changer. Si nous nous souvenons, c'est que l'apprentissage nous a rendu autre. La joie d'apprendre est aussi la joie de devenir autre, de sentir que nous devenons autre tout en sachant que c'est de nous qu'il s'agit, que nous demeurons nous même en nous transformant."

Extrait de "Sur les épaules de Darwin",
émission produite par France Inter, présentée par Jean-Claude Ameisen,
Professeur de médecine à l'Université Paris Diderot.

Introduction générale

"La science doit s'accommoder à la nature. La nature ne peut s'accommoder à la science."

Ferdinand Brunot

La Nature, la science et ses géants

La Nature nous offre tous les jours la chance de s'émerveiller devant ses réalisations. Elle est le peintre, nous en sommes ses spectateurs. Sa production est abondante, riche de formes et de couleurs, donnant sans cesse la preuve d'un ordre, d'une logique. Elle est également fascinante par le gigantisme sans limite de ses toiles, apparente juxtaposition d'évènements microscopiques, de petites touches impressionnistes, qui prennent germe aux confins de l'infiniment petit.

Il est coutume de dire que les équations régissent ou gouvernent les réalisations de la Nature, comme si elle suivait aveuglément les exigences d'un dompteur, qu'elle n'était sensible qu'au langage des mathématiques. Je dois affirmer que la Nature n'est pas - ou du moins n'est plus - un animal sauvage qui doit être dompté. La science ne donne pas d'ordre, en aucun cas la Nature ne marche au pas, *cela ne la regarde pas*. La science donne une représentation de la réalité. Elle s'exprime par le langage des mathématiques, et transcrit les phénomènes physiques en termes scientifiques. Pour Albert Jacquard : *nous ne voyons pas le monde avec nos yeux, nous le voyons avec nos concepts*.

En outre, la science enseigne l'humilité, elle se mature, et l'histoire nous montre qu'il faut clamer avec prudence la véracité et l'unicité des lois physiques. Comme Newton, il faut avoir la modestie de dire : "tout se passe comme si les corps s'attiraient", et non que les "corps s'attirent". L'histoire lui donnera raison.

Chaque marche, chaque pas franchi par l'humanité en déchiffrant les mystères de la Nature est un moyen pour les générations suivantes de *voir plus loin* (Bernard de Chartres), *de mieux voir* (Isaac Newton). Jean-Claude Ameisen résume la progression scientifique par une phrase dont son émission porte le nom : *Sur les épaules de Darwin, sur les épaules des géants*. Nous nous trouvons ici bas tels des nains, assis sur les épaules des géants. Nous voyons plus loin non pas parce que nous disposons d'une vue d'une

certaine acuité, mais parce que ces géants nous portent vers les hauteurs, nous élèvent par leur taille gigantesque. *J'ai vu plus loin que les autres parce que je me suis juché sur les épaules de géants* (Isaac Newton).

La turbulence

Cette thèse a pour but l'étude d'un phénomène particulier : la turbulence, phénomène dont les réalisations surabondent dans la Nature. Il suffit de porter notre regard sur le mouvement des nuages, prendre le temps de regarder la danse lancinante des rivières, le vol paisible d'un oiseau ou le passage d'une marée pour se persuader de son caractère pléthorique. Depuis les esquisses de Léonard de Vinci jusqu'au tableau *La nuit étoilée* de Vincent van Gogh, les artistes y ont puisé une partie de leur inspiration.

Elle a cela de fascinant que l'homme en a fait l'expérience il y a certainement des millénaires, et pourtant les premières études scientifiques remontent seulement au XIX° siècle. On citera notamment les travaux des géants que sont Poiseuille, Darcy, Helmholtz, Boussinesq, Reynolds ou Rayleigh. À cette même époque - pour ne citer qu'eux - Pierre et Marie Curie découvraient la radio-activité et Maxwell et Lorentz établissaient les lois fondamentales de la physique. C'est dire que des avancées plus que notables ont vu le jour à cette période, dans des domaines particulièrement contre-intuitifs ou du moins difficilement accessibles par l'observation. La recherche sur les écoulements turbulents n'en était alors qu'à ses balbutiements.

Au cours du XX° siècle, quelques publications scientifiques éminemment importantes ont vu le jour, notamment dans le courant des années 1940. Depuis, le nombre d'études sur la turbulence a littéralement explosé. En comptant, par intervalle de cinq années, le nombre de publications citées par Monin et Yaglom [101] dans leur ouvrage de référence, Lumley et Yaglom [93] montrent que le nombre N de publications émis par unité de temps t depuis 1900 peut être approchée par la loi suivante :

$$N(t) = 0.434e^{t/11.8} \tag{1}$$

Il s'agit donc d'une progression exponentielle. Il suffit de 8.2 années pour que le nombre de papier double. En se référant à cette loi, Lumley et Yaglom [93] indiquent que 2.6 papiers par an sortaient en 1921, 36 en 1952 et l'on s'attend donc à 5300 papiers aujourd'hui. Cela dépasse largement les capacités d'un lecteur, aussi acharné soit-il ! Malgré ce nombre exorbitant, on doit noter que l'infusion de certaines idées majeures, comme l'utilisation des statistiques, l'élucidation de structures cohérentes ou bien la description fractale de la turbulence ont très fortement contribué à raviver la flamme de la recherche dans ce domaine.

Malgré près de 100 ans de recherche scientifique sur le sujet, la marche vers la compréhension et prédiction de la turbulence demeure lente et le but est loin d'être atteint.

En quoi la turbulence est-elle fascinante ? Finalement, il semblerait qu'elle le soit à bien des égards. La cause majeure est qu'il s'agit d'un des problèmes de la physique moderne

qui demeure irrésolu, et attire par la même la curiosité des physiciens. Heinsenberg avait l'humour de dire : *Lorsque je rencontrerai Dieu, je lui poserai deux questions : pourquoi la relativité ? Et pourquoi la turbulence ?* Et à cela il répondait :*Je suis personnellement convaincu qu'il aura une réponse à la première.* Lorsqu'un géant de l'ampleur de Heisenberg semble si déconcerté face à la turbulence, on est en proie à s'inquiéter. Et pour cause ! Un certain nombre de caractéristiques majeures font de ce phénomène un casse-tête pour les physiciens :

Une très grande variété d'échelles de temps et d'espace. A première vue, un écoulement turbulent s'apparente à un tas de boue, à une pelote de laine, où une très grande variété d'échelles s'entremêlent et se meuvent suivant une dynamique allant de temps très courts à des temps très longs. Du point de vue du physicien, aucune séparation d'échelle ou de temps n'est alors possible, et l'intégralité du spectre d'échelles et de temps doit être considérée. Ce point particulier est clairement un frein à la description du phénomène. Cependant, la turbulence semble dévoiler une certaine hiérarchie d'échelles, au sein de laquelle on a coutume de supposer que l'énergie cascade de proche en proche. La paternité de cette idée revient à Lewis Fry Richardson [120] qui révolutionna la perception de la turbulence.

Une très forte non linéarité. Cette non linéarité est intrinsèque aux équations de Navier-Stokes. Ces équations sont le postulat permettant de décrire le mouvement des fluides dans l'approximation des milieux continus et des fluides Newtoniens (viscosité indépendante du taux de cisaillement). Elles ont été établies dans le courant du 19^{me} siècle, et depuis aucune solution générale ni même l'unicité de la solution n'ont été démontrées. Ce problème est inscrit dans les sept problèmes du millénaire (n'en reste que 6 depuis que le mathématicien russe Grigori Perelman donna la démonstration de la conjecture de Poincaré). La non linéarité des équations de Navier-Stokes a pour résultat que de faibles effets ont de grandes conséquences. En d'autres termes, une légère modification des conditions initiales ou limites entraînent de très larges modifications du phénomène observé après un certain temps. On qualifie cela de *chaos* (mot grec qui est l'antithèse du *cosmos* qui signifie ordre ou arrangement [21]). La non linéarité rend donc la prédiction déterministe aux temps longs hors de portée. Lorsque le déterminisme échoue, le physicien a coutume d'invoquer les opérateurs statistiques. Cela permet de s'affranchir de la très grande variabilité du phénomène.

La turbulence n'est pas purement aléatoire. Au sein de cette pelote de laine apparemment désorganisée, un ordre, conséquence d'un déterminisme sous-jacent, semble persister. Plus communément cet ordre est qualifié par les mots de 'structure cohérente'. Mais qu'est ce qu'une structure cohérente ? Pour Hussain [75], [74], *une structure cohérente est un mouvement à grande échelle dont la vorticité présente une corrélation de phase le long de son extension spatiale. L'extension jusque laquelle une vorticité cohérente persiste*

délimite l'étendue spatiale de cette structure cohérente. Cette définition sous entend donc que les structures cohérentes présentent une topologie de taille finie. En d'autres termes, on peut leur attribuer une qualité corpusculaire. Or, tous les écoulements turbulents ne respectent pas forcément cette limitation spatiale. Ceux-ci semblent, en effet, se mouvoir d'avantage comme un bain d'ondes qu'un enchevêtrement de structures corpusculaires. De plus la vorticité n'est peut-être pas le seul critère d'identification d'une corrélation de phase. Il mérite certainement d'être complété grâce à d'autres opérateurs, comme par exemple l'étirement [2]. La définition de Hussain, bien que clamée courageusement au milieu des controverses, semble donc aujourd'hui quelque peu limitée. Pour cette raison, nous préférons parler de mouvement organisé, ou mouvement cohérent qui s'affranchit de cette délimitation spatiale et ne limite pas son élucidation à l'existence seule d'une vorticité cohérente.

Pour revenir aux descriptions statistiques de la turbulence, il semble que les théories qui ont été brandies comme étendard à l'aube des années 50 pèchent de ne pas considérer l'existence de cet ordre. Pire ! L'opération de moyenne que l'on a coutume d'invoquer en statistique masque les effets du mouvement organisé qui ne devient plus observable.

L'objectif du travail

Au final, le regard du physicien ne peut être purement déterministe à cause de la non linéarité des équations de Navier-Stokes. Il ne peut être non plus purement statistique dès lors qu'un ordre persiste. Cela fut énoncé peut-être pour la première fois par Townsend au début des années 50 pour qui : *à cette distance [50's], il semble que ce soit la fin des théories purement statistiques* ***avant*** *que de nouveaux concepts de structures organisées révèlent leur importance* [136].

Le mot ***avant*** est important et mérite que l'on s'y penche. Au milieu des années 70, l'élucidation du mouvement organisé au sein des écoulements, considérés jusqu'alors pleinement turbulents, fut l'objet d'énormément d'attention. L'étude de Brown et Roshko [22] mettant en évidence la réminiscence de structures organisées dans une couche de cisaillement est souvent citée comme point de départ. Cette part importante de la recherche en turbulence créa un regain d'activité très prononcé. Le chercheur se sentait alors soulagé en découvrant l'existence d'un ordre sur lequel il allait pouvoir se reposer un instant. L'influence du mouvement organisé, en terme de dynamique ou de contribution énergétique, fut en particulier mis en exergue. Pourtant, le retour vers les théories statistiques prenant en considération cet ordre ne fut pas considéré. La recherche semble avoir perdu le fil de la proposition de Townsend.

Comme dans bien des domaines de la physique moderne, les avancées les plus marquantes se font en réunifiant des théories existantes. Ce fut le cas pour Maxwell et Lorentz, ce fut le cas également pour Einstein et bien d'autres. Le but de cette thèse est de tenter de réconcilier les théories statistiques considérant la turbulence comme purement aléatoire,

aux découvertes mettant en évidence la réminiscence d'un ordre.

Notre regard est tout d'abord théorique et très général. L'objectif est de construire une équation statistique prenant en considération l'influence du mouvement organisé. Ensuite, nous nous intéressons à un écoulement particulier : le sillage se créant en aval de différents obstacles. Cet écoulement est réputé pour présenter une identité cohérente forte qui nait en champ proche et persiste ensuite sur de longues distances en aval de l'obstacle. La quantification des statistiques de la vitesse et de la pression, est issue de mesures en soufflerie subsonique.

Cette thèse vise à répondre à différentes questions utilisant deux types d'outils :

Outils analytiques. Peut-on construire un bilan énergétique en deux points prenant en considération l'influence du mouvement organisé ? Quelles simplifications sont nécessaires en vue d'une confrontation avec l'expérience ? Quelles différences y-a-t'il avec les théories existantes ? Quel est le degré de généralité d'un tel bilan ?

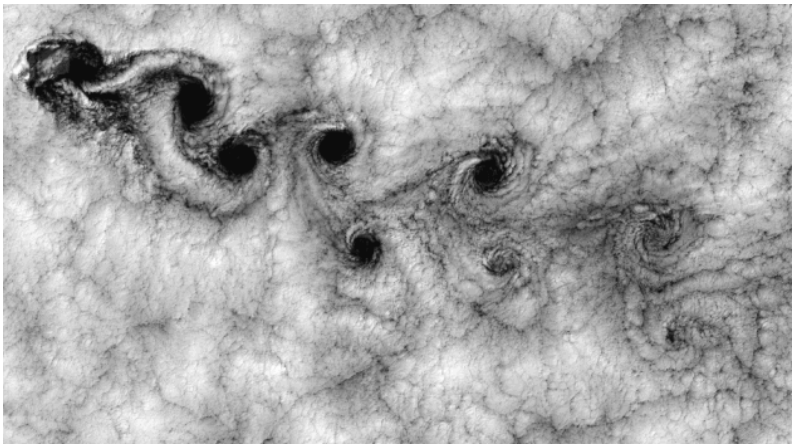
Outils techniques et expérimentaux. En quoi les différentes méthodes de mesure sont-elles complémentaires ? Nous permettent-elles d'accéder à l'intégralité des termes des bilans énergétiques, notamment ceux liés à la pression ? Comment dissocier les statistiques des fluctuations ordonnées du reste du champ turbulent ?

L'écoulement. Ensuite d'autres questions se focalisent davantage sur l'écoulement en question. Les bilans énergétiques, sont-ils des outils appropriés afin de décrire l'écoulement de sillage ? Quelle est la contribution énergétique du mouvement organisé ? Interagit-il avec les fluctuations aléatoires du champ turbulent ?

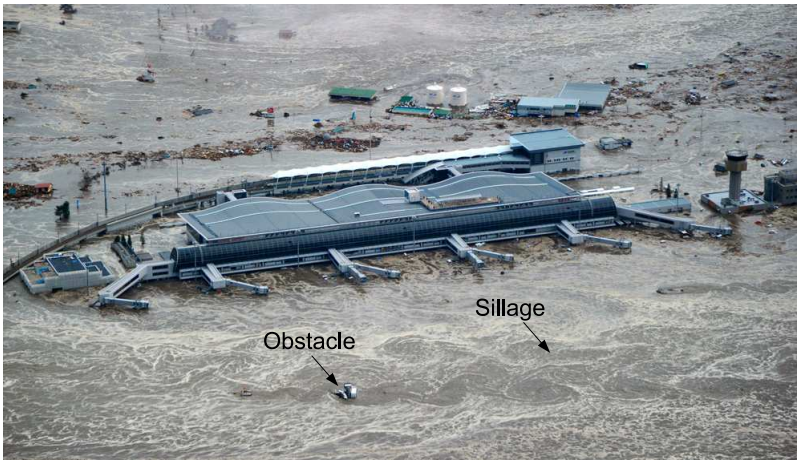
L'écoulement de sillage

L'écoulement de sillage est très largement rencontré dans la Nature. Lorsqu'un écoulement fluide est perturbé par la présence d'un obstacle, un sillage se forme en aval de ce dernier. Dans certains cas, se forme un écoulement turbulent.

Sur la Fig. 1, nous avons pioché deux illustrations de ce phénomène. La première est une prise de vue par satellite du sillage en aval d'une île de l'océan Pacifique. On remarque une "allée" de tourbillons parfaitement ordonnée, ces tourbillons ayant une taille environ égale à la taille de l'île. Le second exemple est bien plus tragique. Il s'agit d'une photographie prise d'un hélicoptère alors que le Tsunami du 11 Mars 2011 atteignait l'aéroport de Sendai au Japon. On remarque qu'un obstacle freine la progression du fluide. Se forment alors en aval un certain nombre de grands tourbillons dont la taille est environ équivalente à l'envergure d'un avion. D'autres tourbillons à plus petites échelles et beaucoup moins ordonnés s'observent également.



(a)



(b)

FIGURE 1 – (a) Allée de Bénard-von Kármán visualisée par le satellite LandSat 7, dans le sillage de l'île Alejandro Selkirk située au large du Chili. Source : NASA. (b) Aéroport de Sendaï (Japon) le 11 Mars 2011, sillage turbulent se formant après le passage du Tsunami. Source : Le Monde.

L'écoulement de sillage réagit différemment selon la taille de l'obstacle D, la vitesse U_0 et la viscosité ν du fluide. En termes scientifiques, on regroupe l'effet de ces trois paramètres en un nombre sans dimension, le nombre de Reynolds : $Re = U_0 D/\nu$.

- $Re < 1$. Pour de très faibles valeurs du nombre de Reynolds, les effets visqueux prédominent et le fluide suit fidèlement la courbure de l'obstacle.
- $1 < Re < 45$. Pour des nombres de Reynolds inférieur à 45 [1], la couche limite se détache de la surface du cylindre et se forment deux zones de circulation stables en

1. Ce seuil [141] étant valable pour un cylindre circulaire de longueur infinie

temps et en espace.

– $45 < Re < 150$. Dans cette gamme de nombres de Reynolds, apparait la très célèbre allée de Bénard-von Kármán (Fig. 2). Cette réalisation particulière fut observée pour la première fois par le français Henri Bénard en 1908 [16], puis Théodore von Kármán s'attaqua à ce problème d'un point de vue théorique à partir de 1911. Les anglophones oublient bien souvent de spécifier le nom de Bénard, attribuant bien souvent toute la paternité de ce phénomène à von Kármán. Ce qui n'est bien sûr pas le cas des français...

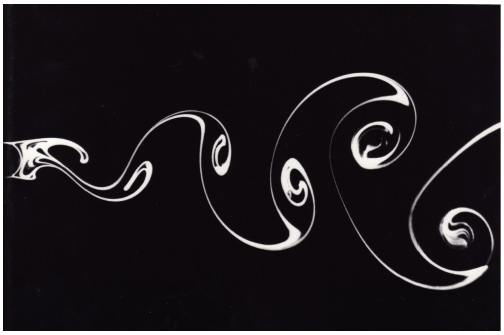


FIGURE 2 – Visualisation expérimentale de l'Allée de Bénard-von Kármán. D'après le livre de Van Dyke [139]

– $Re > 150$. A partir de ce nombre de Reynolds critique [141], le sillage qui était jusqu'alors un mouvement en deux dimensions s'épanouit maintenant sur les trois directions de l'espace. On observe donc des structures "giratoires" sur la troisième direction (Fig 3). Cependant, l'écoulement demeure très fortement ordonné.
– $Re > 1200$ [113]. Pour ces nombres de Reynolds, les couches limites jaillissant de la surface du cylindre se déstabilisent en suivant les mécanismes d'instabilités de Kelvin-Helmholtz. Ces tourbillons que l'on nomme parfois tourbillons de Bloor-Gerrard, interagissent de manière non linéaire avec l'allée de Bénard-von Kármán, le sillage est alors beaucoup moins ordonné.

Dans notre étude, nous nous intéressons au sillage se formant en aval de différents obstacles pour des nombres de Reynolds supérieurs à 1200. L'écoulement présente alors une gamme d'échelles relativement développée. Il n'est pas purement turbulent ou bien purement ordonné mais il présente les deux caractéristiques à la fois. Cet écoulement est donc tout à fait en adéquation avec les questions auxquelles cette thèse doit répondre, notamment concernant les interactions entre le mouvement ordonné et la turbulence.

Organisation du manuscrit

Hormis une partie introductive et finale, la thèse comporte cinq chapitres distincts. Le premier chapitre est destiné au développement des outils analytiques, dans un contexte

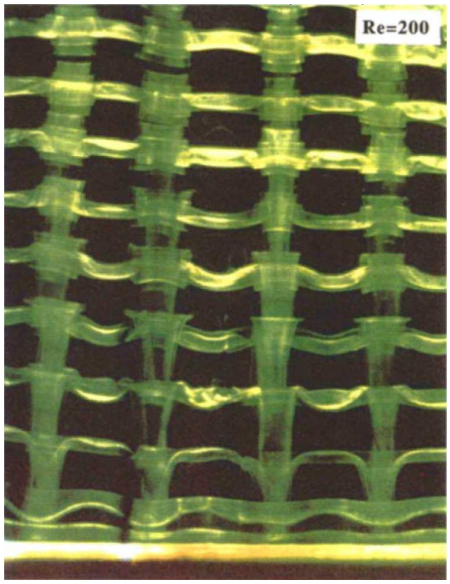


FIGURE 3 – Visualisation de la dégénérescence en trois dimensions de l'allée de Bénard-von Kármán. Le nombre de Reynolds est de 200. Il s'agit d'une vue de dessus, le cylindre est placé horizontalement et l'écoulement parcourt l'image de bas en haut. D'après Williamson [141]

très général. Le second chapitre illustre les outils expérimentaux mis en œuvre durant la période de thèse. Le troisième, quatrième et cinquième chapitre concernent des résultats sur la physique de l'écoulement de sillage.

Chapitre 1 : Considérations analytiques. Cette partie consiste en une revue des bilans énergétiques existants, aussi bien globaux (en un point) qu'à chaque échelle (en deux points). Sont donc rappelés le bilan énergétique établit par O. Reynolds (équations RANS), le bilan en un point de Reynolds et Hussain [119] propre au mouvement organisé et au mouvement aléatoire, et enfin le bilan en deux points de Kolmogorov généralisé [5], [45].

Nous développons ensuite une forme générale ainsi qu'une forme localement isotrope du bilan énergétique en deux points, prenant en considération le mouvement organisé. Cette démarche est à notre connaissance inédite. A la différence des bilans en deux points d'ores et déjà établis ([77], [143], [5], [45]), un certain nombre de termes supplémentaires sont mis en lumière. Il est ainsi notamment prouvé que le transfert énergétique au sein du mouvement aléatoire, est constitué du transfert total (mouvement aléatoire + mouvement organisé) auquel est soustrait le processus de forçage par le mouvement organisé ainsi que le transfert énergétique du mouvement organisé. Un pas de plus est fait analytiquement par l'établissement d'une équation anisotrope de transfert énergétique à chaque échelle, et à chaque angle par rapport à l'axe d'axisymétrie [47].

Chapitre 2 : Dispositifs expérimentaux. Ce chapitre a pour trait de décrire les différentes méthodes anémométriques mises en place lors de cette thèse. Nous étayons ainsi le principe, la fidélité et surtout la complémentarité des méthodes de vélocimétrie au fil chaud (HWA), de vélocimétrie par images de particules (PIV) résolues ou non dans le temps, d'anémométrie Doppler laser (ADL) et de mesure acoustique par diffusion ultra-sonore (AS, mesure temporelle d'un mode de Fourier de la vorticité).

Le dispositif expérimental étudié au Coria est un cylindre simple (diamètre 1 cm.) placé dans la soufflerie basse-vitesse du groupe 'Turbulence'. De plus, nous utilisons dans notre analyse des mesures complémentaires effectuées à l'Université de Newcastle, Australie. Il s'agit de cinq configurations d'écoulement : un sillage de cylindre, d'un cylindre poreux, d'une plaque plane solide et poreuse ainsi que d'un barreau carré.

Chapitre 3 : Dynamique d'advection à chaque échelle. Avant de porter nos regards sur les différents bilans énergétiques, nous nous intéressons plus particulièrement à la dynamique d'advection à une échelle particulière du spectre turbulent. Pour ce faire, la diffusion acoustique (AS) ainsi que la conjonction des mesures spatiales par PIV et temporelles par ADL sont alors particulièrement adaptées. Nous questionnons entre autre la validité de l'hypothèse de "Frozen flow" de Taylor et mesurons avec précision la vitesse de convection à une échelle particulière. Nous évaluons également les temps caractéristiques d'advection et de déformation d'un "rouleau" de vorticité à un nombre d'onde particulier. Ces deux temps caractéristiques sont reliés grâce à un scénario basé sur le mécanisme de basculement-étirement d'un rouleau de vorticité.

Chapitre 4 : Bilans en un point en champ proche. Via des mesures par PIV (résolues ou non dans le temps) et d'ADL, le champ proche du sillage est exploré. Chaque terme des bilans en un point, prenant en compte ou non le mouvement cohérent, est estimé. Cela afin de peser la contribution des différents mécanismes propres à l'énergie cinétique turbulente ainsi les zones d'activité de chacun d'entre eux. Un effort particulier est consacré à la mesure du terme de dissipation. Le rôle de la pression (moyenne et fluctuante) est également souligné.

Chapitre 5 : Bilans en deux points en champ intermédiaire. La formulation générale et exacte des bilans en deux points aboutit à une description du phénomène en six dimensions (3 dimensions d'espace, 3 dimensions dans l'espace des séparations). De plus, l'utilisation de l'hypothèse de Taylor afin de calculer une séparation spatiale via un signal temporel, aboutit à l'obtention d'une seule composante de séparation. Nous restreignons donc l'étude à l'expression localement isotrope des bilans en deux points, évaluée en une position fixe de l'écoulement. Cela réduit le problème à une représentation des statistiques en deux points suivant une seule variable : la norme du vecteur séparation. Pour cette raison, cette section de la thèse se focalise sur le champ intermédiaire du sillage pour lequel

l'hypothèse d'isotropie locale est davantage vérifiée. Dans cette zone de l'écoulement, la technique anémométrique au fil chaud est alors tout à fait efficace.

L'objectif est double. Premièrement, il s'agit d'étudier la véracité ainsi que l'influence du mouvement organisé sur l'hypothèse d'isotropie locale. Ensuite, le bilan en deux points, prenant en considération ou non, le mouvement ordonné est estimé. Ces deux étapes sont l'occasion de questionner l'influence des conditions initiales, en l'occurrence l'influence de la forme de l'obstacle. Nous montrons également que sur l'axe du sillage, le rôle de certains termes (pression, production ..) est négligeable et les bilans énergétiques se réduisent à ceux propres à une turbulence de grille pour laquelle on dispose de modèles simplifiés.

Chapitre 1

Considérations analytiques

"Expérimenter, c'est imaginer"

Friedrich Nietzsche

D'après Heidegger, *La qualité des théories est intrinsèquement conditionnée par la qualité des intuitions a priori.* Au delà des convictions politiques douteuses de ce penseur, il me semble que cette phrase résume tout à fait la démarche scientifique. L'essentiel des activités de recherche ont en effet pour but de construire et d'aiguiser cette *intuition*, qui prend germe et évolue en fonction des différentes expériences sondant le phénomène à étudier. Cette quête d'intuition est le quotidien du chercheur. Pourtant cette graine à elle seule ne suffit pas. La traduction des observations en termes plus théoriques nécessite d'*imaginer* un possible scénario, déduit des observations, et créant un lien logique entre chacune d'entre elles. L'imagination est donc la brique avec laquelle le pont entre observation et théorie peut s'élever, *Expérimenter, c'est imaginer.* Pour Albert Jacquard : *Sans imagination il ne pourrait y avoir création.* Pour Einstein : *L'imagination est plus importante que le savoir.* On stigmatise bien souvent le scientifique en le qualifiant à tort de rationnel, alors que c'est au contraire l'abstraction et l'imagination qui caractérise et anime l'esprit scientifique.

A la lumière des remarques précédentes, il est donc quelque peu anormal et certainement un peu troublant pour le lecteur de voir ce chapitre théorique ainsi disposé dans ce manuscrit. Le plus logique aurait été de le voir apparaitre une fois toutes les observations faites, comme il en a été pendant cette thèse. Nous avons choisi, au contraire, de construire ainsi ce manuscrit afin de montrer en quoi les développements fondamentaux constituent un outil d'étude des écoulements turbulents. De la même manière que les méthodes expérimentales (ou numériques), la théorie est un moyen, un outil permettant de sonder le phénomène à étudier.

La propriété fondamentale des écoulements turbulents est de présenter de telles variations spatio-temporelles qu'ils ne peuvent être décrits de manière déterministe. En théorie, la transition et le développement de la turbulence suivent bien un chemin déterministe,

cette voie étant inhérente aux équations de Navier-Stokes. Cependant le nombre de degré de liberté soumettant l'écoulement est trop important pour prédire analytiquement son comportement. Ainsi, la description de la turbulence est construite sur la base des théories statistiques.

Ce chapitre a pour but de récapituler les raisonnements théoriques existants et surtout de prodiguer un cadre analytique original permettant de décrire les écoulements turbulents réels. Ces écoulements sont, d'une part, caractérisés par un nombre de Reynolds modéré ; les effets caractéristiques des plus grandes et des plus petites échelles cohabitent alors dans un gamme d'échelle commune. Ils sont, d'autre part, généralement anisotropes et enfin peuplés de structures cohérentes. L'anisotropie étant bien souvent une conséquence de la réminiscence de cet ordre. Ces trois caractéristiques se retrouvent dans la plupart des écoulements de laboratoire ou industriels, aussi notre démarche se doit d'être très générale.

Comme il a été dit précédemment, ces considérations analytiques constituent un outil d'étude afin de décrire les mécanismes physiques inhérents à la turbulence. La célèbre phrase de Lavoisier : *rien ne se perd, rien ne se crée, tout se transforme* s'appliquant tout à fait à l'énergie, ce paramètre est ici postulé comme 'traceur' pertinent pour l'étude des écoulements turbulents. Sont ainsi étudiés les mécanismes de transport, de transfert, de production et de perte de l'énergie cinétique turbulente ainsi que la manière dont ces mécanismes s'équilibrent.

Nous nous intéresserons à différents types de bilans d'énergie. Les premiers sont appelés "bilan en un point" dans le sens où les quantités statistiques sont considérées en un seul point de l'écoulement. La notion d'échelle n'apparait pas car ils caractérisent l'énergie de l'intégralité du spectre turbulent, des plus grandes aux plus petites échelles. Cependant, un minimum de deux points - avec l'un se déplaçant relativement à l'autre, sont nécessaires afin de définir une échelle et prendre en compte la grande variété d'échelle inhérente au phénomène de turbulence. Ce qui nous amène à construire des bilans d'énergie qualifiés de "bilan en deux points", où l'énergie est propre à une échelle r

1.1 Bilan en un point

1.1.1 Bilan de l'énergie cinétique totale

Le père des études s'adressant aux écoulements turbulents, ou du moins le plus cité, est certainement Osborne Reynolds. Il fut le premier à déterminer la condition qui détermine la formation de turbulences en 1883 [118], caractérisée par un nombre sans dimension qui porte son nom. Il fut par ailleurs le précurseur des théories statistiques de la turbulence. Son idée est de décomposer la vitesse et la pression en une quantité moyenne $\overline{U}_i, \overline{P}$ et une quantité fluctuante u_i, p et d'inclure cette décomposition dans les équations de Navier-Stokes avant d'y appliquer l'opérateur moyenne [117]. Il aboutit à deux bilans, l'un pour la quantité de mouvement, l'autre pour l'énergie cinétique de la vitesse fluctuante. Ces

deux bilans connus aujourd'hui sous le nom de Reynolds Averaged Navier Stokes (RANS) s'écrivent [117] :

$$\overline{U_j}\frac{\partial \overline{U_i}}{\partial x_j} + \frac{\partial \overline{u_i u_j}}{\partial x_j} = -\frac{\partial \overline{P}}{\partial x_i} + \nu \frac{\partial^2 \overline{U_i}}{\partial x_j \partial x_j} \tag{1.1}$$

est le bilan de quantité de mouvement :

$$\frac{1}{2}\overline{U_j}\frac{\partial \overline{q^2}}{\partial x_j} + \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\overline{u_j p} + \frac{1}{2}\overline{u_j q^2}\right) + \overline{u_j u_i}\frac{\partial \overline{U_i}}{\partial x_j} + \overline{\epsilon} = 0 \tag{1.2}$$

est le bilan de l'énergie cinétique du champ fluctuant. Dans la relation (1.2), $\overline{q^2} = \overline{u^2} + \overline{v^2} + \overline{w^2}$ est l'énergie cinétique totale du champ fluctuant et $\overline{\epsilon} = \frac{1}{2}\nu\overline{\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right)^2}$ est le taux de dissipation moyen de la turbulence en chaleur.

L'équation (1.1) met en évidence le problème de fermeture de la turbulence. La résolution de l'équation de la vitesse moyenne nécessite en effet la connaissance des corrélations croisées du champ fluctuant $\overline{u_j u_i}$ appelées tensions de Reynolds qui demeurent inconnues *a priori*. Ces dernières années et encore de nos jours, les attentions se focalisent sur ce point particulier de la modélisation des tensions de Reynolds à partir du champ moyen.

L'équation (1.2) implique quatre termes : l'advection du champ turbulent par la vitesse moyenne, la diffusion par la pression, le transport de l'énergie cinétique totale par la turbulence, la production de fluctuations par la vitesse moyenne et enfin le terme de dissipation de l'énergie cinétique turbulente en chaleur. Cette relation caractérise donc l'équilibre entre ces différents processus. L'utilisation des relations (1.1) et (1.2) afin de décrire un certain nombre d'écoulements canoniques fut l'objet des travaux expérimentaux du pionnier Townsend [135]. Ces résultats sont répertoriés 1956 dans la première édition de son livre référence.

Suite à ces études, il est révélé que ces écoulements présentent une identité cohérente forte qui cohabite avec un fond turbulent à proprement parler. Il est désormais bien admis que ces structures ordonnées, qui prennent germe au sein d'instabilités hydrodynamiques bien connues, persistent sur de longues distances en aval de l'injection d'énergie [22], [74], [17], [3], [34]. Elles sont à l'origine des différences observées en champ lointain lorsque le mode d'injection de l'énergie turbulente en champ proche varie [6], [8], [10]. Les fluctuations de la vitesse portent de ce fait la trace de deux mécanismes bien distincts : l'un ordonné et à grande échelle dont la corrélation avec le cisaillement moyen est forte, l'autre aléatoire et à plus petite échelle qui suit le mouvement des plus grandes. Afin de cribler la contribution énergétique associée à chacune de ces deux entités du champ fluctuant, Reynolds et Hussain [119] affinent la description statistique globale prodiguée par Osborne Reynolds en dissociant la partie aléatoire de la partie ordonnée.

1.1.2 Bilan de l'énergie cinétique cohérente et aléatoire

Dans ce but, Reynolds et Hussain [119] établissent une équation dynamique portant sur la partie cohérente et aléatoire du champ fluctuant, puis l'invoquent comme fondation sur laquelle repose le bilan énergétique propre aux deux entités fluctuantes. La présente section de ce manuscrit a pour trait de détailler la procédure mise en place par Reynolds et Hussain [119].

Le point de départ est toujours l'équation de Navier-Stokes incompressible :

$$\frac{\partial U_i}{\partial t} + U_j \frac{\partial U_i}{\partial x_j} = -\frac{\partial P}{\partial x_i} + \nu \frac{\partial^2 U_i}{\partial x_j \partial x_j} \tag{1.3}$$

où la pression est divisée par la masse volumique ρ et ν représente la viscosité cinématique. L'équation de continuité correspondante s'écrit :

$$\frac{\partial U_i}{\partial x_i} = 0, \tag{1.4}$$

où deux indices répétés indiquent la sommation. Reynolds et Hussain [119] décomposent la vitesse U_i et la pression P en une vitesse moyenne, cohérente et aléatoire :

$$\begin{aligned} U_i = \overline{U}_i + \tilde{u}_i + u_i', \qquad P = \overline{P} + \tilde{p} + p' \\ u_i = \tilde{u}_i + u_i', \qquad\quad p = \tilde{p} + p', \end{aligned} \tag{1.5}$$

où $\overline{[...]}$ dénote une moyenne temporelle. Par définition, la composante cohérente $\langle \tilde{u}_i \rangle = \tilde{u}_i$ où $\langle [...] \rangle$ désigne la moyenne de phase. Les propriétés de la moyenne temporelle et de la moyenne de phase utilisées par la suite doivent être à ce stade définies :

$$\begin{array}{lll} \langle f' \rangle = 0, & \overline{\tilde{f}} = 0, & \overline{f'} = 0 \\ \overline{\overline{f} g} = \overline{f}\,\overline{g}, & \langle \tilde{f} g \rangle = \tilde{f} \langle g \rangle, & \langle \overline{f} g \rangle = \overline{f} \langle g \rangle \\ \overline{\langle f \rangle} = \overline{f}, & \langle \overline{f} \rangle = \overline{f}, & \overline{\tilde{f} g'} = \langle \tilde{f} g' \rangle = 0 \end{array} \tag{1.6}$$

L'intérêt majeur de la moyenne de phase est qu'il s'agit d'une opération statistique. Elle est équivalente à une moyenne d'ensemble d'évènements ayant une phase commune. Lors de l'introduction, nous avons mis en lumière la difficulté de considérer la turbulence d'un point de vue purement statistique du fait de la présence des structures cohérentes, ou bien d'un point de vue purement déterministe du fait de la non linéarité des équations de Navier-Stokes. Finalement, grâce à l'opération de moyenne de phase, une théorie prenant en considération le mouvement ordonné peut se faire sur le terrain des statistiques.

En substituant (1.5) dans (1.4), en appliquant une moyenne temporelle puis une moyenne de phase, on obtient l'équation de continuité portant sur la vitesse moyenne, cohérente et aléatoire :

$$\frac{\partial \overline{U}_i}{\partial x_i} = \frac{\partial \tilde{u}_i}{\partial x_i} = \frac{\partial u_i'}{\partial x_i} = 0 \tag{1.7}$$

Puis en substituant (1.5) dans (1.3) et en appliquant une moyenne de phase, on trouve :

$$\frac{\partial \tilde{u}_i}{\partial t} + \overline{U}_j \frac{\partial \overline{U}_i}{\partial x_j} + \overline{U}_j \frac{\partial \tilde{u}_i}{\partial x_j} + \tilde{u}_j \frac{\partial \overline{U}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left\langle u_i' u_j' \right\rangle + \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\tilde{u}_i \tilde{u}_j \right) = -\frac{\partial}{\partial x_i} \left(\overline{P} + \tilde{p} \right) + \nu \left(\frac{\partial^2 \overline{U}_i}{\partial x_j \partial x_j} + \frac{\partial^2 \tilde{u}_i}{\partial x_j \partial x_j} \right). \tag{1.8}$$

La moyenne temporelle de (1.8) aboutit à :

$$\overline{U}_j \frac{\partial \overline{U}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial}{\partial x_j} \overline{u_i' u_j'} + \frac{\partial}{\partial x_j} \overline{\tilde{u}_i \tilde{u}_j} = -\frac{\partial \overline{P}}{\partial x_i} + \nu \frac{\partial^2 \overline{U}_i}{\partial x_j \partial x_j} \tag{1.9}$$

L'équation (1.9) est l'équation d'équilibre du champ moyen de vitesse. Elle met en évidence que les contraintes de Reynolds $\overline{\tilde{u}_i \tilde{u}_j}$ et $\overline{u_i' u_j'}$ associées respectivement au mouvement cohérent et aléatoire, perturbe le champ moyen, ou bien que *a contrario* les gradients de vitesse moyenne induisent des fluctuations de vitesse. On retrouve ainsi le problème de fermeture précédemment décrit. En soustrayant (1.9) à (1.8), on obtient l'équation dynamique du mouvement cohérent :

$$\frac{\partial \tilde{u}_i}{\partial t} + \overline{U}_j \frac{\partial \tilde{u}_i}{\partial x_j} + \tilde{u}_j \frac{\partial \overline{U}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\tilde{u}_i \tilde{u}_j - \overline{\tilde{u}_i \tilde{u}_j} \right) + \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\left\langle u_i' u_j' \right\rangle - \overline{u_i' u_j'} \right) = -\frac{\partial \tilde{p}}{\partial x_i} + \nu \frac{\partial^2 \tilde{u}_i}{\partial x_j \partial x_j} \tag{1.10}$$

Puis en soustrayant (1.8) à (1.3) on obtient une équation dynamique pour le mouvement aléatoire :

$$\frac{\partial u_i'}{\partial t} + \overline{U}_j \frac{\partial u_i'}{\partial x_j} + \tilde{u}_j \frac{\partial u_i'}{\partial x_j} + u_j' \frac{\partial \overline{U}_i}{\partial x_j} + u_j' \frac{\partial \tilde{u}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left(u_i' u_j' - \left\langle u_i' u_j' \right\rangle \right) = -\frac{\partial p'}{\partial x_i} + \nu \frac{\partial^2 u_i'}{\partial x_j \partial x_j} \tag{1.11}$$

En multipliant l'équation (1.10) par $\tilde{u}_i$, l'équation (1.11) par u_i' puis en appliquant une moyenne de phase puis une moyenne temporelle, on obtient le bilan en un point du mouvement cohérent et aléatoire respectivement :

$$\frac{1}{2} \overline{U}_j \frac{\partial}{\partial x_j} \overline{\tilde{q}^2} + \overline{\tilde{u}_i \tilde{u}_j} \frac{\partial \overline{U}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\overline{\tilde{u}_j \tilde{p}} + \frac{1}{2} \overline{\tilde{u}_j \tilde{q}^2} + \overline{\tilde{u}_i \left\langle u_i' u_j' \right\rangle} \right) - \overline{\left\langle u_i' u_j' \right\rangle \frac{\partial \tilde{u}_i}{\partial x_j}} + \overline{\tilde{\epsilon}} = 0 \tag{1.12}$$

$$\frac{1}{2} \overline{U}_j \frac{\partial}{\partial x_j} \overline{q'^2} + \overline{u_i' u_j'} \frac{\partial \overline{U}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\overline{u_j' p'} + \frac{1}{2} \overline{u_j' q'^2} + \frac{1}{2} \overline{\tilde{u}_j \left\langle q'^2 \right\rangle} \right) + \overline{\left\langle u_i' u_j' \right\rangle \frac{\partial \tilde{u}_i}{\partial x_j}} + \overline{\epsilon'} = 0 \tag{1.13}$$

Ces deux bilans constituent l'essentiel des travaux analytiques de Hussain et Reynolds [119]. De la même manière que le bilan (1.2), on remarque au sein de ces bilans un terme de transport et de production par la vitesse moyenne, un terme de diffusion par la pression et de diffusion turbulente ainsi qu'un terme de dissipation concernant le champ ordonné et le champ aléatoire. D'autre part, ces équations mettent en évidence un terme d'interaction particulier $\overline{\left\langle u_i' u_j' \right\rangle \frac{\partial \tilde{u}_i}{\partial x_j}}$ dont le signe est inversé d'une équation à l'autre. Cela montre que ce qui constitue une perte pour la partie cohérente est un gain pour la partie aléatoire du champ fluctuant. Une part importante de l'étude Reynolds et Hussain [119] s'attache à modéliser ce terme particulier. On remarque également des termes de transport des quantités aléatoires par le mouvement cohérent : $\tilde{u}_j \left\langle q'^2 \right\rangle$ et $\tilde{u}_i \left\langle u_i' u_j' \right\rangle$. Ces trois derniers termes sont le siège des transferts énergétiques entre le mouvement ordonné et les fluctuations purement turbulentes.

Pour conclure, les relations (1.2), (1.12) et (1.13) sont les bilans énergétiques des fluctuations totales, cohérentes et aléatoires respectivement. Ils décrivent l'équilibre entre les processus de transport, de diffusion, de production et de dissipation. Ils mettent en jeu des caractéristiques globales telle que la variance, où l'intégralité du spectre turbulent est intégré, des plus grandes échelles jusqu'aux plus petites. Or, les processus intrinsèquement liés aux petites échelles ne sont pas forcément les mêmes que ceux agissant sur les plus grandes. Par exemple, il semble intuitif d'affirmer que les effets de viscosité sont très actifs à petites échelles, *a contrario* le cisaillement moyen sera davantage ressenti par les grandes échelles. Cela nous amène donc progressivement à étudier les mécanismes turbulents propres à une échelle donnée du champ fluctuant, par le biais de bilan en deux points. De récents efforts y ont été consacrés, s'inspirant des travaux des pionniers Taylor [131], Kármán et Howarth [84], Kolmogorov [78], Yaglom [143], Monin et Yaglom [101].

1.2 Bilan en deux points

1.2.1 Formulation générale

La méthodologie a encore une fois comme point de départ, l'équation de Navier Stokes (1.3). De la même manière que [101], [128], [40], [45], cette relation est écrite au point $\overrightarrow{x}$ et au point $\overrightarrow{x}^+$ séparés d'une distance $\overrightarrow{r}$. En décomposant la vitesse en une partie moyenne et une partie aléatoire, la différence de ces deux relations aboutit à :

$$\begin{aligned} &\frac{\partial \Delta u_i}{\partial t} + \Delta\left(\overline{U}_j \frac{\partial \overline{U}_i}{\partial x_j}\right) + \Delta\left(\overline{U}_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j}\right) + \Delta\left(u_j \frac{\partial \overline{U}_i}{\partial x_j}\right) + \Delta\left(u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j}\right) \\ &\qquad = -\left(\frac{\partial}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_i^+}\right)\Delta p + \nu\left(\frac{\partial^2}{\partial x_j \partial x_j} + \frac{\partial^2}{\partial x_j^+ \partial x_j^+}\right)\Delta u_i \end{aligned} \tag{1.14}$$

où $\Delta[...] = [...](\overrightarrow{x}^+) - [...](\overrightarrow{x})$ Comme Hill [68], [69], [70], nous considérons le gradient vis à vis du point central X_j tel que $\overrightarrow{X} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{x} + \overrightarrow{x}^+)$, ainsi :

$$\frac{\partial}{\partial x_j} = -\frac{\partial}{\partial r_j} + \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial X_j}, \quad \frac{\partial}{\partial x_j^+} = \frac{\partial}{\partial r_j} + \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial X_j} \tag{1.15}$$

S'en suit donc que $\frac{\partial}{\partial X_j} = \frac{\partial}{\partial x_j} + \frac{\partial}{\partial x_j^+}$. Les points $\overrightarrow{x}$ et $\overrightarrow{x}^+$ étant indépendants, *i.e.* $\frac{\partial u_i}{\partial x_j^+} = \frac{\partial u_i^+}{\partial x_j} = 0$, en multipliant (1.14) par $2\Delta u_i$, en utilisant les propriétés (1.7) et (1.15) et en appliquant l'opérateur de moyenne temporelle, on obtient :

$$\begin{aligned}\overline{\frac{\partial \Delta q^2}{\partial t}} + \overline{U}_j\frac{\partial \overline{\Delta q^2}}{\partial x_j} + 2\overline{\Delta u_i \Delta u_j}\frac{\partial \overline{U}_i}{\partial x_j} + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x_j} + \frac{\partial}{\partial x_j^+}\right)\overline{\left(u_j + u_j^+\right)\Delta q^2} \\ +2\left(\frac{\partial}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_i^+}\right)\overline{\Delta u_i \Delta p} + \frac{\partial}{\partial r_j}\overline{\Delta u_j \Delta q^2} \\ -2\nu\left[\frac{\partial^2}{\partial r_j^2}\overline{\Delta q^2} + \overline{\frac{\partial u_i}{\partial x_j}\frac{\partial u_j}{\partial x_i}} + \overline{\frac{\partial u_i^+}{\partial x_j^+}\frac{\partial u_j^+}{\partial x_i^+}} + \frac{1}{4}\frac{\partial^2}{\partial X_j^2}\overline{\Delta q^2}\right] + 2\left(\overline{\epsilon} + \overline{\epsilon}^+\right) = 0\end{aligned} \tag{1.16}$$

$\overline{\Delta q^2} = \overline{\Delta u_i \Delta u_i}$ est l'énergie cinétique totale des échelles $\leq ||\overrightarrow{r}||$ ([135] p.11, [46]). (1.16) peut être formellement réécrite de la manière suivante :

$$\mathcal{I} + \mathcal{A} + \mathcal{P} + \mathcal{D} + \mathcal{D}_p + \frac{\partial}{\partial r_j}\overline{\Delta u_j \Delta q^2} - \mathcal{V} + 2\left(\overline{\epsilon} + \overline{\epsilon}^+\right) = 0 \tag{1.17}$$

où $\mathcal{I}$ est le terme de non stationnarité, $\mathcal{A}$ et $\mathcal{P}$ sont respectivement l'advection et la production de fluctuations de vitesse par le champ moyen. $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}_p$ sont le transport de l'énergie cinétique par la turbulence et par la pression respectivement. $\mathcal{V}$ est le terme visqueux. Enfin apparait le terme de transfert non linéaire de l'énergie cinétique à une échelle $\overrightarrow{r}$. Il met en jeu des corrélations triples $\overline{\Delta u_j \Delta q^2}$ qui sont le siège du processus de cascade turbulente. Danaila *et al.* [40], [45] met en évidence que les termes de transport, production, diffusion agissent majoritairement à grandes échelles, c'est-à-dire pour de fortes valeurs de r. *A contrario*, le terme visqueux agit d'autant plus que les échelles sont petites, en d'autres termes pour de faibles valeur de r. À l'interface entre grandes et petites échelles a lieu le transfert énergétique non linéaire dans une zone du spectre turbulent appelée zone inertielle. La somme de tous ces termes équivaut au transfert total d'énergie, égal au taux moyen de dissipation de l'énergie cinétique totale.

On remarque donc que ce bilan révèle rigoureusement les mêmes processus physiques que le bilan en un point prodigué par Osborne Reynolds, à la différence qu'ils sont propres à une échelle $\overrightarrow{r}$ du champ turbulent. De plus, la relation (1.16) met en évidence un terme supplémentaire : le transfert énergétique au sein de la cascade turbulente. La cohabitation d'une large variété d'échelles au sein des écoulements turbulents induit des transferts énergétiques qui sont analytiquement caractérisés par ce terme.

Considérons maintenant la limite aux grandes échelles de (1.16). En remarquant que dans le cas d'un écoulement homogène, les statistiques au point $\overrightarrow{x}$ et au point $\overrightarrow{x}^+$ sont égales, le développement de (1.16) aux grandes échelles aboutit à :

$$\frac{1}{2}\overline{U}_j\frac{\partial\overline{q^2}}{\partial x_j}+\frac{\partial}{\partial x_j}\left(\overline{u_jp}+\frac{1}{2}\overline{u_jq^2}\right)+\overline{u_ju_i}\frac{\partial\overline{U_i}}{\partial x_j}+\overline{\epsilon}=0. \tag{1.18}$$

La limite aux grandes échelles du bilan en deux points est le bilan en un point de Osborne Reynolds exposé précédemment. Le bilan en un point est donc d'une importance primordiale en tant qu'étape préliminaire de l'estimation du bilan à chaque échelle (1.16). Il permet d'estimer la contribution énergétique des termes à grandes échelles afin de déterminer dans quelle mesure ils doivent être pris en compte, ou non.

Chaque terme de la relation (1.16) dépend du vecteur de séparation $\overrightarrow{r}=\overrightarrow{r_x}+\overrightarrow{r_y}+\overrightarrow{r_z}$. À partir d'une DNS 3D précisément résolue, chaque terme pourrait être estimé sans autre hypothèse. Ce n'est pas le cas dans le cadre de confrontation avec des expériences physiques, pour lesquelles il est quasi impossible d'accéder à l'intégralité du champ turbulent. D'autre part, survient le problème de la représentation des résultats puisque le problème est en six dimensions (x, y, z et r_x, r_y, r_z). Le fer de lance de Danaila *et al.* [40], [45] et de ses prédécesseurs : Taylor [131], Kármán et Howarth [84], Kolmogorov [78], Yaglom [143], Monin et Yaglom [101] est de simplifier sa forme sous une forme 'observable' par l'expérience. La première hypothèse consiste alors à considérer la forme localement homogène et isotrope du bilan à chaque échelle.

1.2.2 Contexte localement homogène et isotrope

L'hypothèse d'isotropie et d'homogénéité locale est l'hypothèse la plus couramment employée dans les descriptions analytiques de la turbulence. Cette idée provient de la théorie de Kolmogorov [78] qui stipule qu'il existe une échelle à partir de laquelle les statistiques ne sont plus corrélées à la topologie de l'injection d'énergie et se comportent de manière isotrope. Taylor [131], Kármán et Howarth [84] considéraient quant à eux l'isotropie globale, c'est-à-dire pour l'intégralité des échelles.

L'isotropie locale signifie que les statistiques de la vitesse sont invariantes par rotation et par symétrie. La propriété de symétrie est le plus souvent mise de côté alors qu'elle implique également l'homogénéité locale (invariance par translation). En revanche, la réciproque n'est pas juste, car l'homogénéité locale n'induit pas inéluctablement l'isotropie locale. Pour beaucoup, la juxtaposition des mots "homogène" et "isotrope" est donc un pléonasme. En réalité pas tout à fait. Elle signifie qu'un certain nombre de simplifications proviennent de l'hypothèse - bien moins restrictive - d'homogénéité locale seule, et d'autres simplifications font suite à l'invocation de l'hypothèse d'isotropie locale.

En effet, si l'on suppose l'homogénéité locale, le terme visqueux devient :

$$\mathcal{V}=2\nu\frac{\partial^2}{\partial r_j^2}\overline{\Delta q^2} \tag{1.19}$$

du fait que l'homogénéité induit $\overline{\frac{\partial u_i}{\partial x_j}\frac{\partial u_j}{\partial x_i}} = 0$ et $\frac{\partial^2}{\partial X_j^2}\overline{\Delta q^2} = 0$ [68], [69], [70]. Ensuite, en invoquant l'isotropie locale on accède à un second niveau de simplification. En effet, l'isotropie signifie donc que chaque terme de la relation (1.16) ne dépend pas de l'orientation du vecteur $\overrightarrow{r}$, mais uniquement de son module r. En d'autres termes, les opérateurs gradient et laplacien peuvent être exprimés en coordonnées sphériques :

$$\frac{\partial}{\partial r_j} = \frac{2}{r} + \frac{\partial}{\partial r}, \qquad \frac{\partial^2}{\partial r_j^2} = \left(\frac{2}{r} + \frac{\partial}{\partial r}\right)\frac{\partial}{\partial r} \tag{1.20}$$

Puis, en multipliant (1.16) par r^2, en intégrant vis à vis de r puis en divisant par r^2, on obtient :

$$\frac{1}{r^2}\int_0^r s^2\left(\mathcal{I} + \mathcal{A} + \mathcal{P} + \mathcal{D} + \mathcal{D}_p\right) ds + \overline{\Delta u_\parallel \Delta q^2} - 2\nu\frac{\partial}{\partial r}\overline{\Delta q^2} + \frac{4}{3}\left(\overline{\epsilon}\right) r = 0, \tag{1.21}$$

qui est la forme localement isotrope du bilan à chaque échelle dans laquelle s est une variable muette et l'indice $\parallel$ signifie parallèle à la direction de $\vec{r}$. A partir d'expériences, la séparation spatiale est calculée le plus souvent grâce à l'hypothèse de Taylor. La direction de $\vec{r}$ coïncide alors avec la direction de l'écoulement moyen. En ignorant les termes à grandes échelles, on retrouve l'équation de Yaglom [101] déterminée dans le contexte du scalaire passif :

$$\overline{\Delta u_\parallel \Delta q^2} - 2\nu\frac{d}{dr}\overline{\Delta q^2} + \frac{4}{3}\overline{\epsilon} r = 0 \tag{1.22}$$

Ces équations mettent donc en lumière une possible analogie entre le comportement d'un scalaire passif (température, concentration) et de l'énergie cinétique totale turbulente [5]. Cette analogie est d'importance capitale pour un aspect pratique de modélisation des statistiques du scalaire. En effet, connaissant le champ de vitesse, on pourrait prédire le champ de scalaire. Cela motiva de nombreux travaux, notamment ceux de Fulachier [59], Fulachier et Antonia [58], Antonia *et al.* [5]. Cependant, la pratique montre que la formulation du bilan énergétique est certes la même, mais que les différents processus ne s'équilibrent pas de la même manière. C'est par exemple le cas dans le contexte d'un écoulement de turbulence de grille chauffé par une mandoline [44], [46].

Dans la zone inertielle où les effets visqueux et les termes à grandes échelles sont supposés faibles, on a :

$$-\overline{\Delta u_\parallel \Delta q^2} = \frac{4}{3}\overline{\epsilon} r. \tag{1.23}$$

Cette dernière relation est connue sous le nom de loi '4/3'. En pratique, les nombres de Reynolds rencontrés dans les écoulements de laboratoire ou industriels ne sont jamais suffisamment grands pour que la relation (1.23) soit vérifiée. Cela provient du fait que la

contribution énergétique des effets à grandes échelles et des effets visqueux s'entrecroisent au sein des échelles de la zone inertielle. On observe donc que :

$$-\frac{\overline{\Delta u_{\parallel}\Delta q^2}}{\overline{\epsilon}r} \leq \frac{4}{3}. \tag{1.24}$$

De nombreuses validations expérimentales de (1.21) ont été effectuées [40], [45], [43], [48], [7], [39], dans de nombreux écoulements canoniques de la turbulence de grille au jet en passant par le canal pleinement développé. Pour chacun de ces écoulements, des formes particulières de (1.21) sont utilisées selon l'importance des termes à grandes échelles. Il est à noter qu'aucune validation n'a été faite dans le sillage d'un obstacle.

- la turbulence de grille : L'unique direction d'inhomogénéité à grande échelle en turbulence de grille est la direction d'advection de l'écoulement dirigé vers x. Il est ainsi nécessaire de prendre en compte le terme de transport par le champ moyen porté par la vitesse moyenne longitudinale U. L'équation devient [43], [46], [7] :

$$\frac{\overline{U}}{r^2}\int_0^r s^2\frac{\partial\overline{\Delta q^2}}{\partial x}ds + \overline{\Delta u\Delta q^2} - 2\nu\frac{d}{dr}\overline{\Delta q^2} + \frac{4}{3}\overline{\epsilon}r = 0 \tag{1.25}$$

- la ligne centrale d'un jet rond : En plus du terme d'advection, le terme de production longitudinale associée au gradient longitudinal de vitesse moyenne est important. L'équation devient alors [45], [28] :

$$\frac{\overline{U}}{r^2}\int_0^r s^2\frac{\partial\overline{\Delta q^2}}{\partial x}ds + 2\frac{\partial\overline{U}}{\partial x}\frac{1}{r^2}\int_0^r s^2\left(\overline{(\Delta u)^2} - \overline{(\Delta v)^2}\right)ds + \overline{\Delta u\Delta q^2} - 2\nu\frac{d}{dr}\overline{\Delta q^2} + \frac{4}{3}\overline{\epsilon}r = 0 \tag{1.26}$$

- la ligne centrale d'un canal plan : pour cet écoulement, le terme de diffusion transversal est à considérer. L'équation devient alors [39] :

$$\frac{1}{r^2}\int_0^r \frac{s^2}{2}\left(\frac{\partial}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial y^+}\right)\overline{(v+v^+)\,\Delta q^2}ds + \overline{\Delta u\Delta q^2} - 2\nu\frac{d}{dr}\overline{\Delta q^2} + \frac{4}{3}\overline{\epsilon}r = 0 \tag{1.27}$$

- Une zone de cisaillement homogène : seul le terme de production transversal est important [42] :

$$\frac{2}{r^2}\frac{\partial\overline{U}}{\partial y}\int_0^r s^2\overline{\Delta u\Delta v}ds + \overline{\Delta u\Delta q^2} - 2\nu\frac{d}{dr}\overline{\Delta q^2} + \frac{4}{3}\overline{\epsilon}r = 0 \tag{1.28}$$

Cependant l'hypothèse d'isotropie locale n'est pas toujours vérifiée. Le cisaillement est en effet souvent à l'origine d'une anisotropie forte dont l'effet se ressent jusqu'aux plus petites échelles [51]. Aussi, la description se doit d'être plus générale encore. Nous libérons donc un degré d'anisotropie supplémentaire en considérant l'axisymétrie locale.

1.2.3 Contexte localement axisymétrique

L'hypothèse suivante faisant suite à la relaxation de l'hypothèse d'isotropie locale, est de supposer l'axisymétrie locale. Cette supposition est la manière la plus simple de traiter l'anisotropie d'un point de vue mathématique et expérimental.

En 1946, soit huit ans après l'écriture de l'équation de Kármán-Howarth [84] et cinq ans après les travaux de Kolmogorov [77], Batchelor [12] dérive l'équation de transport des corrélations de vitesses sous la forme axi-symétrique. Depuis, la description analytique des écoulements turbulents statistiquement axisymétriques fut complétée par Chandrasekhar [31]. Puis, Linborg [89] simplifie la description axisymétrique prodiguée par Batchelor et Chandrasekhar en terme de scalaires mesurables, en vue de sa validation expérimentale (Sjögren and Johansson [129]). Une théorie complémentaire concernant l'équation de transport des corrélations du champ scalaire est aussi traitée par Shivamoggi et Antonia [128]. Enfin, Danaila *et al.* [47] dérivent l'analogue de l'équation de Yaglom (où le scalaire est l'énergie cinétique totale) sous la forme axysimétrique. Ce paragraphe a pour objet de résumer brièvement la dérivation de cette dernière équation.

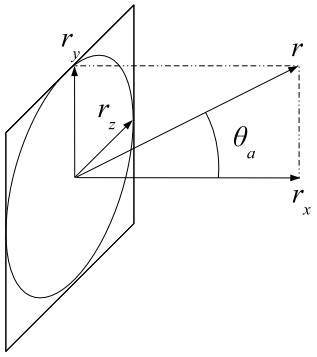


FIGURE 1.1 – Représentation schématique de l'axisymétrie

L'axisymétrie signifie que les statistiques sont invariantes par rotation sur tout plan perpendiculaire à un axe appelé axe d'axisymétrie, noté $\overrightarrow{n_a}$. Sur la Fig. 1.1 l'axe d'axisymétrie $\overrightarrow{n_a}$ est aligné avec l'axe r_x, les statistiques sont alors invariantes par rotation sur le plan $(\overrightarrow{r_y}, \overrightarrow{r_z})$. Comme [128] ou [47], l'équation (1.16) est alors dépendante de deux variables : r le module de la séparation et μ_a est le cosinus de l'angle Θ_a entre l'axe d'axisymétrie $\overrightarrow{n_a}$ et le vecteur séparation $\overrightarrow{r}$. Les corrélations triples sont alors écrites comme [128] :

$$\overline{\Delta u_j \Delta q^2} = M_a(r_a, \mu_a) r_j + N_a(r_a, \mu_a) n_j \tag{1.29}$$

si bien que les projections sur les directions parallèles et perpendiculaires à l'axe d'axisy-

métrie s'écrivent :

$$\begin{aligned}\overline{\Delta u_\perp \Delta q^2}\,(r,\mu_a) &= M_a r\sqrt{1-\mu_a^2}\\ \overline{\Delta u_{||} \Delta q^2}\,(r,\mu_a) &= M_a r\mu_a + N_a\end{aligned} \tag{1.30}$$

avec l'indice $\perp$ et $||$ indiquant la direction perpendiculaire et parallèle à l'axe d'axisymétrie $\overrightarrow{n_a}$ respectivement. On a donc :

$$\frac{\partial}{\partial r_j} = \left(r\frac{\partial}{\partial r} + 3\right) M_a + \left(\mu_a \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1-\mu_a^2}{r}\frac{\partial}{\partial \mu_a}\right) N_a \tag{1.31}$$

Puis on introduit $\mathcal{V}$ tel que $N_a = \left(2 + r\frac{\partial}{\partial r}\right)\mathcal{V} = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\mathcal{V}\right)$ où $\mathcal{V} = \frac{1}{r^2}\int_0^r N_a ds$ avec s une variable muette. On définit ensuite :

$$N_a^* = \left(\mu_a \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1-\mu_a^2}{r}\frac{\partial}{\partial \mu_a}\right)\mathcal{V}, \tag{1.32}$$

et $G(r,\mu_a) = M_a + N_a^*$. En remarquant que $\left(r\frac{\partial}{\partial r} + 3\right) = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}r^3$ et en intégrant selon la séparation r on obtient :

$$\begin{aligned}\frac{1}{r^3}\int_0^r s^2\left(\mathcal{I}(r,\mu_a) + \mathcal{A}(r,\mu_a) + \mathcal{P}(r,\mu_a) + \mathcal{D}(r,\mu_a) + \mathcal{D}_p(r,\mu_a)\right) ds\\ + G(r,\mu_a) - 2\nu\int_0^r s^2 \nabla^2_{r,\mu_a}.\overline{\Delta q^2} ds + \frac{2}{3}\left(\overline{\epsilon} + \overline{\epsilon}^+\right) = 0,\end{aligned} \tag{1.33}$$

∇^2_{r,μ_a} correspond au laplacien dont la forme axisymétrique est :

$$\nabla^2_{r,\mu_a} = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{2}{r}\frac{\partial}{\partial r} - 2\frac{\mu_a}{r^2}\frac{\partial}{\partial \mu_a} + \frac{1-\mu_a^2}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial \mu_a^2}. \tag{1.34}$$

La relation (1.33) représente le bilan énergétique à une échelle r dans le cadre d'un champ turbulent axisymétrique. Il est à noter que ce bilan se réduit au bilan localement isotrope si la dépendance à l'angle μ_a est annihilée. Le terme G est l'analogue du terme de transfert dans un contexte localement isotrope. Dans le dernier chapitre de cette thèse, ce terme particulier est estimé afin de caractériser l'anisotropie du transfert énergétique sur le point d'impact de deux jets opposés.

Une validation partielle de l'équation (1.33) est prodiguée par Danaila *et al.* [47] dans l'écoulement se développant au sein du réacteur partiellement pré-mélangé en configuration de jets opposés.

Finalement, nous disposons de deux bilans énergétiques décrivant les phénomènes de transport, production, dissipation et transfert à une échelle r donnée, dans le cas localement isotrope ou axisymmétrique. Cependant, la distinction entre le mouvement cohérent et aléatoire n'est pas prise en compte dans ces équations. De la même manière que Reynolds et Hussain [119], il est intéressant de réécrire ces bilans en dissociant le mouvement cohérent de la partie aléatoire. Ce point particulier n'a pas encore été traité dans la littérature. À notre connaissance cette thèse constitue une première étude analytique sur ce sujet.

1.2.4 Bilans à chaque échelle dissociant cohérence et turbulence

Cas général. Les équations (1.10) et (1.11) sont le point de départ de l'établissement des bilans énergétiques à une échelle prenant en considération le mouvement cohérent. (1.10) et (1.11) sont alors écrit en $\overrightarrow{x}$ et au point $\overrightarrow{x}^+$ séparés d'une distance $\overrightarrow{r}$ puis soustraites. On obtient alors les équations dynamiques des incréments Δ du mouvement cohérent et aléatoire respectivement :

$$\frac{\partial \Delta\tilde{u}_i}{\partial t} + \Delta\left(\overline{U}_j \frac{\partial \tilde{u}_i}{\partial x_j}\right) + \Delta\left(\tilde{u}_j \frac{\partial \overline{U}_i}{\partial x_j}\right) + \Delta\left(\frac{\partial}{\partial x_j}\left(\tilde{u}_i\tilde{u}_j - \overline{\tilde{u}_i\tilde{u}_j}\right)\right)$$
$$+\Delta\left(\frac{\partial}{\partial x_j}\left(\left\langle u_i' u_j'\right\rangle - \overline{u_i' u_j'}\right)\right) = -\left(\frac{\partial}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_i^+}\right)\Delta\tilde{p} + \nu\left(\frac{\partial^2}{\partial x_j^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_j^{+2}}\right)\Delta\tilde{u}_i \quad (1.35)$$

$$\frac{\partial \Delta u_i'}{\partial t} + \Delta\left(\overline{U}_j \frac{\partial u_i'}{\partial x_j}\right) + \Delta\left(\tilde{u}_j \frac{\partial u_i'}{\partial x_j}\right) + \Delta\left(u_j' \frac{\partial \overline{U}_i}{\partial x_j}\right) + \Delta\left(u_j' \frac{\partial \tilde{u}_i}{\partial x_j}\right)$$
$$+\Delta\left(\frac{\partial}{\partial x_j}\left(u_i'u_j' - \left\langle u_i'u_j'\right\rangle\right)\right) = -\left(\frac{\partial}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_i^+}\right)\Delta p' + \nu\left(\frac{\partial^2}{\partial x_j^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_j^{+2}}\right)\Delta u_i' \quad (1.36)$$

En utilisant les propriétés (1.6,1.7,1.15), en multipliant (1.35) par $2\Delta\tilde{u}_i$ et (1.36) par $2\Delta u_i'$, en appliquant la moyenne de phase puis la moyenne temporelle, puis en notant que :

$$\left\langle \Delta u_j' \Delta u_i' \right\rangle = \left\langle \Delta u_i \Delta u_j \right\rangle - \Delta\tilde{u}_i \Delta\tilde{u}_j \quad (1.37)$$
$$\overline{\left\langle \Delta u_j \Delta q^2 \right\rangle} = \overline{\Delta\tilde{u}_j \Delta\tilde{q}^2} + \overline{\Delta\tilde{u}_j \left\langle \Delta q'^2 \right\rangle} + \overline{\left\langle \Delta u_j' \Delta q'^2 \right\rangle} + 2\overline{\Delta\tilde{u}_i \left\langle \Delta u_j' \Delta u_i' \right\rangle}, \quad (1.38)$$

pour l'énergie du mouvement cohérent, on obtient après quelques efforts :

$$\overline{\frac{\partial}{\partial t}\Delta\tilde{q}^2} + \overline{U}_j \frac{\partial \overline{\Delta\tilde{q}^2}}{\partial x_j} + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x_j} + \frac{\partial}{\partial x_j^+}\right)\left[\overline{\left(\tilde{u}_j + \tilde{u}_j^+\right)\Delta\tilde{q}^2} + 2\overline{\left\langle \left(u_j' + u_j'^+\right)\Delta u_i'\right\rangle \Delta\tilde{u}_i}\right]$$
$$+2\overline{\Delta\tilde{u}_i\Delta\tilde{u}_j}\frac{\partial \overline{U}_i}{\partial x_j} - \overline{\left\langle \left(u_j' + u_j'^+\right)\Delta u_i'\right\rangle \left(\frac{\partial}{\partial x_j} + \frac{\partial}{\partial x_j^+}\right)\Delta\tilde{u}_i} + 2\left(\frac{\partial}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_i^+}\right)\overline{\Delta\tilde{u}_i\Delta\tilde{p}}$$
$$+\frac{\partial}{\partial r_j}\overline{\Delta\tilde{u}_j\Delta\tilde{q}^2} + 2\overline{\Delta\tilde{u}_i\frac{\partial}{\partial r_j}\left\langle \Delta u_i'\Delta u_j'\right\rangle} + \nu\left[-\left(2\frac{\partial^2}{\partial r_j^2} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial X_j^2}\right)\overline{\Delta\tilde{q}^2}\right]$$
$$-2\nu\left[\left(\overline{\frac{\partial\tilde{u}_i}{\partial x_j}\frac{\partial\tilde{u}_j}{\partial x_i}} + \overline{\frac{\partial\tilde{u}_i^+}{\partial x_j^+}\frac{\partial\tilde{u}_j'^+}{\partial x_i^+}}\right)\right] + 2\left(\bar{\tilde{\epsilon}} + \bar{\tilde{\epsilon}}^+\right) = 0 \quad (1.39)$$

et concernant le mouvement aléatoire, nous obtenons :

$$\overline{\frac{\partial}{\partial t}\Delta q'^2} + \overline{U}_j \frac{\partial \overline{\Delta q'^2}}{\partial x_j} + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x_j} + \frac{\partial}{\partial x_j^+}\right)\left[\overline{\left(u'_j + u'^+_j\right)\Delta q'^2} + \overline{\left(\tilde{u}_j + \tilde{u}_j^+\right)\left\langle \Delta q'^2 \right\rangle}\right]$$
$$+2\overline{\Delta u'_i \Delta u'_j}\frac{\partial \overline{U}_i}{\partial x_j} + \overline{\left\langle \left(u'_j + u'^+_j\right)\Delta u'_i \right\rangle}\left(\frac{\partial}{\partial x_j} + \frac{\partial}{\partial x_j^+}\right)\Delta\tilde{u}_i + 2\left(\frac{\partial}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_i^+}\right)\overline{\Delta u'_i \Delta p'}$$
$$+\frac{\partial}{\partial r_j}\left(\overline{\left\langle \Delta u_j \Delta q^2 \right\rangle} - \overline{\Delta\tilde{u}_j \Delta\tilde{q}^2}\right) - 2\overline{\Delta\tilde{u}_i \frac{\partial}{\partial r_j}\left\langle \Delta u'_i \Delta u'_j \right\rangle}$$
$$+\nu\left[-\left(2\frac{\partial^2}{\partial r_j^2} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial X_j^2}\right)\overline{\Delta q'^2} - 2\left(\overline{\frac{\partial u'_i}{\partial x_j}\frac{\partial u'_j}{\partial x_i}} + \overline{\frac{\partial u'^+_i}{\partial x_j^+}\frac{\partial u'^+_j}{\partial x_i^+}}\right)\right] + 2\left(\overline{\epsilon'} + \overline{\epsilon'}^+\right) = 0 \quad (1.40)$$

Où $\overline{\Delta\tilde{q}^2} = \overline{\Delta\tilde{u}_i \Delta\tilde{u}_i}$ et $\overline{\Delta q'^2} = \overline{\Delta u'_i \Delta u'_i}$ est l'énergie cinétique totale des échelles $\leq ||\overrightarrow{r}||$ du mouvement cohérent et aléatoire respectivement et $\overline{\tilde{\epsilon}} = \frac{1}{2}\nu\overline{\left(\frac{\partial\tilde{u}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial\tilde{u}_j}{\partial x_i}\right)^2}$ et $\overline{\epsilon'} = \frac{\nu}{2}\overline{\left(\frac{\partial u'_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u'_j}{\partial x_i}\right)^2}$ est le taux moyen de dissipation du mouvement cohérent et aléatoire.

Par simplicité, (1.39) et (1.40) peuvent être réécrites formellement de la manière suivante :

$$\mathcal{I}_c + \mathcal{A}_{cm} + \mathcal{D}_{cc} + \mathcal{D}^1_{rc} + \mathcal{P}_{cm} - \mathcal{P}_{rc} + \mathcal{D}_{cp} + \mathcal{T}_c + \mathcal{F}_c + \mathcal{V}_c + 2\left(\overline{\tilde{\epsilon}} + \overline{\tilde{\epsilon}}^+\right) = 0 \quad (1.41)$$

$$\mathcal{I}_r + \mathcal{A}_{rm} + \mathcal{D}_{rr} + \mathcal{D}^2_{rc} + \mathcal{P}_{rm} + \mathcal{P}_{rc} + \mathcal{D}_{rp} + \mathcal{T} - \mathcal{T}_c - \mathcal{F}_c + \mathcal{V}_r + 2\left(\overline{\epsilon'} + \overline{\epsilon'}^+\right) = 0 \quad (1.42)$$

où $\mathcal{I}$, $\mathcal{A}$, $\mathcal{D}$, $\mathcal{P}$, $\mathcal{T}$, $\mathcal{F}$ et $\mathcal{V}$ dénotent respectivement les termes de non stationnarité, d'advection, de diffusion, de production, de transfert, forçage et visqueux. Les indices m, c, r correspondent à la moyenne, au mouvement cohérent et aléatoire et $\mathcal{D}_p$ est la diffusion par la pression.

Un point de vérification important de la véracité de ces relations est la limite aux grandes échelles. Sachant que, dans le cas d'un champ homogène les statistiques au point $\overrightarrow{x}$ et au point $\overrightarrow{x}^+$ tendent vers des valeurs égales, la relation (1.39) tend vers

$$\frac{1}{2}\overline{U}_j \frac{\partial}{\partial x_j}\overline{\tilde{q}^2} + \overline{\tilde{u}_i\tilde{u}_j}\frac{\partial \overline{U}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\overline{\tilde{u}_j\tilde{p}} + \frac{1}{2}\overline{\tilde{u}_j\tilde{q}^2} + \overline{\tilde{u}_i\left\langle u'_i u'_j \right\rangle}\right) - \overline{\left\langle u'_i u'_j \right\rangle \frac{\partial\tilde{u}_i}{\partial x_j}} + \overline{\tilde{\epsilon}} = 0, \quad (1.43)$$

et (1.40) tend vers :

$$\frac{1}{2}\overline{U}_j \frac{\partial}{\partial x_j}\overline{q'^2} + \overline{u'_i u'_j}\frac{\partial \overline{U}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\overline{u'_j p'} + \frac{1}{2}\overline{u'_j q'^2} + \frac{1}{2}\overline{\tilde{u}_j\left\langle q'^2 \right\rangle}\right) + \overline{\left\langle u'_i u'_j \right\rangle \frac{\partial\tilde{u}_i}{\partial x_j}} + \overline{\epsilon'} = 0. \quad (1.44)$$

Ces relations sont les bilans en un point construit par Reynolds et Hussain [119] exposés précédemment. A la différence de Reynolds et Hussain pour lesquels il s'agit

du bilan intégré sur toutes les échelles du champ fluctuant, nous avons ici construit un cadre analytique permettant d'observer l'équilibre énergétique à l'échelle $\overrightarrow{r}$ considérée. Apparaissent donc des termes supplémentaires notamment ceux de transfert et forçage, dont l'intégrale est nulle sur toutes les échelles et qui ne sont donc pas présents dans le bilan en un point. Ces termes sont le siège des échanges énergétiques entre la partie cohérente et aléatoire du champ fluctuant et sont ainsi d'une importance primordiale dans la modélisation du processus de cascade et d'interaction entre le mouvement ordonné et aléatoire. D'autre part, les termes $\mathcal{P}_{rc}$, $\mathcal{T}_c$ et $\mathcal{F}_c$ apparaissent dans les deux équations, seul leur signe change d'une relation à l'autre. Cela prouve que ce qui constitue une perte pour le mouvement cohérent correspond à un gain d'énergie pour le champ aléatoire.

Contexte localement homogène et isotrope. Intéressons-nous maintenant au développement de (1.39) et (1.40) dans un cas localement homogène et isotrope. En l'état, la formulation générale des bilans en deux points prenant en considération le mouvement ordonné aboutit à une description en six dimensions : 3 dimensions d'espace (x, y, z) et les trois dimensions des séparations spatiales (r_x, r_y, r_z). Il est donc nécessaire de limiter l'approche à un nombre inférieur de dimension afin de rendre les résultats observables. En outre, cette étape permet de rendre les équations (1.39) et (1.40) comparables avec les considérations analytiques isotropes précédemment mises en œuvre [84], [78], [143], [45]. Enfin, la formulation isotrope pourra être confrontée à l'expérience.

Les opérateurs divergence et laplacien sont alors exprimés en coordonnées sphériques. En multipliant par r^2, intégrant vis à vis de r puis en divisant par r^2 on obtient :

$$\frac{1}{r^2}\int_0^r s^2\left(\mathcal{A}_{cm}+\mathcal{D}_{cc}+\mathcal{D}^1_{rc}+\mathcal{P}_{cm}-\mathcal{P}_{rc}+\mathcal{D}_{cp}\right)ds$$
$$+\overline{\Delta\tilde{u}_\parallel\Delta\tilde{q}^2}+\frac{2}{r^2}\int_0^r\overline{\Delta\tilde{u}_i\frac{\partial}{\partial s}s^2\left\langle\Delta u'_\parallel\Delta u'_i\right\rangle}ds-2\nu\frac{\partial}{\partial r}\overline{\Delta\tilde{q}^2}+\frac{4}{3}\bar{\tilde{\epsilon}}r=0 \tag{1.45}$$

pour le champ cohérent, et

$$\frac{1}{r^2}\int_0^r s^2\left(\mathcal{A}_{rm}+\mathcal{D}_{rr}+\mathcal{D}^2_{rc}+\mathcal{P}_{rm}+\mathcal{P}_{rc}+\mathcal{D}_{rp}\right)ds$$
$$+\overline{\left\langle\Delta u_\parallel\Delta q^2\right\rangle}-\overline{\Delta\tilde{u}_\parallel\Delta\tilde{q}^2}-\frac{2}{r^2}\int_0^r\overline{\Delta\tilde{u}_i\frac{\partial}{\partial s}s^2\left\langle\Delta u'_\parallel\Delta u'_i\right\rangle}ds-2\nu\frac{\partial}{\partial r}\overline{\Delta q'^2}+\frac{4}{3}\overline{\epsilon'}r=0 \tag{1.46}$$

pour le champ aléatoire. En comparant (1.46) à (1.21), on remarque que outre la différence des termes à grande échelle, le transfert effectif de la partie aléatoire du mouvement cohérent est le transfert total (cohérent + aléatoire) auquel est soustrait le transfert énergétique du champ cohérent, ainsi que le terme de forçage. En termes plus scientifiques :

$$\text{Transfert effectif}=\overline{\left\langle\Delta u_\parallel\Delta q^2\right\rangle}-\overline{\Delta\tilde{u}_\parallel\Delta\tilde{q}^2}-\frac{2}{r^2}\int_0^r\overline{\Delta\tilde{u}_i\frac{\partial}{\partial s}s^2\left\langle\Delta u'_\parallel\Delta u'_i\right\rangle}ds \tag{1.47}$$

1.3 Conclusion

Nous allons conclure cette section fondamentale en répertoriant les différents bilans dont nous venons de discuter. La Fig. 1.2 montre comment ces différentes relations s'imbriquent les unes dans les autres. La forme de la pyramide fut choisie, non pas pour placer cette étude en haut de l'échiquier mais parce qu'elle montre qu'il s'agit d'une progression. Sans les fondations, impossible de bâtir le reste. Sans les géants, impossible de voir plus loin.

Les bilans énergétiques sont de deux types : bilans en un et deux point, chacun d'eux se dissociant encore en deux parties : par la prise en compte ou non du mouvement cohérent.

La base de la pyramide est le bilan en un point des fluctuations totales proposé par O. Reynolds. Puis Reynolds et Hussain affinent cette description en dissociant la partie cohérente de la partie aléatoire du champ de vitesse. D'autre part, afin d'observer les mécanismes propres à l'énergie à une échelle particulière, Danaila *et al.* [45] généralisent les bilans en deux points construits par ses prédécesseurs : Kármán Howarth [84], Kolmogorov [78], Yaglom [143], sous leur forme complète, localement isotrope ou axisymétrique. De la même manière que Reynolds et Hussain, nous ajoutons une brique à l'édifice en considérant la séparation des structures cohérentes du reste du champ fluctuant dans les bilans en deux points.

Lorsque les bilans en deux points sont étudiés dans la limite de très grandes séparations, les bilans en un point sont retrouvés. La contribution énergétique des termes à grandes échelles (notés LST) des bilans en deux points peut donc être évaluée à partir des bilans en un point.

Le tableau ci-après répertorie les différentes expressions de chacun de ces bilans.

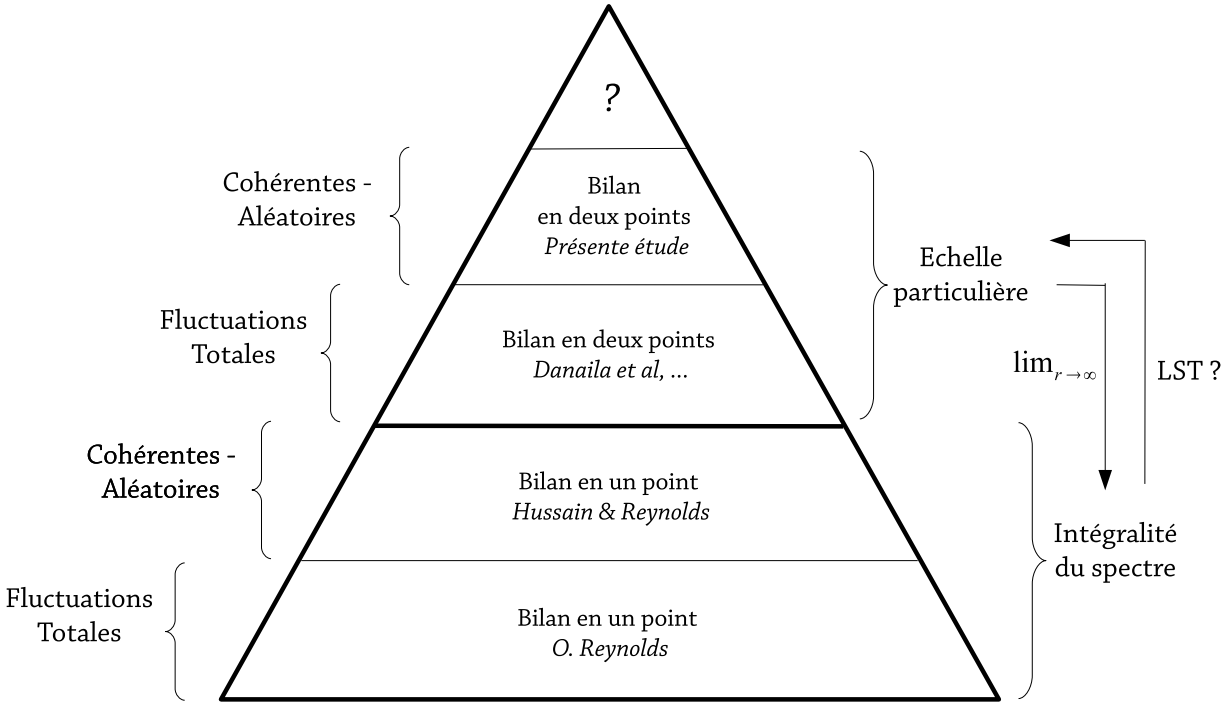


FIGURE 1.2 – Imbrication des différents bilans énergétiques discutés dans cette étude

FLUCTUATIONS TOTALES	FLUCTUATIONS COHÉRENTES - ALÉATOIRES
BILAN EN UN POINT	
$\frac{1}{2}\overline{U}_j\frac{\partial\overline{q^2}}{\partial x_j}+\frac{\partial}{\partial x_j}\left(\overline{u_j p}+\frac{1}{2}\overline{u_j q^2}\right)+\overline{u_j u_i}\frac{\partial\overline{U_i}}{\partial x_j}+\overline{\epsilon}=0$	$\frac{1}{2}\overline{U}_j\frac{\partial}{\partial x_j}\overline{\tilde{q}^2}+\frac{\partial}{\partial x_j}\left(\overline{\tilde{u}_j\tilde{p}}+\frac{1}{2}\overline{\tilde{u}_j\tilde{q}^2}+\overline{\tilde{u}_i\left\langle u_i' u_j'\right\rangle}\right)$ $+\overline{\tilde{u}_i\tilde{u}_j}\frac{\partial\overline{U}_i}{\partial x_j}-\overline{\left\langle u_i' u_j'\right\rangle}\frac{\partial\tilde{u}_i}{\partial x_j}+\overline{\tilde{\epsilon}}=0$ $\frac{1}{2}\overline{U}_j\frac{\partial}{\partial x_j}\overline{q'^2}+\frac{\partial}{\partial x_j}\left(\overline{u_j' p'}+\frac{1}{2}\overline{u_j' q'^2}+\frac{1}{2}\overline{\tilde{u}_j\left\langle q'^2\right\rangle}\right)$ $+\overline{u_i' u_j'}\frac{\partial\overline{U}_i}{\partial x_j}+\overline{\left\langle u_i' u_j'\right\rangle}\frac{\partial\tilde{u}_i}{\partial x_j}+\overline{\epsilon'}=0$
FORME GÉNÉRALE DES BILANS EN DEUX POINTS	
$\mathcal{I}+\mathcal{A}+\mathcal{P}+\mathcal{D}+\mathcal{D}_p$ $+\frac{\partial}{\partial r_j}\overline{\Delta u_j\Delta q^2}-2\nu\frac{\partial^2}{\partial r_j^2}\overline{\Delta q^2}+2\left(\overline{\epsilon}+\overline{\epsilon}^+\right)=0$	$\mathcal{I}_c+\mathcal{A}_{cm}+\mathcal{D}_{cc}+\mathcal{D}^1_{rc}+\mathcal{P}_{cm}$ $-\mathcal{P}_{rc}+\mathcal{D}_{cp}+\mathcal{T}_c+\mathcal{F}_c+\mathcal{V}_c+2\left(\overline{\tilde{\epsilon}}+\overline{\tilde{\epsilon}}^+\right)=0$ $\mathcal{I}_r+\mathcal{A}_{rm}+\mathcal{D}_{rr}+\mathcal{D}^2_{rc}+\mathcal{P}_{rm}$ $+\mathcal{P}_{rc}+\mathcal{D}_{rp}+\mathcal{T}-\mathcal{T}_c-\mathcal{F}_c+\mathcal{V}_r+2\left(\overline{\epsilon'}+\overline{\epsilon'}^+\right)=0$
FORME ISOTROPE DES BILANS EN DEUX POINTS	
$\frac{1}{r^2}\int_0^r s^2\left(\mathcal{I}+\mathcal{A}+\mathcal{P}+\mathcal{D}+\mathcal{D}_p\right)ds$ $+\overline{\Delta u_\parallel\Delta q^2}-2\nu\frac{\partial}{\partial r}\overline{\Delta q^2}+\frac{4}{3}\left(\overline{\epsilon}\right)r=0$	$\frac{1}{r^2}\int_0^r s^2\left(\mathcal{A}_{cm}+\mathcal{D}_{cc}+\mathcal{D}^1_{rc}+\mathcal{P}_{cm}-\mathcal{P}_{rc}+\mathcal{D}_{cp}\right)ds$ $+\overline{\Delta\tilde{u}_\parallel\Delta\tilde{q}^2}+\frac{2}{r^2}\int_0^r\overline{\Delta\tilde{u}_i\frac{\partial}{\partial s}s^2\left\langle\Delta u_\parallel'\Delta u_i'\right\rangle}ds-2\nu\frac{\partial}{\partial r}\overline{\Delta\tilde{q}^2}+\frac{4}{3}\overline{\tilde{\epsilon}}r=0$ $\frac{1}{r^2}\int_0^r s^2\left(\mathcal{A}_{rm}+\mathcal{D}_{rr}+\mathcal{D}^2_{rc}+\mathcal{P}_{rm}+\mathcal{P}_{rc}+\mathcal{D}_{rp}\right)ds$ $+\overline{\left\langle\Delta u_\parallel\Delta q^2\right\rangle}-\overline{\Delta\tilde{u}_\parallel\Delta\tilde{q}^2}-\frac{2}{r^2}\int_0^r\overline{\Delta\tilde{u}_i\frac{\partial}{\partial s}s^2\left\langle\Delta u_\parallel'\Delta u_i'\right\rangle}ds$ $-2\nu\frac{\partial}{\partial r}\overline{\Delta q'^2}+\frac{4}{3}\overline{\epsilon'}r=0$

Chapitre 2

Dispositif Expérimental

"Ce sont les regardeurs qui font les tableaux"

Marcel Duchamp

Dans le cadre de cette thèse, la soufflerie fait office de toile blanche sur laquelle est peint le phénomène de turbulence. Tout repose sur l'œuvre ainsi créée en espérant qu'elle soit bien signée de la main de la Nature plutôt que de la main tremblante et maladroite de l'expérimentateur. Puis, des avis scientifiques sont émis à partir des observations effectuées via le prisme des techniques anémométriques. Cela laisse donc libre cours au doute, notamment quant à l'influence de l'expérimentateur sur les réalisations de la Nature, et la fidélité de ce nouvel œil à percevoir les moindres nuances spatiales et temporelles du phénomène.

Pour tout expérimentateur, la rigueur et la minutie sont donc de mise. La mise en place et les tests au préalable du dispositif expérimental concentrent une part majoritaire des efforts, se résumant pourtant à leur plus simple expression dans les publications. Souvent frustrante car peu valorisée, cette tâche de fond a tout de même la légèreté de chasser bon nombre de mauvaises nuits.

Ce chapitre a pour trait de détailler le dispositif expérimental mis en place lors de cette étude. En espérant ne pas transférer les efforts fournis sur la quantité allouée à ce chapitre dans le manuscrit, nous décrirons tout d'abord la soufflerie subsonique basse vitesse. Ensuite, nous passerons en revue les diverses méthodes anémométriques utilisées depuis la Velocimétrie par fil chaud jusqu'à la diffusion acoustique ultrasonore en passant par la Velocimétrie par Images de Particules (PIV/TR-PIV) sans oublier l'Anémométrie par Doppler Laser (ADL).

2.1 La soufflerie subsonique basse vitesse

Les expérimentations ont été menées dans une soufflerie subsonique, propriété du Coria et installée dans les locaux de l'INSA [1] de Rouen. Son histoire commence avec deux stages en 2007 [2] et 2008 [3] dont le but était, entre autre, de caractériser son bon fonctionnement.

La qualité d'une soufflerie est déterminée par sa capacité à générer un écoulement stable en temps, et homogène en espace. La vue de dessus de la soufflerie est décrite sur la Fig. 2.1. Il s'agit ici d'une soufflerie de type circuit fermé, la section d'essai carrée mesure 40 cm de coté. La Fig. 2.1 met en évidence un certain nombre de composants.

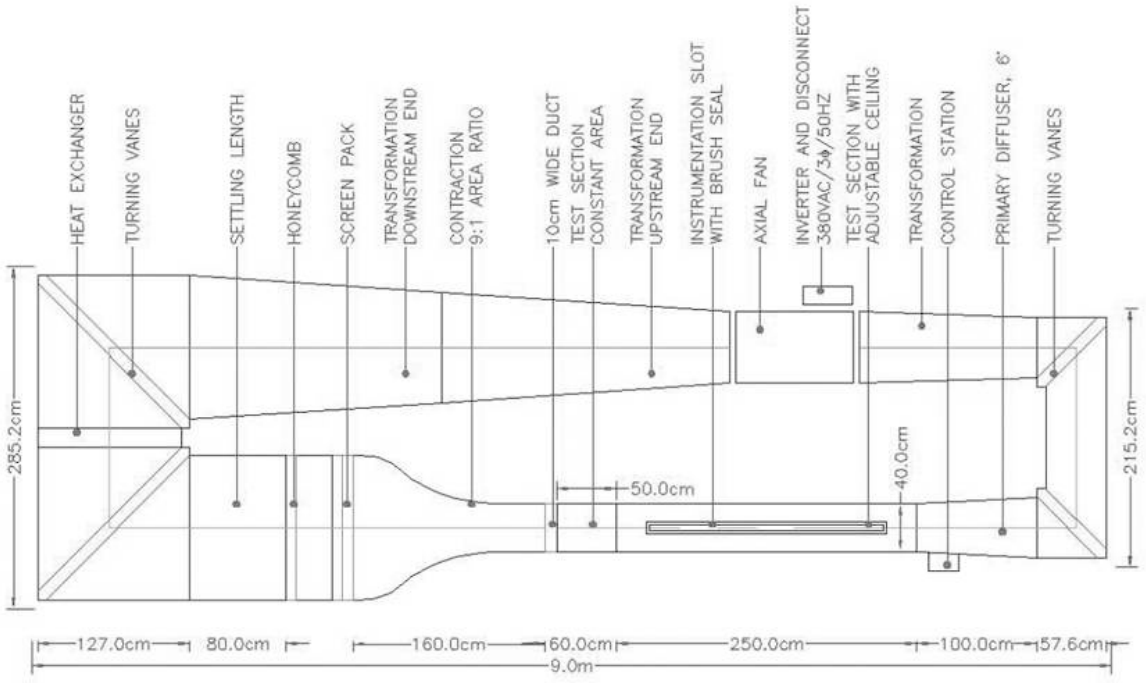


FIGURE 2.1 – Vue de dessus de la soufflerie subsonique présente au Coria

2.1.1 Le ventilateur axial

Le rôle du ventilateur (trad. *Axial fan* Fig. 2.1) est de générer l'écoulement. Il est actionné grâce à un moteur électrique triphasé dont la vitesse de rotation est proportionnelle à la fréquence de la tension sinusoïdale imposée à ses bornes. La vitesse de l'écoulement

1. Institut National des Sciences Appliquées
2. Stage technicien de 3 mois
3. Stage Master de 6 mois

et la vitesse de rotation du ventilateur axial sont liées par le premier des invariants de Rateau défini par :

$$\text{Coefficient de débit} = \frac{Q_v}{N_v R_v^3} = cte, \tag{2.1}$$

où R_v est le rayon des aubes du ventilateur, Q_v est le débit volumique et N_v la vitesse de rotation du ventilateur. Pour un même ventilateur, le rayon des aubes $R_v = cte$. Ainsi, la vitesse de l'écoulement dans la zone d'essai est proportionnelle à la vitesse de rotation N_v. La fonction transfert du ventilateur est exposée sur la Fig. 2.2. La vitesse de l'écoulement est mesurée grâce à un tube de Pitot placé dans la veine d'essai. La proportionnalité entre la vitesse de l'écoulement dans la veine d'essai et la vitesse de rotation du ventilateur est bien vérifiée.

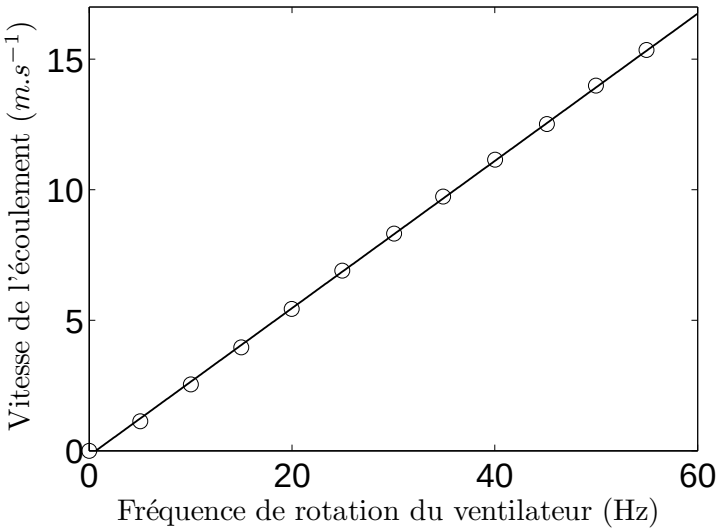


FIGURE 2.2 – Fonction transfert du ventilateur. ○ Mesures, —— fit linéaire

2.1.2 Le convergent

Le convergent(trad. *Contraction* Fig. 2.1) est l'organe le plus sensible d'une soufflerie. Il est le garant de la qualité de l'écoulement et fait toujours l'objet d'une attention particulière. Son rôle est d'accélérer le fluide et "d'aplatir" le profil type Poiseuille présent en amont du convergent. Le convergent doit satisfaire les contraintes suivantes : (*i*) un fort rapport de contraction $C_R = \frac{S_{in}}{S_{out}}$, c'est-à-dire un important ratio entre les sections d'entrée et de sortie, (*ii*) une longueur faible pour un encombrement limité, (*iii*) en évitant

tout décollement de couche limite de la surface du convergent. Ces décollements peuvent apparaitre après le point d'inflexion de la courbe du convergent, c'est-à-dire dans la partie où le gradient de pression longitudinal s'oppose à l'écoulement. Ils donnent lieu à des structures vorticitaires qui dégradent la qualité de l'écoulement dans la zone d'essai et perturbent le phénomène à mesurer.

Son dimensionnement a nécessité une étude spécifique réalisée par les soins de Georges Matheou, ancien membre de l'équipe de Paul Dimotakis (Caltech). A partir de simulations numériques, la courbure du convergent (ici $C_R = 9$) a été optimisée afin d'éviter tout décollement des couches limites. Pour vérifier ce point, nous utilisons une approche globale basée sur le coefficient de perte de charge singulière du convergent. Si des décollements apparaissent, ils seront associés à des recirculations locales et donc des pertes de quantité de mouvement. Globalement, toutes ces pertes ajoutées les unes aux autres provoquent un différentiel de pression supplémentaire entre l'entrée et la sortie du convergent de la forme $P_{sing} = \frac{1}{2} K_c \rho V_{out}^2$. À partir de la conservation du débit volumique et du théorème de Bernoulli, on déduit l'expression du coefficient de perte de charge singulière du convergent K_c :

$$K_c = \frac{2\left(P_{in} - P_{out}\right)}{\rho V_{out}^2} - 1 + C_R^{-2} \tag{2.2}$$

Les pressions P_{in} et P_{out} sont prélevées à partir de deux prises de pressions prévues à cet effet, situées à l'entrée et à la sortie du convergent. La différence de pression est mesurée grâce à un micromanomètre *Furness Control* dont la précision est de $0.1 mm H_20$ soit environ $1Pa$. La vitesse débitante V_{out} est calculée en intégrant le profil de vitesse selon l'axe vertical dans la section d'essai. Ces vitesses sont mesurées grâce à un tube de Pitot relié au même micro-manomètre. Les mesures sont effectuées pour trois vitesses différentes. Les résultats sont présentés dans le tableau ci dessous. On remarque de très faibles valeurs du coefficient de perte de charge singulière, en réalité du même ordre de grandeur que l'incertitude ($1pa$). Cela indique que les décollements et les structures vorticitaires qui s'en suivent sont de faible intensité et/ou rares voire même inexistantes. On peut donc conclure que la courbure du convergent est tout à fait appropriée.

$V_{out}\,(m.s^{-1})$	$P_{in} - P_{out}\,(Pa)$	K_c
8.3	41	0.005
12.5	94	0.015
16.7	167	0.010

2.1.3 la veine d'essai

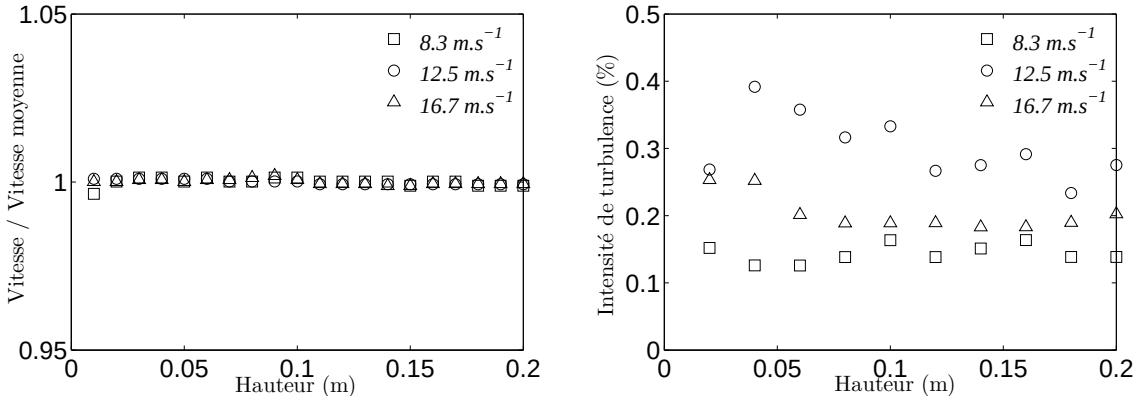
La veine d'essai (trad. *Test section with ajustable ceiling*, Fig. 2.1) est la zone dans laquelle les mesures sont effectuées. Elle mesure $2,5m$ de long pour une section carrée de $40cm$ de coté. Les instruments de mesure sont introduits dans la veine d'essai via la fente

(trad. *Slot* Fig. 2.1) pourvue de poils en plastique pour éviter les fuites. Elle est également constituée d'un plafond mobile qui permet de compenser l'effet du développement des couches limites qui 'réduisent' la section débitante et accroissent la vitesse au centre de la veine. Ce point est particulièrement important lorsque les études sont menées sur une longue distance en aval de l'obstacle, ou lors d'étude du développement de la couche limite.

Nous souhaitons vérifier le bon fonctionnement du ventilateur et du convergent précédemment exposés grâce à une expérimentation au fil chaud simple dans la section d'essai. Nous mesurons les profils verticaux de la vitesse longitudinale dans la section d'essai, 50 cm après la sortie du convergent. On calcule la moyenne temporelle (Fig. 2.3(a)) et l'intensité de turbulence (Fig. 2.3(b)) de la vitesse longitudinale locale pour trois vitesses différentes à l'intérieur de la veine d'essai. L'intensité de turbulence est définie par le ratio entre l'écart type des fluctuations et la vitesse moyenne. Ces figures montrent que la vitesse dans la section d'essai présente de faibles inhomogénéités en espace et de faibles fluctuations temporelles (<0.4%). L'intensité de turbulence annoncée ici est très certainement surestimée car son niveau est proche du bruit. On peut alors statuer de la conformité de la soufflerie en veine libre :

(i) le profil de vitesse est homogène sur la section de sortie du convergent. La courbure du convergent induit une accélération centrifuge du fluide suffisante pour "aplatir" le profil de Poiseuille (Fig. 2.3(a)).

(ii) les fluctuations temporelles sont très faibles indiquant l'absence de structures tourbillonnaires résiduelles (Fig. 2.3(b)).



(a) (b)

FIGURE 2.3 – Profil vertical de vitesse moyenne longitudinale (a) et d'intensité de turbulence (b)

D'autres composants non détaillés dans cette étude ont également leur importance. On peut citer le **diffuseur** (trad. *Transformation* Fig. 2.1) dont le rôle est de ralentir le

fluide avant qu'il ne franchisse le **nid d'abeilles** et les **filtres** (trad. *Honeycomb - screen pack* Fig. 2.1) qui extirpent les poussières et laminent l'écoulement. Enfin, la soufflerie est constituée d'un système de **régulation de température** (trad. *Heat exchanger* Fig. 2.1) par variation du débit d'eau au sein d'un échangeur à courant croisé eau-air. La précision de la régulation est de $\pm 0.5°C$. Cet élément est indispensable dans le cadre de mesures anémométriques au fil chaud car les dérives en température sont immédiatement associées à des erreurs systématiques.

Au final, nous nous sommes assurés que la toile est bien signée de la main de la Nature. Dans un langage plus scientifique, la soufflerie génère un écoulement de qualité, homogène et stable. La turbulence générée par la présence du ou des cylindres ne sera pas perturbée par des conditions initiales mal maitrisées.

2.1.4 Le sillage

Nous nous intéressons au champ proche d'un sillage se développant derrière un cylindre. Pour cela, le cylindre de diamètre $D = 1cm$ et de longueur égale à $40cm$ est placé perpendiculairement à la direction de l'écoulement, 40cm en aval de la sortie du convergent (Fig. 2.4). Comme montré par Norberg [102], une longueur relative au diamètre de 40 permet de considérer la longueur du cylindre comme infinie. D'autre part Pierre Rebuffet [116] indique que la hauteur de la veine d'essai doit être d'au moins 40 diamètres afin d'éviter tout effet de blocage. C'est pour cette raison qu'un diamètre $D = 1cm$ fut prescrit. Cela dit, certaines configurations expérimentales sont construites de telle sorte à ce que les résultats obtenus soient comparables à des résultats numériques dans des domaines de calcul de taille finie. C'est le cas dans l'expérience de Perrin *et al.* [106], [105] par exemple.

En outre, quatre vitesses U_0 en amont du cylindre sont testées : 3.2, 5.4, 8.7 et $13.2m.s^{-1}$ correspondant à des nombres de Reynolds $Re_D = U_0 D/\nu$ (ν est la viscosité cinématique) de 2150, 3600, 5800 et 8800.

2.2 L'anémométrie au fil chaud

L'anémométrie au fil chaud est l'une des méthodes les plus anciennes. Depuis son avènement au début du 19° siècle, elle est restée indétrônable pendant plus d'un siècle avant que les techniques laser ne fassent leur apparition. Malgré cela, le fil chaud demeure encore aujourd'hui l'une des méthodes les plus efficientes. Quelques ouvrages de référence sont pleinement consacrés à la technologie anémométrique du fil chaud, parmi lesquels on citera le livre de Perry [108], de Lomas [91] ou enfin de Bruun [25]. Peter Freymuth [56] établit également un inventaire exhaustif des références bibliographiques sur le sujet de 1800 à 1980.

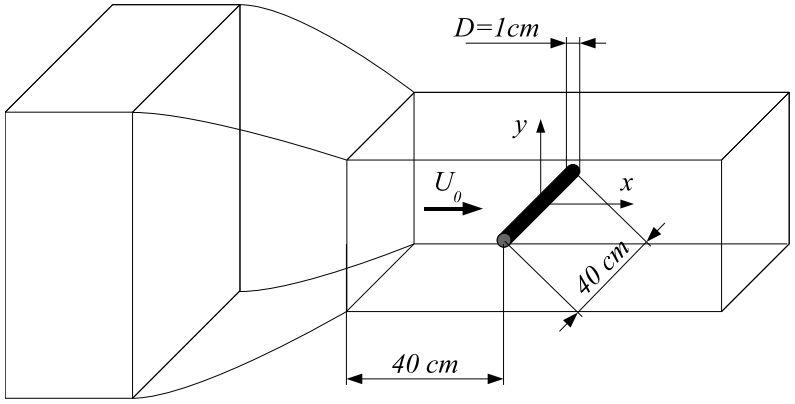


FIGURE 2.4 – Mise en place du cylindre dans la soufflerie

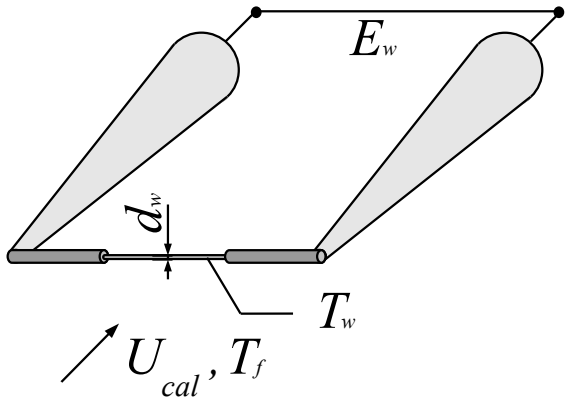


FIGURE 2.5 – Représentation schématique d'un fil chaud.

2.2.1 Principe

Un fil métallique de petite dimension est chauffé par effet Joule et plongé dans l'écoulement (Fig. 2.5). La puissance thermique apportée est alors équilibrée par les échanges par convection forcée entre le fluide et le fil. L'équilibre entre la puissance induite par effet Joule et la puissance transférée au fluide s'écrit :

$$R_w I_w^2 = \frac{E_w^2}{R_w} = h_c S_w \left(T_w - T_f\right), \tag{2.3}$$

où I_w et E_w sont respectivement l'intensité et la tension aux bornes du fil. R_w est la résistance électrique du fil à la température du fil T_w, la température du fluide est notée

T_f. S_w est la surface du fil en contact avec le fluide et h_c est le coefficient de convection forcée de l'écoulement fluide autour du fil.

Cette expression ne fait pas apparaitre de relation explicite entre la vitesse de l'écoulement et la tension ou l'intensité du courant parcourant le fil. Elle apparait implicitement via le coefficient de convection h_c qui fait la passerelle entre la variable physique à mesurer (la vitesse) et une variable observable (la tension ou l'intensité). Sous sa forme sans dimension, le coefficient de convection se traduit sous la forme du nombre de Nusselt tel que $Nu_{d_w} = \frac{h_c d_w}{\lambda_f}$ où d_w est le diamètre du fil et λ_f est la conductivité thermique du fluide évaluée à la température de film telle que $T_{film} = \frac{T_f + \overline{T_w}}{2}$. Puis, le nombre de Nusselt est exprimé en fonction du nombre de Reynolds qui lui dépend de la vitesse. Une corrélation célèbre est la relation de Kramer (Hinze 1959 [71], Lomas [91]) :

$$Nu_{d_w} = 0.42 Pr^{\frac{1}{5}} + 0.57 Pr^{\frac{1}{3}} Re_{d_w}^{\frac{1}{2}}, \tag{2.4}$$

valable pour $0.01 < Re_{d_w} < 10000$ où $Pr = \frac{\nu}{D_T}$ est le nombre de Prandtl avec ν la viscosité cinématique du fluide et D_T le coefficient de diffusion de la température. Le nombre de Reynolds est défini sur le diamètre du fil $Re_{d_w} = \frac{U_{cal} d_w}{\nu}$ où U_{cal} est la vitesse du fluide. Si la température du fil et du fluide sont maintenues constantes [4], on peut alors construire une relation de la forme :

$$E_w^2 = A_{cal} + B_{cal} U_{cal}^{n_{cal}}, \tag{2.5}$$

où A_{cal}, B_{cal} et n_{cal} sont des constantes déduites analytiquement des relations (2.3) et (2.4). Elles font apparaitre une dépendance explicite avec, entre autre, la température du milieu fluide dans lequel est plongée la sonde. Pendant de longues périodes de mesures, la température de la soufflerie sera forcément amenée à augmenter à cause des frottements visqueux occasionnés par la soufflerie elle même et l'obstacle présent dans la veine d'essai. Le but du paragraphe suivant est de quantifier l'influence de la température du fluide sur la mesure de vitesse.

2.2.2 Influence des dérives en température

Expérimentalement, la correspondance entre E_w et U_{cal} est établie grâce à un étalonnage. La procédure consiste à relever la tension aux bornes du fil chaud, placé dans la veine d'essai sans obstacle, pour différentes valeurs de vitesse connues. Les points obtenus sont alors approchés par un polynôme d'ordre 4 en utilisant les fonctions *polyfit/polyval* du logiciel *Matlab*. Si la température varie pendant l'expérience, l'étalonnage subira irrémédiablement des dérives.

4. On parlera alors d'anémomètre à température constante trad. *Constant Temperature Anemometer* : CTA. Cependant, l'intensité du courant peut être également maintenue constante auquel cas on parlera d'anémomètre à courant constant *Constant Current Anemometer* : CCA. Cette technologie que nous ne décrivons pas ici est dédiée aux mesures de température (fil froid)

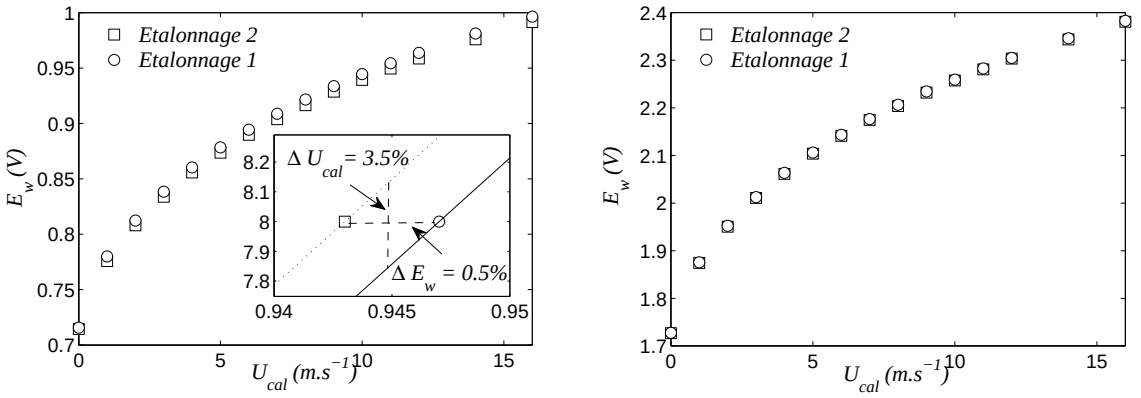


FIGURE 2.6 – Étalonnage sans le système de régulation (a) Étalonnage avec le système de régulation (b)

Sur les Fig. 2.6(a) et Fig. 2.6(b) sont représentées deux courbes d'étalonnage d'un même fil chaud (Etalonnage 1 et 2). Un intervalle d'une heure sépare chaque étalonnage (Etalonnage 1 et 2) pendant lequel la soufflerie est en marche et un cylindre est placé dans la veine. Le système de régulation de température est soit éteint (Fig. 2.6(a)), l'écart de température entre les deux étalonnages est alors de $2°C$. Ou bien, la température est maintenue constante à $0.5°C$ près (Fig. 2.6(b)).

Sur la Fig. 2.6(a), on remarque que lorsque la température du fluide augmente, la sensibilité du fil, c'est-à-dire la pente des courbes d'étalonnage diminue légèrement. La tension E_w est globalement peu affectée par la montée en température, mais il n'en est pas de même pour U_{cal}. En effet, l'erreur associée sur la vitesse de l'écoulement, est fortement amplifiée par la pente de la bijection $U_{cal} \rightarrow E_w$. Ainsi, nous pouvons évaluer la conséquence d'une dérive en température, à savoir qu'une erreur de 0.5% sur E_w entraîne une erreur de 3.5% sur U_{cal}. Pour une mesure dans un milieu turbulent, seule la valeur de la vitesse moyenne est sensiblement biaisée. La variance quant à elle, n'est que très peu affectée par ce problème car les courbes d'étalonnage sont quasiment parallèles.

Le système de régulation de température permet de s'affranchir d'éventuelles dérives. Les courbes des étalonnages 1 et 2 sont alors identiques et aucune erreur systématique n'est commise (Fig. 2.6(b)).

2.2.3 Conditionnement des signaux

Afin de réduire le niveau d'énergie du bruit électronique comparé à celui du signal physique, nous procédons à un conditionnement analogique du signal avant sa numérisa-

tion au sein de la carte d'acquisition. Sur la Fig. 2.7, on remarque que le signal provenant

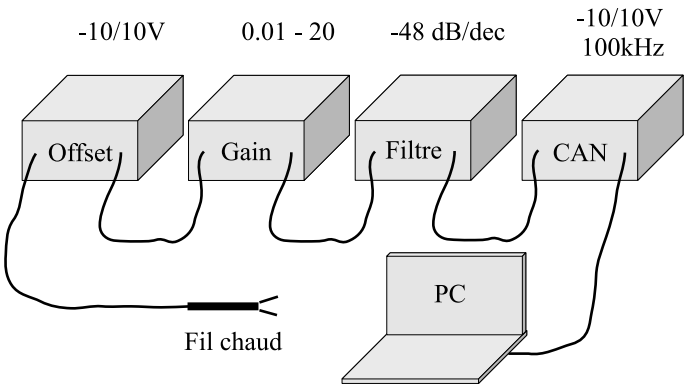


FIGURE 2.7 – Chaine de conditionnement analogique des signaux

de l'anémomètre est :

- translaté d'un offset égal à la valeur moyenne du signal de tension.
- amplifié, les variations de vitesse sont alors multipliées par un gain pour remplir au maximum la gamme de tension disponible au niveau de la carte d'acquisition.
- filtré afin de limiter le repliement des fréquences supérieures à la moitié de la fréquence d'échantillonnage.

Nous disposons de 8 racks d'offset, d'amplification qui ont été achetés auprès de *Stanford Research System* modèle *SIM983* et de filtres *SIM965*. Cela nous permet de conditionner simultanément plusieurs signaux provenant de plusieurs fils chauds (et/ou fils froids). Le gain peut être ajusté entre une valeur de 0.01 et 20 (les amplificateurs pouvant être mis en série si des valeurs supérieures sont exigées). Les filtres passe-bas de type Butterworth ont une pente de -48dB/dec pour des fréquences allant jusqu'à 100 kHz. La carte d'acquisition de marque *National Instrument* est pilotée par le logiciel *Labview*. Sa gamme de tension s'étale de -10 à 10 Volt, la fréquence d'acquisition maximum est 100 kHz avec une précision de 12 bits. Le conditionnement en amont de l'acquisition permet d'obtenir au final 6 à 8 décades de différence entre le niveau des plus grandes échelles de la turbulence et le bruit électronique.

2.2.4 Étalonnage des sondes en X (HWA-X)

Des arrangements complexes de fils chauds ont été développés afin de mesurer simultanément plusieurs composantes de vitesse, voire des gradients de vitesse et/ou de température. Dans notre étude, nous avons mis en place dans la soufflerie une sonde double

en X permettant de mesurer deux composantes de vitesse simultanément. Ce type de sonde nécessite une procédure d'étalonnage spécifique que l'on décrit dans ce paragraphe. Un schéma de ce type de sonde est représenté sur la Fig. 2.8. Les deux fils sont orientés d'un angle de $\pm 45°$ par rapport à l'axe x de la sonde, formant ainsi un X. L'étalonnage

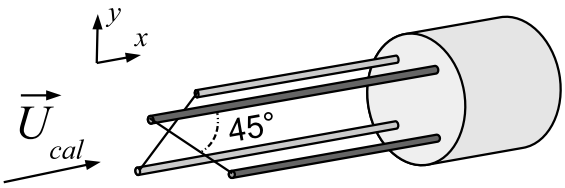


FIGURE 2.8 – Représentation schématique d'une sonde double en X

consiste à construire la loi bijective reliant $E1_w$, $E2_w$ les tensions aux bornes des fils 1 et 2 à la composante horizontale $U = \overrightarrow{U_{cal}}.\overrightarrow{e_x}$ et verticale $V = \overrightarrow{U_{cal}}.\overrightarrow{e_y}$ du vecteur vitesse $\overrightarrow{U_{cal}}$. Pour ce faire, nous balayons différentes valeurs de vitesse $U_{cal} = \|\overrightarrow{U_{cal}}\|$ et différents angles $\beta_{U_{cal}}$ entre l'axe de la sonde et la direction de l'écoulement. Pour chaque couple $(U_{cal}, \beta_{U_{cal}})$ nous relevons les valeurs $(E1_w, E2_w)$. Nous construisons ainsi la table d'étalonnage $(E1_w, E2_w, U_{cal}, \beta_{U_{cal}})$ comme représentée sur la Fig2.9. Sur cette figure, la norme de la vitesse est donnée sur l'axe vertical et l'angle entre l'écoulement et l'axe de la sonde est caractérisé par la couleur de la surface (blanc : $\beta_{U_{cal}} = 45°$, noir : $\beta_{U_{cal}} = -45°$).

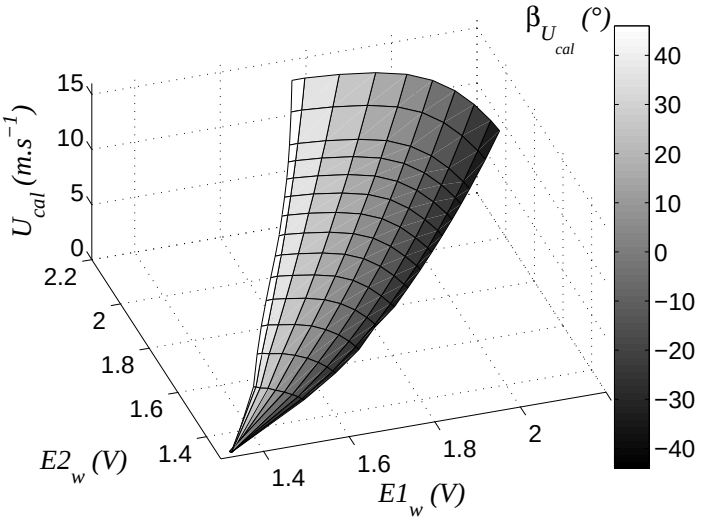


FIGURE 2.9 – Table d'étalonnage d'une sonde double en X

La reconstruction du vecteur vitesse en un temps donné de l'expérience est réalisée

grâce à la fonction *griddata* du logiciel *Matlab*. Cette méthode de *look-up table* calcule le couple $(U_{cal}(t), \beta_{U_{cal}}(t))$ par interpolation linéaire ou cubique du couple $(E1_w(t), E2_w(t))$ sur la table $(E1_w, E2_w, U_{cal}, \beta_{U_{cal}})$ construite lors de l'étalonnage. Cette méthode d'étalonnage a été initialement introduite par Willmarth et Bogar [142] puis par Lueptow *et al.* [92]. Selon les bornes (en angle et en norme) du signal turbulent à mesurer, il est essentiel de raffiner l'étalonnage autour de cet intervalle, afin d'optimiser la qualité de l'interpolation.

Il existe d'autres méthodes d'étalonnage des sondes doubles. Par exemple la méthode dite d'angle effectif (yaw-angle) est largement employée du fait de sa facilité de mise en œuvre. Cependant, les études détaillées de Browne *et al.* en 1989 [24] et de Burattini et Antonia en 2005 [27] montrent que la méthode de *look-up table* est la plus rigoureuse de toutes car aucune hypothèse n'est faite quant à l'effet de la vitesse tangentielle sur le refroidissement du fil. Elle requière cependant plus de temps pour sa mise en œuvre.

2.3 La Velocimétrie par Images de Particules

La Velocimétrie par Images de Particule (*PIV : Particle Image Velocimetry*) est une méthode anémométrique par tomographie [5] laser. Cette technologie aboutit à la mesure de la vitesse de l'écoulement sur un plan. Le principe de la méthode PIV est exposé sur la Fig 2.10.

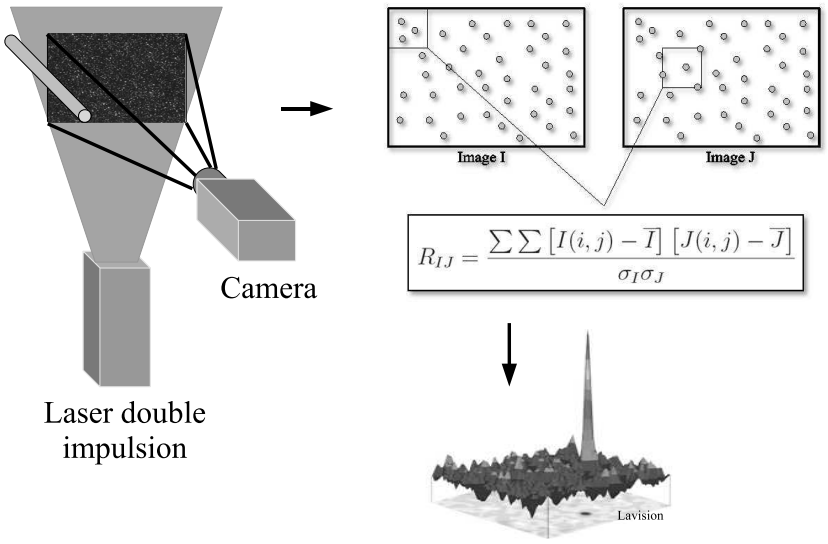


FIGURE 2.10 – Représentation schématique du système PIV.

5. *Etym.* provient de la racine grecque *tomê* qui veut dire "coupe".

2.3.1 Principe

Un laser génère deux impulsions laser, séparées d'un laps de temps noté Δt. Le faisceau laser cylindrique est transformé en une nappe fine au passage d'une lentille sphérique et cylindrique, avant d'être acheminé dans le milieu turbulent ensemencé de fines particules. La taille de ces particules est supposée être suffisamment faible pour suivre fidèlement l'écoulement. Nous reviendrons sur ce point par la suite. Une camera, synchronisée avec le laser, capte la lumière diffusée par les particules et enregistre les deux images consécutives aux deux impulsions laser. Toute la difficulté réside ensuite dans l'estimation du déplacement des particules entre les deux images séparées par le laps de temps Δt. La vitesse est alors calculée par la relation très simple :

$$\overrightarrow{U} = \frac{\overrightarrow{x_2} - \overrightarrow{x_1}}{\Delta t}. \tag{2.6}$$

2.3.2 Estimation du déplacement des particules

L'estimation du déplacement des particules $\overrightarrow{x_2} - \overrightarrow{x_1}$ dans le milieu fluide à mesurer est le point délicat de la PIV. La méthode dite de corrélation est une méthode classique de calcul des trajectoires. Elle est très souvent employée en automobile pour la détection des obstacles, ou pour la surveillance météorologique ou militaire... L'image est tout d'abord découpée en plusieurs zones de même dimension que l'on appelle fenêtres d'interrogation. Puis, le principe repose sur la maximisation de l'inter-corrélation normalisée entre les niveaux de gris des fenêtres d'interrogation d'une image à l'autre (Willert et Gharib [140]). Pour des questions de rapidité, la corrélation R_{IJ} est estimée par une transformée de Fourier rapide ou Fast Fourier Transform (FFT) :

$$R_{IJ} = \frac{\sum\sum \left[I(i,j) - \overline{I}\right] \left[J(i,j) - \overline{J}\right]}{\sigma_I \sigma_J}, \tag{2.7}$$

où $I(i,j)$ est le niveau de gris de la fenêtre d'interrogation indicée par i et j de la première image et $J(i,j)$ est le niveau de gris de la fenêtre d'interrogation indicée par i et j pour la seconde image. $\overline{I}$ et $\overline{J}$ est la valeur moyenne des niveaux de gris de la première et la seconde image respectivement. σ_I et σ_J sont les écarts-types des niveaux de gris de la première et la seconde image respectivement. L'inter-corrélation est normalisée par la moyenne et l'écart type du niveau de gris afin de s'affranchir des éventuelles différences de luminosité et de contraste d'une image à l'autre. Le déplacement $\overrightarrow{x_2} - \overrightarrow{x_1}$ est alors défini par la position du maximum de l'inter-corrélation, nommé par la suite pic de corrélation. Afin d'améliorer la qualité de l'estimation du déplacement, Lecordier et Trinité [87] ont proposé une méthode itérative avec déformation de fenêtre. Cette méthode améliore considérablement la force du pic de corrélation, lorsque la taille de la fenêtre d'interrogation est faible. Le principe de cette méthode est de calculer un

premier champ de déplacement pour des fenêtres d'interrogation de grandes tailles ($64px^2$) qui servira de prédicteur pour le calcul des déplacements pour des fenêtres d'interrogation de plus faibles tailles ($32px^2$), et ainsi de suite jusqu'à une taille de $16px^2$. La déformation des fenêtres d'interrogation est ajoutée à la méthode de calcul afin de s'adapter aux zones délicates des écoulements : forts cisaillements, zone proche paroi, centre des vortex, etc. En théorie, la taille des fenêtres d'interrogation peut descendre jusqu'au pixel. Cependant, dans un cas réel, le bruit électronique du capteur de la caméra et l'épaisseur de la nappe induisent une taille minimum de $16px^2$. Nous avons choisi cette méthode avec une taille de fenêtre initiale de $64px^2$ et 6 itérations sont nécessaires pour diminuer la taille jusqu'à $16px^2$ avec un recouvrement de 50%. On a donc accès à 1 vecteur tous les 8 pixels. Pour le calcul des champs de vitesse, nous utilisons le logiciel Lavision Davis 7.2 qui dispose de l'algorithme d'inter-corrélation itérative avec déformation de fenêtre.

Le niveau de gris étant donné pour chaque valeur entière de pixel, le déplacement obtenu sera lui aussi quantifié en valeur entière de pixel. Pour gagner en précision, on peut approcher la forme de l'inter-corrélation par une Gaussienne calculée sur 3, 5 ou 7 pixels afin de raffiner l'estimation de la position du maximum du pic de corrélation. Cette méthode permet d'obtenir des précisions sur le déplacement de 0.1 pixel.

Il existe d'autres méthodes d'évaluation du mouvement des particules. Corpetti [36] ou Heitz *et al.* [67] proposent une méthode très novatrice, basée sur une approche variationnelle. Le principe repose sur l'écriture des équations de Navier-Stokes dans le formalisme de la mécanique Hamiltonienne. Les positions des particules étant connues au instant t_1 et t_2 consécutifs au deux tirs laser, la trajectoire suivie par les particules pendant cet intervalle est évaluée par la minimisation du Lagrangien (Principe des moindres actions) entre les deux instants. Cette méthode permet d'accéder, en théorie, à un vecteur par pixel mais est bien souvent limitée à un vecteur tous les huit pixels comme la méthode par corrélation, du fait du bruit et de l'épaisseur de nappe. Cependant, s'agissant d'un calcul contraignant le champ et non pas un point de ce champ, les vecteurs faux sont annihilés.

2.3.3 Choix des particules d'ensemencement

Le choix du traceur est contraint par l'écoulement lui même. Une revue des différentes particules utilisées en PIV est établie par Melling [99] pour des écoulements incompressibles ou compressibles.

L'inertie des particules injectées dans l'écoulement doit être suffisamment faible pour qu'elles soient considérées comme des traceurs parfaits, c'est-à-dire qu'elles suivent fidèlement l'écoulement. Intuitivement, plus elles sont petites et/ou de faible densité, plus elles auront tendance à suivre l'écoulement, sachant qu'elles doivent être suffisamment grandes pour que l'intensité du rayonnement diffusé soit suffisante pour être mesurée. Le nombre sans dimension qui caractérise le temps de réponse de la particule comparé à celui de

l'écoulement est le nombre de Stokes [130], défini ci-dessous :

$$St = \frac{\tau_p}{\tau_f} \tag{2.8}$$

où τ_p est le temps caractéristique de la particule et τ_f est le plus petit temps caractéristique de la turbulence. Ainsi, plus le nombre de Stokes est faible, plus la particule aura tendance à suivre fidèlement l'écoulement. Si l'on considère que le temps τ_p est uniquement piloté par la force de trainée de la goutte, on peut alors postuler que $\tau_p = \frac{\rho_p D_p^2}{18\mu}$ où ρ_p est la masse volumique de la particule, D_p son diamètre et μ est la viscosité dynamique du fluide porteur. La quantification la plus rationnelle du plus faible temps turbulent τ_t se base sur le temps caractéristique de Kolmogorov, à savoir $\tau_f = \left(\frac{\nu}{\bar{\epsilon}}\right)^{\frac{1}{2}}$, où ν est la viscosité cinématique du fluide porteur et $\bar{\epsilon}$ le taux moyen de dissipation de la turbulence. Si bien que :

$$St = \frac{\rho_p D_p^2}{18\mu} . \left(\frac{\bar{\epsilon}}{\nu}\right)^{\frac{1}{2}} . \tag{2.9}$$

Ce nombre sans dimension est proportionnel au maitre couple de la particule, à la densité du fluide d'ensemencement et à la dissipation de l'énergie cinétique turbulente. Ainsi pour un même type de particule d'ensemencement (même ρ_p, D_p), le traceur sera d'autant plus adéquat que l'énergie des petites échelles de la turbulence sera faible. Dans cette étude, nous utilisons un générateur de fumée de théâtre pour ensemencer l'écoulement. Les gouttelettes générées ont une densité proche de l'eau $\rho_p \approx 1000 kg.m^{-3}$ avec un diamètre moyen proche de $1\mu m$. D'après Melling [99], la réponse fréquentielle des gouttelettes sera alors dans notre cas d'environ $10kHz$. En d'autres termes une fluctuation de vitesse dont la fréquence est supérieure à $10kHz$ ne sera pas mesurée. Une très grande partie du spectre de la turbulence sera tout de même très correctement résolue.

2.3.4 Résolution spatiale

Nous avons vu précédemment que les champs de déplacement sont estimés pour des tailles de fenêtres d'interrogation de $16px^2$ avec 50% de recouvrement. Le déplacement estimé par la méthode de corrélation n'est donc pas le déplacement effectif de chaque particule, mais le déplacement le plus probable de l'ensemble des particules présentes dans la fenêtre d'interrogation. La vitesse estimée est donc moyennée sur la fenêtre d'interrogation. Si des gradients de vitesse existent à une échelle plus faible que la taille de la fenêtre d'interrogation, ils ne seront pas captés. Ce qui signifie que, dans la plupart des cas, la méthode PIV ne permet pas d'accéder à l'ensemble du spectre spatial de la turbulence.

Afin d'estimer la résolution spatiale de la méthode, nous utilisons la même méthode que Foucaut *et al.* [55]. Le but est d'estimer la réponse fréquentielle de la méthode PIV à un bruit blanc. Ce dernier est généré en ensemençant l'écoulement de la même manière

que lors d'une expérience, et en enregistrant 1000 couples d'images de l'écoulement au repos. La densité spectrale d'énergie $E(k\Delta_c)$ (où k est le nombre d'onde et Δ_c la distance entre deux vecteurs vitesse) est ensuite calculée comme indiquée par Liu *et al.* [90] sur des champs filtrés aux frontières par une fenêtre de Hanning. Puis, l'échelle à partir de laquelle la réponse spectrale est atténuée de 3dB est considérée comme échelle de coupure. Sur la Fig. 2.11(a), est comparée la réponse spectrale au bruit blanc du système PIV à la fonction analytique suivante :

$$E(k\Delta_c) \propto \mathrm{sinc}_\pi^2(k\Delta_c) \tag{2.10}$$

Cette réponse théorique déterminée par Foucaut *et al.* [55], correspond à la transformée de Fourier de la fonction porte d'échelle Δ_c. On remarque une très bonne correspondance entre la réponse spectrale théorique et celle obtenue expérimentalement. Tout calcul de spectre d'énergie cinétique d'un écoulement turbulent nécessite donc une procédure de correction basée sur cette réponse sans écoulement.

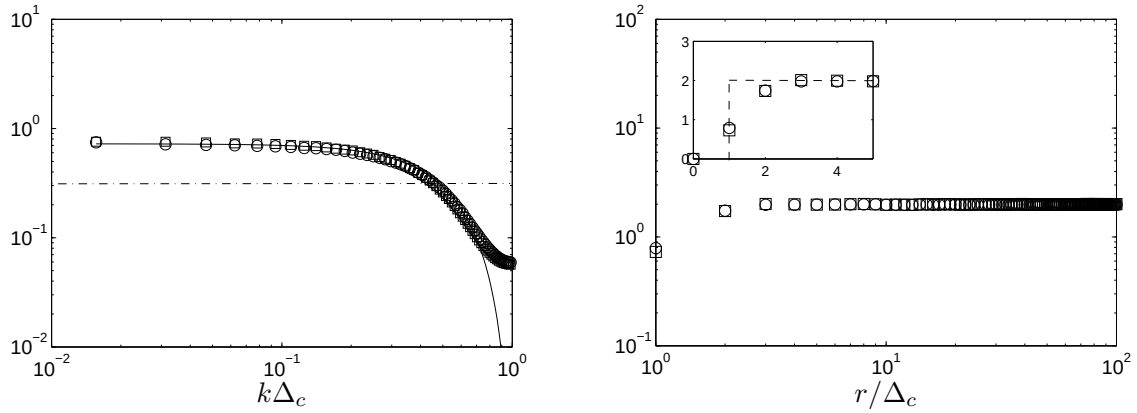
D'une manière analogue, on peut déterminer la réponse "physique" à un bruit blanc. Pour cela, nous considérons non pas le spectre d'énergie mais la fonction de structure d'ordre 2 à une échelle r. Celle-ci a pour définition :

$$\overline{(\Delta u_\alpha)^2}(r) = \overline{\left(u_\alpha\left(x+r\right) - u_\alpha\left(x\right)\right)^2} \tag{2.11}$$

où $\overline{[...]}$ dénote la moyenne temporelle et $u_\alpha \equiv u$ ou v. La fonction de structure d'ordre 2 représente l'énergie cinétique à une échelle r. La réponse physique au bruit blanc calculée à partir du même set de données est représentée sur la Fig. 2.11(b). La réponse attendue est la fonction porte définie par :

$$\begin{aligned} \overline{(\Delta u_\alpha)^2}(r) &= 2\overline{u_\alpha^2} \text{ si } r \geq \Delta_c \\ \overline{(\Delta u_\alpha)^2}(r) &= 0 \text{ sinon} \end{aligned} \tag{2.12}$$

Pour conclure sur la résolution spatiale de la méthode PIV, la fréquence de coupure dans l'espace spectral est environ égale à $2.4\Delta_c$, cette fréquence de coupure est une conséquence de la transformée de Fourier de la fonction porte à l'échelle Δ_c. Cette valeur est très similaire à la valeur obtenue par J-F. Krawczynski [82]. Dans l'espace physique (celui des séparations r), la réponse observée s'écarte de la fonction créneau. En effet, il faut attendre de même $r \approx 2.4\Delta_c$ pour voir la fonction de structure normalisée $\overline{(\Delta u_\alpha)^2}(r)/\overline{u_\alpha^2}$ tendre vers 2. L'atténuation du système PIV n'est donc pas une conséquence du calcul *a posteriori* de la transformée de Fourier, mais du calcul *a priori* de l'inter-corrélation qui est fait dans l'espace de Fourier. Chaque vecteur est donc intrinsèquement biaisé par le filtrage à petite échelle caractérisé par Foucault *et al.* [55]. Cette atténuation de l'énergie des plus petites échelles de la turbulence est le point faible de la méthode PIV. En effet, les variances des fluctuations de vitesse et, plus critique, le taux de dissipation de la turbulence seront irrémédiablement sous-estimés.



(a) (b)

FIGURE 2.11 – (a) Réponse spectrale à un bruit blanc. Trait d'axe : Réponse -3dB ○ : $\underline{E_{uu}}(k_x)$, □ $\underline{E_{vv}}(k_x)$, —— sinus cardinal. (b) Réponse "physique" à un bruit blanc ○ : $\overline{(\Delta u)^2}$, □ $\overline{(\Delta v)^2}$, - - - - fonction créneau.

2.3.5 PIV classique (PIV2C) - PIV rapide (TR-PIV2C)

Dans cette étude, nous avons mis en place deux différents types de Velocimétrie par Image de Particules. Le premier est un système PIV classique pour lequel les champs de vitesse sont décorrélés les uns des autres. Le second est de type PIV rapide pour lequel on a accès aux dynamiques temporelles des plus grandes échelles de l'écoulement. Ce paragraphe a pour trait de décrire le matériel nécessaire à chacune de ces deux méthodes.

– La PIV classique. Le système PIV classique est constitué d'un laser bi-pulse double cavité Nd-YAG émettant dans le vert (532nm, 100mJ par pulse) et d'une caméra CCD Lavision $1280\times1024px^2$ dont la résolution est de 12 bits par pixel munie d'un objectif Nikkon 28mm. La synchronisation laser-camera est assurée par le logiciel Davis 7.2. La fréquence d'acquisition des couples d'images est de 4Hz ce qui signifie que les champs de vitesse seront considérés comme indépendants. Le champ de vecteur vitesse mesure $96mm$ dans la direction de l'écoulement et $76.8mm$ dans la direction perpendiculaire. L'épaisseur de nappe laser formée est d'environ $0.7mm$. Le laps de temps entre deux images successives est fixé de tel sorte à ce que le déplacement moyen du groupe au sein de la fenêtre d'interrogation de particules soit d'environ 7 pixels. Le tableau suivant répertorie les laps de temps pour les quatre vitesses en amont du cylindre U_0 et nombres de Reynolds $Re_D = \frac{U_0 D}{\nu}$.

U_0	3.2	5.4	8.7	13.2
Re_D	2150	3600	5800	8800
$\Delta t(\mu s)$	160	96	60	40

– La PIV rapide. Le système PIV rapide est constitué d'un laser Quantronix double cavité Nd-YLF émettant dans le vert (512nm) et d'une caméra rapide Phantom V10 $960 \times 720 pixel^2$ dont la résolution est 8 bits par pixel, munie d'un objectif Nikkon 50mm. La taille du champ observé est plus faible que pour la PIV classique et mesure $6cm$ par $4.5cm$. La synchronisation des lasers et de la caméra fut assurée par génération de signaux TTL (créneau de 5 Volts d'amplitude). La procédure de synchronisation est représentée sur la Fig. 2.12. Un signal TTL est envoyé à la camera dont la période d'intégration durera $480ms$. Un autre signal TTL est alors envoyé à la première cavité du laser, $5\mu s$ plus tard le pulse laser d'une durée de $1\mu s$ est capté par le biais d'une photo-diode rapide. La première image est alors enregistrée. Puis une seconde impulsion TTL est de nouveau envoyée à la camera $500\mu s$ après la première, la période d'intégration est de même égale $480ms$. Un signal TTL est alors envoyé à la seconde cavité laser, $20\mu s$ après le départ de l'intégration de l'image par la camera, la seconde image est enregistrée. La fréquence d'acquisition des couples d'images est alors de 1kHz permettant d'observer la dynamique temporelle des plus grandes structures de l'écoulement. Ainsi, les moyennes de phase des champs de vitesse qui n'étaient pas accessibles via la PIV classique par manque de résolution temporelle peuvent être évaluées par la technique PIV rapide.

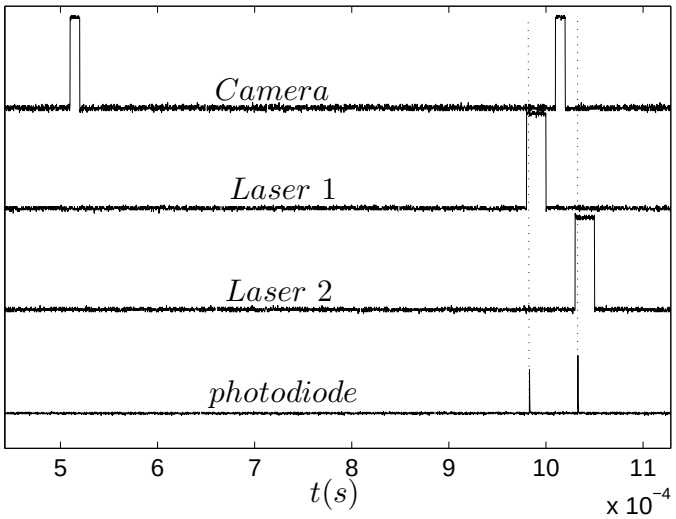


FIGURE 2.12 – Procédure de synchronisation laser-camera pour le système PIV rapide

Le laps de temps Δt entre les deux impulsions laser est ajusté de telle sorte à ce que le déplacement soit d'environ 7 pixels. Le tableau suivant indique le laps de temps fixé pour les deux nombres de Reynolds considérés.

U_0	5.4	8.7
Re_D	3600	5800
$\Delta t(\mu s)$	80	50

2.4 L'Anémométrie Doppler Laser

La mesure de vitesse par la méthode PIV accède à deux composantes de vitesse sur un plan. Nous avons mis en évidence dans le paragraphe précédent que la PIV ne résout pas les plus petites échelles de la turbulence. Afin de mesurer la troisième composante de vitesse, et d'observer également les fluctuations de vitesse les plus rapides, nous avons complété les mesures PIV par la méthode d'Anémométrie Doppler Laser (ADL).

2.4.1 Principe

Lorsque se croisent deux faisceaux lasers de même longueur d'onde λ_L ou de même fréquence f_L et de même direction de polarisation, il se crée un réseau de franges d'interférences parallèles à la bissectrice entre les deux faisceaux. La distance inter-frange D_i est une fonction de l'angle entre les deux faisceaux lasers Θ_L et de la longueur d'onde du laser λ_L [125] :

$$D_i = \frac{\lambda_L}{2sin(\Theta_L/2)}. \tag{2.13}$$

Lorsqu'une particule franchit le réseau d'inter-franges à une certaine vitesse $\overrightarrow{U}$, elle traverse tour à tour les parties éclairées et sombres du réseau à une fréquence f_D. La fréquence de la lumière diffusée par la particule se trouve ainsi modulée, c'est l'effet Doppler [138]. La projection de la vitesse de la particule sur la normale au réseau d'inter-franges $\overrightarrow{n}$ peut être ainsi évaluée à partir de la fréquence Doppler f_D par la relation :

$$\overrightarrow{U}.\overrightarrow{n} = D_i f_D = \frac{\lambda_L}{2sin(\Theta_L/2)} f_D. \tag{2.14}$$

Il se pose donc le problème d'indétermination du signe de la vitesse de la particule, à savoir que l'on n'est pas en mesure de déterminer par quelle direction la particule a franchi le réseau d'interférences. Pour palier cet inconvénient, la fréquence d'un des deux faisceaux est décalée d'une légère valeur. Cela se fait par le biais d'une cellule opto-acoustique, dite cellule de Bragg. Les inter-franges se meuvent ainsi a une certaine vitesse égale à $f_B D_i$ où f_B est la fréquence du faisceau ayant subi les effets de la cellule de Bragg. La vitesse de la particule est alors estimée par :

$$\overrightarrow{U}.\overrightarrow{n} = D_i(f_D - f_B) = \frac{\lambda_L}{2sin(\Theta_L/2)}(f_D - f_B). \tag{2.15}$$

Le signal lumineux est ensuite transformé en signal électrique via un photo-multiplicateur. La fréquence de Bragg f_B est en général de l'ordre du MHz. Dès lors, une détection hétérodyne centrée sur la fréquence de Bragg est appliquée au signal électrique reçu du photo-multiplicateur, c'est-à-dire que l'on observe uniquement les écarts par rapport à la fréquence de Bragg $f_D - f_B$. Une particule de vitesse nulle dans le réseau se traduira donc par $f_D - f_B = 0$. Afin de limiter les effets du bruit lumineux ou électronique, un filtrage passe-bas et passe-haut est également appliqué. Cela limite ainsi la vitesse maximum et minimum mesurable. Cette gamme de vitesse accessible doit être ajustée au mieux en fonction des fluctuations de vitesse pour optimiser la sensibilité de la mesure. Le calcul de la vitesse à partir de la fréquence du signal lumineux diffusé est réalisé par le biais d'un logiciel développé au Coria par Corbin *et al.* [35].

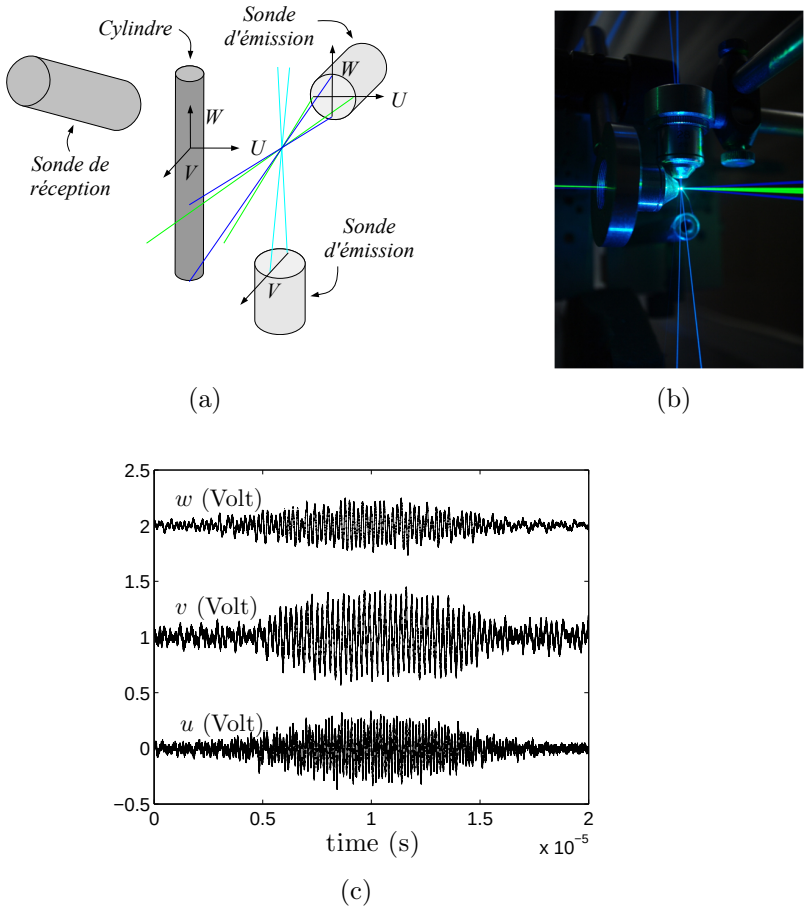


FIGURE 2.13 – (a) Schéma descriptif de l'Anémométrie Doppler Laser (ADL). (b) Coïncidence des faisceaux laser sur un fil métallique de $80\mu m$ de diamètre. (c) Signaux typiques enregistrés sur les trois voies

2.4.2 L'Anémométrie Doppler Laser 3 composantes (ADL3C)

Le système ADL délivre la mesure des trois composantes du champ fluctuant en un point. Un laser de marque Coherent émet continument trois longueurs d'ondes distinctes : vert(514.5nm), bleu (488nm) et violet (476.5nm). Les faisceaux sont séparés et doublés, le couplage aux fibres optiques a un rendement d'environ 50%. Les couples de faisceaux verts et violets sont transmis par une sonde d'émission de marque TSI équipée d'une lentille convergente de 350mm placée perpendiculairement à l'axe du cylindre, le couple de faisceaux bleus parallèlement à l'axe du cylindre (Fig. 2.13(a)). Les faisceaux verts, bleus et violets correspondent aux composantes U, V et W respectivement. Le tableau ci-dessous répertorie les différentes caractéristiques associées aux trois composantes de vitesse.

Couleur	vert	bleu	violet
Longueur d'onde (nm)	514.5	488	476.5
Composante de vitesse	U	V	W
Longueur du volume de mesure (mm)	1.3	1.3	1.3
Diamètre du volume de mesure (μm)	90	90	90
Distance inter-frange (μm)	3.73	3.54	3.46
Fréquence du passage de particules (kHz)	25	20	10

La coïncidence spatiale des volumes de mesure est assurée en focalisant les faisceaux sur l'extrémité d'un fil métallique de $80\mu m$ de diamètre. L'ombre du fil est alors agrandie grâce à des lentilles de microscope pour faciliter l'ajustement (Fig. 2.13(b)). La collection de la lumière diffusée est réalisée grâce à une sonde PDA (Phase Doppler Anemometry) de marque Dantec équipée d'une lentille de 300mm, placée en diffusion avant (Fig. 2.13(a)). Cette sonde est munie d'un diaphragme permettant d'ajuster la taille de la zone d'observation, une valeur de $100\mu m$ fut choisie. Dans la plupart des configurations d'anémométrie Doppler Laser, la résolution spatiale correspond à la longueur des volumes de croisement des faisceaux. Dans notre cas, cette résolution est sensiblement améliorée car seulement une portion de $100\mu m$ fut observée. La sensibilité sur chaque composante est ajustée au mieux en modifiant la fréquence de la détection hétérodyne et des filtres. Les fluctuations de vitesse représentent ainsi, selon les cas, de 1/4 à 3/4 de la gamme disponible. Trois signaux typiques associés aux trois composantes de vitesse sont exposés sur la Fig. 2.13(c).

Deux valeurs de vitesse amont $U_0 = 5.4$ et $8.7 m.s^{-1}$ ont été étudiées par le biais de cette technique, correspondant à des nombres de Reynolds $Re_D = 3600$ et 5800.

2.4.3 Correction du biais des mesures ADL

Lorsque la fréquence de la lumière diffusée par la particule est proche de la fréquence de Bragg, en d'autres termes lorsque la vitesse au sein du volume de mesure est proche de zéro, s'en suit une difficulté d'estimation du déplacement de la particule. La plupart de temps,

cette vitesse sera rejetée par le logiciel et ne sera pas prise en compte dans les réalisations statistiques. Ce point est particulièrement préjudiciable pour une évaluation correcte des statistiques, car elle occasionne un biais. Ce biais est également une conséquence de la non régularité temporelle des passages de particules dans le volume de mesure.

Toute quantité statistique est alors caractérisée par sa moyenne ou ses moments pondérés :

$$\overline{U_i} = \frac{\sum U_i \Phi}{\sum \Phi} \tag{2.16}$$

où Φ est un coefficient de pondération. Il existe alors trois différents types de pondération :

- Sans pondération : $\Phi = 1$;
- Pondération par le temps de passage dans le volume de mesure (méthode de Buchave [26]) ;
- Pondération par l'intervalle de temps entre deux passage de particule (méthode de Edwards [52]).

L'idée principale de la pondération est de donner un poids plus important aux vitesses faibles (Buchave), ou bien aux mesures de vitesse fortement séparées dans le temps (Edwards). Sachant que la plupart du temps, l'un et l'autre sont liés. Dans notre cas, le temps de passage dans le volume de mesure ne fut pas enregistré. La méthode de pondération de Buchave ne fut donc pas employée. Pour cette raison, nous avons utilisé la méthode de Edwards qui aboutit à de très bons résultats. Cela sera montré par la suite.

Un autre point délicat des mesures ADL est l'estimation des corrélations croisées de vitesse. En effet, leur précision repose sur la précision de la coïncidence spatio-temporelle des points de mesures. Ici, la coïncidence spatiale est assurée par focalisation sur un fil de $80\mu m$ de diamètre. On peut alors postuler de la bonne juxtaposition des volumes de mesures. Concernant la coïncidence temporelle, chaque composante fut enregistrée indépendamment des autres. Cela dans le but de ne pas surimposer de biais statistique. En effet, une particule doit présenter une composante de vitesse sur les trois directions pour être retenue. Si ce n'est pas le cas, le point de mesure sera rejeté et le biais accentué. Dans cette étude, la trace temporelle des composantes v et w est alors linéairement interpolée *a posteriori* sur la base temporelle de la composante la plus échantillonnée (u) pour limiter l'effet de la pondération. Puis les corrélations croisées pondérées sont calculées suivant la relation (2.16).

2.5 La diffusion acoustique ultra-sonore

Toutes les méthodes que nous venons de décrire accèdent à la mesure des fluctuations de vitesse de l'écoulement turbulent. Or, ces fluctuations sont associées à la modulation en amplitude et en phase de l'intégralité du spectre turbulent, des plus grandes aux plus petites échelles. On souhaiterait pourtant sonder un nombre d'onde particulier du spectre

afin d'étudier son comportement de manière isolée. La diffusion acoustique ultra-sonore est une technique qui permet d'extraire les mécanismes d'advection de la vorticité à un nombre d'onde donné.

2.5.1 Principe

Le principe de cette méthode de mesure repose sur la diffusion d'une onde acoustique par un milieu fluide turbulent, connue depuis plus d'un demi siècle [80]. Cette technique est couramment employée en océanographie par exemple pour suivre les bancs de poissons [127] ou la migration des algues toxiques [19]. L'application de cette méthode à l'étude de l'allée de Bénard Von Karman fut réalisée par Baudet *et al.* [14] puis aux écoulements turbulents de laboratoire par Baudet *et al.* [15], Poulain [109], Poulain *et al.* [112], [111], [110] ou Mazellier [98].

Une onde acoustique incidente de fréquence f_0 et de direction $\overrightarrow{n}_0$ est envoyée au sein de l'écoulement turbulent par le biais d'un haut-parleur HP (Fig. 2.14). L'onde acoustique incidente est alors diffusée dans tout l'espace, dont une partie est prélevée au niveau d'un microphone M dans la direction $\overrightarrow{n}_r$ (Fig. 2.14). La réception sur le microphone M est équivalente à une onde acoustique envoyée par le biais d'un haut-parleur virtuel HP' (Fig. 2.14). Ainsi, de la même manière que l'Anémométrie Doppler Laser, se crée alors un réseau d'interférences. La distance inter-frange D_i crible alors un nombre d'onde particulier $\overrightarrow{k}_s = 2\pi/D_i.(\overrightarrow{n}_r - \overrightarrow{n}_0)$, défini par :

$$\overrightarrow{k}_s = \frac{4\pi f_0}{c} sin\left(\frac{\Theta_s}{2}\right)(\overrightarrow{n}_r - \overrightarrow{n}_0), \tag{2.17}$$

où $\overrightarrow{k}_s$ est le nombre d'onde sondé, c la célérité du son dans le milieu et Θ_s est l'angle entre le haut-parleur et le microphone. On peut donc sonder différents nombres d'onde en ajustant soit la fréquence du signal incident f_0 soit en modifiant l'angle de diffusion Θ_s. La vérification de cette loi fut l'objet de l'étude de Baudet *et al.* [14].

L'onde acoustique diffusée porte l'empreinte du milieu turbulent. En métrologie, on cherche toujours le lien entre le paramètre observable (ici la pression acoustique diffusée) et le paramètre à mesurer (ici l'écoulement turbulent). Reste donc maintenant à caractériser de quelle manière l'écoulement module-t-il l'onde acoustique incidente. Kraichnan [80] pour une turbulence homogène isotrope ou plus récemment Lund [94] pour un écoulement quelconque, construisent les bases théoriques de l'interaction d'une onde acoustique avec un milieu turbulent. La formulation de Lund [94] s'écrit :

$$P_s(\overrightarrow{x}, f) \propto P_0(\overrightarrow{x}, f_0).\zeta(\Theta_s).\frac{i\pi^2 f e^{if|x|/c}}{c^2|x|}\left[(\overrightarrow{n}_0 \wedge \overrightarrow{n}_r).\omega^\circ\left(\overrightarrow{k}_s, f - f_0\right)\right]. \tag{2.18}$$

Dans cette relation :

– P_s est la pression acoustique diffusée dont la fréquence est f,

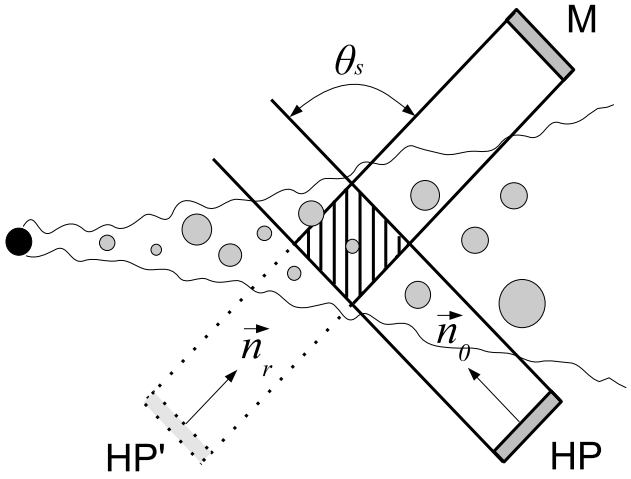


FIGURE 2.14 – Mise en place du haut-parleur et du microphone au sein de l'écoulement turbulent

- P_0 est la pression acoustique incidente dont la fréquence est f_0,
- $\zeta(\Theta_s)$ est le facteur angulaire traduisant l'intensité de l'onde diffusée en fonction de l'angle Θ_s,
- ω° est la transformée de Fourier spatio-temporelle de la vorticité ω définie par :

$$\omega^\circ\left(\overrightarrow{k}, f\right) = \int \omega\left(\overrightarrow{x}, t\right) e^{i\left(2\pi f t - \overrightarrow{k}.\overrightarrow{x}\right)} d^3x dt \tag{2.19}$$

La relation (2.18) suppose un certain nombre d'hypothèses, en particulier :

- La pression acoustique de l'onde incidente doit être suffisamment faible pour ne pas perturber l'écoulement.
- Le nombre de Mach est suffisamment faible pour considérer l'écoulement comme incompressible.
- Le champ de vorticité et le champ acoustique ont des fréquences caractéristiques très différentes. En pratique, cette hypothèse sera vérifiée du fait que l'onde acoustique incidente est dans la gamme des ultrasons, donc très grande devant la plus forte fréquence de l'écoulement.
- L'écoulement est isotherme.

L'énergie de l'onde acoustique diffusée par le milieu turbulent n'est pas répartie de manière isotrope dans l'espace. Lund [94] détermine un facteur angulaire $\zeta(\Theta_s)$ traduisant l'énergie diffusée en fonction de l'angle entre l'onde diffusée et l'onde incidente Θ_s :

$$\zeta(\Theta_s) = \frac{-sin\Theta_s cos\Theta_s}{1 - cos\Theta_s} \tag{2.20}$$

Au final, il existe donc une relation entre le paramètre observable (la pression acoustique diffusée) et le paramètre à mesurer (la vorticité à un nombre donné) de la forme :

$$P_s\left(\overrightarrow{x},f\right) \propto P_0\left(\overrightarrow{x}\right).\omega_\perp^\circ\left(\overrightarrow{k}_s, f-f_0\right), \tag{2.21}$$

où $\omega_\perp^\circ$ est la transformée de Fourier spatio-temporelle de composante de vorticité perpendiculaire au plan d'inter-frange (Fig. 2.14). Toutes ces quantités physiques sont prises dans l'espace de Fourier, or la mesure se situant dans l'espace physique (celui du temps), il est nécessaire de transcrire la relation (2.18) dans une formulation temporelle. Poulain [109] s'attaque à ce problème et déduit une expression temporelle de la pression acoustique diffusée :

$$P_s\left(\overrightarrow{x},t\right) = P_0(t).\zeta\left(\Theta_s\right).\frac{e^{-2i\pi f_0 t}}{||\overrightarrow{x}||c^2}.\left[\frac{\partial\widehat{\omega}_\perp\left(\overrightarrow{k}_s,t\right)}{\partial t} - 2i\pi f_0\widehat{\omega}_\perp\left(\overrightarrow{k}_s,t\right)\right] \tag{2.22}$$

avec

$$\widehat{\omega} = \int \omega(\overrightarrow{x},t)e^{i\overrightarrow{k}\overrightarrow{x}}d^3x \tag{2.23}$$

La fréquence de l'onde incidente étant très grande devant la fréquence caractéristique de la vorticité, la relation (2.22) se simplifie de la manière suivante :

$$P_s\left(\overrightarrow{x},t\right) = -\frac{2i\pi f_0}{||\overrightarrow{x}||c^2}P_0\left(t\right).\zeta\left(\Theta_s\right).e^{-2i\pi f_0 t}.\widehat{\omega}_\perp\left(\overrightarrow{k}_s,t\right) \tag{2.24}$$

La relation (2.24) montre que les variations temporelles de la pression acoustique diffusée est en lien direct avec la dynamique temporelle de la transformée de Fourier spatiale d'une composante de la vorticité à un nombre d'onde donné. Nous mesurons donc un nombre complexe constitué d'une amplitude et d'une phase.

Un désavantage de cette méthode est la taille du volume de mesure. D'après le principe d'incertitude d'Heisenberg, la précision conjointe sur le nombre d'onde et sur la position spatiale est bornée par une certaine valeur :

$$\delta k_s \delta x \geq \frac{1}{4\pi} \tag{2.25}$$

avec δk_s l'incertitude sur le nombre d'onde sondé et δx l'incertitude sur la position. Cela montre qu'une forte précision sur le nombre d'onde se traduira par une forte imprécision sur la position spatiale. Cela a une conséquence pratique directe : la taille du volume de mesure doit être suffisamment grand pour sonder précisément un nombre d'onde particulier de l'écoulement. Dans notre cas la taille du volume de mesure est d'une vingtaine de centimètres de large pour une trentaine de centimètre de long. Cela signifie que la diffusion acoustique mesure un archétype de structure vorticitaire dont le nombre d'onde et l'amplitude ne varient pas dans le volume de mesure.

2.5.2 Dispositif expérimental de diffusion acoustique (AS)

La chaine de mesure expérimentale de diffusion acoustique est décrite sur la Fig. 2.15.

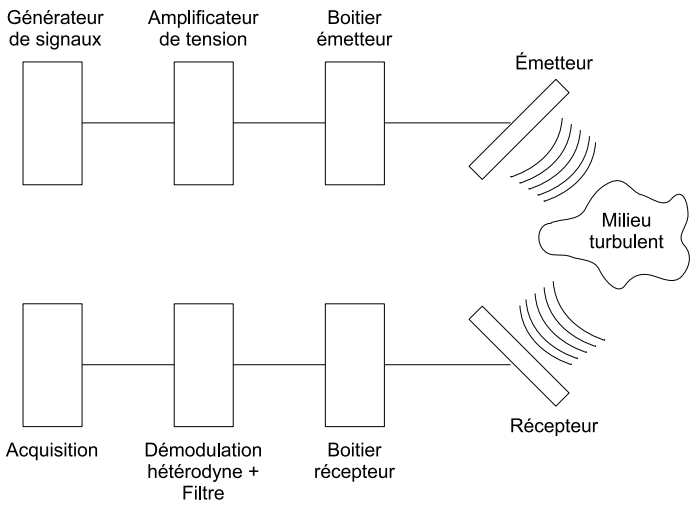


FIGURE 2.15 – Chaîne de mesure de diffusion acoustique

- Le générateur de signaux : Pour produire une onde acoustique émise dans la gamme des ultrasons, nous utilisons un générateur de signaux électriques de marque *Agilent* modèle *33220A*. L'onde générée est type sinusoïdal à des fréquences comprises entre 20kHz et 200kHz.
- L'amplificateur de tension : le signal électrique en sortie du générateur de signaux a une amplitude de l'ordre de 2 Volts. Afin de transformer au mieux l'énergie électrique en énergie mécanique au niveau de la membrane du haut-parleur, il est nécessaire d'amplifier ce signal. Cependant, l'amplitude ne doit pas être trop importante afin que l'onde acoustique incidente ne modifie pas le comportement de l'écoulement. Nous utilisons un amplificateur de tension de marque *NF Electronics Instruments* modèle *HSA4014*.
- L'émetteur : il s'agit d'un organe réversible, il peut à la fois être utilisé comme émetteur ou récepteur. Ils ont été construits au LEGI de Grenoble et on a donc bénéficié de nombreuses années de développement de la technique au sein de ce laboratoire. Ce sont des émetteurs-récepteurs à condensateur, dont la capacité est créée par un vide d'air entre une plaque de zinc et une toile de Mylar de quelques micromètres d'épaisseur (Fig. 2.16). La plaque de zinc est striée sous forme d'un quadrillage cartésien très fin. Les transducteurs sont ainsi virtuellement constitués d'une multitude de sources acoustiques ponctuelles. Le condensateur est polarisé grâce à une tension continue d'environ 250 Volts. Puis en superposant le signal

sinusoïdal à la tension continue de polarisation, le film mylar se met à vibrer à la fréquence du signal électrique incident. En mode récepteur, la vibration du film mylar associée à la pression acoustique incidente modifie la capacité du transducteur. Ces modifications de la charge sont alors transformées en signal électrique, puis amplifiées par un amplificateur à bas bruit.

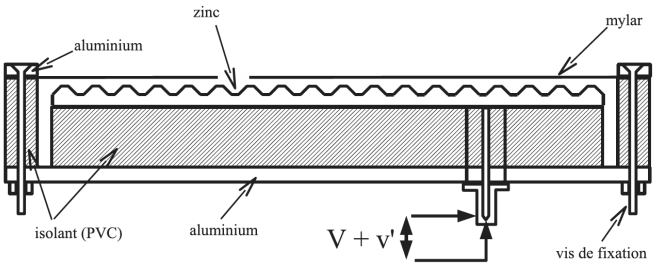


FIGURE 2.16 – Coupe transversale des transducteurs. D'après [98]

– La démodulation hétérodyne et le filtrage : d'après la relation (2.18), la modulation de l'onde acoustique incidente par la turbulence, c'est-à-dire la modification en amplitude et en fréquence de l'onde incidente, se traduit par un décalage de fréquence $f - f_0$. Afin d'observer uniquement les écarts par rapport à la fréquence de l'onde incidente, une démodulation hétérodyne est appliquée au signal provenant du récepteur. Il s'agit donc d'une translation dans l'espace spectral d'où :

$$P_s^H(t) = P_s(t)e^{-2if_0t}, \tag{2.26}$$

où P_s^H est le signal de pression acoustique diffusée en sortie du démodulateur. Un démodulateur de marque *Stanford Research System* modèle *SR830* fut mis en place. Puis afin de limiter les effets de bruit électronique et aérodynamique, le signal est filtré grâce à un filtre passe-haut et passe-bas de type Butterworth (-48dB/dec) de marque *Stanford Research System* modèle *SIM965*.
– L'acquisition : Une carte d'acquisition de Marque National Instrument DAQmx dont la fréquence d'acquisition maximum est de 100kHz et la précision est de 12 bits.

2.6 Conclusion

Nous disposons donc d'un panel de techniques anémométriques complémentaires. Chacune de ces méthodes a des avantages et des inconvénients. Nous résumons les caractéristiques des diverses techniques mise en place lors de cette thèse dans le tableau ci dessous :

	HWA-X	PIV2C	TR-PIV2C	ADL3C	AS
Composantes	U, V	U, V	U, V	U, V, W	$\omega_\perp(k_s)$
Type de mesure	ponctuelle	planaire	planaire	ponctuelle	volumique
Résolution spatiale	complète	incomplète	incomplète	complète	imprécise
Résolution temporelle	complète	aucune	incomplète	complète	complète
Recirculation	non	oui	oui	oui	oui
Corrélation spatiale	non	oui	oui	non	non
Corrélation temporelle	oui	non	oui	oui	oui

Chapitre 3

Dynamique d'advection à une échelle

"Toute musique qui ne peint rien n'est que du bruit."

Jean le Rond d'Alembert

Avant de focaliser notre attention sur les bilans d'énergie cinétique turbulente à proprement parler, un point préliminaire concerne la dynamique d'advection à une échelle donnée du spectre turbulent. En d'autres termes, nous cherchons à caractériser le transport du champ fluctuant, des plus petites aux plus grandes échelles. Ce point particulier permet de peser, entre autres, la validité de l'hypothèse de "champ gelé" de Taylor qui sera utilisée par la suite.

3.1 Estimation de la vitesse de convection

Dans un milieu turbulent, la vitesse dépend du temps et de l'espace, *i.e.* $u_\alpha = u_\alpha(x,t)$. Afin de caractériser un écoulement turbulent, un paramètre d'étude important est de considérer le "taux de ressemblance" ou bien "l'énergie de l'écart" entre $u_\alpha(x,t)$ et la vitesse u_α prise à un temps $t+\tau$ et à une position spatiale $x+r$, où r et τ varient. En terme plus scientifique le "taux de ressemblance" se calcule par le coefficient de corrélation $\rho_{u_\alpha u_\alpha}$ définit par :

$$\rho_{u_\alpha u_\alpha}(r,\tau) = \frac{\overline{u_\alpha(x,t)u_\alpha(x+r,t+\tau)}}{\sqrt{\overline{u_\alpha^2(x,t)}}\sqrt{\overline{u_\alpha^2(x+r,t+\tau)}}} \tag{3.1}$$

et "l'énergie de l'écart" est caractérisée par la fonction de structure d'ordre 2 (normalisée) :

$$\overline{(\Delta u_\alpha)^2}(r,\tau) = \frac{\overline{\left[u_\alpha(x+r,t+\tau) - u_\alpha(x,t)\right]^2}}{\frac{1}{2}\left[\overline{u_\alpha^2(x,t)} + \overline{u_\alpha^2(x+r,t+\tau)}\right]} \tag{3.2}$$

Rares sont les études expérimentales dont la résolution spatiale et temporelle sont suffisantes afin de calculer précisément la corrélation ou la fonction de structure spatio-temporelle. Les méthodes expérimentales dont on dispose accèdent en général soit à une trace temporelle de la vitesse (HWA, ADL), soit à un champ spatial (PIV). Cependant il est possible de simplifier le problème en supposant l'existence d'une vitesse de phase U_c permettant de faire le pont entre une séparation temporelle τ et une séparation spatiale r. Dans l'espace physique, τ et r sont liés par la relation suivante :

$$r = U_c(r)\tau. \tag{3.3}$$

Dans la relation (3.3), la vitesse de phase U_c est une fonction de la séparation spatiale r. Autrement dit, la vitesse de convection à une échelle particulière du champ turbulent dépend de cette échelle. Il est alors coutume d'invoquer l'hypothèse de "champ gelé" de Taylor [132] qui revient à considérer que U_c est une constante qui ne dépend pas de l'échelle r.

3.1.1 Ajustement direct

Dans notre étude, la détermination de U_c est tout d'abord réalisée en ajustant la séparation spatiale $r = U_c\tau$ calculée à partir d'un signal temporel (issu de l'ADL3C), à la séparation réelle (issue des champs PIV2C). Auparavant, quelques considérations techniques sont à prendre en compte.

En effet, la plupart des outils statistiques couramment employés en turbulence nécessitent un échantillonnage constant en temps. C'est le cas pour le spectre d'énergie comme pour les auto-corrélations calculées à partir d'une transformée de Fourier rapide (FFT). Le désavantage principal de l'ADL est que l'estimation de la vitesse est concomitante au passage d'une particule dans le volume de mesure. L'intervalle de temps entre deux passages successifs n'est donc pas régulier. En s'inspirant de la méthode de calcul des corrélations proposée par Mayo *et al.* [97], le calcul des fonctions de structure peut s'affranchir de cet inconvénient. Les séparations en temps sont alors triées en différentes classes τ telles que $\tau = k\Delta t_{min}$ (Δt_{min} est le plus petit intervalle de temps entre 2 passages de particules) avec $k = 1, 2, 3, ...$, et la fonction de structure est estimée pour chaque classe.

De plus, les mesures ADL demeurent polluées par le bruit et notamment à petite échelle (Romano *et al.* [122], Ramond & Millan [115]). Les sources de bruit sont multiples : polarisation des faisceaux, équilibrage en puissance des couples de faisceaux, ensemencement, collection et traitement de la lumière diffusée. Romano *et al.* [122] montrent que en présence de bruit, les fonctions de structure d'ordre 2 s'écrivent :

$$\overline{(\Delta u_N)^2} = \overline{(\Delta u)^2} + \overline{(\Delta N)^2}, \tag{3.4}$$

en considérant que le bruit et le signal sont non corrélés. Ici, N est le bruit de mesure et $\overline{(\Delta u_N)^2}$ est la fonction de structure du signal bruité u_N. Selon les cas, le rapport signal sur

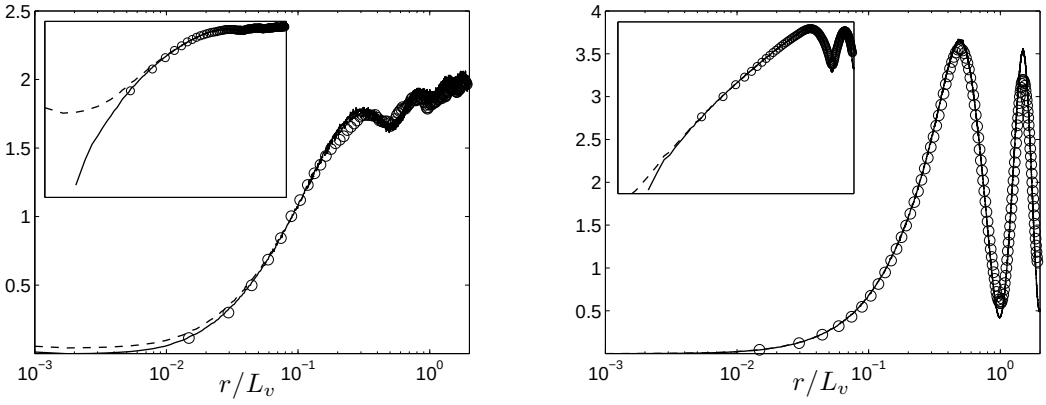
bruit varie mais il peut être considéré constant pour tout $\tau > 0$ ou $r > 0$ (bruit blanc) :

$$\overline{(\Delta N)^2} = 2\overline{N^2}. \tag{3.5}$$

Afin de corriger les fonctions de structure d'ordre 2, nous considérons que la variance du bruit est égale à la valeur de la fonction de structure bruitée à la plus petite séparation Δt_{min}, où l'énergie cinétique de la turbulence est négligeable comparée à celle du bruit :

$$\overline{\Delta N^2}(\tau) = 2\overline{N^2} = \overline{\Delta u_N^2}(\tau = \Delta t_{min}). \tag{3.6}$$

Puis, les fonctions de structure sont corrigées en soustrayant la fonction de structure du bruit.



(a) (b)

FIGURE 3.1 – Comparaison des fonctions de structure d'ordre 2 des composantes u (a) et v (b) calculées à partir de l'ADL3C : bruitées - - - - et non bruitées —— et calculées à partir de la PIV2C : ○ . $x = 7D$, $y = 0D$, $Re_D = 3600$. Le cadre en haut à gauche de chaque figure est la même fonction de structure mais dans une représentation log-log.

Un exemple de calcul de la vitesse de convection en $x = 7D$ et $y = 0D$ est donné sur la Fig. 3.1. Cette position particulière fut choisie car le champ moyen est suffisamment homogène pour que l'hypothèse de Taylor soit valide. Lorsque l'on se rapproche du cylindre, cette hypothèse n'est plus respectée (non montré ici).

A cette position particulière, le champ moyen est certes relativement homogène mais ce n'est en revanche pas le cas pour le champ fluctuant. Pour cette raison les fonctions de structure de la PIV2C sont normalisées par la moyenne entre la variance au point considéré et au point séparé du premier d'une distance r. Cette méthode revient virtuellement à "réhomogénéiser" le champ fluctuant.

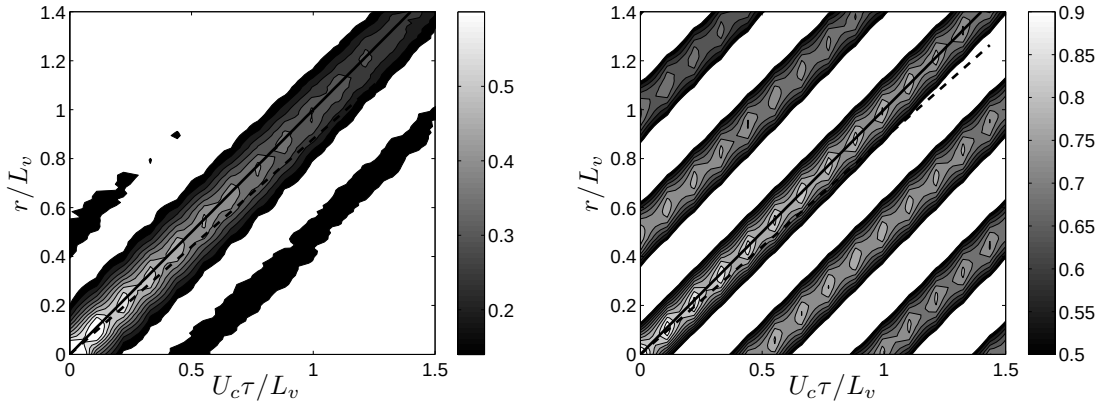
Il est d'usage de supposer que la validité de l'hypothèse Taylor repose sur un faible taux de turbulence, autrement dit lorsque les fluctuations autour de la moyenne sont

faibles comparées à cette vitesse moyenne. La Fig. 3.1 montre que l'hypothèse de Taylor est tout à fait valable alors que taux de turbulence est particulièrement élevé dans cette portion de l'écoulement ($\approx 30\%$). En considérant une vitesse de convection constante, les fonctions de structure d'ordre 2 calculées via la PIV2C et l'ADL3C coïncident tout à fait sur toutes les séparations. Il en est de même en dehors de la ligne centrale du sillage et d'autres nombres de Reynolds. Cela n'occasionne que de très faibles variations de U_c. L'estimation de la vitesse de convection aboutit à une valeur $U_c = 0.84U_0$, valeur très proche de celle mesurée par Zhou & Antonia [148] à 10D ($U_c = 0.86 - 0.88U_0$) et identique à celle prodiguée par Lin & Hsieh [88] à 7D ($U_c = 0.84U_0$).

L'axe des séparations r est normalisé par L_v : la distance longitudinale entre deux tourbillons de même signe. Cette séparation correspond à la périodicité observée sur la fonction de structure de la composante v. Dans notre cas, $L_v = 4.15D$, valeur très proche de celle mesurée par Zhou & Antonia [148] ($L_v = 4.2D$). Par la suite, cette séparation particulière sera utilisée afin d'extraire la variance du mouvement cohérent.

3.1.2 Corrélation spatio-temporelle

La vitesse de convection peut être également extraite de la corrélation spatio-temporelle définie par la relation (3.1) (Krogstad *et al.* [83], Chung & McKeon [33]). Seule la méthode TR-PIV2C permet de calculer $\rho_{u_\alpha u_\alpha}$ pour laquelle on dispose de champs spatiaux de vitesse et d'une relativement bonne résolution temporelle. La méthode d'estimation de la vitesse de convection U_c consiste en l'évaluation expérimentale de la relation de dispersion : $r = U_c\tau$.



(a) (b)

FIGURE 3.2 – Valeur absolue du coefficient de corrélation spatio-temporelle de la composante u (a) et v (b) à une position $x = 7D$ et $y = 0D$, $Re_D = 3600$. —— : $r = U_c\tau$, - - - - : $r = \overline{U}\tau$

Sur la Fig. 3.2, il est illustré $\rho_{u_\alpha u_\alpha}(r,\tau)$. On remarque une très forte périodicité (en temps comme en espace), notamment en ce qui concerne la composante $u_\alpha \equiv v$. On observe que pour obtenir un évènement ressemblant à celui considéré au point x et à l'instant t, il faut soit attendre une période égale à L_v/U_c, soit se déplacer d'une période égale à L_v. Cela est une conséquence du caractère spatio-temporel de l'allée de Bénard-von Kármán.

De même que précédemment, l'hypothèse de Taylor est très bien vérifiée pour toutes les séparations. La corrélation spatio-temporelle acquiert un maximum local qui suit parfaitement la droite d'équation $r = U_c\tau$. Une fois encore les valeurs $U_c = 0.84U_0$ et $L_v = 4.15D$ sont observées. Sur la Fig. 3.2, est également représentée la droite d'équation $r = \overline{U}\tau$ où $\overline{U}$ est la vitesse moyenne à cette position dans l'écoulement. La vitesse de convection du champ turbulent diffère donc de la vitesse moyenne locale. Cela est d'une très grande importance car l'hypothèse de Taylor est certes valide, mais son utilisation requiert une connaissance préliminaire de U_c, qui diffère de la vitesse moyenne locale.

Pour conclure, les plus grandes et les plus petites échelles de l'écoulement sont convectées à une même vitesse U_c. Or, comme il fut mis en lumière par Zaman et Hussain [145], par Zhou *et al.* [148] et Lin & Hsieh [88], U_c représente la vitesse de convection des tourbillons de l'allée de Bénard-von Kármán. Une des méthodes de mesure de U_c qui ne fut pas employée ici consiste justement à identifier la vitesse moyenne locale au centre des tourbillons [148], [88]. L'étude de la dynamique d'advection à une échelle donnée du champ turbulent met donc en lumière une interaction de premier ordre entre les plus petites et les plus grandes échelles. On montre ainsi que la dynamique d'advection des plus petites échelles est pilotée par celle des plus grandes qui peuvent se présenter sous la forme d'un mouvement cohérent.

3.2 Temps caractéristiques à un nombre d'onde

La méthode expérimentale de diffusion acoustique permet de sonder un nombre d'onde donné du spectre turbulent. Il s'agit donc d'un outil particulièrement adapté afin de décrire par exemple le mécanisme de transport de ce nombre d'onde. Il est ici mis en œuvre afin de sonder le mode de Fourier k_s de la composante ω_z de vorticité. Ici, k_s coïncide avec l'axe principal de l'écoulement x, $k_s \equiv k_x$.

Nous précisons que nombre des résultats qui seront présentés par la suite ont été déjà illustrés par Baudet *et al.* [15], ainsi que dans le travail de thèse de Cédric Poulain [109] ainsi que dans celle de Nicolas Mazellier [98]. Lors de cette thèse, nous réinvestissons la méthode de diffusion acoustique dans le contexte de l'écoulement de sillage, les études citées ci-dessus se focalisant sur une turbulence de grille et sur un jet. Cependant, une découverte de plus sera présentée dans cette thèse, mettant en évidence de manière très forte la persistance d'un mouvement organisé sur de très longues distances en aval du cylindre.

3.2.1 Mise en évidence du mécanisme de balayage

Tout d'abord, rappelons que la méthode de diffusion acoustique repose sur le lien entre un paramètre observable : la pression acoustique diffusée P_s, et le paramètre à mesurer (la transformée de Fourier d'une composante de vorticité à un nombre d'onde donné $\widehat{\omega}_z$). Ces deux quantités sont liées par une expression de la forme :

$$P_s\left(\overrightarrow{x},t\right) \propto P_0\left(t\right)\widehat{\omega}_z\left(\overrightarrow{k}_s,t\right), \tag{3.7}$$

où P_0 est la pression acoustique incidente. Après l'opération de démodulation hétérodyne, P_s est un nombre complexe caractérisé par son amplitude A_s et sa phase ϕ, *i.e.* $P_s(t) = A_s(t)e^{i\phi(t)}$. Sur la Fig. 3.3(a) est représentée en insert la densité spectrale d'énergie (PSD) brute du signal de pression acoustique mesurée. En $f - f_0 = 0$ on remarque une forte quantité d'énergie que l'on nommera par la suite "pic central". Cette énergie parasite est liée au dispositif expérimental de diffusion acoustique qui induit une propagation directe de la pression acoustique entre l'émetteur et le récepteur [109], [98]. Afin de limiter son effet, nous utilisons un filtre numérique dont la fonction transfert est la suivante [109], [98] :

$$P_s^f = \frac{P_s(t) - P_s(t+\Delta t)}{2}, \tag{3.8}$$

où Δt est la période d'acquisition, *i.e.* l'inverse de la fréquence d'acquisition. Le spectre obtenu une fois l'opération de filtrage effectuée est représenté sur la Fig. 3.3(a). Le pic central est clairement atténué par l'opération de filtrage.

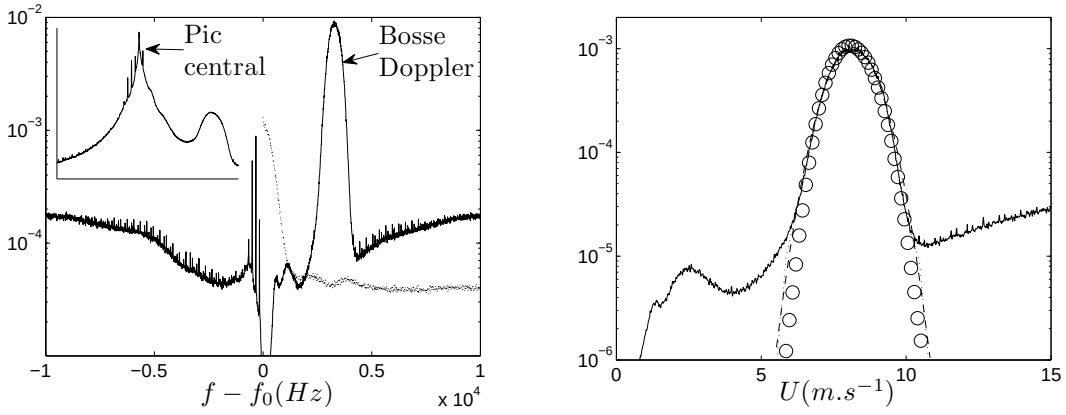
En outre, une bosse d'énergie s'observe sur une bande de fréquence $3000 < f - f_0 < 6000$ (Fig. 3.3(a)). Le décalage en fréquence est représentatif de l'effet Doppler associé à une vitesse non nulle du rouleau de vorticité au sein du volume de mesure [109], [98]. L'amplitude de la bosse Doppler est proportionnelle à l'amplitude de la vorticité à ce nombre d'onde. L'effet Doppler n'a en revanche aucun effet sur le spectre d'amplitude [109] du nombre complexe, ce que l'on vérifie bien sur la Fig. 3.3(a).

De manière tout à fait équivalente à la méthode ADL basée sur la diffusion de la lumière, le décalage en fréquence s'exprime de la manière suivante [109], [98] :

$$2\pi(f(t) - f_0) = k_s.U(t) \tag{3.9}$$

du fait que, dans notre cas, $\vec{k_s}$ est aligné avec x. Au sein du volume de mesure, la vitesse de l'écoulement turbulent est caractérisée par une fonction de probabilité de rencontrer une vitesse U comprise dans un intervalle $U - \Delta U\,;\, U + \Delta U$. La bosse Doppler peut donc être considérée comme la densité de probabilité (PDF) que le rouleau de vorticité ait une vitesse U.

Sur la Fig. 3.3(b), est représenté le spectre de vorticité tracé en fonction de $U = 2\pi(f-f_0)/k_s$ ainsi que la PDF de la composante de vitesse U calculée à partir d'une mesure



(a) (b)

FIGURE 3.3 – (a) Spectre de vorticité brut (insert) et filtré (——) mesuré à $x = 50D$, $y = 0D$, $Re_D = 4800$, Spectre de l'amplitude du signal mesuré $\cdots\cdots$. (b) —— Spectre de vorticité où l'axe des fréquences est transformé en vitesse, ○ Densité de probabilité de la composante U mesurée grâce au fil chaud, $\cdots\cdots$ ajustement Gaussien du spectre de vorticité.

au fil chaud. On remarque que la PDF de U mesuré au fil chaud coïncide relativement correctement avec le spectre de vorticité (Fig. 3.3(b)), à la fois en terme de moyenne que des fluctuations autour de la moyenne.

La PDF de la vitesse incorpore les fluctuations de vitesse associées à toutes les échelles de la turbulence, des plus grandes aux plus petites. Cela indique une fois de plus qu'un nombre d'onde donné (ou une échelle donnée) est transporté par la totalité des échelles du spectre turbulent, notamment par les plus grandes. Ce mécanisme est nommé transport par balayage (tr.*sweeping*).

Les différents moments statistiques de la vitesse U peuvent aussi être extraits du spectre de vorticité. Dans ce but, nous ajustons la PSD de vorticité par une forme Gaussienne [109], [98] définie par :

$$PSD(\Delta f) = \frac{A}{\sqrt{2\pi}\sigma_f} exp\left(-\frac{(\Delta f - \mu_f)^2}{2\sigma_f^2}\right) \tag{3.10}$$

où $\Delta f = f - f_0$, A est l'amplitude moyenne de la vorticité au nombre d'onde k_s, μ_f est la position en fréquence du maximum de la bosse Doppler, et σ_f est l'écart type de la Gaussienne. Ainsi, les paramètres de la Gaussienne μ_f et σ_f permettent de calculer respectivement la vitesse moyenne et l'écart type de la vitesse via les relations :

$$\overline{U} = 2\pi\mu_f/k_s, \tag{3.11}$$

$$\left(\overline{u^2}\right)^{1/2} = 2\pi\sigma_f/k_s. \tag{3.12}$$

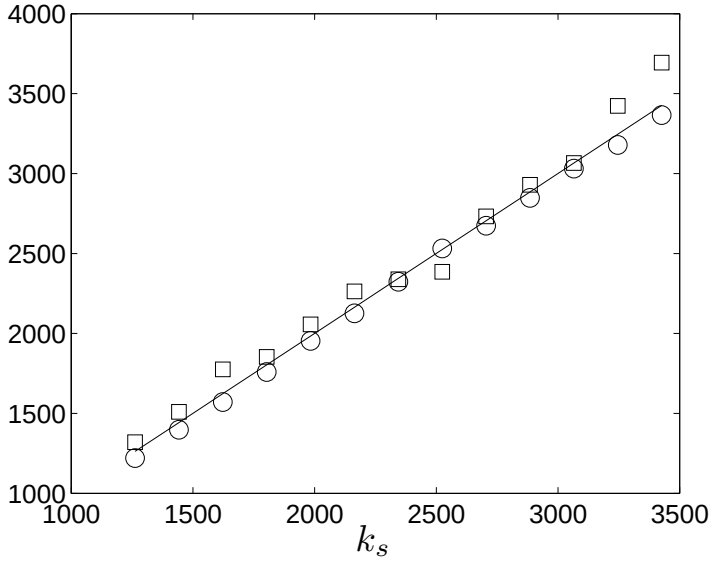


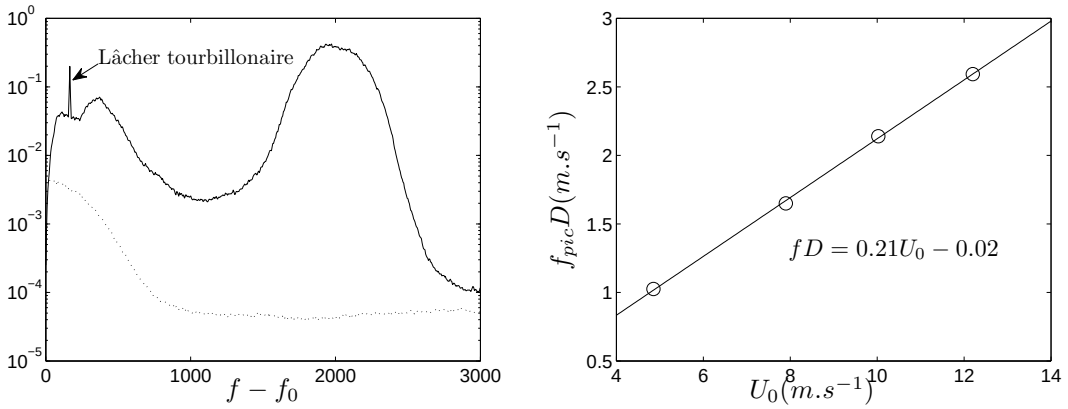
FIGURE 3.4 – Comparaison des moments d'ordre 1 et 2 calculés par le biais de la diffusion acoustique et par anémométrie au fil chaud. —— : $k_s = k_s$, ○ : $2\pi\mu_f/\overline{U}$, □ : $2\pi\sigma_f/\left(\overline{u^2}\right)^{1/2}$. $x = 50D$, $y = 0D$, $Re_D = 4800$

La Fig. 3.4 représente une comparaison de la vitesse moyenne et de l'écart type de la vitesse issue de la diffusion acoustique et de l'anémométrie au fil chaud. Si les estimations étaient rigoureusement les mêmes, la position des symboles devraient coïncider avec la droite de coefficient directeur égal à 1. L'estimation la vitesse moyenne est très proche de celle effectuée via le fil chaud, avec un écart inférieur à 5%. Concernant l'écart type de la vitesse, l'écart est un peu plus prononcé avec une erreur maximum d'environ 15%. Cette surestimation de l'écart type est certainement due à une influence du volume de mesure, incorporant les fluctuations de vitesse de part et d'autre de la ligne centrale [98].

3.2.2 Identification du nombre de Strouhal

En outre, le spectre d'énergie du nombre complexe $P_s(t)$ montre un pic très étroit situé entre le pic central et la bosse Doppler (Fig. 3.5(a)). Or, aucun pic d'énergie n'est présent sur le spectre d'amplitude du signal complexe mesuré. Il s'agit donc bien d'un mécanisme d'advection n'affectant que la phase. Le mécanisme de balayage que nous venons de mettre en évidence présente donc une dynamique temporelle périodique. Faisons l'hypothèse que cette périodicité est une preuve du lâcher tourbillonnaire de Bénard-von Kármán.

Afin de vérifier cette supposition, nous comparons la valeur du nombre de Strouhal



(a) (b)

FIGURE 3.5 – (a) Identification de la fréquence du lâcher tourbillonnaire sur le spectre de vorticité. —— : spectre du nombre complexe, ····· : spectre d'amplitude. (b) Vérification de l'évolution du nombre de Strouhal en fonction de la vitesse amont U_0. ○ points expérimentaux, —— approximation linéaire : $f_{pic}D = 0.215U_0 - 0.02$.

St_D à celle proposée dans la littérature. Celui-ci est défini par :

$$St_D = \frac{f_{pic}D}{U_0} \tag{3.13}$$

Dans la gamme de nombre de Reynolds étudiés, le nombre de Strouhal est constant et atteint la valeur de 0.212 (Roshko [123], [124]). Sur la Fig. 3.5(b) est représenté le produit $f_{pic}D$ en fonction de U_0. A partir d'une approximation linéaire, nous obtenons une valeur de 0.215 concernant le coefficient directeur. Cette valeur est tout à fait en accord avec la valeur de Roshko [123], [124]. L'existence d'un mécanisme d'advection périodique d'un nombre d'onde donné par le mouvement cohérent est ainsi prouvée.

Cette remarque est à mettre en parallèle avec l'estimation précédente de la vitesse d'advection U_c du champ turbulent. En effet, nous avons mis en lumière que l'intégralité des échelles du spectre turbulent est advectée en moyenne à la même vitesse U_c : la vitesse moyenne au centre des tourbillons de l'allée de Bénard-von Kármán. Une fois encore, nous montrons que l'interaction à l'ordre 0 entre les plus petites et les plus grandes échelles correspond à une induction du mécanisme de transport des petites échelles par les plus grandes dont la dynamique peut être cohérente.

La mise en évidence de l'advection par le mouvement organisé est ici effectué à $x = 50D$ derrière le cylindre alors qu'aucun pic n'est perceptible dans le spectre de vitesse mesuré grâce à un fil chaud. Il convient alors de rappeler que l'anémométrie au fil chaud mesure la modulation d'amplitude de la vitesse (et non de sa phase) associée à l'intégralité du spectre turbulent (et non une échelle particulière). Les amplitudes du fond turbulent et du

mouvement organisé sont alors du même ordre de grandeur, et ne peuvent être dissociées l'une de l'autre. En revanche, la diffusion acoustique sonde un nombre d'onde particulier et est aveugle à la modulation d'amplitude des autres nombres d'onde. La présence d'un mouvement organisé est alors clairement perceptible.

3.2.3 Temps de balayage et de basculement

Jusqu'ici, nous avons mis en évidence que le spectre fréquentiel de vorticité à un nombre d'onde est particulièrement marqué par le mécanisme de balayage. Il est intéressant maintenant de s'intéresser plus en détail à ce mécanisme, notamment d'un point de vue quantitatif. Dans ce but, nous étudions les temps caractéristiques de balayage déduit des auto-corrélations temporelles du signal complexe de vorticité. Il convient alors de considérer deux types de corrélations :

– Corrélation du nombre complexe $\rho_{\omega\omega}$:

$$\rho_{\omega\omega}(k_s,\tau) = \frac{\overline{P_s(k_s,t)\check{P}_s(k_s,t+\tau)}}{\overline{P_s(k_s)^2}} \tag{3.14}$$

où $\check{P}_s$ est le conjugué de P_s. On peut alors définir son temps caractéristique $\tau_c(k_s)$:

$$\tau_c(k_s) = \int_0^\infty \rho_{\omega\omega}(k_s,\tau)d\tau. \tag{3.15}$$

$\tau_c(k_s)$ représente donc une sorte de temps intégral d'advection à un nombre d'onde donné.

– Corrélation de l'amplitude $\rho_{|\omega||\omega|}$:

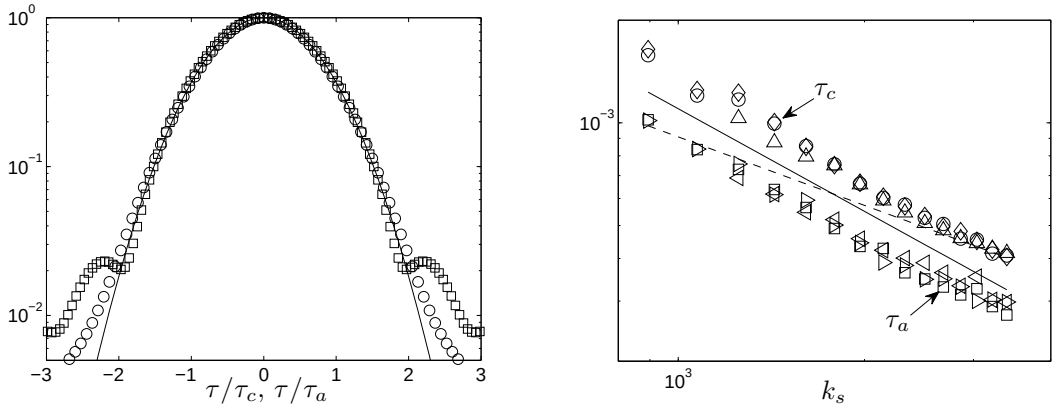
$$\rho_{|\omega||\omega|}(k_s,\tau) = \frac{\overline{|P_s|\,(k_s,t)\,|P_s|\,(k_s,t+\tau)}}{\overline{|P_s(k_s)|^2}} \tag{3.16}$$

où $|P_s|$ désigne la valeur absolue de P_s. Et son temps caractéristique $\tau_a(k_s)$ est :

$$\tau_a(k_s) = \int_0^\infty \rho_{|\omega||\omega|}(\tau)d\tau. \tag{3.17}$$

Les corrélations $\rho_{\omega\omega}$ et $\rho_{|\omega||\omega|}$ sont représentées sur la Fig. 3.6(a), où l'axe des séparations temporelles τ est normalisé par le temps caractéristique τ_c ou τ_a. Ces deux corrélations ont une forme très similaire et suivent très fidèlement la tendance Gaussienne jusqu'à $\tau/ \approx 2\tau_c, \tau_a$.

L'hypothèse de similitude d'échelle de Kolmogorov [77] stipule que la vitesse caractéristique u_r à une échelle r est liée à sa taille r par la relation $u_r \propto r^{1/3}$. Cette hypothèse



(a) (b)

FIGURE 3.6 – (a) Corrélation du nombre complexe et de son amplitude en fonction de la séparation spatiale. ○ : $\rho_{\omega\omega}$; □ : $\rho_{|\omega||\omega|}$; —— Gaussienne. (b) Évolution des temps caractéristiques $\tau_c/\sqrt{\overline{u^2}}$ et $\tau_a/\sqrt{\overline{u^2}}$ en fonction du nombre d'onde pour différents nombres de Reynolds $Re_D = 3000, 4800, 6000$. —— : prédiction de Tennekes k_s^{-1} ; · · · · · · : prédiction de Kolmogorov $k_s^{-2/3}$.

étant valable dans un contexte localement isotrope et à un nombre de Reynolds infini. Kolmogorov [77] construit alors un temps caractéristique τ_r^K à une échelle r de la forme :

$$\tau_r^K \propto \frac{r}{u_r} \propto r^{2/3} \propto k_s^{-2/3}. \tag{3.18}$$

Cette relation montre que le temps caractéristique de Kolmogorov dépend uniquement de l'échelle r indépendamment du comportement des autres échelles. Tennekes [133] construit un autre temps caractéristique prenant en considération les possibles interactions non locales entre les différentes échelles du spectre turbulent :

$$\tau_r^T \propto \frac{r}{\sqrt{\overline{u^2}}} \propto r^1 \propto k_s^{-1}. \tag{3.19}$$

Dans la formulation de Tennekes, u_r est simplement remplacé par $\sqrt{\overline{u^2}}$ prenant en considération la modulation associée à l'ensemble des échelles susceptibles d'agir sur l'échelle r. Il est important de rappeler que ces deux formulations aboutissent toutes deux à un spectre évoluant en $k^{-5/3}$, tendance largement vérifiée par l'expérience.

La Fig. 3.6(b) montre que les temps caractéristiques d'advection τ_c et τ_a suivent la loi de Tennekes : k_s^{-1} [109], [98], Poulain *et al.* [112], [111] [110]). Par une simple étude d'ordre de grandeur, il est facile de montrer que $\overline{u^2} >> u_r^2$. Le temps de Kolmogorov est donc beaucoup plus long que le temps de Tennekes [98]. Pour cette raison, le temps de

Kolmogorov n'est pas perceptible par la mesure par diffusion acoustique car caché par l'influence dominante du sweeping.

La Fig. 3.6(b) montre également que la constante de proportionnalité ne varie pas significativement dans la gamme de nombres de Reynolds étudiés, et que cette constante est plus faible pour τ_a que pour τ_c. En d'autres termes, l'amplitude de la vorticité à un nombre d'onde donné a une "durée de corrélation" moins longue que celle du signal complexe.

Considérons maintenant l'équation de transport de la vorticité dans l'espace physique :

$$\underbrace{\frac{\partial \omega}{\partial t} + \mathbf{u}\nabla\omega}_{\text{dérivée particulaire}} = \underbrace{\omega\nabla\mathbf{u}}_{\text{étirement + diffusion}} + \underbrace{\nu\Delta\omega}_{\text{diffusion}} \tag{3.20}$$

Le membre de gauche est associé à la dérivée particulaire (advection) du vecteur ω. Il traduit l'évolution de la vorticité en suivant les particules fluides dans leur mouvement. Ce terme décrit donc un phénomène de transport mais n'induit aucune déformation du tube de vorticité sondé. Les mécanismes de déformation sont intégrés dans le premier terme du membre de droite et sont au nombre de deux. Le premier type de déformation correspond au basculement du vecteur ω, le second à un étirement. Enfin, le dernier terme correspond au mécanisme de diffusion ou d'étalement du vecteur ω.

Nous avons mis en évidence que le temps caractéristique du signal complexe est profondément marqué par la dynamique d'advection. Telle que la méthode est mise en place, une seule direction d'advection ($\equiv x$) est selectionnée. Si bien que :

$$\tau_c = \frac{1}{\sqrt{\overline{u^2}}k_s}. \tag{3.21}$$

L'advection (membre de gauche de l'équation de transport de la vorticité) est un mécanisme n'influant que la phase et non l'amplitude du signal complexe. Pour reformuler, le temps caractéristique de l'amplitude du signal complexe est insensible à l'advection. Il ne peut donc être la marque que de la déformation du vecteur ω (membre de droite), le temps caractéristique du phénomène de diffusion étant bien plus long donc non visible [109].

Les mécanismes aboutissant à la déformation d'une structure vorticitaire sont schématisés sur la Fig. 3.7. De la même manière que Mazellier [98], on considère un modèle simple d'une structure isolée sous la forme d'un rouleau cylindrique dont l'axe est initialement aligné avec la composante de vorticité sondée. L'amplitude de la vorticité est maximale lorsque l'axe du rouleau est colinéaire à la direction de la composante de vorticité considérée.

Sous l'effet des composantes de vitesse perpendiculaires à la direction de la composante de vorticité ω_z (notée $u_\perp$), ce rouleau bascule (Fig. 3.7). L'amplitude de la composante vorticité sondée diminue donc par transfert d'énergie vers les autres directions. D'autre

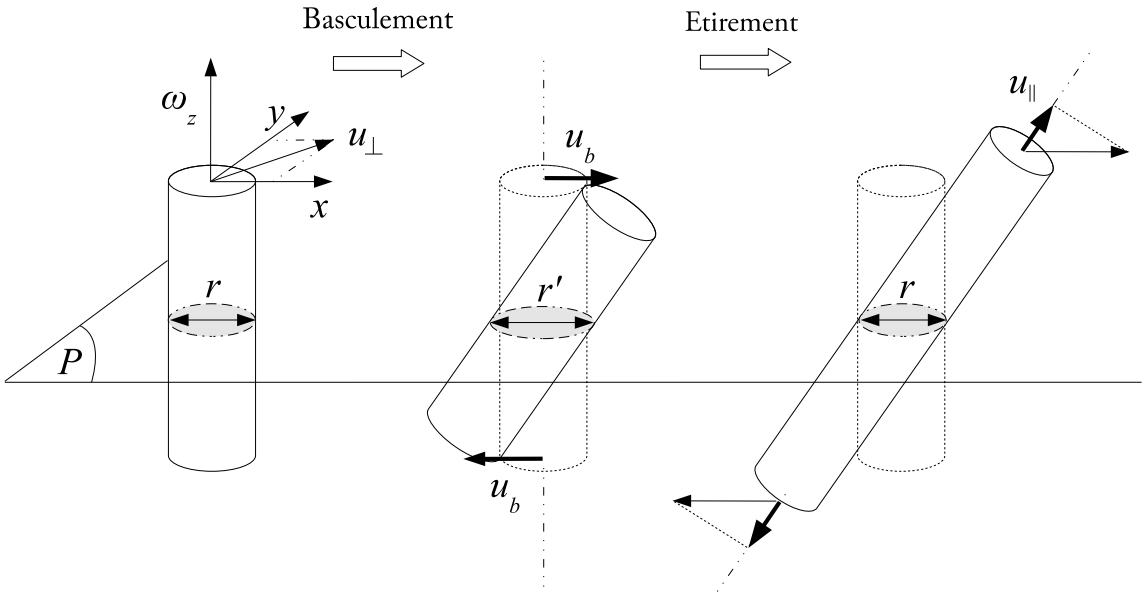


FIGURE 3.7 – Schématisation de l'effet du basculement-étirement sur un rouleau de vorticité.

part, la surface projetée sur le plan P (surface grisée) est plus grande, le nombre d'onde projeté $k_x \equiv k_s$ est donc plus petit. Dès lors que ce rouleau commence à basculer, les composantes perpendiculaires participent également à l'étirement. La conservation du moment cinétique induit une augmentation du nombre d'onde (surface grisée plus petite) ainsi qu'un accroissement de l'amplitude de vorticité. Ce mécanisme d'étirement est souvent utilisé afin d'expliquer une production d'échelles de plus en plus énergiques en terme de vorticité au fur et à mesure que les échelles du spectre sont petites [9], [49].

Pour que le modèle soit en adéquation avec les observations faites via la diffusion acoustique, c'est-à-dire pour qu'un rouleau de vorticité voit son amplitude changer sans modification de sa surface projetée (du nombre d'onde), il faut que le processus de basculement et d'étirement se compensent très exactement en terme de déformation du rouleau (surface projetée). Si l'on considère un étirement pur ou bien un basculement pur, le rouleau change de nombre d'onde et la diffusion acoustique perd la trace de cette structure. Il faut donc considérer une conjonction de ces deux phénomènes, et non chacun séparément.

Dans notre configuration, la composante ω_z est sondée par le biais de la diffusion acoustique. Le basculement est ainsi provoqué par les composantes perpendiculaires à la direction z, soit u et v. Considérons alors une vitesse effective de basculement u_b telle que [98] :

$$\sqrt{\overline{u_b^2}} = \sqrt{\frac{\overline{\left(u_\perp(z) - u_\perp(z+\Delta z)\right)^2}}{2}}. \tag{3.22}$$

Si l'on considère que la longueur Δz est de l'ordre de l'échelle intégrale, les composantes $u_\perp(z)$ et $u_\perp(z+\Delta z)$ sont indépendantes, si bien que :

$$\begin{aligned}\sqrt{\overline{u_b^2}} &= \sqrt{\frac{1}{2}\left(\overline{u_\perp^2}(z)+\overline{u_\perp^2}(z+\Delta z)\right)} \\ &= \sqrt{\frac{1}{2}\left(\overline{u^2}(z)+\overline{v^2}(z)+\overline{u^2}(z+\Delta z)+\overline{v^2}(z+\Delta z)\right)}. \end{aligned} \tag{3.23}$$

Si l'on considère l'homogénéité du champ fluctuant, s'en suit :

$$\sqrt{\overline{u_b^2}} = \sqrt{\overline{u^2}+\overline{v^2}}. \tag{3.24}$$

Le temps caractéristique de l'amplitude de la vorticité peut alors s'écrire sous la forme :

$$\tau_a = \frac{1}{k_s\sqrt{\overline{u^2}+\overline{v^2}}}, \tag{3.25}$$

et le rapport des deux temps caractéristiques τ_a et τ_c s'écrit alors :

$$\frac{\tau_c}{\tau_a} = \sqrt{1+\frac{\overline{v^2}}{\overline{u^2}}}. \tag{3.26}$$

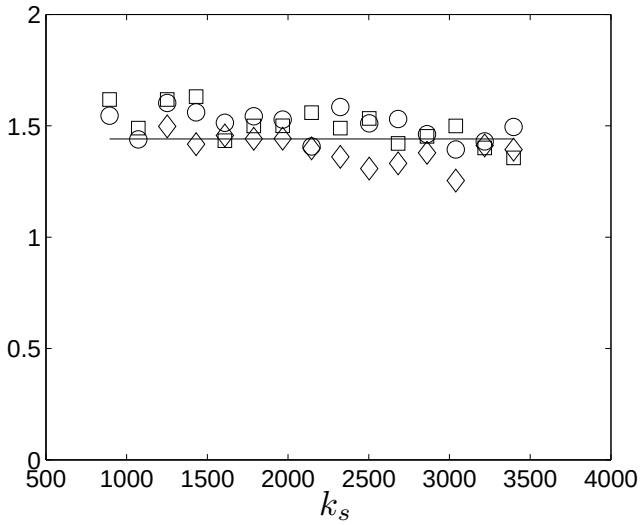


FIGURE 3.8 – Rapport τ_c/τ_a pour différents nombres d'onde et différents nombres de Reynolds $Re_D = 3000, 4800, 6000$, la ligne —— correspond à la valeur $\tau_c/\tau_a = 1.41$ déduites du modèle.

D'après ce modèle, le rapport entre le temps caractéristique du signal complexe et du temps caractéristique de son module est donc indépendant du nombre d'onde k_s et sa valeur est déterminée par les variances des composantes perpendiculaires à la composante de vorticité sondée par la méthode de diffusion acoustique. Dans un cas isotrope $\overline{v^2} = \overline{u^2}$. Le modèle aboutit alors à un rapport $\frac{\tau_c}{\tau_a} \approx\approx \sqrt{2} \approx 1.41$.

Des mesures au fil chaud en X indiquent que $\overline{v^2} \approx \overline{u^2} \pm 5\%$ sur la ligne centrale du sillage. On s'attend alors à un rapport $\frac{\tau_c}{\tau_a} \approx \sqrt{2} \approx 1.41$. La Fig. 3.8 montre que ce modèle basé sur le basculement-étirement est relativement bien vérifié par l'expérience. Le rapport $\frac{\tau_c}{\tau_a}$ est indépendant du nombre d'onde sondé et sa valeur est proche de la valeur attendue 1.41.

3.2.4 Hypothèse de Taylor locale

Le balayage signifie donc qu'une échelle donnée n'est pas transportée à une vitesse constante dans le temps, mais à une vitesse qui fluctue selon les modulations associées à l'intégralité du spectre turbulent. Cette remarque indique donc que l'hypothèse de Taylor peut être affinée en considérant une vitesse d'advection U_c autour de laquelle est ajoutée la vitesse fluctuante $u(t)$. Le temps et l'espace sont donc liés par une relation de la forme :

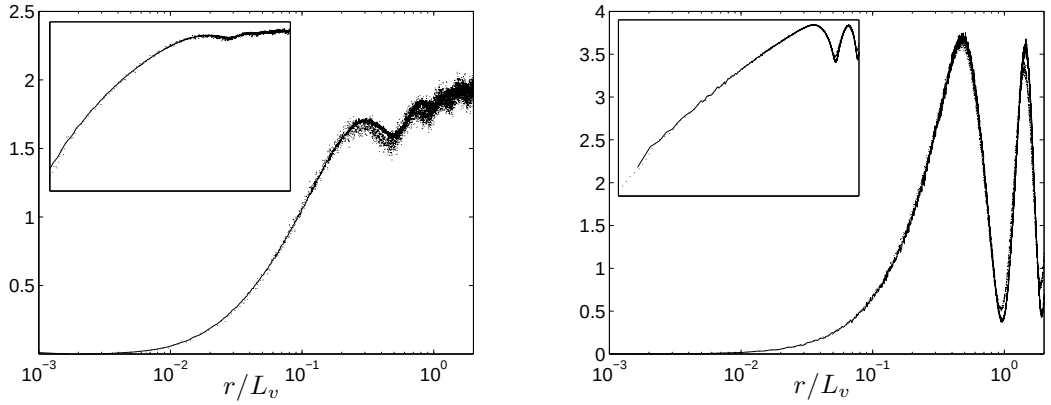
$$x(t) \quad = \quad \int_0^t (U_c + u(t))\, dt \tag{3.27}$$

Du fait que $u(t)$ varie irrégulièrement dans le temps, il en est de même pour $x(t)$. Bien souvent, le signal $x(t)$ est alors interpolé sur une base de temps d'intervalles constants. Concernant les fonctions de structure, cette interpolation n'est pas nécessaire et les incréments spatiaux sont de nouveaux triés en classe et les fonctions de structure calculées sur chaque classe.

Les Fig. 3.9(a) et 3.9(b) montrent que chacune des deux hypothèses aboutissent strictement au même résultat quel que soit l'échelle r considérée.

Pour conclure ce chapitre, la complémentarité des techniques anémométriques spatiales (PIV2C), temporelles (ADL3C), spatio-temporelles (TR-PIV2C) et spectrales (AS) permet d'étudier en détail la dynamique d'advection d'une échelle particulière du spectre turbulent.

Nous mettons en évidence l'interaction à l'ordre 0 entre les différentes échelles du spectre turbulent. Instantanément, une échelle particulière r est balayée à une vitesse fluctuante qui est la conséquence de la modulation de l'intégralité du spectre turbulent. Le transport des petites échelles est donc notamment induit par les plus grandes structures qui peuvent être "cohérentes" et dont la contribution énergétique est particulièrement forte. En moyenne, l'intégralité du spectre est convectée à une vitesse constante U_c dont la signification physique est la vitesse moyenne au centre des tourbillons de l'allée de Bénard-von Kármán.



(a) (b)

FIGURE 3.9 – Comparaison des hypothèses de Taylor globale (——) et locale (· · · · · ·) à $x = 7D$, $y = 0D$ et $Re_D = 3600$ (ADL3C). (a) composante u et (b) composante v. Insert : représentation log-log.

Lors de la mise en place de la méthode de diffusion acoustique, nous fondions beaucoup de nos espoirs en la détermination expérimentale de différents temps caractéristiques, autres que celui de balayage qui était déjà mis en évidence. Notamment, nous portions nos attentions sur un temps caractéristique basé sur l'étirement. Ce temps caractéristique fut énoncé pour la première fois par Batchelor [13] puis transcrit en termes mathématiques par Kraichnan [81]. Récemment, il fut invoqué afin de décrire analytiquement la tendance asymptotique du spectre du champ scalaire lorsque le nombre de Reynolds tend vers l'infini [44], [46].

Chapitre 4

Bilan en un point en champ proche

"Pourquoi certains n'auraient pas tout ? Il y en a qui n'ont rien. Ca fait l'équilibre."

Michel Audiard

Les considérations analytiques précédemment détaillées montrent que la limite aux grandes échelles des bilans en deux points correspond aux bilans en un point. L'estimation de la contribution énergétique des termes à grandes échelles du bilan à chaque échelle se fait donc par le biais du bilan en un point.

En outre, le bilan en un point constitue une étape préliminaire particulièrement enrichissante du point de vue de la description des mécanismes physiques propres aux écoulements turbulents. Le bilan en un point permet de discuter l'équilibre entre tous les mécanismes intrinsèques associés à l'énergie cinétique totale, cohérente et aléatoire. Il permet de peser l'amplitude de certains mécanismes comparés aux autres, et de mettre en évidence les zones de l'écoulement dans lesquelles ils sont importants.

A noter enfin que l'évaluation complète des bilans en un point est rarement réalisée, d'autant plus s'agissant du champ proche d'un écoulement canonique tel que le sillage de cylindre. Certains termes ont d'ores et déjà été traités par le passé [29], [50], [107], mais aucune évaluation systématique de tous les termes n'est disponible, contrairement au champ lointain pour lequel il fut largement discuté par exemple par Townsend [135].

4.1 Statistiques du champ de vitesse

4.1.1 Comparaison des méthodes de mesures

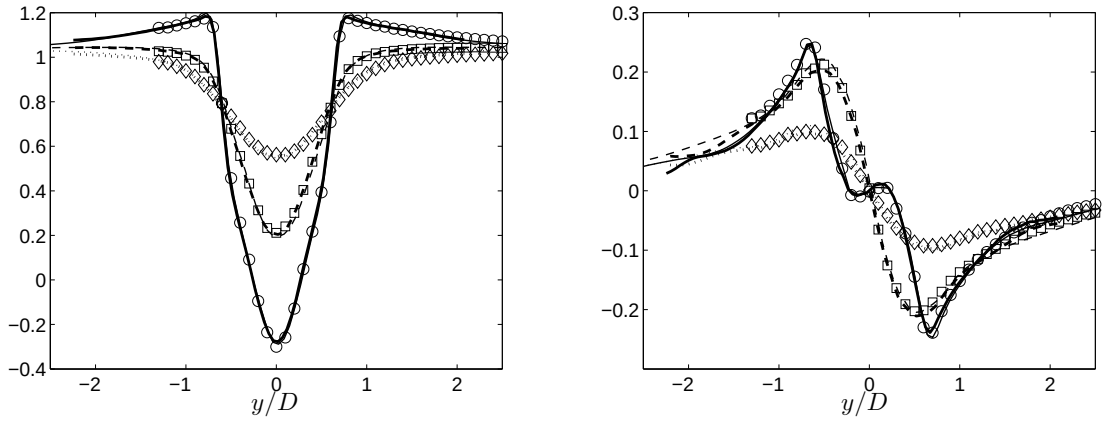
Dans cette étude, le champ proche du sillage est exploré par le biais de trois différentes méthodes de mesures : PIV2C, TR-PIV2C et ADL3C. Nous l'avons déjà évoqué et nous allons voir en quoi ces méthodes de mesures sont complémentaires. On entend par là que certaines quantités qui ne sont pas accessibles avec l'une des techniques, le seront

avec l'une des deux autres. Elles présentent une zone de recouvrement où les statistiques sont mesurables par chacune d'entres elles, quasiment sans hypothèse. C'est le cas par exemple pour les statistiques en un point de la vitesse. Une étape préliminaire avant tout autre investigation est donc de vérifier le recouvrement des mesures réalisées par chacun des systèmes. Pour cela, nous comparons quelques profils des moments statistiques de la vitesse pour différentes distances en aval du cylindre. Nous rappelons ici que l'estimation des statistiques via la méthode ADL3C a été corrigée de son biais par la méthode de Edwards (pondération par le laps de temps entre deux passages de particules).

Tout d'abord, les Fig. 4.1(a) et Fig. 4.1(b) montrent que l'estimation du moment d'ordre 1 (la moyenne) de la vitesse longitudinale U et transversale V effectuée par les trois techniques sont très proches. On peut donc conclure de la bonne répétabilité des mesures concernant les moments d'ordre 1.

Le profil de la composante longitudinale moyenne $\overline{U}$ présente une forme caractéristique de l'écoulement de sillage. La présence de l'obstacle entraîne en effet une diminution de la vitesse avec une symétrique axiale par rapport à la ligne centrale du sillage, *i.e.* $y = 0$. Ce déficit de vitesse est en lien avec la perte de quantité de mouvement, en d'autres termes au coefficient de trainée du cylindre. Lorsque l'on s'éloigne de l'obstacle, la vitesse moyenne tend à s'homogénéiser.

Le profil de la composante transversale $\overline{V}$ présente quant à lui une symétrie centrale par rapport au point $y = 0$. Des valeurs extrêmes s'observent en une position y qui correspond à peu près au point d'intersection des profil de vitesse U pour différentes positions longitudinales x.



(a) (b)

FIGURE 4.1 – Comparaison du moment d'ordre 1 à un nombre de Reynolds de 3600. PIV-2C (trait fin), TR-PIV2C (trait épais), et ADL3C (symboles) en $x = 2.2D$ (——, ○) ; $x = 3D$ (- - - -, □) ; $x = 3.8D$ (· · · · · ·, ◇). (a) $\overline{U}/U_0$, (b) $\overline{V}/U_0$

Intéressons-nous à présent aux variances des fluctuations de vitesse. Les profils des moments d'ordre 2 de la vitesse longitudinale et transversale sont exposés sur les Fig. 4.2(a) et Fig. 4.2(b). De même que pour le moment d'ordre 1, les trois méthodes de mesures aboutissent à des résultats très similaires. La composante longitudinale présente un profil de variance en forme de double bosse. Il est coutume d'associer cette forme particulière à la présence des centres des zones de girations de l'allée de Bénard-von Kármán. Ces centres ont donc tendance à s'écarter progressivement de la ligne centrale du sillage au fur et à mesure que l'on s'éloigne du cylindre.

Pour de tels nombres de Reynolds, l'écoulement présente des caractéristiques turbulentes sur les trois directions de l'espace. Or, les deux méthodes PIV utilisées dans cette étude n'accèdent qu'aux deux composantes U et V. Il est donc nécessaire d'invoquer une hypothèse sur les statistiques de la composante de vitesse suivant l'axe z. Cette hypothèse peut être confrontée à l'estimation faite via la méthode ADL pour laquelle on dispose d'une mesure des trois composantes de vitesse. Sur la Fig. 4.2(c) sont comparées l'énergie cinétique turbulente $\overline{q^2} = \overline{u^2} + \overline{v^2} + \overline{w^2}$ calculée sans hypothèse (ADL3C) et via l'hypothèse d'axisymétrie autour de l'axe y, c'est-à-dire en postulant $\overline{w^2} = \overline{u^2}$ (PIV2C, TR-PIV2C). Cette supposition est très fortement inspirée par les mesures de Norberg [103]. Au regard de la Fig. 4.2(c), cette hypothèse est tout à fait valable en champ proche, et particulièrement sur la ligne centrale du sillage ($y = 0D$). Une conséquence importante est que l'évaluation des termes du bilan énergétique en un point de l'énergie cinétique totale pourra être faite à partir de la méthode PIV en invoquant cette hypothèse.

Un point critique de la méthode ADL concerne l'évaluation des moments croisés comme par exemple $\overline{uv}$. Celui-ci nécessite une coïncidence spatio-temporelle parfaite des points de mesure de la vitesse. La Fig. 4.2(d) montre que la corrélation $\overline{uv}$ évaluée par l'ADL est très proche de celle évaluée par la PIV. La méthode de coïncidence spatiale (par focalisation des volumes de mesures sur un fil de $80\mu m$) et temporelle (par interpolation linéaire de V et W sur la trace temporelle de U) est tout à fait efficace.

Enfin, les profils transversaux des moments croisés d'ordre 3, $\overline{vq^2}$ et $\overline{uq^2}$ sont détaillés sur la Fig. 4.3(a) et Fig. 4.3(b). De la même manière que pour le moment croisé d'ordre 2, l'hypothèse d'axisymmétrie autour de l'axe transversal y est invoquée. La forme axisymétrique des moments croisés d'ordre 3 est donc :

$$\begin{aligned} \overline{uq^2} &= 2\overline{u^3} + \overline{uv^2} \\ \overline{vq^2} &= 2\overline{vu^2} + \overline{v^3}. \end{aligned} \tag{4.1}$$

Ici encore, cette hypothèse est tout à fait valable et les trois méthodes de mesures aboutissent à des résultats très similaires. Pour conclure, la répétabilité des mesures réalisées par trois différentes méthodes est prouvée, cela pour les moments d'ordre 1 à 3. D'autre part, la complémentarité des mesures PIV2C et ADL3C nous permet de peser la validité de l'hypothèse d'axisymétrie. A la différence du champ lointain, où l'habitude est de supposer l'axisymétrie autour de l'axe x, voire même l'isotropie, le champ proche présente une axisymétrie autour de y.

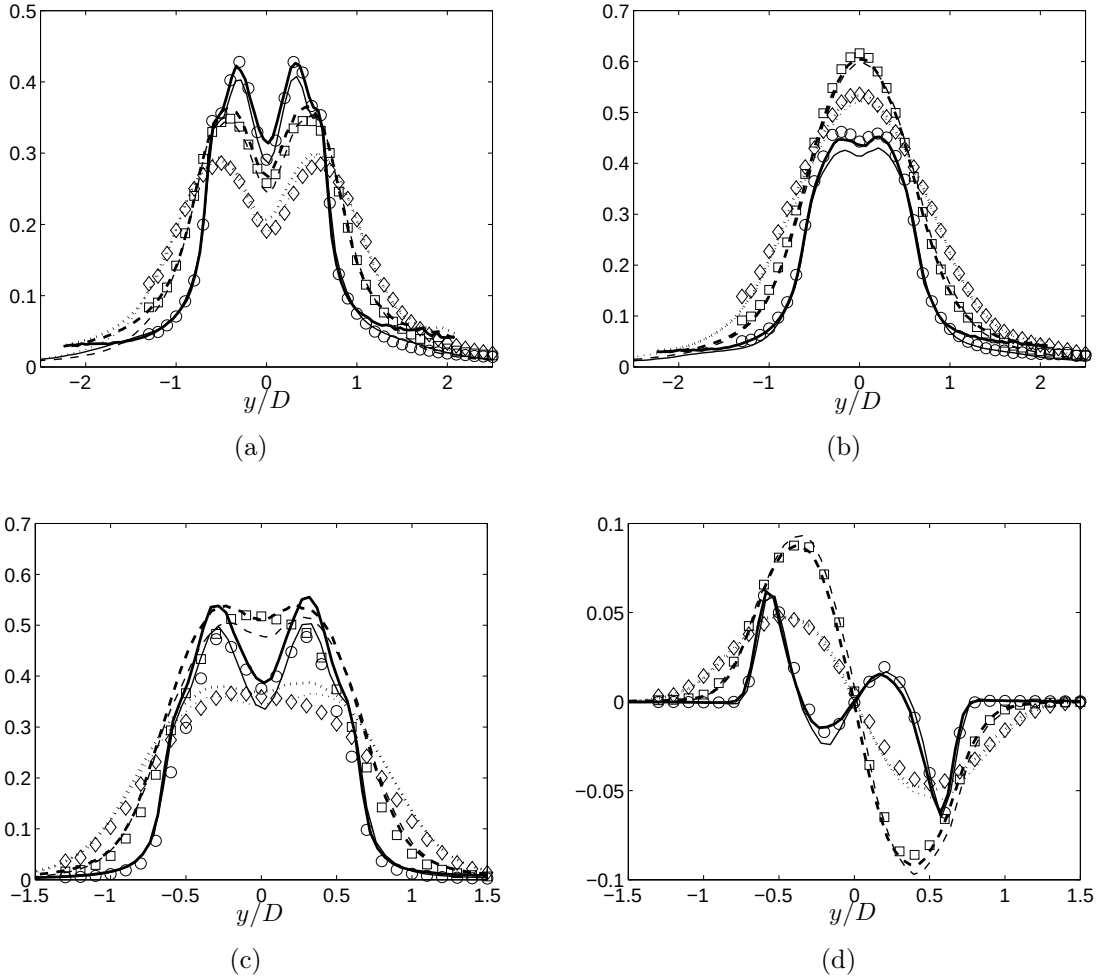
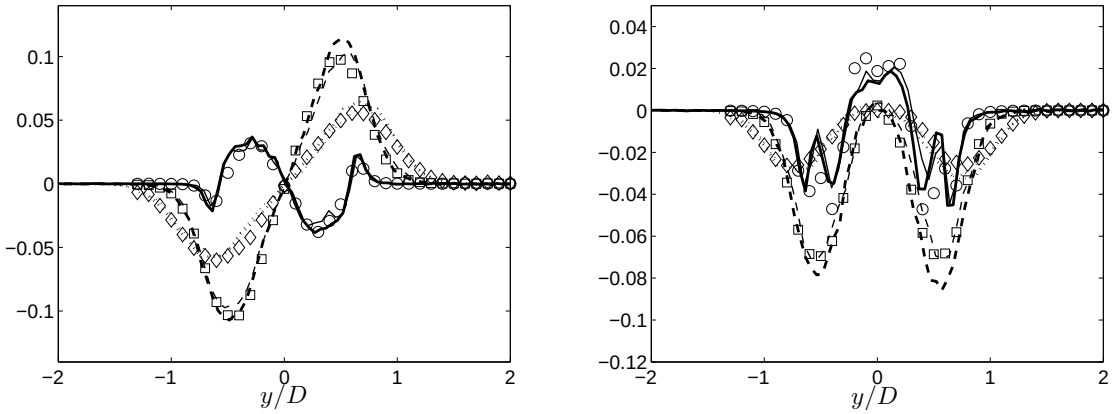


FIGURE 4.2 – Comparaison du moment d'ordre 2 à un nombre de Reynolds de 3600. PIV-2C (trait fin), TR-PIV2C (trait épais), et ADL3C (symboles) en $x = 2.2D$ (——, ○) ; $x = 3D$ (- - - -, □) ; $x = 3.8D$ (· · · · · ·, ♢). (a) $(\overline{u^2})^{1/2}/U_0$, (b) $(\overline{v^2})^{1/2}/U_0$. (c) $\overline{q^2}/U_0^2$. (d) $\overline{uv}/U_0^2$.

Le profil de $\overline{vq^2}$ présente une inversion de signe entre $x = 2.2D$ et $x = 3D$. Cela montre qu'une quantité d'énergie q^2 est transportée vers l'intérieur pour $x = 2.2D$ et ensuite vers l'extérieur pour $x = 3D$ et puis pour tout x supérieur. Cette inversion se fait dans la bulle de recirculation, zone particulièrement importante pour la caractérisation des statistiques de la vitesse en champ proche. Nous tournons donc dès à présent notre attention sur cette bulle de recirculation.



(a) (b)

FIGURE 4.3 – Comparaison des moments croisés d'ordre 3 à un nombre de Reynolds de 3600. PIV-2C (trait fin), TR-PIV2C (trait épais), et ADL3C (symboles) en $x = 2.2D$ (——, ○) ; $x = 3D$ (- - - -, □) ; $x = 3.8D$ ($\cdots\cdots$, ♢). (a) $\overline{vq^2}/U_0^3$, (b) $\overline{uq^2}/U_0^3$.

4.1.2 La longueur de recirculation

Le champ proche d'un sillage est très fortement marqué par la présence d'une zone particulière que l'on nommera par la suite zone de recirculation ou de formation (Fig. 4.4). Cette zone singulière des sillages de cylindres a reçu énormément d'attention, notamment ces cinquante dernières années, du fait de son importance dans la prédiction des forces agissant sur l'obstacle et de la fréquence du lâcher tourbillonnaire. La zone de recirculation est donc d'intérêt pratique dans de nombreuses applications industrielles. Les travaux des pionniers tels que Fage et Johansen [53], [54] Schiller et Linke [126], A. Roshko [123], [124], S. Bloor [20] ou J.H. Gerrard [63], [64], montrent que pour des nombres de Reynolds supérieurs à 350 [113] environ, les couches de cisaillement jaillissant de la surface du cylindre se déstabilisent en suivant le mode d'instabilité de Kelvin-Helmholtz (Fig. 4.4). Dans le cas particulier des sillages, on les nomme aussi parfois tourbillons de Bloor-Gerrard, même si Shiller et Linke auraient pu en revendiquer la paternité. Les interactions non linéaires entre les tourbillons de Bloor-Gerrard et l'allée de Bénard-von Kármán enrichissent le spectre de quelques harmoniques qui peu à peu disparaissent dans un fond turbulent développé [79]. Ces interactions contribuent activement au processus de cascade en déstabilisant l'allée de tourbillons.

Il est désormais largement admis que cette zone présente une très forte sensibilité aux conditions extérieures, telles que le taux de turbulence amont, le nombre de Reynolds, le diamètre et la rugosité du cylindre, les conditions aux extrémités du cylindre [63], [137], [102], [141], [113]. Cette sensibilité provient de la susceptibilité de l'instabilité de

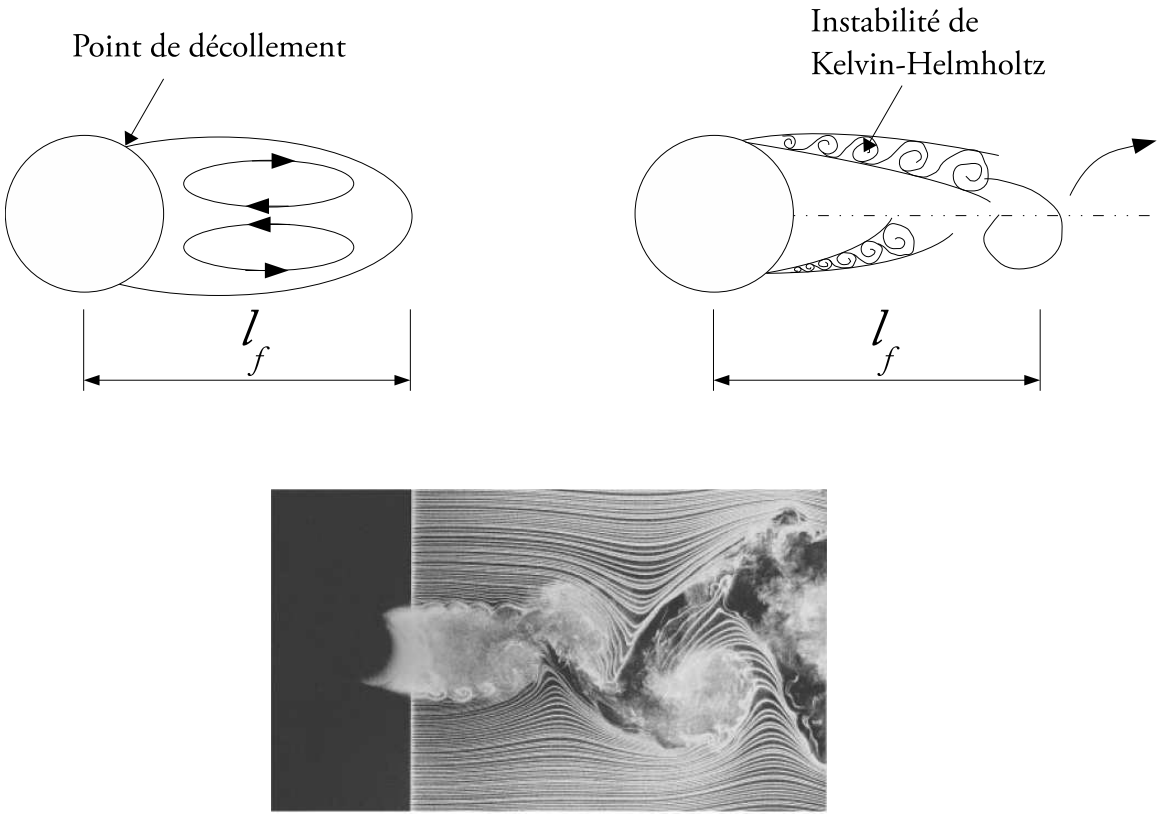


FIGURE 4.4 – Représentation schématique de la zone de recirculation se développant dans le champ proche du sillage de cylindre. La visualisation des instabilités de Kelvin Helmholtz est prodiguée par Prasad & Williamson [113].

Kelvin-Helmholtz et von Kármán ainsi que de leur interaction.

Un point particulier de cette thèse est d'explorer l'effet du nombre de Reynolds sur le développement du champ proche et *a fortiori* sur la taille de la zone recirculation. La taille de la zone de formation l_f est définie par la distance en aval du cylindre x, pour laquelle la vitesse moyenne longitudinale est nulle. En d'autres termes :

$$\overline{U}(x = l_f) = 0. \tag{4.2}$$

Le tableau ci-dessous repertorie les valeurs de la zone de recirculation obtenues pour les différents nombres de Reynolds.

En accord avec plusieurs autres observations [63], [64]), [103], [137], la zone de recirculation présente une évolution décroissante avec le nombre de Reynolds. Cela est une conséquence du point de détachement des couches limites de la surface du cylindre qui se déplace en amont au fur et à mesure que le nombre de Reynolds augmente.

Re_D	2150	3600	5400	8800
PIV2C	2.72	2.60	2.30	1.90
TR-PIV2C		2.60	2.20	
ADL3C		2.70	2.35	

TABLE 4.1 – Valeurs de la longueur de la zone de recirculation (en nombre de diamètres) pour différents nombres de Reynolds.

Afin de mettre en évidence l'importance de la zone de recirculation sur le développement du champ proche, nous proposons de normaliser les statistiques de la vitesse par la vitesse amont U_0 et l'axe longitudinal est translaté tel que son origine coïncide avec l'extrémité de la zone de formation, *i.e.* $x \equiv (x - l_f)/D$. Cette normalisation est très fortement inspirée par l'étude de Paranthoën *et al.* [104] pour laquelle $x \equiv (x - l_f)/x_{max}$ concernant l'évolution de la vitesse moyenne et $x \equiv x/x_{max}$ pour les fluctuations de vitesse. x_{max} est la position longitudinale où les fluctuations de vitesse sont maximum. Il est à noter que $x \equiv (x - l_f)/D$ tend vers la normalisation conventionnelle x/D lorsque la distance x tend vers l'infini. Il s'agit donc bien ici d'une normalisation propre au champ proche.

Sur les Fig. 4.5(a), 4.5(b), 4.5(c) et 4.5(d) sont représentées les évolutions des statistiques des moments d'ordre 1 et 2 sur la ligne centrale ($y/D = 0$) suivant la normalisation proposée ci-dessus pour des nombres de Reynolds variant entre 2150 et 8800. Toutes les courbes se regroupent en une seule. L'effet du nombre de Reynolds sur l'évolution des statistiques turbulentes peut donc être paramétré par la longueur de la zone de formation.

La Fig. 4.5(a) montre que la vitesse moyenne longitudinale présente de très fortes variations sur les premiers diamètres suivant le cylindre. Puis, à partir de $x - l_f = 2D$, la vitesse moyenne est quasi homogène.

L'écart-type des fluctuations de vitesse des composantes U et V est représenté sous forme adimensionnelle sur la Fig. 4.5(b) et 4.5(c) respectivement. On remarque que la zone de recirculation est associée à une croissance des fluctuations de la vitesse, celles-ci atteignent un maximum en $x = l_f$ puis décroissent par la suite. D'autre part, $x = l_f$ est la position du maximum d'anisotropie, caractérisée par le ratio $\overline{v^2}/\overline{u^2}$. L'énergie cinétique totale $\overline{q^2}$ (Fig. 4.5(d)) estimée par l'hypothèse d'axisymétrie autour de l'axe y (PIV2C et TR-PIV2C) est tout à fait en accord avec la valeur mesurée sans cette supposition (ADL3C).

La zone de recirculation se présente donc comme la face immergée de l'iceberg qui cache toute une physique complexe et fortement sensible. Tout l'intérêt de la normalisation de l'axe longitudinal par la zone de formation est de s'affranchir de la sensibilité aux conditions extérieures. On peut également supposer que ce type de représentation s'appliquera à différents types d'obstacle et différentes conditions extérieures.

Par la suite, toute figure propre aux statistiques en champ proche sera représentée en

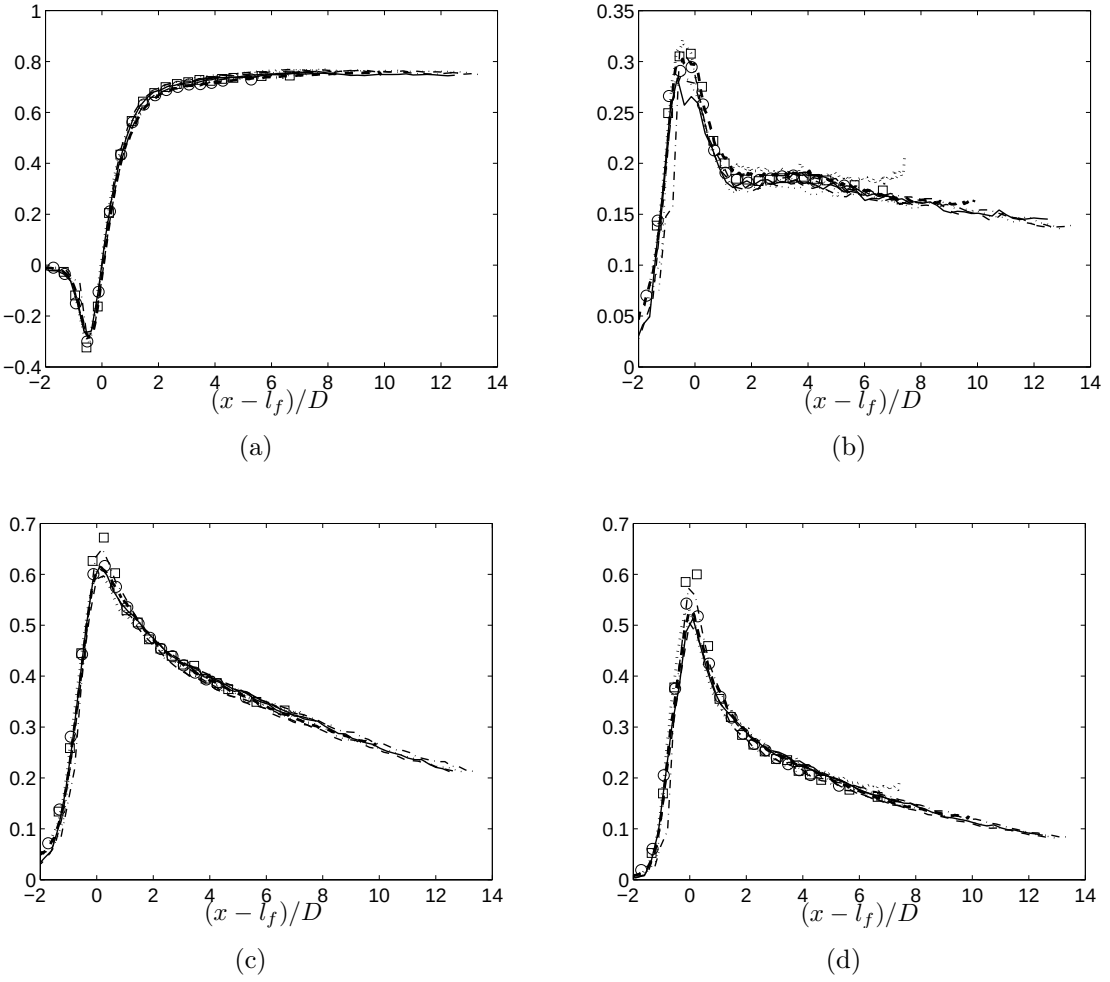


FIGURE 4.5 – Normalisation des statistiques par la vitesse amont U_0 et l'axe longitudinal par la longueur de recirculation pour différents nombres de Reynolds. $Re_D = 2150$: —— (trait fin) PIV2C. $Re_D = 3600$: - - - - (trait fin) PIV2C, (trait épais) TR-PIV2C, ○ ADL3C. $Re_D = 5800$: ····· (trait fin) PIV2C, (trait épais) TR-PIV2C, □ ADL3C. $Re_D = 8800$: — · — PIV2C. (a) $\overline{U}/U_0$. (b) $(\overline{u^2})^{1/2}/U_0$. (c) $(\overline{v^2})^{1/2}/U_0$. (d) $\overline{q^2}/U_0^2$

suivant cette normalisation. Nous dévoilerons alors les résultats que pour un seule vitesse amont U_0 car les observations sont qualitativement et quantitativement similaires pour d'autres nombres de Reynolds. À l'origine de la thèse, nous avons choisi de modifier le nombre de Reynolds car nous nous attendions à une influence de ce paramètre. Il eut fallu le faire pour se rendre compte, qu'au final, son influence est dissimulée dans la valeur de la taille de la zone de formation.

4.2 Bilan de quantité de mouvement

Intéressons-nous maintenant au bilan de quantité de mouvement. Le but principal est d'extraire le champ moyen de pression afin de se donner une idée de l'amplitude des fluctuations de pression, qui ne sont pas mesurées dans cette étude. Il semble en effet intuitif de dire - en analogie avec la vitesse - que plus les gradients de pression moyenne sont importants, plus les fluctuations et les corrélations vitesse-pression seront importantes.

Nous rappelons que le bilan de quantité de mouvement s'écrit :

$$\overline{U_j}\frac{\partial \overline{U_i}}{\partial x_j} + \frac{\partial \overline{u_i u_j}}{\partial x_j} = -\frac{\partial \overline{P}}{\partial x_i} + \nu \frac{\partial^2 \overline{U_i}}{\partial x_j \partial x_j} \tag{4.3}$$

Les deux termes du membre de gauche de la relation (4.3) correspondent au transport de la vitesse moyenne et au gradient des tensions de Reynolds. Le membre de droite est constitué du gradient de pression et du terme visqueux. Comme il n'y a pas de sommation sur les indices i, ce bilan se décompose donc en deux équations, correspondant aux projections sur l'axe x et y en fixant $\overline{U}_i = \overline{U}$ et $\overline{U}_i = \overline{V}$ respectivement. Les deux paragraphes suivants exposent la projection longitudinale et transversale du bilan de quantité de mouvement.

4.2.1 Projection sur l'axe x

La projection sur l'axe x du bilan de quantité de mouvement s'écrit :

$$\overline{U_j}\frac{\partial \overline{U}}{\partial x_j} + \frac{\partial \overline{u u_j}}{\partial x_j} = -\frac{\partial \overline{P}}{\partial x} + \nu \frac{\partial^2 \overline{U}}{\partial x_j \partial x_j}. \tag{4.4}$$

Cette équation met donc en lumière les mécanismes de transport de quantité de mouvement, de transfert vers des quantités fluctuantes ainsi que le rôle de la pression dans la direction x. Les Fig. 4.6(a), 4.6(b), 4.6(c) et 4.6(d) représentent le terme d'advection, de gradient des tensions de Reynolds, le terme de pression ainsi que le terme visqueux respectivement.

Ces termes varient fortement sur les premiers diamètres suivant le cylindre. Au delà, les évolutions sont bien plus faibles. En considérant chaque terme un à un, on remarque tout d'abord que le terme visqueux (Fig. 4.6(d)) est de deux ordres de grandeur plus faible que les trois autres termes. Ce dernier peut donc être négligé.

Le terme d'advection (Fig. 4.6(a)) présente deux zones négatives (centrées en $x - l_f = -0.25D, y = \pm 0.75D$ avec des valeurs d'environ -0.6), qui représentent une décélération locale. Autour de $x - l_f = 0.75D, y = 0D$, ce terme est positif représentant une augmentation de la vitesse moyenne. Cette observation est tout à fait en accord avec les profils de vitesse moyenne exposés sur la Fig. 4.1(a) et son évolution sur la ligne centrale (Fig. 4.5(a)).

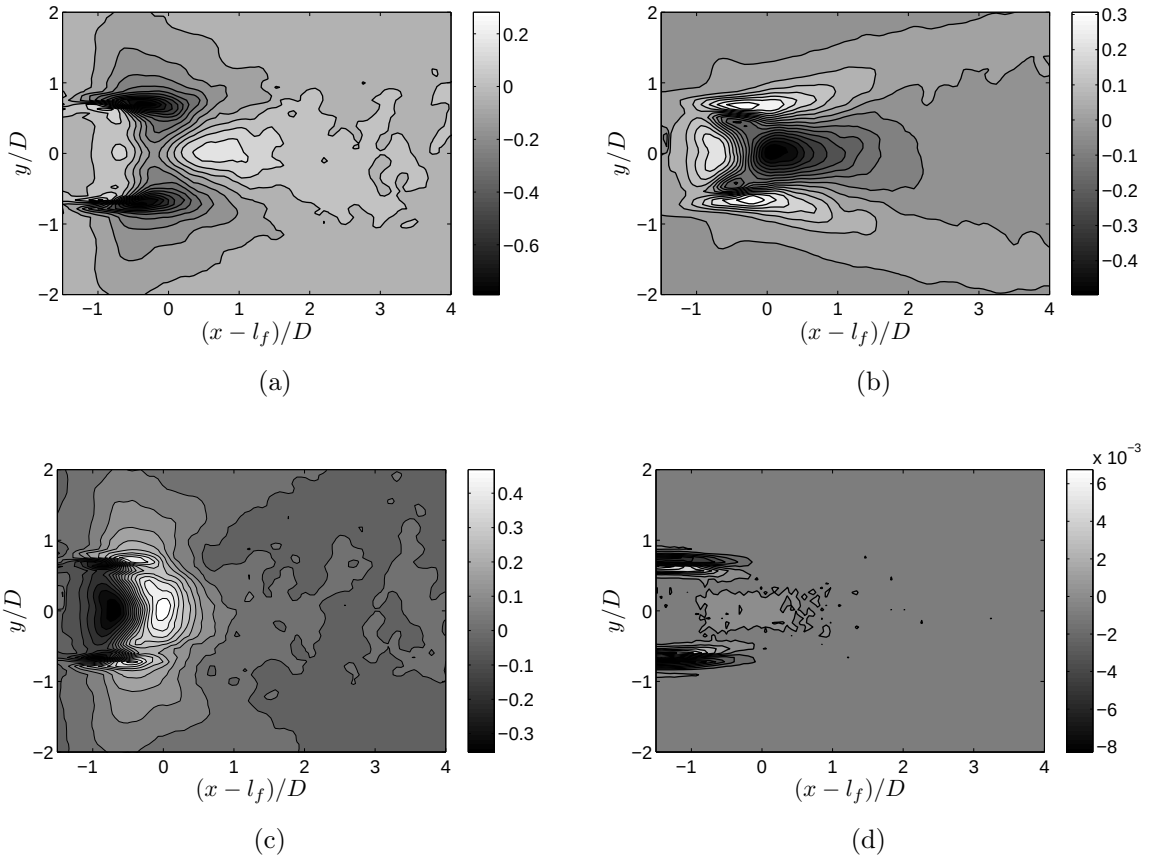


FIGURE 4.6 – Termes de la projection longitudinale du bilan de quantité de mouvement à un nombre de Reynolds de 3600 (PIV2C). Tous les termes sont normalisés par D/U_0^2. (a) Terme de transport de la vitesse moyenne $\overline{U_j}\frac{\partial \overline{U}}{\partial x_j}$. (b) Gradient des tensions de Reynolds $\frac{\partial \overline{uu_j}}{\partial x_j}$. (c) Gradient longitudinal de pression moyenne $\frac{\partial \overline{P}}{\partial x}$. (d) Terme visqueux $\nu\frac{\partial^2 \overline{U}}{\partial x_j^2}$.

Les gradients des tensions de Reynolds (Fig. 4.6(b)) présentent une zone positive en $x - l_f = -0.25D, y = \pm 0.75D$, zone où le terme d'advection est au contraire négatif. Cela dévoile une conversion d'une quantité de mouvement initialement portée par la vitesse moyenne en quantité de mouvement portée par les fluctuations de vitesse. Cette opposition de signe se retrouve également en $x - l_f = 0.75D, y = 0D$ où la vitesse moyenne augmente et les fluctuations de vitesse s'uniformisent. Ici au contraire, la quantité de mouvement sous forme turbulente est transférée à la vitesse moyenne.

Le gradient de pression moyenne calculée par différence (Fig. 4.6(c)) présente une zone positive en $x - l_f = -0.25D, y = \pm 0.75D$ et $x = l_f, y = 0D$. Dans ces zones, la pression s'oppose à l'écoulement. Au contraire, en $x - l_f = -0.75D, y = 0D$, le gradient de pression

est négatif. Cette zone peut donc être interprétée comme un "bassin d'attraction" attirant la quantité de mouvement en son sein.

Il est important de noter à ce stade qu'il est difficile d'interpréter le champ de pression en terme de cause ou de conséquence puisqu'il est intimement lié (et même déduit) du champ de vitesse. On peut donc par exemple imaginer que la vitesse moyenne diminue fortement en $x - l_f = -0.25D, y = \pm 0.75D$ car la pression s'oppose à l'écoulement, ou bien que la pression augmente car la vitesse diminue. Cela est un problème conceptuel associé à l'utilisation du bilan où les processus s'équilibrent mais ne s'induisent pas les uns les autres.

4.2.2 Projection sur l'axe y

La projection sur l'axe y du bilan de quantité de mouvement s'écrit :

$$\overline{U_j}\frac{\partial \overline{V}}{\partial x_j} + \frac{\partial \overline{vu_j}}{\partial x_j} = -\frac{\partial \overline{P}}{\partial y} + \nu \frac{\partial^2 \overline{V}}{\partial x_j \partial x_j}. \tag{4.5}$$

De même, la projection sur y lève le voile sur les mécanismes de transport de quantité de mouvement, de transfert vers les quantités fluctuantes ainsi que les processus liés à la pression dans la direction y. Les Fig. 4.7(a), 4.7(b), 4.7(c) et 4.7(d) représentent le terme d'advection, de gradients des tensions de Reynolds, le terme de pression et de diffusion respectivement.

La Fig. 4.7(d) montre que le terme visqueux est une fois de plus négligeable comparé aux autres termes du bilan de quantité de mouvement. Le bilan est donc quasiment équilibré uniquement par les termes d'advection, de gradients des tensions de Reynolds et de pression.

Le terme d'advection (Fig. 4.7(a)) est symétrique (en norme) par rapport à l'axe $y = 0$ avec des valeurs positives en $y < 0, x < l_f$ et négatives en $y > 0, x < l_f$. Dans la zone de recirculation, la quantité de mouvement présente en $y > 0$ est donc transportée vers le bas, et celle en $x < 0$ vers le haut. Nous avons noté précédemment que le transport de la quantité de mouvement diminue dans la direction x (Fig. 4.6(a)), nous remarquons ici qu'elle est donc déviée vers l'intérieur de la zone de recirculation. En $x - l_f = 0.5D, y = \pm 0.5D$ elle est au contraire dirigée vers l'extérieur du sillage.

Les tensions de Reynolds (portées majoritairement par $\overline{v^2}$) montrent de très fortes variations spatiales en $x = l_f, y = \pm 0.5D$ (Fig. 4.7(b)) avec des valeurs atteignant ± 0.6. Cela montre que la majorité de la quantité de mouvement portée par la vitesse moyenne initialement dirigée vers x (Fig. 4.6(a)), est transférée sur la direction y sous forme turbulente.

La cause (ou la conséquence) est que le gradient transversal de pression moyenne (Fig. 4.7(c)) présente deux zones de fortes valeurs de part et d'autre de la ligne centrale du sillage. Il est très probable que les fluctuations soient importantes dans ces zones, de la même manière que les fluctuations de vitesse sont importantes dans les zones où les

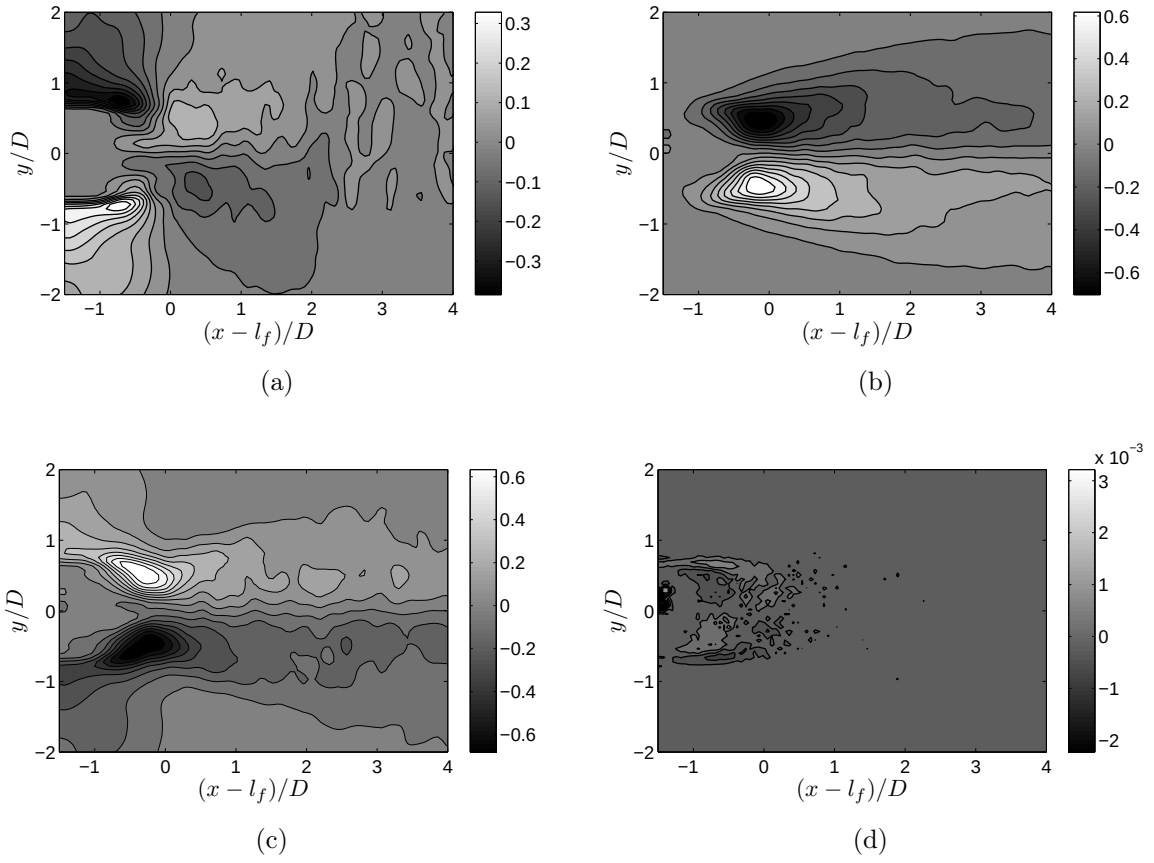


FIGURE 4.7 – Termes de la projection transversale du bilan de quantité de mouvement à un nombre de Reynolds de 3600 (PIV2C). Tous les termes sont normalisés par D/U_0^2. (a) Terme de transport de la vitesse moyenne $\overline{U_j}\frac{\partial \overline{V}}{\partial x_j}$. (b) Gradient des tensions de Reynolds $\frac{\partial \overline{vu_j}}{\partial x_j}$. (c) Gradient transversal de pression moyenne $\frac{\partial \overline{P}}{\partial y}$. (d) Terme visqueux $\nu\frac{\partial^2 \overline{V}}{\partial x_j^2}$

gradients de vitesse moyenne sont importants. Les corrélations vitesse-pression, que met en évidence le bilan d'énergie cinétique turbulente, seront ainsi à prendre en compte et nécessitent d'être évaluées.

4.3 Bilan d'énergie cinétique turbulente

On rappelle que le bilan d'énergie cinétique turbulente en un point s'écrit :

$$\frac{1}{2}\overline{U_j}\frac{\partial \overline{q^2}}{\partial x_j} + \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\overline{u_j p} + \frac{1}{2}\overline{u_j q^2}\right) + \overline{u_j u_i}\frac{\partial \overline{U_i}}{\partial x_j} + \overline{\epsilon} = 0 \tag{4.6}$$

Le premier terme de la relation (4.6) est le transport de la quantité $\overline{q^2}$ par la vitesse moyenne, le second correspond à la diffusion turbulente par la pression et par les fluctuations de vitesse. Le troisième terme est interprété comme une production d'énergie cinétique turbulente par le champ moyen. Ces trois termes sont compensés par un terme de dissipation de l'énergie cinétique turbulente en chaleur.

Ce dernier terme est défini par :

$$\overline{\epsilon} = \frac{\nu}{2}\overline{\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right)^2} \tag{4.7}$$

Cette expression montre bien la difficulté des expérimentateurs à évaluer correctement ce terme. Il nécessite en effet la connaissance des gradients des trois composantes de vitesse selon les trois directions. Son évaluation complète est le plus souvent remplacée par des expressions simplifiées dont la validité repose sur une hypothèse : homogénéité, axisymétrie ou isotropie. Il existe tout de même quelques tentatives expérimentales d'estimation quasi complètes [23], [146], [100] pour lesquelles 6 à 9 des 12 composantes de la dissipation ont été mesurées.

Un autre problème inhérent à la technique PIV est la sous-estimation des gradients de vitesse à cause de la résolution spatiale inadéquate mais inéluctable de cette technique. Afin de compenser cette sous estimation, nous proposons une méthode que nous développons dans le paragraphe suivant.

4.3.1 Estimation du terme de dissipation

En intégrant le bilan d'énergie cinétique turbulente sur le plan $(\vec{x}, \vec{y})$, on obtient :

$$\int_{(\vec{x},\vec{y})} \left(\frac{1}{2}\overline{U_j}\frac{\partial \overline{q^2}}{\partial x_j} + \overline{u_j u_i}\frac{\partial \overline{U_i}}{\partial x_j}\right) dxdy = -\int_{(\vec{x},\vec{y})} \overline{\epsilon} dxdy, \tag{4.8}$$

en estimant que le champ spatial mesuré est suffisamment large pour que l'intégrale de la diffusion turbulente ou par la pression soit nulle sur le plan $(\vec{x}, \vec{y})$. La sous-estimation de la dissipation associée à la mesure PIV peut donc être corrigée par un coefficient α_{PIV} tel que :

$$\alpha_{PIV} = -\frac{\int_{(\vec{x},\vec{y})} \left(\frac{1}{2}\overline{U_j}\frac{\partial \overline{q^2}}{\partial x_j} + \overline{u_j u_i}\frac{\partial \overline{U_i}}{\partial x_j}\right) dxdy}{\int_{(\vec{x},\vec{y})} \overline{\epsilon}_{PIV} dxdy}, \tag{4.9}$$

où $\overline{\epsilon}_{PIV}$ est déterminé via la forme axisymétrique [62] selon l'axe y, c'est-à-dire :

$$\overline{\epsilon}_{PIV} = \nu\left(8\overline{\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2} + 2\overline{\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2} + 2\overline{\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2} - \overline{\left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)^2}\right). \tag{4.10}$$

	2150	3600	5800	8800
PIV2C	1.74	2.72	4.51	7.68
TR-PIV2C		1.50	2.10	

TABLE 4.2 – Valeurs de α_{PIV} pour différents nombres de Reynolds

En théorie, le coefficient α_{PIV} varie selon la position dans l'écoulement et le nombre de Reynolds. Du fait de l'opération d'intégration sur le plan $(\vec{x}, \vec{y})$, cette méthode de correction ne donne qu'une information en fonction du nombre de Reynolds. Nous considérons donc implicitement que l'effet du nombre de Reynolds est bien plus important que celui de la position dans l'écoulement sur la sous-estimation de la dissipation. Le tableau 4.2 réunit les valeurs α_{PIV} pour les nombres de Reynolds considérés dans cette étude pour la méthode PIV2C et TR-PIV2C.

Les valeurs du coefficient de correction sont particulièrement fortes. La sous-estimation liée à la résolution spatiale du champ PIV est drastique, avec des valeurs se situant entre 150 et 800 % selon le nombre de Reynolds.

Afin de valider cette méthode de correction, nous proposons de confronter les valeurs obtenues avec celles déterminées via l'Anémométrie Doppler Laser, pour laquelle les gradients de vitesse sont relativement bien estimés. En revanche, un nombre limité de composantes du tenseur de dissipation est accessible. Ainsi, nous sommes dans l'obligation d'utiliser des relations alternatives simplifiées. La plus connues de toutes est la relation isotrope :

$$\overline{\epsilon} = 15\nu\overline{\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2}. \tag{4.11}$$

Du fait de la présence de bruit aux plus petites échelles induisant une surestimation de la variances des dérivées [122] on préfère utiliser l'équivalent mathématique :

$$\overline{\epsilon} = 15\nu \lim_{r\to 0} \frac{\overline{(\Delta u)^2}}{r^2}, \tag{4.12}$$

pour laquelle les fonctions de structure ont été corrigées de l'effet du bruit. D'autre part, la limite aux petites échelles du bilan à chaque échelle de l'énergie cinétique turbulente aboutit à une nouvelle définition de la dissipation de la forme [38], [40], [45] :

$$\overline{\epsilon} = 3\nu\overline{\left(\frac{\partial u_i}{\partial x}\frac{\partial u_i}{\partial x}\right)}. \tag{4.13}$$

De même, on lui préfère son équivalent mathématique dans lequel les fonctions de structure ont été corrigées du bruit :

$$\overline{\epsilon} = 3\nu \lim_{r\to 0} \frac{\overline{\Delta q^2}}{r^2}. \tag{4.14}$$

L'hypothèse de similitude d'échelle dans la zone inertielle proposée par Kolmogorov [78] induit également une expression pour la dissipation moyenne de l'énergie cinétique turbulente :

$$\overline{\epsilon} = \left(C_u^{-1} r^{-2/3} \overline{(\Delta u)^2} \right)^{3/2}, \tag{4.15}$$

où C_u est une constante qui dépend le plus souvent de l'écoulement et du nombre de Reynolds turbulent [6]. Ici, nous choisissons la valeur $C_u = 2$, valeur proche de la valeur proposée par Antonia et Pearson [6] dans le sillage d'un cylindre. La relation $\overline{\epsilon} = C_\epsilon \frac{\overline{u^2}^{3/2}}{L_u}$ ne fut pas considérée dans cette étude du fait de la très grande sensibilité de la constante C_ϵ à l'écoulement et au nombre de Reynolds [6], ainsi que de la difficulté à définir une échelle intégrale dans un écoulement fortement périodique.

Enfin, les bilans à chaque échelle peuvent être invoqués pour déterminer la dissipation moyenne. On dispose alors de l'équation de Kolmogorov [78] :

$$-\overline{(\Delta u)^3} + 6\nu \frac{\partial}{\partial r} \overline{(\Delta u)^2} = \frac{4}{5} \overline{\epsilon} r \tag{4.16}$$

ainsi que l'analogue [5] de l'équation de Yaglom [143] (initialement écrite pour un scalaire) :

$$-\overline{\Delta u \Delta q^2} + 2\nu \frac{\partial}{\partial r} \overline{\Delta q^2} = \frac{4}{3} \overline{\epsilon} r. \tag{4.17}$$

Les relations (4.11) à (4.17) sont valides uniquement dans un contexte localement isotrope. Afin de vérifier cette hypothèse, nous choisissons d'étudier l'écart à la relation proposée par Monin et Yaglom [101] (relation 13.87 p. 106, Vol. 2) :

$$\overline{(\Delta u_\perp)^2} = \overline{(\Delta u_\parallel)^2} + \frac{r}{2} \frac{\partial}{\partial r} \overline{(\Delta u_\parallel)^2}, \tag{4.18}$$

où l'indice $\perp$ dénote une composante de vitesse perpendiculaire à la direction de la séparation r. En d'autres termes $u_\perp = v, w$ car la séparation spatiale calculée via l'hypothèse de Taylor coïncide avec la direction principale de l'écoulement. L'écart à l'isotropie locale qualifié par l'écart à la relation (4.18) à une distance de $7D$, est représenté sur la Fig. 4.8. Cette distance est choisie suffisamment écartée du cylindre afin que l'hypothèse de "Frozen flow" de Taylor soit valable.

La Fig. 4.8 montre que ce test d'isotropie locale est tout à fait valide pour des échelles inférieures ou égales à $r/L_v = 0.03$ soit $r/\eta \approx 15$. Cette observation est d'importance capitale car elle est le point de départ qui conditionne la validité des relations (4.11) à (4.17). On remarque par ailleurs que la distribution d'énergie de la composante w épouse la relation isotrope aux échelles inférieures à $r/L_v = 0.2$, contrairement à v pour laquelle l'isotropie locale est vérifiée pour des échelles inférieures à $r/L_v = 0.03$. Cette différence provient de la topologie des structures cohérentes dont le forçage est particulièrement actif dans la direction y et est nul dans la direction z.

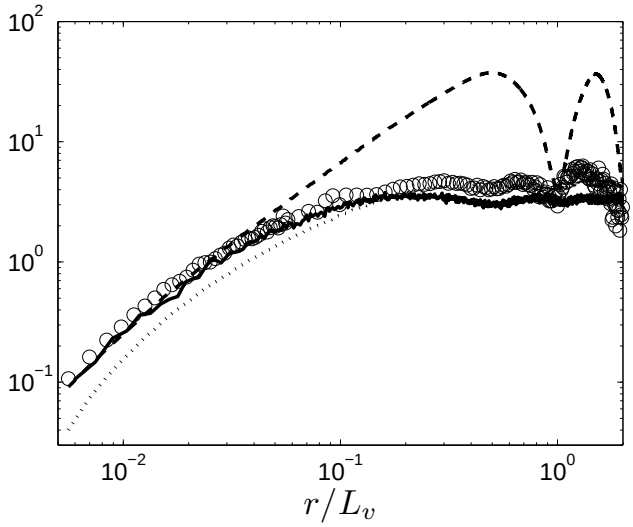


FIGURE 4.8 – Test d'isotropie locale sur les fonctions de structure d'ordre 2 en $x = 7D \equiv x - l_f = 4.4D$ sur la ligne centrale du sillage, à un nombre de Reynolds de 3600. $\cdots\cdots$ $\overline{(\Delta u)^2}$, - - - - $\overline{(\Delta v)^2}$, —— $\overline{(\Delta w)^2}$, ○ relation (4.18).

Les Fig. 4.9(a) et 4.9(b) montrent les différentes estimations de la dissipation à partir des relations (4.11) à (4.17), comparées à celle effectuée à partir de la PIV2C. Les relations (4.11) et (4.13) aboutissent à des valeurs supérieures à toutes les autres. Cela est une conséquence du bruit électronique qui pollue en particulier les petites échelles et le calcul des variances des dérivées. Leur équivalent mathématique (relations (4.12) et (4.14)) pour lequel le bruit est ôté des fonctions de structure d'ordre 2, tend très clairement vers la valeur calculée à partir de la PIV2C. La relation issue de l'hypothèse de similitude de Kolmogorov donne dans la zone inertielle (restreinte pour de tels nombres de Reynolds) une valeur similaire. Enfin, les relations de Kolmogorov (4.16) et de Kolmogorov généralisée (4.17), étendues ici des échelles visqueuses aux échelles inertielles, montrent une relativement bonne correspondance avec l'estimation faite par la PIV. Ces relations ne sont pas étendues aux grandes échelles en suivant les développements analytiques de Danaila *et al.* [45], [43], [39] car l'isotropie locale n'est plus vérifiée. A ce propos, la relation de Kolmogorov généralisée (4.17) aboutit à des valeurs supérieures à la valeur "attendue" à partir de $r/L_v > 0.03$, séparation à laquelle l'isotropie locale n'est plus une hypothèse valable.

Pour conclure, la complémentarité des mesures PIV et ADL permet de peser la validité de la correction proposée de l'estimation de la dissipation à partir de la PIV. Cinq des sept estimations réalisées par l'ADL3C convergent vers la valeur obtenue par le biais de la PIV avec un intervalle de confiance de 25%.

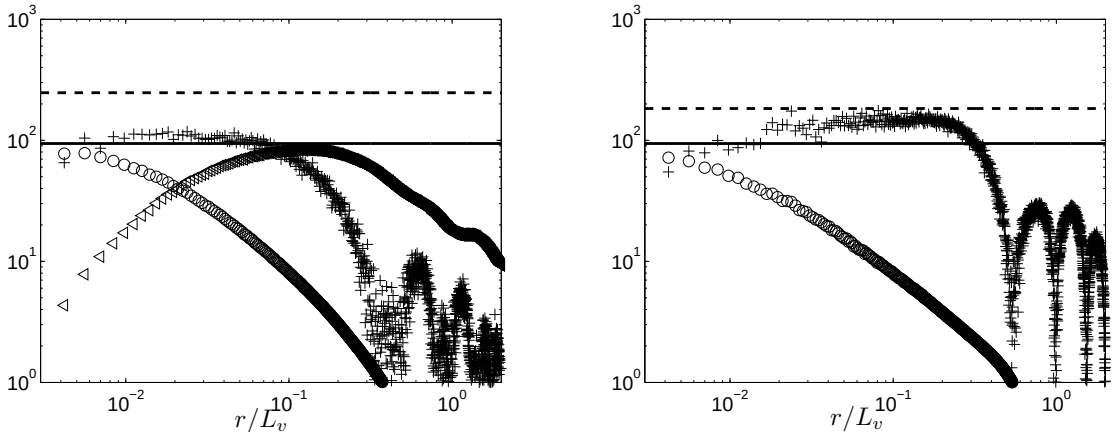


FIGURE 4.9 – Comparaison des estimations de la dissipation sur la ligne centrale du sillage à un nombre de Reynolds de 3600 en $x = 7D(\equiv x - l_f = 4.4D)$. (a) —— : $\alpha_{PIV}\overline{\epsilon}_{PIV}$, - - - - : $15\nu\overline{\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2}$, ○ : $15\nu\frac{\overline{(\Delta u)^2}}{r^2}$, ◁ : $\left(C_u^{-1}r^{-2/3}\overline{(\Delta u)^2}\right)^{3/2}$, + : $\frac{5}{4r}\left(6\nu\frac{\partial}{\partial r}\overline{(\Delta u)^2} - \overline{(\Delta u)^3}\right)$. (b) —— : $\alpha_{PIV}\overline{\epsilon}_{PIV}$, - - - - : $3\nu\overline{\left(\frac{\partial u_i}{\partial x}\right)^2}$, ○ : $3\nu\frac{\overline{\Delta q^2}}{r^2}$, + : $\frac{4}{3r}\left(2\nu\frac{\partial}{\partial r}\overline{\Delta q^2} - \overline{\Delta u \Delta q^2}\right)$

4.3.2 Bilan d'énergie cinétique

Une fois le terme de dissipation évalué, nous nous intéressons maintenant aux différents termes constituant le bilan d'énergie cinétique totale :

$$\frac{1}{2}\overline{U_j}\frac{\partial\overline{q^2}}{\partial x_j} + \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\overline{u_j p} + \frac{1}{2}\overline{u_j q^2}\right) + \overline{u_j u_i}\frac{\partial\overline{U_i}}{\partial x_j} + \overline{\epsilon} = 0 \tag{4.19}$$

La diffusion par la pression est calculée par différence, d'où la nécessité d'évaluer correctement la dissipation. Les différents termes de l'équation (4.19) sont représentés sur la Fig. 4.10. Les valeurs négatives représentent un gain d'énergie cinétique turbulente, à l'inverse des valeurs positives, une perte d'énergie.

Tout d'abord, notons que le terme de dissipation (Fig. 4.10(e)) est relativement faible dans le champ proche du sillage. En d'autres termes, les petites échelles de l'écoulement pour lesquelles la dissipation visqueuse est active ne sont pas très développées. Cela est la preuve que cette zone particulière de l'écoulement est marquée par des mouvements à grande échelle, qui prennent germe au sein des mécanismes d'instabilités hydrodynamiques telles que l'instabilité de Bénard-von Kármán.

Le terme de production (Fig. 4.10(b)) est en revanche particulièrement fort, avec une valeur maximum (en norme) positionnée en $x = l_f, y = 0$. A cette position particulière, le terme de production est la conséquence d'un très fort niveau d'anisotropie et un fort

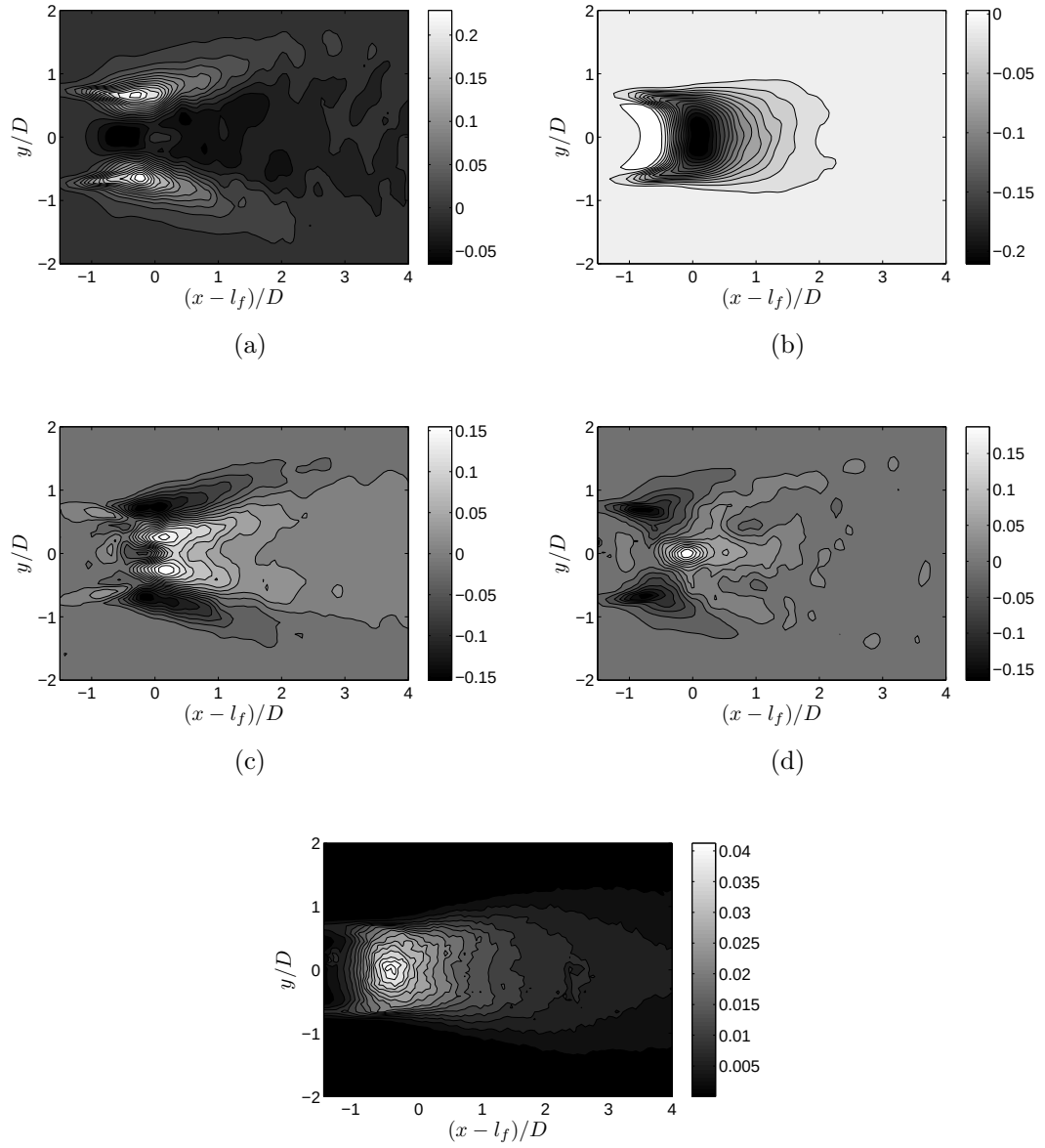


FIGURE 4.10 – Termes du bilan d'énergie cinétique turbulente mesurés par la PIV2C à un nombre de Reynolds 3600. Chaque terme est multiplié par D/U_0^3. (a) Advection $\frac{1}{2}\overline{U}_j\frac{\partial\overline{q^2}}{\partial x_j}$. (b) Production $\overline{u_iu_j}\frac{\partial\overline{U}_i}{\partial x_j}$. (c) Diffusion turbulente $\frac{\partial\overline{u_jq^2}}{\partial x_j}$. (d) Diffusion par la pression $\frac{\partial\overline{u_jp}}{\partial x_j}$. (d) Dissipation estimée par la relation $\alpha_{PIV}\overline{\epsilon}_{PIV}$

gradient de vitesse moyenne induisant une forte valeur du produit $\left(\overline{u^2} - \overline{v^2}\right) \frac{\partial \overline{U}}{\partial x}$. La zone d'"activité" du terme de production est relativement restreinte, localisée à l'intérieur de la zone de recirculation, et tend rapidement vers zéro au delà ($x - l_f > 2D$).

Le terme de transport de l'énergie cinétique totale par la vitesse moyenne (Fig. 4.10(a)) constitue une perte dans une zone centrée en $x - l_f = -0.25D, y = \pm 0.5D$ et un gain partout ailleurs. A noter que ce terme est nul à la fin de la zone de formation $x = l_f, y = 0$ car la vitesse moyenne est nulle et l'énergie cinétique totale maximum.

La diffusion turbulente (Fig. 4.10(c)) présente, à l'inverse, des valeurs négatives à l'endroit où l'advection est positive et *vice versa*. Cela met en lumière encore une fois la conversion du transport de l'énergie cinétique par la moyenne à un transport par des quantités fluctuantes. La même observation fut tenue précédemment concernant la quantité de mouvement.

La diffusion par la pression (Fig. 4.10(d)) présente quant à elle une topologie relativement similaire à la diffusion turbulente. Son importance est loin d'être négligeable. Cela n'est pas surprenant au vu du champ de pression moyenne, dont les gradients sont particulièrement forts dans cette zone.

A partir de $x - l_f = 2, y = 0$, le bilan d'énergie cinétique totale est majoritairement équilibré par l'advection, la dissipation et la diffusion turbulente.

4.4 Bilan d'énergie cinétique cohérente et aléatoire

A ce stade de développement de l'écoulement, une simple observation de champs instantanés de vitesse révèle que le mouvement organisé intrinsèque à l'instabilité de Bénard-von Kármán constitue une part importante des fluctuations de vitesse. Il est donc essentiel de séparer la contribution énergétique des structures cohérentes du reste du fond turbulent.

4.4.1 Fluctuations cohérentes de la vitesse

Pour ce faire, nous utilisons la méthode de moyenne de phase telle qu'elle fut définie par Reynolds et Hussain [119]. La moyenne de phase revient à une moyenne conditionnée par une certaine valeur de la phase d'un signal de référence. Cela nécessite donc d'avoir en sa possession une trace temporelle de ce signal de référence. Dans notre cas, c'est à partir de la PIV rapide qu'est extraite la phase, et en particulier de la vitesse transversale de l'écoulement. En effet, la composante v est réputée pour présenter une identité cohérente forte, et l'extraction de la phase en est facilitée [17], [18], [96], [96], [76], [66].

Nous utilisons une méthode relativement similaire à celle de Perrin [105] ou Perrin *et al.* [106]. Dans notre cas, la composante transversale v est filtrée par le biais de la méthode EMD (Annexe A, [121], [72]) afin d'ôter les modulations de phase associées à la partie aléatoire du champ fluctuant. La transformée de Hilbert $h(t)$ du signal filtré $v_f(t)$

est invoquée afin de calculer la phase ϕ telle que $\phi = tan^{-1}\left(\frac{h(t)}{v_f(t)}\right)$. Enfin, la phase est divisée en 32 classes, et les statistiques sont calculées pour chaque classe.

La Fig. 4.11 représente la variance des fluctuations totales, cohérentes et aléatoires de la vitesse longitudinale u et transversale v. Les Fig. 4.11(c) et 4.11(e) montrent que les fluctuations ordonnées de la composante v représentent près des 2/3 de la variance des fluctuations totales de la vitesse. La fin de la zone de recirculation correspond au maximum des fluctuations cohérentes de la vitesse v. A l'inverse, les Fig. 4.11(d) et 4.11(f) mettent en lumière que la variance de la vitesse u est avant tout constituée de fluctuations désordonnées. Cela d'autant plus que l'on se situe proche de la ligne centrale sur laquelle la variance des fluctuations ordonnées est quasi nulle (Fig. 4.11(d)).

Un autre moyen de calculer la variance des fluctuations cohérentes de la vitesse est d'utiliser les fonctions de structure d'ordre 2. Nous avons vu dans un précédent chapitre que la fonction de structure de la composante v révèle de fortes oscillations de période spatiale égale à L_v (3.1(b)). En considérant l'indépendance des fluctuations cohérentes et aléatoires, la fonction de structure d'ordre 2 d'une composante de vitesse u_α s'écrit :

$$\overline{(\Delta u_\alpha)^2} = \overline{(\Delta \tilde{u}_\alpha)^2} + \overline{(\Delta u'_\alpha)^2} \tag{4.20}$$

En $r = L_v$, $\tilde{u}^+_\alpha = \tilde{u}_\alpha$ d'où :

$$\overline{(\Delta u_\alpha)^2}(r = L_v) = \overline{(\Delta u'_\alpha)^2} \tag{4.21}$$

On peut considérer que L_v est suffisamment large pour que $\overline{u'_\alpha u'^+_\alpha} = 0$. On obtient donc :

$$\overline{(\Delta u_\alpha)^2}(r = L_v) = 2\overline{u'^2_\alpha}. \tag{4.22}$$

La fonction de structure en une séparation particulière $r = L_v$ vaut donc le double de la variance des fluctuations aléatoires. Connaissant la variance totale, la variance du mouvement ordonné est calculée par différence.

Les Fig. 4.12(a) et 4.12(b) représentent les profils des variances totales et ordonnées de la vitesse longitudinale et transversale respectivement à $7D$ derrière le cylindre. Cette position particulière fut choisie car le champ de vitesse moyenne et fluctuante est relativement homogène. Les fonctions de structure issues de signaux temporels (ADL3C) sont alors comparables à celles calculées via une réelle séparation spatiale (PIV2C). Ces profils sont très similaires à ceux mesurés par Matsumura et Antonia [96]. On observe en particulier une forme en double bosse concernant $\overline{\tilde{u}^2}$ et une forme en cloche en ce qui concerne $\overline{\tilde{v}^2}$. A partir de la méthode PIV2C et ADL3C, le mouvement cohérent est extrait via les fonctions de structure d'ordre 2 alors qu'à partir de la TR-PIV2C la méthode des moyennes de phase fut employée. Ces figures montrent que la méthode proposée, mettant en jeu les fonctions de structure est tout à fait efficace. L'accord avec la méthode de moyenne de phase est très correct. A noter une légère sous-estimation via la PIV2C qui provient du fait que l'on se soit effectivement déplacé entre $x = 7D$ jusque $x = 7D + L_v$, alors que

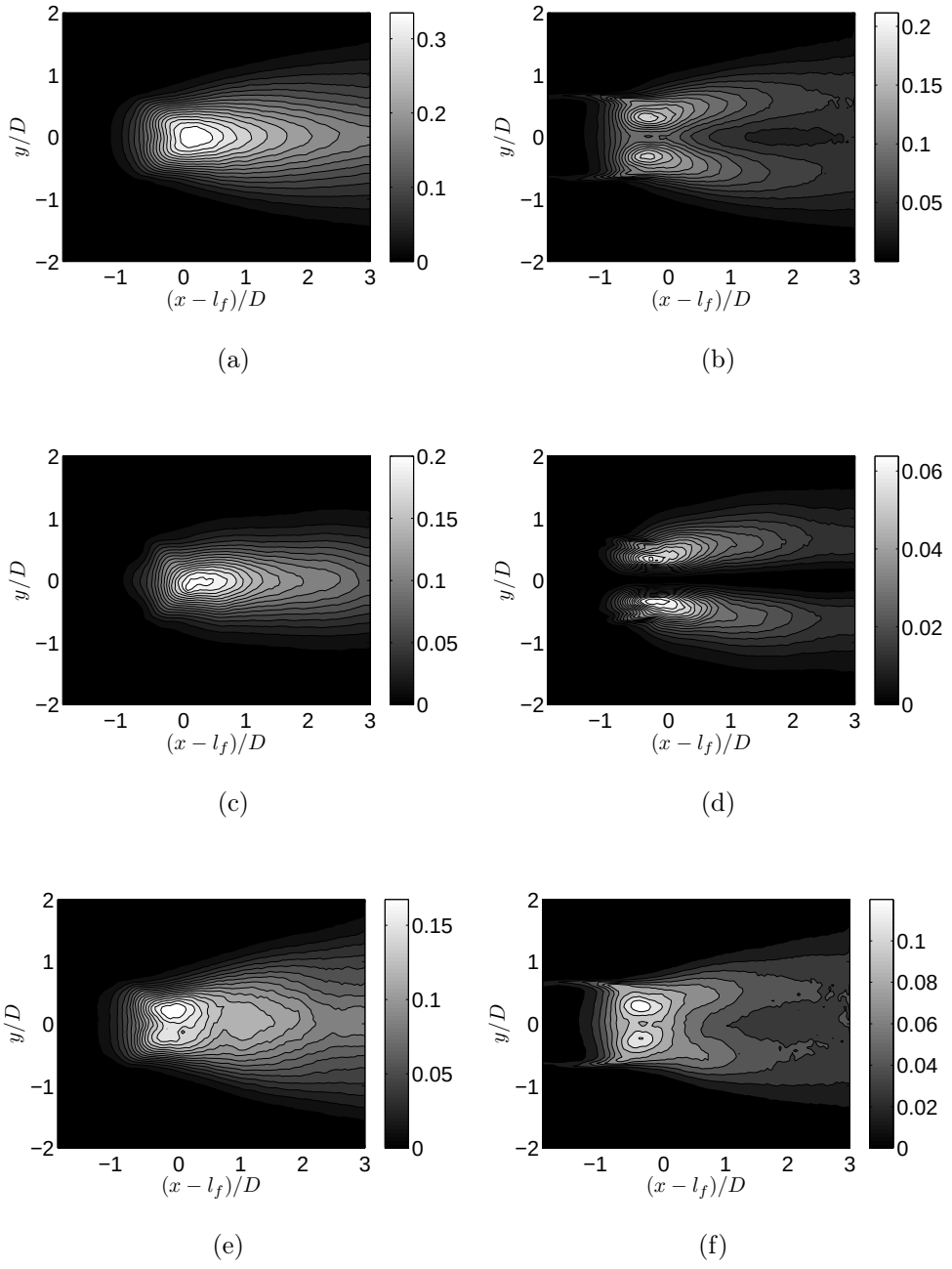
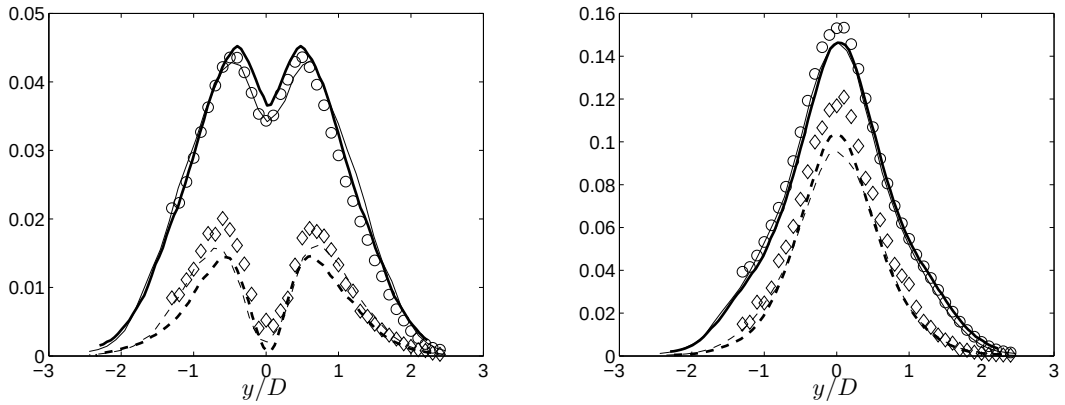


FIGURE 4.11 – Variance des fluctuations de vitesse totales, cohérentes et aléatoires issues de la technique TR-PIV2C à un nombre de Reynolds de 3600. (a) $\overline{v^2}/U_0^2$, (b) $\overline{u^2}/U_0^2$, (c) $\overline{\tilde{v}^2}/U_0^2$, (d) $\overline{\tilde{u}^2}/U_0^2$, (e) $\overline{v'^2}/U_0^2$, (f) $\overline{u'^2}/U_0^2$



(a) (b)

FIGURE 4.12 – Variance des fluctuations de vitesse totales et cohérentes, normalisée par U_0^2 en $x = 7D \equiv x - l_f = 4.4D$ à un nombre de Reynolds de 3600. $\overline{u_\alpha^2}/U_0^2$: ○ ADL3C, —— (trait fin) PIV2C, —— (trait épais) TR-PIV2C. $\overline{\tilde{u_\alpha}^2}/U_0^2$: ◇ ADL3C, - - - - (trait fin) PIV2C, - - - - (trait épais) TR-PIV2C. (a) $u_\alpha = u$, (b) $u_\alpha = v$

la fonction de structure issue de l'ADL3C est évaluée en un point. Cette sous-estimation de la composante ordonnée reflète donc une décroissance du mouvement cohérent entre $x = 7D$ jusque $x = 7D + L_v$.

Pour résumer, le champ proche se caractérise par une forte contribution du mouvement organisé intrinsèque à l'allée de Bénard-von Kármán dans les fluctuations de vitesse. Le bilan d'énergie cinétique dissociant la partie cohérente de la partie purement aléatoire est donc absolument nécessaire afin de mieux décrire les mécanismes de transport, production, diffusion d'énergie cinétique propres à chacune des deux entités.

Avant cela, intéressons nous à l'extraction des fluctuations cohérentes de la pression et des corrélations vitesse-pression, nécessaires à l'évaluation de la diffusion par la pression.

4.4.2 Fluctuations cohérentes de la pression

A partir de la moyenne de phase du champ de vitesse issue de la TR-PIV2C, il est possible de calculer le champ de pression qui lui est associé. Calculer le champ de pression à partir du champ de vitesse est une idée qui remonte à l'étude de Gurka *et al.* [65] ou Yoshioka [144] et d'autres depuis, comme par exemple Fujisawa *et al.* [57]. Il existe également une étude très complète qui répertorie l'efficacité de cette méthode par Charonko *et al.* [32].

En appliquant l'opérateur divergence à l'équation de Navier-Stokes, on obtient une

équation de Poisson reliant le laplacien à la divergence du terme non linéaire de vitesse :

$$\partial_j \partial_j P = -\partial_i \partial_j (U_i U_j) \tag{4.23}$$

Du fait que l'écoulement s'épanouit sur les trois directions de l'espace, l'utilisation de l'équation (4.23) pour calculer le champ de pression nécessite l'évaluation des trois composantes de vitesse sur tout un volume. Cela est hors de portée de la méthode PIV pour laquelle seulement 2 composantes de vitesse sur un plan sont mesurées.

En revanche, le champ ordonné de vitesse est quant à lui purement $2D$ [76]. La méthode PIV est alors en mesure d'être mise en oeuvre afin d'extraire le champ de pression ordonné. Pour cela il est nécessaire d'écrire une nouvelle équation de Poisson propre uniquement au champ cohérent. En appliquant une moyenne de phase à l'équation (4.23), on obtient :

$$\partial_j \partial_j \left(\overline{P} + \tilde{p}\right) = -\partial_i \partial_j \left(\overline{U}_i \overline{U}_j + \overline{U}_i \tilde{u}_j + \tilde{u}_i \overline{U}_j + \tilde{u}_i \tilde{u}_j + \langle u_i' u_j' \rangle\right) \tag{4.24}$$

En comparant la relation (4.24) à l'équation proposée par Yoshioka *et al.* [144], on remarque qu'apparaissent en plus les tensions de Reynolds de la partie aléatoire du champ fluctuant qui, étrangement, ne furent pas prises en compte dans [144]. Le second membre de (4.24) est ici écrit sous sa forme conservative. Cette forme est préférée afin de limiter l'effet des erreurs commises sur la vitesse perturbant le champ de pression calculé [32].

Ce problème est elliptique et ne dépend donc que des conditions limites qu'il convient de fixer de manière adéquate. En ce qui concerne les conditions supérieures et inférieures du domaine de calcul, nous fixons comme [57] des conditions de Dirichlet en estimant que le champ PIV est suffisamment large pour que $\overline{P} + \tilde{p} = 0$. Il convient de fixer au moins une condition de Dirichlet, sans quoi la pression est évaluée à une constante près. Pour les conditions aux limites d'entrée et de sortie du domaine, nous fixons un gradient de pression par rapport à la normale à la frontière $\overrightarrow{n}$, dérivant des équations de Navier-Stokes :

$$\begin{aligned} \pm\, \partial_n \langle \overline{P} + \tilde{p} \rangle = \partial_x \langle \overline{P} + \tilde{p} \rangle = &-\partial_t \tilde{u} - \partial_x \left(\overline{U}^2 + \tilde{u}^2 + \langle u'^2 \rangle + 2\overline{U}\tilde{u}\right) \\ &-\partial_y \left(\overline{U}.\overline{V} + \overline{U}\tilde{v} + \tilde{u}\overline{V} + \tilde{u}\tilde{v} + \langle u'v' \rangle\right) \\ &+\nu \left(\Delta_{x,y}\overline{U} + \Delta_{x,y}\tilde{u}\right). \end{aligned} \tag{4.25}$$

Cette condition aux limites semble être la plus "physique" dans le sens où elle dérive de Navier Stokes sans autres hypothèses. La résolution de l'équation de Poisson avec ses conditions limites est réalisée grâce à la méthode des éléments finis et en particulier du logiciel *FreeFem* dont la fonctionnalité facilite la mise en œuvre. Une annexe complète (Annexe B) est dédiée à cette méthode. Pour faire court, la méthode des éléments finis repose sur la résolution de la forme faible de l'équation (4.23) qui s'écrit :

$$\int_\Omega \nabla \langle P \rangle . \nabla f - \int_\Gamma \partial_n \langle P \rangle . f = \int_\Omega \Theta . f \tag{4.26}$$

où Ω correspond au champ PIV $(\overrightarrow{x}, \overrightarrow{y})$, Γ est sa frontière, Θ est le second membre de (4.23), f une fonction test et ∇ représente l'opérateur gradient. Tout l'intérêt de l'utilisation des éléments finis est à ce stade évident. En effet, les conditions aux limites font partie intégrante de la formulation faible et constituent un terme à part entière du problème dans (4.26). Celles-ci sont explicites et s'écrivent :

$$\int_{\Gamma} \partial_n \langle P \rangle . f. \tag{4.27}$$

Changer les conditions limites se fait donc très simplement. En discrétisant (4.26) sur les fonctions de base d'éléments finis et en fixant la fonction test selon la méthode de Galerkin, (4.26) se traduit par :

$$\sum_{j=1}^{n_v} A_{ij} P_j = B_i. \tag{4.28}$$

Il s'agit donc de n_v systèmes linéaires à résoudre, où n_v est le nombre de vertex. *FreeFem* dispose de toutes les fonctions intrinsèques permettant de résoudre ces derniers le plus simplement du monde. Dans le cas présent, un algorithme de minimisation généralisée des résidus (GMRES) fut employé. Différents espaces d'éléments finis ont été testés, d'ordre 2 et 3 qui n'occasionnent de pas grandes modifications des résultats. Le temps de calcul de chaque champ de pression à partir d'un champ de vitesse possédant 120*90 vecteurs est d'environ 3 secondes pour des éléments finis d'ordre 2.

Afin de vérifier l'efficacité de la méthode, nous comparons la moyenne temporelle des fluctuations au champ moyen de pression obtenue par deux autres méthodes. La première est une méthode dite d'"intégration en ligne" [32] du gradient transversal de pression calculée via le bilan de quantité de mouvement, en partant d'une valeur en $y \to -\infty$ égale à zéro. En d'autres termes :

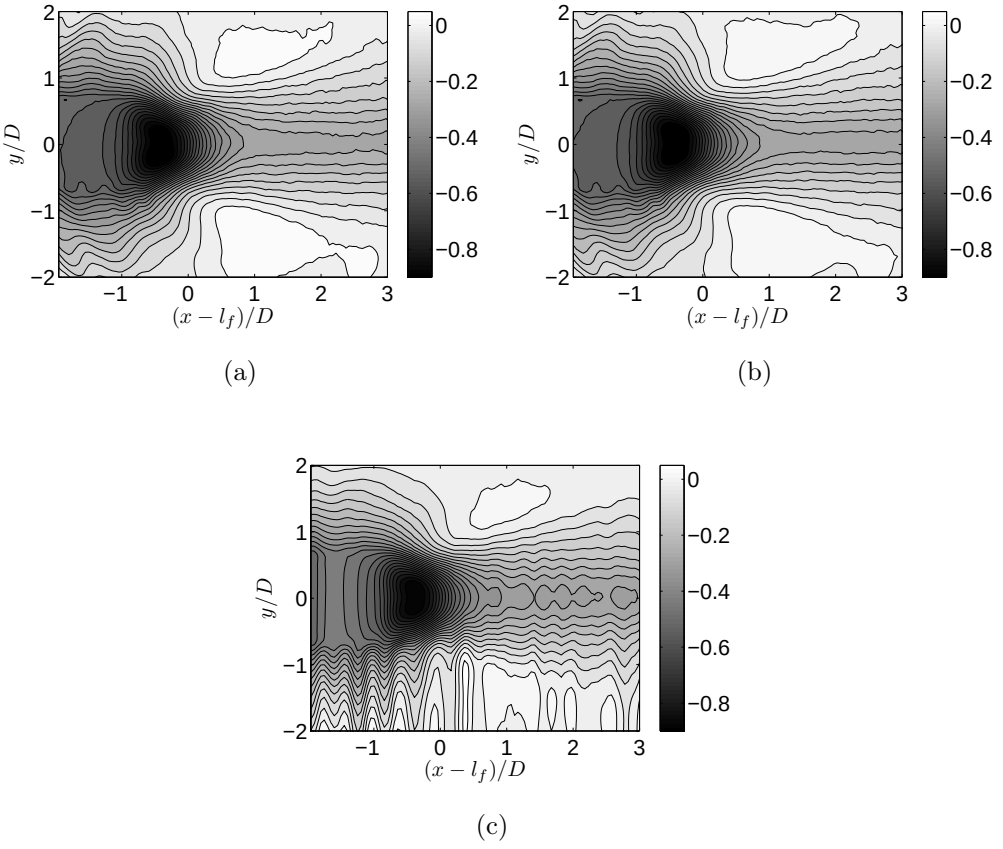
$$\overline{P}(x,y) = 0 + \int_{-\infty}^{y} \frac{\partial \overline{P}(x,y)}{\partial y} dy. \tag{4.29}$$

L'autre méthode consiste en la résolution de l'équation de Poisson propre au champ moyen. Celle-ci s'écrit [65] :

$$\Delta \overline{P} = -\partial_i \partial_j \left(\overline{U}_i \overline{U}_j + \overline{u_i u_j} \right), \tag{4.30}$$

avec les conditions limites de Dirichlet $\overline{P} = 0$ pour la paroi haute et basse et une condition de Neumann suivante pour l'entrée et la sortie de domaine :

$$\pm \partial_n \overline{P} = \partial_x \overline{P} = -\partial_x \left(\overline{U}^2 + \overline{u^2} \right) . - \partial_y \left(\overline{U} . \overline{V} + \overline{uv} \right) + \nu \Delta_{x,y} \overline{U} \tag{4.31}$$



(a) (b)

(c)

FIGURE 4.13 – (a) Moyenne temporelle des fluctuations ordonnées de la pression, (b) par le biais de (4.30), (c) Coefficient de pression moyen calculé à partir du bilan de quantité de mouvement.

Dans cette partie de la thèse, nous décidons de discuter non pas la pression en tant que telle mais le coefficient de pression $\tilde{C}_p$ définit par :

$$\tilde{C}_p = \frac{\overline{P} + \tilde{p}}{\frac{1}{2}U_0^2}. \tag{4.32}$$

La comparaison de la Fig. 4.13(a) et 4.13(b) montre une très bonne correspondance, validant la méthode de calcul du champ de pression par résolution de l'équation de Poisson. L'intégration en ligne semble bien plus bruitée, mettant en doute cette méthode de calcul du champ de pression moyen comme il fut largement discuté par [32].

Intéressons-nous maintenant à quelques champs instantanés de pression pour quelques valeurs de référence de phase. Tout d'abord, il est important de noter qu'il existe une très forte correspondance entre une zone de vorticité et une zone de dépression (Fig. 4.14(a)-

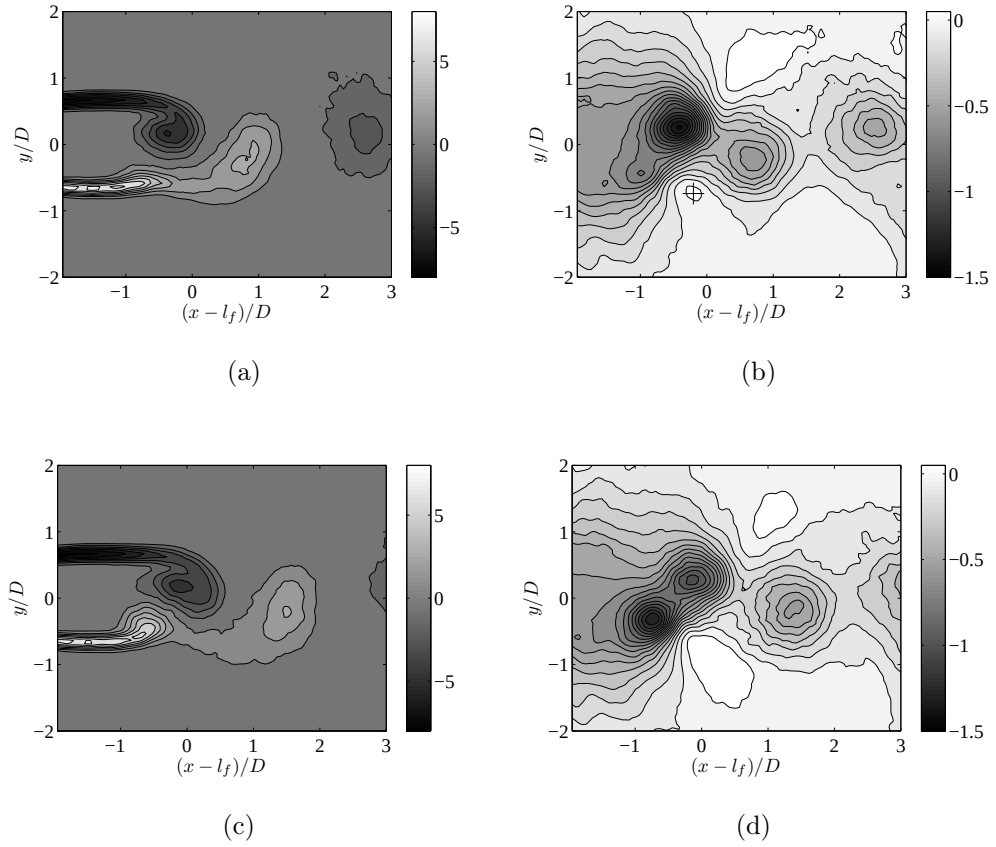


FIGURE 4.14 – Champ de vorticité $\tilde{\omega}_z D/U_0$ (a et c) et du coefficient de pression (b et d) pour les phases $\phi = -\pi$ (a-b) et $-\pi/2$ (c-d).

4.14(b)). D'un point de vue mathématique, l'équation de Poisson liant le laplacien de pression au champ de vitesse peut être exprimée en fonction du critère $\mathcal{Q}$ [73] :

$$\Delta P = 2\mathcal{Q}, \tag{4.33}$$

où $\mathcal{Q}$ est le second invariant du tenseur des gradients de vitesse. D'un point de vue plus physique, $\mathcal{Q}$ est utilisé comme un critère révélant les zones où la vorticité domine sur le cisaillement [73] :

$$\mathcal{Q} = \frac{1}{2}\left(\| \omega \|^2 - \| S \|^2\right), \tag{4.34}$$

où ω est la vorticité et S le cisaillement. La courbure de la pression caractérisée d'un point de vue mathématique par l'opérateur laplacien est donc proportionnelle au critère

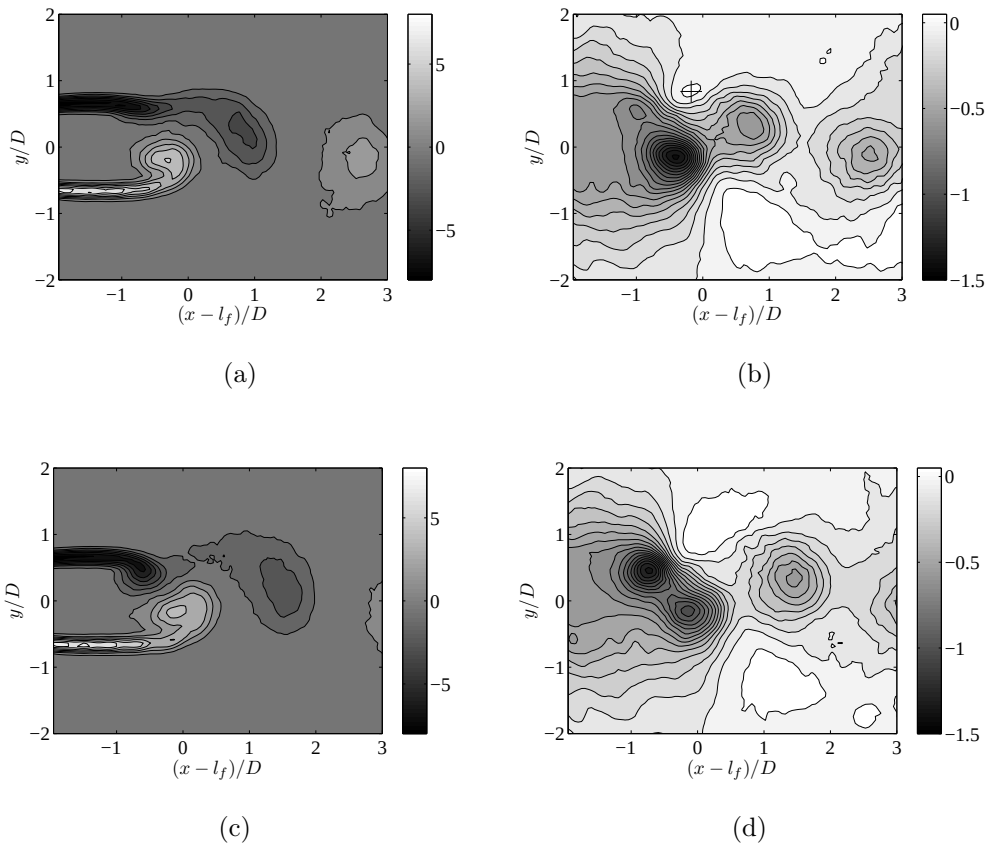


FIGURE 4.15 – Champ de vorticité $\tilde{\omega}_z D/U_0$ (a et c) et du coefficient de pression (b et d) pour les phases $\phi = 0$ (a-b) et $\pi/2$ (c-d).

$\mathcal{Q}$, dévoilant les zones de forte vorticité. Cela explique la correspondance entre zone de forte vorticité et de dépression.

Sur la Fig. 4.14(a), on remarque que le vortex naissant localisé en $x - l_f \sim -0.5D, y \sim 0.25D$ provenant de la couche de cisaillement supérieure induit une surpression localisée de l'autre coté de la ligne centrale en $x \sim l_f, y \sim -1D$ (symbole + placé sur la Fig. 4.14(b)). Cette surpression gêne la progression rectiligne de la couche de cisaillement inférieure qui se courbe et pénètre dans la bulle de recirculation (Fig. 4.14(c)). Une fois dans la zone de recirculation, le vortex localisé en $x - l_f \sim -0.5D, y \sim -0.25D$ provenant de la couche de cisaillement inférieure prend de l'ampleur (Fig. 4.15(a)) et crée lui-même une légère surpression située en $x \sim l_f, y \sim 1D$ (symbole + placé sur la Fig. 4.15(b)). Cette surpression gène la progression de la couche de cisaillement supérieure qui pénètre à son tour dans la zone de recirculation (Fig. 4.15(c), 4.15(d)), et ainsi de suite. On peut

donc conclure que la pression joue un rôle prépondérant dans la formation de la zone de recirculation et sur le caractère périodique et auto-entretenu de la déstabilisation des couches de cisaillement.

4.4.3 Bilan d'énergie cinétique cohérente et aléatoire

Nous venons de montrer que les fluctuations cohérentes de vitesse et de pression représentent une part importante des fluctuations totales. Il est donc impératif d'étudier à présent le bilan de l'énergie cinétique du mouvement ordonné et aléatoire séparément. On rappelle que le bilan en un point de l'énergie cinétique des fluctuations cohérentes de la vitesse s'écrit [119] :

$$\frac{1}{2}\overline{U}_j\frac{\partial}{\partial x_j}\overline{\tilde{q}^2}+\overline{\tilde{u}_i\tilde{u}_j}\frac{\partial\overline{U}_i}{\partial x_j}+\frac{\partial}{\partial x_j}\left(\overline{\tilde{u}_j\tilde{p}}+\frac{1}{2}\overline{\tilde{u}_j\tilde{q}^2}+\overline{\tilde{u}_i\left\langle u_i'u_j'\right\rangle}\right)-\overline{\left\langle u_i'u_j'\right\rangle\frac{\partial\tilde{u}_i}{\partial x_j}}+\bar{\tilde{\epsilon}}=0 \quad (4.35)$$

Pour la composante aléatoire, le bilan s'écrit :

$$\frac{1}{2}\overline{U}_j\frac{\partial}{\partial x_j}\overline{q'^2}+\overline{u_i'u_j'}\frac{\partial\overline{U}_i}{\partial x_j}+\frac{\partial}{\partial x_j}\left(\overline{u_j'p'}+\frac{1}{2}\overline{u_j'q'^2}+\frac{1}{2}\overline{\tilde{u}_j\left\langle q'^2\right\rangle}\right)+\overline{\left\langle u_i'u_j'\right\rangle\frac{\partial\tilde{u}_i}{\partial x_j}}+\overline{\epsilon'}=0 \quad (4.36)$$

Les Fig. 4.16(a), 4.16(b), 4.16(c), 4.16(d) et 4.10(e) représentent les termes propres aux fluctuations cohérentes. Les Fig. 4.17(a) et 4.17(b) sont les termes d'interactions entre la partie ordonnée et aléatoire du champ fluctuant. Ces interactions prennent place dans un mécanisme de transport (Fig. 4.17(a)) et de production (Fig. 4.17(b)) de fluctuations aléatoires par le mouvement cohérent. Les Fig. 4.18(a), 4.18(b), 4.18(c), 4.18(d) et 4.18(e) sont les termes constituant le bilan d'énergie des fluctuations aléatoires. Les Fig. 4.19(a) et 4.19(b) sont les termes de production et de transport de fluctuations aléatoires par le mouvement cohérent.

En comparant les Fig. 4.16(a) et Fig. 4.18(a), on remarque que l'advection par vitesse moyenne est de même importance que ce soit pour l'énergie cohérente ou aléatoire. La topologie de ce terme est également relativement identique, avec des valeurs positives centrées sur $x-l_f=-0.5D, y=\pm 0.75D$ et négatives autour de $x-l_f=-0.5D, y=0D$ et partout ailleurs avec une plus faible importance.

Concernant le terme de production de fluctuations cohérentes (Fig. 4.16(b)) et aléatoires (Fig. 4.18(b)) par la vitesse moyenne, on remarque certaines ressemblances à la fois en terme de topologie que de valeurs. Cela montre que les gradients de vitesse moyenne a autant d'effet sur la production de fluctuations ordonnées qu'ils en ont sur la production d'énergie cinétique aléatoire. On pouvait penser *a priori* que les fluctuations cohérentes à grande échelle sont produites dans un premier temps, suivant un mécanisme propre aux gradients de vitesse moyenne. Puis, cette énergie serait transférée vers les plus petites échelles dans un mécanisme de cascade. En réalité, fluctuations ordonnées et aléatoires sont créées quasi simultanément. Cependant, quelques petites différences s'observent au

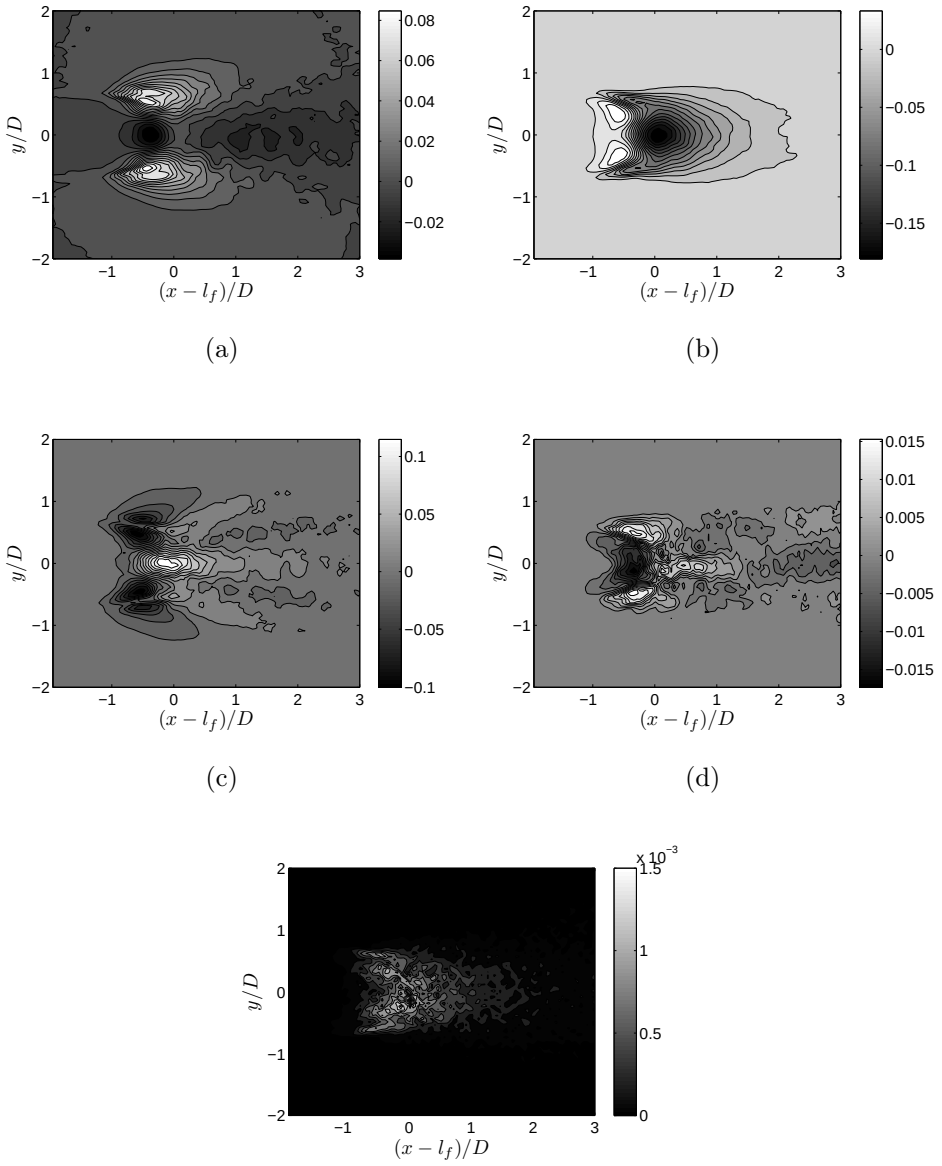
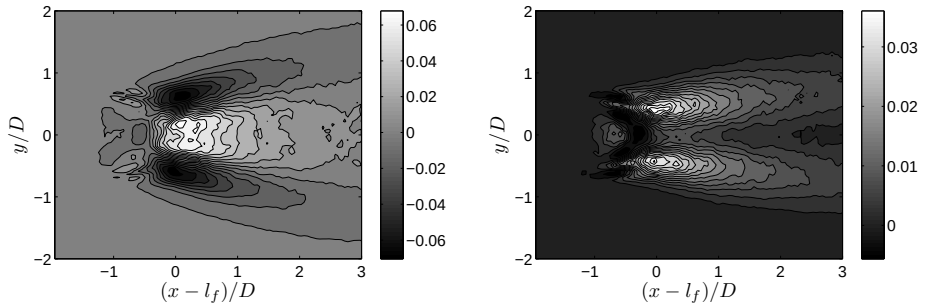


FIGURE 4.16 – Termes du bilan d'énergie cinétique cohérente normalisés par D/U_0^3 à un nombre de Reynolds de 3600 (TR-PIV2C). (a) Advection $\frac{1}{2}\overline{U}_j \frac{\partial}{\partial x_j}\overline{\widetilde{q}^2}$, (b) Production $\overline{\widetilde{u}_i\widetilde{u}_j}\frac{\partial \overline{U}_i}{\partial x_j}$, (c) Diffusion par la pression $\frac{\partial \overline{\widetilde{u}_j\widetilde{p}}}{\partial x_j}$, (d) Diffusion cohérente $\frac{1}{2}\frac{\partial \overline{\widetilde{q}^2}}{\partial x_j}$, (e) Terme de dissipation.



(a) (b)

FIGURE 4.17 – (a) Diffusion des fluctuations aléatoires par le champ cohérent $\frac{\partial \overline{\tilde{u}_i \langle u_i' u_j' \rangle}}{\partial x_j}$, (b) Production de fluctuations aléatoires par le champ cohérent $-\overline{\langle u_i' u_j' \rangle \frac{\partial \tilde{u}_i}{\partial x_j}}$.

niveau de la fin de la zone de recirculation ($x = l_f, y = 0$), où la création de fluctuations ordonnées (Fig. 4.16(b)) est maximum alors que le maximum de production d'énergie cinétique aléatoire (Fig. 4.18(b)) est positionné à l'intérieur des couches de cisaillement. La création de fluctuations aléatoires dans cette zone particulière est représentative des tourbillons de Bloor-Gerrard.

La diffusion par la pression du mouvement ordonné (Fig. 4.16(c)) est calculée directement à partir des fluctuations cohérentes de la pression. Celle du mouvement aléatoire (Fig. 4.18(c)) est calculée en soustrayant la diffusion par la pression cohérente à la diffusion par la pression de l'énergie cinétique totale. Chacune de ces deux figures montre que la diffusion par la pression induit un gain d'énergie dans la couches de cisaillement. Cela corrobore encore une fois les observations mettant en évidence le rôle de la pression dans le transfert d'énergie cinétique initialement sous forme de quantité moyenne et dirigée vers x, en énergie cinétique fluctuante dirigée majoritairement vers y. A la fin de la zone de recirculation $x = l_f, y = 0$, la diffusion par la pression constitue une perte dans le bilan d'énergie cinétique cohérente et aléatoire.

Le transport de l'énergie cinétique cohérente par le champ cohérent (Fig. 4.16(d)) est particulièrement faible. La diffusion turbulente totale est ainsi quasi intégralement constituée par la diffusion aléatoire (Fig. 4.18(d)).

Enfin la dissipation du mouvement cohérent (Fig. 4.16(e)) révèle, sans surprise, de très faibles valeurs. En effet, la dissipation d'énergie est une caractéristique des gradients aux plus petites échelles de l'écoulement. Or, les structures cohérentes sont caractérisées par des mouvements à grandes échelles, il est donc tout à fait normal d'observer des niveaux minimes de dissipation. Celle-ci est ainsi entièrement portée par le mouvement aléatoire (Fig. 4.16(e)).

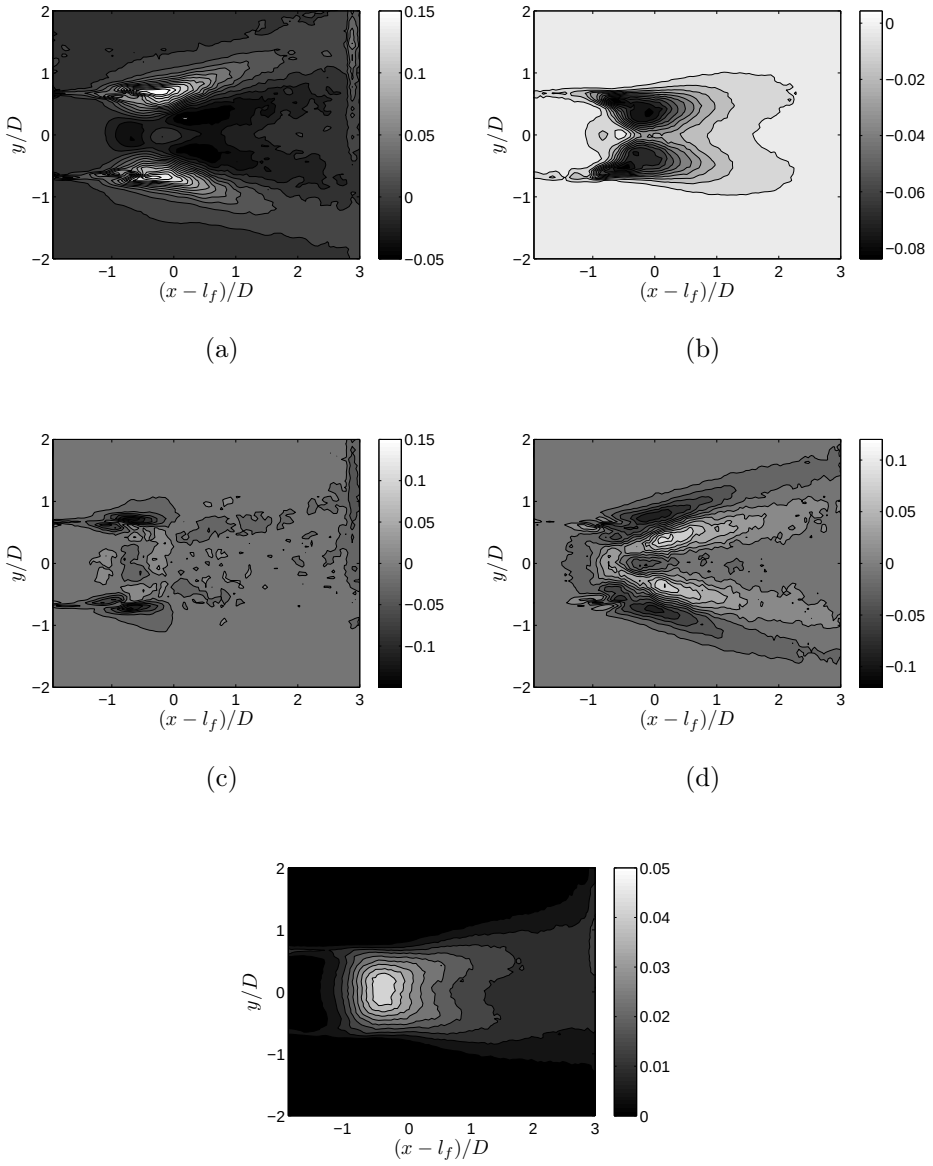
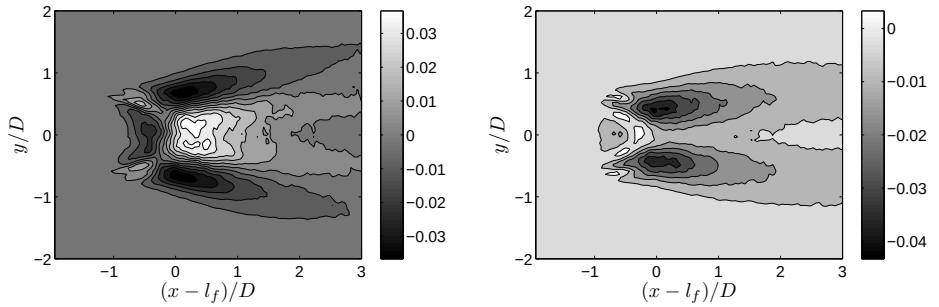


FIGURE 4.18 – Termes du bilan d'énergie cinétique aléatoire normalisés par D/U_0^3 à un nombre de Reynolds de 3600 (TR-PIV2C). (a) Advection $\frac{1}{2}\overline{U}_j \frac{\partial \overline{q'^2}}{\partial x_j}$, (b) Production $\overline{u'_i u'_j} \frac{\partial \overline{U}_i}{\partial x_j}$, (c) Diffusion par la pression $\frac{\partial \overline{u'_j p'}}{\partial x_j}$, (d) Diffusion aléatoire $\frac{1}{2} \frac{\partial \overline{u'_j q'^2}}{\partial x_j}$, (e) Terme de dissipation



(a) (b)

FIGURE 4.19 – (a) Diffusion des fluctuations aléatoires par le champ cohérent $\frac{1}{2}\frac{\partial \tilde{u}_j \langle q'^2 \rangle}{\partial x_j}$, (b) Production de fluctuations aléatoires par le champ cohérent $\overline{\left\langle u_i' u_j' \right\rangle \frac{\partial \tilde{u}_i}{\partial x_j}}$

Les interactions entre la partie cohérente et aléatoire du champ turbulent sont représentées sur les Fig. 4.17(a), 4.17(b), 4.19(a) et 4.19(b). Le terme de production de fluctuations aléatoires par le champ ordonné est le même entre la Fig. 4.17(b) et 4.19(b), seul le signe change. Ces deux dernières figures montrent que la production de fluctuations aléatoires via le champ ordonné est majoritairement localisée en $x = l_f, y = \pm 0.5D$. Au delà de la zone de recirculation, ce terme prend la forme de double bosse.

Les autres termes d'interactions correspondent à un mécanisme de transport de quantités fluctuantes par le champ ordonné : transport des tensions de Reynolds (Fig. 4.17(a)) et transport de l'énergie cinétique aléatoire (Fig. 4.19(a)). La topologie, l'amplitude et le signe de ces deux termes sont très ressemblants. Le mécanisme de transport de la trace du tenseur des tensions de Reynolds du champ aléatoire (Fig. 4.19(a)) constitue un gain pour l'énergie cinétique aléatoire dans un zone située autour de $x - l_f, y = 0.5D$, une perte autour de $x - l_f, y = 0D$. Il est de plus quasiment égal au transport de ses diagonales (Fig. 4.17(a) et représente un gain pour le champ ordonné en $x - l_f, y = 0.5D$, une perte en $x - l_f, y = 0D$.

4.5 Conclusion

A partir des différentes techniques de mesures mises en place dans le champ proche du sillage de cylindre, les bilans en un point de la quantité de mouvement, de l'énergie cinétique totale, cohérente et aléatoire sont entièrement estimés. Ils mettent en évidence que :

– Tous les termes à grandes échelles sont à prendre en considération dans les bilans

en deux points. Ce point particulier est un obstacle d'un point de vue calculatoire car les correspondants en deux points de chacun de ces termes devront être évalués.
- La diffusion par la pression nécessiterait, soit d'être mesurée, soit d'être évaluée par différence, à condition que tous les autres termes soient précisément estimés.
- Le champ fluctuant est constitué pour une part importante de fluctuations ordonnées dont la contribution nécessite d'être extraite du champ purement turbulent. Pour chacune de ces deux entités, tous les termes à grandes échelles sont également à prendre en compte. Cela complexifie sévèrement l'évaluation complète des bilans en deux points dissociant la partie cohérente et aléatoire.
- A partir de cette base de données, seule la séparation spatiale longitudinale est accessible via les signaux temporels (l'ADL3C) ou bien les séparations longitudinales et transversales (PIV2C et la TR-PIV2C). Une forme particulière de l'opérateur divergence et Laplacien doit être invoquée en se référant à une hypothèse. La plus courante des suppositions est bien entendue l'isotropie locale [1]. En champ proche, l'isotropie locale n'est vérifiée que pour de faibles séparations. On ne dispose donc pas d'une extension spatiale suffisante sur laquelle l'isotropie locale soit respectée afin de décrire le champ turbulent dans sa globalité.

A la lumière des précédentes remarques, il semble évident que l'évaluation complète des bilans en deux points à partir d'expérimentations en champ proche est particulièrement complexe, voire hors de portée. Nous tournons donc notre attention sur une zone où l'écoulement est davantage développé, où les termes à grandes échelles sont moins nombreux et où l'isotropie locale est vérifiée sur une plus large gamme d'échelles. Notre regard porte ainsi sur le champ intermédiaire et lointain du sillage de cylindre et de différents obstacles.

1. On pourrait également invoquer l'hypothèse moins restrictive d'axisymétrie locale. Cependant la forme axisymétrique du bilan en deux points prenant en considération le mouvement cohérent n'a pas été considérée lors du Chapitre "Considérations analytiques". Cela fait partie des perspectives de ce travail

Chapitre 5

Bilan en deux points dans le champ intermédiaire

"Le chemin le plus court d'un point à un autre est la ligne droite, à condition que les deux points soient bien en face l'un de l'autre."

Pierre Dac

5.1 Introduction

Nous atteignons désormais le point d'orgue de ce manuscrit. Les avancées les plus importantes que prodigue ce travail de thèse se situent en effet dans ce chapitre. Jusqu'alors, les processus énergétiques au sein de cet écoulement étaient caractérisés par des bilans en un point où la notion d'échelle n'apparaissait pas. Or, il convient de décrire les écoulements turbulents pour chacune des échelles, les processus agissant sur le plus petites n'étant pas *a priori* les mêmes que ceux qui influent sur les plus grandes.

Ce chapitre a pour objet de caractériser l'écoulement à chaque échelle par le biais de bilans en deux points. Leur formulation localement isotrope est utilisée, afin de réduire le problème initial en six dimensions (3 dimensions d'espace, 3 dimensions dans l'espace des séparations) en un problème en une dimension (celui du module de la séparation notée r). D'autant plus que seul le module r du vecteur de séparation $\vec{r}$ est accessible via l'expérimentation au fil chaud. D'autre méthodes 'exactes' de réduction du problème sont possibles. Casciola *et al.* [30] ou bien Marati *et al.* [95] s'inspirent du travail analytique de Hill [70] qui propose d'intégrer la forme générale des bilans en deux points sur une sphère de rayon r. Cependant, bien qu'exacte, cette formulation a deux inconvénients. D'une part, elle semble inaccessible via l'expérience car nous ne disposons pas de méthodes précises permettant la mesure des trois composantes de vitesse au sein d'un volume. L'intégration spatiale n'est donc pas envisageable. D'autre part, même si sa validité ne repose pas sur l'hypothèse d'isotropie locale, elle masque les effets liés à l'anisotropie du

fait de l'intégration spatiale.

Du fait de l'isotropie locale, nous nous écartons du champ proche du sillage où cette hypothèse est, certes, vérifiée aux plus petites échelles, mais pas sur une gamme d'échelle suffisamment large. Nous portons donc notre attention sur le champ intermédiaire où la turbulence y est davantage développée. Ce passage du champ proche au champ lointain se fait uniquement dans le but de réduire le problème à des quantités observables par l'expérience. A noter que les fonctions de structure, bien que réservées d'ordinaire à la turbulence pleinement développée, révèlent toute leur acuité également en champ proche [60], [114], [86].

La vérification de l'hypothèse d'isotropie locale se doit tout de même de faire l'objet d'une étude préliminaire. La section 5.2 aborde cette question et met en évidence notamment l'influence du mouvement organisé sur l'isotropie locale. Cette étude permet d'affirmer que l'isotropie est relativement bien vérifiée sur une gamme d'échelle relativement étendue. Les écarts à cette hypothèse se trouvent dans un intervalle de confiance de plus ou moins 25%.

À la lumière des remarques précédentes, la formulation localement isotrope des bilans en deux points peut donc être mise en perspective. Nos regards portent tout d'abord sur les bilans en deux points ne prenant pas en compte l'influence du mouvement organisé (Section 5.3). Cette section permet également de tester l'hypothèse d'auto-similitude afin de simplifier l'exploitation expérimentale des bilans en deux points à partir de mesures en un unique point de l'écoulement.

Dans la section 5.4, l'influence du mouvement organisé est incorporée aux bilans en deux points. Les interactions entre le mouvement ordonné et le champ aléatoire à chacune des échelles, que ce soit en terme de dynamique ou de contribution énergétique sont ainsi mises en lumière.

Enfin, lorsque l'isotropie locale n'est plus valide, la première relaxation en terme de difficulté mathématique est l'axisymétrie locale. Cette caractéristique est par exemple observée au niveau du point d'impact de deux jets opposés [82]. Dans la section 5.5, la forme localement axisymétrique des bilans en deux points est invoquée, afin de caractériser l'anisotropie du transfert énergétique au sein de la cascade turbulente.

5.2 Effet d'un mouvement organisé anisotrope sur l'isotropie locale

Effect of the organized motion on local isotropy at the centreline of a wake

F. THIESSET[1], L. DANAILA[1]†, AND R. A. ANTONIA[2]

[1] CORIA, Avenue de l'Université, BP 12, 76801 Saint Etienne du Rouvray, France

[2] School of Engineering, University of Newcastle, NSW 2308, Australia

(Received ?; revised ?; accepted ?. - To be entered by editorial office)

The local isotropy of wakes behind five types of obstacles (a circular cylinder, a square cylinder, a screen cylinder, a normal plate and a screen strip) is experimentally tested in the intermediate field. Several tests are used for both dissipative and inertial range scales. Each wake has a different level of large-scale organization which is reflected by different amounts of large-scale anisotropy. The latter has a greater effect on v than on u and is more pronounced for the porous-body wakes than for the solid-body wakes. Isotropy is a reasonable approximation for small scales, especially for the square cylinder. The least locally isotropic flow is the screen strip wake, for which coherent motions first appear downstream of the obstacle.

These observations are analysed in the context of an isotropy criterion based on the ratio between two characteristic times, one associated with the coherent strain and the other with the characteristic time of turbulence at a specific scale, which is either large, intermediate (inertial) or small (dissipative). We show that in the presence of an organized motion, isotropy is not an adequate assumption for the large scales but may be satisfied over a range of scales extending from the smallest dissipative scale up to a scale which depends on the coherent strain rate that characterizes the flow. We discuss two criteria of LI (one in the inertial range and another in the dissipative range), which allow us to estimate this scale from a knowledge of the strain imposed by the coherent motion. Simple analytical arguments show that in the far-field, the strength of the coherent motion decays at the same rate as that of the turbulent motion, thus implying the persistence of anisotropy far downstream. This result does not seem to depend on the scale at which anisotropy is tested.

Key words: Isotropic turbulence - Wakes

1. Introduction

The analytical framework introduced by Kolmogorov (1941) (hereafter K41) for describing the properties of small-scale turbulence at sufficiently large Reynolds numbers has had a tremendous impact on turbulence research. There continues to be a strong belief among the turbulence community that if a theory of turbulence were to emerge, it would most likely relate to the small-scale motion whose features tend to exhibit quasi-universal characteristics, *e.g.* Sreenivasan & Antonia (1997). Local isotropy (hereafter, LI) is one of the key assumptions of the K41 theory. LI is without doubt the most utilised

† Email address for correspondence: danaila@coria.fr

hypothesis, primarily because of the resulting analytical simplifications, but also because it allows experimentalists to gather only a minimal amount of information on the velocity fluctuating field. However, whilst the largest scales are anisotropic, LI is unlikely to be satisfied in flows normally encountered in laboratory. Uniform shear flows constitute an example where even the smallest scales are affected by the large-scale shear, at least for commonly used values of the Reynolds number.

The longer term aim of this study is to understand how, in the context of shear flows, the anisotropy propagates across the scales -from the largest to the smallest-, how it evolves down the scales and finally, what the degree of anisotropy is at any given scale. It is now recognized that the most important signature of the shear is the presence of coherent structures, which retain, through their size and dynamics, significant information about the initial conditions. For instance, the spectral slopes may be drastically affected by the presence of coherent motions (Morris & Foss (2005)).

We aim at investigating the influence of the particular nature of the flow, the differences in initial conditions and the effect of Reynolds number on local isotropy. The degree of LI is quantified at a fixed position in the intermediate wake, and the return to isotropy for further downstream positions (far wake) is investigated. Therefore, as a first step in answering the question of what the isotropy level is at any particular scale, we consider flows populated by a **single-scale, persistent** coherent motion. A good candidate is the two-dimensional wake generated by different bluff bodies, and this study focuses entirely on this flow.

Several previous studies were devoted to characterising this flow, *e.g.* Antonia *et al.* (2002) (hereafter AZR), Zhou & Antonia (1994), Zhou & Antonia (1995), Antonia & Mi (1998), etc. In AZR, both porous and impervious bodies were chosen because of the differences in the organized motion that have been observed when the shape and/or the porosity of the generator are varied (Cannon *et al.* (1993), Cimbala *et al.* (1988), Antonia & Mi (1998)). Measurements of the spanwise vorticity fluctuations ω_z were made on the centerline of the wakes generated by five different bluff bodies, *i.e.* a solid circular cylinder, a circular cylinder constructed from a screen (0.5 mm wire diameter with a mesh size of 1.6 mm), a solid square cylinder, a solid plate placed normal to the flow, and a screen strip (Fig. 1). For all of them, the characteristic dimension d (height or diameter), was the same (25.4mm). The measurements were performed at the same location ($x/d = 70$), and at nominally the same Reynolds number (R_{λ_u} , the Taylor microscale Reynolds number ≈ 200). It was emphasized that although the differences are most pronounced in the near field, they are not diminished in the far field. The global level of anisotropy, *i.e.* the ratio of the variances $\overline{v^2}/\overline{u^2}$, significantly varied from flow to flow, being the largest for the screen strip and the smallest for the square cylinder. These variations were mainly due to variations in $\overline{v^2}$. AZR further showed that the autocorrelation coefficients, as well as the second-order structure functions of the velocity component v, highlighted differences among the five generators. In particular, a strong periodicity was observed for the porous body wakes at large separations. This was associated with the vortices which first appear in the mixing layers that originate from the edges of the mesh and subsequently undergo pairing, thus increasing their intensity further downstream.

Second-order structure functions of v also reflected the way energy was injected into the large scales. Associated with significant changes in $\overline{v^2}/\overline{u^2}$ between the different wakes are appreciable variations in both the shape and magnitude of the Kolmogorov-normalised second-order structure functions over the restricted scaling range (RSR). Oscillations were observed beyond the upper end of this RSR for the porous-body wakes. The RSR is the range of scale over which the second-order structure functions exhibit a well-defined scaling, the exponent of which is smaller than the asymptotic value of 2/3

In the dissipative range, the distributions of Kolmogorov-normalised second-order structure functions of v do not appear to collapse as well as those for u, indicating departures from local isotropy. The derivative variances also emphasized departures from isotropy in each wake, with little evidence that the departure from isotropy differs perceptibly between the wakes of the porous generators and those of the impervious bodies.

As an overall conclusion of AZR, the differences observed between the different wakes cannot be simply ascribed to whether the wake generator is solid or porous, the shape of the generator being also important. The authors concluded that it is difficult to make any authoritative comment on whether small-scale turbulence becomes universal at very large R_{λ_u}.

The present paper extends the study of AZR in a significant manner, by addressing the question of local isotropy on the centerline of a wake behind different types of bluff bodies. More especially, we investigate the effect on LI of *(i)* the initial conditions (the large-scale organisation particular to each kind of generator) and *(ii)* the Reynolds number.

Different analytical expressions based on local isotropy are reviewed and used as tests of LI. Some of theses tests involve velocity derivatives and therefore focus on the dissipative range. Statistics of velocity derivatives are corrected with respect to both the probe resolution and noise effects. Other tests involve velocity increments at a given scale, therefore they provide a test of LI at that particular scale.

In part, we reanalyse the same data as in AZR (obtained at a single downstream location) by applying a wider range of LI criteria on a larger number of quantities than considered in AZR. Measurements are described in Section 2. In these flows, different isotropy tests are investigated, first at the smallest (dissipative scales) in Section 3, and then at large scales (Section 4). Section 5 is devoted to explaining the experimental observations, whereas Section 6 deals with the anisotropy effects which persist in the far field of the wake. Conclusions are drawn in Section 7.

2. Experiments

Measurements were performed in an open circuit wind tunnel of the University of Newcastle, Australia. Five different generators were used, all of them with the same characteristic dimension $d = 25.4mm$: a circular cylinder (CC), a square cylinder (SqC), a screen cylinder (ScC), a normal plate (P) and a screen strip (SS) (Fig 1). The spanwise and the transverse vorticity components (ω_z, ω_y) were measured independently, by rotating a single component vorticity probe. For more information about the generators and the probe, see AZR. The measurement location is $70d$ downstream the generator, on the wake centreline.

The separation between hot wires and the sampling frequency were adjusted so that $\Delta x \approx \Delta y \approx \Delta z \approx 3 - 6\eta$ (η denotes the Kolmogorov length scale), depending on the Reynolds number. Whereas a separation 3η may be appropriate for correctly inferring derivatives statistics, 6η is too large, and an attenuation of derivatives spectra may occur. This attenuation of the velocity derivatives spectrum may be corrected using the spectral method provided by Antonia *et al.* (1996).

Let us briefly recall the correction method, for a one-component vorticity probe. The ratio between the measured spectrum $\phi^M_{u,y}$ and the true spectrum $\phi_{u,y}$ of transverse derivatives is (Antonia *et al.* (1996)):

$$\frac{\phi^M_{u,y}}{\phi_{u,y}} = \frac{4\int\int_{-\infty}^{\infty} \sin^2\left(\frac{k_y \Delta y}{2}\right) \frac{E(k)}{4\pi k^4}\left(k^2 - k_x^2\right) dk_y dk_z}{(\Delta y)^2 \int\int_{-\infty}^{\infty} k_y^2 \frac{E(k)}{4\pi k^4}\left(k^2 - k_x^2\right) dk_y dk_z}, \tag{2.1}$$

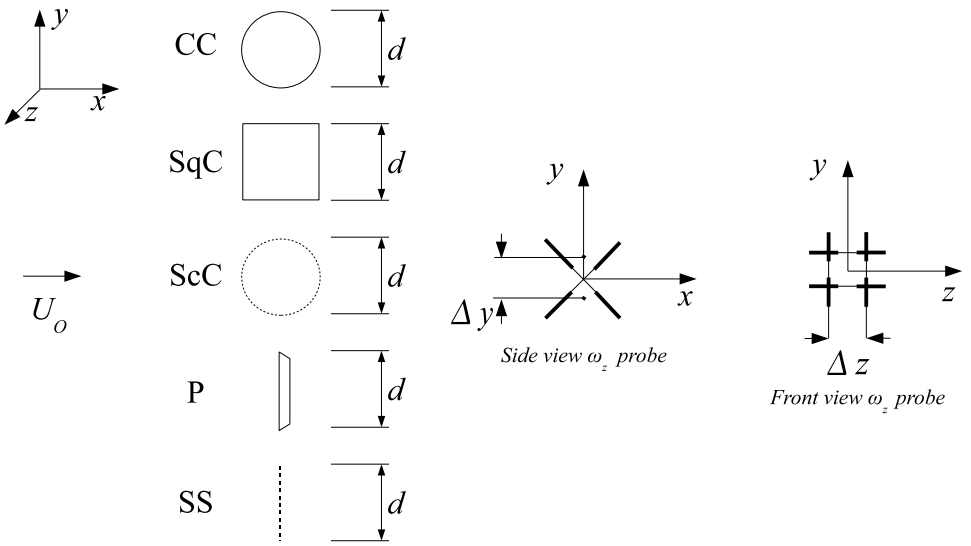


FIGURE 1. Cross section of the five different generators. From top to bottom: CC, SqC, ScC, P, SS. Also sketched is a one-component vorticity probe in the ω_z configuration (ω_z is the vorticity component in the z direction).

where $u_{,y} = \frac{\partial u}{\partial y}$, $k = \left(k_x^2 + k_y^2 + k_z^2\right)^{1/2}$ is the magnitude of the wave number vector with k_x, k_y and k_z are wavenumbers along the x, y and z directions and $E(k)$ is the 3D isotropic spectrum. Replacing y by z leads to a similar expression for $\phi^M_{u_{,z}}$. Note that in reality, the double integrals involved in Eq. 2.1 do not extend from $-\infty$ to ∞ since the integrated functions decay to zero.

For the longitudinal derivatives, the measured spectrum $\phi^M_{u_{,x}}$ is related to the true spectrum $\phi_{u_{,x}}$ via the sinc function, *viz.*:

$$\frac{\phi^M_{u_{\alpha,x}}}{\phi_{u_{\alpha,x}}} = \mathrm{sinc}^2\left(\frac{k_x \Delta x}{2}\right), \tag{2.2}$$

where $u_\alpha \equiv u, v, w$. It is important to recall that while LI was invoked in Eq. (2.1), the correction of any streamwise derivative spectrum (Eq. (2.2)) does not require this assumption.

Measurements were performed at several values of the Taylor microscale Reynolds number R_{λ_u}, based on the RMS of u and the Taylor microscale ${\lambda_u}^2 = 15\nu\frac{\overline{u^2}}{\overline{\epsilon}}$. The Taylor microscale λ_u, the isotropic mean energy dissipation rate $\overline{\epsilon}_{iso} = 15\nu\overline{\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2}$ and the Taylor micro-scale Reynolds number for each generator are reported in Table 1, for each generator. Note that $\overline{\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2}$ was corrected using Eq. (2.2)

3. Anisotropy of the dissipative scales

Local isotropy is tested at the level of the dissipative scales, via second-order moments (Subsection 3.1) and higher-order moments (Sections 3.2 and 3.3).

3.1. *Second-order moments*

We first examine the departures from LI of the dissipative scales, due to the effect of the organized motion . To this end, we study the departure from LI of several components of

	λ_u (mm)			$\overline{\epsilon}$ $(m^2.s^{-3})$			R_{λ_u}		
CC	6.39	5.30	3.91	0.98	2.47	14.26	164	188	252
SqC	5.78	5.12	3.81	1.74	3.01	20.57	183	197	286
ScC	5.79	5.25	3.54	1.34	2.74	23.94	178	198	255
P	5.69	4.83	3.50	1.46	3.39	22.24	156	186	247
SS	5.29	4.52	3.47	0.88	2.44	14.78	114	140	197

TABLE 1. Values of the Taylor microscale λ_u, $\overline{\epsilon}_{iso}$ and the Taylor microscale Reynolds number R_{λ_u} for the five different generators.

the mean energy dissipation rate. From the one-component vorticity probe, the following ratios are measurable

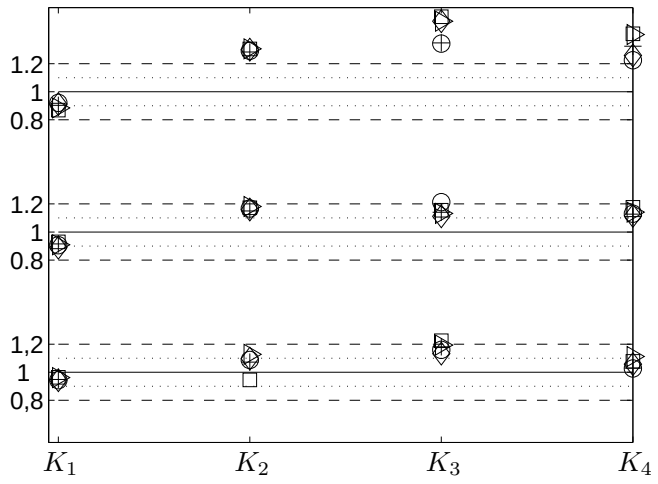
$$K_1 = 2\overline{\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2} \Big/ \overline{\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2} \qquad K_2 = 2\overline{\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2} \Big/ \overline{\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2}$$
$$K_3 = 2\overline{\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2} \Big/ \overline{\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2} \qquad K_4 = 2\overline{\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2} \Big/ \overline{\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2}. \tag{3.1}$$

Values of K_1 and K_3 are estimated by the vorticity probe oriented in the ω_z configuration, whereas K_2 and K_4 are inferred from the probe placed in the ω_y configuration. If LI holds, these ratios must be equal to 1 (Taylor (1935)) and the mean dissipation rate must be equal to its isotropic surrogate $\overline{\epsilon}_{iso}$.

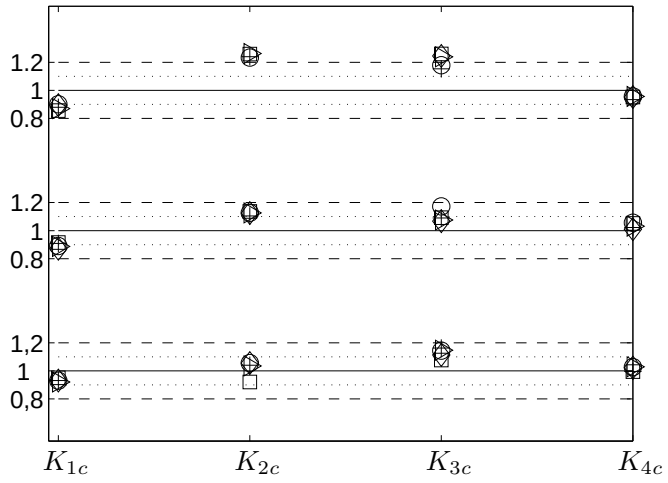
Several values of K_1 to K_4 in turbulent shear flows are summarized by Browne *et al.* (1987) whereas Antonia *et al.* (1998) reported some of these values in grid turbulence. For all these flows, some departures from LI are discernible, indicating persisting effects of a large scale anisotropic forcing.

As pointed out by Antonia *et al.* (1986), the controversy concerning the validity of LI at the level of the dissipative range has, to large extent, reflected the difficulties of measuring small scale quantities. Indeed, the imperfect spatial resolution of most of hot wire probes, leads to an attenuation of the velocity derivatives. Hence, assessing LI from small scale measurements needs special vigilance. The correction procedure (2.1) is based on LI whereas the present study aims at testing its validity. We thus need to verify whether the correction induces a bias in the assessment of LI. To this purpose, we compare the raw and corrected values of the ratios K_1 to K_4.

Fig. 2(a) and 2(b) show the uncorrected and corrected (assigned with the subscript 'c') of K_1 to K_4 estimated in the wake of the five different generators and for three different turbulent Reynolds numbers. The corrected values are calculated by integrating (from 0 to infinity) the corresponding 'true' spectra, *i.e.* obtained from the measured spectra by using Eqs. (2.1) and (2.2). With respect to Eq. (2.2), K_1 and K_2 are slightly affected by the correction procedure, and their values indicate that LI is respected. Moreover, values of K_3 and K_4 are modified by the correction method. By comparing the values displayed in Fig. 2(a) to those plotted in 2(b), we remark that the differences are not significant at the two smallest Taylor micro-scale Reynolds numbers, for which $\Delta x \approx \Delta y \approx \Delta z \approx 3 - 4\eta$. This particular separation is a good compromise between scales at which the attenuation cannot be neglected and those scales affected by the interference between hot wires (Antonia *et al.* (1993), Zhu & Antonia (1995)). As a consequence, this



(a)



(b)

FIGURE 2. Velocity derivatives ratios K_1 to K_4, (a) uncorrected, (b) corrected. ○ CC, □ SqC, ♢ ScC, ▷ P, + SS. Increasing Reynolds number from bottom to top. —— represents the isotropic ratio of 1, ····· and - - - - indicate departures of 10 and 20% respectively.

particular choice leads to a precise estimation of the variances of velocity derivatives. In contrast, the effect of the correction procedure is clearly visible for the higher Reynolds number, for which $\Delta x \approx \Delta y \approx \Delta z \approx 6 - 7\eta$. This spatial resolution is not adequate. Hence, the measurements made at the highest Reynolds number do not allow very reliable conclusions with regard to the validity of LI at the smallest scales.

The ratios K_1 to K_4, after correction, indicate only a slight departure from 1. The maximum departure has the order of magnitude of 20%. The results do not change significantly with the Reynolds number and the type of generator.

	CC	SqC	ScC	P	SS
$S^3_{u,y}$	0.0086	0.0074	0.0905	0.0107	0.1010
$S^3_{u,z}$	-0.0013	-0.0146	-0.0150	-0.0550	-0.0153
$S^3_{v,x}$	-0.0038	-0.0156	-0.0119	0.0091	-0.0541
$S^3_{w,x}$	0.0004	0.0047	-0.0230	0.0062	-0.0063

TABLE 2. Values of the skewness of velocity derivatives $S^3_{u_\alpha,\beta}$ at approximatively the same $R_{\lambda_u} \approx 195$ for the five wake generators.

3.2. *Third-order moments*

The previous discussion focused on second-order statistics of velocity derivatives. We now turn our attention to third-order moments, in particular to the skewness of velocity derivatives $S^3_{u_\alpha,\beta}$:

$$S^3_{u_\alpha,\beta} = \overline{\left(\frac{\partial u_\alpha}{\partial \beta}\right)^3} \Bigg/ \left[\overline{\left(\frac{\partial u_\alpha}{\partial \beta}\right)^2}\right]^{3/2}. \tag{3.2}$$

The Greek subscripts α and β indicate a particular direction; there is no implicit summation on repeated Greek indices. Isotropy requires that $S^3_{u_\alpha,\beta} = 0$ if $\alpha \neq \beta$. As for second order statistics, the interpretation of third-order moments is hampered by uncertainties due to the spatial resolution of the vorticity probe. Burattini *et al.* (2008) proposed a spectral method to correct the attenuation of the skewness. This correction, which is also based on local isotropy, is well adapted to a single wire probe, but not to a X wire probe (or more complex probes). Further, the corrected data were tested against DNS data without accounting for the electronic noise contamination in the experiments. Therefore, we do not as yet dispose of an accurate procedure for correcting third-order moments. However, as shown by Antonia *et al.* (1993), a spatial resolution of $\approx 3\eta$ results in good agreement between measured and DNS estimates of $S^3_{u,y}$ in a turbulent channel flow. We can thus postulate that this particular separation represents an adequate compromise between the influence of electronic noise at too small separations and the attenuation associated with too large separations. Hence, since the spatial resolution is about $\approx 3-4\eta$ for the two smallest Taylor microscale Reynolds numbers, estimates of $S^3_{u_\alpha,\beta}$ were not corrected in the present study. $S^3_{u_\alpha,\beta}$ is computed by means of the cumulative probability density functions (Shen & Warhaft (2000)) in order to ensure statistical convergence. This method consists in calculating the probability density function ($\mathcal{P}$) of the quantity $X = \frac{\partial u_\alpha}{\partial \beta}$, followed by computing $\int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{P}(X) X^3 dX$. The correct convergence to zero of the integrand $\mathcal{P}(X)X^3dX$ for large values of X is a guaranty of the correct estimation of the third-order moment (Shen & Warhaft (2000)). Obviously, any other moment can be calculated with this method.

In presence of an organized motion, $S^3_{u_\alpha,\beta}$ is particularly small for each value of α, β (Table 2). The measured values are about one or two order of magnitude smaller than the one measured by Shen & Warhaft (2000) in presence of mean shear. These authors indicated that $S^3_{u,y}$ ranges between 0.8 and 0.2 for $100 < R_{\lambda_u} < 1000$ (note the decreasing value of this skewness factor, with increasing Reynolds number). In our study, where the local mean shear is zero, the largest values although only equal to about 0.1 - are found for $S^3_{u,y}$ in the SS and the ScC wake. As was observed for second-order statistics, the

influence of the type of generator and the Reynolds number (not reported) are not clearly discernible.

3.3. *Higher-order moments and dynamical tests*

As far as the higher order moments are concerned, the following quantities can be defined:

$$G_1 = \overline{\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}\right)^2} \Big/ 3\overline{\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)^2} \qquad G_2 = \overline{\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right)^2} \Big/ 3\overline{\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)^2}$$
$$G_3 = \overline{\frac{\partial u}{\partial x}\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2} \Big/ \frac{2}{3}\overline{\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^3} \qquad G_4 = \overline{\frac{\partial u}{\partial x}\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2} \Big/ \frac{2}{3}\overline{\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^3}. \tag{3.3}$$

If LI was valid, values of G_1 to G_4 must be equal to 1. Antonia *et al.* (1997) reported values of G_3 and G_4 in the wake of a circular cylinder.

Further, ratios D_1 and D_2 can be defined as follows:

$$D_1 = -\overline{\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^3} \Big/ 2\nu\overline{\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)^2} \qquad D_2 = -\overline{\frac{\partial u}{\partial x}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x}\right)^2} \Big/ \frac{2}{3}\nu\overline{\left(\frac{\partial^2 u_i}{\partial x^2}\right)^2} \tag{3.4}$$

They represent in essence the limiting forms when the separation goes to zero of the Kolmogorov (1941) equation and the extended Kolmogorov equation (Antonia *et al.* (1997)) respectively. D_1 and D_2 depict the balance between the production of dissipation (or enstrophy) through extension of the vortex lines by the turbulent rate of strain and the viscous loss of dissipation (or enstrophy). They are thus considered as dynamical tests of LI since they are derived from the Navier-Stokes equation (*e.g.* Tennekes & Lumley (1972)). For sufficiently high Reynolds numbers, other effects such as the decay, or production of dissipation through other (large-scale) effects are negligible, their values should be equal to 1 (Champagne (1978), Shah & Antonia (1986)). Whereas the eventual departures of G_1 to G_4 from the isotropic value of 1 represent tests of LI, D_1 and D_2 are equal to 1 if and only if both LI is respected and the Reynolds number of the flow under consideration is sufficiently large. Therefore, the dynamic tests are particularly delicate, since their eventual departures from 1 may be associated with either LI, or Finite Reynolds Numbers (FRN) effects, or with both of these effects. The critical Reynolds number above which large-scale effects are negligible presumably depends on the flow, and of the particular region of the flow.

If the streamwise inhomogeneity is accounted for, in a locally isotropic decaying flow such as grid turbulence, the zero separation limiting form of the scale-by-scale energy budget equations leads to (Danaila *et al.* (2003), Antonia *et al.* (2000)):

$$-\frac{1}{35\nu}\overline{U}\frac{\partial \overline{\epsilon}}{\partial x} = \overline{\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^3} + 2\nu\overline{\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)^2} \tag{3.5}$$

$$-\frac{1}{15\nu}\overline{U}\frac{\partial \overline{\epsilon}}{\partial x} = \overline{\frac{\partial u}{\partial x}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x}\right)^2} + \frac{2}{3}\nu\overline{\left(\frac{\partial^2 u_i}{\partial x^2}\right)^2} \tag{3.6}$$

Therefore, D_1 and D_2 are strictly equal to 1 if both Eqs. (3.3) hold and if the decay of the mean dissipation rate is negligible in comparison with the two other terms. We finally note that the most elegant manner of defining dynamical tests of LI (similar to D_1 and D_2) at FRN would be taking into account the decay of the mean energy dissipation rate and eventually the production of the dissipation through the mean or fluctuating strain. This perspective is left for the future.

However, the relatively large Reynolds number of the flow under investigation (Table

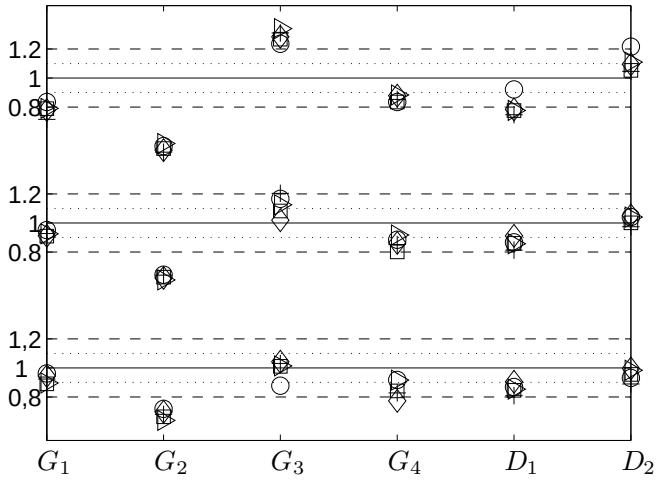


FIGURE 3. Velocity derivatives ratios G_1, G_2, G_3, G_4, D_1, D_2. ○ CC, □ SqC, ♢ ScC, ▷ P, + SS. Increasing Reynolds number from bottom to top. —— represents the isotropic ratio of 1, ····· and - - - - represent a departure of 10 and 20% respectively.

1) makes us thinking that FRN might be negligible and we continue considering D_1 and D_2 as adequate tests of LI.

In Fig. 3, are displayed the ratios G_1 to G_4, D_1 and D_2 for each type of generator and for the three turbulent Reynolds numbers investigated here. To calculate these ratios, the cumulative method (Shen & Warhaft (2000)) was also used. The term $\overline{\left(\frac{\partial^2 u_i}{\partial x^2}\right)^2}$ was alternatively calculated by using a spectral method (*i.e.* integrating the spectrum multiplied by k_x^4 see also Zhou *et al.* (2000) for details about the method), with essentially same results.

Values of G_1 and G_4 are close to the isotropic values. They are not strongly affected by the type of generator and the turbulent Reynolds number. In contrast, a strong departure from LI is found for G_2, to within 30 to 50% which increases for the largest Reynolds number, for which, as already mentioned, experimental errors tend to be accentuated. This trend is also discernible for G_3 for which the departure from LI increases when R_{λ_u} is enhanced (but which is, however, closer to LI than G_2).

Axisymmetry hypothesis around the x axis would have led to the equality $G_1 = G_2$ and $G_3 = G_4$. Or, we note systematically that not only local axisymmetry is not well respected, but $G_1 > G_2$ and $G_3 > G_4$. This behaviour is most likely attributable to the fact that energy is injected in the system by the fluctuating velocity v, followed by u (which is along the mean flow direction) and lastly redistributed (by the pressure-velocity correlations) to the fluctuating velocity w. Therefore, the production of dissipation through v (term G_3) must be larger than production of dissipation through w (term G_4), inequality which is well respected whatever the investigated Reynolds numbers. Similarly, $G_1 > G_2$ because the dissipation of the dissipation is larger for v than for w, thus illustrating a more intense activity along the vertical direction y. All these are speculative and more investigations are needed in order to infer a clear conclusion.

The ratios D_1 and D_2 are close to the isotropic and asymptotic value of 1, thus validating LI at these large enough Reynolds numbers. Note that comparable values of D_1 at

similar Reynolds numbers were obtained by *e.g.* Champagne (1978) (Table 3, for cylinder wake flow, note that this author indicated values of $1/D_1$).

To conclude, different tests focused on the dissipative scales show that isotropy-based relations between the second-order statistics of the first-order velocity derivatives are verified with a confidence level of about 20%. The skewness of velocity derivatives is very small compared to that obtained in the presence of mean shear. The second-order moments of the second-order velocity derivatives show little departures from LI. These points argue in favour of LI which seems to be a reasonable assumption at the smallest scales, independently of the obstacle type and the Reynolds number.

4. Anisotropy of inertial and large scales

We now turn our attention to investigating LI at scales larger than the dissipative ones, in a range of scales which might be only loosely defined as 'inertial', but in reality can only qualify to belong to a 'restricted scaling range', RSR. The RSR is defined as the range of scales where a scaling law holds. As noted in AZR, defining a clear RSR in this flow is a challenge. Here we compare measured second and third-order velocity structure functions with the corresponding isotropic forms.

4.1. *Isotropic relations between second- and third-order structure functions*

Following *e.g.* Monin & Yaglom (2007), the well-known isotropic relation between second-order structure functions of the longitudinal velocity components and those of the transverse velocity components is given by

$$\overline{(\Delta u_\perp)^2}|_{iso} = \left(1 + \frac{r}{2}\frac{\partial}{\partial r}\right)\overline{(\Delta u)^2}, \tag{4.1}$$

where r is the separation between the point x and the point $x^+ = x + r$ and $\overline{(\Delta u_\alpha)^2} = \overline{\left(u_\alpha\left(x+r\right) - u_\alpha\left(x\right)\right)^2}$ (no summation over Greek double indices). The separation r is inferred from Taylor's hypothesis. Therefore r is considered along the direction of the mean flow. The perpendicular component is either $u_\perp = v$ or w. The equivalent relation in the spectral space is

$$\phi_{u_\perp}(k_x) = \frac{1}{2}\left(1 - k_x\frac{\partial}{\partial k_x}\right)\phi_u, \tag{4.2}$$

where ϕ_u is the power spectral density of u and k_x the streamwise wave number.

Further, it is straightforward to get an 'isotropic' expression for $\overline{(\Delta q)^2} = \overline{\Delta u_i \Delta u_i}$ (the summation convention applies to Latin indices), *viz.*

$$\overline{(\Delta q)^2}|_{iso} = \overline{(\Delta u)^2} + 2\overline{(\Delta u_\perp)^2}|_{iso}. \tag{4.3}$$

By applying the limit as r goes to zero of (4.1) and (4.3) and since

$$\lim_{r\to 0}\left(\frac{\overline{(\Delta u_\perp)^2}|_{iso}}{r^2}\right) = 2\frac{\overline{(\Delta u)^2}}{r^2} = 2\overline{\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2}, \tag{4.4}$$

it can be readily shown that

$$\lim_{r\to 0}\left(\overline{(\Delta u_\perp)^2}|_{iso}\Big/\,\overline{(\Delta u_\perp)^2}\right) = 2\overline{\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2}\Bigg/\overline{\left(\frac{\partial u_\perp}{\partial x}\right)^2} = K_1 \quad \text{if} \quad u_\perp = v$$
$$= K_2 \quad \text{if} \quad u_\perp = w \tag{4.5}$$

whereas

$$\lim_{r\to 0}\left(\overline{(\Delta q)^2}\Big/\overline{(\Delta q)^2}|_{iso}\right)=\frac{1}{5}\left(1+2K_1+2K_2\right). \tag{4.6}$$

The individual isotropic ratios K_1 and K_2 are therefore retrieved in the limit of small separation.

The limits at the largest scales of (4.1) and of (4.3) yield

$$\lim_{r\to\infty}\left(\overline{(\Delta u_\perp)^2}|_{iso}\Big/\overline{(\Delta u_\perp)^2}\right)=\overline{u^2}\Big/\overline{u_\perp^2}; \tag{4.7}$$

$$\lim_{r\to\infty}\left(\overline{(\Delta q)^2}|_{iso}\Big/\overline{(\Delta q)^2}\right)=3\overline{u^2}\Big/\overline{q^2}. \tag{4.8}$$

This is consistent with the 'global' isotropic ratios $\overline{u^2}/\overline{u_\perp^2}$ and $3\overline{u^2}/\overline{q^2}$ ($\overline{q^2}=\overline{u_iu_i}$ is twice the turbulent kinetic energy). Hence, the isotropic relation between second-order structure functions of different normal components, but also of their sum, allows us to assess the departure from LI for each separation r, from the smallest to the largest.

As discussed by AZR and Shen & Warhaft (2000), isotropy also requires

$$\overline{(\Delta u_\perp)^3}=0 \tag{4.9}$$

for each separation r. The limit at $r\to 0$ of the normalised third-order moment is the skewness of velocity derivatives, *viz.*

$$\lim_{r\to 0}\overline{(\Delta u_\perp)^3}\Big/\left[\overline{(\Delta u_\perp)^2}\right]^{3/2}=\overline{\left(\frac{\partial u_\perp}{\partial x}\right)^3}\Bigg/\left[\overline{\left(\frac{\partial u_\perp}{\partial x}\right)^2}\right]^{3/2}=S^3_{u_\perp,x}. \tag{4.10}$$

In this study, we chose to compare $\overline{(\Delta u_\perp)^3}(\bar{\epsilon}r)^{-1}$ to $\overline{(\Delta u)^3}(\bar{\epsilon}r)^{-1}$, which should be smaller or equal to 4/5 this latter value applying to very large Reynolds numbers (Kolmogorov (1941)).

The isotropic relation between third-order structure functions is (Monin & Yaglom (2007)):

$$\overline{\Delta u(\Delta u_\perp)^2}|_{iso}=\frac{1}{6}\frac{\partial}{\partial r}r\overline{(\Delta u)^3}, \tag{4.11}$$

which leads to:

$$\overline{\Delta u(\Delta q)^2}|_{iso}=\overline{(\Delta u)^3}+2\overline{\Delta u(\Delta u_\perp)^2}|_{iso}. \tag{4.12}$$

Since at the smallest scales, $\frac{\overline{(\Delta u)^3}}{r^3}\to\overline{\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^3}$ and $\frac{\overline{\Delta u(\Delta u_\perp)^2}|_{iso}}{r^3}\to\frac{2}{3r^3}\overline{(\Delta u)^3}$, the small-scale limit of Eq. (4.11) is fully consistent with Eq. (3.3):

$$\begin{aligned}\lim_{r\to 0}\left(\overline{\Delta u(\Delta u_\perp)^2}\Big/\overline{\Delta u(\Delta u_\perp)^2}|_{iso}\right)&=\overline{\frac{\partial u}{\partial x}\left(\frac{\partial u_\perp}{\partial x}\right)^2}\Bigg/\frac{2}{3}\overline{\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^3}\\&=G_3\quad\text{if}\quad u_\perp=v\\&=G_4\quad\text{if}\quad u_\perp=w.\end{aligned} \tag{4.13}$$

Eq.(4.1) has often been used to check LI in several studies (Danaila *et al.* (2001), Gotoh *et al.* (2002), Lavoie *et al.* (2005)). Its equivalent in the spectral space, Eq. (4.2), has also been widely tested by *e.g.* Champagne *et al.* (1970), Mestayer (1982), Kim & Antonia (1993), Saddoughi & Veeravalli (1994). However, Eq. (4.11) received much less attention (Gotoh *et al.* (2002)) although its limiting form as r goes to zero (*e.g.* Champagne (1978)) has been tested in a few flows (*e.g.* Antonia *et al.* (1997)).

A worthwhile exercise would be to test LI using higher-order moments than considered here and thus extend our analysis to fourth-order, or higher order statistics. At present, we are limited to second- and third-order structure functions since fourth-order isotropic relations are not yet available. Phan-Thien & Antonia (1994) tackled this problem and Ould-Rouis *et al.* (1996) empirically extended the results to structure functions. However, there are doubts concerning the validity of their results. Indeed, Phan-Thien & Antonia (1994) characterized the *8-th* order moment tensor by means of a single invariant whereas Siggia (1981) suggested that at least four invariants are needed. Hierro & Dopazo (2003) obtained a more compact expression (for the *8-th* order moment tensor) than - though in full agreement with - that of Siggia (1981); they also concluded that their expression was more accurate than the simpler expression of Phan-Thien & Antonia (1994). Nevertheless, Hierro and Dopazo's result needs to be fully tested, especially in the light of the limited experimental evidence in grid turbulence (Zhou & Antonia (2000)) that the four invariants seem to be related.

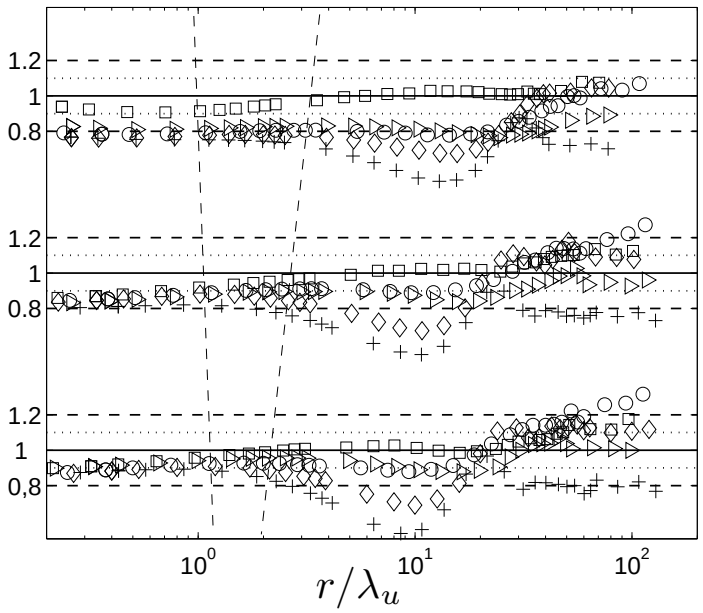
4.2. *Results on the wake centreline*

Fig. 4(a) and 4(b) represent the ratios between the calculated and measured second-order structure function of the velocity component v and w respectively. The previously calculated values of K_1 and K_2 are recovered at the smallest scales, thus validating once again the calculated values of the derivative statistics. For each type of initial conditions, the second-order structure function is almost independent of the Reynolds number (also noted by AZR). The departure from LI appears to be smaller in the RSR (with an amplitude of about 10 -15%) and slightly increases as r decreases though the dissipative range. Note however that for small scales, this ratio is calculated by dividing small values of second-order structure functions, this may be a possible source of errors.

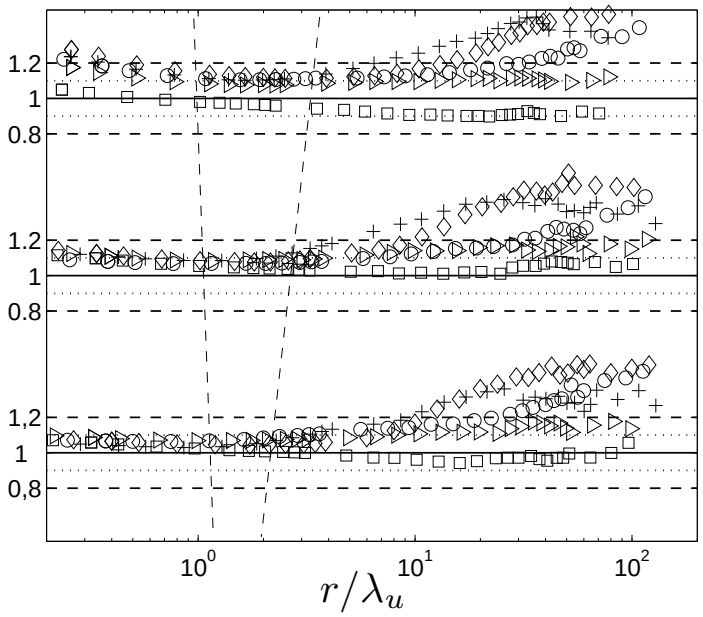
Note also that $\overline{(\Delta v)^2} > \overline{(\Delta v)^2}|_{iso}$ and $\overline{(\Delta w)^2} < \overline{(\Delta w)^2}|_{iso}$ for most of the separations. This trend is certainly interesting in the context of the compensations that occur at the level of the total kinetic energy, which is much closer to the LI than each individual component. For larger separations, the departure from LI is maximum at $r \approx 8 - 10\lambda_u$ and is more noticeable on v than w. At this particular separation ($r \approx 8 - 10\lambda_u$), the SS wake exhibits the largest departure from LI followed by the ScC, CC, P and finally the SqC wake. Therefore, the quasi-universal behaviour observed for the dissipative scales does not extend to the largest scales. This reflects once again the influence of different types of large-scale organisation which depend on the type of wake generator. This point will be further developed in the next section.

Third-order structure functions of the velocity components v and w normalized by $\bar{\epsilon}r$ are displayed in Fig. 5(a) and 5(b). The very small values when $r \to 0$ are consistent with the estimations of the Skewness reported in Section 3. For any type of generator, $\overline{(\Delta w)^3}$ is almost zero, whatever the separation r. This holds also for $\overline{(\Delta v)^3}$, with the exception of the SS wake for which $\overline{(\Delta v)^3}$deviates strongly from isotropy and has a maximum departure at $r \approx 3 - 8\lambda_u$. Interestingly, the maximum is comparable to 4/5 and actually exceeds it at the two largest Reynolds numbers.

Ratios between measured and calculated third-order structure functions are plotted in Fig. 6. In contrast with the second-order structure functions for which the ratio $\overline{(\Delta u_\perp)^2}|_{iso}/\overline{(\Delta u_\perp)^2}$ was displayed, here we represent $\overline{\Delta u(\Delta u_\perp)^2}/\overline{\Delta u(\Delta u_\perp)^2}|_{iso}$. This choice is motivated by the fact that factors G_3 and G_4 are explicitly recovered in the limit of small separations. Whereas the departure from the isotropic prediction is approximatively constant (and sufficiently small) within the dissipative range, a strong departure, again more noticeable on v than w, is observed for scales situated within the RSR. For larger separations, the deviation is much bigger than that reported for second-

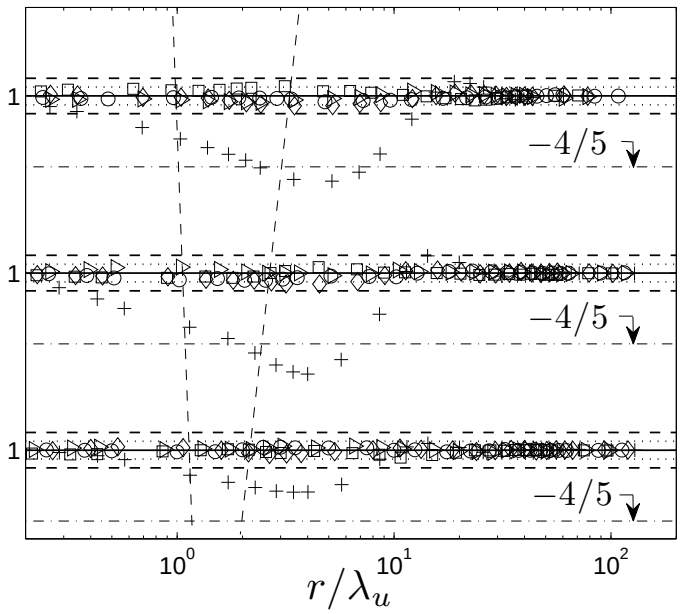


(a)

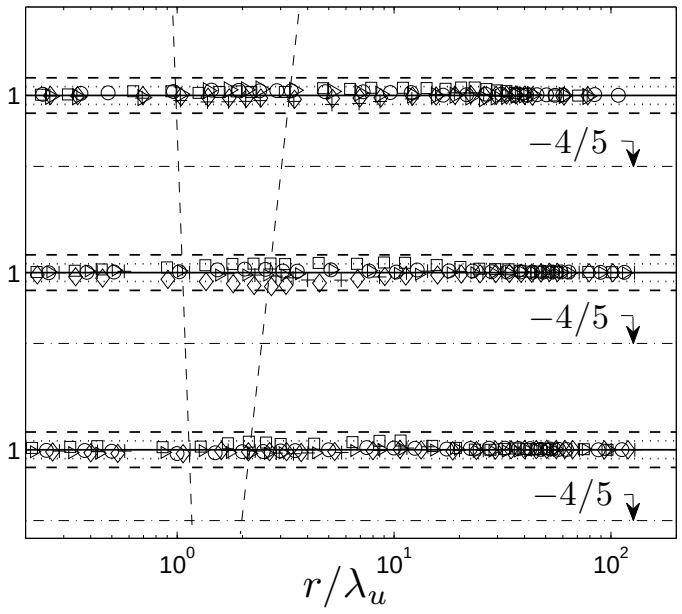


(b)

FIGURE 4. (a), (b) Ratios between the isotropic predictions and measured second-order structure functions. In each figure, the increasing Reynolds number is displayed from bottom to top. (a) $\overline{(\Delta v)^2}|_{iso}/\overline{(\Delta v)^2}$. (b) $\overline{(\Delta w)^2}|_{iso}/\overline{(\Delta w)^2}$. ○ CC, □ SqC, ◇ ScC, ▷ P, + SS. —— represents the isotropic ratio of 1, ····· and - - - - represent a departure of 10 and 20% respectively. Vertical broken lines correspond approximatively to the lower and upper limits of the restricted scaling range; they diverge upwards as the Reynolds number increases, reflecting the increase in the extent of the RSR with the Reynolds number.



(a)



(b)

FIGURE 5. (a) Effect of the organized motion on $\overline{(\Delta u_\perp)^3}\bar{\epsilon}^{-1}r^{-1}$. (a) $u_\perp = v$ Increasing Reynolds number is displayed from bottom to top. (b) $u_\perp = w$ increasing Reynolds number is displayed from bottom to top (offset 0, 2 and 4 with increasing R_{λ_u}). ○ CC, □ SqC, ♢ ScC, ▷ P, + SS. —— represents the isotropic ratio of 1, ····· and - - - - represent a departure of 10 and 20% respectively. The inclined vertical broken lines delineate approximately the extent of the restricted scaling range.

order structure functions, and it continuously grows for larger and larger scales. For that reason, values beyond $r \approx 10\lambda_u$ are not shown. The departure is largest for the SS wake and smaller in order of importance for the ScC, CC, P, and the SqC wakes.

Differences between the behaviour of v and w, irrespectively of the criterion, are attributable once again to the different way energy is injected in the system: here, fluctuations of v are mostly created through instabilities associated with the Bénard-Von Kármán street. Further downstream, pressure-velocity correlations act to redistribute the energy, which is continuously reinjected in v by the persistent coherent motion, to the other velocity components. Therefore, a detailed investigation of statistics associated with each individual velocity component may *a priori* highlight energy exchanges among different velocity components and hence possible imbalances between them.

Whereas the evaluation of statistics associated with individual velocity components may result in very tough LI tests due to the previously mentioned imbalances, we continue our investigation with the total kinetic energy and its transport at a given scale.

Figure 7 represents the isotropic expressions relating second- and third-order structure functions applied to the scalar quantity $\overline{\Delta q^2}$ and its non linear transfer $\overline{\Delta u(\Delta q)^2}$. It is noteworthy that the departure from LI, typically less than 5%, is smaller than that of the individual velocity components v or w. This underlines the compensation which arises from the inequalities $\overline{\Delta v^2} > \overline{\Delta v^2}|_{iso}$ and $\overline{\Delta w^2} < \overline{\Delta w^2}|_{iso}$. In the limit of small separations, $\frac{1}{5}\left(1 + K_1 + K_2\right) \rightarrow 1$ whereas $K_1 \neq K_2 \neq 1$. The use of the isotropic surrogate $\overline{\epsilon}_{iso}$ is thus justified, even though individual components can exhibit departures from isotropy. Deviations from LI are maximum at $r \approx 10\lambda_u$ for both $\overline{(\Delta q)^2}$ and $\overline{\Delta u(\Delta q)^2}$, as is the case for the individual velocity component v and w. Moreover, the SS wake exhibits once again the strongest anisotropy followed by the ScC, CC, P and the SqC wake.

We conclude this section by summarising the main results obtained by applying several tests of isotropy to second and third-order moments of velocity increments:

• for the smallest scales, *i.e.* in the dissipative range (scales smaller than the Taylor microscale), LI is a good assumption on the wake centerline. For these scales, there is no clear dependence on initial conditions or on the Reynolds number.

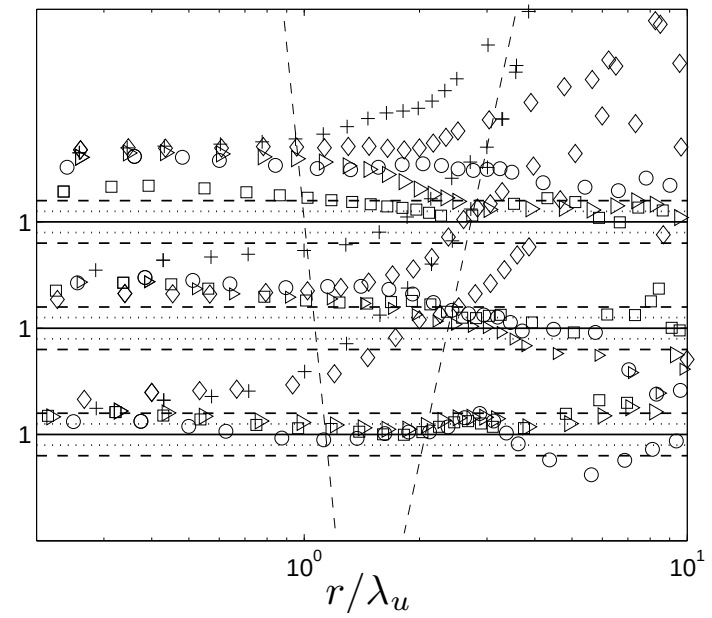
• For scales situated in a range loosely identified with the RSR, LI is a reasonable approximation, although there is some dependence on initial conditions and a slight dependence on the Reynolds number. These statements hold for scales smaller than L_a (or 'anisotropy' scale), which lies between 2 and 10 Taylor microscales, depending mainly on the particular test that is used and the Reynolds number.

• Departures from LI are noted for scales larger than L_a, mainly for the transverse velocity v. The observed departures from LI at scales larger than L_a must be correlated with, as noted in previous studies, the persisting footprints of the organized motion on v (*e.g.* Hayakawa & Hussain (1989), Matsumura & Antonia (1993))

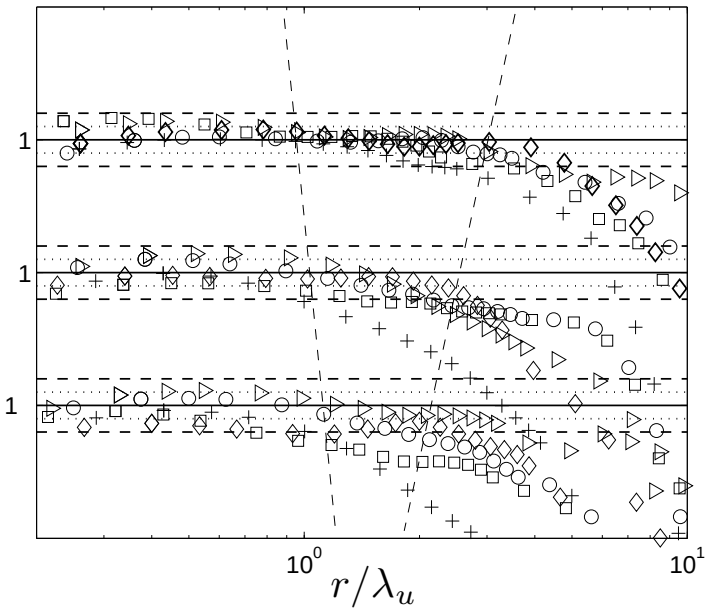
We have thus shown that LI is a reasonable approximation for the smallest scales, and is most closely satisfied by the square cylinder wake. The least isotropic wake is that generated by the screen strip, for which vortex merging leads to the production of a very persistent coherent motion. For scales smaller than L_a, which satisfy LI reasonably, there is no perceptible dependence on the Reynolds number, at least for this range of Reynolds numbers.

5. Phenomenological interpretation of departures from LI

In this section, we aim to provide a phenomenological interpretation of the scale L_a, which relates closely to the influence of the coherent strain, at which LI is no longer

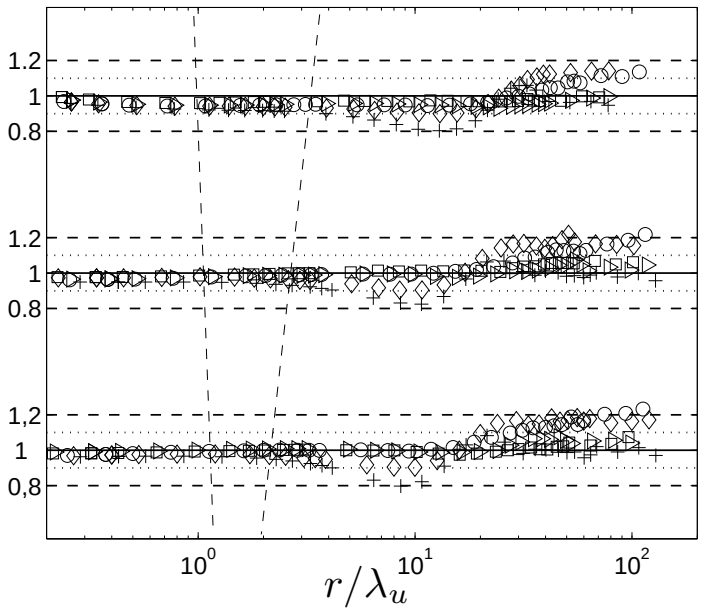


(a)

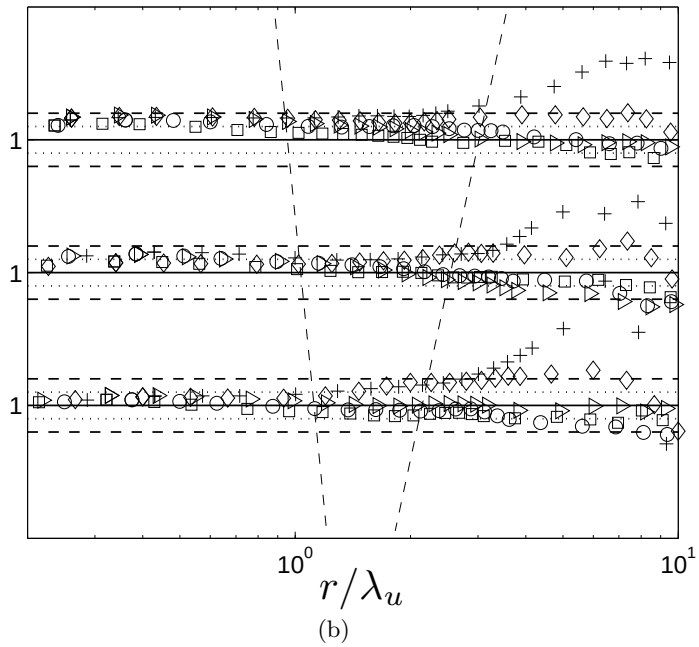


(b)

FIGURE 6. (a), (b) Ratio between measured and calculated third-order structure functions. Increasing Reynolds number from bottom to top. (a) $\overline{\Delta u(\Delta v)^2}/\overline{\Delta u(\Delta v)^2}|_{iso}$. (b) $\overline{\Delta u(\Delta w)^2}/\overline{\Delta u(\Delta w)^2}|_{iso}$. ○ CC, □ SqC, ◇ ScC, ▷ P, + SS. —— represents the isotropic ratio of 1, ····· and - - - - represent a departure of 10 and 20% respectively. The inclined vertical broken lines delineate approximately the extent of the restricted scaling range.



(a)



(b)

FIGURE 7. (a) Ratio between calculated and measured second order structure functions $\overline{(\Delta q)^2}|_{iso}/\overline{(\Delta q)^2}$. Increasing Reynolds number is displayed from bottom to top. (b) Ratio between measured and calculated third order structure functions $\overline{\Delta u(\Delta q)^2}/\overline{\Delta u(\Delta q)^2}|_{iso}$. Increasing Reynolds number from bottom to top. ○ CC, □ SqC, ◇ ScC, ▷ P, + SS. —— represents the isotropic ratio of 1, ····· and - - - - represent a departure of 10 and 20% respectively. The upwardly divergent broken lines delineate the approximate extent of the restricted scaling range.

satisfied. The key parameter here is the fluctuating coherent strain rate and its associated characteristic time.

Therefore, we need to explain the previous experimental results by using simple, phenomenological, arguments. We try to determine the magnitude of a characteristic scale below which turbulence may be isotropic and above which it is anisotropic. In particular, we address the following questions: Can we reasonably predict the scale L_a at which the departure from LI is first observed? Does this prediction depend on the particular test or criterion that is chosen? Is that scale situated in the dissipative range, or does it lie within the RSR or perhaps even beyond the RSR?

We explore if isotropy is valid at a given scale, by using several criteria, adapted to the investigated scales: large, intermediate and viscous. The methodology chosen in order to answer these questions is based on calculating the characteristic times:

• of the coherent motion, present at rather large scales. In our case, the mean shear is absent on the centerline, so that the coherent motion (and the associated strain, $\widetilde{S}$, to be defined later in this paper) is the only phenomenon which may induce anisotropy. Therefore, the characteristic time of the coherent motion is $\widetilde{S}^{-1}$;

• of the structures present at any other scale, $\tau(r)$. This other scale can be large, in which case large-scale statistics can relate to both turbulent and coherent motions. $\tau(r)$ can also relate to inertial or small-scales, mostly characterized by random fluctuations.

Isotropy at some scale r is mathematically represented by the following inequality: the ratio $\mathcal{R}$ say of the characteristic time $\tau(r)$ at a scale yet to be specified, to that of the coherent motion $\widetilde{S}^{-1}$ should be much smaller than 1.

Further, in order to distinguish at an arbitrary scale the contribution of coherent motion with respect to that of turbulent motion, the next step is to statistically separate coherent and turbulent motions, and we need to adopt a different viewpoint. Although all previous investigations have dealt with the total velocity field, we recall that fluctuating, periodic contributions are present in the flow, notably for the v component.

Therefore, the velocity field is decomposed according to $u_\alpha = \tilde{u}_\alpha + u'_\alpha$, where $\tilde{u}_\alpha$ denotes the periodic contribution associated with the coherent motion and u'_α is the random/turbulent fluctuation. One way to calculate $\tilde{u}_\alpha$ is (Reynolds & Hussain (1972)) to perform phase-averaging over the period of the coherent motion. Phase-averages will be denoted $\langle . \rangle$, whereas superscripts $.'$ and $\tilde{.}$ refer to random and coherent fluctuations respectively. In this new framework, phase-averaged quantities are ascribed to the coherent motion which is generally associated with large scales.

In subsection 5.1, we investigate the isotropy mainly at large scales, by calculating the ratio of the characteristic time of the coherent strain and that of the total cascade. Subsection 5.2 is dedicated to investigating local isotropy for intermediate scales, associated with the restricted scaling range. Subsection 5.3 is devoted to LI within the viscous range.

5.1. *Large-scale isotropy and time-scale of the coherent strain*

The starting point is the study of Durbin & Speziale (1991) in an uniformly sheared flow. In order to study LI, they derived a budget equation for each component of the mean energy dissipation rate, which accounted for the mean strain. They demonstrated that a criterion for LI must be $\overline{S}\overline{q^2}/\overline{\epsilon} \ll 1$, where $\overline{S}$ is the absolute value of the strain rate $\overline{S} = \left|\overline{S}_{ij}\right| = \frac{1}{2}\left|\left(\frac{\partial \overline{U}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \overline{U}_j}{\partial x_i}\right)\right|$ and $\overline{q^2}/\overline{\epsilon}$, the ratio between the total kinetic energy and the mean energy dissipation rate, is the characteristic time of the (total) cascade. Therefore, Durbin and Speziale's criterion simply signifies that the ratio between the total cascade time and the characteristic time of the strain should be much smaller than 1. We should

mention here that, in our opinion, this criterion deals with the notion of 'isotropy' and not necessarily with 'local isotropy', since no particular scale is involved.

Antonia & Kim (1994) stated that a disadvantage of using $\overline{\widetilde{S}q^2}/\overline{\epsilon}$ is that it is zero at the wall (see their Fig. 8) where $\overline{S}$ is the largest. Moreover, Gualtieri *et al.* (2002) suggested the same idea in their relation (14) which expresses $\overline{\widetilde{S}q^2}/\overline{\epsilon}$ as a function of two large scales, hence with no dependence on any small scale. Therefore, this criterion is not useful for testing local isotropy in highly sheared flows, and in particular for the flow under consideration. We will then adapt it to our case, but specifically for investigating local isotropy.

By analogy, we presume that the coherent strain rate $\widetilde{S}$ associated with the organized motion must play a significant role. This can be emphasized by deriving a transport equation for the energy dissipation, in which the organized motion is accounted for. We introduce a ratio between the eddy-turnover time $\overline{q^2}/\overline{\epsilon}$ and $1/\widetilde{S}$, the inverse of the coherent strain rate. Following the lines of Durbin & Speziale (1991), one can therefore argue that local isotropy should be a plausible hypothesis in the case of the coherent strain time-scale very large compared to the integral time scale. In other words:

$$\widetilde{S}\overline{q^2}/\overline{\epsilon} \ll 1 \tag{5.1}$$

where $\widetilde{S} = \overline{\left|\widetilde{S}_{ij}\right|}$ is the mean value of the modulus of $\widetilde{S}_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial \widetilde{u}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \widetilde{u}_j}{\partial x_i}\right)$.

We now present the experimental results obtained in the intermediate field, for the investigated Reynolds numbers. On the wake centreline, the transverse velocity component v constitutes the most important contribution to the mean rate of coherent strain, *i.e.* $\widetilde{S} = \overline{\left|\frac{\partial \widetilde{v}}{\partial x}\right|}$ (here, the spatial derivative is calculated from time/phase derivative by using Taylor's hypothesis). To calculate phase averaged statistics, the transverse component v is filtered at a frequency corresponding to the local peak in the v spectrum. Then, the Hilbert transform h of the filtered signal v_f is invoked, and the phase is obtained by $\phi = \tan^{-1}(h/v_f)$. This method was proposed by Perrin *et al.* (2007). Finally, the phase is divided into 32 segments and phase averaged statistics are calculated for each class. Since we dispose of about 750 integral time-scales for each segment, the convergence of statistics was found to be satisfactory.

In Fig. 8, we plot the values of $\widetilde{S}\overline{q^2}/\overline{\epsilon}$ for each generator. For each wake, the condition $\widetilde{S}\overline{q^2}/\overline{\epsilon} \ll 1$ is violated, which is consistent with the persisting large-scale anisotropy. The SS wake is the most influenced by the rate of coherent strain since $\widetilde{S}\overline{q^2}/\overline{\epsilon} \approx 4.5$ followed by the ScC wake ($\widetilde{S}\overline{q^2}/\overline{\epsilon} \approx 3.2$), the CC wake ($\widetilde{S}\overline{q^2}/\overline{\epsilon} \approx 2.5$), the P wake ($\widetilde{S}\overline{q^2}/\overline{\epsilon} \approx 1.5$) and the SqC wake ($\widetilde{S}\overline{q^2}/\overline{\epsilon} \approx 0.9$).

In conclusion, by comparing the characteristic time of the coherent motion strain rate with that associated with the total turbulence cascade, we have shown that at the centerline of the wake, where the mean strain rate is equal to zero, global isotropy is unlikely to hold.

We next address the influence of the Reynolds number via dimensional arguments which assume that the most appropriate scales are U_d (the velocity defect) and $y_{0.5}$ (the half-width of the mean velocity profile), even though these similarity scales apply strictly to the far field. Therefore,

$$\begin{aligned} \widetilde{S} &\propto U_d/y_{0.5}; \\ \overline{q^2} &\propto U_d^2; \\ \overline{\epsilon} &\propto U_d^3/y_{0.5}. \end{aligned} \tag{5.2}$$

Further, by considering that at this location in the flow $U_d \propto U_0$ and $y_{0.5} \propto d$, and pro-

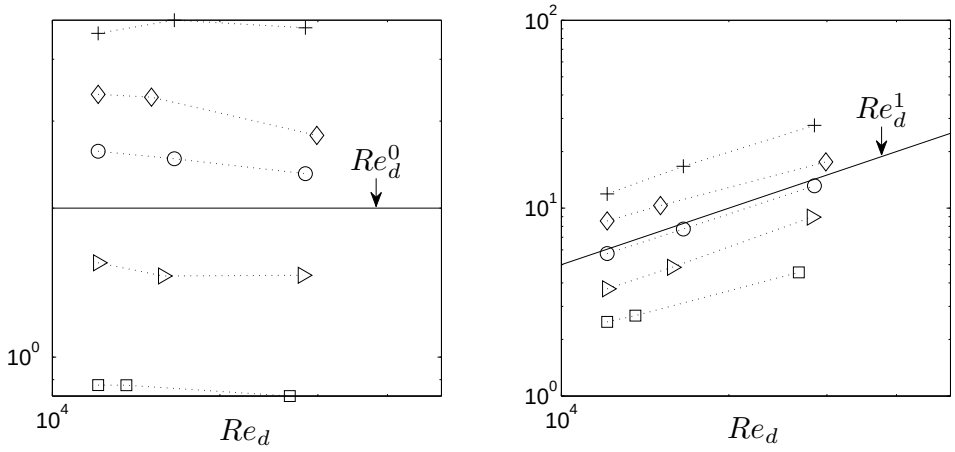


FIGURE 8. (a) $\widetilde{Sq^2}/\overline{\epsilon}$, —— : Re_d^0. (b) Norm of the coherent shear $\widetilde{S}$ for various Reynolds numbers, —— : Re_d^1. ○ CC, □ SqC, ◇ ScC, ▷ P, + SS.

vided the proportionality constants do not vary discernibly with the Reynolds numbers, their ratio leads to

$$\widetilde{Sq^2}/\overline{\epsilon} \propto Re_d^0, \tag{5.3}$$

where Re_d is the Reynolds number based on U_0 and d. This indicates that the ratio $\widetilde{Sq^2}/\overline{\epsilon}$ is constant with respect to Re_d. The effect of the coherent shear is expected to be significant over the turbulent field, independently on the Reynolds number. Both Fig. 8(a) and 8(b) suggest that the dimensional analysis which predicts the evolution of $\widetilde{Sq^2}/\overline{\epsilon}$ and of $\widetilde{S}$ with the Reynolds number is well supported by the experimental data. At this stage, it would appear that, in the presence of an anisotropic organized motion, the attainment of an asymptotic isotropic state for large scales and large Reynolds numbers is questionable. This remark is not unexpected.

Relation (5.1) which does not take into account any turbulence scale, can be easily extended to allow isotropy to be tested at any scale r and can potentially become a criterion for local isotropy. This is attempted in section 5.2.

5.2. *Local Isotropy in the inertial range*

For intermediate scales which may be associated with the inertial range, the local isotropy criterion translates to $\mathcal{R}(r) = \frac{\tau(r)}{\widetilde{S}} \ll 1$, or the equivalent expression in spectral space, *viz.* $\mathcal{R}(k) = \frac{\tau(k)}{\widetilde{S}} \ll 1$. In both spaces, different expressions of the energy transfer characteristic time may be used, such as that suggested by Batchelor (1959), Kraichnan (1971) and Danaila & Antonia (2009) in the spectral space $\tau(k) = \left(\int_0^k p^2 E(p)dp\right)^{-1/2}$. This characteristic time is dimensionally consistent with that proposed by Onsager (1949) $\tau(k) = \left(k^3 E(k)\right)^{-1/2}$. Injecting a particular expression of the 3D energy spectrum, *e.g.* $E(k) \propto \overline{\epsilon}^{2/3} k^{-5/3}$ in the criterion $\mathcal{R}(k) = k^3 \overline{\epsilon}^{2/3} k^{-5/3} / \widetilde{S}$, leads to the determination of a wavenumber k beyond which LI in the inertial range (or RSR, for finite Reynolds numbers) is an adequate approximation. This wavenumber is given by $k \gg k_{\widetilde{S}} = \sqrt{\widetilde{S}^3/\overline{\epsilon}}$.

This result is fully consistent with the characteristic strain-rate length-scale proposed

by Corrsin (1958), for the purpose of assessing LI in the inertial range, *i.e.*

$$L_{\overline{S}} = \sqrt{\overline{\epsilon}/\,\overline{S}^3}. \tag{5.4}$$

Obviously, the same methodology can be applied in real space, in which the characteristic time at an arbitrary scale r may be written as proposed by Danaila *et al.* (2012).

We briefly recall here Casciola *et al.* (2003)'s corresponding arguments in physical space. In particular, these authors provided the physical interpretation of $L_{\overline{S}}$, emphasizing that $L_{\overline{S}}$ represents the cross-over between the contribution of the production term due to the mean shear and non linear transfer contribution of the generalized spherically averaged scale-by-scale kinetic energy budget. In presence of an organized motion, the production term at each scale can be defined by (Thiesset *et al.* (2011))

$$P_{ro}(r) = 2\overline{\left\langle \Delta u_i' \Delta u_j' \right\rangle \frac{\partial \widetilde{u}_i}{\partial x_j}}. \tag{5.5}$$

In homogeneous turbulence, the limiting value at the largest scales of (5.5) is twice the production term in the one-point kinetic energy budget(Reynolds & Hussain (1972))

$$P_{ro} = \overline{\left\langle u_i' u_j' \right\rangle \frac{\partial \widetilde{u}_i}{\partial x_j}}. \tag{5.6}$$

By considering classical scaling laws such as $\left\langle \Delta u_i' \Delta u_j' \right\rangle \propto \overline{\epsilon}^{2/3} r^{2/3}$, and $\overline{\Delta u' \Delta q'^2} \propto \overline{\epsilon} r$, a characteristic length scale of the form:

$$L_{\widetilde{S}} \propto \sqrt{\overline{\epsilon}/\,\widetilde{S}^3}, \tag{5.7}$$

can be derived. $L_{\widetilde{S}}$ represents the separation at which the kinetic energy production due to the coherent strain and the non-linear transfer are comparable. Therefore, a characteristic length scale related to the coherent strain is derived and its formulation is analogous to the length-scale proposed by Corrsin (1958). Note finally that we have illustrated these arguments by using scaling laws such as '$-5/3$' for spectra or '$2/3$' for structure functions, but finite Reynolds numbers effects and therefore departures from these asymptotic values may be taken into account by simply considering true values of $E(k)$ and second-order structure functions together with the associated scaling exponents.

After having determined plausible expressions for the threshold scale $L_{\widetilde{S}}$, we investigate its possible dependence on the initial conditions and the Reynolds number based on the upstream mean velocity field. The same dimensional arguments as used previously in this section lead to

$$\begin{aligned} L_{\widetilde{S}}/d &\propto Re_d^0, \\ L_{\widetilde{S}}/\lambda_u &\propto Re_d^{1/2}. \end{aligned} \tag{5.8}$$

The length-scale $L_{\widetilde{S}}$ is therefore constant with respect to the Reynolds number and the ratio between $L_{\widetilde{S}}$ and λ_u increases. We have chosen to study the evolution of $L_{\widetilde{S}}$ with respect to λ_u since λ_u is often identified with the scale at which the non-linear transfer is maximum. Further, λ_u can be determined reasonably accurately.

Experimental data (Fig. 9(a)) show that the coherent shear length scale $L_{\widetilde{S}}$ increases from $1d$ for the SS wake to $10d$ for the SqC. Whilst expressing $L_{\widetilde{S}}$ in terms of d may not be particularly meaningful since d is not a local scale, the fact that the variation of $L_{\widetilde{S}}$ with Re_d is negligible signifies that $L_{\widetilde{S}}$ is a geometrical scale linked to initial conditions.

In order to test Eq. (5.8), the ratio $L_{\widetilde{S}}/\lambda_u$ is plotted in Fig. 9(b). The magnitude

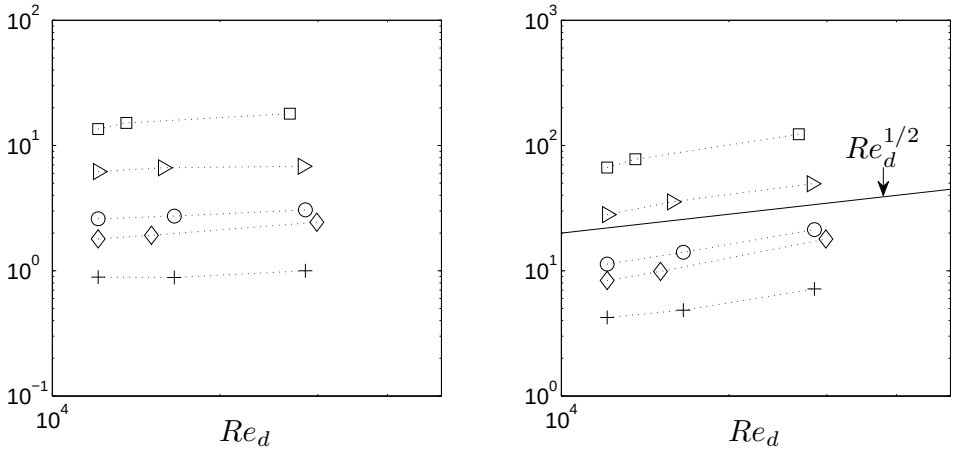


FIGURE 9. (a)$L_{\widetilde{S}}/d$, (b) $L_{\widetilde{S}}/\lambda_u$, —— : $Re_d^{1/2}$. ○ CC, □ SqC, ◇ ScC, ▷ P, + SS.

extends between 4 to $8\lambda_u$ for the SS wake. This value corresponds roughly with the position of the maximum departure from the isotropic value of '1' of different tests observed in Fig. 5 for instance. $L_{\widetilde{S}}$ also corresponds to the scale at which the departure from LI is first noticeable in Figs. 4(a), 4(b), 7(a) and 7(b). Therefore, it corresponds to the scale L_a which we wish to quantify phenomenologically. For SqC, the ratio $L_{\widetilde{S}}/\lambda_u$ is about 100, which is consistent with excellent conformity with LI for this particular set of initial conditions.

5.3. *Local isotropy in the smallest dissipative range*

Let us now look at the far (smallest scales) dissipative range for which the scales r are of the same order of magnitude as the Kolmogorov scale. The associated characteristic time scale is the Kolmogorov time scale $(\nu/\overline{\epsilon})^{1/2}$. When this characteristic time is much smaller than that associated with the coherent strain $\widetilde{S}$, LI is tenable down to the Kolmogorov length-scale. Mathematically, this translates to

$$\widetilde{S}^* \equiv (\nu/\overline{\epsilon})^{1/2}\widetilde{S} \ll 1. \tag{5.9}$$

In another viewpoint, at a given wavenumber in this range, the coherent strain characteristic time, should also be much larger than $\frac{1}{\nu k^2}$. Therefore, isotropy should apply for length scales that are much smaller than $L^*_{\widetilde{S}} = \left(\nu\widetilde{S}^{-1}\right)^{1/2}$. The same result can be obtained directly in real space, by considering the cross-over between the dissipative term in the scale-by-scale energy budget equation, *viz.* $2\nu\frac{\partial}{\partial r}\overline{\Delta q'^2}$ and the production term arising through the organised motion (Eq. (5.5)).

In Figure 10(a), the ratio $L^*_{\widetilde{S}}/\lambda_u$ varies from 0.2 to 0.5. Since the ratio $L^*_{\widetilde{S}}/L_{\widetilde{S}} = \widetilde{S}^*$, the Kolmogorov normalized coherent rate of strain, LI will be satisfied when $\widetilde{S}^*$ is much smaller than 1. Since the present maximum value of $\widetilde{S}^*$ is 0.1, the possibility of satisfying LI within the dissipative range seems plausible. Figure 10(c) represents $L^*_{\widetilde{S}}/\eta$ which varies between 4 and 15, therefore LI is valid at the level of smallest scales in the dissipative range. This result, based on phenomenological arguments, reinforces the idea that all the tests presented in section 3 (factors K_i, G_i and dynamical tests D_i, the calculation of which was based on derivatives estimation) were relevant for the dissipative range LI.

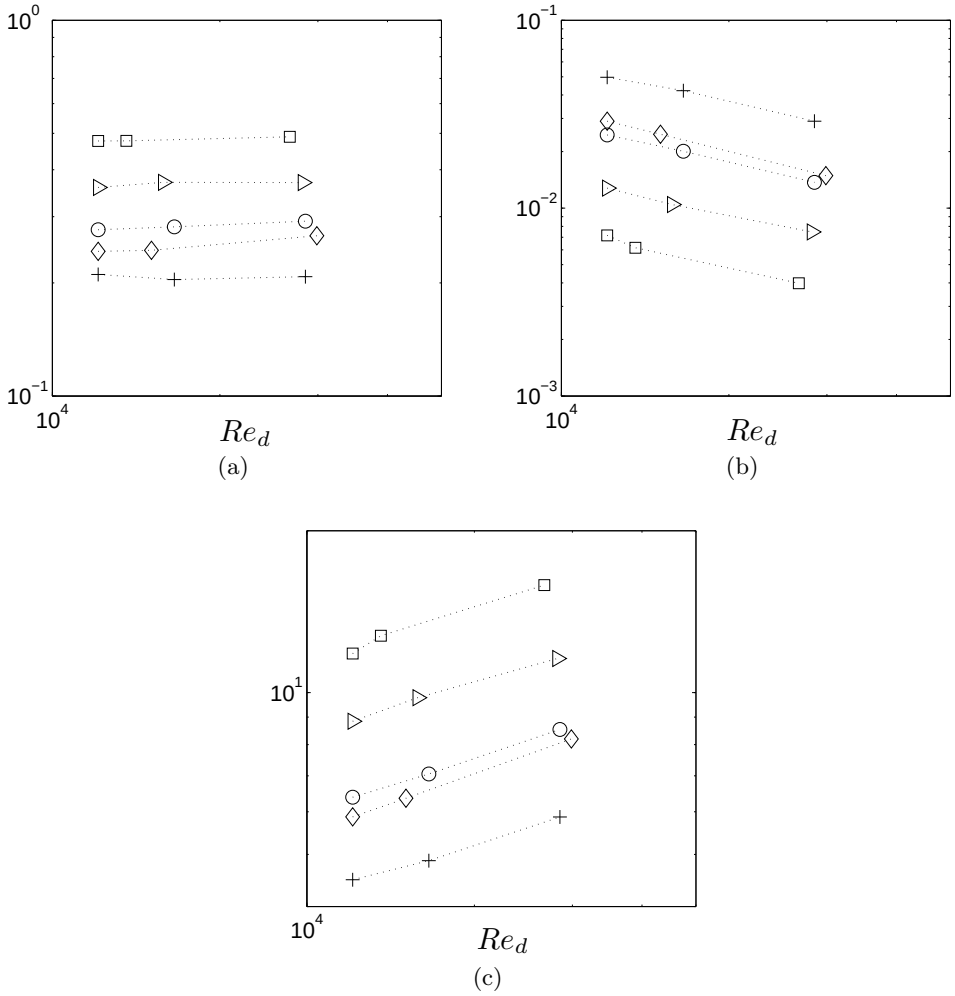


FIGURE 10. (a) Variation of $L^*_{\widetilde{S}}/\lambda_u$ with Re_d, (b) $\widetilde{S}^*$, (c) $L^*_{\widetilde{S}}/\eta$. ○ CC, □ SqC, ♢ ScC, ▷ P, + SS.

6. Persisting effects of the coherent motion in the far field

We now turn our attention to the possibility that the effects of the organized motion or coherent structures persist in the far field. To this end, the downstream evolution of $\widetilde{S}\widetilde{q^2}/\overline{\epsilon}$, $L_{\widetilde{S}}$, $L^*_{\widetilde{S}}$ as well as their ratio needs to be examined. It is now well established that the far field of the wake flow is characterized by a self similar state with respect to the streamwise direction (Townsend (1976), Wygnanski *et al.* (1986), George (1989), Browne & Antonia (1986)) when statistics are normalized by U_d and $y_{0.5}$, as illustrated by relations (5.2). Furthermore, by using the fact that the downstream evolutions of U_d and $y_{0.5}$ are respectively

$$\begin{aligned} U_d &\propto (x - x_0)^{-1/2} \\ y_{0.5} &\propto (x - x_0)^{1/2}, \end{aligned} \tag{6.1}$$

where x_0 is a virtual origin, we thus expect that

$$\begin{aligned} \widetilde{S\overline{q^2}}/\overline{\epsilon} &\propto (x - x_0)^0 \\ \widetilde{S}^* &\propto (x - x_0)^0 \\ L_{\widetilde{S}}/\lambda_u &\propto (x - x_0)^0 \\ L^*_{\widetilde{S}}/\lambda_u &\propto (x - x_0)^0. \end{aligned} \tag{6.2}$$

These relations suggest that the four quantities under study, $\widetilde{S\overline{q^2}}/\overline{\epsilon}$, $L_{\widetilde{S}}$, $L^*_{\widetilde{S}}$ and $\widetilde{S}^*$ do not vary with the downstream position. In the light of these remarks, LI is not expected to be more accurately verified in the far wake. This corroborates the experimental observations of Browne *et al.* (1987), who indicated that anisotropy is not negligible at $420d$. Moreover, our results support the proposition of George (1989) that there is no universal self-similarity (see also Wygnanski *et al.* (1986)) but only local self-similarity conditioned by the topology and amplitude of the organized motion associated with each set of initial conditions. They further strongly point to the likelihood that, associated with the notion of local self-similarity, local anisotropy will be found in differing degrees between far-wakes generated by different obstacles. In particular, the anisotropy in the far-wakes generated by porous bodies of the type considered in the present study ought to be greater than that in the far-wakes of solid bodies. One cannot rule out that there may be different anisotropies among the far-wakes in each of the two previous groups. For example, it seems plausible that the far-wake of a solid square cylinder will be more isotropic than that of a solid circular cylinder.

It is finally very important to note that these conclusions also hold in the context of the far field of other turbulent shear flows, such as the axisymetric wake, the plane or the axisymetric jet.

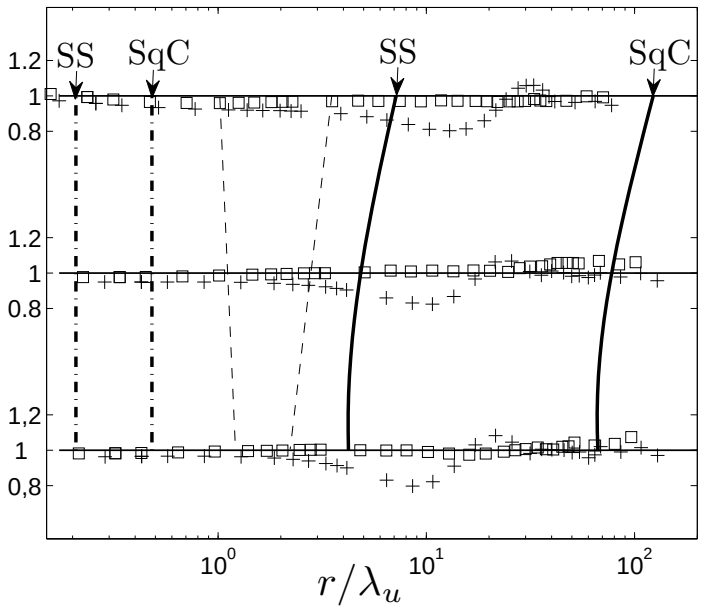
7. Conclusions and suggestions for future work

Local isotropy in the presence of an anisotropic coherent motion is assessed by means of hot-wire measurements on the centerline of the wake behind different obstacles. Isotropy is tested for a wide range of scales, from the dissipative to the largest scales. Different analytical expressions, all based on LI, involving statistics at a particular scale or spatial derivatives, are tested against experimental data. These analytical relations are either kinematic or dynamic.

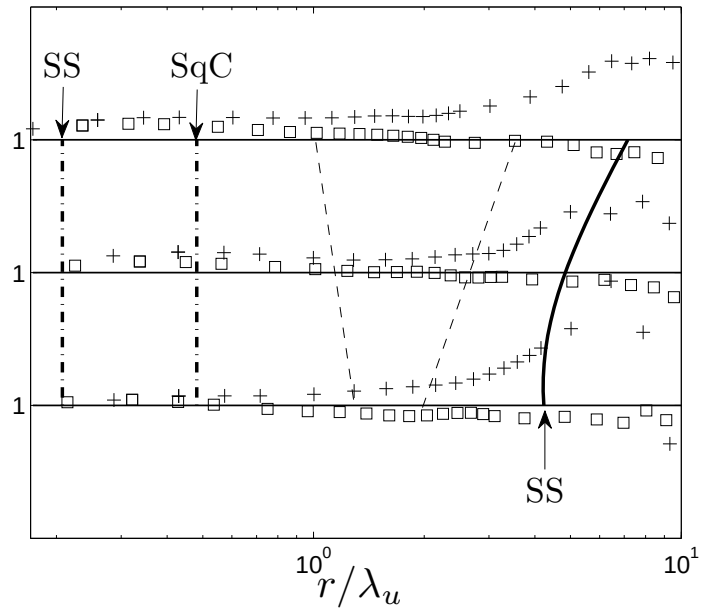
Notwithstanding the fact that local isotropy is observed at the smallest scales, it is shown that the latter are not strongly affected by the type of wake-generator used. Further, third-order moments of velocity derivatives are two orders of magnitude smaller than the values reported in the presence of a mean shear (Shen & Warhaft (2000)). This conclusion is in favour of a 'universal' isotropic behaviour of the dissipative scales.

The assessment of LI is then extended to the inertial and large scale ranges by means of isotropic relations between structure functions. Different isotropy criteria for both dissipative and large scales are recovered by considering the limiting forms of these relations when the separation is either very small or very large. In the inertial range, second-order structure functions are closer to isotropy than third-order structure functions.

We have thus shown that isotropy is a reasonable approximation for the smallest scales, especially for the square cylinder. The least isotropic flow is the screen strip wake, for which vortex merging leads to the production of a very persistent coherent motion. As far as the influence of the Reynolds number is concerned, we note that over the range of scales for which LI holds, there is no clear dependence on the Reynolds number for scales



(a)



(b)

FIGURE 11. (a) $\overline{(\Delta q)^2}|_{iso}/\overline{(\Delta q)^2}$, (b) $\overline{\Delta u(\Delta q)^2}/\overline{\Delta u(\Delta q)^2}|_{iso}$. □ SqC, + SS. Vertical solid line represents $L_{\widetilde{S}}/\lambda_u$; vertical dash-dot line is $L^*_{\widetilde{S}}/\lambda_u$.

smaller than L_a. For scales larger than L_a, departures are clearly visible, especially on the transverse velocity component v.

In order to relate phenomenologically the anisotropic scale L_a to the characteristics of the flow, *i.e.* the strain imposed by the coherent motion, we first draw an analogy with the work of Durbin & Speziale (1991). We define the ratio of the eddy-turnover time and a time scale corresponding to the inverse of the coherent strain rate and show that isotropy is not an adequate property of this flow, irrespective of the Reynolds number.

Also, the mean strain length originally defined by Corrsin (1958) and further interpreted by Casciola *et al.* (2003) has led us an original definition of a length scale associated with the coherent strain rate. Those two parameters have allowed us to explain qualitatively both the amplitude and the scale at which the anisotropy is observable. As a consequence, the five investigated wakes feel the anisotropy in different degrees, depending on their level of coherence. The SS wake is most influenced by the coherent motion (Fig. 11), followed by the ScC, CC, P and the SqC wakes. Departures from local isotropy follow this order, *i.e.* they are largest for the SS wake and smallest for the SqC wake (Fig. 11).

It is pertinent to illustrate one of the main results of this study with two examples chosen among the various tests examined in Section 4. Fig. 11 reproduces two LI tests, $\overline{(\Delta q)^2}|_{iso}/\overline{(\Delta q)^2}$ and $\overline{\Delta u(\Delta q)^2}/\overline{\Delta u(\Delta q)^2}|_{iso}$ already presented in Figs. 7(a) and 7(b) respectively, for only two cases: the SqC and SS wakes (the most and the least isotropic). Also shown on the same figures are values of our phenomenological predictions for the scales below which LI should hold, i.e. $L_{\widetilde{S}}/\lambda_u$ (solid lines) for the restricted scaling range, and $L^*_{\widetilde{S}}/\lambda_u$ for the dissipative range (vertical dash-dotted line). The vertical broken lines delineate the upper and lower limits of the restricted scaling range. It is clear that for both tests, their values in the dissipative range and in particular their limits for $r \to 0$ are very close to 1, thus in agreement with LI. Noticeable is the fact that values of $L^*_{\widetilde{S}}/\lambda_u$ are larger than the Kolmogorov scale and situated in the dissipative range (smaller than the lower end of the RSR), thus reinforcing the fact that local isotropy holds at the level of the smallest scales. For larger scales situated in the RSR, as already discussed, the behaviour of SqC and SS is different. For the SS wake, LI is valid for scales situated in the RSR, whereas the value of the scale $L_{\widetilde{S}}$ is slightly larger. We recall here however that in determining phenomenologically this scale, several constants were used arbitrarily. On the other hand, for the SqC wake, LI holds for all the investigated scales and the values of $L_{\widetilde{S}}/\lambda_u$ are large. Note that for Fig. 11(b), the values of $L_{\widetilde{S}}/\lambda_u$ for the SqC wake are not shown since they fall outside the range covered by the figure. Therefore, our phenomenological predictions of scales below which LI holds seem quite consistent with those inferred from the different isotropy tests that we have used.

An interesting further perspective of this work would be to establish a $R_{\lambda_u} - \widetilde{S}$ phase diagram, thus extended the idea of Schumacher *et al.* (2003) by replacing the mean strain rate by a strain rate arising from the coherent motion. This diagram would allow estimates of the combination of R_{λ_u} and $\widetilde{S}$ values for which LI is first validated, with the caveat that whilst such estimates may be possible for second and third-order statistics, such as considered in this paper, they may not exist for higher-order statistics.

The possibility that the effects of the organized motion persist in the the far field has also been addressed. To this end, we have considered some very simple arguments based on self-similarity. We have shown analytically that $\widetilde{S}\overline{q^2}/\overline{\epsilon}$, $\widetilde{S}^*$, $L_{\widetilde{S}}/\lambda_u$ and $L^*_{\widetilde{S}}/\lambda_u$ remain constant when the distance downstream of the obstacle increases. The effect of the organized motion is expected to persist even though the distance from the obstacle becomes extremely large. This trend needs to be confirmed by further experiments.

Future work is needed to explain the dynamical processes which result in local anisotropy in the presence of an organized motion, paying particular attention to the influence of the anisotropic energy fluxes. In this context, it would be useful to assess the influence of the coherent motions on scale-by-scale budgets for the energy associated with each velocity component, rather than just the trace $\overline{\Delta q^2}$. This could lead to a clearer insight into the interactions established between different velocity components.

Acknowledgement

The financial support of the French National Research Agency (ANR), under the project 'ANISO', is gratefully acknowledged. RAA acknowledges the support of the Australian Research Council. We thank T. Zhou for his contribution to the original experiments carried out, as well as the estimation of the factors K_i.

REFERENCES

Antonia, R.A. & Kim, J. 1994 A numerical study of local isotropy of turbulence. *Phys. Fluids* **6, 2**, 834–841.

Antonia, R.A., Zhu, Y. & Kim, J. 1993 On the measurements of lateral velocity derivatives in turbulent flows. *Exp. Fluids* **15**, 65–69.

Antonia, R. A., Anselmet, F. & Chambers, A. J. 1986 Assessment of local isotropy using measurements in a turbulent plane jet. *J.Fluid Mech.* **163**, 365–391.

Antonia, R. A. & Mi, J. 1998 Approach towards self-preservation of turbulent cylinder and screen wakes. *Exp. Therm. Fluid Science* **17**, 277–284.

Antonia, R. A., Ould-Rouis, M., Anselmet, F. & Zhu, Y. 1997 Analogy between predictions of Kolmogorov and Yaglom. *J. Fluid Mech.* **332**, 395–409.

Antonia, R. A., Zhou, T., Danaila, L. & Anselmet, F. 2000 Streamwise inhomogeneity of decaying grid turbulence. *Phys. Fluids* **12**, 3086–3089.

Antonia, R. A., Zhou, T. & Romano, G. P. 2002 Small-scale turbulence characteristics of two dimensional bluff body wakes. *J.Fluid Mech.* **459**.

Antonia, R. A, Zhou, T. & Zhu, Y. 1998 Three-component vorticity measurements in a turbulent grid flow. *J. Fluid Mech.* **374**, 29–57.

Antonia, R. A., Zhu, Y. & Shafi, H. S. 1996 Lateral vorticity measurements in a turbulent wake. *J. Fluid Mech.* **323**, 173–200.

Batchelor, G.K. 1959 Small-scale variation of convected quantities like temperature in turbulent fluid part 1. general discussion and the case of small conductivity. *J. Fluid Mech.* **5**, 113.

Browne, L. W. B. & Antonia, R. A 1986 Reynolds shear stress and heat flux measurements in a cylinder wake. *Phys. Fluids* **29**, 709–713.

Browne, L. W. B., Antonia, R. A. & Shah, D. A. 1987 Turbulent energy dissipation in a wake. *J. Fluid Mech.* **179**, 307–326.

Burattini, P., Lavoie, P. & Antonia, R. A. 2008 Velocity derivative skewness in isotropic turbulence and its measurement with hot wires. *Exp. Fluids* **45**, 523–535.

Cannon, S., Champagne, F. & Glezer, A. 1993 Observations of large-scale structures in wakes behind axisymmetric bodies. *Exp. Fluids* **14**, 447–450.

Casciola, C.M, Gualtieri, P, Benzi, R. & Piva, R. 2003 Scale-by-scale budget and similarity laws for shear turbulence. *J. Fluid Mech.* **476**, 105 114.

Champagne, F. H. 1978 The fine-scale structure of the turbulent velocity field. *J. Fluid Mech.* **86**.

Champagne, F. H., Harris, V. G. & Corrsin, S. 1970 Experiments on nearly homogeneous turbulent shear flow. *J. Fluid Mech.* **41**, 81–139.

Cimbala, J.M., Nagib, H.M. & Roshko, A. 1988 Large structure in the far wake of two dimensional bluff bodies. *J. Fluid Mech.* **190**, 265–298.

Corrsin, S. 1958 Local isotropy in turbulent shear flow. *NACA RM* **58B11**.

Danaila, L., Anselmet, F. & Antonia, R. A. 2001 Turbulent energy scale budget equations in a fully developped chanel flow. *J. Fluid Mech.* **430**, 87–109.

Danaila, L. & Antonia, R. A. 2009 Spectrum of a passive scalar in moderate reynolds number homogeneous isotropic turbulence. *Phys. Fluids* **21**.

Danaila, L., Antonia, R. A. & Burattini, P. 2012 Comparison between kinetic energy and passive scalar energy transfer in locally homogeneous isotropic turbulence. *Physica D* **241**, 224–231.

Danaila, L., Zhou, T., Anselmet, F. & Antonia, R.A. 2003 Sur l'volution du taux moyen de dissipation de l'nergie cintique de la turbulence dans une turbulence de grille. *Congrs Franais de Mcanique, Nice* .

Durbin, P. A. & Speziale, C. G. 1991 Local anisotropy in strained turbulence at high reynolds numbers. *Recent Advances in Mechanics of Structured Continua* **117**, 402–426.

George, W. K. 1989 The self preservation of turbulent flows and its relation to initial conditions and coherent structure. *Advances in Turbulence* .

Gotoh, T., Fukayama, D. & Nakano, T. 2002 Velocity field statistics in homogeneous steady turbulence obtained using a high-resolution direct numerical simulation. *Phys. Fluids* **14**, 1065–1081.

Gualtieri, P., Casciola, C. M., Benzi, R., Amati, G. & Piva, R. 2002 Scaling laws and intermittency in homogeneous shear flow. *Phys. Fluids* **14, 2**, 583–596.

Hayakawa, M. & Hussain, A. K. M. F. 1989 Three-dimensionality of organized structures in a plane turbulent wake. *J. Fluid Mech.* **206**, 375–404.

Hierro, J. & Dopazo, C. 2003 Fourth-order statistical moments of the velocity gradient tensor in homogeneous, isotropic turbulence. *Phys. Fluids* .

Kim, J. & Antonia, R. A. 1993 Isotropy of the small scales of turbulence at low Reynolds number. *J. Fluid Mech.* .

Kolmogorov, A. 1941 Dissipation of energy in the locally isotropic turbulence. *Dokl. Akad. Nauk. SSSR* **125**.

Kraichnan, R. H. 1971 Inertial-range transfer in two-and three-dimensional turbulence. *J. Fluid Mech.* **47**, 525.

Lavoie, P, Burattini, P., Djenidi, L. & Antonia, R.A 2005 Effect of initial conditions on decaying grid turbulence at low R_λ. *Exp. Fluids* **39**, 865–874.

Matsumura, M. & Antonia, R. A. 1993 Momentum and heat transport in the turbulent intermediate wake of a circular cylinder. *J. Fluid Mech.* **250**.

Mestayer, P. 1982 Local isotropy and anisotropy in a high-reynolds-number turbulent boundary layer. *J. Fluid Mech.* **125**, 475–403.

Monin, A. S. & Yaglom, A. M. 2007 *Statistical Fluid dynamics*, , vol. 2. John L. Lumley.

Morris, S. C. & Foss, J. F. 2005 Vorticity spectra in high reynolds number anisotropic turbulence. *Phys. Fluids* **17**.

Onsager, L. 1949 Statistical hydrodynamics. *Nuovo Cimento* **6**, 279–287.

Ould-Rouis, M., Antonia, R. A, Zhou, Y. & Anselmet, F. 1996 Turbulent pressure structure function. *Phys. Rev. L.* **77**.

Perrin, R., Braza, M., Cid, E., Cazin, S., Barthet, A., Sevrain, A., Mockett, C & Thiele, F. 2007 Obtaining phase averaged turbulence properties in the near wake of a circular cylinder at high reynolds number using POD. *Exp. Fluids* **43**.

Phan-Thien, N. & Antonia, R. A. 1994 Isotropic cartesian tensors of arbitrary even orders and velocity gradient correlation functions. *Phys. Fluids* **6**, 3818.

Reynolds, W. C. & Hussain, A. K. M. F. 1972 The mechanics of an organised wave in turbulent shear flow. *J. Fluid Mech.* **54**.

Saddoughi, S.G. & Veeravalli, S. V 1994 Local isotropy in turbulent boundary layers at high Reynolds number. *J. Fluid Mech.* **268**, 333–372.

Schumacher, J., Sreenivasan, K.R. & Yeung, P.K. 2003 Derivatives moments in turbulent shear flows. *Phys. Fluids* **15**, 84–90.

Shah, D. A. & Antonia, R. A. 1986 Isotropic forms of the vorticity and velocity structure functions equations in several turbulent shear flows. *Phys. Fluids* .

Shen, X. & Warhaft, Z. 2000 The anisotropy of the small scale structure in high reynolds number ($R_\lambda = 1000$) turbulent shear flow. *Phys. Fluids* **12**, 2976–2989.

Siggia, E. D. 1981 Invariants for the one-point vorticity and strain rate correlation functions. *Phys. Fluids* **24**.

Sreenivasan, K. R. & Antonia, R. A. 1997 The phenomenology of small-scale turbulence. *Ann. Rev. Fluid Mech.* **29**, 435–472.

Taylor, G. I. 1935 Statistical theory of turbulence. *Proc. Roy. Soc. London* **151 (873)**, 421–444.

Tennekes, H. & Lumley, J.L. 1972 *A first course in turbulence*. MIT press.

Thiesset, F., Danaila, L., Antonia, R. A. & Zhou, T. 2011 Scale-by-scale budgets which account for the organised motion. *European Turbulence Conference, Warsaw, Poland* .

Townsend, A.A. 1976 *The structure of turbulent shear flow*. Cambridge University Press.

Wygnanski, I., Champagne, F. & Marasli, B. 1986 On the large-scale structures in two-dimensional, small-deficit, turbulent wakes. *J. Fluid Mech.* **168**, 31–71.

Zhou, T. & Antonia, R. A. 2000 Reynolds number dependence of the small-scale structure of grid turbulence. *J. Fluid Mech.* **406**, 81–107.

Zhou, T., Antonia, R. A., Danaila, L. & Anselmet, F. 2000 Transport equations for the mean energy and temperature dissipation rates in grid turbulence. *Exp. Fluids* .

Zhou, Y. & Antonia, R. A. 1994 Effect of initial conditions on vortices in a turbulent near wake. *AIAA J.* **32**, 1207–1213.

Zhou, Y. & Antonia, R. A. 1995 Memory effects in a turbulent plane wake. *Exp. Fluids* **19**, 112–120.

Zhu, Y. & Antonia, R. A. 1995 Effect of wire separation on X-probe measurements in a turbulent flow. *J. Fluid Mech.* **287**, 199–223.

5.3 Bilan à chaque échelle dans le sillage de différents obstacles

Dans la section précédente, nous avons jaugé la validité de l'hypothèse d'isotropie locale. Les résultats montrent que sur la ligne centrale des différents sillages, cette supposition est bien vérifiée pour des échelles inférieures à $r \approx 10\lambda_u$. Pour les échelles supérieures, des écarts à l'isotropie s'observent. Nous définissons alors un rapport de temps caractéristiques ainsi qu'un rapport d'échelles propres au mouvement organisé, rendant compte qualitativement de l'amplitude des écarts à l'isotropie et de l'échelle à laquelle ils apparaissent.

Les résultats mettent en lumière également que les conditions aux limites (ici le type d'obstacle) restent influentes même à $70D$ en aval de l'obstacle. Cela est la conséquence de la persistance d'un mouvement organisé dont la topologie et l'amplitude dépendent du type d'obstacle. L'étude de Antonia *et al.* [10] montre que les plus petites échelles de l'écoulement (en particulier celles de la composante u) s'accordent correctement et de manière universelle (indépendante des conditions initiales) à la normalisation de Kolmogorov. Cependant, pour de plus grandes séparations, la distribution d'énergie à chaque échelle est dépendante des conditions initiales.

Dans cette section, nous réinvestissons les données publiées en 2002 dans [10] que nous complétons avec des mesures au fil chaud effectuées au Coria. Le but est de décrire plus finement l'échelle à laquelle l'influence des conditions initiales se ressent. Pour plus d'informations concernant les mesures réalisées sous la direction de Robert Antonia à l'Université de Newcastle , le lecteur pourra se référer à la section précédente de ce chapitre ainsi qu'à la publication de 2002 [10].

Les résultats présentés dans cette section font l'objet d'une publication en cours de préparation, en collaboration avec R. A. Antonia.

5.3.1 Validation de l'hypothèse de similitude d'équilibre

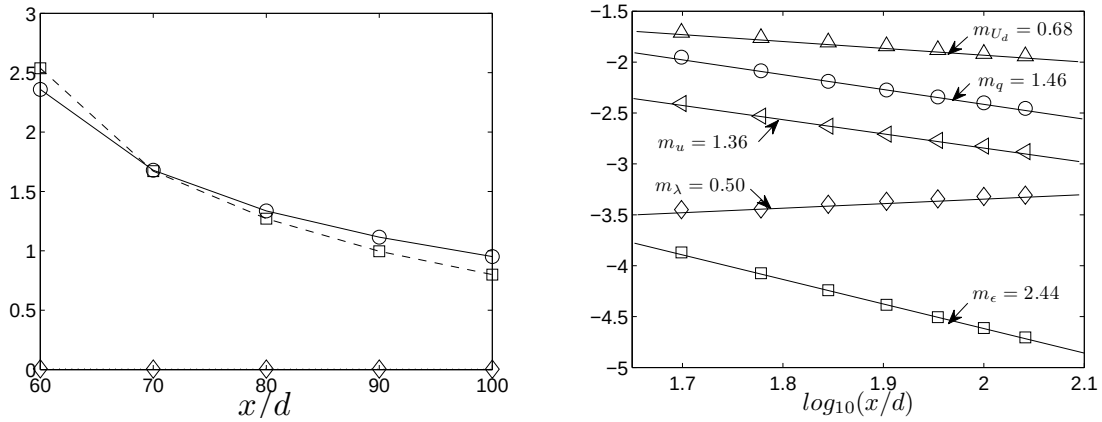
Statistiques en un point

Avant cela, nous évaluons les différents termes du bilan en un point afin de déterminer les termes à grandes échelles qui doivent être pris en compte. Sur la ligne centrale du sillage, trois principaux mécanismes contribuent *a priori* à l'équilibre énergétique en un point. Il s'agit des processus de production et d'advection de l'énergie cinétique, tous deux compensés par la dissipation. En termes mathématiques, l'équilibre s'écrit donc :

$$\frac{1}{2}\overline{U}\frac{\partial\overline{q^2}}{\partial x} + \left(\overline{u^2} - \overline{v^2}\right)\frac{\partial\overline{U}}{\partial x} + \overline{\epsilon}. = 0 \tag{5.1}$$

Afin d'évaluer ce bilan, nous utilisons les mesures réalisées au Coria entre 50 et $110D$ en aval d'un cylindre circulaire. Le nombre de Reynolds Re_D est alors de 4333 correspondant

à un nombre de Reynolds basé sur une fluctuation type et la micro-échelle de Taylor $R_\lambda = \frac{\sqrt{\overline{u^2}}\lambda}{\nu} \approx 77$. Du fait que nous disposons seulement de deux composantes de vitesse sur les trois nécessaires à l'évaluation de l'énergie cinétique totale $\overline{q^2} = \overline{u_i u_i}$, nous invoquons l'hypothèse d'axisymétrie autour de l'axe x, *i.e.* $\overline{w^2} = \overline{v^2}$. De plus, la dissipation moyenne est calculée au moyen de sa relation isotrope $\overline{\epsilon} = 15\nu\overline{\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2}$.



(a) (b)

FIGURE 5.1 – (a) Termes du bilan énergétique en un point (5.1) sur la ligne centrale. □ $-\frac{1}{2}\overline{U}\frac{\partial\overline{q^2}}{\partial x}$, ○ $\overline{\epsilon}$, ♢ $\left(\overline{u^2} - \overline{v^2}\right)\frac{\partial\overline{U}}{\partial x}$. (b) Exposant de décroissance sur la ligne centrale ; ○ $log_{10}(\overline{q^2}/U_0^2)$, ◁ $log_{10}(\overline{u^2}/U_0^2)$, □ $log_{10}(\overline{\epsilon}D/U_0^3)$, ♢ $log_{10}(10^{-1}\lambda/D)$, △ $log_{10}(U_d^2/U_0^2)$, les droites pleines correspondent à une approximation linéaire.

La Fig. 5.1(a) montre que le terme de production est négligeable devant le terme d'advection et de dissipation. Sur la ligne centrale du sillage, le bilan énergétique en un point se résume donc à celui d'une turbulence de grille où la dissipation et l'advection s'équilibrent. Les très faibles écarts entre ces deux termes proviennent à la fois de l'utilisation de l'hypothèse d'axisymétrie et de l'utilisation de la relation isotrope de la dissipation moyenne d'énergie. Finalement, (5.1) se réduit à :

$$\frac{1}{2}\overline{U}\frac{\partial\overline{q^2}}{\partial x} + \overline{\epsilon} = 0. \tag{5.2}$$

Cela indique que seul le terme de décroissance à grande échelle devra être pris en compte dans le bilan en deux points. Celui-ci est alors tout à fait analogue à celui d'une turbulence de grille.

Dans le but d'évaluer au mieux ce terme de décroissance à grande échelle, nous nous intéressons tout d'abord à la validité de l'hypothèse de similitude d'équilibre. Cette propriété permet d'évaluer les bilans énergétiques en deux points, à partir d'une mesure en

une seule position de l'écoulement [7], [45], [28]. Pour cela, les statistiques en un point sont formellement réécrites de la manière suivante :

$$\overline{u^2} \propto (x - x_0)^{-m_u} \tag{5.3}$$
$$\overline{q^2} \propto (x - x_0)^{-m_q} \tag{5.4}$$
$$\overline{U_d}^2 \propto (x - x_0)^{-m_{U_d}} \tag{5.5}$$
$$\epsilon \propto (x - x_0)^{-m_\epsilon} \tag{5.6}$$
$$\lambda \propto (x - x_0)^{-m_\lambda}, \tag{5.7}$$

où x_0 est une origine virtuelle, U_d est la vitesse de déficit maximum, soit $U_d = U_0 - \overline{U}(y = 0)$ et $m_u, m_q, m_{U_d}, m_\epsilon, m_\lambda$ sont les exposants de décroissance de $\overline{u^2}, \overline{q^2}, \overline{U_d}, \epsilon, \lambda$ respectivement. L'équation (5.2) implique $m_\epsilon = -m_q - 1$ et du fait que $\lambda^2 = 5\nu\frac{\overline{q^2}}{\epsilon}$, on s'attend à ce que $m_\lambda = 0.5$. L'isotropie globale requiert $m_u = m_q$ et la propriété de similitude des sillages implique $m_{U_d} = m_q = 1$.

L'origine virtuelle x_0 est estimée en utilisant la méthode basée sur λ. L'évolution longitudinale de λ^2 est alors linéairement extrapolée, et x_0 correspond à la distance x où λ^2 vaut zéro. Une valeur $x_0 = 8D$ est trouvée. Les exposants de décroissance sur la ligne centrale d'un sillage de cylindre sont représentés sur la Fig. (5.1(b)).

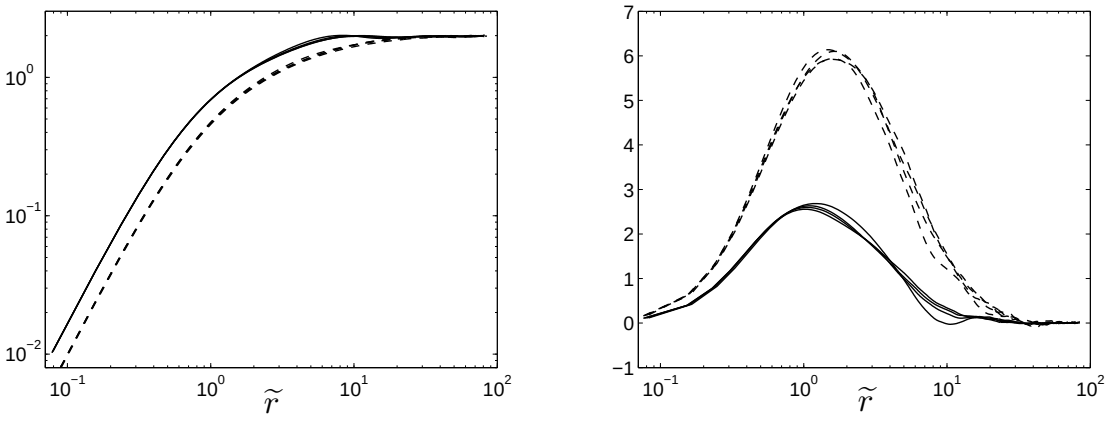
On remarque que $m_\epsilon \approx m_q - 1$ qui renforce la validité de (5.2). Cependant, m_q est quelque peu différent de m_u, ce qui prouve que l'isotropie globale caractérisée par le ratio $\overline{q^2}/3\overline{u^2} \neq 1$ n'est pas vérifiée. L'hypothèse d'axisymétrie que nous avons émise est certainement également en partie responsable de cet écart. De plus, $m_{U_d} \neq m_q \neq 1$ ce qui montre que les statistiques n'ont pas encore atteint une similitude parfaite. Cela renforce l'idée que l'on se situe en champ intermédiaire et non en champ lointain. Cependant, les statistiques en un point semblent évoluer tout en respectant une auto-similitude 'intermédiaire', ce qui rend possible tout de même une définition 'intermédiaire' des exposants de décroissance.

Statistiques en deux points

La propriété d'auto-similitude peut-elle maintenant être étendue à toutes les échelles du spectre turbulent ? Les fonctions de structure d'ordre deux et trois sont alors normalisées selon [7], [4], [45], [28], en suivant les lignes de la similitude d'équilibre proposée par George [61]. Les fonctions de structure d'ordre deux et trois sont alors formellement réécrite de la forme suivante ([7], [4]) :

$$f_u(\widetilde{r}) = \frac{\overline{(\Delta u)^2}}{\overline{u^2}}, \qquad g_u(\widetilde{r}) = -\overline{(\Delta u)^3}\frac{R_\lambda}{(\overline{u^2})^{3/2}} \tag{5.8}$$
$$f_q(\widetilde{r}) = \frac{\overline{(\Delta q)^2}}{\overline{q^2}}, \qquad g_q(\widetilde{r}) = -\overline{\Delta u(\Delta q)^2}\frac{3^{1/2}R_\lambda}{(\overline{q^2})^{3/2}} \tag{5.9}$$

où $\widetilde{r} = r/\lambda$. La propriété d'auto-similitude implique que f_u, f_q, g_u et g_q sont des fonctions de $\widetilde{r}$ uniquement. Au regard de la Fig. 5.2(a) and 5.2(b), cette supposition semble bien vérifiée par l'expérience. La distribution d'énergie f_u, f_q (Fig. 5.2(a)) ainsi que le transfert énergétique g_u, g_q (Fig. 5.2(b)) se rassemblent en une seule courbe sur une large gamme d'échelles. A noter que l'hypothèse d'axisymétrie fut également invoquée, *i.e.* $\overline{(\Delta w)^2} = \overline{(\Delta v)^2}$ et $\overline{\Delta u(\Delta w)^2} = \overline{\Delta u(\Delta v)^2}$.



(a) (b)

FIGURE 5.2 – (a) Fonctions de structure d'ordre 2 représentées en fonction $\widetilde{r} = r/\lambda$ pour $x/D = 50, 70, 90, 110$. - - - - - : $f_u = \overline{(\Delta u)^2}/\overline{u^2}$ et —— $f_q = \overline{(\Delta q)^2}/\overline{q^2}$. (b) Fonctions de structure d'ordre 3 en fonction de $\widetilde{r} = r/\lambda$ pour $x/d = 50, 70, 90, 110$. - - - - - : $g_u\widetilde{r}^{-1} = -\overline{(\Delta u)^3}R_\lambda \left(\overline{u^2}\right)^{-3/2}\widetilde{r}^{-1}$ et —— $g_q\widetilde{r}^{-1} = -\overline{\Delta u(\Delta q)^2}R_\lambda \left(\overline{q^2}\right)^{-3/2}\widetilde{r}^{-1}$

Finalement, nous montrons ici que la propriété de similitude d'équilibre des statistiques en un et deux points est valide dans le sillage d'un cylindre. Nous admettrons par la suite que cette caractéristique sera également vérifiée dans le sillage de différents obstacles. En d'autres termes, nous imposerons comme valeurs d'exposants de décroissance ceux que nous venons d'évaluer. Nous supposons donc que m_u and m_q ne dépendent pas du type d'obstacle et du nombre de Reynolds, ou bien que leur influence sur le bilan énergétique en deux points est mineure.

5.3.2 Bilan à chaque échelle

Auto-similitude d'une turbulence isotrope en décroissance

Le bilan en un point indique que seul le terme de décroissance doit être incorporé aux bilans à chaque échelle. Selon [40], [43], les équations de transport de $\overline{(\Delta u)^2}$ et $\overline{(\Delta q)^2} =$

$\overline{\Delta u_i \Delta u_i}$ sont respectivement :

$$-\overline{(\Delta u)^3} + 6\nu\frac{\partial}{\partial r}\overline{(\Delta u)^2} - 3\frac{\overline{U}}{r^4}\int_0^r s^4\frac{\partial}{\partial x}\overline{(\Delta u)^2}ds = \frac{4}{5}\epsilon r \tag{5.10}$$

$$-\overline{\Delta u(\Delta q)^2} + 2\nu\frac{\partial}{\partial r}\overline{(\Delta q)^2} - \frac{\overline{U}}{r^2}\int_0^r s^2\frac{\partial}{\partial x}\overline{(\Delta q)^2}ds = \frac{4}{3}\epsilon r \tag{5.11}$$

En utilisant la similitude d'équilibre, (5.10) et (5.11) sont réécrites de la manière suivante (voir [7] pour la dérivation complète) :

$$g_u + 6f'_u - \left(\frac{15\Gamma_{u1}}{m_u} - 30\Gamma_{u2}\right)\widetilde{r}^{-4} = 12\widetilde{r} \tag{5.12}$$

$$g_q + 2f'_q - \left(\frac{5\Gamma_{q1}}{m_q} - 10\Gamma_{q2}\right)\widetilde{r}^{-2} = \frac{20}{3}\widetilde{r}, \tag{5.13}$$

où :

$$\Gamma_{u1} = \int_0^{\widetilde{r}} \widetilde{s}^5 f'_u d\widetilde{s}, \qquad \Gamma_{u2} = \int_0^{\widetilde{r}} \widetilde{s}^4 f_u d\widetilde{s} \tag{5.14}$$

$$\Gamma_{q1} = \int_0^{\widetilde{r}} \widetilde{s}^3 f'_q d\widetilde{s}, \qquad \Gamma_{q2} = \int_0^{\widetilde{r}} \widetilde{s}^2 f_q d\widetilde{s}. \tag{5.15}$$

L'exposant $'$ dénote une dérivation selon $\widetilde{r}$ et s est une variable muette. Par simplicité, (5.12) et (5.13) sont formellement réécrites :

$$G_u + D_u + I_u = \frac{4}{5}, \tag{5.16}$$

où $G_u = g_u\tilde{r}^{-1}/15$, $D_u = 6f'_u\tilde{r}^{-1}/15$ et $I_u = -\left(\Gamma_{u1}/m_u - 2\Gamma_{u2}\right)\widetilde{r}^{-5}$, et

$$G_q + D_q + I_q = \frac{4}{3}, \tag{5.17}$$

où $G_q = g_q\tilde{r}^{-1}/5$, $D_q = 2f'_q\tilde{r}^{-1}/5$ et $I_q = -\left(\Gamma_{q1}/m_q - 2\Gamma_{q2}\right)\widetilde{r}^{-3}$. (5.16) et (5.17) sont uniquement des fonctions de $\tilde{r}$. Chaque terme peut donc être évalué à partir de mesures en un seule position spatiale de l'écoulement.

Modèle pour une turbulence isotrope

Le bilan en un point et deux points est donc tout fait analogue à celui d'une turbulence de grille en décroissance. Afin de pousser l'analogie encore plus loin, nous nous interrogeons sur une possible analogie entre le bilan énergétique en deux points observé dans le sillage des différents obstacles à celui d'une turbulence idéalement isotrope. La procédure consiste à considérer une forme analytique particulière pour $\overline{(\Delta u)^2}$ ou $\overline{\Delta q^2}$ et l'injecter dans (5.16)

ou (5.17). Dans cette étude nous nous intéressons tout d'abord à la formulation proposée par Kurien & Sreenivasan [85] :

$$\overline{(\Delta u)^{*2}}|_K = \frac{r^{*2}}{15}\frac{(1+\beta r^*)^{(2c-2)}}{(1+\alpha r^{*2})^c}. \tag{5.18}$$

Aivalis *et al.* [1] ont proposé également une autre expression

$$\overline{(\Delta u)^{*2}}|_A = \frac{r^{*2}}{15}\frac{(1+(\beta r^*)^2)^{(c-1)}}{(1+\alpha r^{*2})^c}. \tag{5.19}$$

L'indice K dénote le modèle de Kurien & Sreenivasan [85] et l'indice A celui de Aivalis *et al.* [1]. L'exposant * correspond à la normalisation par les échelles de Kolmogorov. Dans (5.18) et (5.19), $\beta = L^{*-1}$ où $L^* = C_\epsilon R_\lambda^{3/2} 15^{-3/4}$ (la dissipation normalisée $C_\epsilon = 1$ de la même manière que [7], [4]) est une mesure de l'échelle intégrale. De plus $\alpha = (15C_u)^{-3/2}$ ($C_u = 2$ [7], [4]) désigne le cross-over entre les échelles dissipatives et inertielles. Enfin, $c = 1 - \zeta_u/2$ où ζ_u est l'exposant des fonctions de structure d'ordre 2 de la composante u. A la différence de l'étude de Danaila *et al.* [47] où ζ_u était considéré dépendant du nombre de Reynolds R_λ, nous considérons ici que $\zeta_u = cte = 2/3$.

Du fait que les fonctions de structure longitudinales et transversales sont liées par la relation isotrope (Eq. (12.67) p.48 of [101]) :

$$\overline{(\Delta u_\perp)^{*2}}|_{K,A} = (1 + \frac{r^*}{2}\frac{\partial}{\partial r^*})\overline{(\Delta u)^{*2}}|_{K,A} \tag{5.20}$$

où $u_\perp = v, w$, $\overline{(\Delta q)^2}$ est alors calculée par :

$$\overline{(\Delta q)^{*2}}|_{K,A} = (3 + r^*\frac{\partial}{\partial r^*})\overline{(\Delta u)^{*2}}|_{K,A}. \tag{5.21}$$

En injectant (5.18) où (5.19) dans (5.16) ou bien (5.21) dans (5.17), la valeur de chaque terme des bilans à chaque échelle peut être modélisée. Le transfert énergétique est alors calculé par différence, en supposant la validité de (5.16) et (5.17). Ce modèle se résume finalement à une fonction d'une variable R_λ et d'un paramètre : soit l'exposant m_u ou bien l'exposant m_q.

Une fois la démarche expliquée, comparons maintenant les deux formulations analytiques de $\overline{(\Delta u)^2}$. La différence entre (5.19) et (5.18) se situe uniquement au numérateur, si bien que :

$$\frac{\overline{(\Delta u)^{*2}}|_K}{\overline{(\Delta u)^{*2}}|_A} = \left[\frac{1+2\beta r^* + (\beta r^*)^2}{1+(\beta r^*)^2}\right]^{(c-1)}. \tag{5.22}$$

Du fait que $c - 1 < 0$, $\overline{(\Delta u)^{*2}}|_K < \overline{(\Delta u)^{*2}}|_A$ et $\overline{(\Delta q)^{*2}}|_K < \overline{(\Delta q)^{*2}}|_A$ quelle que soit la séparation r. Donc $I_u|_K < I_u|_A$, $I_q|_K < I_q|_A$ (du fait que I_u ou I_q est une intégrale

cumulative). Cependant, dans la limite de très grandes séparations :

$$\lim_{r\to\infty} \overline{(\Delta u)^{*2}}|_K = \lim_{r\to\infty} \overline{(\Delta u)^{*2}}|_A = \frac{2R_\lambda}{15^{1/2}} \tag{5.23}$$

$$\lim_{r\to\infty} \overline{(\Delta q)^{*2}}|_K = \lim_{r\to\infty} \overline{(\Delta q)^{*2}}|_K = \frac{6R_\lambda}{15^{1/2}}. \tag{5.24}$$

Dans la limite de petites séparations :

$$\lim_{r\to 0} \overline{(\Delta u)^{*2}}|_K = \lim_{r\to 0} \overline{(\Delta u)^{*2}}|_A = \frac{r^{*2}}{15} \tag{5.25}$$

$$\lim_{r\to 0} \overline{(\Delta q)^{*2}}|_K = \lim_{r\to 0} \overline{(\Delta q)^{*2}}|_A = \frac{r^{*2}}{3}. \tag{5.26}$$

On prouve donc que les deux modèles présentés ci-dessus aboutissent à une même distribution asymptotique d'énergie dans la limite de très grandes ou de très petites séparations. Ils ne diffèrent donc qu'à des échelles intermédiaires.

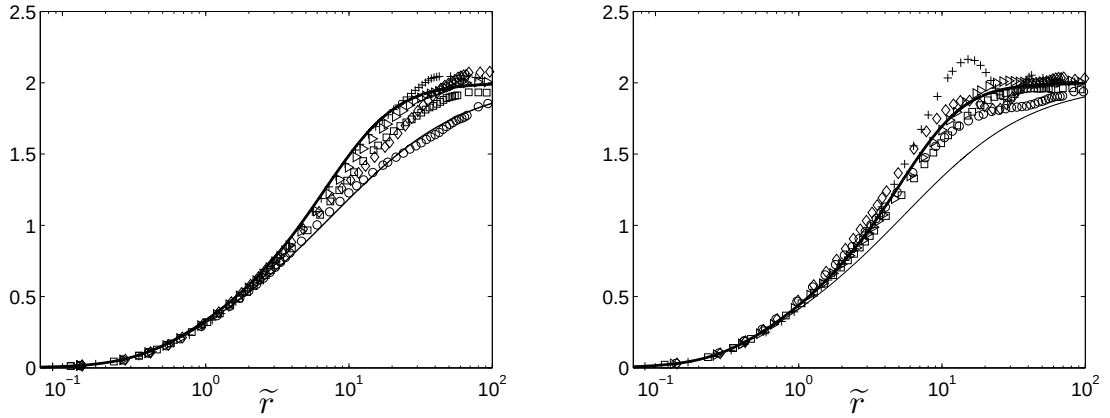


FIGURE 5.3 – Fonctions de structure mesurées dans le sillage des 5 obstacles. (a) f_u. (b) f_q. ○ CC, □ SqC, ◇ ScC, ▷ P, + SS. Fonctions de structure calculées selon l'expression de Kurien & Sreenivasan[85] (ligne fine) et Aivalis *et al.* [1] (ligne épaisse). R_λ est approximativement le même ≈ 195.

Sur la Fig. 5.3, nous traçons les fonctions de structure mesurées dans le sillage des cinq obstacles à un nombre de Reynolds quasi identique. Nous utilisons donc, pour ce faire, les mesures réalisées à l'université de Newcastle. La description détaillée de ces cinq obstacles se trouve dans [10] et dans la section précédente de ce chapitre.

On observe que toutes les distributions d'énergie se regroupent, et ce plus particulièrement pour de faibles séparations r. Cette observation est tout à fait en accord avec

Antonia *et al* [10]. Cependant, la normalisation par l'échelle de Taylor plutôt que l'échelle de Kolmogorov, semble aboutir à une universalisation des fonctions de structure sur une plus large gamme d'échelle.

Pour des échelles supérieures à $r \approx 4\lambda$, la distribution d'énergie au sein des échelles diffère selon l'obstacle. Une partie de ces différences est attribuable à de faibles différences du nombre de Reynolds R_λ. Cependant, nous supposons qu'une part majoritaire des écarts entre chaque sillage est due à une influence persistante des conditions initiales.

En outre, les fonctions de structure d'ordre 2 sont globalement plus proches du modèle de Aivalis *et al.* [1] que de la formulation de Kurien & Sreenivasan [85]. Cette remarque est en désaccord avec la turbulence de grille, pour laquelle le modèle de Kurien & Sreenivasan [85] semble être le plus adéquat.

Il est à noter enfin que la distribution d'énergie dans le sillage de la plaque plane perforée (quelque peu perceptible également sur le cylindre perforé) révèle une bosse d'énergie (Fig. 5.3(b)) avec un maximum se situant à $\tilde{r} \approx 12$. On sait maintenant que ce surplus d'énergie est une empreinte du mouvement organisé.

Bilans à chaque échelle

Nous tournons maintenant notre attention sur les bilans à chaque échelle et pour commencer, celui de la composante de vitesse u (5.16). Les différents termes qui le composent sont représentés sur la Fig. 5.4 et comparés à ceux des modèles présentés précédemment. Globalement, on observe encore une fois que le modèle de Aivalis *et al.* [1] est le plus proche de la valeur des termes mesurés dans le sillage des différents obstacles, et l'analogie entre le bilan énergétique d'un écoulement de sillage et celui d'une turbulence isotrope en décroissance est relativement bien vérifiée. Cela est particulièrement vrai lorsque la séparation est inférieure à $\approx 4\lambda$. Des différences entre chaque obstacle s'observent alors d'autant plus que la séparation est grande.

Pour résumer, l'influence des conditions initiales ne se ressent donc que pour des échelles plus grandes qu'une certaine limite, en l'occurrence $r = 4\lambda$. Il est important de remarquer que cette séparation limite correspond au cross-over entre le terme de transfert et le le terme de décroissance à grande échelle que l'on nommera par la suite L_c. Cela nous mène à la conclusion intuitive que la distribution d'énergie est d'autant plus sensible aux conditions initiales que la séparation est grande devant L_c. Cette distribution subit alors davantage la contribution énergétique des grandes échelles qui sont elles mêmes réputées pour porter la trace des conditions initiales via, par exemple, un mouvement organisé.

Enfin, $G_u + D_u + I_u$ est relativement proche de la valeur attendue $4/5$, qui rend compte du bon équilibre entre le membre de gauche et le membre de droite de (5.16). De légers écarts à cette valeur attendue se discernent tout de même, plus particulièrement pour des échelles supérieures à $4\lambda_u$. Deux facteurs pourraient être à l'origine de cette observation. D'une part il peut s'agir d'écart à l'isotropie locale comme ils furent mis en exergue dans la section précédente de ce chapitre. D'autre part, la présence d'un mouvement organisé

peut induire un forçage supplémentaire occasionnant une augmentation du transfert énergétique. Une prochaine partie de ce manuscrit aura pour objet de quantifier ce forçage associé au mouvement ordonné.

Le bilan énergétique de $\overline{\Delta q^2}$ prodigué par (5.17), est exposé sur la Fig. 5.5. On observe exactement les mêmes tendances à savoir que l'influence des conditions initiales s'observe pour des échelles supérieures à une certaine valeur limite, ici $r \approx 2\lambda$. On remarque, en outre, que l'évolution à chaque échelle du terme de transfert est fortement influencée par le type d'obstacle, contrairement aux autres termes qui le sont largement moins. Enfin, la valeur maximum de G_q est systématiquement plus grande que celle calculée via le modèle de Kurien ou celui de Aivalis. Nous nous attarderons sur ce point par la suite.

De même que précédemment, le membre de gauche de (5.17) s'écarte légèrement de la valeur attendue de 4/3. Cela est particulièrement vrai pour le sillage de la plaque poreuse (SS) et dans une moindre mesure du cylindre poreux (ScC). Il est alors utile de rappeler que les deux obstacles poreux créent une turbulence plus anisotrope que les autres types d'obstacle car le mouvement organisé y est davantage présent. Ces deux facteurs que sont l'anisotropie locale et le mouvement organisé peuvent ainsi expliquer, ici encore, l'écart à 4/3.

L'échelle de cross-over

Les résultats précédents montrent donc que les conditions initiales sont influentes non pas sur l'intégralité des échelles, mais qu'à partir d'une échelle limite L_c. Notre interprétation est que L_c correspond à l'échelle à laquelle le terme non linéaire et le terme de décroissance à grande échelle sont égaux. En d'autres termes, L_c est l'échelle r pour laquelle :

$$\overline{U}\frac{\partial\overline{(\Delta u)^2}}{\partial x}r \equiv \overline{\Delta u^3}. \tag{5.27}$$

En considérant que $\overline{U}\frac{\partial}{\partial x} \propto U_0/D$, $\overline{\Delta u^2} \propto \bar{\epsilon}^{2/3}r^{2/3}$ et $\overline{\Delta u^3} \propto \bar{\epsilon}r$, on obtient donc que :

$$L_c \propto \sqrt{\frac{\bar{\epsilon}D^3}{U_0^3}} \tag{5.28}$$

et du fait que $\bar{\epsilon} \propto U_0^3/D$, s'en suit donc que :

$$L_c \propto D \tag{5.29}$$

L_c ne dépend donc que d'un paramètre macro-échelle qu'est la taille caractéristique de l'obstacle. Il serait plus adéquat d'étudier l'évolution de cette longueur en fonction de λ du fait que λ est considérée comme l'échelle où le transfert énergétique est maximum. Le

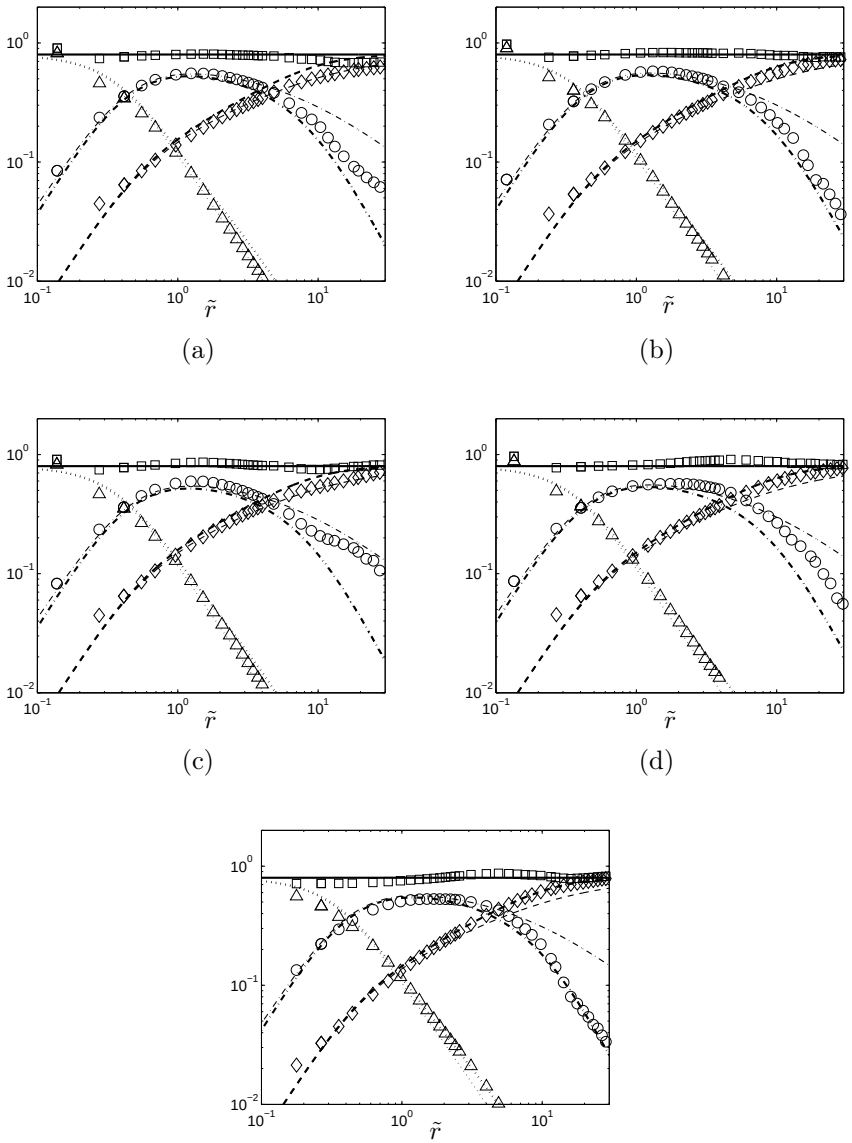
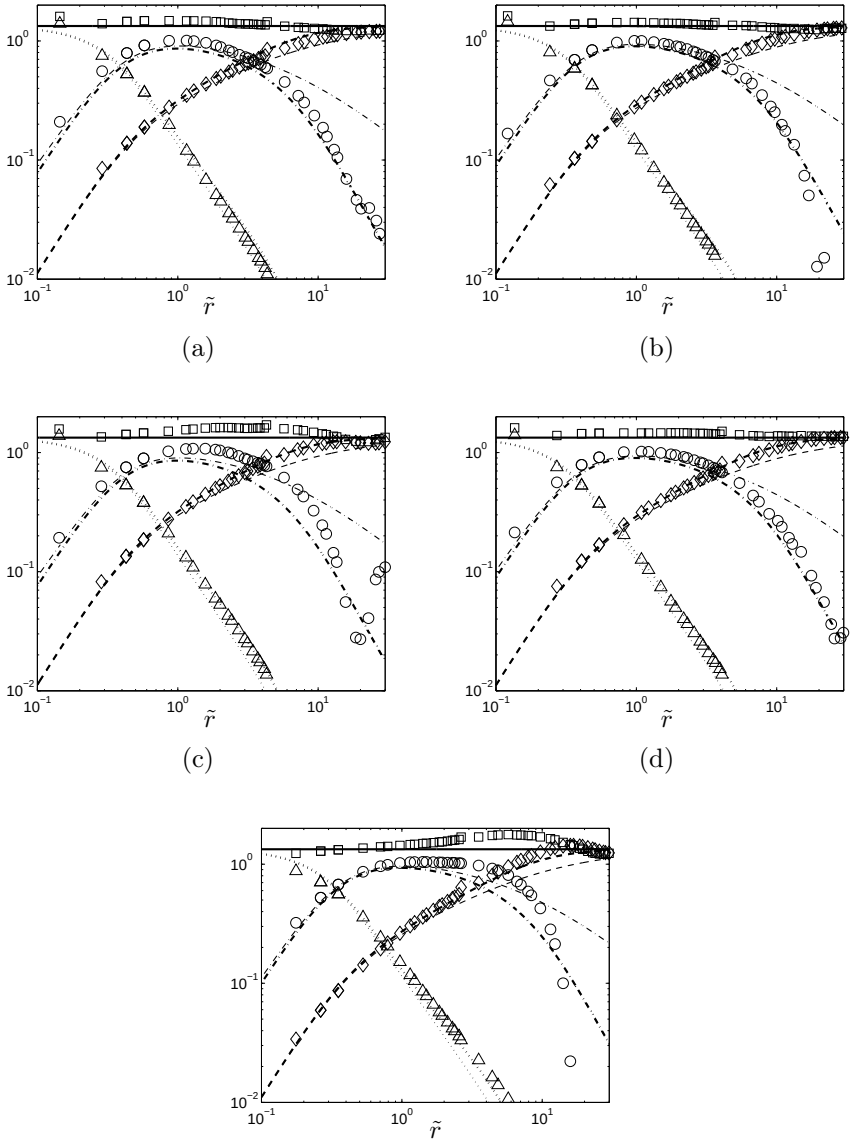


FIGURE 5.4 – Bilan à chaque échelle (5.16) dans le sillage de différents obstacles ($R_\lambda \approx 195$). Lignes fines : Kurien & Sreenivasan [85] ; lignes épaisses : Aivalis *et al.* [1] ; symboles : expérience. ○ , — · — : G_u ; ▷, ····· : D_u ; ♢, - - - - : I_u ; □, —— : $(G_u + D_u + I_u)$. (a) CC, (b) SqC, (c) ScC, (d) P, (e) SS

ratio entre L_c et λ qui donne donc une mesure de l'étendue spatiale séparant les effets à



(a) (b) (c) (d) (e)

FIGURE 5.5 – Bilan à chaque échelle (5.17) dans le sillage des différents obstacles ($R_\lambda \approx 195$). Lignes fine : Kurien & Sreenivasan [85] ; lignes épaisses : Aivalis *et al.* [1] model ; symboles : expérience. ○ , — · — : G_q ; ▷, · · · · · · : D_q ; ♢, - - - - : I_q ; □, —— : $(G_u + D_u + I_u)$. (a) CC, (b) SqC, (c) ScC, (d) P, (e) SS

grandes échelles des effets 'inertiels', évolue donc de la manière suivante :

$$L_c/\lambda \propto R_\lambda. \tag{5.30}$$

Afin de vérifier ce résultat analytique, nous proposons de représenter l'évolution de $L_c|_u$ et $L_c|_q$ en fonction de R_λ (Fig. 5.6). $L_c|_u$ et $L_c|_q$ sont calculées en prenant l'échelle à laquelle $G_u = I_u$ et $G_q = I_q$ respectivement. Cette dernière définition est tout à fait consistante avec (5.27). Les évaluations expérimentales ainsi que celles prodiguées par les deux modèles sont dispensées sur la Fig. 5.6.

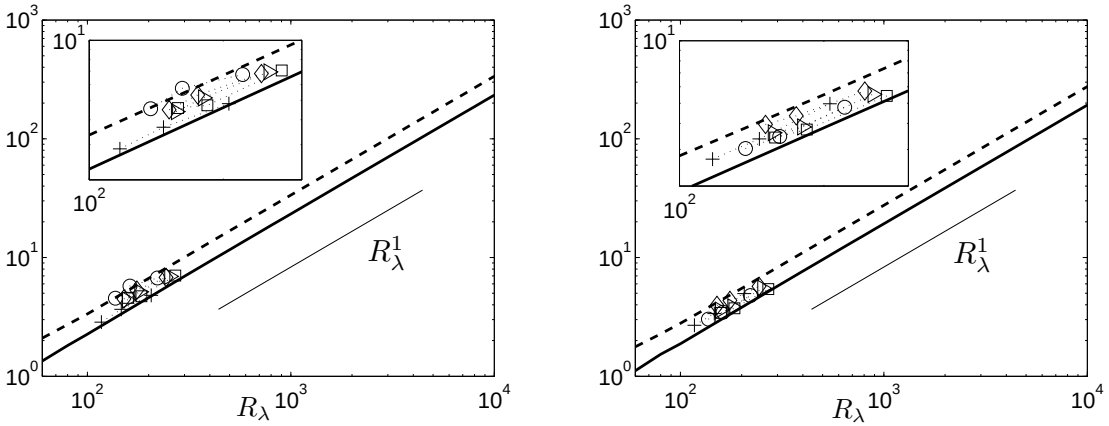


FIGURE 5.6 – Evolution de la longueur de cross-over L_c en fonction de R_λ. —— : Aivalis *et al.* [1], - - - - : Kurien & Sreenivasan [85], ○ CC, □ SqC, ♢ ScC, ▷ P, + SS. (a) $L_c|_u/\lambda$, (b) $L_c|_q/\lambda$

La proportionnalité entre $L_c|_u$, $L_c|_q$ et le nombre de Reynolds R_λ est tout à fait vérifiée. A noter que pour un même R_λ, la valeur de L_c évaluée par le biais du modèle de Aivalis *et al.* est systématiquement plus faible que celle prodiguée par le modèle de Kurien & Sreenivasan. Cela est une conséquence du fait que $I_u|_K < I_u|_A$ ou bien de manière équivalente $I_q|_K < I_q|_A$. De plus, la proportionnalité entre L_c et R_λ est tout à fait vérifiée par l'expérience où les estimations semblent correctement bornées par les deux modèles. Pour un $R_\lambda \approx 300 - 400$, L_c est séparé de seulement une décade par rapport à λ. Un nombre de Reynolds de $3000 - 4000$ doit être atteint afin d'obtenir une gamme inertielle suffisamment large afin de perdre l'influence des conditions initiales.

5.3.3 Tendance à la loi asymptotique 4/5 et 4/3

Nous avons précédemment remarqué que la valeur maximum du terme de transfert énergétique mesuré dans les sillage des cinq obstacles $A_u = \max(G_u)$ ou $A_q = \max(G_q)$ est systématiquement plus grande que celle prodiguée par les deux modèles. Nous tâchons maintenant d'élucider une éventuelle persistance de cette caractéristique pour de plus forts nombres de Reynolds turbulents.

Par analogie avec Antonia & Burattini [4], l'évolution asymptotique vers la loi 4/5 et 4/3 peut être modélisée. Les résultats, pour trois valeurs différentes de l'exposant de décroissance m_u et m_q, sont représentés sur la Fig. 5.7. Au regard de ces figures, l'influence du choix de l'exposant de décroissance est discernable (en proportion mineure) seulement pour de très faibles valeurs de R_λ, et devient d'autant plus faible que le nombre de Reynolds devient important. Cela est une conséquence des effets à grande échelle qui deviennent de plus en plus faibles au fur et à mesure que R_λ augmente. Pour les nombres de Reynolds rencontrés dans cette étude $150 < R_\lambda < 300$, le choix de m_u ou m_q est déjà quasiment sans conséquence. L'influence du modèle est quant à lui bien plus discernable et devient également négligeable pour de grandes valeurs du nombre de Reynolds.

Les points expérimentaux sont également représentés sur la Fig. 5.7 autour desquels des barres d'erreur ont été ajoutées. Concernant les barres d'erreurs verticales, nous supposons que les possibles erreurs ne proviennent que de l'incertitude sur le taux de dissipation moyen $\overline{\epsilon}$. Dans cette étude les composantes de vorticité ω_z et ω_y ont été mesurées indépendamment en pivotant la sonde de 90^o autour de son axe. Ainsi, $\overline{\epsilon}$ peut être évalué par le biais de ces différentes relations :

$$\overline{\epsilon}_{iso} = 15\nu\overline{\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2}, \tag{5.31}$$

$$\overline{\epsilon}_q = 3\nu\left[\overline{\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2} + \overline{\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2} + \overline{\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2}\right], \tag{5.32}$$

$$\overline{\epsilon}_{\omega_z} = \nu\left(2\overline{\omega_z^2} + \overline{\omega_y^2}\right), \tag{5.33}$$

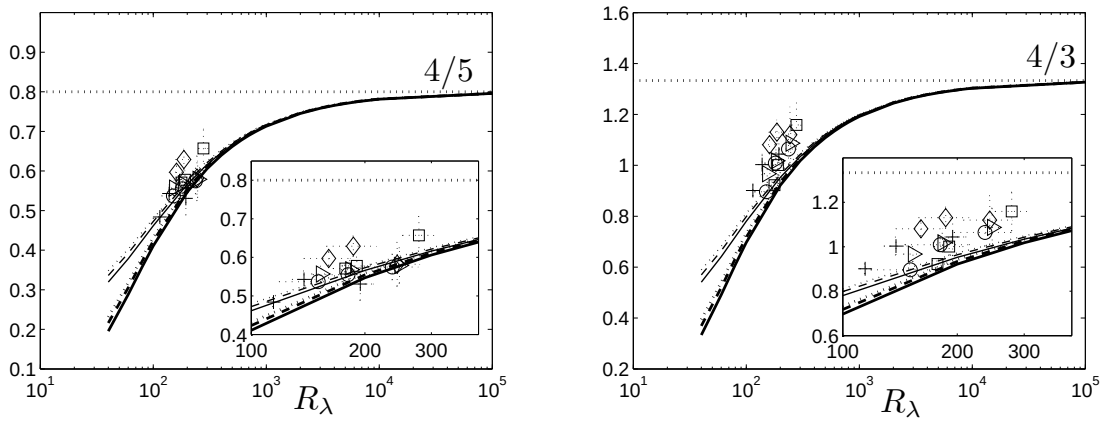
$$\overline{\epsilon}_{\omega_y} = \nu\left(\overline{\omega_z^2} + 2\overline{\omega_y^2}\right), \tag{5.34}$$

$$\overline{\epsilon}_{xy} = \nu\left[6\overline{\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2} + 3\overline{\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2} + 2\overline{\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2} + \overline{\left(\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial x}\right)}\right], \tag{5.35}$$

$$\overline{\epsilon}_{xz} = \nu\left[6\overline{\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2} + 3\overline{\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2} + 2\overline{\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2} + \overline{\left(\frac{\partial u}{\partial z}\frac{\partial w}{\partial x}\right)}\right]. \tag{5.36}$$

Dans toutes ces relations, la variance des dérivées de vitesse a été corrigée en utilisant la méthode spectrale proposée par [11]. On définit alors les barres d'erreur verticales comme l'écart type entre ces différentes relations. Il s'agit donc d'une mesure de l'anisotropie de l'écoulement aux échelles visqueuses. La valeur fixée au final est la moyenne entre toutes ces relations, *i.e.* $\overline{\epsilon}$ = moyenne $\left(\overline{\epsilon}_{iso}, \overline{\epsilon}_q, \overline{\epsilon}_{\omega_z}, \overline{\epsilon}_{\omega_y}, \overline{\epsilon}_{xy}, \overline{\epsilon}_{xz}\right)$.

Concernant les barres d'erreur horizontales, nous calculons la différence entre $R_{\lambda_u} = \frac{\sqrt{\overline{u^2}}\lambda_u}{\nu}$ and $R_{\lambda_q} = \frac{\sqrt{\overline{q^2}}\lambda_q}{\sqrt{3}\nu}$, où $\lambda_u^2 = 15\nu\frac{\overline{u^2}}{\overline{\epsilon}}$ et $\lambda_q^2 = 5\nu\frac{\overline{q^2}}{\overline{\epsilon}}$. Le rapport entre R_{λ_u} et R_{λ_q} est



(a) (b)

FIGURE 5.7 – (a) Approche à la loi 4/5. (b) Approche à la loi 4/3. ○ CC, □ SqC, ♢ ScC, ▷ P, + SS. Lignes fines : Kurien & Sreenivasan [85] ; lignes épaisses : Aivalis *et al.* [1] model —— : $m_u = m_q = 1.25$, - - - - : $m_u = m_q = 1.5$, ····· : $m_u = m_q = 1.75$

donc :

$$\frac{R_{\lambda_u}}{R_{\lambda_q}} = \sqrt{\frac{3\overline{u^2}}{\overline{q^2}}} \left(\frac{\lambda_u}{\lambda_q}\right) = \frac{3\overline{u^2}}{\overline{q^2}} \tag{5.37}$$

Ce qui donne donc une mesure de l'anisotropie aux grandes échelles. D'après la Fig. 5.7, la valeur maximum du transfert énergétique au sein des cinq écoulements de sillage semble systématiquement plus grande que celle prédite par les deux modèles. Aucune atténuation de cette caractéristique n'est discernable lorsque le nombre de Reynolds augmente. Il est possible que de plus forts nombres de Reynolds doivent être atteints pour voir ce comportement plus rapide à la loi 4/3 ou 4/5 s'amenuiser.

Une tendance plus accentuée aux lois asymptotiques fut également observée en turbulence forcée [4]. Il semble donc que le sillage soit un écoulement intermédiaire entre un écoulement en décroissance et une turbulence forcée. Intuitivement, nous associons ce forçage à la présence du mouvement organisé, donnant lieu à des mécanismes supplémentaires de production, transfert (et autre) d'énergie cinétique.

5.3.4 Conclusion

Les conclusions de cette section sont triples. Tout d'abord, à partir de mesures réalisées au Coria à différentes positions spatiales dans le sillage d'un cylindre, l'hypothèse de similitude d'équilibre est vérifiée. Les statistiques deux points évoluent alors de manière

similaire quelle que soit la distance en aval du cylindre. Cette propriété autorise l'utilisation de la forme auto-similaire des bilans à chaque échelle ([7], [4]) qui peuvent ainsi être évalués à partir de mesures en un seul point de l'espace.

A partir des bilans en deux points, nous montrons que les conditions initiales ne se ressentent que pour des séparations supérieures à une certaine valeur limite. Nous associons cette limite à l'échelle L_c où le terme de décroissance à grande échelle et le terme de transfert s'équivalent. Le bilan énergétique des échelles supérieures à L_c est alors principalement constitué de processus à grande échelle qui transmettent la trace des conditions initiales. Pour les séparations inférieures à L_c, le type d'obstacle n'a pas plus d'influence et les statistiques évoluent de manière analogue à une turbulence isotrope en décroissance.

A partir d'arguments dimensionnels, nous montrons que L_c est proportionnelle à un paramètre caractéristique macro-échelle, en l'occurrence la taille caractéristique de l'obstacle D. L'extension spatiale séparant L_c à λ est ainsi proportionnelle à R_λ. Cette évolution fut confirmée à la fois par le biais des modèles et de l'expérience.

Finalement, nous mettons en évidence que la valeur maximum du transfert énergétique est systématiquement plus grande que celle prédite par les modèles d'une turbulence en décroissance. Nous supposons que le mouvement cohérent qui, rappelons le, occasionne un forçage supplémentaire est à l'origine de cet écart. Il nous semble que cette observation ouvre une boîte de Pandore.

Dans la section suivante, nous prenons en considération le mouvement cohérent afin de caractériser l'influence du mouvement organisé, notamment sur la dynamique du transfert énergétique à chaque échelle.

5.4 Bilan à chaque échelle prenant en considération le mouvement organisé

Scale-by-scale energy budgets which account for the coherent motion

Thiesset[1], F. & Danaila[1], L. & Antonia[2], R.A & Zhou[3], T.

[1]CORIA CNRS UMR 6614, University of Rouen, France
[2] School of Mechanical Engineering, University of Newcastle, Australia
[3] Civil and Resource Engineering, University of Western Australia, Australia

E-mail: danaila@coria.fr

Abstract. Scale-by-scale energy budget equations are written for flows where coherent structures may be prominent. Both general and locally isotropic formulations are provided. In particular, the contribution to the production, diffusion and energy transfer terms associated with the coherent motion is highlighted. Preliminary results are presented in the intermediate wake of a circular cylinder for phase-averaged second-and third-order structure functions. The experimental data provide adequate support for the scale-by-scale budgets.

1. Introduction

Characterizing and understanding turbulent flows are necessary steps prior to modelling and predicting their statistics as well as the dynamical behaviour which underpins these statistics. Since the pioneering work of Townsend (1976) numerous studies have confirmed the persistence of the organized or coherent motion (CM) in a wide variety of turbulent shear flows. Since CM plays an important role in the context of turbulence dynamics, a lot of effort has been devoted to the extraction of coherent structures, with the aim of learning more about their dynamical nature and their contribution to the total statistics. The meaningful extraction of CM entails establishing clear criteria for defining it and hence distinguishing it from the mean flow and the random motion (RM). Since the major challenge is to predict turbulent flow statistics, a first (quite important) step would be to predict the interactions between CM and RM. The process of turbulence birth starts with mean velocity gradients (stagnation points or regions), followed by instabilities which lead to CM and are followed by the onset of RM. For decaying flows such as wakes, there is now abundant experimental and numerical support of the persisting influence of the CM far downstream of the turbulent energy injection (Cimbala *et al.* (1988), Bisset *et al.* (1990)).

In turbulent flows, the energy is generally distributed over a wide range of scales. A first feature which distinguishes CM from RM is the scale(s) at which these two motions exist. CM is generally characterized by a single scale, or a very restricted range of scales (a narrow peak in the energy spectrum) whereas RM is represented by a wide range of scales. Kolmogorov (Kolmogorov (1941)) stipulated that there is a scale beyond which the influence of the anisotropic/coherent large scales is not perceptible anymore and, as a consequence, the velocity statistics become locally isotropic. Presumably for this reason, the influence of CM on RM was not considered

Published under licence by IOP Publishing Ltd

at the level of an arbitrary scale, implicitly supposing that the effect of CM is confined to the level of its characteristic scale. Alternately, both the nonlocality of the cascade and the finite Reynolds number (FRN) effects lead to the fact that CM might play a role on RM at a given, arbitrary scale.

The focus of this study is to understand the relationship between the three main ingredients of the flow (mean velocity, CM and RM) at a given scale (small, intermediate and large). The variables of the problem are the scale r (separation between two spatial locations) and the CM phase ϕ (also interpreted as the transit period of the CM).

The separation between the CM and RM is done according to a triple decomposition of the instantaneous velocity field proposed by Reynolds & Hussain (1972), viz.

$$U_i = \overline{U}_i + \tilde{u}_i + u_i' \tag{1}$$

where $\overline{U}_i$, $\tilde{u}_i$, u_i' respectively stand for the mean, coherent and random velocities along the i-th direction ($\overline{x}$ indicates time averaging).

Since CM is characterized by a time/scale periodicity, it is useful to introduce the operation of phase-averaging (i.e. averaging over the CM period), noted as $\langle\cdot\rangle$. The resulting statistics will therefore depend on the scale r and on the phase ϕ. The physical quantities are the energy of the RM and CM for a given set of parameters (r, ϕ), which are second-order structure functions calculated with velocity increments at a scale $\vec{r}$, defined as $\Delta\alpha(\vec{r}) = \alpha(\vec{x}+\vec{r}) - \alpha(\vec{x})$, where α is any velocity component:

$$\langle \Delta q'^2 \rangle (\vec{r}, \phi) = \left\langle (u_i'(\vec{x}+\vec{r}) - u_i'(\vec{x}))^2 \right\rangle, \quad \Delta\tilde{q}^2 (\vec{r}, \phi) = (\tilde{u}_i(\vec{x}+\vec{r}) - \tilde{u}_i(\vec{x}))^2, \tag{2}$$

where $\langle\rangle$ indicates phase averaging (see Reynolds & Hussain (1972) for the procedure), q indicates the total kinetic energy and double indices indicate summation. As a first step, local isotropy will be supposed so that the dependence is on r (the modulus of $\vec{r}$) only, which corresponds to considering (for instance) the central region of a cylinder wake.

The aim of this study is twofold.

- First, we derive scale-by-scale energy budgets for both CM and RM which mathematically emphasize their interaction at a vectorial scale $\vec{r}$ separating two spatial points. We provide transport equations of $\overline{\langle \Delta q'^2 \rangle}$ and $\overline{\Delta\tilde{q}^2}$, the time-averaged values of $\langle \Delta q'^2 \rangle (\vec{r}, \phi)$ and $\Delta\tilde{q}^2 (\vec{r}, \phi)$. General (Section 2.1), as well as locally isotropic formulations (Section 2.2), are provided. These equations evidence additional terms corresponding to the transport, production, diffusion and forcing of RM by CM.
- Second, we turn our attention to the particular case of the wake behind a cylinder (Section 3), in which the scale-phase second-and third-order structure functions are calculated from hot-wire measurements with phase reference. We have chosen this flow because it is characterized by a persisting Bénard-Von Kármán street, even in the so-called 'far field' (Cimbala *et al.* (1988), Bisset *et al.* (1990)). Specifically, we identify the energy distributions of the CM and RM at a given (r, ϕ) in the intermediate wake of a circular cylinder. We finally show that the scale-by-scale budget of the random field is well supported by experimental data on the wake centreline.

2. Analytical development

2.1. General formulation

The starting point is the triple decomposition given by Eq. 1, and the objective is to derive transport equations for quantities such as time averages of $\langle \Delta q'^2 \rangle (\vec{r}, \phi)$ and $\langle \Delta\tilde{q}^2 \rangle (\vec{r}, \phi)$.

As an example, Reynolds & Hussain (1972) described analytically the interaction between turbulence and an organized wave. These authors derived dynamical and one-point energy

budgets equations, for both the coherent and the random components of the velocity field. They proposed using the phase averaging operator which allows assessing the dynamical process associated with coherent motion, one step before the temporal averaging. These authors (Reynolds & Hussain (1972)) obtained the dynamical equations for both the random and the coherent motion, viz.

$$\frac{\partial \tilde{u}_i}{\partial t} + \overline{U}_j \frac{\partial \tilde{u}_i}{\partial x_j} + \tilde{u}_j \frac{\partial \overline{U}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\tilde{u}_i\tilde{u}_j - \overline{\tilde{u}_i\tilde{u}_j}\right) + \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\left\langle u_i' u_j' \right\rangle - \overline{u_i' u_j'}\right) = -\frac{\partial \tilde{p}}{\partial x_i} + \nu \frac{\partial^2 \tilde{u}_i}{\partial x_j^2}; \tag{3}$$

$$\frac{\partial u_i'}{\partial t} + \overline{U}_j \frac{\partial u_i'}{\partial x_j} + \tilde{u}_j \frac{\partial u_i'}{\partial x_j} + u_j' \frac{\partial \overline{U}_i}{\partial x_j} + u_j' \frac{\partial \tilde{u}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial}{\partial x_j}\left(u_i' u_j' - \left\langle u_i' u_j' \right\rangle\right) = -\frac{\partial p'}{\partial x_i} + \nu \frac{\partial^2 u_i'}{\partial x_j^2}. \tag{4}$$

In (3) and (4), ν is the kinematic viscosity, p is the kinematic pressure, and repeated indices signify summation. Following the procedure established by Antonia *et al.* (1997) and Danaila *et al.* (2004), (3) and (4) are each written at the two points $\vec{x}$ and $\vec{x}^+ = \vec{x} + \vec{r}$, where $\vec{r}$ is the separation vector between the two points, and the superscript '+' hereafter denotes quantities considered at the point $\vec{x} + \vec{r}$. The substraction of one from the other yields the transport equations of the organized and random velocity increment, $\Delta\tilde{u}_i = \tilde{u}_i^+ - \tilde{u}_i$ and $\Delta u_i' = u_i'^+ - u_i'$ respectively, viz.

$$\begin{aligned} &\frac{\partial \Delta\tilde{u}_i}{\partial t} + \Delta\left(\overline{U}_j \frac{\partial \tilde{u}_i}{\partial x_j}\right) + \Delta\left(\tilde{u}_j \frac{\partial \overline{U}_i}{\partial x_j}\right) + \Delta\left(\frac{\partial}{\partial x_j}\left(\tilde{u}_i\tilde{u}_j - \overline{\tilde{u}_i\tilde{u}_j}\right)\right) \\ &+\Delta\left(\frac{\partial}{\partial x_j}\left(\left\langle u_i' u_j' \right\rangle - \overline{u_i' u_j'}\right)\right) = -\left(\frac{\partial}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_i^+}\right)\Delta\tilde{p} + \nu\left(\frac{\partial^2}{\partial x_j \partial x_j} + \frac{\partial^2}{\partial x_j^+ \partial x_j^+}\right)\Delta\tilde{u}_i; \end{aligned} \tag{5}$$

and

$$\begin{aligned} &\frac{\partial \Delta u_i'}{\partial t} + \Delta\left(\overline{U}_j \frac{\partial u_i'}{\partial x_j}\right) + \Delta\left(\tilde{u}_j \frac{\partial u_i'}{\partial x_j}\right) + \Delta\left(u_j' \frac{\partial \overline{U}_i}{\partial x_j}\right) + \Delta\left(u_j' \frac{\partial \tilde{u}_i}{\partial x_j}\right) \\ &+\Delta\left(\frac{\partial}{\partial x_j}\left(u_i' u_j' - \left\langle u_i' u_j' \right\rangle\right)\right) = -\left(\frac{\partial}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_i^+}\right)\Delta p' + \nu\left(\frac{\partial^2}{\partial x_j \partial x_j} + \frac{\partial^2}{\partial x_j^+ \partial x_j^+}\right)\Delta u_i'. \end{aligned} \tag{6}$$

At this stage, the statistics at the two points $\vec{x}$ and $\vec{x}^+$ are considered as being independent. Then, considering the gradient with respect to the mid-point $\vec{X} = \frac{1}{2}\left(\vec{x} + \vec{x}^+\right)$ (Hill (2002), Danaila *et al.* (2004))

$$\frac{\partial}{\partial x_j} = -\frac{\partial}{\partial r_j} + \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial X_j}, \quad \frac{\partial}{\partial x_j^+} = \frac{\partial}{\partial r_j} + \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial X_j}, \tag{7}$$

by multiplying (5) and (6) with $2\Delta\tilde{u}_i$ and $2\Delta u_i'$ respectively, applying phase followed by a time averaging, and finally noting that

$$\left\langle \Delta u_j' \Delta u_i' \right\rangle = \left\langle \Delta u_i \Delta u_j \right\rangle - \Delta\tilde{u}_i \Delta\tilde{u}_j \tag{8}$$

$$\overline{\left\langle \Delta u_j \Delta q^2 \right\rangle} = \overline{\Delta\tilde{u}_j \Delta\tilde{q}^2} + \overline{\Delta\tilde{u}_j \left\langle \Delta q'^2 \right\rangle} + \overline{\left\langle \Delta u_j' \Delta q'^2 \right\rangle} + 2\overline{\Delta\tilde{u}_i \left\langle \Delta u_j' \Delta u_i' \right\rangle}, \tag{9}$$

we obtain the energy budgets for the organized and random motions. These are

$$\underbrace{\frac{\partial}{\partial t}\overline{\Delta\tilde{q}^2}}_{\mathcal{I}_c}+\underbrace{\overline{U}_j\frac{\partial\overline{\Delta\tilde{q}^2}}{\partial x_j}}_{\mathcal{A}_{cm}}+\underbrace{\frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x_j}+\frac{\partial}{\partial x_j^+}\right)\left[\overline{\left(\tilde{u}_j+\tilde{u}_j^+\right)\Delta\tilde{q}^2}+2\overline{\left\langle\left(u_j'+u_j'^+\right)\Delta u_i'\right\rangle\Delta\tilde{u}_i}\right]}_{\mathcal{D}_{cc}+\mathcal{D}_{rc}^1}$$
$$+\underbrace{2\overline{\Delta\tilde{u}_i\Delta\tilde{u}_j}\frac{\partial\overline{U}_i}{\partial x_j}}_{\mathcal{P}_{cm}}-\underbrace{\overline{\left\langle\left(u_j'+u_j'^+\right)\Delta u_i'\right\rangle\left(\frac{\partial}{\partial x_j}+\frac{\partial}{\partial x_j^+}\right)\Delta\tilde{u}_i}}_{\mathcal{P}_{rc}}+\underbrace{2\left(\frac{\partial}{\partial x_i}+\frac{\partial}{\partial x_i^+}\right)\overline{\Delta\tilde{u}_i\Delta\tilde{p}}}_{\mathcal{D}_{cp}}$$
$$+\underbrace{\frac{\partial}{\partial r_j}\overline{\Delta\tilde{u}_j\Delta\tilde{q}^2}}_{\mathcal{T}_c}+\underbrace{2\overline{\Delta\tilde{u}_i\frac{\partial}{\partial r_j}\left\langle\Delta u_i'\Delta u_j'\right\rangle}}_{\mathcal{F}_c}$$
$$+\underbrace{\nu\left[-\left(2\frac{\partial^2}{\partial r_j^2}+\frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial X_j^2}\right)\overline{\Delta\tilde{q}^2}-2\left(\overline{\frac{\partial\tilde{u}_i}{\partial x_j}\frac{\partial\tilde{u}_j}{\partial x_i}}+\overline{\frac{\partial\tilde{u}_i^+}{\partial x_j^+}\frac{\partial\tilde{u}_j'^+}{\partial x_i^+}}\right)\right]}_{\mathcal{V}_c}+2\left(\tilde{\epsilon}+\tilde{\epsilon}^+\right)=0; \qquad (10)$$

and

$$\underbrace{\frac{\partial}{\partial t}\overline{\Delta q'^2}}_{\mathcal{I}_r}+\underbrace{\overline{U}_j\frac{\partial\overline{\Delta q'^2}}{\partial x_j}}_{\mathcal{A}_{rm}}+\underbrace{\frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x_j}+\frac{\partial}{\partial x_j^+}\right)\left[\overline{\left(u_j'+u_j'^+\right)\Delta q'^2}+\overline{\left(\tilde{u}_j+\tilde{u}_j^+\right)\langle\Delta q'^2\rangle}\right]}_{\mathcal{D}_{rr}+\mathcal{D}_{rc}^2}$$
$$+\underbrace{2\overline{\Delta u_i'\Delta u_j'}\frac{\partial\overline{U}_i}{\partial x_j}}_{\mathcal{P}_{rm}}+\underbrace{\overline{\left\langle\left(u_j'+u_j'^+\right)\Delta u_i'\right\rangle\left(\frac{\partial}{\partial x_j}+\frac{\partial}{\partial x_j^+}\right)\Delta\tilde{u}_i}}_{\mathcal{P}_{rc}}+\underbrace{2\left(\frac{\partial}{\partial x_i}+\frac{\partial}{\partial x_i^+}\right)\overline{\Delta u_i'\Delta p'}}_{\mathcal{D}_{rp}}$$
$$+\underbrace{\frac{\partial}{\partial r_j}\overline{\langle\Delta u_j\Delta q^2\rangle}}_{\mathcal{T}}-\underbrace{\frac{\partial}{\partial r_j}\overline{\Delta\tilde{u}_j\Delta\tilde{q}^2}}_{\mathcal{T}_c}-\underbrace{2\overline{\Delta\tilde{u}_i\frac{\partial}{\partial r_j}\left\langle\Delta u_i'\Delta u_j'\right\rangle}}_{\mathcal{F}_c}$$
$$+\underbrace{\nu\left[-\left(2\frac{\partial^2}{\partial r_j^2}+\frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial X_j^2}\right)\overline{\Delta q'^2}-2\left(\overline{\frac{\partial u_i'}{\partial x_j}\frac{\partial u_j'}{\partial x_i}}+\overline{\frac{\partial u_i'^+}{\partial x_j^+}\frac{\partial u_j'^+}{\partial x_i^+}}\right)\right]}_{\mathcal{V}_r}+2\left(\epsilon'+\epsilon'^+\right)=0, \qquad (11)$$

where $\overline{\Delta\tilde{q}^2}=\overline{\Delta\tilde{u}_i\Delta\tilde{u}_i}$ and $\overline{\Delta q'^2}=\overline{\Delta u_i'\Delta u_i'}$ are respectively the CM and RM kinetic energies at a given scale. The quantities $\tilde{\epsilon}=\frac{\nu}{2}\overline{\left(\frac{\partial\tilde{u}_i}{\partial x_j}+\frac{\partial\tilde{u}_j}{\partial x_i}\right)^2}$ and $\epsilon'=\frac{\nu}{2}\overline{\left(\frac{\partial u_i'}{\partial x_j}+\frac{\partial u_j'}{\partial x_i}\right)^2}$ are the mean energy dissipation rates of the coherent and the random motions, respectively.

For the sake of simplicity, (10) and (11) can be formally written as

$$\mathcal{I}_c+\mathcal{A}_{cm}+\mathcal{D}_{cc}+\mathcal{D}_{rc}^1+\mathcal{P}_{cm}-\mathcal{P}_{rc}+\mathcal{D}_{cp}+\mathcal{T}_c+\mathcal{F}_c+\mathcal{V}_c+2\left(\tilde{\epsilon}+\tilde{\epsilon}^+\right)=0; \qquad (12)$$
$$\mathcal{I}_r+\mathcal{A}_{rm}+\mathcal{D}_{rr}+\mathcal{D}_{rc}^2+\mathcal{P}_{rm}+\mathcal{P}_{rc}+\mathcal{D}_{rp}+\mathcal{T}-\mathcal{T}_c-\mathcal{F}_c+\mathcal{V}_r+2\left(\epsilon'+\epsilon'^+\right)=0, \qquad (13)$$

where $\mathcal{I}$, $\mathcal{A}$, $\mathcal{D}$, $\mathcal{P}$, $\mathcal{T}$, $\mathcal{F}$ et $\mathcal{V}$ denote respectively the non stationarity, advection, diffusion, production, transfer, forcing and viscous terms. The subscripts m, c, r correspond to the mean, coherent and random motions, and $\mathcal{D}_p$ indicates the pressure diffusion.

Equations (10) and (11) are the general formulations of the scale-by-scale budgets which account for the coherent motion in which each term depends on the separation vector $\vec{r}$. For homogeneous flows and in the limit of large separations, the scale-by-scale budgets (10) and (11) are fully consistent with one-point energy budget provided by Reynolds & Hussain (1972) (Eqs. (3.2b) and (3.2c) p. 266 in Reynolds & Hussain (1972)). Each term can be evaluated by DNS (Direct Numerical Simulations), without any other assumption. Equations (10) and (11) provide a general basic framework which ought to allow the physics of the interaction between coherent and random fields to be unravelled.

By comparison with Danaila *et al.* (2004), there are additional terms which emerge in the present equations, e.g. the terms $\mathcal{P}_{rc}$, $\mathcal{T}_c$ and $\mathcal{F}_c$ which can be identified as the production of random fluctuations by the coherent motion, the coherent kinetic energy transfer and the forcing associated by the presence of a coherent motion are emphasized. All three are present in equations (10) and (11), but with opposite sign. This means that what represents a loss of energy for CM (10), constitutes a gain of energy for RM (11). Further, we can shed some light on the transport of random statistical quantities by the organized motion $\mathcal{D}^1_{rc}$ and $\mathcal{D}^2_{rc}$.

2.2. The locally homogeneous and isotropic context

We now turn our attention to the derivation of (10) and (11) in a locally homogeneous and isotropic context. This assumption yields considerable simplifications of the analytical development and allows an easier comparison with simpler quantities, which could be therefore inferred from measurements (Danaila *et al.* (1999), Danaila *et al.* (2001)). Considering first a locally homogeneous turbulent flow, the viscous term simplifies such as

$$\nu\left[-\left(2\frac{\partial^2}{\partial r_j^2}+\frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial X_j^2}\right)\overline{\Delta q'^2}-2\left(\overline{\frac{\partial u_i'}{\partial x_j}\frac{\partial u_j'}{\partial x_i}}+\overline{\frac{\partial u_i'^+}{\partial x_j^+}\frac{\partial u_j'^+}{\partial x_i^+}}\right)\right]=2\nu\frac{\partial^2}{\partial r_j^2}\overline{\Delta q'^2}, \tag{14}$$

since $\overline{\frac{\partial u_i'}{\partial x_j}\frac{\partial u_j'}{\partial x_i}}=0$ and $\frac{\partial^2}{\partial X_j^2}=0$, Hill (1997). The same simplification holds for the coherent motion. Then, in the context of local isotropy, the divergence and the Laplacian operators are expressed as:

$$\frac{\partial}{\partial r_j}=\frac{2}{r}+\frac{\partial}{\partial r},\qquad \frac{\partial^2}{\partial r_j^2}=\left(\frac{2}{r}+\frac{\partial}{\partial r}\right)\frac{\partial}{\partial r}. \tag{15}$$

By further using (15), after multiplying (10) and (11) with $r^2=r_jr_j$, integrating with respect to r and dividing by r^2, we obtain

$$\begin{aligned}&\frac{1}{r^2}\int_0^r s^2\left(\mathcal{A}_{cm}+\mathcal{D}_{cc}+\mathcal{D}^1_{rc}+\mathcal{P}_{cm}+\mathcal{P}_{rc}+\mathcal{D}_{cp}\right)ds\\ &+\overline{\Delta\tilde{u}_\parallel\Delta\tilde{q}^2}+\frac{2}{r^2}\int_0^r\overline{\Delta\tilde{u}_i\frac{\partial}{\partial s}s^2\left\langle\Delta u_\parallel'\Delta u_i'\right\rangle}ds-2\nu\frac{\partial}{\partial r}\overline{\Delta\tilde{q}^2}+\frac{4}{3}\tilde{\epsilon}r=0;\end{aligned} \tag{16}$$

$$\begin{aligned}&\frac{1}{r^2}\int_0^r s^2\left(\mathcal{A}_{rm}+\mathcal{D}_{rr}+\mathcal{D}^2_{rc}+\mathcal{P}_{rm}-\mathcal{P}_{rc}+\mathcal{D}_{rp}\right)ds\\ &+\overline{\left\langle\Delta u_\parallel\Delta q^2\right\rangle}-\overline{\Delta\tilde{u}_\parallel\Delta\tilde{q}^2}-\frac{2}{r^2}\int_0^r\overline{\Delta\tilde{u}_i\frac{\partial}{\partial s}s^2\left\langle\Delta u_\parallel'\Delta u_i'\right\rangle}ds-2\nu\frac{\partial}{\partial r}\overline{\Delta q'^2}+\frac{4}{3}\epsilon'r=0.\end{aligned} \tag{17}$$

Equations (16) and (17) are the scale-by-scale energy budgets of the organized and random motions respectively, in a locally homogeneous and isotropic context. Here, s is a dummy

variable and the subscript $\parallel$ denotes the direction parallel to the separation vector. When the spatial separation is inferred by invoking Taylor hypothesis, this direction coincides with the direction of the mean flow.

The first line of Eqs. (16) and (17) represents the energy contribution of the largest scales (Danaila *et al.* (2004)). The main difference with respect to the extended form of Kolmogorov equation Antonia *et al.* (1997) equation, consists in several extra terms due to the presence of CM. The effective energy transfer of the random velocity component is explicit and is thus constituted of the total energy transfer $\overline{\langle \Delta u_{\parallel} \Delta q^2 \rangle}$ (including the coherent and random contributions), from which is subtracted the coherent energy transfer $\overline{\Delta \tilde{u}_{\parallel} \Delta \tilde{q}^2}$ and the forcing term $\frac{2}{r^2} \int_0^r \overline{\Delta \tilde{u}_i \frac{\partial}{\partial s} s^2 \left\langle \Delta u'_{\parallel} \Delta u'_i \right\rangle} ds$.

3. Results in the wake of a circular cylinder

3.1. Measurements

The analytical considerations previously developed are now used to assess the essential physics and particularly the dynamical nature associated with the presence of the organized motion. Hot-wire measurements previously made at the University of Newcastle (Zhou *et al.* (2003)) are used to calculate two-point statistics of CM and RM. The measurements were conducted in an open-circuit wind tunnel with a square working section of $0.35 \times 0.35m$ and $2.4m$ long. The cylinder of diameter $d = 12.7mm$ was placed horizontally to generate the wake flow. The three vorticity components were measured simultaneously by means of a four-X-wire probe, tested in grid turbulence by Antonia *et al.* (1998). The downstream location investigated here is $40d$, sufficiently far from the energy injection to expect the local isotropy to be verified and close enough to accurately extract the organized motion. The free stream velocity U_0 is $3m.s^{-1}$ corresponding to a Reynolds number, based on the cylinder diameter and upstream velocity of $Re_d = 2525$, and a Taylor micro-scale Reynolds number of about 70 on the wake centerline.

When making the hot wire probe, great effort has been attempted to keep $\Delta x = \Delta y = \Delta z$, which are about 6η, where η is the Kolmogorov length scale, and can be obtained using $\eta \equiv \left(\nu^3/\epsilon'\right)^{1/4}$. This spatial separation leads to an attenuation of the measured velocity gradients, which should have been corrected by using the spectral method proposed by Zhu & Antonia (1996). However, the estimation based on isotropic assumption, i.e. $\epsilon'_{iso} = 15\nu\overline{\left(\frac{du}{dx}\right)^2}$, can approximate the full energy dissipation rate properly, around the wake centerline, in terms of the mean value (Zhu & Antonia (1996)). The spatial separation Δx is calculated by means of the Taylor's hypothesis, $\Delta x = -U_c \Delta t$, where U_c is the mean velocity at the center of the vortices and is equal to $U_c = 0.92U_0$ at $40d$ downstream the cylinder (Zhou & Antonia (1992)).

To calculate phase averaged statistics, the transverse velocity signal v is bandpass filtered at a frequency centered on Strouhal frequency. The Hilbert transform h of the filtered signal v_f is calculated and the phase is inferred from $\phi(t) = tan^{-1}\left(\frac{h(t)}{v_f(t)}\right)$. Finally, the phase is divided into 32 segments and phase averaged statistics are calculated for each class. Statistics were calculated aver 750 integral time-scales, convergence of the statistics was checked and found to be satisfactory.

3.2. Phase-scale second-and third-order structure functions, on the wake centerline

The essential difference between our approach and the classical energy budget equations is the phase averaging operation which allows us to assess the temporal dynamics associated with the CM, one step before time averaging. Second-and third-order structure functions are as usually functions of r, but specific to our methodology, they are also functions of the phase ϕ of the CM, before being time-integrated.

Fig1(a) and 1(b) represent the phase-scale distributions of the kinetic energy of the organized and random motions respectively. In Fig1(a), one can note a strong temporal periodicity of period $\phi = \pi$ of the coherent motion kinetic energy. This periodicity might also be observable on the r axis, at scales characteristic of the organized motion (not shown). This emphasizes the spatio-temporal periodicity of the Von Kármán street. Concerning the energy distribution of random fluctuations (Fig1(b)), the influence of the CM is less perceptible. Its shape in scale r is very similar to that of the 'classical' time-integrated second-order structure function.

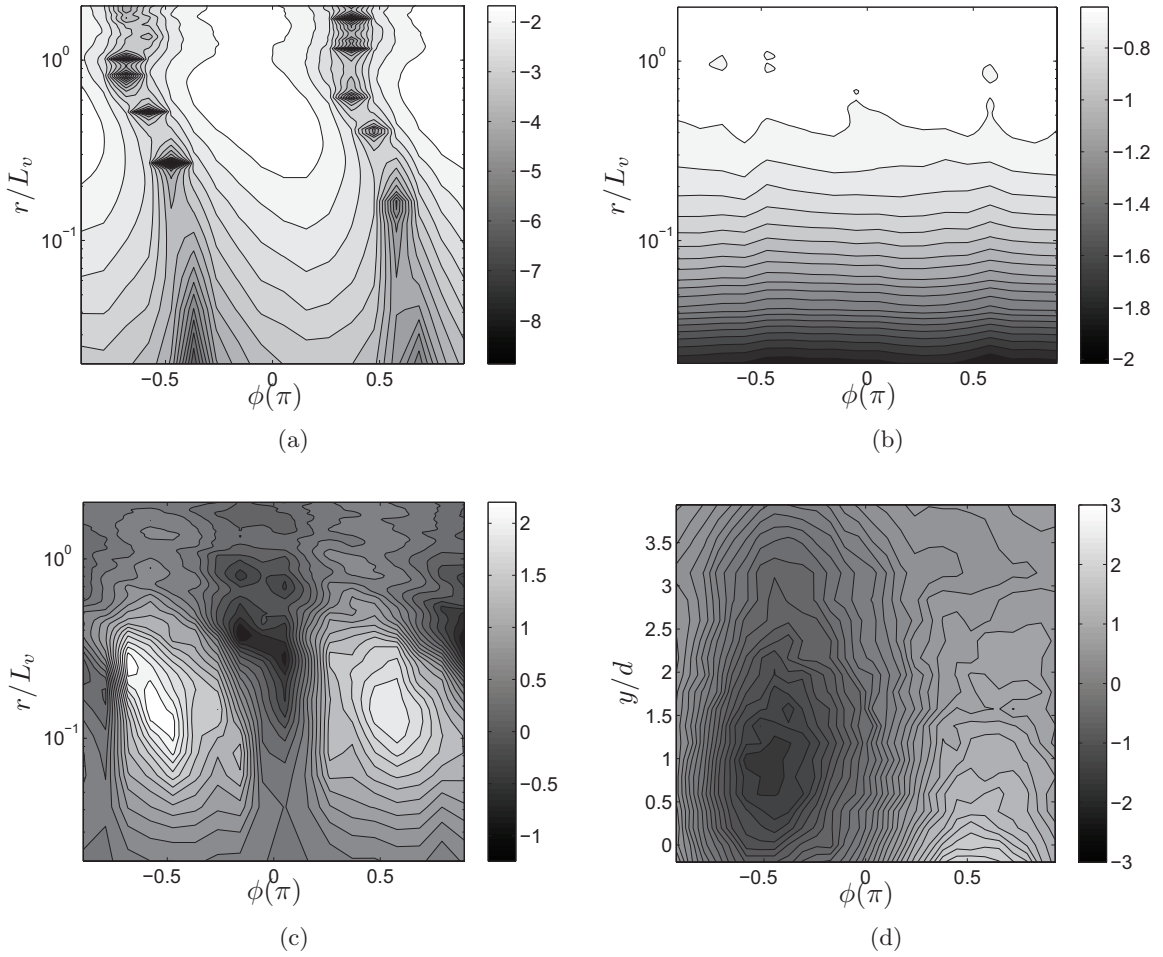


Figure 1. (a) $log_{10}\left(\Delta\tilde{q}^2\right)$ function of r and ϕ on the wake center line at $x = 40d$, r is normalized by $L_v = 4.2d$, the streamwise distance between two consecutive vortices. (b) $log_{10}\left(\left\langle\Delta q'^2\right\rangle\right)$ function of r and ϕ on the wake center line at $x = 40d$. (c) Transfer term $-\left\langle\Delta u_{\|}\Delta q^2\right\rangle/\epsilon' r$ function of r and ϕ on the wake center line at $x = 40d$. (d) Phase averaging of the spanwise vorticity component $\tilde{\omega}_z$ normalized by d/U_0 in the plan (ϕ, y).

The non linear transfer term $-\left\langle\Delta u_{\|}\Delta q^2\right\rangle$ divided by ϵr is displayed on Fig1(c). The temporal periodicity is strongly discernible, and reveals two maxima at a phase location $\phi = \pm\pi/2$ and a scale $r \approx L_v/10 \approx \lambda$, where λ is the Taylor micro-scale. Furthermore, at $\phi = 0$ this term reveals some negative values, which might a priori be associated with a local, inverse cascade. Noticeable are also maximum values larger than 4/3, presumably signifying very accelerate cascade.

In Fig1(d), it is represented the phase-averaged vorticity spanwise component. This is a

pertinent criterium of the Von Kármán street, which has a negative sign vortex centered at $\phi = -\pi/2, y = 0.75d$. Its partner of positive sign, not visible on the figure, is located at $\phi = \pi/2, y = -0.75d$. Therefore, the two maxima of the non-linear transfer term coincide with the vortex centers. There is evidence that the organized motion induces a strong temporal effect on the kinetic energy transfer at a scale r.

3.3. Scale-by-scale budget

We now turn our attention to time-averaged structure functions. Fig. 2 contains the total non linear transfer $-\overline{\langle \Delta u_\parallel \Delta q^2 \rangle}$, the additional coherent transfer and forcing due to the coherent motion $\overline{\Delta \tilde{u}_\parallel \Delta \tilde{q}^2} + \frac{2}{r^2}\int_0^r \overline{\Delta \tilde{u}_i \frac{\partial}{\partial s} s^2 \left\langle \Delta u'_\parallel \Delta u'_i \right\rangle} ds$ and the effective transfer inferred from their sum, in function of the separation r/L_v.

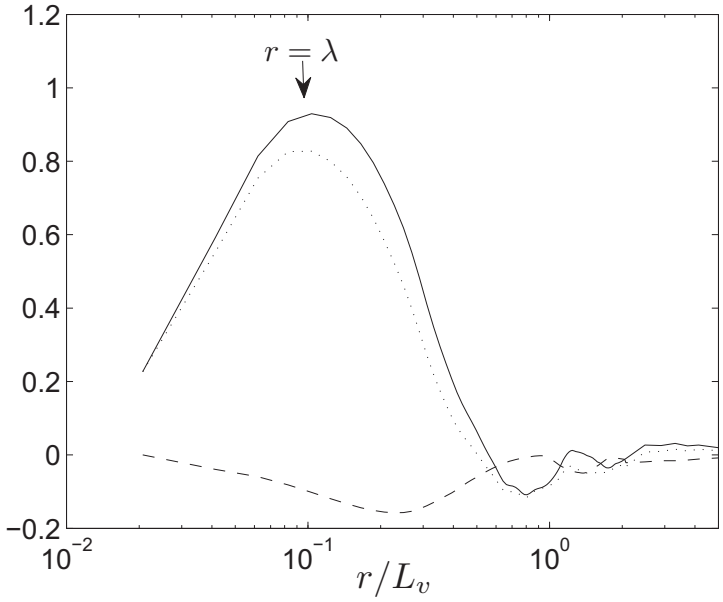


Figure 2. Non linear transfer term divided by ϵr. —— total transfer term $-\overline{\langle \Delta u_\parallel \Delta q^2 \rangle}$, - - - - coherent transfer and forcing term $\overline{\Delta \tilde{u}_\parallel \Delta \tilde{q}^2} + \frac{2}{r^2}\int_0^r \overline{\Delta \tilde{u}_i \frac{\partial}{\partial s} s^2 \left\langle \Delta u'_\parallel \Delta u'_i \right\rangle} ds$, ····· difference $-\overline{\langle \Delta u_\parallel \Delta q^2 \rangle} + \overline{\Delta \tilde{u}_\parallel \Delta \tilde{q}^2} + \frac{2}{r^2}\int_0^r \overline{\Delta \tilde{u}_i \frac{\partial}{\partial s} s^2 \left\langle \Delta u'_\parallel \Delta u'_i \right\rangle} ds$.

For weakly turbulent flows the non linear transfer term is smaller than $\frac{4}{3}\epsilon r$, because of the cross-over between viscous and large-scale effects (Danaila *et al.* (1999), Danaila *et al.* (2004)). Here, $-\overline{\langle \Delta u_\parallel \Delta q^2 \rangle}/\epsilon r \approx 0.93$. The additional energy transfer associated with the coherent motion is negative, its value is quite small, but nonnegligible. Its contribution is non zero for all separation with a maximum contribution located at about 2λ. Finally, the maximum effective transfer of the random motion is smaller than the total transfer by about 12%.

On the wake centerline, the isotropic scale-by-scale budget of the random motion is:

$$-\frac{1}{r^2}\int_0^r s^2 \mathcal{A}_{rm} ds - \overline{\langle \Delta u_\parallel \Delta q^2 \rangle}$$
$$+\overline{\Delta \tilde{u}_\parallel \Delta \tilde{q}^2} + \frac{2}{r^2}\int_0^r \overline{\Delta \tilde{u}_i \frac{\partial}{\partial s} s^2 \left\langle \Delta u'_\parallel \Delta u'_i \right\rangle} ds + 2\nu \frac{\partial}{\partial r}\overline{\Delta q'^2} = \frac{4}{3}\epsilon' r, \qquad (18)$$

which means that in the limit of large scales, the advection term is almost entirely compensated by the energy dissipation rate. All terms of the scale-by-scale budget (18) are shown in Fig. 3.

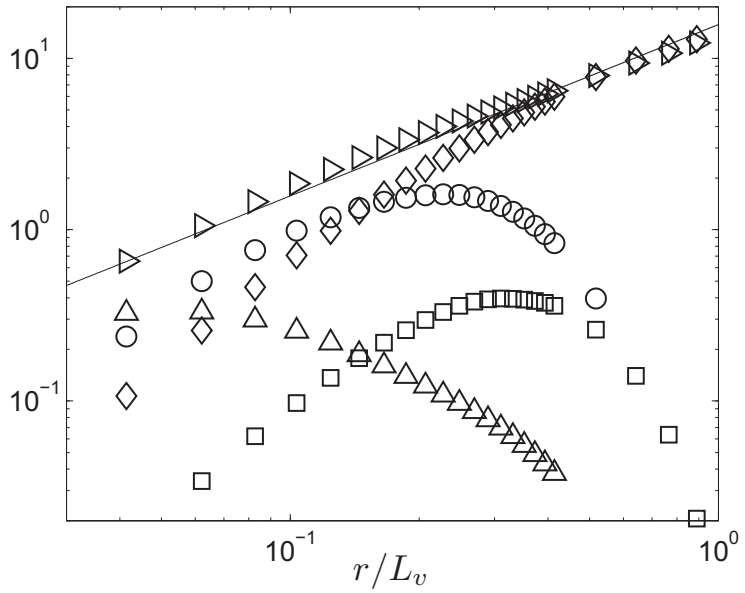


Figure 3. Term in equation (18) divided by ϵ'. —— : $\frac{4}{3}r$, $\diamondsuit$: $-\frac{1}{r^2}\int_0^r s^2\mathcal{A}_{rm}ds$, $\circ$ $-\overline{\left\langle \Delta u_\parallel \Delta q^2 \right\rangle}$, $\square$: $-\overline{\Delta\tilde{u}_\parallel \Delta\tilde{q}^2} - \frac{2}{r^2}\int_0^r \overline{\Delta\tilde{u}_i \frac{\partial}{\partial s} s^2 \left\langle \Delta u'_\parallel \Delta u'_i \right\rangle} ds$, $\triangle$: $2\nu\frac{\partial}{\partial r}\overline{\Delta q'^2}$, $\triangleright$ Left hand side of (18).

The balance between the right-and left-hand sides of (18) is reasonably satisfied at all scales. The accuracy with which (18) is validated appears to reflect that local isotropy is achieved. Several local isotropy tests were made (to be presented elsewhere) and compared with experimental data in the far-field of a wake Browne *et al.* (1987); overall, these tests seem to indicate that the use of ϵ_{iso} is justifiable even though individual components of the full energy dissipation rate exhibit departures from isotropy. Therefore, the experimental investigation in the cylinder intermediate wake supports the analytical considerations provided in Section 1.

4. Concluding remarks

Scale-by-scale budgets of the kinetic energy associated with the organized and random fields are derived using both general and isotropic frameworks. They reveal additional diffusion, production, transport terms as well as extra energy transfer and forcing terms associated with the presence of the coherent motion. These considerations put explicitly in evidence the fact that the effective energy transfer of the random motion consists of the difference between the total energy transfer and the energy transfer and forcing by the organized structures. Hot wire measurements in the intermediate wake of a circular cylinder are subsequently used to highlight the temporal dynamics due to the organized motion. It is shown that the energy transfer is clearly influenced by the coherent motion, revealing two maxima corresponding to the locations of the vortex centers. The time-averaged scale-by-scale budget (18) is also reasonably well supported by the experimental data.

References

Antonia, R. A., Ould-Rouis, M., Anselmet, F. & Zhu, Y. 1997 Analogy between predictions of Kolmogorov and Yaglom. *J. Fluid Mech.* **332**, 395–409.

Antonia, R. A, Zhou, T. & Zhu, Y. 1998 Three-component vorticity measurements in a turbulent grid flow. *J. Fluid Mech.* **374**, 29–57.

Bisset, D. K., Antonia, R. A. & Britz, D. 1990 Structure of large-scale vorticity in a turbulent far wake. *J. Fluid Mech.* **218**.

Browne, L. W. B., Antonia, R. A. & Shah, D. A. 1987 Turbulent energy dissipation in a wake. *J. Fluid Mech.* **179**, 307–326.

Cimbala, J.M., Nagib, H.M. & Roshko, A. 1988 Large structure in the far wake of two dimensional bluff bodies. *J. Fluid Mech.* **190**, 265–298.

Danaila, L., Anselmet, F. & Antonia, R. A. 2001 Turbulent energy scale budget equations in a fully developped chanel flow. *J. Fluid Mech.* **430**, 87–109.

Danaila, L., Anselmet, F., Zhou, T. & Antonia, R. A. 1999 A generalization of Yaglom's equations which accounts for the large-scale forcing in heated decaying turbulence. *J. Fluid Mech.* **391**, 359–372.

Danaila, L., Antonia, R. A. & Burattini, P. 2004 Progress in studying small-scale turbulence using 'exact' two-point equations. *New Journ. Phys.* **6**.

Hill, R.J. 1997 Applicability of Kolmogorov's and Monin's equations of turbulence. *J. Fluid Mech.* **353**, 67–81.

Hill, R.J. 2002 Exact second-order structure-function relationships. *J. Fluid Mech.* **468**, 317–326.

Kolmogorov, A. 1941 The local structure of turbulence in incompressible viscous fluid for very large reynolds numbers. *Proc. USSR Ac. of Sci. (Trad. Proc Roy. Soc London 434 1991).* **30**, 299–303.

Reynolds, W. C. & Hussain, A. K. M. F. 1972 The mechanics of an organised wave in turbulent shear flow. part 3. theoretical models and comparisons with experiments. *J. Fluid Mech.* **54**.

Townsend, A. A. 1976 *The structure of turbulent shear flow*. Cambridge University Press.

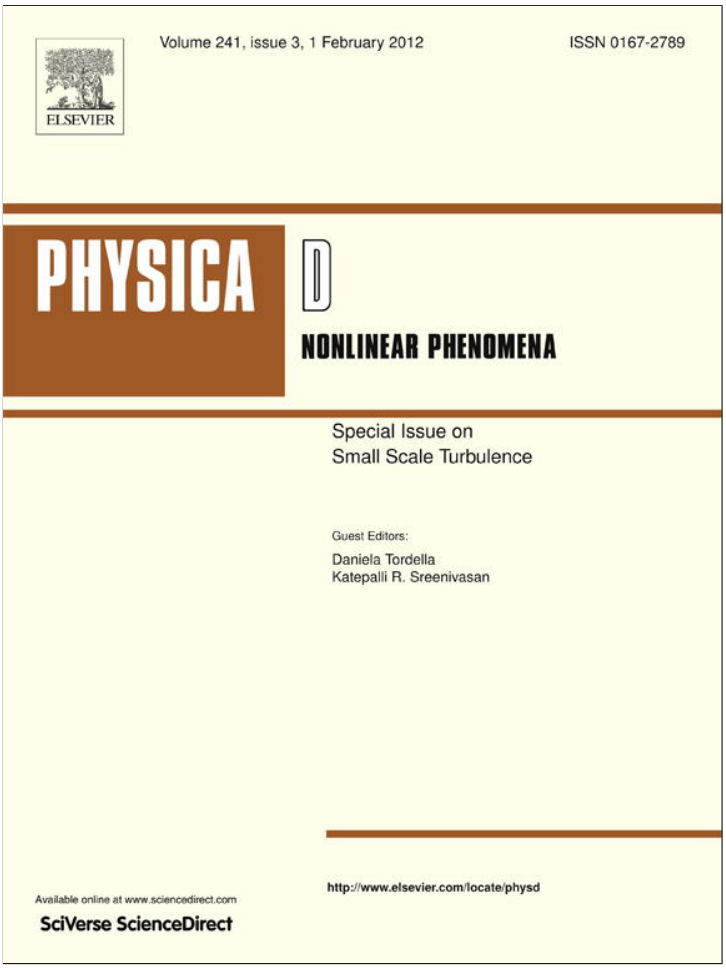
Zhou, T., Zhou, Y., Yiu, M.W & Chua, L.P 2003 Three-dimensional vorticity in a turbulent cylinder wake. *Exp. Fluids* **35**, 459–471.

Zhou, Y. & Antonia, R. A. 1992 Convection velocity measurements in a cylinder wake. *Exp. Fluids* **13**.

Zhu, Y. & Antonia, R. A. 1996 Spatial resolution of a 4-X-wire vorticity probe. *Meas. Sci. Technol.* **7**, 14921497.

5.5 Bilan à chaque échelle sous la forme axisymétrique

Provided for non-commercial research and education use.
Not for reproduction, distribution or commercial use.



This article appeared in a journal published by Elsevier. The attached copy is furnished to the author for internal non-commercial research and education use, including for instruction at the authors institution and sharing with colleagues.

Other uses, including reproduction and distribution, or selling or licensing copies, or posting to personal, institutional or third party websites are prohibited.

In most cases authors are permitted to post their version of the article (e.g. in Word or Tex form) to their personal website or institutional repository. Authors requiring further information regarding Elsevier's archiving and manuscript policies are encouraged to visit:

http://www.elsevier.com/copyright

Author's personal copy

Physica D 241 (2012) 216–223

Contents lists available at SciVerse ScienceDirect

Physica D

journal homepage: www.elsevier.com/locate/physd

Yaglom-like equation in axisymmetric anisotropic turbulence

L. Danaila *, J.F. Krawczynski [1], F. Thiesset, B. Renou

CORIA UMR 6614, Université de Rouen, BP 12 76801 Saint Etienne du Rouvray, France

ARTICLE INFO

Article history:
Available online 14 September 2011

Keywords:
Scale-by-scale energy budgets
Axisymmetric turbulence
Coherent motion
Opposed jets
PIV measurements
Energy transfer

ABSTRACT

A scale-by-scale kinetic energy budget equation is developed for inhomogeneous and anisotropic turbulence. This equation reduces to Yaglom's 4/3 law, under more strict assumptions. Experimental data obtained in the impact region of two opposed jets, in a multiple-opposed-jets flow, are used to partially validate the analytical development and to better characterize this complex flow. It is shown that the energy transfer is mainly performed in planes perpendicular to the axisymmetry axis, whereas it is strongly inhibited along the axisymmetry direction.

© 2011 Elsevier B.V. All rights reserved.

1. General picture and isotropic context

A lot of effort is being devoted to understanding and modelling real flows, whereas most of them are anisotropic and/or populated by coherent structures. The latter are often the result of initial or boundary conditions. Therefore, either the near field of decaying flows, or forced turbulence in small volumes, strong anisotropy is usually present. The issue addressed here is how to characterize these flows from an analytical viewpoint which concerns kinetic energy at a given scale.

First, let us briefly recall the existing analytical tools, developed in the context of isotropic and locally isotropic turbulence.

1. Strictly isotropic context.
   Kolmogorov's relationship [1,2] between the second-order moment, $\langle(\delta u)^2\rangle$, of the velocity increment along the flow direction, $\delta u(r) = u(x+r) - u(x)$, over an interval r in the longitudinal (x) direction and the third-order moment, $\langle(\delta u)^3\rangle$, is given by

$$-\langle(\delta u)^3\rangle + 6\nu\frac{d}{dr}\langle(\delta u)^2\rangle = \frac{4}{5}\langle\epsilon\rangle r, \tag{1}$$

   where $\langle\epsilon\rangle$ is the mean energy dissipation rate defined as

$$\langle\epsilon\rangle = \frac{1}{2}\nu\left\langle\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right)^2\right\rangle. \tag{2}$$

Here, and throughout the paper, repeated indices indicate summation, ν is the kinematic viscosity of the fluid, u_i is the fluctuating velocity component in the i-th direction, and angular brackets denote time averaging. Eq. (1) is derived within a framework [1] which assumes a cascade that is universal and locally isotropic for small enough scales and large enough Reynolds numbers. When the effect of viscosity is negligible, Eq. (1) reduces to the so-called 'four-fifths law',

$$-\langle(\delta u)^3\rangle = \frac{4}{5}\langle\epsilon\rangle r, \tag{3}$$

which has a cornerstone role in the study of turbulence, since it is the simplest result derived from relations expressing conservation of momentum, using homogeneity and local isotropy. Writing Eq. (1) symbolically as $A + B = C$, term C – directly proportional to $\langle\epsilon\rangle$ – is associated with the transfer of energy at a scale r. Eq. (1) indicates that, at each scale, energy is transferred by both turbulent advection (term A) and molecular diffusion (term B). Eqs. (1) and (3) have also been often used as alternate, experimental, means of determining $\langle\epsilon\rangle$ via measurements of $\langle(\delta u)^2\rangle$ and $\langle(\delta u)^3\rangle$.

At small Reynolds numbers, the sum $A+B$ cannot be expected to balance C, except at the smallest scales (e.g., for grid turbulence, this equality is satisfied only for $r/\eta \lesssim 5$ at $R_\lambda = 66$ [3]). Here, $R_\lambda \equiv u'\lambda/\nu$, where u' is the root-mean-square of the longitudinal velocity fluctuation and $\lambda \equiv (\langle u^2\rangle/\langle(\partial u/\partial x)^2\rangle)^{\frac{1}{2}}$ is the longitudinal Taylor microscale. For intermediate Reynolds numbers ($100 < R_\lambda < 500$), Eq. (1) is not satisfied for moderate to large scales, e.g. [4,5]. This equation is only satisfied up to a separation which depends on the Reynolds number. Obviously, it cannot be verified at large r, when the contributions from the two terms on the left side of Eq. (1) become negligible.

* Corresponding author. Tel.: +33 2 32 95 37 02.
E-mail address: danaila@coria.fr (L. Danaila).
[1] Present address: UPMC Univ Paris 06, UMR 7190, Institut Jean Le Rond d'Alembert, F-75005 Paris, France.

0167-2789/$ – see front matter © 2011 Elsevier B.V. All rights reserved.
doi:10.1016/j.physd.2011.08.011

Author's personal copy

In deriving Eq. (1) from the Kármán–Howarth equation [6], the non-stationarity term was ignored. Inclusion of this term would result in a transport equation for $\left\langle (\delta u^2) \right\rangle$ across all scales

$$-\left\langle (\delta u)^3 \right\rangle + 6\nu \frac{d}{dr}\left\langle (\delta u)^2 \right\rangle - 3\frac{U}{r^4}\int_0^r s^4 \frac{\partial}{\partial x}\left\langle (\delta u)^2 \right\rangle ds = \frac{4}{5}\langle \epsilon \rangle r, \tag{4}$$

where U is the mean velocity and s is a dummy variable. Eq. (4) relates the second- to the third-order structure function of u at all separations [7,3,8]. At sufficiently large r, the relation (4) correctly represents the one-point energy budget for spatially decaying homogeneous isotropic turbulence, viz. $\langle \epsilon \rangle = -U\frac{3}{2}\frac{d}{dx}\langle u^2 \rangle$. At large r, the extra term in Eq. (4), relative to Eq. (1), becomes the major contribution. This term arises because $\left\langle (\delta u)^2 \right\rangle$ varies with x. This variation is due to the decaying large scales. In flows which are not homogeneous and isotropic, there may be other extra terms in Eq. (1), reflecting the large scale inhomogeneities, such as turbulent diffusion or production, and they may differ intrinsically between different flows. Indeed, the difference may be such that, for the same R_λ, the inhomogeneous contributions may vary from flow to flow or possibly different regions of the same flow.

At the smallest scales, Eq. (1) is consistent with the isotropic definition of $\langle \epsilon \rangle$, e.g.

$$\langle \epsilon \rangle_{\text{iso}} = 15\nu \left\langle \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 \right\rangle. \tag{5}$$

This result is expected since Kolmogorov's equation is underpinned by the physical idea of a cascade of energy from large to small scales and an eventual decorrelation between the small (isotropic) scales and the large (anisotropic) scales. In the limit of $r \to 0$, Eq. (1) also leads (using a Taylor series development) to the transport equation of the enstrophy (or that for the mean energy dissipation rate $\langle \epsilon \rangle$) for isotropic turbulence [9].

2. Locally isotropic context

We mainly focus our attention on the following transport equation for $\langle \delta u_i \delta u_i \rangle \equiv \langle (\delta q)^2 \rangle$, e.g. [10]

$$-\langle \delta u (\delta q)^2 \rangle + 2\nu \frac{d}{dr}\langle (\delta q)^2 \rangle = \frac{4}{3}\langle \epsilon \rangle r, \tag{6}$$

which is the analogue (inhomogeneous isotropic turbulence) of the Yaglom equation [11] derived for temperature fluctuations. The term-to-term analogy comes from the fact that both of them are transport equations of scalars (total kinetic energy and temperature variance at a given scale), whereas the coefficient in the right hand side (RHS) is 4/3. For very small scales, Eq. (6) complies with another form of $\langle \epsilon \rangle$, viz. [12]

$$\langle \epsilon \rangle_q = 3\nu \left\langle \frac{\partial u_i}{\partial x}\frac{\partial u_i}{\partial x} \right\rangle. \tag{7}$$

The non-negligible differences between the statistics of u and the other two velocity components in most of the (anisotropic) flows justify by using δu_i instead of δu. Following from Eq. (7), another definition of the Taylor microscale is $\lambda = \left(5\nu \langle u_i u_i \rangle / \langle \epsilon \rangle_q\right)^{1/2}$, from which $R_\lambda \equiv (\langle u_i u_i \rangle /3)^{1/2}\lambda/\nu$. These forms will be used in the following.

Because most of the flows are anisotropic, at least over a range of scales, the far aim of this work is to understand, at a given scale, how energy is transferred, produced, diffused and dissipated, in anisotropic flows. First, we develop an analytical tool which can be used to characterize in real space, the turbulent cascade. This tool is specific to anisotropic axisymmetric flows. Second, this paper is aimed at quantifying anisotropic energy transfer along different spatial directions, in the impact region among two opposed jets with lateral fluid confinement.

Section 2 is devoted to the analytical development, in the general context 2.1 and in anisotropic context 2.2. Section 3 deals with a brief description of the experimental set-up and of the measurements. The mean flow is characterized in 3.2 and the fluctuating field in 3.3. The results are discussed in Section 4.

2. Analytical development

2.1. Scale-by-scale energy budget equation

Using the same procedure as outlined in [13,14,2], we write the incompressible Navier–Stokes equations at the two points $\vec{x}$ and $\vec{x}^+$, which are separated by the increment $\vec{r} = \vec{x}^+ - \vec{x}$, viz.

$$\partial_t u_i + U_\alpha \partial_\alpha u_i + u_\alpha \partial_\alpha U_i + U_\alpha \partial_\alpha U_i + u_\alpha \partial_\alpha u_i = -\partial_i (p+P)/\rho + \nu \partial_\alpha^2 (u_i + U_i) \tag{8}$$

$$\partial_t u_i^+ + U_\alpha^+ \partial_\alpha u_i^+ + u_\alpha^+ \partial_\alpha U_i^+ + U_\alpha^+ \partial_\alpha U_i^+ + u_\alpha^+ \partial_\alpha^+ u_i^+ = -\partial_i^+ (p^+ + P^+)/\rho + \nu \partial_\alpha^{2+} (u_i^+ + U_i^+), \tag{9}$$

where u_i and U_i denote the fluctuating velocity, i.e. $\langle u_i \rangle = 0$, and the mean velocity respectively. The mean velocity field is considered as being stationary. p is the fluctuating pressure and P is the mean pressure. The superscript + refers to $\vec{x}^+$ and ρ is the fluid density. In (8) and (9), $\partial_t \equiv \partial/\partial t$, $\partial_\alpha \equiv \partial/\partial x_\alpha$ and ∂_α^2 is the Laplacian $\partial^2/\partial x_\alpha^2$ (hereafter, the notation ∂_α and ∂_α^+ will be used to denote derivatives with respect to x_α and x_α^+; when other spatial variables are involved, the derivatives will be written explicitly, e.g., $\partial/\partial r_\alpha$ or $\partial/\partial X_\alpha$). We then consider that the two points $\vec{x}$ and $\vec{x}^+$ are independent, i.e. u_i depends only on $\vec{x}$ and u_i^+ depends only on $\vec{x}^+$.

Under these conditions, subtraction of (8) from (9) yields an equation for the fluctuating velocity increment $\delta u_i = u_i^+ - u_i$ (increments of any arbitrary function f are defined as $\delta f \equiv f^+ - f$), viz.

$$\partial_t(\delta u_i) + \delta(U_\alpha \partial_\alpha u_i) + \delta(u_\alpha \partial_\alpha U_i) + \delta(U_\alpha \partial_\alpha U_i) + u_\alpha^+ \partial_\alpha^+ (\delta u_i) + u_\alpha \partial_\alpha (\delta u_i) = -(\partial_i + \partial_i^+)(\delta(p+P))/\rho + \nu(\partial_\alpha^2 + \partial_\alpha^{2+})(\delta(u_i + U_i)). \tag{10}$$

Following the approach suggested by Hill [13], we also consider the gradient with respect to the midpoint, i.e.

$$\vec{X} = \frac{1}{2}\left(\vec{x} + \vec{x}^+\right). \tag{11}$$

Thus,

$$\partial_\alpha^+ \equiv \frac{\partial}{\partial r_\alpha} + \frac{1}{2}\partial_{X_\alpha}; \tag{12}$$

$$\partial_\alpha \equiv -\frac{\partial}{\partial r_\alpha} + \frac{1}{2}\partial_{X_\alpha}, \tag{13}$$

resulting in $\partial_{X_\alpha} = \partial_\alpha + \partial_\alpha^+$.

By taking into account (12), multiplying Eq. (10) by $2\delta u_i$, averaging and some calculations, we finally obtain

$$\partial_t \langle (\delta q)^2 \rangle (\vec{r}) + 2\langle \delta(U_\alpha \partial_\alpha u_i) \cdot \delta u_i \rangle (\vec{r}) + 2\langle \delta(u_\alpha \partial_\alpha U_i) \cdot \delta u_i \rangle (\vec{r}) + \frac{1}{2}\left\langle \left[\partial_\alpha + \partial_\alpha^+\right] \cdot \left[u_\alpha + u_\alpha^+\right] (\delta q)^2 \right\rangle + 2/\rho(\partial_i + \partial_i^+)\langle \delta p \cdot \delta u_i \rangle (\vec{r}) + \frac{\partial}{\partial r_\alpha}\langle \delta u_\alpha (\delta q)^2 \rangle (\vec{r}) = 2\nu \frac{\partial^2}{\partial {r_\alpha}^2}\langle (\delta q)^2 \rangle (\vec{r}) - 2\left(\langle \epsilon \rangle + \langle \epsilon \rangle^+\right). \tag{14}$$

Author's personal copy

Note that the first four terms correspond to large-scale effects. In (14), each term depends on the spatial vector $\vec{r}$. Therefore, Eq. (14) formally writes

$$D(\vec{r}) + T(\vec{r}) + P(\vec{r}) + TD(\vec{r}) + PD(\vec{r}) + \frac{\partial}{\partial r_\alpha}\langle \delta u_\alpha (\delta q)^2\rangle(\vec{r}) = 2\nu \frac{\partial^2}{\partial {r_\alpha}^2}\langle (\delta q)^2\rangle(\vec{r}) - 2\left(\langle\epsilon\rangle + \langle\epsilon\rangle^+\right), \quad (15)$$

where terms T, P, TD and PD are the transport, production, turbulence diffusion and pressure diffusion terms, respectively.

2.2. Axisymmetric context

An anisotropic (axisymmetric) treatment is to be further applied to Eq. (15), in which each term depends on the spatial vector $\vec{r}$. Note also that this is a scalar equation, representing the scale-by-scale kinetic energy. Let us assume that the flow is axisymmetric with respect to a direction specified by $\vec{n}$. Flow statistics are then invariant to rotations in planes normal to $\vec{n}$ and symmetric with respect to $\vec{n}$. We note

$$r^2 = \vec{r}\cdot\vec{r} \quad \text{and} \quad r\mu \equiv \vec{r}\cdot\vec{n}. \quad (16)$$

In this context, each term of the equations depends on two variables, r and μ. Large-scale inhomogeneous variations might be observed along the axisymmetry direction $\vec{n}$. We consider that statistics are homogeneous in planes perpendicular to $\vec{n}$.

The advection term $\frac{\partial}{\partial r_\alpha}\langle \delta u_\alpha (\delta q)^2\rangle(\vec{r})$ is written in a manner similar to [15,16]:

$$\langle \delta u_\alpha (\delta q)^2\rangle(\vec{r}) = M_a(r,\mu) r_\alpha + N_a(r,\mu) n_\alpha, \quad (17)$$

where only two scalars M_a and N_a appear (the subscript a stands for the 'advection' term in the kinetic energy budget equation). A very important remark is that the scalars $M_a(r,\mu)$ and $N_a(r,\mu)$ can be determined from planar experiments which include the axisymmetry vector $\vec{n}$. For instance, Particle Image Velocimetry (PIV) measurements in planes including $\vec{n}$, provide velocity fluctuations $u_\parallel$ and $u_\perp$, parallel and perpendicular to $\vec{n}$. Therefore, by supposing axisymmetry for the third (unmeasured) velocity component, quantities such as $\langle \delta u_\parallel (\delta q)^2\rangle$ and $\langle \delta u_\perp (\delta q)^2\rangle$ are measurable. This leads to the experimentally determinable scalars:

$$M_a(r,\mu) = \frac{\langle \delta u_\perp (\delta q)^2\rangle(r,\mu)}{r\sqrt{(1-\mu^2)}};$$
$$N_a(r,\mu) = \langle \delta u_\parallel (\delta q)^2\rangle(r,\mu) - \langle \delta u_\perp (\delta q)^2\rangle(r,\mu)\frac{\mu}{\sqrt{1-\mu^2}}. \quad (18)$$

Therefore, for the axisymmetric case, $\frac{\partial}{\partial r_\alpha}\langle \delta u_\alpha (\delta q)^2\rangle(\vec{r})$ becomes

$$\frac{\partial}{\partial r_\alpha}\langle \delta u_\alpha (\delta q)^2\rangle(\vec{r}) \equiv \left(r\frac{\partial}{\partial r} + 3\right) M_a(r,\mu) + \left(\mu\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1-\mu^2}{r}\frac{\partial}{\partial \mu}\right) N_a(r,\mu). \quad (19)$$

The dissipative term $\mathrm{Diss}(r,\mu)$ is to be further explicited by using the axisymmetric form of the Laplacian $\Delta(r,\mu)$ [17,18].

Eq. (15) can therefore be written formally as

$$D(r,\mu) + T(r,\mu) + P(r,\mu) + TD(r,\mu) + PD(r,\mu) + \left(r\frac{\partial}{\partial r} + 3\right) M_a(r,\mu) + \left(\mu\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1-\mu^2}{r}\frac{\partial}{\partial \mu}\right) N_a(r,\mu) = 2\nu\Delta(r,\mu)\langle \delta q^2\rangle - 2\left[\langle\epsilon\rangle + \langle\epsilon\rangle^+\right]. \quad (20)$$

Finally, in order to simplify the mathematical form of this equation, we introduce $\mathcal{V}$ such that $N_a(r,\mu) = \left[2 + r\frac{\partial}{\partial r}\right]\mathcal{V} = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left[r^2\mathcal{V}\right]$, with $\mathcal{V} = \frac{1}{r^2}\int_0^r sN_a(s,\mu)ds$, where s is a dummy variable. We further define

$$N_a^* = \left(\mu\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1-\mu^2}{r}\frac{\partial}{\partial \mu}\right)\mathcal{V}, \quad (21)$$

which is obviously determinable from experiments, so that Eq. (20) reduces to

$$D(r,\mu) + T(r,\mu) + P(r,\mu) + TD(r,\mu) + PD(r,\mu) + \left(r\frac{\partial}{\partial r} + 3\right)\left(M_a(r,\mu) + N_a^*(r,\mu)\right) = 2\nu\Delta(r,\mu)\langle(\delta q)^2\rangle(r,\mu) - 2\left[\langle\epsilon\rangle + \langle\epsilon\rangle^+\right]. \quad (22)$$

By noting $G = M_a(r,\mu) + N_a^*(r,\mu)$ and $\left(r\frac{\partial}{\partial r} + 3\right) = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^3\right)$, and after integration with respect to r, the final axisymmetric form of scale-by-scale energy budget equation is (also discussed in the context of a parallel with the spectral space developments in [18])

$$G(r,\mu) = -\frac{2}{3}\left[\langle\epsilon\rangle + \langle\epsilon\rangle^+\right] + 2\nu\frac{1}{r^3}\int_0^r s^2\Delta(r,\mu)\langle(\delta q)^2\rangle ds - \frac{1}{r^3}\int_0^r s^2\left(D(r,\mu) + T(r,\mu) + P(r,\mu) + TD(r,\mu) + PD(r,\mu)\right)ds. \quad (23)$$

Note the importance of (23) with respect to the classical known equations:

- it obviously reduces to the isotropic '4/3' law;
- it contains large-scale terms (decay, transport, production etc.) which are very important in the context of the validation against experimental data;
- it contains an explicit spatial variation of the mean kinetic energy dissipation rate;
- it takes into account both inhomogeneity and anisotropy (though, under the assumption of axisymmetry).

In the following, we investigate (experimentally) the reduced form of this equation:

$$G(r,\mu) = -\frac{2}{3}\left[\langle\epsilon\rangle + \langle\epsilon\rangle^+\right], \quad (24)$$

which comes to study the (total) kinetic energy transferred at each scale, by velocity fluctuations. Eq. (24) is the analogue of Yaglom's equation in anisotropic, axisymmetric turbulence.

3. Brief description of the flow generated by multiple opposed jets

The experiments were conducted in the confined-opposed-jets chamber, Fig. 1, in which the work of [19] was previously carried out. Particular to this chamber is that 16 pairs of opposed jets coexist and interact with their characteristic instabilities, thus leading to their local confinement. Therefore, the basic flow pattern is a pair of opposed, confined jets.

Turbulence generation, the interaction with large-scale component of the flow, and the local confinement induce inherent anisotropy. Although the particular geometrical features of this chamber generate successive anisotropic energy injection, it was shown that, towards the exit from the reactor, the velocity fluctuations become nearly homogeneous and isotropic [19].

At present, we turn our attention to the region responsible for the velocity fluctuations generation, i.e. the impact region among two opposed jets. As a result of collisions between confined opposed streams and their subsequent instabilities, a relatively narrow zone of intense velocity fluctuations is generated, which offers *a priori* excellent conditions for intensifying the mixing rate.

Author's personal copy

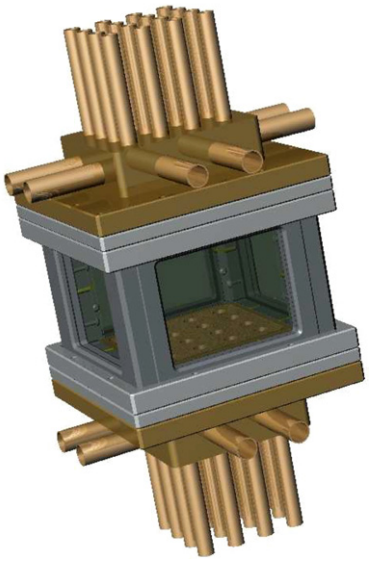


Fig. 1. Experimental set-up.

3.1. Apparatus and measurements

The test section consisted of a rectangular parallelepiped ($110 \times 110 \times 60$ mm^3) equipped with quartz Suprasil windows (100×80 mm^2) on each side. Both the inlet and the outlet of the fluid were located at the top and bottom boundary plates made of a 24 mm-spacing square-matrix arrangement of jets and of a porous, homogeneous, media in between them. The porous boundary plates were backed by plena connected to the exhaust piping network. 200 mm-long tubes were supplying the 16 pairs of jets issuing from the top and bottom boundary plates. Air mass flow-rates were controlled by two Bronkhorst (EL-FLOW) mass flow-metres whose accuracy was estimated at $\pm 0.5\%$ of the full scale (100 NCMH, normal cube metres per hour). Micrometric valves were used to match the flow rate issuing from every individual jet. The inner-chamber static pressure as well as the pressure drop of each exhaust plena could be adjusted with two regulating valves connected to the exhaust piping network. One wall was equipped with a 1 mm-diameter pressure tap, connected to a digital manometer. A static pressure transducer (Keller) was used to measure the mean flow pressure with a resolution of 1 mbar and an accuracy of 0.03 bars. The geometry of the facility is characterized by the following outer scales: the horizontal mid-distance between two consecutive jet-axes, $L = 12$ mm kept fixed, the vertical mid-distance between two opposed jets, $h = 30$ mm and the inner jet diameter, $d_j = 10$ mm or $d_j = 6$ mm.

The instantaneous, two-dimensional velocity measurements relied on Particle Image Velocimetry (PIV) with DEHS (Di-Ethyl-Hexyl-Sebacat, $C_{26}H_{50}O_4$) particles ($\rho_p = 918$ kg/m^3). The light source was a Nd:Yag laser (Big Sky laser, 120 mJ/pulse) with a second-harmonic-generating crystal producing a Q-switched laser output in the green (532 nm). Light that scattered from the particles was collected on a CCD camera (FlowMaster La Vision, 12 bits, 1280×1024 pix^2) with a 50 mm f/1.2 Nikkor lens. The optical arrangement yielded a magnification of 20.5 pix/mm, calibrated using images of a precision reference grid. PIV processing was performed with a cross-correlation technique between pairs of successive images. The initial size of the PIV interrogation window was 64 pix^2. Six iterations were used to obtain a final interrogation window size of 16 pix^2, with a 50% overlap. The time interval between two consecutive images was in the range 3–8 μs, scaled approximately inversely with the injection velocity, V_{inj}. The determination of the minimum fully-resolved length-scale was discussed in detail in [19]. An analysis based on the estimation of the PIV spectral transfer-function [20] yielded to a cut-off length scale due to the low-pass filtering effect of our PIV system of $\lambda_c = 1/k_c \simeq 1.7$ mm. The spatial resolution, as well as the largest measurable scales, are fixed for all the experiments by the optics, the CCD focal-plane array resolution, and the PIV processing, and are independent of the flow.

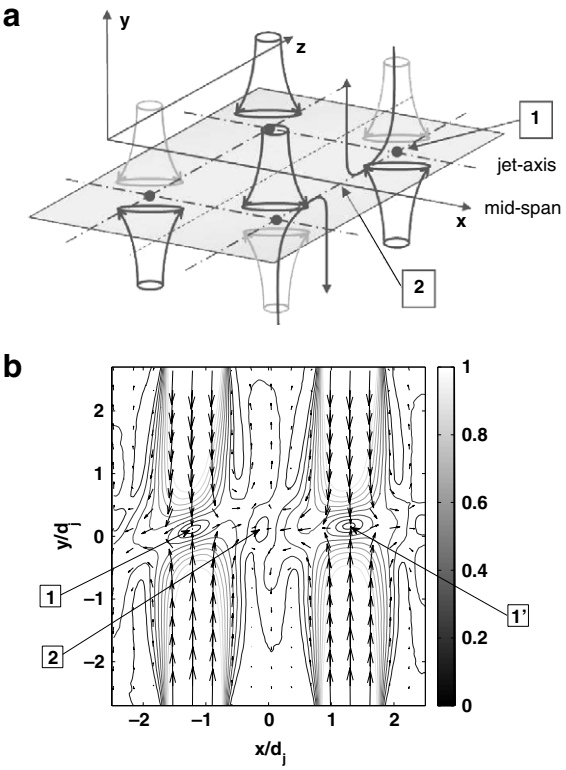


Fig. 2. (a): Schematic of the flow. (b): Normalized mean velocity field, $V_{\text{total}}/V_{\text{inj}}$, in the jet-axis plane, as function of x/d_j and y/d_j.

3.2. Flow overview

The flow description is based on planar cuts in the jet-axis plane (parallel to the *OXY*-plane), see Fig. 2(a) that illustrates the flow resulting from four pairs of opposed jets. Here, u is the velocity along the horizontal x direction, and v along the vertical y direction, i.e. parallel to the jets axes. Arrows in Fig. 2(a) represent schematic trajectories of particles transported by the mean velocity field only, see Fig. 2(b). Statistics discussed below are based on time-averaging performed in each image pixel over a set of 1500 images.

Fig. 2(b) represents the mean velocity field, $V_{\text{total}} = (U^2+V^2)^{0.5}$, normalized by the injection velocity V_{inj}, for two pairs of opposed jets. We choose to further investigate this flow pattern, by keeping in mind the periodicity and symmetry of this flow that are well-captured by the experimental implementation. The impingement of symmetric opposed jets generates stagnation points, the first one (noted as [1] on Fig. 2(b)) is present between two opposed jets. Particular to this flow is the local confinement of every pair of opposed jets that constrains the radial flow issuing from their collision, thus creating a secondary statistical stagnation point at mid-horizontal-distance between two pairs of opposed jets (point [2] on Fig. 2(b)). The third point noted on the same figure is [1'], placed between the two pairs of opposed jets.

The stagnation region between two opposed-axial-jets is characterized by strong variations of the velocity field in the y

Author's personal copy

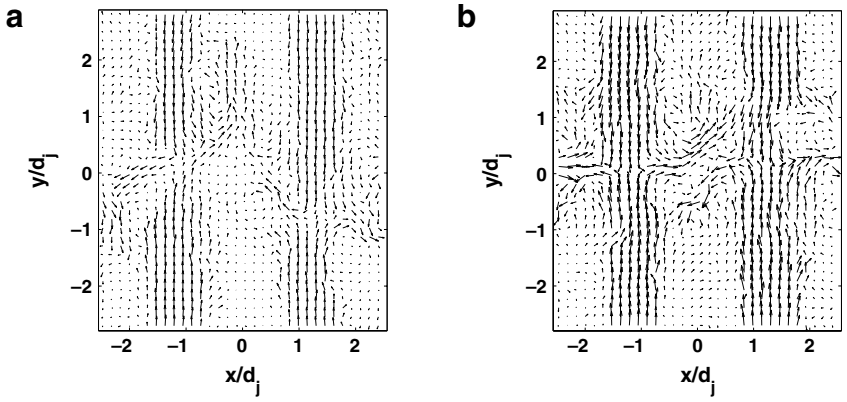


Fig. 3. Instantaneous velocity vectors field, in the jet-axis plane, as function of x/d_j and y/d_j.

direction and by nearly axisymmetrical statistical properties [19]. The strong variations over very short distances lead to energy injection over a direction perpendicular to the instantaneous stagnation plane, thus not necessarily parallel to y. Fluid laterally escapes in the local, instantaneous, stagnation plane and returns towards exits. The interaction between fluid injected and the return flow, along with the local-confinement effects, produce large scale annular shear-layers, see Fig. 5 in.

3.3. Fluctuating flow and mean energy dissipation

The unstable aspect of the flow is noteworthy, which significantly contrasts with the mean flow aspect and its remarkable symmetries. Instantaneous images as depicted in Fig. 3 that suggest up-and-down and left–right movements of the very thin fluid interface among each two opposed jets, which is generally not parallel to the mean stagnation plane [19]. Instabilities which are present here are a subtle combination of opposed jets instabilities [21–24], twin-jets instabilities [25,26] and one confined-jet with backflow [27]. Therefore, obtaining a mean stagnation plane region, i.e. all the stagnation points being aligned on the same horizontal plane, represents a challenge in the present experiment and requires a detailed balance for the mass flow issuing through each of the 32 injecting jets.

Velocity fluctuations are mainly produced during strong variations of the mean velocity in the stagnation region. In between two axially opposed-jets, the most intense strain is along y. This results in a significant anisotropy level in this region, as illustrated for instance by the ratio $\langle u^2\rangle^{1/2}/\langle v^2\rangle^{1/2}$, represented in Fig. 4, which is much smaller than the isotropic value of 1. In the stagnation point [2], fluctuations along the horizontal direction are mainly created, and therefore the above-mentioned ratio becomes larger than 1.

Therefore, most of the total kinetic energy, calculated using axisymmetry hypothesis, i.e. $\langle q^2\rangle = 2\times\langle u^2\rangle + \langle v^2\rangle$, is concentrated in the impinging region of the confined chamber, see Fig. 5. This is a particularity of the stagnation flow among two fluids, for which the stagnation point is associated both with a stagnation of the mean velocity and a maximum of velocity fluctuations.

Our aim is to assess Eq. (24) in the region around the stagnation point [1] among two opposed jets, where a lot of kinetic energy is present. It is therefore necessary to determine properly the mean energy dissipation rate in that region. This is not an easy task in this flow, and with PIV measurements. The values of the mean energy dissipation rate $\langle\epsilon\rangle$ were determined with some of the methods described in [19] (not all of them are well-adapted to the region around the stagnation point between two opposed jets). These methods can be divided into two classes: those based on small-scales and those based on large-scales [12], that we briefly detail in the following.

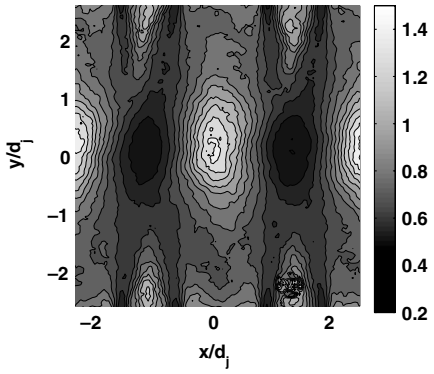


Fig. 4. Ratio $\langle u^2\rangle^{1/2}/\langle v^2\rangle^{1/2}$ in the jet-axis plane.

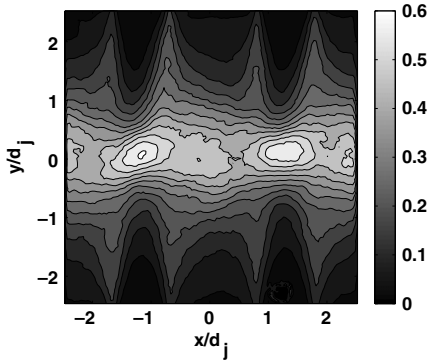


Fig. 5. Distribution of the normalized total kinetic energy $\langle u_i u_i\rangle/V_{\text{inj}}^2$. Filled contour plot in increments of 0.1.

A Small-scales methods:
- The direct method, i.e. using finite differences, leading to $\langle\epsilon\rangle_{FD}$, in each point of the measurement plane. Depending on the PIV resolution, this method usually underestimates the real value of the mean energy dissipation rate.

B Large-scales methods:
- The second-order structure functions in the inertial range. The advantage of this method is that these scales are resolved by PIV. These structure functions are calculated over a locally homogeneous region that should scale as $\propto \langle\epsilon\rangle^{2/3} r^{2/3}$. The proportionality (Kolmogorov) constant $C_{K2} \approx 2$ for Reynolds numbers sufficiently large. The method is more reliable, for higher Reynolds numbers. The advantage of using structure functions (rather than spectra) is that structure functions can be computed over any number of scales (or, pixels), instead of a power of 2 number of pixels for spectra.

Author's personal copy

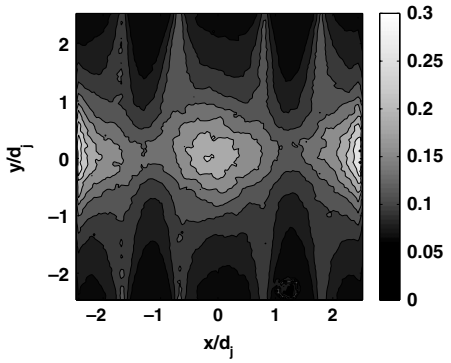


Fig. 6. Distribution of the mean energy dissipation rate (normalized by V_{inj}^3/d_j).

- The most classical large-scale method is the 1-point energy budget. In locally homogeneous flows, the pressure-diffusion term is negligible and therefore the only unknown in the equation is the mean energy dissipation rate. In the context of our flow, and in the particular stagnation point [1], this method is not reliable, because of the importance of the variations of pressure–velocity correlations, which are not measured.
- The normalized dissipation, which should scale as:
$$C_\epsilon = \frac{\langle\epsilon\rangle\mathcal{L}}{u'^3}, \tag{25}$$
where $\mathcal{L}$ is the (local) integral scale, calculated using e.g. the spatial correlations, and u' is the typical velocity RMS. For locally isotropic flows and for moderate/high Reynolds numbers (Reynolds number based on the Taylor microscale larger than 150), C_ϵ asymptotically tends to 0.5, the value which is used here. This method provides an estimation of the mean energy dissipation rate called $\langle\epsilon\rangle_{\text{norm}}$.
- The integral method over the whole volume of the chamber. Integration of the 1-point kinetic energy budget around the axis of the two opposed jets leads to cancellation of the diffusion (by turbulence and pressure) terms. This results in an estimation of the total mean dissipation rate in the volume, called $\iiint_V \langle\epsilon\rangle_{\text{true}}\, dV$, which is then simply equal to the total production plus the total energy transport. By further considering the same distribution of $\langle\epsilon\rangle$ as that given by finite differences applied to PIV measurements, i.e. $\langle\epsilon\rangle_{\text{true}} = \alpha\langle\epsilon\rangle_{FD}$, where α is a constant, determination of $\iiint_V \langle\epsilon\rangle_{\text{true}}\, dV$ and of $\iiint_V \langle\epsilon\rangle_{FD}\, dV$ leads to the determination of the proportionality constant α. Therefore, $\langle\epsilon\rangle_{\text{true}}$ is finally obtained.

We have mentioned one small-scale method (which underestimates the real value of the mean energy dissipation rate), and four large-scale methods, among which three of them have been effectively used. Comparison between the three of them: $\langle\epsilon\rangle_{\text{true}}$, that obtained by using the second-order structure functions, as well as $\langle\epsilon\rangle_{\text{norm}}$ leads to less than 15% differences, at least for the Reynolds number reported here (around 150 in the stagnation point between two opposed jets). However, note that, the differences among the values of $\langle\epsilon\rangle$ provided by different methods increase with increasing Reynolds numbers (this will be reported elsewhere).

The distribution of $\langle\epsilon\rangle_{\text{true}}$ is shown on Fig. 6. Important values of $\langle\epsilon\rangle_{\text{true}}$ are present in stagnation points [1] and [1'], but the most important values are noted in the central stagnation point [2], where turbulence has had time to develop, and where turbulent/small scale kinetic energy (not shown here) is the most important.

In the following, with this spatial distribution of $\langle\epsilon\rangle$, we proceed to testing Eq. (24).

4. Results. Anisotropic energy transfer in the impact region of two opposed jets with counterflow

This section is devoted to the experimental investigation of Eq. (24).

It is of interest to first present the distribution of the second-order structure functions $\langle(\delta q)^2\rangle$ as the function of the Cartesian coordinates r_x, r_y and afterwards of the cylindrical coordinates r, μ, where r_x and r_y are the separations in the x and y directions, and the axisymmetry axis $\vec{n}$ is parallel to y. Therefore $r = \sqrt{r_x^2 + r_y^2}$ and $\mu = \cos\left(\text{Arctan}\left(\frac{r_x}{r_y}\right)\right)$. These structure functions are calculated by fixing the origin of the Cartesian coordinate system (r_x, r_y) at the intersection of the axisymmetry axis of two opposed jets (and we fix here the left side pair of opposed jets) with the plane where the mean velocity is zero $V = U = 0$ (point [1] on Fig. 2(b)). Then, increments δu_i are calculated

$$\delta u_i \equiv u_i(r_x, r_y) - u_i(r_x = 0, r_y = 0). \tag{26}$$

Second-order structure functions, defined as $\langle\delta q^2\rangle \equiv \langle(\delta u_i)^2\rangle$ (r_x, r_y), are represented in Fig. 7 (left). It is obvious that in point $r_x = 0$, $r_y = 0$, the values of $\langle\delta q^2\rangle$ are zero. This function is different from zero at different positions in jets-axis plane. For instance, over the radial direction r_x, energy increases for increasing separations, exhibits a maximum in the stagnation point [2] created by the two pairs of jets, it further decreases in a region with less fluctuations and increases again in the stagnation point corresponding to the right-side opposed jets, [1']. Over the vertical direction r_y, energy increases but much less than over the radial/horizontal direction. Variations of energy over Fig. 7 (left) are to be correlated with the distribution of the total kinetic energy, as represented in Fig. 5.

Fig. 7(b) represents the same quantity $\langle\delta q^2\rangle$, but in (r, μ) coordinates. The axis $\mu = 0$, for any value of r, physically corresponds to the horizontal axis r_x. Along this axis, the same behaviour of $\langle\delta q^2\rangle$ as previously discussed is to be emphasized: energy maxima are present for the two stagnation points of the flow: point [2], and the stagnation point among the two pairs of opposed jets. For $\mu = \pm 1$, corresponding to the vertical axis r_y, energy increase is to be noted, but in a much less quantity than over the radial direction (which is 'populated' with stagnation points).

Fig. 8 represents the distribution of $\langle\epsilon\rangle$ as a function of (r, μ). The same procedure as developed for $\langle(\delta q)^2\rangle$ was used. For $\mu = 0$, corresponding to $\theta = 90^\circ$ and therefore to the horizontal axis r_x, the dissipation increases in the stagnation point [2], then decreases, and further increases again (but to a less important value) towards the stagnation point [1'].

Finally, we represent the term G as a function of (r, μ), in Fig. 9. Term G has the physical signification of the energy transferred by fluctuations at a given scale r, and a spatial position r, μ. To our knowledge, this is for the first time when such anisotropic energy transfer, equivalent to $-\langle(\delta u)^3\rangle$ or to $-\langle\delta u(\delta q)^2\rangle$ in strictly isotropic turbulence, is obtained from experimental data. For $\mu = 0$, term G is first negative for scales smaller than the integral scale, corresponding to a classical direct cascade. It becomes positive for scales larger than the integral scale (beyond the stagnation point [2]), where the flow becomes strongly inhomogeneous. This change in sign does not signify an inverse cascade, but it is rather the signature of large-scale inhomogeneity. A similar behaviour is to be noted for values of μ nearly close to 0, i.e. around the horizontal direction r_x. This similarity is associated with the fact that in the central stagnation region, the mean velocity components are nearly equal to zero, and statistics closely satisfy local isotropy (over a limited range of scales). For values of $\mu = \pm 1$, corresponding to the vertical axisymmetry axis, term G is much less important, over the whole range of scales, thus signifying that the energy transfer through total velocity fluctuations is strongly

Author's personal copy

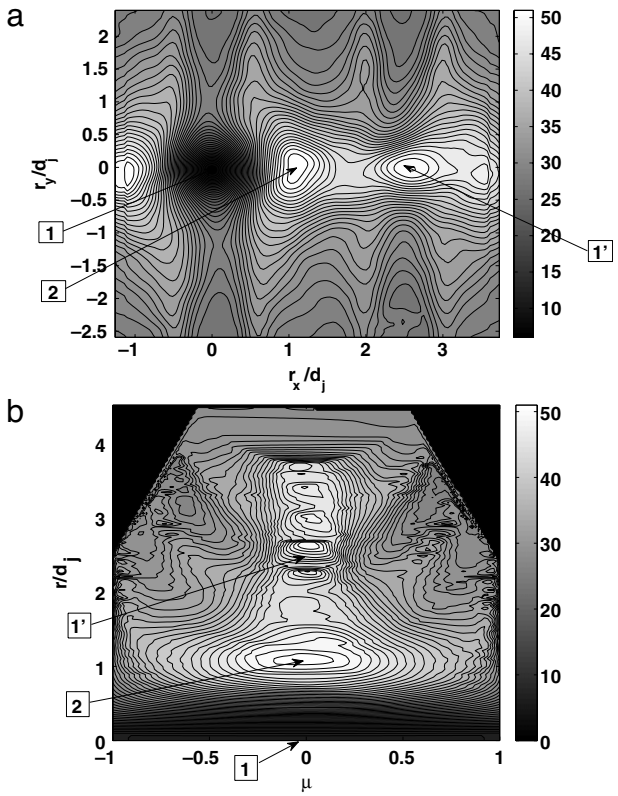


Fig. 7. Distribution of the total kinetic energy at each scale $\langle \delta q^2 \rangle$, when the first point is (1). (left) $\langle \delta q^2 \rangle$ as function of r_x, r_y, (right) $\langle \delta q^2 \rangle$ as function of r, μ.

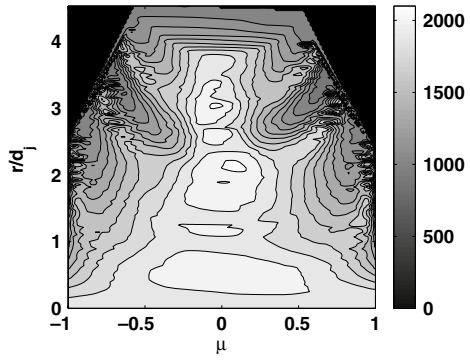


Fig. 8. Distribution of term $\langle \epsilon \rangle + \langle \epsilon \rangle^+$ in r, μ coordinates.

inhibited. This is associated with the fact that over this direction, kinetic energy is much less present (see Fig. 5).

The final budget, as given by Eq. (24), for this Reynolds number based on the Taylor microscale equal to 250, is represented in Fig. 9, right. Along the vertical direction ($\mu = 1$, solid line and □), the budget is not at all equilibrated, and the energy transfer term G is much less important than the total energy transferred.

For an intermediate direction ($\mu = 0.5$, dashed line and ○), the energy transfer is intensified, but it is still much smaller than the total energy transferred, as given by the RHS of Eq. (24).

Along the horizontal direction ($\mu = 0$, dashed–dotted lines and +), and for small scales, the budget is best balanced, but not equilibrated mainly because the molecular term is absent (this term is not represented here because PIV is not at all an adequate tool to calculate derivatives, and even less Laplacians). For intermediate scales, the budget is better equilibrated, signifying that energy transferred by fluctuations equilibrates by itself the total energy transferred, and that other effects (shear, pressure-diffusion, decay etc.) are not important over this range of scales.

5. Conclusions and perspectives

We have presented the salient steps in obtaining an anisotropic, axisymmetric, scale-by-scale energy budget equation. The equation is developed for the kinetic energy, which is a scalar, therefore the calculations are much facilitated than those for the velocity field itself [28–31]. The analytical development is similar to that of [16], but we take care of large-scale inhomogeneous terms, and we also consider spatial variations of the mean kinetic energy dissipation rate, without which the equation would have been mathematically inconsistent (left-hand-side would depend on (r, μ), but not the right-hand-side).

The reduced form of this equation has been used in order to have a deeper insight into the physics associated with two opposed jets, present in a multiple-opposed-jets reactor. We have proved that the energy transfer along the horizontal direction is much more important than that along the axisymmetry direction. This behaviour is associated with the quantity of kinetic energy present along each direction, much more important along the horizontal one than along the vertical one.

Eq. (24) can be used as a tool to investigate the degree of anisotropy of different flows, and the manner in which different phenomena may affect the energy cascade. Open perspectives concern a similar development for flows in which other effects are present, such as rotation or stratification [32]. Moreover, the theory is developed for incompressible turbulence in homogeneous fluids (i.e. with uniform physical properties: constant density, viscosity etc.). A similar approach can obviously be developed for variable-properties turbulence, for which all the terms involved exhibit specific analytical forms (see for instance the book by Sagaut and Cambon [33], for expressions of the dissipation in compressible turbulence). The complexity of these terms lead to the necessity

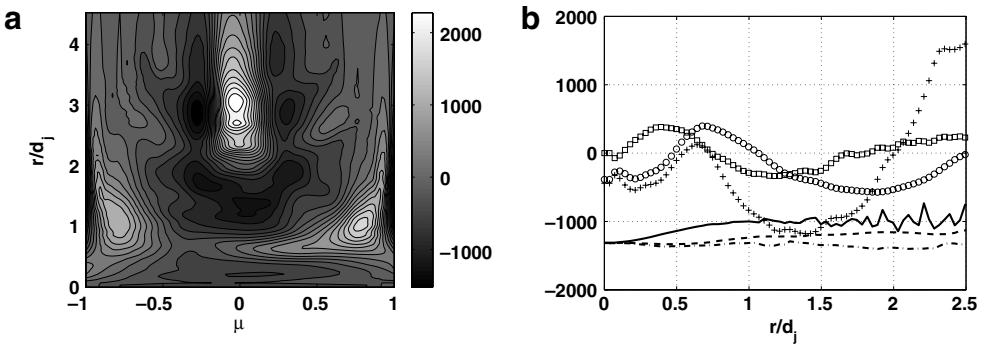


Fig. 9. (a): Distribution of term G; (b): Eq. (24) for different values of $\mu = 1$ (LHS: □, RHS: solid line), $\mu = 1/2$ (LHS: o, RHS: dashed line) and $\mu = 0$ (LHS: +, RHS: dash-dotted line).

Author's personal copy

to use rather numerical simulations to perform this investigation, instead of under-resolved (in space/time) PIV. This issue is left for the future.

Acknowledgements

Financial support from the French National Research Agency, under the projects 'Micromélange' and 'ANISO', is gratefully acknowledged. Professor P.E. Dimotakis is thanked for the useful discussions.

References

[1] A. Kolmogorov, Dokl. Akad. Nauk SSSR 32 (1941).
[2] A.S. Monin, A.M. Yaglom, in: J. Lumley (Ed.), Statistical Fluid Mechanics, vol. 2, MIT Press, Cambridge, MA, 1975.
[3] L. Danaila, F. Anselmet, T. Zhou, R.A. Antonia, J. Fluid Mech. 391 (1999) 359.
[4] R.A. Antonia, A. Chambers, L. Browne, Exp. Fluids 1 (1983) 213.
[5] L. Mydlarski, Z. Warhaft, J. Fluid Mech. 320 (1996) 331–368.
[6] T. von Karman, L. Howarth, Proc. R. Soc. Lond. Ser. A 164 (1938) 192.
[7] P.G. Saffman, Lectures on homogeneous turbulence, in: N. Zabusky (Ed.), Topics in Nonlinear Physics, Springer, 1968, pp. 485–614.
[8] E. Lindborg, Phys. Fluids 11 (1999) 510.
[9] G. Batchelor, A. Townsend, Proc. R. Soc. Lond. Ser. A Math. Phys. Sci. 190 (1947) 534–550.
[10] R.A. Antonia, M. Ould-Rouis, F. Anselmet, Y. Zhu, J. Fluid Mech. 332 (1997) 395.
[11] A.M. Yaglom, Dokl. Akad. Nauk SSSR 69 (1949) 743.
[12] L. Danaila, R.A. Antonia, P. Burattini, New J. Phys. 6 (128) (2004) 1–23.
[13] R. Hill, J. Fluid Mech. 353 (1997) 67.
[14] L. Danaila, F. Anselmet, T. Zhou, R.A. Antonia, J. Fluid Mech. 430 (2001) 87.
[15] G. Batchelor, Proc. R. Soc. Lond. A 195 (1949) 513–532.
[16] B.K. Shivamoggi, R.A. Antonia, Fluid Dynam. Res. 26 (2000) 95–104.
[17] S. Chandrasekhar, Philos. Trans. R. Soc. Lond. Ser. A Math. Phys. Sci. 242 (1950) 557–577.
[18] C. Cambon, L. Danaila, F. Godeferd, J. Scott, Internal report of the ANR Activity 'ANISO', 2011.
[19] J.-F. Krawczynski, B. Renou, L. Danaila, Phys. Fluids 22 (2010) 1.
[20] J. Foucault, J. Carlier, M. Stanislas, Meas. Sci. Technol. 15 (2004) 1046–1058.
[21] V. Denshchikov, V. Kontratev, A. Romashev, Fluid Dyn. 6 (1978) 924–926.
[22] J. Rolon, D. Veynante, J. Martin, Exp. Fluids 11 (1991) 313–324.
[23] L. Kostiuk, K. Bray, R. Cheng, Combust. Flame 92 (1993) 377–395.
[24] G. Stan, Fundamental characteristics of turbulent opposed impinging jets, Ph.D. Thesis, U. Waterloo, Canada, 2000.
[25] C. Soong, P. Tzeng, C. Hsieh, Phys. Fluids 10 (1998) 2910–2921.
[26] A. Nahum, A. Seifert, Phys. Fluids 18 (2006) 064107.
[27] M. Barchillon, R. Curtet, J. Basic Eng. 86 (1964) 777–787.
[28] E. Lindborg, J. Fluid Mech. 302 (1995) 179–201.
[29] F. Anselmet, R.A. Antonia, M. Ould-Rouis, J. Turbul. 003 (2000) 1.
[30] M. Ould-Rouiss, Eur. Phys. J. B 15 (2000) 339–347.
[31] S. Galtier, Phys. Rev. E 80 (2009) 046301.
[32] F.S. Godeferd, C. Staquet, J. Fluid Mech. 486 (2003) 115–159.
[33] P. Sagaut, C. Cambon, Homogeneous Turbulence Dynamics, Cambridge University Press, 2008.

Conclusions et Perspectives

"Une sortie, c'est une entrée que l'on prend dans l'autre sens."

Boris Vian

Conclusions

L'ambition première de ce travail de thèse est avant tout d'explorer les interactions entre le mouvement organisé et le reste du champ turbulent. Notre point de vue est tout d'abord théorique puis nous appliquons ensuite notre démarche au cas particulier de l'écoulement de sillage. Cet écoulement est choisi pour différentes raisons. D'une part il est relativement simple à mettre en place dès lors que l'on dispose d'une soufflerie adaptée. D'autre part, il est réputé pour présenter une identité cohérente forte se mêlant à un fond turbulent, et persistant sur de longues distances en aval de l'obstacle. Il s'agit donc d'un support particulièrement adapté afin de répondre aux ambitions de ce travail de thèse. Enfin, cet écoulement canonique fut largement étudié par le passé et l'on dispose donc d'une très grande variété de résultats et donc d'une large connaissance sur ce sujet.

Après un bref rappel des théories statistiques existantes, un cadre analytique original est tout d'abord proposé afin de décrire les interactions entre le mouvement ordonné et la turbulence à chaque échelle. La proposition de Townsend est réintroduite comme point de mire de cette étude. La réconciliation des théories statistiques et de l'école des structures cohérentes est ainsi entamée, en l'occurrence sur le terrain des statistiques. Cela est permis notamment grâce à l'opération de moyenne de phase prodiguant la possibilité de traiter l'ordre d'un point de vue statistique, le désordre ne pouvant être traité de manière déterministe.

Le développement analytique repose sur les équations de transport du mouvement organisé et du mouvement aléatoire [119], qui elles-mêmes dérivent des équations de Navier-Stokes. Chacune de ces relations est écrite en deux points séparés d'une distance spatiale variable, qui fixe une échelle particulière du champ fluctuant. Puis, les propriétés de la moyenne de phase et de la moyenne temporelle sont utilisées afin d'aboutir à une forme générale (sans hypothèse) du bilan énergétique propre à chacune des entités du champ de vitesse. Lorsque la séparation spatiale tend vers de très grandes valeurs, les bilans en un point proposés par Reynolds et Hussain [119] sont recouvrés.

En l'état, la forme générale des bilans énergétiques en deux points se résume à un problème en six dimensions : 3 dimensions d'espace et 3 dimensions dans l'espace des séparations. Dans le but d'une représentativité possible des résultats, une hypothèse doit être invoquée afin de réduire le nombre de degrés de liberté du problème. Pour ce faire, nous développons la forme localement homogène et isotrope des bilans énergétiques à chaque échelle. Ce résultat théorique a deux intérêts majeurs. D'une part, cette formulation peut être explorée par le biais d'expérimentations, par exemple au fil chaud, pour lesquelles une seule composante de séparation spatiale est accessible. D'autre part, elle autorise une comparaison avec les théories isotropes existantes. Cette comparaison met en lumière un certain nombre de termes supplémentaires, aux grandes ainsi qu'aux échelles intermédiaires. On montre ainsi qu'un certain nombre de processus constituent une perte d'énergie pour le mouvement organisé, ces mêmes processus agissant comme un gain d'énergie pour le mouvement aléatoire. D'autre part, nous qualifions de manière explicite le transfert énergétique effectif du mouvement aléatoire. Il est en l'occurrence constitué du transfert total, auquel sont soustraits le transfert énergétique du mouvement organisé ainsi que le terme d'interaction entre les deux entités du champ fluctuant.

Ces différentes théories statistiques sont utilisées comme outil de description des écoulements turbulents, quels qu'ils soient. Elles permettent de jauger la contribution énergétique des différents processus physiques, les zones de l'écoulement ainsi que les échelles du spectre auxquelles ces mécanismes prédominent.

Lors de cette thèse, différentes techniques expérimentales complémentaires sont mises en place afin de caractériser au mieux l'écoulement. Par exemple, la conjonction des signaux temporels issus de la méthode ADL3C et des mesures spatiales par PIV aboutit à une évaluation précise de la vitesse de convection à une échelle particulière du champ turbulent. Cette estimation est confortée par l'utilisation d'une autre méthode issue de la PIV rapide. Nous prouvons ainsi que l'intégralité du champ turbulent est advectée à une même vitesse U_c qui est la vitesse longitudinale au centre des tourbillons de l'allée de Bénard-von Kármán. Il s'agit donc d'une interaction 'à l'ordre 0' entre le mouvement organisé et le reste du champ turbulent. Les plus grandes échelles de l'écoulement *a fortiori* cohérentes pilotent la dynamique du transport des plus petites structures. Le transport d'un nombre d'onde particulier au sein de l'écoulement de sillage est également caractérisé par la méthode de diffusion acoustique. Nous mettons en évidence de manière très forte, grâce à cette technique, qu'une échelle donnée du spectre présente une dynamique d'advection périodique en temps et que cette périodicité atteste de la persistance du mouvement organisé très loin en aval du cylindre.

De plus, l'hypothèse d'axisymétrie autour de l'axe y en champ proche est confortée en mesurant les trois composantes de vitesse via la technique ADL. Le taux moyen de dissipation de l'énergie cinétique turbulente est également correctement évalué grâce à la bonne résolution temporelle de cette méthode expérimentale. Enfin, les fluctuations ordonnées de la pression ainsi que les corrélations vitesse-pression sont déterminées en résolvant l'équation de Poisson propre à la moyenne de phase de la pression. Seule la

méthode de PIV rapide permet cette estimation. L'intégralité des termes constituant les bilans énergétiques en un point sont mesurés. Nous notons, en particulier, l'importance de la zone de recirculation ainsi que sa relation au champ de pression fluctuante, sur le développement du champ proche de l'écoulement. Ce champ proche du sillage est très fortement marqué par la présence des structures cohérentes, dont la contribution énergétique peut dépasser celle du mouvement aléatoire.

Enfin, les dernières considérations portent sur les bilans énergétiques en deux points. A la différence des bilans énergétiques en un point, les processus physiques associés à l'énergie cinétique turbulente sont alors décrits pour chacune des échelles du spectre turbulent. Du fait de l'utilisation de la formulation localement isotrope des bilans à chaque échelle, nous nous écartons du champ proche du sillage et portons nos regards sur le champ intermédiaire où l'on espère que cette hypothèse soit davantage vérifiée. Dans cette zone, les mesures réalisées au fil chaud au Coria sont complétées par des mesures réalisées à l'université de Newcastle en Australie. Des mesures de vorticité (1 et 3 composantes simultanées) réalisées par T. Zhou sous la supervision de R. Antonia ([10], [147]) dans le sillage de différents obstacles, à différentes positions dans l'écoulement sont alors de nouveau exploitées.

Une étape préliminaire se concentre donc sur la vérification de l'hypothèse d'isotropie locale. Nous nous sommes focalisés sur la ligne centrale du sillage afin de discriminer les effets d'un cisaillement moyen, d'un cisaillement fluctuant qui témoigne de la présence d'un mouvement organisé. En s'inspirant de l'étude de Durbin & Speziale [51], il est notamment prouvé que l'anisotropie locale sera d'autant plus grande que le rapport entre le temps caractéristique de cascade $\overline{q^2}/\overline{\epsilon}$ et le temps caractéristique du cisaillement cohérent $\tilde{S}$ sera grand. D'autre part, nous proposons une définition d'une échelle caractéristique du cisaillement cohérent, similaire à celle initialement introduite par Corrsin [37] : $L_{\tilde{S}} = \sqrt{\overline{\epsilon}/\tilde{S}^3}$. Par analogie avec l'étude de Casciola [30], $L_{\tilde{S}}$ est interprétée comme la séparation à laquelle le transfert d'énergie et la production associée à la présence du cisaillement cohérent sont de même ordre de grandeur. Il est démontré que l'anisotropie locale sera observée à une échelle d'autant plus faible que l'échelle $L_{\tilde{S}}$ est faible. L'existence d'un comportement localement isotrope, lorsque le nombre de Reynolds ou bien la distance en aval du cylindre tend vers de très fortes valeurs, est remise en question.

Ensuite, nos regards se tournent vers l'influence des conditions initiales (forme de l'obstacle) sur la répartition d'énergie à une échelle r. Nous vérifions l'existence d'une similitude d'équilibre [61], dont l'intérêt pratique est d'estimer les bilans en deux points à partir de mesures en un unique point de l'écoulement. La formulation auto-similaire des bilans à chaque échelle est alors identique à celui propre à une turbulence de grille. Il est ensuite dévoilé que l'influence des conditions initiales se ressent pour des échelles supérieures à une certaine séparation L_c qui correspond au point d'intersection entre le transfert énergétique à une échelle r et le terme de décroissance à grande échelle. Nous montrons de plus que la tendance aux lois asymptotiques '4/5' et '4/3' de la turbulence de

sillage est plus rapide que pour une turbulence de grille classique. Cette différence dévoile une influence du mouvement organisé, qui induit un forçage et accentue le transfert total d'énergie.

Forts de ces différentes observations, les interactions entre le mouvement organisé et la turbulence sont alors caractérisées à chaque échelle [134]. Nous montrons alors pour la première fois, des fonctions de structure d'ordre deux et trois qui dépendent de deux variables : la séparation spatiale r ainsi que la phase du mouvement ordonné ϕ. Cela nous permet de statuer sur une très forte influence du mouvement ordonné sur le transfert énergétique total à une échelle r, plus particulièrement en terme de dynamique temporelle. Le transfert d'énergie présente, en l'occurrence, des maxima locaux coïncidant avec les centres des tourbillons. Des valeurs négatives s'observent également au niveau des points critiques de compression. Pour le nombre de Reynolds considéré dans cette étude, le transfert énergétique effectif est 15% plus faible que le transfert total, et se rapproche ainsi des prédictions analytiques à la loi 4/3 portant sur la turbulence en décroissance. Ces expérimentations révèlent, en outre, un très bon accord avec les considérations analytiques proposées lors de cette thèse.

Enfin, une première pierre est lancée sur le terrain de la description anisotrope des écoulements, en caractérisant l'anisotropie du transfert énergétique autour du point d'impact de deux jets opposés. Cette validation partielle de la forme axisymétrique du bilan à chaque échelle témoigne d'un transfert énergétique accentué dans la direction perpendiculaire à la direction principale des jets.

Perspectives

Conclure, c'est refermer les portes restées entre-ouvertes jusqu'alors. Mais on se doit également d'en ouvrir d'autres, peut être même davantage. Il y a ici quelque chose de fractal. Il faut donc prendre garde à ne pas se disperser dans toutes les directions, ne pas devenir turbulent à notre tour, de ne pas s'abandonner à tous les degrés de liberté au risque de ne plus comprendre sa propre démarche. Je vais donc essayer de donner ici quelques pistes en tant que proches perspectives en évitant la surabondance.

Nous avons représenté pour la première fois des fonctions de structure en fonction de la séparation spatiale et la phase du mouvement cohérent. Il serait intéressant d'étudier le bilan énergétique en amont de l'intégration temporelle. On pourrait alors décrire la dynamique temporelle induite par le mouvement cohérent et agissant sur les différents processus intrinsèques aux bilans énergétiques.

Ensuite, il semble important de libérer un degré d'anisotropie en développant la forme axisymétrique des bilans à chaque échelle prenant en considération le mouvement cohérent. De tels bilans seraient alors particulièrement adaptés à la description de la turbulence de jets ronds ou de sillages de sphère, pour lesquels l'axisymétrie est imposée par la géométrie de l'écoulement.

En outre, nous pouvons considérer des bilans en deux points associés, non pas à la trace

du tenseur des fonctions de structure $\overline{\Delta q^2}$, mais à chacune de ses composantes prises à part $\overline{(\Delta u_\alpha)^2}$. L'exploration de leur forme générale (sans hypothèse) permettrait, entre autres, de caractériser finement l'anisotropie du champ fluctuant, car la répartition d'énergie est alors décrite pour chaque composante et chaque échelle. Dans le cas particulier du sillage, cela permettrait de comprendre pourquoi la composante v est systématiquement plus anisotrope que w.

On dispose à l'heure actuelle d'un certain nombre d'expressions analytiques décrivant la distribution d'énergie à chacune des échelles du champ turbulent (Kurien & Sreenivasan [85], Aivalis *et al.* [1]). Ces formulations ne considèrent pas l'influence d'un mouvement organisé et ressemblent donc relativement peu à la répartition d'énergie rencontrée dans un écoulement de sillage par exemple. Or, certaines études montrent que la partie cohérente du champ fluctuant peut être correctement paramétrée par un archétype de tourbillons, comme par exemple le tourbillon de Oseen [149]. Il serait donc d'usage de prendre en compte ces paramètres afin de proposer une formulation analytique généralisée des fonctions de structure d'ordre deux, représentative de la présence d'un mouvement organisé.

Enfin, tous les outils théoriques développés dans cette thèse ne sont que descriptifs. En aucun cas ils ne permettent de modéliser la distribution d'énergie ou bien le transfert énergétique au sein de la cascade. Je crois que c'est dans cette direction que nous devons maintenant porter nos efforts. En ce qui concerne la modélisation de la distribution d'énergie à chaque échelle, certains processus stochastiques ont déjà fait leurs preuves [41] et pourraient être étendus aux écoulements présentant un mouvement organisé. Une autre tâche serait de modéliser le transfert énergétique (moment d'ordre 3) connaissant la distribution d'énergie (moment d'ordre 2). Une des voies qui est proposée par Danaila & Antonia [44], [46] est de supposer qu'une quantité d'énergie à une échelle r est transférée en un temps caractéristique, propre à cette échelle, mais n'ignorant pas l'existence des autres échelles. Danaila & Antonia [44], [46] postulent que ce temps caractéristique peut être issu du temps caractéristique de l'étirement émis par Batchelor [13], et traduit par Kraichnan [81]. Cependant, la turbulence ne se résout pas à un seul temps caractéristique et il semble évident que bien d'autres pourraient être invoqués. Reste à les imaginer.

Annexe A

La Décomposition Empirique en Mode (EMD)

La décomposition EMD [72] a pour objet de prescrire une analyse temps-fréquence de signaux physiques ou complexes non linéaires et non stationnaires. A la différence de la décomposition en ondelettes, cette méthode s'applique à un signal non stationnaire, c'est-à-dire dont la moyenne varie en fonction du temps. Le nombre de modes criblés par la méthode EMD est fini et permet de reconstruire le signal avec une erreur de l'ordre du zéro machine. Cela n'est pas le cas pour la décomposition en mode propre (POD) pour laquelle une reconstruction parfaite du signal nécessite un nombre infini de modes. Le processus de décomposition EMD est dit empirique car il s'auto-adapte en fonction du signal physique à traiter.

Fréquence instantanée - Fonctions modales intrinsèques. Le point d'ancrage de toute décomposition temps-fréquence est la notion de fréquence instantanée. Cette notion est particulièrement controversée. En effet, la précision de toute analyse temps-fréquence bute sur l'équivalent du principe d'incomplétude d'Heisenberg. Ce principe, qui s'inscrit dans le cadre de la physique microscopique, stipule que la précision conjointe sur la position et la vitesse d'une particule est bornée par une certaine valeur. Autrement dit, une très grande précision sur la position d'une particule est immédiatement associée à une forte incertitude sur sa vitesse, et *vice-versa*. La traduction de ce principe, dans le cadre de l'analyse temps-fréquence, est qu'une forte précision sur la localité temporelle d'un évènement sera inexorablement associée à une forte imprécision sur la détermination de la fréquence de cet évènement. Ainsi, dire qu'il existe une fréquence instantanée revient à stipuler que la précision spectro-temporelle n'est pas bornée.

La définition mathématique de la notion de fréquence instantanée est construite à partir de la transformée de Hilbert. Pour un signal physique $X(t)$ la transformée de

Hilbert s'écrit :

$$Y(t) = \frac{1}{\pi} P \int_{-\infty}^{\infty} \frac{X(t')}{t - t'} dt'$$

où P est la valeur principale de Cauchy. Ainsi, la transformation de Hilbert représente la convolution du signal avec la fonction $1/t$. Cette transformation peut se mettre sous la forme d'un nombre complexe $Z(t)$ tel que :

$$Z(t) = X(t) + iY(t) = a(t)e^{i\phi(t)} \tag{A.1}$$

avec

$$a(t) = X^2(t) + Y^2(t) \text{ et } \phi(t) = arctan\left(\frac{Y(t)}{X(t)}\right)$$

On peut alors définir une fréquence instantanée $\omega(t)$ telle que

$$\omega(t) = \frac{d\phi(t)}{dt} \tag{A.2}$$

On remarque donc que la fréquence instantanée est une unique valeur qui dépend du temps. La fréquence instantanée ne peut être alors définie que pour une fonction "monocomposante" : constituée que d'une seule fréquence. Cependant, il n'existe pas de définition claire d'un signal monocomposante, c'est pourquoi on lui préfère la définition de signal à bande étroite. La largeur de bande d'un signal peut être caractérisée par les $i^{\text{èmes}}$ moments m_i du spectre de ce signal. Pour ce faire, on calcule le nombre de passages par zéro N_0 d'un signal :

$$N_0 = \frac{1}{\pi}\left(\frac{m_2}{m_0}\right)^{1/2}$$

et le nombre d'extrema N_1 d'un signal :

$$N_1 = \frac{1}{\pi}\left(\frac{m_4}{m_2}\right)^{1/2}$$

On définit alors le paramètre ν par

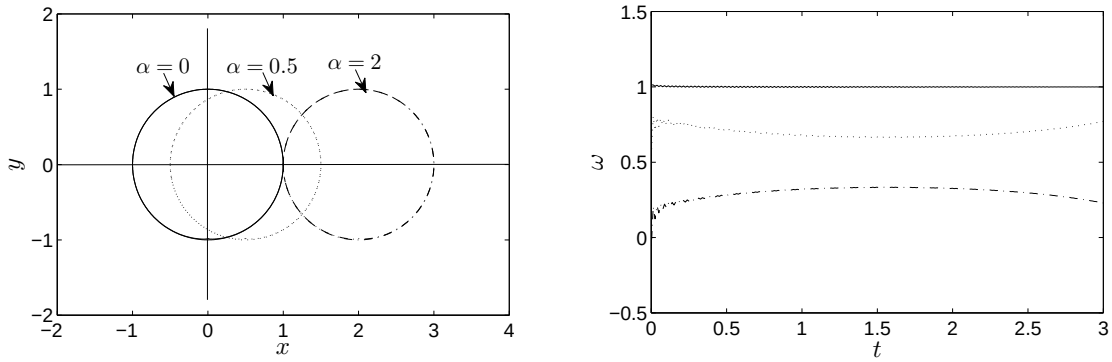
$$\frac{1}{\pi^2}\nu = N_1^2 - N_0^2 = \frac{1}{\pi^2}\frac{m_4 m_0 - m_2^2}{m_2 m_0}$$

Le paramètre ν est une mesure de la largeur de bande d'un signal. Un signal à bande étroite pour lequel la fréquence instantanée a du sens sera ainsi caractérisé par un paramètre $\nu = 0$. Autrement dit, la fréquence instantanée d'un signal n'est identifiable que pour des signaux dont le nombre de passages à zéro et d'extrema est identique.

Cette restriction est malheureusement très globale car elle considère l'intégralité du signal. Or, s'agissant d'une analyse temps-fréquence, il est nécessaire de définir une restriction plus locale. Pour ce faire, considérons un exemple avec le signal suivant :

$$x(t) = \alpha + sin(t)$$

La transformée de Hilbert de ce signal est notée $y(t)$ et vaut simplement $\alpha + cos(t)$. Le diagramme de phase $x(t), y(t)$, représenté sur la Fig. A.1(a), est un cercle de rayon 1 centré sur $x = \alpha$. Trois valeurs différentes de α sont considérées pour cet exemple, $\alpha = 0, 0.5, 2$.



(a) (b)

FIGURE A.1 – (a) Diagramme de phase $x(t), y(t)$ du signal $x(t) = \alpha + sin(t)$. (b) Fréquence instantanée calculée par la relation (A.2)

Sur la Fig. A.1(b) sont représentées les trois fréquences instantanées calculées par la relation (A.2), correspondant aux trois valeurs de α. Pour $\alpha = 0$, la fréquence instantanée vaut la valeur attendue de 1 quel que soit le temps. En revanche, en ce qui concerne $\alpha = 0.5$ et 2, la fréquence varie selon le temps et atteint même des valeurs négatives (non physiques) pour $\alpha = 2$. On en déduit donc que la notion de fréquence instantanée n'a de sens que si localement le signal est symétrique par rapport à zéro.

Or, la décomposition EMD se doit de traiter des signaux dont la largeur spectrale est large, d'une part, et dont la moyenne locale est non nulle et peut varier dans le temps (signaux non stationnaires). De plus, un signal physique est constitué en un temps donné de plusieurs fréquences instantanées.

Pour palier ces deux constats, le signal physique est décomposé en un nombre fini de composantes pour lesquelles la fréquence instantanée peut être définie. On considère donc une classe de fonctions, désignées comme Fonctions Modales Intrinsèques (IMF : *Intrinsic*

Mode Functions) basées sur les restrictions présentées ci-dessus (une restriction globale et une locale).

Le nom de Fonctions Modales Intrinsèques est adoptée parce qu'elles représentent un mode particulier présent dans le signal en un temps donné. Les fonctions modales intrinsèques doivent satisfaire deux conditions : (i) pour l'intégralité du signal, le nombre d'extrema et de passages à zéro doit être identique ou bien diffère de un au maximum (restriction globale de largeur de bande), (ii) à chaque instant la moyenne de l'enveloppe définie par la moyenne de l'enveloppe des minima et de l'enveloppe des maxima doit être nulle (restriction locale de symétrie par rapport à zéro).

Décompostion empirique des modes (EMD) - Processus de criblage (*Sifting process*). La décomposition est basée sur deux hypothèses : (i) Le signal présente au moins deux extrema (un minimum, un maximum), (ii) le temps caractéristique peut être défini par le laps de temps entre deux extrema, (iii) si le signal ne possède pas d'extremum mais uniquement des points d'inflexion alors il peut être dérivé une ou plusieurs fois pour révéler des extrema, le résultat final sera alors obtenu par intégration.

En vertu de leur propriété de symétrie locale, les IMF peuvent être criblées en utilisant l'enveloppe des maxima et l'enveloppe des minima. Une fois les extrema identifiés, les maxima sont connectés par spline cubique (meilleure méthode comparée à l'interpolation linéaire ou polynomiale [121]) pour former l'enveloppe supérieure. L'opération est répétée pour les minima. Leur moyenne est désignée par M_1 et la différence par rapport au signal brut par H_1, i.e :

$$H_1 = X(t) - M_1$$

En théorie, H_1 est une IMF. Cependant, en pratique cette opération révèle parfois de nouveaux extrema ou en exagère d'autres. De plus, de sérieuses difficultés se rencontrent près des bords du signal du fait de l'approximation spline cubique. Cela donne lieu à des ondes qui peuvent se propager dans le reste du domaine. Pour éliminer ces effets, et pour rendre les IMF plus symétriques par rapport à zéro, l'opération est répétée plusieurs fois. Ainsi,

$$H_{1k} = H_{1(k-1)} - M_{1k}$$

L'opération s'arrête à un certain niveau de convergence caractérisé par l'écart type (SD) d'une opération à l'autre, où :

$$SD = \sum_{t=0}^{T} \left(\frac{\left(H_{1k}(t) - H_{1(k-1)}(t)\right)^2}{H^2_{1(k-1)}(t)} \right)$$

Une valeur typique du critère de convergence est $SD = 0.2$. Rilling *et al.* [121] proposent une amélioration du critère de convergence, basé sur deux seuils différents : l'un

global portant sur la symétrie de l'IMF, l'autre local autorisant de fortes fluctuations autour de la moyenne. La première composante des IMF est ainsi définie par $c_1 = H_{1k}$, et le résidu r_1 par

$$r_1 = X(t) - c_1$$

Du fait que le résidu r_1 contient la trace d'une composante à plus grande échelle, r_1 est traité comme un nouveau signal et l'opération précédente est répétée. D'où

$$r_2 = r_1 - c_2, ..., r_n = r_{n-1} - c_n$$

Les opérations de criblage des IMF s'arrêtent lorsque plus aucune IMF ne peut être extraite, en d'autres termes, lorsque le résidu est une fonction monotone. Et le signal original peut être reconstruit par :

$$X(t) = \sum_{i=1}^{n} c_i + r_n$$

Pour un signal non stationnaire, le résidu r_n correspond à la déviation temporelle de la moyenne. Rilling *et al.* [121] résument l'algorithme de criblage par :

(1) identifier tous les extrema ;
(2) interpoler les maxima et les minima pour déterminer l'enveloppe supérieure ($e_{max}(t)$) et l'enveloppe inférieure ($e_{min}(t)$) ;
(3) calculer la moyenne $m(t) = (e_{min}(t) + e_{max}(t))/2$;
(5) extraire le mode $c(t) = X(t) - m(t)$;
(6) itérer sur le résidu.

La Fig. A.2 représente le résultat d'une décomposition EMD d'un signal physique correspondant à la vitesse d'un écoulement turbulent. Ce signal présente une fréquence typique caractéristique de l'allée de tourbillons de Bénard-von Kármán. La décomposition crible, dans ce cas, 10 modes et un résidu. La Fig. A.3 montre que ces 10 modes suffisent à reconstruire le signal original avec une précision qui est de l'ordre de la précision de l'ordinateur ($\approx 1e^{-15}$).

La question que l'on se pose maintenant concerne l'orthogonalité des différents modes extraits par la méthode EMD. En effet, du fait que la décomposition EMD ne présuppose pas l'existence d'une base de fonction sur laquelle est projeté le signal (ce qui est le cas pour la décomposition de Fourier ou en mode propres), on ne peut pas postuler *a priori* l'orthogonalité des différents modes. Pour déterminer l'orthogonalité des modes EMD, l'énergie du signal $X^2(t)$ peut s'écrire :

$$X^2(t) = \sum_{j=1}^{n+1} c_j(t)^2 + 2 \sum_{j=1}^{n+1} \sum_{k=1}^{n+1} c_j(t) c_k(t)$$

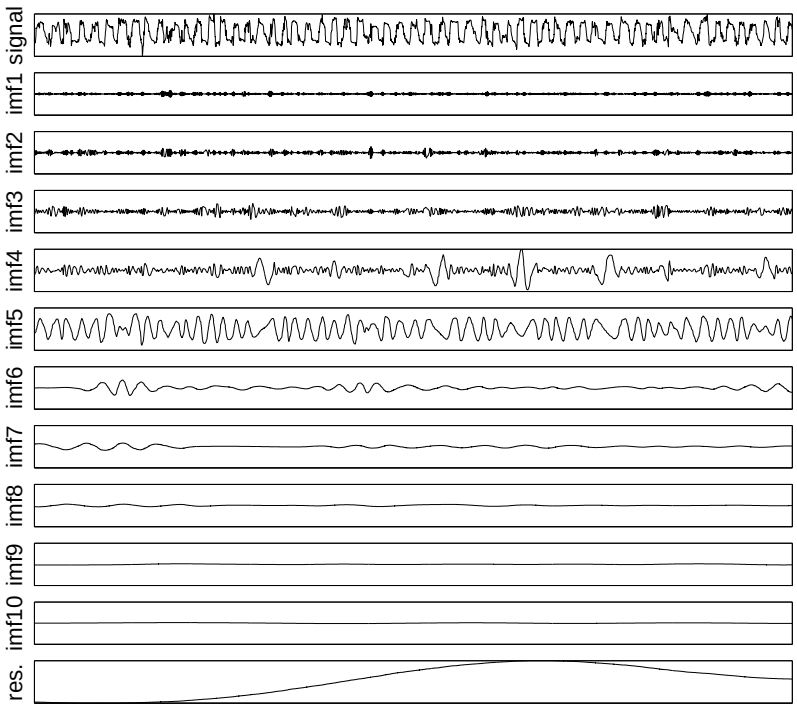


FIGURE A.2 – Décomposition EMD d'un signal obtenu par Anémométrie Doppler Laser (ADL) sur la ligne centrale d'un sillage de cylindre ($x = 7D$)

Si les modes sont orthogonaux, alors la seconde partie de l'expression précédente est nulle. On peut alors donner un indice d'orthogonalité IO tel que :

$$IO = \sum_{t=0}^{T} \left(\sum_{j=1}^{n+1} \sum_{k=1}^{n+1} c_j(t) c_k(t) / X^2(t) \right)$$

Cet indice peut être affiné en considérant l'orthogonalité de deux modes entre eux, ainsi :

$$IO_{fg} = \sum_{t=0}^{T} \left(\frac{c_f(t) c_g(t)}{c_f^2 + c_g^2} \right)$$

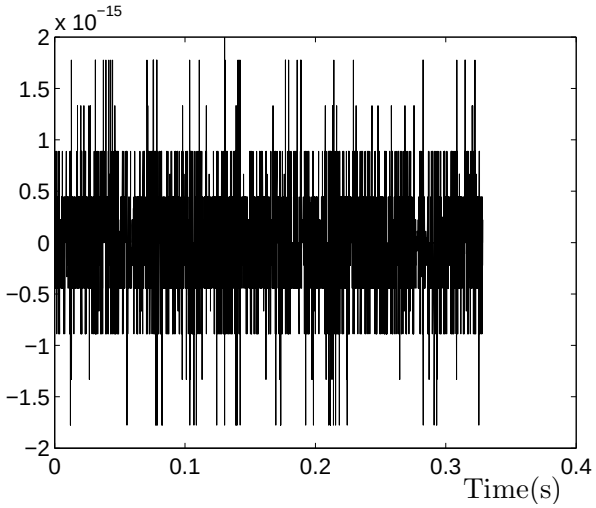


FIGURE A.3 – Reconstruction du signal original. $X(t) - \sum_{i=1}^{n} c_i + r_n$

Annexe B

Méthode des éléments finis : Résolution de l'équation de Poisson

La méthode numérique des éléments finis est une technique particulière de résolution des équations aux dérivées partielles. Dans notre cas cette méthode est appliquée à la résolution de l'équation de Poisson. Nous avons choisi d'utiliser le logiciel gratuit ***Freefem*** codé en C++ qui utilise la méthode des éléments finis (EF).

La forme des équations.

- Différence finie : forme forte

$$\frac{\partial U}{\partial t} + U.\nabla U = -\nabla P + \nu \Delta U$$

- Éléments finis : forme faible

$$\int_{\Omega} NS.f = 0$$

  où Ω est le domaine sur lequel l'équation est résolue Fig. B.1 et f une fonction test.

- Volume fini : forme intégrale locale :

$$\int_{\delta\Omega} NS.f = 0$$

La méthode de discrétisation. Pour toutes méthodes numériques, on cherche une solution de la forme :

$$P = \sum_{k} P_k \phi_k$$

où les ϕ_k sont les fonctions de base.

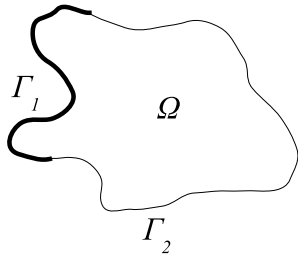


Figure B.1 – Domaine de calcul

– Différence finie (Fig. B.2) :

$$\phi_k = 1 \text{ au point } k$$
$$\phi_k = 0 \text{ ailleurs}$$

– Éléments finis (Fig. B.2) :

$$\phi_k = 1 \text{ au point } k$$
$$\phi_k \text{ fonction affine (P1)}$$
$$\text{ou } \phi_k \text{ polynôme d'ordre N (PN) ailleurs}$$

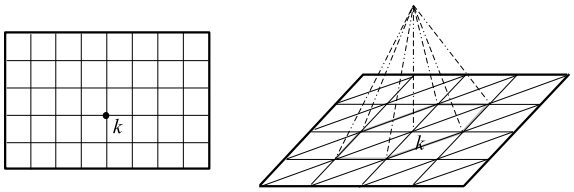


Figure B.2 – Représentation schématique des fonctions de base. (gauche) différences finies, (droite) éléments finis (P1)

Condition aux limites. Selon les configurations, il convient d'imposer les conditions aux limites adéquates. La solution des équations elliptiques ne dépend que des conditions aux limites. Le choix des conditions limites est donc particulièrement critique et doit assuré la convergence de la méthode numérique. Il existe différents types de conditions limites :

– Dirichlet :

$$P|_{\Gamma_1} = P^*$$

– Neumann :

$$\frac{\partial P}{\partial n}|_{\Gamma_2} = 0$$

– Robin :

$$\alpha P|_{\Gamma_1} + \beta \frac{\partial P}{\partial n}|_{\Gamma_2} = 0$$

Formulation variationnelle de l'équation de Poisson. Pour plus de facilité, l'équation de Poisson est réécrite de la manière suivante :

$$-\Delta P = \Theta$$

Sous sa forme variationnelle, l'équation précédente s'écrit :

$$-\int_\Omega \Delta P.f = \int_\Omega \Theta.f$$

D'après le théorème de Gauss-Ostogradsky :

$$\int_\Omega div\,(\overrightarrow{\varphi}) = \int_\Gamma \overrightarrow{\varphi}\,\overrightarrow{n}$$

or $\Delta P = div\,(\nabla P)$, d'où

$$-\Delta P.f = -div\,(\nabla P.f) + \nabla P.\nabla f$$

Donc

$$\int_\Omega \nabla P.\nabla f - \int_\Omega div\,(\nabla P.f) = \int_\Omega \Theta.f$$
$$\int_\Omega \nabla P.\nabla f - \int_\Gamma (\nabla P)\,.f.\overrightarrow{n} = \int_\Omega \Theta.f$$

Qui peut s'écrire également :

$$\int_\Omega \nabla P.\nabla f - \int_\Gamma \frac{\partial P}{\partial n}.f = \int_\Omega \Theta.f$$

Tout l'intérêt de la méthode des éléments finis est à ce stade évident. En effet, on voit apparaitre de manière explicite les conditions aux limites, qui font partie intégrante du problème à résoudre. A priori, les éléments finis semblent un peu plus complexes que les autres méthodes mais au final, modifier les conditions aux limites devient un jeu d'enfant.

Discrétisation de la formulation variationnelle. On rappel que :

$$P = \sum_{j=1}^{n_v} P_j \phi_j$$

où n_v est le nombre de vertex (sommet des triangles).

Admettons dans un premier temps, et pour faciliter la compréhension que $\int_\Gamma \frac{\partial P}{\partial n}.f = 0$. Si bien que la discrétisation de la formulation variationnelle de l'équation de Poisson s'écrit :

$$\sum_{j=1}^{n_v} P_j \int_\Omega \nabla\phi_j.\nabla f = \int_\Omega \Theta.f$$

Il s'agit donc d'un problème à n_v inconnues qui nécessite donc n_v équations. ***Freefem*** utilise à ce stade la méthode de Galerkin qui stipule intuitivement que l'on peut prendre n_v fonctions test définies par les fonctions de base, soit donc :

$$f = \phi_j \text{ avec } j = 1 : n_v$$

D'où

$$\sum_{j=1}^{n_v} P_j \int_\Omega \nabla\phi_j.\nabla\phi_j = \int_\Omega \Theta.\phi_j$$

ce qui se résume à un problème du type :

$$\sum_{j=1}^{n_v} A_{ij} P_j = \Theta_i$$

La forme faible de l'équation de Poisson discrétisée se résout par le biais de n_v systèmes linéaires à inverser. ***Freefem*** dispose de toutes les fonctions intrinsèques permettant de résoudre ces systèmes d'équation.

Bibliographie

[1] K. G. Aivalis, K. R. Sreenivasan, Y. Tsuji, J.C. Klewicki, and C. A. Biltoft. Temperature structure functions for air flow over moderately heated ground. *Phys. Fluids*, 14 :2439–2446, 2002.

[2] R. A. Antonia. The role of coherent structures. comment 3. *Lecture notes in Physics*, 357 :156–169, 1990.

[3] R. A. Antonia, L. W. B. Browne, D.K. Bisset, and L. Fulachier. A description of the organized motion in the turbulent far wake of a cylinder at low reynolds number. *J. Fluid Mech.*, 184 :423–44, 1987.

[4] R. A. Antonia and P. Burattini. Approach to the 4/5 law in homogeneous isotropic turbulence. *Journ. Fluid Mech.*, 550 :175–184, 2006.

[5] R. A. Antonia, M. Ould-Rouis, F. Anselmet, and Y. Zhu. Analogy between predictions of Kolmogorov and Yaglom. *J. Fluid Mech.*, 332 :395–409, 1997.

[6] R. A. Antonia and B. R. Pearson. Effect of initial conditions on the mean energy dissipation rate and the scaling exponent. *Phys. Rev. E.*, 62, 2000.

[7] R. A. Antonia, R. J. Smalley, T. Zhou, F. Anselmet, and L. Danaila. Similarity of energy structure functions in decaying homogeneous isotropic turbulence. *J. Fluid Mech.*, 487 :245–269, 2003.

[8] R. A. Antonia and Q. Zhao. Effect of initial conditions on a circular jet. *Exp. Fluids*, 31, 2001.

[9] R. A. Antonia, T. Zhou, L. Danaila, and F. Anselmet. Streamwise inhomogeneity of decaying grid turbulence. *Phys. Fluids*, 12 :3086–3089, 2000.

[10] R. A. Antonia, T. Zhou, and G. P. Romano. Small-scale turbulence characteristics of two dimensional bluff body wakes. *J. Fluid Mech.*, 459, 2002.

[11] R. A. Antonia, Y. Zhu, and H. S. Shafi. Lateral vorticity measurements in a turbulent wake. *J. Fluid Mech.*, 323 :173–200, 1996.

[12] G. K. Batchelor. The theory of axisymmetric turbulence. *Proc. Roy. Soc. London*, 186 :480–502, 1946.

[13] G.K. Batchelor. Small-scale variation of convected quantities like temperature in turbulent fluid part 1. general discussion and the case of small conductivity. *J. Fluid Mech.*, 5 :113, 1959.

[14] C. Baudet, S. Ciliberto, and J. F. Pinton. Spectral analysis of the von Karman flow using ultrasound scattering. *Phys. Rev. Lett.*, 67 :193–195, 1991.

[15] C. Baudet, O. Michel, and W. J. Williams. Detection of coherent vorticity structures using time-scale resolved acoustic spectroscopy. *Phys. D*, 128 :1–17, 1999.

[16] H. Bénard. Formation de centres de girations à l'arrière d'un obstacle en mouvement. *C.R Acad. Sciences*, pages 839–842, 1908.

[17] D. K. Bisset, R. A. Antonia, and D. Britz. Structure of large-scale vorticity in a turbulent far wake. *J. Fluid Mech.*, 218, 1990.

[18] D. K. Bisset, R. A. Antonia, and L. W. B. Browne. Spatial organization of large structures in the turbulent far wake of a cylinder. *J. Fluid Mech.*, 218, 1990.

[19] S. Blanc, P. Mosto, M. E. de Milou, and C. Benitez. An alternative proposal : acoustic techniques to asses detection and monitoring of toxic algal blooms. *Gayana T.I. Proc. Concepcion*, 68(2) :54–59, 2004.

[20] M.S. Bloor. The transition to turbulence in the wake of a circular cylinder. *J. Fluid Mech.*, 19, 1964.

[21] P. Bradshaw. The role of coherent structures. comment 2. *Lecture notes in Physics*, 357 :152–157, 1990.

[22] G.L. Brown and A. Roshko. On density effects and large structure in turbulent mixing layers. *J. Fluid Mech.*, 64 :775, 1974.

[23] L. W. B. Browne, R. A. Antonia, and D. A. Shah. Turbulent energy dissipation in a wake. *J. Fluid Mech.*, 179 :307–326, 1987.

[24] L.W.B. Browne, R. A. Antonia, and L. P. Chua. Calibration of x-probes for turbulent flow measurements. *Exp. Fluids*, 7, 1989.

[25] H. H. Bruun. *Hot wire anemometry : Principles and signal analysis.* Oxford University Press, 1995.

[26] P. Buchave. Biasing errors in individual particle measurements with the lda-counter signal processor. *Proc. LDA. Symp, Copenhagen*, page 258, 1975.

[27] P. Burattini and R. A. Antonia. The effect of different x-wire schemes on some turbulence statistics. *Exp. Fluids*, 38, 2005.

[28] P. Burattini, R. A. Antonia, and L. Danaila. Similarity in the far field of a turbulent round jet. *Phys. Fluids*, 17, 2005.

[29] B. Cantwell and D. Coles. An experimental study of entrainment and transport in the turbulent near wake of a circular cylinder. *J. Fluid Mech.*, 136, 1983.

[30] C. M. Casciola, P. Gualtieri, R. Benzi, and R. Piva. Scale-by-scale budget and similarity laws for shear turbulence. *J. Fluid Mech.*, 476 :105–114, 2003.

[31] S Chandrasekhar. The theory of axisymmetric turbulence. *Proc. Roy. Soc. London*, 242 :557–577, 1950.

[32] J.J. Charonko, C.V. King, B.L Smith, and P.P. Vlachos. Assessment of pressure field calculations from particle image velocimetry measurements. *Meas. Sci. Techn.*, 21, 2010.

[33] D. Chung and B. J. McKeon. Large-eddy simulation of large-scale structures in long channel flow. *J. Fluid Mech.*, 66 :341–364, 2010.

[34] J. M. Cimbala, H. M. Nagib, and A. Roshko. Large structure in the far wakes of two-dimensional bluff bodies. *J. Fluid Mech.*, 190 :265–298, 1988.

[35] F. Corbin, B. Patte, and M. Trinité. Automatisation des mesures de vitesse en vélocimétrie laser. application à la cartographie et au suivi des lignes de courant. *3ème Congrès Francophone de Vélocimétrie Doppler Laser, Toulouse*, 1992.

[36] T. Corpetti, D. Heitz, G. Arroyo, E. Memin, and A. Santa-Cruz. Fluid experimental flow estimation based on an optical-flow scheme. *Exp. Fluids*, 40 :80–97, 2006.

[37] S. Corrsin. Local isotropy in turbulent shear flow. *NACA RM*, 58B11, 1958.

[38] L. Danaila. Description analytique des écoulements et du mélange turbulent. *Habilitation à Diriger la Recherche*, 2006.

[39] L. Danaila, F. Anselmet, and R. A. Antonia. Turbulent energy scale budget equations in a fully developped chanel flow. *J. Fluid Mech.*, 430 :87–109, 2001.

[40] L. Danaila, F. Anselmet, and R. A. Antonia. An overview of the effect of large scale inhomogeneities on small-scale turbulence. *Phys. Fluids*, 14, 2002.

[41] L. Danaila, F. Anselmet, P. Le Gal, J. Dusek, C. Brun, and A. Pumir. Predictions of small-scale statistics for a passive scalar in turbulent mixing. *Phys. Rev. Lett.*, 79 :4577–4580, 1997.

[42] L. Danaila, F. Anselmet, and T. Zhou. Turbulent energy scale-budget equations for nearly homogeneous sheared turbulence. *Flow Turbulence and Combustion*, 72 :287–310, 2004.

[43] L. Danaila, F. Anselmet, T. Zhou, and R. A. Antonia. A generalization of yaglom's equations which accounts for the large-scale forcing in heated decaying turbulence. *J. Fluid Mech.*, 391 :359–372, 1999.

[44] L. Danaila and R. A. Antonia. Spectrum of a passive scalar in moderate reynolds number homogeneous isotropic turbulence. *Phys. Fluids*, 21, 2009.

[45] L. Danaila, R. A. Antonia, and P. Burattini. Progress in studying small-scale turbulence using 'exact' two-point equations. *New Journ. Phys.*, 6, 2004.

[46] L. Danaila, R. A. Antonia, and P. Burattini. Comparison between kinetic energy and passive scalar energy transfer in locally homogeneous isotropic turbulence. *Phys. D*, 241 :224–231, 2012.

[47] L. Danaila, J.F. Krawczynski, F. Thiesset, and B Renou. Yaglom-like equation in axisymmetric anisotropic context. *Phys. D*, 241 :216–223, 2012.

[48] L. Danaila and L. Mydlarski. Effect of gradient production on scalar fluctuations in decaying grid turbulence. *Phys. Rev. E*, 64, 2001.

[49] L. Danaila, T. Zhou, F. Anselmet, and R. A. Antonia. Sur l'évolution du taux moyen de dissipation de l'énergie cinétique de la turbulence dans une turbulence de grille. *Congrès Français de Mécanique*, 2003.

[50] H. Djeridi, M. Braza, R. Perrin, E. Harran, E. Cid, and S. Cazin. Near-wake turbulence properties around a circular cylinder at high reynolds number. *Flow, Turbulence and Combustion.*, 71, 2003.

[51] P. A. Durbin and C. G. Speziale. Local anisotropy in strained turbulence at high reynolds numbers. *Recent Advances in Mechanics of Structured Continua*, 117 :402–426, 1991.

[52] R. V. Edwards and A. S. Jensen. Particle-sampling statistics in laser anemometers : sample-and-hold systems and saturable systems. *J. Fluid Mech.*, 133 :397–411, 1983.

[53] A. Fage and F.C. Johansen. Flow of air behind an inclined flat plate of infinite span. *Proc. Roy. Soc. London*, 116, 1927.

[54] A. Fage and F.C. Johansen. The flow of air and of an inviscid fluid around an elliptic cylinder and an airfoil of infinite span, especially in the region of the forward stagnation point. *Proc. Roy. Soc. London*, 647, 1928.

[55] J. M. Foucaut, J. Carlier, and M. Stanislas. PIV optimization for the study of turbulent flow using spectral analysis. *Meas. Sci. Techn.*, 15, 2004.

[56] P. Freymuth. A bibliography of thermal anemometry. *TSI Incorporated*, 4, 1982.

[57] N. Fujisawa, S. Tanhashi, and K. Srinivas. Evaluation of pressure field and fluid forces on a circular cylinder with and without rotational oscillation using velocity data from PIV measurement. *Meas. Sci. Techn.*, 16 :989–996, 2005.

[58] L. Fulachier and R. A. Antonia. Spectral analogy between temperature and velocity fluctuations in several turbulent flows. *Int. Journ. Heat Mass Transfer*, 27 :987–997, 1984.

[59] L. Fulachier and R Dumas. Spectral analogy between temperature and velocity fluctuations in a turbulent boundary layer. *J. Fluid Mech.*, 77 :257–277, 1976.

[60] E. Gaudin, B. Protas, S. Goujon-Durand, J. Wojciechowski, and J. E. Weisfreid. Spatial properties of the velocity structure functions in turbulent wake flows. *Phys. Rev. E*, 57, 1998.

[61] W.K. George. The decay of homogeneous isotropic turbulence. *Phys. Fluids*, 4 :1492–1509, 1992.

[62] W.K. George and J. Hussein. Locally axisymmetric turbulence. *J. Fluid Mech.*, 233 :1–23, 1991.

[63] J.H. Gerrard. A disturbance-sensitive reynolds number range of the flow past a circular cylinder. *J. Fluid Mech.*, 22, 1965.

[64] J.H. Gerrard. The mechanics of the formation of vortices behind bluff bodies. *J. Fluid Mech.*, 25, 1966.

[65] R. Gurka, A. Liberzon, D. Hefetz, D. Rubistein, and U. Shavit. Computation of pressure distribution using PIV velocity data. *Proc. 3rd Int. Workshop PIV (Santa Barbara)*, 1999.

[66] M. Hayakawa and A. K. M. F. Hussain. Three-dimensionality of organized structures in a plane turbulent wake. *J. Fluid Mech.*, 206 :375–404, 1989.

[67] D. Heitz, P. Heas, E. Memin, and Carlier F. Dynamic consistent correlation-variational approach for robust optical flow estimation. *Exp. Fluids*, 45 (4) :595–608, 2008.

[68] R. J. Hill. Applicability of Kolmogorov's and Monin's equations of turbulence. *J. Fluid Mech.*, 353 :67–81, 1997.

[69] R. J. Hill. Equations relating structure functions of all orders. *J. Fluid Mech.*, 434 :379–388, 2001.

[70] R.J. Hill. Exact second-order structure-function relationships. *J. Fluid Mech.*, 468 :317–326, 2002.

[71] J. O. Hinze. *Turbulence*. Mac Graw Hill, 1959.

[72] N. E. Huang, Z. Shen, S. R. Long, M.C. Wu, H. H. Shih, Q. Zheng, N-C. Yen, C. C. Tung, and H. Liu. The empirical mode decomposition ans the hilbert spectrum for non-linear and non-stationary time series analysis. *Proc. R. Lond. A.*, 454 :903–995, 1998.

[73] J. C. R. Hunt, A. A. Wray, and P. Moin. Eddies, streams, and convergence zones in turbulent flows. *In its Studying Turbulence Using Numerical Simulation Databases, 2. Proceedings of the 1988 Summer Program*, pages 193–208, 1988.

[74] A. K. M. F. Hussain. Cohrerent structures : myth and reality. *Phys. Fluids*, 26, 1983.

[75] A. K. M. F. Hussain. Coherent structures and turbulence. *J. Fluid Mech.*, 173 :303–356, 1986.

[76] M. Kiya and M. Matsumura. Incoherent turbulence structure in the near wake of a normal plate. *J. Fluid Mech.*, 190, 1988.

[77] A. Kolmogorov. Dissipation of energy in the locally isotropic turbulence. *Dokl. Akad. Nauk. SSSR*, 125, 1941.

[78] A. Kolmogorov. The local structure of turbulence in incompressible viscous fluid for very large reynolds numbers. *Proc. USSR Ac. of Sci. (Trad. Proc Roy. Soc London 434 1991).*, 30 :299–303, 1941.

[79] A. Kourta, H.C. Boisson, P. Chassaing, and H. Ha Minh. Nonlinear interaction and the transition to turbulence in the wake of a circular cylinder. *J. Fluid Mech.*, 181, 1987.

[80] R. H. Kraichnan. The scattering of sound in a turbulent medium. *J. Acoust. Soc. Am.*, 25 :1096–1104, 1953.

[81] R. H. Kraichnan. Inertial-range transfer in two-and three-dimensional turbulence. *J. Fluid Mech.*, 47 :525, 1971.

[82] J.F Krawczynski. *La structure du champ de vitesse dans un réacteur à jets opposés. Caractérisation du mélange turbulent.* PhD thesis, Université de Rouen, 2006.

[83] P. A. Krogstad, J. H. Haspersen, and S. Rimestad. Convection velocities in a turbulent boundary layer. *Phys. Fluids*, 10 :949–957, 1998.

[84] T Kármán and L. Howarth. On the statistical theory of isotropic turbulence. *Proc. Roy. Soc. London*, 164 (917) :192–215, 1938.

[85] S. Kurien and K. R. Sreenivasan. Anisotropic scaling contributions to high order structure functions in high reynolds number turbulence. *Phys. Rev. E.*, 62 :2206–2212, 2000.

[86] St. Lück and J. Peinke. Uniform statistical description of the transition between near and far wake turbulence in a wake flow. *Phys. Rev. Lett.*, 83, 1999.

[87] B Lecordier and M Trinité. Advanced PIV algorithms with image distorsion-validation and comparison from synthetic images of turbulent flows. *PIV03 Symposium, Busan, Korea*, 2003.

[88] C. Lin and S. C. Hsieh. Convection velocity of vortex structures in the near wake of a circular cylinder. *J. Engrg Mech.*, 129, 2003.

[89] E. Lindborg. Kinematics of homogeneous axisymmetric turbulence. *J. Fluid Mech.*, 302 :179–201, 1995.

[90] S. Liu, C. Meneveau, and J. Katz. On the properties of similarity subgrid-scale models as deduced from measurements in a turbulent jet. *J. Fluid Mech.*, 275 :283, 1994.

[91] C. G. Lomas. *Fundamentals of hot wire anemometry*. Cambridge University Press, 1986.

[92] R.M Lueptow, K.S. Breuer, and J.H. Haritonidis. Computer-aided calibration of x-probes using a look-up table. *Exp. Fluids*, 6 :115–118, 1988.

[93] J. L. L. Lumley and A. M Yaglom. A century of turbulence. *Flow Turbulence and Combustion*, 66 :241–286, 2001.

[94] F. Lund and C. Rojas. Ultrasound as a probe of turbulence. *Phys. D*, 37 :508–514, 1989.

[95] N. Marati, C. M. Casciola, and R. Piva. Energy cascade and spatial fluxes in wall turbulence. *J. Fluid Mech.*, 521 :191–215, 2004.

[96] M. Matsumura and R. A. Antonia. Momentum and heat transport in the turbulent intermediate wake of a circular cylinder. *J. Fluid Mech.*, 250, 1993.

[97] W. T. Mayo, M. T. Shay, and S. Riter. Digital estimation of turbulence power spectra from burst counter LDV data. *Proc 2nd Int Workshop on Laser velocimetry*, 1, 1974.

[98] N. Mazellier. *Dynamique spatio-tempoelle du champ de vorticite en turbulence : mesures par correlation acoustique dynamique.* PhD thesis, LEGI Grenoble, 2005.

[99] A. Melling. Tracer particles and seeding for partcile image velocimetry. *Meas. Sci. Techn.*, 8, 1997.

[100] J. Mi and R. A. Antonia. Approach to local axisymmetry in a turbulent cylinder wake. *Exp. Fluids*, 48 :933–947, 2010.

[101] A. S. Monin and A. M. Yaglom. *Statistical Fluid dynamics*, volume 2. John L. Lumley, 2007.

[102] C. Norberg. An experimental investigation of the flow around a circular cylinder : influence of aspect ratio. *J. Fluid Mech.*, 258 :287–316, 1994.

[103] C. Norberg. LDV-measurements in the near wake of a circular cylinder. *Advances in Understanding bluff-body wakes and Vortex Induced Vibration*, 1998.

[104] P. Paranthoën, L.W.B. Browne, S. Le Masson, F. Dumouchel, and J.C. Lecordier. Characteristics of the near wake of a cylinder at low reynolds number. *Eur. J. Mech. B/Fluids*, 18, 1999.

[105] R. Perrin. *Analyse physique et modélisation des écoulements incompressibles instationnaires turbulents autour d un cylindre circulaire à grand nombre de Reynolds.* PhD thesis, INP Toulouse, 2005.

[106] R. Perrin, M. Braza, E. Cid, S. Cazin, A. Barthet, A. Sevrain, C Mockett, and F. Thiele. Obtaining phase averaged turbulence properties in the near wake of a circular cylinder at high reynolds number using POD. *Exp. Fluids*, 43, 2007.

[107] R. Perrin, M. Braza, E. Cid, S Cazin, F. Moradei, A. Barthet, A. Sevrain, and Y. Hoarau. Near-wake turbulence properties in the high reynolds number incompressible flow around a circular cylinder measured by two- and three-component piv,. *Flow, Turbulence and Combustion.*, 77, 2006.

[108] A. E. Perry. *Hot-wire anemometry.* Oxford University Press, New York, 1982.

[109] C. Poulain. *Turbulence dans l espace de Fourier : Mesures de vorticité par diffusion acoustique.* PhD thesis, LEGI Grenoble, 2003.

[110] C. Poulain, N. Mazellier, L. Chevillard, Y. Gagne, and C. Baudet. Dynamics of spatial fourier modes in turbulence. *Eur. Phys. J. B*, 53 :219–224, 2006.

[111] C. Poulain, N. Mazellier, Y. Gagne, and C. Baudet. Time dynamic of fourier modes in turbulence : sweeping effects, long time correlations and temporal intermittency. *Phys. Rev. Lett.*, 2005.

[112] C. Poulain, N. Mazellier, P. Gervais, Y. Gagne, and C. Baudet. Spectral vorticity and lagrangian velocity measurements in turbulent jets. *Flow, Turbulence and Combustion.*, 72, 2004.

[113] A. Prasad and C. H. K. Williamson. The instability of the shear layer separating from a bluff body. *J. Fluid Mech.*, 333 :375–402, 1997.

[114] B. Protas, S. Goujon-Durand, and J. E. Weisfreid. Scaling properties of two-dimensional turbulence in wakes behind bluff bodies. *Phys. Rev. E*, 55, 1997.

[115] A. Ramond and P. Millan. Measurements and treatment of LDA signals, comparison with hot-wire signals. *Exp. Fluids*, 28, 2000.

[116] P. Rebuffet. *Aérodynamique expérimentale.* Béranger, Dunod, 1950.

[117] O. Reynolds. On the dynamical theory of incompressible viscous fluids and the determination of the criterion. *Proc. Roy. Soc. A.*, 186 :126–164, 1885.

[118] O. Reynolds. *Mechanical and Physical Subjects.* Cambridge University Press, 1901.

[119] W. C. Reynolds and A. K. M. F. Hussain. The mechanics of an organised wave in turbulent shear flow. *J. Fluid Mech.*, 54, 1972.

[120] L. F. Richardson. The supply of energy from and to atmospheric eddies. *Proc. Roy. Soc. A.*, 97 :354–373, 1920.

[121] G. Rilling, P. Flandrin, and P. Gonçalves. On empirical mode decomposition and its algorithms. *EEEE URASIP Workshop on Nonlinear Signal and Image Processing NSIP*, 3 :8–11, 2003.

[122] G. P. Romano, R. A. Antonia, and T. Zhou. Evaluation of lda temporal and spatial velocity structure functions in a low reynolds number turbulent channel flow. *Exp. Fluids*, 27 :368–377, 1997.

[123] A. Roshko. On the development of turbulent wakes from vortex streets. *Naca TR*, 1191, 1954.

[124] A. Roshko. On the drag and shedding frequency of two dimensionnal bluff bodies. *Naca TN*, 3169, 1954.

[125] M. J. Rudd. A new theoretical model for the laser doppler meter. *Journ. Phys. E.*, 2 :55–58, 1969.

[126] L. Schiller and W. Linke. Pressure and frictionnal resistance of a cylinder at reynolds number 5,000 to 40,000. *Naca TM*, **715**, 1933.

[127] D.A. Selivanosky and A.B. Ezersky. Sound scattering by hydrodynamic wakes of sea animals. *ICES Journ. Marine Science*, 53 :377–381, 1996.

[128] B. K. Shivamoggi and R. A. Antonia. Isotropic and axisymmetric turbulence of passive scalar. *Fluid. Dyn. Res.*, 26, 2000.

[129] T. Sjogren and A. V. Johansson. Measurement and modelling of homogeneous axisymmetric turbulence. *J. Fluid Mech.*, 374 :59–90, 1998.

[130] G. Stokes. On the effect of the internal friction of fluids on the motion of pendulums. *Transactions of the Cambridge Philosophical Society*, 9 :8–106, 1851.

[131] G. I. Taylor. Statistical theory of turbulence. *Proc. Roy. Soc. London*, 151 (873) :421–444, 1935.

[132] G. I. Taylor. The spectrum of turbulence. *Proc. Roy. Soc. London*, 164 :476–490, 1938.

[133] H. Tennekes. Eulerian and lagrangian time microscales in isotropic turbulence. *J. Fluid Mech.*, 67 :561–567, 1975.

[134] F. Thiesset, L. Danaila, R. A. Antonia, and T. Zhou. Scale-by-scale budgets which account for the organised motion. *European Turbulence Conference, Warsaw, Poland*, 2011.

[135] A. A. Townsend. *The structure of turbulent shear flows.* Cambridge University Press, 1956.

[136] A. A. Townsend. Early days of turbulence research in Cambridge. *J. Fluid Mech.*, 212 :1–5, 1990.

[137] M.F Unal and D. Rockwell. On vortex formation from a cylinder. *J. Fluid Mech.*, 190, 1988.

[138] H. Van de Hulst. *Light scattering by small particles.* Dover, 1957.

[139] M. Van Dyke. *An album of fluid motion.* Parabolic Press, 1982.

[140] C. E. Willert and M Gharib. Digital particle image velocimetry. *Exp. Fluids*, 10, 1991.

[141] C.H.K. Williamson. Vortex dynamics in the cylinder wake. *Annu. Rev. Fluid. Mech.*, 28, 1996.

[142] W. W. Willmarth and T.J. Bogar. Survey and new measurements of turbulent structure near the wall. *Phys. Fluids*, 20 :9, 1977.

[143] A. M Yaglom. On the local structure of a temperature field in a turbulent flow. *Dokl. Akad. Nauk SSSR*, 69 :743, 1949.

[144] S. Yoshioka, S. Obi, and S. Masuda. Momentum transfer in the periodically perturbed turbulent separated flow over the backward facing step. *3rd Int. Workshp on Particle Image Velocimetry*, 1999.

[145] K. B. M. Q Zaman and A. K. M. F. Hussain. Taylor hypothesis and large-scale coherent structures. *J. Fluid Mech.*, 112 :379–396, 1981.

[146] T. Zhou, Z. Hao, L.P. Chua, and Y. Zhou. Comparisons between different approximations to energy dissipation rate in a self-preserving far wake. *Phys. Rev. E*, 74, 2006.

[147] T. Zhou, Y. Zhou, M.W Yiu, and L.P Chua. Three-dimensional vorticity in a turbulent cylinder wake. *Exp. Fluids*, 35 :459–471, 2003.

[148] Y. Zhou and R. A. Antonia. Convection velocity measurements in a cylinder wake. *Exp. Fluids*, 13, 1992.

[149] Y. Zhou and R. A. Antonia. A study of turbulent vortices in the near wake of a cylinder. *J. Fluid Mech.*, 253 :643–661, 1993.