Formulation d'un modèle homogénéisé de plaque en béton armé pour des applications sismiques

Combescure Christelle

▶ **To cite this version:**

Combescure Christelle. Formulation d'un modèle homogénéisé de plaque en béton armé pour des applications sismiques. Matériaux et structures en mécanique [physics.class-ph]. Université Pierre et Marie Curie - Paris VI, 2013. Français. NNT : . tel-00880279

HAL Id: tel-00880279

https://theses.hal.science/tel-00880279

Submitted on 5 Nov 2013

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

THESE DE DOCTORAT DE
L'UNIVERSITE PIERRE ET MARIE CURIE

Spécialité

Sciences Mécaniques, Acoustique, Electronique et Robotique
(Ecole doctorale)

Présentée par

Mlle COMBESCURE Christelle

Pour obtenir le grade de

DOCTEUR de l'UNIVERSITÉ PIERRE ET MARIE CURIE

Sujet de la thèse :

Formulation d'un modèle homogénéisé de plaque en béton armé pour des applications sismiques

soutenue le 25 Septembre 2013

devant le jury composé de : (préciser la qualité de chacun des membres).

Mme. Hélène DUMONTET Directrice de thèse

M. François VOLDOIRE Co-Encadrant

M. Karam SAB Rapporteur

M. Jean-Claude MICHEL Rapporteur

M.Jean-Jacques MARIGO Examinateur

M.Djimedo KONDO Examinateur

« En amour comme dans les affaires, dans les sciences comme dans le saut en longueur, on doit croire, avant de pouvoir gagner ou atteindre son but. »

Robert Musil

REMERCIEMENTS

Durant ces trois dernières années, j'ai été amenée à faire la rencontre de beaucoup de personnes qui ont toutes contribué, chacune à leur manière, à l'accomplissement de cette thèse. Je souhaiterais les remercier chacune personnellement mais je crains que cela ne soit possible et je m'excuse donc d'avance pour celles et ceux qui pourraient être omis dans ces remerciements.

Je commencerais bien sûr par remercier François Voldoire qui m'a accueilli en stage en 2010 puis qui m'a proposé cette thèse. Son savoir et sa culture m'ont tout de suite plu et j'ai beaucoup appris, personnellement et professionnellement à son contact. J'ajouterais que son impressionnante patience et sa pédagogie m'ont également été d'un grand secours. Je remercierais ensuite ma directrice de thèse, Hélène Dumontet, qui a su se dégager du temps pour s'occuper des divers problèmes scientifiques et administratifs auxquels j'ai pu être confrontée. Viennent alors Jean-Jacques Marigo et Djimedo Kondo avec qui j'ai pu avoir des discussions très intéressantes sur mon sujet et qui ont très gentiment accepté de faire partie de mon jury. Je remercierais également mes deux rapporteurs, Karam Sab et Jean-Claude Michel qui ont eu la lourde tâche de relire ce manuscrit et d'en rapporter le contenu scientifique. Leurs rapports et leurs interrogations, toujours constructifs, m'ont permis d'approfondir certains points que j'avais pu négliger et d'éclairer de nouvelles pistes de perspectives.

Durant mes trois ans j'ai beaucoup discuté avec les collègues qui étaient présents à EDF pour profiter de leurs connaissances diverses et variées. Je remercierais donc Sebastien Fayolle, Mickaël Abbas, Thomas de Soza, Nicolas Greffet et, en général, tous ceux du groupe T62 que j'ai pu aller voir un grand nombre de fois par jour et qui ont toujours été disponibles et compréhensifs. Je remercierais Claude Stolz également qui m'a bien aidé lors de la formulation du problème de plaque et qui, en règle générale a été d'une grande aide scientifique. Merci également aux collègues thésards, El-Hadi, Dzifa, Alex, Dina, Fabien (et j'en oublie probablement) pour les discussions interminables sur des sujets aussi divers que les espaces de Sobolev, Copé 2017 ou le stage diversité. Merci à Pierre Moussou, qui a su détecter avant même que je ne le sache moi-même quand je commençais à fatiguer. Et bien sûr un merci général à tous ceux que j'ai pu croiser ou aller solliciter à Clamart (Jean-Luc Fléjou, Pierre Badel, Renaud Bargellini, Jean-Michel Proix, Albert Alarcón et je m'arrête parce que je ne peux en fait pas tous vous citer et je m'en veux…).

Je n'oublierais pas pour finir ma famille et mes amis, qui m'ont toujours soutenu que ce soit logistiquement (merci Claire pour la relecture et Pascal pour le béton armé) ou psychologiquement (LN, Yaël, Rémi, Thomas²…). Et enfin un énorme merci à Olivier pour son calme, son soutien et sa patience sans limites.

Sans vous ces trois années n'auraient pas eu la même saveur, vos sourires et votre temps m'ont été précieux et m'ont assurément été nécessaires pour arriver à être docteur !

Doctoralement vôtre.

RÉSUMÉ

Le parc d'installations nucléaires dont EDF a la charge est soumis régulièrement à des réévaluations de sureté. Concernant le risque sismique, ces réévaluations ont mené à la décision de prendre en compte les comportements non-linéaires des matériaux dans les structures lors des modélisations et des simulations numériques des bâtiments composant ce parc d'installations assez souvent réalisés en béton armé. Dans ce contexte, le besoin de disposer de modélisations représentatives du comportement de plaques en béton armé soumises à des sollicitations sismiques est fort et il s'est avéré que la littérature ne proposait que très peu de ce type de modélisation.

Afin de répondre à ce besoin tout en cherchant à maîtriser la phase d'identification des paramètres du modèle, un modèle de plaque en béton armé pour des applications sismiques est proposé dans ce travail. Ce modèle, DHRC (Dissipative Homogenised Reinforced Concrete), est construit par une approche d'homogénéisation périodique. Il couple deux phénomènes dissipatifs : l'endommagement de la matrice de béton et le glissement interne à l'interface entre les barres de renfort en acier et le béton avoisinant. Ce couplage original entre endommagement et glissement permet une meilleure représentativité de la dissipation d'énergie au cours des cycles de chargement induite par la dégradation du matériau. Les paramètres du modèle global sont identifiés par une procédure d'homogénéisation automatisée et la résolution numérique de problèmes cellulaires. La procédure s'appuie sur les caractéristiques géométriques de la microstructure de la plaque et un nombre très restreint de caractéristiques matériaux, permettant ainsi à l'ingénieur de l'utiliser de manière simple et maîtrisée. Le modèle implanté dans le code de calculs par éléments finis ASTER est validé numériquement sur plusieurs structures tests sous des chargements simples et combinés. Sa capacité à simuler le comportement expérimental de structures voiles est également analysée. Des perspectives d'enrichissement du modèle à l'échelle microscopique sont proposées.

Enfin, une simplification unidimensionnelle de ce modèle permet de représenter le comportement de barres en béton armé pour des représentations simplifiées de type bielles ou treillis ou pour modéliser le comportement de poteaux en béton armé en traction-compression.

ABSTRACT

Safety reassessments are periodically performed on the EDF nuclear power plants and the recent seismic reassessments leaded to the necessity of taking into account the non-linear behaviour of materials when modeling and simulating industrial structures of these power plants under seismic solicitations. A large proportion of these infrastructures is composed of reinforced concrete buildings, including reinforced concrete slabs and walls, and literature seems to be poor on plate modeling dedicated to seismic applications for this material. As for the few existing models dedicated to these specific applications, they present either a lack of dissipation energy in the material behaviour, or no micromechanical approach that justifies the parameters needed to properly describe the model.

In order to provide a constitutive model which better represents the reinforced concrete plate behaviour under seismic loadings and whose parameters are easier to identify for the civil engineer, a constitutive model dedicated to reinforced concrete plates under seismic solicitations is proposed: the DHRC (Dissipative Homogenised Reinforced Concrete) model. Justified by a periodic homogenisation approach, this model includes two dissipative phenomena: damage of concrete matrix and internal sliding at the interface between steel rebar and surrounding concrete. An original coupling term between damage and sliding, resulting from the homogenisation process, induces a better representation of energy dissipation during the material degradation. The model parameters are identified from the geometric characteristics of the plate and a restricted number of material characteristics, allowing a very simple use of the model. Numerical validations of the DHRC model are presented, showing good agreement with experimental behaviour.

A one dimensional simplification of the DHRC model is proposed, allowing the representation of reinforced concrete bars and simplified models of rods and wire mesh.

SOMMAIRE

INTRODUCTION **1**

CHAPITRE I. **9**

REVUE BIBLIOGRAPHIQUE **9**

I.1. OBSERVATIONS EXPERIMENTALES 10
I.1.i. Comportement du béton *10*
I.1.ii. Comportement du béton armé *14*
I.1.iii. Particularité des plaques *20*
I.2. MODELES CONSTITUTIFS 22
I.2.i. Plusieurs échelles *22*
I.2.ii. Plusieurs cadres théoriques *23*
I.2.iii. Modélisation des phénomènes dissipatifs *25*
I.2.iv. Modélisation des éléments de structure *26*
I.3. FOCUS SUR L'ENDOMMAGEMENT 27
I.3.i. Définition de l'endommagement *28*
I.3.ii. Diverses fonctions d'endommagement *28*
I.3.iii. Endommagement anisotrope *31*
I.4. CHOIX DE MODELISATION 31

CHAPITRE II. **33**

MODELES DE COMPORTEMENT DE BARRE EN BETON ARME **33**

II.1. MECANISMES DISSIPATIFS SEULS 34
II.1.i. Glissement seul *34*
II.1.ii. Endommagement seul *37*
II.1.iii. Conclusions *41*
II.2. MECANISMES DISSIPATIFS COUPLES 42
II.2.i. Modification directe de l'énergie libre *42*
II.2.ii. Couplage des modèles rhéologiques *43*
II.2.iii. Conclusions *54*
II.3. INTRODUCTION DE LA DISSYMETRIE TRACTION-COMPRESSION 55
II.3.i. Dans le modèle à glissement induit *55*
II.3.ii. Dans le modèle à endommagement seul *56*
II.3.iii. Dans le modèle couplé *58*
II.4. CONFRONTATION A DES RESULTATS EXPERIMENTAUX 59
II.5. CONCLUSIONS GENERALES 61

CHAPITRE III. **63**

MODELE DE COMPORTEMENT DE PLAQUE EN BETON ARME **63**

III.1. RAPPELS SUR LE CADRE DE L'HOMOGENEISATION DE PLAQUES PERIODIQUES 64
III.2. METHODOLOGIE 67
III.2.i. Méthodologie appliquée *67*
III.2.ii. Définition des cellules d'homogénéisation *68*
III.2.iii. Traitement des non-linéarités *69*
III.3. FORMULATION DU PROBLEME D'HOMOGENEISATION 70
III.3.i. Problème réel et simplifications *70*
III.3.ii. Mise en équation du problème local – formulation variationnelle *74*
III.3.iii. Modèle macroscopique obtenu *77*
III.3.iv. Généralisation à un matériau à structure interne périodique *80*
III.3.v. Résolution du problème local en une dimension *80*
III.4. PROCEDURE D'IDENTIFICATIONS DES PARAMETRES 84
III.4.i. Détermination des paramètres à identifier *84*
III.4.ii. Géométrie de la cellule de base réaliste *89*
III.4.iii. Comportement des matériaux *92*

III.4.iv. Conditions limites et chargements *93*
III.4.v. Combinaisons de chargements et de cellules de base *94*
III.4.vi. Paramètres identifiés pour une plaque à symétrie miroir *97*
III.4.vii.Paramètres identifiés pour une plaque sans symétrie miroir *105*
III.4.viii. Dégradation du comportement et de la cellule vers l'unidimensionnel *107*
III.5. CONCLUSIONS GENERALES 110

CHAPITRE IV. **111**

ILLUSTRATIONS NUMERIQUES **111**

IV.1. IMPLANTATION NUMERIQUE 112
IV.1.i. Elements finis DKTG *112*
IV.1.ii. Intégration de la loi de comportement *113*
IV.1.iii. Les différents repères pour l'implantation *114*
IV.2. CAS-TESTS DE VALIDATION 115
IV.2.i. Problème de référence *115*
IV.2.ii. Cas test de traction-compression pures *117*
IV.2.iii. Cas test de flexion pure alternée *122*
IV.2.iv. Cas test de distorsion pure alternée dans le plan *126*
IV.2.v. Cas test de cisaillement pur alterné dans le plan *129*
IV.2.vi. Cas test de sollicitations combinées *130*
IV.3. COMPARAISON AUX ESSAIS EXPERIMENTAUX DU PROGRAMME SAFE 130
IV.3.i. Présentation du programme SAFE : voile T5 ..... *130*
IV.3.ii. Modélisation du voile T5 avec le modèle DHRC *133*
IV.3.iii. Modélisation du voile T5 avec le modèle couplé unidimensionnel *139*
IV.4. CONCLUSIONS GENERALES 142

CONCLUSION ET PERSPECTIVES **143**

BIBLIOGRAPHIE **147**

INTRODUCTION

Les tremblements de terre font partie des catastrophes naturelles les plus dévastatrices au monde. Du fait de leur caractère imprévisible et de l'étendue des territoires sur lesquels ils ont lieu, ces phénomènes causent régulièrement des pertes humaines et économiques considérables. Pour se prévenir le plus possible de telles pertes, les scientifiques géologues, sismologues, physiciens et mécaniciens s'attachent à mieux comprendre les causes de ces phénomènes ainsi que leur impact sur les constructions qui nous entourent. En effet, un tremblement de terre dans un champ ne posera pas les mêmes problèmes de sécurité que dans une ville à urbanisme dense ou à proximité d'une installation classée (barrage, centrale…), et il est ainsi nécessaire, dans le monde urbanisé dans lequel nous évoluons, d'assurer de la sécurité non seulement des personnes mais aussi des constructions, lors de catastrophes naturelles de ce type.

L'analyse sismique des structures consiste en l'étude des conséquences du risque sismique sur les bâtiments, installations et grands ouvrages. Ce risque naturel, qui demande par nature un traitement probabiliste, nécessite la mise en place de méthodologies de modélisation et de simulation couvrant un large champ de la dynamique, de la propagation d'ondes dans les sols jusqu'à l'analyse non linéaire des sols et des structures. Il s'agit de fournir à l'ingénieur les éléments de décision lui permettant d'assurer un niveau de protection défini, de le vérifier, et de l'aider à prédire ce qui se produit au-delà de ce niveau prédéfini. Ce sont les séismes destructeurs et meurtriers de San Francisco en 1906, de Messine en 1908 puis de Kanto (Tokyo) en 1923 qui ont poussé le développement de cette discipline, tant aux États-Unis qu'au Japon. Les premières réglementations sismiques ont vu le jour depuis cette période et les codifications mises en place dans de nombreux pays ont permis d'encadrer les pratiques et les niveaux d'exigence à la conception et lors des réévaluations pour des ouvrages existants. Quand elles sont correctement appliquées, elles ont permis de réduire significativement les destructions.

Les règlementations sismiques ont pour but d'assurer le non-effondrement et de limiter les dommages notamment pour les installations ayant une certaine importance pour la sécurité civile (hôpitaux, pompiers, centrales électriques...). Elles ont introduit de nombreuses recommandations pour la conception des bâtiments, par exemple : la régularité des formes et des fondations qui permet de mieux répartir les efforts sismiques et la capacité suffisante de dissipation d'énergie…

Malgré tous ces efforts , les séismes de Chi-Chi (Taiwan) en 1999, Boumerdès (Algérie) en 2002 puis plus récemment, Port-au-Prince (Haïti) en 2010 ou Christchurch (Nouvelle-Zélande) et Van (Turquie) en 2011, ont causé des pertes humaines et matérielles conséquentes et nous ont rappelé l'importance du non-effondrement, lors de séismes, des bâtiments ordinaires mais également des ouvrages d'importance première pour la sécurité civile comme les ponts qui assurent

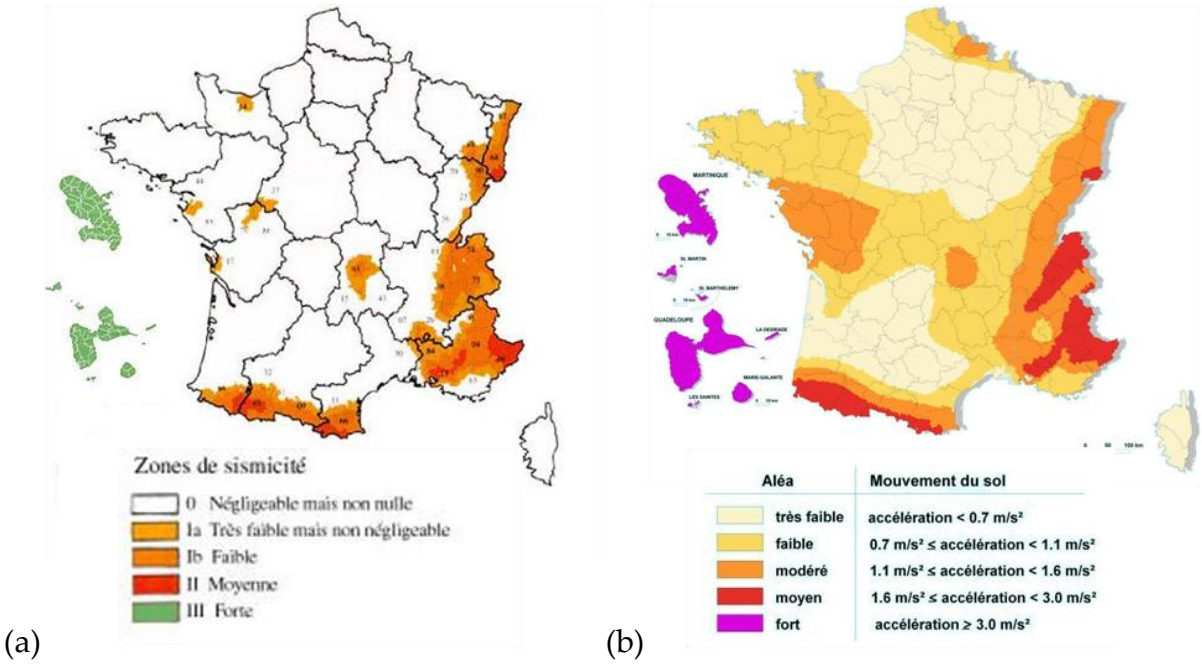
l'acheminement des secours sur les lieux du sinistre (voir Illustration 1) ou les hôpitaux qui permettent la prise en charge efficace et rapide des blessés. Le séisme sous-marin de Honshu (Japon) en 2011, qui a engendré un tsunami sans précédent dans la région de Sendaï, a souligné l'efficacité de la conception et de la construction parasismique du Japon (quasiment aucun dégât matériel à Tokyo pour un des séismes les plus violents de ce siècle). Mais ce séisme a également souligné l'importance capitale de la protection d'ouvrages à risque spécial pour la sécurité civile. En effet, le tsunami engendré par ce séisme a mené à la rupture de plusieurs barrages et à des dégâts irrémédiables sur la centrale nucléaire de Fukushima Daïchi. Il est, par conséquent, primordial pour les exploitants de ces ouvrages à risque spécial d'assurer non seulement leur non-effondrement mais aussi leur bon fonctionnement, ou leur remise en marche rapide, lors de catastrophes naturelles.

Illustration 1 : Pile de pont détruite séisme de Chi-Chi (Taiwan) 1999 (a), bâtiment détruit séisme de Boumerdès (Algérie) 2002 (b), passerelle détruite séisme de Christchurch (Nouvelle-Zélande) 2011 (c).

La France métropolitaine n'a, quant à elle, pas à craindre de tels séisme. En effet, historiquement le plus fort séisme instrumental enregistré au XXème siècle avait une magnitude de 6 (séisme du 11 juin 1909 à Lambesc, en Provence). La sismicité historique conduit cependant à estimer des séismes plus importants (6 à 6,5 voire près de 7 (Bâle)) et des traces de séismes dans les couches géologiques confirment des magnitudes plus élevées que 6 en Europe occidentale, mais sans atteindre les valeurs critiques de magnitude 9 ou 10 récemment observées au Japon ou au Chili.

Aléa sismique en France

Dans le but d'améliorer la sécurité et d'harmoniser les normes au niveau européen, les règlementations de construction parasismique ont été réévaluées ces dernières années pour mener à la mise en place de l'Eurocode 8 (voir Illustration 2). Cette norme, avec ses annexes nationales, est entrée en vigueur depuis Mars 2010 et les maîtres d'ouvrages et exploitants se doivent alors de justifier la tenue des ouvrages à construire et existants à l'aléa sismique selon des dispositions prévues par le nouveau code et le zonage sismique du territoire. En France, le nouveau zonage sismique a mené à une réévaluation sévère de l'aléa; en effet, jusqu'alors, environ 15% du territoire était considéré sujet à l'aléa sismique alors que désormais 75% du territoire est concerné dans la nouvelle règlementation. Ce changement drastique résulte principalement de la considération désormais acquise d'une probabilité de dépassement d'un séisme majeur en 50 ans égale à 10% (période de retour de 475 ans).



(a) (b)

Illustration 2 : Carte d'aléa sismique en France selon le PS92 (a) et l'Eurocode 8 (b)

Les installations à risque spécial – c'est le cas des installations nucléaires - sont, elles, soumises à une règlementation plus sévère et à des exigences particulières en matière de tenue sismique. Ainsi, dès la conception du programme nucléaire français, toutes les installations nucléaires ont fait l'objet d'études selon des règlements et des codifications spécialement appliqués à cette industrie (RFS 2001-1 avec une période de retour d'environ 1000 ans et une magnitude majorée de 0.5 soit une énergie considérée environ trois fois plus élevée), sous le contrôle de l'Autorité de Sûreté Nucléaire (ASN), anciennement DCSIN. Des dispositions constructives particulières ont été prises à la conception, notamment l'installation d'appuis d'isolation sismique sur le site de la centrale de Cruas, dans la vallée du Rhône, ou plus récemment pour le réacteur RJH du CEA à Cadarache. Quant à la période de retour considérée pour

les installations classées et les barrages de grande dimension, en France, elle est de l'ordre de 5000 ans, ce qui est plus du décuple de la période de retour considérée pour le bâti courant.

Cependant, il est important de noter que le risque sismique en France métropolitaine reste très modéré relativement à l'ensemble de la planète et ne peut être considéré comme menant à la ruine d'une structure ou d'une installation classée en béton armé correctement dimensionnée.

Calculs parasismiques

L'ingénierie parasismique s'intéresse à la protection des personnes et des biens lors d'événements sismiques en limitant l'endommagement des structures à des niveaux acceptables, variables suivant la règlementation à appliquer à l'ouvrage ou le bâtiment concerné. Pour ce faire, les ingénieurs parasismiques essaient de comprendre les raisons de la dégradation, voire de l'effondrement, de certaines structures lors de séismes afin d'améliorer les techniques de dimensionnement et de renforcement des bâtiments à venir et existants. L'ingénieur génie civil en calcul parasismique dispose actuellement de plusieurs moyens pour mener à bien un calcul de dimensionnement parasismique (voir Illustration 3), mais il est important de réaliser que ces calculs sont lourds car ils font intervenir entre autres des phénomènes cycliques et de couplage et s'intéressent à des bâtiments de grande dimension dont il faut analyser le comportement dynamique transitoire.

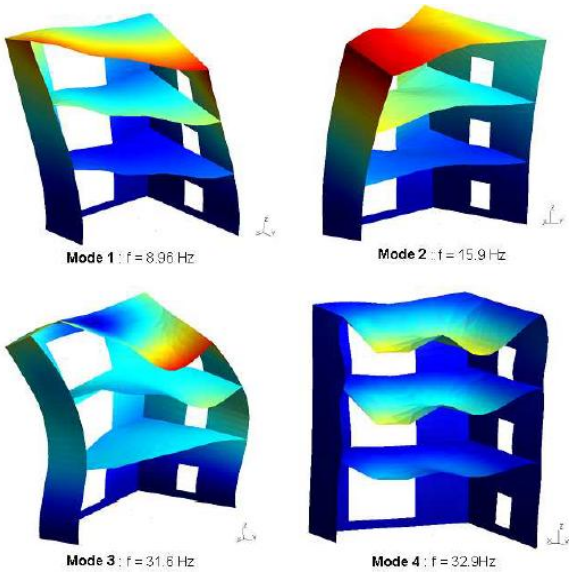
(a) (b) 

Illustration 3 : Benchmark SMART 2008 : Maquette d'un bâtiment asymétrique à l'échelle 1/4 (a) simulation numérique des modes propres de la maquette avec Code_Aster (hypothèse élastique) (b)

La réévaluation du risque sismique en France a mené à une nécessaire réévaluation des marges de dimensionnement des bâtiments existant et à construire en béton armé. Ces marges correspondent à un coefficient de sécurité assurant que, si l'évènement maximal considéré lors de la conception de la structure est dépassé, la structure sera toujours à même de résister et de fonctionner. L'hypothèse d'un

comportement élastique des matériaux et des structures, pour les calculs prédictifs, avec la nouvelle règlementation s'est avérée, dans certains cas, trop sévère et non représentative du comportement réel, et il est apparu nécessaire de considérer la dissipation d'énergie et la modification de raideur consécutive à l'endommagement, apportées par les comportements non linéaires de dégradation des matériaux. De cette manière, l'énergie provenant du signal sismique et transmise à la structure, se dissipe dans des mécanismes complexes (frottements, effritement, fissuration, chocs…), ce qui permet de prédire de façon plus représentative les déplacements et efforts subis par la structure. La modification de raideur, quant à elle, modifie la fréquence de vibration propre de la structure, ce qui, mal maîtrisé, peut mener à de dangereux phénomènes de résonnance avec le signal sismique, ou à une diminution de l'énergie sismique transmise à la structure. Il est donc important d'analyser et de prendre en compte le comportement non linéaire des structures et des matériaux dans un calcul sismique, pour prévoir correctement la réponse d'un bâtiment lors d'un séisme.

Contexte industriel

Les installations nucléaires de production d'électricité en France sont au nombre de 56 tranches en activité, pour une puissance électrique totale de 63GWe et une production annuelle de l'ordre de 420TWh. Il faut y ajouter les installations nucléaires de recherche, comme celle du CEA…

Les exigences réglementaires en matière de sûreté sismique d'installations nucléaires ont pour objet de garantir en cas de survenue d'un événement sismique prévisible sur le site étudié, le maintien du bon fonctionnement des équipements de l'installation (circuits de la chaudière nucléaire, circuits de sauvegarde et leurs systèmes support…), l'arrêt sûr du réacteur nucléaire et la protection de l'environnement. Ces critères généraux sont du type de ceux exigés pour toute installation à risque spécial (ICPE) : industries chimique, pharmaceutique, pétrolière et gazière, barrages…, tandis que pour le bâti courant, l'exigence essentielle est d'abord la capacité à protéger les personnes par une évacuation sûre.

Les exigences de sûreté nucléaire sont en particulier d'éviter d'induire des incidents/accidents par défaillance (rupture) de structures, composants ou circuits, d'éviter l'indisponibilité des matériels de sûreté nécessaires à la démonstration de sûreté (permettre le retour en état d'arrêt sûr en situation accidentelle générée par la défaillance d'équipements classés et y compris non classés), d'éviter le relâchement de radioactivité : en cas de rupture de réservoirs ou structures contenant des produits de fission (effluents, combustible usé,…).

Les structures concernées sont les principaux bâtiments de l'installation nucléaire, les ouvrages géotechniques (digues…), l'enceinte de confinement qui contient les principaux composants, les bâtiments auxiliaires (abritant l'approvisionnement en combustible nucléaire, les auxiliaires électriques, la station de pompage, la salle de

commande…), les principaux composants nucléaires (chaudière avec ses internes, circuit primaire, générateurs de vapeur, réservoirs, piscine de stockage des assemblages combustibles, circuits de sauvegarde et leurs systèmes support…) et d'autres équipements, tels que les pompes, les armoires électriques pour les commandes des systèmes, les réseaux de tuyauteries et les câbles électriques, les diesels de secours…

L'ingénierie parasismique dans ce contexte spécifique des installations à risque spécial, et en particulier des installations nucléaires en France, s'intéresse à un problème différent de celui de l'ingénierie de dimensionnement des bâtiments ordinaires car elle consiste à calculer le comportement de bâtiments conçus il y a des décennies pour un niveau de risque inférieur aux règlementations actuelles. Les marges de sécurité alors considérées lors de la conception de ces installations se voient ainsi diminuées par l'augmentation du niveau sismique considéré, à méthode d'analyse constante. Le principal objectif de l'ingénieur est alors de **justifier des nouvelles méthodes d'analyse plus réalistes** de manière à assurer, non seulement la tenue structurelle des installations à risque spécial après séisme, mais aussi leur remise en état de fonctionnement rapide pour des raisons économiques évidentes. Pour ce faire, l'ingénieur doit mettre en œuvre des modélisations et des simulations numériques prenant en compte des phénomènes jusqu'alors négligés (interaction sol-structure, comportement non-linéaire des sols et des bâtiments, variabilité spatiale du signal sismique, angle d'incidence des ondes sismiques etc…).

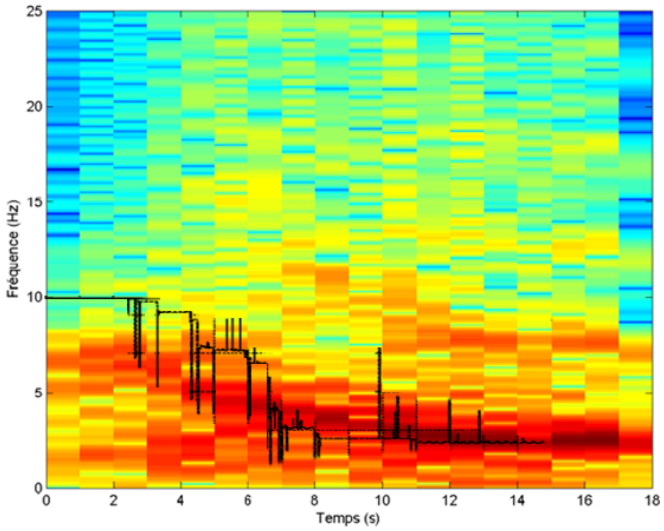


Illustration 4 : Chute de fréquence propre d'un bâtiment lors d'une sollicitation sismique sur le voile T5 des essais SAFE : données expérimentales (couleur) vs calcul modèle GLRC_DM (ligne noire).

Dans ce contexte, la division Recherche et Développement de l'Electricité de France – l'opérateur principal des industries électriques françaises – s'intéresse à développer des nouveaux modèles de comportement représentant au mieux le comportement réaliste des ouvrages en béton armé (barrages, installations nucléaires) sous sollicitations typiques des séismes de France métropolitaine. Au vu de l'aléa sismique probable sur ce territoire, **l'intérêt ne portera pas sur la ruine de la**

structure mais **plutôt sur sa dégradation**, qui a tendance à **modifier les fréquences propres** de la structure (voir Illustration 4) et qui pourrait conduire à la défaillance des équipements importants pour garantir la sûreté des processus industriels (systèmes de sauvegarde compris) contenus dans les bâtiments de ces installations à risque spécial.

Au sein du parc de bâtiments dont EDF a la charge, une part très importante de structures est en béton armé. Une première tentative pour introduire la modélisation de certains phénomènes non linéaires typiques du comportement du béton armé lors de sa dégradation par un évènement sismique a conduit à la mise en place d'un modèle de comportement global pour les plaques en béton armé dès 2005 : le modèle GLRC_DM (Markovic 2006; Voldoire 2005). Ce modèle, bien que satisfaisant au niveau de la robustesse numérique et de la représentativité de la perte de raideur, s'est avéré manquer de dissipation d'énergie et sa formulation heuristique, loin de toute justification micromécanique, rend l'identification de ses paramètres délicate… En prenant ce modèle comme référence, au moins au niveau conceptuel, il a donc été décidé de s'intéresser à une **modélisation plus complète des phénomènes à l'origine de la dissipation d'énergie et de la perte de raideur** au sein des structures en béton armé, de manière à parvenir, par une **analyse micromécanique**, à un **modèle plus représentatif du comportement des plaques en béton armé sous sollicitations sismiques** tout en gardant une **modélisation performante et robuste**.

Plan du document

Une revue bibliographique, présentée au **Chapitre I**, détaille les principales observations expérimentales du comportement élastique et endommagé du béton et du béton armé, matériau au centre de l'étude présentée dans ce mémoire. En s'appuyant sur la grande variété de modèles préexistants, cette revue bibliographique s'attache ensuite à décrire un cadre physique acceptable pour représenter le comportement du béton armé de manière prédictive à l'aide d'équations mathématiques capables de modéliser les phénomènes dissipatifs majeurs ayant lieu au sein de ce matériau. Pour finir, une attention particulière est portée aux modèles de comportements faisant intervenir la variable interne d'endommagement. Sur la base de ces constatations expérimentales et théoriques, et en accord avec le contexte industriel présenté ci-avant, un cadre théorique et des phénomènes dissipatifs à modéliser sont choisis pour la suite de l'étude.

Une première approche unidimensionnelle du comportement du béton armé est présentée au **Chapitre II**. Des modèles rhéologiques, dont le fonctionnement très simplifié est facilement compréhensible pour l'ingénieur sont successivement étudiés de manière à se conforter dans la méthodologie mise en place. Il en ressort un modèle unidimensionnel couplant endommagement et glissement interne, apte à représenter le comportement de barres en béton armé (poutres sans comportement de flexion) sous sollicitations sismiques. Ce modèle est validé par rapport à un résultat expérimental.

L**e Chapitre III** constitue le cœur du travail effectué ces trois dernières années. Il présente un modèle constitutif pour les plaques en béton armé sous sollicitations sismiques, construit par homogénéisation périodique et s'inscrivant dans le cadre des Matériaux Standard Généralisés : le modèle DHRC. Ce modèle nécessite la mise en place d'une procédure numérique d'identification des paramètres spécifique et automatisée qui mène à une description physique représentative du comportement du béton armé. Ce modèle de plaque et l'identification de ses paramètres sont dégradés pour revenir à un comportement unidimensionnel et retrouver alors le modèle de barre présenté au Chapitre II.

L'implantation numérique du modèle de plaque DHRC est décrite au **Chapitre IV**. Ce chapitre détaille également la validation du modèle sur des cas de sollicitations simples et combinées et la comparaison avec un modèle de référence. Pour finir une comparaison avec des résultats expérimentaux d'un voile en distorsion est présentée et étudiée. Certaines limitations du modèle sont alors présentées et analysées pour mener à des propositions d'amélioration et d'enrichissement du modèle.

CHAPITRE I.

REVUE BIBLIOGRAPHIQUE

« L'art est limitation : le fond de tout tableau est donné par son cadre. »

Gilbert Keith Chesterton

Le besoin a été identifié de représenter fidèlement le comportement de structures en béton armé soumises à des sollicitations sismiques en vue de réaliser des calculs non linéaires transitoires sur des bâtiments industriels. A la lumière des observations expérimentales sur le béton et le béton armé, des besoins spécifiques de l'ingénierie, et après une revue des modèles et cadres théoriques existants, le choix est fait de construire, par homogénéisation, un modèle global pour les plaques, s'inscrivant dans le cadre des Matériaux Standard Généralisés, et comprenant de l'endommagement, des déformations résiduelles, une pente post élastique toujours positive ainsi que de la dissymétrie traction-compression. Une attention particulière est portée sur la description de l'endommagement et de ses variables internes et fonctions associées.

Figure I-1 : Photo de la mise en œuvre d'une dalle en béton armé

I.1. OBSERVATIONS EXPERIMENTALES

Les plaques en béton armé sont des éléments très utilisés dans la construction de bâtiments courants et industriels. Cependant, ces éléments sont peu étudiés expérimentalement du fait de certains problèmes de mise en œuvre liés aux applications des chargements inhérents à ce type de géométrie (flambage, sensibilité aux conditions limites, biaxialité…). Le béton armé étant un matériau « composite » constitué de béton et d'armatures en acier, l'état de l'art expérimental présenté ci-après va s'attacher à mettre en évidence les comportements particuliers typiques du béton puis du béton armé, sous sollicitations monotones et cycliques, et enfin, les particularités de comportement des plaques en béton armé.

I.1.i. Comportement du béton

Le béton, sous sa forme actuelle est le fruit de décennies d'évolutions et d'expérimentations. Avec des premières traces d'utilisation datant de l'antiquité romaine, ses caractéristiques mécaniques intéressantes, son faible coût relatif et sa facilité de mise en œuvre en font un matériau de choix utilisé dans les grands projets d'architecture moderne. Constitué habituellement de ciment, de sable, de granulats et d'eau, ce matériau intrinsèquement hétérogène, dont la solidification passe par des processus chimiques et thermiques compliqués, possède par conséquent des propriétés difficiles à appréhender et à modéliser et il reste, encore aujourd'hui, beaucoup à apprendre sur son comportement.

Dans cette thèse, l'échelle des structures considérées mène à la considération usuelle d'un béton homogène et loin du comportement au jeune âge. Il est donc nécessaire de s'intéresser aux caractéristiques prédominantes du béton de manière générale pour représenter au mieux la réponse macroscopique de ce matériau à la microstructure complexe.

A l'échelle microscopique, les processus chimiques exothermes complexes et variés mènent à l'apparition, lors du séchage, d'un réseau de microfissures dans la matrice cimentaire. Lors de l'application d'un chargement macroscopique quelconque sur un volume élémentaire de béton, ces microfissures s'étendent et coalescent de différentes manières pour former des macrofissures. La façon dont la microstructure se réarrange est fortement dépendante du type de sollicitation appliquée à la cellule de béton.

Sollicitations de traction uniaxiale

Dans un premier temps, étudions la réponse du béton seul à une sollicitation de traction uniaxiale. Usuellement les résultats d'une telle sollicitation à déformation imposée mènent à une courbe du type de celle présentée en Figure I-2 (Terrien 1980) où peuvent être distinguées trois phases :

- une phase élastique à réponse linéaire,
- une phase post élastique non linéaire à pente moyenne négative (ce phénomène sera référencé sous le nom adoucissement par la suite)
- puis une phase stabilisée à contrainte résiduelle.

Lors des décharges effectuées pendant la phase post-élastique, une perte de raideur globale est observée (la pente des droites de décharge est plus faible que la pente élastique), et des boucles d'hystérésis apparaissent. Enfin, une déformation résiduelle peut être observée

lorsque la contrainte est annulée. Cette déformation résiduelle, de même que les boucles d'hystérésis, sont généralement attribuées au frottement entre les lèvres des macrofissures créées, dû à la forte irrégularité de ces lèvres induite par l'hétérogénéité microscopique du béton. Ce phénomène hautement dissipatif est encore aujourd'hui difficile à cerner et à expliquer et par conséquent relativement ardu à modéliser.

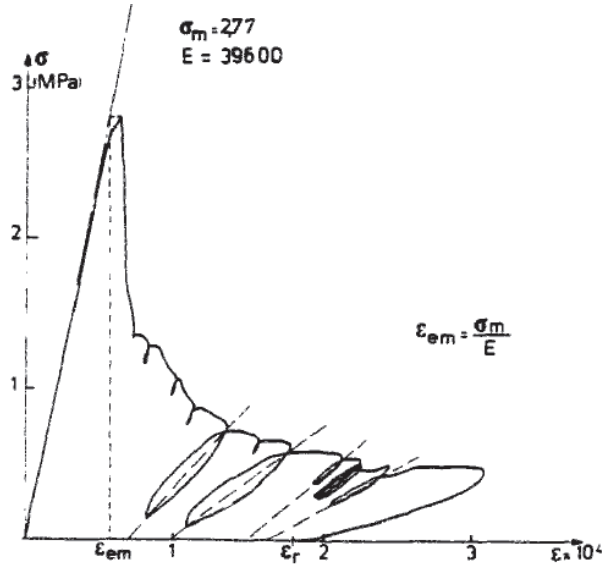


Figure I-2 : Réponse d'un élément de béton soumis à de la traction uniaxiale (Terrien 1980)

Sollicitations de compression uniaxiale

Intéressons-nous désormais au comportement du béton seul sous sollicitation de compression uniaxiale à déformation imposée. Comme présenté sur la Figure I-3 (Watanabe et al 2004), la réponse typique du béton à une telle sollicitation est sensiblement différente de sa réponse sous sollicitation de traction. En effet, les ordres de grandeur des déformations et contraintes atteintes sont jusqu'à dix fois supérieures à celles obtenues sur un essai de traction uniaxiale et la phase élastique est bien moins évidente à déterminer.

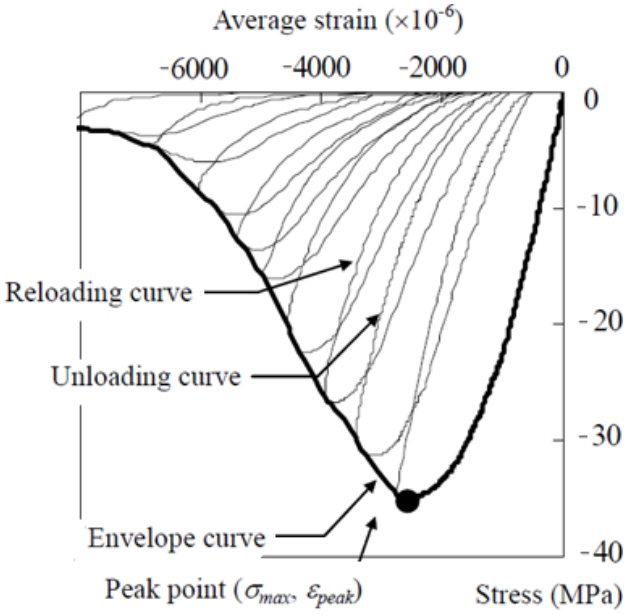


Figure I-3 : Réponse d'un élément de béton soumis à de la compression uniaxiale (Watanabe et al 2004)

D'une manière générale, le comportement post-élastique du béton en compression s'avère être beaucoup plus ductile que celui en traction et il est d'usage de considérer le béton comme un matériau quasi-fragile en traction et ductile en compression.

Il est cependant possible de noter trois caractéristiques communes à la réponse du béton aux deux sollicitations élémentaires que sont la traction et la compression :

- une perte de raideur macroscopique,
- des boucles d'hystérésis,
- et une déformation résiduelle à décharge.

Sollicitations bi-axiales

La dissymétrie entre le comportement en traction et celui en compression est confirmée par la Figure I-4 (Kupfer & Gerstle 1973), où sont tracées les surfaces élastiques et de rupture d'un béton ordinaire sous sollicitation bi-axiale.

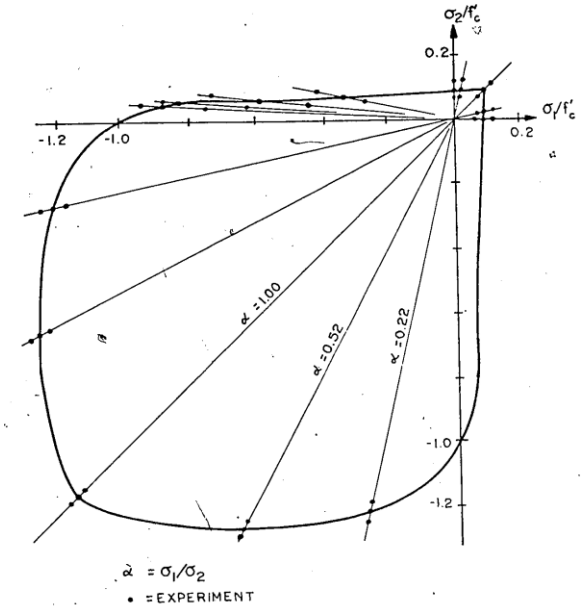


Figure I-4 :Surfaces élastiques et de rupture d'un béton ordinaire soumis à des sollicitations bi-axiales (Kupfer & Gerstle 1973)

Sollicitations alternées traction-compression

Les sollicitations alternées traction-compression mettent en évidence un autre comportement typique du béton : l'effet unilatéral. Celui-ci peut-être défini par la capacité du béton à restaurer en partie sa rigidité initiale lors du changement de signe de la sollicitation qui lui est imposée. Ainsi, comme présenté en Figure I-5 (Mazars et al 1990), la pente de la réponse lors du passage en compression du béton croît pour revenir à peu près celle de la réponse élastique du début du chargement de traction. Ce comportement peut s'expliquer par l'orientation des fissures lors des sollicitations de traction et de compression. Les Figure I-6 (a) et (b) schématisent ainsi l'orientation des fissures macroscopiques dans le béton lors de sollicitations de traction et de compression. Il est alors relativement évident que ces deux types de fissures ne proviennent pas de la coalescence des mêmes microfissures et que le passage de la traction à la compression entraîne, en premier lieu, la refermeture des fissures ouvertes dans un sens, puis, l'ouverture de macrofissures orthogonales aux premières. Ce

passage d'un type de fissure à l'autre est ce qui explique le retard à la reprise de raideur, observable sur la Figure I-5 (la reprise de raideur n'a pas lieu lorsque la contrainte s'annule mais un peu après).

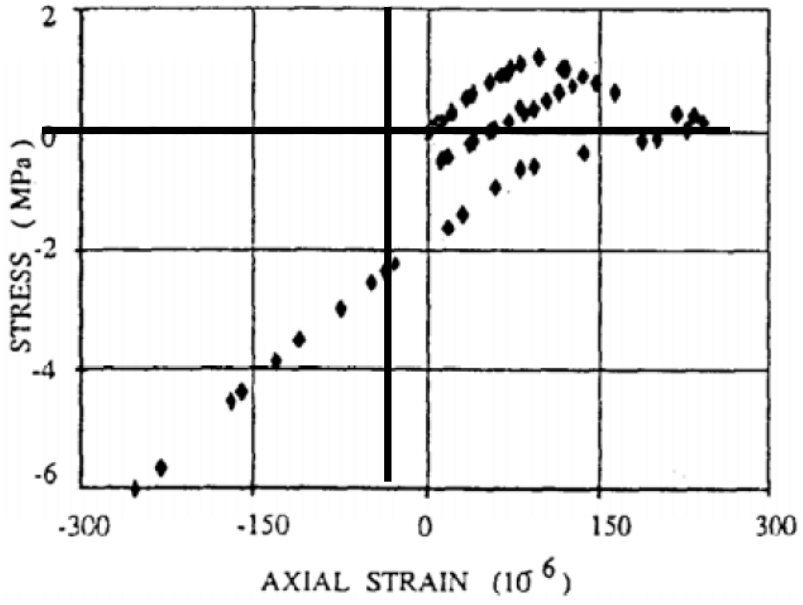


Figure I-5 : Réponse du béton à une sollicitation alternée traction-compression (Mazars et al 1990)

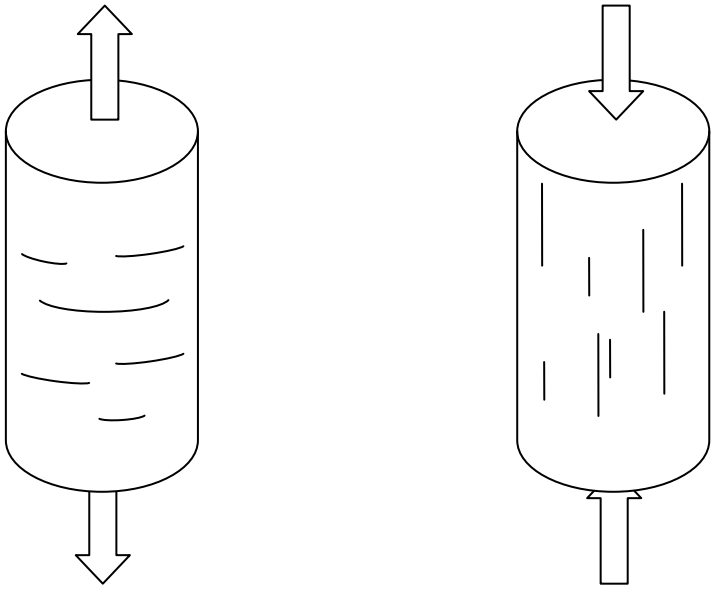


Figure I-6 : Orientation schématique des fissures lors de sollicitations de traction (a) et de compression (b) sur du béton

Conclusion

Le **béton** exhibe donc un **comportement non linéaire asymétrique** entre des sollicitations de traction et de compression uniaxiales, avec, dans les deux cas, une **perte de raideur** macroscopique, des **boucles d'hystérésis** et une **déformation résiduelle** à décharge. Ce comportement asymétrique s'accompagne d'une **restitution partielle de la raideur** lors du passage d'une sollicitation de traction à une sollicitation de compression (effet unilatéral). Ces phénomènes non linéaires sont généralement attribués aux fissures internes au béton, et plus précisément aux frottements entre les lèvres de ces fissures.

I.1.ii. Comportement du béton armé

Le béton armé étant un matériau composé de béton et d'armatures en acier, c'est tout naturellement que les caractéristiques particulières du béton, évoquées ci-avant, vont se retrouver dans le comportement macroscopique du béton armé. Le comportement de l'acier n'a pas été étudié de la même manière que celui du béton car, pour les niveaux de sollicitations considérés dans cette étude, les barres de renforts en acier restent dans leur domaine élastique. Cependant, la présence des armatures modifie sensiblement le comportement du béton, en particulier en traction ; c'est d'ailleurs historiquement la raison première de l'introduction d'armatures dans le béton : améliorer son comportement sous sollicitations de traction en tirant parti des bonnes capacités mécaniques de l'acier en traction. L'étude du comportement du béton armé peut avoir lieu à plusieurs échelles, les échelles présentées ci-après sont l'échelle « macroscopique » (échelle de la structure en béton armé testée) et l'échelle « microscopique » (échelle de la barre d'armature en acier et de ses nervures).

Echelle macroscopique

Un exemple du comportement macroscopique du béton armé sous sollicitation monotone de traction est présenté en Figure I-7. Cette figure, issue du livre de Favre et al. (Favre 1997) schématise le comportement global d'un tirant en béton armé qui peut se décomposer en quatre phases :

- La phase non fissurée (ou phase élastique) : l'élément se comporte linéairement.
- La phase de formation des fissures : le nombre de fissures augmente au fur et à mesure de l'augmentation de l'intensité du chargement ; l'ouverture de fissure reste quant à elle constante. Une diminution progressive de la raideur est observée avec un comportement non linéaire quasi-ductile.
- La phase de fissuration stabilisée (ou propagation des fissures) : aucune nouvelle fissure n'apparaît mais l'ouverture de fissure augmente. L'élément se comporte à nouveau quasi-linéairement mais avec une pente plus élevée que dans la phase précédente.
- La phase de rupture : la limite d'élasticité des aciers est dépassée et ceux-ci exhibent un comportement plastique.

Au vu du niveau de sollicitations et du type d'éléments considérés dans notre étude, Favre conseille de ne prendre en compte que les deux premières phases présentée ci-dessus. Les deux dernières phases ne sont, selon lui, atteintes que dans des cas de chargements extrêmes très souvent réservés aux essais en laboratoires. Cette constatation va dans le sens des codes de dimensionnement des éléments en béton armé, qui imposent que la rupture en flexion des sections de béton armé ait lieu à la fois par la plastification des aciers tendus et par la ruine en compression du béton comprimé. Ainsi, dès lors que la ruine des éléments n'est pas étudiée, la plastification des aciers n'a pas à être considérée.

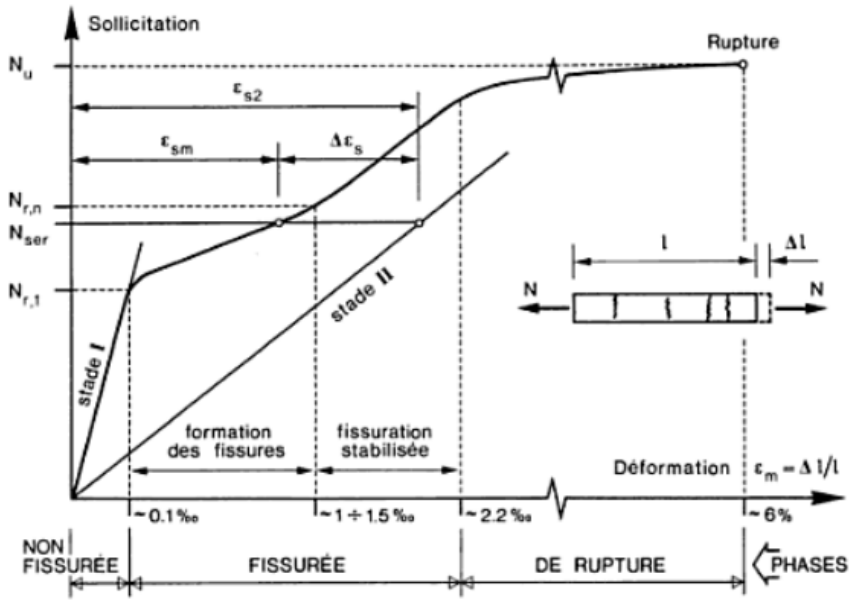


Figure I-7 : Diagramme sollicitation-déformation caractéristique d'un tirant de béton armé et différentes phases de son comportement (Favre 1997)

En comparant la réponse proposée par Favre (Figure I-7) et celle présentée en Figure I-2, l'effet des armatures en traction peut être observé en particulier sur la pente post-élastique de la réponse contrainte-déformation du béton armé : dans le cas du béton seul, la pente post-élastique était négative alors que dans le cas du béton armé, après une courte phase de transition (non représentée sur la courbe théorique de Favre), les aciers reprennent les efforts internes initialement répartis dans le béton et assurent ainsi une pente post-élastique macroscopique toujours positive. Cette constatation souligne l'intérêt de modéliser le comportement macroscopique du béton armé dans son ensemble. En effet, la modélisation du comportement adoucissant du béton en traction pose des problèmes numériques du fait de la non-bijectivité de la fonction représentant la courbe contrainte-déformation qui mène à une perte d'ellipticité de l'opérateur tangent (Benallal et al 1988; Benallal et al 1989).

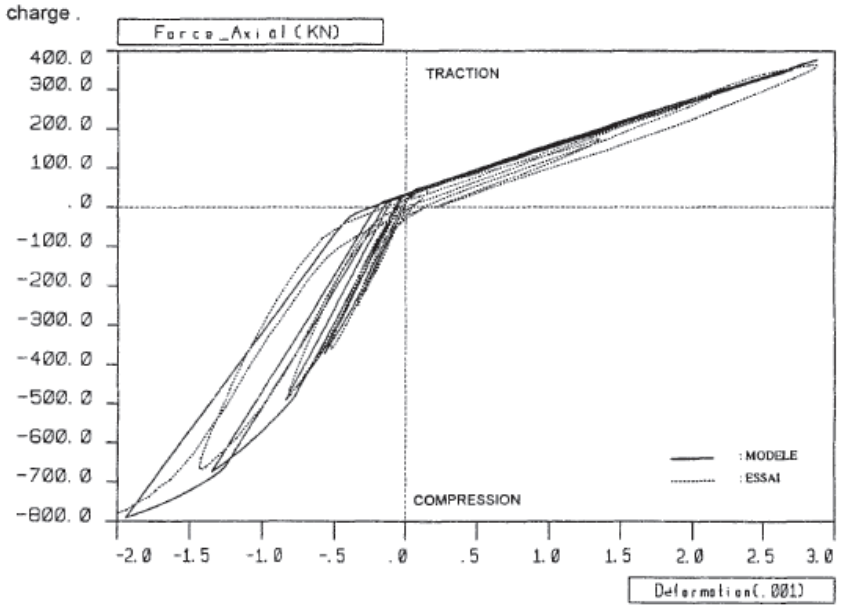


Figure I-8 : Résultats expérimentaux d'un poteau en béton armé soumis à de la traction-compression alternées (Benmansour 1997)

Le comportement du béton armé sous sollicitations alternées est présenté, par exemple en Figure I-8 pour le cas d'un poteau court en béton armé soumis à de la traction-compression alternée (Benmansour 1997). La pente post-élastique toujours positive, proposée par Favre, est bien observée sur cet essai. Par ailleurs, certains comportements relevés pour le béton seul se retrouvent sur cet essai de béton armé : des déformations résiduelles à charge nulle, une perte de raideur macroscopique, des boucles d'hystérésis et un comportement dissymétrique entre traction et compression avec reprise de raideur au changement de signe de la sollicitation.

Ces ressemblances et dissemblances entre les comportements du béton seul et du béton armé peuvent être éclairées par une analyse à l'échelle microscopique.

Echelle microscopique

La modification significative de la réponse mécanique du béton en traction lors d'ajout de barres d'armatures, appelée « tension-stiffening effect » (Hegemier et al 1985), résulte d'une redistribution complexe, à l'échelle microscopique, des efforts internes du béton vers l'acier. Cette hyperstaticité du système microscopique formé par le béton et les barres d'armatures en acier repose sur une zone qui a fait l'objet de nombreuses études : la liaison acier-béton. En se basant sur le travail remarquable de référencement bibliographique effectué par N. Dominguez Ramirez dans sa thèse (Ramirez 2005), les effets mécaniques prédominants de la dégradation de cette liaison sur la réponse macroscopique d'une structure en béton armé sont résumés ci-dessous :

- Redistribution significative des efforts et contraintes dans le corps du béton, créant des zones très chargées et d'autres très peu.
- Apparition de déplacements résiduels dans la structure.
- Réduction de la rigidité induisant une augmentation de la période propre de la structure dans le cas de sollicitations dynamiques.

Ramirez propose également une description phénoménologique de la dégradation de la liaison acier-béton sous chargement cyclique qui peut se résumer ainsi :

- Lors de la première mise en charge, le béton s'écrase sur les nervures de la barre de renfort, créant des microfissures situées au lieu de chaque nervure. Certaines de ces microfissures peuvent coalescer pour former un réseau de fissures primaires (macrofissures) et secondaires (microfissures) comme représenté sur la Figure I-9 (Goto 1971; Kobayashi et al 1980).
- Quand le sens de chargement est inversé, la résistance de la liaison est d'abord faible à cause du jeu créé derrière les nervures par le béton écrasé ; puis, lorsque le jeu créé par ce béton écrasé est rattrapé, la résistance de la liaison remonte sans pour autant atteindre la valeur obtenue, dans ce sens de chargement, sous chargement monotone (Viwathanatepa et al 1979).

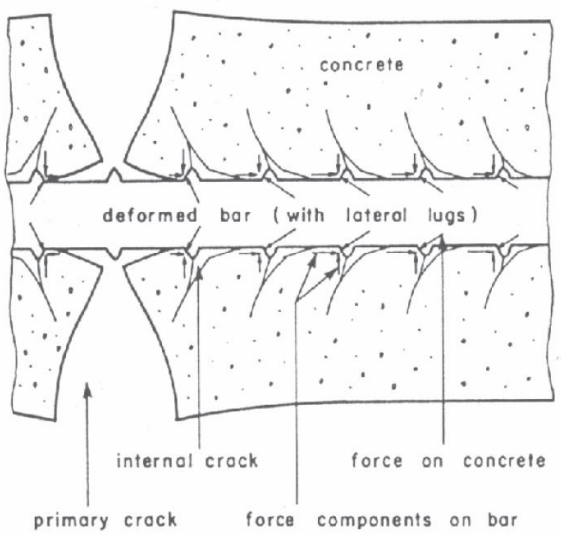


Figure I-9 : Répartition des fissures primaires et secondaires dans le béton, localement près de la barre de renfort en acier (Goto 1971)

Ainsi, bien que certains comportements macroscopiques puissent sembler similaires entre le béton seul et le béton armé, leur origine microscopique peut différer :

- les déplacements résiduels sont attribués dans un cas au glissement entre les lèvres des fissures du béton, et dans l'autre à la décohésion de l'interface acier-béton (Code 1990; Kobayashi et al 1980),
- la distribution interne des fissures semble différer entre un élément en béton seul et un élément en béton armé : la présence d'armatures modifie la distribution interne de contraintes dans le béton et par conséquent les faciès de fissurations internes.

L'apparition de fissures reste cependant un point commun dans le comportement du béton et du béton armé et semble être à l'origine de la réduction de rigidité macroscopique (Farrar & Baker 1992) et de l'effet unilatéral. Quant aux boucles d'hystérésis, dont l'origine est difficile à déterminer mais que l'on attribue volontiers aux frottements entre surfaces, elles pourraient provenir des frottements à l'interface acier-béton comme des frottements entre lèvres de fissures.

Les barres d'armatures semblant être à l'origine des fissures macroscopiques et microscopiques du béton composant le béton armé, une étude de l'influence des aciers sur la fissuration s'impose.

Etude de l'influence des aciers sur la fissuration

D'après (Goto 1971) et tous les auteurs qui l'ont suivi, la décohésion acier-béton est intrinsèquement liée à la dégradation du béton localement près des armatures via la création de fissures secondaires et le glissement relatif acier-béton se retrouve donc induit par la fissuration du béton.

Les mesures des efforts d'adhérence et des glissements internes à l'interface acier-béton sont cependant expérimentalement compliquées, si bien que les auteurs s'accordent à reconnaître, à la manière de (Marti et al 1998) ou encore de (Favre 1997), que la contrainte d'adhérence subit une discontinuité au droit de la fissure tandis que le glissement est à son maximum,

sans donner réellement plus de détails expérimentaux à ce sujet. Les variations typiques des contraintes proposées par ces deux auteurs sont présentées en Figure I-10 et Figure I-11.

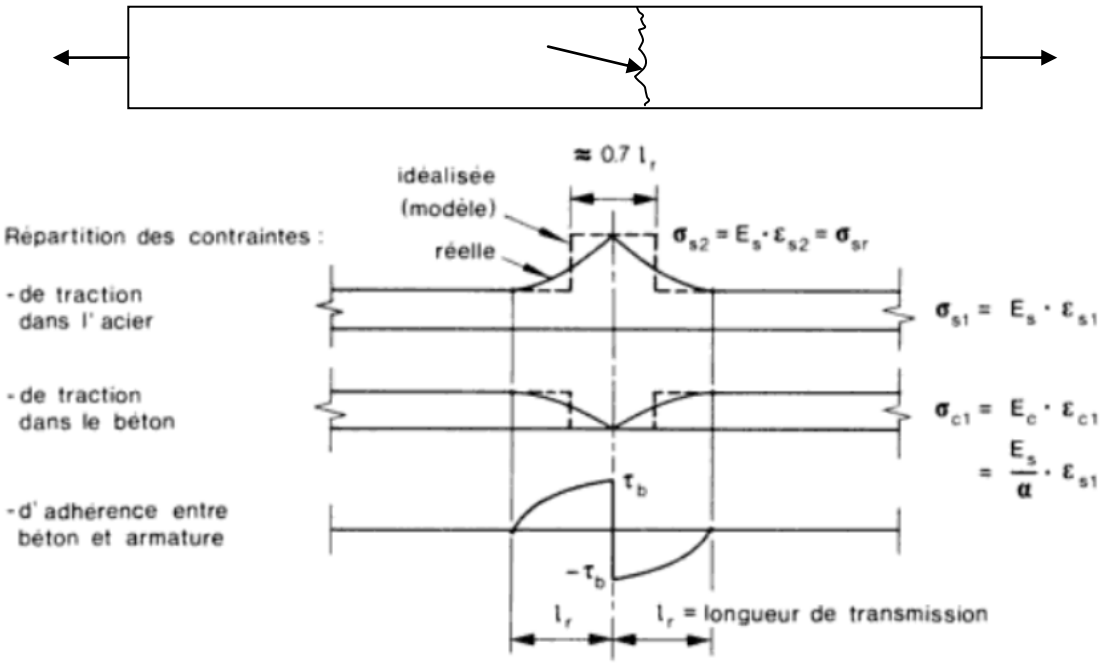


Figure I-10 : Répartition des contraintes de traction et d'adhérence dans et entre l'acier et le béton (Favre 1997)

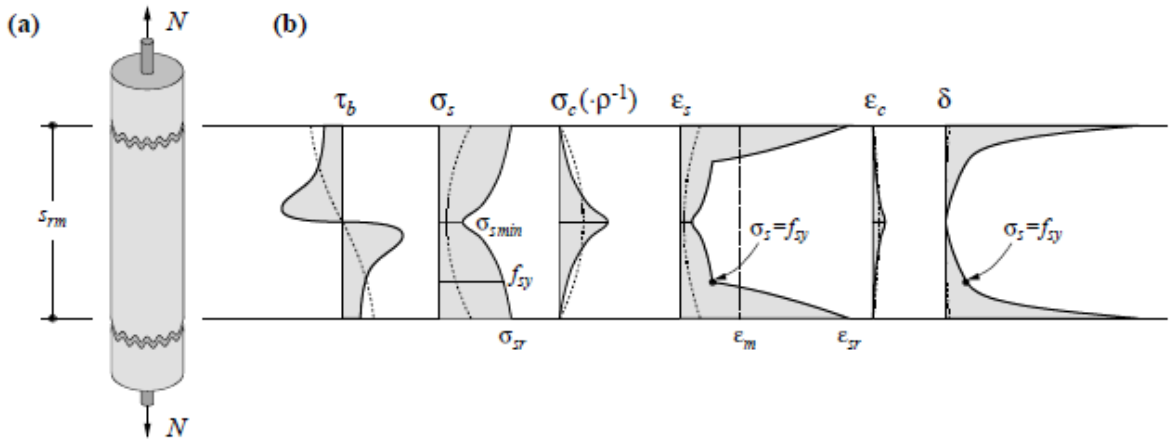


Figure I-11 : Répartition des contraintes d'adhérence, des contraintes et déformations dans l'acier et le béton, et du glissement (Marti et al 1998)

La Figure I-11 représente en pointillés le comportement sous faibles niveaux de sollicitations et en trait plein le comportement sous forts niveaux de sollicitations. Les tracés en pointillés de la Figure I-11 sont similaires aux tracés en traits pleins de la Figure I-10. Ainsi, en idéalisant le comportement de la liaison de la manière proposée par Favre sur la Figure I-10 ou par (Marti et al 1998) dans le « tension chord model », pour les aciers haute adhérence nervurés utilisés habituellement, un modèle simple pour représenter la liaison acier-béton du type rigide-parfaitement glissant suffit à représenter de manière satisfaisante la relation contrainte-glissement à l'interface acier-béton. Cette hypothèse est également utilisée dans (Ingraffea et al 1984) et (Pimentel et al 2010). Les répartitions des contraintes d'adhérence et du glissement à l'interface acier-béton peuvent alors être idéalisées comme sur la Figure I-12.

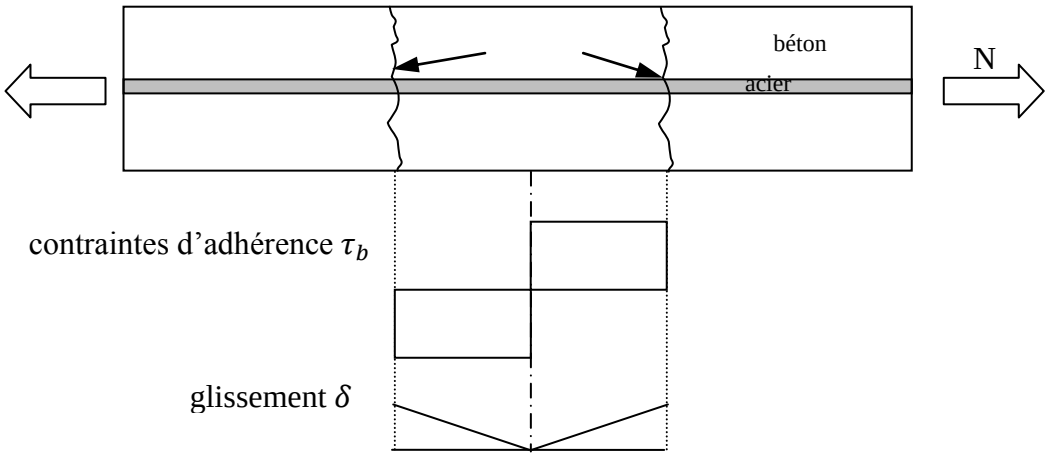


Figure I-12 : Répartition idéalisée des contraintes d'adhérence et du glissement

Enfin, s'il a pu être démontré, sous chargement thermique (Sicsic et al 2013) que les fissures dans le béton seul sont réparties de manière régulière voire périodique, la présence d'armatures a tendance à modifier cette répartition en la rendant d'une part plus régulière et d'autre part réglée sur la périodicité desdites armatures. En effet, le contraste de rigidité entre l'acier et le béton conduit à des concentrations de contraintes au niveau de la frontière entre les deux matériaux, induisant des singularités localisées menant à la fissuration. Ainsi, il a été constaté lors d'essais sur une poutre en béton armé peu ferraillée (0,67% de taux de ferraillage) soumise à de la flexion trois points alternée, effectués au Laboratoire de Mécanique et Technologie de l'ENS Cachan, que les fissures macroscopiques apparaissent au niveau des cadres d'armatures transversales (voir Figure I-13).

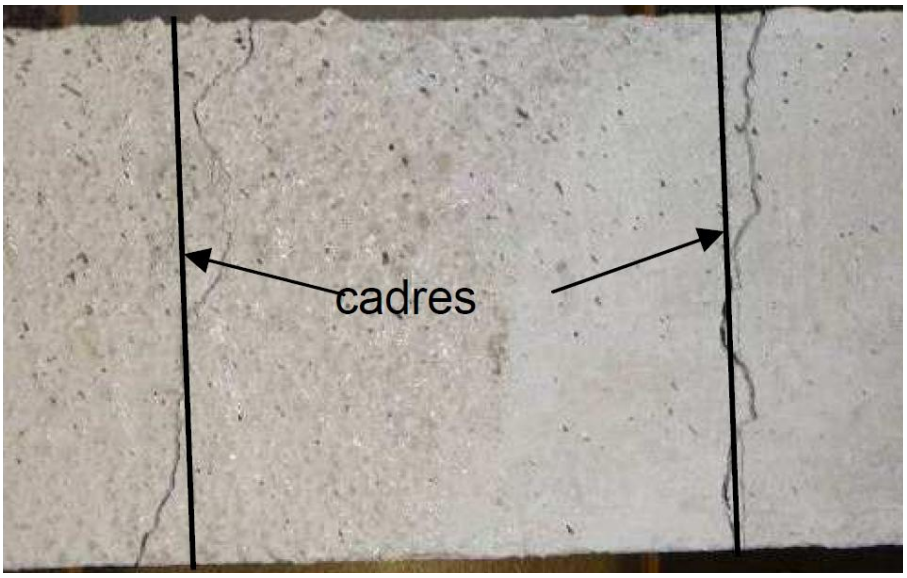


Figure I-13 : Fissuration externe sur poutre HA8B flexion 3 pts alternée, essais CEA/LMT (Crambuer et al 2011)

Cependant, peu de tests ont été effectués pour étudier cette régularisation des fissures par la présence d'armatures, probablement à cause de la forte dépendance du phénomène de fissuration aux conditions limites ainsi qu'à l'hétérogénéité interne du béton lui-même.

Conclusion

Le **béton armé** présente un **comportement macroscopique non linéaire** dont les caractéristiques sont semblables à celles du béton seul, à savoir une **perte de raideur progressive**, de la **dissymétrie** traction-compression, des **boucles d'hystérésis**, une **restitution de la rigidité** au changement de signe de la sollicitation et des **déformations résiduelles**. Cependant, ces phénomènes ne proviennent pas tous des mêmes mécanismes à l'échelle microscopique et sont intimement liés à la présence des armatures qui induisent un changement de répartition des contraintes internes au béton et ainsi régularisent l'apparition des fissures macroscopiques. Au niveau de l'interface entre l'acier et le béton, les redistributions de contraintes peuvent être représentées simplement par des fonctions créneaux. La différence majeure entre le comportement macroscopique du béton armé et celui du béton seul se situe au niveau de la réponse macroscopique post-élastique : le béton seul présente un comportement « adoucissant » avec une pente post-élastique négative alors que le béton armé présente un comportement « affaiblissant » avec une **pente post-élastique positive**. Cette réponse macroscopique à pente post-élastique positive confirme l'intérêt de la **modélisation globale ou homogénéisée** du béton armé, qui ne présentera ainsi pas de localisation lors des calculs de structure.

I.1.iii. Particularité des plaques

Les plaques en béton armé sont des éléments de structure élancés en béton, rigidifiés par des cadres d'armatures souvent répartis en deux nappes (inférieure et supérieure) à l'image de ce qui est présenté en Figure I-14 (a) et (b).

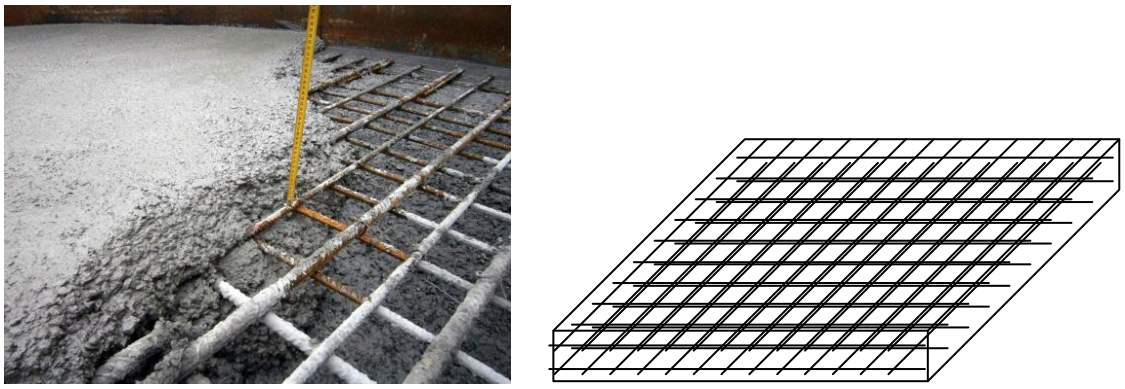


Figure I-14 : (a) Mise en œuvre d'une dalle en béton armé, détail des armatures ; (b) Schématisation d'une plaque en béton armé avec ses deux nappes d'armatures

Du fait de leur faible épaisseur relativement à leurs dimensions latérales (Figure I-14 (b)), les éléments de type plaque sont relativement difficiles à étudier expérimentalement car très sensibles au flambement. De plus, les faciès de fissuration s'avèrent conséquemment dépendants des conditions limites appliquées en particulier au niveau des appuis de la plaque considérée.

Parmi les divers essais sur plaques en béton armé existants, se distinguent :

- Les essais menés à l'INSA de Toulouse sur l'influence des armatures sur la fissuration de dalles carrées en flexion (Sall 1985), qui mettent en évidence « l'effet de dalle » (le moment de fissuration des dalles est supérieur à celui de poutrelles sollicitées en flexion 4 points), la présence de deux seuils dans la modification du

comportement (un seuil pour la microfissuration, et un pour la macrofissuration), ainsi qu'une influence néfaste des armatures pour la fissuration au sens que le moment de fissuration diminue lorsque le taux d'armature augmente au-delà d'un taux d'armature de 0.35% par direction.

- Les essais menés à l'université technique de Braunschweig (Allemagne) par (Kordina & Kiel 1982) sur des panneaux testés à la compression uniaxiale et à la flexion qui mettent en évidence une distribution plus régulière des fissures pour les plaques armées comparées aux plaques non armées.

- Les essais effectués à l'université de Toronto (Canada) par (Polak & Vecchio 1994) sur des plaques sollicitées en membrane-flexion munies d'armatures anisotropes (taux d'armatures de 1.25% dans une direction et 0.42% dans l'autre) dont l'un des spécimens possède des armatures orientées à 45° par rapport aux bords de la plaque, qui mettent en évidence la faible interaction entre les directions orthogonales lorsque les armatures sont parallèles aux directions de chargement, alors que les plaques à armatures à 45° (simulant une sollicitation de type cisaillement plan) montrent un comportement davantage non linéaire avec une réorientation des fissures.

- Les essais menés à l'INSA de Lyon par (Pascu 1995) sur des plaques en béton armé ferraillées d'un taux de 0.53% dans chaque direction (correspondant à des éléments utilisés dans les tours aéroréfrigérantes) et sollicitées en flexion-membrane uni ou bi axiale, qui mettent en évidence la coïncidence entre les positions et espacements des fissures et ceux des armatures lors d'essais de flexion-bimembrane ou de biflexion-bimembrane (voir les Figure I-15 (a) et (b)).

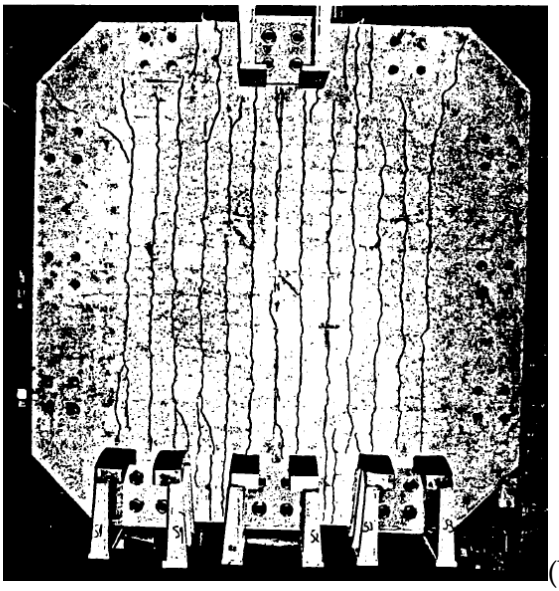
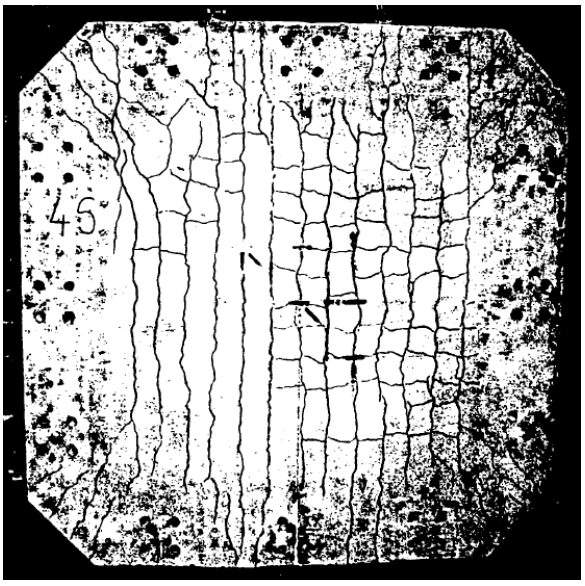
(a)  (b) 

Figure I-15 : Faciès de fissuration pour des plaques en béton armé soumises à de la (a) flexion-bimembrane, (b) biflexion-bimembrane (Pascu 1995)

Conclusion

L'étude des plaques en béton armé confirme les études précédemment menées sur le béton armé en général avec quelques particularités spécifiques aux plaques : une faible interaction entre les directions orthogonales des grilles de renfort lorsque les armatures sont parallèles aux directions de chargement et une **coïncidence très marquée entre les positions et espacements des fissures et ceux des armatures**. **L'influence des armatures** sur la distribution des fissures dans le béton semble donc **plus importante encore pour les plaques** que pour les poutres.

I.2. MODELES CONSTITUTIFS

Une grande variété de modèles constitutifs dédiés aux applications de bâtiments ou structures en béton armé peut être recensée dans la littérature. En effet, pour chaque cas d'application, le type de structure à modéliser, les niveaux de sollicitations appliqués à ces structures et les échelles caractéristiques des phénomènes d'intérêt sont des critères cruciaux pour s'éviter des calculs trop lourds, inutiles ou des résultats inappropriés. Ainsi, le modèle de béton armé universel permettant de traiter toutes les problématiques à toutes les échelles de manière efficace, précise et robuste n'ayant pas encore été créé, le nombre et la variété des modèles existants se multiplient. Il est cependant possible de classer ces modèles selon l'échelle caractéristique des phénomènes d'intérêts comme proposé par (Spacone et al 1996). Parmi ces modèles, certains sont purement phénoménologiques alors que d'autres s'inscrivent dans des cadres théoriques plus rigoureux. Nous proposons de décrire les spécificités de la thermodynamique des processus irréversibles et de la théorie des Matériaux Standard Généralisés.

I.2.i. Plusieurs échelles

En reprenant la classification proposée par (Spacone et al 1996), les modèles dédiés au béton armé peuvent être classés à partir de l'échelle caractéristique des phénomènes d'intérêts :

- **à l'échelle microscopique**, pour des analyses raffinées dédiées à l'analyse des interfaces ou de la fissuration, la modélisation multi-phases (bi ou tri –phases généralement) est privilégiée. Elle inclut des lois de comportement sophistiquées pour représenter le béton (lois d'endommagement, modèles de fissuration discrète du type « smeared crack », modèles non-locaux, représentation des granulats…), les aciers (plasticité, flambement…), et la liaison acier-béton (adhérence…). Ce type de modélisation éléments finis requiert des maillages raffinés et souffre bien souvent de problèmes de convergence dus à la perte d'unicité induite par l'adoucissement du béton (voir paragraphe I.1.i) que l'on corrige par des méthodes de régularisation. Elle est par conséquent coûteuse en temps et moyens de calculs et ne peut être raisonnablement proposée pour des analyses de bâtiments complets.
- **à l'échelle intermédiaire** (échelle mésoscopique) ce sont les modélisations multicouches ou multifibres qui sont prédominantes. Dans ce cas, des lois de comportement simplifiées sont utilisées pour la représentation du béton et des aciers (Guedes et al 1994; Ngo & Scordelis 1967; Spacone et al 1996) et le comportement non-linéaire de la liaison acier-béton peut être inclus dans l'un ou l'autre des

matériaux ou appliqué via des éléments joints (David et al 2012). Ces modélisations, certes moins coûteuses que les précédentes, ne parviennent cependant pas à s'affranchir totalement des difficultés induites par l'adoucissement du béton (régularisation des modèles de béton).

- **à l'échelle macroscopique,** pour des analyses de bâtiments ou structures complètes, des modèles de béton armé « globaux » ou « homogénéisés » sont souvent proposés (Takeda et al 1970). Ces modèles résument les aspects principaux de la réponse non linéaire macroscopique du béton armé (voir paragraphe I.1.ii) présenté comme un matériau homogène à l'échelle de la structure. Leurs paramètres sont calibrés à partir d'une analyse locale et de données expérimentales et d'un nombre restreint de paramètres matériaux et géométriques, pour permettre leur utilisation industrielle.

Conclusion

Comme précisé précédemment, les modèles formulés à l'échelle microscopique permettent une bonne représentativité des interactions entre les différentes phases du matériau hétérogène qu'est le béton armé mais requièrent moyens et des temps de calculs trop élevés dès lors que l'on s'intéresse au calcul de structures de grande envergure. Les modèles multicouches ou multifibres de l'échelle mésoscopique sont alors plus rapides mais nécessitent encore l'utilisation d'artefacts pour s'affranchir des problèmes de localisations induits par la représentation du comportement adoucissant du béton seul. Les modèles les plus appropriés, pour l'instant, à des **analyses transitoires non linéaires de bâtiments de grande envergure** pour une utilisation industrielle semblent donc être ceux formulés à **l'échelle macroscopique.**

I.2.ii. Plusieurs cadres théoriques

Les différents types de modèles classifiés ci-avant peuvent être formulés selon deux méthodologies principales :

- **pour les analyses aux échelles microscopique et mésoscopique**, les modèles sont usuellement construits via la formulation d'expressions théoriques ou de descriptions phénoménologiques idéalisant chaque phénomène élémentaire intervenant dans le comportement macroscopique observé. Puis les paramètres de ces modèles microscopiques sont calibrés à partir de données expérimentales. Le modèle de béton armé est alors obtenu par addition de chaque mécanisme élémentaire représenté. Ainsi les plaques en béton armé, par exemple, sont modélisées comme des structures multi-composantes comprenant du béton, des barres d'acier et leur interaction. Ce type de formulation a été choisi notamment par (Lee 2011; Marti et al 1998; Okamura & Kim 2000; Pimentel et al 2010; Selby & Vecchio 1997; Soltani et al 2005; Spacone & El-Tawil 2004; Vecchio & Collins 1986). L'hypothèse sous-jacente à cette formulation repose sur la superposition des distributions des contraintes provenant de chaque phase et des contraintes d'interface (Feenstra & de Borst 1995).

- **pour les modèles macroscopiques,** l'approche privilégiée est le développement de modèles à partir d'un cadre théorique général afin de formuler, de manière consistante, les équations d'état, les lois d'écoulement et la dissipation mécanique intrinsèque. De plus, certains auteurs utilisent des techniques d'homogénéisation ou

des analyses multi-échelles pour transférer les variables physiques et les équations de la description multi-phases microscopique à l'élément de béton armé macroscopique (Andrieux et al 1986; Caillerie 1995; Peric et al 2011; Suquet 1993).

Quelle que soit la méthodologie employée, les modèles microscopiques, mésoscopiques ou macroscopiques se basant sur des expressions théoriques de la relation contrainte-déformation sont bien souvent formulés dans un cadre théorique prédéfini. Le comportement des matériaux est alors décomposé en deux parties : la partie réversible et la partie dissipative.

- Le cadre de la thermodynamique des processus irréversibles (Auriault 1973; Coleman & Gurtin 1967; Germain 1973) permet de définir l'état thermodynamique d'un matériau hors d'équilibre à partir de variables d'état indépendantes et de variables internes. Les **variables d'état** suffisent à décrire l'évolution du milieu lors d'un **processus réversible** alors que les **variables internes**, constantes lors des processus réversibles, décrivent la **dissipation interne** du matériau (création d'entropie). L'évolution dans le temps de ces variables internes est gouvernée par les variables d'état. Ainsi, via les variables internes, un effet mémoire est introduit de sorte que l'état thermodynamique d'un corps est déterminé par l'histoire des états thermodynamiques précédemment vécus par ce corps. La thermodynamique des processus irréversibles comprend elle-même plusieurs cadres théoriques parmi lesquels les Matériaux Standard Généralisés (Halphen & Nguyen 1975).

La théorie des Matériaux Standard Généralisés

En toute généralité, dans le cadre de la thermodynamique des processus irréversibles, la dissipation d'énergie interne au matériau est décrite par des variables internes dont l'évolution est gouvernée par des variables d'état via des fonctionnelles quelconques.

La **théorie des Matériaux Standard Généralisés** définit la dissipation d'énergie à partir d'un **potentiel de dissipation** φ^* convexe par rapport aux flux, positif et nul en zéro. Le dual φ de ce potentiel, par la transformée de Legendre-Fenchel, définit alors les **lois complémentaires d'écoulement** qui s'expriment alors par la **propriété de normalité**.

Ainsi, si $\dot{a}_i$ est un flux de variable interne et A_i la force généralisée associée à ce flux, alors la dissipation d'énergie $\mathfrak{D}$ dans le milieu considéré peut s'écrire sous la forme :

$$\mathfrak{D} = -\dot{a}_i A_i \geq 0$$

La positivité de la dissipation étant une conséquence du second principe de la thermodynamique après séparation des dissipations thermique et mécanique (Germain 1973).

L'hypothèse est alors faite qu'il existe un potentiel φ, dit de dissipation, duquel dérivent les flux de variables internes. Ce potentiel est convexe, positif et nul en zéro mais non nécessairement dérivable. Est alors introduite la notion de sous-gradient comme suit :

Le sous-gradient $\partial_A \varphi(A)$ d'une fonction scalaire φ en un point A est tel que :

$$\dot{a} \in \partial_A \varphi(A) \Leftrightarrow \varphi(\hat{A}) - \varphi(A) \geq \dot{a}.(\hat{A} - A) \ \forall \hat{A}$$

C'est donc l'ensemble des tangentes sous la frontière du domaine φ qui n'a de sens que si φ est convexe.

L'hypothèse des Matériaux Standard Généralisés est donc :

$$\dot{a}_i \in \partial_{A_i}\varphi(A_i) \left(\text{ou par transformée de Legendre } A_i \in \partial_{\dot{a}_i}\varphi^*(\dot{a}_i)\right)$$

Remarque 1 : Dans le cas particulier où les flux sont proportionnels aux forces ($\dot{a}_i = L_{ij}A_j$), l'existence des potentiels de dissipation est assurée, ils sont dérivables et la relation habituelle suivante peut être écrite : $\dot{a}_i = -\frac{\partial\varphi(A)}{\partial A_i}$ *(ou par transformée de Legendre* $A_i = -\frac{\partial\varphi^*(\dot{a})}{\partial \dot{a}_i}$*)*

Remarque 2 : La convexité et la positivité postulées du potentiel assurent la positivité de la dissipation (en prenant simplement $\hat{A} = 0$*).*

Dans bien des cas, lorsque le comportement est indépendant des vitesses, le potentiel de dissipation dual $\varphi(A_i)$ est positivement homogène de degré un et sa définition équivaut à définir une fonction indicatrice d'un domaine admissible convexe $f(A_i)$ telle que :

$$\varphi(A_i) = 0 \quad \text{si } f(A_i) \leq 0$$
$$\varphi(A_i) = +\infty \quad \text{si } f(A_i) > 0$$

f est alors appelée surface (ou fonction) de charge et les équations décrivant la normalité deviennent $\dot{a}_i = -\lambda_{\dot{a}_i}\frac{\partial f(A)}{\partial A_i}$.

Il est alors préféré par la suite, à la définition du potentiel de dissipation, qui n'est que difficilement interprétable physiquement, la définition des surfaces de charge et de lois d'écoulement normal, tout en gardant à l'esprit que le cadre dans lequel s'inscrit le modèle est bien toujours la théorie des Matériaux Standard Généralisés.

Le cadre des Matériaux Standard Généralisés est celui usuellement utilisé pour la description de la plasticité associée ou de l'endommagement. Il a notamment été choisi par (Alliche & Dumontet 2011; Badel et al 2007; Dragon & Mroz 1979; Gatuingt & Pijaudier-Cabot 2002; Lorentz & Godard 2011; Markovic 2006; Rumanus & Meschke 2007; Rumanus & Meschke 2008; Shao et al 2006), pour formuler leurs modèles et en particulier pour idéaliser le comportement du béton.

Conclusion

La **théorie des Matériaux Standard Généralisés** repose sur une caractérisation énergétique bien définie car elle assure la positivité de la dissipation au sein du matériau. Associée à la convexité de l'énergie libre nécessaire au cadre thermodynamique des processus irréversibles, qui assure les bonnes propriétés du problème de minimisation, la théorie des Matériaux Standard Généralisés est, par conséquent, adaptée à l'implantation numérique implicite dans n'importe quel code élément fini, via un algorithme d'intégration en temps bien discrétisé (Marigo 1989). C'est donc ce cadre qui **va être choisi par la suite pour la formulation du modèle macroscopique** de plaque en béton armé.

I.2.iii. Modélisation des phénomènes dissipatifs

L'étude des résultats expérimentaux sur le béton et le béton armé a mis en évidence la nécessité de prendre en compte plusieurs phénomènes dissipatifs pour représenter

correctement le comportement du béton armé sous sollicitations cycliques. Nous nous sommes restreints pour cette étude à deux mécanismes dissipatifs : l'endommagement et les déformations résiduelles. Ces déformations résiduelles peuvent être modélisées notamment par du glissement, du frottement ou de la plasticité. Plusieurs modèles proposant de coupler ces deux phénomènes dissipatifs existent déjà dans la littérature pour plusieurs types d'application. Nous proposons ici de faire une brève revue, non exhaustive, de certains de ces modèles en s'intéressant à un nombre restreint de caractéristiques de ces modèles : le type de matériau considéré, le nombre et l'identification des paramètres. Cette revue débute par les modèles formulés à l'échelle macroscopique, puis examine les modèles construits par une approche d'homogénéisation.

Modèles formulés directement à l'échelle macroscopique

Les modèles couplant endommagement et déformations résiduelles sont pour la plupart phénoménologiques et formulés directement à l'échelle macroscopique en couplant les deux phénomènes directement dans la formulation de l'énergie libre. Ces modèles peuvent s'appuyer alors sur des considérations microscopiques pour justifier la forme macroscopique des équations proposées, à l'image du modèle proposé par (Halm & Dragon 1998), qui couple endommagement et frottement à l'échelle macroscopique en se basant sur une description microscopique du frottement (direction de glissement et frottement de Coulomb). Ces auteurs parviennent ainsi à un modèle tridimensionnel standard généralisé pour les matériaux fragiles comprenant neuf paramètres identifiés à partir d'essais triaxiaux et du coefficient de frottement usuel de Coulomb. Ce modèle se base sur un endommagement anisotrope dont l'origine est justifiée de manière microscopique. Cette même justification microscopique de l'endommagement se retrouve dans le modèle Standard Généralisé proposé par (Marquis & Lemaitre 1988) pour les métaux, qui justifient la plasticité, elle aussi introduite de manière macroscopique, par l'approche microscopique classique de propagation de dislocations au sein du matériau. Les paramètres de ce modèle sont alors identifiés sur des essais de traction.

Bien qu'une justification microscopique des phénomènes dissipatifs soit avancée dans ces modèles, les auteurs n'ont pas décrit les processus de construction de la forme mathématique de l'énergie macroscopique associée à ces dissipations microscopiques ni même les paramètres à identifier. Une approche par analyse micromécanique puis homogénéisation est susceptible d'apporter cette justification.

Modèles formulés par analyse micro-macro

Un nombre restreint de modèles couplant endommagement et déformations résiduelles repose sur une approche micromécanique de ces phénomènes dissipatifs. Ainsi (Andrieux et al 1986) proposent un modèle pour les matériaux microfissurés appliqué aux béton et aux roches, basé sur une analyse micromécanique du comportement frottant des fissures et de leur propagation. A l'échelle macroscopique, il en résulte, par homogénéisation, un modèle tridimensionnel élasto-plastique endommageable non standard.

I.2.iv. Modélisation des éléments de structure

Il est admis de considérer que les calculs utilisant des éléments tridimensionnels sur des structures de grande envergure sont trop coûteux en temps et moyens de calculs pour être

utilisés dans des applications industrielles. Par conséquent, l'usage est de se tourner vers des éléments de structure de type poutre (unidimensionnel) ou plaque (bidimensionnel).

Les modèles dédiés au comportement des structures en béton armé sous sollicitations sismiques proposés dans la littérature s'attachent, pour la plupart, à représenter les poutres et poteaux en béton armé (Banon et al 1981; Carpinteri & Carpinteri 1984; Guedes et al 1994; Maekawa et al 2003; Ngo & Scordelis 1967; Spacone et al 1996; Takeda et al 1970). En effet, ces éléments de structure sont très représentés mondialement dans le bâti actuel et sont étudiés, en particulier, pour s'assurer de la protection des personnes vis-à-vis du risque sismique. De plus, l'analyse de la tenue sismique de ces structures poutres-poteaux nécessite de disposer d'un modèle non linéaire de nœuds d'armature bien calibré. Du fait de la particularité géométrique de ce type d'éléments, le moyen le plus utilisé pour formuler les modèles de comportement se situe à l'échelle intermédiaire : les poutres multifibres.

Cependant, les éléments de type poutre ne sont pas les seuls éléments utilisés en construction et, en particulier dans la construction industrielle ou de grande envergure, des panneaux en béton armé sont ainsi employés pour améliorer la rigidité et les propriétés dissipatives des bâtiments, deux caractéristiques nécessaires au dimensionnement parasismique. C'est pourquoi certains auteurs comme (Brun et al 2003; Kotronis et al 2003; Kratzig & Polling 2004; Mazars et al 2002; Selby & Vecchio 1997), ou encore (Soltani et al 2003) se sont intéressés à la formulation de modèles constitutifs pour des panneaux en béton armé en utilisant le point de vue de l'analyse locale à l'échelle microscopique. Comme précisé précédemment, ce type de modélisation est relativement coûteux à utiliser pour des calculs de grande envergure. Il n'y a néanmoins que peu de travaux recensés concernant des modèles de comportement non linéaires pour les panneaux en béton armé formulés à l'échelle macroscopique, dans un cadre théorique général, via une analyse multi-échelle. Il est possible de citer le modèle dédié à la ruine des plaques en béton armé sous impacts dynamiques développé par (Koechlin & Potapov 2007), mais ce modèle n'est pas approprié aux sollicitations sismiques qui font l'objet de notre étude. Le modèle le plus proche du type d'application qui nous intéresse ici serait celui proposé par (Markovic 2006), GLRC_DM, formulé pour les plaques en béton armé sous sollicitations sismiques à l'aide de la loi des mélanges, et limité à une seule phénoménologie de dissipation via une variable interne d'endommagement scalaire. Ce modèle, décrit en ANNEXE 1, servira de référence et le travail présenté dans cette thèse vise en particulier à enrichir ce modèle.

Conclusion

La revue bibliographique fait ressortir le besoin de développement de modèles de plaques en béton armé permettant à l'ingénieur l'analyse transitoire non linéaire de bâtiments sous chargements sismiques.

I.3. FOCUS SUR L'ENDOMMAGEMENT

Parmi tous les outils dont dispose le modélisateur pour représenter les comportements et phénomènes qu'il observe dans le matériau étudié, il en est apparu un dans les années 1950, dédié à la modélisation de la détérioration progressive des matériaux avant rupture : l'endommagement. Le phénomène d'endommagement d'un matériau élastique est la conséquence de l'apparition ou du développement de défauts à l'échelle de la

microstructure, qui conduisent à une modification des propriétés mécaniques (élastiques) du matériau à l'échelle macroscopique. A ce titre, l'endommagement est un phénomène dissipatif irréversible permettant l'étude du comportement avant rupture des matériaux.

I.3.i. Définition de l'endommagement

L'endommagement se définit phénoménologiquement comme une description de la dégradation des caractéristiques élastiques d'un matériau causée par des irréversibilités microstructurelles (microcavités, fissuration, décohésion intragranulaire…) subies par le matériau au cours de son histoire. L'état de dégradation du matériau est alors caractérisé par la donnée de paramètres internes définissant lesdites modifications à l'échelle de la microstructure.

Il est d'usage de noter $\boldsymbol{d}$ (pour « damage ») **la variable interne d'endommagement** ; d pouvant être un ensemble de paramètres d'endommagement d_i (par exemple d_1 est la densité de microfissures) et de considérer que d est nul lorsque le matériau est sain (i.e. non endommagé).

Le comportement élastique endommageable macroscopique est alors défini à partir des paramètres élastiques usuels définissant le tenseur d'élasticité $\mathbb{A}^0$ et des paramètres d'endommagement d_i. Il est alors possible d'écrire un tenseur de rigidité élasto-endommageable : $\mathbb{A}(d)$, tel que $\mathbb{A}(0) = \mathbb{A}^0$.

Remarque 3 : Il serait malvenu de définir une rigidité négative, peu représentative de la réalité physique des phénomènes représentés. A ce titre, $\mathbb{A}(d)$ est donc bien toujours une fonction positive de la variable d'endommagement $\boldsymbol{d}$. De même, l'endommagement représentant l'altération des propriétés mécaniques du matériau, $\mathbb{A}(d)$ est décroissante.

Remarque 4 : Pour finir, du fait de l'irréversibilité admise du phénomène d'endommagement, la variable d'endommagement $\boldsymbol{d}$ se doit d'être toujours croissante.

En une dimension, d étant alors une variable scalaire, la manière la plus simple de définir la variation du tenseur de rigidité en fonction de l'endommagement semble être la décomposition multiplicative suivante (Marigo 1982) :

$$A(d) = A^0 \zeta(d)$$

avec ζ, une fonction décroissante de la variable d'endommagement d à valeur initiale unitaire : $\zeta(0) = 1$.

$\boldsymbol{\zeta}$ est alors appelée la fonction d'endommagement.

I.3.ii. Diverses fonctions d'endommagement

Selon les significations physiques associées à l'endommagement, plusieurs fonctions d'endommagement peuvent être définies. Les raisonnements très simples qui suivent sont menés, à titre d'exemple, dans le cas d'une seule variable scalaire caractéristique de l'endommagement.

En associant l'endommagement à une mesure du ratio de volumes entre le volume des microcavités et microfissures et le volume total de l'élément considéré,(Kachanov 1958)

repris en France notamment par (Lemaitre & Chaboche 1994) définissent la fonction d'endommagement comme simplement :

$$\zeta(d) = 1 - d \qquad \text{où } d \in [0,1] \qquad \text{(I-1)}$$

Remarque 5 : Le tenseur de raideur $\mathbb{A}$ peut ainsi prendre des valeurs nulles correspondant à une ruine totale de l'élément considéré. Cela peut mener à des difficultés numériques lors de l'implantation dans un code élément fini qui supporte mal les éléments de rigidité nulle… il est alors nécessaire, dans la programmation, de borner la valeur de d à un endommagement critique $d_{cr} < 1$ et de bloquer ainsi son évolution dans une partie du domaine. Les résultats, en termes d'énergie dissipée peuvent alors être dépendants de la valeur limite d_{cr} choisie.

D'une manière plus générale, en associant l'endommagement à une simple mesure de la dégradation de la rigidité, (Lorentz 1996) définit une fonction d'endommagement faisant intervenir un paramètre « d'écrouissage » $\gamma \geq 0$:

$$\zeta(d) = \frac{1 - d}{1 + \gamma d} \qquad \text{où } d \in [0,1] \qquad \text{(I-2)}$$

Remarque 6 : Le cas particulier $\gamma = 0$ correspond à la fonction d'endommagement de (Kachanov 1958; Lemaitre & Chaboche 1994).

Remarque 7 : La variable d'endommagement d variant ici encore entre 0 et 1, la Remarque 5 reste valable.

En associant l'endommagement à la même signification macroscopique que Lorentz, mais en cherchant, en toute généralité, la forme de la fonction d'endommagement ζ à partir de la forme de la réponse contrainte-déformation souhaitée, le raisonnement suivant peut être fait :

1) La variable d'endommagement d n'a pas de raison physique d'être majorée par 1, mais se doit d'être nulle lorsque le matériau est sain et croissante d'où $d \in [0, +\infty[$.

Remarque 8 : La variable d'endommagement change ici de domaine de variation et peut ainsi prendre des valeurs à l'infini. Cette définition purement mathématique, peu en accord avec la réalité des variables physiques, nous permet de définir, comme nous allons le justifier ci-dessous, ***la grandeur à considérer quand il s'agit d'endommagement : la fonction d'endommagement ζ****.*

2) Soit la densité d'énergie libre suivante : $\mathcal{W}(\varepsilon, d) = A^0 \zeta(d) \varepsilon^2/2$, en une dimension de l'espace.

La loi d'état qui en découle est alors la suivante : $\sigma = A^0 \zeta(d) \varepsilon$

Et le taux de restitution d'énergie : $G = -\varepsilon^2 \zeta'(d)/2$

Considérant une fonction de charge à seuil constant : $f(G) = G - k_0$, lorsque l'endommagement évolue il vient : $\dot{d} \geq 0$ et $\dot{f}(G) = 0$.

Or $\dot{f}(G) = -\varepsilon \dot{\varepsilon} \zeta'(d) - \dfrac{\varepsilon^2 \dot{d} \zeta''(d)}{2}$

$$\text{D'où } \dot{d} = -\frac{2\dot{\varepsilon}\zeta'(d)}{\varepsilon \zeta''(d)}$$

Le module tangent $\dot{\sigma}/\dot{\varepsilon}$ s'exprime donc : $\dot{\sigma}/\dot{\varepsilon} = \zeta - 2\zeta'^2(d)/\zeta"(d)$.

Ainsi, en se donnant une réponse contrainte-déformation en charge de pente $h(d)$, la fonction d'endommagement ζ doit satisfaire l'équation différentielle non linéaire suivante :

$$\zeta"(d)h(d) = \zeta"(d)\zeta(d) - 2\zeta'^2(d) \qquad \forall d \in [0, +\infty[\qquad \text{(I-3)}$$

Remarque 9 : Nous n'avons pas, au jour d'aujourd'hui, pu résoudre cette équation différentielle de manière formelle dans le cas général.

Dans le cas particulier où $h(d)$ est égal à une constante h, toute fraction rationnelle de polynômes du premier degré en d de la forme (I-4) est solution particulière de l'équation différentielle (I-3), avec $\zeta(0) = 1$, sous la condition que $\gamma/\delta = h$:

$$\zeta(d) = \frac{\alpha + \gamma d}{\alpha + \delta d} \qquad \forall d \in [0, +\infty[\qquad \text{(I-4)}$$

où α est une constante quelconque.

Remarque 10 : La fonction d'endommagement se doit d'être convexe décroissante pour respecter la condition de convexité de l'énergie libre et représenter la perte de rigidité due à l'endommagement. Ainsi les conditions suivantes apparaissent : $\gamma \leq \delta$.

La fonction d'endommagement proposée par (Lorentz 1996) et reprise par (Badel et al 2007) et présentée en (I-2) est donc une solution particulière de (I-3) pour $h(d) = -1/\gamma$ avec la limitation $\gamma \geq 0$ pour respecter la convexité et la décroissance de ζ.

La fonction d'endommagement proposée par (Koechlin & Potapov 2007; Markovic 2006) est également une solution particulière de (I-3) avec $h(d) = \gamma$. Elle s'exprime comme :

$$\zeta(d) = \frac{1 + \gamma d}{1 + d} \qquad \text{où } d \in [0, +\infty[\text{ et } \gamma \leq 1 \qquad \text{(I-5)}$$

Remarque 11 : La fonction d'endommagement ζ varie alors entre 1 (quand $d = 0$) et son asymptote γ (quand $d \to +\infty$) comme présenté sur la Figure I-16. γ est borné par la valeur 1 de manière à respecter la condition de décroissance de ζ donnée en Remarque 10.

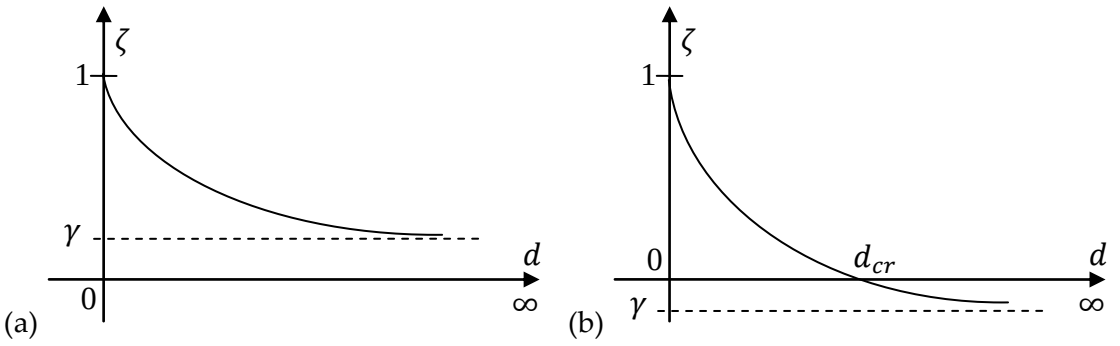


Figure I-16 : Représentation qualitative de l'évolution de la fonction d'endommagement ζ pour un γ positif (a) et négatif (b)

Remarque 12 : Le problème posé par la rigidité nulle abordé en Remarque 5 est écarté tant que $\gamma > 0$. *Cependant, il est possible que* γ *prenne des valeurs négatives ; la fonction d'endommagement* ζ *aura alors une valeur nulle puis des valeurs négatives au-delà d'un endommagement critique* d_{cr}.*Dans ce cas là, la variable d'endommagement* d *sera bornée au domaine* $d < d_{cr}$ *de manière à conserver un sens physique.*

Remarque 13 : La pente de la réponse contrainte-déformation en charge d'un modèle utilisant cette fonction d'endommagement est égale à γ. *Si ce paramètre est pris négatif, il est possible de représenter le phénomène d'adoucissement (pente post-élastique négative) pour le béton en traction.*

La fonction d'endommagement (I-5) peut être généralisée via l'introduction d'un paramètre α, comme choisi dans la forme actuelle du modèle GLRC_DM (ANNEXE 1) :

$$\zeta(d) = \frac{\alpha + \gamma d}{\alpha + d} \qquad \text{où } d \in [0, +\infty[\text{ et } \alpha, \gamma \geq 0 \qquad (\text{I-6})$$

Remarque 14 : L'introduction du paramètre α *permet de faire varier la vitesse de la décroissance de la fonction d'endommagement* ζ.

I.3.iii. Endommagement anisotrope

L'endommagement étant défini comme la description de la dégradation des caractéristiques élastiques d'un matériau causée par des irréversibilités microstructurelles, il n'est a priori pas nécessairement isotrope. Le traitement de l'anisotropie de l'endommagement peut alors se faire de deux manières : en définissant une variable d ou une fonction d'endommagement ζ anisotrope, qui serait tensorielle (Halm & Dragon 1996), ou en définissant une fonction d'endommagement spécifique à chaque composante du tenseur de rigidité. Cette fonction d'endommagement n'a alors pas de réelles caractéristiques tensorielles. Elle peut, par exemple, dépendre du signe des valeurs propres du tenseur de déformation et ainsi mener à un tenseur de raideur endommagé orthotrope.

I.4. CHOIX DE MODELISATION

En mettant en relation le contexte industriel considéré avec toutes les conclusions précédemment effectuées lors de la revue de l'état de l'art actuel, les choix de modélisation effectués pour la construction du modèle de béton armé présenté dans cette thèse sont résumés ci-après.

Il est fait le choix de construire un modèle :

- de plaque,
- à l'échelle macroscopique,
- justifié par une analyse multi-échelle,
- dans le cadre des Matériaux Standard Généralisés,
- représentant le comportement non linéaire du béton armé.

Les phénomènes retenus pour la modélisation sont :

- la perte de raideur,

- la dissymétrie traction-compression avec son effet unilatéral

- et les déformations résiduelles.

Les variables internes choisies pour représenter les mécanismes dissipatifs microscopiques à l'origine des phénomènes énoncés précédemment sont :

- l'endommagement (pour la perte de raideur et la dissymétrie traction-compression)

- et la décohésion à l'interface acier-béton (pour les déformations résiduelles).

La modélisation des boucles d'hystérésis est pour l'instant écartée du fait de la difficulté apparente à déterminer leur origine microscopique.

CHAPITRE II.

MODELES DE COMPORTEMENT DE BARRE EN BETON ARME

«I have found that all ugly things are made by those who strive to make something beautiful, and that all beautiful things are made by those who strive to make something useful. »

Oscar Wilde

Nous nous proposons dans ce chapitre de construire un modèle unidimensionnel de comportement de tirant en béton armé apte à traduire les phénomènes observés d'altération et de dissipation. L'endommagement et le glissement sont ici utilisés pour représenter respectivement l'altération du béton et le glissement relatif entre acier-béton au niveau de la barre de renforcement en acier, associés à l'hyperstaticité interne à la section de béton armé qui constitue l'origine de l'effet de « tension-stiffening ».

Différents modèles rhéologiques sont successivement construits et étudiés intégrant les mécanismes dissipatifs seuls puis couplés de glissement à l'interface acier-béton et d'endommagement du béton. La dissymétrie du comportement en traction et compression du béton et du béton armé observée expérimentalement est ensuite introduite dans les modèles comportant de l'endommagement. Le but de cette étude est de parvenir à reproduire, par un modèle simple, la réponse expérimentale d'une poutre en béton armé sous un chargement cyclique de traction -compression présentée à la Figure II-1.

Ce chapitre permet, via l'utilisation des modèles rhéologiques, d'appréhender aisément le fonctionnement de chaque mécanisme dissipatif considéré.

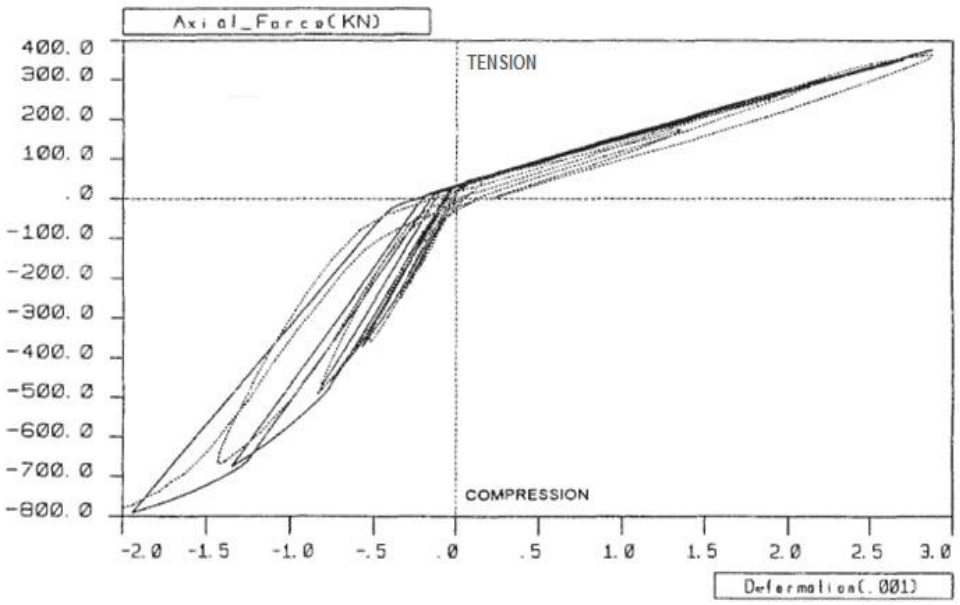


Figure II-1 : Essai poutre traction compression béton armé (Benmansour 1997)

II.1. MECANISMES DISSIPATIFS SEULS

Dans un premier temps, attachons-nous à étudier les deux mécanismes dissipatifs considérés pour la représentation du comportement d'une poutre en béton armé, glissement et endommagement, séparément de manière à appréhender aisément leur fonctionnement.

II.1.i. Glissement seul

Etudions tout d'abord un modèle rhéologique représentatif du comportement d'une poutre en béton armé dont la liaison acier-béton est susceptible de glisser périodiquement.

Construction du modèle rhéologique

Considérons un système de quatre ressorts (deux pour représenter l'acier et deux pour le béton) de part et d'autre de la liaison acier-béton. Le glissement acier-béton est modélisé ici à l'aide d'un patin entre les ressorts représentant l'acier et ceux représentant le béton, introduisant ainsi une déformation résiduelle ε^η (voir Figure II-2). La liaison reste cependant parfaite aux bords du modèle rhéologique étudié. De cette manière est représentée la décohésion entre l'acier et le béton au niveau de la barre de renforcement, annulée au niveau des cadres de renforcements et rendue périodique par la périodicité de ces cadres. Cette décohésion n'est activée qu'à partir d'un seuil exprimé en contraintes grâce à la contrainte microscopique de glissement σ^η associée à la déformation résiduelle microscopique ε^η.

Notons par k_i^B les raideurs des deux ressorts représentatifs du comportement du béton et par k_i^A celles des ressorts d'acier. Les variables microscopiques de déformations et de contraintes dans les ressorts de béton et d'acier sont notées respectivement par $(\varepsilon_i^B, \sigma_i^B)$ et $(\varepsilon_i^A, \sigma_i^A)$. Enfin, notons les variables macroscopiques contraintes et déformations, respectivement Σ et E, et les variables macroscopiques contraintes et déformations de glissement, respectivement Σ^η et E^η.

Remarque 15 : Le modèle ne comportant qu'une déformation résiduelle de glissement microscopique ε^η, les variables contraintes et déformations de glissement macroscopiques sont identiques à leurs homologues microscopiques.

Nous cherchons à obtenir une loi macroscopique unidimensionnelle à partir du modèle rhéologique microscopique suivant, hyperstatique de degré 2 et ne comprenant que du glissement :

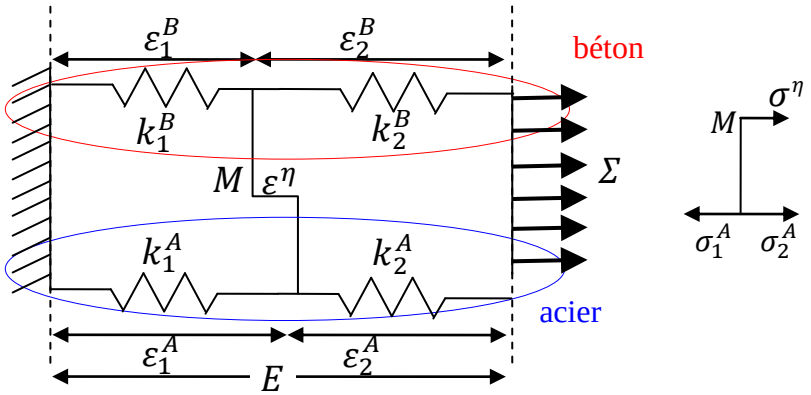


Figure II-2 : Modèle rhéologique à glissement seul

Les équations locales d'équilibre, de cinématique et de comportement associées à ce modèle rhéologique sont les suivantes :

Cinématique et liaisons :

$E = \varepsilon_1^A + \varepsilon_2^A = \varepsilon_1^B + \varepsilon_2^B$

$\varepsilon_1^A = \varepsilon_1^B + \varepsilon^\eta \; ; \varepsilon_2^A = \varepsilon_2^B - \varepsilon^\eta$

Comportement :

$\sigma_1^A = k_1^A \varepsilon_1^A \; ; \sigma_2^A = k_2^A \varepsilon_2^A$

$\sigma_1^B = k_1^B \varepsilon_1^B \; ; \sigma_2^B = k_2^B \varepsilon_2^B$

Equilibre :

$\Sigma = \sigma_1^A + \sigma_1^B = \sigma_2^A + \sigma_2^B$

$\sigma^\eta = \sigma_1^B - \sigma_2^B = \sigma_2^A - \sigma_1^A$

Seuil :

$f_\eta(\sigma^\eta) = |\sigma^\eta| - \sigma_{crit} \leq 0$

Evolution : loi de normalité

$\dot{\varepsilon}^\eta = \dot{\lambda}_\eta \dfrac{\partial f_\eta}{\partial \sigma^\eta}$ avec $\dot{\lambda}_\eta \geq 0$

Loi de comportement et seuil macroscopiques

La loi de comportement macroscopique reliant les variables macroscopiques Σ, Σ^η, E et E^η entre elles s'obtient en résolvant les équations locales énoncées ci-dessus. Sachant que $\Sigma^\eta = \sigma^\eta$ et $E^\eta = \varepsilon^\eta$, nous obtenons, après calculs :

$$\Sigma = \frac{(k_1^A + k_1^B)(k_2^A + k_2^B)}{k_1^A + k_2^A + k_1^B + k_2^B} E - \frac{k_2^A k_1^B - k_1^A k_2^B}{k_1^A + k_2^A + k_1^B + k_2^B} E^\eta \qquad (\text{II-1})$$

$$\Sigma^\eta = \frac{k_2^A k_1^B - k_1^A k_2^B}{k_1^A + k_2^A + k_1^B + k_2^B} E - \frac{(k_1^A + k_2^A)(k_1^B + k_2^B)}{k_1^A + k_2^A + k_1^B + k_2^B} E^\eta \qquad (\text{II-2})$$

Nous noterons désormais la loi de comportement macroscopique (II-1) et (II-2) sous la forme suivante :

$$\Sigma = AE - BE^\eta \qquad (\text{II-3})$$

$$\Sigma^\eta = BE - CE^\eta \qquad (\text{II-4})$$

Le seuil macroscopique ne dépendant que des variables macroscopiques Σ, Σ^η, E et E^η est obtenu grâce à l'équation (II-4), soit :

$$f_\eta(\Sigma^\eta) = |\Sigma^\eta| - \sigma_{crit} = |BE - CE^\eta| - \sigma_{crit} \leq 0 \qquad (\text{II-5})$$

avec $C = \dfrac{(k_1^A + k_2^A)(k_1^B + k_2^B)}{k_1^A + k_2^A + k_1^B + k_2^B} \geq 0.$

Remarque 16 : Compte tenu du fait que la déformation de glissement E^η est choisie positive lorsque E est positive, il est nécessaire d'assurer la positivité de B pour rester dans une description physique des phénomènes à modéliser. Ainsi vient la condition suivante : $k_2^A k_1^B \geq k_1^A k_2^B$.

Remarque 17 : Dans le cas particulier où $k_1^A = k_2^A$ et $k_1^B = k_2^B$, le facteur B est nul et le seuil de glissement f_η n'est jamais atteint.

Cadre thermodynamique

Nous nous proposons dans ce paragraphe de montrer que le modèle rhéologique construit précédemment s'inscrit bien dans le cadre thermodynamique des Matériaux Standard Généralisés (Halphen & Nguyen 1975).

Introduisons la densité d'énergie libre suivante :

Densité d'énergie libre : $$\mathcal{W}(E,E^\eta)=\frac{AE^2}{2}-BEE^\eta+\frac{CE^{\eta 2}}{2}$$

Alors, la loi de comportement s'obtient par dérivation sous la forme :

Contraintes : $$\Sigma=\frac{\partial \mathcal{W}}{\partial E}=AE-BE^\eta$$

Contraintes de glissement : $$\Sigma^\eta=-\frac{\partial \mathcal{W}}{\partial E^\eta}=BE-CE^\eta$$

Le comportement dissipatif macroscopique s'écrit, quant à lui, comme suit :

Seuil : $$f_\eta(\Sigma^\eta)=|\Sigma^\eta|-\sigma_{crit}\leq 0$$

Evolution (loi de normalité) : $$\dot{E}^\eta=\dot{\lambda}\frac{\partial f}{\partial \Sigma^\eta} \text{ avec } \dot{\lambda}\geq 0$$

Puissance dissipée : $$\mathfrak{D}=\Sigma^\eta\dot{E}^\eta$$

Remarque 18 : Il est intéressant de noter que la densité d'énergie libre Φ *peut s'écrire sous la forme suivante :* $\mathcal{W}(E,E^\eta)=\frac{1}{2}\binom{E}{E^\eta}\begin{pmatrix}A & -B\\ -B & C\end{pmatrix}\binom{E}{E^\eta}$.

Remarque 19 : $\text{Notons } P=C-\frac{B^2}{A}\geq 0$. *P est alors directement lié au déterminant de la matrice ci-dessus et donc à la convexité de* $\mathcal{W}$.

Opérateur de localisation

Les opérateurs de localisation reliant les variables microscopiques aux variables macroscopiques sont donnés par les expressions suivantes :

$$\sigma^\eta=\Sigma^\eta \qquad \varepsilon^\eta=E^\eta \qquad \varepsilon_1^B=\frac{\Sigma^\eta+k_2^BE}{k_1^B+k_2^B}=\varepsilon_1^A-E^\eta \qquad \varepsilon_2^B=\frac{k_1^BE-\Sigma^\eta}{k_1^B+k_2^B}=\varepsilon_2^A+E^\eta$$

Paramètres du modèle

Les paramètres du modèle ainsi construit sont les rigidités des ressorts représentant le béton et l'acier respectivement k_i^B et k_i^A, avec $i=1,2$ et la contrainte seuil de glissement σ_{crit}. Cette contrainte correspond à la contrainte partir de laquelle apparaît un glissement relatif entre l'acier et le béton. La valeur de ce seuil est déterminée à l'aide de résultats expérimentaux ou de valeurs usuellement utilisées dans les études pour l'ingénieur.

Réponse caractéristique

Est présentée, sur la Figure II-3, la réponse, en contraintes-déformations, du modèle à glissement seul soumis à une sollicitation alternée traction-compression-traction. Les paramètres utilisés pour cette simulation sont donnés au Tableau II-1. La courbe réponse contraintes-déformations a été obtenue grâce à une intégration du modèle dans Matlab®.

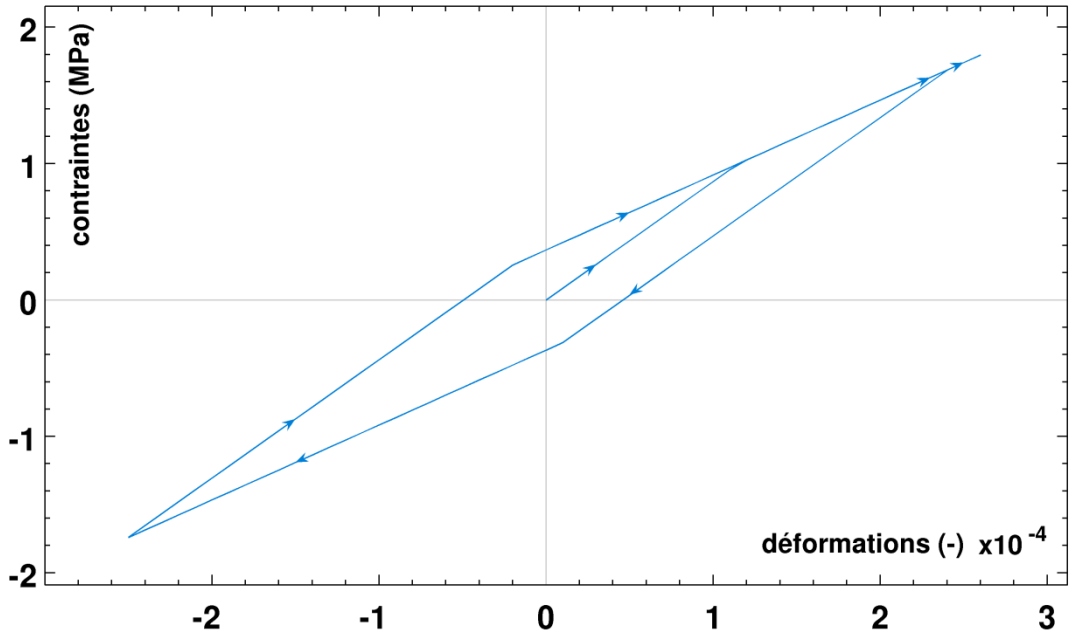


Figure II-3 : Courbe réponse contraintes-déformations obtenue par le modèle à glissement seul au cours d'un cycle de traction-compression-traction

La courbe réponse présentée en Figure II-3 met en évidence la capacité du modèle à traduire l'apparition de déformation résiduelle après un cycle de chargement ; en revanche, comme attendu, nous remarquons que le modèle ne permet pas de traduire la perte de raideur à la décharge observée expérimentalement.

Remarque 20 : La réponse obtenue est typique d'un modèle plastique avec écrouissage bien qu'aucun écrouissage explicite ne soit introduit dans la fonction seuil f. L'écrouissage observé est en effet induit par la formulation d'énergie libre macroscopique obtenue, qui comprend un terme de stockage d'énergie de glissement induit par l'hyperstaticité interne à l'échelle microscopique.

Tableau II-1 : Paramètres retenus pour le modèle à glissement seul

$k_1^A(\mathrm{MN.m^{-1}})$	$k_2^A(\mathrm{MN.m^{-1}})$	$k_1^B(\mathrm{MN.m^{-1}})$	$k_2^B(\mathrm{MN.m^{-1}})$	$\sigma_{crit}(\mathrm{MN.m^{-1}})$
10000	10000	40000	500	1

Notation : Du fait du comportement unidimensionnel étudié dans tout ce chapitre, les « déformations » et « contraintes » étudiées sont en réalité linéiques. A ce titre, les déformations ont la dimension d'une longueur et les contraintes seront exprimées en $MN.m^{-1}$.

II.1.ii. Endommagement seul

Tournons-nous désormais vers un modèle rhéologique à endommagement seul pour représenter le comportement du béton armé.

Construction du modèle rhéologique

Reprenons le système étudié précédemment constitué de quatre ressorts (deux pour représenter l'acier et deux pour le béton) de part et d'autre de la liaison acier-béton considérée cette fois comme parfaite. La liaison est également parfaite aux bords du système.

Introduisons alors de l'endommagement localisé dans un seul des deux ressorts représentant le béton. Cette dégradation de la raideur k_2^B du béton correspond à l'endommagement local du béton au niveau des nervures de la barre d'acier, introduit sous la forme d'une fonction ζ de l'endommagement d positive décroissante convexe et dont les valeurs sont comprises entre 0 et 1, qui vient pondérer la raideur k_2^B. A cet endommagement microscopique est associé un taux de restitution d'énergie g_2^B en accord avec une description standard généralisée du modèle d'endommagement microscopique. Notons alors D la variable d'endommagement macroscopique définie comme la moyenne des endommagements microscopiques dans le milieu. Notons enfin par Σ et E, les variables macroscopiques duales contraintes et déformations, respectivement .

Remarque 21 : Nous aurions tout aussi bien pu endommager les deux ressorts de béton, mais cette représentation permet d'introduire, de la manière la plus simple, un endommagement non uniforme dans le modèle rhéologique présenté. En effet, par ce biais, nous obtenons deux zones de béton endommagées de manière différente : une zone non endommagée et une endommagée. Cette représentation permet de n'avoir qu'une variable d'endommagement microscopique d dans le système.

Nous cherchons à obtenir une loi macroscopique unidimensionnelle, ne mettant en jeu que les grandeurs macroscopiques Σ, E et D à partir du modèle rhéologique suivant comprenant uniquement de l'endommagement :

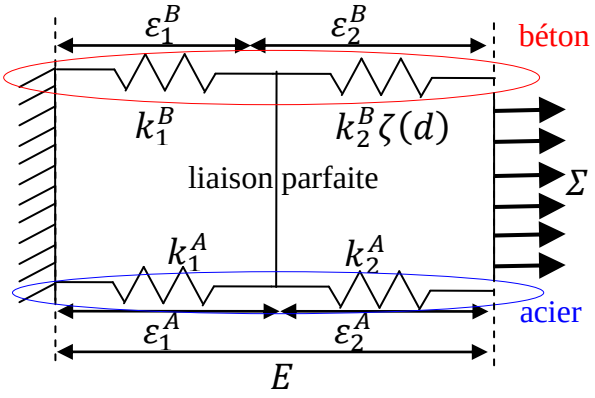


Figure II-4 : Modèle rhéologique à endommagement seul

Les équations locales d'équilibre, de cinématique et de comportement associées à ce modèle rhéologique sont les suivantes, avec ζ' la dérivée de ζ par rapport à d :

Cinématique et liaisons :

$E = \varepsilon_1^A + \varepsilon_2^A = \varepsilon_1^B + \varepsilon_2^B$

$\varepsilon_1^A = \varepsilon_1^B \; ; \varepsilon_2^A = \varepsilon_2^B$

Comportement :

$\sigma_1^A = k_1^A \varepsilon_1^A \; ; \sigma_2^A = k_2^A \varepsilon_2^A$

$\sigma_1^B = k_1^B \varepsilon_1^B \; ; \sigma_2^B = k_2^B \zeta(d) \varepsilon_2^B$

Taux de restitution d'énergie :

$$g_2^B = -\frac{k_2^B \zeta'(d) {\varepsilon_2^B}^2}{2}$$

Equilibre :

$\Sigma = \sigma_1^A + \sigma_1^B = \sigma_2^A + \sigma_2^B$

Seuil :

$$f_d(g_2^B) = \left|g_2^B\right| - k_0 = \left|-\frac{k_2^B \zeta'(d) {\varepsilon_2^B}^2}{2}\right| - k_0 \leq 0$$

Evolution : loi de normalité

$$\dot{d} = \dot{\lambda}_d \frac{\partial f_d}{\partial g_2^B} \text{ avec } \dot{\lambda}_d \geq 0$$

Loi de comportement et seuil macroscopiques

À l'aide des équations de la cinématique, de comportement et d'équilibre, données ci-dessus, nous obtenons la loi de comportement macroscopique suivante en fonction des variables macroscopiques Σ, E et D :

$$\Sigma = \frac{\left(k_1^A + k_2^A\right)\left(k_1^B + k_2^B \zeta(D)\right)}{k_1^A + k_2^A + k_1^B + k_2^B \zeta(D)} E \qquad \text{(II-6)}$$

On notera désormais (II-6) sous la forme :

$$\Sigma = A(D)E \qquad \text{(II-7)}$$

avec $A(D) = \frac{\left(k_1^A + k_2^A\right)\left(k_1^B + k_2^B \zeta(D)\right)}{k_1^A + k_2^A + k_1^B + k_2^B \zeta(D)}$.

Remarque 22 : Si la fonction d'endommagement microscopique ζ est prise de la forme suivante : $\zeta(d) = \frac{\beta+\gamma d}{\beta+d}$, avec $\beta \in \mathbb{R}$ et $\gamma \in [0,1]$, alors la rigidité effective A est une fonction positive décroissante convexe de la variable d'endommagement macroscopique D s'exprimant comme suit : $A(D) = c_A \frac{B_A+\Gamma_A D}{B_A+D} = C_A \xi(D)$, avec $(C_A, B_A) \in \mathbb{R}$ et $\Gamma_A \in [0,1]$. A est à valeurs dans $[C_A; \Gamma_A]$. Il est possible, de cette manière, justifier les fonctions ξ_i du modèle GLRC_DM. (voir Chapitre I §I.3.ii).

Nous cherchons maintenant à obtenir le seuil macroscopique dépendant des variables macroscopiques Σ, E et D. A l'aide des équations de la cinématique, de comportement et d'équilibre, nous avons $\Sigma = \left(k_2^A + k_2^B \zeta(D)\right) \varepsilon_2^B$. Donc, en réinjectant cette expression de la contrainte dans le seuil microscopique, nous obtenons l'expression du seuil macroscopique : $G = \frac{-k_2^B \zeta'(D) \Sigma^2}{2\left(k_2^A + k_2^B \zeta(D)\right)^2}$

En utilisant la loi de comportement macroscopique (II-6) nous obtenons alors :

$$\left| \frac{-k_2^B \zeta'(D)\ (k_1^A + k_1^B) E^2}{2\left(k_1^A + k_2^A + k_1^B + k_2^B \zeta(D)\right)^2} \right| - k_0 \leq 0 \qquad \text{(II-8)}$$

Or : $\frac{k_2^B \zeta'(D)\ (k_1^A + k_1^B)}{\left(k_1^A + k_2^A + k_1^B + k_2^B \zeta(D)\right)^2} = A'(D)$.

Le seuil macroscopique est donc identifié sous la loi suivante :

$$\left| \frac{-A'(D)E^2}{2} \right| - k_0 \leq 0 \qquad \text{(II-9)}$$

Cadre thermodynamique

Comme nous l'avons fait au paragraphe précédent pour le modèle avec glissement seul, le modèle avec endommagement seul peut être décrit dans le cadre thermodynamique des Matériaux Standard Généralisés (Halphen & Nguyen 1975).

Introduisons alors la densité d'énergie libre suivante :

Densité d'énergie libre : $\mathcal{W}(E,D) = \frac{A(D)E^2}{2}$

La loi de comportement s'obtient par dérivation sous la forme :

Contraintes : $\Sigma = \frac{\partial \mathcal{W}}{\partial E} = A(D)E$

Taux de restitution d'énergie : $G = -\frac{\partial \mathcal{W}}{\partial D} = -\frac{A'(D)E^2}{2} > 0$

Le comportement dissipatif macroscopique s'écrit, quant à lui, comme suit :

Seuil : $f_d(G) = |G| - k_0 \leq 0$

Evolution (loi de normalité) : $\dot{D} = \dot{\lambda}\frac{\partial f}{\partial G}$ avec $\dot{\lambda} \geq 0$

Puissance dissipée : $\mathfrak{D} = G\dot{D}$

Remarque 23 : A étant une fonction décroissante de la variable d'endommagement macroscopique D, G est par conséquent toujours positif, ce qui implique un endommagement toujours croissant.

Remarque 24 : A étant une fonction convexe de la variable d'endommagement macroscopique D, la densité d'énergie libre l'est, elle aussi.

Remarque 25 : Le présent travail, moyennant la forme de A donnée à la Remarque 22, fournit ainsi une justification par l'approche micromécanique de la forme de la rigidité effective postulée dans modèle GLRC_DM (Markovic 2006).

Opérateur de localisation

Les opérateurs de localisation permettant d'exprimer les variables microscopiques en fonction des variables macroscopiques sont donnés par :

$$G_2^B = G \qquad d = D \qquad \varepsilon_1^B = \varepsilon_1^A = \frac{\Sigma}{k_1^A + k_1^B} \qquad \varepsilon_2^B = \varepsilon_2^A = \frac{\Sigma}{k_2^A + k_2^B\zeta(D)}$$

Paramètres du modèle

Les paramètres du modèle ainsi construit sont les rigidités des ressorts représentant le béton et l'acier respectivement k_i^B et k_i^A, avec $i = 1,2$, le paramètre de seuil d'endommagement k_0, ainsi que les paramètres permettant de définir la fonction d'endommagement microscopique ζ.

k_0 peut être déterminé comme suit : $k_0 = G|_{D=0} = g_2^B\big|_{d=0}$

D'où, considérant une fonction d'endommagement microscopique ζ de la forme donnée à la Remarque 22, k_0 peut être définie à partir d'une contrainte de primo-endommagement donnée σ_d et des paramètres de la fonction d'endommagement α et γ :

$$k_0 = \frac{k_2^B(1-\gamma){\sigma_d}^2}{2\alpha(k_2^A + k_2^B)^2} \qquad \text{(II-10)}$$

Réponse caractéristique

Est présentée ci-dessous la réponse, en contraintes-déformations, du modèle à endommagement seul soumis à une sollicitation alternée traction-compression-traction non symétrique, obtenue grâce à une intégration du modèle dans Matlab® avec les paramètres suivants :

Tableau II-2 : Paramètres retenus pour le modèle à endommagement seul

$k_1^A(\mathrm{MN.m^{-1}})$	$k_2^A(\mathrm{MN.m^{-1}})$	$k_1^B(\mathrm{MN.m^{-1}})$	$k_2^B(\mathrm{MN.m^{-1}})$	$\alpha(-)$	$\gamma(-)$	$\sigma_d(\mathrm{MN.m^{-1}})$
10000	10000	40000	40000	1	-0,05	2

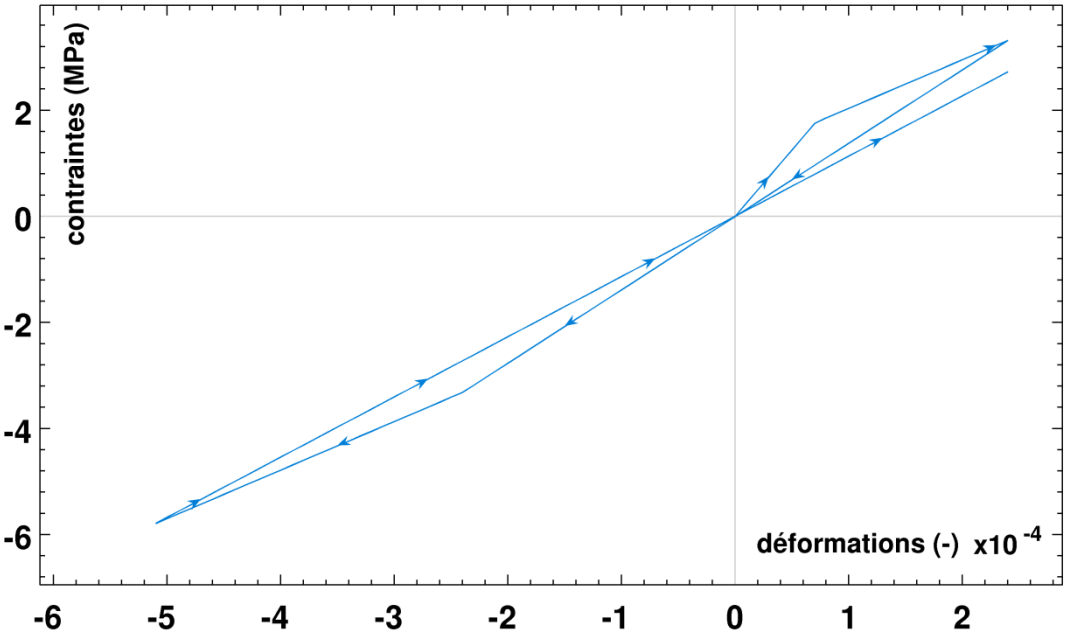


Figure II-5 : Courbe réponse contraintes-déformations obtenue par le modèle à endommagement seul au cours d'un cycle de traction-compression-traction

La courbe réponse met en évidence la capacité du modèle à traduire la perte de raideur observée expérimentalement. La réponse contraintes-déformations est bilinéaire et revient à contrainte nulle – déformation nulle à la fin de la décharge. Le modèle proposé ne semble donc pas apte à représenter les déformations résiduelles après décharge.

Remarque 26 : Bien que le paramètre d'endommagement microscopique γ ait été choisi négatif, une réponse macroscopique à pente post-élastique positive est observée. En effet, à l'échelle macroscopique, le paramètre d'endommagement correspondant est rendu positif par la présence d'aciers élastiques, non endommagés. Le signe de ce paramètre détermine le signe de la pente post-élastique (voir §I.3.ii).

II.1.iii. Conclusions

Deux modèles rhéologiques à glissement seul puis à endommagement seul sont proposés pour représenter le comportement des poutres en béton armé sous sollicitations cycliques :

Le modèle à glissement seul permet de traduire l'apparition de déformations résiduelles mais ne permet pas de représenter la perte de raideur observée expérimentalement lors de la décharge.

Le modèle à endommagement seul conduit à une réponse contraintes-déformations bilinéaire et induit une perte de raideur par le biais de l'endommagement mais ne permet pas de représenter les déformations résiduelles observées expérimentalement.

Le modèle rhéologique à endommagement seul permet de justifier la forme du modèle à endommagement de plaques en béton armé GLRC_DM.

II.2. MECANISMES DISSIPATIFS COUPLES

Chacun des mécanismes dissipatifs étudié dans le paragraphe précédent semble apte à représenter une partie des comportements macroscopiques du béton armé observés expérimentalement. Deux possibilités de couplage sont donc explorées dans ce paragraphe : un couplage par modification directe de l'énergie libre obtenue lors de l'étude du modèle rhéologique à endommagement seul et un couplage par fusion des deux modèles rhéologiques présentés précédemment.

II.2.i. Modification directe de l'énergie libre

Nous allons nous intéresser, dans ce paragraphe, à l'étude d'un modèle d'endommagement un peu plus élaboré que le modèle à endommagement seul, intégrant une déformation résiduelle induite par l'endommagement. Ce modèle est construit en suivant l'approche proposée par C. La Borderie (La Borderie 1991).

Remarque 27 : Ce modèle n'est, ici, pas justifié par une approche rhéologique micromécanique.

Cadre thermodynamique

Introduisons un terme linéaire supplémentaire en E dans l'expression de l'énergie libre macroscopique du modèle à endommagement seul décri au paragraphe II.1.ii à la manière de C. La Borderie :

Densité d'énergie libre : $$\mathcal{W}(E,D) = \frac{A(D)E^2}{2} + B(D)E$$

En suivant le cadre des Matériaux Standard Généralisés, la loi de comportement s'obtient par dérivation sous la forme :

Contraintes : $$\Sigma = \frac{\partial \mathcal{W}}{\partial E} = A(D)E + B(D)$$

Taux de restitution d'énergie : $$G = -\frac{\partial \mathcal{W}}{\partial D} = -\frac{A'(D)E^2}{2} - B'(D)E$$

Le comportement dissipatif macroscopique s'écrit, quant à lui, comme suit :

Seuil : $$f_d(G) = |G| - k_0 \leq 0$$

Evolution (loi de normalité) : $$\dot{D} = \dot{\lambda}\frac{\partial f}{\partial G} \text{ avec } \dot{\lambda} \geq 0$$

Puissance dissipée : $$\mathfrak{D} = G\dot{D}$$

Remarque 28 : La rigidité effective A est ici la même que dans le modèle à endommagement seul, elle est donc une fonction positive, décroissante et convexe de l'endommagement macroscopique D.

Remarque 29 : Pour des raisons évidentes de conditions initiales, il est nécessaire d'imposer $B(0) = 0$.

Remarque 30 : Il est possible de vérifier que l'équation de seuil possède bien deux racines en E*, une négative et une positive ; nous sommes alors bien dans le cas d'un seuil négatif (critère non atteint) au début du chargement.*

Réponse caractéristique

La réponse en contraintes-déformations du modèle à glissement induit soumis à une sollicitation alternée traction-compression-traction est présentée à la Figure II-6. Cette courbe est obtenue grâce à une intégration du modèle dans Matlab® avec les paramètres présentés au Tableau II-3 et avec $B(d) = K\left(1 - \zeta(D)\right)$ (ainsi $B(0) = 0$) et $K = 1{,}26\ \mathrm{N.m^{-1}}$. ζ étant la fonction d'endommagement microscopique.

Tableau II-3 : Paramètres retenus pour le modèle à glissement induit par l'endommagement

$k_1^A(\mathrm{MN.m^{-1}})$	$k_2^A(\mathrm{MN.m^{-1}})$	$k_1^B(\mathrm{MN.m^{-1}})$	$k_2^B(\mathrm{MN.m^{-1}})$	$\alpha(-)$	$\gamma(-)$	$\sigma_d(\mathrm{MN.m^{-1}})$
10000	10000	40000	40000	1	0,03	2

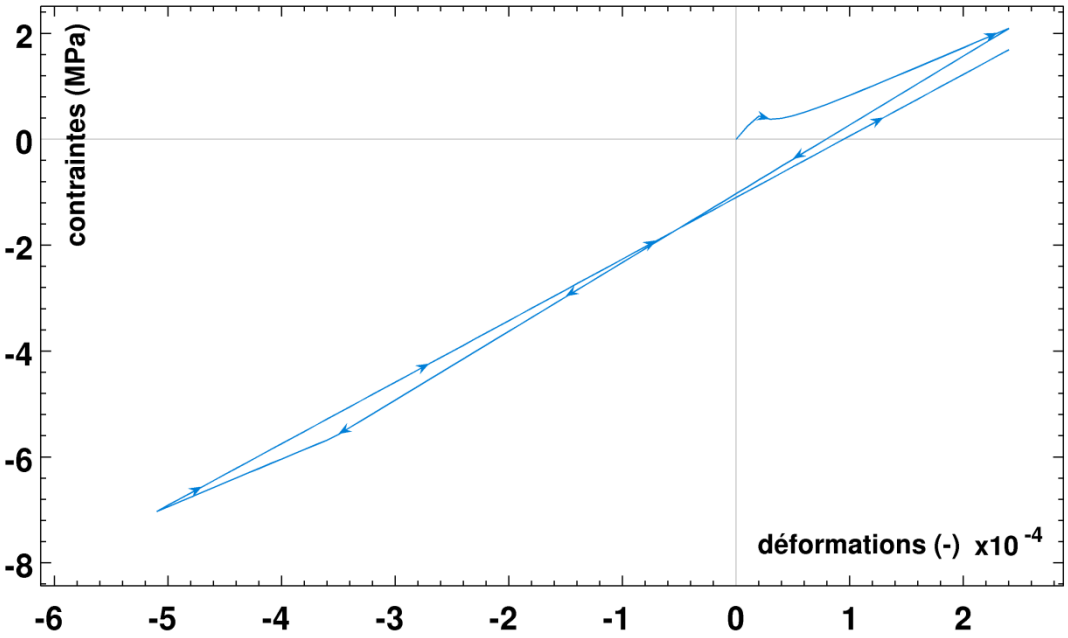


Figure II-6 : Courbe réponse contraintes-déformations obtenue par le modèle à glissement induit au cours d'un cycle de traction-compression-traction

Nous observons que ce modèle crée une déformation résiduelle positive qui grandit avec l'endommagement. Cette déformation résiduelle est positive même pour une sollicitation de compression.

Ce comportement n'est donc pas représentatif de celui que l'on souhaite modéliser et qui est observé sur la Figure II-1 pour un chargement cyclique d'une poutre en béton armé.

II.2.ii. Couplage des modèles rhéologiques

Lors de l'étude des modèles à endommagement et glissement seuls, nous avons pu remarquer que chacun de ces modèles permet de représenter une partie des observations expérimentales. Nous allons donc proposer, dans cette partie, un modèle rhéologique né de

du couplage entre ces deux modèles, permettant de modéliser à la fois la dégradation du béton mais également la décohésion acier-béton au niveau de la barre d'acier.

Construction du modèle rhéologique

Ce modèle est construit à l'aide d'un modèle rhéologique couplant l'endommagement d'un ressort de béton et un patin glissant à l'interface acier béton, la liaison restant parfaite aux bords du modèle.

Définissons, sur ce système, les variables macroscopiques contraintes et déformations, respectivement Σ et E, et les variables macroscopiques contrainte et déformation de glissement, respectivement Σ^η et E^η.

Remarque 31 : Le modèle ne comportant qu'une déformation résiduelle de glissement microscopique ε^η, les variables macroscopiques contrainte et déformation de glissement sont identiques à leurs homologues microscopiques. De même, comme expliqué au paragraphe §II.1.ii, la variable macroscopique d'endommagement D est identique à son homologue microscopique.

La Figure II-7 schématise le modèle rhéologique obtenu en fusionnant les deux modèles d'endommagement seul et de glissement précédents :

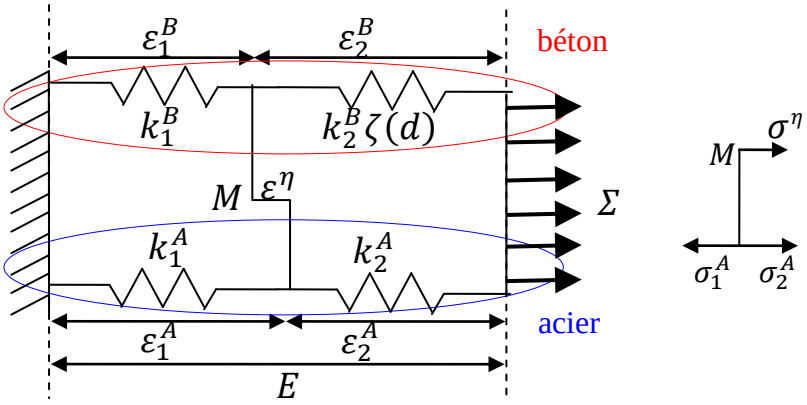


Figure II-7 : Modèle rhéologique couplant endommagement et glissement

Les équations locales d'équilibre, de cinématique et de comportement associées à ce modèle rhéologique sont les suivantes, avec ζ' la dérivée de ζ par rapport à d :

Cinématique et liaisons :

$E = \varepsilon_1^A + \varepsilon_2^A = \varepsilon_1^B + \varepsilon_2^B$

$\varepsilon_1^A = \varepsilon_1^B + \varepsilon^\eta \; ; \varepsilon_2^A = \varepsilon_2^B - \varepsilon^\eta$

Comportement :

$\sigma_1^A = k_1^A \varepsilon_1^A \; ; \sigma_2^A = k_2^A \varepsilon_2^A$

$\sigma_1^B = k_1^B \varepsilon_1^B \; ; \sigma_2^B = k_2^B \zeta(d) \varepsilon_2^B$

Taux de restitution :

$$g_2^B = -\frac{k_2^B \zeta'(d) \varepsilon_2^{B\,2}}{2}$$

Equilibre :

$\Sigma = \sigma_1^A + \sigma_1^B = \sigma_2^A + \sigma_2^B$

$\sigma^\eta = \sigma_1^B - \sigma_2^B = \sigma_2^A - \sigma_1^A$

Seuil :

$f_\eta(\sigma^\eta) = |\sigma^\eta| - \sigma_{crit} \leq 0$

$$f_d(g_2^B) = |g_2^B| - k_0 = \left| -\frac{k_2^B \zeta'(d) \varepsilon_2^{B\,2}}{2} \right| - k_0 \leq 0$$

Evolution : lois de normalité

$$\dot{d} = \dot{\lambda}_d \frac{\partial f_d}{\partial g_2^B} \quad \text{et} \quad \dot{\varepsilon}^\eta = \dot{\lambda}_\eta \frac{\partial f_\eta}{\partial \sigma^\eta} \text{ avec } \dot{\lambda}_\eta, \dot{\lambda}_d \geq 0$$

Remarque 32 : Lors de l'étude du modèle à glissement seul (§II.1.i), avait été obtenue une condition sur les valeurs des raideurs relatives des ressorts ($k_2^A k_1^B \geq k_1^A k_2^B$) à respecter pour obtenir un coefficient de glissement B positif. Nous allons nous attacher ici à respecter cette condition en affectant la fonction d'endommagement ζ à la raideur du ressort de béton k_2^B. Ainsi, dans le cas limite où est pris $k_2^A k_1^B = k_1^A k_2^B$, lors de l'évolution de l'endommagement la raideur k_2^B se verra affectée du multiplicateur ζ, fonction décroissante convexe de l'endommagement, et la condition sera bien toujours respectée.

Le choix a été fait de construire un modèle à deux seuils constants, chaque variable interne peut ainsi évoluer à sa propre vitesse définie par les multiplicateurs de Kuhn-Tücker $\dot{\lambda}_d$ pour l'endommagement et $\dot{\lambda}_\eta$ pour le glissement.

Loi de comportement et seuils macroscopiques

La loi de comportement macroscopique dépendant des variables macroscopiques $\Sigma, \Sigma^\eta, E, E^\eta$ *et* D s'obtient par résolution des équations de la cinématique, du comportement et de l'équilibre listées ci-dessus, sachant que $D = d$, $\Sigma^\eta = \sigma^\eta$ et $E^\eta = \varepsilon^\eta$:

$$\Sigma = \frac{(k_1^A + k_1^B)(k_2^A + k_2^B \zeta(D))}{k_1^A + k_2^A + k_1^B + k_2^B \zeta(D)} E - \frac{k_2^A k_1^B - k_1^A k_2^B \zeta(D)}{k_1^A + k_2^A + k_1^B + k_2^B \zeta(D)} E^\eta \qquad \text{(II-11)}$$

$$\Sigma^\eta = \frac{k_2^A k_1^B - k_1^A k_2^B \zeta(D)}{k_1^A + k_2^A + k_1^B + k_2^B \zeta(D)} E - \frac{(k_1^A + k_2^A)(k_1^B + k_2^B \zeta(D))}{k_1^A + k_2^A + k_1^B + k_2^B \zeta(D)} E^\eta \qquad \text{(II-12)}$$

Dans la mesure où les parties 1 et 2, distinguées pour les besoins de construction du modèle, correspondent en fait à un même milieu acier ou béton, les raideurs k_1^A et k_2^A peuvent être prises égales de même que k_1^B et k_2^B. La loi de comportement macroscopique se simplifie alors pour donner :

$$\Sigma = \frac{(k^A + k^B)\left(k^A + k^B \zeta(D)\right)}{2k^A + k^B\left(1 + \zeta(D)\right)} E - \frac{k^A k^B\left(1 - \zeta(D)\right)}{2k^A + k^B\left(1 + \zeta(D)\right)} E^\eta \qquad \text{(II-13)}$$

$$\Sigma^\eta = \frac{k^A k^B\left(1 - \zeta(D)\right)}{2k^A + k^B\left(1 + \zeta(D)\right)} E - \frac{2k^A k^B\left(1 + \zeta(D)\right)}{2k^A + k^B\left(1 + \zeta(D)\right)} E^\eta \qquad \text{(II-14)}$$

Remarque 33 : Le terme en E^η dans l'expression de Σ est donc nul à $D = 0$, (puisqu'alors $\zeta = 1$).

La loi de comportement macroscopique s'écrit donc sous une forme analogue à celle du modèle à glissement seul, les coefficients effectifs dépendant cette fois de la variable d'endommagement macroscopique D :

$$\Sigma = A(D)E - B(D)E^\eta \qquad \text{(II-15)}$$

$$\Sigma^\eta = B(D)E - C(D)E^\eta \qquad \text{(II-16)}$$

Remarque 34 : La rigidité effective A est la même que celle du modèle à endommagement seul. Elle peut donc être mise sous la forme proposée dans la Remarque 22. De la même manière peuvent être écrits : $B(D) = \frac{\Gamma_B D}{B_B + D}$ et $C(D) = C_C \frac{B_C + \Gamma_C D}{B_C + D}$. Remarquons alors que $B_C = B_A$. Voir l'ANNEXE 2 pour les expressions analytiques de A, B et C en fonction de D.

Nous cherchons maintenant à exprimer les deux seuils d'évolution des variables internes en fonction des variables macroscopiques $(\Sigma, \Sigma^\eta), (E, E^\eta)\ et\ D$.

Sachant que $\Sigma^\eta = \sigma^\eta$, le seuil de glissement microscopique est déjà exprimé uniquement en fonction des variables macroscopiques sus citées. Nous ne travaillerons donc que sur le seuil d'endommagement par la suite.

La fonction d'endommagement ζ étant donnée sous la forme d'une fonction positive décroissante convexe de l'endommagement d, sa dérivée satisfait $\zeta' \leq 0$ et l'expression sous la valeur absolue pour le seuil d'endommagement est positive.

Exprimons maintenant ε_2^B uniquement en fonction des variables primales macroscopiques E, E^η et D. Pour ce faire partons de $\Sigma^\eta = \sigma_1^B - \sigma_2^B$. A l'aide des équations de cinématique et des lois de comportement microscopique il vient :

$$\Sigma^\eta = k_1^B E - [k_1^B + k_2^B \zeta(D)]\varepsilon_2^B$$

$$\Leftrightarrow \varepsilon_2^B = \frac{k_1^B E - \Sigma^\eta}{k_1^B + k_2^B \zeta(D)} \qquad \text{(II-17)}$$

Intéressons-nous désormais au calcul de $k_1^B E - \Sigma^\eta$. En utilisant l'équation (II-16) il vient :

$$k_1^B E - \Sigma^\eta = \frac{k_1^B + k_2^B \zeta(D)}{k_1^A + k_2^A + k_1^B + k_2^B \zeta(D)} \left((k_1^A + k_1^B)\, E + (k_1^A + k_2^A) E^\eta \right)$$

Il est alors possible d'exprimer ε_2^B uniquement en fonction des variables E, E^η et D, soit :

$$\varepsilon_2^B = \frac{(k_1^A + k_1^B)E + \left(k_1^A + k_2^A\right)E^\eta}{k_1^A + k_1^A + k_1^B + k_2^B \zeta(D)}$$

Posons $h(G) = \frac{-k_2^B \zeta(D)}{2} \left[\frac{(k_1^A + k_1^B)E + (k_1^A + k_2^A)E^\eta}{k_1^A + k_2^A + k_1^B + k_2^B \zeta(D)} \right]^2$

Le seuil d'endommagement macroscopique s'écrit alors :

$$|h(G)| - k_0 \leq 0 \qquad \text{(II-18)}$$

Nous obtenons ainsi, par une approche micromécanique, un modèle couplé présentant deux seuils qui peut être rapproché du modèle proposé par (Luccioni et al 1996). La résolution des deux équations de seuil se fera alors simultanément et l'évolution via deux multiplicateurs de Kühn-Tücker distincts : l'un pour le glissement et l'autre pour l'endommagement.

Il est également possible de créer un modèle couplé à un seul seuil (Lemaitre & Chaboche 1994). Pour ce faire, nous pouvons combiner les deux seuils précédents, tous deux de même dimension physique, avec un paramètre de contrôle α, ce qui conduit à un seuil unique :

$$\alpha|\Sigma^\eta| + (1-\alpha)|f(G)| - (\alpha\sigma_{crit} + (1-\alpha)k_0) \leq 0 \qquad \text{(II-19)}$$

Cette dernière possibilité induisant un paramètre de plus à déterminer, elle n'a pas été retenue par la suite.

Cadre thermodynamique

De même que pour les modèles à mécanismes dissipatifs seuls, le modèle couplé peut être décrit dans le cadre des Matériaux Standard Généralisés.

Introduisons donc la densité d'énergie libre suivante :

Densité d'énergie libre : $$\mathcal{W}(E, E^\eta, D) = \frac{A(D)E^2}{2} - B(D)EE^\eta + \frac{C(D)E^{\eta 2}}{2}$$

La loi de comportement s'obtient par dérivation sous la forme :

Contraintes : $$\Sigma = \frac{\partial \mathcal{W}}{\partial E} = A(D)E - B(D)E^\eta$$

Contraintes de glissement : $$\Sigma^\eta = -\frac{\partial \mathcal{W}}{\partial E^\eta} = B(D)E - C(D)E^\eta$$

Remarque 35 : Il est intéressant de noter que la densité d'énergie libre Φ *peut s'écrire sous la forme suivante :* $\mathcal{W}(E, E^\eta, D) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} E \\ E^\eta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A(D) & -B(D) \\ -B(D) & C(D) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} E \\ E^\eta \end{pmatrix}$.

Remarque 36 : Notons $P(D) = C(D) - \frac{B^2(D)}{A(D)}$. *P est alors directement lié au déterminant de la matrice ci-dessus et donc à la convexité de* $\mathcal{W}$.

Remarque 37 : Il est possible d'exprimer P *de la même manière que* A, B *et* C *le sont dans la Remarque 34. On a alors* $B_P = B_B$. *Voir l'ANNEXE 2 pour l'expression analytique de* P *en fonction de* D. *De même que pour le modèle à glissement seul,* P *est directement lié à la convexité de la densité d'énergie libre.*

Un petit travail préliminaire est nécessaire avant de pouvoir écrire dans sa globalité le modèle dans le cadre Standard Généralisé. En effet, il serait plus aisé d'écrire le seuil d'endommagement (II-18) de manière explicite en fonction de G. Calculons donc G :

$$G = -\frac{\partial \mathcal{W}}{\partial D}$$

$$\Leftrightarrow \quad G = -\frac{A'(D)E^2}{2} + B'(D)EE^\eta - C'(d)E^{\eta 2}$$

$$\Leftrightarrow \quad G = \frac{-k_2^B \zeta'(D)}{2}\left[\frac{(k_1^A + k_1^B)E + \left(k_1^A + k_2^A\right)E^\eta}{k_1^A + k_2^A + k_1^B + k_2^B \zeta(D)}\right]^2$$

Il vient donc $h(G) = G$.

Nous pouvons alors continuer l'écriture du modèle dans le cadre des Matériaux Standard Généralisés :

Taux de restitution d'énergie : $$G = -\frac{\partial \mathcal{W}}{\partial D}$$

Seuils : $$f_\eta(\Sigma^\eta) = |\Sigma^\eta| - \sigma_{crit} \leq 0 \text{ et } f_d(\mathrm{G}) = |G| - k_0 \leq 0$$

Evolutions (lois de normalité) : $$\dot{E}^\eta = \dot{\lambda}_\eta \frac{\partial f_\eta}{\partial \Sigma^\eta} \text{ et } \dot{D} = \dot{\lambda}_d \frac{\partial f_d}{\partial G} \text{ avec } \dot{\lambda}_\eta, \dot{\lambda}_d \geq 0$$

Puissance dissipée : $\mathfrak{D} = \Sigma^{\eta}\dot{E}^{\eta} + G\dot{D}$

Pour compléter l'étude de cette formulation, il convient d'étudier les propriétés de la densité d'énergie. En effet, l'énergie libre doit nécessairement être une fonction convexe de ses variables E et E^{η} de façon à assurer l'existence et l'unicité d'une solution pour la résolution du problème d'évolution des variables internes, et, en conséquence, permet d'assurer la robustesse et l fiabilité des algorithmes de résolution. Il faudrait également s'assurer des propriétés du problème en vitesse.

Propriétés de la densité d'énergie macroscopique

Attachons-nous tout d'abord à prouver la positivité la matrice Hessienne via l'utilisation du critère de Sylvester (Horn & Johnson 1990; Sylvester 1851) selon lequel une matrice est positive si et seulement si ses mineurs principaux sont tous positifs. Or, on a :

$\frac{\partial^2 \mathcal{W}}{\partial E^2} = A(D)$: assurée par construction de $A, \forall D \in \mathbb{R}^+$

$\begin{vmatrix} \frac{\partial^2 \mathcal{W}}{\partial E^2} & \frac{\partial^2 \mathcal{W}}{\partial E \partial E^{\eta}} \\ \frac{\partial^2 \mathcal{W}}{\partial E^{\eta} \partial E} & \frac{\partial^2 \mathcal{W}}{\partial E^{\eta 2}} \end{vmatrix} = A(D)P(D)$: assurée par construction de A et P , $\forall D \in \mathbb{R}^+$

Pour plus de détails, voir les expressions de A, B, C et P en fonction de D présentées en ANNEXE 2.

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial^2 \mathcal{W}}{\partial E^2} & \frac{\partial^2 \mathcal{W}}{\partial E \partial E^{\eta}} & \frac{\partial^2 \mathcal{W}}{\partial E \partial D} \\ \frac{\partial^2 \mathcal{W}}{\partial E^{\eta} \partial E} & \frac{\partial^2 \mathcal{W}}{\partial E^{\eta 2}} & \frac{\partial^2 \mathcal{W}}{\partial E^{\eta} \partial D} \\ \frac{\partial^2 \mathcal{W}}{\partial D \partial E} & \frac{\partial^2 \mathcal{W}}{\partial D \partial E^{\eta}} & \frac{\partial^2 \mathcal{W}}{\partial D^2} \end{vmatrix} = a(D)E^2 + b(D)EE^{\eta} + c(D)E^{\eta 2} = T_{(E^{\eta},D)}(E)$$

La positivité de ce dernier déterminant dépend du signe de $a(D)$ ainsi que du signe du discriminant de $T_{(E^{\eta},D)}(E)$. De sorte que si l'on établit la positivité du coefficient a $\forall D \in \mathbb{R}^+$ et la négativité du discriminant de $T_{(E^{\eta},D)}$ $\forall (E, E^{\eta}) \in \mathbb{R}^2$ et $\forall D \in \mathbb{R}^+$, alors le déterminant de la matrice Hessienne est bien positif et n'admet qu'une ou pas de racine en E donc reste positif $\forall E \in \mathbb{R}$. En conséquence, l'énergie libre proposée est donc bien convexe $\forall (E, E^{\eta}) \in \mathbb{R}^2$ et $\forall D \in \mathbb{R}^+$.

La démonstration de la négativité du discriminant de $T_{(E^{\eta},D)}(E)$ revient en fait à montrer la positivité de a $\forall D \in \mathbb{R}^+$.La démonstration de la positivité de a est présentée en ANNEXE 2 et mène donc aux relations suivantes :

$$a(D) \geq 0 \Leftrightarrow \left\{ k_1^A k_2^B = k_2^A k_1^B \; ; \; \frac{1-\sqrt{5}}{2} \leq \frac{k_1^B}{k_2^B} \leq \frac{1+\sqrt{5}}{2} \; ; \; \frac{k_2^A \left(k_1^{B\,2} - k_2^{B\,2} - k_1^B k_2^B \right)}{(k_1^B + k_2^B) k_2^{B\,2} + k_1^A k_1^{B\,2}} \leq \gamma \leq 1 \right\} \qquad \text{(II-20)}$$

Remarque 38 : L'équation(II-20) *fait apparaître le nombre d'or (!)*

Dans la mesure où les parties 1 et 2, distinguées pour les besoins de construction du modèle, correspondent en fait à un même milieu acier ou béton, les raideurs k_1^A et k_2^A peuvent être

prises égales de même que k_1^B et k_2^B. Les deux premières conditions des relations (II-20) sont alors automatiquement assurées et la troisième se réduit alors à :

$$\frac{-k^A}{2k^B + k^A} \leq \gamma \leq 1$$

Remarque 39 : Les conditions énoncées dans l'équation (II-20) permettent à γ de prendre des valeurs négatives. Il est alors possible d'avoir un modèle adoucissant au niveau local et seulement affaiblissant au niveau macroscopique. Ceci explique la Remarque 26.

Opérateurs de localisation

Les opérateurs de localisation, associés à ce modèle couplé, reliant les variables microscopiques aux variables macroscopiques s'expriment comme suit :

$$\sigma^\eta = \Sigma^\eta \qquad \varepsilon^\eta = E^\eta \qquad \varepsilon_1^B = \frac{\Sigma^\eta + k_2^B \zeta(D) E}{k_1^B + k_2^B \zeta(D)} = \varepsilon_1^A - E^\eta \qquad \varepsilon_2^B = \frac{k_1^B E - \Sigma^\eta}{k_1^B + k_2^B \zeta(D)} = \varepsilon_2^A + E^\eta$$

$$G_2^B = G \qquad d = D \qquad \varepsilon_1^B = \varepsilon_1^A = \frac{\Sigma}{k_1^A + k_1^B} \qquad \varepsilon_2^B = \varepsilon_2^A = \frac{\Sigma}{k_2^A + k_2^B \zeta(D)}$$

Paramètres du modèle couplé

Dans la mesure où les parties 1 et 2, distinguées pour les besoins de construction du modèle, correspondent en fait à un même milieu acier ou béton, il sera décidé, par la suite de prendre $k_1^A = k_2^A = k^A$ et $k_1^B = k_2^B = k^B$.

Ce modèle couplé endommagement-glissement est donc paramétré par 6 constantes matériaux :

- k^A : module élastique de l'acier relativement à la proportion d'acier dans la section de béton armé
- k^B : module élastique du béton relativement à la proportion de béton dans la section de béton armé
- α : paramètre d'endommagement pour le béton (se rapporte à la vitesse de la décroissance de la fonction d'endommagement du béton d'après Chapitre I, §I.3.ii).
- γ : paramètre d'endommagement pour le béton (se rapporte à la pente de la réponse contrainte-déformation d'après Chapitre I, §I.3.ii) vérifiant (II-20).
- σ_d : contrainte de primo-endommagement du béton
- σ_{crit} : contrainte de décohésion de la liaison acier-béton

Remarquons que, dans ce modèle, les constantes de seuils macroscopiques pour l'endommagement et le glissement sont les mêmes que les constantes de seuils locales.

σ_{crit}, la contrainte de primo-glissement locale, est donc la contrainte à partir de laquelle apparaît la décohésion acier-béton à l'interface. Cette contrainte est déterminée à l'aide de la littérature ou d'éventuels essais à l'arrachement effectués avec les matériaux composant le béton armé considéré.

Quant à la constante de seuil k_0 elle peut être calculée microscopiquement à la manière expliquée au §II.1.ii, considérant une fonction d'endommagement microscopique ζ de la

forme donnée à la Remarque 22. Il vient donc l'expression suivante de k_0, en fonction d'une contrainte de primo-endommagement donnée σ_d et des paramètres de la fonction d'endommagement α et γ :

$$k_0 = \frac{(1-\gamma)\sigma_d^2}{2\alpha k^B} \qquad \text{(II-21)}$$

avec σ_d comme seul paramètre à identifier, correspondant à la contrainte de primo-endommagement du béton seul. Il est possible d'exprimer k_0 en fonction de ε_d également pour travailler en déformations.

Réponse caractéristique

Est présentée, sur la Figure II-3, la réponse caractéristique, en contraintes-déformations, du modèle couplé glissement-endommagement, obtenue pour le jeu de paramètres résumés au Tableau II-4. Ces paramètres sont représentatifs d'une section de béton armé comprenant un béton de module de Young de 42 100 MPa représentant 95% de la section et un acier de module d'Young 200 000 MPa représentant 5% de la section.

Tableau II-4 : Paramètres retenus pour le modèle couplé glissement-endommagement

$k^A(\mathrm{MN.m^{-1}})$	$k^B(\mathrm{MN.m^{-1}})$	$\alpha(-)$	$\gamma(-)$	$\sigma_d(\mathrm{MN.m^{-1}})$	$\sigma_{crit}(\mathrm{MN.m^{-1}})$
10000	40000	1	-0.05	1	1

Pour des raisons de démonstration et de présentation, un paramètre γ négatif a été choisi, respectant la condition (II-20).

Nous observons, sur cette courbe réponse, qu'une déformation « résiduelle » à contrainte nulle est créée ainsi qu'un affaiblissement de la raideur macroscopique lors de la décharge. Le modèle rhéologique couplant les deux mécanismes dissipatifs d'endommagement et de glissement regroupe donc bien les propriétés des deux modèles rhéologiques à un seul mécanisme.

De plus, un comportement post élastique non linéaire à trois pentes est observé. En effet, dès lors que les raideurs des milieux 1 et 2 sont prises égales, le terme de couplage $B(D)$ dans la densité d'énergie libre est nul tant que l'endommagement est nul. Ainsi le premier seuil à être franchi est nécessairement le seuil d'endommagement, puis, à mesure que l'endommagement croît, le terme de couplage $B(D)$ croît jusqu'à ce que le seuil de glissement soit franchi à son tour. Les deux mécanismes dissipatifs sont alors activés simultanément. La courbe réponse de la Figure II-8 montre donc trois pentes en charge :

- une pente élastique,
- une pente correspondant à l'évolution de l'endommagement
- et, pour finir, une pente correspondant à l'évolution simultanée de l'endommagement et du glissement.

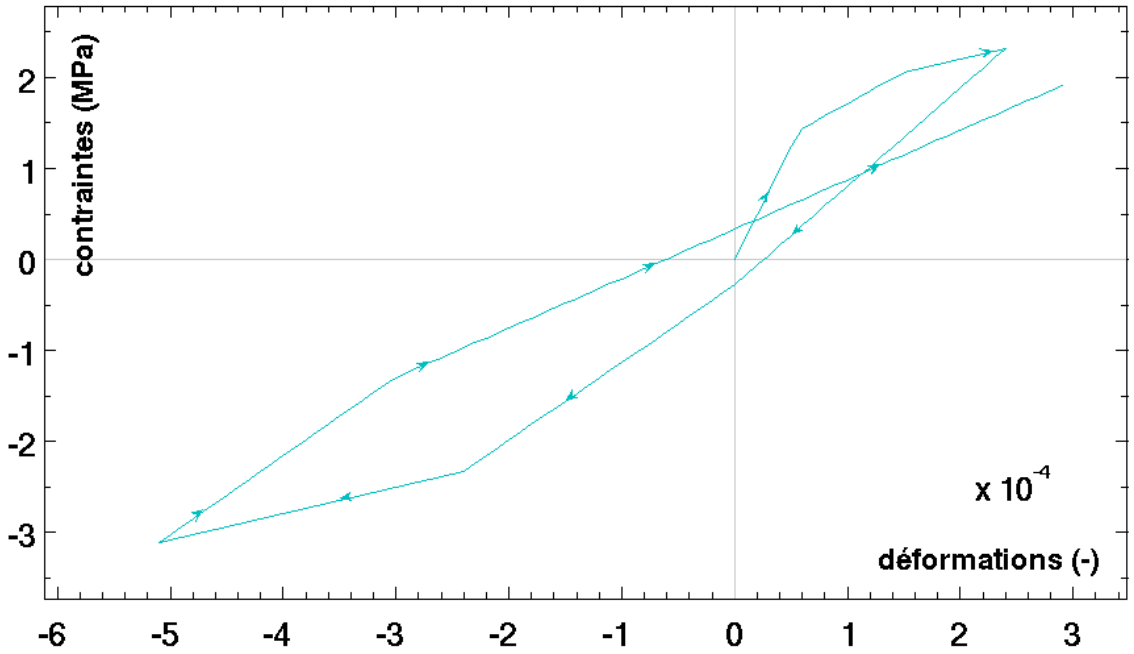


Figure II-8 : Courbe réponse contraintes-déformations obtenue par le modèle couplé glissement-endommagement au cours d'un cycle de traction-compression-traction

L'apport du couplage glissement-endommagement est mis en évidence sur la courbe suivante. Y sont confrontées les courbes des Figure II-8, Figure II-5 et Figure II-3.

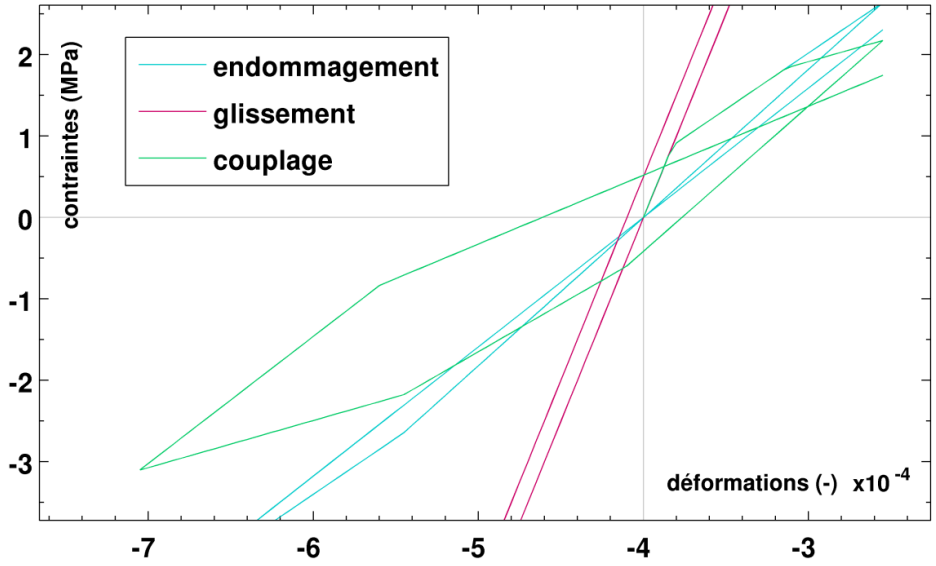


Figure II-9 : Comparaison des réponses des modèles à glissement seul (bleu clair), endommagement seul (bleu foncé) et couplage glissement-endommagement (rouge)

Il apparaît, sur la Figure II-9, que le modèle couplé permet une diminution des contraintes maximales atteintes ainsi qu'une aire des boucles (et par conséquent une dissipation d'énergie) plus importante que chacun des deux autres modèles.

Etude paramétrique

L'étude de ce modèle couplé est complétée par une analyse de sensibilité aux paramètres du modèle. Les courbes ci-dessous sont donc issues d'une simulation d'essai de traction puis compression avec le modèle couplé endommagement-glissement dont les paramètres ont été

modifiés un à un. Partant des paramètres de référence résumés dans le Tableau II-4, chaque paramètre étudié a été multiplié par les facteurs 0.5 , 1 , 1.5 et 2. Les réponses associées à ces quatre facteurs sont repérées sur les courbes par des couleurs différentes : les quatre facteurs suivants :facteur 0.5 (courbes bleues), facteur 1 (courbes vertes), facteur 1.5 (jaune) et , facteur 2 (rouge).

L'ensemble des valeurs des paramètres de référence a été choisi en accord avec la physique du problème étudié et de manière à mettre bien en avant l'influence de chaque paramètre. *Remarque 40 : L'étude ci-après n'a pas été réalisée avec des nombres sans dimension car 5 des 6 paramètres étudiés ont la même dimension, ce qui restreint l'intérêt de l'adimensionnalisation*

Influence du ratio des raideurs d'acier et de béton

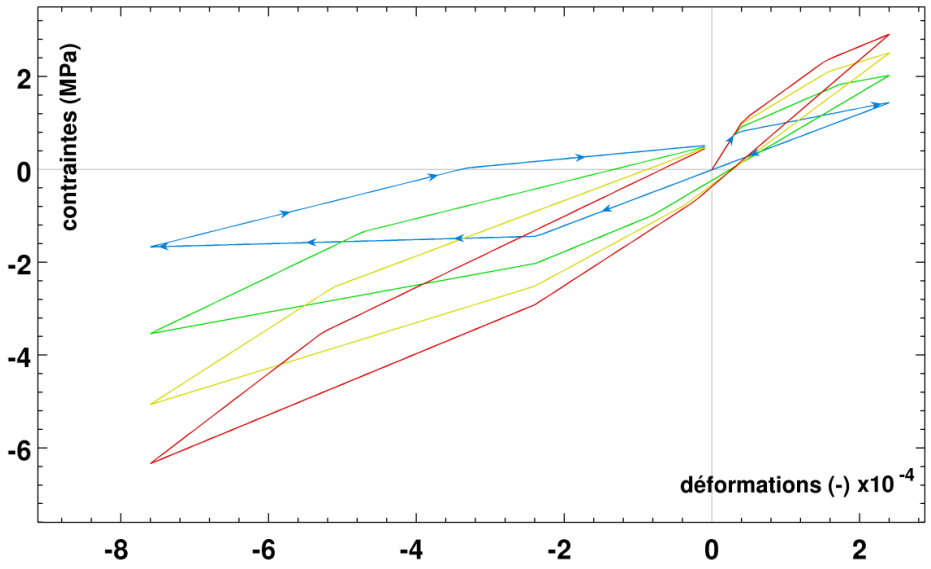


Figure II-10 : Etude paramétrique de la réponse suivant le ratio des raideurs d'acier et de béton k^A/k^B

L'étude paramétrique du ratio des raideurs d'acier et de béton k^A/k^B souligne, comme attendu, que plus la proportion d'acier est importante, plus la pente post-élastique de la réponse contrainte-déformation est importante ; l'hypothèse de reprise de raideur des aciers lors de la dégradation du béton est ainsi confortée. De plus remarquons que la contrainte maximale atteinte lors de la traction augmente avec le ratio étudié alors que la déformation résiduelle maximale atteinte dans ce cycle semble être peu influencée par ce ratio.

Quant au cycle de compression, au contraire de la traction, le ratio k^A/k^B semble influer beaucoup sur la déformation résiduelle atteinte. Cependant, la déformation résiduelle observée à contrainte nulle n'est pas la déformation résiduelle maximale atteinte lors du cycle. En effet, la décharge du cycle de compression se fait selon deux pentes : la première pente correspondant à la décharge élastique selon le module endommagé de raideur, la seconde pente débutant au franchissement du seuil de glissement en décharge. Il y a donc refermeture de la déformation résiduelle lors de la décharge. Une analyse de l'évolution de la déformation résiduelle de glissement présentée en Figure II-11 permet alors de conclure que la déformation résiduelle de glissement augmente avec le ratio k^A/k^B.

Finalement, remarquons que l'augmentation du ratio induit une augmentation des niveaux de premier endommagement et de premier glissement. En effet, ces deux seuils sont à paramètres constants mais sont interdépendants des variables internes d'endommagement et

de glissement. Ainsi, une grande proportion d'acier induit un glissement important et le phénomène dissipatif représenté sera donc plus fort dans les éléments fortement armés.

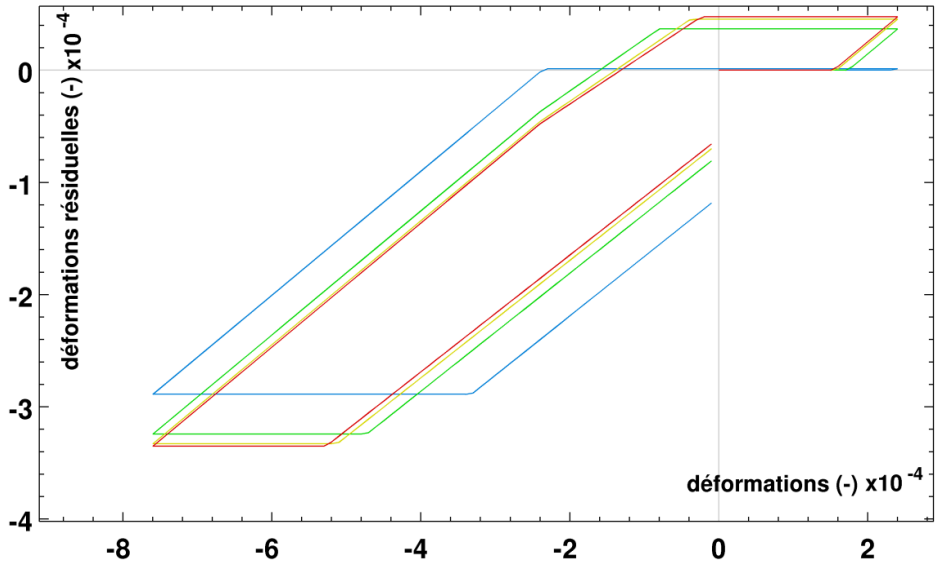


Figure II-11 : Evolution de la déformation résiduelle de glissement en fonction de la déformation. Influence du ratio des raideurs d'acier et de béton k^A/k^B

Influence du paramètre d'endommagement γ

L'étude paramétrique a été effectuée avec un γ de référence égal à 0.25 permettant de vérifier, pour tous les facteurs multiplicatifs, la condition (II-20) assurant la convexité de l'énergie libre. Cette étude souligne que la pente post-élastique augmente avec l'augmentation de ce paramètre. En effet, ce paramètre correspond au rapport entre la pente élastique et la pente de la réponse à endommagement infini. Ainsi, au niveau microscopique, plus ce paramètre est élevé, plus la pente de la réponse microscopique du béton endommagé sera proche de la pente élastique. C'est donc en toute logique que cette propriété se retrouve au niveau macroscopique.

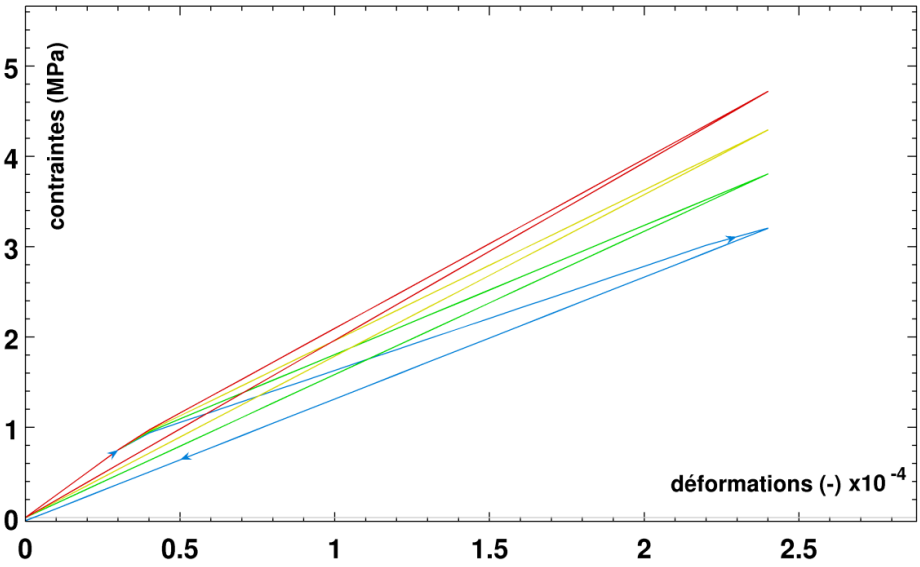


Figure II-12 : Etude paramétrique de la réponse suivant le paramètre d'endommagement γ

Influence des seuils microscopiques de glissement et d'endommagement

Les deux études paramétriques présentées en Figure II-13 et Figure II-14 montrent, comme attendu, que les deux paramètres σ_{crit} et σ_d ont une influence sur les valeurs de seuil macroscopiques respectivement de glissement et d'endommagement. Remarquons également que la baisse du paramètre σ_d implique une valeur d'endommagement macroscopique D plus forte à déformation donnée, ce qui influe sur la valeur du seuil de glissement macroscopique observée puisque ce seuil est fonction de Σ_η qui lui-même dépend de l'endommagement D.

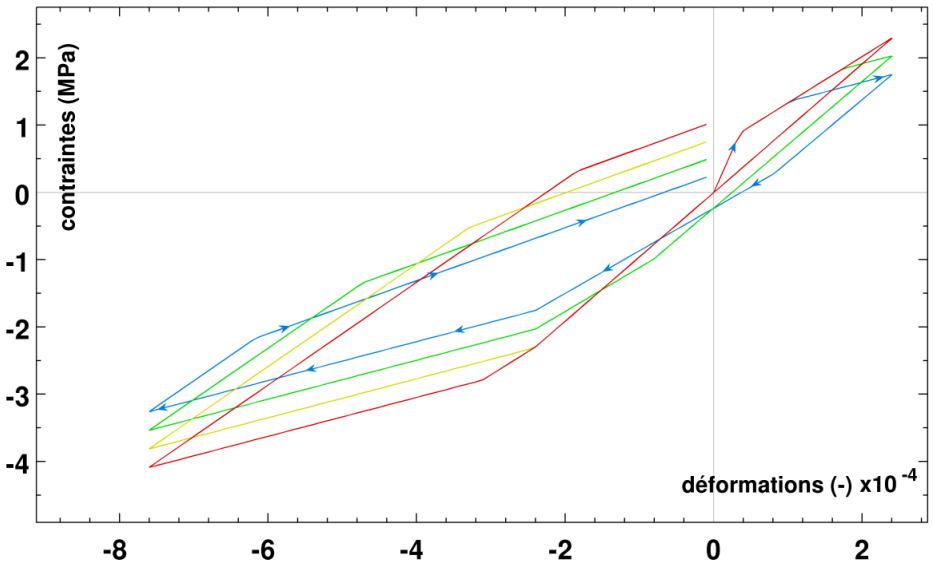


Figure II-13 : Etude paramétrique de la réponse suivant la contrainte de décohésion acier-béton σ_{crit}

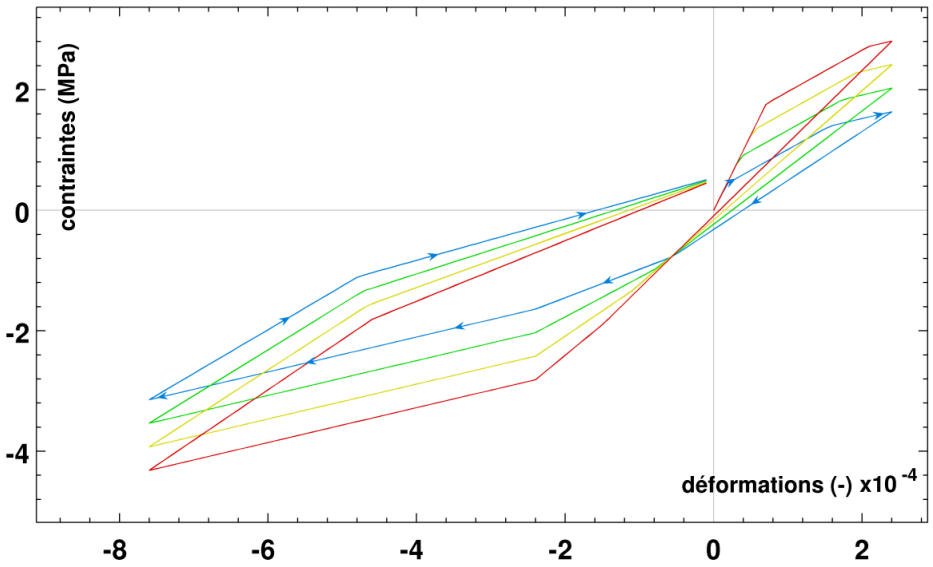


Figure II-14 : Etude paramétrique de la réponse suivant la contrainte de primo-endommagement du béton σ_d

II.2.iii. Conclusions

Deux modèles couplant endommagement et glissement sont proposés pour représenter le comportement des poutres en béton armé sous sollicitations cycliques.

- Un modèle construit à l'aide de l'ajout d'un terme linéaire en E dans l'expression de l'énergie libre du modèle à endommagement seul permet l'apparition de déformations résiduelles induites par l'endommagement. Ces déformations résiduelles sont cependant toujours de même signe quelque soit le signe de la déformation macroscopique imposée.

- Un modèle couplé endommagement-glissement à deux seuils, se voulant représentatif du comportement cyclique du béton armé unidimensionnel, a été construit dans le cadre des Matériaux Standard Généralisés, à partir du couplage de deux modèles rhéologique simples. Ce modèle est à même de représenter la perte de raideur et les déformations résiduelles observées expérimentalement. Il comprend un nombre limité de paramètres pouvant tous être obtenus à partir de mesures expérimentales basiques.

II.3. INTRODUCTION DE LA DISSYMETRIE TRACTION-COMPRESSION

Il est possible d'introduire, dans les modèles présentés précédemment, une dissymétrie entre le comportement en traction et en compression de manière à représenter au mieux le comportement effectif du béton armé observé expérimentalement. Du fait de la dissymétrie traction-compression (TC) du comportement du béton, une dissymétrie similaire dans le comportement du matériau composite béton armé se retrouve naturellement, induisant notamment une reprise de raideur lors du changement de signe de la sollicitation.

II.3.i. Dans le modèle à glissement induit

Afin de pallier à la limitation observée du modèle, nous proposons d'introduire une différentiation de comportement en traction et en compression dans le modèle couplé à glissement induit, de manière à regagner de la raideur lors du passage en compression du matériau et à également changer le signe de la déformation résiduelle selon le cas.

L'énergie libre est alors postulée sous la forme :

$$\mathcal{W} = \frac{1}{2}\left(A_+(D)\langle E\rangle_+{}^2 + A_-(D)\langle E\rangle_-{}^2\right) + B_+(D)\langle E\rangle_+ + B_-(D)\langle E\rangle_-$$

où les indices $+$ se réfèrent aux paramètres de traction, les indices $-$ aux paramètres de compression et les crochets $\langle . \rangle_-$ et $\langle . \rangle_+$ représentent les opérateurs usuels partie négative et partie positive.

La contrainte macroscopique s'exprimera ainsi :

$$\Sigma = A_T(D)\langle E\rangle_+ + A_C(D)\langle E\rangle_- + B_T(D)H(E) + B_C(D)H(-E)$$

où H désigne la fonction de Heaviside.

La condition initiale de contrainte nulle devant être conservée, il vient : $B_T(0) = 0 = B_C(0)$. D'autre part, pour obtenir le comportement souhaité, il est nécessaire d'imposer : $B_T(D) \leq 0$ et $B_C(D) \geq 0$, ce qui pose, de façon évidente, un problème de discontinuité des contraintes lors du changement de signe de E, à moins de raccorder les deux fonctions à zéro ce qui revient à annuler la déformation résiduelle introduite par cette formulation.

Le modèle ainsi construit ne permet donc pas de représenter de façon réaliste un comportement couplant endommagement et dissipation.

Remarque 41 : C. La Borderie (La Borderie 1991) a résolu cette difficulté posée par la discontinuité des contraintes par l'introduction d'une fonction dite de « refermeture de fissure » qui lie linéairement le comportement en traction à celui en compression. Cette solution ne permet cependant pas la conservation du caractère Standard Généralisé du modèle.

II.3.ii. Dans le modèle à endommagement seul

La courbe réponse du modèle à endommagement seul proposée en Figure II-5 ne présente pas de reprise de raideur lors du passage en compression du matériau. Pour pallier à ce défaut, et en accord avec l'analyse micromécanique du comportement du béton armé, nous introduisons une dissymétrie entre le comportement en traction et en compression à travers la fonction d'endommagement microscopique du béton ζ, représentative de l'altération des caractéristiques du béton seul. Pour ce faire, nous proposons d'écrire la fonction d'endommagement microscopique ζ comme suit, à l'instar de ce qui a pu être fait dans le modèle GLRC_DM (ANNEXE 1) :

$$\zeta(d) = \frac{\alpha_+ + \gamma_+ d}{\alpha_+ + d} H(\varepsilon_2^B) + \frac{\alpha_- + \gamma_- d}{\alpha_- + d} H(-\varepsilon_2^B) \qquad \text{(II-22)}$$

où les indices $+$ et $-$ sont associés respectivement à la traction et la compression, et où H désigne la fonction de Heaviside.

Le choix a été fait de ne considérer qu'une seule variable d'endommagement pour décrire l'endommagement en traction et celui en compression. Ce faisant, une évolution de l'endommagement lors d'une sollicitation de traction induit son évolution lors d'une compression. En effet, considérant le fait que la variable d'endommagement d représente la création de zones fissurées au sein du béton, l'évolution de l'endommagement dans une direction implique que le matériau s'est détérioré en créant des fissures microscopiques qui vont altérer son comportement lors d'une sollicitation dans la direction opposée. Ce comportement se retrouve d'ailleurs expérimentalement, où l'on constate que la raideur « élastique » de compression après un test de traction est inférieure à la raideur élastique de compression sur un matériau sain. Ce faisant, la prise en compte de l'effet unilatéral passe par la définition de deux jeux de paramètres (α, γ) dans la fonction d'endommagement ζ suivant la direction de sollicitation considérée.

Remarque 42 : Il est possible de se contenter d'un seul paramètre α et de fixer, par exemple, α_T à la valeur 1. Dans la suite nous prendrons $\alpha_T = 1$.

Grâce à l'opérateur de localisation, exprimons ζ de la manière suivante :

$$\zeta(d) = \frac{\alpha_+ + \gamma_+ d}{\alpha_+ + d} H\big(S(E)\big) + \frac{\alpha_- + \gamma_- d}{\alpha_- + d} H\big(S(E)\big) \qquad \text{(II-23)}$$

où $S(E) = (k_1^A + k_1^B)E$

Les paramètres α et γ n'intervenant que dans l'expression des fonctions microscopiques d'endommagement, l'introduction de la dissymétrie TC dans la fonction d'endommagement

microscopique ζ induit une dissymétrie dans les fonctions d'endommagement macroscopiques. Pour ce modèle à endommagement seul, cette dissymétrie est centrée en $E = 0$.

Remarque 43 : L'introduction de la dissymétrie traction-compression dans les fonctions d'endommagement via une discontinuité de type Heaviside remet en question les démonstrations de convexités qui ont pu être faites auparavant. En effet, la densité d'énergie libre $\mathcal{W}$ n'est alors plus quadratique et la convexité globale sur tout l'espace des déformations et des glissements reste à démontrer. En se basant sur les travaux de (Curnier et al 1994), cette démonstration, présentée en ANNEXE 2, repose sur la continuité de $\mathcal{W}$ et de Σ lors du passage de l'interface de discontinuité.

D'autre part, l'introduction de cette dissymétrie permet la création de deux seuils d'endommagements distincts en traction σ_{d+} en en compression σ_{d-} pour un même paramètre de seuil k_0. En effet, rappelons l'expression de k_0 présentée en (II-21) :

$$k_0 = \frac{(1-\gamma)\sigma_d^2}{2\alpha k^B}$$

Cette expression fait intervenir les paramètres d'endommagement α et γ qui sont désormais différents selon si la déformation macroscopique est une déformation de traction ou de compression. Ainsi si $\alpha_+ = 1$, k_0 peut être calculé en fonction de γ_+ et de σ_{d+}. k_0 étant alors fixé, et connaissant la valeur de γ_-, il vient une relation entre α_- et σ_{d-}. Le paramètre le plus parlant physiquement étant le seuil de primo-endommagement en compression σ_{d-}, c'est celui-ci qui sera privilégié par la suite.

De cette manière sont donc introduits deux seuils bien distincts d'endommagement du béton en traction et en compression permettant de représenter le comportement fragile en traction et quasi-ductile en compression du béton.

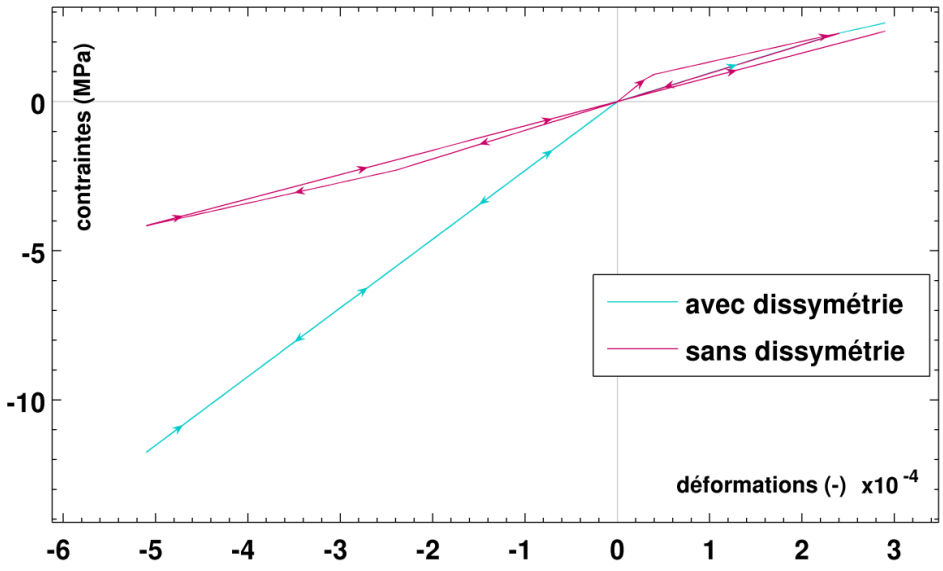


Figure II-15 : Réponses comparées du modèle avec endommagement seul intégrant la dissymétrie TC (courbe bleue) et sans dissymétrie TC (courbe rouge)

La réponse obtenue par ce modèle modifié est présentée à la Figure II-15 et comparée à la réponse fournie par le modèle initial. Les valeurs des paramètres adoptées précédemment pour l'analyse du modèle avec endommagement seul sont conservées pour le comportement

en traction. Les valeurs retenues pour les paramètres supplémentaires nécessaires à la description du comportement en compression sont les suivantes : $\gamma_- = 0.8,\ \sigma_{d-} = 2N.m^{-1}$.

Observons alors que l'introduction de la dissymétrie TC dans la fonction d'endommagement microscopique permet une reprise de raideur macroscopique au passage en compression, en accord avec ce qui peut être observé expérimentalement (cf. Figure II-1).

II.3.iii. Dans le modèle couplé

De la même que pour le modèle à endommagement seul, la courbe réponse du modèle couplé endommagement glissement de la Figure II-8 ne présente pas de reprise de raideur lors du passage en compression du matériau. La même modification de la fonction d'endommagement ζ est alors proposée.

Grâce à l'opérateur de localisation, différent de celui du modèle à endommagement seul, la fonction d'endommagement ζ s'exprime alors :

$$\zeta(d) = \frac{\alpha_+ + \gamma_+ d}{\alpha_+ + d} H\big(S(E, E^\eta)\big) + \frac{\alpha_- + \gamma_- d}{\alpha_- + d} H\big(S(E, E^\eta)\big) \qquad \text{(II-24)}$$

où $S(E, E^\eta) = (k_1^A + k_1^B)E + \big(k_1^A + k_2^A\big)E^\eta$

La dissymétrie TC n'est alors pas centrée en $E = 0$ mais est translatée proportionnellement à E^η, du fait de l'expression de ε_2^B.

Les observations sur les seuils de primo-endommagement restent, quant à elles, inchangées.

La réponse obtenue par le modèle couplé endommagement-glissement dans lequel la dissymétrie TC a été introduite est présentée à la Figure II-16 et comparée à la réponse fournie par le modèle sans dissymétrie. Les valeurs des paramètres utilisées pour le calcul de ces réponses sont les mêmes que ceux utilisés pour le calcul des réponses du modèle à endommagement seul.

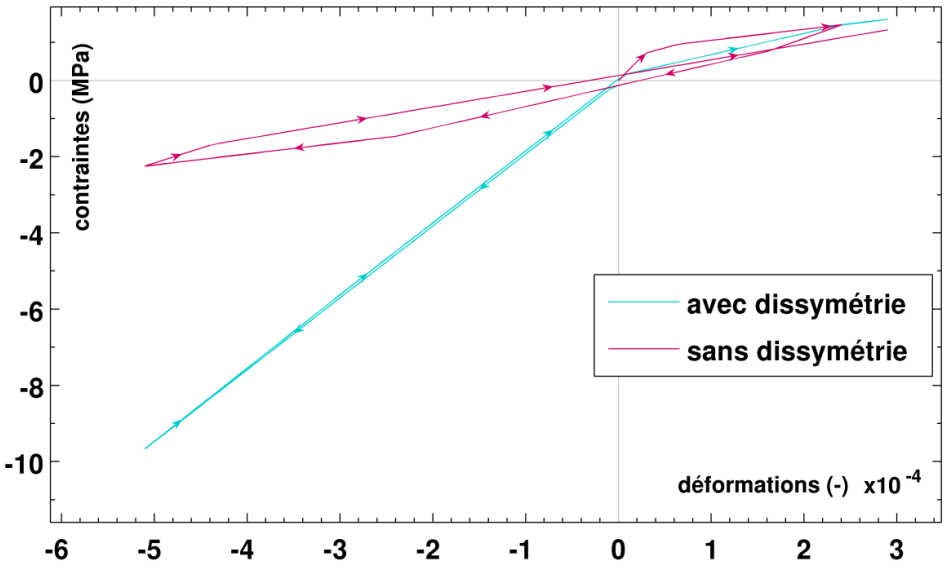


Figure II-16 : Réponses comparées du modèle couplé intégrant la dissymétrie TC (courbe bleue) et sans dissymétrie TC (courbe rouge)

La Figure II-16 permet de mettre en évidence la reprise de raideur globale lors du passage en compression, de même que sur la Figure II-15 et en accord avec ce qui peut être observé expérimentalement (c.f. Figure II-1). Remarquons également sur cette figure que les seuils d'endommagement et de plasticité sont repoussés à des valeurs plus élevées avec le modèle comportant de la dissymétrie. Le modèle traduit donc bien le faible endommagement du béton en compression et le moindre glissement relatif acier-béton, étant entendu que ce glissement est principalement causé par l'endommagement du béton, localement, près des barres d'acier. Pour finir, lors du passage en compression, la reprise de raideur ne se fait pas à déformation nulle $E = 0$ (correspondant à la barre verticale grise sur la Figure II-16) mais bien un peu plus tard, confirmant le fait que la dissymétrie est centrée sur une déformation macroscopique E non nulle.

II.4. CONFRONTATION A DES RESULTATS EXPERIMENTAUX

Cette dernière partie propose de confronter le modèle couplé endommagement-glissement intégrant la dissymétrie de comportement en traction-compression aux résultats expérimentaux présentés à la Figure II-1.

La courbe expérimentale de la Figure II-1 est issue de la thèse de Benmansour (Benmansour 1997) et présente la réponse d'un poteau fortement armé à une sollicitation alternée de traction-compression.

D'après les données accessibles dans cette thèse, le poteau, de section 150x150 mm² et de longueur 0.7 m, est constitué d'un béton de module de Young annoncé 28500 MPa. Les aciers longitudinaux, 4HA14, sont quant à eux de module d'Young moyen 195000 MPa, pour un pourcentage d'acier de 2.74%. Il va s'avérer, pour reproduire la raideur élastique du poteau, que le béton a plutôt un module de Young de 37000 MPa, plus proche de la valeur prédite par les codes de dimensionnement (BAEL80 1980). Les valeurs des paramètres d'élasticité qui seront exploitées par le modèle couplé endommagement-glissement sont rassemblées dans le Tableau II-5(a).

La résistance à la traction par fendage du béton donnée par Benmansour est de 2.94 MPa, ce qui devrait être égal au paramètre seuil d'endommagement en traction σ_{d+}, et sa résistance en compression à 50 jours de 25 MPa ce qui devrait être à peu près le double du paramètre seuil d'endommagement en compression σ_{d-}. En effet, le paramètre σ_d est un paramètre de primo-endommagement et non un paramètre de rupture, il ne correspond donc pas à la résistance en compression mais débute en compression bien plus tôt car le béton est un matériau initialement endommagé. Lors de la comparaison avec les résultats expérimentaux, il va s'avérer que la résistance à la traction observée lors des essais est bien plus faible que celle du test par fendage (cette observation est également faite par Benmansour) et la valeur de σ_{d+} de 1.1 MPa est donc retenue.

Considérant que notre béton est complètement dégradé en traction une fois sa résistance à la traction atteinte, nous lui attribuons un paramètre d'endommagement microscopique en traction γ_+ faiblement négatif ; quant au paramètre d'endommagement microscopique en compression γ_-, il sera de l'ordre de 0.3. Ce paramètre, initialement plus élevé (de l'ordre de 0.8) dans nos premières simulations, s'est avéré devoir prendre une valeur bien plus faible pour représenter au mieux le comportement du poteau en béton armé en compression.

Pour finir, le paramètre σ_{crit} nous est donné par la littérature comme étant la résistance à la décohésion de la liaison acier béton, de l'ordre de 10 ou 15 MPa. Les valeurs choisies pour les paramètres dissipatifs du modèle couplé sont résumées dans le Tableau II-5 (b).

Tableau II-5 : (a) Paramètres d'élasticité du modèle couplé pour la confrontation à l'expérimental
(b) Paramètres dissipatifs du modèle couplé pour la confrontation à l'expérimental

(a)

$k^A(\mathrm{MN.m^{-1}})$	$k^B(\mathrm{MN.m^{-1}})$
3740	25190

(b)

$\alpha_+(-)$	$\gamma_+(-)$	$\gamma_-(-)$	$\sigma_{d+}(\mathrm{MN.m^{-1}})$	$\sigma_{d-}(\mathrm{MN.m^{-1}})$	$\sigma_{crit}(\mathrm{MN.m^{-1}})$
1	-0.02	0.3	1.1	12	15

Le modèle unidimensionnel couplé glissement-endommagement intégrant la dissymétrie de comportement en traction et en compression a été soumis à un programme de charge représentatif du chargement du poteau étudié expérimentalement. Ce chargement a été obtenu approximativement à partir de relevés de points sur la courbe donnée dans la thèse de Benmansour. La programmation numérique de notre modèle étant pour l'instant contrôlée en déformations uniquement, il était en effet impossible de reprendre tel quel le programme de charge en effort proposé par Benmansour. Le programme de charge en déformations retenu pour les simulations est présenté au Tableau II-6.

Tableau II-6 : Programme de charge en déformations retenu pour le modèle couplé

N° cycle	1	1	2	2	3	3	4	4	5	5	6
déformations ($\times 10^{-3}$)	-0,5	0,85	-0,75	1,15	-1,05	1,35	-1,75	2,1	-2	2,85	-2

La Figure II-17 ci-dessous présente la réponse comparée du modèle couplé (en trait plein bleu) et des résultats expérimentaux (en pointillés noirs).

La comparaison avec les résultats expérimentaux présentée en Figure II-17 apparaît satisfaisante tant qualitativement que quantitativement dans la représentation du comportement en traction. En effet, le modèle permet une bonne estimation de la force maximale ainsi que des déformations résiduelles atteintes en traction.

Cependant, la modélisation du comportement en compression reproduit moins bien le comportement expérimental en compression. Ce point peut s'expliquer par le fait que les sollicitations imposées expérimentalement au poteau dépassent le cadre dans lequel le modèle a été formulé en compression. Les déformations considérées sont en effet relativement élevées et par conséquent, le béton en compression se trouve beaucoup endommagé. Ces sollicitations sont trop fortes comparées à celles considérées pour notre modèle, dans lequel l'endommagement du béton en compression est supposé faible. D'autre part, la reproduction par la modélisation des boucles d'hystérésis n'est pas très satisfaisante. En effet, le phénomène microscopique à l'origine de ces boucles n'a pas été identifié ni modélisé. Une possibilité pour obtenir ces boucles serait d'intégrer une modélisation du frottement microscopique au niveau de la liaison acier-béton et non simplement du glissement.

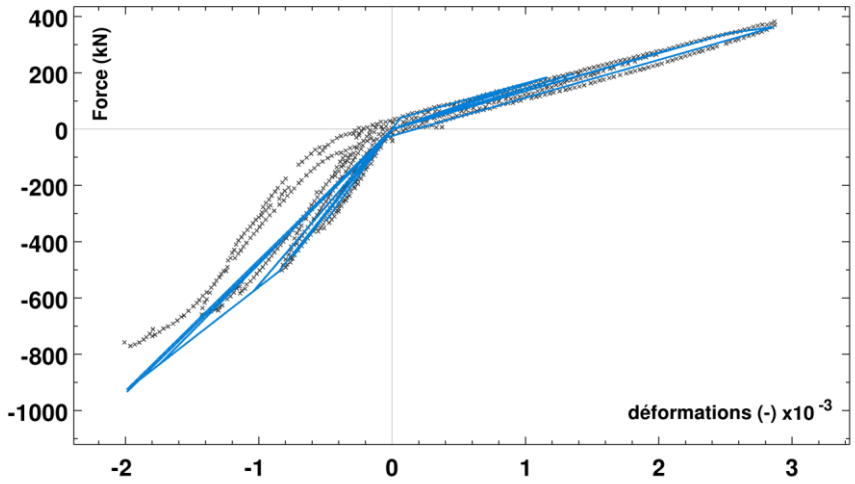


Figure II-17 : Réponse comparée modèle couplé (bleu) et données expérimentales (pointillés noirs) (Benmansour 1997)

II.5. CONCLUSIONS GENERALES

Suite à l'étude de plusieurs modèles rhéologiques, un modèle de comportement couplant endommagement et glissement a été construit par une démarche micromécanique.

Ce modèle traduit simplement le comportement d'une poutre en béton armé sous chargement cyclique susceptible de s'endommager et de présenter une décohésion entre acier et béton au niveau des barres de renfort. Le modèle permet d'intégrer l'effet de la périodicité de cette décohésion dû à la répartition des armatures transversales dans la structure.

L'introduction d'une dissymétrie traction-compression, au niveau microscopique, dans la fonction d'endommagement du béton permet un bon accord entre la réponse du modèle et le comportement expérimental d'un poteau en béton armé soumis à des cycles de traction-compression.

Ce modèle macroscopique s'inscrit dans le cadre thermodynamique des Matériaux Standard Généralisés et est défini par les équations suivantes :

Densité d'énergie libre : $\mathcal{W}(E, E^{\eta}, D) = \frac{A(D)E^2}{2} - B(D)EE^{\eta} + \frac{C(D)E^{\eta 2}}{2}$

Seuils : $f_{\eta}(\Sigma^{\eta}) = |\Sigma^{\eta}| - \sigma_{crit} \leq 0$ et $f_d(\mathrm{G}) = |G| - k_0 \leq 0$

Evolutions (lois de normalité) : $\dot{E}^{\eta} = \dot{\lambda}_{\eta} \frac{\partial f_{\eta}}{\partial \Sigma^{\eta}}$ et $\dot{D} = \dot{\lambda}_d \frac{\partial f_d}{\partial G}$ avec $\dot{\lambda}_{\eta}, \dot{\lambda}_d \geq 0$

Puissance dissipée : $\mathfrak{D} = \Sigma^{\eta}\dot{E}^{\eta} + G\dot{D}$

Les fonctions A, B et C dépendent analytiquement de l'endommagement D et des caractéristiques matériaux et géométriques de la microstructure. Elles intègrent une dissymétrie entre le comportement en traction et celui en compression avec un décalage en fonction du glissement, correspondant à un retard à la refermeture de fissure.

La fonction B est nulle tant que le modèle considéré ne contient pas une dissymétrie telle que $k_1^A k_2^B < k_2^A k_1^B$ donc entre autres tant que l'endommagement est nul.

CHAPITRE III.

MODELE DE COMPORTEMENT DE PLAQUE EN BETON ARME

« La science antique portait sur des concepts, tandis que la science moderne cherche des lois. »

Henri Bergson

Au Chapitre II, différents modèles de comportement de tirants en béton armé ont été construits en s'appuyant sur des modèles rhéologiques simples. Cette étude unidimensionnelle a permis de mettre en évidence les comportements globaux de certains types de couplages entre endommagement et glissement, via l'analyse de modèles rhéologiques. En s'inspirant de cette étude, nous allons mettre en place une démarche micromécanique par l'utilisation de la théorie de l'homogénéisation de plaques minces. Un modèle constitutif représentatif du comportement non linéaire des plaques en béton armé soumises à des sollicitations cycliques va être construit par homogénéisation après un certain nombre de simplifications nécessaires à la formulation du modèle, puis ses paramètres seront identifiés grâce à un processus d'homogénéisations numériques élastiques successives. Ce modèle de comportement non-linéaire pour les plaques en béton armé est appelé « Dissipative Homogenised Reinforced Concrete » (DHRC).

La dégradation de ce modèle de plaque et de l'identification de ses paramètres pour se positionner dans un cas unidimensionnel permet de retrouver le modèle présenté au Chapitre II.

Notations : Dans tout ce chapitre, les notations suivantes seront adoptées :

- *les tenseurs d'ordre 1 (vecteurs) seront soulignés, les tenseurs d'ordre 2 seront notés en gras et les tenseurs d'ordre 3 ou plus seront notés par une lettre doublée (ex :* $\mathbb{a}$*)*
- *un repère orthonormé cartésien est adopté de sorte que les composantes covariantes et contra variantes sont assimilées. les composantes des tenseurs seront données relativement à un indice se rapportant à la base utilisée : les indices grecs* $(\alpha, \beta, \gamma, etc\ldots)$ *désigneront les entiers de* 1 *à* 2 *et les indices latins* $(p, q, r, etc\ ...)$*, les entiers de* 1 *à* 3*. Ainsi, par exemple, la composante* 3 *d'un vecteur macroscopique représentera la projection de ce vecteur sur le vecteur de base* $\underline{X}_3$
- *le produit simplement contracté sera noté par un point* "." *et le produit doublement contracté par deux* ":"
- *les lettres majuscules feront référence à l'échelle macroscopique et les lettres minuscules à l'échelle microscopique*

III.1. RAPPELS SUR LE CADRE DE L'HOMOGENEISATION DE PLAQUES PERIODIQUES

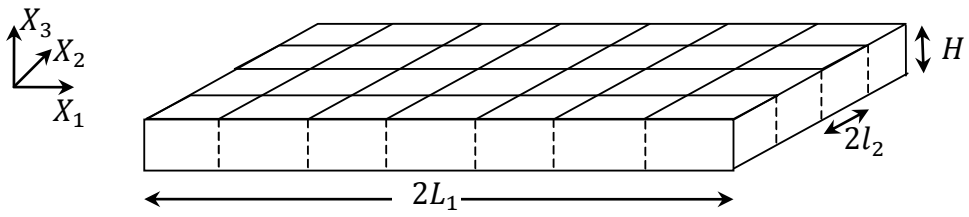


Figure III-1 : Définition des longueurs caractéristiques de la plaque

Soit la plaque présentée sur la Figure III-1 de longueur $2L_1$, de largeur $2L_2$ et d'épaisseur H, partagée en cellules de base de taille caractéristique $2l_1$x$2l_2$, ($l_1 \ll L_1, l_2 \ll L_2$).

Les dimensions L_1 et L_2 sont du même ordre de grandeur, en revanche, l'épaisseur de la plaque H est petite devant ces deux dimensions. La structure de cette plaque est finement hétérogène avec une répartition périodique de cette hétérogénéité dans le plan $X_1\,X_2$. Convenons de noter Ω la cellule de base de taille caractéristique $2l_1$ x 2 l_2 x H ; les vecteurs de base $\underline{e}_{X_3}$ et $\underline{e}_{x_3}$ sont alors assimilés (cf. Figure III-2). Les constituants de la plaque sont supposés élastiques, linéaires et collés entre eux.

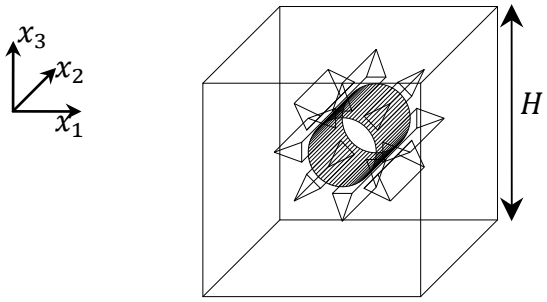


Figure III-2 : Cellule de base Ω

La plaque est supposée soumise à des efforts volumiques f, des efforts surfaciques F sur sa surface latérale, alors que les faces supérieures et inférieures (i.e. de normale $\underline{e}_{X_3}$) sont libres d'efforts.

Suivant la démarche de l'homogénéisation périodique de plaques, introduisons deux petits paramètres :

- $\xi = l_1/L_1$ désignant la taille relative des hétérogénéités,
- $\vartheta = H/L_1$ désignant l'épaisseur relative de la plaque étudiée.

Ces deux petits paramètres ξ et ϑ sont supposés tendre vers zéro de manière concomitante. Il s'agit du cas standard, où l'hétérogénéité matérielle est de taille analogue à l'épaisseur de la plaque.

En procédant à des développements asymptotiques du champ de déplacement vis-à-vis des ces deux paramètres, (Caillerie 1995; Caillerie & Nedelec 1984) a montré que sous ces hypothèses, le modèle homogénéisé de plaques suit une cinématique de type Love-Kirchhoff.

Plus précisément, le champ de déplacement macroscopique s'exprime au premier ordre sous la forme suivante :

$$\begin{cases} U_\alpha^0(X_1,X_2,X_3) = U_\alpha^0(X_1,X_2) - X_3 U_{3,\alpha}^0(X_1,X_2) : \text{déplacement plan} \\ U_3^0(X_1,X_2,X_3) = U_3^0(X_1,X_2) : \text{déplacement transversal (flèche)} \end{cases} \quad \text{(III-1)}$$

Les champs U_α^0, U_3^0 sont définis sur la surface moyenne ω.

Les déformations généralisées associées sont :

$$\begin{cases} E(\underline{U}^0)_{\alpha\beta} = \frac{1}{2}(U_{\alpha,\beta}^0 + U_{\beta,\alpha}^0) : \text{déformation membranaire} \\ K(\underline{U}^0)_{\alpha\beta} = U_{3,\alpha\beta}^0 : \text{variation de courbure} \end{cases} \quad \text{(III-2)}$$

Le problème global sur la plaque s'écrit donc :

$$\begin{array}{l} Trouver\ \underline{U}^0 \in \mathcal{V}_\omega^{LK}, tel\ que : \\ \int_\omega \begin{pmatrix} \underline{\mathrm{E}}(\underline{U}^0) \\ \underline{\mathrm{K}}(\underline{U}^0) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \mathbb{A}^{\mathrm{mm}} & \mathbb{A}^{\mathrm{mf}} \\ \mathbb{A}^{\mathrm{fm}} & \mathbb{A}^{\mathrm{ff}} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \underline{\mathrm{E}}(\underline{V}) \\ \underline{\mathrm{K}}(\underline{V}) \end{pmatrix} \mathrm{d}\omega = \mathcal{L}(\underline{V}),\ \ \forall \underline{V} \in \mathcal{V}_\omega^{LK0} \end{array} \quad \text{(III-3)}$$

$\mathcal{V}_\omega^{LK}$ désigne l'espace des champs cinématiquement admissibles pour le problème, définis sur la surface moyenne ω, et $\mathcal{V}_\omega^{LK0}$ l'espace vectoriel associé.

Le second membre $\mathcal{L}(\underline{V})$ contient des termes comme :

$\frac{1}{|\Omega|}\int_\omega \left(\int_\Omega \underline{f} d\Omega\right) dS.\underline{V}$, avec $\underline{f}$ forces volumiques dans la cellule Ω

$\frac{1}{|\Omega|}\int_\omega \left(\int_{\partial\Omega} \underline{F} d\Omega\right)$dS.$\underline{V}$, avec $\underline{F}$ forces surfaciques réparties sur les bords latéraux des cellules Ω…

Les tenseurs $\mathbb{A}^{mm}, \mathbb{A}^{mf}, \mathbb{A}^{fm}, \mathbb{A}^{ff}$ sont les coefficients de rigidité homogénéisés, respectivement en membrane, couplage et flexion, qui relient les grandeurs $\underline{E}$ et $\underline{K}$ aux efforts membranaires $\underline{N}$ et moments de flexion $\underline{M}$. Ces grandeurs macroscopiques déformations, contraintes et tenseurs de rigidité s'expriment sous forme de moyenne de grandeurs microscopiques.

Ainsi il a été établi (Sanchez-Palencia et al 1987) que les déplacements microscopiques dans la cellule Ω sont reliés au déplacement macroscopique $\underline{U}^0$, par :

$$\begin{array}{l} u_\delta(x_1,x_2,x_3) = U_\delta^0 - X_3 U_{3,\delta}^0 \quad + E_{\alpha\beta}(\underline{U}^0)\left[x_\beta \delta_{\alpha\delta} + \chi_\delta^{\alpha\beta}(x_1,x_2,x_3)\right] \\ \qquad\qquad\qquad\qquad + K_{\alpha\beta}(\underline{U}^0)\left[-x_3 x_\beta \delta_{\alpha\delta} + \xi_\delta^{\alpha\beta}(x_1,x_2,x_3)\right] \\ u_3(x_1,x_2,x_3) = U_3^0 + E_{\alpha\beta}(\underline{U}^0)\chi_3^{\alpha\beta}(x_1,x_2,x_3) + K_{\alpha\beta}(\underline{U}^0)\xi_3^{\alpha\beta}(x_1,x_2,x_3) \end{array} \quad \text{(III-4)}$$

Les termes $\chi^{\alpha\beta}$et $\xi^{\alpha\beta}$ sont appelés correcteurs de membrane et de flexion et sont solutions des problèmes élémentaires suivants :

$$\begin{cases} \text{Trouver } \underline{\chi}^{\alpha\beta} \in \tilde{\mathcal{V}}_\Omega, \text{ tel que :} \\ \int_\Omega \boldsymbol{\varepsilon}\left(\underline{\chi}^{\alpha\beta}\right).\mathbb{a}.\boldsymbol{\varepsilon}(\tilde{\boldsymbol{v}})d\Omega = -\int_\Omega \boldsymbol{E^{\alpha\beta}}.\mathbb{a}.\boldsymbol{\varepsilon}\left(\underline{\tilde{v}}\right)d\Omega, \forall \underline{\tilde{v}} \in \tilde{\mathcal{V}}_\Omega \\ \text{Trouver } \underline{\xi}^{\alpha\beta} \in \tilde{\mathcal{V}}_\Omega, \text{ tel que :} \\ \int_\Omega \boldsymbol{\varepsilon}\left(\underline{\xi}^{\alpha\beta}\right).\mathbb{a}.\boldsymbol{\varepsilon}\left(\underline{\tilde{v}}\right)d\Omega = \int_\Omega \underline{x}_3.\boldsymbol{E^{\alpha\beta}}.\mathbb{a}.\boldsymbol{\varepsilon}\left(\underline{\tilde{v}}\right)d\Omega, \forall \underline{\tilde{v}} \in \tilde{\mathcal{V}}_\Omega \end{cases} \quad \text{(III-5)}$$

où : $\mathbb{a}$ est le tenseur de rigidité tridimensionnel local,

$\boldsymbol{E^{\alpha\beta}}$ est : $\boldsymbol{E^{11}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \boldsymbol{E^{12}} = \boldsymbol{E^{21}} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \boldsymbol{E^{22}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

$\tilde{\mathcal{V}}_\Omega$ est l'espace des champs de déplacements cinématiquement admissibles sur la cellule Ω, de déformations moyennes $\langle\boldsymbol{\varepsilon}(\underline{\tilde{v}})\rangle_\Omega$ et $\langle\underline{x}_3.\boldsymbol{\varepsilon}(\underline{\tilde{v}})\rangle_\Omega$ nulles, périodiques dans les direction $\underline{e}_{x_1}$ et $\underline{e}_{x_2}$.

Il a été démontré que, dans ce cadre, les coefficients de la loi de comportement homogénéisée obtenus sont exacts (Duvaut-Sanchez) et obtenus de la manière suivante :

$$\begin{cases} \mathbb{A}^{mm}_{\alpha\beta\gamma\delta} = \langle\langle \mathbb{a}_{\alpha\beta\gamma\delta}\rangle\rangle_\Omega - \langle\langle \boldsymbol{\varepsilon}\left(\underline{\chi}^{\alpha\beta}\right).\mathbb{a}.\varepsilon\left(\underline{\chi}^{\gamma\delta}\right)\rangle\rangle_\Omega \\ \mathbb{A}^{mf}_{\alpha\beta\gamma\delta} = \langle\langle -x_3\mathbb{a}_{\alpha\beta\gamma\delta}\rangle\rangle_\Omega - \langle\langle \boldsymbol{\varepsilon}\left(\underline{\chi}^{\alpha\beta}\right).\mathbb{a}.\boldsymbol{\varepsilon}\left(\underline{\xi}^{\gamma\delta}\right)\rangle\rangle_\Omega = \mathbb{A}^{fm}_{\alpha\beta\gamma\delta} \\ \mathbb{A}^{ff}_{\alpha\beta\gamma\delta} = \langle\langle x_3^2\mathbb{a}_{\alpha\beta\gamma\delta}\rangle\rangle_\Omega - \langle\langle \boldsymbol{\varepsilon}\left(\underline{\xi}^{\alpha\beta}\right).\mathbb{a}.\boldsymbol{\varepsilon}\left(\underline{\xi}^{\gamma\delta}\right)\rangle\rangle_\Omega \end{cases} \quad \text{(III-6)}$$

avec $\langle\langle . \rangle\rangle_\Omega = \frac{H}{|\Omega|}\int_\Omega . d\Omega$

<u>Remarque 44</u> : La grande symétrie pour les termes de membrane et de flexion est avérée par symétrie des tenseurs contraintes et déformations. $\mathbb{A}^{mm}_{\alpha\beta\gamma\delta} = \mathbb{A}^{mm}_{\gamma\delta\alpha\beta}$*, de même pour* $\mathbb{A}^{ff}$*.*

<u>Remarque 45</u> : Les coefficients de couplage $\mathbb{A}^{mf}$ *sont nuls lorsque* Ω *présente une symétrie matérielle par rapport au plan* $x_3 = 0$*, ce qui est le cas pour la cellule de base présentée sur la Figure III-2.*

<u>Rappel :</u> La loi de comportement s'écrit, en fonction des efforts et déformations généralisés :

$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{N} \\ \boldsymbol{M} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbb{A}^{mm} & \mathbb{A}^{mf} \\ \mathbb{A}^{fm} & \mathbb{A}^{ff} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \boldsymbol{E} \\ \boldsymbol{K} \end{pmatrix}$$

Les déformations $\boldsymbol{E}$, variations de courbures $\boldsymbol{K}$, efforts membranaires $\boldsymbol{N}$ et de flexion $\boldsymbol{M}$ macroscopiques s'expriment, en fonction des champs microscopiques, comme suit :

$E_{\alpha\beta} = \frac{1}{H}\int_{-\frac{H}{2}}^{\frac{H}{2}} \varepsilon_{\alpha\beta}\left(\underline{u}^0\right) dx_3$, $K_{\alpha\beta} = \frac{12}{H^3}\int_{-\frac{H}{2}}^{\frac{H}{2}} -X_3\ \varepsilon_{\alpha\beta}\left(\underline{u}^0\right) dx_3$, $\boldsymbol{N} = \langle\boldsymbol{\sigma}\rangle_\Omega$, $\boldsymbol{M} = \langle -x_3\boldsymbol{\sigma}\rangle_\Omega$…

<u>Remarque 46</u> : Il est démontré (cf. ANNEXE 3*), par ailleurs, que, bien que l'état de contraintes microscopiques soit tridimensionnel, il vient :* $\langle\sigma_{33}\rangle_\Omega = \langle x_3\sigma_{33}\rangle_\Omega = 0$*.*

III.2. METHODOLOGIE

Compte tenu du contexte présenté en introduction, l'objectif principal du travail présenté ici est de construire un modèle constitutif pour représenter le comportement de voiles et dalles en béton armé sous sollicitations cycliques de type séisme, pour des applications industrielles. Par conséquent, il a été décidé de construire, grâce à la technique d'homogénéisation périodique, un modèle macroscopique représentatif du comportement global du matériau hétérogène considéré, comme s'il s'agissait d'un matériau homogène équivalent avec une loi de comportement spécifique. Ce choix a été fait, comme expliqué dans le Chapitre I, dans l'idée d'arriver à un compromis entre la précision des résultats obtenus et le temps mis pour effectuer les calculs sur des structures industrielles de type bâtiment complet.

III.2.i. Méthodologie appliquée

Il existe plusieurs moyens de mise en œuvre des méthodes micro-macro dont certains restent conséquemment coûteux en ressources numériques, en particulier les méthodes numériques multi-échelles basées sur des techniques de type « éléments finis à deux niveaux » (Feyel 1999; Nicot & Darve 2007) pour lesquels, à chaque point d'intégration de la structure macroscopique est associé un volume élémentaire représentatif microscopique sur lequel les calculs d'homogénéisation sont pratiqués à chaque itération de l'algorithme de résolution non linéaire macroscopique. Dans le souci de conserver un modèle efficace numériquement, et en ayant conscience de l'adéquation nécessaire entre la précision relative des données disponibles sur le matériau et la modélisation de la loi de comportement, la méthodologie expliquée précédemment et toutes ses variantes ont été écartées et le choix s'est porté sur la **construction a priori d'un modèle macroscopique** pour les plaques en béton armé, **en amont de tout calcul de structure**. La méthodologie suivante a donc été développée, en reprenant les idées des travaux de (Waeckel 1994) sur l'identification du comportement métallurgique ou encore de (Yvonnet et al 2009) sur l'étude des composites linéaires viscoélastiques et non-linéaires : la forme mathématique générique du modèle est établie à partir des caractéristiques génériques d'une plaque en béton armé, puis les paramètres de ce modèle sont identifiés à partir des caractéristiques géométriques réelles de la plaque étudiée, pour chaque plaque constituant la structure à étudier, enfin, le calcul de structure non linéaire est effectué.

Cette méthodologie est schématisée sur la Figure III-3.

Tous les calculs d'homogénéisation, nécessaires à l'identification des paramètres du modèle, nombreux et numériquement coûteux, ne sont donc réalisés qu'une fois par type de dalle ou voile à modéliser, en amont du calcul non linéaire de structure. Par ailleurs, l'étape 1 est l'étape de construction de la forme mathématique du modèle, elle est expliquée dans cette thèse et n'a pas à être pratiquée par l'utilisateur. Celui-ci n'aura donc à sa charge que les étapes 2 et 3 consistant à identifier les paramètres et à les appliquer au modèle dans le calcul de structure non linéaire qu'il souhaite effectuer. L'utilisateur a donc à sa disposition une nouvelle loi de comportement dédiée aux plaques en béton armé, considérant ce matériau comme un nouveau matériau homogène.

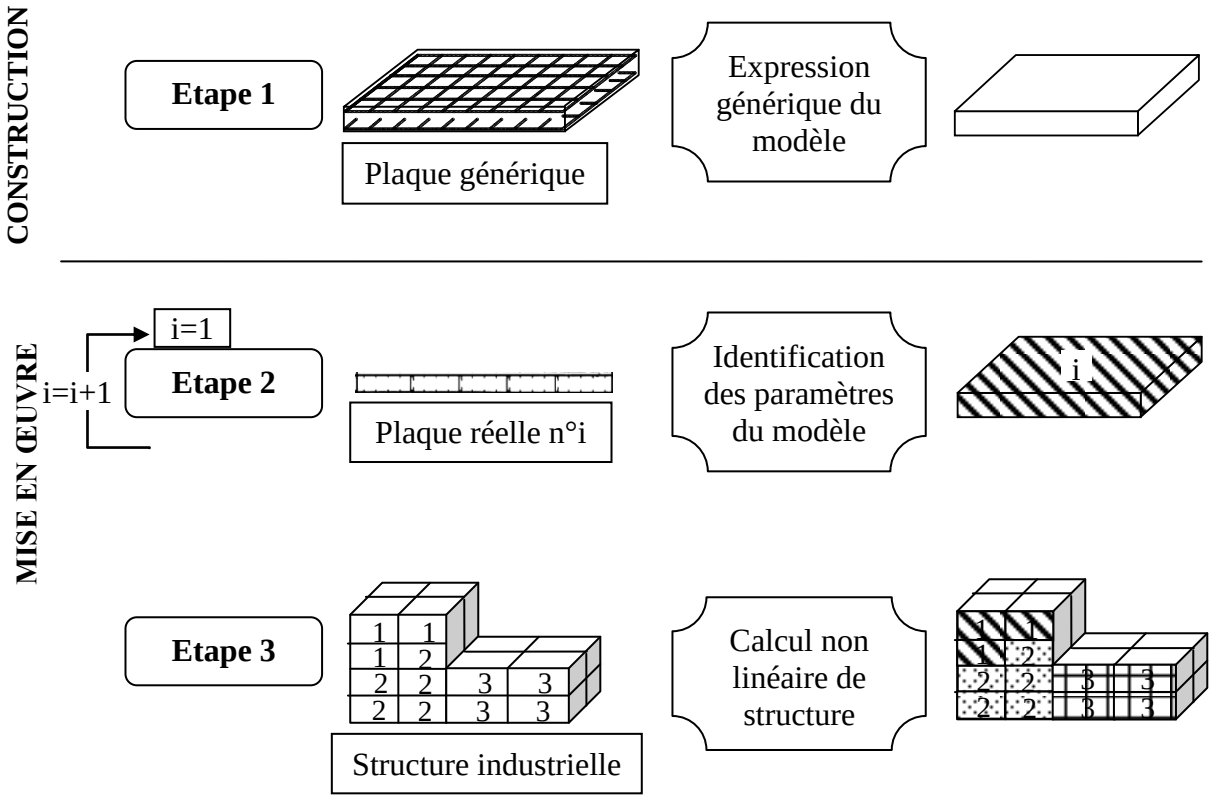


Figure III-3: Méthodologie employée pour la construction et la mise en œuvre du modèle de comportement

III.2.ii. Définition des cellules d'homogénéisation

L'étude bibliographique et le contexte considéré, présentés précédemment, ont conduit à la décision de construire une loi macroscopique de plaque qui trouve une justification par une approche micromécanique. Le cadre rigoureux de l'homogénéisation périodique de plaque (Caillerie 1995; Caillerie & Nedelec 1984) est adopté. Le modèle macroscopique générique s'exprime, dans cette approche, en fonction de champs de déplacements correcteurs obtenus par résolution de problèmes locaux posés sur la période de base. Etant donné la complexité du problème réel, notamment des évolutions irréversibles à l'échelle microscopique, la décision a été prise de schématiser simplement la cellule de base pour obtenir la forme mathématique du modèle. C'est ensuite la phase d'identification, plus riche, qui permettra d'identifier les paramètres du modèle pour se rapprocher du comportement réel de la plaque étudiée, dans la gamme de sollicitations visée.

La méthodologie se base donc sur la définition de deux cellules de base :

- L'une, simplifiée, permettra d'établir la forme mathématique du modèle macroscopique en amont de tout calcul de structure réelle (étape 1 de la Figure III-3).

- La seconde, représentant le plus exactement possible la géométrie d'une cellule de base périodique de la plaque réelle étudiée, permettra d'identifier les paramètres homogénéisés du modèle macroscopique précédemment établi (étape 2 de la Figure III-3).

Finalement, le modèle ainsi construit et ses paramètres ainsi identifiés mèneront à un comportement macroscopique de la plaque étudié approché mais représentatif du comportement réel.

III.2.iii. Traitement des non-linéarités

D'après l'étude bibliographique, le modèle macroscopique à construire doit comporter deux sources de non-linéarités avec effet d'histoire pour être représentatif du comportement du béton armé observé expérimentalement : de l'endommagement et des déformations résiduelles. De plus, des campagnes expérimentales ont permis d'identifier que l'endommagement provient de la dégradation par fissuration du matériau béton alors que les déformations résiduelles sont plutôt dues à la décohésion locale entre les aciers et le béton, au voisinage des armatures ; décohésion qui se produirait périodiquement, d'une période réglée par la régularité des armatures transversales (Ramirez 2005). Le modèle macroscopique, construit par homogénéisation, va devoir représenter ces deux non-linéarités par le biais de variables internes ce qui nous éloigne alors du cadre théorique de l'homogénéisation élastique pour entrer dans celui de l'homogénéisation non linéaire.

L'homogénéisation élastique est un cadre de travail appréciable car il mène à une démarche découplée entre équilibre à l'échelle macroscopique et problèmes élémentaires et c'est pourquoi il a été choisi de se placer dans ce cadre pour cette étude. Cependant, dès lors que sont introduits des phénomènes dissipatifs, le découplage entre les deux échelles n'est alors plus assuré et il est nécessaire d'être rigoureux et attentif quant à la définition des variables internes dissipatives. En effet, comme décrit dans la thèse de P. Suquet (Suquet 1982), si des champs de variables internes microscopiques sont considérés, le processus d'homogénéisation mène à une infinité de variables internes macroscopiques à considérer en chaque point matériel à l'échelle macroscopique, ce qui n'est pas envisageable en pratique. Ainsi, dans l'idée de rester au plus près de résultats que l'on sait exacts et d'une applicabilité pratique du modèle macroscopique à construire, le modèle sera construit à l'aide du cadre de l'homogénéisation périodique anélastique en adoptant des hypothèses simplificatrices sur les variables internes microscopiques de manière à ce que le nombre de variables internes soit réduit à une quantité finie. De plus et toujours en se basant sur le travail de Suquet, l'énergie libre décrivant notre modèle sera alors déterminée en fixant les variables internes de façon à obtenir un problème purement élastique à résoudre sur la cellule de base.

L'identification des paramètres du modèle macroscopique ainsi construit se fera à l'aide d'une série de calculs d'homogénéisation élastiques menés à variables dissipatives fixées. Ainsi, considérant notre cas d'étude d'une plaque en béton armé endommageable et comprenant des déformations résiduelles dues à la décohésion interne entre acier et béton au niveau de la liaison, l'identification des coefficients homogénéisés du modèle global s'organisera comme suit :

- Une première série de calculs d'homogénéisation permettant de déterminer les coefficients homogénéisés élastiques de la plaque homogène saine équivalente à l'aide de sollicitations élémentaires.
- Une seconde série de calculs destinée à identifier la dépendance des coefficients élastiques homogénéisés par rapport à l'endommagement. Cette série de calculs s'effectue sur la cellule de base utilisée pour les calculs élastiques dont les propriétés mécaniques du béton

seront affaiblies successivement via l'endommagement d'une partie de ce matériau. Cette procédure sera répétée pour plusieurs valeurs d'endommagement microscopique.

- Une troisième série de calculs destinée à identifier les propriétés dissipatives (coefficients de glissement) du modèle lors de la décohésion entre les armatures et le béton. Cette série de calculs d'effectue sur une cellule présentant une zone de décohésion entre les armatures et le béton, induisant un glissement relatif entre les deux matériaux. Les sollicitations élémentaires pour cette série de calculs seront alors les glissements élémentaires le long des armatures considérées.
- Pour finir, une quatrième série de calculs, reprenant les calculs de la troisième série avec les valeurs d'endommagement et les cellules ainsi endommagées de la seconde série de manière à déterminer la dépendance des coefficients de glissement homogénéisés par rapport à l'endommagement.

En substance donc, des « photos » des états endommagés de la cellule de base sont effectuées pour plusieurs valeurs d'endommagement afin de déterminer la dépendance des coefficients d'élasticité et de glissement à l'endommagement. Dans l'hypothèse où la construction de la forme mathématique du modèle permettrait de supposer une forme mathématique a priori de cette dépendance, les photos permettront de déterminer les coefficients de cette forme mathématique par une identification du type moindre carrés.

III.3. FORMULATION DU PROBLEME D'HOMOGENEISATION

III.3.i. Problème réel et simplifications

La structure à laquelle nous nous intéressons dans ce travail est une plaque en béton renforcée par deux grilles d'armature en acier situées de part et d'autre du plan moyen de la plaque. L'épaisseur de la plaque H est petite devant ses dimensions transversales. Les grilles présentent une périodicité naturelle dans les directions $\underline{e}_{x_1}$ et $\underline{e}_{x_2}$ et l'espacement entre les armatures est petit devant la taille de la plaque.

De sorte que les hypothèses du cadre général de l'homogénéisation périodique de plaque énoncées au paragraphe précédent restent valides, à savoir que le ratio ξ entre les dimensions latérales l_1 et l_2 de la cellule élémentaire choisie et celles L_1 et L_2 de la plaque entière est du même ordre de grandeur que le ratio ϑ entre l'épaisseur H de la plaque et ses dimensions latérales L_1 et L_2.

Dans ce cadre, nous allons procéder à une homogénéisation périodique de plaque sur une cellule élémentaire dont l'épaisseur H est égale à celle de la plaque de béton armé étudiée avec une périodicité dans les directions $\underline{e}_{X_1}$ et $\underline{e}_{X_2}$. Ces deux directions, correspondant aux directions des deux aciers de la grille d'armature, seront les directions préférentielles pour tout le travail qui suit. **Le repère microscopique choisi sera donc le repère des armatures** $\left(O, \underline{e}_{x_1}, \underline{e}_{x_2}, \underline{e}_{x_3}\right)$, avec $\underline{e}_{x_3} = \underline{e}_{X_3}$ et O est le centre de la cellule de base considérée.

La géométrie de la plaque et de la cellule de base sont présentées à la Figure III-4.

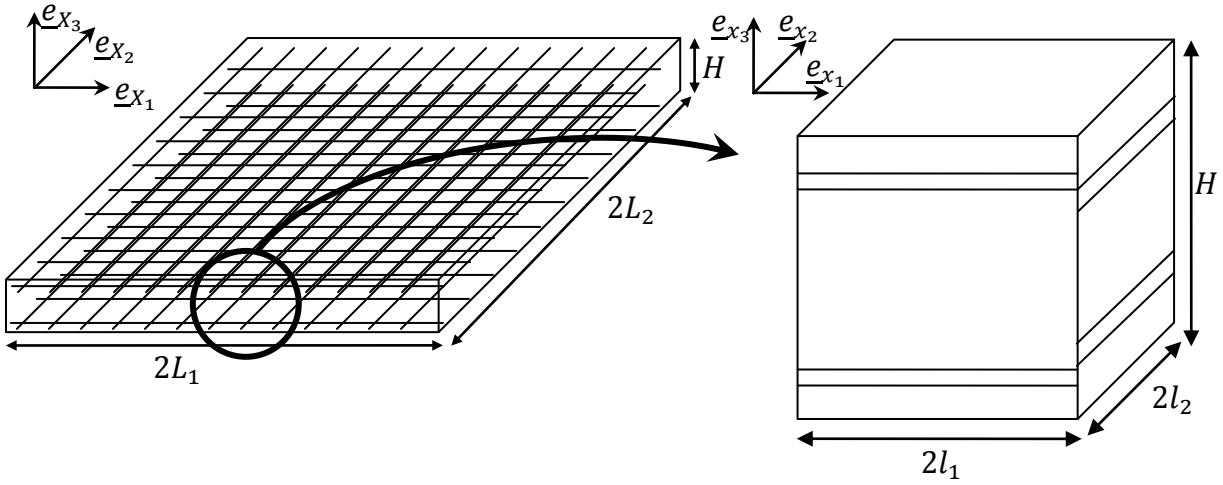


Figure III-4 : Définition de la cellule de base d'étude Ω à partir de la structure réelle

Alors que les travaux rappelés précédemment concernaient des milieux constitutifs élastiques linéaires parfaitement collés, nous allons devoir ici introduire la non linéarité de comportement du béton et la décohésion possible des phases au niveau des armatures.

Les hypothèses sur le comportement des phases adoptées dans ce travail sont les suivantes (cf. Chapitre I et §III.2) :

Comportement des matériaux constitutifs dans la cellule Ω:

Hyp 1. L'acier est considéré comme élastique.

Hyp 2. Le béton est considéré comme un matériau homogène, élastique, endommageable

Hyp 3. Le béton s'endommage selon une loi de comportement du type $\boldsymbol{\sigma} = \mathbb{a}(d) : \boldsymbol{\varepsilon}$.

Comportement de l'interface acier-béton :

Hyp 4. Le béton et les barres d'armatures peuvent glisser relativement l'un par rapport aux autres au-delà d'un certain seuil d'adhérence.

Hyp 5. Le comportement de l'interface glissante entre acier et béton est considéré comme rigide-parfaitement glissant.

Hyp 6. Le glissement relatif entre béton et acier, qui advient après fissuration du béton et report des efforts du béton sur la barre d'acier, peut subvenir dans deux directions seulement $\underline{e}_{X_1}$ et $\underline{e}_{X_2}$ – le long des armatures longitudinales – et peut être différent pour les armatures des grilles supérieures et inférieures de la plaque (pour la prise en compte du comportement de flexion, par exemple).

Hyp 7. Ce glissement relatif est considéré comme nul au droit des armatures orthogonales à la direction de glissement – i.e. soit des armatures de la grille perpendiculaires à la direction de glissement, soit des armatures transversales. Le glissement est donc périodique, d'une période égale à la distance entre deux armatures de la grille, dans la direction de glissement considérée.

Etant donné la complexité du problème réel, tant au niveau géométrique que matériel, il a été décidé de procéder à différentes simplifications du problème sur le plan géométrique et

également du comportement. Comme indiqué au §III.2, cette schématisation permet d'obtenir la forme générale du modèle. C'est ensuite grâce à la phase d'identification présentée au paragraphe 0, que les paramètres du modèle ainsi construit seront ajustés pour se rapprocher d'un comportement plus réaliste de la plaque étudiée.

Les hypothèses simplificatrices formulées pour la construction de la forme mathématique du modèle sont énoncées ci-dessous. Leurs justifications sont ensuite présentées :

Géométrie :

Hyp 8. Pour simplifier la géométrie du problème, les grilles son schématisées par une couche homogène dont le comportement correspond à celui des armatures d'acier et du béton se trouvant à l'intérieur du cadre formé par les armatures. La plaque renforcée par les deux grilles peut alors être considérée comme alternant couches de béton et couches équivalente aux grilles (cf. Figure III-6), séparées par des interfaces notées Γ_1.

Endommagement non uniforme :

Hyp 9. Pour représenter l'endommagement non uniforme du béton le long des barres d'acier, les couches de béton seul sont en fait divisées en en deux parties Ω_1 et Ω_2 : l'une associée à un béton sain (partie Ω_1) et l'autre associée à un béton endommagé (partie Ω_2) (justification ci-dessous). L'interface Γ_2 entre ces deux domaines alors introduite est considérée parfaitement adhérente.

Justification de l'Hyp 9:

En réalité, le béton de la plaque ne s'endommage pas de façon uniforme dans son volume. Pour traduire ce phénomène, il faudrait introduire dans la modélisation une variable d'endommagement d non uniforme dans la cellule de base. Or, d'après les travaux de (Suquet 1982), cette non-uniformité du champ de variable interne microscopique nécessite, lors du passage à l'échelle macroscopique, de considérer une infinité de variables internes à chaque point matériel macroscopique. Cela rend impraticable le modèle macroscopique Standard Généralisé obtenu à partir des modèles microscopiques utilisés. Cependant, il est possible, toujours selon Suquet, de limiter ce nombre de variables internes à une quantité finie si l'on arrive à montrer que ces variables internes sont uniformes, uniformes par morceaux ou décrivent un espace vectoriel de dimension finie. Ainsi, si un tel choix de variable interne suffit à représenter, avec un bon degré d'approximation, l'état réel du matériau dans la cellule il est possible de construire un modèle macroscopique Standard Généralisé à nombre fini de variables internes. Dans notre cas, pour limiter le nombre de variables internes macroscopiques, la solution choisie est de définir une seule variable interne microscopique d pour l'endommagement, uniforme dans la cellule de base, et deux « matériaux » pour le béton endommagé correspondant à deux états d'endommagement différents pour le béton, situés dans les zones Ω_1 et Ω_2. Cela permet de représenter les phénomènes microscopiques à l'origine de l'effet de « tension-stiffening ». La variable interne macroscopique D et la variable interne microscopique d sont alors similaires $D = d$.

Hyp 10. Pour prendre en compte le fait que l'endommagement n'est, a priori, pas uniforme dans l'épaisseur de la plaque, nous allons distinguer deux variables pour l'endommagement, représentant l'endommagement dans la moitié supérieure et inférieure de la plaque (justification ci-dessous) :

$$d = \begin{cases} d^1 \text{ si } x_3 \geq 0 \\ d^2 \text{ si } x_3 \leq 0 \end{cases}$$

En pratique cette hypothèse conduit à un endommagement macroscopique qui se décompose également en deux variables D^1 et D^2. Notons d^π et D^π les variables d'endommagement microscopiques et macroscopiques selon si la variable considérée est celle de la moitié supérieure ($\pi = 1$) ou inférieure $\pi = 2$ de la plaque.

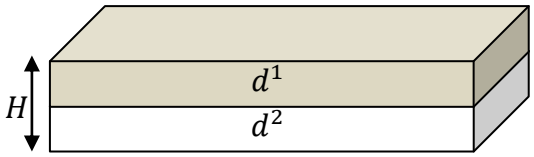


Figure III-5 : Représentation de la discrétisation de la variable d'endommagement microscopique d

Désignons par Γ_3 l'interface entre les couches de la partie supérieure de la plaque et celles de la partie inférieure. L'interface Γ_3 ainsi introduite est considérée parfaitement adhérente.

Compte tenu de la distinction faite des deux parties supérieure et inférieure, les domaines Ω_i ($i = 1,2$) et les interfaces Γ_1 entre les couches de béton et les couches équivalentes aux grilles sont dédoublées en Ω_i^1, Ω_i^2 et Γ_1^1, Γ_1^2. Convenons de noter Γ_1^π les interfaces Γ_1^1 et Γ_1^2.

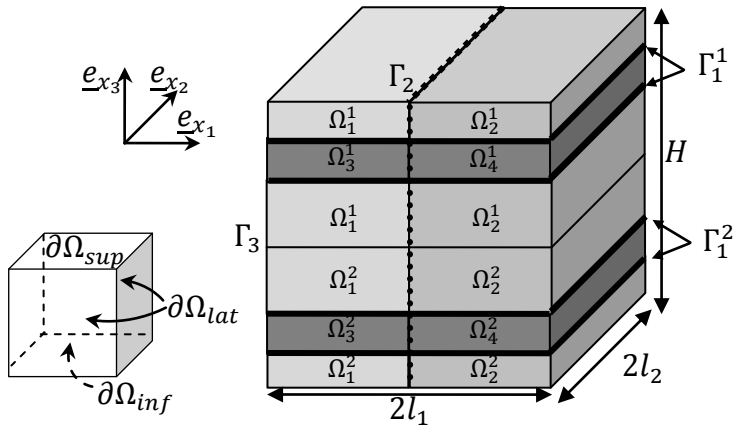


Figure III-6 : Cellule de base simplifiée Ω pour la construction de la forme mathématique du modèle

Justification de l'Hyp 10 :

Cette hypothèse forte de discrétisation de la variable d'endommagement microscopique a été faite pour rendre compte des observations expérimentales lors d'essais de flexion quatre points sur des poutres en béton armé : les fissures s'ouvrant dans les parties en traction de la plaque se propagent de façon dynamique quasi-instantanément. Cette échelle de temps de propagation des fissures est très inférieure à l'échelle de temps relative aux phénomènes sismiques considérés pour cette étude. Il est donc acceptable d'envisager que l'endommagement se discrétise en deux valeurs selon la position dans l'épaisseur, la séparation se faisant au milieu. Cette hypothèse implique de plus que la

fibre neutre reste au milieu de l'épaisseur de la plaque ce qui est une seconde approximation forte pour le comportement de la plaque en sollicitations mixtes membrane-flexion. Cela est cependant en accord avec les codes de dimensionnement du béton armé qui préconisent de ne considérer, pour le dimensionnement en flexion que la moitié de la section de béton (BAEL80 1980; Code 1990).

Glissement non uniforme :

Considérons alors, sur la cellule de base présentée à la Figure III-6, que le glissement peut survenir, aux interfaces Γ_1^π dans les directions $\underline{e}_{x_1}$ ou $\underline{e}_{x_2}$. Les faces supérieures et inférieures de la cellule de base sont libres d'efforts (Caillerie & Nedelec 1984).

Les formes des glissements $\underline{\eta}^\pi(\underline{x})$ sur les interfaces Γ_1^π résultent de la minimisation d'énergie mécanique et dépendent donc de l'histoire du chargement imposé sur la cellule. La méthodologie choisie étant de construire le modèle macroscopique à partir d'une analyse microscopique « a priori », il n'est pas possible de savoir quelles vont être les formes réelles des glissements correspondant à la sollicitation macroscopique imposée sur la plaque totale. Une forme de glissement a priori doit donc être choisie pour mener l'homogénéisation périodique. De plus, de la même manière que l'endommagement se devait d'être uniforme dans la cellule étudiée, il apparaît nécessaire de définir le glissement le long de chaque acier à partir d'un seul paramètre par direction et par grille. Plusieurs possibilités s'offrent alors : soit le saut de déplacement correspondant au glissement considéré est contant, soit les contraintes induites par ce glissement le sont. Dans l'étude bibliographique présentée au Chapitre I, il a été souligné que, selon (Marti et al 1998), les contraintes induites par la décohésion acier-béton sont constantes par morceaux.

Hyp 11.Ainsi, en se basant sur cette affirmation, un glissement sous forme de « chapeau » (présenté à la Figure III-7) – correspondant à des contraintes constantes par morceaux à l'interface – est choisi. Ce glissement n'est paramétré que par son amplitude (sa périodicité étant réglée sur la périodicité de la plaque), et n'est donc bien défini que par un seul paramètre.

Hyp 12.Il sera considéré de plus que le glissement relatif acier-béton dans la direction x_α, noté η_α ne dépend que de la composante x_α. Notons $\hat{\eta}_\alpha^\pi(x_\alpha)$ la fonction de glissement de forme « chapeau » d'amplitude unitaire pour la direction $\underline{e}_{x_\alpha}$, d'où : $\eta_\alpha^\pi = E_\alpha^{\eta\pi}\hat{\eta}_\alpha^\pi$.

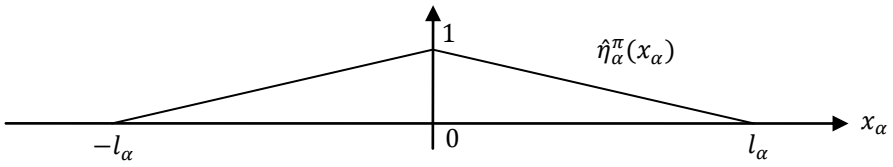


Figure III-7 : Fonction de glissement « chapeau » $\hat{\eta}_\alpha^\pi$ périodique pour la direction x_α et d'amplitude unitaire

III.3.ii. Mise en équation du problème local – formulation variationnelle

Compte-tenu des hypothèses simplificatrices adoptées précédemment, le problème local d'homogénéisation se formule sur la cellule de base simplifiée (Figure III-6). Il s'agit d'un problème présentant six variables internes microscopiques fixées associées à l'endommagement microscopique en moitié inférieure et supérieure de la plaque à travers d_1 et d_2, et aux glissements dans les directions $\underline{e}_{x_1}$ et $\underline{e}_{x_2}$, en grille supérieure et inférieure à

travers les fonctions $\eta_1^1(x_1), \eta_2^1(x_2), \eta_1^2(x_1), \eta_2^2(x_2)$. Le problème cellulaire élastique, à déformations macroscopiques de membrane $E_{\alpha\beta}$ et de flexion $K_{\alpha\beta}$, et à variables internes microscopiques d et $\underline{\eta}^{\pi}(\underline{x})$, fixées s'écrit donc :

Trouver $(\boldsymbol{\sigma}, \underline{u})$ admissibles tels que :

$$\begin{cases} \underline{div}\,\boldsymbol{\sigma}(\underline{u}) = \underline{0} & \text{dans } \Omega_i^{\pi} & \text{équilibre} \\ \boldsymbol{\sigma}(\underline{u}) = \mathbb{a}^i(d^{\pi}) : \boldsymbol{\varepsilon}(\underline{u}) & \text{dans } \Omega_i^{\pi} & \text{comportement : Hyp 1, Hyp 2} \\ \boldsymbol{\varepsilon}(\underline{u}) \text{ périodique} & \text{sur } \partial\Omega_{lat} & \text{condition limite : Hyp 7} \\ \boldsymbol{\sigma}.\underline{n} \text{ antipériodique} & \text{sur } \partial\Omega_{lat} & \text{condition limite : Hyp 7} \\ \boldsymbol{\sigma}.\underline{n} = \underline{0} & \text{sur } \partial\Omega_{sup} \cup \partial\Omega_{inf} & \text{condition limite : bord libre} \\ [\![\boldsymbol{\sigma}]\!].\underline{n} = \underline{0} & \text{sur } \Gamma_2 \cup \Gamma_3 & \text{condition interface : Hyp 9, Hyp 10} \\ [\![\underline{u}]\!] = \underline{0} & \text{sur } \Gamma_2 \cup \Gamma_3 & \text{condition interface : Hyp 9, Hyp 10} \\ [\![\boldsymbol{\sigma}]\!].\underline{n} = \underline{0} & \text{sur } \Gamma_1^{\pi} & \text{condition interface : Hyp 6} \\ [\![\underline{u}_N]\!] = \underline{0} & \text{sur } \Gamma_1^{\pi} & \text{condition interface : Hyp 6} \\ [\![\underline{u}_T]\!] = \underline{\eta}^{\pi}(\underline{x}) & \text{sur } \Gamma_1^{\pi} & \text{condition interface : Hyp 6} \\ \langle \varepsilon_{\alpha\beta}(\underline{u}) \rangle_{\Omega} = E_{\alpha\beta} & \text{où } \alpha,\beta \in [\![1,2]\!] & \text{et } \langle x_3 \varepsilon_{\alpha\beta}(\underline{u}) \rangle_{\Omega} = K_{\alpha\beta} \text{ pour la flexion} \end{cases} \quad \text{(III-7)}$$

où $\langle . \rangle_{\Omega} = \frac{1}{|\Omega|} \int_{\cup \Omega_i^{\pi}} . \, d\Omega$ représente la valeur moyenne du champ considéré sur la cellule périodique.

La déformation macroscopique de glissement $\boldsymbol{E}^{\boldsymbol{\eta}\pi}$ est alors définie comme la moyenne du glissement sur chaque interface Γ_1^{π} :

$$\boldsymbol{E}^{\boldsymbol{\eta}\pi} = \frac{1}{|\Omega|} \int_{\Gamma_1^{\pi}} [\![\underline{u}_T]\!] \otimes^s (\underline{e}_{x_1} \wedge \underline{e}_{x_2}) dS$$

où $\otimes^s$ représente le produit tensoriel symétrisé.

D'après (III-7), $[\![\underline{u}_T]\!] = \underline{\eta}^{\pi}(\underline{x})$ sur Γ_1^{π}, et le glissement $\underline{\eta}^{\pi}$ considéré à l'interface ne prend pas en compte le décollement (i.e. pas de « glissement » selon $\underline{e}_{x_3}$). Par conséquent, les seules composantes non nulles de $\boldsymbol{E}^{\boldsymbol{\eta}\pi}$ sont les $E_{\alpha 3}^{\eta\pi}$. $\boldsymbol{E}^{\boldsymbol{\eta}\boldsymbol{\pi}}$ sera donc considéré, par la suite, comme un tenseur d'ordre 1 du plan tangent, noté $\underline{E}^{\eta\pi} = E_{\alpha}^{\eta\pi}$.

Introduisons, comme cela a été rappelé au paragraphe III.1, des champs correcteurs microscopiques dits « élastiques » de membrane $\underline{\chi}$ et de flexion $\underline{\xi}$ correspondant au cas de déformation – de membrane et de flexion – macroscopique imposée et glissement nul, et des champs correcteurs dits « de glissement » $\underline{\chi}^{\eta_{\alpha}^{\pi}}$, correspondant au cas de déformation macroscopique nulle et glissement $\eta_{\alpha}^{\pi}(x_{\alpha})$ imposé (Andrieux et al 1986; Pensée & Kondo 2001). Le déplacement $\underline{u}$, solution du problème local d'homogénéisation (**III-7**), s'écrit alors sous la forme :

$$u_{\alpha}(\underline{x}) = E_{\alpha\beta} x_{\beta} - K_{\alpha\beta} x_{\beta} x_3 + E_{\beta\gamma} \chi_{\alpha}^{\beta\gamma}(\underline{x}) + K_{\beta\gamma} \xi_{\alpha}^{\beta\gamma}(\underline{x}) + E_{\beta}^{\eta\pi} \chi_{\alpha}^{\eta_{\beta}^{\pi}}(\underline{x})$$

$$u_3(\underline{x}) = E_{\beta\gamma} \chi_3^{\beta\gamma}(\underline{x}) + K_{\beta\gamma} \xi_3^{\beta\gamma}(\underline{x}) + E_{\beta}^{\eta\pi} \chi_3^{\eta_{\beta}^{\pi}}(\underline{x})$$

Ces champs correcteurs périodiques satisfont les dix problèmes suivants :

Trouver $\underline{\chi}^{\alpha\beta} \in \mathcal{U}_{ad}^{0}$ tel que :

$$\int_{\cup\Omega_i^{\pi}} \varepsilon_{pq}\left(\underline{\chi}^{\alpha\beta}\right) \mathbb{a}_{pqrs}^{i}(d^{\pi})\varepsilon_{rs}(\underline{v})d\Omega = -\int_{\cup\Omega_i^{\pi}} \mathbb{a}_{\alpha\beta rs}^{i}(d^{\pi})\varepsilon_{rs}(\underline{v})d\Omega \quad \forall \underline{v} \in \mathcal{U}_{ad}^{0}$$

Trouver $\underline{\xi}^{\alpha\beta} \in \mathcal{U}_{ad}^{0}$ tel que :

$$\int_{\cup\Omega_i^{\pi}} \varepsilon_{pq}\left(\underline{\xi}^{\alpha\beta}\right) \mathbb{a}_{pqrs}^{i}(d^{\pi})\varepsilon_{rs}(\underline{v})d\Omega = -\int_{\cup\Omega_i^{\pi}} x_3.\mathbb{a}_{\alpha\beta rs}^{i}(d^{\pi})\varepsilon_{rs}(\underline{v})d\Omega \quad \forall \underline{v} \in \mathcal{U}_{ad}^{0}$$

(III-8)

avec $\mathcal{U}_{ad}^{0} = \{\underline{v} \,/\, \underline{v}$ périodique en x_1 et $x_2, \underline{v}$ continu sur $\Gamma_1^1 \cup \Gamma_1^2 \cup \Gamma_2, \langle\varepsilon(v)\rangle_{\Omega} = \langle x_3\varepsilon(v)\rangle_{\Omega} = 0\}$

Trouver $\underline{\chi}^{\eta_\alpha^\rho} \in \mathcal{U}_{ad}^{\alpha\rho}$ tel que :

$$\int_{\cup\Omega_i^{\pi}} \varepsilon_{pq}\left(\underline{\chi}^{\eta_\alpha^\rho}\right) \mathbb{a}_{pqrs}^{i}(d^{\pi})\varepsilon_{rs}\left(\underline{v} - \underline{\chi}^{\eta_\alpha^\rho}\right) d\Omega = 0 \quad \forall \underline{v} \in \mathcal{U}_{ad}^{\alpha\rho}$$

(III-9)

$\mathcal{U}_{ad}^{\alpha\rho} = \{\underline{v} \,/\, \underline{v}$ périodique en x_1 et $x_2, \underline{v}$ continu sur $\Gamma_2, \underline{v}_N$ continu et $[\![\underline{v}_T]\!] = E_\alpha^{\eta\rho}\hat{\eta}_\alpha^\rho(x_\alpha)\underline{e}_{x_\alpha}$ sur $\Gamma_1^\rho\}$

Les énergies libres microscopiques de chaque matériau sont alors :

$$w^i\left(\boldsymbol{\varepsilon}\left(\underline{\eta}^{\pi}\right), d^{\rho}\right) = \frac{1}{2}\boldsymbol{\varepsilon}\colon \mathbb{a}^i(d^{\pi})\colon \boldsymbol{\varepsilon}$$

Pour finir, définissons les comportements dissipatifs à l'échelle microscopique. Nous considérons alors les phénomènes dissipatifs les plus simples (paramètres de seuil constants, pas d'écrouissage…) et des matériaux microscopiques standard généralisés avec les fonctions seuils suivantes, respectivement pour l'endommagement et la décohésion (g^π est le taux de restitution d'énergie microscopique du béton endommagé situé dans le domaine Ω_2^π et $\sigma_{\alpha 3}^\pi$ sont les composantes tangentielles du vecteur contraintes $\boldsymbol{\sigma}.\underline{e}_{x_3}$ à l'interface Γ_1^π).

$$f_{d^\pi}(g^\pi) = g^\pi - k_0 \leq 0 \qquad \text{et} \qquad f_{\eta^\pi}^{\alpha}(\sigma_{\alpha 3}^{\pi}) = (\sigma_{\alpha 3}^{\pi})^2 - \sigma_{crit}^2 \qquad \text{(III-10)}$$

<u>Remarque 47</u> *: La prise en compte d'une fonction seuil pour le glissement résulte de l'Hyp 4.*

<u>Remarque 48</u> *: La fonction seuil microscopique pour l'endommagement résulte du choix du modèle d'endommagement microscopique présenté à l'Hyp 3 et pour l'instant non explicité.*

Les lois d'écoulement microscopiques associées sont donc :

$$\dot{d}^\pi = \dot{\lambda}_{d^\pi}\frac{\partial f_{d^\pi}(g^\pi)}{\partial g^\pi} = \dot{\lambda}_{d^\pi} \text{ et } [\![\dot{u}_\alpha^\pi]\!] = \dot{\lambda}_{\eta^\pi}^{\alpha}\frac{\partial f_{\eta^\pi}^{\alpha}(\sigma_{\alpha 3}^{\pi})}{\partial \sigma_{\alpha 3}^{\pi}} = 2\sigma_{\alpha 3}^{\pi}\dot{\lambda}_{\eta^\pi}^{\alpha} \qquad \text{(III-11)}$$

où $\dot{\lambda}_{d^\pi}$ et $\dot{\lambda}_{\eta^\pi}^{\alpha}$ sont deux scalaires positifs déterminés à l'aide de la condition de consistance : $\dot{\lambda}f = 0$.

III.3.iii. Modèle macroscopique obtenu

Le modèle macroscopique s'obtient classiquement par relation entre grandeurs moyennes en exploitant le principe de Hill -Mandel étendu (Halphen & Nguyen 1975; Suquet 1982).

Energie libre macroscopique

Ainsi, après résolution des dix problèmes indépendants, linéaires et élastiques aux correcteurs (en pratique numériquement), la densité d'énergie libre macroscopique s'exprime comme suit, en fonction de la déformation macroscopique $\boldsymbol{E}$ et des grandeurs dissipatives macroscopique fixées d'endommagement D et de déformation de glissement $\underline{E}^{\eta}$:

$$\begin{aligned}2\mathcal{W}\left(\boldsymbol{E}, D, \underline{E}^{\eta}\right) \;=\; & \boldsymbol{E}:\langle\langle \mathbb{a}(d)\rangle\rangle_{\Omega}:\boldsymbol{E} - E_{\alpha\beta}\,\langle\langle \boldsymbol{\varepsilon}\left(\underline{\chi}^{\alpha\beta}\right):\mathbb{a}(d):\boldsymbol{\varepsilon}\left(\underline{\chi}^{\gamma\delta}\right)\rangle\rangle_{\Omega}\,E_{\gamma\delta} \\ & -2\boldsymbol{E}:\langle\langle x_3.\,\mathbb{a}(d)\rangle\rangle_{\Omega}:\boldsymbol{K} - 2E_{\alpha\beta}\,\langle\langle \boldsymbol{\varepsilon}\left(\underline{\chi}^{\alpha\beta}\right):\mathbb{a}(d):\boldsymbol{\varepsilon}\left(\underline{\xi}^{\gamma\delta}\right)\rangle\rangle_{\Omega}\,K_{\gamma\delta} \\ & +\boldsymbol{K}:\langle\langle x_3^2.\,\mathbb{a}(d)\rangle\rangle_{\Omega}:\boldsymbol{K} - K_{\alpha\beta}\,\langle\langle \boldsymbol{\varepsilon}\left(\underline{\xi}^{\alpha\beta}\right):\mathbb{a}(d):\boldsymbol{\varepsilon}\left(\underline{\xi}^{\gamma\delta}\right)\rangle\rangle_{\Omega}\,K_{\gamma\delta} \\ & +2\boldsymbol{E}:\langle\langle \mathbb{a}(d):\boldsymbol{\varepsilon}\left(\underline{\chi}^{\eta_\gamma^{\pi}}\right)\rangle\rangle_{\Omega}\,\underline{E}_{\gamma}^{\eta\pi} \\ & +2\boldsymbol{K}:\langle\langle x_3.\,\mathbb{a}(d):\boldsymbol{\varepsilon}\left(\underline{\chi}^{\eta_\gamma^{\pi}}\right)\rangle\rangle_{\Omega}\,\underline{E}_{\gamma}^{\eta\pi} \\ & +E_{\alpha}^{\eta\rho}\,\langle\langle \boldsymbol{\varepsilon}\left(\underline{\chi}^{\eta_\alpha^{\rho}}\right):\mathbb{a}(d):\boldsymbol{\varepsilon}\left(\underline{\chi}^{\eta_\gamma^{\pi}}\right)\rangle\rangle_{\Omega}\,\underline{E}_{\gamma}^{\eta\pi}\end{aligned} \qquad \text{(III-12)}$$

où $\langle\langle . \rangle\rangle_{\Omega} = \frac{H}{|\Omega|}\int_{\cup\Omega_i^{\pi}} . \, d\Omega$ représente la valeur moyenne surfacique du champ considéré sur la cellule périodique Ω, avec H, l'épaisseur de la cellule de base (et de la plaque).

Il est alors possible d'identifier trois tenseurs de comportement homogénéisés d'ordres respectifs quatre, trois et deux (Lichnérowicz 1967) définis dans le plan tangent à la plaque $\mathbb{A}, \mathbb{B}, \boldsymbol{C}$, tels que :

$$2\mathcal{W}\left(\boldsymbol{E}, D, \underline{E}^{\eta}\right) = \begin{pmatrix}\boldsymbol{E}\\ \boldsymbol{K}\end{pmatrix}:\begin{pmatrix}\mathbb{A}^{mm}(D) & \mathbb{A}^{mf}(D)\\ \mathbb{A}^{fm}(D) & \mathbb{A}^{ff}(D)\end{pmatrix}:\begin{pmatrix}\boldsymbol{E}\\ \boldsymbol{K}\end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix}\boldsymbol{E}\\ \boldsymbol{K}\end{pmatrix}:\begin{pmatrix}\mathbb{B}^{\pi m}(D)\\ \mathbb{B}^{\pi f}(D)\end{pmatrix}.\underline{E}^{\eta\pi} + \underline{E}^{\eta\rho}.\mathbf{C}^{\boldsymbol{\rho\pi}}(D).\underline{E}^{\eta\pi} \qquad \text{(III-13)}$$

avec

$$\mathbb{A}_{\alpha\beta\gamma\delta}^{mm}(D) = \langle\langle \mathbb{a}_{\alpha\beta\gamma\delta}(d)\rangle\rangle_{\Omega} - \langle\langle \varepsilon_{ij}\left(\underline{\chi}^{\alpha\beta}\right):\mathbb{a}_{ijkl}(d):\varepsilon_{kl}\left(\underline{\chi}^{\gamma\delta}\right)\rangle\rangle_{\Omega} \qquad \text{(III-14)}$$

$$\mathbb{A}_{\alpha\beta\gamma\delta}^{mf}(D) = -2\,\langle\langle x_3.\,\mathbb{a}_{\alpha\beta\gamma\delta}(d)\rangle\rangle_{\Omega} - 2\,\langle\langle \varepsilon_{ij}\left(\underline{\chi}^{\alpha\beta}\right):\mathbb{a}_{ijkl}(d):\varepsilon_{kl}\left(\underline{\xi}^{\gamma\delta}\right)\rangle\rangle_{\Omega} = \mathbb{A}_{\alpha\beta\gamma\delta}^{fm}(D) \qquad \text{(III-15)}$$

$$\mathbb{A}_{\alpha\beta\gamma\delta}^{ff}(D) = \langle\langle x_3^2.\,\mathbb{a}_{\alpha\beta\gamma\delta}(d)\rangle\rangle_{\Omega} - \langle\langle \varepsilon_{ij}\left(\underline{\xi}^{\alpha\beta}\right):\mathbb{a}_{ijkl}(d):\varepsilon_{kl}\left(\underline{\xi}^{\gamma\delta}\right)\rangle\rangle_{\Omega} \qquad \text{(III-16)}$$

$$\mathbb{B}_{\alpha\beta\gamma}^{\pi m}(D) = \langle\langle \mathbb{a}_{\alpha\beta kl}(d):\varepsilon_{kl}\left(\underline{\chi}^{\eta_\gamma^{\pi}}\right)\rangle\rangle_{\Omega} \qquad \text{(III-17)}$$

$$\mathbb{B}_{\alpha\beta\gamma}^{\pi f}(D) = \langle\langle x_3.\,\mathbb{a}_{\alpha\beta kl}(d):\varepsilon_{kl}\left(\underline{\chi}^{\eta_\gamma^{\pi}}\right)\rangle\rangle_{\Omega} \qquad \text{(III-18)}$$

$$C_{\alpha\gamma}^{\rho\pi}(D) = \langle\langle \varepsilon_{ij}\left(\underline{\chi}^{\eta_\alpha^{\rho}}\right):\mathbb{a}_{ijkl}(d):\varepsilon_{kl}\left(\underline{\chi}^{\eta_\gamma^{\pi}}\right)\rangle\rangle_{\Omega} \qquad \text{(III-19)}$$

Cette densité d'énergie libre, comprend un terme de couplage « déformations généralisées – déformations de glissement » qui fait intervenir l'endommagement et couple ainsi de manière forte les deux types de variables internes considérées.

Remarque 49 : La densité d'énergie libre (III-13) peut également s'écrire comme suit :

$$2\mathcal{W}(\boldsymbol{E}, D, \underline{E}^{\boldsymbol{\eta}}) = \left[\begin{pmatrix}\boldsymbol{E}\\ \boldsymbol{K}\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}\mathbb{Q}^{\pi m}(D)\\ \mathbb{Q}^{\pi f}(D)\end{pmatrix}.\underline{E}^{\eta\pi}\right] : \begin{pmatrix}\mathbb{A}^{mm}(D) & \mathbb{A}^{mf}(D)\\ \mathbb{A}^{fm}(D) & \mathbb{A}^{ff}(D)\end{pmatrix} : \left[\begin{pmatrix}\boldsymbol{E}\\ \boldsymbol{K}\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}\mathbb{Q}^{\pi m}(D)\\ \mathbb{Q}^{\pi f}(D)\end{pmatrix}.\underline{E}^{\eta\pi}\right] + \underline{E}^{\eta\rho}.\boldsymbol{P}^{\boldsymbol{\rho\pi}}(D).\underline{E}^{\eta\pi}$$

où $\mathbb{Q}^{\pi}(D) = \mathbb{A}^{-1}(D) : \mathbb{B}^{\pi}(D)$ *et* $\boldsymbol{P}^{\rho\pi}(D) = \boldsymbol{C}^{\rho\pi}(D) - \mathbb{B}^{\rho T}(D) : \mathbb{A}^{-1}(D) : \mathbb{B}^{\pi}(D)$.

Cette formulation met en évidence l'introduction, dans la densité d'énergie libre présentée, d'un couplage entre endommagement et glissement via une déformation anélastique $\boldsymbol{E}^{IR}(D) = \begin{pmatrix}\mathbb{Q}^{\pi m}(D)\\ \mathbb{Q}^{\pi f}(D)\end{pmatrix}.\underline{E}^{\eta\pi}$ *qui dépend donc de l'endommagement. Cela diffère des formulations usuelles présentées par exemple dans (Chaboche 2003; Nedjar 2001; Shao et al 2006),où il est plutôt fait référence à une déformation résiduelle* $\boldsymbol{E}^{IR}$ *indépendante de l'endommagement. Cette approche correspond par contre au travail de (Andrieux et al 1986).*

Remarque 50 : On retrouve ici une généralisation, pour les plaques, de la formulation unidimensionnelle proposée au Chapitre II et obtenue par étude du modèle rhéologique. Pour rappel il avait été établi la densité d'énergie libre suivante : $\Phi(E, E^{\eta}, D) = \frac{A(D)E^2}{2} - B(D)EE^{\eta} + \frac{C(D)E^{\eta 2}}{2}$.

Remarque 51 : Il est démontré (voir ANNEXE 4) que le tenseur $\mathbb{B}$ *est nul tant que le tenseur de raideur microscopique* $\mathbb{a}(d)$ *est identique dans les deux volumes* Ω_1 *et* Ω_2.

Dans le cadre théorique de la thermodynamique des processus irréversibles, la densité d'énergie libre (III-13) peut être différentiée pour obtenir les forces thermodynamiques et les lois d'état suivantes:

Efforts généralisés de membrane **N** et flexion **M** :

$$\mathbf{N} = \frac{\partial W}{\partial \boldsymbol{E}} = [\mathbb{A}^{mm}(D) \quad \mathbb{A}^{mf}(D)] : \begin{pmatrix}\boldsymbol{E}\\ \boldsymbol{K}\end{pmatrix} + \mathbb{B}^{\pi m}(D).\underline{E}^{\eta\pi} \qquad \text{(III-20)}$$

$$\mathbf{M} = \frac{\partial W}{\partial \boldsymbol{K}} = [\mathbb{A}^{fm}(D) \quad \mathbb{A}^{ff}(D)] : \begin{pmatrix}\boldsymbol{E}\\ \boldsymbol{K}\end{pmatrix} + \mathbb{B}^{\pi f}(D).\underline{E}^{\eta\pi} \qquad \text{(III-21)}$$

Tenseur contraintes de décohésion $\underline{\Sigma}^{\eta\pi}$:

$$\underline{\Sigma}^{\eta\pi} = -\frac{\partial W}{\partial \underline{E}^{\eta\pi}} = -[\boldsymbol{E} \quad \boldsymbol{K}] : \begin{pmatrix}\mathbb{B}^{\pi m}(D)\\ \mathbb{B}^{\pi m}(D)\end{pmatrix} - \underline{E}^{\eta\rho}.\boldsymbol{C}^{\rho\pi}(D) \qquad \text{(III-22)}$$

Taux de restitution d'énergie G^{π} :

$$G^{\pi} = -\frac{\partial W}{\partial D^{\pi}} \qquad \text{(III-23)}$$

Comportement dissipatif et évolution des variables internes

Une fois les problèmes élastiques cellulaires résolus et la densité d'énergie libre exprimée explicitement, il reste à traiter les problèmes d'évolution des variables internes.

En se basant sur le travail de (Suquet 1982) et en s'inspirant de celui de (Stolz 2010) sur les interfaces, la dissipation mécanique intrinsèque macroscopique est définie comme suit :

$$\begin{aligned}\mathfrak{D}\left(\boldsymbol{E}, D, \underline{E}^{\eta}\right) &= \langle\langle \boldsymbol{\sigma} : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} \rangle\rangle_{\Omega} - \frac{H}{|\Omega|}\int_{\Gamma_1^{\pi}} w_{,\varepsilon}\, \varepsilon_{,\eta^{\pi}}\, \dot{\underline{\eta}}^{\pi} dS - \langle\langle \dot{w}(\boldsymbol{\varepsilon}, d^{\rho}) \rangle\rangle_{\Omega} \\ &= G^{\rho}\dot{D}^{\rho} + \underline{\Sigma}^{\eta\pi} . \dot{\underline{E}}^{\eta\pi}\end{aligned} \qquad \text{(III-24)}$$

où $w\left(\boldsymbol{\varepsilon}\left(\underline{\eta}^{\pi}\right), d^{\rho}\right)$ est la densité d'énergie libre microscopique de chaque matériau composant la cellule de base périodique.

Remarque 52 : On retrouve à nouveau ici, une généralisation, pour les plaques, de la formulation unidimensionnelle proposée au Chapitre II et obtenue par étude du modèle rhéologique.

Les fonctions seuils macroscopiques sont alors identifiées à partir de la dissipation mécanique intrinsèque macroscopique comme étant :

$$f_{d^{\pi}}(G^{\pi}) = G^{\pi} - Hk_0 \leq 0 \qquad \text{et} \qquad f_{\eta^{\pi}}^{\alpha}\left(\Sigma_{\alpha}^{\eta\pi}\right) = \left(\Sigma_{\alpha}^{\eta\pi}\right)^2 - (H\sigma_{crit})^2 \qquad \text{(III-25)}$$

Pour finir, les lois d'évolutions prennent la forme de lois de normalité :

$$\dot{D}^{\pi} = \dot{\lambda}_{d^{\pi}} \frac{\partial f_{d^{\pi}}(G^{\pi})}{\partial G^{\pi}} = \dot{\lambda}_{d^{\pi}} \text{ et } \dot{E}_{\alpha}^{\eta\pi} = \dot{\lambda}_{\eta^{\pi}}^{\alpha} \frac{\partial f_{\eta^{\pi}}^{\alpha}(\Sigma_{\alpha}^{\eta\pi})}{\partial \Sigma_{\alpha}^{\eta\pi}} = 2\Sigma_{\alpha}^{\eta\pi}\dot{\lambda}_{\eta^{\pi}}^{\alpha} \qquad \text{(III-26)}$$

où $\dot{\lambda}_{d^{\pi}}$ et $\dot{\lambda}_{\eta^{\pi}}^{\alpha}$ sont deux scalaires positifs déterminés à l'aide de la condition de consistance : $\dot{\lambda} f = 0$.

Remarque 53 : Les fonctions seuils macroscopiques et les lois d'évolution sont similaires à leurs homonymes microscopiques à un facteur d'échelle H près. En effet, les phénomènes dissipatifs situés à l'échelle microscopique sont naturellement similaires à ceux situés à l'échelle macroscopique puisque le processus d'homogénéisation ne peut pas créer de nouvelles sources de dissipation.

Remarque 54 : Les fonctions seuils microscopiques et macroscopiques étant similaires, il est possible de choisir des fonctions seuils plus riches pour le glissement et l'endommagement microscopique. Cela sera immédiatement répercuté à l'échelle macroscopique. Cependant, le choix de fonctions seuils très simples à un seul paramètre a été fait pour limiter le nombre de paramètres à identifier.

Caractère Standard Généralisé

En se basant sur les travaux de (Suquet 1982), les variables internes microscopiques d'endommagement et de glissement considérées étant uniformes ou constantes dans toute la cellule de base, il est possible d'affirmer, par les arguments de l'analyse convexe, que les propriétés standard généralisées des matériaux à l'échelle microscopiques se transmettent au modèle homogénéisé. Le modèle présenté ci-avant sous forme de densités d'énergie libre et de dissipation mécanique intrinsèque, est donc bien un modèle Standard Généralisé.

III.3.iv. Généralisation à un matériau à structure interne périodique

Il est nécessaire de souligner que la construction de la forme homogénéisée du modèle macroscopique présenté ci-avant ne dépend pas de certaines des hypothèses présentées au début du paragraphe III.2 : les hypothèses sur la loi de comportement endommageable adoptée pour le béton Hyp 3 et sur et la forme du glissement retenue Hyp 11. En effet, lors de la mise en équation du problème d'homogénéisation et lors de la construction des grandeurs macroscopiques décrivant le modèle, il n'a jamais été nécessaire de préciser la loi d'endommagement microscopique utilisée ni même la forme du glissement microscopique imposé aux interfaces Γ_1^{π}.

C'est lors de la phase d'identification des paramètres que ces deux précisions vont devoir être apportées. Les hypothèses Hyp 3 et Hyp 11 ont ainsi une influence sur les champs de déplacements correcteurs $\underline{\chi}$, $\underline{\xi}$ et $\underline{\chi}^{\eta}$, donc sur les coefficients des tenseurs $\mathbb{A}$, $\mathbb{B}$ et $\boldsymbol{C}$, ainsi que sur leur dépendance à la variable d'endommagement D.

Par conséquent, le modèle présenté peut se généraliser à toute plaque constituée d'un matériau présentant une matrice endommageable et des inclusions de géométrie similaire à une grille, quelles que soient la loi d'endommagement utilisée et la forme du glissement microscopique périodique imposé.

L'originalité du travail présenté ci-dessus réside alors dans l'explicitation de la loi de comportement d'une telle plaque, obtenue par homogénéisation périodique. Cette loi de comportement présente une énergie libre de la forme générale suivante :

$$2\mathcal{W}(\mathbf{E}, \mathrm{D}, \mathbf{E}^{\eta}) = \begin{pmatrix} \boldsymbol{E} \\ \boldsymbol{K} \end{pmatrix} : \begin{pmatrix} \mathbb{A}^{mm}(D) & \mathbb{A}^{mf}(D) \\ \mathbb{A}^{fm}(D) & \mathbb{A}^{ff}(D) \end{pmatrix} : \begin{pmatrix} \boldsymbol{E} \\ \boldsymbol{K} \end{pmatrix} + 2 \begin{pmatrix} \boldsymbol{E} \\ \boldsymbol{K} \end{pmatrix} : \begin{pmatrix} \mathbb{B}^{\pi m}(D) \\ \mathbb{B}^{\pi f}(D) \end{pmatrix} : \underline{E}^{\eta\pi} + \underline{E}^{\eta\rho} . \boldsymbol{C}^{\rho\pi}(D) . \underline{E}^{\eta\pi}$$

L'existence du terme de couplage $\mathbb{B}(D)$ avait déjà été évoquée, sous une autre forme, dans les travaux de (Michel 1984) et (Andrieux et al 1986). Ceux-ci, considérant un matériau microscopique plastique ou microfissuré, montrent en effet que l'énergie libre macroscopique homogénéisée comporte un terme de couplage entre déformation macroscopique et déformation plastique microscopique, ce terme faisant intervenir le tenseur de raideur microscopique.

Remarque 55 : L'étude menée ci-dessus montre qu'il existe, en règle générale, un terme de couplage $\mathbb{B}(D)$. Dans le cas particulier d'un glissement constant sur Γ_1, il vient $\mathbb{B}(D) = \mathbb{A} : \mathbb{I}_3$, où $\mathbb{I}_3$ est le tenseur identité d'ordre 3. Ce cas correspond alors aux formulations usuelles de la plasticité, l'énergie interne macroscopique s'écrivant sous la forme : $2W = (\boldsymbol{E} - \boldsymbol{E}^P) : \mathbb{A}(D) : (\boldsymbol{E} - \boldsymbol{E}^P)$, avec une déformation plastique $\boldsymbol{E}^P = \mathbb{I}_3 . \underline{E}^{\eta}$.

III.3.v. Résolution du problème local en une dimension

Il est possible de résoudre analytiquement les problèmes aux correcteurs définis par (III-8) et (III-9) posés sur le VER de la Figure III-6 avec des champs correcteurs unidimensionnels se réduisant à une seule composante et des tenseurs de raideur $\mathbb{A}_i$ se réduisant au simple module de Young du matériau considéré. Dans Ω_3 le matériau choisi est l'acier, de module de Young E^{A} constant dans tout le domaine ; dans Ω_1, le matériau choisi sera le béton sain de module de Young E^{B} constant dans tout le domaine. Ω_2 est finalement constitué de béton endommagé de module de Young constant dans tout le domaine $\mathrm{E}^{\mathrm{B}}(d) = \mathrm{E}^{\mathrm{B}}\zeta(d)$, $\zeta(d)$ étant

une fonction d'endommagement a priori quelconque. Pour finir, il est nécessaire de choisir que le chargement de membrane E ainsi que le glissement n'aient lieu que dans une direction. Arbitrairement, plaçons-nous dans le cas de chargement de membrane et de glissement selon x_1 avec des champs correcteurs $\underline{\chi} = \chi_1(x_1)\underline{x}_1$.

Les épaisseurs respectives des couches de béton et d'acier considérées seront notées h_1 et h_2.

Le problème « élastique » se réduit alors, pour une déformation macroscopique E unitaire, à :

Trouver $\chi_1^{11} \in \mathcal{U}_{ad}^0$ tel que :

$$\int_{\cup\Omega_i} \chi_{1,1}^{11} \mathrm{E}^i(d) v_{1,1} d\Omega = -\int_{\cup\Omega_i} \mathrm{E}^i(d) v_{1,1} d\Omega \quad \forall v_1 \in \mathcal{U}_{ad}^0 \qquad \text{(III-27)}$$

avec $\mathcal{U}_{ad}^0 = \{\chi_1 \,/\, \chi_1$ périodique en x_1 et continu sur $\Gamma_1, \langle \boldsymbol{\varepsilon}(\chi_1)\rangle_\Omega = 0\ \}$

D'où, par une intégration par parties en x_1 et un choix de fonctions test v_1 nulles partout sauf sur un domaine Ω_i : $\chi_{1,11}^{11} = 0$ sur chaque Ω_i. Notons pour chaque domaine Ω_i : $\chi_{1,1}^{11} = \varepsilon_{11}^i$.

Reste alors :

$$\int_{\cup\Omega_i} \mathrm{E}^i(d) \varepsilon_{11}^i v_{1,1} dS = -\int_{\cup\Omega_i} \mathrm{E}^i(d) v_{1,1} dS \quad \forall v_1 \in \mathcal{U}_{ad}^0$$

Remarque 56 : Les champs v_1 considérés ne dépendent pas des directions $\underline{e}_{x_2}$ et $\underline{e}_{x_3}$. Les intégrations selon ces deux directions se ramènent donc à de simples multiplications par la longueur du domaine Ω_i dans les directions considérées.

D'après la Remarque 56, il vient $\forall v_1 \in \mathcal{U}_{ad}^0$, considérant une déformation macroscopique E unitaire :

$$\begin{aligned} &\mathrm{E}^{\mathrm{A}} h_2 \left((\varepsilon_{11}^3 + E)[v_1]_{-l_1/2}^0 + (\varepsilon_{11}^4 + E)[v_1]_0^{l_1/2} \right) \\ &+\mathrm{E}^{\mathrm{B}} h_1 \left((\varepsilon_{11}^1 + E)[v_1]_{-l_1/2}^0 + \zeta(d)(\varepsilon_{11}^2 + E)[v_1]_0^{l_1/2} \right) = 0 \end{aligned}$$

Or $v_1 \in \mathcal{U}_{ad}^0$, donc $v_1(-l_1/2) = v_1(l_1/2)$ et $v_1(0^-) = v_1(0^+)$.

D'où :

$$\left(\mathrm{E}^{\mathrm{B}} h_1[\zeta(d)(\varepsilon_{11}^2 + E) - (\varepsilon_{11}^1 + E)] + \mathrm{E}^{\mathrm{A}} h_2[\varepsilon_{11}^4 - \varepsilon_{11}^3]\right)\left(v_1(l_1/2) - v_1(0)\right) = 0 \quad \forall v_1 \in \mathcal{U}_{ad}^0$$

$$\Leftrightarrow \mathrm{E}^{\mathrm{B}} h_1[\zeta(d)(\varepsilon_{11}^2 + E) - (\varepsilon_{11}^1 + E)] + \mathrm{E}^{\mathrm{A}} h_2[\varepsilon_{11}^4 - \varepsilon_{11}^3] = 0$$

De plus, comme χ_1^{11} est périodique et continu sur l'interface Γ_1, il vient : $\varepsilon_{11}^1 = \varepsilon_{11}^3$, $\varepsilon_{11}^2 = \varepsilon_{11}^4$ et $\langle \varepsilon_{11}^i \rangle_{\Omega_i} = 0$.

D'où, avec $E = 1$:

$$\chi_{1,1}^{11} = \begin{cases} \varepsilon_{11}^1 = E \frac{\mathrm{E}^{\mathrm{B}} h_1 (\zeta(d) - 1)}{2\mathrm{E}^{\mathrm{A}} h_2 + \mathrm{E}^{\mathrm{B}} \mathrm{h}_1 (1 + \zeta(d))} & \text{dans } \Omega_1 \\ \varepsilon_{11}^2 = -\varepsilon_{11}^1 & \text{dans } \Omega_2 \\ \varepsilon_{11}^3 = \varepsilon_{11}^1 & \text{dans } \Omega_3 \\ \varepsilon_{11}^4 = -\varepsilon_{11}^1 & \text{dans } \Omega_4 \end{cases} \qquad \text{(III-28)}$$

Le problème « de glissement » se réduit, quant à lui, à :

Trouver $\chi_1^\eta \in \mathcal{U}_{ad}^1$ tel que :

$$\int_{\cup\Omega_i} \mathrm{E}^{\mathrm{i}}(d)\chi_{1,1}^\eta(v_{1,1}-\chi_{1,1}^\eta)d\Omega = 0 \quad \forall v_1 \in \mathcal{U}_{ad}^1 \qquad \text{(III-29)}$$

Avec $\mathcal{U}_{ad}^1 = \{\chi_1 \,/\, \chi_1 \text{ périodique en } x_1, [\![\chi_1]\!] = E^\eta\hat{\eta}_1(x_1) \text{ sur } \Gamma_1, \langle\boldsymbol{\varepsilon}(\chi_1^\eta)\rangle_\Omega = 0\}$

D'où, par une intégration par parties en x_1 et un choix de $v_1 = \chi_1^\eta$ partout sauf sur un domaine Ω_i : $\chi_{1,11}^\eta = 0$ sur chaque Ω_i. Pour chaque domaine Ω_i, notons : $\chi_{1,1}^\eta = \varepsilon_{11}^{\eta i}$.

Alors, les champs de déformations microscopiques $\varepsilon(\chi_1^\eta)$ sont constants dans chaque domaine, cela induisant des champs de déplacements linéaires. Il en va donc de même pour le champ de déplacement de glissement et la fonction de glissement unitaire $\underline{\hat{\eta}}_1$, linéaire par morceaux et périodique, est donc définie de manière unique comme :

$$\underline{\hat{\eta}}_1(x_1) = \begin{cases} (l_1/2 + x_1) & \forall x_1 \in [-l_1/2; 0] \\ (l_1/2 - x_1) & \forall x_1 \in [0; l_1/2] \end{cases}$$

Reste donc :

$$\int_{\cup\Omega_i} \mathrm{E}^{\mathrm{i}}(d)\varepsilon_{11}^{\eta i}(v_{1,1}-\varepsilon_{11}^{\eta i})dS = 0 \quad \forall v_1 \in \mathcal{U}_{ad}^1$$

Les champs v_1 considérés ne dépendent pas des directions $\underline{e}_{x_2}$ et $\underline{e}_{x_3}$. Les intégrations selon ces deux directions se ramènent donc à de simples multiplications par la longueur du domaine Ω_i dans les directions considérées. De plus, les modules de Young des matériaux sont considérés constants dans chaque domaine Ω_i.

Il vient donc $\forall v_1 \in \mathcal{U}_{ad}^1$:

$$\mathrm{E}^{\mathrm{A}}h_2\left(\varepsilon_{11}^{\eta 3}\left[v_1-\chi_1^\eta\right]_{-l_1/2}^{0} + \varepsilon_{11}^{\eta 4}\left[v_1-\chi_1^\eta\right]_{0}^{l_1/2}\right)$$
$$+\mathrm{E}^{\mathrm{B}}h_1\left(\varepsilon_{11}^{\eta 1}\left[v_1-\chi_1^\eta\right]_{-l_1/2}^{0} + \zeta(d)\varepsilon_{11}^{\eta 2}\left[v_1-\chi_1^\eta\right]_{0}^{l_1/2}\right) = 0$$

Or $(v_1 - \chi_1^\eta) \in \mathcal{U}_{ad}^0$,

Donc $(v_1 - \chi_1^\eta)(-l_1/2) = (v_1 - \chi_1^\eta)(l_1/2)$ et $(v_1 - \chi_1^\eta)(0^-) = (v_1 - \chi_1^\eta)(0^+)$.

D'où :

$$\left(\mathrm{E}^{\mathrm{B}}h_1\left[\zeta(d)\varepsilon_{11}^{\eta 2} - \varepsilon_{11}^{\eta 1}\right] + \mathrm{E}^{\mathrm{A}}h_2\left[\varepsilon_{11}^{\eta 4} - \varepsilon_{11}^{\eta 3}\right]\right)\left((v_1 - \chi_1^\eta)(l_1/2) - (v_1 - \chi_1^\eta)(0)\right) = 0 \quad \forall v_1 \in \mathcal{U}_{ad}^1$$

$$\Leftrightarrow \mathrm{E}^{\mathrm{B}}h_1\left[\zeta(d)\varepsilon_{11}^{\eta 2} - \varepsilon_{11}^{\eta 1}\right] + \mathrm{E}^{\mathrm{A}}h_2\left[\varepsilon_{11}^{\eta 4} - \varepsilon_{11}^{\eta 3}\right] = 0$$

De plus, sachant que χ_1^η est périodique et $[\![\chi_1^\eta]\!] = E^\eta\hat{\eta}_1(x_1)$ sur l'interface Γ_1, il vient :

$\varepsilon_{11}^{\eta 1} = \varepsilon_{11}^{\eta 3} - E^\eta$ $\quad$ $\varepsilon_{11}^{\eta 2} = \varepsilon_{11}^{\eta 4} + E^\eta$ $\quad$ et $\quad$ $\langle\varepsilon_{11}^{\eta i}\rangle_{\Omega_i} = 0.$

D'où :

$$\chi_{1,1}^{\eta} = \begin{cases} \varepsilon_{11}^{\eta 1} = -E^{\eta} \dfrac{2\mathrm{E}^{\mathrm{A}} h_2}{2\mathrm{E}^{\mathrm{A}} h_2 + \mathrm{E}^{\mathrm{B}} h_1 \left(1 + \zeta(d)\right)} & \text{dans } \Omega_1 \\ \varepsilon_{11}^{\eta 2} = -\varepsilon_{11}^{1} & \text{dans } \Omega_2 \\ \varepsilon_{11}^{\eta 3} = E^{\eta} \dfrac{\mathrm{E}^{\mathrm{B}} h_1 \left(1 + \zeta(d)\right)}{2\mathrm{E}^{\mathrm{A}} h_2 + \mathrm{E}^{\mathrm{B}} h_1 \left(1 + \zeta(d)\right)} & \text{dans } \Omega_3 \\ \varepsilon_{11}^{\eta 4} = -\varepsilon_{11}^{\eta 3} & \text{dans } \Omega_4 \end{cases} \quad \text{(III-30)}$$

Une fois les deux correcteurs élastique et de glissement identifiés, l'énergie libre macroscopique peut être établie comme présenté précédemment en (III-12). Dans le cas unidimensionnel, elle vaut :

$$\mathcal{W} = \frac{(k_1^A + k_1^B)(k_2^A + k_2^B \zeta(D))}{2\left(k_1^A + k_2^A + k_1^B + k_2^B \zeta(D)\right)} E^2 - \frac{k_2^A k_1^B - k_1^A k_2^B \zeta(D)}{k_1^A + k_2^A + k_1^B + k_2^B \zeta(D)} E E^{\eta} + \frac{(k_1^A + k_2^A)(k_1^B + k_2^B \zeta(D))}{2k_1^A + k_2^A + k_1^B + k_2^B \zeta(D)} (E^{\eta})^2$$

<u>Remarque 57</u> : Cette énergie libre est bien la même que celle présentée au Chapitre II pour le modèle couplé endommagement-glissement.

La résolution du problème cellulaire dans le cas particulier unidimensionnel se fait donc analytiquement et permet de retrouver la loi de comportement de barres couplant endommagement et glissement construite au Chapitre II par une approche de modèle rhéologique.

III.4. PROCEDURE D'IDENTIFICATIONS DES PARAMETRES

Nous nous intéressons dans ce paragraphe à l'identification des paramètres de ce modèle que sont les tenseurs $\mathbb{A}, \mathbb{B}$ et $\boldsymbol{C}$ avec que leur dépendance à la variable interne d'endommagement macroscopique D, ainsi que les paramètres des seuils macroscopiques d'endommagement et de glissement.

III.4.i. Détermination des paramètres à identifier

Tenseur $\mathbb{A}$:

Le tenseur $\mathbb{A}$ est le tenseur de raideur élastique endommageable de la plaque. A ce titre, c'est un tenseur d'ordre 4 du plan tangent, symétrique, comprenant des termes de membrane, des termes de flexion, et des termes couplés membrane-flexion. En tant que tenseur symétrique, il est possible de l'écrire sous forme de tenseur d'ordre 2 en utilisant la notation de Voigt. Il se présente donc comme suit, où $\mathbb{A}^{mf} = \mathbb{A}^{fm} : \mathbb{A} = \begin{bmatrix} \mathbb{A}^{mm} & \mathbb{A}^{mf} \\ \mathbb{A}^{fm} & \mathbb{A}^{ff} \end{bmatrix}$.

Chaque tenseur $\mathbb{A}^{\mathrm{mm}}$, $\mathbb{A}^{\mathrm{mf}}$ et $\mathbb{A}^{\mathrm{ff}}$ est alors représenté par une matrice (3x3).

Remarque 58 : Si la plaque présente une symétrie miroir (symétrie par rapport au plan moyen de normale $\underline{e}_{x_3}$), alors les tenseurs $\mathbb{A}^{mf}$ et $\mathbb{A}^{fm}$ sont nuls tant que l'endommagement est nul.

Rappelons que les expressions des tenseurs $\mathbb{A}^{mm}$, $\mathbb{A}^{mf}$ et $\mathbb{A}^{ff}$ en fonction des champs correcteurs de membrane et de flexion $\underline{\chi}$ et $\underline{\xi}$ sont les suivantes :

$$A^{mm}_{\alpha\beta\gamma\delta} = \langle\langle \mathrm{a}_{\alpha\beta\gamma\delta}(d)\rangle\rangle_\Omega - \langle\langle \boldsymbol{\varepsilon}\left(\underline{\chi}^{\alpha\beta}\right) : \mathbb{a}(d) : \boldsymbol{\varepsilon}\left(\underline{\chi}^{\gamma\delta}\right)\rangle\rangle_\Omega \quad \text{(III-31)}$$

$$A^{mf}_{\alpha\beta\gamma\delta} = \langle\langle -x_3 . \mathrm{a}_{\alpha\beta\gamma\delta}(\mathrm{d})\rangle\rangle_\Omega - \langle\langle \boldsymbol{\varepsilon}\left(\underline{\chi}^{\alpha\beta}\right) : \mathbb{a}(\mathrm{d}) : \boldsymbol{\varepsilon}\left(\underline{\xi}^{\gamma\delta}\right)\rangle\rangle_\Omega \quad \text{(III-32)}$$

$$A^{ff}_{\alpha\beta\gamma\delta} = \langle\langle x_3^2 . \mathrm{a}_{\alpha\beta\gamma\delta}(\mathrm{d})\rangle\rangle_\Omega - \langle\langle \boldsymbol{\varepsilon}\left(\underline{\xi}^{\alpha\beta}\right) : \mathbb{a}(\mathrm{d}) : \boldsymbol{\varepsilon}\left(\underline{\xi}^{\gamma\delta}\right)\rangle\rangle_\Omega \quad \text{(III-33)}$$

Les premiers termes de chaque équation (III-31),(III-32),(III-33) correspondent à la loi des mélanges. Cette simple moyenne est pondérée par des termes correcteurs faisant intervenir les champs périodiques $\underline{\chi}$ et $\underline{\xi}$. Ce sont ces champs correcteurs qu'il faut calculer pour procéder à l'identification des paramètres et donc résoudre pour cela les dix problèmes élémentaires satisfaits par les fonctions $\underline{\chi}^{\alpha\beta}$ et $\underline{\xi}^{\alpha\beta}$, avec $(\alpha\beta) = (1,1), (1,2), (2,2)$.

Les paramètres élastiques à identifier pour déterminer le tenseur élastique $\mathbb{A}$ sont donc au nombre de 21.

Le tenseur $\mathbb{A}$ dépend de plus de la variable interne d'endommagement macroscopique D. A ce titre, il est nécessaire de préciser la forme mathématique de sa dépendance. En unidimensionnel, il a été prouvé, au Chapitre II que, si la fonction d'endommagement microscopique était de la forme $\zeta(d) = \frac{\alpha+\gamma d}{\alpha+d}$, alors la composante 1111 du tenseur $\mathbb{A}$ est de la même forme ($A^{mm}_{1111} = A^{0\,mm}_{1111} \frac{\alpha_{1111}+\gamma_{1111} D}{\alpha_{1111}+D}$).

En tridimensionnel, nous faisons l'hypothèse suivant a priori :

Hyp 13. si les coefficients de raideurs microscopiques dépendent de l'endommagement sous la forme : $a_{ijkl}(d) = a^0_{ijkl}\frac{\alpha_{ijkl}+\gamma_{ijkl}d}{\alpha_{ijkl}+d}$, alors les composantes $A^{mm}_{\alpha\beta\gamma\delta}$ et $A^{ff}_{\alpha\beta\gamma\delta}$ des tenseurs de raideur macroscopiques s'écrivent également sous cette forme. A priori, il n'y a aucune raison pour que toutes les composantes du tenseur $\mathbb{A}$ dépendent de la même manière de la variable D, il y a donc un jeu de paramètres $\alpha_{\alpha\beta\gamma\delta}, \gamma_{\alpha\beta\gamma\delta}$ pour chaque composante $A_{\alpha\beta\gamma\delta}$ de ce tenseur. Pour les composantes des tenseurs $\mathbb{A}^{mf}$ et $\mathbb{A}^{fm}$, la dépendance adoptée a priori est du type : $A^{mf}_{\alpha\beta\gamma\delta} = A^{0^{mf}}_{\alpha\beta\gamma\delta} - 1 + \frac{\alpha_{\alpha\beta\gamma\delta}+\gamma_{\alpha\beta\gamma\delta}D}{\alpha_{\alpha\beta\gamma\delta}+D}$. Cette forme est en accord avec la Remarque 58 et le fait que les tenseurs $\mathbb{A}^{\mathrm{mf}}$ et $\mathbb{A}^{\mathrm{fm}}$ sont nuls, en l'absence d'endommagement pour une plaque présentant une symétrie miroir.

Remarque 59 : Dans le cas d'une plaque à symétrie miroir, le terme $A^{0^{mf}}_{\alpha\beta\gamma\delta}$ est nul.

Il sera donc supposé que les composantes du tenseur $\mathbb{A}$ s'exprimeront selon les expressions suivantes, en fonction de l'endommagement :

$$A^{mm}_{\alpha\beta\gamma\delta} = A^{0^{mm}}_{\alpha\beta\gamma\delta}\frac{\alpha^{mm}_{\alpha\beta\gamma\delta} + \gamma^{mm}_{\alpha\beta\gamma\delta}D}{\alpha^{mm}_{\alpha\beta\gamma\delta} + D} \qquad \text{(III-34)}$$

$$A^{mf}_{\alpha\beta\gamma\delta} = A^{0^{mf}}_{\alpha\beta\gamma\delta} - 1 + \frac{\alpha^{mf}_{\alpha\beta\gamma\delta} + \gamma^{mf}_{\alpha\beta\gamma\delta}D}{\alpha^{mf}_{\alpha\beta\gamma\delta} + D} \qquad \text{(III-35)}$$

$$A^{ff}_{\alpha\beta\gamma\delta} = A^{0^{ff}}_{\alpha\beta\gamma\delta}\frac{\alpha^{ff}_{\alpha\beta\gamma\delta} + \gamma^{ff}_{\alpha\beta\gamma\delta}D}{\alpha^{ff}_{\alpha\beta\gamma\delta} + D} \qquad \text{(III-36)}$$

Les paramètres $\alpha^{mm}_{\alpha\beta\gamma\delta}$, $\gamma^{mm}_{\alpha\beta\gamma\delta}$ nécessaires pour définir la dépendance en D du tenseur $\mathbb{A}$ sont donc au nombre de 42 = 21x2 (α, γ). Ils n'ont pas, a priori, de caractère tensoriel.

De plus, il est nécessaire de faire la distinction, au sein du béton, entre le comportement en traction et celui en compression car le béton est un matériau au comportement dissymétrique. Pour ce faire, la fonction d'endommagement microscopique intègre le comportement dissymétrique via l'utilisation d'une fonction Heaviside H et s'exprime donc comme suit :

$$\zeta(d, x) = \frac{\alpha_+ + \gamma_+ d}{\alpha_+ + d}H(x) + \frac{\alpha_- + \gamma_- d}{\alpha_- + d}H(-x)$$

H est ici la fonction de Heaviside qui s'applique à tout réel x. x peut, dans notre cas, être une composante ou un invariant des tenseurs de déformation ou contrainte.

avec 4 paramètres :

- (α_+, γ_+) pour le comportement en traction
- (α_-, γ_-) pour le comportement en compression

Par conséquent, chaque composante du tenseur $\mathbb{A}$ doit prendre en compte deux paramètres supplémentaires pour représenter la dissymétrie entre le comportement en traction et en compression du matériau.

Les paramètres supplémentaires nécessaires pour représenter la dissymétrie du comportement du béton armé endommagé sont alors au nombre de 42= 21x2 (α_-, γ_-).

Pour finir, comme expliqué en Hyp 10, la variable d'endommagement microscopique d est discrétisée en deux variables d'endommagement d^1 et d^2 représentant respectivement l'endommagement en moitié supérieure et inférieure de la plaque (voir Figure III-5).

La fonction d'endommagement microscopique ζ se voit alors une nouvelle fois enrichie, à la manière de la loi GLRC_DM (Markovic 2006), pour prendre en compte cette discrétisation :

$$\zeta(d,x) = \frac{1}{2}\left[\left(\frac{\alpha_+^1 + \gamma_+^1 d^1}{\alpha_+^1 + d^1} + \frac{\alpha_+^2 + \gamma_+^2 d^2}{\alpha_+^2 + d^2}\right)H(x) + \left(\frac{\alpha_-^1 + \gamma_-^1 d^1}{\alpha_-^1 + d^1} + \frac{\alpha_-^2 + \gamma_-^2 d^2}{\alpha_-^2 + d^2}\right)H(-x)\right] \quad \text{(III-37)}$$

La variable d'endommagement microscopique étant alors considérée comme uniforme dans la demi-épaisseur de la cellule de base, il en résulte une discrétisation similaire de la variable d'endommagement macroscopique D désormais discrétisée en D^1 et D^2.

84=21x4 ($\alpha_+^1, \gamma_+^1, \alpha_-^1, \gamma_-^1$) paramètres supplémentaires sont alors nécessaires pour déterminer la dépendance en D^1 et D^2 du tenseur $\mathbb{A}$.

Hyp 14. Finalement, l'hypothèse sera faite que les composantes du tenseur $\mathbb{A}$ évoluent en fonction de l'endommagement de la manière suivante :

$$A_{\alpha\beta\gamma\delta}^{mm} = \frac{A_{\alpha\beta\gamma\delta}^{0^{mm}}}{2}\left(\frac{\alpha_{\alpha\beta\gamma\delta_\pm}^{1mm} + \gamma_{\alpha\beta\gamma\delta_\pm}^{1mm} D^1}{\alpha_{\alpha\beta\gamma\delta_\pm}^{1mm} + D^1} + \frac{\alpha_{\alpha\beta\gamma\delta_\pm}^{2mm} + \gamma_{\alpha\beta\gamma\delta_\pm}^{2mm} D^2}{\alpha_{\alpha\beta\gamma\delta_\pm}^{2mm} + D^2}\right)H(\pm x) \quad \text{(III-38)}$$

$$A_{\alpha\beta\gamma\delta}^{mf} = A_{\alpha\beta\gamma\delta}^{0^{mf}} - 1 + \frac{1}{2}\left(\frac{\alpha_{\alpha\beta\gamma\delta_\pm}^{1mf} + \gamma_{\alpha\beta\gamma\delta_\pm}^{1mf} D^1}{\alpha_{\alpha\beta\gamma\delta_\pm}^{1mf} + D^1} + \frac{\alpha_{\alpha\beta\gamma\delta_\pm}^{2mf} + \gamma_{\alpha\beta\gamma\delta_\pm}^{2mf} D^2}{\alpha_{\alpha\beta\gamma\delta_\pm}^{2mf} + D^2}\right)H(\pm x) \quad \text{(III-39)}$$

$$A_{\alpha\beta\gamma\delta}^{ff} = \frac{A_{\alpha\beta\gamma\delta}^{0ff}}{2}\left(\frac{\alpha_{\alpha\beta\gamma\delta_\pm}^{1ff} + \gamma_{\alpha\beta\gamma\delta_\pm}^{1ff} D^1}{\alpha_{\alpha\beta\gamma\delta_\pm}^{1ff} + D^1} + \frac{\alpha_{\alpha\beta\gamma\delta_\pm}^{2ff} + \gamma_{\alpha\beta\gamma\delta_\pm}^{2ff} D^2}{\alpha_{\alpha\beta\gamma\delta_\pm}^{2ff} + D^2}\right)H(\pm x) \quad \text{(III-40)}$$

où H est la fonction Heaviside et $x = \begin{cases} E_{\alpha\beta} & \text{si } \alpha\beta = \gamma\delta \text{ dans } A_{\alpha\beta\gamma\delta} \\ \det(\boldsymbol{E}) & \text{sinon} \end{cases}$

Ce choix particulier pour x permet de faire intervenir la composante du tenseur de déformation pour les termes diagonaux du tenseur de raideur $\mathbb{A}$ et un invariant pour les termes hors diagonaux, conservant ainsi la grande symétrie du tenseur $\mathbb{A}$. Cela implique également de considérer la fonction d'endommagement suivante :

$$\zeta(d,x) = \frac{1}{2}\left[\left(\frac{\alpha_+^1 + \gamma_+^1 d^1}{\alpha_+^1 + d^1} + \frac{\alpha_+^2 + \gamma_+^2 d^2}{\alpha_+^2 + d^2}\right)H(x) + \left(\frac{\alpha_-^1 + \gamma_-^1 d^1}{\alpha_-^1 + d^1} + \frac{\alpha_-^2 + \gamma_-^2 d^2}{\alpha_-^2 + d^2}\right)H(-x)\right]$$

où H est la fonction Heaviside et $x = \begin{cases} E_{\alpha\beta} & \text{si } \alpha\beta = \gamma\delta \text{ dans } A_{\alpha\beta\gamma\delta} \\ \det(\boldsymbol{E}) & \text{sinon} \end{cases}$

Remarque 60 : La dissymétrie traction-compression de la fonction microscopique d'endommagement ζ est appliquée via une fonction Heaviside qui est non-définie en zéro. Il est donc nécessaire de choisir une valeur pour les paramètres d'endommagement du béton lorsque $\boldsymbol{E} = \boldsymbol{0}$. Arbitrairement, ***les paramètres de traction sont affectés à la valeur nulle de déformation macroscopique****.*

Au total 21x9=189 paramètres sont nécessaires pour déterminer entièrement le tenseur $\mathbb{A}$ y compris sa dépendance dissymétrique aux variables d'endommagement macroscopiques D^1 et D^2.

Tenseur $\boldsymbol{C}$:

Le tenseur $\boldsymbol{C}$ est le tenseur de « raideur » de glissement. A ce titre, c'est un tenseur d'ordre 2 du plan tangent à la plaque qui s'exprime comme suit, les exposants grecs indiquant si le glissement considéré est celui en grille supérieure ($\rho, \pi = 1$) ou inférieure ($\rho, \pi = 2$).

L'expression du tenseur $\boldsymbol{C}$ en fonction du champ correcteur de glissement $\underline{\chi}^{\eta}$ est :

$$\boldsymbol{C}_{\alpha\gamma}^{\rho\pi} = \langle\langle \boldsymbol{\varepsilon}\left(\underline{\chi}^{\eta_\alpha^\rho}\right) : \mathbb{a}(\mathrm{d}) : \boldsymbol{\varepsilon}\left(\underline{\chi}^{\eta_\gamma^\pi}\right)\rangle\rangle_\Omega$$

Les indices du tenseur $\boldsymbol{C}$ indiquent la direction des glissements considérés, les exposants indiquent la zone dans laquelle ces glissements ont lieu. Les situations nécessaire à la l'identification des caractéristiques du tenseur $\boldsymbol{C}$ sont alors au nombre de 10, considérant :

1. 2 glissements selon x_1 en zone 1 : C_{11}^{11}
2. 2 glissements selon x_1 en zone 2 : C_{11}^{22}
3. 1 glissement selon x_1 en zone 1 et 1 en zone 2 : C_{11}^{12}
4. 5. 6. Idem pour x_2 : $C_{22}^{11},\ C_{22}^{22},\ C_{22}^{12}$
7. 1 glissement selon x_1 et 1 selon x_2 en zone 1 : C_{12}^{11}
8. 1 glissement selon x_1 et 1 selon x_2 en zone 2 : C_{12}^{22}
9. 1 glissement selon x_1 en zone 1 et 1 selon x_2 en zone 2 : C_{12}^{12}
10. 1 glissement selon x_1 en zone 2 et 1 selon x_2 en zone 1 : C_{12}^{21}

Le nombre de paramètres nécessaires pour décrire les composantes « élastiques » du tenseur $\boldsymbol{C}$ est alors de 10.

En considérant la même fonction d'endommagement microscopique que celle décrite précédemment pour le tenseur $\mathbb{A}$, la dépendance en D des composantes du tenseur $\boldsymbol{C}$ est supposée comme suit :

$$C_{\alpha\gamma}^{\rho\pi} = C_{\alpha\gamma}^{0\rho\pi} \frac{\alpha_{\alpha\gamma}^{C\rho\pi} + \gamma_{\alpha\gamma}^{C\rho\pi} D}{\alpha_{\alpha\gamma}^{C\rho\pi} + D} \qquad \text{(III-41)}$$

Le nombre de paramètres nécessaires pour identifier la dépendance en D^1 et D^2 du tenseur $\boldsymbol{C}$ s'élève alors à 40 (10x2(α,γ)x2(D^1, D^2)).

Remarque 61 : Le problème aux correcteurs de glissement (III-9) est écrit à déformation macroscopique $\boldsymbol{E}$ *nulle. A ce titre,* ***le tenseur*** $\boldsymbol{C}$ ***ne prend pas en compte de dissymétrie entre traction et compression*** *puisque cette dissymétrie est induite par celle de la fonction microscopique d'endommagement* ζ*, basée sur le signe de* $\boldsymbol{E}$ *fixé dans le problème considéré (voir (III-37)).*

Au total 50 paramètres sont nécessaires pour déterminer entièrement le tenseur $\boldsymbol{C}$ y compris sa dépendance aux variables d'endommagement macroscopiques D^1 et D^2.

Tenseur $\mathbb{B}$:

Le tenseur $\mathbb{B}$ est le tenseur de couplage élasticité endommageable –glissement. A ce titre, c'est un tenseur d'ordre 3 du plan tangent à la plaque. Il comprend des termes de membrane et de flexion et peut s'écrire, en adoptant la notation de Voigt, sous la forme suivante : $\mathbb{B} = \begin{bmatrix} \mathbb{B}^{\pi^m} \\ \mathbb{B}^{\pi^f} \end{bmatrix}$, l'exposant π indiquant si le glissement considéré est celui en grille supérieure ($\pi = 1$) ou inférieure ($\pi = 2$).

Les expressions des tenseurs $\mathbb{B}^m$ et $\mathbb{B}^f$ en fonction des champs correcteurs de membrane et de flexion $\underline{\chi}$ et $\underline{\xi}$ et du champ correcteur de glissement $\underline{\chi}^{\eta^\pi}$ sont les suivantes :

$$\mathbb{B}^{\pi^m}_{\alpha\beta\gamma} = \langle\langle \boldsymbol{\varepsilon}\left(\underline{\chi}^{\alpha\beta}\right) : \mathbb{a}(d) : \boldsymbol{\varepsilon}\left(\underline{\chi}^{\eta^\pi_\gamma}\right)\rangle\rangle_\Omega$$

$$\mathbb{B}^{\pi^f}_{\alpha\beta\gamma} = \langle\langle \boldsymbol{\varepsilon}\left(\underline{\xi}^{\alpha\beta}\right) : \mathbb{a}(d) : \boldsymbol{\varepsilon}\left(\underline{\chi}^{\eta^\pi_\gamma}\right)\rangle\rangle_\Omega$$

Remarque 62 : Il a été démontré (voir Remarque 51 et ANNEXE 4) que le tenseur $\mathbb{B}$ *est nul tant que la cellule et les matériaux sont symétriques par rapport au plan passant par le point O et de normale l'axe directeur de l'acier qui glisse. C'est le cas tant que l'endommagement est nul. Par conséquent, il n'est pas nécessaire de déterminer les propriétés non-endommagées du tenseur* $\mathbb{B}$*.*

En considérant la même fonction d'endommagement microscopique que celle décrite précédemment, et supposant que chaque composante du tenseur $\mathbb{B}$ suit la même évolution que la composante identifiée en unidimensionnel, il vient :

$$B^\pi_{\alpha\beta\gamma} = \frac{\gamma^{B\pi}_{\alpha\beta\gamma} D}{\alpha^{B\pi}_{\alpha\beta\gamma} + D} \qquad \text{(III-42)}$$

Les deux premiers indices $\alpha\beta$ des composantes du tenseur $\mathbb{B}$ se réfèrent aux déformations macroscopiques $E^{\alpha\beta}$ et le dernier indice γ se réfère à la déformation de glissement E^η_γ. L''exposant π indiquant si le glissement considéré est celui en grille supérieure ($\pi = 1$) ou inférieure ($\pi = 2$), il y a donc, à zone de glissement fixée, 6 composantes pour les tenseurs $\mathbb{B}^{\pi m}$ et $\mathbb{B}^{\pi f}$, donc en tout 24 composantes pour le tenseur $\mathbb{B}$ complet.

Le nombre de paramètres nécessaires pour identifier la dépendance en D_1 et D_2 du tenseur $\mathbb{B}$ s'élève alors à 96=24x2(α, γ)x2(D^1, D^2).

Remarque 63 : Le problème aux correcteurs de glissement (III-9) est écrit à déformation macroscopique $\boldsymbol{E}$ *nulle alors que le problème aux correcteurs élastiques (III-8) est écrit avec une déformation macroscopique* $\boldsymbol{E}$ *non nulle et signée. Le tenseur* $\mathbb{B}$ *devrait donc inclure une dissymétrie traction-compression. Cependant, si cela est fait, la continuité des efforts généralisés lors du passage à zéro avec changement de signe de* $\boldsymbol{E}$ *ne sera pas assurée. En effet, les efforts généralisés, à déformation*

macroscopique (membrane et flexion) nulle s'expriment comme suit : $\begin{pmatrix}\mathbf{N}\\ \mathbf{M}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\mathbb{B}^{\pi m}{}_{(D)}\\ \mathbb{B}^{\pi f}{}_{(D)}\end{pmatrix}.\underline{E}^{\eta\pi}$*. Dès lors, à partir du moment où* $\underline{E}^{\eta\pi}$ *est non nulle, introduire une dissymétrie dans le tenseur* $\mathbb{B}$ *risque d'introduire une discontinuité des efforts généralisés. Pour cette raison,* ***il a été choisi de ne pas introduire de dissymétrie traction-compression dans le tenseur*** $\mathbb{B}$**.**

Au total ce sont 335 paramètres qu'il faut identifier pour être capables de décrire complètement les tenseurs $\mathbb{A}$, $\mathbb{B}$ et $\boldsymbol{C}$.

Les illustrations numériques de la procédure d'identification qui seront présentées ultérieurement montreront qu'il est possible de réduire le nombre de paramètres du modèle.

Paramètres de seuils :

Les seuils macroscopiques d'endommagement et de glissement ont été définis en (III-25) comme suit. Ils sont donc paramétrés par **deux constantes de seuils** $\boldsymbol{k_0}$ **et** $\boldsymbol{\sigma_{crit}}$, qui correspondent aux constantes de seuils microscopiques pour les comportements choisis du béton et de l'interface.

$$f_{d^\pi}(G^\pi) = G^\pi - Hk_0 \leq 0 \quad \text{et} \quad f^\alpha_{\eta^\pi}\left(\Sigma^{\eta\pi}_\alpha\right) = \left(\Sigma^{\eta\pi}_\alpha\right)^2 - (H\sigma_{crit})^2$$

Il est considéré ici que la valeur de k_0 est connue par le fait que la loi de comportement à l'échelle microscopique du béton est maîtrisée (pour plus de détail sur la manière de choisir k_0 se reporter à l'ANNEXE 1). La valeur de σ_{crit}, elle, est directement reliée au seuil de rupture en traction du béton et à la géométrie des aciers. Ainsi, σ_{crit} peut être approximé comme suit : $\sigma_{crit} = 2\pi r_{moy} L_{moy} \sigma_t$, où r_{moy} et L_{moy} sont respectivement le rayon et l'espacement moyens des aciers dans la cellule de base, et σ_t est la contrainte seuil de rupture en traction du béton.

III.4.ii. Géométrie de la cellule de base réaliste

Les composantes des différents tenseurs sont obtenues en résolvant 10 problèmes élémentaires satisfaits par les correcteurs sur la cellule de base. En pratique, une cellule de base différente de celle qui a permis de mettre en place la forme mathématique du modèle est utilisée pour ces résolutions et le calcul des tenseurs de raideurs. La dépendance selon l'endommagement de ces tenseurs est obtenue en procédant à une succession d'homogénéisations élastiques, à variables d'endommagement fixée mais différente pour chaque homogénéisation, sur une cellule de base dont les propriétés mécaniques d'une partie du béton sont progressivement dégradées suivant une loi d'endommagement explicitée ci-dessous. Cette cellule de base représente, le plus exactement possible, la géométrie d'une période de la plaque étudiée en schématisant les armatures d'acier sous forme d'une grille (et non plus à travers une couche homogène équivalente). Elle reprend les hypothèses de répartition des variables internes d'endommagement et de glissement faites lors de la construction du modèle que sont les Hyp 6, Hyp 7, Hyp 9 et Hyp 10.

Géométrie :

Les aciers sont représentés par des barres de section cylindrique d'axes directeurs x_1 ou x_2.

La résolution des différents problèmes satisfait par les correcteurs s'effectue sur cette nouvelle cellule de base qui représente exactement la géométrie d'une « période » de la plaque réelle avec les aciers cylindriques à leur position réelle.

Un exemple de maillage de la cellule de base est présenté Figure III-8. Il s'agit ici d'une plaque de 20cm d'épaisseur pour un taux de ferraillage de 0,8% avec des aciers espacés de 12,5cm.

Remarque 64 : les aciers en x_1 et en x_2 d'une même grille d'armature sont à une position selon x_3 différente dans l'épaisseur de la plaque, induisant une différence significative pour les raideurs en flexion de la plaque autour de x_1 ou x_2.

Pour les calculs effectués et présentés par la suite, la cellule de base a été maillée avec des éléments finis linéaires tétraédriques raffinés au niveau des barres d'acier de manière à représenter au mieux leur géométrie cylindrique. L'ordre de grandeur du nombre de degrés de liberté total est de 100 000.

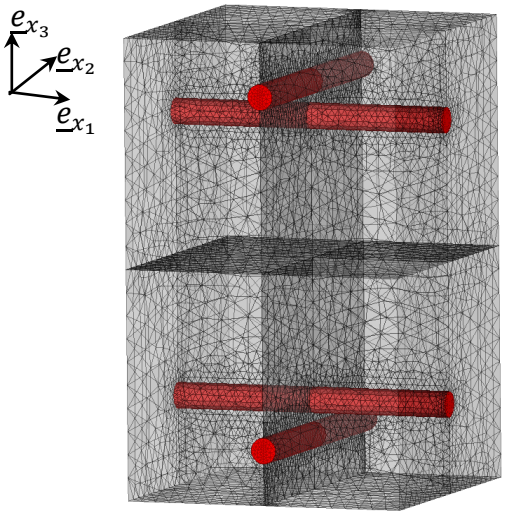


Figure III-8 : Exemple de maillage d'une cellule de base pour l'identification des paramètres (aciers en rouge, béton en bleu)

Le maillage de la cellule de base est généré automatiquement, par une procédure python pour le mailleur Salomé, à partir des paramètres géométriques suivants :

1. Epaisseur de la plaque
2. et 3. Espacement des armatures selon x_1 et x_2
4. 5. 6. et 7. Diamètres des quatre barres d'armatures
8. 9. 10. et 11.Excentrement des quatre barres d'armatures

Remarque 65 : Si la plaque étudiée contient moins de barres d'armatures (pas d'armatures en grille supérieure, ou pas d'armatures selon x_1, par exemple), ces barres seront quand même maillées mais on leur affectera les caractéristiques du béton.

Définition des zones endommagées

Les calculs élastiques qui vont être menés sur la cellule de base pour l'identification des paramètres nécessitent de distinguer au sein de la cellule de base une partie de béton endommagé. Pour se placer au plus près des hypothèses qui ont été faites lors de la construction de la forme mathématique du modèle, la moitié du béton, selon une direction privilégiée, est considérée comme endommagée. Ainsi sont définies **deux zones de béton :**

une zone de béton sain et une zone de béton endommagé, représentant chacune une moitié de la cellule de base. De plus, comme expliqué au Chapitre II, le glissement interne périodique est considéré comme résultant d'une dissymétrie dans l'endommagement du béton autour de la barre d'armatures qui glisse. Par conséquent, il est nécessaire de **recourir à au moins deux cellules d'homogénéisation selon que le glissement a lieu dans la direction x_1 ou x_2**. Pour finir, la construction du modèle prend en compte la discrétisation de la variable interne d'endommagement dans l'épaisseur de la plaque en deux variables représentant l'endommagement en moitié supérieure et inférieure de la plaque comme présenté sur la Figure III-5. De la même manière, le glissement peut avoir lieu indépendamment le long des aciers de la nappe supérieure ou inférieure d'armatures.

Vont donc être définies les deux cellules de base présentées sur la Figure III-9 pour l'identification des paramètres, selon la direction de glissement considérée. Ces deux cellules diffèrent par la position de la zone endommagée, « orientée » soit selon l'axe x_1 soit selon l'axe x_2.

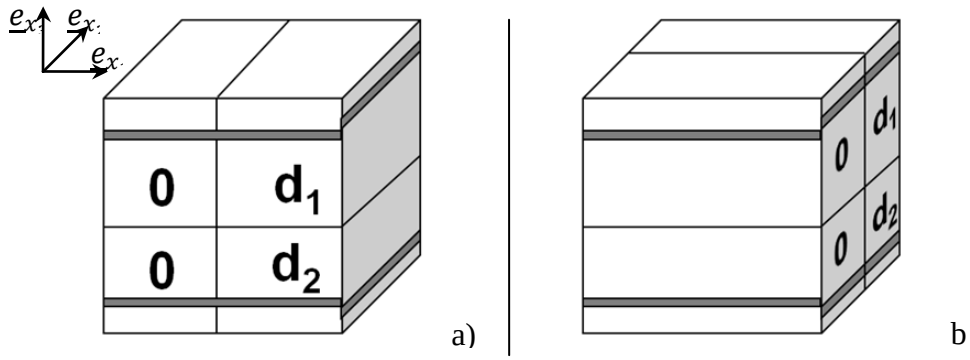


Figure III-9 : Définition des zones de béton sain et endommagé pour le glissement selon x_1 (a) et le glissement selon x_2 (b)

Un traitement particulier va être appliqué à l'identification du comportement en distorsion/cisaillement plans. En effet, dans ce cas il n'y a pas de distinction à faire quant au signe de la sollicitation appliquée. Le choix a donc été fait de considérer, pour les sollicitations élémentaires de distorsion, une cellule entièrement endommagée (présentée en Figure III-10) selon la même loi d'endommagement que les deux cellules présentées ci-dessus mais exprimée dans un repère tourné de 45° par rapport aux armatures. Ainsi, lors de l'application d'une sollicitation de distorsion, le matériau béton sera entièrement endommagé avec une direction principale à 45° endommagée avec les paramètres de traction et l'autre à -45° avec les paramètres de compression. Cela va être détaillé plus après dans la partie comportement des matériaux.

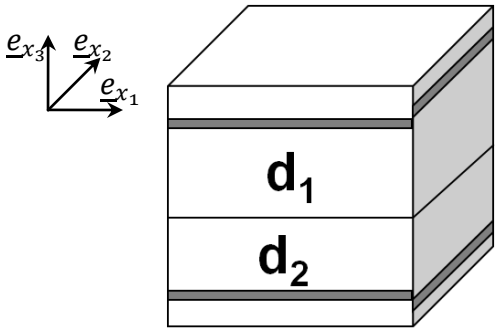


Figure III-10 : Définition des zones de béton endommagé pour l'étude du comportement de distorsion

Remarque 66 : Ces cellules de base seront référencées sous le nom CELLULE X pour la cellule présentée en Figure III-9 *(a), CELLULE Y pour la cellule présentée en* Figure III-9 *(b) et CELLULE T la cellule présentée en* Figure III-10*. Les deux premières appellations font référence à un repère* $(\underline{e}_X, \underline{e}_Y, \underline{e}_Z)$ *identique au repère* $(\underline{e}_{x_1}, \underline{e}_{x_2}, \underline{e}_{x_3})$ *de la* Figure III-9*, la dernière appellation utilise le T pour Total puisque la totalité de la plaque est endommagée.*

III.4.iii. Comportement des matériaux

- Les **aciers** sont considérés comme **élastiques isotropes**, paramétrés par E^A et ν^A.
- Le **béton « sain »** est considéré comme **élastique isotrope**, paramétrés par E^B et ν^B.
- Quant au **béton endommagé**, il est considéré comme **élastique orthotrope**, avec des **raideurs élastiques affaiblies par un endommagement microscopique dont la valeur est fixée arbitrairement.**

Dans ce paragraphe, la loi d'endommagement permettant de définir les raideurs élastiques affaiblies du béton endommagé est décrite.

Remarque 67 : Pour l'identification des paramètres de distorsion dans le plan, correspondant à la déformation macroscopique E_{12}*, la même énergie libre va être utilisée mais relativement à un repère tourné à 45° par rapport au repère orthogonal défini par les armatures.*

La forme de la densité d'énergie libre microscopique pour le béton endommagé, dans le repère défini par les armatures sera donc :

$$\mathcal{W}(\boldsymbol{\varepsilon}, \boldsymbol{E}, d) = \frac{\lambda}{2}\zeta(d, tr\boldsymbol{E})(tr\boldsymbol{\varepsilon})^2 + \mu\sum_{\alpha=1}^{2}\zeta(d, E_{\alpha\alpha})\varepsilon_{\alpha\alpha}^2 + \mu\zeta(d,0)\left[\sum_{i=1}^{3}\varepsilon_{i3}^2 + \varepsilon_{12}^2\right]$$

où ζ est la fonction d'endommagement microscopique définie au paragraphe III.4.i, λ et μ sont les coefficients de Lamé du matériau.

La forme et le repère propre du champ de déformations microscopique dans le béton étant intrinsèquement liés au chargement imposé et à l'histoire de ce chargement, ils ne peuvent donc être définis a priori. Pour cette raison, la décision a été prise de faire dépendre la fonction d'endommagement microscopique ζ du champ de déformation macroscopique imposé $\boldsymbol{E}$, dans le repère défini par les armatures.

Remarque 68 : Cette ***énergie libre est donc à variable d'endommagement scalaire mais à endommagement orthotrope*** *du fait de la prise en compte de paramètres d'endommagement différents selon si la déformation macroscopique imposée correspondant au terme microscopique considéré est positive ou négative.*

Cette énergie libre est associée à une fonction seuil à paramètre constant et une loi d'écoulement normal :

$$f_{d^\alpha}(g^\alpha) = g^\alpha - k_0 \qquad \text{avec } g^\alpha = \frac{\partial \mathcal{W}}{\partial d^\alpha} \qquad \text{et} \qquad \dot{d}^\alpha = \dot{\lambda}_{d^\alpha}\frac{\partial f_{d^\alpha}}{\partial g^\alpha} \quad \text{avec } \dot{\lambda}_{d^\alpha} \text{ un scalaire positif}$$

Le paramètre k_0 est identifié à partir d'un test en traction simple uni-axiale sur le béton seul comme suit, en notant σ_d l'effort critique de primo-endommagement :

- Les contraintes microscopiques dans le béton en traction simple élastique uniaxiale s'expriment comme suit :

$$\sigma_{11} = a_{1111}\varepsilon_{11} + a_{1122}\varepsilon_{22} + a_{1133}\varepsilon_{33} = \sigma_d$$
$$\sigma_{22} = a_{2211}\varepsilon_{11} + a_{2222}\varepsilon_{22} + a_{2233}\varepsilon_{33} = 0$$
$$\sigma_{33} = a_{3311}\varepsilon_{11} + a_{3322}\varepsilon_{22} + a_{3333}\varepsilon_{33} = 0$$
$$\sigma_{12} = a_{1212}\varepsilon_{12} = 0 = \sigma_{13} = \sigma_{23}$$

- Il est donc possible d'exprimer ε_{11} en fonction de σ_d .
- Ainsi à l'initiation de l'endommagement ($d = 0$), il est possible d'exprimer le seuil de primo-endommagement en fonction de σ_d et déterminer ainsi k_0.

III.4.iv. Conditions limites et chargements

Conditions limites

La cellule de base définie ci-dessus est affectée des conditions limites de bords libres sur les faces supérieures et inférieures $\partial\Omega_{sup}$ et $\partial\Omega_{inf}$ et de conditions de périodicité sur les faces latérales $\partial\Omega_{lat}$.

Chargements

Les chargements utilisés pour déterminer les champs correcteurs microscopiques élastiques et de glissement sont définis ici.

Pour la détermination des correcteurs élastiques de membrane, le chargement a été imposé via une déformation moyenne unitaire $E_{\alpha\beta} = \langle\varepsilon(u)\rangle_\Omega$ sur toute la cellule de base, avec une interface acier-béton collée. Cette condition de chargement a été imposée par l'opérateur `PRE_EPSI` de Code_Aster. Cet opérateur impose un second membre élémentaire égal à :

$$\int_{V_E} E_{\alpha\beta}^{impo} : \mathbb{a} : \varepsilon(v^*) dV_E$$

La détermination des correcteurs élastiques de flexion utilise le même opérateur avec une variation de courbure moyenne unitaire imposée $K_{\alpha\beta} = \langle x_3\varepsilon(u)\rangle_\Omega$, donc avec $\int_{V_E} x_3 E_{\alpha\beta}^{impo} : \mathbb{a} : \varepsilon(v^*) dV_E$.

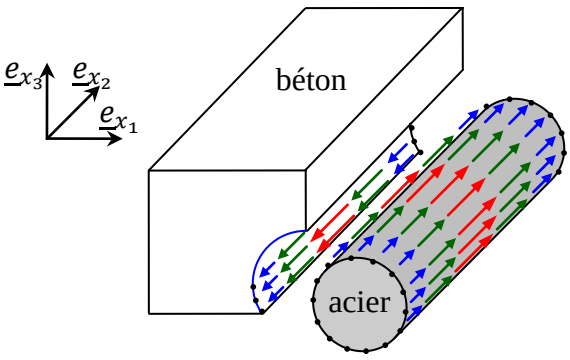


Figure III-11 : Représentation du glissement relatif acier-béton

Pour finir, les correcteurs de glissement ont été déterminés par l'imposition d'un déplacement relatif unitaire entre l'acier correspondant au correcteur à identifier et le béton avoisinant. Ainsi, si le correcteur à identifier est $\chi_1^{\eta 1}$, le déplacement relatif sera imposé entre

le béton et l'acier de la grille supérieure dont l'axe principal est orienté selon $\underline{e}_{x_1}$. Plus précisément, ce déplacement relatif est imposé entre la surface latérale de l'acier circulaire et celle du béton qui l'entoure, dans la direction de l'axe directeur de l'acier (voir Figure III-11) et la fonction de glissement prend la forme présentée en Figure III-7 et rappelée ci-dessous en Figure III-12.

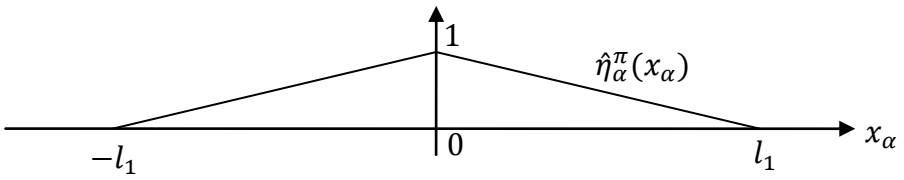


Figure III-12 : Fonction de glissement « chapeau » $\hat{\eta}_\alpha^\pi$ périodique pour la direction x_α et d'amplitude unitaire

Ce déplacement relatif a été imposé à l'aide de l'opérateur `LIAISON_GROUP` de Code_Aster, qui relie les degrés de libertés de groupes de nœuds par un scalaire (ou une fonction) imposé(e).

III.4.v. Combinaisons de chargements et de cellules de base

Une fois expliqués les conditions limites, les chargements et les cellules de base sur et avec lesquels les calculs d'identification sont effectués, il est nécessaire de définir les différentes combinaisons chargements/cellules de base utilisées pour ces calculs.

Le principe sous-jacent à ces combinaisons est d'appliquer, à chaque cellule de base, tous les problèmes aux correcteurs décrits dans les équations (III-8)(III-9), puis de faire varier les valeurs de la variable d'endommagement de manière à déterminer l'évolution des composantes en fonction de cette variable et donc les paramètres α et γ à identifier :

- 4 valeurs d'endommagement microscopique ont été choisies : 0.5, 2.0, 10.0, 20.0
- pour déterminer la dépendance en D^1 et D^2 des composantes à identifier, les calculs ont été effectués sur des cellules endommagées uniquement en partie supérieure, la partie inférieure étant laissée saine ($D^1 \neq 0, D^2 = 0$), puis le contraire ($D^1 = 0, D^2 \neq 0$).

Remarque 69 : Le calcul a également été effectué avec plus et moins de valeurs d'endommagement, de manière à étudier la qualité de l'identification par moindres carrés des paramètres α et γ de la fonction d'évolution (voir ANNEXE 5). ***L'erreur relative optimale (meilleur compromis entre nombre de calculs et valeur de l'erreur) semble être pour les 4 valeurs d'endommagement $\boldsymbol{d^i}$ choisies.***

La déformation macroscopique $\boldsymbol{E}$ imposée est unitaire et positive ou négative pour déterminer la dissymétrie traction-compression. Le même tenseur de déformation macroscopique est utilisé pour le calcul de membrane et de flexion. Dans ce dernier cas, le tenseur est alors multiplié simplement par la position dans l'épaisseur de la cellule de base x_3.

Remarque 70 : La déformation macroscopique de distorsion E_{12} est imposée égale à 0.5 puisque c'est ce qui correspond à une déformation unitaire (le terme anti-diagonal de la déformation étant symétrique) : $E_{12} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$. Elle ne prend pas de valeur négative puisque cela n'a pas d'influence sur la dissymétrie.

Le Tableau III-1, ci-dessous, résume toutes les combinaisons de cellules de base et de chargements considérés pour la détermination des champs correcteurs élastiques correspondants au problème (III-8). Pour chaque déformation macroscopique élémentaire présentée, deux calculs sont effectués pour déterminer les correcteurs de membrane et de flexion.

Tableau III-1 : Combinaisons de cellules de base, de chargements et de valeurs d'endommagement pour la résolution des problèmes aux correcteurs élastiques

CELLULES			E_{11}	E_{22}	E_{12}	$E_1^{\eta 1}$	$E_2^{\eta 1}$	$E_1^{\eta 2}$	$E_2^{\eta 2}$	D^1	D^2
X	Y	T	±1.0	0	0	0	0	0	0	0.0	0.0
X	Y	T	±1.0	0	0	0	0	0	0	0.5	0.0
X	Y	T	±1.0	0	0	0	0	0	0	2.0	0.0
X	Y	T	±1.0	0	0	0	0	0	0	10.	0.0
X	Y	T	±1.0	0	0	0	0	0	0	20.	0.0
X	Y	T	±1.0	0	0	0	0	0	0	0.0	0.5
X	Y	T	±1.0	0	0	0	0	0	0	0.0	2.0
X	Y	T	±1.0	0	0	0	0	0	0	0.0	10.
X	Y	T	±1.0	0	0	0	0	0	0	0.0	20.
X	Y	T	0	±1.0	0	0	0	0	0	0.0	0.0
X	Y	T	0	±1.0	0	0	0	0	0	0.5	0.0
X	Y	T	0	±1.0	0	0	0	0	0	2.0	0.0
X	Y	T	0	±1.0	0	0	0	0	0	10.	0.0
X	Y	T	0	±1.0	0	0	0	0	0	20.	0.0
X	Y	T	0	±1.0	0	0	0	0	0	0.0	0.5
X	Y	T	0	±1.0	0	0	0	0	0	0.0	2.0
X	Y	T	0	±1.0	0	0	0	0	0	0.0	10.
X	Y	T	0	±1.0	0	0	0	0	0	0.0	20.
X	Y	T	0	0	0.5	0	0	0	0	0.0	0.0
X	Y	T	0	0	0.5	0	0	0	0	0.5	0.0
X	Y	T	0	0	0.5	0	0	0	0	2.0	0.0
X	Y	T	0	0	0.5	0	0	0	0	10.	0.0
X	Y	T	0	0	0.5	0	0	0	0	20.	0.0
X	Y	T	0	0	0.5	0	0	0	0	0.0	0.5
X	Y	T	0	0	0.5	0	0	0	0	0.0	2.0
X	Y	T	0	0	0.5	0	0	0	0	0.0	10.
X	Y	T	0	0	0.5	0	0	0	0	0.0	20.

Les composantes $\alpha\beta\gamma\delta$ du tenseur $\mathbb{A}$, lorsque $\alpha\beta \neq \gamma\delta$, sont recomposées par combinaison de deux champs correcteurs : $\chi^{\alpha\beta}$ et $\chi^{\gamma\delta}$. Il est possible que ces deux champs correcteurs aient été identifiés sur deux cellules de base différentes (par exemple le champ χ^{11} est identifié sur la cellule X, et le champ χ^{12} sur la cellule T), et il serait ne serait pas correct de combiner ces deux champs qui ne partagent pas le même espace. Dans ce cas là, la composante à identifier $\alpha\beta\gamma\delta$ sera calculée par combinaison sur les deux cellules X et T (en utilisant un

champ correcteur χ^{11} calculé sur la cellule T et un champ correcteur χ^{12} calculé sur la cellule X) et l'identification se fera par moindres carrés entre les deux séries de points obtenues. Il en ira de même pour les tenseurs $\mathbb{B}$ et $\boldsymbol{C}$.

La déformation macroscopique de glissement $\boldsymbol{E^{\eta}}$ est imposée unitaire également pour chaque barre d'acier des deux grilles, séparément, comme résumé au Tableau III-2.

Remarque 71 : La CELLULE T n'est pas utilisée pour la détermination du glissement puisqu'elle ne comporte pas deux zones d'endommagement différent. Elle conduirait donc à des correcteurs de glissement induisant une énergie de déformation nulle sur toute la cellule.

Tableau III-2 : Combinaisons de cellules de base, de chargements et de valeurs d'endommagement pour la résolution des problèmes aux correcteurs de glissement

CELLULES		E_{11}	E_{22}	E_{12}	$E_1^{\eta 1}$	$E_2^{\eta 1}$	$E_1^{\eta 2}$	$E_2^{\eta 2}$	D^1	D^2
X	Y	0	0	0	1	0	0	0	0.0	0.0
X	Y	0	0	0	1	0	0	0	0.5	0.0
X	Y	0	0	0	1	0	0	0	2.0	0.0
X	Y	0	0	0	1	0	0	0	10.	0.0
X	Y	0	0	0	1	0	0	0	20.	0.0
X	Y	0	0	0	1	0	0	0	0.0	0.5
X	Y	0	0	0	1	0	0	0	0.0	2.0
X	Y	0	0	0	1	0	0	0	0.0	10.
X	Y	0	0	0	1	0	0	0	0.0	20.
X	Y	0	0	0	0	1	0	0	0.0	0.0
X	Y	0	0	0	0	1	0	0	0.5	0.0
X	Y	0	0	0	0	1	0	0	2.0	0.0
X	Y	0	0	0	0	1	0	0	10.	0.0
X	Y	0	0	0	0	1	0	0	20.	0.0
X	Y	0	0	0	0	1	0	0	0.0	0.5
X	Y	0	0	0	0	1	0	0	0.0	2.0
X	Y	0	0	0	0	1	0	0	0.0	10.
X	Y	0	0	0	0	1	0	0	0.0	20.
X	Y	0	0	0	0	0	1	0	0.0	0.0
X	Y	0	0	0	0	0	1	0	0.5	0.0
X	Y	0	0	0	0	0	1	0	2.0	0.0
X	Y	0	0	0	0	0	1	0	10.	0.0
X	Y	0	0	0	0	0	1	0	20.	0.0
X	Y	0	0	0	0	0	1	0	0.0	0.5
X	Y	0	0	0	0	0	1	0	0.0	2.0
X	Y	0	0	0	0	0	1	0	0.0	10.
X	Y	0	0	0	0	0	1	0	0.0	20.

X	Y	0	0	0	0	0	0	1	0.0	0.0
X	Y	0	0	0	0	0	0	1	0.5	0.0
X	Y	0	0	0	0	0	0	1	2.0	0.0
X	Y	0	0	0	0	0	0	1	10.	0.0
X	Y	0	0	0	0	0	0	1	20.	0.0
X	Y	0	0	0	0	0	0	1	0.0	0.5
X	Y	0	0	0	0	0	0	1	0.0	2.0
X	Y	0	0	0	0	0	0	1	0.0	10.
X	Y	0	0	0	0	0	0	1	0.0	20.

III.4.vi. Paramètres identifiés pour une plaque à symétrie miroir

Une fois effectués les calculs par éléments finis détaillés ci-dessus, les composantes des tenseurs $\mathbb{A}$, $\mathbb{B}$ et $\boldsymbol{C}$ sont reconstituées pour chaque valeur d'endommagement choisie. Ces valeurs numériques des composantes servent alors de base pour identifier les paramètres d'endommagement α et γ de chaque composante par la méthode des moindres carrés.

Rappelons que l'hypothèse avait été faite que l'évolution des composantes suivait une loi de décroissance du type : $\frac{\alpha+\gamma D}{\alpha+D}$ (cf (III-34)).

Les paramètres présentés ci-après concernent une plaque à symétrie miroir dont la géométrie correspond à celle présentée à la Figure III-8. Le béton a été considéré comme ayant un module de Young de 24GPa, un coefficient de Poisson de 0.2, l'acier un module de Young de 200GPa pour un coefficient de Poisson de 0.3. Les paramètres d'endommagement pour le béton sont un α unitaire en traction et égal à 4 pour la compression et un γ égal à -0.05 en traction et 0.5 en compression.

Tenseur $\mathbb{A}$

Les composantes du tenseur de raideur $\mathbb{A}$ ont été calculées à endommagement nul puis pour quatre valeurs d'endommagement D^1 et D^2. Les paramètres permettant de déterminer la valeur élastique et l'évolution en fonction de l'endommagement de chaque composante du tenseur $\mathbb{A}$ ont ensuite été identifiés par la méthode des moindres carrés, en se basant sur l'hypothèse que les composantes s'expriment comme posé en équations (III-38), (III-39), et (III-40).

La Figure III-13 ci-dessous présente le résultat de l'identification des paramètres pour la composante 1111 du tenseur de raideur membranaire $\mathbb{A}^{mm}$ pour des sollicitations de traction ($E_{11} = 1$). Les courbes indiquées par le numéro 1 sont celles identifiées à endommagement D^2 nul, celles indiquées 2 étant identifiées à D^1 nul.

Remarque 72 : Il y a une très bonne adéquation entre la courbe identifiée et les points correspondant aux calculs numériques.

Les paramètres identifiés par moindres carrés sont présentés dans le Tableau III-3.

Tableau III-3: Paramètres identifiés pour la composante $\mathbb{A}^{mm}_{1111}$ en sollicitation de traction

A^{0mm}_{1111}(Pa)	α^{1mm}_{1111+}(-)	γ^{1mm}_{1111+}(-)	α^{2mm}_{1111+}(-)	γ^{2mm}_{1111+}(-)
$5{,}318.10^9$	1,984	$7{,}027.10^{-2}$	1,984	$7{,}021.10^{-2}$

Remarque 73 : Les valeurs des paramètres correspondant à l'endommagement D^1 sont sensiblement égales à celles des paramètres correspondant à l'endommagement D^2. En effet, l'identification présentée ci-dessus concerne une plaque à symétrie miroir. L'étude d'une plaque ne possédant pas cette propriété sera présentée ci-après.

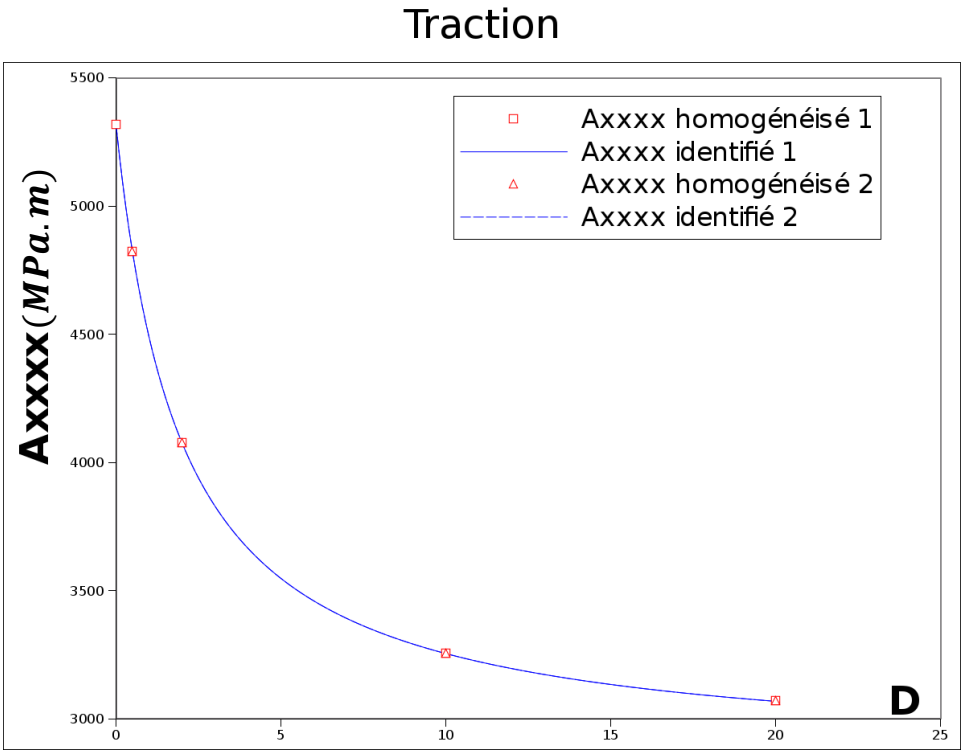


Figure III-13 : Evolution de la composante $\mathbb{A}^{mm}_{1111}$ en fonction de l'endommagement *D* pour des sollicitations de traction. Comparaison résultats numérique (points rouges)/identification (courbes bleues).

La Figure III-14 et le Tableau III-4 ci-dessous présentent les résultats de l'identification des paramètres pour la composante 1111 du tenseur de raideur membranaire $\mathbb{A}^{mm}$ pour des sollicitations de compression ($E_{11} = -1$).

Remarque 74 : Les résultats pour les sollicitations de compression sont bien différents de ceux pour les sollicitations de traction. Les paramètres identifiés fournissent la même raideur élastique A^{0mm}_{1111} mais des paramètres d'endommagement α et γ différents.

Tableau III-4 : Paramètres identifiés pour la composante 1111 du tenseur de membrane $\mathbb{A}^{mm}$ en sollicitation de compression

A^{0mm}_{1111}(Pa)	α^{1mm}_{1111-}(-)	γ^{1mm}_{1111-}(-)	α^{2mm}_{1111-}(-)	γ^{2mm}_{1111-}(-)
$5{,}318.10^{9}$	4,543	$4{,}848.10^{-1}$	4,543	$4{,}848.10^{-1}$

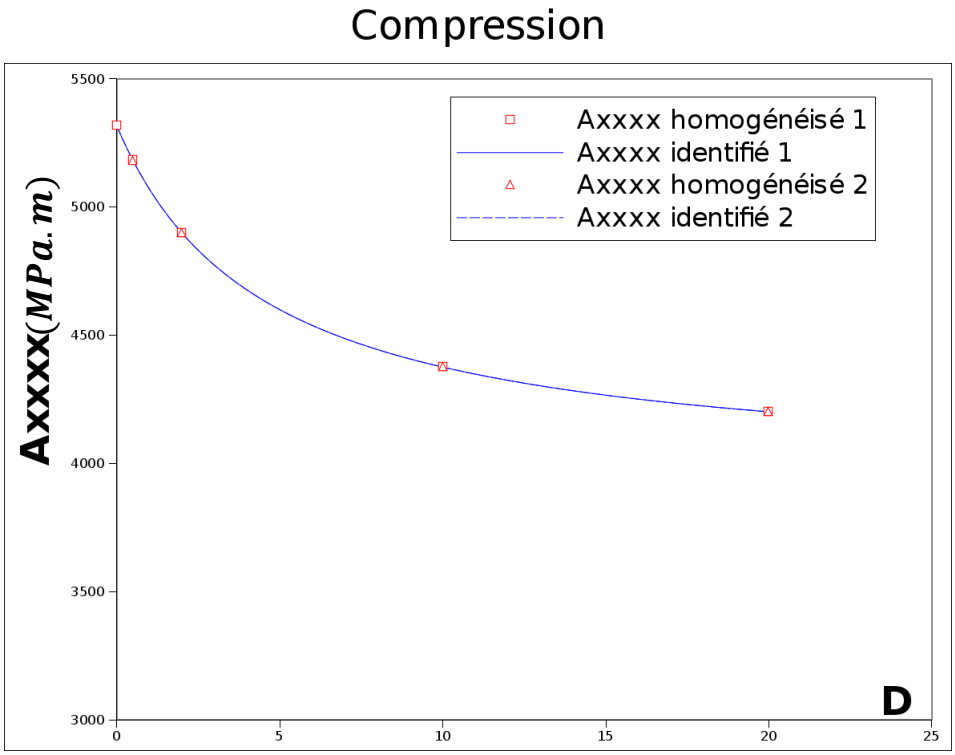


Figure III-14 : Evolution de la composante 1111 du tenseur $\mathbb{A}^{mm}$ en fonction de l'endommagement *D* pour des sollicitations de compression. Comparaison résultats numérique (points rouges)/identification (courbes bleues).

Sont présentés en Figure III-15 et Tableau III-5 les résultats de l'identification de paramètres lorsque plusieurs cellules d'homogénéisation sont utilisées (pour les composantes $\alpha\beta\gamma\delta$ lorsque $\alpha\beta \neq \gamma\delta$, voir le paragraphe III.4.v). Chaque cellule est représentée par une série de points et il est bien possible de distinguer, sur les figures deux séries de points pour chaque composante au milieu desquelles passe la courbe bleue correspondant à l'identification des paramètres par moindres carrés.

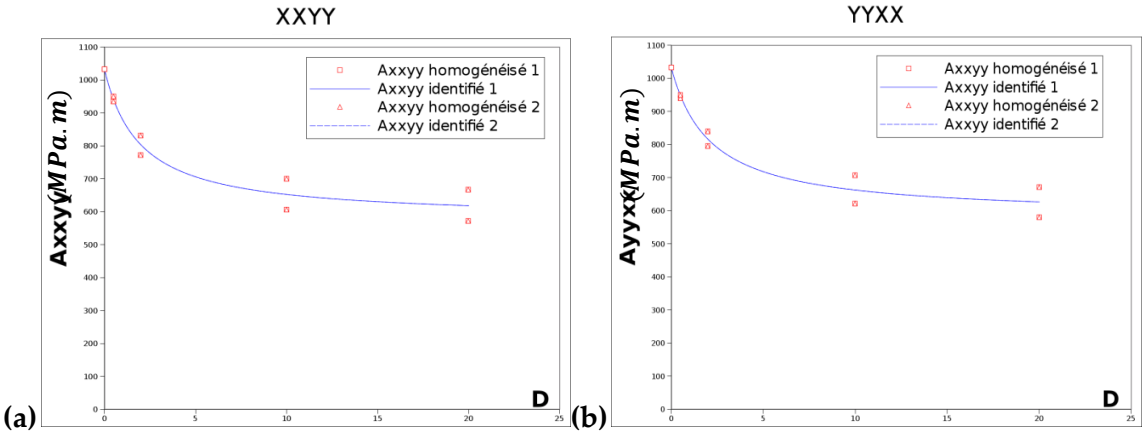


Figure III-15 : Evolution des composantes 1122 (a) et 2211 (b) du tenseur $\mathbb{A}^{mm}$ en fonction de l'endommagement *D* pour des sollicitations de compression. Comparaison résultats numérique (points rouges)/identification (courbes bleues).

Le Tableau III-5 souligne que l'identification des paramètres ne fournit pas un tenseur de raideur membranaire symétrique. Cela posant des problèmes relativement évidents quant à la consistance du tenseur obtenu avec la mécanique des milieux continus en petite

déformations, la décision a été prise d'utiliser la moyenne des deux valeurs obtenues, comme valeur des paramètres d'endommagement pour ces termes hors diagonale.

Tableau III-5 : Paramètres identifiés pour les composantes 1122 et 2211 du tenseur de membrane $\mathbb{A}^{mm}$ en sollicitation de traction

	A^{0mm}(Pa)	α^{1mm}(-)	γ^{1mm}(-)	α^{2mm}(-)	γ^{2mm}(-)
1122	$1\,,032.10^3$	1,971	$1{,}205.10^{-1}$	1,971	$1{,}204.10^{-1}$
2211	$1{,}032.10^3$	2,150	$1{,}309.10^{-1}$	2,150	$1{,}309.10^{-1}$

Remarque 75 : Cette perte de symétrie s'explique par le choix de la valeur de l'Heaviside en zéro. En effet, si l'on choisit que lorsque la sollicitation est nulle, l'Heaviside correspondante prend les valeurs des paramètres de traction, alors les composantes 1122 et 2211 pour la traction seront symétriques alors que celles pour la compression ne le seront pas et vice-versa. ***La perte de symétrie est donc un avatar dû à l'utilisation de la fonction Heaviside dans l'identification de paramètres, ou plus généralement à la forme de la fonction d'endommagement microscopique $\boldsymbol{\xi(d,x)}$ adoptée.***

Remarque 76 : Cependant, la perte de symétrie n'entraine pas d'erreur significative sur l'identification des paramètres et les paramètres identifiés pour la composante 1122 sont bien représentatifs de l'évolution de la composante 2211. Ainsi, le choix de la valeur moyenne pour rétablir la symétrie du tenseur de raideur $\mathbb{A}$ semble acceptable.

Les résultats pour les composantes du tenseur de raideur de flexion $\mathbb{A}^{ff}$ sont sensiblement similaires à ceux présentés pour le tenseur de raideur membranaire.

Le résultat de l'identification des paramètres pour le tenseur de raideur de couplage membrane-flexion $\mathbb{A}^{mf}$ est présenté sur la Figure III-16.

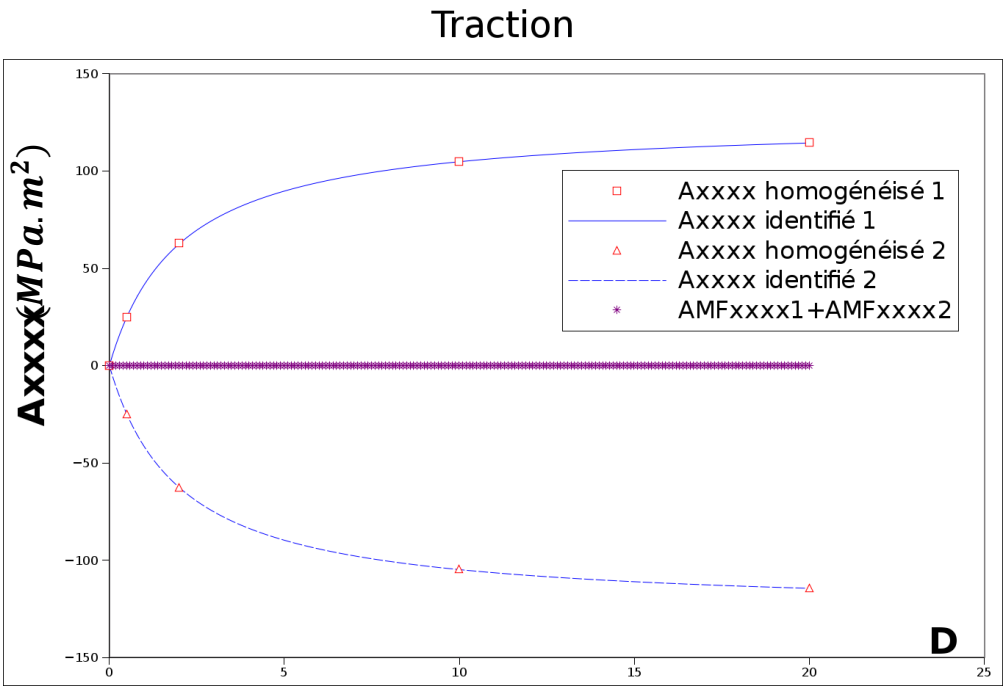


Figure III-16 : Evolution de la composante 1111 du tenseur de couplage membrane/flexion $\mathbb{A}^{mf}$ en fonction de l'endommagement *D* pour des sollicitations de traction membranaire. Comparaison résultats numérique (points rouges)/identification (courbes bleues).

Tableau III-6 : Paramètres identifiés pour la composante 1111 du tenseur de couplage membrane/flexion $\mathbb{A}^{mf}$ en sollicitation de traction membranaire

$A_{1111}^{0mf}(Pa.m^2)$	α_{1111+}^{1mf}(-)	γ_{1111+}^{1mf}(-)	α_{1111+}^{2mf}(-)	γ_{1111+}^{2mf}(-)
$2{,}381.10^{-2}$	2,023	$2{,}529.10^{2}$	2,022	$-2{,}509.10^{2}$

Remarque 77 : Cette fois-ci, les résultats diffèrent entre l'endommagement en partie supérieure ou inférieure de la plaque. En effet, si la partie inférieure de la plaque est plus endommagée que la partie supérieure, cela va favoriser la création de déformations de flexion positives sous chargement membranaire pur, alors que le contraire favorisera la création de déformations de flexion négatives.

Remarque 78 : La plaque sur laquelle l'identification est effectuée possède une symétrie miroir. En conséquence, la raideur élastique A_{1111}^{0mf} est nulle et la somme des deux évolutions présentées en Figure III-16, à endommagement uniforme dans l'épaisseur ($D^1 = D^2$), correspond à la série de points violets et est donc nulle.

L'ensemble des résultats pour cet exemple d'identification est résumé en ANNEXE 6.

Au final, le tenseur homogénéisé $\mathbb{A}$ exhibe des propriétés d'orthotropie, avec des composantes $\alpha\alpha\alpha\beta$ nulles, en corrélation avec la répartition orthotrope des armatures et le comportement orthotrope du béton endommagé, selon le même repère d'orthotropie. Ce tenseur présente également une dissymétrie entre traction et compression et prend en compte la possible dissymétrie miroir de la plaque.

De manière générale, la forme des dépendances des raideurs microscopiques choisies dans la loi d'endommagement microscopique du béton se retrouve bien à l'échelle macroscopique (conformément à ce qui avait été proposé a priori). 4 valeurs discrètes d'endommagement apparaissent suffisantes pour estimer les paramètres α, γ régissant la dépendance à l'endommagement des raideurs macroscopiques. Numériquement, les propriétés de symétrie attendues du tenseur de raideur $\mathbb{A}$ se retrouvent bien.

Tenseur $\mathbb{B}$

Les composantes du tenseur de raideur $\mathbb{B}$ ont été calculées à endommagement nul puis pour quatre valeurs d'endommagement D^1 et D^2. Les paramètres permettant de déterminer l'évolution en fonction de l'endommagement de chaque composante du tenseur $\mathbb{B}$ ont ensuite été identifiés par la méthode des moindres carrés, en se basant sur l'hypothèse que les composantes s'expriment comme posé en équation (III-42).

Sur la Figure III-17 sont présentés les résultats de l'identification de paramètres pour la composante 111 du tenseur de couplage élasticité membranaire/glissement $\mathbb{B}^{1^m}$.

Tableau III-7 : Paramètres identifiés pour la composante 111 du tenseur de couplage élasticité membranaire/glissement $\mathbb{B}^{1^m}$.

$\alpha_{111}^{1^1m}$(-)	$\gamma_{111}^{1^1m}(MPa.m^2)$	$\alpha_{111}^{2^1m}$(-)	$\gamma_{111}^{2^1m}(MPa.m^2)$
1,155	$-9{,}171.10^{1}$	1,244	1,724

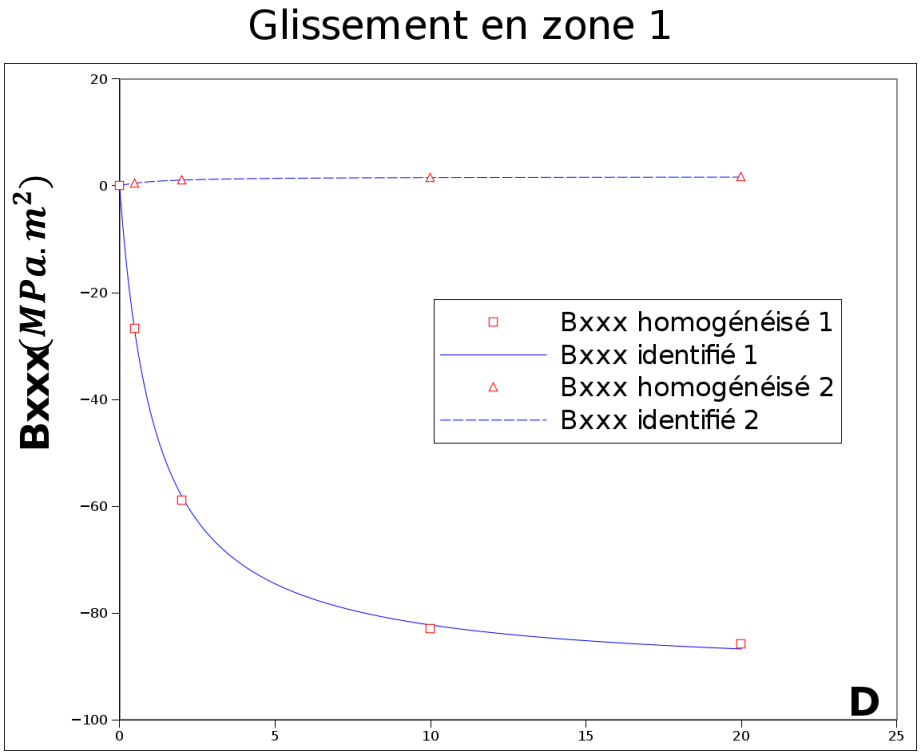


Figure III-17 : Evolution de la composante 111 du tenseur de couplage élasticité membranaire/glissement $\mathbb{B}^{1^m}$ en fonction de l'endommagement D. Comparaison résultats numérique (points rouges)/identification (courbes bleues).

Le glissement en zone supérieure 1 semble peu affecté par l'évolution de l'endommagement en zone inférieure 2. Cette constatation se confirme pour toutes les composantes du tenseur $\mathbb{B}$ (voir ANNEXE 6), à savoir que le glissement dans une zone est peu affecté par l'évolution de l'endommagement dans l'autre zone.

L'expression du tenseur $\mathbb{B}$ en fonction de l'endommagement peut donc être simplifiée pour devenir :

$$\mathbb{B}^{1^m}_{\alpha\beta\gamma}(D^1, D^2) = \mathbb{B}^{1^m}_{\alpha\beta\gamma}(D^1) = \frac{\gamma^{1m}_{\alpha\beta\gamma} D^1}{\alpha^{1m}_{\alpha\beta\gamma} + D^1}$$

$$\mathbb{B}^{2^m}_{\alpha\beta\gamma}(D^1, D^2) = \mathbb{B}^{2^m}_{\alpha\beta\gamma}(D^2) = \frac{\gamma^{2m}_{\alpha\beta\gamma} D^2}{\alpha^{2m}_{\alpha\beta\gamma} + D^2}$$

Cette constatation réduit donc le nombre de paramètres à identifier pour le tenseur de raideur $\mathbb{B}$ de 96 à 48.

La Figure III-18 ci-dessous présente le résultat de l'identification de paramètres pour la composante 121 du tenseur de couplage élasticité membranaire/glissement $\mathbb{B}^{1^m}$.

Bien qu'une dépendance à l'endommagement soit observable, l'amplitude de la variation est négligeable comparée à la variation des composantes 111 et 221 du même tenseur. Il en va de même pour les trois autres glissements concernant toujours la composante 12α, et cette composante est donc supposée nulle.

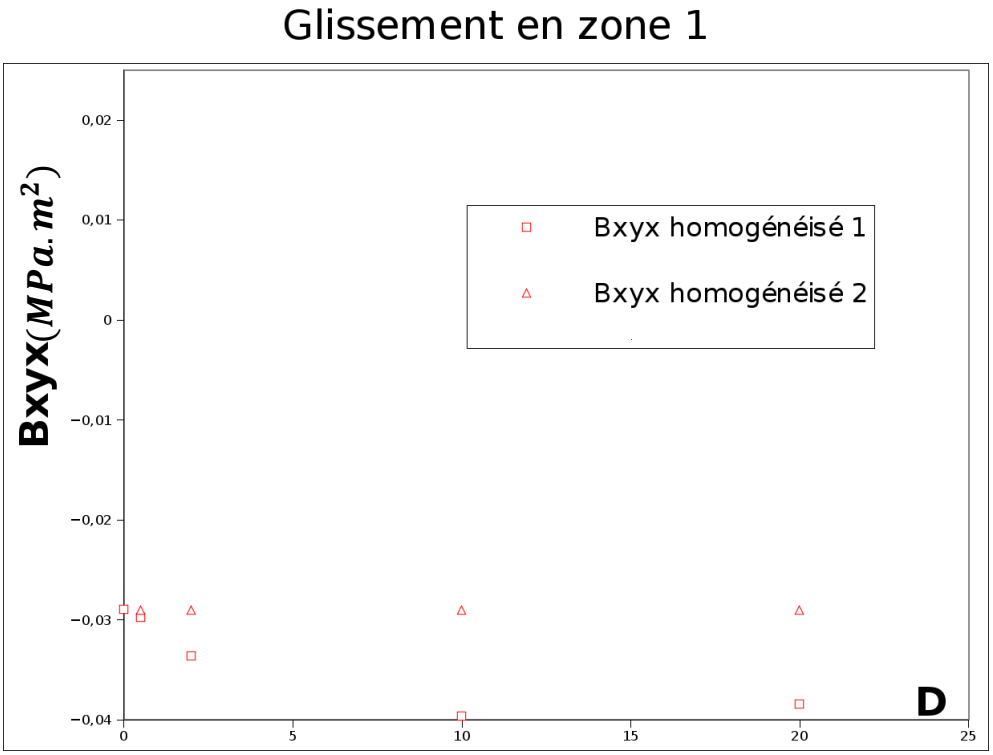


Figure III-18 : Evolution de la composante 121 du tenseur de couplage élasticité membranaire/glissement $\mathbb{B}^{1^m}$ en fonction de l'endommagement D. Résultats numériques.

Par conséquent, la composante 12α du tenseur $\mathbb{B}^{\pi^m}$ sera considérée comme nulle. Ainsi, le glissement le long de l'acier supérieur orienté selon x_1 n'induit pas de déformations de distorsion et vice-versa. Les sollicitations de distorsion pure ne seront donc pas à même de créer de déformation résiduelle via le mécanisme choisi de glissement.

Les composantes du tenseur de couplage élasticité de flexion/glissement $\mathbb{B}^f$ suivent sensiblement la même évolution que celle du tenseur $\mathbb{B}^m$. Il est cependant nécessaire de noter que les évolutions des composantes du tenseur de couplage élasticité de flexion/glissement $\mathbb{B}^f$ diffèrent entre l'évolution par rapport à l'endommagement en partie supérieure et celle par rapport à l'endommagement en partie inférieure de la plaque, de la même manière et pour les mêmes raisons que pour le tenseur de couplage membrane/flexion $\mathbb{A}^{mf}$ (voir la Figure III-19).

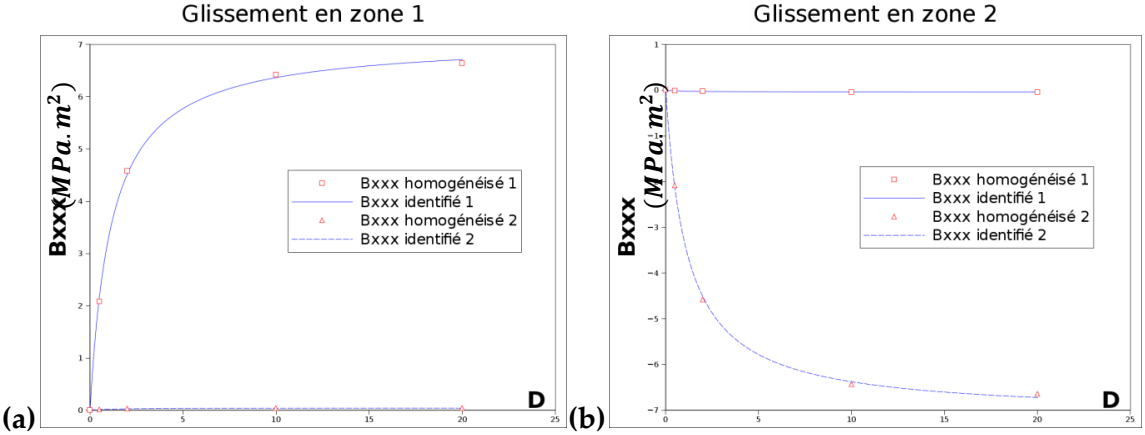


Figure III-19 : Evolution de la composante 111 des tenseurs $\mathbb{B}^{1^f}$ (a) et $\mathbb{B}^{2^f}$ (b) en fonction de l'endommagement D. Comparaison résultats numérique/identification.

Tenseur $\boldsymbol{C}$

Les composantes du tenseur de raideur $\boldsymbol{C}$ ont été calculées à endommagement nul puis pour quatre valeurs d'endommagement D^1 et D^2. Les paramètres permettant de déterminer l'évolution en fonction de l'endommagement de chaque composante du tenseur $\boldsymbol{C}$ ont ensuite été identifiés par la méthode des moindres carrés, en se basant sur l'hypothèse que les composantes s'expriment comme posé en équation (III-41).

La Figure III-20 présente les résultats de l'identification des paramètres pour la composante 11 du tenseur de raideur de glissement C^{11} correspondant à deux glissements selon $\underline{e}_{x_1}$ de la grille d'armatures supérieure. La même constatation sur la dépendance à l'endommagement en zone inférieure 2 que pour le tenseur de couplage $\mathbb{B}$ apparaît alors, à savoir que le glissement dans une zone est peu affecté par l'évolution de l'endommagement dans l'autre zone. L'expression du tenseur $\boldsymbol{C}$ en fonction de l'endommagement peut donc être simplifiée pour devenir :

$$C_{\alpha\beta}^{11}(D^1, D^2) = C_{\alpha\beta}^{11}(D^1) = C_{\alpha\beta}^{0^{11}} \frac{\alpha_{\alpha\beta}^{11} + \gamma_{\alpha\beta}^{11} D^1}{\alpha_{\alpha\beta}^{11} + D^1}$$

$$C_{\alpha\beta}^{22}(D^1, D^2) = C_{\alpha\beta}^{22}(D^2) = C_{\alpha\beta}^{0^{22}} \frac{\alpha_{\alpha\beta}^{22} + \gamma_{\alpha\beta}^{22} D^2}{\alpha_{\alpha\beta}^{22} + D^2}$$

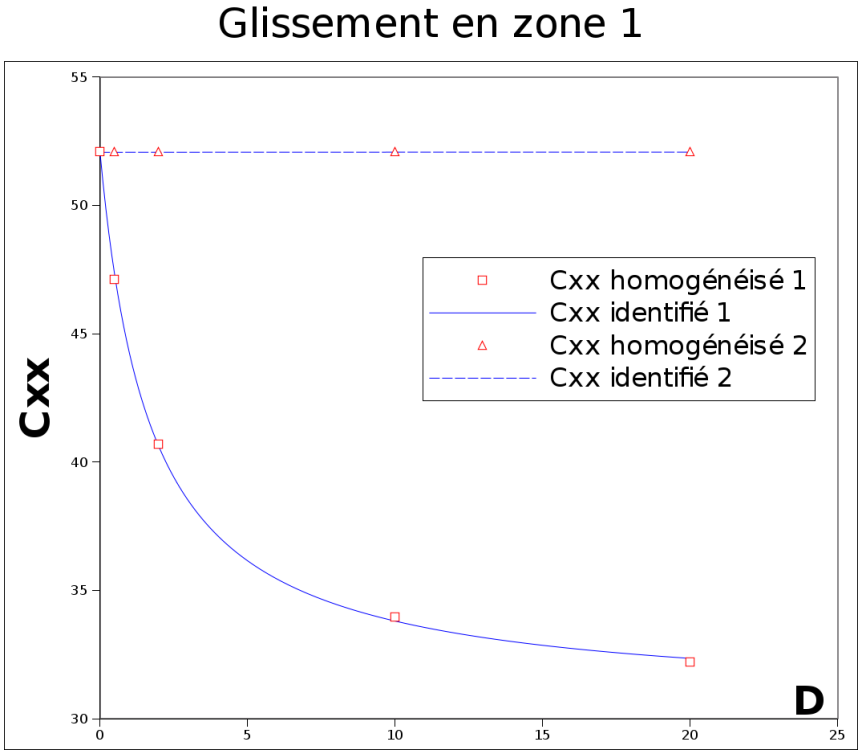


Figure III-20 : Evolution de la composante 11 du tenseur de raideur de glissement C^{11} en fonction de l'endommagement D. Comparaison résultats numérique/identification.

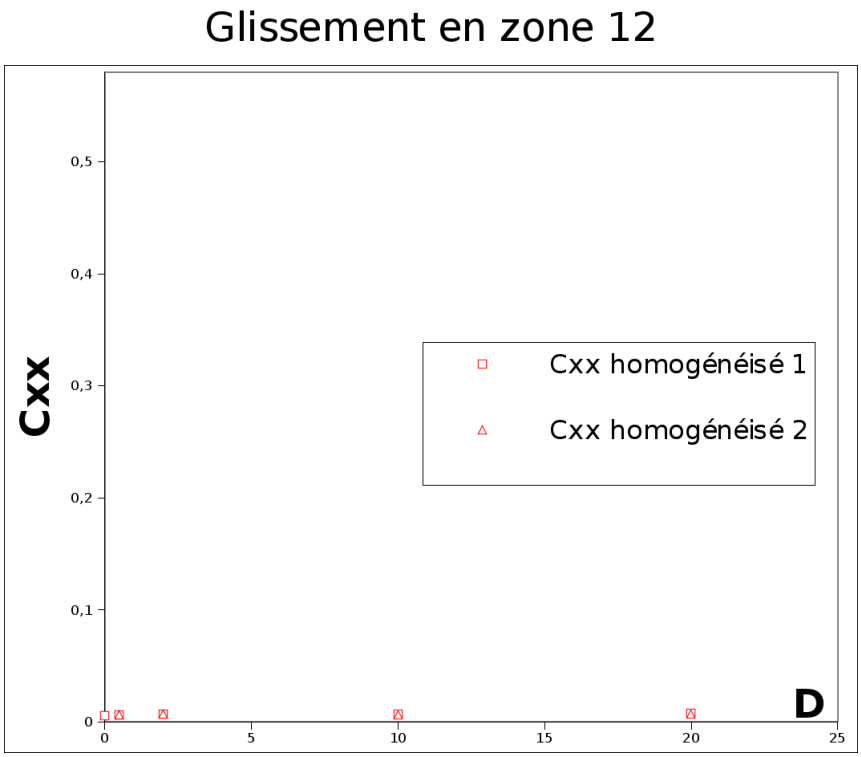


Figure III-21 : Evolution de la composante 11 du tenseur de raideur de glissement C^{12} en fonction de l'endommagement D. Résultats numérique.

De plus, l'observation de la Figure III-21, qui présente les résultats de l'identification des paramètres pour la composante 11 du tenseur de raideur de glissement C^{12} correspondant à un glissement selon $\underline{e}_{x_1}$ de la grille d'armatures supérieure 1 et un glissement selon $\underline{e}_{x_1}$ de la grille d'armatures inférieure 2, permet de conclure qu'il n'y a pas de couplage entre ces deux glissements et que le tenseur $\boldsymbol{C}^{12}$ est toujours nul.

Par conséquent, le nombre paramètres à identifier pour le tenseur de raideur de glissement $\boldsymbol{C}$ peut se réduire à 18.

III.4.vii. Paramètres identifiés pour une plaque sans symétrie miroir

De manière à étudier la capacité du modèle à prendre en compte une rupture de la symétrie miroir de la plaque par l'introduction d'aciers différents en grille supérieure et inférieure, l'étude d'une plaque sans symétrie miroir a été réalisée. Le maillage utilisé pour cette étude est présenté en Figure III-22. Les aciers de la grille supérieurs correspondent à des HA8 (4mm de rayon) alors que ceux de la grille inférieure correspondent à des HA16 (8mm de rayon). Le reste des propriétés géométriques et matériaux de la plaque reste inchangé par rapport à l'étude de la plaque à symétrie miroir.

Les mêmes calculs d'identification que précédemment sont effectués et les résultats les plus significatifs sont présentés ci-après.

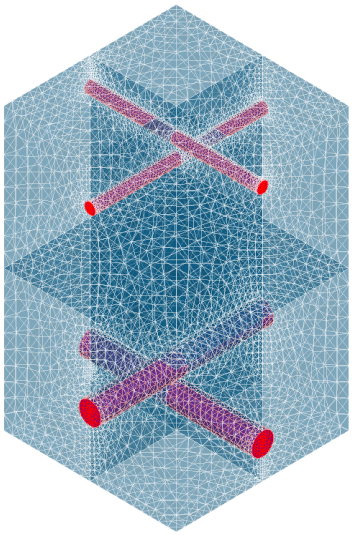


Figure III-22 : Maillage utilisé pour l'identification de paramètres d'une plaque sans symétrie miroir (aciers en rouge, béton en bleu)

Le Tableau III-8 et la Figure III-23 présentent les résultats de l'identification pour les paramètres correspondant à la composante 1111 du tenseur de couplage membrane/flexion $\mathbb{A}^{mf}$. Le paramètre élastique de cette composante, qui était nul pour une plaque à symétrie miroir (voir Tableau III-6 et Remarque 78), est bien non nul sur la plaque ne possédant pas cette symétrie. De la même manière, la somme des deux contributions en D^1 et D^2 de l'endommagement n'est plus nulle à valeurs d'endommagement égales.

Tableau III-8 : Paramètres identifiés pour la composante 1111 du tenseur de couplage membrane/flexion $\mathbb{A}^{mf}$ en sollicitation de traction membranaire pour une plaque sans symétrie miroir

$A^{0mf}_{1111}(Pa.m)$	$\alpha^{1mf}_{1111+}(-)$	$\gamma^{1mf}_{1111+}(-)$	$\alpha^{2mf}_{1111+}(-)$	$\gamma^{2mf}_{1111+}(-)$
$5{,}580.10^1$	3,891	$1{,}868.10^2$	0,866	$-3{,}062.10^2$

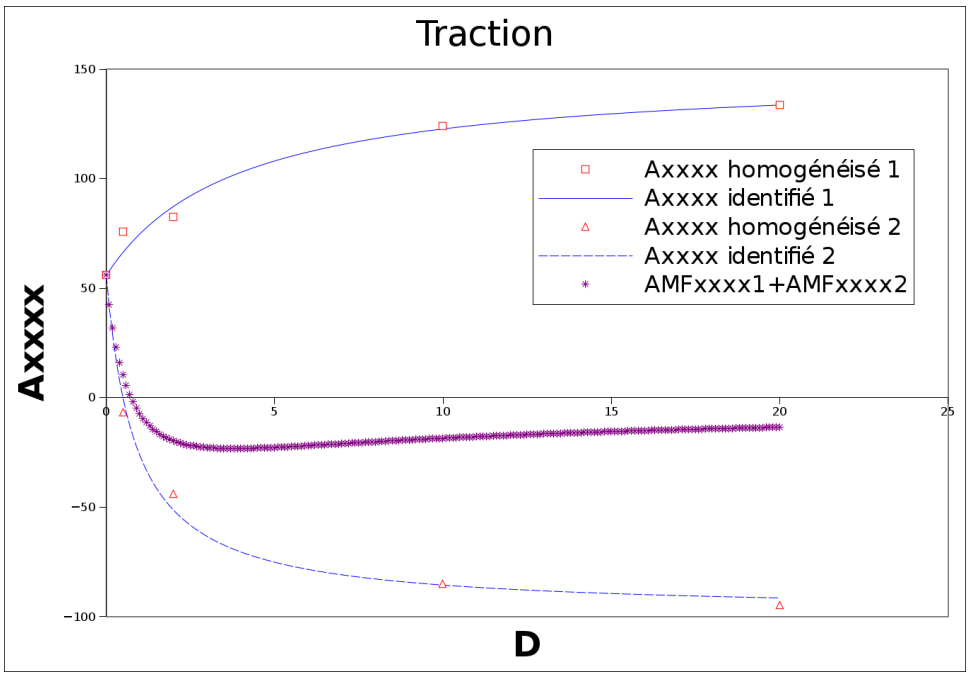


Figure III-23 : Evolution de la composante 1111 du tenseur de couplage membrane/flexion $\mathbb{A}^{mf}$ en fonction de l'endommagement *D* pour des sollicitations de traction membranaire sur une cellule sans symétrie miroir. Comparaison résultats numériques (points rouges) / identification (courbes bleues)

Le reste des résultats pour cette étude de plaque sans symétrie miroir est présenté en ANNEXE 6. Il peut y être constaté que les conclusions quant à la faible dépendance du glissement dans une zone à l'évolution de l'endommagement dans l'autre zone restent vraies, tant pour le tenseur $\mathbb{B}$ que pour le tenseur $\boldsymbol{C}$. D'autre part, une distinction des évolutions en fonction de D^1 et D^2 peut être observée sur les composantes de flexion du tenseur $\mathbb{A}$, laissant supposer que la contribution des aciers dans le comportement en flexion est conséquente.

Remarque 79 : L'identification des paramètres semble moins bonne que pour la plaque à symétrie miroir. Remarquons en particulier que la dépendance pour la partie 1 ne semble pas suivre une dépendance croissante concave…

III.4.viii. Dégradation du comportement et de la cellule vers l'unidimensionnel

De manière à valider les choix qui ont été faits vis-à-vis de la mise en œuvre numérique de la procédure d'identification des paramètres du modèle macroscopique, une validation par rapport à l'unidimensionnel a été faite. Pour ce faire, il est nécessaire de définir une cellule de base proche de l'unidimensionnel, et d'adapter les conditions limites comme expliqué ci-dessous.

Cellules de base pour l'unidimensionnel

Deux cellules de base représentatives de celle utilisée pour la formulation du problème unidimensionnel sont définies et présentées en Figure III-24. Elles font 1m de long et de large et ont une épaisseur de 10cm.

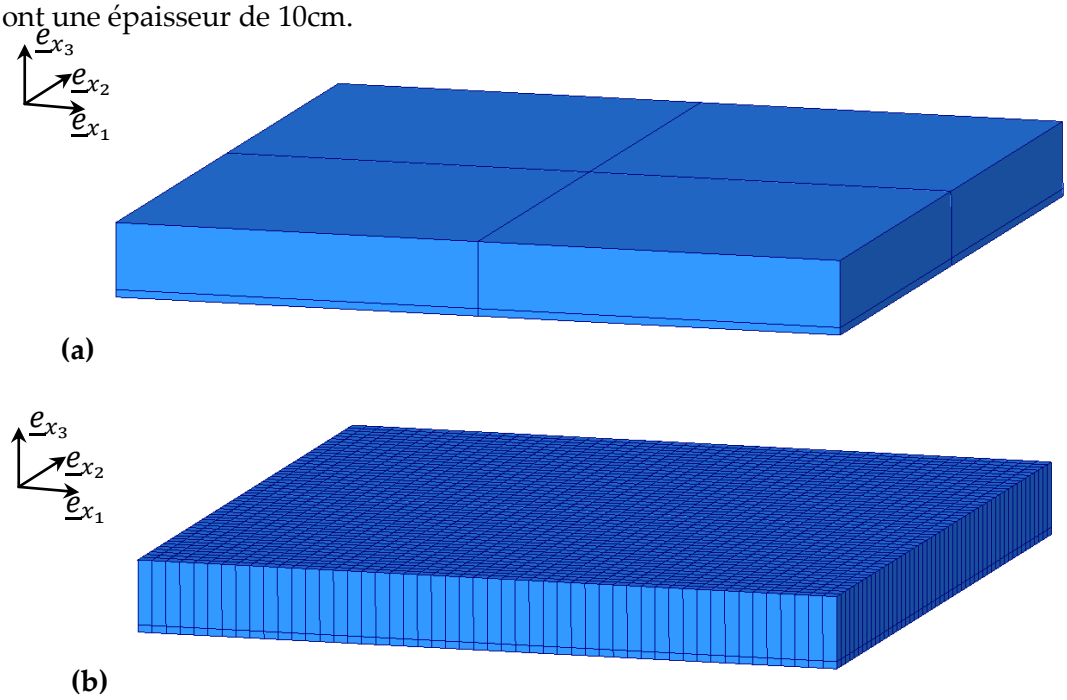


Figure III-24 : Cellules de base à maillage grossier (2 mailles dans la longueur)(a) et fin (20 mailles dans la longueur)(b) pour l'identification des paramètres de l'unidimensionnel

Le choix de deux maillages va permettre d'étudier une éventuelle dépendance au maillage du résultat unidimensionnel.

Remarque 80 : Etant donné que le problème unidimensionnel possède une solution unique analytique, obtenue avec une discrétisation du type de la cellule présentée en Figure III-24 *(a), il ne devrait y avoir aucune dépendance au maillage du résultat.*

Conditions limites spécifiques à l'unidimensionnel

En plus des conditions limites définies au paragraphe III.4.iv, une condition de déplacements normaux uniformes sur les bords latéraux et sur l'interface Γ_2 de la cellule a dû être ajoutée. En effet, l'hypothèse de comportement unidimensionnel implique que tous les déplacements soient uniformes dans l'épaisseur de la cellule considérée.

Paramètres choisis et résultats

Les paramètres microscopiques choisis pour la comparaison entre les identifications numérique et analytique en unidimensionnel sont résumés dans le Tableau III-9. Ils correspondent à des paramètres matériaux représentatifs des valeurs usuelles/moyennes pour le béton et l'acier.

Tableau III-9 : Paramètres matériaux et géométriques pour la comparaison numérique/analytique de l'identification de paramètres

H^B (m) hauteur béton	H^A (m) hauteur acier	E^B (MPa)	E^A (MPa)	α(-)	γ(-)
0.09	0.01	32000	200 000	1.48	0.5

D'après l'étude menée au paragraphe III.3.v, la déformation dans chaque domaine est constante, ce qui se retrouve bien qualitativement lors de l'identification numérique, comme montré sur les Figure III-25 (a), (b) et (c).

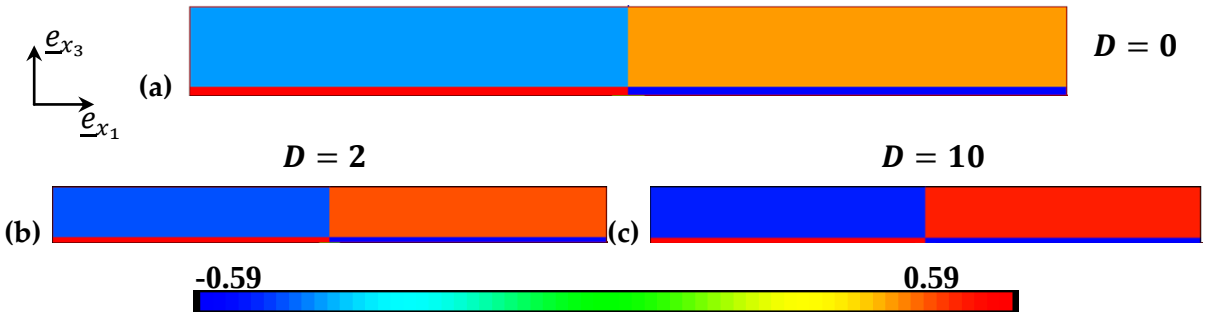


Figure III-25 : Carte des déformations pour différentes valeurs d'endommagement : 0, 2 et 10.

Par ailleurs, de manière quantitative, la comparaison entre les résultats analytiques et numériques pour les deux maillages grossiers et raffinés présentés en Figure III-24 et pour trois valeurs d'endommagement $D = 0,2$ et 10 est présentée dans le Tableau III-10. Le paramètre appelé A_CORR correspond à la partie correcteur du tenseur $\mathbb{A}$, l'autre partie étant la loi des mélanges et donc nécessairement identique entre les deux calculs.

Les deux types d'identification (analytique et numérique) parviennent à des résultats identiques pour toutes les valeurs d'endommagement choisies et quelle que soit la précision utilisée (jusqu'à la limite de la précision des machines utilisées). Il n'y a aucune différence entre les résultats obtenus avec les deux maillages.

Tableau III-10 : Comparaison des identifications des paramètres analytiques et numériques pour les deux maillages grossiers et raffinés et pour trois valeurs d'endommagement : 0, 2 et 10.

	CALCUL			CALCUL ANALYTIQUE			
	A_CORR	**B**	**C**	**A_CORR**	**B**	**C**	**D**
maill raf	1,24E-27	-8E-15	1180,328	0	0	1180,328	0
maill gros	9,8E-30	-1,4E-14	1180,328				
maill raf	38,33784	370,5991	1104,385	38,33784	370,5991	1104,385	2
maill gros	38,33784	370,5991	1104,385				
maill raf	92,49196	589,8932	1059,448	92,49196	589,8932	1059,448	10
maill gros	92,49196	589,8932	1059,448				

Cette comparaison rapide et sommaire entre les résultats analytiques et ceux obtenus avec la procédure d'identification de paramètres numérique valide bien la procédure numérique mise en place.

III.5. CONCLUSIONS GENERALES

Dans ce chapitre est construit un modèle de comportement pour les plaques en béton armé comportant de l'endommagement et une déformation résiduelle de glissement. Ce modèle est construit par homogénéisation périodique via la méthode des moyennes en considérant un endommagement non-homogène et non-symétrique dans la cellule de base, discrétisé en deux variables dans l'épaisseur de la plaque (D^1 et D^2), et quatre glissements périodiques à l'interface entre les quatre barres de renforts en acier et le béton avoisinant.

L'analyse multi-échelle mène à une forme de modèle originale comprenant un terme de couplage entre déformations généralisées et déformations de glissement, à la manière de ce qui avait pu être mis en évidence pour la plasticité par (Michel 1984). Ce terme, faisant intervenir l'endommagement, est nul lorsque l'endommagement est symétrique par rapport au plan de symétrie du glissement considéré. ; il est par conséquent nul à endommagement nul.

Les densités d'énergie libre les lois d'écoulement définissant de ce modèle sont les suivantes :

$$2\mathcal{W}\left(\boldsymbol{E}, D, \underline{E}^{\eta}\right) = \begin{pmatrix}\boldsymbol{E}\\ \boldsymbol{K}\end{pmatrix} : \begin{pmatrix}\mathbb{A}^{mm}(D) & \mathbb{A}^{mf}(D)\\ \mathbb{A}^{fm}(D) & \mathbb{A}^{ff}(D)\end{pmatrix} : \begin{pmatrix}\boldsymbol{E}\\ \boldsymbol{K}\end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix}\boldsymbol{E}\\ \boldsymbol{K}\end{pmatrix} : \begin{pmatrix}\mathbb{B}^{\pi m}(D)\\ \mathbb{B}^{\pi f}(D)\end{pmatrix} . \underline{E}^{\eta\pi} + \underline{E}^{\eta\rho} . \mathbf{C^{\rho\pi}}(D) . \underline{E}^{\eta\pi}$$

$$f_{d^\pi}(G^\pi) = G^\pi - Hk_0 \leq 0 \qquad \text{et} \qquad f^{\alpha}_{\eta^\pi}\left(\Sigma^{\eta\pi}_{\alpha}\right) = \left(\Sigma^{\eta\pi}_{\alpha}\right)^2 - (H\sigma_{crit})^2$$

$$\dot{D}^{\pi} = \dot{\lambda}_{d^\pi} \frac{\partial f_{d^\pi}(G^\pi)}{\partial G^\pi} = \dot{\lambda}_{d^\pi} \text{ et } \dot{E}^{\eta\pi}_{\alpha} = \dot{\lambda}^{\alpha}_{\eta^\pi} \frac{\partial f^{\alpha}_{\eta^\pi}(\Sigma^{\eta\pi}_{\alpha})}{\partial \Sigma^{\eta\pi}_{\alpha}} = 2\Sigma^{\eta\pi}_{\alpha}\dot{\lambda}^{\alpha}_{\eta^\pi}$$

Ce modèle, initialement construit pour les plaques en béton armé peut se généraliser à n'importe quel matériau composite à matrice endommageable et inclusions sous forme de grille comprenant un glissement interne périodique.

Les tenseurs $\mathbb{A}$, $\mathbb{B}$ et $\boldsymbol{C}$, paramètres du modèle, sont ensuite identifiés sur une cellule de géométrie identique à celle de la plaque réelle. L'identification par une procédure automatisée ne fait intervenir que 11 paramètres géométriques, obtenus sur les plans de ferraillage de la plaque considérée, et 8 paramètres matériaux. Elle conduit à un tenseur de raideur élastique-endommageable $\mathbb{A}$ orthotrope, et des tenseurs de couplage et de stockage $\mathbb{B}$ et $\boldsymbol{C}$ découplant les phénomènes qui ont lieu en moitié supérieure et inférieure de la plaque. Par ailleurs, le tenseur $\mathbb{B}$ ne comprend pas de terme couplant les déformations généralisées de distorsion et le glissement.

Le modèle semble à même de représenter la perte de symétrie miroir au cours du chargement par la prise en compte des deux variables d'endommagement différentes dans l'épaisseur de la plaque et ainsi créer des couplages membrane-flexion. Ces couplages apparaissent également dans le cas d'une plaque initialement non symétrique par rapport au plan $x_3 = 0$.

La construction du modèle et l'identification des paramètres ont été dégradés pour retrouver un comportement unidimensionnel, validé par rapport aux expressions analytiques obtenues au Chapitre II.

CHAPITRE IV.

ILLUSTRATIONS NUMERIQUES

« Je pense qu'il y a une morale à cette histoire, à savoir qu'il est plus important d'avoir de la beauté dans une équation que de constater qu'elle s'ajuste à l'expérience.»

Paul Adrien Maurice Dirac

Le modèle de comportement DHRC dédié aux plaques en béton armé sous sollicitations sismiques, établi au Chapitre III, a été implanté dans un code élément fini implicite (Code_Aster). Le détail de l'implantation concernant l'intégration de la loi de comportement et les éléments finis de plaque utilisés est présenté dans ce chapitre. La réponse du modèle DHRC sous des sollicitations simples, seules et combinées est ensuite étudiée et comparée à la réponse du modèle GLRC_DM. Une comparaison du modèle de plaque et du modèle unidimensionnel avec les essais de voile en cisaillement SAFE (voir Figure IV-1) est enfin proposée.

Ces études numériques, associées avec la comparaison à l'expérimental proposée au Chapitre II pour le modèle unidimensionnel permettent de conclure quant à l'aptitude du modèle, formulé avec les hypothèses simples d'aujourd'hui, à représenter correctement le comportement de voiles et de dalles en béton armé lors de séismes.

Figure IV-1 : Photo du voile en béton armé T5 des essais SAFE dans un état de ruine à la fin de la sollicitation sismique la plus endommageante (0.9g). Rapport d'essai JRC.

IV.1. IMPLANTATION NUMERIQUE

Le modèle de comportement non linéaire DHRC pour les plaques en béton armé présenté au Chapitre III a été implanté dans un code élément finis implicite (Code_Aster). Cette implantation se base sur des éléments finis spécifiques aux lois de comportement de plaques : les éléments finis Discrete Kirchhoff Triangle Generalised (DKTG). Les spécificités de ces éléments et la mise en place de la résolution du problème d'évolution des variables interne sont présentées dans ce paragraphe.

IV.1.i. Elements finis DKTG

Les éléments finis DKTG sont une extension des éléments finis usuels DKT (Dhatt et al 1970). Ces éléments ne contiennent qu'un seul point d'intégration dans l'épaisseur et sont, par conséquent, particulièrement conseillés pour les lois de comportement de plaques écrites directement en déformations et contraintes généralisées (pour lesquelles l'intégration dans l'épaisseur de l'élément ne doit donc pas être calculée).

Pour le reste, les éléments finis DKTG sont en tout point similaires aux éléments finis DKT (Dhatt et al 1970) : ce sont des éléments finis isoparamétriques de plaque, plans, adaptés aux calculs de structures minces élancées en petites déformations, dont l'énergie de distorsion transverse est considérée nulle et qui ne prennent pas en compte la courbure de la géométrie des structures. Ils comportent cinq degrés de liberté par nœud : les déplacements dans le plan de l'élément et hors plan, ainsi que deux rotations dans le plan de l'élément.

Ces éléments existent, dans Code_Aster sous forme de triangles (DKTG) ou de quadrangles (DKQG) présentés à la Figure IV-2.

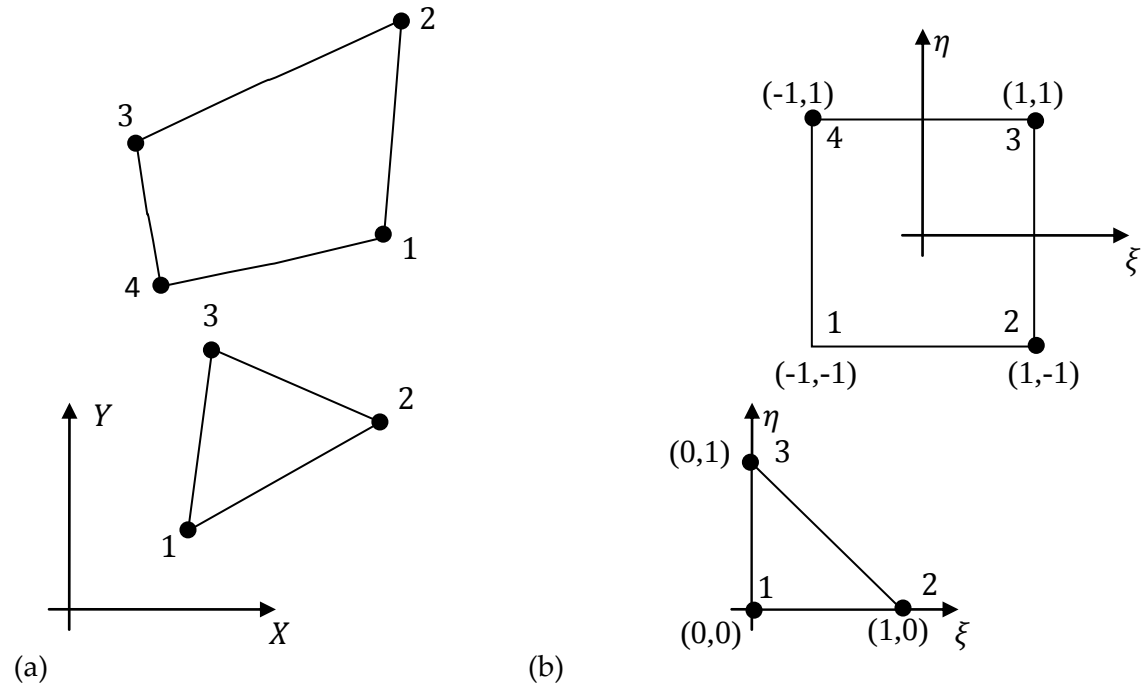


Figure IV-2: Eléments triangle DKTG et quadrangle DKQG réels (a) et de référence (b)

IV.1.ii. Intégration de la loi de comportement

Le modèle de comportement DHRC pour les plaques en béton armé décrit au Chapitre III possède six variables internes : deux variables pour l'endommagement D^1 et D^2, et quatre variables pour le glissement $E_1^{\eta 1}$, $E_2^{\eta 1}$, $E_1^{\eta 2}$et $E_2^{\eta 2}$. L'intégration implicite directe en temps de la loi de comportement passe donc par la résolution du problème d'évolution de ces six variables internes considérant six seuils que l'on notera $f_{d1}, f_{d2}, f_{\eta 1}^1, f_{\eta 1}^2, f_{\eta 2}^1, f_{\eta 2}^2$. L'organigramme de la Figure IV-3 présente la procédure suivie pour l'intégration de la loi de comportement.

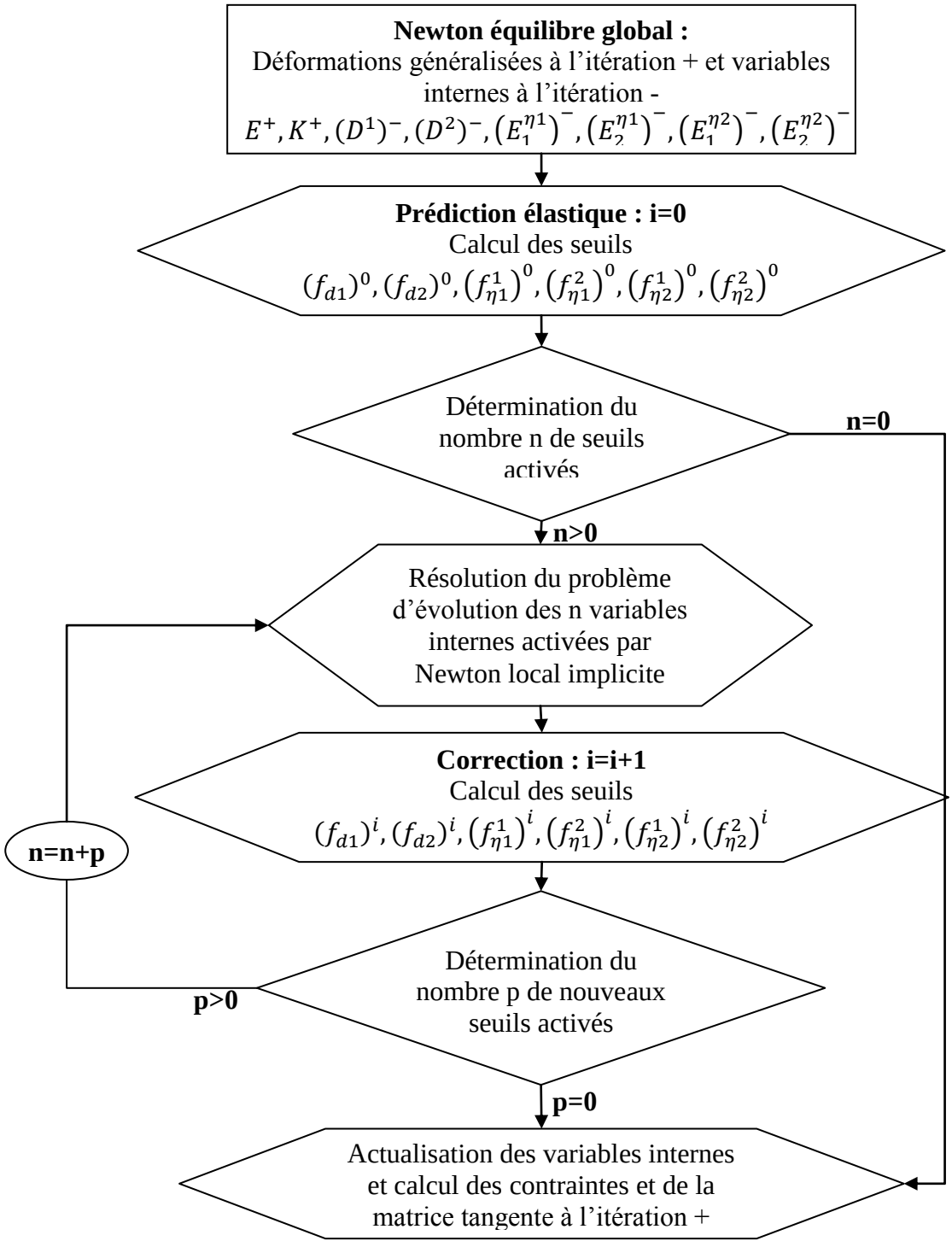


Figure IV-3 : Organigramme de la procédure suivie pour l'intégration de la loi de comportement

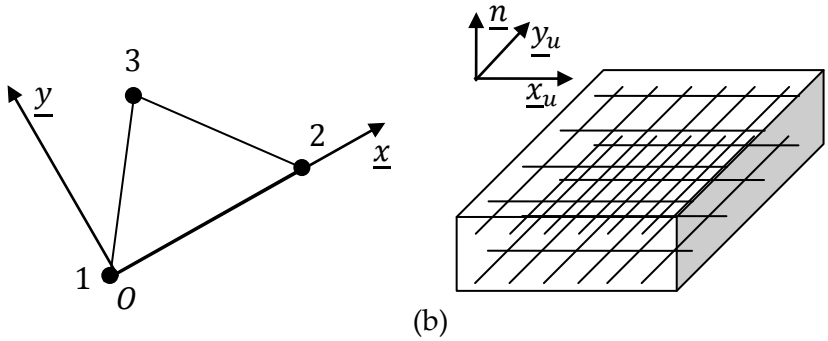
La résolution se base donc sur un algorithme de point fixe sur les seuils activés :

- Dans un premier temps, grâce à la prédiction élastique, les six seuils sont calculés et les n seuils « activés » ($f \geq 0$) sont déterminés.
- Un algorithme de Newton local implicite permet alors de calculer l'évolution des n variables internes correspondant aux n seuils « activés » déterminés précédemment.
- Considérant ces n variables internes, les 6-n variables qui n'ont pas évolué et les déformations généralisées données par l'équilibre global, les six seuils sont à nouveau calculés.
- Si p nouveaux seuils ont été activés par rapport aux n seuils de la prédiction élastique, le Newton local est recommencé pour déterminer les n+p variables internes qui évoluent.
- Une fois le nombre de seuils activés stabilisé, les variables internes sont actualisées et les contraintes ainsi que la matrice tangente sont calculées.

Remarque 81 : Le calcul de la matrice tangente réutilise la Jacobienne locale utilisée lors de la résolution par Newton local.

IV.1.iii. Les différents repères pour l'implantation

Comme précisé au Chapitre III, paragraphe III.3.i, le repère microscopique utilisé pour formuler le modèle DHRC est le repère des armatures. L'implantation numérique du modèle dans le code a donc été réalisée dans ce repère et il est demandé à l'utilisateur de préciser un « repère utilisateur » correspondant au repère des armatures. Ainsi, l'algorithme de Newton global fournissant les déformations généralisées dans le repère intrinsèque à l'élément de plaque considéré, un changement de repère préalable est nécessaire afin de fournir, au modèle des déformations généralisées dans le repère des armatures (voir Figure IV-4). Le repère intrinsèque $\left(O, \underline{x}, \underline{y}\right)$ à un élément est défini en prenant pour origine O le premier sommet de l'élément et pour axe Ox le côté joignant les sommets 1 et 2.



(a) (b)

Figure IV-4 : Définition des repères intrinsèque (a) et utilisateur (b)

L'utilisateur doit renseigner deux angles α et β permettant de situer la base liée au repère utilisateur $(\underline{x}_u, \underline{y}_u, \underline{n})$ dans l'espace global $(\underline{X}, \underline{Y}, \underline{Z})$ dans lequel le maillage est défini. A partir de ces deux angles, il est possible de passer du repère utilisateur au repère intrinsèque et vice-versa (voir Figure IV-5).

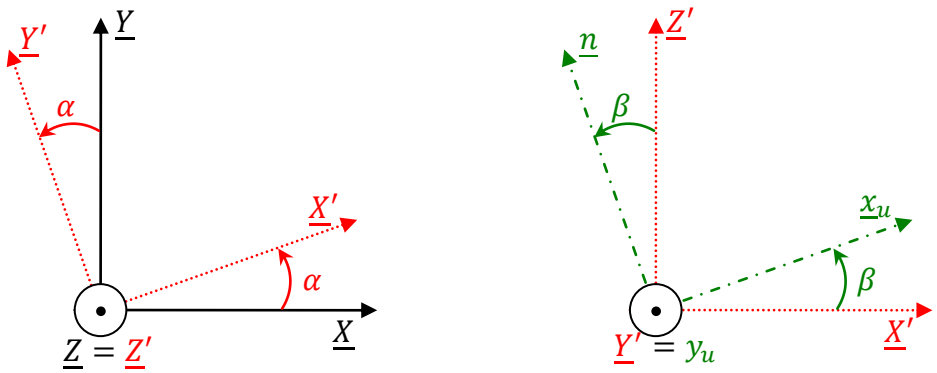


Figure IV-5 : Représentation des angles α et β pour le changement de la base du maillage $(\underline{X}, \underline{Y}, \underline{Z})$ à la base utilisateur $(\underline{x_u}, \underline{y_u}, \underline{n})$.

IV.2. CAS-TESTS DE VALIDATION

Pour valider le comportement du modèle DHRC et le comparer au comportement du modèle de référence GLRC_DM que nous cherchons à améliorer, une série de cas-tests a été développée. Ces cas-tests sont représentatifs d'une plaque en béton armé soumise à des sollicitations élémentaires uniaxiales cycliques variées : traction/compression, flexion alternée, distorsion dans le plan et leurs combinaisons. Nous n'avons pas la prétention ici de présenter toutes les combinaisons possibles. Les analyses sont faites en statique ; le traitement des termes dynamiques étant réalisé classiquement par un schéma d'intégration de Newmark type HHT, l'intérêt est de tester ici le calcul des forces internes. Les caractéristiques géométriques et matériaux de la plaque modélisée se basent sur les caractéristiques du voile T5 en béton armé des essais SAFE (voir §IV.3).

IV.2.i. Problème de référence

Géométrie

Le cas test concerne une plaque carrée à symétrie miroir en béton armé de longueur et largeur 1m et d'épaisseur 0.1m. Le taux de ferraillage de type « assez fortement ferraillé » pour chaque nappe d'armatures est de 8.0×10^{-4} m²/m, ce qui correspond environ à des aciers de diamètre 10mm (Ø10) espacés de 10cm les uns des autres. L'enrobage des nappes d'armatures supérieure et inférieure est de 1cm et concerne les barres d'aciers parallèles à l'axe $\underline{x}$. La Figure IV-6 résume toutes ces caractéristiques géométriques.

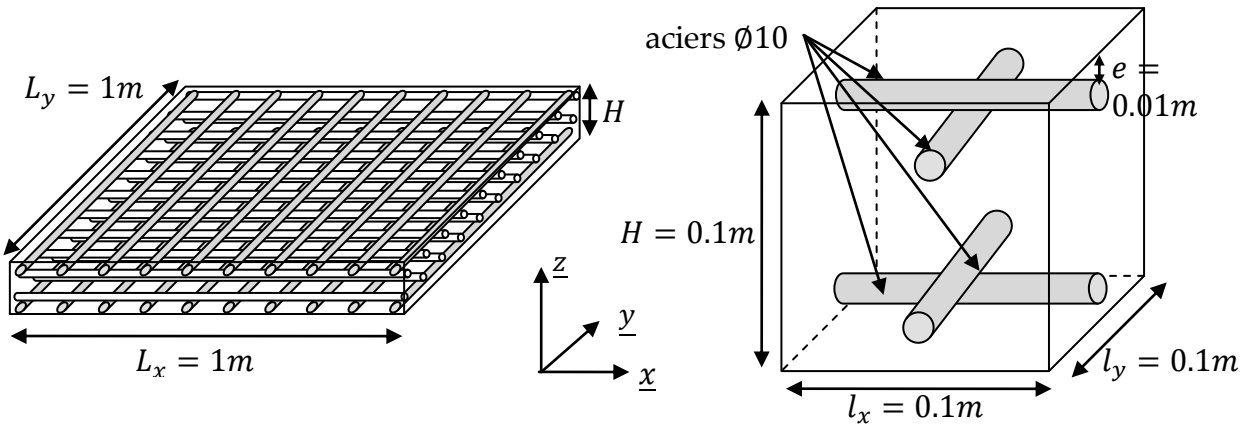


Figure IV-6 : Caractéristiques géométriques de la plaque du problème de référence

Propriétés matériau

Les matériaux considérés pour ce cas test sont un béton et un acier de modules de Young respectifs 32 000MPa et 200 000 MPa, le béton ayant comme coefficient de Poisson 0.2. Les paramètres retenus pour la fonction d'endommagement microscopique du béton ainsi que les paramètres de seuil d'endommagement et de glissement sont rassemblés dans le Tableau IV-1. Typiquement, ces paramètres devraient être identifiés sur des courbes issues d'essais de traction/compression du béton et d'arrachement de la barre d'acier. Dans ce cas-test illustratif, de tels résultats expérimentaux ne sont pas disponibles et les paramètres retenus sont considérés comme représentatifs d'un béton armé standard.

Tableau IV-1: Paramètres d'endommagement et de seuils microscopiques de traction et glissement choisis

$\alpha_+(-)$	$\alpha_-(-)$	$\gamma_+(-)$	$\gamma_-(-)$	$\sigma_{d+}(MPa)$	$\sigma_{crit}(MPa)$
1	1.9	-0.01	0.8	1.7	1.5

Identification des paramètres des modèles

Les cas tests présentés par la suite vont être simulés à l'aide de deux modèles : le modèle de référence GLRC_DM et le modèle DHRC construit dans cette thèse. Les paramètres du modèle DHRC sont identifiés via la procédure d'identification des paramètres décrite au Chapitre III sur la cellule de base présentée en Figure IV-7.

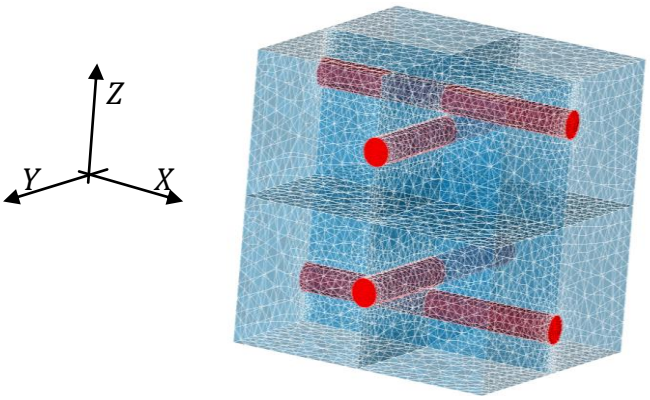


Figure IV-7 : Maillage utilisé pour l'identification des paramètres pour les cas-tests

Quant aux paramètres du modèle GLRC_DM, les paramètres d'élasticité $E_{eq}^{m}, E_{eq}^{f}, \nu_m, \nu_f$ et de seuils N_{d+} et M_{crit} sont déterminés comme décrit dans l'ANNEXE 1, à savoir que les paramètres d'élasticité résultent d'une simple moyenne (loi des mélanges) et les paramètres de seuils sont déterminés analytiquement à partir de données expérimentales sur des tests de traction simple du béton. Les paramètres d'endommagement sont choisis à partir des résultats de l'identification des paramètres pour le modèle DHRC. Ainsi, pour GLRC_DM, le paramètre d'endommagement en traction γ_T, par exemple, sera pris égal au paramètre Γ_{1111} identifié lors d'une sollicitation de traction pour DHRC. L'ensemble des paramètres d'élasticité et d'endommagement retenus pour la modélisation GLRC_DM est présentée au Tableau IV-2.

Remarque 82 : Les valeurs des seuils N_{d+} et M_{crit} présentées au Tableau IV-2 résultent de l'identification des paramètres sur des cas de traction et de flexion pure comme décrit à l'ANNEXE 1.

Tableau IV-2: Paramètres d'élasticité et d'endommagement pour le modèle GLRC_DM

$E_{eq}^{m}(MPa)$	$E_{eq}^{f}(MPa)$	$\nu_m(-)$	$\nu_f(-)$	$\alpha_+(-)$	$\gamma_+(-)$	$\gamma_-(-)$	$\gamma_f(-)$	$N_{d+}(N.m^{-1})$	$M_{crit}(MPa)$
35625	38660	0.18	0.17	1	0.06	0.8	0.45	0.37	9.10^{-3}

Remarque 83 : Une comparaison avec des modèles multicouches ou multifibres a été tentée mais les sollicitations appliquées sont telles que les fibres ou les couches de béton sont détruites et les fibres d'acier doivent reprendre cette raideur. Cette reprise de raideur pose des problèmes de robustesse et de convergence et cette démarche nécessite donc l'utilisation de techniques spéciales que nous n'avons pas mises en œuvre ici.

IV.2.ii. Cas test de traction-compression pures

Conditions limites et chargement

La plaque étudiée $A_1A_2A_3A_4$ est considérée encastrée en un point du bord et en appui simple le long d'une arête contenant ce point. Sur l'arrête opposée à l'arête glissante, une sollicitation de traction ou compression uniaxiale uniforme est appliquée dans la direction perpendiculaire à cette arête (voir Figure IV-9). Les conditions limites et chargements sont donc :

- $\mathrm{DX} = \mathrm{DY} = \mathrm{DZ} = 0 = \mathrm{DRX} = \mathrm{DRY} = \mathrm{DRZ}$ en A_1
- $\mathrm{DX} = 0$ sur $\mathrm{A}_1 - \mathrm{A}_3$
- $\mathrm{DX} = U_0 f(t)$ sur $\mathrm{A}_2 - \mathrm{A}_4$

où $\mathrm{DX}, \mathrm{DY}, \mathrm{DZ}$ représentent les déplacements selon les directions $\mathrm{X}, \mathrm{Y}, \mathrm{Z}$ et $\mathrm{DRX}, \mathrm{DRY}, \mathrm{DRZ}$ les rotations autour des axes $\mathrm{OX}, \mathrm{OY}, \mathrm{OZ}$ et où U_0 représente l'amplitude du chargement imposé, ici $1.10^{-3}m$ et $f(t)$ représente la fonction du temps décrivant le chargement cyclique.

Deux fonctions de chargement ont été considérées pour ce cas-test, de manière à étudier le comportement sur un cycle puis sur deux. La fonction de chargement pour un cycle est présentée en Figure IV-8. La fonction de chargement pour deux cycles étant simplement la répétition de cette fonction une fois de plus.

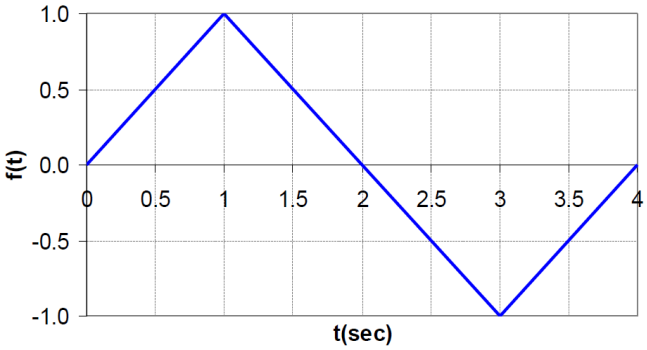


Figure IV-8 : Fonction de chargement $f(t)$ unitaire positive puis négative

Remarque 84 : La déformation extrémale de 1.10^{-3} représente environ un tiers de la déformation usuelle considérée pour la plastification des aciers mais plus de 18 fois la limite en traction du béton. L'hypothèse d'élasticité des aciers et, en général, le champ d'application du modèle, sont donc bien respectés.

Remarque 85 : La fonction de chargement $f(t)$ est discrétisée, dans l'approche quasi-statique, par un pas de temps d'intégration de 0.25s.

Maillage

Le maillage utilisé pour ce cas test est très simple. En effet, les conditions limites sont telles que les déformations sont uniformes dans toute la plaque. Un raffinement du maillage n'est donc nullement nécessaire. Les éléments finis utilisés sont les éléments de plaque DKTG décrits au §IV.1.i. et le maillage est constitué de 8 mailles triangulaires (TRIA3) pour 8 segments (SEG2) et 9 nœuds (voir Figure IV-9).

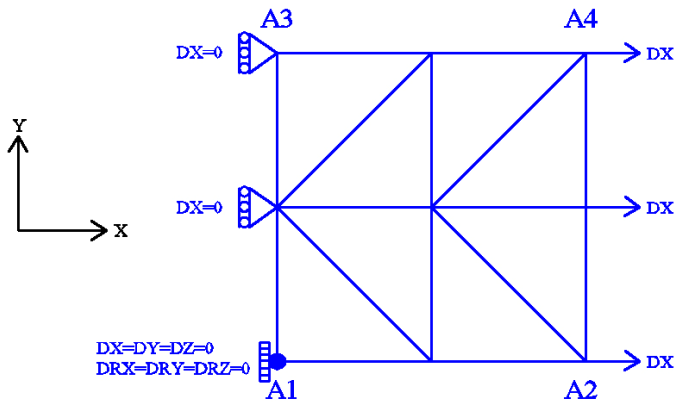
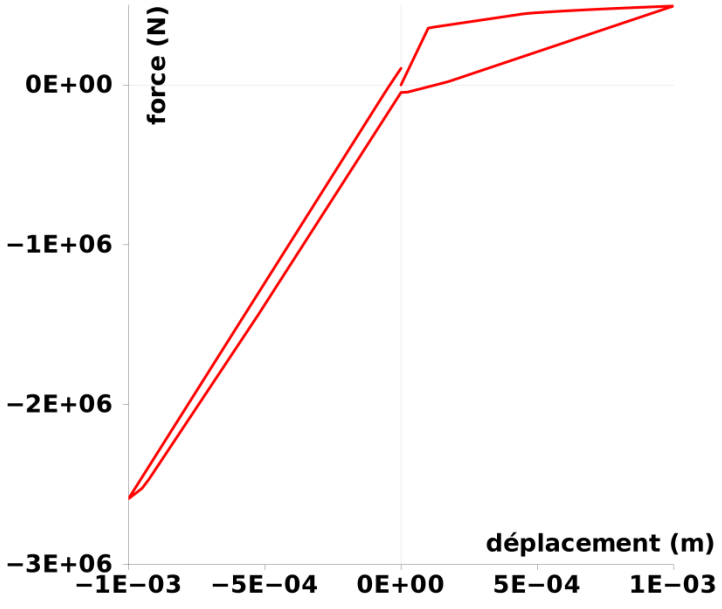


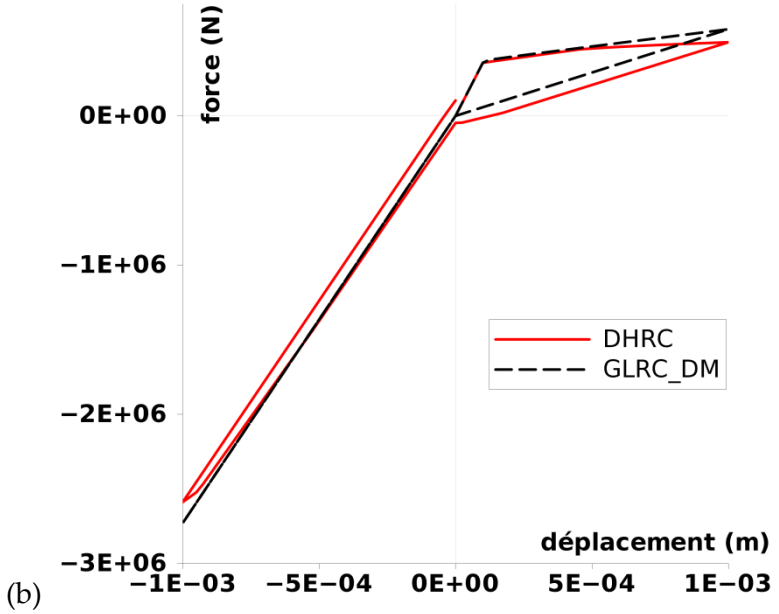
Figure IV-9 : Maillage et conditions limites pour le cas-test de traction-compression pure

Résultats pour un cycle de chargement

Les forces de réaction moyennes ainsi que les déplacements moyens selon l'axe OX sont calculées, pour les deux modélisations GLRC_DM et DHRC. Les courbes réponses en force-déplacements du modèle DHRC seul puis des deux modèles, pour un cycle de chargement sont présentées respectivement sur les Figure IV-10 (a) et (b).



(a)



(b)

Figure IV-10 : Courbe réponse force-déplacement pour un cycle de chargement traction-compression pure par le modèle DHRC seul (a) et les modèles DHRC (ligne rouge) et GLRC_DM (tirets noirs) (b)

La courbe réponse du modèle DHRC présente trois pentes en charge : une pente élastique, une pente correspondant à l'évolution de l'endommagement seul, et une pente correspondant à l'évolution simultanée de l'endommagement et du glissement. Des déformations résiduelles sont également bien crées en traction comme en compression. Ce comportement est analogue à celui obtenu et illustré au Chapitre II pour le modèle dans son expression unidimensionnelle.

Les évolutions des différents types d'énergie dissipée au cours des cycles pour le modèle DHRC sont présentées sur la Figure IV-11. La prise en compte du glissement dans ce modèle apparaît alors importante pour ce qui est de la capacité du modèle à dissiper de l'énergie au cours des cycles de chargement. En effet, l'énergie dissipée par l'endommagement n'évolue qu'au cours du cycle de charge en traction alors que l'énergie dissipée par glissement continue d'évoluer au cours des cycles suivants.

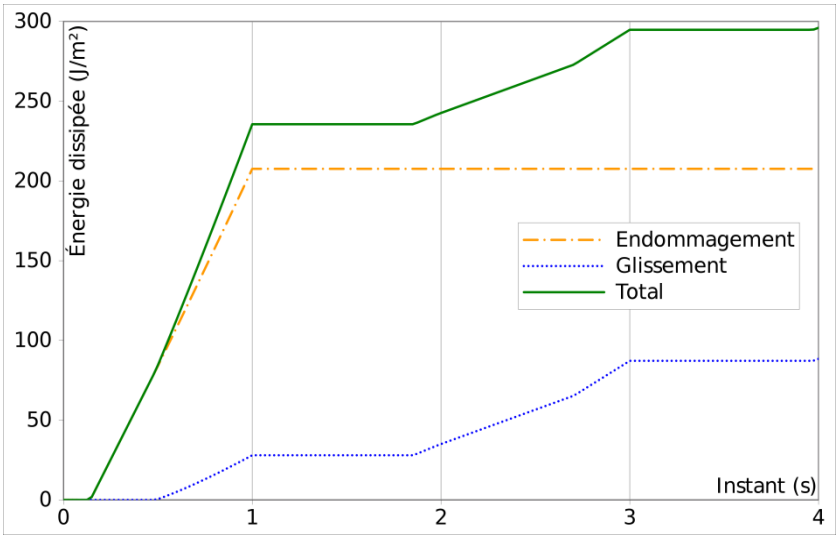


Figure IV-11 : Energies dissipées d'endommagement (tirets oranges), de glissement (pointillés bleus) et totale (ligne verte) au cours d'un cycle de chargement de traction-compression pour le modèle DHRC.

Les modèles DHRC et GLRD_DM sont en bonne concordance globale compte tenu du calage des paramètres effectué, notamment des paramètres d'endommagement de GLRC_DM, à partir des paramètres identifiés du modèle DHRC. Néanmoins, les matrices de rigidités élastiques des deux modèles ne sont pas égales et mènent donc à une pente élastique différente selon la modélisation. En effet, les paramètres d'élasticité de GLRC_DM sont calculés à partir de la loi des mélanges, alors que ceux de DHRC sont calculés exactement à partir d'une homogénéisation périodique. La loi des mélanges étant connue pour fournir un majorant de la rigidité effective, obtenue de manière exacte grâce à l'homogénéisation périodique, cette constatation est tout à fait naturelle et justifiée.

La comparaison de l'énergie dissipée totale pour les deux modèles, présentée à la Figure IV-12, fait apparaître la capacité du modèle DHRC à dissiper plus d'énergie que le modèle GLRC_DM grâce à la prise en compte du glissement qui induit des aires des boucles correspondant aux cycles de traction et de compression plus élevées que le modèle GLRC_DM. Ce dernier modèle ne dissipe d'ailleurs aucune énergie lors de la boucle de compression comme le montre les Figure IV-12 et Figure IV-10.

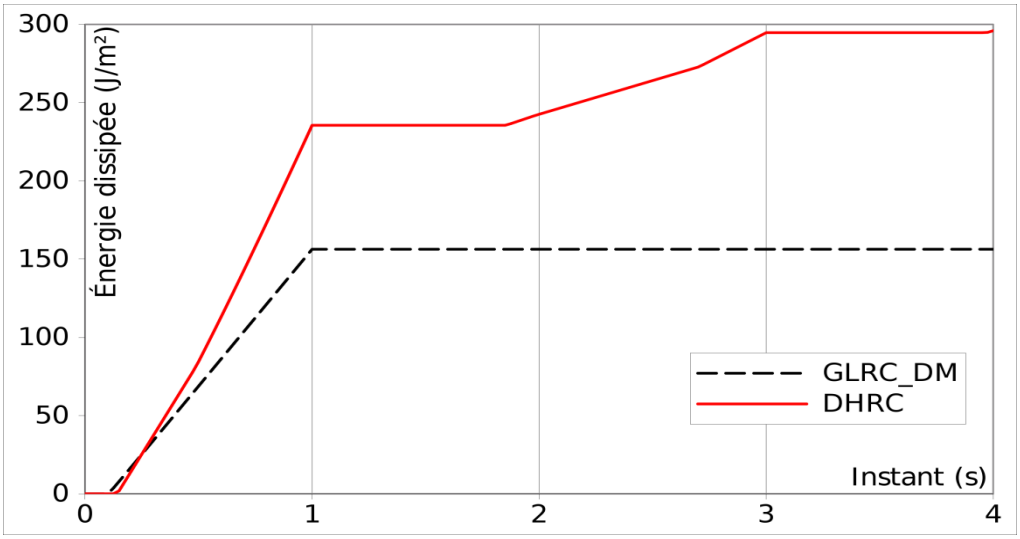


Figure IV-12 : Energie dissipée totale au cours d'un cycle de chargement de traction-compression pour les modèles DHRC (ligne rouge) et GLRC_DM (tirets noirs).

Résultats pour deux cycles de chargement

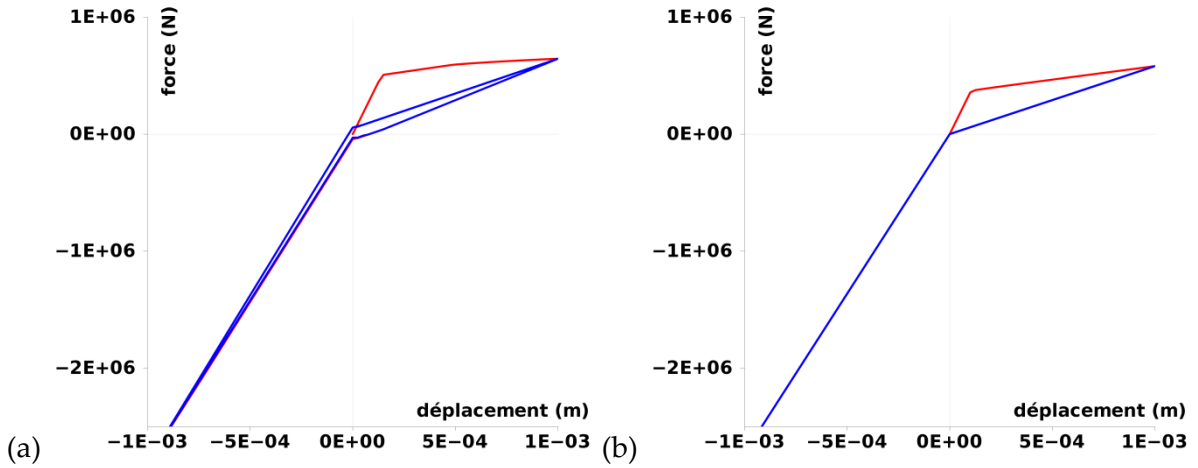


Figure IV-13 : Courbe réponse force-déplacement pour deux cycles de chargement traction-compression pure par le modèle DHRC seul (a) et le modèle GLRC_DM (b) cycle 1 (ligne rouge), cycle 2 (ligne bleue)

La Figure IV-13 présente la courbe réponse force-déplacements pour les modèles DHRC (a) et GLRC_DM (b) pour deux cycles de chargement traction-compression pure. Le second cycle apparaît en trait bleu et il est alors observable que le modèle DHRC dissipe de l'énergie au cours de son second cycle (aire sous la boucle d'hystérésis non nulle) alors que le modèle GLRC_DM n'en dissipe pas. Il semble donc que, pour le modèle GLRC_DM, tout l'énergie dissipée l'est au cours du premier cycle de chargement alors que le modèle DHRC dissipe de l'énergie au cours du cycle suivant grâce à la modélisation du glissement interne. Cette observation est d'ailleurs confirmée par les Figure IV-14 et Figure IV-15 qui présentent les densités d'énergie dissipées au cours des deux cycles de chargement par le modèle DHRC puis la comparaison avec le modèle GLRC_DM. Il apparaît bien, sur la Figure IV-14 que c'est le glissement qui continue de faire évoluer l'énergie dissipée totale et non l'endommagement.

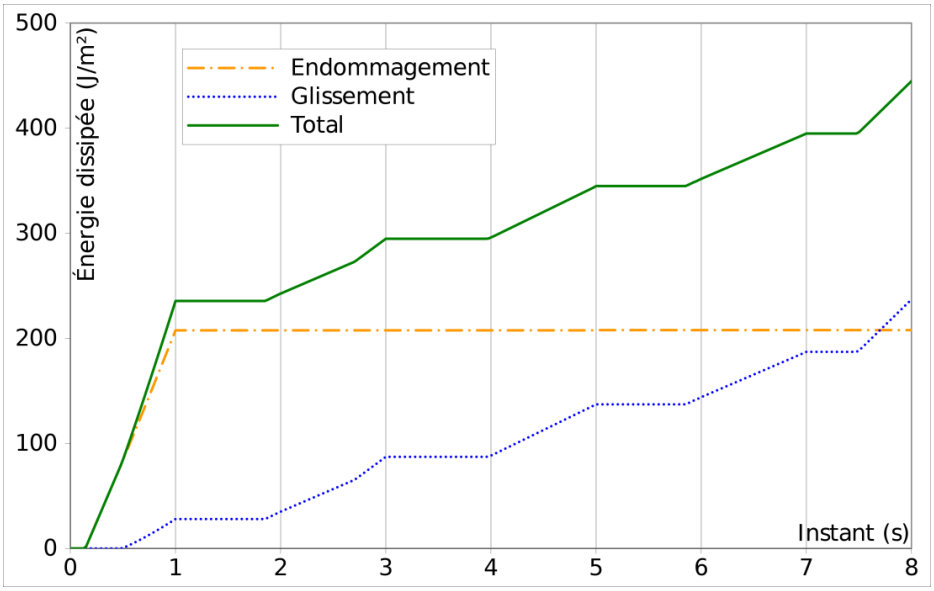


Figure IV-14 : Energies dissipées d'endommagement (tirets oranges), de glissement (pointillés bleus) et totale (ligne verte) au cours des deux cycles de chargement de traction-compression pour le modèle DHRC.

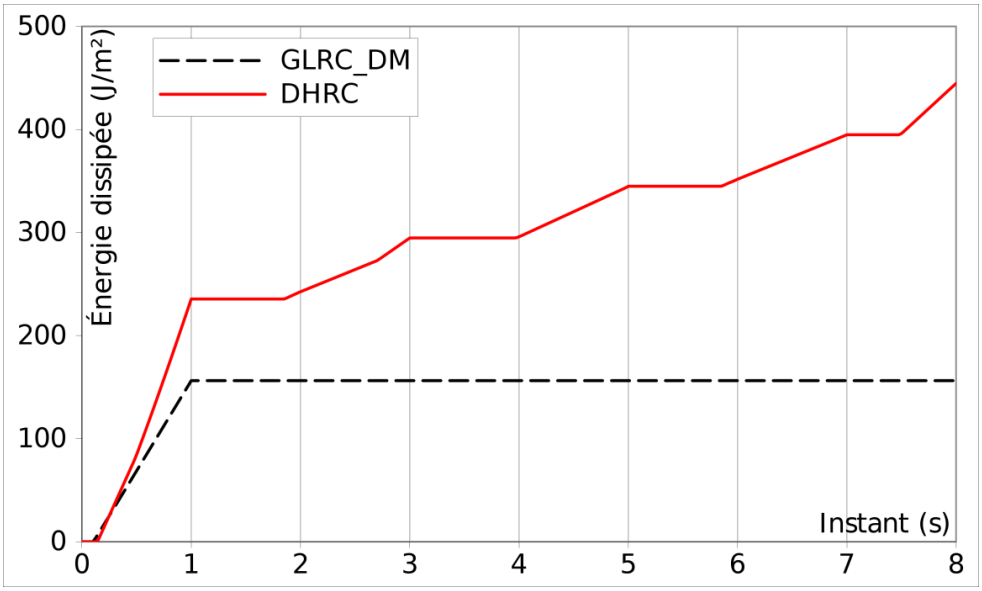


Figure IV-15 : Energie dissipée totale au cours des deux cycles de chargement de traction-compression pour les modèles DHRC (ligne rouge) et GLRC_DM (tirets noirs).

Le temps CPU consommé pour un cycle de chargement avec le modèle DHRC est de 7.3s alors que le modèle GLRC_DM consomme 4.8s. Cela restant très rapide pour les deux modèles, la différence, notable cependant, peut s'expliquer tout d'abord par la non-optimisation de l'implantation du modèle DHRC dans le code, ainsi que par le grand nombre de paramètres nécessaire au modèle DHRC (qui prennent par conséquent un certain temps à être chargés en mémoire à chaque point de Gauss).

IV.2.iii. Cas test de flexion pure alternée

Conditions limites et chargement

La plaque est considérée encastrée en un point du bord et en liaison glissant avec un bâti rigide le long d'une arête contenant ce point. Sur l'arrête opposée à l'arête glissante, une sollicitation de traction ou compression uniaxiale uniforme est appliquée dans la direction perpendiculaire à cette arête (voir Figure IV-16). Les conditions limites et chargements sont donc :

- $\mathrm{DX} = \mathrm{DY} = \mathrm{DZ} = 0 = \mathrm{DRX} = \mathrm{DRY} = \mathrm{DRZ}$ en A_1
- $\mathrm{DRY} = 0$ sur $\mathrm{A}_1 - \mathrm{A}_3$
- $\mathrm{DRY} = R_0 f(t)$ sur $\mathrm{A}_2 - \mathrm{A}_4$

où R_0 représente l'amplitude de la variation de courbure imposée, ici 3.10^{-2} et $f(t)$ représente la fonction du temps décrivant le chargement cyclique. La fonction de chargement considérée pour ce cas-test est identique à celle présentée en Figure IV-8.

Remarque 86 : L'amplitude de la variation de courbure imposée correspond à une déformation maximale en paroi de $3.10^{-3}\mathrm{x}0.05 = 1.5.10^{-3}$ *donc à aucune plastification des aciers mais à une rupture locale du béton en traction.*

Remarque 87 : La fonction de chargement $f(t)$ *est discrétisée, dans l'approche quasi-statique, par un pas de temps d'intégration de 0.25s.*

Maillage

Le maillage utilisé pour ce cas test semble également très grossier ; les conditions limites étant telles que les variations de courbure sont uniformes dans toute la plaque, un raffinement du maillage n'est donc nullement nécessaire.

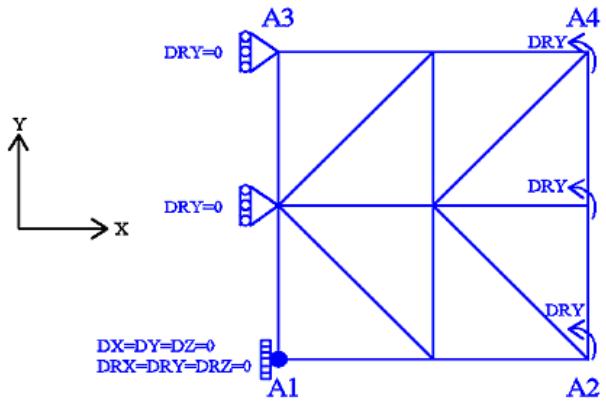
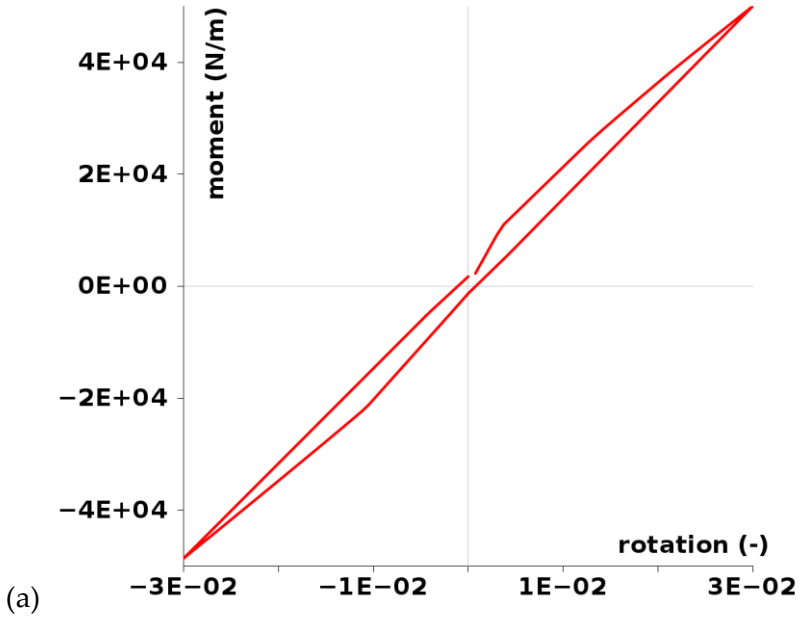


Figure IV-16 : Maillage et conditions limites pour le cas-test de flexion pure alternée

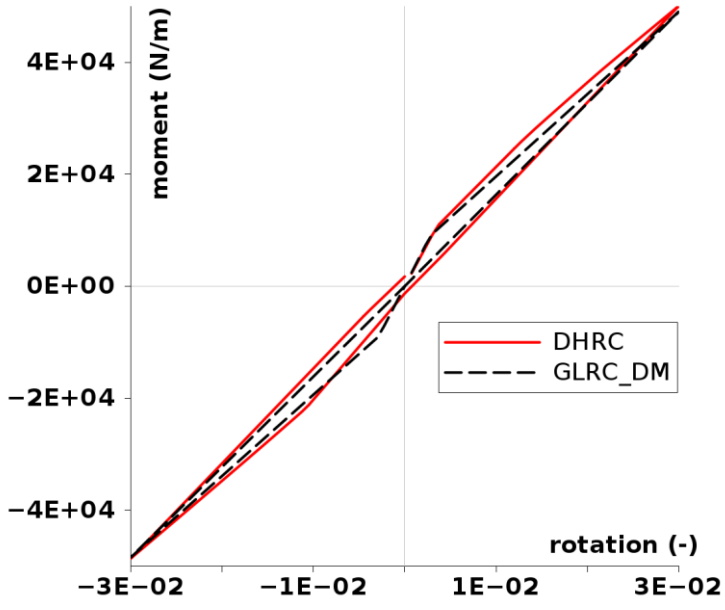
Les éléments finis utilisés sont les éléments de plaque DKTG décrits au §IV.1.i. et le maillage est constitué de 8 mailles triangulaires (TRIA3) pour 8 segments (SEG2) et 9 nœuds (voir Figure IV-16). C'est le même maillage que celui utilisé pour le cas-test précédent.

Résultats

Les moments ainsi que les rotations moyens autour de l'axe OY sont calculés, pour les deux modélisations GLRC_DM et DHRC. Les courbes réponses en moment-rotations du modèle DHRC seul puis des deux modèles sont présentées respectivement sur les Figure IV-17 (a) et (b).



(a)



(b)

Figure IV-17 : Courbe réponse moment-rotation pour la flexion pure alternée par le modèle DHRC seul (a) et les modèles DHRC (ligne rouge) et GLRC_DM (tirets noirs) (b)

La réponse moment-rotation du modèle DHRC présente elle aussi trois pentes en charge. Des déformations résiduelles sont bien observées à charge nulle. Le comportement ne

présente pas de dissymétrie entre flexion positive et négative puisque la plaque considérée a une symétrie miroir.

Les évolutions des différents types d'énergie dissipée au cours des cycles pour le modèle DHRC sont présentées sur la Figure IV-18.

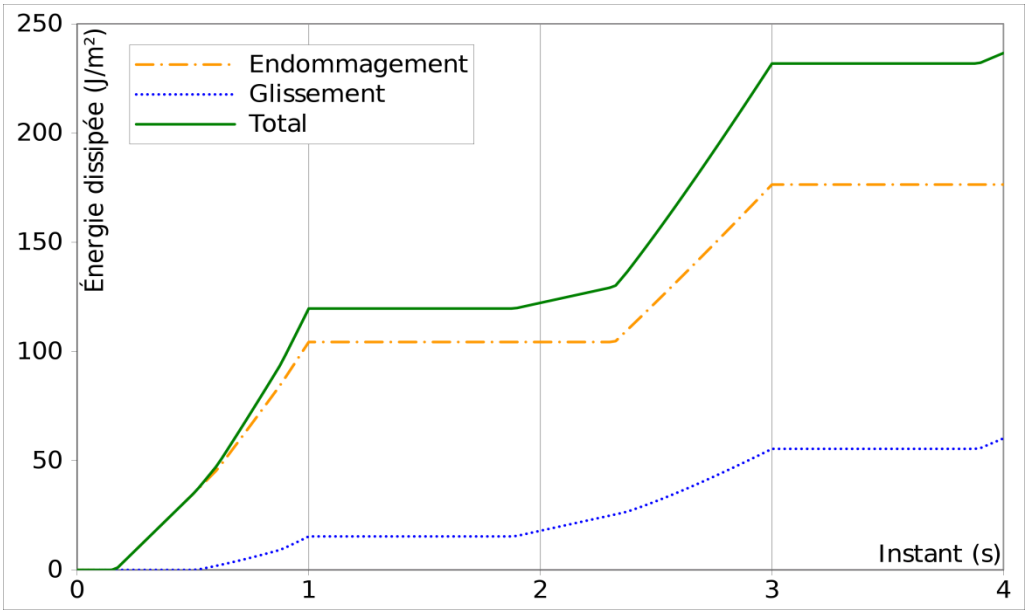


Figure IV-18 : Energies dissipées d'endommagement (tirets oranges), de glissement (pointillés bleus) et totale (ligne verte) au cours d'un cycle de chargement de flexion alternée pour le modèle DHRC.

Les observations faites sur le cas-test précédent restent valables, à savoir que la prise en compte du glissement dans ce modèle apparaît importante pour ce qui est de la capacité du modèle à dissiper de l'énergie au cours des cycles de chargement. De plus, lors de l'apparition du glissement, la pente de l'énergie dissipée par l'endommagement devient plus forte. Le couplage entre les deux phénomènes tend donc également à augmenter l'énergie dissipée.

Les modèles DHRC et GLRD_DM sont en bonne concordance globale compte tenu du calage des paramètres effectué, notamment des paramètres d'endommagement de GLRC_DM, à partir des paramètres identifiés du modèle DHRC. Par ailleurs, les deux modèles présentent une reprise de raideur lors du changement de signe de la sollicitation de flexion. Cette reprise de raideur est moins flagrante pour le modèle DHRC du fait des déformations résiduelles.

Les matrices de rigidités élastiques des deux modèles ne sont pas égales et mènent donc à une pente élastique différente selon la modélisation. Le modèle DHRC semble cette fois encore avoir une pente élastique plus faible que le modèle GLRC_DM, mais la différence est bien plus conséquente que pour le cas de traction-compression pure. Outre la précision apportée par l'homogénéisation périodique, cette différence notoire sur les pentes élastiques de flexion s'explique par la précision de l'identification des paramètres de flexion pour le modèle DHRC. En effet, l'identification des paramètres de flexion pour le modèle DHRC, présentée au Chapitre III, fait la distinction entre le comportement en flexion autour de l'axe OX et autour de l'axe OY pour lesquels les aciers ne sont pas à la même position dans l'épaisseur de la plaque (cf Figure IV-7).

Une étude paramétrique sur la position des aciers dans l'épaisseur de la plaque a été réalisée et met en évidence l'importance de la position de ces aciers dans la détermination du comportement en flexion macroscopique de la plaque. Ainsi un écart de 1cm sur la position des aciers dans l'épaisseur de la plaque mène à 4% d'erreur sur l'estimation de la flexion. Alors que le modèle GLRC_DM travaille avec un excentrement ou une épaisseur d'enrobage similaire pour les aciers selon Ox ou ceux selon Oy, le modèle DHRC différentie la position de ces aciers et mène à des raideurs sensiblement différentes en flexion. Par exemple, pour le cas-test de flexion considéré ici, la composante diagonale du tenseur de raideur élastique pour la flexion autour de l'axe $0x$ vaut $3.154.10^6$ (aciers selon Ox excentrés de 0.09) alors que pour la flexion autour de l'axe $0y$ la composante diagonale vaut $3.028.10^6$ (aciers selon Oy excentrés de 0.079) soit 4% de différence de raideur entre les deux.

Remarque 88 : Dans le cas limite où la plaque de béton armé ne disposerait que d'une seule grille d'acier au milieu de son épaisseur, ces aciers ne participeraient pas à la rigidité élastique de flexion de la plaque. L'accès aux valeurs d'excentrement des aciers est donc primordial dans l'identification des paramètres pour être au plus près de la rigidité élastique réelle de la plaque en flexion. Ces valeurs sont accessibles à l'ingénieur sur les plans de ferraillage nécessaires à la mise en œuvre de toute structure en béton armé.

La comparaison de l'énergie dissipée pour les deux modèles fait à nouveau apparaître la capacité du modèle DHRC à dissiper plus d'énergie que le modèle GLRC_DM grâce notamment à la prise en compte du glissement qui induit des aires des boucles correspondant aux cycles de flexion plus élevées que le modèle GLRC_DM, mais également grâce au couplage entre les deux phénomènes qui augmente l'énergie dissipée par endommagement lorsque le glissement apparaît.

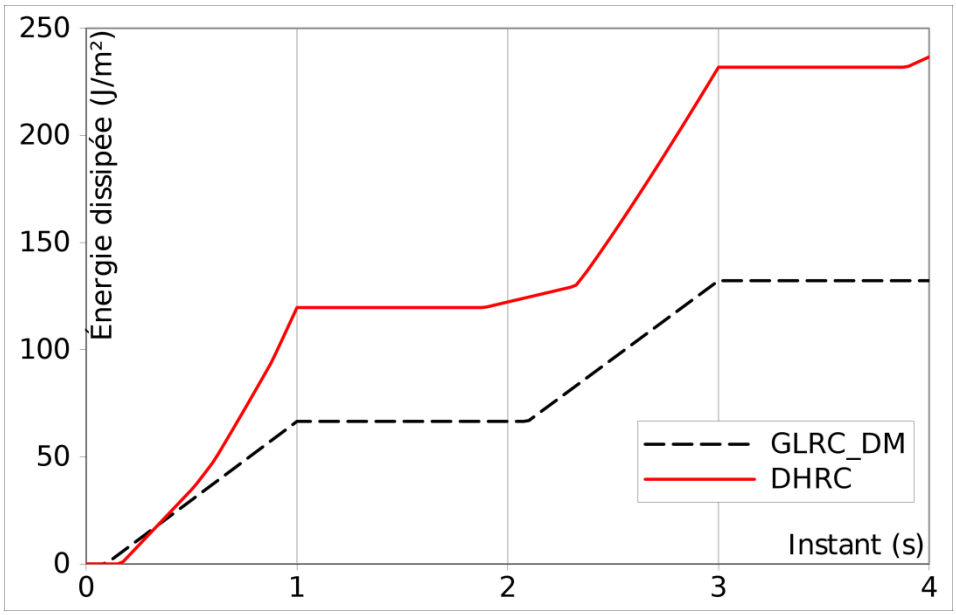


Figure IV-19 : Energie dissipée au cours d'un cycle de chargement de flexion alternée pour les modèles DHRC (ligne rouge) et GLRC_DM (tirets noirs).

IV.2.iv. Cas test de distorsion pure alternée dans le plan

Conditions limites et chargement

La plaque est considérée encastrée en un point du bord. La sollicitation de distorsion est appliquée via des conditions limites de déplacements linéaires sur les quatre arrêtes de la plaque (voir Figure IV-20). Les conditions limites et chargements sont donc :

- $\mathrm{DX} = \mathrm{DY} = \mathrm{DZ} = 0 = \mathrm{DRX} = \mathrm{DRY} = \mathrm{DRZ}$ en A_1
- $\mathrm{DX} = \mathrm{Y}D_0 f(t)$ et $\mathrm{DY} = 0$ sur $\mathrm{A}_1 - \mathrm{A}_3$
- $\mathrm{DX} = \mathrm{Y}D_0 f(t)$ et $\mathrm{DY} = D_0 L$ sur $\mathrm{A}_2 - \mathrm{A}_4$
- $\mathrm{DY} = \mathrm{X}D_0 f(t)$ et $\mathrm{DX} = 0$ sur $\mathrm{A}_1 - \mathrm{A}_2$
- $\mathrm{DY} = \mathrm{X}D_0 f(t)$ et $\mathrm{DX} = D_0 L$ sur $\mathrm{A}_3 - \mathrm{A}_4$

où D_0 représente l'amplitude du chargement imposé, ici 3.10^{-4} et $f(t)$ représente la fonction du temps décrivant le chargement cyclique. La fonction de chargement considérée pour ce cas-test est identique à celle présentée en Figure IV-8.

De cette manière, la déformation que subit la plaque est bien $\varepsilon = \frac{1}{2}\left(u_{x,y} + u_{y,x}\right) = D_0$.

Remarque 89 : La fonction de chargement $f(t)$ est discrétisée, dans l'approche quasi-statique, par un pas de temps d'intégration plus faible que pour les autres cas-test : 0.05s.

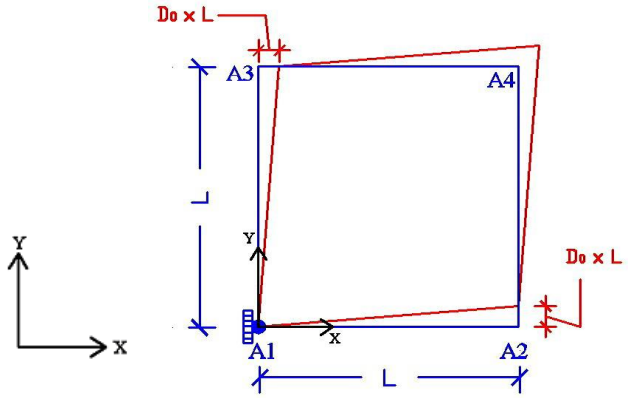


Figure IV-20 : Conditions limites pour le cas-test de distorsion pure alternée dans le plan

Maillage

Le maillage utilisé pour ce cas test est plus raffiné que les maillages précédents. En effet, même si les conditions limites et chargements sont tels que les déformations soient uniformes dans toute la plaque, les chargements sont appliqués comme une fonction affine d'une variable de l'espace et le maillage précédent n'était pas assez raffiné pour permettre l'application d'une telle condition, le nombre de conditions de Lagrange étant trop grand et menant à un mauvais conditionnement de la matrice tangente globale. Un raffinement du maillage est donc nécessaire. Les éléments finis utilisés sont les éléments de plaque DKTG décrits au §IV.1.i. et le maillage est alors constitué de 200 mailles triangulaires (TRIA3) pour 40 segments (SEG2) et 121 nœuds (voir Figure IV-21).

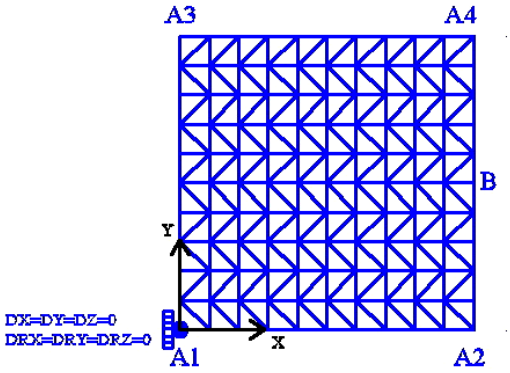
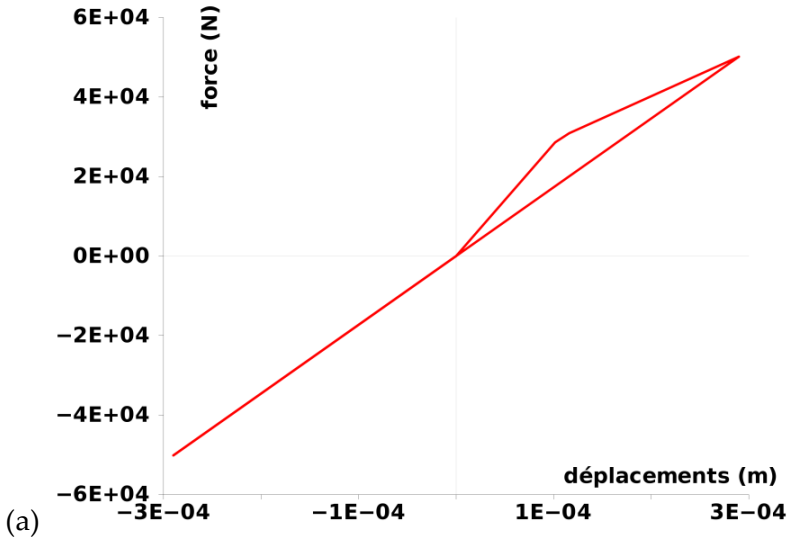


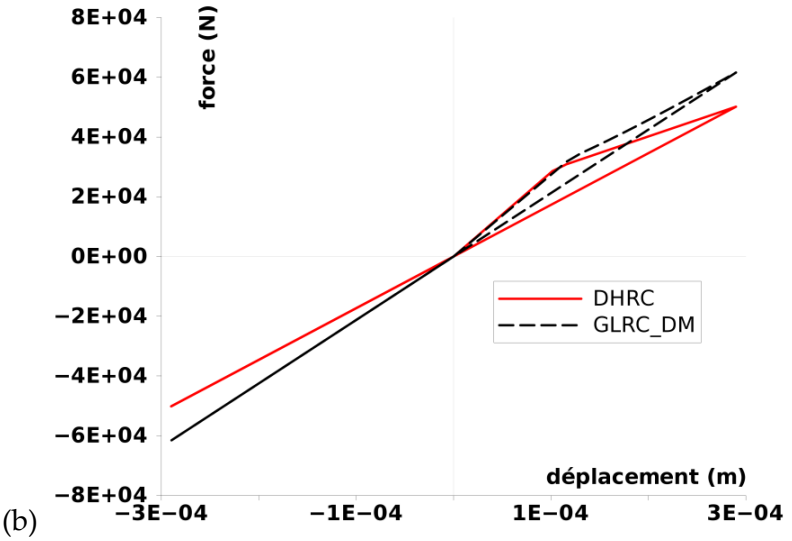
Figure IV-21 : Maillage pour le cas-test de distorsion pure alternée dans le plan

Résultats

Les efforts tranchants moyens ainsi que les distorsions moyennes dans le plan sont calculés, pour les deux modélisations GLRC_DM et DHRC. Les courbes réponses en efforts-déplacement du modèle DHRC seul puis des deux modèles sont présentées respectivement sur les Figure IV-22 (a) et (b).



(a)



(b)

Figure IV-22 : Courbe réponse effort-déplacement pour la distorsion pure alternée dans le plan par le modèle DHRC seul (a) et les modèles DHRC (ligne rouge) et GLRC_DM (tirets noirs) (b)

La courbe réponse du modèle DHRC à une sollicitation de distorsion ne présente cette fois que deux pentes et pas de déformations résiduelles. Il semble donc que le modèle ne soit pas à même de créer des déformations résiduelles lors de sollicitations de distorsions. Cela confirme la conclusion faite lors de la présentation du modèle au Chapitre III, §III.4.vi : « le glissement le long d'un acier n'induit pas de déformations de distorsion et vice-versa. Les sollicitations de distorsion pure ne seront donc pas à même de créer de déformation résiduelle via le mécanisme choisi de glissement. »

Les évolutions des différents types d'énergie dissipée au cours des cycles pour le modèle DHRC sont présentées sur la Figure IV-23. Ces courbes confirment bien l'absence de glissement dans le modèle DHRC pour ce type de sollicitation, l'énergie dissipée totale est alors égale à l'énergie dissipée par endommagement.

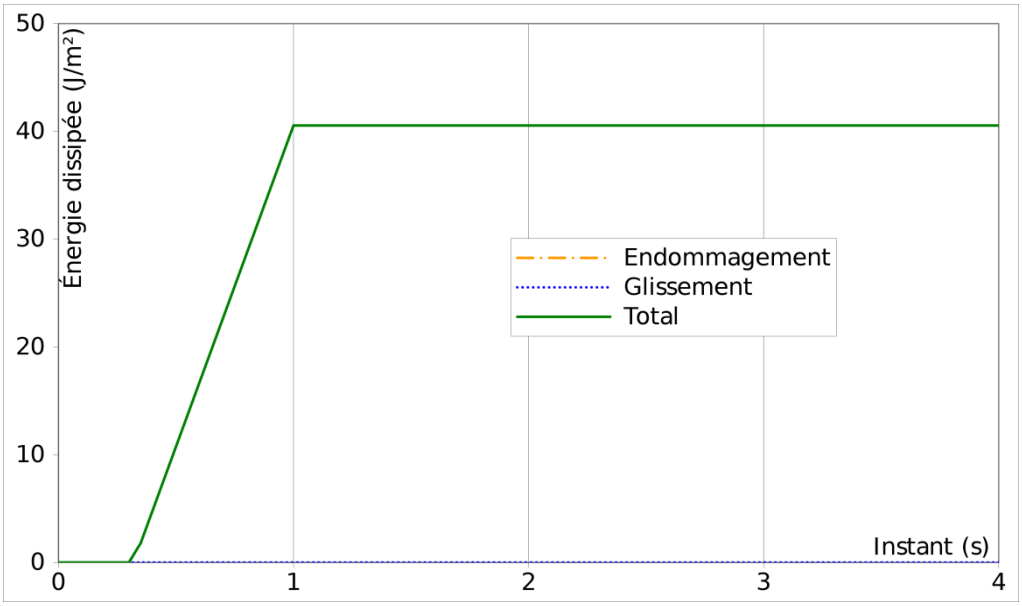


Figure IV-23 : Energies dissipées d'endommagement (tirets oranges), de glissement (pointillés bleus) et totale (ligne verte) au cours d'un cycle de chargement de distorsion alternée pour le modèle DHRC.

La comparaison entre les deux modèles présente cette fois une différence notable de comportement, en particulier au niveau de la pente endommagée. Le modèle GLRC_DM semble en effet présenter une réponse post-élastique plus rigide que le modèle DHRC. Cette différence notoire ne peut être rétablie par le calage des paramètres de GLRC_DM à partir des paramètres identifiés de DHRC car le modèle GLRC_DM ne prend pas comme paramètre d'entrée un paramètre γ permettant de gérer cette pente, mais calcule la pente post-élastique endommagée à partir du repère propre des déformations généralisées.

La comparaison de l'énergie dissipée totale pour les deux modèles fait apparaître la capacité du modèle DHRC à dissiper plus d'énergie que le modèle GLRC_DM. Ce modèle commence en effet son endommagement plus tôt que le modèle GLRC_DM (voir remarque précédente sur les courbes réponses) mais la pente de l'énergie dissipée totale pour le modèle DHRC est également plus élevée que la pense de l'énergie totale dissipée par le modèle GLRC_DM.

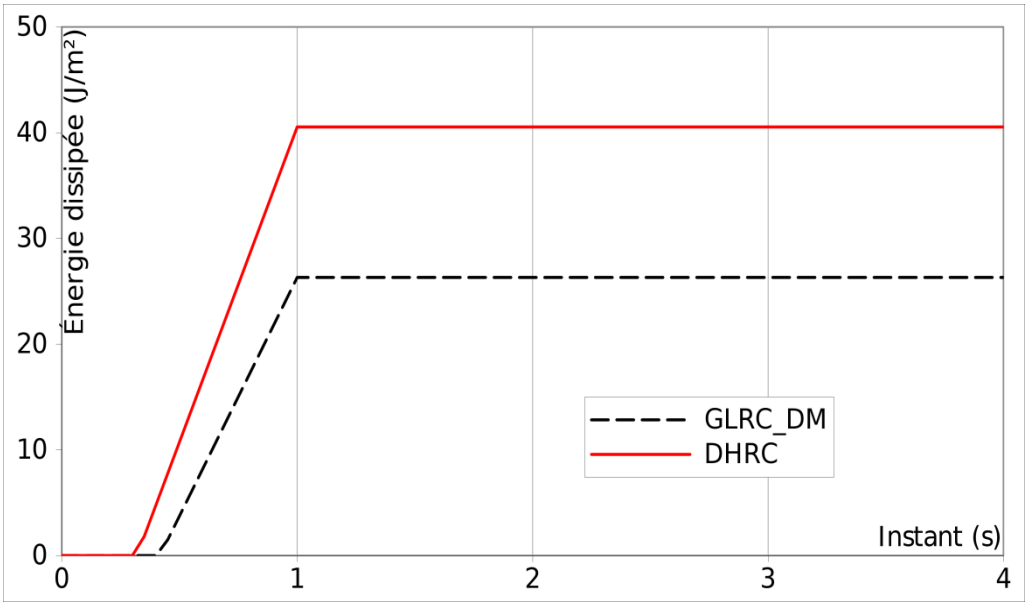


Figure IV-24 : Energie dissipée au cours des cycles de chargement pour les modèles DHRC (ligne rouge) et GLRC_DM (tirets noirs).

IV.2.v. Cas test de cisaillement pur alterné dans le plan

L'ANNEXE 8 présente une comparaison théorique simplifiée du comportement du béton armé en distorsion et en cisaillement. Il apparaît alors que le rôle des aciers en distorsion pure imposée est limité alors que ceux-ci influent sur le comportement en cisaillement imposé. Le cas-test précédent est donc repris en imposant comme condition limite non plus des déplacements mais des efforts affines de valeur maximale 500 kN.

La Figure IV-25 présente la comparaison des modèle DHRC et GLRC_DM pour des cas de distorsion et de cisaillement purs dans le plan. Les comportements élastiques des deux modèles sont similaires pour les deux types de chargement. Le comportement post-élastique, lui, diffère, au sens que le modèle DHRC présente le même comportement en cisaillement et en distorsion, alors que le modèle GLRC_DM a un comportement post-élastique plus souple en cisaillement qu'en distorsion. La pente post-élastique du modèle DHRC est cependant comprise entre les deux courbes « distorsion » et « cisaillement » du modèle GLRC_DM et pourrait être interprétée comme une moyenne de ces deux comportements.

Il serait nécessaire de déterminer les causes du comportement différent en distorsion et cisaillement pour le modèle GLRC_DM et de déterminer pourquoi le modèle DHRC ne suit pas ce comportement…

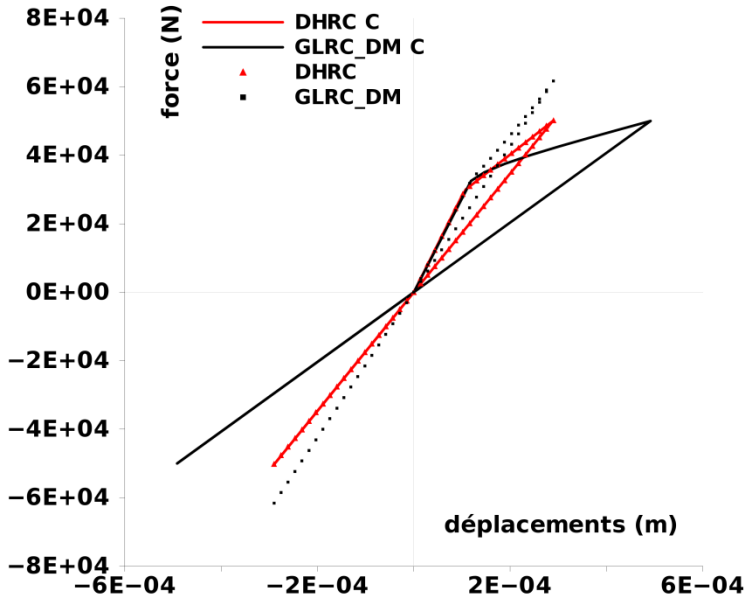


Figure IV-25 : Comparaison des courbes réponses force-déplacement pour les modèles DHRC (rouge) et GLRC_DM lors d'un cycle de cisaillement pur alterné dans le plan (lignes continues) et de distorsion pure alternée dans le plan (pointillés).

IV.2.vi. Cas test de sollicitations combinées

D'autres cas tests de sollicitations combinées des trois sollicitations élémentaires (traction, flexion, distorsion dans le plan) présentées ci-avant ont été également traités. Ces cas tests présentés en ANNEXE 9 concernent les sollicitations combinées de traction-compression-flexion, distorsion-flexion. Ils permettent de valider l'implantation numérique du modèle DHRC quelle que soit la sollicitation imposée mais ne présentent pas d'intérêt pédagogique ou démonstratif et ne sont donc pas présentés ici.

IV.3. COMPARAISON AUX ESSAIS EXPERIMENTAUX DU PROGRAMME SAFE

Une des sollicitations prédominantes dans des voiles de bâtiments lors de séismes est la distorsion, ou le cisaillement dans le plan. L'évaluation du modèle de comportement DHRC sur le benchmark expérimental du programme SAFE (Structures Armées Faiblement Élancées) de murs en distorsion testés au CCR/ISPRA en 1998 (Pegon et al 1998) est en ce sens intéressante. Elle est présentée dans cette section et est complétée par une modélisation à l'aide du modèle unidimensionnel couplé présenté au Chapitre II.

IV.3.i. Présentation du programme SAFE : voile T5

Le programme expérimental SAFE regroupe des expérimentations pseudo-dynamiques réalisées à l'aide du mur de réaction dans le laboratoire ELSA du CCR-ISPRA, en 1998, et a été l'occasion d'une collaboration EDF-COGEMA-CCR. Treize voiles de géométries différentes ont été testés en cisaillement. Le travail présenté ici s'intéresse au voile le plus épais (20cm) et le plus armé (0.8% de taux d'armatures) : le voile T5, chargé en cisaillement, avec deux murs raidisseurs (voir Figure IV-26). Plusieurs séries de sollicitations sismiques ont été imposées successivement à ce mur. Pour des raisons de cohérence avec le contexte

industriel considéré, la série étudiée ici correspond à un « run » équivalent à un accélérogramme synthétique calé à 0.43 g.

Géométrie

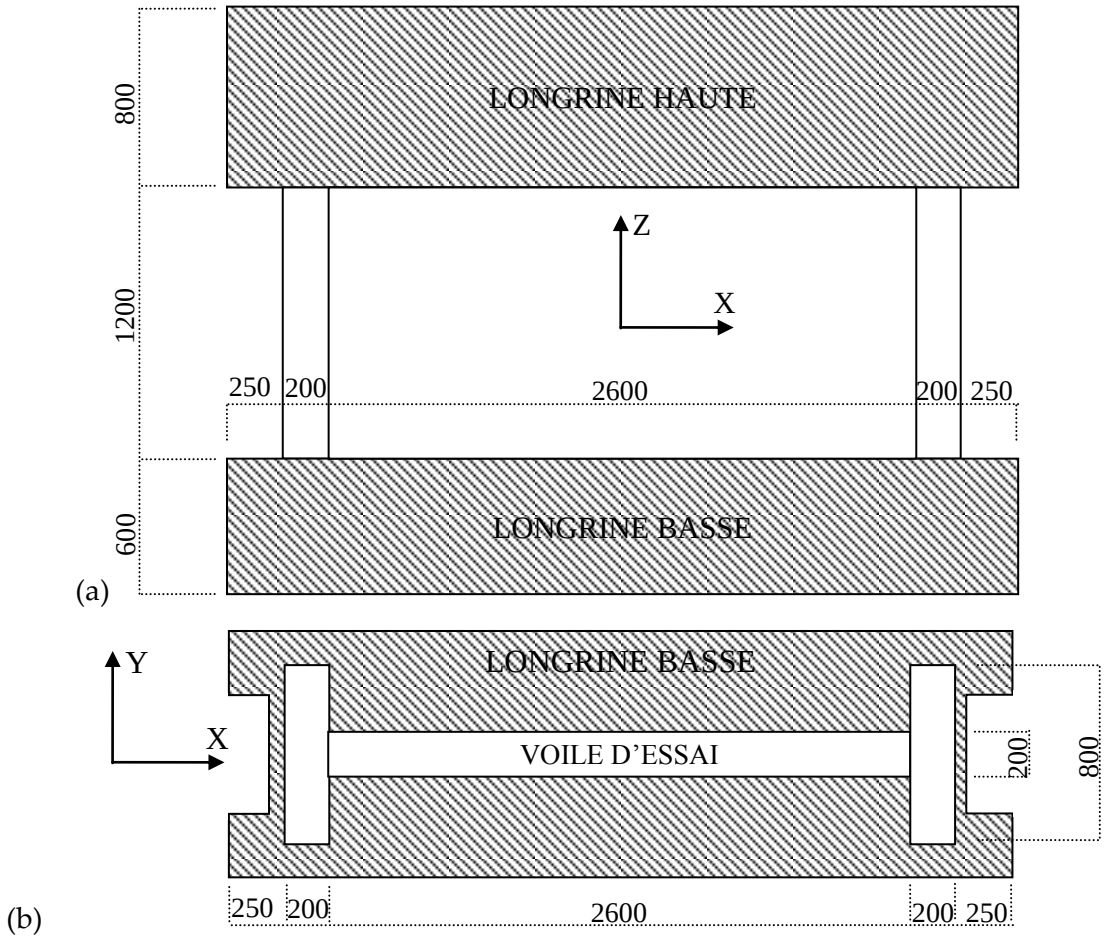


Figure IV-26 : Voile T5 avec murs raidisseurs du programme SAFE, CCR/ELSA (cotes en mm) (a) vue en élévation, (b) vue de dessous

Comme présenté sur les Figure IV-26 (a) et (b), le voile considéré a une largeur de 2.6m pour une hauteur de 1.2m et une épaisseur de 20cm. Il est prolongé à ses deux extrémités par deux murs raidisseurs de même hauteur et épaisseur que le voile principal et d'une largeur de 80cm. Le mur est construit avec deux blocs rigides à ses extrémités supérieure et inférieure appelés longrines qui permettent d'appliquer les conditions limites et de chargement.

Ferraillage

Le voile T5 est ferraillé avec un taux de ferraillage de 0.8% dans chaque direction. Cela correspond à un ferraillage réparti constitué de deux nappes identiques à maille carrée de 125mm de côté, réalisées à partir d'armatures hautes adhérence (HA) de diamètres 10mm et 12mm alternés. Les armatures horizontales sont disposées avec un enrobage de 21mm et les verticales avec un enrobage de 36mm. Les murs raidisseurs sont, quant à eux, ferraillés à partir d'armatures HA horizontales de diamètres 12mm espacées de 125mm et enrobées de 15mm de béton et d'armatures HA verticales de diamètre 14mm espacées de 125mm, regroupées par paires et enrobées de 28mm de béton.

Conditions limites et chargements

Le dispositif de chargement est représenté à la Figure IV-27. Deux longrines (haute et basse), très fortement ferraillées, ont pour fonction d'assurer la transmission des efforts de cisaillement apportés par des vérins et la fixation au sol, sans possibilité de décollement en pied ou de rotation en tête. Le voile est ainsi encastré en sa base via une série de tiges métalliques insérées dans la longrine inférieure et le chargement horizontal est appliqué au niveau du plan du centre de gravité du voile de manière à limiter les rotations induites. Un dispositif métallique a, pour cela, été mis en place, encastré dans la longrine supérieure (cf. Figure IV-27). Pour finir, deux vérins verticaux assurent une rotation nulle de la longrine supérieure tout en laissant libres les mouvements verticaux. Aucun chargement statique vertical n'est imposé. L'objectif de ce dispositif de chargement est de privilégier une sollicitation sismique de cisaillement plan en limitant les effets de flexion. Les chargements sont appliqués par deux séries de cinq vérins connectés à des blocs en acier encastrés dans la longrine supérieure. Les dix vérins ainsi disposés permettent de développer un effort total de 7MN.

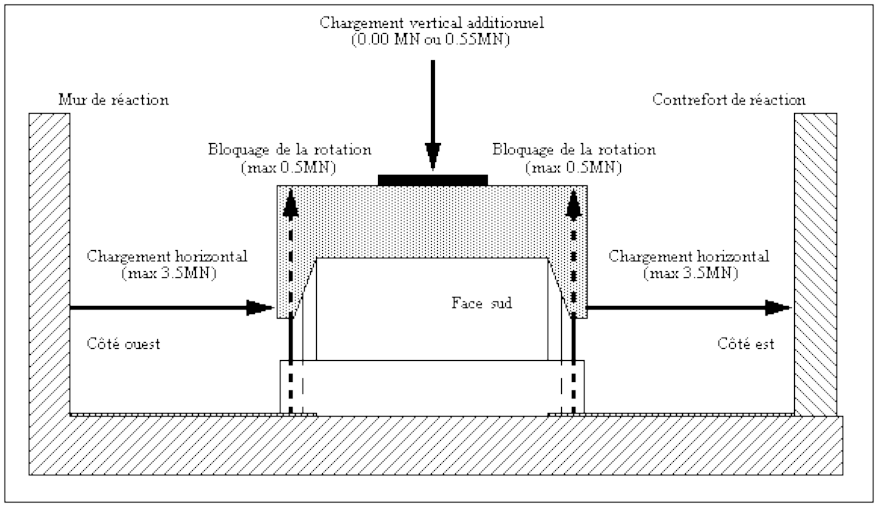


Figure IV-27 : Dispositif de chargement pour les essais SAFE. Rapport d'essai JRC.

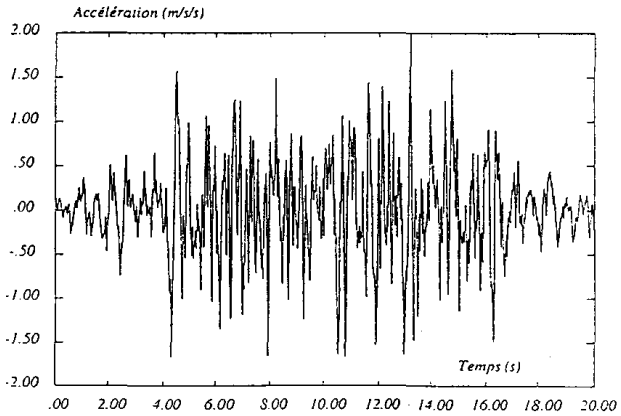


Figure IV-28 : Accélérogramme de référence pour les essais SAFE. Rapport d'essai JRC.

Le voile T5 a été testé sous cinq chargements sismiques homothétiques successifs de niveau croissant. Le premier essai correspondant à un niveau de dimensionnement, c'est celui qui va être modélisé par la suite. L'accélérogramme utilisé est un accélérogramme synthétique ayant pour spectre cible le spectre standard de dimensionnement calé à 0.43 g. La fréquence

du pic standard est située à 4 Hz. L'accélérogramme de référence est présenté sur la Figure IV-28. Au vu du nombre de pics endommageants, ce signal synthétique s'apparente à un séisme de type lointain.

Matériaux

Des tests de rupture en traction et compression sur des éprouvettes cubiques et cylindriques ont été réalisés afin d'estimer les résistances en compression et en traction du béton. Les résultats sont résumés dans le Tableau IV-3. Nous retiendrons une valeur moyenne des résultats obtenus sur cylindres. Le module de rigidité du béton n'a malheureusement pas été communiqué et nous nous baserons donc sur une valeur approximative calculée en conformité avec les prescriptions des codes de dimensionnement du béton : $E = 12000 f_{c28}^{1/3}$.

Des essais de traction ont également été réalisés pour qualifier les armatures utilisées. Etant donné que nous ne nous intéressons qu'au comportement élastique de ces aciers, nous ne retiendrons que leur module de rigidité de 200 GPa.

Tableau IV-3 : Résistances en traction et compression du béton pour les essais SAFE

Evènement	Date	Mesure
Coulage	**24/02/1997**	
Rupture en compression (cube 150 mm d'arête)	**16/07/1998**	**37.3 MPa** **39.9 MPa**
Rupture en compression (cylindre $\emptyset = 6.4\ mm, H = 15\ cm$)	**16/07/1998**	**32.2 MPa** **29.1 MPa**
Rupture en traction (cylindre $\emptyset = 6.4\ mm, H = 15\ cm$)	**16/07/1998**	**4.91 MPa** **4.73 MPa**

IV.3.ii. Modélisation du voile T5 avec le modèle DHRC

Le voile T5 et les deux murs raidisseurs ont été modélisés à l'aide du modèle de plaque en béton armé DHRC.

Maillage

Le maillage de base utilisé est présenté en Figure IV-29.

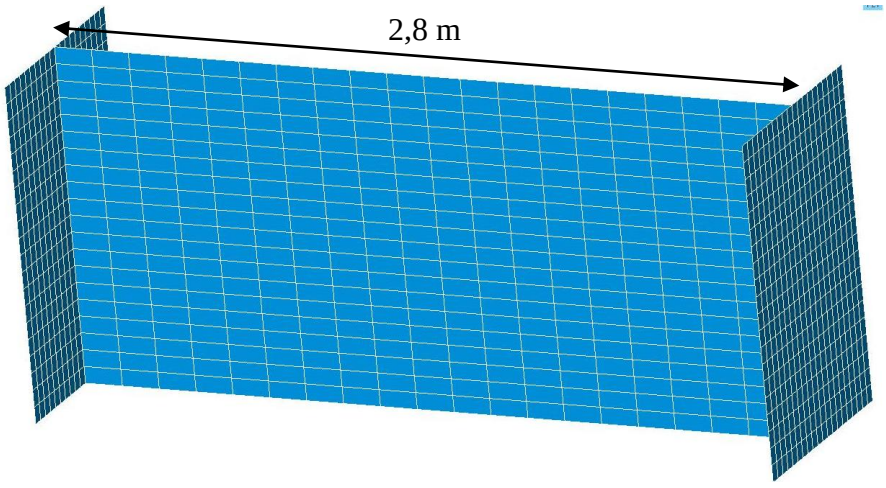


Figure IV-29: Maillage du voile T5 pour le modèle DHRC

Les mailles sont placées dans les plans moyens des murs respectifs, ce qui explique la longueur totale du voile principal de 2.8 m alors que la longueur à nu entre les deux murs raidisseurs de 20cm est de 2.6 m.

Paramètres pour l'identification

Deux maillages ont été utilisés pour l'identification des paramètres du modèle DHRC pour la modélisation de ces essais SAFE. En effet, les voiles raidisseurs n'ont pas les mêmes propriétés géométriques que le voile principal et l'identification pour ces deux types de voiles est donc différente. La Figure IV-30 présente le maillage utilisé pour l'identification des paramètres du voile principal.

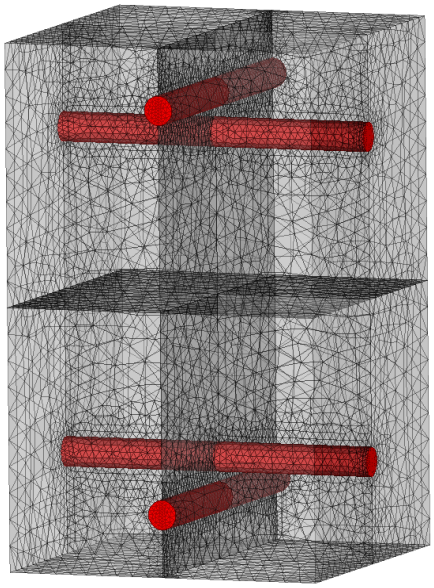


Figure IV-30 : Maillage pour l'identification des paramètres du modèle DHRC pour le voile principal du mur d'essai T5

Les paramètres matériaux utilisés pour cette identification sont, quant à eux rassemblés dans le Tableau IV-4. Ils résultent plus ou moins directement des paramètres matériaux fournis par les rapports d'essais. Le module de Young a été ajusté pour obtenir une raideur élastique satisfaisante. Les paramètres matériaux sont les mêmes pour le voile principal que pour les deux voiles raidisseurs.

Tableau IV-4 : Paramètres matériaux retenus pour l'identification des paramètres du modèle DHRC pour le voile T5

$E_A(GPa)$	$\nu_A(-)$	$E_B(GPa)$	$\nu_B(-)$	$\alpha_+(-)$	$\alpha_-(-)$	$\gamma_+(-)$	$\gamma_-(-)$	$\sigma_{d+}(MPa)$	$\sigma_{crit}(MPa)$
200	0.3	24	0.2	1	3	-0.02	0.275	1.5	1.5

Résultats

Le champ d'endommagement aux points de Gauss obtenu en fin de calcul pour la variable d'endommagement D^1 représentant l'endommagement en moitié supérieure de la plaque est présenté en Figure IV-31. Il peut être comparé qualitativement avec la photo prise pendant l'essai présentée en Figure IV-32.

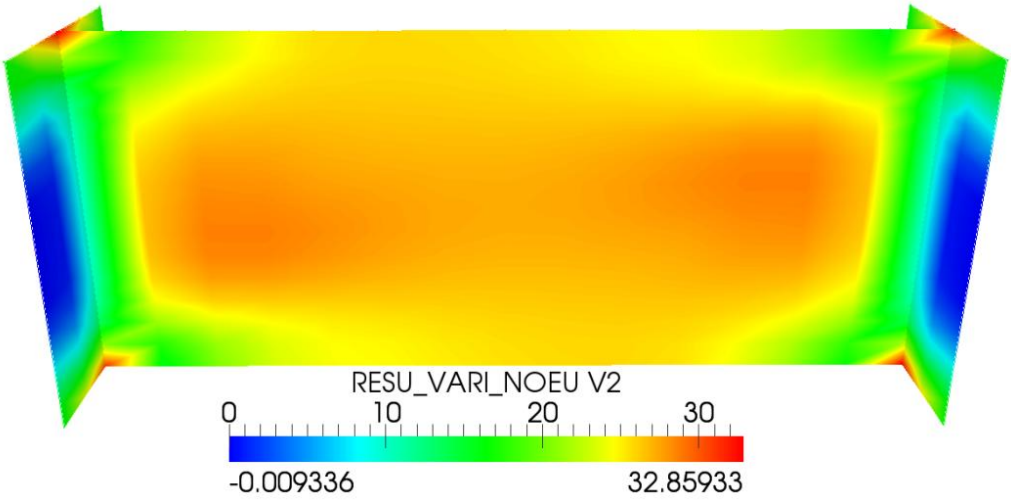


Figure IV-31 : Variable interne D^2 du modèle DHRC pour le pas de temps final

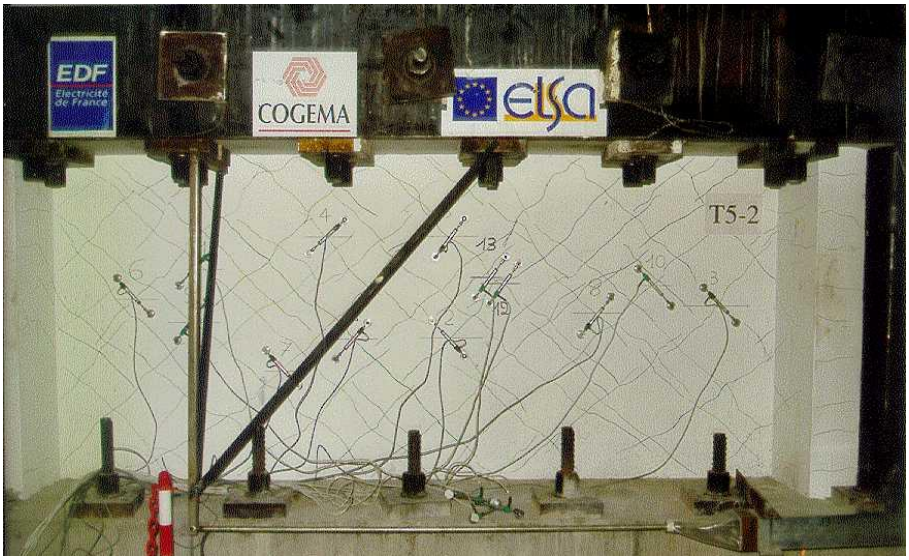


Figure IV-32 : Photo du voile T5 à la fin de l'essai correspondant à l'accélérogramme nominal

L'endommagement présenté par le calcul est globalement uniforme dans le voile principal et semble s'affaiblir près des bords libres et du bord encastré. Sur la photo, l'endommagement est à rapprocher avec les fissures apparentes et plus particulièrement avec la densité de ces fissures. Il est alors possible de constater que ces fissures semblent avoir la même répartition que la répartition suggérée par le calcul à savoir une densité globalement homogène dans le voile principal et un peu moins dense à proximité des bords supérieur et inférieur.

Remarque 90 : Il est important de noter ici que le modèle utilisé étant un modèle global, il n'est pas à même de représenter exactement les fissures du béton. L'idée est ici de représenter correctement l'affaiblissement de raideur dû à ces fissures mais nullement leur orientation, leur position ou leur ouverture. Le processus d'homogénéisation à l'origine de la formulation du modèle a justement consisté à moyenner ces fissures de façon à s'affranchir des phénomènes de localisation et de dépendance au maillage induits par la représentation numérique des fissures, il n'y a pas donc lieu d'attendre du calcul, avec ce modèle homogénéisé, une représentation visuelle des fissures observées lors de l'expérience, sans post-traitement spécifique.

La Figure IV-33 présente l'état de la variable interne de glissement $E_1^{\eta 1}$ au pas de temps final. Il est alors à noter que cette variable n'est non nulle qu'aux bords du voile étudié et semble nulle dans toute la partie utile et la plus endommagée de ce voile. Ce résultat est concordant avec les remarques effectuées lors de la construction du modèle au Chapitre III, et lors de la validation sur cas test présentée ci-avant, à savoir que le modèle de plaque en béton armé DHRC n'est, pour l'instant, pas à même de représenter de déformations résiduelles lors de sollicitations de distorsion pure. Or, les essais SAFE ont été mis en place pour favoriser ce type de sollicitation. Il est donc tout naturel que très peu de glissement ne soit créé lors de ces essais et que celui-ci soit localisé au niveau des liaisons avec les murs de refends, endroits où des contraintes et déformations normales se développent.

Remarque 91 : Le modèle DHRC ayant été conçu par homogénéisation périodique, près des bords et au niveau des liaisons il n'est plus représentatif. De même que pour les modèles de poutres, il semble nécessaire de développer des modèles de liaisons voile-dalle de manière à représenter correctement les liaisons et transmissions d'efforts dans ces éléments de construction qui possèdent une géométrie et une mise en œuvre particulière, notamment du ferraillage.

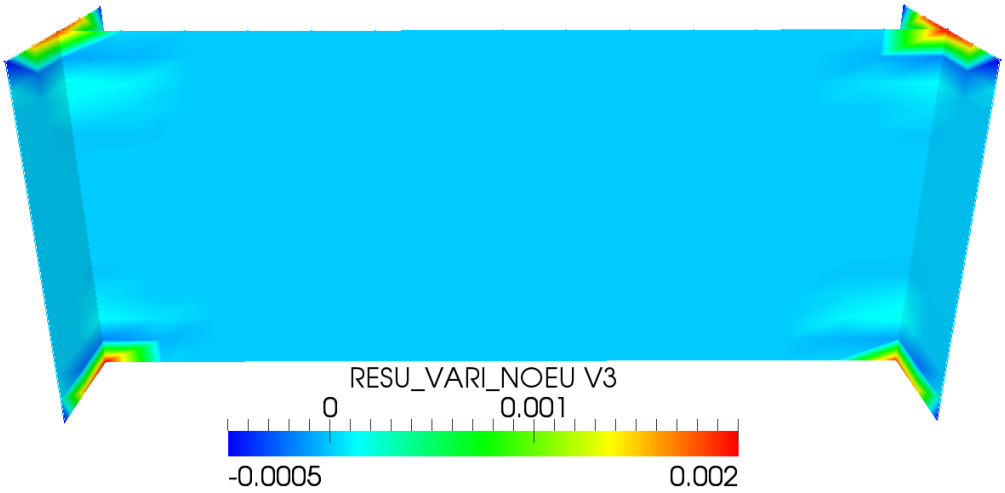


Figure IV-33 : Variable interne $E_1^{\eta 1}$ du modèle DHRC représentée aux points de Gauss pour le pas de temps final

Les autres variables internes du modèle DHRC sont présentées en ANNEXE 10 aux points de Gauss pour le pas de temps final.

Après ces constatations et comparaisons qualitatives qui tendent à rassurer sur la représentativité du modèle quant au type de sollicitations et d'endommagement que peut subir le voile durant les essais représentés, nous proposons de comparer quantativement les résultats expérimentaux et la modélisation numérique sur la réponse efforts-déplacement présentée en Figure IV-34. Les constatations qualitatives se retrouvent confirmées quantativement par la comparaison essais-calculs, à savoir que la perte de raideur et la force maximale atteinte à chaque cycle par le voile lors des essais sont correctement représentées, cependant les déformations résiduelles représentées par la simulation sont négligeables comparées à celles mesurées lors des essais.

Le phénomène dissipatif à l'origine des déformations résiduelles observées en distorsion n'est donc pas capté par le modèle tel qu'il a été construit ; à savoir que les sollicitations de distorsion ne mettent pas en jeu de glissement interne acier-béton. Le glissement n'a alors

lieu que dans les zones qui ne sont pas sollicitées en distorsion pure à savoir près de la liaison avec les murs raidisseurs.

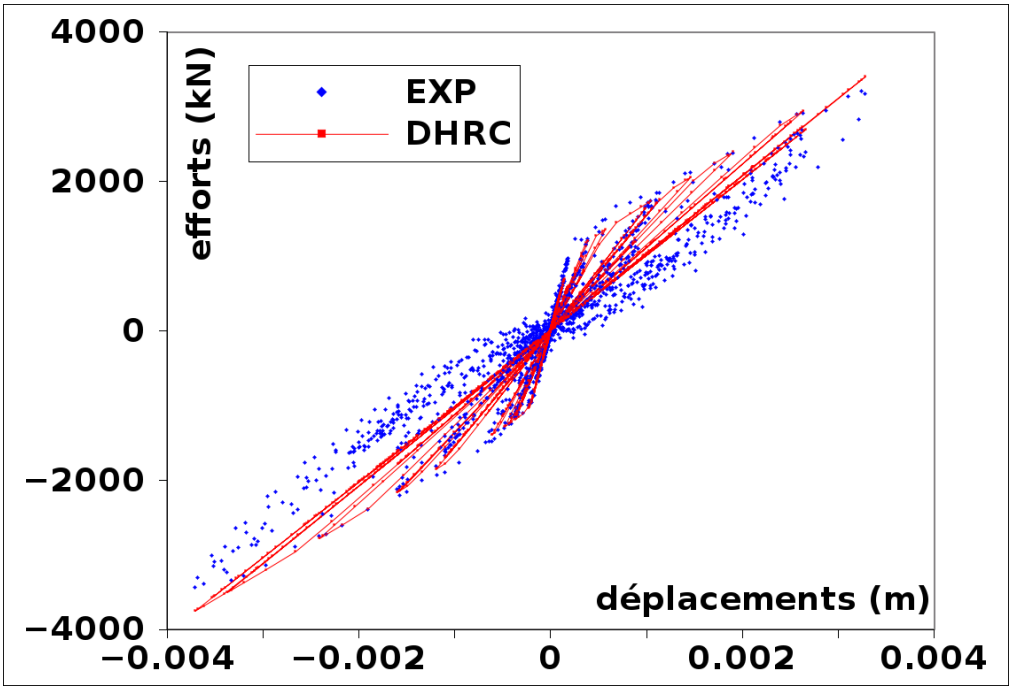


Figure IV-34 : Réponses efforts-déplacements pour le run 1 des essais SAFE du voile T5 - Comparaison essais (points bleu) modèle DHRC (ligne rouge)

Il est possible, avec le modèle actuel, d'observer les dissipations d'énergies spécifiques liées à l'endommagement et au glissement en chaque point de Gauss du maillage, puis d'extrapoler ces valeurs aux nœuds du maillage. Ainsi, comme présenté à la Figure IV-35, pour un nœud du maillage situé près de la liaison entre les murs raidisseurs et le voile principal, la prise en compte du glissement est un atout majeur pour augmenter la dissipation d'énergie par rapport à un modèle qui n'intègrerait que de l'endommagement.

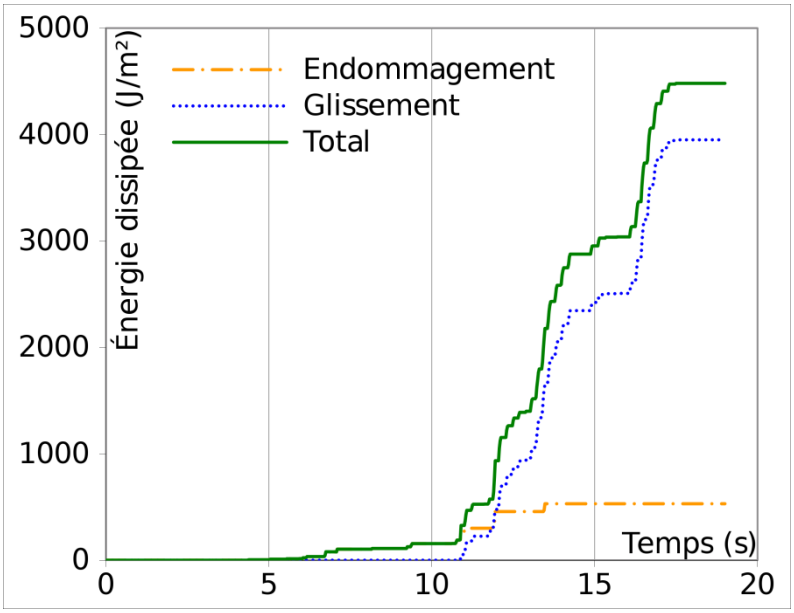


Figure IV-35 : Evolution de l'énergie dissipée totale (ligne verte) et des énergies dissipées par l'endommagement (tirets oranges) et le glissement (pointillés bleus) extrapolée en un nœud du maillage près de la liaison voile-murs raidisseurs.

Cette remarque est cependant à nuancer au regard de la Figure IV-36 qui présente les densités d'énergies dissipées moyennées sur tout le voile. En effet, le faible nombre de points de Gauss affectés par le glissement par rapport au nombre total sur le voile induit une énergie dissipée par le glissement très faible par rapport à celle dissipée par l'endommagement.

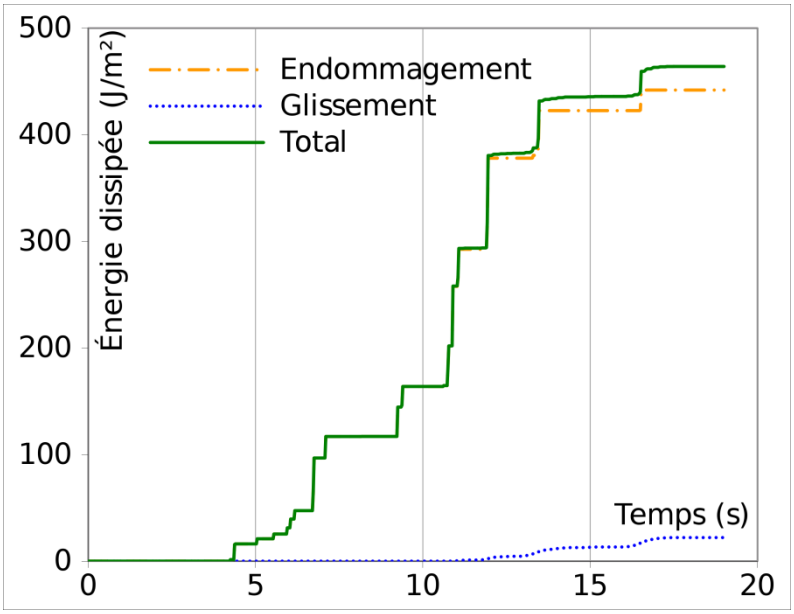


Figure IV-36 : Evolution de la densité d'énergie dissipée totale (ligne verte) et des énergies dissipées par l'endommagement (tirets oranges) et le glissement (pointillés bleus) moyennées sur tout le voile avec le modèle DHRC

En complément de l'étude de ce voile soumis à une sollicitation de type séisme, il est intéressant d'étudier la chute de fréquence propre du voile au cours de l'essai. En effet, comme précisé en introduction, la dégradation de la rigidité de la structure mène à une baisse de sa fréquence propre initiale, qu'il est important de représenter correctement pour concevoir une structure qui restera dans les marges de dimensionnement prévues tout au long de la sollicitation sismique qu'elle subit.

Cette étude fréquentielle a été réalisée par post-traitement du calcul quasi-statique non linéaire, en calculant la fréquence propre de la structure totale (voile+murs raidisseurs) à la fin de plusieurs pas de temps du calcul statique. Considérant alors un béton de masse volumique 2400 kg/m^3, des aciers de masse volumique 7800 kg/m^3 et un dispositif en tête de la maquette (longrine + dispositif de chargement) pesant 2818 t (données de l'expérience), le calcul de fréquence propre a été réalisé pour les instants suivants : 0, 2.65, 3.25, 6.5, 8.65, 10.5, 13.75 et 19 s, correspondant à des valeurs nulles de chargement statique. Les résultats expérimentaux ont, quant à eux, été obtenus à partir de la flèche en tête mesurée lors des essais, via des analyses de transformée de Fourier sur une fenêtre glissante sur toute la durée du signal. Cette méthode produit alors un spectrogramme qui représente le spectre de fréquence de toute la maquette tout au long du signal. Le code couleur adopté ici est bleu pour des faibles hauteurs de pics à rouge foncé pour les pics principaux.

La Figure IV-37 présente une comparaison entre le spectrogramme de la réponse expérimentale de la maquette SAFE T5 étudiée, et la chute de fréquence propre calculée, par post-traitement, à différents instants du calcul statique.

Une très bonne corrélation entre les résultats expérimentaux et la simulation numérique est alors observée, soulignant la bonne capacité du modèle DHRC à représenter la chute de fréquence propre due à la perte de rigidité du matériau.

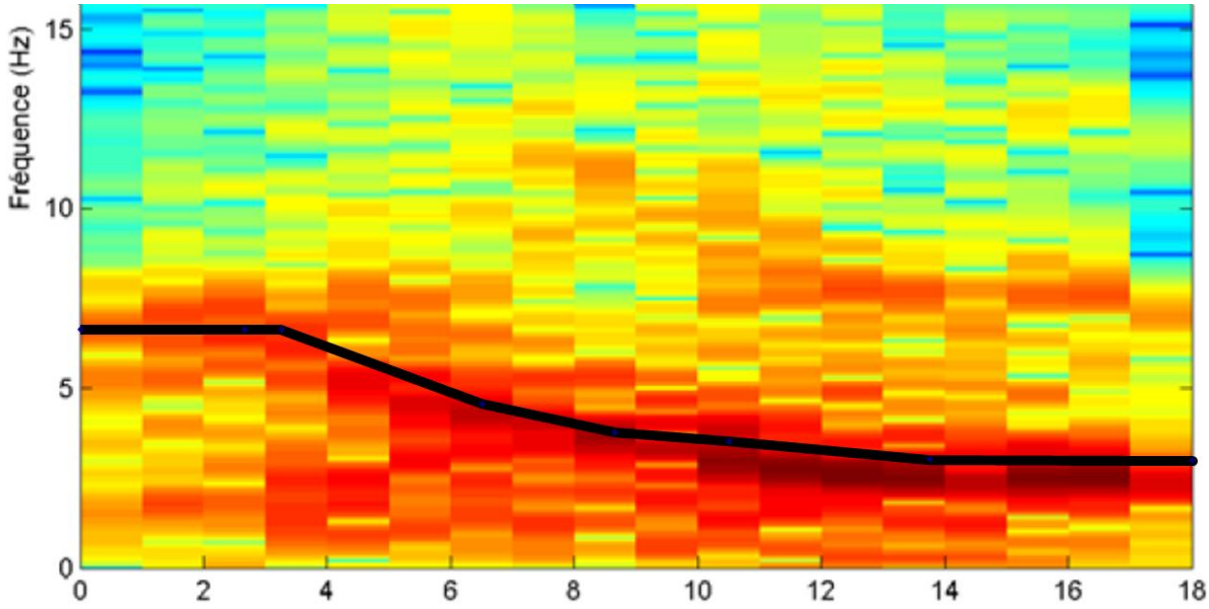


Figure IV-37 : Evolution de la fréquence propre de la maquette SAFE T5 au cours de la sollicitation. Comparaison spectrogramme expérimental (nappe colorée), fréquence propre calculée pour la simulation avec le modèle DHRC (ligne continue noire).

Le calcul quasi-statique non-linéaire a consommé 7m 4s de temps CPU, ce qui est satisfaisant au niveau des performances compte-tenu que l'implantation numérique n'a pas été optimisée.

IV.3.iii. Modélisation du voile T5 avec le modèle couplé unidimensionnel

De manière à compléter l'étude précédemment faite de la modélisation du voile à l'aide du modèle de plaque DHRC, une simulation du voile en utilisant le modèle unidimensionnel couplé formulé au Chapitre II est présentée. Cette modélisation simple permet de se faire une première idée des raisons pour lesquelles le modèle de plaque semble manquer de représentativité en distorsion.

Maillage

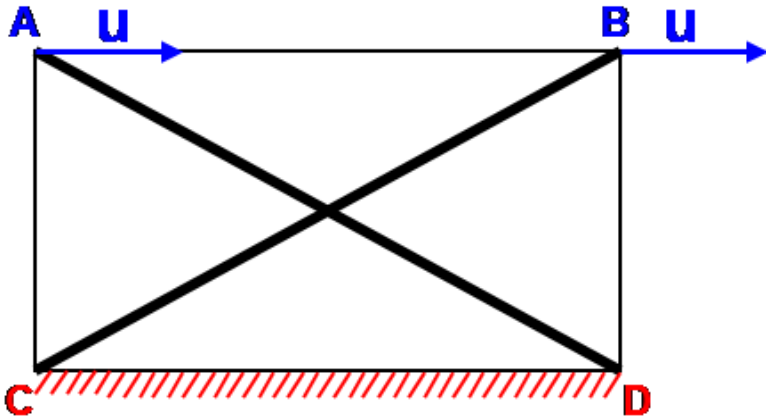


Figure IV-38 : Bielles équivalentes pour la modélisation du voile T5 avec le modèle couplé unidimensionnel

En s'inspirant du travail de (Kotronis 2000), un treillis équivalent est défini pour représenter le voile T5 des essais SAFE par deux bielles de béton armé comme présenté en Figure IV-38.

Les deux bielles équivalentes de béton armé fonctionnent alors uniquement en traction-compression et peuvent être associées au modèle unidimensionnel couplé de béton armé présenté au Chapitre II, l'effet du coefficient de Poisson étant négligé et les raideurs étant ramenées à la surface du voile. Les murs raidisseurs ne sont, ici, pas modélisés.

Paramètres pour le modèle unidimensionnel

Les paramètres sont identifiés considérant des modules de Young de 28.6 GPa pour le béton et 200 GPa pour l'acier, avec une proportion d'acier de 0.8% et des limites à rupture du béton en compression et traction respectivement de f_{cm} =46.4 MPa et f_{ct} =3.32 MPa. A partir de ces valeurs, sont définies les valeurs des seuils microscopiques de primo-endommagement pour le béton en compression et traction, respectivement : $\sigma_{d-} = 10\% f_{cm}$ and $\sigma_{d+} = 40\% f_{ct}$. Ces valeurs, définies arbitrairement sont déduites des affirmations suivantes : le béton en compression commence à endommager très tôt mais a un comportement ductile, ce qui permet d'estimer sa valeur de seuil de primo-endommagement à 10% de sa valeur de seuil de rupture. De son côté, le béton en traction a un comportement quasi-fragile donc la valeur du seuil de primo-endommagement en traction doit être définie plus proche de la valeur de seuil de rupture en traction ; cependant, le paramètre de pente post-élastique du béton en traction γ_+, doit respecter la condition (II-20) et ne peut, par conséquent être plus faible que -0.027. La pente post-élastique du béton en traction est donc très faible, proche de zéro et la valeur de seuil de primo-endommagement est donc abaissée de manière à mieux représenter la valeur ultime de la raideur après rupture du béton en traction. Quant à la valeur du seuil de primo-glissement, elle est définie, à partir de la littérature et des caractéristiques du béton utilisée à 1.5 MPa. Finalement, les paramètres d'endommagement en traction et compression pour le béton γ_+ et γ_- sont choisis à partir des courbes de référence pour le béton aux valeurs respectives de –0.01 et 0.8.

Résultats

La Figure IV-39 confronte les réponses efforts-déplacement du voile T5 pour les mesures expérimentales et les résultats calculés par la modélisation de bielles avec le modèle couplé endommagement-glissement unidimensionnel. Une bonne corrélation entre les deux courbes est observée, avec une estimation correcte de la perte de raideur, de l'effort maximal et la création de déformations résiduelles conséquentes. Ces déformations résiduelles, encore trop faibles par rapport à l'expérimental pourraient être amplifiées par la prise en compte non seulement du glissement mais aussi du frottement.

A la différence du modèle de plaque, la modélisation en bielles semble plus à même de représenter l'expérimental. Cela peut s'expliquer par le fait que cette modélisation représente un glissement qui a lieu dans les directions des bielles et non dans les directions des armatures comme pour le modèle de plaque DHRC. Une simulation de ces essais avec le modèle de plaque DHRC tourné à 45° par rapport au maillage a également été effectuée pour confirmer cette constatation et mène au même type de réponse que celle présentée en Figure IV-39, avec donc des déformations résiduelles conséquentes.

Les déformations résiduelles observées expérimentalement semblent donc bien provenir d'un phénomène de glissement comme modélisé dans notre étude, mais pas principalement

d'un glissement entre acier et béton. Il semblerait que ce glissement se situe plutôt entre béton et béton au niveau des fissures inclinées observées macroscopiquement lors de l'essai (voir Figure IV-32).

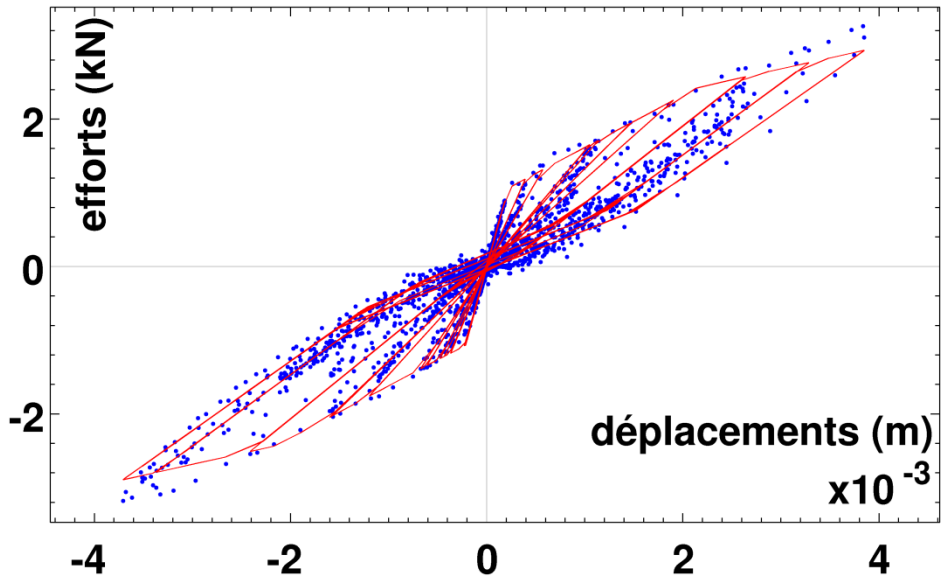


Figure IV-39 : Réponses efforts-déplacements pour le run 1 des essais SAFE du voile T5 - Comparaison essais (ligne rouge) modélisation par bielles équivalente de béton armé (points bleus)

De même que pour le modèle de plaque, il est possible de tracer l'évolution des densités d'énergies dissipées, ramenées à la surface du voile, par l'endommagement et le glissement obtenus par le modèle unidimensionnel, au cours de ce calcul. La Figure IV-40 présente l'évolution de ces énergies et de leur somme : l'énergie dissipée totale.

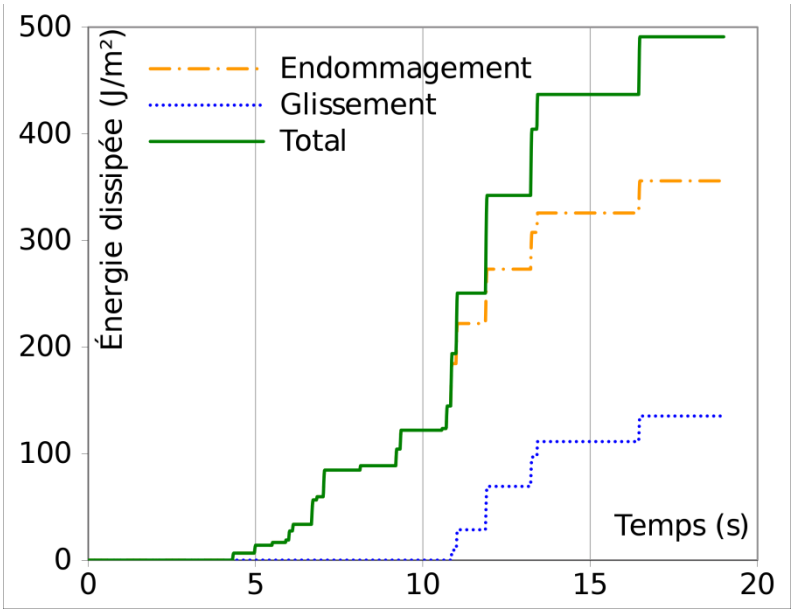


Figure IV-40 : Evolution de l'énergie dissipée totale (ligne verte) et des énergies dissipées par l'endommagement (tirets oranges) et le glissement (pointillés bleus) moyennées sur tout le voile avec la modélisation 1D

La part du glissement dans l'énergie totale a alors bien augmenté pour en représenter désormais près d'un tiers. La prise en compte de ce phénomène de glissement est donc importante à considérer et efficace dans l'objectif d'augmenter la dissipation d'énergie et la

représentation des déformations résiduelles par rapport à un modèle à endommagement seul. Reste, comme précisé précédemment, à identifier le phénomène microscopique à l'origine des glissements internes lors d'un essai de distorsion qui permettra d'enrichir la modélisation.

IV.4. CONCLUSIONS GENERALES

Dans ce chapitre, **l'implantation numérique** du modèle de plaque en béton armé DHRC est décrite. Ce modèle repose sur une discrétisation par **éléments finis de plaque DKTG** et la résolution du problème d'évolution des variables internes utilise un algorithme de **point fixe** sur les **mécanismes dissipatifs activés**.

Le modèle DHRC est ensuite **validé sur des cas tests** associés à des sollicitations élémentaires simples et combinées. Puis le modèle est comparé au modèle de référence à endommagement seul GLRC_DM. Les comparaisons soulignent le **rôle important** de la prise en compte du **glissement** dans **l'augmentation des capacités dissipatives** du modèle DHRC par rapport au modèle GLRC_DM. La validation sur le cas-test de **distorsion pure** confirme les constatations précédentes quant à **l'absence de génération de déformations résiduelles** par le modèle DHRC lors de sollicitations de distorsion. Toutefois, le modèle DHRC conduit à une énergie dissipée augmentée par rapport au modèle à endommagement seul GLRC_DM construit sans analyse micro-macro.

Une validation par rapport à des résultats expérimentaux est présentée. Elle se réfère aux essais SAFE qui ont eu lieu à Ispra (Italie) en 1998 et qui concernent un voile en béton armé soumis à des sollicitations sismiques de distorsion. La comparaison qualitative et quantitative des réponses expérimentales et simulées par le modèle de plaque en béton armé DHRC souligne la **bonne représentativité du modèle quant à la perte de raideur induite par l'endommagement, la force maximale atteinte au cours des cycles de chargement, ainsi que la chute de fréquence propre au cours du calcul.** Cependant, **trop peu de déformations résiduelles** sont créées lors de la simulation du fait du manque constaté de glissement représenté par le modèle DHRC pour ce type de sollicitation.

La simulation de ce même essai avec le modèle unidimensionnel couplant endommagement et glissement, via une modélisation par bielles équivalentes, mène à une réponse plus proche de l'expérimental en termes de déformations résiduelles mais aussi de forme des boucles d'hystérésis. Cette simulation tend à montrer qu'il serait intéressant**,** pour représenter correctement les sollicitations de distorsion, **d'introduire, dans la modélisation, un autre type de glissement microscopique** pouvant survenir dans les directions des fissures qui apparaissent au sein du béton sous chargement de distorsion.

Une dernière comparaison à l'expérimental sur un cas semi-industriel (benchmark SMART 2008) est en cours de réalisation.

CONCLUSION ET PERSPECTIVES

Ce rapport a présenté la formulation de deux modèles de comportement couplant endommagement et glissement pour les barres et pour les plaques en béton armé. Ces modèles sont justifiés par une approche micromécanique et mènent à des résultats satisfaisants quant à la comparaison à l'expérimental.

Ce travail s'inscrit dans le contexte de la sécurité sismique du parc de bâtiments des installations nucléaires dont EDF a la charge sur le sol français métropolitain. Il répond au besoin de représenter les comportements non linéaires liés à la dégradation des matériaux et des structures dans la modélisation et la simulation de bâtiments en béton armé soumis à des sollicitations sismiques.

Après une revue bibliographique (Chapitre I) permettant de mieux cerner les principaux phénomènes à l'origine de la détérioration des propriétés mécaniques des plaques en béton armé sous sollicitation cycliques, les phénomènes que nous avons cherché à modéliser sont :

- la **perte de raideur**,
- la **dissymétrie traction-compression avec son effet unilatéral**
- et les **déformations résiduelles**

La modélisation des boucles d'hystérésis est écartée, dans cette étude, du fait de la difficulté apparente à déterminer leur origine microscopique.

Une classification des nombreux modèles existants dans la littérature selon l'échelle des phénomènes d'intérêts et l'échelle à laquelle ils sont formulés est ensuite proposée, suivie d'une description de la théorie des Matériaux Standard Généralisés et d'un focus sur la théorie de l'endommagement. Il apparaît alors que peu de modèles de plaque en béton armé formulés à l'échelle macroscopique dans un cadre théorique rigoureux, sont disponibles dans la littérature. Par conséquent, il est fait le choix de construire :

- un **modèle de plaque**
- représentant le **comportement non linéaire du béton armé**,
- à **l'échelle macroscopique**,
- construit par une **analyse multi-échelle**
- dans le cadre des **Matériaux Standard Généralisés**.

Les variables internes choisies pour représenter les mécanismes dissipatifs microscopiques sont **l'endommagement** (pour la perte de raideur et la dissymétrie traction-compression) et **la décohésion à l'interface acier-béton** (pour les déformations résiduelles).

Une première approche simplifiée de la modélisation du comportement du béton armé est présentée au Chapitre II à travers la construction de **modèles rhéologiques**. Par enrichissement successifs, un **modèle de comportement pour les barres en béton armé couplant endommagement et glissement** à l'interface acier-béton est construit par une **démarche micromécanique**. Ce modèle traduit simplement le comportement d'une poutre

en béton armé sous chargement cyclique susceptible de s'endommager et de présenter une décohésion entre acier et béton au niveau des barres de renfort. Le modèle permet d'intégrer l'effet **de la périodicité de cette décohésion** dû à la répartition des armatures transversales dans la structure. L'introduction d'une **dissymétrie traction-compression**, au niveau microscopique, dans la fonction d'endommagement du béton permet un **bon accord entre la réponse du modèle et le comportement expérimental** d'un poteau en béton armé soumis à des cycles de traction-compression.

Ce modèle macroscopique s'inscrit dans le cadre thermodynamique des Matériaux Standard Généralisés et est défini par les équations suivantes :

Densité d'énergie libre :	$\mathcal{W}(E, E^{\eta}, D) = \frac{A(D)E^2}{2} - B(D)EE^{\eta} + \frac{C(D)E^{\eta 2}}{2}$
Seuils :	$f_{\eta}(\Sigma^{\eta}) = \lvert\Sigma^{\eta}\rvert - \sigma_{crit} \leq 0$ et $f_d(\mathrm{G}) = \lvert G\rvert - k_0 \leq 0$
Evolutions (lois de normalité) :	$\dot{E}^{\eta} = \dot{\lambda}_{\eta} \frac{\partial f_{\eta}}{\partial \Sigma^{\eta}}$ et $\dot{D} = \dot{\lambda}_d \frac{\partial f_d}{\partial G}$ avec $\dot{\lambda}_{\eta}, \dot{\lambda}_d \geq 0$

Les fonctions A, B et C dépendent analytiquement de l'endommagement D et des caractéristiques matériaux et géométriques de la microstructure.

Fort de cette première approche unidimensionnelle de la modélisation du béton armé par démarche micromécanique, le Chapitre III présente la construction, par **homogénéisation périodique**, d'un **modèle de comportement** de **plaques en béton armé couplant endommagement** et **déformations résiduelles de glissement** : le modèle DHRC.

La méthodologie adoptée pour la construction de ce modèle macroscopique est décrite, faisant la distinction entre la **formulation de la forme mathématique** du modèle et **l'identification de ses paramètres**, et définissant ainsi deux domaines géométriques d'étude : un domaine simplifié pour la formulation du modèle et un domaine représentatif des caractéristiques réelles de la plaque étudiée pour l'identification des paramètres. Les **comportements non-linéaires** seront **identifiés** avec des **variables dissipatives fixées**, et ce successivement pour plusieurs valeurs de ces variables.

Le modèle DHRC considère un **endommagement non-homogène et non-symétrique** dans la cellule de base, et **quatre glissements périodiques** à l'interface entre les quatre barres en acier et le béton avoisinant. L'analyse multi-échelle mène à une **forme de modèle originale** comprenant un terme **de couplage entre déformations généralisées et déformations de glissement** : $\mathbb{B}(D)$. Ce modèle est défini, dans le cadre des Matériaux Standard Généralisés par la densité d'énergie libre, les seuils et les lois d'évolution suivantes :

$$2\mathcal{W}(\boldsymbol{E}, D, \underline{E}^{\eta}) = \begin{pmatrix}\boldsymbol{E}\\ \boldsymbol{K}\end{pmatrix} : \begin{pmatrix}\mathbb{A}^{mm}(D) & \mathbb{A}^{mf}(D)\\ \mathbb{A}^{fm}(D) & \mathbb{A}^{ff}(D)\end{pmatrix} : \begin{pmatrix}\boldsymbol{E}\\ \boldsymbol{K}\end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix}\boldsymbol{E}\\ \boldsymbol{K}\end{pmatrix} : \begin{pmatrix}\mathbb{B}^{\pi m}(D)\\ \mathbb{B}^{\pi f}(D)\end{pmatrix} . \underline{E}^{\eta\pi} + \underline{E}^{\eta\rho} . \mathbf{C^{\rho\pi}}(D) . \underline{E}^{\eta\pi}$$

$$f_{d^{\pi}}(G^{\pi}) = G^{\pi} - Hk_0 \leq 0 \qquad \text{et} \qquad f^{\alpha}_{\eta^{\pi}}(\Sigma^{\eta\pi}_{\alpha}) = \left(\Sigma^{\eta\pi}_{\alpha}\right)^2 - (H\sigma_{crit})^2$$

$$\dot{D}^{\pi} = \dot{\lambda}_{d^{\pi}} \frac{\partial f_{d^{\pi}}(G^{\pi})}{\partial G^{\pi}} = \dot{\lambda}_{d^{\pi}} \text{ et } \dot{E}^{\eta\pi}_{\alpha} = \dot{\lambda}^{\alpha}_{\eta^{\pi}} \frac{\partial f^{\alpha}_{\eta^{\pi}}(\Sigma^{\eta\pi}_{\alpha})}{\partial \Sigma^{\eta\pi}_{\alpha}} = 2\Sigma^{\eta\pi}_{\alpha} \dot{\lambda}^{\alpha}_{\eta^{\pi}}$$

Les tenseurs $\mathbb{A}$, $\mathbb{B}$ et $\boldsymbol{C}$, paramètres du modèle, sont ensuite identifiés par résolution de problèmes élémentaires posés sur la cellule de base. Cette identification, dont la procédure

est automatisée, ne fait intervenir que 11 paramètres géométriques, fournis par les plans de ferraillage de la plaque considérée, et 8 paramètres matériaux aisément identifiables également.

Le modèle DHRC, initialement construit pour les plaques en béton armé peut se généraliser à n'importe quel matériau composite à matrice endommageable et inclusions comprenant un glissement interne périodique.

La construction du modèle et l'identification des paramètres ont été dégradés dans le cas unidimensionnel. On retrouve de cette manière le comportement construit par au Chapitre II par l'approche rhéologique.

Dans une dernière partie (Chapitre IV), l'implantation numérique du modèle DHRC est décrite, puis validée sur des cas tests de sollicitations élémentaires simples et combinées.

Les comparaisons avec un modèle global de plaque ne faisant intervenir que de l'endommagement soulignent le **rôle important** de la prise en compte du **glissement** dans **l'augmentation des capacités dissipatives** du modèle DHRC.

La validation sur des cas-test de **distorsion et cisaillement purs** confirme que le modèle DHRC n'est **pas à même de créer des déformations résiduelles** lors de sollicitations de ce type.

Une validation par rapport aux résultats expérimentaux des essais SAFE qui ont eu lieu à Ispra (Italie) en 1998 et qui concernent un voile en béton armé soumis à des sollicitations sismiques de distorsion est également présentée. La comparaison qualitative et quantitative des réponses expérimentales et simulées par le modèle de plaque en béton armé DHRC souligne la **bonne représentativité du modèle** quant à la **perte de raideur induite par l'endommagement,** la **force maximale** atteinte au cours des cycles de chargement, ainsi que la **chute de fréquence propre** au cours du calcul. Cependant, **trop peu de déformations résiduelles** sont représentées par le modèle. Cette limitation est liée au manque constaté de glissement généré par le modèle DHRC pour ce type de sollicitation.

La simulation du même essai avec le modèle unidimensionnel couplant endommagement et glissement, via une modélisation par bielles équivalentes, mène à une réponse plus proche de l'expérimental en termes de déformations résiduelles mais aussi de forme des boucles d'hystérésis.

Perspectives

D'autres validations du modèle sur des essais de flexion alternée ou des essais à plus grande ampleur sur des bâtiments complets ou à échelle réduite ainsi que des validations dynamiques seraient nécessaires.

Ce modèle n'intègre pas encore de prise en compte du comportement thermique des matériaux, une simple translation des déformations généralisées par une déformation thermique ($\boldsymbol{E} - \boldsymbol{E}^{th}$) pourrait permettre cette prise en compte.

Par ailleurs, le modèle DHRC a été formulé dans le cadre des plaques minces. Il est possible d'élargir sa formulation aux plaques épaisses et voiles courts en considérant le cisaillement transverse. Pour ce faire, il suffit alors de résoudre deux problèmes élémentaires supplémentaires en élasticité correspondant aux correcteurs de cisaillement transverse.

Le modèle de comportement de plaques en béton armé DHRC fait apparaître des défauts de représentativité du comportement expérimental observé en distorsion/cisaillement. Pour pallier à ce défaut, une variable interne plastique usuelle associée à la déformation macroscopique de distorsion ($E_{xy} - E_{xy}^{p}$) a été introduite. Ces développements non présentés ici n'ont pas mené à un comportement macroscopique représentatif des résultats expérimentaux. En gardant la même méthodologie de construction du modèle par une approche micromécanique, il serait intéressant d'introduire à l'échelle microscopique des termes de glissement qui s'activeraient sous sollicitation de distorsion (voir modélisation bielles avec le modèle de barres en béton armé). Ce glissement ne serait alors pas un glissement entre acier et béton mais un glissement (ou une ouverture) au sein du béton simulant le glissement sur des lèvres des fissures inclinées dans le béton lors de sollicitations de ce type.

Pour représenter les boucles d'hystérésis, une des pistes suggérée est la modélisation du frottement à l'interface acier-béton ou au niveau des lèvres des fissures dans le béton. Cette piste risque cependant de mettre en péril la formulation Standard Généralisée du modèle…

La méthodologie proposée étant très générale, elle mène à une forme de modèle indépendante de la loi d'endommagement utilisée ou de la forme de la fonction de glissement choisie. La même procédure d'identification des paramètres avec un modèle d'endommagement microscopique du béton différent et/ou une forme de glissement plus réaliste que celles utilisées pour cette étude pourrait être mise en œuvre. De la même manière, on pourrait tester l'applicabilité du modèle à d'autres types de matériaux à matrice fragile et fibres croisées.

Pour finir, le modèle étant construit par homogénéisation périodique, il n'est pas à même de représenter correctement le comportement du matériau au niveau des liaisons et aucune étude sur les effets de bords n'a, pour l'instant, été menée. Dans le même esprit, il serait nécessaire de construire un modèle de comportement pour les liaisons dalle-voile, dalle-poutre etc… en béton armé, qui font intervenir des ferraillages et des techniques de mise en œuvre spécifiques. Pour ce faire, une approche par développement asymptotique menant à une modélisation de couche mince peut-être menée, à la manière de ce qu'a proposé (David et al 2012).

BIBLIOGRAPHIE

Alliche A, Dumontet H. 2011. Anisotropic model of damage for geomaterials and concrete. *International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics* 35:969-79

Andrieux S, Bamberger Y, Marigo JJ. 1986. Un modèle de matériau microfissuré pour les bétons et les roches. *Journal de mécanique théorique et appliquée* 5:471-513

Auriault J-L. 1973. *Sur une théorie de la thermodynamique des processus irréversibles dans les milieux continus*. Université Joseph-Fourier-Grenoble I

Badel P, Godard V, Leblond J-B. 2007. Application of some anisotropic damage model to the prediction of the failure of some complex industrial concrete structure. *International journal of solids and structures* 44:5848-74

BAEL80. 1980. Règles techniques de conception et de calcul des ouvrages et construction en béton armé suivant la méthode des états limites. Ministère de l'environnement et du cadre de vie, Ministère des transports

Banon H, Irvine HM, Biggs JM. 1981. Seismic damage in reinforced concrete frames. *Journal of the Structural Division* 107:1713-29

Benallal A, Billardon R, Geymonat G. 1988. Some mathematical aspects of the damage softening problem. *Cracking and damage* 1:247-58

Benallal A, Billardon R, Geymonat G. 1989. Conditions de bifurcations à l'intérieur et aux frontières pour une classe de matériaux non-standards. *Comptes rendus de l'Académie des sciences. Série 2, Mécanique, Physique, Chimie, Sciences de l'univers, Sciences de la Terre* 308:893-8

Benmansour MB. 1997. *Modélisation du comportement cyclique alterné du béton armé. Application à divers essais statiques de poteaux*. Ecole Nationale des Ponts et Chaussées

Brun M, Reynouard JM, Jezequel L. 2003. A simple shear wall model taking into account stiffness degradation. *Engineering structures* 25:1-9

Caillerie D. 1995. 2D models of plate-like 3D elastic bodies. *Pitman research notes in mathematics series*:28-34

Caillerie D, Nedelec JC. 1984. Thin elastic and periodic plates. *Mathematical Methods in the Applied Sciences* 6:159-91

Carpinteri A, Carpinteri A. 1984. Hysteretic behavior of RC beams. *Journal of structural engineering* 110:2073-84

Chaboche JL. 2003. Damage mechanics. *Milne, I., Ritchie, RO and B. Karihaloo (eds.) Comprehensive Structural Integrity* 2:213-84

Code CEBFIPM. 1990. Model Code for Concrete Structures. In *Bulletin D'Information*

Coleman BD, Gurtin ME. 1967. Thermodynamics with internal state variables.

Crambuer R, Pinelli X, Ragueneau F, Juster-Lermitte S. 2011. Mesures de dissipation hystérétiques par flexion 3 points sur poutres en béton armé. *Rep. 4000434357*, CEA-LMT

Curnier A, He Q-C, Zysset P. 1994. Conewise linear elastic materials. *Journal of Elasticity* 37:1-38

David M, Marigo JJ, Pideri C. 2012. Homogenized interface model describing inhomogeneities located on a surface. *Journal of Elasticity* 109:153-87

Dhatt GS, Dorney DJ, Griffin LW, Huber FW, Sondak DL. 1970. An efficient triangular shell element. *AIAA Journal* 8:2100-2

Dragon A, Mroz Z. 1979. A continuum model for plastic-brittle behaviour of rock and concrete. *International Journal of Engineering Science* 17:121-37

Farrar CR, Baker WE. 1992. Measuring the stiffness of concrete shear walls during dynamic tests. *Experimental mechanics* 32:179-83

Favre R. 1997. *Dimensionnement des structures en béton: aptitude au service et éléments de structures*: PPUR presses polytechniques

Feenstra PH, de Borst R. 1995. Constitutive model for reinforced concrete. *Journal of engineering mechanics* 121:587-95

Feyel Fdr. 1999. Multiscale FE2 elastoviscoplastic analysis of composite structures. *Computational Materials Science* 16:344-54

Gatuingt F, Pijaudier-Cabot G. 2002. Coupled damage and plasticity modelling in transient dynamic analysis of concrete. *International journal for numerical and analytical methods in geomechanics* 26:1-24

Germain P. 1973. *Cours de mécanique des milieux continus*: Masson

Goto Y. 1971. Cracks formed in concrete around deformed tension bars. *ACI Journal Proceedings*: ACI

Guedes J, Pegon P, Pinto AV. 1994. A fibre Timoshenko beam element in CASTEM 2000. *special publication Nr. I* 94

Halm D, Dragon A. 1996. A model of anisotropic damage by mesocrack growth; unilateral effect. *International Journal of Damage Mechanics* 5:384-402

Halm D, Dragon A. 1998. An anisotropic model of damage and frictional sliding for brittle materials. *European Journal of Mechanics - A/Solids* 17:439-60

Halphen B, Nguyen QS. 1975. Sur les matériaux standard généralisés. *Journal de mécanique* 14:39-63

Hegemier GA, Murakami H, Hageman LJ. 1985. On tension stiffening in reinforced concrete. *Mechanics of Materials* 4:161-79

Horn RA, Johnson CR. 1990. *Matrix analysis*: Cambridge university press

Ingraffea AR, Gerstk WH, Gergely P, Saouma V. 1984. Fracture mechanics of bond in reinforced concrete. *Journal of Structural Engineering* 110:871-90

Kachanov LM. 1958. Time of the rupture process under creep conditions. *Isv. Akad. Nauk. SSR. Otd Tekh. Nauk* 8:26-31

Kobayashi AS, Hawkins NM, Chan YA, Lin IJ. 1980. A feasibility study of detecting reinforcing-bar debonding by acoustic-emission technique. *Experimental Mechanics* 20:301-8

Koechlin P, Potapov S. 2007. Global constitutive model for reinforced concrete plates. *Journal of engineering mechanics* 133:257-66

Kordina K, Kiel M. 1982. Stabilitat Mehseitig Gelagertes Betonwande, 2. Stufe. *Institut fur Baustoffkunde und Stahlbetonbau, Technische, Universitat Braunschweig*

Kotronis P. 2000. *Cisaillement dynamique de murs en béton armé. Modèles simplifiés 2D et 3D*. Ecole normale supérieure de Cachan-ENS Cachan

Kotronis P, Mazars J, Davenne L. 2003. The equivalent reinforced concrete model for simulating the behavior of walls under dynamic shear loading. *Engineering fracture mechanics* 70:1085-97

Kratzig WB, Polling R. 2004. An elasto-plastic damage model for reinforced concrete with minimum number of material parameters. *Computers & structures* 82:1201-15

Kupfer HB, Gerstle KH. 1973. Behavior of concrete under biaxial stresses. *Journal of the Engineering Mechanics Division* 99:853-66

La Borderie C. 1991. *Phénomènes unilatéraux dans un matériau endommageable: modélisation et application à l'analyse de structures en béton*

Lee HP. 2011. Shell finite element of reinforced concrete for internal pressure analysis of nuclear containment building. *Nuclear Engineering and Design* 241:515-25

Lemaitre J, Chaboche J-L. 1994. *Mechanics of solid materials*: Cambridge university press

Lichnérowicz A. 1967. Calcul tensoriel. Collection Armand Colin, Paris

Lorentz E. 1996. Modélisations opérationnelles de l'endommagement. *Bulletin de la Direction des Etudes et Recherche, EDF* HI-74/96/012/0

Lorentz E, Godard V. 2011. Gradient damage models: Toward full-scale computations. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 200:1927-44

Luccioni B, Oller S, Danesi R. 1996. Coupled plastic-damaged model. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 129:81-9

Maekawa K, Pimanmas A, Okamura H. 2003. *Non-linear Mechanics of Reinforced Concrete*: CRC PressI Llc

Marigo JJ. 1982. Étude numérique de l'endommagement. *Bulletin de la Direction des Etudes et Recherche, EDF* 2:22-48

Marigo JJ. 1989. Constitutive relations in plasticity, damage and fracture mechanics based on a work property. *Nuclear Engineering and Design* 114:249-72

Markovic D. 2006. Loi de comportement GLRC_DM.

Marquis D, Lemaitre J. 1988. Constitutive equations for the coupling between elasto-plasticity damage and aging. *Revue de physique appliquée* 23:615-24

Marti P, Alvarez M, Kaufmann W, Sigrist V. 1998. Tension chord model for structural concrete. *Structural Engineering International* 8:287-98

Mazars J, Berthaud Y, Ramtani S. 1990. The unilateral behaviour of damaged concrete. *Engineering Fracture Mechanics* 35:629-35

Mazars J, Kotronis P, Davenne L. 2002. A new modelling strategy for the behaviour of shear walls under dynamic loading. *Earthquake engineering & structural dynamics* 31:937-54

Michel J-C. 1984. *Homogénéisation de matériaux élastoplastiques avec cavités*

Nedjar B. 2001. Elastoplastic-damage modelling including the gradient of damage: formulation and computational aspects. *International Journal of Solids and Structures* 38:5421-51

Ngo D, Scordelis AC. 1967. Finite element analysis of reinforced concrete beams. *ACI Journal Proceedings*: ACI

Nicot F, Darve F. 2007. Approche multi-échelle de la rupture. *18ème Congrès Français de Mécanique (Grenoble 2007)*

Okamura H, Kim IH. 2000. Seismic performance check and size effect FEM analysis of reinforced concrete. *Engineering Fracture Mechanics* 65:369-89

Pascu IR. 1995. *Contribution à l'analyse d'éléments en béton armé sollicités en membrane et flexion biaxiale. Expérimentation, modélisation, validation*

Pegon P, Magonette G, Molina FJ, Verzeletti G, Dyngeland T, et al. 1998. Programme SAFE: Rapport du test T5. *Technical Note, Joint Research Center*

Pensée V, Kondo D. 2001. Une analyse micromécanique 3-D de l'endommagement par mésofissuration. *Comptes Rendus de l'Académie des Sciences - Series IIB - Mechanics* 329:271-6

Peric D, de Souza Neto EA, Feijo RA, Partovi M, Molina AJ. 2011. On micro-to-macro transitions for multi-scale analysis of non-linear heterogeneous materials: unified variational basis and finite element implementation. *International Journal for Numerical Methods in Engineering* 87:149-70

Pimentel Mr, BrÃ¼whiler E, Figueiras J. 2010. Extended cracked membrane model for the analysis of RC panels. *Engineering Structures* 32:1964-75

Polak MA, Vecchio FJ. 1994. Reinforced concrete shell elements subjected to bending and membrane loads. *ACI Structural Journal-American Concrete Institute* 91:261-8

Ramirez ND. 2005. *Etude de la liaison acier-béton: de la modélisation du phénomène à la formulation d'un élément fini enrichi 'béton armé'*. Ecole normale supérieure de Cachan-ENS Cachan

Rumanus E, Meschke G. 2007. Homogenization-based modelling of reinforced concrete in the context of durability-oriented analyses. *6th International Conference on Fracture Mechanics of Concrete and Concrete Structures, Catania, Italy*

Rumanus E, Meschke Gn. 2008. Modelling of reinforced concrete by means of homogenization approach including steel-concrete interactions.

Sall ELHO. 1985. *Contribution à l'étude de l'influence des armatures sur la fissuration des éléments de structure : cas des plaques*

Sanchez-Palencia E, Zaoui A, Suquet PM. 1987. *Homogenization Techniques for Composite Media*: Springer Berlin Heidelberg. 193-8 pp.

Selby RG, Vecchio FJ. 1997. A constitutive model for analysis of reinforced concrete solids. *Canadian Journal of Civil Engineering* 24:460-70

Shao J-F, Jia Y, Kondo D, Chiarelli A-S. 2006. A coupled elastoplastic damage model for semi-brittle materials and extension to unsaturated conditions. *Mechanics of materials* 38:218-32

Sicsic P, Marigo JJ, Corrado M. 2013. Initiation of a periodic array of cracks in the thermal shock problem: a gradient damage modeling. *Journal of Mechanics and Physics of Solids*

Soltani M, An X, Maekawa K. 2003. Computational model for post cracking analysis of RC membrane elements based on local stress-strain characteristics. *Engineering structures* 25:993-1007

Soltani M, An X, Maekawa K. 2005. Localized nonlinearity and size-dependent mechanics of in-plane RC element in shear. *Engineering structures* 27:891-908

Spacone E, El-Tawil S. 2004. Nonlinear analysis of steel-concrete composite structures: State of the art. *Journal of Structural Engineering* 130:159-68

Spacone E, Filippou FC, Taucer FF. 1996. Fibre beam-column model for non-linear analysis of R/C frames: Part I. Formulation. *Earthquake Engineering and Structural Dynamics* 25:711-26

Stolz C. 2010. On micro-macro transition in non-linear mechanics. *Materials* 3:296-317

Suquet P. 1982. *Plasticité et homogénéisation*. Univ. Paris VI, Paris

Suquet PM. 1993. Overall potentials and extremal surfaces of power law or ideally plastic composites. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids* 41:981-1002

Sylvester JJ. 1851. On a remarkable discovery in the theory of canonical forms and of hyperdeterminants. *Philosophical Magazine* 4th series, 2:391-410

Takeda T, Sozen MA, Nielsen NN. 1970. Reinforced concrete response to simulated earthquakes. *Journal of the Structural Division* 96:2557-73

Terrien M. 1980. Emission acoustique et" comportement mecanique post-critique" d'un beton sollicite en traction. *BULL LIAISON LAB PONTS CHAUSS*

Vecchio FJ, Collins MP. 1986. The modified compression-field theory for reinforced concrete elements subjected to shear. *ACI J.* 83:219-31

Viwathanatepa S, Popov EP, Bertero VV. 1979. *Effects of generalized loadings on bond of reinforcing bars embedded in confined concrete blocks*: University of California, Earthquake Engineering Research Center

Voldoire F. 2005. Proposition de développement de modèle global pour le comportement des voiles en béton armé sous sollicitations sismiques, EDF R&D

Waeckel F. 1994. *Une loi de comportement thermo-métallurgique des aciers pour le calcul mécanique des structures*

Watanabe K, Niwa J, Yokota H, Iwanami M. 2004. Experimental Study on Stress-Strain Curve of Concrete Considering Localized Failure in Compression. *Journal of Advanced Concrete Technology* 2:395-407

Yvonnet J, Gonzalez D, He QC. 2009. Numerically explicit potentials for the homogenization of nonlinear elastic heterogeneous materials. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 198:2723-37

ANNEXE 1

Descriptif de la loi de comportement GLRC_DM

GLRC_DM est une loi de comportement faisant partie des modèles dits « globaux » utilisés pour des structures minces (poutres, plaques et coques). Pour ces types de modèles, les phénomènes non linéaires comme la plasticité ou l'endommagement sont directement reliés aux déformations généralisées (extension, courbure, distorsion) et aux contraintes généralisées (efforts membranaires, de flexion ou tranchants). Cette considération permet d'économiser, par rapport à une approche multicouche, du temps CPU ainsi que de la mémoire. D'autre part, l'avantage par rapport aux coques multicouches est que cette modélisation permet d'éviter les problèmes de localisation et d'instabilités liées au caractère adoucissant de la loi constitutive lorsque l'un des constituants de la plaque a un comportement quasi-fragile (béton), en profitant de l'homogénéisation avec le matériau acier.

La loi de comportement GLRC_DM s'applique plus particulièrement à un élément fini de type plaque soumis à des sollicitations membranaires ou de flexion. Elle modélise l'endommagement de plaques en béton armé à l'aide de paramètre « homogénéisés ». Ne représentant pas une éventuelle plastification, cette loi ne s'adapte pas bien aux sollicitations sous chargement extrêmes, d'où son intérêt ici, puisque l'on traite de séismes de faible magnitude (France) peu susceptibles d'entraîner la plastification des aciers. De plus, GLRC_DM est isotrope avant endommagement, c'est-à-dire que l'orthotropie induite par les nappes d'armatures est négligée.

Cette partie va se consacrer à la présentation théorique du modèle en partant d'une énergie libre et d'une modélisation de coque avec coefficients de membrane et de flexion différents pour arriver à une expression d'un seuil d'endommagement.

Énergie libre

On considère une formulation de la densité d'énergie libre définie directement en déformations généralisées, ε et κ, accompagnées de la déformation de « pincement » transversal, avec un endommagement indépendant de la position en z (direction de l'épaisseur)**:**

$$\varphi_{ed}(\varepsilon,\kappa,\varepsilon_{zz},d_j)=\frac{\lambda}{2}(tr(\varepsilon)+\varepsilon_{zz})^2.\xi_m(tr(\varepsilon),d_j)+\mu.(\sum_{i=1}^{2}\tilde{\varepsilon}_i{}^2.\xi_m(\tilde{\varepsilon}_i,d_j)+\varepsilon_{zz}^2)$$

$$+\frac{\lambda}{2}z^2tr(\kappa)^2.\xi_f(tr(\kappa),d_j)+\mu z^2\sum_{i=1}^{2}\tilde{\kappa}_i{}^2.\xi_f(\tilde{\kappa}_i,d_j)+z(.)$$

où $z(.)$ contient tous les termes de couplage entre ε et κ qui devraient disparaître par intégration dans l'épaisseur.

On fait l'hypothèse que la plaque est symétrique par rapport au feuillet moyen et on intègre sur l'épaisseur zpour construire une densité surfacique. On obtient alors la densité surfacique d'énergie libre, moyennant une hypothèse complémentaire sur la déformation ε_{zz} :

$$\varphi_{ed}^{s}(\varepsilon,\kappa,\varepsilon_{zz},d_j)=\int_{(\frac{-h}{2})}^{(\frac{h}{2})}\varphi_{ed}((\varepsilon),(\kappa),\varepsilon_{zz},d_j)$$

$$=\frac{\lambda_m}{2}(tr(\varepsilon)+\varepsilon_{zz})^2.\xi_m(tr(\varepsilon),d_j)+\mu_m.(\sum_{i=1}^{2}\tilde{\varepsilon}_i{}^2.\xi_m(\tilde{\varepsilon}_i,d_j)+\varepsilon_{zz}^2)$$

$$+\frac{\lambda_f}{2}tr(\kappa)^2.\xi_f(tr(\kappa),d_j)+\mu_f\sum_{i=1}^{2}\tilde{\kappa}_i{}^2.\xi_f(\tilde{\kappa}_i,d_j)$$

où h est l'épaisseur de la la plaque et $\lambda_m,\lambda_f,\mu_m,\mu_f$ sont les coefficients de Lamé relatifs aux parties membranaire et de flexion. C'est à partir de cette expression de la densité surfacique d'énergie libre que le modèle GLRC_DM est construit. Sa construction à partir d'une analyse locale dépasse le stade de ce stage.

Coefficients de Lamé

Connaissant E_{eq}^{m} (module d'Young effectif en membrane), E_{eq}^{f} (module d'Young effectif en flexion), ν_m (coefficient de poisson effectif en membrane) et ν_f (module d'Young effectif en flexion), on applique les relations suivantes pour déterminer les coefficients de Lamé susdits :

$\lambda_m=\frac{\nu_m E_{eq}^{m}h}{(1-\nu_m).(1-2\nu_m)}$,$\mu_m=\frac{E_{eq}^{m}h}{2.(1+\nu_m)}$

$\lambda_f=\frac{\nu_f E_{eq}^{f}h^3}{12.(1-\nu_f^2)}$,$\mu_f=\frac{E_{eq}^{f}h^3}{24.(1+\nu_f)}$

Nota : on a, à ce stade, considéré que la déformation de « pincement » transversal était une variable d'état, qui sera ensuite contrôlée via l'hypothèse des contraintes planes, uniquement dans la direction de déformation membranaire, d'où l'expression des coefficients λ_m *et* μ_m *(cela offre l'avantage de pouvoir faire dépendre le couplage de contraintes planes de l'endommagement sur le comportement membranaire) ; tandis que celle des coefficients* λ_f *et* μ_f *prend en compte implicitement cette condition.*

Endommagement

La variable d'endommagement est, quant à elle, décrite par deux composantes 1 et 2 représentant respectivement l'endommagement global du côté de la face supérieure de la plaque et celui du côté de la face inférieure :

$$d(z)=\begin{cases}d_1 & si\ z\geq 0\\ d_2 & si\ z<0\end{cases}$$

Les fonctions d'endommagement $\xi_m(.,d_j),\xi_f(.,d_j)$ sont alors définies comme suit :

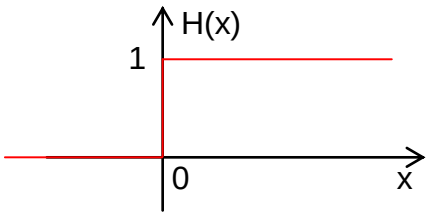
$$\xi_m(x,d_1,d_2)=\frac{1}{2}\frac{1+\gamma_{mt}d_1}{1+d_1}+\frac{1+\gamma_{mt}d_2}{1+d_2}H(x)+\frac{1+\gamma_{mc}d_1}{1+d_1}+\frac{1+\gamma_{mc}d_2}{1+d_2}H(-x)\in[0,1]$$

et

$$\xi_f(x,d_1,d_2)=\frac{\alpha+\gamma_f d_1}{\alpha+d_1}H(-x)+\frac{\alpha+\gamma_f d_2}{\alpha+d_2}H(x)\in[0,1]$$

$H(.)$est la fonction Heaviside définie comme suit :

$$H(x) = \begin{cases} 0 & si\ x < 0 \\ 1 & sinon \end{cases}$$



Les paramètres d'endommagement γ_{mt} pour la traction en membrane, γ_{mc} pour la compression en membrane et γ_f pour la flexion, peuvent avoir des valeurs dans [0,1], de manière à ce que le modèle ne soit pas adoucissant, ce qui entraînerait sinon des difficultés de dépendance à la discrétisation spatiale et de convergence, et ce qui ne correspond pas à la réalité physique globale de la réponse de la structure en béton armé dans le domaine de chargement visé. On choisira $\gamma \approx 0$ lorsque le phénomène correspondant aura plus d'impact sur l'endommagement et $\gamma \approx 1$ lorsque celui-ci sera négligeable. Ainsi, pour le béton armé, on s'attend à $\gamma_{mc} \approx 1$ et $\gamma_{mt} \approx 0$. Quant au paramètre, α, il permet d'ajuster la contribution de la flexion au seuil d'endommagement.

On a donc :

$\frac{\partial \xi_m x, d_1, d_2}{\partial d_j} = -\frac{G_m(x)}{2(1+d_j)^2}$ en notant $G_m(x) = (1-\gamma_{mt})H(x) + (1-\gamma_{mc})H(-x)$

Ces fonctions caractéristiques de l'endommagement vérifient $\frac{\partial \xi}{\partial d} \leq 0$ pour représenter la perte de raideur liée à l'endommagement, et $\frac{\partial \xi}{\partial x} = 0 \quad pour\ x \in]-\infty, 0[\cup]0, +\infty[$.

Le saut en 0 permettant de représenter le changement de comportement entre traction et compression, cependant sans introduire de discontinuité. Ces fonctions varient de 1 à respectivement γ_{mt}ou γ_{mc}, et γ_f, pour des $d_j \to +\infty$. Le modèle décrit donc un endommagement partiel mais non total du matériau. De plus, les différences de valeurs entre γ_{mt} et γ_{mc} permettent de représenter la « refermeture de fissure » (reprise de raideur) si $\gamma_{mc} > \gamma_{mt}$.

Contraintes généralisées

Selon la procédure habituelle on définit les contraintes généralisées (efforts normaux et moments) par les dérivées de la densité d'énergie libre par rapport aux déformations généralisées, ε et κ :

$$\mathrm{N} = \frac{\partial \Phi_{ed}^S}{\partial \varepsilon} \quad ; \quad \mathrm{M} = \frac{\partial \Phi_{ed}^S}{\partial \kappa}$$

On calcule, dans notre application, les contraintes généralisées dans le repère des vecteurs propres des déformations généralisées (respectivement en membrane et en flexion). On trouve alors :

$$\tilde{N}_i = \frac{\partial \Phi_{ed}^S}{\partial \tilde{\varepsilon}_i} = \lambda_m(\mathrm{tr}(\varepsilon) + \varepsilon_{zz}).\xi_m \mathrm{tr}(\varepsilon, d_j) + 2\mu_m \tilde{\varepsilon}_i.\xi_m(\tilde{\varepsilon}_i, d_j), \quad i = 1..2$$

$$\tilde{M}_i = \frac{\partial \Phi_{ed}^S}{\partial \tilde{\kappa}_i} = \lambda_f \mathrm{tr}(\kappa).\xi_f \mathrm{tr}(\kappa, d_j) + 2\mu_f \tilde{\kappa}_i.\xi_f(\tilde{\kappa}_i, d_j), \quad i = 1,2$$

Les contraintes et déformations généralisées partagent le même repère propre. Ainsi, si leurs vecteurs propres sont désignés comme V_m et V_f pour respectivement la membrane et la flexion, on peut écrire :

$$\mathrm{NV}_m = \tilde{\mathrm{N}}\mathrm{V}_m \qquad \text{et} \qquad \mathrm{MV}_f = \tilde{\mathrm{M}}\mathrm{V}_f$$

où $\tilde{\mathrm{N}}$et $\tilde{\mathrm{M}}$ sont les matrices diagonales composées des valeurs propres $\tilde{\mathrm{N}}_i$ et $\tilde{\mathrm{M}}_i$. Il est important de noter que les vecteurs propres pour la partie de membrane V_m et de flexion et V_f sont complètement indépendants.

De la même manière, on peut définir les contraintes de pincement σ_{zz} comme variables duales de ε_{zz}:

$$\sigma_{zz} = \frac{\partial \Phi_{ed}^S}{\partial \varepsilon_{zz}} = \lambda_m \xi_m(\mathrm{tr}(\varepsilon), d_1, d_2).\mathrm{tr}(\varepsilon) + \varepsilon_{zz} + 2\mu_m \varepsilon_{zz}$$

L'hypothèse de contraintes planes impose alors : $\sigma_{zz} = 0$ en tout point de l'épaisseur.

Seuils et évolution de l'endommagement

Pour pouvoir introduire un seuil d'endommagement dans le cadre de l'hypothèse d'un *matériau généralisé*, on introduit les forces thermodynamiques associées aux variables d_1 et d_2 :

$$Y_j = -\frac{\partial \Phi_{ed}^S}{\partial d_j} = Y_j^m + Y_j^f \text{ où } j \in [\![1,2]\!]$$

Avec

$$\left.\begin{aligned} Y_j^m(\varepsilon, d_j, \varepsilon_{zz}) &= \frac{1}{(1+d_j)^2}\frac{\lambda_m}{4}\mathrm{tr}(\varepsilon) + {\varepsilon_{zz}}^2.G_m(\mathrm{tr}(\varepsilon)) + \frac{\mu_m}{2}\sum_{i=1}^{2}\tilde{\varepsilon}_i^2.G_m(\tilde{\varepsilon}_i) \\ Y_j^f(\kappa, d_j) &= \frac{\alpha(1-\gamma_f)}{\alpha + {d_j}^2}\frac{\lambda_f}{2}\mathrm{tr}(\kappa)^2 H(-1)^j.\mathrm{tr}(\kappa) + \mu_f\sum_{i=1}^{2}\tilde{\kappa}_i^2 H(-1)^j.\tilde{\kappa}_i \end{aligned}\right\} j \in [\![1,2]\!]$$

Les seuils d'endommagement sont définis par :

$f_{d_j} = Y_j(\varepsilon, \kappa, d_j, \varepsilon_{zz}) - k_{0j} \leq 0$ où k_{0j} sont des constantes de seuil.

Ces seuils définissent le domaine convexe de réversibilité dans l'espace des (ε, κ). En principe les constantes de seuil k_{01} et k_{02} pourraient être différentes, mais selon l'hypothèse qu'on fait sur la symétrie de la plaque par rapport au feuillet moyen, les deux valeurs sont les mêmes : $k_{01} = k_{02} = k_0$.

On peut voir que le paramètre α régule la contribution de la flexion au seuil d'endommagement initial, puisque :

$$f_{d_j}(d_j = 0) = Y_j^m(\varepsilon, d_j = 0) + \frac{1}{\alpha}Y_j^{f,0}(\kappa) - k_0$$

La loi d'évolution des variables d'endommagement d_1 et d_2 est définie par la règle de normalité aux seuils, pour lesquels on peut définir le pseudo-potentiel de dissipation $D(\delta)$:

$$\dot{d}_j = \eta \frac{\partial f_{d_j}}{\partial Y_j} \quad avec\, \eta \geq 0$$

$$\Leftrightarrow Y_j \in \partial D(\dot{d}_j) \Leftrightarrow D(\dot{d}_j) - D(\delta) \geq Y_j.(\dot{d}_j - \delta) \;\; \forall \delta \geq 0$$

Les valeurs d'endommagement d_1 et d_2 sont alors parfaitement déterminées par les conditions suivantes :

$$si\, f_{d_j} < 0 \quad alors\, \dot{d}_j = 0$$

$$si\, f_{d_j} = 0 \quad alors \begin{cases} \dot{d}_j \geq 0, \\ \dot{f}_{d_j} = 0, \;\; \text{conditiondecohérence} \\ \dot{d}_j f_{d_j} = 0, \;\; \text{conditiondecomplémentarité(Kühn} - \text{Tücker)} \end{cases}$$

L'évolution des variables d'endommagement est donc obtenue à l'aide de la condition de cohérence, les fonctions $\xi(x, d)$ étant convexes, les modules d'écrouissage $-f_{,d_j}$ sont positifs (les coefficients vérifiant $\gamma_{.} \in [0,1]$) :

$$\dot{d}_j = -\frac{[f_{,Y}.Y_{,\varepsilon}.\dot{\varepsilon}]_+}{f_{,d_j}}$$

Dissipation d'énergie

Par définition, la densité de puissance de dissipation lors de l'endommagement vaut :

$$\dot{D} = \sigma : \dot{\varepsilon} - \dot{\Phi}_{ed}^S = -\sum_{j=1,2} \frac{\partial \Phi_{ed}^S}{\partial d_j} \dot{d}_j = \sum_{j=1,2} Y_j \dot{d}_j$$

Dans cette expression, on a utilisé la définition de Y_j[éq. 2.3-2]. Dans la phase endommageante, les fonctions seuils satisfont toujours $f_{d_j} = Y_j - k_0 \equiv 0$. Par conséquent, on peut calculer la dissipation cumulée comme :

$$D = \int \dot{D} dt = k_0(d_1 + d_2)$$

On a démontré que la dissipation cumulée du processus d'endommagement est directement liée aux variables internes. Il suffit de faire la somme des deux contributions et de la multiplier par la constante de seuil k_0.

Paramètres de la loi

Le modèle de dalle en béton armé endommageable GLRC_DM a donc besoin de paramètres caractéristiques de l'élasticité, complétés de 5 paramètres pour décrire le comportement d'endommagement : k_0, pour définir la limite élastique, αpour déterminer la participation de la flexion (voir § 2.2), γ_{mt}et γ_{mc}, $\gamma_f$pour décrire la réponse non linéaire. Tous ces paramètres peuvent être identifiés à partir d'essais de traction et de flexion purs uniaxiaux monotones. Certains d'entre eux sont remplacés dans le jeu de données *Code_Aster* par des paramètres plus « parlants », voir ci-après au § 3.2.5.

Il est possible de procéder soit à partir d'estimations analytiques simples (qui donnent les ordres de grandeur) soit à partir d'un recalage sur une courbe de réponse fournie par un autre modèle de comportement, éventuellement en intégrant des compromis.

On décrit dans les paragraphes ci-dessous la démarche et on en fait le bilan au § 3.2.5.

Dans cette section, on considère que $\alpha_c = 1$. En effet, le développement de la méthodologie d'identification avec $\alpha_c \neq 1$n'a pas encore été réalisée.

Identification des paramètres de comportement élastique linéaire

Dans ce modèle on suppose que le milieu béton armé est homogénéisé et on laisse à l'utilisateur le soin de choisir (calculer ou mesurer) les paramètres : E_{eq}^m(module de Young effectif en membrane), E_{eq}^f(module de Young effectif en flexion), ν_m(coefficient de Poisson effectif en membrane) et ν_f(coefficient de Poisson effectif en flexion). On applique les relations suivantes pour déterminer les coefficients de Lamé λ_m, $\mu_m$et λ_f, μ_f :

$$\begin{aligned} \lambda_m &= \frac{\nu_m E_{eq}^m h}{(1+\nu_m)(1-2\nu_m)} \quad , \quad \mu_m = \frac{E_{eq}^m h}{2(1+\nu_m)} \\ \lambda_f &= \frac{\nu_f E_{eq}^f h^3}{12(1-\nu_f^2)} \quad , \quad \mu_f = \frac{E_{eq}^f h^3}{24(1+\nu_f)} \end{aligned} \tag{3.1-1}$$

Les relations ci-dessus ne sont pas interchangeables par $F \leftrightarrow M$ pour les paramètres membrane et flexion, puisqu'en membrane les relations correspondent au cas général (élasticité 3D) et la condition de contraintes planes est traitée au sein de la formulation du modèle, tandis que pour la flexion on s'est placé d'emblée en élasticité 2D avec contraintes planes. Dans le domaine élastique on a ainsi :

$$N_{\alpha\beta} = \frac{E_{eq}^m h}{1-\nu_m^2}\nu_m.\,\mathrm{tr}\varepsilon.\,\delta_{\alpha\beta} + (1-\nu_m)\varepsilon_{\alpha\beta}$$
$$M_{\alpha\beta} = \frac{E_{eq}^f h^3}{12(1-\nu_f^2)}\nu_f.\,\mathrm{tr}\kappa.\,\delta_{\alpha\beta} + (1-\nu_f)\kappa_{\alpha\beta}$$

αet βétant des indices allant de 1 à 2.

Par défaut $E_{eq}^m = E_{eq}^f = E$et $\nu_m = \nu_f = \nu$, où Eet νsont les coefficients élastiques renseignés dans le fichier de commande sous le mot-clé ELAS. En revanche, comme le béton armé n'est pas un matériau homogène, la valeur effective de E_{eq}^fpeut être différente de E_{eq}^m. Par conséquent, on laisse à l'utilisateur la possibilité d'introduire des valeurs E_{eq}^fet ν_f(EF et NUF sous le mot-clé facteur GLRC_DM) différentes de Eet ν, qui dans ce cas ne servent que pour décrire l'élasticité en membrane.

La condition des contraintes planes pour la membrane $\sigma_{zz} = 0$est satisfaite de la manière décrite dans le § 2.3.

<u>Remarque</u> : Dans [eq. 3.1-1], on obtient une relation différente entre λ_f, $\nu_f$et E_{eq}^fd'une part, et entre λ_m,ν_m et E_{eq}^md'autre part. Cette différence est directement liée à la prise en compte différente en membrane et en flexion de la condition de contraintes planes. Plus particulièrement, on définit E_{eq}^fet

ν_fà travers un essai de flexion pure, où $\kappa_{yy} = -\nu_f \kappa_{xx}$, et $M_{ij} = 0$, sauf $M_{xx} \neq 0$. On se sert alors des équations suivantes pour trouver la relation entre λ_f, $\mu_f$et E_{eq}^f, ν_f :

$$M_{yy} = \left(\lambda_f\left(1-\nu_f\right) - 2\mu_f\nu_f\right)\kappa_{xx} = 0 \qquad Et \qquad M_{xx} = (\lambda_f(1-\nu_f) - 2\mu_f)\kappa_{xx} = \frac{E_{eq}^f h^3}{12}\kappa_{xx}$$

d'où l'on obtient :

$$E_{eq}^f = \frac{12}{h^3}\lambda_f(1-\nu_f) + 2\mu_f et\ \lambda_f(1-\nu_f) - 2\mu_f\nu_f = 0 \qquad (3.1\text{-}2)$$

En résolvant [éq. 3.1-2], on a les relations exprimées dans [éq. 3.1-1].

L'identification des paramètres élastiques E_{eq}^m, ν_m, E_{eq}^fet $\nu_f$du modèle à partir des caractéristiques du béton et des aciers repose sur deux cas de chargement : traction pure et flexion pure.

Considérons les caractéristiques suivantes pour le béton : module de Young E_b, coefficient de Poisson ν_b, épaisseur de la dalle h, et pour les aciers : module de Young E_a, coefficient de Poisson ν_a, section totale par mètre linéaire (pour les deux nappes, supposées symétriques dans l'épaisseur et identiques dans les deux directions) S_a, position relative d'une nappe dans l'épaisseur $\chi_a \in]0,1[$.

On obtient ainsi par l'essai uniaxial en **traction élastique pure** :

$$\begin{aligned} N_{xx} &= E_{eq}^m h\varepsilon_{xx} = E_a S_a \varepsilon_{xx} + \frac{E_b h}{1-\nu_b^2}(\varepsilon_{xx} + \nu_b \varepsilon_{yy}) \\ N_{yy} &= 0 = E_a S_a \varepsilon_{yy} + \frac{E_b h}{1-\nu_b^2}(\varepsilon_{yy} + \nu_b \varepsilon_{xx}) \end{aligned} \quad ; \varepsilon_{yy} = -\nu_m \varepsilon_{xx} \qquad (3.1\text{-}3)$$

D'où (mots-clé E et NU) :

$$E_{eq}^m = E_a \frac{S_a}{h} + E_b \cdot \frac{E_b h + E_a S_a}{E_b h + E_a S_a(1-\nu_b^2)} \; ; \nu_m = \nu_b \cdot \frac{E_b h}{E_b h + E_a S_a(1-\nu_b^2)} \qquad (3.1\text{-}4)$$

On observe que cette identification produit une erreur sur la raideur en cisaillement élastique plan de la dalle, cas pour lequel les aciers ne contribuent pas (il s'agit de grilles de tiges soudées), ce qui rend le comportement homogénéisé orthotrope et non pas isotrope. En effet, on obtient avec les valeurs [éq.3.1-4] :

$$G_{eq}^m = \frac{E_{eq}^m}{2(1+\nu_m)} = \frac{E_b}{2(1+\nu_b)} \cdot \frac{E_b^2 h^2 + 2E_a E_b h S_a + E_a^2 S_a^2(1-\nu_b^2)}{E_b^2 h^2 + E_a E_b h S_a(1-\nu_b)} \neq \frac{E_b}{2(1+\nu_b)} \qquad (3.1\text{-}5)$$

Si l'on préfère assurer prioritairement l'identification sur le cas de **cisaillement élastique plan** de la dalle, et sur le cas de la réponse selon la direction de traction pure (donc en acceptant l'erreur sur l'effet de Poisson orthogonal), on obtient :

$$E_{eq}^m = E_b + \frac{E_a S_a(1-\nu_b)}{h} \; ; \nu_m = \nu_b + \frac{E_a S_a(1-\nu_b^2)}{E_b h} \; ; G_{eq}^m = \frac{E_b}{2(1+\nu_b)} \qquad (3.1\text{-}6)$$

On prendra garde à ce que cette identification grossière (non admissible thermodynamiquement par rapport à l'essai de traction pure) ne donne pas des valeurs fantaisistes de ν_m.

Ensuite, on obtient par l'essai uniaxial en **flexion élastique pure** :

$$\begin{matrix} M_{xx} = \frac{E_{eq}^f h^3}{12}\kappa_{xx} = \frac{1}{4}E_a S_a h^2 \chi_a^2 \kappa_{xx} + \frac{E_b h^3}{12(1-\nu_b^2)}(\kappa_{xx} + \nu_b \kappa_{yy}) \\ M_{yy} = 0 = \frac{1}{4}E_a S_a h^2 \chi_a^2 \kappa_{yy} + \frac{E_b h^3}{12(1-\nu_b^2)}(\kappa_{yy} + \nu_b \kappa_{xx}) \end{matrix} ; \kappa_{yy} = -\nu_f \kappa_{xx} \qquad (3.1\text{-}7)$$

D'où (mots-clé EF et NUF) :

$$E_{eq}^f = \frac{3}{h}E_a S_a \chi_a^2 + E_b \cdot \frac{E_b h + 3E_a S_a \chi_a^2}{E_b h + 3E_a S_a \chi_a^2 (1-\nu_b^2)} ; \qquad \nu_f = \nu_b \cdot \frac{E_b h}{E_b h + 3E_a S_a \chi_a^2 (1-\nu_b^2)} \qquad (3.1\text{-}8)$$

On observe aussi que cette identification produit une erreur sur la raideur en flexion élastique anticlastique M_{xy}de la dalle (coefficient $G_{eq}^f = \frac{E_{eq}^f h^3}{24(1+\nu_f)}$au lieu de $G_b^f = \frac{E_b h^3}{24(1+\nu_b)}$), cas pour lequel les aciers ne contribuent pas.

Identification des paramètres de comportement élastique endommageable

La façon dont on obtient les paramètres de l'élasticité linéaire étant présentée au § 3.1, on propose de calculer les paramètres d'endommagement du modèle à partir de deux tests : un essai de traction pure et un essai de flexion pure monotones uniaxiaux.

De cette manière on obtient les valeurs du seuil k_0, des deux paramètres relatifs aux effets de membrane (γ_{mt} et γ_{mc}) indépendamment des deux paramètres relatifs aux effets de flexion (α, γ_f).

Pour déterminer les paramètres d'endommagement on considère donc essentiellement deux tests uniaxiaux monotones :

Traction pure, où : $\Sigma = (N_{xx} \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0)^T$

Flexion pure, où : $\Sigma = (0 \quad 0 \quad 0 \quad M_{xx} \quad 0 \quad 0)^T$

Paramètres définissant les seuils (mots-clé NYT, NYC et MYF)

Les paramètres du modèle définissant les seuils (k_0, α) sont exprimés respectivement à partir des valeurs de l'effort de membrane en traction pure et du moment fléchissant seuil en flexion pure correspondant à l'apparition de l'endommagement : N_D(mot-clé NYT) et M_D(mot-clé MYF).

Cas traction uniaxiale pure

En particulier, pour la **traction** élastique **uniaxiale pure** à l'apparition de l'endommagement on peut écrire la valeur du seuil, cf. [éq. 2.3-2] :

$$f_{d_j} = Y_j^m - k_0 = \varepsilon_D^2 \frac{\lambda_m}{4}(1-2\nu_m)^2(1-\gamma_{mt}) + \frac{\mu_m}{2}1 - \gamma_{mt} + \nu_m^2(1-\gamma_{mc}) - k_0 = 0$$

$\varepsilon_D$étant la déformation élastique à l'apparition de l'endommagement, ayant alors $\varepsilon_{yy} = -\nu_m\varepsilon_D = \varepsilon_{zz}$et $\xi_m(x,0,0) = 1$, d'où :

$$k_0 = \frac{\lambda_m(1-2\nu_m)^2(1-\gamma_{mt})+2\mu_m 1-\gamma_{mt}+\nu_m^2(1-\gamma_{mc})}{4(\lambda_m(1-2\nu_m)+2\mu_m)^2} N_D^2, \text{ soit :}$$

$$k_0 = \frac{N_D^2}{4E_{éq}^m h(1+\nu_m)} \cdot (1-\nu_m)(1+2\nu_m)(1-\gamma_{mt}) + \nu_m^2(1-\gamma_{mc}) \tag{3.2-1}$$

Ayant $N_D = (\lambda_m(1-2\nu_m)+2\mu_m)\varepsilon_D = E_{eq}^m h\varepsilon_D$

<u>Remarque</u> : On rappelle que $\gamma_{mt} \leq 1$(cf. éq. 3.2-2) et que $\gamma_{mc} \leq 1$pour que l'endommagement se traduise bien par un affaiblissement de la raideur. On observe aussi sur [éq. 3.2-1] que l'on ne peut pas avoir à la fois $\gamma_{mt} = 1$et $\gamma_{mc} = 1$, car alors $k_0 = 0$(le modèle n'a pas de domaine élastique), ou alors il faudrait donner $N_D = \infty$(mot-clé NYT).

En poursuivant l'analyse faite au 3.1, juste à l'apparition de l'endommagement, la contrainte longitudinale dans le béton vaut :

$$E_b\varepsilon_D \frac{1-\nu_b\nu_m}{1-\nu_b^2}$$

de telle sorte que l'on puisse exprimer le seuil N_D(mot-clé NYT) avec la limite de fissuration du béton σ_b^ten traction, en supposant valide le critère local $\sigma_{xx} \leq \sigma_b^t$:

$$N_D = \sigma_b^t \frac{E_{eq}^m h}{E_b} \cdot \frac{1-\nu_b^2}{1-\nu_b\nu_m} \tag{3.2-2}$$

Cas compression uniaxiale pure

Si on envisage un essai de **compression uniaxiale pure**, la valeur du seuil de premier endommagement, cf. [éq. 2.3-2], s'écrit en désignant par N_Cl'effort normal correspondant :

$$k_0 = \frac{N_C^2}{4E_{éq}^m h(1+\nu_m)} \cdot (1-\nu_m)(1+2\nu_m)(1-\gamma_{mc}) + \nu_m^2(1-\gamma_{mt})$$

On doit donc nécessairement avoir la relation :

$$\frac{N_C^2}{N_D^2} = \frac{(1-\nu_m)(1+2\nu_m)(1-\gamma_{mt}) + \nu_m^2(1-\gamma_{mc})}{(1-\nu_m)(1+2\nu_m)(1-\gamma_{mc}) + \nu_m^2(1-\gamma_{mt})}$$

Ainsi, avec la valeur de $|\ N_C\ |$(fournie par le mot-clé NYC), le coefficient γ_{mc}se déduit de γ_{mt}et de N_D :

$$\gamma_{mc} = 1 - (1-\gamma_{mt}) \cdot \frac{N_D^2(1-\nu_m)(1+2\nu_m) - N_C^2\nu_m^2}{N_C^2(1-\nu_m)(1+2\nu_m) - N_D^2\nu_m^2} \tag{3.2-3}$$

<u>Remarque</u> : Il est nécessaire que $\gamma_{mc} \leq 1$, tout comme $\gamma_{mt} \leq 1$, cf. [éq. 2.3-2]. On rappelle aussi, cf. [éq. 3.2-1], que l'on ne peut pas avoir à la fois $\gamma_{mt} = 1$et $\gamma_{mc} = 1$. De l'[éq. 3.2-3], on obtient la condition nécessaire :

$$| N_C | \leq N_D \frac{\sqrt{(1-\nu_m)(1+2\nu_m)}}{\nu_m}$$

L'égalité dans la relation ci-dessus conduit à $\gamma_{mc} = 1$.

Pour du béton armé, ayant $\nu_m \approx 0{,}2$*, cette condition s'écrit :* $| N_C | < 5{,}2 N_D$.

Cas distorsion uniaxiale pure

Vérifions l'effet de ces paramètres sur l'apparition de l'endommagement suite à un chargement de **distorsion pure** élastique $\varepsilon_{xy} = \tilde{\varepsilon_1} = -\tilde{\varepsilon_2}$, avec $\varepsilon_{xx} = \varepsilon_{yy} = 0$. Ainsi : $N_{xy} = \tilde{N_1} = -\tilde{N_2} = 2\mu_m \varepsilon_{xy}$. Le seuil d'apparition de l'endommagement [éq. 2.3-2] avec le modèle GLRC_DM est atteint pour l'effort de cisaillement :

$$N_{xy}^D = 2\frac{\sqrt{2\mu_m k_0}}{\sqrt{2-\gamma_{mc}-\gamma_{mt}}} = \frac{N_D}{1+\nu_m} \cdot \sqrt{\frac{(1-\nu_m)(1+2\nu_m)(1-\gamma_{mt}) + \nu_m^2(1-\gamma_{mc})}{2-\gamma_{mc}-\gamma_{mt}}}$$

Il peut être utile de confronter cette prédiction avec celle que l'on obtient avec le modèle de béton ENDO_ISOT_BETON [R7.01.04], [2.3.2.3], avec la limite de fissuration du béton σ_b^ten traction :

$$N_{xy_{EIB}}^D = 2\sigma_b^t h \sqrt{\frac{(1-\nu_b)(1+2\nu_b)}{(1+\nu_b)^2}} = 2N_D \frac{E_b(1-\nu_b\nu_m)}{E_{éq}^m(1-\nu_b^2)} \cdot \sqrt{\frac{(1-\nu_b)(1+2\nu_b)}{(1+\nu_b)^2}}$$

Remarque :

Dans toute situation combinée (compression+cisaillement, etc.) en membranaire pur, l'expression du seuil de premier endommagement $Y_j^m = k_0$*du modèle GLRC_DM , cf. [éq. 2.3-2], en fonction des efforts membranaires* $N_{xx}, N_{xy}\ldots$*, est constituée des mêmes monômes que le critère « habituel » en contraintes planes du matériau béton considéré ne pas résister au-delà de* σ_b^t*. Ceci provient du choix de la formulation du modèle GLRC_DM en membrane, en filiation directe du modèle ENDO_ISOT_BETON .*

Cas flexion uniaxiale pure

D'autre part, en **flexion** élastique uniaxiale pure un seul mécanisme d'endommagement est activé, selon son sens, positif ou négatif. Ici on choisit la flexion positive, pour laquelle on a toujours $f_{d_1} < f_{d_2}$. La valeur maximale de courbure élastiqueκ_{xx} à l'apparition de l'endommagement est notée $\kappa_D (\kappa_{yy} = -\nu_f \kappa_{xx})$, telle que seul le seuil $f_{d_2} = 0$peut être atteint, tandis que $f_{d_1} < 0$pour chaque point de cette trajectoire du chargement, cf. [éq. 2.3-2] :

$$f_{d_2} = Y_2^f - k_0 = \kappa_D^2 \frac{(1-\gamma_f)}{\alpha} \frac{\lambda_f}{2} (1-\nu_f)^2 + \mu_f - k_0$$

$\gamma_f \leq 1$étant obtenu au § 3.2.2, d'où :

$$\alpha = (1-\gamma_f) \frac{\lambda_f (1-\nu_f)^2 + 2\mu_f}{2(\lambda_f(1-\nu_f)+2\mu_f)^2} \frac{M_D^2}{k_0} \qquad (3.2\text{-}4)$$

ayant$M_D = (\lambda_f(1-\nu_f)+2\mu_f).\kappa_D = \frac{E_{eq}^f h^3}{12}\kappa_D$

Comme la plaque en béton armé est supposée symétrique par rapport au feuillet moyen, on n'a besoin de faire l'identification que pour la flexion positive (la flexion négative donnant la même valeur).

En poursuivant l'analyse faite au § 3.1, juste à l'apparition de l'endommagement, la contrainte longitudinale dans le béton vaut en paroi de la plaque (on sait qu'alors l'endommagement progresse immédiatement dans une bonne part de l'épaisseur de la section) :

$E_b \kappa_D h \frac{1-\nu_b \nu_f}{2(1-\nu_b^2)}$

de telle sorte que l'on puisse exprimer le seuil $M_D$avec la limite de fissuration du béton σ_t^b(mot-clé MYF) :

$$M_D = \sigma_t^b \frac{E_{eq}^f h^2}{6E_b} \cdot \frac{1-\nu_b^2}{1-\nu_b \nu_f} \tag{3.2-5}$$

ANNEXE 2

Expression des facteurs A, B, C, P, Q en fonction de D

Dans le cadre du modèle couplé endommagement-glissement, il est possible de décrire analytiquement la dépendance en D des facteurs homogénéisés macroscopiques A, B, C, P et Q.

$$A(D) = C_A \frac{B_A + \Gamma_A D}{B_A + D}$$

avec

$$C_A = \frac{(k_1^A + k_1^B)(k_2^A + k_2^B)}{k_1^A + k_2^A + k_1^B + k_2^B} \geq 0$$

$$B_A = \alpha \frac{k_1^A + k_2^A + k_1^B + k_2^B}{k_1^A + k_2^A + k_1^B + \gamma k_2^B} \geq 0 \quad \text{et} \quad \Gamma_A = \frac{(k_2^A + \gamma k_2^B)(k_1^A + k_2^A + k_1^B + k_2^B)}{(k_2^A + k_2^B)(k_1^A + k_2^A + k_1^B + \gamma k_2^B)} \geq 0$$

$$B(D) = \frac{A_B + \Gamma_B D}{B_B + D}$$

avec

$$A_B = \alpha \frac{k_2^A k_1^B - k_1^A k_2^B}{k_1^A + k_2^A + k_1^B + \gamma k_2^B} = 0 \quad \text{si} \quad k_1^A = k_2^A \ \text{et} \ k_1^B = k_2^B$$

$$B_B = \alpha \frac{k_1^A + k_2^A + k_1^B + k_2^B}{k_1^A + k_2^A + k_1^B + \gamma k_2^B} \geq 0 \quad \text{et} \quad \Gamma_B = \frac{k_2^A k_1^B - \gamma k_1^A k_2^B}{k_1^A + k_2^A + k_1^B + \gamma k_2^B} \geq 0$$

$$C(D) = C_C \frac{B_C + \Gamma_C D}{B_C + D}$$

avec

$$C_C = \frac{(k_1^A + k_2^A)(k_1^B + k_2^B)}{k_1^A + k_2^A + k_1^B + k_2^B} \geq 0$$

$$B_C = \alpha \frac{k_1^A + k_2^A + k_1^B + k_2^B}{k_1^A + k_2^A + k_1^B + \gamma k_2^B} = B_A \quad \text{et} \quad \Gamma_C = \frac{(k_1^B + \gamma k_2^B)(k_1^A + k_2^A + k_1^B + k_2^B)}{(k_1^B + k_2^B)(k_1^A + k_2^A + k_1^B + \gamma k_2^B)} \geq 0$$

$$P(D) = C_P \frac{B_P + \Gamma_P D}{B_P + D}$$

avec

$$C_P = \frac{(k_1^A + k_1^B)k_2^A k_2^B + (k_2^A + k_2^B)k_1^A k_1^B}{(k_1^A + k_1^B)(k_2^A + k_2^B)} \geq 0$$

$$B_P = \alpha \frac{k_2^A + k_2^B}{k_2^A + \gamma k_2^B} \geq 0 \quad \text{et} \quad \Gamma_P = \frac{(k_2^A + k_2^B)[(k_1^A + k_1^B)\gamma k_2^A k_2^B + (k_2^A + \gamma k_2^B)k_1^A k_1^B]}{(k_2^A + \gamma k_2^B)[(k_1^A + k_1^B)k_2^A k_2^B + (k_2^A + k_2^B)k_1^A k_1^B]} \geq 0$$

$$Q(D) = \frac{A_Q + \Gamma_Q D}{B_Q + D}$$

avec

$$A_Q = \alpha \frac{k_2^A k_1^B - k_1^A k_2^B}{(k_1^A + k_1^B)(k_2^A + \gamma k_2^B)} = 0 \quad \text{si} \quad k_1^A = k_2^A \ \text{et} \ k_1^B = k_2^B$$

$$B_Q = \alpha \frac{k_2^A + k_2^B}{k_2^A + \gamma k_2^B} \geq 0 \quad \text{et} \quad \Gamma_Q = \frac{k_2^A k_1^B - \gamma k_1^A k_2^B}{(k_1^A + k_1^B)(k_2^A + \gamma k_2^B)} \geq 0$$

Démonstration de la positivité de a

Introduisons le facteur $Q(D) = B(D)/A(D)$, ayant les mêmes propriétés que B : positif, croissant, concave et dont l'expression, en fonction de D est également donnée dans cette Annexe.

Commençons par calculer : $a(D) = P(D)\left[\frac{A(D)A"(D)}{2} - A'^2(D)\right] - A^3(D)Q'^2(D)$

Qui peut être écrit, d'après les *Remarque 34* et *Remarque 36* :

$$a(D) = \frac{C_A^2}{(B_A + D)^3(B_Q + D)}\left[C_P B_A \Gamma_A (1 - \Gamma_A)\left(B_Q + \Gamma_P D\right) - C_A\left(B_Q \Gamma_Q\right)^2 \frac{(B_A + \Gamma_A D)^3}{\left(B_Q + D\right)^3}\right]$$

Nous cherchons à déterminer le signe de a, $\forall D \in \mathbb{R}^+$, sachant que $\frac{C_A^2}{(B_A+D)^3(B_Q+D)} \geq 0$.

Notons alors $t(D) = C_P B_A \Gamma_A (1 - \Gamma_A)\left(B_Q + \Gamma_P D\right) - C_A\left(B_Q \Gamma_Q\right)^2 \frac{(B_A+\Gamma_A D)^3}{\left(B_Q+D\right)^3}$ et calculons t' :

$$t'(D) = C_P B_A \Gamma_P \Gamma_A (1 - \Gamma_A) - 3C_A\left(B_Q \Gamma_Q\right)^2 \frac{(B_A + \Gamma_A D)^2}{\left(B_Q + D\right)^4}\left(\Gamma_A B_Q - B_A\right)$$

Or par construction $B_A = \Gamma_A B_Q$. Donc $g'(D) = C_P B_A \Gamma_P \Gamma_A (1 - \Gamma_A) \geq 0$, $\forall D \in \mathbb{R}^+$, car $\Gamma_A \leq 1$. (voir Chapitre I §I.3.ii)

D'où $\min_{D \in \mathbb{R}^+} g(D) = g(0) = \frac{B_A^2}{B_Q}\left[C_P B_Q (1 - \Gamma_A) - C_A B_A \Gamma_Q^2\right]$ car $B_A = \Gamma_A B_Q$.

Reste donc à déterminer le signe de $C_P B_Q (1 - \Gamma_A) - C_A B_A \Gamma_Q^2$.

D'après les expressions de $C_A, C_P, B_A, B_Q, \Gamma_A, \Gamma_Q$, il vient :

$$a(D) \geq 0 \Leftrightarrow \left\{ k_1^A k_2^B = k_2^A k_1^B \; ; \; \frac{1 - \sqrt{5}}{2} \leq \frac{k_1^B}{k_2^B} \leq \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \; ; \; \frac{k_2^A\left(k_1^{B\,2} - k_2^{B\,2} - k_1^B k_2^B\right)}{(k_1^B + k_2^B)k_2^{B\,2} + k_1^A k_1^{B\,2}} \leq \gamma \leq 1 \right\}$$

Démonstration de la convexité de la densité d'énergie libre avec une discontinuité dans les fonctions d'endommagement.

Notons X le vecteur constitué des variables d'état E et E^η : $X = \left[\begin{smallmatrix} E \\ E^\eta \end{smallmatrix}\right]$, décrivant un espace $\mathcal{E}$ comprenant une interface $\mathcal{I}$ définie par l'ensemble des vecteurs X respectant la condition $\mathcal{N}.X = 0$, où $\mathcal{N}$ est une application linéaire.

<u>Exemple</u> : Dans le cas unidimensionnel du problème d'intérêt : $\mathcal{N} = \left[\begin{smallmatrix} k^A + k^B \\ 2k^A \end{smallmatrix}\right]$.

Notons $\mathcal{W}^-$ la densité d'énergie libre convexe à gauche de l'interface $\mathcal{I}$, dans l'espace que l'on notera $\mathcal{E}^-$ et $\mathcal{W}^+$ la densité d'énergie libre convexe à droite dans l'espace que l'on notera $\mathcal{E}^+$.

Soit $X \in \mathcal{E}^-$, $X^* \in \mathcal{E}^+$ et $\lambda \in \mathbb{R}$ / $Y = \lambda X^* + (1 - \lambda)X$ et $\mathcal{N}.Y = 0$.

alors $\lambda = -\mathcal{N}.X/\mathcal{N}.(X^* - X)$

La densité d'énergie libre $\mathcal{W}$ est convexe à gauche de l'interface $\mathcal{I}$, ainsi :

$$\mathcal{W}^-(Y) > \mathcal{W}^-(X) + \nabla_X \mathcal{W}^-(X).(Y-X) = \mathcal{W}(X) + \nabla_X \mathcal{W}(X).(Y-X)$$

De même, la densité d'énergie libre $\mathcal{W}$ est convexe à droite de l'interface $\mathcal{I}$, ainsi :

$$\mathcal{W}^+(X^*) = \mathcal{W}(X^*) > \mathcal{W}^+(Y) + \nabla_X \mathcal{W}^+(Y).(X^*-Y)$$

Supposons que la densité d'énergie libre $\mathcal{W}$ est continue à travers l'interface $\mathcal{I}$.

Alors : $\mathcal{W}^-(Y) = \mathcal{W}^+(Y) = \mathcal{W}(Y)$. Il vient donc :

$$\mathcal{W}(X^*) > W(X) + \nabla_X \mathcal{W}(X).(Y-X) + \nabla_X \mathcal{W}^+(Y).(X^*-Y)$$

or $Y - X = X^* - X + Y - X^*$, d'où :

$$\mathcal{W}(X^*) > W(X) + \nabla_X \mathcal{W}(X).(X^*-X) + \left(\nabla_X \mathcal{W}(X) - \nabla_X \mathcal{W}^+(Y)\right).(Y-X^*)$$

or $Y - X^* = \frac{1-\lambda}{\lambda} - (X-Y) = -\frac{\mathcal{N}.X^*}{\mathcal{N}.X} > 0$ car $X \in \mathcal{E}^-$ et $X^* \in \mathcal{E}^+$

Donc : $\mathcal{W}(X^*) > W(X) + \nabla_X \mathcal{W}(X).(X^*-X) + \frac{1-\lambda}{\lambda}\left(\nabla_X \mathcal{W}(X) - \nabla_X \mathcal{W}^+(Y)\right).(X-Y)$

Le dernier terme de cette équation est positif si $\nabla_X \mathcal{W}^+(Y) = \nabla_X \mathcal{W}^-(Y)$ donc si **les contraintes et les contraintes de glissement sont continues à travers l'interface $\mathcal{I}$.**

Considérant les trois hypothèses de continuité des contraintes, des contraintes de glissement et de la densité d'énergie libre, à travers l'interface $\mathcal{J}$, la convexité de la densité d'énergie libre est assurée sur tout l'espace $\mathcal{E}$ des déformations et déformations de glissement.

<u>Exemple unidimensionnel :</u> En unidimensionnel, connaissant les expressions analytiques de la densité d'énergie libre et des contraintes et contraintes de glissement, il est possible de démontrer que la densité d'énergie libre $\mathcal{W}$ est convexe sur tout le domaine $\mathcal{E}$.

Pour ce faire, sachant que la convexité à gauche et à droite de l'interface $\mathcal{I}$ est démontrée, il ne reste qu'à démontrer la continuité de $\mathcal{W}$ et de Σ et Σ^η sur l'interface $\mathcal{I}$.

A l'interface, les déformations macroscopiques sont reliées aux déformations de glissement par l'application linéaire $\mathcal{N} = \begin{bmatrix} k^A + k^B \\ 2k^A \end{bmatrix}$. On a alors $E = -\frac{2k^A}{k^A+k^B}E^\eta$

Or $\mathcal{W}|_{\mathcal{N}.X=0} = \frac{\left(k^A+k^B\right)\left(k^A+k^B\zeta(D)\right)}{2\left(2k^A+k^B\left(1+\zeta(D)\right)\right)}E^2 - \frac{k^Ak^B\left(1-\zeta(D)\right)}{2k^A+k^B\left(1+\zeta(D)\right)}EE^\eta + \frac{k^Ak^B\left(1+\zeta(D)\right)}{2k^A+k^B\left(1+\zeta(D)\right)}E^{\eta 2}$

D'où

$$\mathcal{W}|_{\mathcal{N}.X=0} = \left[\frac{\left(k^A+k^B\right)\left(k^A+k^B\zeta(D)\right)}{\left(2k^A+k^B\left(1+\zeta(D)\right)\right)}\frac{2k^{A^2}}{(k_A+k_B)^2} + \frac{k^Ak^B\left(1-\zeta(D)\right)}{2k^A+k^B\left(1+\zeta(D)\right)}\frac{2k^A}{k_A+k_B} + \frac{k^Ak^B\left(1+\zeta(D)\right)}{2k^A+k^B\left(1+\zeta(D)\right)}\right]E^{\eta 2} = k^AE^{\eta 2}$$

De même, on trouve

$$\Sigma|_{\mathcal{N}.X=0} = -2k^AE^\eta \qquad \textit{et} \qquad \Sigma^\eta|_{\mathcal{N}.X=0} = -\frac{2k^Ak^B}{k^A+k^B}E^\eta$$

Ces expression ne dépendant pas de la fonction d'endommagement ζ, les contraintes, contraintes de glissement et la densité d'énergie libre sont bien continues au passage de l'interface $\mathcal{J}$.

ANNEXE 3

Démonstration de l'état plan de contraintes lors d'une homogénéisation périodique où ξ et η tendent simultanément vers 0.

Montrons tout d'abord $\langle \sigma_{\alpha 3} \rangle_{\mathcal{Z}} = 0, \forall \alpha, \beta = 1,2$.
Pour ce faire, considérons les problèmes élémentaires posés sur la cellule $\mathcal{Z}$, en prenant comme fonction test $\tilde{v}$ telle que $\varepsilon_{kl}(\tilde{v}) = \varepsilon_{\beta 3}\delta_{k\beta}\delta_{l3} (= 1)$.

On a alors : $\begin{matrix} \int_{\mathcal{Z}} \varepsilon_{ij}(\chi^{\gamma\delta}) a_{ij\beta 3}\varepsilon_{\beta 3} d\mathcal{Z} = -\int_{\mathcal{Z}} E_{ij}^{\gamma\delta} a_{ij\beta 3}\varepsilon_{\beta 3} d\mathcal{Z} \\ \int_{\mathcal{Z}} \varepsilon_{ij}(\xi^{\gamma\delta}) a_{ij\beta 3}\varepsilon_{\beta 3} d\mathcal{Z} = -\int_{\mathcal{Z}} x_3 E_{ij}^{\gamma\delta} a_{ij\beta 3}\varepsilon_{\beta 3} d\mathcal{Z} \end{matrix}$

Or d'après les propriétés du tenseur $\boldsymbol{a}$, on a comme seuls termes non nuls $\mathcal{A}_{\alpha\beta\gamma\delta}$ $\mathcal{A}_{\alpha\beta\gamma\delta}$, $\mathcal{A}_{33\alpha\beta}$, $\mathcal{A}_{a3\beta 3}$ et $\mathcal{A}_{3333}$, d'où :

$$\begin{cases} \int_{\mathcal{Z}} \varepsilon_{\alpha 3}(\chi^{\gamma\delta}) \mathcal{A}_{\alpha 3\beta 3}\varepsilon_{\beta 3} d\mathcal{Z} = -\int_{\mathcal{Z}} E_{\alpha 3}^{\gamma\delta} \mathcal{A}_{\alpha 3\beta 3}\varepsilon_{\beta 3} d\mathcal{Z} \\ \int_{\mathcal{Z}} \varepsilon_{\alpha 3}(\xi^{\gamma\delta}) \mathcal{A}_{\alpha 3\beta 3}\varepsilon_{\beta 3} d\mathcal{Z} = \int_{\mathcal{Z}} z_3 E_{\alpha 3}^{\gamma\delta} \mathcal{A}_{\alpha 3\beta 3}\varepsilon_{\beta 3} d\mathcal{Z} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \int_{\mathcal{Z}} \varepsilon_{\alpha 3}(\chi^{\gamma\delta}) \mathcal{A}_{\alpha 3\beta 3} d\mathcal{Z} = -\int_{\mathcal{Z}} E_{\alpha 3}^{\gamma\delta} \mathcal{A}_{\alpha 3\beta 3} d\mathcal{Z} \\ \int_{\mathcal{Z}} \varepsilon_{\alpha 3}(\xi^{\gamma\delta}) \mathcal{A}_{\alpha 3\beta 3} d\mathcal{Z} = \int_{\mathcal{Z}} z_3 E_{\alpha 3}^{\gamma\delta} \mathcal{A}_{\alpha 3\beta 3} d\mathcal{Z} \end{cases}$$

Or $E^{\gamma\delta}$ est un tenseur plan, on a donc $E_{\alpha 3}^{\gamma\delta} = 0, \forall \alpha = 1,2$, d'où :

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \int_{\mathcal{Z}} \varepsilon_{\alpha 3}(\chi^{\gamma\delta}) \cdot \mathcal{A}_{\alpha 3\beta 3}\, d\mathcal{Z} = 0 \\ \int_{\mathcal{Z}} \varepsilon_{\alpha 3}(\xi^{\gamma\delta}) \cdot \mathcal{A}_{\alpha 3\beta 3}\, d\mathcal{Z} = 0 \end{cases}$$

Considérons maintenant $\langle\langle \sigma_{\alpha 3} \rangle\rangle_{\mathcal{Z}}$:

$$\langle\langle \sigma_{a3} \rangle\rangle_{\mathcal{Z}} = \int_{\mathcal{Z}} \mathcal{A}_{a3\beta 3} \cdot E_{\gamma\delta} \cdot \varepsilon_{\beta 3}(\chi^{\gamma\delta}) + \mathcal{A}_{\alpha 3\beta 3} \cdot K_{\gamma\delta} \cdot \varepsilon_{\beta 3}(\xi^{\gamma\delta}) d\mathcal{Z}$$

On décompose alors $E_{\gamma\delta} = q_\varepsilon \varepsilon_{\gamma\delta}^{\varepsilon}$ et $K_{\gamma\delta} = q_\kappa z_3 \varepsilon_{\gamma\delta}^{\kappa}$ avec $\varepsilon_{\gamma\delta}$ unitaires et on a :

$$\langle\langle \sigma_{\alpha 3} \rangle\rangle_{\mathcal{Z}} = q_\varepsilon \int_{\mathcal{Z}} \mathcal{A}_{\alpha 3\beta 3} \cdot \varepsilon_{\gamma\delta}^{\varepsilon} \cdot \varepsilon_{\beta 3}(\chi^{\gamma\delta}) d\mathcal{Z} + q_\kappa \int_{\mathcal{Z}} \mathcal{A}_{\alpha 3\beta 3} \cdot \varepsilon_{\gamma\delta}^{\kappa} \cdot \varepsilon_{\beta 3}(\xi^{\gamma\delta}) d\mathcal{Z}$$

$$\Leftrightarrow \langle\langle \sigma_{\alpha 3} \rangle\rangle_{\mathcal{Z}} = q_\varepsilon \int_{\mathcal{Z}} \mathcal{A}_{\alpha 3\beta 3} \cdot \varepsilon_{\beta 3}(\chi^{\gamma\delta}) d\mathcal{Z} + q_\kappa \int_{\mathcal{Z}} \mathcal{A}_{\alpha 3\beta 3} \cdot \varepsilon_{\beta 3}(\xi^{\gamma\delta}) d\mathcal{Z}$$

$$\Leftrightarrow \langle\langle \sigma_{\alpha 3} \rangle\rangle_{\mathcal{Z}} = 0$$

Montrons ensuite $\langle\langle \sigma_{33} \rangle\rangle_{\mathcal{Z}} = 0, \forall \alpha = 1,2$.
De la même manière que pour la démonstration précédente, on considère les problèmes élémentaires avec cette fois la fonction test $\tilde{v}$ telle que

$$\varepsilon_{kl}(\tilde{v}) = \begin{cases} \varepsilon_{33} (= 1) \text{ si } k = 3, l = 3 \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}.$$

On a alors :

$$\begin{cases} \int_{\mathcal{Z}} \varepsilon_{\alpha\beta}\left(\chi^{\gamma\delta}\right) \cdot \mathcal{A}_{\alpha\beta 33} + \varepsilon_{33}\left(\chi^{\gamma\delta}\right) \cdot \mathcal{A}_{3333}\, d\mathcal{Z} = -\int_{\mathcal{Z}} \varepsilon_{\alpha\beta}^{\gamma\delta} \cdot \mathcal{A}_{\alpha\beta 33} + \varepsilon_{33}^{\gamma\delta} \cdot \mathcal{A}_{3333}\, d\mathcal{Z} \\ \int_{\mathcal{Z}} \varepsilon_{\alpha\beta}\left(\xi^{\gamma\delta}\right) \cdot \mathcal{A}_{\alpha\beta 33} + \varepsilon_{33}\left(\xi^{\gamma\delta}\right) \cdot \mathcal{A}_{3333}\, d\mathcal{Z} = \int_{\mathcal{Z}} z_3 \cdot (\varepsilon_{\alpha\beta}^{\gamma\delta} \cdot \mathcal{A}_{\alpha\beta 33} + \varepsilon_{33}^{\gamma\delta} \cdot \mathcal{A}_{3333})\, d\mathcal{Z} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \int_{\mathcal{Z}} \varepsilon_{a\beta}\left(\chi^{\gamma\delta}\right) \cdot \mathcal{A}_{a\beta 33} + \varepsilon_{33}\left(\chi^{\gamma\delta}\right) \cdot \mathcal{A}_{3333}\, d\mathcal{Z} = -\int_{\mathcal{Z}} \varepsilon_{a\beta}^{\gamma\delta} \cdot \mathcal{A}_{a\beta 33}\, d\mathcal{Z} \\ \int_{\mathcal{Z}} \varepsilon_{a\beta}\left(\xi^{\gamma\delta}\right) \cdot \mathcal{A}_{a\beta 33} + \varepsilon_{33}\left(\xi^{\gamma\delta}\right) \cdot \mathcal{A}_{3333}\, d\mathcal{Z} = \int_{\mathcal{Z}} z_3 \cdot \varepsilon_{a\beta}^{\gamma\delta} \cdot \mathcal{A}_{a\beta 33}\, d\mathcal{Z} \end{cases}$$

Or

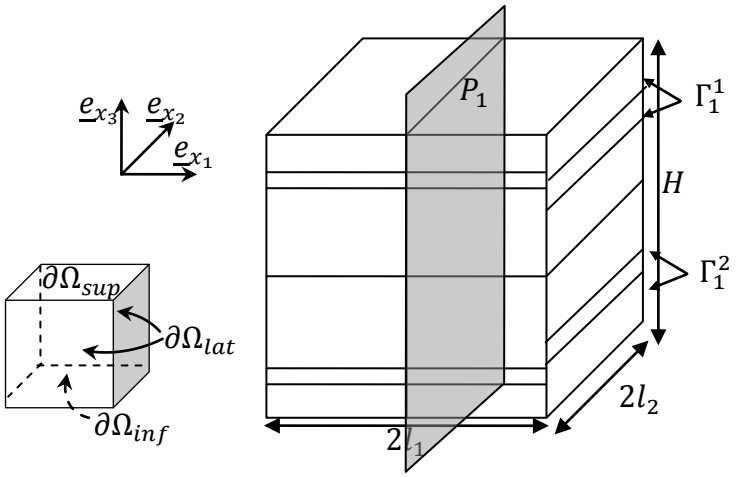
$$\begin{aligned} \left\langle\left\langle \sigma_{33} \right\rangle\right\rangle_{\mathcal{Z}} = & \int_{\mathcal{Z}} \mathcal{A}_{\alpha\beta 33} \cdot \left(E_{a\beta} + E_{\gamma\delta} \cdot \varepsilon_{\alpha\beta}\left(\chi^{\gamma\delta}\right)\right) + \mathcal{A}_{3333} \cdot E_{\gamma\delta} \cdot \varepsilon_{33}\left(\chi^{\gamma\delta}\right) d\mathcal{Z} \\ & + \int_{\mathcal{Z}} \mathcal{A}_{\alpha\beta 33} \cdot \left(K_{\alpha\beta} - z_3 \cdot K_{\gamma\delta} \cdot \varepsilon_{\alpha\beta}\left(\xi^{\gamma\delta}\right)\right) + \mathcal{A}_{3333} \cdot K_{\gamma\delta} \cdot \varepsilon_{33}\left(\xi^{\gamma\delta}\right) d\mathcal{Z} \end{aligned}$$

Ainsi, avec la même décomposition que précédemment, on trouve bien : $\left\langle\left\langle \sigma_{33} \right\rangle\right\rangle_{\mathcal{Z}} = 0$

De la même manière, on peut s'attacher à montrer que $\left\langle\left\langle - z_3 \cdot \sigma_{i3} \right\rangle\right\rangle_{\mathcal{Z}} = 0$.

ANNEXE 4

Démonstration des propriétés du tenseur $\mathbb{B}$



Cellule de base sur lesquels sont posés les problèmes aux correcteurs élastiques et de glissement

Considérons les problèmes aux correcteurs (III-8) avec la fonction test $\underline{v} \in \mathcal{U}_{ad}^0$ suivante :

$$\underline{v} = \begin{cases} \underline{\chi}^{\eta_\alpha^\rho} & \text{dans } \Omega \\ \underline{\chi}^{\eta_\alpha^\rho} + \eta^\rho \underline{e}_{x_\alpha} & \text{dans } \Omega^- \end{cases}$$

Il vient alors : $\boldsymbol{\varepsilon}(\underline{v}) = \begin{cases} \boldsymbol{\varepsilon}(\underline{\chi}^{\eta_\alpha^\rho}) & \text{dans } \Omega \\ \boldsymbol{\varepsilon}(\underline{\chi}^{\eta_\alpha^\rho}) + \widehat{H}(x_\alpha)\underline{e}_{x_\alpha} \otimes^s \underline{e}_{x_\alpha} & \text{dans } \Omega^- \end{cases}$

Avec $\widehat{H} = 2H - 1$ où H désigne la fonction Heaviside.

D'où $\int_{\cup\Omega_i^\pi} \varepsilon_{pq}\left(\underline{\chi}^{\alpha\beta}\right) \mathbb{a}_{pqrs}^i(d_\pi)\varepsilon_{rs}(\underline{v})d\Omega = -\int_{\cup\Omega_i^\pi} \mathbb{a}_{\alpha\beta rs}^i(d_\pi)\varepsilon_{rs}(\underline{v})d\Omega$ devient :

$$-\int_\Omega \mathbb{a}_{\alpha\beta rs}^i(d_\pi)\varepsilon_{rs}(\underline{v})d\Omega - \int_{\Omega^-} \mathbb{a}_{\alpha\beta rs}^i(d_\pi)H(x_\alpha)\underline{e}_{x_\alpha}\otimes\underline{e}_{x_\alpha}d\Omega$$

$$= \underbrace{\int_\Omega \varepsilon_{pq}\left(\underline{\chi}^{\alpha\beta}\right) \mathbb{a}_{pqrs}^i(d_\pi)\varepsilon_{rs}\left(\underline{\chi}^{\eta_\alpha^\rho}\right)d\Omega}_{\text{0 d'après (III9)}} + \int_{\Omega^-} \varepsilon_{pq}\left(\underline{\chi}^{\alpha\beta}\right) \mathbb{a}_{pqrs}^i(d_\pi)H(x_\alpha)\underline{e}_{x_\alpha}\otimes\underline{e}_{x_\alpha}d\Omega$$

$$\Leftrightarrow \underbrace{\int_\Omega \mathbb{a}_{\alpha\beta rs}^i(d_\pi)\varepsilon_{rs}(\underline{v})d\Omega}_{\mathbb{B}_{\alpha\beta\gamma(D)}} = -\int_{\Omega^-}\left(\varepsilon_{pq}\left(\underline{\chi}^{\alpha\beta}\right)\mathbb{a}_{pqrs}^i(d_\pi) - \mathbb{a}_{\alpha\beta rs}^i(d_\pi)\right)H(x_\alpha)\underline{e}_{x_\alpha}\otimes\underline{e}_{x_\alpha}d\Omega$$

Il est donc démontré que :

$$\mathbb{B}(D) = -\int_{\Omega^-}\left(\varepsilon_{pq}\left(\underline{\chi}^{\alpha\beta}\right)\mathbb{a}_{pqrs}^i(d_\pi) - \mathbb{a}_{\alpha\beta rs}^i(d_\pi)\right)H(x_\alpha)\underline{e}_{x_\alpha}\otimes\underline{e}_{x_\alpha}d\Omega$$

Ainsi, dès lors que les matériaux se situant de part et d'autre du plan P_1 sont identiques et dans le même état d'endommagement, les tenseurs $\mathbb{a}_{pqrs}^i(d_\pi)$ seront égaux de part et d'autre de ce plan, de même que le tenseur $\varepsilon_{pq}\left(\underline{\chi}^{\alpha\beta}\right)$ (par le principe de Curie ; alors que la fonction Heaviside sera égale à -1 d'un côté de ce plan et à 1 de l'autre côté.

ANNEXE 5

Etude de l'influence des valeurs d'endommagement sur l'identification des paramètres

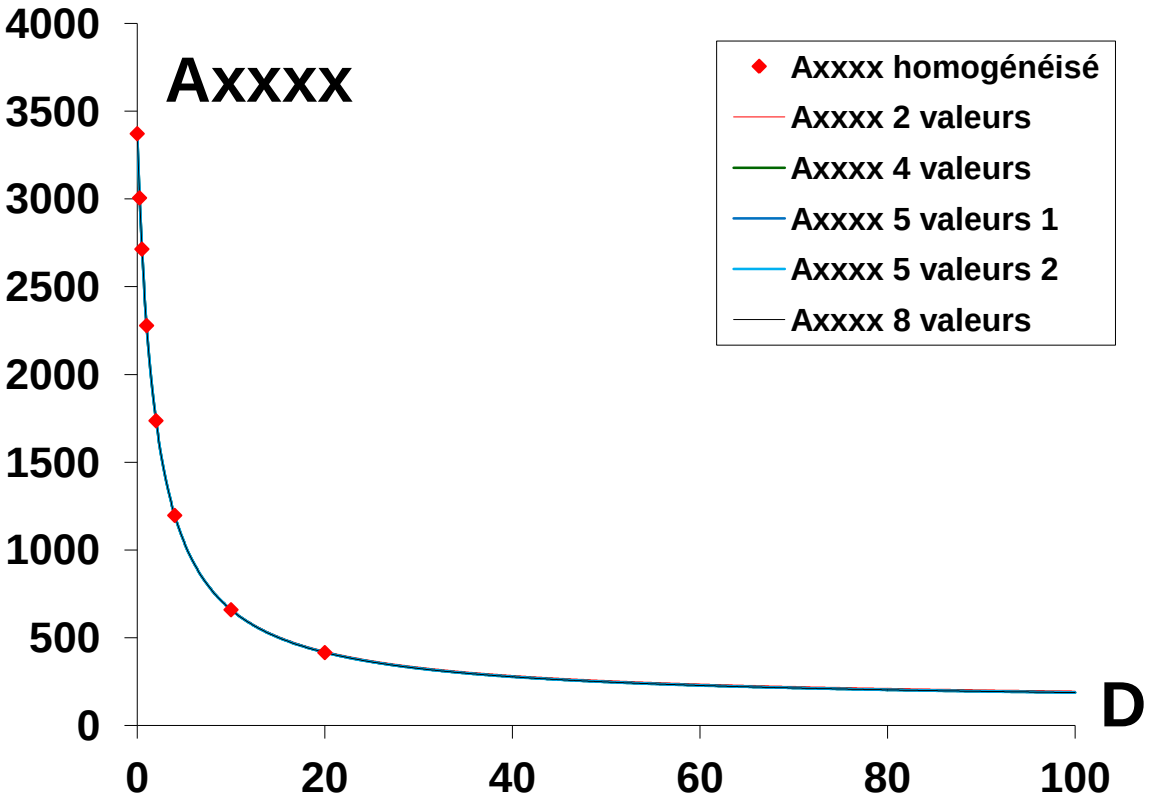
Dans cette annexe est présentée une étude de l'influence du choix des valeurs d'endommagement pour l'identification des paramètres sur la qualité de cette identification. La comparaison se fait entre 2, 4, 5 et 8 valeurs d'endommagement, avec deux variantes pour le choix des 5 valeurs. Elle est menée sur la composante 1111 du tenseur de raideur membranaire $\mathbb{A}^{mm}$ pour des sollicitations de traction. Les paramètres identifiés sont résumés dans le tableau ci-dessous, l'erreur relative étant exprimée en pourcentages par rapport à la référence des paramètres obtenus avec les 8 valeurs d'endommagement.

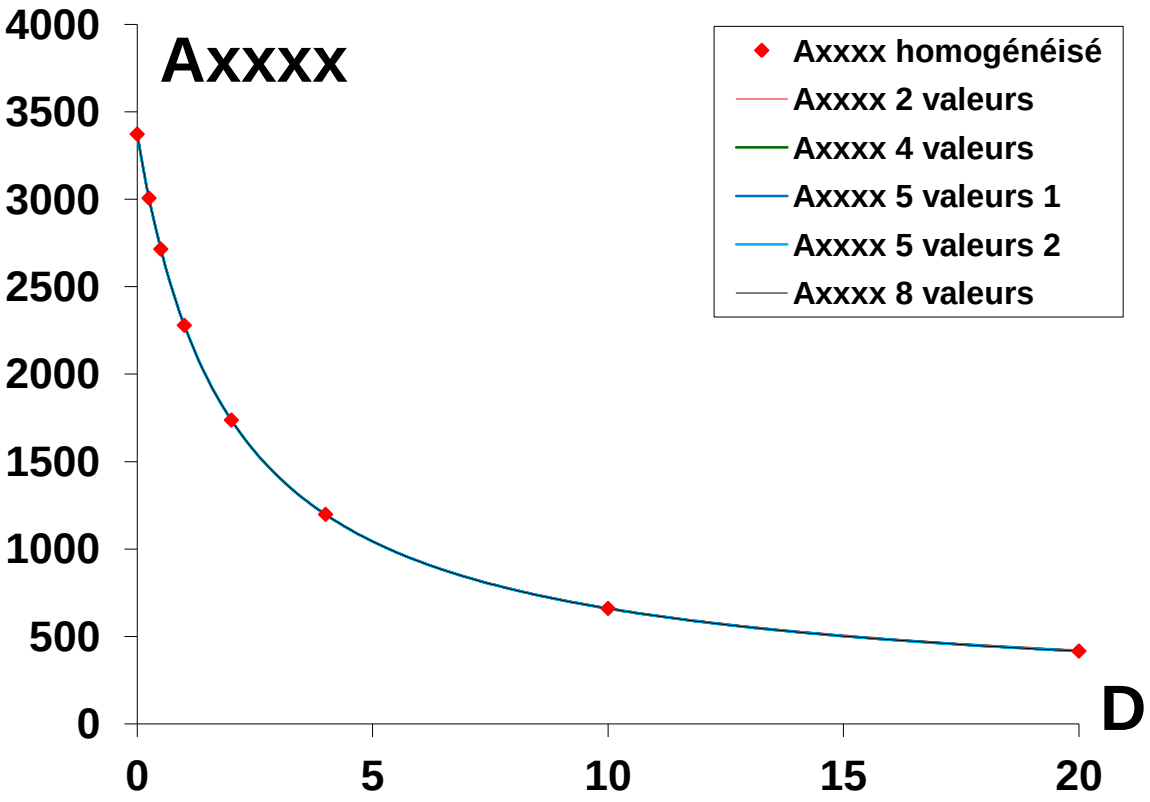
Nb valeurs de *D*	**Valeurs de *D***	**paramètres identifiés**		**Erreur (%)**
		A^0_{1111}	3371,60662	
8 **référence**	0, 0,25, 0,5, 1, 2, 4, 10, 20	α_{1111}	1,9712202	0
		γ_{1111}	0,03719894	0
2	0, 0,25	α_{1111}	1,9626893	0,433
		γ_{1111}	0,03984289	7,108
4	0, 0,5, 2, 10	α_{1111}	1,97045736	0,0387
		γ_{1111}	0,03733467	0,365
5 Variante 1	0, 0,25, 0,5, 2, 10	α_{1111}	1,97008985	0,057
		γ_{1111}	0,03737465	0,472
5 Variante 2	0, 0,5, 2, 10, 20	α_{1111}	1,97134509	**0,006**
		γ_{1111}	0,03713971	**0,169**

Le choix de 5 valeurs d'endommagement avec la variante 2 apparaît comme le meilleur compromis entre la qualité et le nombre de calculs à effectuer, aux vues des résultats présentés ici.

La courbe proposée ci-après nuance ce propos, elle représente les différentes approximations et les compare aux points de données utilisés pour les calculer : les valeurs homogénéisées de la composante A_{1111} pour les 8 valeurs d'endommagement choisies.

Il apparait que bien que l'erreur puisse aller jusqu'à 7% pour l'identification menée avec 2 valeurs d'endommagement, cette différence se remarque à peine à l'œil nu, qualitativement au regard des courbes proposées, et ce même si l'endommagement va prendre la valeur 100, pour laquelle la raideur résiduelle n'est plus que 5% de la raideur initiale.





ANNEXE 6

Résultats numériques et identification des paramètres pour une plaque à symétrie miroir

D1	D2	AHOMXXXX	AHOMXXXXC	AHOMYYYY	AHOMYYYYC	AHOMXYXY			
0	0	5318.1	5318.1	5312.3	5312.3	2048.32			
0.5	0	4821.7	5182	4814.32	5176.16	1823.75			
2	0	4076.21	4899.29	4062.05	4893.43	1555.67			
10	0	3255.02	4376.57	3246.43	4370.83	1291.35			
20	0	3069.31	4201.58	3062.07	4195.89	1230.85			
0	0.5	4821.68	5181.99	4814.31	5176.15	1823.74			
0	2	4076.17	4899.28	4062.01	4893.42	1555.66			
0	10	3254.93	4376.55	3246.31	4370.82	1291.32			
0	20	3069.17	4201.55	3061.88	4195.87	1230.82			
D1D1	D2D2	AHOMXXYY	AHOMXXYYC	AHOMYYXX	AHOMYYXXC	AHOMXXXY	AHOMXYXX	AHOMYYXY	AHOMXYYY
0	0	1031.71	1031.71	1031.71	1031.71	−0.0027558	−0.0027558	−0.0022293	−0.0022293
0.5	0	949.829	1003.81	939.744	1003.81	−0.0013089	−0.0023666	−0.0031474	−0.0019521
2	0	831.114	945.864	794.353	945.864	−0.0019483	−0.0015170	−0.0051998	−0.0015057
10	0	699.318	838.825	621.004	838.825	−0.0099091	−0.0004397	−0.0092413	−0.0013482
20	0	667.025	803.016	579.859	803.016	−0.0134777	−0.0001611	−0.0105862	−0.0015267
0	0.5	949.827	1003.8	939.741	1003.8	−0.0026501	−0.0022317	−0.0025520	−0.0017722
0	2	831.109	945.862	794.346	945.862	−0.0025712	−0.0015385	−0.0032776	−0.0011853
0	10	699.306	838.819	620.977	838.819	−0.0047909	−0.0010346	−0.0044674	−0.0006557
0	20	667.01	803.01	579.815	803.01	−0.0067088	−0.0009559	−0.0046702	−0.0005479
0	0	1031.71	1031.71	1031.71	1031.71	−0.0027558	−0.0027558	−0.0022293	−0.0022293
0.5	0	934.793	1003.81	949.126	1003.81	−0.219062	−0.0005572	−0.243275	−0.0029151
2	0	772.023	945.877	839.663	945.877	−0.760729	−0.0066339	−0.803252	−0.0055813
10	0	605.49	838.881	707.338	838.881	−0.611909	−0.0193971	−0.656131	−0.0113693
20	0	571.578	803.089	671.079	803.089	−1.3115	−0.0247555	−1.26933	−0.0130998
0	0.5	934.786	1003.81	949.121	1003.81	−0.221701	−0.0036033	−0.245052	−0.0029843
0	2	772.005	945.872	839.654	945.872	−0.765697	−0.0054239	−0.806636	−0.0044128
0	10	605.448	838.872	707.322	838.872	−0.617309	−0.0134043	−0.660172	−0.0063577
0	20	571.519	803.078	671.062	803.078	−1.30642	−0.0179157	−1.2652	−0.006852

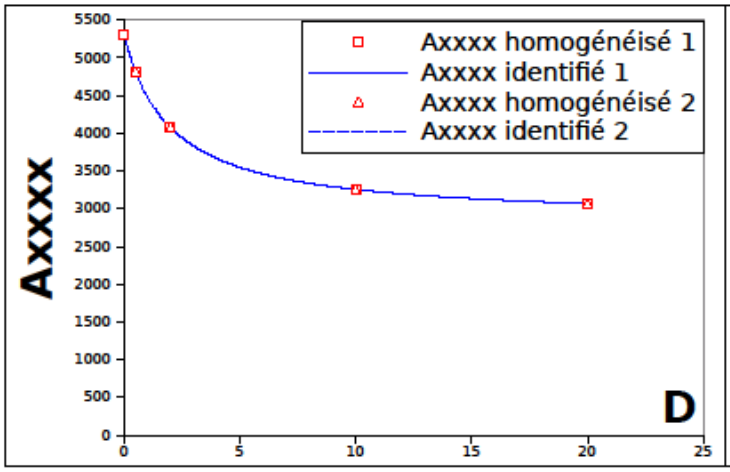
D1	D2	AHOMFXXXX	AHOMFXXXXC	AHOMFYYYY	AHOMFYYYYC	AHOMFXYXY			
0	0	0.0238118	0.0238118	0.0268953	0.0268953	0.00650736			
0.5	0	24.9044	6.81295	25.1444	6.84111	11.2942			
2	0	62.6772	20.9846	63.6093	21.0912	24.8067			
10	0	104.78	47.3292	105.888	47.6259	38.1767			
20	0	114.372	56.1925	115.514	56.5653	41.2448			
0	0.5	−24.8869	−6.79506	−25.1328	−6.82929	−11.2894			
0	2	−62.6595	−20.9669	−63.5974	−21.0794	−24.8022			
0	10	−104.761	−47.3112	−105.875	−47.6138	−38.1729			
0	20	−114.353	−56.1743	−115.502	−56.553	−41.2412			
D1D1	D2D2	AHOMFXXYY	AHOMFXXYYC	AHOMFYYXX	AHOMFYYXXC	AHOMFXXXY	AHOMFXYXX	AHOMFYYXY	AHOMFXYYY
0	0	0.013971	0.013971	0.0139974	0.0139974	0.00014179	0.000141491	4.8835E−05	4.2047E−05
0.5	0	6.9328	1.97822	6.434	1.97824	2.5187E−05	0.000113973	1.7965E−05	6.2962E−05
2	0	11.9459	5.11669	12.1919	5.11673	0.000223644	5.6192E−05	0.000169318	9.4436E−05
10	0	17.0465	9.81492	21.3089	9.81479	0.000766919	1.5814E−05	0.000500012	0.000102527
20	0	18.7283	11.6491	23.4834	11.6489	0.000990819	3.4765E−05	0.000628829	8.8337E−05
0	0.5	−6.90468	−1.95022	−6.40585	−1.95019	−0.0001514	−0.0001777	−7.166E−05	−7.388E−06
0	2	−11.9178	−5.08861	−12.1905	−5.08859	−0.0001756	−0.0002238	−0.0001204	−3.689E−05
0	10	−17.0449	−9.81346	−21.3077	−9.81341	−0.0001674	−0.0002556	−0.0002296	−7.554E−05
0	20	−18.7266	−11.6476	−23.4826	−11.6475	−0.0001308	−0.0002603	−0.0002745	−8.219E−05
0	0	0.013971	0.013971	0.0139974	0.0139974	0.00014179	0.000141491	4.8835E−05	4.2047E−05
0.5	0	6.12737	1.97761	6.93214	1.97761	0.0782913	0.000151443	0.090446	3.8516E−05
2	0	13.4742	5.11123	12.4269	5.11121	0.158593	0.000641888	0.180154	0.000215898
10	0	22.3102	9.84081	16.6418	9.84084	0.157703	0.00141487	0.180573	0.000587047
20	0	24.1166	11.6849	18.5526	11.6849	0.0564668	0.00167418	0.0783916	0.000727155
0	0.5	−6.09894	−1.94955	−6.90382	−1.9495	−0.0787552	−6.846E−05	−0.0904805	−6.820E−05
0	2	−13.4734	−5.08299	−12.3983	−5.08293	−0.159214	−1.221E−05	−0.180305	−0.0001343
0	10	−22.3096	−9.83964	−16.6407	−9.83972	−0.158353	−0.0002019	−0.180769	−0.0002838
0	20	−24.1162	−11.6837	−18.5514	−11.6838	−0.0570945	−0.0003074	−0.0785953	−0.0003365

D1	D2	AHOFXXXX	AHOFXXXXC	AHOFYYYY	AHOFYYYYC	AHOFXYXY			
0	0	18.5743	18.5743	18.1368	18.1368	6.92332			
0.5	0	16.9236	18.1221	16.4594	17.6802	6.16961			
2	0	14.4317	17.1818	13.8965	16.7286	5.26692			
10	0	11.6589	15.4376	11.0753	14.9564	4.37272			
20	0	11.0243	14.8515	10.4304	14.359	4.16735			
0	0.5	16.9236	18.1221	16.4593	17.6802	6.1696			
0	2	14.432	17.1818	13.8964	16.7286	5.26689			
0	10	11.6595	15.4378	11.0752	14.9564	4.37265			
0	20	11.025	14.8518	10.4303	14.359	4.16727			
D1D1	D2D2	AHOFXXYY	AHOFXXYYC	AHOFYYXX	AHOFYYXXC	AHOFXXXY	AHOFXYXX	AHOFYYXY	AHOFXYYY
0	0	3.5029	3.5029	3.5029	3.5029	−1.263E−05	−1.263E−05	−9.731E−06	−9.731E−06
0.5	0	3.2235	3.40838	3.19294	3.40838	−2.391E−06	−1.078E−05	−1.558E−05	−8.096E−06
2	0	2.81675	3.21204	2.6972	3.21204	−1.924E−05	−6.897E−06	−2.804E−05	−5.872E−06
10	0	2.36111	2.84859	2.09681	2.84859	−6.239E−05	−2.136E−06	−5.170E−05	−5.663E−06
20	0	2.24816	2.72665	1.95237	2.72665	−7.841E−05	−9.089E−07	−5.981E−05	−6.844E−06
0	0.5	3.2235	3.40838	3.19295	3.40838	−1.223E−05	−9.996E−06	−1.122E−05	−6.936E−06
0	2	2.81677	3.21205	2.69724	3.21205	−1.049E−05	−6.738E−06	−1.477E−05	−3.621E−06
0	10	2.36118	2.84862	2.09692	2.84862	−7.780E−06	−4.553E−06	−2.353E−05	−1.039E−06
0	20	2.24824	2.7267	1.95248	2.7267	−8.003E−06	−4.194E−06	−2.724E−05	−6.777E−07
0	0	3.5029	3.5029	3.5029	3.5029	−1.263E−05	−1.263E−05	−9.731E−06	−9.731E−06
0.5	0	3.1711	3.40829	3.22434	3.40829	−0.0064415	−1.156E−05	−0.0080675	−1.558E−05
2	0	2.60747	3.2112	2.84924	3.2112	−0.0127639	−5.097E−05	−0.0156686	−2.804E−05
10	0	2.02058	2.84458	2.38575	2.84458	−0.0128216	−0.0001094	−0.0159114	−5.170E−05
20	0	1.89944	2.72114	2.25639	2.72114	−0.0059886	−0.0001279	−0.0089527	−5.981E−05
0	0.5	3.17107	3.40828	3.22433	3.40828	−0.0064539	−1.880E−05	−0.0080774	−1.122E−05
0	2	2.60742	3.21118	2.84921	3.21118	−0.0127869	−2.437E−05	−0.0156872	−1.477E−05
0	10	2.02053	2.84456	2.38573	2.84456	−0.0128463	−3.233E−05	−0.0159334	−2.353E−05
0	20	1.89937	2.72112	2.25639	2.72112	−0.0060121	−3.641E−05	−0.0089755	−2.724E−05

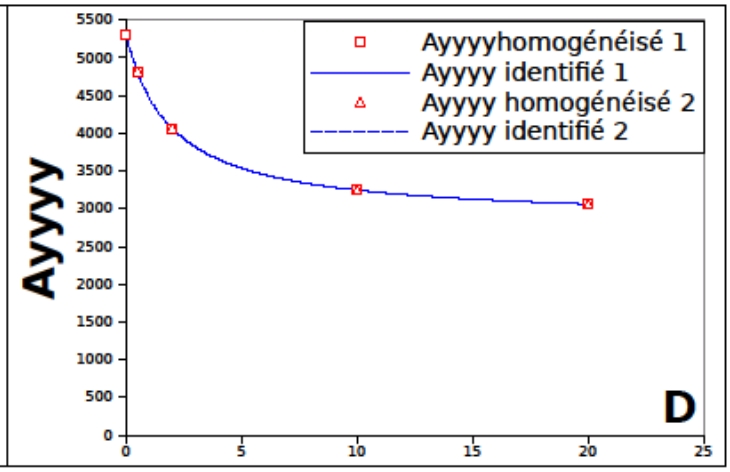
D1	D2	BHOM1XXX	BHOM2XXX	BHOM1YYX	BHOM2YYX	BHOM1XYX	BHOM2XYX	BHOM1XXY	BHOM2XXY	BHOM1YYY	BHOM2YYY	BHOM1XYY	BHOM2XYY
0	0	−0.0042731	0.020528	0.0126058	−0.0031842	−0.028971	0.0109948	−0.0052351	0.0288695	0.0547557	0.0425891	−0.0064787	0.00424057
0.5	0	−26.7048	0.495648	−6.51451	0.0579622	−0.0297444	0.0109164	−6.23302	0.0726691	−26.9476	0.505576	−0.0049994	0.00422663
2	0	−58.9402	1.1051	−12.9736	0.112553	−0.0336073	0.0108396	−12.3027	0.108343	−59.7034	1.09839	−0.0029104	0.00427155
10	0	−82.9572	1.58406	−16.1057	0.12332	−0.0396401	0.010879	−15.1375	0.106401	−83.8967	1.55521	0.00090535	0.00442257
20	0	−85.7616	1.62606	−16.0993	0.110247	−0.0384232	0.0109566	−15.1166	0.0916601	−86.5499	1.5884	0.00082398	0.00449714
0	0.5	0.470565	−26.7052	0.0735699	−6.53767	−0.0290149	0.00880958	0.0386184	−6.20418	0.517856	−26.9502	−0.0065305	0.00772304
0	2	1.07932	−58.9776	0.127857	−13.0052	−0.0290555	0.0106705	0.0743151	−12.2798	1.11068	−59.6957	−0.0064986	0.0129392
0	10	1.55635	−83.045	0.138043	−16.1455	−0.0290639	0.0226439	0.072282	−15.12	1.56701	−83.8842	−0.0062633	0.0157872
0	20	1.59704	−85.8576	0.124601	−16.1401	−0.0290718	0.0268307	0.0574229	−15.0998	1.59982	−86.5379	−0.0061435	0.0170282
D1	**D2**	**BHOF1XXX**	**BHOF2XXX**	**BHOF1YYX**	**BHOF2YYX**	**BHOF1XYX**	**BHOF2XYX**	**BHOF1XXY**	**BHOF2XXY**	**BHOF1YYY**	**BHOF2YYY**	**BHOF1XYY**	**BHOF2XYY**
0	0	0.00024784	0.00134107	−0.0010591	−0.0003997	0.00239425	0.00096963	0.00031954	0.00185794	−0.0035865	0.0027063	0.00051296	0.00031092
0.5	0	2.08417	−0.0116623	0.489231	−0.0024688	0.00240082	0.00096860	0.397324	−0.0002662	1.76193	−0.0119522	0.0004888	0.00031275
2	0	4.57717	−0.0284064	0.963932	−0.0044756	0.0026891	0.00096763	0.779921	−0.0022188	3.89295	−0.0304671	0.00053012	0.00031342
10	0	6.42238	−0.039761	1.18799	−0.0047735	0.00325781	0.00096525	0.95898	−0.0022495	5.47088	−0.0422986	0.00059985	0.00031239
20	0	6.63989	−0.0398503	1.18659	−0.0042228	0.00322341	0.00096267	0.959274	−0.0015817	5.65098	−0.042017	0.00069087	0.00031159
0	0.5	0.0132546	−2.08482	0.00100723	−0.491325	0.00239285	0.00074946	0.00244439	−0.395611	0.0110686	−1.76259	0.00051392	0.00052154
0	2	0.0299966	−4.58122	0.00300814	−0.966783	0.00239095	0.00083391	0.00439725	−0.778778	0.0295792	−3.89365	0.00051701	0.00085078
0	10	0.0413236	−6.43104	0.0032926	−1.1916	0.00238991	0.00168621	0.0044259	−0.958463	0.0414055	−5.47241	0.00052243	0.00102129
0	20	0.0413863	−6.64943	0.00273325	−1.19033	0.00238955	0.0019891	0.0037537	−0.958937	0.0411172	−5.65297	0.00052448	0.00105535

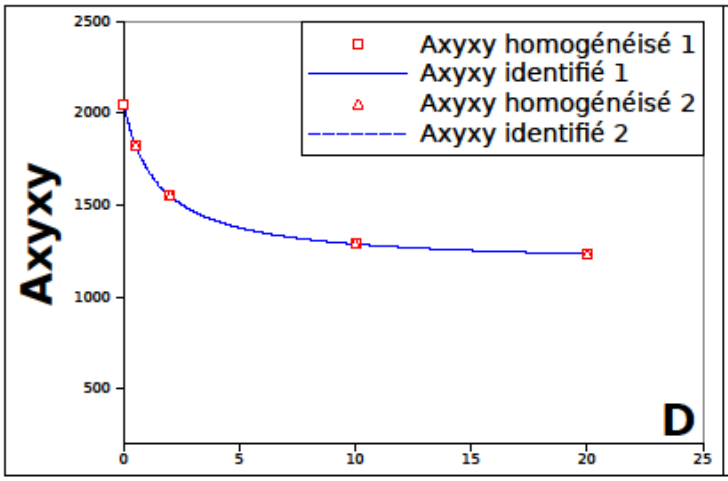
D1	D2	CHOMXX1	CHOMXX12	CHOMXX2	CHOMYY1	CHOMYY12	CHOMYY2
0	0	52.0708	0.00514568	52.1166	50.9942	0.0113315	50.9439
0.5	0	47.0999	0.00588243	52.1174	46.1191	0.0130845	50.9446
2	0	40.6763	0.00655753	52.1188	39.8222	0.014645	50.9461
10	0	33.9655	0.00658565	52.1217	33.2827	0.0147697	50.9491
20	0	32.2101	0.00727255	52.1231	31.6249	0.0147231	50.9505
0	0.5	52.0716	0.00588349	47.1423	50.9949	0.0127195	46.0733
0	2	52.0731	0.00651004	40.718	50.9963	0.0136709	39.7827
0	10	52.076	0.00628082	34.0128	50.9993	0.0127693	33.2482
0	20	52.0774	0.0067756	32.2603	51.0007	0.0120143	31.5895
D1D1	**D2D2**	**CHOMXY1**	**CHOMXY12**	**CHOMXY21**	**CHOMXY2**		
0	0	0.00173143	6.5394E−06	1.216E−06	0.0021676		
0.5	0	0.00028959	6.6487E−06	4.022E−06	0.00216666		
2	0	0.00142003	5.4974E−06	1.6494E−05	0.00216495		
10	0	0.00282098	2.6437E−06	4.182E−05	0.00216275		
20	0	0.00271001	8.0577E−06	5.8713E−05	0.00216298		
0	0.5	0.00173149	4.6143E−06	4.1274E−07	0.00145225		
0	2	0.00173157	1.0123E−06	3.1518E−07	0.00117131		
0	10	0.00173251	1.6286E−05	5.5936E−06	0.00131893		
0	20	0.00173383	2.7947E−05	1.9043E−05	0.00097467		
0	0	0.00145944	4.8898E−06	8.2E−06	0.00199123		
0.5	0	0.00131254	4.296E−06	5.082E−06	0.00199012		
2	0	0.00127054	5.2893E−07	3.9263E−06	0.00198817		
10	0	0.00201384	2.7861E−05	2.4278E−05	0.00198439		
20	0	0.00231366	5.3202E−05	3.4904E−05	0.00198275		
0	0.5	0.00145937	1.7837E−06	9.5276E−06	0.00205418		
0	2	0.00145946	6.2802E−06	1.1895E−05	0.00202941		
0	10	0.00146051	2.9021E−05	1.5666E−05	0.00207774		
0	20	0.00146099	5.1613E−05	1.5369E−05	0.00210354		

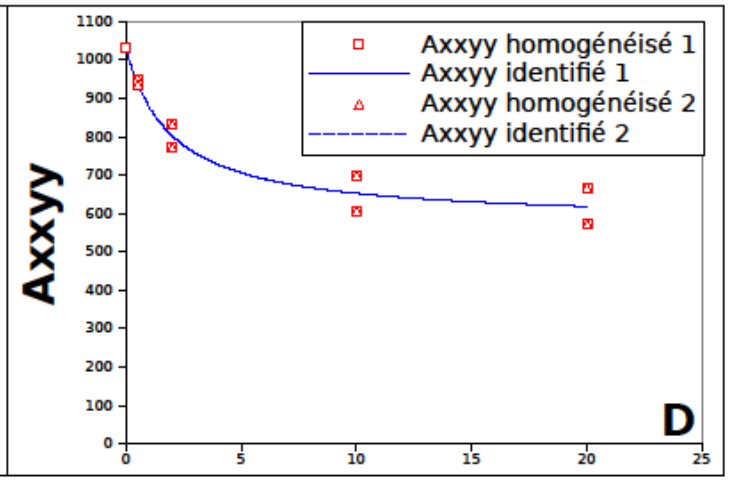
Traction

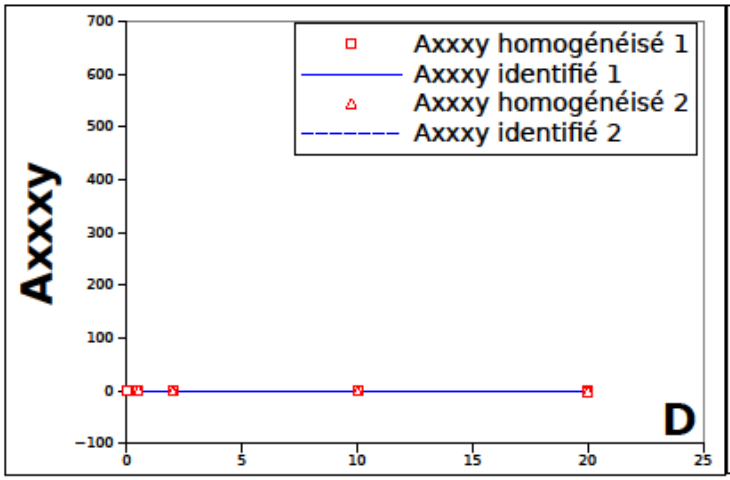


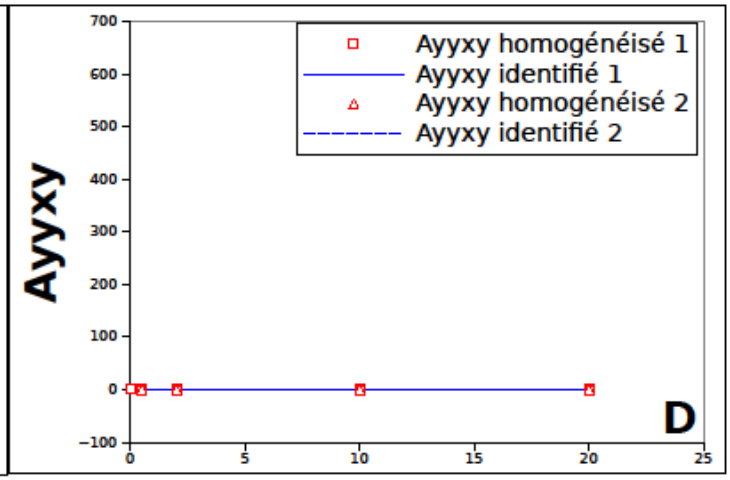
Traction





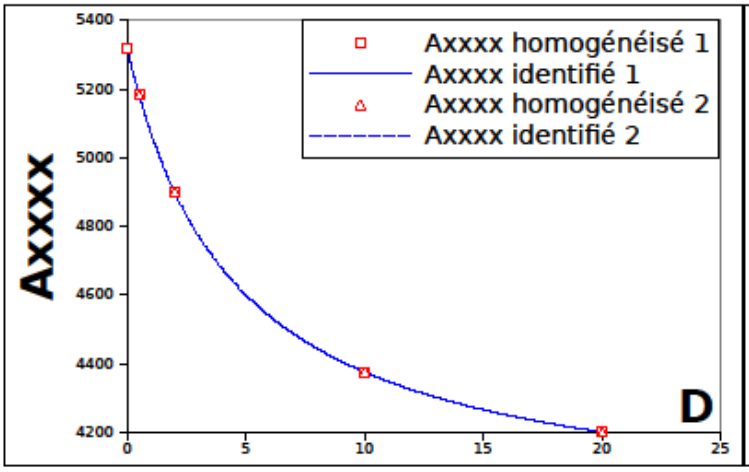




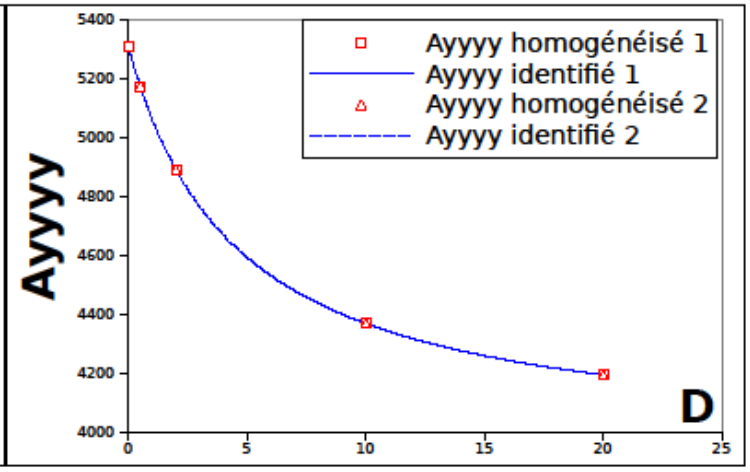


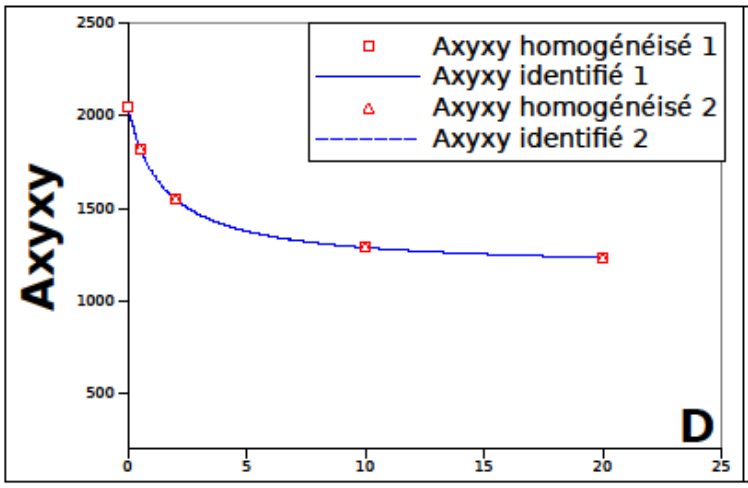
	AM	ALPHA1	GAMMA1	ALPHA2	GAMMA2
XXXX	5318.1	1.98396	0.07027	1.98409	0.07021
YYYY	5312.3	1.9625	0.06949	1.9627	0.06942
XYXY	2048.32	1.51435	0.14563	1.51438	0.1456
XXYY	1031.71	1.97059	0.12046	1.97074	0.12038
XXXY	0	1	1	1	1
YYXY	0	1	1	1	1

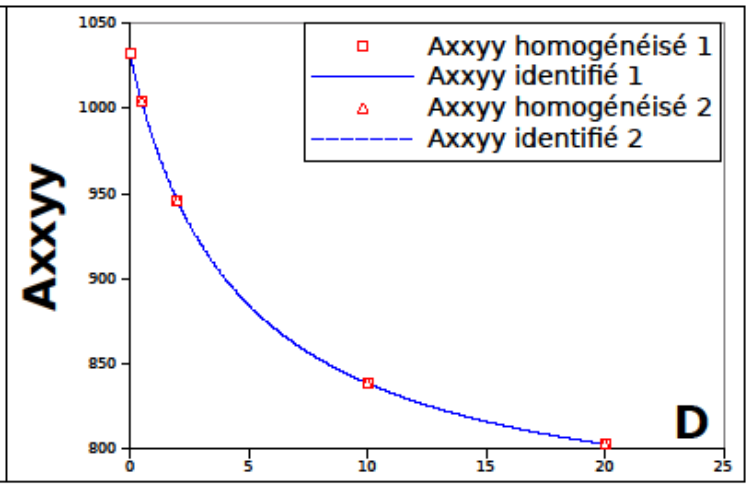
Compression

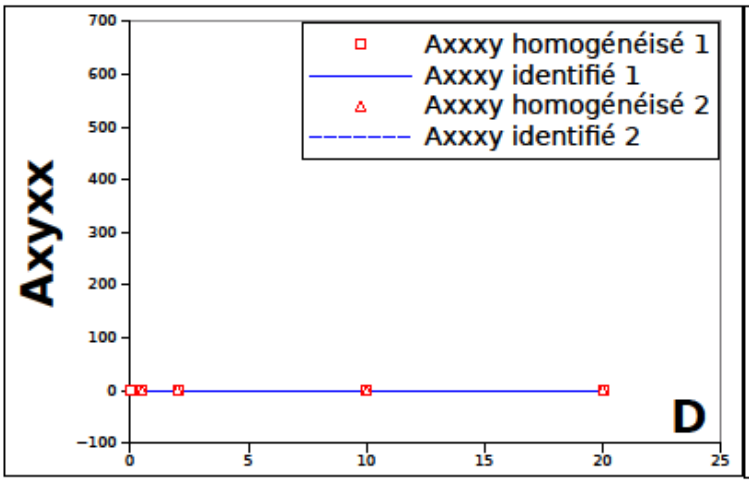


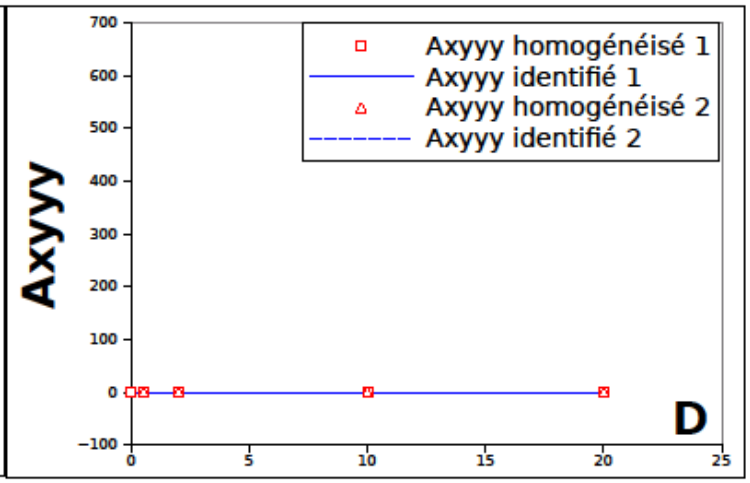
Compression





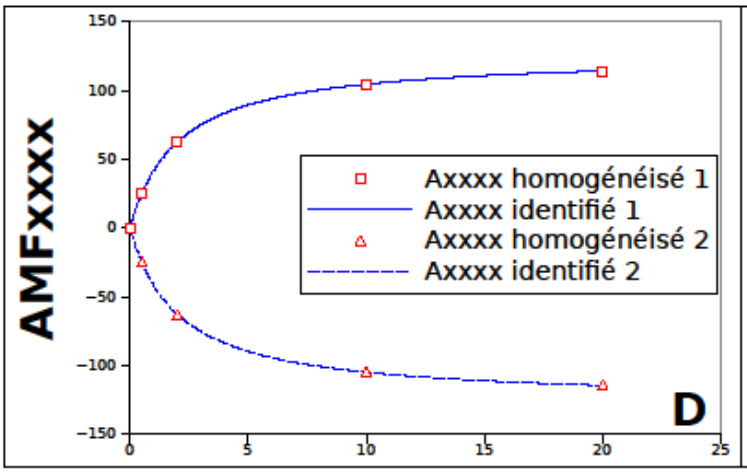




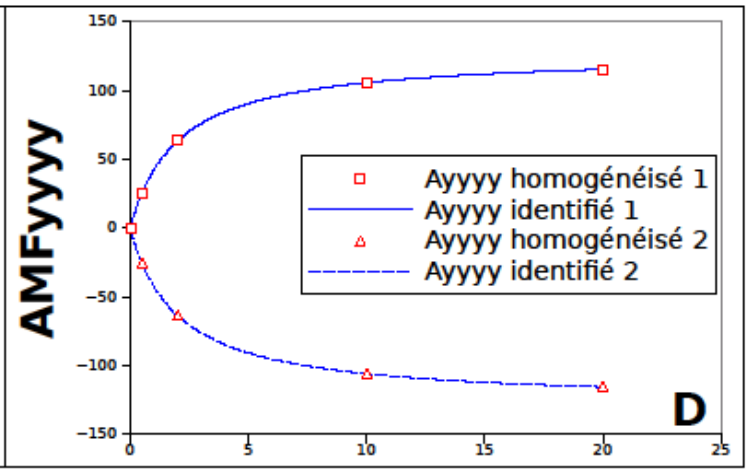


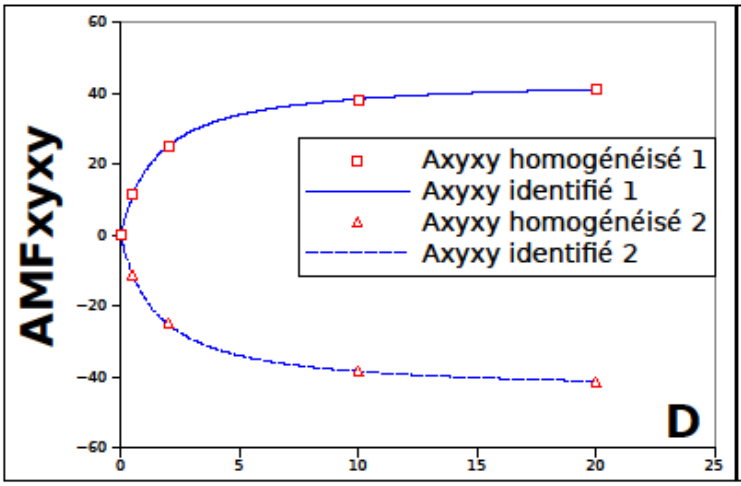
	AM	ALPHA1	GAMMA1	ALPHA2	GAMMA2
XXXX	5318.1	4.54284	0.48485	4.54282	0.48484
YYYY	5312.3	4.54059	0.48439	4.54063	0.48438
XYXY	2048.32	1.51435	0.14563	1.51438	0.1456
XXYY	1031.71	4.53526	0.45635	4.53524	0.45633
XXXY	0	1	1	1	1
YYXY	0	1	1	1	1

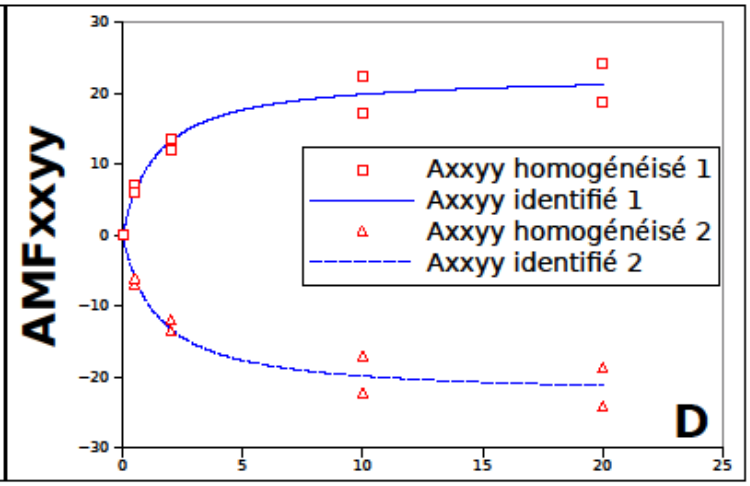
POSITIF

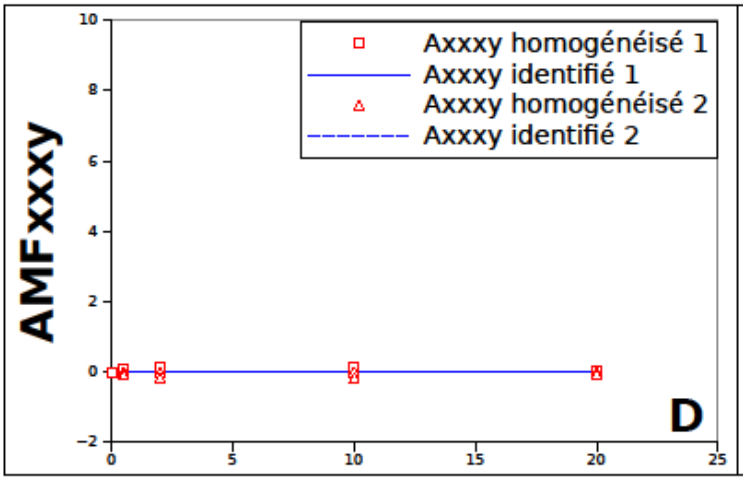


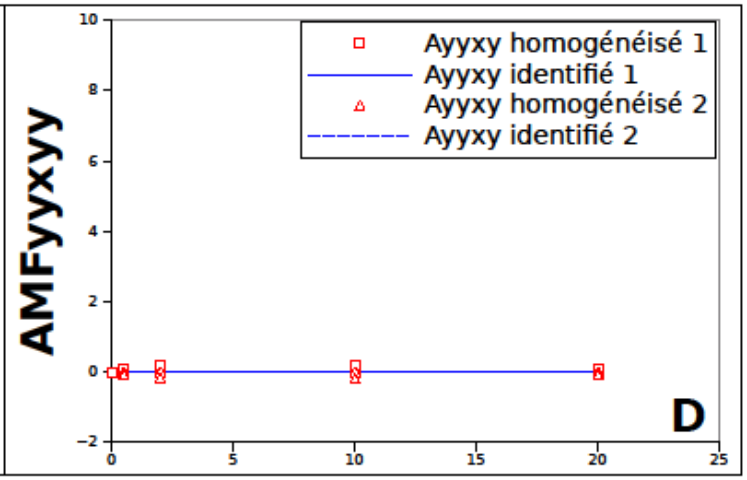
POSITIF





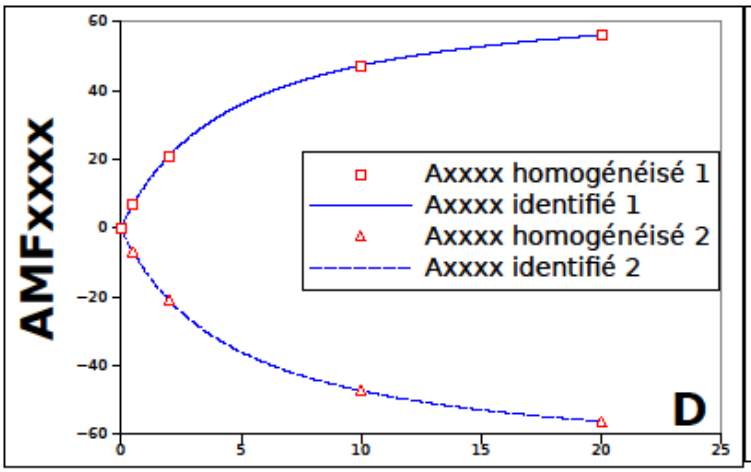




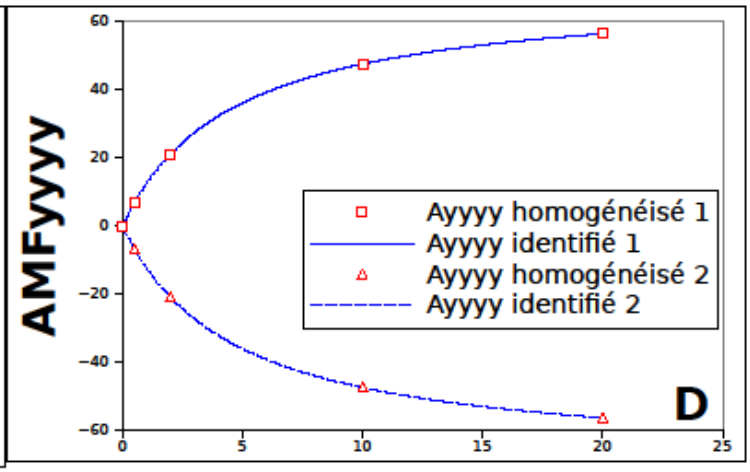


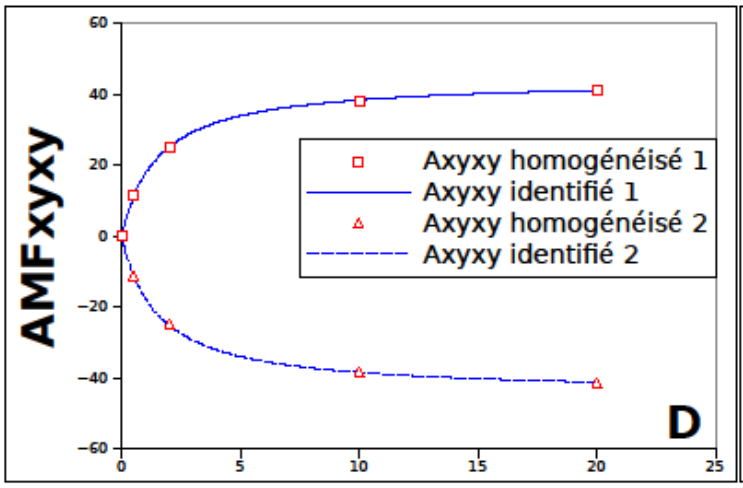
	AMF	ALPHA1	GAMMA1	ALPHA2	GAMMA2
XXXX	0.02381	2.02323	252.875	2.02153	−250.9
YYYY	0.0269	2.00838	255.245	2.00609	−253.3
XYXY	0.00651	1.52302	89.3153	1.52221	−87.33
XXYY	0.01397	1.42714	46.2739	1.42928	−44.34
XXXY	0	1	1	1	1
YYXY	0	1	1	1	1

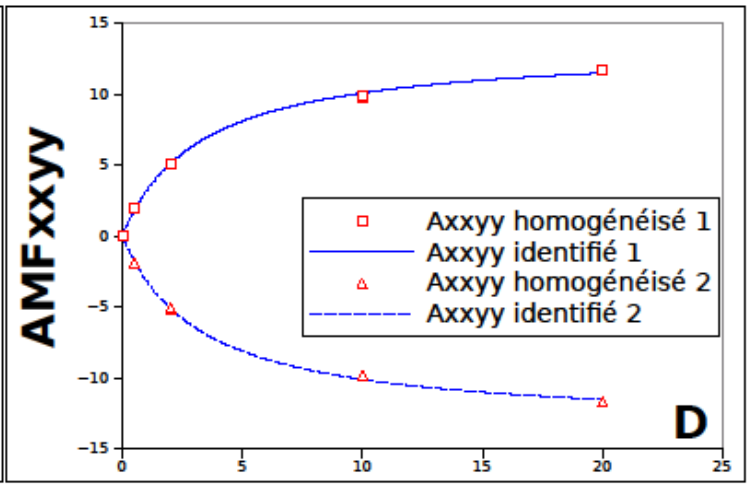
NEGATIF

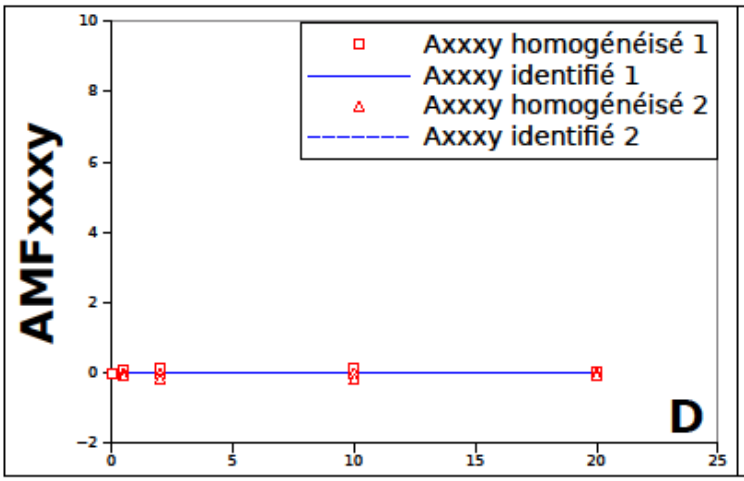


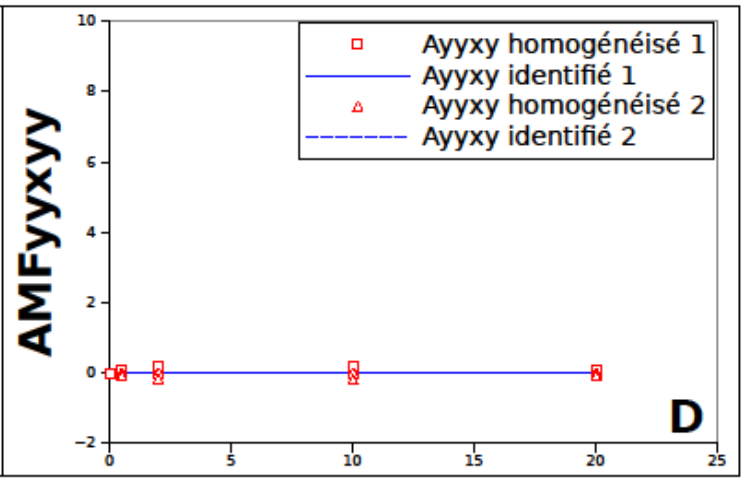
NEGATIF





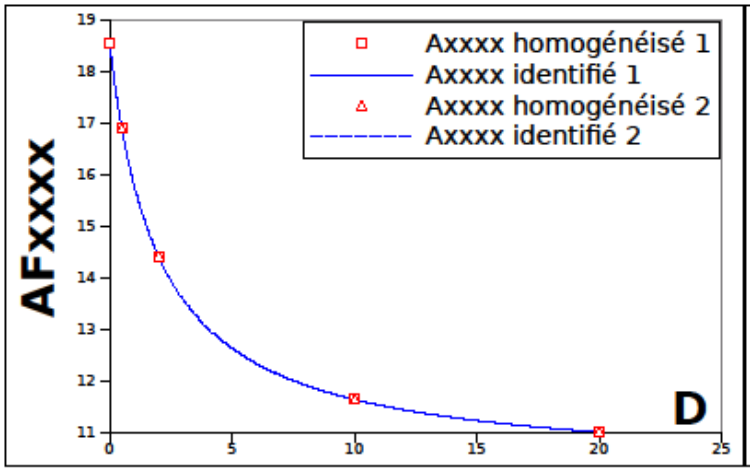




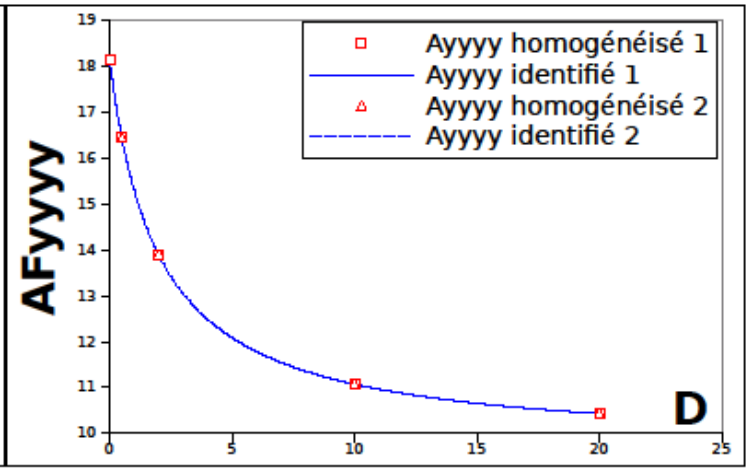


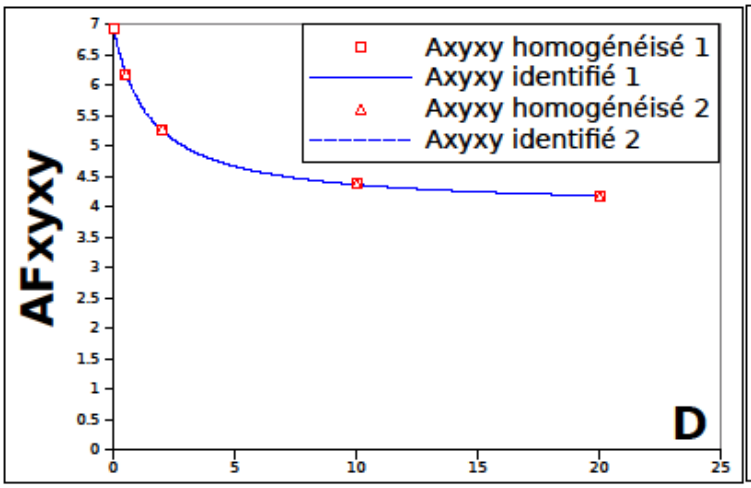
AMF	ALPHA1	GAMMA1	ALPHA2	GAMMA2
XXXX	0.02381	4.59028	139.092	4.57977	−137.1
YYYY	0.0269	4.60553	140.09	4.59081	−138.1
XYXY	0.00651	1.52302	89.3153	1.52221	−87.33
XXYY	0.01397	3.23744	27.6458	3.25254	−25.73
XXXY	0	1	1	1	1
YYXY	0	1	1	1	1

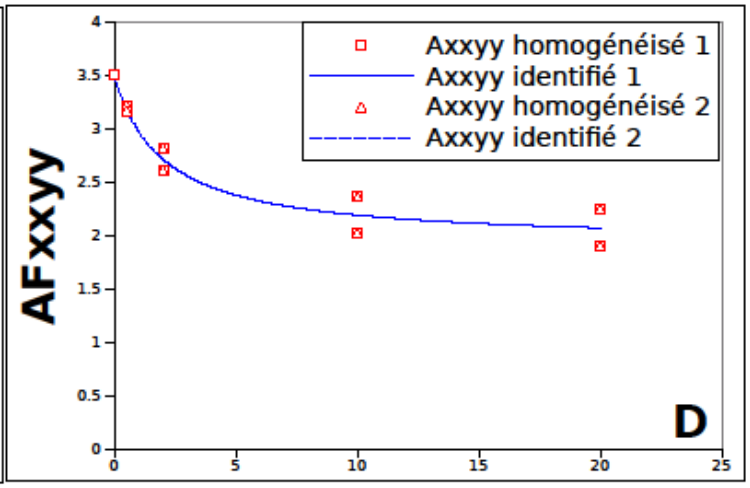
POSITIF

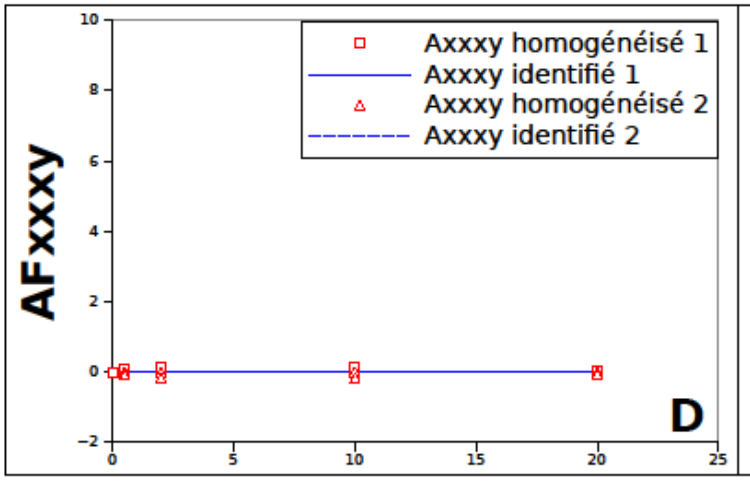


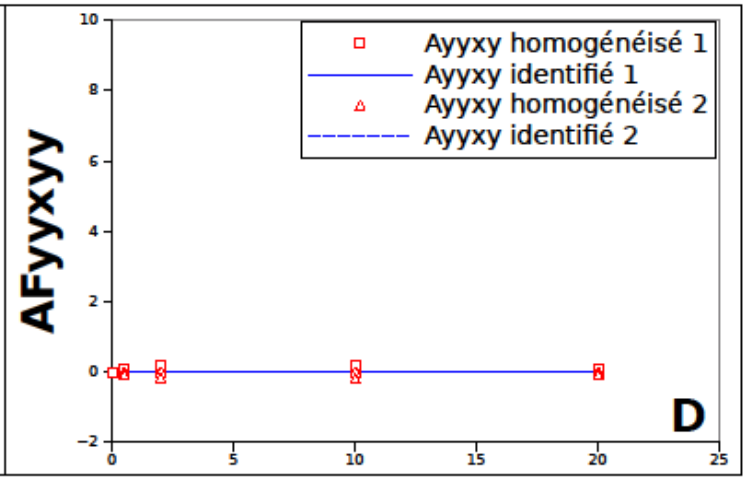
POSITIF





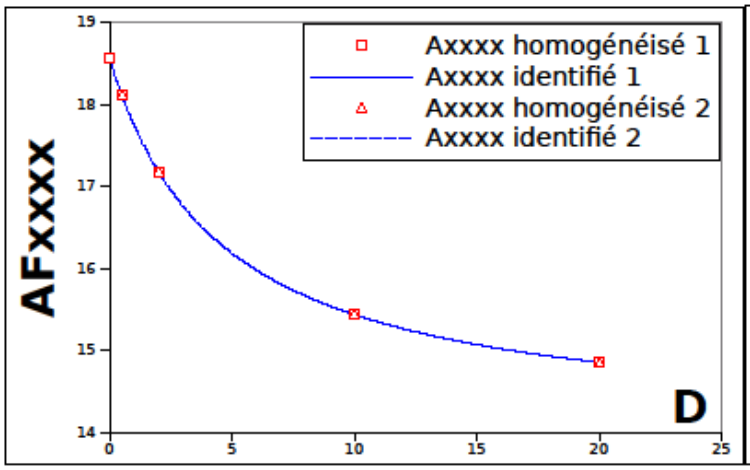




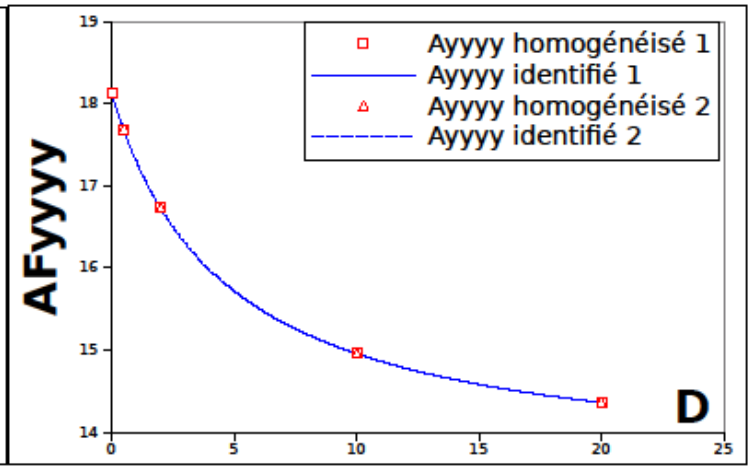


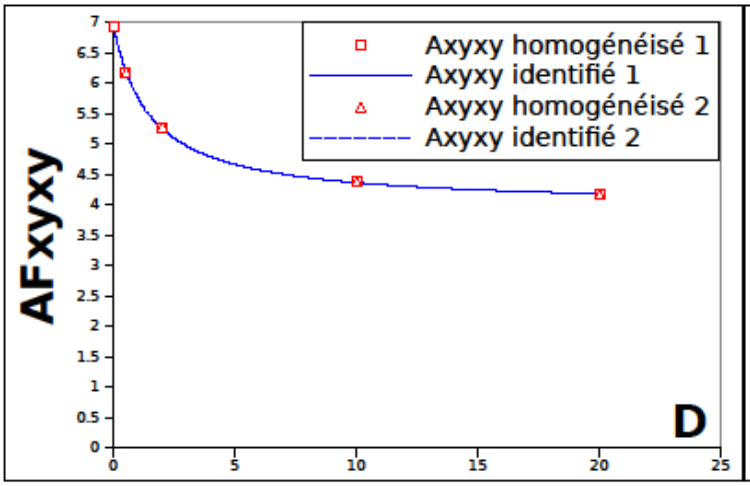
	AF	ALPHA1	GAMMA1	ALPHA2	GAMMA2
XXXX	18.5743	2.01361	0.10527	2.0134	0.10537
YYYY	18.1368	2.00925	0.06468	2.00924	0.06468
XYXY	6.92332	1.52533	0.14742	1.52538	0.14739
XXYY	3.5029	2.01005	0.10085	2.00994	0.10086
XXXY	0	1	1	1	1
YYXY	0	1	1	1	1

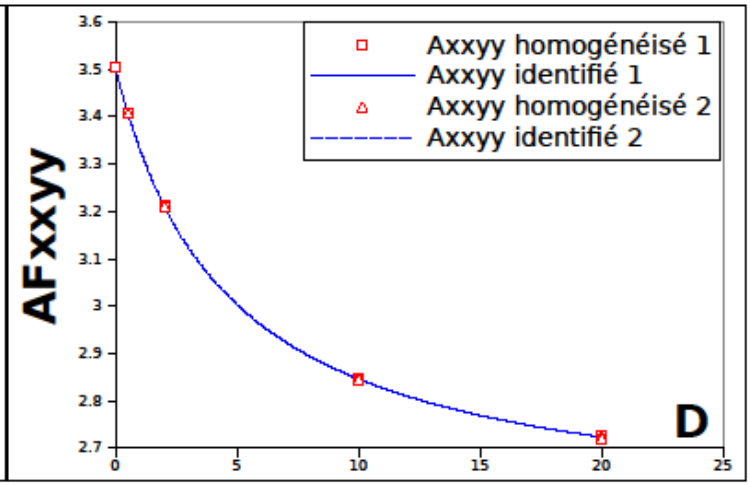
NEGATIF

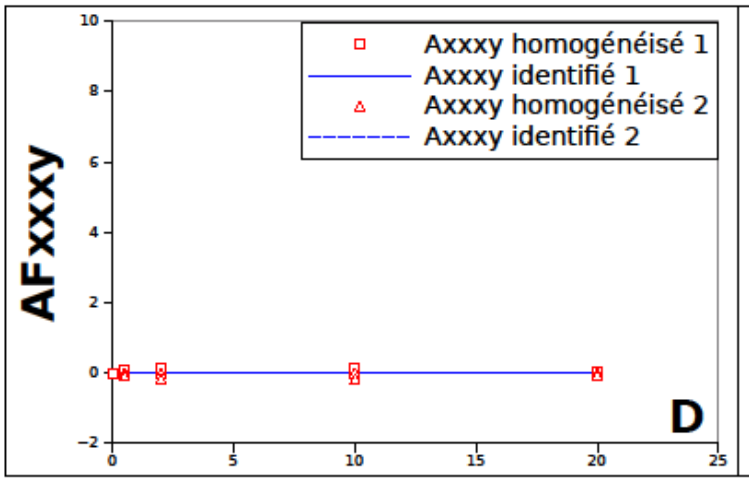


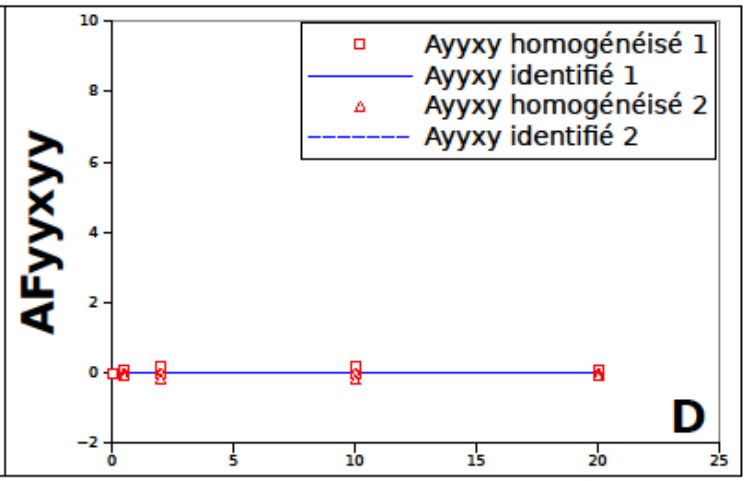
NEGATIF





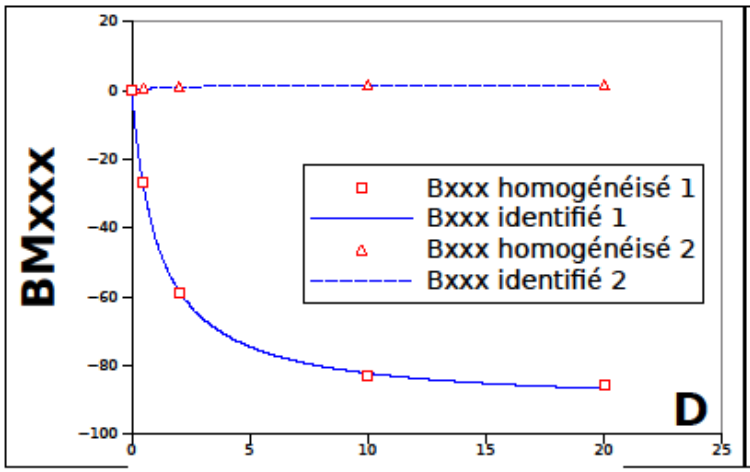




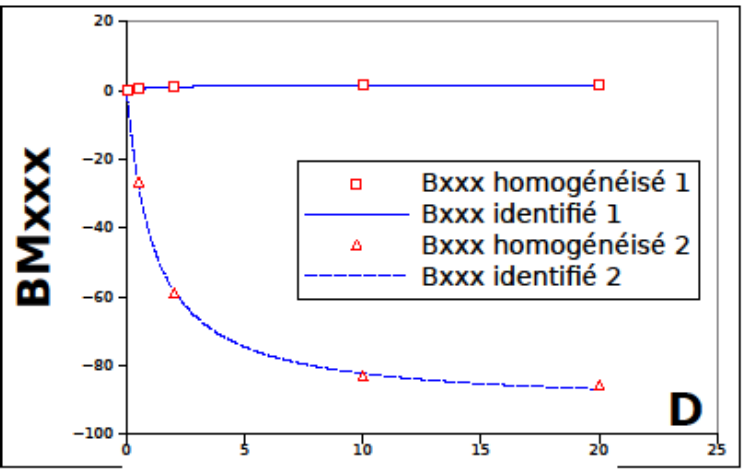


	AF	ALPHA1	GAMMA1	ALPHA2	GAMMA2
XXXX	18.5743	4.56784	0.50773	4.56753	0.50777
YYYY	18.1368	4.5996	0.48775	4.59956	0.48775
XYXY	6.92332	1.52533	0.14742	1.52538	0.14739
XXYY	3.5029	4.57134	0.45371	4.57113	0.45373
XXXY	0	1	1	1	1
YYXY	0	1	1	1	1

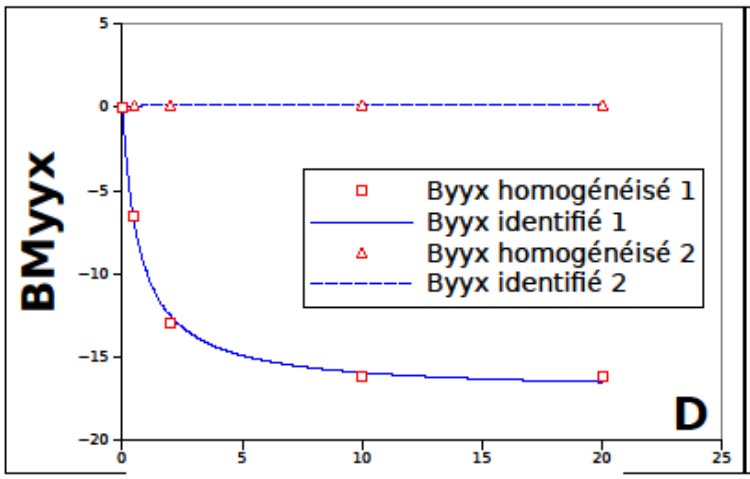
Glissement en zone 1



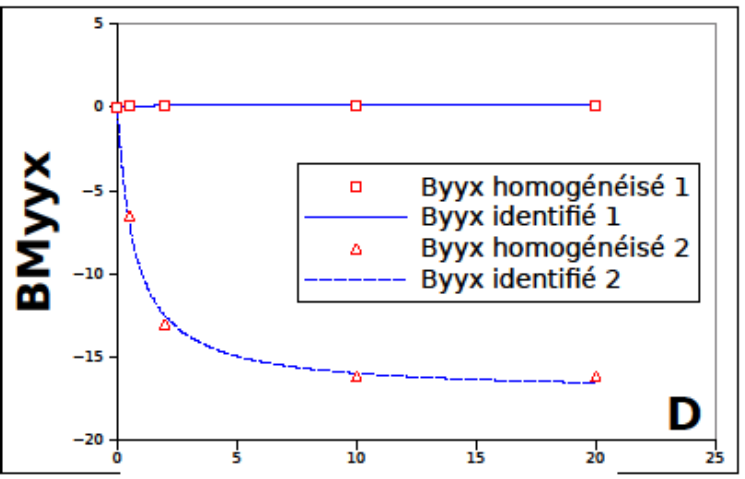
Glissement en zone 2



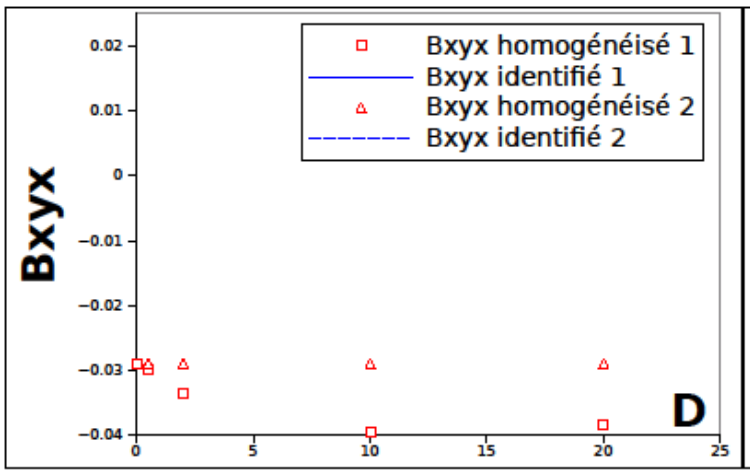
Glissement en zone 1



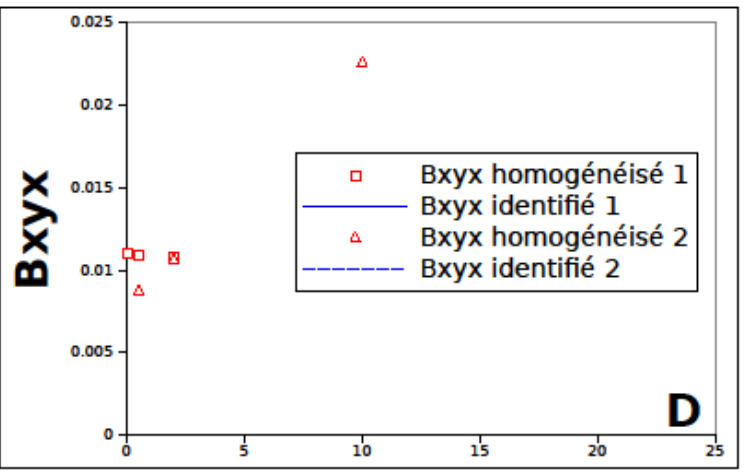
Glissement en zone 2



Glissement en zone 1

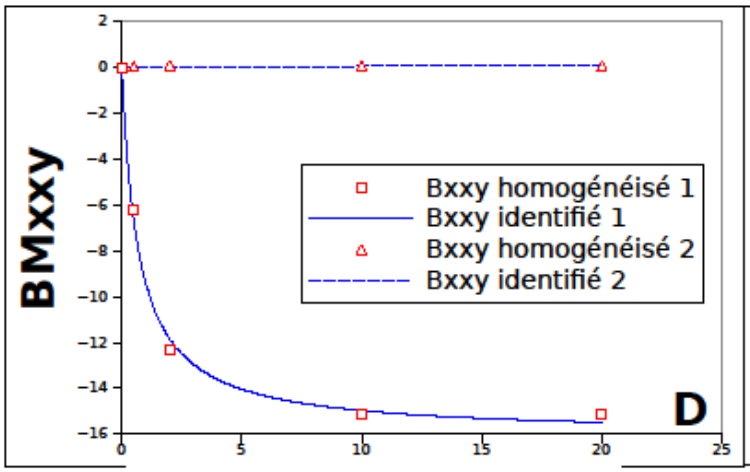


Glissement en zone 2

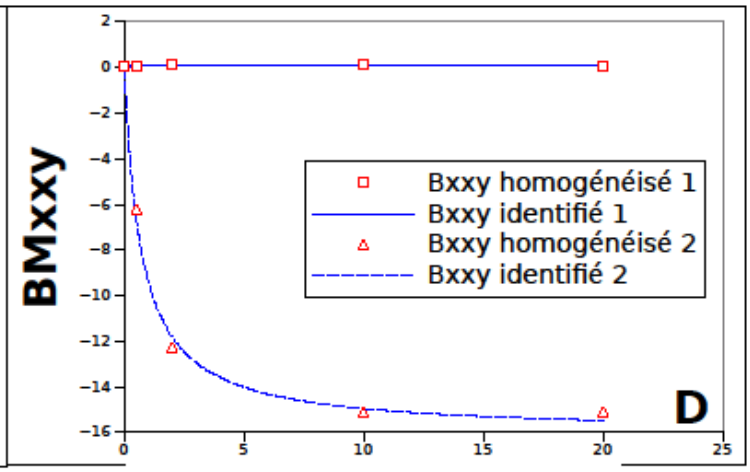


	ALPHA1	GAMMA1	ALPHA2	GAMMA2
XXX1	1.15537	−91.71	1.2443	1.72378
XXX2	1.20154	1.74909	1.15721	−91.82
XXY1	0.73737	−17.09	0.36835	0.13808
XXY2	0.45393	0.12379	0.73654	−17.13
XYX1	1	0	1	0
XYX2	1	0	1	0

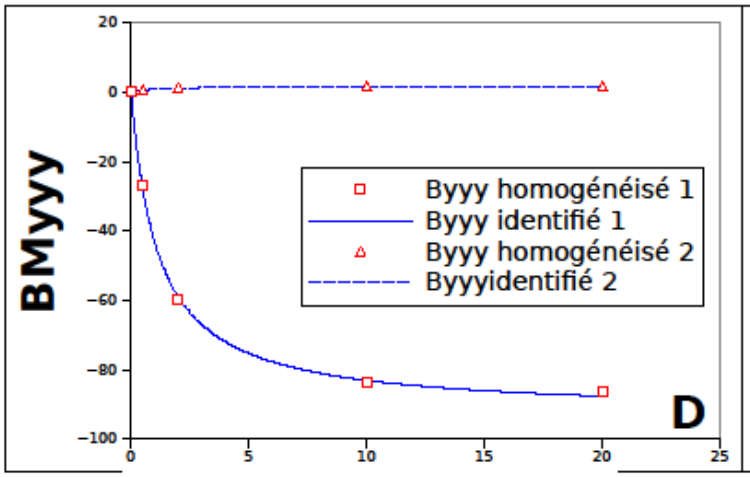
Glissement en zone 1



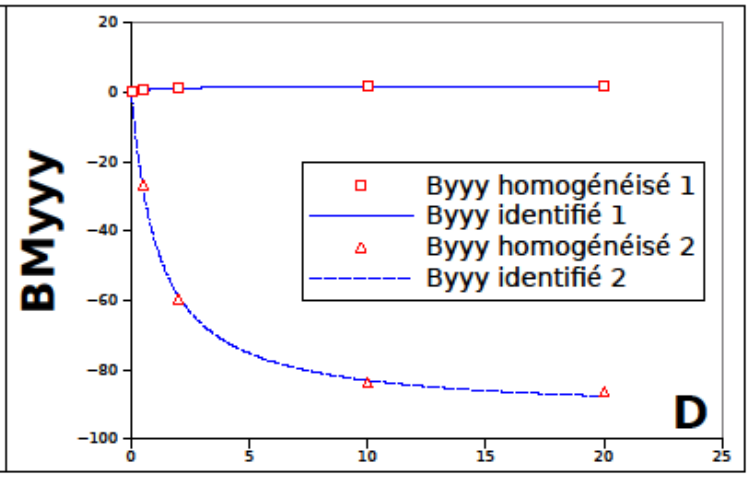
Glissement en zone 2



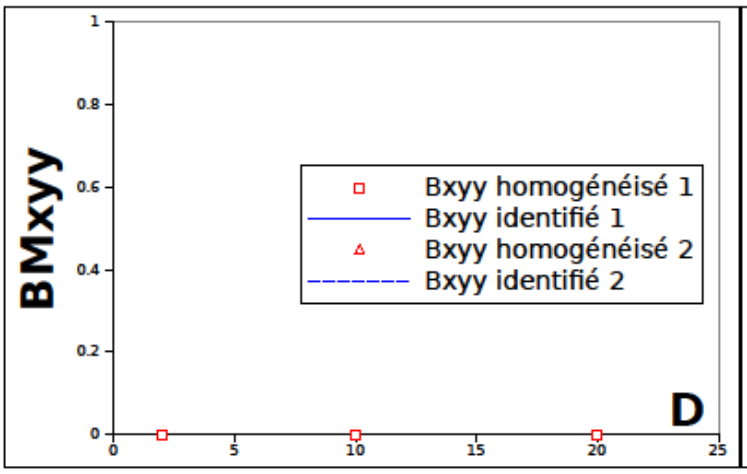
Glissement en zone 1



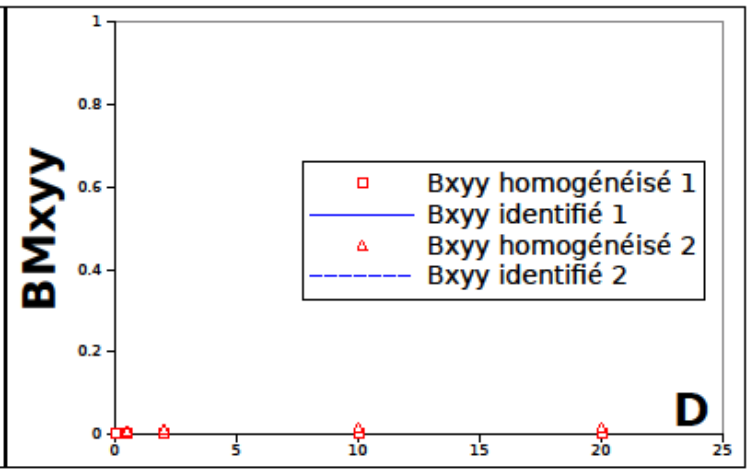
Glissement en zone 2



Glissement en zone 1

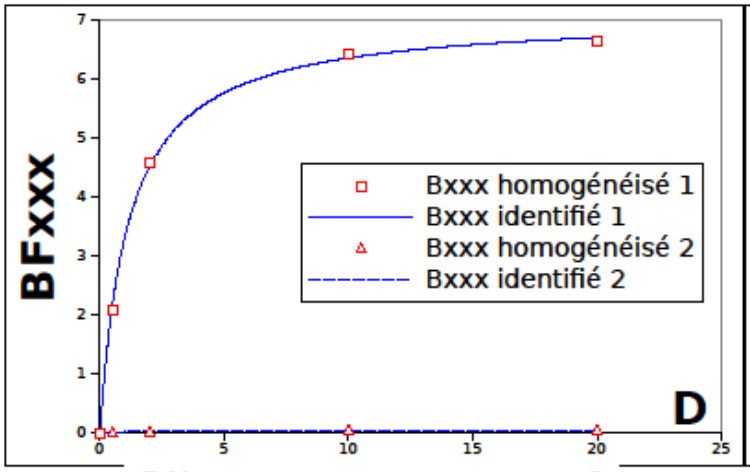


Glissement en zone 2

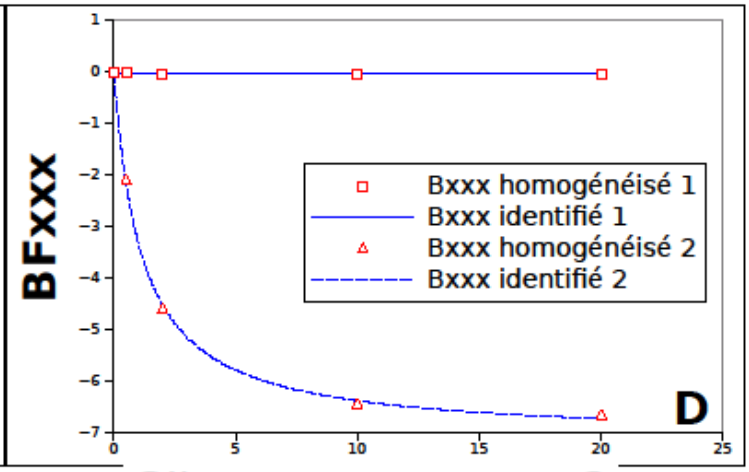


	ALPHA1	GAMMA1	ALPHA2	GAMMA2
XXY1	0.7131	−16.04	0.28732	0.07015
XXY2	0.17573	0.1044	0.71674	−16.02
YYY1	1.15093	−92.63	1.11192	1.71444
YYY2	1.13435	1.70477	1.15068	−92.61
XYY1	1	0	1	0
XYY2	1	0	1	0

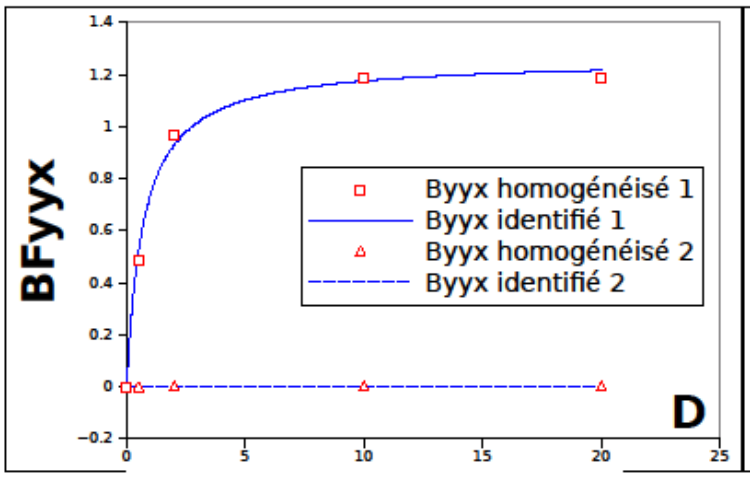
Glissement en zone 1



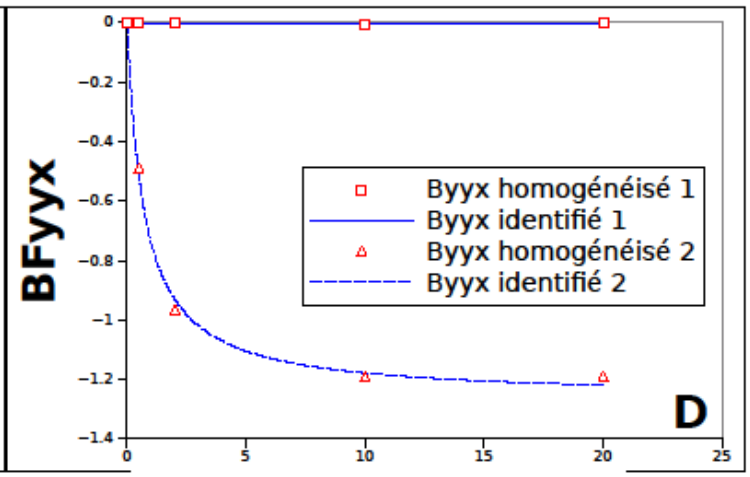
Glissement en zone 2



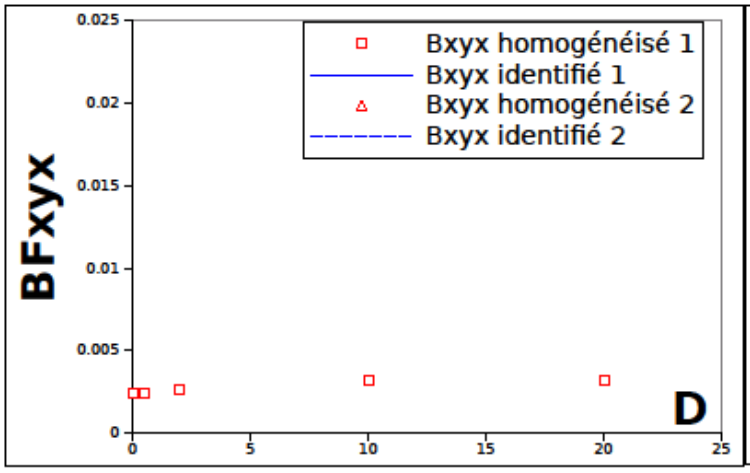
Glissement en zone 1



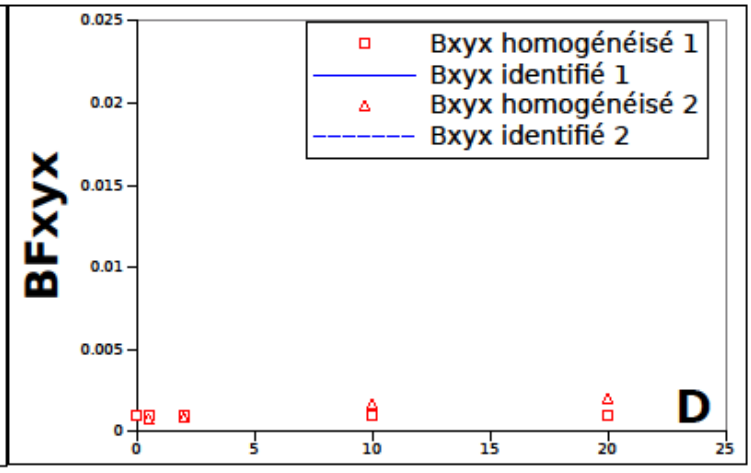
Glissement en zone 2



Glissement en zone 1

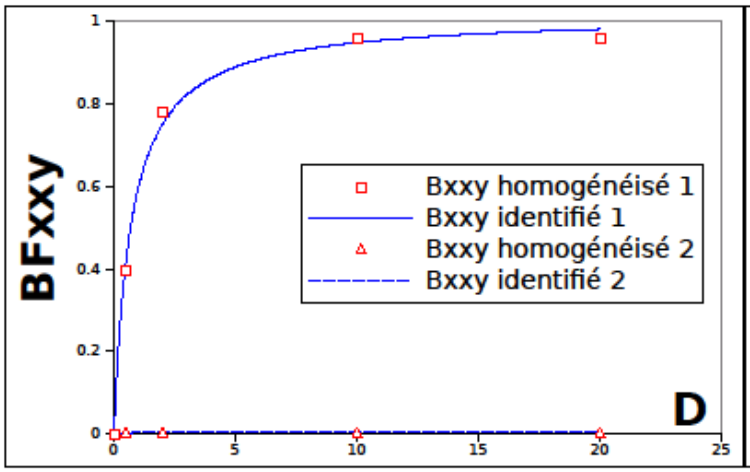


Glissement en zone 2

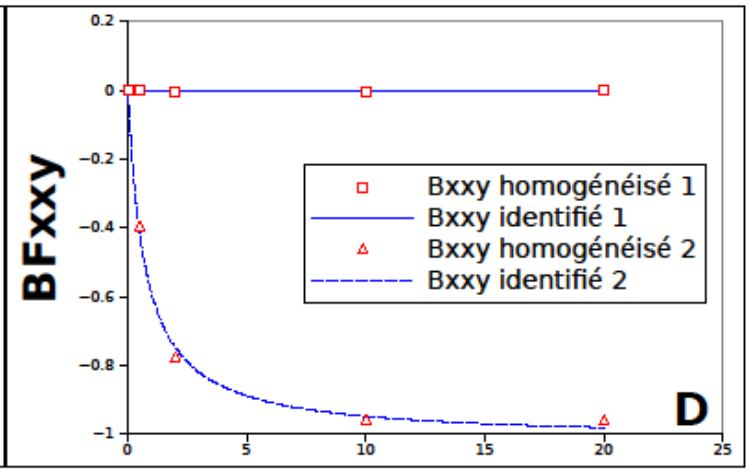


	ALPHA1	GAMMA1	ALPHA2	GAMMA2
XXY1	1.14249	7.09391	1.07011	0.04475
XXY2	1.17515	−0.043	1.14443	−7.105
YYY1	0.71462	1.25858	0.6609	0.00328
YYY2	0.37464	−0.005	0.71375	−1.262
XYY1	1	0	1	0
XYY2	1	0	1	0

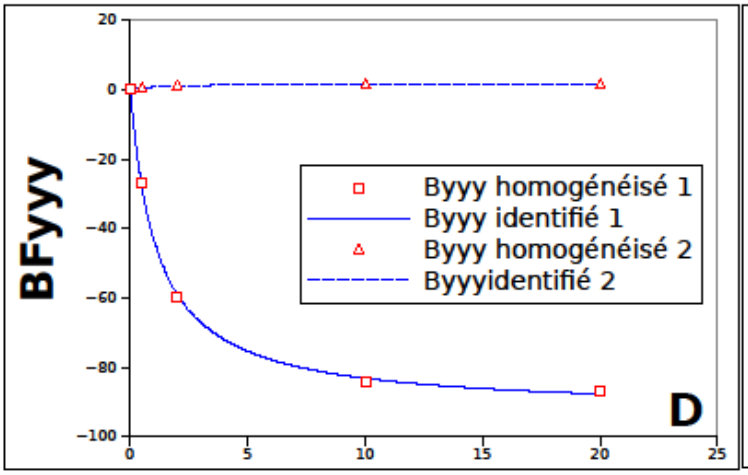
Glissement en zone 1



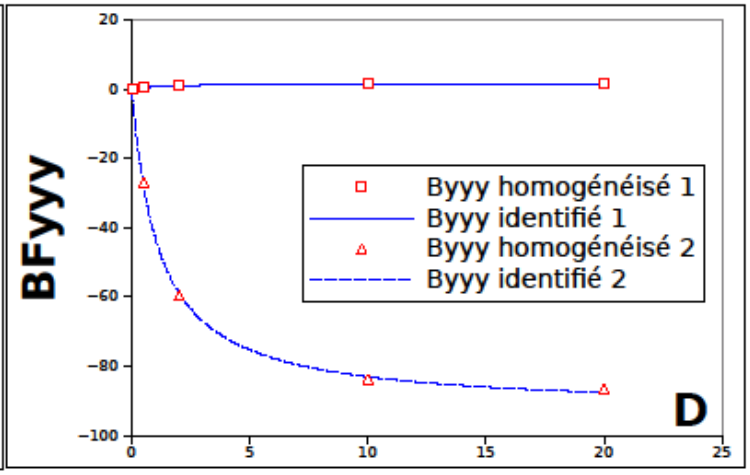
Glissement en zone 2



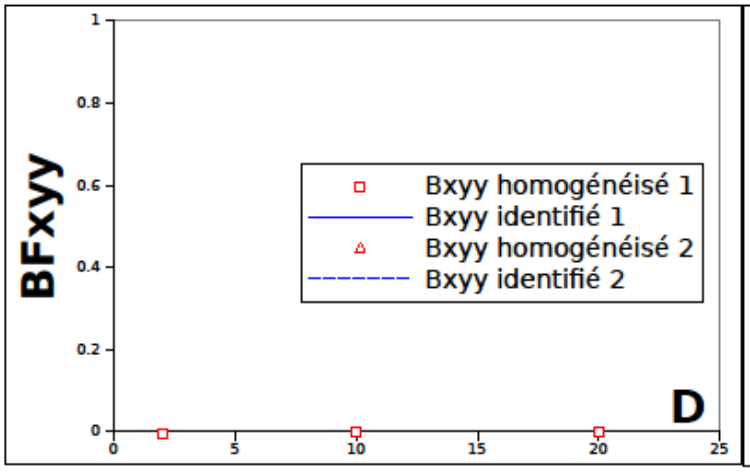
Glissement en zone 1



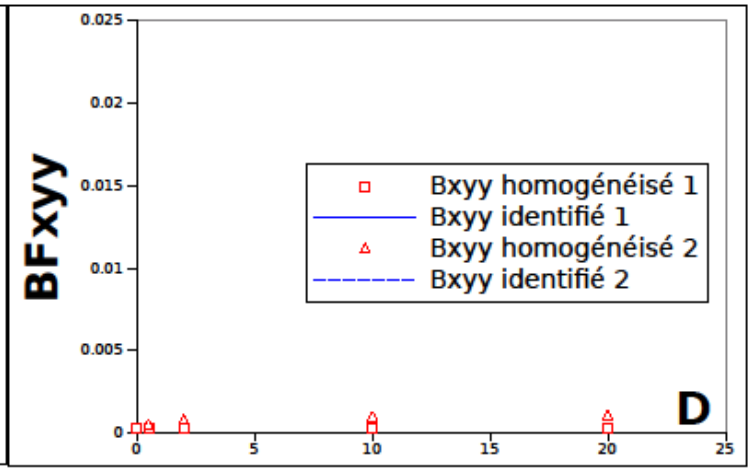
Glissement en zone 2



Glissement en zone 1

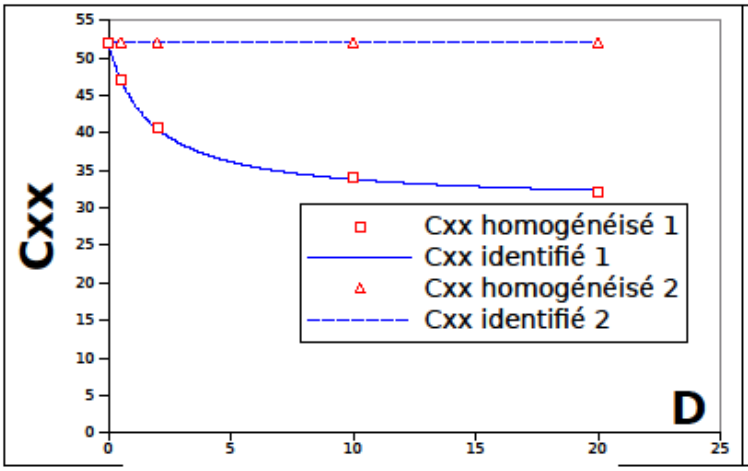


Glissement en zone 2

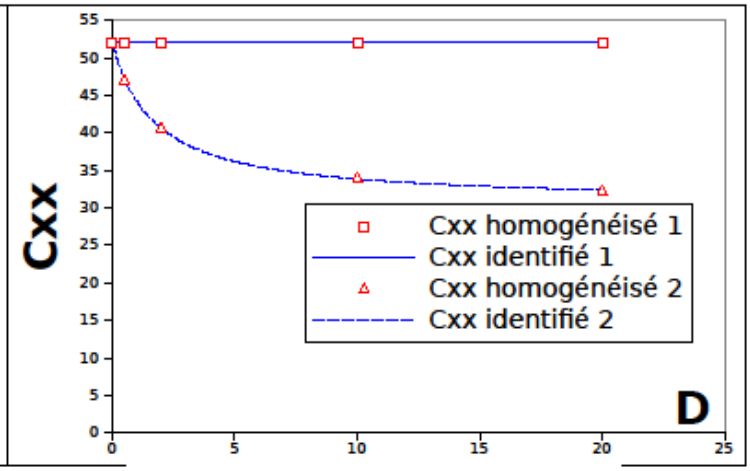


	ALPHA1	GAMMA1	ALPHA2	GAMMA2
XXY1	0.70897	1.01637	0.29997	0.00436
XXY2	0.79585	−0.002	0.71321	−1.016
YYY1	1.15093	−92.63	1.11192	1.71444
YYY2	1.13435	1.70477	1.15068	−92.61
XYY1	1	0	1	0
XYY2	1	0	1	0

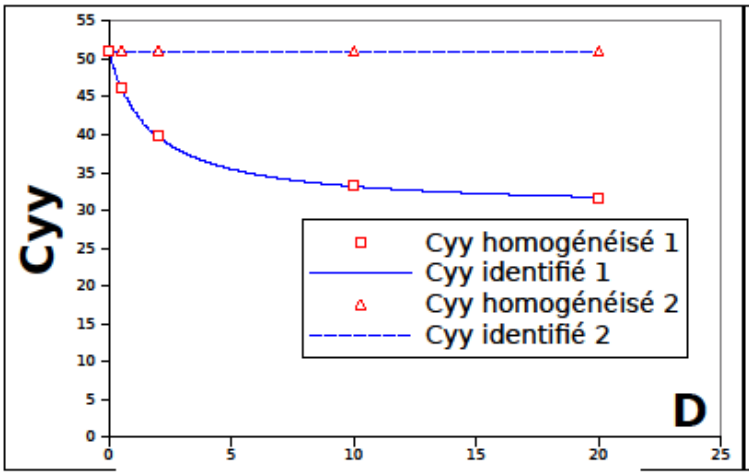
Glissement en zone 1



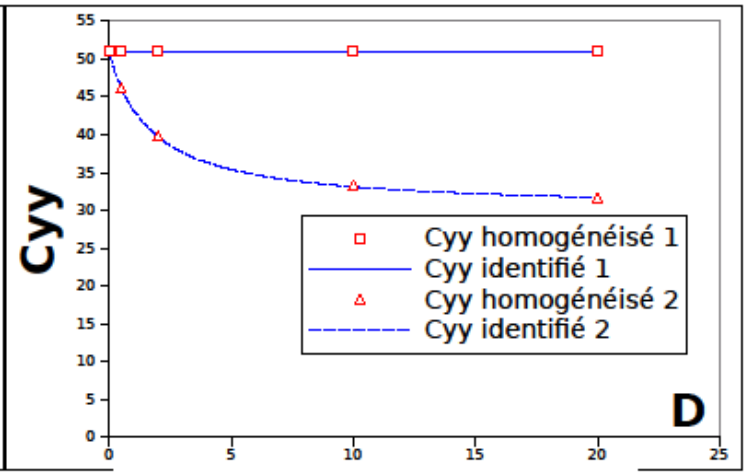
Glissement en zone 2



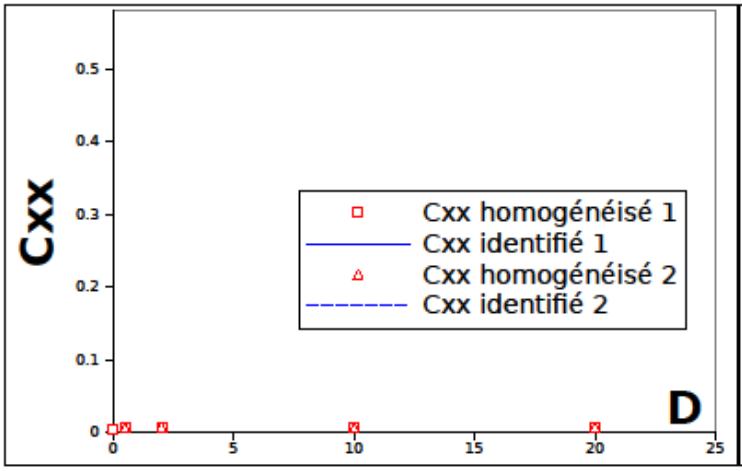
Glissement en zone 1



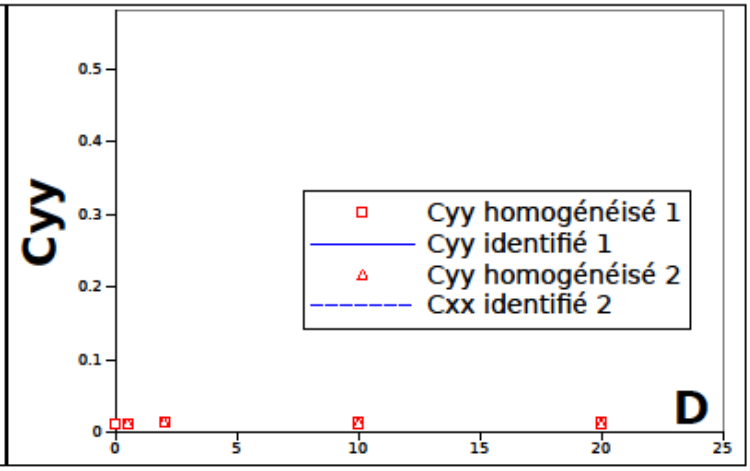
Glissement en zone 2



Glissement en zone 12



Glissement en zone 12



	C0	ALPHA1	GAMMA1	ALPHA2	GAMMA2
XX1	52.0708	1.73082	0.17739	5.57901	1.00032
XX2	52.1166	5.3496	1.00031	1.72833	0.17837
YY1	50.9942	1.71242	0.18067	5.93836	1.00033
YY2	50.9439	5.91466	1.00033	1.71301	0.1805
XX12	0	1	0	1	0
YY12	0	1	0	1	0

ANNEXE 7

Résultats numériques et identification des paramètres pour une plaque sans symétrie miroir

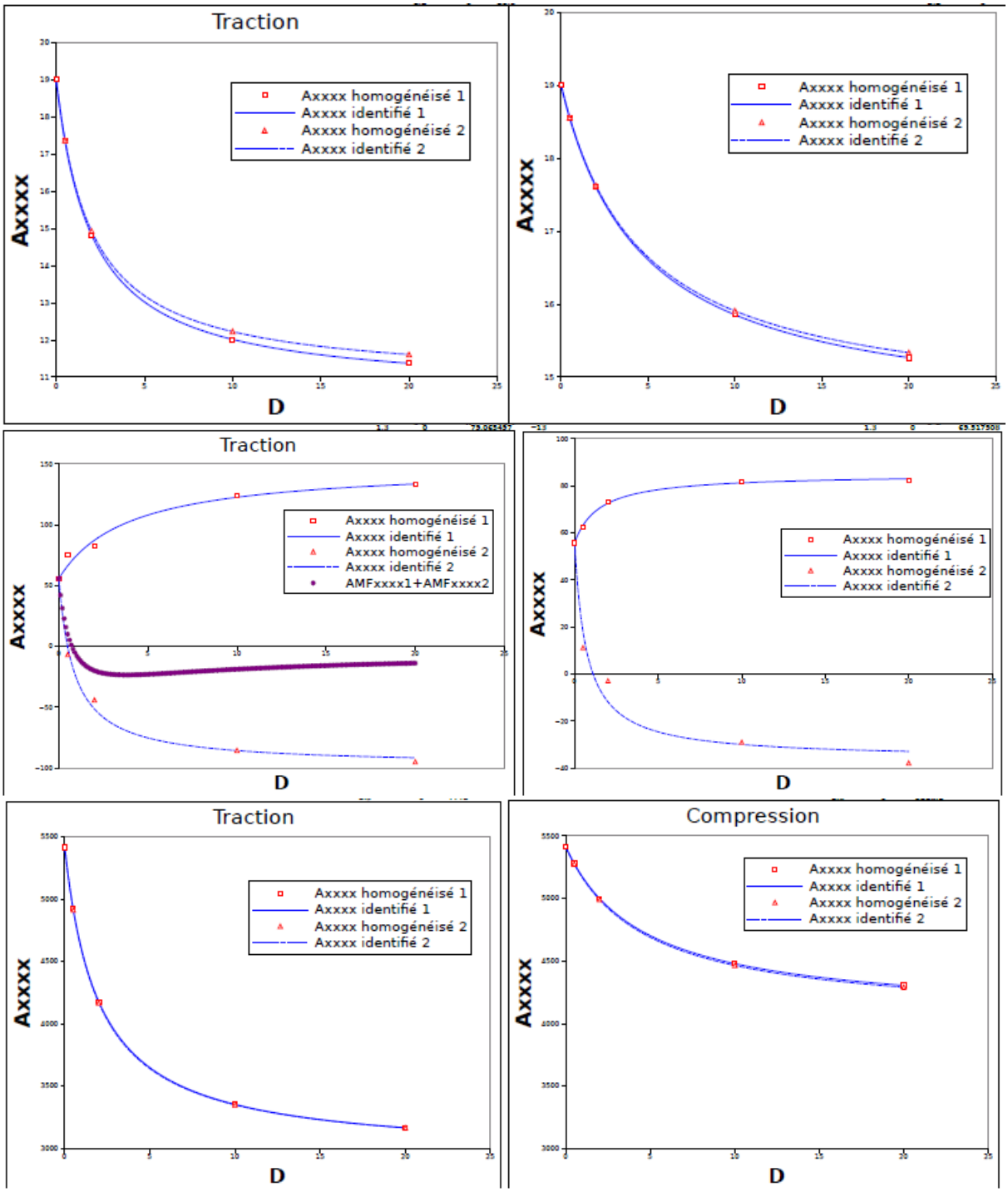
D1	D2	AHOMXXXX	AHOMXXXXC	AHOMYYYY	AHOMYYYYC	AHOMXYXY			
0	0	5318.1	5318.1	5312.3	5312.3	2048.32			
0.5	0	4821.7	5182	4814.32	5176.16	1823.75			
2	0	4076.21	4899.29	4062.05	4893.43	1555.67			
10	0	3255.02	4376.57	3246.43	4370.83	1291.35			
20	0	3069.31	4201.58	3062.07	4195.89	1230.85			
0	0.5	4821.68	5181.99	4814.31	5176.15	1823.74			
0	2	4076.17	4899.28	4062.01	4893.42	1555.66			
0	10	3254.93	4376.55	3246.31	4370.82	1291.32			
0	20	3069.17	4201.55	3061.88	4195.87	1230.82			
D1D1	D2D2	AHOMXXYY	AHOMXXYYC	AHOMYYXX	AHOMYYXXC	AHOMXXXY	AHOMXYXX	AHOMYYXY	AHOMXYYY
0	0	1031.71	1031.71	1031.71	1031.71	−0.0027558	−0.0027558	−0.0022293	−0.0022293
0.5	0	949.829	1003.81	939.744	1003.81	−0.0013089	−0.0023666	−0.0031474	−0.0019521
2	0	831.114	945.864	794.353	945.864	−0.0019483	−0.0015170	−0.0051998	−0.0015057
10	0	699.318	838.825	621.004	838.825	−0.0099091	−0.0004397	−0.0092413	−0.0013482
20	0	667.025	803.016	579.859	803.016	−0.0134777	−0.0001611	−0.0105862	−0.0015267
0	0.5	949.827	1003.8	939.741	1003.8	−0.0026501	−0.0022317	−0.0025520	−0.0017722
0	2	831.109	945.862	794.346	945.862	−0.0025712	−0.0015385	−0.0032776	−0.0011853
0	10	699.306	838.819	620.977	838.819	−0.0047909	−0.0010346	−0.0044674	−0.0006557
0	20	667.01	803.01	579.815	803.01	−0.0067088	−0.0009559	−0.0046702	−0.0005479
0	0	1031.71	1031.71	1031.71	1031.71	−0.0027558	−0.0027558	−0.0022293	−0.0022293
0.5	0	934.793	1003.81	949.126	1003.81	−0.219062	−0.0005572	−0.243275	−0.0029151
2	0	772.023	945.877	839.663	945.877	−0.760729	−0.0066339	−0.803252	−0.0055813
10	0	605.49	838.881	707.338	838.881	−0.611909	−0.0193971	−0.656131	−0.0113693
20	0	571.578	803.089	671.079	803.089	−1.3115	−0.0247555	−1.26933	−0.0130998
0	0.5	934.786	1003.81	949.121	1003.81	−0.221701	−0.0036033	−0.245052	−0.0029843
0	2	772.005	945.872	839.654	945.872	−0.765697	−0.0054239	−0.806636	−0.0044128
0	10	605.448	838.872	707.322	838.872	−0.617309	−0.0134043	−0.660172	−0.0063577
0	20	571.519	803.078	671.062	803.078	−1.30642	−0.0179157	−1.2652	−0.006852

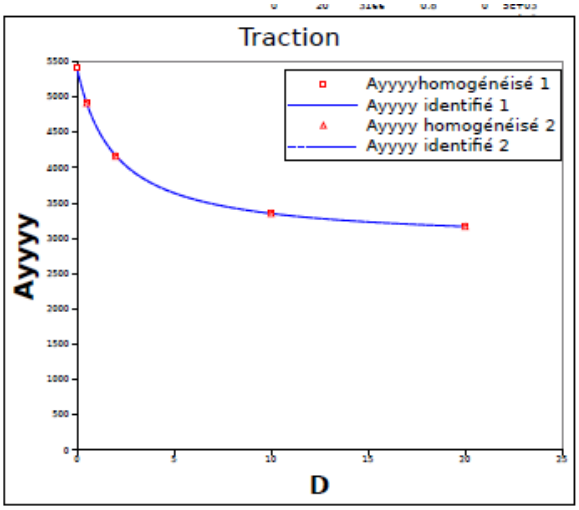
D1	D2	AHOMFXXXX	AHOMFXXXXC	AHOMFYYYY	AHOMFYYYYC	AHOMFXYXY			
0	0	0.0238118	0.0238118	0.0268953	0.0268953	0.00650736			
0.5	0	24.9044	6.81295	25.1444	6.84111	11.2942			
2	0	62.6772	20.9846	63.6093	21.0912	24.8067			
10	0	104.78	47.3292	105.888	47.6259	38.1767			
20	0	114.372	56.1925	115.514	56.5653	41.2448			
0	0.5	−24.8869	−6.79506	−25.1328	−6.82929	−11.2894			
0	2	−62.6595	−20.9669	−63.5974	−21.0794	−24.8022			
0	10	−104.761	−47.3112	−105.875	−47.6138	−38.1729			
0	20	−114.353	−56.1743	−115.502	−56.553	−41.2412			
D1D1	D2D2	AHOMFXXYY	AHOMFXXYYC	AHOMFYYXX	AHOMFYYXXC	AHOMFXXXY	AHOMFXYXX	AHOMFYYXY	AHOMFXYYY
0	0	0.013971	0.013971	0.0139974	0.0139974	0.00014179	0.000141491	4.8835E−05	4.2047E−05
0.5	0	6.9328	1.97822	6.434	1.97824	2.5187E−05	0.000113973	1.7965E−05	6.2962E−05
2	0	11.9459	5.11669	12.1919	5.11673	0.000223644	5.6192E−05	0.000169318	9.4436E−05
10	0	17.0465	9.81492	21.3089	9.81479	0.000766919	1.5814E−05	0.000500012	0.000102527
20	0	18.7283	11.6491	23.4834	11.6489	0.000990819	3.4765E−05	0.000628829	8.8337E−05
0	0.5	−6.90468	−1.95022	−6.40585	−1.95019	−0.0001514	−0.0001777	−7.166E−05	−7.388E−06
0	2	−11.9178	−5.08861	−12.1905	−5.08859	−0.0001756	−0.0002238	−0.0001204	−3.689E−05
0	10	−17.0449	−9.81346	−21.3077	−9.81341	−0.0001674	−0.0002556	−0.0002296	−7.554E−05
0	20	−18.7266	−11.6476	−23.4826	−11.6475	−0.0001308	−0.0002603	−0.0002745	−8.219E−05
0	0	0.013971	0.013971	0.0139974	0.0139974	0.00014179	0.000141491	4.8835E−05	4.2047E−05
0.5	0	6.12737	1.97761	6.93214	1.97761	0.0782913	0.000151443	0.090446	3.8516E−05
2	0	13.4742	5.11123	12.4269	5.11121	0.158593	0.000641888	0.180154	0.000215898
10	0	22.3102	9.84081	16.6418	9.84084	0.157703	0.00141487	0.180573	0.000587047
20	0	24.1166	11.6849	18.5526	11.6849	0.0564668	0.00167418	0.0783916	0.000727155
0	0.5	−6.09894	−1.94955	−6.90382	−1.9495	−0.0787552	−6.846E−05	−0.0904805	−6.820E−05
0	2	−13.4734	−5.08299	−12.3983	−5.08293	−0.159214	−1.221E−05	−0.180305	−0.0001343
0	10	−22.3096	−9.83964	−16.6407	−9.83972	−0.158353	−0.0002019	−0.180769	−0.0002838
0	20	−24.1162	−11.6837	−18.5514	−11.6838	−0.0570945	−0.0003074	−0.0785953	−0.0003365

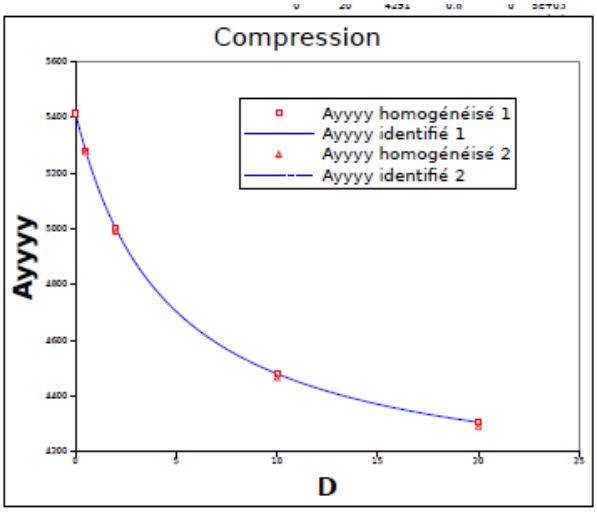
D1	D2	AHOFXXXX	AHOFXXXXC	AHOFYYYY	AHOFYYYYC	AHOFXYXY			
0	0	18.5743	18.5743	18.1368	18.1368	6.92332			
0.5	0	16.9236	18.1221	16.4594	17.6802	6.16961			
2	0	14.4317	17.1818	13.8965	16.7286	5.26692			
10	0	11.6589	15.4376	11.0753	14.9564	4.37272			
20	0	11.0243	14.8515	10.4304	14.359	4.16735			
0	0.5	16.9236	18.1221	16.4593	17.6802	6.1696			
0	2	14.432	17.1818	13.8964	16.7286	5.26689			
0	10	11.6595	15.4378	11.0752	14.9564	4.37265			
0	20	11.025	14.8518	10.4303	14.359	4.16727			
D1D1	D2D2	AHOFXXYY	AHOFXXYYC	AHOFYYXX	AHOFYYXXC	AHOFXXXY	AHOFXYXX	AHOFYYXY	AHOFXYYY
0	0	3.5029	3.5029	3.5029	3.5029	−1.263E−05	−1.263E−05	−9.731E−06	−9.731E−06
0.5	0	3.2235	3.40838	3.19294	3.40838	−2.391E−06	−1.078E−05	−1.558E−05	−8.096E−06
2	0	2.81675	3.21204	2.6972	3.21204	−1.924E−05	−6.897E−06	−2.804E−05	−5.872E−06
10	0	2.36111	2.84859	2.09681	2.84859	−6.239E−05	−2.136E−06	−5.170E−05	−5.663E−06
20	0	2.24816	2.72665	1.95237	2.72665	−7.841E−05	−9.089E−07	−5.981E−05	−6.844E−06
0	0.5	3.2235	3.40838	3.19295	3.40838	−1.223E−05	−9.996E−06	−1.122E−05	−6.936E−06
0	2	2.81677	3.21205	2.69724	3.21205	−1.049E−05	−6.738E−06	−1.477E−05	−3.621E−06
0	10	2.36118	2.84862	2.09692	2.84862	−7.780E−06	−4.553E−06	−2.353E−05	−1.039E−06
0	20	2.24824	2.7267	1.95248	2.7267	−8.003E−06	−4.194E−06	−2.724E−05	−6.777E−07
0	0	3.5029	3.5029	3.5029	3.5029	−1.263E−05	−1.263E−05	−9.731E−06	−9.731E−06
0.5	0	3.1711	3.40829	3.22434	3.40829	−0.0064415	−1.156E−05	−0.0080675	−1.558E−05
2	0	2.60747	3.2112	2.84924	3.2112	−0.0127639	−5.097E−05	−0.0156686	−2.804E−05
10	0	2.02058	2.84458	2.38575	2.84458	−0.0128216	−0.0001094	−0.0159114	−5.170E−05
20	0	1.89944	2.72114	2.25639	2.72114	−0.0059886	−0.0001279	−0.0089527	−5.981E−05
0	0.5	3.17107	3.40828	3.22433	3.40828	−0.0064539	−1.880E−05	−0.0080774	−1.122E−05
0	2	2.60742	3.21118	2.84921	3.21118	−0.0127869	−2.437E−05	−0.0156872	−1.477E−05
0	10	2.02053	2.84456	2.38573	2.84456	−0.0128463	−3.233E−05	−0.0159334	−2.353E−05
0	20	1.89937	2.72112	2.25639	2.72112	−0.0060121	−3.641E−05	−0.0089755	−2.724E−05

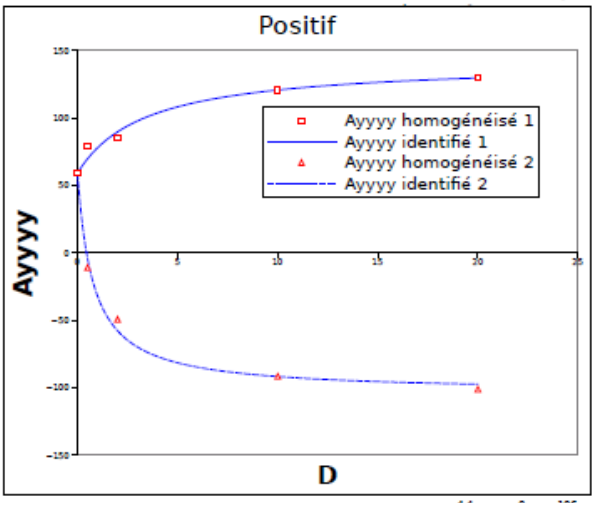
D1	D2	BHOM1XXX	BHOM2XXX	BHOM1YYX	BHOM2YYX	BHOM1XYX	BHOM2XYX	BHOM1XXY	BHOM2XXY	BHOM1YYY	BHOM2YYY	BHOM1XYY	BHOM2XYY
0	0	0,0155835	0,541092	0,00385041	0,0811185	0,0033107	0,0406803	−0,0303099	0,0716362	−0,249337	0,612178	0,00102056	−0,0146413
0,5	0	−17,1774	1,36538	−4,16631	0,182812	0,00104395	0,0403539	−4,06376	0,117041	−17,8102	1,44236	0,00075582	−0,0143609
2	0	−38,7642	2,42272	−8,49622	0,272959	−0,0033232	0,0398578	−8,17249	0,146614	−39,904	2,50778	0,00061032	−0,0137132
10	0	−55,7721	3,24836	−10,8089	0,288566	−0,0085955	0,0391626	−10,2662	0,123372	−57,061	3,31312	0,00207923	−0,0124472
20	0	−57,9337	3,31727	−10,8669	0,265086	−0,0086331	0,0389307	−10,3005	0,0958374	−59,0837	3,36109	0,00272739	−0,0119008
0	0,5	0,292584	−41,1188	0,0400583	−10,248	0,00339381	0,0178235	−0,0019975	−9,96022	0,040733	−42,1839	0,00110061	−0,0139367
0	2	0,647564	−89,3194	0,0725129	−19,9309	0,00353251	−0,0097987	0,0207809	−19,1661	0,410446	−91,8334	0,00121132	0,00029858
0	10	0,92724	−123,426	0,0795216	−24,1639	0,00369538	−0,0349044	0,01952	−22,9945	0,695285	−126,486	0,00127231	0,0207283
0	20	0,952506	−127,192	0,0724892	−24,0268	0,00370543	−0,0405597	0,0105106	−22,8436	0,716359	−130,065	0,00126209	0,0174573
D1	D2	BHOF1XXX	BHOF2XXX	BHOF1YYX	BHOF2YYX	BHOF1XYX	BHOF2XYX	BHOF1XXY	BHOF2XXY	BHOF1YYY	BHOF2YYY	BHOF1XYY	BHOF2XYY
0	0	−0,0011839	0,0416878	−0,0003374	0,00617925	−0,0002202	0,00392714	0,00204407	0,0041187	0,017086	0,0361826	−6,12E−05	−0,0011931
0,5	0	1,37026	0,0183375	0,320057	0,00254593	−4,879E−05	0,00392454	0,26431	3,1087E−05	1,19011	0,00516428	−4,01E−05	−0,0011920
2	0	3,07745	−0,0116722	0,645911	−0,0009296	0,00034363	0,00392257	0,528061	−0,0035	2,65749	−0,0335635	−2,50E−05	−0,0011992
10	0	4,41367	−0,0318033	0,815918	−0,0012774	0,00088277	0,0039225	0,66187	−0,0029014	3,79783	−0,057305	−0,0001373	−0,0012231
20	0	4,58437	−0,0318406	0,819419	−0,0002009	0,00094793	0,00392326	0,66462	−0,0013306	3,93651	−0,0563137	−0,0001965	−0,0012348
0	0,5	0,00624532	−3,09716	0,00086466	−0,744093	−0,0002183	0,00190848	0,00333565	−0,555042	0,0259274	−2,40228	−5,97E−05	−0,0012688
0	2	0,0158225	−6,69345	0,00204636	−1,43155	−0,0002153	−0,0005931	0,00452312	−1,06561	0,0370575	−5,22698	−5,66E−05	−0,0006507
0	10	0,022406	−9,22446	0,00228176	−1,72387	−0,0002125	−0,0029395	0,00456835	−1,28149	0,044163	−7,21442	−5,40E−05	6,8419E−05
0	20	0,0225188	−9,51008	0,00200998	−1,71408	−0,0002128	−0,0034415	0,00419918	−1,2765	0,0440135	−7,43094	−5,38E−05	−0,0003567

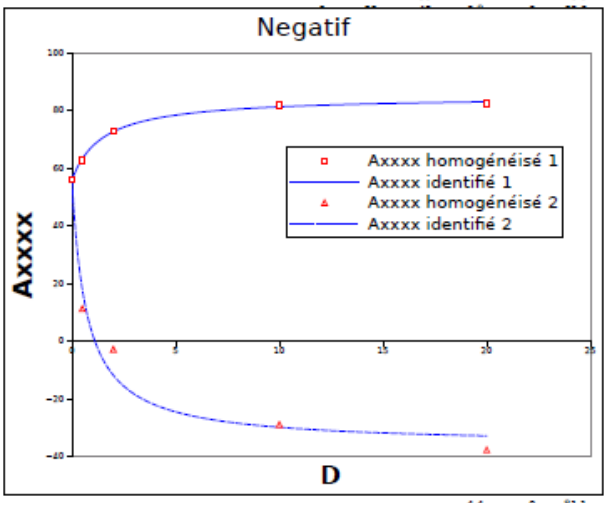
D1	D2	CHOMXX1	CHOMXX12	CHOMXX2	CHOMYY1	CHOMYY12	CHOMYY2
0	0	34,9437	0,00578497	78,2536	34,7136	0,0135119	76,9646
0,5	0	32,1383	0,006604	78,2559	31,9263	0,0154297	76,9672
2	0	28,3046	0,00734843	78,2604	28,1113	0,0169547	76,9723
10	0	23,9952	0,00736124	78,2695	23,8222	0,0166902	76,9823
20	0	22,814	0,00839441	78,2737	22,6696	0,016499	76,9867
0	0,5	34,9439	0,00652693	69,5481	34,7139	0,014864	68,2678
0	2	34,9444	0,00710898	58,9583	34,7144	0,0157249	57,7276
0	10	34,9454	0,0067258	48,7139	34,7154	0,0147045	47,6668
0	20	34,9459	0,00685825	46,1914	34,7159	0,0135155	45,2939
D1D1	D2D2	CHOMXY1	CHOMXY12	CHOMXY21	CHOMXY2		
0	0	0,00141921	1,0563E−05	3,3563E−06	0,021548		
0,5	0	0,00120003	1,4339E−05	5,7753E−06	0,0215567		
2	0	0,00086508	1,7565E−05	1,0615E−05	0,0215713		
10	0	8,7854E−05	1,6352E−05	1,1702E−05	0,0215938		
20	0	0,00020355	1,1201E−05	5,178E−06	0,0216011		
0	0,5	0,00141993	8,9749E−06	4,4301E−06	0,0115592		
0	2	0,00142127	8,1292E−06	4,8034E−06	0,00163852		
0	10	0,00142382	6,8996E−06	7,2446E−06	0,00494348		
0	20	0,00142492	5,6501E−06	7,2451E−06	0,00573193		
0	0	0,00145591	3,8465E−06	1,5089E−05	0,021042		
0,5	0	0,00151747	7,2571E−06	1,8661E−05	0,0210396		
2	0	0,00170955	1,2139E−05	2,7648E−05	0,0210343		
10	0	0,00218631	7,126E−06	6,1548E−05	0,0210215		
20	0	0,00245778	7,8662E−06	9,9351E−05	0,0210159		
0	0,5	0,00145587	3,4938E−06	1,6962E−05	0,0255711		
0	2	0,00145583	5,6336E−08	2,1331E−05	0,0323942		
0	10	0,00145609	1,3421E−05	2,894E−05	0,0423431		
0	20	0,00145645	2,6095E−05	2,776E−05	0,0463337		

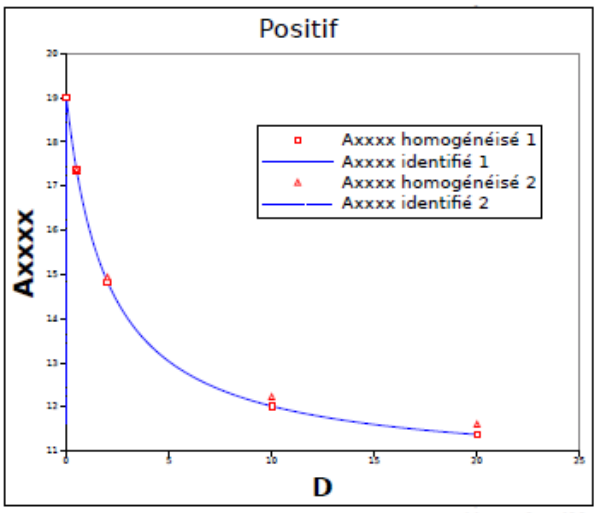

Traction
Axxxx homogénéisé 1
Axxxx identifié 1
Axxxx homogénéisé 2
Axxxx identifié 2
Axxxx
D
Axxxx homogénéisé 1
Axxxx identifié 1
Axxxx homogénéisé 2
Axxxx identifié 2
Axxxx
D
Traction
Axxxx homogénéisé 1
Axxxx identifié 1
Axxxx homogénéisé 2
Axxxx identifié 2
AMFxxxx1+AMFxxxx2
Axxxx
D
Axxxx homogénéisé 1
Axxxx identifié 1
Axxxx homogénéisé 2
Axxxx identifié 2
Axxxx
D
Traction
Axxxx homogénéisé 1
Axxxx identifié 1
Axxxx homogénéisé 2
Axxxx identifié 2
Axxxx
D
Compression
Axxxx homogénéisé 1
Axxxx identifié 1
Axxxx homogénéisé 2
Axxxx identifié 2
Axxxx
D

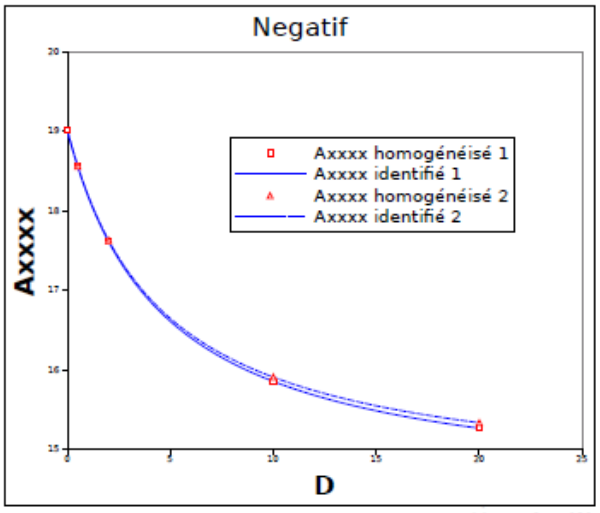

Traction
Ayyyyhomogénéisé 1
Ayyyy identifié 1
Ayyyy homogénéisé 2
Ayyyy identifié 2
Ayyyy
D

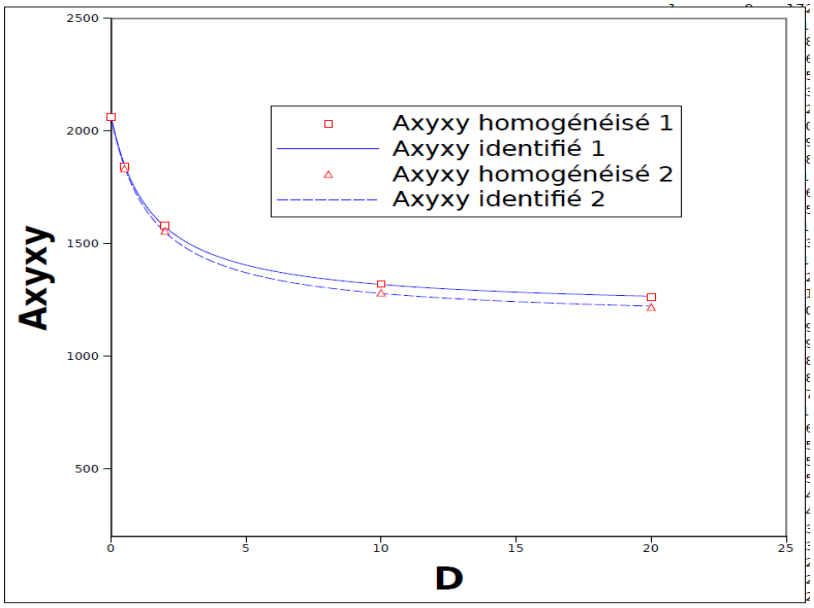

Compression
Ayyyy homogénéisé 1
Ayyyy identifié 1
Ayyyy homogénéisé 2
Ayyyy identifié 2
Ayyyy
D

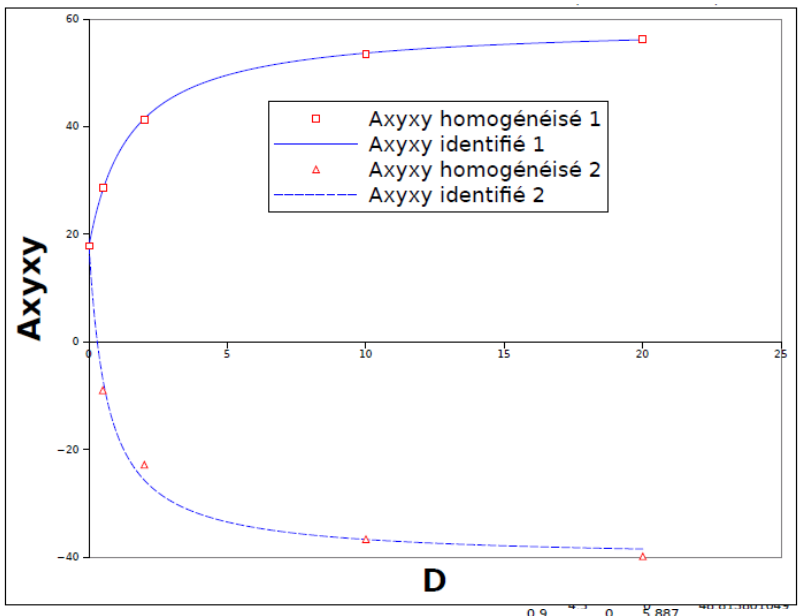

Positif
Ayyyy homogénéisé 1
Ayyyy identifié 1
Ayyyy homogénéisé 2
Ayyyy identifié 2
Ayyyy
D

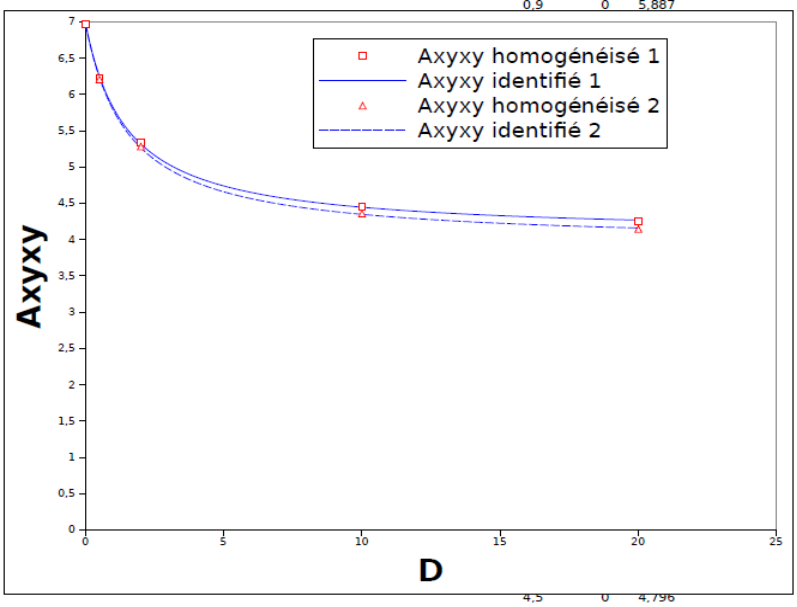

Negatif
Axxxx homogénéisé 1
Axxxx identifié 1
Axxxx homogénéisé 2
Axxxx identifié 2
Axxxx
D

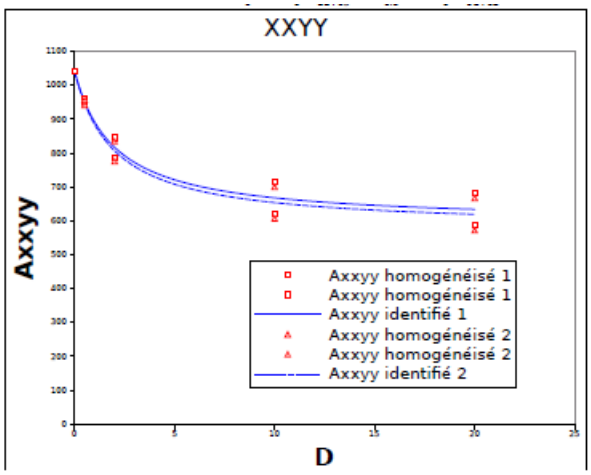

Positif
Axxxx homogénéisé 1
Axxxx identifié 1
Axxxx homogénéisé 2
Axxxx identifié 2
Axxxx
D

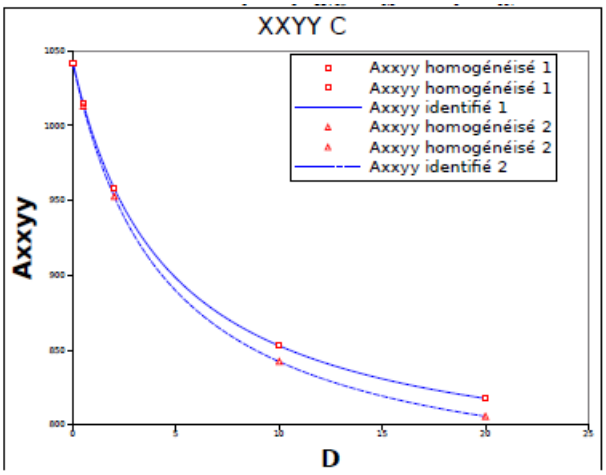

Negatif
Axxxx homogénéisé 1
Axxxx identifié 1
Axxxx homogénéisé 2
Axxxx identifié 2
Axxxx
D

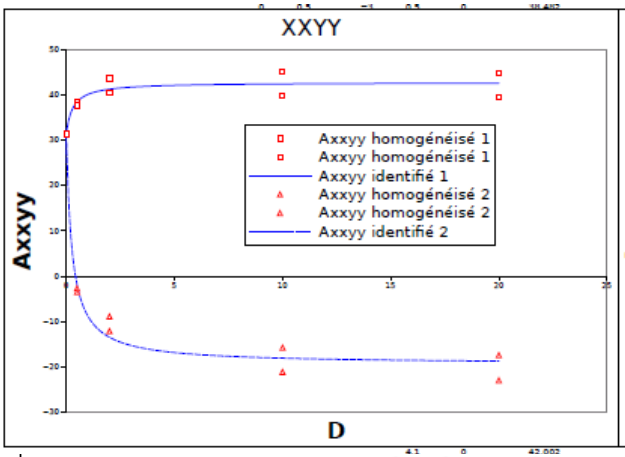

Axyxy homogénéisé 1
Axyxy identifié 1
Axyxy homogénéisé 2
Axyxy identifié 2
Axyxy
D
2500
2000
1500
1000
500
0
5
10
15
20
25

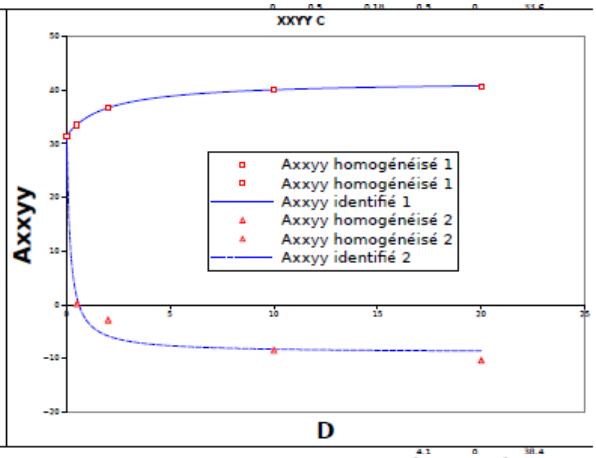

Axyxy homogénéisé 1
Axyxy identifié 1
Axyxy homogénéisé 2
Axyxy identifié 2
Axyxy
D
60
40
20
0
−20
−40
0
5
10
15
20
25

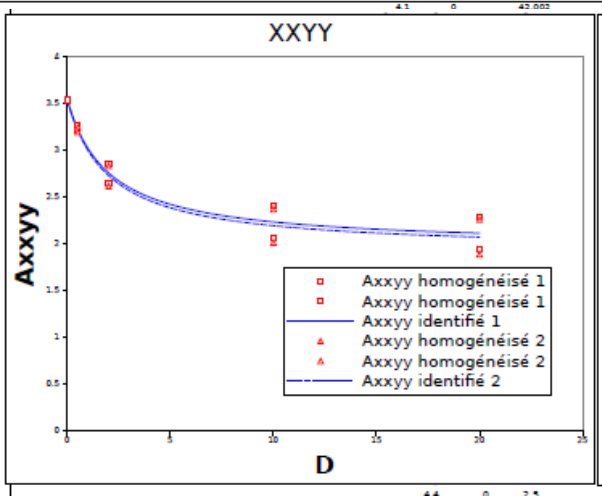

Axyxy homogénéisé 1
Axyxy identifié 1
Axyxy homogénéisé 2
Axyxy identifié 2
Axyxy
D
7
6,5
6
5,5
5
4,5
4
3,5
3
2,5
2
1,5
1
0,5
0
0
5
10
15
20
25

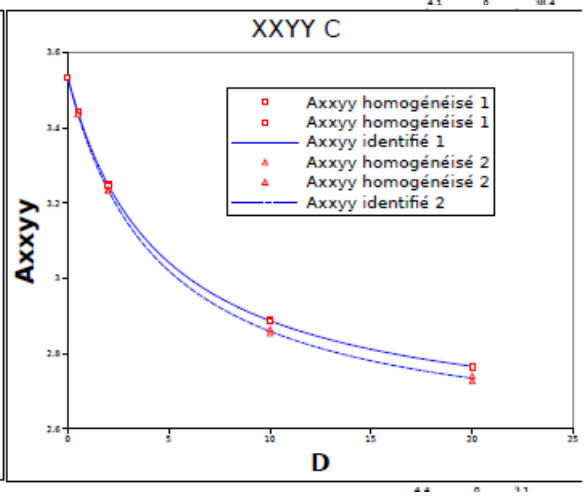

XXYY
Axxyy
D
Axxyy homogénéisé 1
Axxyy homogénéisé 1
Axxyy identifié 1
Axxyy homogénéisé 2
Axxyy homogénéisé 2
Axxyy identifié 2

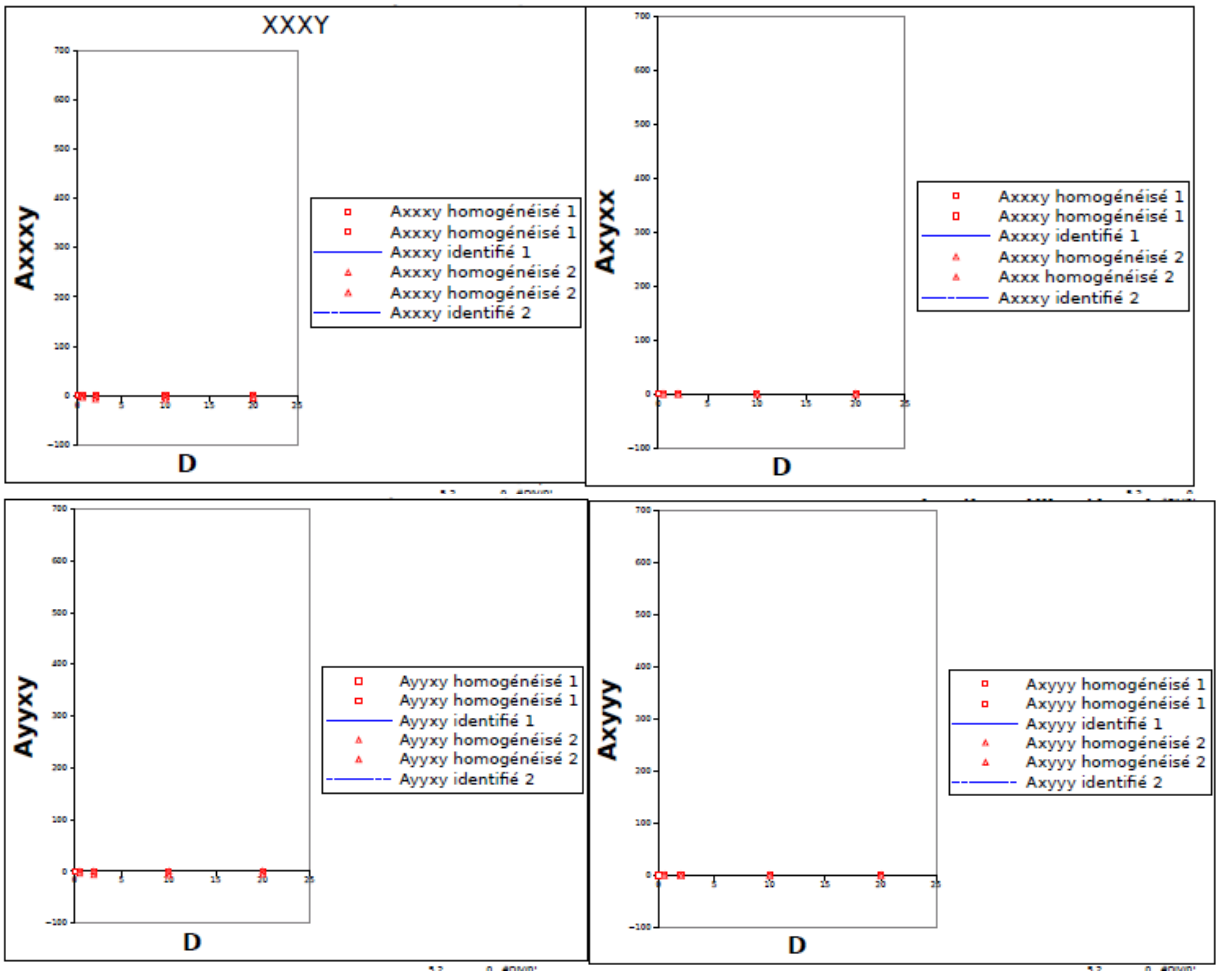

XXYY C
Axxyy
D
Axxyy homogénéisé 1
Axxyy homogénéisé 1
Axxyy identifié 1
Axxyy homogénéisé 2
Axxyy homogénéisé 2
Axxyy identifié 2


XXYY
Axxyy
D
Axxyy homogénéisé 1
Axxyy homogénéisé 1
Axxyy identifié 1
Axxyy homogénéisé 2
Axxyy homogénéisé 2
Axxyy identifié 2


XXYY C
Axxyy
D
Axxyy homogénéisé 1
Axxyy homogénéisé 1
Axxyy identifié 1
Axxyy homogénéisé 2
Axxyy homogénéisé 2
Axxyy identifié 2

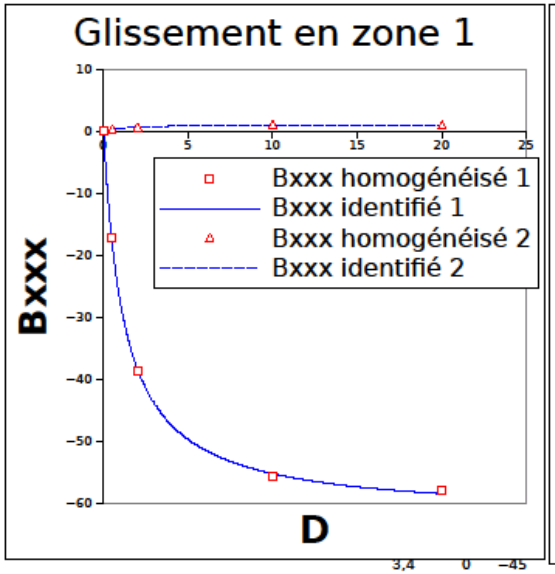

XXYY
Axxyy
D
Axxyy homogénéisé 1
Axxyy homogénéisé 1
Axxyy identifié 1
Axxyy homogénéisé 2
Axxyy homogénéisé 2
Axxyy identifié 2


XXYY C
Axxyy
D
Axxyy homogénéisé 1
Axxyy homogénéisé 1
Axxyy identifié 1
Axxyy homogénéisé 2
Axxyy homogénéisé 2
Axxyy identifié 2


XXXY
Axxxy
D
Axxxy homogénéisé 1
Axxxy homogénéisé 1
Axxxy identifié 1
Axxxy homogénéisé 2
Axxxy homogénéisé 2
Axxxy identifié 2
Axyxx
D
Axxxy homogénéisé 1
Axxxy homogénéisé 1
Axxxy identifié 1
Axxxy homogénéisé 2
Axxx homogénéisé 2
Axxxy identifié 2
Ayyxy
D
Ayyxy homogénéisé 1
Ayyxy homogénéisé 1
Ayyxy identifié 1
Ayyxy homogénéisé 2
Ayyxy homogénéisé 2
Ayyxy identifié 2
Axyyy
D
Axyyy homogénéisé 1
Axyyy homogénéisé 1
Axyyy identifié 1
Axyyy homogénéisé 2
Axyyy homogénéisé 2
Axyyy identifié 2

1

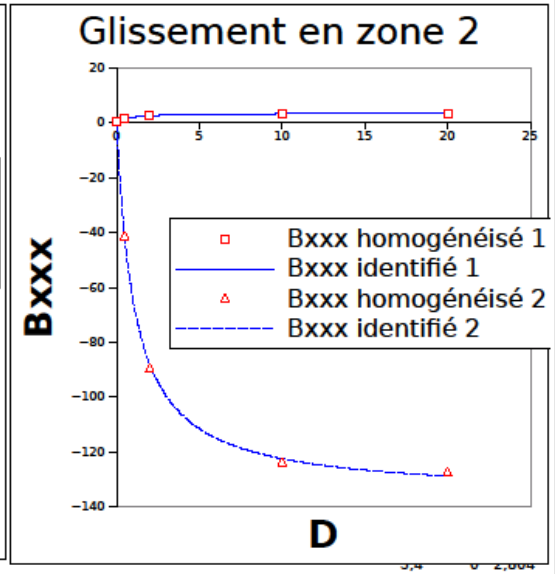
		poptXXX	D1	D2	BHOM	D1	D2	AID
0, 0,5, 2, 10,	B0XXX	1	0	0	0,016	0	0	0
	alphXX	1,246	0,5	0	−17	0,1	0	−4,6
	gamXX	−62	2	0	−39	0,2	0	−8,6
	alphXX	1,193	10	0	−56	0,3	0	−12
	gamXX	1,023	20	0	−58	0,4	0	−15
			0	0,5	0,293	0,5	0	−18



3,4	0	−45
3,5	0	−46
3,6	0	−46
3,7	0	−47
3,8	0	−47
3,9	0	−47
4	0	−47
4,1	0	−48

2

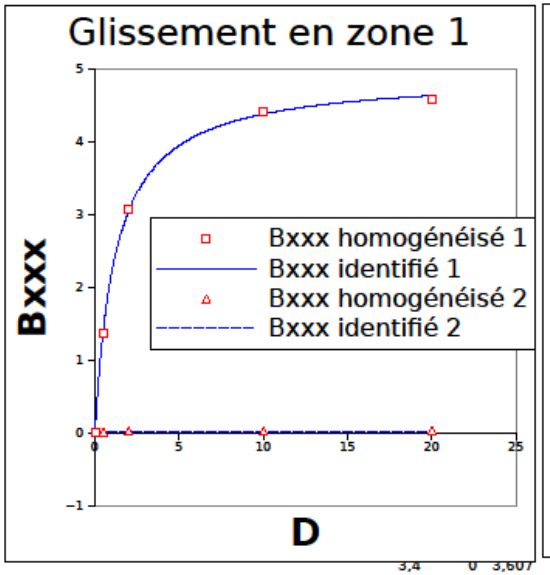
		poptXXX	D1	D2	BHOM	D1	D2	AID
0, 0,5, 2, 10,	B0XXX	1	0	0	0,541	0	0	0
	alphXX	0,802	0,5	0	1,365	0,1	0	0,384
	gamXX	3,466	2	0	2,423	0,2	0	0,692
	alphXX	1,087	10	0	3,248	0,3	0	0,943
	gamXX	−136	20	0	3,317	0,4	0	1,153
			0	0,5	−41	0,5	0	1,331



3,4	0	2,864
3,5	0	2,819
3,6	0	2,834
3,7	0	2,848
3,8	0	2,862
3,9	0	2,874
4	0	2,887
4,1	0	2,899

1

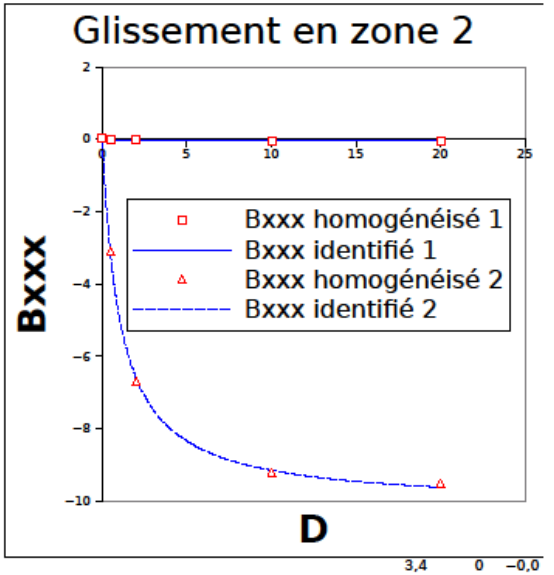
		poptXXX	D1	D2	BHOM	D1	D2	AID
0, 0,5, 2, 10,	B0XXX	1	0	0	−0,0	0	0	0
	alphXX	1,233	0,5	0	1,37	0,1	0	0,369
	gamXX	4,915	2	0	3,077	0,2	0	0,686
	alphXX	1,244	10	0	4,414	0,3	0	0,962
	gamXX	0,025	20	0	4,584	0,4	0	1,204
			0	0,5	0,006	0,5	0	1,418



3,4	0	3,607
3,5	0	3,635
3,6	0	3,661
3,7	0	3,687
3,8	0	3,711
3,9	0	3,735
4	0	3,757
4,1	0	3,779

2

		poptXXX	D1	D2	BHOM	D1	D2	AID
0, 0,5, 2, 10,	B0XXX	1	0	0	0,042	0	0	0
	alphXX	9,23	0,5	0	0,018	0,1	0	−0,0
	gamXX	−0,1	2	0	−0,0	0,2	0	−0,0
	alphXX	1,076	10	0	−0,0	0,3	0	−0,0
	gamXX	−10	20	0	−0,0	0,4	0	−0,0
			0	0,5	−3,1	0,5	0	−0,0

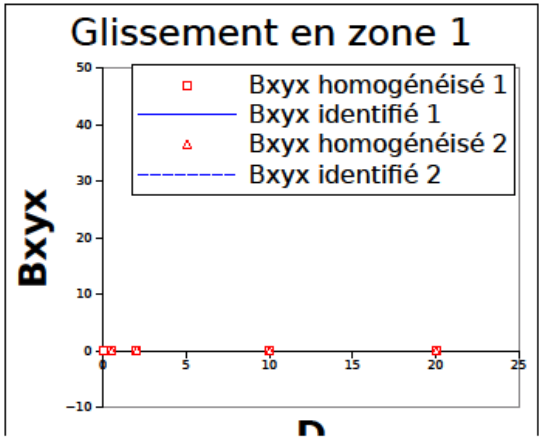


3,4	0	−0,0
3,5	0	−0,0
3,6	0	−0,0
3,7	0	−0,0
3,8	0	−0,0
3,9	0	−0,0
4	0	−0,0
4,1	0	−0,0

ANNEXE 7

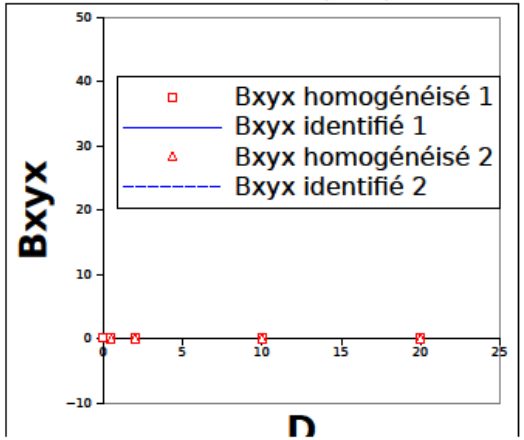
1

		poptXYX	D1	D2	BHOM	D1	D2	AID
0, 0,5, 2, 10, 20	B0XYX	1	0	0	0,0033	0	0	#DIV/0!
	alphXYX	0	0,5	0	0,001	0,1	0	#DIV/0!
	gamXYX	0	2	0	−0,003	0,2	0	#DIV/0!
	alphXYX	0	10	0	−0,009	0,3	0	#DIV/0!
	gamXYX	0	20	0	−0,009	0,4	0	#DIV/0!
			0	0,5	0,0034	0,5	0	#DIV/0!
			0	2	0,0035	0,6	0	#DIV/0!
			0	10	0,0037	0,7	0	#DIV/0!



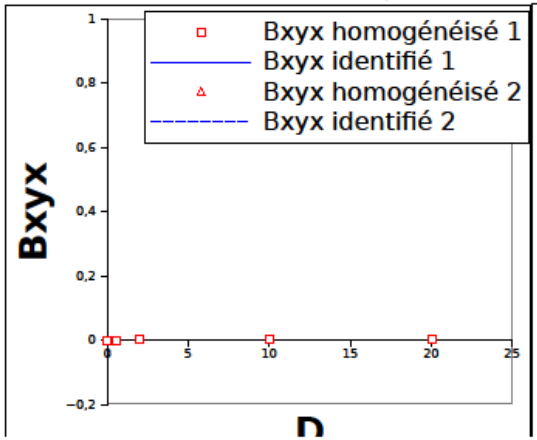
2

		poptXYX	D1	D2	BHOM	D1	D2	AID
0, 0,5, 2, 10, 20	B0XYX	1	0	0	0,0407	0	0	#DIV/0!
	alphXYX	0	0,5	0	0,0404	0,1	0	#DIV/0!
	gamXYX	0	2	0	0,0399	0,2	0	#DIV/0!
	alphXYX	0	10	0	0,0392	0,3	0	#DIV/0!
	gamXYX	0	20	0	0,0389	0,4	0	#DIV/0!
			0	0	0,0178	0,5	0	#DIV/0!
			0	2	−0,010	0,6	0	#DIV/0!
			0	10	−0,035	0,7	0	#DIV/0!



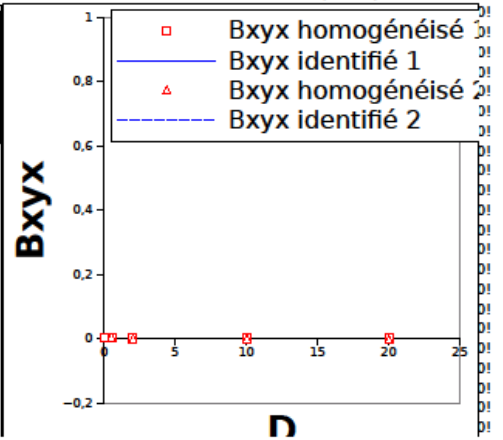
1

		poptXYX	D1	D2	BHOM	D1	D2	AID
0, 0,5, 2, 10,	B0XYX	1	0	0	−0	0	0	#DIV/0!
	alphXY	0	0,5	0	0	0,1	0	#DIV/0!
	gamXY	0	2	0	0	0,2	0	#DIV/0!
	alphXY	0	10	0	0,00	0,3	0	#DIV/0!
	gamXY	0	20	0	0,00	0,4	0	#DIV/0!
			0	0,5	−0	0,5	0	#DIV/0!
			0	2	−0	0,6	0	#DIV/0!
			0	10	−0	0,7	0	#DIV/0!



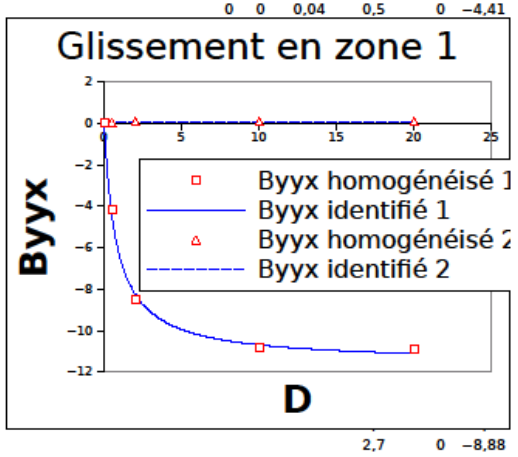
2

		poptXYX	D1	D2	BHOM	D1	D2	AID
0, 0,5, 2,	B0XYX	1	0	0	0,00	0	0	#DIV/0!
	alphX	0	0,5	0	0,00	0,1	0	#DIV/0!
	gamX	0	2	0	0,00	0,2	0	#DIV/0!
	alphX	0	10	0	0,00	0,3	0	#DIV/0!
	gamX	0	20	0	0,00	0,4	0	#DIV/0!
			0	0,5	0,00	0,5	0	#DIV/0!
			0	2	−0,0	0,6	0	#DIV/0!
			0	10	−0,0	0,7	0	#DIV/0!



1

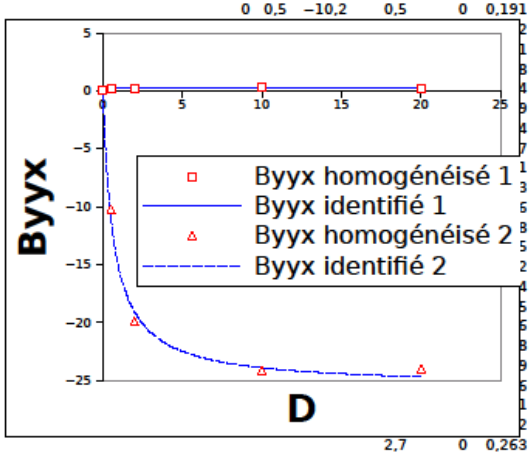
		poptYYX	D1	D2	BHOM	D1	D2	AID
0, 0,5, 2, 10, 20	BOYYX	1	0	0	0,004	0	0	0
	alphYY›	0,81	0	0	−4,17	0,1	0	−1,27
	gamYY›	−11,5	2	0	−8,50	0,2	0	−2,29
	alphYY›	0,418	10	0	−10,8	0,3	0	−3,12
	gamYY›	0,08	20	0	−10,9	0,4	0	−3,82
			0	0	0,04	0,5	0	−4,41



2,7 0 −8,88

2

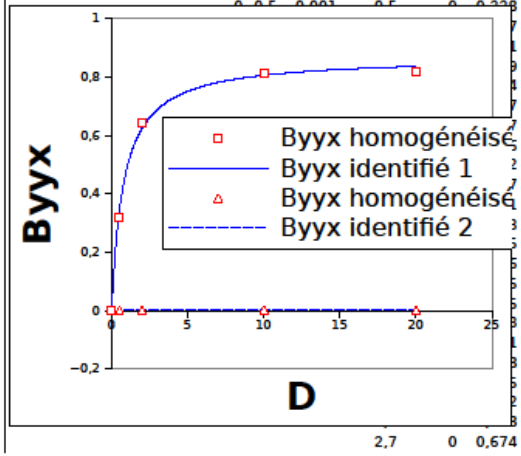
		poptYYX	D1	D2	BHOM	D1	D2	AID
0, 0,5, 2, 10, 20	BOYYX	1	0	0	0,081	0	0	0
	alphYY›	0,254	0,5	0	0,183	0,1	0	0,081
	gamYY›	0,288	2	0	0,273	0,2	0	0,127
	alphYY›	0,671	10	0	0,289	0,3	0	0,156
	gamYY›	−25,5	20	0	0,265	0,4	0	0,176
			0	0,5	−10,2	0,5	0	0,191



2,7 0 0,263

1

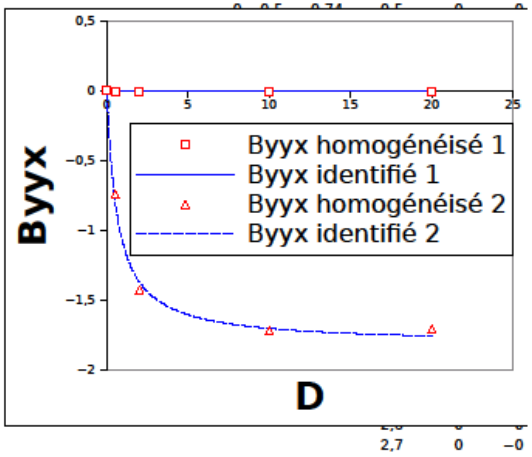
		poptYYX	D1	D2	BHOM	D1	D2	AID
0, 0,5, 2, 10, 20	BOYYX	1	0	0	−0	0	0	0
	alphYY›	0,786	0	0	0,32	0,1	0	0,098
	gamYY›	0,87	2	0	0,646	0,2	0	0,176
	alphYY›	0,594	10	0	0,816	0,3	0	0,24
	gamYY›	0,002	20	0	0,819	0,4	0	0,293



2,7 0 0,674

2

		poptYYX	D1	D2	BHOM	D1	D2	AID
0, 0,5, 2, 10, 20	BOYYX	1	0	0	0,006	0	0	0
	alphYY›	5,332	0,5	0	0,003	0,1	0	0
	gamYY›	−0,00	2	0	−0,00	0,2	0	0
	alphYY›	0,651	10	0	−0,00	0,3	0	0
	gamYY›	−1,82	20	0	−0	0,4	0	0

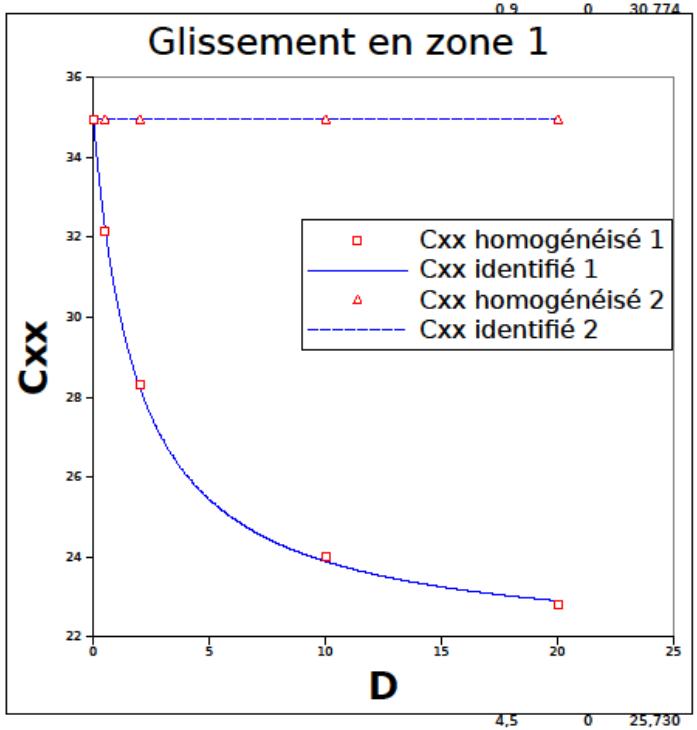


2,7 0 −0

ANNEXE 7

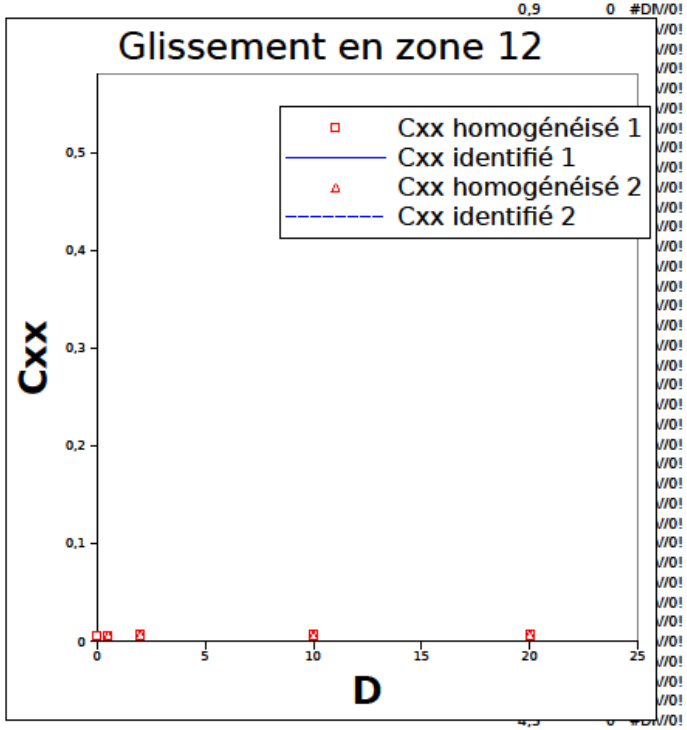
Glissement 1

	poptXX	D1	D2	CHOM	D1	D2	AID
0, 0,5, 2, 10, 20	C0XX	34,943661	0	0	34,944	0	0	34,944
	alphXX	1,9509540	0,5	0	32,138	0,1	0	34,300
	gamXX	0,2440589	2	0	28,305	0,2	0	33,716
	alphXX	5,4161694	10	0	23,995	0,3	0	33,183
	gamXX	1,0001582	20	0	22,814	0,4	0	32,696
			0	0,5	34,944	0,5	0	32,249
			0	2	34,944	0,6	0	31,837
			0	10	34,945	0,7	0	31,456
			0	20	34,946	0,8	0	31,103
						0,9	0	30,774
						4,5	0	25,730



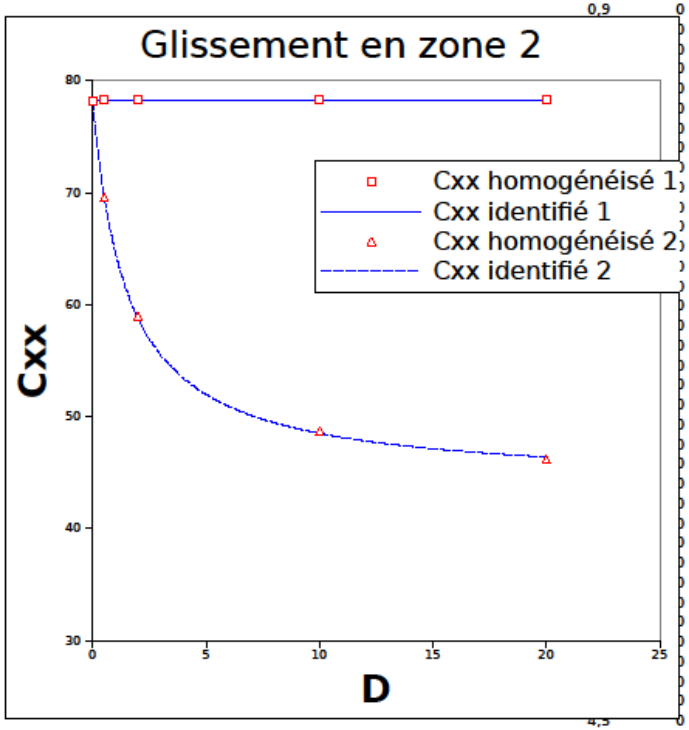
Glissement 12

	poptXX	D1	D2	CHOM	D1	D2	AID
0, 0,5, 2, 10, 20	C0XX	0,00578	0	0	0,00578	0	0	#DIV/0!
	alphXX	0	0,5	0	0,00660	0,1	0	#DIV/0!
	gamXX	−1	2	0	0,00735	0,2	0	#DIV/0!
	alphXX	0	10	0	0,00736	0,3	0	#DIV/0!
	gamXX	−1	20	0	0,00839	0,4	0	#DIV/0!
			0	0,5	0,00653	0,5	0	#DIV/0!
			0	2	0,00711	0,6	0	#DIV/0!
			0	10	0,00673	0,7	0	#DIV/0!
			0	20	0,00686	0,8	0	#DIV/0!
						0,9	0	#DIV/0!
						4,5	0	#DIV/0!



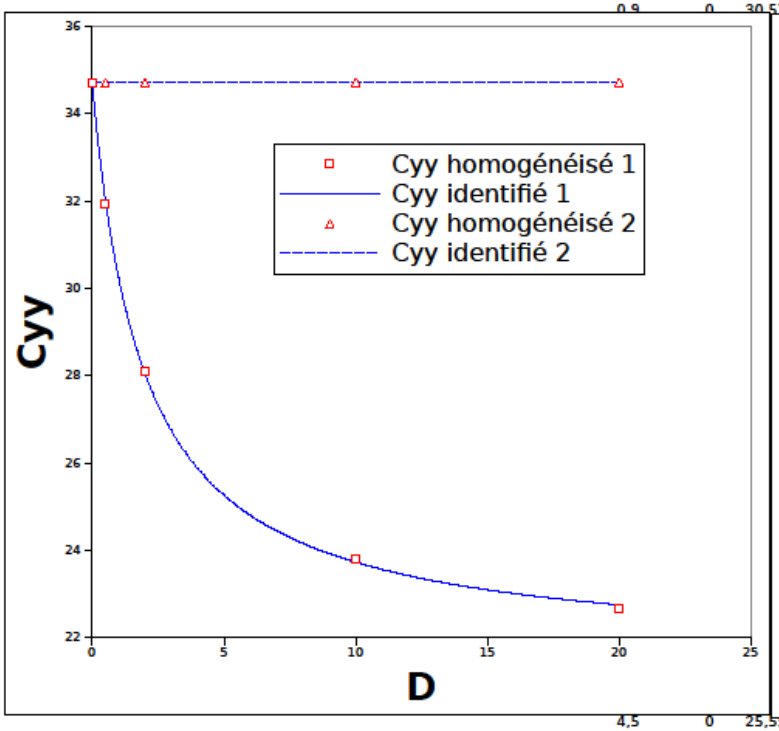
Glissement 2

	poptXX	D1	D2	CHOM	D1	D2	
0, 0,5, 2, 10, 20	C0XX	78,253589	0	0	78,25	0	0
	alphXX	5,6989161	0,5	0	78,26	0,1	0
	gamXX	1,0006537	2	0	78,26	0,2	0
	alphXX	1,5258354	10	0	78,27	0,3	0
	gamXX	0,1239112	20	0	78,27	0,4	0
			0	0,5	69,55	0,5	0
			0	2	58,96	0,6	0
			0	10	48,71	0,7	0
			0	20	46,19	0,8	0
						0,9	0
						4,5	0



Glissement 1

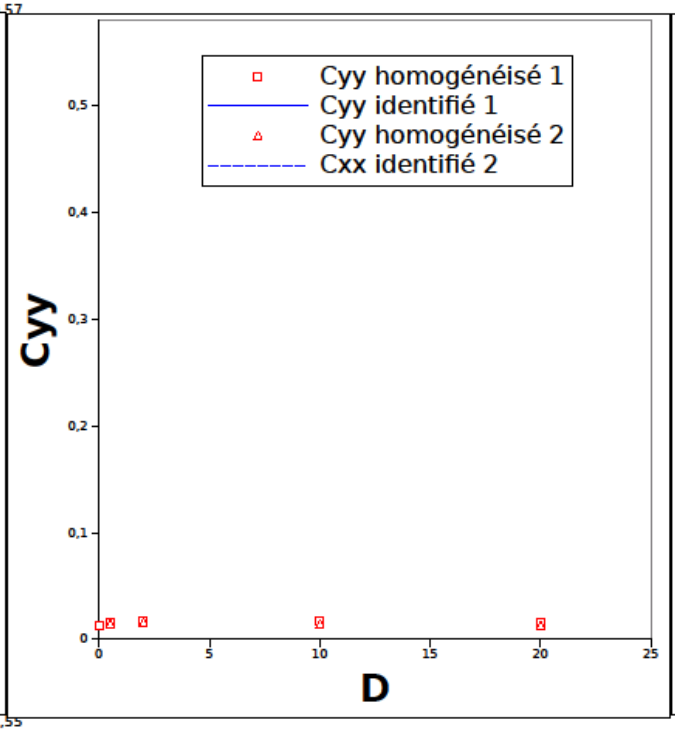
	poptYY	D1	D2	CHOM	D1	D2	AID
0, 0,5, 2, 10, 20	C0YY	34,713614	0	0	34,71	0	0	34,71
	alphYY	1,9467695	0,5	0	31,93	0,1	0	34,07
	gamYY	0,2440239	2	0	28,11	0,2	0	33,49
	alphYY	5,9085755	10	0	23,82	0,3	0	32,96
	gamYY	1,0001689	20	0	22,67	0,4	0	32,48
			0	0,5	34,71	0,5	0	32,03
			0	2	34,71	0,6	0	31,62
			0	10	34,72	0,7	0	31,24
			0	20	34,72	0,8	0	30,89
						0,9	0	30,57



			4,5	0	25,55
			4,6	0	25,49
			4,7	0	25,44
			4,8	0	25,38
			4,9	0	25,32
			5	0	25,27
			5,1	0	25,22
			5,2	0	25,17
			5,3	0	25,12
			5,4	0	25,07
			5,5	0	25,02
			5,6	0	24,98
			5,7	0	24,93
			5,8	0	24,89
			5,9	0	24,85
			6	0	24,81
			6,1	0	24,77
			6,2	0	24,73
			6,3	0	24,69
			6,4	0	24,65
			6,5	0	24,62
			6,6	0	24,58
			6,7	0	24,55
			6,8	0	24,51

Glissement 12

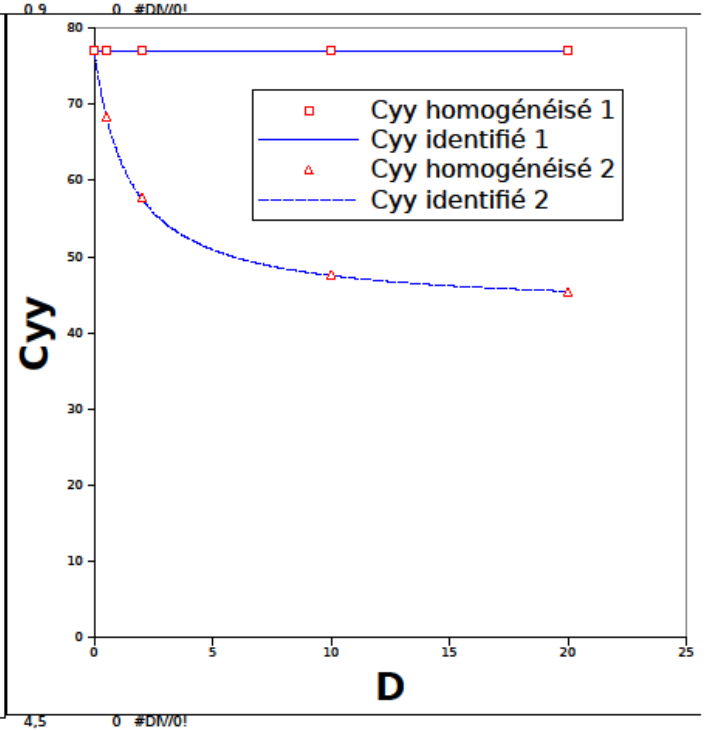
	poptYY	D1	D2	CHOM	D1	D2	AID
0, 0,5, 2, 10, 20	C0YY	0,006	0	0	0,01351	0	0	#DIV/0!
	alphYY	0	0,5	0	0,01543	0,1	0	#DIV/0!
	gamYY	−1	2	0	0,01695	0,2	0	#DIV/0!
	alphYY	0	10	0	0,01669	0,3	0	#DIV/0!
	gamYY	−1	20	0	0,0165	0,4	0	#DIV/0!
			0	0,5	0,01486	0,5	0	#DIV/0!
			0	2	0,01572	0,6	0	#DIV/0!
			0	10	0,0147	0,7	0	#DIV/0!
			0	20	0,01352	0,8	0	#DIV/0!
						0,9	0	#DIV/0!



			4,5	0	#DIV/0!
			4,6	0	#DIV/0!
			4,7	0	#DIV/0!
			4,8	0	#DIV/0!
			4,9	0	#DIV/0!
			5	0	#DIV/0!
			5,1	0	#DIV/0!
			5,2	0	#DIV/0!
			5,3	0	#DIV/0!
			5,4	0	#DIV/0!
			5,5	0	#DIV/0!
			5,6	0	#DIV/0!
			5,7	0	#DIV/0!
			5,8	0	#DIV/0!
			5,9	0	#DIV/0!
			6	0	#DIV/0!
			6,1	0	#DIV/0!
			6,2	0	#DIV/0!
			6,3	0	#DIV/0!
			6,4	0	#DIV/0!
			6,5	0	#DIV/0!
			6,6	0	#DIV/0!
			6,7	0	#DIV/0!
			6,8	0	#DIV/0!

Glissement 2

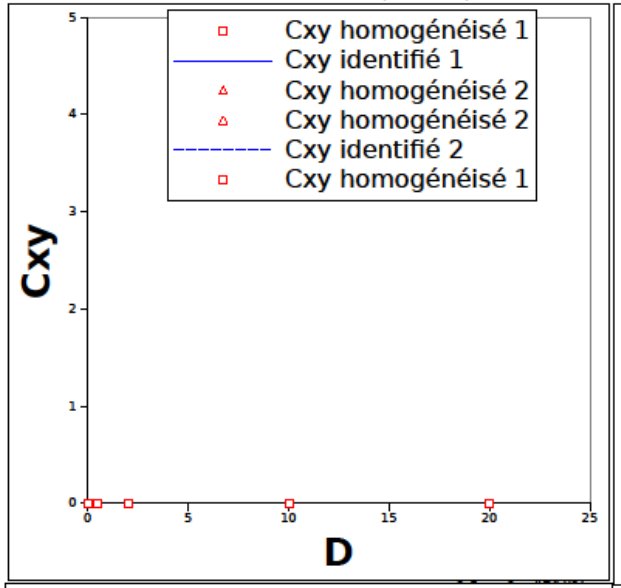
	poptYY	D1
0, 0,5, 2, 10, 20	C0YY	76,964555	0
	alphYY	5,2917475	0,5
	gamYY	1,0007187	2
	alphYY	1,4949362	10
	gamYY	0,1202581	20
			0
			0
			0
			0

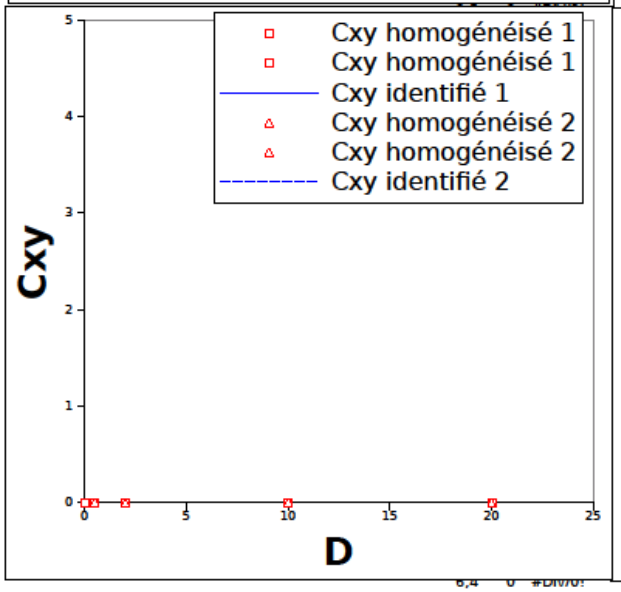


ANNEXE 7

Glissement 1

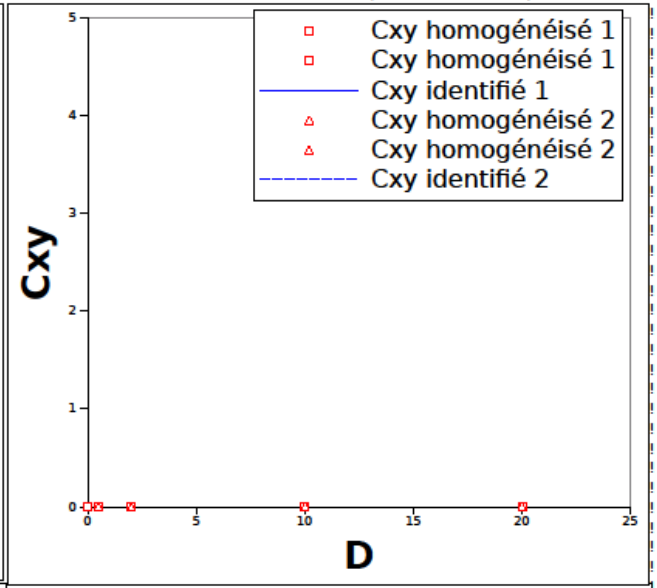
		poptXY	D1	D2	CHOM	D1	D2	AID
0, 0,5, 2, 10, 20	C0XY	0,001	0	0	0,00142	0	0	#DIV/0!
	alphXY	0	0,5	0	0,0012	0,1	0	#DIV/0!
	gamXY	−1	2	0	0,00087	0,2	0	#DIV/0!
	alphXY	0	10	0	8,8E−05	0,3	0	#DIV/0!
	gamXY	−1	20	0	0,00020	0,4	0	#DIV/0!
			0	0	0,00142	0,5	0	#DIV/0!

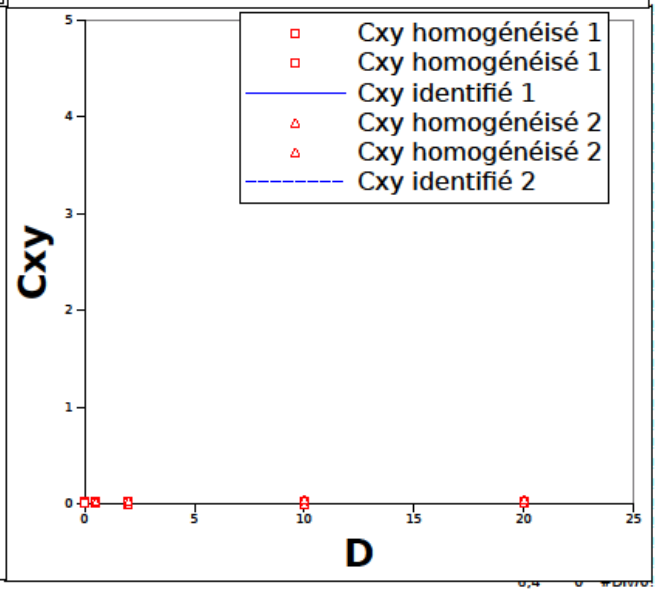




Glissement 12

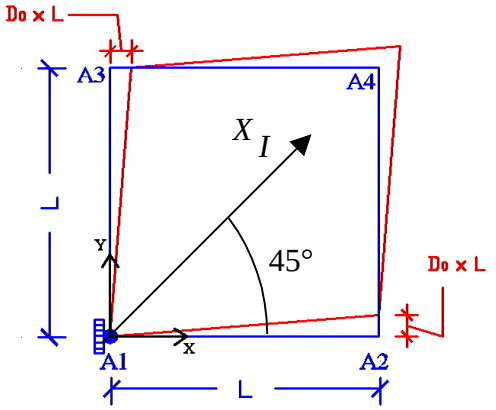
		poptXY	D1	D2	CHOM	D1	D2	AID
0, 0,5, 2, 10, 20	C0XY	1E−05	0	0	1,1E−05	0	0	#DIV/0!
	alphXY	0	0	0	1,4E−05	0,1	0	#DIV/0!
	gamXY	−1	2	0	1,8E−05	0,2	0	#DIV/0!
	alphXY	0	10	0	1,6E−05	0,3	0	#DIV/0!
	gamXY	−1	20	0	1,1E−05	0,4	0	#DIV/0!
			0	0,5	9E−06	0,5	0	#DIV/0!





ANNEXE 8

Etude du comportement du béton armé en cisaillement vs distorsion



Afin de mieux comprendre le type de réponses que le béton armé produit en situation de cisaillement, on effectue ci-après une analyse, avec un modèle très simple élasto-endommageable parfait de béton, des chargements en distorsion et en cisaillement imposés, que l'on pourra utiliser comme référence.

La dalle en béton armé a pour épaisseur h. Les aciers, de section S_a, sont supposés portés par les axes (x, y). Le chargement étudié est soit en distorsion imposée $\in_{xy}$, soit en cisaillement imposé N_{xy}. On doit considérer deux repères : (O, x, y) et (O, X_I, X_{II}) à 45°.

On se propose d'évaluer avec un modèle de comportement très simple le type de réponse en cisaillement selon le type de chargement ; on admettra un comportement du béton élastique fragile en traction. On notera $G_b = \dfrac{E_b}{1+\nu}$ le module de cisaillement du béton et $\mathbf{A}_b = \dfrac{E_b}{1-\nu^2}\begin{pmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1-\nu \end{pmatrix}$ le tenseur d'élasticité en contraintes planes du béton écrit sous forme matricielle.

Chargement en distorsion imposée $\in_{xy}$

Dans ce cas, le tenseur de déformation $\boldsymbol{\varepsilon}$ a pour composantes dans le repère : $\boldsymbol{\varepsilon} = \in_{xy} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}_{(O,x,y)}$, soit $\boldsymbol{\varepsilon} = \in_{xy} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}_{(O,X_I,X_{II})}$ dans le repère principal à 45°. Par conséquent, les aciers ne seront jamais chargés et seul le béton offre une résistance.

Envisageons une évolution monotone linéaire dans le temps (push over).

Phase élastique linéaire

Dans la 1ère montée en charge élastique, les aciers ne contribuant pas à la raideur, on a :

$\boldsymbol{\sigma}^{acier} \equiv \mathbf{0}$ et $\boldsymbol{\sigma}^{béton} = G_b . \in_{xy} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}_{(O,x,y)}$

D'où les efforts : $\mathbf{N} = G_b h . \in_{xy} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}_{(O,x,y)}$. Notamment : $\boldsymbol{\sigma}^{béton} = G_b . \in_{xy} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}_{(O,X_I,X_{II})}$ dans le repère à 45°. L'opérateur de raideur tangente $\partial \mathbf{N} / \partial \varepsilon_{xy}$, dans le repère (O, x, y), est : $\mathbf{R}_{\tan}^{BA} = G_b h \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Phase d'endommagement

Dès qu'on atteint $\in_{xy} = \sigma_f^t / G_b$ (selon un modèle unidimensionnel simple de résistance du béton : fissures parallèles à la direction OX_{II}) et que l'on continue la charge, le béton fissure et ne résiste plus sur la direction OX_I ; les contraintes dans le béton sont alors nécessairement : $\boldsymbol{\sigma}^{béton} = G_b . \in_{xy} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}_{(O,X_I,X_{II})}$ donc $\boldsymbol{\sigma}^{béton} = G_b . \frac{\in_{xy}}{2} \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}_{(O,x,y)}$, tandis que puisque l'on maintient $\in_{xx} = \in_{yy} = 0$, $\boldsymbol{\sigma}^{acier}$ reste nul. Donc les efforts normaux sont alors : $\mathbf{N} = \frac{G_b h. \in_{xy}}{2} \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}_{(O,x,y)}$: on constate donc une chute brutale de la réponse en effort de cisaillement, accompagné d'une anisotropie induite par l'endommagement. À la fin de la charge (pour $\in_{xy}^{\max} > \sigma_f^t / G_b$) : $\boldsymbol{\sigma}^{béton} = G_b . \frac{\in_{xy}^{\max}}{2} \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}_{(O,x,y)}$.

L'opérateur de raideur tangente, dans le repère (O,x,y), s'écrit : $\mathbf{R}_{\tan}^{BA} = \frac{G_b h}{2} \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$.

Chargement en cisaillement imposé N_{xy}

Dans ce cas, le tenseur de déformation $\mathbf{N}$ a pour composantes dans le repère (O,x,y): $\mathbf{N} = N_{xy} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}_{(O,x,y)}$, soit $\mathbf{N} = N_{xy} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}_{(O,X_I,X_{II})}$ dans le repère principal à 45°. Par conséquent, l'équilibre impose :

$$\boldsymbol{\sigma}^{acier} = \begin{pmatrix} -h\sigma_{xx}^b / S_a & 0 \\ 0 & -h\sigma_{yy}^b / S_a \end{pmatrix}_{(O,x,y)}$$

Envisageons une évolution monotone linéaire dans le temps (push over).

Phase élastique linéaire

Dans la 1ère montée en charge élastique, on a : $N_{xy} = h.\sigma_{xy}^b = G_b h. \in_{xy}$ et $\in_{xx} = \in_{yy} = 0$. Donc :

$\boldsymbol{\sigma}^{acier} \equiv \mathbf{0}$ et $\boldsymbol{\sigma}^{béton} = G_b . \in_{xy} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}_{(O,x,y)}$

D'où les efforts : $\mathbf{N} = G_b h. \in_{xy} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}_{(O,x,y)}$. Notamment : $\boldsymbol{\sigma}^{béton} = G_b . \in_{xy} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}_{(O,X_I,X_{II})}$ dans le repère à 45°. L'opérateur de souplesse tangente $\partial\boldsymbol{\varepsilon} / \partial N_{xy}$, dans le repère (O,x,y), écrit sous forme matricielle, est : $\mathbf{S}_{\tan}^{BA} = \frac{1}{G_b h} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Phase d'endommagement

Dès qu'on atteint $N_{xy}^e = h\sigma_f^t$, avec $\in_{xy} = \sigma_f^t / G_b$ (selon un modèle unidimensionnel simple de résistance du béton : fissures parallèles à la direction OX_{II}) et que l'on continue la charge, le béton fissure et ne résiste plus sur la direction OX_I ; les contraintes dans le béton deviennent alors nécessairement : $\boldsymbol{\sigma}^{béton} = \sigma_{22}^b \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}_{(O,X_I,X_{II})}$ donc $\boldsymbol{\sigma}^{béton} = \frac{\sigma_{22}^b}{2} \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}_{(O,x,y)}$, avec σ_{22}^b à déterminer.

Ayant :

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \begin{pmatrix} \in_{11} & \in_{12} \\ \in_{12} & \in_{22} \end{pmatrix}_{(O,X_I,X_{II})} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \in_{xx} + \in_{yy} + 2 \in_{xy} & \in_{yy} - \in_{xx} \\ \in_{yy} - \in_{xx} & \in_{xx} + \in_{yy} - 2 \in_{xy} \end{pmatrix}_{(O,X_I,X_{II})} = \begin{pmatrix} \in_{xx} & \in_{xy} \\ \in_{xy} & \in_{yy} \end{pmatrix}_{(O,x,y)}$$

l'hypothèse de maintien de l'adhérence acier/béton et l'équilibre imposent pour $N_{xy}^e = h\sigma_f^t$:

$\sigma_{22}^b = 2N_{xy} / h = 2\sigma_f^t$; $\in_{xx} = \in_{yy} = N_{xy}^e / E_a S_a$;

et donc dans l'acier : $\boldsymbol{\sigma}^{acier} = \frac{N_{xy}}{S_a} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}_{(O,x,y)}$

et le comportement du béton étant élastique sur la direction OX_{II}, on en déduit pendant cette phase :

$\in_{xy} - \in_{xx} = \sigma_{22}^b / E_b = 2N_{xy} / E_b h \quad \Rightarrow \quad \in_{xy} = N_{xy}(2E_a S_a + E_b h) / E_a E_b S_a h$

À la fin de la charge (pour $N_{xy}^{max} > h\sigma_f^t$) : $\boldsymbol{\sigma}^{béton} = \frac{N_{xy}^{max}}{h} \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}_{(O,x,y)}$

$\Leftrightarrow \quad \boldsymbol{\sigma}^{béton} = \frac{2N_{xy}^{max}}{h} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}_{(O,X_I,X_{II})}$, $\boldsymbol{\sigma}^{acier} = \frac{N_{xy}^{max}}{S_a} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}_{(O,x,y)}$ et

$\boldsymbol{\varepsilon} = N_{xy}^{max} \begin{pmatrix} 1/E_a S_a & (2E_a S_a + E_b h)/E_a E_b S_a h \\ (2E_a S_a + E_b h)/E_a E_b S_a h & 1/E_a S_a \end{pmatrix}_{(O,x,y)}$, notamment

$\in_{yy}^{max} = \in_{xx}^{max} = N_{xy}^{max} / E_a S_a$.

L'opérateur de souplesse tangente $\partial\boldsymbol{\varepsilon} / \partial N_{xy}$, dans le repère (O,x,y), écrit sous forme matricielle, est : $\mathbf{S}_{\tan}^{BA} = \frac{1}{E_a E_b S_a h} \begin{pmatrix} E_b h & 2E_a S_a + E_b h \\ 2E_a S_a + E_b h & E_b h \end{pmatrix}$.

Comparaison des raideurs en distorsion et cisaillement imposés

Durant les phases élastiques, on a dans les deux cas de chargements : $\partial N_{xy} / \partial \in_{xy} = G_b h = E_b h / (1+\nu)$. Par contre, en distorsion imposée $\in_{xy}$, on a : $\partial N_{xy} / \partial \in_{xy} = \dfrac{G_b h}{2}$ tandis qu'en cisaillement imposé N_{xy} on a : $\partial N_{xy} / \partial \in_{xy} = \dfrac{E_a E_b S_a h}{2E_a S_a + E_b h}$.

Avec les données du cas-test SSNS106D :

h	ν_b	E_b	E_a	S_a
0,1 m	*0.2*	32308 MPa	200000 MPa	0,0016

on trouve : $N_{xy}^e = h\sigma_f^t = 300\,kN$ et :

en distorsion imposée $\in_{xy}$, on a : $\partial N_{xy} / \partial \in_{xy} = 1346{,}17\ MPa.m$.

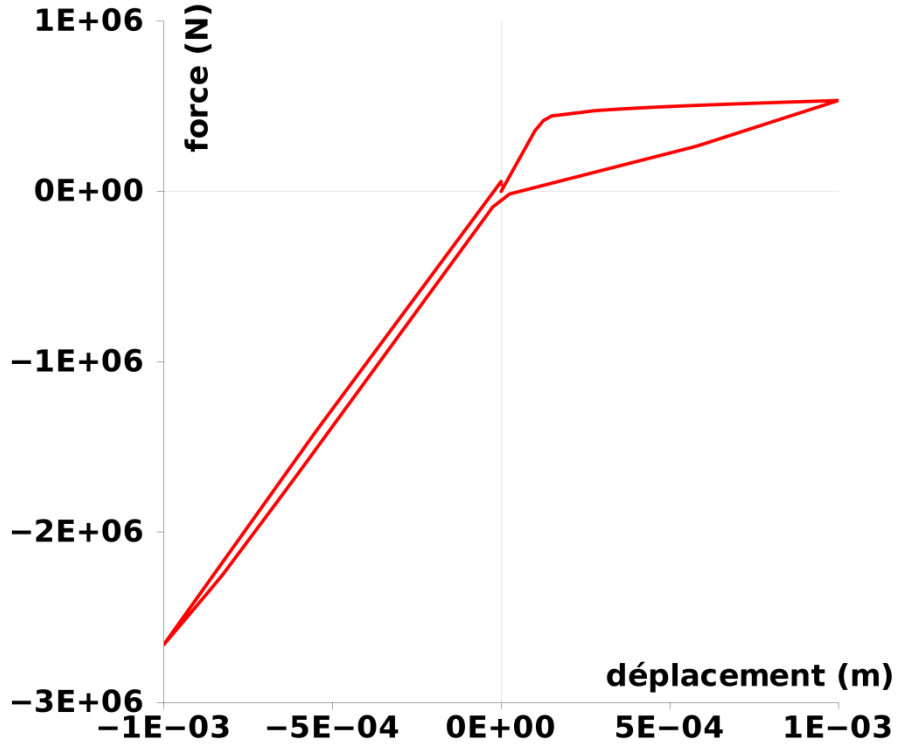
tandis qu'en cisaillement imposé N_{xy} on a : $\partial N_{xy} / \partial \in_{xy} = 267{,}09\ MPa.m$.

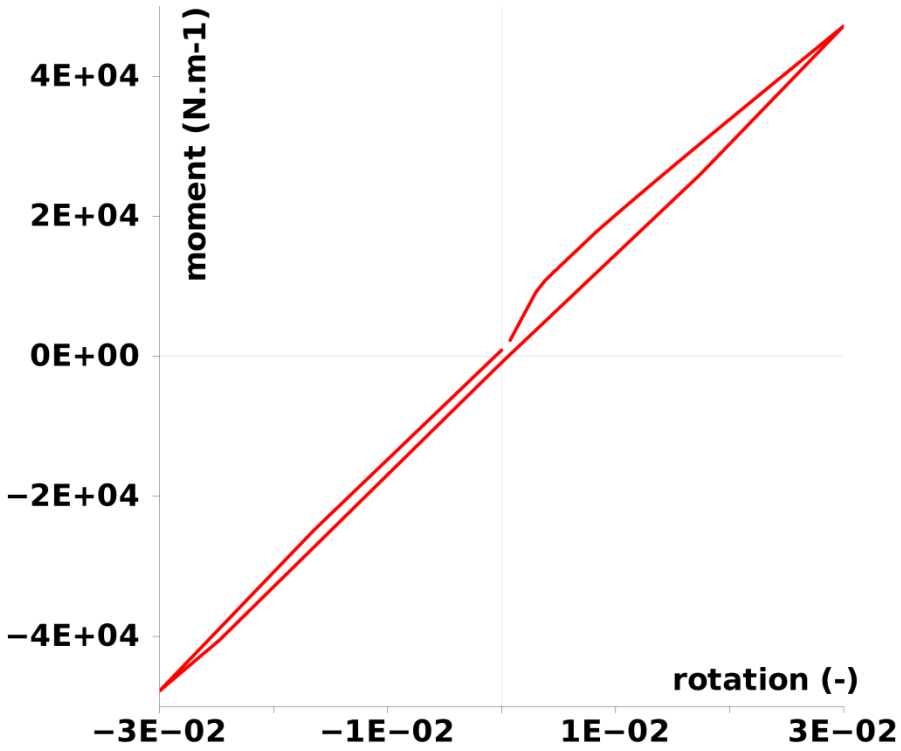
ANNEXE 9

Cas-test combinés

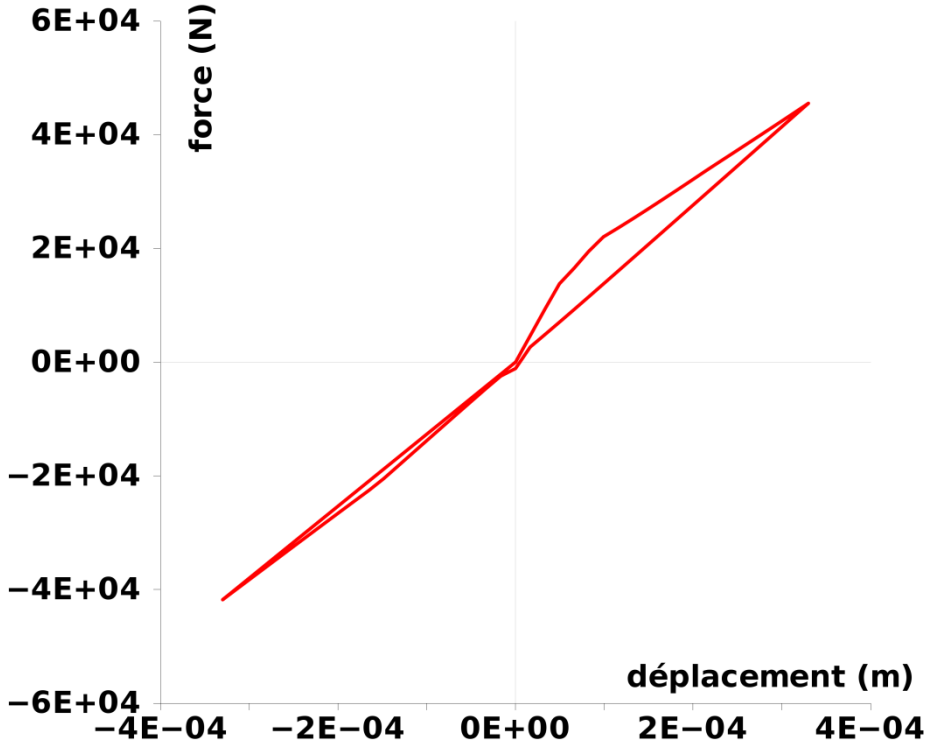
Les courbes réponses des cas-test combinant flexion-traction et flexion-distorsion synchrones sont présentées ci-dessous.

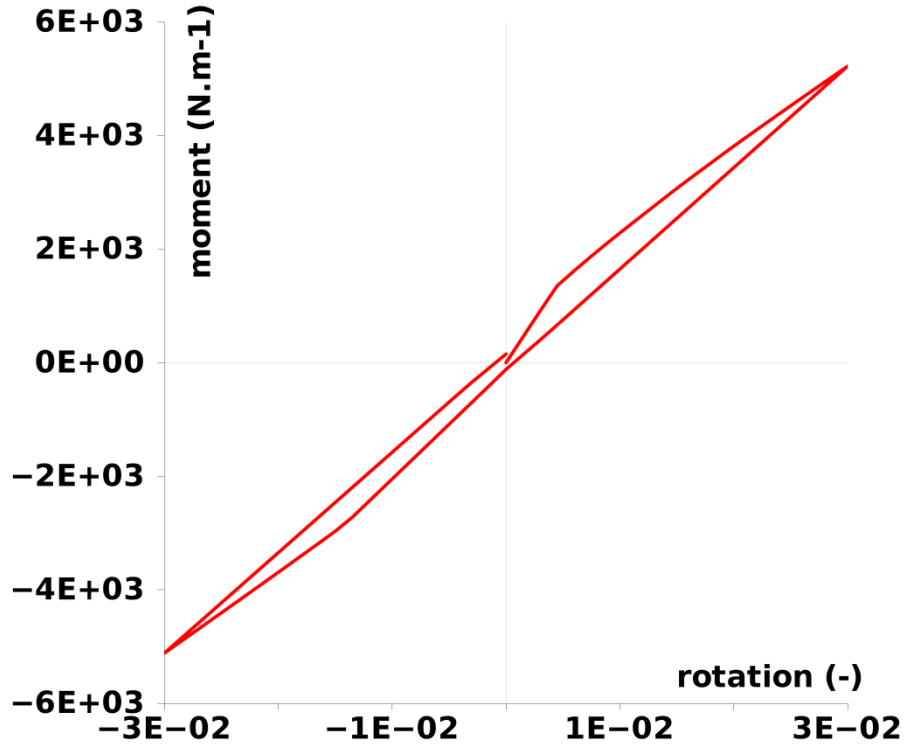
Flexion-traction alternées synchrones :





Flexion-distorsion alternées synchrones :

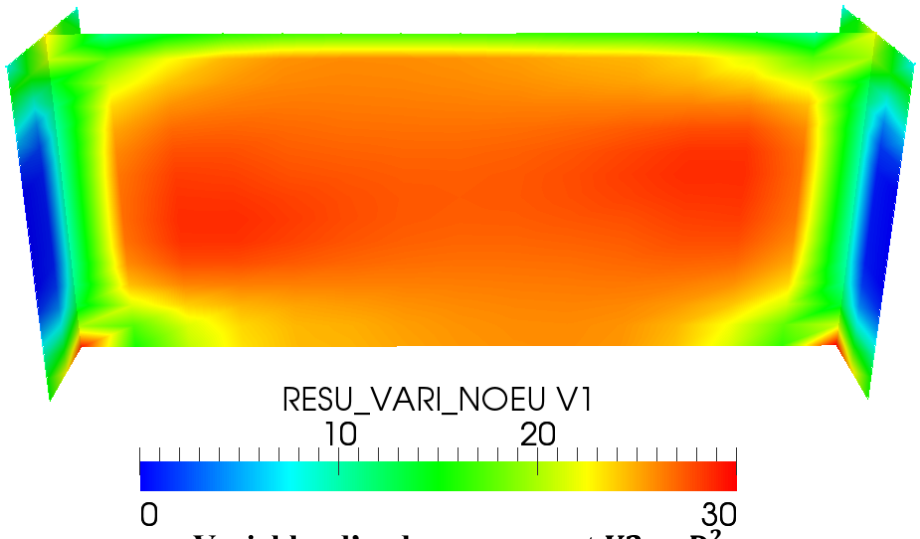




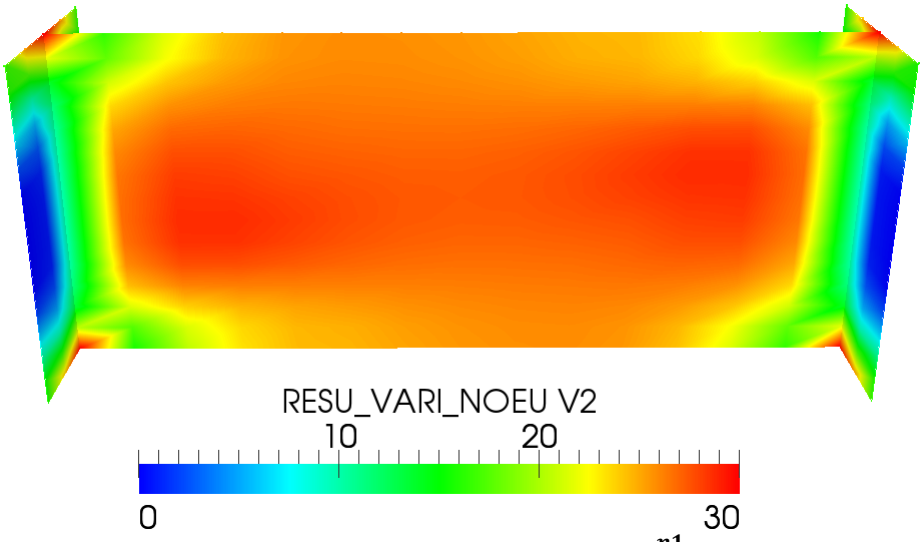
ANNEXE 10

Variables internes de SAFE

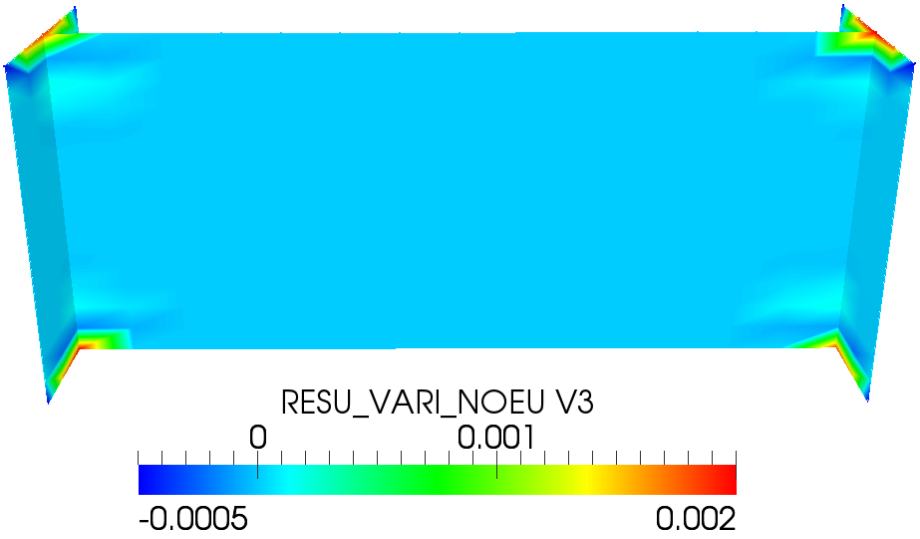
Variables d'endommagement $V1 = D^1$



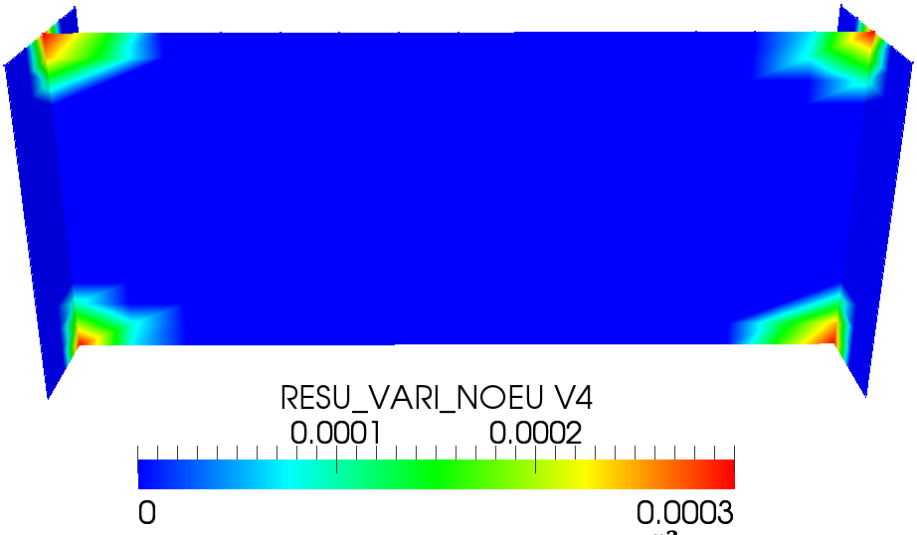
Variables d'endommagement $V2 = D^2$



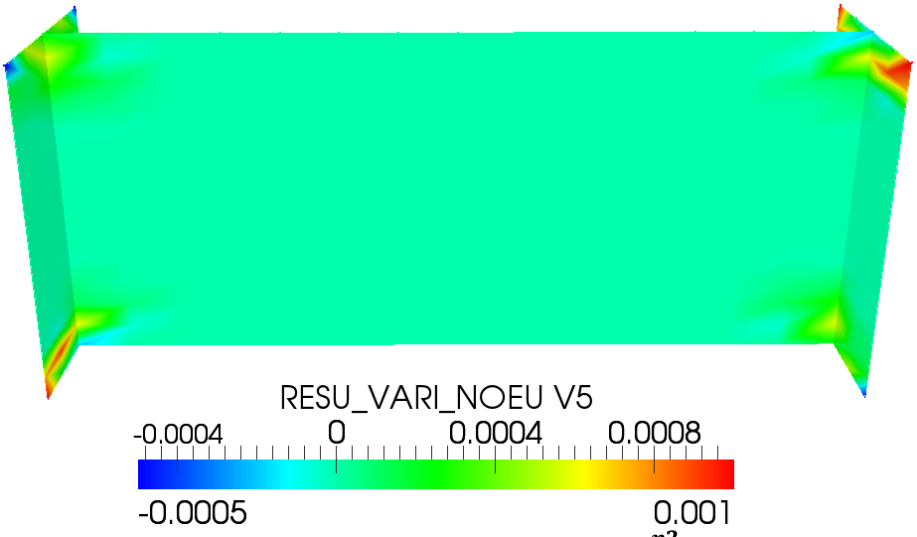
Variable de glissement $V3 = E_1^{\eta 1}$



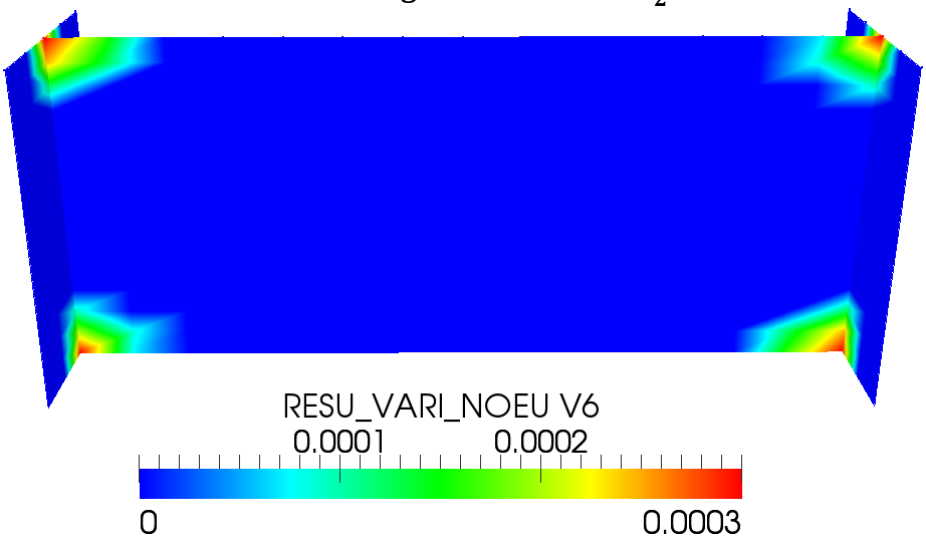
Variable de glissement $V4 = E_2^{\eta 1}$



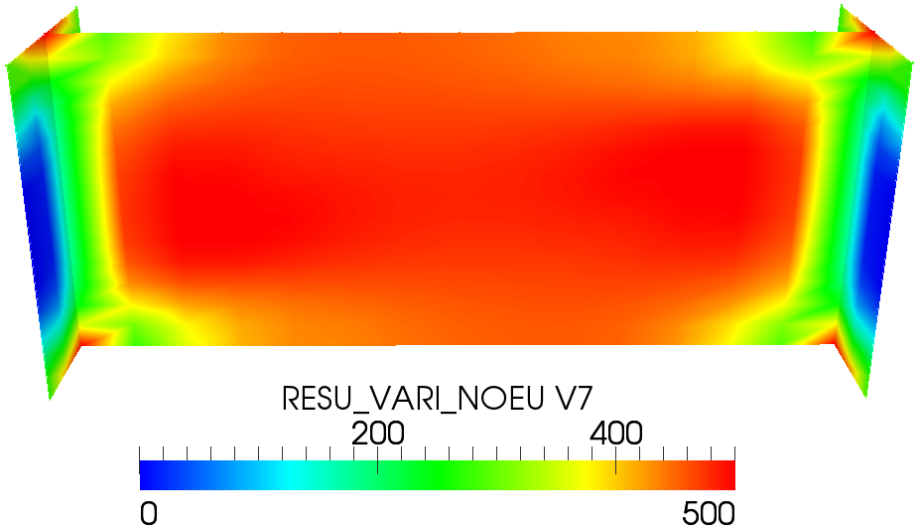
Variable de glissement $V5 = E_1^{\eta 2}$



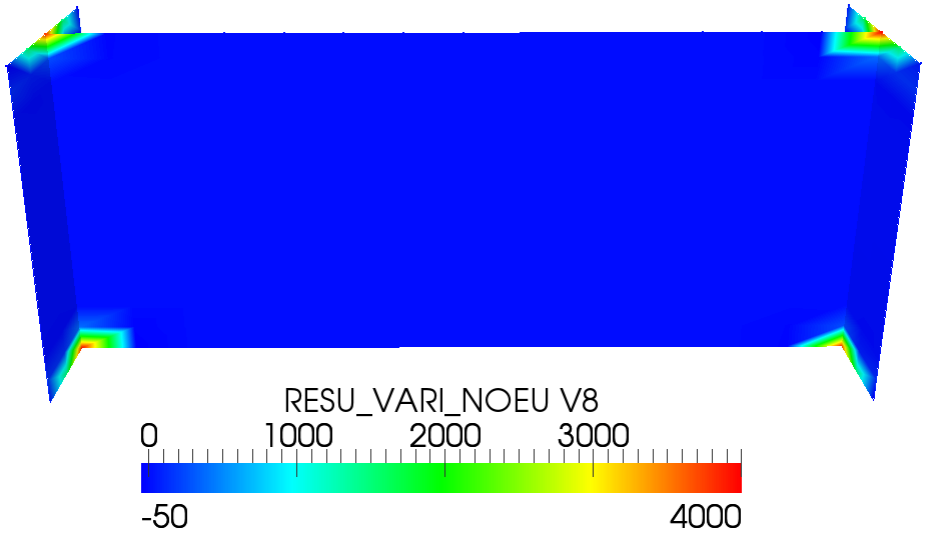
Variable de glissement $V6 = E_2^{\eta 2}$



Variable de post-traitement, dissipation d'énergie par endommagement $V7$



Variable de post-traitement, dissipation d'énergie par glissement $V8$



Christelle COMBESCURE

Formulation d'un modèle homogénéisé de plaque en béton armé pour des applications sismiques

Résumé

Des réévaluations de sureté régulières sont pratiquées sur le parc d'installations nucléaires dont EDF a la charge et les récentes réévaluations sismiques ont souligné le besoin de prendre en compte les comportements non-linéaires des matériaux dans les structures en béton armé. Afin de répondre à ce besoin, un modèle de plaque en béton armé pour des applications sismiques est proposé : le modèle DHRC. Construit par une approche d'homogénéisation périodique, il couple deux phénomènes dissipatifs : l'endommagement du béton et le glissement à l'interface entre les armatures et le béton avoisinant. Ce couplage original entre endommagement et glissement permet une meilleure représentativité de la dissipation d'énergie au cours des cycles de chargement. Les paramètres du modèle DHRC sont identifiés par une procédure d'homogénéisation automatisée, s'appuyant sur un nombre très restreint de caractéristiques géométriques et matériaux. Le modèle implanté dans le code de calculs par éléments finis ASTER est validé numériquement et sa capacité à simuler le comportement expérimental de structures voiles est analysée.

Mots Clés : béton armé, glissement, endommagement, plaque, homogénéisation périodique

Résumé en anglais

Safety reassessments are periodically performed on the EDF nuclear power plants and the recent seismic reassessments leaded to the necessity of taking into account the non-linear behaviour of materials when modeling these reinforced concrete buildings. A constitutive model dedicated to reinforced concrete plates under seismic solicitations is proposed: the DHRC model. Justified by a periodic homogenisation approach, this model includes two dissipative phenomena: damage of concrete and sliding at the interface between steel rebar and surrounding concrete. An original coupling term between damage and sliding, resulting from the homogenisation process, induces a better representation of energy dissipation during the material degradation. The model parameters are identified from and a restricted number of geometric and material characteristics. Numerical validations of the DHRC model are presented, showing good agreement with experimental behaviour.