Université Paris-Sud 11
LPT Orsay

MPI for Gravitational Physics
(Albert Einstein Institute)

Microscopic Quantum Structure
& Dynamics of Spacetime

Synthèse en français de :

Tensorial methods and renormalization in Group Field Theories

Thèse de doctorat de physique, presentée par

Sylvain Carrozza

le 19 september 2013, devant un jury composé de

Pr. Renaud Parentani	Président
Pr. Bianca Dittrich	Rapporteur
Dr. Razvan Gurau	Rapporteur
Pr. Carlo Rovelli	Examinateur
Pr. Daniele Oriti	Directeur de thèse
Pr. Vincent Rivasseau	Directeur de thèse

Avertissement :

La présente synthèse n'est qu'un bref résumé en français d'une thèse rédigée en anglais. Elle ne contient aucun détail conceptuel ni équation, le lecteur intéressé est donc renvoyé à la présentation détaillée contenue dans le manuscrit original.

1 Introduction et motivations

Cette thèse explore certaines propriétés mathématiques des théories quantiques des champs dites GFT (*Group Field Theory*). Cette terminologie désigne un ensemble de théories définies sur des groupes de Lie, et avec des interactions non-locales bien spécifiques, qui visent à donner une description quantique de la gravitation. Dans cette optique, le groupe de Lie sur lequel les champs vivent est un groupe de symétrie auxiliaire (par exemple le groupe de Lorentz) plutôt que l'espace-temps lui-même. Son pendant quantique (et dynamique) est au contraire à chercher du côté des amplitudes de Feynman des GFT, qui sont indexées par des triangulations, incarnations discrètes de l'espace-temps de la relativité générale.

Une grande variété de modèles de GFT est à l'étude à l'heure actuelle, avec deux sources d'inspiration principales : les modèles de matrices et les mousses de spin. Les premières ont été développées dans les années 80, ont permis de décrire la gravité quantique 2d à l'aide de techniques combinatoires, et suggèrent des généralisations en dimension arbitraire connues sous le nom de modèles de tenseurs. Quant aux mousses de spin, ce sont des versions covariantes de la gravité quantique à boucles qui proposent une description de l'espace-temps quantique en termes de 2-complexes et de leurs triangulations duales. Les GFT ne sont autres que des modèles de tenseurs dont les indices sont à valeur dans un groupe de Lie, et dont les amplitudes de Feynman sont des mousses de spin.

Le but de cette thèse est de mettre à profit les nouveaux outils combinatoires qui ont été développés dans le cadre des modèles de tenseurs, afin de progresser dans la résolution de certains problèmes ouverts en GFT. Parmi eux la question de la limite continue de ces théories est sans doute la plus épineuse : si certaines GFT issues de la gravité quantique à boucles proposent une définition de l'espace-temps quantique et de sa dynamique qui implémente une notion de géométrie discrète quand peu de degrés de liberté sont en présence, il est pour l'heure impossible de démontrer que la relativité générale émerge dans la limite où une infinité de degrés de liberté contribuent. De ce fait, et pour des raisons de cohérence interne, il semble nécessaire d'étendre aux GFT les outils standards de la théorie des champs, au rang desquels la renormalisation. C'est à cette tâche que s'attelle cette thèse, en ce focalisant sur les GFT avec invariance de jauge, qui s'appliquent à la gravité quantique 3d et sont à la base des modèles de gravité 4d.

2 Expansions asymptotiques

La première partie de la thèse se focalise sur l'expansion asymptotique dite *large N* des modèles colorés de Boulatov et Ooguri. La théorie de Boulatov est un modèle de gravité quantique en 3 dimensions, avec signature euclidienne, qui génère des amplitudes de mousses de spin de Ponzano-Regge. Quant au modèle de Ooguri, il s'agit d'une généralisation immédiate du modèle de Boulatov en dimension 4, sur lequel sont basées les GFT pour la gravité en 4 dimensions. Dans leurs versions colorées, la combinatoire des mousses de spin générées par les modèles de Boulatov et Ooguri est contrainte, sans que les amplitudes n'en soient affectées. Ceci permet une grande simplification de l'analyse de ces modèles, sans changer l'interprétation physique de leurs amplitudes. En particulier, la limite *large N* des modèles de matrices a pu être généralisée au modèles de Boulatov et Ooguri uniquement dans leurs versions colorées.

En utilisant de nouvelles représentations de ces modèles, la représentation *vertex* du modèle de Boulatov et la représentation *edge* du modèle de Ooguri, il a été possible au cours de cette thèse d'améliorer les bornes sur leurs amplitudes dans la limite de grand cut-off N.

Le premier type de bornes, appelées bornes de bulles, permet de contrôler les singularités topologiques dans la limite grand N. On montre en effet, pour les deux modèles, que seulement des triangulations de variétés topologiques contribuent aux premiers ordres dominants en N. Au contraire, plus une triangulation est topologiquement singulière, plus son amplitude décroît rapidement vers 0 quand $N \to +\infty$.

Dans un second temps, les bornes dites de jaquettes, qui sont à la base de l'expansion en $1/N$, ont pu être améliorées. Les jaquettes sont des surfaces fermées plongées dans les triangulations colorées, qui permettent d'en capturer des propriétés topologiques et combinatoires. Les paramètres capturées par ces bornes sont les genres des jaquettes : plus ces entiers sont grands, moins une triangulation contribue dans la limite de grand N. Plus précisément, alors que la version originale de la borne de jaquettes est paramétrée par la moyenne de leurs genres, la contribution de cette thèse a consisté à montrer que cette même borne est satisfaite en remplaçant la moyenne par le maximum des genres. Cette nouvelle borne est plus contraignante, et suggère des différences notables entre l'expansion en $1/N$ des modèles de tenseurs et celle des modèles de Boulatov-Ooguri.

3 Renormalisation

La seconde partie de la thèse concerne la renormalisation perturbative de modèles du type Boulatov-Ooguri (avec groupe et dimension arbitraires), à deux différences près : a) les interactions sont déterminées par un principe de "localité" basé sur une invariance tensorielle (on parle alors de *Tensorial GFT*, ou simplement TGFT) ; b) le propagateur est rendu non trivial grâce à un nouveau terme cinétique impliquant le Laplacien sur le groupe. Ces deux modifications permettent de disposer de théories avec une notion d'échelle bien définie, et un ensemble infini d'interactions susceptibles de réabsorber les divergences à hautes échelles.

Dans ce contexte, la question de la renormalisabilité est bien posée et non triviale. Elle est étudiée en trois temps : tout d'abord, une décomposition multi-échelles des amplitudes est mise en place ; puis, un comptage de puissance optimal permet, pour une attribution d'échelle donnée, de déterminer les sous-graphes contribuant aux divergences ; enfin, ces divergences sont réabsorbées dans de nouvelles interactions effectives, à échelles plus basses. Plusieurs aspects de cette analyse doivent être modifiés pour s'appliquer aux TGFT étudiées dans cette thèse, et particulièrement la notion de quasi-localité. Alors qu'un sous-graphe à hautes énergies dans une théorie des champs ordinaire est automatiquement quasi-local du point de vue de ses pattes externes à plus basses énergies, et donc sa divergence éventuelle peut nécessairement être réabsorbée dans une nouvelle interaction effective locale, il en est tout autrement dans notre cas : un sous-graphe à hautes échelles ne ressemble pas nécessairement à un terme local (i.e. un invariant tensoriel) du point de vue de ses pattes externes. Ceci est dû au fait que les amplitudes des TGFT avec invariance de jauge dépendent des holonomies le long des faces des 2-complexes générés dans l'expansion de Feynman, qui sont des objets essentiellement non-locaux du point de vue des graphes de Feynman. Il faut donc avant toute chose s'assurer que les graphes divergents de ces théories sont tels que leurs faces à hautes échelles peuvent être contractées en préservant l'invariance tensorielle. De tels graphes sont dits *tracial*, et il se trouve que les TGFT avec invariance de jauge qui sont potentiellement renormalisables du point de vue du comptage de puissance sont aussi dominées par des graphes dits *melonic*, qui forment une sous-classe des graphes *tracial*. Cette propriété est la raison profonde qui permet d'appliquer les méthodes de renormalisation habituelles à ces théories des champs d'un nouveau genre.

Le premier ensemble de théories renormalisables étudié en détails dans la thèse regroupe les TGFT basées sur le groupe U(1) en dimension 4. Ces modèles, qui n'ont pas d'interprétation géométrique claire, représentent néanmoins un bon moyen de comprendre la structure des divergences de ce type de TGFT. Ils sont super-renormalisables du point de vue du comptage de puissance, c'est-à-dire qu'ils ne génèrent qu'un nombre fini de graphes divergents, ce qui est confirmé par une étude approfondie. La renormalisation d'une théorie des champs ordinaire super-renormalisable peut être entièrement implémentée par un changement de variables au niveau de l'action, appelé ordre de Wick. Cette procédure s'étend aux TGFT super-renormalisables, et là encore le rôle des faces entraîne des complications inattendues. La renormalisabilité est cependant démontrée en toute rigueur, et à tous les ordres perturbatifs.

Dans un second temps, la thèse aborde la question des théories juste-renormalisables, c'est-à-dire des théories renormalisables générant une infinité de graphes divergents. Le premier résultat notable à ce propos est une classification complète des théories juste-renormalisables du point de vue du comptage de puissance, en fonction de la dimension du groupe de Lie D, et de la dimension d des triangulations générées par la théorie. Seulement 5 combinaisons de ces deux paramètres peuvent potentiellement produire des théories juste-renormalisables. Parmi elles, seule la combinaison $d = D = 3$ peut avoir une interprétation gravitationnelle, par exemple avec le groupe $\mathrm{SU}(2)$ en signature euclidienne. Il est particulièrement intéressant de voir ainsi que les critères de renormalisabilité et de géométricité suffisent à sélectionner de tels modèles, ce qui coïncide avec le fait que les GFT avec invariance de jauge ne sont appelées à décrire la gravité quantique qu'en dimension au plus 3.

Il est donc naturel que cette thèse se conclue par l'étude détaillée du cas $d = D = 3$ avec groupe de jauge $\mathrm{SU}(2)$. La renormalisabilité est encore une fois démontrée à tous les ordres en perturbation, grâce à des méthodes multi-échelles. Les principales innovations requises par rapport aux modèles super-renormalisables basés sur le groupe $\mathrm{U}(1)$ concernent l'analyse de la famille infinie des graphes divergents, la renormalisation de la fonction d'onde, ainsi que la non-commutativité du groupe $\mathrm{SU}(2)$. Cette théorie est la première GFT renormalisable ayant un lien avec la gravité quantique, et ouvre la voie à de nombreux développements.

4 Conclusion

Cette thèse est une étape vers l'application de méthodes de théories des champs rigoureuses en gravité quantique à boucles. En ce qui concerne l'expansion en $1/N$ des GFT colorées, les résultats existants à propos des modèles avec invariance de jauge ont été raffinés, suggérant des différences non négligeables par rapport aux modèles de tenseurs. Seule une étude approfondie de l'ordre dominant en $1/N$, puis des premiers ordres sous-dominants, pourra déterminer les conséquences exactes de l'invariance de jauge sur cette expansion.

En ce qui concerne la renormalisation des TGFT, c'est aussi à l'effet de l'invariance de jauge que cette thèse s'est intéressé. Le premier fait (a priori surprenant) mis en évidence à ce sujet est que les techniques usuelles de renormalisation sont compatibles avec l'invariance de jauge, malgré le caractère non-local des amplitudes du point de vue de leurs graphes de Feynman. Secondement, l'invariance de jauge améliore le comptage de puissance des théories qui en sont dépourvues, révélant ainsi un riche ensemble de modèles renormalisables. En particulier, les modèles juste-renormalisables ont pu être classifiés, et la renormalisabilité de l'unique modèle de gravité (en 3d) confirmée par des preuves détaillées. Une étude approfondie du flot des constantes de couplage devrait permettre de confirmer ou d'infirmer la liberté asymptotique de ce modèle, qui est suggérée par des calculs partiels présentés dans la thèse. Puis, il s'agira d'explorer les éventuelles conséquences physiques de ce modèle en ce qui concerne la gravité quantique en 3 dimensions.

Enfin, maintenant que l'impact de l'invariance de jauge sur la renormalisabilité des GFT est largement compris, il convient d'étendre ces résultats aux modèles de gravité quantique en 4 dimensions. Pour se faire, les contraintes de simplicité proposées dans les modèles de mousses de spin devront être intégrées au formalisme. Il sera pour ce faire nécessaire que, comme l'invariance de jauge, ces nouvelles contraintes améliorent la renormalisabilité des TGFT, de telle sorte que des théories basées sur les groupes SO(4) ou SO(3, 1) en 4 dimensions puissent être renormalisées. Si une TGFT renormalisable inspirée par la gravité en 4 dimensions peut en effet être définie, il restera à en étudier les conséquences physiques, et en particulier à déterminer si la relativité générale peut être recouvrer dans une limite à définir. Nul doute que les nombreux outils de théorie des champs à disposition dans un tel contexte joueraient alors un rôle majeur.