

Restauration en échantillonnage irrégulier

Théorie et applications aux signaux et images satellitaires

Julien Caron

Université de Picardie Jules Verne
Laboratoire Amiénois de Mathématique Fondamentale et Appliquée

03 Mai 2012

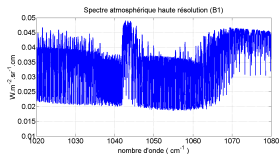
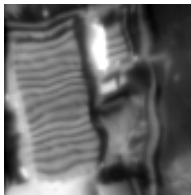
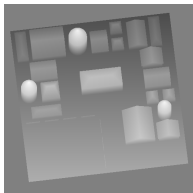
Thèse encadrée par

Sylvain Durand (Université Paris Descartes)
Andrés Almansa (Telecom ParisTech)



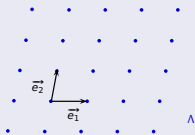
Les problèmes abordés dans cette thèse faisant intervenir l'échantillonnage irrégulier :

- 1 En lien avec l'acquisition par balayage de certains satellites :
 - La correction des micro-vibrations dans les modèles 3D
 - La restauration des images déformées
- 2 La reconstruction de spectres atmosphériques par transformée de Fourier statique irrégulière

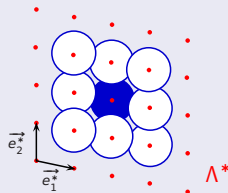


- 1 **Introduction**
 - Qu'est-ce que l'échantillonnage irrégulier ?
- 2 Correction de micro-vibrations dans les systèmes à balayage
- 3 Restauration des images en échantillonnage irrégulier
- 4 L'échantillonnage irrégulier en bande étroite
- 5 Conclusion

L'échantillonnage : définition et interprétation



(a) Points de mesure du signal

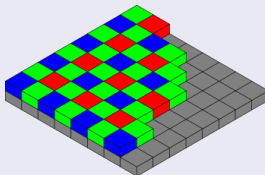


(b) Domaine de Fourier

L'échantillonnage : processus qui consiste à enregistrer les valeurs d'un signal en certains points de l'espace ou du temps.

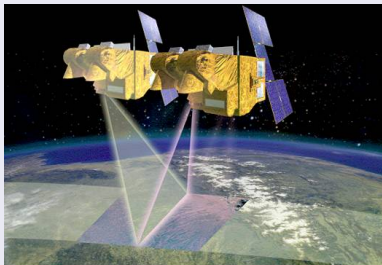
$$\sum_{\lambda \in \Lambda} f(\lambda) e^{i2\pi(\lambda, \xi)} = |\det(e_1^*, e_2^*)| \sum_{\lambda^* \in \Lambda^*} \mathcal{F}(f)(\xi + \lambda^*)$$

L' échantillonnage régulier sur une matrice de capteurs



Les capteurs CCD/CMOS sont organisés selon un réseau d'échantillonnage carré ou quinconce (Filtre de Bayer)

Acquisition par balayage ou *push-broom* : SPOT5



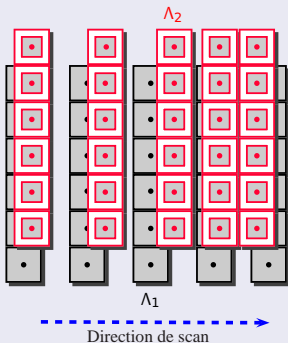
(a) L'instrument HRS : les deux capteurs panchromatiques permettent le calcul de modèles 3D



(b) L'instrument HRG : deux capteurs multi-spectraux avec possibilité de fusion (Supermode)



Echantillonnage perturbé



Ensemble d'échantillonnage :

$$\Lambda_2 = \{z_{k,l}\}$$

$$z_{k,l} = (k + \epsilon_1(k), l)$$

$$\epsilon_1(k) \approx \theta(k \delta t) \times h$$

Micro-vibrations de la (des)
barrette(s) d'acquisition (CCD/TDI)

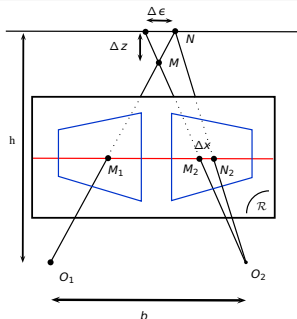
- 1 Introduction
 - Qu'est-ce que l'échantillonnage irrégulier ?
- 2 Correction de micro-vibrations dans les systèmes à balayage
 - Description du problème
 - Modélisation des micro-vibrations
 - Détection par Basis Pursuit
 - Estimation des amplitudes
 - Hypothèse affine sur le relief
- 3 Restauration des images en échantillonnage irrégulier
 - Présentation
 - Déconvolution d'images en échantillonnage irrégulier
 - Résultats et performances
 - Observations et perspectives
- 4 L'échantillonnage irrégulier en bande étroite
 - L'instrument SIFTI
 - Modélisation et méthodes de reconstruction
 - Théorèmes de perturbation en bande étroite
 - Observations numériques
- 5 Conclusion

- 1 Introduction
- 2 Correction de micro-vibrations dans les systèmes à balayage
 - Description du problème
 - Modélisation des micro-vibrations
 - Détection par Basis Pursuit
 - Estimation des amplitudes
 - Hypothèse affine sur le relief
- 3 Restauration des images en échantillonnage irrégulier
- 4 L'échantillonnage irrégulier en bande étroite
- 5 Conclusion

Definition (Disparité)

Etant données deux images I_1, I_2 , la disparité associée à un pixel de l'image I_1 est la différence des coordonnées du point physique correspondant dans I_2 et dans I_1

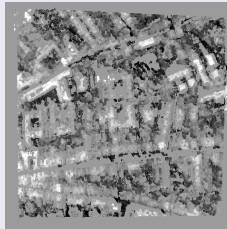
Dans le cas d'images en géométrie *épipolaire*, ce vecteur n'a qu'une composante selon X proportionnelle à l'élévation du point projeté.



$$\Delta z \approx \frac{\Delta \epsilon}{b/h}$$

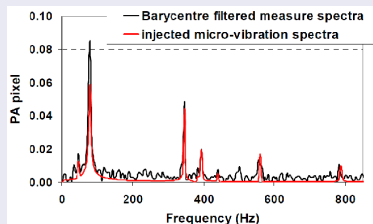
- Détermination des perturbations de l'échantillonnage à partir d'un couple d'images en géométrie épipolaire.
- Utilisation de données très précises mais non-denses de déplacement entre les deux images (disparités fournies par le logiciel MARC2 du CNES).

Cartes de disparité non-denses



Carte des disparités estimées par MARC2 : sous-pixellique (gauche) et ensemble de définition correspondant (droite)

Modélisation des microvibrations (PLEIADES)



Les microvibrations V_1 et V_2 sont des fonctions quasi-périodiques avec quelques modes dominants : signaux parcimonieux

(Greslou et al. , *Using exotic guidance for PLEIADES-HR image quality calibration* , 2008)

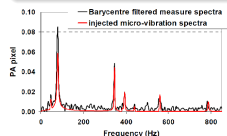
Roques, Brachere, Rougé, Pausader, *Séparation des décalages induits par l'attitude et le relief entre images d'un couple stéréoscopique*, 2001

Definition (Parcimonie)

La propriété de parcimonie d'un signal dans une certaine base correspond à un faible nombre de coordonnées non-nulles

$$S = \sum_{k=1}^N c_k g_k \quad , \quad K = \|c\|_0 \ll N.$$

De manière plus générale un signal est dit parcimonieux s'il concentre une grande partie de son énergie sur un faible nombre de composantes.



Résolution exacte de complexité combinatoire (NP) ou approchée par *Matching Pursuit* (algorithmes gloutons) .

Description mathématique du problème

Soient deux images I_1 et I_2 et V_1, V_2 les micro-vibrations du satellite lors de l'acquisition de chaque image :

$$I_1(k) = U_1(k + V_1(k))$$

$$I_2(k) = U_2(k + V_2(k))$$

$$U_2(X) = U_1(X + H(X))$$

$$I_2(k) = I_1(k + D(k))$$

$H(X)$: hauteur réelle du point X dans le plan image de référence.

$D(k)$: disparité mesurée du pixel k de l'image de référence.

Un problème mal-posé

$$D(z_k) = H(z_k + V_1(z_k)) - V_1(z_k) + V_2(z_k - D_k)$$

- z_k : pixels de l'image de référence de disparité connue

Non-unicité de la solution

$$\{(H, V_1, V_2) \text{ t.q. } H = 0, V_1(x, y) = V_2(x, y) = x + C^{te}\} \subset \mathcal{S}$$

Basis Pursuit : une convexification du problème

$$\operatorname{argmin}_{c \in \mathbb{R}^N} \|c\|_{\ell^1} \quad \text{t.q.} \quad \|S - \sum_k c_k g_k\|^2 \leq C^{te}$$

La norme ℓ^1 a la propriété de favoriser les solutions avec peu de coefficients non-nuls

- Chen et al. , *Atomic decomposition by Basis Pursuit* , 1998
- Daubechies et al. , *An iterative thresholding algorithm for linear inverse problems with a sparsity constraint* , 2004

Approximation dans une base de polynômes trigonométriques

$$V_j(X) = \sum_{k=1-T}^{T-1} A_j[k] e^{ik \frac{\pi}{T} X} \quad \text{de période } 2T$$
$$V_1 = L_1 A_1 \quad , \quad V_2 = L_2 A_2$$

$$E_1(A_1, A_2) = \lambda_1 \|A_1\|_1 + \lambda_2 \|A_2\|_1 + \underbrace{\frac{1}{2} \|D + L_1 A_1 - L_2 A_2\|^2}_{f_2(A_1, A_2)}$$

Algorithme de seuillage itératif (ISTA)

Pour tout $n \geq 0$,

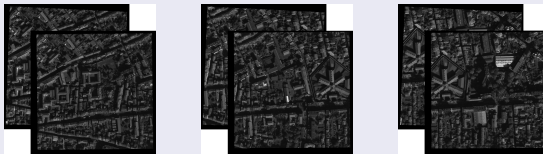
- $(A_1^{n+1/2}, A_2^{n+1/2}) = (A_1^n, A_2^n) - \rho \nabla f_2(A_1^n, A_2^n)$
- $(A_1^{n+1}, A_2^{n+1}) = \text{soft}_{(\rho\lambda_1, \rho\lambda_2)}(A_1^{n+1/2}, A_2^{n+1/2})$

$$V_1^* = L_1 A_1^n$$

$$V_2^* = L_2 A_2^n$$

$$H^* = D + V_1 - V_2$$

Tests sur les paires simulées PLEIADES

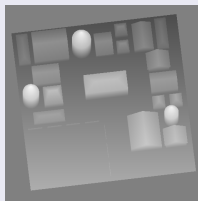
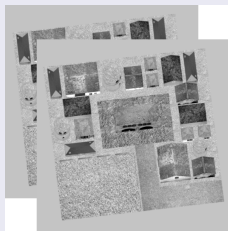


Paires stéréo simulées avec micro-vibrations à la résolution 0.7 m.

Freq. (pix ⁻¹)	0,0048672	0,008112	0,0356928	0,0397488	0,04056	0,056784
Amp. (pix)	0,25	0,25	0,075	0,082	0,082	0,041

Modes vibratoires et amplitudes des micro-vibrations dans les paires PLEIADES.

Tests sur les images VILLAGE

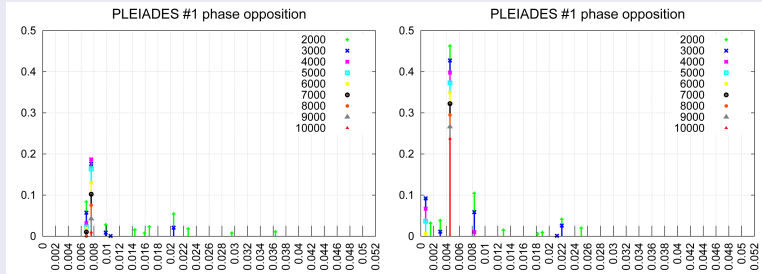


Paire VILLAGE simulée à résolution plus élevée (vérité terrain connue).

Frequences (pix^{-1})	0,0048672	0,008112
Amplitudes (pix)	0,25	0,25

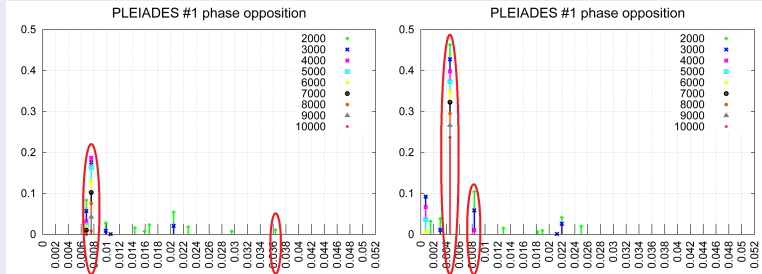
Modes vibratoires et amplitudes des micro-vibrations dans les images VILLAGE (décalage temporel connu).

Cas 1 : opposition de phase pour l'un des modes vibratoires



Amplitudes des fréquences détectées dans les paires PLEIADES pour l'image référence I_1 (gauche) et l'image I_2 (droite) en fonction du paramètre de Lagrange $\lambda = \lambda_1 = \lambda_2$.

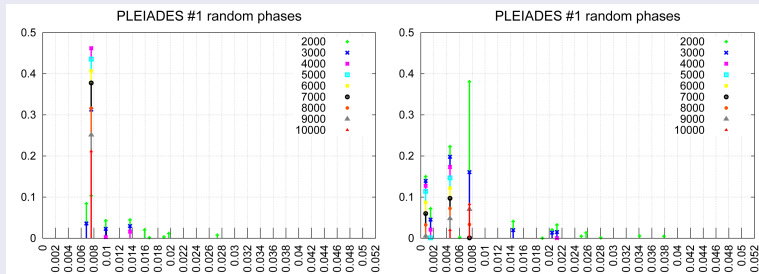
Cas 1 : opposition de phase pour l'un des modes vibratoires



Amplitudes des fréquences détectées dans les paires PLEIADES pour l'image référence I_1 (gauche) et l'image I_2 (droite) en fonction du paramètre de Lagrange $\lambda = \lambda_1 = \lambda_2$.

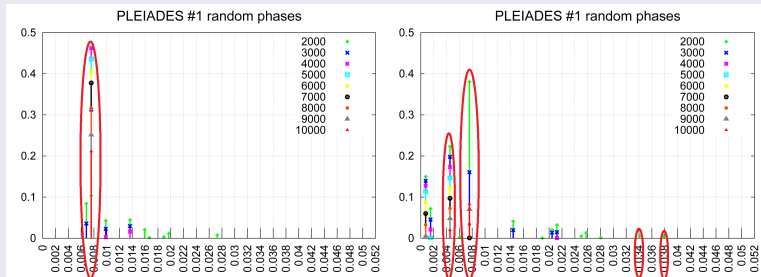
⇒ Seuls les deux modes principaux (0.0048 et 0.0081 pix^{-1}) sont correctement détectés ici .

Cas 2 : phases aléatoires dans V_1 et V_2



Amplitudes des fréquences détectées dans les paires PLEIADES dans l_1 (gauche) et dans l_2 (droite) en fonction du paramètre de Lagrange $\lambda = \lambda_1 = \lambda_2$

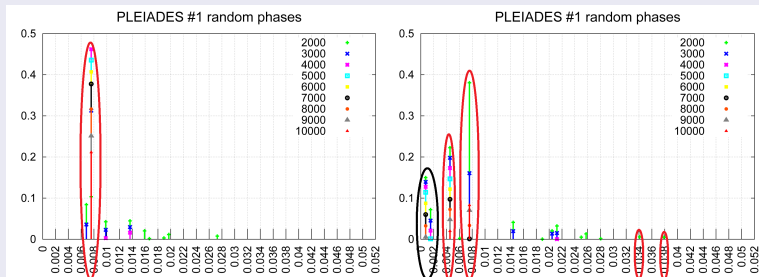
Cas 2 : phases aléatoires dans V_1 et V_2



Amplitudes des fréquences détectées dans les paires PLEIADES dans I_1 (gauche) et dans I_2 (droite) en fonction du paramètre de Lagrange $\lambda = \lambda_1 = \lambda_2$

Les deux modes principaux (0.0048 et 0.0081 pix^{-1}) sont détectés (en rouge). .

Cas 2 : phases aléatoires dans V_1 et V_2



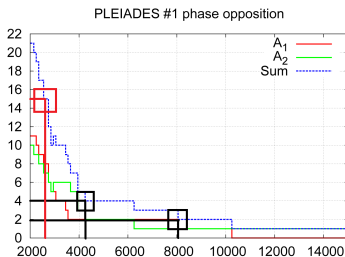
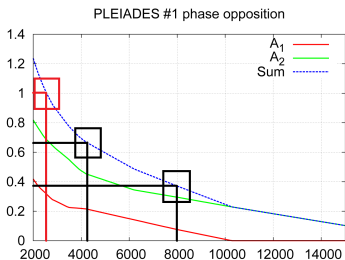
Amplitudes des fréquences détectées dans les paires PLEIADES dans l_1 (gauche) et dans l_2 (droite) en fonction du paramètre de Lagrange $\lambda = \lambda_1 = \lambda_2$

Des outliers persistent quand $\lambda \nearrow$ (en noir).

Observations sur les couples testés

- Les deux modes principaux sont bien détectés dans le cas 1 (opposition de phase).
- Dans le cas 2 (phases aléatoires) les micro-vibrations peuvent se compenser, seule la différence $V_1 - V_2$ est détectée.
- La détection nécessite une sur-régularisation sous peine d'ouliers (fausses détections).
- Les modes détectés peuvent passer très facilement de V_1 à V_2 (phénomène de mélange).

La pénalisation par la norme ℓ^1 ne permet pas de retrouver les amplitudes exactes : phénomène d'érosion



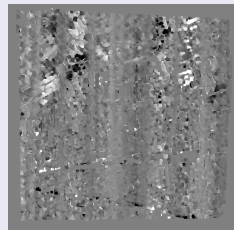
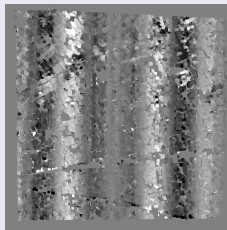
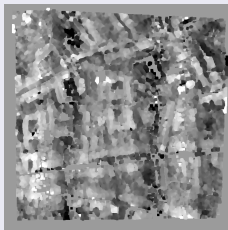
Norme ℓ^1 des coefficients (gauche) et nombre de fréquences détectées (droite) en fonction de la pénalisation.

Corrections partielles : sur-régularisation pour enlever les outliers.

L'étape d'estimation des amplitudes nécessite une sur-régularisation afin d'éliminer les outliers potentiels.

- Schéma de seuillage dur itéré ou sélection des coefficients, moindres carrés à support restreint (Blumensath et al. , *Iterative Thresholding for Sparse Approximations* , 2009) .

Estimation des amplitudes

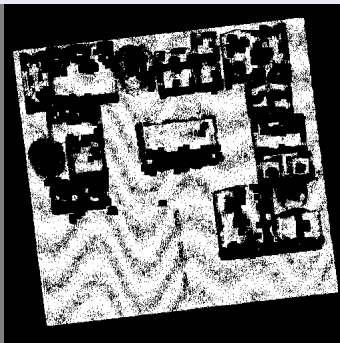
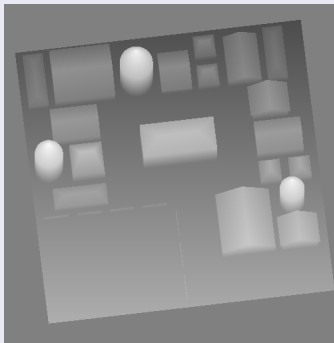


Correction par estimation des amplitudes après régularisation ℓ^1 .

Résultats de l'estimation des amplitudes

- Dans le cas des images PLEIADES, la sélection des modes dominants avec sur-régularisation permet de corriger une partie des micro-vibrations.
- Sans cette connaissance a priori certains outliers peuvent être gardés : le relief est absorbé par les micro-vibrations calculées.
- L'estimation des micro-vibrations ne résout pas le phénomène de mélange entre V_1 et V_2 .
- La détection a contrario basée sur les moindres carrés ne discerne pas les vibrations du modèle d'élévation.

Hypothèse affine par morceaux



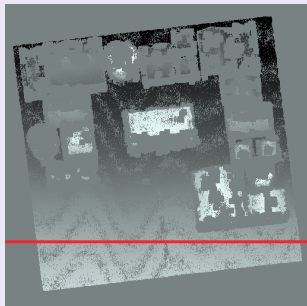
Vérité terrain de la paire Village (gauche) et masque des disparités obtenues avec correction d'adhérence (droite).

$$D_k = \underbrace{H(z_k + V_1(z_k))}_{\approx \text{affine par morceaux}} - V_1(z_k) + V_2(z_k + D_k)$$

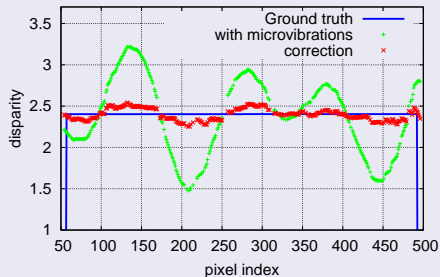
$$\|D^2(H)\|_1 \leq C^{te}$$

- Algorithmes de minimisation alternée et semi-implicite accéléré (FISTA).
- Schémas de minimisation duale accélérés (FISTA, mFISTA, Nesterov) pour le proximal de $\|D^2 \cdot\|_1$ sur un réseau non-dense.

Correction de cartes de disparité par hypothèse affine par morceaux



Horizontal sample : Line 400 (Village #1)



Disparité **avec micro-vibrations** et **correction** par régularisation de F .

Expériences sur données segmentées : paire Village .

Conclusion et perspectives

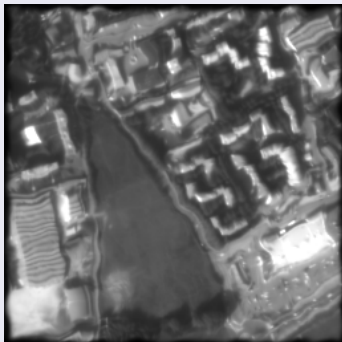
- Nous avons proposé une méthode variationnelle avec un a priori sur la nature du relief qui améliore la correction du modèle 3D.
- Un modèle $TV - TV2$ est envisagé afin de tenir compte des discontinuités du relief
- La correction des cartes des disparités dans les données PLEIADES en présence de micro-vibrations est possible avec une connaissance précise des principaux modes vibratoires.
- La séparation de V_1 et V_2 s'est avérée impossible dans le cadre fixé.

Bredies, Kunish, Pock, Total Generalized Variation, 2010 .

De Lussy , Greslou , Gross-Colzy , *Process line for geometrical image correction of disruptive microvibrations* , 2008 .

- 1 Introduction
- 2 Correction de micro-vibrations dans les systèmes à balayage
- 3 Restauration des images en échantillonnage irrégulier**
 - Présentation
 - Déconvolution d'images en échantillonnage irrégulier
 - Résultats et performances
 - Observations et perspectives
- 4 L'échantillonnage irrégulier en bande étroite
- 5 Conclusion

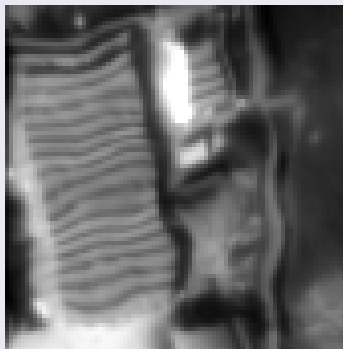
Modèle de données



$$v_k = (h_{sat} * u)(z_k) + \xi_k$$

- $h_{sat} = h_{opt} * h_{cap} * h_{mov}$
- $\Lambda = \{z_k\}_{1 \leq k \leq |\Lambda|}$ est l'ensemble d'échantillonnage irrégulier
- ξ_k un bruit Gaussien d'écart-type supposé connu

Modèle de données



$$v_k = (h_{sat} * u)(z_k) + \xi_k$$

- $h_{sat} = h_{opt} * h_{cap} * h_{mov}$
- $\Lambda = \{z_k\}_{1 \leq k \leq |\Lambda|}$ est l'ensemble d'échantillonnage irrégulier
- ξ_k un bruit Gaussien d'écart-type supposé connu

Problème de débruitage (1)

$$v_{k,l} = u(z_{k,l}) + \nu_{k,l} \quad , \quad z_{k,l} \in \Lambda \quad (\mathcal{P}_{samp})$$

Problème de déconvolution+débruitage (2)

$$v_{k,l} = (h_{sat} * u)(z_{k,l}) + \nu_{k,l} \quad , \quad z_{k,l} \in \Lambda \quad (\mathcal{P}_{blur})$$

Etat de l'art en échantillonnage irrégulier

- Strohmer, *Computationally attractive reconstruction of bandlimited images from irregular samples*, 1997 ♠
- Almansa et al., *Restoration and zoom of irregularly sampled, blurred, and noisy images by accurate total variation minimization with local constraints*, 2006 ♠♦
- Facciolo et al., *Irregular to regular sampling, denoising, and deconvolution*, 2009 ♠♦
- Arigovindan et al., *Variational image reconstruction from arbitrarily spaced samples : a fast multiresolution spline solution*, 2005 ♥♣

♠ : polynômes trigonométriques ♥ : fonctions splines

♦ : déconvolution, zoom, contraintes locales

♣ : multi-résolution, débruitage, contrainte globale

Objectif : accélérer la restauration des images par rapport à l'état de l'art grâce aux outils suivants

- fonctions d'interpolation à support compact (splines)
- programmation non-linéaire (opérateurs proximaux)

avec un paramètre de régularisation automatique.

Coût numériques de l'échantillonnage irrégulier

Soient S_Λ l'opérateur d'échantillonnage, $(a_{k,l})_{1 \leq k, l \leq N}$ les coefficients de l'image dans la base considérée, alors

- $S_\Lambda^* S_\Lambda a \asymp O((2N)^2 \log(N))$ (polynômes trigonométriques)
- $S_\Lambda^* S_\Lambda a \asymp O((d+1)^2 |\Lambda|)$ (espace de splines)

Etat de l'art en échantillonnage irrégulier

- Strohmer, *Computationally attractive reconstruction of bandlimited images from irregular samples*, 1997 ♠
- Almansa et al., *Restoration and zoom of irregularly sampled, blurred, and noisy images by accurate total variation minimization with local constraints*, 2006 ♠♦
- Facciolo et al., *Irregular to regular sampling, denoising, and deconvolution*, 2009 ♠♦
- Arigovindan et al., *Variational image reconstruction from arbitrarily spaced samples : a fast multiresolution spline solution*, 2005 ♥♣

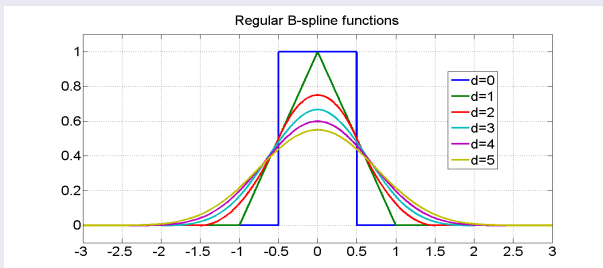
♠ : polynômes trigonométriques ♥ : fonctions splines

♦ : déconvolution, zoom, contraintes locales

♣ : multi-résolution, débruitage, contrainte globale

Méthode proposée

Fonctions splines 1D



Fonctions spline β_d (ordre 0 à 5)

Definition (Approximation splines 2D)

$$u(x, y) = \sum_{k,l} \beta_d(x - k) \beta_d(y - l)$$

k, l sont les noeuds de l'image (échantillonnage régulier).

L'opérateur de convolution

Soit $u \in S_{per}^d(n, m)$ l'espace des fonctions périodiques engendré par les splines périodiques, alors

$$h_{sat} * u \notin S_{per}^d(n, m).$$

Opérateur de projection

Soit $u = \sum_{k,l} a[k, l] \widetilde{\beta}_{d,2}(\cdot - (k, l))$

$$\begin{aligned} \text{proj}_{S_{per}^{d_2}(n,m)}(h * u) &= \underset{v \in S_{per}^{d_2}(n,m)}{\text{argmin}} \|h * u - v\|_{L^2([0,n] \times [0,m])}^2 \\ &= \sum_{k,l} (h_{proj} * a)[k, l] \widetilde{\beta}_{d,2}(\cdot - (k, l)) \end{aligned}$$

Formulation variationnelle

$$v^* = \underset{u \in S_{per}^d(n,m)}{\operatorname{argmin}} \quad \lambda TV(u) + \underbrace{\frac{1}{2} \left\| \operatorname{proj}(h_{sat} * u)(z_{k,l}) - v_{k,l} \right\|^2}_{\text{résidu}}$$

$$u^* = p_{low} * v^*$$

λ : paramètre de Lagrange , p_{low} : filtre passe-bas

$$E_{TV}(u) = \underbrace{f_1(u)}_{\text{homogène positive}} + \underbrace{f_2(u)}_{\text{différentiable}}$$

Schéma de minimisation semi-implicite

$$\begin{cases} u^{n+1/2} = u^n - \rho \nabla f_2(u^n) \\ u^{n+1} = \text{prox}_{\rho f_1}(u^{n+1/2}) \end{cases}$$

$\rho < \frac{2}{\text{Lip}(\nabla f_2)}$: pas de descente

$$\text{prox}_{\rho f_1}(u) = \underset{v}{\text{argmin}} \quad \rho f_1(v) + \frac{1}{2} \|v - u\|^2$$

- Chambolle et al. , An Algorithm for Total Variation Minimization and Applications, 2004
- Combettes et al. , Signal recovery by proximal forward-backward splitting, 2005

Schéma de minimisation semi-implicite

$$\begin{cases} u^{n+1/2} = u^n - \rho \nabla f_2(u^n) \\ u^{n+1} = \text{prox}_{\rho f_1}(u^{n+1/2}) \end{cases}$$

$\rho < \frac{2}{\text{Lip}(\nabla f_2)}$: pas de descente

$$\text{prox}_{\rho f_1}(u) = \underset{v}{\text{argmin}} \quad \rho f_1(v) + \frac{1}{2} \|v - u\|^2$$

- Chambolle et al. , An Algorithm for Total Variation Minimization and Applications, 2004
- Combettes et al. , Signal recovery by proximal forward-backward splitting, 2005
- *Beck et al. , A Fast Iterative Shrinkage-Thresholding Algorithm for Linear Inverse Problems , 2009*
- *Chambolle et al. , A First-Order Primal-Dual Algorithm for Convex Problems with Applications to Imaging, 2010*

Algorithme global : mise à jour multiplicative de λ

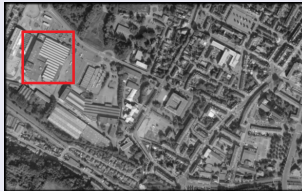
- 0 Calcul de u_0 par Gradient conjugué tronqué (ACT-splines)
- 1 Tant que **res** $\notin [R_1, R_2]$
 - Calcul de u_{n+1} par minimisation de E_{TV} avec $\lambda = \lambda_n$
 - Mise à jour de λ

$$\lambda_{n+1} = \lambda_n \times \phi(\mathbf{res}(u_{n+1}) - R|\Lambda|\sigma^2)$$

$$\mathbf{res}(u) = \frac{1}{2} \|\text{proj}(h_{\text{sat}} * u)(z_{k,l}) - v_{k,l}\|^2$$

$$R_1 = |\Lambda|(R - W)\sigma^2 \quad , \quad R_2 = |\Lambda|(R + W)\sigma^2$$

Ensemble d'images test



(a) Beauvais

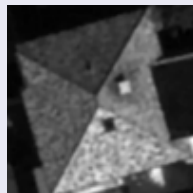
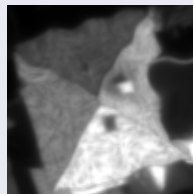
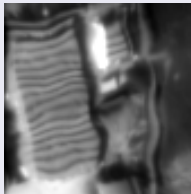


(b) Nimes



(c) Toulouse

Qualité de la reconstruction



Images test (haut) et restauration (bas) par la méthode proposée. ($\sigma = 1$)

Qualité de la reconstruction

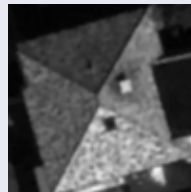
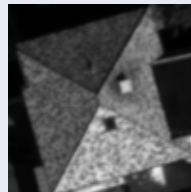
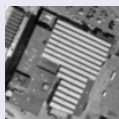
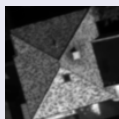
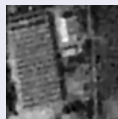
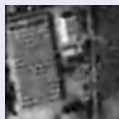
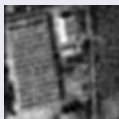


Image référence (haut) et restauration (bas) par la méthode proposée. ($\sigma = 1$)

Comparaison avec l'état de l'art



référence

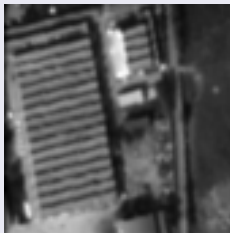
ACT

CG-splines
($\sigma = 7$)

FAR

TV-splines

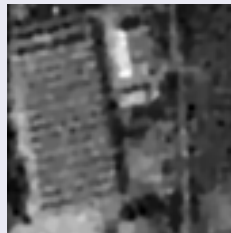
La mire de Nimes



Reference



(FAR)
PSNR = 30,61



(TV-splines)
PSNR = 30.58

Déconvolution+débruitage : $\sigma = 7$

image	σ	ACT	FAR	CG-S	TIKH-S	TV-S
beauvais	1	24.35	39.26	38.64	39.82	39.96
	3	24.34	33.24	32.70	33.56	33.97
	5	24.31	30.96	30.35	31.18	31.48
	7	24.27	29.61	29.05	29.52	29.89
nimes	1	26.62	40.35	38.816	39.88	40.91
	3	26.59	34.22	32.77	33.79	34.91
	5	26.53	31.93	30.70	31.44	32.38
	7	26.44	30.61	29.51	29.84	30.58
stmichel	1	28.00	42.70	40.57	41.53	43.12
	3	27.96	36.91	34.72	35.84	37.53
	5	27.89	34.65	32.86	33.31	34.52
	7	27.77	33.02	31.33	31.11	32.40

PSNR pour les différentes méthodes, ordre de splines $d=3$ (déconvolution).

image	σ	ACT	FAR	CG-S	TIKH-S	TV-S
beauvais	1	2.404s	24m36s	7.048s	28.430s	58.124s
	3	2.452s	8m55s	3.424s	12.461s	37.194s
	5	2.476s	5m55s	2.804s	11.749s	31.778s
	7	2.420s	4m36s	2.564s	10.893s	29.674s
nimes	1	0.828s	4m30s	1.180s	4.556s	12.169s
	3	0.836s	1m56s	0.652s	2.744s	9.201s
	5	0.816s	1m20s	0.552s	2.520s	8.273s
	7	0.824s	56s	0.516s	2.556s	9.453s
stmichel	1	2.860s	17m56s	2.888s	4.276s	34.522s
	3	2.852s	7m24s	1.732s	2.856s	28.926s
	5	2.920s	5m5s	1.588s	1.792s	33.410s
	7	2.872s	4m12s	1.404s	2.404s	30.506s

Temps de calcul pour les différentes méthodes, ordre de splines $d=3$ (déconvolution).

- Les résultats quantitatifs sont équivalents à l'état de l'art et temps de calcul divisé par un facteur 10 à 20.
- En débruitage+ré-échantillonnage simple une méthode quadratique obtient de meilleurs résultats (avec un temps de calcul inférieur).
- Les contraintes locales (FAR) débruitent mieux mais semblent laisser des zones lisses (Pondération de Voronoï).

- 1 Introduction
- 2 Correction de micro-vibrations dans les systèmes à balayage
- 3 Restauration des images en échantillonnage irrégulier
- 4 L'échantillonnage irrégulier en bande étroite**
 - L'instrument SIFTI
 - Modélisation et méthodes de reconstruction
 - Théorèmes de perturbation en bande étroite
 - Observations numériques
- 5 Conclusion

L'interféromètre statique : mesure de spectre par transformée de Fourier

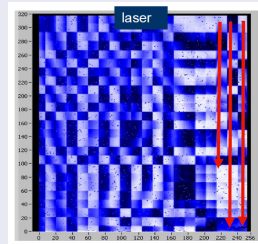
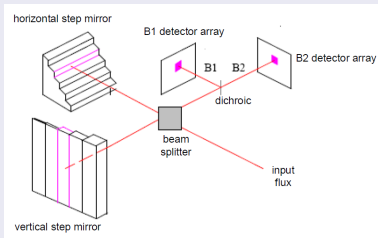
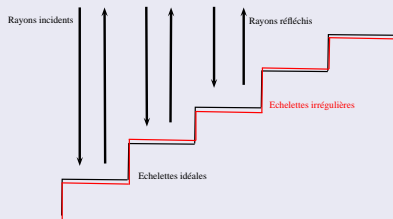


Schéma de l'interféromètre SIFTI (gauche). La lecture des valeurs de l'interférogramme se fait ici en colonnes (droite)

L'interférogramme

$$I_k = \int_A^B S(\sigma) (1 + \cos(2\pi x_k \sigma)) d\sigma$$

Irrégularité des échelottes et ensembles d'échantillonnage

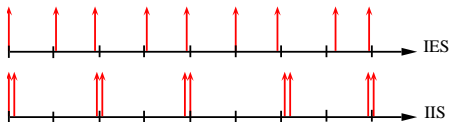


Irrégularité d'usinage des composants optiques

$$x_k = k dx + x_0 + \xi_k \quad (\text{IES})$$

$$\begin{cases} x_{2k} = k dx' + x'_0 + \xi_{2k} \\ x_{2k+1} = x_{2k} + \epsilon \end{cases} \quad (\text{IIS})$$

$$\xi_k \simeq \mathcal{N}(0, 5\mu\text{m})$$



Definition (Fonctions à bande étroite)

$$BP(K) = \{f \in L^2(\mathbb{R}^d) \text{ t.q. } \text{supp}(\hat{f}) \subset K \in \mathbb{R}^d\}$$

$$BP(A, B) = \{f \in L^2(\mathbb{R}) \text{ t.q. } \text{supp}(\hat{f}) \subset [-B, -A] \cup [A, B]\}$$

Theorem (Shannon généralisé)

Soient $0 \leq A < B$ et $dx > 0$. Alors $\{k dx\}_{k \in \mathbb{Z}}$ est un ensemble d'échantillonnage stable de $BP(A, B)$ si et seulement si

$$\exists 0 \leq k \leq \left\lfloor \frac{A}{B-A} \right\rfloor \text{ t.q. } dx \in \left[\frac{k}{2A}, \frac{(k+1)}{2B} \right], \quad k \in \mathbb{N}$$

$$I(x) = 2(B-A) dx \sum_{k \in \mathbb{Z}} I(k dx) \cos(\pi(B+A)x) \text{sinc}(\pi(B-A)x)$$

Méthodes linéaires de reconstruction (CNES)

- Interférogramme régularisé

$$I(x) \simeq \sum_{j=1..J} I(j dx_0) \phi(\cdot - j dx_0)$$

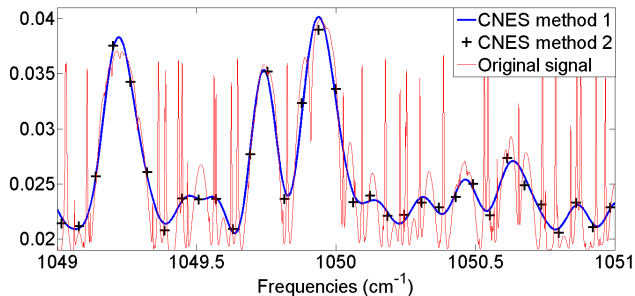
$$\tilde{S}_{rec1}(\cdot) = \sum_{j=1..J} I_{rec}(j dx_0) \cos(2\pi j dx_0 \cdot)$$

- Approximation de la transformée de Fourier

$$I_k \simeq \Delta \sigma \sum_{j=0..J} S(A + j\Delta \sigma) \cos(2\pi x_k (A + j\Delta \sigma))$$

$$(I_k)_{k=1..N} \simeq \mathcal{M} (S(A + j\Delta \sigma))_{j=1..M}$$

$$(\tilde{S}_{rec2}(A + j\Delta \sigma))_{j=1..M} = (\mathcal{M})^\dagger (I_k)_{k=1..N}$$

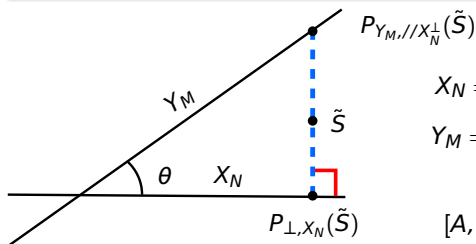


Deux reconstructions par les méthodes 1 et 2 : l'une est continue, l'autre n'est définie qu'en certains points $\{A + k \Delta \sigma\}$

spécification mission : $SNR \geq 650$ (0.079 NeDT)

Deux reconstructions, deux projections

$$\tilde{S}_{rec1} = \underset{Y_M // X_N^\perp}{\text{proj}} (\tilde{S}) \quad , \quad \tilde{S}_{rec2} \simeq \underset{\perp X_N}{\text{proj}} (\tilde{S})$$



$$X_N = \langle \{ \cos(2\pi x_k \sigma) \}_{k=1..N} \rangle$$
$$Y_M = \langle \{ \cos(2\pi j dx \sigma) \}_{j=1..M} \rangle$$
$$\sigma \in [-B, -A] \cup [A, B]$$
$$[A, B] = [1020, 1080] \text{ cm}^{-1}$$

Cadre général

- Une famille de mesure

$$\mathcal{B}_{mes} = \{\cos(2\pi x_k \sigma)\} \quad k = 1..K$$

- Une famille de reconstruction

$$\mathcal{B}_{rec} = \{\cos(2\pi y_j \sigma)\} \quad j = 1..J$$

$$\tilde{S}(\cdot) = \sum_{j=1..J} c_j \cos(2\pi y_j \cdot)$$

Reconstruction non-régularisée

$$c = Q^\dagger (I_k)_{k=1..K}$$

$$Q_{k,j} = \langle \cos(2\pi y_j \cdot), \cos(2\pi x_k \cdot) \rangle_{L^2([A,B])}$$

Definition

Soient $\mathcal{H} \subset L^2(\mathbb{R})$ un espace de Hilbert fonctionnel, $\Lambda \subset \mathbb{R}^d$ un ensemble dénombrable. Λ est appelé ensemble d'échantillonnage stable de \mathcal{H} si il existe $C > 0$ tel que

$$\|f\|_{\mathcal{H}}^2 \leq C \sum_{x \in \Lambda} |f(x)|^2 \quad \forall f \in \mathcal{H}$$

Theorem (Echantillonnage IES perturbé)

Soient $0 < A < B$ and $dx > 0$ vérifiant les conditions de Shannon généralisé. L'ensemble $\Lambda = \{x_k\}_{k \in \mathbb{Z}}$ tel que

$$|x_k - k dx| \leq L \quad \forall k \in \mathbb{Z}$$

est un ensemble d'échantillonnage stable de BP(A, B) si $L < \frac{\ln 2}{2\pi B}$.

Démonstration

- D'après le théorème de Shannon généralisé

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}} |f(k dx)|^2 = \frac{1}{dx} \|f\|_{L^2(\mathbb{R})}^2$$

Démonstration

- D'après le théorème de Shannon généralisé

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}} |f(k dx)|^2 = \frac{1}{dx} \|f\|_{L^2(\mathbb{R})}^2$$

- $BP(A, B)$ est stable par dérivation

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}} |f^{(l)}(k dx)|^2 \leq \frac{(2\pi B)^{2l}}{dx} \|f\|_{L^2(\mathbb{R})}^2$$

Démonstration

- D'après le théorème de Shannon généralisé

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}} |f(k dx)|^2 = \frac{1}{dx} \|f\|_{L^2(\mathbb{R})}^2$$

- $BP(A, B)$ est stable par dérivation

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}} |f^{(l)}(k dx)|^2 \leq \frac{(2\pi B)^{2l}}{dx} \|f\|_{L^2(\mathbb{R})}^2$$

- Les fonctions à bande limitée sur \mathbb{R} sont des fonctions entières (Paley-Wiener)

$$f(x_k) - f(k dx) = \sum_{l \geq 1} f^{(l)}(k dx) \frac{(x_j - k dx)^l}{l!}, \quad \forall k \in \mathbb{Z}$$

Démonstration



$$\sum_{k \in \mathbb{Z}} |f(x_k) - f(k dx)|^2 \leq \frac{1}{dx} (e^{2\pi BL} - 1) \|f\|^2$$

Duffin, Schaeffer, *A class of Nonharmonic Fourier Series*, 1952

Démonstration



$$\sum_{k \in \mathbb{Z}} |f(x_k) - f(k dx)|^2 \leq \frac{1}{dx} (e^{2\pi BL} - 1) \|f\|^2$$

Duffin, Schaeffer, *A class of Nonharmonic Fourier Series*, 1952

- Par inégalité triangulaire

$$\frac{1}{\sqrt{dx}} (2 - e^{2\pi BL}) \|f\| \leq \sqrt{\sum |f(x_k)|^2} \leq \frac{1}{\sqrt{dx}} e^{2\pi BL} \|f\|$$

$$L < \frac{\ln(2)}{2\pi B} \Rightarrow \|f\|^2 \leq dx (2 - e^{2\pi BL})^{-2} \sum |f(x_k)|^2$$

Theorem (Echantillonnage IIS)

Soient $0 < A < B$, $0 < dx \leq \frac{1}{B-A}$ et $d > 0$.

$$\mathcal{J} = \left\{ k \in \mathbb{Z} / \mu \left(\left([-B, -A] + \frac{k}{dx} \right) \cap [A, B] \right) > 0 \right\}$$

$\Lambda = \{l dx\}_{l \in \mathbb{Z}} \cup \{l dx + d\}_{l \in \mathbb{Z}}$ est un ensemble d'échantillonnage stable de $BP(A, B)$ si et seulement si

$$\mathcal{J} \cap \frac{dx}{d} \mathbb{Z} = \emptyset$$

Vaughan, Scott, White, *The theory of bandpass sampling*, 1991

Theorem (Echantillonnage IIS perturbé)

Soient $0 < A < B$, $0 < dx < \frac{1}{B-A}$ et d vérifiant le théorème précédent.
Il existe $L > 0$ t.q. tout ensemble $\Lambda = \{x_k\}_{k \in \mathbb{Z}}$ vérifiant

$$\begin{cases} |x_{2k} - k dx| \leq L \\ |x_{2k+1} - k dx - d| \leq L \end{cases} \quad \forall k \in \mathbb{Z}$$

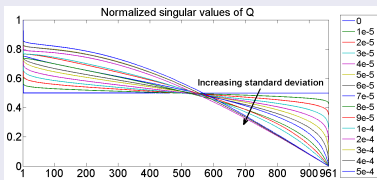
soit un ensemble d'échantillonnage stable de $BP(A, B)$.

Lorsque $dx \leq \frac{1}{B-A}$ et $(B+A)dx \in \mathbb{N}$ on a

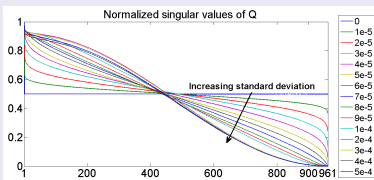
$$L \geq \frac{\ln(1 + 1/\kappa)}{2\pi B}$$

$$\kappa = \text{cond}\left(\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & e^{-i2\pi d \frac{k}{dx}} \end{pmatrix}\right)$$

Instabilité de l'échantillonnage IES : $dx = dx_{max}$



(a) Projection oblique



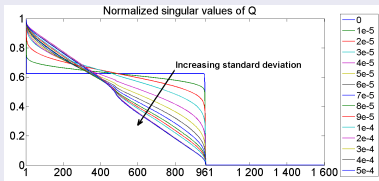
(b) Projection orthogonale

Valeurs singulières de la matrice de produits scalaires ($Q_{k,l}$) pour l'échantillonnage critique

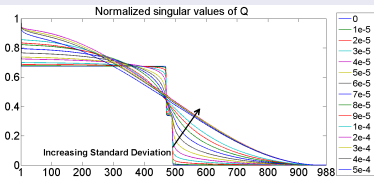
$$dx = dx_{max} = \frac{1}{2(B - A)}$$

$$Y_M = \{\cos(2\pi(k - 1) dx_{max} \sigma)\}_{k=1..961}$$

Cas $dx < dx_{max}$



(a) Projection orthogonale : $dx = 50 \mu\text{m}$
(Shannon généralisé)



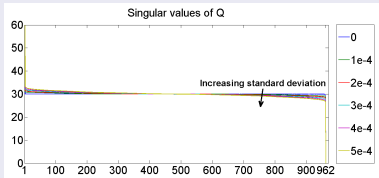
(b) Projection orthogonale : $dx = 81 \mu\text{m}$
(\neq Shannon généralisé)

Valeurs singulières de la matrice de produits scalaires ($Q_{k,l}$)

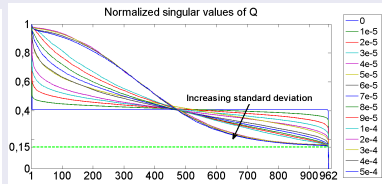
La perturbation de l'ensemble d'échantillonnage peut améliorer le conditionnement et la reconstruction

Wojtiuk, Martin, *Random sampling enables flexible design for multiband carrier signals*, 2001

Stabilité de l'échantillonnage IIS



(a) Projection oblique sur la base de co-sinus en quadrature



(b) Projection oblique sur la base duale approchée (hors quadrature)

Valeurs singulières de la matrice de produits scalaires ($Q_{k,l}$)

Les valeurs singulières sont bornées inférieurement ce qui améliore la qualité de la reconstruction

Le cadre fonctionnel des espaces de Hilbert et des fonctions à bande étroite permet

- d'expliquer la différence entre les reconstructions (notion de projection)
- de donner des bornes théoriques sur la perturbation maximale du réseau d'échantillonnage

Les simulations numériques montrent

- une plus grande sensibilité (conditionnement) de la projection orthogonale
- une meilleure stabilité des ensembles d'échantillonnage entrelacés et des familles de reconstruction associées

$$\mathcal{B}_{IIS} = \{\cos(2\pi k dx \sigma)\} \cup \{\cos(2\pi(k dx + \epsilon) \sigma)\}$$

Dans cette thèse nous avons étudié trois problèmes dans lesquels l'échantillonnage est modifié et proposé des méthodes de résolution

- la détection et la correction du tangage et roulis dans le relief estimé par Basis Pursuit, avec l'ajout d'une hypothèse affine sur le relief qui améliore la correction
- la déconvolution rapide des images déformées avec un algorithme basé sur la variation totale dans un espace de splines
- une généralisation des méthodes linéaires de reconstruction en bande étroite et l'étude de la stabilité de certains ensembles d'échantillonnage