Quelques résultats mathématiques en thermodynamique des fluides compressibles

Didier Jesslé

ÉCOLE DOCTORALE Mer et Sciences (ED 548)

THÈSE présentée par :

Didier JESSLÉ

soutenue le : **27 juin 2013**

pour obtenir le grade de Docteur en Mathématiques Appliquées

Quelques résultats mathématiques en thermodynamique des fluides compressibles

THÈSE dirigée par :

M. NOVOTNY Antonin	Professeur, Université du Sud Toulon Var

JURY :

M. BRESCH Didier	Directeur de recherche, Université de Savoie
M. GALLOUËT Thierry	Professeur, Aix-Marseille Université
M. GALUSINSKI Cédric	Professeur, Université du Sud Toulon Var
M. HASPOT Boris	Maître de Conférences, Université Paris Dauphine
M. NOVOTNY Antonin	Professeur, Université du Sud Toulon Var
M. SERRE Denis	Professeur, École Normale Supérieure de Lyon
M. SUEUR Franck	Maître de Conférences HDR, Université Paris 6

Remerciements

Un grand nombre de personnes m'a aidé et soutenu durant mon doctorat, je souhaite les remercier ici.

Tout d'abord, j'adresse mes plus sincères et amicaux remerciements à mon directeur de thèse Antonín Novotný. Sa rigueur, son sérieux et sa disponibilité ont été sans faille au cours de ces années de travail. Pour cela et pour son enthousiasme, je tiens à l'assurer de mon plus profond respect et de ma plus grande amitié.

Je souhaite également exprimer ici ma gratitude à Didier Bresch et Franck Sueur pour avoir accepté de rapporter ma thèse. Je les remercie pour l'intérêt qu'ils ont porté à mon travail et pour les commentaires qu'ils ont pu me soumettre.

Je remercie Thierry Gallouët, Cédric Galusinski, Boris Haspot et Denis Serre pour m'avoir fait l'honneur de participer à mon jury.

Je désire aussi remercier les membres du laboratoire IMATH pour leur accueil chaleureux et les années agréables que j'ai pu passer auprès d'eux. Merci à Jean-Jacques Alibert et Gloria Faccanoni pour nos discussions enrichissantes et les précieux conseils qu'ils ont su me donner.

Je tiens à exprimer ma reconnaissance envers Eduard Feireisl et Milan Pokorný qui m'ont permis de découvrir la recherche en mathématiques.

J'adresse un remerciement affectueux à mes amis et à ma famille qui m'ont soutenu tout au long des ces années.

Une immense pensée pour Carine, qui a toujours été à mes côtés et qui a fait d'innombrables sacrifices pour moi. Je lui dédie cette thèse.

Table des matières

PARTIE II
Écoulements non-stationnaires

Nomenclature

Notations diverses

a	:	les quantités scalaires sont désignées par une écriture normale,
$\mathbf{u}$	:	les quantités vectorielles sont désignées par une écriture en gras,
$\mathbb{M}$	:	les quantités matricielles sont désignées par une écriture en math blackboard,
$\mathbb{I}$	:	matrice identité,
$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}$	:	produit scalaire de $\mathbf{v}$ et $\mathbf{u}$,
$\mathbf{u} \times \mathbf{v}$	:	produit vectoriel de $\mathbf{v}$ et $\mathbf{u}$,
$\mathbf{u} \otimes \mathbf{v}$	:	produit tensoriel de $\mathbf{v}$ et $\mathbf{u}$,
$\mathbf{n}$	:	vecteur normal sortant,
$\mathbf{v}_k \to \mathbf{v}$	:	convergence forte,
$\mathbf{v}_k \rightharpoonup \mathbf{v}$	:	convergence faible,
$\mathbf{v}_k \overset{*}{\rightharpoonup} \mathbf{v}$	:	convergence faible-$*$,
$\overline{g(x)}$	:	limite faible de $g(x_k)$ dans L^1,
$\langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathcal{X},\mathcal{X}^*}$	:	crochet de dualité,
$\hookrightarrow$	:	inclusion continue,
1_Ω	:	indicatrice de l'ensemble Ω.

Notations différentielles

$\partial_x f$	:	dérivation de f par rapport à la variable x,
∇f	:	gradient de la fonction f,
$\nabla_x f(t,x)$	:	gradient par rapport au variables spatiales d'une fonction f dépendant du temps et de l'espace,
$\operatorname{div} \mathbf{v}$	:	divergence d'un vecteur $\mathbf{v}$,
$\operatorname{div}_x \mathbf{v}(t,x)$	:	divergence par rapport au variables spatiales d'un vecteur $\mathbf{v}$ dépendant du temps et de l'espace,
$\operatorname{rot} \mathbf{v}$	:	rotationnel d'un vecteur $\mathbf{v}$.

Ensembles et espaces

$\mathbb{N}$	:	ensemble des entiers naturels,
$\mathbb{Z}$	:	ensemble des entiers relatifs,
$\mathbb{R}$	:	ensemble des nombres réels,
$B(\mathbf{x}, r)$	:	boule centrée en $\mathbf{x}$ de rayon r,
$\partial\Omega$	:	frontière de l'ensemble Ω,
$\lvert\Omega\rvert$	:	mesure de l'ensemble Ω,
$\mathcal{X}^*$	:	dual topologique de l'espace $\mathcal{X}$,
$\overline{\mathcal{X}}^{\mathcal{Y}}$	:	fermeture de l'espace $\mathcal{X}$ dans l'espace $\mathcal{Y}$,
$\mathcal{C}(\Omega)$	:	espace des fonctions continues de Ω dans $\mathbb{R}$,
$\mathcal{C}(\Omega; \mathbb{R}^N)$	:	espace des fonctions continues de Ω dans $\mathbb{R}^N$,

$\mathcal{C}_B(\overline{\Omega})$: espace des fonctions continues bornées sur $\overline{\Omega}$,
$\mathcal{C}^k$: espace des fonctions continues dont toutes les dérivées jusqu'à l'ordre k sont continues,
$\mathcal{C}^\infty$: espace des fonctions continues dont les dérivées sont continues à n'importe quel ordre,
$\mathcal{C}_c$: espace des fonctions continues à support compact,
$\mathcal{C}_c^k$: espace des fonction k fois continument dérivables à support compact,
$\mathcal{C}_{\mathrm{weak}}([0,T];\mathcal{X})$: espace des fonctions à valeurs dans un espace de Banach $\mathcal{X}$ continues sur $[0,T]$ pour la topologie faibles de $\mathcal{X}$,
$\mathcal{D}(\Omega;\mathbb{R}^N)$: espace des fonctions indéfiniment dérivables à support compact,
$\mathcal{D}'(\Omega;\mathbb{R}^N)$: espace des distributions,
$L^p(\Omega;\mathbb{R}^N)$: espace de Lebesgue,
$L^p_{\mathrm{loc}}(\Omega;\mathbb{R}^N)$: espace des fonctions localement intégrables,
$[L^p+L^q](\Omega,\mathbb{R}^N)$: somme des espaces de Lebesgue,
$[L^p\cap L^q](\Omega,\mathbb{R}^N)$: intersection des espaces de Lebesgue,
$L^p_f(\Omega,\mathbb{R}^N)$: espace des fonctions pondérées par f p-intégrables,
$W^{k,p}(\Omega;\mathbb{R}^N)$: espace de Sobolev,
$W^{-k,p}(\Omega;\mathbb{R}^N)$: espace de Sobolev dual,
$W^{k,p}_{\mathbf{n}}(\Omega;\mathbb{R}^N)$: espace de Sobolev des fonctions à trace normale nulle.

Notations en mathématiques des fluides

ϱ : densité,
ϑ : température,
$\mathbf{u}$: vitesse,
p : pression,
s : entropie spécifique,
e : énergie interne spécifique,
E : énergie totale,
σ : taux de production d'entropie,
$\mathbb{S}$: tenseur des contraintes visqueuses,
$\mathbf{q}$: flux de chaleur,
κ : conductivité de la chaleur,
μ : viscosité de cisaillement,
ξ : viscosité volumique.

1 Introduction

Dans cette étude, on travaille sur deux problèmes à la fois liés mais distincts. C'est donc tout naturellement que l'exposé est divisé en deux parties traitant chacune de l'un de ces problèmes : les écoulements stationnaires pour l'une et les écoulements instationnaires pour l'autre.

On se concentre tout d'abord sur les écoulements stationnaires. On commence en traitant l'existence d'écoulements visqueux décrits par le système de Navier-Stokes isentrope, puis on généralise nos résultats au système complet de Navier-Stokes-Fourier qui comporte également l'équation de conservation d'énergie. Cette étude est faite sur des domaines bornés, pouvant être axisymétriques pour des conditions de glissement partiel au bord ou ne comportant pas de symétrie axiale pour un glissement parfait à la frontière. Bien que cette partie permette de mettre en place plusieurs résultats nouveaux, elle peut aussi être considérée comme une première étape technique avant de traiter l'existence des écoulements non stationnaires beaucoup plus délicate en terme de compacité.

Dans la seconde partie de cette thèse, on se consacre à l'étude des écoulements non stationnaires décrits par le système de Navier-Stokes-Fourier avec évolution temporelle. On choisit de travailler sur la formulation faible des équations, avec la conservation d'énergie exprimée en terme de bilan entropique. L'existence de solutions faibles pour ce type de problème a déjà été montrée dans le livre de Feireisl et Novotny [24] pour des domaines bornés. Notre but est donc d'étendre ces résultats à une large classe de domaines non bornés, où le fluide est soumis à un potentiel pouvant être non borné. Pour traiter ce problème, la notion de solution faible n'est plus adaptée, et il convient d'introduire la notion de solution très faible.

Depuis les travaux [25], on sait que dans un domaine borné toute solution faible vérifie aussi une inégalité dite d'entropie relative. On met en place ici ce type de résultat pour des domaines non bornés en montrant qu'il est possible de construire des solutions très faibles satisfaisant à cette inégalité d'entropie relative. Ces solutions très faibles particulières sont appelées solutions dissipatives.

Enfin, ce même article [25] montre aussi le principe d'unicité forte-faible que l'on porte ici aux domaines non bornés pour les solutions dissipatives. Ceci nécessite néanmoins que les forces potentielles décroissent vers zéro à l'infini.

Dans cette partie, on considère dans un premier temps des conditions de bord d'adhérence pour la vitesse, puis on retrouve les mêmes résultats pour des conditions de glissement. Dans chacun des cas, on suppose qu'il n'y a pas de transfert de chaleur avec l'extérieur.

1.1 Présentation de la première partie - Écoulements stationnaires

1.1.1 Le système de Navier-Stokes-Fourier stationnaire

Le système de Navier-Stokes-Fourier stationnaire est un système d'équations aux dérivées partielles non linéaire dont les inconnues sont la densité (de masse) du fluide $\varrho = \varrho(x)$, la température absolue du fluide $\vartheta = \vartheta(x)$ et le champ de vitesse du fluide $\mathbf{u} = \mathbf{u}(x)$. Ici, x la variable d'espace appartenant au domaine physique Ω occupé par le fluide étudié. Remarquons qu'il s'agit en fait de la réduction du problème de Navier-Stkoes-Fourier complet avec évolution temporelle (voir section 1.2.1) où l'on considère que nos grandeurs ne dépendent pas du temps. Les équations de Navier-Stokes-Fourier décrivent les lois de conservation thermodynamique qui régissent le comportement de ϱ, ϑ et $\mathbf{u}$:

- la conservation de la masse :

$$\operatorname{div}(\varrho\mathbf{u}) = 0, \tag{1.1}$$

- la conservation de la quantité de mouvement :

$$\operatorname{div}(\varrho\mathbf{u} \otimes \mathbf{u}) - \operatorname{div}\mathbb{S} + \nabla p = \varrho\mathbf{f}, \tag{1.2}$$

- la conservation de l'énergie totale :

$$\operatorname{div}(\varrho E\mathbf{u}) = \varrho\mathbf{f}\cdot\mathbf{u} - \operatorname{div}(p\mathbf{u}) + \operatorname{div}(\mathbb{S}\mathbf{u}) - \operatorname{div}\mathbf{q}, \tag{1.3}$$

où $E(\varrho, \vartheta, \mathbf{u}) = e(\varrho, \vartheta) + \frac{1}{2}\varrho\mathbf{u}^2$ avec $e(\varrho, \vartheta)$ l'énergie interne spécifique du fluide
Cette dernière peut aussi être considérée au sens entropique

$$\operatorname{div}(\varrho s\mathbf{u}) + \operatorname{div}\left(\frac{\mathbf{q}(\vartheta, \nabla\vartheta)}{\vartheta}\right) = \frac{\mathbb{S}(\vartheta, \nabla\mathbf{u}) : \nabla\mathbf{u}}{\vartheta} - \frac{\mathbf{q}(\vartheta, \nabla\vartheta)\cdot\nabla\vartheta}{\vartheta^2} \tag{1.4}$$

grâce à la formule de Gibbs qui définie l'entropie spécifique $s(\varrho, \vartheta)$

$$\mathrm{d}s = \mathrm{d}e - \frac{p}{\varrho^2}\,\mathrm{d}\varrho.$$

Dans le système, $p(\varrho, \vartheta)$ représente la pression au sein du fluide, $\mathbf{f}$ est une force extérieure. Le tenseur $\mathbb{S}(\vartheta, \nabla_x\mathbf{u})$ symbolise les contraintes visqueuses et on fait l'hypothèse qu'il dépend linéairement du gradient symétrisé de la vitesse (on dit que le fluide est newtonien). Enfin, le flux de chaleur $\mathbf{q}(\vartheta, \nabla_x\vartheta)$ obéit à la loi de Fourier et il est donc proportionnel au gradient de la température. Dans toute cette partie, on travaille sur des domaines bornés mais les conditions de bord que l'on impose influent sur la structure des domaines admissibles (on ne pourra prendre un domaine axisymétrique que dans le cas ou les glissements ne sont pas parfaits).

On commence notre étude avec le cas d'un fluide barotrope, ce qui réduit notre système aux équations suivantes

$$\operatorname{div}(\varrho\mathbf{u}) = 0. \tag{1.5}$$

$$\operatorname{div}(\varrho\mathbf{u}\otimes\mathbf{u}) - \operatorname{div}\mathbb{S}(\nabla\mathbf{u}) + \nabla p(\varrho) = \varrho\mathbf{f}, \tag{1.6}$$

avec un tenseur des contraintes visqueuses ne dépendant plus que du gradient de la vitesse. Dans ce cas, on impose des conditions de glissement au bord pour la vitesse.

On généralise ensuite notre étude au système complet de Navier-Stokes-Fourier décrit au début de cette section. On choisit pour ce travail des conditions de bord de glissement partiel pour la vitesse, et un transfert de chaleur dépendant de la température extérieure.

1.1.2 Contexte et présentation des résultats obtenus

L'existence de solutions faibles pour les équations de Navier-Stokes dans le cas barotrope est un problème récent. Les premières démonstrations remontent en effet au livre [52] de P.L. Lions. Il y est prouvé l'existence d'un type particulier de solutions faibles dans le cas où le coefficient adiabatique γ est strictement supérieur à $5/3$. Cette condition est liée à la nécessité d'employer le concept de solution renormalisée de l'équation de conservation de la masse qui lui même demande dans ce contexte que la densité soit de carré sommable. Ce coefficient adiabatique est le coefficient qui lie le comportement de la pression à celui de la densité, et la physique statistique nous enseigne *via* le théorème d'équirépartition que pour traiter les gaz polyatomiques il faut considérer des coefficients adiabatiques proches de 1. Néanmoins, les travaux de Lions se révélèrent fondateurs puisque le concept de flux effectif visqueux qu'il a introduit à cette occasion ainsi que l'adaptation de la notion de solutions renormalisées à l'équation de conservation de masse sont devenus des outils standard dans l'étude du système de Navier-Stokes-Fourier complet.

Une autre avancée conceptuelle fut faite par Feireisl et al. dans son livre [21] et dans [26] avec la création d'une mesure de défaut dans le cas instationnaire. L'utilisation de cette dernière a permis à Novo et Novotný dans [60] de montrer l'existence de solutions faibles dans le cas stationnaire pour certaines situations où la densité n'est pas de carré intégrable. Cette mesure de défaut est elle aussi devenue un argument standard dans l'étude du système complet de Navier-Stokes-Fourier pour montrer la convergence forte de la densité. Les travaux [60] et [62] montrent la compacité des solutions faibles sous hypothèse que la densité est simplement bornée dans L^q avec $q > 1$, et le problème d'existence s'en trouve ainsi réduit à l'obtention de ces estimations.

Březina et Novotný, dans leur article [6], ont obtenu les premiers résultats d'existence de solutions faibles pour γ strictement inférieur à $5/3$. Cependant une restriction sur le coefficient adiabatique est encore présente ($\gamma > \frac{1+\sqrt{13}}{3}$), et des conditions de bord périodiques ont été considérées afin d'éviter d'éventuels problèmes à la frontière.

Par la suite, Frehse *et al.* [28], [29] ont eu une autre approche, basée sur des estimations de type potentiel de la pression permettant d'améliorer les estimations de la densité. Deux des clés de ce travail sont le choix d'un paramètre de bootstrapping et un test judicieux de l'équation de quantité de mouvement. Les auteurs arrivent grâce à cette méthode à une preuve d'existence pour $\gamma > 4/3$ en trois dimensions et $\gamma \geq 1$ en deux dimensions, cela pour des conditions de bord de Dirichlet. Ces résultats sont néanmoins transposables aux conditions de Navier à la frontière.

Enfin, un nouveau paramètre de bootstrapping a été employé par Jiang et Zhou dans [48] qui permet d'assurer l'existence de solutions faibles pour un coefficient adiabatique strictement supérieur à 1. Malheureusement, ce résultat n'est obtenu que dans le cas des conditions de bord périodiques.

Nous reprenons dans notre étude du système de Navier-Stokes barotrope ce paramètre de bootstrapping, mais nous arrivons à établir des estimations de type potentiel jusqu'au bord du domaine. Il nous faut donc mettre en place une fonction test pour l'équation de quantité de mouvement qui prend en compte les conditions de glissement partiel imposées. Ces fonctions sont mises en place dans la section 2.5 du chapitre 2. Le reste de la preuve d'existence des solutions faibles repose sur des techniques standard telles que l'utilisation de l'opérateur d'inversion de la divergence de Bogovskii, une inégalité de type Korn spécifique, l'identité du flux effectif visqueux, une mesure de défaut ou encore les solutions renormalisées de l'équation de conservation de la masse. On arrive de cette façon à montrer l'existence de solutions faibles au système de Navier-Stokes barotrope pour des coefficients adiabatiques proches de 1.

On généralise ensuite ce travail au système de Navier-Stokes-Fourier stationnaire complet où l'on définit deux types de solutions faibles : les solutions faibles qui vérifient l'équation de bilan d'énergie totale au sens faible et les solutions entropiques variationnelles satisfaisant le bilan d'entropie au sens faible sous forme d'inégalité.

Dans un souci de clarté, nous ne reportons pas dans l'introduction les détails des définitions des solutions faibles que nous utilisons, ni des résultats obtenus. Les définitions considérées se trouvent dans les sections 2.1.4 et 3.2.1. Les résultats d'existence sont rassemblés dans trois théorèmes : 2.1, 3.1 et 3.2.

1.2 Présentation de la seconde partie - Écoulements non stationnaires

1.2.1 Le système de Navier-Stokes-Fourier avec évolution temporelle

Le système de Navier-Stokes-Fourier non stationnaire décrit l'évolution des trois variables caractérisant l'écoulement d'un fluide dans le temps. On étudie donc le comportement de la densité du fluide $\varrho = \varrho(t,x)$, la température absolue du fluide $\vartheta = \vartheta(t,x)$ et le champ de vitesse du fluide $\mathbf{u} = \mathbf{u}(t,x)$ sur un domaine physique occupé par le fluide. Les lois de conservation thermodynamique incluent donc les variations temporelles de nos grandeurs physiques.

- la conservation de la masse
$$\partial_t \varrho + \operatorname{div}(\varrho \mathbf{u}) = 0, \tag{1.7}$$
- la conservation de la quantité de mouvement
$$\partial_t(\varrho \mathbf{u}) + \operatorname{div}_x(\varrho \mathbf{u} \otimes \mathbf{u}) + \nabla_x p(\varrho, \vartheta) = \operatorname{div}_x \mathbb{S}(\vartheta, \nabla_x \mathbf{u}) + \varrho \nabla_x F, \tag{1.8}$$
- la conservation de l'énergie
$$\partial_t(\varrho e(\varrho,\vartheta)) + \operatorname{div}_x(\varrho e(\varrho,\vartheta)\mathbf{u}) + \operatorname{div}_x \mathbf{q}(\vartheta, \nabla_x \vartheta) + p(\varrho,\vartheta) \operatorname{div}_x \mathbf{u} = \mathbb{S}(\vartheta, \nabla_x \mathbf{u}) : \nabla_x \mathbf{u}, \tag{1.9}$$

  dans son écriture pour l'énergie interne spécifique $e(\varrho, \vartheta)$.

Notons que cette dernière équation bilan peut être exprimée en terme d'énergie totale $E = e(\varrho,\vartheta) + \frac{1}{2}\mathbf{u}^2$

$$\partial_t(\varrho E(\varrho,\vartheta)) + \operatorname{div}_x(\varrho E(\varrho,\vartheta)\mathbf{u} + p(\varrho,\vartheta)\mathbf{u}) + \operatorname{div}_x \mathbf{q}(\vartheta, \nabla_x \vartheta) = \operatorname{div}_x(\mathbb{S}(\vartheta, \nabla_x \mathbf{u})\mathbf{u}) \tag{1.10}$$

ou encore en terme d'entropie spécifique $s(\varrho, \vartheta)$

$$\partial_t(\varrho s(\varrho, \vartheta)) + \operatorname{div}_x(\varrho s(\varrho, \vartheta)\mathbf{u}) + \operatorname{div}_x \left(\frac{\mathbf{q}(\vartheta, \nabla\vartheta)}{\vartheta} \right) = \sigma. \tag{1.11}$$

Dans cette dernière forme, on rappelle que l'entropie spécifique $s(\varrho, \vartheta)$ est définie par la relation de Gibbs

$$\mathrm{d}s = \mathrm{d}e - \frac{p}{\varrho^2}\,\mathrm{d}\varrho$$

et σ est le taux de production d'entropie qui vaut (quand l'équation est satisfaite au sens fort)

$$\sigma = \frac{1}{\vartheta} \left(\mathbb{S}(\vartheta, \nabla_x \mathbf{u}) : \nabla_x \mathbf{u} - \frac{\mathbf{q}(\vartheta, \nabla_x\vartheta) \cdot \nabla_x\vartheta}{\vartheta} \right).$$

La fonction $p(\varrho, \vartheta)$ représente la pression du fluide, la fonction $\nabla_x F = \nabla_x F(x)$ représente une force potentielle et $\mathbb{S}(\vartheta, \nabla_x \mathbf{u})$ et $\mathbf{q}(\vartheta, \nabla_x\vartheta)$ représentent quant à elles le tenseur des contraintes visqueuses et le flux de chaleur.

On fait plusieurs suppositions concernant ces fonctions constitutives. On considère en particulier que le fluide est newtonien et qu'il vérifie l'hypothèse de Stokes, ce qui signifie que le tenseur des contraintes visqueuses dépend linéairement du gradient symétrisé de la vitesse qui doit lui-même être à trace nulle. On prend aussi pour hypothèse que le flux de chaleur suit la loi de Fourier, qui stipule qu'il est proportionnel au gradient de température. Les lois de conservations sont détaillées dans le chapitre 4.

Enfin, on travaille avec des conditions de bord d'adhérence pour la vitesse et une absence de transfert de chaleur au travers de la frontière. On généralise ensuite nos résultats aux conditions de glissement de Navier.

1.2.2 Contexte et présentation des résultats obtenus

Les équations de Navier-Stokes-Fourier décrites dans le paragraphe précédent forment un système d'équation aux dérivées partielles fortement non linéaire, c'est pourquoi il a été très largement étudié pour des cas où les données initiales sont des petites perturbations d'états déjà connus, principalement des états d'équilibre. Ces études amènent à des solutions régulières proches de ces états connus. Parmi les travaux fondamentaux de ce domaine, on se réfère aux articles [55] et [56] de Matsumura et Nishida, de Valli, Zajaczkowski [82] ou plus récemment aux résultats d'Alazard [1] ou de Danchin [12]. Enfin, des perturbations moins régulières ou même discontinues ont été traitées par Hoff dans [39]. Pour une bibliographie plus complète, voir le livre de Bahouri *et al.* [2].

Les résultats récents sur les critères d'explosion pour le système de Navier-Stokes-Fourier complet nous apprennent que la disparition des solutions fortes ou l'apparition de singularité peuvent être causées par de fortes densité ou température, ainsi que par la création de zones de vide dans le domaine, comme montré dans l'article [77] de Sun *et al.* ou encore dans Feireisl *et al.* [27]. L'équation de bilan de masse étant une équation de transport, il semble tout à fait naturel que des discontinuités présentes dans les données initiales se propagent à tout temps positif, comme l'ont mis en évidence Hoff et Serre dans [43] puis Hoff [40] et [42] avec Santos. L'absence de résultats sur l'existence de solutions fortes globales en temps nous incite naturellement à étudier le système de Navier-Stokes-Fourier complet dans sa formulation faible, dans l'esprit des travaux de Leray pour les fluides incompressibles dans [50]. Ses travaux ont pu être généralisés aux équations de Navier-Stokes compressibles pour les écoulements barotropes par Lions [51]

$$\partial_t \varrho + \operatorname{div}(\varrho \mathbf{u}) = 0,$$

$$\partial_t(\varrho \mathbf{u}) + \operatorname{div}(\varrho \mathbf{u} \otimes \mathbf{u}) + \nabla_x p(\varrho) = \operatorname{div} \mathbb{S}(\nabla_x \mathbf{u}).$$

En effet, Lions y a identifié le flux effectif visqueux, une quantité fondamentale dans la description des oscillations de la densité (voir aussi les résultats indépendants de Hoff [41] et Serre [74]) qui, associée à la notion de solution renormalisée de l'équation de conservation de masse introduite dans ses travaux avec DiPerna [14], lui a permis de démontrer l'existence de solutions faibles pour ce problème. Ces derniers résultats ont pu être étendus dans Feireisl *et al.* [21] et [26].

Une autre direction a été prise par Vaigant et Kazhikhov [81] qui ont considéré une viscosité dépendant de manière particulière de la densité. Les travaux dans cette voie ont en quelque sorte été poursuivis par Mellet, Vasseur [57] et Bresch et Desjardins [4], [5]. En prenant une viscosité dépendant de la densité de manière spécifique, ces derniers ont réussi à démontrer une inégalité d'entropie qui implique une compacité dans la suite de densité pour le système de Navier-Stokes-Fourier complet dans lequel ils ont considéré la formulation faible de la conservation d'énergie totale. Feireisl choisit quant à lui dans [21] de traiter le système de Navier-Stokes-Fourier complet avec une conservation d'énergie interne sous forme d'inégalité. Il prouve l'existence de solutions faibles pour une pression affine par rapport à la température. Il utilise cependant l'égalité globale de conservation d'énergie déduite grâce aux conditions à la frontière

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_\Omega \frac{1}{2}\varrho\mathbf{u}^2 + \varrho e(\varrho,\vartheta)\,\mathrm{d}x = 0.$$

Inspirés par Feireisl et Novotný [24, Chapitre 3], nous définissons dans cette thèse les solutions faibles avec une conservation d'énergie reposant sur le bilan d'entropie (1.11). Le taux de production d'entropie y est considéré comme une mesure positive supérieure au taux physique de production d'entropie, ce qui se traduit par l'inégalité

$$\sigma \geq \frac{1}{\vartheta}\left(\mathbb{S}(\vartheta,\nabla_x\mathbf{u}) : \nabla_x\mathbf{u} - \frac{\mathbf{q}(\vartheta,\nabla_x\vartheta)\cdot\nabla_x\vartheta}{\vartheta}\right).$$

Dans leurs travaux, Feireisl et Novotný utilisent l'égalité globale de conservation d'énergie pour compenser le manque d'informations apporté par l'écriture d'une inégalité en lieu et place de l'égalité de conservation d'énergie. Cette dernière n'est en effet pas adaptée aux études dans les domaines non bornés car l'intégrale en question diverge en général. Ne pouvant pas écrire cette égalité pour un domaine non borné, on fait l'hypothèse que l'inégalité de dissipation suivante est satisfaite :

$$\begin{aligned}&\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_\Omega \left(\frac{1}{2}\varrho|\mathbf{u}|^2 + H_{\overline{\vartheta}}(\varrho,\vartheta) - \partial_\varrho H_{\overline{\vartheta}}(\tilde{r},\overline{\vartheta})(\varrho-\tilde{r}) - H_{\overline{\vartheta}}(\tilde{r},\overline{\vartheta})\right)\mathrm{d}x\\ &+\int_\Omega \frac{\overline{\vartheta}}{\vartheta}\left(\mathbb{S}(\vartheta,\nabla_x\mathbf{u}) : \nabla_x\mathbf{u} - \frac{\mathbf{q}(\vartheta,\nabla_x\vartheta)\cdot\nabla_x\vartheta}{\vartheta}\right)\mathrm{d}x \leq 0.\end{aligned}$$

Ces constatations nous ont conduits à la définition des solutions très faibles détaillée en section 4.2, définition 4.1 qui s'avère trop longue pour figurer dans cette introduction. Dans le chapitre 5, on montre dans le théorème 5.3 l'existence de ces solutions très faibles au système de Navier-Stokes-Fourier pour une large variété de domaines non bornés et ceci en présence de forces potentielles pouvant être non bornées. Notons au passage que dans les domaines bornés, toute solution faible est une solution très faible. On commence par étudier le problème avec des conditions de bord d'adhérence pour la vitesse, mais il est aussi possible de traiter des conditions de glissement, moyennant quelques changements dans la définition des solutions faibles ainsi que dans la démonstration de leur existence. Ce résultat est effectué dans le chapitre 8, théorème 8.3. La preuve de ce théorème repose sur l'emploi d'une suite de domaines bornés croissante au sens de l'inclusion qui tend à "remplir" le domaine non borné étudié, ainsi que sur de nombreuses techniques introduites dans [24, Chapitre 3]. On compte parmi celles-ci des inégalités de type Korn et de Poincaré particulières, la convergence forte de la température *via* le lemme div-rot et des mesures de Young paramétrées, la convergence forte de la densité grâce à l'identité du flux effectif visqueux (s'appuyant lui-même sur des lemmes de commutateurs de type Coifman, Meyer [9]), une mesure de défaut pour la densité à la manière de Feireisl [21] ou encore le concept de solutions renormalisées à l'équation de conservation de masse.

Dans le chapitre 6, on remarque le rôle crucial de la quantité

$$H_\Theta(\varrho,\vartheta) = \varrho e(\varrho,\vartheta) - \varrho\Theta s(\varrho,\vartheta)$$

qui est une sorte d'énergie libre de Helmholtz, où les densité et température sont celles d'une solution très faible et Θ est une température de référence. Comme on fait l'hypothèse de stabilité thermodynamique de notre fluide (*i.e.* la compressibilité et la capacité thermique à volume constant sont positives), on sait que $\varrho \mapsto H_\Theta(\varrho,\Theta)$ est une fonction strictement convexe et que $\vartheta \mapsto H_\Theta(\varrho,\Theta)$ atteint son minimum en $\vartheta = \Theta$. Cela nous amène a étudier la quantité

$$\mathcal{E}(\varrho,\vartheta|r,\Theta) = H_\Theta(\varrho,\vartheta) - \partial_\varrho H_\Theta(\varrho,\vartheta)(\varrho-r) - H_\Theta(r,\Theta)$$

qui est appelée entropie relative et qui permet de mesurer la "distance" entre (ϱ, ϑ) et un autre état quelconque (r, Θ). Dans [25], Feireisl et Novotný ont prouvé que toute solution faible du type [24, Chapitre 3] satisfait une inégalité dite d'entropie relative basée sur la quantité $\mathcal{E}$:

$$\begin{aligned}
&\int_\Omega \frac{1}{2}\varrho|\mathbf{u}-\mathbf{U}|^2 + \mathcal{E}(\varrho,\vartheta|r,\Theta)\,\mathrm{d}x\Big|_0^\tau \\
&+ \int_0^\tau \int_\Omega \left(\Theta\frac{\mathbb{S}(\vartheta,\nabla_x\mathbf{u})}{\vartheta} : \nabla_x\mathbf{u} - \mathbb{S}(\vartheta,\nabla_x\mathbf{u}) : \nabla_x\mathbf{U}\right)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t \\
&- \int_0^\tau \int_\Omega \left(\Theta\frac{\mathbf{q}(\vartheta,\nabla_x\vartheta)}{\vartheta^2} : \nabla_x\vartheta - \frac{\mathbf{q}(\vartheta,\nabla_x\vartheta)}{\vartheta}\cdot\nabla_x\Theta\right)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t \\
&\le \int_0^\tau \mathcal{R}(\varrho,\vartheta,\mathbf{u}|r,\Theta,\mathbf{u})\,\mathrm{d}t,
\end{aligned}$$

où la définition du terme $\mathcal{R}$ est donnée dans le chapitre 4, définition 4.3. Cette inégalité est mise en place pour les domaines bornés et en nous inspirant de [25], nous proposons dans le chapitre 6 de construire des solutions très faibles qui la vérifient pour une large classe de domaines non bornés. Nous appelons ces solutions très faibles particulières solutions dissipatives et ces résultats font l'objet du théorème 6.1. Une fois encore, cette démarche est faite dans le cadre de conditions d'adhérence au bord, mais il est possible de la mettre en place pour les conditions de Navier, ce que nous montrons dans le chapitre 8, théorème 8.4.

Notons que dans le cas barotrope plus réduit, l'entropie relative a été construite dans les domaines bornés et non bornés dans les travaux de Feireisl, Jin et Novotný [23] (voir aussi Germain [34] ou encore Feireisl, Novotný et Sun [27]). Notons aussi que le concept d'entropie relative a été introduit dans le contexte de lois de conservations hyperboliques par Dafermos [10], dans le cas de l'équation de Boltzman par Saint-Raymond [72] ou encore pour les équations d'Euler incompressibles par Lions [52] puis employé *ad hoc* pour d'autres types d'équation, voir par exemple Carillo *et al.*[8], Masmoudi [54] et [53], Ukai [80], Wang et Jiang [83].

La construction de cette inégalité d'entropie relative fait apparaître que la quantité

$$\int_\Omega \frac{1}{2}\varrho|\mathbf{u}-\mathbf{U}|^2 + \mathcal{E}(\varrho,\vartheta|r,\Theta)\,\mathrm{d}x$$

est un outil tout à fait adapté à la mesure d'une sorte de "distance" entre une solution faible du système de Navier-Stokes-Fourier et l'état décrit par le triplet $(r, \Theta, \mathbf{U})$. Ceci nous incite à utiliser l'inégalité d'entropie relative afin de montrer qu'une solution faible dissipative et une solution forte issue des mêmes données initiales coïncident. Ce type de résultat, appelé principe d'unicité forte-faible, est connu depuis longtemps pour les fluides de Navier-Stokes incompressibles (voir Prodi [70] et Serrin [75]). Il a aussi été invoqué plus récemment dans les travaux de Eskauriaza *et al.* [17]. Feireisl *et al.* ont pu prouver que ce principe est vrai pour les écoulements barotropes incompressibles dans [23] après des résultats partiels de Germain [34] et de Desjardins [13]. Dans le cas du système de Navier-Stokes-Fourier complet en domaine borné, l'unicité forte-faible a été montrée très récemment dans [25].

Nous proposons dans le chapitre 7 de vérifier ce principe d'unicité-forte faible à une classe de domaines non bornés très large *via* le théorème 7.1. Dans notre cas néanmoins, on prouve uniquement que les solutions dissipatives suivent ce principe, mais pas que chacune des solutions très faibles le respecte. Pour prouver ce résultat, on utilise l'inégalité d'entropie relative pour déterminer la "distance" entre une solution dissipative et une solution forte issues des mêmes données initiales. Cela fait apparaître une forme essentiellement quadratique qui permet l'emploi du lemme de Gronwall montrant que les deux solutions coïncident. Le même résultat est mis en place pour les conditions de Navier, moyennant quelques modifications mineures dans la preuve du principe d'unicité forte-faible, dans le théorème 8.5. Toutefois quelques restrictions supplémentaires sur les domaines compatibles sont à constater, à cause de la nécessité d'une inégalité de type Korn spécifique. Ce travail est détaillé dans le chapitre 8 .

Première partie

Écoulements stationnaires

Dans cette première partie, on expose deux résultats d'existence de solutions faibles pour le système de Navier-Stokes dans le cas stationnaire.
On s'intéresse tout d'abord au système de Navier-Stokes pour le cas barotrope avec des conditions de glissement de Navier au bord du domaine. On montre l'existence de solutions faibles renormalisées à énergie bornée pour ce problème avec une loi de pression comportant un coefficient adiabatique aussi proche de 1 qu'on le souhaite. Cette étude est faite sur des domaines ne présentant pas de symétrie axiale, la raison en étant une inégalité particulière de type Korn.
On s'affranchit ensuite de cette condition lors de l'étude du système complet de Navier-Stokes-Fourier prenant en compte les variations de température, avec des conditions de glissement partiel au bord. On montre cette fois-ci l'existence de solutions entropiques variationnelles et de solutions faibles avec des contraintes sur le coefficient adiabatique et le coefficient de conductivité de la chaleur.

2 Existence de solutions faibles renormalisées pour les équations de Navier-Stokes dans le cas stationnaire barotrope

Sommaire

2.1 Introduction et description du problème

2.1.1 Introduction

On étudie ici l'existence de solutions faibles renormalisées au système de Navier-Stokes stationnaire dans le cas où la pression ne dépend que de la densité, avec des conditions de glissement parfait au bord. On montre que l'existence est assurée pour un coefficient adiabatique aussi proche de 1 qu'on le désire.

Dans cette optique, on écrit un système approchant dont l'existence de solutions est bien connue et qui nous donne des estimations d'énergie et de type Bogovskii sur plusieurs quantités. Ces estimations se font toutes en fonction d'un paramètre de bootstrapping particulier bien choisi.

On met ensuite en place des fonctions test permettant de faire des estimations de type potentiel jusqu'au bord du domaine. Ces dernières nous octroient la possibilité d'estimer notre paramètre de bootstrapping et de le majorer par une constante. Ainsi, toutes les quantités de notre système approchant sont estimées de manière uniforme.

On peut finalement passer à la limite dans notre système approchant en employant plusieurs techniques récentes devenues standard : l'identité du flux effectif visqueux, une mesure de défaut et l'équation de bilan de masse renormalisée, voir Lions [52], Feireisl [21], Feireisl *et al.* [26] et Novotný, Straškraba [62].

Ce chapitre est directement inspiré par les travail de Jiang et Zhou [48] qui traite du même problème sur un tore. Ce dernier article utilise de manière essentielle les estimations de type potentiel introduites dans ce domaine par Frehse *et al.* dans [28] [29] ainsi que par Plotnikov et Sokolowski dans [68], [67] et [66] sur lesquels nous nous reposons également. La principale contribution effectuée ici est l'introduction de fonctions test spécifiques qui permettent d'obtenir ces estimations en tenant compte de la frontière.

Les résultats obtenus dans ce chapitre ont été l'objet de l'article [45].

2.1.2 Le système de Navier-Stokes

Dans ce premier chapitre, on étudie le système de Navier-Stokes compressible décrivant un fluide newtonien compressible en régime barotrope stationnaire dans un domaine tridimensionnel borné et avec des conditions de glissement au bord. On montre l'existence de deux variables d'état, la densité du fluide $\varrho(x)$ et le champ de vitesse du fluide $\mathbf{u}(x)$, satisfaisant au système d'équations aux dérivées partielles suivant, sur un domaine $\Omega \subset \mathbb{R}^3$:

$$\operatorname{div}(\varrho\mathbf{u}) = 0. \tag{2.1}$$

$$\operatorname{div}(\varrho\mathbf{u} \otimes \mathbf{u}) - \operatorname{div}\mathbb{S} + \nabla p = \varrho\mathbf{f}, \tag{2.2}$$

Le fluide étant supposé newtonien, le tenseur des contraintes visqueuses est supposé de la forme

$$\mathbb{S} = \mathbb{S}(\mathbf{u}) = \mu\Big[\nabla\mathbf{u} + (\nabla\mathbf{u})^T - \frac{2}{3}\operatorname{div}\mathbf{u}\mathbb{I}\Big] + \xi\operatorname{div}\mathbf{u}\mathbb{I}, \tag{2.3}$$

où $\mu > 0$ est la viscosité dynamique et $\xi \geq 0$ la viscosité volumique.

2.1.3 Cadre de travail

Le système (2.2) - (2.1) est complété par des conditions de glissement de Navier sur le bord $\partial\Omega$

$$\mathbf{u}\cdot\mathbf{n} = \mathbf{0},\ (\mathbb{S}(\mathbf{u})\cdot\mathbf{n}) \times \mathbf{n} = \mathbf{0}, \tag{2.4}$$

où $\mathbf{n}$ représente le vecteur normal sortant à la frontière $\partial\Omega$.

Une inégalité d'énergie peut être obtenue (du moins formellement) en multipliant l'équation (2.2) par $\mathbf{u}$ puis en l'intégrant sur le domaine Ω :

$$\int_\Omega \mathbb{S}(\mathbf{u}) : \nabla\mathbf{u}\,\mathrm{d}x \leq \int_\Omega \varrho\mathbf{f}\cdot\mathbf{u}\,\mathrm{d}x. \tag{2.5}$$

La pression dépend uniquement de la densité, avec la loi de comportement suivante

$$p \in \mathcal{C}[0,\infty) \cap \mathcal{C}^1(0,\infty),\ p(0) = 0,\ p'(\varrho) > 0,\ \lim_{\varrho\to\infty}\frac{p'(\varrho)}{\varrho^{\gamma-1}} = p_\infty > 0, \tag{2.6}$$

avec $\gamma > 1$ la constante adiabatique.

Pour finir, on considère que la quantité totale de fluide dans le volume Ω est fixée, ce qui se traduit par la relation qui suit

$$\int_\Omega \varrho\,\mathrm{d}x = M > 0. \tag{2.7}$$

2.1.4 Définition des solutions recherchées et résultat obtenu

On précise maintenant le type de solutions recherché pour le système de Navier-Stokes défini auparavant. On met en place la définition de *solution faible renormalisée à énergie bornée* suivante

Définition 2.1 (Solutions faibles renormalisées à énergie bornée)
Un couple $(\varrho, \mathbf{u})$ *est appelé solution faible renormalisée à énergie bornée du système* (2.2) - (2.7)*, si*

1. *les conditions de régularité suivantes sont respectées*
   - $\varrho \geq 0$ *presque partout dans* Ω*,*
   - $\varrho \in L^\gamma(\Omega)$*,*
   - $\int_\Omega \varrho\,\mathrm{d}x = M$*,*

- $\mathbf{u} \in W^{1,2}_{\mathbf{n}}(\Omega;\mathbb{R}^3)$

2. *l'équation de bilan de masse est satisfaite au sens faible*

$$\int_\Omega \varrho \mathbf{u} \cdot \nabla \varphi \,\mathrm{d}x = 0,\ \forall \varphi \in \mathcal{C}^\infty(\overline{\Omega}), \tag{2.8}$$

3. *l'équation de bilan de masse renormalisée est vérifiée*

$$\int_\Omega \big(\varrho b'(\varrho) - b(\varrho)\big) \operatorname{div} \mathbf{u} \varphi \,\mathrm{d}x - \int_\Omega b(\varrho)\mathbf{u} \cdot \nabla \varphi \,\mathrm{d}x = 0,\ \forall \varphi \in \mathcal{C}^\infty(\overline{\Omega}), \tag{2.9}$$

pour tout $b \in \mathcal{C}([0,\infty)) \cap \mathcal{C}^1(0,\infty)$ *vérifiant*

$$\begin{cases} zb'(z) \in L^\infty(0,1), \\ b(z)/z^{5\gamma/6} \in L^\infty(1,\infty), \\ \dfrac{zb'(z) - b(z)}{z^{\gamma/2}} \in L^\infty(1,\infty), \end{cases}$$

4. *l'équation de bilan de quantité de mouvement est satisfaite au sens faible*

$$\int_\Omega \Big(\varrho(\mathbf{u}\otimes\mathbf{u}) : \nabla\boldsymbol{\varphi} - p(\varrho)\operatorname{div}\boldsymbol{\varphi} + \mathbb{S}(\mathbf{u}) : \nabla\boldsymbol{\varphi}\Big)\,\mathrm{d}x = \int_\Omega \varrho \mathbf{f}\cdot\boldsymbol{\varphi}\,\mathrm{d}x, \tag{2.10}$$

pour tout $\boldsymbol{\varphi} \in \mathcal{C}^\infty(\overline{\Omega};\mathbb{R}^3)$, $\boldsymbol{\varphi}\cdot\mathbf{n}|_{\partial\Omega} = 0$,

5. *l'inégalité d'énergie est vérifiée*

$$\int_\Omega \mathbb{S}(\mathbf{u}) : \nabla \mathbf{u}\,\mathrm{d}x \le \int_\Omega \varrho\mathbf{f}\cdot\mathbf{u}\,\mathrm{d}x. \tag{2.11}$$

Le symbole $W^{1,2}_{\mathbf{n}}(\Omega;\mathbb{R}^3)$ *désigne l'espace de Sobolev des champs de vecteurs appartenant à* $W^{1,2}(\Omega;\mathbb{R}^3)$ *à trace normale nulle sur la frontière* $\partial\Omega$.

Le théorème d'équirépartition (aussi appelé *théorème du viriel*) en physique statistique nous indique que les valeurs pertinentes pour le coefficient adiabatique γ se situent à $5/3$ dans le cas d'un gaz monoatomique, entre $11/9$ et $7/5$ pour les gaz diatomiques et enfin entre $[3(s-1)+1]/[3(s-1)]$ et $4/3$ pour les gaz à s-atomes. La valeur $\gamma = 4/3$, issue de la mécanique statistique des lois de constitution, est quant à elle utilisée pour les gaz dits relativistes. On se réfère à [16] pour plus de détails. On se propose dans ce chapitre d'établir le résultat d'existence suivant

Théorème 2.1 (Existence de solutions faibles renormalisées à énergie bornée)
Soit $\Omega \in C^2$ *un domaine borné de* $\mathbb{R}^3$ *ne possédant pas de symétrie axiale,* $\boldsymbol{f} \in L^\infty(\Omega;\mathbb{R}^3)$ *et* $\gamma > 1$. *Alors il existe un couple* $(\varrho,\mathbf{u})$ *solution faible renormalisée à énergie bornée du système d'équations aux dérivées partielles* (2.2) - (2.7).

2.1.5 Remarques bibliographiques

Les premiers résultats sur les solutions faibles des équations de Navier-Stokes dans le cas barotrope sont relativement récents : en introduisant la notion de flux effectif visqueux et en appliquant le concept de solutions renormalisées à l'équation de bilan de masse, P.L. Lions a prouvé dans son livre [52] l'existence de solutions faibles renormalisées aux équations de Navier-Stokes isentropes pour $\gamma > \frac{5}{3}$. Néanmoins, comme cela a été précisé précédemment, les valeurs du coefficient adiabatique physiquement pertinentes se situent dans l'intervalle $[1, \frac{5}{3}]$.

Par la suite, l'emploi du concept de mesure de défaut introduite par Feireisl *et al.* dans [21], [26] a rendu possible la preuve de la convergence forte de la densité dans des cas où elle n'était qu'uniformément bornée dans des espaces L^p avec $p < 2$, voir [62]. Ainsi, plus que ces arguments de compacité qui sont maintenant devenus usuels, le principal obstacle à la résolution du système (2.2) - (2.7) se révèle être l'obtention d'estimations permettant d'employer ces arguments de compacité pour des valeurs de γ proches de 1.

De nouveaux progrès apportant des estimations de densité plus fines ont été réalisés indépendamment par Plotnikov, Sokolowski [68], [67], [66] et Frehse, Goj, Steinhauer [30]. L'article [66] contient aussi un résultat d'existence, toutefois la forme intégrale du bilan de masse n'y est pas respectée.

Une première démonstration d'existence de solutions faibles pour $\gamma < \frac{5}{3}$ a été faite par Březina et Novotný dans [6]. Dans cet article, le coefficient adiabatique était néanmoins supposé strictement supérieur à $\frac{1+\sqrt{13}}{3}$ et des conditions de bord périodiques en espace avaient été considérées dans le but de pallier le manque d'estimations près du bord du domaine.

Une nouvelle méthode ouvrant la voie à une preuve d'existence pour $\gamma > \frac{4}{3}$ en trois dimensions spatiales (et $\gamma \geq 1$ en deux dimensions) avec des conditions de Dirichlet fut ensuite imaginée par Frehse, Steinhauer et Weigant dans [28] et [29]. Elle repose sur des estimations de type potentiel pour la pression et améliore les estimations de densité, ceci jusqu'au bord du domaine. Cette avancée a été rendue possible par un test astucieux de l'équation de la quantité de mouvement et un paramètre de bootstrap différent de celui employé dans [6]. Ce travail se transpose aux cas des conditions de bord de Navier avec les mêmes résultats.

L'hypothèse de périodicité vue dans [6] a été reprise dans les travaux de Jiang et Zhou [48] qui employèrent un paramètre de bootstrap original. Ils obtinrent ainsi l'existence de solutions faibles pour $\gamma > 1$. Néanmoins, si le bootstrapping effectué s'avère judicieux, il n'en reste pas moins que comme dans l'article [6], le résultat est restreint au cas purement théorique du tore.

On s'intéresse ici au système de Navier-Stokes avec glissement au bord décrivant le comportement d'un fluide barotrope dans un domaine borné aux bords réguliers (au moins C^2). On construit une fonction test particulière pour l'équation bilan de la quantité de mouvement qui amène des estimations de type potentiel pour la pression, à la manière de ce qui avait été fait dans [28], mais avec moins de restrictions sur les valeurs possibles pour le coefficient adiabatique. On combine ces estimations à la méthode de bootstrapping utilisée dans [48] que l'on remanie sur certains aspects techniques. Cela nous permet de montrer l'existence de solutions faibles pour des valeurs de γ strictement plus grandes que 1 dans le cas de conditions de glissement au bord. Ceci améliore donc le résultat [28] dans le cas des conditions de Navier, mais malheureusement pas dans le cas des conditions de Dirichlet.

2.2 Système approchant

On introduit dans cette section un système approchant comportant un paramètre δ, pour lequel l'existence de solutions faibles est connue.

La pression $p(\varrho)$ de l'équation (2.2) est remplacée par

$$p_\delta(\varrho) = p(\varrho) + \delta\varrho^4 \tag{2.12}$$

pour obtenir l'équation du bilan de la quantité de mouvement approchante

$$\operatorname{div}(\varrho\mathbf{u} \otimes \mathbf{u}) - \operatorname{div}\mathbb{S} + \nabla p_\delta = \varrho\mathbf{f}. \tag{2.13}$$

On note ainsi $(\varrho_\delta, \mathbf{u}_\delta)$ une solution faible renormalisée à énergie bornée du système approchant constitué de (2.1), (2.3) - (2.7) et (2.13). L'existence de telles solutions faibles possédant en outre la propriété de régularité suivante

$$\varrho_\delta \in L^8(\Omega) \tag{2.14}$$

a été démontrée par P.L. Lions [52].

Il nous faut maintenant établir des estimations indépendantes de δ pour les suites $(\varrho_\delta, \mathbf{u}_\delta)$. Ceci se fait *via* un bootstrapping inspiré de [48] qui se fonde sur l'utilisation de la quantité

$$A = \int_\Omega \left(\varrho^\gamma \mathbf{u}_\delta^2 + \varrho^\beta \mathbf{u}_\delta^{2\beta+2}\right)\mathrm{d}x, \tag{2.15}$$

où $\beta \in (0,1)$.
On se limite cependant aux cas où γ est inférieur ou égal à $4/3$, l'existence de solutions faibles renormalisées pour γ strictement supérieur à $4/3$ étant déjà montrée dans [28].

2.3 Estimations d'énergie

On commence par donner des estimations des quantités $\varrho_\delta \mathbf{u}_\delta$ et $\varrho_\delta \mathbf{u}_\delta^2$ par notre paramètre A qui se déduisent aisément de (2.7) grâce à l'inégalité de Hölder.

Lemme 1
Pour tout $\beta \in (0,1)$, il existe une constante c positive et indépendante de δ telle que

$$\|\varrho_\delta \mathbf{u}_\delta\|_{L^1(\Omega;\mathbb{R}^3)} \leq cA^{\frac{\gamma-\beta}{2(\gamma\beta+\gamma-2\beta)}} \tag{2.16}$$

Démonstration:
Il suffit d'effectuer la décomposition suivante

$$\begin{aligned}\|\varrho_\delta \mathbf{u}_\delta\|_{L^1(\Omega;\mathbb{R}^3)} &= \int_\Omega \left((\varrho_\delta^\gamma \mathbf{u}_\delta^2)^{\frac{1-\beta}{2(\gamma\beta+\gamma-2\beta)}} (\varrho_\delta^\beta \mathbf{u}_\delta^{2\beta+2})^{\frac{\gamma-1}{2(\gamma\beta+\gamma-2\beta)}} \varrho_\delta^{\frac{2\gamma\beta+\gamma-3\beta}{2(\gamma\beta+\gamma-2\beta)}} \right) \mathrm{d}x \\ &\leq cA^{\frac{\gamma-\beta}{2(\gamma\beta+\gamma-2\beta)}} \end{aligned} \tag{2.17}$$

où l'on a utilisé l'inégalité de Hölder et la propriété (2.7). □

Lemme 2
Soit $s \in (1, 2-\frac{1}{\gamma})$. Alors il existe une constante c positive et indépendante de δ telle que

$$\|\varrho_\delta \mathbf{u}_\delta^2\|_{L^s(\Omega)} \leq cA^{\frac{\gamma-\beta/s}{\gamma\beta+\gamma-2\beta}}, \tag{2.18}$$

avec

$$0 < (s-1)\frac{\gamma}{\gamma-1} < \beta < 1. \tag{2.19}$$

Démonstration:
De la même manière que précédemment et avec les mêmes arguments, on arrive à l'inégalité voulue

$$\begin{aligned}\|\varrho_\delta \mathbf{u}_\delta^2\|_{L^s(\Omega)}^s &= \int_\Omega \left((\varrho_\delta^\gamma \mathbf{u}_\delta^2)^{\frac{2s-1-\beta}{\gamma\beta+\gamma-2\beta}} (\varrho_\delta^\beta \mathbf{u}_\delta^{2\beta+2})^{\frac{s\gamma+1-2s}{\gamma\beta+\gamma-2\beta}} \varrho_\delta^{\frac{\gamma\beta+\gamma-\beta-s\gamma}{\gamma\beta+\gamma-2\beta}} \right) \mathrm{d}x \\ &\leq cA^{\frac{s\gamma-\beta}{\gamma\beta+\gamma-2\beta}}. \end{aligned} \tag{2.20}$$

□

On rappelle maintenant un lemme de type Korn, dont la preuve peut être trouvée dans [24, Appendix].

Lemme 3
Soit $1 < p < \infty$ et $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ un domaine lipschitzien borné. Alors il existe une constante positive c telle que

$$\|\mathbf{v}\|_{W^{1,p}(\Omega;\mathbb{R}^3)} \leq c \left(\|\nabla \mathbf{v} + \nabla^T \mathbf{v} - \frac{2}{3} \operatorname{div} \mathbf{v} \mathbb{I}\|_{L^p(\Omega;\mathbb{R}^{3\times 3})} + \|\mathbf{v}\|_{L^p(\Omega;\mathbb{R}^3)} \right) \tag{2.21}$$

pour tout $\mathbf{v} \in W^{1,p}(\Omega;\mathbb{R}^3)$.

Ceci nous amène au prochain résultat, qui est une conséquence du lemme précédent.

Lemme 4
Soit Ω un domaine lipschitzien borné ne présentant pas de symétrie axiale et $1 < p < \infty$. Alors il existe une constante positive c telle que pour tout champ vectoriel $\mathbf{v}$ de $W_\mathbf{n}^{1,p}(\Omega;\mathbb{R}^3)$, on a

$$\|\mathbf{v}\|_{W^{1,p}(\Omega;\mathbb{R}^3)} \leq c\|\nabla \mathbf{v} + \nabla^T \mathbf{v} - \frac{2}{3} \operatorname{div} \mathbf{v} \mathbb{I}\|_{L^p(\Omega;\mathbb{R}^{3\times 3})}. \tag{2.22}$$

Démonstration:
On procède par l'absurde en supposant qu'il existe une suite $\mathbf{v}_k$ de $W_\mathbf{n}^{1,p}(\Omega;\mathbb{R}^3)$ telle que pour tout

entier naturel k on a

$$\begin{cases} \|\mathbf{v}_k\|_{W^{1,p}(\Omega;\mathbb{R}^3)} = 1, \\ \|\mathbf{v}_k\|_{W^{1,p}(\Omega;\mathbb{R}^3)} > k\|\nabla \mathbf{v}_k + \nabla^T \mathbf{v}_k - \frac{2}{3}\operatorname{div}\mathbf{v}_k \mathbb{I}\|_{L^p(\Omega;\mathbb{R}^{3\times 3})}. \end{cases} \tag{2.23}$$

L'hypothèse (2.23) et le lemme 3 nous affirment que

$$\mathbf{v}_k \to \mathbf{v} \text{ dans } W^{1,p}(\Omega;\mathbb{R}^3), \tag{2.24}$$

avec

$$\|\mathbf{v}\|_{W^{1,p}(\Omega;\mathbb{R}^3)} = 1 \text{ et } \|\nabla \mathbf{v} + \nabla^T \mathbf{v} - \frac{2}{3}\operatorname{div}\mathbf{v}\mathbb{I}\|_{L^p(\Omega;\mathbb{R}^{3\times 3})} = 0. \tag{2.25}$$

Ainsi,

$$\mathbf{v} \in \operatorname{vect}\{\mathbf{a}, \mathbf{b}\times x, \beta x, \mathbf{c}\cdot(x\otimes x - |x|^2\mathbb{I})\},$$

où $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c} \in \mathbb{R}^{\mathbf{3}}$, $\beta \in \mathbb{R}$, cf. Dain [11]. Finalement, puisque Ω ne comporte pas de symétrie axiale et que $\mathbf{v}$ est dans $W^{1,p}_{\mathbf{n}}(\Omega;\mathbb{R}^3)$, on peut déduire que $\mathbf{v} = 0$. Ce qui est bien en contradiction avec les conditions (2.25). □

On peut maintenant utiliser les lemmes 1 et 4 pour tester l'équation (2.13) par la fonction test $\mathbf{u}_\delta$ afin d'obtenir une estimation du champ de vitesse décrite dans le lemme suivant

Lemme 5
Pour tout $\beta \in \left((s-1)\frac{\gamma}{\gamma-1}, 1\right)$, $s \in \left(1, 2-\frac{1}{\gamma}\right)$,

$$\|\mathbf{u}_\delta\|_{W^{1,2}(\Omega;\mathbb{R}^3)} \leq cA^{\frac{\gamma-\beta}{4(\gamma\beta+\gamma-2\beta)}}, \tag{2.26}$$

où c est une constante positive indépendante de δ.

Démonstration:
Pour arriver au résultat énoncé, il faut majorer le membre de droite de l'inégalité (2.11) de la manière suivante

$$\left|\int_\Omega \varrho_\delta \mathbf{f}\cdot\mathbf{u}_\delta \,\mathrm{d}x\right| \leq \|f\|_{L^\infty(\Omega;\mathbb{R}^3)}\|\varrho_\delta \mathbf{u}_\delta\|_{L^1(\Omega;\mathbb{R}^3)} \leq cA^{\frac{\gamma-\beta}{2(\gamma\beta+\gamma-2\beta)}},$$

où l'on a employé le lemme 2. Ensuite, grâce au lemme 4 on minore le membre de gauche par $\|\mathbf{u}_\delta\|^2_{W^{1,2}(\Omega;\mathbb{R}^3)}$ ce qui nous amène à la majoration désirée

$$\|\mathbf{u}_\delta\|^2_{W^{1,2}(\Omega;\mathbb{R}^3)} \leq cA^{\frac{\gamma-\beta}{2(\gamma\beta+\gamma-2\beta)}}. \tag{2.27}$$

□

2.4 Estimations de type Bogovskii

L'objectif de cette partie est d'estimer la pression dans un espace $L^p(\Omega)$ avec $p > 1$, ce qui induit que la densité est elle aussi estimée dans un espace meilleur que $L^\gamma(\Omega)$. Pour cela, on teste l'équation de bilan de la quantité de mouvement approchée (2.13) par une fonction conçue à partir de l'opérateur de Bogovskii d'inversion de la divergence. Les estimations obtenues grâce à cette méthode sont regroupées dans le lemme suivant

Lemme 6
Soit $\gamma > 1$ et $s \in (1, 2-\frac{1}{\gamma})$. On a alors les estimations suivantes

$$\delta\|\varrho_\delta\|^{4+(s-1)\gamma}_{L^{4+(s-1)\gamma}(\Omega)} \leq c\left(1 + A^{\frac{\gamma s-\beta}{\gamma\beta+\gamma-2\beta}}\right), \tag{2.28}$$

$$\|\varrho_\delta\|_{L^{\gamma s}(\Omega)} \leq c\left(1 + A^{\frac{1-\beta/(\gamma s)}{\gamma\beta+\gamma-2\beta}}\right), \tag{2.29}$$

$$\|p(\varrho_\delta)\|_{L^s(\Omega)} \leq c\left(1 + A^{\frac{\gamma-\beta/s}{\gamma\beta+\gamma-2\beta}}\right), \tag{2.30}$$

$$\|p_\delta(\varrho_\delta)\|^{1+\frac{s-1}{4}\gamma}_{L^{1+\frac{s-1}{4}\gamma}(\Omega)} \leq c\left(1 + A^{\frac{\gamma-\beta/s}{\gamma\beta+\gamma-2\beta}}\right), \tag{2.31}$$

où β vérifie les hypothèses (2.19) *et $c > 0$ est une constante indépendante de δ.*

Démonstration:
La fonction test utilisée dans l'équation (2.13) est une solution du problème suivant

$$\begin{cases} \operatorname{div} \mathbf{\Phi} = \varrho_\delta^{(s-1)\gamma} - \frac{1}{|\Omega|}\int_\Omega \varrho_\delta^{(s-1)\gamma} \mathrm{d}x & \text{dans } \Omega, \\ \mathbf{\Phi} = 0 & \text{sur } \partial\Omega, \\ \|\mathbf{\Phi}\|_{W^{1,p}(\Omega;\mathbb{R}^3)} \leq c\|\varrho_\delta\|^{(s-1)\gamma}_{L^{p(s-1)\gamma}(\Omega)}, & \text{pour } 1 < p < \infty. \end{cases} \tag{2.32}$$

Un tel champ de vecteur $\mathbf{\Phi}$ peut être construit explicitement (voir Bogovskii [3] ou Galdi [31]). On a donc la relation suivante

$$\begin{aligned} \int_\Omega p_\delta \varrho_\delta^{(s-1)\gamma} \,\mathrm{d}x = &\frac{1}{|\Omega|}\int_\Omega p_\delta \,\mathrm{d}x \int_\Omega \varrho_\delta^{(s-1)\gamma} \,\mathrm{d}x - \int_\Omega \varrho_\delta \mathbf{u}_\delta \otimes \mathbf{u}_\delta : \nabla\mathbf{\Phi} \,\mathrm{d}x \\ &+ \int_\Omega \mathbb{S}(\mathbf{u}_\delta) : \nabla\mathbf{\Phi} \,\mathrm{d}x - \int_\Omega \varrho_\delta \mathbf{f}\cdot\mathbf{\Phi} \,\mathrm{d}x && (2.33) \\ = &I_1 + I_2 + I_3 + I_4. && (2.34) \end{aligned}$$

Comme on ne se concentre que sur le cas $1 < \gamma \leq \frac{4}{3}$ on a, grâce aux conditions de régularité des solution faibles à énergie bornée,

$$I_1 \leq c\int_\Omega p_\delta \,\mathrm{d}x \leq c(\delta\|\varrho_\delta\|^4_{L^4(\Omega;\mathbb{R})} + \|\varrho_\delta\|^\gamma_{L^\gamma(\Omega;\mathbb{R})}). \tag{2.35}$$

On traite le terme I_2 au moyen de l'inégalité de Hölder et de l'estimation (2.18)

$$I_2 \leq \|\varrho_\delta \mathbf{u}_\delta^2\|_{L^s(\Omega)}\|\nabla\mathbf{\Phi}\|_{L^{\frac{s}{s-1}}(\Omega)} \leq cA^{\frac{\gamma-\beta/s}{\gamma\beta+\gamma-2\beta}}\|\varrho_\delta\|^{(s-1)\gamma}_{L^{s\gamma}(\Omega;\mathbb{R})}. \tag{2.36}$$

Le terme I_3 se majore tout d'abord de la façon suivante

$$I_3 \leq c\|\nabla\mathbf{u}_\delta\|_{L^2(\Omega;\mathbb{R}^{3\times3})}\|\nabla\mathbf{\Phi}\|_{L^2(\Omega;\mathbb{R}^{3\times3})} \leq cA^{\frac{\gamma-\beta}{4(\gamma\beta+\gamma-2\beta)}}\|\varrho_\delta\|^{(s-1)\gamma}_{L^{2(s-1)\gamma}(\Omega;\mathbb{R})}, \tag{2.37}$$

puis, grâce à une interpolation d'espaces de Lebesgue du fait que s se trouve dans l'intervalle $(1, 2-\frac{1}{\gamma})$, on arrive à

$$I_3 \leq cA^{\frac{\gamma-\beta}{4(\gamma\beta+\gamma-2\beta)}}\|\varrho_\delta\|^{s(2s\gamma-2\gamma-1)}_{L^{s\gamma}(\Omega;\mathbb{R})}. \tag{2.38}$$

Enfin, le dernier terme est estimé à l'aide au lemme 1

$$I_4 \leq cA^{\frac{\gamma-\beta}{2(\gamma\beta+\gamma-2\beta)}}. \tag{2.39}$$

On a donc montré l'inégalité (2.28) qui, en association avec les propriétés de la pression décrites en (2.6), nous fournit les estimations (2.29), (2.30) et (2.31). Le lemme 6 est ainsi démontré. □

2.5 Estimations de type potentiel au bord du domaine

Pour pouvoir travailler au bord du domaine, il faut construire des fonctions test spécifiques à notre problème. On décrit tout d'abord la frontière de Ω à l'aide de coordonnées locales bien choisies, puis on construit nos fonctions test grâce à ces coordonnées locales. Après avoir vérifié leur admissibilité, on les emploie dans l'équation de conservation du moment approchée (2.13).

2.5.1 Coordonnées locales au bord du domaine

Ayant supposé que notre domaine Ω est de classe $\mathcal{C}^2$, nous sommes assurés (voir par exemple Gilbarg, Trudinger [35]) de l'existence de deux constantes ω et R_0 toutes deux strictement positives telles que pour tout point y de la frontière $\partial\Omega$ on a :

(i) Il existe une fonction a_y

$$a_y \in \mathcal{C}^2(\Delta_{2\omega}),\ \Delta_{2\omega} = (-2\omega, 2\omega)^2,\ a_y(0) = 0,\ \nabla_{x'} a_y(0) = 0, \tag{2.40}$$

avec $x' = (x_1, x_2)$.

(ii) Il existe une matrice orthogonale $\mathbb{O}_y$

$$\mathbb{O}_y \in \mathbb{R}^{3\times 3},\ \mathbb{O}_y^T\, \mathbb{O}_y = \mathbb{I}, \tag{2.41}$$

telle que pour tout $0 < R < R_0$, les ensembles

$$\begin{aligned}
W^+_{y,2\omega,2R} &= \{x = (x', x_3)\,|\, x' \in \Delta_{2\omega},\ a_y(x') < x_3 < a_y(x') + 2R\}, \\
W^-_{y,2\omega,2R} &= \{x = (x', x_3)\,|\, x' \in \Delta_{2\omega},\ a_y(x') - 2R < x_3 < a_y(x')\}, \\
\Gamma_{y,s,2\omega,2R} &= \{x = (x', x_3)\,|\, x' \in \Delta_{2\omega},\ x_3 = a_y(x') - s\},\ \text{où } s \in [0, 2R)
\end{aligned} \tag{2.42}$$

vérifient

$$\begin{aligned}
\mathcal{U}^+_{2\omega,2R}(y) &\equiv y + \mathbb{O}_y\Big(W^+_{y,2\omega,2R}\Big) \subset \Omega, \\
\mathcal{U}^-_{2\omega,2R}(y) &\equiv y + \mathbb{O}_y\Big(W^-_{y,2\omega,2R}\Big) \subset \mathbb{R}^3 \setminus \Omega, \\
\mathcal{G}_{2\omega,2R}(y) &\equiv y + \mathbb{O}_y\Big(\Gamma_{y,0,2\omega,2R}\Big) \subset \partial\Omega.
\end{aligned} \tag{2.43}$$

On définit maintenant dans Ω une bande d'épaisseur R

$$\Omega^+_R = \{x \in \Omega\,|\, \mathrm{dist}(x, \partial\Omega) \le R\} \tag{2.44}$$

et pour tout y lui appartenant, on appelle $P(y)$ sa projection sur la frontière $\partial\Omega$. On note ainsi

$$P(y) \in \partial\Omega,\ |P(y) - y| = \mathrm{dist}(y, \partial\Omega), \tag{2.45}$$

en constatant que si R est choisi suffisamment petit, alors $P(y)$ est défini de manière unique.

On possède désormais les éléments nécessaires pour réaliser un recouvrement de notre domaine de la façon suivante

$$\mathcal{V}(y) = \begin{cases} cy + \mathcal{U}^+_{\omega/2,R/2}(P(y)) & \text{si } y \in \Omega^+_R, \\ \\ B(y; R/2) & \text{si } y \in \Omega \setminus \Omega^+_R, \end{cases} \tag{2.46}$$

et l'on a bien

$$\Omega = \bigcup_{y\in\Omega} \mathcal{V}(y). \tag{2.47}$$

2.5.2 Fonctions test définies dans les coordonnées locales

Pour la suite, on note

$$\begin{aligned} V^+_{\omega,R} &= \{x = (x', x_3) \,|\, x' \in \Delta_\omega,\ a(x') < x_3 < a(x') + R\}, \\ V^-_{\omega,R} &= \{x = (x', x_3) \,|\, x' \in \Delta_\omega,\ a(x') - R < x_3 < a(x')\}, \\ \Gamma_s &= \{x = (x', x_3) \,|\, x' \in \Delta_\omega,\ x_3 = a(x') - s\},\ \text{avec } s \in [0, R), \\ V_{\omega,R} &= V^+_{\omega,R} \cup \Gamma_0 \cup V^-_{\omega,R} \end{aligned} \tag{2.48}$$

où a satisfait aux conditions (2.40). Sur cet ensemble $V_{\omega,R}$, on construit les champs vectoriels

$$\mathbf{t}^i = \frac{1}{\sqrt{1 + |\partial_{x_i} a|^2}}\Big(\mathbf{e}^i + \partial_{x_i} a\mathbf{e}^3\Big),\ \mathbf{n} = \frac{1}{\sqrt{1 + |\nabla_{x'} a|^2}}\Big(\partial_{x_1} a\mathbf{e}^1 + \partial_{x_2} a\mathbf{e}^2 - \mathbf{e}^3\Big), \tag{2.49}$$

où la famille $\{\mathbf{e}^1, \mathbf{e}^2, \mathbf{e}^3\}$ constitue une base (canonique) orthonormée de $\mathbb{R}^3$. Les champs $\{\mathbf{t}^1, \mathbf{t}^2, \mathbf{n}\}$ forment eux aussi une famille orthonormée dans $V_{\omega,R}$ dont les vecteurs $\mathbf{t}^i(x', a(x') - s)$ sont tangents à la surface Γ_s alors que $\mathbf{n}(x', a(x') - s)$ en est la normale extérieure.

On en arrive à la construction des fonctions test dans les coordonnées locales. On introduit maintenant pour tout $\alpha \in (0, 1)$ deux champs de vecteurs. Le premier a son support dans $V_{\omega,R}$ avec pour définition

$$\mathbf{v}(x) = \frac{\eta(x)}{|x|^\alpha} \times \begin{cases} (x \cdot \mathbf{t}^1)\mathbf{t}^1 + (x \cdot \mathbf{t}^2)\mathbf{t}^2 + \Big((0, 0, x_3 - a(x')) \cdot \mathbf{n}\Big)\mathbf{n} & \text{si } x \in V^+_{\omega,R} \cup \Gamma_0, \\ (x \cdot \mathbf{t}^1)\mathbf{t}^1 + (x \cdot \mathbf{t}^2)\mathbf{t}^2 & \text{si } x \in V^-_{\omega,R}, \\ 0 & \text{sinon,} \end{cases} \tag{2.50}$$

où

$$\eta \in \mathcal{C}^\infty_c(\mathbb{R}^3) \quad , \quad \eta(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } V_{\omega/2,R/2} \\ 0 & \text{si } \mathbb{R}^3 \setminus V_{\omega,R} \end{cases} , \quad |\nabla \eta(x)| \leq \frac{c}{R}.$$

Le second, quant à lui, a pour support la boule $B(0; R)$ et est défini comme suit

$$\mathbf{v}(x) = \begin{cases} \dfrac{x\eta(x)}{|x|^\alpha} & \text{si } x \in B(0; R), \\ 0 & \text{sinon,} \end{cases} \tag{2.51}$$

avec

$$\eta \in \mathcal{C}^\infty_c(\mathbb{R}^3) \quad , \quad \eta(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } B(0; R/2), \\ 0 & \text{si } \mathbb{R}^3 \setminus B(0; R), \end{cases} \quad , \quad |\nabla \eta(x)| \leq \frac{c}{R}.$$

Enfin, on finit en énumérant les propriétés de ces deux fonctions vectorielles dans deux lemmes, dont la preuve est purement calculatoire.

Lemme 7
Soit $\mathbf{v}$ *un champ vectoriel défini d'après la relation* (2.50)*, alors*

- *il existe*

$$g_{ij} \in L^\infty(\mathbb{R}^3)\ , \quad g_{ij}(x) = 0 \text{ si } x \notin V_{\omega,R}\ , \quad i, j \in \{1, 2, 3\}^2$$

tel que pour tout $i \in \{1, 2, 3\}$

$$\begin{aligned} \partial_{x_i} v_j(x) &= \frac{1}{|x|^\alpha}\left(\delta_{ij} - \alpha\frac{x_i x_j}{|x|^2}\right)\eta(x) + g_{ij}(x), \quad \text{avec } j \in \{1, 2\} \\ \partial_{x_i} v_3(x) &= \begin{cases} \dfrac{1}{|x|^\alpha}\left(\delta_{i3} - \alpha\dfrac{x_i x_3}{|x|^2}\right)\eta(x) + g_{i3}(x) & \text{si } x \in V^+_{\omega,R}, \\ g_{i3}(x) & \text{sinon,} \end{cases} \end{aligned} \tag{2.52}$$

- *de plus*

$$\operatorname{div} \mathbf{v}(x) = \begin{cases} \dfrac{3-\alpha}{|x|^\alpha}\eta(x) + g(x) & si\ x \in V^+_{\omega,R}, \\ \dfrac{2-\alpha}{|x|^\alpha}\eta(x) + g(x) & si\ x \in V^-_{\omega,R}, \\ g(x) & sinon, \end{cases} \tag{2.53}$$

avec

$$g \in L^\infty(\mathbb{R}^3)\ , \quad g(x) = 0\ si\ x \notin V_{\omega,R};$$

- *enfin,*

$$\mathbf{v} \in W^{1,p}(V_{\omega,R};\mathbb{R}^3),\ pour\ tout\ p \in [1, \tfrac{3}{\alpha}) \tag{2.54}$$

et

$$\mathbf{v}\cdot\mathbf{n}|_{\Gamma_s} = 0\ pour\ tout\ s \in [0,R). \tag{2.55}$$

Lemme 8
Soit $\mathbf{v}$ *un champ vectoriel défini suivant* (2.51)*. Alors*

- *il existe* $g_{ij} \in L^\infty(\mathbb{R}^3),\ g_{ij}(x) = 0\ si\ x \notin B(0;R)$ *tel que*

$$\partial_{x_i} v_j = \frac{1}{|x|^\alpha}\left(\delta_{ij} - \alpha\frac{x_i x_j}{|x|^2}\right)\eta(x) + g_{ij}(x); \tag{2.56}$$

- *en outre*

$$\operatorname{div} \mathbf{v}(x) = \frac{3-\alpha}{|x|^\alpha}\eta(x) + g(x), \tag{2.57}$$

avec

$$g \in L^\infty(\mathbb{R}^3)\ , \quad g(x) = 0\ si\ x \notin B(0;R);$$

- *en particulier,*

$$\mathbf{v} \in W^{1,p}_0(B(0;R);\mathbb{R}^3),\ pour\ tout\ p \in [1, \tfrac{3}{\alpha}). \tag{2.58}$$

2.5.3 Estimations de type potentiel

Pour tout $y \in \Omega^+_R$, on pose $0 < R < \min\{\omega, R_0\}$ et on construit

$$\mathbf{w}(x) = \mathbb{O}_{P(y)}\left[\mathbf{v}\Big(\mathbb{O}^T_{P(y)}(x-y)\Big)\right], \tag{2.59}$$

où $\mathbf{v}$ correspond à la définition (2.50), avec

$$V_{\omega,R} = W_{P(y),\omega,R},$$

cf. (2.42), (2.45). Pour le cas où y se situe dans $\Omega \setminus \Omega^+_R$, on prend le champ vectoriel suivant

$$\mathbf{w}(x) = \mathbf{v}(x-y), \tag{2.60}$$

où l'on a utilisé le vecteur $\mathbf{v}$ de la formule (2.51). Les lemmes 7 et 8 impliquent les propriétés suivantes pour les champs $\boldsymbol{w}$.

Lemme 9
Soit $\alpha \in (0,1)$ *et* $y \in \Omega$*. Alors,*

(i)

$$\mathbf{w} \in W^{1,q}(\Omega;\mathbb{R}^3),\ pour\ tout\ q \in [1, \tfrac{3}{\alpha}) \tag{2.61}$$

et

$$\begin{cases} \mathbf{w}\cdot\mathbf{n}|_{\partial\Omega} = 0 & si\ l'on\ emploie\ le\ champ\ vectoriel\ \mathbf{w}\ de\ la\ définition\ (2.59), \\ \mathbf{w}|_{\partial\Omega} = 0 & si\ l'on\ emploie\ le\ champ\ vectoriel\ \mathbf{w}\ de\ la\ définition\ (2.60). \end{cases} \tag{2.62}$$

(ii) Il existe une constante c strictement positive et indépendante de $y \in \Omega$ telle que pour tout $p \in L^2(\Omega)$,

$$\int_{\mathcal{V}(y)} p(x)\,\mathrm{div}\,\mathbf{w}\,\mathrm{d}x \geq \int_{\mathcal{V}(y)} \frac{p(x)}{|x-y|^{\alpha}}\,\mathrm{d}x - c\int_{\Omega} p(x)\,\mathrm{d}x. \tag{2.63}$$

(iii) Il existe une constante c strictement positive et indépendante de $y \in \Omega$ telle que pour tout $\boldsymbol{z} \in L^4(\Omega;\mathbb{R}^3)$,

$$\int_{\mathcal{V}(y)} z_i(x)z_j(x)\partial_{x_i}w_j\,\mathrm{d}x \geq (1-\alpha)\int_{\mathcal{V}(y)} \frac{\mathbf{z}^2(x)}{|x-y|^{\alpha}}\,\mathrm{d}x - c\int_{\Omega}\mathbf{z}^2(x)\,\mathrm{d}x, \tag{2.64}$$

où l'ensemble $\mathcal{V}(y)$ est défini en (2.46).

En constatant que les deux fonctions $\mathbf{w}$ mises en place dans (2.59) et (2.60) peuvent être utilisées comme fonctions test dans l'équation du moment approchée (2.13), on déduit l'égalité suivante

$$\int_{\Omega}\Big(p_\delta(\varrho_\delta)\mathrm{div}\mathbf{w} + \varrho_\delta\mathbf{u}_\delta\otimes\mathbf{u}_\delta : \nabla\mathbf{w}\Big)\,\mathrm{d}x = \int_{\Omega}\Big(\mathbb{S}(\mathbf{u}_\delta) : \nabla\mathbf{w} - \varrho_\delta\mathbf{f}\cdot\mathbf{u}_\delta\Big)\,\mathrm{d}x. \tag{2.65}$$

On remarque maintenant que si $x \notin \mathcal{V}(y)$, alors $|x-y| \geq \frac{2}{R}$. De plus, comme $\mathbf{w} \in \mathcal{C}(\overline{\Omega})$, on arrive à l'inégalité

$$(2-\alpha)\int_{\Omega}\frac{p_\delta(x)}{|x-y|^{\alpha}}\,\mathrm{d}x \leq \int_{\mathcal{V}(y)} p_\delta(x)\,\mathrm{div}\,\mathbf{w}\,\mathrm{d}x + \left(\frac{2}{R}\right)^{\alpha}\int_{\Omega} p_\delta(x)\,\mathrm{d}x. \tag{2.66}$$

De la même manière,

$$\int_{\Omega}\frac{\varrho u_i u_j}{|x|^{\alpha}}\left(\delta_{ij} - \alpha\frac{x_i x_j}{|x|^2}\right)\mathrm{d}x = (1-\alpha)\int_{\Omega}\frac{\varrho\mathbf{u}^2}{|x-y|^{\alpha}}\,\mathrm{d}x + \alpha\int_{\Omega}\frac{\varrho(|\mathbf{u}|^2 - |\mathbf{u}\cdot\mathbf{n}|^2)}{|x-y|^{\alpha}}\,\mathrm{d}x, \tag{2.67}$$

où $\mathbf{n} = \frac{x}{|x|}$. Finalement, du fait de la positivité de la deuxième intégrale du membre de droite, on déduit

$$\begin{aligned}(1-\alpha)\int_{\Omega}\frac{\varrho\mathbf{u}^2}{|x-y|^{\alpha}}\,\mathrm{d}x &\leq \int_{\Omega}\frac{\varrho u_i u_j}{|x-y|^{\alpha}}\left(\delta_{ij} - \alpha\frac{x_i x_j}{|x|^2}\right)\mathrm{d}x \\ &\leq \int_{\mathcal{V}(y)}\frac{\varrho u_i u_j}{|x-y|^{\alpha}}\partial_{x_i}w_j\,\mathrm{d}x + c\left(\frac{2}{R}\right)^{\alpha}\int_{\Omega}\varrho\mathbf{u}^2\,\mathrm{d}x.\end{aligned} \tag{2.68}$$

On peut désormais injecter (2.66) - (2.68) dans l'équation (2.65). Ce faisant, on arrive à la majoration suivante au moyen de l'inégalité de Hölder

$$\begin{aligned}&\Big(p_\delta(\varrho_\delta) + (1-\alpha)\varrho\mathbf{u}^2\Big)\mathrm{d}x \\ &\qquad\leq c\left(\|p_\delta(\varrho_\delta)\|_{L^1(\Omega)} + \|\varrho\mathbf{u}^2\|_{L^1(\Omega)} + \|\nabla\mathbf{u}\|_{L^2(\Omega;\mathbb{R}^{3\times3})} + \|\varrho_\delta\mathbf{u}_\delta\|_{L^1(\Omega;\mathbb{R}^3)}\right),\end{aligned} \tag{2.69}$$

où la constante $c > 0$ est à la fois indépendante de α et de $y \in \Omega$.
On peut faire tendre α vers 1 dans (2.69) au moyen du lemme de Fatou :

$$\int_{\Omega}\frac{p_\delta(\varrho_\delta)}{|x-y|}\mathrm{d}x \leq c\left(\|p_\delta(\varrho_\delta)\|_{L^1(\Omega)} + \|\varrho_\delta\mathbf{u}_\delta^2\|_{L^1(\Omega)} + \|\nabla\mathbf{u}_\delta\|_{L^2(\Omega;\mathbb{R}^{3\times3})} + \|\varrho_\delta\mathbf{u}_\delta\|_{L^1(\Omega;\mathbb{R}^3)}\right),$$

puis choisir $\alpha \in (0,\beta)$ de façon à ce que l'intégrale $\displaystyle\int_{B(0;1)} |x|^{\frac{\alpha\beta-1}{1-\beta}}\mathrm{d}x$ soit finie et écrire

$$\frac{\varrho^{\beta}\mathbf{u}^{2\beta}}{|x-y|} = \frac{\varrho^{\beta}\mathbf{u}^{2\beta}}{|x-y|^{\alpha\beta}}\frac{1}{|x-y|^{1-\alpha\beta}}$$

afin d'obtenir, à partir de (2.69),

$$\int_{\Omega}\frac{\varrho_\delta^{\beta}\mathbf{u}_\delta^{2\beta}}{|x-y|}\,\mathrm{d}x \leq c\left(\|p_\delta(\varrho_\delta)\|_{L^1(\Omega)} + \|\varrho_\delta\mathbf{u}_\delta^2\|_{L^1(\Omega)} + \|\nabla\mathbf{u}_\delta\|_{L^2(\Omega;\mathbb{R}^{3\times3})} + \|\varrho_\delta\mathbf{u}_\delta\|_{L^1(\Omega;\mathbb{R}^3)}\right)^{\beta}, \tag{2.70}$$

pour $\alpha \in (\max\{0, (3\beta - 2)/\beta\}, 1)$.

Ces constatations nous permettent d'écrire le lemme suivant.

Lemme 10
Soit $s \in (1, 2 - \frac{1}{\gamma})$, $\beta \in (\max\{\frac{2}{3}, (s-1)\frac{\gamma}{\gamma-1}\}, 1)$. Alors il existe une constante $c > 0$, indépendante des choix de δ et de $y \in \Omega$, telle que

$$\int_\Omega \frac{p_\delta(\varrho_\delta) + \varrho_\delta^\beta \mathbf{u}_\delta^{2\beta}}{|x-y|}\,\mathrm{d}x \leq c\left(1 + \|p_\delta(\varrho_\delta)\|_{L^1(\Omega)} + \|\varrho_\delta \mathbf{u}_\delta^2\|_{L^1(\Omega)} + \|\nabla \mathbf{u}_\delta\|_{L^2(\Omega;\mathbb{R}^{3\times 3})} + \|\varrho_\delta \mathbf{u}_\delta\|_{L^1(\Omega;\mathbb{R}^3)}\right). \tag{2.71}$$

Ce résultat nous permet, grâce aux lemmes 1 à 5, de majorer $\displaystyle\int_\Omega \frac{p_\delta(\varrho_\delta) + \varrho_\delta^\beta \mathbf{u}_\delta^{2\beta}}{|x-y|}\,\mathrm{d}x$ par notre paramètre A.

Lemme 11
Soit $s \in (1, 2 - 1/\gamma)$, $\beta \in (\max\{\frac{2}{3}, (s-1)\frac{\gamma}{\gamma-1}\}, 1)$. Alors, il existe $c > 0$, indépendante de δ et $y \in \Omega$ telle que

$$\int_\Omega \frac{\varrho_\delta^\gamma + \varrho_\delta^\beta \mathbf{u}_\delta^{2\beta}}{|x-y|}\,\mathrm{d}x \leq c\left(1 + A^{\frac{\gamma-\beta/s}{\gamma\beta+\gamma-2\beta}}\right). \tag{2.72}$$

2.6 Estimation du paramètre de bootstrapping

Dans cette partie, nous estimons le paramètre A et du même coup nous obtenons des bornes pour toutes les quantités estimées *via* cet argument. On passe par un problème de Neumann intermédiaire :

$$\begin{cases} -\Delta h = \varrho_\delta^\gamma + \varrho_\delta^\beta \mathbf{u}_\delta^{2\beta} - \dfrac{1}{|\Omega|}\displaystyle\int_\Omega \left(\varrho_\delta^\gamma + \varrho_\delta^\beta \mathbf{u}_\delta^{2\beta}\right)\mathrm{d}x & \text{sur } \Omega, \\ \partial_{\mathbf{n}} h|_{\partial\Omega} = 0 & \text{sur } \partial\Omega. \end{cases} \tag{2.73}$$

Ce dernier admet une unique solution forte de la forme

$$h(x) = \int_\Omega G(x,y)(\varrho_\delta^\gamma + \varrho_\delta^\beta \mathbf{u}_\delta^{2\beta})(y)\,\mathrm{d}y,$$

où G est le noyau de Green du problème (2.73). Ce noyau possède la propriété suivante

$$|G(x,y)| \leq \frac{c}{|x-y|} \text{ pour tout } (x,y) \in \Omega^2,$$

voir [35]. On reconnait ainsi la quantité majorée dans le lemme 11, ce qui nous amène finalement à estimer h dans l'espace $L^\infty(\Omega)$

$$\|h\|_{L^\infty(\Omega)} \leq c\left(1 + A^{\frac{\gamma-\beta/s}{\gamma\beta+\gamma-2\beta}}\right). \tag{2.74}$$

On estime maintenant A. Pour cela, on commence par une intégration par partie

$$A = -\int_\Omega \Delta h \mathbf{u}_\delta^2\,\mathrm{d}x = \int_\Omega \nabla h \cdot \nabla \mathbf{u}_\delta \cdot \mathbf{u}_\delta\,\mathrm{d}x \leq \|\nabla \mathbf{u}_\delta\|_{L^2(\Omega;\mathbb{R}^{3\times 3})} B^{1/2},$$

où la quantité B est définie comme suit

$$B = \int_\Omega |\nabla h \otimes \mathbf{u}_\delta|^2\,\mathrm{d}x.$$

En outre, les estimations formulées dans le lemme 5 nous affirment que

$$A \leq cA^{\frac{\gamma-\beta}{4(\gamma\beta+\gamma-2\beta)}} B^{1/2}. \tag{2.75}$$

Il ne nous reste plus qu'à évaluer le paramètre B lui-même, à nouveau à l'aide d'une intégration par parties

$$B = -\int_\Omega h\Delta h \mathbf{u}_\delta^2 \,\mathrm{d}x - \int_\Omega h(\nabla h \otimes \mathbf{u}_\delta) : \nabla \mathbf{u}_\delta \,\mathrm{d}x \le \|h\|_{L^\infty(\Omega)} \Big(A + B^{1/2} \|\nabla \mathbf{u}_\delta\|_{L^2(\Omega;\mathbb{R}^{3\times 3})} \Big).$$

À l'aide de (2.74), du lemme 5 et de l'inégalité de Young, on déduit immédiatement

$$B \le c\Big(1 + A^{\frac{2\gamma+\gamma\beta-\beta/s-2\beta}{\gamma\beta+\gamma-2\beta}} + A^{\frac{5\gamma-4\beta/s-\beta}{2(\gamma\beta+\gamma-2\beta)}}\Big).$$

On conclut en remarquant l'existence de paramètres $1 < s_0 < 2 - \frac{1}{\gamma}$ et $(s_0-1)\frac{\gamma}{\gamma-1} < \beta_0 < 1$ tels que

$$B \le c\Big(1 + A^{\frac{2\gamma+\gamma\beta-\beta/s-2\beta}{\gamma\beta+\gamma-2\beta}}\Big), \tag{2.76}$$

pour tout $s \in (1, s_0)$, $\beta \in (\beta_0, 1)$.

Il suffit de rassembler les observations (2.75) et (2.76), pour obtenir une borne pour notre paramètre de bootstrap A

$$A \le c \text{ pour } s \in (1, s_0) \text{ et } \beta \in (\beta_0, 1). \tag{2.77}$$

Cette estimation est la clé pour déduire des lemmes 1, 2, 5, 6 toute une série d'estimations uniformes indépendantes de δ qui se trouvent rassemblées dans le lemme qui suit.

Lemme 12
Si $\gamma > 1$, alors il existe $s_0 \in (1, 2 - \frac{1}{\gamma})$ tel que pour tout $s \in (1, s_0)$ on a

$$\begin{aligned}
&\sup_{\delta>0} \|\mathbf{u}_\delta\|_{W^{1,2}(\Omega)} && < \infty,\\
&\sup_{\delta>0} \|\varrho_\delta\|_{L^{s\gamma}(\Omega)} && < \infty,\\
&\sup_{\delta>0} \|p(\varrho_\delta)\|_{L^{s}(\Omega)} && < \infty,\\
&\sup_{\delta>0} \|\varrho_\delta \mathbf{u}_\delta\|_{L^{s}(\Omega;\mathbb{R}^3)} && < \infty,\\
&\sup_{\delta>0} \|\varrho_\delta \mathbf{u}_\delta^2\|_{L^{s}(\Omega)} && < \infty,\\
&\sup_{\delta>0} \|\varrho_\delta^\gamma \mathbf{u}_\delta^2\|_{L^{1}(\Omega)} && < \infty,\\
&\sup_{\delta>0} \Big(\delta \int_\Omega \varrho_\delta^{4+(s-1)\gamma} \,\mathrm{d}x\Big) && < \infty,\\
&\sup_{\delta>0} \|p_\delta(\varrho_\delta)\|_{L^{1+\frac{s-1}{4}\gamma}(\Omega)} && < \infty.
\end{aligned} \tag{2.78}$$

2.7 Passage à la limite $\delta \to 0^+$

2.7.1 Limites dues aux bornes uniformes

Les estimations établies dans la section précédente nous permettent de déduire l'existence de sous-suites de ϱ_δ et $\mathbf{u}_\delta$ (que l'on indice encore par δ) possédant les propriétés suivantes

$$\begin{aligned}
&\mathbf{u}_\delta \rightharpoonup \mathbf{u} && \text{dans } W^{1,2}(\Omega;\mathbb{R}^3),\\
&\mathbf{u}_\delta \to \mathbf{u} && \text{dans } L^{q}(\Omega;\mathbb{R}^3) \text{ pour } 1 \le q < 6,\\
&\varrho_\delta \rightharpoonup \varrho && \text{dans } L^{s\gamma}(\Omega),\\
&\delta\varrho_\delta^4 \rightharpoonup 0 && \text{dans } L^{1+(s-1)\gamma/4}(\Omega),\\
&p(\varrho_\delta) \rightharpoonup \overline{p(\varrho)} && \text{dans } L^{s}(\Omega),\\
&p_\delta(\varrho_\delta) \rightharpoonup \overline{p(\varrho)} && \text{dans } L^{1+(s-1)\gamma/4}(\Omega).
\end{aligned} \tag{2.79}$$

Pour s'assurer de la convergence des produits $\varrho_\delta \mathbf{u}_\delta$ et $\varrho_\delta \mathbf{u}_\delta \otimes \mathbf{u}_\delta$, on écrit un lemme intermédiaire

Lemme 13
Soit $f_\delta \rightharpoonup f$ dans $L^1(\Omega)$, $g_\delta \to g$ dans $L^1(\Omega)$ et $f_\delta g_\delta \rightharpoonup z$ dans $L^1(\Omega)$. Alors $z = fg$ presque partout sur Ω.

Démonstration:
On observe tout d'abord que g_δ tend vers g presque partout sur Ω. Le théorème d'Egoroff (voir théorème B.2)nous indique ainsi que $g_\delta \to g$ uniformément dans $\Omega \setminus E_\varepsilon$, avec $|E_\varepsilon| < \varepsilon$ où le réel $\varepsilon > 0$ peut être choisi arbitrairement petit. On définit

$$Z_\varepsilon = E_\varepsilon \cup \left\{ |g(x)| \geq \frac{1}{\varepsilon} \right\}.$$

On remarque ensuite que le produit fg est une fonction définie presque partout sur Ω et que la restriction de g à l'ensemble $\Omega \setminus Z_\varepsilon$ appartient à $L^\infty(\Omega \setminus Z_\varepsilon)$. Ainsi, la restriction de fg à $\Omega \setminus Z_\varepsilon$ appartient à $L^1(\Omega \setminus Z_\varepsilon)$ et on a, pour tout $\varphi \in L^\infty(\Omega)$,

$$\int_{\Omega \setminus Z_\varepsilon} (f_\delta g_\delta - fg)\varphi \, \mathrm{d}x = \int_{\Omega \setminus Z_\varepsilon} (g_\delta - g) f_\delta \varphi \, \mathrm{d}x + \int_{\Omega \setminus Z_\varepsilon} (f_\delta - f) g \varphi \, \mathrm{d}x,$$

où toutes les intégrales sont bien définies et convergentes. En outre, les deux intégrales du membre de droite tendent vers 0 quand $\delta \to 0$. On en déduit donc que $z = fg$ presque partout sur $\Omega \setminus Z_\varepsilon$. Comme la mesure de Lebesgue de l'ensemble Z_ε tend vers 0 quand $\varepsilon \to 0$, notre lemme est démontré.

On utilise maintenant ce résultat et, en accord avec les convergences énoncées en (2.79), on obtient les limites

$$\varrho_\delta \mathbf{u}_\delta \rightharpoonup \varrho \mathbf{u} \text{ dans } L^s(\Omega, \mathbb{R}^3)$$

et

$$\varrho_\delta \mathbf{u}_\delta \otimes \mathbf{u}_\delta \rightharpoonup \varrho \mathbf{u} \otimes \mathbf{u} \text{ dans } L^s(\Omega, \mathbb{R}^3).$$

Il est dorénavant aisé de faire tendre δ vers 0 dans la formulation faible de notre problème approchant (2.13), (2.1) - (2.7), (voir la définition 2.1 en remplaçant p par p_δ). Ainsi, pour $\gamma > 1$, on obtient le problème limite

$$\int_\Omega \varrho \mathbf{u} \cdot \nabla \varphi \, \mathrm{d}x = 0, \ \forall \varphi \in \mathcal{C}^\infty(\overline{\Omega}), \tag{2.80}$$

$$-\int_\Omega \overline{b(\varrho)} \mathbf{u} \cdot \nabla \varphi \, \mathrm{d}x + \int_\Omega \overline{\big(\varrho b'(\varrho) - b(\varrho)\big) \operatorname{div} \mathbf{u}} \varphi \, \mathrm{d}x = 0 \ \forall \varphi \in \mathcal{C}^\infty(\overline{\Omega}), \tag{2.81}$$

pour tout $b \in \mathcal{C}([0,\infty)) \cap \mathcal{C}^1(0,\infty)$ avec $zb'(z) \in L^\infty(0,\infty)$, $b(z)/z^{\gamma/2} \in L^\infty(1,\infty)$.

$$\begin{aligned} &\int_\Omega \Big(-\varrho(\mathbf{u} \otimes \mathbf{u}) : \nabla \boldsymbol{\varphi} - \overline{p(\varrho)} \operatorname{div} \boldsymbol{\varphi} + \mathbb{S}(\mathbf{u}) : \nabla \boldsymbol{\varphi} \Big) \mathrm{d}x \\ &= \int_\Omega \varrho \mathbf{f} \cdot \boldsymbol{\varphi} \, \mathrm{d}x, \quad \forall \boldsymbol{\varphi} \in \mathcal{C}^\infty(\overline{\Omega}; \mathbb{R}^3), \ \boldsymbol{\varphi} \cdot \mathbf{n}|_{\partial\Omega} = 0, \end{aligned} \tag{2.82}$$

où la notation $\overline{g(\varrho, \mathbf{u}, \nabla \mathbf{u})}$ désigne la limite faible de $g(\varrho_\delta, \mathbf{u}_\delta, \nabla \mathbf{u}_\delta)$ dans $L^1(\Omega)$.

Il ne nous reste maintenant plus qu'à montrer la convergence forte de ϱ_δ vers ϱ dans $L^1(\Omega)$ pour finir la démonstration du théorème 2.1. Pour cela, nous employons une preuve très semblable à [62, chapitre 4], basée sur l'établissement de l'identité du flux effectif visqueux et la mise en place d'une mesure de défaut qui rendent possible l'utilisation de l'équation de continuité renormalisée.

2.7.2 Flux effectif visqueux

On définit la fonction de troncature

$$T_k(z) = kT(\frac{z}{k}), \qquad T(z) = \begin{cases} z \text{ pour } 0 \leq z \leq 1, \\ \text{concave sur } (0,\infty), \\ 2 \text{ pour } z \geq 3, \end{cases}$$

que l'on se propose d'utiliser pour créer une fonction test pour l'équation (2.13) : $\zeta\nabla\Delta^{-1}(1_\Omega T_k(\varrho_\delta))$, $k \in \mathbb{N}$ avec $T_k \in \mathcal{C}^\infty([0,\infty))$, $\zeta \in \mathcal{C}_c^\infty(\Omega)$. On utilise la fonction $\zeta\nabla\Delta^{-1}(1_\Omega\overline{T_k(\varrho)})$ dans l'équation limite (2.82) (voir chapitre 5 section 5.2.4 pour les détails de cette utilisation dans un cas plus général). On arrive finalement à l'égalité

$$\begin{aligned}\lim_{\delta\to 0}\int_\Omega \zeta\left(p_\delta(\varrho_\delta)\,T_k(\varrho_\delta) - \left(\frac{4}{3}\mu+\xi\right)\operatorname{div}\mathbf{u}_\delta\,T_k(\varrho_\delta)\right)\mathrm{d}x \\ = \int_\Omega \zeta\left(\overline{p(\varrho)}\;\overline{T_k(\varrho)} - \left(\frac{4}{3}\mu+\xi\right)\operatorname{div}\mathbf{u}\overline{T_k(\varrho)}\right)\mathrm{d}x \\ + \int_\Omega \zeta\mathbf{u}\cdot\left(\varrho\mathbf{u}\cdot\mathcal{R}[1_\Omega\overline{T_k(\varrho)}]\right)\mathrm{d}x - \lim_{\delta\to 0}\int_\Omega \zeta\mathbf{u}_\delta\cdot\left(\varrho_\delta\mathbf{u}_\delta\cdot\mathcal{R}[1_\Omega T_k(\varrho_\delta)]\right)\mathrm{d}x.\end{aligned} \tag{2.83}$$

Ici, la notation $\mathcal{R}$ désigne l'opérateur de Riesz $(\mathcal{R}[v])_{ij} = (\nabla\otimes\nabla\Delta^{-1})_{ij}v = \mathcal{F}^{-1}\left[\frac{\xi_i\xi_j}{|\xi|^2}\mathcal{F}(v)(\xi)\right]$ où $\mathcal{F}$ représente la transformée de Fourier. On se rapporte à l'annexe (définition B.2 et propriétés afférentes) pour plus de détails sur les propriétés de cet opérateur.

On peut voir $\mathcal{R}[v]$ comme trois champs de vecteurs dont les composantes sont $\mathcal{R}_{ij}(v)$, $i = 1, 2, 3$ et on remarque ainsi que pour j fixé, ce champ de vecteurs est un gradient. Le lemme div-rot de Tartar et Murat (voir [79], [59] ou encore [24, Appendix] pour ce cas précis), nous amène immédiatement à la constatation suivante

Lemme 14
Soit $\mathbf{U}_\delta \rightharpoonup \mathbf{U}$ *dans* $L^p(\mathbb{R}^3;\mathbb{R}^3)$, $\operatorname{div}\mathbf{U}_\delta = 0$, $v_\delta \rightharpoonup v$ *dans* $L^q(\mathbb{R}^3;\mathbb{R})$, *où*

$$\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=\frac{1}{r}<1.$$

Alors on a la convergence

$$\mathbf{U}_\delta\cdot\mathcal{R}[v_\delta] \rightharpoonup \mathbf{U}\cdot\mathcal{R}[v].$$

dans $L^r(\mathbb{R}^3;\mathbb{R}^3)$.

On applique le lemme 14 aux suites

$$\begin{aligned} v_\delta = T_k(\varrho_\delta) &\rightharpoonup \overline{T_k(\varrho)} && \text{dans } L^q(\mathbb{R}^3;\mathbb{R}),\ \text{pour } q<\infty \text{ arbitraire },\\ \mathbf{U}_\delta = \varrho_\delta\mathbf{u}_\delta &\rightharpoonup \varrho\mathbf{u} && \text{dans } L^p(\mathbb{R}^3;\mathbb{R}^3),\ \text{pour un certain } p>1,\end{aligned}$$

ce qui nous donne

$$\varrho_\delta\mathbf{u}_\delta\cdot\mathcal{R}[1_\Omega T_k(\varrho_\delta)] \rightharpoonup \varrho\mathbf{u}\cdot\mathcal{R}[1_\Omega\overline{T_k(\varrho)}]$$

dans $L^p(\Omega;\mathbb{R}^3)$ pour tout $p \in [1, s)$. Par ailleurs,

$$\varrho_\delta\mathbf{u}_\delta\otimes\mathbf{u}_\delta : \mathcal{R}[1_\Omega T_k(\varrho_\delta)] = \mathbf{u}_\delta\cdot\left(\varrho_\delta\mathbf{u}_\delta\cdot\mathcal{R}[1_\Omega T_k(\varrho_\delta)]\right)$$

est uniformément borné dans $L^p(\Omega)$ pour $p \in [1, s)$. Le lemme 13 implique donc

$$\int_\Omega \zeta\mathbf{u}_\delta\cdot(\varrho_\delta\mathbf{u}_\delta\cdot\mathcal{R}[1_\Omega T_k(\varrho_\delta)])\,\mathrm{d}x \to \int_\Omega \zeta\mathbf{u}\cdot\left(\varrho\mathbf{u}\cdot\mathcal{R}[1_\Omega\overline{T_k(\varrho)}]\right)\mathrm{d}x.$$

L'identité (2.83) peut donc être transformée en identité du flux effectif visqueux détaillée dans le lemme suivant

Lemme 15
Soit $\gamma > 1$. *Alors*

$$\overline{p(\varrho)T_k(\varrho)} - \left(\frac{4}{3}\mu+\xi\right)\overline{T_k(\varrho)\operatorname{div}\mathbf{u}} = \overline{p(\varrho)}\;\overline{T_k(\varrho)} - \left(\frac{4}{3}\mu+\xi\right)\overline{T_k(\varrho)}\operatorname{div}\mathbf{u}. \tag{2.84}$$

2.7.3 Majoration de la mesure de défaut

On définit la mesure de défaut

$$\mathbf{osc_q}[\varrho_\delta \to \varrho](Q) = \sup_{k>1} \left(\limsup_{\delta\to 0^+} \int_Q |T_k(\varrho_\delta) - T_k(\varrho)|^q \,\mathrm{d}x \right), \tag{2.85}$$

et on montre dans cette section que la suite ϱ_δ est telle que la quantité $\mathbf{osc_q}[\varrho_\delta \to \varrho](\Omega)$ (pour un certain $q > 2$) est uniformément bornée en δ.

Tout d'abord, on constate que l'hypothèse (2.6) nous indique l'existence d'un réel $d > 0$ tel que

$$p(\varrho) = d\varrho^\gamma + p_m(\varrho), \qquad \frac{\partial p_m(\varrho)}{\partial \varrho} \geq 0. \tag{2.86}$$

Puis, sachant que T_k est lipschitzienne et grâce à l'inégalité $(a-b)^\gamma \leq a^\gamma - b^\gamma$, $a \geq b \geq 0$, on effectue la majoration

$$\begin{aligned} d \limsup_{\delta\to 0^+} \int_\Omega |T_k(\varrho_\delta) - T_k(\varrho)|^{\gamma+1} \,\mathrm{d}x &\leq d \limsup_{\delta\to 0^+} \int_\Omega (\varrho^\gamma - \varrho_\delta^\gamma)(T_k(\varrho) - T_k(\varrho_\delta)) \,\mathrm{d}x \\ &= d \int_\Omega \left(\overline{\varrho^\gamma T_k(\varrho)} - \overline{\varrho^\gamma}\; \overline{T_k(\varrho)}\right) \mathrm{d}x + d \int_\Omega (\varrho^\gamma - \overline{\varrho^\gamma})\left(T_k(\varrho) - \overline{T_k(\varrho)}\right) \mathrm{d}x. \end{aligned}$$

On emploie maintenant la convexité de la fonction $\varrho \mapsto \varrho^\gamma$, la concavité de T_k, la relation (2.86), le lemme 15, et le lemme de convexité et monotonie B.5, pour obtenir une dernière série d'inégalités

$$\begin{aligned} d \limsup_{\delta\to 0^+} \int_\Omega |T_k(\varrho_\delta) - T_k(\varrho)|^{\gamma+1} \,\mathrm{d}x &\leq \int_\Omega \left(\overline{p(\varrho) T_k(\varrho)} - \overline{p(\varrho)}\; \overline{T_k(\varrho)}\right) \mathrm{d}x \\ &\leq \int_\Omega [\frac{4}{3}\mu + \xi] \left(\overline{T_k(\varrho) \operatorname{div} \mathbf{u}} - \overline{T_k(\varrho)} \operatorname{div} \mathbf{u}\right) \mathrm{d}x \\ &\leq c \sup_{\delta>0} \|\operatorname{div} \mathbf{u}_\delta\|_{L^2(\Omega)} \limsup_{\delta\to 0} \|T_k(\varrho_\delta) - T_k(\varrho)\|_{L^2(\Omega)} \\ &\leq c \limsup_{\delta\to 0} \|T_k(\varrho_\delta) - T_k(\varrho)\|_{L^2(\Omega)}. \end{aligned} \tag{2.87}$$

Il s'ensuit que la mesure de défaut est bornée, moyennant l'utilisation de l'inégalité de Young dans le membre de droite de la dernière inégalité. On peut donc écrire le lemme suivant

Lemme 16
Si $\gamma > 1$, alors la mesure de défaut $\mathbf{osc_{\gamma+1}}[\varrho_\delta \to \varrho](\Omega)$ est bornée.

2.7.4 Équation du bilan de masse renormalisée

La quantité $\mathbf{osc_q}[\varrho_\delta \to \varrho](\Omega)$ permet l'utilisation des solutions renormalisées de l'équation de bilan de masse pour les cas où les travaux de Di-Perna, Lions en théorie de transport (voir [14]) ne sont pas exploitables. Ceci est résumé dans le lemme suivant (voir [24, Lemma 3.8]), que l'on redémontre dans le cinquième chapitre 5.

Lemme 17
Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^3$. On suppose que

$$\begin{aligned} \varrho_\delta &\rightharpoonup \varrho && \textit{dans } L^1(\Omega;\mathbb{R}), \\ \mathbf{u}_\delta &\rightharpoonup \mathbf{u} && \textit{dans } L^r(\Omega;\mathbb{R}^3), \\ \nabla\mathbf{u}_\delta &\rightharpoonup \nabla\mathbf{u} && \textit{dans } L^r(\Omega;\mathbb{R}^{3\times 3}), \quad r > 1. \end{aligned}$$

et

$$\mathbf{osc_q}[\varrho_\delta \to \varrho](\Omega) < \infty \tag{2.88}$$

avec $\frac{1}{q} < 1 - \frac{1}{r}$, où $(\varrho_\delta, \mathbf{u}_\delta)$ est solution de l'équation de bilan de masse (2.9)*. Alors les fonctions limites $\varrho, \mathbf{u}$ sont solutions elles aussi de* (2.9).

On applique ce résultat à la suite ϱ_δ, et on en déduit le lemme

Lemme 18
Soit $\gamma > 1$. Le couple $(\varrho, \mathbf{u})$ de limites faibles vérifie l'équation de bilan de masse renormalisée (2.9).

2.7.5 Convergence forte de la densité

On sait que les couples $(\varrho_\delta, \mathbf{u}_\delta)$ et $(\varrho, \mathbf{u})$ sont solutions de l'équation du bilan de masse renormalisée (2.9). On y utilise la fonction $b(\varrho) = \varrho \int_1^\varrho \frac{T_k(z)}{z^2}\,\mathrm{d}z$ pour déduire

$$\int_\Omega T_k(\varrho)\,\mathrm{div}\,\mathbf{u}\,\mathrm{d}x = 0,$$

et

$$\int_\Omega T_k(\varrho_\delta)\,\mathrm{div}\,\mathbf{u}_\delta\,\mathrm{d}x = 0, \qquad \textit{id est} \int_\Omega \overline{T_k(\varrho)\,\mathrm{div}\,\mathbf{u}}\,\mathrm{d}x = 0.$$

Puis, en revenant à l'identité du flux effectif visqueux (2.84), il vient

$$\int_\Omega \frac{\overline{p(\varrho)T_k(\varrho)} - \overline{p(\varrho)}\;\overline{T_k(\varrho)}}{\frac{4}{3}\mu + \xi}\,\mathrm{d}x = \int_\Omega \left(T_k(\varrho) - \overline{T_k(\varrho)}\right)\mathrm{div}\,\mathbf{u}\,\mathrm{d}x. \tag{2.89}$$

Comme $\lim_{k\to\infty} \|T_k(\varrho) - \varrho\|_{L^1(\Omega;\mathbb{R})} = \lim_{k\to\infty} \|\overline{T_k(\varrho)} - \varrho\|_{L^1(\Omega;\mathbb{R})} = 0$, le lemme 16 et l'équation (2.89) en association avec une interpolation nous donnent

$$\lim_{k\to\infty} \int_\Omega \left(\overline{p(\varrho)T_k(\varrho)} - \overline{p(\varrho)}\;\overline{T_k(\varrho)}\right)\mathrm{d}x = 0.$$

En reprenant maintenant (2.87) on arrive à

$$\lim_{k\to\infty} \limsup_{\delta\to 0^+} \int_\Omega |T_k(\varrho_\delta) - T_k(\varrho)|^{\gamma+1}\,\mathrm{d}x = 0,$$

puis en constatant l'inégalité

$$\|\varrho_\delta - \varrho\|_{L^1(\Omega;\mathbb{R})} \le \|\varrho_\delta - T_k(\varrho_\delta)\|_{L^1(\Omega;\mathbb{R})} + \|T_k(\varrho_\delta) - T_k(\varrho)\|_{L^1(\Omega;\mathbb{R})} + \|T_k(\varrho) - \varrho\|_{L^1(\Omega;\mathbb{R})},$$

on déduit finalement que

$$\varrho_\delta \to \varrho \qquad \text{dans } L^1(\Omega;\mathbb{R}).$$

Ceci implique

$$\varrho_\delta \to \varrho \quad \text{dans } L^p(\Omega;\mathbb{R}) \quad \text{pour tout } p \text{ dans } [1, s\gamma),$$

ce qui met un point final à la preuve du théorème 2.1.

3 Existence de solutions faibles pour les équations de Navier-Stokes-Fourier dans le cas stationnaire avec des conditions de glissement au bord

Sommaire

3.1 Introduction et description du problème

3.1.1 Introduction

On étudie maintenant le problème de Navier-Stokes-Fourier complet dans le cas stationnaire. La pression dépend ainsi de la densité mais aussi de la température, tout comme l'énergie et l'entropie du système. On considère des conditions de bord de glissement partiel. Cette condition nous permet d'obtenir les résultats d'existence pour des domaines pouvant comporter des symétries axiales. On introduit deux classes de solutions : les solutions faibles standard et les solutions entropiques variationnelles basées sur le bilan d'entropie. On arrive à des résultats d'existence de solutions faibles pour des domaines comportant des symétries axiales ou non, et avec un coefficient adiabatique aussi proche de 1 qu'on le souhaite.

On commence en écrivant un système approchant pour lequel l'existence de solutions est vérifiée. On continue en établissant des estimations *a priori* pour la vitesse et la température au moyen de l'équation d'énergie totale et de l'inégalité entropique. Enfin, en introduisant un paramètre de bootstrapping similaire à celui du chapitre précédent, on parvient à majorer diverses quantités, de la même manière que dans le chapitre précédent.

On met ensuite en place le type de fonctions test créées auparavant et l'on arrive au même genre d'estimations de type potentiel. Celles-ci permettent à leur tour de borner le paramètre de bootstrapping et d'estimer de manière uniforme les quantités majorées par notre paramètre.

Ceci nous autorise à énoncer de nombreuses convergences nécessaires au passage du système approchant au système de départ. Il ne reste plus alors qu'à démontrer la convergence de la densité. Ceci est fait en appliquant les techniques énoncées dans le chapitre précédent au système complet de Navier-Stokes-Fourier. On généralise ainsi les travaux de Novotný et Pokorny [61] et [63] en permettant de traiter des lois constitutives plus générales.

Les résultats énoncés et démontrés dans ce chapitre, ont été l'objet de l'article [46] accepté pour publication.

3.1.2 Le système de Navier-Stokes-Fourier stationnaire avec conduction de la chaleur

Dans ce chapitre, on montre l'existence de solutions faibles pour le système de Navier-Stokes-Fourier stationnaire avec conduction de la chaleur dans un domaine borné $\Omega \subset \mathbb{R}^3$. Ce système d'équations aux dérivées partielles décrit l'écoulement d'un fluide compressible conducteur de la chaleur et s'écrit comme suit

$$\operatorname{div}(\varrho \mathbf{u}) = 0, \tag{3.1}$$

$$\operatorname{div}(\varrho \mathbf{u} \otimes \mathbf{u}) - \operatorname{div} \mathbb{S} + \nabla p = \varrho \mathbf{f}, \tag{3.2}$$

$$\operatorname{div}(\varrho E \mathbf{u}) = \varrho \mathbf{f} \cdot \mathbf{u} - \operatorname{div}(p\mathbf{u}) + \operatorname{div}(\mathbb{S}\mathbf{u}) - \operatorname{div} \mathbf{q}. \tag{3.3}$$

Comme auparavant, la première équation exprime le bilan de masse du fluide, alors que la deuxième représente le bilan de quantité de mouvement. La dernière équation dresse quant à elle le bilan d'énergie totale du système. La première inconnue du système est la densité du fluide, ϱ, qui est toujours positive ou nulle alors que la température du fluide ϑ doit rester strictement positive. Cette dernière n'apparaît qu'implicitement dans la formulation que l'on a donné du problème. Enfin, $\mathbf{u}$ représente le vecteur vitesse du fluide. Le fluide étant à nouveau supposé newtonien, on considère un tenseur des contraintes visqueuses de la forme

$$\mathbb{S} = \mathbb{S}(\vartheta, \nabla \mathbf{u}) := \mu(\vartheta) \left[\nabla \mathbf{u} + \nabla^T \mathbf{u} - \frac{2}{3} \operatorname{div} \mathbf{u} \mathbb{I} \right] + \xi(\vartheta) \operatorname{div} \mathbf{u} \mathbb{I}, \tag{3.4}$$

et le flux de chaleur $\mathbf{q}$ est supposé satisfaire la loi de Fourier

$$\mathbf{q} = -\kappa(\vartheta) \nabla \vartheta. \tag{3.5}$$

3.1.3 Cadre de travail

On considère pour conditions de bord sur $\partial\Omega$:

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{n} = 0, \quad (\mathbb{S}(\vartheta, \nabla \mathbf{u})\mathbf{n}) \times \mathbf{n} + \lambda \mathbf{u} \times \mathbf{n} = 0, \tag{3.6}$$

$$-\mathbf{q}(\vartheta, \nabla\vartheta) \cdot \mathbf{n} + L(\vartheta)(\vartheta - \Theta_0) = 0, \tag{3.7}$$

où $\mathbf{n}$ représente le vecteur normal unitaire sortant au bord du domaine Ω. La fonction $L(\cdot)$ est une fonction de la température vérifiant les propriétés

$$L(\cdot) \in \mathcal{C}(0, \infty), \quad c_1(1 + \vartheta)^l \leq L(\vartheta) \leq c_2(1 + \vartheta)^l, \quad l \in \mathbb{R}, \ \vartheta \in \mathbb{R}^+. \tag{3.8}$$

Ces conditions signifient qu'il y a un glissement partiel au bord (parfait si λ est nul) et un transfert de chaleur à travers la frontière qui est proportionnel à la différence de température entre le système et l'extérieur.

La masse totale du fluide est définie par

$$\int_\Omega \varrho \,\mathrm{d}x = M > 0.$$

Les viscosités quant à elles sont supposées avoir les comportements suivants

$$\begin{cases} \mu > 0, \quad \xi \geq 0, & (3.9a)\\ \mu \text{ et } \xi \text{ sont continues sur } (0,\infty), & (3.9b)\\ \mu \text{ est lipschitzienne sur } (0,\infty), & (3.9c)\\ c_1(1+\vartheta) \leq \mu(\vartheta), & (3.9d)\\ \mu(\vartheta), \xi(\vartheta) \leq c_2(1+\vartheta). & (3.9e) \end{cases}$$

Pour la conductivité de la chaleur $\kappa(\vartheta)$ on fait l'hypothèse

$$c_3(1+\vartheta^m) \leq \kappa(\vartheta) \leq c_4(1+\vartheta^m) \text{ sur } (0,\infty), \tag{3.10}$$

pour un certain m strictement positif. On montre par la suite que ce coefficient se révèle nécessairement strictement supérieur à $2/3$.

Précisons maintenant les quantités thermodynamiques. L'énergie totale E qui apparaît dans l'équation (3.3) est la somme de l'énergie interne spécifique du système et de l'énergie cinétique :

$$E(\varrho,\vartheta,\mathbf{u}) = e(\varrho,\vartheta) + \frac{1}{2}\mathbf{u}^2. \tag{3.11}$$

La pression considérée est une généralisation de la loi de pression pour les gaz monoatomiques

$$p(\varrho,\vartheta) = (\gamma-1)\varrho e(\varrho,\vartheta). \tag{3.12}$$

Enfin, l'entropie spécifique $s = s(\varrho,\vartheta)$ est définie à travers la relation de Gibbs

$$\vartheta D s(\varrho,\vartheta) = De(\varrho,\vartheta) + p(\varrho,\vartheta) D\left(\frac{1}{\varrho}\right), \tag{3.13}$$

où D représente le gradient par rapport aux variables ϱ et ϑ.

On constate que l'entropie spécifique ainsi définie est solution de

$$\operatorname{div}(\varrho s\mathbf{u}) + \operatorname{div}\left(\frac{\mathbf{q}(\vartheta,\nabla\vartheta)}{\vartheta}\right) = \frac{\mathbb{S}(\vartheta,\nabla\mathbf{u}) : \nabla\mathbf{u}}{\vartheta} - \frac{\mathbf{q}(\vartheta,\nabla\vartheta)\cdot\nabla\vartheta}{\vartheta^2}. \tag{3.14}$$

Par ailleurs, si p est de classe $\mathcal{C}^1((0,\infty)^2)$ et que $e \in \mathcal{C}^2((0,\infty)^2)$, alors la relation de Gibbs est équivalente à la relation dite de Maxwell

$$\frac{\partial e(\varrho,\vartheta)}{\partial\varrho} = \frac{1}{\varrho^2}\left(p(\varrho,\vartheta) - \vartheta\frac{\partial p(\varrho,\vartheta)}{\partial\vartheta}\right). \tag{3.15}$$

La pression est donc finalement de la forme

$$p(\varrho,\vartheta) = \vartheta^{\gamma/(\gamma-1)} P\left(\frac{\varrho}{\vartheta^{1/(\gamma-1)}}\right), \tag{3.16}$$

où P est une fonction positive possédant la propriétés suivantes

$$\begin{cases} P \in \mathcal{C}^1([0,\infty)) \cap \mathcal{C}^2((0,\infty)), & (3.17a)\\ P(0) = 0 \text{ et } P'(0) = p_0 > 0, & (3.17b)\\ P'(Z) > 0 \text{ pour } Z > 0, & (3.17c)\\ \lim\limits_{Z\to\infty}\dfrac{P(Z)}{Z^\gamma} = p_\infty > 0, & (3.17d)\\ 0 < \dfrac{1}{\gamma-1}\dfrac{\gamma P(Z) - ZP'(Z)}{Z} \leq c_5 < \infty, \text{ pour } Z > 0. & (3.17e) \end{cases}$$

Remarque 1
Pour faciliter la compréhension, on peut se restreindre au modèle plus simple où

$$p(\varrho, \vartheta) = \varrho^\gamma + \varrho\vartheta \text{ et } e(\varrho, \vartheta) = \frac{1}{\gamma - 1}\varrho^{\gamma-1} + c_v\vartheta \text{ avec } c_v > 0. \tag{3.18}$$

Dans ce cas, en vertu de (3.13), *on sait que l'entropie spécifique est de la forme*

$$s(\varrho, \vartheta) = -\ln \varrho + c_v \ln \vartheta. \tag{3.19}$$

L'utilisation d'un tel modèle permet d'exhiber toutes les difficultés des preuves, tout en évitant l'émergence de certains problèmes techniques.

3.2 Définitions des solutions recherchées et résultats obtenus

3.2.1 Définitions des solutions

On définit ici deux types de solutions à notre problème.

Définition 3.1 (Solution faible)
On appelle solution faible du système (3.1) - (3.19) *un triplet* $(\varrho, \vartheta, \mathbf{u})$ *qui vérifie les conditions suivantes :*

1. *Les propriétés de régularité :*
   - $\varrho \geq 0$ *presque partout sur* Ω,
   - $\varrho \in L^{6\gamma/5}(\Omega)$,
   - $\int_\Omega \varrho \,\mathrm{d}x = M$,
   - $\vartheta > 0$ *presque partout sur* Ω,
   - $\vartheta \in W^{1,r}(\Omega) \cap L^{3m}(\Omega) \cap L^{l+1}(\partial\Omega)$, *pour un certain r>1,*
   - $\vartheta^m \nabla\vartheta \in L^1(\Omega; \mathbb{R}^3)$,
   - $\mathbf{u} \in W_0^{1,2}(\Omega; \mathbb{R}^3)$,
   - $\varrho|\mathbf{u}|^2 \in L^{6/5}(\Omega)$,
   - $\mathbb{S}(\vartheta, \nabla\mathbf{u})\mathbf{u} \in L^1(\Omega; \mathbb{R}^3)$,
   - $\varrho\mathbf{u}\vartheta \in L^1(\Omega; \mathbb{R}^3)$,
2. *L'équation de bilan de masse au sens faible :*
$$\int_\Omega \varrho\mathbf{u} \cdot \nabla\psi = 0, \quad \forall\psi \in \mathcal{C}^\infty(\overline{\Omega}), \tag{3.20}$$
3. *L'équation de bilan de quantité de mouvement au sens faible :*
$$\int_\Omega \Big(-\varrho(\mathbf{u}\otimes\mathbf{u}) : \nabla\boldsymbol{\varphi} - p(\varrho, \vartheta)\operatorname{div}\boldsymbol{\varphi} + \mathbb{S}(\vartheta, \nabla\mathbf{u}) : \nabla\boldsymbol{\varphi}\Big)\,\mathrm{d}x + \lambda\int_{\partial\Omega} (\mathbf{u}\times\mathbf{n})\cdot(\boldsymbol{\varphi}\times\mathbf{n})\,\mathrm{d}\sigma = \int_\Omega \varrho\mathbf{f}\cdot\boldsymbol{\varphi}\,\mathrm{d}x \tag{3.21}$$
pour tout $\varphi \in \mathcal{C}_{\mathbf{n}}^\infty(\overline{\Omega}; \mathbb{R}^3)$,
4. *L'équation de bilan d'énergie totale au sens faible :*
$$\begin{aligned}\int_\Omega -\left(\frac{1}{2}\varrho|\mathbf{u}|^2 + \varrho e(\varrho, \vartheta)\right)\mathbf{u}\cdot\nabla\psi\,\mathrm{d}x &= \int_\Omega \varrho\mathbf{f}\cdot\mathbf{u}\psi + p(\varrho, \vartheta)\mathbf{u}\cdot\nabla\psi\,\mathrm{d}x \\ - \int_\Omega \Big((\mathbb{S}(\vartheta, \nabla\mathbf{u})\mathbf{u})\cdot\nabla\psi + \kappa(\vartheta)\nabla\vartheta\cdot\nabla\psi\Big)\,\mathrm{d}x &- \int_{\partial\Omega} L(\vartheta)(\vartheta - \Theta_0)\psi\,\mathrm{d}\sigma - \lambda\int_{\partial\Omega} (\mathbf{u}\times\mathbf{n})^2\psi\,\mathrm{d}\sigma,\end{aligned} \tag{3.22}$$
pour tout $\psi \in \mathcal{C}^\infty(\overline{\Omega})$.

Ici, le symbole $\mathcal{C}_{\mathbf{n}}^\infty(\overline{\Omega}; \mathbb{R}^3)$ *représente l'ensemble* $\{\mathbf{v} \in \mathcal{C}^\infty(\overline{\Omega}); \mathbf{v}\cdot\mathbf{n} = 0 \text{ sur } \partial\Omega\}$.

Définition 3.2 (Solution entropique variationnelle)
Un triplet $(\varrho, \vartheta, \mathbf{u})$ *sera appelé solution variationnelle entropique au système* (3.1) - (3.19) *s'il vérifie*

1. *Les propriétés de régularité :*
   - $\varrho \geq 0$ *presque partout sur* Ω,
   - $\varrho \in L^\gamma(\Omega)$,
   - $\int_\Omega \varrho \, \mathrm{d}x = M$,
   - $\vartheta > 0$ *presque partout sur* Ω,
   - $\vartheta \in L^{3m}(\Omega)$,
   - $\vartheta^{-1} \in L^1(\partial\Omega)$,
   - $(1+\vartheta)^l \in L^1(\partial\Omega)$,
   - $\vartheta^m \frac{|\nabla\vartheta|^2}{\vartheta^2} \in L^1(\Omega)$,
   - $\vartheta^m \frac{\nabla\vartheta}{\vartheta} \in L^1(\Omega)$,
   - $\mathbf{u} \in W_0^{1,2}(\Omega;\mathbb{R}^3)$,
   - $\varrho\vartheta \in L^1(\Omega)$,
   - $\varrho|\mathbf{u}|^2 \in L^{6/5}(\Omega)$,
   - $\vartheta^{-1}\mathbb{S}(\vartheta,\nabla\mathbf{u})\mathbf{u} \in L^1(\Omega;\mathbb{R}^3)$,
2. *Les équations de bilan de masse et de quantité de mouvement au sens faible* (3.20)*,* (3.21)*,*
3. *L'inégalité d'entropie :*

$$\int_\Omega \left(\frac{\mathbb{S}(\vartheta,\nabla\mathbf{u}) : \nabla\mathbf{u}}{\vartheta} + \kappa(\vartheta)\frac{|\nabla\vartheta|^2}{\vartheta^2} \right) \psi \, \mathrm{d}x + \int_{\partial\Omega} \frac{L(\vartheta)}{\vartheta}\Theta_0 \, \mathrm{d}\sigma \leq \int_{\partial\Omega} L(\vartheta)\psi \, \mathrm{d}\sigma + \int_\Omega \kappa(\vartheta)\frac{\nabla\vartheta\cdot\nabla\psi}{\vartheta} - \varrho s(\varrho,\vartheta)\mathbf{u}\cdot\nabla\psi \, \mathrm{d}x \tag{3.23}$$

   pour tout ψ *positif appartenant à* $\mathcal{C}^\infty(\overline{\Omega})$,
4. *Le bilan d'énergie global*

$$\lambda \int_{\partial\Omega} (\mathbf{u}\times\mathbf{n})^2 \, \mathrm{d}\sigma + \int_{\partial\Omega} L(\vartheta)(\vartheta - \Theta_0) \, \mathrm{d}\sigma = \int_\Omega \varrho\mathbf{f}\cdot\mathbf{u} \, \mathrm{d}x. \tag{3.24}$$

Définition 3.3 (Solution renormalisée)
Soit $\varrho \in L^{6/5}_{loc}(\mathbb{R}^3)$ *et* $\mathbf{u} \in W^{1,2}_{loc}(\mathbb{R}^3;\mathbb{R}^3)$ *qui sont solutions de*

$$\operatorname{div}(\varrho\mathbf{u}) = 0$$

au sens des distributions.
Alors, le couple $(\varrho,\mathbf{u})$ *est appelé solution renormalisée de l'équation de bilan de masse si*

$$\operatorname{div}(b(\varrho)\mathbf{u}) + (\varrho b'(\varrho) - b(\varrho))\operatorname{div}\mathbf{u} = 0 \text{ dans } \mathcal{D}'(\mathbb{R}^3) \tag{3.25}$$

pour tout $b \in \mathcal{C}([0,\infty)) \cap \mathcal{C}^1(0,\infty)$ *vérifiant*

$$\begin{cases} zb'(z) \in L^\infty(0,1), \\ b(z)/z^{5\gamma/6} \in L^\infty(1,\infty), \\ \dfrac{zb'(z)-b(z)}{z^{\gamma/2}} \in L^\infty(1,\infty). \end{cases}$$

3.2.2 Résultats obtenus

Inspirés par la méthode exposée dans le premier chapitre de cette partie, le but de notre étude est d'abaisser la valeur de γ aussi près de 1 que possible. Nous formulons les résultats obtenus dans les deux théorèmes ci-dessous. Le premier théorème est valable dans le cas d'un domaine non axisymétrique, le deuxième montre les résultats obtenus dans le cas où le domaine contient une symétrie de révolution.

Théorème 3.1 (Existence de solutions - Cas d'un domaine non axisymétrique)
Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ *un domaine* $\mathcal{C}^2$ *borné. On suppose que* $\mathbf{f}$ *est un champ vectoriel de* $L^\infty(\Omega;\mathbb{R}^3)$*, que* $\Theta_0 \geq K_0 > 0$ *presque partout sur la frontière* $\partial\Omega$*, que* $\Theta_0 \in L^1(\partial\Omega)$ *et enfin que* L *est constante.*

- *Si* $\gamma > 1$ *et* $m > \max\left\{\frac{2}{3}, \frac{2}{3(\gamma-1)}\right\}$*, alors il existe une solution entropique variationnelle (voir définition 3.2) au problème* (3.1) *-* (3.19)*. Le couple* $(\varrho,\mathbf{u})$ *s'avère en outre être une solution*

renormalisée de l'équation de bilan de masse.
- *Si* $\gamma > \frac{5}{4}$ *et* $m > 1$*, alors la solution est aussi solution faible (au sens de la définition 3.1).*

Théorème 3.2 (Existence de solutions - Cas d'un domaine axisymétrique)
Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ *un domaine* $\mathcal{C}^2$ *borné. On suppose que* $\mathbf{f}$ *est un champ vectoriel de* $L^\infty(\Omega;\mathbb{R}^3)$*, que* $\Theta_0 \geq K_0 > 0$ *presque partout sur la frontière* $\partial\Omega$*, que* $\Theta_0 \in L^1(\partial\Omega)$ *et enfin que* L *est constante. On fait l'hypothèse supplémentaire que* $\lambda > 0$*.*
- *Si* $\gamma > 1$ *et* $m > \max\left\{\frac{2}{3}, \frac{2}{3(\gamma-1)}\right\}$*, alors il existe une solution entropique variationnelle (voir définition 3.2) au problème* (3.1) - (3.19)*.*
- *Si* $\gamma \in \left(\frac{5}{4}, \frac{4}{3}\right]$ *et* $m > \frac{6\gamma}{15\gamma-16}$ *ou si* $\gamma \in \left(\frac{4}{3}, \frac{5}{3}\right)$ *et* $m > \frac{18-6\gamma}{9\gamma-7}$*, alors la solution est aussi solution faible (au sens de la définition 3.1).*

3.2.3 Remarques bibliographiques

Les premiers résultats d'existence de solutions faibles pour le système de Navier-Stokes dans le cas compressible remontent au livre [52] de P.L. Lions, où la preuve a été faite pour un fluide isentrope avec un coefficient adiabatique strictement supérieur à $\frac{5}{3}$. Le point crucial de ce travail, la convergence forte de la densité, reposait sur l'utilisation de l'identité du flux effectif visqueux et la notion d'équation de bilan de masse renormalisée. Cette dernière nécessitant des estimations *a priori* pour la densité dans $L^2(\Omega)$. Dans l'article [60], Novo et Novotný se sont inspirés des travaux de Feireisl *et al.* [21], [26] sur la mesure de défaut pour obtenir l'existence de solutions pour tout γ, sous réserve que la densité obéisse à certaines estimations *a priori*.

De nouvelles idées pour améliorer les estimations de densité furent apportées de manière indépendante par Plotnikov et Sokolowski dans [68], [67] et [66] et par Frehse, Goj et Steinhauer dans [30]. La première preuve d'existence de solutions faibles pour $\gamma < \frac{5}{3}$ a été faite par Březina et Novotný [6], où les auteurs ont pris $\gamma > \frac{1+\sqrt{13}}{3}$ et ont évité les problèmes à la frontière en prenant des conditions de bord spatialement périodiques. Une nouvelle méthode valable pour des valeurs du coefficient adiabatique strictement supérieures à $\frac{4}{3}$ en trois dimensions (ou strictement supérieures à 1 dans le cas bidimensionnel) avec des conditions de Dirichlet a été émise dans les articles de Frehse, Steinhauer et Weigant [28] et [29]. Enfin, pour $\gamma > 1$, Jiang et Zhou on montré dans [48] et [47] l'existence de solutions faibles pour des conditions de Dirichlet périodiques en espace et dans le cas isentrope.

Pour les fluides conducteurs de la chaleur dans le cas stationnaire, on trouve un premier résultat dans le livre [52], mais avec des contraintes sur l'intégrabilité L^q de la densité pour des q larges. Ainsi, le premier résultat similaire au problème exposé dans ce chapitre s'avère être de Mucha et Pokorny [58], où les coefficients de viscosité sont indépendants de la température, γ est strictement supérieur à 3, $m = l + 1 = \frac{3\gamma-1}{3\gamma-7}$ et avec des conditions de glissement au bord du domaine pour la vitesse. En contrepartie des ces contraintes, la densité était bornée et la vitesse était dans $W^{1,q}(\Omega)$ pour tout q.

Dans les articles [61] et [63], les auteurs ont pu abaisser la valeur limite de γ jusqu'à $\frac{\sqrt{41}+3}{8}$ pour des conditions de Dirichlet et des viscosités dépendantes de la température, permettant une utilisation efficace de l'inégalité d'entropie.

3.3 Quelques résultats préliminaires

Dans cette section, on rappelle quelques résultats classiques qui seront utilisés par la suite.

3.3.1 Estimations des quantités thermodynamiques

On commence avec des propriétés concernant les quantités thermodynamiques $p(\varrho,\vartheta)$, $e(\varrho,\vartheta)$ et $s(\varrho,\vartheta)$. Celles-ci se déduisent de la loi de pression (3.12), de l'équation de Maxwell (3.15) et des propriétés de la pression (3.16) - (3.17). On se réfère à [24, Section 3.2] pour plus de détails.

On a, pour K_0 une constante fixée

$$\begin{aligned} &c_8\varrho\vartheta \leq p(\varrho,\vartheta) \leq c_9\varrho\vartheta \text{ si } \varrho \leq K_0\vartheta^{1/(\gamma-1)}, \\ &c_{10} \leq p(\varrho,\vartheta) \leq c_{11} \begin{cases} \vartheta^{\gamma/(\gamma-1)}, & \text{si } \varrho \leq K_0\vartheta^{1/(\gamma-1)}, \\ \varrho^\gamma, & \text{si } \varrho > K_0\vartheta^{1/(\gamma-1)}. \end{cases} \end{aligned} \tag{3.26}$$

On a aussi l'hypothèse thermodynamique suivante

$$\frac{\partial p(\varrho,\vartheta)}{\partial \varrho} > 0 \text{ sur } (0,\infty)^2, \tag{3.27}$$

$$p = d\varrho^\gamma + p_m(\varrho,\vartheta) \text{ pour un certain } d > 0 \text{ avec } \frac{\partial p_m(\varrho,\vartheta)}{\partial \varrho} \geq 0 \text{ sur } (0,\infty)^2. \tag{3.28}$$

Concernant l'énergie interne spécifique e, on sait que

$$\begin{cases} \dfrac{1}{\gamma-1} p_\infty \varrho^\gamma - 1 \leq e(\varrho,\vartheta) \leq c_{12}(\varrho^{\gamma-1} + \vartheta) & \text{sur } (0,\infty)^2, \\ \\ \dfrac{\partial e(\varrho,\vartheta)}{\partial \varrho}\varrho \leq c_{12}(\varrho^{\gamma-1} + \vartheta) & \text{sur } (0,\infty)^2. \end{cases} \tag{3.29}$$

Enfin, pour l'entropie spécifique on dispose des résultats suivants :

$$\frac{\partial s(\varrho,\vartheta)}{\partial \varrho} = \frac{1}{\vartheta}\left(\frac{\partial e(\varrho,\vartheta)}{\partial \varrho} - \frac{p(\varrho,\vartheta)}{\varrho^2}\right) = -\frac{1}{\varrho^2}\frac{\partial p(\varrho,\vartheta)}{\partial \vartheta}, \tag{3.30}$$

et

$$\frac{\partial s(\varrho,\vartheta)}{\partial \vartheta} = \frac{1}{\vartheta}\frac{\partial e(\varrho,\vartheta)}{\partial \vartheta} = \frac{1}{\gamma-1}\frac{\vartheta^{1/(\gamma-1)}}{\varrho}\left(\gamma P\left(\frac{\varrho}{\vartheta^{1/(\gamma-1)}}\right) - \frac{\varrho}{\vartheta^{1/(\gamma-1)}}P'\left(\frac{\varrho}{\vartheta^{1/(\gamma-1)}}\right)\right) > 0. \tag{3.31}$$

Mais aussi

$$\begin{cases} |s(\varrho,\vartheta)| \leq c_{13}(1 + |\ln \varrho| + |\ln \vartheta|) & \text{sur } (0,\infty)^2, \\ |s(\varrho,\vartheta)| \leq c_{14}(1 + |\ln \varrho|) & \text{sur } (0,\infty)\times(1,\infty), \\ s(\varrho,\vartheta) \geq c_{15} > 0 & \text{sur } (0,1)\times(1,\infty), \\ s(\varrho,\vartheta) \geq c_{16}(1 + \ln \vartheta) & \text{sur } (0,1)\times(0,1). \end{cases} \tag{3.32}$$

3.3.2 Inégalités de type Korn

On rappelle maintenant différentes inégalités de type Korn auxquelles on ajoute une version correspondant à nos conditions de bord.

Lemme 19
Soit $\mathbf{u} \in W_0^{1,2}(\Omega;\mathbb{R}^3)$, $\vartheta > 0$ *et* $\mathbb{S}(\vartheta,\nabla\mathbf{u})$ *comme défini précédemment. Alors*

$$\begin{aligned} &\int_\Omega \frac{\mathbb{S}(\vartheta,\nabla\mathbf{u}) : \nabla\mathbf{u}}{\vartheta}\,\mathrm{d}x \geq c\|\mathbf{u}\|^2_{W_0^{1,2}(\Omega;\mathbb{R}^3)}, \\ &\int_\Omega \mathbb{S}(\vartheta,\nabla\mathbf{u}) : \nabla\mathbf{u}\,\mathrm{d}x \geq c\|\mathbf{u}\|^2_{W_0^{1,2}(\Omega;\mathbb{R}^3)}. \end{aligned} \tag{3.33}$$

La preuve de ce lemme peut être trouvée dans [24].

Lemme 20
Soit $\mathbf{u} \in W^{1,2}(\Omega;\mathbb{R}^3)$, $\vartheta > 0$ *et* Ω *lipschitzien. Alors*

$$\int_\Omega \left|\nabla\mathbf{u} + \nabla^T\mathbf{u} - \frac{2}{3}\operatorname{div}\mathbf{u}\mathbb{I}\right|^2 \mathrm{d}x + \int_\Omega |\mathbf{u}|^2 \geq c\|\mathbf{u}\|^2_{W^{1,2}(\Omega;\mathbb{R}^3)}. \tag{3.34}$$

La preuve de ce résultat se trouve, par exemple, dans [24, Theorem 10.15].

Lemme 21
Soit $\mathbf{u} \in W_{\mathbf{n}}^{1,2}(\Omega;\mathbb{R}^3)$, $\vartheta > 0$, Ω *lipschitzien et* $\mathbb{S}(\vartheta, \nabla \mathbf{u})$ *vérifiant* (3.4) *et* (3.9). *Alors*

$$\begin{aligned} \int_\Omega \frac{\mathbb{S}(\vartheta,\nabla\mathbf{u}) : \nabla\mathbf{u}}{\vartheta}\,\mathrm{d}x + \int_{\partial\Omega} |\mathbf{u}\times\mathbf{n}|^2\,\mathrm{d}\sigma \geq c\|\mathbf{u}\|^2_{W_{\mathbf{n}}^{1,2}(\Omega;\mathbb{R}^3)}, \\ \int_\Omega \mathbb{S}(\vartheta,\nabla\mathbf{u}) : \nabla\mathbf{u}\,\mathrm{d}x + \int_{\partial\Omega} |\mathbf{u}\times\mathbf{n}|^2\,\mathrm{d}\sigma \geq c\|\mathbf{u}\|^2_{W_{\mathbf{n}}^{1,2}(\Omega;\mathbb{R}^3)}. \end{aligned} \tag{3.35}$$

Si de plus Ω *n'est pas axisymétrique, alors les inégalités* (3.33) *sont vraies elles aussi.*

Démonstration:
On utilise un raisonnement par l'absurde en supposant qu'il existe une suite de champs vectoriels $\mathbf{v}_k$ de $W_{\mathbf{n}}^{1,2}(\Omega;\mathbb{R}^3)$ telle que pour tout entier naturel k on a

$$\begin{cases} \|\mathbf{v}_k\|_{W_{\mathbf{n}}^{1,2}(\Omega;\mathbb{R}^3)} = 1, \\ \|\mathbf{v}_k\|_{W_{\mathbf{n}}^{1,2}(\Omega;\mathbb{R}^3)} > k\left(\int_\Omega \frac{\mathbb{S}(\vartheta,\nabla\mathbf{v}_k) : \nabla\mathbf{v}_k}{\vartheta}\,\mathrm{d}x + \int_{\partial\Omega} |\mathbf{v}_k\times\mathbf{n}|^2\,\mathrm{d}\sigma\right). \end{cases}$$

Le lemme 20 nous indique que cette suite va converger vers un certain $\mathbf{v}$ appartenant à $W_0^{1,2}(\Omega;\mathbb{R}^3)$ avec $\displaystyle\int_\Omega \frac{\mathbb{S}(\vartheta,\nabla\mathbf{u})}{\vartheta}\,\mathrm{d}x = 0$. Le lemme 19 nous assure ainsi que notre limite $\mathbf{v}$ est nulle, ce qui contredit notre première hypothèse. On obtient donc la première inégalité. La deuxième se démontrant de la même façon, on peut passer au cas où Ω ne comporte pas de symétrie axiale. On reprend alors le même argumentaire que dans le chapitre précédent, section 2.3. La dernière inégalité s'obtient de manière similaire. □

3.3.3 Système approchant

On utilise le système approchant suivant, basé sur le travail fait dans [61]. Il nous faut néanmoins refaire le passage à la limite $\delta \to 0$ qui se trouve modifié. On affirme ainsi que pour tout $\delta > 0$ il existe, pour β et B suffisamment grands, un triplet $(\varrho_\delta, \vartheta_\delta, \mathbf{u}_\delta)$ tel que

$$\begin{cases} \varrho_\delta \geq 0, \\ \varrho_\delta \in L^{5\beta/3}(\Omega), \\ \vartheta_\delta > 0 \text{ presque partout sur } \Omega, \\ \vartheta_\delta \in W^{1,2}(\Omega) \cap L^{3B}(\Omega), \\ \mathbf{u}_\delta \in W_{\mathbf{n}}^{1,2}(\Omega;\mathbb{R}^3), \end{cases}$$

vérifiant les équations suivantes

- l'équation de bilan de masse au sens faible

$$\int_\Omega \varrho_\delta \mathbf{u}_\delta \cdot \nabla\psi\,\mathrm{d}x = 0, \text{ pour tout } \psi \in W^{1,\frac{30\beta}{25\beta-18}}(\Omega), \tag{3.36}$$

- l'équation de la quantité de mouvement au sens faible

$$\begin{aligned} \int_\Omega \Big(-\varrho_\delta(\mathbf{u}_\delta\otimes\mathbf{u}_\delta) : \nabla\boldsymbol{\varphi} + \mathbb{S}(\vartheta_\delta,\nabla\mathbf{u}_\delta) : \nabla\boldsymbol{\varphi} - (p(\varrho_\delta,\vartheta_\delta) + \delta\varrho_\delta^\beta + \delta\varrho_\delta^2)\operatorname{div}\boldsymbol{\varphi}\Big)\,\mathrm{d}x \\ +\lambda\int_{\partial\Omega} (\mathbf{u}_\delta\times\mathbf{n})\cdot(\boldsymbol{\varphi}\times\mathbf{n})\,\mathrm{d}\sigma = \int_\Omega \varrho_\delta\mathbf{f}\cdot\boldsymbol{\varphi}\,\mathrm{d}x, \end{aligned} \tag{3.37}$$

  pour tout $\boldsymbol{\varphi} \in W_{\mathbf{n}}^{1,5/2}(\Omega;\mathbb{R}^3)$,

- l'équation de l'énergie totale au sens faible

$$\begin{aligned}\int_\Omega \bigg(\Big(-\frac{1}{2}\varrho_\delta|\mathbf{u}_\delta|^2 - \varrho_\delta e(\varrho_\delta,\vartheta_\delta)\Big)\mathbf{u}_\delta\cdot\nabla\psi + (\kappa(\vartheta_\delta)+\delta\vartheta_\delta^B+\delta\vartheta_\delta^{-1})\nabla\vartheta_\delta:\nabla\psi\bigg)\,\mathrm{d}x \\ + \int_{\partial\Omega}\left(L+\delta\vartheta_\delta^{B-1}\right)(\vartheta_\delta-\Theta_0)\,\psi\,\mathrm{d}\sigma + \lambda\int_{\partial\Omega}(\mathbf{u}_\delta\times\mathbf{n})^2\psi\,\mathrm{d}\sigma = \int_\Omega \varrho_\delta\mathbf{f}\cdot\mathbf{u}_\delta\psi\,\mathrm{d}x \\ + \int_\Omega\Big(\big(-\mathbb{S}(\vartheta_\delta,\nabla\mathbf{u}_\delta)\mathbf{u}_\delta + (p(\varrho_\delta,\vartheta_\delta)+\delta\varrho_\delta^\beta+\delta\varrho_\delta^2)\mathbf{u}_\delta\big)\cdot\nabla\psi + \delta\vartheta_\delta^{-1}\psi\Big)\,\mathrm{d}x \\ +\delta\int_\Omega\left(\frac{1}{\beta-1}\varrho_\delta^\beta+\varrho_\delta^2\right)\mathbf{u}_\delta\cdot\nabla\psi\,\mathrm{d}x,\end{aligned} \tag{3.38}$$

pour tout $\psi\in\mathcal{C}^1(\overline{\Omega})$,

- l'inégalité d'entropie sous la forme

$$\begin{aligned}\int_\Omega\left(\vartheta_\delta^{-1}\mathbb{S}(\vartheta_\delta,\nabla\mathbf{u}_\delta):\nabla\mathbf{u}_\delta + \delta\vartheta_\delta^{-2} + (\kappa(\vartheta_\delta)+\delta\vartheta_\delta^B+\delta\vartheta_\delta^{-1})\frac{|\nabla\vartheta_\delta|^2}{\vartheta_\delta^2}\right)\psi\,\mathrm{d}x \\ \le \int_\Omega\left((\kappa(\vartheta_\delta)+\delta\vartheta_\delta^B+\delta\vartheta_\delta^{-1})\frac{\nabla\vartheta_\delta:\nabla\psi}{\vartheta_\delta} - \varrho_\delta s(\varrho_\delta,\vartheta_\delta)\mathbf{u}_\delta\cdot\nabla\psi\right)\mathrm{d}x \\ + \int_{\partial\Omega}\frac{L+\delta\vartheta_\delta^{B-1}}{\vartheta_\delta}(\vartheta_\delta-\Theta_0)\psi\,\mathrm{d}\sigma,\end{aligned} \tag{3.39}$$

pour tout ψ positif appartenant à $\mathcal{C}^1(\overline{\Omega})$.

3.4 Estimations *a priori*

3.4.1 Vitesse et température

En prenant $\psi\equiv 1$ dans (3.38) et (3.39) on obtient le lemme suivant

Lemme 22
Si Ω ne comporte pas de symétrie axiale, alors il existe une constante c indépendante de δ telle que

$$\|\mathbf{u}_\delta\|_{W^{1,2}(\Omega;\mathbb{R}^3)} \le c \tag{3.40}$$

et

$$\|\vartheta_\delta\|_{L^{3m}(\Omega)} \le c\left(1+\left|\int_\Omega \varrho_\delta\mathbf{u}_\delta\cdot\mathbf{f}\,\mathrm{d}x\right|\right). \tag{3.41}$$

Si au contraire le domaine Ω est axisymétrique, alors

$$\|\mathbf{u}_\delta\|^2_{W^{1,2}(\Omega;\mathbb{R}^3)} + \|\vartheta_\delta\|_{L^{3m}(\Omega)} \le c\left(1+\left|\int_\Omega \varrho_\delta\mathbf{u}_\delta\cdot\mathbf{f}\,\mathrm{d}x\right|\right). \tag{3.42}$$

Démonstration:
La preuve dans le cas présent étant très similaire à celle du cas des conditions de Dirichlet pour la vitesse, on se réfère à [61] pour les détails de la preuve et on se restreint aux idées essentielles de la démonstration.

- On commence en testant les équations (3.38) et (3.39) avec $\psi\equiv 1$, comme annoncé auparavant. Cela donne

$$\int_{\partial\Omega} L\vartheta_\delta + \delta\vartheta_\delta^B + \lambda(\mathbf{u}_\delta\times\mathbf{n})^2\,\mathrm{d}\sigma = \int_\Omega\varrho_\delta\mathbf{f}\cdot\mathbf{u}_\delta\,\mathrm{d}x + \int_{\partial\Omega}(L+\delta\vartheta_\delta^{B-1})\Theta_0\,\mathrm{d}\sigma + \delta\int_\Omega\vartheta_\delta^{-1}\,\mathrm{d}x \tag{3.43}$$

et

$$\int_\Omega (\kappa(\vartheta_\delta) + \delta\vartheta_\delta^B + \delta\vartheta_\delta^{-1})\frac{|\nabla\vartheta_\delta|^2}{\vartheta_\delta^2}\,\mathrm{d}x + \int_\Omega \frac{\mathbb{S}(\vartheta_\delta, \nabla\mathbf{u}_\delta)}{\vartheta_\delta} : \nabla\mathbf{u}_\delta + \delta\vartheta_\delta^{-2}\,\mathrm{d}x + \int_{\partial\Omega} \frac{L + \delta\vartheta_\delta^{B-1}}{\vartheta_\delta}\Theta_0\,\mathrm{d}\sigma \leq \int_{\partial\Omega} L + \delta\vartheta_\delta^{B-1}\,\mathrm{d}\sigma. \tag{3.44}$$

- Ces tests nous permettent de déduire que

$$\begin{aligned}\lambda\|\mathbf{u}_\delta \times \mathbf{n}\|^2_{L^2(\partial\Omega;\mathbb{R}^3)} + \|\vartheta_\delta\|_{L^{3m}(\Omega)} &\leq \lambda\|\mathbf{u}_\delta \times \mathbf{n}\|^2_{L^2(\partial\Omega;\mathbb{R}^3)} + c\left(\|\vartheta_\delta\|_{L^1(\partial\Omega)} + \|\nabla\vartheta_\delta^{\frac{m}{2}}\|^{\frac{2}{m}}_{L^2(\Omega;\mathbb{R}^3)}\right)\\ &\leq c\left(1 + \|\varrho_\delta\|_{L^{\frac{6}{5}}(\Omega)} + \delta^{\frac{1}{(B-1)}}\|\varrho_\delta\|^{\frac{2B}{B+1}}_{L^{\frac{6}{5}}(\Omega)} + \delta^{\frac{2}{m(B+1)}}\|\varrho_\delta\|^{\frac{2(B-1)}{(B+1)}}_{L^{\frac{6}{5}}(\Omega)}\right).\end{aligned} \tag{3.45}$$

et

$$\begin{aligned}&\int_\Omega \frac{\mathbb{S}(\vartheta_\delta, \nabla\mathbf{u}_\delta) : \nabla\mathbf{u}_\delta}{\vartheta_\delta}\,\mathrm{d}x + \|\nabla\vartheta_\delta^{\frac{m}{2}}\|^2_{L^2(\Omega;\mathbb{R}^3)} + \|\nabla\ln\vartheta_\delta\|^2_{L^2(\Omega;\mathbb{R}^3)} + \|\vartheta_\delta^{-1}\|_{L^1(\partial\Omega)}\\ &+\delta\left(\|\nabla\vartheta_\delta^{\frac{B}{2}}\|^2_{L^2(\Omega;\mathbb{R}^3)} + \|\nabla\vartheta_\delta^{\frac{-1}{2}}\|^2_{L^2(\Omega;\mathbb{R}^3)} + \|\vartheta_\delta\|^{B-2}_{L^{3B}(\Omega)} + \|\vartheta_\delta^{-2}\|_{L^1(\Omega)}\right)\\ &\leq c\left(1 + \delta^{\frac{2}{B+1}}\|\varrho_\delta\|^{\frac{2(B-1)}{B-1}}_{L^{\frac{6}{5}}(\Omega)}\right)\end{aligned} \tag{3.46}$$

- En se servant du lemme d'inversion de la divergence de Bogovskii (voir théorème B.9 de l'annexe), on emploie une solution du problème

$$\begin{cases}\operatorname{div}\mathbf{\Phi} = \varrho_\delta - \frac{1}{|\Omega|}\int_\Omega \varrho\,\mathrm{d}x & \text{sur } \Omega,\\ \mathbf{\Phi} = 0 & \text{sur } \partial\Omega,\end{cases}$$

dans l'équation de la quantité de mouvement et on obtient

$$\delta\|\varrho_\delta\|^{\beta-\frac{3}{2}}_{\beta+1} \leq c, \tag{3.47}$$

pour $m > \frac{2}{3}$ et $\beta > \frac{3m+2}{3m-2}$.

- On peut maintenant faire appel au lemme 21, tout d'abord dans le cas d'un domaine non axisymétrique pour avoir

$$\begin{aligned}&\|\mathbf{u}_\delta\|_{W^{1,2}(\Omega;\mathbb{R}^3)} + \|\nabla\vartheta_\delta^{\frac{m}{2}}\|^2_{L^2(\Omega;\mathbb{R}^3)} + \|\nabla\ln\vartheta_\delta\|^2_{L^2(\Omega;\mathbb{R}^3)} + \|\vartheta_\delta^{-1}\|_{L^1(\partial\Omega)}\\ &+\delta\left(\|\nabla\vartheta_\delta^{\frac{B}{2}}\|^2_{L^2(\Omega;\mathbb{R}^3)} + \|\nabla\vartheta_\delta^{\frac{-1}{2}}\|^2_{L^2(\Omega;\mathbb{R}^3)} + \|\vartheta_\delta\|^{B-2}_{L^{3B}(\Omega)} + \|\vartheta_\delta^{-2}\|_{L^1(\Omega)}\right) \leq c\end{aligned} \tag{3.48}$$

et

$$\|\vartheta_\delta\|_{L^{3m}(\Omega)} \leq c\left(1 + \left|\int_\Omega \varrho_\delta\mathbf{u}_\delta\cdot\mathbf{f}\,\mathrm{d}x\right|\right). \tag{3.49}$$

Pour finir, dans le cas où Ω comporte une symétrie axiale (et où λ est strictement positif), on obtient

$$\begin{aligned}&\|\nabla\vartheta_\delta^{\frac{m}{2}}\|^2_{L^2(\Omega;\mathbb{R}^3)} + \|\nabla\ln\vartheta_\delta\|^2_{L^2(\Omega;\mathbb{R}^3)} + \|\vartheta_\delta^{-1}\|_{L^1(\partial\Omega)}\\ &+\delta\left(\|\nabla\vartheta_\delta^{\frac{B}{2}}\|^2_{L^2(\Omega;\mathbb{R}^3)} + \|\nabla\vartheta_\delta^{\frac{-1}{2}}\|^2_{L^2(\Omega;\mathbb{R}^3)} + \|\vartheta_\delta\|^{B-2}_{L^{3B}(\Omega)} + \|\vartheta_\delta^{-2}\|_{L^1(\Omega)}\right) \leq c\end{aligned} \tag{3.50}$$

et

$$\|\mathbf{u}_\delta\|^2_{W^{1,2}(\Omega;\mathbb{R}^3)} + \|\vartheta_\delta\|_{L^{3m}(\Omega)} \leq c\left(1 + \left|\int_\Omega \varrho_\delta\mathbf{u}_\delta\cdot\mathbf{f}\,\mathrm{d}x\right|\right). \tag{3.51}$$

Ce qui achève la démonstration du lemme. □

3.4.2 Densité - Estimations globales

Comme dans le chapitre précédent, on utilise un paramètre de bootstrapping

$$A := \int_\Omega \varrho_\delta^a|\mathbf{u}_\delta|^2 + \varrho_\delta|\mathbf{u}_\delta|^{2b+2}\,\mathrm{d}x,$$

où a appartient à $[1,\gamma]$ et b appartient à $(0,1)$. De manière similaire à précédemment, on peut écrire les résultats suivants

Lemme 23
Pour les a et b choisis comme décrit dans la définition du paramètre A, il existe une constante c indépendante de δ telle que

$$\|\varrho_\delta \mathbf{u}_\delta\|_{L^1(\Omega;\mathbb{R}^3)} \leq cA^{\frac{a-b}{2(ab+a-2b)}}. \tag{3.52}$$

Démonstration:
On utilise l'inégalité de Hölder en se remémorant que $\int_\Omega \varrho \,\mathrm{d}x = M$ et on déduit directement que

$$\|\varrho_\delta \mathbf{u}_\delta\|_{L^1(\Omega;\mathbb{R}^3)} = \int_\Omega \left((\varrho_\delta^a |\mathbf{u}_\delta|^2)^{\frac{1-b}{2(ab+a-2b)}} (\varrho_\delta^b |\mathbf{u}_\delta|^{2b+2})^{\frac{a-1}{2(ab+a-2b)}} \varrho_\delta^{\frac{2ab+a-3b}{2(ab+a-2b)}} \right) \mathrm{d}x \leq cA^{\frac{a-b}{2(ab+a-2b)}}, \tag{3.53}$$

qui est l'inégalité souhaitée. □

Lemme 24
Pour les a et b choisis comme décrit dans la définition du paramètre A et pour $1 < s < \frac{1}{2-a}$ (dans le cas où $a < 2$) et $0 < (s-1)\frac{a}{a-1} < b < 1$, il existe une constante c indépendante de δ telle que

$$\|\varrho_\delta |\mathbf{u}_\delta|^2\|_{L^s(\Omega;\mathbb{R}^3)} \leq cA^{\frac{a-b/s}{ab+a-2b}}. \tag{3.54}$$

Démonstration:
De façon identique à la démonstration précédente

$$\|\varrho_\delta |\mathbf{u}_\delta|^2\|^s_{L^s(\Omega;\mathbb{R}^3)} = \int_\Omega \left((\varrho_\delta^a |\mathbf{u}_\delta|^2)^{\frac{2s-1-b}{ab+a-2b}} (\varrho_\delta^b |\mathbf{u}_\delta|^{2b+2})^{\frac{sa+1-2s}{ab+a-2b}} \varrho_\delta^{\frac{ab+a-b-sa}{ab+a-2b}} \right) \mathrm{d}x \leq cA^{\frac{a-b/s}{ab+a-2b}}. \tag{3.55}$$

□

Lemme 25
Soit $1 \leq a \leq \gamma$, $0 < b < 1$, $1 < s < \frac{1}{2-a}$ (si $a < 2$), $0 < (s-1)\frac{a}{a-1} < b < 1$, $s \leq \frac{6m}{3m+2}$, $m > \frac{2}{3}$. Alors, que Ω soit axisymétrique (avec $\lambda > 0$) ou non, il existe une constante c indépendante de δ telle que

$$\int_\Omega \left(\varrho_\delta^{s\gamma} + \varrho_\delta^{(s-1)\gamma} p(\varrho_\delta, \vartheta_\delta) + (\varrho_\delta |\mathbf{u}_\delta|^2)^s + \delta \varrho_\delta^{\beta+(s-1)\gamma} \right) \mathrm{d}x \leq c\left(1 + A^{\frac{sa-b}{ab+a-b}}\right). \tag{3.56}$$

Démonstration:
On invoque une fois encore le résultat de Bogovskii d'inversion de la divergence. En effet, on va utiliser dans l'équation de mouvement (3.37) la fonction test solution du problème

$$\begin{cases} \operatorname{div} \mathbf{\Phi} = \varrho_\delta^{(s-1)\gamma} - \dfrac{1}{|\Omega|} \displaystyle\int_\Omega \varrho_\delta^{(s-1)\gamma} \,\mathrm{d}x & \text{sur } \Omega, \\ \mathbf{\Phi} = 0 & \text{sur } \partial\Omega. \end{cases} \tag{3.57}$$

On arrive à l'égalité

$$\begin{aligned} \int_\Omega \varrho_\delta^{(s-1)\gamma} p(\varrho_\delta, \vartheta_\delta) \,\mathrm{d}x + \delta \int_\Omega \varrho_\delta^{(s-1)\gamma} (\varrho_\delta^\beta + \varrho_\delta^2) \,\mathrm{d}x &= \frac{1}{|\Omega|} \int_\Omega p(\varrho_\delta, \vartheta_\delta) \,\mathrm{d}x \int_\Omega \varrho_\delta^{(s-1)\gamma} \,\mathrm{d}x \\ + \frac{\delta}{|\Omega|} \int_\Omega \varrho_\delta^\beta + \varrho_\delta^2 \,\mathrm{d}x \int_\Omega \varrho_\delta^{(s-1)\gamma} \,\mathrm{d}x - \int_\Omega \varrho_\delta (\mathbf{u}_\delta \otimes \mathbf{u}_\delta) &: \nabla \mathbf{\Phi} \,\mathrm{d}x + \int_\Omega \mathbb{S}(\vartheta_\delta, \nabla \mathbf{u}_\delta) : \nabla \mathbf{\Phi} \,\mathrm{d}x \\ - \int_\Omega \varrho_\delta \mathbf{f} \cdot \mathbf{\Phi} \,\mathrm{d}x &= I_1 + I_2 + I_3 + I_4 + I_5. \end{aligned} \tag{3.58}$$

On majore maintenant les différents termes du membre de droite. Pour cela on utilise les propriétés de notre fonction $\mathbf{\Phi}$ concernant sa norme. Si $(s-1)\gamma \leq 1$, on sait que $\int_\Omega \varrho_\delta^{(s-1)\gamma} \,\mathrm{d}x \leq c(M)$ et il vient ainsi l'estimation de I_1 :

$$\begin{aligned}
|I_1| &\leq c(M)\int_\Omega p(\varrho_\delta,\vartheta_\delta)\,\mathrm{d}x \\
&\leq c\left(\int_\Omega \varrho_\delta^{s\gamma}\,\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{s}} + c\int_{\{\varrho_\delta<K_0\vartheta_\delta^{\frac{1}{\gamma-1}}\}}\left((\varrho_\delta^{1+(s-1)\gamma}\vartheta_\delta)^{\frac{1}{1+(s-1)\gamma}}\vartheta_\delta^{\frac{(s-1)\gamma}{1+(s-1)\gamma}}\right)\mathrm{d}x \\
&\leq c\left(\left(\int_\Omega \varrho_\delta^{s\gamma}\,\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{s}} + \left(\int_{\{\varrho_\delta<K_0\vartheta_\delta^{\frac{1}{\gamma-1}}\}}\varrho_\delta^{1+(s-1)\gamma}\vartheta_\delta\,\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{1+(s-1)\gamma}}\left(\int_{\{\varrho_\delta<K_0\vartheta_\delta^{\frac{1}{\gamma-1}}\}}\vartheta_\delta\,\mathrm{d}x\right)^{\frac{(s-1)\gamma}{1+(s-1)\gamma}}\right) \\
&\leq \varepsilon\int_\Omega \varrho_\delta^{(s-1)\gamma}p(\varrho_\delta,\vartheta_\delta)\,\mathrm{d}x + c(\varepsilon)\int_\Omega \vartheta_\delta\,\mathrm{d}x.
\end{aligned} \tag{3.59}$$

Grâce au lemme 23 en association avec le lemme 22, on arrive à

$$\int_\Omega \vartheta_\delta\,\mathrm{d}x \leq \|\vartheta_\delta\|_{3m} \leq c\left(1+A^{\frac{a-b}{2(ab+a-2b)}}\right) \leq c\left(1+A^{\frac{sa-b}{ab+a-2b}}\right), \tag{3.60}$$

puisque $s>1$. Si au contraire $(s-1)\gamma>1$ on procède comme dans [64] et on obtient

$$|I_1| \leq \varepsilon\int_\Omega \varrho_\delta^{(s-1)\gamma}p(\varrho_\delta,\vartheta_\delta)\,\mathrm{d}x + c(\varepsilon)\left(\int_\Omega \vartheta_\delta\,\mathrm{d}x\right)^{\frac{s\gamma}{\gamma-1}} \tag{3.61}$$

sans restriction additionnelle.

Le terme I_2 pouvant quant à lui être aisément traité *via* une interpolation, on passe au troisième terme de la façon suivante

$$\begin{aligned}
|I_3| &\leq \left(\int_\Omega (\varrho_\delta|\mathbf{u}_\delta|^2)^s\,\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{s}}\left(\int_\Omega |\nabla\mathbf{\Phi}|^{\frac{s}{s-1}}\,\mathrm{d}x\right)^{\frac{s-1}{s}} \\
&\leq \varepsilon\int_\Omega \varrho_\delta^{s\gamma}\,\mathrm{d}x + c(\varepsilon)\int_\Omega (\varrho_\delta|\mathbf{u}_\delta|^2)^s\,\mathrm{d}x \\
&\leq \varepsilon\int_\Omega \varrho_\delta^{(s-1)\gamma}p(\varrho_\delta,\vartheta_\delta)\,\mathrm{d}x + c(\varepsilon)\int_\Omega (\varrho_\delta|\mathbf{u}_\delta|^2)^s\,\mathrm{d}x.
\end{aligned} \tag{3.62}$$

En utilisant le lemme 24, on obtient finalement

$$|I_3| \leq \varepsilon\int_\Omega \varrho_\delta^{(s-1)\gamma}p(\varrho_\delta,\vartheta_\delta)\,\mathrm{d}x + c\left(1+A^{\frac{sa-b}{ab+a-2b}}\right).$$

C'est la quatrième intégrale qui apporte des restrictions entre s et m puisque

$$|I_4| \leq c\int_\Omega (1+\vartheta)|\nabla\mathbf{u}_\delta||\nabla\mathbf{\Phi}|\,\mathrm{d}x \leq c\|\nabla\mathbf{\Phi}\|_{L^{\frac{s}{s-1}}(\Omega;\mathbb{R}^{3\times3})}\|\nabla\mathbf{u}_\delta\|_{L^2(\Omega;\mathbb{R}^{3\times3})}(1+\|\vartheta_\delta\|_{L^{3m}(\Omega)})$$

pour $s \leq \frac{6m}{3m+2}$ (ce qui signifie que pour avoir $s>1$ il faut que $m>\frac{2}{3}$). L'inégalité de Young nous fournit

$$|I_4| \leq \varepsilon\int_\Omega \varrho_\delta^{(s-1)\gamma}p(\varrho_\delta,\vartheta_\delta)\,\mathrm{d}x + c(\varepsilon)\|\nabla\mathbf{u}_\delta\|^s_{L^2(\Omega;\mathbb{R}^{3\times3})}\left(1+\|\vartheta_\delta\|^s_{L^{3m}(\Omega)}\right).$$

Donc, en regard du lemme 23, on peut obtenir la majoration suivante

$$|I_4| \leq \varepsilon\int_\Omega \varrho_\delta^{(s-1)\gamma}p(\varrho_\delta,\vartheta_\delta)\,\mathrm{d}x + c(\varepsilon)\|\nabla\mathbf{u}_\delta\|^s_{L^2(\Omega;\mathbb{R}^{3\times3})}\left(1+A^{\frac{sa-b}{ab+a-2b}}\right). \tag{3.63}$$

Pour finir, on estime la dernière intégrale

$$|I_5| \leq c\|\mathbf{\Phi}\|_{L^{\frac{s}{s-1}}(\Omega;\mathbb{R}^3)}\|\varrho_\delta\|_{L^s(\Omega)} \leq \varepsilon|\varrho_\delta\|^{s\gamma}_{L^{s\gamma}(\Omega)} + c(\varepsilon),$$

ce qui clôt la preuve du lemme. $\square$

3.4.3 Fonctions test locales

On utilise ici les méthodes exposées dans le chapitre 2. On emploie donc les mêmes résultats concernant les coordonnées locales pour les domaines $\mathcal{C}^2$ qui amènent à la définition des mêmes fonctions test, que ce soit "loin" ou "à proximité" du bord $\partial\Omega$. Il s'avère donc que les propriétés exprimées en section 2.5 du chapitre précédent pour ces fonctions test restent inchangées. Bien entendu, nous utilisons ici les mêmes notations que celles établies au cours du précédent chapitre.

On peut tester l'équation de mouvement approchante (3.37) avec nos fonctions $\mathbf{w}^1$ et $\mathbf{w}^2$ selon que l'on est proche du bord ($\operatorname{dist}(y,\partial\Omega) \le R$)) ou non ($\operatorname{dist}(y,\partial\Omega) > R$))

$$\begin{aligned}\int_\Omega \Big(-\varrho_\delta(\mathbf{u}_\delta\otimes\mathbf{u}_\delta):\nabla\mathbf{w}^i + \mathbb{S}(\vartheta_\delta,\nabla\mathbf{u}_\delta):\nabla\mathbf{w}^i - (p(\varrho_\delta,\vartheta_\delta)+\delta\varrho_\delta^\beta+\delta\varrho_\delta^2)\operatorname{div}\mathbf{w}^i\Big)\,\mathrm{d}x \\ +\lambda\int_{\partial\Omega}(\mathbf{u}_\delta\times\mathbf{n})\cdot(\mathbf{w}^i\times\mathbf{n})\,\mathrm{d}\sigma = \int_\Omega \varrho_\delta\mathbf{f}\cdot\mathbf{w}^i\,\mathrm{d}x.\end{aligned} \tag{3.64}$$

On se réfère ensuite aux lemmes 7 et 8 du chapitre précédent énumérant les propriétés des fonctions $\mathbf{v}^i$ pour déduire l'existence d'une constante c indépendante de δ (mais néanmoins dépendante de λ) telle que

$$\begin{aligned}&\int_\Omega \frac{p(\varrho_\delta,\vartheta_\delta)+\delta(\varrho_\delta^\beta+\varrho_\delta^2)}{|x-y|^\alpha}\,\mathrm{d}x + (1-\alpha)\int_\Omega \frac{\varrho_\delta|\mathbf{u}_\delta|^2}{|x-y|^\alpha}\,\mathrm{d}x \\ &\le c(\lambda)\Big(1+\delta\|\varrho_\delta\|^\beta_{L^\beta(\Omega)} + \|p(\varrho_\delta,\vartheta_\delta)\|_{L^1(\Omega)} + (1+\|\vartheta_\delta\|_{L^{3m}(\Omega)})\|\mathbf{u}\|_{W^{1,2}(\Omega;\mathbb{R}^3)} + \|\varrho_\delta|\mathbf{u}_\delta|^2\|_{L^1(\Omega)}\Big)\end{aligned} \tag{3.65}$$

pour $\alpha < \frac{3m-2}{2m}$. On résume cela dans le lemme suivant

Lemme 26
Soit $0<\alpha<\max\left\{1,\frac{3m-2}{2m}\right\}$ *et* $m>\frac{2}{3}$. *Il existe une constante* c *indépendante de* δ *telle que* (3.65) *est vérifiée pour tout* δ *strictement positif.*

3.4.4 Densité - Estimations finales

Il convient maintenant de distinguer deux cas soulevés par le lemme précédent.

Si $m\ge 2$, on a $\frac{3m-2}{2m}\ge 1$ et donc la restriction sur α se trouve être $\alpha<1$. On trouve alors en faisant tendre α vers 1^- au moyen du lemme de Fatou

$$\int_\Omega \frac{p(\varrho_\delta,\vartheta_\delta)}{|x-y|}\,\mathrm{d}x \le c(\lambda)\Big(1+\delta\|\varrho_\delta\|^\beta_{L^\beta(\Omega)} + \|p(\varrho_\delta,\vartheta_\delta)\|_{L^1(\Omega)} + (1+\|\vartheta_\delta\|_{L^{3m}(\Omega)})\|\mathbf{u}\|_{W^{1,2}(\Omega;\mathbb{R}^3)} + \|\varrho_\delta|\mathbf{u}_\delta|^2\|_{L^1(\Omega)}\Big).$$

On remarque par ailleurs que pour $0<b<1$

$$\frac{\varrho_\delta^b|\mathbf{u}_\delta|^{2b}}{|x-y|} \le \left(\frac{\varrho_\delta|\mathbf{u}_\delta|^2}{|x-y|^\alpha}\right)^b \frac{1}{|x-y|^{1-b\alpha}},$$

ce qui entraîne *de facto*

$$\int_\Omega \frac{\varrho_\delta^b|\mathbf{u}_\delta|^{2b}}{|x-y|}\,\mathrm{d}x \le \left(\int_\Omega \frac{\varrho_\delta|\mathbf{u}_\delta|^2}{|x-y|^\alpha}\,\mathrm{d}x\right)^b \left(\int_\Omega \frac{1}{|x-y|^{\frac{1-b\alpha}{1-b}}}\,\mathrm{d}x\right)^{1-b}.$$

On observe que la deuxième intégrale est finie pour tout $b<1$ et l'on peut donc arriver au résultat suivant

Lemme 27
Soit $b\in((s-1)\frac{\gamma}{\gamma-1},1)$, $1<s<\frac{2}{2-\gamma}$, $m\ge 2$ *et* $s\le\frac{6m}{3m+2}$. *Sous ces conditions, il existe une constante* c *indépendante de* δ *telle que pour tout* y *dans* $\overline{\Omega}$

$$\begin{aligned}&\int_\Omega \frac{p(\varrho_\delta,\vartheta_\delta)+(\varrho_\delta|\mathbf{u}_\delta|^2)^b}{|x-y|}\,\mathrm{d}x \\ &\le c\Big(1+\delta\|\varrho_\delta\|^\beta_{L^\beta(\Omega)} + \|p(\varrho_\delta,\vartheta_\delta)\|_{L^1(\Omega)} + (1+\|\vartheta_\delta\|_{L^{3m}(\Omega)})\|\mathbf{u}_\delta\|_{W^{1,2}(\Omega;\mathbb{R}^3)} + \|\varrho_\delta|\mathbf{u}_\delta|^2\|_{L^1(\Omega)}\Big).\end{aligned} \tag{3.66}$$

Pour le cas ou $m < 2$, on suit les méthodes décrites dans [64]. Pour $1 \leq a < \gamma$ on remarque

$$\begin{aligned}\int_\Omega \frac{\varrho_\delta^a}{|x-y|}\,\mathrm{d}x &= \int_\Omega \left(\frac{\varrho_\delta^\gamma}{|x-y|^\alpha}\right)^{\frac{a}{\gamma}} \left(\frac{1}{|x-y|^{\frac{\gamma-a\alpha}{\gamma}}}\right)\mathrm{d}x \\ &= \left(\int_\Omega \frac{\varrho_\delta^\gamma}{|x-y|^\alpha}\,\mathrm{d}x\right)^{\frac{a}{\gamma}} \left(\int_\Omega \frac{1}{|x-y|^{\frac{\gamma-a\alpha}{\gamma-a}}}\,\mathrm{d}x\right)^{\frac{\gamma-a}{\gamma}}.\end{aligned} \tag{3.67}$$

En conséquence, si $\frac{\gamma-a\alpha}{\gamma-a} < 3$ (ce qui équivaut à $\alpha > \frac{3a-2\gamma}{a}$) alors

$$\int_\Omega \frac{\varrho_\delta^a}{|x-y|}\,\mathrm{d}x \leq c\left(1+\delta\|\varrho_\delta\|_{L^\beta(\Omega)}^\beta + \|p(\varrho_\delta,\vartheta_\delta)\|_{L^1(\Omega)} + (1+\|\vartheta_\delta\|_{L^{3m}(\Omega)})\|\mathbf{u}_\delta\|_{W^{1,2}(\Omega;\mathbb{R}^3)} + \|\varrho_\delta|\mathbf{u}_\delta|^2\|_{L^1(\Omega)}\right)^{\frac{a}{\gamma}}. \tag{3.68}$$

De la même façon que pour le lemme qui précède, on a

$$\int_\Omega \frac{\varrho_\delta^b|\mathbf{u}|^{2b}}{|x-y|}\,\mathrm{d}x \leq c\left(1+\delta\|\varrho_\delta\|_{L^\beta(\Omega)}^\beta + \|p(\varrho_\delta,\vartheta_\delta)\|_{L^1(\Omega)} + (1+\|\vartheta_\delta\|_{L^{3m}(\Omega)})\|\mathbf{u}_\delta\|_{W^{1,2}(\Omega;\mathbb{R}^3)} + \|\varrho_\delta|\mathbf{u}_\delta|^2\|_{L^1(\Omega)}\right)^{b}, \tag{3.69}$$

mais cette fois, pour satisfaire à la condition $\frac{1-b\alpha}{1-b} < 3$, il faut que

$$\alpha > \frac{3b-2}{b}.$$

Tout ceci est résumé dans le lemme qui suit

Lemme 28
Soit $b \in ((s-1)\frac{\gamma}{\gamma-1}, 1)$, $1 < s < \frac{2}{2-\gamma}$, $\alpha > \max\left\{\frac{3a-2\gamma}{a}, \frac{3b-2}{b}\right\}$, $m \in \left(\frac{2}{3}, 2\right)$. Il existe une constante c indépendante de δ telle que pour tout $y \in \overline{\Omega}$,

$$\begin{aligned}&\int_\Omega \frac{\varrho_\delta^a + \left(\varrho_\delta|\mathbf{u}|^2\right)^b}{|x-y|}\,\mathrm{d}x \\ &\quad\leq c\left(1+\delta\|\varrho_\delta\|_{L^\beta(\Omega)}^\beta + \|p(\varrho_\delta,\vartheta_\delta)\|_{L^1(\Omega)} + (1+\|\vartheta_\delta\|_{L^{3m}(\Omega)})\|\mathbf{u}_\delta\|_{W^{1,2}(\Omega;\mathbb{R}^3)} + \|\varrho_\delta|\mathbf{u}_\delta|^2\|_{L^1(\Omega)}\right)^{\frac{a}{\gamma}} \\ &\quad+ c\left(1+\delta\|\varrho_\delta\|_{L^\beta(\Omega)}^\beta + \|p(\varrho_\delta,\vartheta_\delta)\|_{L^1(\Omega)} + (1+\|\vartheta_\delta\|_{L^{3m}(\Omega)})\|\mathbf{u}_\delta\|_{W^{1,2}(\Omega;\mathbb{R}^3)} + \|\varrho_\delta|\mathbf{u}_\delta|^2\|_{L^1(\Omega)}\right)^{b}.\end{aligned} \tag{3.70}$$

On procède maintenant comme dans la section 2.6 du chapitre précédent en considérant le problème de Neumann

$$\begin{cases} -\Delta h = \varrho_\delta^a + \varrho_\delta^b|\mathbf{u}_\delta|^{2b} - \frac{1}{|\Omega|}\int_\Omega \left(\varrho_\delta^a + \varrho_\delta^b|\mathbf{u}_\delta|^{2b}\right)\mathrm{d}x & \text{sur } \Omega, \\ \partial_{\mathbf{n}} h|_{\partial\Omega} = 0 & \text{sur } \partial\Omega. \end{cases} \tag{3.71}$$

On conserve ici les mêmes notations que dans le chapitre précédent. Quelques restrictions apparaissent, que l'on détaille ici.

- Pour $m \geq 2$,

$$\|h\|_{L^\infty(\Omega)} \leq c\left(1 + A^{\frac{\gamma-b/s}{\gamma\beta+\gamma-2b}}\right),$$

  sous les conditions

$$1 < s < \frac{1}{2-\gamma}, \quad 0 < (s-1)\frac{\gamma}{\gamma-1} < b < 1, \quad s \leq \frac{6m}{3m-2}.$$

- Pour $\frac{2}{3} < m < 2$,

$$\|h\|_{L^\infty(\Omega)} \leq c\left(1 + A^{\frac{a-b/s}{ab+a-2b}\frac{a}{\gamma}} + A^{\frac{a-b/s}{ab+a-2b}b}\right),$$

  avec les restrictions

$$1 < s < \frac{1}{2-\gamma}, \quad 0 < (s-1)\frac{\gamma}{\gamma-1} < b < 1, \quad s \leq \frac{6m}{3m-2},$$

$$\alpha > \frac{3a-2\gamma}{a}, \quad \alpha > \frac{3b-2}{b}, \quad \alpha < \frac{3m-2}{2m}.$$

On procède ensuite au bootstrapping, qui amène lui aussi de nouvelles conditions à la fois selon que le domaine Ω est axisymétrique ou non, mais aussi suivant les valeurs de m.

- Pour un domaine ne comportant pas de symétrie axiale

$$A \leq c\Big(1 + A^{\frac{\gamma - b/s}{b\gamma+\gamma-2b}}\Big), \qquad \text{si } m \geq 2, \tag{3.72}$$

$$A \leq c\Big(1 + A^{\frac{a-b/s}{ab+a-2b}\frac{a}{\gamma}} + A^{\frac{a-b/s}{ab+a-2b}b}\Big), \qquad \text{si } \frac{2}{3} < m < 2. \tag{3.73}$$

- Pour un domaine axisymétrique et avec $\lambda > 0$

$$A \leq c\Big(1 + A^{\frac{3\gamma-2b/s-b}{2(b\gamma+\gamma-2b)}}\Big), \qquad \text{si } m \geq 2, \tag{3.74}$$

$$A \leq cA^{\frac{a-b}{2(ab+a-2b)}}\Big(1 + A^{\frac{a-b/s}{ab+a-2b}\frac{a}{\gamma}} + A^{\frac{a-b/s}{ab+a-2b}b}\Big), \qquad \text{si } \frac{2}{3} < m < 2. \tag{3.75}$$

On peut donc conclure sur les conditions pour que notre paramètre de bootstrapping soit borné par une constante.

- Pour Ω ne comportant pas de symétrie axiale et $m \geq 2$:

$$1 < s < \frac{1}{2-\gamma}, \quad 0 < (s-1)\frac{\gamma}{\gamma-1} < b < 1, \quad s \leq \frac{6m}{3m-2}, \quad \frac{\gamma - b/s}{b\gamma+\gamma-2b} < 1.$$

- Pour Ω ne comportant pas de symétrie axiale et $\frac{2}{3} < m < 2$:

$$1 < s < \frac{1}{2-a}, \quad 0 < (s-1)\frac{a}{a-1} < b < 1, \quad s \leq \frac{6m}{3m-2}, \quad \alpha > \frac{3a-2\gamma}{a},$$

$$\alpha > \frac{3b-2}{b}, \quad \alpha < \frac{3m-2}{2m}, \quad \frac{a-b/s}{ab+a-2b}\frac{a}{\gamma} < 1, \quad \frac{a-b/s}{ab+a-2b}b < 1.$$

- Pour Ω axisymétrique, $\lambda > 0$ et $m \geq 2$:

$$1 < s < \frac{1}{2-\gamma}, \quad 0 < (s-1)\frac{\gamma}{\gamma-1} < b < 1, \quad s \leq \frac{6m}{3m-2}, \quad \frac{3\gamma-2b/s-b}{2(b\gamma+\gamma-2b)} < 1. \tag{3.76}$$

- Pour Ω axisymétrique, $\lambda > 0$ et $\frac{2}{3} < m < 2$:

$$1 < s < \frac{1}{2-a}, \quad 0 < (s-1)\frac{a}{a-1} < b < 1, \quad s \leq \frac{6m}{3m-2}, \quad \alpha > \frac{3a-2\gamma}{a},$$

$$\alpha > \frac{3b-2}{b}, \quad \alpha < \frac{3m-2}{2m}, \quad \frac{a-b+2(a-b/s)\frac{a}{\gamma}}{2(ab+a-2b)} < 1, \quad \frac{a-b+2(a-b/s)b}{2(ab+a-2b)}b < 1. \tag{3.77}$$

Cela se traduit par le résultat suivant

Lemme 29
On suppose que le triplet $(\varrho_\delta, \vartheta_\delta, \mathbf{u}_\delta)$ *est solution du problème approchant* (3.36)-(3.39). *Si un des deux cas suivants est vérifié*

1. Ω *n'est pas axisymétrique,* $\gamma > 1$, $m > \frac{2}{4\gamma-3}$ *et* $m > \frac{2}{3}$,

2. Ω *est axisymétrique,* $\lambda > 0$, $\gamma > 1$, $m > \frac{6-2\gamma}{3\gamma-1}$ *et* $m > \frac{2}{3}$,

alors il existe $s > 1$ tel que

$$\begin{aligned}
\sup_{\delta>0} \|\varrho_\delta\|_{L^{s\gamma}(\Omega)} &< \infty, \\
\sup_{\delta>0} \|\varrho_\delta \mathbf{u}_\delta\|_{L^{s}(\Omega)} &< \infty, \\
\sup_{\delta>0} \|\varrho_\delta |\mathbf{u}_\delta|^s\|_{L^{s}(\Omega)} &< \infty, \\
\sup_{\delta>0} \|\mathbf{u}_\delta\|_{W^{1,2}(\Omega;\mathbb{R}^3)} &< \infty, \\
\sup_{\delta>0} \|\vartheta_\delta\|_{L^{3m}(\Omega)} &< \infty, \\
\sup_{\delta>0} \|\vartheta_\delta^{m/2}\|_{W^{1,2}(\Omega)} &< \infty, \\
\sup_{\delta>0} \|\varrho_\delta^{\beta+(s-1)\gamma}\|_{L^{1}(\Omega)} &< \infty.
\end{aligned} \tag{3.78}$$

De plus, on peut prendre $s > \frac{6}{5}$ si on se trouve dans une des situations suivantes

1. *Ω n'est pas axisymétrique, $\gamma > \frac{5}{4}$ et $m > \max\left\{1, \frac{2\gamma+10}{17\gamma-15}\right\}$.*

2. *Ω est axisymétrique, $\lambda > 0$, $\gamma > 54$, $m > 1$ et $m > \frac{6\gamma}{15\gamma-16}$ $\left(\text{pour } \gamma \in \left(\frac{5}{4}, \frac{4}{3}\right]\right)$ ou $m > \frac{18-6\gamma}{9\gamma-7}$ $\left(\text{pour } \gamma \in \left(\frac{4}{3}, \frac{5}{3}\right)\right)$.*

Démonstration:

- Si Ω n'est pas axisymétrique :
  Pour $m \geq 2$, on peut choisir b aussi proche de 1 qu'on le souhaite. Il s'ensuit que la condition $(s-1)\frac{\gamma}{\gamma-1} < 1$ devient $s < 2 - \frac{1}{\gamma}$, ce qui implique que γ doit être strictement supérieur à $\frac{5}{4}$ si l'on veut $s > \frac{6}{5}$. Les autres conditions ne conduisent pas à des restrictions supplémentaires. Avec ces valeurs, la quantité A est bornée et il en découle toutes les estimations du lemme.
  Pour $m < 2$, on a $a < \frac{4\gamma m}{3m+2}$ et $b < \frac{4m}{3m+2}$. Ainsi, puisque $s > 1$, l'inégalité $(s-1)\frac{a}{a-1} < b$ amène à $m > \frac{2}{4\gamma-3}$. Pour avoir $s > \frac{6}{5}$, la condition $s \leq \frac{6m}{3m+2}$ conduit à $m > 1$ et la condition $(s-1)\frac{a}{a-1} < b$ implique $m > \frac{2\gamma+10}{17\gamma-15}$. Les autres conditions pouvant être rencontrées sont moins restrictives que celles décrites dans ce paragraphe.
- Si Ω est axisymétrique avec $\lambda > 0$:
  La dernière condition de (3.76) donne $m > \frac{6\gamma}{15\gamma-16}$ si $s > \frac{6}{5}$ (pour $s > 1$, il n'y a pas d'autre restriction). La condition (3.77) quant à elle, impose que $m > \frac{6_2\gamma}{3\gamma-1}$ pour $s > 1$ et $m > \frac{18-6\gamma}{9\gamma-7}$ pour $s > \frac{6}{5}$.

Ceci conclut la démonstration. $\square$

3.5 Passage à la limite en δ

3.5.1 Limites dues aux bornes uniformes

On se réfère aux résultats du lemme précédent pour déduire qu'il existe des sous-suites de ϱ_δ, ϑ_δ et $\mathbf{u}_\delta$ (toujours notées de la même manière) vérifiant

$$\begin{aligned}
&\varrho_\delta \rightharpoonup \varrho && \text{dans } L^{s\gamma}(\Omega), && \\
&\delta\varrho_\delta \to 0 && \text{dans } L^q(\Omega), && \text{pour } q < 1 + (s-1)\frac{\gamma}{\beta}, \\
&\vartheta_\delta \rightharpoonup \vartheta && \text{dans } W^{1,p}(\Omega), && \text{pour } p = \min\left\{2, \frac{3m}{m+1}\right\}, \\
&\vartheta_\delta \to \vartheta && \text{dans } L^q(\Omega), && \text{pour } q < 3m, \\
&\vartheta_\delta \to \vartheta && \text{dans } L^r(\partial\Omega), && \text{pour } r < 2m, \\
&\mathbf{u}_\delta \rightharpoonup \mathbf{u} && \text{dans } W^{1,2}(\Omega;\mathbb{R}^3), && \\
&\mathbf{u}_\delta \to \mathbf{u} && \text{dans } L^q(\Omega;\mathbb{R}^3), && \text{pour } q < 6, \\
&\mathbf{u}_\delta \to \mathbf{u} && \text{dans } L^r(\partial\Omega;\mathbb{R}^3), && \text{pour } r < 4, \\
&p(\varrho_\delta,\vartheta_\delta) \to \overline{p(\varrho_\delta,\vartheta_\delta)} && \text{dans } L^r(\Omega), && \text{pour un certain } r > 1, \\
&e(\varrho_\delta,\vartheta_\delta) \to \overline{e(\varrho_\delta,\vartheta_\delta)} && \text{dans } L^r(\Omega), && \text{pour un certain } r > 1, \\
&s(\varrho_\delta,\vartheta_\delta) \to \overline{s(\varrho_\delta,\vartheta_\delta)} && \text{dans } L^r(\Omega), && \text{pour un certain } r > 1.
\end{aligned} \tag{3.79}$$

Au moyen de ces observations et du lemme 13 du chapitre précédent, on peut passer à la limite dans les équations bilan de la masse, de la quantité de mouvement, de l'énergie globale et dans l'inégalité d'entropie :

$$\int_\Omega \varrho\mathbf{u}\cdot\nabla\psi \,\mathrm{d}x = 0 \tag{3.80}$$

pour tout $\psi \in \mathcal{C}^1(\overline{\Omega})$,

$$\int_\Omega \Big((-\varrho\mathbf{u}\otimes\mathbf{u} + \mathbb{S}(\vartheta,\nabla\mathbf{u})) : \nabla\boldsymbol{\varphi} - \overline{p(\varrho,\vartheta)}\operatorname{div}\boldsymbol{\varphi}\Big)\,\mathrm{d}x + \lambda\int_{\partial\Omega}(\mathbf{u}\times\mathbf{n})\cdot\boldsymbol{\varphi}\,\mathrm{d}\sigma = \int_\Omega \varrho\mathbf{f}\cdot\boldsymbol{\varphi}\,\mathrm{d}x \tag{3.81}$$

pour tout $\boldsymbol{\varphi} \in \mathcal{C}^1(\overline{\Omega};\mathbb{R}^3)$ avec $\boldsymbol{\varphi}\cdot\mathbf{n} = 0$ sur $\partial\Omega$,

$$\begin{aligned}
\int_\Omega &\left(\vartheta^{-1}\mathbb{S}(\vartheta,\nabla\mathbf{u}) : \nabla\mathbf{u} + \kappa(\vartheta)\frac{|\nabla\vartheta|^2}{\vartheta^2}\right)\psi\,\mathrm{d}x \\
&\leq \int_\Omega \kappa(\vartheta)\frac{\nabla\vartheta\cdot\nabla\psi}{\vartheta} - \overline{\varrho s(\varrho,\vartheta)}\mathbf{u}\cdot\nabla\psi\,\mathrm{d}x + \int_{\partial\Omega}\frac{L}{\vartheta}(\vartheta-\Theta_0)\psi\,\mathrm{d}\sigma
\end{aligned} \tag{3.82}$$

pour tout ψ positif appartenant à $\mathcal{C}^1(\overline{\Omega})$,

$$\int_{\partial\Omega} L(\vartheta-\Theta_0) + \lambda(\mathbf{u}\times\mathbf{n})^2\,\mathrm{d}\sigma = \int_\Omega \varrho\mathbf{f}\cdot\mathbf{u}\,\mathrm{d}x. \tag{3.83}$$

Le passage à la limite dans l'équation de l'énergie totale est un peu plus délicat. Il nécessite en effet une convergence faible de $\varrho_\delta|\mathbf{u}_\delta|^2$ vers $\varrho|\mathbf{u}|^2$ dans un espace $L^q(\Omega)$ pour un $q > \frac{6}{5}$, mais aussi une convergence forte de ϑ_δ vers ϑ dans un espace $L^r(\Omega)$ pour un $r > 3$. C'est possible dans le cas où $s > \frac{6}{5}$ et $m > 1$. Dans ce cas, on a aussi $\delta\|\varrho_\delta\|^\beta_{L^{\frac{6\beta}{5}}(\Omega)} \to 0$ (voir [61]).

En supposant donc que $\gamma > \frac{5}{4}$, $m > \max\left\{1, \frac{2\gamma+10}{17\gamma-15}\right\}$ si Ω n'est pas axisymétrique ou que $\gamma > \frac{5}{4}$, $m > 1$, $m > \frac{6\gamma}{15\gamma-16}$ $\big($pour $\gamma \in \left(\frac{5}{4}, \frac{4}{3}\right]\big)$ et $m > \frac{18-6\gamma}{9\gamma-7}$ $\big($pour $\gamma \in \left(\frac{4}{3}, \frac{5}{3}\right)\big)$ si Ω est axisymétrique et $\lambda > 0$, on obtient en plus le bilan d'énergie totale

$$\int_\Omega \left(\left(-\frac{1}{2}\varrho|\mathbf{u}|^2 - \overline{\varrho e(\varrho,\vartheta)}\right)\mathbf{u} + \kappa(\vartheta)\nabla\vartheta\right)\cdot\nabla\psi + \int_{\partial\Omega}(L(\vartheta-\Theta_0)+\lambda(\mathbf{u}\times\mathbf{n})^2)\psi\,\mathrm{d}\sigma$$
$$= \int_\Omega \varrho\mathbf{f}\cdot\mathbf{u}\psi\,\mathrm{d}x + \int_\Omega\left(-\mathbb{S}(\vartheta,\nabla\mathbf{u})\mathbf{u} + \overline{p(\varrho,\vartheta)\mathbf{u}}\right)\cdot\nabla\psi\,\mathrm{d}x \quad (3.84)$$

pour tout $\psi\in\mathcal{C}^1(\overline{\Omega})$.

Il nous reste maintenant à montrer la convergence forte de la suite ϱ_δ dans un espace $L^r(\Omega)$ pour un $r\geq 1$ pour achever la démonstration de notre théorème. Pour ce faire, on va suivre les étapes effectuées dans le chapitre précédent dont les détails sont fournis dans le cinquième chapitre (dans le cas plus compliqué de l'évolution temporelle).

3.5.2 Convergence forte de la densité

On va suivre les étapes suivantes pour arriver à la convergence souhaitée

- On définit une fonction de troncature

$$T_k(z) = kT\left(\frac{z}{k}\right),\quad T(z) = \begin{cases} z, & \text{pour } 0\leq z\leq 1,\\ \text{concave}, & \text{sur } (0,\infty),\\ 2, & \text{pour } z\geq 3.\end{cases} \quad (3.85)$$

- On établit l'identité du flux effectif visqueux

$$\overline{p(\varrho,\vartheta)T_k(\varrho)} - \left(\frac{4}{3}\mu(\vartheta)+\xi(\vartheta)\right)\overline{T_k(\varrho)\operatorname{div}\mathbf{u}} = \overline{p(\varrho,\vartheta)}\,\overline{T_k(\varrho)} - \left(\frac{4}{3}\mu(\vartheta)+\xi(\vartheta)\right)\overline{T_k(\varrho)}\operatorname{div}\mathbf{u}.$$

- On montre que la mesure de défaut

$$\mathbf{osc}_q[\varrho_\delta\to\varrho](\Omega) = \sup_{k>1}\left(\limsup_{\delta\to 0}\int_\Omega |T_k(\varrho_\delta)-T_k(\varrho)|^q\,\mathrm{d}x\right)$$

  est bornée pour un certain $q>2$.
- On utilise le lemme des solutions renormalisées de l'équation de bilan de masse [24, Lemma 3.8].
- On constate grâce à ce lemme et à l'identité du flux effectif visqueux que

$$\lim_{k\to\infty}\int_\Omega \frac{1}{\frac{4}{3}\mu(\vartheta)+\xi(\vartheta)}\left(\overline{p(\varrho,\vartheta)T_k(\varrho)} - \overline{p(\varrho,\vartheta)}\,\overline{T_k(\varrho)}\right)\mathrm{d}x = 0.$$

- On conclut au moyen de calculs détaillés dans le chapitre précédent que

$$\varrho_\delta\to\varrho$$

  dans $L^1(\Omega)$ et ainsi dans $L^p(\Omega)$ pour tout $p\in[1,s\gamma)$.

On termine en ajoutant que pour le cas où Ω ne comporte pas de symétrie axiale, la condition $m>\frac{2}{3\gamma-1}$ se révèle la plus restrictive alors que dans le cas où Ω est axisymétrique avec $\lambda>0$, les conditions du lemme 29 sont les plus contraignantes pour le cas $s>\frac{6}{5}$ nécessaire à l'existence de solutions faibles.

Conclusion et perspectives

Dans cette partie, nous avons étudié le système de Navier-Stokes puis le système complet de Navier-Stokes-Fourier comprenant aussi la conduction de la chaleur dans le cas stationnaire. Nous avons pu établir des résultats d'existence de solutions faibles dans chacun des cas traités.

Pour le système de Navier-Stokes, nous avons considéré des conditions de bord de glissement dans un domaine ne comportant pas de symétrie axiale et avons réussi à établir l'existence de solutions faibles pour un coefficient adiabatique proche de 1.

Dans le cas du système complet de Navier-Stokes-Fourier, nous avons considéré des conditions de glissement (pouvant être partielles) sur un domaine non axisymétrique puis des conditions de glissement partiel sur un domaine comportant des symétries axiales. Dans chacun de ces cas, nous avons montré l'existence de solutions entropiques variationnelles, c'est-à-dire vérifiant l'inégalité d'entropie au sens faible et le bilan d'énergie global. Ceci est fait pour des coefficients adiabatiques aussi proches de 1 que souhaité. Pour des coefficients adiabatiques strictement supérieurs à $5/4$, nous avons montré que ces solutions étaient aussi des solutions faibles (*i.e.* respectant l'équation de bilan de l'énergie totale au sens faible).

Au cours de cette première partie, nous avons pu mettre en place des outils et techniques standard qui sont utilisés abondamment dans la seconde partie portant sur les écoulements non stationnaires. En ce sens, ces premiers travaux pourraient être considérés comme une introduction aux problématiques liées aux équations de Navier-Stokes-Fourier avec évolution temporelle. Nous avons néanmoins pu établir plusieurs résultats nouveaux et identifier plusieurs problèmes qui nous paraissent non triviaux pour une étude dans le cas stationnaire. Parmi eux :

1. Le problème de Dirichlet avec $\mathbf{u}|_{\partial\Omega} = 0$ dans le cas isentrope et avec conduction de la chaleur (système de Navier-Stokes-Fourier complet). Il s'agit ici d'établir des fonctions test permettant d'établir des estimations de type potentiel semblables à celles de la sous-section 2.5.3.
2. Le problème de Navier-Stokes-Fourier incluant des conditions de Dirichlet non homogènes avec entrée et sortie, par exemple
$$\mathbf{u}|_{\partial\Omega} = \mathbf{a}(x), \quad \varrho|_{\Gamma_{\text{entrée}}} = r \text{ où } \Gamma_{\text{entrée}} = \{x \in \partial\Omega \,|\, \mathbf{u}\cdot\mathbf{n} < 0\}\,.$$
3. Le problème de Navier-Stokes-Fourier dans certains domaines Ω non bornés (comme des domaines extérieurs) avec des conditions à l'infini du type
$$\varrho(x) \xrightarrow[|x|\to\infty]{} \overline{\varrho} > 0, \quad \mathbf{u}(x) \xrightarrow[|x|\to\infty]{} \mathbf{a} \in \mathbb{R}^3.$$
Dans le cas isentrope, l'existence de solutions est connue, mais seulement pour des coefficients adiabatiques strictement supérieurs à 3. Le problème pour des valeurs du coefficient adiabatique comprises dans l'intervalle $(1, 3]$ reste un problème ouvert. Il s'agit ici de trouver des estimations de la quantité $\varrho - \overline{\varrho}$ dans l'espace $[L^\gamma + L^2](\Omega)$.

Deuxième partie

Écoulements non-stationnaires

Dans cette deuxième partie, on s'intéresse au système de Navier-Stokes-Fourier dans le cas instationnaire. On rappelle tout d'abord la définition des solutions faibles dans un domaine borné et on s'aperçoit qu'elle n'est pas convenable pour les domaines non bornés. Ceci nous pousse à introduire la définition de solutions très faibles puis la notion de solutions dissipatives basée sur une inégalité dite d'entropie relative. La pertinence de ces concepts est justifiée par la vérification du principe d'unicité forte-faible par ce type de solutions.

On prouve ensuite l'existence de solutions très faibles au sens des définitions données dans le premier chapitre. Pour ce faire, on utilise un résultat d'existence en domaine borné déjà connu, que l'on exploite sur une suite croissante de domaines au sens de l'inclusion. On arrive de cette manière à atteindre un domaine non borné, pour peu que l'on parvienne à démontrer les convergences nécessaires de nos quantités.

L'étude des solutions faibles fait apparaître une fonction spécifique de type Helmholtz qui joue un rôle central dans cette partie. Grâce aux conditions de stabilité thermodynamique, cette fonction peut-être modifiée afin d'obtenir une fonctionnelle mesurant une "distance" entre une solution faible et un autre état quelconque. Cette fonctionnelle est appelée entropie relative. Pour la mettre en place, on retravaille l'équation du bilan de masse, l'équation du bilan de quantité de mouvement, l'inégalité d'entropie et l'égalité de conservation d'énergie avec des fonctions test bien choisies afin d'obtenir une inégalité d'entropie relative sur un domaine borné. Les résultats de convergence obtenus lors du chapitre précédent permettent alors de passer à la limite vers des domaines non bornés.

On utilise ce dernier résultat pour démontrer le principe d'unicité forte-faible en testant notre inégalité d'entropie relative avec une solution forte du problème de Navier-Stokes-Fourier. On remanie cette expression pour pouvoir employer le lemme de Gronwall, ce qui nous assure que les solutions forte et faible issues des mêmes données initiales coïncident sur leur temps maximal d'existence.

Pour finir, on revient sur les changements à opérer pour traiter le cas des conditions de bord de glissement, où tous les résultats peuvent être retrouvés pour certaines classes de domaines.

4 Présentation du système de Navier-Stokes dans le cas non stationnaire

Sommaire

4.1 Description du problème

4.1.1 Le système de Navier-Stokes-Fourier dans le cas instationnaire

On s'intéresse dans cette partie à l'évolution temporelle des trois variables d'état d'un fluide compressible dans un domaine $\Omega \subset \mathbb{R}^3$. On a donc une densité $\varrho = \varrho(t,x)$, une température $\vartheta = \vartheta(t,x)$ et un champ de vitesse $\mathbf{u} = \mathbf{u}(t,x)$, où t est la variable temporelle et $x \in \Omega$ est la variable spatiale exprimée dans le système de coordonnées eulériennes.
Les équations aux dérivées partielles décrivant l'évolution temporelle du fluide expriment respectivement le bilan de la masse, de la quantité de mouvement et de l'énergie exprimée sous la forme de bilan entropique :

$$\partial_t \varrho + \operatorname{div}_x(\varrho \mathbf{u}) = 0, \tag{4.1}$$

$$\partial_t(\varrho \mathbf{u}) + \operatorname{div}_x(\varrho \mathbf{u} \otimes \mathbf{u}) + \nabla_x p(\varrho, \vartheta) = \operatorname{div}_x(\mathbb{S}(\vartheta, \nabla_x \mathbf{u})) + \varrho \nabla_x F, \tag{4.2}$$

$$\partial_t(\varrho s(\varrho, \vartheta)) + \operatorname{div}_x(\varrho s(\varrho, \vartheta)\mathbf{u}) + \operatorname{div}_x\left(\frac{\mathbf{q}(\vartheta, \nabla_x \vartheta)}{\vartheta}\right) = \sigma, \tag{4.3}$$

où $p = p(\varrho, \vartheta)$ représente la pression du fluide, $s = s(\varrho, \vartheta)$ représente son entropie spécifique, $\nabla_x F = \nabla_x F(x)$ est une force potentielle et σ est le taux de production d'entropie. Dans le cas où les équations sont prises au sens classique, on a

$$\sigma = \frac{1}{\vartheta}\left(\mathbb{S}(\vartheta, \nabla_x \mathbf{u}) : \nabla_x \mathbf{u} - \frac{\mathbf{q}(\vartheta, \nabla_x \vartheta) \cdot \nabla_x \vartheta}{\vartheta}\right). \tag{4.4}$$

On suppose à nouveau que le fluide est newtonien, ainsi le tenseur des contraintes visqueuses sera de la forme

$$\mathbb{S}(\vartheta, \nabla_x \mathbf{u}) = \mu(\vartheta)\mathbb{T}(\nabla_x \mathbf{u}) + \xi(\vartheta) \operatorname{div}_x \mathbf{u}\, \mathbb{I}, \text{ avec } \mathbb{T}(\nabla_x \mathbf{u}) = \nabla_x \mathbf{u} + \nabla_x^T \mathbf{u} - \frac{2}{3} \operatorname{div}_x \mathbf{u}\, \mathbb{I}, \tag{4.5}$$

le flux de chaleur $\mathbf{q}$ satisfaisant quant à lui la loi de Fourier

$$\mathbf{q} = -\kappa(\vartheta)\nabla_x \vartheta. \tag{4.6}$$

Le système d'équations aux dérivées partielles (4.1) - (4.3) complété par les relations de comportement (4.5) et (4.6) est appelé système de Navier-Stokes-Fourier pour un fluide newtonien.

4.1.2 Cadre de travail

Pour affaiblir la notion de solution pour le système (4.1) - (4.9), on considère une définition de solution faible introduite dans [24] respectant le second principe de la thermodynamique et stipulant que le taux de production d'entropie σ est une mesure positive, avec

$$\sigma \geq \frac{1}{\vartheta}\left(\mathbb{S}(\vartheta, \nabla_x \mathbf{u}) : \nabla_x \mathbf{u} - \frac{\mathbf{q}(\vartheta, \nabla_x \vartheta) \cdot \nabla_x \vartheta}{\vartheta}\right). \tag{4.7}$$

On ferme le système de Navier-Stokes-Fourier grâce aux conditions d'adhérence au bord

$$\mathbf{u}|_{\partial\Omega} = 0, \tag{4.8}$$

ainsi que par une absence de transfert de chaleur à travers la frontière

$$\mathbf{q} \cdot \mathbf{n}|_{\partial\Omega} = 0. \tag{4.9}$$

On complète le système de Navier-Stokes-Fourier par les conditions initiales suivantes

$$\varrho(0,\cdot) = \varrho_0 \geq 0, \quad \vartheta(0,\cdot) = \vartheta_0 > 0, \quad \varrho\mathbf{u}(0,\cdot) = \varrho_0\mathbf{u}_0, \quad \varrho s(\varrho,\vartheta)(0,\cdot) = \varrho_0 s(\varrho_0,\vartheta_0) \tag{4.10}$$

où ϱ_0 est positif et ϑ_0 est strictement positif.

Dans le cas d'un domaine non borné, on suppose que les variables d'état du fluide ont le comportement suivant à l'infini :

$$\varrho - \tilde{r} \to 0, \ \vartheta \to \overline{\vartheta}, \ \mathbf{u} \to 0 \quad \text{quand } |x| \to \infty, \tag{4.11}$$

où $\tilde{r}(x) \geq \underline{r} > 0$ et $\overline{\vartheta} > 0$ décrivent un état d'équilibre vérifiant

$$\nabla_x p(\tilde{r}, \overline{\vartheta}) = \tilde{r}\nabla_x F. \tag{4.12}$$

On précise maintenant les relations constitutives de notre fluide, en commençant par l'équation de Gibbs liant la pression p, l'énergie interne spécifique $e = e(\varrho,\vartheta)$ et l'entropie spécifique s

$$\vartheta Ds(\varrho,\vartheta) = De(\varrho,\vartheta) + p(\varrho,\vartheta)D\left(\frac{1}{\varrho}\right), \tag{4.13}$$

où D représente le gradient par rapport aux variables ϱ et ϑ. On s'appuie aussi sur l'hypothèse de stabilité thermodynamique énonçant que la capacité thermique à volume constant et la compressibilité du fluide sont strictement positives :

$$\frac{\partial e(\varrho,\vartheta)}{\partial\vartheta} > 0, \quad \frac{\partial p(\varrho,\vartheta)}{\partial\varrho} > 0, \tag{4.14}$$

pour tous ϱ et ϑ strictement positifs.
Pour finir, on suppose que $p(\varrho,\vartheta)$, $e(\varrho,\vartheta)$ et $s(\varrho,\vartheta)$ ont les formes suivantes :

$$p(\varrho,\vartheta) = \vartheta^{\gamma/(\gamma-1)}P\left(\frac{\varrho}{\vartheta^{1/(\gamma-1)}}\right) + \frac{a}{3}\vartheta^4, \tag{4.15}$$

$$e(\varrho,\vartheta) = \frac{1}{\gamma-1}\frac{\vartheta^{\gamma/(\gamma-1)}}{\varrho}P\left(\frac{\varrho}{\vartheta^{1/(\gamma-1)}}\right) + a\frac{\vartheta^4}{\varrho}, \tag{4.16}$$

$$s(\varrho,\vartheta) = S\left(\frac{\varrho}{\vartheta^{1/(\gamma-1)}}\right) + \frac{4a}{3}\frac{\vartheta^3}{\varrho}, \tag{4.17}$$

avec $a > 0$, $\gamma > \frac{3}{2}$ et

$$P \in \mathcal{C}^1[0,\infty), \quad P(0) = 0, \quad P'(0) > 0. \tag{4.18}$$

Les propriétés de stabilité thermodynamique nous apprennent que

$$P'(Z) > 0 \text{ pour tout } Z \geq 0, \quad 0 < \frac{\gamma P(Z) - ZP'(Z)}{Z} < c \text{ pour tout } Z > 0, \tag{4.19}$$

ce qui implique que la fonction $Z \mapsto P(Z)/Z^\gamma$ est décroissante. On prend pour hypothèse que

$$\lim_{Z\to\infty} \frac{P(Z)}{Z^\gamma} = P_\infty > 0. \tag{4.20}$$

Enfin, en accord avec le troisième principe de la thermodynamique :

$$S'(Z) = -\frac{1}{\gamma - 1}\frac{\gamma P(Z) - ZP'(Z)}{Z^2} < 0, \quad \lim_{Z\to\infty} S(Z) = 0 \tag{4.21}$$

Les viscosités dynamique μ, cinématique ν et le coefficient de transport de la chaleur κ sont supposés avoir les propriétés suivantes

$$\mu, \xi \in \mathcal{C}^1[0,\infty) \text{ sont globalement lipschitziennes avec } \mu_0(1+\vartheta) \le \mu(\vartheta),\ 0 \le \xi(\vartheta),\ \mu_0 > 0, \tag{4.22}$$

$$\kappa \in \mathcal{C}^1[0,\infty), \quad \kappa_0(1+\vartheta^3) \le \kappa(\vartheta) \le \kappa_1(1+\vartheta^3),\ 0 < \kappa_0 \le \kappa_1, \tag{4.23}$$

d'après [24, Chapitre 3].

On finit en introduisant la fonction $H_{\overline{\vartheta}} = \varrho e(\varrho,\vartheta) - \overline{\vartheta}\varrho s(\varrho,\vartheta)$ et en remarquant que

$$\frac{\partial H_{\overline{\vartheta}}}{\vartheta}(\varrho,\vartheta) = \varrho\frac{\vartheta - \overline{\vartheta}}{\vartheta}\frac{\partial e}{\partial\vartheta}(\varrho,\vartheta) \text{ et } \frac{\partial^2 H_{\overline{\vartheta}}}{\partial\varrho^2}(\varrho,\overline{\vartheta}) = \frac{1}{\varrho}\frac{\partial p}{\partial\varrho}(\varrho,\overline{\vartheta}), \tag{4.24}$$

les propriétés de stabilité thermodynamique (4.14) induisent que

$$\varrho \mapsto H_{\overline{\vartheta}}(\varrho,\overline{\vartheta}) \text{ est une fonction strictement convexe} \tag{4.25}$$

et que

$$\vartheta \mapsto H_{\overline{\vartheta}}(\varrho,\vartheta) \text{ atteint son minimum global pour } \vartheta = \overline{\vartheta}. \tag{4.26}$$

Cette fonction $H_{\overline{\vartheta}}$ nous permet d'établir une inégalité de dissipation d'énergie complétant (4.7)

$$\begin{aligned} &\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_\Omega \left(\frac{1}{2}\varrho|\mathbf{u}|^2 + H_{\overline{\vartheta}}(\varrho,\vartheta) - \partial_\varrho H_{\overline{\vartheta}}(\tilde{r},\overline{\vartheta})(\varrho - \tilde{r}) - H_{\overline{\vartheta}}(\tilde{r},\overline{\vartheta})\right)\mathrm{d}x \qquad (4.27)\\ &+ \int_\Omega \frac{\overline{\vartheta}}{\vartheta}\left(\mathbb{S}(\vartheta,\nabla_x\mathbf{u}) : \nabla_x\mathbf{u} - \frac{\mathbf{q}(\vartheta,\nabla_x\vartheta)\cdot\nabla_x\vartheta}{\vartheta}\right)\mathrm{d}x \le 0. \end{aligned}$$

Si le domaine est borné, on peut étudier le bilan d'énergie totale

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_\Omega \frac{1}{2}\varrho|\mathbf{u}|^2 + \varrho e(\varrho,\vartheta) - \varrho F\,\mathrm{d}x = 0. \tag{4.28}$$

4.2 Solutions recherchées

Pour définir le type de solutions recherchées, on suppose par la suite que $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ est un domaine lipschitzien pouvant être non borné et on utilise les hypothèses suivantes sur le potentiel F et les données initiales :

$$F \in \mathcal{C}^1(\overline{\Omega}), \tag{4.29}$$

$$0 < \underline{r} \le \tilde{r} \in \mathcal{C}^1(\overline{\Omega}), \tag{4.30}$$

$$0 < \underline{r} \le \varrho_0 \in L^\gamma_{\mathrm{loc}}(\overline{\Omega}), \quad \varrho_0\mathbf{u}_0 \in L^{2\gamma/(\gamma+1)}_{\mathrm{loc}}(\overline{\Omega};\mathbb{R}^3), \tag{4.31}$$

$$0 < \underline{\vartheta} < \vartheta_0, \quad \varrho_0 s(\varrho_0,\vartheta_0) \in L^1_{\mathrm{loc}}(\overline{\Omega}), \tag{4.32}$$

$$\int_\Omega \left(\frac{1}{2} \varrho_0 |\mathbf{u}_0|^2 + H_{\overline{\vartheta}}(\varrho_0, \vartheta_0) - \partial_\varrho H_{\overline{\vartheta}}(\tilde{r}, \overline{\vartheta})(\varrho_0 - \tilde{r}) - H_{\overline{\vartheta}}(\tilde{r}, \overline{\vartheta}) \right) \mathrm{d}x < \infty. \tag{4.33}$$

Notation (Fonctions p-intégrables pondérées)
Rappelons que pour $1 \leq p < \infty$ et $f \geq 0$, on note $L^p_f(\Omega, \mathbb{R}^N)$ l'ensemble

$$\left\{ \mathbf{v} \mid f |\mathbf{v}|^p \in L^1(\Omega, \mathbb{R}^N) \right\}.$$

Définition 4.1 (Solution très faible)
On dit qu'un triplet $(\varrho, \vartheta, \mathbf{u})$ est une solution très faible du système de Navier-Stokes-Fourier (4.1) - (4.11) si et seulement si les conditions suivantes sont satisfaites :

1. *Conditions de régularité :*
   - $\varrho(t,x) \geq 0$, $\vartheta(t,x) > 0$ *presque partout sur* $(0,T) \times \Omega$,
   - $\frac{\varrho}{\tilde{r}} - 1 \in L^\infty\left(0,T; \left[L^\gamma_{\tilde{r}^\gamma} + L^2_{\tilde{r}^\gamma}\right](\Omega)\right)$,
   - $\varrho \mathbf{u} \in L^\infty\left(0,T; \left[L^{2\gamma/(\gamma+1)} + L^2_{1/\tilde{r}}\right](\Omega; \mathbb{R}^3)\right)$,
   - $\varrho \mathbf{u}^2 \in L^\infty\left(0,T; L^1(\Omega)\right)$,
   - $\vartheta - \overline{\vartheta} \in L^\infty\left(0,T; [L^4 + L^2](\Omega)\right) \cap L^2\left(0,T; W^{1,2}(\Omega)\right)$,
   - $\nabla_x \log \vartheta \in L^2\left(0,T; L^2(\Omega; \mathbb{R}^3)\right)$,
   - $\mathbf{u} \in L^2\left(0,T; W^{1,2}_0(\Omega; \mathbb{R}^3)\right)$.
2. *Conditions sur l'équation du bilan de masse :*
   - ϱ *doit appartenir à l'espace* $\mathcal{C}_{weak}([0,T]; L^\gamma(K))$ *pour tout compact* K *inclus dans* $\overline{\Omega}$,
   - *l'équation du bilan de masse* (4.1) *est vérifiée au sens suivant*

$$\int_\Omega \varrho \varphi \,\mathrm{d}x \Big|_0^\tau = \int_0^\tau \int_\Omega \varrho \partial_t \varphi + \varrho \mathbf{u} \cdot \nabla_x \varphi \,\mathrm{d}x \,\mathrm{d}t, \text{ pour tout } \tau \in [0,T] \text{ et } \varphi \in \mathcal{C}^1_c\left([0,T] \times \overline{\Omega}\right). \tag{4.34}$$

3. *Conditions sur l'équation du bilan de quantité de mouvement :*
   - $\varrho \mathbf{u}$ *doit appartenir à l'espace* $\mathcal{C}_{weak}\left(0,T; L^{2\gamma/(\gamma+1)}(K; \mathbb{R}^3)\right)$ *pour tout compact* K *inclus dans* $\overline{\Omega}$
   - *l'équation du bilan de quantité de mouvement* (4.2) *est vérifiée au sens suivant*

$$\int_\Omega \varrho \mathbf{u} \cdot \boldsymbol{\varphi} \Big|_0^\tau = \int_0^\tau \int_\Omega \Big(\varrho \mathbf{u} \cdot \partial_t \boldsymbol{\varphi} + \varrho \mathbf{u} \otimes \mathbf{u} : \nabla_x \boldsymbol{\varphi} + p(\varrho, \vartheta) \operatorname{div}_x \boldsymbol{\varphi} - \mathbb{S}(\vartheta, \nabla_x \mathbf{u}) : \nabla_x \boldsymbol{\varphi} + \varrho \nabla_x F \cdot \boldsymbol{\varphi} \Big) \,\mathrm{d}x \,\mathrm{d}t \tag{4.35}$$

   pour tout $\tau \in [0,T]$ *et* $\boldsymbol{\varphi} \in \mathcal{C}^1_c\left([0,T] \times \Omega; \mathbb{R}^3\right)$.
4. *L'équation du bilan d'entropie est satisfaite au sens suivant*

$$\begin{aligned} - \int_\Omega \varrho s(\varrho, \vartheta) \varphi \,\mathrm{d}x \Big|_0^\tau &+ \int_0^\tau \int_\Omega \frac{\varphi}{\vartheta} \left(\mathbb{S}(\vartheta, \nabla_x \mathbf{u}) : \nabla_x \mathbf{u} - \frac{\mathbf{q}(\vartheta, \nabla_x \vartheta) \cdot \nabla_x \vartheta}{\vartheta} \right) \mathrm{d}x \,\mathrm{d}t \\ &\leq - \int_0^\tau \int_\Omega \left(\varrho s(\varrho, \vartheta) \partial_t \varphi + \varrho s(\varrho, \vartheta) \mathbf{u} \cdot \nabla_x \varphi + \frac{\mathbf{q}(\vartheta, \nabla_x \vartheta) \cdot \nabla_x \vartheta}{\varphi} \right) \mathrm{d}x \,\mathrm{d}t, \end{aligned} \tag{4.36}$$

   pour presque tout $\tau \in (0,T)$ *et pour tout* $\varphi \in \mathcal{C}^1_c\left([0,T] \times \overline{\Omega}\right)$.
5. *L'inégalité de dissipation est vérifiée*

$$\begin{aligned} &\int_\Omega \left(\frac{1}{2} \varrho |\mathbf{u}|^2 + H_{\overline{\vartheta}}(\varrho, \vartheta) - \partial_\varrho H_{\overline{\vartheta}}(\tilde{r}, \overline{\vartheta})(\varrho - \tilde{r}) - H_{\overline{\vartheta}}(\tilde{r}, \overline{\vartheta}) \right)(\tau, \cdot) \,\mathrm{d}x \\ &+ \int_0^\tau \int_\Omega \frac{\overline{\vartheta}}{\vartheta} \left(\mathbb{S}(\vartheta, \nabla_x \mathbf{u}) : \nabla_x \mathbf{u} - \frac{\mathbf{q}(\vartheta, \nabla_x \vartheta) \cdot \nabla_x \vartheta}{\vartheta} \right) \mathrm{d}x \,\mathrm{d}t \\ &\leq \int_\Omega \left(\frac{1}{2} \varrho_0 |\mathbf{u}_0|^2 + H_{\overline{\vartheta}}(\varrho_0, \vartheta_0) - \partial_\varrho H_{\overline{\vartheta}}(\tilde{r}, \overline{\vartheta})(\varrho_0 - \tilde{r}) - H_{\overline{\vartheta}}(\tilde{r}, \overline{\vartheta}) \right) \mathrm{d}x, \end{aligned} \tag{4.37}$$

   pour presque tout $\tau \in [0,T]$.

Définition 4.2 (Solution très faible renormalisée)
On dit qu'un triplet $(\varrho, \vartheta, \mathbf{u})$ *est une solution très faible renormalisée du système de Navier-Stokes-Fourier* (4.1) - (4.11) *s'il est une solution très faible et si de plus*

- *le couple* $(\varrho, \mathbf{u})$ *vérifie l'équation de bilan de la masse renormalisée*

$$\int_\Omega b(\varrho)\varphi \,\mathrm{d}x\Big|_0^\tau = \int_0^\tau \int_\Omega b(\varrho)\left(\partial_t\varphi + \mathbf{u}\cdot\nabla_x\varphi\right)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t + \int_0^\tau \int_\Omega \left(\varrho b'(\varrho) - b(\varrho)\right)\mathrm{div}_x\mathbf{u}\,\varphi\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t, \quad (4.38)$$

pour tout $\tau \in [0,T]$, $\varphi \in \mathcal{C}_c^1\left([0,T)\times\overline{\Omega}\right)$ *et* $b \in \mathcal{C}([0,\infty)) \cap \mathcal{C}^1(0,\infty)$ *vérifiant*

$$\begin{cases} zb'(z) \in L^\infty(0,1), \\ b(z)/z^{5\gamma/6} \in L^\infty(1,\infty), \\ \dfrac{zb'(z)-b(z)}{z^{\gamma/2}} \in L^\infty(1,\infty), \end{cases} \quad (4.39)$$

- $b(\varrho)$ *appartient à l'espace* $\mathcal{C}_{weak}\left([0,T], L^1(K)\right)$ *pour tout compact* K *inclus dans* $\overline{\Omega}$.

Définition 4.3 (Solution dissipative)
On dit qu'un triplet $(\varrho, \vartheta, \mathbf{u})$ *est une solution dissipative du système de Navier-Stokes-Fourier* (4.1) - (4.11) *s'il est une solution très faible et s'il satisfait l'inégalité d'entropie relative*

$$\begin{aligned}
&\int_\Omega \left(\frac{1}{2}\varrho|\mathbf{u}-\mathbf{U}|^2 + \mathcal{E}(\varrho,\vartheta|r,\Theta)\right)(\tau,\cdot)\,\mathrm{d}x \\
&+ \int_0^\tau\int_\Omega \Theta\frac{\mathbb{S}(\vartheta,\nabla_x\mathbf{u})}{\vartheta} : \nabla_x\mathbf{u} - \mathbb{S}(\vartheta,\nabla_x\mathbf{u}) : \nabla_x\mathbf{U}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t \\
&- \int_0^\tau\int_\Omega \Theta\frac{\mathbf{q}(\vartheta,\nabla_x\vartheta)}{\vartheta^2} : \nabla_x\vartheta - \frac{\mathbf{q}(\vartheta,\nabla_x\vartheta)}{\vartheta}\cdot\nabla_x\Theta\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t \\
&\le \int_\Omega \left(\frac{1}{2}\varrho_0|\mathbf{u}_0 - \mathbf{U}(0,\cdot)|^2 + \mathcal{E}(\varrho_0,\vartheta_0|r(0,\cdot),\Theta(0,\cdot))\right)\mathrm{d}x \\
&\quad + \int_0^\tau\int_\Omega \varrho\left(\partial_t\mathbf{U} + \mathbf{u}\cdot\nabla_x\mathbf{U}\right)\cdot(\mathbf{U}-\mathbf{u})\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t + \int_0^\tau\int_\Omega \varrho(\mathbf{U}-\mathbf{u})\cdot\left(\frac{\nabla_x p(r,\Theta)}{r} - \frac{\nabla_x p(\tilde{r},\overline{\vartheta})}{\tilde{r}}\right)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t \\
&\quad + \int_0^\tau\int_\Omega \left(p(r,\Theta) - p(\varrho,\vartheta)\right)\mathrm{div}\,\mathbf{U}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t + \int_0^\tau\int_\Omega \varrho\left(s(r,\Theta) - s(\varrho,\vartheta)\right)\left(\partial_t\Theta + u\cdot\nabla_x\Theta\right)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t \\
&\quad + \int_0^\tau\int_\Omega \left(1 - \frac{\varrho}{r}\right)\left(\partial_t p(r,\Theta) + \mathbf{U}\cdot\nabla_x p(r,\Theta)\right)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t,
\end{aligned} \quad (4.40)$$

pour presque tout $\tau \in (0,T)$ *et pour tout*

$$(r-\tilde{r}, \Theta - \overline{\vartheta}, \mathbf{U}) \in \mathcal{C}_c^1\left([0,T]\times\overline{\Omega};\mathbb{R}^5\right) \text{ avec } r>0,\ \Theta>0,\ \mathbf{U}|_{\partial\Omega} = 0, \quad (4.41)$$

où

$$\mathcal{E}(\varrho,\vartheta|r,\Theta) = H_\Theta(\varrho,\vartheta) - \partial_\varrho H_\Theta(r,\Theta)(\varrho - r) - H_\Theta(r,\Theta) \quad (4.42)$$

et

$$H_\Theta(\varrho,\vartheta) = \varrho e(\varrho,\vartheta) - \Theta\varrho s(\varrho,\vartheta). \quad (4.43)$$

Dans le cas où le domaine Ω est borné, on modifie la définition de solution faible comme suit

Définition 4.4 (Solution faible dans un domaine borné)
On dit qu'un triplet $(\varrho, \vartheta, \mathbf{u})$ *est une solution faible du système de Navier-Stokes-Fourier* (4.1) - (4.11) *s'il satisfait aux conditions* 1 *à* 4 *de la définition 4.1 et si de plus il respecte la conservation d'énergie totale dans* Ω *:*

$$\int_\Omega \left(\frac{1}{2}\varrho|\mathbf{u}|^2 + \varrho e(\varrho,\vartheta) - \varrho F\right)(\tau,\cdot)\,\mathrm{d}x = \int_\Omega \frac{1}{2}\varrho_0|\mathbf{u}_0|^2 + \varrho_0 e(\varrho_0,\vartheta_0) - \varrho_0 F\,\mathrm{d}x, \quad (4.44)$$

pour presque tout $\tau \in [0,T]$.

Enfin, dans le dernier chapitre établissant l'unicité forte-faible des solutions très faibles dissipatives du système de Navier-Stokes-Fourier, on utilise la notion de solution forte explicitée ci-dessous

Définition 4.5 (Solution forte)
On dit qu'un triplet $(\tilde{\varrho}, \tilde{\vartheta}, \tilde{\mathbf{u}})$ *est une solution forte du système de Navier-Stokes-Fourier* (4.1) - (4.11) *sur* $(0,T) \times \Omega$ *si*

- $\tilde{\varrho},\ \tilde{\vartheta},\ \tilde{\mathbf{u}}$ *vérifient les équations* (4.1) - (4.11),
- $\tilde{\varrho} \in \mathcal{C}^1([0,T] \times \overline{\Omega})$,
- $\tilde{\vartheta},\ \partial_t \tilde{\vartheta},\ \nabla_x^2 \tilde{\vartheta} \in \mathcal{C}([0,T] \times \overline{\Omega})$,
- $\tilde{\mathbf{u}},\ \partial_t \tilde{\mathbf{u}},\ \nabla_x^2 \tilde{\mathbf{u}} \in \mathcal{C}([0,T] \times \overline{\Omega})$,
- $\tilde{\varrho}(t,x) \geq \underline{\varrho} > 0$ *pour tout* (t,x),
- $\tilde{\vartheta}(t,x) \geq \underline{\vartheta} > 0$ *pour tout* (t,x).

4.2.1 Quelques remarques bibliographiques

La notion de solution faible en mécanique des fluides remonte à Jean Leray en 1934 [50], pour des fluides incompressibles newtoniens. C'est P.L. Lions qui a ensuite utilisé ce concept dans le cas de fluides compressibles en régime barotrope dans ses travaux [52], suivi par Feireisl *et al.* [26]. Enfin, l'existence de solutions faibles pour le système de Navier-Stokes-Fourier a été montrée dans [24]. Une notion différente de la solution faible, basée sur le bilan d'énergie interne plutôt que sur l'équation d'entropie a été étudiée dans [21]. Une approche différente motivée parle travail de Vaigant et Kazhikhov [81] considérant une dépendance spécifique de la viscosité vis à vis de la densité a été étudiée par Bresch et Desjardin dans [4] et [5] ou encore par Mellet, Vasseur [57].

Les solutions faibles ne sont malheureusement pas forcément uniques et peuvent aussi faire montre de propriétés gênantes, comme l'ont montré Hoff et Serre dans [43]. La plus grande avancée dans le domaine de l'unicité des solutions reste le principe d'unicité forte-faible stipulant qu'une solution faible coïncide avec la solution forte issue des même données initiales, pourvue que cette dernière existe. Le principe d'unicité forte-faible a déjà été employé pour des écoulements de Navier-Stokes incompressibles par Prodi [70] en 1959, Serrin [75] en 1962. Une approche plus moderne avec des résultats plus pointus pour les équations de Navier-Stokes incompressibles peuvent être trouvés dans [17]. Puis Feireisl, Jin et Novotný ont pu démontrer que ce principe est aussi vérifié pour les fluides compressibles en régime barotrope dans [23] après des résultats partiels de Desjardins [13] et Germain [34]. Enfin, l'unicité forte-faible a été prouvée pour les solutions faibles du système de Navier-Stokes-Fourier dans [25], avec une formulation de l'entropie issue de [24].

Les résultats d'unicité forte-faible reposent sur l'emploi de la notion d'entropie relative. L'entropie relative est une fonctionnelle servant à estimer l'écart entre une solution faible et une fonction régulière ayant les propriétés des solutions aux problèmes étudiés. Elle doit satisfaire une inégalité différentielle, dite inégalité d'entropie relative, qui permet de suivre l'évolution temporelle de l'entropie relative. La limite de cette méthode réside dans la difficulté à trouver une fonctionnelle adaptée à chaque problème que l'on souhaite étudier. Néanmoins, elle a été utilisée, souvent de manière *ad hoc*, dans plusieurs travaux portant sur les équations d'Euler, sur le système de Navier-Stokes barotrope ou encore les équations de Boltzman par de nombreux auteurs comme Dafermos [10], Lions [52], Saint-Raymond [72], Grenier [36], Masmoudi [53], Ukai [80], Wang et Jiang [83] entre autres. On appuie la preuve du principe d'unicité forte-faible de cette partie sur cette méthode de l'entropie relative.

Le système complet de Navier-Stokes-Fourier a été étudié jusqu'ici uniquement dans des domaines bornés, voir [24], [25]. Le but de cette partie est d'étendre à la fois les résultats d'existence de solutions faibles (théorème 5.3), mais aussi les résultats d'unicité forte-faible (théorème 7.1) à une large classe de domaines non bornés. Pour cela, on établit une inégalité d'entropie relative elle aussi valable dans ces domaines non bornés (voir théorème 6.1).

5 Existence de solutions faibles

Sommaire

5.1 Introduction et résultats obtenus

5.1.1 Introduction

Dans ce chapitre, on démontre l'existence de solutions très faibles au système de Navier-Stokes-Fourier instationnaire, dont la définition est mise en place dans le chapitre introductif de cette partie. Des conditions de bord d'adhérence sont considérées pour la vitesse, et une absence de transfert de chaleur à la frontière est imposée. Enfin, notre fluide est soumis à une force extérieure potentielle.

Parmi plusieurs variantes possibles nous adoptons, comme dans [24], la définition de solution faible contenant la loi de conservation d'énergie exprimée sous forme de bilan entropique. Dans cette formulation, le taux de production d'entropie doit être interprété comme une mesure de Radon positive. Dans ce chapitre et jusqu'à la fin de ces travaux, nous nous concentrons uniquement sur cette variante et laissons de côté d'autres options possibles comme celle introduite par Feireisl dans [21] ou encore celle de Bresch et Desjardins utilisée dans [4] et [5].

L'existence de solutions faibles définies de la sorte dans les domaines bornés a été montrée dans [25]. Nous nous inspirons des techniques de cette démonstration, tout en nous concentrant exclusivement sur les domaines non bornés. Nous adaptons ainsi la définition des solutions faibles à cette situation. Pour les conditions à l'infini, on suppose que la vitesse y est nulle, la température absolue constante positive et la densité à l'état d'équilibre.

Pour prouver l'existence d'un tel type de solutions, on travaille dans une suite de domaine bornés croissants au sens de l'inclusion dont la limite est le domaine non borné visé. L'inégalité de dissipation sur ces domaines nous fournit les estimations indispensables à la mise en place de limites faibles pour la densité, la température et la vitesse. Notons que les conditions de stabilité thermodynamiques jouent un rôle crucial dans l'établissement de ces estimations.

Les équations étant non linéaires, il nous faut démontrer la convergence forte de la température puis celle de la densité. Il est connu que la compacité nécessaire ne découle pas de théorèmes classiques de compacité, mais doit être recherchée dans la structure même des équations. Ainsi, la convergence forte de la température est obtenue à l'aide d'une variante du lemme div-rot et du théorème sur la représentation des limites faibles par les mesures de Young.

La convergence presque partout de la densité est ensuite établie au moyen du même type d'outils que dans le cas stationnaire, incluant notamment la mise en place de l'inégalité du flux effectif visqueux, l'utilisation d'une mesure de défaut et l'emploi de l'équation du bilan de masse renormalisée, comme dans [52] puis [21] et [26].

On finit en établissant l'équation de dissipation dans notre domaine non borné.

Les travaux exposés dans ce chapitre ont été l'objet de l'article [44] accepté pour publication.

5.1.2 Présentation des résultats

Cas d'un domaine borné

On construit les solutions très faibles en s'appuyant sur des solutions faibles dans des domaines bornés dont l'existence est connue puis en travaillant sur des domaines croissants au sens de l'inclusion. Rappelons le théorème d'existence de solutions faibles pour les domaines bornés dont la preuve peut être trouvée dans [24, Chapitre 3] pour un domaine de régularité $\mathcal{C}^{2,\nu}$, $\nu \in (0,1)$, les modifications à prendre en compte pour l'étude sur des domaines lipschitziens étant détaillées dans [69].

Théorème 5.1
Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ un domaine borné lipschitzien. On suppose que

- *p, e et s vérifient les hypothèses* (4.15) - (4.21),
- *μ, ξ et κ respectent les relations* (4.22) *et* (4.23),
- *la force potentielle F est de classe $\mathcal{C}^1(\overline{\Omega})$,*
- *l'état d'équilibre $(\tilde{r}, \overline{\vartheta})$ qui est associé à F satisfait à* (4.30),
- *les données initiales définies en* (4.10) *ont les propriétés décrites en* (4.31) - (4.33).

Alors

Le système de Navier-Stokes-Fourier (4.1) - (4.11) *possède au moins un triplet $(\varrho, \vartheta, \mathbf{u})$ solution faible renormalisée au sens des définitions 4.1 et 4.2.*

Théorème 5.2
Sous les mêmes hypothèses que pour le théorème 5.1,

- *Toute solution faible est une solution très faible. En particulier, toute solution faible vérifie l'inégalité de dissipation* (4.37).
- *Toute solution faible est une solution dissipative. En particulier, toute solution faible satisfait l'inégalité d'entropie relative* (4.40) *avec les fonctions test de type* (4.41).

Ce théorème assure l'existence de solutions dissipatives au problème de Navier-Stokes-Fourier dans les domaines bornés. Les preuves respectives de ces deux résultats ont été faites dans [24, chapitre 3] et [25]. Nous rappelons la provenance des inégalité de dissipation et d'entropie relative pour les domaines bornés dans les sections 5.2.1 et 6.2.1.

Cas d'un domaine non borné

On travaille maintenant sur des domaines qui seront soit lipschitziens bornés, soit non bornés et uniformément lipschitziens. Dans ce dernier cas, on supposera que notre domaine sera de la forme suivante

$$\Omega = \bigcup_{s=1}^{\infty} \Omega_s, \tag{5.1}$$

où les ensembles Ω_s sont des domaines lipschitziens bornés satisfaisant $\overline{\Omega}_s \subset \Omega_{s+1}$. Notons que ce type de domaine est aussi utilisé dans les deux prochains chapitres, pour les résultats de solutions très faibles dissipatives et d'unicité forte-faible. Remarquons aussi que la condition (5.1) n'est que très peu restrictive.

Théorème 5.3 (Existence de solutions très faibles)
On suppose que Ω est de type (5.1)

- *p, e et s vérifient les hypothèses* (4.15) - (4.21),
- *μ, ξ et κ respectent les relations* (4.22) *et* (4.23),
- *la force potentielle F est de classe $\mathcal{C}^1(\overline{\Omega})$,*
- *l'état d'équilibre $(\tilde{r}, \overline{\vartheta})$ qui est associé à F satisfait à* (4.30),
- *les données initiales définies en* (4.10) *ont les propriétés décrites en* (4.31) - (4.33).

Alors le système de Navier-Stokes-Fourier (4.1) - (4.11) *possède au moins une solution très faible renormalisée $(\varrho, \vartheta, \mathbf{u})$ au sens des définitions 4.2 et 4.4.*

Pour un domaine borné, ce théorème a déjà été démontré par Feireisl et Novotny dans [24, Chapitre 3]. Ce résultat peut donc être considéré comme une généralisation à des domaines non bornés avec présence de forces potentielles à croissance arbitraire à l'infini. La preuve en est détaillée dans la section 5.2 de ce chapitre.

Remarque 2
Sous les hypothèses du théorème 5.3, toute solution très faible possède aussi les propriétés suivantes

- *Il existe* $\alpha > 0$ *tel que* $p(\varrho,\vartheta)\varrho^\alpha \in L^1((0,T)\times K)$, $\varrho \in L^{\gamma+\alpha}((0,T)\times K)$, $p(\varrho,\vartheta) \in L^{1+\alpha}((0,T)\times K)$ *pour tout compact* $K \subset \overline{\Omega}$.
- *On a* $\frac{\varrho}{\tilde r} - 1 \in \mathcal{C}_{weak}\left([0,T]; \left[L^\gamma_{\tilde r^\gamma} + L^2_{\tilde r^\gamma}\right](\Omega)\right)$ *et* $\varrho\mathbf{u} \in \mathcal{C}_{weak}\left([0,T]; \left[L^{2\gamma/(\gamma+1)} + L^2_{1/\tilde r^\gamma}\right](\Omega)\right)$. *Si* $(\varrho,\vartheta,\mathbf{u})$ *est aussi une solution très faible renormalisée, alors* $\varrho \in \mathcal{C}\left([0,T]; L^1(K)\right)$ *pour tout* $K \subset \overline{\Omega}$.
- *Pour tout* $\alpha \in [1, 3/2]$, *on a* $\vartheta^\alpha - \overline{\vartheta}^\alpha \in L^2(0,T; W^{1,2}(\Omega))$.
- *On a* $\mathbb{S}(\vartheta, \nabla_x \mathbf{u}) \in L^2\left(0,T; [L^2 + L^{4/3}](\Omega;\mathbb{R}^{3\times 3})\right)$ *et* $\mathbf{q}(\vartheta,\nabla_x\vartheta)/\vartheta \in L^2\left(0,T; [L^2 + L^{8/7}](\Omega;\mathbb{R}^3)\right)$.
- *Si* $\tilde r$ *et* F *satisfont à* (4.29) - (4.30) *et* (7.1) - (7.2), *alors* $p(\varrho,\vartheta) - p(\overline{\varrho},\overline{\vartheta}) \in L^\infty(0,T; [L^1 + L^2](\Omega))$ *et* $\varrho(s(\varrho,\vartheta) - s(\overline{r},\overline{\vartheta})) \in L^\infty(0,T; [L^{4/3} + L^2](\Omega))$.
- *On suppose que* Ω *est un domaine pour lequel l'inégalité de Poincaré suivante est vraie : pour tout* $|\Omega| > \alpha > 0$, *il existe* $c(\alpha)$ *tel que*

$$\forall V \subset \Omega,\ |V| < \alpha,\ \forall v \in W^{1,2}(\Omega),\ \|v\|^2_{L^2(\Omega)} \le c(\alpha)\left(\|\nabla_x v\|^2_{L^2(\Omega)} + \int_{\Omega\setminus V} v^2\,\mathrm{d}x\right).$$

  Alors $\ln\vartheta - \ln\overline{\vartheta} \in L^2(0,T; W^{1,2}(\Omega))$.

Les énoncés de cette remarque prennent sens au cours de la démonstration du théorème 5.3.

5.2 Démonstration du théorème

5.2.1 Inégalité de dissipation sur Ω_s

Soit $(\varrho_s, \vartheta_s, \mathbf{u}_s)$ une solution (au sens des définitions 4.3 et 4.4) du système (4.1) - (4.10) sur $(0,T)\times\Omega_s$, où les conditions initiales sont les restrictions des données initiales à Ω_s et satisfont de surcroit (4.33). L'existence d'une telle solution est assurée par le théorème 5.1.

En utilisant l'égalité (4.12) associée à la propriété thermodynamique (4.24), on déduit

$$F + c = \partial_\varrho H_{\overline{\vartheta}}(\tilde r, \overline{\vartheta}), \quad c \in \mathbb{R}.$$

Ainsi, en partant de l'équation d'énergie (4.28) et en lui ajoutant l'équation d'entropie (4.36) multipliée par $\overline{\vartheta}$, on arrive à l'inégalité de dissipation (4.37) pour $(\varrho_s, \vartheta_s, \mathbf{u}_s)$ sur Ω_s.

5.2.2 Estimations et limites faibles

On commence en remarquant que

$$H_{\overline{\vartheta}}(\varrho,\vartheta) - \partial_\varrho H_{\overline{\vartheta}}(\tilde r,\overline{\vartheta})(\varrho - \tilde r) - H_{\overline{\vartheta}}(\tilde r,\overline{\vartheta}) = \tag{5.2}$$
$$\left[H_{\overline{\vartheta}}(\varrho,\vartheta) - H_{\overline{\vartheta}}(\varrho,\overline{\vartheta})\right] + \left[H_{\overline{\vartheta}}(\varrho,\overline{\vartheta}) - \partial_\varrho H_{\overline{\vartheta}}(\tilde r,\overline{\vartheta})(\varrho - \tilde r) - H_{\overline{\vartheta}}(\tilde r,\overline{\vartheta})\right],$$

où l'on peut évaluer les deux termes du membre de droite :

$$H_{\overline{\vartheta}}(\varrho,\vartheta) - H_{\overline{\vartheta}}(\varrho,\overline{\vartheta}) = \int_{\overline{\vartheta}}^{\vartheta} \partial_\vartheta H_{\overline{\vartheta}}(\varrho,z)\,\mathrm{d}z = \int_{\overline{\vartheta}}^{\vartheta} \frac{\varrho}{z}(z-\overline{\vartheta})\partial_\vartheta e(\varrho,z)\,\mathrm{d}z \ge 4a\int_{\overline{\vartheta}}^{\vartheta} z^2(z-\overline{\vartheta})\,\mathrm{d}z \tag{5.3}$$

et

$$\begin{aligned} H_{\overline{\vartheta}}(\varrho,\overline{\vartheta}) - \partial_\varrho H_{\overline{\vartheta}}(\tilde r,\overline{\vartheta})(\varrho-\tilde r) - H_{\overline{\vartheta}}(\tilde r,\overline{\vartheta}) &= \int_{\tilde r}^{\varrho}\int_{\tilde r}^{z} \partial^2_\varrho H(w,\overline{\vartheta})\,\mathrm{d}w\,\mathrm{d}z = \int_{\tilde r}^{\varrho}\int_{\tilde r}^{z} \frac{1}{w}\partial_\varrho p(w,\overline{\vartheta})\,\mathrm{d}w\,\mathrm{d}z \\ &\simeq \tilde r\left[\frac{\varrho}{\tilde r}\ln\left(\frac{\varrho}{\tilde r}\right) - \left(\frac{\varrho}{\tilde r} - 1\right)\right] + \tilde r^\gamma\left[\left(\frac{\varrho}{\tilde r}\right)^\gamma - \gamma\left(\frac{\varrho}{\tilde r} - 1\right) - 1\right], \end{aligned} \tag{5.4}$$

où la notation $a(z) \simeq b(z)$ signifie qu'il existe deux constantes positives $\underline{c}$ et $\overline{c}$ indépendantes de z telles que $\underline{c}a(z) \le b(z) \le \overline{c}a(z)$. Pour obtenir ces résultats, on a utilisé une fois encore les propriétés (4.24) associées à (4.16) et à l'équivalence

$$P'(Z) \simeq 1 + Z^{\gamma-1}, \quad Z > 0. \tag{5.5}$$

Cette dernière s'obtient grâce à (4.19) et (4.20). En effet, on a d'après (4.19)

$$P'(Z) < \gamma \frac{P(Z)}{Z} \text{ et } \gamma \frac{P(Z)}{Z} < c + P'(Z).$$

Ainsi, il existe un certain $\underline{Z}$ telle que pour tout $Z \leq \underline{Z}$, on a

$$P'(Z) \geq \frac{1}{2} \lim_{Z \to 0} P'(Z) \text{ et } P'(Z) \leq 2 \lim_{Z \to 0} P'(Z).$$

Comme $\gamma > 1$, il existe une constante $c > 0$ telle que pour tout $Z \leq \underline{Z}$

$$P'(Z) \geq c(1 + Z^{\gamma-1}) \text{ et } P'(Z) \leq c(1 + Z^{\gamma-1}).$$

De même, d'après (4.20), il existe $\overline{Z}$ tel que pour tout $Z \geq \overline{Z}$

$$\frac{P(Z)}{Z^\gamma} \leq c + P_\infty \Rightarrow \frac{P(Z)}{Z} \leq (c + P_\infty) Z^{\gamma-1},$$

ainsi,

$$P'(Z) \leq \frac{P(Z)}{Z} \leq (c + P_\infty)(1 + Z^{\gamma-1}).$$

Enfin, la limite $P(Z)/(Z) \xrightarrow[Z \to \infty]{} \infty$ amène les implications suivantes

$$\frac{P(Z)}{Z} \leq c + P'(Z) \Longrightarrow \frac{1}{2} \frac{P(Z)}{Z} \leq P'(Z) \Longrightarrow 1 + Z^{\gamma-1} \leq P'(Z).$$

On prolonge ensuite les fonctions ϱ_s et ϑ_s sur Ω tout entier en posant $\varrho_s = \tilde{r}$ et $\vartheta_s = \overline{\vartheta}$ sur $\Omega \setminus \Omega_s$. La vitesse est quant à elle étendue sur $\mathbb{R}^3$ en prenant $\mathbf{u}_s = 0$ sur $\mathbb{R}^3 \setminus \Omega_s$. On introduit les notions de partie essentielle et de partie résiduelle par rapport aux variables ϱ_s et ϑ_s :

$$\begin{aligned}
&[h]_{\mathrm{ess},\varrho_s} = [h] 1_{\frac{1}{2} \leq \varrho_s/\tilde{r} \leq 2}, && [h]_{\mathrm{res},\varrho_s} = [h] - [h]_{\mathrm{ess},\varrho_s}, \\
&[h]_{\mathrm{ess},\vartheta_s} = [h] 1_{\frac{1}{2}\overline{\vartheta} \leq \vartheta_s \leq 2\overline{\vartheta}}, && [h]_{\mathrm{res},\varrho_s} = [h] - [h]_{\mathrm{ess},\vartheta_s}, \\
&[h]_{\mathrm{ess}} = [h] 1_{\frac{1}{2} \leq \varrho_s/\tilde{r} \leq 2} 1_{\frac{1}{2}\overline{\vartheta} \leq \vartheta_s \leq 2\overline{\vartheta}}, && [h]_{\mathrm{res}} = [h] - [h]_{\mathrm{ess}}.
\end{aligned} \tag{5.6}$$

On utilise l'inégalité de dissipation (4.37) pour faire les premières estimations, entre autre grâces aux observations faites en (5.3) et (5.4), pour obtenir

$$\operatorname*{sup\,ess}_{t \in (0,T)} \int_\Omega \varrho_s \mathbf{u}_s^2 \, \mathrm{d}x \leq c \tag{5.7}$$

$$\begin{cases}
\operatorname*{sup\,ess}_{t \in (0,T)} \int_\Omega \tilde{r}^\gamma \left(\varrho_s/\tilde{r} - 1\right)^2 [1]_{\mathrm{ess},\varrho_s} \, \mathrm{d}x \leq c, & (5.8\mathrm{a}) \\
\operatorname*{sup\,ess}_{t \in (0,T)} \int_\Omega \tilde{r}^\gamma \left(\varrho_s/\tilde{r} - 1\right)^\gamma [1]_{\mathrm{res},\varrho_s} \, \mathrm{d}x \leq c, & (5.8\mathrm{b}) \\
\operatorname*{sup\,ess}_{t \in (0,T)} \int_\Omega \varrho_s^\gamma [1]_{\mathrm{res},\varrho_s} \, \mathrm{d}x \leq c, & (5.8\mathrm{c}) \\
\operatorname*{sup\,ess}_{t \in (0,T)} \int_\Omega (1 + \tilde{r} + \tilde{r}^\gamma) [1]_{\mathrm{res},\varrho_s} \, \mathrm{d}x \leq c, & (5.8\mathrm{d})
\end{cases}$$

$$
\begin{cases}
\sup\limits_{t\in(0,T)} \text{ess} \int_\Omega (\vartheta_s - \overline{\vartheta})^2 [1]_{\text{ess},\vartheta_s} \, \mathrm{d}x \le c, & (5.9a) \\
\sup\limits_{t\in(0,T)} \text{ess} \int_\Omega (\vartheta_s - \overline{\vartheta})^4 [1]_{\text{res},\vartheta_s} \, \mathrm{d}x \le c, & (5.9b) \\
\sup\limits_{t\in(0,T)} \text{ess} \int_\Omega \vartheta_s^4 [1]_{\text{res},\vartheta_s} \, \mathrm{d}x \le c, & (5.9c) \\
\sup\limits_{t\in(0,T)} \text{ess} \int_\Omega [1]_{\text{res},\vartheta_s} \, \mathrm{d}x \le c. & (5.9d)
\end{cases}
$$

Ces deux derniers groupes d'inégalités impliquent que

$$
\sup\limits_{t\in(0,T)} \text{ess} \int_\Omega [1]_{\text{res}} + [\varrho_s]^\gamma_{\text{res}} + [\vartheta_s]^4_{\text{res}} \, \mathrm{d}x \le c \tag{5.10}
$$

On remarque que

$$
([\varrho_s]_{\text{res},\varrho_s} \mathbf{u}_s)^{\frac{2\gamma}{\gamma+1}} \le c(\varrho_s |\mathbf{u}_s|^2)^{\frac{\gamma}{\gamma+1}} ([\varrho_s]^\gamma_{\text{res},\varrho_s})^{\frac{1}{\gamma+1}} \text{ et } \frac{1}{\tilde{r}}([\varrho_s]_{\text{ess},\varrho_s} \mathbf{u})^2 \le c \varrho_s |\mathbf{u}_s|^2
$$

ce qui nous permet de savoir, grâce à (5.8), que la quantité de mouvement possède la propriété suivante :

$$
\|\varrho_s \mathbf{u}_s\|_{L^\infty(0,T;L^{2\gamma/\gamma+1} + L^2_{1/\tilde{r}}(\Omega;\mathbb{R}^3))} \le c. \tag{5.11}
$$

On revient à l'équation (4.37), mais en s'intéressant au tenseur des contraintes visqueuses de la seconde intégrale du membre de gauche et on arrive à

$$
\begin{gathered}
\|\mathbb{T}(\nabla_x \mathbf{u}_s)\|_{L^2(0,T;L^2(\mathbb{R}^3;\mathbb{R}^{3\times 3}))} \le c \\
\int_0^T \int_\Omega \frac{1}{\vartheta_s} |\mathbb{T}(\nabla_x \mathbf{u}_s)|^2 \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}t \le c.
\end{gathered} \tag{5.12}
$$

Pour finir, on estime le terme comportant la chaleur, avec pour conclusions :

$$
\begin{aligned}
&\forall n \in \mathbb{N} \text{ et } s \ge n, \quad \|\nabla_x \vartheta_s^\alpha\|_{L^2(0,T;L^2(\Omega_n))} \le c, \quad \alpha \in [1, 3/2] \\
&\forall n \in \mathbb{N} \text{ et } s \ge n, \quad \|\nabla_x \ln \vartheta_s\|_{L^2(0,T;L^2(\Omega_n))} \le c,
\end{aligned} \tag{5.13}
$$

où la constante c est indépendante de n et de s.

Pour la suite, l'égalité de type Poincaré suivante est nécessaire

Lemme 30
Pour tout $M > 0$, il existe une constante $c(M)$ telle que pour tout $w \in W^{1,2}(\mathbb{R}^3;\mathbb{R}^3)$ et pour tout $V \subset \mathbb{R}^3, |V| \le M$ on a

$$
\|w\|^2_{L^2(\mathbb{R}^3)} \le c(M) \left(\|\nabla_x w\|^2_{L^2(\mathbb{R}^3;\mathbb{R}^3)} + \int_{\mathbb{R}^3 \setminus V} w^2 \, \mathrm{d}x \right). \tag{5.14}
$$

Démonstration:
On définit les ensembles Q et $Q_{\mathbf{z}}$ de la façon suivante

$$
Q := (-M^{1/3}, M^{1/3})^3, \quad Q_{\mathbf{z}} := 2M^{1/3}\mathbf{z} + Q, \ \mathbf{z} \in \mathbb{Z}^3.
$$

Il est clair que les ensembles $Q_{\mathbf{z}}$ sont disjoints et que la réunion de leur fermeture couvre $\mathbb{R}^3$ tout entier. En outre, on sait que $|Q_{\mathbf{z}} \setminus V| > M$. Ceci nous permet d'utiliser une inégalité de Poincaré plus classique, décrite dans [24, Theorem 10.14] dont on reprend simplement l'énoncé :

Lemme 31
Pour tout domaine borné G et toute constante $0 < M < |G|$, il existe une constante $c(M,G)$ telle que

$$\forall w \in W^{1,2}(\Omega), \forall A \subset G, |A| > M, \|w\|^2_{L^2(G)} \le c(M,G)\left(\|\nabla_x w\|^2_{L^2(G;\mathbb{R}^3)} + \int_A w^2 \,\mathrm{d}x\right). \tag{5.15}$$

On utilise ce résultat sur tous nos domaines $Q_{\mathbf{z}}$:

$$\|w\|^2_{L^2(Q_{\mathbf{z}})} \le c(M,Q)\left(\|\nabla_x w\|^2_{L^2(Q_{\mathbf{z}};\mathbb{R}^3)} + \int_{Q_{\mathbf{z}}\setminus V} w^2 \,\mathrm{d}x\right).$$

En remarquant que la constante c ne dépend pas de $\mathbf{z}$, on peut faire la sommation sur $\mathbf{z} \in \mathbb{Z}^3$ de cette dernière inégalité et on arrive au résultat voulu. □

Au moyen de l'inégalité de Korn

$$\forall w \in W^{1,2}(\mathbb{R}^3;\mathbb{R}^{3\times3}), \quad \|\nabla_x w\|_{L^2(\mathbb{R}^3;\mathbb{R}^{3\times3})} \le c\|\mathbb{T}(\nabla_x w)\|_{L^2(\mathbb{R}^3;\mathbb{R}^{3\times3})}, \tag{5.16}$$

de la dernière estimation de (5.8) et du lemme 30, on déduit que

$$\|\mathbf{u}_s\|_{L^2(0,T;W^{1,2}(\Omega;\mathbb{R}^3))} \le c \tag{5.17}$$

On se propose maintenant d'utiliser une fois encore les deux inégalités de Poincaré décrites précédemment, mais cette fois pour la température. En effet, grâce à (5.9), on sait que pour tout $M > 0$, il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que

$$\forall s \ge n \ge n_0, \quad |A_{n,s}| \ge M, \text{ où } A_{n,s} = \{\overline{\vartheta}/2 \le \vartheta_s\} \cap \Omega_n \tag{5.18}$$

On applique donc le lemme 31 à $\ln\vartheta_s$ sur Ω_n avec $A = A_{n,s}$, puis l'inégalité de Poincaré classique à ϑ_s^α sur Ω_n. Cela nous donne

$$\begin{cases} \forall n \in \mathbb{N}, \text{ et } s \ge n, \ \left\|\vartheta_s^\alpha - \overline{\vartheta}^\alpha\right\|_{L^2(0,T;W^{1,2}(\Omega_n))} \le c(n), \ \alpha \in [1,3/2], & (5.19\text{a}) \\ \forall n \in \mathbb{N}, \text{ et } s \ge n, \ \left\|\ln\vartheta_s - \ln\overline{\vartheta}\right\|_{L^2(0,T;W^{1,2}(\Omega_n))} \le c(n) & (5.19\text{b}) \end{cases}$$

grâce aux observation faites en (5.9a) et (5.13). Enfin, au moyen au théorème de Rellich-Kondrachov et à une interpolation, on arrive aux estimations suivantes pour la température

$$\begin{cases} \forall n \in \mathbb{N}, \text{ et } s \ge n, \ \|\vartheta_s\|_{L^3((0,T);L^9\Omega_n)} \le c(n), & (5.20\text{a}) \\ \forall n \in \mathbb{N}, \text{ et } s \ge n, \ \|\vartheta_s\|_{L^{17/3}((0,T)\times\Omega_n)} \le c(n). & (5.20\text{b}) \end{cases}$$

Grâce aux estimations (5.9), (5.13) et (5.17), en étudiant les hypothèses de structure du tenseur des contraintes visqueuses et de conduction de la chaleur (voir (4.5),(4.6),(4.22) et (4.23)) on arrive à

$$\forall n \in \mathbb{N}, \text{ et } s \ge n, \ \|\mathbb{S}(\vartheta_s, \nabla_x\mathbf{u}_s)\|_{L^2(0,T;[L^{4/3}+L^2](\Omega_n;\mathbb{R}^{3\times3}))} \le c \tag{5.21}$$

et

$$\forall n \in \mathbb{N}, \text{ et } s \ge n, \ \left\|\frac{\mathbf{q}(\vartheta_s, \nabla_x\vartheta_s)}{\vartheta_s}\right\|_{L^2(0,T;[L^{8/7}+L^2](\Omega_n;\mathbb{R}^3))} \le c. \tag{5.22}$$

Par ailleurs, les estimations (5.8) et (5.9) nous assurent que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \text{ si } s \ge n, \text{ alors } \|\varrho_s\|_{L^\infty(0,T;L^\gamma(\Omega_n))} \le c(n) \tag{5.23}$$

et

$$\forall n \in \mathbb{N}, \text{ si } s \ge n, \text{ alors } \|\vartheta_s\|_{L^\infty(0,T;L^4(\Omega_n))} \le c(n). \tag{5.24}$$

Pour traiter les termes comprenant l'entropie on utilise les observations (4.17) et (4.21) et on a ainsi

$$|\varrho s(\varrho,\vartheta)| \le c\left(\varrho + \varrho|\ln\varrho| + \varrho\ln\vartheta + \vartheta^3\right). \tag{5.25}$$

Ceci, en association avec (5.8) et (5.9), nous assure que

$$\forall n \in \mathbb{N} \text{ et } s \geq n, \begin{cases} \|\varrho_s s(\varrho_s, \vartheta_s)\|_{L^\infty(0,T;L^q(\Omega_n))} \leq c(n), \\ \|\varrho_s s(\varrho_s, \vartheta_s)\mathbf{u}_s\|_{L^q((0,T)\times\Omega_n,\mathbb{R}^3)} \leq c(n), \end{cases} \tag{5.26}$$

pour un certain $q > 1$.

Les hypothèses constitutives (4.15), (4.16), (4.18) - (4.20) nous indiquent que la pression respecte la majoration suivante

$$|p(\varrho, \vartheta)| \leq c(\varrho\vartheta + \varrho^\gamma + \vartheta^4), \tag{5.27}$$

ce qui revient à dire que $\|p(\varrho_s, \vartheta_s)\|_{L^\infty(0,T;L^1(\Omega_n))} \leq c(n)$. Pour obtenir une meilleure estimation de la pression on se sert, comme dans les chapitres précédents, de l'opérateur de Bogovskii (voir théorème B.9 de l'annexe). On utilise ce résultat pour définir une fonction test $\varphi := \mathcal{B}_{\Omega_n}(\varrho_s^\nu)$ appartenant $L^\infty(0, T; W_0^{1,\gamma/\nu}(\Omega_n))$, $\gamma > \nu > 0$ pour tester l'équation bilan de la quantité de mouvement (4.35) récrite avec les variables $(\varrho_s, \vartheta_s, \mathbf{u}_s)$ sur le domaine Ω_n. On arrive ainsi à déduire en procédant de la même façon que dans le lemme 25 qu'il existe $\nu > 0$ tel que pour tout $s \geq n$,

$$\begin{cases} \displaystyle\int_0^T \int_{\Omega_n} p(\varrho_s, \vartheta_s)\varrho_s^\nu \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t \leq c(n), \\ \displaystyle\int_0^T \int_{\Omega_n} p^{1+\nu}(\varrho_s, \vartheta_s) \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t \leq c(n). \end{cases} \tag{5.28}$$

On applique maintenant un procédé de diagonalisation aux suites ϱ_s, ϑ_s et $\mathbf{u}_s$ à partir des résultats énoncés en (5.8) - (5.9), (5.17) et (5.19) - (5.28). On en tire l'existence d'un triplet $(\varrho, \vartheta, \mathbf{u})$ tel que

$$\begin{cases}
\varrho_s/\tilde{r} \overset{*}{\rightharpoonup} \varrho_s/\tilde{r} \text{ dans } L^\infty(0,T;\left[L^\gamma_{\tilde{r}^\gamma} + L^2_{\tilde{r}^\gamma}\right](\Omega)), & \text{(5.29a)}\\
\vartheta_s \overset{*}{\rightharpoonup} \vartheta \text{ dans } L^\infty(0,T;L^2 + L^4(\Omega)), & \text{(5.29b)}\\
\mathbf{u}_s \rightharpoonup \mathbf{u} \text{ dans } L^2(0,T;W^{1,2}(\Omega;\mathbb{R}^3)), & \text{(5.29c)}\\
\vartheta_s \rightharpoonup \vartheta \text{ dans } L^2(0,T;W^{1,2}(\Omega_n)),\ \forall n \in \mathbb{N},\ \text{avec } \vartheta - \overline{\vartheta} \in L^2(0,T;W^{1,2}(\Omega)), & \text{(5.29d)}\\
\ln\vartheta_s \rightharpoonup \overline{\ln\vartheta} \text{ dans } L^2(0,T;W^{1,2}(\Omega_n)),\ \forall n \in \mathbb{N},\ \text{avec } \nabla_x(\overline{\ln\vartheta} - \ln\overline{\vartheta}) \in L^2((0,T)\times\Omega), & \text{(5.29e)}\\
p(\varrho_s,\vartheta_s) \rightharpoonup \overline{p(\varrho,\vartheta)} \text{ dans } L^q((0,T)\times\Omega_n) \text{ pour un certain } q>1, \forall n\in\mathbb{N}, & \text{(5.29f)}\\
\mathbb{S}(\vartheta_s,\nabla_x\mathbf{u}_s) \rightharpoonup \overline{\mathbb{S}(\vartheta,\nabla_x\mathbf{u})} \text{ dans } L^q((0,T)\times\Omega_n;\mathbb{R}^3) \text{ pour un certain } q>1, & \\
\qquad \text{pour tout } n \text{ de } \mathbb{N}, \text{et avec } \overline{\mathbb{S}(\vartheta,\nabla_x\mathbf{u})} \in L^2((0,T);[L^2 + L^{4/3}](\Omega;\mathbb{R}^3)), & \text{(5.29g)}\\
\varrho_s s(\varrho_s,\vartheta_s) \rightharpoonup \overline{\varrho s(\varrho,\vartheta)} \text{ dans } L^q((0,T)\times\Omega_n) \text{ pour un certain } q>1, \forall n\in\mathbb{N}, & \text{(5.29h)}\\
\mathbf{q}(\vartheta_s,\nabla_x\vartheta_s)/\vartheta_s \rightharpoonup \overline{\mathbf{q}(\vartheta,\nabla_x\vartheta)/\vartheta} \text{ dans } L^q((0,T)\times\Omega_n;\mathbb{R}^3) \text{ pour un certain } q>1, & \\
\qquad \forall n\in\mathbb{N}, \text{et avec } \overline{\mathbf{q}(\vartheta),\nabla_x\vartheta/\vartheta} \in L^2(0,T;[L^2 + L^{8/7}](\Omega;\mathbb{R}^3)). & \text{(5.29i)}
\end{cases}$$

La notation $\overline{g(\varrho, \vartheta, \mathbf{u})}$ désigne ici et pour la suite, comme dans les précédents chapitres, la limite faible de la suite $g(\varrho_s, \vartheta_s, \mathbf{u}_s)$ dans L^1.

À la lumière des estimations (5.8), on revient aux équations de bilan de masse (4.34) et de bilan de masse renormalisée (4.38) et en associant l'équation de bilan de la quantité de mouvement (4.35) à (5.11), on peut déduire les convergences suivantes

$$\begin{cases}
\varrho_s \to \varrho \text{ dans } \mathcal{C}_{\text{weak}}([0,T];L^\gamma(\Omega_n)) \text{ et } L^2(0,T;W^{-1,2}(\Omega_n)) \text{ pour tout } n \text{ de } \mathbb{N}, & \text{(5.30a)}\\
h(\varrho_s) \to \overline{h(\varrho)} \text{ dans } \mathcal{C}_{\text{weak}}([0,T];L^q(\Omega_n)),\ q\in[1,\infty) \text{ et } L^2(0,T;W^{-1,2}(\Omega_n)), \forall n\in\mathbb{N}, & \\
\qquad\qquad \text{pour } h \text{ de classe (4.39)}, & \text{(5.30b)}\\
\varrho_s\mathbf{u}_s \to \varrho\mathbf{u} \text{ dans } \mathcal{C}_{\text{weak}}([0,T];L^{2\gamma/(\gamma+1)}(\Omega_n;\mathbb{R}^3)) \text{ et } L^2(0,T;W^{-1,2}(\Omega_n;\mathbb{R}^3)),\ \forall n\in\mathbb{N}, & \text{(5.30c)}\\
\varrho_s\mathbf{u}_s\otimes\mathbf{u}_s \rightharpoonup \varrho\mathbf{u}\otimes\mathbf{u} \text{ dans } L^2(0,T;L^{6\gamma/(4\gamma+3)}(\Omega_n;\mathbb{R}^{3\times3})). & \text{(5.30d)}
\end{cases}$$

Celles-ci reposent sur l'utilisation du théorème d'Arzela-Ascoli (voir B.3 en annexe) dans l'équation de continuité (pour la densité) et l'équation du mouvement (en ce qui concerne la quantité de mouvement), d'un procédé de diagonalisation et d'un argument de densité. Les convergences fortes dans les espaces $L^2W^{-1,2}$ sont quant à elles obtenues au moyen de l'inclusion compacte de $L^q(G)$ dans $W^{-1,2}(G)$ pour

$q > 6/5$ et G un domaine borné.

De surcroit, (5.8) implique

$$\frac{\varrho}{\tilde{r}} - 1 \in \mathcal{C}_{\mathrm{weak}}\left([0,T]; \left[L^{\gamma}_{\tilde{r}^{\gamma}} + L^{2}_{\tilde{r}^{\gamma}}\right](\Omega)\right) \tag{5.31}$$

car

$$\int_{\Omega} \left(\frac{\varrho_s}{\tilde{r}} - 1\right) \varphi \,\mathrm{d}x \to \int_{\Omega} \left(\frac{\varrho}{\tilde{r}} - 1\right) \varphi \,\mathrm{d}x$$

dans l'espace $\mathcal{C}([0,T])$ pour tout $\varphi \in \mathcal{C}^{\infty}_c(\Omega)$. Il suffit d'utiliser (5.29a) et la densité de $C^{\infty}_c(\Omega)$ dans l'espace $\left[L^{\gamma/(\gamma-1)}_{(1/\tilde{r})^{\gamma/(\gamma-1)}} \cap L^{2}_{(1/\tilde{r})^{\gamma}}\right](\Omega)$ qui est le dual de $\left[L^{\gamma}_{\tilde{r}^{\gamma}} + L^{2}_{\tilde{r}^{\gamma}}\right](\Omega)$. (5.11) nous donne

$$\varrho\mathbf{u} \in \mathcal{C}_{\mathrm{weak}}\left([0,T]; \left[L^{2\gamma/(\gamma+1)} + L^{2}_{1/\tilde{r}}\right](\Omega;\mathbb{R}^3)\right). \tag{5.32}$$

On peut maintenant passer à la limite $s \to \infty$ dans les équations (4.34), (4.35) et (4.38) écrite en $(\varrho_s, \vartheta_s, \mathbf{u}_s)$ sur Ω_s. On obtient ainsi respectivement

$$-\int_{\Omega} \varrho_0 \varphi(0,\cdot)\,\mathrm{d}x = \int_0^T \int_{\Omega} \varrho\partial_t\varphi + \varrho\mathbf{u}\cdot\nabla_x\varphi \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t \tag{5.33}$$

pour tout $\varphi \in \mathcal{C}^1_c([0,T) \times \overline{\Omega})$;

$$\begin{aligned} -\int_{\Omega} \varrho_0\mathbf{u}_0 \cdot \boldsymbol{\varphi}(0,\cdot)\,\mathrm{d}x = &\int_0^T \int_{\Omega} \left(\varrho\mathbf{u}\cdot\partial_t\boldsymbol{\varphi} + \varrho\mathbf{u}\otimes\mathbf{u} : \nabla_x\boldsymbol{\varphi} + \overline{p(\varrho,\vartheta)}\,\mathrm{div}\,\boldsymbol{\varphi}\right) \mathrm{d}x\,\mathrm{d}t \\ &- \int_0^T \int_{\Omega} \left(\overline{\mathbb{S}(\vartheta,\nabla_x\mathbf{u})} : \nabla_x\boldsymbol{\varphi} + \varrho\nabla_x F\cdot\boldsymbol{\varphi}\right) \mathrm{d}x\,\mathrm{d}t \end{aligned} \tag{5.34}$$

pour tout $\boldsymbol{\varphi} \in \mathcal{C}^1_c([0,T) \times \overline{\Omega};\mathbb{R}^3)$, $\boldsymbol{\varphi}|_{\partial\Omega} = 0$;

$$\int_0^T \int_{\Omega} \overline{\varrho L_k(\varrho)}\,(\partial_t\varphi + \mathbf{u}\cdot\nabla_x\varphi)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t = \int_0^T \int_{\Omega} \overline{T_k(\varrho)\,\mathrm{div}\,\mathbf{u}}\varphi\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t - \int_{\Omega} \varrho_0 L_k(\varrho)\varphi(0,\cdot)\,\mathrm{d}x \tag{5.35}$$

et

$$\int_0^T \int_{\Omega} \overline{\varrho T_k(\varrho)}\,(\partial_t\varphi + \mathbf{u}\cdot\nabla_x\varphi)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t = \int_0^T \int_{\Omega} \overline{(\varrho T_k'(\varrho) - T_k(\varrho))\,\mathrm{div}\,\mathbf{u}}\varphi\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t - \int_{\Omega} T_k(\varrho)\varphi(0,\cdot)\,\mathrm{d}x \tag{5.36}$$

où $\varphi \in \mathcal{C}^1_c([0,T) \times \overline{\Omega})$. Ici, on a considéré les fonctions de troncature

$$T_k(z) := kT\left(\frac{z}{k}\right) \text{ et } L_k(z) := \int_1^z \frac{T_k(w)}{w^2}dw$$

avec $T(z)$ une fonction de $\mathcal{C}^1[0,\infty)$ de la forme

$$T(z) = \begin{cases} z, & \text{si } z \in [0,1], \\ \text{concave}, & \text{sur } [0,\infty), \\ T'(z) > 0, & \text{pour } z > 0, \\ zT'(z) \in L^{\infty}(0,\infty), & \\ \lim_{z\to\infty} T(z) = 2. & \end{cases}$$

Par exemple, on pourra utiliser $T(z) = \begin{cases} z, & \text{si } z \in [0,1], \\ 2 - \exp(1-z), & \text{si } z \in (0,\infty). \end{cases}$

5.2.3 Convergence de la température

On définit la quantité

$$\begin{aligned}\langle \sigma_s, \varphi \rangle = &- \int_{\Omega_s} \varrho_0 s(\varrho_0, \vartheta_0)\varphi(0,\cdot)\,\mathrm{d}x \\ &- \int_0^T \int_{\Omega_s} \Big(\varrho_s s(\varrho_s, \vartheta_s)\partial_t \varphi + \varrho_s s(\varrho_s, \vartheta_s)\mathbf{u}_s \cdot \nabla_x \varphi \Big)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t.\end{aligned} \tag{5.37}$$

σ_s peut être interprétée comme une forme linéaire continue sur l'espace métrique $\mathcal{C}_c^1([0,T) \times \overline{\Omega}_s)$.

Soit $\varphi \in \mathcal{C}([0,T] \times \overline{\Omega}_s)$, $\varphi_{\pm,n} \in \mathcal{C}_c^1([0,T) \times \overline{\Omega}_s)$ et $\chi_k \in \mathcal{C}_c^1([0,T))$ trois suites telles que

$$\begin{cases} \varphi_{\pm,n} \to \varphi^{\pm} \text{ dans } \mathcal{C}([0,T] \times \overline{\Omega}_s), \\ 0 \le \chi_k \le 1,\ \chi_k = 1 \text{ sur } [0, T-1/k],\ \chi_k' \le 0,\ \chi_k \text{ est croissante et tend vers } 1. \end{cases} \tag{5.38}$$

Comme σ_s est positive, on peut écrire que

$$|\langle \sigma_s, \phi\chi_k \rangle| \le \langle \sigma_s, \chi_k 1_{\overline{\Omega}_s} \rangle \|\phi\|_{\mathcal{C}([0,T]\times\overline{\Omega}_s)} \tag{5.39}$$

pour tout ϕ appartenant à l'espace $\mathcal{C}_c^1([0,T] \times \overline{\Omega}_s)$. On revient maintenant à (4.21) et (4.37) qui nous amènent l'égalité

$$\langle \sigma_s, \chi_k 1_{\overline{\Omega}_s} \rangle = - \int_{\Omega_s} \varrho_0 s(\varrho_0, \vartheta_0)\,\mathrm{d}x = c(s)$$

On en déduit que σ_s peut être prolongée en une forme linéaire continue sur $\mathcal{C}([0,T] \times \overline{\Omega}_s)$ en posant

$$\langle \sigma_s, \varphi \rangle = \langle \sigma_s, \varphi^+ \rangle - \langle \sigma_s, \varphi^- \rangle$$

où

$$\langle \sigma_s, \varphi^{\pm} \rangle = \sup_{\chi_k \in (5.38)} \Big(\lim_{n\to\infty} \langle \sigma_s, \varphi_{\pm,n}\chi_k \rangle \Big) = \lim_{k\to\infty} \lim_{n\to\infty} \langle \sigma_s, \varphi_{\pm,n}\chi_k \rangle.$$

On se sert maintenant du théorème de représentation de Riesz pour affirmer l'existence d'une mesure de Radon positive μ_s sur $[0,T] \times \overline{\Omega}_s$ qui vérifie

$$\langle \sigma_s, \varphi \rangle = \int_{[0,T]\times\overline{\Omega}_s} \varphi\,\mathrm{d}\mu_s$$

En prenant $n < s$, on définit $\sigma_s|_n$ la restriction de σ_s à $\mathcal{C}([0,T] \times \overline{\Omega}_n)$:

$$\langle \sigma_s|_n, \varphi \rangle = \int_{[0,T]\times\overline{\Omega}_n} \varphi\,\mathrm{d}\mu_s.$$

On a ainsi la norme de $\sigma_s|_n$

$$\begin{aligned}\|\sigma_s|_n\|_{[\mathcal{C}([0,T]\times\overline{\Omega}_n)]^*} &= \sup_{\varphi\ge 0,\ \|\varphi\|_{\mathcal{C}([0,T]\times\overline{\Omega}_n)}=1} \langle \sigma_s|_n, \varphi \rangle = \langle \sigma_s|_n, 1_{[0,T]\times\overline{\Omega}_n} \rangle \\ &\le \langle \sigma_s|_n, \varphi 1_{[0,T]} \rangle = \lim_{k\to\infty} \langle \sigma_s|_n, \varphi\chi_k \rangle \le c(n)\end{aligned} \tag{5.40}$$

où φ est une fonction positive de l'espace $\mathcal{C}_c^1(\Omega_{n+1})$ telle que $\varphi = 1$ sur $\overline{\Omega}_n$. La dernière majoration est une conséquence de l'inégalité (5.37) couplée aux estimations (5.22) et (5.26).

Sachant que l'inclusion $[\mathcal{C}(\overline{G})]^* \hookrightarrow W^{-1,q}(G)$ est compacte pour tout domaine lipschitzien borné $G \subset \mathbb{R}^4$ si $q \in (1, 4/3)$, on sait que σ_s est compacte dans $W^{-1,q}((0,T) \times \Omega_n)$.

Nous nous proposons donc d'appliquer le lemme div-rot aux vecteurs à quatre composantes

$$\mathbf{V}_s = (\varrho_s s(\varrho_s, \vartheta_s), \varrho_s s(\varrho_s, \vartheta_s)\mathbf{u}_s + \mathbf{q}(\vartheta_s \nabla_x \vartheta_s)/\vartheta_s) \text{ et } \mathbf{W}_s = (T_k(\vartheta_s), 0, 0, 0),$$

en remarquant que $\mathrm{div}_{(t,x)}\, \mathbf{V}_s = \sigma_s$ et que $\mathrm{rot}_{(t,x)}\, \mathbf{W}_s \in W^{-1,q}((0,T) \times \Omega_n)$, $q \in (1, 4/3)$. On arrive donc à l'égalité suivante

$$\overline{T_k(\vartheta)\varrho s(\varrho,\vartheta)} = \overline{T_k(\vartheta)}\,\overline{\varrho s(\varrho,\vartheta)}, \tag{5.41}$$

qui, d'après (4.17), peut-être récrite sous la forme

$$\overline{T_k(\vartheta)\varrho s_M(\varrho,\vartheta)} + \frac{4}{3}a\overline{T_k(\vartheta)\vartheta^3} = \overline{T_k(\vartheta)}\,\overline{\varrho s_M(\varrho,\vartheta)} + \frac{4}{3}a\overline{T_k(\vartheta)}\,\overline{\vartheta^3}, \tag{5.42}$$

où $s_M(\varrho,\vartheta) = S\left(\varrho/\vartheta^{\frac{1}{\gamma-1}}\right)$.

Pour prouver la convergence forte de la température, il nous faut maintenant montrer que

$$\overline{T_k(\vartheta)\varrho s_M(\varrho,\vartheta)} \geq \overline{T_k(\vartheta)}\,\overline{\varrho s_M(\varrho,\vartheta)}. \tag{5.43}$$

Ceci se fait en passant par une égalité intermédiaire :

$$\begin{aligned}\varrho_s s_M(\varrho_s,\vartheta_s)\left(T_k(\vartheta_s) - \overline{T_k(\vartheta)}\right) &= \varrho_s s_M\left(\varrho_s, T_k^{-1}\left(\overline{T_k(\varrho)}\right)\right)\left(T_k(\varrho_s) - \overline{T_k(\vartheta)}\right)\\ \varrho_s\left[s_M\left(\varrho_s, T_k^{-1}\left(T_k(\vartheta_s)\right)\right) - s_M\left(\varrho_s, T_k^{-1}\left(\overline{T_k(\varrho)}\right)\right)\right]&\left(T_k(\vartheta_s) - \overline{T_k(\vartheta)}\right).\end{aligned}$$

Pour prouver l'inégalité (5.43), il faut démontrer la convergence suivante

$$\varrho_s s_M\left(\varrho_s, T_k^{-1}\left(\overline{T_k(\vartheta)}\right)\right)\left(T_k(\vartheta_s) - \overline{T_k(\vartheta)}\right) \rightharpoonup 0 \text{ dans } L^1((0,T)\times\Omega_n), \tag{5.44}$$

où la quantité

$$\varrho_s s_M\left(\varrho_s, T_k^{-1}\left(\overline{T_k(\vartheta\,(t,x))}\right)\right) = \psi(t,x,\varrho_s) \tag{5.45}$$

peut être interprétée comme une fonction de Carathéodory de (t,x) et de ϱ_s. On peut donc utiliser le lemme B.4 d'existence des mesures de Young pour déduire la véracité de la relation (5.44).

On utilise tout d'abord les résultats précédents (5.29) et (5.30) qui nous assurent les convergences

$$\begin{aligned}h(\varrho_s) &\to \overline{h(\varrho)} \text{ dans } L^2(0,T;W^{-1,2}(\Omega_n)),\\ G(\vartheta_s) &\rightharpoonup \overline{G(\vartheta)} \text{ dans } L^2(0,T;W^{1,2}(\Omega_n)),\end{aligned}$$

pour toute fonction h satisfaisant (4.39) et G se trouvant dans l'espace $W^{1,\infty}((0,\infty))$. On en déduit l'égalité sur le produit des limites

$$\overline{h(\varrho)G(\vartheta)} = \overline{h(\varrho)}\,\overline{G(\vartheta)}, \tag{5.46}$$

En effet, en dénotant par $\mu^{\varrho,\vartheta}_{(t,x)}$, $\mu^{\varrho}_{(t,x)}$ et $\mu^{\vartheta}_{(t,x)}$ les mesures de Young associées aux suites (ϱ_s,ϑ_s), ϱ_s et ϑ_s *via* le résultat B.4. L'égalité sur le produit des limites peut donc se lire

$$\int_{\mathbb{R}^2} h(\lambda)G(\nu)\,\mathrm{d}\mu^{\varrho,\vartheta}_{(t,x)}(\lambda,\nu) = \int_{\mathbb{R}} h(\lambda)\,\mathrm{d}\mu^{\varrho}_{(t,x)} \times \int_{\mathbb{R}} G(\nu)\,\mathrm{d}\mu^{\vartheta}_{(t,x)}(\nu). \tag{5.47}$$

Finalement, on arrive à la relation qui entraine (5.44) et du même coup (5.43) :

$$\begin{aligned}\overline{\psi(t,x,\varrho)G(\vartheta)}(t,x) &= \int_{\mathbb{R}^2}\psi(t,x,\lambda)\,\mathrm{d}\mu^{\varrho,\vartheta}_{(t,x)}(\lambda,\nu) = \int_{\mathbb{R}^2}\psi(t,x,\lambda)G(\nu)\,\mathrm{d}\mu^{\varrho}_{(t,x)}(\lambda)\,\mathrm{d}\mu^{\vartheta}_{(t,x)}(\nu)\\ &= \overline{\psi(\cdot,\cdot,\varrho)}(t,x)\times\overline{G(\vartheta)}(t,x).\end{aligned} \tag{5.48}$$

En utilisant le théorème sur la convergence faible et monotonie B.5 avec les fonctions $T_k(\vartheta_s)$ et ϑ^3, on déduit que

$$\overline{T_k(\vartheta)\vartheta^3} \geq \overline{T_k(\vartheta)}\,\overline{\vartheta^3}$$

d'où l'on obtient grâce aux relations (5.43) et (5.42)

$$\overline{T_k(\vartheta)\vartheta^3} = \overline{T_k(\vartheta)}\,\overline{\vartheta^3}. \tag{5.49}$$

Enfin, on passe à la limite $k\to\infty$ dans cette dernière équation au moyen du théorème de Beppo Levi

pour avoir
$$\overline{\vartheta^4} = \vartheta\overline{\vartheta^3}, \tag{5.50}$$
ce qui nous assure la convergence point par point
$$\vartheta_s \to \vartheta \text{ presque partout sur}(0,T)\times\Omega_n \tag{5.51}$$

Pour finir, on fait une dernière observation. L'inégalité de dissipation (4.37) nous assure que les quantités
$$\sqrt{\frac{\mu(\vartheta_s)}{\vartheta_s}}\left(\nabla_x\mathbf{u}_s + \nabla_x^T\mathbf{u}_s - \frac{2}{3}\operatorname{div}\mathbf{u}_s\right),\ \sqrt{\frac{\xi(\vartheta_s)}{\vartheta_s}}\operatorname{div}\mathbf{u}_s \text{ et } \frac{\sqrt{\kappa(\vartheta_s)}}{\vartheta_s}\nabla_x\vartheta_s$$
sont toutes bornées dans $L^2((0,T)\times\Omega_n)$ et ce pour tout n appartenant à $\mathbb{N}$. Ainsi, par semi-continuité inférieure faible et en accord avec (5.29) et (5.51)
$$\begin{aligned}\int_0^T\int_{\Omega_n}\frac{\varphi}{\vartheta}&\left(\mathbb{S}(\vartheta,\nabla_x\mathbf{u}):\nabla_x\mathbf{u} - \frac{\mathbf{q}(\vartheta,\nabla_x\vartheta)\cdot\nabla_x\vartheta}{\vartheta}\right)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t\\ &\le \liminf_{s\to\infty}\int_0^T\int_{\Omega_n}\frac{\varphi}{\vartheta_s}\left(\mathbb{S}(\vartheta_s,\nabla_x\mathbf{u}_s):\nabla_x\mathbf{u}_s - \frac{\mathbf{q}(\vartheta_s,\nabla_x\vartheta_s)\cdot\nabla_x\vartheta_s}{\vartheta_s}\right)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t\end{aligned}$$
pour tout φ positif de l'espace $\mathcal{C}_c([0,T]\times\overline{\Omega})$ et tout $n\in\mathbb{N}$.

En revenant au bilan d'entropie (4.36) récrit en ϱ_s, ϑ_s et $\mathbf{u}_s$ sur Ω_s, on obtient en faisant tendre s vers l'infini
$$\begin{aligned}\int_\Omega \varrho_0 s(\varrho_0,\vartheta_0)\varphi(0,\cdot)\,\mathrm{d}x &+ \int_0^T\int_\Omega\frac{\varphi}{\vartheta}\left(\mathbb{S}(\vartheta,\nabla_x\mathbf{u}):\nabla_x\mathbf{u} - \frac{\mathbf{q}(\vartheta,\nabla_x\vartheta)\cdot\nabla_x\vartheta}{\vartheta}\right)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t\\ &\le -\int_0^T\int_\Omega\left(\overline{\varrho s(\varrho,\vartheta)}\partial_t\varphi + \overline{\varrho s(\varrho,\vartheta)\mathbf{u}}\cdot\nabla_x\varphi + \frac{\mathbf{q}(\vartheta,\nabla_x\vartheta)}{\vartheta}\cdot\nabla_x\varphi\right)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t\end{aligned} \tag{5.52}$$
pour tout φ positif appartenant à $\mathcal{C}_c^1([0,T)\times\overline{\Omega})$.

5.2.4 Convergence de la densité

Identité du flux effectif visqueux

Cette section est consacrée à l'établissement de l'identité du flux effectif visqueux
$$\overline{T_k(\varrho)\operatorname{div}_x\mathbf{u}} - \overline{T_k(\varrho)}\operatorname{div}_x\mathbf{u} = \frac{1}{\frac{4}{3}\mu(\vartheta)+\xi(\vartheta)}\left(\overline{p(\varrho,\vartheta)T_k(\varrho)} - \overline{p(\varrho,\vartheta)}\,\overline{T_k(\varrho)}\right). \tag{5.53}$$

On utilise la fonction test suivante dans l'équation du moment sur Ω_n
$$\varphi(t,x) = \zeta(t,x)\mathcal{A}_j[a(x)T_k(\varrho_s)],\ \zeta\in\mathcal{C}_c^\infty((0,T)\times\Omega;\mathbb{R}^3),\ a\in\mathcal{C}_c^\infty(\Omega)$$
où $\mathcal{A}$ est un opérateur de $L^p(\Omega)$ dans $v\in L^{\frac{3p}{3-p}}(\Omega), \nabla_x v\in L^p(\Omega)$ défini par
$$\mathcal{A}[f] = -\mathcal{F}^{-1}\left[-\frac{\mathrm{i}\xi}{\xi^2}\mathcal{F}[f]\right] \text{ avec les composantes } \mathcal{A}_j[f] = -\mathcal{F}^{-1}\left[-\frac{\mathrm{i}\xi_j}{\xi^2}\mathcal{F}[f]\right],\quad j=1,2,3$$
où $\mathcal{F}$ désigne la transformée de Fourier. Afin de préserver la clarté de ce paragraphe, on se réfère à l'annexe (théorèmes B.6 et B.7) où les propriétés de l'opérateur $\mathcal{A}$ sont détaillées.

Montrons que notre fonction φ ainsi définie est une fonction test admissible. En particulier, il faut contrôler la régularité de la dérivée temporelle de φ. Pour ce faire, on passe par l'équation de continuité renormalisée, que l'on peut tester par $\varphi(t,x) = a(x)\mathcal{A}[\psi]$ où $\psi\in\mathcal{C}_c^\infty((0,T)\times\Omega_n),\ a\in\mathcal{C}_c^\infty(\Omega_n)$. En prenant $b(\varrho_s) = a(x)T_k(\varrho_s)$, on a alors l'égalité suivante

$$\begin{aligned}\int_0^T\int_{\Omega_n} \mathcal{A}[aT_k(\varrho_s)]\partial_t\psi \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t = &-\int_0^T\int_{\Omega_n} \mathcal{R}[aT_k(\varrho_s)\mathbf{u}_s]\psi \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t \\ &+\int_0^T\int_{\Omega_n} \left(T_k(\varrho_s)\nabla_x a\cdot \mathbf{u}\mathcal{A}[\psi] + a\left(\varrho_s T_k'(\varrho_s) - T_k(\varrho_s)\right)\operatorname{div}\mathbf{u}_s\mathcal{A}[\psi]\right)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t\end{aligned} \tag{5.54}$$

qui nous indique que la dérivée temporelle de $\mathcal{A}[\zeta(t,x)T_k(\varrho)]$ est dans $L^{\frac{2\gamma}{\gamma+1}}(\Omega)$. Ici, $\mathcal{R}$ représente l'opérateur de Riesz

$$\begin{cases}\mathcal{R} : L^p(\mathbb{R}^3) \to L^p(\mathbb{R}^3), \\ \mathbf{v} \mapsto (\mathcal{R}[\mathbf{v}])_i = \displaystyle\sum_{j=1}^3 \mathcal{F}^{-1}\left[\frac{\xi_i\xi_j}{\xi^2}\mathcal{F}[v_j]\right],\end{cases} \tag{5.55}$$

voir la définition B.2 et les théorèmes B.6 et B.7 en annexe.

Étant maintenant assurés que notre fonction test est admissible, on en fait usage dans l'équation du moment sur Ω_n. On arrive alors à l'égalité suivante

$$\begin{aligned}&\int_0^T\int_{\Omega_n} \zeta\varrho_s\mathbf{u}_s\partial_t\left(\mathcal{A}[aT_k(\varrho_s)]\right)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t + \int_0^T\int_{\Omega_n} \zeta\varrho_s\mathbf{u}_s\otimes\mathbf{u}_s : \mathcal{R}[aT_k(\varrho_s)]\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t \\ &\quad+\int_0^T\int_{\Omega_n} \zeta p(\varrho_s,\vartheta_s)aT_k(\varrho_s)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t + \int_0^T\int_{\Omega_n}\zeta\mathbb{S}(\vartheta_s,\nabla_x\mathbf{u}_s) : \mathcal{R}[aT_k(\varrho_s)]\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t \\ &\quad+\int_0^T\int_{\Omega_n} \varrho_s\mathbf{u}_s\cdot\mathcal{A}[aT_k(\varrho_s)]\partial_t\zeta\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t + \int_0^T\int_{\Omega_n}\varrho_s\mathbf{u}_s\otimes\mathbf{u}_s : \nabla_x\zeta\otimes\mathcal{A}[aT_k(\varrho_s)]\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t \\ &\quad+\int_0^T\int_{\Omega_n} p(\varrho_s,\vartheta_s)\nabla_x\zeta\mathcal{A}[aT_k(\varrho_s)]\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t + \int_0^T\int_{\Omega_n}\mathbb{S}(\vartheta_s,\nabla_x\mathbf{u}_s) : \nabla_x\zeta\otimes\mathcal{A}[aT_k(\varrho_s)]\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t \\ &\quad+\int_0^T\int_{\Omega_n} \varrho_s\nabla_x F\cdot\mathcal{A}[aT_k(\varrho_s)]\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t = 0.\end{aligned} \tag{5.56}$$

En injectant l'équation (5.54), on arrive à

$$\begin{aligned}&\int_0^T\int_{\Omega_n} \zeta\varrho_s\mathbf{u}_s\mathcal{R}[aT_k(\varrho_s)\mathbf{u}_s]\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t + \int_0^T\int_{\Omega_n} \zeta\varrho_s\mathbf{u}_s\otimes\mathbf{u}_s : \mathcal{R}[aT_k(\varrho_s)]\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t \\ &\quad+\int_0^T\int_{\Omega_n} \zeta p(\varrho_s,\vartheta_s)aT_k(\varrho_s)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t + \int_0^T\int_{\Omega_n}\zeta\mathbb{S}(\vartheta_s,\nabla_x\mathbf{u}_s) : \mathcal{R}[aT_k(\varrho_s)]\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t \\ &\quad+\mathcal{L}(\varrho_s, T_k(\varrho_s),\vartheta_s,\mathbf{u}_s,p(\varrho_s,\vartheta_s)),\end{aligned} \tag{5.57}$$

où

$$\begin{aligned}\mathcal{L}(\varrho_s, T_k(\varrho_s),\vartheta_s,\mathbf{u}_s,p(\varrho_s,\vartheta_s)) = &-\int_0^T\int_{\Omega_n}\Big(\mathcal{A}[T_k(\varrho)\nabla_x a\cdot\mathbf{u}] + \mathcal{A}[a\left(\varrho T_k'(\varrho) - T_k(\varrho)\right)\operatorname{div}\mathbf{u}]\Big)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t \\ &+\int_0^T\int_{\Omega_n}\Big(\varrho_s\mathbf{u}_s\cdot\mathcal{A}[aT_k(\varrho_s)]\partial_t\zeta + \varrho_s\mathbf{u}_s\otimes\mathbf{u}_s : \nabla_x\zeta\otimes\mathcal{A}_j[aT_k(\varrho_s)]\Big)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t \\ &+\int_0^T\int_{\Omega_n}\Big(p(\varrho_s,\vartheta_s)\nabla_x\zeta\mathcal{A}[aT_k(\varrho_s)] + \mathbb{S}(\vartheta_s,\nabla_x\mathbf{u}_s) : \nabla_x\zeta\otimes\mathcal{A}[aT_k(\varrho_s)]\Big)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t \\ &+\int_0^T\int_{\Omega_n}\Big(\varrho_s\nabla_x F\cdot\mathcal{A}[aT_k(\varrho_s)]\Big)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t.\end{aligned} \tag{5.58}$$

On teste aussi l'équation du moment limite avec la fonction suivante, toujours sur Ω_n

$$\varphi(t,x) = \zeta(t,x)\mathcal{A}[a\overline{T_k(\varrho)}],\ \zeta\in\mathcal{C}_c^\infty((0,T)\times\Omega;\mathbb{R}^3),$$

et on obtient

$$\int_0^T \int_{\Omega_n} \zeta \varrho \mathbf{u} \partial_t \left(\mathcal{A}[\overline{aT_k(\varrho)}] \right) \,\mathrm{d}x \,\mathrm{d}t + \int_0^T \int_{\Omega_n} \zeta \varrho \mathbf{u} \otimes \mathbf{u} : \mathcal{R}[\overline{aT_k(\varrho)}] \,\mathrm{d}x \,\mathrm{d}t \tag{5.59}$$
$$+ \int_0^T \int_{\Omega_n} \zeta p(\varrho,\vartheta) \overline{aT_k(\varrho)} \,\mathrm{d}x \,\mathrm{d}t + \int_0^T \int_{\Omega_n} \zeta \mathbb{S}(\vartheta, \nabla_x \mathbf{u}) : \mathcal{R}[\overline{aT_k(\varrho)}] \,\mathrm{d}x \,\mathrm{d}t$$
$$+ \mathcal{L}(\varrho, T_k(\varrho), \vartheta, \mathbf{u}, \overline{p(\varrho,\vartheta)}) = 0.$$

On passe à la limite $s \to \infty$ dans (5.57), puis en utilisant des arguments classiques de compacité , on observe que

$$\mathcal{L}(\varrho, T_k(\varrho), \vartheta, \mathbf{u}, \overline{p(\varrho,\vartheta)}) = \lim_{s\to\infty} \mathcal{L}(\varrho_s, T_k(\varrho_s), \vartheta_s, \mathbf{u}_s, p(\varrho_s, \vartheta_s)).$$

On arrive alors à

$$\lim_{s\to\infty} \int_0^T \int_\Omega \zeta \Big(p(\varrho_s,\vartheta_s) aT_k(\varrho_s) - \mathbb{S}(\vartheta_s, \nabla_x \mathbf{u}_s) : \mathcal{R}[aT_k(\varrho_s)] \Big) \,\mathrm{d}x \,\mathrm{d}t \tag{5.60}$$
$$= \int_0^T \int_\Omega \zeta \left(\overline{p(\varrho,\vartheta)}\, \overline{aT_k(\varrho)} - \mathbb{S}(\vartheta, \nabla_x \mathbf{u}) : \mathcal{R}[\overline{aT_k(\varrho)}] \right) \,\mathrm{d}x \,\mathrm{d}t$$
$$- \int_0^T \int_\Omega \left(\overline{aT_k(\varrho)} \mathbf{u} \cdot \mathcal{R}[\zeta \varrho \mathbf{u}] - \zeta \varrho (\mathbf{u} \otimes \mathbf{u}) : \mathcal{R}[\overline{aT_k(\varrho)}] \right) \,\mathrm{d}x \,\mathrm{d}t$$
$$+ \lim_{s\to\infty} \int_0^T \int_\Omega \Big(aT_k(\varrho_s) \mathbf{u}_s \cdot \mathcal{R}[\zeta \varrho_s \mathbf{u}_s] - \zeta \varrho_s (\mathbf{u}_s \otimes \mathbf{u}_s) : \mathcal{R}[aT_k(\varrho_s)] \Big) \,\mathrm{d}x \,\mathrm{d}t,$$

moyennant l'utilisation des propriétés de l'opérateur $\mathcal{A}_j$ explicitées en B.6. On observe que

$$\lim_{s\to\infty} \int_0^T \int_\Omega \left(aT_k(\varrho_s) \mathbf{u}_s \cdot \mathcal{R}[\zeta \varrho_s \mathbf{u}_s] - \zeta \varrho_s \mathbf{u}_s \otimes \mathbf{u} : \mathcal{R}[\overline{aT_k(\varrho)}] \right) \,\mathrm{d}x \,\mathrm{d}t$$
$$- \int_0^T \int_\Omega \left(\overline{aT_k(\varrho)} \mathbf{u} \cdot \mathcal{R}[\zeta \varrho \mathbf{u}] - \zeta \varrho (\mathbf{u} \otimes \mathbf{u}) : \mathcal{R}[\overline{aT_k(\varrho)}] \right) \,\mathrm{d}x \,\mathrm{d}t$$
$$= \lim_{s\to\infty} \int_0^T \int_\Omega \mathbf{u}_s \cdot \left(aT_k(\varrho_s) \mathcal{R}[\zeta \varrho_s \mathbf{u}_s] - \zeta \varrho_s \mathbf{u}_s \cdot \mathcal{R}[\overline{aT_k(\varrho)}] \right) \,\mathrm{d}x \,\mathrm{d}t$$
$$- \int_0^T \int_\Omega \left(\overline{aT_k(\varrho)} \mathbf{u} \cdot \mathcal{R}[\zeta \varrho \mathbf{u}] - \zeta \varrho (\mathbf{u} \otimes \mathbf{u}) : \mathcal{R}[\overline{aT_k(\varrho)}] \right) \,\mathrm{d}x \,\mathrm{d}t, \tag{5.61}$$

où l'on note

$$(\mathcal{R}[\mathbf{v}])_i := \sum_{j=1}^3 \mathcal{R}_{ij}[\mathbf{v}_j],$$
$$(\mathbf{u} \cdot \mathcal{R}[f])_i := \mathbf{u}_j \mathcal{R}_{ji}[f].$$

Sachant que $T_k(\varrho_s) \to \overline{T_k(\varrho)}$ dans $\mathcal{C}_{\mathrm{weak}}([0,T]; L^p(\Omega_n))$ pour tout $p \in [1, \infty)$ et que $\varrho_s \mathbf{u}_s \to \varrho \mathbf{u}$ dans $\mathcal{C}_{\mathrm{weak}}([0,T]; L^{2\gamma/(\gamma+1)})(\Omega_n; \mathbb{R}^3))$, on peut utiliser le lemme des commutateurs (voir lemme 38 en annexe) pour déduire la convergence

$$\forall t \in [0,T],\ \left(aT_k(\varrho_s) \mathcal{R}[\zeta \varrho_s \mathbf{u}_s] - \zeta \varrho_s \mathbf{u}_s \mathcal{R}[aT_k(\varrho_s)] \right)(t) \rightharpoonup \left(\overline{aT_k(\varrho)} \mathcal{R}[\zeta \varrho \mathbf{u}] - \zeta \varrho \mathbf{u} \mathcal{R}[\overline{aT_k(\varrho)}] \right)(t) \tag{5.62}$$

dans $L^r(\Omega_n; \mathbb{R}^3)$ avec $r > 6/5$. Comme l'injection de $L^r(\Omega_n)$ dans $W^{-1,2}(\Omega_n)$ est compacte, on est assuré que

$$\int_0^T \int_{\Omega_n} \mathbf{u}_s \cdot \Big(aT_k(\varrho_s) \mathcal{R}[\zeta \varrho_s \mathbf{u}_s] - \zeta \varrho_s \mathbf{u}_s \mathcal{R}[aT_k(\varrho_s)] \Big) \,\mathrm{d}x \,\mathrm{d}t \to \int_0^T \int_{\Omega_n} \mathbf{u} \cdot \Big(\overline{aT_k(\varrho)} \mathcal{R}[\zeta \varrho \mathbf{u}] - \zeta \varrho_s \mathbf{u} \mathcal{R}[\overline{aT_k(\varrho)}] \Big) \,\mathrm{d}x \,\mathrm{d}t$$

grâce au théorème de Lebesgue. Ainsi, l'équation (5.61) se simplifie en

$$\int_0^T \int_{\Omega_n} a\zeta \left(\overline{p(\varrho,\vartheta) T_k(\varrho)} - \overline{p(\varrho,\vartheta)}\, \overline{T_k(\varrho)} \right) \,\mathrm{d}x \,\mathrm{d}t = \int_0^T \int_{\Omega_n} \zeta \left(\overline{\mathbb{S}(\vartheta, \nabla_x \mathbf{u}) : \mathcal{R}[aT_k(\varrho)]} - \mathbb{S}(\vartheta, \nabla_x \mathbf{u}) : \mathcal{R}[\overline{aT_k(\varrho)}] \right) \,\mathrm{d}x \,\mathrm{d}t. \tag{5.63}$$

On traite maintenant le terme $\overline{\mathbb{S}(\vartheta, \nabla_x \mathbf{u}) : \mathcal{R}[T_k(\varrho)]}$ en remarquant que

$$\mathcal{R} : [\zeta\mu(\vartheta_s) \left(\nabla_x \mathbf{u}_s + \nabla_x \mathbf{u}_s^T\right)] = 2\zeta\mu(\vartheta_s) \operatorname{div} \mathbf{u}_s + \omega(\vartheta_s, \mathbf{u}_s),$$

avec

$$\omega(\vartheta_s, \mathbf{u}_s) = \mathcal{R} : [\zeta\mu(\vartheta_s) \left(\nabla_x \mathbf{u}_s + \nabla_x \mathbf{u}_s^T\right)] - \zeta\mu(\vartheta_s)\mathcal{R} : [\nabla_x \mathbf{u}_s + \nabla_x^T \mathbf{u}_s].$$

Le même raisonnement est appliqué à la quantité $\mathbb{S}(\vartheta, \nabla_x \mathbf{u}) : \mathcal{R}[\overline{T_k(\varrho)}]$. Cette écriture nous permet d'employer naturellement le second lemme des commutateurs (voir lemme 39 en annexe) à $\omega(\vartheta_s, \mathbf{u}_s)$. On déduit ainsi que cette suite est bornée dans $L^1(0, T; W^{a,r}(\mathbb{R}^3; \mathbb{R}^3))$, pour $a \in (0, 1)$ et $r > 1$.

En définissant les vecteurs à quatre composantes suivants

$$\mathbf{U}_s := (T_k(\varrho_s), T_k(\varrho_s)\mathbf{u}_s), \quad \mathbf{V}_s := (\omega(\vartheta_s, \mathbf{u}_s), 0, 0, 0),$$

on peut leur appliquer le lemme div-rot puisque $\operatorname{div}_{(t,x)} \mathbf{U}_s$ et $\operatorname{rot}_{(t,x)} \mathbf{V}_s$ sont tous deux compacts dans $W^{-1,r}((0, T) \times \Omega_n; \mathbb{R}^3)$. On en infère ainsi que

$$\omega(\vartheta_s, \mathbf{u}_s)T_k(\varrho_s) \rightharpoonup \overline{\omega(\vartheta, \mathbf{u})}\, \overline{T_k(\varrho)},$$

et connaissant la convergence presque partout de ϑ_s vers ϑ sur $(0, T) \times \Omega_n$, on conclut que

$$\overline{\omega(\vartheta, \mathbf{u})} = \omega(\vartheta, \mathbf{u}).$$

Cela nous permet, en revenant à (5.63), d'arriver à l'identité du flux effectif visqueux (5.53) que nous recherchions.

Mesure de défaut

On commence tout d'abord par introduire la notion de mesure de défaut associée à la suite ϱ_s sur le domaine $(0, T) \times \Omega_n$. Pour q appartenant $[1, \infty)$

$$\mathbf{osc}_q[\varrho_s \to \varrho]((0, T) \times \Omega_n) := \sup_{k>0} \limsup_{s\to\infty} \int_0^T \int_{\Omega_n} |T_k(\varrho_s) - T_k(\varrho)|^q \,\mathrm{d}x \,\mathrm{d}t. \tag{5.64}$$

On cherche ici à montrer que cette quantité est bornée par une constante. On commence par remarquer, d'après les propriétés thermodynamiques décrites dans le cadre de travail du chapitre 4, que

$$p(\varrho, \vartheta) = d\varrho^\gamma + p_m(\varrho, \vartheta), \text{ pour un certain } d > 0 \text{ et avec } \partial_\varrho p_m(\varrho, \vartheta) \geq 0. \tag{5.65}$$

En effet, on pose

$$p_m(\varrho, \vartheta) = p(\varrho, \vartheta) - d\varrho^\gamma, \tag{5.66}$$

où d est une constante. On déduit de (5.5) que

$$\begin{aligned}
\partial_\varrho p_m &= \vartheta P'\left(\frac{\varrho}{\vartheta^{1/(\gamma-1)}}\right) - \gamma d\varrho^{\gamma-1} \\
&= \vartheta \left[P'\left(\frac{\varrho}{\vartheta^{1/(\gamma-1)}}\right) - \gamma d\left(\frac{\varrho}{\vartheta^{1/(\gamma-1)}}\right)^{\gamma-1}\right] \\
&\geq 0,
\end{aligned}$$

en choisissant la constante d suffisamment petite. Grâce à la propriété algébrique $a \geq b \geq 0 \Rightarrow (a-b)^\gamma \leq a^\gamma - b^\gamma$, et à l'inégalité $b - a \geq T_k(b) - T_k(a)$ on a pour toute fonction $\zeta \in \mathcal{C}_c^\infty((0, T) \times \Omega_n)$

$$d \limsup_{s\to\infty} \int_0^T \int_{\Omega_n} \left(\frac{\zeta}{1+\vartheta} |T_k(\varrho_s) - T_k(\varrho)|^{\gamma+1}\right) \mathrm{d}x \,\mathrm{d}t \leq d \limsup_{s\to\infty} \int_0^T \int_{\Omega_n} \left(\frac{\zeta}{1+\vartheta} \left(T_k(\varrho_s) - T_k(\varrho)\right)\left(\varrho_s^\gamma - \varrho^\gamma\right)\right) \mathrm{d}x \,\mathrm{d}t.$$

On continue en utilisant la convexité de la fonction $\varrho \mapsto \varrho^\gamma$ et la concavité de $\varrho \mapsto T_k(\varrho)$, pour majorer le membre de droite comme suit

$$d \limsup_{s\to\infty} \int_0^T \int_{\Omega_n} \left(\frac{\zeta}{1+\vartheta} \left(T_k(\varrho_s) - T_k(\varrho)\right)\left(\varrho_s^\gamma - \varrho^\gamma\right)\right) leq$$

$$d \limsup_{s\to\infty} \int_0^T \int_{\Omega_n} \frac{\zeta}{1+\vartheta} \left(T_k(\varrho_s)\varrho_s^\gamma - \overline{T_k(\varrho)}\overline{\varrho^\gamma} + T_k(\varrho_s)\overline{\varrho^\gamma} - T_k(\varrho_s)\varrho^\gamma - T_k(\varrho)(\overline{\varrho^\gamma} - \varrho^\gamma) \right) \mathrm{d}x\, \mathrm{d}t \le$$

$$d \int_0^T \int_{\Omega_n} \frac{\zeta}{1+\vartheta} \left(\overline{\varrho^\gamma T_k(\varrho)} - \overline{\varrho^\gamma}\, \overline{T_k(\varrho)} \right) \mathrm{d}x\, \mathrm{d}t + d \int_0^T \int_{\Omega_n} \left(\frac{\zeta}{1+\vartheta} \left(\overline{T_k(\varrho)} - T_k(\varrho) \right) (\overline{\varrho^\gamma} - \varrho^\gamma) \right) \mathrm{d}x\, \mathrm{d}t,$$

où l'on remarque que le second terme du membre de droite est négatif. Donc

$$\begin{aligned} d \limsup_{s\to\infty} \int_0^T \int_{\Omega_n} & \left(\frac{\zeta}{1+\vartheta} \left(T_k(\varrho_s) - T_k(\varrho) \right) (\varrho_s^\gamma - \varrho^\gamma) \right) \mathrm{d}x\, \mathrm{d}t \\ \le & d \int_0^T \int_{\Omega_n} \frac{\zeta}{1+\vartheta} \left(\overline{\varrho^\gamma T_k(\varrho)} - \overline{\varrho^\gamma}\, \overline{T_k(\varrho)} \right) \mathrm{d}x\, \mathrm{d}t \\ \le & d \int_0^T \int_{\Omega_n} \frac{\zeta}{1+\vartheta} \left(\overline{p(\varrho,\vartheta) T_k(\varrho)} - \overline{p(\varrho,\vartheta)}\, \overline{T_k(\varrho)} \right) \mathrm{d}x\, \mathrm{d}t \\ & - d \int_0^T \int_{\Omega_n} \frac{\zeta}{1+\vartheta} \left(\overline{p_m(\varrho,\vartheta) T_k(\varrho)} - \overline{p_m(\varrho,\vartheta)}\, \overline{T_k(\varrho)} \right) \mathrm{d}x\, \mathrm{d}t \\ \le & d \int_0^T \int_{\Omega_n} \frac{\zeta}{1+\vartheta} \left(\overline{p(\varrho,\vartheta) T_k(\varrho)} - \overline{p(\varrho,\vartheta)}\, \overline{T_k(\varrho)} \right) \mathrm{d}x\, \mathrm{d}t \end{aligned}$$

car

$$\overline{p_m(\varrho,\vartheta) T_k(\varrho)} - \overline{p_m(\varrho,\vartheta)}\, \overline{T_k(\varrho)} \ge 0 \tag{5.67}$$

On se propose de montrer l'inégalité (5.67). Remarquons tout d'abord que

$$\begin{aligned} \partial_\vartheta p_m(\varrho,\vartheta) &= \frac{\gamma}{\gamma-1} \vartheta^{1/(\gamma-1)} P\left(\frac{\varrho}{\vartheta^{1/(\gamma-1)}} \right) - \frac{1}{\gamma-1} \varrho P'\left(\frac{\varrho}{\vartheta^{1/(\gamma-1)}} \right) + \frac{4}{3} a\vartheta^3 \\ &= \frac{1}{\gamma-1} \vartheta^{1/(\gamma-1)} \left(\gamma P(Z) - Z P'(Z) \right) + \frac{4}{3} a\vartheta^3 \\ &= \frac{1}{\gamma-1} \varrho \frac{\gamma P(Z) - Z P'(Z)}{Z} + \frac{4}{3} a\vartheta^3, \end{aligned}$$

où $Z = \dfrac{\varrho}{\vartheta^{1/(\gamma-1)}}$. Ainsi, en revenant à (4.19), on déduit que

$$|\partial_\vartheta p_m(\varrho,\vartheta)| \le c\varrho + \frac{4}{3} a\vartheta^3. \tag{5.68}$$

Comme l'on a les convergences (5.20b) et (5.51), on sait que

$$\vartheta_s \to \vartheta \text{ dans } L^p((0,T)\times\Omega_n), \ \forall p \in [1, 17/3). \tag{5.69}$$

Prouver (5.67) revient ainsi à démontrer l'inégalité

$$\overline{p_m(\varrho,\vartheta(t,x)) T_k(\varrho)} - \overline{p_m(\varrho,\vartheta(t,x))}\, \overline{T_k(\varrho)} \ge 0. \tag{5.70}$$

Pour cela, on observe que (5.69) implique aussi que pour tout ε strictement positif, il existe une fonction $\Theta \in \mathcal{C}^1((0,T)\times\Omega_n)$ telle que

$$\|\Theta - \vartheta\|_{L^{17/3}((0,T)\times\Omega_n)} < \varepsilon. \tag{5.71}$$

On emploie maintenant le théorème des accroissements finis à la quantité $p_m(\varrho_s,\vartheta) - p_m(\varrho_s,\Theta)$, ce qui nous assure l'existence d'un ζ compris entre $\min(\vartheta,\Theta)$ et $\max(\vartheta,\Theta)$ tel que

$$\begin{aligned} |p_m(\varrho_s,\vartheta) - p_m(\varrho_s,\Theta)| &= \left| \partial_\vartheta p_m(\varrho_s,\zeta)(\vartheta - \Theta) \right| \\ &\le c(\varrho_s + \zeta^3)|\vartheta - \Theta| \\ &\le c(\varrho_s + \vartheta^3 + \Theta^3)|\vartheta - \Theta|. \end{aligned}$$

Il vient de là les inégalités suivantes

$$\|p_m(\varrho,\vartheta)T_k(\varrho_s) - p_m(\varrho_s,\Theta)T_k(\varrho_s)\|_{L^1((0,T)\times\Omega_n)} \leq c(n)\|\vartheta-\Theta\|_{L^{17/3}((0,T)\times\Omega_n)}$$

et

$$\|p_m(\varrho,\vartheta)\overline{T_k(\varrho)} - p_m(\varrho_s,\Theta)\overline{T_k(\varrho)}\|_{L^1((0,T)\times\Omega_n)} \leq c(n)\|\vartheta-\Theta\|_{L^{17/3}((0,T)\times\Omega_n)}.$$

Finalement, on constate que l'inégalité (5.70) est vraie si

$$\overline{p_m(\varrho,\Theta)T_k(\varrho)} - \overline{p_m(\varrho,\Theta)}\,\overline{T_k(\varrho)} \geq 0 \tag{5.72}$$

Dans cette optique, on remarque qu'avec le même ε qu'employé en (5.71), il existe un δ tel que si B est une boule de volume strictement inférieur à δ alors

$$\left\|\Theta - \frac{1}{|B\cap(0,T)\times\Omega_n|}\int_{B\cap(0,T)\times\Omega_n}\Theta\,\mathrm{d}x\right\|_{L^{17/3}((0,T)\times\Omega_n)} \leq \varepsilon.$$

Ce qui résume notre étude de signe à la quantité

$$\overline{p_m(\varrho,[\Theta]_B)T_k(\varrho)} - \overline{p_m(\varrho,[\Theta]_B)}\,\overline{T_k(\varrho)}$$

où $[\Theta]_B = \frac{1}{|\Theta|}\int_B \Theta\,\mathrm{d}x$, qui est non négative d'après le théorème de convergence faible et monotonie (voir annexe B.5). Par déductions successives, il vient que (5.67) est vraie.

On arrive ainsi à la majoration

$$\int_0^T\int_{\Omega_n}\frac{\zeta}{1+\vartheta}\left(\overline{\varrho^\gamma T_k(\varrho)} - \overline{\varrho^\gamma}\,\overline{T_k(\varrho)}\right)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t \leq \int_0^T\int_{\Omega_n}\frac{\zeta}{1+\vartheta}\left(\overline{p(\varrho,\vartheta)T_k(\varrho)} - \overline{p(\varrho,\vartheta)}\,\overline{T_k(\varrho)}\right)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t. \tag{5.73}$$

On fait ensuite le calcul suivant, grâce à l'inégalité de Hölder

$$\begin{aligned}\int_0^T\int_{\Omega_n}|T_k(\varrho_s)-T_k(\varrho)|^q\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t &= \int_0^T\int_{\Omega_n}\left(\frac{1}{(1+\vartheta)^\beta}|T_k(\varrho_s)-T_k(\varrho)|^q(1+\vartheta)^\beta\right)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t\\ &\leq c(\Omega_n)\left(\int_0^T\int_{\Omega_n}\frac{1}{(1+\vartheta)}|T_k(\varrho_s)-T_k(\varrho)|^{\gamma+1}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t\right)^{q/(\gamma+1)},\end{aligned}$$

avec $q>2$, $\beta(\gamma+1)=q$ et $\beta(\gamma+1)/(\gamma+1-q)\leq 17/3$ pour conserver l'intégrabilité de ϑ d'après (5.69). En tenant compte de l'estimation de la vitesse (5.17), on va maintenant majorer le terme

$$\int_0^T\int_{\Omega_n}\frac{\zeta}{1+\vartheta}\left(\overline{p(\varrho,\vartheta)T_k(\varrho)} - \overline{p(\varrho,\vartheta)}\,\overline{T_k(\varrho)}\right)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t$$

à l'aide de l'identité du flux effectif visqueux (5.53).

On arrive, en utilisant la semi-continuité inférieure de la norme L^2, à la majoration suivante pour la mesure de défaut

$$\begin{aligned}(\mathbf{osc}_q[\varrho_s\to\varrho]((0,T)\times\Omega_n))^{(\gamma+1)/q} &\leq \int_0^T\int_{\Omega_n}\overline{T_k(\varrho)\operatorname{div}\mathbf{u}} - \overline{T_k(\varrho)}\operatorname{div}\mathbf{u}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t \qquad (5.74)\\ &\leq \lim_{s\to\infty}\int_0^T\int_{\Omega_n}(T_k(\varrho_s)-T_k(\varrho))\operatorname{div}\mathbf{u}_s\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t\\ &\quad+\lim_{s\to\infty}\int_0^T\int_{\Omega_n}(T_k(\varrho)-\overline{T_k(\varrho)})\operatorname{div}\mathbf{u}_s\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t\\ &\leq \|\operatorname{div}\mathbf{u}_s\|_{L^2(0,T;L^2(\Omega_n;\mathbb{R}^3))}\limsup_{s\to\infty}\|T_k(\varrho_s)-T_k(\varrho)\|_{L^2((0,T)\times\Omega_n)}\\ &\leq c\limsup_{s\to\infty}\|T_k(\varrho_s)-T_k(\varrho)\|_{L^1((0,T)\times\Omega_n)}^{(q-2)/(2q-2)}\|T_k(\varrho_s)-T_k(\varrho)\|_{L^q((0,T)\times\Omega_n)}^{q/(2q-2)}\\ &\leq c\,(\mathbf{osc}_q[\varrho_s\to\varrho]((0,T)\times\Omega_n))^{q/(2q-2)} \qquad (5.75)\end{aligned}$$

pour un certain q vérifiant $\beta(\gamma+1) = q$ et $\beta(\gamma+1)/(\gamma+1-q) \leq 17/3$.

Comme l'exposant $q/2q-2$ est plus petit que $(\gamma+1)/q$ sous les conditions considérées, on peut conclure grâce à l'inégalité de Young que

$$\mathbf{osc}_q[\varrho_s \to \varrho]((0,T) \times \Omega_n) < \infty. \tag{5.76}$$

Équation de continuité renormalisée

Ayant montré que la mesure de défaut associée à la suite ϱ_s, on peut utiliser le lemme suivant, nous affirmant que les fonctions limites ϱ et $\mathbf{u}$ vérifient l'équation de continuité renormalisée (4.38). On se réfère à [24, lemme 3.8] pour plus de détails sur ce résultat.

Lemme 32
Soit Q un ouvert borné de $\mathbb{R}^3$ et

$$\begin{cases} \varrho_s \rightharpoonup \varrho & \textit{dans } L^1((0,T) \times Q), \\ \mathbf{u}_s \rightharpoonup \mathbf{u} & \textit{dans } L^r((0,T) \times Q; \mathbb{R}^3), \\ \nabla_x \mathbf{u}_s \rightharpoonup \nabla \mathbf{u} & \textit{dans } L^r((0,T) \times Q; \mathbb{R}^{3\times 3}),\ r > 1. \end{cases}$$

On suppose de plus que

$$\mathbf{osc}_q[\varrho_s \to \varrho]((0,T) \times Q) < \infty,\ \textit{pour } \frac{1}{q} < 1 - \frac{1}{r}, \tag{5.77}$$

où $(\varrho_s, \mathbf{u}_s)$ satisfait l'équation de continuité renormalisée (4.38) *sur Q.*

Alors, les limites ϱ et $\mathbf{u}$ sont aussi solutions de (4.38) *sur Q.*

Démonstration:
Comme ϱ_s est une solution à (4.38), on a

$$T_k(\varrho_s) \to \overline{T_k(\varrho)} \text{ dans } \mathcal{C}_{\text{weak}}((0,T); L^\beta(Q)) \text{ pour tout } \beta \in [1, \infty).$$

Connaissant les convergence de $\mathbf{u}_s$ et $\nabla_x \mathbf{u}_s$, on déduit que

$$T_k(\varrho_s)\mathbf{u}_s \to \overline{T_k(\varrho)}\mathbf{u} \text{ faiblement dans } L^r((0,T) \times Q; \mathbb{R}^3),$$

ce qui nous amène à

$$\partial_t \overline{T_k(\varrho)} + \operatorname{div}_x \left(\overline{T_k(\varrho)} \mathbf{u} \right) + \overline{(\varrho T_k'(\varrho) - T_k(\varrho)) \operatorname{div}_x \mathbf{u}} = 0 \text{ dans } \mathcal{D}'((0,T) \times Q)$$

On emploie maintenant le théorème des solutions renormalisées pour l'équation de bilan de masse (voir théorème B.8 de l'annexe) qui nous permet d'obtenir

$$\begin{aligned} \partial_t h \left(\overline{T_k(\varrho)} \right) + \operatorname{div} \left(h \left(\overline{T_k(\varrho)} \right) \mathbf{u} \right) + \left(h' \left(\overline{T_k(\varrho)} \right) \overline{T_k(\varrho)} - \overline{T_k(\varrho)} \right) \operatorname{div} \mathbf{u} \\ = h' \left(\overline{T_k(\varrho)} \right) \overline{(T_k(\varrho) - \varrho T_k'(\varrho)) \operatorname{div} \mathbf{u}} \text{ dans } \mathcal{D}'((0,T) \times Q) \end{aligned} \tag{5.78}$$

où h est une fonction continument dérivable telle que $h'(z) = 0$ pour tout z supérieur à une certaine constante M.

Il nous reste donc à montrer que

$$h' \left(\overline{T_k(\varrho)} \right) \overline{(T_k(\varrho) - \varrho T_k'(\varrho)) \operatorname{div} \mathbf{u}} \xrightarrow[k \to \infty]{} 0 \text{ dans } L^1((0,T) \times Q). \tag{5.79}$$

Pour ce faire, on introduit la notation

$$Q_{k,M} = \{(t,x) \in (0,T) \times Q, |\overline{T_k(\varrho)}| \leq M\}.$$

On a l'estimation suivante de notre quantité

$$\begin{aligned}
&\left\| h'\left(\overline{T_k(\varrho)}\right) \overline{(T_k(\varrho)-\varrho T_k'(\varrho))\operatorname{div}\mathbf{u}} \right\|_{L^1((0,T)\times Q)} \\
&\le \left(\sup_{0\le z\le M}|h'(z)|\right)\left(\sup_{s>0}\|\operatorname{div}\mathbf{u}_s\|_{L^r((0,T)\times Q)}\right)\liminf_{\delta\to 0}\|T_k(\varrho_s)-\varrho_s T_k'(\varrho_s)\|_{L^{\frac{r}{r-1}}(Q_{k,M})}.
\end{aligned} \tag{5.80}$$

Par interpolation on peut majorer cette dernière différence

$$\|T_k(\varrho_s)-\varrho_s T_k'(\varrho_s)\|_{L^{\frac{r}{r-1}}(Q_{k,M})} \le \|T_k(\varrho_s)-\varrho_s T_k'(\varrho_s)\|^{\beta}_{L^1((0,T)\times Q_{k,M})}\|T_k(\varrho_s)-\varrho_s T_k'(\varrho_s)\|^{1-\beta}_{L^q((0,T)\times Q_{k,M})}$$

avec $\beta\in(0,1)$. Par équi-intégrabilité de ϱ_s, on sait que

$$\sup_{\delta>0}\{\|T_k(\varrho_s)-\varrho_s T_k'(\varrho_s)\|_{L^1((0,T)\times Q)}\} \xrightarrow[k\to\infty]{} 0.$$

Enfin, comme $|\varrho_s T_k'(\varrho_s)|\le T_k(\varrho_s)$, on peut effectuer les estimations suivantes

$$\begin{aligned}
&\|T_k(\varrho_s)-\varrho_s T_k'(\varrho_s)\|_{L^q(Q_{k,M})} \\
&\le 2\left(\|T_k(\varrho_s)-T_k(\varrho)\|_{L^q((0,T)\times Q)}+\|T_k(\varrho_s)-\overline{T_k(\varrho)}\|_{L^q((0,T)\times Q)}+\|\overline{T_k(\varrho)}\|_{L^q(Q_{k,M})}\right) \\
&\le 2\left(\|T_k(\varrho_s)-T_k(\varrho)\|_{L^q((0,T)\times Q)}+\mathbf{osc}_q[\varrho_s\to\varrho]((0,T)\times Q)+|(0,T)\times Q|^{\frac{1}{q}}\right)
\end{aligned} \tag{5.81}$$

Pour finir, on constate que

$$\limsup_{s\to\infty}\|T_k(\varrho_s)-\varrho_s T_k'(\varrho_s)\|_{L^q(Q_{k,M})}\le 4\mathbf{osc}_q[\varrho_s\to\varrho]((0,T)\times Q)+2M|(0,T)\times Q|^{\frac{1}{q}}, \tag{5.82}$$

ce qui implique que la convergence (5.79) est vérifiée. Il s'ensuit la démonstration du théorème. □

On déduit de ce résultat que ϱ et $\mathbf{u}$ sont solution de l'équation suivante

$$\int_0^T\int_{\Omega_n}\varrho L_k(\varrho)\left(\partial_t\varphi+\mathbf{u}\cdot\nabla_x\varphi\right)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t=\int_0^T\int_{\Omega_n}T_k(\varrho)\operatorname{div}\mathbf{u}\varphi\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t-\int_{\Omega_n}\varrho_0 L_k(\varrho_0)\varphi(0,\cdot)\,\mathrm{d}x, \tag{5.83}$$

pour tout $\varphi\in C_c^1([0,T)\times\overline{\Omega})$ vérifiant $\operatorname{supp}\varphi\subset[0,T)\times\Omega_n$ et avec $L_k(\varrho)=\displaystyle\int_1^{\varrho}\frac{T_k(s)}{s^2}\,\mathrm{d}s$.
Bien entendu, l'équation limite

$$\int_0^T\int_{\Omega_n}\overline{\varrho L_k(\varrho)}\left(\partial_t\varphi+\mathbf{u}\cdot\nabla_x\varphi\right)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t=\int_0^T\int_{\Omega_n}\overline{T_k(\varrho)\operatorname{div}\mathbf{u}}\varphi\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t-\int_{\Omega_n}\varrho_0 L_k(\varrho_0)\varphi(0,\cdot)\,\mathrm{d}x \tag{5.84}$$

est elle aussi vérifiée pour tout $\varphi\in\mathcal{C}_c^1\left([0,T)\times\overline{\Omega}\right)$. En soustrayant (5.83) à (5.84) on arrive à

$$\int_0^T\int_{\Omega_n}\left(\overline{\varrho L_k(\varrho)}-\varrho L_k(\varrho)\right)\left(\partial_t\varphi+\mathbf{u}\cdot\nabla_x\varphi\right)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t=\int_0^T\int_{\Omega_n}\left(\overline{T_k(\varrho)\operatorname{div}\mathbf{u}}-T_k(\varrho)\operatorname{div}\mathbf{u}\right)\varphi\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t. \tag{5.85}$$

Le terme intégré du membre de droite peut être écrit comme suit

$$\begin{aligned}
\overline{T_k(\varrho)\operatorname{div}\mathbf{u}}-T_k(\varrho)\operatorname{div}\mathbf{u} &= \overline{T_k(\varrho)\operatorname{div}\mathbf{u}}-\overline{T_k(\varrho)}\operatorname{div}\mathbf{u}+\overline{T_k(\varrho)}\operatorname{div}\mathbf{u}-T_k(\varrho)\operatorname{div}\mathbf{u} \\
&= \frac{\overline{p(\varrho,\vartheta)T_k(\varrho)}-\overline{p(\varrho,\vartheta)}\,\overline{T_k(\varrho)}}{\frac{4}{3}\mu(\vartheta)+\xi(\vartheta)}+\overline{T_k(\varrho)}\operatorname{div}\mathbf{u}-T_k(\varrho)\operatorname{div}\mathbf{u},
\end{aligned}$$

avec

$$\begin{aligned}\int_0^T \int_{\Omega_n} \overline{T_k(\varrho)}\operatorname{div}\mathbf{u} - T_k(\varrho)\operatorname{div}\mathbf{u} &\leq c\|\operatorname{div}\mathbf{u}\|_{L^2(0,T;L^2(\Omega_n))}\|\overline{T_k(\varrho)} - T_k(\varrho)\|_{L^2((0,T)\times\Omega_n)}\\
&\leq c\|\overline{T_k(\varrho)} - T_k(\varrho)\|^{(q-2)/(2q-2)}_{L^1((0,T)\times\Omega_n)}\|\overline{T_k(\varrho)} - T_k(\varrho)\|^{q/(2q-2)}_{L^q((0,T)\times\Omega_n)}\\
&\leq c\|\overline{T_k(\varrho)} - T_k(\varrho)\|^{(q-2)/(2q-2)}_{L^1((0,T)\times\Omega_n)}\mathbf{osc}_q[\varrho_s \to \varrho]((0,T)\times\Omega_n)^{(q-2)/(2q-2)}\\
&\leq c(n)\|\overline{T_k(\varrho)} - T_k(\varrho)\|_{L^1((0,T)\times\Omega_n)}. \qquad (5.86)\end{aligned}$$

On souhaite maintenant passer à la limite $k \to \infty$. Pour cela, on fait plusieurs observations. On remarque tout d'abord que

$$\begin{aligned}\|\overline{T_k(\varrho)} - T_k(\varrho)\|_{L^1((0,T)\times\Omega_n)} &\leq \|\overline{T_k(\varrho)} - \varrho\|_{L^1((0,T)\times\Omega_n)} + \|\varrho - T_k(\varrho)\|_{L^1((0,T)\times\Omega_n)}\\
&\leq \liminf_{s\to\infty}\|T_k(\varrho_s) - \varrho_s\|_{L^1((0,T)\times\Omega_n)} + \|\varrho - T_k(\varrho)\|_{L^1((0,T)\times\Omega_n)}\\
&\leq c(n)\frac{1}{k^\gamma}. \qquad (5.87)\end{aligned}$$

En effet,

$$|\{\varrho \geq k\}\cap\Omega_n| \leq \int_{\{\varrho\geq k\}\cap\Omega_n}\frac{\varrho}{k}\,\mathrm{d}x \leq c\frac{1}{k}\left(\int_\Omega \varrho^\gamma\right)^{\frac{1}{\gamma}}|\{\varrho \geq k\}\cap\Omega_n|^{\frac{\gamma}{\gamma-1}}.$$

En revenant à la définition de L_k, on sait que

$$\begin{aligned}\|\varrho L_k(\varrho) - \varrho\ln\varrho\|_{L^1((0,T)\times\Omega_n)} =&\int_{(0,T)\times\Omega_n}\left(\varrho\int_1^\varrho \frac{T_k(z)}{z^2}\,\mathrm{d}z - \varrho\ln\varrho\right)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t\\
=&\int_{\{\varrho\leq k\}\cap\Omega_n}\varrho\int_1^\varrho\left(\frac{T_k(z)}{z^2}\,\mathrm{d}z - \varrho\ln\varrho\right)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t\\
&+\int_{\{\varrho\geq k\}\cap\Omega_n}\varrho\int_1^\varrho\left(\frac{T_k(z)}{z^2}\,\mathrm{d}z - \varrho\ln\varrho\right)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t\\
=&I_1 + I_2,\end{aligned}$$

avec

$$I_1 = \int_{\{\varrho\leq k\}\cap\Omega_n}\varrho\int_1^\varrho\left(\frac{1}{z}\,\mathrm{d}z - \varrho\ln\varrho\right)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t = 0$$

et

$$\begin{aligned}I_2 &= \int_{\{\varrho\geq k\}\cap\Omega_n}\varrho\left(\int_1^k\frac{T_k(z)}{z^2}\,\mathrm{d}z + \int_k^\varrho\frac{T_k(z)}{z^2}\,\mathrm{d}z - \ln\varrho\right)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t\\
&= \int_{\{\varrho\geq k\}\cap\Omega_n}\varrho\left(\ln\varrho - \ln k + \int_k^\varrho\frac{T_k(z)}{z^2}\,\mathrm{d}z\right)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t\\
&\leq 3\int_{\{\varrho\geq k\}\cap\Omega_n}\varrho\ln\varrho\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t\\
&\leq c(n)\|\varrho\|_{L^q(\Omega_n)}|\{\varrho\geq k\}\cap\Omega_n|^{\frac{q}{q-1}},\end{aligned}$$

pour tout $1 \leq q \leq \gamma$. Ceci nous permet de déduire que

$$\lim_{k\to\infty}\|\varrho L_k(\varrho) - \varrho\ln\varrho\|_{L^1((0,T)\times\Omega_n)} = 0$$

mais aussi que

$$\lim_{k\to\infty}\|\overline{\varrho L_k(\varrho)} - \overline{\varrho\ln\varrho}\|_{L^1((0,T)\times\Omega_n)} \leq \lim_{k\to\infty}\limsup_{s\to\infty}\|\varrho_s L_k(\varrho_s) - \varrho_s\ln\varrho_s\|_{L^1((0,T)\times\Omega_n)} = 0$$

On utilise ensuite l'observation faite auparavant

$$\overline{p(\varrho,\vartheta)T_k(\varrho)} - \overline{p(\varrho,\vartheta)}\,\overline{T_k(\varrho)} \geq 0$$

mais aussi l'identité du flux effectif visqueux (5.53) pour déduire de (5.85) l'inégalité

$$\int_\Omega \left(\overline{\varrho L_k(\varrho)} - \varrho L_k(\varrho)\right) \varphi \,\mathrm{d}x \Big|_0^T - \lim_{k\to\infty} \int_0^T \int_\Omega \left(\overline{\varrho L_k(\varrho)} - \varrho L_k(\varrho)\right) (\partial_t \varphi + \mathbf{u} \cdot \nabla_x \varphi) \,\mathrm{d}x \,\mathrm{d}t \leq 0, \tag{5.88}$$

pour tout φ de $\mathcal{C}_c^\infty([0,T] \times \overline{\Omega})$ positive. On définit maintenant, pour $R > 1$, une nouvelle fonction test $\Phi_R(x) = \Phi(x/R)$ avec

$$\Phi \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^3),\ 0 \leq \Phi \leq 1,\ \Phi = \begin{cases} 1, & \text{si } |x| \leq 1, \\ 0, & \text{si } |x| \geq 2, \end{cases}$$

que l'on utilise dans notre dernière inégalité pour obtenir

$$\begin{aligned} \int_\Omega \left(\left(\overline{\varrho \ln \varrho} - \varrho \ln \varrho\right)(\tau) \Phi_R(x)\right) \mathrm{d}x \leq & \int_0^\tau \int_\Omega \left(\left(\overline{\varrho \ln \varrho} - \tilde r \ln \tilde r\right) \mathbf{u} \cdot \nabla_x \Phi_R(x)\right) \mathrm{d}x \,\mathrm{d}t \\ & - \int_0^\tau \int_\Omega \left(\left(\varrho \ln \varrho - \tilde r \ln \tilde r\right) \mathbf{u} \cdot \nabla_x \Phi_R(x)\right) \mathrm{d}x \,\mathrm{d}t. \end{aligned} \tag{5.89}$$

On remarque que

$$\begin{aligned} \left| \int_\Omega [(\varrho \ln \varrho - \tilde r \ln \tilde r)\, \mathbf{u} \cdot \nabla_x \Phi_R(x)]_{\mathrm{ess}} \,\mathrm{d}x \right| \leq & c \int_\Omega \left([|\varrho - \tilde r|\,(1 + |\ln \tilde r|)\, |u| |\nabla_x \Phi_R(x)]_{\mathrm{ess}} \right) \mathrm{d}x \\ \leq & c \|\nabla_x \Phi_R\|_{L^\infty(\mathbb{R}^3)} \left\| \sqrt{\tilde r}\,(1 + |\ln \tilde r|) \left[\frac{\varrho}{\tilde r} - 1\right]_{\mathrm{ess}} \right\|_{L^2(\Omega)} \left\| \left[\sqrt{\tilde r}\mathbf{u}\right]_{\mathrm{ess}} \right\|_{L^2(\Omega;\mathbb{R}^3)}, \end{aligned}$$

mais aussi

$$\left| \int_\Omega [(\varrho \ln \varrho - \tilde r \ln \tilde r)\, \mathbf{u} \cdot \nabla_x \Phi_R(x)]_{\mathrm{res}} \mathrm{d}x \right| \leq c \|\nabla_x \Phi_R\|_{L^\infty(\mathbb{R}^3)} \left(\|\tilde r \ln \tilde r\|_{L^{6/5}(\Omega)} + \|\varrho \ln \varrho\|_{L^{6/5}(\Omega)}\right) \|\mathbf{u}\|_{L^6(\Omega;\mathbb{R}^3)}.$$

En regard des estimations (5.7) et (5.8), on déduit de ces majorations que le membre de droite de l'inégalité (5.89) tend vers 0 quand $R \to \infty$ et que donc

$$\int_\Omega \left(\overline{\varrho \ln \varrho} - \varrho \ln \varrho\right)(\tau) \,\mathrm{d}x \leq 0.$$

Comme la fonction $z \mapsto z \ln z$ est strictement convexe sur $(0, \infty)$, on en conclut que

$$\overline{\varrho \ln \varrho} - \varrho \ln \varrho = 0 \text{ presque partout sur } (0,T) \times \Omega.$$

Pour finir, cette dernière convergence implique

$$\varrho_s \to \varrho \text{ presque partout sur } (0,T) \times \Omega. \tag{5.90}$$

5.3 Inégalité de dissipation sur Ω

On considère une fonction test ζ pour l'inégalité de dissipation (4.37) ayant les propriétés suivantes :

- $\zeta \in \mathcal{C}_c^1[0,T)$,
- $\zeta \geq 0$,
- $\zeta' \leq 0$.

On obtient alors

$$\begin{aligned} \int_0^T \zeta'(t) \int_\Omega \left(\frac{1}{2}\varrho_0 |\mathbf{u}_0|^2 + \mathcal{E}(\varrho_0, \vartheta_0 | \tilde r, \overline{\vartheta})\right) \mathrm{d}x \,\mathrm{d}t - \int_0^T \zeta'(t) \int_{\Omega_n} \left(\frac{1}{2}\varrho_s |\mathbf{u}_s|^2 + \mathcal{E}(\varrho_s, \vartheta_s | \tilde r, \overline{\vartheta})\right) \mathrm{d}x \,\mathrm{d}t \\ + \int_0^T \zeta(t) \int_{\Omega_n} \frac{\overline{\vartheta}}{\vartheta_s} \left(\mathbb{S}(\vartheta_s, \nabla_x \mathbf{u}_s) : \nabla_x \mathbf{u}_s - \frac{\mathbf{q}(\vartheta_s, \nabla_x \vartheta_s) \cdot \nabla_x \vartheta_s}{\vartheta_s}\right) \mathrm{d}x \,\mathrm{d}t \leq 0 \end{aligned} \tag{5.91}$$

pour tout entier naturel n. En utilisant la semi-continuité inférieure faible de la norme L^2, on a immédiatement

$$-\int_0^T \zeta'(t) \int_{\Omega_n} \varrho \mathbf{u}^2 \,\mathrm{d}x \,\mathrm{d}t \leq -\liminf_{s\to\infty} \int_0^T \zeta'(t) \int_{\Omega_n} \varrho_s \mathbf{u}_s^2 \,\mathrm{d}x \,\mathrm{d}t.$$

Par ailleurs, $\mathcal{E}(\varrho_s, \vartheta_s | \tilde{r}, \overline{\vartheta}) \geq 0$ et les convergences presque partout de ϱ_s (5.90) et ϑ_s (5.51) nous indiquent que

$$\mathcal{E}(\varrho_s, \vartheta_s | \tilde{r}, \overline{\vartheta}) \to \mathcal{E}(\varrho, \vartheta | \tilde{r}, \overline{\vartheta}) \text{ presque partout sur } (0,T)\times\Omega,$$

ce qui, *via* le lemme de Fatou, nous permet d'obtenir l'inégalité

$$-\int_0^T \zeta'(t) \int_{\Omega_n} \mathcal{E}(\varrho, \vartheta | \tilde{r}, \overline{\vartheta}) \,\mathrm{d}x \,\mathrm{d}t \leq -\liminf_{s\to\infty} \int_0^T \zeta'(t) \int_{\Omega_n} \mathcal{E}(\varrho_s, \vartheta_s | \tilde{r}, \overline{\vartheta}) \,\mathrm{d}x \,\mathrm{d}t.$$

On peut donc passer à la limite $s \to \infty$ dans (5.91), et obtenir

$$\int_0^T \zeta'(t) \int_\Omega \left(\frac{1}{2}\varrho_0 |\mathbf{u}_s|^2 + \mathcal{E}(\varrho_0, \vartheta_0 | \tilde{r}, \overline{\vartheta})\right) \mathrm{d}x \,\mathrm{d}t - \int_0^T \zeta'(t) \int_{\Omega_n} \left(\frac{1}{2}\varrho |\mathbf{u}|^2 + \mathcal{E}(\varrho, \vartheta | \tilde{r}, \overline{\vartheta})\right) \mathrm{d}x \,\mathrm{d}t$$
$$+ \int_0^T \int_{\Omega_n} \zeta \frac{\overline{\vartheta}}{\vartheta} \left(\mathbb{S}(\vartheta, \nabla_x \mathbf{u}) : \nabla_x \mathbf{u} - \frac{\mathbf{q}(\vartheta, \nabla_x \vartheta)\cdot \nabla_x \vartheta}{\vartheta}\right) \mathrm{d}x \,\mathrm{d}t \leq 0,$$

ce qui nous fournit l'inégalité de dissipation sur Ω pour $(\varrho, \vartheta, \mathbf{u})$.

6 Inégalité d'entropie relative

Sommaire

6.1 Introduction et résultat obtenu

6.1.1 Introduction

Nous avons déjà observé, notamment grâce aux conditions de stabilité thermodynamique, que la quantité $\frac{1}{2}\varrho|\mathbf{u}-\mathbf{U}|^2+\mathcal{E}(\varrho,\vartheta|r,\Theta)$ où $\mathcal{E}(\varrho,\vartheta|r,\Theta)=H_\Theta(\varrho,\vartheta)-\partial_\varrho H_\Theta(r,\Theta)(\varrho-r)-H_\Theta(r,\Theta)$ vue dans l'inégalité (4.37) est bien adaptée pour mesurer la "distance" entre une solution faible du système de Navier-Stokes-Fourier et un état quelconque décrit par le triplet $(r,\Theta,\mathbf{U})$. L'inégalité de dissipation utilisée abondamment dans le chapitre précédent fait intervenir cette quantité dans le cas particulier où $\Theta=\overline{\vartheta}>0$, $r=\tilde{r}>0$ et $\mathbf{U}=0$. Dans ce chapitre, on se propose de montrer ce que devient l'inégalité de dissipation si on y introduit le terme $\frac{1}{2}\varrho|\mathbf{u}-\mathbf{U}|^2+\mathcal{E}(\varrho,\vartheta|r,\Theta)$ où $(r,\Theta,\mathbf{U})$ sont des fonctions arbitraires. Cette nouvelle inégalité est appelée inégalité d'entropie relative. Dans cette étude, nous nous inspirons des travaux [27], [23] et surtout [25] où il a été démontré que toute solution faible dans un domaine borné satisfait l'inégalité d'entropie relative. Ici, nous montrons que pour une large classe de domaines non bornés, il est possible de construire des solutions très faibles qui satisfont l'inégalité d'entropie relative. Contrairement à l'article [25], nous ne sommes pas en mesure de montrer que toute solution très faible vérifie l'inégalité d'entropie relative. Dans le cadre des domaines non bornés, il s'agit d'un problème ouvert.

Les travaux exposés dans ce chapitre ont été l'objet de l'article [44] accepté pour publication.

6.1.2 Présentation du résultat

Avant l'énoncé du résultat obtenu, rappelons rapidement l'inégalité d'entropie relative

$$
\begin{aligned}
&\int_\Omega \left(\frac{1}{2}\varrho|\mathbf{u}-\mathbf{U}|^2 + \mathcal{E}(\varrho,\vartheta|r,\Theta) \right)(\tau,\cdot)\,\mathrm{d}x \\
&+\int_0^\tau \int_\Omega \left(\Theta \frac{\mathbb{S}(\vartheta,\nabla_x\mathbf{u})}{\vartheta} : \nabla_x\mathbf{u} - \mathbb{S}(\vartheta,\nabla_x\mathbf{u}) : \nabla_x\mathbf{U} \right)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t \\
&-\int_0^\tau \int_\Omega \left(\Theta \frac{\mathbf{q}(\vartheta,\nabla_x\vartheta)}{\vartheta^2} : \nabla_x\vartheta - \frac{\mathbf{q}(\vartheta,\nabla_x\vartheta)}{\vartheta}\cdot\nabla_x\Theta \right)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t \\
&\leq \int_\Omega \left(\frac{1}{2}\varrho_0|\mathbf{u}_0-\mathbf{U}(0,\cdot)|^2 + \mathcal{E}(\varrho_0,\vartheta_0|r(0,\cdot),\Theta(0,\cdot)) \right)\mathrm{d}x \\
&\quad+\int_0^\tau\int_\Omega \varrho\left(\partial_t\mathbf{U}+\mathbf{u}\cdot\nabla_x\mathbf{U}\right)\cdot(\mathbf{U}-\mathbf{u})\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t + \int_0^\tau\int_\Omega \varrho(\mathbf{U}-\mathbf{u})\cdot\left(\frac{\nabla_x p(r,\Theta)}{r} - \frac{\nabla_x p(\tilde r,\overline{\vartheta})}{\tilde r}\right)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t \\
&\quad+\int_0^\tau\int_\Omega (p(r,\Theta)-p(\varrho,\vartheta))\operatorname{div}\mathbf{U}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t + \int_0^\tau\int_\Omega \varrho\left(s(r,\Theta)-s(\varrho,\vartheta)\right)\left(\partial_t + u\cdot\nabla_x\Theta\right)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t \\
&\quad+\int_0^\tau\int_\Omega \left(1-\frac{\varrho}{r}\right)\left(\partial_t p(r,\Theta)+\mathbf{U}\cdot\nabla_x p(r,\Theta)\right)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t,
\end{aligned}
\tag{6.1}
$$

pour presque tout $\tau \in (0,T)$ et pour tout

$$(r-\tilde r, \Theta-\overline{\vartheta}, \mathbf{U}) \in \mathcal{C}^1_c\left([0,T]\times\overline{\Omega};\mathbb{R}^5\right) \text{ avec } r>0,\ \Theta>0,\ \mathbf{U}|_{\partial\Omega}=0, \tag{6.2}$$

où

$$\mathcal{E}(\varrho,\vartheta|r,\Theta) = H_\Theta(\varrho,\vartheta) - \partial_\varrho H_\Theta(r,\Theta)(\varrho-r) - H_\Theta(r,\Theta) \tag{6.3}$$

et

$$H_\Theta(\varrho,\vartheta) = \varrho e(\varrho,\vartheta) - \Theta\varrho s(\varrho,\vartheta). \tag{6.4}$$

Théorème 6.1
On suppose que toutes les hypothèses du théorème 5.3 sont vérifiées. Alors le système de Navier-Stokes-Fourier (4.1) - (4.11) *admet au moins une solution très faible* $(\varrho,\vartheta,\mathbf{u})$ *satisfaisant l'inégalité d'entropie relative* (6.1)*. Il s'agit donc d'une solution dissipative au sens de la définition 4.3.*

On trouve dans [25] une preuve de ce résultat dans le cas des domaines bornés. Comme pour le théorème précédent, nous faisons ici une généralisation à des domaines non bornés avec présence de forces potentielles à croissance arbitraire à l'infini. La démonstration constitue la section 6.2 de ce chapitre.

Remarque 3
(Régularité suffisante des fonctions test pour le théorème 6.1)
Il est possible d'élargir l'ensemble des fonctions test $r,\Theta,\mathbf{U}$ *employables dans l'inégalité d'entropie relative* (4.40)*. Dans le cas où* $\tilde r$ *et* F *satisfont à* (4.29) - (4.30) *et vérifient les propriétés suivantes (qui feront sens dans le prochain chapitre)*

$$\nabla_x F \in L^2\cap L^6(\Omega;\mathbb{R}^3) \tag{6.5}$$

et

$$\tilde r \in C^1_B(\overline{\Omega}),\ \mathcal{E}(\tilde r,\overline{\vartheta}|\overline{r},\overline{\vartheta}) \in L^1(\Omega), \tag{6.6}$$

alors les classes de fonctions test suivantes sont suffisantes pour que (4.40) *soit vraie :*

- *Pour que le membre de gauche de l'équation d'entropie relative soit bien défini il suffit que*

$$\mathcal{E}(r,\Theta|\overline{r},\overline{\vartheta}) \in L^\infty(0,T;L^1(\Omega)),\quad 0<\underline{\varrho}\leq r\leq\overline{\varrho}<\infty,\quad 0<\underline{\vartheta}\leq\Theta\leq\overline{\vartheta}<\infty, \tag{6.7}$$

$$\mathbf{U}\in L^\infty(0,T;L^2\cap L^6(\Omega;\mathbb{R}^3)). \tag{6.8}$$

- *Pour que le membre de droite soit bien défini, il est suffisant que*

$$\partial_t \mathbf{U} \in L^\infty(0,T;L^2\cap L^6(\Omega;\mathbb{R}^3)), \qquad \nabla_x \mathbf{U} \in L^\infty(0,T;L^2\cap L^\infty(\Omega;\mathbb{R}^{3\times 3})), \tag{6.9}$$
$$\partial_t \Theta \in L^\infty(0,T;L^2\cap L^4(\Omega;\mathbb{R})), \qquad \nabla_x \Theta \in L^\infty(0,T;L^2\cap L^\infty(\Omega;\mathbb{R}^3)), \tag{6.10}$$
$$\partial_t r \in L^\infty(0,T;L^2\cap L^3(\Omega;\mathbb{R})), \qquad \nabla_x r \in L^\infty(0,T;L^2\cap L^6(\Omega;\mathbb{R}^3)). \tag{6.11}$$

- *Enfin*

$$\mathbf{U}|_{\partial\Omega} = 0. \tag{6.12}$$

Pour justifier ces remarques, on utilise les observations suivantes : à partir de la définition 4.1 et sous les hypothèses (4.30), (7.2) et (6.7), on arrive à constater que

a) la quantité $\mathcal{E}(\varrho,\vartheta|\tilde{r},\overline{\vartheta})$ appartient à $L^\infty(0,T;L^1(\Omega))$ si et seulement si $\mathcal{E}(\varrho,\vartheta|r,\Theta)$ est dans $L^\infty(0,T;L^1(\Omega))$,

b) si $\partial_t r$, $\partial_x r$, $\partial_t\Theta$ et $\partial_x\Theta$ sont de $L^q(0,T;L^p(\Omega))$, alors $\partial_t p(r,\Theta)$ et $\partial_x p(r,\Theta)$ sont eux-mêmes dans $L^q(0,T;L^p(\Omega))$,

c) la quantité $p(r,\Theta)-p(\varrho,\vartheta)$ peut se récrire $p(r,\Theta)-p(\overline{r},\overline{\vartheta})+(p(\overline{r},\overline{\vartheta})-p(\varrho,\vartheta))$ et permet l'utilisation de la remarque précédente. On peut bien entendu procéder de la même façon avec la quantité $s(r,\Theta)-s(\varrho,\vartheta)$,

d) l'ensemble résiduel $\Omega\setminus\left\{\frac{\tilde{r}}{2}\le\varrho\le 2\tilde{r}, \frac{\overline{\vartheta}}{2}\le\vartheta\le 2\overline{\vartheta}\right\}$ est de mesure finie.

6.2 Démonstration du théorème

On rappelle que l'on travaille sur des domaines qui sont soit lipschitziens bornés, soit non bornés et uniformément lipschitziens. Dans ce dernier cas, il est supposé que notre domaine est de la forme suivante

$$\Omega = \bigcup_{s=1}^{\infty}\Omega_s, \tag{6.13}$$

où les ensembles Ω_s sont des domaines lipschitziens bornés satisfaisant $\overline{\Omega}_s\subset\Omega_{s+1}$.

On utilise les mêmes notations qu'auparavant concernant les solutions sur les domaines bornés Ω_s, c'est-à-dire que $(\varrho_s,\vartheta_s,\mathbf{u}_s)$ est une solution du système (4.1) - (4.10) sur $(0,T)\times\Omega_s$ avec des conditions initiales satisfaisant de surcroit (4.33).

6.2.1 Inégalité d'entropie relative sur les domaines Ω_s

On rappelle que les fonctions $\mathbf{U}$, $\Theta-\overline{\vartheta}$, $r-\tilde{r}$ considérées sont toutes dans $\mathcal{C}_c^\infty([0,T]\times\overline{\Omega})$ et que r et Θ sont strictement positifs. Pour la suite, on choisit un indice s suffisamment élevé pour que la fonction $\mathbf{U}$ soit aussi dans $\mathcal{C}_c^\infty([0,T]\times\overline{\Omega}_s)$.

La fonction $\varphi=\frac{|\mathbf{U}|^2}{2}$ peut donc être utilisée comme fonction test dans l'équation de bilan de masse (4.34) :

$$\int_{\Omega_s}\varrho_s\frac{|\mathbf{U}|^2}{2}\,\mathrm{d}x\Big|_0^\tau = \int_0^\tau\int_{\Omega_s}\varrho_s\mathbf{U}\cdot(\partial_t\mathbf{U}+\mathbf{u}_s\cdot\nabla_x\mathbf{U})\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t. \tag{6.14}$$

On teste l'équation de mouvement (4.35) avec $\varphi=\mathbf{U}$ et l'inégalité d'entropie (4.40) avec $\varphi=\Theta$, ce qui donne

$$\int_{\Omega_s}\varrho_s\mathbf{u}_s\cdot\mathbf{U}\,\mathrm{d}x\Big|_0^\tau = \int_0^\tau\int_{\Omega_s}\Big(\varrho_s\mathbf{u}_s\cdot(\partial_t\mathbf{U}+\mathbf{u}_s\cdot\nabla_x\mathbf{U})+p(\varrho_s,\vartheta_s)\operatorname{div}\mathbf{U}-\mathbb{S}(\vartheta_s,\nabla_x\mathbf{u}_s):\nabla\mathbf{U}+\varrho_s\mathbf{U}\cdot\nabla_x F\Big)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t \tag{6.15}$$

et

$$\begin{aligned}-\int_{\Omega_s}\varrho_s s(\varrho_s,\vartheta_s)\Theta\,\mathrm{d}x\Big|_0^\tau + \int_0^\tau\int_{\Omega_s}\frac{\Theta}{\vartheta_s}\left(\mathbb{S}(\vartheta_s,\nabla_x\mathbf{u}_s):\nabla_x\mathbf{u}_s-\frac{\mathbf{q}(\vartheta_s,\nabla_x\vartheta_s)\cdot\nabla_x\vartheta_s}{\vartheta_s}\right)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t\\ \le -\int_0^\tau\int_{\Omega_s}\left(\varrho_s s(\varrho_s,\vartheta_s)(\partial_t\Theta+\mathbf{u}_s\cdot\nabla_x\Theta)+\frac{\mathbf{q}(\vartheta_s,\nabla_x\vartheta_s)\cdot\nabla_x\Theta}{\vartheta_s}\right)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t.\end{aligned} \tag{6.16}$$

Pour finir, on revient à l'équation (4.34) que l'on teste cette fois par $\varphi = F$ et on obtient

$$\int_{\Omega_s} \varrho_s F \,\mathrm{d}x \Big|_0^\tau = \int_0^\tau \int_{\Omega_s} \varrho_s \mathbf{u}_s \cdot \nabla_s F \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t. \tag{6.17}$$

On rassemble maintenant ces quatre résultats avec l'égalité de conservation d'énergie (4.44) pour parvenir à l'inégalité suivante

$$\int_{\Omega_s} \Big(\frac{\varrho_s}{2}|\mathbf{u}_s - \mathbf{U}|^2 + H_\Theta(\varrho_s, \vartheta_s)\Big) \,\mathrm{d}x \Big|_0^\tau + \int_0^\tau \int_{\Omega_s} \frac{\Theta}{\vartheta_s} \Big(\mathbb{S}(\vartheta_s, \nabla_x \mathbf{u}_s) : \nabla_x \mathbf{u}_s - \frac{\mathbf{q}(\vartheta_s, \nabla_x \vartheta_s) \cdot \nabla_x \vartheta_s}{\vartheta_s}\Big) \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t$$
$$\leq I_1 + I_2 + I_3 + I_4 + I_5, \tag{6.18}$$

avec

$$\begin{aligned}
I_1 &= \int_0^\tau \int_{\Omega_s} \Big(\mathbb{S}(\vartheta_s, \nabla_x \mathbf{u}_s) : \nabla_x \mathbf{U} - \frac{\mathbf{q}(\vartheta_s, \nabla_x \vartheta_s) \cdot \Theta}{\vartheta_s}\Big) \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t,\\
I_2 &= \int_0^\tau \int_{\Omega_s} (\partial_t \mathbf{U} + \mathbf{u}_s \nabla_x \mathbf{U}) \cdot (\mathbf{U} - \mathbf{u}_s) \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t,\\
I_3 &= -\int_0^\tau \int_{\Omega_s} \varrho_s s(\varrho_s, \vartheta_s)(\partial_t \Theta + \mathbf{u}_s \cdot \nabla_x \Theta) \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t,\\
I_4 &= -\int_0^\tau \int_{\Omega_s} p(\varrho_s, \vartheta_s) \operatorname{div} \mathbf{U} \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t,\\
I_5 &= \int_0^\tau \int_{\Omega_s} \varrho_s \nabla_x F \cdot (\mathbf{u}_s - \mathbf{U}) \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t.
\end{aligned}$$

On rappelle que

$$H_\Theta(\varrho, \vartheta) = \varrho e(\varrho, \vartheta) - \Theta \varrho s(\varrho, \vartheta),$$

ainsi la relation de Gibbs (4.13) nous permet de déduire

$$a\partial_\varrho H_b(a, b) - H_b(a, b) = p(a, b).$$

En conséquence

$$\int_{\Omega_s} r\partial_\varrho H_\Theta(r, \Theta) - H_\Theta(r, \Theta) \,\mathrm{d}x \Big|_0^\tau = \int_0^\tau \int_{\Omega_s} \partial_t p(r, \Theta) \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t, \tag{6.19}$$

pour presque tout τ dans l'intervalle $(0, T)$. De la même manière qu'auparavant, on remarque que

$$\partial_y \partial_\varrho H_b(a, b) = \frac{1}{a}\partial_y p(a, b) - s(a, b)\partial_y b.$$

Cette dernière égalité nous permet, en testant l'équation de bilan de masse (4.34) par $-\partial_\varrho H_\Theta(r, \Theta)$, de trouver l'égalité suivante

$$\begin{aligned}
\int_{\Omega_s} \varrho_s \partial_\rho H_\Theta(r, \Theta) \,\mathrm{d}x \Big|_0^\tau &= \int_0^\tau \int_{\Omega_s} \varrho_s \Big(\partial_t \partial_\varrho H_\Theta(r, \Theta) + \mathbf{u}_s \cdot \nabla_x \partial_\varrho H_\Theta(r, \Theta)\Big) \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t\\
&= \int_0^\tau \int_{\Omega_s} \frac{\varrho_s}{r} \Big(\partial_t p(r, \Theta) - s(r, \Theta)\partial_t \Theta + \mathbf{u}_s \cdot (\nabla_x p(r, \Theta) - s(r, \Theta)\nabla_x \Theta)\Big) \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t.
\end{aligned} \tag{6.20}$$

Grâce aux résultats obtenus en (6.19) et (6.20), on peut ajouter le terme

$$-\int_{\Omega_s} \Big(\varrho_s \partial_\rho H_\Theta(r, \Theta) - r\partial_\varrho H_\Theta(r, \Theta) + H_\Theta(r, \Theta)\Big) \,\mathrm{d}x \Big|_0^\tau$$

dans le membre de gauche de (6.18). On a alors

$$\int_{\Omega_s} \left(\frac{\varrho_s}{2} |\mathbf{u}_s - \mathbf{U}|^2 + H_\Theta(\varrho_s, \vartheta_s) - \partial_\varrho H_\Theta(r,\Theta)(\varrho_s - r) - H_\Theta(r,\Theta) \right) \mathrm{d}x \Big|_0^\tau \tag{6.21}$$
$$+ \int_0^\tau \int_{\Omega_s} \frac{\Theta}{\vartheta_s} \left(\mathbb{S}(\vartheta_s, \nabla_x \mathbf{u}_s) : \nabla_x \mathbf{u}_s - \frac{\mathbf{q}(\vartheta_s, \nabla_x \vartheta_s) \cdot \nabla_x \vartheta_s}{\vartheta_s} \right) \mathrm{d}x\,\mathrm{d}t$$
$$\leq I_1 + I_2 + I_3 + I_4 + I_5 + I_6 + I_7$$

où les termes du membre de droite sont les suivants

$$\begin{aligned}
I_1 &= \int_0^\tau \int_{\Omega_s} \left(\mathbb{S}(\vartheta_s, \nabla_x \mathbf{u}_s) : \nabla_x \mathbf{U} - \frac{\mathbf{q}(\vartheta_s, \nabla_x \vartheta_s) \cdot \Theta}{\vartheta_s} \right) \mathrm{d}x\,\mathrm{d}t, \\
I_2 &= \int_0^\tau \int_{\Omega_s} (\partial_t \mathbf{U} + \mathbf{u}_s \nabla_x \mathbf{U}) \cdot (\mathbf{U} - \mathbf{u}_s)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t, \\
I_3 &= \int_0^\tau \int_{\Omega_s} \varrho_s (s(r,\Theta) - s(\varrho_s, \vartheta_s))(\partial_t \Theta + \mathbf{u}_s \cdot \nabla_x \Theta)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t, \\
I_4 &= \int_0^\tau \int_{\Omega_s} \left(1 - \frac{\varrho_s}{r} \right) \partial_t p(r,\Theta)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t, \\
I_5 &= -\int_0^\tau \int_{\Omega_s} p(\varrho_s, \vartheta_s)\,\mathrm{div}\,\mathbf{U}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t, \\
I_6 &= -\int_0^\tau \int_{\Omega_s} \varrho_s \mathbf{u}_s \cdot \left(\frac{\nabla_x p(r,\Theta)}{r} - \frac{\nabla_x p(\tilde{r}, \overline{\vartheta})}{\tilde{r}} \right) \mathrm{d}x\,\mathrm{d}t, \\
I_7 &= -\int_0^\tau \int_{\Omega_s} \varrho_s \mathbf{U} \cdot \nabla_x F\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t.
\end{aligned}$$

L'hypothèse (4.12) a été utilisée dans la réécriture des intégrales I_6 et I_7. On se propose maintenant de traiter le terme I_6, afin de récrire notre inégalité (6.21) et ainsi faire apparaître l'inégalité d'entropie relative. On procède comme suit :

$$\begin{aligned}
&\int_{\Omega_s} \varrho_s \mathbf{u}_s \cdot \left(\frac{\nabla_x p(r,\Theta)}{r} - \frac{\nabla_x p(\tilde{r}, \overline{\vartheta})}{\tilde{r}} \right) \mathrm{d}x \\
&= \int_{\Omega_s} \varrho_s (\mathbf{u}_s - \mathbf{U}) \cdot \left(\frac{\nabla_x p(r,\Theta)}{r} - \frac{\nabla_x p(\tilde{r}, \overline{\vartheta})}{\tilde{r}} \right) \mathrm{d}x + \int_{\Omega_s} \varrho_s \mathbf{U} \cdot \left(\frac{\nabla_x p(r,\Theta)}{r} - \frac{\nabla_x p(\tilde{r}, \overline{\vartheta})}{\tilde{r}} \right) \mathrm{d}x \\
&= \int_{\Omega_s} \varrho_s (\mathbf{u}_s - \mathbf{U}) \cdot \left(\frac{\nabla_x p(r,\Theta)}{r} - \frac{\nabla_x p(\tilde{r}, \overline{\vartheta})}{\tilde{r}} \right) \mathrm{d}x + \int_{\Omega_s} \varrho_s \mathbf{U} \cdot \left(\frac{\nabla_x p(r,\Theta)}{r} - \nabla_x F \right) \mathrm{d}x \\
&= \int_{\Omega_s} \left(\varrho_s (\mathbf{u}_s - \mathbf{U}) \cdot \left(\frac{\nabla_x p(r,\Theta)}{r} - \frac{\nabla_x p(\tilde{r}, \overline{\vartheta})}{\tilde{r}} \right) - \left(1 - \frac{\varrho_s}{r} \right) \mathbf{U} \cdot \nabla_x p(r,\Theta) + \mathbf{U} \cdot \nabla_x p(r,\Theta) - \varrho_s \mathbf{U} \cdot \nabla_x F \right) \mathrm{d}x \\
&= \int_{\Omega_s} \left(\varrho_s (\mathbf{u}_s - \mathbf{U}) \cdot \left(\frac{\nabla_x p(r,\Theta)}{r} - \frac{\nabla_x p(\tilde{r}, \overline{\vartheta})}{\tilde{r}} \right) - \left(1 - \frac{\varrho_s}{r} \right) \mathbf{U} \cdot \nabla_x p(r,\Theta) - p(r,\Theta)\,\mathrm{div}\,\mathbf{U} - \varrho_s \mathbf{U} \cdot \nabla_x F \right) \mathrm{d}x.
\end{aligned}$$

Il ne nous reste plus qu'à remplacer cette quantité dans (6.21)

$$\int_{\Omega_s} \left(\frac{\varrho_s}{2} |\mathbf{u}_s - \mathbf{U}|^2 + H_\Theta(\varrho_s, \vartheta_s) - \partial_\varrho H_\Theta(r,\Theta)(\varrho_s - r) - H_\Theta(r,\Theta) \right) \mathrm{d}x \Big|_0^\tau \tag{6.22}$$
$$+ \int_0^\tau \int_{\Omega_s} \frac{\Theta}{\vartheta_s} \left(\mathbb{S}(\vartheta_s, \nabla_x \mathbf{u}_s) : \nabla_x \mathbf{u}_s - \frac{\mathbf{q}(\vartheta_s, \nabla_x \vartheta_s) \cdot \nabla_x \vartheta_s}{\vartheta_s} \right) \mathrm{d}x\,\mathrm{d}t$$
$$\leq I_1 + I_2 + I_3 + I_4 + I_5 + I_6,$$

avec

$$\begin{aligned}
I_1 &= \int_0^\tau \int_{\Omega_s} \mathbb{S}(\vartheta_s, \nabla_x \mathbf{u}_s) : \nabla_x \mathbf{U} - \frac{\mathbf{q}(\vartheta_s, \nabla_x \vartheta_s) \cdot \Theta}{\vartheta_s} \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t, \\
I_2 &= \int_0^\tau \int_{\Omega_s} (\partial_t \mathbf{U} + \mathbf{u}_s \nabla_x \mathbf{U}) \cdot (\mathbf{U} - \mathbf{u}_s) \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t, \\
I_3 &= \int_0^\tau \int_{\Omega_s} \varrho_s (s(r,\Theta) - s(\varrho_s, \vartheta_s))(\partial_t \Theta + \mathbf{u}_s \cdot \nabla_x \Theta) \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t, \\
I_4 &= \int_0^\tau \int_{\Omega_s} \left(1 - \frac{\varrho_s}{r}\right) (\partial_t p(r,\Theta) + \mathbf{U} \cdot \nabla_x p(r,\Theta)) \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t, \\
I_5 &= \int_0^\tau \int_{\Omega_s} (p(r,\Theta) - p(\varrho_s, \vartheta_s)) \operatorname{div} \mathbf{U} \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t, \\
I_6 &= \int_0^\tau \int_{\Omega_s} \varrho_s (\mathbf{U} - \mathbf{u}_s) \cdot \left(\frac{\nabla_x p(r,\Theta)}{r} - \frac{\nabla_x p(\tilde{r}, \overline{\vartheta})}{\tilde{r}} \right) \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t,
\end{aligned}$$

et à constater qu'il s'agit de l'inégalité d'entropie relative (4.40) exprimée pour $(\varrho_s, \vartheta_s, \mathbf{u}_s)$ sur le domaine Ω_s.

6.2.2 Inégalité d'entropie relative sur Ω

On désire maintenant passer à la limite $s \to \infty$ dans l'équation (6.22). On observe tout d'abord que les termes intégrés dans le membre de droite sont à support compact du fait de l'appartenance de $(r, \Theta, \mathbf{U})$ à la classe (4.41). On choisit donc un indice n suffisamment élevé pour que le support de ces intégrandes soit inclus dans Ω_n. Comme les intégrandes du membre de gauche sont positifs, on obtient de (6.22)

$$\begin{aligned}
&\int_{\Omega_n} \left(\frac{\varrho_s}{2} |\mathbf{u}_s - \mathbf{U}|^2 + H_\Theta(\varrho_s, \vartheta_s) - \partial_\varrho H_\Theta(r,\Theta)(\varrho_s - r) - H_\Theta(r,\Theta) \right) \mathrm{d}x \Big|_0^\tau \\
&\quad + \int_0^\tau \int_{\Omega_n} \frac{\Theta}{\vartheta_s} \left(\mathbb{S}(\vartheta_s, \nabla_x \mathbf{u}_s) : \nabla_x \mathbf{u}_s - \frac{\mathbf{q}(\vartheta_s, \nabla_x \vartheta_s) \cdot \nabla_x \vartheta_s}{\vartheta_s} \right) \mathrm{d}x\,\mathrm{d}t \\
&\quad \leq I_1 + I_2 + I_3 + I_4 + I_5 + I_6,
\end{aligned} \tag{6.23}$$

avec

$$\begin{aligned}
I_1 &= \int_0^\tau \int_{\Omega_n} \mathbb{S}(\vartheta_s, \nabla_x \mathbf{u}_s) : \nabla_x \mathbf{U} - \frac{\mathbf{q}(\vartheta_s, \nabla_x \vartheta_s) \cdot \Theta}{\vartheta_s} \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t, \\
I_2 &= \int_0^\tau \int_{\Omega_n} (\partial_t \mathbf{U} + \mathbf{u}_s \nabla_x \mathbf{U}) \cdot (\mathbf{U} - \mathbf{u}_s) \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t, \\
I_3 &= \int_0^\tau \int_{\Omega_n} \varrho_s (s(r,\Theta) - s(\varrho_s, \vartheta_s))(\partial_t \Theta + \mathbf{u}_s \cdot \nabla_x \Theta) \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t, \\
I_4 &= \int_0^\tau \int_{\Omega_n} \left(1 - \frac{\varrho_s}{r}\right) (\partial_t p(r,\Theta) + \mathbf{U} \cdot \nabla_x p(r,\Theta)) \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t, \\
I_5 &= \int_0^\tau \int_{\Omega_n} (p(r,\Theta) - p(\varrho_s, \vartheta_s)) \operatorname{div} \mathbf{U} \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t, \\
I_6 &= \int_0^\tau \int_{\Omega_n} \varrho_s (\mathbf{U} - \mathbf{u}_s) \cdot \left(\frac{\nabla_x p(r,\Theta)}{r} - \frac{\nabla_x p(\tilde{r}, \overline{\vartheta})}{\tilde{r}} \right) \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t.
\end{aligned}$$

En utilisant les estimations (5.29) et (5.30) ainsi que les convergences (5.51) et (5.90), il est aisé de passer à la limite pour le membre de droite. Le membre de gauche est quant à lui traité grâce aux mêmes observations que dans la section 5.3. Finalement, on a pour tout n suffisamment grand

$$\begin{aligned}\int_{\Omega_n} \left(\frac{\varrho}{2}|\mathbf{u}-\mathbf{U}|^2 + H_\Theta(\varrho,\vartheta) - \partial_\varrho H_\Theta(r,\Theta)(\varrho - r) - H_\Theta(r,\Theta)\right) \mathrm{d}x\Big|_0^\tau \\ + \int_0^\tau \int_{\Omega_n} \frac{\Theta}{\vartheta}\left(\mathbb{S}(\vartheta,\nabla_x\mathbf{u}) : \nabla_x \mathbf{u} - \frac{\mathbf{q}(\vartheta,\nabla_x\vartheta)\cdot\nabla_x\vartheta}{\vartheta}\right) \mathrm{d}x\,\mathrm{d}t \\ \leq I_1 + I_2 + I_3 + I_4 + I_5 + I_6,\end{aligned} \tag{6.24}$$

avec

$$\begin{aligned}
I_1 &= \int_0^\tau \int_{\Omega_n} \mathbb{S}(\vartheta,\nabla_x\mathbf{u}) : \nabla_x\mathbf{U} - \frac{\mathbf{q}(\vartheta,\nabla_x\vartheta)\cdot\Theta}{\vartheta}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t,\\
I_2 &= \int_0^\tau \int_{\Omega_n} (\partial_t\mathbf{U} + \mathbf{u}\nabla_x\mathbf{U})\cdot(\mathbf{U}-\mathbf{u})\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t,\\
I_3 &= \int_0^\tau \int_{\Omega_n} \varrho(s(r,\Theta) - s(\varrho,\vartheta))(\partial_t\Theta + \mathbf{u}\cdot\nabla_x\Theta)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t,\\
I_4 &= \int_0^\tau \int_{\Omega_n} \left(1 - \frac{\varrho}{r}\right)(\partial_t p(r,\Theta) + \mathbf{U}\cdot\nabla_x p(r,\Theta))\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t,\\
I_5 &= \int_0^\tau \int_{\Omega_n} (p(r,\Theta) - p(\varrho,\vartheta))\,\mathrm{div}\,\mathbf{U}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t,\\
I_6 &= \int_0^\tau \int_{\Omega_n} \varrho(\mathbf{U}-\mathbf{u})\cdot\left(\frac{\nabla_x p(r,\Theta)}{r} - \frac{\nabla_x p(\tilde{r},\overline{\vartheta})}{\tilde{r}}\right)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t.
\end{aligned}$$

L'inégalité d'entropie relative est donc vérifiée pour tout n suffisamment grand, ce qui achève la démonstration du théorème 6.1.

7 Unicité forte-faible

Sommaire

7.1 Introduction et résultat obtenu

7.1.1 Introduction

Dans ce chapitre, on se propose de montrer l'unicité forte-faible pour les équations de Navier-Stokes-Fourier décrites dans le chapitre introductif de cette partie. Le principe d'unicité forte-faible stipule que s'il existe une solution faible et une solution forte issues des mêmes données initiales, alors elles coïncident. Plus précisément, on démontre que toute solution dissipative coïncide avec la solution forte issue des mêmes données initiales tant que cette dernière existe.

Pour montrer que les solutions dissipative dont l'existence a été montrée au cours des chapitres 5 et 6 respectent le principe d'unicité forte-faible, on utilise l'inégalité d'entropie relative mise en place dans le chapitre précédent. Pour ce faire, nous devons supposer que la densité à l'état d'équilibre est constante. Le résultat est obtenu en employant les solutions fortes issues des mêmes données initiales comme fonction test dans l'inégalité d'entropie relative.

Ce chapitre généralise à une large classe de domaines non bornés le résultat d'unicité forte-faible démontré dans [25] pour un domaine borné.

Les travaux exposés dans ce chapitre ont été l'objet de l'article [44] accepté pour publication.

7.1.2 Présentation du résultat

Avant d'énoncer le théorème d'unicité forte-faible, rappelons le concept de solution forte qui est essentiel pour ce prochain résultat.

Définition 7.1 (Solution forte)
On dit qu'un triplet $(\tilde{\varrho}, \tilde{\vartheta}, \tilde{\mathbf{u}})$ *est une solution forte du système de Navier-Stokes-Fourier* (4.1) - (4.11) *sur* $(0,T)\times\Omega$ *si*

- $\tilde{\varrho},\ \tilde{\vartheta},\ \tilde{\mathbf{u}}$ *vérifient les équations* (4.1) - (4.11),
- $\tilde{\varrho} \in C^1([0,T]\times\overline{\Omega})$,
- $\tilde{\vartheta},\ \partial_t\tilde{\vartheta},\ \nabla_x^2\tilde{\vartheta} \in C([0,T]\times\overline{\Omega})$,
- $\tilde{\mathbf{u}},\ \partial_t\tilde{\mathbf{u}},\ \nabla_x^2\tilde{\mathbf{u}} \in C([0,T]\times\overline{\Omega})$,
- $\tilde{\varrho}(t,x) \geq \underline{\varrho} > 0$ *pour tout* (t,x),
- $\tilde{\vartheta}(t,x) \geq \underline{\vartheta} > 0$ *pour tout* (t,x).

Théorème 7.1 (Unicité forte-faible)
On suppose que toutes les hypothèses du théorème 5.3 sont vérifiées, que la fonction P *décrite en* (4.18) *est deux fois continument dérivable sur* $(0,\infty)$ *et que de plus*

$$\nabla_x F \in L^2 \cap L^6(\Omega;\mathbb{R}^3) \tag{7.1}$$

et

$$\tilde{r} \in C^1_B(\overline{\Omega}), \;\; \mathcal{E}(\tilde{r}, \overline{\vartheta}|\overline{r}, \overline{\vartheta}) \in L^1(\Omega) \tag{7.2}$$

pour un certain $\overline{r} > 0$.

Soit $(\varrho, \vartheta, \mathbf{u})$ *une solution dissipative du sytème de Navier-Stokes-Fourier* (4.1) - (4.11). *Si* $(\tilde{\varrho}, \tilde{\vartheta}, \tilde{\mathbf{u}})$ *est une solution classique du système* (4.1) - (4.11) *sur* $(0,T) \times \Omega$ *qui satisfait l'inégalité de dissipation* (4.37) *vérifiant*

$$\begin{aligned} 0 < \underline{\vartheta} \leq \tilde{\vartheta} \leq \overline{\vartheta} < \infty, \quad 0 < \underline{\varrho} \leq \tilde{\varrho} \leq \overline{\varrho} < \infty, \quad \tilde{\mathbf{u}} \in L^\infty(0,T; L^2 \cap L^\infty(\Omega;\mathbb{R}^3)), \\ \partial_t \tilde{\varrho}, \partial_t \tilde{\vartheta}, \partial_t \tilde{\mathbf{u}}, \nabla_x \tilde{\varrho}, \nabla_x^m \tilde{\vartheta}, \nabla_x^m \tilde{\mathbf{u}} \in L^\infty(0,T; L^2 \cap L^\infty(\Omega;\mathbb{R}^3)), \quad m = 1,2 \end{aligned} \tag{7.3}$$

et qui émane des mêmes données initiales, alors

$$(\varrho, \vartheta, \mathbf{u}) = (\tilde{\varrho}, \tilde{\vartheta}, \tilde{\mathbf{u}}) \text{ sur } [0,T] \times \overline{\Omega}. \tag{7.4}$$

7.2 Inégalité d'entropie relative testée avec une solution forte

On se propose maintenant de montrer l'unicité fort-faible en écrivant l'inégalité d'entropie relative (4.40) pour $r = \tilde{\varrho}$, $\Theta = \tilde{\vartheta}$ et $\mathbf{U} = \tilde{\mathbf{u}}$, où $(\tilde{\varrho}, \tilde{\vartheta}, \tilde{\mathbf{u}})$ est une solution forte du système de Navier-Stokes-Fourier aux données initiales

$$\tilde{\varrho}(0,\cdot) = \varrho_0, \;\; \tilde{\mathbf{u}}(0,\cdot) = \mathbf{u}_0, \;\; \tilde{\vartheta}(0,\cdot) = \vartheta_0$$

qui satisfont en outre l'inégalité de dissipation d'énergie (4.27) et possèdent les propriétés (7.3). Il s'ensuit que le terme comportant les conditions initiales dans le membre de droite de (4.27) va disparaitre.

On cherche ensuite à appliquer le lemme de Gronwall à une forme remaniée de l'inégalité d'entropie relative pour arriver à montrer que

$$\varrho \equiv \tilde{\varrho}, \;\; \vartheta \equiv \tilde{\vartheta} \text{ et } \mathbf{u} \equiv \tilde{\mathbf{u}}.$$

On commence donc par récrire cette équation (4.40) afin de pouvoir y employer le lemme de Gronwall.

Lemme 33
On suppose que toutes les hypothèses du théorème d'unicité forte-faible 7.1 sont vérifiées. Alors on a

$$\begin{aligned}
&\int_\Omega \left(\frac{1}{2} \varrho |\mathbf{u} - \tilde{\mathbf{u}}|^2 + \mathcal{E}(\varrho, \vartheta | \tilde{\varrho}, \tilde{\vartheta}) \right)(\tau, \cdot) \, \mathrm{d}x \\
&+ \int_0^\tau \int_\Omega \Bigg(\frac{\tilde{\vartheta}}{\vartheta} \mathbb{S}(\vartheta, \nabla_x \mathbf{u}) : \nabla_x \mathbf{u} - \mathbb{S}(\vartheta, \nabla_x \mathbf{u}) : \nabla_x \tilde{\mathbf{u}} + \mathbb{S}(\tilde{\vartheta}, \nabla_x \tilde{\mathbf{u}}) : \nabla_x (\tilde{\mathbf{u}} - \mathbf{u}) + \frac{\vartheta - \tilde{\vartheta}}{\tilde{\vartheta}} \mathbb{S}(\tilde{\vartheta}, \nabla_x \tilde{\mathbf{u}}) : \nabla_x \tilde{\mathbf{u}} \Bigg) \mathrm{d}x \, \mathrm{d}t \\
&- \int_0^\tau \int_\Omega \Bigg(\frac{\tilde{\vartheta}}{\vartheta} \frac{\mathbf{q}(\vartheta, \nabla_x \vartheta)}{\vartheta} \cdot \nabla_x \vartheta - \frac{\mathbf{q}(\vartheta, \nabla_x \vartheta)}{\vartheta} \cdot \nabla_x \tilde{\vartheta} + \frac{\mathbf{q}(\tilde{\vartheta}, \nabla_x \tilde{\vartheta})}{\vartheta} \cdot (\nabla_x \tilde{\vartheta} - \vartheta) + \frac{\vartheta - \tilde{\vartheta}}{\tilde{\vartheta}} \frac{\mathbf{q}(\tilde{\vartheta}, \nabla_x \tilde{\vartheta})}{\tilde{\vartheta}} \cdot \nabla_x \tilde{\vartheta} \Bigg) \mathrm{d}x \, \mathrm{d}t \\
&\leq \int_0^\tau \int_\Omega ((\varrho - \tilde{\varrho}) \partial_t \tilde{\mathbf{u}} + (\varrho \mathbf{u} - \tilde{\varrho} \tilde{\mathbf{u}}) \cdot \nabla_x \tilde{\mathbf{u}}) \cdot (\tilde{\mathbf{u}} - \mathbf{u}) \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}t \\
&\quad + \int_0^\tau \int_\Omega (\varrho - \tilde{\varrho}) (\tilde{\mathbf{u}} - \mathbf{u}) \cdot \left(\frac{\nabla_x p(\tilde{\varrho}, \tilde{\vartheta})}{\tilde{\varrho}} - \frac{\nabla_x p(\tilde{r}, \overline{\vartheta})}{\tilde{r}} \right) \mathrm{d}x \, \mathrm{d}t \\
&\quad - \int_0^\tau \int_\Omega \Big(\big(\mathcal{S}(\varrho, \vartheta) - (\varrho - \tilde{\varrho}) \partial_\varrho \mathcal{S}(\tilde{\varrho}, \tilde{\vartheta}) - (\vartheta - \tilde{\vartheta}) \partial_\vartheta p(\tilde{\varrho}, \tilde{\vartheta}) - p(\tilde{\varrho}, \tilde{\vartheta}) \big) \big(\partial_t \tilde{\vartheta} + \tilde{\mathbf{u}} \cdot \nabla_x \tilde{\vartheta} \big) \Big) \mathrm{d}x \, \mathrm{d}t \\
&\quad - \int_0^\tau \int_\Omega \Big(\big(p(\varrho, \vartheta) - (\varrho - \tilde{\varrho}) \partial_\varrho p(\tilde{\varrho}, \tilde{\vartheta}) - (\vartheta - \tilde{\vartheta}) \partial_\vartheta p(\tilde{\varrho}, \tilde{\vartheta}) - p(\tilde{\varrho}, \tilde{\vartheta}) \big) \operatorname{div} \tilde{\mathbf{u}} \Big) \mathrm{d}x \, \mathrm{d}t \\
&\quad + \int_0^\tau \int_\Omega \Big(\varrho \left(s(\tilde{\varrho}, \tilde{\vartheta}) - s(\varrho, \vartheta) \right) (\mathbf{u} - \tilde{\mathbf{u}}) \cdot \nabla_x \tilde{\vartheta} \Big) \mathrm{d}x \, \mathrm{d}t,
\end{aligned} \tag{7.5}$$

avec

$$\mathcal{S}(\varrho, \vartheta) = \varrho s(\varrho, \vartheta).$$

La preuve de ce lemme est constituée de trois étapes.
Étape 1. L'inégalité d'entropie relative (4.40) écrite pour $(\tilde{\varrho}, \tilde{\vartheta})$ se lit

$$\begin{aligned}
&\int_\Omega \left(\frac{1}{2}\varrho|\mathbf{u}-\tilde{\mathbf{u}}|^2 + \mathcal{E}(\varrho,\vartheta|\tilde{\varrho},\tilde{\vartheta})\right)(\tau,\cdot)\,\mathrm{d}x \\
&+\int_0^\tau\int_\Omega \left(\tilde{\vartheta}\frac{\mathbb{S}(\vartheta,\nabla_x\mathbf{u})}{\vartheta} : \nabla_x\mathbf{u} - \mathbb{S}(\vartheta,\nabla_x\mathbf{u}) : \nabla_x\tilde{\mathbf{u}}\right)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t \\
&-\int_0^\tau\int_\Omega \left(\tilde{\vartheta}\frac{\mathbf{q}(\vartheta,\nabla_x\vartheta)}{\vartheta^2} : \nabla_x\vartheta - \frac{\mathbf{q}(\vartheta,\nabla_x\vartheta)}{\vartheta}\cdot\nabla_x\tilde{\vartheta}\right)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t \\
&\leq \int_0^\tau\int_\Omega \varrho\left(\partial_t\tilde{\mathbf{u}} + \mathbf{u}\cdot\nabla_x\tilde{\mathbf{u}}\right)\cdot(\tilde{\mathbf{u}}-\mathbf{u})\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t + \int_0^\tau\int_\Omega \varrho(\tilde{\mathbf{u}}-\mathbf{u})\cdot\left(\frac{\nabla_x p(\tilde{\varrho},\tilde{\vartheta})}{\tilde{\varrho}} - \frac{\nabla_x p(\tilde{r},\overline{\vartheta})}{\tilde{r}}\right)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t \\
&\quad+\int_0^\tau\int_\Omega \left(p(\tilde{\varrho},\tilde{\vartheta}) - p(\varrho,\vartheta)\right)\operatorname{div}\tilde{\mathbf{u}}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t + \int_0^\tau\int_\Omega\left(\varrho\left(s(\tilde{\varrho},\tilde{\vartheta}) - s(\varrho,\vartheta)\right)\left(\partial_t\tilde{\vartheta} + \tilde{\mathbf{u}}\cdot\nabla_x\tilde{\vartheta}\right)\right)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t \\
&\quad+\int_0^\tau\int_\Omega \varrho\Big(s(\tilde{\varrho},\tilde{\vartheta}) - s(\varrho,\vartheta)(\mathbf{u}-\tilde{\mathbf{u}})\cdot\nabla_x\tilde{\vartheta}\Big)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t + \int_0^\tau\int_\Omega\left(1-\frac{\varrho}{\tilde{\varrho}}\right)\left(\partial_t p(\tilde{\varrho},\tilde{\vartheta}) + \tilde{\mathbf{u}}\cdot\nabla_x p(\tilde{\varrho},\tilde{\vartheta})\right)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t,
\end{aligned} \tag{7.6}$$

On définit la quantité

$$A := \left(\tilde{\varrho}(\partial_t\tilde{\mathbf{u}} + \tilde{\mathbf{u}}\cdot\nabla_x\tilde{\mathbf{u}}) + \nabla_x p(\tilde{\varrho},\tilde{\vartheta}) - \frac{\tilde{\varrho}}{\tilde{r}}\nabla_x p(\tilde{r},\overline{\vartheta})\right)\cdot(\mathbf{u}-\tilde{\mathbf{u}}) + \mathbb{S}(\tilde{\vartheta},\nabla_x\tilde{\mathbf{u}}) : \nabla_x(\mathbf{u}-\tilde{\mathbf{u}})$$

dont l'intégrale sur Ω se révèle être nulle à la vue de l'équation de bilan du moment couplée aux propriétés de la définition des solutions fortes et à (7.3). On peut donc soustraire le terme $\int_0^\tau\int_\Omega A\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t$ dans le membre de droite de notre inégalité (7.6) et en arranger les termes pour obtenir

$$\begin{aligned}
&\int_\Omega \left(\frac{1}{2}\varrho|\mathbf{u}-\tilde{\mathbf{u}}|^2 + \mathcal{E}(\varrho,\vartheta|\tilde{\varrho},\tilde{\vartheta})\right)(\tau,\cdot)\,\mathrm{d}x \\
&+\int_0^\tau\int_\Omega \left(\tilde{\vartheta}\frac{\mathbb{S}(\vartheta,\nabla_x\mathbf{u})}{\vartheta} : \nabla_x\mathbf{u} - \mathbb{S}(\vartheta,\nabla_x\mathbf{u}) : \nabla_x\tilde{\mathbf{u}} + \mathbb{S}(\tilde{\vartheta},\nabla_x\tilde{\mathbf{u}}) : \nabla_x(\mathbf{u}-\tilde{\mathbf{u}})\right)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t \\
&-\int_0^\tau\int_\Omega \left(\tilde{\vartheta}\frac{\mathbf{q}(\vartheta,\nabla_x\vartheta)}{\vartheta^2} : \nabla_x\vartheta - \frac{\mathbf{q}(\vartheta,\nabla_x\vartheta)}{\vartheta}\cdot\nabla_x\tilde{\vartheta}\right)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t \\
&\leq \int_0^\tau\int_\Omega \left((\varrho-\tilde{\varrho})\partial_t\tilde{\mathbf{u}} + (\varrho\mathbf{u}-\tilde{\varrho}\tilde{\mathbf{u}})\cdot\nabla_x\tilde{\mathbf{u}}\right)\cdot(\tilde{\mathbf{u}}-\mathbf{u})\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t \\
&\quad+\int_0^\tau\int_\Omega (\varrho-\tilde{\varrho})(\tilde{\mathbf{u}}-\mathbf{u})\cdot\left(\frac{\nabla_x p(\tilde{\varrho},\tilde{\vartheta})}{\tilde{\varrho}} - \frac{\nabla_x p(\tilde{r},\overline{\vartheta})}{\tilde{r}}\right)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t \\
&\quad+\int_0^\tau\int_\Omega \left(p(\tilde{\varrho},\tilde{\vartheta}) - p(\varrho,\vartheta)\right)\operatorname{div}\tilde{\mathbf{u}}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t + \int_0^\tau\int_\Omega\left(\varrho\left(s(\tilde{\varrho},\tilde{\vartheta}) - s(\varrho,\vartheta)\right)\left(\partial_t\tilde{\vartheta} + \tilde{\mathbf{u}}\cdot\nabla_x\tilde{\vartheta}\right)\right)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t \\
&\quad+\int_0^\tau\int_\Omega \varrho\Big(s(\tilde{\varrho},\tilde{\vartheta}) - s(\varrho,\vartheta)(\mathbf{u}-\tilde{\mathbf{u}})\cdot\nabla_x\tilde{\vartheta}\Big)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t + \int_0^\tau\int_\Omega\left(1-\frac{\varrho}{\tilde{\varrho}}\right)\left(\partial_t p(\tilde{\varrho},\tilde{\vartheta}) + \tilde{\mathbf{u}}\cdot\nabla_x p(\tilde{\varrho},\tilde{\vartheta})\right)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t.
\end{aligned} \tag{7.7}$$

Étape 2. On injecte maintenant la quantité

$$B := (\vartheta-\tilde{\vartheta})\left(\tilde{\varrho}(\partial_t s(\tilde{\varrho},\tilde{\vartheta}) + \tilde{\mathbf{u}}\cdot\nabla_x s(\tilde{\varrho},\tilde{\vartheta})) - \frac{\mathbb{S}(\tilde{\vartheta},\nabla_x\tilde{\mathbf{u}}) : \nabla_x\tilde{\mathbf{u}}}{\tilde{\vartheta}} + \frac{\mathbf{q}(\tilde{\vartheta},\nabla_x\tilde{\vartheta})\cdot\nabla_x\tilde{\vartheta}}{\tilde{\vartheta}^2}\right) + \frac{\mathbf{q}(\tilde{\vartheta},\nabla_x\tilde{\vartheta})\cdot\nabla_x(\tilde{\vartheta}-\vartheta)}{\tilde{\vartheta}}$$

dans le membre de gauche de l'inégalité précédente. On remarque grâce à l'équation (4.3) et aux mêmes propriétés que dans le cas de la quantité A que

$$\int_0^\tau\int_\Omega B\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t = 0,$$

ce qui nous permet, en réarrangeant les termes, d'avoir

$$\begin{aligned}
&\int_\Omega \left(\frac{1}{2}\varrho|\mathbf{u}-\tilde{\mathbf{u}}|^2 + \mathcal{E}(\varrho,\vartheta|\tilde{\varrho},\tilde{\vartheta})\right)(\tau,\cdot)\,\mathrm{d}x \\
&+\int_0^\tau\int_\Omega \left(\tilde{\vartheta}\frac{\mathbb{S}(\vartheta,\nabla_x\mathbf{u})}{\vartheta} : \nabla_x\mathbf{u} - \mathbb{S}(\vartheta,\nabla_x\mathbf{u}) : \nabla_x\tilde{\mathbf{u}} + \mathbb{S}(\tilde{\vartheta},\nabla_x\tilde{\mathbf{u}}) : \nabla_x(\mathbf{u}-\tilde{\mathbf{u}}) + \frac{\vartheta-\tilde{\vartheta}}{\vartheta}\mathbb{S}(\tilde{\vartheta},\nabla_x\tilde{\mathbf{u}}) : \nabla_x\tilde{\mathbf{u}}\right)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t \\
&-\int_0^\tau\int_\Omega \left(\tilde{\vartheta}\frac{\mathbf{q}(\vartheta,\nabla_x\vartheta)}{\vartheta^2} : \nabla_x\vartheta - \frac{\mathbf{q}(\vartheta,\nabla_x\vartheta)}{\vartheta}\cdot\nabla_x\tilde{\vartheta} + \frac{\mathbf{q}(\tilde{\vartheta},\nabla_x\tilde{\vartheta})\cdot\nabla_x(\tilde{\vartheta}-\vartheta)}{\tilde{\vartheta}} + \frac{\vartheta-\tilde{\vartheta}}{\vartheta}\frac{\mathbf{q}(\tilde{\vartheta},\nabla_x\tilde{\vartheta})\cdot\nabla_x\tilde{\vartheta}}{\tilde{\vartheta}^2}\right)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t \\
&\le \int_0^\tau\int_\Omega ((\varrho-\tilde{\varrho})\partial_t\tilde{\mathbf{u}} + (\varrho\mathbf{u}-\tilde{\varrho}\tilde{\mathbf{u}})\cdot\nabla_x\tilde{\mathbf{u}})\cdot(\tilde{\mathbf{u}}-\mathbf{u})\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t \\
&\quad+\int_0^\tau\int_\Omega (\varrho-\tilde{\varrho})(\tilde{\mathbf{u}}-\mathbf{u})\cdot\left(\frac{\nabla_x p(\tilde{\varrho},\tilde{\vartheta})}{\tilde{\varrho}} - \frac{\nabla_x p(\tilde{r},\overline{\vartheta})}{\tilde{r}}\right)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t \\
&\quad+\int_0^\tau\int_\Omega \left(p(\tilde{\varrho},\tilde{\vartheta}) - p(\varrho,\vartheta)\right)\operatorname{div}\tilde{\mathbf{u}}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t + \int_0^\tau\int_\Omega \left(\varrho\left(s(\tilde{\varrho},\tilde{\vartheta}) - s(\varrho,\vartheta)\right)\left(\partial_t\tilde{\vartheta} + \tilde{\mathbf{u}}\cdot\nabla_x\tilde{\vartheta}\right)\right)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t \\
&\quad+\int_0^\tau\int_\Omega \varrho\left(s(\tilde{\varrho},\tilde{\vartheta}) - s(\varrho,\vartheta)(\mathbf{u}-\tilde{\mathbf{u}})\cdot\nabla_x\tilde{\vartheta}\right)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t + \int_0^\tau\int_\Omega \left(1-\frac{\varrho}{\tilde{\varrho}}\right)\left(\partial_t p(\tilde{\varrho},\tilde{\vartheta}) + \tilde{\mathbf{u}}\cdot\nabla_x p(\tilde{\varrho},\tilde{\vartheta})\right)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t \\
&\quad+\int_0^\tau\int_\Omega \left(\tilde{\varrho}(\vartheta-\tilde{\vartheta})(\partial_t s(\tilde{\varrho},\tilde{\vartheta}) + \tilde{\mathbf{u}}\cdot\nabla_x s(\tilde{\varrho},\tilde{\vartheta}))\right)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t.
\end{aligned} \tag{7.8}$$

Étape 3. On récrit tout d'abord les deux derniers termes de notre dernière inégalité de la façon suivante

$$\begin{aligned}
&\left(1-\frac{\varrho}{\tilde{\varrho}}\right)\left(\partial_t p(\tilde{\varrho},\tilde{\vartheta}) + \tilde{\mathbf{u}}\cdot\nabla_x p(\tilde{\varrho},\tilde{\vartheta})\right) + \tilde{\varrho}(\vartheta-\tilde{\vartheta})(\partial_t s(\tilde{\varrho},\tilde{\vartheta}) + \tilde{\mathbf{u}}\cdot\nabla_x s(\tilde{\varrho},\tilde{\vartheta})) \\
&\qquad= \left(\left(1-\frac{\varrho}{\tilde{\varrho}}\right)\partial_\varrho p(\tilde{\varrho},\tilde{\vartheta}) + \tilde{\varrho}(\vartheta-\tilde{\vartheta})\partial_\varrho s(\tilde{\varrho},\tilde{\vartheta})\right)(\partial_t\tilde{\varrho} + \tilde{\mathbf{u}}\cdot\nabla_x\tilde{\varrho}) \\
&\qquad+ \left(\left(1-\frac{\varrho}{\tilde{\varrho}}\right)\partial_\vartheta p(\tilde{\varrho},\tilde{\vartheta}) + \tilde{\varrho}(\vartheta-\tilde{\vartheta})\partial_\vartheta s(\tilde{\varrho},\tilde{\vartheta})\right)\left(\partial_t\tilde{\vartheta} + \tilde{\mathbf{u}}\cdot\nabla_x\tilde{\vartheta}\right).
\end{aligned}$$

On reformule ensuite les termes du membre de droite comme suit, grâce à l'équation de bilan de masse (4.1) et la relation de Gibbs (4.13) à travers son équivalent

$$\frac{1}{\varrho}\partial_\vartheta p(\varrho,\vartheta) = -\varrho\partial_\varrho s(\varrho,\vartheta).$$

Cela nous permet d'avoir

$$\left(\left(1-\frac{\varrho}{\tilde{\varrho}}\right)\partial_\varrho p(\tilde{\varrho},\tilde{\vartheta}) + \tilde{\varrho}(\vartheta-\tilde{\vartheta})\partial_\varrho s(\tilde{\varrho},\tilde{\vartheta})\right)(\partial_t\tilde{\varrho} + \tilde{\mathbf{u}}\cdot\nabla_x\tilde{\varrho}) = \left((\varrho-\tilde{\varrho})\partial_\varrho p(\tilde{\varrho},\tilde{\vartheta}) + (\vartheta-\tilde{\vartheta})\partial_\vartheta p(\tilde{\varrho},\tilde{\vartheta})\right)\operatorname{div}\tilde{\mathbf{u}},$$

et

$$\begin{aligned}
&\left(\left(1-\frac{\varrho}{\tilde{\varrho}}\right)\partial_\vartheta p(\tilde{\varrho},\tilde{\vartheta}) + \tilde{\varrho}(\vartheta-\tilde{\vartheta})\partial_\vartheta s(\tilde{\varrho},\tilde{\vartheta})\right)\left(\partial_t\tilde{\vartheta} + \tilde{\mathbf{u}}\cdot\nabla_x\tilde{\vartheta}\right) \\
&= \tilde{\varrho}\left((\varrho-\tilde{\varrho})\partial_\varrho s(\tilde{\varrho},\tilde{\vartheta}) + (\vartheta-\tilde{\vartheta})\partial_\vartheta s(\tilde{\varrho},\tilde{\vartheta})\right)\left(\partial_t\tilde{\vartheta} + \tilde{\mathbf{u}}\cdot\nabla_x\tilde{\vartheta}\right) \\
&= (\tilde{\varrho}-\varrho)\left((\varrho-\tilde{\varrho})\partial_\varrho s(\tilde{\varrho},\tilde{\vartheta}) + (\vartheta-\tilde{\vartheta})\partial_\vartheta s(\tilde{\varrho},\tilde{\vartheta})\right)\left(\partial_t\tilde{\vartheta} + \tilde{\mathbf{u}}\cdot\nabla_x\tilde{\vartheta}\right) \\
&\quad+ \varrho\left((\varrho-\tilde{\varrho})\partial_\varrho s(\tilde{\varrho},\tilde{\vartheta}) + (\vartheta-\tilde{\vartheta})\partial_\vartheta s(\tilde{\varrho},\tilde{\vartheta})\right)\left(\partial_t\tilde{\vartheta} + \tilde{\mathbf{u}}\cdot\nabla_x\tilde{\vartheta}\right) \\
&= \left(\tilde{\varrho}s(\tilde{\varrho},\tilde{\vartheta}) - \varrho s(\tilde{\varrho},\tilde{\vartheta}) + (\varrho-\tilde{\varrho})\partial_\varrho\mathcal{S}(\tilde{\varrho},\tilde{\vartheta}) + (\vartheta-\tilde{\vartheta})\partial_\vartheta\mathcal{S}(\tilde{\varrho},\tilde{\vartheta})\right)\left(\partial_t\tilde{\vartheta} + \tilde{\mathbf{u}}\cdot\nabla_x\tilde{\vartheta}\right),
\end{aligned}$$

en remarquant que

$$\partial_\varrho\mathcal{S}(\tilde{\varrho},\tilde{\vartheta}) = s(\tilde{\varrho},\tilde{\vartheta}) + \tilde{\varrho}\partial_\varrho s(\tilde{\varrho},\tilde{\vartheta}) \text{ et } \partial_\vartheta\mathcal{S}(\tilde{\varrho},\tilde{\vartheta}) = \tilde{\varrho}\partial_\vartheta s(\tilde{\varrho},\tilde{\vartheta}).$$

Pour finir, on utilise ces résultats dans l'inégalité (7.8), on arrive à l'inégalité voulue, (7.5), ce qui clôt la preuve du lemme 33.

7.3 Inégalité d'entropie relative remaniée

7.3.1 Termes de viscosité

On commence par étudier le cas où ϑ appartient à $(0,\tilde{\vartheta})$. Pour cela, on remarque d'abord que la forme quadratique $\mathbb{Z}\mapsto\mathbb{S}(\vartheta,\mathbb{Z}):\mathbb{Z}$ est convexe ce qui nous donne

$$\mathbb{S}(\vartheta,\mathbb{Z}+\mathbb{H}):(\mathbb{Z}+\mathbb{H})-\mathbb{S}(\vartheta,\mathbb{Z}):\mathbb{Z}\geq 2\mathbb{S}(\vartheta,\mathbb{Z}):\mathbb{H}.$$

On peut donc procéder au calcul suivant

$$\begin{aligned}
&1_{\{\vartheta<\tilde{\vartheta}\}}\left(\frac{\tilde{\vartheta}}{\vartheta}\mathbb{S}(\vartheta,\nabla_x\mathbf{u}):\nabla_x\mathbf{u}-\mathbb{S}(\vartheta,\nabla_x\mathbf{u}):\nabla_x\tilde{\mathbf{u}}+\mathbb{S}(\tilde{\vartheta},\nabla_x\tilde{\mathbf{u}}):\nabla_x(\tilde{\mathbf{u}}-\mathbf{u})+\frac{\vartheta-\tilde{\vartheta}}{\tilde{\vartheta}}\mathbb{S}(\tilde{\vartheta},\nabla_x\tilde{\mathbf{u}}):\nabla_x\tilde{\mathbf{u}}\right)\\
&=1_{\{\vartheta<\tilde{\vartheta}\}}\left(\frac{\tilde{\vartheta}-\vartheta}{\vartheta}\mathbb{S}(\vartheta,\nabla_x\mathbf{u}):\nabla_x\mathbf{u}+\big(\mathbb{S}(\vartheta,\nabla_x\mathbf{u})-\mathbb{S}(\tilde{\vartheta},\nabla_x\tilde{\mathbf{u}})\big):\nabla_x(\mathbf{u}-\tilde{\mathbf{u}})+\frac{\tilde{\vartheta}-\vartheta}{\vartheta}\mathbb{S}(\tilde{\vartheta},\nabla_x\tilde{\mathbf{u}}):\nabla_x\tilde{\mathbf{u}}\right)\\
&\geq 1_{\{\vartheta<\tilde{\vartheta}\}}\left((\mathbb{S}(\vartheta,\nabla\mathbf{u})-\mathbb{S}(\vartheta,\nabla_x\tilde{\mathbf{u}})):\nabla_x(\mathbf{u}-\tilde{\mathbf{u}})+\frac{\tilde{\vartheta}-\vartheta}{\tilde{\vartheta}}\left(\mathbb{S}(\vartheta,\nabla_x\mathbf{u}):\nabla_x\mathbf{u}-\mathbb{S}(\vartheta,\nabla_x\tilde{\mathbf{u}}):\nabla_x\tilde{\mathbf{u}}\right)\right)\\
&+1_{\{\vartheta<\tilde{\vartheta}\}}\left(\big(\mathbb{S}(\vartheta,\nabla_x\tilde{\mathbf{u}})-\mathbb{S}(\tilde{\vartheta},\nabla_x\tilde{\mathbf{u}})\big):\nabla_x(\mathbf{u}-\tilde{\mathbf{u}})+\frac{\tilde{\vartheta}-\vartheta}{\tilde{\vartheta}}\big(\mathbb{S}(\vartheta,\nabla_x\tilde{\mathbf{u}})-\mathbb{S}(\tilde{\vartheta},\nabla_x\tilde{\mathbf{u}})\big):\nabla_x\tilde{\mathbf{u}}\right)\\
&\geq 1_{\{\vartheta<\tilde{\vartheta}\}}\frac{\mu(\vartheta)}{2}|\mathbb{T}(\nabla_x(\mathbf{u}-\tilde{\mathbf{u}}))|^2+1_{\{0<\vartheta<\tilde{\vartheta}\}}2\frac{\tilde{\vartheta}-\vartheta}{\tilde{\vartheta}}\mathbb{S}(\vartheta,\nabla_x\tilde{\mathbf{u}}):\nabla_x(\mathbf{u}-\tilde{\mathbf{u}})\\
&+1_{\{\vartheta<\tilde{\vartheta}\}}\left(\big(\mathbb{S}(\vartheta,\nabla\tilde{\mathbf{u}})-\mathbb{S}(\tilde{\vartheta},\nabla_x\tilde{\mathbf{u}})\big):\nabla_x(\mathbf{u}-\tilde{\mathbf{u}})+\frac{\tilde{\vartheta}-\vartheta}{\vartheta}\big(\mathbb{S}(\vartheta,\nabla\tilde{\mathbf{u}})-\mathbb{S}(\tilde{\vartheta},\nabla_x\tilde{\mathbf{u}})\big):\nabla_x\tilde{\mathbf{u}}\right)\\
&\geq 1_{\{\vartheta<\tilde{\vartheta}\}}\frac{\mu(\vartheta)}{2}|\mathbb{T}(\nabla_x(\mathbf{u}-\tilde{\mathbf{u}}))|^2\\
&-1_{\{\vartheta<\tilde{\vartheta}\}}\left|\frac{\tilde{\vartheta}-\vartheta}{\tilde{\vartheta}}\big(\mathbb{S}(\vartheta,\nabla_x\tilde{\mathbf{u}})-\mathbb{S}(\tilde{\vartheta}),\nabla_x\tilde{\mathbf{u}})\big):\nabla_x\tilde{\mathbf{u}}+\left(\mathbb{S}(\vartheta,\nabla_x\tilde{\mathbf{u}})-\mathbb{S}(\tilde{\vartheta},\nabla_x\tilde{\mathbf{u}})+2\frac{\tilde{\vartheta}-\vartheta}{\tilde{\vartheta}}\mathbb{S}(\vartheta,\nabla_x\tilde{\mathbf{u}})\right):\nabla_x(\mathbf{u}-\tilde{\mathbf{u}})\right|.
\end{aligned}$$

On passe au cas où $\vartheta\geq\tilde{\vartheta}$

$$\begin{aligned}
&1_{\{\vartheta\geq\tilde{\vartheta}\}}\left(\frac{\tilde{\vartheta}}{\vartheta}\mathbb{S}(\vartheta,\nabla_x\mathbf{u}):\nabla_x\mathbf{u}-\mathbb{S}(\vartheta,\nabla_x\mathbf{u}):\nabla_x\tilde{\mathbf{u}}+\mathbb{S}(\tilde{\vartheta},\nabla_x\tilde{\mathbf{u}}):\nabla_x(\tilde{\mathbf{u}}-\mathbf{u})+\frac{\vartheta-\tilde{\vartheta}}{\tilde{\vartheta}}\mathbb{S}(\tilde{\vartheta},\nabla_x\tilde{\mathbf{u}}):\nabla_x\tilde{\mathbf{u}}\right)\\
&=1_{\{\vartheta\geq\tilde{\vartheta}\}}\left(\frac{\tilde{\vartheta}}{\vartheta}\left(\mathbb{S}(\vartheta,\nabla_x\mathbf{u})-\mathbb{S}(\vartheta,\nabla_x\tilde{\mathbf{u}})\right):\nabla_x(\mathbf{u}-\tilde{\mathbf{u}})+\tilde{\vartheta}\left(\frac{\mathbb{S}(\vartheta,\nabla_x\tilde{\mathbf{u}})}{\vartheta}-\frac{\mathbb{S}(\tilde{\vartheta},\nabla_x\tilde{\mathbf{u}})}{\tilde{\vartheta}}\right):\nabla_x(\mathbf{u}-\tilde{\mathbf{u}})\right)\\
&\qquad+1_{\{\vartheta\geq\tilde{\vartheta}\}}(\vartheta-\tilde{\vartheta})\left(\frac{\mathbb{S}(\tilde{\vartheta},\nabla_x\tilde{\mathbf{u}})}{\tilde{\vartheta}}-\frac{\mathbb{S}(\vartheta,\nabla_x\mathbf{u})}{\vartheta}\right):\nabla_x\tilde{\mathbf{u}}\\
&\geq -1_{\{\vartheta\geq\tilde{\vartheta}\}}\left|\tilde{\vartheta}\left(\frac{\mathbb{S}(\vartheta,\nabla_x\tilde{\mathbf{u}})}{\vartheta}-\frac{\mathbb{S}(\tilde{\vartheta},\nabla_x\tilde{\mathbf{u}})}{\tilde{\vartheta}}\right):\nabla_x(\mathbf{u}-\tilde{\mathbf{u}})+(\vartheta-\tilde{\vartheta})\left(\frac{\mathbb{S}(\tilde{\vartheta},\nabla_x\tilde{\mathbf{u}})}{\tilde{\vartheta}}-\frac{\mathbb{S}(\vartheta,\nabla_x\mathbf{u})}{\vartheta}\right):\nabla_x\tilde{\mathbf{u}}\right|\\
&\qquad+1_{\{\vartheta\geq\tilde{\vartheta}\}}\frac{\tilde{\vartheta}}{\vartheta}\frac{\mu(\vartheta)}{2}|\mathbb{T}(\nabla_x(\mathbf{u}-\tilde{\mathbf{u}}))|^2.
\end{aligned}\tag{7.9}$$

On revient à (5.2) afin d'établir l'identité

$$\mathcal{E}(\varrho,\vartheta|\tilde{\vartheta},\tilde{\varrho})\geq c\left([1]_{\underline{res}}+[\varrho]^{\gamma}_{\underline{res}}+[\vartheta]^4_{\underline{res}}+|[\varrho-\tilde{\varrho}]|^2_{\underline{ess}}+|[\vartheta-\tilde{\vartheta}]|^2_{\underline{ess}}\right)\tag{7.10}$$

où les notations indicielles sont définies comme suit

$$[h]_{\underline{ess}}:=h1_{\frac{1}{2}\leq\varrho/\tilde{\varrho}\leq 2}\times 1_{\frac{1}{2}\leq\vartheta/\tilde{\vartheta}\leq 2},\quad [h]_{\underline{res}}:=1-[h]_{\underline{ess}}.$$

On remarque aussi, grâce à (4.36) et (7.2), que

$$\mathcal{E}(\varrho,\vartheta|\tilde{\varrho},\tilde{\vartheta})\in L^\infty(0,T;L^1(\Omega))\tag{7.11}$$

En utilisant (4.5), les propriétés des viscosités (4.22), (7.10), (7.11) et les inégalités de Young et Hölder, on peut déduire les inégalités

$$
\begin{aligned}
&\left\| \left[1_{\{0<\vartheta<\tilde\vartheta\}} \left(\left(\mathbb{S}(\vartheta,\nabla\tilde{\mathbf{u}}) - \mathbb{S}(\tilde\vartheta,\nabla\tilde{\mathbf{u}})\right) : \nabla_x(\mathbf{u}-\tilde{\mathbf{u}}) + \frac{\tilde\vartheta-\vartheta}{\tilde\vartheta}\left(\mathbb{S}(\vartheta,\nabla\tilde{\mathbf{u}}) - \mathbb{S}(\tilde\vartheta,\nabla\tilde{\mathbf{u}}) : \nabla_x\tilde{\mathbf{u}}\right)\right)\right]_{\underline{ess}} \right\|_{L^1((0,\tau)\times\Omega)} \\
&\qquad + 2\left\| \left[1_{\{0<\vartheta<\tilde\vartheta\}} \frac{\tilde\vartheta-\vartheta}{\tilde\vartheta}\mathbb{S}(\vartheta,\nabla_x\tilde{\mathbf{u}}) : \nabla_x(\mathbf{u}-\tilde{\mathbf{u}})\right]_{\underline{ess}}\right\|_{L^1((0,\tau)\times\Omega)} \\
&\qquad + \left\| \left[1_{\{\vartheta>\tilde\vartheta\}} \left(\tilde\vartheta \left(\frac{\mathbb{S}(\vartheta,\nabla_x\tilde{\mathbf{u}})}{\vartheta} - \frac{\mathbb{S}(\tilde\vartheta,\nabla_x\tilde{\mathbf{u}})}{\tilde\vartheta}\right) : \nabla_x(\mathbf{u}-\tilde{\mathbf{u}}) + \right.\right.\right. \\
&\qquad \left.\left.\left. +(\vartheta-\tilde\vartheta)\left(\frac{\mathbb{S}(\tilde\vartheta,\nabla_x\tilde{\mathbf{u}})}{\tilde\vartheta} - \frac{\mathbb{S}(\vartheta,\nabla_x\mathbf{u})}{\vartheta}\right) : \nabla_x\tilde{\mathbf{u}}\right)\right]_{\underline{ess}}\right\|_{L^1((0,\tau)\times\Omega)} \\
&\qquad \le \delta\|\nabla_x(\mathbf{u}-\tilde{\mathbf{u}})\|^2_{L^2((0,\tau)\times\Omega;\mathbb{R}^{3\times3})} + c\left(\delta,\underline{\vartheta},\overline{\vartheta},\|\nabla_x\tilde{\mathbf{u}}\|_{L^\infty((0,\tau)\times\Omega;\mathbb{R}^{3\times3})}\right)\int_0^\tau\int_\Omega \mathcal{E}(\varrho,\vartheta|\tilde\varrho,\tilde\vartheta)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t
\end{aligned}
$$

et

$$
\begin{aligned}
&\left\| \left[1_{\{0<\vartheta<\tilde\vartheta\}} \left(\left(\mathbb{S}(\vartheta,\nabla_x\tilde{\mathbf{u}}) - \mathbb{S}(\tilde\vartheta,\nabla_x\tilde{\mathbf{u}})\right) : \nabla_x(\mathbf{u}-\tilde{\mathbf{u}}) + \right.\right.\right. \\
&\qquad \left.\left.\left. + \frac{\tilde\vartheta-\vartheta}{\tilde\vartheta}\left(\mathbb{S}(\tilde\vartheta,\nabla_x\tilde{\mathbf{u}}) - \mathbb{S}(\vartheta,\nabla_x\mathbf{u})\right) : \nabla_x\tilde{\mathbf{u}}\right)\right]_{\underline{res}} \right\|_{L^1((0,\tau)\times\Omega)} \\
&\qquad + 2\left\| \left[1_{\{0<\vartheta<\tilde\vartheta\}} \frac{\tilde\vartheta-\vartheta}{\tilde\vartheta} - \mathbb{S}(\vartheta,\nabla_x\tilde{\mathbf{u}}) : \nabla_x(\mathbf{u}-\tilde{\mathbf{u}})\right]_{\underline{res}}\right\|_{L^1((0,\tau)\times\Omega)} \\
&\qquad + \left\| \left[1_{\{\vartheta>\tilde\vartheta\}} \left(\tilde\vartheta \left(\frac{\mathbb{S}(\vartheta,\nabla_x\tilde{\mathbf{u}})}{\vartheta} - \frac{\mathbb{S}(\tilde\vartheta,\nabla_x\tilde{\mathbf{u}})}{\tilde\vartheta}\right) : \nabla_x(\mathbf{u}-\tilde{\mathbf{u}}) + \right.\right.\right. \\
&\qquad \left.\left.\left. +(\vartheta-\tilde\vartheta)\left(\frac{\mathbb{S}(\tilde\vartheta,\nabla_x\tilde{\mathbf{u}})}{\tilde\vartheta} - \frac{\mathbb{S}(\vartheta,\nabla_x\mathbf{u})}{\vartheta}\right) : \nabla_x\tilde{\mathbf{u}}\right)\right]_{\underline{res}}\right\|_{L^1((0,\tau)\times\Omega)} \\
&\qquad \le \delta\|\nabla_x(\mathbf{u}-\tilde{\mathbf{u}})\|^2_{L^2((0,\tau)\times\Omega;\mathbb{R}^{3\times3})} + c\left(\delta,\underline{\vartheta},\overline{\vartheta},\|\nabla_x\tilde{\mathbf{u}}\|_{L^\infty((0,\tau)\times\Omega;\mathbb{R}^{3\times3})}\right)\int_0^\tau\int_\Omega \mathcal{E}(\varrho,\vartheta|\tilde\varrho,\tilde\vartheta)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t
\end{aligned}
$$

pour tout $\delta > 0$.

En prolongeant $\mathbf{u}$ et $\tilde{\mathbf{u}}$ par 0 en dehors de Ω et en leur appliquant le lemme de Poincaré 30 et l'inégalité de Korn (5.16) il vient

$$
\|\mathbb{T}(\nabla_x(\mathbf{u}-\tilde{\mathbf{u}}))\|^2_{L^2(\Omega;\mathbb{R}^{3\times3})} \ge c'\|\nabla_x(\mathbf{u}-\tilde{\mathbf{u}})\|^2_{L^2(\Omega;\mathbb{R}^{3\times3})} \ge c\left(\|\mathbf{u}-\tilde{\mathbf{u}}\|^2_{W^{1,2}(\Omega;\mathbb{R}^3)} - \int_\Omega \varrho(\mathbf{u}-\tilde{\mathbf{u}})^2\,\mathrm{d}x\right). \tag{7.12}
$$

On arrive donc à la conclusion

$$
\begin{aligned}
&\int_0^\tau\int_\Omega\left(\frac{\tilde\vartheta}{\vartheta}\mathbb{S}(\vartheta,\nabla_x\mathbf{u}) : \nabla_x\mathbf{u} - \mathbb{S}(\vartheta,\nabla_x\mathbf{u}) : \nabla_x\tilde{\mathbf{u}} + \mathbb{S}(\tilde\vartheta,\nabla_x\tilde{\mathbf{u}}) : \nabla_x(\tilde{\mathbf{u}}-\mathbf{u}) + \frac{\vartheta-\tilde\vartheta}{\tilde\vartheta}\mathbb{S}(\tilde\vartheta,\nabla_x\tilde{\mathbf{u}}) : \nabla_x\tilde{\mathbf{u}}\right)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t \\
&\qquad \ge \alpha\|\mathbf{u}-\tilde{\mathbf{u}}\|^2_{L^2(0,T;W^{1,2}(\Omega;\mathbb{R}^3))} - c\int_0^\tau\int_\Omega \varrho(\mathbf{u}-\tilde{\mathbf{u}})^2 + \mathcal{E}(\varrho,\vartheta|\tilde\varrho,\tilde\vartheta)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t
\end{aligned} \tag{7.13}
$$

où α et c sont deux constantes positives.

7.3.2 Termes liés à la conduction de la chaleur

On remarque tout d'abord que

$$\begin{aligned}
&-\frac{\tilde\vartheta}{\vartheta}\frac{\mathbf{q}(\vartheta,\nabla_x\vartheta)\cdot\nabla_x\vartheta}{\vartheta}+\frac{\mathbf{q}(\vartheta,\nabla_x\vartheta)\cdot\nabla_x\tilde\vartheta}{\vartheta}-\frac{\mathbf{q}(\tilde\vartheta,\nabla_x\tilde\vartheta)}{\tilde\vartheta}\cdot\nabla_x(\tilde\vartheta-\vartheta)-\frac{\vartheta-\tilde\vartheta}{\tilde\vartheta}\frac{\mathbf{q}(\tilde\vartheta,\nabla_x\tilde\vartheta)\cdot\nabla_x\tilde\vartheta}{\tilde\vartheta}\\
&=-\tilde\vartheta\mathbf{q}(\vartheta,\nabla_x\ln\vartheta)\cdot\nabla_x\ln\vartheta+\tilde\vartheta\mathbf{q}(\vartheta,\nabla_x\ln\vartheta)\cdot\nabla_x\ln\tilde\vartheta-\tilde\vartheta\mathbf{q}(\tilde\vartheta,\nabla_x\ln\tilde\vartheta)\cdot\nabla_x\ln\tilde\vartheta\\
&\quad+\vartheta\mathbf{q}(\tilde\vartheta,\nabla_x\ln\tilde\vartheta)\cdot\nabla_x\ln\vartheta-(\vartheta-\tilde\vartheta)\mathbf{q}(\tilde\vartheta,\nabla_x\ln\tilde\vartheta)\cdot\nabla_x\ln\tilde\vartheta\\
&=-\tilde\vartheta\left(\mathbf{q}(\vartheta,\nabla_x\ln\vartheta)-\mathbf{q}(\vartheta,\nabla_x\ln\tilde\vartheta)\right)\cdot\nabla_x(\ln\vartheta-\ln\tilde\vartheta)+\tilde\vartheta\mathbf{q}(\vartheta,\nabla_x\ln\tilde\vartheta)\cdot\nabla_x(\ln\tilde\vartheta-\ln\vartheta)\\
&\quad-\tilde\vartheta\mathbf{q}(\tilde\vartheta,\nabla_x\ln\tilde\vartheta)\cdot\nabla_x\ln\tilde\vartheta+\tilde\vartheta\mathbf{q}(\tilde\vartheta,\nabla_x\ln\tilde\vartheta)\cdot\nabla_x\ln\vartheta+(\vartheta-\tilde\vartheta)\mathbf{q}(\tilde\vartheta,\nabla_x\ln\tilde\vartheta)\cdot\nabla_x\ln\vartheta\\
&\quad-(\vartheta-\tilde\vartheta)\mathbf{q}(\tilde\vartheta,\nabla_x\ln\tilde\vartheta)\cdot\nabla_x\ln\tilde\vartheta\\
&=\tilde\vartheta\kappa(\vartheta)|\nabla_x(\ln\vartheta-\ln\tilde\vartheta)|^2+\tilde\vartheta\left(\mathbf{q}(\tilde\vartheta,\nabla\ln\tilde\vartheta)-\mathbf{q}(\vartheta,\nabla_x\ln\tilde\vartheta)\right)\cdot\nabla(\ln\vartheta-\ln\tilde\vartheta)\\
&\quad+(\vartheta-\tilde\vartheta)\mathbf{q}(\tilde\vartheta,\nabla_x\ln\tilde\vartheta)\cdot\nabla(\ln\vartheta-\ln\tilde\vartheta).
\end{aligned}$$

On revient aux hypothèses (4.6) et (4.23), aux propriétés (7.10) et (7.11) et on emploie les inégalités de Young et de Hölder pour déduire les estimations

$$\begin{aligned}
&\left\|\left[\tilde\vartheta\left(\mathbf{q}(\tilde\vartheta,\nabla_x\ln\tilde\vartheta)-\mathbf{q}(\vartheta,\nabla_x\ln\tilde\vartheta)\right)\cdot\nabla_x(\ln\vartheta-\ln\tilde\vartheta)+(\vartheta-\tilde\vartheta)\mathbf{q}(\tilde\vartheta,\nabla_x\ln\tilde\vartheta)\cdot\nabla_x(\ln\vartheta-\ln\tilde\vartheta)\right]_{\mathrm{ess}}\right\|_{L^1((0,T)\times\Omega)}\\
&\leq\delta\|\sqrt{\kappa(\vartheta)}\nabla_x(\ln\vartheta-\ln\tilde\vartheta)\|^2_{L^2((0,\tau)\times\Omega;\mathbb{R}^{3\times3})}+c\left(\delta,\underline{\vartheta},\overline{\vartheta},\|\nabla_x\ln\tilde\vartheta\|_{L^\infty((0,\tau)\times\Omega;\mathbb{R}^{3\times3})}\right)\int_0^\tau\int_\Omega\mathcal{E}(\varrho,\vartheta|\tilde\varrho,\tilde\vartheta)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t
\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
&\left\|\left[\frac{\tilde\vartheta}{\sqrt{\kappa(\vartheta)}}\left(\mathbf{q}(\tilde\vartheta,\nabla_x\ln\tilde\vartheta)-\mathbf{q}(\vartheta,\nabla_x\ln\tilde\vartheta)\right)\cdot\sqrt{\kappa(\vartheta)}\nabla_x(\ln\vartheta-\ln\tilde\vartheta)+(\vartheta-\tilde\vartheta)\mathbf{q}(\tilde\vartheta,\nabla_x\ln\tilde\vartheta)\cdot\nabla_x(\ln\vartheta-\ln\tilde\vartheta)\right]_{\mathrm{res}}\right\|_{L^1((0,T)\times\Omega)}\\
&\leq\delta\|\sqrt{\kappa(\vartheta)}\nabla_x(\ln\vartheta-\ln\tilde\vartheta)\|^2_{L^2((0,\tau)\times\Omega;\mathbb{R}^{3\times3})}+c\left(\delta,\underline{\vartheta},\overline{\vartheta},\|\nabla_x\ln\tilde\vartheta\|_{L^\infty((0,\tau)\times\Omega;\mathbb{R}^{3\times3})}\right)\int_0^\tau\int_\Omega\mathcal{E}(\varrho,\vartheta|\tilde\varrho,\tilde\vartheta)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t
\end{aligned}$$

pour $\delta>0$ quelconque.

On peut donc écrire l'inégalité principale de cette section

$$\begin{aligned}
&-\int_0^\tau\int_\Omega\left(\frac{\tilde\vartheta}{\vartheta}\frac{\mathbf{q}(\vartheta,\nabla_x\vartheta)}{\vartheta}\cdot\nabla_x\vartheta-\frac{\mathbf{q}(\vartheta,\nabla_x\vartheta)}{\vartheta}\cdot\nabla_x(\tilde\vartheta-\vartheta)+\frac{\mathbf{q}(\tilde\vartheta,\nabla_x\tilde\vartheta)}{\tilde\vartheta}\cdot\nabla_x(\tilde\vartheta-\vartheta)+\frac{\vartheta-\tilde\vartheta}{\tilde\vartheta}\frac{\mathbf{q}(\tilde\vartheta,\nabla_x\tilde\vartheta)}{\tilde\vartheta}\cdot\nabla_x\tilde\vartheta\right)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t\\
&\qquad\geq\alpha\|\sqrt{\kappa(\vartheta)}\nabla_x(\ln\vartheta-\ln\tilde\vartheta)\|^2_{L^2((0,\tau)\times\Omega;\mathbb{R}^{3\times3})}-c\int_0^\tau\int_\Omega\mathcal{E}(\varrho,\vartheta|\tilde\varrho,\tilde\vartheta)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t,\quad(7.14)
\end{aligned}$$

où α et c sont des constantes positives.

7.3.3 Nouvelle inégalité d'entropie

Les deux inégalités (7.13) et (7.14) permettent, en partant de (7.5) d'arriver au résultat suivant

Lemme 34
Si toutes les hypothèses du théorème 7.1 sont satisfaites, alors

$$\begin{aligned}
&\int_\Omega\left(\frac{1}{2}\varrho|\mathbf{u}-\tilde{\mathbf{u}}|^2+\mathcal{E}(\varrho,\vartheta|\tilde\varrho,\tilde\vartheta)\right)(\tau,\cdot)\,\mathrm{d}x+ \qquad (7.15)\\
&\alpha\left(\left\|\sqrt{\kappa(\vartheta)}\left(\nabla_x\ln\vartheta-\nabla_x\ln\tilde\vartheta\right)\right\|^2_{L^2((0,\tau)\times\Omega)}+\|\mathbf{u}-\tilde{\mathbf{u}}\|^2_{L^2(0,T;W^{1,2}(\Omega;\mathbb{R}^3))}\right)\\
&\leq c\int_0^\tau\int_\Omega\left(\frac{1}{2}\varrho|\mathbf{u}-\tilde{\mathbf{u}}|^2+\mathcal{E}(\varrho,\vartheta|\tilde\varrho,\tilde\vartheta)\right)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t+\mathcal{R}(\varrho,\vartheta,\mathbf{u}|\tilde\varrho,\tilde\vartheta,\tilde{\mathbf{u}})
\end{aligned}$$

pour presque tout $\tau \in (0,T)$ avec α et c des constantes positives (dépendantes néanmoins de $\tilde{\varrho}$, $\tilde{\vartheta}$ et $\tilde{\mathbf{u}}$) et $\mathcal{R}$ le terme résiduel défini par

$$\begin{aligned}
\mathcal{R}(\varrho,\vartheta,\mathbf{u}|\tilde{\varrho},\tilde{\vartheta},\tilde{\mathbf{u}}) = &\int_0^\tau \int_\Omega \Big(((\varrho-\tilde{\varrho})\partial_t \tilde{\mathbf{u}} + (\varrho\mathbf{u} - \tilde{\varrho}\tilde{\mathbf{u}}) \cdot \nabla_x \tilde{\mathbf{u}}) \cdot (\tilde{\mathbf{u}} - \mathbf{u}) \Big) \,\mathrm{d}x \,\mathrm{d}t \\
&+ \int_0^\tau \int_\Omega (\varrho-\tilde{\varrho})(\tilde{\mathbf{u}}-\mathbf{u}) \cdot \left(\frac{\nabla_x p(\tilde{\varrho},\tilde{\vartheta})}{\tilde{\varrho}} - \frac{\nabla_x p(\tilde{r},\overline{\vartheta})}{\tilde{r}} \right) \mathrm{d}x \,\mathrm{d}t \\
&- \int_0^\tau \int_\Omega \Big(\mathcal{S}(\varrho,\vartheta) - (\varrho-\tilde{\varrho})\partial_\varrho \mathcal{S}(\tilde{\varrho},\tilde{\vartheta}) - (\vartheta-\tilde{\vartheta})\partial_\vartheta \mathcal{S}(\tilde{\varrho},\tilde{\vartheta}) - \mathcal{S}(\tilde{\varrho},\tilde{\vartheta}) \Big) \Big(\partial_t \tilde{\varrho} + \tilde{\mathbf{u}} \cdot \nabla_x \tilde{\vartheta} \Big) \,\mathrm{d}x \,\mathrm{d}t \\
&- \int_0^\tau \int_\Omega \Big(p(\varrho,\vartheta) - (\varrho-\tilde{\varrho})\partial_\varrho p(\tilde{\varrho},\tilde{\vartheta}) - (\vartheta-\tilde{\vartheta})\partial_\vartheta p(\tilde{\varrho},\tilde{\vartheta}) - p(\tilde{\varrho},\tilde{\vartheta}) \Big) \operatorname{div} \tilde{\mathbf{u}} \,\mathrm{d}x \,\mathrm{d}t \\
&+ \int_0^\tau \int_\Omega \varrho \Big(\big(s(\tilde{\varrho},\tilde{\vartheta}) - s(\varrho,\vartheta) \big) (\mathbf{u} - \tilde{\mathbf{u}}) \cdot \nabla_x \tilde{\vartheta} \Big) \,\mathrm{d}x \,\mathrm{d}t.
\end{aligned}$$

7.4 Estimation du terme résiduel

Dans cette dernière partie, on établit une majoration de notre terme résiduel $\mathcal{R}$ permettant l'application du lemme de Gronwall à l'inégalité du lemme 34. On traite chaque terme de $\mathcal{R}$ de manière individuelle, ce qui constitue chacune des différentes étapes de cette section.

Étape 1. Concernant le premier terme, on remarque tout d'abord

$$\int_\Omega (\varrho\mathbf{u} - \tilde{\varrho}\tilde{\mathbf{u}}) \cdot \nabla_x \tilde{\mathbf{u}} \cdot (\mathbf{u} - \tilde{\mathbf{u}}) \,\mathrm{d}x = \int_\Omega \varrho(\mathbf{u} - \tilde{\mathbf{u}}) \cdot \nabla_x \tilde{\mathbf{u}} \cdot (\mathbf{u} - \tilde{\mathbf{u}}) \,\mathrm{d}x + \int_\Omega (\varrho - \tilde{\varrho})\tilde{\mathbf{u}} \cdot \nabla_x \tilde{\mathbf{u}} \cdot (\mathbf{u} - \tilde{\mathbf{u}}) \,\mathrm{d}x.$$

Ainsi, il vient pour la partie essentielle

$$\begin{aligned}
&\left| \int_\Omega \left[((\varrho-\tilde{\varrho})\partial_t \tilde{\mathbf{u}} + (\varrho\mathbf{u} - \tilde{\varrho}\tilde{\mathbf{u}}) \cdot \nabla_x \tilde{\mathbf{u}}) \cdot (\mathbf{u} - \tilde{\mathbf{u}}) \right]_{\underline{ess}} \,\mathrm{d}x \right| \\
&\leq \|\nabla_x \tilde{\mathbf{u}}\|_{L^\infty((0,T)\times\Omega;\mathbb{R}^{3\times 3})} \int_\Omega \varrho |\mathbf{u} - \tilde{\mathbf{u}}|^2 \,\mathrm{d}x \\
&+ c \left(\|\tilde{\mathbf{u}}\|_{L^\infty(0,T;W^{1,\infty}(\Omega;\mathbb{R}^3))}, \|\partial_t \tilde{\mathbf{u}}\|_{L^\infty((0,T)\times\Omega;\mathbb{R}^3)}, \|\tilde{\varrho}\|_{L^\infty((0,T)\times\Omega)} \right) \left\| [\varrho - \tilde{\varrho}]_{\underline{ess}} \right\|_{L^2(\Omega)} \left\| [\mathbf{u} - \tilde{\mathbf{u}}]_{\underline{ess}} \right\|_{L^2(\Omega;\mathbb{R}^3)} \\
&\leq c \left(\delta, \|\tilde{\mathbf{u}}\|_{L^\infty(0,T;W^{1,\infty}(\Omega;\mathbb{R}^3))}, \|\partial_t \tilde{\mathbf{u}}\|_{L^\infty((0,T)\times\Omega;\mathbb{R}^3)}, \|\tilde{\varrho}\|_{L^\infty((0,T)\times\Omega)} \right) \times \\
&\times \int_\Omega \left(\frac{1}{2} \varrho |\mathbf{u} - \tilde{\mathbf{u}}|^2 + \mathcal{E}(\varrho,\vartheta|\tilde{\varrho},\tilde{\vartheta}) \right) \,\mathrm{d}x + \delta \left\| [\mathbf{u} - \tilde{\mathbf{u}}]_{\underline{ess}} \right\|
\end{aligned}$$

et pour la partie résiduelle

$$\begin{aligned}
&\left| \int_\Omega \left[((\varrho-\tilde{\varrho})\partial_t \tilde{\mathbf{u}} + (\varrho\mathbf{u} - \tilde{\varrho}\tilde{\mathbf{u}}) \cdot \nabla_x \tilde{\mathbf{u}}) \cdot (\mathbf{u} - \tilde{\mathbf{u}}) \right]_{\underline{res}} \,\mathrm{d}x \right| \\
&\leq \|\nabla_x \tilde{\mathbf{u}}\|_{L^\infty((0,T)\times\Omega;\mathbb{R}^{3\times 3})} \int_\Omega \varrho |\mathbf{u} - \tilde{\mathbf{u}}|^2 \,\mathrm{d}x \\
&+ c \left(\|\tilde{\mathbf{u}}\|_{L^\infty(0,T;W^{1,\infty}(\Omega;\mathbb{R}^3))}, \|\partial_t \tilde{\mathbf{u}}\|_{L^\infty((0,T)\times\Omega;\mathbb{R}^3)}, \|\tilde{\varrho}\|_{L^\infty((0,T)\times\Omega)} \right) \times \\
&\times \left(\left\| [\varrho]_{\underline{res}} \right\|_{L^{\frac{6}{5}}(\Omega)} + \left(\int_\Omega [1]_{\underline{res}} \,\mathrm{d}x \right)^{\frac{6}{5}} \right) \left\| [\mathbf{u} - \tilde{\mathbf{u}}]_{\underline{res}} \right\|_{L^6(\Omega;\mathbb{R}^3)} \\
&\leq c \left(\delta, \|\tilde{\mathbf{u}}\|_{L^\infty(0,T;W^{1,\infty}(\Omega;\mathbb{R}^3))}, \|\partial_t \tilde{\mathbf{u}}\|_{L^\infty((0,T)\times\Omega;\mathbb{R}^3)}, \|\tilde{\varrho}\|_{L^\infty((0,T)\times\Omega)} \right) \times \\
&\times \left[\int_\Omega \frac{1}{2} \varrho |\mathbf{u} - \tilde{\mathbf{u}}|^2 \,\mathrm{d}x + \left(\int_\Omega \mathcal{E}(\varrho,\vartheta|\tilde{\varrho},\tilde{\vartheta}) \,\mathrm{d}x \right)^{\frac{5}{3}} \right] + \delta \, \|[\mathbf{u} - \tilde{\mathbf{u}}]\|^2_{W^{1,2}(\Omega;\mathbb{R}^3)} \\
&\leq c \int_\Omega \left(\frac{1}{2} \varrho |\mathbf{u} - \tilde{\mathbf{u}}|^2 + \mathcal{E}(\varrho,\vartheta|\tilde{\varrho},\tilde{\vartheta}) \right) \,\mathrm{d}x + \delta \, \|[\mathbf{u} - \tilde{\mathbf{u}}]\|^2_{W^{1,2}(\Omega;\mathbb{R}^3)} .
\end{aligned}$$

Étape 2. Pour le second terme, on procède comme suit

$$
\begin{aligned}
&\left| \int_\Omega \left[(\varrho - \tilde{\varrho})(\tilde{\mathbf{u}} - \mathbf{u}) \cdot \left(\frac{\nabla_x p(\tilde{\varrho}, \tilde{\vartheta})}{\tilde{\varrho}} - \frac{\nabla_x p(\tilde{r}, \overline{\vartheta})}{\tilde{r}} \right) \right]_{\underline{ess}} \mathrm{d}x \right| \\
&\leq c\left(\underline{\varrho}, \|\tilde{\varrho}\|_{L^\infty(0,T;W^{1,\infty}(\Omega))}, \|\tilde{r}\|_{W^{1,\infty}(\Omega)}\right) \left\| [\varrho - \tilde{\varrho}]_{\underline{ess}} \right\|_{L^2(\Omega)} \left\| [\mathbf{u} - \tilde{\mathbf{u}}]_{\underline{ess}} \right\|_{L^2(\Omega;\mathbb{R}^3)} \\
&\leq c\left(\delta, \underline{\varrho}, \|\tilde{\varrho}\|_{L^\infty(0,T;W^{1,\infty}(\Omega))}, \|\tilde{r}\|_{W^{1,\infty}(\Omega)}\right) \int_\Omega \mathcal{E}(\varrho, \vartheta | \tilde{\varrho}, \tilde{\vartheta})\, \mathrm{d}x + \delta \left\| [\mathbf{u} - \tilde{\mathbf{u}}]_{\underline{ess}} \right\|^2_{L^2(\Omega;\mathbb{R}^3)}
\end{aligned}
$$

et

$$
\begin{aligned}
&\left| \int_\Omega \left[(\varrho - \tilde{\varrho})(\tilde{\mathbf{u}} - \mathbf{u}) \cdot \left(\frac{\nabla_x p(\tilde{\varrho}, \tilde{\vartheta})}{\tilde{\varrho}} - \frac{\nabla_x p(\tilde{r}, \overline{\vartheta})}{\tilde{r}} \right) \right]_{\underline{res}} \mathrm{d}x \right| \\
&\leq c\left(\underline{\varrho}, \|\tilde{\varrho}\|_{L^\infty(0,T;W^{1,\infty}(\Omega))}, \|\tilde{r}\|_{W^{1,\infty}(\Omega)}\right) \left(\left\| [\varrho]_{\underline{res}} \right\|_{L^{\frac{6}{5}}(\Omega)} + \left(\int_\Omega [1]_{\underline{res}}\, \mathrm{d}x \right)^{\frac{5}{6}} \right) \left\| [\mathbf{u} - \tilde{\mathbf{u}}]_{\underline{res}} \right\|_{L^6(\Omega;\mathbb{R}^3)} \\
&\leq c\left(\delta, \underline{\varrho}, \|\tilde{\varrho}\|_{L^\infty(0,T;W^{1,\infty}(\Omega))}, \|\tilde{r}\|_{W^{1,\infty}(\Omega)}\right) \int_\Omega \mathcal{E}(\varrho, \vartheta | \tilde{\varrho}, \tilde{\vartheta})\, \mathrm{d}x + \delta \left\| [\mathbf{u} - \tilde{\mathbf{u}}]_{\underline{res}} \right\|^2_{W^{1,2}(\Omega;\mathbb{R}^3)}.
\end{aligned}
$$

Étape 3. L'estimation du troisième terme nécessite un développement de Taylor pour la partie essentielle

$$
\begin{aligned}
&\left| \int_\Omega \left[\left(\mathcal{S}(\varrho, \vartheta) - (\varrho - \tilde{\varrho}) \partial_\varrho \mathcal{S}(\tilde{\varrho}, \tilde{\vartheta}) - (\vartheta - \tilde{\vartheta}) \partial_\vartheta \mathcal{S}(\tilde{\varrho}, \tilde{\vartheta}) - \mathcal{S}(\tilde{\varrho}, \tilde{\vartheta}) \right) \left(\partial_t \tilde{\vartheta} + \tilde{\mathbf{u}} \cdot \nabla_x \tilde{\vartheta} \right) \right]_{\underline{ess}} \mathrm{d}x \right| \\
&\leq c\left(\underline{\varrho}, \overline{\varrho}, \underline{\vartheta}, \overline{\vartheta}; \|\tilde{\mathbf{u}}\|_{L^\infty((0,T)\times\Omega;\mathbb{R}^3)}, \|\partial_t \tilde{\vartheta}\|_{L^\infty((0,T)\times\Omega;\mathbb{R}^3)}, \|\nabla_x \tilde{\vartheta}\|_{L^\infty((0,T)\times\Omega;\mathbb{R}^3)} \right) \times \\
&\times \left(\left\| [\varrho - \tilde{\varrho}]^2_{\underline{ess}} \right\|_{L^2(\Omega)} + \left\| [\vartheta - \tilde{\vartheta}]^2_{\underline{ess}} \right\|_{L^2(\Omega)} \right) \\
&\leq c \int_\Omega \mathcal{E}(\varrho, \vartheta | \tilde{\varrho}, \tilde{\vartheta})\, \mathrm{d}x.
\end{aligned}
$$

Concernant la partie résiduelle, on commence par remarquer

$$
\begin{aligned}
&\left| \int_\Omega \left[\left(\mathcal{S}(\varrho, \vartheta) - (\varrho - \tilde{\varrho}) \partial_\varrho \mathcal{S}(\tilde{\varrho}, \tilde{\vartheta}) - (\vartheta - \tilde{\vartheta}) \partial_\vartheta \mathcal{S}(\tilde{\varrho}, \tilde{\vartheta}) - \mathcal{S}(\tilde{\varrho}, \tilde{\vartheta}) \right) \left(\partial_t \tilde{\vartheta} + \tilde{\mathbf{u}} \cdot \nabla_x \tilde{\vartheta} \right) \right]_{\underline{res}} \mathrm{d}x \right| \\
&\leq c\left(\underline{\varrho}, \overline{\varrho}, \underline{\vartheta}, \overline{\vartheta}, \|\tilde{\mathbf{u}}\|_{L^\infty((0,T)\times\Omega;\mathbb{R}^3)}, \|\partial_t \tilde{\vartheta}\|_{L^\infty((0,T)\times\Omega;\mathbb{R}^3)}, \|\nabla_x \tilde{\vartheta}\|_{L^\infty((0,T)\times\Omega;\mathbb{R}^3)} \right) \left(\left\| [\varrho s(\varrho, \vartheta)]_{\underline{res}} \right\|_{L^1(\Omega)} + \int_\Omega [1]_{\underline{res}}\, \mathrm{d}x \right).
\end{aligned}
$$

Il vient, au regard de (5.25) et des propriétés de $\mathcal{E}(\varrho, \vartheta | \tilde{\varrho}, \tilde{\vartheta})$ (7.10) et (7.11)

$$
\left| \int_\Omega \left[\left(\mathcal{S}(\varrho, \vartheta) - (\varrho - \tilde{\varrho}) \partial_\varrho \mathcal{S}(\tilde{\varrho}, \tilde{\vartheta}) - (\vartheta - \tilde{\vartheta}) \partial_\vartheta \mathcal{S}(\tilde{\varrho}, \tilde{\vartheta}) - \mathcal{S}(\tilde{\varrho}, \tilde{\vartheta}) \right) \left(\partial_t \tilde{\vartheta} + \tilde{\mathbf{u}} \cdot \nabla_x \tilde{\vartheta} \right) \right]_{\underline{res}} \mathrm{d}x \right| \leq c \int_\Omega \mathcal{E}(\varrho, \vartheta | \tilde{\varrho}, \tilde{\vartheta})\, \mathrm{d}x.
$$

Étape 4. Comme dans l'étape précédente, on a pour le quatrième terme

$$
\left| \int_\Omega \left[\left(p(\varrho, \vartheta) - (\varrho - \tilde{\varrho}) \partial_\varrho p(\tilde{\varrho}, \tilde{\varrho}) - (\vartheta - \tilde{\vartheta}) \partial_\vartheta p(\tilde{\varrho}, \tilde{\varrho}) - p(\tilde{\varrho}, \tilde{\vartheta}) \right) \operatorname{div} \tilde{\mathbf{u}} \right]_{\underline{ess}} \mathrm{d}x \right| \tag{7.16}
$$

$$
\leq c\left(\underline{\varrho}, \overline{\varrho}, \underline{\varrho}, \overline{\vartheta}, \|\tilde{\mathbf{u}}\|_{L^\infty((0,T)\times\Omega;\mathbb{R}^3)} \right) \times \left(\left\| [\varrho - \tilde{\varrho}]^2_{\underline{ess}} \right\|_{L^2(\Omega)} + \left\| \left[\vartheta - \tilde{\vartheta} \right]^2_{\underline{ess}} \right\|_{L^2(\Omega)} \right) \tag{7.17}
$$

$$
\leq c \int_\Omega \mathcal{E}(\varrho, \vartheta | \tilde{\varrho}, \tilde{\vartheta})\, \mathrm{d}x \tag{7.18}
$$

et

$$\left| \int_\Omega \left[\left(p(\varrho,\vartheta) - (\varrho-\tilde\varrho)\partial_\varrho p(\tilde\varrho,\tilde\varrho) - (\vartheta-\tilde\vartheta)\partial_\vartheta p(\tilde\varrho,\tilde\varrho) - p(\tilde\varrho,\tilde\vartheta) \right) \operatorname{div} \tilde{\mathbf{u}} \right]_{\underline{res}} \, \mathrm{d}x \right| \tag{7.19}$$

$$\leq c\left(\underline{\varrho}, \overline{\varrho}, \underline{\varrho}, \overline{\vartheta}, \|\tilde{\mathbf{u}}\|_{L^\infty((0,T)\times\Omega;\mathbb{R}^3)}\right) \times \left(\left\| [p(\varrho,\vartheta)]_{\underline{res}} \right\|_{L^1(\Omega)} + \int_\Omega [1]_{\underline{res}} \, \mathrm{d}x \right) \tag{7.20}$$

$$\leq c \int_\Omega \mathcal{E}(\varrho,\vartheta|\tilde\varrho,\tilde\vartheta) \, \mathrm{d}x. \tag{7.21}$$

Au moyen de (5.27) et de (7.10), on arrive finalement à la majoration

$$\left| \int_\Omega \left[\left(p(\varrho,\vartheta) - (\varrho-\tilde\varrho)\partial_\varrho p(\tilde\varrho,\tilde\varrho) - (\vartheta-\tilde\vartheta)\partial_\vartheta p(\tilde\varrho,\tilde\varrho) - p(\tilde\varrho,\tilde\vartheta) \right) \operatorname{div} \tilde{\mathbf{u}} \right]_{\underline{res}} \, \mathrm{d}x \right| \leq c \int_\Omega \mathcal{E}(\varrho,\vartheta|\tilde\varrho,\tilde\vartheta) \, \mathrm{d}x.$$

Étape 5. Grâce à la formule de Taylor, on déduit

$$\begin{aligned}
&\left| \int_\Omega \left[\varrho \left(s(\tilde\varrho,\tilde\vartheta) - s(\varrho,\vartheta) \right) (\mathbf{u}-\tilde{\mathbf{u}}) \cdot \nabla_x \tilde\vartheta \right]_{\underline{ess}} \, \mathrm{d}x \right| \\
&\leq c\left(\underline{\varrho}, \overline{\varrho}, \underline{\varrho}, \overline{\vartheta}, \|\nabla_x \tilde\vartheta\|_{L^\infty((0,T)\times\Omega;\mathbb{R}^3)}\right) \times \left(\left\| [\varrho-\tilde\varrho]^2_{\underline{ess}} \right\|_{L^2(\Omega)} + \left\| [\vartheta-\tilde\vartheta]^2_{\underline{ess}} \right\|_{L^2(\Omega)} \right) \|\mathbf{u}-\tilde{\mathbf{u}}\|_{L^2(\Omega;\mathbb{R}^3)} \\
&\leq c\left(\delta, \underline{\varrho}, \overline{\varrho}, \underline{\varrho}, \overline{\vartheta}, \|\nabla_x \tilde\vartheta\|_{L^\infty((0,T)\times\Omega;\mathbb{R}^3)}\right) \int_\Omega \mathcal{E}(\varrho,\vartheta|\tilde\varrho,\tilde\vartheta) \, \mathrm{d}x + \delta \|\mathbf{u}-\tilde{\mathbf{u}}\|_{L^2(\Omega;\mathbb{R}^3)}.
\end{aligned}$$

Pour la partie résiduelle, en procédant comme dans la première étape, on conclut

$$\int_\Omega \left[\varrho \left(s(\tilde\varrho,\tilde\vartheta) - s(\varrho,\vartheta) \right) (\mathbf{u}-\tilde{\mathbf{u}}) \cdot \nabla_x \tilde\vartheta \right]_{\underline{res}} \, \mathrm{d}x \tag{7.22}$$

$$\leq c\left(\underline{\varrho}, \overline{\varrho}, \underline{\vartheta}, \overline{\vartheta}, \left\|\nabla_x \tilde\vartheta\right\|_{L^\infty(\Omega;\mathbb{R}^3)}\right) \left(\left\| [\varrho s(\varrho,\vartheta)]_{\underline{res}} \right\|_{L^{\frac{6}{5}}(\Omega)} + \left(\int_\Omega [1]_{\underline{res}} \, \mathrm{d}x \right)^{\frac{6}{5}} \right) \|\mathbf{u}-\tilde{\mathbf{u}}\|_{L^6(\Omega;\mathbb{R}^3)} \tag{7.23}$$

$$\leq c \int_\Omega \mathcal{E}(\varrho,\vartheta|\tilde\varrho,\tilde\vartheta) \, \mathrm{d}x + \delta \|\mathbf{u}-\tilde{\mathbf{u}}\|^2_{W^{1,2}(\Omega;\mathbb{R}^3)}. \tag{7.24}$$

Étape 6. On choisit un paramètre δ suffisamment petit dans les étapes précédentes pour déduire de (7.15)

$$\int_\Omega \left(\frac{1}{2} \varrho |\mathbf{u}-\tilde{\mathbf{u}}|^2 + \mathcal{E}(\varrho,\vartheta|\tilde\varrho,\tilde\vartheta) \right)(\tau,\cdot) \, \mathrm{d}x \leq c \int_0^\tau \int_\Omega \left(\frac{1}{2} \varrho |\mathbf{u}-\tilde{\mathbf{u}}|^2 + \mathcal{E}(\varrho,\vartheta|\tilde\varrho,\tilde\vartheta) \right) \mathrm{d}x \, \mathrm{d}t$$

pour presque tout τ appartenant à l'intervalle $(0,T)$.

On peut maintenant conclure, grâce au lemme de Gronwall, que $\varrho = \tilde\varrho$, $\vartheta = \tilde\vartheta$ et $\mathbf{u} = \tilde{\mathbf{u}}$. Ceci termine la preuve du théorème 7.1.

8 Cas des conditions de bord de Navier

Sommaire

8.1 Introduction et cadre de travail

8.1.1 Introduction

Ce chapitre est consacré aux modifications à apporter aux définitions, théorèmes et preuves dans le cas où l'on considère des conditions de glissement au bord du domaine.

On modifie tout d'abord les définitions des solutions faibles pour accueillir ces conditions aux limites, puis on décrit les résultats obtenus et les changements à effectuer pour accorder les démonstrations des précédents chapitres avec les nouvelles conditions de bord.

Les travaux exposés dans ce chapitre ont été acceptés pour publication dans [44].

8.1.2 Travail sur un domaine borné

On souhaite traiter le système de Navier-Stokes-Fourier (4.1) - (4.6), (4.10) - (4.11) avec les conditions suivantes au bord

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{n}|_{\partial\Omega} = 0, \quad \mathbb{S}(\vartheta, \nabla_x \mathbf{u})\mathbf{n} \times \mathbf{n}|_{\partial\Omega} = 0, \quad \mathbf{q} \cdot \mathbf{n}|_{\partial\Omega} = 0. \tag{8.1}$$

De la même manière que dans le chapitre 5, on travaille sur une suite de domaines bornés croissants remplissant notre domaine Ω. Pour un domaine G de cette suite, les conditions de bord appropriées pour la vitesse sont du type $\mathbf{u}|_{\partial G \cap \Omega} = 0$, $\mathbf{u} \cdot \mathbf{n}|_{\partial G \setminus \partial\Omega} = 0$. On considère donc pour le cas général les conditions de bord mixtes

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{n}|_{\Gamma} = 0, \quad \mathbb{S}(\vartheta, \nabla_x \mathbf{u})\mathbf{n} \times \mathbf{n}|_{\Gamma} = 0, \quad \mathbf{u}|_{\partial\Omega\setminus\Gamma} = 0, \quad \mathbf{q} \cdot \mathbf{n}|_{\partial\Omega} = 0, \tag{8.2}$$

où Γ est un partie régulière de la frontière $\partial\Omega$. Il est a noter que si Γ s'avère être égal à la frontière $\partial\Omega$, alors on retrouve les conditions de Navier évoquées en (8.1).

On introduit pour la suite l'espace de Sobolev suivant

$$W^{1,2}_{\mathbf{n},\Gamma}(\Omega) := \overline{\left\{\mathbf{u} \in \mathcal{C}^{2,\nu}(\overline{\Omega} \setminus \Gamma) \mid \mathbf{u} \cdot \mathbf{n}|_{\Gamma} = 0,\ \mathbf{u}|_{\partial\Omega\setminus\Gamma} = 0\right\}}^{W^{1,2}(\Omega)}$$

où ν appartient à l'intervalle $(0, 1)$, voir Solonnikov et Schadilov [76]. Dans un souci de clarté, on notera $W^{1,2}_{\mathbf{n}}(\Omega)$ pour désigner l'espace $W^{1,2}_{\mathbf{n},\partial\Omega}(\Omega)$. À la lumière de ces changements, il est évident que les solutions recherchées ne sont plus les mêmes que celle définies au chapitre 4.

8.1.3 Retour sur les solutions recherchées

Les définitions de solutions très faibles données au début de cette partie doivent donc être modifiées de la façon suivante :

Définition 8.1
(Solution très faible avec conditions de Navier)
On dit qu'un triplet $(\varrho, \vartheta, \mathbf{u})$ *est une solution très faible du système de Navier-Stokes-Fourier* (4.1) - (4.7), (4.10) - (4.11), (8.2) *si et seulement si les conditions suivantes sont satisfaites :*

1. *Conditions de régularité :*
   - $\varrho(t,x) \geq 0$, $\vartheta(t,x) > 0$ *presque partout sur* $(0,T) \times \Omega$,
   - $\frac{\varrho}{\tilde{r}} - 1 \in L^\infty\left(0,T; \left[L^\gamma_{\tilde{r}^\gamma} + L^2_{\tilde{r}^\gamma}\right](\Omega)\right)$,
   - $\varrho\mathbf{u} \in L^\infty\left(0,T; \left[L^{2\gamma/(\gamma+1)} + L^2_{1/\tilde{r}}\right](\Omega;\mathbb{R}^3)\right)$,
   - $\varrho\mathbf{u}^2 \in L^\infty\left(0,T; L^1(\Omega)\right)$,
   - $\vartheta - \overline{\vartheta} \in L^\infty\left(0,T; [L^4 + L^2](\Omega)\right) \cap L^2\left(0,T; W^{1,2}(\Omega)\right)$,
   - $\nabla_x \log\vartheta \in L^2\left(0,T; L^2(\Omega;\mathbb{R}^3)\right)$,
   - $\mathbf{u} \in L^2\left(0,T; W^{1,2}_{\mathbf{n},\Gamma}(\Omega;\mathbb{R}^3)\right)$.
2. *Conditions sur l'équation du bilan de masse :*
   - ϱ *doit appartenir à l'espace* $\mathcal{C}_{weak}([0,T]; L^\gamma(K))$ *pour tout compact* K *inclus dans* $\overline{\Omega}$,
   - *l'équation du bilan de masse* (4.1) *est vérifiée au sens suivant :*

$$\int_\Omega \varrho\varphi \,\mathrm{d}x\Big|_0^\tau = \int_0^\tau \int_\Omega \varrho\partial_t\varphi + \varrho\mathbf{u}\cdot\nabla_x\varphi \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t, \text{ pour tout } \tau \in [0,T] \text{ et } \varphi \in \mathcal{C}^1_c\left([0,T]\times\overline{\Omega}\right). \tag{8.3}$$

3. *Conditions sur l'équation du bilan de quantité de mouvement :*
   - $\varrho\mathbf{u}$ *doit appartenir à l'espace* $\mathcal{C}_{weak}\left(0,T; L^{2\gamma/(\gamma+1)}(K;\mathbb{R}^3)\right)$ *pour tout compact* K *inclus dans* $\overline{\Omega}$,
   - *l'équation du bilan de quantité de mouvement* (4.2) *est vérifiée au sens suivant :*

$$\int_\Omega \varrho\mathbf{u}\cdot\boldsymbol{\varphi}\Big|_0^\tau = \int_0^\tau\int_\Omega \Big(\varrho\mathbf{u}\cdot\partial_t\boldsymbol{\varphi} + \varrho\mathbf{u}\otimes\mathbf{u} : \nabla_x\boldsymbol{\varphi} + p(\varrho,\vartheta)\,\mathrm{div}_x\boldsymbol{\varphi} - \mathbb{S}(\vartheta,\nabla_x\mathbf{u}) : \nabla_x\boldsymbol{\varphi} + \varrho\nabla_x F\cdot\boldsymbol{\varphi}\Big)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t, \tag{8.4}$$

   pour tout $\tau \in [0,T]$ *et* $\boldsymbol{\varphi} \in \mathcal{C}^1_c\left([0,T]\times(\Omega\cup\Gamma);\mathbb{R}^3\right)$, $\boldsymbol{\varphi}\cdot\mathbf{n}|_\Gamma = 0$.
4. *L'équation du bilan d'entropie est satisfaite au sens suivant*

$$\begin{aligned}
&-\int_\Omega \varrho s(\varrho,\vartheta)\varphi\,\mathrm{d}x\Big|_0^\tau + \int_0^\tau\int_\Omega \frac{\varphi}{\vartheta}\left(\mathbb{S}(\vartheta,\nabla_x\mathbf{u}) : \nabla_x\mathbf{u} - \frac{\mathbf{q}(\vartheta,\nabla_x\vartheta)\cdot\nabla_x\vartheta}{\vartheta}\right)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t \\
&\qquad \leq -\int_0^\tau\int_\Omega \left(\varrho s(\varrho,\vartheta\partial_t + \varrho s(\varrho,\vartheta)\mathbf{u}\cdot\nabla_x\varphi) + \frac{\mathbf{q}(\vartheta,\nabla_x\vartheta)\cdot\nabla_x\varphi}{\vartheta}\right)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t,
\end{aligned} \tag{8.5}$$

   pour presque tout $\tau \in (0,T)$ *et pour tout* $\varphi \in \mathcal{C}^1_c\left([0,T]\times\overline{\Omega}\right)$.
5. *L'inégalité de dissipation est vérifiée*

$$\begin{aligned}
&\int_\Omega \left(\frac{1}{2}\varrho|\mathbf{u}|^2 + H_{\overline{\vartheta}}(\varrho,\vartheta) - \partial_\varrho H_{\overline{\vartheta}}(\tilde{r},\overline{\vartheta})(\varrho-\tilde{r}) - H_{\overline{\vartheta}}(\tilde{r},\overline{\vartheta})\right)(\tau,\cdot)\,\mathrm{d}x \\
&\quad + \int_0^\tau\int_\Omega \frac{\overline{\vartheta}}{\vartheta}\left(\mathbb{S}(\vartheta,\nabla_x\mathbf{u}) : \nabla_x\mathbf{u} - \frac{\mathbf{q}(\vartheta,\nabla_x\vartheta)\cdot\nabla_x\vartheta}{\vartheta}\right)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t \\
&\quad \leq \int_\Omega \left(\frac{1}{2}\varrho_0|\mathbf{u}_0|^2 + H_{\overline{\vartheta}}(\varrho_0,\vartheta_0) - \partial_\varrho H_{\overline{\vartheta}}(\tilde{r},\overline{\vartheta})(\varrho_0-\tilde{r}) - H_{\overline{\vartheta}(\tilde{r},\overline{\vartheta})}\right)\mathrm{d}x
\end{aligned} \tag{8.6}$$

   pour presque tout $\tau \in [0,T]$.

Définition 8.2
(Solution très faible renormalisée avec conditions de Navier)
On dit qu'un triplet $(\varrho, \vartheta, \mathbf{u})$ *est une solution très faible renormalisée du système de Navier-Stokes-Fourier* (4.1) - (4.7), (4.10) - (4.11), (8.2) *s'il est une solution très faible et si de plus*

- *le couple* $(\varrho, \mathbf{u})$ *vérifie l'équation de bilan de la masse renormalisée*

$$\int_\Omega b(\varrho)\varphi\,\mathrm{d}x\Big|_0^\tau = \int_0^\tau\int_\Omega b(\varrho)\left(\partial_t\varphi + \mathbf{u}\cdot\nabla_x\varphi\right)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t + \int_0^\tau\int_\Omega \left(\varrho b'(\varrho) - b(\varrho)\right)\mathrm{div}_x\mathbf{u}\,\varphi\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t, \tag{8.7}$$

pour tout $\tau \in [0,T]$, $\varphi \in \mathcal{C}_c^1\left([0,T) \times \overline{\Omega}\right)$ *et* $b \in \mathcal{C}([0,\infty)) \cap C^1(0,\infty)$ *vérifiant*

$$\begin{cases} zb'(z) \in L^\infty(0,1), \\ b(z)/z^{5\gamma/6} \in L^\infty(1,\infty), \\ \frac{zb'(z)-b(z)}{z^{\gamma/2}} \in L^\infty(1,\infty) \end{cases} \tag{8.8}$$

Définition 8.3
(Solution dissipative avec conditions de Navier)
On dit qu'un triplet $(\varrho, \vartheta, \mathbf{u})$ *est une solution dissipative du système de Navier-Stokes-Fourier* (4.1) - (4.7), (4.10) - (4.11), (8.2) *s'il est une solution très faible et s'il satisfait l'inégalité d'entropie*

$$\begin{aligned}
&\int_\Omega \left(\frac{1}{2}\varrho|\mathbf{u}-\mathbf{U}|^2 + \mathcal{E}(\varrho,\vartheta|r,\Theta)\right)(\tau,\cdot)\,\mathrm{d}x \\
&+ \int_0^\tau \int_\Omega \left(\Theta\frac{\mathbb{S}(\vartheta,\nabla_x\mathbf{u})}{\vartheta} : \nabla_x\mathbf{u} - \mathbb{S}(\vartheta,\nabla_x\mathbf{u}) : \nabla_x\mathbf{U}\right)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t \\
&- \int_0^\tau \int_\Omega \left(\Theta\frac{\mathbf{q}(\vartheta,\nabla_x\vartheta)}{\vartheta^2} : \nabla_x\vartheta - \frac{\mathbf{q}(\vartheta,\nabla_x\vartheta)}{\vartheta}\cdot\nabla_x\Theta\right)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t \\
&\leq \int_\Omega \left(\frac{1}{2}\varrho_0|\mathbf{u}_0-\mathbf{U}(0,\cdot)|^2 + \mathcal{E}(\varrho_0,\vartheta_0|r(0,\cdot),\Theta(0,\cdot))\right)\mathrm{d}x \\
&+ \int_0^\tau \int_\Omega \varrho\left(\partial_t\mathbf{U} + \mathbf{u}\cdot\nabla_x\mathbf{U}\right)\cdot(\mathbf{U}-\mathbf{u})\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t + \int_0^\tau \int_\Omega \varrho(\mathbf{U}-\mathbf{u})\cdot\left(\frac{\nabla_x p(r,\Theta)}{r} - \frac{\nabla_x p(\tilde{r},\overline{\vartheta})}{\tilde{r}}\right)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t \\
&+ \int_0^\tau \int_\Omega (p(r,\Theta)-p(\varrho,\vartheta))\operatorname{div}\mathbf{U}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t + \int_0^\tau \int_\Omega \varrho\left(s(r,\Theta)-s(\varrho,\vartheta)\right)\left(\partial_t + u\cdot\nabla_x\Theta\right)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t \\
&+ \int_0^\tau \int_\Omega \left(1-\frac{\varrho}{r}\right)\left(\partial_t p(r,\Theta) + \mathbf{U}\cdot\nabla_x p(r,\Theta)\right)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t,
\end{aligned} \tag{8.9}$$

pour presque tout $\tau \in (0,T)$ *et avec les fonctions test de classe*

$$(r-\tilde{r}, \Theta-\overline{\vartheta}, \mathbf{U}) \in \mathcal{C}_c^1\left([0,T] \times \overline{\Omega}; \mathbb{R}^5\right) \text{ avec } r>0,\ \Theta>0,\ \mathbf{U}\cdot\mathbf{n}|_\Gamma = 0,\ \mathbf{U}|_{\partial\Omega\setminus\Gamma} = 0, \tag{8.10}$$

où

$$\mathcal{E}(\varrho,\vartheta|r,\Theta) = H_\Theta(\varrho,\vartheta) - \partial_\varrho H_\Theta(r,\Theta)(\varrho-r) - H_\Theta(r,\Theta) \tag{8.11}$$

et

$$H_\Theta(\varrho,\vartheta) = \varrho e(\varrho,\vartheta) - \Theta\varrho s(\varrho,\vartheta). \tag{8.12}$$

De façon similaire au chapitre 4, dans le cas où le domaine Ω est borné, on modifie la définition de solution faible avec conditions de Navier de la façon suivante :

Définition 8.4
(Solution faible dans un domaine borné) On dit qu'un triplet $(\varrho, \vartheta, \mathbf{u})$ *est une solution faible du système de Navier-Stokes-Fourier* (4.1) - (4.7), (4.10) - (4.11), (8.2) *s'il satisfait aux conditions* 1 *à* 4 *de la définition 8.1 et si de plus il respecte la conservation d'énergie totale dans* Ω *:*

$$\int_\Omega \left(\frac{1}{2}\varrho|\mathbf{u}|^2 + \varrho e(\varrho,\vartheta) - \varrho F\right)(\tau,\cdot)\,\mathrm{d}x = \int_\Omega \left(\frac{1}{2}\varrho_0|\mathbf{u}_0|^2 + \varrho_0 e(\varrho_0,\vartheta_0) - \varrho_0 F\right) \tag{8.13}$$

pour presque tout $\tau \in [0,T]$.

8.2 Résultats pour les domaines bornés avec des conditions de bord mixtes

On reprend ici les théorèmes d'existence dans le cas d'un domaine borné, mais adaptés aux conditions de bord mixtes énoncées en (8.2). On se réfère aux mêmes travaux que dans le cas des conditions d'adhésion décrites au chapitre 5, avec toutefois quelques changements mineurs.

Théorème 8.1
On suppose que toutes les hypothèses du théorème 5.1 sont vérifiées. Si le domaine Ω *est de classe* $C^{2,\nu}$ *avec* $\nu \in (0,1)$*, alors le système de Navier-Stokes-Fourier* (4.1) - (4.7)*,* (4.10)*,* (8.2) *possède au moins une solution faible renormalisée* $(\varrho, \vartheta, \mathbf{u})$ *au sens des définitions 8.2 et 8.4.*

On se rapporte encore une fois à [24, Chapitre 3] pour la preuve de ce théorème dans le cas où $\Gamma = \partial\Omega$, en y apportant néanmoins de légères modifications.

Théorème 8.2
Si les hypothèses du théorème 8.1 sont satisfaites, on a
- *Toute solution faible est une solution très faible. En particulier, toute solution faible vérifie l'inégalité de dissipation* (4.37).
- *Toute solution faible est une solution dissipative. En particulier, toute solution faible satisfait l'inégalité d'entropie relative* (4.40) *avec les fonctions test de type* (8.10)*, où* $\Gamma = \partial\Omega$.

8.3 Résultats pour les domaines non bornés avec des conditions de Navier

8.3.1 Type de domaine non borné étudié

On s'intéresse de manière plus précise au type de domaines non bornés pour lesquels on propose des résultats sous les conditions de glissement de Navier. On suppose que les domaines étudiés vérifient les propriétés suivantes :
- Ω est uniformément lipschitzien de la forme

$$\Omega = \bigcup_{s=1}^{s=\infty} \Omega_s,\ \overline{\Omega}_s \subset \Omega_{s+1},\ \Omega_s \in C^{2,\nu} \text{ avec } \nu \in (0,1). \tag{8.14}$$

- Pour tout $\mathbf{u} \in W^{1,2}(\Omega_s; \mathbb{R}^3)$,

$$\mathbf{u}\cdot\mathbf{n}|_{\partial\Omega_s \setminus \partial\Omega} = 0,\ \mathbf{u}|_{\partial\Omega_s \cap \Omega} = 0 \text{ et le prolongement de } \mathbf{u} \text{ par } 0 \text{ à } \Omega \setminus \Omega_s \text{ appartient à } W^{1,2}_{\mathbf{n}}(\Omega; \mathbb{R}^3). \tag{8.15}$$

- Pour tout $\alpha > 0$, il existe $c = c(\alpha) > 0$ tel que pour tout $\mathbf{u} \in W^{1,2}(\Omega; \mathbb{R}^3)$ et tout $V \subset \Omega$ avec $|V| < \alpha$,

$$\|\mathbf{u}\|^2_{W^{1,2}(\Omega;\mathbb{R}^3)} \le c \left(\|\mathbb{T}(\nabla_x \mathbf{u})\|^2_{L^2(\Omega;\mathbb{R}^{3\times 3})} + \int_{\Omega\setminus V} \mathbf{u}^2 \,\mathrm{d}x \right). \tag{8.16}$$

Ce type de domaine inclut entre autre les domaines extérieurs, les demis-espaces, $\mathbb{R}^3$ tout entier ou encore des cylindres infinis de base quelconque.

Les trois théorèmes énoncés dans la section qui suit sont tous écrits pour des domaines caractérisés par ces propriétés.

8.3.2 Résultats obtenus

Théorème 8.3
Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ *un domaine soit borné de classe* $\mathcal{C}^{2,\nu}$ *avec* $\nu \in (0,1)$*, soit non borné qui possède les propriétés* (8.14) - (8.16)*. On suppose que*
- p*,* e *et* s *vérifient les hypothèses* (4.15) - (4.21)*,*
- μ*,* ξ *et* κ *respectent les relations* (4.22) *et* (4.23)*,*
- *la force potentielle* F *est de classe* $\mathcal{C}^1(\overline{\Omega})$*,*
- *l'état d'équilibre* $(\tilde{r}, \overline{\vartheta})$ *qui est associé à* F *satisfait à* (4.30)*,*
- *les données initiales définies en* (4.10) *ont les propriétés décrites en* (4.31) - (4.33).

Alors le système de Navier-Stokes-Fourier (4.1) - (4.6)*,* (4.11) *avec les conditions initiales* (4.10) *et les conditions de bord de Navier* (8.1) *possède au moins une solution très faible renormalisée* $(\varrho, \vartheta, \mathbf{u})$ *au sens des définitions 8.1 et 8.2.*

Théorème 8.4
On suppose que toutes les hypothèses du théorème 8.3 sont vérifiées, alors le système de Navier-Stokes-Fourier (4.1) - (4.6)*,* (4.11) *avec les conditions initiales* (4.10) *et les conditions de bord de Navier* (8.1) *admet au moins une solution dissipative au sens des définitions 8.1 et 8.3. Elle satisfait en particulier l'inégalité d'entropie relative* (4.40) *testée avec le triplet* $(r, \Theta, \mathbf{U})$ *de classe* (8.10) *avec* $\Gamma = \partial\Omega$ *.*

Théorème 8.5
On suppose que toutes les hypothèses du théorème 8.3 sont vérifiées, que la fonction P *décrite en* (4.18) *est deux fois continument dérivable sur* $(0, \infty)$ *et que de plus*

$$\nabla_x F \in L^2 \cap L^6(\Omega; \mathbb{R}^3) \tag{8.17}$$

et

$$\tilde{r} \in \mathcal{C}^1_B(\overline{\Omega}), \ \mathcal{E}(\tilde{r}, \overline{\vartheta} | \overline{r}, \overline{\vartheta}) \in L^1(\Omega) \tag{8.18}$$

pour un certain $\overline{r} > 0$*.*

Soit $(\varrho, \vartheta, \mathbf{u})$ *une solution dissipative du sytème de Navier-Stokes-Fourier* (4.1) - (4.6)*,* (4.11) *avec les conditions initiales* (4.10) *et les conditions de bord de Navier* (8.1)*. Si* $(\tilde{\varrho}, \tilde{\vartheta}, \tilde{\mathbf{u}})$ *est une solution classique du système* (4.1) - (4.11) *sur* $(0, T) \times \Omega$ *qui satisfait l'inégalité de dissipation* (4.37) *vérifiant*

$$\begin{gathered} 0 < \underline{\vartheta} \leq \tilde{\vartheta} \leq \overline{\vartheta} < \infty, \quad 0 < \underline{\varrho} \leq \tilde{\varrho} \leq \overline{\varrho} < \infty, \quad \tilde{\mathbf{u}} \in L^\infty(0, T; L^2 \cap L^\infty(\Omega; \mathbb{R}^3)), \\ \partial_t \tilde{\varrho}, \partial_t \tilde{\vartheta}, \partial_t \tilde{\mathbf{u}}, \nabla_x \tilde{\varrho}, \nabla_x^m \tilde{\vartheta}, \nabla_x^m \tilde{\mathbf{u}} \in L^\infty(0, T; L^2 \cap L^\infty(\Omega; \mathbb{R}^3)), \quad m = 1, 2 \end{gathered} \tag{8.19}$$

et qui émane des mêmes données initiales, alors

$$(\varrho, \vartheta, \mathbf{u}) = (\tilde{\varrho}, \tilde{\vartheta}, \tilde{\mathbf{u}}) \ sur \ [0, T] \times \overline{\Omega}. \tag{8.20}$$

8.4 Modification des preuves pour passer aux conditions de Navier

1. Pour le théorème 8.3 : On note $(\varrho_s, \vartheta_s, \mathbf{u}_s)$ une solution très faible du problème (4.1) - (4.6), (4.11), (8.2) avec $\Gamma = \partial\Omega_s \setminus \Omega$ avec (4.10) pour conditions initiales. L'existence d'une telle solution est assurée par le théorème 8.1. On prolonge (ϱ_s, ϑ_s) par $(\tilde{r}, \overline{\theta})$ sur $\Omega \setminus \Omega_s$ et $\mathbf{u}_s$ par 0 sur ce même ensemble en conservant les mêmes notations pour ces nouvelles fonctions. Connaissant les propriétés de prolongement de $\mathbf{u}_s$ décrites en (8.15), on en déduit que $\mathbf{u}_s$ est dans $W^{1,2}_{\mathbf{n}}(\Omega; \mathbb{R}^3)$. On utilise ensuite l'inégalité (8.16) avec l'ensemble $V = \{x \in \Omega \mid |\varrho_s - \tilde{r}| \geq \tilde{r}/2\}$. Les estimations (5.8) nous permettent de déduire que $|V|$ est bornée indépendamment de s. Ainsi, l'utilisation de (8.16) en association avec (5.12) implique la majoration

$$\|\mathbf{u}\|_{L^2(0,T; W^{1,2}(\Omega, \mathbb{R}^3))} \leq c. \tag{8.21}$$

   Cette dernière remplace l'estimation (5.17) de la preuve dans le cas des conditions d'adhérence du chapitre 5. Le reste de la preuve demeure inchangé.
2. Pour le théorème 8.4 : Il suffit de suivre la preuve décrite dans le chapitre 6.
3. Pour le théorème 8.5 : La seule différence notable avec la démonstration détaillée pour le théorème 7.1 réside dans les prolongements de $\mathbf{u}$ et $\tilde{\mathbf{u}}$ par 0 en dehors de Ω_s. Ces derniers ne sont plus continus ce qui empêche l'utilisation de l'inégalité de Korn pour obtenir (7.13). Pour pallier cela, on réitère l'utilisation de la propriété (8.16) avec $V = \{x \in \Omega \mid |\varrho_s - \tilde{r}| \geq \tilde{r}/2\}$. La minoration (7.10) nous indiquant que V est borné, on arrive à l'inégalité

$$\|\mathbb{T}(\nabla_x(\mathbf{u} - \tilde{\mathbf{u}}))\|_{L^2(\Omega;\mathbb{R}^3)} \geq c \left(\|\mathbf{u} - \tilde{\mathbf{u}}\|^2_{W^{1,2}(\Omega;\mathbb{R}^3)} - \int_\Omega \varrho(\mathbf{u} - \tilde{\mathbf{u}})^2 \, \mathrm{d}x \right). \tag{8.22}$$

   Ceci permet de finir la démonstration sans autre changement.

Conclusion et perspectives

Dans cette partie dédiée à l'étude des écoulements instationnaires, nous avons travaillé sur le système de Navier-Stokes-Fourier complet en domaine non borné. Nous avons prouvé des résultats d'existence de solutions faibles, une inégalité d'entropie relative et démontré que le principe d'unicité forte-faible est respecté pour les solutions faibles qui vérifient l'inégalité d'entropie relative.

Les résultats ont d'abord été obtenus sur une large classe de domaines bornés pour des conditions de bord d'adhérence, puis nous avons pu les porter au cas des conditions de Navier à la frontière réduisant quelque peu la classe des domaines non bornés pouvant être considérées. Concernant les conditions à l'infini, nous imposons une vitesse nulle, une température constante et une densité à l'équilibre dans chacun des cas.

La démonstration de l'existence des solutions très faibles a nécessité l'emploi de plusieurs outils déjà décrits dans la première partie, comme l'identité du flux effectif visqueux, l'utilisation d'une mesure de défaut, le concept de solutions renormalisées pour l'équation de conservation de la masse et divers arguments techniques se rapportant à chacun de ces outils. Nous pouvons ajouter à cela une variante du lemme div-rot et l'utilisation de mesures de Young paramétrées indispensables à la preuve de la convergence de la température.

On établit l'inégalité d'entropie relative en incorporant dans l'inégalité de dissipation la quantité $\frac{1}{2}\varrho|\mathbf{u}-\mathbf{U}|^2 + \mathcal{E}(\varrho, \vartheta|r, \Theta)$ où $(r, \Theta, \mathbf{U})$ sont des fonctions arbitraires. On démontre qu'il est possible de construire des solutions très faibles vérifiant cette inégalité, mais nous n'arrivons toutefois pas à montrer que toute solution très faible satisfait l'inégalité d'entropie relative.

Ceci permet d'estimer "l'éloignement" entre une solution très faible vérifiant notre inégalité et ces fonctions arbitraires. Il s'agit d'un point crucial dans la démonstration du principe d'unicité forte-faible, où l'on teste notre inégalité d'entropie relative avec une solution dissipative et une solution forte issue des mêmes données initiales. En effet, après avoir exhibé une forme quadratique dans notre inégalité, nous avons appliqué le lemme de Gronwall et montré que les deux solutions coïncident.

On constate que l'inégalité d'entropie relative joue un rôle de premier plan dans l'étude du système de Navier-Stokes-Fourier. Ceci nous ouvre des perspectives avec, par exemple :

1. Son application dans la réduction de modèles thermodynamiques à une analyse asymptotique des équations de Navier-Stokes-Fourier (limites à faibles nombres de Mach ou de Froude ou encore à grands nombres de Reynolds ou de Péclet). Dans ce cas, on pourrait envisager d'utiliser l'inégalité d'entropie relative pour mesurer la distance entre la solution faible du système de Navier-Stokes-Fourier et une solution forte du système cible. Par exemple, si $Ma \to 0$ et $Fr \to 0$, le système visé peut être l'approximation d'Oberbeck-Boussinesq, si $Ma \to 0$, $Fr \to 0$ et $Re \to 0$, on s'attend à tendre vers un système d'Euler avec une force de "buoyancy". Notons que le système cible dépend de divers ratios entre les nombres caractéristiques qui entrent en jeu.
2. Son emploi dans la mise en place et l'étude de schémas numériques respectant la théorie d'existence des solutions. En effet, l'inégalité d'entropie relative serait un bon outil dans l'étude de la stabilité des schémas numériques par rapport aux solutions fortes. Les premiers schémas numériques avec cette propriété pour le système de Navier-Stokes compressible barotrope ou le système de Stokes compressible barotrope ont été construits par Gallouët, Gastaldo, Herbin et Latché [33], Gallouët *et al.* [32], Eymard, Gallouët, Herbin et Latché [20], [19] suivis par Karper [49].

Il est aussi envisageable d'étudier les équations de Navier-Stokes-Fourier couplées avec l'équation de Maxwell dans l'esprit de Feireisl et Ducomet [15] ou encore avec des termes supplémentaires de capillarité dans l'esprit de Haspot [38], [37], ou encore le problème de Cauchy pour un solide immergé dans un fluide compressible avec des conditions de glissement (partiel ou total) au bord comme l'ont fait Planas et Sueur dans leur travail [65], mais pour des fluides incompressibles. Notons que dans le cas des conditions de Dirichlet, nous disposons des études de problèmes similaires par Serre [73] et Takahashi, Tucsnak [78] pour les fluides incompressibles et de Feireisl [22] pour les fluides incompressibles.

Annexes

Annexe A

Définitions usuelles

On rappelle ici plusieurs définitions et notations souvent usuelles afin de donner un sens clair aux différentes notations employées au cours des nos travaux. Notons que dans ce chapitre Ω un désigne un domaine de $\mathbb{R}^3$.

Opérateurs différentiels

Notation (Dérivée partielle)
On utilise le symbole

$$\partial_{x_i} f(x) := \frac{\partial f}{\partial x_i}(x)$$

pour représenter la dérivée partielle de la fonction f par rapport à la variable x_i, calculée en un point x. On emploie la même notation pour parler des dérivées au sens des distributions.

Définition A.1 (Opérateur gradient)
Le gradient d'une fonction scalaire f est le vecteur défini et noté de la manière suivante

$$\nabla f(x) := \left[\partial_{x_1} f(x), ..., \partial_{x_N} f(x)\right].$$

Le gradient d'un vecteur $\mathbf{v}$ est la matrice

$$\nabla \mathbf{v}(x) := \{\partial_{x_j} \mathbf{v}_i(x)\}_{i,j=1}^N.$$

Dans chacun des cas, on note $\nabla^T f$ ou $\nabla^T \mathbf{v}$ le vecteur transposé ou la matrice transposée du gradient du scalaire f ou du vecteur $\mathbf{v}$.

Notation (Gradient spatial)
Le gradient par rapport aux coordonnées spatiales d'une fonction scalaire $f(t,x)$ ou d'une fonction vectorielle $\mathbf{v}(t,x)$ est noté ∇_x. Il est défini par

$$\nabla_x f(t,x) := \left[\partial_{x_1} f(t,x), ..., \partial_{x_N} f(t,x)\right] \text{ et } \nabla_x \mathbf{v}(t,x) := \{\partial_{x_j} \mathbf{v}_i(t,x)\}_{i,j=1}^N.$$

Définition A.2 (Opérateur divergence)
La divergence d'une fonction vectorielle $\mathbf{v}$ est une fonction scalaire définie par

$$\operatorname{div} \mathbf{v}(x) := \sum_{i=1}^{3} \partial_x \mathbf{v}_i(x).$$

La divergence d'une fonction matricielle $\mathbb{A}(x)$ est une fonction vectorielle définie par

$$\operatorname{div} \mathbb{A}(x) := [\partial_{x_j} \mathbb{A}_{1,j}(x), \partial_{x_j} \mathbb{A}_{2,j}(x), \partial_{x_j} \mathbb{A}_{3,j}(x)]$$

où l'on utilise la convention d'Einstein de sommation sur les indices répétés.

Notation (Divergence spatiale)
Comme pour le gradient, la divergence par rapport aux coordonnées spatiales d'une fonction vectorielle $\mathbf{v}(t,x)$ ou d'une fonction matricielle $\mathbb{A}(t,x)$ est noté div_x. Elle est définie par

$$\operatorname{div}_x \mathbf{v}(t,x) := \sum_{i=1}^{3} \partial_x \mathbf{v}_i(t,x) \text{ et } \operatorname{div}_x \mathbb{A}(t,x) := [\partial_{x_j} \mathbb{A}_{1,j}(t,x), \partial_{x_j} \mathbb{A}_{2,j}(t,x), \partial_{x_j} \mathbb{A}_{3,j}(t,x)].$$

Définition A.3 (Opérateur laplacien)
On définit l'opérateur laplacien comme la composée du gradient par la divergence

$$\Delta(\cdot) := \operatorname{div} \nabla(\cdot).$$

Définition A.4 (Rotationnel)
En dimension 2 on définit le rotationnel d'un vecteur $\mathbf{v}$ *comme le scalaire*

$$\partial_{x_1}\mathbf{v}_2 - \partial_{x_2}\mathbf{v}_1.$$

Le rotationnel d'un vecteur $\mathbf{v}(x)$ *de dimension* 3 *est l'opérateur*

$$\nabla \times \mathbf{v}(x),$$

où le symbole ∇ *représente le vecteur* $(\partial_{x_1}(\cdot), \partial_{x_2}(\cdot), \partial_{x_3}(\cdot))$.

En dimension $n > 3$, *on appelle rotationnel d'un vecteur* $\mathbf{v}$, *noté* $\operatorname{rot} \mathbf{v}$, *l'opérateur*

$$\operatorname{rot} \mathbf{v} := (\nabla \mathbf{v} - \nabla^T \mathbf{v}). \tag{A.1}$$

Il s'agit donc d'un tenseur antisymétrique d'ordre 2.

Espaces des fonctions continues

Définition A.5 (Fonctions de classe $\mathcal{C}^k$)
Pour $k \in \mathbb{N}$, $\mathcal{C}^k(\Omega)$ *est l'ensemble des fonctions* k *fois continument dérivables sur* Ω *et* $\mathcal{C}^k(\overline{\Omega})$ *l'ensemble des restrictions à* $\overline{\Omega}$ *des fonctions de* $\mathcal{C}^k(\mathbb{R}^N)$.

Notation (Fonctions continues à support compact)
On note $\mathcal{C}^k_c(\Omega)$ *l'ensemble des fonctions de classe* $\mathcal{C}^k(\Omega)$ *à support compact dans* Ω.

Notation (Fonctions continues bornées)
On note $\mathcal{C}^k_B(\overline{\Omega})$ *l'espace de Banach des fonctions de* $\mathcal{C}^k(\overline{\Omega})$ *dont toutes les dérivées jusqu'à l'ordre* k *muni de la norme*

$$\|\mathbf{f}\|_{\mathcal{C}^k_B(\overline{\Omega});\mathbb{R}^M} := \max_{|\alpha| \le k} \sup_{x \in \Omega} |\partial^\alpha \mathbf{f}(x)|,$$

où α *est un multiindice.*

Définition A.6 (Fonctions Hölderiennes)
Une fonction f *de* $\overline{\Omega} \subset \mathbb{R}^N$ *dans* $\mathbb{R}^N$ *est dite* μ*-Hölderienne avec* $\mu \in (0, 1]$ *s'il existe une constante* L *telle que pour tout* $x, y \in \overline{\Omega}$,

$$|f(x) - f(y)| \le L|x - y|^\mu.$$

On note l'ensemble des fonction μ*-Hölderiennes* $\mathcal{C}^{0,\mu}(\overline{\Omega})$ *et* $\mathcal{C}^{k,\mu}(\overline{\Omega})$ *l'ensemble des fonction* μ*-Hölderiennes dont toutes les dérivées sont elles-mêmes* μ*-Hölderiennes jusqu'à l'ordre* k. *L'espace* $\mathcal{C}^{k,\mu}(\overline{\Omega})$ *muni de la norme*

$$\|f\|_{\mathcal{C}^{k,\mu}(\overline{\Omega})} = \max_{|\alpha| \le k} \sup_{x \in \Omega} |\partial^\alpha f(x)| + \max_{|\alpha| \le k} \sup_{(x,y) \in \Omega^2, x \neq y} \frac{|\partial^\alpha f(x) - \partial^\alpha f(y)|}{|x - y|^\mu}$$

est un espace de Banach. Si $\mu = 1$ *et* $k = 0$, *les fonctions sont dites lipschitziennes.*

Notation (Dual de l'espace des fonctions continues bornées)
On note $\left[\mathcal{C}_B(\overline{\Omega})\right]^*$ *le dual topologique de* $\mathcal{C}_B(\overline{\Omega})$. *Il s'agit d'un espace de Banach quand on le munit de la norme*

$$\|f\|_{\left[\mathcal{C}_B(\overline{\Omega})\right]^*} := \sup_{\varphi \in \mathcal{C}_B(\overline{\Omega})} \frac{\langle f, \varphi \rangle_{\mathcal{C}_B(\overline{\Omega}), \left[\mathcal{C}_B(\overline{\Omega})\right]^*}}{\|\varphi\|_{\mathcal{C}_B(\overline{\Omega})}}$$

Définition A.7 (Distributions)
Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ *un ensemble ouvert. On désigne par* $\mathcal{D}(\Omega; \mathbb{R}^M)$ *l'espace* $\mathcal{C}^\infty_c(\Omega; \mathbb{R}^M)$ *muni de la topologie induite par la convergence*

$$\boldsymbol{\varphi}_n \to \boldsymbol{\varphi} \text{ dans } \mathcal{D}(\Omega; \mathbb{R}^M) \text{ si } \boldsymbol{\varphi}_n \to \boldsymbol{\varphi} \text{ dans } \mathcal{C}^k(K; \mathbb{R}^M)$$

pour tout entier naturel k, avec K un compact de Ω incluant le support de $\boldsymbol{\varphi}$. Le dual topologique de $\mathcal{D}(\Omega)$ est noté $\mathcal{D}'(\Omega)$. Il s'agit de l'espace des distributions sur Ω à valeurs dans $\mathbb{R}^M$.

Définition A.8 (Espaces $\mathcal{C}_{\mathbf{weak}}(\overline{\Omega}; \mathcal{X})$)
On note $\mathcal{C}_{weak}(\Omega; \mathcal{X})$ l'espace des fonctions sur Ω à valeurs dans un espace de Banach $\mathcal{X}$ qui sont continues pour la topologie faible de $\mathcal{X}$. On dit que f_n converge vers f dans $\mathcal{C}_{weak}(\Omega; \mathcal{X})$ si

$$\langle f_n; \varphi \rangle_{\mathcal{X},\mathcal{X}^*} \to \langle f; \varphi \rangle_{\mathcal{X},\mathcal{X}^*} \text{ dans } \mathcal{C}(\Omega) \text{ pour tout } \varphi \in \mathcal{X}^*.$$

Espaces de Lebesgue

Définition A.9 (Espaces de Lebesgue)
On définit l'espace de Lebesgue $L^p(\Omega)$ par

$$L^p(\Omega) := \left\{ f \text{ mesurable}, \int_\Omega |f(x)|^p \, dx < \infty \right\},$$

où $1 \le p < \infty$. C'est un espace de Banach pour la norme $\|f\|_{L^p(\Omega)} = \left[\int_\Omega |f|^p\right]^{\frac{1}{p}}$.
De manière similaire, on note $L^\infty(\Omega)$ l'espace

$$L^\infty(\Omega) := \{ f \text{ mesurable}, \ \exists c > 0, |f(x)| \le c \text{ presque partout} \}.$$

Il est lui aussi un espace de Banach pour la norme

$$\|f\|_{L^\infty(\Omega)} = \inf \{ c \ge 0, \ f(x) \le c \text{ presque partout} \}.$$

Les espaces $L^p(\Omega)$ sont séparables si $1 \le p < \infty$ et réflexifs pour $1 < p < \infty$.

Notation (Duaux des espaces de Lebesgue)
Pour $1 < p < \infty$, on désigne le dual de l'espace de Lebesgue $L^p(\Omega)$ par

$$[L^p(\Omega)]^* := L^{p'}(\Omega)$$

et on a $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$. Le dual de $L^1(\Omega)$ est $L^\infty(\Omega)$, mais on sait seulement que $L^1(\Omega) \subset [L^\infty(\Omega)]^*$.

Notation (Fonctions localement intégrables)
Pour $p \in [1, \infty)$, on désigne par $L^p_{loc}(\Omega)$ l'ensemble des fonctions appartenant à $L^p(K)$ pour tout K compact de Ω.

Notation (Espaces des fonctions p-intégrables pondérées)
Pour $1 \le p < \infty$ et $f \ge 0$ mesurable, on note $L^p_f(\Omega, \mathbb{R}^N)$ l'ensemble

$$\left\{ \mathbf{v} \mid f|\mathbf{v}|^p \in L^1(\Omega, \mathbb{R}^N) \right\}.$$

Espaces de Sobolev

Définition A.10 (Espaces de Sobolev)
Soit $1 \le p < \infty$, on définit l'espace de Sobolev $W^{1,p}(\Omega)$

$$W^{1,p}(\Omega) := \left\{ f \in L^p(\Omega), \exists (g_i)_{i=1}^n \in L^p(\Omega) \text{ telle que } \int_\Omega f \partial_i \varphi = \int_\Omega g_i \varphi, \ \forall \varphi \in \mathcal{C}^\infty_c(\Omega) \right\}.$$

On généralise cette définition aux dérivées d'ordres supérieurs avec, par exemple, la définition suivante

$$W^{k,p}(\Omega) := \{ u \in L^p(\Omega), \ \partial_\alpha u \in L^p(\Omega) \text{ pour tout multiindice } \alpha \text{ vérifiant } |\alpha| \le k \}.$$

Enfin, on note

$$W^{1,p}_0(\Omega) = \overline{\mathcal{C}^\infty_c(\Omega)}^{W^{1,p}(\Omega)},$$

la fermeture de $C_c^\infty(\Omega)$ dans l'espace $W^{1,p}(\Omega)$. On utilise la norme

$$\|f\|_{W^{1,p}(\Omega)} := \left(\|f\|^p_{L^p(\Omega)} + \sum_{i=1}^n \|\partial_i f\|^p_{L^p(\Omega)}\right)^{\frac{1}{p}}$$

pour laquelle $W^{1,p}(\Omega)$ est un espace de Banach si $1 \leq p \leq \infty$. $W^{1,p}(\Omega)$ est de plus séparable pour $1 \leq p < \infty$ et réflexif pour $1 < p < \infty$. Enfin, on munit $W^{k,p}(\Omega)$ de la norme

$$\|f\|_{W^{k,p}(\Omega)} := \left(\sum_{|\alpha|=0}^k \int_\Omega |\partial_\alpha f|^p \,\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{p}}$$

qui en fait un espace de Banach.

Définition A.11 (Duaux des espaces de Sobolev)
Soit $1 \leq p \leq \infty$. On note

$$W^{-k,p}(\Omega) = \left[W_0^{k,p'}(\Omega)\right]^*,$$

qui représente le dual topologique de $W_0^{1,p'}(\Omega)$, avec $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$.

Définition A.12 (Espaces de Sobolev-Slobodetskii)
Si $k \in \mathbb{N}$, $\varepsilon \in (0,1)$ et $p \in [1,\infty)$, alors on définit l'espace de Sobolev-Slobodetskii $W^{k+\varepsilon,p}(\Omega)$ comme l'espace des fonctions de $W^{k,p}(\Omega)$ vérifiant

$$\int_\Omega \int_\Omega \frac{|\partial^\alpha \mathbf{u}(x) - \partial^\alpha \mathbf{u}(y)|^p}{|x-y|^{N+p\varepsilon}} \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y < \infty$$

pour tout multiindice α tel que $|\alpha| = k$. Muni de la norme

$$\|\mathbf{u}\|_{W^{k+\varepsilon,p}(\Omega)} = \left(\|\mathbf{u}\|_{W^{k,p}(\Omega)} + int_\Omega \int_\Omega \frac{|\partial^\alpha \mathbf{u}(x) - \partial^\alpha \mathbf{u}(y)|^p}{|x-y|^{N+p\varepsilon}} \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\right)^{1/p},$$

$W^{k+\varepsilon,p}(\Omega)$ est un espace de Banach.

Notation
On note $W_{\mathbf{n}}^{k,p}(\Omega)$ l'ensemble des éléments de $W^{k,p}(\Omega)$ à trace normale nulle au bord.

Notation
Dans le dernier chapitre, traitant de conditions mixtes au bord d'un domaine, on met en place la notation suivante

$$W^{1,2}_{\mathbf{n},\Gamma}(\Omega) := \overline{\left\{\mathbf{u} \in \mathcal{C}^{2,\nu}(\overline{\Omega} \setminus \Gamma) \mid \mathbf{u} \cdot \mathbf{n}|_\Gamma = 0,\ \mathbf{u}|_{\partial\Omega\setminus\Gamma} = 0\right\}}^{W^{1,2}(\Omega)}.$$

Dans le cas où $\Gamma = \partial\Omega$, on revient à la notation introduite précédemment.

Espaces de Bochner

Définition A.13 (Espaces de Bochner)
On définit les espaces de Bochner $L^p(0,T;\mathcal{X})$ pour $1 \leq p < \infty$, $L^\infty(0,T;\mathcal{X})$ et $\mathcal{C}(I;\mathcal{X})$, où $T > 0$, $\mathcal{X}$ est un espace de Banach et I est un intervalle de $\mathbb{R}$, ainsi que la norme dont on les munit de la façon suivante

$$f : (0,T) \to \mathcal{X} \text{ appartient à } L^p(0,T;\mathcal{X}) \quad \Leftrightarrow \quad \|f\|^p_{L^p(0,T;\mathcal{X})} := \int_0^T \|f(t)\|^p_{\mathcal{X}} \,\mathrm{d}t < \infty,$$

$$f : (0,T) \to \mathcal{X} \text{ appartient à } L^\infty(0,T;\mathcal{X}) \quad \Leftrightarrow \quad \|f\|_{L^\infty(0,T;\mathcal{X})} := \operatorname*{sup\,ess}_{(0,T)} \|f(t)\|_{\mathcal{X}} < \infty,$$

$$f : (0,T) \to \mathcal{X} \text{ appartient à } C([0,T];\mathcal{X}) \quad \Leftrightarrow \quad \|f\|_{\mathcal{C}([0,T];\mathcal{X})} := \sup_{(0,T)} \|f(t)\|_{\mathcal{X}} < \infty.$$

Ce sont des espaces de Banach pour les normes $\|f\|_{L^p(0,T;\mathcal{X})}$ *et* $\|f\|_{\mathcal{C}([0,T];\mathcal{X})}$ *respectivement.*

Annexe B

Théorèmes usuels

On rappelle dans cette partie quelques résultats connus auxquels on fait référence au cours de nos travaux. Les références indiquées ne sont pas toujours originales, mais on peut consulter les ouvrages cités pour plus de références.

Lemme 35 (Inégalité de Poincaré)
Soit $1 \leq p < \infty$ et Ω un domaine lipschitzien de $\mathbb{R}^N$. Alors :

1. *Pour tout ensemble $A \subset \partial\Omega$ de surface non nulle, il existe une constante positive $c = c(p, N, A, \Omega)$ telle que*
$$\forall v \in W^{1,p}(\Omega), \ \|v\|_{L^p(\Omega)} \leq c \left(\|\nabla v\|_{L^p(\Omega;\mathbb{R}^N)} + \int_A |v| \,\mathrm{d}S \right). \tag{B.1}$$
2. *Il existe une constante positive c dépendant uniquement de p et du domaine telle que*
$$\forall v \in W^{1,p}(\Omega), \ \left\| v - \frac{1}{\Omega} \int_\Omega v \,\mathrm{d}x \right\|_{L^p(\Omega)} \leq c \|\nabla v\|_{L^p(\Omega)}. \tag{B.2}$$

Pour ce résultat, on se rapporte à [24] et aux travaux auxquels il fait référence.

Théorème B.1 (Théorème de Rellich-Kondrachov)
Soit Ω un domaine lipschitzien borné de $\mathbb{R}^N$.

1. *Si $kp < N$, l'espace de Sobolev $W^{k,p}(\Omega)$ est inclus continument dans $L^q(\Omega)$ si*
$$1 \leq q \leq \frac{Np}{N - kp}. \tag{B.3}$$
L'inclusion se révèle compacte si $k > 0$ et $q < \frac{Np}{N-kp}$.
2. *Si $kp = N$, l'espace de Sobolev $W^{k,p}(\Omega)$ est inclus de façon compacte dans $L^q(\Omega)$ pour tout q dans $[1, \infty)$.*
3. *Si $kp > N$, l'espace de Sobolev $W^{k,p}(\Omega)$ est inclus continument dans $C^{k-[N/p]+1,\nu}(\overline{\Omega})$ avec*
$$\nu = \begin{cases} [\frac{N}{p}] + 1 - \frac{N}{p}, \ \text{si } \frac{N}{p} \notin \mathbb{Z}, \\ \text{un nombre quelconque de } (0,1), \ \text{si } \frac{N}{p} \in \mathbb{Z}. \end{cases} \tag{B.4}$$
De plus, l'inclusion est compacte si $0 < \nu < [\frac{N}{p}] + 1 - \frac{N}{p}$.

On se réfère pour ce théorème au livre [62] et à toutes les références qu'il contient.

Lemme 36 (Lemme de Gronwall - Forme intégrale)
Soit h une fonction continue sur un intervalle $[a, b]$ et r une fonction intégrable sur l'intervalle ouvert (a, b). On suppose en outre que h et r sont positives ou nulles presque partout sur (a, b).
Si y est une fonction continue sur $[a, b]$ satisfaisant l'inégalité suivante
$$y(t) \leq h(t) + \int_a^b r(s)y(s) \,\mathrm{d}s \tag{B.5}$$
pour tout t dans (a, b), alors on a
$$y(t) \leq h(t) + \int_a^b h(s)r(s) \exp\left(\int_s^t r(\tau) \,\mathrm{d}\tau \right) \tag{B.6}$$

pour tout t dans (a, b).

Citons par exemple le livre [18] qui contient une preuve de ce lemme.

Théorème B.2 (Théorème d'Egoroff)
Soit f_n une suite de fonctions convergeant presque partout vers une fonction f sur un ensemble M mesurable et borné de $\mathbb{R}^n$, avec f finie presque partout. Alors, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un sous-ensemble A de M tel que $|M \setminus A| < \varepsilon$ où f converge uniformément vers f.

On se réfère à [62] pour cette formulation du théorème ainsi qu'aux citations qu'il donne.

Lemme 37 (Inégalité d'interpolation)
Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ et $\mathbf{v} \in [L^p \cap L^q](\Omega)$ avec $1 \leq p, q \leq \infty$, alors l'inégalité suivante est vérifiée

$$\|v\|_{L^r(\Omega)} \leq c\|v\|^{\lambda}_{L^p(\Omega)}\|v\|^{1-\lambda}_{L^q(\Omega)}, \tag{B.7}$$

où

$$\frac{1}{r} = \frac{\lambda}{p} + \frac{1-\lambda}{q}, \quad 0 \leq \alpha \leq 1.$$

Voir [7].

Théorème B.3 (Théorème d'Arzela-Ascoli)
Toute suite $\{\mathbf{v}_n\}_{n=1}^{\infty}$ d'éléments de $\mathcal{C}_B([0,T];\mathbb{R}^N)$ bornée et uniformément équi-continue est précompacte dans $\mathcal{C}_B([0,T];\mathbb{R}^N)$.

Une fois encore, on invoque [7] et toutes les références qu'il donne.

Définition B.1 (Fonctions de Carathéodory)
Soit Q un domaine de $\mathbb{R}^N$. On appelle fonction de Carathéodory de $Q \times \mathbb{R}^M$ vers $Q \times \mathbb{R}^M$ toute fonction Ψ vérifiant
- *pour presque tout x de Q, la fonction $\lambda \mapsto \psi(x, \lambda)$ est continue sur $\mathbb{R}^M$,*
- *pour tout λ de R^M, la fonction $x \mapsto \psi(x, \lambda)$ est mesurable sur Q.*

On dit que $\{\mu_x\}_{x \in Q}$ est une famille de mesures paramétrées si μ_x est une mesure de probabilité pour presque tout x de Q et si la fonction $x \mapsto \int_{\mathbb{R}^M} \phi(\lambda)\,\mathrm{d}\mu_x(\lambda) := \langle \mu_x, \phi \rangle$ est mesurable sur Q pour tout $\phi \in \big(C(\mathbb{R}^M) \cap L^\infty(\mathbb{R}^M)\big)$.

Théorème B.4 (Théorème fondamental des mesures de Young paramétrées)
Soit $\{\mathbf{v}_n\}_{n=1}^{\infty}$, $\mathbf{v}_n : Q \to \mathbb{R}^M$ une suite de fonctions bornées dans $L^1(Q;\mathbb{R}^M)$ où Q est un domaine borné de $\mathbb{R}^N$.
Alors, il existe une sous-suite de $\{\mathbf{v}_n\}_{n=1}^{\infty}$ (toujours indicée par n) et une famille $\{\mu_y\}_{y \in Q}$ de mesures de probabilité sur $\mathbb{R}^M$ qui vérifient la propriété suivante :
pour toute fonction de Carathéodory $\Phi = \Phi(y, z)$, $(y, z) \in Q \times \mathbb{R}^M$ telle que $\Phi(\cdot, \mathbf{v}_n) \rightharpoonup \overline{\Phi}$ dans $L^1(Q)$, on a

$$\overline{\Phi}(y) = \int_{\mathbb{R}^M} \psi(y, z)\,\mathrm{d}\mu_z \text{ pour presque tout } y \in Q. \tag{B.8}$$

Ce résultat est issu de [24], auquel on se rapporte pour trouver la référence originale.

Théorème B.5 (Convergence faible et monotonie)
Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$, Q un domaine de $\mathbb{R}^N$ et (P, G) un couple de fonctions continues croissantes sur I.
Supposons que ϱ_n est une suite de $L^1(Q; I)$ telle que l'on ait les convergences faibles suivantes dans $L^1(Q)$:
- $P(\varrho_n) \to \overline{P(\varrho)}$,
- $G(\varrho_n) \to \overline{G(\varrho)}$,
- $P(\varrho_n)G(\varrho_n) \to \overline{P(\varrho)G(\varrho)}$.

Alors, $\overline{P(\varrho)}$ et $\overline{G(\varrho)}$ vérifient les propriétés :

1. $$\overline{P(\varrho)}\,\overline{G(\varrho)} \leq \overline{P(\varrho)G(\varrho)} \tag{B.9}$$

2. Si en outre
- $G \in C(\mathbb{R})$ *est strictement croissante avec* $G(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$,
- $P \in C(\mathbb{R})$ *est croissante,*
- $\overline{P(\varrho)G(\varrho)} = \overline{P(\varrho)}\,\overline{G(\varrho)}$,

alors

$$\overline{P(\varrho)} = P \circ G^{-1}\left(\overline{G(\varrho)}\right). \tag{B.10}$$

La preuve de ce résultat peut être trouvée dans [24], ainsi que références à des travaux similaires plus anciens.

Définition B.2 (Opérateur de Riesz et inverse de la divergence)
On définit les opérateurs suivant :
- *L'opérateur de Riesz :*
$$\mathcal{R}_j[v] := \mathcal{F}^{-1}\left[\frac{i\xi_j}{|\xi|}\mathcal{F}[v]\right],$$
- *L'opérateur de Riesz double :*
$$\mathcal{R}_{k,j}[v] := \mathcal{F}^{-1}\left[\frac{\xi_k\xi_j}{|\xi|^2}\mathcal{F}[v]\right],$$
- *L'opérateur d'inversion de la divergence :*
$$\mathcal{A}_j[v] := -\mathcal{F}^{-1}\left[\frac{i\xi_j}{|\xi|^2}\mathcal{F}[v]\right],$$

où $\mathcal{F}$ *représente la transformée de Fourier.*

Théorème B.6 (Propriétés des opérateurs de Riesz et d'inversion de la divergence)
On rappelle des propriétés issues de calculs directs, valables pour des éléments f *et* g *des espaces* $L^p(\mathbb{R}^3)$ *et* $L^{p'}(\mathbb{R}^3)$, $1 < p < \infty$ *:*
- $\mathcal{R}_{j,k}[f] = \partial_j \mathcal{A}_k[f] = -\mathcal{R}_j\left[\mathcal{R}_k[f]\right]$;
- $\mathcal{R}_j\left[\mathcal{R}_k[f]\right] = \mathcal{R}_k\left[\mathcal{R}_j[f]\right]$;
- $\displaystyle\sum_{k=1}^{3} \mathcal{R}_k\left[\mathcal{R}_k[f]\right] = f$;
- $\displaystyle\int_\Omega \mathcal{A}_k[f]\overline{g}\,\mathrm{d}x = -\int_\Omega f\overline{\mathcal{A}_k[g]}\,\mathrm{d}x$;
- $\displaystyle\int_\Omega \mathcal{R}_j\left[\mathcal{R}_k[f]\right]\overline{g}\,\mathrm{d}x = \int_\Omega f\overline{\mathcal{R}_j\left[\mathcal{R}_k[g]\right]}\,\mathrm{d}x$.

Théorème B.7 (Continuité des opérateurs de Riesz et d'inversion de la divergence)
Les opérateurs $\mathcal{R}_k$ *et* $\mathcal{R}_{k,j}$ *sont linéaires et continus de* $L^p(\mathbb{R}^3)$ *vers* $L^p(\mathbb{R}^3)$ *pour tout* p *de* $(1,\infty)$ *et on a l'inégalité suivante*

$$\|\mathcal{R}[v]\|_{L^p(\mathbb{R}^3)} \leq c(p)\,\|v\|_{L^p(\mathbb{R}^3)}\,,\ \textit{pour tout } v \in L^p(\mathbb{R}^3),$$

où $\mathcal{R}$ *représente* $\mathcal{R}_k$ *ou* $\mathcal{R}_{k,j}$.
L'opérateur $\mathcal{A}_k$ *est linéaire continu de* $L^1(\mathbb{R}^3) \cap L^2(\mathbb{R}^3)$ *dans* $L^2(\mathbb{R}^3) + L^\infty(\mathbb{R}^3)$ *et de* $L^p(\mathbb{R}^3)$ *dans* $L^{\frac{3p}{3-p}}(\mathbb{R}^3)$ *pour tout* p *de* $(0,\infty)$. *De plus, les deux inégalités suivantes sont respectées :*

$$\|\mathcal{A}_k[v]\|_{L^2(\mathbb{R}^3)+L^\infty(\mathbb{R}^3)} \leq c\|v\|_{L^1(\mathbb{R}^3)\cap L^2(\mathbb{R}^3)},\ \textit{pour tout } v \in L^1(\mathbb{R}^3) \cap L^2(\mathbb{R}^3),$$

et

$$\|\mathcal{A}_k[v]\|_{L^{\frac{3p}{3-p}}(\mathbb{R}^3)} \leq c\|v\|_{L^p(\mathbb{R}^3)},\ \textit{pour tout } v \in L^p(\mathbb{R}^3),\ 1 < p < \infty.$$

Enfin, si v *et* $\partial_t v$ *appartiennent à* $L^p(I \times \mathbb{R}^3)$ *où* I *est un intervalle, alors*

$$\partial_t \mathcal{A}_k[v](t,x) = \mathcal{A}_k\left[\partial_t f\right](t,x)\ \textit{pour presque tout couple } (t,x) \textit{ de } I \times \mathbb{R}^3.$$

Lemme 38 (Premier lemme des commutateurs)
Soit $\mathbf{U}_s$ *convergeant faiblement vers* $\mathbf{U}$ *dans* $L^p(\mathbb{R}^3;\mathbb{R}^3)$ *et* v_s *convergeant faiblement vers* v *dans* $L^q(\mathbb{R}^3)$ *avec*

$$\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=\frac{1}{r}<1.$$

Alors, on a la convergence

$$v_s\mathcal{R}[\mathbf{U}_s]-\mathcal{R}[v_s]\mathbf{U}_s \rightharpoonup v\mathcal{R}[\mathbf{U}]-\mathcal{R}[v]\mathbf{U}$$

dans $L^r(\mathbb{R}^3;\mathbb{R}^3)$.

Lemme 39 (Second lemme des commutateurs)
Soit w *un élément de* $W^{1,r}(\mathbb{R}^3;\mathbb{R})$ *et* $\mathbf{z}$ *appartenant à* $L^2(\mathbb{R}^3;\mathbb{R}^3)$ *avec*

$$1<r<3,\ \frac{1}{r}+\frac{1}{6}<\frac{1}{s}<1.$$

On a alors

$$\|\mathcal{R}[w\mathbf{z}]-w\mathcal{R}[\mathbf{z}]\|_{W^{a,s}(\mathbb{R}^3;\mathbb{R}^3)}\leq c\|w\|_{W^{1,r}(\mathbb{R}^3)}\|\mathbf{z}\|_{L^2(\mathbb{R}^3;\mathbb{R}^3)},$$

où $\frac{a}{3}=\frac{1}{s}-\frac{1}{6}-\frac{1}{r}$.

Ces définitions et résultats sont issus du livre [24] qui cite les résultats originaux. On peut toutefois citer [9] parmi les initiateurs de ce genre d'argument.

Théorème B.8 (Solutions renormalisées de l'équation du bilan de masse)
Soit $\beta\in[1,\infty)$, $q\in[1,\infty]$ *avec* $1/q+1/\beta\in(0,1]$. *On suppose que les fonctions* ϱ *et* $\mathbf{u}$ *appartiennent respectivement aux espaces* $L^{\beta}_{loc}((0,T)\times\mathbb{R}^3)$ *et* $L^q_{loc}(0,T;W^{1,q}_{loc}(\mathbb{R}^3;\mathbb{R}^3))$ *avec* $\varrho\geq 0$ *presque partout sur* $(0,T)\times\mathbb{R}^3$ *et vérifient*

$$\partial_t\varrho+\operatorname{div}_x(\varrho\mathbf{u})=f\ \text{ dans }\mathcal{D}'((0,T)\times\mathbb{R}^3), \tag{B.11}$$

où $f\in L^1_{loc}((0,T)\times\mathbb{R}^3)$.
Alors on a

$$\partial_t b(\varrho)+\operatorname{div}(b(\varrho)\mathbf{u})+(\varrho b'(\varrho)-b(\varrho))\operatorname{div}_x\mathbf{u}=fb'(\varrho)\ \text{ dans }\mathcal{D}'((0,T)\times\mathbb{R}^3) \tag{B.12}$$

pour tout $b\in C^1([0,\infty))\cap W^{1,\infty}(0,\infty)$.

Le résultat est tiré de [24]. Citons aussi [14].
On considère le problème

$$\begin{cases}\operatorname{div}_x\mathbf{u}=f \text{ dans } \Omega\\ \mathbf{u}|_{\partial\Omega}=0\end{cases} \tag{B.13}$$

Théorème B.9 (Inverse de l'opérateur divergence - Formule de Bogovskii)
Soit $\Omega\subset\mathbb{R}^3$ *un domaine lipschitzien borné.*

1. *Il existe une application linéaire* $\mathcal{B}$ *telle que*

$$\mathcal{B}:\left\{f|f\in C^\infty_c(\Omega),\int_\Omega f\,\mathrm{d}x=0\right\}\to C^\infty_c(\Omega,\mathbb{R}^3)$$

telle que $\operatorname{div}_x(\mathcal{B}[f])=f$. *Par conséquent,* $\mathbf{u}=\mathcal{B}[f]$ *est solution de* (B.13).

2. *On a*

$$\|\mathcal{B}[f]\|_{W^{k+1,p}(\Omega;\mathbb{R}^3)}\leq c\|f\|_{W^{k,p}(\Omega)}$$

pour tout $p\in(0,\infty)$ *et* $k\in\mathbb{N}$. *En particulier,* $\mathcal{B}$ *peut être prolongé de manière unique en un opérateur linéaire borné*

$$\mathcal{B}:\left\{f|f\in L^p(\Omega),\int_\Omega f\,\mathrm{d}x=0\right\}\to W^{1,p}_0(\Omega;\mathbb{R}^3).$$

3. *Si f appartient à $L^p(\Omega)$ avec $\int_\Omega f \,\mathrm{d}x = 0$ avec en plus $f = \mathrm{div}_x \mathbf{g}$ où $\mathbf{g} \in E_0^{q,p}(\Omega)$, $1 < q < \infty$, alors*
$$\|\mathcal{B}[f]\|_{L^q(\Omega;\mathbb{R}^3)} \leq c\|\mathbf{g}\|_{L^q(\Omega;\mathbb{R}^3)}.$$

4. *On peut étendre $\mathcal{B}$ de manière unique en un opérateur linéaire borné*
$$\mathcal{B} : \left[\dot{W}^{1,p'}(\Omega)\right]^* = \left\{f \in W^{1,p'}(\Omega) | \langle f; 1\rangle = 0\right\} \to L^p(\Omega;\mathbb{R}^3)$$
de manière à ce que
$$-\int_\Omega \mathcal{B}[f] \cdot \nabla v \,\mathrm{d}x = \langle f; v\rangle_{[W^{1,p'}]^*(\Omega);W^{1,p'}(\Omega)}$$
et
$$\|\mathcal{B}[f]\|_{L^p(\Omega;\mathbb{R}^3)} \leq c\|f\|_{[W^{1,p'}(\Omega)]^*}.$$
Ici, on identifie $f \in C_c^\infty(\Omega)$ a une forme linéaire de $\left[W^{1,p'}(\Omega)\right]^*$ via la formule de Riesz
$$\langle f; v\rangle_{[W^{1,p'}]^*(\Omega);W^{1,p'}(\Omega)} = \int_\Omega fv \,\mathrm{d}x \text{ pour tout } v \in W^{1,p'}(\Omega).$$

Ici, l'ensemble $E_0^{q,p}(\Omega;\mathbb{R}^3)$ représente l'ensemble des fonctions q-intégrables à divergence dans $L^p(\Omega)$ qui sont à trace nulle. Plus précisément, on a
$$E^{q,p}(\Omega) := \{\mathbf{u} \in L^q(\Omega) | \operatorname{div} \mathbf{u} \in L^p(\Omega)\}$$
que l'on munit de la norme $\|\mathbf{u}\|_{L^q(\Omega;\mathbb{R}^3)} + \|\operatorname{div} \mathbf{u}\|_{L^p(\Omega)}$. La fermeture $\overline{\mathcal{C}_c^\infty(\Omega;\mathbb{R}^3)}^{E^{q,p}(\Omega)}$ sera désignée par $E_0^{q,p}(\Omega;\mathbb{R}^3)$. Le résultat énoncé est celui de [24] qui repose sur les travaux [3] et [31] entre autres.

Lemme 40 (Lemme div-rot)
Soit Q un ouvert de $\mathbb{R}^3$. On suppose que
$$\mathbf{U}_n \rightharpoonup \mathbf{U} \text{ dans } L^p(Q;\mathbb{R}^3), \tag{B.14}$$
$$\mathbf{V}_n \rightharpoonup \mathbf{U} \text{ dans } L^q(Q;\mathbb{R}^3), \tag{B.15}$$
avec
$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{1}{r} < 1.$$
Si de plus on a
$$\operatorname{div} \mathbf{U}_n \text{ est précompact dans } W^{-1,s}(Q), \tag{B.16}$$
$$\operatorname{rot} \mathbf{V}_n := \nabla \mathbf{V} - \nabla^T \mathbf{V}_n \text{ est précompact dans } W^{-1,s}(Q;\mathbb{R}^{3\times 3}) \tag{B.17}$$
pour un certain $s > 1$, alors
$$\mathbf{U}_n \cdot \mathbf{V}_n \rightharpoonup \mathbf{U} \cdot \mathbf{V} \text{ dans } L^r(Q).$$

Ce lemme est issu de [24], mais on peut aussi se référer aux travaux [59] et [79].

Théorème B.10 (Décomposition de Helmholtz)
Soit Ω un domaine borné de classe $\mathcal{C}^{1,1}$. Alors l'espace de Lebesgue $L^p(\Omega;\mathbb{R}^3)$ peut être décomposé comme suit
$$L^p(\Omega;\mathbb{R}^3) = L^p_\sigma(\Omega;\mathbb{R}^3) \oplus L^p_g(\Omega;\mathbb{R}^3), \ 1 < p < \infty,$$
où
$$L^p_\sigma(\Omega;\mathbb{R}^3) := \left\{\mathbf{v} \in L^p(\Omega;\mathbb{R}^3) | \operatorname{div}_x \mathbf{v} = 0, \ \mathbf{v} \cdot \mathbf{n}|_{\partial\Omega} = 0\right\}$$
et
$$L^p_g(\Omega;\mathbb{R}^3) := \left\{\mathbf{v} \in L^p(\Omega;\mathbb{R}^3) | \mathbf{v} = \nabla_x \Psi, \ \Psi \in W^{1,p}_{loc}(\Omega)\right\}.$$

Plus précisément, on a pour tout $\mathbf{v} \in L^p(\Omega;\mathbb{R}^3)$ *:*

$$\mathbf{v} = \mathbf{H}[\mathbf{v}] + \mathbf{H}^\perp[\mathbf{v}]$$

avec $\mathbf{H}^\perp[\mathbf{v}] = \nabla_x \Psi$ *où* $\Psi \in W^{1,p}_{loc}(\Omega)$ *est l'unique solution faible du problème de Neumann*

$$\int_\Omega \nabla_x \Psi \cdot \nabla_x \varphi \,\mathrm{d}x = \int_\Omega \mathbf{v} \cdot \nabla_x \varphi \,\mathrm{d}x \text{ pour tout } \varphi \in C^\infty(\overline{\Omega}), \ \int_\Omega \Psi \,\mathrm{d}x = 0.$$

Citons [24] d'où provient le résultat et qui en fournit une preuve.

Théorème B.11 (Semi-continuité inférieure faible des fonctions convexes)
Soit Ω *un ensemble mesurable de* $\mathbb{R}^N$ *et* $\{\mathbf{v}_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ *une suite de fonctions de* $L^1(\Omega;\mathbb{R}^M)$ *telle que*

$$\mathbf{v}_k \rightharpoonup \mathbf{v} \text{ dans } L^1(\Omega;\mathbb{R}^M).$$

Soit $\Phi : \mathbb{R}^M \to (-\infty,\infty]$ *une fonction convexe semi-continue inférieurement telle que* $\Phi(\mathbf{v}_k) \in L^1(\Omega)$ *pour tout* k *de* $\mathbb{N}$ *et*

$$\Phi(\mathbf{v}_k) \rightharpoonup \overline{\Phi(\mathbf{v})} \text{ dans } L^1(\Omega).$$

Alors, on a l'inégalité suivante :

$$\Phi(\mathbf{v}) \leq \overline{\Phi(\mathbf{v})} \text{ presque partout sur } \Omega.$$

De surcroit, si Φ *est strictement convexe sur un ouvert* $U \subset \mathbb{R}^M$ *avec*

$$\Phi(\mathbf{v}) = \overline{\Phi(\mathbf{v})} \text{ presque partout sur } \Omega,$$

alors

$$\mathbf{v}_k(\mathbf{y}) \to \mathbf{v}(\mathbf{y}) \text{ pour presque tout } \mathbf{y} \in \{\mathbf{y} \in \Omega \mid \mathbf{v}(\mathbf{y}) \in U\}$$

quitte à extraire une sous-suite le cas échéant.

On se réfère à [24] pour plus de détails sur la preuve et les références originales.

Théorème B.12 (Théorème de représentation de Riesz)
Soit G *un borélien de* $\mathbb{R}^N$*. On considère l'ensemble* $\mathcal{B}(G)$ *des boréliens de* G *pour la topologie induite. Soit* φ *une forme linéaire positive sur* $\mathcal{C}_c(G)$*.*

Il existe une unique mesure de Radon μ *positive sur* $\mathcal{B}(G)$ *telle que*

$$\forall f \in \mathcal{C}_c(G), \ \int_G f \,\mathrm{d}\mu = \varphi(f).$$

De surcroit, cette mesure est régulière.

Remarque 4
Si G *est fermé est si* φ *est positive et appartient à* $[\mathcal{C}_B(G)]^*$*, alors*

$$\|\varphi\|_{[\mathcal{C}_B(G)]^*} = \mu(G).$$

On se réfère à [71] pour une démonstration complète de ces résultats.

Publications

1. *Existence of renormalized weak solutions to the steady equations describing compressible fluids in barotropic regime*
   Didier JESSLÉ, Antonín NOVOTNÝ.
   Publié dans le *Journal de mathématiques pures et appliquées. Neuvième série.*
   Volume 99:(2013), pages 280–296 ;

2. *Steady Navier-Stokes-Fourier system with slip boundary conditions*
   Didier JESSLÉ, Antonín NOVOTNÝ et Milan POKORNÝ.
   Accepté par *Mathematical Models and Methods in Applied Sciences.*
   À paraître ;

3. *Navier-Stokes-Fourier system on unbounded domains : weak solutions, relative entropies, weak-strong uniqueness*
   Didier JESSLÉ, Antonín NOVOTNÝ et Bum Ja JIN.
   Accepté par *SIAM Journal on Mathematical Analysis.*
   À paraître.

Bibliographie

[1] Thomas ALAZARD. « Low Mach number limit of the full Navier-Stokes equations ». Dans : *Arch. Ration. Mech. Anal.* 180.1 (2006), p. 1–73. ISSN : 0003-9527. DOI : 10.1007/s00205-005-0393-2. URL : http://dx.doi.org/10.1007/s00205-005-0393-2.

[2] Hajer BAHOURI, Jean-Yves CHEMIN et Raphaël DANCHIN. *Fourier analysis and nonlinear partial differential equations.* T. 343. Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften [Fundamental Principles of Mathematical Sciences]. Heidelberg : Springer, 2011, p. xvi+523. ISBN : 978-3-642-16829-1. DOI : 10.1007/978-3-642-16830-7. URL : http://dx.doi.org/10.1007/978-3-642-16830-7.

[3] M. E. BOGOVSKII. « Solutions of some problems of vector analysis, associated with the operators div and grad ». Dans : *Theory of cubature formulas and the application of functional analysis to problems of mathematical physics.* T. 1980. Trudy Sem. S. L. Soboleva, No. 1. Novosibirsk : Akad. Nauk SSSR Sibirsk. Otdel. Inst. Mat., 1980, p. 5–40, 149.

[4] Didier BRESCH et Benoît DESJARDINS. « On the existence of global weak solutions to the Navier-Stokes equations for viscous compressible and heat conducting fluids ». Dans : *J. Math. Pures Appl. (9)* 87.1 (2007), p. 57–90. ISSN : 0021-7824. DOI : 10.1016/j.matpur.2006.11.001. URL : http://dx.doi.org/10.1016/j.matpur.2006.11.001.

[5] Didier BRESCH et Benoît DESJARDINS. « Stabilité de solutions faibles globales pour les équations de Navier-Stokes compressible avec température ». Dans : *C. R. Math. Acad. Sci. Paris* 343.3 (2006), p. 219–224. ISSN : 1631-073X. DOI : 10.1016/j.crma.2006.05.016. URL : http://dx.doi.org/10.1016/j.crma.2006.05.016.

[6] J. BŘEZINA et A. NOVOTNÝ. « On weak solutions of steady Navier-Stokes equations for monatomic gas ». Dans : *Comment. Math. Univ. Carolin.* 49.4 (2008), p. 611–632. ISSN : 0010-2628.

[7] Haïm BREZIS. *Analyse fonctionnelle.* Collection Mathématiques Appliquées pour la Maîtrise. [Collection of Applied Mathematics for the Master's Degree]. Théorie et applications. [Theory and applications]. Paris : Masson, 1983, p. xiv+234. ISBN : 2-225-77198-7.

[8] J. A. CARRILLO, A. JÜNGEL, P. A. MARKOWICH, G. TOSCANI et A. UNTERREITER. « Entropy dissipation methods for degenerate parabolic problems and generalized Sobolev inequalities ». Dans : *Monatsh. Math.* 133.1 (2001), p. 1–82. ISSN : 0026-9255. DOI : 10.1007/s006050170032. URL : http://dx.doi.org/10.1007/s006050170032.

[9] R. R. COIFMAN et Yves MEYER. « On commutators of singular integrals and bilinear singular integrals ». Dans : *Trans. Amer. Math. Soc.* 212 (1975), p. 315–331. ISSN : 0002-9947.

[10] C. M. DAFERMOS. « The second law of thermodynamics and stability ». Dans : *Arch. Rational Mech. Anal.* 70.2 (1979), p. 167–179. ISSN : 0003-9527. DOI : 10.1007/BF00250353. URL : http://dx.doi.org/10.1007/BF00250353.

[11] Sergio DAIN. « Generalized Korn's inequality and conformal Killing vectors ». Dans : *Calc. Var. Partial Differential Equations* 25.4 (2006), p. 535–540. ISSN : 0944-2669. DOI : 10.1007/s00526-005-0371-4. URL : http://dx.doi.org/10.1007/s00526-005-0371-4.

[12] Raphaël DANCHIN. « Global existence in critical spaces for flows of compressible viscous and heat-conductive gases ». Dans : *Arch. Ration. Mech. Anal.* 160.1 (2001), p. 1–39. ISSN : 0003-9527. DOI : 10.1007/s002050100155. URL : http://dx.doi.org/10.1007/s002050100155.

[13] Benoît DESJARDINS. « Regularity of weak solutions of the compressible isentropic Navier-Stokes equations ». Dans : *Comm. Partial Differential Equations* 22.5-6 (1997), p. 977–1008. ISSN : 0360-5302. DOI : 10.1080/03605309708821291. URL : http://dx.doi.org/10.1080/03605309708821291.

[14] R. J. DiPerna et P.-L. Lions. « Ordinary differential equations, transport theory and Sobolev spaces ». Dans : *Invent. Math.* 98.3 (1989), p. 511–547. issn : 0020-9910. doi : 10.1007/BF01393835. url : http://dx.doi.org/10.1007/BF01393835.

[15] Bernard Ducomet et Eduard Feireisl. « The equations of magnetohydrodynamics: on the interaction between matter and radiation in the evolution of gaseous stars ». Dans : *Comm. Math. Phys.* 266.3 (2006), p. 595–629. issn : 0010-3616. doi : 10.1007/s00220-006-0052-y. url : http://dx.doi.org/10.1007/s00220-006-0052-y.

[16] S. Eliezer, A. Ghatak, H. Hora et E. Teller. « An introduction to equations of state – Theory and applications ». Dans : *Nuclear Fusion* 26.12 (1986), p. 1749.

[17] L. Eskauriaza, G. A. Serëgin et V. Shverak. « $L_{3,\infty}$-solutions of Navier-Stokes equations and backward uniqueness ». Dans : *Uspekhi Mat. Nauk* 58.2(350) (2003), p. 3–44. issn : 0042-1316. doi : 10.1070/RM2003v058n02ABEH000609. url : http://dx.doi.org/10.1070/RM2003v058n02ABEH000609.

[18] Lawrence C. Evans. *Partial differential equations*. T. 19. Graduate Studies in Mathematics. Providence, RI : American Mathematical Society, 1998, p. xviii+662. isbn : 0-8218-0772-2.

[19] R. Eymard, T. Gallouët, R. Herbin et J. C. Latché. « A convergent finite element-finite volume scheme for the compressible Stokes problem. II. The isentropic case ». Dans : *Math. Comp.* 79.270 (2010), p. 649–675. issn : 0025-5718. doi : 10.1090/S0025-5718-09-02310-2. url : http://dx.doi.org/10.1090/S0025-5718-09-02310-2.

[20] R. Eymard, T. Gallouët, R. Herbin et J.-C. Latché. « Convergence of the MAC scheme for the compressible Stokes equations ». Dans : *SIAM J. Numer. Anal.* 48.6 (2010), p. 2218–2246. issn : 0036-1429. doi : 10.1137/090779863. url : http://dx.doi.org/10.1137/090779863.

[21] Eduard Feireisl. *Dynamics of viscous compressible fluids*. T. 26. Oxford Lecture Series in Mathematics and its Applications. Oxford : Oxford University Press, 2004, p. xii+212. isbn : 0-19-852838-8.

[22] Eduard Feireisl. « On the motion of rigid bodies in a viscous compressible fluid ». Dans : *Arch. Ration. Mech. Anal.* 167.4 (2003), p. 281–308. issn : 0003-9527. doi : 10.1007/s00205-002-0242-5. url : http://dx.doi.org/10.1007/s00205-002-0242-5.

[23] Eduard Feireisl, Bum Ja Jin et Antonín Novotný. « Relative entropies, suitable weak solutions, and weak-strong uniqueness for the compressible Navier-Stokes system ». Dans : *J. Math. Fluid Mech.* 14.4 (2012), p. 717–730. issn : 1422-6928. doi : 10.1007/s00021-011-0091-9. url : http://dx.doi.org/10.1007/s00021-011-0091-9.

[24] Eduard Feireisl et Antonín Novotný. *Singular limits in thermodynamics of viscous fluids*. Advances in Mathematical Fluid Mechanics. Basel : Birkhäuser Verlag, 2009, p. xxxvi+382. isbn : 978-3-7643-8842-3. doi : 10.1007/978-3-7643-8843-0. url : http://dx.doi.org/10.1007/978-3-7643-8843-0.

[25] Eduard Feireisl et Antonín Novotný. « Weak-strong uniqueness property for the full Navier-Stokes-Fourier system ». Dans : *Arch. Ration. Mech. Anal.* 204.2 (2012), p. 683–706. issn : 0003-9527. doi : 10.1007/s00205-011-0490-3. url : http://dx.doi.org/10.1007/s00205-011-0490-3.

[26] Eduard Feireisl, Antonín Novotný et Hana Petzeltová. « On the existence of globally defined weak solutions to the Navier-Stokes equations ». Dans : *J. Math. Fluid Mech.* 3.4 (2001), p. 358–392. issn : 1422-6928. doi : 10.1007/PL00000976. url : http://dx.doi.org/10.1007/PL00000976.

[27] Eduard Feireisl, Antonín Novotný et Yongzhong Sun. « Suitable weak solutions to the Navier-Stokes equations of compressible viscous fluids ». Dans : *Indiana Univ. Math. J.* 60.2 (2011), p. 611–631. issn : 0022-2518. doi : 10.1512/iumj.2011.60.4406. url : http://dx.doi.org/10.1512/iumj.2011.60.4406.

[28] J. Frehse, M. Steinhauer et W. Weigant. « The Dirichlet problem for steady viscous compressible flow in three dimensions ». Dans : *J. Math. Pures Appl. (9)* 97.2 (2012), p. 85–97. issn : 0021-7824. doi : 10.1016/j.matpur.2009.06.005. url : http://dx.doi.org/10.1016/j.matpur.2009.06.005.

[29] J. Frehse, M. Steinhauer et W. Weigant. « The Dirichlet problem for viscous compressible isothermal Navier-Stokes equations in two-dimensions ». Dans : *Arch. Ration. Mech. Anal* 198.1 (2010), p. 1–12.

[30] Jens Frehse, Sonja Goj et Mark Steinhauer. « L^p-estimates for the Navier-Stokes equations for steady compressible flow ». Dans : *Manuscripta Math.* 116.3 (2005), p. 265–275. issn : 0025-2611. doi : 10.1007/s00229-004-0513-6. url : http://dx.doi.org/10.1007/s00229-004-0513-6.

[31] Giovanni P. Galdi. *An introduction to the mathematical theory of the Navier-Stokes equations. Vol. I.* T. 38. Springer Tracts in Natural Philosophy. Linearized steady problems. New York : Springer-Verlag, 1994, p. xii+450. isbn : 0-387-94172-X.

[32] T. Gallouët, R. Herbin et J.-C. Latché. « A convergent finite element-finite volume scheme for the compressible Stokes problem. I. The isothermal case ». Dans : *Math. Comp.* 78.267 (2009), p. 1333–1352. issn : 0025-5718. doi : 10.1090/S0025-5718-09-02216-9. url : http://dx.doi.org/10.1090/S0025-5718-09-02216-9.

[33] Thierry Gallouët, Laura Gastaldo, Raphaele Herbin et Jean-Claude Latché. « An unconditionally stable pressure correction scheme for the compressible barotropic Navier-Stokes equations ». Dans : *M2AN Math. Model. Numer. Anal.* 42.2 (2008), p. 303–331. issn : 0764-583X. doi : 10.1051/m2an:2008005. url : http://dx.doi.org/10.1051/m2an:2008005.

[34] Pierre Germain. « Weak-strong uniqueness for the isentropic compressible Navier-Stokes system ». Dans : *J. Math. Fluid Mech.* 13.1 (2011), p. 137–146. issn : 1422-6928. doi : 10.1007/s00021-009-0006-1. url : http://dx.doi.org/10.1007/s00021-009-0006-1.

[35] David Gilbarg et Neil S. Trudinger. *Elliptic partial differential equations of second order.* Second. T. 224. Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften [Fundamental Principles of Mathematical Sciences]. Berlin : Springer-Verlag, 1983, p. xiii+513. isbn : 3-540-13025-X.

[36] E. Grenier. « Oscillatory perturbations of the Navier-Stokes equations ». Dans : *J. Math. Pures Appl. (9)* 76.6 (1997), p. 477–498. issn : 0021-7824. doi : 10.1016/S0021-7824(97)89959-X. url : http://dx.doi.org/10.1016/S0021-7824(97)89959-X.

[37] Boris Haspot. « Existence of global weak solution for compressible fluid models of Korteweg type ». Dans : *J. Math. Fluid Mech.* 13.2 (2011), p. 223–249. issn : 1422-6928. doi : 10.1007/s00021-009-0013-2. url : http://dx.doi.org/10.1007/s00021-009-0013-2.

[38] Boris Haspot. « Existence of global weak solutions for compressible fluid models with a capillary tensor for discontinuous interfaces ». Dans : *Differential Integral Equations* 23.9-10 (2010), p. 899–934. issn : 0893-4983.

[39] David Hoff. « Discontinuous solutions of the Navier-Stokes equations for multidimensional flows of heat-conducting fluids ». Dans : *Arch. Rational Mech. Anal.* 139.4 (1997), p. 303–354. issn : 0003-9527. doi : 10.1007/s002050050055. url : http://dx.doi.org/10.1007/s002050050055.

[40] David Hoff. « Dynamics of singularity surfaces for compressible, viscous flows in two space dimensions ». Dans : *Comm. Pure Appl. Math.* 55.11 (2002), p. 1365–1407. issn : 0010-3640. doi : 10.1002/cpa.10046. url : http://dx.doi.org/10.1002/cpa.10046.

[41] David Hoff. « Strong convergence to global solutions for multidimensional flows of compressible, viscous fluids with polytropic equations of state and discontinuous initial data ». Dans : *Arch. Rational Mech. Anal.* 132.1 (1995), p. 1–14. issn : 0003-9527. doi : 10.1007/BF00390346. url : http://dx.doi.org/10.1007/BF00390346.

[42] David Hoff et Marcelo M. Santos. « Lagrangean structure and propagation of singularities in multidimensional compressible flow ». Dans : *Arch. Ration. Mech. Anal.* 188.3 (2008), p. 509–543. issn : 0003-9527. doi : 10.1007/s00205-007-0099-8. url : http://dx.doi.org/10.1007/s00205-007-0099-8.

[43] David Hoff et Denis Serre. « The failure of continuous dependence on initial data for the Navier-Stokes equations of compressible flow ». Dans : *SIAM J. Appl. Math.* 51.4 (1991), p. 887–898. issn : 0036-1399. doi : 10.1137/0151043. url : http://dx.doi.org/10.1137/0151043.

[44] Didier Jesslé, Bum Ja Jin et Antonín Novotný. « Navier–Stokes–Fourier System on Unbounded Domains: Weak Solutions, Relative Entropies, Weak-Strong Uniqueness ». Dans : *SIAM J. Math. Anal.* 45.3 (2013), p. 1907–1951. issn : 0036-1410. doi : 10.1137/120874576. url : http://dx.doi.org/10.1137/120874576.

[45] Didier JESSLÉ et Antonín NOVOTNÝ. « Existence of renormalized weak solutions to the steady equations describing compressible fluids in barotropic regime ». Dans : *J. Math. Pures Appl. (9)* 99.3 (2013), p. 280–296. ISSN : 0021-7824. DOI : 10.1016/j.matpur.2012.06.016. URL : http://dx.doi.org/10.1016/j.matpur.2012.06.016.

[46] Didier JESSLÉ, Antonín NOVOTNÝ et Milan POKORNÝ. « Steady Navier-Stokes-Fourier system with slip boundary conditions ». À paraître dans *Math. Models Methods Appl. Sci.*

[47] S. JIANG et C. ZHOU. « On the existence of weak solutions to the three-dimensional steady compressible Navier-Stokes equations in bounded domains ».

[48] Song JIANG et Chunhui ZHOU. « Existence of weak solutions to the three-dimensional steady compressible Navier-Stokes equations ». Dans : *Ann. Inst. H. Poincaré Anal. Non Linéaire* 28.4 (2011), p. 485–498. ISSN : 0294-1449. DOI : 10.1016/j.anihpc.2011.02.008. URL : http://dx.doi.org/10.1016/j.anihpc.2011.02.008.

[49] Trygve K KARPER. « A convergent FEM-DG method for the compressible Navier–Stokes equations ». Dans : *Numerische Mathematik* (2012), p. 1–70.

[50] Jean LERAY. « Sur le mouvement d'un liquide visqueux emplissant l'espace ». Dans : *Acta Math.* 63.1 (1934), p. 193–248. ISSN : 0001-5962. DOI : 10.1007/BF02547354. URL : http://dx.doi.org/10.1007/BF02547354.

[51] Pierre-Louis LIONS. « Compacité des solutions des équations de Navier-Stokes compressibles isentropiques ». Dans : *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math.* 317.1 (1993), p. 115–120. ISSN : 0764-4442.

[52] Pierre-Louis LIONS. *Mathematical topics in fluid mechanics. Vol. 2.* T. 10. Oxford Lecture Series in Mathematics and its Applications. Compressible models, Oxford Science Publications. New York : The Clarendon Press Oxford University Press, 1998, p. xiv+348. ISBN : 0-19-851488-3.

[53] Nader MASMOUDI. « Incompressible, inviscid limit of the compressible Navier-Stokes system ». Dans : *Ann. Inst. H. Poincaré Anal. Non Linéaire* 18.2 (2001), p. 199–224. ISSN : 0294-1449. DOI : 10.1016/S0294-1449(00)00123-2. URL : http://dx.doi.org/10.1016/S0294-1449(00)00123-2.

[54] Nader MASMOUDI. « Rigorous derivation of the anelastic approximation ». Dans : *J. Math. Pures Appl. (9)* 88.3 (2007), p. 230–240. ISSN : 0021-7824. DOI : 10.1016/j.matpur.2007.06.001. URL : http://dx.doi.org/10.1016/j.matpur.2007.06.001.

[55] Akitaka MATSUMURA et Takaaki NISHIDA. « Initial-boundary value problems for the equations of compressible viscous and heat-conductive fluid ». Dans : *Nonlinear partial differential equations in applied science (Tokyo, 1982).* T. 81. North-Holland Math. Stud. Amsterdam : North-Holland, 1983, p. 153–170.

[56] Akitaka MATSUMURA et Takaaki NISHIDA. « The initial value problem for the equations of motion of viscous and heat-conductive gases ». Dans : *J. Math. Kyoto Univ.* 20.1 (1980), p. 67–104. ISSN : 0023-608X.

[57] A. MELLET et A. VASSEUR. « On the barotropic compressible Navier-Stokes equations ». Dans : *Comm. Partial Differential Equations* 32.1-3 (2007), p. 431–452. ISSN : 0360-5302. DOI : 10.1080/03605300600857079. URL : http://dx.doi.org/10.1080/03605300600857079.

[58] Piotr B. MUCHA et Milan POKORNÝ. « On the steady compressible Navier-Stokes-Fourier system ». Dans : *Comm. Math. Phys.* 288.1 (2009), p. 349–377. ISSN : 0010-3616. DOI : 10.1007/s00220-009-0772-x. URL : http://dx.doi.org/10.1007/s00220-009-0772-x.

[59] François MURAT. « Compacité par compensation ». Dans : *Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa Cl. Sci. (4)* 5.3 (1978), p. 489–507. URL : http://www.numdam.org/item?id=ASNSP_1978_4_5_3_489_0.

[60] Sébastien NOVO et Antonin NOVOTNÝ. « On the existence of weak solutions to the steady compressible Navier-Stokes equations when the density is not square integrable ». Dans : *J. Math. Kyoto Univ.* 42.3 (2002), p. 531–550. ISSN : 0023-608X.

[61] A. NOVOTNÝ et M. POKORNÝ. « Steady compressible Navier-Stokes-Fourier system for monoatomic gas and its generalizations ». Dans : *J. Differential Equations* 251.2 (2011), p. 270–315. ISSN : 0022-0396. DOI : 10.1016/j.jde.2011.04.008. URL : http://dx.doi.org/10.1016/j.jde.2011.04.008.

[62] A. Novotný et I. Straškraba. *Introduction to the mathematical theory of compressible flow.* T. 27. Oxford Lecture Series in Mathematics and its Applications. Oxford : Oxford University Press, 2004, p. xx+506. ISBN : 0-19-853084-6.

[63] Antonín Novotný et Milan Pokorný. « Weak and variational solutions to steady equations for compressible heat conducting fluids ». Dans : *SIAM J. Math. Anal.* 43.3 (2011), p. 1158–1188. ISSN : 0036-1410. DOI : 10.1137/100799393. URL : http://dx.doi.org/10.1137/100799393.

[64] Antonín Novotný et Milan Pokorný. « Weak solutions for steady compressible Navier-Stokes-Fourier system in two space dimensions ». Dans : *Appl. Math.* 56.1 (2011), p. 137–160. ISSN : 0862-7940. DOI : 10.1007/s10492-011-0013-4. URL : http://dx.doi.org/10.1007/s10492-011-0013-4.

[65] Gabriela Planas et Franck Sueur. « On the "viscous incompressible fluid + rigid body" system with Navier conditions ». Dans : *Ann. Inst. H. Poincaré Anal. Non Linéaire* (2012). Online first. DOI : 10.1016/j.anihpc.2013.01.004. URL : http://dx.doi.org/10.1016/j.anihpc.2013.01.004.

[66] P. I. Plotnikov et Zh. Sokolovski. « Stationary solutions of Navier-Stokes equations for diatomic gases ». Dans : *Uspekhi Mat. Nauk* 62.3(375) (2007), p. 117–148. ISSN : 0042-1316. DOI : 10.1070/RM2007v062n03ABEH004414. URL : http://dx.doi.org/10.1070/RM2007v062n03ABEH004414.

[67] P. I. Plotnikov et J. Sokolowski. « Concentrations of solutions to time-discretizied compressible Navier-Stokes equations ». Dans : *Comm. Math. Phys.* 258.3 (2005), p. 567–608. ISSN : 0010-3616. DOI : 10.1007/s00220-005-1358-x. URL : http://dx.doi.org/10.1007/s00220-005-1358-x.

[68] P. I. Plotnikov et J. Sokolowski. « On compactness, domain dependence and existence of steady state solutions to compressible isothermal Navier-Stokes equations ». Dans : *J. Math. Fluid Mech.* 7.4 (2005), p. 529–573. ISSN : 1422-6928. DOI : 10.1007/s00021-004-0134-6. URL : http://dx.doi.org/10.1007/s00021-004-0134-6.

[69] L. Poul. « Existence of weak solutions to the Navier-Stokes-Fourier system on Lipschitz domains ». Dans : *Discrete Contin. Dyn. Syst* (2007), p. 834–843.

[70] Giovanni Prodi. « Un teorema di unicità per le equazioni di Navier-Stokes ». Dans : *Ann. Mat. Pura Appl. (4)* 48 (1959), p. 173–182. ISSN : 0003-4622.

[71] Walter Rudin. *Real and complex analysis.* New York : McGraw-Hill Book Co., 1966, p. xi+412.

[72] Laure Saint-Raymond. « Hydrodynamic limits: some improvements of the relative entropy method ». Dans : *Ann. Inst. H. Poincaré Anal. Non Linéaire* 26.3 (2009), p. 705–744. ISSN : 0294-1449. DOI : 10.1016/j.anihpc.2008.01.001. URL : http://dx.doi.org/10.1016/j.anihpc.2008.01.001.

[73] Denis Serre. « Chute libre d'un solide dans un fluide visqueux incompressible. Existence ». Dans : *Japan J. Appl. Math.* 4.1 (1987), p. 99–110. ISSN : 0910-2043. DOI : 10.1007/BF03167757. URL : http://dx.doi.org/10.1007/BF03167757.

[74] Denis Serre. « Variations de grande amplitude pour la densité d'un fluide visqueux compressible ». Dans : *Phys. D* 48.1 (1991), p. 113–128. ISSN : 0167-2789. DOI : 10.1016/0167-2789(91)90055-E. URL : http://dx.doi.org/10.1016/0167-2789(91)90055-E.

[75] James Serrin. « On the interior regularity of weak solutions of the Navier-Stokes equations ». Dans : *Arch. Rational Mech. Anal.* 9 (1962), p. 187–195. ISSN : 0003-9527.

[76] V. A. Solonnikov et V. E. Shchadilov. « A certain boundary value problem for the stationary system of Navier-Stokes equations ». Dans : *Trudy Matematicheskogo Instituta im. VA Steklova* 125 (1973), p. 196–210.

[77] Yongzhong Sun, Chao Wang et Zhifei Zhang. « A Beale-Kato-Majda criterion for three dimensional compressible viscous heat-conductive flows ». Dans : *Arch. Ration. Mech. Anal.* 201.2 (2011), p. 727–742. ISSN : 0003-9527. DOI : 10.1007/s00205-011-0407-1. URL : http://dx.doi.org/10.1007/s00205-011-0407-1.

[78] Takéo Takahashi et Marius Tucsnak. « Global strong solutions for the two-dimensional motion of an infinite cylinder in a viscous fluid ». Dans : *J. Math. Fluid Mech.* 6.1 (2004), p. 53–77. issn : 1422-6928. doi : 10.1007/s00021-003-0083-4. url : http://dx.doi.org/10.1007/s00021-003-0083-4.

[79] L. Tartar. « Compensated compactness and applications to partial differential equations ». Dans : *Nonlinear analysis and mechanics: Heriot-Watt Symposium, Vol. IV*. T. 39. Res. Notes in Math. Boston, Mass. : Pitman, 1979, p. 136–212.

[80] Seiji Ukai. « The incompressible limit and the initial layer of the compressible Euler equation ». Dans : *J. Math. Kyoto Univ.* 26.2 (1986), p. 323–331. issn : 0023-608X.

[81] V. A. Vaĭgant et A. V. Kazhikhov. « On the existence of global solutions of two-dimensional Navier-Stokes equations of a compressible viscous fluid ». Dans : *Sibirsk. Mat. Zh.* 36.6 (1995), p. 1283–1316, ii. issn : 0037-4474. doi : 10.1007/BF02106835. url : http://dx.doi.org/10.1007/BF02106835.

[82] Alberto Valli et Wojciech M. Zajaczkowski. « Navier-Stokes equations for compressible fluids: global existence and qualitative properties of the solutions in the general case ». Dans : *Comm. Math. Phys.* 103.2 (1986), p. 259–296. issn : 0010-3616. url : http://projecteuclid.org/getRecord?id=euclid.cmp/1104114707.

[83] Shu Wang et Song Jiang. « The convergence of the Navier-Stokes-Poisson system to the incompressible Euler equations ». Dans : *Comm. Partial Differential Equations* 31.4-6 (2006), p. 571–591. issn : 0360-5302. doi : 10.1080/03605300500361487. url : http://dx.doi.org/10.1080/03605300500361487.

Didier JESSLÉ
IMATH, Université de Toulon

Quelques résultats mathématiques en thermodynamique des fluides compressibles

Dans cette thèse, nous étudions les écoulements de fluides compressibles décrits par les équations de Navier-Stokes-Fourier dans les cas stationnaire et instationnaire et avec des conditions de bord assurant l'isolation thermique et mécanique du fluide. On commence par le cas stationnaire barotrope et des conditions de Navier à la frontière du domaine. La pression est donc de la forme $p(\varrho) = \varrho^\gamma$ où γ est appelé coefficient adiabatique et nous arrivons à montrer l'existence de solutions faibles pour $\gamma > 1$. On généralise ensuite ce résultat aux équations de Navier-Stokes-Fourier avec conduction de la chaleur et glissement (partiel ou total) au bord, toujours dans le cas stationnaire. On montre cette fois-ci l'existence de solutions faibles particulières appelées solutions entropiques variationnelles respectant l'inégalité d'entropie pour $\gamma > 1$ et l'existence de solutions faibles respectant le bilan de l'énergie totale au sens faible pour $\gamma > 5/4$. On travaille ensuite sur les écoulements instationnaires décrits par les équations de Navier-Stokes-Fourier sur une large variété de domaines non bornés, tout d'abord pour des conditions de bord d'adhérence puis pour des conditions de Navier à la frontière (ce qui restreint quelque peu la diversité des domaines non bornés admissibles). On arrive à montrer l'existence de solutions faibles particulières respectant l'inégalité d'entropie et une inégalité de dissipation remplaçant l'égalité de conservation d'énergie totale dans le volume Ω qui n'a plus de sens dans les domaines non bornés. Par après, on met en place une inégalité dite d'entropie relative dont on montre qu'elle est respectée par certaines des solutions faibles exhibées auparavant. Ces solutions sont appelées solutions dissipatives. On parvient à prouver que pour chaque donnée initiale, il existe au moins une solution dissipative. Cette inégalité d'entropie relative nous permet de démontrer le principe d'unicité forte-faible pour nos solutions dissipatives. Précisément, cela signifie qu'une solution dissipative et une solution forte issues des mêmes données initiales coïncident sur le temps maximal d'existence de la solution forte. La propriété d'unicité forte-faible donne un fondement à la notion de solution dissipative pour les domaines non bornés.

Mots clefs : Système de Navier-Stokes-Fourier, Fluides compressibles, Entropie relative

Some mathematical results in thermodynamic of compressible fluids

In this thesis, we study the Navier-Stokes-Fourier system describing the flow of compressible fluids both in the steady and unsteady case and we suppose that the fluid is thermally and mechanically isolated. We start with the case of a steady barotropic fluid and Navier boundary conditions. In this situation, the pressure law considered is of the form $p(\varrho) = \varrho^\gamma$, where γ is called the adiabatic constant. We show the existence of weak solutions for $\gamma > 1$. We then extend this result to the complete Navier-Stokes-Fourier system with heat conductivity and slip or partially slip boundary conditions, once again in the steady case. In this setup, we prove the existence of a specific type of weak solutions, called variationnal entropy solutions, which satisfy the entropy inequality for $\gamma > 1$ and the existence of weak solutions satisfying the conservation of total energy in its weak formulation for $\gamma > 5/4$. We then treat the unsteady flows described by the complete Navier-Stokes-Fourier system on a large class of unbouded domains, first with no-slip boundary conditions and then with the Navier boundary conditions which reduce the class of the admissible unbounded domains. We manage to prove the existence of a specific type of weak solutions verifying the entropy inequality and a dissipation inequality instead of the global conservation of total energy which is no more relevant in the unbounded domains. Afterwards, we establish a new inequality called relative entropy inequality and we show that it is satisfied by some of the weak solutions presented previously. These are called dissipative solutions. Next we show that for any given initial data there exists at least one dissipative solution. This observation allows us to perform the proof of the weak-strong uniqueness principle in the class of dissipative solutions. Precisely, it means that a dissipative solution and a classical one emanating from the same initial data coincide as long as the latter exists. The weak-strong uniqueness property justifies the concept of dissipative solutions in the situation of unbounded domains.

Keywords: Navier-Stokes-Fourier system, Compressible fluids, Relative entropy