



HAL
open science

Robustesse des Seuils en Épidémiologie et Stabilité Asymptotique d'un Modèle à Infectivité et Susceptibilité Différentielle

Léontine Nkague Nkamba

► **To cite this version:**

Léontine Nkague Nkamba. Robustesse des Seuils en Épidémiologie et Stabilité Asymptotique d'un Modèle à Infectivité et Susceptibilité Différentielle. Systèmes dynamiques [math.DS]. Université de Lorraine; Université Gaston Berger, Saint Louis, Sénégal, 2012. Français. NNT : 2012LORR0382 . tel-01749597v2

HAL Id: tel-01749597

<https://theses.hal.science/tel-01749597v2>

Submitted on 8 Sep 2013

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



UNIVERSITÉ
DE LORRAINE



Laboratoire de Mathématiques
Et Application de Metz.

Laboratoire d'Analyse Numérique
et d'Informatique.

Thèse de Doctorat

Présentée et soutenue publiquement par :

M^{lle} Léontine NKAGUE NKAMBA

Pour l'obtention du titre :

Docteur de l'Université de Lorraine et de l'Université Gaston Berger

Spécialité: Mathématiques Appliquées et calcul scientifique

Robustesse des Seuils en Épidémiologie et Stabilité Asymptotique d'un Modèle à Infectivité et Susceptibilité Différentielle

Soutenue le ... octobre 2012, à l'Université de Lorraine devant le jury composé de :

RAPPORTEURS :

M. DUMONT Yves : (Directeur de Recherches ; CIRAD Montpellier)

M. RAPAPORT Alain : (Directeur de recherches ; INRA Montpellier)

EXAMINATEURS :

M. Mary Teuw NIANE ; Professeur à l'Université Gaston Berger

M. Abdou SENE ; Professeur à l'Université Gaston Berger

M. ADDA Philippe ; Maître de conférence à l'Université de Lorraine

M. SALLET Gauthier; Professeur des universités. Université de Lorraine



**ROBUSTESSE des SEUILS en
EPIDEMIOLOGIE MATHEMATIQUE
et
STABILITÉ ASYMPTOTIQUE d'un
MODÈLE à INFECTIVITÉ et
SUSCEPTIBILITÉ DIFFERENTIELLE**

Leontine NKAGUE NKAMBA

15 octobre 2012

Table des matières

Remerciements et Dédicaces	1
Résumé	3
Introduction générale	3
I Robustesse et Seuils Epidémiques	9
Robustesse	11
1 Robustesse	13
1.1 Introduction	13
1.1.1 Matrice inversible, conditionnement d'une matrice	16
1.2 Historique et motivation	19
1.3 Distance à l'instabilité	24
1.3.1 Déstabilisation par des matrices de rang 1	29
1.4 Robustesse de la stabilité	30
1.4.1 Un algorithme pour calculer $\beta(A)$	35
1.5 Rappel de quelques résultats classiques utilisés précédemment	37
1.5.1 Sur l'équation matricielle de Lyapunov	37
1.5.2 Sur l'équation algébrique de Riccati	37
1.5.3 Sur l'équation de Sylvester	38
1.6 Distance à l'instabilité pour les matrice de Metzler stables	40
1.7 Quelques considérations	48

2	Robustesse et Nombre de Reproduction de Base \mathcal{R}_0	49
2.1	Introduction	49
2.2	Notations et définitions	50
2.3	Calcul de \mathcal{R}_0 : Méthode de van den Driessche et Watmough	51
2.4	Une classe de modèles tests et leurs propriétés	54
2.4.1	Modèle DIDS1 et propriétés	55
2.4.2	Etude de la stabilité des équilibres du modèle DIDS1	60
2.4.3	Modèle DIDS2 et quelques propriétés	64
2.5	\mathcal{R}_0 des modèles (2.1, 2.7) et distance du Jacobien ($Jac(DFE)$) à l'instabilité et à la stabilité selon les cas.	67
2.5.1	$\mathcal{R}_0 > 1$, constant et distance de $J(DFE)$ à la stabilité très petite	69
2.5.2	\mathcal{R}_0 très grand mais la distance de $J(DFE)$ à la stabilité très petite	70
2.5.3	\mathcal{R}_0 proche de 1 par valeurs supérieures et la distance de $J(DFE)$ à la stabilité très grande	73
2.5.4	$\mathcal{R}_0 < 1$ et proche de 0 et distance de J à l'instabilité très petite	74
2.5.5	$\mathcal{R}_0 \leq 1$, et proche de 1 par valeurs inférieures, mais avec distance de J à l'instabilité très grande	78
3	Robustesse et Nombre de Reproduction-type \mathcal{T}	81
3.1	Introduction	81
3.2	Nombre de reproduction-type \mathcal{T}	82
3.2.1	Implémentation de la Matrice (M)	83
3.3	Calcul du nombre de reproduction type \mathcal{T} pour le modèle (2.1)	96
3.3.1	calculs des matrices K , P et T	96
3.3.2	Nombre de reproduction type \mathcal{T}	97
3.4	Calcul du nombre de reproduction type \mathcal{T} pour le modèle (2.8)	98
3.4.1	calculs des matrices K , P , et T	98
3.4.2	Nombre de reproduction type \mathcal{T}	99

TABLE DES MATIÈRES

3.5	Exemples	100
3.5.1	Exemple de la section 2.5.1	100
3.5.2	Exemple de la section 2.3.2	101
3.5.3	Exemple de la section 2.5.3	101
3.5.4	Exemples de la section 2.5.4	101
3.5.5	Conclusion	102
 II Fonctions de Lyapunov et analyse de la stabilité asymptotique d'un Modèle Epidémiologique $SVEIR$		103
Introduction		105
 4 Présentation , Préliminaires et Quelques Propriétés du Modèle $SVEIR$		111
4.1	Introduction	111
4.2	Quelques modèles ($SVEIR$) existants	111
4.2.1	Modèle de Huiming Weil [140]	111
4.2.2	Modele de Yu Yiang [42]	112
4.2.3	Modèle ($SVEIR$) de Gumel [42]	112
4.3	Présentation et préliminaires du modèle à étudier	114
4.4	Quelques propriétés	118
4.4.1	Compact absorbant positivement invariant	118
4.5	Calcul du taux de reproduction de base	120
 5 Analyse asymptotique		123
5.1	Globale stabilité de l'équilibre sans maladie (DFE)	123
5.2	Equilibre endémique : Existence et globale stabilité	127
 6 Conclusion et Perspectives		141
 Bibliographie		144

A	Glossaire et rappels mathématiques	159
A.1	glossaire	159
A.2	Rappels mathématiques	160
A.3	Norme subordonnée, norme monotone, norme de Frobenius d'une matrice	161
A.4	Généralités en systèmes dynamiques	162
A.4.1	Systèmes autonomes	162
A.4.2	Notion de stabilité et point d'équilibre	166
A.4.3	Systèmes monotones	167
A.5	Système triangulaire	168
A.6	Méthodes de Lyapunov	171
A.6.1	Le principe d'invariance de LaSalle	172
A.7	Quelques matrices particulières	173
A.8	Suites et serie de matrices	177
A.9	Les matrices de Metzler	178
A.9.1	Matrices de Metzler irréductibles	183
A.9.2	Décomposition régulière d'une matrice de Metzler	184
B	Le nombre de reproduction de base	187
B.1	Introduction	187
B.2	Méthode « de la prochaine génération »	188
B.3	\mathcal{R}_0 et les conditions de seuil	191
C	Distance d'une Matrice de Metzler à la Stabilité puis à l'Instabilité	195
C.1	Introduction	195
C.2	Préliminaires	196
C.3	Distance d'une matrice de Metzler $A \in M_{(2 \times 2)}(\mathbb{R})$ diagonale instable à l'ensemble \mathcal{S}_t des matrices stables	198
C.3.1	Frontière de l'ensemble des matrices stables $(\partial \mathcal{S}_t)$	199

TABLE DES MATIÈRES

C.3.2	Distance de A à \mathcal{X} ($d_F(A, \mathcal{X})$), Distance de A à \mathcal{Y} ($d_F(A, \mathcal{Y})$, et Distance de A à \mathcal{Z} ($d_F(A, \mathcal{Z})$)	203
C.4	Distance d'une matrice de Metzler $A \in M_{(2 \times 2)}(\mathbb{R})$ diagonale stable à l'ensemble \mathcal{U} des matrices instables	212
C.4.1	Distance de A à \mathcal{X} ($d_F(A, \mathcal{X})$), Distance de A à \mathcal{Y} ($d_F(A, \mathcal{Y})$), et Distance de A à \mathcal{Z} ($d_F(A, \mathcal{Z})$)	213
C.5	Conclusion	215

TABLE DES MATIÈRES

Remerciements

Mes remerciements

Au Professeur Gauthier SALLET de l'Université Paul Verlaine de Metz, qui a bien voulu accepter de superviser mes travaux, et n'a ménagé aucun effort pour me mettre dans des conditions idoines de travail.

Au Professeurs Mary TEUW NIANG et Abdou SENE de L'Université Gaston Berger de Saint Louis dont j'ai bénéficié d'un soutien sans faille au Sénégal

Au Professeur Lorenzo CASTELLI de L'université de Trieste, qui a accepté de veiller à la bonne marche de mes séjours scientifiques au sein de l'ICTP en Italie

Ma gratitude va également au Professeur Philippe ADDA, dont j'ai bénéficié du soutien tant sur le plan scientifique que social à METZ.

Aux rapporteurs et membres du jury qui ont consenti à laisser un temps leurs nombreuses occupations afin de se prêter à cette délicate tâche de rapporteur ou de juge

Aux membres doctorants des équipes de recherches dont je fais partie, Je pense ici , à mademoiselle Edwige MALEKA KOUBEMBA, au Dr Berge TSANOU, à Monsieur Bichara DERDEI, au Dr Aziz FALL , à mademoiselle Lena TENDENG.

TABLE DES MATIÈRES

Aux Secrétaires des différentes équipes de recherches donc je fais partie pour leur disponibilité , je pense ici à la secrétaire Madame AWA Mbengue , à la secrétaire de l'INRIA Madame Christel WIEMER, à la secrétaire du LMAM Madame Isabelle NAVILLIAT

à mes responsables scientifiques du Centre International de la Théorie Physique (I.C.T.P), Mesdames Nadia BINGUELI et Dorethy CALLIGARO

Au peuple sénégalais, pour son hospitalité.

Au gouvernement Camerounais qui de temps à autre volait à mon secours via ses ambassades à Dakar, et à Paris .

Aux organismes qui ont financé cette thèse : Agence Universitaire de la Francophonie (AUF) , Centre International de la physique théorique (ICTP), Au laboratoire d'Analyse Numérique et d'Informatique de L'Université Gaston Berger de Saint louis.

Ma reconnaissance va ici à mon père Gaspard NKAMBA qui m'a inculqué l'esprit d'abnégation et de persévérance, ma tante Madame Justine NDOUAKOUT qui ne s'est jamais lassée de me soutenir, et de m'encourager dans mes moments de profonds doutes.

Enfin je dédie cette thèse à Maman Nini, Diane et Patrick qui ne sont plus

Résumé

Ce mémoire de thèse s'articule en deux parties.

La première partie s'intéresse à la robustesse du nombre de reproduction de base \mathcal{R}_0 et du nombre de reproduction type \mathcal{T} , qui sont des seuils pour des systèmes épidémiques. Nous montrons que ces paramètres seuils ne sont pas des jauges fiables pour évaluer la distance qui sépare le Jacobien J du système, calculé au point d'équilibre sans maladie à l'ensemble des matrices stables (\mathcal{S}) si J est instable,

(respectivement à l'ensemble des matrices instables (\mathcal{U}) si J est stable).

La deuxième partie se penche sur l'étude d'un modèle déterministe ($S V E I R$), où S représente les susceptibles, V les vaccinés, E les latents, I les infectieux et R les immuns.

Dans le dit modèle, les vaccinés sont considérés comme des "susceptibles dans une moindre mesure" du fait que le vaccin ne garantit pas une immunité totale.

Le nombre de reproduction de base \mathcal{R}_{vac} qui assure l'existence et l'unicité de l'équilibre endémique est déterminé.

La globale stabilité de l'équilibre endémique est établie en utilisant les techniques de Lyapunov quand $\mathcal{R}_{vac} > 1$. Ce résultat améliore un résultat de Gumel [42]

TABLE DES MATIÈRES

Introduction Générale

*«Seuls les marabouts et les devins gagnent leur vie assis ;
pour les autres, ils doivent se lever de bonne heure chaque matin ;
aller travailler dur, pour gagner leur bâton de manioc quotidien».*

Léontine NKAMBA

Dans le contexte actuel où nous vivons de graves crises sanitaires tant dans les pays industrialisés que ceux qui le sont moins, un des champs disciplinaires de prédilection qu'embrasse la modélisation mathématique est la santé publique.

Yves Cherruault [21] définit la modélisation mathématique comme un processus par lequel un problème du monde réel est interprété en termes de symboles abstraits. La description abstraite faisant intervenir une formulation mathématique est appelée modèle mathématique associé au problème de départ.

Le dit problème issu du monde réel peut alors être traité uniquement à l'aide d'outils mathématiques. La santé publique étant un vaste domaine, nous nous intéressons à la propagation des maladies infectieuses (grippe, méningite, choléra) susceptibles de provoquer des épidémies et nous nous servons des modèles mathématiques. Cette combinaison des mathématiques et maladies infectieuses est appelée épidémiologie mathématique tout simplement ; Les premières contributions à l'épidémiologie mathématique moderne sont due à P.D Enk'o entre 1873 et 1894.

L'épidémiologie est l'étude de la distribution des maladies chez l'homme et des facteurs qui les influencent, autrement dit c'est l'étude des épidémies et des facteurs qui pourraient les causer. Elle vise à la compréhension des causes des maladies et à l'amélioration de leurs traitements et moyens de prévention.

L'épidémiologie s'intéresse essentiellement à la variation du nombre de cas en fonc-

tion du temps (et éventuellement de l'espace). Ceci implique que les modèles épidémiologiques sont fondamentalement des modèles dynamiques.

Les modèles qui apparaîtront tout au long de ce document sont sous-tendus par les équations différentielles, et les systèmes dynamiques qui sont nécessaires pour la bonne compréhension des études qui seront menées sur ces modèles.

Dans le cas des maladies microparasitaires, nous nous intéressons aux modèles qui traitent de la dynamique inter-hôte. C'est à dire la dynamique des états cliniques des individus hôtes. Pour ce faire, les modèles en compartiments sont parfaitement adaptés ; Ils consistent à diviser la population hôte en autant de compartiments que d'états cliniques et à connecter ces compartiments entre eux par des flux d'individus ; Les fondements de l'approche de l'épidémiologie basée sur les modèles compartimentaux ont été établis par les médecins de santé publique comme Sir Ronald Ross, W.H Hamer, A.G MCKendrick and W.O Kernack entre les années 1900 et 1935.

L'analyse compartimentale est une technique de modélisation très utilisée en biologie (Anderson et May, 1991 ; Diekmann et Heesterbeek, 2000 ; Keeling et Rohani, 2007). On trouve des applications en pharmacocinétique, en métabolisme, en épidémiologie et en dynamique des populations. En fait dans tous les domaines où on peut faire des bilans de matières.

Après la mise sur pieds d'un modèle mathématiquement et épidémiologiquement bien posé , il est toujours question par la suite d'étudier la stabilité des points d'équilibres existants.

Pour un modèle général compartimental de transmission d'une maladie, il est susceptible d'exister un équilibre sans maladie (Disease free equilibrium (DFE)) et un ou plusieurs équilibres endémiques. Pour analyser la stabilité asymptotique de ces différents équilibres, on dispose d'un outil comme le nombre de reproduction de base \mathcal{R}_0 , qui peut s'interpréter comme le nombre de cas secondaires qu'un individu infectieux génère quand il est introduit dans une population donnée constituée uniquement des susceptibles durant sa vie infectieuse. Le nombre de reproduction type \mathcal{T} , quant à lui, est le nombre de cas secondaires qu'engendre un infectieux quand on l'introduit dans une classe de susceptibles particulière . \mathcal{R}_0 et \mathcal{T} sont

des paramètres seuils de bifurcation des systèmes épidémiques. Le point d'équilibre sans maladie (DFE) est localement asymptotiquement stable si $\mathcal{R}_0 < 1$ et instable si $\mathcal{R}_0 > 1$.

Rendu à ce niveau, une question que l'on pourrait se poser est : le nombre de reproduction de base \mathcal{R}_0 et le nombre de reproduction type \mathcal{T} permettent-ils de quantifier l' "effort à fournir" pour faire basculer un système épidémique de la stabilité à l'instabilité (respectivement de l'instabilité à la stabilité).

En d'autres termes \mathcal{R}_0 , et \mathcal{T} sont ils des indicateurs seuils robustes ?

Répondre à cette question est l'une des contributions de cette thèse, et fera l'objet de la première partie.

La deuxième partie de la thèse procédera à l'analyse asymptotique des équilibres sans maladie et endémique d'un modèle à susceptibilité et infectivité différentielle (SVEIR) dont l'un des compartiments des susceptibles comporte des individus vaccinés.

La seconde contribution sera de montrer la globale stabilité de l'équilibre endémique en utilisant la méthode directe de Lyapunov.

En Annexe on retrouvera les calculs de distances à la stabilité (respectivement instabilité), pour une famille de matrices de Metzler d'ordre 2

TABLE DES MATIÈRES

Première partie

Robustesse et Seuls Epidémiques

Résumé

L'objectif de cet exposé est de voir si le taux de reproduction de base \mathcal{R}_0 est un indicateur robuste relativement à la stabilité des systèmes épidémiologiques déterministe en dimension finie.

On sait que si $\mathcal{R}_0 < 1$ alors l'équilibre sans maladie est asymptotiquement stable et si $\mathcal{R}_0 > 1$ alors celui-ci est instable.

Autrement dit si \mathcal{R}_0 est un seuil de bifurcation. La question qui se pose est : \mathcal{R}_0 est-il un indicateur de robustesse ? En d'autres termes si \mathcal{R}_0 est très supérieur à 1 cela veut-il dire que le système considéré nécessite une importante modification des paramètres pour rendre le DFE asymptotiquement stable ? Réciproquement si $\mathcal{R}_0 < 1$ est «loin» de 1 ce système est-il robustement stable vis à vis des perturbations ?



Chapitre 1

Robustesse

1.1 Introduction

Suivant la culture des gens, on trouve différentes notions qui ne sont pas sans rapports : sensibilité aux variations des paramètres, robustesse, conditionnement ... Ce sont des mots employés par des communautés différentes qui recouvrent un même phénomène.

La notion de robustesse est devenue une problématique centrale dans de nombreux domaines scientifiques allant de l'informatique à la biologie en passant par l'écologie ou la finance (Doyle, Low, Paganini et al., 2005 ; Bonabeau, Theraulaz, Deneubourg et al., 1996) [12,96]

Il n'existe pas de définition unique de cette notion et ceci d'autant plus qu'elle interfère avec les notions de résilience ou de stabilité. Selon les usages qu'on lui donne, elle peut prendre des acceptions théoriques et épistémologiques très différentes.

La robustesse d'un seuil en épidémiologie mathématique pourrait se traduire comme sa capacité à ne pas être modifié par une petite perturbation sur les données ou dans les paramètres du modèle choisis pour le seuil.

En automatique, la robustesse d'un système se définit , par la relative invariance de ses propriétés vis à vis d'une incertitude du modèle.

Dans le domaine des statistiques, Huber (1981) [69] caractérise la robustesse comme étant une insensibilité à toutes déviations par rapport aux hypothèses. Par exemple :

Un test est robuste s'il reste valable alors que les hypothèses d'application ne sont pas toutes réunies. Ce peut être une taille d'échantillon un peu faible ou une loi de probabilité (loi normale pour les tests paramétriques) qui n'est pas très bien vérifiée. D'un point de vue de la conception de produit, la notion de robustesse fait référence à l'insensibilité relative des performances fonctionnelles d'un produit, lorsque ses conditions de fabrication et d'utilisation dévient de leurs spécifications (Kackar, 1985). [76]

En recherche opérationnelle et plus particulièrement dans le contexte de l'aide à la décision (RO-AD), Roy (1997) [107] propose le concept de conclusion robuste qui vise à élaborer des éléments de réponse à un problème auquel est confronté un décideur, éléments de réponses qui sont obtenus en prenant en compte les incertitudes éventuelles sur les paramètres du problème. D'après Davenport et Beck (2000), [23] il n'existe pas de définition d'ordonnancement robuste mais plutôt une compréhension générale informelle de ce qu'est la robustesse (i.e., la capacité d'un ordonnancement prédictif d'être performant malgré des événements inattendus). Dans la théorie de la décision, l'action la plus robuste est celle qui ne conduit pas à une perte importante quelque soit l'événement qui va se produire (Pomerol, 2001). [99]

De manière générale un indicateur est un outil d'évaluation et d'aide à la décision (pilotage, ajustements et rétrocorrection) grâce auquel on va pouvoir mesurer une situation ou une tendance, de manière relativement objective, à un instant donné, ou dans le temps et/ou l'espace.

Un indicateur se veut être une sorte de résumé d'informations complexes offrant la possibilité à des acteurs différents (scientifiques, gestionnaires, politiques et citoyens) de dialoguer entre eux.

L'indicateur (qualitatif ou quantitatif) décrit généralement un état, et/ou une réponse ne pouvant être appréhendés directement ; Il doit exister une relation causale entre le fait mesuré (indiqué) et l'indicateur.

Un indicateur est dit robuste s'il renseigne suffisamment sur «l'effort » à fournir pour changer la réponse donnée par un système sur un fait mesuré.

Il vient alors que pour évaluer la robustesse d'un indicateur, il faut à priori être capable de mesurer l'effort à fournir pour passer d'une réponse à une autre du système. ce qui n'est pas toujours chose aisée.

Le conditionnement numérique (condition number) d'un problème mesure la sensibilité des réponses à de petits changements dans les données [25]. Le problème est dit mal conditionné si son conditionnement numérique est infini.

Soit un problème dont les données vivent dans un espace vectoriel \mathbb{R}^n . La solution de ce problème (ou une des solutions sélectionnées) vit dans \mathbb{R}^m . Autrement dit on a une application de l'espace des paramètres dans l'espace des solutions :

$$x \mapsto f(x)$$

Le problème est d'avoir une majoration, une idée de la variation de la solution quand les paramètres initiaux varient.

Autrement dit on a envie d'avoir une estimation d'une quantité

$$\frac{\left(\frac{\|f(x+\delta x) - f(x)\|}{\|f(x)\|} \right)}{\left(\frac{\|\delta x\|}{\|x\|} \right)}$$

Qui est tout simplement la variation relative de la solution divisée par la variation relative des paramètres.

Il est à peu près clair que cette quantité, ou la meilleure majoration de cette quantité, pour des $\|\delta x\|$ petits, qui s'appellera le conditionnement du problème est liée au Jacobien de f au point x si f est dérivable.

On aura à considérer la quantité

$$\frac{\|Jac(f, x)\| \|x\|}{\|f(x)\|}$$

où $Jac(f, x)$ est le Jacobien de f calculé en x .

On va préciser cette idée sur des exemples bien connus. On va également donner un «folk theorem». La notion de robustesse peut aussi se comprendre comme la

distance au problème mal posé. les exemples éclairciront ces généralités. Il est admis dans les milieux de l'analyse numérique que l'inverse de la distance au problème mal posé est en rapport de grandeur avec le conditionnement.

1.1.1 Matrice inversible, conditionnement d'une matrice

On considère le problème

$$Ax = b$$

où A est une matrice réelle inversible $n \times n$, b un vecteur de \mathbb{R}^n .

L'espace des paramètres est $\mathbb{R}^{n^2} \times \mathbb{R}^n$. La solution est donnée par la fonction

$$x \mapsto A^{-1}b$$

à valeur dans \mathbb{R}^n .

Le conditionnement d'une matrice, en analyse numérique linéaire [26, 40, 68, 116, 122] est défini par

$$\kappa(A) = \|A\| \|A^{-1}\|$$

La distance au problème «mal posé» est donnée par la distance de la matrice inversible A à l'ensemble des matrices singulières Σ :

$$d(A, \Sigma) = \min_{X \in \Sigma} \|A - X\|$$

On a le théorème bien connu

Théorème 1 (voir [40] theorem 2.5.2 sur rank deficiency and the SVD)

Si A est une matrice inversible la distance de A à l'ensemble des matrices singulières est donnée par la plus petite valeur singulière de A , pour la distance associée aux normes matricielles euclidienne ou à la norme de Frobenius.

$$\min_{X \in \Sigma} \|A - X\|_2 = \min_{X \in \Sigma} \|A - X\|_F = \sigma_n$$

Mais si l'on remarque que

$$\frac{1}{\sigma_n} = \|A^{-1}\|_2$$

alors la distance relative

$$\frac{d(A, \Sigma)}{\|A\|_2} = \frac{1}{\|A^{-1}\|_2 \|A\|_2} = \frac{1}{\kappa(A)}$$

Cela confirme notre «folk theorem» ([25]).

Distance aux matrices singulières

Si A est une matrice inversible la distance à l'ensemble Σ des matrices singulières est donnée par $\sigma_{\min}(A)$ que l'on mesure cette distance par la norme subordonnée à la norme euclidienne ou par la norme de Frobenius. On peut démontrer un théorème plus général :

Théorème 2 (Gastinel) *Si A est une matrice inversible, alors pour toute norme matricielle subordonnée, la distance à l'ensemble Σ des matrices singulières est donnée par*

$$d(A, \Sigma) = \min_{A+\Delta A \in \Sigma} \|\Delta A\| = \frac{1}{\|A^{-1}\|}$$

Le théorème de distance à l'instabilité pour une norme subordonnée va combiner le théorème de Gastinel et la technique de démonstration de van Loan [131].

Pour cette raison nous allons donner la preuve de ce théorème et par ailleurs nous allons utiliser une technique analogue (utilisation de la norme duale) plus loin.

preuve 1 *Soit $\|\cdot\|$ une norme et sa norme matricielle associée*

$$\|A\| = \max_{x \neq 0} \frac{\|Ax\|}{\|x\|}$$

Supposons $\|\delta A\| < \|A^{-1}\|^{-1}$. Alors la matrice $I+A^{-1}\delta A$ est inversible car $\|A^{-1}\delta A\| <$

1. En écrivant

1.1. INTRODUCTION

$$A + \delta A = A(I + A^{-1}\delta A)$$

on obtient que $A + \delta A$ est inversible et donc $d(A, \Sigma) \leq \|A^{-1}\|^{-1}$.

Réciproquement, pour montrer l'égalité choisissons x un vecteur unitaire $\|x\| = 1$ tel que

$$\|A^{-1}x\| = \|A^{-1}\|$$

On pose

$$y = \frac{\|A^{-1}x\|}{\|A^{-1}x\|_2^2} A^{-1}x$$

ce qui donne

$$\langle y | A^{-1}x \rangle = \|A^{-1}x\| = \|A^{-1}\|$$

Si l'on considère y^T comme la matrice de l'application linéaire $x \mapsto \langle x | y \rangle$, et que l'on considère sa norme associée pour la norme $\|\bullet\|$, notée $\|y^T\|^D$

On a

$$\|y^T\|^D = \max_{x \neq 0} \frac{|y^T x|}{\|x\|} = \max_{x \neq 0} \frac{|\langle x | y \rangle|}{\|x\|} = \frac{\|y\|_2^2}{\|y\|}$$

(un produit scalaire $\langle x | y \rangle$ est maximisé pour la valeur de x valant $x = y$)

On dit que cette expression $\|y^T\|^D$ est la norme duale.

D'après les calculs précédents la norme duale pour cette expression de y

$$\|y^T\|^D = 1$$

On pose $\Delta A = -\|A^{-1}\|^{-1}xy^T$.

$$\|\Delta A\| = \|A^{-1}\|^{-1} \|x y^T\|$$

Mais

$$\|x y^T\| = \max_{\|z\|=1} \|x y^T z\| = \|x\| \max_{\|z\|=1} |\langle y | z \rangle| = |\langle y | \frac{y}{\|y\|} \rangle| = \frac{\|y\|_2^2}{\|y\|} = 1$$

finalement $\|\Delta A\| = \|A^{-1}\|^{-1}$ et

$$\begin{aligned} (A + \Delta A) A^{-1} x &= x + \Delta A A^{-1} x \\ &= x - \|A^{-1}\|^{-1} x y^T A^{-1} x \\ &= x - \|A^{-1}\|^{-1} \langle y | A^{-1} x \rangle x \\ &= x - x = 0 \end{aligned}$$

Cela finit la démonstration.

Remarque 1 La perturbation singularisante est de norme 1. La matrice $\Delta A = \|A^{-1}\|^{-1} x y^T$ est une matrice de rang 1.

Remarque 2 Ce résultat est démontré dans [25] (1987). Il est aussi généralisé dans [77] (1966) aux matrices structurées et dans ces deux références le résultat est attribué à Gastinel.

1.2 Historique et motivation

Le résultat principal de la suite, en relation avec notre problématique, est d'étudier la stabilité asymptotique globale d'un système de la forme

$$\dot{x} = A x + f(t, x)$$

où A est une matrice Hurwitz et la «perturbation» $f(t, x)$ vérifie une inégalité du type

$$\|f(t, x)\| \leq \gamma \|x\|$$

uniformément en t sur l'ouvert où l'on considérera l'équation différentielle.

Le problème est donc, connaissant le spectre de A peut-on en déduire quelque chose sur le comportement du système perturbé.

Le résultat est que si $\gamma < \beta(A)$, où $\beta(A)$ est une constante dépendant de A dont nous parlerons plus loin, alors le système est asymptotiquement stable.

- Si l'inégalité est vérifiée localement sur un ouvert contenant l'origine alors l'asymptotique stabilité est locale et l'on pourra déterminer de manière pratique un ouvert contenu dans le bassin d'attraction.
- Si l'inégalité est vérifiée globalement sur \mathbb{R}^n , alors le système sera globalement asymptotiquement stable.

Ce résultat est bien sûr un résultat de perturbation et a pour réminiscence le théorème de Poincaré-Lyapounov. Le théorème de Poincaré-Lyapounov, dans une de ses formes, affirme que si $f(t, x) = o(\|x\|)$ alors le système considéré est asymptotiquement stable. En effet avec cette hypothèse la quantité γ pourra être rendue aussi petite que l'on veut à condition de choisir un ouvert suffisamment petit.

Le résultat que nous présentons choisit un autre point de vue. Tout d'abord on verra que dans un certain sens la quantité $\beta(A)$ est la meilleure possible. Ensuite $\beta(A)$ étant fixé, on pourra chercher à déterminer l'ouvert le plus grand possible pour que $\gamma < \beta(A)$.

La constante $\beta(A)$ est tout simplement la distance de la matrice A à l'ensemble des matrices complexes non asymptotiquement stables. La distance sur les matrices étant celle correspondant à la norme matricielle induite par la norme euclidienne sur \mathbb{R}^n (Cela vaut aussi si l'on prend la norme matricielle de Frobenius). Cette quantité $\beta(A)$ mesure donc la norme de la plus petite matrice E telle que $A + E$ ne soit plus asymptotiquement stable. Le résultat présenté est donc évident si la perturbation $f(t, x) = B.x$ où est une matrice constante, il ne l'est déjà plus si la perturbation est linéaire non autonome $f(t, x) = B(t).x$ vérifiant $\|B(t)\|_2 < \beta(A)$.

Pour situer le résultat présenté nous allons le mettre en perspective par rapport à la littérature.

La quantité $\beta(A)$ a fait l'objet d'une étude systématique par deux communautés diffé-

rentes : les «numériciens » et les «contrôleurs». C'est C.F. Van Loan , numéricien réputé (il est l'auteur avec G. Golub du très célèbre livre Matrix Computations [40]) qui a introduit cette distance en 1984 dans une conférence AMS-SIAM entre numériciens et contrôleurs [131]. Il montre la relation

$$\beta_2(A) = \min_{\omega \in \mathbb{R}} \sigma_{\min}(i\omega I - A)$$

La notation β_2 signifie que l'on utilise la norme subordonnée à la norme euclidienne. Pour les problèmes de placement de pôles robustes Kautsky-Nichols et Van Dooren ont considéré cette quantité $\beta(A + BF)$ pour un feedback linéaire F rendant $A + BF$ Hurwitz. [81](1985).

La quantité $\beta(A)$ est la bonne mesure pour la robustesse aux perturbations (constantes). Van Loan fait remarquer que le nombre considéré comme mesure de stabilité par les ingénieurs et les mathématiciens, « le module de stabilité » défini par

$$\alpha(A) = \max \{ \operatorname{Re}(\lambda) | \lambda \in \operatorname{Sp}(A) \},$$

est un mauvais indicateur de robustesse pour la stabilité.

Nous avons repris la notation de van Loan. Cette quantité n'a pas de notation déterminée. Elle est aussi appelée borne spectrale (spectral bound) et noté $s(A)$ [66, 119, 120]. Elle est aussi appelée abscisse spectrale (notée $\mu(A)$) [113]. On trouve abscisse spectrale avec la notation $\alpha(A)$ [123] ... La notation $\beta(A)$ provient du choix α par van Loan.

Le module de stabilité est la plus grande partie réelle des valeurs propres de A . Or cette quantité est une mauvaise mesure de la distance à l'instabilité, donc de la robustesse. On peut faire l'analogie avec déterminant qui est une mauvaise mesure de la distance à la singularité.

De son côté la communauté du contrôle a commencé à s'intéresser à cette quantité $\beta(A)$. Hinrichsen (qui était présent à la conférence où Van Loan a introduit $\beta(A)$) et Pritchard ont publié à partir de 1986 une série de papiers sur le rayon de stabilité des systèmes linéaires [57–59, 63].

Si cette quantité $\beta(A)$ est significative, il faut un algorithme pour la calculer car il s'agit clairement d'un problème de minimisation non linéaire. Dans son papier initial Van Loan n'a pu proposer que des estimations pratiques. Autrement dit un algorithme basé sur une conjecture. Malheureusement J.W. Demmel [24] a montré par des contre-exemples appropriés que cette conjecture était fausse.

Le premier à avoir proposé un algorithme efficace est un élève de Van Loan, R.Byers, la référence [18] soumise en décembre 1986, acceptée en septembre 1988! . Son algorithme utilise les propriétés des matrices Hamiltoniennes.

Il y a de fortes relations entre $\beta(A)$ et la norme H_∞ , bien connue en théorie du contrôle, de la fonction de transfert du système non perturbé $G(s) = (sI - A)^{-1}$. En fait il est évident que

$$\beta_2(A) = \frac{1}{\|G(s)\|_\infty}$$

Ceci a été remarqué par S. Boyd, V. Balakrishnan et P. Kabamba [16] dans les années 1989. En fait cette remarque est contenue en germe dans les papiers de Hinrichsen et Pritchard [57, 58]. Que ces deux auteurs n'aient pas fait le lien avec le H_∞ est normal car on peut considérer que la notion de norme H_∞ a été éclaircie entre 1987 et 1990 (voir les résumés [32, 98]). La relation entre H_∞ et $\beta(A)$ est reprise en 1990 par Hinrichsen et Pritchard [63].

Le résultat de Boyd et al , en 1989 [16], présente un algorithme par dichotomie pour calculer la norme H_∞ de $C(sI - A)^{-1}B + D$. Leur démonstration généralise celle de Byers. Ces auteurs proposent ensuite un algorithme convergeant de manière quadratique.

Aux notions précédentes on peut encore ajouter la notion de pseudo-spectre (pseudospectrum ou ε -pseudospectrum). On a la définition du ε -pseudospectre

$$\sigma_\varepsilon(A) = \left\{ \lambda \in \mathbb{C} \mid \exists \Delta, \|\Delta\| \leq \varepsilon \lambda \in \sigma(A + \Delta A) \right\},$$

où la norme matricielle utilisée est une norme matricielle subordonnée. Cette notion

de pseudospectre est, avec la définition donnée ici, intimement liée à notre problème. En fait cette notion a été introduite de manière indépendante au moins 6 fois dans l'histoire : J. M. Varah (1967) [132], H. Landau (1975) [87], S. K. Godunov (1982), L. N. Trefethen (1990), D. Hinrichsen and A. J. Pritchard (1992), and E. B. Davies (1997). Landau a étudié le spectre asymptotique d'opérateurs intégraux, Varah s'intéressait aux espaces invariants de matrices dans le contexte des problèmes de valeurs propres numériques dans le cas non-Hermitien, Godunov s'est intéressé aux problèmes de précision numérique des valeurs propres ...

C'est Trefethen [121] qui a considéré les pseudospectres dans le cadre des valeurs propres instables des matrices obtenues dans le cadre des méthodes spectrales de discrétisation. Le problème qui a motivé cette communauté est que le spectre d'une matrice qui est «éloignée» des matrices normales donne peu d'information sur le comportement des semi-groupes e^{tA} ou A^n .

On se trouve ainsi en présence de trois communautés : les numériciens (Van Loan, Van Dooren, Byers, Trefethen, Demmel ...) les contrôleurs (Pritchard, Hinrichsen) et les contrôleurs H_∞ (Boyd, Bruinsma, ...) s'ignorant plus ou moins. Ils ont cependant tous en commun la considération de la résolvante et sa norme.

Il existe dans la littérature du contrôle un résultat de robustesse semblable à celui que nous présentons. Il est démontré que si $\gamma < \tau(A)$, où $\tau(A)$ est une autre constante dépendant de A , alors le système est asymptotiquement stable. Même si ce résultat n'est pas exposé sous la forme que nous lui donnons, même s'il est démontré dans un contexte différent, celui des observateurs, le résultat de convergence est contenu dans un papier bien connu de F. E. Thau de 1973 [117] "observing the state of nonlinear dynamical systems".

Cet article, bien connu des spécialistes des observateurs est aussi abondamment cité et utilisé par chercheurs sur les systèmes incertains : [10] [22] [84] [102] [100] [138] [139] [143]

Le résultat de Thau a été précisé par Patel et Toda [97] en 1980. Nous montrerons que

$$\tau(A) \leq \beta(A)$$

Dans deux articles parus dans SIAM J. Control en 1988 et 1990, G. Hewer et C. Kenney redécouvrent la constante de Thau [54, 82]. Ils montrent que

$$\tau(A) = \text{sep}_2(A, -A^T)$$

où on définit classiquement $\text{sep}_2(A, B) = \sigma_{\min}(B^T \otimes I - I \otimes A)$.

A la différence du théorème de Thau, leur résultat ne vaut que pour des perturbations matricielles constantes. Les démonstrations sont algébriques et longues. Nous pensons que le cadre naturel est celui des systèmes dynamiques et la stabilité se prouve facilement avec les techniques de Lyapounov.

Les résultats précédents, pour la commodité du lecteur, seront démontrés et précisés.

1.3 Distance à l'instabilité

Dans cette section nous faisons l'état de l'art en ce qui concerne la distance à l'instabilité pour les matrices.

Pour cela nous avons besoin de quelques préliminaires.

Tout d'abord on introduit la définition suivante

Définition 1.3.1 (module de stabilité) :

Pour une matrice A on définit le module de stabilité $\alpha(A)$, comme étant la plus grande partie réelle des valeurs propres de la matrice A :

$$\alpha(A) = \max_{\lambda \in \text{Sp}(A)} \Re(\lambda)$$

On va maintenant introduire la distance à l'instabilité pour une matrice A stable (i.e. $\alpha(A) < 0$). C'est tout simplement la distance de A à l'ensemble des matrices non stables, où encore

Définition 1.3.2 (distance à l'instabilité) :

$$\beta_2(A) = \min_{\alpha(A+\Delta)=0} \|\Delta\|_2$$

On doit faire ici plusieurs remarques. Tout d'abord nous avons choisi la norme matricielle associée à la norme euclidienne de \mathbb{R}^n :

$$\|A\|_2 = \sup_{x \neq 0} \frac{\|A.x\|_2}{\|x\|_2}$$

Si l'on désigne par $\rho(A)$ le rayon spectral de la matrice A :

$$\rho(A) = \max_{\lambda \in Sp(A)} |\lambda|$$

Il est bien connu que

$$\|A\|_2 = \left(\rho(A^T.A)\right)^{\frac{1}{2}} = \sigma_{max}(A)$$

où σ_{max} désigne la plus grande valeur singulière de A

La deuxième remarque est que en toute rigueur la définition devrait être

$$\beta(A) = \inf_{\alpha(A+\Delta) \geq 0} \|\Delta\|_2$$

Mais l'ensemble \mathcal{I} des matrices vérifiant $\alpha(M) \geq 0$ est un fermé. Cela provient du fait que le spectre d'une matrice dépend continûment des coefficients de la matrice, on en déduit que la fonction α est aussi continue. La distance entre le point A , qui est un compact et le fermé \mathcal{I} est donc atteinte à la frontière de \mathcal{I} . Ce qui explique le **min** et la relation $\alpha(A + \Delta) = 0$.

La dernière remarque est que même si la matrice A est réelle, la «perturbation» peut être complexe.

La quantité $\alpha(A)$ est un mauvais indicateur de la robustesse de la stabilité. Dans [131] van Loan donne un exemple avec matrice en dimension 10. Voici un exemple très simple : considérons la matrice

1.3. DISTANCE À L'INSTABILITÉ

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 10^n \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$$

Il est clair que le module de stabilité est -1 et pourtant la perturbation

$$\Delta A = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 2 \times 10^{-n} & 0 \end{bmatrix}$$

rend instable la matrice $A + \Delta A$ et $\|\Delta A\|_2 = 2 \times 10^{-n}$.

Par conséquent $\beta(A) \leq 2 \times 10^{-n}$.

Nous allons donner une autre expression, due à Van Loan pour $\beta(A)$. Pour cela nous rappelons un résultat classique sur la décomposition en valeurs singulières. (par exemple [26, 40, 122])

Théorème 3 :

Si A est une matrice réelle $m \times n$ alors il existe des matrices orthogonales $U \in M(m, \mathbb{R})$ et $V \in M(n, \mathbb{R})$ telles que

$$U^T . A . V = \text{diag}(\sigma_1, \dots, \sigma_p)$$

où $\sigma_1 \geq \dots \geq \sigma_p$, $p = \min(m, n)$

Les σ_i sont des réels. Si la matrice A est carrée ce sont les racines carrées des valeurs propres de la matrice symétrique positive $A^T . A$ et les σ_i s'appellent les valeurs singulières de A .

On notera

$$\sigma_{\max}(A) = \sigma_1$$

et

$$\sigma_{\min}(A) = \sigma_n$$

Le résultat suivant est également classique :

Théorème 4 (distance à la singularité)

Soit A est une matrice réelle $m \times n$. On note Σ l'ensemble des matrices de rang strictement inférieur à $\min(m, n)$.

Alors on a la relation

$$d_2(A, \Sigma) = \min_{A+\Delta \in \Sigma} \|\Delta\|_2 = \min_{A+\Delta \in \Sigma} \|\Delta\|_F = d_F(A, \Sigma)$$

La notation $\|\cdot\|_F$ désigne la norme de Frobenius

$$\|A\|_F = \sqrt{\sum_{i,j} |A_{i,j}|^2} = \left(\text{Tr}(A^T * A)\right)^{\frac{1}{2}}$$

Remarque 3 :

On trouvera ce résultat dans les livres classiques d'analyse numérique linéaire (par exemple [26, 40, 116, 122]). Pour la norme subordonnée à la norme euclidienne la preuve est en [40], pour la norme de Frobenius la preuve est en [116].

La décomposition en valeurs singulières a été découverte indépendamment Par Beltrami (1873) et Jordan (1874) et ensuite par Sylvester (1889). L'extension aux matrices complexes est due à Autonne (1912) et celle aux matrices rectangulaires à Eckart et Young (1936). Le résultat d'Eckart et Young a d'importantes applications aux statistiques, notamment les décompositions en composantes principales. La généralisation à la dimension infinie a été développée par Schmidt (1907, un élève de Hilbert, inventeur du célèbre procédé d'orthogonalisation dit de Gram-Schmidt) et Weyl.

En dépit de ces racines lointaines, la décomposition en valeurs singulières ou SVD (singular value decomposition) n'est devenue bien connue dans le domaine des mathématiques appliquées qu'à partir des années 1960, quand Golub et Kahan ont proposé un algorithme de calcul effectif. Même après cela, le monde mathématique a été lent à reconnaître la nature fondamentale de la SVD. Si maintenant la SVD est bien présente dans la littérature des manuels anglo-saxons, elle est souvent ignorée en France. Par exemple le classique «introduction à l'analyse numérique matricielle de

1.3. DISTANCE À L'INSTABILITÉ

P.G. Ciarlet» lui consacre une demi-page, ce résultat est absent du livre d'analyse numérique (éditeur Hermann) de Sibony et Mardon.

La SVD est connue en analyse harmonique sous le nom de décomposition de Cartan.

Nous pouvons maintenant énoncer et démontrer la proposition suivante :

Théorème 5 [Van Loan]

Pour une matrice stable, on a la relation suivante :

$$\beta_2(A) = \min_{\omega \in \mathbb{R}} \sigma_{\min}(i\omega I - A)$$

Nous donnerons une preuve d'un résultat plus général plus loin, qui contiendra celui de van Loan. Ici la norme matricielle considérée est la norme subordonnée à la norme euclidienne. La perturbation peut être complexe. On remarque que

$$\sigma_{\min}(i\omega I - A) = \frac{1}{\sigma_{\max}((i\omega I - A)^{-1})} = \frac{1}{\|(i\omega I - A)^{-1}\|_2}$$

Remarque 4 :

On a ramené l'expression de $\beta_2(A)$ à une distance à la singularité. L'expression $\beta_2(A)$ signifie que l'on utilise la norme matricielle associée à la norme euclidienne. Si l'on reprend la démonstration précédente on montre

$$\beta_F(A) = \min_{\omega \in \mathbb{R}} \sigma_{\min}(i\omega I - A)$$

Ce qui prouve par le théorème (4) que

$$\beta_2(A) = \beta_F(A)$$

La quantité $\beta(A)$ est liée à la norme \mathcal{H}_∞ de la matrice A . En effet on considère le système stable

$$\dot{x} = A.x$$

La fonction de transfert est $(sI - A)^{-1}$. La matrice $(sI - A)^{-1}$ est holomorphe en s sur le demi-plan droit $\Re(s) > 0$, puisque A est stable. On considère la norme 2 de cette matrice : $\| (sI - A)^{-1} \|_2$. La norme \mathcal{H}_∞ de ce système est par définition

$$\max_{\Re(s) \geq 0} \| (sI - A)^{-1} \|_2 = \max_{\Re(s) \geq 0} \left(\sigma_{\max} \left((sI - A)^{-1} \right) \right)$$

Il est classiquement connu dans la littérature \mathcal{H}_∞ que la quantité précédente est égale à

$$\max_{\omega} \| (i\omega I - A)^{-1} \|_2 = \max_{\omega \geq 0} \left(\sigma_{\max} \left((i\omega I - A)^{-1} \right) \right)$$

Si l'on remarque que

$$\sigma_{\max} \left((i\omega I - A)^{-1} \right) = \frac{1}{\sigma_{\min} (i\omega I - A)}$$

On a donc

$$\max_{\omega} \| (i\omega I - A)^{-1} \|_2 = \frac{1}{\min_{\omega} \| (i\omega I - A) \|_2} = \frac{1}{\beta_2(A)}$$

Ce qui prouve que la norme \mathcal{H}_∞ est l'inverse de $\beta_2(A)$

On va montrer plus loin un résultat analogue pour une norme matricielle subordonnée.

1.3.1 Déstabilisation par des matrices de rang 1

Le précédent résultat est dû à Van Loan [131] en 1985. On va montrer, de la même manière que la singularisation est obtenue par une matrice de rang 1, la déstabilisation peut s'obtenir par une matrice de rang 1. Le résultat est dû à Hinrichsen et Pritchard [57] en 1986.

On vu que

$$\beta_2(A) = \min_{\omega \in \mathbb{R}} \sigma_{\min}(i\omega I - A)$$

et que le minimum était atteint. Soit ω_0 où le minimum est atteint. Parce que l'on utilise la norme euclidienne

1.4. ROBUSTESSE DE LA STABILITÉ

$$\beta(A) = \sigma_{\min}(i\omega_0 I - A) = \min_{\substack{z \\ \|z\|=1}} \|(i\omega_0 I - A)z\|$$

Soit un z_0 qui réalise ce minimum, alors $\beta(A) = \|(i\omega_0 I - A)z_0\|$ et on va montrer que la matrice de rang 1

$$\Delta = (A - i\omega_0 I)z_0z_0^*$$

est déstabilisante. En effet on considère la matrice $i\omega_0 I - A - \Delta$. Elle est singulière car

$$\left[(i\omega_0 I - A) - (A - i\omega_0 I)z_0z_0^* \right] z_0 = 0$$

Ceci parce que $z_0^* z_0 = \langle z_0 | z_0 \rangle = 1$

La matrice $A + \Delta$ a donc une valeur propre nulle, elle est dans le complémentaire des matrices stables, par conséquent

$$\beta(A) \leq \|\Delta\|.$$

Mais par ailleurs

$$\|\Delta\| = \max_{\substack{z \\ \|z\|=1}} \|(A - i\omega_0 I)z_0z_0^*z\| = \|(A - i\omega_0 I)z_0\| \max_{\substack{z \\ \|z\|=1}} |\langle z_0 | z \rangle| = \beta(A)$$

1.4 Robustesse de la stabilité

On a vu que $\beta(A)$ mesure la distance à l'instabilité d'une matrice stable. C'est une mesure de bon conditionnement des problèmes associés à la contrôlabilité, le placement de pôles etc. . .

$$\beta_2(A) = \min_{\omega \in \mathbb{R}} \sigma_{\min}(i\omega I - A)$$

Jusqu'à quel point peut-on perturber un système linéaire stable sans perdre la stabilité?

On connaît déjà la réponse quand la perturbation est linéaire :

$$\dot{x} = Ax + \Delta x$$

sera encore stable pourvu que $\|\Delta\|_2 < \beta(A)$. Peut-on dire plus dans le cas d'une perturbation non linéaire? La réponse est contenue dans [1, 60].

Théorème 6 (Stabilité et perturbation) :

On considère le système linéaire supposé asymptotiquement stable, défini sur un voisinage ouvert Ω de l'origine :

$$\dot{x} = Ax$$

et le système perturbé

$$\dot{x} = Ax + f(t, x) \tag{1.1}$$

où la perturbation est uniformément Lipschitzienne sur Ω

$$\|f(t, x)\|_2 \leq \gamma \|x\|_2$$

Si la constante de Lipschitz vérifie

$$\gamma < \beta(A)$$

alors le système perturbé est asymptotiquement stable sur Ω

Le théorème classique de Poincaré-Lyapounov dit que si γ est suffisamment petit le résultat énoncé est vrai. Le théorème proposé précise la grandeur admissible de la perturbation.

Pour démontrer le théorème et faire le lien avec les équations de Riccati, nous avons besoin de la proposition suivante.

1.4. ROBUSTESSE DE LA STABILITÉ

Pro 1.4.1 :

On considère une matrice A stable. Soit γ un réel positif, alors la matrice Hamiltonienne

$$H_\gamma = \begin{bmatrix} A & I \\ -\gamma^2 I & -A^T \end{bmatrix}$$

est hyperbolique si et seulement si

$$\gamma < \beta(A)$$

preuve 2 On considère les fonctions de variable complexe

$$G(s) = sI - H_\gamma$$

et

$$\Phi(s) = \det(G(s))$$

On a en permutant les deux premières colonnes blocs de $sI - H_\gamma$:

$$\Phi(s) = (-1)^n \det \left(\begin{bmatrix} -I & sI - A \\ sI + A^T & -\gamma^2 I \end{bmatrix} \right)$$

Pour calculer le déterminant on peut utiliser le résultat sur le complément de Schur : si une matrice se décompose en blocs carrés A, B, C, D avec la matrice A inversible alors :

$$\det \left(\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} \right) = \det(A) \det(D - CA^{-1}B)$$

note : ce résultat est classique en algèbre linéaire,

$$D - CA^{-1}B$$

s'appelle le complément de Schur, il correspond à une transformation de Gauss par blocs.

On obtient alors

$$\Phi(s) = \left(-\gamma^2 I - (sI + A^T)(sI - A) \right)$$

Pour que $i\omega$ soit une valeur propre de H_γ , il est nécessaire et suffisant que $G(i\omega) = 0$.

$$G(i\omega) = -\gamma^2 I - (i\omega I + A^T)(i\omega I - A) = -\gamma^2 I + (i\omega I - A)^*(i\omega I - A)$$

Si l'on note $\Delta(\omega) = (i\omega I - A)^*(i\omega I - A)$ on a

$$G(i\omega) = \Delta(\omega) - \gamma^2 I \tag{1.2}$$

La matrice $\Delta(\omega)$ est une matrice autoadjointe symétrique positive. En utilisant la définition de $\beta(A)$, la relation avec γ on obtient les inégalités :

$$\sigma_{\min}(\Delta(\omega)) \geq \min_{\omega \in \mathbb{R}} \sigma_{\min}(\Delta(\omega)) = \beta(A)^2 > \gamma^2$$

Ceci implique immédiatement que si $\beta(A) > \gamma$ alors la matrice $G(i\omega)$ est autoadjointe définie positive. Elle n'est donc jamais singulière et $i\omega$ ne peut être une valeur propre de H_γ , qui est donc hyperbolique.

Réciproquement pour montrer que la condition $\gamma < \beta(A)$ est nécessaire on va raisonner par contraposée. Supposons $\beta(A) \leq \gamma$. On va montrer que H_γ a au moins une valeur propre imaginaire pure.

La relation

$$\sigma_{\min}(\Delta(\omega)) = \omega^2 \sigma_{\min} \left(I + \frac{i}{\omega} (A - A^T) + \frac{1}{\omega^2} (A^T A) \right) \tag{1.3}$$

Implique immédiatement

$$\lim_{\omega \rightarrow \pm\infty} [\sigma_{\min}(\Delta(\omega))] = +\infty \tag{1.4}$$

Comme de plus la fonction $\sigma_{\min}(\Delta(\omega))$ est une fonction continue de ω cela montre que cette fonction atteint son minimum sur \mathbb{R} . Par définition cette valeur minimum est $\beta(A)^2$. Comme on a supposé que $\beta(A) \leq \gamma$, par le théorème des valeurs intermédiaires, il existe un ω_0 pour lequel

1.4. ROBUSTESSE DE LA STABILITÉ

$$\Delta(\omega_0) = \gamma^2$$

Ce qui prouve d'après (1.2) que $G(i\omega_0)$ est singulière et $i\omega_0$ est une valeur propre de H_γ . Ce qui démontre bien la nécessité de la condition sur γ .

On peut maintenant démontrer le théorème (6).

On a par hypothèse $\gamma < \beta(A)$. Choisissons $\epsilon > 0$ tel que l'on ait encore $\gamma^2 + \epsilon < \beta(A)^2$. La proposition(1.4.1) montre immédiatement que la matrice Hamiltonienne

$$H_\gamma = \begin{bmatrix} A & I \\ -(\gamma^2 + \epsilon)I & -A^T \end{bmatrix}$$

est hyperbolique. Par conséquent, d'après le théorème fondamental sur les équations de Riccati, l'ARE

$$PA + A^T P + P P + (\gamma^2 + \epsilon)I = 0 \quad (1.5)$$

admet une unique solution stabilisante P . En effet la paire (A, I) est évidemment stabilisable et par hypothèse la matrice Hamiltonienne associée est hyperbolique.

On peut réécrire cette équation (1.5) sous forme d'équation de Lyapounov

$$PA + A^T P = -\tilde{Q}$$

où

$$\tilde{Q} = P P + (\gamma^2 + \epsilon)I$$

La matrice symétrique vérifie $\tilde{Q} \geq (\gamma^2 + \epsilon)I$, elle est donc symétrique définie positive. Cela implique que $P > 0$. On remarque que le fait que A soit stable sert à ce niveau. Puisque P est une matrice symétrique définie positive, on peut considérer la fonction de Lyapounov

$$V(x) = \langle P x | x \rangle$$

On a alors le calcul

$$\begin{aligned}
 \dot{V}(x) &= \langle P \dot{x} | x \rangle + \langle P x | \dot{x} \rangle \\
 &= \langle PAx + Pf(t, x) | x \rangle + \langle P x | Ax + f(t, x) \rangle \\
 &= \langle (PA + A^T P)x | x \rangle + 2\langle P x | f(t, x) \rangle
 \end{aligned} \tag{1.6}$$

En utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz, la relation de Lipschitz sur f et l'inégalité sur le produit on a

$$2\langle P x | f(t, x) \rangle \leq 2\|\gamma\| \|P x\| \leq \|P x\|^2 + \gamma^2 \|x\|^2 = \langle PPx | x \rangle + \gamma^2 \langle x | x \rangle$$

Avec cette inégalité et le calcul (1.6), on obtient

$$\begin{aligned}
 \dot{V}(x) &\leq \langle (PA + A^T P + PP + \gamma^2 I)x | x \rangle \\
 &\leq -\epsilon \|x\|^2
 \end{aligned} \tag{1.7}$$

La fonction de Lyapounov considérée est bien une fonction de Lyapounov stricte, ce qui prouve la stabilité asymptotique sur l'ouvert de considération.

Remarque 5 :

Cette démonstration prouve que le résultat est vrai même si les quantités considérées sont complexes.

1.4.1 Un algorithme pour calculer $\beta(A)$

L'algorithme de Byers [18] se programme facilement.

La proposition (1.4.1) permet de définir un algorithme par dichotomie pour calculer $\beta(A)$ pour une matrice stable.

Tout d'abord on a l'inégalité évidente.

$$0 < \beta(A) \leq \|A\|_2$$

On choisit la moitié de cet intervalle $\gamma = \|A\|_2/2$, on forme H_γ de la proposition (1.4.1) :

- Si H_γ est hyperbolique alors $\gamma < \beta(A)$
- Sinon $\beta(A) \leq \gamma$

On continue par dichotomie. Il est facile d'écrire le programme en Scilab :

1.4. ROBUSTESSE DE LA STABILITÉ

```
1 function d=beta(A,N)
2 //compute the distance of a matrix A}
3 //to the nearest unstable matrix.
4 // N is the number of iterations. By default N=10
5 //Check if A is stable
6 //vector of eigenvalues
7 Z=spec(A)
8 //check if an eigenvalue is in the right half plane
9 if or( real(Z) >= 0)
10 error('A must be a stable matrix')
11 end
12 ni=arg(2)
13 //parse input list
14 select ni
15 case 1 then N=10
16 end
17 a=0
18 b=norm(A)
19 //main loop bisection method
20 for i=1:N
21 gamma=(a+b)/2
22 //Hamiltonian
23 H=[A, eye(A); -gamma^2*eye(A), -A']
24 X=spec(H^2)
25 //test if the Hamiltonian is hyperbolic
26 nonhyp=or( imag(X)==0.*X<0)
27 if nonhyp==0
28 a=gamma
29 else
30 b=gamma
31 end
32 end
33 d=gamma
34 endfunction
```

Remarque 6 Cet algorithme ne vaut que pour β_2 . En général trouver un minimum global n'est pas facile, même pour la fonction $\frac{1}{\|G(i\omega)\|}$. L'avantage de l'algorithme de Byers est qu'il modifie cette recherche.

Remarque 7 Dans l'algorithme on recherche les valeurs propres d'une matrice Ha-

miltonienne. Les codes pour cela ne sont pas largement accessibles (ni en Scilab, ni en MATLAB). On peut se demander s'il est acceptable d'utiliser des routines standard de recherche de valeurs propres dans l'algorithme de Byers. En fait la réponse est oui, pour peu que l'on considère que les valeurs propres sont imaginaires si leur valeur réelles calculée est inférieure à une certaine tolérance.

1.5 Rappel de quelques résultats classiques utilisés précédemment

1.5.1 Sur l'équation matricielle de Lyapunov

Pro 1.5.1 :

Dans l'équation de Lyapunov

$$PA + A^T P + Q = 0 \tag{1.8}$$

- Si $Q = Q^T$ est symétrique et A stable (ou $-A$ stable) alors la solution P unique est symétrique
- Si A est stable et $Q = Q^T \geq 0$ alors l'unique solution P symétrique est semi-définie positive i.e. $P \geq 0$
- Si A est stable et $Q = C^T C$ est telle que la paire (C, A) est observable alors $P > 0$

1.5.2 Sur l'équation algébrique de Riccati

On considère une équation matricielle algébrique de Riccati (ARE)

$$A^T P + PA - PBB^T P + C^T C = 0$$

On suppose qu'il existe une solution et que cette solution est «stabilisante», i.e. que la matrice $A - BB^T P$ est stable (par stable il faut entendre, ici et par la suite, asymptotiquement stable).

On va énoncer le théorème fondamental d'existence et d'unicité pour les solutions stabilisantes.

1.5. RAPPEL DE QUELQUES RÉSULTATS CLASSIQUES UTILISÉS PRÉCÉDEMMENT

Théorème 7 :

On considère

$$PA + A^T P + PLP + Q = 0$$

où A, Q, L sont des matrices réelles, L est symétrique semi-définie positive ou semi-définie négative et Q est symétrique.

On lui associe la matrice Hamiltonienne

$$H = \begin{bmatrix} A & L \\ -Q & -A^T \end{bmatrix}$$

Une condition nécessaire et suffisante pour qu'il existe une unique solution symétrique stabilisante est

- *H est hyperbolique*
- *La paire (A, L) est stabilisable.*

1.5.3 Sur l'équation de Sylvester

Théorème 8 (solution de l'équation de Sylvester) :

L'équation de Sylvester

$$AX - XB = C \tag{1.9}$$

a une unique solution si et seulement si $Sp(A) \cap Sp(B) = \emptyset$

Ce résultat se démontre facilement

Démonstration du théorème

Soit X une matrice de taille $m \times n$, au lieu de ranger X en un tableau rectangulaire on peut créer un grand vecteur colonne en empilant les colonnes de X de la gauche vers la droite. Ce qui se traduit par

Définition 1.5.2 :

On associe à la matrice X le vecteur de \mathbb{R}^{mn} noté $vec(X)$ défini par

$$\text{vec}(X)(i + (j - 1)m) = X(i, j)$$

Remarque 8 :

Pour les heureux possesseurs de MATLAB ou SCILAB $\text{vec}(X) = X(:)$

Lemme 1.5.3 :

On a les formules

$$\text{vec}(AX) = (I_n \otimes A).\text{vec}(X)$$

$$\text{vec}(XB) = (B^T \otimes I_m).\text{vec}(X)$$

et

$$\text{vec}(AXB) = (B^T \otimes A).\text{vec}(X)$$

Avec ces outils on a les équivalences

$$AX - XB = C$$

$$\text{vec}(AX) - \text{vec}(XB) = \text{vec}(C)$$

$$[I_n \otimes A - B^T \otimes I_m].\text{vec}(X) = C$$

Il suffit de constater que l'opération $\text{vec}(\)$ est linéaire, puis d'appliquer les formules précédentes. Cela ramène l'équation de Sylvester (1.9) à un système linéaire. On constate que c'est une équation linéaire sur \mathbb{R}^{mn} .

Les valeurs propres de $[I_n \otimes A - B^T \otimes I_m]$ sont $(\lambda_i - \mu_j)$ où λ_i et μ_j décrivent respectivement les spectres de A et B^T (on a utilisé le fait bien connu $Sp(B) = Sp(B^T)$). La valeur 0 ne sera pas dans le spectre de $[I_n \otimes A - B^T \otimes I_m]$ si et seulement si $Sp(A) \cap Sp(B) = \emptyset$. Ce qui démontre le théorème sur l'équation de Sylvester.

1.6 Distance à l'instabilité pour les matrice de Metzler stables

Les matrices de Metzler sont associées aux systèmes dynamique positifs, i.e., qui laissent invariant l'orthant positif.

En fait on montre qu'un système épidémiologique déterministe en dimension finie peut s'écrire [80]

$$\dot{x} = A(x)x + F(x)$$

Si ce système admet un DFE et sous certaines conditions génériques alors la Jacobienne, calculée au DFE est une matrice de Metzler [80, 127]. On voit que pour notre problème il est nécessaire de considérer la distance à l'instabilité pour les matrices de Metzler stables.

Ce que Van Loan a noté $\beta(A)$ est dénommé rayon de stabilité par Hinrichsen et Pritchard. On peut définir un rayon de stabilité pour différents types de perturbations : complexes, réelles, réelles positives.

De manière générale on a

$$r_{\mathbb{C}}(A) \leq r_{\mathbb{R}}(A) \leq r_{\mathbb{R}_+}(A)$$

Dans la référence [113], Hinrichsen et Son proposent le théorème suivant

Théorème 9 ([113]) *Si on considère une matrice de Metzler stable alors la distance à l'instabilité, calculée pour une norme matricielle, subordonnée à une norme monotone sur \mathbb{R}^n , est donnée par*

$$r_{\mathbb{C}}(A) = r_{\mathbb{R}}(A) = r_{\mathbb{R}_+}(A) = \frac{1}{\|A^{-1}\|}$$

Malheureusement, une lecture attentive de la démonstration proposée montre que ce théorème est démontré seulement pour la norme subordonnée à la norme euclidienne.

Nous allons donner une preuve de ce résultat afin de montrer où les auteurs de [113] sont incorrects. De manière rapide et avant de rentrer dans les détails, dans [113] on utilise et on fait référence à des résultats de [57, 58], où il est clairement indiqué, dans ces références, que la norme matricielle considérée est la norme euclidienne. A partir du livre [62] de Hinrichsen et Pritchard on peut montrer ce théorème (exemple 5.3.22 page 301). Mais la démonstration nécessite de consulter le livre entier, ce qui en fait une preuve compliquée. Nous allons donner une preuve élémentaire.

Si l'on considère le pseudo-spectre d'une matrice, il est clair que si A est une matrice stable alors

$$r_{\mathbb{C}}(A) = \min\{ \varepsilon \mid \sigma_{\varepsilon}(A) \cap i\mathbb{R} \neq \emptyset \}$$

Tout d'abord donnons un premier résultat sur le pseudospectre [124, 129]. On note $\sigma(A)$ le spectre d'une matrice.

Théorème 10

On considère une norme matricielle subordonnée $\| \cdot \|$

Les définitions suivantes du pseudospectre sont équivalentes

1.

$$\sigma_{\varepsilon}(A) = \left\{ s \in \mathbb{C} \mid \frac{1}{\|(sI - A)^{-1}\|} \leq \varepsilon \right\}$$

2.

$$\sigma_{\varepsilon}(A) = \{ s \in \mathbb{C} \mid \exists \Delta, \|\Delta\| \leq \varepsilon \quad s \in \sigma(A + \Delta) \}$$

3.

$$\sigma_{\varepsilon}(A) = \{ s \in \mathbb{C} \mid \exists u \in \mathbb{C}^n \quad \|u\| = 1 \quad \|(sI - A)u\| \leq \varepsilon \}$$

Si $\|(sI - A)u\| \leq \varepsilon$ et $\|u\| = 1$ on dit que s est une ε -pseudovaleur propre et u un ε -pseudo-vecteur propre.

1.6. DISTANCE À L'INSTABILITÉ POUR LES MATRICE DE METZLER STABLES

Par convention on note $\|(sI - A)^{-1}\| = \infty$ si $s \in \sigma(A)$. Avec cette convention $\sigma_0 = \sigma(A)$ et les trois définitions coïncident. Il suffit de montrer le théorème pour $\varepsilon > 0$.

preuve 3 1 \Rightarrow 3

Il existe u (non vecteur propre de A) avec $\|u\| = 1$ et

$$\|(sI - A)^{-1} u\| = \|(sI - A)^{-1}\| \geq \frac{1}{\varepsilon}$$

Si on pose $v = (sI - A)^{-1} u$ alors

$$\frac{\|(sI - A)v\|}{\|v\|} = \frac{1}{\|v\|} \leq \varepsilon$$

On a bien 3 avec $\frac{v}{\|v\|}$ qui est un ε -pseudo-vecteur propre pour A .

3 \Rightarrow 2

Soit u avec $\|u\| = 1$ et tel que $\|(sI - A)u\| \leq \varepsilon$. Posons $v = (sI - A)u$ et

$$w = \frac{u}{\|u\|_2^2}$$

où $\|\cdot\|_2$ est la norme hermitienne (respectivement euclidienne) de \mathbf{C}^n (respectivement de \mathbf{R}^n).

On a $\|v\| \leq \varepsilon$, $\langle u|w \rangle = 1$, $\|w\|_2^2 = \frac{1}{\|u\|_2^2}$, $\|w\| = \frac{1}{\|u\|_2}$ et $su = Au - v$, d'où

$$su = Au - \langle w|u \rangle v = Au - w^* u v = Au - v w^* u = (A - v w^*)u$$

Soit $s \in \sigma((A - v w^*))$.

Il reste à évaluer la norme de la matrice $v w^*$

$$\|v w^*\| = \max_{z \neq 0} \frac{|v w^* z|}{\|z\|} = \max_{z \neq 0} \frac{|\langle w|z \rangle| \|v\|}{\|z\|} = \|v\| \frac{|\langle w|w \rangle|}{\|w\|} = \frac{\|v\|_2^2}{\|w\|} \|v\| \leq \varepsilon$$

2 \Rightarrow 1

Soit u , $\|u\| = 1$ un vecteur propre de $A + \Delta A$. Soit $su = (A + \Delta A)u$, ou encore $(sI - A)u = \Delta A u$. Posons $v = (sI - A)u$. Alors $\|v\| = \|\Delta A u\| \leq \|\Delta A\| \|u\| \leq \varepsilon$.

Maintenant

$$1 = \|u\| = \|(sI - A)^{-1} v\| \leq \|(sI - A)^{-1}\| \|v\| \leq \|(sI - A)^{-1}\| \varepsilon$$

et finalement

$$\frac{1}{\|(sI - A)^{-1}\|} \leq \varepsilon$$

Remarque 9

La démonstration de **3 \Rightarrow 2** est complètement inspirée de la démonstration de Gastinel (2). Elle utilise la norme duale. En effet on pourrait utiliser le théorème de Hahn-Banach pour justifier le fait qu'il existe une forme linéaire continue valant 1 en u , de norme 1 et se prolongeant sur \mathbb{K}^n . Par le théorème de Hilbert, cette forme linéaire s'écrit $\langle w | \bullet \rangle$, et sa norme est précisément la norme duale de w , notée $\|w^*\|^D$. On a vu que $\|w^*\|^D = 1$. Dans le cas de dimension finie ce résultat s'établit simplement sans recours au théorème de Hahn-Banach, ni au théorème de Hilbert.

On peut maintenant montrer le théorème suivant

Théorème 11

On considère une norme matricielle subordonnée $\|\cdot\|$ sur \mathbb{R}^n ou \mathbb{C}^n . Soit une matrice A Hurwitz (asymptotiquement stable, que l'on raccourcira en stable). On désigne par \mathcal{I} le complémentaire des matrices Hurwitz. L'ensemble \mathcal{I} est la fermeture de l'ensemble des matrices instables.

Alors le rayon de stabilité $r_{\mathbb{C}}(A)$ de la matrice est défini par

$$r_{\mathbb{C}}(A) = \min_{A+\Delta \in \mathcal{I}} \|\Delta\|.$$

1.6. DISTANCE À L'INSTABILITÉ POUR LES MATRICES DE METZLER STABLES

On a la propriété

$$r_{\mathbf{C}}(A) = \min_{\omega \in \mathbb{R}} \frac{1}{\| (i\omega I - A)^{-1} \|}.$$

Remarque 10

Ce théorème contient celui de van Loan.

preuve 4 Comme A est une matrice stable, il existe une matrice Δ de norme minimale telle que $A + \Delta A$ appartienne à la frontière de \mathcal{I} . Par conséquent le module de stabilité de $A + \Delta A$ est nul. La matrice $A + \Delta A$ admet une valeur propre imaginaire $i\omega$. La matrice $A + \Delta A - i\omega I$ est donc singulière. La perturbation ΔA rend singulière la matrice $i\omega I - A$. Ce qui par le théorème (2) entraîne

$$\min_{\omega \in \mathbb{R}} \frac{1}{\| (i\omega I - A)^{-1} \|} \leq \frac{1}{\| (i\omega I - A)^{-1} \|} \leq \| \Delta \| = r_{\mathbf{C}}(A)$$

On a montré

$$\min_{\omega \in \mathbb{R}} \frac{1}{\| (i\omega I - A)^{-1} \|} \leq r_{\mathbf{C}}(A)$$

Réciproquement considérons la quantité

$$\frac{1}{\|G(i\omega)\|} = \frac{1}{\| (i\omega I - A)^{-1} \|}$$

Nous affirmons que cette fonction tend vers l'infini quand ω tend vers $\pm\infty$.

En effet on a $(i\omega I - A) = i\omega(I - \frac{1}{i\omega}A)$. Pour ω suffisamment grand, on aura $\| \frac{1}{i\omega}A \| < 1$. D'où de manière classique

$$\| (i\omega I - A)^{-1} \| = \frac{1}{|\omega|} \| (I - \frac{1}{i\omega}A)^{-1} \| \leq \frac{1}{|\omega|} \frac{1}{\left(1 - \frac{1}{|\omega|} \|A\|\right)} = \frac{1}{(|\omega| - \|A\|)}$$

Ce qui montre que $\| (i\omega I - A)^{-1} \|$ tend vers 0 quand $\omega \rightarrow \pm\infty$ et prouve notre affirmation.

Comme de plus $\frac{1}{\|G(i\omega)\|}$ est continue en ω elle atteint donc son minimum sur \mathbb{R} .
On peut donc légitimement écrire qu'il existe ω_0 tel que

$$\frac{1}{\|G(i\omega_0)\|} = \min_{\omega} \frac{1}{\|(i\omega I - A)^{-1}\|}$$

Ce qui, par le théorème de Gastinel théorème (2), entraîne que la distance à la singularité de la matrice $(A - i\omega_0 I)$ est atteinte en une matrice de perturbation ΔA . La matrice $A - i\omega_0 I + \Delta A$ est singulière et donc $\alpha(A + \Delta A) = 0$. D'où par définition de $r_{\mathbb{C}}$

$$r_{\mathbb{C}}(A) \leq \|\Delta A\| = \min_{\omega} \frac{1}{\|(i\omega I - A)^{-1}\|}$$

On note \mathbb{K} un des deux corps de base \mathbb{R} ou \mathbb{C} .

Nous avons besoin de la définition suivante

Définition 1.6.1 (Norme absolue) [68]

Si $x \in \mathbb{K}^n$, on définit le vecteur $|x| = [|x_i|]$. Une norme vectorielle sur \mathbb{K}^n est dite

Monotone Si $|x| \leq |y|$ entraîne $\|x\| \leq \|y\|$ pour tout (x, y) .

Absolue Si $\|x\| = \||x|\|$ pour tout $x \in \mathbb{K}^n$

On a le théorème bien connu ([68] 5.5.10)

Théorème 12

Une norme sur \mathbb{K}^n est monotone si et seulement si elle est absolue.

Nous pouvons maintenant donner une preuve simple de l'affirmation de Son et Hinrichsen [113].

Théorème 13

On considère une norme absolue sur \mathbb{K}^n . Soit A une matrice de Metzler Hurwitz. Pour la norme matricielle subordonnée on a

1.6. DISTANCE À L'INSTABILITÉ POUR LES MATRICE DE METZLER STABLES

$$r_{\mathbb{C}}(A) = r_{\mathbb{R}}(A) = r_{\mathbb{R}^+}(A) = \frac{1}{\|A^{-1}\|}$$

preuve 5 Soit A une matrice de Metzler stable. Alors la matrice complexe $A - \lambda I$ est encore stable si $\Re(\lambda) > \alpha(A)$. En effet $\alpha(A - \lambda I) = \alpha(A) - \Re(\lambda)$.

La matrice $A - \Re(\lambda)I$ est encore une matrice de Metzler stable si $\Re(\lambda) > \alpha(A)$. On rappelle que, si une matrice de Metzler A est stable, alors l'opposé de son inverse est positive $-A^{-1} \geq 0$.

Il est alors facile de voir, dans ce cas, que

$$-(A - \lambda I)^{-1} = \int_0^{+\infty} e^{t(A - \lambda I)} dt$$

Par conséquent

$$\begin{aligned} \left| \langle -(A - \lambda I)^{-1} e_i | e_j \rangle \right| &= \left| \left\langle \left(\int_0^{+\infty} e^{t(A - \lambda I)} dt \right) e_i | e_j \right\rangle \right| \\ &\leq \left\langle \left(\int_0^{+\infty} |e^{t(A - \lambda I)}| dt \right) e_i | e_j \right\rangle \\ &= \left\langle \left(\int_0^{+\infty} e^{t(A - \Re(\lambda)I)} dt \right) e_i | e_j \right\rangle \\ &= \langle -(A - \Re(\lambda)I)^{-1} e_i | e_j \rangle \end{aligned}$$

En d'autres termes

$$\left| -(A - \lambda I)^{-1} \right| \leq -(A - \Re(\lambda)I)^{-1}$$

Par conséquent

$$|G(i\omega)| \leq -A^{-1} = G(0)$$

Pour une norme absolue

$$\|G(i\omega)\| \leq G(0) = \|A^{-1}\| = \max_{\omega \in \mathbb{R}} \|G(i\omega)\|$$

Ceci montre

$$r_{\mathbb{C}} = \frac{1}{\|A^{-1}\|}$$

On va reprendre la démonstration faite dans le théorème (2) de Gastinel pour montrer que la perturbation déstabilisante peut être accomplie par une matrice de rang 1. La matrice est donnée par

$$\Delta A = -\|A^{-1}\| x y^T$$

où x est un vecteur de norme 1 tel que $\|Ax\| = 1$. Il est donc réel, puisque A est une matrice réelle. Le vecteur y est donné par

$$y = \frac{\|A^{-1}x\|}{\|A^{-1}x\|_2^2} A^{-1}x$$

C'est encore un vecteur réel. Par conséquent ΔA est réelle. On a vu que $A + \Delta A$ est singulière et que $\Delta A = \|A^{-1}\|^{-1}$. Ceci prouve que

$$r_{\mathbb{R}}(A) \leq \|\Delta A\| = r_{\mathbb{C}}(A)$$

Il existe donc une matrice réelle ΔA de rang 1, déstabilisante. Autrement dit $\alpha(A + \Delta A) = 0$

Soit $\lambda \in \sigma(A + \Delta A)$ et v un vecteur propre correspondant. Soit a un réel positif tel que $aI + A \geq 0$.

$$(\Re(\lambda) + a) |v| \leq |(\lambda + a)v| \leq \|[(A + aI) + \Delta A] v\| \leq (A + aI + |\Delta|) |v|$$

Soit $\Re(\lambda) |v| \leq (A + |\Delta|) |v|$. La matrice $A + |\Delta|$ est une matrice de Metzler, $|v| \geq 0$, il est bien connu (voir l'appendice sur les matrices de Metzler, référence) que cela implique $\alpha(A + |\Delta|) \geq \Re(\lambda)$.

1.7. QUELQUES CONSIDÉRATIONS

On a donc $\alpha(A + |\Delta|) \geq \alpha(A + \Delta) = 0$.

On en déduit que $\alpha(A + |\Delta A|) \geq 0$. La matrice positive est déstabilisante. Il faut calculer la norme de $\|\|\Delta A\|\|$. Mais il existe des vecteurs réels tel que

$$\Delta A = u v^T \quad |\Delta A| = |u| |v|^T$$

On a $\|\Delta A\| = \|u\| \frac{\|v\|_2^2}{\|v\|}$ et $\|\|\Delta A\|\| = \|\|u\|\| \frac{\|\|v\|\|_2^2}{\|\|v\|\|}$. La norme étant absolue, ainsi que la norme euclidienne on a $\|\Delta\| = \|\|\Delta\|\|$. La matrice $|\Delta A|$ est une matrice positive déstabilisante et sa norme vaut $r_{\mathbb{C}}(A)$.

On en déduit $r_{\mathbb{R}^+}(A) \leq r_{\mathbb{C}}(A)$. Ceci termine la démonstration.

Remarque 11 Ce théorème ne dit rien sur des normes matricielles quelconques. On donnera un exemple avec la norme de Frobenius où l'on verra que ce n'est plus vrai.

1.7 Quelques considérations

Pour l'analyse de la robustesse on a donné des résultats pour des normes matricielles. Pour le calcul explicite de la distance d'une matrice stable on dispose d'un algorithme fiable pour la norme subordonnée à la norme euclidienne. Cela vaut aussi pour la norme de Frobenius

Si la matrice est Metzler stable c'est encore plus simple. Tous les logiciels de calculs numériques fournissant la norme d'une matrice pour les normes 1, 2 et ∞ . Quand la matrice est Metzler instable on ne sait rien dire. Il s'agit d'un problème d'optimisation sous contraintes. Il n'existe pas d'algorithme connu et l'on ne dispose pas d'une formule à la van Loan (5). En dimension 2 nous avons choisi la norme de Frobenius, qui a l'avantage d'être simple à calculer. Elle est en outre convexe et différentiable, ce qui permet de recourir aux technique des multiplicateurs de Lagrange et d'obtenir dans certains cas des formules explicites. Toutes les normes sont équivalentes mais il faut obtenir une estimation et la norme de Frobenius d'usage courant en analyse numérique linéaire est un bon candidat.

Chapitre 2

Robustesse et Nombre de Reproduction de Base \mathcal{R}_0

2.1 Introduction

L'abondante littérature consacrée au nombre de reproduction de base \mathcal{R}_0 témoigne de son importance comme concept clé dans l'étude des systèmes dynamiques en épidémiologie mathématique, en écologie, et en démographie . [27, 28, 47, 48, 73, 104, 114]

Il est bien connu en épidémiologie mathématique que le nombre de reproduction de base \mathcal{R}_0 est une valeur seuil, qui après introduction d'une maladie infectieuse dans une population, renseigne sur la possible extinction ($\mathcal{R}_0 < 1$), ou expansion ($\mathcal{R}_0 > 1$), de l'infection dans la population donnée.

Certains auteurs prêtent à \mathcal{R}_0 d'être aussi une mesure d'évaluation d'effort à fournir pour éteindre une épidémie ; en d'autres termes le coût de l'effort à fournir pour faire basculer un système endémique $\mathcal{R}_0 > 1$ en un système localement non endémique.

Cette qualité allouée à \mathcal{R}_0 peut être discutée à partir du moment où la notion d'effort devrait être associée à une fonction coût.

Cependant, la distance euclidienne entre les paramètres de deux systèmes, en choisissant un ou des paramètres de contrôle, peut être prise comme une fonction coût particulière.

Il en ressort que le calcul de la distance entre le Jacobien d'un système pris au (DFE) à la stabilité (respectivement l'instabilité) devient un outil pour tester la robustesse de \mathcal{R}_0 .

On devrait toujours avoir les mêmes conclusions sur le comportement du système après calcul du \mathcal{R}_0 et de la distance du Jacobien du système à la stabilité (instabilité), pour garantir la robustesse de \mathcal{R}_0 . Malheureusement ce n'est pas toujours le cas.

En clair on va montrer que la distance de \mathcal{R}_0 à 1 qui est bien un indicateur de la stabilité du Disease Free Equilibrium (DFE), (équilibre sans maladie) n'est pas robuste.

Pour illustrer nos propos nous allons nous servir de deux modèles épidémiologiques ; après nous être donné des paramètres arbitraires, nous calculons le \mathcal{R}_0 correspondant et la distance du Jacobien du modèle à la stabilité (respectivement à l'instabilité) selon que le nombre de reproduction de base est supérieur ou inférieur à 1.

2.2 Notations et définitions

Afin de mieux appréhender tout ce qui se dira dans ce chapitre, nous donnons dans cette section quelques définitions et résultats nécessaires sur les matrices de Metzler,

Définition 2.2.1 (Matrice de Metzler) *Une matrice de Metzler A est une matrice telle que, $A(i, j) \geq 0$ pour tout indices $i \neq j$ [6, 74, 95]. Ces matrices sont aussi dites quasi-positives [111].*

les matrices de Metzler sont les opposées des \mathcal{Z} -matrices [6, 127]. Dans la suite du document nous utiliserons les matrices de Metzler puisqu'elles apparaissent de manière naturelle dans les modèles compartimentaux.

Définition 2.2.2 (Rayon spectral, Module de stabilité) *Nous notons $\rho(A)$ le rayon spectral de la matrice A , lequel est défini si, $Sp(A)$ représente le spectre de*

A , par

$$\rho(A) = \max\{|\lambda| \mid \lambda \in Sp(A)\}$$

et $\alpha(A)$ le module de stabilité

$$\alpha(A) = \max\{\Re \lambda \mid \lambda \in Sp(A)\}$$

Où $\Re \lambda$ denote la partie réelle de λ .

la matrice A est stable ou encore Hurwitz si, $\alpha(A) < 0$.

Définition 2.2.3 (décomposition régulière) Soit une matrice de Metzler A .

On appelle décomposition régulière A

toute décomposition de A de la forme $A = F + V$ où $F \geq 0$ et V est une matrice de Metzler-Hurwitz .

Lemme 2.2.4 (Varga,1962, theo 3.13, [134]) Soit une matrice de Metzler A inversible. Pour toute décomposition régulière de A de la forme $A = F + V$, les deux assertions suivantes sont équivalentes :

A est une matrice de Metzler stable; i. e

$$\alpha(A) < 0.$$

$$\rho(-FV^{-1}) < 1$$

2.3 Calcul de \mathcal{R}_0 : Méthode de van den Driessche et Watmough

Dans cette technique de calcul , \mathcal{R}_0 est définie comme le rayon spectral de « l'opérateur de la prochaine génération ». La détermination de l'opérateur implique la répartition en deux compartiments; le compartiment des infectés (latents , infectieux...) et le compartiment des individus non infectés.

Cette technique a été élaborée d'abord par Diekmann et Heesterbeek dans [29] et puis reprise par Van den Driessche et Watmough dans [127] pour les systèmes en

2.3. CALCUL DE \mathcal{R}_0 : MÉTHODE DE VAN DEN DRIESSCHE ET WATMOUGH

dimension finie.

On considère un modèle épidémiologique comportant n classes ou compartiments homogènes. Le vecteur x représente l'état du système et x_j est le nombre (ou la concentration) d'individus dans le compartiment j . Les compartiments sont ordonnés de tel sorte que les derniers sont des infectés (latents, infectieux...). Les k premiers compartiments sont les individus libres de l'infection (Susceptibles...).

Soit le vecteur $x = x_j$, $j = 1, \dots, n$, où x_j est le nombre (ou concentration) des individus dans le compartiment j .

Soit $\mathcal{F}_j(x)$ la vitesse d'apparition des infectieux dans le compartiment j . On note par \mathcal{V}_j^+ la vitesse de transfert des individus dans le compartiment j par tout autre moyen et \mathcal{V}_j^- la vitesse de transfert hors du compartiment j . La dynamique définie dans ce compartiment est :

$$\dot{x}_j = \mathcal{F}_j(x) + \mathcal{V}_j^+(x) - \mathcal{V}_j^-(x)$$

On suppose que les fonctions sont au moins C^1 . Si on pose $\mathcal{V}_j(x) = \mathcal{V}_j^+(x) - \mathcal{V}_j^-(x)$ le système précédent devient

$$\dot{x}_j = \mathcal{F}_j(x) + \mathcal{V}_j(x)$$

Un état du système x_0 est sans maladie, si les compartiments des « infectés » sont vides. C'est le « Disease Free Equilibrium »(DFE), c'est à dire pour $j > k$, $(x_0)_j = 0$. Pour des raisons biologiques on a les propriétés suivantes :

1. $x \geq 0$, $\mathcal{F}_j(x) \geq 0$, $\mathcal{V}_j^+(x) \geq 0$, $\mathcal{V}_j^-(x) \geq 0$ car les flots de matières sont des quantités positives.
Si un compartiment est vide, alors il n'y a pas de transfert d'individus hors du compartiment par la mort, l'infection ou soit par tout autre moyen. Ainsi,
2. si $x_j = 0$ alors $\mathcal{V}_j^- = 0$. En particulier si l'on pose $X_s = \{x \geq 0; x_j = 0, i = 1, \dots, n\}$ et si $x \in X_s$ alors $\mathcal{V}_j^- = 0$. En d'autres termes il ne peut rien sortir d'un compartiment vide.
3. Si $j \leq k$ alors $\mathcal{F}_j(x) = 0$. Cela signifie par définition qu'il ne peut rentrer des infectés dans les compartiments non infectés.

4. Si x_0 est un état sans maladie alors $\mathcal{F}_j(x_0) = 0$ et pour $j > k$, $\mathcal{V}_j^+(x_0) = 0$.
 Quand il n'y a aucun infecté, il ne peut y avoir de maladie, donc on reste sans infection.

Nous allons maintenant essayer de définir le nombre moyen de ré-infections produites par un individu typique infecté dans un voisinage du DFE.

Considérons la dynamique du système linéarisé au voisinage du point d'équilibre sans maladie, avec une infection bloquée

$$\dot{x} = D\mathcal{V}(x_0)(x - x_0) = D\mathcal{V}^+(x_0)(x - x_0) - D\mathcal{V}^-(x_0)(x - x_0).$$

Le résultat suivant précise la structure du système linéarisé $DX(x_0)$ au voisinage de l'équilibre sans maladie x_0 .

Lemme 2.3.1 *Si x_0 est un DFE, alors les matrices $D\mathcal{F}(x_0)$ et $D\mathcal{V}(x_0)$ se décomposent en blocs*

$$D\mathcal{F}(x_0) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & F \end{bmatrix}$$

$$D\mathcal{V}(x_0) = \begin{bmatrix} J_1 & J_2 \\ 0 & V \end{bmatrix}$$

$F \geq 0$ et V est une matrice de Metzler stable.

La preuve détaillée ce lemme se trouve dans [127].

La matrice $-FV^{-1}$ est appelée la « **matrice de seconde génération** » (en Anglais « **next generation matrix** »).

Définition 2.3.1 ([29]) *Le nombre de reproduction de base \mathcal{R}_0 est le rayon spectral de la matrice de seconde génération : à savoir*

$$\mathcal{R}_0 = \rho(-FV^{-1})$$

L'interprétation suivante est donnée à la matrice $-FV^{-1}$:

Considérons un individu infecté introduit dans un compartiment $k > m$ d'une population sans maladie. L'entrée (i, k) de la matrice $-V^{-1}$ est le temps moyen que

l'individu passera dans le compartiment i au cours de sa vie, en supposant que l'on a bloqué la ré-infection. L'entrée (j, i) de la matrice F est la vitesse à laquelle un infecté dans le compartiment i produit des infections dans le compartiment j . Ainsi l'entrée (j, k) de $-FV^{-1}$ est le nombre espéré de nouvelles infections dans le compartiment j produit par un individu infecté introduit originellement dans le compartiment k . Le rayon spectral de la matrice $-FV^{-1}$ est le nombre de reproduction de base. C'est à dire $\mathcal{R}_0 = \rho(-FV^{-1})$.

2.4 Une classe de modèles tests et leurs propriétés

Nous prenons pour exemples deux modèles épidémiologiques à susceptibilité et infectivité différentielles (DIDS : Differential Susceptibility and Differential infectivity epidemic model”); nous les appellerons dans la suite du document (DIDS1) pour le premier, et (DIDS2) pour le deuxième exemple. De tels modèles ont été étudiés par Bonzi et al [14, 71]. Le terme infectivité différentielle a été introduit par Hyman et al en 1999 [72], par Jacquez et al, circa 1990s ; Quant au terme susceptibilité différentielle, il a été introduit en 2006 dans [71] par Hyman.

Pour bon nombre de maladies transmissibles, les facteurs d'infectivité et de susceptibilité sont couplés .

Hyman et al [71] calculent le nombre de reproduction de base \mathcal{R}_0 et prouvent d'une part la globale stabilité du DFE quand $\mathcal{R}_0 < 1$, pour le cas des incidences bilinéaires et d'autre part l'existence d'un unique équilibre endémique lorsque $\mathcal{R}_0 > 1$.

Bonzi et al [14] prouvent les mêmes résultats pour un modèle DIDS plus général. Cependant pour tous ces modèles la matrice de transmission Whom Acquire Infection From Whom(WAIFW) (qui acquiert l'infection de qui?) est de rang 1, et la stabilité de l'équilibre endémique est à chaque fois donnée par conjecture (Hyman et al [72]), ou prouvée pour un cas spécial par Bonzi et al [14].

Dans ce document nous prouvons entre autre que si $\mathcal{R}_0 \leq 1$, alors le DFE est globalement asymptotiquement stable sur l'orthant positif $\mathbb{R}_+^4 \setminus \mathbb{R}_+^2 \times \{(0, 0)\}$.

Dans les deux modèles nous avons deux types d'individus : les susceptibles S_i divisés en deux classes, et les infectieux I_i eux aussi divisés en deux classes. Les deux classes des susceptibles peuvent être des non vaccinés et des vaccinés car généralement l'immunité acquise grâce à un vaccin n'est presque jamais parfaite. Les classes peuvent aussi être différenciées par le sexe des individus.

Le modèle (DIDS1) est gouverné par le système d'équation différentielle 2.1, et s'illustre par le schéma compartimental (2.1)

2.4.1 Modèle DIDS1 et propriétés

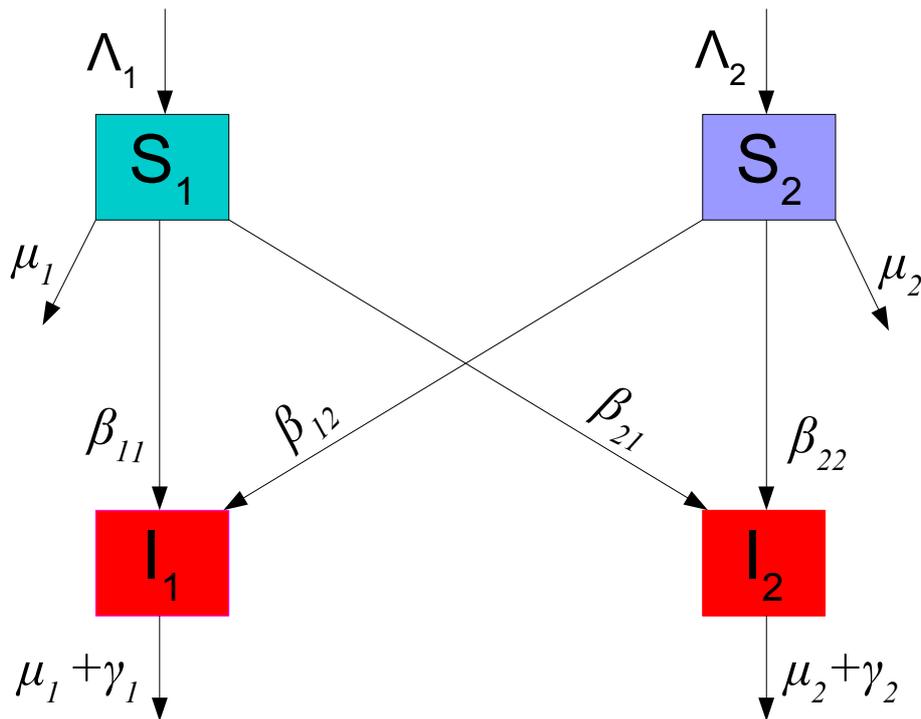


FIGURE 2.1 – S_1, S_2 représentent les classes de susceptibles et I_1, I_2 représentent les classes des infectieux.

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{S}_1 = \Lambda_1 - \mu_1 S_1 - \beta_{11} S_1 I_1 - \beta_{12} S_1 I_2 + \gamma_1 I_1 \\ \dot{S}_2 = \Lambda_2 - \mu_2 S_2 - \beta_{21} S_2 I_1 - \beta_{22} S_2 I_2 + \gamma_2 I_2 \\ \dot{I}_1 = \beta_{11} S_1 I_1 + \beta_{12} S_1 I_2 - (\mu_1 + \gamma_1) I_1 \\ \dot{I}_2 = \beta_{21} S_2 I_1 + \beta_{22} S_2 I_2 - ((\mu_2 + \gamma_2) I_2 \end{array} \right. \quad (2.1)$$

Où

- 1 \dot{S}_i est la classe des susceptibles i
- 2 \dot{I}_i est la classes des infectieux i
- 3 Λ_i dénote le taux de recrutement des susceptibles i
- 4 μ_i le taux de mortalité des susceptibles i
- 5 β_{ij} est la force avec laquelle les infectieux i infectent les susceptibles j
- 6 γ_i représente la taux de guérison des infectieux i .

Et la matrice

$$B = \begin{bmatrix} \beta_{11} & \beta_{12} \\ \beta_{21} & \beta_{22} \end{bmatrix}$$

résume les transmissions et est appelée who acquires infection from whom (*WAIFW*) (qui acquière l'infection de qui)

Le calcul du \mathcal{R}_0 pour ce modèle est donné par Brauer et al [17].

Pro 2.4.1 *Si $\mathcal{R}_0 \leq 1$ alors le DFE est globalement asymptotiquement stable, et si $\mathcal{R}_0 > 1$, alors il existe un unique équilibre endémique qui est globalement asymptotiquement stable sur $\mathbb{R}^4 \setminus \mathcal{D}_0$, ou $\mathcal{D}_0 = \mathbb{R}_+^2 \times \{(0, 0)\}$*

Preuve

Posons, $N_1 = S_1 + I_1$ et $N_2 = S_2 + I_2$, nous réécrivons le système 2.1 et obtenons le système suivant :

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{N}_1 = \Lambda_1 - \mu_1 N_1 \\ \dot{N}_2 = \Lambda_2 - \mu_2 N_2 \\ \dot{I}_1 = \beta_{11}(N_1 - I_1)I_1 + \beta_{12}(N_1 - I_1)I_2 - (\mu_1 + \gamma_1)I_1 \\ \dot{I}_2 = \beta_{21}(N_2 - I_2)I_1 + \beta_{22}(N_2 - I_2)I_2 - (\mu_2 + \gamma_2)I_2 \end{array} \right. \quad (2.2)$$

Pro 2.4.2 *l'ensemble compact*

$$K = \left[0, \frac{\Lambda_1}{\mu_1}\right] \times \left[0, \frac{\Lambda_2}{\mu_2}\right] \times \left[0, \frac{\Lambda_1}{\mu_1}\right] \times \left[0, \frac{\Lambda_2}{\mu_2}\right]$$

est positivement invariant et absorbant.

Preuve

Pour cela nous allons nous servir du théorème de la barrière , sur la frontière ; A la frontière de K nous avons les implications suivantes.

$$N_1 = 0 \Rightarrow \dot{N}_1 > 0$$

$$N_2 = 0 \Rightarrow \dot{N}_2 > 0$$

$$I_1 = 0 \Rightarrow \dot{I}_1 = \beta_{12}N_1I_2 \geq 0$$

$$I_2 = 0 \Rightarrow \dot{I}_2 = \beta_{21}N_2I_1 \geq 0$$

$$N_1 = \frac{\Lambda_1}{\mu_1} \Rightarrow \dot{N}_1 = 0$$

$$N_2 = \frac{\Lambda_2}{\mu_2} \Rightarrow \dot{N}_2 = 0$$

$$I_1 = \frac{\Lambda_1}{\mu_1} \Rightarrow \dot{I}_1 \leq 0$$

car $\beta_{11}(N_1 - I_1)I_1 \leq 0$ et $\beta_{12}(N_1 - I_1)I_2 \leq 0$ comme dans K , $N_1 \leq \frac{\Lambda_1}{\mu_1}$.

$$I_2 = \frac{\Lambda_2}{\mu_2} \Rightarrow \dot{I}_2 \leq 0$$

car $\beta_{21}(N_2 - I_2)I_1 \leq 0$ et $\beta_{22}(N_2 - I_2)I_2 \leq 0$ comme dans K , $N_2 \leq \frac{\Lambda_2}{\mu_2}$.

Les implications précédentes prouvent que

$$N_1, N_2, I_1, I_2$$

décroissent dans le temps et finissent par entrer respectivement dans les ensembles.

$$N_1 \leq \frac{\Lambda_1}{\mu_1}, N_2 \leq \frac{\Lambda_2}{\mu_2}, I_1 \leq \frac{\Lambda_1}{\mu_1}, I_2(t) \leq \frac{\Lambda_2}{\mu_2}.$$

et y demeurent. Ceci prouve que est K un ensemble compact absorbant et positivement invariant.

Théorème 14 (Vidyasagar [135], theorem 3.1) *Soit le système C^1 , suivant défini sur $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$*

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{x} = f(x) \\ \dot{y} = g(x, y) \\ \text{avec un point d'équilibre, } (x^*, y^*), \text{ i.e.,} \\ f(x^*) = 0 \text{ et } g(x^*, y^*) = 0 \end{array} \right. \quad (2.3)$$

Si x^ est globalement asymptotiquement stable (GAS) dans \mathbb{R}^n pour le système $\dot{x} = f(x)$, et si y^* est (GAS) dans \mathbb{R}^m , pour le système $\dot{y} = g(x^*, y)$, alors (x^*, y^*) est localement asymptotiquement stable pour (2.3).*

En outre si toutes les trajectoires de (2.3) sont bornées, alors (x^, y^*) est (GAS) pour (2.3)*

Muni de ce théorème, il est suffisant d'étudier le système 2.2 sur

$$K_1 = [0, \bar{N}_1] \times [0, \bar{N}_2] \text{ où } \bar{N}_1 = \frac{\Lambda_1}{\mu_1}, \text{ et } \bar{N}_2 = \frac{\Lambda_2}{\mu_2}$$

Il se réduit au système suivant :

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{I}_1 = \beta_{11} (\bar{N}_1 - I_1) I_1 + \beta_{12} (\bar{N}_1 - I_1) I_2 - (\mu_1 + \gamma_1) I_1 \\ \dot{I}_2 = \beta_{21} (\bar{N}_2 - I_2) I_1 + \beta_{22} (\bar{N}_2 - I_2) I_2 - ((\mu_2 + \gamma_2) I_2 \end{array} \right. \quad (2.4)$$

Par un changement de coordonnées, $(x = \frac{I_1}{\bar{N}_1}, y = \frac{I_2}{\bar{N}_2})$ le système (2.4) est équivalent au système sur $[0, 1] \times [0, 1]$ suivant

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{x} = \beta_{11} (1 - x) x + \beta_{12} (1 - x) y - (\mu_1 + \gamma_1) x \\ \dot{y} = \beta_{21} (1 - y) x + \beta_{22} (1 - y) y - (\mu_2 + \gamma_2) y \end{array} \right. \quad (2.5)$$

2.4. UNE CLASSE DE MODÈLES TESTS ET LEURS PROPRIÉTÉS

Les β_{ij} sont modifiées pour satisfaire au nouvel ordre de grandeur des variables x et y

De manière explicite , les nouveaux β_{ij} sont :

$$\tilde{\beta}_{11} = \beta_{11}\bar{N}_1$$

$$\tilde{\beta}_{12} = \beta_{12}\bar{N}_2$$

$$\tilde{\beta}_{21} = \beta_{21}\bar{N}_1$$

$$\tilde{\beta}_{22} = \beta_{22}\bar{N}_2$$

le modèle (2.5) peut s'apparenter à une généralisation du modèle de Ross [3, 106].

L'ensemble $[0, 1) \times [0, 1)$ est positivement invariant, de plus dans cet ensemble le système (2.5) est fortement monotone (voire appendice) et le Jacobien est strictement antimonotone.

Nous pouvons donc appliquer le théorème 6.1 de Hirsch [64]. Plus précisément si $\mathcal{R}_0 > 1$, le point d'équilibre endémique est instable [28], donc toutes les trajectoires ne tendent pas vers l'origine.

Aussi d'après Hirsch [64], il existe un unique équilibre endémique $p \in]0, 1[\times]0, 1[$ tel que toutes les trajectoires de $[0, 1) \times [0, 1[$ tendent vers p .

En examinant le champ de vecteurs à la frontière, ceci prouve que le point d'équilibre endémique est attractif sur $]0, 1[\times]0, 1[$.

2.4.2 Etude de la stabilité des équilibres du modèle DIDS1

Stabilité locale de l'équilibre endémique

soit l'équilibre endémique $p = (\bar{x}, \bar{y})$, prenons le Jacobien en cet équilibre.

$$Jac(EE) = \begin{bmatrix} \beta_{11}(1 - \bar{x}) - \beta_{11}\bar{x} - \beta_{12}\bar{y} - (\mu_1 + \gamma_1) & \beta_{12}(1 - \bar{x}) \\ \beta_{21}(1 - \bar{y}) & \beta_{22}(1 - \bar{y}) - \beta_{22}\bar{y} - \beta_{21}\bar{x} - (\mu_2 + \gamma_2) \end{bmatrix}$$

Pour prouver la locale stabilité de l'équilibre endémique, il suffit de prouver que la trace de $Jac(EE)$ est négative et le déterminant $det(Jac(EE))$ est positif.

L'équilibre endémique satisfait aux équations

$$\begin{cases} \beta_{11}(1-\bar{x})\bar{x} - (\mu_1 + \gamma_1)\bar{x} = -\beta_{12}(1-\bar{x})\bar{y} \\ \beta_{22}(1-\bar{y})\bar{y} - (\mu_2 + \gamma_2)\bar{y} = -\beta_{21}(1-\bar{y})\bar{x} \end{cases} \quad (2.6)$$

$$\begin{cases} [\beta_{11}(1-\bar{x}) - (\mu_1 + \gamma_1) - \beta_{12}\bar{y}]\bar{x} = -\beta_{12}\bar{y} \\ [\beta_{22}(1-\bar{y}) - (\mu_2 + \gamma_2) - \beta_{21}\bar{x}]\bar{y} = -\beta_{21}\bar{x} \end{cases} \quad (2.7)$$

En substituant les expressions $(\mu_1 + \gamma_1)$ et $(\mu_2 + \gamma_2)$ par leurs valeurs tirées des relations du système (2.6) le Jacobien ci dessus devient :

$$Jac(EE) = \begin{bmatrix} -\beta_{12}\frac{\bar{y}}{\bar{x}} - \beta_{11}\bar{x} & \beta_{12}(1-\bar{x}) \\ \beta_{21}(1-\bar{y}) & -\beta_{21}\frac{\bar{x}}{\bar{y}} - \beta_{22}\bar{y} \end{bmatrix}$$

Nous avons,

$$Tr(Jac(EE)) = -\beta_{12}\frac{\bar{y}}{\bar{x}} - \beta_{11}\bar{x} - \beta_{21}\frac{\bar{x}}{\bar{y}} - \beta_{22}\bar{y} \leq 0$$

$$\begin{aligned} det(Jac(EE)) &= (\beta_{12}\frac{\bar{y}}{\bar{x}} + \beta_{11}\bar{x})(\beta_{21}\frac{\bar{x}}{\bar{y}} + \beta_{22}\bar{y}) - \beta_{12}(1-\bar{x})\beta_{21}(1-\bar{y}) \\ &= [\beta_{12}\beta_{22}\frac{\bar{y}^2}{\bar{x}} + \beta_{11}\beta_{21}\frac{\bar{x}^2}{\bar{y}} + \beta_{12}\beta_{22}\bar{x}\bar{y} + \beta_{12}\beta_{21}\bar{x} + \beta_{12}\beta_{21}(1-\bar{x})\bar{y}] > 0 \end{aligned}$$

Tous les termes de $\det(\text{Jac}(EE))$ sont positifs puisque $(\bar{x}, \bar{y}) \in]0, 1[\times]0, 1[$, nous avons

$$\det(\text{Jac}(EE)) > 0$$

Ceci achève de montrer la stabilité de $\text{Jac}(EE)$ et la globale asymptotique stabilité de l'équilibre endémique.

Stabilité de l'équilibre sans maladie

A présent nous allons prouver la globale asymptotique stabilité de l'équilibre sans maladie (DFE) quand $\mathcal{R}_0 \leq 1$.

Nous savons que, pour $\mathcal{R}_0 \leq 1$, le DFE est localement stable, c'est à dire $\det(\text{Jac}(DFE)) > 0$ et $\text{Tr}(\text{Jac}(DFE)) = 0$

On considère la fonction de Lyapunov suivante sur $[0, 1] \times [0, 1]$:

$$V(x, y) = -[\beta_{22} - (\mu_2 + \gamma_2)]x + \beta_{12}y$$

Pour que ce soit une fonction de Lyapunov, c'est à dire définie positive sur $[0, 1] \times [0, 1]$ il faut montrer que le terme $-\beta_{22} - \mu_2 + \gamma_2$ est positif.

En effet la matrice Jacobienne à l'origine se réduit à

$$\text{Jac}(DFE) = \begin{bmatrix} \beta_{11} - (\mu_1 + \gamma_1) & \beta_{12} \\ \beta_{21} & \beta_{22} - (\mu_2 + \gamma_2) \end{bmatrix}$$

Puisque nous sommes dans le cas où $\mathcal{R}_0 \leq 1$, son module de stabilité est tel que $\alpha(J) \leq 0$,

Ceci implique $\det(\text{Jac}(\text{DFE})) \geq 0$ et $\text{Tr}(\text{Jac}(\text{DFE})) = 0$

En d'autres termes,

$$\mathcal{R}_0 \leq 1.$$

↓

$$\text{Tr}(\text{Jac}(\text{DFE})) = \beta_{11} - (\mu_1 + \gamma_1) + \beta_{22} - (\mu_2 + \gamma_2) \leq 0$$

et

$$\det(\text{Jac}(\text{DFE})) = [\beta_{11} - (\mu_1 + \gamma_1)][\beta_{22} - (\mu_2 + \gamma_2)] - \beta_{12}\beta_{21} > 0$$

Des inégalités précédentes, il vient : $\beta_{11} - (\mu_1 + \gamma_1)$, $\beta_{22} - (\mu_2 + \gamma_2)$ sont de même signe et leur somme est négative, donc le terme $-\beta_{12}\beta_{21}$ est positif.

Donc quand $\mathcal{R}_0 \leq 1$, nous avons,

$$\beta_{11} \leq (\mu_1 + \gamma_1), \text{ et } \beta_{22} \leq (\mu_2 + \gamma_2).$$

La dérivée de $V(x, y)$ le long des trajectoires donne,

$$\begin{aligned}
 \dot{V}(x, y) &= -[\beta_{22} - (\mu_2 + \gamma_2)] \dot{x} + \beta_{12} \dot{y} \\
 &= -[\beta_{22} - (\mu_2 + \gamma_2)][\beta_{11} (1 - x) - (\mu_1 + \gamma_1)] x \\
 &\quad - [\beta_{22} - (\mu_2 + \gamma_2)] \beta_{12} (1 - x) y \\
 &\quad + \beta_{12} \beta_{22} (1 - y) x + \beta_{12} [\beta_{22} (1 - y) - (\mu_2 + \gamma_2)] y \\
 &\leq -[(\beta_{22} - (\mu_2 + \gamma_2))(\beta_{11} - (\mu_1 + \gamma_1) - \beta_{11} \beta_{22})] x \\
 &\quad + \beta_{12} y [-(\beta_{22} - (\mu_2 + \gamma_2)) + (\beta_{22} - (\mu_2 + \gamma_2))] \\
 &= -[(\beta_{11} - (\mu_1 + \gamma_1)) (\beta_{22} - (\mu_2 + \gamma_2)) - \beta_{12} \beta_{21}] x \leq 0
 \end{aligned}$$

Ceci prouve que $\dot{V} \leq 0$ donc l'équilibre est stable.

De plus si $\dot{V} = 0$ alors on a

$$-[(\beta_{11} - (\mu_1 + \gamma_1)) (\beta_{22} - (\mu_2 + \gamma_2)) - \beta_{12} \beta_{21}] x = 0$$

comme $[(\beta_{11} - (\mu_1 + \gamma_1)) (\beta_{22} - (\mu_2 + \gamma_2)) - \beta_{12} \beta_{21}] > 0$ ceci implique $x = 0$.

Par suite $x = 0$, puis $\dot{x} = \beta_{12} y = 0$ d'où $y = 0$

Ainsi le plus grand ensemble invariant contenu dans l'ensemble des couples (x, y) qui annule \dot{V} est le singleton $(0, 0)$

On en conclut que $(0, 0)$ est globalement asymptotiquement stable dans le carré $[0, 1] \times [0, 1]$ d'après le principe de LaSalle.

2.4.3 Modèle DIDS2 et quelques propriétés

Notre deuxième système épidémiologique est un cas particulier du modèle (2.1) et peut servir à décrire la dynamique de l'infection des maladies sexuellement transmissibles telle que la blennorragie, où l'infection se contracte par contact avec le sexe

opposé.

Nous avons alors le compartiment des femmes et celui des hommes.

Le modèle est régi par le système d'équations différentielles 2.8 et illustré par la figure 2.2.

Remarque 12 Les flèches rouges et en discontinues sur la figure 2.2 dénotent le fait qu'il n'y a pas d'infections directe entre les infectés et les susceptibles d'un même type i . C'est le cas, des maladies sexuellement transmissibles. Quand l'hypothèse d'homosexualité n'est pas considéré dans la population étudiée.

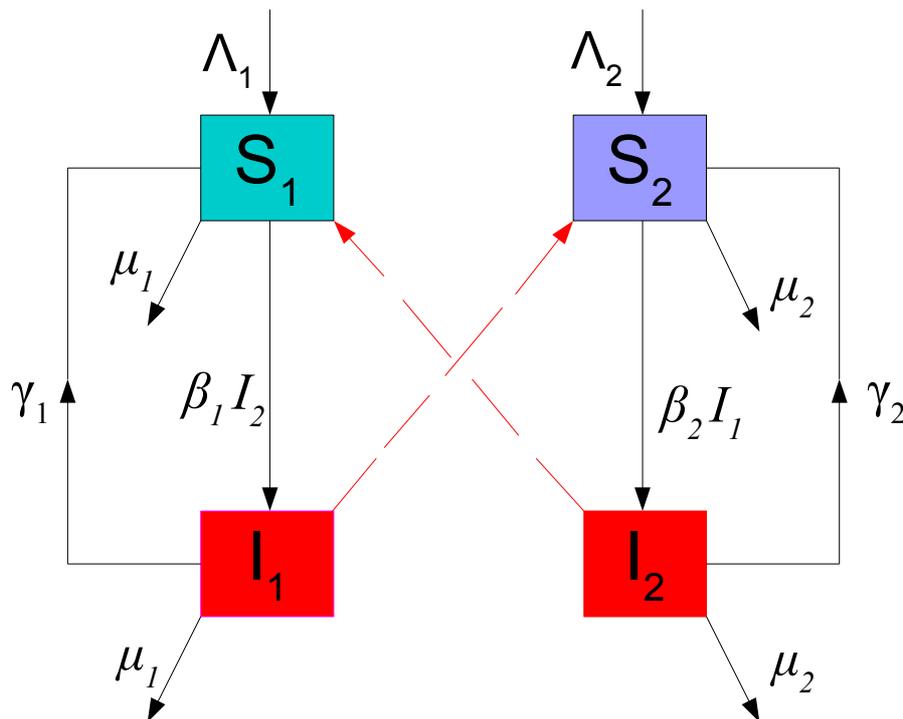


FIGURE 2.2 – S_1 et S_2 représentent les classes des susceptibles I_1 I_2 représentent les classes des infectieux

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{S}_1 = \Lambda_1 - \mu_1 S_1 - \beta_1 S_1 I_2 + \gamma_1 I_1 \\ \dot{S}_2 = \Lambda_2 - \mu_2 S_2 - \beta_2 S_2 I_1 + \gamma_2 I_2 \\ \dot{I}_1 = \beta_1 S_1 I_2 - (\mu_1 + \gamma_1) I_1 \\ \dot{I}_2 = \beta_2 S_2 I_1 - (\mu_2 + \gamma_2) I_2 \end{array} \right. \quad (2.8)$$

Pour ce dernier modèle, 2.8 le point d'équilibre sans maladie (DFE) est $(S_1^*, S_2^*, 0, 0)^\tau$.
Avec

$$S_1^* = \frac{\Lambda_1}{\mu_1}, S_2^* = \frac{\Lambda_2}{\mu_2}.$$

Le Jacobien au DFE est donné par :

$$Jac(DFE) = V + F = \begin{bmatrix} -(\mu_1 + \gamma_1) & 0 \\ 0 & -(\mu_2 + \gamma_2) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & \beta_1 S_1^* \\ \beta_2 S_2^* & 0 \end{bmatrix}$$

$$\text{Avec } F = \begin{bmatrix} 0 & \beta_1 S_1^* \\ \beta_2 S_2^* & 0 \end{bmatrix} \text{ et } V = \begin{bmatrix} -(\mu_1 + \gamma_1) & 0 \\ 0 & -(\mu_2 + \gamma_2) \end{bmatrix}$$

Connaissant F et V , le nombre de reproduction de base \mathcal{R}_0 est le rayon spectral de la matrice A avec $A = -FV^{-1}$

On a donc $\mathcal{R}_0 = \rho(-FV^{-1})$ d'après Diekmann et al [28, 128]

Nous avons,

$$A = -FV^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{\beta_1 S_1^*}{(\mu_2 + \gamma_2)} \\ \frac{\beta_2 S_2^*}{(\mu_1 + \gamma_1)} & 0 \end{bmatrix}$$

Le polynôme caractéristique est

$$P_\lambda(A) = \lambda^2 - \frac{\beta_1 \beta_2 S_1^* S_2^*}{(\mu_1 + \gamma_1)(\mu_2 + \gamma_2)}$$

Il en découle que $\mathcal{R}_0 = \rho(A)$, qui est la plus grande valeur propre de A en module et nous avons

$$\mathcal{R}_0 = \sqrt{\frac{\beta_1 \beta_2 S_1^* S_2^*}{(\mu_1 + \gamma_1)(\mu_2 + \gamma_2)}} \quad (2.9)$$

Remarque 13 *P. Van Den Driessche et al [128] donnent le Jacobien sous la forme $Jac(DFE) = F - V$, avec une différence de signe sur V .*

Dans ce document nous préférons la donner sous la forme $Jac(DFE) = V + F$, ducoup V apparait comme une matrice de Metzler stable, Cette préférence de signe vient du fait que les matrices de Metzler apparaissent de manière naturelle dans les systèmes compartimentaux. Le signe moins (-) dans la formule donnée ici du \mathcal{R}_0 dû au faite que les Z -Matrices sont opposées aux matrices de Metzler.

2.5 \mathcal{R}_0 des modèles (2.1, 2.7) et distance du Jacobien ($Jac(DFE)$) à l'instabilité et à la stabiité selon les cas.

Cette section a pour but d'apprécier la robustesse de \mathcal{R}_0 .

Nous utilisons les modèles épidémiologiques décrits ci dessus (2.1), (2.8). Et à chaque fois les paramètres composantes du Jacobien donné, seront des valeurs arbitraires choisies, mais qui garderont néanmoins les propriétés du système.

Ensuite nous calculons d'une part le \mathcal{R}_0 correspondant et d'autre part la distance séparant le système à la stabilité (instabilité).

2.5. \mathcal{R}_0 DES MODÈLES (2.1, 2.7) ET DISTANCE DU JACOBIEN (JAC(DFE))
 À L'INSTABILITÉ ET À LA STABILITÉ SELON LES CAS.

Le but est de montrer que ces deux indicateurs de stabilité sont indépendants.

Pro 2.5.1 Soit $J = PDP^{-1}$ une matrice 2×2 de Metzler symétrique stable.

D la matrice diagonale semblable à J par changement de base orthogonale P .

$\overline{\mathcal{S}}_t$ la fermeture de l'ensemble des matrices stables \mathcal{S}_t

Nous avons,

$$d(J, \overline{\mathcal{S}}_t)_F = d(D, \overline{\mathcal{S}}_t)_F$$

Preuve

Nous avons $d(J, \overline{\mathcal{S}}_t) = \min_{s \in \overline{\mathcal{S}}_t} \|J - s\|_F$

La norme de Frobenius est invariante par changement de base orthogonale.

Il vient donc,

$$\|J - s\|_F = \|PDP^{-1} - s\|_F = \|D - P^{-1}sP\|_F.$$

En outre $s \in \overline{\mathcal{S}}_t$, et il existe une suite s_n d'éléments de \mathcal{S}_t tel que $s_n \rightarrow s$

$Tr(s_n) < 0$ et $Det(s_n) > 0$.

Nous avons

$$(s_n \rightarrow s) \iff (P^{-1}s_nP \rightarrow P^{-1}sP)$$

La trace et le déterminant sont invariant par changement de base, donc $P^{-1}s_nP \in \mathcal{S}_t$

Et comme $P^{-1}s_nP$ converge vers $P^{-1}sP$, $P^{-1}sP$ est élément de $\overline{\mathcal{S}}_t$

Notons $P^{-1}sP = s'$; quand s parcourt \mathcal{S}_t , s' aussi.

On obtient donc,

$$d(J, \overline{\mathcal{S}}_t) = \min_{s \in \overline{\mathcal{S}}_t} \|J - s\|_F = \min_{s' \in \mathcal{S}_t} \|D - s'\|_F = d(D, \overline{\mathcal{S}}_t)$$

Cette dernière proposition 2.5.1 va nous simplifier les calculs sur la distance dans les prochaines sections. Il suffira désormais de chercher la matrice diagonale semblable à la Jacobienne ($Jac(DFE)$) supposée symétrique et d'appliquer directement les résultats de l' Annexe C sur le calcul des distances (confere C.16 , C.19) pour évaluer la distance du Jacobien ($J(DFE)$) à la stabilité ou à l'instabilité selon le cas.

2.5.1 $\mathcal{R}_0 > 1$, constant et distance de $J(DFE)$ à la stabilité très petite

Considérons le système (2.8) avec les paramètres suivant :

$$\beta_2 S_2^* = \beta_1 S_1^* = \frac{2}{n}$$

$$(\mu_1 + \gamma_1) = (\mu_2 + \gamma_2) = \frac{1}{n}$$

Calcul de \mathcal{R}_0

Nous obtenons $\mathcal{R}_0 = 2$, à partir de l'expression ci-dessous

$$\mathcal{R}_0 = \sqrt{\frac{\beta_1 \beta_2 S_1^* S_2^*}{(\mu_1 + \gamma_1)(\mu_2 + \gamma_2)}} \quad (2.10)$$

Calcul de la distance $d(J, S_t)_F$

Avec les paramètres choisis ci -dessus le Jacobien du système est :

$$Jac(DFE) = \begin{bmatrix} -\frac{1}{n} & \frac{2}{n} \\ \frac{2}{n} & -\frac{1}{n} \end{bmatrix}$$

2.5. \mathcal{R}_0 DES MODÈLES (2.1, 2.7) ET DISTANCE DU JACOBIEN (JAC(DFE))
 À L'INSTABILITÉ ET À LA STABILITÉ SELON LES CAS.

Cette dernière matrice est symétrique donc diagonalisable et semblable à

$$D = \begin{bmatrix} \frac{1}{n} & 0 \\ 0 & -\frac{3}{n} \end{bmatrix}$$

d'après la proposition (2.5.1) et le résultat (C.16) on a,

$$d(J, \overline{\mathcal{S}}_t)_F = d(D, \overline{\mathcal{S}}_t)_F = \frac{1}{n}$$

Conclusion

Nous avons donc obtenu, un ensemble de modèles, pour lesquels $\mathcal{R}_0 > 1$ est constant, mais la distance à la stabilité est arbitrairement petite. On peut donc avoir un système instable indépendamment de la grandeur de n de (Jac(DFE)), mais donc il suffit d'une petite perturbation pour la rendre stable.

2.5.2 \mathcal{R}_0 très grand mais la distance de $J(DFE)$ à la stabilité très petite

Prenons les valeurs suivantes pour les paramètres,

$$\beta_{11}S_1^* = \beta_{12}S_1^* = \beta_{21}S_2^* = \frac{1}{\sqrt{n}}$$

$$\beta_{22}S_2^* = \frac{1}{2n^2}$$

$$(\mu_1 + \gamma_1) = 1 + \frac{1}{\sqrt{n}}, \quad (\mu_2 + \gamma_2) = \frac{1}{n^2}$$

Calcul de \mathcal{R}_0

En utilisant la notation de Van Den Driessche dans [128], nous avons :

$$J(\text{DFE}) = F - V = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{n}} & \frac{1}{\sqrt{n}} \\ \frac{1}{\sqrt{n}} & \frac{1}{2n^2} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 + \frac{1}{\sqrt{n}} & 0 \\ 0 & \frac{1}{n^2} \end{bmatrix}$$

et

$$-FV^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{1 + \sqrt{n}} & n\sqrt{n} \\ \frac{1}{1 + \sqrt{n}} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

Après calcul des valeurs propres de la matrice $-FV^{-1}$, nous obtenons

$$\mathcal{R}_0 = \rho(-FV^{-1}) = \frac{1}{2} \left[\frac{1}{2} + \frac{1}{1 + \sqrt{n}} + \sqrt{\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{n\sqrt{n}}\right)^2 + \frac{4n\sqrt{n}}{\sqrt{n} + 1}} \right]$$

Quand $n \rightarrow +\infty$, nous avons $\mathcal{R}_0 \sim \sqrt{n}$

Reste à évaluer la distance $d(J, \mathcal{S}_t)_F$ du jacobien ($\text{Jac}(\text{DFE})$) à l'ensemble des matrices stables.

Majoration de la distance $d(J, \mathcal{S}_t)_F$

Il est plus simple de majorer $d(J, \mathcal{S}_t)_F$, que de calculer explicitement cette distance

2.5. \mathcal{R}_0 DES MODÈLES (2.1, 2.7) ET DISTANCE DU JACOBIEN (JAC(DFE))
 À L'INSTABILITÉ ET À LA STABILITÉ SELON LES CAS.

Nous rappelons que le Jacobien au (DFE) est

$$J = F - V = \begin{bmatrix} -1 & \frac{1}{\sqrt{n}} \\ \frac{1}{\sqrt{n}} & -\frac{1}{2n^2} \end{bmatrix}$$

La matrice

$$Z = \begin{bmatrix} -1 & \frac{1}{\sqrt{n}} \\ \frac{1}{\sqrt{n}} & -\frac{1}{n} \end{bmatrix}$$

appartient à la frontière ($\partial\mathcal{S}_t$) de l'ensemble des matrices stables car :

$$\text{Tr}(Z) < 0 \text{ et } \det(Z) = 0.$$

Comme la matrice $Z \in \partial\mathcal{S}_t$, nous avons par conséquent :

$$\min_{s \in \mathcal{S}_t} \|J - s\|_F = d(J, \mathcal{S}_t)_F \leq d(J, Z)_F = \frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2}$$

(La distance calculée ici est celle de Frobenius.)

En d'autres termes, la distance de J à l'ensemble des matrices stables est plus petite que $\frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2}$

Conclusion

Nous obtenons un ensemble de modèles pour lesquels avec un \mathcal{R}_0 arbitrairement grand, mais donc la distance à la stabilité est arbitrairement petite.

Par exemple si nous prenons $n = 100$ nous avons $\mathcal{R}_0 \approx 10.627$ avec $d \leq 0.01$

2.5.3 \mathcal{R}_0 proche de 1 par valeurs superieurs et la distance de $J(DFE)$ à la stabilité très grande

Considérant le système (2.1) , nous choisissons les valeurs suivante pour les paramètres :

$$\beta_{11} = \beta_{22} = n^2$$

$$\beta_{12} = \beta_{21} = n^2 + n$$

$$(\mu_1 + \gamma_1) = 2n^2, \quad (\mu_2 + \gamma_2) = 2n^2$$

Calcul de \mathcal{R}_0

De ces paramètres, nous obtenons au DFE(1,1)

$$F = \begin{bmatrix} n^2 & n^2 + n \\ n^2 + n & n^2 \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad -V = \begin{bmatrix} 2n^2 & 0 \\ 0 & 2n^2 \end{bmatrix}$$

ce qui nous conduit à

$$-FV^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} + \frac{1}{2n} \\ \frac{1}{2} + \frac{1}{2n} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

et nous avons $\mathcal{R}_0 = \rho(-FV^{-1}) = 1 + \frac{1}{2n}$

Calcul de la distance $d(J, S_t)_F$

Le Jacobien au DFE est

$$J = F - V = \begin{bmatrix} -n^2 & n^2 + n \\ n^2 + n & -n^2 \end{bmatrix}$$

2.5. \mathcal{R}_0 DES MODÈLES (2.1, 2.7) ET DISTANCE DU JACOBIEN (JAC(DFE))
 À L'INSTABILITÉ ET À LA STABILITÉ SELON LES CAS.

La matrice J ci dessus est symétrique et est semblable par changement de base orthogonale de la matrice P , à la matrice diagonale.

$$D = PJP^{-1} = \begin{bmatrix} n & 0 \\ 0 & -2n^2 - n \end{bmatrix} \text{ avec } P^{-1} = {}^t P$$

La norme de Frobenius étant invariante par changement de base orthogonale, alors la distance de J à \mathcal{S}_t ensemble des matrices stables, est égale à la distance de $D = PJP^{-1}$ à \mathcal{S}_t (confère proposition (2.5.1)) dans ces conditions la distance de D à \mathcal{S}_t est donnée par la formule (C.16) et elle est égale à n .

conclusion

Nous obtenons une famille de modèles pour lesquels $\mathcal{R}_0 > 1$ très proche de 1 par valeurs supérieurs mais avec une distance à la stabilité arbitrairement grande. Par exemple si nous prenons $n = 100$ nous avons $\mathcal{R}_0 = 1.005$ avec $d = 100$ En d'autres termes , on peut avoir $\mathcal{R}_0 \approx 1.005$, bien qu'une très forte modification des paramètres soit nécessaire pour rendre le (DFE) globalement asymptotiquement stable.

2.5.4 $\mathcal{R}_0 < 1$ et proche de 0 et distance de J à l'instabilité très petite

Dans cette section nous présentons une classe de systèmes pour lesquels \mathcal{R}_0 est très loin de 1 par valeurs inférieures (précisément proche de 0), mais ayant une distance arbitrairement petite à la l'instabilité.

En d'autre termes une petite perturbation fait basculer le système vers l'instabilité

alors que \mathcal{R}_0 est plus petit que 1 et très loin de 1. Nous considérons toujours le système (2.8) avec les valeurs suivantes pour les paramètres :

$$\beta_2 S_2^* = \beta_1 S_1^* = \frac{1}{n}$$

$$(\mu_1 + \gamma_1) = \frac{1}{n} \quad (\mu_2 + \gamma_2) = n$$

Calcul de \mathcal{R}_0

La formule

$$\mathcal{R}_0^2 = \frac{\beta_1 \beta_2 S_1^* S_2^*}{(\mu_1 + \gamma_1)(\mu_2 + \gamma_2)} \quad (2.9)$$

donne ici $\mathcal{R}_0 = \frac{1}{n^2}$.

Calcul de la distance $d(J, \mathcal{U})_F$

Le Jacobien au DFE est donné par

$$J = \begin{bmatrix} -\frac{1}{n} & \frac{1}{n} \\ \frac{1}{n} & -n \end{bmatrix}$$

Dans ce cas nous calculons la distance à l'instabilité avec une norme matricielle différente de la norme de Frobenius.

Le Jacobien est une matrice de Metzler stable, nous pouvons utiliser alors le résultat de Hinrichsen et al [56], énoncé dans le théorème 5 de [56] et qui dit que, la distance d'une matrice de Metzler stable A à l'ensemble des matrices instable est égale à,

$$d = \frac{1}{\|A^{-1}\|}$$

2.5. \mathcal{R}_0 DES MODÈLES (2.1, 2.7) ET DISTANCE DU JACOBIEN (JAC(DFE))
 À L'INSTABILITÉ ET À LA STABILITÉ SELON LES CAS.

où la norme utilisée est une norme induite par une norme monotone (voir définition) A.3.2 et A.3.1 sur \mathbb{R}^n ,

Nous avons l'inverse de J ,

$$J^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{n^3}{n^2-1} & \frac{n}{n^2-1} \\ \frac{n}{n^2-1} & \frac{n}{n^2-1} \end{bmatrix}$$

Rappelons les définitions des normes infinie, et norme 1

Définition 2.5.2 (Norme infinie et norme 1 d'une matrice) Soit une matrice A $n \times n$, sa norme infinie ($\|\cdot\|_\infty$) (respectivement norme 1 ($\|\cdot\|_1$)) se définit comme suit :

$$\|A\|_\infty = \max_{1 \leq i \leq n} \sum_{j=1}^n |a_{ij}|$$

c'est la norme induite par la norme $\|\cdot\|_\infty$ sur \mathbb{R}^n .

et

$$\|A\|_1 = \max_{1 \leq j \leq n} \sum_{i=1}^n |a_{ij}|$$

c'est la norme induite par la norme $\|\cdot\|_1$ sur \mathbb{R}^n .

Ces deux normes matricielles sont bien induites par des normes monotones sur \mathbb{R}^n

Nous avons

$$\|J^{-1}\|_1 = \|J^{-1}\|_\infty = \frac{n^3 + n}{n^2 - 1}$$

la formule de Hinrichsen s'applique, c'est à dire la distance J à l'instabilité est donnée par

$$d(J, \mathcal{U}_F) = \frac{n^2 - 1}{n^3 + n} \sim \frac{1}{n} \text{ quand } n \rightarrow \infty$$

conclusion

$\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ étant évidemment de dimension finie, toutes les normes sur \mathbb{R} sont équivalentes.

Nous en concluons que pour toute norme matricielle sur $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, nous pouvons toujours avoir une distance arbitrairement petite à l'instabilité.

Remarque 14 *Nous allons vérifier cette dernière affirmation en calculant la distance à l'instabilité au moyen de la norme de Frobenius. nous reprenons le Jacobien précédent.*

$$J = \begin{bmatrix} -\frac{1}{n} & \frac{1}{n} \\ \frac{1}{n} & -n \end{bmatrix}$$

J matrice de Metzler symétrique et semblable à la matrice diagonale,

$$D = PJP^{-1} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix}$$

En utilisant la proposition 2.5.1, il nous revient que la distance à l'instabilité, pour la norme de Frobenius, est égale à la distance de sa matrice diagonale semblable à l'instabilité.

Les valeurs propres de la matrice J sont :

$$\lambda_1 = \frac{1}{2} \left[-\frac{n^3 + n}{n^2 - 1} + \sqrt{\left(\frac{n^3 - n}{n^2 - 1}\right)^2 + 4 \frac{n}{n^2 - 1}} \right]$$

et

2.5. \mathcal{R}_0 DES MODÈLES (2.1, 2.7) ET DISTANCE DU JACOBIEN (JAC(DFE))
 À L'INSTABILITÉ ET À LA STABILITÉ SELON LES CAS.

$$\lambda_2 = \frac{1}{2} \left[-\frac{n^3 + n}{n^2 - 1} - \sqrt{\left(\frac{n^3 - n}{n^2 - 1}\right)^2 + 4 \frac{n}{n^2 - 1}} \right]$$

Le résultat (C.19), nous dit que la distance par la norme de Frobenius de la matrice

$$A = \begin{bmatrix} -a & 0 \\ 0 & -b \end{bmatrix} \text{ avec } a > 0, \text{ et } b > 0$$

à l'ensemble des matrices instables \mathcal{U} est, $\min(a, b)$

Il vient donc

$$d(J, \mathcal{U})_F = \frac{1}{2} \left[-\frac{n^3 + n}{n^2 - 1} + \sqrt{\left(\frac{n^3 - n}{n^2 - 1}\right)^2 + 4 \frac{n}{n^2 - 1}} \right]$$

A l'aide des développements limités, nous obtenons :

$$d(J, \mathcal{U})_F \sim \frac{1}{n} \text{ quand } n \rightarrow \infty$$

2.5.5 $\mathcal{R}_0 \leq 1$, et proche de 1 par valeurs inférieures, mais avec distance de J à l'instabilité très grande

Dans cette section nous présentons une famille de modèles pour lesquels \mathcal{R}_0 est arbitrairement proche de 1 par valeurs inférieures, mais dont la distance à l'instabilité est arbitrairement grande.

Nous reprenons le système (2.8) avec les valeurs suivantes pour les paramètres.

$$\beta_2 S_2^* = \beta_1 S_1^* = n^2$$

$$(\mu_1 + \gamma_1) = \frac{1}{n} \quad (\mu_2 + \gamma_2) = \frac{n^3}{n-1}$$

Calcul de \mathcal{R}_0

De l'équation (2.9),

$$\mathcal{R}_0^2 = \frac{\beta_1 \beta_2 S_1^* S_2^*}{(\mu_1 + \gamma_1)(\mu_2 + \gamma_2)}$$

,
 nous avons $\mathcal{R}_0 = (1 - \frac{1}{n})^2$.

Calcul de la distance $d(J, \partial \mathcal{U})_F$

Le Jacobien est donné par,

$$J = \begin{bmatrix} -\frac{n^3}{n-1} & n^2 \\ n^2 & -\frac{n^3}{n-1} \end{bmatrix}$$

Nous obtenons après calculs,

$$\|J^{-1}\|_1 = \|J^{-1}\|_\infty = \frac{n-1}{n^2}.$$

De nouveau d'après Hinrichsen, la distance à l'instabilité est :

$$d_1 = d_\infty = \frac{n^2}{n-1} \sim n \text{ quand } n \rightarrow \infty$$

conclusion

La distance à l'instabilité peut donc être arbitrairement grande avec un \mathcal{R}_0 au voisinage de 1 et inférieur à 1.

2.5. \mathcal{R}_0 DES MODÈLES (2.1, 2.7) ET DISTANCE DU JACOBIEN (JAC(DFE))
À L'INSTABILITÉ ET À LA STABILITÉ SELON LES CAS.

Chapitre 3

Robustesse et Nombre de Reproduction-type \mathcal{T}

3.1 Introduction

Dans une série de publications [48,103] Heesterbeek et Roberts, introduisent un nouveau nombre seuil épidémique \mathcal{T} .

Ce seuil trouve sa raison d'être quand il est question d'analyser les modèles ayant plusieurs types d'hôtes, différents par des caractéristiques épidémiologiques.

Si nous identifions n différents types de susceptibles dans une population donnée (de susceptibles), notons K la matrice de la prochaine génération d'infectés (la next generation matrix) [28] donc les éléments sont les K_{ij} .

Les éléments de K ont une signification similaire à celle de \mathcal{R}_0 . Par exemple K_{ij} est le nombre attendu d'infectés secondaires dans la population des susceptibles de type i quand on introduit un infectieux de type j dans la population totale des susceptibles.

Le concept du nombre de reproduction de base \mathcal{R}_0 apparait donc peu adapté quand on s'intéresse à la dynamique de l'infection dans une population des susceptibles quand l'infection arrive par un infectieux spécifique.

Pour illustrer nos propos, prenons le cas du paludisme dont la population des susceptible est constituée par les humains et les moustiques. Appelons les humains hôtes de type 1 et les moustiques hôtes de type 2. Nous avons $K_{11} = K_{22} = 0$;

3.2. NOMBRE DE REPRODUCTION-TYPE \mathcal{T}

Ce qui signifie qu'un humain n'infecte pas directement un humain, et un moustique n'infecte pas directement un moustique.

K_{12} est le nombre de nouveaux humains infectés attendu quand un moustique est introduit dans la population des susceptibles.

K_{21} est le nombre de nouveaux moustiques infectés quand un humain malade est introduit dans la population des susceptibles.

Nous avons dans les deux cas, humains ou moustiques $\mathcal{R}_0 = \sqrt{K_{12}K_{21}}$. Par contre le nombre de cas secondaires d'une infection humain à humain arrive à la deuxième génération, ceci du fait de la présence du vecteur moustique. Dans ce cas, le nombre de cas secondaires est \mathcal{R}_0^2 . (Heesterbeek et Roberts 2003)

On pourrait donc définir le nombre de reproduction type \mathcal{T} comme le nombre de cas secondaires total attendu dans une population de susceptibles de type différents, après l'introduction dans la dite population, d'un infectieux de type spécifique durant sa période infectieuse. \mathcal{T} est considéré comme un seuil épidémique au même titre que \mathcal{R}_0 .

Dans la première section nous donnons la définition mathématique et l'implémentation de \mathcal{T} , suivra l'exposition de quelques propositions donnant des implications et équivalences existantes entre \mathcal{T} et le nombre de reproduction de base.

Dans la deuxième section nous verrons si la distance de \mathcal{T} à 1, permet d'évaluer l'effort à fournir pour faire basculer un système stable, respectivement (instable) vers l'instabilité, respectivement (stabilité). En d'autres termes, nous testons la robustesse de l'indicateur \mathcal{T} .

Pour ce faire nous nous servons des systèmes épidémiologiques (2.1), (2.8) puisque ayant des compartiments des susceptibles différents par leur manière de contracter la maladie.

3.2 Nombre de reproduction-type \mathcal{T}

Nous rappelons la définition donnée dans le papier de Heesterbeek [48] :

Dans les n différents types d'hôtes, on considère un sous ensemble défini dans

l'ensemble des indices $I_d \subset \{1, \dots, n\}$.

La matrice P est la matrice de projection définie comme une matrice diagonale satisfaisant $P_{ii} = 1$ si $i \in I_d$ et $P_{ii} = 0$ sinon.

La matrice K est la "next generation matrice" $n \times n$ du model épidémiologique et la matrice I est la matrice identité $n \times n$.

Définition 3.2.1 ([48]) Si $\rho((I - P)K) < 1$ le nombre de reproduction type \mathcal{T} est défini par

$$\mathcal{T} = \rho(P(M))$$

avec

$$M = K[I - (I - P)K]^{-1}$$

3.2.1 Implémentation de la Matrice (M)

$M = (m_{ab})$ est la matrice dont chaque élément est la somme totale à une génération donnée des infectés de type a quand on a introduit au départ un infectieux de type b dans la population totale.

Le but de cette section ici est de retrouver l'expression de la matrice M donnée dans la définition précédente [3.2.1](#)

Soit donc K la matrice de la prochaine génération, e le vecteur unité dont le premier élément est 1 et les autres zéro.

Quand nous introduisons un infectieux de type 1 par exemple, nous obtenons le vecteur $PK e$ donc l'élément non nul est le nombre d'infectieux de type 1 obtenu à la première génération. et $(I - P)K e$ est le vecteur dont les éléments sont les nombres d'infectés d'autres types obtenus à la première génération après l'introduction d'un infectieux de type 1. A la deuxième génération, ayant mis de coté les infectieux de type 1 de la première génération, on récolte les infectés obtenus de type 1 obtenu à partir des infectés d'autres types. Donc , on applique PK au vecteur $(I - P)K e$ et obtenons $PK(I - P)K e$.

On reprend le même procédé en écartant à chaque génération, le nombre d'infectieux de type 1, pour ne compter que le nombre d'infectés de type 1 obtenu à la génération

3.2. NOMBRE DE REPRODUCTION-TYPE \mathcal{T}

suivante par le biais des infectés d'autres types. Rendu à la i -ème génération, nous obtenons $PK[(I - P)K]^{i-1}e$.

schéma récapitulatif du procédé d'obtention du nombre d'infectés de type 1 à chaque génération

Nous avons ci dessous le schéma récapitulatif du procédé.

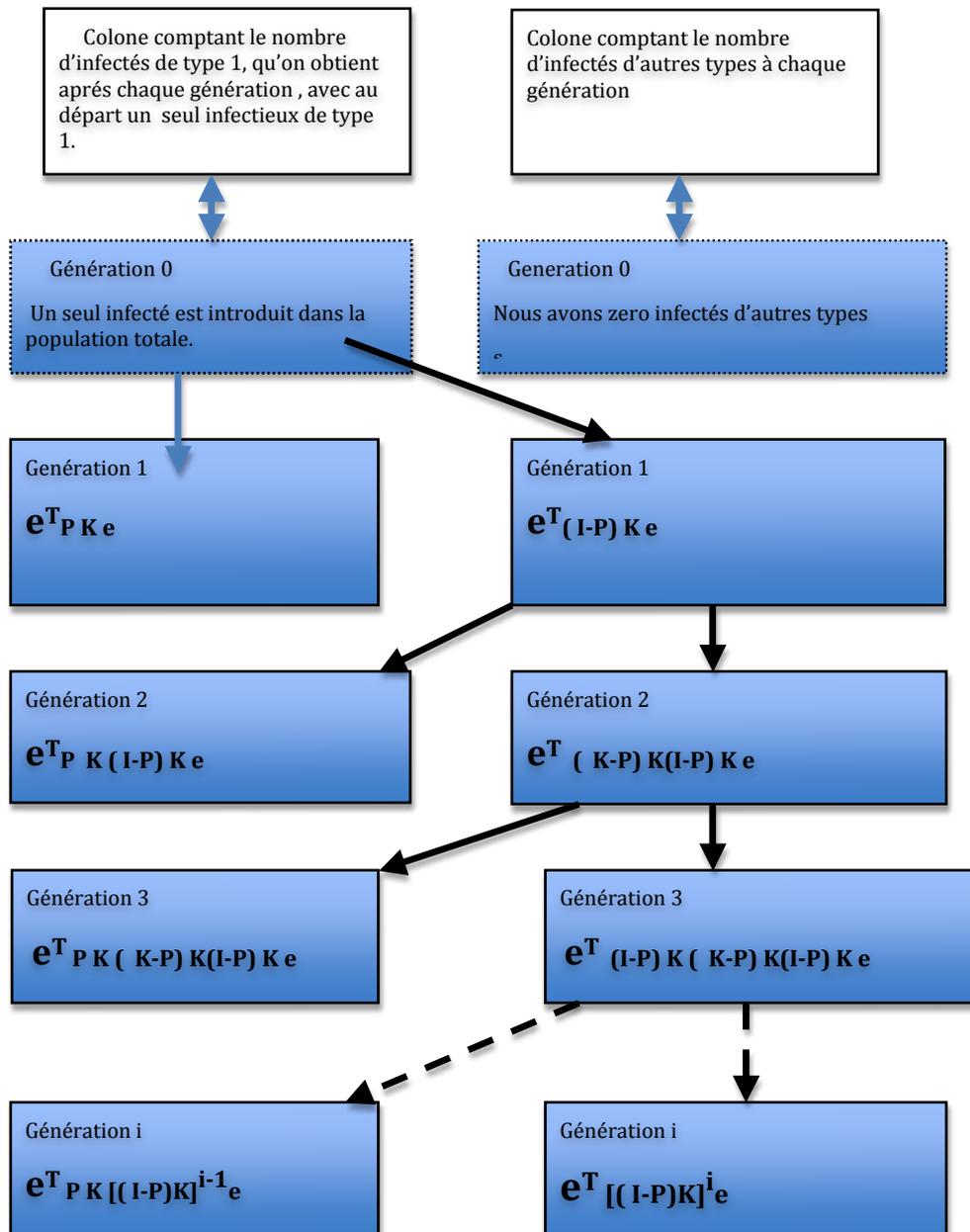


FIGURE 3.1 – Schéma nombre d'infectieux du type 1 par génération

calcul de M

D'après la figure 3.1 le nombre d'infectés obtenu de type 1 à la i ème génération est :

$$e^T P K [(I - P) K]^{i-1} e = e^T K [(I - P) K]^{i-1} e$$

car $e^T P = e^T$.

Nous avons

$$M = K \sum_{i=1}^n [(I - P) K]^{i-1}$$

en faisant éclater cette somme , nous obtenons la série suivante.

$$\begin{aligned} M &= K + K[(I - P) K] + K[(I - P) K]^2 + K[(I - P) K]^3 + \dots K[(I - P) K]^n + \dots \\ &= K[I + [(I - P) K] + [(I - P) K]^2 + [(I - P) K]^3 + \dots [(I - P) K]^n] + \dots \end{aligned}$$

Quand la série M converge nous avons ;

$$M = K \sum_{i=1}^{\infty} [(I - P) K]^{i-1} = K[I - (I - P) K]^{-1}$$

Remarque 15 Si $\rho((I - P) K) < 1$ alors la serie définissant M converge (confere A.8.2) et l'on a :

$$M = K \sum_{j=0}^{\infty} [(I - P) K]^j = K[I - (I - P) K]^{-1}$$

La matrice $[I - (I - P) K]^{-1}$ existe et est positive si et seulement si

$$\rho((I - P) K) < 1.$$

Il peut arriver que $[I - (I - P) K]$ soit inversible avec $\rho((I - P) K) \geq 1$. mais dans ce cas l'inverse n'est plus positive

Avant d'examiner le comportement de \mathcal{T} puis sa robustesse, nous aurons besoin de quelques propriétés.

Dans [48] Heesterbeek énonce (propriété(i)) que si K est irréductible alors :

$$\mathcal{T} > 1 \iff \mathcal{R}_0 > 1$$

La preuve donnée dans [48] n'est pas facile à vérifier. De plus, l'irréductibilité de K n'y est pas requise de manière spéciale.

Dans la proposition qui va suivre, nous prouvons quelques relations entre \mathcal{T} et \mathcal{R}_0 .

Pour ce faire nous avons besoin d'un lemme technique. Les résultats de ce lemme peuvent être déduits des résultats de [5] sur les matrices positives et étendus aux matrices de Metzler. Cependant nous donnerons une preuve simple basée sur les propriétés dynamiques des matrices de Metzler.

Lemme 3.2.2 *Soit A une matrice de Metzler.*

Premier cas : *S'il existe $v \gg 0$ tel que $Av \leq 0$, alors $\alpha(A) \leq 0$.*

Deuxième cas : *S'il existe $v \gg 0$ tel que $Av \leq 0$ et A est irréductible alors $\alpha(A) < 0$.*

Troisième cas : *S'il existe $v > 0$ tel que $Av \geq 0$, alors $\alpha(A) \geq 0$.*

Preuve

Les matrices de Metzler laissent invariant l'orthant positif \mathbb{R}_+^n .

Premier cas : $v \gg 0$ tel que $Av \leq 0$

Considérons la fonction de Lyapunov $V(x) = \langle x|v \rangle$ sur \mathbb{R}_+^n pour le système linéaire $\dot{x} = A^T x$.

Nous avons par suite

$$\dot{V}(x) = \langle \dot{x}|v \rangle = \langle A^T x|v \rangle = \langle x|Av \rangle \leq 0$$

Par le théorème de stabilité de Lyapunov ceci prouve que 0 est stable sur \mathbb{R}_+^n .

3.2. NOMBRE DE REPRODUCTION-TYPE \mathcal{T}

Montrons que si le système $\dot{x} = A^T x$ est stable dans \mathbb{R}_+^n , il l'est dans \mathbb{R}^n .
Soit $x(0) \in \mathbb{R}^n$, nous avons ;

$$x(0) = x_1(0) - x_2(0) \text{ avec } x_1(0) \in \mathbb{R}_+^n \text{ et } x_2(0) \in \mathbb{R}_+^n.$$

Par définition de la stabilité de 0 sur \mathbb{R}_+^n nous avons :

$$\forall \epsilon > 0 \exists \delta > 0 \text{ tel que } \|x(0)\| \leq \delta \implies \forall t \geq 0, \|e^{A^T t} x(0)\| \leq \epsilon$$

supposons $\|x_1(0)\| \leq \delta$ et $\|x_2(0)\| \leq \delta$ alors

$$\|e^{A^T t} x_1(0)\| \leq \epsilon, \quad \forall t \geq 0$$

et

$$\|e^{A^T t} x_2(0)\| \leq \epsilon, \quad \forall t \geq 0$$

De l'inégalité triangulaire, nous avons,

$$\|e^{A^T t} x(0)\| = \|e^{A^T t} x_1(0) - e^{A^T t} x_2(0)\| \leq \|e^{A^T t} x_1(0)\| + \|e^{A^T t} x_2(0)\| \leq 2\epsilon, \quad \forall t \geq 0$$

Nous avons là la définition de la stabilité de l'origine sur \mathbb{R}^n et par suite

$$s(A^T) = \alpha(A) \leq 0.$$

Deuxième cas : A irréductible $v \gg 0$ tel que $Av \leq 0$.

Si A est irréductible, le principe d'invariance de Lasalle permet de conclure à la stabilité asymptotique

D'après le premier cas, (avec la même fonction de Lyapunov $\dot{V}(x) = \langle x|v \rangle$)
0 est stable et donc $\alpha(A) \leq 0$; on applique le principe d'invariance de Lasalle ; donc on cherche le plus grand ensemble invariant inclus dans

$$E = \{x \in \mathbb{R}_+^n \text{ tel que } \dot{V}(x) = 0\}$$

Puisque,

$$\dot{V}(x) = \langle \dot{x}|v \rangle = \langle A^T x|v \rangle = \langle x|Av \rangle \leq 0$$

Nous avons,

$$\begin{aligned} E &= \{x \in \mathbb{R}_+^n \text{ tel que } \langle x|Av \rangle = 0 \\ &= \{x \in \mathbb{R}_+^n \text{ tel que } x_i = 0, \text{ si } (Av)_i \neq 0\} \end{aligned}$$

Soit I le plus grand ensemble invariant inclus dans E ;

si $x \in I$, alors $(e^{A^T t} x)_i = 0, \forall t \geq 0$ Soit alors i tel que $(Av)_i \neq 0$ on a donc, $(e^{A^T t} x)_i = 0 \forall t \geq 0$

donc $\dot{x}_i = 0$ (pour $\dot{x} = A^T x$)

or nous avons; $\dot{x}_i = \sum_{j \neq i} a_{ji} x_j = 0$ (du fait que $x_i = 0$ et $\dot{x} = A^T x$)

Or A est une matrice de Metzler, donc nous avons $a_{ji} \geq 0$ et $x_j \geq 0$ donc $x_j = 0, \forall j$ tel que $a_{ij} \neq 0$.

Dans le graphe dont A est la matrice d'incidence, tous les sommets j pour lesquels il y a un arc partant de i et entrant dans j sont tels que $x_j = 0$

Si on reprend le raisonnement ci-dessus, on voit que tous les sommets $\{k\}$ qui sont accessibles à partir du sommet $\{i\}$ par un chemin orienté, vérifient $x_k = 0$; comme A est irréductible, tous les de sommets k sont reliés à i par un chemin orienté donc $x_k = 0; \forall k$. Donc $I = \{0\}$ et 0 est globalement asymptotiquement stable sur \mathbb{R}_+^n ; et comme \mathbb{R}_+^n engendre \mathbb{R}^n . Nous avons la stabilité de 0 sur \mathbb{R}^n (confère premier cas) et par suite

$$s(A^T) = \alpha(A) \leq 0.$$

Troisième cas : $v > 0$ tel que $Av \geq 0$.

On considère la même fonction (qui n'est plus définie positive sur \mathbb{R}_+^n)

$$V(x) = \langle x|v \rangle$$

Par conséquent nous avons :

$$\dot{V}(x) = \langle \dot{x}|v \rangle = \langle A^T x|v \rangle = \langle x|Av \rangle \geq 0$$

3.2. NOMBRE DE REPRODUCTION-TYPE \mathcal{T}

On considère l'hyperplan

$$H_\epsilon = \{x \in \mathbb{R}_+^n \text{ tel que } \langle v|x \rangle = \epsilon\} \text{ où } \epsilon > 0$$

Alors pour tout $x_0 \in$ au polyèdre $P = \{x \in \mathbb{R}_+^n \text{ tel que } \langle v|x \rangle \geq \epsilon\}$

(qui est non vide car $(\frac{v}{\|v\|^2}) \in P$ et tel que 0 n'appartient pas à P)

La trajectoire $x(t)$ issue de x_0 reste dans P (puisque $V(x(t))$ est croissante et que \mathbb{R}_+^n est positivement invariant) et donc $x(t)$ ne peut tendre vers 0 quand t tend vers ∞ . On dit que H_ϵ est une barrière.

En conclusion 0 n'est pas asymptotiquement stable sur \mathbb{R}^n ni sur \mathbb{R}_+^n et finalement $s(A^\tau) = \alpha(A) \geq 0$.

Pro 3.2.3 *Nous avons les implications suivantes :*

1. *Si K est irréductible*

$$\mathcal{T} < 1 \implies \mathcal{R}_0 < 1.$$

$$\mathcal{T} > 1 \implies \mathcal{R}_0 > 1.$$

$$\mathcal{T} = 1 \implies \mathcal{R}_0 = 1.$$

2. *Quand \mathcal{T} est le nombre de reproduction-type correspondant à un seul type, et que K est irréductible les implications précédentes sont équivalentes,*

$$\mathcal{T} < 1 \iff \mathcal{R}_0 < 1.$$

$$\mathcal{T} > 1 \iff \mathcal{R}_0 > 1.$$

$$\mathcal{T} = 1 \iff \mathcal{R}_0 = 1.$$

Preuve de la proposition (3.2.3)

a) Supposons $\rho((I - P)K) < 1$. Soit la matrice

$$M = K \sum_{j=0}^{\infty} [(I - P)K]^j = K[I - (I - P)K]^{-1}.$$

montrons que :

$$M(K - I) = (MP - I)K \quad (3.1)$$

Nous avons

$$M = K[I - (I - P)K]^{-1}$$

De l'égalité ci-dessus découlent les suivantes

$$M(K - I) = K[I - (I - P)K]^{-1} [-(I - K) + PK - PK]$$

$$M(K - I) = K[I - (I - P)K]^{-1} [-(I - (I - P)K) + PK]$$

$$M(K - I) = [-K + MPK]$$

$$M(K - I) = [MP - I]K.$$

b) K est une matrice positive et irréductible dont la plus grande valeur propre est réelle et vaut \mathcal{R}_0 ; donc, d'après Perron-Frobenius il existe $v \gg 0$ tel que $Kv = \mathcal{R}_0 v$.

Montrons que

$$(MP - I)\mathcal{R}_0 v = (\mathcal{R}_0 - 1)Mv \quad (3.2)$$

De la relation $Kv = \mathcal{R}_0 v$ on déduit successivement les égalités suivantes

$$Kv - v = (\mathcal{R}_0 - 1)v$$

$$(K - I)v = (\mathcal{R}_0 - 1)v$$

$$M(K - I)v = (\mathcal{R}_0 - 1)Mv$$

3.2. NOMBRE DE REPRODUCTION-TYPE \mathcal{T}

Alors d'après (3.1) nous obtenons :

$$(MP - I)Kv = (\mathcal{R}_0 - 1)Mv$$

$$(MP - I)\mathcal{R}_0 v = (\mathcal{R}_0 - 1)Mv$$

c) Montrons maintenant (sous l'hypothèse K irréductible) que $Mv \gg 0$

Par hypothèse, $\rho((I - P)K) < 1$ donc la série $\sum_{j=0}^{\infty} [(I - P)K]^j$ converge et sa somme est $[I - (I - P)K]^{-1}$; de plus puisque nous avons $K \geq 0$, $I - P \geq 0$ on a $[(I - P)K]^j \geq 0$ i.e chaque terme de la série $\sum_{j=0}^{\infty} [(I - P)K]^j$ est positif. et finalement $\sum_{j=0}^{\infty} [(I - P)K]^j \geq 0$ est limite d'une suite de matrices positives c'est à dire $[I - (I - P)K]^{-1} \geq 0$.

Considérons le vecteur $v \gg 0$ mis en évidence dans (b),
alors $[I - (I - P)K]^{-1}v \geq 0$;

En effet d'une part $[I - (I - P)K]^{-1} \geq 0$, et $v \gg 0$, donc $[I - (I - P)K]^{-1}v \geq 0$
d'autre part si ce produit avait une composante nulle la matrice $[I - (I - P)K]^{-1}$ aurait une ligne nulle et ne serait pas donc inversible.

Enfin $Mv = K [I - (I - P)K]^{-1}v \gg 0$:

En effet d'une part $K \geq 0$; $[I - (I - P)K]^{-1}v \gg 0$ (confère ce qui précède).
donc le produit $K [I - (I - P)K]^{-1}v \geq 0$.

D'autre part, de nouveau, si ce produit avait une composante nulle, alors K aurait une ligne nulle et ne serait donc pas irréductible.

1. Venons-en à la démonstration proprement dite des trois cas de la proposition
3.2.3

Premier cas : $\mathcal{R}_0 \geq 1$

On a (confère l'équation 3.2) : $(MP - I)v = \frac{(\mathcal{R}_0 - 1)}{\mathcal{R}_0} Mv$

Par ailleurs on a $v \gg 0$, $Mv \gg 0$ (confère (c)) et $\mathcal{R}_0 > 0$
 donc $\frac{(\mathcal{R}_0 - 1)}{\mathcal{R}_0} Mv \geq 0$. c'est à dire $(MP - I)v \geq 0$; $(MP - I)$ est donc une
 matrice de Metzler pour laquelle $\exists v \gg 0$ tel que $(MP - I)v \geq 0$;

on en déduit, d'après le lemme 3.2.2 (troisième cas que) $s(MP - I) \geq 0$.

Or $s(MP - I) = s(MP) - 1 = \rho(MP) - 1 \geq 0$, car $(MP) \geq 0$ donc d'après Perron-
 Frobenius, $s(MP) = \rho(MP)$

finalement $\mathcal{T} = \rho(MP) \geq 1$.

On a donc obtenu $\mathcal{R}_0 \geq 1 \implies \mathcal{T} \geq 1$, soit par contraposition : $\mathcal{T} < 1 \implies \mathcal{R}_0 < 1$.

Deuxième cas : $\mathcal{R}_0 \leq 1$

Par le même raisonnement, on a : $\exists v \gg 0$ tel que $(MP - I)v \leq 0$;

d'où, d'après le lemme 3.2.2 (premier cas) $s(MP - I) = \rho(MP) - 1 \leq 0$, i.e
 $\mathcal{T} = \rho(MP) \leq 1$.

On a donc obtenu $\mathcal{R}_0 \leq 1 \implies \mathcal{T} \leq 1$,

soit par contraposition : $\mathcal{T} > 1 \implies \mathcal{R}_0 > 1$.

Troisième cas : $\mathcal{R}_0 = 1$

On déduit des deux premiers cas que $\mathcal{T} = 1 \iff \mathcal{R}_0 = 1$.

2 Propriétés de \mathcal{T} dans le cas d'un seul type de susceptible

Dans ce cas, P peut s'écrire $P = ee^t$, où e est un vecteur de la base canonique
 de \mathbb{R}^n qui correspond au type d'hôte choisi.

3.2. NOMBRE DE REPRODUCTION-TYPE \mathcal{T}

Donc la matrice $PM = ee^T M$ est de rang 1.

En effet, si nous choisissons le type d'hôte 1, nous avons :

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \cdots & \vdots \\ \vdots & 0 & \ddots & 0 & \cdots & \vdots \\ \vdots & 0 & 0 & \ddots & 0 & \vdots \\ \vdots & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

et la matrice $M = \begin{pmatrix} m_{11} & m_{12} & \cdots & \cdots & \cdots & m_{1n} \\ m_{21} & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \vdots \\ \vdots & \cdots & \ddots & \cdots & \cdots & \vdots \\ \vdots & \cdots & \cdots & \ddots & \cdots & \vdots \\ \vdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \vdots \\ m_{n1} & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & m_{nn} \end{pmatrix}$

Quand on fait le produit de ces deux matrices nous avons :

$$PM = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \cdots & \vdots \\ \vdots & 0 & \ddots & 0 & \cdots & \vdots \\ \vdots & 0 & 0 & \ddots & 0 & \vdots \\ \vdots & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} m_{11} & m_{12} & \cdots & \cdots & \cdots & m_{1n} \\ m_{21} & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \vdots \\ \vdots & \cdots & \ddots & \cdots & \cdots & \vdots \\ \vdots & \cdots & \cdots & \ddots & \cdots & \vdots \\ \vdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \vdots \\ m_{n1} & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & m_{nn} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} m_{11} & m_{12} & \cdots & \cdots & \cdots & m_{1n} \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ \vdots & \cdots & \ddots & \cdots & \cdots & 0 \\ \vdots & \cdots & \cdots & \ddots & \cdots & \vdots \\ \vdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

On voit clairement que notre matrice est de rang 1 et aussi sa plus grande valeur propre est m_{11} dans le cas ou on s'intéresse au premier type de susceptible.

nous avons $\rho(PM) = \mathcal{T} = m_{11}$

Dans le cas général, nous avons une formule explicite de \mathcal{T}

$$\mathcal{T} = \langle Me|e \rangle = m_{ii} \text{ si } e = e_i \quad (3.3)$$

Reprenons la formule 3.2

$$(1 - \mathcal{R}_0)Mv = \mathcal{R}_0(I - MP)v$$

multiplions à gauche par P , on a :

$$(1 - \mathcal{R}_0)PMv = \mathcal{R}_0(P - PMP)v$$

prenons le produit scalaire avec e il vient :

$$(1 - \mathcal{R}_0)\langle PMv|e \rangle = \mathcal{R}_0(\langle P \mathbf{v}|e \rangle - \langle PMP \mathbf{v} |e \rangle)$$

Or, $Pv = \langle v|e \rangle e$ (projection orthogonale de v sur e), d'où :

$$(1 - \mathcal{R}_0)\langle PMv|e \rangle = \mathcal{R}_0\langle v|e \rangle - \mathcal{R}_0\langle v|e \rangle \langle P M e|e \rangle$$

Or, $PMe = ee^\tau Me = \langle Me|e \rangle e = \mathcal{T}e$, il vient :

$$\begin{aligned} (1 - \mathcal{R}_0)\langle PMv|e \rangle &= \mathcal{R}_0\langle v|e \rangle - \mathcal{R}_0\langle v|e \rangle \mathcal{T} \\ &= \mathcal{R}_0\langle v|e \rangle (1 - \mathcal{T}) \end{aligned}$$

Finalement nous avons $(1 - \mathcal{R}_0)\langle PMv|e \rangle = \mathcal{R}_0\langle v|e \rangle (1 - \mathcal{T})$

Dans cette dernière formule nous observons que $\langle v|e \rangle \gg 0$ car $v \gg 0$;
 $\langle PMv|e \rangle > 0$ car $PMv \gg 0$ du fait que $Mv \gg 0$.

On en conclut de maniere évidente que :

$$\mathcal{T} < 1 \iff \mathcal{R}_0 < 1.$$

$$\mathcal{T} > 1 \iff \mathcal{R}_0 > 1.$$

$$\mathcal{T} = 1 \iff \mathcal{R}_0 = 1.$$

3.3 Calcul du nombre de reproduction type \mathcal{T} pour le modèle (2.1)

Nous calculons le nombre de reproduction type pour le cas du système (2.1) nous rappelons la définition (3.2.1)

Si $\rho((I - P)K) < 1$ le nombre de reproduction type \mathcal{T} est défini par

$$\mathcal{T} = \rho(PK[I - (I - P)K]^{-1}).$$

A travers cette section nous introduisons par commodité les notations $T = (I - P)K$ et $M = K[I - T]^{-1}$.

3.3.1 calculs des matrices K , P et T

Calcul de la matrice de la prochaine génération K

Pour le calcul de K et le Jacobien au *DFE*, il est nécessaire qu'on puisse "incorporer" les équilibres S_1^* et S_2^* dans les coefficients β_{ij} .

(c'est à dire $S_1^* = 1$, $S_2^* = 1$)

Pour simplifier les notations nous substituons aussi μ_i à $\mu_i + \gamma_i$

Avec ces conventions, nous obtenons le Jacobien J au *DFE* :

$$J = \begin{bmatrix} \beta_{11} - \mu_1 & \beta_{12} \\ \beta_{21} & \beta_{22} - \mu_2 \end{bmatrix}.$$

La matrice de la prochaine génération est alors :

$$K = -FV^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{\beta_{11}}{\mu_1} & \frac{\beta_{12}}{\mu_2} \\ \frac{\beta_{21}}{\mu_1} & \frac{\beta_{22}}{\mu_2} \end{bmatrix}$$

Avec

$$F = \begin{bmatrix} \beta_{11} & \beta_{12} \\ \beta_{21} & \beta_{22} \end{bmatrix}$$

et

$$V = \begin{bmatrix} \mu_1 & 0 \\ 0 & \mu_2 \end{bmatrix}$$

La matrice de projection P

Il est à signaler que le nombre de reproduction type \mathcal{T} se calcule ici pour un seul type d'hôte.

Si on veut calculer le nombre de reproduction type, dû à l'introduction d'un infectieux dans la population des susceptibles de type 1 ,

La matrice P de projection est :

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Calcul de la matrice conditionnelle T

$$T = (I - P)K = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ \frac{\beta_{21}}{\mu_1} & \frac{\beta_{22}}{\mu_2} \end{bmatrix}$$

$$\rho(T) = \rho((I - P)K) = \frac{\beta_{22}}{\mu_2}$$

3.3.2 Nombre de reproduction type \mathcal{T}

Nous avons :

$$[I - T]^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \frac{\mu_2 \beta_{21}}{\mu_1(\mu_2 - \beta_{22})} & \frac{\mu_2}{\mu_2 - \beta_{22}} \end{bmatrix}$$

et

$$PK[I - T]^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{\beta_{11}}{\mu_1} + \frac{\beta_{12} \beta_{21}}{\mu_1 \mu_2 - \beta_{22}} & \frac{\beta_{12}}{\mu_2 - \beta_{22}} \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Finalement si $\rho(T) = \rho((I - P)K) = \frac{\beta_{22}}{\mu_2} < 1$, c'est dire à $\mu_2 - \beta_{22} > 0$

3.4. CALCUL DU NOMBRE DE REPRODUCTION TYPE \mathcal{T} POUR LE MODÈLE (??)

nous avons

$$\mathcal{T} = \rho(PK[I - T]^{-1}) = \frac{\beta_{11}}{\mu_1} + \frac{\beta_{12}\beta_{21}}{\mu_1\mu_2 - \beta_{22}}$$

que l'on peut exprimer aussi par :

$$\mathcal{T} = \frac{\beta_{11}}{\mu_1} + \frac{\beta_{12}\beta_{21}}{\mu_1(\mu_2 - \beta_{22})} = 1 - \frac{\det(J)}{\mu_1(\mu_2 - \beta_{22})} \quad (3.4)$$

En utilisant l'équivalence $\mathcal{R}_0 > 1 \iff \alpha(J) > 0$ [79, 127] il est facile avec cette formule de vérifier la proposition (3.2.3).

Si $\mu_2 - \beta_{22} < 0$ et $\det(J) > 0$ en appliquant sans précaution la formule 3.4, on obtient $\mathcal{T} > 1$ donc $\mathcal{R}_0 > 1$. Ce qui n'as pas de sens puisque \mathcal{T} n'est défini que si $\mu_2 - \beta_{22} > 0$.

3.4 Calcul du nombre de reproduction type \mathcal{T} pour le modèle (2.8)

Nous calculons le nombre de reproduction type pour le cas du système (2.8)

3.4.1 calculs des matrices K , P , et T

Calcul de la matrice de la prochaine generation K

Pour le calcul de K et le Jacobien au DFE, il est nécessaire qu'on puisse "incorporer" les équilibres S_1^* et S_2^* dans les coefficients β_{ij} .

(c'est à dire $S_1^* = 1$, $S_2^* = 1$)

Pour simplifier les notations nous substituons aussi μ_i à $\mu_i + \gamma_i$

Avec ces conventions, nous obtenons le Jacobien au point (1, 1).

le Jacobien J au DFE est :

$$J(1, 1) = \begin{bmatrix} -\mu_1 & \beta_2 \\ \beta_1 & -\mu_2 \end{bmatrix}$$

La matrice de la prochaine generation qui est

$$K = -FV^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{\beta_1}{\mu_2} \\ \frac{\beta_2}{\mu_1} & 0 \end{bmatrix}$$

Avec

$$F = \begin{bmatrix} 0 & \beta_2 \\ \beta_1 & 0 \end{bmatrix}$$

et

$$V = \begin{bmatrix} \mu_1 & 0 \\ 0 & \mu_2 \end{bmatrix}$$

La matrice de projection P

On calcule \mathcal{T} pour un seul type de susceptible, ici S_1

Donc la matrice P de projection est :

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Calcul de la matrice conditionnelle T

$$T = (I - P)K = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ \frac{\beta_2}{\mu_1} & 0 \end{bmatrix}$$

$$\rho(T) = \rho((I - P)K) = 0$$

3.4.2 Nombre de reproduction type \mathcal{T}

Nous avons :

$$[I - T]^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \frac{\beta_2}{\mu_1} & 1 \end{bmatrix}$$

et

$$PK[I - T]^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{\beta_1 \beta_2}{\mu_1 \mu_2} & \frac{\beta_1}{\mu_2} \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Finalement si $\rho(T) = \rho((I - P)K) = 0$ et nous avons :

$$\mathcal{T} = \rho(PK[I - T]^{-1}) = \frac{\beta_1 \beta_2}{\mu_1 \mu_2} \quad (3.5)$$

3.5 Exemples

Nous allons revisiter quelques exemples de la section(2.5) et calculer \mathcal{T} .

3.5.1 Exemple de la section 2.5.1

Rappelons que dans la section 2.5.1 nous avons

Pour le système (2.8) avec les paramètres suivant :

$$\beta_2 S_2^* = \beta_1 S_1^* = \frac{2}{n}$$

$$(\mu_1 + \gamma_1) = (\mu_2 + \gamma_2) = \frac{1}{n}$$

$$\mathcal{R}_0 = 2 \quad \text{et} \quad d_F(J, \mathcal{S}_t) = \frac{1}{n}$$

Nous considérons le nombre de reproduction-type 1, c'est à dire que P est la projection sur le premier axe .

On observe après calcul que $\rho(T) = 0$. donc < 1 La formule (3.5) nous donne $\rho(PM) = 4$.

Conclusion

Nous avons un $\mathcal{T} = 4$ plus grand que 1 et constant.

et la distance à la stabilité qui peut être prise arbitrairement petite.

3.5.2 Exemple de la section 2.3.2

Nous avons pour cet exemple

$$\mathcal{R}_0 \approx \sqrt{n} \quad \text{et} \quad d_F(J, \mathcal{S}_i) \leq \frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2}$$

Ici nous avons $\rho(T) = \frac{1}{2}$ et $\mathcal{T} \sim 2n$ (quand $n \Rightarrow +\infty$)

Conclusion

Pour n grand nous obtenons un $\mathcal{T} \sim 2n$ très grand et une distance à la stabilité arbitrairement petite.

3.5.3 Exemple de la section 2.5.3

Nous avons obtenu pour cet exemple,

$$\mathcal{R}_0 = 1 + \frac{1}{2n} \quad \text{et} \quad d_F(J, \mathcal{S}_i) = n$$

Nous avons pour ce cas $\rho(\mathcal{T}) = \frac{1}{2}$ et $\mathcal{T} \sim 1 + \frac{1}{n} + \frac{1}{2n^2}$.

Conclusion

Nous obtenons \mathcal{T} plus grand que 1 et arbitrairement proche de 1 avec une distance à la stabilité arbitrairement grande.

3.5.4 Exemples de la section 2.5.4

Considérons le système (2.8) avec les paramètres suivant :

$$\beta_2 \mathcal{S}_2^* = \beta_1 \mathcal{S}_1^* = \frac{1}{n}$$

$$(\mu_1 + \gamma_1) = \frac{1}{n} \quad (\mu_2 + \gamma_2) = n$$

Dans ce cas, $\mathcal{R}_0 = \mathcal{T} = \frac{1}{n^2}$ inférieur à 1 et proche de zéro,
mais avec une distance à l'instabilité équivalente à $\frac{1}{n}$, donc très petite pour n
grand

3.5.5 Conclusion

Dans les quatre cas, on obtient des conclusions similaires à celles de la non robustesse de \mathcal{R}_0 concernant la non robustesse de l'indicateur \mathcal{T} .

Deuxième partie

Fonctions de Lyapunov et analyse de la stabilité
asymptotique d'un Modèle Epidémiologique *SVEIR*

Résumé 1

Cette deuxième partie parle d'un modèle déterministe SVEIR , où S représente les susceptibles, V les vaccinés, E les latents, I les infectieux et R les immuns. Dans ce modèle les vaccinés sont considérés comme des susceptibles dans une moindre mesure du fait que le vaccin ne garanti pas une immunité totale.

Le nombre de reproduction de base \mathcal{R}_{vac} qui assure l'existence et l'unicité de l'équilibre endémique est déterminé.

Quand $\mathcal{R}_{vac} > 1$, la globale stabilité de l'équilibre endémique est établie en utilisant les techniques de Lyapunov.



Introduction

Les modèles épidémiologiques sont souvent illustrés par une série de compartiments correspondants aux différents étapes de l'infection ou de la maladie. On note le modèle par une série de lettres majuscules caractérisant les différents compartiments. [53].

Le modèle $SVEIR$ quant à lui prend en compte les individus suivant :

Les susceptibles (S), les vaccinés (V), les latents (E), infectieux (I), et les immuns (R).

Le modèle épidémiologique $SVEIR$ est basé sur le modèle ($SEIR$) standard.

Quelques modèles $SVEIR$ ont déjà été étudiés. Huiming Wei et al. [140] proposent un modèle épidémique $SVEIR$ avec retard, et analysent le comportement dynamique du modèle sous une vaccination d'impulsion, cette stratégie de vaccination qui consiste à vacciner les individus à répétition en respectant un intervalle de temps. En 2009 Yu Jiang et al. [75] étudient le même modèle en y incorporant l'incidence de saturation, (qui voudrait que soit limité dans le temps le nombre d'infections).

Pour évaluer à l'aide de la modélisation mathématique l'impact potentiel du vaccin contre la pneumonie atypique maladie se caractérisant par un syndrome respiratoire aiguë sévère (SARS : severe acute respiratory syndrome), Gumel et al en 2006 [42] se servent d'un modèle ($SVEIR$) et appliquent la méthode des " compound matrices " de Li - Muldowney pour montrer la globale stabilité de l'équilibre endémique. Ils prouvent la globale stabilité de l'équilibre endémique sous la condition que, la période d'incubation de doit pas être très grande.

Nous étudions dans cette partie un modèle épidémique ($SVEIR$) et prouvons l'exis-

tence de l'équilibre endémique et la globale stabilité de l'équilibre endémique dans le cas général.

Nous utilisons les techniques de LaSalle lesquelles nous permettront de généraliser les résultats de Gumel [42].

Le modèle (*SVEIR*) que nous analysons pourrait servir à évaluer l'impact potentiel du nouveau vaccin contre la méningite du serogroupe A (Menvacafri) , introduit en 2011 en Afrique subsaharienne via une vaccination de masse.

Comme la vaccination ne confère pas une immunité totale, le V-Compartiment des individus vaccinés est considéré comme un compartiment des susceptibles, ainsi nous tombons dans un système à susceptibilité et infectivité différentiel avec incidence bilinéaire comme celui de Hyman and Li (2005a) model [70]. Le modèle étudié ici prend non seulement en compte le flot entre les différents compartiment des susceptibles , mais aussi la différence des taux de mortalité entre les différents compartiments constituant le modèle. Pour ce type de modèles à susceptibilité différentielle, la stabilité de l'équilibre sans maladie (DFE : Disease Free equilibrium) a déjà été montrée par B. Bonzi et al en 2010 [15].

La globale stabilité de quelques modèles *SEIR* a été prouvée par LI et al [94]. Nous utiliserons pour démontrer la globale stabilité de l'équilibre endémique, la méthode directe de Lyapunov en exhibant une fonction de la forme :

$$V(Y_1, Y_2, \dots, Y_n) = \sum_i A_i (Y_i(t) - Y_i^* \ln Y_i(t)).$$

Où les A_i sont des constantes bien choisies ; Y_i est la population du $i^{\text{ème}}$ compartiment et Y_i^* l'état d'équilibre correspondant en l'équilibre endémique.

Les fonctions de Lyapunov de ce type ont été utilisées dans le cas des systèmes proie-prédateur de Lotka-Volterra. [4], et peuvent s'utiliser pour bon nombre de systèmes complexes compartimentaux de modèle épidémiques. comme dans [34, 118].

Le chapitre qui va suivre fait tout d'abord une revue de quelques modèles *SVEIR* trouvés en littérature, suivra

la présentation du modèle *SVEIR* à étudier plus quelques propriétés, ensuite viendra le chapitre qui va présenter le nombre de reproduction de base \mathcal{R}_0 et en dernier recours surviendra le chapitre qui va s'étaler sur l'analyse asymptotique des différents états d'équilibres.



Chapitre 4

Présentation , Préliminaires et Quelques Propriétés du Modèle *SVEIR*

4.1 Introduction

Dans ce chapitre, nous reprenons un modèle étudié par Gumel et al [42] le généralisons très légèrement. Gumel et al prouvent la stabilité asymptotique globale de l'équilibre endémique sous l'hypothèse que le temps moyen d'incubation est inférieur à la durée de vie moyenne. Il utilise la technique de Li et Muldowney [91,93]. Nous nous affranchissons de cette technique pour notre modèle général.

4.2 Quelques modèles (*SVEIR*) existants

Nous présentons dans cette section successivement en soulevant leurs particularités, le modèle de Huiming Weil, le modèle (*SVEIR*) de Yu Yiang, et le modèle (*SVEIR*) de Gumel.

4.2.1 Modèle de Huiming Weil [140]

Le modèle *SVEIR* de Huiming Weil incorpore la notion retard qui consiste à admettre que les individus ne sauraient passer d'un compartiment à une autre directement sans observer un certain temps (τ) dit retard.

Ensuite le comportement dynamique du modèle est étudié sous une stratégie de vaccination dite (Pulse vaccination) .Stratégie qui consiste à vacciner les individus d'une certaine tranche d' âge, non pas une seule et unique fois, mais à plusieurs reprises en séparant les doses d'un temps bien déterminé.

Sous des contraintes sur certains paramètres du modèle, il est montré d'une part la globale attractivité de la solution périodique du (DFE), et d'autre part, il est montré avec une condition sur I la permanence du modèle quand $R_0 > 1$.

4.2.2 Modele de Yu Yiang [42]

Yu Yiang reprend le modèle (SVEIR) de Huiming Weil et introduit la saturation dans l'incidence, qui prend la forme $\frac{\beta SI}{1 + \alpha S}$ en lieu et place de l'incidence bilinéaire βSI . il reprend les démonstrations faites par Huiming [140]

Pour finir, par des simulations numériques ils arrivent à conclure que :

Un grand taux de vaccination, ou une petite période entre les doses de vaccination, ou un longue période de latence est une condition suffisante pour éteindre la maladie.

4.2.3 Modèle (SVEIR) de Gumel [42]

En 2006 pour évaluer l'impact potentiel du vaccin contre la pneumonie atypique, Gumel et al mettent sur pied un modèle (SVEIR) qui est représenté par le diagramme des flots figure 4.1. Le diagramme montre la progression de l'infection dans les différents compartiments à partir des susceptibles (S), des vaccinés (V), en passant par les latents (E), les infectieux (V), et en fin les immuns R.

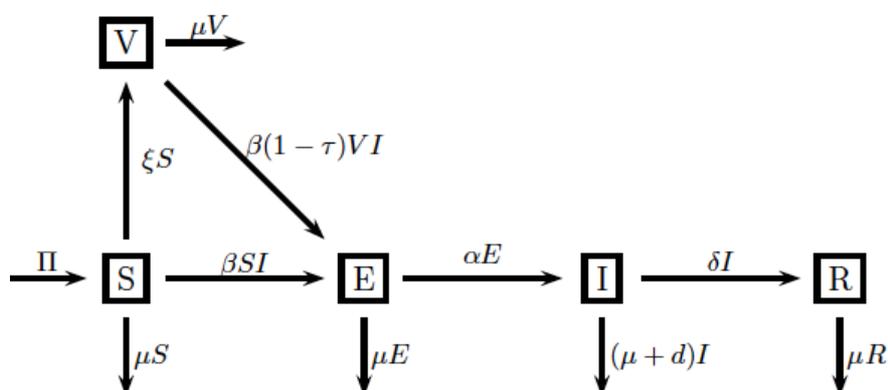


FIGURE 4.1 – Schema compartimental (SVEIR) Gumel

Paramètres du modèle et description

Paramètres	Description
π	Taux de recrutement des susceptibles
μ	taux de mortalité
β	Taux de contact effectif provoquant la transmission
ξ	Taux de la couverture vaccinale
τ	Efficacité du vaccin
α	Taux de développements des symptômes cliniques
δ	Taux de guérison des infectieux
d	Morbidité induite par la maladie

Dans ce modèle, Gumel considère que le taux de mortalité μ ne diffère pas d'un compartiment à l'autre, excepté pour la souspopulation des infectés ou il est associé

une morbidité connexe à la maladie dont on étudie la dynamique.

Quant à l'analyse de la stabilité globale de l'équilibre endémique, Gumel utilise les techniques de Li et Muldowney [91, 93] basées sur une approche géométrique.

Le modèle est régi par le système d'équations différentielle 4.1 suivant.

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{S} = \pi - (\xi + \mu)S - \beta S I \\ \dot{V} = \xi S - \mu V - (1 - \tau)\beta V I \\ \dot{E} = \beta I(S + (1 - \tau)V) - (\mu + \alpha)E \\ \dot{I} = \alpha E - (\mu + \delta + d)I \\ \dot{R} = \delta I - \mu R \end{array} \right. \quad (4.1)$$

Le modèle $SVEIR$ qui va faire l'objet d'étude dans la prochaine section diffère de celui de Gumel et est plus general en ce sens que les mortalité sont différentes d'un compartiment à un autre. En outre nous utiliserons les techniques de Lyapunov pour montrer la globale stabilité asymptotique de l'équilibre endémique.

4.3 Présentation et préliminaires du modèle à étudier

Nous allons répartir la population entière en cinq sous groupes d'individus. Chaque groupe ayant une signification épidémiologique différente, nous aurons donc le compartiment des susceptibles, des vaccinés, des latents, des infectieux et enfin le compartiment des guéris qui sont représentés respectivement par la suite des lettres S, V, E, I et R

Le compartiment des latents prend en compte le fait qu'il s'écoule un certain temps entre le moment où les susceptibles sont infectés et le moment où ils deviennent infectieux.

CHAPITRE 4. PRÉSENTATION , PRÉLIMINAIRES ET QUELQUES PROPRIÉTÉS DU MODÈLE SVEIR

Les susceptibles, les vaccinés, les latents , les infectieux et les guéris peuvent mourir d'une mort autre que la maladie concernée par l'étude, avec des taux de mortalités respectifs $d_S \geq 0, d_V \geq 0, d_E \geq 0, d_I \geq 0$.

Comme en général le statut immunologique de la population de chaque compartiment est différent, nous nous devons de prendre des taux de mortalité différents.

(Λ) est le taux de recrutement des susceptibles , ceci inclue les nouveaux nés qui naissent susceptibles dans le type d'infection considéré. Le coefficient de transmission (β) est le nombre de contact faits par un individu infectieux par unité de temps multiplié par la probabilité pour qu'un contact avec un susceptible conduit à une infection.

(ε) est le taux avec lequel les individus deviennent infectieux après avoir passé un certain temps dans le compartiment des latents.

(γ) est le taux avec lequel les infectieux recouvrent leur santé.

Nous considérons ici que la maladie a une transmission horizontale. l'infection se transmet des individus infectieux aux individus susceptibles d'une part, et d'autre part des individus infectieux aux vaccinés ceci dû au fait que la vaccin ne confère pas une immunité totale.

Les susceptibles deviennent infectés par la relation (βSI) et les vaccinés s'infectent avec la relation ($\theta \beta VI$), où $\theta \in [0, 1]$.

Ceci dit $1 - \theta$ est l'efficacité du vaccin.

Le schéma compartimental de ce modèle s'illustre par le diagramme donné par la figure [4.2](#)

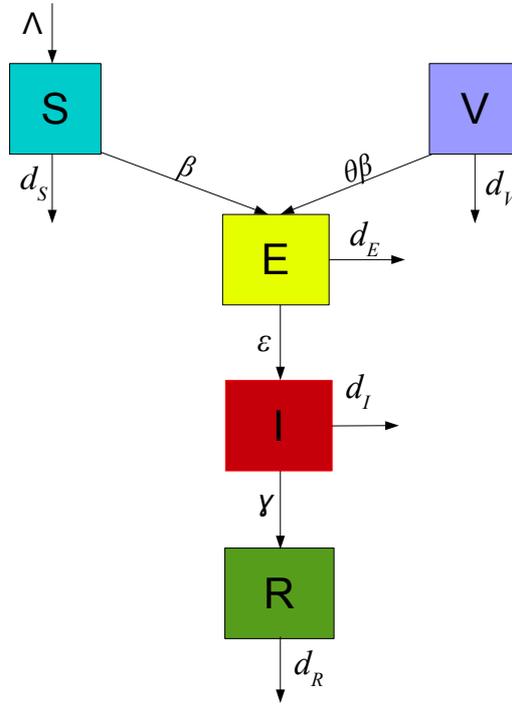


FIGURE 4.2 – Schema compartimental

Les flots entre les différents compartiments sont représentés par le système d'équation différentiel suivant.4.2

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{S} = \Lambda - (d_s + p)S - \beta SI \\ \dot{V} = pS - d_v V - \theta \beta VI \\ \dot{E} = \beta I(S + \theta V) - (d_E + \varepsilon) E \\ \dot{I} = \varepsilon E - (d_I + \gamma) I \\ \dot{R} = \gamma I - d_R R \end{array} \right. \quad (4.2)$$

Comme R n'apparaît pas dans les quatre premières équations, le système , (4.2)

CHAPITRE 4. PRÉSENTATION , PRÉLIMINAIRES ET QUELQUES PROPRIÉTÉS DU MODÈLE SVEIR

est triangulaire de la forme.

$$\begin{cases} \dot{X} = f(X) \\ \dot{Y} = g(X, Y) \end{cases} \quad (4.3)$$

Où pour toute valeur constante de \bar{X} le système $\dot{Y} = g(\bar{X}, Y)$ est globalement asymptotiquement stable. Nous rappelons le théorème de Vidyasagar qui nous permet de restreindre notre étude au système (4.5) sans le compartiment R

Théorème 15 (Vidyasagar [135], theorem 3.1) *Soit le système C^1 , suivant défini sur $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$*

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x) \\ \dot{y} = g(x, y) \\ \text{avec un point d'équilibre, } (x^*, y^*), \text{ i.e,} \\ f(x^*) = 0 \text{ et } g(x^*, y^*) = 0 \end{cases} \quad (4.4)$$

Si x^ est globalement asymptotiquement stable (GAS) dans \mathbb{R}^n pour le système $\dot{x} = f(x)$, et si y^* est (GAS) dans \mathbb{R}^m , pour le système $\dot{y} = g(x^*, y)$, alors (x^*, y^*) est localement asymptotiquement stable pour (4.4).*

En outre si toutes les trajectoires de (??) sont bornées , alors (x^, y^*) est (GAS) pour (4.4)*

$$\begin{cases} \dot{S} = \Lambda - (d_S + p)S - \beta SI \\ \dot{V} = pS - d_V V - \theta \beta VI \\ \dot{E} = \beta I(S + \theta V) - (d_E + \varepsilon)E \\ \dot{I} = \varepsilon E - (d_I + \gamma)I \end{cases} \quad (4.5)$$

Remarque 16 *Il s'agit du modèle de Gumel et al où on a différentié les mortalités. Le modèle est un tout petit peu général.*

4.4 Quelques propriétés

Le système (4.2) a un état d'équilibre sans maladie $P^* = (S^*, V^*, E^*, I^*)$, tel que

$$S^* = \frac{\Lambda}{(d_S + p)}, \quad V^* = \frac{p \Lambda}{d_V(d_S + p)}, \quad E^* = 0, \quad I^* = 0.$$

Apart cet équilibre sans maladie, il peut exister aussi un état d'équilibre endémique positif, \bar{P} . Si ce dernier état d'équilibre existe et est stable, alors l'infection va persister de manière endémique. Si l'état d'équilibre sans maladie P^* est stable, alors la population va rester dans cet état sans maladie pendant longtemps.

4.4.1 Compact absorbant positivement invariant

Pour que le modèle soit mathématiquement et épidémiologiquement bien posé, pour tout t positif, toutes les trajectoires du système doivent rester dans l'orthant positif quelque soit la solution de (4.5).

C'est à dire $\forall t \geq 0 \quad S(t), V(t), E(t), I(t) \geq 0$.

En considérant la remarque qui nous permet de remplacer le système (4.2) par (4.5) les résultats suivants sont de mise.

L'orthant positif

$$\mathbb{R}_+^4 = \{(S, V, E, I) \in \mathbb{R}^4, S \geq 0, V \geq 0, E \geq 0, I \geq 0\}$$

est positivement invariant.

En effet, Si $S(t) = 0$, nous avons obtenus :

$\dot{S}(t) \geq 0$, et avons des résultats similaires pour $V(t)$, $E(t)$ and $I(t)$.

Nous allons montrer à présent qu'il existe un ensemble compact absorbant positivement invariant \mathcal{K} pour le système (4.5).

Ceci signifie d'une part que toute solution du système prenant ses conditions initiales dans l'orthant positif \mathbb{R}_+^4 finit par entrer dans \mathcal{K} quand t tend vers l'infini, et d'autre part que toute solution prenant ses conditions initiales dans \mathcal{K} y demeure

pour tout (t) positif.

Lemme 4.4.1

Si on pose $d = \min(d_S, d_V, d_E, d_I, d_R)$, il suit :

$$\mathcal{K} = \left\{ (S, V, E, I) \in \mathbb{R}_+^4 : S + V + E + I \leq \frac{\Lambda}{d}, S \leq S^*, V \leq V^* \right\}$$

est un ensemble compact attractif positivement invariant pour le modèle de transmission de la maladie (4.5) avec des conditions initiales prises dans l'ensemble \mathbb{R}_+^4 .

Preuve

Si nous additionons toutes les équations du système (4.5),

la population totale varie selon l'équation différentielle suivante.

$$\dot{N}(t) = \Lambda - d_S S(t) - d_V V(t) - d_E E(t) - d_I I(t) - d_R R(t),$$

où

$$N(t) = S(t) + V(t) + E(t) + I(t) + R(t).$$

En substituant d_S, d_V, d_E, d_I, d_R respectivement par leur minimum $d = \min(d_S, d_V, d_E, d_I, d_R)$, nous obtenons l'inégalité suivante.

$$\dot{N}(t) \leq \Lambda - d N(t) \tag{4.6}$$

Par conséquent l'hyperplan définie par $N = \frac{\Lambda}{d}$ fait office de barrière pour le système (4.5). De ce fait $N(t)$ décroît avec le temps et finit par entrer dans l'ensemble $N(t) \leq \frac{\Lambda}{d}$ et y demeure.

Une preuve analogue prouve que :

$\dot{S}(t) \leq 0$ quand $S(t) > S^*$

En effet,

$$S > S^* \implies \dot{S}(t) = \Lambda - (d_S + p)S - \beta SI \leq \Lambda - (d_S + p)S < 0$$

Dans le compact K ;

Comme nous avons $S(t) \leq S^*$ dans K il vient si $V > V^*$

$$\dot{V} = pS - d_V V - \theta \beta VI \leq pS^* - d_V V^* < 0$$

Ceci montre que si $S(t) > S^*$ et $V > V^*$ alors les trajectoires rentrent dans K , et à la limite plus précisément, l'ensemble w -limite de toute trajectoire est dans K .

Ceci prouve que, \mathcal{K} est un ensemble compact absorbant et positivement invariant pour le système (4.5), et ceci achève la preuve du lemme (4.4.1).

Des que \mathcal{K} est un ensemble compact absorbant positivement invariant il sera suffisant de considérer seule la dynamique générée par le système (4.5) dans \mathcal{K} .

4.5 Calcul du taux de reproduction de base

Nous examinons un modèle épidémique qui a deux souspopulations susceptibles(S, V), puisque l'immunité conférée par la vaccination n'est pas complète. En s'inspirant de la méthode de Van den Driessche et Watmough (dite prochaine generation) [27, 127], nous allons calculer le nombre de reproduction de base pour le système (4.5) que nous notons par, \mathcal{R}_{vac}

Le Jacobien J du systeme (4.5) au (DFE) est :

$$J(DFE) = F + V = \begin{bmatrix} -(d_E + \varepsilon) & \beta(S^* + \theta V^*) \\ \varepsilon & -(d_I + \gamma) \end{bmatrix}$$

Nous avons :

$$F = \begin{bmatrix} 0 & \beta(S^* + \theta V^*) \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ et } -V = \begin{bmatrix} +(d_E + \varepsilon) & 0 \\ -\varepsilon & +(d_I + \gamma) \end{bmatrix}$$

$$-FV^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{\varepsilon\beta(S^* + \theta V^*)}{(d_E + \varepsilon)(d_I + \gamma)} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Comme $\mathcal{R}_{vac} = \rho(-FV^{-1})$, nous obtenons :

$$\mathcal{R}_{vac} = \frac{\varepsilon\beta(S^* + \theta V^*)}{(d_E + \varepsilon)(d_I + \gamma)} \quad (4.7)$$

Substituant S^* et V^* par leur valeur dans (4.7), nous obtenons :

$$\mathcal{R}_{vac} = \frac{\varepsilon\beta\Lambda}{(d_S + p)(d_E + \varepsilon)(d_I + \gamma)} \left(1 + \frac{\theta p}{d_V}\right). \quad (4.8)$$

Quand il n'ya aucune vaccination, ($p = 0$), le système (4.2) revient au modèle standard *SEIR* donc le

$$\mathcal{R}_0 = \mathcal{R}_{vac} |_{p=0} = \frac{\varepsilon\beta\Lambda}{d_S(d_E + \varepsilon)(d_I + \gamma)}.$$

Nous avons,

$$\mathcal{R}_{vac} = \mathcal{R}_0 \left(1 + \frac{\theta p}{d_V}\right) \left(\frac{d_S}{d_S + p}\right). \quad (4.9)$$

Si $\theta \leq d_S \leq d_V$, alors

4.5. CALCUL DU TAUX DE REPRODUCTION DE BASE

$$\mathcal{R}_{vac} \leq \mathcal{R}_0 \tag{4.10}$$

Chapitre 5

Analyse asymptotique

Dans ce chapitre il est question de procéder à l'analyse proprement dite, de la stabilité des différents états d'équilibre, à savoir l'équilibre sans maladie et l'équilibre endémique. Pour l'équilibre endémique, son existence et son unicité seront prouvées au préalable. Ensuite sera montré sa globale stabilité.

5.1 Globale stabilité de l'équilibre sans maladie (DFE)

Dans cette section nous prouvons la globale stabilité de l'équilibre sans maladie en se servant de la méthode de LaSalle Lyapunov.

Théorème 16 *Le point d'équilibre sans maladie $P^* = (S^*, V^*, E^*, I^*)$, est globalement asymptotiquement stable sur \mathbb{R}_+^4 si $\mathcal{R}_{vac} \leq 1$.*

Preuve :

Puisque \mathcal{K} est un sous ensemble positivement invariant et absorbant, de \mathbb{R}_+^4 , il est suffisant de prouver le résultat dans \mathcal{K} .

Pour se faire nous allons considérer une fonction de Lyapunov au sens de LaSalle [44, 89]. En d'autre terme cette fonction n'est nécessairement pas définie positive, mais pouvons conclure à l'aide des résultats de LaSalle [89] seulement si nous

5.1. GLOBALE STABILITÉ DE L'ÉQUILIBRE SANS MALADIE (DFE)

sommes dans un compact positivement invariant.

Prenons la fonction de Lyapunov suivante dans \mathcal{K} .

$$\mathcal{V}(E, I) = \varepsilon E + (\varepsilon + d_E)I \quad (5.1)$$

Dérivons la fonction 5.1 le long des trajectoires du système (4.5).

$$\begin{aligned} \dot{\mathcal{V}} &= \varepsilon(\beta I(S + \theta V) - (d_E + \varepsilon)E) + (\varepsilon + d_E)(\varepsilon E - (d_I + \gamma)I) \\ &= \varepsilon\beta I(S + \theta V) - \varepsilon(d_E + \varepsilon)E + \varepsilon(d_E + \varepsilon)E - (d_E + \varepsilon)(d_I + \gamma)I \\ &= [\varepsilon\beta(S + \theta V) - (d_E + \varepsilon)(d_I + \gamma)]I \\ &= (d_E + \varepsilon)(d_I + \gamma) \left[\frac{\varepsilon\beta(S + \theta V)}{(d_E + \varepsilon)(d_I + \gamma)} - 1 \right] I \\ &\leq (d_E + \varepsilon)(d_I + \gamma) \left[\frac{\varepsilon\beta(S^* + \theta V^*)}{(d_E + \varepsilon)(d_I + \gamma)} - 1 \right] I \\ &\leq (d_E + \varepsilon)(d_I + \gamma)(\mathcal{R}_{vac} - 1)I \end{aligned} \quad (5.2)$$

Comme tous les paramètres du modèle sont positifs, il vient :

$$\dot{\mathcal{V}} \leq 0 \quad \text{if} \quad \mathcal{R}_{vac} \leq 1.$$

Nous clavons que le plus grand ensemble \mathcal{L} positivement invariant contenu dans l'ensemble

$$\mathcal{E} = \{(S, V, E, R) \in \mathcal{K} : \dot{V}(S, V, E, I) = 0\}$$

est le singleton équilibre sans maladie $\mathcal{L} = \{(S^*, V^*, 0, 0)\}$.

Pour le montrer nous nous devons de considérer les deux cas suivant.

Cas 1 : Si $\mathcal{R}_{vac} < 1$ Alors nous avons :

$$\begin{aligned} \dot{\mathcal{V}}(E, I) &= (d_E + \varepsilon)(d_I + \gamma) \left[\frac{\varepsilon \beta(S + \theta V)}{(d_E + \varepsilon)(d_I + \gamma)} - 1 \right] I \\ &= (d_E + \varepsilon)(d_I + \gamma) [\mathcal{R}_{vac} - 1] I < 0 \end{aligned} \quad (5.3)$$

Cependant, $\dot{\mathcal{V}} = 0 \Leftrightarrow I = 0$, en substituant I par 0 dans la dernière équation du système (4.5) nous obtenons $E = 0$.

Donc le plus grand sous ensemble positivement invariant \mathcal{L} contenu dans \mathcal{E} contient les trajectoires du système suivant 5.4.

$$\begin{cases} \dot{S} = \Lambda - (d_S + p) S \\ \dot{V} = p S - d_V V \end{cases} \quad (5.4)$$

Il est facile de voir que le système (5.4) est linéaire et globalement stable à l'équilibre (S^*, V^*) .

A part les points d'équilibre toutes les trajectoires quittent tout compact quand $t \rightarrow +\infty$. Alors le seul sous ensemble invariant contenu dans \mathcal{E} est $\{(S^*, V^*, 0, 0)\}$. Puisque \mathcal{K} est un ensemble compact positivement invariant et absorbant, nous appliquons le principe d'invariance et prouvons que $(S^*, V^*, 0, 0)$ est globalement et asymptotiquement stable dans \mathcal{K}

Cas 2 : si $\mathcal{R}_{vac} = 1$ alors,

$$1 = \frac{\varepsilon \beta(S^* + \theta V^*)}{(d_E + \varepsilon)(d_I + \gamma)} \quad (5.5)$$

5.1. GLOBALE STABILITÉ DE L'ÉQUILIBRE SANS MALADIE (DFE)

En exploitant de l'égalité précédente (5.5) dans l'équation (5.3) nous obtenons :

$$\dot{\mathcal{V}}(S, V, E, I) = (d_E + \varepsilon)(d_I + \gamma) \left[\frac{\varepsilon \beta(S + \theta V)}{(d_E + \varepsilon)(d_I + \gamma)} - \frac{\varepsilon \beta(S^* + \theta V^*)}{(d_E + \varepsilon)(d_I + \gamma)} \right] I \quad (5.6)$$

Par la suite,

$$\dot{\mathcal{V}}(S, V, E, I) = 0 \iff \varepsilon \beta [(S + \theta V) - (S^* + \theta V^*)] I = 0.$$

Il suit que,

$$\dot{\mathcal{V}}(S, V, E, I) = 0 \iff (I = 0 \quad \vee \quad (S - S^*) + \theta(V - V^*) = 0).$$

Si $I = 0$, nous retournons au cas 1.

Sinon, $(S - S^*) + \theta(V - V^*) = 0$, puisque dans \mathcal{K} , nous avons $S - S^* \leq 0$, et $V - V^* \leq 0$, nous déduisons que,

$$V = V^*, \quad \text{and} \quad S = S^*$$

Comme $S = S^*$, il vient $\dot{S} = 0$ et la première équation du système (4.5) donne :

$$0 = -\beta S^* I \implies I = 0.$$

De manière similaire la dernière équation du système (4.5) donne $E = 0$.

Finalement,

Si $\mathcal{R}_{vac} = 1$, le plus grand ensemble positivement invariant contenu dans

l'ensemble $\{(S, V, E, I) \mid \dot{\mathcal{V}}(S, V, E, I) = 0\}$ est l'équilibre sans maladie $\{(S^*, V^*, 0, 0)\}$.

Le principe d'invariance de LaSalle nous permet de dire que l'équilibre sans maladie $(S^*, V^*, 0, 0)$ est attractif, et devient globalement asymptotiquement stable. Ceci achève la preuve \square

5.2 Equilibre endémique : Existence et globale stabilité

Existence de l'équilibre endémique

Nous rappelons la définition suivante.

Définition 5.2.1

Une matrice de Metzler

A est une matrice tel que $A(i, j) \geq 0$ pour tout $i \neq j$.

Dans la suite de ce document nous utiliserons les notations suivantes :

Si x est un vecteur de \mathbb{R}^n alors $\text{diag}(x)$ sera la matrice diagonale $n \times n$, où les éléments de la diagonale sont les composantes du vecteur x .

Nous noterons par $\langle | \rangle$ le produit intérieur usuel dans \mathbb{R}^n .

$\{e_1, \dots, e_n\}$ la base canonique dans \mathbb{R}^n .

Nous noterons par $\mathbf{1}$ le vecteur donné par $\mathbf{1} = (1, \dots, 1)^T = e_1 + \dots + e_n$, où T dénote la transposition.

Nous utilisons la relation d'ordre dans \mathbb{R}^n générée par le cône \mathbb{R}_+^n .

Nous écrivons $x \leq y$, si $y - x \in \mathbb{R}_+^n$

et $x < y$ si $x \leq y$ et $x \neq y$

et finalement $x \ll y$ si $x_i < y_i$ pour tout index i .

Définition 5.2.2

Un équilibre pour le système (4.5) est dit fortement endémique si $(\bar{E}, \bar{I}) \gg 0$.

Ici nous allons prouver qu'il existe un unique équilibre fortement endémique pour le modèle (4.5) si et seulement si $\mathcal{R}_{vac} > 1$.

Si $\bar{P} = (\bar{S}, \bar{V}, \bar{E}, \bar{I})$ est un équilibre endémique pour le système (4.5), alors nous devons avoir $\bar{S}, \bar{V}, \bar{E}, \bar{I} > 0$ plus les égalités suivantes.

$$\begin{cases} \Lambda - (d_S + p)\bar{S} - \beta\bar{S}\bar{I} & = 0 \\ p\bar{S} - d_V\bar{V} - \theta\beta\bar{V}\bar{I} & = 0 \\ \beta\bar{I}(\bar{S} + \theta\bar{V}) - (d_E + \varepsilon)\bar{E} & = 0 \\ \varepsilon\bar{E} - (d_I + \gamma)\bar{I} & = 0. \end{cases} \quad (5.7)$$

Réécrivons le système (5.7) sous une forme matricielle

Pour ce faire, nous écrivons sous forme de matrice les variables et paramètres du modèle comme suit :

$$\begin{aligned} S_M &= (S, V)^T; & I_M &= (E, I)^T; & \Pi &= (\Lambda, 0)^T; & \mu_S &= (d_S, d_V)^T; \\ \mu_I &= (d_E, d_I)^T; & \gamma_I &= (0, \gamma)^T; & q &= (1, 0)^T; & Q &= q \mathbf{1}^T; \\ B &= \begin{bmatrix} 0 & \beta \\ 0 & \theta\beta \end{bmatrix}; & A_S &= \begin{bmatrix} -p & 0 \\ p & 0 \end{bmatrix}; & A_I &= \begin{bmatrix} -\varepsilon & 0 \\ \varepsilon & 0 \end{bmatrix}; \\ \tilde{A}_I &= -\text{diag}(\mu_I + \gamma_I) + A_I = \begin{bmatrix} -d_E - \varepsilon & 0 \\ \varepsilon & -d_I - \gamma \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (5.8)$$

Nous soulignons que \tilde{A}_I est une matrice de Metzler stable, de ce fait et inversible et donc l'inverse satisfait à l'inégalité.

$$-\tilde{A}_I^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{d_E + \varepsilon} & 0 \\ \frac{\varepsilon}{(d_E + \varepsilon)(d_I + \gamma)} & \frac{1}{d_I + \gamma} \end{bmatrix} > 0.$$

Muni de ces notations, le système (5.7) devient

$$\begin{cases} \Pi - \text{diag}(\mu_S) S_M + A_S S_M - \text{diag}(B I_M) S_M & = 0 \\ Q \text{diag}(B I_M) S_M - \text{diag}(\mu_I + \gamma_I) I_M + A_I I_M & = 0. \end{cases} \quad (5.9)$$

comme

$$q \mathbf{1}^T \text{diag}(B I_M) S_M = \langle \mathbf{1} \mid \text{diag}(B I_M) S_M \rangle q = \langle B I_M \mid S_M \rangle q,$$

le système (5.9) se décline en

$$\begin{cases} \Pi - \text{diag}(\mu_S) S_M + A_S S_M - \text{diag}(B I_M) S_M = 0 \\ \langle B I_M | S_M \rangle q + \tilde{A}_I I_M = 0. \end{cases} \quad (5.10)$$

Théorème 17

Il existe un unique équilibre fortement endémique $(\bar{S}, \bar{V}, \bar{E}, \bar{I})$ dans l'orthant positif \mathbb{R}_+^n pour le système (4.5) si et seulement si $\mathcal{R}_{vac} > 1$.

Preuve :

Comme les systèmes (5.7) et (5.10) sont équivalents, il est suffisant de résoudre le système (5.10).

D'après la définition 5.2.2, un équilibre du système (5.10) est fortement endémique si $\bar{I}_M \gg 0$.

Puisque \tilde{A}_I est une matrice de Metzler stable, donc inversible, de la seconde équation de (5.10) nous avons,

$$\bar{I}_M = \langle B \bar{I}_M | \bar{S}_M \rangle (-\tilde{A}_I^{-1}) q. \quad (5.11)$$

En prenant le produit scalaire de q (i.e $\|q\|_2^2 = \langle q | q \rangle = 1$) et en l'appliquant à la seconde équation du système (5.10) nous obtenons,

$$\langle B \bar{I}_M | \bar{S}_M \rangle = -\langle \tilde{A}_I \bar{I}_M | q \rangle. \quad (5.12)$$

En substituant $\langle B \bar{I}_M | \bar{S}_M \rangle$ dans la relation 5.11 par sa valeur de la relation 5.12

nous obtenons,

$$\bar{I}_M = -\langle \tilde{A}_I \bar{I}_M | q \rangle (-\tilde{A}_I^{-1}) q. \quad (5.13)$$

Pour calculer \bar{I}_M il est suffisant de trouver $-\langle \tilde{A}_I \bar{I}_M | q \rangle$. D'autre part en multipliant à gauche par B de part et d'autre, et à droite par \bar{S}_M^{-T} de part et d'autre de l'égalité $\bar{I}_M = \langle B \bar{I}_M | \bar{S}_M \rangle (-\tilde{A}_I^{-1}) q$, nous avons

$$\langle B \bar{I}_M | \bar{S}_M \rangle = \langle B \bar{I}_M | \bar{S}_M \rangle \langle B (-\tilde{A}_I^{-1}) q | \bar{S}_M \rangle.$$

De ce qui précède, nous avons l'expression équivalente suivante :

$$\langle B\bar{I}_M | \bar{S}_M \rangle [1 - \langle B(-\tilde{A}_I^{-1})q | \bar{S}_M \rangle] = 0. \quad (5.14)$$

Ainsi, si $\langle B\bar{I}_M | \bar{S}_M \rangle = 0$, comme \tilde{A}_I est inversible, la seconde équation de (5.10) implique que $\bar{I}_M = 0$, et nous retrouvons l'équilibre sans maladie du système (4.5) calculé précédemment sur la section 4.4.

Par conséquent, pour avoir un équilibre endémique nous devons avoir $\langle B\bar{I}_M | \bar{S}_M \rangle \neq 0$.

Ainsi, si $\langle B\bar{I}_M | \bar{S}_M \rangle \neq 0$, l'équation (5.14) est équivalente à

$$\langle B(-\tilde{A}_I^{-1})q | \bar{S}_M \rangle = 1. \quad (5.15)$$

De la première équation de (5.10) nous avons

$$\bar{S}_M = -[-\text{diag}(\mu_S + B\bar{I}_M) + A_S]^{-1} \Pi. \quad (5.16)$$

En effet $-\text{diag}(\mu_S + B\bar{I}_M) + A_S$ est une matrice de Metzler donc inversible.

et d'après le théorème de Perron-Frobenius l'opposée de son inverse est positive. donc

$$-[-\text{diag}(\mu_S + B\bar{I}_M) + A_S]^{-1} \geq 0$$

Par suite, en multipliant (5.13) par B et en substituant $B\bar{I}_M$ dans (5.16) nous avons,

$$\bar{S}_M = -[-\text{diag}(\mu_S + (-\langle \tilde{A}_I \bar{I}_M | q \rangle) B(-\tilde{A}_I^{-1})q) + A_S]^{-1} \Pi \quad (5.17)$$

Posons,

$$M(x) = -\text{diag}(\mu_S + x B(-\tilde{A}_I^{-1})q) + A_S.$$

Où nous avons : $x = -\langle \tilde{A}_I \bar{I}_M | q \rangle$

Après calcul nous avons,

$$M(x) = \begin{bmatrix} -\frac{(d_E + \varepsilon)(d_S + p) + x \theta \beta}{d_E + \varepsilon} & 0 \\ p & -\frac{d_V (d_E + \varepsilon)(d_I + \gamma) + x \theta \beta \varepsilon}{(d_E + \varepsilon)(d_I + \gamma)} \end{bmatrix}.$$

$M(x)$ est clairement une matrice de Metzler stable ou les composantes dépendent linéairement du nombre positif x .

Elle est de ce fait inversible avec :

$$-M(x)^{-1} = \begin{bmatrix} a_0(x) & 0 \\ b_0(x) & c_0(x) \end{bmatrix} > 0$$

Où

$$\begin{aligned} a_0(x) &= \frac{d_E + \varepsilon}{(d_E + \varepsilon)(d_S + p) + x \theta \beta} \\ b_0(x) &= p a_0(x) c_0(x) \\ c_0(x) &= \frac{(d_E + \varepsilon)(d_I + \gamma)}{d_V (d_E + \varepsilon)(d_I + \gamma) + x \theta \beta \varepsilon}. \end{aligned}$$

Substituant \bar{S}_M dans la relation (6.15) par son expression donnée par (5.17), nous avons

$$\langle B(-\tilde{A}_I^{-1})q \mid -M(x)^{-1} \Pi \rangle = 1.$$

En d'autres termes $-\langle \tilde{A}_I \bar{I}_M \mid q \rangle$ est solution de l'équation

$$H(x) = 1,$$

Où nous avons

$$\begin{aligned} H(x) &= \langle B(-\tilde{A}_I^{-1})q \mid -M(x)^{-1} \Pi \rangle \\ &= \Lambda \langle B(-\tilde{A}_I^{-1})q \mid (a_0(x), b_0(x))^T \rangle \\ &= \frac{\Lambda \theta \beta}{d_E + \varepsilon} \left\langle \left(1, \frac{\varepsilon}{d_I + \gamma} \right)^T \mid (a_0(x), b_0(x))^T \right\rangle \\ &= \frac{\Lambda \theta \beta}{d_E + \varepsilon} a_0(x) \left(1 + \frac{p \varepsilon}{d_I + \gamma} c_0(x) \right) \end{aligned}$$

Finalement nous avons

$$H(x) = \frac{\Lambda \theta \beta}{(d_E + \varepsilon)(d_S + p) + x \theta \beta} \left(1 + \frac{p \varepsilon (d_E + \varepsilon)}{d_V (d_E + \varepsilon) (d_I + \gamma) + x \theta \beta \varepsilon} \right).$$

Nous affirmons que $H(x)$ est une fonction strictement décroissante.

En effet , la dérivée de H est :

$$\begin{aligned} H'(x) = & -\frac{\Lambda (\theta \beta)^2}{[(d_E + \varepsilon)(d_S + p) + x \theta \beta]^2} \left(1 + \frac{p \varepsilon (d_E + \varepsilon)}{d_V (d_E + \varepsilon) (d_I + \gamma) + x \theta \beta \varepsilon} \right) \\ & -\frac{\Lambda \theta \beta}{(d_E + \varepsilon)(d_S + p) + x \theta \beta} \left(\frac{p \theta \beta (\varepsilon)^2 (d_E + \varepsilon)}{[d_V (d_E + \varepsilon) (d_I + \gamma) + x \theta \beta \varepsilon]^2} \right) \end{aligned}$$

Il apparait clairement que la fonction $H'(x)$ est négative ($H'(x) < 0$), et $H(x)$ est une fonction strictement décroissante.

La fonction $H(x)$ satisfait $\lim_{x \rightarrow +\infty} H(x) = 0$.

On aura donc une unique solution positive si et seulement si $H(0) > 1$

Et comme $H(0) = \mathcal{R}_{vac} > 1$.

Nous avons prouver que

$$x = -\langle \tilde{A}_I \bar{I}_M | q \rangle > 0$$

d'une part. D'autre part de la relation 5.13 nous avons

$$\bar{I}_M = \langle B \bar{I}_M | \bar{S}_M \rangle (-\tilde{A}_I^{-1}) q.$$

$-\tilde{A}_I$ est une matrice de Metzler donc l'opposée de son inverse est positive, nous alors $(-\tilde{A}_I^{-1}) q \gg 0$ avec $q > 0$.

Finalement $-\langle \tilde{A}_I \bar{I}_M | q \rangle > 0$ et $(-\tilde{A}_I^{-1}) q \gg 0$ nous donne $\bar{I} \gg 0$

Par ailleurs nous avons $\bar{E} = \frac{d_I + \gamma}{\varepsilon} \bar{I}$, ainsi $\bar{I} \gg 0 \implies \bar{E} \gg 0$

Finalement l'équilibre endémique est fortement endémique [119],
c'est à dire $(\bar{E}, \bar{I}) \gg 0$.

Λ

Globale stabilité de l'équilibre endémique avec la méthode directe de Lyapunov

Nous rappelons ici que l'unique équilibre fortement endémique $\bar{P} = (\bar{S}, \bar{V}, \bar{E}, \bar{I})$ pour le système 4.5 prouvé précédemment est tel que $\bar{S}, \bar{V}, \bar{E}, \bar{I} > 0$ et satisfait aux égalités suivantes :

$$\begin{cases} \Lambda - (d_S + p)\bar{S} - \beta\bar{S}\bar{I} & = 0 \\ p\bar{S} - d_V\bar{V} - \theta\beta\bar{V}\bar{I} & = 0 \\ \beta\bar{I}(\bar{S} + \theta\bar{V}) - (d_E + \varepsilon)\bar{E} & = 0 \\ \varepsilon\bar{E} - (d_I + \gamma)\bar{I} & = 0. \end{cases} \quad (5.18)$$

$$\Lambda = d_S\bar{S} + d_V\bar{V} + \beta\bar{I}(\bar{S} + \theta\bar{V}) \quad (5.19)$$

$$(d_E + \varepsilon)\bar{E} = \beta\bar{I}(\bar{S} + \theta\bar{V}) \quad (5.20)$$

$$\frac{(d_E + \varepsilon)(d_I + \gamma)}{\varepsilon} = \beta(\bar{S} + \theta\bar{V}) \quad (5.21)$$

$$p\bar{S} = d_V\bar{V} + \theta\beta\bar{V}\bar{I} \quad (5.22)$$

Nous allons prouver la globale stabilité de $(\bar{S}, \bar{V}, \bar{E}, \bar{I})$ en se servant d'une fonction de Lyapunov.

Théorème 18

Le point d'équilibre endémique $(\bar{S}, \bar{V}, \bar{E}, \bar{I})$ est globalement asymptotiquement stable dans \mathbb{R}_+^4 .

Preuve

Considérons la fonction de Lyapunov suivante dans \mathbb{R}_+^4 .

$$\mathcal{V}(S, V, E, I) = (S - \bar{S} \ln S) + (V - \bar{V} \ln V) + (E - \bar{E} \ln E) + \left(\frac{d_E + \varepsilon}{\varepsilon} \right) (I - \bar{I} \ln I) \quad (5.23)$$

En dérivant $\mathcal{V}(S, V, E, I)$ le long des solutions de (4.5) nous avons :

$$\begin{aligned}
 \dot{\mathcal{V}}(S, V, E, I) &= \dot{S} - \frac{\bar{S}}{S} \dot{S} + \dot{V} - \frac{\bar{V}}{V} \dot{V} + \dot{E} - \frac{\bar{E}}{E} \dot{E} + \frac{(d_E + \varepsilon)}{\varepsilon} \left(\dot{I} - \frac{\bar{I}}{I} \dot{I} \right) \\
 &= \Lambda - (d_S + p) S - \beta S I \\
 &\quad - \frac{\bar{S}}{S} \Lambda + \frac{\bar{S}}{S} (d_S + p) S + \frac{\bar{S}}{S} \beta S I \\
 &\quad + p S - d_V V - \theta \beta V I - \frac{\bar{V}}{V} p S + \frac{\bar{V}}{V} d_V V + \frac{\bar{V}}{V} \theta \beta V I \\
 &\quad + \beta I (S + \theta V) - (d_E + \varepsilon) E - \beta I (S + \theta V) \frac{\bar{E}}{E} + (d_E + \varepsilon) E \frac{\bar{E}}{E} \\
 &\quad + \left(\frac{d_E + \varepsilon}{\varepsilon} \right) (\varepsilon E - (d_I + \gamma) I) \\
 &\quad - \left(\frac{d_E + \varepsilon}{\varepsilon} \right) \varepsilon E \frac{\bar{I}}{I} + \left(\frac{d_E + \varepsilon}{\varepsilon} \right) (d_I + \gamma) I \frac{\bar{I}}{I}.
 \end{aligned}$$

Développant à nouveau l'expression précédente de $\dot{\mathcal{V}}(S, V, E, I)$ nous obtenons

$$\begin{aligned}
 \dot{\mathcal{V}}(S, V, E, I) &= \Lambda - d_S S - \frac{\bar{S}}{S} \Lambda + d_S \bar{S} + p \bar{S} + \beta \bar{S} I \\
 &\quad - d_V V - p S \frac{\bar{V}}{V} + d_V \bar{V} + \theta \beta I \bar{V} - \beta I (S + \theta V) \frac{\bar{E}}{E} + (d_E + \varepsilon) \bar{E} \\
 &\quad - \left(\frac{d_E + \varepsilon}{\varepsilon} \right) (d_I + \gamma) I - (d_E + \varepsilon) E \frac{\bar{I}}{I} + \left(\frac{d_E + \varepsilon}{\varepsilon} \right) (d_I + \gamma) \bar{I}.
 \end{aligned}$$

5.2. EQUILIBRE ENDÉMIQUE : EXISTENCE ET GLOBALE STABILITÉ

En exploitant les relations (5.19) et (5.22), $\dot{\mathcal{V}}(S, V, E, I)$ devient :

$$\begin{aligned}
 \dot{\mathcal{V}}(S, V, E, I) &= d_S \bar{S} - d_S S - d_S \frac{\bar{S}^2}{S} + d_S \bar{S} \\
 &\quad + d_V \bar{V} - \frac{\bar{S}}{S} d_V \bar{V} + d_V \bar{V} \\
 &\quad - d_V V + d_V \bar{V} + d_V \bar{V} - d_V \frac{\bar{V}^2}{V} \frac{S}{\bar{S}} + \beta \bar{I} (\bar{S} + \theta \bar{V}) \\
 &\quad - \frac{\bar{S}^2}{S} \beta \bar{I} - \beta \bar{I} \theta \bar{V} \frac{\bar{S}}{S} + \theta \beta \bar{V} \bar{I} + \beta \bar{S} I - \theta \beta \frac{\bar{V}^2}{V} \bar{I} \frac{S}{\bar{S}} \\
 &\quad + \theta \beta I \bar{V} - \beta I (S + \theta V) \frac{\bar{E}}{E} + \beta I (\bar{S} + \theta \bar{V}). \\
 &\quad - \left(\frac{d_E + \varepsilon}{\varepsilon} \right) (d_I + \gamma) I - (d_E + \varepsilon) E \frac{\bar{I}}{I} + \left(\frac{d_E + \varepsilon}{\varepsilon} \right) (d_I + \gamma) \bar{I}.
 \end{aligned}$$

Exploitant à present les relations (5.20) et (5.21), $\dot{\mathcal{V}}(S, V, E, I)$ devient :

$$\begin{aligned}
 \dot{\mathcal{V}}(S, V, E, I) &= d_S \bar{S} \left(2 - \frac{S}{\bar{S}} - \frac{\bar{S}}{S} \right) + d_V \bar{V} \left(3 - \frac{\bar{S}}{S} - \frac{V}{\bar{V}} - \frac{\bar{V}}{V} \frac{S}{\bar{S}} \right) \\
 &\quad + 3\beta \bar{I} \bar{S} - \frac{\bar{S}^2}{S} \beta \bar{I} - \beta \bar{I} \bar{S} \frac{E}{E} \frac{\bar{I}}{I} - \beta I S \frac{\bar{E}}{E} \\
 &\quad + 3\beta \bar{I} \theta \bar{V} + \theta \beta \bar{V} \bar{I} - \theta \beta \frac{\bar{V}^2}{V} \frac{S}{\bar{S}} - \beta I \theta V \frac{\bar{E}}{E} - \beta \bar{I} \theta \bar{V} \frac{E}{E} \frac{\bar{I}}{I} \\
 &\quad - \beta \bar{I} \theta \bar{V} \frac{\bar{S}}{S} - \left(\frac{d_E + \varepsilon}{\varepsilon} \right) (d_I + \gamma) I + \beta I (\bar{S} + \theta \bar{V}).
 \end{aligned}$$

De la relation (5.21) nous avons ;

$$\beta I (\bar{S} + \theta \bar{V}) - \left(\frac{d_E + \varepsilon}{\varepsilon} \right) (d_I + \gamma) I = 0.$$

Arrangeant correctement la dernière expression de Ψ comme combinaison lineaire de $d_S \bar{S}$, $d_V \bar{V}$, $\beta \bar{I} \bar{S}$, et $\beta \bar{I} \bar{\theta} \bar{V}$ nous obtenons l'expression suivante :

$$\begin{aligned}
 \Psi &= d_S \bar{S} \left(2 - \frac{S}{\bar{S}} - \frac{\bar{S}}{S} \right) \\
 &+ d_V \bar{V} \left(3 - \frac{\bar{S}}{S} - \frac{V}{\bar{V}} - \frac{\bar{V} S}{V \bar{S}} \right) \\
 &+ \beta \bar{I} \bar{S} \left(3 - \frac{\bar{S}}{S} - \frac{I S \bar{E}}{\bar{I} \bar{S} \bar{E}} - \frac{E \bar{I}}{\bar{E} \bar{I}} \right) \\
 &+ \theta \beta \bar{I} \bar{V} \left(4 - \frac{\bar{V} S}{V \bar{S}} - \frac{I V \bar{E}}{\bar{I} \bar{V} \bar{E}} - \frac{E \bar{I}}{\bar{E} \bar{I}} - \frac{\bar{S}}{S} \right).
 \end{aligned} \tag{5.24}$$

Nous remarquons que

$$\begin{aligned}
 \frac{S \bar{S}}{\bar{S} S} &= 1 \\
 \frac{\bar{S} V \bar{V} S}{\bar{S} \bar{V} \bar{V} \bar{S}} &= 1 \\
 \frac{\bar{S} I S \bar{E} E \bar{I}}{\bar{S} \bar{I} \bar{S} \bar{E} \bar{E} \bar{I}} &= 1 \\
 \frac{\bar{V} S I V \bar{E} E \bar{I} \bar{S}}{\bar{V} \bar{S} \bar{I} \bar{V} \bar{E} \bar{E} \bar{I} \bar{S}} &= 1.
 \end{aligned} \tag{5.25}$$

Et en utilisant l'inégalité entre la moyenne arithmétique et la moyenne géométrique donnée par l'expression suivante,

$$a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n \geq n \sqrt[n]{a_1 \cdot a_2 \cdot a_3 \cdot \dots \cdot a_n}, \quad a_1, a_2, a_3, \dots, a_n \geq 0$$

Nous pouvons conclure que,

$$\begin{aligned}
 2 - \frac{S}{\bar{S}} - \frac{\bar{S}}{S} &\leq 0 \\
 3 - \frac{\bar{S}}{S} - \frac{V}{\bar{V}} - \frac{\bar{V}}{V} \frac{S}{\bar{S}} &\leq 0 \\
 3 - \frac{\bar{S}}{S} - \frac{I}{\bar{I}} \frac{S}{\bar{S}} \frac{\bar{E}}{E} - \frac{E}{\bar{E}} \frac{\bar{I}}{I} &\leq 0 \\
 4 - \frac{\bar{V}}{V} \frac{S}{\bar{S}} - \frac{I}{\bar{I}} \frac{V}{\bar{V}} \frac{\bar{E}}{E} - \frac{E}{\bar{E}} \frac{\bar{I}}{I} - \frac{\bar{S}}{S} &\leq 0.
 \end{aligned} \tag{5.26}$$

Les inégalités précédentes assurent que

$\dot{\mathcal{V}} \leq 0$, Et en utilisant le théorème de stabilité de Lyapunov, nous concluons que

$\bar{P} = (\bar{S}, \bar{V}, \bar{E}, \bar{I})$ est stable.

Pour achever la preuve du précédent théorème , il nous reste à prouver que $\bar{P} = (\bar{S}, \bar{V}, \bar{E}, \bar{I})$ est asymptotiquement stable.

pour ce faire il suffit de montrer que

que $\dot{\mathcal{V}}$ s'annule seulement au point $\bar{P} = (\bar{S}, \bar{V}, \bar{E}, \bar{I})$ En effet :

$$\begin{aligned}
 \dot{V}(S, V, E, I) = & d_S \bar{S} \left(2 - \frac{S}{\bar{S}} - \frac{\bar{S}}{S} \right) + d_V \bar{V} \left(3 - \frac{\bar{S}}{S} - \frac{V}{\bar{V}} - \frac{\bar{V}}{V} \frac{S}{\bar{S}} \right) \\
 & + \beta \bar{I} \bar{S} \left(3 - \frac{\bar{S}}{S} - \frac{I}{\bar{I}} \frac{S}{\bar{S}} \frac{\bar{E}}{E} - \frac{E}{\bar{E}} \frac{\bar{I}}{I} \right) \\
 & + \theta \beta \bar{I} \bar{V} \left(4 - \frac{\bar{V}}{V} \frac{S}{\bar{S}} - \frac{I}{\bar{I}} \frac{V}{\bar{V}} \frac{\bar{E}}{E} - \frac{E}{\bar{E}} \frac{\bar{I}}{I} - \frac{\bar{S}}{S} \right).
 \end{aligned} \tag{5.27}$$

Posons

$$A = 2 - \frac{S}{\bar{S}} - \frac{\bar{S}}{S}$$

$$B = 3 - \frac{\bar{S}}{S} - \frac{V}{\bar{V}} - \frac{\bar{V}}{V} \frac{S}{\bar{S}}$$

$$C = 3 - \frac{\bar{S}}{S} - \frac{I}{\bar{I}} \frac{S}{\bar{S}} \frac{\bar{E}}{E} - \frac{E}{\bar{E}} \frac{\bar{I}}{I}$$

$$D = 4 - \frac{\bar{V}}{V} \frac{S}{\bar{S}} - \frac{I}{\bar{I}} \frac{V}{\bar{V}} \frac{\bar{E}}{E} - \frac{E}{\bar{E}} \frac{\bar{I}}{I} - \frac{\bar{S}}{S}$$

De la relation (5.26) il est clair que ;

$$(\dot{\mathcal{V}} = 0) \iff (A = B = C = D = 0)$$

or $(A = B = C = D = 0) \iff (S = \bar{S}, \quad V = \bar{V}, \quad E = \bar{E}, \quad I = \bar{I})$)

Conclusion. la méthode de Lyapunov directe nous permet de dire que le point d'équilibre endémique $\bar{P} = (\bar{S}, \bar{V}, \bar{E}, \bar{I})$ est globalement asymptotiquement stable.

Chapitre 6

Conclusion et Perspectives

Dans ce travail de thèse il a été question dans un premier temps, d'évaluer la distance séparant le jacobien J calculer au point d'équilibre sans maladie (DFE) respectivement a la stabilité (instabilité) d'une matrice de Metzler diagonale d'ordre 2, selon que J soit respectivement instable (instable).

Comme récapulatif nous avons eu, pour la norme de Frobenious

1. La distance à l'instabilité d'une matrice diagonale

$$A = \begin{bmatrix} -a & 0 \\ 0 & -b \end{bmatrix}$$

avec $a > 0, b > 0$ est $d_F(A, U) = \min(a, b)$

2. La distance a la stabilite d'une matrice diagonale

$$A = \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & -b \end{bmatrix} \text{ avec } a > 0, b > 0$$

est,

$$d_F(A, \Delta) = \begin{cases} a & \text{si } b \geq a \\ \frac{\sqrt{3a^2 + 3b^2 - 2ab}}{2} & \text{si } a > b \end{cases} \quad (6.1)$$

Par la suite nous nous sommes intéressé a la robustesse des seuils épidémiologiques, nombre de reproduction de base \mathcal{R}_0 et nombre de reproduction type \mathcal{T} .

Par la suite nous avons apprécié la robustesse de \mathcal{R}_0 , et de \mathcal{T} utilisant deux modèles épidémiologiques (4.2), (5.22), et à chaque fois les paramètres composantes du jacobien donné ont été des valeurs arbitraires choisies, mais qui gardaient néanmoins les propriétés du système

. Ensuite nous avons calculé d'une part le \mathcal{R}_0 correspondant et d'autre part calculé la distance séparant le système à la stabilité (instabilité).

Et avons pu montrer que ces deux indicateurs de stabilité sont indépendants aux moyens des quatre situations ci dessous.

- $\mathcal{R}_0 > 1$, constant et distance de $J(DFE)$ à la stabilité très petite
- \mathcal{R}_0 très grand mais la distance de $J(DFE)$ à la stabilité très petite
- \mathcal{R}_0 proche de 1 par valeurs positives et la distance de $J(DFE)$ à la stabilité très petite
- $\mathcal{R}_0 < 1$ et proche de 0 et distance de J à l'instabilité très petite

Nous avons obtenus des résultats similaires pour le nombre de reproduction type \mathcal{T} .

En dernier lieu nous avons partie parlé d'un modèle déterministe $SVEIR$, où S représentait les susceptibles, V les vaccinés, E les latents, I , les infectieux et R les immuns. Dans ce modèle les vaccinés sont considérés comme des susceptibles dans une moindre mesure dû au fait que le vaccin ne garanti pas une immunité totale.

Le nombre de reproduction de base \mathcal{R}_{vac} qui assure l'existence et l'unicité de l'équilibre endémique a été déterminée :

$$\mathcal{R}_{vac} = \mathcal{R}_0 \left(1 + \frac{\theta p}{d_V} \right) \left(\frac{d_S}{d_S + p} \right). \quad (6.2)$$

La globale stabilité de l'équilibre endémique a été établie en utilisant les techniques de Lyapunov quand $\mathcal{R}_{vac} > 1$. Plus précisément la méthode directe de Lyapunov a été utilisé celle qui consiste à exhiber une fonction de Lyapunov pour démontrer

la globale stabilité de l'équilibre endémique.

Et pour ce faire nous avons considéré la fonction de Lyapunov suivante dans \mathbb{R}_+^4 .

$$\mathcal{V}(S, V, E, I) = (S - \bar{S} \ln S) + (V - \bar{V} \ln V) + (E - \bar{E} \ln E) + \left(\frac{d_E + \varepsilon}{\varepsilon} \right) (I - \bar{I} \ln I) \quad (6.3)$$



Bibliographie

- [1] C. ABOKY, G. SALLET, AND J.-C. VIVALDA, *Observers for Lipschitz nonlinear systems*, *Internat. J. Control*, 75 (2002), pp. 204–212.
- [2] P. ABSIL, R. SEPULCHRE, AND R. MAHONY, *Continuous-time subspace flows related to the symmetric eigenproblem*, *Pac. J. Optim*, 4 (2008), pp. 179–194.
- [3] P. AUGER, E. KOUOKAM, G. SALLET, M. TCHUENTE, AND B. TSANOU, *The ross-macdonald model in a patchy environment*, *Mathematical biosciences*, 216 (2008), pp. 123–131.
- [4] E. BERETTA AND Y. TAKEUCHI, *Global asymptotic stability of Lotka-Volterra diffusion models with continuous time delay*, *SIAM Journal on Applied Mathematics*, 48 (1988), pp. 627–651.
- [5] A. BERMAN AND R. PLEMMONS, *Nonnegative matrices in the mathematical sciences*, Society for Industrial Mathematics, 1994.
- [6] A. BERMAN AND R. J. PLEMMONS, *Nonnegative matrices in the mathematical sciences.*, SIAM, 1994.
- [7] ———, *Nonnegative matrices in the mathematical sciences*, vol. 9 of *Classics in Applied Mathematics*, Society for Industrial and Applied Mathematics (SIAM), Philadelphia, PA, 1994. Revised reprint of the 1979 original.
- [8] O. BERNARD, G. SALLET, AND A. SCIANDRA, *Nonlinear observers for a class of biological systems. application to validation of a phytoplanktonic growth model*, *IEEE Trans. Automat. Control*, 43 (1998), pp. 1056–1066.

- [9] G. BESANCON AND H. HAMMOURI, *On Uniform Observation of Nonuniformly Stable Systems.*, Systems & Control Letters, 29 (1996), pp. 9–19.
- [10] D. BESTLE AND M. ZEITZ, *A canonical form observer design for nonlinear time-variable systems*, Int. J. Control, 38 (1983), pp. 419–431.
- [11] S. BITTANTI, A. J. LAUB, AND J. WILLEMS, *The Riccati Equation*, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, 1991.
- [12] E. BONABEAU, G. THERAULAZ, AND J. DENEUBOURG, *Quantitative study of the fixed threshold model for the regulation of division of labour in insect societies*, Proceedings of the Royal Society of London. Series B : Biological Sciences, 263 (1996), pp. 1565–1569.
- [13] J.-M. BONY, *Principe du maximum, inégalité de Harnack et unicité du problème de Cauchy pour les opérateurs elliptiques dégénérés*, Ann. Inst. Fourier (Grenoble), 19 (1969), pp. 277–304 xii.
- [14] B. BONZI, A. FALL, A. IGGIDR, AND G. SALLET, *Stability of differential susceptibility and infectivity epidemic models*, Journal of mathematical biology, (2010), pp. 1–26.
- [15] B. BONZI, A. FALL, A. IGGIDR, AND G. SALLET, *Stability of differential susceptibility and infectivity epidemic models*, J. Math. Biol., 62 (2011), pp. 39–64. To appear d.o.i 10.1007/s00285-010-0327-y.
- [16] S. BOYD, V. BALAKRISHNAN, AND P. KABAMBA, *A Bisection Method for Computing the H_∞ Norm of a Transfer Matrix and Related Problems*, Math. Control Signals Systems, 2 (1989), pp. 207–219.
- [17] F. BRAUER, P. VAN DEN DRIESSCHE, J. WU, AND L. ALLEN, *Mathematical epidemiology*, no. 1945, Springer Verlag, 2008.
- [18] R. BYERS, *A Bisection Method for measuring the distance of a stable matrix to the unstable matrices*, SIAM J. Sci. Statist. Comput., 9 (1988), pp. 875–881.
- [19] R. BYERS, *A bisection method for measuring the distance of a stable matrix to the unstable matrices*, SIAM J. Sci. Stat. Comput, 9 (1988), pp. 875–881.

- [20] R. BYERS, *A bisection method for measuring the distance of a stable matrix to the unstable matrices*, SIAM J. Sci. Statist. Comput., 9 (1988), pp. 875–881.
- [21] Y. CHERRUAULT, *Modèles et méthodes mathématiques pour les sciences du vivant*, Presses universitaires de France, 1998.
- [22] Y. M. CHO AND R. RAJAMANI, *A Systematic Approach to Adaptive Observer Synthesis for Non linear Systems*, IEEE Trans. Automat. Control, 42 (1997), pp. 831–847.
- [23] T. DAVENPORT AND J. BECK, *Getting” attention*, Harvard Business Review, (2000), p. 119.
- [24] J. W. DEMMEL, *A Counterexample for two conjecture about stability*, IEEE Trans. Autom. Control, 32 (1987), pp. 340–342.
- [25] J. W. DEMMEL, *On condition numbers and the distance to the nearest ill-posed problem*, Numer. Math., 51 (1987), pp. 251–289.
- [26] J. W. DEMMEL, *Applied numerical algebra*, SIAM Philadelphia, 1997.
- [27] O. DIEKMANN AND J. HEESTERBEEK, *Mathematical epidemiology of infectious diseases*, Wiley Chichester, 2000.
- [28] O. DIEKMANN, J. HEESTERBEEK, AND J. METZ, *On the definition and the computation of the basic reproduction ratio r_0 in models for infectious diseases in heterogeneous populations*, Journal of Mathematical Biology, 28 (1990), pp. 365–382.
- [29] O. DIEKMANN AND J. A. P. HEESTERBEEK, *Mathematical epidemiology of infectious diseases*, Wiley Series in Mathematical and Computational Biology, John Wiley & Sons Ltd., Chichester, 2000. Model building, analysis and interpretation.
- [30] O. DIEKMANN, J. A. P. HEESTERBEEK, AND J. A. J. METZ, *On the definition and the computation of the basic reproduction ratio R_0 in models for infectious diseases in heterogeneous populations*, J. Math. Biol., 28 (1990), pp. 365–382.

- [31] A. D'ONOFRIO, *On pulse vaccination strategy in the SIR epidemic model with vertical transmission*, Applied Mathematics Letters, 18 (2005), pp. 729–732.
- [32] J. DOYLE, K. GLOVER, P. KHARGONEKAR, AND B. FRANCIS, *State-Space Solutions to Standard H_2 and H_∞ Control Problems*, IEEE Trans. Automat. Control, 34 (1989), pp. 166–170.
- [33] R. EISING, *Between controllable and uncontrollable*, Systems & Control Letters, 4 (1984), pp. 263–264.
- [34] A. FALL, A. IGGIDR, G. SALLET, AND J. J. TEWA, *Epidemiological models and Lyapunov functions, volume = 2, year = 2007, bdsk-file-1 = YnB-saXN0MDDUAQIDBAUIJidUJHRvcFgkb2JqZWN0c1gkdmVyc2lvblkkYXJjaGl2ZXLRBgdUcm*, Math. Model. Nat. Phenom., pp. 55–73.
- [35] B. A. FRANCIS, *A course in \mathcal{H}^∞ control theory*, vol. 88 of Lectures Notes in Control and Information Sciences, Springer-verlag, 1987.
- [36] J. GAUTHIER, H. HAMMOURI, AND S. OTHMAN, *A Simple Observer for Nonlinear Systems*, IEEE Trans. Automat. Control, 37 (1992), pp. 875–880.
- [37] J. GAUTHIER AND I. KUPKA, *Observability and Observers for Nonlinear Systems*, SIAM J. Control Optim, 32 (1994), pp. 975–994.
- [38] S. K. GODUNOV AND M. SADKANE, *Computation of pseudospectra via spectral projectors*, Linear Algebra Appl., 279 (1998), pp. 163–175.
- [39] G. GOLUB AND C. VAN LOAN, *Matrix computations*, vol. 3, Johns Hopkins University Press, 1996.
- [40] G. H. GOLUB AND C. F. VAN LOAN, *Matrix Computations*, John Hopkins University Press, Baltimore and London, 1993.
- [41] M. GREEN AND D. LIMEBEER, *Linear Robust Control*, Prentice Hall, New Jersey, 1995.
- [42] A. B. GUMEL, C. MCCLUSKEY, AND J. WATMOUGH, *An SVEIR model for assessing potential impact of an imperfect anti-SARS vaccine*, Math. Biosci. Eng, 3 (2006), p. 485.

- [43] W. HAHN, *Stability of motion. translated from the german manuscript by arne p. baartz*, Die Grundlehren der mathematischen Wissenschaften, 138 (1967).
- [44] J. HALE, *Ordinary differential equations*, Krieger, 1980.
- [45] ———, *Ordinary differential equations, re krieger p*, Co. Huntington, New York, (1980).
- [46] J. HEESTERBEEK, *A brief history of R_0 and a recipe for its calculation*, Acta Biotheoretica, 50 (2002), pp. 189–204.
- [47] J. HEESTERBEEK AND K. DIETZ, *The concept of R_0 in epidemic theory*, Statistica Neerlandica, 50 (1996), pp. 89–110.
- [48] J. HEESTERBEEK AND M. ROBERTS, *The type-reproduction number t in models for infectious disease control*, Mathematical biosciences, 206 (2007), pp. 3–10.
- [49] J. A. P. HEESTERBEEK, *A brief history of R_0 and a recipe for its calculation*, Acta Biotheoretica, 50 (2002), pp. 189–204.
- [50] J. A. P. HEESTERBEEK AND K. DIETZ, *The concept of R_0 in epidemic theory*, Statist. Neerlandica, 50 (1996), pp. 89–110.
- [51] J. A. P. HEESTERBEEK AND M. ROBERTS, *The type-reproduction number t in models for infectious disease control*, Math. Biosci., (2006).
- [52] J. HEFFERNAN, R. SMITH, AND L. WAHL, *Perspectives on the basic reproductive ratio*, Journal of the Royal Society Interface, 2 (2005), pp. 281–293.
- [53] H. W. HETHCOTE, *The mathematics of infectious diseases*, SIAM Rev., 42 (2000), pp. 599–653 (electronic).
- [54] G. HEWER AND C. KENNEY, *The sensitivity of the stable Lyapunov equation*, SIAM J. Control Optim., 26 (1988), pp. 321–344.
- [55] N. J. HIGHAM, *Matrix nearness problems and applications*, in Applications of matrix theory (Bradford, 1988), vol. 22 of Inst. Math. Appl. Conf. Ser. New Ser., Oxford Univ. Press, New York, 1989, pp. 1–27.
- [56] D. HINRICHSSEN AND A. PRITCHARD, *Stability radii of linear systems*, Systems & Control Letters, 7 (1986), pp. 1–10.

- [57] D. HINRICHSSEN AND A. J. PRITCHARD, *Stability radii of linear systems*, Systems Control Lett., 7 (1986), pp. 1–10.
- [58] —, *Stability radius for structured perturbations and the algebraic Riccati equation*, Systems Control Lett., 8 (1986), pp. 105–113.
- [59] —, *A note on some differences between real and complex stability radii*, Systems Control Lett., 14 (1990), pp. 401–408.
- [60] —, *Destabilization by output feedback*, Differential Integral Equations, 5 (1992), pp. 357–386.
- [61] —, *On spectral variations under bounded real matrix perturbations*, Numer. Math., 60 (1992), pp. 509–524.
- [62] D. HINRICHSSEN AND A. J. PRITCHARD, *Mathematical systems theory I*, vol. 48 of Texts in Applied Mathematics, Springer, Heidelberg, 2010. Modelling, state space analysis, stability and robustness, Corrected reprint [of MR2116013].
- [63] D. HINRICHSSEN, A. J. PRITCHARD, AND S. B. TOWNLEY, *Riccati equation approach to maximizing the complex stability radius by state feedback*, Internat. J. Control, 52 (1990), pp. 769–794.
- [64] M. HIRSCH, *The dynamical systems approach to differential equations*, AMERICAN MATHEMATICAL SOCIETY, 11 (1984).
- [65] M. HIRSCH AND S. SMALE, *Differential Equations, Dynamical Systems and Linear Algebra*, Acad. Press, 1974.
- [66] M. W. HIRSCH AND H. L. SMITH, *Monotone dynamical systems*, in Handbook of differential equations : ordinary differential equations. Vol. II, Elsevier B. V., Amsterdam, 2005, pp. 239–357.
- [67] R. HORN AND C. JOHNSON, *Matrix analysis*, Cambridge University Express, (1985).
- [68] R. A. HORN AND C. R. JOHNSON, *Matrix analysis*, Cambridge University Press, Cambridge, 1985.

- [69] P. HUBER, *Robust statistics*. 1981.
- [70] J. HYMAN AND J. LI, *Differential susceptibility epidemic models*, Journal of mathematical biology, 50 (2005), pp. 626–644.
- [71] —, *Differential susceptibility and infectivity epidemic models*, Mathematical Biosciences and Engineering, 3 (2006), p. 89.
- [72] J. HYMAN, J. LI, AND E. STANLEY, *The differential infectivity and staged progression models for the transmission of hiv*, Mathematical biosciences, 155 (1999), pp. 77–110.
- [73] J. JACQUEZ, C. SIMON, AND J. KOOPMAN, *The reproduction number in deterministic models of contagious diseases*, Comments Theor. Biol, 2 (1991), pp. 159–209.
- [74] J. A. JACQUEZ AND C. P. SIMON, *Qualitative theory of compartmental systems*, SIAM Rev., 35 (1993), pp. 43–79.
- [75] Y. JIANG, H. WEI, X. SONG, L. MEI, G. SU, AND S. QIU, *Global attractivity and permanence of a delayed SVEIR epidemic model with pulse vaccination and saturation incidence*, Applied Mathematics and Computation, 213 (2009), pp. 312–321.
- [76] R. KACKAR, *Off-line quality control, parameter design, and the taguchi method*, Journal of Quality Technology, 17 (1985), pp. 176–188.
- [77] W. KAHAN, *Numerical linear algebra*, Canad. Math. Bull, 9 (1966), pp. 757–801.
- [78] T. KAILATH, *Linear Systems*, Prentice Hall, Englewood Cliffs,N.J., 1980.
- [79] J. KAMGANG AND G. SALLET, *Computation of threshold conditions for epidemiological models and global stability of the disease-free equilibrium (dfe)*, Mathematical biosciences, 213 (2008), pp. 1–12.
- [80] J. KAMGANG AND G. SALLET, *Computation of threshold conditions for epidemiological models and global stability of the disease free equilibrium.,0*, Math. Biosci., 213 (2008), pp. 1–12.

- [81] J. KAUTSKY, N. NICHOLS, AND P. V. DOOREN, *Robust pole assignment in linear state feedback*, Int. J. Control, 41 (1985), pp. 1129–1155.
- [82] C. KENNEY AND G. HEWER, *The sensitivity of the algebraic and differential Riccati equations*, SIAM J. Control Optim., 28 (1990), pp. 50–69.
- [83] A. KOROBENIKOV AND P. MAINI, *A lyapunov function and global properties for sir and seir epidemiological models with nonlinear incidence*, Math. Biosci. Eng, 1 (2004), pp. 57–60.
- [84] S. R. KOU, D. L. ELLIOTT, AND T. J. TARN, *Exponential observers for nonlinear dynamic systems*, Information and Control, 29 (1975), pp. 204–216.
- [85] V. KUCERA, *A contribution to matrix quadratic equations*, IEEE Trans. Automat. Control, 17 (1972), pp. 344–347.
- [86] P. LANCASTER AND L. RODMAN, *Algebraic Riccati Equations*, Clarendon Press, Oxford, 1995.
- [87] H. J. LANDAU, *Loss in unstable resonators*, J. Opt. Soc. Amer., 66 (1976), pp. 525–529.
- [88] J. LASALLE, *Stability of nonautonomous systems*, Nonlinear Anal., Theory, Methods Appl., 1 (1976), pp. 83–91.
- [89] —, *Stability theory and invariance principles*, in Dynamical Systems, An International Symposium, vol. 1, 1976, pp. 211–222.
- [90] J. P. LASALLE, *The stability of dynamical systems*, Society for Industrial and Applied Mathematics, Philadelphia, Pa., 1976. With an appendix : “Limiting equations and stability of nonautonomous ordinary differential equations” by Z. Artstein, Regional Conference Series in Applied Mathematics.
- [91] M. LI AND J. MULDOWNY, *On ra smith’s autonomous convergence theorem*, Rocky Mountain J. Math, 25 (1995), pp. 365–379.
- [92] —, *A geometric approach to global-stability problems*, SIAM Journal on Mathematical Analysis, 27 (1996), p. 1070.
- [93] —, *Phase asymptotic semiflows, poincare’s condition, and the existence of stable limit cycles*, Journal of differential equations, 124 (1996), pp. 425–448.

- [94] M. Y. LI AND J. S. MULDOWNNEY, *Global stability for the SEIR model in epidemiology*, Math. Biosci., 125 (1995), pp. 155–164.
- [95] D. G. LUENBERGER, *Introduction to dynamic systems. Theory, models, and applications.*, John Wiley & Sons Ltd., 1979.
- [96] F. PAGANINI, Z. WANG, J. DOYLE, AND S. LOW, *Congestion control for high performance, stability, and fairness in general networks*, Networking, IEEE/ACM Transactions on, 13 (2005), pp. 43–56.
- [97] R. V. PATEL AND M. TODA, *Quantitative measure of robustness for multi-variable systems*, in Proc. 1980 JACC, 1980.
- [98] I. PETERSEN, B. ANDERSON, AND E. JONCKHEERE, *A first principles solution to the non-singular H^∞ control problem*, Int. J. Robust Nonlinear Control, 1 (1991), pp. 171–185.
- [99] J. POMEROL AND P. BRÉZILLON, *About some relationships between knowledge and context*, Modeling and Using Context, (2001), pp. 461–464.
- [100] S. RAGHAVAN AND J. HEDRICK, *Observer design for a class of nonlinear systems*, Int. J. Control, 59 (1994), pp. 515–528.
- [101] R. RAJAMANI, *Observers for Lipschitz Nonlinear Systems*, IEEE Trans. Automat. Control, 43 (1998), pp. 397–401.
- [102] R. RAJAMANI AND Y. M. CHO, *existence and design of observers for nonlinear systems : relation to distance of unobservability*, Int. J. Control, 69 (1998), pp. 717–731.
- [103] M. ROBERTS, *The pluses and minuses of r0. jr soc*, Interface, 4 (2007), pp. 949–961.
- [104] M. ROBERTS AND J. HEESTERBEEK, *A new method for estimating the effort required to control an infectious disease*, Proceedings of the Royal Society of London. Series B : Biological Sciences, 270 (2003), p. 1359.
- [105] R. ROCKAFELLAR, *Lagrange multipliers and optimality*, SIAM review, 35 (1993), pp. 183–238.

- [106] S. ROSS, *The prevention of malaria*, Dutton, 1910.
- [107] M. ROY, *Recent diversification in african greenbuls (pycnonotidae : Andropadus) supports a montane speciation model*, Proceedings of the Royal Society of London. Series B : Biological Sciences, 264 (1997), pp. 1337–1344.
- [108] P. SEIBERT AND R. SUAREZ, *Global stabilization of nonlinear cascade systems*, Syst. Control Lett., 14 (1990), pp. 347–352.
- [109] M. A. SHAYMAN, *Geometry of the algebraic Riccati equation*, SIAM J. Control Optim., 21 (1983), pp. 375–394.
- [110] —, *Geometry of the algebraic Riccati equation, part II*, SIAM J. Control Optim., 21 (1983), pp. 395–409.
- [111] H. SMITH, *Monotone dynamical systems. An introduction of the theory of competitive and cooperative systems.*, AMS, Providence, R.I., 1995.
- [112] —, *Monotone dynamical systems : An introduction to the theory of competitive and cooperative systems*, AMS Bookstore, 2008.
- [113] N. SON AND D. HINRICHSSEN, *Robust stability of positive continuous time systems*, Numer. Funct. Anal. and Optim., 17 (1996), pp. 649–659.
- [114] N. SON AND D. HINRICHSSEN, *Robust stability of positive continuous time systems*, Numerical functional analysis and optimization, 17 (1996), pp. 649–659.
- [115] M. SPONG, *Modeling and control of elastic joint robots*, ASME Journal of Dynamical Systems, Measurement and Control, 109 (1987), pp. 310–319.
- [116] G. W. STEWART, *Introduction to matrix computations*, Academic Press [A subsidiary of Harcourt Brace Jovanovich, Publishers], New York-London, 1973. Computer Science and Applied Mathematics.
- [117] F. THAU, *Observing the state of nonlinear dynamic systems*, Int. J. Control, 17 (1973), pp. 471–479.
- [118] H. THIEME, *Global stability of the endemic equilibrium in infinite dimension : Lyapunov functions and positive operators*, J. Differ. Equations, 250 (2011), pp. 3772–3801.

- [119] H. R. THIEME, *Mathematics in population biology*, Princeton Series in Theoretical and Computational Biology, Princeton University Press, Princeton, NJ, 2003.
- [120] —, *Spectral bound and reproduction number for infinite-dimensional population structure and time heterogeneity*, SIAM J. Appl. Math., 70 (2009), pp. 188–211.
- [121] L. N. TREFETHEN, *Approximation theory and numerical linear algebra*, in Algorithms for approximation, II (Shrivenham, 1988), Chapman and Hall, London, 1990, pp. 336–360.
- [122] —, *Numerical linear algebra*, SIAM Philadelphia, 1997.
- [123] L. N. TREFETHEN, *Pseudospectra of linear operators*, SIAM Rev., 39 (1997), pp. 383–406.
- [124] L. N. TREFETHEN AND M. EMBREE, *Spectra and pseudospectra*, Princeton University Press, Princeton, NJ, 2005. The behavior of nonnormal matrices and operators.
- [125] N. TREFETHEN, *Nonhermitian systems and pseudospectra*, in Seminaire : Equations aux Dérivées Partielles. 2005–2006, Sémin. Équ. Dériv. Partielles, École Polytech., Palaiseau, 2006, pp. Exp. No. X, 13.
- [126] H. L. TRENTELMAN, *When does the algebraic Riccati equation has a negative semi-definite solution ?*, in Open Problems in Mathematical Systems and Control Theory, V. D.Blondel, E. D. Sontag, M. Vidyasagar, and J. Willems, eds., Springer Verlag, 1999, pp. 229–239.
- [127] P. VAN DEN DRIESSCHE AND J. WATMOUGH, *reproduction numbers and sub-threshold endemic equilibria for compartmental models of disease transmission*, Math. Biosci., 180 (2002), pp. 29–48.
- [128] P. VAN DEN DRIESSCHE AND J. WATMOUGH, *Reproduction numbers and sub-threshold endemic equilibria for compartmental models of disease transmission*, Mathematical Biosciences, 180 (2002), pp. 29–48.

- [129] J. L. M. VAN DORSSELAER, J. F. B. M. KRAAIJEVANGER, AND M. N. SPIJKER, *Linear stability analysis in the numerical solution of initial value problems*, in Acta numerica, 1993, Acta Numer., Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1993, pp. 199–237.
- [130] C. VAN LOAN, *How near is a stable matrix to an unstable matrix ?*, (1984).
- [131] C. VAN LOAN, *How near is a stable matrix to an unstable matrix ?*, in Linear algebra and its role in systems theory (Brunswick, Maine, 1984), vol. 47 of Contemp. Math., Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1985, pp. 465–478.
- [132] J. M. VARAH, *On the separation of two matrices*, SIAM J. Numer. Anal., 16 (1979), pp. 216–222.
- [133] R. VARGA, *Factorization and normalized iterative methods, boundary problems in differential equations*, 1960.
- [134] —, *Matrix iterative analysis*, Prentice Hall, 1962.
- [135] M. VIDYASAGAR, *Decomposition techniques for large-scale systems with non-additive interactions : stability and stabilizability*, Automatic Control, IEEE Transactions on, 25 (1980), pp. 773–779.
- [136] —, *Decomposition techniques for large-scale systems with nonadditive interactions : Stability and stabilizability.*, IEEE Trans. Autom. Control, 25 (1980), pp. 773–779.
- [137] —, *Input-output analysis of large-scale interconnected systems. Decomposition, well-posedness and stability.*, no. 29, Springer-Verlag, 1981.
- [138] B. L. WALCOTT, M. CORLESS, AND S. H. ZAK, *Comparative study of nonlinear state-observation techniques*, Int. J. Control, 45 (1987), pp. 2109–2132.
- [139] B. L. WALCOTT AND S. H. ZAK, *State estimation of nonlinear uncertain dynamical systems*, IEEE Trans. Automat. Control, 32 (1987), pp. 166–170.
- [140] H. WEI, Y. JIANG, X. SONG, G. SU, AND S. QIU, *Global attractivity and permanence of a SVEIR epidemic model with pulse vaccination and time delay*, Journal of computational and applied mathematics, 229 (2009), pp. 302–312.

BIBLIOGRAPHIE

- [141] J. H. WILKINSON, *Sensitivity of eigenvalues. II*, Utilitas Math., 30 (1986), pp. 243–286.
- [142] J. C. WILLEMS, *Least Squares Stationary Optimal Control and the Algebraic Riccati Equation*, IEEE Trans. Automat. Control, 16 (1971), pp. 621–634.
- [143] S. H. ZAK, *On the stabilization and observation of nonlinear uncertain dynamic systems*, IEEE Trans. Automat. Control, 35 (1990), pp. 604–607.
- [144] K. ZHOU, J. DOYLE, AND K. GLOVER, *Robust Optimal Control*, Prentice hall, 1996.

BIBLIOGRAPHIE

Annexe A

Glossaire et rappels mathématiques

A.1 glossaire

Nous donnons ici la signification abréviations et définissons les termes techniques utilisés dans le document.

DFE : Disease Free Equilibrium qui se traduit par Point d'équilibre sans maladie

DIDS : Abbréviation de "Differential susceptibility and infectivity epidemic model" qui signifie Modèle à susceptibilité et infectivité différentielle

WAIFW : Whom Acquire Infection From Whom qui se traduit par qui acquiert l'infection de qui ?

Susceptibles : En épidémiologie une population des susceptibles est composée des individus qui peuvent être atteints par une maladie donnée

Infectieux Les infectieux sont des individus infectés et qui peuvent transmettre la maladie

Infectés : Personnes ayant été contaminées par une maladie et révélant des signes cliniques

Latents : Individus ayant contractés une maladie mais qui ne révèlent pas encore des signes cliniques

\mathcal{R}_0 : Nombre de reproduction de base, qui se définit comme le nombre de cas secondaire qu'un individu infectieux peut générer quand il est introduit dans une population de susceptible donnée

\mathcal{T} : Nombre de reproduction type est un nombre seuil qui donne le nombre de cas secondaires dans un type de susceptible donné quand on introduit un infectieux dans une population de susceptibles compartimentés en plusieurs sous types.

A.2 Rappels mathématiques

L'analyse mathématique des systèmes dynamiques résultant de la modélisation en épidémiologique fait appel à des matrices d'un type bien particulier. Les systèmes différentielles étudiés dans cette thèse sont non linéaires, et parfois monotones. Nous allons présenter la plupart des résultats qui ont été utilisés dans ce travail. Ces résultats sont classiques. Ainsi les notions de système dynamique, de stabilité des solutions d'un système dynamique, de matrice de Metzler, de matrice irréductible, de matrice à diagonale dominante, de système dynamique monotone, système triangulaire seront revisités. Enfin nous allons présenter la méthode de van den Driessche et Watmough pour le calcul du nombre de reproduction de base \mathcal{R}_0 .

Dans suite nous aurons besoin des définitions et notations suivantes :

Définition A.2.1

Soit $x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$

- On dit que le vecteur x , (respectivement la matrice A) est strictement positif, et on note $x \gg 0$ (respectivement $A \gg 0$), si pour tout i , $1 \leq i \leq n$, $x_i > 0$ (respectivement pour tout i, j , $1 \leq i \leq n$, $1 \leq j \leq n$, $a_{ij} > 0$)

- On dit que le vecteur x , (respectivement la matrice A) est positif, et on note $x > 0$ (respectivement $A > 0$), si pour tout i , $1 \leq i \leq n$, $x_i \geq 0$; et il existe au moins un i tel que $x_i > 0$ (respectivement pour tout i, j , $1 \leq i, j \leq n$, $a_{ij} \geq 0$ et pour au moins un couple (i, j) , $a_{ij} > 0$)
- On dit que le vecteur x , (respectivement la matrice A) est positif (largement) et on note $x \geq 0$ (respectivement $A \geq 0$), si $x > 0$ ou $x = 0$ (respectivement $A > 0$ ou $A = 0$).

A.3 Norme subordonnée, norme monotone, norme de Frobenius d'une matrice

Définition A.3.1 (Norme subordonnée) Si f est une application linéaire et continue de $(E, \|\cdot\|_E) \rightarrow (F, \|\cdot\|_F)$, on définit la norme subordonnée comme,

$$\|f\| = \sup_{x \neq 0} \frac{\|f(x)\|_F}{\|x\|_E}$$

$\|\cdot\|$ est une norme sur $\mathcal{LC}(E, F)$, subordonnée à, $\|\cdot\|_E$ et $\|\cdot\|_F$

Définition A.3.2 (Norme monotone) Soit un corps \mathbb{K} ; une norme $\|\cdot\|$ sur \mathbb{K}^n est dite monotone si elle satisfait à,

$$\forall x, y \in \mathbb{K}^n \quad |x| \leq |y| \implies \|x\| \leq \|y\|,$$

Où l'on note par $|x|$ le vecteur donc les composantes sont les $|x_i|$

Définition A.3.3 (Norme de Frobenius d'une matrice) Soit une matrice A $m \times n$, sa norme de Frobenius $(\|\cdot\|_F)$ se définit comme suit :

$$\|A\|_F = \sqrt{\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n |a_{ij}|^2} = \|A\|_F^2 = \text{Tr}(A^T A)$$

A.4 Généralités en systèmes dynamiques

Définition A.4.1 (*Système dynamique à temps continu*)

On appelle système dynamique à temps continu sur un ensemble Ω , une famille d'applications $\{\phi_t; t \in \mathbb{R}_+\}$, paramétrée soit par l'ensemble \mathbb{R}_+ des réels positifs ou nuls, soit par l'ensemble \mathbb{R} de tous les réels, et vérifiant les propriétés suivantes :

1. chaque application ϕ_t est définie sur une partie U_t de Ω et à valeurs dans Ω ;
2. l'application ϕ_0 définie sur Ω tout entier est l'application identité sur (id_Ω) ;
3. Si $0 \leq t_1 \leq t_2$, alors $U_{t_2} \subset U_{t_1}$;
4. Soient t et s deux éléments de l'ensemble \mathbb{R}_+ (ou \mathbb{R}) qui paramètre la famille des applications considérées. Soit $x \in U_s$; alors $\phi_s(x)$ est un élément de U_t si et seulement si x est un élément de U_{s+t} et, lorsque c'est le cas, on a

$$\phi_t(\phi_s(x)) = \phi_{s+t}(x)$$

L'ensemble Ω est appelé **espace de phases** du système dynamique.

A.4.1 Systèmes autonomes

Soit Ω un sous ensemble de \mathbb{R}^n . Considérons l'équation différentielle autonome définie par :

$$\dot{x} = X(x) \tag{A.1}$$

On suppose que $X : \Omega \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ est continue et satisfait des conditions telles qu'une solution du système (A.1) existe en tout point, est unique et dépend de manière continue des conditions initiales. Les états stationnaires ou points d'équilibre du système (A.1) sont les points $x_0 \in \Omega$ satisfaisant $X(x_0) = 0$. Pour chaque $x \in \Omega$, nous notons par $X_t(x)$ la solution du système (A.1) satisfaisant $X_0(x) = x$. Nous supposons que X satisfait des conditions telles que $X_t(x)$ est continue en (t, x) .

Définition A.4.2 (*Trajectoire, orbite*)

- On appelle **trajectoire** d'un point x de Ω l'application $X_x : t \longmapsto X_t(x)$;
- on appelle **orbite** d'un point x de Ω la partie $\gamma_x = \{X_t(x), t \in \mathbb{R}\}$ de l'espace des phases ;

- l'orbite d'un point x de Ω est dite **périodique** si x n'est pas un point d'équilibre et s'il existe $T \in \mathbb{R}_+$ tel que $X_T(x) = x$. On dit alors que T est une période de l'orbite périodique considérée.

Définition A.4.3 On appelle **orbite positive** $\gamma^+(x_0)$ issue de x_0 l'ensemble

$$\{x(t, x_0); t \geq 0\}$$

Définition A.4.4 (Ensembles limites)

Les hypothèses et les notations sont celles de la définition précédente, nous supposons que Ω est un espace topologique séparé. soit x un point de Ω ;

soit $I_x = \{X_t(x) \text{ est définie}\}$;

- on suppose que I_x est borné à droite.
On appelle ensemble ω - **limite** de x et on note $\omega(x)$ l'ensemble des valeurs d'adhérence de la trajectoire $t \mapsto X_t(x)$ de x , lorsque t tend vers $+\infty$
- on suppose que I_x non borné à gauche. On appelle ensemble α -**limite** de x et on note $\alpha(x)$ l'ensemble des valeurs d'adhérence de la trajectoire $t \mapsto X_t(x)$ de x , lorsque t tend vers $-\infty$

Définition A.4.5 (Bassin d'attraction d'un point d'équilibre)

Soit $x_0 \in \Omega$ un point d'équilibre du système (A.1).

- On appelle **bassin d'attraction** du point $x_0 \in \Omega$ l'ensemble des éléments $x \in \Omega$ tels que pour tout $t \in \mathbb{R}_+$, $X_t(x)$ soit défini et que

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} X_t(x) = x_0$$

- On appelle **bassin de répulsion** du point $x_0 \in \Omega$; l'ensemble des éléments $x \in \Omega$ tels que pour tout $t \in \mathbb{R}_-$, $X_t(x)$ soit défini et que

$$\lim_{t \rightarrow -\infty} X_t(x) = x_0$$

Définition A.4.6 (Ensemble absorbant)

Supposons que le système (A.1) est tel que X est de classe C^1 et que Ω est un ouvert de \mathbb{R}^n . Supposons de plus que cette équation admet des solutions quel que

soit $t \geq 0$. Un sous-ensemble D de Ω est dit **absorbant** suivant A.1 si tout sous-ensemble borné K de Ω satisfait $x(t, K) \subset D$ pour tout temps t suffisamment grand. De même, D est dit absorbant lorsque pour toute condition initiale x_0 , il existe $t > 0$ tel que $X_t(x_0) \in D$.

Définition A.4.7 (Ensemble invariant)

Un sous-ensemble K de Ω est dit **positivement (resp. négativement) invariant** relativement à (A.1) si $x(t, K) \subset K$ pour tout $t \geq 0$ (resp $t \leq 0$), K est dit invariant si $x(t, K) = K$ pour tout t .

Les ensembles α – limite et ω – limite sont des exemples d’ensembles invariants et absorbants.

Théorème 19

Soit le système défini sur \mathbb{R}^n par

$$\dot{x} = A(x)x \tag{A.2}$$

Si pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, $A(x)$ est une matrice de Metzler, alors le système (A.2) laisse positivement invariant l’orthant positif \mathbb{R}_+^n .

Preuve :

Supposons que pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, $A(x)$ soit une matrice de Metzler (c’est à dire , $a_{ij}(x) \geq 0$ pour tout i, j tel que $i \neq j$); soit i un indice quelconque tel que $1 \leq i \leq n$; soit l’ensemble

$$H_i = \{x \in \mathbb{R}^n; x_i = 0\} \cap \mathbb{R}_+^n$$

Sur H_i , on a

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \sum_{j=1}^n a_{ij}(x) x_j \\ &= \sum_{j=1, j \neq i}^n a_{ij}(x) x_j \geq 0 \end{aligned}$$

Autrement dit, sur les ensembles H_i qui sont en fait les diverses faces de la frontière de \mathbb{R}_+^n , la restriction du système (A.2) a un champ de vecteurs qui pointe vers l'extérieur de \mathbb{R}_+^n . Donc par continuité du flot, aucune trajectoire de ce système qui commence dans \mathbb{R}_+^n n'en ressort. Ce qui démontre l'invariance positivité de l'orthant positif. Ce qui achève la preuve du théorème.

Théorème 20 (*Théorème de la barrière*) []

On considère une fonction $H : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$. Soit Ω un ouvert de \mathbb{R} . On suppose qu'en tout point $x \in \overline{\Omega}$ tel que $H(x) = 0$, on a

$$\nabla H(x) \neq 0 \quad \text{et} \quad \langle X(x) \mid \nabla H(x) \rangle \leq 0$$

Alors aucune trajectoire de X issue d'un point tel que $H(x) \leq 0$ ne peut sortir par l'ensemble

$$\{x \in \overline{\Omega} \mid \nabla H(x) = 0\}$$

On dit qu'en l'ensemble des points x où $\langle X(x) \mid \nabla H(x) \rangle \leq 0$, le champ de vecteurs est rentrant dans l'ensemble $\{x \mid \nabla H(x) = 0\}$.

Ce théorème est évident si le champ est strictement rentrant, le point délicat est quand le champ est tangent. On a alors besoin que le champ soit de Lipschitz pour prouver qu'il ne traverse pas la barrière. (Cette condition est due à Quincampoix, Aubin, Vidyasagar [136])

On en déduit le corollaire suivant qui est très utilisé, par exemple pour montrer que l'orthant positif est invariant.

Théorème 21 (Théorème 2.1 : Tangent à un fermé [13]) Soit Ω un ouvert de \mathbb{R}^n et F un fermé de Ω . Soit $X(x)$ un champ de vecteurs lipschitzien dans Ω et tangent à F . Alors, toute courbe intégrale de X qui rencontre F en un point est entièrement contenue dans F

La notion de tangent à un fermé passe par la notion de vecteur normal.

Corollaire A.4.8

On considère un ensemble G fermé et dont la frontière est constituée de morceaux de surfaces hyperplanes. Alors si le champ est rentrant dans G en tout de sa frontière, l'ensemble G est positivement invariant par X .

A.4.2 Notion de stabilité et point d'équilibre

Définition A.4.9 (*Stabilité d'un point d'équilibre*)

Soit $x_0 \in \Omega$ un point d'équilibre du système (A.1).

On dit que x_0 est un **point d'équilibre stable** pour (A.1) ou que le système (A.1) est stable en x_0 si pour tout ϵ positif, il existe un nombre réel positif δ tel que pour tout $x \in \Omega$ avec $\|x(0) - x_0\| < \delta$, la solution $X_t(x(0)) = x(t)$

Si de plus il existe δ_0 tel que $0 < \delta_0 < \delta$ et

$$\|x(0) - x_0\| < \delta_0 \Rightarrow \lim_{t \rightarrow +\infty} x(t) = x_0$$

x_0 est dit *asymptotiquement stable*.

Le système est dit **instable** en x_0 s'il n'est pas stable en x_0 .

Définition A.4.10 (*Point d'équilibre attractif*)

- Le point d'équilibre x_0 est dit **attractif** (on dira aussi que le système A.1 est attractif en x_0) s'il existe un voisinage $D \subset \Omega$ de x_0 tel que pour toute condition initiale x débutant dans D , la solution correspondante $X_t(x)$ du système (A.1) est définie pour tout $t \geq 0$ et tend vers x_0 lorsque t tend vers l'infini. En d'autres termes,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} X_t(x) = x_0$$

pour toute condition initiale $x \in D$;

- le point x_0 est dit **globalement attractif** si $\lim_{t \rightarrow \infty} X_t(x) = x_0$ pour toute condition initiale $x \in \Omega$

Définition A.4.11

x_0 est un point **asymptotiquement stable** pour le système (A.1) s'il est stable et attractif.

Définition A.4.12 (*Equilibre globalement asymptotiquement stable*)

Soit $x_0 \in \Omega$ un point d'équilibre du système (A.1).

Ce système est dit **globalement asymptotiquement stable** en x_0 dans Ω si il est à la fois stable, attractif et son bassin d'attraction est Ω tout entier.

A.4.3 Systèmes monotones

Définition A.4.13 [66]

Considérons le système (A.1) avec X de classe C^1 et Ω un ouvert de \mathbb{R}^n .

- X est de **type K** dans Ω si pour tout i ; $X_i(a) \leq X_i(b)$ quel que soit a et b dans Ω vérifiant $a_k \leq b_k$ et $a_i = b_i$, ($i \neq k$ et $i, k = 1, 2, \dots, n$);
- on dira que Ω est **p -convexe** si $tx + (1 - t)y \in \Omega$, pour tout $t \in [0, 1]$, chaque fois que $x, y \in \Omega$ et $x \leq y$;
- on dira que le système (A.1) est un **système coopératif** si Ω est p -convexe et

$$\frac{\partial X_i(x)}{\partial x_j} \geq 0, i \neq j, x \in \Omega$$

- On dira que le système (A.1) est un **système compétitif** si Ω est p -convexe et

$$\frac{\partial X_i(x)}{\partial x_j} \leq 0, i \neq j, x \in \Omega.$$

Définition A.4.14 (*Système dynamique monotone*)

Soit un système dynamique dont le flow est $\phi_t : x \mapsto \phi_t(x)$.

Ce système dynamique est dit **monotone** s'il est défini sur un espace métrique ordonné et s'il possède la propriété suivante :

$$t \geq 0, x \leq y \Rightarrow \phi_t(x) \leq \phi_t(y)$$

Il est dit **fortement monotone** si

$$t \geq 0, x < y \Rightarrow \phi_t(x) \ll \phi_t(y)$$

Il est dit **anti-monotone** si

$$t \geq 0, x \leq y \Rightarrow DX(x) > DX(y)$$

Il est dit **strictement anti-monotone** si

$$t \geq 0, x < y \Rightarrow DX(x) > DX(y)$$

A.5 Système triangulaire

On considère un système triangulaire, plus précisément il s'agit d'un système sur $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$ ayant la forme

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = f_1(x_1) \\ \dot{x}_2 = f_2(x_1, x_2) \end{cases} \quad (\text{A.3})$$

où f_1 est une application de \mathbb{R}^n dans \mathbb{R}^n et f_2 de $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$ dans \mathbb{R}^m . On supposera que les conditions sont vérifiées pour l'existence et l'unicité des solutions (par exemple, f_1 et f_2 de classe C^1).

Les trajectoires ont toutes la même projection sur $\mathbb{R}^n \times \{0\}$, ce sont celle du système. On voit bien pourquoi on a donné le nom de triangulaire. En fait la jacobienne du système est triangulaire inférieure par blocs. Ces systèmes sont aussi appelés systèmes hiérarchiques. Nous allons démontrer un résultat de stabilité du théorème de Vidyasagar [136]. La version que nous présentons ici est dans le cas des systèmes autonomes. Elle est beaucoup plus simple que celle donnée dans le cas général par Vidyasagar.

Théorème 22

On considère un système de classe C^1

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = f_1(x_1) \\ \dot{x}_2 = f_2(x_1, x_2) \end{cases} \quad (\text{A.4})$$

tel l'origine de \mathbb{R}^n est globalement asymptotiquement stable (GAS) pour le système $\dot{x}_1 = f_1(x_1)$ sur \mathbb{R}^n et tel que l'origine de \mathbb{R}^m est GAS pour $\dot{x}_2 = f_2(0, x_2)$ sur \mathbb{R}^m , alors l'origine de $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$ est asymptotiquement stable.

Si de plus, toutes les trajectoires sont bornées alors l'origine est GAS sur $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$.

Preuve

On va prouver la stabilité. Soit le voisinage suivant de l'origine

$$B(0, \varepsilon) = \{(x_1, x_2) \mid \|x_1\| \leq \varepsilon, \|x_2\| \leq \varepsilon\}$$

Puisque les équilibres des systèmes isolés sont GAS, que les systèmes sont de classe C^1 , on peut appliquer la réciproque du théorème de Lyapunov. Il existe des fonctions de classe C^1 définies positives $V_1(x_1)$ et $V_2(x_2)$ telles que

$$\dot{V}_1 = \langle \nabla V_1(x_1) \mid f_1(x_1) \rangle \leq 0, \quad \dot{V}_2 = \langle \nabla V_2(x_2) \mid f_2(0, x_2) \rangle \leq 0$$

Les fonctions \dot{V}_1 et \dot{V}_2 sont définies négatives sur $B(0, \varepsilon)$ pour ε pris suffisamment petit. Puisque f_1 et V_1 sont de classe C^1 , posons

$$L = \max_{(x_1, x_2) \in B(0, \varepsilon)} \frac{\partial f_1}{\partial x_2}(x_1, x_2)$$

$$M = \max_{(x_1, x_2) \in B(0, \varepsilon)} \nabla V_2(x_2)$$

Comme V_2 est une fonction de Lyapunov, on peut choisir $\delta_1 < \frac{\varepsilon}{2}$ suffisamment petit tel que

$$\max_{\|x_2\| \leq \delta_1} \nabla V_2(x_2) < \min_{\frac{\varepsilon}{2} \leq \|x_2\| \leq \varepsilon} \nabla V_2(x_2)$$

$$\dot{V}_2(x_2) = \langle \nabla V_2(x_2) | f_2(x_1, x_2) \rangle = \langle \nabla V_2(x_2) | f_2(0, x_2) \rangle + \langle \nabla V_2(x_2) | f_2(x_1, x_2) - f_2(0, x_2) \rangle$$

En vertu de la formule de Taylor, on a la relation

$$f_2(x_1, x_2) - f_2(0, x_2) = \int_0^1 \frac{\partial f_2}{\partial x_1}(x_1, x_2) x_1 dt$$

Ainsi sur $B(0, \varepsilon)$ on a

$$\|f_2(x_1, x_2) - f_2(0, x_2)\| \leq \|x_1\|$$

et l'inégalité de Cauchy Schwarz donne

$$\dot{V}_2(x_2) \leq \langle \nabla V_2(x_2) | f_2(0, x_2) \rangle + LM \|x_1\| \tag{A.5}$$

Comme la fonction $\langle \nabla V_2(x_2) | f_2(0, x_2) \rangle$ est négative, si l'on la fonction φ par

$$\varphi(c) = \min_{c \leq \|x_2\| \leq \varepsilon} \left(-\langle \nabla V_2(x_2) | f_2(0, x_2) \rangle \right)$$

Cette fonction φ , définie sur \mathbb{R} , est continue, croissante et tend vers 0 lorsque $c \rightarrow 0$. Elle vérifie en plus $\varphi(c) > 0$ pour tout $c > 0$.

Puisque le système $\dot{x}_1 = f_1(x_1)$ est asymptotiquement stable, on peut choisir $\delta_2 \leq \delta_1$ tel que pour toute condition initiale vérifiant $\|x_1(0)\| \leq \delta_2$, alors pour tout $t \geq 0$, on a l'inégalité $\|x_1(t)\| \leq \frac{\varphi(c)}{LM}$. Par ailleurs, si l'on a $\|x_1\| \leq \delta_2$ et $\|x_2\| \geq \delta_1$, avec l'inégalité (A.5), on en déduit la relation

$$\langle \nabla V_2(x_2) | f_2(0, x_2) \rangle + LM \|x_1\| < 0 \tag{A.6}$$

A.5. SYSTÈME TRIANGULAIRE

Soit maintenant $0 < \delta_3 < \delta_2$ tel que

$$\max_{\|x_1\| \leq \delta_3} V_1(x_1) < \min_{\delta_2 \leq \|x_1\| \leq \varepsilon} V_1(x_1)$$

Considérons l'ouvert \mathcal{U} défini par

$$\mathcal{U} = \{(x_1, x_2) \mid \|x_1\| \leq \delta_2, \|x_2\| \leq \delta_3\}$$

Si $x_1(0) \leq \delta_3$, comme V_1 est décroissante, l'inégalité précédente montre que $\|x_1(t)\| \leq \delta_2$ (aucune trajectoire ne peut atteindre la sphère de rayon δ_2 sur \mathbb{R}^n).

Soit $x_2(0) \leq \delta_3$. Comme

$$\max_{\|x_2\| \leq \delta_3} V_2(x_2) \leq \max_{\|x_2\| \leq \delta_1} V_2(x_2) < \min_{\frac{\varepsilon}{2} \leq \|x_2\| \leq \varepsilon} V_2(x_2).$$

La trajectoire issue de $(x_1(0), x_2(0))$ vérifiant $\|x_2(t)\| \leq \delta_1$ entraîne

$$V_2(x_2) \leq \min_{\delta_1 \leq \|x_2\| \leq \varepsilon} V_2(x_2).$$

On a vu ci-dessus que l'on a $\|x_1(t)\| \leq \delta_2$. Ceci entraîne, dès que $\|x_2(t)\| \geq \delta_1$, en vertu de l'inégalité (A.6) $\dot{V}_2 \leq 0$.

Comme V_2 est décroissante sur les trajectoires contenues dans l'anneau $\|x_1\| \leq \delta_2$, $\|x_2\| \leq \frac{\varepsilon}{2}$, on en déduit qu'une trajectoire ne peut atteindre la sphère de rayon $\frac{\varepsilon}{2}$ dans \mathbb{R}^m . Nous avons prouvé que $\|x_1(t)\| \leq \delta_2 \leq \varepsilon$ et $\|x_2(t)\| \leq \frac{\varepsilon}{2}$. Ce qui achève la démonstration de la stabilité.

On va maintenant, démontrer l'attractivité locale par le principe d'invariance de Lasalle. Puisque l'origine est stable, il existe un voisinage compact \mathcal{U} de cette origine qui est positivement invariant. On va donc se restreindre à cet invariant \mathcal{U} .

On considère la fonction V_1 . C'est une fonction de Lyapunov-Lasalle. Par hypothèse

$$\dot{V}_1 = \langle \nabla V_1(x_1) \mid f_1(x_1) \rangle \leq 0.$$

Soit

$$E = \{(x_1, x_2) \in \mathcal{U} \mid \dot{V}_1 = 0\}$$

On considère dans l'ensemble E , le plus grand ensemble invariant. C'est évidemment $(\{0\} \times \mathbb{R}^m) \cap \mathcal{U}$. Par hypothèse le système $\dot{x}_2 = f_2(0, x_2)$ est globalement asymptotiquement stable sur $\{0\} \times \mathbb{R}^m$. Ceci implique que toute trajectoire négative du système

de $\mathcal{U} \setminus \{0\}$ sort de \mathcal{U} .

En effet, si cela n'est pas le cas, il existe une trajectoire complète γ dans \mathcal{U} . L'ensemble des points α -limites de γ est invariant. Par stabilité asymptotique et invariance, cet ensemble contient l'origine. Cela signifie que la trajectoire part aussi près de l'origine que l'on veut pour y retourner. La fermeture de cette trajectoire étant compacte, cela contredit la stabilité. La propriété énoncée est donc vraie.

Cela signifie que le plus grand invariant contenu dans E est réduit à $\{0\}$. Ceci montre l'attractivité dans \mathcal{U} .

Si une trajectoire est relativement compacte, alors les points ω -limites sont dans $\{0\} \times \mathbb{R}^m$.

En effet, pour $t_n \rightarrow \infty$, on a $x_1(t_n) \rightarrow 0$. Si toutes les trajectoires sont compactes, alors l'ensemble des points ω -limites sont dans $\{0\} \times \mathbb{R}^m$. Par stabilité asymptotique sur $\{0\} \times \mathbb{R}^m$ l'origine est un point ω -limite. Toute trajectoire s'approche aussi près que l'on veut de l'origine. Par stabilité elle est piégée dans l'ouvert \mathcal{U} défini ci-dessus. Elle tend donc vers l'origine par stabilité asymptotique.

A.6 Méthodes de Lyapunov

Les fonctions de Lyapunov jouent un grand rôle dans l'étude de la stabilité des systèmes dynamiques. Cette section est consacrée à quelques résultats dus à Lyapunov. Soit $V : \Omega \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue ;

Définition A.6.1

- La fonction V est dite **définie positive** si $V(x_0) = 0$ et $V(x) > 0$ dans un voisinage Ω_0 de x_0 pour tout $x \neq x_0$ dans ce voisinage ;
- La fonction V est dite **définie négative** si $-V$ est définie positive ;
- La fonction V est dite **semi-positive** si $V(x_0) = 0$ et $V(x) \geq 0$ dans un voisinage Ω_0 de x_0

Définition A.6.2 (Fonction de Lyapunov) [90]

Une fonction $V : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ est une **fonction de Lyapunov** pour le système (A.1) si elle décroissante le long des trajectoires du système. Si V est de classe C^1 , cela

revient à dire que sa dérivée \dot{V} par rapport au système (A.1) est négative sur Ω , c-à-d, $\dot{V}(x) \leq 0$ pour tout $x \in \Omega$.

Théorème 23 (Théorème de Lyapunov)

- Si la fonction V est définie positive et \dot{V} semi-définie négative sur Ω , alors le point d'équilibre x_0 est stable pour le système A.1.
- Si la fonction V est définie positive et \dot{V} définie négative sur Ω , alors x_0 est un point d'équilibre asymptotiquement stable pour le système (A.1).

Ce théorème affirme que pour montrer qu'un point d'équilibre x_0 est stable, il suffit de trouver une fonction de Lyapunov en ce point. Par ailleurs, pour utiliser le théorème original de Lyapunov pour montrer la stabilité asymptotique d'un système donné, nous devons déterminer une fonction V définie positive dont la dérivée \dot{V} est définie négative. Dans le cas général, ceci n'est pas évident. La condition sur la dérivée \dot{V} peut être allégée en utilisant le **principe de LaSalle** qui sera énoncé dans la section suivante.

A.6.1 Le principe d'invariance de LaSalle

Théorème 24 (Principe d'invariance de LaSalle [88, 90])

Soit Ω un sous-ensemble de \mathbb{R}^n ; supposons que Ω est un ouvert positivement invariant pour le système (A.1) en x_0 . Soit $V : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe C^1 pour le système (A.1) en x_0 telle que :

1. $\dot{V} \leq 0$ sur Ω ;
2. soient $E = \{x \in \Omega \mid \dot{V}(x) = 0\}$ et L le plus grand ensemble invariant par X et contenu dans E .

Alors, toute solution bornée issue dans Ω tend vers l'ensemble L lorsque le temps tend vers l'infini.

Ce théorème est un outils très important pour l'analyse des systèmes ; à la différence de Lyapunov, il n'exige ni de la fonction V d'être définie positive, ni de sa dérivée \dot{V} d'être négative. Cependant, il fournit seulement des informations sur l'attractivité

du système considéré au point d'équilibre x_0 . Par exemple, il ne peut être utilisé pour prouver que les solutions tendent vers un point d'équilibre que lorsque l'ensemble L est réduit à ce point d'équilibre. Il n'indique pas si ce point d'équilibre est stable ou pas. Lorsqu'on veut établir la stabilité asymptotique d'un point d'équilibre x_0 de Ω , on utilise le corollaire suivant qui est une conséquence du principe d'invariance de LaSalle.

Corollaire A.6.3 (*Lasalle [88]*)

Supposons $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ est un ouvert connexe tel que $x_0 \in \Omega$.

Soit $V : \mathbb{U} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction définie positive et de classe C^1 telle que $\dot{V} \leq 0$ sur \mathbb{U} . Soit $E = \{x \in \mathbb{U} \mid \dot{V}(x) = 0\}$; supposons que le plus grand ensemble positivement invariant contenu dans E est réduit au point x_0 .

Alors x_0 est un point d'équilibre asymptotiquement stable pour le système (A.1).

Si ces conditions sont satisfaites pour $\mathbb{U} = \Omega$ si de plus V est propre sur Ω , c'est à dire si $\lim V(x) = +\infty$ lorsque $d(x, \frac{\partial}{\partial x}\Omega) + \|x\| \rightarrow +\infty$, alors toutes les trajectoires sont bornées pour tout $t \geq 0$ et x_0 est un point d'équilibre globalement stable pour le système (A.1).

Corollaire A.6.4

Sous les hypothèses du théorème précédent, si l'ensemble L est réduit au point $x_0 \in \Omega$, alors x_0 est un point d'équilibre globalement asymptotiquement stable pour le système (A.1) défini sur Ω .

A.7 Quelques matrices particulières

Définition A.7.1 (*Module de stabilité, rayon spectrale*)

Soit A une matrice carrée, si on désigne par $\text{spec}(A)$ l'ensemble des valeurs propres de A .

On appelle **Module de stabilité** de la matrice A , le nombre défini par :

$$\alpha(A) = \max\{\text{Re}(\lambda); \lambda \in \text{Spec}(A)\}$$

A.7. QUELQUES MATRICES PARTICULIÈRES

La matrice A est dite **stable** si $\alpha(A) < 0$.

On appelle rayon spectrale le nombre réel $\rho(A)$ défini par

$$\rho(A) = \max_{\lambda \in \text{Spec}(A)} |\lambda|$$

On dit qu'une matrice A est stable si ses valeurs propres ont des parties réelles strictement négatives. On dit aussi que la matrice est de Hurwitz.

Théorème 25

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Le spectre de A est contenu dans la réunion des disques dont les centres sont les coefficients diagonaux a_{ii} de la matrice A et dont les rayons respectifs sont les sommes des valeurs absolues des coefficients extra-diagonaux des lignes correspondantes.

En d'autres termes, pour tout indice i , $1 \leq i \leq n$, si on pose $r_i = \sum_{j=1, j \neq i}^n |a_{ij}|$, alors

$$\text{Spec}(A) \subset \cup_{i=1}^n B(a_{ii}, r_i)$$

Lemme A.7.1

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice carrée.

Si A est une matrice singulière, alors il existe un indice i_0 tel que

$$|a_{i_0 i_0}| \leq \sum_{j=1, j \neq i_0}^n |a_{i_0 j}|$$

En d'autres mots, le terme $a_{i_0 i_0}$ est dominé par la colonne i_0 .

Preuve du lemme

Soit n un entier naturel quelconque fixé; on va supposer que A est une matrice singulière. Par abus nous allons noter la matrice A et l'endomorphisme de \mathbb{R}^n correspondant par le même symbole A . Puisque A est singulière, $\text{Ker}(A) \neq \{0\}$; soit $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T \in \text{Ker}(A)$; soit i_0 l'indice de la composante de x telle que x_{i_0}

réalise la norme maximum de x (c'est à dire $|x_{i_0}| = \max_{1 \leq i \leq n} |x_i| = \|x\|_\infty$)

$$Ax = 0 \implies (Ax)_{i_0} = \sum_{j=1}^n a_{i_0 j} x_j = 0$$

$$\implies -a_{i_0 i_0} x_{i_0} = \sum_{j=1, j \neq i}^n a_{i_0 j} x_j$$

$$\implies |a_{i_0 i_0}| |x_{i_0}| \leq \sum_{j=1, j \neq i}^n |a_{i_0 j}| |x_j|$$

$$\leq |x_{i_0}| \sum_{j=1, j \neq i}^n |a_{i_0 j}| |x_j|$$

Puisque $x_{i_0} \neq 0$, il vient que

$$|a_{i_0 i_0}| \leq \sum_{j=1, j \neq i}^n |a_{i_0 j}|$$

ce qui met fin à la preuve du lemme. La conséquence suivante mieux adaptée au théorème que le lemme précédent est la suivante

Corollaire A.7.2

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice carrée.

Si A est une matrice singulière, alors il existe un indice i_0 tel que

$$|a_{i_0 i_0}| \leq \sum_{j=1, j \neq i}^n |a_{i_0 j}|$$

En d'autres termes, le terme général $a_{i_0 i_0}$ est dominé par la colonne i_0

La preuve de ce corollaire est identique à celle du lemme précédent; cependant on remplace la matrice A par sa transposée A^T qui a les propriétés de régularité identiques que la matrice A .

Preuve du théorème 25

Soit la $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$; alors pour tout $\lambda \in \text{Spec}(A)$, $A - \lambda I$ est une matrice singulière.

Le lemme précédent implique que pour tout $\lambda \in \text{Spec}(A)$, il existe $i_\lambda \in \mathbb{N}$, $1 \leq i_\lambda \leq n$

A.7. QUELQUES MATRICES PARTICULIÈRES

tel que

$$|a_{i_\lambda i_\lambda}| \leq \sum_{j=1, j \neq i_\lambda} |a_{i_\lambda j}|$$

Si on pose $r_i = \sum_{j=1, j \neq i} |a_{i j}|$; l'inégalité précédente est équivalente à : pour tout $\lambda \in \text{Spec}(A)$, il existe $i_\lambda \in \mathbb{N}$, $1 \leq i_\lambda \leq n$, tel que $\lambda \in B(a_{i_\lambda i_\lambda}, r_{i_\lambda})$. Si on considère les boules $B(a_{ii}, r_i)$ pour tout i , $1 \leq i \leq n$, il vient que tout $\lambda \in \text{Spec}(A)$ est dans l'une d'entre elles; on peut donc dire que $\lambda \in \cup_{i=1}^n B(a_{ii}, r_i)$.

Ce qui met fin à la preuve du théorème.

Corollaire A.7.3

Soit $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice carrée

Le spectre de la matrice A est contenu dans la réunion des disques dont les centres sont les coefficients diagonaux a_{ii} de la matrice A et dont les rayons respectifs sont les sommes des valeurs absolues des coefficients extra-diagonaux des colonnes correspondantes. En d'autres termes, pour tout i , $1 \leq i \leq n$, si on pose $r_i = \sum_{j=1, j \neq i}^n |a_{ji}|$,

alors

$$\text{Spec}(A) \subset \cup_{i=1}^n B(a_{ii}, r_i)$$

Preuve

Il s'agit d'une conséquence du théorème 25 et du corollaire A.7.2.

En effet A est à diagonale dominante stricte, alors pour tout i tel que $1 \leq i \leq n$, on a $|a_{ii}| > r_i$ ($r_i = \sum_{j=1, j \neq i}^n |a_{ji}|$, si ce sont les colonnes qui sont concernées, ou $r_i = \sum_{j=1, j \neq i}^n |a_{ij}|$ si ce sont les lignes qui sont concernées). Donc aucune des boules $B(a_{ii}, r_i)$ ne contient l'origine de \mathbb{C} . Par conséquent aucune valeur propre de A ne peut être nulle.

Définition A.7.4 Matrice à diagonale dominante

- Une matrice $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est à diagonale dominante colonne si pour tout i tel que $1 \leq i \leq n$, on a

$$|a_{ii}| \geq \sum_{j=1, j \neq i}^n |a_{ji}|$$

- Une matrice $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est à diagonale dominante ligne si pour tout i tel que $1 \leq i \leq n$, on a

$$|a_{ii}| \geq \sum_{j=1, j \neq i}^n |a_{ij}|$$

- On parle de matrice à diagonale dominante stricte colonne (respectivement stricte ligne) lorsque les inégalités dans les relations précédentes sont strictes.

Corollaire A.7.5

Si une matrice A est à diagonale dominante stricte, alors elle est inversible.

C'est une conséquence immédiate du théorème 25 (on pourra raisonner par l'absurde).

Définition A.7.6 (Matrice réductible, matrice irréductible)

Soit $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice carrée.

On dit que la matrice A est réductible, si il existe une matrice de permutation P tel que

$$P^T A P = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ 0 & A_{22} \end{pmatrix}$$

La matrice A est dite irréductible si et seulement si elle n'est pas réductible.

A.8 Suites et serie de matrices

Définition A.8.1 (Convergence d'une suite de matrices) On dit qu'une suite de matrice $(A_m)_{m \geq 0}$ converge vers la matrice A si

$$\lim_{m \rightarrow +\infty} \|A_m - A\|_p = 0$$

Pro A.8.2 1. (a) $\lim_{m \rightarrow +\infty} A^m = 0 \iff \rho(A) < 1$

2. (b) La serie $\sum_{m=0}^{+\infty} A^m$ converge $\iff \rho(A) < 1$

3. (c) $\lim_{m \rightarrow +\infty} \sum_{m=0}^{+\infty} A^m = (I - A)^{-1}$

A.9 Les matrices de Metzler

Définition A.9.1

On appelle matrice de Metzler, toute matrice $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dont tous les coefficients extra-diagonaux sont positifs. C'est-à-dire $a_{ij} \geq 0$ pour tout les i et j avec $i \neq j$

Le théorème suivant dû à Perron-Frobenius sera très utile dans l'étude de la stabilité des modèles que nous allons étudier.

Théorème 26 (Perron - Frobenius) [7]

Soit $A \in \mathcal{M}_{(\mathbb{R}_n)}$ une matrice positive ;

- alors le rayon spectrale $\rho(A)$ de la matrice A est une valeur propre de A et il existe un vecteur propre $v > 0$ qui lui est associé ;
- si de plus la matrice A est irréductible, alors $\rho(A) > 0$ et $v \gg 0$; de plus, $\rho(A)$ est une valeur propre simple et si $u > 0$ est un autre vecteur propre de A , il existe $s > 0$ tel que $u = sv$;
- si B est une matrice telle que $B > A$, alors $\rho(B) > \rho(A)$
- si $A \gg 0$, alors $|\lambda| < \rho(A)$ pour tout autre valeur propre λ de A

Corollaire A.9.2

Soit $A \in \mathcal{M}_{(\mathbb{R}_n)}$ une matrice de Metzler.

- Le module de stabilité $\alpha(A)$ est une valeur propre de A et il existe un vecteur $v > 0$ tel que $Av = \alpha(A)v$. De plus $Re(\lambda) < \alpha(A)$ pour tout $\lambda \in \text{Spec}(A) - \{\alpha(A)\}$.
 - Si de plus A est irréductible, alors
1. $\alpha(A)$ est une valeur propre simple ;

2. $v \gg 0$ et pour tout autre vecteur propre positif de A est un multiple de v ;
3. Si B est une matrice vérifiant $B > A$, alors $\alpha(B) > \alpha(A)$;
4. si $\alpha(A) < 0$, alors $-A^{-1} \gg 0$

Preuve :

Il existe un $C \geq 0$ assez grand tel que $A + CI \geq 0$. par conséquent le théorème précédent de Perron-Frobenius peut s'appliquer à $A + CI$ pour un tel $C \geq 0$. En particulier, le rayon spectral $\rho(A + CI) > 0$. On remarque que $\text{Spec}(A + CI) = C + \text{Spec}(A)$; ce qui implique

$$\alpha(A + CI) = \rho(A + CI) = C + \alpha(A)$$

et par conséquent, $\alpha(A)$ est une valeur propre de A . Si A est irréductible, $A + CI$ est aussi irréductible. Le théorème de Perron-Frobenius appliqué à $A + CI$ implique les propriétés 1,2,3. Par ailleurs, comme $-A^{-1} = \int_0^\infty e^{tA} dt \gg 0$ (4) est vérifié.

Le théorème suivant est important pour l'étude la stabilité des points d'équilibres et la construction de certaines fonctions de Lyapunov.

Théorème 27 Matrice de Metzler stable

Si $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est une matrice de Metzler, les assertions suivantes sont équivalentes :

1. La matrice de Metzler A est stable,
2. la matrice A est inversible et $-A^{-1} \geq 0$,
3. Si $b \gg 0$, alors l'équation $Ax + b = 0$ admet une solution $x \gg 0$,
4. il existe un vecteur $c > 0$, tel que $Ac \ll 0$,
5. il existe un vecteur $c \gg 0$, tel que $Ac \ll 0$.

Nous donnons une preuve de ce théorème qui est une adaptation d'une preuve similaire trouvée dans [7].

Preuve :

1) \implies 2)

A.9. LES MATRICES DE METZLER

La matrice A est stable, alors elle est inversible et $\alpha(A) < 0$; il existe un scalaire k tel que pour tout

$$x_0 \in \mathbb{R}^n, \|e^{tA} x_0\| \leq K e^{\alpha(A)t} \|x_0\|$$

On en déduit que l'intégrale $\int_0^\infty e^{tA} x_0 dt$ est normalement convergente pour tout point x_0 . par suite la matrice $\int_0^\infty e^{tA} dt$ est absolument convergente :

En effet la fonction $t \in \mathbb{R}_+ \rightarrow e^{tA} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est dans $L^1(0, \infty)$ et

$$B = \int_0^\infty e^{tA} dt = -A^{-1}$$

Nous allons déterminer le signe de chacun des coefficients de la matrice $B = (b_{ij})$; pour cela considérons la base canonique (e_i) de \mathbb{R}^n ; nous remarquons que :

$$\begin{aligned} b_{ij} &= \langle B e_j, e_i \rangle = (B e_j)_i = \left\langle \int_0^\infty e^{tA} dt e_j, e_i \right\rangle \\ &= \int_0^\infty \langle e^{tA} e_j, e_i \rangle dt \\ &= \int_0^\infty (e^{tA} e_j)_i dt \geq 0 \end{aligned}$$

d'où la matrice $-A^{-1} = B \geq 0$.

2) \implies 3)

Soit b un vecteur tel que $b \gg 0$; soit $x = -A^{-1}b$; alors $x \gg 0$ comme produit de deux matrices strictement positives. D'où $Ax + b = 0$

3) \implies 4)

Soit $b \gg 0$ un vecteur de \mathbb{R}_+^n ; soit $c = -A^{-1}b$; il est clair que $Ac = -b \ll 0$. On peut donc conclure qu'il existe un vecteur $c \gg 0$ tel que $Ac \ll 0$.

4) \implies 5)

Il suffit de perturber un peu la propriété 4. En effet soit $\varepsilon > 0$ et $c_1 = c + \varepsilon \sum_{i=1}^n e_i \gg 0$.

Ainsi $Ac_1 = Ac + \varepsilon \sum_{i=1}^n Ae_i$. Par continuité, on peut choisir $\varepsilon > 0$ suffisamment petit tel que $Ac_1 \ll 0$.

5) \implies 1) Considérons dans l'orthant positif l'équation différentielle $\dot{x} = A^T x$. On choisit la fonction

$$V(x) = \langle c, x \rangle$$

Comme par hypothèse $c \gg 0$, alors V est définie positive sur \mathbb{R}_+^n et on a

$$\dot{V}(x) = \langle c, Ax \rangle = \langle A^T c, x \rangle$$

$\dot{V}(x) = 0$ si et seulement si $x = 0$. Ce qui prouve, en vertu du théorème de Lyapunov que la matrice A^T est asymptotiquement stable et par suite que A est stable puisque A et A^T ont les mêmes valeurs propres.

Ce qui achève la démonstration du théorème.

Théorème 28

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice de Metzler.

1. Le module de stabilité $\alpha(A)$ de A est une valeur propre de A à laquelle est associé un vecteur propre positif; c'est à dire qu'il existe $v \in \mathbb{R}_+^n$ tel que $v \neq 0$ et $Av = \alpha(A)v$
2. Si de plus la matrice A est irréductible, alors $\alpha(A)$ est une valeur propre simple de la matrice A à laquelle est associée un vecteur propre positif; c'est à dire qu'il existe $v \in \mathbb{R}_+^n$ tel que $v \gg 0$ et $Av = \alpha(A)v$.

Preuve

Soit $m = \min\{\min_{1 \leq i \leq n} a_{ii}, 0\}$; alors $A - mI \geq 0$. En appliquant à la matrice $A - mI$ le théorème de Perron-Frobenius, il vient que :

$$\text{il existe } v \in \mathbb{R}_+^n; (A - mI)v = \rho(A - mI)v$$

d'où il existe $v \in \mathbb{R}_+^n$ tel que

$$Av = (\rho(A - mI) + m)v$$

le vecteur v est donc un vecteur propre de la matrice A associé à la valeur propre $\rho(A - mI) + m$.

Il est à remarquer que pour une matrice carrée B donnée,

$$\text{Spec}(B + kI) = k + \text{Spec}(B)$$

Or $\rho(A - mI) = \max_{\lambda \in \text{Spec}(A - mI)} \text{Re}(\lambda)$ d'où

$$\rho(A - mI) + m = \max_{\lambda \in \text{Spec}(A - mI + mI)} \text{Re}(\lambda) = \max_{\lambda \in \text{Spec}(A)} \text{Re}(\lambda) = \alpha(A)$$

Donc v est un vecteur propre de A associé à la valeur propre

$$\alpha(A) = \rho(A - mI) + m \in \mathbb{R}$$

La preuve de cet important théorème peut être trouvée dans [?]. Mais compte tenu de son importance dans cette thèse, nous la redonnons intégralement ici.

Théorème 29 (Caractérisation des matrices Metzler stables)

Soit M une matrice de Metzler se mettant sous la forme

$$M = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$$

M est stable si et seulement si A et $D - CA^{-1}B$ sont stables.

Preuve

Prouvons d'abord la condition nécessaire. Puisque que toute sous matrice principale d'une matrice de Metzler stable est encore une matrice de Metzler stable (voir Varga [?]), alors A et D sont Metzler stables. Comme M est Metzler stable, il existe un vecteur $c = c_1, c_2 \gg 0$, tel que $Mc \ll 0$ (condition I_{28} du théorème 2.3 de [7]). Ce qui signifie que

$$\begin{aligned} Ac_1 + Bc_2 &\ll 0 \\ Cc_1 + Dc_2 &\ll 0 \end{aligned}$$

Comme A est Metzler stable, on $-A^{-1} \geq 0$ et C est positive. Multiplions $Ac_1 + Bc_2 \ll 0$ par $-CA^{-1}$, on obtient $-Cc_1 - CA^{-1}Bc_2 \ll 0$ et par suite $(D - CA^{-1}B)c_2 \ll 0$. Ce qui prouve, en vertu de I_{28} que $D - CA^{-1}B$ est Metzler stable. Ceci montre la nécessité. Montrons enfin que la condition est suffisante.

Puisque A et $D - CA^{-1}B$ sont Metzler stables, il existe un vecteur $c_2 \gg 0$ tel que

$$(D - CA^{-1}B)c_2 \ll 0$$

Soit maintenant $c_3 = -A^{-1}Bc_2$, comme A est Metzler stable, on a $-A^{-1} \geq 0$. Comme B est positive et $c_2 \gg 0$, on en déduit que $c_3 \gg 0$ et les inégalités

$$Cc_3 + Dc_2 \ll 0, \quad Ac_3 + Bc_2 \ll 0$$

A étant Metzler stable, il existe un vecteur $v \gg 0$ tel que $Av \ll 0$ (voir théorème 27). Maintenant, choisit $c_1 = c_3 + \varepsilon v \gg 0$, pour $\varepsilon > 0$. On a

$$Cc_1 + Dc_2 = Cc_3 + Dc_2 + \varepsilon Cv$$

On peut choisir $\varepsilon > 0$ suffisamment petit pour que $Cc_1 + Dc_2 \ll 0$. A ce moment là,

$$Ac_1 + Bc_2 = Ac_3 + Bc_2 + \varepsilon Av \ll 0$$

On a donc trouvé $c = (c_1, c_2) \gg 0$ tel que $Mc \ll 0$, ce qui prouve que M est Metzler stable (voir théorème 27). Et la condition suffisante est prouvée.

dans le résultat qui suit nous allons montrer que le module de stabilité est une fonction croissante sur les matrices de Metzler.

Théorème 30 (Ordre et module de stable) [7]

1. *S'il existe $v \gg 0$ tel que $Av \leq \beta v$ alors $\alpha(A) \leq \beta$.*
2. *Si de plus A est irréductible alors $v > 0$ et $Av < \beta v$ entraînent $\alpha(A) < \beta$. En fait on a obligatoirement $v \gg 0$.*
3. *S'il existe $v > 0$ tel que $sv \leq Av$ alors $s \leq \alpha(A)$.*
4. *Si de plus A est irréductible alors $s < Av$ entraîne $s < \alpha(A)$.*

A.9.1 Matrices de Metzler irréductibles

On va caractériser par une propriété dynamique l'irréductibilité des matrices de Metzler.

Une matrice de Metzler laisse invariant positivement invariant l'orthan positif.

On va d'abord démontrer un premier résultat sur l'irréductibilité.

La définition de l'irréductibilité, pour les matrices de Metzler est équivalente à la propriété suivante :

Pro A.9.3 (Matrices de Metzler irréductibles)

La matrice de Metzler A est irréductible si et si seulement si, pour tout vecteur $x > 0$ appartenant à une face F de \mathbb{R}_+^n , où F est définie par :

$$F = \{x \geq 0 \mid \exists i \in I, \langle e_i \mid x \rangle = 0\}$$

il existe un indice $i \in I$ tel que $\langle e_i | x \rangle = 0$ et $\langle e_i | Ax \rangle > 0$.

Preuve

D'après le théorème ??, l'irréductibilité d'une matrice ne dépend que de ses termes hors diagonaux. On peut toujours remplacer A par $A + \lambda I$ pour λ suffisamment grand. La condition d'irréductibilité est équivalente, comme condition de la proposition. S'il existe i tel que $\langle e_i | x \rangle = 0$ et $\langle e_i | Ax \rangle > 0$, alors c'est équivalent à $\langle e_i | x \rangle = 0$ et $\langle e_i | (A + \lambda I)x \rangle > 0$.

On va donc supposer sans nuire à la généralité que $A \geq 0$.

La condition est suffisante.

En effet, supposons que pour tout i tel que $\langle e_i | x \rangle = 0$, on ait $\langle e_i | Ax \rangle > 0$. Soit $F_x = \mathbb{R}^+[0, x]$ la face engendrée par x . Puisque $A \geq 0$, on a $AF_x = \mathbb{R}^+[0, Ax]$. La face F_x est caractérisée par un ensemble d'indices I . On a $F_x = \{x \geq 0 \mid \langle e_i | x \rangle = 0\}$. Pour ces indices on a $\langle e_i | Ax \rangle = 0$. Par suite $AF_x \subset F_x$ et la matrice A n'est pas irréductible.

La condition est nécessaire.

Si A est réductible, il existe une face, notée par F_x , telle que $AF_x \subset F_x$. Pour tout indice tel que $\langle e_i | x \rangle = 0$ on a donc $\langle e_i | Ax \rangle = 0$.

A.9.2 Décomposition régulière d'une matrice de Metzler

Nous allons démontrer un résultat dû à Varga [?] donc l'utilité est avérée dans la méthode de calcul du nombre de reproduction de base \mathcal{R}_0 .

Définition A.9.4

Soit une matrice de Metzler A inversible. On appelle décomposition régulière de A , toute décomposition de la forme

$$A = F + V$$

où $F \geq 0$ et V est une matrice de Metzler stable.

On a le théorème suivant démontré par Varga dans [?]. Vu son importance, nous donnerons cette preuve.

Théorème 31

Soit une matrice de Metzler A inversible. Pour toute décomposition régulière de A de la forme $A = F + V$, les deux assertions suivantes sont équivalentes.

- 1)- A est une matrice stable.
- 2)- $\rho(-FV^{-1}) < 1$.

Preuve

Supposons que A est une matrice stable, alors d'après le théorème 27, on a $-A^{-1} \geq 0$. Les matrices $V = A - F$ et A étant inversibles, on peut écrire

$$-FV^{-1} = -F(A - F)^{-1} = -FA^{-1}(I - FA^{-1})^{-1}$$

On note $G = -FA^{-1}$. C'est une matrice positive. Pour chercher son rayon spectrale, d'après Perron-Frobenius, il suffit de se restreindre aux vecteurs propres positifs. Soit donc $v > 0$ un vecteur propre de G correspondant à une valeur propre $\lambda \geq 0$, soit $Gv = \lambda v$. On a

$$-FV^{-1}v = G(I - G)^{-1}v = \frac{\lambda}{1 + \lambda}v$$

La matrice $-FV^{-1}$ est positive. Réciproquement soit $\mu \geq 0$ une valeur propre relativement à un vecteur propre $v > 0$. Alors $G(I - G)^{-1}v = \mu v$. Les matrices G et $(I + G)^{-1}$ commutent, on en déduit que $Gv = \mu(I + G)v$. Cela entraîne que nécessairement $\mu \neq 1$ et v est un vecteur propre de G relativement à la valeur propre $\frac{\mu}{1 + \mu}$.

La fonction de \mathbb{R}^+ dans $[0, 1[$, définie par $x \mapsto \frac{x}{1 + x}$ est une bijection entre les valeurs propres de $G = -FA^{-1}$ sur celles de $-FV^{-1}$. C'est une fonction monotone. Par conséquent on a

$$\rho(-FV^{-1}) = \frac{\rho(G)}{1 + \rho(G)} < 1.$$

Réciproquement supposons $\rho(-FV^{-1}) < 1$. Alors la matrice $-I - FV^{-1}$ est inversible, c'est en plus une matrice de Metzler. Puisque $\rho(-FV^{-1}) < 1$, on a $\alpha(-I - FV^{-1}) < 1$. C'est donc une matrice de Metzler stable. Son inverse est positive et par conséquent

$$-A^{-1} = (-I - FV^{-1})^{-1}V^{-1} \geq 0$$

Ce qui montre que A est une matrice de Metzler stable d'après le théorème 27. Cela termine la démonstration.

Annexe B

Le nombre de reproduction de base

B.1 Introduction

Le nombre de reproduction de base couramment appelé \mathcal{R}_0 est une quantité sans dimension qui, sous certaines conditions permet d'établir la stabilité des points d'équilibres d'un système dynamique. est défini comme « **le nombre moyen de cas secondaires, produit par un individu infectieux typique au cours de sa période d'infectivité, dans une population totalement constituée de susceptibles.** »

\mathcal{R}_0 est par conséquent, une mesure du potentiel de transmission, c'est à dire la capacité d'un agent infectieux à propager l'infection à travers une population donnée immédiatement après son introduction.

Le moyen de transmission peut être direct ou indirect. Le nombre \mathcal{R}_0 a été défini mathématiquement par O. Diekmann et al dans ([29], [30]) en utilisant la décomposition régulière de la matrice de Metzler associée aux individus « infectieux ». C'est A. Lokta (1913) qui introduit la notation \mathcal{R}_0 et reconnaît la formule de Böckh

$$\mathcal{R}_0 = \int_0^{\infty} p(a)\beta(a)da$$

où $p(a)$ désigne la probabilité pour une femme de survivre à l'âge a et $\beta(a)$ le taux de naissance des filles à l'âge a .

L'apparition de \mathcal{R}_0 est relativement récente en épidémiologie et date des années 80. Depuis une trentaine d'années \mathcal{R}_0 est de plus en plus utilisé dans les situations de plus en plus réalistes et sur des modèles de plus en plus compliqués.

Le concept trouve sa base en démographie. Le directeur de bureau des statistiques de Berlin, Richard Böckh introduit et calcule ce qu'il appelle « la propagation totale de la population » (K.Dietz). Dans ce contexte \mathcal{R}_0 est le nombre moyen de naissances de filles produit par une femme durant sa vie entière.

Dans la littérature, il existe plusieurs techniques de calcul de \mathcal{R}_0 . Nous allons dans la suite donner deux types d'algorithmes de calcul de \mathcal{R}_0 . À savoir :

1. l'algorithme de calcul dû à J. M. Hefferman et al dans [52]
2. la technique élaborée par G. Sallet et J. C. Kamgang dans [79]. Il faut noter que cette technique faite par ces deux auteurs est un raffinement du critère de Routh-Hurwitz. Cette méthode ne calcule pas forcément \mathcal{R}_0 mais donne un seuil équivalent.

B.2 Méthode « de la prochaine génération »

Dans cette technique de calcul, \mathcal{R}_0 est définie comme le rayon spectral de « l'opérateur de la prochaine génération ». La détermination de l'opérateur implique la répartition en deux compartiments; le compartiment des infectés (latents, infectieux...) et le compartiment des individus non infectés.

Cette technique a été élaborée d'abord par Diekmann et Heesterbeek dans [29] et puis reprise par Van den Driessche et Watmough dans [127] pour les systèmes en dimension finie. Dans cette partie, nous allons appliquer cette méthode à quelques modèles d'épidémiologie. Pour les détails de la formation de « l'opérateur de la prochaine génération », se référer à l'article de Diekmann et Heesterbeek [30].

On considère un modèle épidémiologique comportant n classes ou compartiments homogènes. Le vecteur x représente l'état du système et x_j est le nombre (ou la concentration) d'individus dans le compartiment j . Les compartiments sont ordonnés de tel sorte que les derniers sont des infectés (latents, infectieux...). Les k premiers

compartiments sont les individus libres de l'infection (Susceptibles...).

Soit le vecteur $x = x_j$, $j = 1, \dots, n$, où x_j est le nombre (ou concentration) des individus dans le compartiment j .

Soit $\mathcal{F}_j(x)$ la vitesse d'apparition des infectieux dans le compartiment j . On note par \mathcal{V}_j^+ la vitesse de transfert des individus dans le compartiment j par tout autre moyen et \mathcal{V}_j^- la vitesse de transfert hors du compartiment j . La dynamique définie dans ce compartiment est :

$$\dot{x}_j = \mathcal{F}_j(x) + \mathcal{V}_j^+(x) - \mathcal{V}_j^-(x)$$

On suppose que les fonctions sont au moins C^1 . Si on pose $\mathcal{V}_j(x) = \mathcal{V}_j^+(x) - \mathcal{V}_j^-(x)$ le système précédent devient

$$\dot{x}_j = \mathcal{F}_j(x) + \mathcal{V}_j(x)$$

Un état du système x_0 est sans maladie, si les compartiments des « infectés » sont vides. C'est le « Disease Free Equilibrium »(DFE), c'est à dire pour $j > k$, $(x_0)_j = 0$. Pour des raisons biologiques on a les propriétés suivantes :

1. $x \geq 0$, $\mathcal{F}_j(x) \geq 0$, $\mathcal{V}_j^+(x) \geq 0$, $\mathcal{V}_j^-(x) \geq 0$ car les flots de matières sont des quantités positives.
Si un compartiment est vide, alors il n'y a pas de transfert d'individus hors du compartiment par la mort, l'infection ou soit par tout autre moyen. Ainsi,
2. si $x_j = 0$ alors $\mathcal{V}_j^- = 0$. En particulier si l'on pose $X_s = \{x \geq 0; x_j = 0, i = 1, \dots, n\}$ et si $x \in X_s$ alors $\mathcal{V}_j^- = 0$. En d'autres termes il ne peut rien sortir d'un compartiment vide.
3. Si $j \neq k$ alors $\mathcal{F}_j(x) = 0$. Cela signifie par définition qu'il ne peut rentrer des infectés dans les compartiments non infectés.
4. Si x_0 est un état sans maladie alors $\mathcal{F}_j(x_0) = 0$ et pour $j > k$, $\mathcal{V}_j^+(x_0) = 0$.
Quand il n'y a aucun infecté, il ne peut y avoir de maladie, donc on reste sans infection.

Nous allons maintenant essayer de définir le nombre moyen de ré-infections produites par un individu typique infecté dans un voisinage du DFE.

Considérons la dynamique du système linéarisé au voisinage du point d'équilibre sans maladie, avec une infection bloquée

$$\dot{x} = D\mathcal{V}(x_0)(x - x_0) = D\mathcal{V}^+(x_0)(x - x_0) - D\mathcal{V}^-(x_0)(x - x_0).$$

Le lemme suivant précise la structure du système linéarisé $DX(x_0)$

Lemme B.2.1 [127] *Si x_0 est un DFE, alors les matrices $D\mathcal{F}(x_0)$ et $D\mathcal{V}(x_0)$ se décomposent en blocs*

$$D\mathcal{F}(x_0) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & F \end{bmatrix}$$

$$D\mathcal{V}(x_0) = \begin{bmatrix} J_1 & J_2 \\ 0 & V \end{bmatrix}$$

$F \geq 0$ et est une matrice de Metzler

Preuve : voir [127].

Par ailleurs si x_0 est un point d'équilibre sans maladie,

$$F = \left[\frac{\partial F_j(x_0)}{\partial x_i} \right] \text{ et } V = \left[\frac{\partial V_j(x_0)}{\partial x_i} \right] \text{ avec } j, i = 1, \dots, m$$

V est une matrice de Metzler.

Si de plus V est stable, ceci implique $-V^{-1} \geq 0$ (voir théorème 27).

Interprétation de la matrice $-FV^{-1}$

Considérons un individu infecté introduit dans un compartiment $k > m$ d'une population sans maladie. L'entrée (i, k) de la matrice $-V^{-1}$ est le temps moyen que l'individu passera dans le compartiment i au cours de sa vie, en supposant que l'on a bloqué la ré-infection. L'entrée (j, i) de la matrice F est la vitesse à laquelle un infecté dans le compartiment i produit des infections dans le compartiment j . Ainsi l'entrée (j, k) de $-FV^{-1}$ est le nombre espéré de nouvelles infections dans le compartiment j produit par un individu infecté introduit originellement dans le compartiment k . La matrice $-FV^{-1}$ est appelée la « **next generation matrix** ».

Le rayon spectral de la matrice $-FV^{-1}$ est le nombre de reproduction de base. C'est à dire

$$\mathcal{R}_0 = \rho(-FV^{-1})$$

La matrice $-FV^{-1} \geq 0$ d'après le théorème de Perron - Frobenius (voir appendice)

B.3 \mathcal{R}_0 et les conditions de seuil

Cette méthode de calcul que nous allons proposer est un résultat tiré de [?] qui est un raffinement du critère de Routh-Hurwitz. En général, la condition de seuil est obtenue en calculant la matrice Jacobienne du système au DFE (Disease Free Equilibrium) et en appliquant le critère de Routh-Hurwitz. Pour les systèmes de dimension supérieure à quatre, le critère n'est plus applicable. Cependant le critère de Routh-Hurwitz reste implicite et ne repose pas sur une formule explicite de la condition de seuil.

Soit un modèle épidémiologique pouvant se mettre sous la forme

$$\begin{cases} \dot{x}_1 &= f(x_1, x_2) \\ \dot{x}_2 &= g(x_1, x_2) \end{cases} \quad (\text{B.1})$$

où $x_1 \in \mathbb{R}_+^{n_1}$ et $x_2 \in \mathbb{R}_+^{n_2}$ et $g(x_1, 0) = 0$

Le vecteur x_1 représente la classe des susceptibles et d'autres classes des individus infectés inactifs; le vecteur x_2 représente la classe des infectés actifs et celle des infectieux. Les fonctions f et g sont supposées être au moins de classe C^1 . Nous allons faire un certain nombre d'hypothèses biologiques raisonnables pour le modèle :

1. On suppose que le système est défini sur un sous-ensemble Ω compact et positivement invariant de l'orthant positif $\mathbb{R}_+^n = \mathbb{R}_+^{n_1} \times \mathbb{R}_+^{n_2}$ avec $n = n_1 + n_2$;
2. l'apparition d'individus infectieux provient des différents compartiments d'individus infectés. En d'autres termes, si la condition initiale appartient à la variété $\{x_2 = 0\}$, les trajectoires positives du système restent dans cette variété. Ce qui signifie que nous pouvons identifier $\mathbb{R}_+^{n_1}$ à $\mathbb{R}_+^{n_1} \times \{0\}$ dans $\mathbb{R}_+^{n_1} \times \mathbb{R}_+^{n_2}$ et $\mathbb{R}_+^{n_1}$ est positivement invariant par le système. Ceci implique que pour tout $x_1 \in \Omega \subset \mathbb{R}_+^n$, $g(x_1, 0) = 0$. Puisque g est de classe C^1 , on peut écrire

$$g(x_1, x_2) = A_3(x)x_2,$$

où $A_3(x)$ est une matrice $n_2 \times n_2$ continue et $x = (x_1, x_2)$;

3. supposons qu'il existe un unique point d'équilibre non endémique encore appelé « Disease Free Equilibrium »(DFE), $(x_1^*, 0) \in \Omega \subset \mathbb{R}_+^n$ du système. Puisque f

est de classe C^1 , on peut écrire

$$f(x_1, x_2) = A_1(x)(x_1 - x_1^*) + A_2(x)x_2$$

où A_1 est une matrice carrée d'ordre n_1 et A_2 une matrice d'ordre $n_1 \times n_2$.

Considérons le système pseudo-triangulaire suivant :

$$\begin{cases} \dot{x}_1 &= A_1(x)(x_1 - x_1^*) + A_2(x)x_2 \\ \dot{x}_2 &= A_3(x)x_2 \end{cases} \quad (\text{B.2})$$

Puisque les modèles épidémiologiques sont des systèmes compartimentaux particuliers, nous en déduisons que la matrice

$$\begin{pmatrix} A_1(x) & A_2(x) \\ 0 & A_3(x) \end{pmatrix}$$

est une matrice de Metzler.

Ajoutons à présent une hypothèse raisonnable : l'équilibre non endémique (DFE) $(x_1^*, 0) \in \Omega$, où $x_1^* \in \mathbb{R}_+^{n_1}$ est globalement et asymptotiquement stable sur $(\mathbb{R}_+^{n_1} \times \{0\}) \cap \Omega$. Ceci implique que pour le système $\dot{x}_1 = A_1(x)x_1$ défini dans $(\mathbb{R}_+^{n_1} \times \{0\}) \cap \Omega$, x_1^* est un point d'équilibre globalement et asymptotiquement stable.

En biologie, cette hypothèse signifie qu'il existe un état d'équilibre positif, attractif et stable où il n'y a pas de maladie dans la population.

Nous allons maintenant présenter une méthode de calcul permettant de donner une condition de seuil. Considérons le système (B.1) précédent.

Soit $x^* = (x_1^*, 0) \in \mathbb{R}_+^{n_1+n_2}$ le point d'équilibre sans maladie ou disease free equilibrium (DFE) du système (B.1) ; alors

$$f(x_1^*, 0) = g(x_1^*, 0) = 0.$$

La matrice Jacobienne calculée au DFE peut se mettre sous la forme :

$$J = \begin{pmatrix} A_1(x_1^*) & A_2(x_1^*) \\ 0 & A_3(x_1^*) \end{pmatrix}$$

et nous supposons que $\dot{x}_1 = A_1(x)x_1$ est globalement asymptotiquement stable en x_1^* , la matrice $A_1(x_1^*)$ est stable, c'est à dire

$$\alpha(A_1(x_1^*)) < 0$$

La matrice J étant triangulaire, la stabilité locale de x_1^* est associée à la stabilité de la matrice de Metzler $A_3(x_1^*)$. La condition pour la stabilité locale est donc $\alpha(A_3(x_1^*)) < 0$ et la condition d'instabilité locale est $\alpha(A_3(x_1^*)) > 0$. De cette condition de stabilité locale du DFE, on peut obtenir le taux de reproduction de base \mathcal{R}_0 en donnant une expression équivalente à $\alpha(A_3(x_1^*)) < 0$ et se mettant sous la forme $\mathcal{R}_0 < 1$ voir [?].

De même, lorsque la décomposition régulière de la matrice A est de la forme $A = D + M$ où D est de Metzler stable et $M \geq 0$, cette condition de seuil associée à \mathcal{R}_0 est d'après [30], [29]

$$\mathcal{R}_0 = \rho(-D^{-1}M)$$

Les deux sections précédente nous ont permis de faire une analyse des quelques méthodes de détermination du nombre de reproduction de base. Ce paramètre sans dimension est un outil très important dans l'étude de la stabilité des points d'équilibre des modèles épidémiologiques.

Annexe C

Distance d'une Matrice de Metzler à la Stabilité puis à l'Instabilité

C.1 Introduction

Calculer la distance à l'instabilité d'une matrice stable pour des perturbations réelles et complexes est un problème d'optimisation difficile. Un algorithme solution a été proposé pour calculer cette distance en 1988 par Byers [19], pour des perturbations complexes. Cette distance, dite rayon de stabilité, a été introduite dans le contexte de la théorie de contrôle par Hinrichsen et Pritchard [56]

Néanmoins cette tâche difficile peut l'être moins dans le cas d'une matrice de Metzler [6, 74, 95]. Une matrice de Metzler est dite stable si les trois rayons de stabilité définis pour des perturbations complexes, réelles et réelles positives sont égaux et nous disposons d'une formule explicite ;

$$r_{\mathbb{R}} = r_{\mathbb{C}} = r_{\mathbb{R}^+} = \frac{1}{\|A^{-1}\|}$$

[6, 74, 95]. ou $\|\cdot\|$ est une norme subordonnée induite par une norme vectorielle monotone.(voire appendice A.3.2)

Nous remarquons que pour les matrices de Metzler la distance à l'instabilité est égale à la distance à la singularité.

Dans la suite du document nous noterons \mathcal{S}_t l'ensemble des matrices stables ; et \mathcal{U} l'ensemble des matrices instables.

C.2 Préliminaires

Pro C.2.1 (Frontière de l'intersection de deux ouverts) *Soit A et B deux ensembles ouverts et non vides $\partial A, \partial B$ leurs frontières respectives ; nous avons,*

$$\partial(A \cap B) \subset (\partial A \cap B) \cup (A \cap \partial B) \cup (\partial B \cap A)$$

Preuve

On sait que $\partial A = \bar{A} \setminus \text{int}(A) = \bar{A} \cap \bar{A}^c$

donc ,

$$\partial(A \cap B) = \overline{(A \cap B)} \setminus \text{int}(A \cap B)$$

A et B ouverts, nous avons,

$$\partial(A \cap B) = \overline{(A \cap B)} \setminus (A \cap B)$$

En outre nous avons, pour toute paire d'ensembles, A et B

$$\overline{A \cap B} \subset \bar{A} \cap \bar{B}$$

Ce qui conduit à l'inclusion suivante :

$$\partial(A \cap B) \subset (\bar{A} \cap \bar{B}) \setminus (A \cap B)$$

On sait que $A \setminus B = A \cap B^c$ et $(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$

Notre inclusion devient,

$$\partial(A \cap B) \subset (\bar{A} \cap \bar{B}) \cap (A \cap B)^c = (\bar{A} \cap \bar{B}) \cap (A^c \cup B^c)$$

ANNEXE C. DISTANCE D'UNE MATRICE DE METZLER À LA STABILITÉ
 PUIS À L'INSTABILITÉ

Ensuite en utilisant les propriétés de distributivité de l'intersection et de la réunion des ensembles, nous avons,

$$\partial(A \cap B) \subset (A^c \cap \bar{A}) \cap \bar{B} \cup (B^c \cap \bar{B}) \cap \bar{A}$$

Et comme

$$(A^c \cap \bar{A}) \subset (\bar{A}^c \cap \bar{A}) = \partial A$$

$$\partial(A \cap B) \subset (\partial A \cap \bar{B}) \cup (\partial B \cap \bar{A})$$

Notons aussi que, $\bar{A} = A \cup \partial A$, nous avons l'égalité suivante,

$$(\partial A \cap \bar{B}) \cup (\partial B \cap \bar{A}) = (\partial A \cap (B \cup \partial B)) \cup ((\partial B \cap (A \cup \partial A)))$$

De nouveau par distributivité nous avons,

$$(\partial A \cap \bar{B}) \cup (\partial B \cap \bar{A}) = (\partial A \cap B) \cup (\partial A \cap \partial B) \cup (\partial B \cap A) \cup (\partial A \cap \partial B)$$

Et finalement nous obtenons l'inclusion suivante :

$$\partial(A \cap B) \subset (\partial A \cap B) \cup (\partial A \cap \partial B) \cup (\partial B \cap A)$$

Remarque 17 *L'inclusion n'est pas vrai dans l'autre sens. En effet soit deux ensembles ouverts A et B illustrés par la figure C.1 Nous avons :*

$$A \cap B = \emptyset; \text{ donc } \partial(A \cap B) = \emptyset$$

$$\partial A \cap B = \emptyset$$

$$\partial B \cap A = \emptyset$$

$$\partial A \cap \partial B = W \text{ n'est pas inclut dans } \partial(A \cap B) = \emptyset$$

C.3. DISTANCE D'UNE MATRICE DE METZLER $A \in M_{(2 \times 2)}(\mathbb{R})$
 DIAGONALE INSTABLE À L'ENSEMBLE \mathcal{S}_T DES MATRICES STABLES

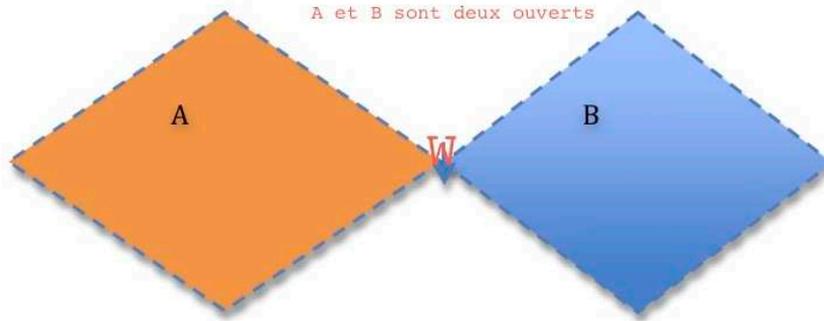


FIGURE C.1 – $(\partial A \cap B) \cup (\partial A \cap \partial B) \cup (\partial B \cap A) \neq \partial(A \cap B)$

C.3 Distance d'une matrice de Metzler $A \in M_{(2 \times 2)}(\mathbb{R})$ diagonale instable à l'ensemble \mathcal{S}_t des matrices stables

Dans cette section il s'agit d'évaluer la distance (de Frobenius) d'une matrice de Metzler diagonale A instable à la stabilité. Pour toute matrice de Metzler symétrique, on peut toujours trouver une matrice diagonale qui est semblable à sa matrice Jacobienne prise au point d'équilibre sans maladie (DFE). De norme de Frobenius est invariable par changement de base orthogonale, et elle est plus aisée à manipuler. Pour qu'une matrice M d'ordre 2 soit stable, il faut et il suffit que sa trace soit négative et son déterminant positif :

$$\text{Tr}(M) < 0 \text{ et } \text{Det}(M) > 0.$$

Soit donc une matrice diagonale instable, $A = \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & -b \end{bmatrix}$ avec $a > 0, b > 0$

Nous allons calculer la distance de A à l'ensemble des matrices stables (\mathcal{S}_t) pour la norme de Frobenius.

ANNEXE C. DISTANCE D'UNE MATRICE DE METZLER À LA STABILITÉ
 PUIS À L'INSTABILITÉ

Prenons $\Delta = \begin{bmatrix} x & y \\ z & t \end{bmatrix}$ dans $\partial\mathcal{S}_t$,

La distance séparant A à \mathcal{S}_t se définit comme suit :

$$d_F(A, \mathcal{S}_t) = d_F(A, \bar{\mathcal{S}}) = \min_{\Delta \in \partial\mathcal{S}_t} \|A - \Delta\| = \sqrt{(a-x)^2 + y^2 + z^2 + (b+t)^2}$$

La distance $d_F(A, \Delta)$ est la solution du problème d'optimisation sous contrainte suivant :

$$\begin{cases} \min d_F^2(A, \Delta) \\ \text{s.c} \\ \Delta \in \partial\mathcal{S}_t \end{cases} \quad (\text{C.1})$$

Nous devons d'abord préciser l'ensemble $\partial\mathcal{S}_t$ frontière de l'ensemble des matrices stables d'ordre 2.

C.3.1 Frontière de l'ensemble des matrices stables ($\partial\mathcal{S}_t$)

Pro C.3.1 *soit :*

$$\mathcal{S}_t = \{M / \det(M) > 0\} \cap \{M / \text{Tr}(M) < 0\}$$

$$\mathcal{X} = \left\{ \begin{bmatrix} x & y \\ z & t \end{bmatrix}, (x+t < 0), xt - yz = 0 \right\}$$

$$\mathcal{Y} = \left\{ \begin{bmatrix} x & y \\ z & t \end{bmatrix}, (xt - yz > 0), (x+t = 0) \right\}$$

$$\mathcal{Z} = \left\{ \begin{bmatrix} x & y \\ z & t \end{bmatrix}, (xt - zy = 0), (x+t = 0) \right\}$$

Nous avons, $\partial\mathcal{S}_t = \mathcal{X} \cup \mathcal{Y} \cup \mathcal{Z}$

C.3. DISTANCE D'UNE MATRICE DE METZLER $A \in M_{(2 \times 2)}(\mathbb{R})$
 DIAGONALE INSTABLE À L'ENSEMBLE \mathcal{S}_T DES MATRICES STABLES

Preuve

\mathcal{S}_t étant l'intersection de deux ouverts,

$$\mathcal{S}_t = \{M / \det(M) > 0\} \cap \{M / \text{Tr}(M) < 0\},$$

la proposition C.2.1 assure que, $\partial\mathcal{S}_t \subset \mathcal{X} \cup \mathcal{Y} \cup \mathcal{Z}$.

Il suffit à présent de montrer que $\mathcal{X} \cup \mathcal{Y} \cup \mathcal{Z} \subset \partial\mathcal{S}_t$

pour prouver que : $\partial\mathcal{S}_t = \mathcal{X} \cup \mathcal{Y} \cup \mathcal{Z}$

Pour ce faire, nous montrons que toute matrice M appartenant à $\mathcal{X} \cup \mathcal{Y} \cup \mathcal{Z}$ se trouve à la frontière $\partial\mathcal{S}_t$ des matrices stables.

Premier cas : $M \in \mathcal{Y}$

$M \in \mathcal{Y}$ alors on a, $(xt - yz > 0)$ et $(x + t = 0) \iff \text{Tr}(M) = 0$, et $\text{Det}(M) > 0$.

Le polynôme caractéristique de M est

$$P_M = \lambda^2 - \text{Tr}(M)\lambda + \text{Det}(M) = \lambda^2 + \text{Det}(M)$$

Le discriminant de P_M est, $\delta = \text{Tr}^2(M) - 4\text{Det}(M) = -4\text{Det}(M) < 0$

Le discriminant étant négatif;

on a des valeurs propres complexes conjuguées, $\lambda = c \pm id$.

De plus les valeurs propres sont imaginaires pures, car $\text{Tr}(M) = 0$.

Donc, $\lambda = \pm id$

On en déduit que, M est semblable à la matrice $\begin{bmatrix} 0 & -d \\ d & 0 \end{bmatrix} = T$,

et il existe une matrice P inversible telle que, $M = P \begin{bmatrix} 0 & -d \\ d & 0 \end{bmatrix} P^{-1}$.

Quand on ajoute à T une matrice de perturbation $\begin{bmatrix} -\epsilon & 0 \\ 0 & -\epsilon \end{bmatrix}$, avec

$$\epsilon = \frac{1}{n}, n \in \mathbb{N}^*$$

ANNEXE C. DISTANCE D'UNE MATRICE DE METZLER À LA STABILITÉ
 PUIS À L'INSTABILITÉ

Nous obtenons une matrice perturbée $T_\epsilon = \begin{bmatrix} -\epsilon & -d \\ d & -\epsilon \end{bmatrix}$, $\epsilon > 0$, qui est stable.

La trace et le déterminant étant invariables par changement de base ;

de la stabilité de $\begin{bmatrix} -\epsilon & -d \\ d & -\epsilon \end{bmatrix}$, nous déduisons celle de $P \begin{bmatrix} -\epsilon & -d \\ d & -\epsilon \end{bmatrix} P^{-1}$.

Quand $n \rightarrow \infty$ nous avons $\epsilon \rightarrow 0$ et nous avons,

$$P \begin{bmatrix} -\epsilon & -d \\ d & -\epsilon \end{bmatrix} P^{-1} \rightarrow P \begin{bmatrix} 0 & -d \\ d & 0 \end{bmatrix} P^{-1} = M$$

M est de ce fait limite d'une suite d'éléments de S et donc appartient à l'adhérence de S_t . et comme par construction, M n'appartient pas à S_t ,

Conclusion, $M \in \overline{S_t} \setminus S_t$ c'est à dire $M \in \partial S_t$

Deuxième cas : $M \in \mathcal{X}$

$M \in \mathcal{X}$, nous avons

$$(x + t < 0) \text{ et } (xt - yz = 0) \iff Tr(M) < 0, \text{ et } Det(M) = 0$$

$P_M = \lambda^2 - Tr(M)\lambda$ et $\delta = Tr^2(M)$ donc nous avons un vecteur propre nulle et l'autre négative.

Aussi, M est semblable à la matrice $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -d \end{bmatrix} = T$. Il existe alors une matrice P inversible tel que,

$$M = P \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -d \end{bmatrix} P^{-1}.$$

C.3. DISTANCE D'UNE MATRICE DE METZLER $A \in M_{(2 \times 2)}(\mathbb{R})$
 DIAGONALE INSTABLE À L'ENSEMBLE \mathcal{S}_T DES MATRICES STABLES

En ajoutant la matrice de perturbation $\begin{bmatrix} -\epsilon & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, $\epsilon = \frac{1}{n}$, $n \in \mathbb{N}^*$

à la matrice T , nous obtenons la matrice stable

$$T_\epsilon = \begin{bmatrix} -\epsilon & 0 \\ 0 & -d \end{bmatrix}, \text{ avec } \epsilon = \frac{1}{n} > 0.$$

La trace et le déterminant étant invariables par changement de base, nous déduisons que la matrice $P \begin{bmatrix} -\epsilon & 0 \\ 0 & -d \end{bmatrix} P^{-1}$ est stable.

Quand $n \rightarrow \infty$, nous avons $\epsilon \rightarrow 0$. Il vient :

$$P \begin{bmatrix} -\epsilon & 0 \\ 0 & -d \end{bmatrix} P^{-1} \rightarrow P \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -d \end{bmatrix} P^{-1} = M.$$

M est de ce fait limite d'une suite d'éléments de \mathcal{S}_t et comme par construction de M n'appartient pas à \mathcal{S}_t

Conclusion, $M \in \overline{\mathcal{S}_t} \setminus \mathcal{S}_t$ c'est à dire $M \in \partial \mathcal{S}_t$

Troisième cas : $M \in \mathcal{Z}$

$M \in \mathcal{Z}$, nous avons

$$(xt - zy = 0) \text{ et } (x + t = 0) \iff \text{Tr}(M) = 0, \text{ et } \text{Det}(M) = 0.$$

$P_M = \lambda^2$, nous avons une valeur propre nulle d'ordre 2. Et comme M est non nulle,

ANNEXE C. DISTANCE D'UNE MATRICE DE METZLER À LA STABILITÉ
 PUIS À L'INSTABILITÉ

M est semblable à la matrice $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = T$.

En ajoutant à T une perturbation $\begin{bmatrix} -\epsilon & 0 \\ 0 & -\epsilon \end{bmatrix}$ avec $\epsilon = \frac{1}{n}, n \in \mathbb{N}$

Nous obtenons la matrice $T_\epsilon = \begin{bmatrix} -\epsilon & 0 \\ 1 & -\epsilon \end{bmatrix}$ qui est stable.

Comme la trace et le déterminant sont invariants par changement de base, la matrice

$P \begin{bmatrix} -\epsilon & 0 \\ 1 & -\epsilon \end{bmatrix} P^{-1}$ est stable.

Quand $n \rightarrow \infty$, on a $\epsilon \rightarrow 0$. et $P \begin{bmatrix} -\epsilon & 0 \\ 1 & -\epsilon \end{bmatrix} P^{-1} \rightarrow P \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} P^{-1} = M$.

M est de ce fait limite d'une suite d'éléments de S et comme par construction de M n'appartient pas à S_t ,

Conclusion, $M \in \overline{S_t} \setminus S_t$ c'est à dire $M \in \partial S_t$

Ce troisième cas achève de montrer que $\mathcal{X} \cup \mathcal{Y} \cup \mathcal{Z} \subset \partial S_t$ et nous pouvons désormais affirmer que $\mathcal{X} \cup \mathcal{Y} \cup \mathcal{Z} = \partial S_t$.

C.3.2 Distance de A à \mathcal{X} ($d_F(A, \mathcal{X})$), Distance de A à \mathcal{Y} ($d_F(A, \mathcal{Y})$), et Distance de A à \mathcal{Z} ($d_F(A, \mathcal{Z})$)

Dans cette section nous calculons la distance d'une matrice diagonale instable A à la frontière de l'ensemble des matrices stables ∂S_t .

Posons $A = \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & -b \end{bmatrix}$ avec $a > 0$ et $b > 0$.

Il a été établi dans la section précédente que $\mathcal{X} \cup \mathcal{Y} \cup \mathcal{Z} = \partial S_t$.

C.3. DISTANCE D'UNE MATRICE DE METZLER $A \in M_{(2 \times 2)}(\mathbb{R})$
 DIAGONALE INSTABLE À L'ENSEMBLE \mathcal{S}_T DES MATRICES STABLES

De ce fait nous avons,

$$d_F(A, \partial\mathcal{S}_t) = \min((d_F(A, \mathcal{X}), d_F(A, \mathcal{Y}), d_F(A, \mathcal{Z}))$$

Pour avoir la distance $d_F(A, \partial\mathcal{S}_t)$, il nous reste à calculer successivement les distances suivantes : $d_F(A, \mathcal{X})$, $d_F(A, \mathcal{Y})$ et $d_F(A, \mathcal{Z})$.

Distance de A à \mathcal{X} . ($d_F(A, \mathcal{X})$)

Soit $\Delta \in \mathcal{X}$, calculer $d_F(A, \mathcal{X})$ revient à résoudre le problème de minimisation suivant :

$$\begin{cases} \min d_F^2(A, \Delta) \\ \text{s.c } \Delta \in \mathcal{X} \end{cases} \quad (\text{C.2})$$

Puisque,

$$\min d^2(A, \Delta) = \min[x - a)^2 + (t + b)^2 + y^2 + z^2]$$

le problème de minimisation ci-dessus se précise comme suit :

$$\begin{cases} \min[(x - a)^2 + (t + b)^2 + y^2 + z^2] \\ \text{s.c} \\ xt - yz = 0 \\ x + t < 0 \end{cases} \quad (\text{C.3})$$

1. Premier cas : ($x = 0, t < 0$)

$$(x = 0, t < 0) \implies (yz = 0),$$

Dans ce cas nous avons, $d_F^2(A, \Delta) = \min(a^2 + y^2 + z^2 + (t + b)^2)$.

on a nécessairement, $y = z = 0$, ceci nous donne $d_F^2(A, \Delta) = \min(a^2 + (t + b)^2)$

Le minimum est atteint quand

ANNEXE C. DISTANCE D'UNE MATRICE DE METZLER À LA STABILITÉ
 PUIS À L'INSTABILITÉ

$$t = -b \text{ i.e } \Delta = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -b \end{bmatrix} \text{ avec } a > 0 \text{ et } b > 0.$$

Finalement nous avons, $d^2(A, \Delta) = a^2$

2. Deuxième cas : $t = 0, x < 0$

$$(t = 0, x < 0) \implies (yz = 0)$$

nous avons, $d_F^2(A, \Delta) = \min((x - a)^2 + y^2 + z^2 + b^2)$

On a, $y = z = 0$, ceci nous donne $d^2(A, \Delta) = \min((x - a)^2 + b^2)$, puisque $x < 0$. $d^2(A, \Delta) > a^2$, valeur obtenue au premier cas, le minimum n'est donc pas atteint

3. Troisième cas : $(xt \neq 0, yz \neq 0)$

$$(xt \neq 0, yz \neq 0) \implies (xt = yz). \text{ De plus, } (xt = yz) \implies (z = \frac{xt}{y})$$

Nous avons, $d_F^2(A, \mathcal{X}) = \min((x - a)^2 + y^2 + z^2 + b^2)$.

En substituant $\frac{xt}{y}$ à z ,

$$\text{il vient, } d_F^2(A, \mathcal{X}) = \min((x - a)^2 + y^2 + \frac{(xt)^2}{y^2} + (t + b)^2).$$

$$\text{Posons } f(x, y, t) = (x - a)^2 + y^2 + \frac{(xt)^2}{y^2} + (t + b)^2$$

Une condition nécessaire pour que le minimum soit atteint est que les dérivées partielles de f s'annulent :

C.3. DISTANCE D'UNE MATRICE DE METZLER $A \in M_{(2 \times 2)}(\mathbb{R})$
 DIAGONALE INSTABLE À L'ENSEMBLE \mathcal{S}_T DES MATRICES STABLES

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial f}{\partial x} = 2(x - a) + 2x \frac{t^2}{y^2} = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial t} = 2(x + b) + 2t \frac{x^2}{y^2} = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y} = (2y) - 2 \frac{x^2 t^2}{y^3} = 0 \end{array} \right. \quad (\text{C.4})$$

De la troisième équation du système C.4, il vient :

$$\frac{\partial f}{\partial y} = 2y - 2 \frac{x^2 t^2}{y^3} = 0 \implies (y^2 = xt, \text{ ou } y^2 = -xt)$$

– **Sous-cas 1** : $xt > 0$

Si $xt > 0$ alors $y^2 = xt$

En substituant xt à y^2 dans la première équation du système C.4, on obtient l'implication suivante :

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2(x - a) + 2t = 0 \implies x + t = a > 0.$$

Ce qui signifie que $\frac{\partial f}{\partial x}$ ne s'annule pas et donc le minimum n'est pas atteint.

– **Sous-cas 2** : $xt < 0$

Si $xt < 0$, nous avons $y^2 = -xt$

De la première équation du système C.4 nous obtenons

ANNEXE C. DISTANCE D'UNE MATRICE DE METZLER À LA STABILITÉ
 PUIS À L'INSTABILITÉ

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2(x - a) + 2x \frac{t^2}{y^2} = 0 \implies x = t + a \quad (\text{C.5})$$

Et de la deuxième équation du système C.5 il vient,

$$\frac{\partial f}{\partial t} = 2(x + b) + 2t \frac{x^2}{y^2} = 0 \implies x = t + b \quad (\text{C.6})$$

Des égalités C.5 et C.6 nous obtenons $a = b$

Minimiser $f(x, y, t) = (x - a)^2 + y^2 + \frac{(xt)^2}{y^2} + (t + b)^2$, revient donc à minimiser

$(x - a)^2 + x^2 + 2 y^2$,) puisque $t + b = x$ et $y^2 = -xt$.

En outre, $y^2 = -xt = -x(x - a)$ en vertu de l'égalité C.5.

Il vient donc $(x - a)^2 + x^2 + 2 y^2 = (x - a)^2 + x^2 - 2x(x - a) = a^2$ et $d_F(A, \mathcal{X}) = a$

Les matrices Δ qui réalisent le minimum sont de la forme,

$$\Delta = \begin{bmatrix} x & \sqrt{(a - x)x} \\ -\sqrt{(a - x)x} & x - a \end{bmatrix}$$

Sous la condition $0 < x < a$ pour que la racine soit définie

De plus, $x + t < 0$ i.e $2x - a < 0$, impose $x < \frac{a}{2}$

Conclusion, $d_F(A, \mathcal{X}) = a$

C.3. DISTANCE D'UNE MATRICE DE METZLER $A \in M_{(2 \times 2)}(\mathbb{R})$
 DIAGONALE INSTABLE À L'ENSEMBLE \mathcal{S}_T DES MATRICES STABLES

Distance de A à \mathcal{Y}

Le minimum n'est pas atteint.

preuve.

$$\begin{cases} \min d_F^2(A, \Delta) \\ \text{s.c } \Delta \in \mathcal{Y} \end{cases} \quad (\text{C.7})$$

Puisque

$$\min d^2(A, \Delta) = \min((x - a)^2 + (t + b)^2 + y^2 + z^2)$$

le problème de minimisation ci dessus se précise comme suit :

$$\begin{cases} \min[(x - a)^2 + (t + b)^2 + y^2 + z^2] \\ \text{s.c} \\ xt - yz \geq 0 \\ x + t = 0 \end{cases} \quad (\text{C.8})$$

Si $(x + t = 0)$, $xt - yt \geq 0 \implies t = -x$, $xt > yt$.

Nous avons $d^2(A, \mathcal{Y}) = \min((x - a)^2 + (-x + b)^2 + y^2 + z^2)$

Nécessairement $y = z = 0$ il vient, $d^2(A, \mathcal{Y}) = \min(x - a)^2 + (-x + b)^2$

Posons

$$f_1 = (x - a)^2 + (-x + b)^2$$

f_1 atteint son minimum quand :

$$\frac{\partial f_1}{\partial x} = 2(x - a) - 2(b - x) = 0 \implies x = \frac{a + b}{2}$$

Les matrices qui réalisent le minimum sont de la forme :

$$\Delta = \begin{bmatrix} \frac{a + b}{2} & 0 \\ 0 & -\frac{a + b}{2} \end{bmatrix}.$$

ANNEXE C. DISTANCE D'UNE MATRICE DE METZLER À LA STABILITÉ
 PUIS À L'INSTABILITÉ

avec $Det(\Delta) < 0$, mais nous avons $\Delta \in \mathcal{S}_t$ ensemble des matrices stables, on arrive à une contradiction et de ce fait il n'y a pas de solution, et le minimum n'est pas atteint.

Distance de A à \mathcal{Z}

Soit $\Delta \in \mathcal{Z}$, calculer $d_F(A, \mathcal{Z})$ revient à résoudre le problème de minimisation suivant :

$$\left\{ \begin{array}{l} \min[(x - a)^2 + (t + b)^2 + y^2 + z^2] \\ \text{s.c} \\ xt - yz = 0 \\ x + t = 0 \end{array} \right. \quad (\text{C.9})$$

En utilisant les multiplicateurs de Lagrange, nous introduisons les nouvelles variables λ_1, λ_2 appelé multiplicateurs de Lagrange, et étudions la fonction de Lagrange suivante :

$$L(x, y, z, \lambda_1, \lambda_2) = (x - a)^2 + (t + b)^2 + y^2 + z^2 - \lambda_1(x + t) - \lambda_2(xt - zy). \quad (\text{C.10})$$

Au minimum nous avons nécessairement.

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial L}{\partial x} = 2(x - a) - \lambda_1 - \lambda_2 t = 0 \\ \frac{\partial L}{\partial t} = 2(t + b) - \lambda_1 - \lambda_2 x = 0 \\ \frac{\partial L}{\partial y} = 2y + \lambda_2 z = 0 \\ \frac{\partial L}{\partial z} = 2z + \lambda_2 y = 0 \end{array} \right. \quad (\text{C.11})$$

C.3. DISTANCE D'UNE MATRICE DE METZLER $A \in M_{(2 \times 2)}(\mathbb{R})$
 DIAGONALE INSTABLE À L'ENSEMBLE \mathcal{S}_T DES MATRICES STABLES

1. **Cas 1** : $\lambda_2 = 2$

$\lambda_2 = 2$ donne $y = -z$

Les relations suivantes s'ensuivent :

$$2x - 2t = \lambda_1 + 2a \quad (\text{C.12})$$

$$-2x + 2t = \lambda_1 - 2b \quad (\text{C.13})$$

Les relations (C.12 et C.13) $\implies (\lambda_1 = b - a)$.

En substituant $b - a$ à λ_1 dans la relation C.12 nous obtenons,

$$x - t = \frac{a + b}{2}. \quad (\text{C.14})$$

En outre comme $\Delta \in \mathcal{Z}$, nous avons

$$x + t = 0 \quad (\text{C.15})$$

Les relations (C.14, et C.15) $\implies (x = \frac{b+a}{4}, t = -\frac{b+a}{4})$

D'autre part, comme $y = -z$, nous avons

$(xt = yz = -y^2) \implies (y = \pm \frac{b+a}{4}, z = \mp \frac{b+a}{4})$. De ce qui précède nous obtenons :

$$\min((x - a)^2 + (t + b)^2 + y^2 + z^2)$$

$$= \left(\frac{b-3a}{4}\right)^2 + \left(\frac{3b-a}{4}\right)^2 + \left(\frac{b+a}{4}\right)^2 + \left(\frac{b+a}{4}\right)^2$$

$$= a^2 + \frac{(3b+a)(b-a)}{4}$$

C'est à dire $d_F^2(A, \mathcal{Z}) = a^2 + \frac{(3b+a)(b-a)}{4}$

Les matrices qui réalisent le minimum sont $\Delta = \begin{pmatrix} \frac{b+a}{4} & \pm \frac{b+a}{4} \\ \mp \frac{b+a}{4} & -\frac{b+a}{4} \end{pmatrix}$

ANNEXE C. DISTANCE D'UNE MATRICE DE METZLER À LA STABILITÉ
 PUIS À L'INSTABILITÉ

2. **Cas 2 :** $y = z = 0$

$y = z = 0$, et $\lambda_2 \in \mathbb{R}$

$$(y = z = 0 \text{ et } xt - zy = 0) \implies (yz = 0 \text{ et } xt = 0)$$

De plus comme $x + t = 0$ nous avons $x = t = 0$ donc $\Delta = 0$

Finalement, $d^2(A, \mathcal{Z}) = a^2 + b^2$

3. **Cas 3 :** $\lambda_2 = -2$,

En substituant -2 à λ_2 dans les deux premières équations du système C.11 nous obtenons $a = -b$ ce qui est une contradiction car a et b sont positifs.

Conclusion : Le minimum n'est pas atteint.

Finalement pour récapituler,

d'après les calculs précédents ; nous avons :

$$d_F(A, \mathcal{S}_t) = \begin{cases} a & \text{si } b > a \\ \frac{\sqrt{3a^2 + 3b^2 - 2ab}}{2} & \text{si } a > b \end{cases} \quad (\text{C.16})$$

C.4 Distance d'une matrice de Metzler $A \in M_{(2 \times 2)}(\mathbb{R})$ diagonale stable à l'ensemble \mathcal{U} des matrices instables

On aura besoin par la suite de mesurer la distance d'une matrice de Metzler stable, à l'ensemble des matrices instables \mathcal{U} . Un tel résultat dû à Hinrichsen et al [56] est connu. Cependant le dit résultat n'est valable que pour des normes subordonnées (voire appendice A.3.1) donc pas pour la norme de Frobenius, d'où la nécessité du calcul ci dessous.

Pro C.4.1 Soit la matrice de Metzler stable suivante

$$A = \begin{bmatrix} -a & 0 \\ 0 & -b \end{bmatrix} \text{ avec } a > 0, b > 0$$

La distance $d_F(A, \mathcal{U})$ de la matrice A à l'ensemble \mathcal{U} des matrices instables, pour la norme de Frobenius est : $d_F(A, \mathcal{U}) = \min(a, b)$.

Preuve

La distance à \mathcal{U} est égale à la distance à la frontière $\partial \mathcal{U}$

Nous avons :

$$\partial \mathcal{U} = \partial \mathcal{S}_t = \mathcal{X} \cup \mathcal{Y} \cup \mathcal{Z}$$

Soit $\Delta = \begin{bmatrix} x & y \\ z & t \end{bmatrix}$ appartenant à $\partial \mathcal{U}$.

Nous avons à minimiser

$$f(x, y, z, t) = d_F^2(A, \Delta) = (x + a)^2 + (t + b)^2 + y^2 + z^2$$

sous la contrainte que $\Delta \in \partial \mathcal{U}$.

ANNEXE C. DISTANCE D'UNE MATRICE DE METZLER À LA STABILITÉ
 PUIS À L'INSTABILITÉ

Puisque

$$\partial U = \partial \mathcal{S}_t = \mathcal{X} \cup \mathcal{Y} \cup \mathcal{Z}$$

Nous avons :

$$d_F(A, \partial \mathcal{S}_t) = \min(d_F(A, \mathcal{X}), d_F(A, \mathcal{Y}), d_F(A, \mathcal{Z}))$$

Et le problème de minimisation ci-dessous va se préciser selon qu'on prend Δ dans \mathcal{X} , dans \mathcal{Y} ou dans \mathcal{Z}

Il nous reste à calculer successivement les distances suivantes :

$$d_F(A, \mathcal{X}), d_F(A, \mathcal{Y}) \text{ et } d_F(A, \mathcal{Z}).$$

C.4.1 Distance de A à \mathcal{X} ($d_F(A, \mathcal{X})$), Distance de A à \mathcal{Y} ($d_F(A, \mathcal{Y})$), et Distance de A à \mathcal{Z} ($d_F(A, \mathcal{Z})$)

Distance de A à \mathcal{X}

$$\Delta \in \mathcal{X} \iff x + t < 0, xt - yz = 0$$

, calculer $d_F(A, \mathcal{X})$ revient à résoudre le problème de minimisation suivant :

$$\left\{ \begin{array}{l} \min[(x + a)^2 + (t + b)^2 + y^2 + z^2] \\ \text{s.c} \\ xt - yz = 0 \\ x + t < 0 \end{array} \right. \quad (\text{C.17})$$

Au minimum on a nécessairement $y = z = 0$

De la contrainte $xt - yz = 0$. nous avons $xt = z = 0$

Si $x = -a$ de la contrainte $x + t < 0$ nous avons $t = 0$

C.4. DISTANCE D'UNE MATRICE DE METZLER $A \in M_{(2 \times 2)}(\mathbb{R})$
 DIAGONALE STABLE À L'ENSEMBLE \mathcal{U} DES MATRICES INSTABLES

Si $t = -b$ de la contrainte $x + t < 0$ nous avons $x = 0$
 et finalement au minimum nous avons.

$$x = -a, y = z = t = 0 \text{ ou } t = -b, x = y = z = 0$$

$$\text{Soit } \Delta = \begin{bmatrix} -a & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ ou } \Delta = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -b \end{bmatrix}$$

Dans ce cas la distance est donnée par

$$d_F(A, \mathcal{U}) = \min(a, b)$$

Λ

Distance de A à \mathcal{Y}

Dans l'ensemble \mathcal{Y} , Il se démontre facilement que la distance n'est pas atteinte

Preuve

$$\Delta \in \mathcal{Y} \iff x + t = 0, xt - yz > 0$$

, calculer $d_F(A, \mathcal{Y})$ revient à résoudre le problème de minimisation suivant :

$$\left\{ \begin{array}{l} \min[(x+a)^2 + (t+b)^2 + y^2 + z^2] \\ \text{s.c} \\ xt - yz > 0 \\ x + t = 0 \end{array} \right. \quad (\text{C.18})$$

Au minimum nous avons $y = z = 0$

La contrainte $xt - yz > 0$ nous donne $xt > 0$

D'autre part la contrainte $x + t = 0$ nous donne $x = -t \implies xt = -t^2$

On aboutit à une contradiction, de ce fait le minimum n'est pas atteint. **Λ**

Distance de A à \mathcal{Z}

Nous trouvons après calculs que

$$d_F(A, \mathcal{Z})^2 = \|A - \Delta\|_F^2 = a^2 + \frac{1}{4}(3b - a)(a + b) = b^2 + \frac{1}{4}(3a - b)(a + b)$$

Si $a > b$ nous avons $d_F(A, \mathcal{Z})^2 = b^2 + \frac{1}{4}(3a - b)(a + b) > b^2$;

Si $b > a$ nous avons $d_F(A, \mathcal{Z})^2 = a^2 + \frac{1}{4}(3b - a)(a + b) > a^2$

Finalement,

$$d_F(A, \mathcal{Z})^2 = \min(a^2, b^2)$$

Nous venons de prouver que la distance pour la norme de Frobenius à l'instabilité est $\min(a, b)$.

C.5 Conclusion

Comme récapitulatif nous avons, pour la norme de Frobenius

1. La distance à l'instabilité d'une matrice diagonale

$$A = \begin{bmatrix} -a & 0 \\ 0 & -b \end{bmatrix}$$

avec $a > 0, b > 0$ est $d_F(A, U) = \min(a, b)$

2. La distance à la stabilité d'une matrice diagonale

$$A = \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & -b \end{bmatrix} \text{ avec } a > 0, b > 0$$

est,

$$d_F(A, \mathcal{S}_t) = \begin{cases} a & \text{si } b > a \\ \frac{\sqrt{3a^2 + 3b^2 - 2ab}}{2} & \text{si } a > b \end{cases} \quad (\text{C.19})$$

Remarque 18 *Le théorème de Hinrichsen- Pritchard n'est plus vrai pour la norme de Frobenius (qui n'est pas une norme subordonnée)*

En effet on a calculé pour $A = \begin{bmatrix} -a & 0 \\ 0 & -b \end{bmatrix}$ $d(A, U) = \min(a, b)$
avec $a > 0, b > 0$

En appliquant le résultat de Hinrichsen et Pritchard, nous avons ce qui suit :

$$d_F(A, U) \neq \frac{1}{\|A^{-1}\|_F} = \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}}} = \frac{ab}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$