



HAL
open science

Estimation de fonctions géométriques et déconvolution

Charles H Dossal

► **To cite this version:**

Charles H Dossal. Estimation de fonctions géométriques et déconvolution. Statistiques [math.ST]. Ecole Polytechnique X, 2005. Français. NNT: . tel-00855128

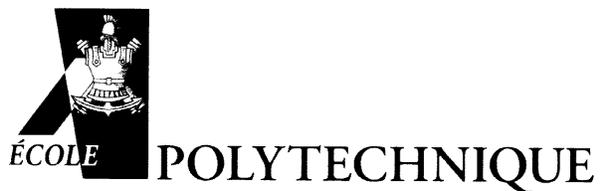
HAL Id: tel-00855128

<https://theses.hal.science/tel-00855128>

Submitted on 28 Aug 2013

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



Thèse pour l'obtention du titre de
DOCTEUR DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE

Spécialité : Mathématiques Appliquées

présentée et soutenue par

Charles DOSSAL

Estimation de fonctions géométriques et déconvolution.

Jury

| | | |
|--------------|---------------|----------------------|
| Marie | FARGE | (Examineur) |
| Jean-Jacques | FUCHS | (Rapporteur) |
| Gérard | KERKYACHARIAN | (Rapporteur) |
| Stéphane | MALLAT | (Directeur de thèse) |
| Marc | LAVIELLE | (Examineur) |

le 5 décembre 2005

Table des matières

| | | |
|-----------|--|-----------|
| I | Introduction | 7 |
| I.1 | Débruitage d'images géométriques | 7 |
| I.1.1 | Un modèle pour les fonctions géométriquement régulières. . . | 7 |
| I.1.2 | Le débruitage dans un cadre minimax | 8 |
| I.1.2.1 | Le risque optimal | 9 |
| I.1.2.2 | Débruitage par seuillage dans une base orthogonale . | 9 |
| I.1.2.3 | Débruitage en ondelettes | 11 |
| I.1.2.4 | Estimation en curvelets | 13 |
| I.1.2.5 | Les familles adaptées | 14 |
| I.1.3 | Les bandelettes de première génération | 15 |
| I.1.4 | Sélection de modèles, estimateur par projection en bandelettes | 17 |
| I.1.5 | Orthogonalisation | 18 |
| I.2 | Inversion tomographique | 19 |
| I.2.1 | Approches linéaires | 19 |
| I.2.2 | Décomposition en Wavelet Vaguelette | 20 |
| I.2.3 | Inversion tomographique en curvelets | 21 |
| I.2.4 | Inversion en bandelettes de seconde génération | 22 |
| I.3 | Déconvolution de train de Diracs, inversion sismique. | 22 |
| I.3.1 | Minimisation l1 | 23 |
| I.3.2 | Un autre critère, l'espacement | 24 |
| | <i>Références bibliographiques de l'introduction</i> | 27 |
| II | Estimation d'images par bandelettes | 31 |
| II.1 | Estimation des images | 32 |
| II.1.1 | Modèle de bruit blanc | 32 |
| II.1.2 | Un modèle pour les images | 33 |
| II.2 | Estimateur par projection et sélection de modèles | 35 |
| II.2.1 | Estimateur par projection | 35 |
| II.2.2 | Sélection de modèle par estimation pénalisée | 36 |

| | | |
|----------|--|----|
| II.2.3 | Calcul du risque de l'estimateur. | 43 |
| II.2.4 | Exemple d'estimateurs par projection pour les images | 46 |
| II.2.4.1 | Les ondelettes | 46 |
| II.2.4.2 | CART et recherche de meilleure base | 47 |
| II.2.4.3 | Les curvelets | 48 |
| II.2.4.4 | Approximation polynomiale par morceaux | 49 |
| II.3 | Estimation dans une base orthogonale de bandelettes | 50 |
| II.3.1 | Bases orthogonales de bandelettes sur une bande | 51 |
| II.3.2 | Des bandelettes sur un rectangle discret | 53 |
| II.3.2.1 | Construction des bases sur un rectangle discret | 54 |
| II.3.2.2 | Approximation sur un rectangle discret | 56 |
| II.3.2.3 | Estimation sur un modèle d'horizon discret | 68 |
| II.3.3 | Base de bandelettes sur $[0, 1]^2$ | 70 |
| II.3.3.1 | Construction d'une base de bandelettes sur $[0, 1]^2$ | 70 |
| II.3.3.2 | Quel découpage ? | 72 |
| II.3.3.3 | Approximation globale en bases de bandelettes | 74 |
| II.3.4 | Estimation des fonctions C^α géométriquement régulières | 80 |
| II.4 | Annexe Découpage | 80 |
| | <i>Références bibliographiques du chapitre II</i> | 91 |

III Application à l'inversion de la tomographie 93

| | | |
|---------|--|-----|
| III.1 | Introduction | 93 |
| III.2 | Inversion et seuillage dans une base. | 97 |
| III.2.1 | Wavelet-Vaguelette Decomposition | 97 |
| III.2.2 | Inversion en curvelets | 98 |
| III.2.3 | Inversion en bandelettes | 99 |
| III.2.4 | Notations | 100 |
| III.3 | Bandelettes orthogonales de deuxième génération | 101 |
| III.3.1 | Transformée en bandelettes sur un petit carré | 102 |
| III.3.2 | Bases et dictionnaire de bandelettes | 104 |
| III.3.3 | Approximation dans une meilleure base de bandelettes | 107 |
| III.4 | Estimateur en bandelettes | 107 |
| III.4.1 | Définition de l'estimateur | 107 |
| III.4.2 | Estimateur oracle | 109 |
| III.4.3 | Résultats d'estimation | 111 |
| III.4.4 | Estimation rapide en bandelettes | 113 |
| III.5 | Résultats numériques | 117 |
| III.6 | Appendices | 119 |
| III.6.1 | Preuve du lemme III.2 | 119 |

| | |
|---|------------|
| <i>Références bibliographiques du chapitre III</i> | 121 |
| IV Inversion sismique sous contrainte d'échelle | 125 |
| IV.1 Introduction | 125 |
| IV.2 Sismique et minimisation l_1 | 127 |
| IV.3 Représentation concise de vecteurs dans un dictionnaire | 129 |
| IV.3.1 Un critère de reconstruction sur le support du vecteur | 131 |
| IV.3.2 Utilisation de la cohérence du dictionnaire | 137 |
| IV.4 Minimisation d'une fonctionnelle relaxée | 138 |
| IV.4.1 Exact Recovery Coefficient | 140 |
| IV.4.2 Reconstruction sous la condition $F(x_0) < 1$ | 145 |
| IV.5 F, ERC et WERC pour la déconvolution | 153 |
| IV.5.1 WERC des signaux de grande échelle | 153 |
| IV.5.2 Résultats numériques | 160 |
| IV.5.2.1 Estimation de Δ | 160 |
| IV.5.2.2 Algorithme itératif par projections alternées | 161 |
| IV.6 Perspectives | 162 |
| <i>Références bibliographiques du chapitre IV</i> | 169 |

Introduction

I.1 Débruitage d'images géométriques

La régularité géométrique des images naturelles est un élément important qui permet à notre cerveau de se faire une représentation de ce que nous voyons. Dans la plupart des images naturelles on retrouve des objets dont les contours ont des formes régulières. Les espaces de régularité classiques tels que les espaces de Hölder, de Sobolev ou de Besov ne prennent pas en compte cette régularité. Elle est pourtant fondamentale pour la reconnaissance, l'analyse et l'estimation. Nous proposons dans la première partie de cette thèse d'exploiter cette régularité géométrique pour estimer au mieux les images en présence de bruit.

On souhaite estimer f à partir des observations bruitées Y

$$Y = f + W, \tag{I.1}$$

où W est un bruit blanc gaussien de variance ε^2 .

Nous choisissons pour cela un modèle de fonctions géométriquement régulières et nous déterminons un estimateur efficace sur les fonctions du modèle.

I.1.1 Un modèle pour les fonctions géométriquement régulières.

Les espaces de régularités classiques tels que les espaces de Hölder, de Sobolev ou de Besov ne sont pas des modèles adaptés aux images géométriques car ils ne prennent pas en compte la géométrie des contours, des singularités. Korostelev et Tsybakov dans [KT93] introduisent le concept de Boundary Fragment qui modélise un morceau d'image géométrique. Ce concept sera repris par Donoho dans [Don97] qui lui donne

le nom de Modèle d'horizon. L'auteur considère une fonction g , \mathbf{C}^α qu'il appelle horizon. Un modèle d'horizon \mathbf{C}^α est une fonction f telle que

$$f(x_1, x_2) = 1_{\{x_2 \geq g(x_1)\}} \quad 0 \leq x_1, x_2 \leq 1. \quad (\text{I.2})$$

Donoho note $\text{Horizon}^\alpha(C_1, C_\alpha)$ l'ensemble des fonctions f telles que l'horizon g vérifie

$$|g(x) - g(x')| \leq C_1|x - x'| \quad \text{et} \quad |g'(x) - g'(x')| \leq C_\alpha|x - x'|^{\alpha-1}, \text{ avec } \alpha > 1.$$

C_1 et C_α contrôlent la régularité de l'horizon.

Ces fonctions correspondent à une image noir et blanc, noir au dessous de la courbe d'horizon, blanc au dessus. On peut enrichir ce modèle en considérant deux polynômes au dessus et au dessous de la courbe, voir [Shu04]. Nous considérons dans cette thèse une classe Θ_α encore plus générale, formée de l'ensemble des fonctions $f \in \mathbf{C}^\alpha$ en dehors d'un nombre fini de courbes \mathbf{C}^α lissées par noyau $h \in \mathbf{C}^\alpha$ de taille s , où s est petit et α est un réel supérieur à 1.

Cette classe des fonctions géométriquement régulières généralise les modèles d'horizon et permet de modéliser des images complexes. Cette classe n'intègre en particulier pas les textures, elle est cependant la classe de référence pour les images géométriques.

Le lissage est un élément important du modèle. Il existe en effet toujours un phénomène de diffraction lors de l'acquisition des images dû le plus souvent aux appareils optiques. Ce lissage qui correspond à la réalité d'un grand nombre d'images posent le problème de l'emplacement exact des contours. Nous verrons que certaines méthodes d'estimation ne sont pas adaptées à un modèle de fonctions lissées.

Notre but est de proposer un estimateur pour des fonctions f de Θ_α qui ne nécessite pas la connaissance a priori de α mais qui exploite la régularité \mathbf{C}^α .

I.1.2 Le débruitage dans un cadre minimax

Soit f une fonction et \hat{f} un estimateur, on définit l'erreur quadratique moyenne, Mean Square Error, de \hat{f} par

$$MSE(\hat{f}, f, \varepsilon) = E(\|f - \hat{f}\|^2).$$

Si Ω est un ensemble de fonctions, on définit le risque d'un estimateur \hat{f} sur l'ensemble Ω par

$$r(\hat{f}, \Omega, \varepsilon) = \sup_{f \in \Omega} E(\|f - \hat{f}\|^2).$$

On définit ainsi le risque minimax de Ω comme le risque du meilleur estimateur sur Ω

$$r(\Omega, \varepsilon) = \inf_{\hat{f}} r(\hat{f}, \Omega, \varepsilon) = \inf_{\hat{f}} \sup_{f \in \Omega} E(\|f - \hat{f}\|^2).$$

Quand Ω est fixé, ce risque est une fonction croissante de ε .

Nous proposons de construire un estimateur dont le risque a la même décroissance asymptotique ou une décroissance asymptotique proche de celle du risque minimax pour les fonctions de Θ_α .

I.1.2.1 Le risque optimal

Korostelev et Tsybakov [KT93] et Donoho et Johnstone [DJ94a] ont montré que le risque minimax sur l'ensemble $\mathcal{F} = \text{Horizon}^\alpha(C_1, C_\alpha)$ des modèles d'horizon vérifie

$$r(\mathcal{F}, \varepsilon) = O(\varepsilon^{\frac{2\alpha}{\alpha+1}}). \quad (\text{I.3})$$

C'est à dire que l'erreur minimax décroît en $\varepsilon^{\frac{2\alpha}{\alpha+1}}$ où ε^2 est la variance du bruit.

Comme les modèles d'horizon appartiennent à notre modèle, on a déjà une borne inférieure du risque minimax de notre modèle.

Nous proposons dans cette thèse un estimateur F pour les fonctions f de Θ_α dont l'erreur quadratique moyenne vérifie

$$MSE(F, f, \varepsilon) = O(|\log \varepsilon|^2 \varepsilon^{\frac{2\alpha}{\alpha+1}})$$

Une telle décroissance asymptotique est ainsi proche de la décroissance optimale. Par rapport aux résultats de Korostelev et Tsybakov nous devons donc intégrer un modèle plus complexe, avec un nombre fini de courbes qui peuvent éventuellement s'intersecter, un lissage et des fonctions qui ne sont pas nécessairement constantes en dehors des courbes.

I.1.2.2 Débruitage par seuillage dans une base orthogonale

Pour certaines classes de fonctions comme les espaces C^α , on sait que la décroissance asymptotique du risque de l'estimation par seuillage dans une base orthogonale adaptée $\mathcal{B} = (b_k)_k$ est la même que celle du risque minimax. Si on estime f par

$$F = \sum_{i \in I} \langle Y, b_i \rangle b_i \quad (\text{I.4})$$

on a

$$E(\|F - f\|^2) = \sum_{i \notin I} |\langle f, b_i \rangle|^2 + \sum_{i \in I} E(|\langle W, b_i \rangle|^2) = \sum_{i \notin I} |\langle f, b_i \rangle|^2 + |I|\varepsilon^2. \quad (\text{I.5})$$

Le risque de l'estimateur s'exprime ici comme la somme d'un terme de biais et de variance. Le terme de biais $\sum_{i \notin I} |\langle f, b_i \rangle|^2$ est contrôlé par les capacités d'approximation de la base \mathcal{B} . En effet le terme $\sum_{i \notin I} |\langle f, b_i \rangle|^2$ est égal à l'erreur d'approximation de f par la projection de f sur l'espace engendré par les $(b_i)_{i \in I}$.

$$\sum_{i \notin I} |\langle f, b_i \rangle|^2 = \|f - f_I\|^2$$

Or cette erreur est au mieux égale à l'erreur d'approximation par la meilleure projection de f sur un espace de dimension $M = |I|$. Si on note f_M cette approximation de f obtenue en conservant les M plus grands coefficients de f dans la base \mathcal{B} , on a

$$\|f - f_M\|^2 \leq \|f - f_I\|^2$$

Si on arrive à choisir I correctement on pourra avoir

$$\|f - f_I\|^2 \leq C \|f - f_M\|^2$$

et ainsi une borne de l'erreur d'approximation $\|f - f_M\|^2$ de la forme

$$\|f - f_M\|^2 \leq C_1 M^{-\alpha} \quad (\text{I.6})$$

permet de borner le risque par

$$E(\|F - f\|^2) \leq C_2 \varepsilon^{\frac{2\alpha}{\alpha+1}}. \quad (\text{I.7})$$

Birgé et Massart ou Willet et Novak ont montré qu'en estimant f par seuillage avec un seuil $T = \lambda \sqrt{\log \kappa \varepsilon}$

$$F = \sum_{|\langle Y, b_i \rangle| > T} \langle Y, b_i \rangle, \quad \text{avec } T = \lambda \sqrt{\log \kappa \varepsilon}, \quad (\text{I.8})$$

on a un estimateur qui atteint le risque minimax à un facteur $\log \kappa$ près, où κ désigne le cardinal de la base \mathcal{B} .

Ces résultats, qui lient la théorie de l'estimation à celle de l'approximation, nous invitent à rechercher des familles de fonctions qui représentent efficacement notre classe de fonctions Θ_α .

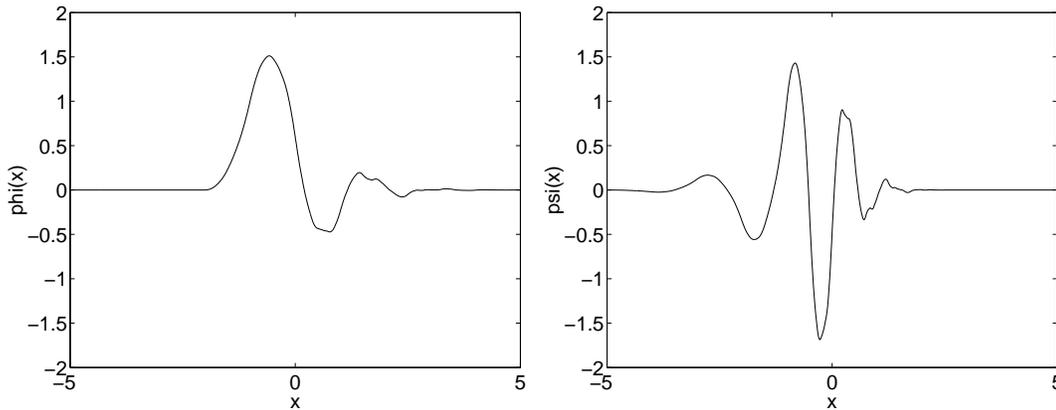


FIG. I.1 – A gauche une fonction d'échelle et à droite l'ondelette associée.

I.1.2.3 Débruitage en ondelettes

Les ondelettes sont aujourd'hui un outil incontournable en traitement du signal, aussi bien en compression qu'en estimation. Soit $\Psi(t)$ une fonction de \mathbb{R} dans \mathbb{R} , on note

$$\psi_{j,m}(t) = \frac{1}{\sqrt{2^j}} \psi \left(\frac{t - 2^j m}{2^j} \right). \quad (\text{I.9})$$

Une ondelette est une fonction Ψ oscillante de moyenne nulle. Il existe des ondelettes telles que la famille $(\psi_{j,m})_{j,m}$ forme une base orthogonale de $L^2(\mathbb{R}^2)$, voir par exemple [Mal98, Dau93, Dau92, Mey91, Mey90, CMW92]. Nous utiliserons de telles ondelettes par la suite pour nos schémas d'approximation. A une échelle j fixée les ondelettes forment une base d'un espace de détails noté W_j . Plus précisément pour tout j_0 on a $L^2(\mathbb{R}) = V_{j_0} + \bigoplus_{j \leq j_0} W_j$, où l'espace V_{j_0} est un espace d'approximation engendré par des fonctions $\phi_{j,m}$ appelées fonctions d'échelle définies par

$$\phi_{j,m}(t) = \frac{1}{\sqrt{2^j}} \phi \left(\frac{t - 2^j m}{2^j} \right). \quad (\text{I.10})$$

Les espaces W_j sont les complémentaires orthogonaux des V_j à l'intérieur des espaces V_{j-1}

$$V_j = V_{j+1} \oplus W_{j+1}. \quad (\text{I.11})$$

Il existe ainsi un lien fort entre l'ondelette et la fonction d'échelle associée. En particulier les ondelettes et les fonctions d'échelle à l'échelle $j+1$ s'écrivent comme des combinaisons linéaires finies des fonctions d'échelle $\phi_{j,m}$

$$\psi_{j+1,n} = \sum_k a_k \phi_{j,n}.$$

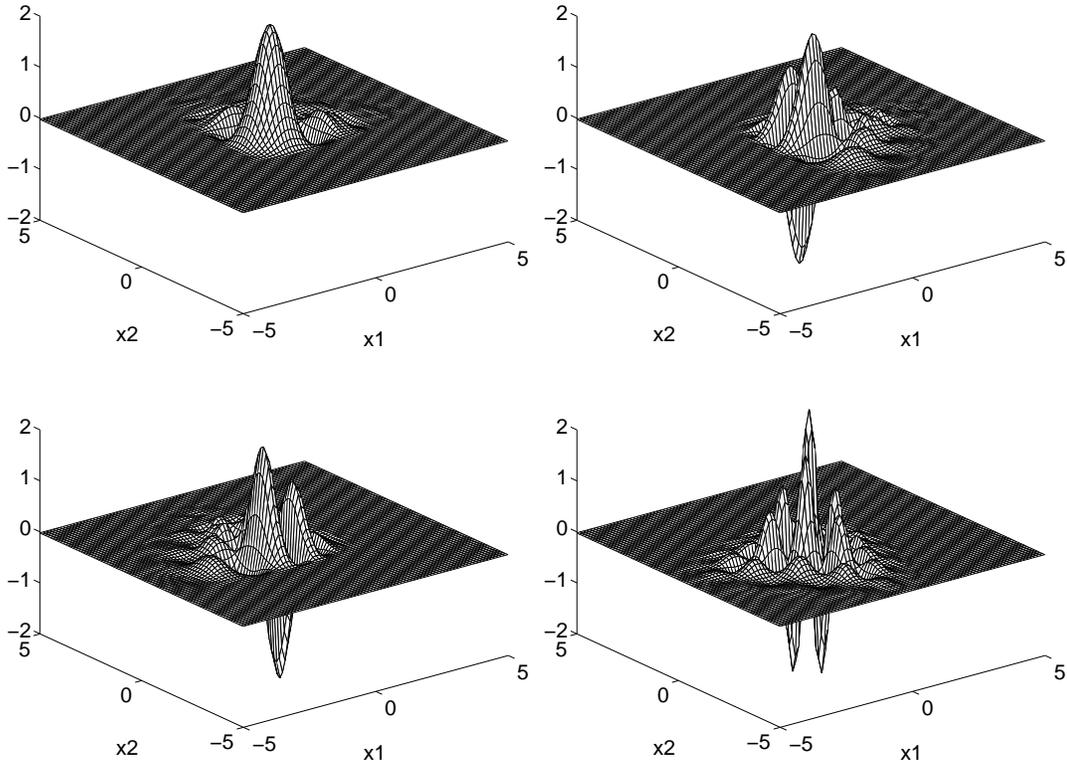


FIG. I.2 – En haut à gauche une fonction d'échelle $\phi(x_1)\phi(x_2)$, en haut à droite une fonction $\psi(x_1)\phi(x_2)$, en bas à gauche $\phi(x_1)\psi(x_2)$, en bas à droite $\psi(x_1)\psi(x_2)$.

I.1.2.4 Estimation en curvelets

Les curvelets proposées par Candès et Donoho dans [CD99, CD00a] sont des frames de fonctions, c'est à dire des familles $(\gamma_i)_i$ vérifiant une propriété de conservation d'énergie

$$A \sum_i |\langle f, \gamma_i \rangle|^2 \leq \|f\|_2^2 \leq B \sum_i |\langle f, \gamma_i \rangle|^2 \quad (\text{I.16})$$

qui représentent efficacement les fonctions \mathbf{C}^2 en dehors de courbes \mathbf{C}^2 . La meilleure approximation de f appartenant à cette classe Θ_2 avec M termes vérifie

$$\|f - f_M\|^2 \leq CM^{-2}(\log M)^3. \quad (\text{I.17})$$

Ce qui la vitesse de décroissance asymptotique optimale au facteur logarithmique près.

Il existe plusieurs constructions de ces familles dont certaines sont des tight frames c'est à dire des fonctions vérifiant la relation (I.16) avec $A = B$. On a alors une parfaite conservation d'énergie entre l'espace et les coefficients. Ces fonctions sont construites en filtrant des fonctions "ridges" paramétrées par trois réels : un paramètre de position b , un paramètre d'échelle a et un paramètre d'orientation θ :

$$\psi_{a,b,\theta}(x_1, x_2) = a^{-1/2} \psi((x_1 \cos \theta + x_2 \sin \theta - b)/a). \quad (\text{I.18})$$

Où ψ est une ondelette.

La conservation d'énergie des curvelets ainsi que leur capacité d'approximation permettent de construire un estimateur \hat{f}_c par seuillage en curvelets dont le risque est presque optimal [CDS00, CD00b]. Pour toute fonction $f \in \Theta_2$ on a

$$MSE(\hat{f}_c, f, \varepsilon) = O(|\log \varepsilon|^2 \varepsilon^{4/3}). \quad (\text{I.19})$$

Les curvelets proposent ainsi une solution optimale pour la classe de fonctions \mathbf{C}^2 géométriquement régulières. Cependant elles ne sont optimales que pour $\alpha = 2$. Si $\alpha > 2$, elles n'arrivent pas à tirer avantage de la régularité supérieure à \mathbf{C}^2 . Si $\alpha < 1$, les curvelets sont moins performantes que les ondelettes. Candès, Donoho et Starck ont ainsi proposé une représentation mixte qui allie les ondelettes aux curvelets [CDS01]. Nous souhaitons étendre les résultats obtenus par Candès et Donoho pour s'adapter à la régularité géométrique de l'image et exploiter cette régularité quand elle est supérieure.

I.1.2.5 Les familles adaptées

David Donoho [Don97] propose en 1997 une famille de fonctions, les wedgelets, qui permet une approximation optimale des modèles d'horizon. Pour définir les wedgelets Donoho divise le modèle d'Horizon en carrés dyadiques. Pour chaque carré S il considère des petits segments reliant M_δ points $v_{i,S}$ régulièrement espacés d'une distance δ sur les bords de S . Il construit ainsi une famille de edgelets, pour edge elements

$$E_\delta(S) = \{e = \overline{v_{i,S} v_{i',S}}, 0 \leq i, i' \leq M_\delta\}. \quad (\text{I.20})$$

A partir de ces edgelets il construit les wedgelets qui sont les fonctions indicatrices des portions de carrés S délimités par les edges :

$$W_\delta(S) = \{1_S\} \cup \{w_{e,S} : e \in E_\delta(S) \text{ non dégénérés}\}. \quad (\text{I.21})$$

Donoho approche les modèles d'horizon qui peuvent être vus comme des images noir et blanc par des wedgelets. Il montre qu'une approximation f_M construite avec M

wedgelets vérifie

$$\|f - f_M\|_2^2 \leq CM^{-\alpha} + \delta \quad (\text{I.22})$$

où α est la régularité Hölderienne de l'horizon.

L'auteur approche l'horizon par des petits segments de droite. Les wedgelets ne forment pas des bases de l'espace, elles engendrent des espaces d'approximation adaptés aux modèles d'horizon. Donoho déduit de ce résultat d'approximation qu'un estimateur en wedgelets atteint le risque minimax à un facteur logarithmique près sur la classe $\mathcal{F} = \text{Horizon}^\alpha(C_1, C_\alpha)$ des modèles d'horizon [Don97].

$$r(\hat{f}_{\text{wedgelets}}, \mathcal{F}, \varepsilon) = O(|\log \varepsilon|)r(\mathcal{F}, \varepsilon) = O(|\log \varepsilon| \varepsilon^{\frac{2\alpha}{\alpha+1}}). \quad (\text{I.23})$$

Ces résultats d'approximation et d'estimation s'étendent naturellement aux modèles d'horizon avec des fonctions polynomiales de part et d'autre de l'horizon, voir par exemple [Shu04]. De tels estimateurs sont donc presque optimaux dans le cadre d'un modèle qui n'inclut pas le lissage. Mais cette approche par estimateur adaptatif génère une erreur d'estimation grande, non optimale pour un modèle lissé. Comme on construit une approximation par morceaux discontinue le long d'une courbe, on aura toujours une erreur élevée sur le tube constitué par la discontinuité lissée.

Nous proposons d'utiliser une approche mixte entre les curvelets et les familles adaptées. Des curvelets, nous conservons l'esprit des bases d'ondelettes géométriques qui engendrent toutes les fonctions du modèles et permettent de gérer le lissage. Des familles adaptées telles que les wedgelets, nous conservons l'adaptabilité à une régularité quelconque et l'idée de découpage en modèles d'horizon et plus généralement en petits zones élémentaires.

I.1.3 Les bandelettes de première génération

Les bandelettes introduites par Le Pennec et Mallat [Pen02, PM05] sont des frames qui assurent une représentation optimale des fonctions de Θ_α . Les bandelettes forment un dictionnaire de frames adaptées aux images de Θ_α . Pour tout $f \in \Theta_\alpha$ il existe un frame de bandelettes \mathcal{B} dans lequel l'erreur d'approximation non linéaire est bornée par

$$\|f - f_M\|_2^2 \leq CM^{-\alpha}. \quad (\text{I.24})$$

Les bandelettes sont initialement construites localement au voisinage d'une singularité sur des domaines en forme de tubes ou de bandes. Une bande est définie par

$$\mathbf{B} = \{(x_1, x_2) : x_1 \in [a_1, b_1], x_2 \in [g(x_1) + a_2, g(x_1) + b_2]\} \quad (\text{I.25})$$

fonction. Comme on ne dispose pas de f mais seulement des observations bruitées Y comment assurer que la famille de bandelettes utilisée pour l'estimation sera adaptée à f ? Nous apportons des réponses à ces deux questions dans la première partie de cette thèse

I.1.4 Sélection de modèles, estimateur par projection en bandelettes

L'estimateur F par seuillage dans une base orthogonale \mathcal{B} peut également être vu comme le minimiseur d'une fonctionnelle pénalisée

$$F = \sum_{i \in I} \langle Y, b_i \rangle b_i. \quad (\text{I.30})$$

où l'ensemble I minimise

$$\sum_{i \in I} |\langle T, b_i \rangle|^2 + |I|T^2. \quad (\text{I.31})$$

Cet estimateur de seuillage obtenu par minimisation d'une fonctionnelle pénalisée entre dans le cadre de la sélection de modèles de Birgé et Massart. Ce cadre théorique inclut la recherche de meilleure base orthogonale et va même au delà. On va chercher un estimateur comme la projection des observations sur un espace vectoriel \mathcal{M}_γ bien choisi. La théorie de la sélection de modèles [BBM99, BM95, ?] nous explique comment choisir ce sous-espace \mathcal{M}_γ parmi une collection $\{\mathcal{M}_\gamma\}_\Gamma$ pour minimiser le risque. La théorie de la sélection de modèles nous assure que l'erreur quadratique de l'estimateur défini par

$$F = \underset{\substack{F_\gamma = P_{\mathcal{M}_\gamma} Y \\ \gamma \in \Gamma}}{\operatorname{argmin}} \|Y - F_\gamma\|^2 + \lambda^2 \log \kappa \varepsilon^2 M_\gamma \quad . \quad (\text{I.32})$$

vérifie avec une probabilité qui tend vers 1 quand ε tend vers 0.

$$\|f - F\|^2 + \lambda^2 \log \kappa \varepsilon^2 M_F \leq C \inf_{\gamma \in \Gamma} \|f - P_{\mathcal{M}_\gamma} f\|^2 + \lambda^2 \log \kappa \varepsilon^2 M_\gamma \quad (\text{I.33})$$

M_γ est la dimension de l'espace \mathcal{M}_γ sur lequel Y est projeté pour obtenir F et κ le nombre total de générateurs dans l'ensemble des modèles. La théorie de la sélection de modèle assure également un résultat en espérance et permet ainsi de contrôler le risque de F . Ces résultats obtenus dans le cadre général de la sélection de modèles [BBM99] de Birgé Massart, ont été appliqués à l'estimation dans un dictionnaire de bases orthogonales par Donoho et Johnstone [DJ94b]. Ces idées ont également été

reprises par Donoho, Mallat, Von Sachs et Samuelides [DMvSS03] pour la construction de macrotilés. Les macrotilés sont également des estimateurs par projection construits pour le débruitage audio et l'estimation de covariance.

Le second membre est une expression déterministe dépendant directement des capacités d'approximation du meilleur modèle, c'est à dire de la meilleure base orthogonale si on étudie un dictionnaire de bases orthogonales. Après avoir orthogonalisé les frames de bandelettes on peut appliquer les résultats statistiques et d'approximation pour obtenir le résultat souhaité :

Théorème I.1

Pour toute fonction $f \in \mathbf{C}^\alpha$ géométriquement régulière, avec $\alpha \geq 1$, il existe une constante C et une constante c tel que pour tout $\varepsilon > 0$ l'estimateur F de f à partir de $dY = f(t)dt + \varepsilon dW$ vérifie avec une probabilité plus grande que $1 - c\varepsilon$

$$\|F - f\|^2 \leq C |\log \varepsilon|^2 \varepsilon^{2\alpha/(\alpha+1)} \quad . \quad (\text{I.34})$$

I.1.5 Orthogonalisation

Le théorème d'estimation que nous avons obtenu ne nécessite pas de bases orthogonales. Cependant si on souhaite déterminer effectivement

$$F = \underset{\substack{F_\gamma = P_{\mathcal{M}_\gamma} Y \\ \gamma \in \Gamma}}{\operatorname{argmin}} \|Y - F_\gamma\|^2 + \lambda^2 \log \kappa \varepsilon^2 M_\gamma \quad . \quad (\text{I.35})$$

il est indispensable d'avoir une conservation exacte entre l'énergie en espace dans le domaine des coefficients et donc d'avoir des bases orthogonales ou des tight frames. Dans ces deux cas on peut déterminer l'optimal par seuillage. Sinon on est obligé de tester tous les jeux de vecteurs pour savoir lequel assure l'erreur de projection la plus faible.

Nous expliquons en détail comment nous effectuons cette orthogonalisation dans la première partie. L'idée principale est de faire rentrer les bandes à l'intérieur de rectangles qui forment une partition de $[0, 1]^2$ pour éviter la redondance. Cette nouvelle condition impose un découpage du carré unité plus complexe. En effet le découpage doit permettre la construction d'un tube incluant la discontinuité à l'intérieur de chaque rectangle. On doit donc assurer que les courbes de singularité ne soient pas tangentes aux bords des rectangles ce qui est impossible avec un découpage dyadique.

I.2 Inversion tomographique

Nous proposons ensuite d'estimer un signal appartenant à la même classe Θ_α des fonctions géométriquement régulières à partir de la transformée de Radon en présence de bruit.

$$Y = Rf + W \quad (\text{I.36})$$

Où W est un bruit blanc gaussien et R est la transformée de Radon

$$Rf(\theta, t) = \int_{x_1, x_2} f(x_1, x_2) \delta(x_1 \cos \theta + x_2 \sin \theta - t) dx_1 dx_2 \quad (\text{I.37})$$

La transformée de Radon est assez proche d'un filtrage. L'opérateur R^*R est un filtrage dont la transformée de Fourier vérifie

$$|\widehat{R^*R}(\omega)| = C/|\omega| \quad (\text{I.38})$$

Nous proposons d'utiliser les résultats d'estimation dans du bruit obtenus dans la première partie pour estimer f à partir de sa transformée de Radon.

I.2.1 Approches linéaires

Pour résoudre le problème général de l'inversion d'opérateur linéaire dans du bruit

$$Y = Kf + W, \quad (\text{I.39})$$

on inverse rarement K directement. D'une part parce que le noyau peut être non nul et d'autre part parce qu'on risque d'amplifier fortement le bruit sur les espaces propres associés aux petites valeurs propres. On peut utiliser une régularisation quadratique,

$$\hat{f}_\lambda = (K^*K - \lambda I)^{-1} K^*Y. \quad (\text{I.40})$$

On peut également utiliser la représentation de f dans une base orthogonale adaptée à l'opérateur K . C'est l'approche de la méthode SVD, Singular Value Decomposition. Soit $(e_\nu)_\nu$ une famille des vecteurs propres de K^*K associés aux valeurs propres $(k_\nu)_\nu$. Les vecteurs e_ν forment une base orthogonale. On note $h_\nu = Ke_\nu / \|Ke_\nu\|_2$.

On a ainsi

$$f = \sum_{\nu} k_\nu^{-1} [Kf, h_\nu] e_\nu \quad (\text{I.41})$$

On estime ensuite f par un opérateur diagonal dans cette base,

$$\hat{f} = \sum_{\nu} \omega_\nu k_\nu^{-1} [Y, h_\nu] e_\nu. \quad (\text{I.42})$$

ω_ν étant un paramètre entre 0 et 1.

Pour le meilleur jeu de paramètre $(\omega_\nu)_\nu$ on a

$$\begin{aligned} E(\|\hat{f} - f\|_2^2) &= \sum_\nu (\omega_\nu^2 k_\nu^{-2} \varepsilon^2 + (1 - \omega_\nu)^2 k_\nu^{-2} [Kf, h_\nu]) \\ &\geq 1/2 \sum_\nu \min(k_\nu^{-2} \varepsilon^2, |\langle f, e_\nu \rangle|^2). \end{aligned}$$

Le risque d'un tel estimateur est ainsi petit, si on a peu d'éléments $|\langle f, e_\nu \rangle|$ qui sont grands. Quand K^*K est un opérateur de filtrage les vecteurs e_ν sont les vecteurs de Fourier. On déduit ainsi que le risque d'un tel estimateur sera bon quand la transformée de Fourier de f décroît rapidement. Comme ce n'est pas le cas pour les signaux admettant des discontinuités comme les fonctions de l'ensemble Θ_α de notre modèle, on doit procéder autrement.

1.2.2 Décomposition en Wavelet Vaguelette

David Donoho propose dans [Don95] une méthode d'estimation qui s'inspire de la SVD mais qui permet d'estimer de manière optimale les fonctions dans des espaces de Besov.

L'idée de la décomposition en wavelet vaguelette (WVD) est d'utiliser des fonctions proches des fonctions e_ν , qui presque diagonalisent l'opérateur K^*K qui assurent également une représentation creuse du signal. Les bases d'ondelettes sont ainsi parfaites pour la transformée de Radon R et toute une classe de filtres.

Considérons une base d'ondelettes Ψ_λ où λ est un indice triple, deux indices spatiaux et un d'échelle. On pose

$$K^*u_\lambda = k_j \psi_\lambda \tag{I.43}$$

où k_j ne dépend que de l'indice d'échelle j mais pas des indices spatiaux. On a la formule de reconstruction suivante

$$f = \sum_\lambda [Kf, u_\lambda] k_j^{-1} \psi_\lambda. \tag{I.44}$$

Si $K = R$ on peut prendre $k_j = 2^{j/2}$ et assurer que $\|u_\lambda\|$ est borné.

On estime alors f en seuillant les coefficients $[Y, u_\lambda]$, ce qui revient à seuiller les coefficients de $[Y, k_j^{-1}u_\lambda]$ avec un seuil proportionnel à k_j .

Donoho montre dans [Don95] que le risque minimax pour l'inversion tomographique dans les espaces de Besov $\Theta_{p,q}^s$ décroît comme

$$r(\Theta_{p,q}^s, \varepsilon) \sim \varepsilon^{2\sigma/(\sigma+3/2)} \tag{I.45}$$

avec $\sigma = s - 1 + 2/p$.

Il montre également que le risque du meilleur estimateur en Wavelet-Vaguelette est optimal :

$$r(f_{WVD}, \Theta_{p,q}^s) \leq C r(\Theta_{p,q}^s). \quad (\text{I.46})$$

Pour les fonctions géométriquement régulières de Θ_α , les ondelettes presque diagonalisent toujours l'opérateur mais n'assurent pas une représentation creuse qui permet d'assurer l'optimalité de l'estimateur dans ce cas.

I.2.3 Inversion tomographique en curvelets

Comme R^*R est un opérateur diagonal en Fourier de nombreuses familles de fonctions dont les éléments sont localisés en fréquence permettent de presque diagonaliser R^*R . Candès et Donoho proposent ainsi d'utiliser les curvelets pour l'inversion tomographique [CD00b]. Les auteurs construisent de la même manière une famille $(U_\lambda)_\lambda$ telle que

$$R^*U_\lambda = k_s \gamma_\lambda \quad (\text{I.47})$$

qui induit une formule de reconstruction similaire à celle de la WVD

$$f = \sum_\lambda [Rf, U_\lambda] k_s^{-1} \gamma_\lambda. \quad (\text{I.48})$$

On construit ainsi un estimateur grâce à un opérateur de seuillage S

$$\hat{f} = \sum_\lambda S_{t_s}([Y, U_\lambda]) \gamma_\lambda \quad (\text{I.49})$$

avec un seuil dépendant de l'échelle

$$t_s = \sqrt{2 \log N_s} k_s^{-1} \varepsilon \quad (\text{I.50})$$

où N_s est le nombre de curvelets à l'échelle s .

On obtient alors un estimateur dont le risque est quasi optimal sur l'ensemble Θ_2 des fonctions C^2 géométriquement régulières. Pour tout $d > 0$

$$r(\hat{f}_{Curvelets}, \Theta_2, \varepsilon) = O(\varepsilon^{4/5+d}) \quad (\text{I.51})$$

Que les auteurs utilisent les ondelettes ou les curvelets, la philosophie est la même. On inverse l'opérateur par bande de fréquences, par échelle d'ondelettes ou de curvelets, on a alors un problème de débruitage par échelle avec un bruit presque blanc. On effectue ensuite un seuillage avec un seuil proportionnel à la variance du bruit amplifié par l'inversion.

Nous proposons une approche similaire en bandelettes.

I.2.4 Inversion en bandelettes de seconde génération

Pour utiliser une méthode comparable à la WVD on a besoin de fonctions dont le support fréquentiel est localisé comme les ondelettes ou les curvelets. La construction des bandelettes que nous présentons dans la première partie n'assure pas cette propriété. C'est pourquoi nous utiliserons une autre construction des bandelettes, dites bandelettes de seconde génération qui sont des combinaisons linéaires d'ondelettes de même échelle

$$b_{k,j} = \sum_l a_{l,j} \psi_{l,j}. \quad (\text{I.52})$$

Cette relation permet de contrôler le support fréquentiel des nouvelles bandelettes. Nous présentons cette nouvelle construction qui nous permet d'obtenir un estimateur presque optimal :

Théorème I.2

Soit f une fonction ayant une régularité géométrique \mathbf{C}^α , et W un bruit additionnel de variance ε suffisamment petit. Alors, avec une probabilité plus grande que $1 - c|\log(\varepsilon)|\varepsilon$, l'erreur de l'estimateur en bandelettes vérifie

$$\|f - \hat{f}\|_2^2 \leq C |\log(\varepsilon)|^{\frac{1}{2\alpha+1}} \varepsilon^{\frac{2\alpha}{2\alpha+1}}, \quad (\text{I.53})$$

où C est une constante qui ne dépend que de f .

I.3 Déconvolution de train de Diracs, inversion sismique.

Dans la dernière partie de cette thèse nous étudierons le problème de l'inversion sismique. Ce problème peut se modéliser par une convolution monodimensionnelle :

$$Y = h \star f + W \quad (\text{I.54})$$

Y sont les observations bruitées, W un bruit borné, h un filtre appelé ondelettes en inversion sismique et f représente la réflectivité du sol à déterminer. Cette réflectivité est la dérivée de l'impédance acoustique.

$$f = \frac{\partial I(z)}{\partial z} \quad (\text{I.55})$$

L'impédance acoustique caractérise un matériau et peut raisonnablement être considérée comme constante sur des couches homogènes. C'est pourquoi f est souvent modélisée par un train de Diracs

$$f = \sum_{i \in I} a_i \delta_i \quad (\text{I.56})$$

I.3.1 Minimisation l1

Depuis la fin des années 70 les ingénieurs qui ont travaillé sur le problème de la reconstruction de train de Diracs à partir de données convoluées [CM73] utilisent des minimisations l_1 .

$$\min \|F\|_1 \quad \text{avec } Y = h \star F \quad (\text{I.57})$$

ou sous forme relaxée

$$\min \|h \star F - Y\|_2^2 + \gamma \|F\|_1. \quad (\text{I.58})$$

Dès 1986 Symes et Santosa proposent des résultats de convergence de la minimisation de la fonctionnelle relaxée dans [SS86] sous contrainte de concision, c'est à dire si f est composée d'un nombre limité de Diracs. Donoho et Stark traitent également le sujet en 1989 dans [DS89] et donnent aussi des résultats sous contraintes de concision.

Ces résultats repris et développés dans le cadre de l'étude de représentations parcimonieuses dans un dictionnaire redondant par Donoho et Huo [DH99], Donoho et Elad [DE02], Elad et Bruckstein [EB02], Donoho, Elad et Temlyakov [DET04] et d'autres, donnent tous des critères de reconstruction contraints sur le nombre de Diracs. La borne sur ce nombre dépend de la cohérence du dictionnaire, c'est à dire dans le cas qui nous intéresse

$$M(h) = \max_{i \neq j} \frac{|\langle h \star \delta_i, h \star \delta_j \rangle|}{\|h \star \delta_i\| \cdot \|h \star \delta_j\|} \quad (\text{I.59})$$

Le résultat optimal pour un dictionnaire quelconque est

$$\|f\|_0 \leq 1/2(1 + 1/M) \Rightarrow f \text{ est solution de (I.57) si } Y = h \star f \quad (\text{I.60})$$

La cohérence $M(h_0)$ du filtre discret h_0

$$\hat{h}_0(\omega) = 1_{\{-\pi/2, \pi/2\}}(\omega) \quad (\text{I.61})$$

qui conserve uniquement la moitié basse des fréquence est $M(h_0) = 2/\pi$.

Une telle cohérence ne permet pas d'assurer la reconstruction de signaux composés de deux Diracs. Pour la plupart des filtres passe bas, on a le même problème de cohérence élevée. Les ondelettes sismiques réelles qui sont essentiellement passe bas engendrent des cohérences relativement élevées.

I.3.2 Un autre critère, l'espacement

On pourrait penser que la borne fournie par la cohérence est grossière et qu'on ne peut pas trouver de vecteurs composés d'un petit nombre de Diracs qui ne soient pas reconstructibles par (I.57) ou (I.58). Il n'en est rien. Il existe en effet des petites combinaisons de Diracs non reconstructibles par minimisation l_1 . Pourtant la minimisation l_1 et particulièrement sous la forme relaxée (I.58) est utilisée avec succès en inversion sismique.

Pour expliquer ces bons résultats nous proposons une contrainte sur l'espacement du support d'un vecteur et non plus sur le cardinal. On dira qu'un vecteur f est espacé de Δ si

$$f = \sum_{i \in S} a_i \delta_i \quad \text{avec } \forall (i, j) \in S^2 \quad |i - j| \geq \Delta. \quad (\text{I.62})$$

Ce critère correspond géologiquement à une épaisseur de couche de matériaux. Nous proposons de montrer que pour tout filtre h il existe un espacement $\Delta(h)$ qui assure la reconstruction par (I.58) des vecteurs espacés de Δ . Cette condition d'espacement est assez naturelle. Il semble en effet clair que si les Diracs sont très éloignés, la méthode de déconvolution les traitera chacun séparément.

Pour montrer cela nous allons reprendre les travaux effectués dans le cadre des hypothèses de concision classiques en nous attachant à déterminer des conditions non directement liées au cardinal du support qui assurent la reconstruction d'un vecteur dans un dictionnaire quelconque. Nous détaillerons le critère proposé par Gribonval et Nielsen [GN02] qui lie le support S d'un vecteur reconstructible aux éléments du noyau du dictionnaire :

$$P_1(S, h) = \sup_{x \in \ker(h), x \neq 0} \frac{\sum_{k \in S} |x_k|}{\sum_k |x_k|} \quad (\text{I.63})$$

$P_1(S, h) < 1/2$ assure que tout vecteur à support dans S est reconstructible par (I.57) dans le cas non bruité.

Nous montrons que les signaux suffisamment espacés vérifient cette condition en introduisant un nouveau critère.

Nous détaillons ensuite deux critères introduits par Tropp [Tro05] et Fuchs [Fuc02] qui assurent la reconstruction de vecteurs par la minimisation relaxée (I.58). Nous montrons que les signaux suffisamment espacés vérifient ces critères et nous en déduisons un théorème de reconstruction dans un cas bruité. Si un vecteur x_0 est suffisamment espacé et que le bruit est suffisamment petit par rapport aux composantes de x_0 , la minimisation l_1 relaxée permet de retrouver exactement le support de x_0 . Nous proposons des méthodes numériques pour estimer ces distances Δ qui peuvent être de l'ordre de 5 zéros entre chaque composante non nulle pour un filtre

ne conservant que la moitié basse des fréquences. Les distances que nous calculons sont proches des distances réellement observées en sismique. Ainsi notre étude théorique permet de comprendre en partie les bons résultats obtenus par cette méthode depuis de nombreuses années.

Références bibliographiques

- [BBM99] A. Barron, L. Birgé and P. Massart, “Risk bounds for model selection via penalization”, *Probability Theory and related fields* (1999), pp. 301–413.
- [BM95] L. Birgé and P. Massart, *From model selection to adaptive estimation*, A Festschrift for Lucien Le Cam (D. Pollard, E. Torgersen and G. L. Yang, eds.), New York, 1995, pp. 55–87.
- [CD99] E.J. Candès and D.L. Donoho, “A surprisingly effective nonadaptive representation for objects with edges”, *Curves and Surfaces* (1999).
- [CD00a] ———, “Curvelets multiresolution representation and scaling law”, *Wavelet Applications in Signal and Image Processing VIII* (2000).
- [CD00b] ———, “Recovering edges in ill-posed inverse problems optimality of curvelets frames”, *Ann Statist* (2000), no. 30, pp. 784–842.
- [CDS00] E.J. Candès, D.L. Donoho and J.L. Stark, “The curvelet transform for image denoising”, *IEEE Transactions on Image Processing* (2000), no. 11, pp. 670–684.
- [CDS01] E.J. Candès, D.L. Donoho and J.L. Starck, “Very high quality image restoration combining wavelets and curvelets”, *Wavelet Applications in Signal and Image Processing IX* (2001).
- [CM73] J.F. Clearbout and F. Muir, “Robust modeling of erratic data”, *Geophyscis* **38** (1973), no. 5, pp. 826–844.
- [CMW92] Ronald R. Coifman, Yves Meyer and M. Victor Wickerhauser, *Wavelet analysis and signal processing*, *Wavelets and their applications*, Jones and Bartlett, Boston, MA, 1992, pp. 153–178. MR 1 187 341
- [Dau92] I. Daubechies, *Ten lectures on wavelets*, CBMS-NSF Reg. Conf. Series in Applied Math., SIAM, 1992.
- [Dau93] Ingrid Daubechies, *Wavelets making waves in mathematics and engineering*, American Mathematical Society, Providence, RI, 1993, A joint

AMS-MAA invited address presented in Baltimore, Maryland, January 1992. MR 95k :42046

- [DE02] D.L. Donoho and M. Elad, “Optimally sparse representation in general (nonorthogonal) dictionaries via l^1 minimization”, PNAS **100** (2002), pp. 2197–2202.
- [DET04] D.L. Donoho, M. Elad and V. Temlyakov, “Stable recovery of sparse overcomplete representations in the presence of noise”.
- [DH99] D.L. Donoho and X. Huo, “Uncertainty principles and ideal decomposition”.
- [DJ94a] D.L. Donoho and I.M. Johnstone, “Empirical Atomic Decomposition”.
- [DJ94b] D.L. Donoho and I.M. Johnstone, “Ideal denoising in an orthonormal basis chosen from a library of bases”.
- [DMvSS03] D.L. Donoho, S. Mallat, R. von Sachs and Y. Samuelides, “Locally stationary covariance and signal estimation via macrotiles”, IEEE transactions on signal processing **51** (2003), no. 3.
- [Don93] D.L. Donoho, “Unconditional bases are optimal bases for data compression and statistical estimation”.
- [Don95] ———, “Nonlinear solution of linear inverse problems by Wavelet Vaguelet Decomposition”.
- [Don97] ———, “Wedgelets : Nearly-Minimax estimation of edges”.
- [DS89] D.L. Donoho and P.B. Stark, “Uncertainty principles and Signal Recovery”, SIAM J. Appl Math **49** (1989), no. 3, pp. 906–931.
- [EB02] M. Elad and A.M. Bruckstein, “A generalized uncertainty principle and sparse representation in pairs of bases”, IEEE transactions on information theory **48** (2002).
- [Fuc02] J.J. Fuchs, “On sparse representations in arbitrary redundant bases”, IEEE-I-IT (2002).
- [GN02] R. Gribonval and M. Nielsen, “Sparse representation in unions of bases”, Publication interne de l’IRISA (2002), no. 1499.
- [KT93] A.P. Korostelev and A.B. Tsybakov, *Minimax Theory of Image Reconstruction*, vol. 82, 1993.
- [Mal98] S. Mallat, *A wavelet tour of signal processing*, 1998.
- [Mey90] Yves Meyer, *Ondelettes et opérateurs. I*, Actualités Mathématiques. [Current Mathematical Topics], Hermann, Paris, 1990, Ondelettes. [Wavelets]. MR 93i :42002

- [Mey91] ———, “Ondelettes sur l’intervalle”, *Rev. Mat. Iberoamericana* **7** (1991), no. 2, pp. 115–133. MR 92m :42001
- [Pen02] E. Le Pennec, *Bandelettes et représentation géométrique des images*, Thèse de doctorat, 2002.
- [PM05] E. Le Pennec and S. Mallat, “Bandelet image approximation and compression”, *IEEE* (2005).
- [Shu04] R. Shukla, *Rate distortion optimized geometrical image processing*, Ph.D. thesis, Ecole polytechnique de Lausanne, 2004.
- [SS86] F. Santosa and W.W. Symes, “Linear inversion of band-limited reflection seismograms”, *SIAM J. Sci. Statistic. Comput* **7** (1986), pp. 1307–1330.
- [Tro05] J.A. Tropp, “Just Relax : Convex Programming Methods for Identifying Sparse Signals in Noise”, *IEEE transactions on information theory* (2005).

Estimation d'images par bandelettes et estimateurs par projection

Introduction

Retrouver une image à partir d'observations dégradées par un bruit blanc gaussien additif est un problème qui relève autant du traitement du signal que de l'estimation statistique. De nombreuses approches ont permis d'intégrer la géométrie régulière des images dans des modèles. Il semble donc naturel de prendre en compte cette régularité également dans l'estimation statistique de ces images. Dans cette première partie nous proposons de déterminer un estimateur quasi-optimal du point de vue minimax sur une classe de fonctions géométriques utilisées comme modèles d'images réelles.

Ce travail prend sa source dans le développement des bases de bandelettes dans le cadre de l'approximation des images géométriques. Les bandelettes sont des familles de fonctions qui s'adaptent aux images géométriques et qui en fournissent des représentations optimales au sens de l'approximation non linéaire. A partir des bandelettes nous construisons un estimateur par projection dont le risque est lié aux capacités d'approximation non linéaires des bandelettes par un principe de sélection de modèle gaussien. L'objet de ce premier chapitre est de montrer que l'estimateur construit à l'aide des bandelettes est presque optimal au sens minimax :

Théorème II.1

Pour toute fonction $f \in C^\alpha$ géométriquement régulière, avec $\alpha \geq 1$, il existe une

constante C et une constante c tel que pour tout $\epsilon > 0$ l'estimateur F de f à partir de $dY = f(t)dt + \epsilon dW$ vérifie avec une probabilité plus grande que $1 - c\epsilon$

$$\|F - f\|^2 \leq C |\log \epsilon|^2 \epsilon^{2\alpha/(\alpha+1)} \quad . \quad (\text{II.1})$$

En effet nous verrons que pour la classe des fonctions de notre modèle, les fonctions C^α géométriquement régulières, la vitesse de décroissance asymptotique du risque minimax est de l'ordre de $\epsilon^{\frac{2\alpha}{\alpha+1}}$. Le risque de notre estimateur est ainsi optimal à un facteur logarithmique près.

Pour construire ce nouvel estimateur de seuillage en bandelettes, nous avons été obligé de modifier la construction proposée par Le Pennec et Mallat. Cette nouvelle construction qui remplace les frames de bandelettes par des bases orthogonales est décrite entièrement dans ce chapitre.

La première partie de ce chapitre définit le problème précis que nous proposons de résoudre, le modèle de bruit et la classe des fonctions régulières que nous utilisons. La seconde partie présente le cadre général des estimateurs par projection. Nous y rappelons les inégalités oracles qui permettent de borner le risque par une entropie dépendant de la base choisie. Cette entropie dont la décroissance est liée aux capacités d'approximation non linéaires des bases considérées est au cœur des démonstrations de ce chapitre. La troisième partie introduit la notion de modèle d'horizon discret et décrit la construction des bases orthogonales de bandelettes. La quatrième et dernière partie est consacrée à la démonstration des capacités d'approximation non linéaire des bandelettes.

II.1 Estimation des images

II.1.1 Modèle de bruit blanc

Le but de l'estimation est de retrouver un signal à partir d'observations dégradées. Nous nous intéressons dans ce chapitre uniquement à une dégradation obtenue par l'ajout d'un bruit blanc. Nous supposons que le signal f à estimer appartient à une classe Θ de $L^2(D)$ où D est un domaine fixé et f est altérée par un bruit blanc additionnel de variance ϵ . Plus précisément, l'observation Y est définie par la formulation différentielle

$$dY = f(t) dt + \epsilon dW(t)$$

où W est un processus de Wiener standard et ϵ est le niveau du bruit. Si on décompose ce modèle sur une base orthogonale on obtient un modèle de bruit blanc. Soit

$\{b_k\}$ une telle base de $L^2(D)$, le modèle de bruit blanc continue devient sur chaque composante

$$\langle Y, b_k \rangle = \langle f, b_k \rangle + \epsilon W_k$$

où $W_k = \int b_k(t) dW(t)$ est un bruit gaussien iid. Retrouver f est alors équivalent à retrouver $\langle f, b_k \rangle$ pour tout k . Ce modèle est différent du modèle d'échantillonnage dans lequel l'observation Y est un nombre n d'échantillons altérés par un bruit gaussien iid

$$Y(x_k) = f(x_k) + \sigma W_k \quad .$$

Cependant, sous des conditions de régularité qui sont satisfaites dans tout ce chapitre, il existe une relation étroite entre le modèle d'échantillonnage avec un paramètre σ et le modèle de bruit blanc avec le paramètre $\epsilon = \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$: tous les résultats qui sont obtenus dans le cadre du modèle de bruit blanc peuvent être énoncés dans le cadre du modèle d'échantillonnage avec ce changement de variables. Une fois qu'on a choisi une classe Θ , les questions qui se posent sont : Comment construire un estimateur efficace F de f à partir de l'observation Y ? Quels sont les performances de cet estimateur ? Est-il optimal ou proche de l'optimalité ? Comment le choix de l'estimateur dépend-t-il de la classe Θ qui peut ne pas être connue. Nous étudierons l'efficacité d'un estimateur dans le cadre *minimax* quadratique. Pour toutes classe Θ , le risque minimax quadratique est défini par

$$\inf_F \sup_{f \in \Theta} E(\|f - F(Y)\|^2)$$

où F est un estimateur. On parlera également de la vitesse de décroissance minimax d'une classe de fonction. Cette vitesse désigne la vitesse de décroissance minimax du meilleur estimateur sur cette classe. Cette vitesse est liée à la complexité de la classe considérée.

Dans toute la suite, F désigne l'estimateur ou l'estimé selon le contexte. La vitesse de décroissance du risque quand ϵ tend vers 0 est appelée vitesse de décroissance minimax. Notre but est de construire explicitement un estimateur qui atteint la vitesse de décroissance minimax. Nous allons maintenant présenter le modèle d'images géométriques que nous utiliserons dans toute la suite.

II.1.2 Un modèle pour les images

Les images ne sont pas très bien modélisées par les espaces de régularité isotropique classique (C^α , Besov, ...) si bien que les résultats d'approximation classiques valables en une dimension ne peuvent être étendus à deux. De fait il est souvent plus

naturel et réaliste de décrire les images comme des fonctions régulières par morceaux. Les limites de ces régions régulières sont les contours qui sont les éléments les plus visibles et les plus significatifs des images. Korostelev, Tsybakov puis Donoho après eux proposèrent un modèle pour les images géométriques en reprenant ces propriétés de régularité anisotrope qui semblent correspondre à un grand nombre d'images : les images géométriquement régulières sont définies comme les images régulières en dehors d'un ensemble de contours qui sont eux mêmes réguliers. Dans [PM05] Le Pennec et Mallat ont proposé une extension de ce modèle en ajoutant un lissage dû aux effets de diffraction lors de l'acquisition de l'image. La définition qu'ils proposent est basée sur les fonctions höldériennes. Si $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ est un ouvert, on note $\mathbf{C}^\alpha(\Omega)$ l'espace des fonctions α -höldériennes d'ordre α sur Ω . Ce sont les fonctions $f : \Omega \subset \mathbb{R}^2$ ayant des dérivées partielles jusqu'à l'ordre $[\alpha]$ vérifiant

$$\|f\|_{\mathbf{C}^\alpha(\Omega)} \stackrel{\text{def.}}{=} \max \left(\begin{array}{l} \max_{a_1+a_2=[\alpha]} \sup_{(x,y) \in \Omega^2} \left| \frac{\partial^{a_1+a_2} f(x)}{\partial x_1^{a_1} \partial x_2^{a_2}} - \frac{\partial^{a_1+a_2} f(y)}{\partial x_1^{a_1} \partial x_2^{a_2}} \right| \|x-y\|^{[\alpha]-\alpha} \\ \max_{a_1+a_2 \leq \alpha} \sup_{x \in \Omega} \left| \frac{\partial^{a_1+a_2} f(x)}{\partial x_1^{a_1} \partial x_2^{a_2}} \right| \end{array} \right)$$

avec

$$[\alpha] \stackrel{\text{def.}}{=} \begin{cases} [\alpha] & \text{si } \alpha \notin \mathbb{N}, \\ \alpha - 1 & \text{si } \alpha \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

A partir des fonctions Höldériennes, on définit les fonctions \mathbf{C}^α géométriquement régulières.

Définition II.1

Une fonction f est \mathbf{C}^α géométriquement régulière sur $[0, 1]^2$ si

- $f = \tilde{f}$ où $f = \tilde{f} \star h$ avec $\tilde{f} \in \mathbf{C}^\alpha(\Lambda)$ pour $\Lambda = [0, 1]^2 - \{\mathcal{C}_\gamma\}_{1 \leq \gamma \leq G}$,
- le noyau de lissage h est \mathbf{C}^α , à support compact dans $[-s, s]^2$ et $\|h\|_{\mathbf{C}^\alpha} \leq s^{-(2+\alpha)}$,
- les courbes de discontinuité \mathcal{C}_γ sont Höldériennes d'ordre α et ne s'intersectent pas tangentiellement si $\alpha > 1$.

Korostelev et Tsybakov ont étudié la vitesse de décroissance minimax optimale que l'on peut espérer pour un estimateur sur la classe des fonctions \mathbf{C}^α régulières. Ils ont prouvé que la complexité de cette classe était la même que celles des fonctions uniformément \mathbf{C}^α et que la vitesse de décroissance optimale était $\varepsilon^{2\alpha/(\alpha+1)}$. Notre objectif est de construire un estimateur qui atteint cette vitesse optimale sans connaissance précise et préalable de α .

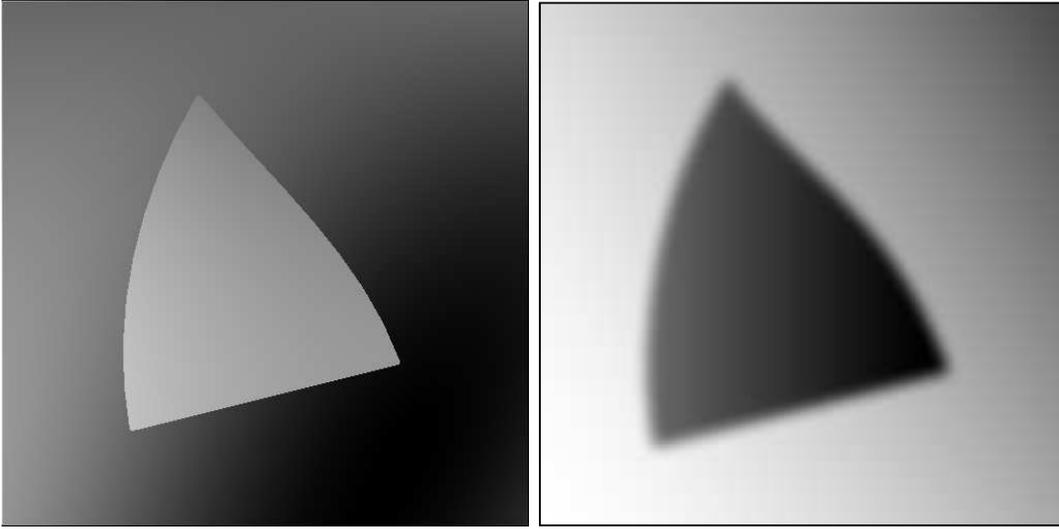


FIG. II.1 – Exemples d’images géométriquement régulières, non lissées à gauche et lissée à droite.

II.2 Estimateur par projection et sélection de modèles

II.2.1 Estimateur par projection

Un estimateur par projection se construit en deux étapes. On projette d’abord linéairement l’observation Y sur un espace vectoriel \mathcal{L} de dimension finie. Cette première étape permet d’avoir une observation $\bar{Y} = \mathbf{P}_{\mathcal{L}}(Y)$ que l’on projette ensuite sur un sous-espace \mathcal{M} choisi de façon adaptative parmi une collection $\{\mathcal{M}_{\gamma}\}_{\gamma \in \Gamma}$ de sous-espaces. Ces sous-espaces sont engendrés par des sous-ensembles d’un dictionnaire fini de vecteurs $\mathcal{D} = \{b_k\}_{k \in K}$. Ces $\kappa = |K|$ vecteurs sont appelés générateurs. Chaque sous-espace \mathcal{M}_{γ} est défini par M_{γ} générateurs de \mathcal{D} par

$$\mathcal{M}_{\gamma} = \text{vect}\{b_k, k \in I_{\gamma} \subset K, |I_{\gamma}| = M_{\gamma}\}$$

et l’estimateur F_{γ} correspondant est défini par

$$F_{\gamma} = \mathbf{P}_{\mathcal{M}_{\gamma}} \bar{Y} \quad .$$

Le seuillage dans une base orthogonale de \mathcal{L} est un exemple d’estimateur par projection.

Les sous-espaces \mathcal{M}_{γ} sont alors l’ensemble des sous-espaces engendrés par les κ vecteurs de bases de \mathcal{L} . Notons au passage que le nombre total d’espaces \mathcal{M}_{γ} et

donc de projections possibles 2^κ est bien plus grand que κ le nombre de vecteurs de base. Ce modèle d'estimateur par projection comprend également les estimateurs par seuillage dans des frames, les estimateurs par projection dans une meilleure base et les approximations polynomiales par morceaux qui sont présentées dans la partie II.2.4.

Après la première projection fixe sur \mathcal{L} , le problème qui se pose est de choisir \mathcal{M}_γ de telle sorte que l'estimateur F_γ ait de bonnes propriétés. Ce choix est réalisé de manière adaptative grâce à une approche de sélection de modèles par pénalisation. Ces estimateurs par projection entrent dans la classe des modèles non-emboîtés introduite par Birgé et Massart dans leur théorie générale de la sélection de modèles. La restriction sur la structure des modèles a deux fonctions. La première est d'avoir un terme de pénalisation simple et la seconde est d'atteindre des résultats asymptotiques presque optimaux.

II.2.2 Sélection de modèle par estimation pénalisée

Comme il l'a été souligné par un grand nombre d'auteurs, l'estimateur par seuillage peut être vu comme un estimateur par pénalisation. En effet, conserver les coefficients $\langle Y, b_k \rangle$ qui sont au dessus du seuil T (dont la valeur absolue est au dessus du seuil T) revient à minimiser sur les sous-ensembles γ de K

$$\sum_{k \notin \gamma} |\langle Y, b_k \rangle|^2 + \sum_{k \in \gamma} T^2 \quad .$$

En utilisant l'orthogonalité de la base $\{b_k\}_{k \in K}$, cette relation devient

$$\|\bar{Y} - F_\gamma\|^2 + T^2 M_\gamma$$

où $F_\gamma = P_{\mathcal{M}_\gamma} \bar{Y}$ et $\mathcal{M}_\gamma = \text{vect}\{b_k, k \in \gamma\}$. Donc l'estimé par seuillage F est également solution de

$$F = \underset{F_\gamma}{\text{argmin}} \|\bar{Y} - F_\gamma\|^2 + T^2 M_\gamma$$

F est ainsi la solution de la minimisation d'une fonctionnelle pénalisée avec la pénalisation $T^2 M_\gamma$ associée au sous-espace \mathcal{M}_γ . Ce terme de pénalisation est similaire à celui proposé par Birgé et Massart ou Willet et Nowak pour $T = \lambda \sqrt{\log \kappa \epsilon}$.

Ce résultat peut être étendu à la plupart des estimateurs par projection. Soit \mathcal{L} un espace vectoriel de dimension finie et soit $\{\mathcal{M}_\gamma\}_{\gamma \in \Gamma}$ une collection de sous-espaces engendrés par des générateurs choisis parmi un ensemble fini \mathcal{D} de cardinal κ .

L'estimateur pénalisé que nous considérons est défini comme étant la solution du problème de minimisation suivant :

$$F = \operatorname{argmin}_{\substack{F_\gamma = P_{\mathcal{M}_\gamma} \bar{Y} \\ \gamma \in \Gamma}} \|\bar{Y} - F_\gamma\|^2 + \lambda^2 \log \kappa \epsilon^2 M_\gamma \quad .$$

Nous rappelons que \bar{Y} est la projection de Y sur \mathcal{L} .

L'intérêt principal de la première projection sur \mathcal{L} est d'assurer que la quantité à minimiser est toujours finie et peut donc être minimisée. En effet, un processus de Wiener projeté sur un espace vectoriel de dimension infinie a une énergie infinie. Ainsi, si on ne projette pas Y sur un espace de dimension finie, la fonctionnelle ci-dessus est toujours infinie.

En reprenant les arguments de Donoho et Johnstone, voir [DJ94a] on montre dans le théorème II.2 que F minimise presque une erreur quadratique d'estimation pénalisée.

Théorème II.2

Soit \mathcal{L} un espace vectoriel de dimension finie et soit $\{\mathcal{M}_\gamma\}_{\gamma \in \Gamma}$ une collection de sous-espaces engendrés par des générateurs choisis parmi un ensemble fini \mathcal{D} de cardinal κ , et $\lambda \geq 4\sqrt{2}$. Avec une probabilité plus grande que $1 - 1/\kappa$, pour tout f et tout niveau de bruit ϵ l'estimé F défini à partir de $dY = f(t)dt + \epsilon dW$ par

$$F = \operatorname{argmin}_{\substack{F_\gamma = \mathbf{P}_{\mathcal{M}_\gamma} \bar{Y} \\ \gamma \in \Gamma}} \|\bar{Y} - F_\gamma\|^2 + \lambda^2 \log \kappa \epsilon^2 M_\gamma \quad .$$

vérifie

$$\|\bar{f} - F\|^2 + \lambda^2 \log \kappa \epsilon^2 M_F \leq C \inf_{\gamma \in \Gamma} \|\bar{f} - \mathbf{P}_{\mathcal{M}_\gamma} \bar{f}\|^2 + \lambda^2 \log \kappa \epsilon^2 M_\gamma$$

où M_F est la dimension du sous espace vectoriel engendré par les générateurs de F .

Birgé et Massart ont également montré un résultat équivalent en espérance. Nous avons choisi de présenter d'abord la version en probabilité car la preuve en est plus simple techniquement et que les différentes idées de la preuve apparaissent clairement. Nous présentons ensuite le résultat en espérance.

Les inégalités de concentration sont au cœur de toutes les preuves concernant les estimateurs par sélection de modèles. Le terme de pénalité sert à borner les variations aléatoires du terme à minimiser. Le lemme II.3 utilise une inégalité de concentration sur les variables gaussiennes pour garantir qu'avec une forte probabilité l'énergie du

bruit n'est pas grande simultanément sur tous les sous-espaces \mathcal{M}_γ .

La démonstration que nous proposons reprend les arguments utilisés par Donoho, Mallat, von Sachs et Samuelides dans [DMvSS03] et par Samuelides dans sa thèse [Sam01] où les auteurs construisent des modèles appelés macrotilés qui sont également des combinaisons linéaires de générateurs monodimensionnels. Notre cadre étant un peu plus simple que le leur, nous proposons une preuve plus rapide tout en conservant les idées principales.

Lemme II.3

Avec une probabilité plus supérieure à $1 - 1/\kappa$,

$$\forall \mathcal{M}_\gamma, \|P_{\mathcal{M}_\gamma}(\epsilon \bar{W})\| \leq 2\sqrt{\log \kappa \epsilon^2 M_\gamma}$$

où \bar{W} est la projection de ϵdW sur l'espace vectoriel \mathcal{L} .

Preuve - Théorème II.2 -

Soit $f_0 = \operatorname{argmin}_{\substack{\bar{f}=P_{\mathcal{M}_\gamma} \bar{f} \\ \gamma \in \Gamma}} \|\bar{f} - \tilde{f}\|^2 + \lambda^2 \log \kappa \epsilon^2 \dim(\mathcal{M})$ et M_0 la dimension du sous-espace vectoriel correspondant. Par définition de F on a,

$$\|\bar{Y} - F\|^2 + \lambda^2 \log \kappa \epsilon^2 M_F \leq \|\bar{Y} - f_0\|^2 + \lambda^2 \log \kappa \epsilon^2 M_0$$

en utilisant $\|\bar{Y} - F\|^2 = \|\bar{Y} - \bar{f}\|^2 + \|\bar{f} - F\|^2 + 2\langle \bar{Y} - \bar{f}, \bar{f} - F \rangle$ et une égalité similaire pour $Y - f_0$, on obtient

$$\begin{aligned} \|\bar{f} - F\|^2 + \lambda^2 \log \kappa \epsilon^2 M_F &\leq \|\bar{f} - f_0\|^2 + \lambda^2 \log \kappa \epsilon^2 M_0 \\ &\quad + 2\langle \bar{Y} - \bar{f}, F - f_0 \rangle \end{aligned}$$

Il reste maintenant à borner le terme $2\langle \bar{Y} - \bar{f}, F - f_0 \rangle$. Nous allons montrer qu'avec une forte probabilité, il est inférieur à $\|\bar{f} - F\|^2 + \lambda^2 \log \kappa M_F$. On observe d'abord que $2\langle \bar{Y} - \bar{f}, F - f_0 \rangle = 2\langle \mathbf{P}_{\mathcal{M} \cup \mathcal{M}_0}(\bar{Y} - \bar{f}), F - f_0 \rangle$ puis on utilise l'inégalité de Cauchy-Schwarz.

$$|2\langle \bar{Y} - \bar{f}, F - f_0 \rangle| \leq 2\|\mathbf{P}_{\mathcal{M} \cup \mathcal{M}_0}(\bar{Y} - \bar{f})\| \|F - f_0\| \quad .$$

$\|F - f_0\|$ peut être borné par $2(\|\bar{f} - F\|^2 + \lambda^2 \log \kappa \epsilon^2 M_F)^{1/2}$, en effet

$$\begin{aligned} \|F - f_0\| &\leq \|F - \bar{f}\| + \|\bar{f} - f_0\| \\ &\leq (\|\bar{f} - F\|^2 + \lambda^2 \log \kappa \epsilon^2 M_F)^{1/2} + (\|\bar{f} - f_0\|^2 + \lambda^2 \log \kappa \epsilon^2 M_0)^{1/2} \\ \|F - f_0\| &\leq 2(\|\bar{f} - F\|^2 + \lambda^2 \log \kappa \epsilon^2 M_F)^{1/2} \quad . \end{aligned}$$

En utilisant le lemme II.3 on obtient

$$\begin{aligned} \|P_{\mathcal{M} \cup \mathcal{M}_0}(\bar{Y} - \bar{f})\| &\leq 2(\log \kappa \epsilon^2 (M_F + M_0))^{1/2} \\ &\leq 2/\lambda(\|\bar{f} - F\|^2 + \lambda^2 \log \kappa \epsilon^2 M_F + \|\bar{f} - f_0\|^2 + \lambda^2 \log \kappa \epsilon^2 M_0)^{1/2} \\ &\leq 2\sqrt{2}/\lambda(\|\bar{f} - F\|^2 + \lambda^2 \log \kappa \epsilon^2 M_F)^{1/2} \end{aligned}$$

Ce qui donne

$$|2\langle \bar{Y} - \bar{f}, F - f_0 \rangle| \leq 4\sqrt{2}/\lambda(\|\bar{f} - F\|^2 + \lambda^2 \log \kappa \epsilon^2 M_F)$$

ce qui assure le résultat si $\lambda > 4\sqrt{2}$. Pour terminer la preuve du théorème nous prouvons maintenant le lemme II.3.

Preuve - du lemme II.3 -

L'argument principal de cette preuve réside dans une inégalité de concentration. Le lemme de Borell montre que pour toute fonction 1-Lipschitz $\phi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ ($|\phi(x) - \phi(y)| \leq \|x - y\|$) si W est un bruit blanc gaussien de variance ϵ^2 dans \mathbb{R}^n alors

$$P(\phi(W) \geq E(\phi(W)) + \sigma t) \leq e^{-t^2/2} .$$

Soit \mathcal{L} un espace vectoriel de dimension finie et \mathcal{M} un sous-espace de dimension M , $\phi_{\mathcal{M}}$ est définie comme une fonction de \mathcal{L} dans \mathbb{R} par

$$\phi_{\mathcal{M}}(f) = \|P_{\mathcal{M}}(f)\|$$

$\phi_{\mathcal{M}}$ est 1-Lipschitz car toute projection orthogonale est 1-Lipschitz. On applique le lemme de Borell pour $t = \sqrt{4 \log \kappa M}$ en utilisant le fait que W est un bruit blanc sur \mathcal{L}

$$P\left(\|P_{\mathcal{M}}W\| \geq E(\|P_{\mathcal{M}}W\|) + 2\sqrt{\log \kappa M \epsilon}\right) \leq \kappa^{-2M} .$$

Maintenant comme $E(\|P_{\mathcal{M}}W\|) \leq (E(\|P_{\mathcal{M}}W\|^2))^{1/2} \sqrt{M\epsilon^2}$, on déduit que

$$P\left(\|P_{\mathcal{M}}W\| \geq 3\sqrt{\log \kappa M \epsilon}\right) \leq \kappa^{-2M} .$$

On conclut en remarquant que

$$\begin{aligned}
P\left(\exists \mathcal{M}, \|P_M W\| \geq 3\sqrt{\log \kappa M \epsilon}\right) &\leq \sum_{\mathcal{M}} P\left(\|P_M W\| \geq 3\sqrt{\log \kappa M \epsilon}\right) \\
&\leq \sum_{\mathcal{M}} \kappa^{-2M} \\
&\leq \sum_{n=1}^{\kappa} \binom{n}{\kappa} \kappa^{-2n} \\
&\leq \sum_{n=1}^{\kappa} \kappa^{-n} \\
&\leq \frac{\kappa^{-1}}{1 - \kappa^{-1}} \\
P\left(\exists \mathcal{M}, \|P_M W\| \geq 3\sqrt{\log \kappa M \epsilon}\right) &\leq \frac{1}{2\kappa}
\end{aligned}$$

■
■

Nous proposons maintenant le même résultat en espérance. Nous reprenons la preuve proposée par Barron, Birgé et Massart dans [BBM99].

Théorème II.4

Il existe C_1 et C_2 tels que l'estimateur F défini par

$$F = \underset{\substack{F_\gamma = \mathbf{P}_{\mathcal{M}_\gamma} \bar{Y} \\ \gamma \in \Gamma}}{\operatorname{argmin}} \|\bar{Y} - F_\gamma\|^2 + 48 \log \kappa \epsilon^2 M_\gamma \quad .$$

vérifie

$$E(\|\bar{f} - F\|^2) \leq C_1 \inf_{\gamma \in \Gamma} (\|\bar{f} - \mathbf{P}_{\mathcal{M}_\gamma} \bar{f}\|^2 + 48 \log \kappa \epsilon^2 M_\gamma) + C_2 \epsilon^2.$$

La preuve de ce résultat en espérance est proche de celle en probabilité. Nous allons travailler en probabilité et passer en espérance à la fin. Nous allons utiliser également une inégalité de concentration et introduire un terme $x_{\gamma_2}(x)$ qui permet de contrôler le bruit sur un ensemble de probabilité supérieure à $1 - e^x$. C'est cette borne qui nous permettra de passer en espérance.

On utilisera plusieurs fois dans ce lemme que la pénalisation $48 \log \kappa > 1$. Nous ne le précisons pas à chaque fois.

Preuve - II.4 -

On note γ_0 le modèle associé à F et γ_1 le modèle associé à f_1 défini par

$$f_1 = \underset{\substack{F_\gamma = \mathbf{P}_{\mathcal{M}_\gamma} \bar{f} \\ \gamma \in \Gamma}}{\operatorname{argmin}} \|\bar{f} - F_\gamma\|^2 + 48 \log \kappa \varepsilon^2 M_\gamma \quad .$$

Comme précédemment on a

$$\|\bar{f} - F\|^2 \leq \|\bar{f} - f_1\|^2 + 48 \log \kappa M_{\gamma_1} \varepsilon^2 - 48 \log \kappa M_{\gamma_0} \varepsilon^2 + 2\langle W, F - f_1 \rangle \quad (\text{II.2})$$

On va maintenant borner le produit scalaire $\langle W, F - f_1 \rangle$.

Soit γ_2 un modèle quelconque et $x > 0$ un réel positif. A tout $h \in \mathcal{M}_{\gamma_2}$ on associe le processus gaussien suivant

$$Z(h) = \frac{\langle W, h - f_1 \rangle}{\omega(\gamma_2, h)} \quad \text{avec } \omega(\gamma_2, h) = \|f - h\|^2 + \|f - f_1\|^2 + \frac{x_{\gamma_2} \varepsilon}{2} \quad (\text{II.3})$$

où $x_{\gamma_2} = 32(M_{\gamma_1} + 2x + 6 \log \kappa M_{\gamma_2})$. Ainsi x_{γ_2} dépend de x .

On va borner ce processus en utilisant le lemme de concentration suivant

Lemme II.5

$$P \left(\sup_{h \in \mathcal{M}_{\gamma_2}} Z(h) \geq E + \lambda \right) \leq e^{-\lambda^2 / \sigma^2} \quad \forall \lambda > 0 \quad (\text{II.4})$$

Si $E \geq E(\sup_{h \in \mathcal{M}_{\gamma_2}} Z(h))$ et si $\operatorname{Var}(Z(h)) \leq \sigma^2$

Ce lemme est une conséquence de l'inégalité de Cirel'son, Ibragimov et Sudakov, voir par exemple [Led96].

On cherche d'abord une valeur de σ^2 vérifiant l'hypothèse du lemme. Comme

$$\operatorname{Var}(\langle W, u \rangle) = \varepsilon^2 \|u\|^2 \quad (\text{II.5})$$

et

$$\omega(\gamma_2, h) \geq \frac{1}{2} (\|h - f_1\|^2 + x_{\gamma_2} \varepsilon^2) \geq \|h - f_1\| x_{\gamma_2}^{1/2} \varepsilon^{-1} \quad (\text{II.6})$$

on a

$$\operatorname{Var}(Z(h)) = \varepsilon^2 \|h - f_1\|^2 \omega^{-2}(\gamma_2, h) \leq x_{\gamma_2}^{-1}. \quad (\text{II.7})$$

On peut ainsi prendre dans le lemme II.5 $\sigma^2 = x_{\gamma_2}^{-1}$.

On détermine ensuite une valeur de E vérifiant les hypothèses du lemme.

Soit (e_1, \dots, e_N) une base orthogonale de $\mathcal{M}_{\gamma_1} + \mathcal{M}_{\gamma_2}$, on a $N \leq M_{\gamma_1} + M_{\gamma_2}$. Par Cauchy Schwarz on a

$$Z^2(h) \leq \|h - f_1\|^2 \omega^{-2}(\gamma_2, h) \sum_{j=1}^N |\langle W, e_j \rangle|^2 \leq x_{\gamma_2}^{-1} \varepsilon^2 \sum_{j=1}^N |\langle W, e_j \rangle|^2. \quad (\text{II.8})$$

Comme cette dernière majoration ne dépend plus de $h \in \mathcal{M}_{\gamma_2}$ on peut écrire

$$\sup_{h \in \mathcal{M}_{\gamma_2}} Z^2(h) \leq x_{\gamma_2}^{-1} \varepsilon^2 \sum_{j=1}^N |\langle W, e_j \rangle|^2 \quad (\text{II.9})$$

et donc

$$E(\sup_{h \in \mathcal{M}_{\gamma_2}} Z^2(h)) \leq x_{\gamma_2}^{-1} (M_{\gamma_1} + M_{\gamma_2}). \quad (\text{II.10})$$

En utilisant l'inégalité de Jensen on a

$$E(\sup_{h \in \mathcal{M}_{\gamma_2}} Z(h)) \leq x_{\gamma_2}^{-1/2} (M_{\gamma_1} + M_{\gamma_2})^{1/2}. \quad (\text{II.11})$$

On peut ainsi prendre $E = x_{\gamma_2}^{-1/2} (M_{\gamma_1} + M_{\gamma_2})^{1/2}$ dans le lemme II.5. Pour $\lambda^2 = 2(x + 2 \log \kappa M_{\gamma_2}) / x_{\gamma_2}$, par définition de x_{γ_2} on a

$$\lambda + E \leq \sqrt{2} \frac{(M_{\gamma_1} + M_{\gamma_2} + 2x + 4 \log \kappa M_{\gamma_1})}{x_{\gamma_2}} \leq \frac{1}{4}. \quad (\text{II.12})$$

En appliquant le lemme II.5 on obtient

$$P(Z(\mathbf{P}_{\mathcal{M}_{\gamma_2}}(\bar{Y})) \geq \frac{1}{4}) \leq P(\sup_{h \in \mathcal{M}_{\gamma_2}} Z(h) \geq \frac{1}{4}) \leq e^{-2 \log \kappa M_{\gamma_2}} e^{-x}. \quad (\text{II.13})$$

Si on somme toute ces inégalités associées à l'ensemble des modèles $\gamma_2 \in \Gamma$

$$P\left(\sup_{\gamma_2 \in \Gamma} \frac{\langle W, \mathbf{P}_{\mathcal{M}_{\gamma_2}}(\bar{Y}) - f_1 \rangle}{\omega(\gamma_2, \mathbf{P}_{\mathcal{M}_{\gamma_2}}(\bar{Y}))} \geq \frac{1}{4}\right) \leq e^{-x} \sum_{\gamma_2 \in \Gamma} e^{-2 \log \kappa M_{\gamma_2}}. \quad (\text{II.14})$$

Nous avons vu dans la preuve du lemme II.3 que $\sum_{\gamma_2 \in \Gamma} e^{-2 \log \kappa M_{\gamma_2}} < 1/\kappa < 1$. On applique l'inégalité II.14 au modèle γ_0 et à F pour obtenir, en dehors d'un ensemble de probabilité inférieure à e^{-x} ,

$$4\langle W, F - f_1 \rangle \leq \omega(\gamma_0, F) \leq \|f - f_1\|^2 + \|f - F\|^2 + 16\varepsilon^2 (M_{\gamma_1} + 2x + 6 \log \kappa M_{\gamma_0}). \quad (\text{II.15})$$

On en déduit en reprenant (II.2), qu'en dehors d'un ensemble de probabilité inférieure à e^{-x} , on a

$$\begin{aligned} \|\bar{f} - F\|^2 &\leq 3\|\bar{f} - f_1\|^2 + 96 \log \kappa M_{\gamma_1} \varepsilon^2 - 96 \log \kappa M_{\gamma_0} \varepsilon^2 \\ &\quad + 16\varepsilon^2(M_{\gamma_1} + 2x + 6 \log \kappa M_{\gamma_0}) \end{aligned} \quad (\text{II.16})$$

$$\leq 3\|\bar{f} - f_1\|^2 + 8/3 \times 48 \log \kappa M_{\gamma_1} + 32\varepsilon^2 x \quad (\text{II.17})$$

On pose

$$V = \max(\|\bar{f} - F\|^2 - 3\|\bar{f} - f_1\|^2 - 8/3 \times 48 \log \kappa M_{\gamma_1}, 0) \quad (\text{II.18})$$

Par définition de V on a

$$E(\|\bar{f} - F\|^2) \leq 3\|\bar{f} - f_1\|^2 + 8/3 \times 48 \log \kappa M_{\gamma_1} + E(V) \quad (\text{II.19})$$

avec $P(V \geq 32x\varepsilon^2) \leq e^{-x}$. En intégrant par rapport à x on a $E(V) \leq 32\varepsilon$ d'où le résultat. ■

II.2.3 Calcul du risque de l'estimateur.

Dans le paragraphe précédent nous avons montré que l'estimé F minimise presque $\|\bar{f} - g\|^2 + \lambda^2 \log \kappa \varepsilon^2 \dim(\mathcal{M})$ dans le sens où pour $g = F$ on sait que la valeur de la fonctionnelle pénalisée ci-dessus est au plus C fois supérieur au minimum où C est un réel que l'on sait borner.

On va maintenant utiliser la borne obtenue sur la fonctionnelle pénalisée pour estimer $\|f - F\|$. Dans un premier temps on borne simplement $\|f - F\|$ par

$$\|f - F\|^2 \leq 2(\|f - \bar{f}\|^2 + \|\bar{f} - F\|^2)$$

Ainsi un contrôle sur les deux termes de droite permet-il un contrôle sur le risque de l'estimateur. Le premier terme $\|f - \bar{f}\|^2$ est l'erreur d'approximation linéaire due à la projection de f sur l'espace vectoriel \mathcal{L} de dimension finie. On peut borner ce terme en utilisant une borne uniforme sur l'erreur d'approximation linéaire sur la classe Θ qui nous intéresse. Ce terme est déterministe et relève donc uniquement de la théorie de l'approximation.

Le théorème II.2 donne une borne sur le second terme sur un ensemble de probabilité tendant vers 1 quand ε tend vers 0. Cette borne est égale à

$$C \inf_{\gamma \in \Gamma} \|\bar{f} - \mathbf{P}_{\mathcal{M}_\gamma} \bar{f}\|^2 + \lambda^2 \log \kappa \varepsilon^2 M_\gamma$$

A la constante C près, cet infimum correspond à la formulation lagrangienne de la minimisation de l'erreur d'approximation $\|\bar{f} - \mathbf{P}_{\mathcal{M}_\gamma} \bar{f}\|^2$ avec une contrainte sur la dimension de \mathcal{M}_γ :

$$\inf_{\gamma \in \Gamma, M_\gamma = M} \|\bar{f} - \mathbf{P}_{\mathcal{M}_\gamma} \bar{f}\|^2$$

C'est l'erreur d'approximation non linéaire. Si on oublie la projection sur \mathcal{L} , le problème qui consiste à estimer

$$\inf_{\gamma \in \Gamma, M_\gamma = M} \|f - \mathbf{P}_{\mathcal{M}_\gamma} f\|^2$$

a été étudié pour un grand nombre de classes de fonctions pour lesquelles il existe un exposant α (et potentiellement un exposant α') tel que

$$\inf_{\gamma \in \Gamma, M_\gamma = M} \|f - \mathbf{P}_{\mathcal{M}_\gamma} f\|^2 \leq C |\log M|^{\alpha'} M^{-\alpha} \quad .$$

Ceci implique que pour tout T

$$\inf_{\gamma \in \Gamma} \|f - \mathbf{P}_{\mathcal{M}_\gamma} f\|^2 + T^2 M_\gamma \leq C' |\log T|^{\alpha' / (\alpha + 1)} T^{2\alpha / (\alpha + 1)} \quad .$$

Si l'espace \mathcal{L} est un espace suffisamment fin, le terme dominant dans la borne sur $\|f - F\|$ est $\|\bar{f} - F\|$. Dans ce cas si T est proportionnel à ε , on peut relier l'exposant β de la vitesse de décroissance de l'erreur d'estimation et l'exposant α de la vitesse d'approximation non linéaire par la relation $\beta = 2\alpha / (\alpha + 1)$.

L'estimateur par projection que nous proposons est une composition de deux projections. Pour que l'erreur d'estimation soit faible il est nécessaire que les erreurs dues à ces deux projections soient faibles. Il est d'autre part inutile que l'une soit bien plus petite que l'autre car l'erreur totale est de l'ordre de celle des deux qui domine. Nous proposons dans le lemme suivant des conditions sur l'espace vectoriel \mathcal{L} et sur les sous-espaces \mathcal{M}_γ pour contrôler au mieux la vitesse de décroissance de l'erreur d'estimation en fonction du niveau de bruit ε .

Lemme II.6

Soit ε un niveau de bruit, s'il existe trois constantes C_1, C_2 et C_3 et trois exposants β, β' et d tels que les espaces \mathcal{L} et \mathcal{M}_γ vérifient les propriétés d'approximation suivantes.

1. $\forall f \in \Theta, \|f - \bar{f}\|^2 \leq C_1 \varepsilon^2,$
2. $\forall f \in \Theta, \forall T > 0, \inf_{\mathcal{M}_\gamma} \|f - \mathbf{P}_{\mathcal{M}_\gamma} f\|^2 + T^2 M_\gamma \leq C_2 (|\log T|^{\beta'} T^\beta + \varepsilon^2)$
3. $\kappa \leq C_3 \varepsilon^{-d}.$

alors il existe une constante C tel que l'estimateur F défini par

$$F = \operatorname{argmin}_{\substack{F_\gamma = \mathbf{P}_{\mathcal{M}_\gamma} \bar{Y} \\ \gamma \in \Gamma}} \|\bar{Y} - F_\gamma\|^2 + \lambda^2 \log \kappa \epsilon^2 M_\gamma$$

vérifie avec une probabilité supérieure à $1 - 1/\kappa$

$$\|f - F\|^2 \leq C(|\log |\log \epsilon|| + |\log \epsilon|)^{\beta'} |\log \epsilon|^{\beta/2} \epsilon^\beta \quad .$$

et on a également pour un bon choix de λ

$$E(\|f - F\|^2) \leq C'(|\log |\log \epsilon|| + |\log \epsilon|)^{\beta'} |\log \epsilon|^{\beta/2} \epsilon^\beta \quad .$$

Le but de ce lemme est de borner le risque de notre estimateur. Ceci n'est possible que si les espaces utilisés pour construire l'estimateur F vérifient quelques propriétés. La première condition impose que \mathcal{L} soit suffisamment fin pour que l'erreur d'approximation linéaire sur \mathcal{L} soit de l'ordre de ϵ^2 . La seconde condition mesure la capacité d'approximation non linéaire de la famille des sous-espaces \mathcal{M}_γ . La troisième condition sert à borner le cardinal des générateurs des espaces \mathcal{M}_γ pour borner l'amplitude du bruit comme nous l'avons vu dans le lemme II.3.

Preuve - II.6 -

Nous proposons la preuve en probabilité, la preuve en espérance est identique et s'appuie sur le théorème II.4.

Nous avons vu que

$$\|f - F\|^2 \leq 2(\|f - \bar{f}\|^2 + \|\bar{f} - F\|^2)$$

En utilisant le théorème II.2 cette inégalité devient avec grande probabilité

$$\leq 2(\|f - \bar{f}\|^2 + C \inf_{\gamma \in \Gamma} \|\bar{f} - \mathbf{P}_{\mathcal{M}_\gamma} \bar{f}\|^2 + \lambda^2 \log \kappa \epsilon^2 M_\gamma)$$

En insérant f et $\mathbf{P}_{\mathcal{M}_\gamma} f$

$$\begin{aligned} &\leq 2(\|f - \bar{f}\|^2 + C \inf_{\gamma \in \Gamma} \|(\bar{f} - f) + (f - \mathbf{P}_{\mathcal{M}_\gamma} f) + (\mathbf{P}_{\mathcal{M}_\gamma} f - \mathbf{P}_{\mathcal{M}_\gamma} \bar{f})\|^2 \\ &\quad + \lambda^2 \log \kappa \epsilon^2 M_\gamma) \\ &\leq 2(C' \|f - \bar{f}\|^2 + C \inf_{\gamma \in \Gamma} \|f - \mathbf{P}_{\mathcal{M}_\gamma} f\|^2 + \lambda^2 \log \kappa \epsilon^2 M_\gamma) \end{aligned}$$

En utilisant les hypothèses du théorème avec $T = \lambda \sqrt{\log \kappa \epsilon}$, et la borne sur κ ,

$$\|f - F\|^2 \leq 2C' \epsilon_0^2 + C'' (\log \log \kappa + |\log \epsilon|)^{\beta'} (\log \kappa)^{\beta/2} \epsilon^\beta$$

ce qui conclut la preuve. ■

Maintenant que nous avons une idée des conditions suffisantes sur les espaces \mathcal{L} et \mathcal{M}_γ pour borner l'erreur d'estimation, nous devons déterminer de tels espaces. Ces espaces dépendent de la classe Θ que nous avons choisie d'estimer. Comment choisir ces espaces à partir de Θ pour qu'ils vérifient les conditions d'approximation et de cardinal du lemme ? Existe-t-il un moyen d'effectuer pratiquement la minimisation sur tous les sous-espaces \mathcal{M}_γ ? En effet, le nombre de sous-espaces \mathcal{M}_γ à tester croît exponentiellement avec κ le nombre de vecteurs générateurs. Il est donc impossible pratiquement de tous les tester. Si on veut pouvoir effectuer la minimisation il est donc indispensable que l'ensemble des modèles, c'est à dire l'ensemble des espaces \mathcal{M}_γ ait une structure particulière permettant une minimisation effective et pas seulement théorique. C'est sur ces questions que nous nous penchons maintenant. Nous présentons dans le paragraphe quelques exemples d'estimateurs par projection avant de construire le dictionnaire de bases de bandelettes qui vérifiera les hypothèses du lemme pour la classe des fonctions à régularité géométrique.

II.2.4 Exemple d'estimateurs par projection pour les images

Dans cette partie nous proposons différents espaces \mathcal{L} et \mathcal{M}_γ qui réalisent les conditions du lemme II.6 pour différents modèles d'images.

II.2.4.1 Les ondelettes

Un estimateur par seuillage dans une base d'ondelettes est un estimateur par projection pénalisé comme il l'a été démontré dans la partie II.2.2.

L'espace d'approximation linéaire \mathcal{L} choisi dans ce cas est $\text{vect}\{\psi_{j,k}, 2^j \geq 2^{j_0}\}$ et l'ensemble $\{\mathcal{M}\}$ des modèles est composé de tous les sous-espaces $\text{vect}\{\psi_{j,k}, (j,k) \in I \subset \{(j,k), 2^j \geq 2^{j_0}\}\}$. On a ainsi $\kappa = 2^{-2j_0}$. La minimisation

$$F = \underset{F_\gamma}{\text{argmin}} \|\bar{Y} - F_\gamma\|^2 + T^2 M_\gamma$$

est obtenue directement en effectuant un seuillage dans l'espace des coefficients.

$$F = \sum_{\substack{(j,k), \\ 2^j \geq 2^{j_0} \\ |\langle Y, \psi_{j,k} \rangle| \geq T}} \langle Y, \psi_{j,k} \rangle \psi_{j,k} \quad .$$

La complexité de cet opérateur de seuillage est linéaire en le nombre de pixels, ce qui est bien plus faible que la complexité d'un algorithme d'exploration de tous les sous-espaces \mathcal{M}_γ possibles. La complexité d'une telle exploration est linéaire en le nombre de modèles et donc exponentielle en le nombre de pixels. Le théorème II.2 correspond dans ce cas à l'inégalité oracle de Donoho et Johnstone.

Les propriétés d'approximation des ondelettes sont connues pour une grande classe d'images. Si la classe d'image est celle des fonctions uniformément régulières, $f \in \mathbf{C}^\alpha$, alors $\|f - \bar{f}\| \leq 2^{2\alpha j_0}$ et $\inf_{\mathcal{M}} \|P_{\mathcal{M}}f - f\|^2 + T^2M \leq CT^{2\alpha/(\alpha+1)} + 2^{2\alpha j_0}$. Donc si on connaît le niveau de bruit ε et qu'on choisit $2^{j_0} = \varepsilon^2$, les conditions du lemme II.6 sont vérifiées et on retrouve les résultats de Donoho et Johnstone avec $\beta = 2\alpha/(\alpha + 1)$.

Si f n'est pas uniformément régulière mais seulement \mathbf{C}^α géométriquement régulière, les capacités d'approximation des ondelettes sont moins bonnes, $\|f - \bar{f}\| \leq 2^{j_0}$ et $\inf_{\mathcal{M}} \|P_{\mathcal{M}}f - f\|^2 + T^2M \leq CT + 2^{j_0}$. Si on prend $2^{j_0} = \varepsilon^2$ on obtient une décroissance similaire mais avec $\beta = 1$ qui ne dépend plus de α .

II.2.4.2 CART et recherche de meilleure base

Comme nous l'avons déjà précisé le théorème II.2 est inspiré d'une série d'articles de Donoho et Johnstone [DJ94a],[DJ94c] et [DJ94b] sur les dictionnaires structurés. Dans le premier article, les auteurs considèrent le cas d'un dictionnaire de bases $\{\mathcal{B}_i\}$ de $l^2(N^2)$ engendrées par un nombre total de κ vecteurs de base. Ils définissent la meilleure base associée à l'observation Y et au seuil T comme la base $\mathcal{B}_i = \{b_n\}$ minimisant l'entropie

$$\mathcal{E}(Y, \mathcal{B}_i, T) = \sum_{b_n \in \mathcal{B}_i} \min(|\langle Y, b_n \rangle|^2, T^2).$$

L'estimé F est alors obtenu par seuillage des coefficients de Y dans cette base.

$$F = \sum_{\substack{b_n \in \mathcal{B}_i \\ |\langle Y, b_n \rangle| > T}} \langle Y, b_n \rangle b_n \quad .$$

Cet estimé peut aussi être vu comme la solution d'une minimisation par double projection, comme nous l'avons décrit précédemment. En effet l'espace $l^2(N^2)$ est déjà de dimension finie et on peut donc prendre $\mathcal{L} = l^2(N^2)$. La première projection est ici sans perte. On considère maintenant l'ensemble $\mathcal{M} = \{\mathcal{M}_\gamma\}$ de tous les sous-espaces engendrés par un sous-ensemble d'une des bases \mathcal{B}_i du dictionnaire. Le nombre κ de générateurs est inférieur à N^2 multiplié par le nombre de bases du

dictionnaire.

F peut ainsi être également défini comme la solution de

$$F = \operatorname{argmin}_{F_\gamma} \|Y - F_\gamma\|^2 + T^2 M_\gamma \quad .$$

La quasi optimalité de cet estimateur est ainsi garantie par le théorème II.2.

II.2.4.3 Les curvelets

Les curvelets introduites par Candès et Donoho dans le cadre de l'approximation non linéaire définissent un frame de $L^2(\mathbb{R}^2)$.

Nous rappelons qu'un frame de $L^2(\mathbb{R}^2)$ est une famille $\{b_\gamma\}$ de vecteurs engendrant un espace, potentiellement redondante, telle qu'il existe deux réels A et B tels que pour tout f dans $L^2(\mathbb{R}^2)$ on ait

$$A \sum_{\gamma} |\langle b_\gamma, f \rangle|^2 \leq \|f\|_2^2 \leq B \sum_{\gamma} |\langle b_\gamma, f \rangle|^2$$

Elles fournissent une représentation fixe, indépendante de la fonction f telle que pour toute fonction $f \in \mathbf{C}^2$ géométriquement régulière, l'approximation f_M à M termes vérifie

$$\|f - f_M\|^2 \leq |\log M|^3 M^{-2}$$

ou plus précisément

$$\|f - f_M\|^2 + T^2 M \leq |\log T| T^{2 \times 2 / (2+1)} \quad .$$

De plus, par construction, les propriétés d'approximation linéaires des curvelets restent similaires à celles des ondelettes. Pour tout ε , on peut définir de la même manière un espace \mathcal{L} de curvelets dont l'échelle est plus grande qu'un certain j_0 . On peut construire également une famille d'espaces \mathcal{M}_γ dont les générateurs sont la famille de bandelettes qui définit \mathcal{L} . On peut ainsi appliquer le théorème II.2 et le lemme II.6.

Cependant, la minimisation effective nécessite le calcul de projections qui sont un peu complexes car les curvelets ne sont pas des bases orthogonales. Les projections sont calculées par un algorithme itératif et doivent être effectuées pour chaque espace \mathcal{M}_γ . L'algorithme pratique est ainsi trop coûteux en calcul.



FIG. II.2 – Exemple de curvelets à différentes échelles et différentes orientations.

Les curvelets peuvent également être des “tight frames” c’est à dire que la suite des coefficients de curvelets a une énergie proportionnelle à l’énergie de la fonction. Autrement dit on a une égalité de type Parseval entre la norme L^2 de la fonction et la norme l^2 des coefficients de curvelets. Dans la définition que nous avons donnée ceci correspond à $A = B$.

Dans ce cas on peut travailler directement dans le domaine des coefficients. Les hypothèses du théorème II.2 et du lemme II.6 peuvent être transférées dans le domaine des coefficients de curvelets. L’estimateur pénalisé est ainsi obtenu par seuillage dans le domaine des coefficients de curvelets puis par un retour dans le domaine spatial. Cet estimateur est différent de celui défini entièrement dans le domaine spatiale mais les deux estimateurs partagent la même décroissance asymptotique. Les frames de curvelets fournissent ainsi des représentations optimales pour les fonctions C^2 géométriquement régulières.

II.2.4.4 Approximation polynomiale par morceaux

Différentes extensions de l’algorithme CART permettent d’obtenir d’autres familles d’estimation par projection. Ces estimateurs partagent la même structure de partition avec des modèles simples sur chacun des rectangles de la partition. L’algorithme CART original correspond à une approximation constante par morceaux. Les Wedgelettes sont des fonctions qui sont constantes par morceaux avec des singularités le long d’un segment à l’intérieur de chaque rectangle. Minh Do et Vetterli en ont proposé une extension polynomiale : ils considèrent une approximation polynomiale par morceaux et ils autorisent une singularité polynomiale sur chaque rectangle.

Pour chaque rectangle la géométrie est spécifiée par un *petit* nombre de paramètres

géométriques. Une fois qu'une géométrie est choisie, les approximations polynomiales sont des projections linéaires. On peut montrer que si le nombre de géométries possibles pour chaque rectangle ne croît pas trop vite avec la taille du rectangle, comme c'est le cas pour les wedgelettes et les approximations polynomiales par morceaux, l'hypothèse sur le cardinal du nombre de générateurs dans le lemme II.6 est vérifiée. Les espaces \mathcal{M}_γ correspondent dans ce cas à toutes les partitions possibles et toutes les géométries possibles. On n'a pas ici de première projection sur un espace \mathcal{L} mais on peut l'ajouter artificiellement en considérant une première projection sur l'espace des polynômes par morceaux à une échelle fine.

Le modèle sous-jacent est optimal pour une classe de fonctions dont la définition est similaire à celle des fonctions \mathbf{C}^α géométriquement régulières mais où on ne considèrerait pas de lissage. Le lemme II.6 assure l'optimalité de l'estimateur polynomial par morceaux sur cette classe. Il est cependant impossible d'ajouter un lissage à ce modèle si on veut conserver les capacités de l'estimateur.

II.3 Estimation dans une base orthogonale de bandelettes

Nous présentons maintenant les bases orthogonales de bandelettes qui vérifient les conditions du lemme II.6 et qui permettent de construire un estimateur dont le risque est quasi optimal pour la classe des fonctions \mathbf{C}^α géométriquement régulières. A la différence des curvelets, les bases de bandelettes sont adaptatives. Il existe un très grand nombre de bases et pour une fonction f donnée il n'en existe que quelques unes qui assurent une bonne représentation de f . La représentation en bandelettes suit le même principe que la représentation polynomiale par morceaux. On découpe l'image en petites sous-images et traite chaque petite zone séparément. Là où l'approximation polynomiale propose d'approcher la fonction par un polynôme par morceaux nous proposons de construire une base orthogonale adaptée à l'image qui s'appuie sur un polynôme.

Une base de bandelettes est ainsi une union de bases orthogonales locales. Ces bases sont construites pour représenter efficacement des rectangles que nous appellerons modèles d'horizon car ils sont construits sur le modèle proposé par Donoho [Don97]. Les modèles d'horizon sont des rectangles sur lesquels la fonction f est \mathbf{C}^α en dehors d'une courbe \mathbf{C}^α qui peut être paramétrisée horizontalement ou verticalement et éventuellement lissée par un noyau h de taille s .

Nous proposons de construire des bases de bandelettes sur de tels modèles d'horizon, puis de montrer les capacités d'approximations de ces bases pour en déduire le

risque d'un estimateur par projection en bases de bandelettes. Nous montrerons dans un second temps comment ces résultats s'étendent naturellement à des images C^α géométriquement régulières en découpant l'image de la même manière que pour l'approximation polynomiale.

Les bandelettes ont été introduites par Mallat et Le Pennec [Pen02, PM05] pour l'approximation linéaire des images C^α géométriquement régulières. Ces bandelettes ne forment pas des bases orthogonales mais de frames, ce qui pose problème pour déterminer effectivement l'estimateur. Ce point a été soulevé dans la description des curvelets qui forment également des frames. Nous proposons dans cette thèse une version orthogonalisée des bandelettes de Le Pennec et Mallat. Nous décrivons dans le paragraphe suivant leur construction et nous détaillons dans le paragraphe d'après les bases orthogonales modifiées.

II.3.1 Bases orthogonales de bandelettes sur une bande

Les ondelettes bidimensionnelles obtenues par produit tensoriel de bases d'ondelettes monodimensionnelles ne permettent pas de représenter efficacement les fonctions f régulières admettant une discontinuité le long d'une courbe. Cependant si la discontinuité de f suit une ligne horizontale on peut montrer que des bases d'ondelettes anisotropes dont les fonctions sont allongées le long de la discontinuité permettent de bien représenter f . C'est en utilisant cette propriété que Mallat et Lepennec ont construit les bandelettes. Les bandelettes sont des bases qui suivent localement une courbe géométrique, qui sont allongées le long de cette courbe et qui utilisent la régularité de la fonction f le long de cette courbe. Le domaine naturel pour construire des bandelettes est donc un domaine qui suit une courbe géométrique, on appelle ces domaines des bandes.

Les bandes horizontales sont des domaines de $[0, 1]^2$ délimités par quatre bords, dont deux sont verticaux et deux autres sont des courbes polynomiales parallèles. On définit de manière analogue des bandes verticales. Dans la suite nous considérons des bandes horizontales, toutes les constructions et les résultats étant similaires pour les bandes verticales.

Une bande \mathbf{B} est ainsi définie par une géométrie g et des bornes (a_1, b_1, a_2, b_2) :

$$\mathbf{B} = \{(x_1, x_2) \mid x_1 \in [a_1, b_1] \ x_2 \in [a_2 + g(x_1), b_2 + g(x_1)]\}.$$

Le warping \mathbf{W} associé à \mathbf{B} est l'application de \mathbb{R}^2 dans \mathbb{R}^2 définie par

$$\mathbf{W}(x_1, x_2) = (x_1, x_2 - g(x_1))$$

L'image de \mathbf{B} par \mathbf{W} est par construction un rectangle \mathbf{R} .

Si f est une fonction définie sur \mathbf{B} , C^α en dehors d'une courbe parallèle aux bords

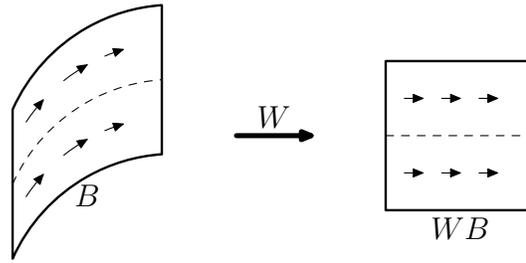


FIG. II.3 – Exemple de bande

de la bande, l'image $\mathbf{W}f$ de f par \mathbf{W} est une fonction \mathbf{C}^α en dehors d'une courbe horizontale. Sur \mathbf{R} on construit la base d'ondelettes anisotropes suivante :

$$\left\{ \begin{array}{ll} \psi_{l,m_1}(x_1)\psi_{j,m_2}(x_2) & , \quad \psi_{j,m_1}(x_1)\phi_{j,m_2}(x_2) \\ & , \quad \psi_{j,m_1}(x_1)\psi_{j,m_2}(x_2) \end{array} \right\}_{(l>j,m_1,m_2)\in I_{\mathbf{R}}} \quad (\text{II.20})$$

Pour chacune des fonctions b_i de cette base on a

$$\langle b_i, \mathbf{W}f \rangle = \langle \mathbf{W}^*b_i, f \rangle.$$

A cette base d'ondelettes anisotropes sur \mathbf{R} on associe une base orthogonale de bandelettes sur \mathbf{B} , image par $\mathbf{W}^* = \mathbf{W}^{-1}$ de la base précédente :

$$\left\{ \begin{array}{ll} \psi_{l,m_1}(x_1)\psi_{j,m_2}(x_2 - g(x_1)) & , \quad \psi_{j,m_1}(x_1)\phi_{j,m_2}(x_2 - g(x_1)) \\ & , \quad \psi_{j,m_1}(x_1)\psi_{j,m_2}(x_2 - g(x_1)) \end{array} \right\}_{(l>j,m_1,m_2)\in I_{\mathbf{B}}} \quad (\text{II.21})$$

Ces bases de bandelettes tirent leurs capacités d'approximations sur la bande \mathbf{B} de celles des ondelettes anisotropes sur \mathbf{R} .

Dans la réalité la géométrie de la bande est polynomiale par morceaux alors que la géométrie réelle de l'image est régulière ce qui fait que la discontinuité warpée n'est pas strictement horizontale. Le Pennec et Mallat ont cependant montré [PM05, Pen02] que si la géométrie de la bande est suffisamment proche de la géométrie réelle alors l'erreur d'approximation décroît de manière optimale en $M^{-\alpha}$,

$$\|f - f_M\| \leq CM^{-\alpha}.$$

Pour approximer une fonction \mathbf{C}^α géométriquement régulière, les auteurs recouvrent le carré unité de bandes bien adaptées localement à l'image. Ces bandes se superposent et ainsi l'union des bases orthogonales locales n'est pas une base orthogonale globale mais un frame. Nous proposons dans le paragraphe suivant une autre

construction qui permet d'élaborer des bases orthogonales sur des rectangles en utilisant la construction précédente. L'avantage des rectangles est qu'ils peuvent facilement constituer une partition du carré $[0, 1]^2$. On peut ainsi construire des bases orthogonales qui s'unissent en une base orthogonale globale.

II.3.2 Des bandelettes sur un rectangle discret

L'idée que nous proposons est simple. Comme on sait construire une base de bandelettes orthogonale sur une bande, on divise le rectangle en deux parties : une bande et le complémentaire de la bande. Il reste ensuite à trouver une base orthogonale du complémentaire qui assure une bonne décroissance de l'erreur d'approximation en utilisant la régularité de la fonction en dehors de la bande. Les contours d'une telle bande sont polynomiaux et donc les contours du complémentaire le sont aussi. Déterminer une base orthogonale qui a de bonnes propriétés d'approximation sur un tel domaine n'est pas simple, c'est pourquoi nous proposons de raisonner en discret et de construire des bases orthogonales discrètes.

Comme dans le problème d'estimation nous commençons par projeter la fonction f sur un espace vectoriel de dimension finie \mathcal{L} . La construction d'une base orthogonale sur \mathcal{L} peut être vue comme un changement de base orthogonale par rapport à une base orthogonale naturelle de \mathcal{L} . Nous proposons pour construire nos bases de bandelettes de projeter nos données sur un espace de fonctions d'échelle V_{j_0} engendré par des fonctions Φ_{j_0, k_1, k_2} et de construire une autre base orthogonale de V_{j_0} adaptée aux fonctions C^α géométriquement régulières. Dans le paragraphe suivant nous détaillons la construction des bases de bandelettes sur l'équivalent de la bande, c'est à dire un rectangle discret dans notre cas. Nous appelons rectangle discret l'espace vectoriel engendré par des fonctions d'échelles formant un rectangle :

$$\mathcal{R} = \text{vect}\{\phi_{j_0, k_1, k_2}, k_1 \in [a_1, b_1], k_2 \in [a_2, b_2]\}$$

Nous verrons plus tard comment on construit une base orthogonale de bandelettes globale sur le carré $[0, 1]^2$ à partir de bases sur des rectangles discrets.

Les bases que nous construisons sur un rectangle discret doivent permettre de bien représenter des petites sous-images d'une fonction $f \in C^\alpha$ géométriquement régulière. La brique élémentaire des fonctions de cette classe est le modèle d'horizon. Si une base locale parvient à représenter de façon quasi optimale une fonction f de la classe Θ sur les modèles d'horizon alors elle sera à même de le faire pour la fonction f globalement. Nous définissons ainsi un équivalent discret du modèle d'horizon avec des contraintes qui permettent la construction d'une base ayant de bonnes propriétés d'approximation non linéaire

Définition II.2

Soit \mathcal{R} un rectangle discret, on dira que \mathcal{R} est un modèle d'horizon horizontal si

1. La fonction f à support dans \mathcal{R} est \mathbf{C}^α géométriquement régulière.
2. Si une seule courbe \mathcal{C} de singularité de f intersecte le support des fonctions qui engendrent \mathcal{R} .
3. Si cette courbe \mathcal{C} fait un angle toujours inférieur à $\pi/3$ avec l'horizontal.
4. Si la courbe \mathcal{C} est éloignée de plus de $4s$ des bords horizontaux de \mathcal{R} .

Les bases de bandelettes que nous construisons sont ainsi adaptées à une certaine configuration géométrique bien particulière.

II.3.2.1 Construction des bases sur un rectangle discret

Comme nous l'avons expliqué, nous séparerons le rectangle discret \mathcal{R} en deux espaces vectoriels. L'un est la bande discrète, notée $\mathbf{B}_{\mathcal{R}}$, l'autre est l'extérieur de la bande notée $\mathbf{B}_{\mathcal{R}}^\perp$. On construit alors deux bases orthogonales associées à chacun de ces espaces.

Dans un rectangle discret une bande est définie par une géométrie. Soit g la paramétrisation d'une courbe continue, la bande associée à cette géométrie est définie par

$$\mathbf{B}_{\mathcal{R}} = \text{vect}\{\phi_{j_0, k_1, k_2}, k_1 \in [a_1, b_1[, k_2 \in \bar{g}(k_1) + [a_2 - \min_{k \in [a_1, b_1)} \bar{g}(k), b_2 - \max_{k \in [a_1, b_1)} \bar{g}(k)]\} \quad .$$

où on note $\bar{g}(k) = E(2^{-j_0} g(k \cdot 2^{j_0}))$ le déplacement vertical de la bande au niveau de l'indice k . Si $\bar{g}(k)$ est constant alors la bande représente tout le rectangle.

$\mathbf{B}_{\mathcal{R}}^\perp$ est l'espace vectoriel des fonctions d'échelle ϕ_{j_0, k_1, k_2} qui sont dans \mathcal{R} mais qui ne sont pas dans \mathbf{B} . Comme les fonctions ϕ_{j_0, k_1, k_2} sont orthogonales entre elles on a bien

$$\mathcal{R} = \mathbf{B}_{\mathcal{R}} \oplus^\perp \mathbf{B}_{\mathcal{R}}^\perp$$

On définit comme dans le cas continue un warping discret \mathbf{W}

$$\mathbf{W}\phi_{j_0, k_1, k_2} = \phi_{j_0, k_1, k_2 - g(k_1)}.$$

Il envoie la bande $\mathbf{B}_{\mathcal{R}}$ vers un rectangle discret $\mathbf{WB}_{\mathcal{R}}$:

$$\mathbf{WB}_{\mathcal{R}} = \text{vect}\{\phi_{j_0, k_1, k_2}, k_1 \in [a_1, b_1[, k_2 \in [a_2 - \min_{k \in [a_1, b_1)} \bar{g}(k), b_2 - \max_{k \in [a_1, b_1)} \bar{g}(k)]\} \quad .$$

Dans ce rectangle on définit également une base d'ondelettes anisotropes

$$\left\{ \begin{array}{l} \psi_{l,m_1}(x_1)\psi_{j,m_2}(x_2) \quad , \quad \psi_{j,m_1}(x_1)\phi_{j,m_2}(x_2) \\ \psi_{j,m_1}(x_1)\psi_{j,m_2}(x_2) \end{array} \right\}_{(l>j>j_0,m_1,m_2) \in I_{\mathbf{B}_R}} . \quad (\text{II.22})$$

par orthogonalisation des fonctions ϕ_{j_0,k_1,k_2} . Toutes les fonctions de cette base sont donc des combinaisons linéaires de Φ_{j_0,k_1,k_2} .

La base \mathcal{B}_1 de la bande \mathbf{B} que nous utilisons est l'image par \mathbf{W}^{-1} de la base précédente. Soit Ψ_i un élément de cette base d'ondelettes anisotropes telle que

$$\Psi_i = \sum_{(k_1,k_2) \in I_i} a_{k_1,k_2} \Phi_{j_0,k_1,k_2}$$

La fonction $b_i = \mathbf{W}^{-1}\Psi_i$ définie par

$$b_i = \sum_{(k_1,k_2) \in I_i} a_{k_1,k_2} \phi_{j_0,k_1,k_2-\bar{g}(k_1)}$$

est une bandelette de la base \mathcal{B}_1 . Les bandelettes de la base \mathcal{B}_1 suivent la géométrie g et nous verrons qu'elles assurent une bonne approximation non linéaire des fonctions f dont la singularité est comprise dans la bande.

Nous avons étendu la notion de bandelettes continues à celle de bandelettes discrètes en ce qui concerne la bande. Pour l'extérieur de la bande nous proposons une approche totalement différente. Quand on construira une base de bandelettes associée localement à une fonction f , les supports des fonctions Φ_{j_0,k_1,k_2} de $\mathbf{B}_{\mathcal{R}}^{\perp}$ n'intersecteront pas la singularité de f . La base que nous devons construire doit donc permettre d'approcher les fonctions uniformément régulières. La difficulté réside ici dans la "forme" de l'espace $\mathbf{B}_{\mathcal{R}}^{\perp}$ qu'on ne peut pas transformer en rectangle. Cet espace a très souvent au moins deux "composantes connexes".

Afin de bien représenter les fonctions régulières nous proposons de construire des bases d'espaces emboîtés \tilde{V}_j . Ces espaces à l'image des espaces V_j serviront d'espaces d'approximation. Nous allons construire ces espaces de manière à assurer que la projection d'une fonction régulière f sur un de ces espaces approche au mieux la projection de f sur $\mathbf{B}_{\mathcal{R}}^{\perp}$.

Soit ϕ_{j,l_1,l_2} une fonction d'échelle d'un espace V_j de \mathcal{R} avec $j \geq j_0$. On peut décomposer cette fonction dans la base des Φ_{j_0,k_1,k_2} :

$$\phi_{j,l_1,l_2} = \sum_{k_1,k_2} \langle \phi_{j,l_1,l_2}, \Phi_{j_0,k_1,k_2} \rangle \Phi_{j_0,k_1,k_2}.$$

On note $\tilde{\phi}_{j,l_1,l_2}$ la restriction de ϕ_{j,l_1,l_2} à $\mathbf{B}_{\mathcal{R}}^\perp$, c'est-à-dire

$$\tilde{\phi}_{j,l_1,l_2} = \sum_{(k_1,k_2), \Phi_{j_0,k_1,k_2} \in \mathbf{B}_{\mathcal{R}}^\perp} \langle \phi_{j,l_1,l_2}, \Phi_{j_0,k_1,k_2} \rangle \Phi_{j_0,k_1,k_2}.$$

On définit l'espace $\tilde{V}_j = \text{vect}\{(\tilde{\phi}_{j,l_1,l_2})_{l_1,l_2}\}$. Ainsi on a $\tilde{V}_{j_0} = \mathbf{B}_{\mathcal{R}}^\perp$. On vérifie que ces espaces sont emboîtés. En effet comme \tilde{V}_{j_0} et $\mathbf{B}_{\mathcal{R}}$ sont orthogonaux, la restriction à \tilde{V}_{j_0} est en fait une projection orthogonale sur \tilde{V}_{j_0} . Comme la projection orthogonale conserve l'inclusion des espaces on a bien une famille d'espaces $(\tilde{V}_j)_{j \geq j_0}$ emboîtés. Les fonctions $\tilde{\phi}_{j,l_1,l_2}$ ne forment pas une base orthogonale de \tilde{V}_j en général. Il se peut même que certaines de ces fonctions soient nulles. Nous proposons donc de construire une base orthogonale de \tilde{V}_{j_0} dont on peut extraire des bases orthogonales des espaces intermédiaires \tilde{V}_j . On note \tilde{W}_j le complémentaire orthogonal de \tilde{V}_j dans \tilde{V}_{j-1} . On construit d'abord une base orthogonale de \tilde{V}_0 en orthogonalisant par exemple par le procédé de Gram-Schmidt la famille de fonctions $(\phi_{0,l_1,l_2})_{l_1,l_2}$. Ensuite pour j allant de -1 à $j_0 + 1$ on construit en utilisant le même procédé des bases orthogonales des espace \tilde{W}_j . Cette méthode permet d'obtenir des bases orthogonales de tous les espaces \tilde{V}_j . L'ensemble des fonctions de bases de \tilde{V}_{j_0} ainsi obtenues forment la base orthogonale \mathcal{B}_2 . Nous montrons plus loin que cette base a de bonnes propriétés d'approximation linéaire pour les fonctions qui sont régulières sur le complémentaire de la bande.

Il est possible de construire des bases de bandelettes avec n'importe quelle géométrie continue mais en pratique nous n'utiliserons qu'un nombre limité de géométries. En effet, pour contrôler le nombre total de vecteurs de base dans l'ensemble des bases de bandelettes, il est nécessaire de ne considérer qu'un nombre limité de géométries par rectangle discret. Nous ne considérons donc que les géométries polynomiales de degré α quantifiées. Le pas de quantification des coefficients des polynômes est lié à l'erreur tolérée sur l'approximation. Si on veut s'assurer d'être proche de la géométrie réelle sur chaque rectangle discret en utilisant une géométrie quantifiée, il est nécessaire de ne construire des bases de bandelettes que sur des rectangles dont la longueur est contrôlée. Nous verrons dans les résultats d'approximation comment on gère cette contrainte de taille sur les modèles d'horizon.

II.3.2.2 Approximation sur un rectangle discret

Nous montrons ici que les bases de bandelettes permettent de représenter de manière optimale une fonction sur un modèle d'horizon discret. Nous expliquerons ensuite comment étendre ce résultat au carré $[0, 1]^2$ et aux images \mathbf{C}^α géométriquement

régulières.

Nous avons le résultat d'approximation non linéaire suivant :

Lemme II.7

Soit \mathcal{R} rectangle modèle d'horizon de largeur l et de hauteur h . Il existe un réel C_H dépendant de f , δ dépendant de la position de courbe \mathcal{C} dans \mathcal{R} et une base de bandelettes \mathcal{B} tels que pour tout T vérifiant $2^{j_0/2} \leq T \leq s^{\frac{\alpha+1}{2\alpha}}$

$$\mathcal{E}(f, T, \mathcal{B}) = \|\mathbf{P}_{V_{j_0}}(f) - f_T\|^2 + MT^2 \leq \frac{C_H}{\delta^2} T^{\frac{2\alpha}{\alpha+1}} |\log_2 T| \max(l, s^{\frac{1}{\alpha}}). \quad (\text{II.23})$$

où f_T est une approximation de f avec les coefficients de f dans la base \mathcal{B} dont les valeurs absolues sont supérieures à T et où M est le nombre de ces coefficients.

La condition $T \leq s^{\frac{\alpha+1}{2\alpha}}$ n'est pas contraignante. En effet si le seuil T est trop grand on peut toujours relisser f par un noyau de taille $s' = T^{\frac{2\alpha}{\alpha+1}}$. Le Pennec et Mallat ont montré dans [PM05] Appendice A.5, qu'un tel lissage introduisait une erreur sur f inférieure à celle de l'approximation en bandelettes. On peut ainsi travailler sur $f_1 = h_{s'} \star f$ et conclure sur la fonction f en ajoutant à la fin l'erreur commise en remplaçant f par f_1 .

L'entropie $\mathcal{E}(f, T, \mathcal{B})$ qui correspond à la quantité à minimiser dans le cadre des estimateurs à pénalité que nous étudions, permet de mesurer la capacité d'approximation non linéaire d'une base. Elle est directement liée à la vitesse de décroissance de l'erreur d'approximation non linéaire. On a en effet au passage le corollaire suivant

Corollaire II.8

Il existe C' tel que

$$\|\mathbf{P}_{V_{j_0}}(f) - f_T\|^2 \leq C' M^{-\alpha} |\log M|^{\alpha+1}. \quad (\text{II.24})$$

L'entropie a également l'avantage d'être additive. En effet si une base orthogonale est formée de l'union de plusieurs bases orthogonales, l'entropie de la base est égale à la somme des entropies. Cette propriété est au cœur des démonstrations qui vont suivre. L'entropie peut également être vue comme le minimum d'une fonctionnelle pénalisée associée à f , \mathcal{B} et T

$$\mathcal{E}(f, T, \mathcal{B}) = \min_{g \in \mathbf{E}} \left(\sum_{b_i \in \mathcal{B}} |\langle f - g, b_i \rangle|^2 + M(g)T^2 \right). \quad (\text{II.25})$$

Où $M(g)$ désigne le nombre de coefficients non nuls de g dans la base orthogonale \mathcal{B} de l'espace vectoriel \mathbf{E} . Cette propriété est très utile pour borner l'entropie.

Preuve - du lemme II.7 -

Pour construire la base \mathcal{B} du lemme nous allons découper le rectangle \mathcal{R} modèle d'horizon en tranches, puis en morceaux. Nous construirons ensuite des bases de bandelettes ou d'ondelettes sur les morceaux dont nous bornerons les entropies.

Comme nous n'autorisons que les géométries polynomiales quantifiées, il est impossible de garantir qu'il existe une telle géométrie qui reste proche de la géométrie réelle. Or les bases de bandelettes ont été créées pour bien représenter les fonctions dont la discontinuité reste dans la bande sur toute la longueur du rectangle discret. L'idée qui permet de se ramener à des rectangles de bonne taille est de découper \mathcal{R} en tranche de longueur $s^{1/\alpha}$. En effet Le Pennec et Mallat ont montré que si la géométrie c réelle de la courbe \mathcal{C} et la géométrie g pratiquement utilisée pour construire la base de bandelettes ne divergeaient pas de plus de $C_1 s$ en norme infinie : $\|c - g\|_\infty \leq C_1 s$ alors la base de bandelettes sur la bande avait de bonnes propriétés d'approximation. Où C_1 est un réel contrôlé, voir [PM05] partie 3.2, théorème 1. Plus précisément c'est la direction de g qui compte si on a une géométrie $g_1 = g + z$ où g est proche de c et où z est un réel quelconque g_1 conviendra également. On veut que les lignes de flot induite par g restent proches de celle induites par c .

Le polynôme de degré α qui approche le mieux la géométrie réelle diverge d'au plus l^α de celle ci. Comme les coefficients sont quantifiés au pas $2^{j_0} \leq s^{(\alpha+1)/\alpha}$, la différence entre le meilleur polynôme quantifié et le meilleur polynôme est bien contrôlée. On en déduit que si $l \leq s^{1/\alpha}$ alors l'approximation sur la bande sera bonne.

On ne découpe cependant pas directement \mathcal{R} en tranches de longueur $s^{1/\alpha}$ car pour appliquer les résultats d'approximation sur une bande il est nécessaire de pouvoir borner la hauteur de la bande en fonction de sa longueur. Cette condition permet en fait de ne pas surdécouper inutilement des parties régulières loin de la singularité. Nous proposons donc un découpage en trois temps. D'abord on découpe verticalement \mathcal{R} en tranches larges de longueur $s^{1/(2\alpha)}$. On redécoupe ensuite chacune des tranches autour de la discontinuité pour construire de petits modèles d'horizon dont les deux dimensions sont de l'ordre de $s^{1/(2\alpha)}$. On peut même s'arranger pour que la courbe soit bien centrée dans ces rectangles. Maintenant que la hauteur de ces rectangles est bornée par $s^{1/(2\alpha)}$ on peut diviser en tranche de longueur $s^{1/\alpha}$. Ainsi on ne surdécoupe pas les zones régulières et on a bien des petits modèles d'horizon de longueur souhaitée.

On démontre d'abord le lemme suivant sur chacun des petits modèles d'horizon :

Lemme II.9

Soit \mathcal{R} un modèle d'horizon, dont la longueur l est bornée par $s^{\frac{1}{\alpha}}$ et dont la largeur h est bornée par $s^{\frac{1}{2\alpha}}$ et telle que $l \leq C_1 h$. On note d la distance minimale entre la courbe \mathcal{C} et les bords horizontaux de \mathcal{R} et on définit $\delta = \frac{d}{h}$. Il existe C et une base de bandelettes \mathcal{B} tels que pour tout $2^{j_0/2} \leq T \leq s^{\frac{\alpha+1}{2\alpha}}$

$$\mathcal{E}(f, T, \mathcal{B}) \leq \frac{C}{\delta^2} T^{\frac{2\alpha}{\alpha+1}} s^{\frac{1}{\alpha}} |\log_2 T|. \quad (\text{II.26})$$

Preuve - II.9 -

Nous avons vu que les bases de bandelettes sur les modèles d'horizon sont constituées de deux bases, \mathcal{B}_1 sur une bande discrète et \mathcal{B}_2 sur le complémentaire orthogonal. Nous proposons une preuve complète des capacités d'approximation d'une base de bandelettes sur le complémentaire de la bande, puis un résumé de la preuve pour la base \mathcal{B}_1 sur la bande avec les arguments principaux. En effet, la preuve des capacités d'approximation non linéaire de la base \mathcal{B}_1 est faite intégralement dans [PM05], dans la partie 6 et particulièrement le lemme 6.1. De plus cette preuve est très technique et une partie de celle ci se retrouve dans la démonstration des capacités d'approximation de \mathcal{B}_2 . Nous bornons donc deux entropies associées à \mathcal{B}_1 et \mathcal{B}_2 et nous sommes ensuite les bornes pour obtenir une borne sur l'entropie associée à $\mathcal{B} = \mathcal{B}_1 \cup \mathcal{B}_2$.

Soit c une paramétrisation de la courbe \mathcal{C} qui traverse le modèle d'horizon \mathcal{R} . On considère la géométrie g polynomiale de degré α dont les coefficients sont quantifiés avec un pas de 2^{j_0} qui approche le mieux c en norme L_∞ . Comme $l \leq s^{1/\alpha}$, on a $\|g - c\|_\infty \leq s$.

On construit la base de bandelettes discrète associée à la géométrie g . Soit \mathcal{B}_2 la base de bandelettes associée à l'extérieur de la bande. On a le lemme suivant

Lemme II.10

$$\mathcal{E}(f, T, \mathcal{B}_2) \leq \frac{C}{\delta^2} T^2 \left(\max(l T^{-\frac{1}{\alpha+1}}, 1) \times \max(h T^{-\frac{1}{\alpha+1}}, 1) \right). \quad (\text{II.27})$$

Preuve - II.10 -

Pour montrer ce lemme nous allons construire une fonction g_1 telle que

$$\sum_{(k_1, k_2) \in \tilde{\Omega}_0} \langle \phi_{j_0, k_1, k_2}, f - g_1 \rangle^2 + M(g_1) T^2 \leq \frac{C}{\delta^2} T^2 \left(\max(l T^{-\frac{1}{\alpha+1}}, 1) \times \max(h T^{-\frac{1}{\alpha+1}}, 1) \right). \quad (\text{II.28})$$

et conclure par la définition de l'entropie.

Comme le rectangle que nous utilisons est un modèle d'horizon, la singularité de f est

éloignée de plus de $4s$ des bords supérieur et inférieur de \mathcal{R} , la bande contient donc entièrement la singularité lissée qui est d'épaisseur $2s$. Sur le support des fonctions Φ_{j_0, k_1, k_2} qui engendrent \tilde{V}_{j_0} la fonction f est donc régulière. Dans ce cas classique de régularité uniforme on sait que l'échelle de coupure en dessous de laquelle tous les coefficients sont inférieurs à T est l'échelle $T^{1/(\alpha+1)}$. Nous ajoutons une condition technique sur cette échelle afin de pouvoir exploiter la régularité de f sur un espace un peu plus grand que V_{j_0} .

On note $2^{j_c} = \min(T^{\frac{1}{\alpha+1}}, \frac{d}{2K})$ et $g_1 = P_{\tilde{V}_{j_c}}(f)$. On veut borner $M(g_1)$

$$M(g_1) \leq K^2 \max(l 2^{-j_c}, 1) \max(h 2^{-j_c}, 1) \quad (\text{II.29})$$

Si $2^{j_c} = T^{\frac{1}{\alpha+1}}$ nous avons

$$M(g_1) \leq K^2 \max(l T^{-\frac{1}{\alpha+1}}, 1) \max(h T^{-\frac{1}{\alpha+1}}, 1) \quad (\text{II.30})$$

Si $2^{j_c} = \frac{d}{2K}$ nous avons

$$M(g_1) \leq K^2 \max\left(\frac{2KC_1}{\delta}, 1\right) \max\left(\frac{2K}{\delta}, 1\right) \leq \frac{4K^4}{\delta^2} \max(l T^{-\frac{1}{\alpha+1}}, 1) \max(h T^{-\frac{1}{\alpha+1}}, 1) \quad (\text{II.31})$$

Ainsi dans les deux cas nous obtenons la borne

$$M(g_1) T^2 \leq \frac{4K^4 C_1}{\delta^2} \max(l T^{-\frac{1}{\alpha+1}}, 1) \max(h T^{-\frac{1}{\alpha+1}}, 1) T^2 \quad (\text{II.32})$$

Nous introduisons maintenant une nouvelle famille d'espaces pour borner les coefficients d'ondelettes

$$E_j = \tilde{V}_{j_0} + \text{Vec}(\psi_{j', l_1, l_2}, j_0 < j' \leq j \text{ such that : } \text{Support}(\psi_{j', l_1, l_2}) \cap \mathcal{C}_l = \emptyset)$$

où \mathcal{C}_l est la singularité lissée.

$$\sum_{(k_1, k_2) \in \tilde{\Omega}_0} \langle \phi_{j_0, k_1, k_2}, f - g \rangle^2 = \|P_{\tilde{V}_{j_0}}(f) - P_{\tilde{V}_{j_c}}(f)\|^2 \quad (\text{II.33})$$

Comme $\tilde{V}_{j_c} \subset \tilde{V}_{j_0}$ nous avons

$$= \|P_{\tilde{V}_{j_0}}(f) - P_{\tilde{V}_{j_c}}(P_{\tilde{V}_{j_0}}(f))\|^2 \quad (\text{II.34})$$

$$= \min_{F \in \tilde{V}_{j_c}} \|P_{\tilde{V}_{j_0}}(f) - F\|^2 \quad (\text{II.35})$$

D'après la définition de \tilde{V}_j , $P_{\tilde{V}_{j_0}}(P_{V_j}(f)) \in \tilde{V}_j$

$$\leq \|P_{\tilde{V}_{j_0}}(f) - P_{\tilde{V}_{j_0}}(P_{V_{j_c}}(f))\|^2 \quad (\text{II.36})$$

$$\leq \|P_{\tilde{V}_{j_0}}(f - P_{V_{j_c}}(f))\|^2 \quad (\text{II.37})$$

Comme $\tilde{V}_{j_0} \subset E_{j_c}$

$$\leq \|P_{E_{j_c}}(f - P_{V_{j_c}}(f))\|^2 \quad (\text{II.38})$$

$$\leq \left\| \sum_{-\infty < j' \leq j_c} \sum_{l_1, l_2} \langle f, \psi_{j', l_1, l_2} \rangle P_{E_{j_c}}(\psi_{j', l_1, l_2}) \right\|^2 \quad (\text{II.39})$$

$$\leq \left\| \sum_{j_0 < j' \leq j_c} \sum_{(l_1, l_2) \in \gamma_{j'}} \langle f, \psi_{j', l_1, l_2} \rangle \psi_{j', l_1, l_2} \right\|^2 \quad (\text{II.40})$$

Où $\gamma_{j'}$ est l'ensemble des indices (l_1, l_2) tels que les ondelettes ψ_{j', l_1, l_2} n'intersectent pas \mathcal{C}_l . Comme $K 2^{j_c} \leq \frac{d}{2}$, si ψ_{j_c, k_1, k_2} intersecte \mathcal{C}_l on a $P_{\tilde{V}_{j_0}}(\psi_{j', k_1, k_2}) = 0$ et par orthogonalité des ondelettes on obtient $P_{E_{j_c}}(\psi_{j', l_1, l_2}) = 0$ ou $P_{E_{j_c}}(\psi_{j', l_1, l_2}) = \psi_{j', k_1, k_2}$

$$\leq \sum_{j_0 < j' < j_c} \sum_{(l_1, l_2) \in \gamma_{j'}} \langle f, \psi_{j', l_1, l_2} \rangle^2 \quad (\text{II.41})$$

Comme ces ondelettes sont toutes orthogonales entre elles

$$\leq \sum_{j_0 < j' < j_c} \sum_{(l_1, l_2) \in \gamma_{j'}} C 2^{(2\alpha+2)j'} \quad (\text{II.42})$$

en utilisant la régularité de f sur le support de chaque ondelette.

$$\leq C \sum_{j_0 < j' < j_c} 2^{(2\alpha+2)j'} K^2 \times 2^{-j'} l 2^{-j'} h \quad (\text{II.43})$$

parce qu'il y a au plus $K^2 l 2^{-j'} h 2^{-j'}$ ondelettes à l'échelle j'

$$\leq C K^2 2^{2\alpha j_c} l h \quad (\text{II.44})$$

d'après la définition de j_c on déduit que

$$\leq C K^2 T^2 l T^{-\frac{1}{\alpha+1}} h T^{-\frac{1}{\alpha+1}} \quad (\text{II.45})$$

$$\leq C T^2 K^2 \max(l T^{-\frac{1}{\alpha+1}}, 1) \max(h T^{-\frac{1}{\alpha+1}}, 1) \quad (\text{II.46})$$

4. En utilisant la régularité de f loin de la courbe et les propriétés des ondelettes nous montrons que

$$\begin{aligned} \mathcal{E}(f, \mathcal{B}'_2, T) &= \sum_{b'_{j,k_1,k_2} \in \mathcal{B}'_2, j \geq j_0} \min(|\langle f, b'_{j,k_1,k_2} \rangle|^2, T^2) \\ &\leq CK^2 T^2 (\max(1, lT^{-\frac{1}{\alpha+1}}) \times \max(1, hT^{-\frac{1}{\alpha+1}})) \end{aligned} \quad (\text{II.49})$$

En utilisant le fait que la fonction f est régulière le long de la courbe et que le nombre de bandelettes qui intersectent la courbe lissée est faible on obtient :

$$\begin{aligned} \mathcal{E}(f, \mathcal{B}'_1, T) &= \sum_{b'_{j,k_1,k_2} \in \mathcal{B}'_1, j \geq j_0} \min(|\langle f, b'_{j,k_1,k_2} \rangle|^2, T^2) \\ &\leq CK^2 T^2 \max(lT^{-\frac{2}{\alpha+1}}, |\log_2 T|). \end{aligned} \quad (\text{II.50})$$

L'intérêt d'utiliser des fonctions allongées le long de la discontinuité est d'assurer qu'un petit nombre de fonctions de base intersectent la discontinuité.

On déduit ensuite que

$$\begin{aligned} \mathcal{E}(f, T, \mathcal{B}') &\leq CK^2 T^2 \left(\max(lT^{-\frac{2}{\alpha+1}}, |\log_2(T)|) \right. \\ &\quad \left. + \max(1, lT^{-\frac{1}{\alpha+1}}) \times \max(1, hT^{-\frac{1}{\alpha+1}}) \right). \end{aligned} \quad (\text{II.51})$$

5. On conclut alors

$$\begin{aligned} \mathcal{E}(f, \mathcal{B}_1, T) &\leq 2(\mathcal{E}(f, \mathcal{B}', T) + \sum_{j \geq j_0} \sum_{k_1, k_2} |\langle f, b'_{j,k_1,k_2} \rangle - \langle f, b_{j,k_1,k_2} \rangle|^2) \\ &\leq 2(\mathcal{E}(f, \mathcal{B}', T) + C2^{j_0}) \\ &\leq 2(\mathcal{E}(f, \mathcal{B}', T) + CT^2). \end{aligned}$$

En sommant (II.47) et (II.27) on obtient que la base de bandelettes $\mathcal{B} = \mathcal{B}_1 \cup \mathcal{B}_2$ vérifie sur un modèle d'horizon

$$\begin{aligned} \mathcal{E}(f, T, \mathcal{B}) &\leq \frac{C}{\delta^2} T^2 \left(\max(lT^{-\frac{2}{\alpha+1}}, |\log_2(T)|) \right. \\ &\quad \left. + \max(1, lT^{-\frac{1}{\alpha+1}}) \times \max(1, hT^{-\frac{1}{\alpha+1}}) \right). \end{aligned}$$

Nous montrons maintenant que la base \mathcal{B} vérifie l'inégalité (II.26).

Comme on a supposé que $l \leq s^{\frac{1}{\alpha}}$ et $h \leq s^{\frac{1}{2\alpha}}$, on a

$$\mathcal{E}(f, T, \mathcal{B}) \leq \frac{C}{\delta^2} T^2 \left(\max(s^{\frac{1}{\alpha}} T^{-\frac{2}{\alpha+1}}, |\log_2(T)|) + \max(1, s^{\frac{1}{\alpha}} T^{-\frac{1}{\alpha+1}}) \times \max(1, s^{\frac{1}{2\alpha}} T^{-\frac{1}{\alpha+1}}) \right). \quad (\text{II.52})$$

Comme $T^{-\frac{2\alpha}{\alpha+1}} \leq s$, il existe trois possibilités

$$1. s^{\frac{1}{\alpha}} \in [T^{\frac{2}{\alpha+1}}, T^{\frac{2}{\alpha+1}} |\log_2 T|]$$

$$\mathcal{E}(f, T, \mathcal{B}) \leq \frac{C}{\delta^2} T^2 \left(s^{\frac{1}{2\alpha}} T^{-\frac{1}{\alpha+1}} + |\log_2 T| \right) \quad (\text{II.53})$$

$$\leq \frac{C}{\delta^2} T^{\frac{2\alpha}{\alpha+1}} \left(s^{\frac{1}{2\alpha}} T^{\frac{1}{\alpha+1}} + T^{\frac{2}{\alpha+1}} |\log_2 T| \right) \quad (\text{II.54})$$

$$\leq \frac{C}{\delta^2} T^{\frac{2\alpha}{\alpha+1}} (s^{\frac{1}{\alpha}} + s^{\frac{1}{\alpha}} |\log_2 T|) \quad (\text{II.55})$$

$$\leq \frac{2C}{\delta^2} T^{\frac{2\alpha}{\alpha+1}} s^{\frac{1}{\alpha}} |\log_2 T|. \quad (\text{II.56})$$

$$2. s^{\frac{1}{\alpha}} \in]T^{\frac{2}{\alpha+1}} |\log_2 T|, T^{\frac{1}{\alpha+1}}]$$

$$\mathcal{E}(f, T, \mathcal{B}) \leq \frac{C}{\delta^2} T^2 \left(s^{\frac{1}{2\alpha}} T^{-\frac{1}{\alpha+1}} + s^{\frac{1}{\alpha}} T^{-\frac{2}{\alpha+1}} \right) \quad (\text{II.57})$$

$$\leq \frac{C}{\delta^2} T^{\frac{2\alpha}{\alpha+1}} \left(s^{\frac{1}{2\alpha}} T^{\frac{1}{\alpha+1}} + s^{\frac{1}{\alpha}} \right) \quad (\text{II.58})$$

$$\leq \frac{2C}{\delta^2} T^{\frac{2\alpha}{\alpha+1}} s^{\frac{1}{\alpha}} \quad (\text{II.59})$$

$$(\text{II.60})$$

$$3. s^{\frac{1}{\alpha}} > T^{\frac{1}{\alpha+1}}$$

$$\mathcal{E}(f, T, \mathcal{B}) \leq \frac{C}{\delta^2} T^2 \left(s^{\frac{3}{2\alpha}} T^{-\frac{2}{\alpha+1}} + s^{\frac{1}{\alpha}} T^{-\frac{2}{\alpha+1}} \right) \quad (\text{II.61})$$

$$\leq \frac{2C}{\delta^2} T^{\frac{2\alpha}{\alpha+1}} s^{\frac{1}{\alpha}} \quad (\text{II.62})$$

$$(\text{II.63})$$

Ce qui conclut la preuve du lemme II.9. \blacksquare

Nous utilisons maintenant cette borne obtenue sur l'entropie d'une base de bandelettes d'un petit modèle d'horizon pour borner l'entropie sur un modèle d'horizon \mathcal{R} quelconque.

On va supposer, sans perte de généralité, que $l \geq s^{\frac{1}{2\alpha}}$ et $h \geq s^{\frac{1}{2\alpha}}$ pour que le découpage en tranches en deux étapes soit justifié. Si $s^{\frac{1}{\alpha}} \leq l < s^{\frac{1}{2\alpha}}$ on ne fait pas le premier découpage en tranches et si $l < s^{\frac{1}{\alpha}}$ on utilise le lemme précédent. Comme la borne finale ne dépend pas de h , le cas $h < s^{\frac{1}{2\alpha}}$ se traite en bornant h par $h' > s^{\frac{1}{2\alpha}}$. Comme la courbe \mathcal{C} est plutôt horizontale, une division de \mathcal{R} en tranches verticales de longueur $s^{\frac{1}{2\alpha}}$ produit moins de $2l s^{-\frac{1}{2\alpha}}$ rectangles \mathcal{R}_i qui sont également des modèles d'horizon. Le rapport $\delta_i = \frac{d_i}{h_i}$ qui mesure la position de la courbe dans chacun

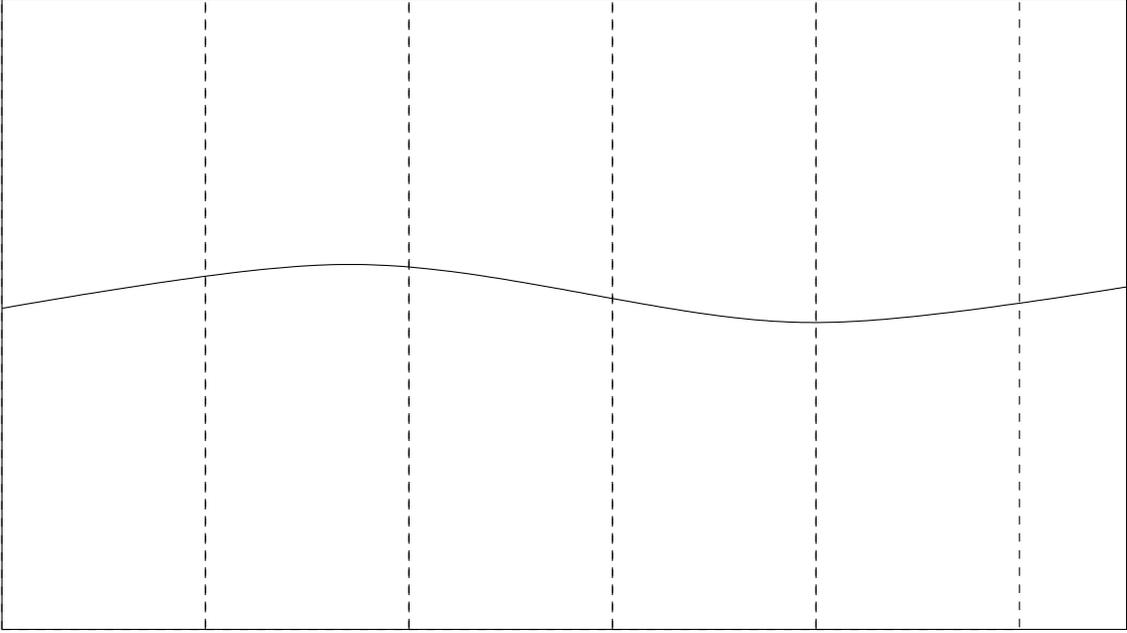


FIG. II.4 – Premier découpage d’un modèle d’horizon en tranches verticales de longueur $s^{1/(2\alpha)}$.

des rectangles est égale au rapport $\delta = \frac{d}{h}$ du modèle d’horizon \mathcal{R} pour chacun des \mathcal{R}_i . Notons \mathcal{R}_1 un de ces rectangles. Comme la courbe \mathcal{C} est plutôt horizontale (l’angle entre \mathcal{C} et la direction horizontale est inférieur à $\frac{\pi}{3}$), on peut diviser horizontalement \mathcal{R}_1 en au plus trois rectangles de telle sorte que

- un d’entre eux soit un modèle d’horizon (noté \mathcal{R}_2) et que les autres soient des rectangles réguliers (où la fonction f est uniformément régulière).
- la hauteur du modèle d’horizon soit inférieure à $5s^{\frac{1}{2\alpha}}$.
- le rapport δ associé au modèle d’horizon soit supérieur à celui de \mathcal{R} .

En effet si la distance d_1 entre \mathcal{C} le bord inférieur (par exemple) de \mathcal{R}_1 est inférieure à $s^{\frac{1}{2\alpha}}$ on divise \mathcal{R} horizontalement en deux rectangles à d_1 au dessus de \mathcal{C}_l . Par construction on a $d_2 = d_1$ et $h_2 \leq h_1$ et donc $\delta_2 \geq \delta_1 = \delta$. De plus on a bien $h \leq 2l + 2d_2 + 2s \leq 4s^{\frac{1}{2\alpha}} + 2s \leq 5s^{\frac{1}{2\alpha}}$ si s est suffisamment petit. Si $d_1 > s^{\frac{1}{2\alpha}}$ alors on divise \mathcal{R} en trois rectangles à une distance $s^{\frac{1}{2\alpha}}$ au dessus et au dessous de \mathcal{C}_l . Dans ce cas on a $h \leq 2d_2 + 2l + 2s \leq 5s^{\frac{1}{2\alpha}}$ et donc on a $\delta_2 \leq 1/5$.

Dans les deux cas les trois conditions précédentes sont remplies. Après avoir divisé tous les rectangles modèles d’horizon type \mathcal{R}_1 en deux ou trois, on divise les rectangles modèles d’horizon \mathcal{R}_2 en tranches de longueur $s^{\frac{1}{\alpha}}$. Pour chaque rectangle \mathcal{R}_2 on forme ainsi moins de $2s^{-\frac{1}{2\alpha}}$ petits modèles d’horizon. Ces rectangles vérifient

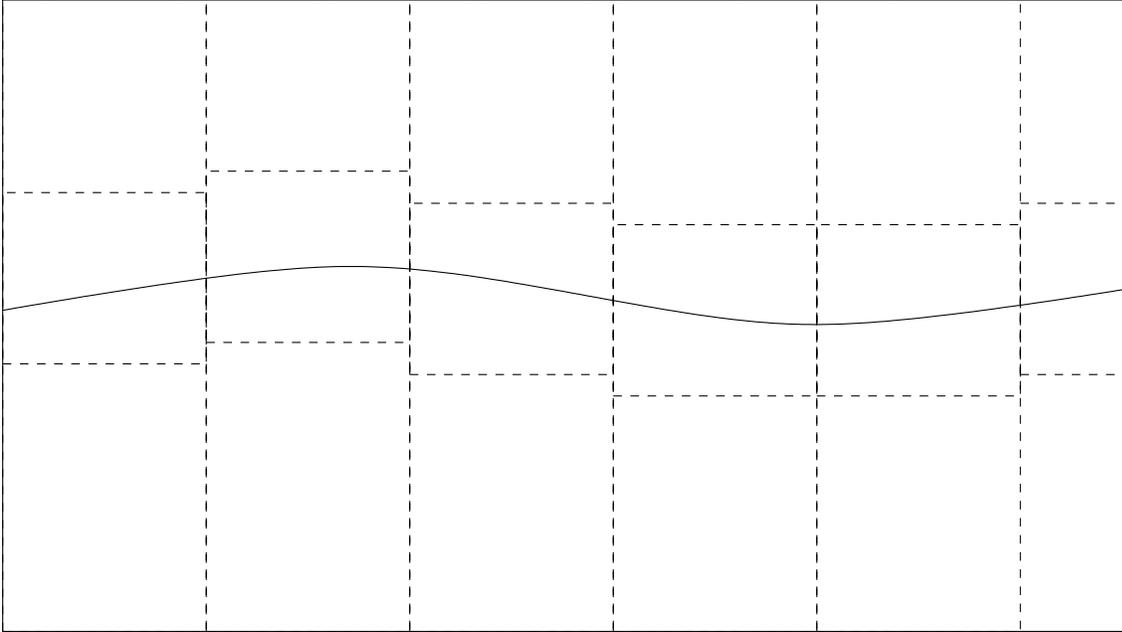


FIG. II.5 – Découpage obtenu après que chaque rectangle \mathcal{R}_1 ait été divisé en 3 pour obtenir des modèles d'horizons dont la hauteur est comparable à la longueur.

toutes les hypothèses du lemme II.9 et peut donc leur appliquer le lemme pour borner l'entropie des bases de bandelettes sur chacun d'eux. Pour borner l'entropie globale de la base \mathcal{B} sur \mathcal{R} il reste à borner l'entropie sur les rectangles réguliers. Nous montrons dans la suite en utilisant les outils que nous avons utilisés à chaque fois pour les zones régulières, qu'une base \mathcal{B}' d'ondelettes simple vérifie sur un rectangle régulier de taille $l \times h$

$$\mathcal{E}(f, \mathcal{B}', T) \leqslant C T^2 \max(l T^{-\frac{1}{\alpha+1}}, 1) \times \max(h T^{-\frac{1}{\alpha+1}}, 1). \quad (\text{II.64})$$

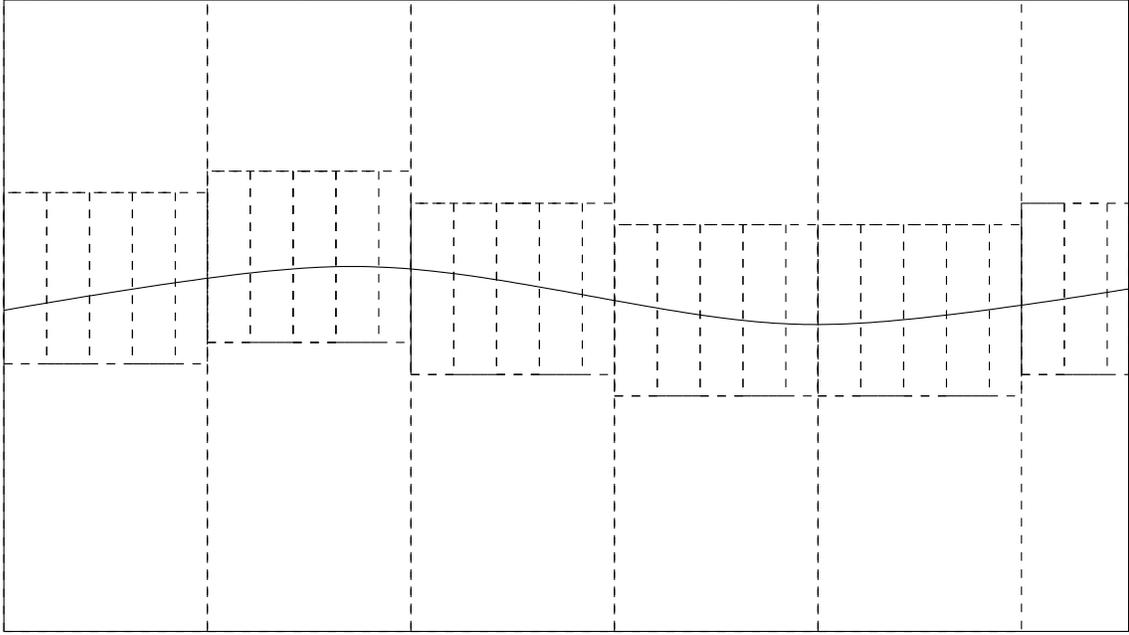


FIG. II.6 – Dernier découpage des modèles d’horizon en tranches verticales de longueur $s^{1/(\alpha)}$.

On conclut alors en sommant les entropies des différentes bases sur les différents rectangles obtenus par la partition de \mathcal{R} décrite ci dessus :

$$\begin{aligned}
\mathcal{E}(f, \mathcal{B}, T) &\leq \sum_{\mathcal{R}_i \text{ modèle d'horizon}} \mathcal{E}(f, \mathcal{B}_i, T) + \sum_{\mathcal{R}_j \text{ rectangles réguliers}} \mathcal{E}(f, \mathcal{B}_j, T) \\
&\leq 2 s^{-\frac{1}{2\alpha}} 2l s^{-\frac{1}{2\alpha}} \times \max_i (\mathcal{E}(f, \mathcal{B}_i, T)) + 4l s^{-\frac{1}{2\alpha}} \times \max_j (\mathcal{E}(f, \mathcal{B}_j, T)) \\
&\leq 2 s^{-\frac{1}{2\alpha}} 2l s^{-\frac{1}{2\alpha}} \times C \frac{K^4}{\delta^2} T^{\frac{2\alpha}{\alpha+1}} s^{\frac{1}{\alpha}} |\log_2 T| \\
&\quad + 4l s^{-\frac{1}{2\alpha}} C T^2 \max(1, l_j T^{-\frac{1}{\alpha+1}}) \max(1, h_j T^{-\frac{1}{\alpha+1}}) \\
&\leq 2 s^{-\frac{1}{2\alpha}} 2l s^{-\frac{1}{2\alpha}} \times C \frac{K^4}{\delta^2} T^{\frac{2\alpha}{\alpha+1}} s^{\frac{1}{\alpha}} |\log_2 T| \\
&\quad + 4l s^{-\frac{1}{2\alpha}} \times C T^2 s^{\frac{1}{2\alpha}} T^{-\frac{1}{\alpha+1}} T^{-\frac{1}{\alpha+1}} \\
&\leq 4l C \frac{K^4}{\delta^2} T^{\frac{2\alpha}{\alpha+1}} |\log_2 T| + 4l C T^{\frac{2\alpha}{\alpha+1}}.
\end{aligned}$$

■

Ce lemme d’approximation non linéaire permet d’obtenir des résultats d’estimation directement sur un modèle d’horizon discret.

II.3.2.3 Estimation sur un modèle d'horizon discret

Le problème de l'estimation sur un modèle d'horizon peut paraître plus simple que le problème d'estimation d'une fonction \mathbf{C}^α géométriquement régulière. En effet le problème est déjà discrétisé et il est plus facile de construire un dictionnaire de bases orthogonales qui assure une bonne décroissance de l'erreur d'approximation sur un modèle d'horizon que sur une image complète. Cependant toute la difficulté réelle du problème réside dans le modèle d'horizon discret.

La première projection sur l'espace $\mathcal{L} = V_{j_0}$ est fixe et ne dépend théoriquement que du niveau de bruit. Plus le bruit est faible, plus on peut espérer retrouver des informations à échelle fine et plus il est important d'avoir des données à ces échelles. Cette première projection est une étape obligée et très classique en théorie de l'approximation. On définit très souvent une première échelle de coupure en dessous de laquelle on sait qu'il n'y a plus d'informations à aller chercher.

Le second point est technique mais pas fondamental. En effet il n'est pas si facile de réaliser une partition du carré unité en modèles d'horizon et rectangles réguliers, mais ce qui permet d'assurer une bonne décroissance de l'erreur d'approximation c'est la borne obtenue plus haut sur l'entropie des bases de bandelettes adaptées sur les modèles d'horizon.

Nous aurions pu choisir de ne donner uniquement que le résultat d'estimation sur les images \mathbf{C}^α géométriques mais nous pensons qu'il n'est qu'une conséquence logique du résultat d'approximation et d'estimation sur un modèle d'horizon. Nous proposons donc un théorème d'estimation sur un modèle d'horizon discret.

Soit \bar{f} la projection d'une fonction \mathbf{C}^α géométriquement régulière sur un rectangle modèle d'horizon \mathcal{R} . \mathcal{R} est engendré par des fonctions d'échelle $(\Phi_{j_0, k_1, k_2})_{k_1, k_2}$.

On a ainsi

$$\bar{f} = \sum_{k_1, k_2} \langle f, \Phi_{j_0, k_1, k_2} \rangle \Phi_{j_0, k_1, k_2}. \quad (\text{II.65})$$

Soit dW un processus de Wiener. On cherche à estimer \bar{f} à partir de

$$\bar{Y} = \sum_{k_1, k_2} \langle f + \varepsilon dW, \Phi_{j_0, k_1, k_2} \rangle \Phi_{j_0, k_1, k_2} = \bar{f} + W \quad (\text{II.66})$$

où W est un bruit blanc gaussien de variance ε^2 dont la dimension est celle de \mathcal{R} . Comme on a le résultat d'approximation non linéaire du paragraphe précédent sur les modèles d'horizon discret, il suffit de montrer que le nombre total de bandelettes dans l'ensemble des bases de bandelettes possibles sur \mathcal{R} est bien contrôlé, pour pouvoir appliquer le lemme II.6 et donc avoir une borne du risque de l'estimateur en bandelettes.

Lemme II.12

Le nombre $\kappa_{\mathcal{R}}$ de bandelettes dans toutes les bases d'un modèle d'horizon \mathcal{R} de dimension $2^{-j_0} \times 2^{-j_0}$ est borné par

$$\kappa_{\mathcal{R}} \leq C 2^{-(\alpha+2)j_0}. \quad (\text{II.67})$$

On a considéré ici que les géométries étaient uniquement polynomiales d'ordre α et quantifiées.

On considère qu'à chaque polynôme quantifié correspond une géométrie différente. Pour être précis le terme constant ne compte pas car c'est uniquement la dérivée de la courbe qui indique la géométrie. Ainsi on peut estimer qu'il y a au plus $2^{-\alpha j_0}$ bases de bandelettes différentes par modèle d'horizon. Le lemme se déduit alors du fait que toutes les bases contiennent moins de $C 2^{-2j_0}$ vecteurs.

On peut maintenant appliquer le lemme II.6 pour obtenir le théorème d'estimation suivant.

Théorème II.13

Soit $\bar{Y} = \bar{f} + W$ où W est un bruit blanc gaussien de variance ε^2 et où \bar{f} est la projection d'une fonction \mathbf{C}^α géométriquement régulière sur un espace de fonctions d'échelle V_{j_0} . Si $2^{j_0} = \varepsilon^2$ alors il existe 3 réels c , C et C' tels que l'estimateur en bandelette défini au lemme II.6 vérifie avec une probabilité supérieure à $1 - c\varepsilon$

$$\|F - \bar{f}\|^2 \leq C |\log \varepsilon|^2 \varepsilon^{\frac{2\alpha}{\alpha+1}} \quad (\text{II.68})$$

et

$$E(\|F - \bar{f}\|^2) \leq C' |\log \varepsilon|^2 \varepsilon^{\frac{2\alpha}{\alpha+1}} \quad (\text{II.69})$$

On remarque simplement que les 3 hypothèses du lemme II.6 sont remplies avec $\beta = 2\alpha/(\alpha+1)$ et $\beta' = 1$, comme $\beta/2 + \beta' \leq 2$ on a le résultat.

La condition $\varepsilon^2 = 2^{j_0}$ est une condition double, en effet si 2^{j_0} est vraiment trop petit par rapport à ε^2 , le nombre de vecteurs dans l'ensemble des bases de bandelettes deviendra trop grand, on considérera donc un ensemble de modèles trop riche et les bornes obtenues sur le risque seront moins bonnes. En pratique elles le resteront si 2^{j_0} reste de l'ordre d'une puissance de ε . Si 2^{j_0} est trop grand, le modèle n'est pas assez riche et on a toutes les chances de perdre des détails qui sont pourtant au dessus du niveau du bruit.

Nous allons maintenant montrer que pour chaque fonction $f \in \mathbf{C}^\alpha$ géométriquement régulière, il existe une base de bandelettes globale qui assure une bonne représentation de f . Nous verrons ensuite un analogue du résultat d'estimation précédent pour ces fonctions.

II.3.3 Base de bandelettes sur $[0, 1]^2$

II.3.3.1 Construction d'une base de bandelettes sur $[0, 1]^2$

Nous considérons maintenant une fonction f appartenant à la classe Θ des fonctions C^α géométriquement régulières dans son entier. Nous avons vu comment on pouvait construire des bases de bandelettes sur des rectangles discrets, comment passer à des bases globales qui conservent les mêmes capacités d'approximation non linéaire ? Nous souhaitons construire des bases de $L^2([0, 1]^2)$ et pas seulement d'un espace de dimension finie. Toute fonction doit pouvoir s'écrire dans une base de bandelettes. Certaines fonctions seront bien approchées avec peu de coefficients, d'autres pas mais toutes auront une représentation en bandelettes. Pour construire ces bases nous considérons une décomposition multiéchelle de $L^2([0, 1]^2)$ associée à une base d'ondelettes orthogonale :

$$L^2([0, 1]^2) = V_{j_0} \oplus_{j \leq j_0} W_j. \quad (\text{II.70})$$

Une base de bandelettes est l'union de deux bases orthogonales, l'une sur l'espace vectoriel de dimension finie V_{j_0} et l'autre sur l'espace $\oplus_{j \leq j_0} W_j$ de dimension infinie. Ainsi, à tout j_0 on associe un dictionnaire de bases de bandelettes D_{j_0} . La base naturelle de l'espace de détails $\oplus_{j \leq j_0} W_j$ est la base d'ondelette tensorielle bidimensionnelle. Comme nous ne nous intéressons à la géométrie des images qu'au dessus d'une certaine échelle pour l'estimation, nous utiliserons cette base naturelle qui sépare les échelles grossières des échelles fines.

La géométrie intervient dans la construction de la base de bandelettes sur V_{j_0} . En effet, une base de bandelettes de V_{j_0} est une union de bases sur des rectangles discrets et nous avons vu que ces bases étaient définies par des géométries locales.

Ainsi une base de bandelettes est définie par trois éléments :

- une échelle j_0 ,
- une segmentation de l'espace V_{j_0} en rectangles discrets,
- une géométrie sur chacun des rectangles.

Nous avons vu dans l'étude des bases sur les rectangles discrets, qu'on pouvait se restreindre aux géométries polynomiales quantifiées et assurer une bonne approximation de f .

Le but de la segmentation est de se ramener à des situations que l'on sait traiter localement, comme pour l'approximation polynomiale par morceaux. L'idéal pour assurer une bonne représentation des fonctions de Θ serait de pouvoir segmenter l'espace V_{j_0} en modèles d'horizon et les traiter séparément. Malheureusement c'est

rarement possible, ne serait-ce qu'aux endroits où les courbes se coupent. Les modèles d'horizon discrets sont des briques élémentaires mais ils ne peuvent à eux seuls servir à partitionner l'image. Si on veut obtenir une base globale qui assure une bonne représentation, c'est à dire dont l'entropie est aussi faible que possible on ne peut pas partitionner l'image n'importe comment.

Nous proposons comme Le Pennec et Mallat [PM05] de diviser l'espace qui est ici discret en trois classes de rectangles :

- les rectangles modèles d'horizon,
- les rectangles réguliers,
- les rectangles de jonction ou singuliers.

Les rectangles réguliers désignent les rectangles discrets sur lesquels la fonction f est uniformément C^α . Les rectangles singuliers sont des rectangles qui n'appartiennent pas aux deux autres catégories, souvent ils contiennent des intersections de courbes ou une seule courbe mais ne remplissent pas toutes les conditions pour être un modèle d'horizon. Trouver des bases qui assurent des entropies faibles sur des rectangles réguliers n'est pas un problème. En effet des bases d'ondelettes classiques représentent de manière optimale les fonctions uniformément régulières. Sur ces rectangles les bandelettes seront ainsi des ondelettes classiques.

Comme on contrôle assez peu ce qui se passe dans les rectangles singuliers, il est difficile de construire une base adaptée. Afin d'assurer une entropie faible sur ces rectangles, nous bornerons leurs deux dimensions par un multiple de s et nous limiterons leur nombre. Nous utiliserons des bases d'ondelettes sur ces rectangles.

Une base de bandelettes au dessus de l'échelle j_0 est donc une union de bases décrites précédemment, forgées sur mesure pour les modèles d'horizon et de bases d'ondelettes locales. Pour montrer que parmi ces bases globales il en existe une pour chaque fonction qui assure une bonne représentation il suffit de montrer qu'il existe bien pour chaque fonction f un bon découpage permettant de construire une base \mathcal{B} dont l'entropie vérifie une inégalité similaire à celle obtenue pour un modèle d'horizon,

$$\mathcal{E}(f, T, \mathcal{B}) \leq CT^{\frac{2\alpha}{\alpha+1}} |\log_2 T|. \quad (\text{II.71})$$

Comment effectuer un découpage adéquat c'est à dire qui assure que les rectangles singuliers soient petits et peu nombreux et que les autres ne soient pas trop nombreux? Si l'image est surdécoupée on tire moins bien partie de sa régularité et on perd en approximation. Dans le prochain paragraphe nous décrivons le problème de la détermination d'un bon découpage, nous expliquons ensuite quelle famille de découpages nous avons choisi et nous montrerons dans les paragraphes suivants que ce découpage assure l'existence d'une base de bandelettes ayant de bonnes propriétés d'approximation.

II.3.3.2 Quel découpage ?

La méthode la plus couramment utilisée pour réaliser ce genre de partition est une division diadique de l'espace. Ainsi Le Pennec et Mallat [PM05] proposent l'utilisation d'un arbre quaternaire pour diviser l'image et les petits carrés qui serviront à construire les bandes sur lesquelles sont construites les bases de bandelettes. L'idée de ce découpage est simple, tant qu'on n'a pas atteint une taille minimale fixée par l'erreur qu'on s'autorise, on redécoupe tous les carrés qui ne sont ni réguliers ni modèles d'horizon. Cette approche a beaucoup d'avantages. Elle est simple, le nombre de rectangles à explorer est limité et la structure arborescente permet une optimisation effective et rapide.

Malheureusement nous ne pouvons l'utiliser directement. En effet la définition que nous avons choisi pour les modèles d'horizon ne s'accorde pas avec un tel découpage. Pour qu'un rectangle soit un modèle d'horizon il est nécessaire que la courbe qui le traverse soit éloignée de plus de $4s$ de ses bords. Si la fonction f admet une discontinuité horizontale exactement au milieu de l'image tous les découpages qui engendreront un bord de rectangle tangent à cette courbe poseront problème. Comme f n'est pas régulière au niveau de la courbe on ne pourra avoir ici de rectangles réguliers. Comme le bord du rectangle est trop proche de la courbe, on ne peut avoir de modèles d'horizon. Si on utilise ici des rectangles singuliers on en aura besoin sur toute une portion de courbe ce qui est trop si on veut assurer une bonne approximation. D'une manière générale, tout découpage qui impose une césure à un endroit précis donné posera le même problème.

Ajoutons que nous imposons une autre contrainte au découpage que nous voulons construire : il doit permettre une minimisation effective. Le nombre de partitions de V_{j_0} en rectangles discrets est colossal et croît au moins exponentiellement avec 2^{-j_0} . Il n'est pas envisageable de toutes les comparer pour déterminer la base de bandelettes optimale. La structure d'arbre quaternaire permet de déterminer la meilleure base globale à partir d'un petit nombre de comparaisons locales. C'est la structure hiérarchique du découpage qui permet cela et qui assure de pouvoir effectuer en un temps raisonnable la minimisation.

Nous utiliserons une méthode de découpage hiérarchique proposé par Huang, Polak, Do et Bouman [HPDB]. Cette méthode a été introduite pour la recherche de meilleure base et conçue pour permettre une minimisation effective. On considère l'ensemble des découpages qui peuvent être obtenus par une succession de divisions verticales et horizontales de rectangles de la partition, sur une grille fixe. A chaque étape, on choisit un rectangle obtenu par les découpages précédents et on le divise en deux rectangles. Chaque division devant être effectuée verticalement ou horizontalement selon une grille fixée.

Ces contraintes limitent le nombre total de découpages et assurent de pouvoir effectuer la minimisation. En effet si on associe une fonction de coût sous-additive quelconque à chaque rectangle, dans notre cas cette fonction de coût est l'entropie de la meilleure base de bandelettes, il existe une méthode qui permet de déterminer la partition qui optimise la fonction de coût globale. On entend par fonction de coût sous-additive, une fonction telle que pour tout rectangle \mathcal{R} ,

$$c(\mathcal{R}) \leq c(\mathcal{R}_1) + c(\mathcal{R}_2), \quad \forall (\mathcal{R}_1, \mathcal{R}_2) \text{ tels que } \mathcal{R}_1 \oplus \mathcal{R}_2 = \mathcal{R}.$$

Pour effectuer la minimisation, T étant fixé, on calcule d'abord l'entropie de la meilleure base de bandelettes construite sans diviser en sous-rectangles, sur tous les rectangles. Le temps que prend cette opération dépend du nombre de rectangles donc de la finesse de la grille de division et du nombre de bases par rectangle. Dans notre cas on s'autorise des divisions sur une grille proportionnelle à celle de V_{j_0} . Ainsi le nombre total de rectangles est borné par 2^{-4j_0} .

Ensuite pour chaque rectangle, en commençant par les plus petits on compare l'entropie de la meilleure base avec la somme des entropies des meilleures bases de \mathcal{R}_1 et \mathcal{R}_2 pour toutes les partitions \mathcal{R} en deux. Le nombre de comparaisons par rectangles est proportionnel au périmètre du rectangle. Comme on commence par les plus petits, on est assuré que la partition choisie sera optimale parmi toutes les partitions car tous les couples $(\mathcal{R}_1, \mathcal{R}_2)$ de partitions possibles auront également été optimisés préalablement. Si le découpage s'effectue sur une grille de taille $N \times N$, le nombre de comparaisons par rectangle est borné par $2N$, le nombre de rectangles est borné par $N^4/2$ et l'optimisation nécessite donc moins de N^5 opérations.

On ainsi a le résultat suivant :

Lemme II.14

L'ensemble des bases de bandelettes construites sur un espace V_{j_0} de dimension 2^{-2j_0} contient moins de $C2^{-(\alpha+6)j_0}$ bandelettes et l'optimisation nécessite de l'ordre de $2^{-(10+\alpha)j_0}$ opérations.

En effet, nous avons vu que l'ensemble des bases de bandelettes sur un modèle d'horizon contenait moins de $C2^{-(\alpha+2)j_0}$ bandelettes de bases et le nombre de rectangles discrets est borné par 2^{-4j_0} . Pour l'optimisation on doit calculer les coefficients dans chaque base locale. Chaque coefficient nécessite au plus $C_1 2^{-2j_0}$ opérations. Chaque base locale nécessite donc au plus $C_1 2^{-4j_0}$ opérations pour décomposer f . Comme on a $2^{-(\alpha+2)j_0}$ bases par rectangles et 2^{-4j_0} rectangles, on en déduit que le calcul de l'ensemble des bases locales s'effectue en moins de $2^{-(10+\alpha)j_0}$ opérations. Le temps d'optimisation est ainsi négligeable par rapport au temps de calcul des décompositions locales de f .

Cette famille de découpages, outre qu'elle permet une optimisation effective, a l'avantage d'être plus souple que la division dyadique. Pour toute courbe horizontale il existe un découpage qui laisse la courbe loin des bords des rectangles de la partition. C'est cette propriété qui va nous permettre de construire un découpage adapté à chaque fonction f .

Dans le paragraphe suivant nous donnons des bornes sur les entropies des bases d'ondelettes sur les rectangles réguliers et singuliers puis nous expliquons comment on construit un découpage adapté à la fonction f en utilisant la méthode décrite ci-dessus. Pour s'assurer que le découpage final peut être obtenu par une succession de divisions en deux rectangles, il est décrit par une succession d'étapes qui peuvent elles-mêmes être décomposées en une succession de division en deux.

II.3.3.3 Approximation globale en bases de bandelettes

Nous avons déjà vu qu'il existait une base de bandelettes sur un modèle d'horizon qui assurait

$$\mathcal{E}(f, T, \mathcal{B}) \leq \frac{C}{\delta^2} T^{\frac{2\alpha}{\alpha+1}} |\log_2 T| \max(l, s^{1/\alpha})$$

où l est la longueur du modèle d'horizon.

On montre maintenant que l'on peut obtenir des bornes similaires pour les rectangles réguliers et singuliers avec des bases d'ondelettes. Pour les rectangles réguliers on a la borne suivante avec des bases d'ondelettes :

Lemme II.15

Soit \mathcal{R} un rectangle régulier dont la longueur est l et la hauteur h . Il existe C_R tel que pour tout $2^{j_0/2} \leq T \leq s^{\frac{\alpha+1}{2\alpha}}$

$$\mathcal{E}(f, T, \mathcal{B}) \leq C_R T^2 \max(1, l T^{-\frac{1}{\alpha+1}}) \max(1, h T^{-\frac{1}{\alpha+1}}). \quad (\text{II.72})$$

Ce lemme exprime simplement les capacités d'approximation des ondelettes sur les fonctions régulières. Les termes $\max(l T^{-\frac{1}{\alpha+1}}, 1)$ et $\max(h T^{-\frac{1}{\alpha+1}}, 1)$ rappellent qu'il faut une taille minimale au rectangle pour exploiter la régularité. En dessous de cette taille, on prend uniquement les fonctions d'échelles, l'approximation sera bonne mais elle nous aura coûté un nombre constant de coefficients pour un tout petit rectangle.

Preuve - II.15 -

Nous allons prouver qu'il existe un réel C dépendant uniquement des bornes sur les dérivées de f , une échelle j_c telle que la projection g_1 de f sur V_{j_c} vérifie

$$\sum_{j_0 < j < j_c} \sum_{k_1, k_2} \langle f, \psi_{j, k_1, k_2} \rangle + M(g_1) T^2 \leq C \max(1, l T^{-\frac{1}{\alpha+1}}) \max(1, h T^{-\frac{1}{\alpha+1}}) T^2 \quad (\text{II.73})$$

où $M(g_1)$ désigne le nombre de coefficients nécessaires à définir g_1 dans l'espace V_{j_c} . La propriété de minimalité vérifiée par l'entropie permet d'assurer

$$\begin{aligned} \mathcal{E}(f, T, \mathcal{B}) &\leq \sum_{j_0 < j < j_c} \sum_{k_1, k_2} \langle f, \psi_{j, k_1, k_2} \rangle + M(g_1) T^2 \\ &\leq C \max(1, l T^{-\frac{1}{\alpha+1}}) \max(1, h T^{-\frac{1}{\alpha+1}}) T^2 \end{aligned}$$

où \mathcal{B} est la base d'ondelettes associée à V_{j_c} .

On choisit $2^{j_c} = T^{\frac{1}{\alpha+1}}$, on a ainsi

$$M(g) \leq K^2 \max(1, l T^{-\frac{1}{\alpha+1}}) \max(1, h T^{-\frac{1}{\alpha+1}})$$

où K est une borne sur la longueur du filtre associé à la base d'ondelettes. De plus, de la régularité de f , on déduit qu'il existe C_1 dépendant des bornes sur les dérivées de f tel que

$$\sum_{j_0 < j < j_c} \sum_{k_1, k_2} \langle f, \psi_{j, k_1, k_2} \rangle \leq \sum_{j_0 < j < j_c} \sum_{k_1, k_2} C_1 2^{2(\alpha+1)j} \quad (\text{II.74})$$

$$\leq \sum_{j_0 < j < j_c} K^2 C_1 \max(1, l 2^{-j}) \max(1, h 2^{-j}) 2^{2(\alpha+1)j} \quad (\text{II.75})$$

La série étant géométrique

$$\leq C K^2 \max(1, l 2^{-j_c}) \max(1, h 2^{-j_c}) 2^{2(\alpha+1)j_c} \quad (\text{II.76})$$

On conclut en utilisant la définition de 2^{j_c}

$$\leq C K^2 \max(1, l T^{-\frac{1}{\alpha+1}}) \max(1, h T^{-\frac{1}{\alpha+1}}) T^2 \quad (\text{II.77})$$

Ce qui termine la preuve du lemme II.15. ■

Pour les rectangles singuliers on ajoute une condition de dimension pour assurer que l'entropie associée à une base d'ondelettes est suffisamment faible.

Lemme II.16

Soit \mathcal{R} un rectangle singulier dont la longueur l est inférieure à $C_1 s$ et dont la longueur h est inférieure à $C_1 s$. Il existe C_S tel que pour tout $T \leq s^{\frac{\alpha+1}{2\alpha}}$

$$\mathcal{E}(f, T, \mathcal{B}) \leq C_S \max(T^{\frac{2\alpha}{\alpha+1}} s^{\frac{2}{\alpha+1}}, T^2). \quad (\text{II.78})$$

Preuve - II.16 -

Nous allons utiliser la régularité du noyau h de taille s pour borner l'entropie sur \mathcal{R} . Soit $2^{j_c} = (T s^\alpha)^{\frac{1}{\alpha+1}}$. On note comme dans le cas régulier g_1 la projection de f sur le sous-espace V_{j_c} . On va montrer que

$$\sum_{j_0 < j < j_c} \sum_{k_1, k_2} \langle f, \psi_{j, k_1, k_2} \rangle + M(g) T^2 \leq C_1^2 C \max(T^{\frac{2\alpha}{\alpha+1}} s^{\frac{2}{\alpha+1}}, T^2). \quad (\text{II.79})$$

et conclure comme nous l'avons déjà fait en utilisant la propriété de minimiseur de l'entropie.

$M(g_1)$ désigne le nombre de coefficients qui définissent g_1 dans l'espace V_{j_c} . D'abord on borne $M(g_1)$

$$M(g_1) \leq K^2 \max(l 2^{-j_c}, 1) \max(h 2^{-j_c}, 1) \quad (\text{II.80})$$

$$\leq K^2 \max(C_1 s (T s^\alpha)^{-\frac{1}{\alpha+1}}, 1)^2 \quad (\text{II.81})$$

$$\leq K^2 C_1^2 \max((s T^{-1})^{\frac{1}{\alpha+1}}, 1)^2 \quad (\text{II.82})$$

On borne ensuite les coefficients d'ondelettes en utilisant la régularité du noyau de lissage,

$$\sum_{j_0 < j < j_c} \sum_{k_1, k_2} \langle f, \psi_{j, k_1, k_2} \rangle \leq \sum_{j_0 < j < j_c} \sum_{k_1, k_2} 2^{(2\alpha+2)j} s^{-2\alpha} \quad (\text{II.83})$$

$$\leq \sum_{j_0 < j < j_c} K^2 \max(C_1 s 2^{-j}, 1)^2 2^{(2\alpha+2)j} s^{-2\alpha} \quad (\text{II.84})$$

On utilise le fait que la série soit géométrique,

$$\leq C C_1^2 \max((s T^{-1})^{\frac{1}{\alpha+1}}, 1)^2 2^{(2\alpha+2)j_c} s^{-2\alpha} \quad (\text{II.85})$$

et donc, d'après la définition de j_c

$$\leq C C_1^2 \max((s T^{-1})^{\frac{1}{\alpha+1}}, 1)^2 T^2 \quad (\text{II.86})$$

On déduit le lemme II.16 de (II.82) et de (II.86) ■

On sait donc borner l'entropie de la meilleure base de bandelettes sur chacune des trois classes de rectangles par des termes qui sont au moins aussi bons que la borne obtenue sur le modèle d'horizon.

La borne obtenue sur les modèles d'horizon est proportionnelle à la longueur du rectangle si celui ci est assez grand. Si nous arrivons à découper l'espace V_{j_0} de telle

sorte que les modèles d'horizon ne soient pas trop petits, on peut obtenir une borne sur l'entropie de l'union des bases sur ces rectangles qui est majorée par un terme de la forme $CT^{\frac{2\alpha}{\alpha+1}}|\log_2 T|L$ où L est la longueur totale des courbes de singularité de f . De même la majoration de l'entropie sur les rectangles réguliers est proportionnelle à leur surface s'ils sont assez grands. Si on ne surdécoupe pas trop on va pouvoir borner la somme de ces entropie par un terme de la forme $CT^{\frac{2\alpha}{\alpha+1}}$ car la somme des surfaces est bornée par 1. Enfin la borne obtenue sur les rectangles singuliers est en fait proportionnelle à T^2 ou $s^{2/(\alpha+1)}T^{\frac{2\alpha}{\alpha+1}}$ selon la valeur de T . Si le nombre de ces rectangles reste raisonnable et en particulier croît moins vite que $s^{-2/(\alpha+1)}$ alors on aura la borne souhaitée sur la somme des entropies sur ces rectangles.

Le lemme suivant affirme qu'il existe un découpage obtenu par la procédure décrite dans le paragraphe précédent qui divise l'espace V_{j_0} en un petit nombre de rectangles discrets des trois classes.

Lemme II.17

Pour toute fonction f de la classe θ , si j_0 est suffisamment petit, il existe une partition du rectangle discret associé à $[0, 1]^2$, en sous-rectangles discrets à l'échelle j_0 et un réel C_D tel qu'il y ait au plus

- $C_D|\log_2 s|^2$ rectangles réguliers
- $C_D|\log_2 s|^2$ modèles d'horizon où δ est minoré uniformément.
- $C_D|\log_2 s|$ rectangles singuliers dont la taille est bornée par $Cs \times Cs$.

Ce lemme permet de conclure à l'existence d'une base globale dont l'entropie est bien contrôlée. En effet la somme des entropies des bases associées aux rectangles réguliers est bornée par

$$\begin{aligned} \sum_{\mathcal{R}_i \text{ rectangles réguliers}} \mathcal{E}(f, \mathcal{B}_i, T) &\leq \sum_{l_i \geq T^{\frac{1}{\alpha+1}} \text{ et } h_i \geq T^{\frac{1}{\alpha+1}}} \mathcal{E}(f, \mathcal{B}_i, T) + \sum_{l_j < T^{\frac{1}{\alpha+1}} \text{ ou } h_j < T^{\frac{1}{\alpha+1}}} \mathcal{E}(f, \mathcal{B}_j, T) \\ &\leq \sum_i C_R l_i h_i T^{\frac{2\alpha}{\alpha+1}} + \sum_j C_R \max(l_j, h_j) T^{\frac{2\alpha}{\alpha+1}} T^{\frac{1}{\alpha+1}} \quad (\text{II.87}) \end{aligned}$$

$$\leq C_R T^{\frac{2\alpha}{\alpha+1}} + C_R C_D T^{\frac{2\alpha}{\alpha+1}} T^{\frac{1}{\alpha+1}} |\log_2 s|^2 \quad (\text{II.88})$$

Comme $T^{\frac{2\alpha}{\alpha+1}} \leq s$ on en déduit une majoration de $|\log_2 S|$

$$\leq C_R T^{\frac{2\alpha}{\alpha+1}} + C_R C_D T^{\frac{2\alpha}{\alpha+1}} (C' T^{\frac{1}{\alpha+1}} |\log_2 T|^2) \quad (\text{II.89})$$

d'où si T est suffisamment petit

$$\leq 2C_R T^{\frac{2\alpha}{\alpha+1}}. \quad (\text{II.90})$$

Un raisonnement similaire permet de borner la somme des entropies des bases de bandelettes sur les modèles d'horizon.

$$\sum_{\mathcal{R}_i \text{ modèles d'horizon}} \mathcal{E}(f, \mathcal{B}_i, T) \leq \sum_{l_i \leq s^{1/\alpha}} \mathcal{E}(f, \mathcal{B}_i, T) + \sum_{l_j > s^{1/\alpha}} \mathcal{E}(f, \mathcal{B}_j, T) \quad (\text{II.91})$$

$$\leq \sum_i \frac{C_H}{\delta^2} l_i T^{\frac{2\alpha}{\alpha+1}} |\log_2 T| + \sum_j \frac{C_H}{\delta^2} s^{1/\alpha} T^{\frac{2\alpha}{\alpha+1}} |\log_2 T| \quad (\text{II.92})$$

$$\leq \frac{C_H}{\delta^2} L T^{\frac{2\alpha}{\alpha+1}} |\log_2 T| + \frac{C_H}{\delta^2} s^{1/\alpha} T^{\frac{2\alpha}{\alpha+1}} |\log_2 T| C_D |\log_2 s|^2 \quad (\text{II.93})$$

et donc dès que s est suffisamment petit par rapport à L

$$\leq \frac{2C_H}{\delta^2} L T^{\frac{2\alpha}{\alpha+1}} |\log_2 T| \quad (\text{II.94})$$

On fait de même sur les rectangles singuliers

$$\sum_{\mathcal{R}_i \text{ rectangles singuliers}} \mathcal{E}(f, \mathcal{B}_i, T) \leq C_D |\log_2 s| C_S T^{\frac{2\alpha}{\alpha+1}} \max(s^{2/(\alpha+1)}, T^{2/(\alpha+1)}) \quad (\text{II.95})$$

Suivant la valeur du maximum, on a

$$\sum_{\mathcal{R}_i \text{ rectangles singuliers}} \mathcal{E}(f, \mathcal{B}_i, T) \leq C_D C_S T^{\frac{2\alpha}{\alpha+1}} s^{2/(\alpha+1)} |\log_2 s| \leq C_D C_S T^{\frac{2\alpha}{\alpha+1}}. \quad (\text{II.96})$$

dès que s est suffisamment petit, ou

$$\sum_{\mathcal{R}_i \text{ rectangles singuliers}} \mathcal{E}(f, \mathcal{B}_i, T) \leq C_D C_S T^{\frac{2\alpha}{\alpha+1}} (C' |\log_2 T| T^{2/(\alpha+1)}) \leq C_D C_S T^{\frac{2\alpha}{\alpha+1}} \quad (\text{II.97})$$

dès que T est suffisamment petit. Dans tous les cas si T et s sont suffisamment petits on a

$$\sum_{\mathcal{R}_i \text{ rectangles singuliers}} \mathcal{E}(f, \mathcal{B}_i, T) \leq C_D C_S T^{\frac{2\alpha}{\alpha+1}} \quad (\text{II.98})$$

Donc de (II.90), (II.94) et (II.98) on déduit que pour tout f dans Θ il existe une base globale \mathcal{B}_G de bandelettes tel qu'il existe C_G dépendant de f tel que

$$\mathcal{E}(f, T, \mathcal{B}) \leq C_G T^{\frac{2\alpha}{\alpha+1}} |\log_2 T|. \quad (\text{II.99})$$

Cette borne va nous permettre d'appliquer les résultats d'estimation sur la fonction f globalement et non plus que sur un modèle d'horizon.

Pour que ce résultat soit tout à fait complet il faut démontrer le lemme concernant l'existence du découpage. Nous proposons de donner ici une description d'un découpage correspondant au lemme II.17. Les détails de la démonstration sont proposés en annexe. Nous proposons un découpage en plusieurs étapes.

Le premier découpage découpe V_{j_0} en un nombre fini de rectangles qui dépend de f . Il a pour but de séparer les différentes courbes. Comme ces courbes sont en nombre fini et que leurs dérivées sont bornées, il existe un découpage qui sépare l'espace en rectangles réguliers, en rectangles singuliers qui contiennent des intersections de courbes et en rectangles orientés. Les rectangles orientés sont définis comme les modèles d'horizon sauf qu'on n'impose pas de condition de distance entre la courbe et les bords. En revanche on impose qu'aux alentours des bords horizontaux (resp verticaux) de ces rectangles les courbes fassent un angle minimal θ_0 avec l'axe horizontal (resp vertical). Cette condition est indispensable pour pouvoir construire des modèles d'horizon par la suite.

Comment réaliser un tel découpage ? Si on n'a pas de condition sur les angles des courbes, il suffit juste de prendre un découpage suffisamment fin. On considère un tel découpage en petits carrés de dimensions $d \times d$. On montre en annexe qu'il existe une petite perturbation de ce découpage, en modifiant légèrement les césures qui posent problème, qui permet de conserver l'isolement des courbes tout en assurant l'existence d'un θ_0 et d'une distance d_0 autour des bords tels que les portions de courbes à moins de d_0 des bords fassent un angle supérieur à θ_0 avec les bords. C'est le nombre fini de courbe et une borne sur les dérivées qui permet cela.

Pour arriver au découpage final, il reste à redécouper les rectangles qui contiennent des intersections de courbes pour n'avoir qu'un petit rectangle singulier au niveau de l'intersection et à redécouper les rectangles orientés en modèles d'horizon.

Le second découpage traite les intersections de courbes. On va diviser récursivement ces rectangles toujours transversalement aux courbes pour ne pas avoir de problèmes de tangence et isoler l'intersection des courbes dans un rectangle de taille inférieure à $C_1 s \times C_1 s$. On montre en annexe qu'on peut le faire pour chaque intersection avec un découpage en $C_2 |\log_2 s|$ rectangles, dont un seul est singulier. Les autres sont soit réguliers soit orientés.

Le dernier découpage traite les rectangles orientés, il permet de diviser chaque rectangle orienté en au plus $C_2 |\log_2 s|$ rectangles dont deux au plus sont singuliers et les autres sont soit réguliers soit des modèles d'horizon. On ne découpe pas si le rectangle est déjà un modèle d'horizon. Sinon il existe un point proche d'un

bord horizontal (avec une courbe horizontale), on l'isole dans un rectangle de taille $4/\tan\theta_0 \times 4/\tan\theta_0$ afin d'assurer qu'en dehors de ce rectangle, la courbe soit suffisamment éloignée du bord et on fait ensuite un découpage logarithmique pour assurer que $1/\delta$ n'explose pas dans les autres rectangles.

Au final, si on fait les comptes, on obtient bien le nombre de rectangles décrit dans le lemme II.17.

II.3.4 Estimation des fonctions C^α géométriquement régulières

Les résultats d'estimation sur les fonctions C^α géométriquement régulières s'obtiennent de la même manière que dans le cas du modèle d'horizon. La principale différence est la première projection sur un espace vectoriel de dimension finie qui était invisible dans le cas du modèle d'horizon. On a donc le théorème annoncé.

Théorème II.18

Pour toute fonction f C^α géométriquement régulière, avec $\alpha \geq 1$, il existe deux constantes C et C' et une constante c telles que pour tout $\epsilon > 0$ l'estimateur F de f à partir de $dY = f(t)dt + \epsilon dW$ vérifie avec une probabilité plus grande que $1 - c\epsilon$

$$\|F - f\|^2 \leq C |\log \epsilon|^2 \epsilon^{2\alpha/(\alpha+1)} \quad . \quad (\text{II.100})$$

et

$$E(\|F - f\|^2) \leq C' |\log \epsilon|^2 \epsilon^{2\alpha/(\alpha+1)} \quad . \quad (\text{II.101})$$

Ce résultat est une conséquence directe du lemme II.6. Pour démontrer le résultat nous allons vérifier qu'il existe une bonne base de bandelettes vérifiant les hypothèses du lemme. On choisit pour cela l'espace $\mathcal{L} = V_{j_0}$ avec $2^{j_0} = \epsilon^2$. Dans le lemme II.14 nous avons vu que le nombre de vecteurs de base était polynomial en 2^{j_0} et nous avons montré qu'il existait une de ces bases de bandelettes qui assurait une approximation en $T^{\frac{2\alpha}{\alpha+1}} |\log_2 T|$. Toutes les conditions du lemme II.6 sont remplies avec les mêmes $\beta = 2\alpha/(\alpha+1)$ et $\beta' = 1$ que pour le cas d'un modèle d'horizon. D'où le résultat.

II.4 Annexe Découpage

Nous présentons ici la construction détaillée du découpage qui a été présenté dans le premier chapitre.

Toutes les constructions qui sont proposées ici sont toujours faites sous réserve que

2^{j_0} soit suffisamment petit. Nous voulons dire ici que pour tout $f \in \Theta$ et pour tout lissage s il existe une échelle $j(f, s)$ en dessous de laquelle la construction suivante est possible. $j(f, s)$ dépend d'un grand nombre de choses, dont la géométrie des courbes, de s mais pas de la précision d'approximation souhaitée. Si $j_0 > j(f, s)$, alors on peut considérer que la fonction est régulière à l'échelle s . Dans toute la suite on considèrera donc que $j_0 \leq j(f, s)$ et qu'il est possible d'effectuer les découpages. Pour conserver un minimum de clarté on assimilera le rectangle discret à un rectangle physique. Cette confusion permettra de désigner une division en deux rectangles discrets par une division spatiale. Si j_0 est suffisamment petit il existera toujours une division discrète très proche de la division spatiale qui assurera les mêmes propriétés. Cela nous permettra de ne pas faire des aller-retours entre les deux domaines et de ne pas calculer sans arrêt les indices discrets de l'espace V_{j_0} associés aux positions réelles des points et des courbes. Comme précédemment on parlera de distance entre des points et des courbes dans l'espace discret. Cette distance n'a pas de sens à l'échelle j_0 car le support des fonctions d'échelle j_0 n'est pas ponctuel mais si j_0 est suffisamment petit, on peut considérer que ce support de dimension $K2^{j_0} \times K2^{j_0}$ est négligeable. C'est à dire que si l'échelle de discrétisation est suffisamment fine on peut parler de la distance entre deux fonctions d'échelle. La lourdeur des notations qu'il aurait fallu pour décrire précisément le découpage discret aurait totalement noyé l'esprit de la méthode de découpage que nous employons. C'est pourquoi nous avons préféré cette approximation.

Nous définissons d'abord une nouvelle classe de rectangles discrets qui vont nous servir d'intermédiaires de calcul.

On dira qu'un rectangle est orienté horizontalement s'il n'est traversé que par une seule courbe horizontale (qui conserve un angle inférieur à $\pi/3$ avec l'horizontal) et tel qu'il existe une distance d_0 et un angle θ_0 tel que tout point de la courbe où l'angle avec l'horizontal est inférieur à θ_0 est distant de plus de d_0 des bords horizontaux du rectangle.

La définition d'un modèle d'horizon est similaire.

On garantit que si la courbe s'approche d'un bord horizontal alors l'angle entre la courbe et l'horizontal est supérieur à une certaine valeur. En particulier, dans un tel rectangle, la courbe ne peut être tangente aux bords. Le découpage que nous proposons peut être décomposé en plusieurs étapes.

Le premier découpage ne dépend que de la position et de la géométrie des courbes et pas de s ni de T . Il a pour but de les isoler

Lemme II.19

Pour toute fonction f il existe K tel que si 2^{j_0} est suffisamment petit, on peut diviser V_{j_0} en

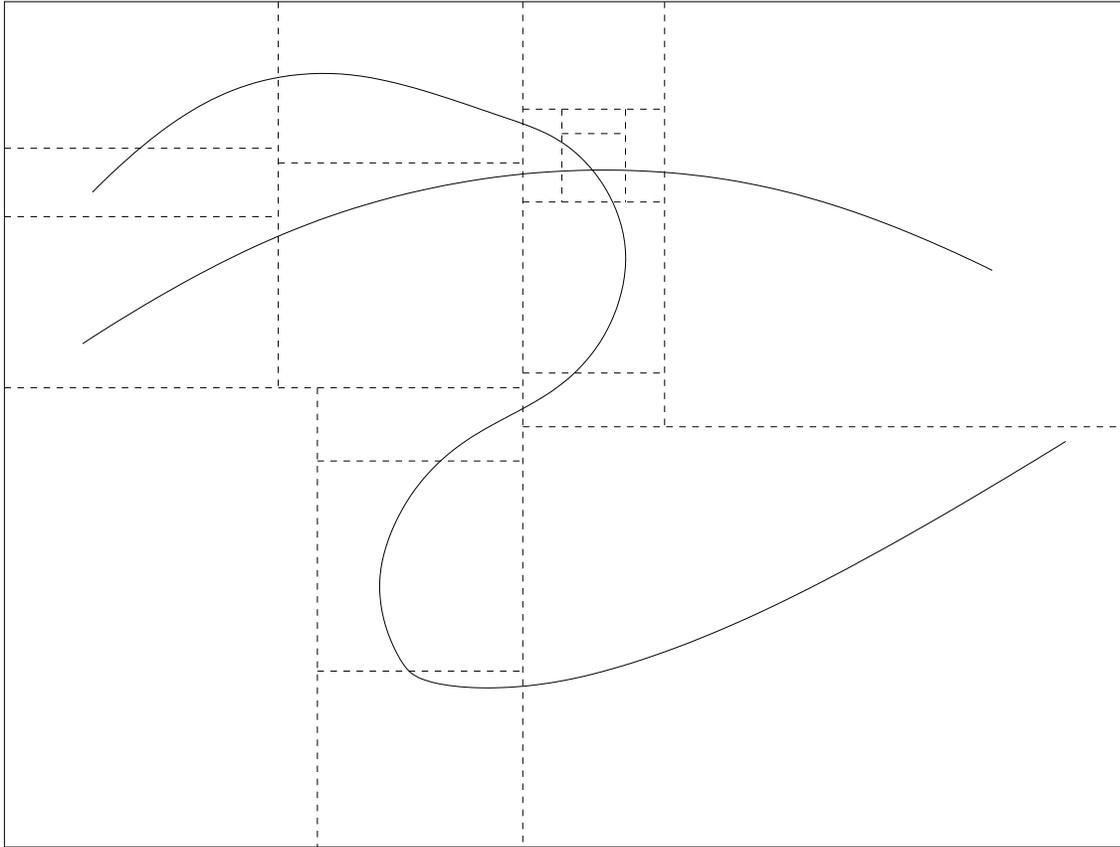


FIG. II.7 – Premier découpage

1. moins de K rectangles réguliers.
2. moins de K rectangles orientés.
3. moins de K rectangles singuliers contenant une intersection de courbe.

De plus on assure que les angles des courbes ne varient pas plus de $\pi/6$ dans chaque rectangle.

Preuve - II.19 -

Pour démontrer ce lemme, nous utiliserons le lemme suivant :

Lemme II.20

Soit $\eta > 0$ et $(\mathcal{C}_j)_{j \leq K_1}$ courbes horizontales paramétrées par des fonctions $f_j : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ telles que $\|f_j''\|_{+\infty} < K_2 \forall j \leq K_1$. Il existe $\theta_0 > 0$ et $i \in \mathbb{Z}$ dépendant de K_1, K_2 et η tels qu'il existe une droite $\Delta : y = k2^i$ avec $k \in \mathbb{N}$ telle que la

distance entre Δ et les points de \mathcal{C}_j où la tangente fait un angle avec l'axe horizontal inférieur à θ_0 est supérieure à 2^i .

Preuve - II.20 -

Soit $n \in \mathbb{N}$, supposons que pour tout $k \in [1, n]$ il existe x_k tel qu'il existe j tel que

$$f_j(x_k) \in \left[\frac{\eta(k-1)}{n}, \frac{\eta k}{n} \right], \quad |f'_j(x_k)| < \frac{\eta}{2(2K_1+1)}$$

Si on considère n valeurs $(x_i)_{i \leq n}$ sur $[0, 1]$ il existe un intervalle fermé de taille $\frac{2K_1+1}{n}$ qui contient au moins $2K_1+1$ valeurs. Parmi ces valeurs, il y en a moins trois qui correspondent au même indice j , si j est choisi parmi un ensemble de taille K_1 . Parmi ces trois points, il en existe au moins deux dont la différence des indices est supérieure ou égale à deux. Donc il existe $x_i < x_l$ associés à la même courbe \mathcal{C}_{j_0} tels que $x_l - x_i \leq \frac{2K_1+1}{n}$ et $|f_{j_0}(x_l) - f_{j_0}(x_i)| \geq \frac{\eta}{n}$.

On supposera maintenant que $f_{j_0}(x_i) < f_{j_0}(x_l)$ sans perdre en généralité.

$$\int_{x_i}^{x_l} f'_{j_0}(x) dx = f_{j_0}(x_l) - f_{j_0}(x_i) \geq \frac{\eta}{n} \quad (\text{II.102})$$

$$\int_{x_i}^{x_l} \left(f'_{j_0}(x) - \frac{\eta}{2(2K_1+1)} \right) dx \geq \frac{\eta}{n} - \frac{\eta}{2(2K_1+1)}(x_l - x_i) \quad (\text{II.103})$$

$$\int_{x_i}^{x_l} \left(f'_{j_0}(x) - \frac{\eta}{2(2K_1+1)} \right) dx \geq \frac{\eta}{2n} \quad (\text{II.104})$$

Comme $|f'_{j_0}(x_i)| < \frac{\eta}{2(2K_1+1)}$ et $\|f''_{j_0}\|_{+\infty} \leq K_2$

$$\int_{x_i}^{x_l} \left(f'_{j_0}(x) - \frac{\eta}{2(2K_1+1)} \right) dx < \frac{(2K_1+1)^2 K_2}{2n^2} \quad (\text{II.105})$$

On déduit donc

$$n < \frac{(2K_1+1)^2 K_2}{\eta} \quad (\text{II.106})$$

Donc si on suppose $n \geq \frac{(2K_1+1)^2 K_2}{\eta}$, il existe k_0 tel que

- soit il n'existe pas de x tel que $\forall j \ f_j(x) \in \left[\frac{\eta(k_0-1)}{n}, \frac{\eta k_0}{n} \right]$,
- soit pour tout x tel que pour tout j tel que $f_j(x) \in \left[\frac{\eta(k_0-1)}{n}, \frac{\eta k_0}{n} \right]$, alors $|f'_j(x)| > \frac{\eta}{2(2K_1+1)}$.

Dans les deux cas si on choisit $i = E[\log_2(\frac{\eta}{3(2K_1+1)^2K_2})]$ et $\theta_0 = \arctan(\frac{\eta}{2(2K_1+1)})$ on peut construire Δ vérifiant la condition du lemme. ■

On propose maintenant de déterminer un découpage qui sépare les courbes puis nous modifierons ce découpage en utilisant le lemme précédent pour pouvoir assurer que les conditions du lemme II.19 sont vérifiées.

Comme les courbes sont en nombre fini, que leurs dérivées sont bornées et qu'elles ne sont pas tangentes, il existe une distance d et un angle θ_1 tel que sur tout rectangle dont les dimensions sont inférieures à $d \times d$, l'angle des courbes ne varie pas de plus de θ_1 et que les courbes s'intersectent avec des angles supérieurs à $3\theta_1$. Soit un découpage du carré unité en rectangles généré par des divisions séquentielles de rectangles par des droites, tel que chaque intersection de courbes soit contenu dans le tiers central d'un carré de dimension $d \times d$. Par définition de d , en dehors de ces carrés, les courbes sont distantes d'au moins $2d \tan(\theta_1/2)/3$. Si on réalise un découpage en dehors de ceux qui isolent les intersections de courbes en rectangles dont les dimensions sont inférieures à $d \tan(\theta_1/2)/3$ alors on est assuré qu'en dehors des rectangles qui contiennent les intersections de courbes, chaque rectangle contient au plus une courbe dont l'angle varie très peu. Ajoutons que si on modifie les positions des droites qui engendrent ces découpages d'une distance inférieure à $d \tan(\theta_1/2)/6$ le résultat est toujours valable.

Nous utilisons maintenant le lemme II.20 pour modifier légèrement ce découpage. D'après le lemme II.20, on déduit que pour tout intervalle I de taille η_1 il existe un η_2 et un θ_0 tel qu'il existe une droite horizontale Δ qui passe par I tel que les courbes \mathcal{C}_j font un angle supérieur à θ_0 avec l'axe horizontal aux points qui sont à une distance inférieure à η_2 de la droite Δ . En prenant des intervalles de longueur $d \tan(\theta_1/2)/6$, on peut remplacer les droites qui engendrent le découpage précédent par de nouvelles droites qui assurent la même séparation des courbes et qui assurent également les conditions de distance entre les courbes et les bords des rectangles du lemme II.19. ■

Le second découpage isole les intersections de courbes dans les rectangles singuliers obtenus par le découpage précédent. Les dimensions des rectangles ne dépendent pas de la géométrie des courbes ici. Il dépend du lissage s . En effet, nous souhaitons isoler les intersections de courbes dans des rectangles singuliers dont les dimensions sont de l'ordre de $s \times s$.

Lemme II.21

Soit \mathcal{R} un rectangle singulier contenant K_1 courbes. Par hypothèse sur f on sait

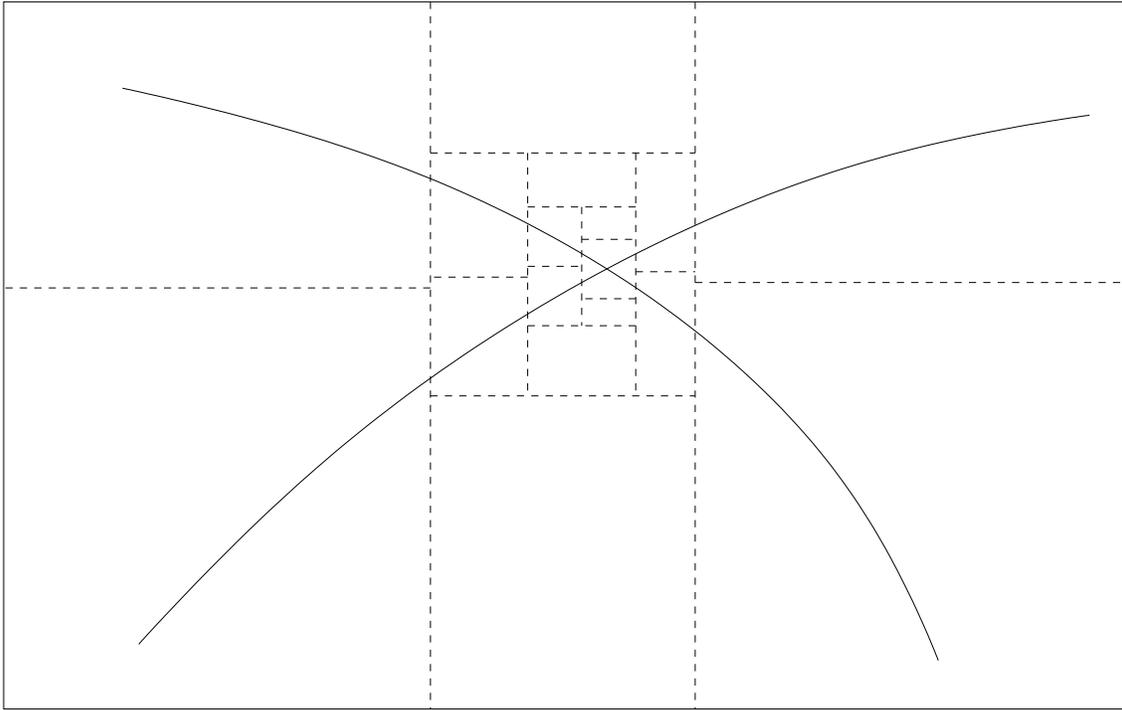


FIG. II.8 – Découpage d'un rectangle contenant une intersection de courbes.

qu'il existe $\theta_1 > 0$ tel que les courbes s'intersectent avec un angle plus grand que $2\theta_1$. De plus comme la direction des courbes change peu sur chacun des rectangles on peut supposer que l'angle entre chaque courbe sur \mathcal{R} est toujours supérieur à θ_1 . Il existe $C > 0$ dépendant de θ_1 tel que si 2^{j_0} est suffisamment petit, il existe un découpage de \mathcal{R} qui engendre au plus

1. 1 rectangle singulier dont la taille est inférieure à $C s \times C s$.
2. $C |\log_2 s|$ rectangles réguliers.
3. $C |\log_2 s|$ rectangles orientés dont les angles associés sont tous supérieurs au θ_0 du premier découpage.
4. $C |\log_2 s|$ modèles d'horizon où δ est minoré uniformément..

Preuve - II.21 -

Pour démontrer ce lemme on utilise un lemme qui va permettre de construire récursivement le découpage souhaité.

Lemme II.22

On note l la longueur de \mathcal{R} et h sa hauteur. Sans perte de généralité on peut supposer

$l \geq h$. Il existe un découpage de \mathcal{R} en au moins $2K_1 + 1$ rectangles tels que l'un d'eux noté \mathcal{R}_0 soit un rectangle singulier dont la longueur est inférieure à $l(1 - \frac{1}{8} \sin \frac{\theta_1}{2})$ et au plus K_1 rectangles orientés et K_1 rectangles réguliers.

Preuve - II.22 -

On suppose sans perte de généralité que $\theta_1 \leq \frac{\pi}{8}$.

Notons X l'intersection des courbes \mathcal{C}_i . On peut supposer que X se trouve dans la partie droite de \mathcal{R} . On note Δ la droite d'équation $x = \frac{1}{8} \sin \frac{\theta_1}{2} l$. On note \mathcal{R}_0 le rectangle formé à la droite de Δ et \mathcal{R}_1 l'autre.

Par construction \mathcal{R}_0 vérifie bien les hypothèses du lemme.

On note $Z_i = (X_i, Y_i)$ les intersections de Δ et des courbes \mathcal{C}_i . Il y a au plus K_1 points Z_i et K_1 courbes dans \mathcal{R}_1 .

Par construction de Δ on a

$$\forall (i, j) \quad \|Z_i - Z_j\| = |Y_i - Y_j| \geq 2l(1 - \frac{1}{8} \sin \frac{\theta_1}{2}) \sin \frac{\theta_1}{2} \geq l \sin \frac{\theta_1}{2}. \quad (\text{II.107})$$

Soient (x_i, y_j) et (x_j, y_j) deux points dans \mathcal{R}_1 sur deux courbes \mathcal{C}_i et \mathcal{C}_j , par construction de Δ on a

$$|y_i - y_j| \geq |Y_i - Y_j| - |Y_i - y_i| - |Y_j - y_j| \geq l(\sin \frac{\theta_1}{2} - 2 \times \tan \frac{\pi}{3} \times \frac{1}{8} \times \sin \frac{\theta_1}{2}) = \frac{l}{2} \sin \frac{\theta_1}{2}. \quad (\text{II.108})$$

Comme X est dans la partie droite de \mathcal{R} , les angles entre les courbes \mathcal{C}_i qui sont dans \mathcal{R}_1 et l'axe horizontal sont toujours inférieurs à $\frac{\pi}{3}$. Ensuite on peut diviser \mathcal{R}_1 avec des droites horizontales Δ_i qui séparent les courbes \mathcal{C}_i en s'assurant que les droites Δ_i sont distantes de plus de $\frac{l}{8} \sin \frac{\theta_1}{2}$ des courbes \mathcal{C}_i . On déduit qu'à l'exception des courbes inférieures et supérieures dans \mathcal{R}_1 , chaque courbe peut être mise dans un modèle d'horizon \mathcal{R}'_i tel que

- la longueur $l'_i = \frac{l}{8} \sin \frac{\theta_1}{2}$,
- la distance d'_i entre la courbe et les bords horizontaux de \mathcal{R}'_i vérifie $d'_i = \frac{l}{8} \sin \frac{\theta_1}{2}$,
- la hauteur h'_i vérifie $h'_i \leq 2d'_i + \tan \frac{\pi}{3} l'_i$

On en déduit $h'_i \leq 2d'_i + 2l'_i \leq 4d'_i$ et donc δ_i est minoré par $1/4$ sur tous les rectangles.

On note \mathcal{R}_u le modèle d'horizon supérieur. Si la courbe dans \mathcal{R}_u est plus proche que d_0 du bord du rectangle alors l'angle de la courbe avec l'horizontal est supérieur à θ_0 au bord du rectangle. On peut alors le diviser en deux verticalement comme dans le lemme II.23 et obtenir un modèle d'horizon et un rectangle orienté avec un angle associé supérieur à θ_0 . Le même raisonnement est valable pour le rectangle inférieur. ■

Nous poursuivons maintenant la preuve du lemme II.21.

On applique récursivement le lemme II.22 au rectangle singulier \mathcal{R}_0 jusqu'à obtenir

un rectangle de taille proportionnelle à $s \times s$. On s'arrête avant la taille s de manière à ce que les minoration des distances entre les courbes et les bords des modèles d'horizon soient toujours supérieures à $4s$. Le nombre n d'étapes nécessaires est borné par

$$n \leq \frac{2 \log_2 s}{\log_2(1 - \frac{1}{8} \sin \frac{\theta_1}{2})}. \quad (\text{II.109})$$

Ainsi le nombre total de rectangles orientés, de modèles d'horizon et de rectangles réguliers produits par ce découpage est proportionnel à $|\log_2 s|$. ■

Après ce second découpage, il reste un certain nombre de rectangles orientés à redécouper. On propose de les découper en deux temps. Soit d_0 et θ_0 les distances et angles associés à l'ensemble des rectangles orientés. Par construction, ces deux valeurs existent et sont strictement positives.

Lemme II.23

On peut diviser chaque rectangle orienté en au plus 3 rectangles tels que

1. *un est un modèle d'horizon.*
2. *deux au plus soient des rectangles orientés tels que l'angle entre la courbe et la direction associée est toujours supérieur à θ_0*

Preuve - II.23 -

Comme l'angle entre la courbe qui traverse \mathcal{R} et l'horizontale est supérieur à θ_0 à proximité des bords, on ne peut avoir que deux portions de courbes à moins de d_0 des bords. On peut donc découper verticalement \mathcal{R} de manière à séparer les rectangles où la courbe est à moins de $d_0/2$ du bord et donc que l'angle est supérieur à θ_0 , du rectangle où la courbe est distante de plus de $d_0/2$ des bords. ■

Le dernier découpage permet d'isoler la singularité éventuelle dans le rectangle orienté et de construire des modèles d'horizon loin de cette singularité.

Lemme II.24

Soit \mathcal{R} un rectangle orienté horizontal tel que l'angle entre la courbe \mathcal{C} et la direction horizontale est supérieur à θ_0 , on peut diviser \mathcal{R} , en plusieurs sous-rectangles tels qu'il y en ait au plus :

1. *1 rectangle singulier dont les dimensions sont inférieures à $C s \times C s$.*
2. *$C |\log_2 s|$ rectangles réguliers.*
3. *$C |\log_2 s|$ modèles d'horizon où δ est minoré uniformément.*

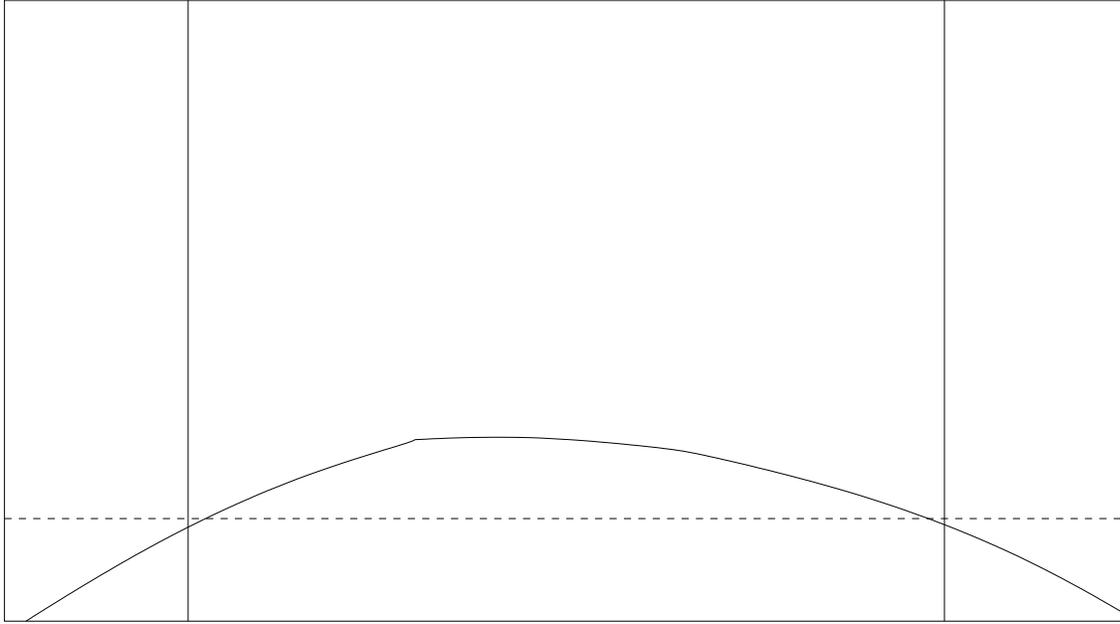


FIG. II.9 – Découpage d'un rectangle orienté en un modèle d'horizon au centre et deux rectangles orientés avec un angle minimal.

Preuve - II.24 -

On suppose sans perte de généralité que la courbe \mathcal{C} est éloignée du bord supérieur de \mathcal{R} et que θ_0 est proche de 0 et positif. On note $Z = (X, Y)$, le point de \mathcal{C} tel que Y est minimal.

On définit $(\Delta_i)_{i \geq 1}$ les droites verticales qui intersectent \mathcal{R} , d'équation $x = X + \frac{2^{i+1}}{\tan \theta_0} s$. On définit ainsi au plus $C|\log_2 s|$ sous-rectangles \mathcal{R}_i tels que l'un d'entre eux noté \mathcal{R}_0 , contient le point Z et que les autres sont des modèles d'horizon tel que la distance entre la courbe \mathcal{C} et le bord inférieur de \mathcal{R} est supérieur à $2^{i+1} s$. La longueur l_i de chaque rectangle \mathcal{R}_i est $\frac{2^{i+1}}{\tan \theta_0} s$

On divise ensuite \mathcal{R}_0 en au plus 4 parties :

1. Un rectangle dont les dimensions sont inférieures à $\frac{8s}{\tan \theta_0} \times \frac{16s}{\tan \theta_0}$.
2. Trois rectangles réguliers, un au dessus, un éventuellement à gauche et un éventuellement au dessous de \mathcal{R}_0 .

On divise ensuite chaque rectangle \mathcal{R}_i horizontalement en 3 rectangles tels que :

1. un d'entre eux soit un modèle d'horizon de longueur $l_i = \frac{2^{i+1}}{\tan \theta_0} s$ et de hauteur $h_i \leq 2^{i+2} s + 2l_i$ pour assurer que la distance entre la courbe \mathcal{C} et le bord horizontal inférieur soit supérieure à $2^{i+1} s$ et donc que $\delta_i \geq \frac{1}{\tan \theta_0}$.
2. les deux autres soient réguliers.

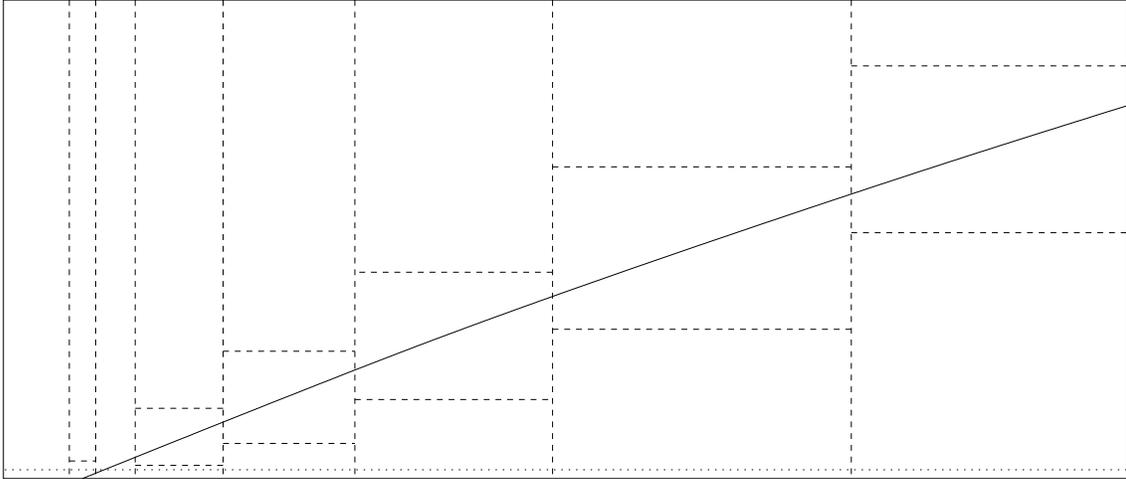


FIG. II.10 – Découpage d'un rectangle orienté avec un angle toujours supérieur à θ_0 .

Finalement on obtient 1 petit rectangle singulier, $C|\log_2 s|$ modèles d'horizon où δ est uniformément minoré et $C|\log_2 s|$ rectangles réguliers.

■

Vérifions maintenant que la suite de ces découpages amène au lemme II.17.

A l'issue du second découpage, il existe K_2 , C_1 et C_2

1. $C_2|\log_2 s|$ rectangles réguliers,
2. $C_2|\log_2 s|$ rectangles orientés,
3. un nombre fini K_1 de rectangles singuliers dont les dimensions sont inférieures à $C_1s \times C_1s$.

Après le découpage en 2 ou 3 des rectangles orientés, on récupère $C_2|\log_2 s|$ modèles d'horizon et au plus $2C_2|\log_2 s|$ rectangles orientés avec un angle minimum. La dernière étape permet d'obtenir de l'ordre de

1. $C|\log_2 s|^2$ rectangles réguliers,
2. $C|\log_2 s|^2$ modèles d'horizon,
3. $C|\log_2 s|$ rectangles singuliers dont les dimensions sont inférieures à $Cs \times Cs$.

d'où le résultat.

Références bibliographiques

Chapitre II

- [BBM99] A. Barron, L. Birgé and P. Massart, “Risk bounds for model selection via penalization”, *Probability Theory and related fields* (1999), pp. 301–413.
- [DJ94a] D.L. Donoho and I.M. Johnstone, “Ideal denoising in an orthonormal basis chosen from a library of bases”.
- [DJ94b] ———, “Ideal spacial adaptation via wavelet shrinkage”.
- [DJ94c] D.L. Donoho and I.M. Johnstone, “Ideal time-frequency denoising”.
- [DJKP93] D. L. Donoho, I. M. Johnstone, G. Kerkyacharian and D. Picard, “Density estimation by wavelet thresholding.”.
- [DJKP95a] ———, “Universal near minimaxity of wavelet shrinkage”.
- [DJKP95b] ———, “Wavelet shrinkage : Asymptopia ? (with discussion).”, *J. of the Royal Stat. Soc., Series B* **57** (1995), pp. 301–369.
- [DMvSS03] D.L. Donoho, S. Mallat, R. von Sachs and Y. Samuelides, “Locally stationary covariance and signal estimation via macrotiles”, *IEEE transactions on signal processing* **51** (2003), no. 3.
- [Don97] D.L. Donoho, “Wedgelets : Nearly-Minimax estimation of edges”.
- [HPDB] Huang, Pollak, Do and Bouman, “Optimal and best basis search in large dictionaries”.
- [JKP03] I. M. Johnstone, G. Kerkyacharian and D. Picard, “Wavelet deconvolution in a periodic setting”.
- [Led96] M. Ledoux, *Isoperimetry and Gaussian Analysis*, 1996.
- [Pen02] E. Le Pennec, *Bandelettes et représentation géométrique des images*, Thèse de doctorat, 2002.
- [PM05] E. Le Pennec and S. Mallat, “Bandelet image approximation and compression”, *IEEE* (2005).

- [Sam01] Y. Samuelides, *Estimation par macrotiles et modèles de marche à sauts*,
Doctoral thesis, 2001.

Application à l'inversion de la tomographie

Ce chapitre utilise les bases orthogonales de bandelettes pour inverser l'opérateur de tomographie en présence de bruit. Un estimateur est construit par seuillage dans une meilleure base de bandelettes.

Cette construction exploite à la fois la capacité des bandelettes orthogonales à bien représenter les fonctions géométriques, et la localisation en échelle des fonctions de base. Nous montrons comment étendre les résultats classiques de débruitage et d'inversion dans une base fixe au cadre d'un dictionnaire de bases. Ceci nous permet de démontrer l'optimalité de l'estimateur en bandelettes pour les fonctions ayant une régularité géométrique.

Des exemples numériques sur des données synthétiques montrent que notre nouvelle méthode apporte une amélioration par rapport aux ondelettes.

III.1 Introduction

Nous proposons maintenant d'utiliser les bases de bandelettes pour estimer un signal f appartenant à la classe Θ_α des fonctions \mathbf{C}^α géométriquement régulières à partir de la transformée de Radon de f en présence de bruit.

$$Y = Rf + W$$

Où W est un bruit blanc gaussien de variance ε^2 et où R désigne la transformée de Radon.

L'opérateur de tomographie R , autre dénomination de la transformée de Radon, est défini pour $f \in L^2([0, 1]^2)$ par :

$$(Rf)(t, \theta) = \int f(x) \delta(x_1 \cos \theta + x_2 \sin \theta - t) dx.$$

La valeur $(Rf)(t, \theta)$ somme les contributions de la fonction originale f le long d'une droite paramétrée par sa pente θ et son abscisse t . Cette opérateur est associé au procédé de tomographie [Her80], où des données sont acquises par lancé de rayons. Les applications dans le domaine médical sont innombrables, principalement en radiologie [Ne81].

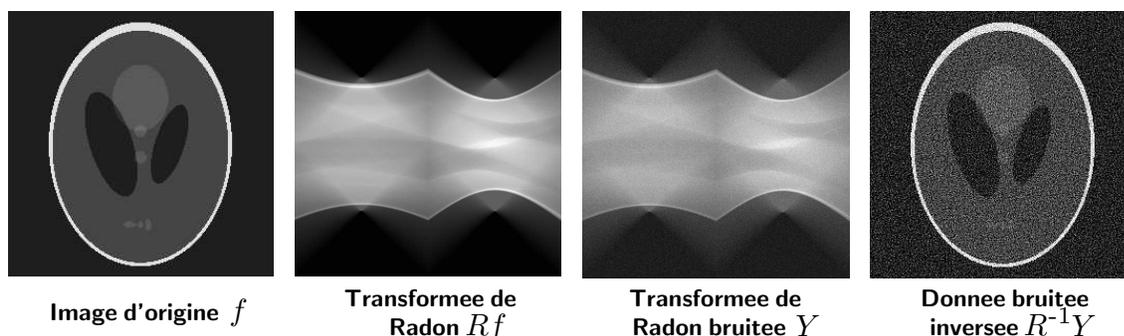


FIG. III.1 – Exemple de transformée de Radon bruitée.

Estimation par seuillage La transformée de Radon s'apparente à un filtre, en effet l'opérateur R^*R est un filtrage et

$$|\widehat{R^*R}(\omega)| = C/|\omega|.$$

Cette propriété induit en particulier que R^{-1} n'est pas borné et qu'on ne peut espérer avoir un estimateur de f correct en calculant $R^{-1}Y$. Il est ainsi nécessaire de construire un estimateur plus robuste qui ne risque pas de faire exploser le bruit aux hautes fréquences.

De nombreuses opérations en traitements d'images correspondent à l'inversion d'un opérateur linéaire comme par exemple la déconvolution ou l'inversion de la tomographie.

$$Y = Kf + W.$$

L'inversion de ces opérateurs est mal posée, et le cadre probabiliste est adapté à la description de ces problèmes, voir à ce sujet la présentation de O'Sullivan [O'S86].

La théorie de la régularisation a été développée par Tikhonov [Tik63] pour résoudre ces problèmes dans le cadre de l'analyse fonctionnelle. Ces méthodes par régularisation se focalisent sur une classe de fonctions qui forment un a priori pour l'inversion.

Des modèles bayésiens permettent de généraliser ces approches, voir par exemple l'approche d'Archer et Titterington [AT95]. La régularisation des problèmes mal posés est aussi un cadre unificateur pour décrire les modèles physiologiques, comme par exemple l'ont montré Bertero et al. pour la vision humaine et Poggio et al. [PTK85] pour la vision par ordinateur.

Des méthodes pénalisant la variation totale de l'image ont été proposées par Rudin et al. [ROF92] ainsi que par Jonsson et al. [JHC98].

Des méthodes récentes exploitent comme a priori un critère de bonne représentation dans une base fixée, comme par exemple la base d'ondelettes qui est utilisée par Daubechies et al. [DDM03]. Ces approches sont équivalentes à une régularisation par pénalisation, mais avec des normes fonctionnelles plus variées.

Il est également possible d'utiliser la représentation de f dans une base orthogonale adaptée à l'opérateur K . L'approche SVD, Singular Value Decomposition, consiste à utiliser une base de vecteurs propres de l'opérateur K^*K et de construire un estimateur diagonal dans cette base. Soit $(e_\nu)_\nu$ une base de vecteurs propres de l'opérateur K^*K associée aux valeurs propres $(k_\nu)_\nu$. Les vecteurs e_ν forment une base orthogonale. On note $h_\nu = Ke_\nu / \|Ke_\nu\|_2$ et on a la formule de reconstruction suivante

$$f = \sum_{\nu} k_\nu^{-1} [Kf, h_\nu] e_\nu.$$

où $[\cdot, \cdot]$ désigne le produit scalaire sur l'espace de Radon.

On estime ensuite f par un estimateur diagonal dans cette base,

$$\hat{f} = \sum_{\nu} \omega_\nu k_\nu^{-1} [Y, h_\nu] e_\nu.$$

(ω_ν) étant une suite d'éléments de $[0, 1]$, choisie a priori pour assurer la convergence de la série.

Comme la base $(e_\nu)_\nu$ est orthogonale, on peut minorer le risque pour le jeu de paramètres $(\omega_\nu)_\nu$ optimal

$$\begin{aligned} E(\|\hat{f} - f\|_2^2) &= \sum_{\nu} (\omega_\nu^2 k_\nu^{-2} \varepsilon^2 + (1 - \omega_\nu)^2 k_\nu^{-2} [Kf, h_\nu]^2) \\ &\geq 1/2 \sum_{\nu} \min(k_\nu^{-2} \varepsilon^2, |\langle f, e_\nu \rangle|^2). \end{aligned}$$

Le risque d'un tel estimateur est ainsi lié à la décroissance des coefficients $|\langle f, e_\nu \rangle|$. Pour la transformée de Radon, comme pour tous les filtres, la base $(e_\nu)_\nu$ est la base de Fourier. L'estimateur par SVD sépare ainsi les fréquences et les traite séparément en atténuant plus celles qui sont amplifiées par l'opérateur inverse K^{-1} . Si les coefficients de Fourier du signal f à estimer décroissent rapidement, la SVD est parfaitement adaptée à l'estimation. Si f contient des singularités, la transformée de Fourier ne décroît pas rapidement et la forte atténuation des hautes fréquences provoque un lissage visible au niveau des singularités.

Si on considère l'opérateur de radon R cette approche n'est pas satisfaisante pour les fonctions de notre modèle Θ_α .

Ce défaut d'estimation est lié au fait que la base $(e_\nu)_\nu$ utilisée est entièrement construite à partir des propriétés de l'opérateur. Donoho dans [Don95] propose une construction similaire à l'aide des ondelettes qui permet d'estimer des fonctions dans des Besov. Candès et Donoho dans [CD00b] poursuivent cette voie en proposant un estimateur diagonal en Curvelets presque optimal pour les fonctions \mathcal{C}^2 géométriquement régulières.

L'idée sous-jacente à ces trois méthodes est d'utiliser une représentation adaptée à l'opérateur et aux fonctions à estimer. A chaque fois on sépare les bandes de fréquences et on les traite séparément. On effectue sur chacune de ces bandes l'équivalent d'un débruitage.

Nous proposons de reprendre cette méthode et de l'appliquer à l'espace Θ_α des fonctions \mathbf{C}^α géométriquement régulières en utilisant les bandelettes de seconde génération. Nous montrons pourquoi cette famille est particulièrement bien adaptée à ce problème et comment on peut appliquer les résultats obtenus en débruitage.

Nous reprenons maintenant plus en détail la Wavelet Vaguelette Decomposition de Donoho et l'inversion en curvelets de Donoho et Candès. Nous mettrons en évidence le fait que ces inversions peuvent être vues comme des débruitages par bandes de fréquences. Nous en déduirons une méthode d'inversion en bandelettes de seconde génération. Nous présenterons cette méthode sous la forme d'une suite de débruitage afin d'utiliser le cadre de la sélection de modèle et les résultats existants sur le débruitage en bandelettes.

III.2 Inversion et seuillage dans une base.

III.2.1 Wavelet-Vaguelette Decomposition

Donoho prend acte des limites de la SVD pour les fonctions dans des espaces de Besov et propose pour l'inversion de certains filtres et de la transformée de Radon une décomposition similaire avec une base d'ondelettes $(\psi_\lambda)_\lambda$. L'objectif de cette nouvelle décomposition est d'exploiter la localisation fréquentielle des ondelettes qui presque diagonalisent ainsi R et la capacité de ces dernières à bien représenter les fonctions des espaces de Besov. On définit ainsi une famille $R^*u_\lambda = k_j\psi_\lambda$. $\lambda = (j, l_1, l_2)$ est un indice triple, représentant un indice d'échelle j et deux indices d'espaces l_1, l_2 . k_j est un réel ne dépendant que de l'échelle j qui permet de normaliser u_λ , de l'ordre de $2^{j/2}$. Les ψ_λ jouent le rôle des vecteurs propres et les k_j des valeurs propres associées. On a par définition de u_λ la formule de reconstruction suivante :

$$f = \sum_{\lambda} [Rf, u_\lambda] k_j^{-1} \psi_\lambda.$$

On estime ensuite f en seuillant les coefficients de $[Y, u_\lambda]$ avec un seuil t_j adapté à chaque échelle j

$$\hat{f} = \sum_{\lambda} S_{t_j}([Y, u_\lambda]) k_j^{-1} \psi_\lambda$$

Les termes $[Y, u_\lambda]$ cachent en quelque sorte une inversion. En effet

$$[Y, u_\lambda] = [Rf + W, u_\lambda] = [R(f + R^{-1}W), u_\lambda] = \langle f + R^{-1}W, R^*u_\lambda \rangle = k_j \langle f + R^{-1}W, \psi_\lambda \rangle$$

Au facteur k_j près $[Y, u_\lambda]$ correspond au coefficient d'ondelettes des données Y brutalement inversées. Le facteur k_j est présent pour contrôler l'explosion du bruit $R^{-1}W$ sur les échelles fines.

On peut ainsi voir l'estimateur \hat{f} en wavelet-vaguelette comme une somme d'estimateurs \hat{f}_j

$$\hat{f} = \sum_j \hat{f}_j \quad \text{avec} \quad \hat{f}_j = k_j^{-1} \sum_{l_1, l_2} S_{t_j}(\langle f + R^{-1}W, \psi_{j, l_1, l_2} \rangle) \psi_{j, l_1, l_2}.$$

Ces estimateurs \hat{f}_j sont obtenus par seuillage des données $R^{-1}Y$ dans la base d'ondelettes. On effectue ainsi un débruitage bande de fréquences par bande de fréquences de $R^{-1}Y$ avec un bruit contrôlé par bande de fréquences. Le niveau du seuil t_j est choisi en fonction de la variance ε_j^2 du bruit $\langle R^{-1}W, \psi_{j, l_1, l_2} \rangle$ qui croît comme $\varepsilon^2 2^{-j}$. Du fait que les ondelettes presque diagonalisent R , le bruit $\langle R^{-1}W, \psi_{j, l_1, l_2} \rangle$ est proche

d'un bruit blanc et on peut transposer des méthodes développées dans le cadre de bruit blanc pour déterminer des seuils t_j qui assurent l'optimalité de l'estimateur sur les espaces de Besov.

Donoho a ainsi montré que la décroissance asymptotique du risque du meilleur estimateur par seuillage en wavelet-vaguelettes était optimale sur des boules d'espaces de Besov $\Theta_{p,q}^s$. Voir [Don95] pour plus de détails.

Les deux points qui assurent que l'estimateur va être performant sont :

- Les ondelettes presque diagonalisent l'opérateur. Cela permet de contrôler au mieux la variance du bruit $[W, u_\lambda]$ en fonction de λ .
- Le fait que les espaces de Besov soient orthosymétriques dans une base d'ondelettes. Cela permet de concentrer l'énergie des fonctions f sur peu de coefficients et ainsi de garantir à chaque échelle un minimum de coefficients au dessus du seuil.

Kalifa et Mallat dans [KM03] utilisent un seuillage adapté dans des bases d'ondelettes miroirs pour inverser un filtrage hyperbolique. Les auteurs montrent que leur estimateur est optimal pour l'estimation des fonctions à variation bornée en encadrant l'espace BV par deux espaces de Besov orthosymétriques dans la base d'ondelettes miroirs.

Ces résultats encourageants ne permettent cependant pas d'estimer de manière optimale les fonctions géométriquement régulières. Donoho et Candès dans [CD00a, CD00c] proposent d'appliquer la même méthode avec les curvelets.

III.2.2 Inversion en curvelets

Les curvelets $(\gamma_\lambda)_\lambda$ forment un tight frame qui assure une représentation presque optimale des fonctions \mathcal{C}_2 régulières. De plus elles sont localisées fréquemment comme les ondelettes et presque diagonalisent donc R . On établit une formule de reconstruction à partir de la famille U_μ définie par $R^*U_\lambda = k_s \gamma_\lambda$ où k_s ne dépend que de l'échelle s .

$$f = \sum_{\lambda} [Rf, U_\lambda] k_s^{-1} \gamma_\lambda.$$

On détermine de la même manière un estimateur par seuillage

$$\hat{f}_{Curvelets} = \sum_{\lambda} S_{t_s}([Y, U_\lambda]) \gamma_\lambda \quad (\text{III.1})$$

avec un seuil dépendant de l'échelle

$$t_s = \sqrt{2 \log N_s} k_s^{-1} \varepsilon \quad (\text{III.2})$$

où N_s est le nombre de curvelets à l'échelle s .

On obtient alors un estimateur dont le risque est quasi optimal sur l'ensemble Θ_2 des fonctions C^2 géométriquement régulières. Pour tout $d > 0$ et pour tout $f \in \Theta_2$

$$MSE(\hat{f}_{\text{Curvelets}}, f, \varepsilon) = O(\varepsilon^{4/5+d}) \quad (\text{III.3})$$

Ce risque est presque optimal sur cette classe. En effet, Candès et Donoho ont montré [CD00c] que le risque optimal est borné inférieurement par $C\varepsilon^{4/5}|\log \varepsilon|^{-2/5}$.

On peut faire la même observation que pour la WVD et voir cet estimateur comme une somme d'estimateurs de débruitage.

Nous proposons d'utiliser les bandelettes de seconde génération et les résultats obtenus en débruitage avec les bandelettes de première génération pour étendre les résultats de Donoho et Candès à la classe Θ_α des fonctions C^α géométriquement régulières.

III.2.3 Inversion en bandelettes

De par leur construction, les bandelettes proposées dans la première partie ne permettent pas d'établir un estimateur optimal. En effet, même si elles assurent une bonne représentation des fonctions de Θ_α , elles ne sont pas localisées en fréquence. Les orthogonalisation des fonctions d'échelles ϕ_{j_0, k_1, k_2} ne permettent pas de contrôler le spectre des bandelettes. La construction des bandelettes de seconde génération proposée par Gabriel Peyré dans sa thèse [Pey05] orthogonalise des fonctions ψ_{j, k_1, k_2} de mêmes échelles.

$$\Psi_{j, l_1, l_2} = \sum_{k_1, k_2} a_{k_1, k_2} \psi_{j, k_1, k_2}$$

On est ainsi assuré de la localisation spectrale des bandelettes. Ces bandelettes, comme les précédentes, assurent une représentation optimale des fonctions de Θ_α . Nous expliquons rapidement dans un paragraphe suivant la construction de ces bandelettes.

Sur le modèle de la WVD nous proposons un estimateur construit échelle par échelle dans une base de bandelettes adaptée. Nous allons utiliser les résultats précédents sur le débruitage issus de la théorie de la sélection de modèles de Birgé et Massart pour garantir le risque des estimateurs \hat{f}_j sur chaque bande. Nous allons considérer le même découpage en espaces d'ondelettes que Donoho dans [Don95]. Nous utiliserons un autre estimateur par seuillage à chaque échelle qui va exploiter la régularité

de la fonction f à chaque échelle. Ainsi le bruit N_j , projection de $R^{-1}W$ sur les espaces d'ondelettes,

$$N_j = \sum_n \langle R^{-1}W, \psi_{jn} \rangle \psi_{jn} 2^{-j/2} \sum_n [W, u_{jn}] \psi_{jn}.$$

que nous essaierons de supprimer à chaque échelle est identique à celui traité par le WVD. Ce bruit est proche d'un bruit blanc, nous utiliserons comme pour la WVD le fait que les bases u_{jn} sont des bases de Riesz pour traiter la coloration de ce bruit. Nous agrégerons ensuite les estimateurs \hat{f}_j pour définir un estimateur global \hat{f} dont les performances seront liées aux capacités d'approximation non linéaire des bandelettes. Nous énoncerons des résultats en probabilité pour conserver une preuve simple mais il est également possible d'obtenir les mêmes résultats en espérance. Nous avons vu dans la première partie comment passer à un résultat en espérance avec des arguments plus techniques. La preuve est identique au débruitage échelle par échelle. La seule différence est le défaut d'orthogonalité de la base u_{jn} qui ne pose pas de problème du fait qu'elle est une base de Riesz comme nous le montrons dans la preuve en probabilité que nous présentons.

Après avoir introduit les notations associées aux bandelettes de deuxième génération et décrit la construction et les propriétés de ces bandelettes, nous construisons notre nouvel estimateur.

III.2.4 Notations

Dans une base orthogonale $B = \{g_\mu\}_\mu$ d'un espace L^2 ou ℓ^2 , la meilleure approximation avec M termes d'une fonction $f \in L^2$ ou d'un vecteur $f \in \ell^2$ dans B peut se calculer à l'aide d'un opérateur de seuillage

$$S_T(f, B) \stackrel{\text{def.}}{=} \sum_{|\langle f, g_\mu \rangle| > T} \langle f, g_\mu \rangle g_\mu \quad \text{avec} \quad M \stackrel{\text{def.}}{=} \text{Card} \{ \mu \mid |\langle f, g_\mu \rangle| > T \},$$

où $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est le produit scalaire canonique sur L^2 ou ℓ^2 .

Dans la suite, on note ψ_{jn}^k une fonction d'ondelettes à l'échelle 2^j et orientation $k \in \{V, H, D\}$, avec $n \in \{0, \dots, 2^{-j} - 1\}^2$. Pour $f \in L^2$ on note

$$\forall n \in \{0, \dots, 2^{-j} - 1\}^2, \quad f_j^k[n] \stackrel{\text{def.}}{=} \langle f, \psi_{jn}^k \rangle$$

les coefficients d'ondelettes de f à l'échelle 2^j et orientation k . De la même façon, si X est un processus aléatoire dont les réalisations sont de carrés intégrables, on

note X_j^k le vecteur aléatoire obtenu par projection sur les fonctions d'ondelettes à l'échelle 2^j et orientation k .

On va utiliser à la fois des normes fonctionnelles

$$\|f\|_{L^2(A)}^2 \stackrel{\text{def.}}{=} \int_A |f(x)|^2 dx \quad \text{pour } A \subset [0, 1]^2,$$

et des normes discrètes

$$\|f_j^k\|_{\ell_j^2(A)}^2 \stackrel{\text{def.}}{=} \sum_{(2^j n) \in A} |f_j^k[n]|^2 \quad \text{pour } A \subset [0, 1]^2,$$

où $\ell_j^2(A)$ est l'espace des vecteurs $\{g[n]\}_{(2^j n) \in A}$. Par exemple, les coefficients de la transformée en ondelettes f_j^k à une échelle donnée 2^j et orientation k d'une fonction f appartiennent à $\ell_j^2([0, 1]^2)$. Dans la suite, on notera $f_j \in \ell^2$ lorsqu'il n'y aura pas de confusion possible sur l'échelle 2^j ou l'orientation k .

III.3 Bandelettes orthogonales de deuxième génération

Comme nous l'avons déjà remarqué, le schéma d'approximation en bandelettes orthogonales dans la première partie, bien qu'adapté à l'approximation de fonctions géométriques, ne convient pas à l'inversion de l'opérateur de tomographie. En effet, les fonctions bandelettes que nous avons construites, ne sont pas localisées en fréquence, ce qui est nécessaire pour bien représenter l'opérateur de tomographie. En effet l'orthogonalisation de Gram Schmidt mélange des fonctions de toutes les échelles. De plus le fait de travailler en espace, sur des rectangles crée des ondelettes de bord dont on ne contrôle pas le spectre.

Pour palier ce problème, un nouveau schéma d'approximation en bandelettes orthogonales de seconde génération est introduit dans [PM05]. Cette nouvelle classe de bases orthogonales est construite directement sur les coefficients discrets d'une transformée en ondelettes. Les fonctions de base sont ainsi des combinaisons linéaires d'ondelettes à une échelle fixée.

Dans cette section nous expliquons la construction de ces bandelettes de seconde génération, et énonçons le résultat d'approximation dans une base adaptée de bandelettes qui sera utile pour démontrer l'optimalité de notre estimateur.

III.3.1 Transformée en bandelettes sur un petit carré

Soit f une fonction avec une régularité géométrique C^α , 2^j une échelle fixée de transformée en ondelettes, et k une orientation.

Une transformée en bandelettes est implémentée à l'aide d'un ensemble d'opérateurs orthogonaux locaux opérant sur les coefficients en ondelettes de f . Plus précisément, chaque opérateur agit sur un sous ensemble de coefficients $f_S \stackrel{\text{def.}}{=} \{f_j^k[n]\}_{(2^j n) \in S}$ où $S = S_1 \times S_2 \in [0, 1]^2$ est un carré.

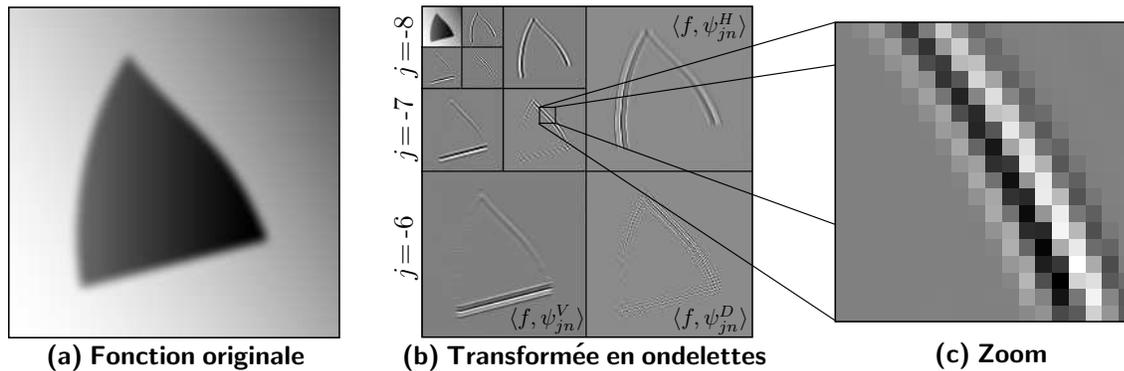


FIG. III.2 – Une image avec de la régularité géométrique et ses coefficients en ondelettes.

La figure III.2 montre un zoom sur les coefficients en ondelettes d'une fonction géométrique, près d'une courbe de singularité. Les opérateurs orthogonaux qui implémentent la nouvelle technique de bandeletisation sont capables d'exploiter la redondance directionnelle qui existe dans cet ensemble de coefficients.

Paramétrisation de la géométrie On construit une base de bandelettes orthogonales discrètes $\mathcal{B}(S, \tilde{g}_S)$ de $\ell_j^2(S)$, qui est paramétrée par une géométrie approchée \tilde{g}_S . Pour décrire cette géométrie, il faut tout d'abord un paramètre Ω qui code le type de la géométrie, qui peut être

- une géométrie horizontale si $\Omega = H$. Dans ce cas, nous utilisons une courbe paramétrée par $(x, \tilde{g}^\Omega(x)) \in S$. Ce type de géométrie est utile si un contour unique g_i traverse S tout en restant relativement horizontal.
- une géométrie verticale si $\Omega = V$. Dans ce cas, nous utilisons une courbe paramétrée par $(\tilde{g}^\Omega(y), y) \in S$.
- aucune géométrie n'est utilisée si $\Omega = \Xi$. Ceci est utile si le carré S ne contient

aucune courbe de singularité, ou bien s'il contient un coin où deux contours concourent.

Il est important de noter que chaque valeur de \tilde{g}^Ω donne naissance à une base de bandelettes, et que le calcul d'un jeu de paramètres adaptés à une fonction donnée fait partie d'une stratégie globale de meilleure base décrite à la section III.3.3.

Lorsque $\Omega = \Xi$, nous gardons les coefficients en ondelette f_S de la fonction d'origine, ce qui revient à définir $\mathcal{B}(S, \tilde{g})$ comme étant la base de Diracs discrets de $\ell_j^2(S)$.

Lorsque $\Omega \neq \Xi$, nous utilisons une géométrie polynômiale quantifiée \tilde{g}^Ω pour définir notre base. Nous ne considérons qu'un nombre fini de géométries potentielles. La paramétrisation exacte de la géométrie est expliquée à la sous-section III.4.4.

Bandeletisation par transformée de Alpert On se place toujours à une échelle 2^j fixée, et on s'intéresse à un carré $S \subset [0, 1]^2$ de largeur b . Dans la suite, on considère seulement le cas d'une géométrie horizontale, paramétrée par $(x, \tilde{g}(x))$, qui intersecte S .

On définit une base de bandelettes de $\ell_j^2(S)$ à l'aide de vecteurs discrets qui oscillent dans de petites bandes suivant la géométrie approchée \tilde{g} .

Pour ce faire, on utilise la déformation qui amène cette géométrie approchée sur la direction horizontale

$$\forall x \in S, \quad w(x_1, x_2) \stackrel{\text{def.}}{=} (x_1, x_2 - \tilde{g}(x_1)).$$

Cette déformation w correspond au warping \mathbf{W} décrit dans la première partie. On subdivise le domaine déformé $\tilde{S} = w(S)$ en petite bandes de largeurs $b2^\ell$ pour $\ell \leq 0$.

Pour chacune de ces largeurs dyadiques, on obtient une segmentation de \tilde{S} en un ensemble de $N_\ell \simeq 2^{-\ell}$ bandes parallèles $\tilde{S} = \bigcup_{i=0}^{N_\ell-1} \tilde{b}_{\ell i}$ comme montré à la figure III.3, et on définit par $b_{\ell i} \stackrel{\text{def.}}{=} w^{-1}(\tilde{b}_{\ell i})$ les bandes dans le domaine d'origine.

On peut ensuite introduire les sous-espace vectoriels de $\ell^2(S)$

$$G_\ell \stackrel{\text{def.}}{=} \left\{ g \in \ell^2(S) \left| \begin{array}{l} \forall x_n \in b_{\ell i}, \quad g[n] = P_i(\tilde{x}_n) \\ \text{et } P_i \text{ est polynômial de degrés } p. \end{array} \right. \right\}.$$

Ces espaces satisfont $G_\ell \subset G_{\ell-1}$, ce qui permet de définir une base orthogonale $\{\Psi_{\ell i}\}_{i=0}^{m_\ell-1}$ de l'espace des détails H_ℓ

$$\text{Vect}_i(\Psi_{\ell i}) = H_\ell \quad \text{où} \quad H_\ell \oplus^\perp G_\ell = G_{\ell-1}. \quad (\text{III.4})$$

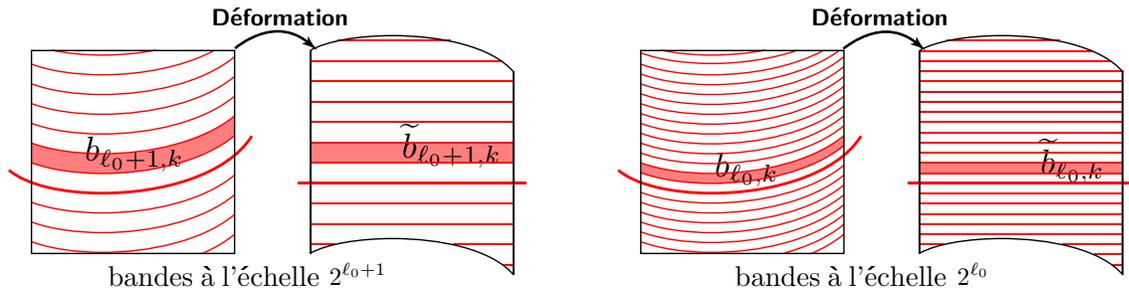


FIG. III.3 – Exemple de dispositions de bandes pour plusieurs tailles $b2^\ell$.

On peut remarquer que la dimension m_ℓ de l'espace H_ℓ est $(p+1)(N_{\ell-1} - N_\ell)$, excepté pour les échelles grossières 2^ℓ , où il peut exister des bandes b_{ℓ_i} contenant moins que $p+1$ points x_n .

On définit ensuite une base de bandelettes discrètes $\mathcal{B}(S, \tilde{g})$ de $\ell^2(S)$ par

$$\mathcal{B}(S, \tilde{g}) \stackrel{\text{def.}}{=} \{\Psi_{\ell i} \mid -2j \log_2(b) \leq \ell \leq 0 \quad \text{et} \quad 0 \leq i \leq m_\ell - 1\}.$$

Cette base est une extension bidimensionnelle des bases de multi-ondelettes de Alpert [Alp93] utilisant des polynômes déformés. La décomposition d'un vecteur de $\ell_j^2(S)$ dans cette base est calculée à l'aide d'un algorithme multirésolution rapide. Cet algorithme suit l'implémentation décrite dans [Alp92], et utilise une procédure d'orthogonalisation de Gram-Schmidt pour calculer, à chaque échelle ℓ , une base de l'espace $G_{\ell-1}$ commençant par les vecteurs de G_ℓ et terminant par les vecteurs de H_ℓ .

III.3.2 Bases et dictionnaire de bandelettes

Paramétrisation d'une base de bandelettes Pour chaque échelle 2^j et orientation k , on construit une base discrète de bandelettes orthogonales $\mathcal{B}(\Gamma_j^k)$ de $\ell_j^2([0, 1]^2)$.

Les paramètres géométriques $\Gamma_j^k \stackrel{\text{def.}}{=} (Q_j^k, \{\tilde{g}_S\}_S)$ sont composés de :

- Une segmentation en quadtree Q_j^k of $[0, 1]^2$. Un quadtree est obtenu en subdivisant de façon récursive le carré $[0, 1]^2$ en quatre sous-carrés de taille égale. La figure III.4 montre un exemple de quadtree adapté à une image donnée.
- Pour chaque carré $S \in Q_j^k$, une géométrie approchée \tilde{g}_S . Comme décrit dans la section précédente, \tilde{g}_S est défini par un type $\Omega \in \{H, V, \Xi\}$, et si $\Omega \neq \Xi$, par un polynôme quantifié. La précision de quantification dépend directement du niveau ε^2 du bruit additionnel. La procédure exacte de quantification est détaillée à la

sous-section III.4.4, et donne naissance à un ensemble $\mathcal{G}_{\varepsilon^2}(S)$ d'environ $\varepsilon^{-2(\alpha-1)}$ géométries potentielles \tilde{g}_S .

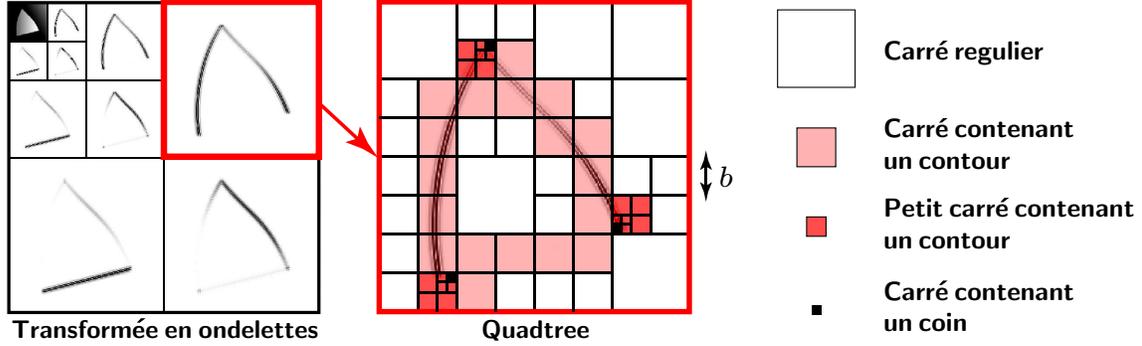


FIG. III.4 – Un exemple de quadtree.

Une base de bandelettes $\mathcal{B}(\Gamma_j^k)$ de tout l'espace discret $\ell_j^2([0, 1]^2)$ est alors définie par

$$\mathcal{B}(\Gamma_j^k) \stackrel{\text{def.}}{=} \bigcup_{S \in Q_j^k} \mathcal{B}(S, \tilde{g}_S)$$

où nous avons implicitement étendu les vecteurs des bases $\mathcal{B}(S, \tilde{g}_S)$ à l'extérieur de S en leur assignant la valeur zéro.

Un vecteur de bandelettes $\Psi_\mu \in \mathcal{B}(\Gamma_j^k)$ est ainsi spécifié par $\mu = (j, k, S, \tilde{g}_S, \ell, i)$ où

- 2^j est l'échelle d'une transformée en ondelettes 2D, et $k \in \{V, H, D\}$ est une orientation,
- $S \in Q_j^k$ est un carré dyadique de largeur $b = L 2^j$,
- \tilde{g}_S est une géométrie approchée quantifiée,
- $\ell \in \{-2 \log_2(L), \dots, 0\}$ et $i \in \{1, \dots, 2^{-\ell}\}$ sont l'échelle et l'index d'une fonction $\Psi_{\ell i}$ dans la base de bandelettes orthogonales $\mathcal{B}(S, \tilde{g}_S)$.

Nous avons ainsi défini

$$\forall x_n \in S \in Q_j^k, \quad \Psi_\mu[n] = \Psi_{\ell i}[n] \quad \text{where} \quad \mathcal{B}(S, \tilde{g}_S) = \{\Psi_{\ell i}\}_{\ell, i}.$$

A quoi ressemblent des bandelettes orthogonales ? Ces vecteurs discrets $\Psi_\mu \in \ell^2([0, 1]^2)$ peuvent être transformés en fonctions $\tilde{\Psi}_\mu \in L^2([0, 1]^2)$ en définissant

$$\tilde{\Psi}_\mu = \sum_n \Psi_\mu[n] \psi_{jn}^k.$$

La figure III.5 montre plusieurs fonctions bandelettes. Ces fonctions sont *aussi régulières* que les fonctions d'ondelettes 2D utilisées. Bien que chaque quadtree segmente l'espace des coefficients en carrés disjoints, la reconstruction après une décomposition en bandelettes seuillée ne souffre pas d'effets de blocs. Ceci est dû au fait que la reconstruction par blocs des coefficients d'ondelettes est filtrée par la transformée en ondelettes inverse.

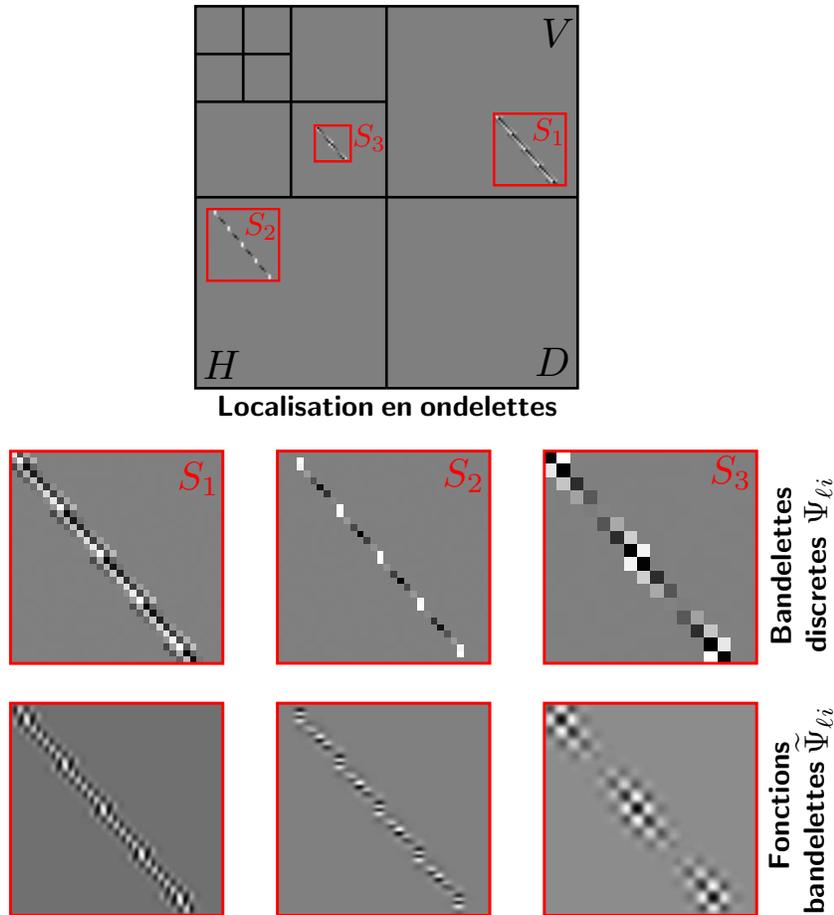


FIG. III.5 – Graphical display of bandelet functions for various scales 2^j .

Structure d'un dictionnaire de bandelettes Soit 2^j une échelle fixée, et k une orientation. Le dictionnaire \mathcal{D}_j^k de base de bandelettes discrètes est composé des bases $\mathcal{B}(\Gamma_j^k)$, obtenues en faisant varier les segmentations en quadtree Q_j^k ainsi que les géométries approchées $\{\tilde{g}_S\}$ à l'intérieur des carrés de la segmentation.

En restreignant les géométries \tilde{g}_S à un ensemble fini $\mathcal{G}_{\varepsilon^2}(S)$, on obtient ainsi un

dictionnaire fini $\mathcal{D}_{j,\varepsilon^2}^k$ de bases de bandelettes

$$\mathcal{D}_{j,\varepsilon^2}^k \stackrel{\text{def.}}{=} \{ \mathcal{B}(\Gamma_j^k) \in \mathcal{D}_j^k \setminus \Gamma_j^k = (Q_j^k, \{\tilde{g}_S\}) \quad \text{et} \quad \forall S \in Q_j^k, \quad \tilde{g}_S \in \mathcal{G}_{\varepsilon^2}(S) \}.$$

III.3.3 Approximation dans une meilleure base de bandelettes

Pour comparer les différentes bases de bandelettes pour l'approximation d'une fonction f donnée, nous utilisons comme précédemment, une entropie qui est aussi une fonctionnelle pénalisée. Soit $\mathcal{B}(\Gamma_j^k) \stackrel{\text{def.}}{=} \{\Psi_\mu\}_\mu$ une base de bandelettes pour une échelle 2^j et orientation k . On définit, pour une fonction $f \in L^2$,

$$\mathcal{E}(f_j^k, \mathcal{B}(\Gamma_j^k), T) \stackrel{\text{def.}}{=} \sum_{|\langle \Psi_\mu, X_j^k \rangle| < T} |\langle \Psi_\mu, f_j^k \rangle|^2 + T^2 M \quad (\text{III.5})$$

où

$$M \stackrel{\text{def.}}{=} \text{Card} \left\{ \mu \setminus |\langle \tilde{\Psi}_\mu, f \rangle| \geq T \right\} + M_G + M_S, \quad (\text{III.6})$$

et où $M_S + M_G$ est le nombre de paramètres nécessaires pour décrire la segmentation en quadtree et les géométries approchées qui composent les paramètres Γ_j^k .

La meilleure base de bandelettes minimisant cette entropie sous forme lagrangienne est alors capable de représenter de façon efficace les coefficients de f à l'échelle 2^j et orientation k . L'algorithme effectif calculant cette meilleure base est décrit à la sous-section III.4.4.

Théorème III.1

Soit $T > 0$ et f une fonction avec une régularité géométrique C^α . Soit $2^j \geq T^{\frac{2\alpha}{\alpha+1}}$ une échelle et k une orientation. On a

$$\mathcal{E}(f_j^k, \mathcal{B}^*, T) \leq C T^{\frac{2\alpha}{\alpha+1}}, \quad \text{où} \quad \mathcal{B}^* \stackrel{\text{def.}}{=} \underset{\mathcal{B} \in \mathcal{D}_{jT^2}^k}{\text{argmin}} (\mathcal{E}(f_j^k, \mathcal{B}, T)), \quad (\text{III.7})$$

et C est une constante qui dépend uniquement de f .

III.4 Estimateur en bandelettes

III.4.1 Définition de l'estimateur

On souhaite estimer une fonction f géométriquement régulière à partir de

$$Y = Rf + W.$$

Comme nous l'avons expliqué nous allons estimer f échelle par échelle à partir des projections sur un espace d'ondelettes de $R^{-1}Y$.

Dans la suite, on note $X_j^k \in \ell_j^2$ les coefficients de la décomposition en ondelettes de X à l'échelle 2^j et orientation k , où X est le signal inversé $X \stackrel{\text{def.}}{=} R^{-1}Y = f + R^{-1}W$.

Pour chaque échelle 2^j , on définit le seuil suivant

$$(t_j)^2 \stackrel{\text{def.}}{=} \lambda |\log(\varepsilon)| \varepsilon^2 2^{-j},$$

où λ est une constante qui sera définie plus tard lors de l'analyse de notre estimateur. À une échelle 2^j vérifiant

$$2^j \geq 2^{j_0} \stackrel{\text{def.}}{=} \varepsilon^{\frac{2\alpha}{2\alpha+1}} = \varepsilon^{\frac{2\alpha}{2\alpha+1}}$$

et une orientation k , l'estimation \hat{f}_j^k des coefficients en ondelettes f_j^k de f est défini par la minimisation de la fonctionnelle pénalisée :

$$\hat{f}_j^k = \underset{\substack{F_\gamma = P_{\mathcal{M}_\gamma} X_j^k \\ \gamma \in \Gamma}}{\operatorname{argmin}} \|X_j^k - F_\gamma\|^2 + t_j^2 M_\gamma \quad .$$

où $F_\gamma = P_{\mathcal{M}_\gamma} X_j^k$ désigne les coefficients d'ondelettes de la projection sur l'espace de bandelettes \mathcal{M}_γ du signal associé aux coefficients X_j^k .

Dans le cadre déterministe de l'approximation de fonctions, on utilisera le terme entropie, comme dans la partie consacrée au débruitage. L'entropie que nous avons définie sous la forme d'un Lagrangien est égale à la fonctionnelle pénalisée. Nous utilisons le terme fonctionnelle pénalisée dans le cadre statistique car nous utilisons la sélection de modèles. Nous utilisons le terme entropie que nous reprenons à Donoho et Johnstone [DJ94b] qui l'ont eux même repris à Coifman et Wickerhauser [CW73] pour la sélection de meilleure base. L'entropie permet dans un cadre d'approximation de sélectionner une meilleure base.

On peut ainsi également définir \hat{f}_j^k en définissant une base optimale

$$\mathcal{B}^*(\Gamma_j^k) \stackrel{\text{def.}}{=} \underset{\mathcal{B}(\Gamma_j^k) \in \mathcal{D}_{j\varepsilon}^k}{\operatorname{argmin}} \mathcal{E}(X_j^k, \mathcal{B}(\Gamma_j^k), t_j).$$

et

$$\hat{f}_j^k \stackrel{\text{def.}}{=} S_{t_j}(X_j^k, \mathcal{B}^*(\Gamma_j^k)).$$

Comme nous ne considérons que les modèles construits à partir de vecteurs appartenant à une même base orthogonale, ces deux définitions sont rigoureusement équivalentes.

On note \mathcal{M}_{γ_0} le modèle associé à \hat{f} et M_{γ_0} la dimension de ce modèle. Pour les fines échelles restantes $2^j < 2^{j_0}$, on définit $\hat{f}_j^k \stackrel{\text{def.}}{=} 0$.

On peut alors agréger les estimateurs à travers toutes les échelles en ondelettes pour obtenir un estimateur \hat{f} de f

$$\hat{f} \stackrel{\text{def.}}{=} \sum_{k,j \leq 0} \sum_n \hat{f}_j^k[n] \psi_{jn}^k.$$

III.4.2 Estimateur oracle

Comme pour le problème de débruitage, nous allons borner le risque en deux temps. D'abord, nous allons montrer grâce à des arguments statistiques que l'estimateur choisi avec la pénalisation adéquate est presque aussi bon qu'un estimateur oracle. Puis nous allons utiliser les capacités d'approximation des bandelettes pour montrer que cet estimateur oracle est bon et donc que l'estimateur sélectionné est bon.

Soit f une fonction ayant une régularité géométrique, C^α , $2^j \geq 2^{j_0}$ une échelle en ondelettes, et k une orientation. Dans la suite, on va noter $f_j \stackrel{\text{def.}}{=} f_j^k$ et on ne fera plus référence à l'orientation courante k .

f_j^1 est l'estimateur oracle défini à partir de f par

$$f_j^1 = \underset{\substack{F_\gamma = P_{\mathcal{M}_\gamma} f \\ \gamma \in \Gamma}}{\operatorname{argmin}} \|f - F_\gamma\|^2 + t_j^2 M_\gamma. \quad (\text{III.8})$$

Cet estimateur par projection peut également être vu comme un estimateur par seuillage dans une meilleure base de bandelettes. On note \mathcal{M}_{γ_1} le modèle associé à f_j^1 et M_{γ_1} la dimension de ce modèle. On peut maintenant montrer comment l'efficacité de notre estimateur peut être bornée à l'aide de l'estimateur oracle.

Proposition III.1

Soit \hat{f}_j l'estimateur en bandelettes défini à la sous-section III.4.1, et f_j^1 l'estimateur oracle défini à l'équation (III.8). Si $\lambda > 32C$, où C est une constante dépendant seulement de l'opérateur R et de la base d'ondelettes, alors avec une probabilité supérieure à $1 - 4\varepsilon^4$, on a

$$\|f_j - \hat{f}_j\|_{\ell_2^2}^2 + (t_j)^2 M_{\gamma_0} \leq C_\lambda \left(\|f_j - f_j^1\|_{\ell_2^2}^2 + (t_j)^2 M_{\gamma_1} \right). \quad (\text{III.9})$$

où $C_\lambda \stackrel{\text{def.}}{=} \left(1 - \sqrt{32C/\lambda}\right)^{-1}$.

Preuve - III.1 -

En utilisant la définition de \hat{f}_j comme minimiseur de la fonctionnelle pénalisée, on a

$$\|X_j - \hat{f}_j\|_{\ell_j^2}^2 + (t_j)^2 M_{\gamma_0} \leq \|X_j - f_j^1\|_{\ell_j^2}^2 + (t_j)^2 M_{\gamma_1}.$$

On utilise ensuite la décomposition suivante

$$\begin{cases} \|X_j - \hat{f}_j\|_{\ell_j^2}^2 = \|X_j - f_j + f_j - \hat{f}_j\|_{\ell_j^2}^2 \leq \|X_j - f_j\|_{\ell_j^2}^2 + \|f_j - \hat{f}_j\|_{\ell_j^2}^2 + \langle X_j - f_j, f_j - \hat{f}_j \rangle, \\ \|X_j - f_j^1\|_{\ell_j^2}^2 = \|X_j - f_j + f_j - f_j^1\|_{\ell_j^2}^2 \leq \|X_j - f_j\|_{\ell_j^2}^2 + \|f_j - f_j^1\|_{\ell_j^2}^2 + \langle X_j - f_j, f_j - f_j^1 \rangle, \end{cases}$$

ce qui mène à

$$\begin{cases} \|X_j - \hat{f}_j\|_{\ell_j^2}^2 - \|X_j - f_j^1\|_{\ell_j^2}^2 + (t_j)^2 \leq (t_j)^2 M_{\gamma_1} \\ \|f_j - \hat{f}_j\|_{\ell_j^2}^2 - \|f_j - f_j^1\|_{\ell_j^2}^2 + \langle X_j - f_j, f_j - \hat{f}_j \rangle + (t_j)^1 M_{\gamma_0} \leq (t_j)^2 M_{\gamma_1}. \end{cases}$$

On a ainsi

$$\|f_j - \hat{f}_j\|_{\ell_j^2}^2 + (t_j)^2 M_{\gamma_0} \leq \|f_j - f_j^1\|_{\ell_j^2}^2 + (t_j)^2 M_{\gamma_1} + 2\langle X_j - f_j, \hat{f}_j - f_j^1 \rangle. \quad (\text{III.10})$$

On définit \mathcal{M} comme étant le modèle de ℓ_j^2 engendré par les bandelettes discrètes générant \hat{f}_j et f_j^1 . Dans la suite, on note N_j les coefficients en ondelettes du bruit additionnel $R^{-1}W$. En utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwartz, on a

$$\langle X_j - f_j, \hat{f}_j - f_j^1 \rangle \langle P_{\mathcal{M}}(N_j), \hat{f}_j - f_j^1 \rangle \leq \|\hat{f}_j - f_j^1\|_{\ell_j^2} \|P_{\mathcal{M}}(N_j)\|_{\ell_j^2}. \quad (\text{III.11})$$

En utilisant la définition de f_j^1 , on a

$$\|\hat{f}_j - f_j^1\|_{\ell_j^2} \leq \|\hat{f}_j - f_j\|_{\ell_j^2} + \|f_j - f_j^1\|_{\ell_j^2} \leq 2 \left(\|f_j - \hat{f}_j\|_{\ell_j^2}^2 + (t_j)^2 M(\hat{f}_j) \right)^{\frac{1}{2}}. \quad (\text{III.12})$$

Pour borner la norme de la projection du bruit N_j sur \mathcal{M} , nous utilisons un lemme statistique dont la démonstration se trouve à la section III.6.1 et qui s'appuie sur le lemme de Borel et sur les propriétés de la WVD pour gérer un bruit qui n'est pas tout à fait blanc.

Lemma III.2

Soit N_j les coefficients en ondelettes de $R^{-1}W$ où W est un bruit blanc gaussien de variance ε^2 . Il existe une constante C telle que, avec une probabilité plus grande que $1 - 4\varepsilon^4$, pour n'importe quel sous-espace \mathcal{E}_1 , de dimension K , généré par des bandelettes, on ait

$$\|P_{\mathcal{E}_1}(N_j)\|^2 \leq C |\log(\varepsilon)| \varepsilon_j^2 K. \quad (\text{III.13})$$

En utilisant le fait que la dimension de \mathcal{M} est plus petite que $M_{\gamma_0} + M_{\gamma_1}$, en utilisant le lemme III.2, on a avec une probabilité plus grande que $1 - 4\varepsilon^4$,

$$\|P_{\mathcal{M}}(N_j)\|^2 \leq C |\log(\varepsilon)| \varepsilon_j^2 (M_{\gamma_0} + M_{\gamma_1}).$$

Ainsi, pour n'importe quel $\lambda > 0$, on a, avec une probabilité plus grande que $1 - 4\varepsilon^4$

$$\begin{aligned} \|P_{\mathcal{M}}(N_j)\|^2 &\leq \frac{C}{\lambda} (\lambda |\log(\varepsilon)| \varepsilon_j^2 (M_{\gamma_0} + M_{\gamma_1})) \\ &\leq \frac{C}{\lambda} \left(\|f_j - \hat{f}_j\|_{\ell_j^2}^2 + (t_j)^2 M_{\gamma_0} + \|f_j - f_j^1\|_{\ell_j^2}^2 + (t_j)^2 M_{\gamma_1} \right) \end{aligned}$$

De part la définition de f_j^1 , on déduit que

$$\|P_{\mathcal{M}}(N_j)\|^2 \leq \frac{C}{\lambda} 2 \left(\|f_j - \hat{f}_j\|^2 + (t_j)^2 M(\hat{f}_j) \right). \quad (\text{III.14})$$

En exploitant les bornes fournies par les équations (III.10), (III.11), (III.12) et (III.14) on obtient

$$\begin{aligned} \|f_j - \hat{f}_j\|^2 + \lambda \varepsilon_j^2 |\log(\varepsilon)| M(\hat{f}_j) &\leq \|f_j - f_j^1\|^2 + \lambda \varepsilon_j^2 |\log(\varepsilon)| M(f_j^1) \\ &\quad + 4 \sqrt{\frac{2C}{\lambda}} \left(\|f_j - \hat{f}_j\|^2 + (t_j)^2 M(\hat{f}_j) \right), \end{aligned}$$

ce qui conclut la preuve de la proposition. \blacksquare

III.4.3 Résultats d'estimation

Après avoir montré que le risque de notre estimateur \hat{f}_j était de l'ordre du risque de l'estimateur oracle f_j^1 pour un bon choix du seuil t_j , on utilise maintenant les propriétés des bandelettes de deuxième génération pour déterminer ce risque. Nous allons pour cela, utiliser les capacités d'approximation des bandelettes.

Proposition III.2

Soit f une fonction ayant une régularité géométrique C^α , et $\varepsilon^2 > 0$ la variance du bruit additionnel. Soit $2^j \geq 2^{j_0}$ une échelle et k une orientation. Alors, avec une probabilité plus grande que $1 - 4\varepsilon^4$, on a

$$\|f_j^k - \hat{f}_j^k\|_{\ell_j^2}^2 \leq C |\log(\varepsilon)| 2^{-j \frac{\alpha}{\alpha+1}} \varepsilon^{\frac{2\alpha}{\alpha+1}}, \quad (\text{III.15})$$

où C est une constante qui dépend seulement de f .

Preuve - III.2 -

On définit f_j^0 comme suit

$$f_j^0 = S_{\tilde{t}_j}(f_j, \mathcal{B}^1) \text{ où } \mathcal{B}^0 \stackrel{\text{def.}}{=} \underset{\mathcal{B} \in \mathcal{D}_{j\varepsilon^2}^k}{\operatorname{argmin}} \mathcal{E}(f_j, \mathcal{B}, \tilde{t}_j). \quad (\text{III.16})$$

où l'on a utilisé un niveau de seuillage $(\tilde{t}_j)^2 \stackrel{\text{def.}}{=} \lambda(\varepsilon_j)^2$. De par la définition de f_j^1 , on a

$$\mathcal{E}(f_j, \mathcal{B}^1, t_j) \leq |\log(\varepsilon)| \mathcal{E}(f_j, \mathcal{B}^0, \tilde{t}_j). \quad (\text{III.17})$$

Où \mathcal{B}^1 est la base associée au modèle \mathcal{M}_{γ_1} et à f_j^1 .

On peut maintenant utiliser la capacité des bandelettes à bien représenter une fonction géométrique. En appliquant le théorème III.1, il existe une constante C qui ne dépend que de f telle que

$$\mathcal{E}(f_j, \mathcal{B}^0, \tilde{t}_j) \leq C (\tilde{t}_j)^{\frac{2\alpha}{\alpha+1}} = C (\lambda \varepsilon_j^2)^{\frac{\alpha}{\alpha+1}}. \quad (\text{III.18})$$

En insérant les inégalités (III.17) et (III.18) dans l'inégalité donnée par le lemme III.1, on conclut la démonstration de la proposition III.2. \blacksquare

On peut maintenant agréger les résultats d'estimation à travers toutes les échelles en ondelettes.

Théorème III.3

Soit f une fonction ayant une régularité géométrique C^α , et $\varepsilon > 0$ un bruit additionnel suffisamment petit. Alors, avec une probabilité plus grande que $1 - C|\log(\varepsilon)|\varepsilon^4$, on a

$$\|f - \hat{f}\|_{L^2}^2 \leq C |\log(\varepsilon)|^{\frac{1}{2\alpha+1}} \varepsilon^{\frac{2\alpha}{2\alpha+1}}, \quad (\text{III.19})$$

où C est une constante qui ne dépend que de f .

Preuve - III.3 -

L'erreur globale commise lors de l'estimation de f se calcule en sommant les erreurs commises lors des estimations de chaque \hat{f}_j^k .

Pour les fines échelles $2^j < 2^{j_0}$, on utilise le fait que $f \in L^2([0, 1]^2)$ et que $\|f\|_{C^\alpha}$ est borné, ce qui implique

$$\|f_j^k\|_{\ell^2}^2 \leq C_1 2^j \implies \sum_{k,j < j_0} \|f_j^k - \hat{f}_j^k\|_{\ell^2}^2 \leq 2 C_1 2^{j_0} \leq |\log(\varepsilon)|^{\frac{1}{2\alpha+1}} \varepsilon^{\frac{2\alpha}{2\alpha+1}}, \quad (\text{III.20})$$

Pour les échelles restantes $2^j \geq 2^{j_0}$, \hat{f}_j^k est défini comme un seuillage dans une meilleure base de bandelettes discrètes. On peut donc appliquer les résultats de III.2, et sommer les erreurs pour obtenir, avec une probabilité plus grande que $1 - C|\log(\varepsilon)|\varepsilon^4$,

$$\|f - \hat{f}\|_{L^2}^2 \leq \sum_{k,j \geq j_0} C \varepsilon^{\frac{2\alpha}{\alpha+1}} |\log(\varepsilon)| 2^{-\frac{\alpha j}{\alpha+1}} + \sum_{k,j < j_0} C_2 2^j \quad (\text{III.21})$$

$$\leq C'' |\log(\varepsilon)|^{\frac{1}{2\alpha+1}} \varepsilon^{\frac{2\alpha}{2\alpha+1}}, \quad (\text{III.22})$$

ce qui termine la preuve du théorème III.3. ■

Ces résultats sont à comparer à ceux de Candès et Donoho dans [CD00b]. Pour des fonctions à régularité géométrique \mathcal{C}^2 , les auteurs montrent que l'erreur d'estimation décroît en

$$MSE(\hat{f}_{\text{curvelets}}, f) = O(\varepsilon^{4/5+d}) \quad \forall d > 0$$

En prenant $\alpha = 2$ on trouve un risque

$$MSE(\hat{f}_{\text{bandelettes}}, f) = O(|\log \varepsilon| \varepsilon^{4/5})$$

Le risque en bandelettes est ainsi comparable à celui obtenu en curvelets pour $\alpha = 2$ et généralise le résultat pour un α quelconque.

Remarque 1

Tous ces résultats sont encore valides lorsque l'on mesure le risque $E(\|f_j - \hat{f}_j\|^2)$, c'est-à-dire lorsque l'on remplace les bornes valides avec grande probabilité par des bornes en espérance. La preuve est identique à celle du débruitage et reprend ainsi la preuve initiale de Barron, Birgé et Massart [BBM99]

III.4.4 Estimation rapide en bandelettes

Dans cette section, nous décrivons chaque étape du calcul de l'estimateur en bandelettes.

Image discrétisée Les calculs qui suivent sont effectués non pas sur des fonctions $f \in L^2$ mais sur des images discrétisées $\bar{f} \in \ell^2$, ce qui correspond à la pratique numérique.

Une image discrétisée \bar{f} de $N \times N$ pixels est obtenue par la projection d'une fonction $f \in L^2([0, 1]^2)$ sur un ensemble de fonctions d'échelle $\{\Phi_{Jn}\}_n$ à une résolution $2^J =$

N^{-1}

$$\forall n \in \{0, \dots, N-1\}^2, \quad \bar{f}[n] \stackrel{\text{def.}}{=} \langle f, \Phi_{Jn} \rangle$$

où

$$\Phi_{Jn}(x) \stackrel{\text{def.}}{=} 2^{-J} \Phi(2^{-J}x - n).$$

L'algorithme Le calcul de l'estimateur en bandelettes inclut la transformée en bandelettes, un seuillage adapté suivant l'échelle et enfin la transformée en bandelettes inverse. La transformée en bandelettes est calculée avec un algorithme rapide qui comprend à la fois le calcul de la meilleure base de bandelettes, $\mathcal{B}^*(\Gamma_j^k)$ pour chaque échelle et le calcul de la décomposition de l'image inversée sur cette base.

(1) Données de l'algorithme. L'utilisateur dispose de données bruitées et discrétisées $\bar{y} = R\bar{f} + \bar{w}$, où w est une réalisation d'un bruit blanc gaussien de variance ϵ . On commence par calculer le signal discrétisé inversé $\bar{g} \stackrel{\text{def.}}{=} R^{-1}\bar{y} = \bar{f} + R^{-1}\bar{w}$ de taille $N \times N$ pixels. On souhaite donc estimer le signal discrétisé d'origine \bar{f} à partir de l'image bruitée \bar{g} . La variance du bruit ϵ peut être estimée directement à partir du signal corrompu \bar{y} à l'aide de techniques standards [DJ94a].

(2) Transformée en ondelettes 2D. On calcule la transformée en ondelettes discrètes 2D des données d'origine \bar{g} . Ceci donne une série de coefficients $\{\bar{g}_j^k\}_{j>J,k}$. Ces nouvelles images \bar{g}_j^k , pour chaque échelle 2^j et orientation $k \in \{V, H, D\}$, peuvent être stockées dans une unique image de la même taille que l'image l'originale \bar{g} . Les étapes suivantes (3)-(7) implémentent la bandelétisation et sont répétées pour chaque échelle et orientation.

(3) Sélection des carrés dyadiques. Un carré dyadique S est, par définition, obtenu en subdivisant de façon récursive le carré $[0, 1]^2$ en quatre sous-carrés de même taille. Ceci permet de regrouper les coefficients $\{\bar{g}_j^k[n]\}_n$ par carrés dyadiques formés par les n vérifiant $2^j n \in S$. Les étapes suivantes (4)-(7) sont répétées pour chaque carré dyadique S à une échelle fixée 2^j et orientation k de la transformée en ondelettes. On note $g_S \stackrel{\text{def.}}{=} \{\bar{g}_j^k[n]\}_{(2^j n) \in S} \in \ell_j^2(S)$ l'ensemble des coefficients en ondelettes à l'intérieur de S .

(4) Quantification de la géométrie. On doit maintenant trouver la meilleure géométrie quantifiée possible \tilde{g}_S à l'intérieur du carré S . On va donc tester, pour chaque

type de géométrie $\Omega \in \{H, V, \Xi\}$ un ensemble suffisant de courbes géométriques (sauf bien sûr pour le cas $\Omega = \Xi$ où l'on ne re-transforme pas g_S).

Dans la suite, on note $\{\theta_i\}_{i=0}^{\alpha-1}$ la base orthogonale des polynômes de Lagrange sur l'intervalle couvert par S (d'abord horizontalement, puis verticalement suivant la valeur de Ω). On teste l'efficacité de la base de bandelettes $\mathcal{B}(S, \tilde{g}_m^\Omega)$ de $\ell_j^2(S)$ pour les géométries

$$\tilde{g}_m^\Omega \stackrel{\text{def.}}{=} \sum_{i=0}^{p-1} (m_i \epsilon^2) \theta_i \quad \text{où } |m_i| \leq A_\theta \epsilon^{-2} \quad \text{et } \Omega \in \{V, H\},$$

pour chaque catégorie $\Omega \in \{H, V\}$ et pour chaque ensemble de coefficients $m \stackrel{\text{def.}}{=} \{m_i\}_i$ vérifiant $|m_i| \leq A_\theta \epsilon^{-2}$.

L'étape suivante (5) est répétée pour chaque géométrie potentielle \tilde{g}_m^Ω , ainsi que pour le cas particulier $\Omega\Xi$.

(5) Calcul de la transformée de Alpert. Pour une géométrie donnée $\tilde{g} = \tilde{g}_m^\Omega$, on calcule l'ensemble des produits scalaires

$$\mathcal{A}_g(g_S)[\ell, i] \stackrel{\text{def.}}{=} \langle g_S, \Psi_{\ell i} \rangle \quad \text{où } \mathcal{B}(S, \tilde{g}) \stackrel{\text{def.}}{=} \{\Psi_{\ell i}\}_{\ell, i}.$$

Cette transformée \mathcal{A}_g peut être calculée avec l'algorithme de transformée de Alpert discrète, comme expliqué dans [Alp92]. Pour le cas particulier $\tilde{g} = \Xi$, la transformation \mathcal{A}_Ξ est l'identité.

(6) Sélection de la meilleure géométrie. Il faut maintenant sélectionner la géométrie $\tilde{g}_S \tilde{g}_m^\Omega$ qui minimise le Lagrangien

$$\mathcal{E}(g_S, \mathcal{B}(S, \tilde{g}_S), t_j) \stackrel{\text{def.}}{=} \sum_{(\ell, i) \in J_\epsilon} |\mathcal{A}_g(g_S)[\ell, i]|^2 + (\text{Card}(J_\epsilon) + M_G) \epsilon^2$$

où t_j est le seuil qui dépend de l'échelle 2^j défini à l'équation III.4.1 et où

$$J_\epsilon \stackrel{\text{def.}}{=} \{(\ell, i) \mid |\mathcal{A}_g(g_S)[\ell, i]| > \epsilon\}$$

et $M_G = 1$ si $\Omega = \Xi$ et $M_G = \alpha$ sinon. On est ainsi capable de définir la géométrie optimale à l'intérieur de S par

$$g_S = \underset{\tilde{g}_m^\Omega}{\text{argmin}} (\mathcal{E}(g_S, \mathcal{B}(S, \tilde{g}_m^\Omega), \epsilon)).$$

(7) Construction du quadtree. Une fois que l'on a calculé les coefficients transformés $\mathcal{A}_{g_S}(g_S)$ pour chaque carré dyadique, on choisit la meilleure segmentation en carrés. Grâce à l'additivité du Lagrangien et à la structure hiérarchique des quadtree, la minimisation de \mathcal{E} peut être effectuée avec une procédure rapide comme introduit dans [Don99] et déjà employé dans [LM05].

Lors de l'étape précédente (6), nous avons enregistré, pour chaque carré dyadique S , la valeur $\mathcal{E}(S) \stackrel{\text{def.}}{=} \mathcal{E}(g_S, \mathcal{B}(S, g_S), t_j)$ du Lagrangien restreint à S , en même temps que la meilleure géométrie quantifiée \tilde{g}_S . Alors, pour chaque échelle 2^j et orientation k , on calcule la structure de quadtree optimale :

- Initialisation du quadtree : chaque petit carré S de largeur $b = 2^j$ est une feuille de l'arbre. On enregistre dans les feuilles de l'arbre la géométrie optimale \tilde{g}_S et on initialise \mathcal{E}_0 , le Lagrangien cumulatif sur le sous-arbre, à $\mathcal{E}_0(S) = \mathcal{E}(S)$.
- On démarre avec des carrés S de taille $b = 2 \times 2^j$.
- Pour chaque carré S , on note (S_1, S_2, S_3, S_4) ses 4 sous-carrés et

$$\mathcal{E}'(S) \stackrel{\text{def.}}{=} \mathcal{E}_0(S_1) + \mathcal{E}_0(S_2) + \mathcal{E}_0(S_3) + \mathcal{E}_0(S_4) + t_j^2$$

est le Lagrangien du sous-arbre (le facteur additionnel t_j^2 est dû au coût du codage de la subdivision, évalué à un coefficient). Les sous-carrés sont regroupés si $\mathcal{E}(S) < \mathcal{E}'(S)$. Si c'est le cas, on déclare S comme une feuille et on enregistre la meilleure géométrie \tilde{g}_S dans l'arbre. On met à jour $\mathcal{E}_0(S) = \min(\mathcal{E}(S), \mathcal{E}'(S))$.

- Tant que $b < 1$, faire $b \leftarrow 2 \times b$ et répéter l'étape précédente.

(9) Seuillage des coefficients. Pour chaque carré S du quadtree, on enregistre les coefficients de la transformée de Alpert $\mathcal{A}_{\tilde{g}_S}(g_S)$. Ces coefficients peuvent être stockés à la place des coefficients de la transformée en ondelettes. On met ensuite à zéro les coefficients dont la valeur absolue est en dessous du seuil t_j .

(10) Calcul de la transformée en bandelettes inverse. Le calcul de la transformée inverse est implémenté en inversant d'abord la transformée de Alpert sur chaque carré dyadique S faisant parti du quadtree à chaque échelle et chaque orientation, puis en inversant la transformée en ondelettes. Ces calculs ne demandent aucune recherche de meilleure base, puisque l'on utilise les paramètres géométriques (quadrees et géométries quantifiées) trouvés lors de la transformée directe.

Complexité numérique Pour une image de $N \times N$ pixels, la complexité numérique de la transformée en ondelettes rapide est de l'ordre de $O(N^2)$. Pour chaque échelle

2^j , chaque orientation k et chaque taille dyadique de carrés b , la complexité de calculer les coefficients de Alpert est

$$\mathcal{C}(j, b) = \underbrace{(1/b)^2}_{\text{nbr.carrés}} \times \underbrace{C_A (2^j b)^2}_{\text{complexité Alpert tr.}} \times \underbrace{C_G \epsilon^{-\eta}}_{\text{nbr.géometries}} = C 2^{-2j} \epsilon^{-\eta}.$$

puisque le nombre de tels carrés est proportionnel à $|\log(\epsilon)|$ et que $\eta < \alpha - 1$. La complexité totale du calcul de l'estimateur est donc asymptotiquement de $O(N^2 \epsilon^{-(\alpha-1)})$.

Bien que polynomiale en N et en ϵ^{-1} , la complexité de la recherche de la géométrie par exploration exhaustive est trop grande pour de grandes images. Les implémentations rapides utilisent des heuristiques pour réduire le nombre de géométries potentielles et se restreignent à des carrés de taille 4×2^j et 8×2^j .

III.5 Résultats numériques

Nous avons testé les algorithmes d'estimation par seuillage en ondelettes et en bandelettes sur des données synthétiques. On utilise une image discrétisée f connue à l'avance (voir figure ?? (a)). On perturbe artificiellement cette image dans le domaine de Radon en posant $y = Rf + w$, où w est une réalisation d'un bruit blanc gaussien de variance ϵ^2 . La figure ?? (b) montre l'image bruitée et inversée $R^{-1}y = f + R^{-1}w$. Dans la suite, on quantifie la variance du bruit w en % relativement à la variance de la transformée de Radon de f notée $\varepsilon(Rf)$.

La transformée de Radon est implémentée numériquement avec l'algorithme de Averbuch, Coifman, Donoho, Israeli et Walden [ACD⁺02]. Ce dernier utilise une paramétrisation des droites d'intégration qui n'est pas exactement polaire, mais ceci n'a pas d'influence sur l'analyse mathématique.

Nous avons testé l'estimateur en bandelettes \hat{f}_b calculé par l'algorithme présenté à la section précédente, ainsi que l'estimateur par seuillage dans une base d'ondelettes. Ces deux estimateurs ont été rendus invariants par translation en réalisant une estimation des différentes versions translattées de l'image et en moyennant les résultats recalés. L'utilisation d'estimateurs invariants par translation améliore grandement les résultats numériques, comme expliqué par Donoho et Coifman [DR95]

On mesure la qualité de l'estimateur à l'aide du PSNR

$$PSNR(f, \hat{f}_b) = -10 \log_2(\|f - \hat{f}_b\|_{L^2} / \|f\|_{\infty}).$$

Sur la figure ??, en haut, on peut voir la comparaison des deux estimateurs pour une large gamme de variances ϵ^2 . On peut observer un gain constant d'environ 0.9dB en

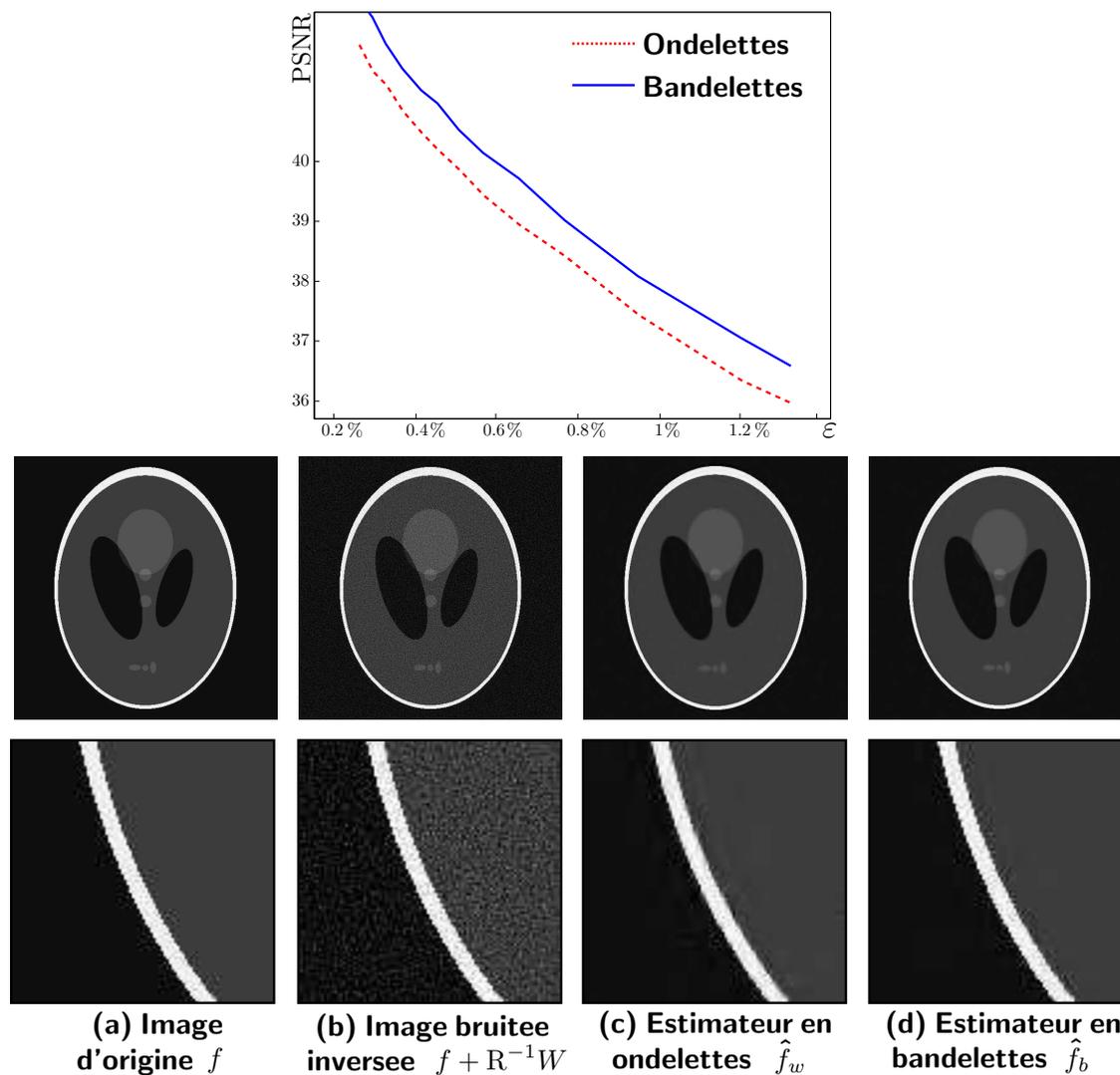


FIG. III.6 – Comparaison de l'inversion de la tomographie par seuillage en ondelettes et en bandelettes. Les images montrées ont été estimées pour un bruit $\epsilon = 1\% \epsilon(Rf)$.

faveur de l'estimateur en bandelettes. En (c) et (d) on peut voir une comparaison visuelle entre les deux estimateurs. L'estimateur en bandelettes respecte mieux les contours très marqués de cette image synthétique. Il reste cependant un travail numérique important pour tester et améliorer cet estimateur en bandelettes dans des cas réels possédant des géométries complexes.

III.6 Appendices

III.6.1 Preuve du lemme III.2

Soit \mathcal{E}_1 un sous-espace vectoriel engendré par K bandelettes. Comme pour le débruitage nous allons utiliser l'inégalité de Borell, démontrée par exemple dans [Adl03] que nous rappelons ici sous forme de lemme

Lemma III.3

Si $\Phi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ est une fonction 1-lipschitz et W est un bruit blanc gaussien de variance ε^2 , alors on a

$$P(\Phi(W) \geq E(\Phi(W)) + \varepsilon t) \leq e^{-t^2/2}.$$

Pour appliquer ce lemme, nous devons écrire $\|P_{\mathcal{E}_1}(N_j)\|$ comme l'image d'un bruit blanc de dimension finie W_j par une fonction Lipschitz f . Avec les notations de la WVD, nous avons

$$N_j = \sum_{n=0}^{2^{-2j}} \langle K^{-1}W, \psi_{jn} \rangle \psi_{jn} 2^{-j/2} \sum_{n=0}^{2^{-2j}} [W, u_{jn}] \psi_{jn}.$$

On définit alors

$$U_j \stackrel{\text{def.}}{=} \text{Vect} \{u_{jn} \mid n \leq 2^{-2j}\},$$

et W_j est la projection orthogonale du bruit W sur U_j , divisée par ε . Comme εW_j est une projection orthogonale d'un bruit blanc gaussien W sur un espace U_j dont la dimension est 2^{-2j} , W_j est un bruit blanc gaussien de dimension 2^{-2j} . On en déduit donc que

$$N_j = \varepsilon_j \sum_{n=0}^{2^{-2j}} [W_j, u_{jn}] \psi_{jn}.$$

On a ensuite $\|P_{\mathcal{E}_1}(N_j)\| = f(W_j)$, où W_j est un vecteur de dimension finie composé de variables aléatoires gaussiennes, centrées, de variance unité, et indépendantes. De plus,

$$\left\{ \begin{array}{l} f \\ U_j \rightarrow \mathbb{R} \\ X \mapsto \|P_{\mathcal{E}_1}(\varepsilon_j \sum_n [X, u_{jn}] \psi_{jn})\| \end{array} \right.$$

où f est $(C_3 \varepsilon_j)$ -lipschitz, puisque la norme L^2 est 1-lipschitz, la projection sur \mathcal{E}_1 est 1-lipschitz et la fonction g telle que $g(X) = \sum_n [X, u_{jn}] \psi_{jn}$ est C_3 lipschitz. Cette propriété qui est au cœur de la WVD est entièrement détaillée dans [Don95] et vient du fait que la base $v_{jn} = 2^{j/2} R \psi_{jn}$ vérifie

$$[u_\lambda, v_\mu] = \delta_{\lambda, \mu}$$

et est une base de Riesz

$$C_2 \left\| \sum_\lambda a_\lambda v_\lambda \right\|_{L^2} \leq \| (a_\lambda) \|_{\ell^2} \leq C_3 \left\| \sum_\lambda a_\lambda v_\lambda \right\|_{L^2}$$

On peut maintenant appliquer, pour tout $\lambda > 0$, le lemme de Borell III.3 à $\| P_{\mathcal{E}_1}(N_j) \|$,

$$P\{ \| P_{\mathcal{E}_1}(N_j) \| - E(\| P_{\mathcal{E}_1}(N_j) \|) > \lambda \} \leq 2e^{-\frac{1}{2}\lambda^2 / (C_3 \varepsilon_j)^2}.$$

En appliquant l'inégalité de Jensen, on déduit, pour tout $\lambda > 0$

$$P\{ \| P_{\mathcal{E}_1}(N_j) \| > \lambda + \sqrt{C_3^2 K \varepsilon_j^2} \} \leq 2e^{-\frac{1}{2}\lambda^2 / (C_3 \varepsilon_j)^2}.$$

Si on choisit $\lambda \geq \sqrt{C_3^2 K \varepsilon_j^2}$, on obtient

$$P\{ \| P_{\mathcal{E}_1}(N_j) \| > 2\lambda \} \leq 2e^{-\frac{1}{2}\lambda^2 / (C_3 \varepsilon_j)^2}.$$

On choisit $\lambda = 2\sqrt{C_3^2 K \varepsilon_j^2 \log(\kappa)}$ pour obtenir :

$$P\{ \| P_{\mathcal{E}_1}(N_j) \| > 4\sqrt{C_3^2 K \varepsilon_j^2 \log(\kappa)} \} \leq 2\kappa^{-2K}.$$

La dimension de \mathcal{E}_1 est bornée par $2N$ et le nombre de sous-espaces \mathcal{E}_1 dont la dimension est K est borné par $\binom{\kappa}{K}$, ainsi

$$\sum_{K=1}^{2N} \binom{\kappa}{K} \kappa^{-2K} \leq \sum_{K=1}^{2N} \frac{\kappa^K}{K!} \kappa^{-2K} \leq \sum_{K=1}^{2N} \kappa^{-K} \leq 2\kappa^{-1}.$$

On a finalement

$$P\left\{ \forall \mathcal{E}_1 \text{ tel que } K \leq 2N, \| P_{\mathcal{E}_1}(N_j) \| \leq 4\sqrt{C_3^2 K \varepsilon_j^2 \log(\kappa)} \right\} \geq 1 - 4\kappa^{-1},$$

ce qui permet de conclure en bornant κ^{-1}

$$\kappa^{-1} \leq 2^{2j_0} = \varepsilon^4.$$

Références bibliographiques

Chapitre III

- [ACD⁺02] A. Averbuch, R. Coifman, D. Donoho, M. Israeli and J. Walden, “Fast slant stack : A notion of radon transform for data on a cartesian grid which is rapidly computable, algebraically exact, geometrically faithful, and invertible”, *SIAM Journal of Scientific Computing*, to appear (2002).
- [Adl03] R. J. Adler, *The geometry of random fields*, Birkhäuser, 2003.
- [Alp92] B.K. Alpert, “Wavelets and other bases for fast numerical linear algebra” in , pp. 181–216, C. K. Chui, editor, Academic Press, San Diego, CA, USA, 1992.
- [Alp93] ———, “A class of bases in L^2 for the sparse representation of integral operators”, *SIAM J. Math. Anal.* **24** (1993).
- [AT95] G. Archer and D.M. Titterton, “On some bayesian/regularization methods for image restoration”, *IEEE Trans. Image Processing* **4** (1995), no. 7, pp. 989–995.
- [BBM99] A. Barron, L. Birgé and P. Massart, “Risk bounds for model selection via penalization”, *Probability Theory and related fields* (1999), pp. 301–413.
- [CD00a] E. J. Candès and D. L. Donoho, “Curvelets and reconstruction of images from noisy radon data”, *Wavelet Applications in Signal and Image Processing VIII*, A. Aldroubi, A. F. Laine, M. A. Unser eds., Proc. SPIE 4119 (2000).
- [CD00b] E.J. Candès and D.L. Donoho, “Recovering edges in ill-posed inverse problems optimality of curvelets frames”, *Ann Statit* (2000), no. 30, pp. 784–842.
- [CD00c] E. J. Candès and D. L. Donoho, “Recovering edges in ill-posed inverse problems optimality of curvelet frames”, *Ann. Statist* **30** (2000), pp. 784–842.

- [CW73] R. A. Coifman and M.V. Wickerhauser, “Entropy-based algorithms for best-basis selection”.
- [DDM03] I. Daubechies, M. Defrise and C. De Mol, *An iterative thresholding algorithm for linear inverse problems with a sparsity constraint*, November 2003.
- [DJ94a] D. Donoho and I. Johnstone, “Ideal spatial adaptation via wavelet shrinkage”, *Biometrika* **81** (1994), pp. 425–455.
- [DJ94b] D.L. Donoho and I.M Johnstone, “Ideal denoising in an orthonormal basis chosen from a library of bases”.
- [Don95] D.L. Donoho, “Nonlinear solution of linear problems by wavelet-vaguelette decomposition”, *App. and Comp. Harmonic Analysis* **2** (1995).
- [Don99] D. Donoho, “Wedgelets : Nearly-minimax estimation of edges”, *Ann. Statist* **27** (1999), pp. 353–382.
- [DR95] D.Donoho and R.Coifman, “Translation-invariant de-noising” in , pp. 125–150, Springer, NY, 1995.
- [Her80] G. T. Herman, *Image reconstruction from projections, the fundamentals of computerized tomography*, Academic Press, New York, 1980.
- [JHC98] E. Jonsson, S. C. Huang and T. Chan, *Total variation regularization in positron emission tomography*, tech. rep., Mathematics, UCLA, 1998.
- [KM03] J. Kalifa and S. Mallat, “Thresholding estimators for linear inverse problems and deconvolutions”, *The Annals of Statistics* **31** (2003), no. 1, pp. 58–109.
- [LM05] E. Le Pennec and S. Mallat, “Bandelet Image Approximation and Compression”, *SIAM Multiscale Modeling and Simulation* (2005), p. to appear.
- [Ne81] T.H. Newton and D.G. Potts (editors), *Radiology of the skull and brain, vol 5 : Technical aspects of computed tomography*, C.V. Mosby Company, 1981.
- [O’S86] F. O’Sullivan, “A statistical perspective on ill-posed inverse problems”, *Statist. Sci.* **1** (1986), pp. 502–527.
- [Pey05] G. Peyré, *La géométrie dans le domaine multiléchelle, application à la compression d’images et à la synthèse de texture*, Thèse de doctorat, 2005.
- [PM05] G. Peyré and S. Mallat, *Image approximation with geometric bandelets*, Preprint CMAP, 2005.

- [PTK85] T.A. Poggio, V. Torre and C. Koch, “Computational vision and regularization theory”, *Nature* **317** (1985), pp. 314–319.
- [ROF92] Leonid I. Rudin, Stanley Osher and Emad Fatemi, *Nonlinear total variation based noise removal algorithms*, Proceedings of the eleventh annual international conference of the Center for Nonlinear Studies on Experimental mathematics : computational issues in nonlinear science, Elsevier North-Holland, Inc., 1992, pp. 259–268.
- [Tik63] A.N. Tikhonov, “The regularization of ill-posed problems”, *Dokl. Akad. Nauk. SSR* **153** (1963), no. 1, pp. 49–52.

Inversion sismique sous contrainte d'échelle

IV.1 Introduction

Nous abordons maintenant le problème de l'inversion sismique. Le but de l'inversion sismique est de déterminer la structure du sous-sol en analysant la réponse de ce dernier à une onde artificielle. Le problème peut être modélisé par une convolution monodimensionnelle

$$y = h \star x + W. \quad (\text{IV.1})$$

y sont les données observées, h un filtre appelé ondelette sismique, W un bruit borné et x la réflectivité du sous-sol. Le terme ondelette introduit par Morlet est à l'origine du nom des bases d'ondelettes. Les ondelettes sismiques sont en effet des fonctions passebandes oscillantes. La réflectivité x est la dérivée par rapport à la profondeur de l'impédance acoustique

$$x = \frac{\partial I(z)}{\partial z}. \quad (\text{IV.2})$$

L'impédance acoustique mesure la capacité d'un matériau à laisser passer une onde de pression et caractérise les matériaux. La connaissance de la réflectivité et donc de l'impédance permet de reconstituer la nature du sous-sol. Le modèle train de Diracs est un modèle de réflectivité utilisé depuis de nombreuses années par les géophysiciens. Ce modèle revient à approcher l'impédance réelle par une impédance constante par morceaux et donc à considérer des couches géologiques homogènes.

$$x = \sum_{i \in S} a_i \delta_i. \quad (\text{IV.3})$$

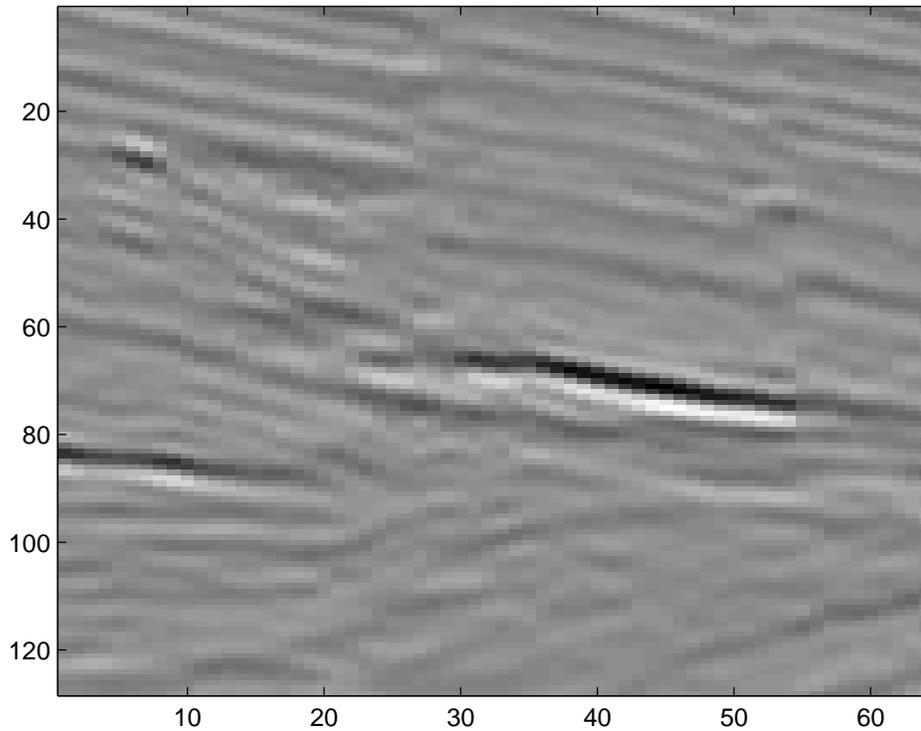


FIG. IV.1 – Données sismiques réelles

Nous souhaitons utiliser cet a priori de concision pour estimer au mieux x à partir de y . Nous montrons dans cette partie comment une minimisation l_1 directe

$$\min_g \|g\|_1 \quad \text{avec } y = h \star g \quad (\text{IV.4})$$

permet de résoudre le problème non bruité

$$y = h \star x \quad (\text{IV.5})$$

et comment une forme relaxée

$$\min_g \frac{1}{2} \|y - h \star g\|_2^2 + \gamma \|g\|_1 \quad (\text{IV.6})$$

permet d'estimer x en présence de bruit (IV.1) ou en l'absence de bruit (IV.5).

Nous détaillons différents critères qui assurent une bonne estimation de x par minimisation l_1 obtenus dans le cadre de la reconstruction de représentations concises de

vecteurs dans des dictionnaires redondants. Nous utiliserons alors un autre formalisme. Nous considérerons le dictionnaire \mathbf{D} formé des images de Diracs par le filtre h

$$\mathbf{D} = [g_i = h \star \delta_i, i \leq N]. \quad (\text{IV.7})$$

Les résultats obtenus dans ce cadre permettent d'estimer une borne sur le cardinal du support d'un vecteur x pour assurer qu'il est l'unique solution de (IV.4) ou proche de la solution de (IV.6) avec $y = h \star x$. Nous verrons que cette borne s'appuie sur un contrôle des produits scalaires $\langle g_i, g_j \rangle$.

Nous verrons également que Gribonval et Nielsen [GN02], Fuchs [Fuc02] et Tropp [Tro05a] proposent des conditions plus générales qui assurent la reconstruction par minimisation l_1 d'un vecteur x . Ces conditions dépendent également des produits scalaires $\langle g_i, g_j \rangle$. Nous allons utiliser le fait que pour la convolution ces produits scalaires dépendent uniquement de la distance $|i - j|$ pour montrer qu'il est possible d'estimer les signaux à une certaine échelle par minimisation l_1 en l'absence ou en présence de bruit. Si $x = \sum_{i \in S} a_i \delta_i$, l'échelle Δ de x est définie par

$$\Delta = \min_{(i,j) \in S, i \neq j} |i - j|.$$

Cette notion d'échelle peut être vue comme une contrainte de concision, en effet un signal d'échelle Δ comprend une proportion supérieure à $(\Delta - 1)/\Delta$ de 0. On borne ainsi le nombre de composantes non nulles par une proportion de la taille du vecteur.

IV.2 Sismique et minimisation l_1

Nous souhaitons estimer x à partir de

$$y = h \star x + W \quad (\text{IV.8})$$

où x est signal à une certaine échelle Δ et où h est une ondelette sismique. A chaque problème d'inversion correspond une ondelette particulière estimée par des mesures le long de puits. Les transformées de Fourier de ces ondelettes sont souvent nulles au delà d'une certaine fréquence et faibles ou nulles aux fréquences proches de 0. Si on note les fréquences dans l'intervalle $[-\pi, \pi]$ on peut considérer que

$$\hat{h}(\omega) = 0 \text{ pour } |\omega| > \omega_c \text{ avec } \omega_c \text{ proche de } \pi/2. \quad (\text{IV.9})$$

Cette caractéristique de l'ondelette sismique va limiter les possibilités de reconstruction en utilisant les méthodes précédentes. En effet si on sépare l'information

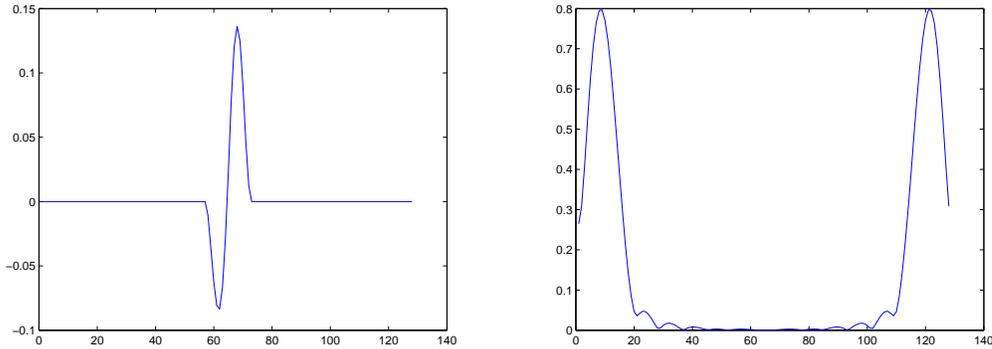


FIG. IV.2 – Ondelette sismique réelle, à gauche en espace, à droite en fréquence

par bande de fréquences comme le fait la Wavelet-Vaguelette decomposition [Don95] on ne pourra rien retrouver aux hautes fréquences, à l'échelle la plus fine. Il existe des méthodes d'inversion sismique par ondelettes mais les meilleurs résultats sont obtenus par minimisation l_1 .

Les ingénieurs qui se sont confrontés à ce problème dès les années 1970 ont proposé de résoudre ce problème par minimisation l_1 , voir Clearbout et Muir [CM73]. Il existe plusieurs versions de cette minimisation. Sans bruit, ie $y = h \star x$

$$\min_g \|g\|_1 \quad \text{avec } Y = h \star g, \quad (\text{IV.10})$$

ou avec bruit, ie $y = h \star x + W$, directement

$$\min_g \|g\|_1 \quad \text{avec } \|Y - h \star g\|_2^2 \leq \varepsilon, \quad (\text{IV.11})$$

ou sous forme relaxée

$$\min_g \frac{1}{2} \|Y - h \star g\|_2^2 + \gamma \|g\|_1. \quad (\text{IV.12})$$

Les premiers résultats obtenus dans les années 80 utilisent des contraintes sur le cardinal du support du vecteur, voir Santosa et Symes [SS86].

Ces dernières années de nombreux résultats ont été obtenus sur l'inversion d'opérateurs linéaires sous contrainte de parcimonie. Le cadre mathématique utilisé par les auteurs, Donoho et Stark [DS89], Donoho et Huo [DH99], Donoho et Elad [DE02], Donoho, Elad et Tselmyakov [DET04], Bruckstein et Elad [EB02], Gribonval et Nielsen [GN02] est celui de la recherche de représentation concise dans un dictionnaire redondant. Dans ces différents articles les auteurs proposent des bornes sur le cardinal d'un support d'un vecteur x_0 pour qu'il soit solution de

$$\min_x \|x\|_1 \quad \text{avec } \mathbf{D}x = \mathbf{D}x_0. \quad (\text{IV.13})$$

Ces critères sur le cardinal sont intéressants pour des dictionnaires quelconques mais souffrent d'un vrai problème pour la déconvolution sismique. Les bornes obtenues sont de l'ordre de 2 ou 3. Ceci est dû aux propriétés spectrales des ondelettes. Comme le spectre des ondelettes est compris dans une bande de basses fréquences, les images de deux diracs proches sont proches. Nous verrons que ces bornes estimées sur un dictionnaire quelconque dépendent de cette proximité.

Le problème est qu'un signal sismique contient souvent plus de 2 ou 3 coefficients non nuls. Les bornes obtenues avec des hypothèses de concision classiques ne permettent donc pas d'assurer une bonne estimation par minimisation l_1 . Pourtant l'expérience montre que cette méthode donne des résultats relativement corrects. Nous proposons d'utiliser les méthodes développées pour la recherche de représentations concises à la reconstruction des signaux ayant une échelle suffisamment grande pour montrer que ces derniers sont estimables par minimisation l_1 .

Le paragraphe suivant décrit des résultats obtenus sur la recherche dans un dictionnaire redondant \mathbf{D} de signaux concis dans un cadre non bruité, qui nous seront utiles pour la déconvolution de signaux d'échelle suffisamment grande. Le dictionnaire \mathbf{D} dans lequel nous ferons nos recherches sera formé par les vecteurs images des diracs par le filtre h

$$\mathbf{D} = [g_i = h \star \delta_i, i \leq N]. \quad (\text{IV.14})$$

Nous pouvons noter dès à présent que les produits scalaires $\langle g_i, g_j \rangle$ sont une fonction de $|i - j|$.

IV.3 Représentation concise de vecteurs dans un dictionnaire

Dans cette partie nous proposons de trouver une représentation concise d'un vecteur $y \in \mathbb{R}^K$ dans un dictionnaire. Nous empruntons la définition du dictionnaire à Gribonval et Nielsen [GN02]

Définition IV.1

Un dictionnaire de \mathbb{R}^K est une famille de $N \geq K$ vecteurs normés $\{g_i\}$ qui engendrent \mathbb{R}^k . On utilisera la notation matricielle $\mathbf{D} = [g_1, \dots, g_N]$ pour le dictionnaire.

Supposons que nous savons que y peut être représenté par une combinaison linéaire d'un petit nombre de vecteurs de \mathbf{D} , c'est-à-dire qu'il existe un vecteur $x \in \mathbb{R}^N$ ayant un petit nombre de composantes non nulles tel que $y = \mathbf{D}x$. x est ici une

représentation de y dans le dictionnaire \mathbf{D} .

Comme le dictionnaire \mathbf{D} est redondant il existe souvent une infinité de combinaisons linéaires d'éléments de \mathbf{D} qui correspondent à y . Ce qui nous intéresse c'est de retrouver parmi toutes les combinaisons linéaires possibles une qui soit concise, faisant intervenir un minimum de vecteurs de \mathbf{D} . Une telle représentation correspond à un vecteur $x \in \mathbb{R}^N$ qui a un petit nombre de composantes non nulles. Deux questions importantes se posent naturellement :

– Étant donné un vecteur y comment retrouver le vecteur x qui exprime y avec le moins possible de vecteurs de \mathbf{D} ?

Exprimé autrement, comment peut on retrouver la combinaison linéaire x qui produit le vecteur y en utilisant le fait que le cardinal du support de x est petit ?

– Étant donnée une méthode qui, à un vecteur y associe sa représentation la plus concise x dans \mathbf{D} , quels sont les vecteurs x qui vont être retrouvés par cette méthode. Quels critères doit on imposer sur x pour qu'il soit reconstructible à partir de $y = \mathbf{D}x$?

La méthode la plus simple qui répond à la première question est d'essayer de minimiser directement la norme l_0 du vecteur x sous la contrainte $y = \mathbf{D}x$.

$$\min \|x\|_0, \quad \text{avec } \mathbf{D}x = y. \quad (\text{IV.15})$$

Malheureusement dans la plupart des cas, ce problème relève de la combinatoire car la seule solution est de tester tous les supports possibles pour x et d'inverser un système au sens des moindres carrés.

Une idée simple pour régler ce problème est de chercher une fonctionnelle proche de (IV.15) qui soit calculable numériquement et qui donne des solutions identiques ou proches de celles obtenues par la minimisation l_0 . La minimisation l_1 sous contrainte d'attache aux données vérifie ces propriétés. On considère donc la seconde fonctionnelle

$$\min \|x\|_1, \quad \text{avec } \mathbf{D}x = y. \quad (\text{IV.16})$$

Pour désigner à fois les deux fonctionnelles nous nous utiliserons la fonctionnelle générique

$$\min \|x\|_\tau, \quad \text{avec } \mathbf{D}x = y. \quad (\text{IV.17})$$

Contrairement à la minimisation l_0 il est possible de réaliser pratiquement une minimisation l_1 , par programmation linéaire ou par l'intermédiaire d'une fonctionnelle relaxée. Un algorithme itératif par projections alternés proposé par Daubechies, Defrise et De Mol [DDM04], et aussi par Chambolle [Cha04] et par Figueiredo et Nowak [FN03], permet de minimiser la fonctionnelle relaxée rapidement en une dimension. La troisième partie est entièrement consacrée à cette méthode de relaxation et aux propriétés de sa solution.

La question qui se pose maintenant est de savoir quels sont les vecteurs x que l'on retrouve par ces deux minimisations. Un vecteur x est dit reconstructible s'il est solution de (IV.17) avec $y = \mathbf{D}x$. S'il minimise uniquement (IV.15) la possibilité de reconstruction est théorique, s'il minimise (IV.16) la reconstruction peut être effective.

IV.3.1 Un critère de reconstruction sur le support du vecteur

Gribonval et Nielsen explicitent un lemme générique dans [GN02] que l'on retrouve sous différentes formes dans un grand nombre de preuves de reconstruction sous contrainte de parcimonie. Nous reprenons leur formulation générale.

On définit d'abord le support d'un vecteur

Définition IV.2

Le support d'un vecteur $\alpha = (\alpha)_n \in \mathbb{R}^N$ est

$$S(\alpha) = \{n, \alpha_n \neq 0\}. \quad (\text{IV.18})$$

On définit ensuite comme pour les applications linéaires, le noyau du dictionnaire,

Définition IV.3

$$\ker(\mathbf{D}) = \{x, \mathbf{D}x = 0\}. \quad (\text{IV.19})$$

Gribonval et Nielsen exposent un critère sur le support d'un vecteur pour déterminer s'il peut être solution de (IV.17).

Lemme IV.1

Soit $S \subset \{1, \dots, N\}$ un ensemble d'indices. Pour $\tau \in \{0, 1\}$ on définit

$$P_\tau(S, \mathbf{D}) = \sup_{x \in \ker(\mathbf{D}), x \neq 0} \frac{\sum_{k \in S} |x_k|^\tau}{\sum_k |x_k|^\tau} \quad (\text{IV.20})$$

1. Si $P_\tau(S(\alpha), \mathbf{D}) < \frac{1}{2}$ alors α est l'unique solution de (IV.17) avec $y = \mathbf{D}\alpha$.
2. Si $P_\tau(S, \mathbf{D}) = \frac{1}{2}$ alors pour tout α tel que $S(\alpha) \subset S$, α est une solution de (IV.17) avec $y = \mathbf{D}\alpha$. D'autre part il existe au moins un élément α_0 dont le support est inclus dans S et un élément $\beta_0 \neq \alpha_0$ tels que $\mathbf{D}\beta_0 = \mathbf{D}\alpha_0$ et $\|\alpha_0\|_\tau = \|\beta_0\|_\tau$.
3. Si $P_\tau(S, \mathbf{D}) > \frac{1}{2}$ il existe α tel que $S(\alpha) \subset S$ and β tel que $\|\beta\|_\tau < \|\alpha\|_\tau$ et $\mathbf{D}\alpha = \mathbf{D}\beta$.

Remarquons que la borne supérieure pour définir $P_\tau(S, \mathbf{D})$ est en fait un maximum. Pour $\tau = 1$ la borne supérieure sur tous les éléments du noyau est égale à celle sur les éléments du noyau de norme 1 et comme l'ensemble des éléments du noyau de norme 1 est un compact, la borne est atteinte. Pour $\tau = 0$ la borne supérieure est prise sur un ensemble fini.

La dernière partie du lemme permet d'affirmer qu'il existe des vecteurs à support dans S qui ne sont pas solution de (IV.17). Il peut cependant exister des vecteurs α à support dans S qui sont solutions uniques de (IV.17). La démonstration de ce lemme permet de comprendre que le signe de x sur son support est un élément qui peut jouer sur son caractère reconstituable si $P_\tau(S, \mathbf{D}) > \frac{1}{2}$.

Ce lemme nous indique également que la possibilité de reconstruire un vecteur dépend du lien qui existe entre son support et les éléments du noyau du dictionnaire.

Preuve - IV.1 -

Supposons $P_\tau(S, \mathbf{D}) < \frac{1}{2}$ et α un vecteur tel que $S(\alpha) \subset S$. Soit β un autre vecteur tel que $\mathbf{D}\alpha = \mathbf{D}\beta$. Comme $x = \beta - \alpha$ appartient au noyau de \mathbf{D} on a

$$\sum_{k \notin S} |x_k|^\tau - \sum_{k \in S} |x_k|^\tau > 0. \quad (\text{IV.21})$$

Par inégalité triangulaire on déduit que

$$\sum_{k \notin S} |x_k|^\tau + \sum_{k \in S} (|\beta_k| - |\alpha_k|) > 0 \quad (\text{IV.22})$$

Et donc

$$\sum_{k \notin S} |\beta_k|^\tau + \sum_{k \in S} |\beta|^\tau - \sum_{k \in S} |\alpha_k|^\tau > 0 \quad (\text{IV.23})$$

D'où le résultat.

Les cas $P_\tau(S, \mathbf{D}) = \frac{1}{2}$ se traitent de la même façon en remplaçant les inégalités par des égalités.

Soit S tel que $P_\tau(S, \mathbf{D}) = \frac{1}{2}$. Montrons l'existence de α_0 et β_0 .

Comme la borne supérieure est atteinte, il existe un élément x du noyau tel que

$$P_\tau(S, \mathbf{D}) = \frac{\sum_{k \in S} |x_k|_\tau}{\sum_k |x_k|_\tau}. \quad (\text{IV.24})$$

On construit α_0 le vecteur tel que pour tout $k \in S$, $\alpha_k = -x_k$ et pour tout $k \notin S$, $\alpha_k = 0$ et le vecteur β_0 tel que pour tout $k \in S$, $\beta_k = 0$ et pour tout $k \notin S$, $\beta_k = x_k$. On a ainsi $\mathbf{D}\beta_0 - \mathbf{D}\alpha_0 = \mathbf{D}x = 0$ et $\|\alpha_0\|_\tau = \|\beta_0\|_\tau$.

Si $P_\tau(S, \mathbf{D}) > \frac{1}{2}$, on construit un vecteur α à support dans S et un vecteur β ayant

la même image et de norme l_τ plus faible.

Pour cela on considère un vecteur x du noyau tel que $\sum_{k \in S} |x_k|^\tau > \sum_k |x_k|^\tau / 2$. Pour tout $k \in S$ on prend $\alpha_k = -x_k$ et $\beta_k = 0$ et pour tout $k \notin S$ on prend $\alpha_k = 0$ et $\beta_k = x_k$. On a bien $\mathbf{D}\beta - \mathbf{D}\alpha = \mathbf{D}x = 0$ et $\|\alpha\|_\tau > \|\beta\|_\tau$. ■

Ce lemme permet de donner une caractéristique précise des supports des vecteurs que l'on peut retrouver par minimisation l_0 et l_1 sous contrainte, même si en pratique il est difficile d'estimer précisément la quantité $P_\tau(S, \mathbf{D})$.

L'idée la plus naturelle pour déterminer si S vérifie $P_\tau(S, \mathbf{D}) < \frac{1}{2}$ est de borner son cardinal *ie* trouver une valeur $f(\mathbf{D})$ telle que

$$\text{Si } \text{card}(S) < f(\mathbf{D}), \text{ alors } P_\tau(S, \mathbf{D}) < \frac{1}{2}. \quad (\text{IV.25})$$

qui correspond à un résultat d'unicité de la forme

$$\text{Si } \|\alpha\|_0 < f(\mathbf{D}), \text{ alors } \alpha \text{ est l'unique solution de (IV.17)} \quad (\text{IV.26})$$

Nous montrons par la suite que la condition $P_\tau(S, \mathbf{D}) < \frac{1}{2}$ est également vérifiée pour des signaux d'échelle suffisamment grande.

Une telle borne fait intervenir ce que Donoho et Elad appelle le Spark de \mathbf{D} dans [DE02] :

Définition IV.4

On définit la quantité $\sigma = \text{Spark}(\mathbf{D})$ comme le plus petit nombre possible tel qu'il existe un ensemble de σ vecteurs de \mathbf{D} qui soient linéairement dépendants.

On a en effet le résultat suivant explicité sous cette forme par Gribonval et Nielsen mais qu'on retrouve dans [DE02] ou dans [DET04].

Lemme IV.2

Notons

$$f_0(\mathbf{D}) \begin{cases} \text{Spark}(\mathbf{D})/2 & \text{si } \text{Spark}(\mathbf{D}) \text{ est pair} \\ (\text{Spark}(\mathbf{D}) + 1)/2 & \text{si } \text{Spark}(\mathbf{D}) \text{ est impair} \end{cases} \quad (\text{IV.27})$$

- Pour $\tau = 0$, (IV.25) est vrai si et seulement si $f(\mathbf{D}) \leq f_0(\mathbf{D})$.
- Si (IV.25) est vérifiée pour $\tau = 1$ avec $f(\mathbf{D})$ alors (IV.25) est également vrai pour $\tau = 0$ avec $f(\mathbf{D})$ et donc $f(\mathbf{D}) \leq f_0(\mathbf{D})$.

Preuve - IV.2 -

– Pour tout S on a

$$P_0(S, \mathbf{D}) \leq \max_{x \in \ker(\mathbf{D}), x \neq 0} \frac{\text{card}(S)}{\|x\|_0} \leq \frac{\text{card}(S)}{\text{Spark}(\mathbf{D})} \quad (\text{IV.28})$$

Donc si $f \leq \frac{\text{Spark}(\mathbf{D})}{2}$ alors (IV.25) est vraie. Si $\text{Spark}(\mathbf{D})$ est impair et $f \leq (\text{Spark}(\mathbf{D}) + 1)/2$, pour tout S , $\text{card}(S) < f$ implique $\text{card}(S) \leq (\text{Spark}(\mathbf{D}) - 1)/2 < \text{Spark}(\mathbf{D})/2$ et donc (IV.25) est vrai.

Pour la réciproque on traite les cas pair et impair séparément.

Supposons $\text{Spark}(\mathbf{D})$ pair. On prend $x \in \ker(\mathbf{D})$ tel que $\|x\|_0 = \text{Spark}(\mathbf{D})$. Si $f > \text{Spark}(\mathbf{D})/2$ il existe $S \subset S(x)$ tel que $\text{card}(S) = \text{Spark}(\mathbf{D})/2 < f$. Par définition de $P_0(S, \mathbf{D})$ on a

$$P_0(S, \mathbf{D}) \geq \frac{\sum_{k \in S} |x_k|_0}{\sum_k |x_k|_0} = \frac{\text{card}(S)}{\text{Spark}(\mathbf{D})} = \frac{1}{2} \quad (\text{IV.29})$$

Supposons que $\text{Spark}(\mathbf{D})$ est impair. On prend toujours $x \in \ker(\mathbf{D})$ tel que $\|x\|_0 = \text{Spark}(\mathbf{D})$ et $f > (\text{Spark}(\mathbf{D}) + 1)/2$.

Soit S un sous ensemble du support de x de cardinal $(\text{Spark}(\mathbf{D}) + 1)/2$.

$$P_0(S, \mathbf{D}) \geq \frac{\sum_{k \in S} |x_k|_0}{\sum_k |x_k|_0} = \frac{\text{Spark}(\mathbf{D}) + 1}{2 \text{Spark}(\mathbf{D})} > \frac{1}{2}. \quad (\text{IV.30})$$

Ce qui conclut la preuve du premier point.

– Soit f tel que $\text{card}(S) < f$ implique $P_1(S, \mathbf{D}) < \frac{1}{2}$. Nous allons montrer que $\text{card}(S) < f$ implique $P_0(S, \mathbf{D}) < \frac{1}{2}$.

Soit α tel que $\|\alpha\|_0 < f$, par hypothèse α est l'unique minimiseur de (IV.16) avec $y = \mathbf{D}\alpha$. Soit β tel que $\mathbf{D}\beta = \mathbf{D}\alpha$ et tel que $\|\beta\|_0 \leq \|\alpha\|_0$, on a $\|\beta\|_0 < f$ et donc β est l'unique minimiseur de (IV.16) avec $y = \mathbf{D}\beta = \mathbf{D}\alpha$, donc $\beta = \alpha$.

On en déduit que si $\beta \neq \alpha$ et $\mathbf{D}\beta = \mathbf{D}\alpha$ alors $\|\beta\|_0 > \|\alpha\|_0$ et donc que α est l'unique minimiseur de (IV.15).

Pour tout S tel que $\text{card}(S) < f$ on a montré que tous les éléments α à support dans S sont les uniques minimiseurs de (IV.15) alors d'après le lemme IV.1 on en déduit que $P_0(S, \mathbf{D}) < \frac{1}{2}$.

D'après le premier point du théorème on déduit enfin que $f \leq f_0(\mathbf{D})$.

■

La quantité $\text{Spark}(\mathbf{D})$ permet donc de contrôler le cardinal maximal d'un support qui induit une reconstruction parfaite, cependant il peut exister des ensembles dont les cardinaux sont plus grands que $\text{Spark}(\mathbf{D})$ qui vérifient $P_\tau(S, \mathbf{D}) < \frac{1}{2}$.

Nous avons ainsi à notre disposition une valeur qui permet d'assurer qu'un ensemble dont le support est restreint est reconstituable. En pratique cette valeur n'est pas toujours accessible et il peut être nécessaire de l'estimer ou de la borner. Dans [DE02], les auteurs proposent différents critères et méthodes qui permettent d'estimer $\text{Spark}(\mathbf{D})$.

Nous proposons ici un autre critère général qui permet d'assurer qu'un vecteur est reconstituable par minimisation l_1 . Ce critère que nous appellerons WERC comme Weak Exact Recovery Coefficient est une version affaiblie du critère introduit par Tropp, voir [Tro04], [Tro05a] et [Tro05b]. Ce critère a été également proposé par Gribonval et Nielsen dans [GN05]. Ses propriétés découlent directement du lemme IV.1. C'est grâce à ce nouveau critère que nous allons montrer que les signaux d'échelle suffisamment grande sont reconstituables par minimisation l_1 directe et relaxée. Il donne une condition facilement estimable à partir des produits scalaires des vecteurs du dictionnaire pour savoir si un support S vérifie $P_1(S, \mathbf{D}) < \frac{1}{2}$. Ce critère donne une condition suffisante mais pas nécessaire. Nous expliquons plus tard ce qu'est l'ERC, nous verrons comment il est relié à WERC.

Le WERC apparaît naturellement à la suite du lemme IV.1 et permet de se faire une idée plus précise des supports S qui sont reconstituables par minimisation l_1 .

Lemme IV.3

Soit $S \subset \{1, \dots, N\}$ on définit

$$\text{WERC}(S) = \frac{\beta(S)}{1 - \alpha(S)} \quad (\text{IV.31})$$

avec

$$\alpha(S) = \sup_{i \in S} \sum_{k \in S, k \neq i} |\langle g_k, g_i \rangle| \quad (\text{IV.32})$$

$$\beta(S) = \sup_{j \notin S} \sum_{k \in S} |\langle g_k, g_j \rangle| \quad (\text{IV.33})$$

$$\text{WERC}(S) < 1 \Rightarrow P_1(S, \mathbf{D}) < \frac{1}{2} \quad (\text{IV.34})$$

et donc si x_0 est à support dans S avec $\text{WERC}(S) < 1$ alors x_0 est l'unique minimiseur de (IV.16).

Preuve - IV.3 -

Soit $Z = (z_i)_i$ un élément du noyau de \mathbf{D} . Par définition de Z on a

$$\sum_i z_i g_i = 0 \quad (\text{IV.35})$$

Ainsi pour chaque indice $k \in S$ comme les vecteurs de \mathbf{D} sont normés on a

$$z_k + \sum_{i \in S, i \neq k} z_i \langle g_k, g_i \rangle = \sum_{i \in S} z_i \langle g_k, g_i \rangle = - \sum_{j \notin S} z_j \langle g_k, g_j \rangle. \quad (\text{IV.36})$$

d'où pour tout indice $k \in S$

$$|z_k| - \sum_{i \in S, i \neq k} |z_i| |\langle g_k, g_i \rangle| \leq \sum_{j \notin S} |z_j| |\langle g_k, g_j \rangle|. \quad (\text{IV.37})$$

Si on somme toutes les inégalités associées aux indices de S on obtient :

$$\sum_{k \in S} |z_k| - \sum_{k \in S} \sum_{i \in S, i \neq k} |z_i| |\langle g_k, g_i \rangle| \leq \sum_{k \in S} \sum_{j \notin S} |z_j| |\langle g_k, g_j \rangle|. \quad (\text{IV.38})$$

$$\sum_{k \in S} |z_k| - \sum_{i \in S} |z_i| \sum_{k \in S, k \neq i} |\langle g_k, g_i \rangle| \leq \sum_{j \notin S} |z_j| \sum_{k \in S} |\langle g_k, g_j \rangle|. \quad (\text{IV.39})$$

D'où par définition de $\alpha(S)$ et $\beta(S)$

$$(1 - \alpha(S)) \sum_{k \in S} |z_k| \leq \beta(S) \sum_{j \notin S} |z_j|. \quad (\text{IV.40})$$

Et donc

$$\sum_{k \in S} |z_k| \leq \text{WERC}(S) \sum_{j \notin S} |z_j|. \quad (\text{IV.41})$$

Donc si $\text{WERC}(S) < 1$ la moitié de la norme l_1 d'un vecteur du noyau ne peut être contenue sur S d'où le lemme.

Notons enfin que la condition $\text{WERC}(S) < 1$ est équivalente à $\beta(S) + \alpha(S) < 1$. ■

Si on borne chacun des produits scalaires des couples de vecteurs par M on peut montrer grâce à le WERC que les supports de petits cardinaux assurent une reconstruction. C'est l'objet du paragraphe suivant, mais ce peut également être vu comme une conséquence de ce lemme. Ce lemme pointe également une idée importante qui sera utile pour la déconvolution : si on veut assurer une restructibilité on peut essayer de borner une somme de produits scalaires. C'est en quelque sorte la norme l_1 des produits scalaires qui importe. On peut borner le maximum de ces produits scalaires pour obtenir des résultats sur des vecteurs concis mais ce n'est pas la seule manière. Dans le cadre du filtrage nous verrons que la décroissance des produits scalaires permet également de contrôler le WERC des signaux de grande échelle. Mais dans un cadre général si le dictionnaire n'a pas de structure particulière la seule quantité que l'on puisse borner est le maximum de ces produits scalaires. Nous introduisons dans le paragraphe suivant la notion de cohérence d'un dictionnaire qui est un outil pratique, facilement calculable et qui permet de borner $\text{Spark}(\mathbf{D})$.

IV.3.2 Utilisation de la cohérence du dictionnaire

Comme la quantité $\text{Spark}(\mathbf{D})$ est difficilement calculable en général on la borne en utilisant la cohérence $M(\mathbf{D})$ du dictionnaire définie par

Définition IV.5

$$M(\mathbf{D}) = \max_{i \neq j} |\langle g_i, g_j \rangle|. \quad (\text{IV.42})$$

Le théorème suivant donne un critère facilement vérifiable sur le support d'un vecteur pour démontrer qu'il est reconstructible.

Théorème IV.4

Pour tout dictionnaire \mathbf{D} , si

$$\|\alpha\|_0 < \frac{1}{2}(1 + 1/M(\mathbf{D})). \quad (\text{IV.43})$$

alors α est l'unique solution des problèmes de minimisation (IV.15) et (IV.16).

Preuve - IV.4 -

On note $M(\mathbf{D}) = M$.

On va montrer que (IV.25) est vrai pour $\tau = 1$ avec $f = (1 + \frac{1}{M})/2$.

Considérons $x \in \ker(\mathbf{D})$. Pour tout k on a $x_k g_k = -\sum_{k' \neq k} x_{k'} g_{k'}$, ainsi en prenant le produit scalaire avec g_k on a $|x_k| \leq M \sum_{k' \neq k} |x_{k'}|$, d'où l'on déduit que

$$(1 + M)|x_k| \leq M\|x\|_1. \quad (\text{IV.44})$$

On somme sur tous les indices $k \in S$ et on obtient

$$P_1(S, \mathbf{D})\|x\|_1 \leq \frac{\text{card}(S)M}{1 + M}\|x\|_1, \text{ et donc} \quad (\text{IV.45})$$

$$P_1(S, \mathbf{D}) \leq \frac{\text{card}(S)M}{1 + M} < 1/2 \quad (\text{IV.46})$$

dès que $\text{card}(S) < (1 + 1/M)/2$. On conclut une nouvelle fois en utilisant le lemme IV.1. ■

Une conséquence de ce théorème et du lemme IV.2 est la minoration de $\text{Spark}(\mathbf{D})$ suivante

$$\text{Spark}(\mathbf{D}) \geq 1 + 1/M. \quad (\text{IV.47})$$

Ce résultat a été proposé la première fois par Donoho et Huo [DH99] dans le cas particulier où le dictionnaire est composé de deux bases orthogonales.

La cohérence d'un dictionnaire ne peut pas être aussi petite que l'on veut. Si le nombre de vecteurs N de \mathbf{D} est strictement supérieur à la dimension K de l'espace vectoriel engendré par ces vecteurs on a

$$\max_{j \neq k} |\langle g_j, g_k \rangle| \geq \sqrt{\frac{N - K}{K(N - 1)}} \quad (\text{IV.48})$$

Voir [SJDH04] pour plus de détails. D'une manière générale on a souvent une borne inférieure de la cohérence qui est au moins de l'ordre de $\frac{1}{\sqrt{K}}$. En effet si le dictionnaire \mathbf{D} contient une base orthogonale et un autre vecteur cette borne est déjà atteinte : Si les K premiers vecteurs forment une base orthogonale on a $\sum_{k=1}^K |\langle g_{K+1}, g_k \rangle|^2 = \|g_{K+1}\|_2^2 = 1$ et donc $\max_{k=1}^K |\langle g_{K+1}, g_k \rangle|^2 \geq 1/K$ d'où

$$M(\mathbf{D}) \geq 1/\sqrt{K}. \quad (\text{IV.49})$$

En pratique dans les cas étudiés comme K est souvent plus petit qu'une fraction de N , (IV.48) assure que $M(\mathbf{D})$ est minorée par une quantité qui est de l'ordre de $1/\sqrt{N}$. Nous verrons en particulier que la cohérence du dictionnaire associé à un filtrage passe bas n'est pas proche de 0 et que ce n'est pas un bon moyen d'estimer $\text{Spark}(\mathbf{D})$.

Cependant, la plupart des résultats d'inversion sous contrainte de concision utilise des bornes issues de la cohérence. Dans la suite nous tâcherons de comprendre quelle est son utilité et comment nous en passer dans des cas où elle est trop grande. C'est pourquoi nous développons dans les paragraphes suivants des critères plus généraux tel celui de Gribonval et Nielsen, qui permettent d'assurer que x_0 est l'unique minimiseur d'une fonctionnelle. Ces critères peuvent être utilisés avec la cohérence et le sont généralement car c'est souvent le seul élément que l'on contrôle dans le dictionnaire, mais sont plus généraux et permettent dans certains cas de s'affranchir de la cohérence.

IV.4 Minimisation d'une fonctionnelle relaxée

On peut résoudre le problème de minimisation l_1 (IV.16) directement par programmation linéaire, voir [CDS99] pour les détails, en utilisant des slack-variables. En pratique on utilisera la fonctionnelle relaxée suivante :

$$\min_x \frac{1}{2} \|\mathbf{D}x - y\|_2^2 + \gamma \|x\|_1, \quad \gamma > 0. \quad (\text{IV.50})$$

Le paramètre γ doit être bien choisi, nous expliquerons comment. Un avantage de cette approche est qu'il existe plusieurs algorithmes efficaces qui minimisent (IV.50). Nous avons utilisé l'algorithme itératif par projections alternées proposé par Daubechies, Defrise et De Mol dans [DDM04] d'une part, par Figueiredo et Nowak [FN03] et Chambolle [Cha04] d'autre part. Un autre algorithme proposé par Maria et Fuchs dans [SF05] permet de résoudre (IV.50) également. La méthode LARS proposée par Efron, Hastie, Johnstone et Tibshirani [EHJT04] et une méthode utilisant des polytopes proposé par Plumbley [Plu05a, Plu05b] permet également de résoudre le même problème.

Un autre avantage important de cette approche est qu'elle permet d'envisager le cas bruité. En effet nous verrons que que le vecteur $x(\gamma)$ qui minimise cette fonctionnelle ne vérifie jamais $\mathbf{D}x(\gamma) = y$.

γ est un paramètre qui pondère l'importance de la norme l_1 dans la fonctionnelle (IV.50), plus γ est petit et plus $\mathbf{D}x(\gamma)$ se rapproche de y , plus γ est grand plus la norme l_1 de $x(\gamma)$ est petite.

Dans l'hypothèse où les données y sont bruitées on ne recherche pas nécessairement un antécédent exact de y mais un vecteur x avec une norme l_1 faible qui donne un résultat proche.

Nous montrerons que sous certaines conditions l'optimum de (IV.50) converge vers le minimum de (IV.16). Cependant il n'est pas nécessaire de construire une suite de γ_n qui tend vers 0 pour retrouver la solution de (IV.16). En effet un des lemmes présentés dans cette partie assure que dès que γ est suffisamment petit, le support de $x(\gamma)$ est le même que celui du vecteur x_0 recherché, si x_0 vérifie certaines hypothèses. Cette propriété est importante car la connaissance du support S du vecteur recherché permet de retrouver ce vecteur simplement par projection sur S .

Dans la suite on considérera autant \mathbf{D} comme un dictionnaire que comme la matrice d'une application linéaire. Ainsi on effectuera des produits matriciels et des inversions, on considérera également la transposée de \mathbf{D} ou d'un sous-dictionnaire ou sous-matrice de \mathbf{D} .

Nous dirons qu'un vecteur x_0 est reconstituable s'il existe γ tel que le minimiseur $x(\gamma)$ de (IV.50) avec $y = \mathbf{D}x_0$ ait le même support que x_0 et que les composantes non nulles de $x(\gamma)$ et x_0 aient mêmes signes.

Nous proposons dans cette partie une étude de la solution de (IV.50), nous montrons comment l'optimum de cette fonctionnelle permet de reconstruire certains vecteurs, dont les vecteurs concis que nous avons décrits dans la partie précédente.

Nous analyserons en particulier deux critères de reconstruction l'un proposé par Tropp l'autre par Fuchs qui nous serviront de base pour la déconvolution de signaux d'échelle suffisamment grande. Nous présentons d'abord les deux critères en faisant le lien avec le WERC précédemment introduit puis nous donnons les résultats de

convergence dans les cas bruité et non bruité obtenus par Fuchs.

IV.4.1 Exact Recovery Coefficient

La plupart des théorèmes utilisables qui assurent la reconstruction d'un vecteur x_0 à partir de $y = \mathbf{D}x_0 + W$ imposent des conditions sur le cardinal du support de x_0 . Ces conditions de concision sont en fait des corollaires de conditions sur le support qui sont vérifiées par les vecteurs concis.

Fuchs et Tropp proposent deux critères très proches qui sont plus généraux que la concision et qui permettent d'assurer la reconstruction d'un vecteur x_0 .

Le critère proposé par Fuchs [Fuc02, Fuc05] est un critère sur le support de x_0 et sur les signes des composantes de x_0 . Celui proposé par Tropp [Tro05a] ne fait intervenir que le support.

Nous faisons une description assez détaillée de ces deux critères dans l'optique de la déconvolution. En effet même s'ils ont été développés dans un cadre de dictionnaire quelconque et jusqu'à présent utilisés essentiellement avec la cohérence ils sont remarquablement adaptés à la déconvolution avec une échelle minimale.

Soit S un ensemble d'indices, on définit les matrices $\bar{\mathbf{D}}_S$ et $\tilde{\mathbf{D}}_S$ comme les matrices extraites de \mathbf{D} composées respectivement des colonnes indicées par S et des autres colonnes. De même on peut décomposer tout vecteur x en deux sous vecteurs \bar{x}_S et \tilde{x}_S composés des coordonnées d'indices $i \in S$ et $j \notin S$.

On note enfin $B^+ = (B^t B)^{-1} B^t$ le pseudo-inverse de B pour toute matrice B extraite de \mathbf{D} .

Le critère utilisé par Fuchs que nous noterons $F(x_0)$ est défini par

$$F(x_0) = \max_{j \notin S} |g_j^t \bar{\mathbf{D}}_S^{+t} \text{sign}(\bar{x}_0)| \quad (\text{IV.51})$$

où S est le support de x_0 .

Fuchs montre que si $F(x_0) < 1$ alors si γ est bien choisi on peut reconstruire x_0 en minimisant (IV.50), les détails précis sont donnés dans le paragraphe suivant.

Si on sait calculer la matrice $\bar{\mathbf{D}}_S^{+t}$, il est facile de savoir si x_0 est reconstructible.

Le critère utilisé par Tropp est appelé ERC pour Exact Recovery Coefficient et ne fait intervenir que le support S , en cela il est moins précis mais tout aussi intéressant quand on a seulement des hypothèses sur le support d'un vecteur. L'ERC est défini comme suit

$$ERC(S) = 1 - \max_{j \notin S} \|\bar{\mathbf{D}}_S^+ g_j\|_1. \quad (\text{IV.52})$$

Comme pour tout $j \notin S$ on a

$$|g_j^t \bar{\mathbf{D}}_S^+ \text{sign}(x_0)| = |\langle \bar{\mathbf{D}}_S^+ g_j, \text{sign}(x_0) \rangle| \leq \|\bar{\mathbf{D}}_S^+ g_j\|_1 \times \|\text{sign}(x_0)\|_\infty = \|\bar{\mathbf{D}}_S^+ g_j\|_1. \quad (\text{IV.53})$$

avec une égalité si on choisit $\text{sign}(x_0) = \text{sign}(\bar{\mathbf{D}}_S^+ g_j)$, d'où

$$\text{ERC}(S) = 1 - \sup_{x_0, \text{support}(x_0)=S} F(x_0). \quad (\text{IV.54})$$

Tropp dans [Tro05a] montre que tout vecteur x_0 à support dans un ensemble S tel que $\text{ERC}(S) > 0$ est reconstituable en minimisant (IV.50).

Fuchs dans [Fuc02] montre que tout vecteur x_0 tel que $F(x_0) < 1$ est reconstituable. Il est clair donc d'après (IV.54) que si $\text{ERC}(S) > 0$ on a nécessairement $F(x_0) < 1$. ERC est donc sensiblement plus faible que F , c'est pourquoi nous réaliserons les preuves uniquement sur F .

L'ERC est cependant un critère fin car Tropp montre également dans [Tro05a] que si $\text{ERC}(S) < 0$ alors il existe un vecteur x_0 dont le support est S qui ne soit pas reconstituable.

L'ERC mesure la proximité des vecteurs $(g_i)_{i \in S}$ avec les autres vecteurs, ceux de S et ceux en dehors de S . En effet

$$\|(\bar{\mathbf{D}}_S^t \bar{\mathbf{D}}_S)^{-1} \bar{\mathbf{D}}_S^t g_j\|_1 \leq \| \bar{\mathbf{D}}_S^t g_j \|_1 \times \|(\bar{\mathbf{D}}_S^t \bar{\mathbf{D}}_S)^{-1}\|_{\infty,1}. \quad (\text{IV.55})$$

où

$$\|A\|_{\infty,1} = \max_j \sum_i |b_{ij}|.$$

en effet si $Y = AX$ on

$$\|Y\|_1 = \sum_i |y_i| \quad (\text{IV.56})$$

$$= \sum_i \left| \sum_j a_{ij} x_j \right| \quad (\text{IV.57})$$

$$\leq \sum_i \sum_j |a_{ij}| |x_j| \quad (\text{IV.58})$$

$$\leq \sum_j |x_j| \sum_i |a_{ij}| \quad (\text{IV.59})$$

$$\leq \|x\|_1 \times \max_j \sum_i |a_{ij}| \quad (\text{IV.60})$$

$$\leq \|X\|_1 \times \|A\|_{\infty,1}. \quad (\text{IV.61})$$

Remarquons qu'on a également l'inégalité suivante, si $Y' = A^t X$

$$\|Y'\|_{\infty} \leq \|A\|_{\infty,1} \|X\|_{\infty},$$

en effet

$$\begin{aligned}
\|Y'\|_\infty &= \max_i |y_i| \\
&= \max_i \left| \sum_j a_{ji} x_j \right| \\
&\leq \max_i \sum_j |a_{ji}| |x_j| \\
&\leq \max_i \sum_j |a_{ji}| \|X\|_\infty \\
&\leq \|A\|_{\infty,1} \|X\|_\infty.
\end{aligned}$$

Ainsi si A est symétrique et $Y = AX$ on a

$$\|Y\|_1 \leq \|A\|_{\infty,1} \|X\|_1 \text{ et } \|Y\|_\infty \leq \|A\|_{\infty,1} \|X\|_\infty \quad (\text{IV.62})$$

La matrice $(\bar{\mathbf{D}}_S^t \bar{\mathbf{D}}_S)^{-1}$ étant symétrique, on utilisera l'une des deux inégalités de (IV.62) selon le besoin.

Le vecteur $\bar{\mathbf{D}}_S^t g_j$ est formé des produits scalaires entre le vecteur g_j et les vecteurs $(g_i)_{i \in S}$. $\|\bar{\mathbf{D}}_S^t g_j\|_1$ mesure ainsi la cohérence entre un vecteur qui n'est pas dans S et l'ensemble des vecteurs de S . Notons que $\max_{j \notin S} \|\bar{\mathbf{D}}_S^t g_j\|_1 = \beta(S)$.

La matrice $\bar{\mathbf{D}}_S^t \bar{\mathbf{D}}_S$ est la matrice de Gram des vecteurs de S , plus les vecteurs de S sont proches de l'orthogonalité plus la matrice de Gram est proche de l'identité et plus l'inverse est proche de l'identité. Notons que la norme $\|\bar{\mathbf{D}}_S^t \bar{\mathbf{D}}_S\|_{\infty,1}$ correspond par définition à la quantité $1 + \alpha(S)$ précédemment définie qui mesure la cohérence interne du jeu de vecteurs de S .

Maintenant que nous avons montré le lien entre les deux critères nous expliquons pourquoi nous avons évoqué un ERC affaibli dans la première partie.

Lemme IV.5

Pour tout vecteur x_0 à support dans S , si $WERC(S) < 1$ alors

$$ERC(S) \geq 1 - WERC(S) \quad (\text{IV.63})$$

et

$$F(x_0) \leq WERC(S). \quad (\text{IV.64})$$

Preuve - IV.5 -

Soit $j \notin S$, comme nous l'avons déjà écrit plus haut

$$\|(\bar{\mathbf{D}}_S^t \bar{\mathbf{D}}_S)^{-1} \bar{\mathbf{D}}_S^t g_j\|_1 \leq \|\bar{\mathbf{D}}_S^t g_j\|_1 \times \|(\bar{\mathbf{D}}_S^t \bar{\mathbf{D}}_S)^{-1}\|_{\infty,1}. \quad (\text{IV.65})$$

Par définition de $\beta(S)$ on a

$$\|\bar{\mathbf{D}}_S^t g_j\|_1 = \sum_{i \in S} |\langle g_j, g_i \rangle| \leq \beta(S). \quad (\text{IV.66})$$

La norme $\|\cdot\|_{\infty,1}$ est une norme d'algèbre sur les matrices en effet si A et B sont deux matrices

$$\|AB\|_{\infty,1} = \max_j \sum_i \left| \sum_k a_{ik} b_{kj} \right| \quad (\text{IV.67})$$

$$\leq \max_j \sum_i \sum_k |a_{ik}| |b_{kj}| \quad (\text{IV.68})$$

$$\leq \max_j \sum_k |b_{kj}| \sum_i |a_{ik}| \quad (\text{IV.69})$$

$$\leq \max_j \sum_k |b_{kj}| \times \max_k \sum_i |a_{ik}| \quad (\text{IV.70})$$

$$\leq \|A\|_{\infty,1} \times \|B\|_{\infty,1}. \quad (\text{IV.71})$$

La matrice $(\bar{\mathbf{D}}_S^t \bar{\mathbf{D}}_S)$ est la matrice de Gram des vecteurs $(g_i)_{i \in S}$ donc par définition de $\alpha(S)$ on a

$$\|(\bar{\mathbf{D}}_S^t \bar{\mathbf{D}}_S) - I\|_{\infty,1} = \alpha(S). \quad (\text{IV.72})$$

On écrit $\bar{\mathbf{D}}_S^t \bar{\mathbf{D}}_S$ sous la forme $I - H$, avec $\|H\|_{\infty,1} = \alpha(S) < 1$. D'où

$$\|(\bar{\mathbf{D}}_S^t \bar{\mathbf{D}}_S)^{-1}\|_{\infty,1} = \|(I - H)^{-1}\|_{\infty,1} \quad (\text{IV.73})$$

$$= \left\| \sum_{k \geq 0} H^k \right\|_{\infty,1} \quad (\text{IV.74})$$

$$\leq \sum_{k \geq 0} \|H^k\|_{\infty,1} \quad (\text{IV.75})$$

$$\leq \sum_{k \geq 0} \|H\|_{\infty,1}^k \quad (\text{IV.76})$$

$$\leq \sum_{k \geq 0} \alpha(S)^k \quad (\text{IV.77})$$

$$\leq \frac{1}{1 - \alpha(S)}. \quad (\text{IV.78})$$

On déduit alors que pour tout $j \notin S$ on a $\|(\bar{\mathbf{D}}_S^t \bar{\mathbf{D}}_S)^{-1} \bar{\mathbf{D}}_S^t g_j\|_1 \leq \text{WERC}(S)$. D'où le premier résultat, l'autre se déduit immédiatement avec (IV.54). ■

Ce lemme montre donc que le critère $\text{WERC} < 1$ est plus faible que les deux autres et par conséquent que si $\text{WERC}(S) < 1$ alors tout vecteur x_0 à support dans S est

reconstructible par la minimisation de (IV.50). Le critère WERC permet d'assurer la reconstruction par les deux minimisations l_1 , une relaxée l'autre non.

On peut énoncer un corollaire à ce lemme pour les vecteurs concis.

Corollaire IV.6

$$\|x_0\|_0 < \frac{1}{2}(1 + 1/M) \Rightarrow F(x_0) < 1. \quad (\text{IV.79})$$

où M est la cohérence du dictionnaire \mathbf{D} .

On en déduira du théorème IV.11 qui est démontré dans le paragraphe suivant qu'un tel vecteur x_0 est reconstructible.

Preuve - IV.6 -

Nous allons montrer que pour un tel vecteur x_0 dont le support est noté S on a $\text{WERC}(S) < 1$ et il suffit alors d'appliquer le lemme précédent.

Pour un tel x_0 on a

$$\beta(S) = \max_{j \notin S} \sum_{i \in S} |\langle g_j, g_i \rangle| < M \times \frac{1}{2}(1 + 2/M) = \frac{M+1}{2}. \quad (\text{IV.80})$$

D'autre part on peut borner $\alpha(S)$:

$$\alpha(S) = \max_{k \in S} \sum_{i \in S, i \neq k} |\langle g_k, g_i \rangle| < M \times \left(\frac{1}{2}(1 + 1/M) - 1 \right) = \frac{1-M}{2}, \quad (\text{IV.81})$$

d'où on déduit

$$\text{WERC}(S) = \frac{\beta(S)}{1 - \alpha(S)} < \left(\frac{M+1}{2} \right) \times \frac{1}{\frac{M+1}{2}} < 1. \quad (\text{IV.82})$$

Ce qui conclut la preuve. ■

Fuchs dans [Fuc02] et [Fuc05] et Tropp dans [Tro04] et [Tro05a] démontrent des résultats intéressants sur leurs critères respectifs. Nous ne présentons dans le paragraphe suivant que les preuves sur F car elles permettent également de déduire les propriétés de reconstruction de l'ERC. Cependant il est important de noter que la condition $\text{ERC} > 0$ permet d'assurer une reconstruction par d'autres méthodes, par exemple à l'aide d'un algorithme glouton [Tro04] et n'est pas un outil exclusivement réservé à la minimisation de (IV.50).

Nous proposons ici deux résultats de Tropp démontrés dans [Tro05a] qui montrent l'intérêt de l'ERC.

Lemme IV.7

On note $a_S = \bar{\mathbf{D}}_S \bar{\mathbf{D}}_S^+(y) = P_S(y)$ la projection de y sur l'espace engendré par les vecteurs indicés par S . Si

$$\|\mathbf{D}(y - a_S)\|_\infty \leq \gamma \text{ERC}(S). \quad (\text{IV.83})$$

Alors le minimiseur $x(\gamma)$ de (IV.50) est à support dans S .

Ce lemme permet d'estimer la qualité d'un support potentiel de la solution. La positivité de $\text{ERC}(S)$ assure la reconstruction pour un γ bien choisi si les données y ne sont pas bruitées, Tropp montre une réciproque partielle à ce résultat,

Théorème IV.8

Soit S un ensemble d'indices tel que $\text{ERC}(S) > 0$, il existe un vecteur x_0 tel que le minimiseur de (IV.50) avec $y = \mathbf{D}x_0$ n'est pas à support dans S quand γ est petit.

Ce résultat rappelle le troisième point du lemme IV.1. En effet on est assuré qu'il existe un vecteur à support dans S qui ne soit pas reconstituable, en revanche il n'exclut pas qu'un vecteur ayant S pour support soit reconstituable.

IV.4.2 Reconstruction sous la condition $F(x_0) < 1$

Notons $x(\gamma)$ le minimum global de (IV.50), on utilise les mêmes notations que précédemment où \bar{T} désigne le sous vecteur ou la sous matrice extrait de T selon le support de $x(\gamma)$, \tilde{T} désigne la sous matrice ou le sous vecteur formé des éléments de T qui ne sont pas dans \bar{T} . On notera de même \bar{T}_0 le vecteur extrait de T en fonction du support de x_0 et \tilde{T}_0 le vecteur complémentaire.

On utilise la notion de sous-gradient, noté $\partial\|x\|_1$, qui désigne un ensemble de vecteurs

$$\partial\|x\|_1 = \{u | u^t x = \|x\|_1 = 1, \|u\|_\infty \leq 1\} \quad (\text{IV.84})$$

$$= \{u | u_i = \text{sign}(x_i) \text{ si } x_i \neq 0 \text{ et } |u_i| \leq 1 \text{ sinon}\}. \quad (\text{IV.85})$$

En effet on peut caractériser le minimiseur $x(\gamma)$ de (IV.50) à l'aide du sous-gradient, voir [Fle87] :

Théorème IV.9

Le point $x(\gamma)$ est un minimum global de (IV.50) si et seulement si

$$\exists u \in \partial\|x\|_1 \text{ tel que } \mathbf{D}^t(\mathbf{D}x(\gamma) - y) + \gamma u = 0. \quad (\text{NSC})$$

Les résultats suivants s'appuient sur un corollaire à ce théorème qui donne une condition suffisante sur $x(\gamma)$ pour assurer qu'il est le minimiseur de $x(\gamma)$.

Corollaire IV.10

Les trois conditions suivantes assurent que $x(\gamma)$ est un minimum strict de (IV.50) :

1.

$$\bar{\mathbf{D}}^t(y - \bar{\mathbf{D}}\bar{x}(\gamma)) = \gamma \text{sign}(\bar{x}(\gamma)), \quad (\text{IV.86})$$

2.

$$|g_j^t(y - \bar{\mathbf{D}}\bar{x}(\gamma))| < \gamma \text{ for } g_j \notin \bar{\mathbf{D}}, \quad (\text{IV.87})$$

3. $\bar{\mathbf{D}}$ est de rang maximum.

où $\bar{x}(\gamma)$ est le vecteur associé aux composantes non nulles de $x(\gamma)$ et $\bar{\mathbf{D}}$ la matrice extraite de \mathbf{D} telle que $\mathbf{D}x(\gamma) = \bar{\mathbf{D}}\bar{x}(\gamma)$.

Remarquons que si les conditions du corollaire précédent sont vérifiées la relation (IV.86) amène à une définition implicite de $\bar{x}(\gamma)$:

$$\bar{x}(\gamma) = \bar{\mathbf{D}}^+y - \gamma(\bar{\mathbf{D}}^t\bar{\mathbf{D}})^{-1}\text{sign}(\bar{x}(\gamma)). \quad (\text{IV.88})$$

On déduit ensuite un critère qui permet de savoir si un vecteur x_0 est reconstituable, c'est à dire si le minimiseur $x(\gamma)$ de (IV.50) a le même support que x_0 et que leur composantes sont de mêmes signes.

Théorème IV.11

La solution x_0 de $\mathbf{D}x = y$ avec $\bar{\mathbf{D}}_0$ et \bar{x}_0 définis comme précédemment, si $\bar{\mathbf{D}}_0$ est de rang maximum, peut être reconstruite à partir de l'optimum de (IV.50) si

1.

$$|g_j^t d_0| < 1, \forall g_j \notin \bar{\mathbf{D}}_0 \text{ avec } d_0 = \bar{\mathbf{D}}_0^{+t}\text{sign}(\bar{x}_0), \text{ ie } F(x_0) < 1. \quad (\text{IV.89})$$

2.

$$\gamma \in]0, \gamma_m[\quad \text{le domaine dans lequel } \text{sign}\{\bar{x}_0 - \gamma(\bar{\mathbf{D}}_0^t\bar{\mathbf{D}}_0)^{-1}\text{sign}(\bar{x}_0)\} = \text{sign}(\bar{x}_0). \quad (\text{IV.90})$$

De plus si γ tend vers 0 le minimiseur $x(\gamma)$ tend vers x_0 .

Preuve - IV.11 -

Comme $\bar{x}_0 = \bar{\mathbf{D}}_0^+y$, le paramètre γ vérifie

$$\text{sign}\{\bar{\mathbf{D}}_0^+y - \gamma(\bar{\mathbf{D}}_0^t\bar{\mathbf{D}}_0)^{-1}\text{sign}(\bar{\mathbf{D}}_0^+y)\} = \text{sign}(\bar{\mathbf{D}}_0^+y). \quad (\text{IV.91})$$

On définit le vecteur \bar{x}^* de la manière suivante.

$$\bar{x}^* = \bar{\mathbf{D}}_0^+ y - \gamma (\bar{\mathbf{D}}_0^t \bar{\mathbf{D}}_0)^{-1} \text{sign}(\bar{x}_0). \quad (\text{IV.92})$$

On a ainsi $\text{sign}(\bar{x}^*) = \text{sign}(\bar{x}_0)$ et donc $\bar{x}^* = \bar{\mathbf{D}}_0^+ y - \gamma (\bar{\mathbf{D}}_0^t \bar{\mathbf{D}}_0)^{-1} \text{sign}(\bar{x}^*)$.
Le couple $(\bar{x}^*, \bar{\mathbf{D}}_0)$ vérifie donc (IV.86). De plus par définition de \bar{x}^* on a

$$|g_j^t(y - \bar{\mathbf{D}}_0 \bar{x}^*)| = \gamma |g_j^t \bar{\mathbf{D}}_0^{+t} \text{sign}(\bar{x}_0)| = \gamma |g_j^t d_0|. \quad (\text{IV.93})$$

D'où on conclut que (IV.89) implique (IV.87) pour le couple $(\bar{x}^*, \bar{\mathbf{D}}_0)$.

Comme $(\bar{x}^*, \bar{\mathbf{D}}_0)$ vérifie les trois conditions du corollaire précédent, on en déduit que le vecteur x^* complété de \bar{x}^* par des zéros est l'unique solution de (IV.50). Comme x_0 et x^* ont même support et mêmes signes on en déduit que x_0 est bien reconstituable. ■

On déduit donc de ce théorème que si la condition (IV.89) est vérifiée, il suffit que γ soit suffisamment petit pour retrouver x_0 .

Cette approche permet également de traiter le cas bruité si le bruit est borné et suffisamment faible. Fuchs énonce un résultat dans le cas concis qui permet d'assurer que le support de la solution de (IV.50) est contenu ou identique à celui de x_0 . Un tel résultat permet ensuite par minimisation au sens des moindres carrés d'estimer x_0 de manière optimale.

Théorème IV.12

Soit $y = \mathbf{D}x_0 + W$ avec $\|W\|_2 \leq \varepsilon$, tel que le support S de x_0 vérifie $\text{ERC}(S) \geq 1 - \Lambda > 0$.

On suppose également que $\|(\bar{\mathbf{D}}_0^t \bar{\mathbf{D}}_0)^{-1}\|_{\infty,1} \leq B$. On note x_{\min} la valeur absolue de la plus petite composante de x_0 .

Si $\gamma \leq \frac{x_{\min}}{2B}$ et si $\varepsilon < (1 - \Lambda)\gamma$ alors $x(\gamma)$ l'optimum de (IV.50) dans le cas bruité et x_0 ont des supports identiques et leurs composantes ont même signe.

Si on suppose simplement $\varepsilon < (1 - \Lambda)\gamma$ alors le support de l'optimum $x(\gamma)$ est inclus dans celui de x_0 .

Une conséquence immédiate de ce lemme est que le support de $x(\gamma)$ solution de (IV.50) est inclus dans celui de x_0 pour tout γ si les données y ne sont pas bruitées, ie $y = \mathbf{D}x_0$.

Preuve - IV.12 -

On montre d'abord le premier point, le second se traite de manière similaire.

Pour une meilleure clarté on notera $\bar{\mathbf{D}}_0 = \bar{\mathbf{D}}$.

Par hypothèse, x_0 vérifie la condition (IV.89) dans le théorème IV.11, en effet $F(x_0) \leq 1 - \text{ERC}(S) \leq \Lambda < 1$.

Si $\gamma \leq \frac{x_{\min}}{2B}$, en utilisant (IV.62) on a

$$\|\gamma(\bar{\mathbf{D}}^t \bar{\mathbf{D}})^{-1} \text{sign}(\bar{x}_0)\|_\infty \leq \gamma B \leq x_{\min}/2$$

et donc

$$\text{sign}(\bar{x}_0) = \text{sign}(\bar{x}_0 - \gamma(\bar{\mathbf{D}}^t \bar{\mathbf{D}})^{-1} \text{sign}(\bar{x}_0)) \quad (\text{IV.94})$$

Donc si on pose pour un tel γ

$$\bar{x}_1(\gamma) = \bar{x}_0 - \gamma(\bar{\mathbf{D}}^t \bar{\mathbf{D}})^{-1} \text{sign}(\bar{x}_0). \quad (\text{IV.95})$$

On sait d'après la preuve du théorème IV.11 que $x_1(\gamma)$ est solution du problème (IV.50) avec $y = y_1 = \mathbf{D}x_0$, on sait que x_0 est reconstructible à partir de $x_1(\gamma)$ et on sait de plus que la plus petite valeur absolue des composante non nulles de $x_1(\gamma)$ est supérieure à $\frac{x_m}{2}$.

On en déduit qu'il existe un vecteur u du sous-gradient en $x_1(\gamma)$ tel que

$$\mathbf{D}^t(\mathbf{D}x_1(\gamma) - y_1) + \gamma u = 0. \quad (\text{IV.96})$$

On a ainsi en particulier

$$\bar{\mathbf{D}}^t(y_1 - \bar{\mathbf{D}}\bar{x}_1(\gamma)) = \gamma \text{sign}(\bar{x}_1(\gamma)) \quad (\text{IV.97})$$

et que pour tout $j \notin S$ on a

$$|g_j^t(y_1 - \bar{\mathbf{D}}\bar{x}_1(\gamma))| \leq \Lambda \gamma. \quad (\text{IV.98})$$

Voir preuve du théorème IV.11, l'inégalité (IV.93).

Nous allons montrer maintenant que $x^*(\gamma) = x_1(\gamma) + \delta$ est le minimiseur de (IV.50) avec $y = \mathbf{D}x_0 + W$ où δ est le vecteur à support dans S tel que $\bar{\delta} = \bar{\mathbf{D}}^+ W$.

Par définition le support de $x^*(\gamma)$ est inclus dans S .

$$\bar{\mathbf{D}}^t(y - \mathbf{D}x^*(\gamma)) = \bar{\mathbf{D}}^t(y_1 + W - \bar{\mathbf{D}}(\bar{x}_1(\gamma) + \delta)) \quad (\text{IV.99})$$

$$= \bar{\mathbf{D}}^t(y_1 - \bar{\mathbf{D}}\bar{x}_1(\gamma)) + \bar{\mathbf{D}}^t(W - \bar{\mathbf{D}}\bar{\mathbf{D}}^+ W) \quad (\text{IV.100})$$

$$= \gamma \text{sign}(\bar{x}_1(\gamma)) + \bar{\mathbf{D}}^t W - \bar{\mathbf{D}}^t \bar{\mathbf{D}}(\bar{\mathbf{D}}^t \bar{\mathbf{D}})^{-1} \bar{\mathbf{D}}^t W \quad (\text{IV.101})$$

$$= \gamma \text{sign}(\bar{x}_0) \quad (\text{IV.102})$$

De plus,

$$\|x_1(\gamma) - x^*(\gamma)\|_\infty = \|\bar{x}_1(\gamma) - \bar{x}^*(\gamma)\|_\infty \quad (\text{IV.103})$$

$$= \|\bar{\mathbf{D}}^+ W\|_\infty \quad (\text{IV.104})$$

$$= \|(\bar{\mathbf{D}}^t \bar{\mathbf{D}})^{-1} \bar{\mathbf{D}}^t W\|_\infty \quad (\text{IV.105})$$

En utilisant (IV.62)

$$\leq \|(\bar{\mathbf{D}}^t \bar{\mathbf{D}})^{-1}\|_{\infty,1} \times \|\bar{\mathbf{D}}^t W\|_\infty \quad (\text{IV.106})$$

$$\leq B \times \varepsilon \quad (\text{IV.107})$$

et comme $\varepsilon < \gamma \leq \frac{x_{\min}}{2B}$ on déduit

$$< \frac{x_{\min}}{2} \quad (\text{IV.108})$$

Comme la plus petite valeur absolue des composantes non nulles de $x_1(\gamma)$ est supérieure à $\frac{x_{\min}}{2}$ on est assuré que $\bar{x}^*(\gamma)$ et \bar{x}_0 aient les mêmes signes, d'où

$$\bar{\mathbf{D}}^t(y - \mathbf{D}x^*(\gamma)) = \gamma \text{sign}(\bar{x}^*(\gamma)). \quad (\text{IV.109})$$

D'autre part pour tout $j \notin S$ on a

$$\begin{aligned} |g_j^t(y - \bar{\mathbf{D}}\bar{x}^*(\gamma))| &= |g_j^t(y_1 + W - \bar{\mathbf{D}}\bar{x}_1(\gamma) - \bar{\mathbf{D}}\bar{\delta})| \\ &\leq |g_j^t(y_1 - \bar{\mathbf{D}}\bar{x}_1(\gamma))| + |g_j^t(W - \bar{\mathbf{D}}\bar{\delta})| \\ &\leq \gamma\Lambda + \|W\|_2 \\ &\leq \gamma\Lambda + \varepsilon \\ &< \gamma. \end{aligned}$$

Ce qui permet de montrer que $x^*(\gamma)$ est bien le minimiseur recherché. Il a bien le même support que x_0 et est de même signe que x_0 .

Supposons maintenant $\varepsilon < (1 - \Lambda)\gamma$ sans borner inférieurement γ .

Soit x_2 le minimiseur de la fonctionnelle suivante

$$\frac{1}{2}\|y - \bar{\mathbf{D}}x\|_2^2 + \gamma\|x\|_1$$

où on a remplacé \mathbf{D} par $\bar{\mathbf{D}}$ par rapport à (IV.50). Nous allons montrer que le vecteur x^* tel que $\bar{x}^* = x_2$ et $\tilde{x}^* = 0$ est solution de (IV.50) avec $y = \mathbf{D}x_0 + W$. Par définition de x_2 il existe \bar{u} dans le sous-gradient en $x_2 = \bar{x}^*$ tel que

$$\bar{\mathbf{D}}^t(y - \bar{\mathbf{D}}\bar{x}^*) = \bar{\mathbf{D}}^t(y - \mathbf{D}x^*) = \gamma\bar{u}$$

Soit $j \notin S$.

$$|g_j^t(y - \mathbf{D}x^*)| = |g_j^t(y - \bar{\mathbf{D}}\bar{x}^*)|$$

En insérant $\bar{x}^* = \bar{\mathbf{D}}^+y - \gamma(\bar{\mathbf{D}}^t\bar{\mathbf{D}})^{-1}\bar{u}$ dans l'égalité précédente on a

$$\begin{aligned} |g_j^t(y - \mathbf{D}x^*)| &= |g_j^t(y - \bar{\mathbf{D}}\bar{\mathbf{D}}^+y + \gamma\bar{\mathbf{D}}(\bar{\mathbf{D}}^t\bar{\mathbf{D}})^{-1}\bar{u})| \\ &\leq |g_j^t(y - \bar{\mathbf{D}}\bar{\mathbf{D}}^+y)| + \gamma|g_j^t\bar{\mathbf{D}}^{+t}\bar{u}| \\ &\leq |g_j^t(y_1 + W - \bar{\mathbf{D}}\bar{\mathbf{D}}^+(y_1 + W))| + \gamma\|g_j^t\bar{\mathbf{D}}^{+t}\|_1\|\bar{u}\|_\infty \\ &\leq |g_j^t(W - \bar{\mathbf{D}}\bar{\mathbf{D}}^+W)| + \gamma(1 - \text{ERC}(S)) \\ &\leq \varepsilon + \Lambda\gamma < \gamma. \end{aligned}$$

Ce qui conclut la preuve du lemme. ■

Nous avons vu précédemment que $\|(\bar{\mathbf{D}}^t\bar{\mathbf{D}})\|_{\infty,1} \leq \frac{1}{1-\alpha(S)}$. Nous avons montré dans un lemme précédent que dans le cas concis on pouvait borner cette quantité à l'aide de la cohérence. D'autre part si $\text{WERC}(S) < 1$ on a toujours $\frac{1}{1-\alpha(S)} < \frac{1}{\beta(S)} < \frac{1}{M}$. Nous proposons de montrer que ces résultats peuvent s'appliquer aux signaux de grande échelle pour un opérateur de filtrage. Utiliser directement le critère ERC sans passer par la cohérence permet de traiter des situations plus variées.

On peut même être un peu plus précis quand on dit que le support de $x(\gamma)$ est inclus dans celui de x_0 pour tout γ si les données ne sont pas bruitées. Si x_0 respecte certaines conditions, on peut montrer que le support de $x(\gamma_2)$ est inclus dans celui de γ_1 si $\gamma_1 < \gamma_2$. Nous proposons de montrer ce résultat en deux temps. D'abord nous montrons que pour un γ_0 fixé le support de $x(\gamma)$ est identique à celui de $x(\gamma_0)$ si $\gamma > \gamma_0$ et γ est proche de γ_0 . Nous montrons ensuite comment le support de $x(\gamma)$ décroît quand γ croît.

Lemme IV.13

Soit $\gamma_0 > 0$ et $x(\gamma_0)$ une solution de (IV.50) avec $y = \mathbf{D}x_0$. On divise \mathbf{D} en deux sous matrices $\bar{\mathbf{D}}$ et $\tilde{\mathbf{D}}$ selon les composantes non nulles de $x(\gamma_0)$. On suppose que $\|\tilde{\mathbf{D}}^t\tilde{\mathbf{D}}^{+t}\text{sign}(x(\gamma_0))\|_\infty < 1$ et que $\bar{\mathbf{D}}$ est de rang maximal.

Il existe γ_1 tel que pour tout $\gamma \in]\gamma_0, \gamma_1[$ la solution de (IV.50) a le même support que $x(\gamma_0)$ et le support de $x(\gamma_1)$ est strictement inclus dans celui de $x(\gamma_0)$.

De plus on a $\|x(\gamma)\|_1 < \|x(\gamma_0)\|_1$ pour tout $\gamma > \gamma_0$.

Preuve - IV.13 -

Comme $x(\gamma_0)$ est solution de (IV.50) on déduit de (NSC) qu'il existe u dans le sous-gradient en x tel que

$$\mathbf{D}^t(y - \mathbf{D}x(\gamma_0)) = \gamma_0 u(\gamma_0). \quad (\text{IV.110})$$

En reprenant (IV.88) on déduit de l'égalité précédente une définition implicite de $x(\gamma_0)$.

$$\bar{x}(\gamma_0) = \bar{\mathbf{D}}^+ y - \gamma_0 (\bar{\mathbf{D}}^t \bar{\mathbf{D}})^{-1} \text{sign}(x(\gamma_0)) \quad (\text{IV.111})$$

En introduisant cette égalité dans la précédente on déduit également

$$\tilde{u}(\gamma_0) = \frac{1}{\gamma_0} \tilde{\mathbf{D}}^t (y^\perp - \gamma_0 \bar{\mathbf{D}}^{+t} \text{sign}(x(\gamma_0))), \quad (\text{IV.112})$$

où $y^\perp = y - \bar{\mathbf{D}}^t \bar{\mathbf{D}} y$. On note γ_1 le plus petit réel tel que

$$\bar{x}(\gamma_1) = \bar{\mathbf{D}}^+ y - \gamma_1 (\bar{\mathbf{D}}^t \bar{\mathbf{D}})^{-1} \text{sign}(x(\gamma_0))$$

ait une composante nulle. Pour tout $\gamma \in]\gamma_0, \gamma_1[$ on définit $x(\gamma)$ par

$$\bar{x}(\gamma) = \bar{\mathbf{D}}^+ y - \gamma (\bar{\mathbf{D}}^t \bar{\mathbf{D}})^{-1} \text{sign}(x(\gamma_0)) \quad \text{et} \quad \tilde{x}(\gamma) = 0.$$

En prenant $u(\gamma)$ défini par

$$\bar{u}(\gamma) = \text{sign}(x(\gamma_0)) \quad \text{et} \quad \tilde{u}(\gamma) = \frac{1}{\gamma} \tilde{\mathbf{D}}^t (y^\perp - \gamma \bar{\mathbf{D}}^{+t} \text{sign}(x(\gamma_0)))$$

On vérifie que

$$\bar{\mathbf{D}}^t (y - \bar{\mathbf{D}} \bar{x}(\gamma)) = \gamma \bar{u}(\gamma) = \gamma \text{sign}(x(\gamma))$$

et

$$\|\tilde{\mathbf{D}}^t (y - \bar{\mathbf{D}} \bar{x}(\gamma))\|_\infty = \|\gamma \tilde{u}(\gamma)\|_\infty = \gamma \left\| \frac{1}{\gamma} \tilde{\mathbf{D}}^t (y^\perp - \gamma \bar{\mathbf{D}}^{+t} \text{sign}(x(\gamma_0))) \right\|_\infty.$$

Comme par définition de $\tilde{u}(\gamma_0)$ on a

$$\left\| \frac{1}{\gamma_0} \tilde{\mathbf{D}}^t (y^\perp - \gamma_0 \bar{\mathbf{D}}^{+t} \text{sign}(x(\gamma_0))) \right\|_\infty \leq 1$$

comme par hypothèse on a

$$\|\tilde{\mathbf{D}}^t \bar{\mathbf{D}}^{+t} \text{sign}(x(\gamma_0))\|_\infty < 1$$

et comme $\left\| \frac{1}{\gamma} \tilde{\mathbf{D}}^t (y^\perp - \gamma \bar{\mathbf{D}}^{+t} \text{sign}(x(\gamma_0))) \right\|_\infty$ est une combinaison convexe de ces deux termes on en déduit

$$\|\tilde{\mathbf{D}}^t (y - \bar{\mathbf{D}} \bar{x}(\gamma))\|_\infty < 1$$

et ainsi que $x(\gamma)$ est l'unique minimiseur de (IV.50) en utilisant le corollaire IV.10. Comme $\gamma \geq \gamma_0$ en écrivant les deux propriétés de minimalité de $x(\gamma)$ et $x(\gamma_0)$ on obtient

$$\|x(\gamma)\|_1 \leq \|x(\gamma_0)\|_1.$$

On définit x_1 par

$$\bar{x}_1 = \bar{\mathbf{D}}^+ y - \gamma_1 (\bar{\mathbf{D}}^t \bar{\mathbf{D}})^{-1} \text{sign}(x(\gamma_0)) \quad \text{et } \tilde{x}_1 = 0.$$

En posant

$$\bar{u}_1 = \text{sign}(x(\gamma_0)) \quad \text{et } \tilde{u}_1 = \frac{1}{\gamma_1} \tilde{\mathbf{D}}^t (y^\perp - \gamma \bar{\mathbf{D}}^{+t} \text{sign}(x(\gamma_0)))$$

on a

$$\bar{\mathbf{D}}(y - \mathbf{D}x_1) = \gamma_1 u_1.$$

On vérifie comme pour $u(\gamma)$ que $u_1 \in \partial \|x\|_1$ au point x_1 et on en déduit que $x(\gamma_1)$ est un minimiseur de (IV.50) pour $\gamma = \gamma_1$. ■

On peut maintenant montrer que sous certaines conditions sur x_0 vérifiées pour les vecteurs concis et d'échelle suffisamment grande, le support du minimiseur $x(\gamma)$ de (IV.50) est inclus dans celui de x_0 .

Lemme IV.14

Soit x_0 un vecteur tel que $\bar{\mathbf{D}}_0$ est de rang maximal et que pour tout $S_k \subset S$ on ait $\text{ERC}(S_k) \geq 1 - \Lambda > 0$.

Pour tout $\gamma > 0$ il existe un unique minimiseur $x(\gamma)$ de (IV.50) à support dans celui de x_0 et pour tout (γ_1, γ_2) tels que $\gamma_1 < \gamma_2$, $S(x(\gamma_2)) \subset S(x(\gamma_1))$.

Preuve - IV.14 -

On va utiliser k fois le lemme précédent pour montrer que le support de $x(\gamma)$ décroît, où k est le cardinal du support de x_0 .

On décompose \mathbf{D} en deux sous-matrices $\bar{\mathbf{D}}_0$ et $\tilde{\mathbf{D}}_0$ selon le support de x_0 . Soit γ_1 le plus petit réel tel que

$$\bar{x}_0(\gamma_1) = \bar{\mathbf{D}}_0^+ b - \gamma_1 (\bar{\mathbf{D}}_0^t \bar{\mathbf{D}}_0)^{-1} \text{sign}(x(\gamma_0))$$

ait une composante nulle. Par hypothèse $\text{ERC}(S) > 0$ et \mathbf{D}_0 est de rang maximal. On peut donc appliquer le lemme précédent en prenant γ_0 , très proche de zéro d'après le théorème IV.11.

Pour tout $\gamma \in]0, \gamma_1[$, $x(\gamma)$ a le même support que x_0 . On sait aussi que $x(\gamma_1)$ défini comme dans le lemme précédent est solution de (IV.50) pour $\gamma = \gamma_1$ et de support strictement inclus dans S .

On prend maintenant $\gamma_0 = \gamma_1$ dans le lemme précédent. On redécompose \mathbf{D} selon le support de $x(\gamma_1)$ inclus dans celui de x_0 . Par hypothèse, la nouvelle matrice $\bar{\mathbf{D}}_1$ est de rang maximum et on a également par hypothèse $\text{ERC}(S(x(\gamma_1))) > 0$. On montre alors qu'il existe $\gamma_2 > \gamma_1$ tel que pour tout $\gamma \in]\gamma_1, \gamma_2[$, $x(\gamma)$ est solution de (IV.50),

que $x(\gamma_2)$ est solution de (IV.50) avec $\gamma = \gamma_2$ et le support de $x(\gamma_2)$ inclus dans celui de $x(\gamma)$ et donc de $x(\gamma_1)$. On itère le procédé, les hypothèses assurant qu'à chaque étape la matrice extraite est bien de rang plein et que $\text{ERC}(S(\gamma_i)) > 0$. ■

IV.5 F, ERC et WERC pour la déconvolution

Dans cette partie nous montrons en quoi les précédents résultats assurent la reconstruction des signaux de grande échelle en montrant que pour ces signaux $\text{WERC}(S) < 1$. On considère un signal discret x_0 d'échelle Δ . On considère toujours

$$y = h \star x_0 + w. \quad (\text{IV.113})$$

En utilisant $F(x_0) \leq \text{WERC}(S)$ et les propriétés de $F(x_0)$ on en déduira que les signaux dont les échelles *Delta* sont suffisamment grande sont reconstructibles.

L'idée qui se cache derrière la déconvolution de tels signaux est relativement simple. Si on sait que l'image g_i d'un Dirac est supportée sur un ensemble de diamètre Δ , alors la déconvolution d'un signal d'échelle Δ est en quelque sorte une union de déconvolution d'un seul Dirac. Les Diracs sont alors suffisamment séparés pour être considérés chacun comme unique.

Pour un tel signal de support S , on a $\alpha(S) = 0$ et $\beta(S) = M$, où M est la cohérence du dictionnaire \mathbf{D} associé à h . On a ainsi $\text{WERC}(S) = \beta(S)/(1 - \alpha(S)) = M < 1$. Notre objectif est d'utiliser F , ERC et WERC pour étendre ce résultat à des filtres h dont la réponse impulsionnelle est à décroissance rapide. On va montrer qu'alors si Δ est suffisamment grand $\alpha(S)$ est proche de 0 et $\beta(S)$ proche de M et ainsi $\text{WERC}(S) < 1$.

Notons au passage que Fuchs a étudié un cas particulier de déconvolution dans [Fuc04]. L'auteur propose un résultat de reconstruction par programmation linéaire des signaux dont toutes les composantes sont positives. Cet exemple illustre la possibilité de reconstruire des signaux qui sont non concis, si on connaît un autre a priori fort sur le signal.

IV.5.1 WERC des signaux de grande échelle

Nous considérons maintenant le dictionnaire

$$\mathbf{D} = [g_i = h \star \delta_i, i \leq N] \quad (\text{IV.114})$$

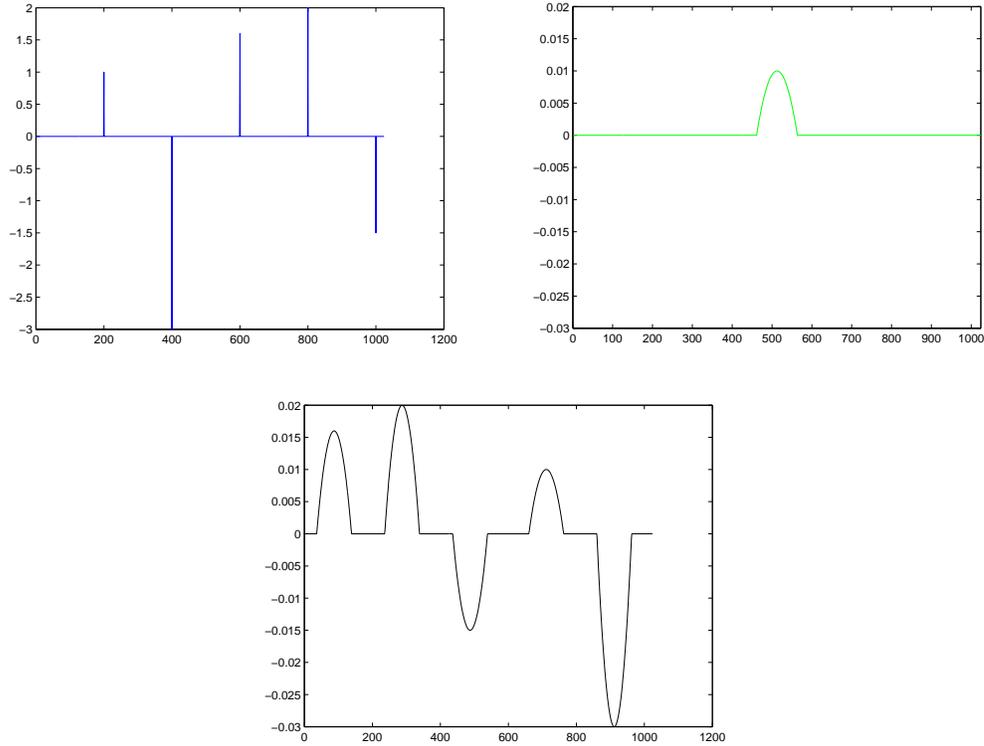


FIG. IV.3 – Signal ayant 5 coefficients non nuls, filtre h à support compact et image du signal par le filtrage

Les produits scalaires $\langle g_i, g_j \rangle$ dépendent ainsi uniquement de la distance $|i - j|$, plus précisément on a

$$\langle g_i, g_j \rangle = \langle h \star \delta_i, h \star \delta_j \rangle = \langle \delta_i, \bar{h} \star h(\delta_j) \rangle = \bar{h} \star h(|i - j|). \quad (\text{IV.115})$$

où $\bar{h}(i) = h(-i)$.

Cette remarque permet d'estimer rapidement la cohérence du dictionnaire comme la seconde plus grande valeur de $H = |\bar{h} \star h|$, la première étant 1 au point 0.

On pourrait espérer utiliser tous les résultats précédents sur les signaux concis malheureusement en pratique les filtres qu'on utilise produisent une cohérence élevée, souvent supérieure à $\frac{1}{2}$ et parfois proche de 1. Le filtre h_0 passe bas défini par

$$\hat{h}_0(\omega) \begin{cases} 1 & \text{si } |\omega| \leq \pi/2 \\ 0 & \text{si } |\omega| > \pi/2 \end{cases} \quad (\text{IV.116})$$

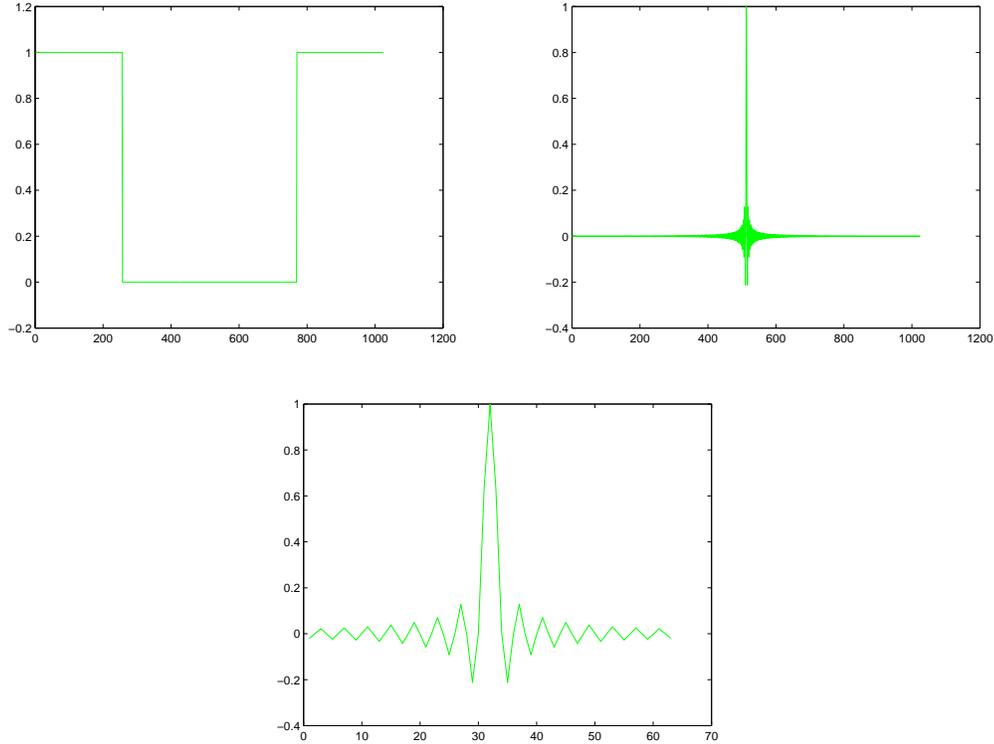


FIG. IV.4 – Transformée de Fourier du filtre h_0 , réponse impulsionnelle de h_0 et zoom sur la réponse impulsionnelle

qui conserve totalement la moitié basse des fréquences et qui annule les autres fréquences, induit une cohérence proche de $\frac{2}{\pi}$. En effet $\bar{h}_0 \star h_0$ est un sinus cardinal :

$$H_0(k) = |\bar{h}_0 \star h_0(k)| = \left| \frac{\sin(k\pi/2)}{k\pi/2} \right|. \quad (\text{IV.117})$$

On observe que la seconde plus grande valeur de ce vecteur est $\frac{2}{\pi}$ quand $k = 1$. Ceci signifie que deux Diracs voisins ont des images proches, ce qui n'est pas surprenant pour un filtre passe bas. Plus généralement la cohérence du dictionnaire associé à un filtre passe bas h dont la transformée de Fourier est l'indicatrice de $[-\omega_c, \omega_c]$ avec $\omega_c < \pi/2$ est

$$M(h) = \frac{\sin(\omega_c)}{\omega_c} \quad (\text{IV.118})$$

Les filtres qui sont utilisés pour modéliser les ondes sismiques induisent des cohérences élevées. Rappelons qu'une cohérence de $\frac{1}{10}$ permet d'assurer la reconstruction

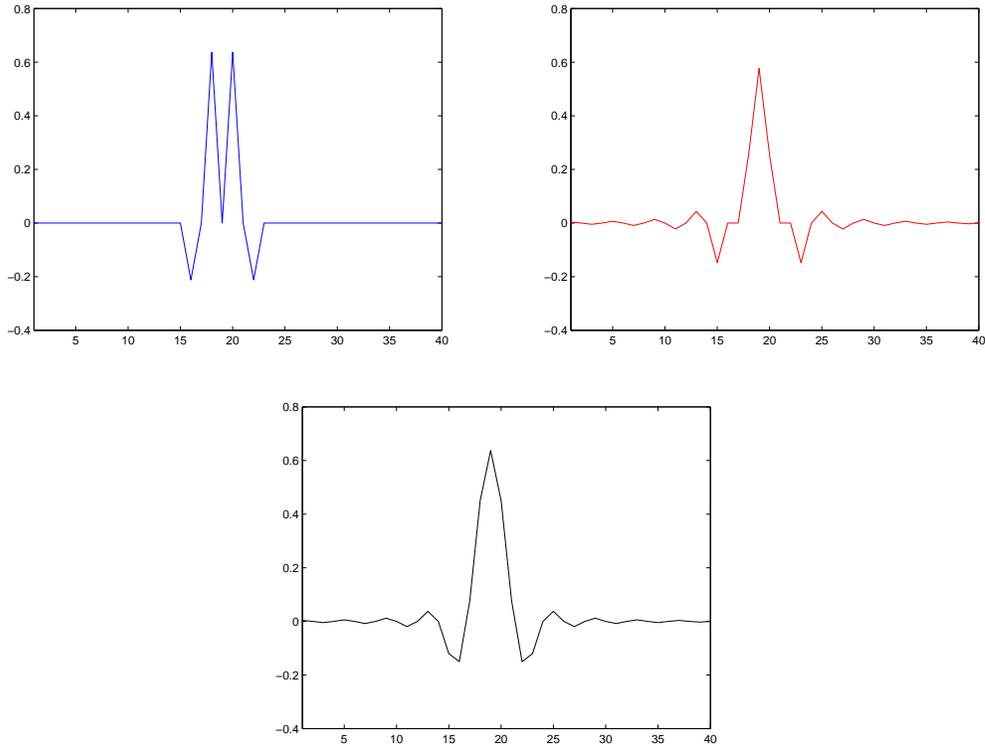


FIG. IV.5 – Signal ayant 4 coefficients non nuls et non reconstructible, le minimiseur de la fonction (IV.50) et l'image commune de ces deux vecteurs par le filtre h_0 . La norme l_1 de la reconstruction est plus petite que celle de l'originale

d'un signal comportant moins de $\frac{1}{2}(1 + 10) = 5.5$ composantes non nulles.

Dans la figure IV.5 on montre l'exemple d'un signal supporté sur 4 Diracs qui n'est pas reconstructible pour le filtre h_0 . La fréquence de coupure du filtre h_0 est pourtant $\pi/2$. Le support spectral des ondelettes sismiques est souvent plus étroit et on peut construire des vecteurs non reconstructibles avec 2 ou 3 Diracs.

Ainsi les résultats d'inversion sous hypothèse de concision ne peuvent donc s'appliquer ici. Cette remarque est confirmée numériquement, il existe des vecteurs ayant un petit nombre de composantes non nulles qui ne sont pas reconstructibles. Le plus simple pour le montrer est de calculer numériquement l'ERC d'un ensemble d'indices pour un filtre h donné. En effet d'après le théorème IV.8 si $ERC(S) < 0$ il existe un signal à support sur S non reconstructible.

Si h est un filtre dont la transformée de Fourier est régulière. On montre que les signaux dont l'échelle est suffisamment grande sont reconstructibles en minimisant

(IV.16) ou (IV.50). Pour cela on montre que le Weak Exact Recovery Coefficient de ces supports est plus petit que 1.

Lemme IV.15

Soit h un filtre tel qu'il existe C tel que $H(n) = |\bar{h} \star h(n)| \leq \frac{C}{(1+n)^{3/2}}$. Il existe $\Delta > 0$ et $\Lambda(\Delta)$ tels que tout ensemble d'indices S d'échelle supérieure à Δ vérifie $WERC(S) \leq \Lambda(\Delta) < 1$ et $\bar{\mathbf{D}}_S^t \bar{\mathbf{D}}_S$ est inversible.

Preuve - IV.15 -

Soit S un ensemble d'indices d'échelle supérieure à Δ .

$$\alpha(S) = \max_{k \in S} \sum_{i \in S, i \neq k} H(i - k) \leq 2 \sum_i H(\Delta + i). \quad (\text{IV.119})$$

En effet pour tout k il existe au plus 2 indices qui sont à une même distance de k , d'autre part aucun n'est à une distance inférieure à Δ

Comme la série des $(H(i))_i$ est convergente, pour tout $\varepsilon > 0$ il existe un Δ_1 tel que $2 \sum_i H(\Delta_1 + i) < \varepsilon$ et donc tel que $\alpha(S) < \varepsilon$. D'autre part

$$\beta(S) = \max_{j \notin S} \sum_{i \in S, i \neq k} H(i - j). \quad (\text{IV.120})$$

Comme la série $(H(i))_i$ est convergente on a aussi

$$\forall \varepsilon, \quad \exists \Delta_2 \text{ tel que } \forall k, H(\Delta_2 + k) < \varepsilon. \quad (\text{IV.121})$$

Soit S un ensemble d'indices d'échelle supérieure à $\Delta_3 = \max(\Delta_1, 2\Delta_2)$.

On note j_S l'indice n'appartenant pas à S réalisant le maximum dans la définition de $\beta(S)$, on a

$$\beta(S) = \sum_{i \in S} H(j_S - i) \quad (\text{IV.122})$$

Il existe au plus 2 indices i_1 et i_2 dans S dont la distance à j_S est inférieure à Δ_1 . On a ainsi

$$\beta(S) \leq H(j_S - i_1) + H(j_S - i_2) + 2 \sum_i H(\Delta_1 + i) \leq H(j - i_1) + H(j - i_2) + \varepsilon. \quad (\text{IV.123})$$

Soit i_1 l'indice le plus proche de j_S . Par définition de Δ_2 on a $|j_S - i_2| \geq \Delta_2$ et donc $H(j_S - i_2) < \varepsilon$.

On borne $H(j_S - i_1)$ par la cohérence M . On déduit donc que pour tout ε il existe une échelle Δ telle que tout signal d'échelle supérieure à Δ vérifie

$$\alpha(S) + \beta(S) \leq M + 2\varepsilon. \quad (\text{IV.124})$$

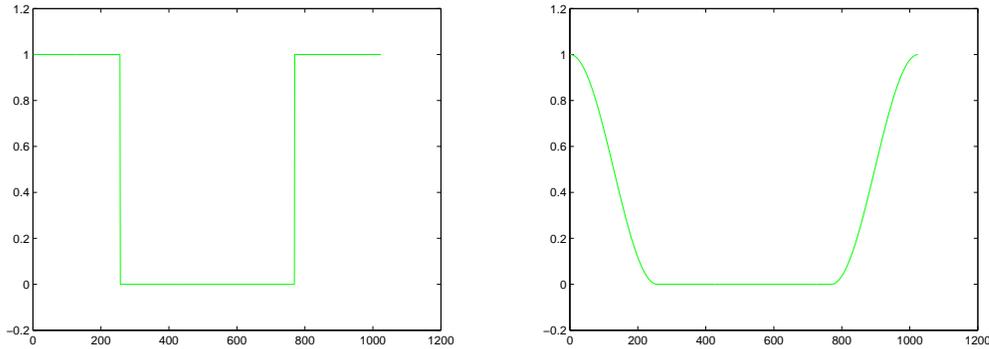


FIG. IV.6 – Transformées de Fourier de deux filtres h_0 et h_1 l'une est discontinue, l'autre régulière.

Comme $M < 1$ on peut choisir $\varepsilon < \frac{1-M}{4}$.

On déduit qu'il existe Δ et $\Lambda(\Delta)$ tels que si S est d'échelle supérieure à Δ alors $\alpha(S) + \beta(S) \leq \Lambda_1(\Delta) < 1$ et donc que

$$\text{WERC}(S) = \frac{\beta(S)}{1 - \alpha(S)} \leq \Lambda(\Delta) < 1. \quad (\text{IV.125})$$

Comme $\|\bar{\mathbf{D}}_S^t \bar{\mathbf{D}}_S\|_{\infty,1} = \alpha(S)$ on sait que $\alpha(S) < 1$ assure l'inversibilité de $\bar{\mathbf{D}}_S^t \bar{\mathbf{D}}_S$, ce qui conclut la preuve du lemme. ■

La décroissance spatiale de la réponse impulsionnelle d'un filtre est liée à la régularité de sa transformée de Fourier. Du fait que $F(x_0) \leq \text{WERC}(S)$ et que $F(x_0) < 1$ implique une reconstruction par minimisation de (IV.50) on déduit que pour tout filtre dont la transformée de Fourier est suffisamment régulière il existe une échelle Δ qui assure que tout vecteur d'échelle Δ est reconstructible par (IV.50). Si le filtre n'est pas régulier on a davantage de problèmes. En effet une décroissance du type de celle du sinus cardinal gêne un algorithme de reconstruction à cause des nombreux rebonds. La figure IV.7 représente un vecteur x_0 non reconstructible pour un filtre dont la transformée de Fourier est discontinue, figure IV.6 à gauche et reconstructible pour un filtre ayant la même fréquence de coupure et dont la transformée de Fourier est régulière, figure IV.6 à droite. La figure IV.6 représente les images par ces deux filtres du vecteurs. Les deux reconstructions sont présentées dans la figure IV.14. Dans le premier cas, le support n'est pas inclus dans celui de x_0 , dans le second le support est bien inclus dans celui de x_0 .

Cependant il est toujours possible de régulariser le filtre en refiltrant les données par un second filtre. Ce second filtre h_r de régularisation doit être construit de manière

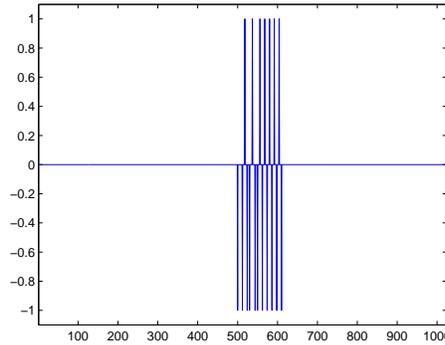


FIG. IV.7 – Signal x_0 . Pour h_0 on a $ERC=-0.22$ et $F=1.14$ le signal n'est pas reconstituable. Pour h_1 $ERC=0.05$ et $F=0.95$ le signal est reconstituable.

à ce que la transformée de Fourier $\hat{h}_1 = \hat{h}_r \star \hat{h}$ de $h_1 = h_r \star h$ soit régulière.

On effectue ensuite la minimisation à partir des données $h_r \star y$ images de y par le filtre h_r . Les résultats précédents s'appliquent sur h_1 et on en déduit que pour tout filtre h il existe une échelle Δ tel que tout vecteur x_0 d'échelle Δ est reconstituable par une minimisation (IV.16) ou (IV.50).

On a également un résultat de reconstruction dans le cas de données bruitées directement en appliquant le théorème IV.12 de reconstruction dans le cas bruité.

Théorème IV.16

Soit h un filtre C^1 et W un bruit tel que $\|W\|_2 \leq \varepsilon$.

Il existe $\Delta > 0$ et Λ tel que pour tout vecteur x_0 dont le support S est d'échelle supérieure à Δ vérifie $ERC(S) > 1 - \Lambda > 0$ et $\|(\bar{\mathbf{D}}_0^t \bar{\mathbf{D}}_0)^{-1}\|_{\infty,1} \leq 2$.

Tout x_0 d'échelle supérieure à Δ et tel que $x_{\min} > \frac{5\varepsilon}{1-\Lambda}$ est reconstituable à partir de $b = \mathbf{D}x_0 + W$.

De plus si $\gamma \geq \frac{\varepsilon}{1-\Lambda}$ alors le support de $x(\gamma)$ est contenu dans celui de x_0 .

Preuve - IV.16 -

Le premier point est une conséquence directe du théorème précédent et de sa preuve.

En effet dans la preuve nous avons vu qu'il existe Δ tel que $\alpha(S) < 1/2$ et donc $1/(1 - \alpha(S)) < 2$. On déduit le résultat de l'inégalité démontrée dans le lemme IV.5 $\|(\bar{\mathbf{D}}_0^t \bar{\mathbf{D}}_0)^{-1}\|_{\infty,1} \leq 1/(1 - \alpha)$.

Le deuxième point est une conséquence du théorème IV.12. En effet comme $1 - ERC \leq WERC(S) < 1$, en prenant $\gamma = \frac{5\varepsilon}{4(1-\Lambda)}$ on vérifie bien toutes les conditions du théorème IV.12

- $\|(\bar{\mathbf{D}}_0^t \bar{\mathbf{D}}_0)^{-1}\|_{\infty,1} \leq 2$
- $\gamma = \frac{5\varepsilon}{4(1-\Lambda)} < \frac{x_{\min}}{4}$
- $\varepsilon = \frac{4}{5}(1-\Lambda)\gamma < (1-\Lambda(\Delta))\gamma$

et on applique le théorème IV.12 pour déduire le résultat.

Le troisième point vient du théorème IV.12. En effet, si x_0 est d'échelle Δ , alors tout vecteur x_k inclus dans le support de x_0 est d'échelle Δ et ainsi $ERC(S(x_k)) > 1 - \lambda > 0$. On applique alors le second point du théorème IV.12.

■

Pour illustrer ce résultat par un exemple pratique, nous proposons dans la figure IV.10, trois inversions sismiques d'un même jeu de données. Il apparaît que le support de γ croît globalement quand γ décroît.

IV.5.2 Résultats numériques

Nous avons testé le pertinence de nos résultats théoriques sur des données artificielles afin de tester différentes valeurs de F , ERC et WERC. Nous proposons également des résultats obtenus sur des données réelles. La figure IV.8 présente une inversion réelle. La figure IV.9 donne deux exemples de traces issues des données bidimensionnelles présentées dans la figure IV.8.

IV.5.2.1 Estimation de Δ

les résultats que nous avons proposés sur Δ ne sont pas constructifs. Il existe un moyen algorithmique de déterminer une échelle Δ entre les indices du support d'un élément qui assure sa reconstruction.

A partir de H on construit ϕ qui est l'infimum des vecteurs décroissants qui majore H :

$$\forall k \in \mathbb{N}, \phi(k) = \max_{j \geq k} H(j). \quad (\text{IV.126})$$

Cette fonction permet de borner le produit scalaire de deux vecteurs si on a une borne inférieure sur la distance qui les sépare, $|\langle h \star e_i, h \star e_j \rangle| \leq \phi(k)$ si $|i - j| \geq k$. Si on se fixe un Δ on peut ainsi borner l'ensemble des $\beta(S)$ et $\alpha(S)$ pour S d'échelle Δ . Par exemple si l'échelle de S est supérieure à Δ on a

$$\alpha(S) \leq 2 \sum_k \phi(k\Delta) \text{ et} \quad (\text{IV.127})$$

$$\beta(S) \leq \max_{j \leq \Delta} (\phi(j) + \phi(\Delta - j)) + \alpha(S). \quad (\text{IV.128})$$

Ces bornes permettent de déterminer un Δ qui assure la restructibilité.

En revanche, pour savoir si un support assure la restructibilité, le mieux est de calculer son ERC. Si on veut estimer le plus petit Δ pour un filtre donné, on le majore en utilisant la fonction ϕ et on essaie de trouver des supports S tels que $\text{ERC}(S) < 0$ avec une échelle la plus grande possible. En effet Tropp a montré dans le théorème IV.8 qu'un ERC négatif assure l'existence d'un vecteur non restructible.

Cette méthode consistant à borner inférieurement et supérieurement Δ a permis d'estimer Δ à 1 près pour les filtres réguliers que nous avons testés. Quelques exemples de filtres passe bas sont présentés dans la figure IV.12

Les expériences numériques ont montré qu'il était parfois plus intéressant de restructurer les données pour diminuer le WERC et l'ERC, si on souhaite avoir le support exact. En effet, même si effectuer un filtrage passe bas supplémentaire renforce souvent la cohérence, il est parfois meilleur d'avoir une décroissance rapide de la réponse impulsionnelle du filtre. Cette remarque prend tout son sens quand on essaie de retrouver un signal à partir de la moitié basse des fréquences. Un bon filtrage régularisant permet de diminuer les valeurs de $\text{WERC}(S)$ et $\text{ERC}(S)$ et ainsi de diminuer sensiblement la distance minimale Δ associée au filtre.

IV.5.2.2 Algorithme itératif par projections alternées

Pour effectuer nos expérimentations numériques, nous avons utilisé l'algorithme développé simultanément par trois équipes, Daubechies, Defrise et De Mol [DDM04], par Chambolle [Cha04] et Figueiredo et Nowak [FN03]. Nous utilisons les notations de [DDM04] pour décrire notre algorithme.

Les auteurs montrent que la suite définie par

$$f_n = S_\lambda(f_{n-1} + K^*(Y - Kf_{n-1})) \quad (\text{IV.129})$$

converge pour tout f_0 vers le minimum de la fonctionnelle

$$J(f) = \|Kf - Y\|^2 + \lambda \|f\|_1 \quad (\text{IV.130})$$

Si K est un opérateur strictement contractant et où $S_\lambda(g)$ désigne l'opérateur de seuillage doux avec un seuil $\lambda/2$.

$$S_\lambda(f) = \sum_i \text{sign}(\langle f, \delta_i \rangle) \max(|\langle f, \delta_i \rangle| - \lambda/2, 0) \delta_i \quad (\text{IV.131})$$

Comme nous avons considéré des filtres h normalisés, il est nécessaire d'effectuer la minimisation en utilisant $K = \mu h$ où $\mu \in]0, 1[$. On en déduit que pour tout f_0 la suite $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par

$$g_n = f_n + \mu^2 \bar{h} \star (Y - h \star f_n) = f_n + \mu^2 \bar{h} \star Y + \mu^2 (\bar{h} \star h) \star f_n \quad (\text{IV.132})$$

$$f_{n+1} = S_{2\mu^2\gamma}(g_n). \quad (\text{IV.133})$$

tend vers le minimiseur de (IV.50)

$$\frac{1}{2} \|Y - h \star f\|_2^2 + \gamma \|f\|_1.$$

A chaque étape on a ainsi un calcul de $H(f_n)$ et un seuillage doux. Le choix de $\mu \in]0, 1[$ est libre. Il est conseillé de choisir μ proche de 1 car l'algorithme converge plus vite.

IV.6 Perspectives

Nous avons justifié l'utilisation de la fonctionnelle relaxée (IV.50) pour la déconvolution de traces sismiques. Cette minimisation tire avantage d'une concision en bases de Diracs de la réflectivité monodimensionnelle. Elle néglige en revanche toute redondance spatiale. En effet les données sismiques réelles sont tridimensionnelles et on retrouve dans ces données des structures régulières, des surfaces ou des courbes. Le sous-sol a ainsi une forte régularité géométrique.

Cette double propriété a été exploitée par Hennenfent, Herrmann et Neelamani dans un travail [HHN05] qui date de juin 2005. Les auteurs proposent de minimiser la fonctionnelle (IV.50) où la norme l_1 est celle des coefficients en curvelets. Les auteurs espèrent ainsi profiter des deux a priori de la réflectivité, la concision verticale et la redondance horizontale. Il est probable qu'une approche similaire en bandelettes donne des résultats équivalents.

Nous pensons toutefois qu'il serait meilleur d'utiliser des bases plus adaptées à l'inversion sismique. En effet même si les réflectivités ont une régularité géométrique, un modèle \mathbf{C}^α en dehors de courbes \mathbf{C}^α ne correspond pas à la régularité verticale d'une réflectivité. Des bases de fonctions, qui ont une régularité géométrique horizontale et un support géométrique proche du Dirac verticalement, semblent plus adaptées au problème.

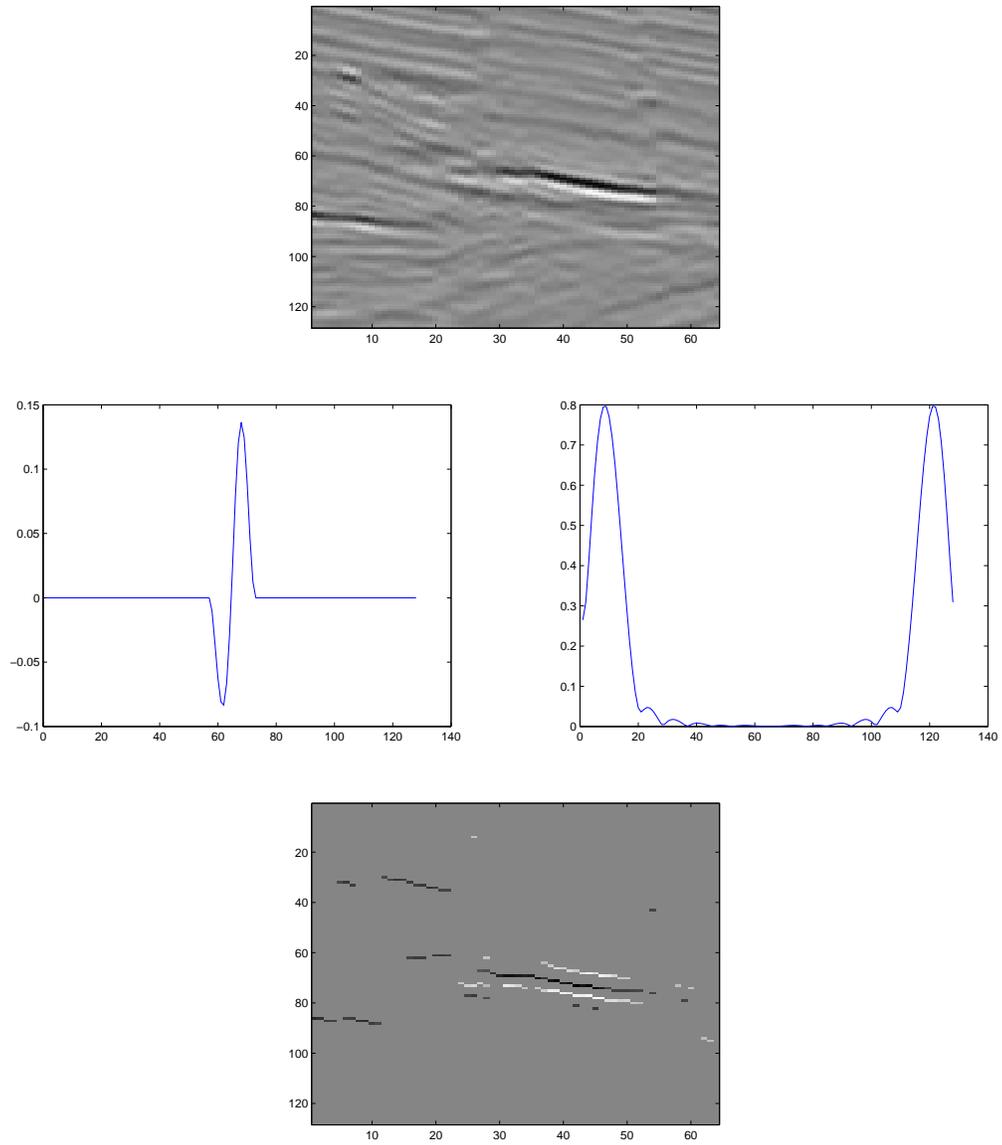


FIG. IV.8 – En haut données sismiques réelles. Au milieu ondelette, en espace et en fréquence. En bas, reconstruction totale par minimisation l_1

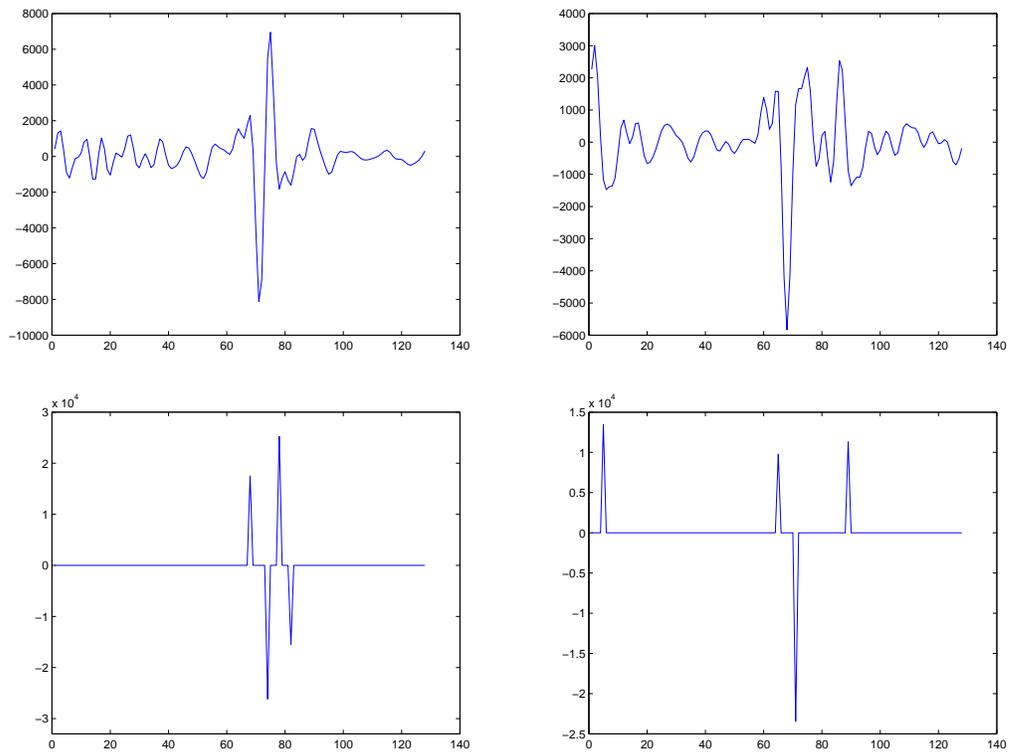


FIG. IV.9 – En haut deux traces sismiques et en bas les deux reconstructions associées.

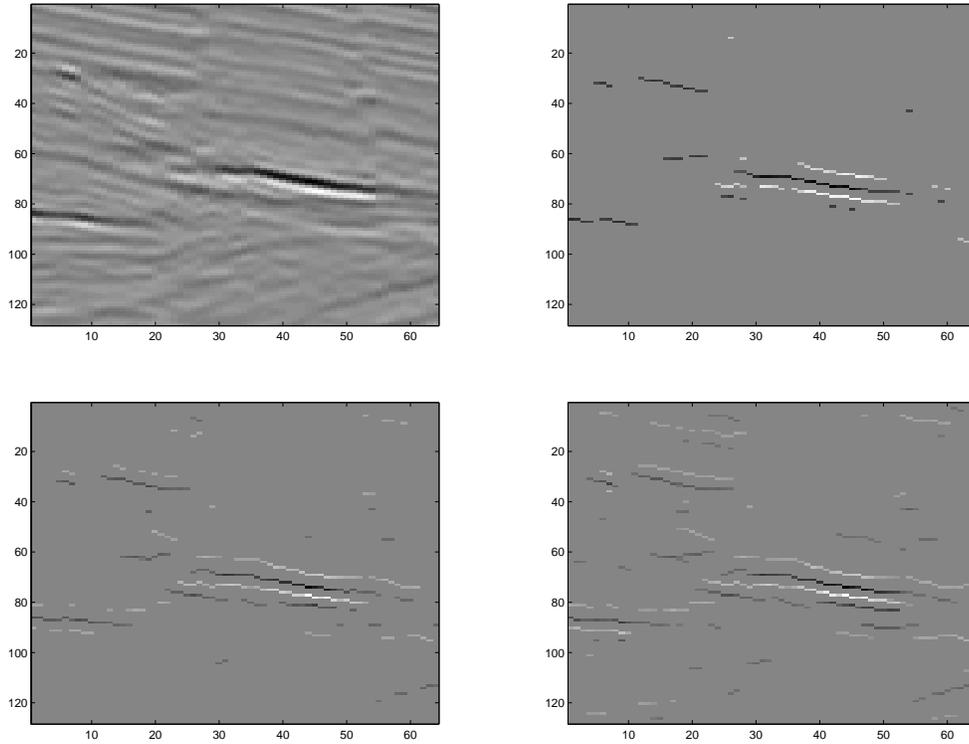


FIG. IV.10 – Différentes reconstructions avec des γ différents. Plus γ est petit plus on récupère de Diracs. En haut à gauche, les données originales, en haut à droite, une reconstruction avec un γ grand, en bas à gauche une reconstruction avec un γ un peu plus petit, en bas à droite une reconstruction avec un γ encore plus faible. On observe que les supports des solutions sont presque intégralement inclus les uns dans les autres.

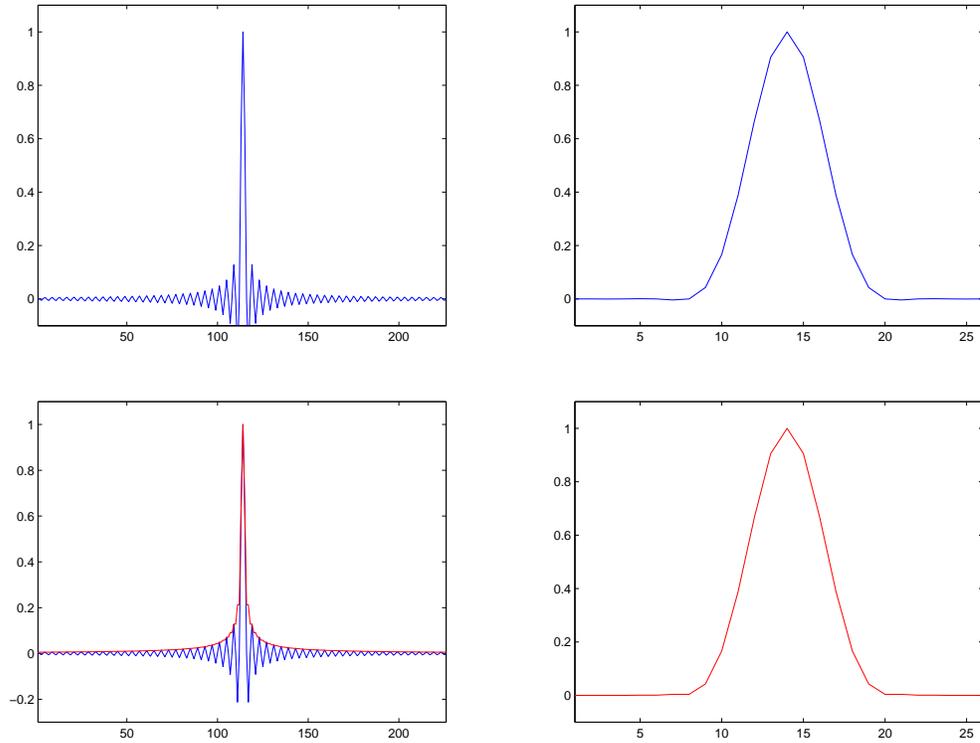


FIG. IV.11 – A gauche sont représentées le vecteur $\bar{h}_0 \star h_0$ et le vecteur ϕ associé qui forme une enveloppe de la courbe oscillante. A droite la même chose pour le filtre h_1 . Dans le second cas l'approximation de $H_1 = |\bar{h}_1 \star h_1|$ par ϕ est une approximation fine. On décèle à peine que H n'est pas rigoureusement décroissante.

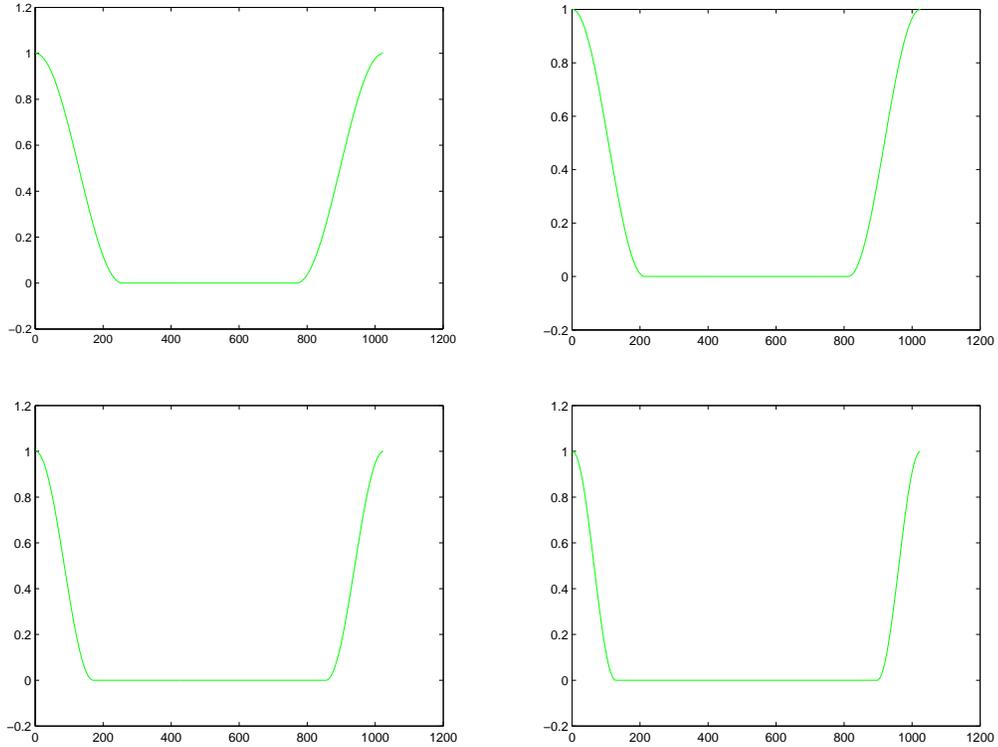


FIG. IV.12 – Différents filtres passe bas pour des fréquences de coupures différentes. Pour une fréquence $\omega_c = \pi/2$ (en haut à gauche) l'utilisation de la fonction ϕ et de l'ERC permet d'obtenir $\Delta = 5$. Pour $\omega_c = 5\pi/12$ (en haut à droite) on obtient $\Delta = 6$. Pour $\omega_c = \pi/3$ (en bas à gauche) on obtient $\Delta = 8$. Pour $\omega_c = \pi/4$ (en bas à droite) on obtient $\Delta \in [11, 12]$.

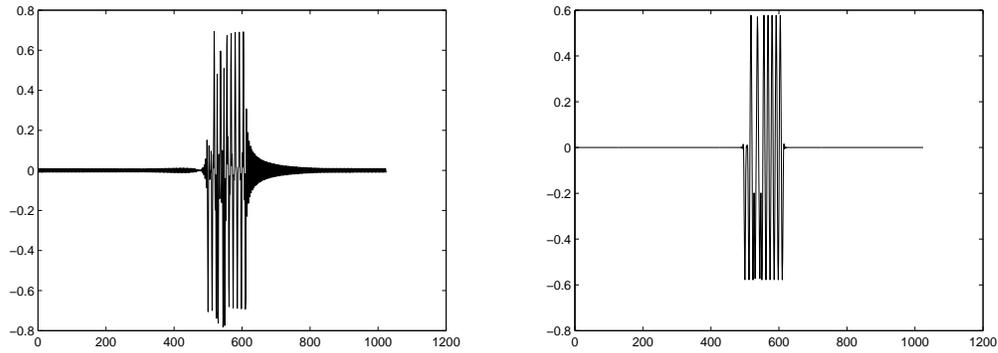


FIG. IV.13 – Images de x_0 par les filtres h_0 et h_1 .

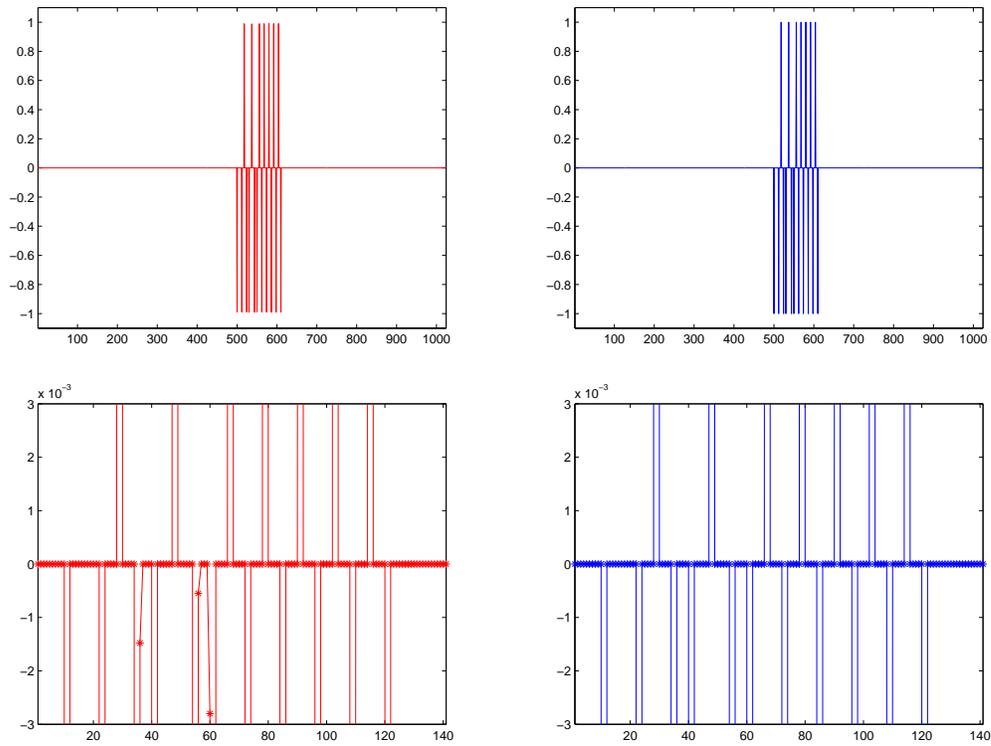


FIG. IV.14 – A gauche la reconstruction par inversion de h_0 . En zoomant on voit que le support diffère en 3 points. A droite la reconstruction par inversion de h_1 , le support est identique à celui de x_0 .

Références bibliographiques

Chapitre IV

- [CDS99] S.S. Chen, D.L. Donoho and M.A. Saunders, “Atomic decomposition by basis pursuit”, *SIAM J. Sci Comput.* (1999).
- [Cha04] Antonin Chambolle, “An algorithm for total variation minimization and applications”, *J. Math. Imaging Vis.* **20** (2004), no. 1-2, pp. 89–97.
- [CJ04] E.J. Candès and J.Romberg, “Quantitative robust uncertainty principles and optimally sparse decompositions”.
- [CM73] J.F. Clearbout and F. Muir, “Robust modeling of erratic data”, *Geophysics* **38** (1973), no. 5, pp. 826–844.
- [CRT05a] E.J. Candès, J. Romberg and T.Tao, “Robust uncertainty principles : Exact signal reconstruction from highly incomplete frequency information”.
- [CRT05b] _____, “Stable signal recovery from incomplete and inaccurate measurements”.
- [CT04] E.J. Candès and T.Tao, “Near optimal signal recovery from random projections and universal encoding strategies”.
- [CT05] _____, “The dantzig selector : statistical estimation when p is much larger than n ”.
- [DDM04] I. Daubechies, M. Defrise and C. De Mol, “An iterative thresholding algorithm for linear inverse problem with sparsity constraint”.
- [DE02] D.L. Donoho and M. Elad, “Optimally sparse representation in general (nonorthogonal) dictionaries via l^1 minimization”, *PNAS* **100** (2002), pp. 2197–2202.
- [DET04] D.L. Donoho, M. Elad and V. Temlyakov, “Stable recovery of sparse overcomplete representations in the presence of noise”.

- [DH99] D.L. Donoho and X. Huo, “Uncertainty principles and ideal decomposition”.
- [Don95] D.L. Donoho, “Nonlinear solution of linear inverse problems by Wavelet Vaguelet Decomposition”.
- [DS89] D.L. Donoho and P.B Stark, “Uncertainty principles and Signal Recovery”, *SIAM J. Appl Math* **49** (1989), no. 3, pp. 906–931.
- [EB02] M. Elad and A.M. Bruckstein, “A generalized uncertainty principle and sparse representation in pairs of bases”, *IEEE transactions on information theory* **48** (2002).
- [EHJT04] B. Efron, T. Hastie, I. Johnstone and R. Tibshirani, “Least Angle Regression”, *Annals of statistics* **32** (2004), no. 2, pp. 407–499.
- [Fle87] R. Fletcher, *Practical methods of optimization*, 1987.
- [FN03] M. Figueiredo and R. Nowak, “An EM Algorithm for Wavelet-Based Image Restoration”, *IEEE Transactions on Image Processing* **12** (2003), no. 8, pp. 906–916.
- [Fuc02] J.J. Fuchs, “On sparse representations in arbitrary redundant bases”, *IEEE-I-IT* (2002).
- [Fuc04] ———, “Sparsity and uniqueness for some specific under-determined linear systems”.
- [Fuc05] ———, “Recovery of exact sparse representations in the presence of bounded noise”, *Publication interne de l’IRISA* (2005), no. 1618.
- [GN02] R. Gribonval and M. Nielsen, “Sparse representation in unions of bases”, *Publication interne de l’IRISA* (2002), no. 1499.
- [GN03] ———, “Highly sparse representations from dictionnaires are unique and independent of the sparseness measure”.
- [GN05] ———, “Beyond Sparsity : Recovering structured representations by l^1 minimization and greedy algorithms. Application of sparse underdetermined ICA”, *Publication interne de l’IRISA* (2005), no. 1684.
- [GVV04] R. Gribonval, R.M. Figueras I Ventura and P. Vandergheynst, “A simple test to check the optimality of a sparse signal approximation”, *Publication interne de l’IRISA* (2004).
- [HHN05] G. Hennenfent, F. Herrmann and R. Neelamani, “Seismic deconvolution revisited with curvelet frames”.
- [Plu05a] M.D. Plumbley, “Polar polytopes and recovery of sparse representations”.
- [Plu05b] ———, “Recovery of sparse representations by polytope faces pursuit”.

- [SF05] S.Maria and J.J. Fuchs, “Application of the global matched filter to Stap data, an efficient algorithmic approach.”.
- [SJDH04] M.A. Sustik, J.Tropp, I.S Dhillon and R.W.Jr Heath, “On the existence of equiregular tight frames”, no. TR04-32.
- [SS86] F. Santosa and W.W. Symes, “Linear inversion of band-limited reflection seismograms”, SIAM J. Sci. Statistic. Comput **7** (1986), pp. 1307–1330.
- [Tro04] J.A. Tropp, “Greed is good : Algorithmic results for sparse approximation”, IEEE transactions on informnation theory **50** (2004), no. 10.
- [Tro05a] ———, “Just Relax : Convex Programming Methods for Identifying Sparse Signals in Noise”, IEEE transactions on informnation theory (2005).
- [Tro05b] ———, “Recovery of short complex linear combinations via l_1 minimization”, IEEE transactions on informnation theory **51** (2005), no. 4.

