Séparation des variables et facteurs de forme des modèles intégrables quantiques

Nicolas Grosjean

THÈSE

en vue de l'obtention du grade de

Docteur de l'Université de Lyon, délivré par l'École Normale Supérieure de Lyon

Discipline : Physique

Laboratoire de physique de l'ENS de Lyon

École Doctorale Physique & Astrophysique de Lyon

présentée et soutenue publiquement le 25 Juin 2013

par Monsieur Nicolas GROSJEAN

Séparation des variables et facteurs de forme

des modèles intégrables quantiques

Directeur de thèse : M. Jean-Michel MAILLET

Après l'avis de : M. Evgueni SKLYANIN

M. Jörg TESCHNER

Devant la commission d'examen formée de :

M. Olivier BABELON, LPTHE, Président

M. Krzysztof GAWEDZKI, ENS de Lyon, Membre

M. Jean-Michel MAILLET, ENS de Lyon, Membre

M. Giuliano NICCOLI, StonyBrook University, Membre

M. Jörg Teschner, DESY, Rapporteur

Remerciements

Une thèse est l'aboutissement d'un long parcours scolaire, qui dans mon cas a été déterminé par de nombreuses rencontres. En premier lieu, Jean-Michel, que je remercie pour m'a fait découvrir les systèmes intégrables, ainsi que pour son expertise et sa gentillesse. Sans lui, cette thèse n'aurait pas été possible.

Il serait difficile de passer sous silence le rôle de Giuliano, pour m'avoir co-encadré et pour m'avoir permis de passer trois semaines à l'université de Stony Brook. Ce séjour m'a permis, en plus de la découverte d'un autre continent, de travailler au contact d'un laboratoire différent, ce qui a été une vraie chance pour moi.

Je remercie également messieurs Evgueni Sklyanin et Jörg Teschner pour avoir accepté d'être les rapporteurs de mon manuscrit, la lecture de plus de cent pages de thèse en français étant loin d'être une sinécure. De plus, je souhaite remercier messieurs Olivier Babelon, Krzysztof Gawedzki et Jörg Teschner d'assister à ma thèse en tant que membres du jury.

Je voudrais également exprimer ma gratitude envers messieurs Jean-François Pinton et Thierry Dauxois pour avoir accepté que je prépare ma thèse au laboratoire, mesdames Fatiha Bouchneb, Laure Dumazel, Laurence Mauduit et Nadine Clervaux pour m'avoir permis de passer ces années au laboratoire dans les meilleures conditions possibles, et de manière générale tout le laboratoire pour l'ambiance et les conditions de travail. Avoir une salle de repos au sein du laboratoire est loin d'être une chose allant de soi, et pourtant elle est la bienvenue. Je souhaite également remercier l'équipe du YITP pour le séjour à Stonybrook.

J'ai aussi une pensée chaleureuse pour les personnes que j'ai croisées au cours de ma scolarité, camarades et professeurs, et qui m'ont orienté vers la voie que j'ai choisie (je pense en particulier à madame Édith Méthou et messieurs Yves Pagnoux et Dominique Obert) ou qui, de manière générale, m'ont permis de réaliser ma scolarité dans les meilleures conditions possibles.

Bien évidemment, je remercie ma famille, et en particulier mes parents et ma soeur. Une telle famille est un vrai privilège. Enfin, merci, Marion, d'être là pour moi.

Table des matières

Introduction

Cette thèse se situe dans le domaine de la physique mathématique. L'histoire des sciences lie irrémédiablement le développement de ces deux branches de la connaissance dans leurs efforts conjoints pour comprendre le monde qui nous entoure. Physique et mathématiques se sont en effet développées en interaction constante dans un processus de fertilisation croisée extrêmement fructueux. Un des exemples paradigmatique est certainement celui de la modélisation du mouvement des corps célestes mêlant les premiers pas du calcul différentiel avec l'émergence des lois fondamentales de la dynamique Newtonienne et l'élucidation des lois de Kepler [7]. Si le cas du problème à deux corps en interaction avec un potentiel central en 1/r admet une résolution exacte, il n'en va pas de même au delà, rendant la prévision de l'évolution à long terme d'un système de N corps en interaction gravitationnelle un problème ardu. Il est ainsi devenu assez vite clair que la majorité des problèmes dynamiques ne se prêtent pas à une solution explicite et exacte, et que ceux qui sont solubles sont l'exception. Mais dans le même temps, l'existence de tels systèmes solubles (ou intégrables) a permis d'éclairer le comportement de systèmes plus généraux dès lors que ceux-ci peuvent être considérés, tout au moins dans une certaine approximation, comme des perturbations de systèmes intégrables.
Le besoin et la nécessité d'identifier et de construire de tels systèmes intégrables et de développer des méthodes pour leur résolution explicite a impulsé des développements importants de cette branche de la physique et des mathématiques au 19ème siècle, et a donné le jour à une théorie de grande portée : la mécanique analytique et ses diverses formulations dans les travaux de Lagrange, Liouville, Jacobi et Hamilton [129, 96, 139, 85]. La notion de résolution exacte et de système intégrable y a trouvé une définition précise et fructueuse, liant une telle propriété à l'existence de symétries et de quantités conservées associées, à la notion de variables action-angle et à celle de séparation des variables de Hamilton-Jacobi [17]. Ainsi, un des premiers formalismes permettant l'étude rigoureuse des systèmes intégrables classiques a été posé dans les travaux de Jacobi [96] et Liouville [139] en mécanique analytique. Dans ce cadre, un système est dit intégrable dès lors que l'on peut construire à partir des variables initiales un ensemble de variables dites action-angle, via une transformation canonique. Ces variables sont définies de telle façon que leur équation d'évolution est linéaire. Cela permet de déterminer simplement les valeurs prises par ces variables au cours du temps, puis d'en déduire, à l'aide d'une transformation inverse, l'évolution des variables initiales. Une telle résolution par quadrature définit l'intégrabilité d'un système au sens de Liouville [17, 7]. En particulier, la moitié des variables action-

angle (les variables action) correspondent à des quantités conservées, et sont donc reliées aux symétries du système via le théorème de Noether [158].

La fin du 19ème siècle a également vu la découverte de théories continues possédant des propriétés proches de celles des systèmes intégrables de mécanique. C'est par exemple le cas des équations Korteweg-de Vries décrivant l'évolution des ondes de surface en eau peu profonde et qui admettent des solutions exactes de type ondes solitaires (ou « solitons ») [124]. Celles-ci se propagent à vitesse constante et sans changement de forme, et ce même lorsque deux ondes de ce type entrent en collision. La présence cachée de quantités conservées, en quelque sorte garantissant la persistance de la forme des solitons, ne faisait aucun doute, même si leur construction générale resta longtemps hors de portée. En effet dans ce cas, l'existence de quantités invariantes par la dynamique ne résulte pas de l'existence de symétries géométriques simples (comme la symétrie par rotation dans le cas d'un potentiel central) mais de symétries dynamiques, c'est à dire dues à la forme de l'interaction, et dont un prototype célèbre est le vecteur de Runge-Lenz dans le problème de Kepler [168, 134]. Il faudra attendre les idées originales de Lax [130], adaptées au cas continu par Zakharov et Shabat [213, 214, 215], pour obtenir un schéma algébrique simple permettant de décrire des systèmes dynamiques admettant par construction des quantités conservées, premier pas vers leur résolution exacte et leur intégrabilité. L'idée générale est de définir une paire de matrices de taille $N \times N$, L et M, appelée paire de Lax [130], toutes deux fonctions des variables dynamiques d'un certain système de telle manière que les équations du mouvement de ce système soient équivalentes à l'équation d'évolution iso-spectrale suivante pour la matrice L :

$$\frac{\mathrm{d}L}{\mathrm{d}t} = [M, L] \tag{1}$$

Il en résulte immédiatement que les fonctions symétriques des invariants spectraux de la matrice L, générés par les traces des puissances de la matrice L, sont des quantités conservées par la dynamique. La généralisation de ce schéma aux théories continues où les variables dynamiques du systèmes notées symboliquement $\varphi(x,t)$ sont des fonctions de deux variables d'espace x et de temps t est donnée par une condition de courbure nulle pour la paire de Lax $L(\varphi)$ et $M(\varphi)$, qui généralise (1) :

$$[L - \partial_x, M - \partial_t] = 0 \tag{2}$$

de telle sorte que cette condition soit équivalente aux équations (en général non-linéaire) du mouvement pour le champs φ. Cette condition assure que le système linéaire associé,

$$\partial_x \Psi = L\Psi \tag{3}$$

$$\partial_t \Psi = M\Psi \tag{4}$$

admet une solution $\Psi(x,t)$ qui permet la construction de quantités conservées par la dynamique. Avec la mise au point de la méthode de la diffusion inverse classique par Gardner, Greene, Kruskal et Miura [73], évoquée plus loin, ce schéma de construction des modèles intégrables via les paires de Lax acquiert également une méthode de résolution systématique (en particulier pour les solutions de type solitons).

La question suivante, naturelle du point de vue de l'intégrabilité, concerne la construction des variables de type action-angle à partir de la donnée d'une paire de Lax dans le cas d'un système possédant un nombre fini de degrés de liberté. Les invariants spectraux de la matrice L, qui sont des quantités conservées par la dynamique dès lors que l'équation de Lax est équivalente aux équations du mouvement, peuvent jouer le rôle de variables action. Une fois ces dernières obtenues, les variables angles peuvent alors être construites à l'aide de la résolution par quadrature [17], c'est-à-dire à l'aide d'une fonction génératrice dont certaines dérivées partielles donnent les variables angle. Toutefois, pour pouvoir être pleinement qualifiées de variables action-angle, ces objets doivent être en nombre suffisant, et vérifier des relations de commutation canoniques au sens de Poisson. La vérification de ce dernier point demande de pouvoir calculer les crochets de Poisson des éléments de la matrice L. A ce titre, il est possible, dans certains cas, d'écrire le crochet de Poisson de tous les éléments de la matrice L sous une forme compacte, faisant intervenir une matrice r. Cette matrice r peut être écrite en général à l'aide des variables du système (on parle alors de matrice r dynamique). Lorsque cette matrice r est constante (ne dépend pas des variables dynamiques), elle obéit, pour que le crochet de Poisson des matrices L satisfasse la relation de Jacobi, à une équation bien particulière nommée équation de Yang-Baxter [17, 69]. Pour finir, notons que l'étude de ces paires de Lax peut être réalisée de manière systématique, elles peuvent en particulier être obtenues par la construction de Zakharov-Shabat qui se base sur l'étude des pôles de ces matrices, pour ensuite donner naissance à un système intégrable [214, 215]. Cette construction permet une approche systématique du problème, basée sur l'étude des algèbres de Lie sous-jacentes [42, 43].

Dans le même temps, l'étude des théories des champs classiques intégrables a connu un progrès considérable avec l'émergence de la méthode de la diffusion inverse classique, mise au point par Gardner, Greene, Kruskal et Miura [73]. Cette méthode a d'abord été construite pour la résolution de l'équation de Korteweg-de Vries [124]. Cette équation de théorie des champs a d'abord été obtenue en hydrodynamique, décrivant l'évolution d'ondes de surface en milieu peu profond, mais elle a ensuite été reliée à d'autres domaines physiques, comme l'étude d'ondes acoustiques dans certains cristaux [210]. Pour cette équation, des simulations numériques avaient indiqué l'existence de solutions de type soliton [211], existence prouvée un peu plus tard par Lax (voir [73]). La méthode de la diffusion inverse classique est basée sur l'équivalence entre l'équation d'évolution du champ et une condition de courbure nulle faisant intervenir deux matrices, analogues aux matrices de Lax L et M évoquées plus haut, dont les éléments sont des quantités dynamiques ainsi qu'un paramètre complexe, nommé paramètre spectral. Cette équivalence donne lieu à un problème différentiel auxiliaire (1.21) dont les solutions, dites solutions de Jost, sont caractérisées à l'aide de deux fonctions du paramètre spectral. Ces deux fonctions (les données de diffusion) satisfont une équation d'évolution très simple, ce qui est à mettre en parallèle avec les relations d'évolution des variables action-angle dans le cas d'un nombre fini de degré de libertés. Il est alors possible de résoudre le problème inverse, c'est-à-dire de reconstruire les champs initiaux à partir de ces données de diffusion, à l'aide de résultats obtenus par Gel'fand, Levitan et Marchenko [75, 145]. Cette méthode de résolution a ensuite été généralisée à d'autres types de théories des champs, notamment l'équation de sine-Gordon classique [1] et l'équation de Schrödinger non-linéaire [213].

Dans le domaine des systèmes intégrables, une autre catégorie de modèles ayant joué un rôle important est celle des modèles statistiques classiques ou quantiques sur réseau, motivé par l'étude de problèmes de physique statistique tels que la transition ferromagnétique-paramagnétique du fer. Ici, l'un des premiers problèmes ayant été résolus de manière exacte, il y a plus de 80 ans, est le modèle de Lenz-Ising [54]. Ce modèle est plus connu sous le nom de modèle d'Ising, bien qu'il ait été proposé par Lenz [133] avant d'être résolu par Ising dans le cas unidimensionne [92]. L'absence de transition de phase dans ce cas précis (une telle transition existe en effet pour des dimensions supérieures, bien qu'Ising ait a l'époque conjecturé le contraire) a poussé les physiciens à se tourner vers des modèles plus complexes. Le modèle de Lenz-Ising fut alors, étant donné la supposée absence de transition de phase pour toute dimension, mis de côté. Dans ce cadre, un modèle quantique fut alors proposé par Heisenberg [87]. Il s'agit d'une chaîne de spins interagissant entre plus proches voisins de manière isotrope. Ce modèle est connu aujourd'hui sous le nom de chaîne de Heisenberg XXX. Le spectre de ce modèle a été obtenu par Bethe en 1931 [50], à l'aide d'une méthode qui porte son nom, l'ansatz de Bethe. Puis, dans les années 40, Onsager [161] et Kaufman [112] déterminent la fonction de partition du modèle d'Ising bidimensionnel, ainsi que des exposants critiques. Cette détermination fait intervenir des algèbres particulières, respectivement les algèbres d'Onsager et de Clifford. Dans ce même modèle, la magnétisation a été calculée, toujours par Onsager et Kaufman, à l'aide d'un résultat donnant le comportement d'un déterminant d'une matrice de Toeplitz quand la taille de cette dernière tend vers l'infini [114, 113]. La formule de la magnétisation spontanée de ce modèle a été obtenue par Yang en 1952 [206]. A la fin des années 50, Orbach [163] et Walker [203] montrent que l'ansatz de Bethe coordonnée, utilisée pour la chaîne de Heisenberg XXX, peut également s'appliquer à d'autres modèles, dont une variante de cette chaîne qui introduit une anisotropie dans la direction Z entre les différentes composantes du spin, la chaîne de Heisenberg XXZ. Citons ensuite le calcul, par Yang et Yang [208], de l'énergie de l'état fondamental de cette chaîne, reliée au modèle 6-vertex [209, 192]. Ce calcul utilise une généralisation de l'ansatz de Bethe utilisée pour la chaîne XXX homogène, l'application de cette ansatz n'étant possible que grâce à l'existence d'une propriété de conservation dite « conservation des flèches »[138, 74].
L'étude des modèles sur réseau a connu d'importants progrès avec les travaux de Baxter. En particulier, son étude des modèles 6-vertex et 8-vertex a donné lieu à une nouvelle approche permettant de les étudier, approche faisant intervenir un opérateur Q et une équation dite « équation de Baxter »[35]. Cette équation se retrouve dans d'autres modèles, ce qui a permis une étude plus globale des modèles sur réseau. C'est le cas par exemple du modèle 8-vertex, pour lequel l'ansatz de Bethe coor-

donnée n'est pas utilisable car la propriété de conservation des flèches n'est pas vérifiée, ce qui a amené à l'obtention de résultats via l'utilisation de cette équation de Baxter [19, 39, 20]. Ce modèle comporte en fait les modèles d'Ising et 6-vertex comme cas particuliers. Citons enfin le modèle de Potts chiral [22, 25, 26, 28] $\mathbb{Z}_N$-symétrique pour lequel la magnétisation n'a pu être obtenue que très récemment [30]. Notons toutefois que ce modèle admet comme cas particulier le modèle de Potts chiral superintégrable [23], pour lequel les paramètres vérifient une propriété d'alternance particulière. Cette propriété permet la simplification des calculs et, pour ce modèle, des résultats tels que la fonction de partition et la magnétisation ont été calculés [32, 31, 34, 36, 33, 11].

Parallèlement, d'importants progrès ont également été obtenus dans le cadre des théories quantiques des champs. En particulier, l'étude des matrices de diffusion (dites matrices-S) représente une étape importante dans ce domaine [217, 218, 219, 110, 109, 47, 152]. Les matrices-S sont des objets reliant les états asymptotiques des particules du modèle qui interagissent entre elles, et permettent ainsi de caractériser leur interaction (et donc leur diffusion). Dans certaines théories des champs de dimension $1+1$, ces matrices-S à N particules peuvent se factoriser en termes de matrices-S à deux particules. Intuitivement, cela peut se comprendre comme étant la décomposition de l'interaction de ces N particules en $N(N-1)/2$ interactions successives de deux particules. Cette propriété de factorisation est reliée à l'existence de quantités conservées, et donc à l'intégrabilité. Elle a été obtenue pour la première fois dans l'étude de la diffusion en dimension $1+1$ de particules interagissant via un potentiel en δ. Cette factorisation impose aux matrices-S des relations de cohérence cubiques identiques aux équations de Yang-Baxter, en plus de celles d'unitarité, de croisement et de factorisation. Les matrices-S des modèles intégrables correspondent donc à certaines solutions de ces équations. En particulier, la solution générale $O(2)$-symétrique de ces équations correspond aux matrices-S de diffusion entre deux solitons de l'équation de sine-Gordon quantique [219]. De manière générale, les matrices-S de diffusion de solitons de modèles classiques solubles par la méthode de la diffusion inverse classique satisfont cette propriété de factorisation.

Dans les années 1970, les travaux sur les théories des champs classiques intégrables et les structures obtenues dans l'étude des modèles intégrables sur réseau ont été combinées. Cela a fait suite aux travaux de Lieb et Liniger [135, 136], qui ont utilisé une méthode découlant de l'ansatz de Bethe pour obtenir les valeurs propres du Hamiltonien d'une théorie quantique des champs, le modèle de Schrödinger non-linéaire quantique. Le fait que la version classique de ce problème soit soluble par la méthode de la diffusion inverse classique a mené à l'élaboration d'une technique basée sur l'ansatz de Bethe et similaire à la méthode de la diffusion inverse. Il s'agit d'une version algébrisée de l'ansatz de Bethe, appelée méthode de la diffusion inverse quantique ou encore ansatz de Bethe algébrique. Elle a permis le traitement de nombreux modèles, dont le modèle de Thirring massif [49, 48], et l'équation de sine-Gordon quantique [67]. Le point central de cette méthode consiste à construire des opérateurs auxiliaires qui peuvent être regroupés en une matrice d'opérateurs, dite matrice de monodromie. Ces éléments peuvent être vus comme l'analogue quantique des données de diffusion $a(\lambda)$ et $b(\lambda)$ de la méthode de la diffusion inverse classique. Les éléments de la matrice de monodromie satisfont des relations de commutation quadratiques dont les constantes de structure sont données par une matrice R, dont la limite classique donne la matrice r classique, solution de l'équation (cubique) de Yang-Baxter déjà citée dans le cadre des matrices-S de diffusion factorisables. Il résulte de cette algèbre que la trace de la matrice de monodromie génère un ensemble d'opérateurs qui commutent. Le Hamiltonien peut être exprimé comme une fonction de la trace de cette matrice, et donc des quantités conservées. Dans ce processus de quantification, les variables action deviennent les quantités conservées de la théorie quantique alors que les variables angle déterminent les opérateurs de création des états propres. Ces relations de commutation permettent alors la construction de la base propre du Hamiltonien et de l'ensemble des quantités conservées en involution. Les états propres du Hamiltonien sont construits par l'action répétée d'une famille d'opérateurs de création (définie à partir des éléments hors diagonaux de la matrice de monodromie) sur un certain état de référence. L'existence de cet état de référence est nécéssaire à l'utilisation de l'ansatz de Bethe algébrique. Cette méthode a permis l'obtention de nombreux résultats. Par exemple, dans le cas de la chaîne de Heisenberg inhomogène XXZ, le spectre a pu être obtenu. Beaucoup plus récemment, il a été possible dans le cadre de cette méthode d'exprimer les produits scalaires des vecteurs propres du Hamiltonien sous forme compacte, à l'aide de déterminants. Ce résultat a ensuite permis de calculer les fonctions de corrélation de ce modèle, et de comparer ces résultats théoriques à des expériences de diffusion de neutrons sur des matériaux magnétiques modélisés par la chaîne XXZ [142, 56, 57].

Bien que très puissante, la méthode de l'ansatz de Bethe algébrique nécéssite l'existence d'un état de référence. Il se trouve qu'un tel état n'existe pas dans tous les modèles intégrables D'autres méthodes permettent de passer outre cette absence. C'est le cas de la méthode de la séparation des variables [182], ou ansatz de Bethe fonctionnelle, qui se place dans le cadre algébrique de l'ansatz de Bethe algébrique, mais qui caractérise le spectre du Hamiltonien à l'aide de N équations de Baxter séparées. Cette méthode a été développée par Sklyanin, tout d'abord dans le cadre de la chaîne de Toda (modèle en dimension 1+1 dans lequel les particules interagissent via un potentiel exponentiel) [174]. Elle présente plusieurs avantages par rapport à l'ansatz de Bethe algébrique, elle n'a en particulier pas besoin de l'existence d'un état de référence pour pouvoir être appliquée. De plus, la complétude du spectre, c'est-à-dire le fait que la méthode génère tous les vecteurs propres du Hamiltonien, vient naturellement. Elle a été par la suite appliquée à de nombreux modèles, tels que le modèle de Gaudin XXX [179, 127, 107, 18], l'équation de Schrödinger non-linéaire en volume infini [177], la chaîne magnétique SL(3) [181, 183] ou plus récemment le modèle de sine-Gordon sur réseau [157].

L'étude des systèmes intégrables a également eu un impact important dans le domaine des sciences mathématiques. En effet, durant les années 1980, Drinfel'd et Jimbo ont étudié plus en détail la matrice R quantique intervenant dans les relations de Yang-Baxter. Il est en fait possible de considérer cette matrice R, ainsi que d'autres éléments tels que la matrice de monodromie, comme étant les représentations d'un élément d'une certaine algèbre enveloppante universelle déformée par un paramètre q, la matrice R universelle. Cette idée a donné naissance au domaine des groupes quantiques [64, 97]. Une des conséquences de ce concept est la recherche générale des solutions de l'équation de Yang-Baxter via la théorie des groupes quantiques, parallèlement aux travaux effectués dans le cas classique et associés aux algèbres de Lie, permettant ainsi une classification des modèles intégrables quantiques [126].

Au-delà du calcul du spectre du Hamiltonien d'un modèle intégrable via l'une des variantes de l'ansatz de Bethe, les quantités importantes pour la prévision de résultats expérimentaux obtenus sur un système physique associé est la donnée des fonctions de corrélation. Dans le cadre de la limite de température nulle, il s'agit des quantités

$$\langle \psi | O_1 O_2 \dots O_n | \psi \rangle \tag{5}$$

où $\langle \psi |$ est l'état fondamental, et $O_1, \dots, O_n$ des opérateurs locaux de la théorie. Ces fonctions contiennent en effet toutes les données dynamiques du système et certaines peuvent être mesurées expérimentalement. Ainsi, les facteurs de structure dynamiques, qui sont donnés par la transformée de Fourier des fonctions de corrélation dynamiques (dépendant du temps et de l'espace) donnent la réponse linéaire d'un système magnétique lorsqu'il est bombardé par des neutrons [125, 196, 197]. Ces fonctions de corrélation sont en général plus difficiles à calculer analytiquement que des quantités telles que le spectre ou la fonction de partition. Par exemple, dans le cadre des théories quantiques de champs, l'ansatz de Bethe thermodynamique permet de déterminer la fonction de partition du système de taille finie dès lors que les matrices S sont déterminées [140]. Le calcul des fonctions de corrélation a néanmoins été obtenu pour plusieurs modèles, dont le modèle d'Ising [146] et, en dehors du cas fermion libre, par ansatz de Bethe algébrique pour les chaînes de Heisenberg XXX et XXZ [115].

Dans le cadre des systèmes intégrables quantiques, et plus particulièrement dans le cas fermion libre, une première approche du calcul des fonctions de corrélation a été effectuée par Lieb, Schultz et Mattis [137]. En construisant deux modèles de chaînes antiferromagnétiques avec interactions entre plus proches voisins pour lesquels certains résultats de base étaient obtenus, il a été possible de fournir des formules générales concernant les fonctions de corrélations entre deux spins, tout en comparant les résultats obtenus avec la chaîne de Heisenberg, permettant d'effectuer quelques conjectures sur le comportement des fonctions de corrélation de cette dernière. Citons ensuite les résultats obtenus par Montroll, Potts et Ward [151], avec lesquels certains résultats obtenus par Onsager concernant le modèle d'Ising bidimensionnel, comme la magnétisation spontanée, sont redérivés et mis sous la forme d'un déterminant. Plus tard, Baruch, McCoy, Tracy et Wu ont repris ces résultats, diminuant la taille du déterminant dans les cas défavorables, permettant ainsi le calcul de ces fonctions dans la limite de scaling [149, 147, 148, 146], tout en démontrant que dans le cadre de cette limite, ces fonctions sont obtenues à partir d'une équation de Painlevé du troisième type [205].

Ce lien avec les équations de Painlevé a été obtenu pour d'autres modèles intégrables, toujours dans le cas fermion libre. C'est le cas par exemple du gaz de Bose impénétrable (avec interactions de type δ), qui est une théorie des champs en dimension $1 + 1$ décrite par l'équation de Schrödinger non-linéaire avec constante de couplage c infinie [169, 131, 132, 194, 195]. Dans ce cadre, Jimbo, Miwa, Môri et Sato ont démontré que les fonctions de corrélation à 2 points satisfont une équation différentielle de Painlevé [101], ce résultat découlant du lien entre opérateurs de champ dans une algèbre de Clifford et la théorie des déformations isomonodromiques. Ce lien a, par ailleurs, été appliqué au modèle d'Ising bidimensionnel [102]. Peu après, Creamer, Thacker et Wilkinson ont réussi à prolonger cette analyse dans le cas c fini, en donnant la correction de premier ordre en $1/c$ de la fonction de corrélation à deux points, en se basant sur l'approche de la diffusion inverse quantique [58].

Citons également le calcul des facteurs de forme en volume infini obtenu par la méthode « bootstrap », c'est-à-dire à l'aide de la construction de matrices S de diffusion par factorisation. Dans ce cadre, les facteurs de forme sont construits à l'aide du théorème de Watson [204] : les symétries et d'autres propriétés du système imposent aux facteur de forme d'obéir à certaines équations, qui permettent d'exprimer ces facteurs de forme à l'aide de la matrice S de diffusion [108, 111].
Plus récemment, il a été possible d'obtenir des résultats concernant les fonctions de corrélation hors du cas fermion libre. Citons tout d'abord les travaux d'Izergin et Korepin [66, 94, 95], puis de Jimbo et Miwa [98, 99], avec les opérateurs de q-vertex. Enfin, d'importants progrès ont été réalisés par le groupe de Lyon dans le cas de la chaîne de Heisenberg XXZ de spin 1/2 [122, 123, 119, 121, 120, 115, 117, 116]. En se basant sur l'approche par ansatz de Bethe algébrique, il a été possible d'exprimer les opérateurs de spin locaux, représentés par les matrices de Pauli, en terme des générateurs de l'algèbre de Yang-Baxter $A(\lambda)$, $B(\lambda)$, $C(\lambda)$ et $D(\lambda)$, c'est-à-dire de résoudre le problème inverse quantique [143]. Ces résultats ont pu être combinés avec ceux obtenus par Slavnov sur le produit scalaire dans le cadre de l'ansatz de Bethe algébrique [184], par lesquels il est possible d'exprimer les produits scalaires entre un état propre du Hamiltonien et un état quelconque sous forme d'un quotient de déterminants de taille N, celui du dénominateur étant un simple déterminant de Cauchy. Il a ainsi été possible, dans le cadre purement algébrique de la méthode de la diffusion inverse quantique, d'obtenir la magnétisation spontanée et les facteurs de forme des opérateurs locaux, puis de calculer directement des fonctions de corrélation à m points [119]. Plus tard, une nouvelle représentation pour les fonctions de corrélation à deux points a été développée, faisant intervenir une intégrale multiple, l'équation maître [121]. Cette approche par équation maître a ensuite pu être généralisée à d'autres modèles, dont des modèles continus tels que le modèle de Schrödinger non-linéaire, pour lequel la fonction de corrélation densité-densité a pu être obtenue.

Dans le cadre du comportement asymptotique des fonctions de corrélation à deux points (la limite dans laquelle la distance entre les spins et la taille du système deviennent infinies), le comportement asymptotique dominant des fonctions de corrélation a pu être obtenu à partir de leur développement en série de facteurs de forme. Ce comportement asymptotique résulte de la sommation sur un ensemble réduit (bien qu'infini dans la limite thermodynamique) d'états, dits critiques (les autres états ayant une contribution négligeable) [118]. Cette simplification a permis de calculer le comportement du développement asymptotique des fonctions de corrélation à deux spins dans le modèle de la chaîne de Heisenberg XXZ, en donnant à la fois l'exposant et les amplitude des termes de ce développement. Ces résultats rejoignent ceux obtenus par l'étude de problèmes de Riemann-Hilbert liés à des déterminants de Fredholm. Cette approche par facteurs de forme peut se généraliser à d'autres modèles, et corrobore les conjectures obtenues par d'autres approches, telles que le concept de liquide de Luttinger [141, 82, 83, 84] ou l'approche par théorie conforme [60, 62, 59].

Enfin, citons les travaux récents de Boos, Jimbo, Miwa, Smirnov et Takeyama [52, 53, 103, 51, 104] qui, dans le cas de la chaîne XXZ infinie, ont exprimé les moyennes dans le vide d'opérateurs locaux à l'aide d'une structure spécifique de l'espace des opérateurs du modèle. Cette structure est basée sur des familles d'opérateurs, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$, $\boldsymbol{b}^*$, $\boldsymbol{c}^*$ qui satisfont des relations d'anticommutation fermioniques, les opérateurs $\boldsymbol{b}$ et $\boldsymbol{c}$ correspondant alors à des opérateurs d'annihilation alors que $\boldsymbol{b}^*$ et $\boldsymbol{c}^*$ correspondent à des opérateurs de création. Les fonctions de corrélation dans le vide des opérateurs peuvent alors être exprimées comme des traces, déformées par un nombre complexe q et par $\boldsymbol{b}$ et $\boldsymbol{c}$, de ces opérateurs. Il est également possible d'utiliser les opérateurs de création pour générer une base (dans le cas inhomogène) des opérateurs locaux et d'exprimer les fonctions de corrélation dans le vide associées comme des déterminants.

Dans le cadre de la résolution exacte de modèles intégrables, le concept de séparation des variables joue un rôle clé. En effet, dans sa version classique, il est l'une des seules méthodes permettant l'obtention de résultats exacts. Ce concept, dont l'émergence remonte au XIXe siècle, peut être résumé comme la séparation d'un problème multidimensionnel complexe en une série de problèmes unidimensionnels indépendants. Notons toutefois que pendant longtemps, il n'y a pas eu de méthode générique permettant de construire cette transformation, qui devait être alors déduite à l'aide de techniques propres au système considéré. Ce fut par exemple le cas du modèle de Neumann. L'apparition de méthodes telles que l'utilisation de fonctions de Baker-Akhiezer, permet d'obtenir cette transformation de manière plus générique. C'est par exemple le cas pour le modèle de la chaîne magnétique XYZ [178] et le modèle de Calogero-Moser à trois particules [159, 160].
La transposition au cas quantique du concept de séparation des variables date des années 80. Un des premiers résultats concerne le modèle unidimensionnel de particules identiques avec interaction exponentielle entre proches voisins, appelé chaîne de Toda. Cette chaîne a tout d'abord fait l'objet d'une étude fructueuse dans le cas classique, prouvant entre autres l'intégrabilité de la chaîne [144, 71, 70] et fournissant les

variables action-angle pour la chaîne périodique [72, 106, 105]. En 1981, Gutzwiller adapte les idées ayant présidé à l'obtention de ces variables action-angle dans le cas quantique [81], ce qui lui permet de montrer que la détermination du spectre du Hamiltonien de la chaîne périodique à N sites revient à résoudre un ensemble de $N-1$ systèmes à une variable. Toutefois, sur le moment, seuls les cas $N=3$ et $N=4$ ont été traités. Quelques années plus tard, Sklyanin reprend cette idée et la transcrit dans le cadre de la méthode de l'ansatz de Bethe algébrique, ce qui lui permet de redériver et généraliser les résultats obtenus par Gutzwiller [174]. Le formalisme ainsi obtenu, appelé initialement ansatz de Bethe fonctionnelle puis renommé séparation des variables de Sklyanin, a pu s'appliquer à de nombreux modèles, tels que la chaîne XXX [180], l'équation de Schrödinger non-linéaire [177], le modèle de sinh-Gordon [176], la chaîne $SL(3)$ [181] et plus récemment le modèle τ_2 [199] et le modèle de sine-Gordon sur réseau avec espace quantique en chaque site associé à une représentation cyclique de $U_q(sl_2)$ [157]. Ici, les auteurs, en reprenant une discrétisation des modèles continus en dimension $1+1$ introduite par Izergin et Korepin [93], ont adapté au modèle de sine-Gordon la séparation des variables de Sklyanin, en exhibant $2N$ opérateurs correspondant aux variables séparées satisfaisant une relation de commutation de type $\eta T = qT\eta$, puis en utilisant ces variables séparées pour donner une caractérisation des valeurs et vecteurs propres du Hamiltonien, tout en prouvant la complétude de ce dernier.

Plusieurs travaux ont été réalisés pour essayer d'appliquer cette méthode de la séparation des variables dans le cas quantique au calcul des facteurs de forme et des fonctions de corrélation des différents modèles intégrables. Citons par exemple les travaux de Babelon, Bernard et Smirnov [15] qui, dans le cadre du modèle de sine-Gordon restreint avec un couplage aux points sans réflexion (points correspondant à certaines racines de l'unité), ont fourni un ensemble de variables séparées dans lesquelles le Hamiltonien a pu être réexprimé en termes de fonction τ. Les facteurs de forme des opérateurs locaux sont également interprétés comme les éléments de matrice d'un système à n solitons, éléments de matrice réécrits comme des intégrales définies à l'aide des variables séparées. Citons encore les résultats de Smirnov qui, dans le cadre de la chaîne de Toda, a utilisé la séparation des variables de Sklyanin pour calculer les éléments de matrice des opérateurs du modèle et les exprimer en termes d'intégrales de solutions de l'équation de Baxter, intégrales pouvant être considérées comme la déformation d'intégrales hyperelliptiques [190, 191]. Il faut aussi citer les résultats de von Gehlen, Iorgov, Pakuliak, Shadura et Tykhyy [199, 201, 202] qui, dans le cadre du modèle τ_2, également appelé modèle de Baxter-Bazhanov-Stroganov, ont appliqué la séparation des variables et dérivé par récurrence l'expression des états propres de $B(\lambda)$, permettant l'obtention des variables séparées et la caractérisation du spectre du modèle via un ensemble d'équations de Baxter. Dans le cas $N=2$, correspondant au cas fermion libre d'un modèle d'Ising généralisé, ces équations ont été résolues explicitement. Ces résultats ont alors été utilisés pour calculer les éléments de matrice d'un opérateur local dans la base des vecteurs propres du problème auxiliaire, c'est-à-dire les vecteurs propres de $B(\lambda)$. Cela a permis d'obtenir les facteurs de forme des opérateurs de spin du modèle d'Ising périodique sur réseau fini [200].

Cette thèse se place dans le prolongement de ces travaux. Elle a pour but de déterminer les facteurs de forme de différents modèles intégrables, nommément le modèle τ_2 et le modèle de sine-Gordon, dans la base des vecteurs propres du Hamiltonien, et ce dans le cadre de la séparation des variables de Sklyanin. Pour cela, plusieurs étapes sont nécéssaires :
-obtention des vecteurs propres du Hamiltonien dans la base des variables séparées et démonstration de la complétude.
-calcul du produit scalaire entre les états propres du Hamiltonien.
-reconstruction des opérateurs locaux en termes des opérateurs correspondant aux variables séparées, il s'agit de la résolution du problème inverse quantique.
-calcul de l'action des opérateurs locaux ainsi reconstruits sur les états propres du Hamiltonien et calcul des produits scalaires qui en résultent.
Le travail de thèse concernant le modèle de sine-Gordon se base sur l'article [157], en utilisant les mêmes notations et la même discrétisation du modèle de sine-Gordon, pour lequel les états propres du Hamiltonien et les éléments de l'algèbre de Yang-Baxter ont déjà été décrits en termes des variables séparées. Dans ce cadre, et en suivant l'idée de l'article [162], les opérateurs locaux ont pu être réexprimées en termes de combinaisons des générateurs de l'algèbre de Yang-Baxter, pris en certains points qui correspondent aux zéros du déterminant quantique. Les puissances de ces opérateurs locaux ont ensuite pu être décomposées de manière explicite dans la base des variables séparées. Parallèlement, le produit scalaire des états propres du Hamiltonien a pu être mis sous forme du déterminant d'une matrice de taille N, de manière similaire au cas de la chaîne de Heisenberg XXZ. Ce produit scalaire a une forme qui ne dépend que de la paramétrisation des générateurs de l'algèbre de Yang-Baxter dans la base séparée : cette construction a depuis été appliquée à de nombreux modèles, tels que la chaîne XXX antipériodique [156], la chaîne ouverte XXZ de spin 1/2 [153] ou encore le modèle 6-vertex antipériodique [155]. Dans le cas où les valeurs propres du Hamiltonien sont différentes, le déterminant de cette matrice est nul (il est possible d'en construire un vecteur propre de valeur propre nulle), ce qui prouve directement l'orthogonalité des états propres. Enfin, il a été possible de calculer les facteurs de forme des opérateurs locaux et de les exprimer en termes de déterminants de matrices de taille N ou supérieure, dont certains éléments sont similaires à l'expression du produit scalaire sous forme de déterminant.
Ces résultats ont également été obtenus dans le cadre du modèle τ_2, ce qui a permis, étant donné le lien qui existe entre ce modèle et celui de Potts chiral, de déterminer les éléments propres du Hamiltonien de ce dernier, vecteurs et valeurs propres, ainsi que certains facteurs de forme.

Chapitre 1

Introduction aux systèmes intégrables

1.1 Systèmes intégrables classiques

La définition heuristique la plus immédiate de la notion de système intégrable est qu'il s'agit de modèles pour lesquels une résolution exacte est possible. Dans le cas de système classiques, cette notion trouve son origine au XIXe siècle, dans les travaux de Jacobi [96] et de Liouville [139]. L'exemple le plus élémentaire est sans conteste celui de l'oscillateur harmonique ; un autre exemple simple et déjà non trivial de système intégrable, historiquement l'un des premiers qui ait été résolu, est celui d'une particule ponctuelle évoluant dans un potentiel central. Dans le cas d'un potentiel en $1/r$ (problème de Kepler [7]), il est possible de résoudre le problème de plusieurs façons. Une première possibilité est la séparation des variables : des six variables initiales (position et impulsion), il est possible de construire trois quantités conservées (le Hamiltonien, le carré du moment cinétique et une composante du moment cinétique) et les trois variables qui leur sont canoniquement associées via le crochet de Poisson [17]. La connaissance de ces variables qui sont de type action-angle permet alors de résoudre le problème. Une autre technique de résolution est de définir un vecteur particulier, le vecteur de Runge-Lenz [86, 134, 168, 76], à partir des variables position et vitesse du mobile. Le profil de l'interaction et le fait qu'elle soit centrale font que ce vecteur de Runge-Lenz est constant, ce qui génère 3 constantes du mouvement, il est alors possible de déterminer la trajectoire à l'aide de considérations géométriques. De plus, les composantes de ce vecteur et celles du vecteur moment cinétique (également des constantes du mouvement) génèrent une algèbre non abélienne de charges conservées dont les constantes de structures contiennent le Hamiltonien, qui est bien entendu une constante du mouvement. La théorie des représentations de cette algèbre a permis, dans le cas quantique, d'obtenir les niveaux d'énergie de l'atome d'hydrogène [164] de manière purement algébrique.

1.1.1 Les variables action-angle

Supposons que le système soit décrit par $2N$ variables q_i et p_i, $i \in [\![1, N]\!]$ (par exemple, les trois variables position et les trois variables impulsion pour une particule ponctuelle évoluant dans un espace tridimensionnel). Il est alors possible de définir à partir de ces variables une fonction bilinéaire et antisymétrique, le crochet de Poisson, qui à deux fonctions de ces variables en associe une troisième. Ce crochet est donné par

$$\{F, G\} \equiv \sum_{i=1}^{N} \frac{\partial F}{\partial p_i}\frac{\partial G}{\partial q_i} - \frac{\partial F}{\partial q_i}\frac{\partial G}{\partial p_i} \tag{1.1}$$

On a en particulier les relations de commutation (au sens du crochet de Poisson)

$$\forall (i, j) \in [\![1, N]\!]^2, \quad \{p_i, p_j\} = 0, \quad \{q_i, q_j\} = 0, \quad \{p_i, q_j\} = \delta_{i,j} \tag{1.2}$$

Supposons à présent qu'il existe une transformation qui associe aux variables « originales », p_i et q_j, de nouvelles variables x_i et y_j :

$$x_i \equiv \mathcal{X}_i(\{p_j\}, \{q_j\}) \quad \text{et} \quad y_i \equiv \mathcal{Y}_i(\{p_j\}, \{q_j\}) \tag{1.3}$$

Ces nouvelles variables étant fonction des p_i et q_j, il est possible de calculer leur crochet de Poisson. Ces nouvelles variables sont dites canoniques si elles satisfont les relations

$$\forall (i, j) \in [\![1, N]\!]^2, \quad \{x_i, x_j\} = 0, \quad \{y_i, y_j\} = 0, \quad \{x_i, y_j\} = \delta_{i,j} \tag{1.4}$$

Dans ce cas, la transformation permettant de passer des variables p_i et q_j aux variables x_i et y_j est dite canonique.

Dans le cadre général des systèmes intégrables classiques de mécanique analytique, l'un des outils principaux est le concept de variables action-angle [17, 7]. Il s'agit d'un ensemble de variables canoniques et ne dépendant pas explicitement du temps, $\{\rho_i, \theta_i\}$, $i \in [\![1, N]\!]$, telles que le crochet de Poisson du Hamiltonien H et de ρ_i est nul $\forall i$ avec $H = H(\{\rho_i\})$. On a alors les équations

$$\dot{\rho}_i = 0 \tag{1.5}$$

$$\dot{\theta}_i = \omega_i \tag{1.6}$$

avec $\omega_i = \{H, \theta_i\}$ des quantités constantes. L'évolution au cours du temps de ces quantités est donc linéaire, ce qui permet d'établir la dynamique du système. On peut prendre l'exemple d'un ensemble d'oscillateurs harmoniques non couplés [17], de Hamiltonien

$$H = \sum_{i=1}^{N} \frac{1}{2}(p_i^2 + \omega_i q_i^2) \tag{1.7}$$

avec q_i la position et p_i l'impulsion de l'oscillateur i. La transformation permettant de passer des coordonnées classiques (p_i, q_i) aux variables action-angle (ρ_i, θ_i) est donnée par (les θ_i sont effectivement des angles) :

$$p_i \equiv \rho_i \cos(\theta_i) \tag{1.8}$$

$$q_i \equiv \frac{1}{\omega_i}\rho_i \sin(\theta_i) \tag{1.9}$$

Ces variables vérifient le crochet de Poisson $\{\rho_i, \theta_j\} = \delta_{i,j}\omega_i/\rho_i$. Le Hamiltonien se réécrit $H = \sum_i \rho_i^2/2$, et est donc bien en involution avec toutes les variables ρ_i. Les équations d'évolution des variables action-angle sont alors $\dot{\rho}_i = 0$ et $\dot{\theta}_i = \omega_i$, ce qui permet d'établir l'évolution temporelle non seulement de ces variables, mais également des coordonnées initiales.

Les variables action-angle sont au cœur de la caractérisation des systèmes intégrables au sens de Liouville. Un système évoluant dans un espace de dimension $2n$ et pour lequel on puisse obtenir n quantités conservées, indépendantes et en involution au sens du crochet de Poisson, est dit intégrable au sens de Liouville, et peut alors être résolu à l'aide du théorème de Liouville-Arnold (voir en particulier la section 49, *Integrable Systems*, de [7]). En particulier, si l'espace des phases est compact et connexe, il est difféomorphe à un n-tore, les quantités conservées jouent alors le rôle de variables action et il est possible de définir des variables angle. Enfin, le système peut être résolu par quadrature, c'est-à-dire que les valeurs des quantités conservées sont fixées à un certain niveau et l'évolution temporelle des variables angle est donnée par des intégrales faisant intervenir ces valeurs fixées [1].

1.1.2 Les paires de Lax

L'intégrabilité, au sens de Liouville, est caractérisée par l'existence de suffisamment de quantités conservées. Un des problèmes-clés de l'étude des systèmes intégrables est de pouvoir déterminer si un système donné satisfait cette condition, et de pouvoir construire de manière systématique des systèmes admettant cette propriété. Un progrès majeur pour aborder ce problème est le concept de paire de Lax. Pour un système intégrable, une paire de Lax est un couple de matrices carrées (L, M) de même taille n et construites à partir des quantités dynamiques du système, telles que la relation

$$\dot{L} = [M, L] \tag{1.10}$$

est vérifiée si et seulement si les équations du mouvement sont vérifiées. Un même système intégrable peut admettre plusieurs paires de Lax, qui peuvent avoir des tailles différentes.
L'intérêt de ces paires de Lax est donné par la remarque suivante : l'équation différentielle (1.10) admet la solution

$$L(t) = g(t)L(0)g(t)^{-1} \tag{1.11}$$

avec la fonction g caractérisée par l'égalité

$$\frac{\mathrm{d}g}{\mathrm{d}t}g^{-1} = M(t) \tag{1.12}$$

En particulier, les matrices $L(t)$ et $L(0)$ sont des matrices semblables. Ainsi, leurs invariants spectraux (tels que la trace ou le déterminant), fonctions des variables du

1. Le terme de quadrature vient du fait que pour certains modèles (voir par exemple la section 8, *Investigation of motion in a central field*, de [7], ou la section 2.7, *The Kepler problem*, de [17]), l'évolution temporelle des variables angle est exprimée en termes de racines de différences d'énergie.

système, sont des fonctions constantes du temps, ce qui permet de construire des quantités conservées du système.
Dans l'exemple d'un oscillateur harmonique, cas particulier de l'exemple évoqué plus haut, un exemple de paire de Lax est donné par

$$L \equiv \begin{pmatrix} p & \omega q \\ \omega q & -p \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad M \equiv \begin{pmatrix} 0 & -\omega/2 \\ \omega/2 & 0 \end{pmatrix} \tag{1.13}$$

Les fonctions déterminant et trace étant invariantes par conjugaison, leur application à la matrice L donne des quantités conservées. En effet, le déterminant donne un multiple du Hamiltonien, alors que la trace donne 0.

La caractérisation du système comme étant intégrable au sens de Liouville requiert non seulement la donnée de telles quantités conservées, mais également leur indépendance et leur involution au sens du crochet de Poisson. La construction de ces quantités à l'aide des matrices de Lax permet de caractériser leur involution sous crochets de Poisson de manière simple. En effet, l'involution des quantités conservées générées à l'aide des matrices de Lax est équivalente à l'existence d'une forme compacte pour les crochets de Poisson des éléments de la matrice L.

Plus précisément, soit une paire de Lax constituée de matrices de taille n, définissons les produits tensoriels $L_1 \equiv L \otimes \mathbb{1}$ et $L_2 \equiv \mathbb{1} \otimes L$, avec $\mathbb{1}$ la matrice identité de taille $n \times n$. Il est possible de définir le crochet de Poisson de ces deux produits par

$$\{L_1, L_2\} \equiv \sum_{i,j,k,l=1}^{n} \{L_{ij}, L_{kl}\} E_{ij} \otimes E_{kl} \tag{1.14}$$

avec $(E_{ij})_{i,j}$ la base canonique de l'espace vectoriel des matrices carrées de taille n, et $L_{i,j}$ les coefficients de L dans cette base, c'est-à-dire $L = \sum_{i,j} L_{i,j} E_{i,j}$. On dit que cette paire de Lax admet une matrice r s'il existe une matrice r_{12} définie sur le produit tensoriel des espaces telle que

$$\{L_1, L_2\} = [r_{12}, L_1] - [r_{21}, L_2] \tag{1.15}$$

L'existence d'une telle matrice r est alors équivalente à l'involution des valeurs propres de la matrice L [17]. Notons que cette notion de matrice r pour le cas classique trouve son origine dans les travaux de Sklyanin, qui a adapté au cas classique un objet fondamental de la théorie des systèmes intégrables quantiques [175].
Par exemple, dans le cas de l'oscillateur harmonique pris comme exemple plus haut, il est possible de construire une matrice r de la façon suivante :

$$r_{12} \equiv \frac{\omega}{2\rho^2} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \otimes L \tag{1.16}$$

Le crochet de Poisson défini en (1.14) doit satisfaire l'identité de Jacobi,

$$\{L_1, \{L_2, L_3\}\} + \{L_2, \{L_3, L_1\}\} + \{L_3, \{L_1, L_2\}\} = 0 \tag{1.17}$$

Dans le cas où la paire de Lax est compatible avec l'existence d'une matrice r, cette égalité peut se réécrire en fonction de celle-ci et des plongements des matrices de Lax L_1, L_2 et L_3, et cela via la relation (1.15). On obtient ainsi une condition de compatibilité que doit satisfaire la matrice r. Dans le cas où cette dernière est une constante (c'est à dire ne dépend pas des quantités dynamiques du système), cette condition s'écrit [17] :

$$[L_1, [r_{12}, r_{13}] + [r_{12}, r_{23}] + [r_{32}, r_{13}]] + \text{perm. circ.} = 0 \tag{1.18}$$

Cette condition est satisfaite si, par exemple, la matrice r satisfait la relation :

$$[r_{12}, r_{13}] + [r_{12}, r_{23}] + [r_{32}, r_{13}] = 0 \tag{1.19}$$

Dans le cas où r est antisymétrique, $r_{12} = -r_{21}$, cette équation s'appelle l'équation de Yang-Baxter classique.

Les relations ci-dessus pour L et r sont semblables à celles définissant une algèbre de Lie, la matrice r, lorsqu'elle est non dynamique, jouant le rôle de constante de structure de cette algèbre linéaire, la relation quadratique ci-dessus pour r garantissant l'identité de Jacobi. De la même manière qu'une algèbre de Lie admet en général plusieurs représentations différentes, les paires de Lax de différents systèmes intégrables peuvent admettre la même matrice r. Ces matrices L constituent alors des représentations différentes de l'algèbre de Yang-Baxter classique définie par cette matrice r. Il est ainsi possible de classer les systèmes intégrables classiques admettant une matrice r en fonction de cette dernière [42, 43, 63, 171, 172].

1.1.3 Méthode de la diffusion inverse classique

Présentation de la méthode

La méthode de la diffusion inverse classique [2, 69, 212] est une méthode d'analyse des théories des champs intégrables très puissante. Elle a été conçue dans les années 60 par Gardner, Greene, Kruskal et Miura pour l'analyse de l'équation de Korteweg-de Vries [73]. Elle consiste en l'établissement de fonctions particulières, dont l'évolution temporelle est très simple, et en la reconstruction des quantités dynamiques en fonction de ces fonctions, reconstruction connue sous le nom de *problème inverse classique*. De telles fonctions, appelées données de diffusion, fournissent en fait l'analogue des variables action-angle en mécanique analytique, mais ici pour une théorie continue possédant donc un nombre infini de degrés de liberté. Bien que cette méthode ait initialement été conçue pour la résolution de l'équation de Korteweg-de Vries, il s'est rapidement avéré qu'elle fournissait un outil général pour la résolution des théories des champs intégrables en dimension 1+1 associées à une paire de Lax. Elle a servi à résoudre, entre autres, l'équation de Schrödinger non-linéaire [213, 69] et l'équation de sine-Gordon [17, 216]
Cette méthode va être ici rapidement présentée dans le cas de l'équation de sine-Gordon en suivant la méthode exposée dans [17]. Le modèle de sine-Gordon est une

théorie des champs en dimension $1+1$ régie par l'équation

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{8m^2}{\beta} \sin 2\beta\varphi = 0 \tag{1.20}$$

Cette équation est la condition de compatibilité du système linéaire suivant

$$(\partial_x - A_x)\Psi = 0 \tag{1.21}$$
$$(\partial_t - A_t)\Psi = 0 \tag{1.22}$$

avec

$$A_x \equiv i \begin{pmatrix} \frac{\beta}{2}\partial_t \varphi & -m(\lambda e^{i\beta\varphi} - \lambda^{-1} e^{-i\beta\varphi}) \\ -m(\lambda e^{-i\beta\varphi} - \lambda^{-1} e^{i\beta\varphi}) & -\frac{\beta}{2}\partial_t \varphi \end{pmatrix} \tag{1.23}$$
$$A_t \equiv i \begin{pmatrix} \frac{\beta}{2}\partial_x \varphi & -m(\lambda e^{i\beta\varphi} + \lambda^{-1} e^{-i\beta\varphi}) \\ -m(\lambda e^{-i\beta\varphi} + \lambda^{-1} e^{i\beta\varphi}) & -\frac{\beta}{2}\partial_x \varphi \end{pmatrix} \tag{1.24}$$

c'est à dire que l'équation

$$[\partial_x - A_x, \partial_t - A_t] = 0 \tag{1.25}$$

est équivalente à l'équation d'évolution du champ (1.20).
De plus, supposons que le champ φ ait le comportement aux asymptotes $x \to \pm\infty$ suivant :

$$\lim_{x\to-\infty} \varphi(x) = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{x\to\infty} \varphi(x) = \frac{Q\pi}{\beta} \text{ avec } Q \in \mathbb{Z} \tag{1.26}$$

Le système se résout alors par la méthode de la diffusion inverse classique en trois étapes :

- Construction des données de diffusion. Cette construction se fait en étudiant les solutions de l'équation (1.21).
- Détermination de l'évolution des données de diffusion. Cette détermination découle de l'étude de l'équation (1.22) dans les régions asymptotiques $x \to \pm\infty$.
- Résolution du problème inverse. Cela passe, par exemple, par la résoution de l'équation de Gelfand-Levitan-Marchenko en fonction des données de diffusion, qui permet de reconstruire $A_x(t)$, et donc $\varphi(x,t)$.

Esquisse de la méthode de résolution

La première étape passe par la construction de deux solutions particulières f_1 et f_2 de l'équation (1.21) à $t = 0$ dénommées solutions de Jost. Ces solutions correspondent à un comportement asymptotique particulier :

$$f_1(x) \sim \begin{pmatrix} 1 \\ e^{i\pi Q} \end{pmatrix} e^{ik(\lambda)x} \text{ en } x \to \infty, \quad f_2(x) \sim \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} e^{-ik(\lambda)x} \text{ en } x \to -\infty \tag{1.27}$$

avec $k(\lambda) \equiv m(\lambda - \lambda^{-1})$. L'étude des Wronskiens de ces solutions en $\pm\infty$ permet alors d'établir un lien entre le comportement de f_1 en $-\infty$ et celui de f_2 en ∞. En fait, il existe deux fonctions du paramètre λ, notées a et b, qui satisfont $|a(\lambda)|^2 + |b(\lambda)|^2 = 1$ et

$$f_1(x) \sim a(\lambda)\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} e^{ik(\lambda)x} - b(\lambda)\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix} e^{-ik(\lambda)x} \text{ en } x \to -\infty \tag{1.28}$$

$$f_2(x) \sim -b^*(\lambda)\begin{pmatrix}1\\e^{i\pi Q}\end{pmatrix} e^{ik(\lambda)x} + a(\lambda)\begin{pmatrix}e^{i\pi Q}\\-1\end{pmatrix} e^{-ik(\lambda)x} \text{ en } x \to \infty \tag{1.29}$$

Ces fonctions a et b sont les données de diffusion du système. Il est en fait possible de définir de telles fonctions à t quelconque, en utilisant le même raisonnement.

Ces fonctions ont une évolution temporelle simple :

$$\dot{a}(\lambda, t) = 0, \quad \dot{b}(\lambda, t) = 2im(\lambda + \lambda^{-1})b(\lambda, t) \tag{1.30}$$

Ce résultat s'obtient en utilisant la seconde équation (1.22). En effet, en notant Ψ une de ses solutions, l'asymptote $x \to \infty$ donne

$$\partial_t\Psi + ie^{i\pi Q}m(\lambda + \lambda^{-1})\begin{pmatrix}0 & 1\\1 & 0\end{pmatrix}\Psi = 0 \tag{1.31}$$

Il est possible de définir une fonction α telle que $\Psi = \alpha(t)f_1$, avec f_1 la première solution de Jost au temps t. L'équation (1.31) conjuguée à la définition des fonctions de Jost pemet alors de déterminer sa dépendance temporelle par l'équation $\dot{\alpha} = -im(\lambda + \lambda^{-1})\alpha$. Le même raisonnement effectué en $x \to -\infty$ permet alors d'obtenir la dépendance des fonctions a et b en t. Explicitement, l'évolution temporelle de ces fonctions est

$$a(\lambda, t) = a(\lambda, 0) \quad \text{et} \quad b(\lambda, t) = e^{2im(\lambda+\lambda^{-1})t}b(\lambda, 0) \tag{1.32}$$

c'est-à-dire que la fonction a est indépendante du temps, alors que l'évolution de la fonction b ne fait intervenir que des constantes et le paramètre λ.

Enfin, la résolution du problème inverse se fait par la résolution de l'équation de Gel'fand-Levitan-Marchenko [75, 145, 17], qui permet de reconstruire certaines données à partir des fonctions a et b. Ces données permettent alors de reconstruire la matrice A_x qui intervient dans l'équation (1.21), et donc de déterminer le champ φ.

Matrice de monodromie et crochets de Poisson

Soit une solution Ψ de l'équation (1.21) sur l'intervalle $[-l, l]$. Cette équation étant linéaire, il existe une matrice $T_l(\lambda)$ indépendante de la solution choisie telle que

$$\Psi(l) = T_l(\lambda)\Psi(-l) \tag{1.33}$$

Cette matrice est appelée matrice de monodromie ; elle est donnée par l'exponentielle ordonnée de la matrice A_x entre $-l$ et l. La matrice

$$\frac{1}{2}\begin{pmatrix}e^{i\pi Q}e^{ik(\lambda)l} & -e^{ik(\lambda)l}\\ e^{-ik(\lambda)l} & e^{i\pi Q}e^{-ik(\lambda)l}\end{pmatrix} T_l(\lambda)\begin{pmatrix}e^{ik(\lambda)l} & e^{-ik(\lambda)l}\\ -e^{ik(\lambda)l} & e^{-ik(\lambda)l}\end{pmatrix} \tag{1.34}$$

admet une limite finie $T(\lambda)$ lorsque $l \to \infty$, et cette limite est reliée aux données de diffusion par la relation

$$T(\lambda) = \begin{pmatrix} a(\lambda) & b(\lambda) \\ -b^*(\lambda) & -a^*(\lambda) \end{pmatrix} \tag{1.35}$$

Remarquons que c'est cette propriété qui a donné leur nom aux données de diffusion.

L'étude de la matrice de monodromie permet de déterminer les crochets de Poisson des données de diffusion [67]. Tout d'abord, remarquons qu'il existe une matrice r_{12} telle que

$$\{A_{x,1}(\lambda, x), A_{x,2}(\mu, y)\} = [r_{12}(\lambda, \mu), A_x(\lambda, x) \otimes \mathbb{1} + \mathbb{1} \otimes A_x(\mu, x)]\delta(x - y) \tag{1.36}$$

avec la notation introduite pour le crochet de Poisson des matrices de Lax, (1.14). La matrice $T_l(\lambda)$ étant construite à partir de l'exponentielle ordonnée de A_x, on peut montrer que les crochets de Poisson des éléments de $T_l(\lambda)$ entre eux sont donnés par la forme compacte

$$\{T_{l,1}(\lambda), T_{l,2}(\mu)\} = [r_{12}(\lambda, \mu), T_l(\lambda) \otimes T_l(\mu)] \tag{1.37}$$

Finalement, les données de diffusion satisfont les relations suivantes :

$$\{a(\lambda), a(\mu)\} = 0, \quad \{b(\lambda), b(\mu)\} = 0 \quad \text{et} \quad \{a(\lambda), b(\mu)\} \propto a(\lambda)b(\mu) \tag{1.38}$$

Ces crochets de Poisson, combinés aux évolutions temporelles des données de diffusion, font que ces fonctions jouent un rôle similaire à celui d'un ensemble de variables action-angle, mais ici pour une théorie des champs, possédant un nombre infini de degrés de liberté.

1.2 Systèmes intégrables quantiques et méthode de la diffusion inverse quantique

Parallèlement à cette étude des systèmes intégrables classiques de mécanique ou de théorie des champs, les systèmes intégrables classiques et quantiques de mécanique statistique ont fait l'objet de nombreux développements. Dans ce domaine, l'une des méthodes les plus puissantes est celle de l'ansatz de Bethe, utlisé tout d'abord dans le cadre de la chaîne de Heisenberg homogène isotrope [50], puis généralisé par Orbach [163], Walker [203], Yang et Yang [208], Sutherland [192] et surtout par Baxter.
Cette méthode a également été employée ultérieurement par Lieb et Liniger pour la résolution du modèle de Schrödinger non-linéaire quantique [136], théorie des champs décrivant un système de bosons interagissant à travers un potentiel à deux corps en δ. Or il se trouve que la version classique du modèle de Schrödinger non-linéaire est soluble par la méthode de la diffusion inverse classique décrite dans la section précédente [213]. La question d'une version quantique de la méthode de diffusion inverse classique, reliée à l'ansatz de Bethe, était ainsi posée de manière naturelle. La résolution de ce problème a été donnée à la fin des années 70 [193, 67] de manière

particulièrement élégante et fructueuse sous la forme d'une version algébrique de l'ansatz de Bethe dans laquelle la version quantifiée des objets standards de la méthode de diffusion inverse classique (matrice de Lax L, matrice de monodromie et données de diffusion) jouent un rôle central. Ainsi au lieu de rechercher les fonctions d'onde propres du système quantique sous la forme d'un ansatz, la version quantique des données de diffusion détermine un ensemble d'opérateurs et leur algèbre qui permettent de construire d'une part l'équivalent quantique des quantités conservées (dont le Hamiltonien) et d'autre part des opérateurs de création des états propres communs à ces quantités conservées (et au Hamiltonien) par leur action sur un état de référence donné.

1.2.1 Hamiltonien, matrice de monodromie et spectre

La méthode de la diffusion inverse quantique a donc été construite par une procédure de quantification de la méthode de la diffusion inverse classique [67]. Cette dernière passe par l'utilisation de données de diffusion (1.30) et de la matrice de monodromie (1.33), qui sont des objets créés à partir des variables dynamiques originales via la matrice de Lax L et qui ont une évolution temporelle très simple. De même, la méthode de la diffusion inverse quantique consiste en la construction d'un ensemble d'opérateurs, qui sont les éléments de matrice de la version quantique de la matrice de monodromie, et dont l'action sur un état de référence permet de créer les états propres communs au Hamiltonien et à l'ensemble des quantités conservées quantiques du système ; ces dernières étant obtenues à partir de la trace de la matrice de monodromie. Cette matrice est construite comme dans le cas classique à partir de la version quantique de la matrice de Lax elle même s'exprimant simplement en termes des opérateurs définissant le système quantique.

Bien entendu le processus de quantification doit préserver l'intégrabilité et donc les symétries sous-jacentes de la théorie considérée ; ces propriétés dans le cas classique sont encodées dans la structure de l'algèbre de Yang-Baxter classique (1.18) et l'existence d'une matrice r régissant les relations de crochets de Poisson des matrices de Lax. Le processus de quantification se doit donc de décrire une structure algébrique quantique généralisant ces structures classiques.

Pour décrire (au moins de manière heuristique) ces structures, considérons une théorie des champs intégrable au niveau classique qui est associée à une certaine matrice de Lax $L(x, \lambda)$ (x les coordonnées d'espace-temps en 1+1 dimensions et λ le paramètre spectral) et à une matrice r classique anti-symétrique et satisfaisant l'équation de Yang-Baxter classique (1.19). Quantifier une telle théorie des champs impose en premier lieu de la régulariser. Pour ce faire, on peut tenter de la discrétiser, c'est à dire de la définir (déjà au niveau classique) sur un réseau (spatial) uni-dimensionnel, le temps restant lui une variable continue. Dans ce cas, l'espace devient un réseau avec des sites n, $n = 1 \dots N$, N étant le nombre total de sites de ce réseau (il peut être commode pour la suite de garder N fini dans un premier temps). Les variables de champs et de moment conjugué deviennent discrètes, fonctions de n

et du temps. L'analogue discret de la matrice de Lax notée $L_n(\lambda)$ est alors semblable à une matrice de monodromie passant d'un site à un autre, c'est à dire à l'exponentielle ordonnée de $L(x,\lambda)$ sur une distance égale au pas du réseau. Pour préserver les propriétés d'intégrabilité, les crochets de Poisson de ces matrices $L_n(\lambda)$ doivent être donc identiques à ceux des matrices de monodromie de la théorie continue (1.18), c'est à dire

$$\{L_{1,n}(\lambda), L_{2,m}(\mu)\} = \delta_{n,m}[r_{12}(\lambda,\mu), L_{1,n}(\lambda)\ L_{2,n}(\mu)]. \tag{1.39}$$

La matrice de monodromie classique sur le réseau est alors obtenue comme le produit ordonné de ces matrices locales tout le long du réseau (ce qui reproduit bien l'analogue de l'exponentielle ordonnée des $L(x,\lambda)$),

$$T(\lambda) \equiv L_N(\lambda) \cdot L_{N-1}(\lambda) \cdot \dots \cdot L_1(\lambda). \tag{1.40}$$

Il est alors aisé de démontrer la relation suivante pour les crochets de Poisson de ces matrices de monodromie,

$$\{T_1(\lambda), T_2(\mu)\} = [r_{12}(\lambda,\mu), T_1(\lambda)\ T_2(\mu)]. \tag{1.41}$$

Une quantification canonique de ces relations via la correspondance entre crochets de Poisson et commutateurs à l'ordre le plus bas en $\hbar$ conduit alors à la relation quantique suivante,

$$R(\lambda,\mu)(L_n(\lambda)\otimes \mathbb{1})(\mathbb{1}\otimes L_n(\mu)) = (\mathbb{1}\otimes L_n(\mu))(L_n(\lambda)\otimes \mathbb{1})R(\lambda,\mu), \tag{1.42}$$

où $R_{12}(\lambda,\mu) = 1 + i\hbar r_{12}(\lambda,\mu) + o(\hbar^2)$. Dans le cas classique ci-dessus les éléments de la matrice $L_n(\lambda)$ étaient des fonctions des champs de la théorie ; dans le cas quantique, la matrice $L_n(\lambda)$ est toujours une matrice carrée de même dimension que dans le cas classique mais dont les éléments de matrices sont à présent des opérateurs définis au site n du réseau. Notons $\mathcal{H}_n$ l'espace (quantique) des états sur lequel ces opérateurs agissent au site n. La relation (1.42) pour les matrices de Lax quantiques spécifie les relations de commutation quadratiques pour de leurs éléments de matrices en tant qu'opérateurs quantiques agissant dans $\mathcal{H}_n$.

L'analogue quantique de la matrice de monodromie sur l'espace correspondant aux N sites du réseau, est définie par le produit ordonné des matrices de Lax quantiques locales,

$$T(\lambda) \equiv L_N(\lambda) \cdot L_{N-1}(\lambda) \cdot \dots \cdot L_1(\lambda) \tag{1.43}$$

Il s'agit d'une matrice carrée (de même dimension que les matrices $L_n(\lambda)$) dont les éléments sont des opérateurs agissant sur l'espace des états du modèle sur réseau $\mathcal{H}$ obtenu comme le produit tensoriel des espaces quantiques locaux , $\mathcal{H} = \otimes_{n=1}^{N}\mathcal{H}_n$. Elle satisfait une algèbre quadratique (de Yang-Baxter) qui découle directement de celle valide pour les matrices L_n (1.42) :

$$R(\lambda,\mu)(T(\lambda)\otimes \mathbb{1})(\mathbb{1}\otimes T(\mu)) = (\mathbb{1}\otimes T(\mu))(T(\lambda)\otimes \mathbb{1})R(\lambda,\mu), \tag{1.44}$$

Dans le cas particulier où la matrice $R_{12}(\lambda,\mu)$ ne dépend que de la différence des paramètres spectraux $\lambda-\mu$, la relation (1.42) est en fait valide pour toute matrice de la forme $L_n(\lambda-\xi)$ avec ξ un paramètre complexe arbitraire. Il est ainsi possible de rajouter des inhomogénéités au modèle en prenant pour la matrice de monodromie le produit des matrices de Lax avec les inhomogénéités,

$$T(\lambda) \equiv L_N(\lambda-\xi_N)\cdot L_{N-1}(\lambda-\xi_{N-1})\cdot\dots\cdot L_1(\lambda-\xi_1) \tag{1.45}$$

Enfin, dans le cas où les matrices de Lax sont de taille 2×2, il est d'usage de noter les 4 éléments de la matrice de monodromie par

$$T(\lambda) \equiv \begin{pmatrix} A(\lambda) & B(\lambda) \\ C(\lambda) & D(\lambda) \end{pmatrix} \tag{1.46}$$

Les élements A, B, C et D sont alors les analogues des données de diffusion (1.35) $a(\lambda)$ (pour A et D) et $b(\lambda)$ (pour B et C).
La relation (1.44), couplée à l'associativité de l'algèbre de Yang-Baxter, impose des contraintes sur la matrice R. En effet, en notant $T_1(\lambda)\equiv T(\lambda)\otimes\mathbb{1}\otimes\mathbb{1}$, cette relation peut être utilisée pour passer de $T_1(\lambda)T_2(\mu)T_3(\nu)$ à $T_3(\nu)T_2(\mu)T_1(\lambda)$ de deux façons différentes. Ces manières sont équivalentes, et la matrice R doit satisfaire la relation suivante :

$$R_{12}(\lambda,\mu)R_{13}(\lambda,\nu)R_{23}(\mu,\nu) = R_{23}(\lambda,\mu)R_{13}(\lambda,\nu)R_{12}(\mu,\nu) \tag{1.47}$$

Cette relation est appelée équation de Yang-Baxter [207, 21]. Comme pour le cas classique, il est possible de classifier les systèmes intégrables solubles par méthode de la diffusion inverse en regroupant les modèles selon leur matrice R, solution de cette équation. Notons que pour toute solution de cette équation, il est possible de définir une matrice de Lax satisfaisant la relation (1.44) en considérant simplement l'espace auxiliaire 3 comme étant l'espace quantique associé à cette matrice, c'est le cas en particulier pour la chaîne de Heisenberg XXZ de spin 1/2. Cela est lié au fait que les matrices T et R peuvent être considérées comme des représentations d'un objet appelé matrice $\mathcal{R}$ universelle satisfaisant la relation de Yang-Baxter, ce point sera développé dans la section suivante.
La matrice de transfert quantique $\tau(\lambda)$ est la trace sur l'espace auxiliaire de cette matrice de monodromie, c'est-à-dire, dans le cas de matrices de taille 2,

$$\tau(\lambda) \equiv A(\lambda) + D(\lambda) \tag{1.48}$$

En particulier, si la matrice R est inversible, la trace sur les deux espaces auxiliaires de la relation de Yang-Baxter pour les matrices de monodromie donne la relation de commutation des matrices de transfert,

$$[\tau(\lambda),\tau(\mu)] = 0 \tag{1.49}$$

pour tous les couples de paramètres spectraux λ et μ. Lorsque le Hamiltonien du système peut être obtenu à partir de cette matrice de transfert, il en résulte que la matrice de transfert est la fonction génératrice d'une série d'opérateurs quantiques commutant avec le Hamiltonien, signe de l'intégralité du système considéré.

Cette approche heuristique, adaptée à la description des théories des champs quantiques intégrables sur le réseau, peut s'étendre au domaine des modèles quantiques définis sur une chaîne unidimensionnelle finie. De tels modèles incluent par exemple les chaînes de Heisenberg [87, 163, 203]. Dans ce cadre, en chaque site n de cette chaîne ($n = 1, \dots N$) on peut définir des opérateurs de spin élémentaires agissant dans un certain espace de Hilbert local $\mathcal{H}_n$ qui est dans le cas de la représentation 1/2 de dimension 2. Les opérateurs de spin sont alors représentés par des matrices de Pauli. L'opérateur Hamiltonien du modèle peut alors s'exprimer en terme de somme de produits de ces opérateurs locaux ; il agit sur l'espace de Hilbert global $\mathcal{H}$ du système, $\mathcal{H} = \otimes_{n=1}^{N} \mathcal{H}_n$ et est donné en termes de $3N$ opérateurs de spin $S_n^{(x)}$, $S_n^{(y)}$ et $S_n^{(z)}$, $n = 1 \dots N$, qui sont représentés en terme des matrices de Pauli. L'action des opérateurs de spin locaux $S_i^{(a)}$ (a étant x, y ou z) sur l'espace $\mathcal{H}_j$ est triviale si $i \neq j$, c'est-à-dire que l'opérateur $S_i^{(a)}$ agit comme l'identité sur un espace $\mathcal{H}_j$ avec $i \neq j$.
Dans ce cas d'un modèle sur réseau, les matrices L_n sont associées à un site n, agissant sur un espace vectoriel auxiliaire commun à tous les sites (que l'on peut prendre de dimension 2 pour la chaîne de Heisenberg ci-dessus), et dont les éléments de matrice sont fonctions des opérateurs locaux au site n. La matrice de monodromie quantique $T(\lambda)$ reste définie comme le produit ordonné sur l'espace auxiliaire de ces matrices de Lax quantiques locales ; dans les cas les plus élémentaires, comme la chaîne de spin de Heisenberg, les matrices de Lax quantiques L_n et donc la matrice de monodromie sont des matrices 2×2. Notons que les éléments de cette matrice de monodromie sont des opérateurs agissant sur $\mathcal{H}$ qui s'expriment de manière extrêmement compliquée en fonction des opérateurs locaux agissant sur les $\mathcal{H}_n$; chaque élément de la matrice de monodromie est en fait obtenu comme la somme de 2^N termes, chacun étant le produit de N opérateurs locaux tout le long de la chaîne.

La relation de commutation (1.44) est la marque de l'intégrabilité du système. Elle se retrouve par exemple dans d'autres méthodes de résolution de modèles intégrables, en particulier sur réseau [35], que ce soit sous cette forme [150] ou sous la forme d'une relation dite étoile-triangle [161]. De plus, cette relation implique la commutativité de la famille des opérateurs de transfert, ce qui permet de simplifier le problème spectral pour le Hamiltonien en le problème spectral pour l'opérateur de transfert.
Cette relation de commutation impose 16 relations quadratiques qui donnent les relations de commutation des opérateurs A, B, C et D, dont les constantes de structure sont données par les éléments de la matrice R. Ces 16 relations définissent une algèbre de Yang-Baxter [207, 68, 21, 100], qui est l'algèbre associative librement engendrée par les 4 éléments de la matrice de monodromie divisée par les relations quadratiques (1.44). Notons encore une fois l'analogie avec la méthode de la diffusion inverse classique : les relations de commutation (au sens du crochet de Poisson) des éléments de la matrice de monodromie peuvent se dériver à partir des relations de commutation locales des éléments de la matrice A_x et se mettre sous une forme compacte faisant intervenir une matrice r.

Une fois ce cadre posé, la résolution du problème spectral pour la matrice de transfert se fait de la façon suivante. Supposons qu'il existe un état particulier $|0\rangle$, dit état de référence, qui soit état propre de $A(\lambda)$ et $D(\lambda)$ et tel que $C(\lambda)|0\rangle = 0$. Les états propres de la matrice de transfert sont alors construits à l'aide d'itérations successives de l'opérateur $B(\lambda)$ pris en des points particuliers sur cet état de référence. Les relations de commutation (1.44) permettent alors de caractériser ces points particuliers ainsi que le spectre de l'opérateur de transfert. Les états propres à gauche de l'opérateur de transfert sont quant à eux reconstruits à l'aide d'itérations successives de l'opérateur $C(\lambda)$ sur un état de référence à gauche [2]. Nous donnerons ci-après plus de détails sur cette procédure pour le cas de la chaîne XXX.

1.2.2 Facteurs de forme et fonctions de corrélation

Dans le domaine des systèmes intégrables quantiques, la résolution d'un modèle consiste entre autres en l'obtention des valeurs propres et états propres du Hamiltonien, ainsi que des fonctions de corrélation, qui sont les quantités de la forme (ici $\beta = (kT)^{-1}$ avec T la température et k la constante de Boltzmann),

$$\frac{\mathrm{Tr}(\phi_1(x_1)\dots\phi_n(x_n)e^{-\beta H})}{\mathrm{Tr}(e^{-\beta H})} \tag{1.50}$$

où les ϕ_i sont des opérateurs du stystème localisé aux points x_i. La connaisance de ces fonctions de corrélation permet, en principe, de prédire n'importe quelle quantité physique observable expérimentalement [196, 197, 125, 142]. Une approche possible pour le calcul de ces fonctions de corrélation dans la limite de température nulle est leur décomposition en termes de produits d'éléments de matrice d'opérateurs dans la base propre du Hamiltonien. Dans la limite de température nulle et dans le cas où il existe un unique état propre du Hamiltonien de plus petite énergie, l'état fondamental, les contributions des autres états au calcul de la trace sont négligeables (en raison de l'exponentielle du Hamiltonien qui va sélectionner l'état fondamental), et la formule (1.50) devient

$$\langle\omega|\phi_1(x_1)\dots\phi_n(x_n)|\omega\rangle \tag{1.51}$$

avec $|\omega\rangle$ l'état fondamental normalisé. Dans le cadre d'un spectre non dégénéré, il est possible d'écrire une décomposition de l'identité à l'aide des états propres du Hamiltonien :

$$\mathbb{1} = \sum_t \frac{|t\rangle\langle t|}{\langle t|t\rangle} \tag{1.52}$$

c'est-à-dire l'exprimer en termes de projecteurs normalisés, la somme sur t désignant la somme sur les états propres du Hamiltonien. Il est possible d'insérer cette égalité

2. En fait, les éléments diagonaux de la matrice de monodromie permettent de reconstruire le Hamiltonien, alors que les éléments hors diagonaux servent à en reconstruire les états propres, ce qui est une fois de plus analogue à ce que l'on observe pour les données de diffusion dans le cas classique : $a(\lambda)$ joue le rôle de variable action, quantité conservée, alors que $b(\lambda)$ joue le rôle de variable angle, dont l'évolution temporelle est simple.

dans les fonctions de corrélation, ce qui donne la décomposition

$$\langle\omega|\phi_1(x_1)\dots\phi_n(x_n)|\omega\rangle = \sum_{t_1,\dots,t_{n-1}} \frac{\langle\omega|\phi_1(x_1)|t_1\rangle\langle t_1|\phi_2(x_2)|t_2\rangle\dots\langle t_{n-1}|\phi_n(x_n)|\omega\rangle}{\langle t_1|t_1\rangle\langle t_2|t_2\rangle\langle t_{n-1}|t_{n-1}\rangle} \tag{1.53}$$

Les éléments de matrice $\langle t|\phi(x)|t'\rangle$ sont appelés génériquement les facteurs de forme de l'opérateur ϕ dans la base propre du Hamiltonien.

Dans un certain nombre de modèles importants, la méthode de la diffusion inverse quantique a permis d'obtenir la donnée du spectre et des états propres du Hamiltonien, ainsi que les facteurs de forme des opérateurs locaux dans la base propre de ce dernier. Cette base propre, exprimée en termes d'états de référence et d'opérateurs B et C, se prête bien au calcul lorsque les opérateurs sont des fonctions des générateurs de l'algèbre de Yang-Baxter. Ce n'est toutefois pas le cas, a priori, des opérateurs locaux qui nous intéressent. C'est pourquoi il est nécéssaire, pour pouvoir obtenir ces facteurs de forme, de pouvoir réexprimer les opérateurs locaux en termes de ces opérateurs A, B, C et D [143, 14] ; ce problème est appelé le problème inverse quantique. Il n'existe pas de méthode générale pour cette résolution, et il faut en général procéder au cas par cas.
Une fois ce problème résolu, il est a priori possible d'exprimer les facteurs de forme des opérateurs locaux. Pour ces quantités, une expression en terme de déterminants est avantageuse, cela permet en particulier d'espérer des simplifications pour les facteurs de forme normalisés (il s'agit alors d'un quotient de deux déterminants, que l'on peut espérer exprimer comme le déterminant de la matrice quotient) ou de leur produit [119, 121, 120, 115].

1.3 Groupes quantiques

Dans le cadre de l'ansatz de Bethe algébrique, la relation de commutation (1.44) est, comme évoqué plus haut, la marque de l'intégrabilité du système. De manière similaire au cas classique, cette relation caractéristique de l'intégrabilité implique une condition de compatibilité sur la matrice R, qui s'écrit en général sous la forme de l'équation de Yang-Baxter quantique (1.47). Toujours en parallèle avec le cas classique, il est possible de chercher de manière systématique les solutions de cette équation, ce qui permet de construire et de classer selon leur matrice R les théories intégrables quantiques solubles par ansatz de Bethe algébrique.
Une façon d'aborder ce problème de la recherche systématiques des solutions de l'équation de Yang-Baxter est le concept de groupes quantiques. Ce concept a été introduit simultanément par Drinfel'd [64] et Jimbo [97]. Un groupe quantique est lié au concept d'algèbre de Hopf, c'est-à-dire une algèbre $\mathcal{A}$ munie d'opérateurs nommés comultiplication, co-unité et antipode satisfaisant des règles de compatibilité bien définies [64]. Plus précisément, ce lien se fait de la façon suivante. Il est possible de considérer l'algèbre des fonctions sur un groupe comme une algèbre de Hopf, qui est alors une algèbre de Hopf commutative (pour la multiplication d'algèbre). Une algèbre de Hopf non commutative pourrait alors être considérée comme une

généralisation de cette algèbre des fonctions sur un groupe, ce qui revient à considérer un analogue quantique (c'est-à-dire entraînant une algèbre de Hopf des fonctions non commutative) de la notion habituelle de groupe [198]. En pratique, les notions d'algèbre de Hopf et de groupe quantique sont confondues. L'intérêt de ce concept est qu'il est possible, pour certaines algèbres de Hopf, de construire de manière systématique un élément appartenant au produit tensoriel de cette algèbre avec elle-même et qui satisfasse la relation de Yang-Baxter quantique. Cet objet est appelé matrice R universelle (bien qu'il n'ait a priori pas de forme matricielle). Il est alors possible, pour une représentation donnée de l'algèbre de Hopf initiale, de construire l'image par cette représentation de la matrice R universelle, il s'agit d'une solution matricielle de l'équation de Yang-Baxter.

1.3.1 Algèbres de Hopf

Rappelons plus précisément la définition d'une algèbre de Hopf : il s'agit de la réunion d'une algèbre $\mathcal{A}$ et de trois fonctions : la comultiplication $\Delta : \mathcal{A} \to \mathcal{A} \otimes \mathcal{A}$, de la co-unité $\epsilon : \mathcal{A} \to \mathbb{C}$ et de l'antipode $S : \mathcal{A} \to \mathcal{A}$. Alors que la comultiplication et la co-unité sont des morphismes d'algèbre, l'antipode est un anti-homomorphisme, c'est-à-dire que $S(ab) = S(b)S(a)$. Pour que $(\mathcal{A}, \Delta, \epsilon, S)$ soit une algèbre de Hopf, les propriétés suivantes doivent être vérifiées :

$$(\Delta \otimes \mathbb{1}) \circ \Delta = (\mathbb{1} \otimes \Delta) \circ \Delta \tag{1.54}$$

$$(\epsilon \otimes \mathbb{1}) \circ \Delta = (\mathbb{1} \otimes \epsilon) \circ \Delta = \mathbb{1} \tag{1.55}$$

$$m \circ (S \otimes \mathbb{1}) \circ \Delta = m \circ (\mathbb{1} \otimes S) \circ \Delta = \epsilon \mathbb{1} \tag{1.56}$$

Un exemple d'une telle algèbre est $U_q(sl_2)$. Elle a pour générateurs e, f, t et t^{-1} qui satisfont les relations

$$tt^{-1} = t^{-1}t = 1 \tag{1.57}$$

$$te = q^2 et \tag{1.58}$$

$$tf = q^{-2} ft \tag{1.59}$$

$$[e, f] = \frac{t - t^{-1}}{q - q^{-1}} \tag{1.60}$$

avec q un paramètre complexe. La comultiplication, la co-unité et l'antipode sont données par les images

$$\Delta(e) \equiv e \otimes \mathbb{1} + t \otimes e, \quad \Delta(f) \equiv f \otimes t^{-1} + \mathbb{1} \otimes f, \tag{1.61}$$

$$\Delta(t) \equiv t \otimes t, \quad \Delta(t^{-1}) \equiv t^{-1} \otimes t^{-1}, \tag{1.62}$$

$$\epsilon(e) \equiv \epsilon(f) \equiv 0, \quad \epsilon(t) \equiv \epsilon(t^{-1}) \equiv 1, \tag{1.63}$$

$$S(e) \equiv -t^{-1}e, \quad S(f) \equiv -ft, \quad S(t) \equiv t^{-1} \quad \text{et} \quad S(t^{-1}) \equiv t \tag{1.64}$$

Remarque 1.1. Cette algèbre de Hopf peut être considérée comme une déformation par le paramètre q de l'algèbre standard sl_2

$$[h, e] = 2e, \quad [h, f] = -2f, \quad [e, f] = h \tag{1.65}$$

En effet, on retrouve, en posant $t = q^h$, ces relations de commutation en faisant tendre q vers 1.

Un autre exemple d'algèbre de Hopf commutative est donnée par l'algèbre commutative des fonctions à valeurs complexes sur un groupe fini. Dans cette algèbre, la comultiplication Δ est donnée par la relation $\Delta(f)(x,y) = f(xy)$, la co-unité par $\epsilon(f) = f(1)$ et l'antipode par $S(f)(x) = f(x^{-1})$, la loi produit étant le produit point par point, i.e. $(f.g)(x) = f(x).g(x)$.

1.3.2 Matrice $\mathcal{R}$ universelle

Le concept de groupe quantique permet d'expliquer la similarité entre les relations (1.44) et (1.47) via la notion de double quantique et celle de matrice $\mathcal{R}$ universelle. Soit deux algèbres de Hopf $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ et une forme bilinéaire $\langle . \rangle : \mathcal{A} \times \mathcal{B} \to \mathbb{C}$, satisfaisant les propriétés

$$\langle a, b_1 b_2 \rangle = \langle \Delta_{\mathcal{A}}(a), b_1 \otimes b_2 \rangle \tag{1.66}$$

$$\langle a_1 a_2, b \rangle = \langle a_1 \otimes a_2, \Delta_{\mathcal{B}}(b) \rangle \tag{1.67}$$

$$\langle \mathbb{1}_{\mathcal{A}}, b \rangle = \epsilon_{\mathcal{B}}(b) \tag{1.68}$$

$$\langle a, \mathbb{1}_{\mathcal{B}} \rangle = \epsilon(a) \tag{1.69}$$

$$\langle S_{\mathcal{A}}(a), S_{\mathcal{B}}(b) \rangle = \langle a, b \rangle \tag{1.70}$$

où a, a_1 et a_2 (respectivement b, b_1 et b_2) sont des éléments de $\mathcal{A}$ (respectivement de $\mathcal{B}$). Il existe alors une algèbre de Hopf $\mathcal{D}$ qui admet pour sous-algèbres $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$.
Une des propriétés importantes de cette structure est qu'elle permet de construire, dans le cas où les sous-algèbres sont de dimension finie, un élément du produit tensoriel $\mathcal{D} \otimes \mathcal{D}$ que l'on appelle matrice $\mathcal{R}$ universelle. En effet, soit $\{a_i\}$ une base de $\mathcal{A}$ et $\{b_i\}$ une base de $\mathcal{B}$ duale par rapport à la forme bilinéaire $\langle . \rangle$. La matrice $\mathcal{R}$ universelle est alors construite par

$$\mathcal{R} \equiv \sum_i a_i \otimes b_i \tag{1.71}$$

Elle satisfait les propriétés suivantes :

$$\mathcal{R}\Delta(x) = \Delta'(x)\mathcal{R} \tag{1.72}$$

$$(\Delta \otimes \mathbb{1})\mathcal{R} = \mathcal{R}_{13}\mathcal{R}_{23} \tag{1.73}$$

$$(\mathbb{1} \otimes \Delta)\mathcal{R} = \mathcal{R}_{13}\mathcal{R}_{12} \tag{1.74}$$

$$(\epsilon \otimes \mathbb{1})\mathcal{R} = \mathbb{1} = (\mathbb{1} \otimes \epsilon)\mathcal{R} \tag{1.75}$$

$$(S \otimes \mathbb{1})\mathcal{R} = \mathcal{R} = (\mathbb{1} \otimes S^{-1})\mathcal{R} \tag{1.76}$$

avec $\Delta' = \sigma \circ \Delta$ et σ l'opérateur de permutation, et $\mathcal{R}_{ij}$ le plongement de la matrice $\mathcal{R}$ dans les espaces i et j du produit tensoriel $\mathcal{D} \otimes \mathcal{D} \otimes \mathcal{D}$. De manière générale, toute algèbre de Hopf dont le produit tensoriel avec elle-même admet un tel élément $\mathcal{R}$ est dite quasi-triangulaire.
En particulier, la matrice R universelle satisfait l'équation de Yang-Baxter

$$\mathcal{R}_{12}\mathcal{R}_{13}\mathcal{R}_{23} = \mathcal{R}_{23}\mathcal{R}_{13}\mathcal{R}_{12} \tag{1.77}$$

Les équations (1.44) et (1.47) peuvent alors s'interpréter de la manière suivante : quand les espaces auxiliaires et quantiques sont des représentations de la même algèbre de Hopf, la matrice R définie sur le produit tensoriel de l'espace auxiliaire avec lui-même est la représentation de cette matrice $\mathcal{R}$ universelle, d'où la relation (1.47). De même, la matrice de monodromie est l'image de la matrice $\mathcal{R}$ universelle dans le produit tensoriel des espaces auxiliaire et quantique, ce qui donne la relation (1.44).

Il est intéressant de remarquer que l'algèbre $U_q(sl_2)$ peut être vue comme le double quantique de deux sous-algèbres de Hopf. Elle est donc quasi-triangulaire, et admet une matrice $\mathcal{R}$ universelle. Ainsi, dans chaque système intégrable où l'espace quantique est une représentation de l'algèbre de Hopf $U_q(sl_2)$, il est possible de trouver une matrice R satisfaisant les relations (1.44), en considérant l'espace auxiliaire comme une représentation de $U_q(sl_2)$.

1.3.3 Représentations de $U_q(sl_2)$

Pour finir, décrivons quelques représentations de $U_q(sl_2)$. Il s'agit en effet d'une algèbre de Hopf simple quoique non triviale et qui est reliée à plusieurs modèles intégrables quantiques comme le modèle de la chaîne de Heisenberg XXZ ou encore le modèle de sine-Gordon. La connaissance de ces représentations permet donc de construire pour ces modèles les matrices R et les matrices de monodromie.
Pour q non racine de l'unité, les représentations irréductibles de dimension N sont les représentations π dont l'espace est engendré par les vecteurs $v_i, i \in [\![1, N]\!]$ avec les relations

$$\pi(e)v_k \propto v_{k-1} \quad \text{avec} \quad v_0 = 0 \tag{1.78}$$

$$\pi(e)v_k \propto v_{k+1} \quad \text{avec} \quad v_{N+1} = 0 \tag{1.79}$$

$$\pi(t) \propto v_k \tag{1.80}$$

En particulier, la représentation de dimension 2 a pour expression matricielle

$$\pi(e) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \pi(f) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \pi(t) = \begin{pmatrix} q & 0 \\ 0 & q^{-1} \end{pmatrix} \tag{1.81}$$

Pour q racine de l'unité, un exemple de représentation est donné par

$$\pi(e) = x\frac{a_1 Z - a_1^{-1} Z^{-1}}{q - q^{-1}} X \tag{1.82}$$

$$\pi(f) = x^{-1}\frac{a_2 Z^{-1} - a_2^{-1} Z}{q - q^{-1}} X^{-1} \tag{1.83}$$

$$\pi(t) = \frac{a_1}{a_2} Z^2 \tag{1.84}$$

avec x, a_1 et a_2 des nombres complexes non nuls et Z et X une représentation de l'algèbre de Weyl définie par $ZX = qXZ$,

$$Z = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & q & & \\ & & \ddots & \\ & & & q^{N-1} \end{pmatrix} \quad X = \begin{pmatrix} & & & 1 \\ 1 & & & \\ & \ddots & & \\ & & 1 & \end{pmatrix} \tag{1.85}$$

Cette représentation est irréductible dès lors que le couple (a_1^{2N}, a_2^{2N}) n'est pas le couple $(1,1)$.

1.4 Ansatz de Bethe algébrique : l'exemple de la chaîne de Heisenberg XXX

Le but de cette section est d'illustrer la méthode de la diffusion inverse quantique en prenant l'exemple de la résolution par ansatz de Bethe algébrique [173, 193] la chaîne de Heisenberg XXX de spin 1/2 [87, 50, 89, 163, 203]. Il s'agit d'une chaîne de N sites, chaque site portant un espace quantique de dimension 2. Le modèle est décrit en termes des opérateurs σ_n^x, σ_n^y et σ_n^z, qui sont les matrices de Pauli agissant sur l'espace quantique au site n. Le Hamiltonien du modèle est donné par

$$H = \sum_{n=1}^{N} \left(\sigma_n^x \sigma_n^{x+1} + \sigma_n^y \sigma_n^{y+1} + \sigma_n^z \sigma_n^{z+1} - 1 \right) \tag{1.86}$$

1.4.1 Détermination du système auxiliaire et matrice de monodromie

La première étape dans la résolution par diffusion inverse quantique est de construire une matrice de monodromie dont la trace génère le Hamiltonien. Cette matrice de monodromie peut s'écrire sous la forme d'un produit de matrices de Lax définies par [122, 123, 143]

$$L_n(\lambda) \equiv \begin{pmatrix} \lambda + \eta S_n^z & \eta S_n^- \\ \eta S_n^+ & \lambda - \eta S_n^z \end{pmatrix} \tag{1.87}$$

avec $S_n^\pm$ et S_n^z les opérateurs locaux définis par

$$S_n^z \equiv \frac{1}{2} \sigma_n^z \quad \text{et} \quad S_n^\pm \equiv \frac{1}{2} (\sigma_n^x \pm i \sigma_n^y) \tag{1.88}$$

Ici, dans la construction de la matrice de monodromie, des inhomogénéités sont incluses de la façon suivante : on définit la matrice de monodromie comme étant

$$T(\lambda) = L_N(\lambda - \delta_N) \dots L_1(\lambda - \delta_1) \tag{1.89}$$

avec les δ_j des paramètres d'inhomogénéité complexes.
Cette matrice de Lax et la trace de la matrice de monodromie

$$\tau(\lambda) = \mathrm{Tr}\, T(\lambda) = \mathrm{Tr} \begin{pmatrix} A(\lambda) & B(\lambda) \\ C(\lambda) & D(\lambda) \end{pmatrix} \tag{1.90}$$

associée permettent bien de reconstruire le Hamiltonien à la limite homogène $\delta_i \to 0$: on a l'identité de trace

$$H = 2\eta \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\lambda} \ln \tau(\lambda)\big|_{\lambda=\frac{\eta}{2}} - 2N \tag{1.91}$$

La matrice de Lax et la matrice de monodromie vérifient les relations (1.44) et (1.42) avec la matrice R définie par

$$R(\lambda,\mu) \equiv \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & b(\lambda,\mu) & c(\lambda,\mu) & 0 \\ 0 & c(\lambda,\mu) & b(\lambda,\mu) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{1.92}$$

avec les fonctions

$$b(\lambda,\mu) \equiv \frac{\lambda-\mu}{\lambda-\mu+\eta} \quad \text{et} \quad c(\lambda,\mu) \equiv \frac{\eta}{\lambda-\mu+\eta} \tag{1.93}$$

L'existence de la matrice R montre bien le caractère commutatif de la famille $(\tau(\lambda))$.

Remarque 1.2. La forme de la matrice de Lax impose que les générateurs de l'algèbre de Yang-Baxter sont des polynômes en λ, de degré N pour $A(\lambda)$ et $D(\lambda)$, et de degré $N-1$ pour $B(\lambda)$ et $C(\lambda)$. En particulier, l'opérateur de transfert $\tau(\lambda)$ est un polynôme de degré N dont les coefficients forment aussi une famille d'opérateurs qui commute.

L'équation (1.44) peut se réécrire comme les 16 équations suivantes :

$$\begin{aligned}
&A(\lambda)A(\mu) = A(\mu)A(\lambda)\\
&A(\lambda)B(\mu) = b(\lambda,\mu)B(\mu)A(\lambda) + c(\lambda,\mu)A(\mu)B(\lambda)\\
&B(\lambda)A(\mu) = c(\lambda,\mu)B(\mu)A(\lambda) + b(\lambda,\mu)A(\mu)B(\lambda)\\
&B(\lambda)B(\mu) = B(\mu)B(\lambda)\\
&b(\lambda,\mu)A(\lambda)C(\mu) + c(\lambda,\mu)C(\lambda)A(\mu) = C(\mu)A(\lambda)\\
&b(\lambda,\mu)A(\lambda)D(\mu) + c(\lambda,\mu)C(\lambda)B(\mu) = b(\lambda,\mu)D(\mu)A(\lambda) + c(\lambda,\mu)C(\mu)B(\lambda)\\
&b(\lambda,\mu)B(\lambda)C(\mu) + c(\lambda,\mu)D(\lambda)A(\mu) = c(\lambda,\mu)D(\mu)A(\lambda) + b(\lambda,\mu)C(\mu)B(\lambda)\\
&b(\lambda,\mu)B(\lambda)D(\mu) + c(\lambda,\mu)D(\lambda)B(\mu) = D(\mu)B(\lambda)\\
&c(\lambda,\mu)A(\lambda)C(\mu) + b(\lambda,\mu)C(\lambda)A(\mu) = A(\mu)C(\lambda)\\
&c(\lambda,\mu)A(\lambda)D(\mu) + b(\lambda,\mu)C(\lambda)B(\mu) = b(\lambda,\mu)B(\mu)C(\lambda) + c(\lambda,\mu)A(\mu)D(\lambda)\\
&c(\lambda,\mu)B(\lambda)C(\mu) + b(\lambda,\mu)D(\lambda)A(\mu) = c(\lambda,\mu)B(\mu)C(\lambda) + b(\lambda,\mu)A(\mu)D(\lambda)\\
&c(\lambda,\mu)B(\lambda)D(\mu) + b(\lambda,\mu)D(\lambda)B(\mu) = B(\mu)D(\lambda)\\
&C(\lambda)C(\mu) = C(\mu)C(\lambda)\\
&C(\lambda)D(\mu) = b(\lambda,\mu)D(\mu)C(\lambda) + c(\lambda,\mu)C(\mu)D(\lambda)\\
&D(\lambda)C(\mu) = c(\lambda,\mu)D(\mu)C(\lambda) + b(\lambda,\mu)C(\mu)D(\lambda)\\
&D(\lambda)D(\mu) = D(\mu)D(\lambda)
\end{aligned}$$

Remarquons entre autres que les quatre familles $A(\lambda)$, $B(\lambda)$, $C(\lambda)$ et $D(\lambda)$ sont des familles commutatives.

Enfin, définissons le déterminant quantique comme étant la fonction

$$\det_q T(\lambda) \equiv A(\lambda)D(\lambda-\eta) - B(\lambda)C(\lambda-\eta) \tag{1.94}$$

Les relations de Yang-Baxter font que cette fonction peut aussi s'écrire

$$\begin{aligned}
\det_q T(\lambda) &= A(\lambda-\eta)D(\lambda) - C(\lambda-\eta)B(\lambda) && (1.95)\\
\det_q T(\lambda) &= D(\lambda-\eta)A(\lambda) - B(\lambda-\eta)C(\lambda) && (1.96)\\
\det_q T(\lambda) &= D(\lambda)A(\lambda-\eta) - C(\lambda)B(\lambda-\eta) && (1.97)
\end{aligned}$$

Cette fonction présente la propriété de factorisation

$$\det_q T(\lambda) = \det_q L_N(\lambda)\det_q L_{N-1}(\lambda)\ldots\det_q L_1(\lambda) \tag{1.98}$$

1.4.2 Caractérisation des états et valeurs propres de l'opérateur de transfert

L'ansatz de Bethe algébrique est basé sur l'existence d'un état $|0\rangle$, l'état de référence, tel que

$$\begin{aligned}
&A(\lambda)|0\rangle = a(\lambda)|0\rangle, \quad D(\lambda)|0\rangle = d(\lambda)|0\rangle, && (1.99)\\
&B(\lambda)|0\rangle \neq 0 \quad \text{et } C(\lambda)|0\rangle = 0 && (1.100)
\end{aligned}$$

Dans le cas de la chaîne de Heisenberg de spin 1/2, cet état est donné par

$$|0\rangle \equiv \bigotimes_{n=1}^{N} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \tag{1.101}$$

En effet, on a

$$T(\lambda)|0\rangle = \begin{pmatrix} A(\lambda)|0\rangle & B(\lambda)|0\rangle \\ C(\lambda)|0\rangle & D(\lambda)|0\rangle \end{pmatrix} = L_N(\lambda)|0\rangle \ldots L_1(\lambda)|0\rangle \tag{1.102}$$

La matrice $L_n|0\rangle$ étant triangulaire supérieure, l'état $|0\rangle$ est bien un état de référence, avec

$$a(\lambda) = \prod_{j=1}^{N}\left(\lambda - \delta_j + \frac{\eta}{2}\right), \quad d(\lambda) = \left(\prod_{j=1}^{N}\lambda - \delta_j - \frac{\eta}{2}\right) \tag{1.103}$$

A partir de cet état de référence, il est possible de créer d'autres états en utilisant l'opérateur B de la façon suivante :

$$\Psi_n(\lambda_1,\ldots,\lambda_n) \equiv B(\lambda_1)\ldots B(\lambda_n)|0\rangle \tag{1.104}$$

La famille $B(\lambda)$ étant une famille d'opérateurs qui commutent, l'ordre des λ_i n'importe pas.

La commutation des opérateurs A et D avec un produit de B est donné par

$$\begin{aligned} A(\lambda)\prod_i B(\mu_i) &= \prod_i \frac{1}{b(\mu_i,\lambda)}\prod_i B(\mu_i)A(\lambda) \\ &- \sum_i \frac{c(\mu_i,\lambda)}{b(\mu_i,\lambda)}B(\lambda)\prod_{j\neq i}\frac{1}{b(\mu_j,\mu_i)}\prod_{j\neq i}B(\lambda_j)A(\mu_i) \end{aligned} \tag{1.105}$$

$$\begin{aligned} D(\lambda)\prod_i B(\mu_i) &= \prod_i \frac{1}{b(\lambda,\mu_i)}\prod_i B(\mu_i)D(\lambda) \\ &- \sum_i \frac{c(\lambda,\mu_i)}{b(\lambda,\mu_i)}B(\lambda)\prod_{j\neq i}\frac{1}{b(\mu_i,\mu_j)}\prod_{j\neq i}B(\lambda_j)A(\mu_i) \end{aligned} \tag{1.106}$$

L'action des opérateurs A et D sur l'état $\Psi_n(\lambda_1,\ldots,\lambda_n)$ est donc donnée par

$$A(\mu)\Psi_n(\lambda_1,\ldots,\lambda_n) = \Lambda\Psi_n(\lambda_1,\ldots,\lambda_n) + \sum_i \Lambda_i\Psi_n(\lambda_1,\ldots,\lambda_{i-1},\lambda_{i+1},\ldots,\lambda_n,\mu)$$

$$D(\mu)\Psi_n(\lambda_1,\ldots,\lambda_n) = \tilde{\Lambda}\Psi_n(\lambda_1,\ldots,\lambda_n) + \sum_i \tilde{\Lambda}_i\Psi_n(\lambda_1,\ldots,\lambda_{i-1},\lambda_{i+1},\ldots,\lambda_n,\mu)$$

avec

$$\Lambda \equiv a(\mu)\prod_i \frac{1}{b(\lambda_i,\mu)} \tag{1.107}$$

$$\tilde{\Lambda} \equiv a(\mu)\prod_i \frac{1}{b(\mu,\lambda_i)} \tag{1.108}$$

$$\Lambda_i \equiv a(\lambda_i)\frac{c(\mu,\lambda_i)}{b(\mu,\lambda_i)}\prod_{j\neq i}\frac{1}{b(\lambda_j,\lambda_i)} \tag{1.109}$$

$$\tilde{\Lambda_i} \equiv d(\lambda_i)\frac{c(\lambda_i,\mu)}{b(\lambda_i,\mu)}\prod_{j\neq i}\frac{1}{b(\lambda_i,\lambda_j)} \tag{1.110}$$

Demander que $\Psi_n(\lambda_1,\ldots,\lambda_n)$ soit un vecteur propre de $\tau(\lambda)$ revient donc à demander que

$$\Lambda_i + \tilde{\Lambda}_i = 0 \quad \forall i \in [\![1,n]\!] \tag{1.111}$$

ce qui peut se réécrire comme une condition indépendante de λ :

$$\frac{a(\lambda_i)}{d(\lambda_i)} = \prod_{j\neq i}\frac{b(\lambda_j,\lambda_i)}{b(\lambda_i,\lambda_j)} \quad \forall i \in [\![1,n]\!] \tag{1.112}$$

Ce système d'équations, appelées équations de Bethe, est un système qui se retrouve dans d'autres modèles intégrables.
Ainsi, il est possible de construire des états propres à droite de l'opérateur de transfert sous la forme $B(\lambda_1)\ldots B(\lambda_n)|0\rangle$. Il faut noter que cette méthode ne permet pas en général de prouver la complétude des états ainsi construits. Cette méthode permet de construire des états propres à gauche de façon similaire, sous la forme $\langle 0|C(\lambda_1)\ldots C(\lambda_n)$ avec l'état de référence à gauche

$$\langle 0| \equiv \bigotimes_{n=1}^{N}\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} \tag{1.113}$$

Les états propres ainsi construits sont orthogonaux car associés à des valeurs propres différentes de l'opérateur de transfert.

Ici, l'existence de l'état de référence et l'équation (1.44) ont permis la caractérisation du spectre et des états propres à la fois de l'opérateur de transfert et du Hamiltonien du modèle XXX à l'aide d'un système d'équations, les équations de Bethe. Cette méthode, appelée ansatz de Bethe algébrique, est un outil puissant qui peut s'appliquer à d'autres modèles.

1.4.3 Résolution du problème inverse

Le spectre et la base propre du Hamiltonien étant caractérisés en termes de générateurs de l'algèbre de Yang-Baxter, il est possible de calculer l'action de ces générateurs dans la base propre du Hamiltonien, et donc de calculer leurs facteurs de forme. L'étape suivante dans le calcul des fonctions de corrélation de la chaîne de Heisenberg est la résolution du problème inverse, c'est-à-dire l'expression de tous les opérateurs locaux en fonction des éléments de la matrice de monodromie [143]. Une fois effectuée, les facteurs de forme des opérateurs locaux pourra a priori être obtenue.

Le fait que l'espace auxiliaire puisse être considéré comme une représentation d'une algèbre de Hopf est à l'origine de cette reconstruction. Ici, les espaces quantiques et auxiliaire sont tous de dimension 2 et sont en fait issus de la même représentation de $\mathcal{U}_q(sl_2)$, et la matrice de Lax $L_n(\lambda-\delta_n)$ présente la propriété d'être un multiple de la matrice de permutation Π_{0n} (0 indique l'espace auxiliaire) au point $\lambda=\xi_n\equiv\delta_n+\eta/2$. On a alors le résultat suivant :

$$\mathrm{tr}_0(S_0^\alpha(\xi_1)T_0(\xi_1)) = S_1^\alpha\tau(\xi_1) \tag{1.114}$$

où $\alpha\in\{z,+,-\}$. Cette formule permet la reconstruction de tous les opérateurs associés au site 1.
Le fait que les matrices de Lax se confondent avec la matrice de permutation en un point donné permet également de construire l'opérateur de translation du système, c'est à dire un opérateur U_n tel que

$$\mathrm{U}_n L_N(\lambda)\dots L_1(\lambda)\mathrm{U}_n^{-1} = L_{n-1}(\lambda)\dots L_1(\lambda)L_N(\lambda)\dots L_n(\lambda) \tag{1.115}$$

Cet opérateur peut se calculer à l'aide des matrices de transfert de la façon suivante :

$$\mathrm{U}_n = \prod_{i=1}^{n-1}\tau(\xi_i) \tag{1.116}$$

L'obtention de ce propagateur permet d'étendre la reconstruction des opérateurs du site 1 à tous les sites de la chaîne. Au final, on a les $3N$ reconstructions :

$$S_n^- = \prod_{i=1}^{n-1} (\tau(\xi_i))\, B(\xi_n) \prod_{i=1}^{n} (\tau(\xi_i))^{-1} \tag{1.117}$$

$$S_n^+ = \prod_{i=1}^{n-1} (\tau(\xi_i))\, C(\xi_n) \prod_{i=1}^{n} (\tau(\xi_i))^{-1} \tag{1.118}$$

$$S_n^z = \prod_{i=1}^{n-1} (\tau(\xi_i))\, \frac{1}{2}(A-D)(\xi_n) \prod_{i=1}^{n} (\tau(\xi_i))^{-1} \tag{1.119}$$

Dans le cas de chaînes de spins supérieurs, l'espace auxiliaire a une dimension strictement inférieure aux espaces quantiques. Il est toutefois possible d'utiliser ce principe de résolution pour le problème inverse, en utilisant une procédure de fusion sur les matrices L pour obtenir des opérateurs agissant sur des espaces auxiliaire et quantiques de même dimension [143].

1.4.4 Produits scalaires et facteurs de forme

Une fois le spectre du Hamiltonien caractérisé en termes des générateurs de l'algèbre de Yang-Baxter et le problème inverse résolu, il est possible d'exprimer les facteurs de forme des éléments locaux, c'est-à-dire les quantités de la forme $\langle\Psi|O_n|\Psi'\rangle$ avec $\langle\Psi|$ et $|\Psi'\rangle$ vecteurs propres respectivement à gauche et à droite du Hamiltonien et O_n un opérateur local associé au site n, en termes d'éléments de la matrice de monodromie uniquement. On se retrouve alors à calculer des quantités du type

$$\langle 0|C(\mu_1)\dots C(\mu_n)\prod_i \tau(\xi_i) X(\lambda) \prod_i \tau^{-1}(\xi_i) B(\nu_1)\dots B(\nu_m)|0\rangle \tag{1.120}$$

avec (μ_i) et (ν_i) des solutions des équations de Bethe (1.112) et X une combinaison linéaire des générateurs A, B, C et D.
Remarquons tout d'abord que l'action des τ sur les produits de B et de C est diagonale, car ces produits correspondent à des états propres de la matrice de transfert. Des égalités telles que (1.105) et (1.106) peuvent ensuite être utilisées pour faire passer X à travers le produit de C. Au final, il est possible de décomposer les facteurs de forme (1.120) en somme de produits scalaires $\langle 0|\prod_i C(\mu'_i)\prod_j B(\nu_j)|0\rangle$, où la famille (μ'_i) ne satisfait pas a priori les équations de Bethe (1.112). Il est possible d'exprimer ces produits scalaires sous une forme simple faisant intervenir un déterminant :

$$\langle 0|\prod_{i=1}^{n} C(\mu'_i)\prod_{j=1}^{n} B(\nu_j)|0\rangle = \frac{\det H(\{\mu'_i\},\{\nu_i\})}{\prod_{j>k}(\mu'_k-\mu'_j)\prod_{j<k}(\nu_k-\nu_j)} \tag{1.121}$$

où la matrice $H(\{\mu'_i\},\{\nu_i\})$ est la matrice $n\times n$ constituée des éléments

$$H(\{\mu'_i\},\{\nu_i\})_{ab} = \frac{\eta}{\nu_a-\mu'_b}\left(a(\mu'_b)\prod_{m\neq a}(\nu_m-\mu'_b+\eta) - d(\mu'_b)\prod_{m\neq a}(\nu_m-\mu'_b-\eta)\right) \tag{1.122}$$

Un point important de ce résultat est qu'il se met sous forme compacte, à l'aide d'un déterminant. Sa manipulation pour de futurs calculs est ainsi plus aisée. De plus, il est possible de montrer l'annulation de cette quantité en exhibant un vecteur propre de la matrice H de valeur propre nulle lorsque $\{\mu_i'\}$ et $\{\nu_i\}$ sont des solutions différentes des équations de Bethe. En particulier, on peut exhiber un tel vecteur dans le cas du produit scalaire de deux états propres de la matrice de transfert associés à deux valeurs propres différentes

Pour finir, remarquons que les résultats théoriques obtenus, combinés à certaines techniques de sommation numérique, permettent d'obtenir des prévisions vérifiables par des expériences de diffusion de neutrons sur des matériau magnétiques modélisés par les chaînes de Heisenberg (le résultat ci-dessus s'étendant au cas XXZ) [57, 56, 165, 166, 142].

Chapitre 2

Séparation des variables

2.1 Séparation des variables classique

Dans le contexte de l'étude des systèmes intégrables classiques, un des méthodes les plus efficaces, mentionnée au début de cette thèse, est celle de la séparation des variables. Cette méthode vise à l'obtention de variables séparées, permettant de transformer le problème original liant $2D$ variables en un ensemble de D problèmes indépendants ne faisant intervenir que deux variables.
La résolution d'un problème par la méthode de la séparation des variables se fait donc en trois étapes :

- Obtention des variables séparées. Il s'agit d'un ensemble de $2D$ variables qui sont, dans le formalisme du crochet de Poisson, des variables canoniques. Ces variables sont telles qu'il existe D relations dites relations séparées ne faisant intervenir chacune qu'une paire de variables séparées et des quantités conservées.
- Calcul de l'évolution temporelle des variables séparées, à l'aide de ces relations séparées.
- Écriture des variables initiales du système au temps t en fonction des variables séparées au temps t.

En général, la première partie de ce schéma est l'une des plus difficile. Il n'existe pas en effet de méthode universelle pour obtenir un jeu de variables séparées pour un système intégrable quelconque.

2.1.1 Variables séparées

En suivant la méthode exposée en [182], je vais tout d'abord rappeler quelques résultats de la séparation des variables dans le cadre de la mécanique classique.
Soit considère un système évoluant dans un espace des phases de dimension $2D$, ainsi que D quantités $H_i, i \in [\![1, D]\!]$ en involution et dont le crochet de Poisson avec le Hamiltonien du sytème est nul,

$$\{H_i, H_j\} = 0 \quad \forall i, j \in [\![1, D]\!] \tag{2.1}$$

alors un ensemble de variables $\{p_i, q_i\}$ est dit séparé s'il est canonique, c'est-à-dire qu'il vérifie les relations

$$\{p_i, p_j\} = \{q_i, q_j\} = 0 \quad \text{et } \{p_i, q_j\} = \delta_{ij} \tag{2.2}$$

et s'il existe D relations liant les éléments des couples (p_i, q_i) et les quantités H_j via des fonctions f_i telles que :

$$f_i(p_i, q_i, H_1, \dots, H_D) = 0 \quad \forall i \in [\![1, D]\!] \tag{2.3}$$

Les quantités H_i commutant au sens de Poisson avec le Hamiltonien, elles sont constantes et il est alors possible de fixer leur valeur, ce qui donne au final D relations, chacune reliant les éléments d'un couple (p_i, q_i).
Un exemple de variables séparées est donné par les variables action-angle d'un système. En effet, ce sont des variables canoniques, et il est possible d'écrire D équations reliant les dérivées temporelles des variables angle aux quantités conservées du système.

2.1.2 Fonctions de Baker-Akhiezer

L'une des méthodes les plus puissantes permettant d'exhiber un ensemble de variables séparées pour un modèle donnée est celle basée sur les fonctions de Baker-Akhiezer. Ces fonctions font intervenir le formalisme des matrices de Lax. Dans ce cadre, soit une matrice de Lax $L(u)$ de taille $N \times N$ du système considéré,

$$L(u) = \begin{pmatrix} L_{11}(u) & L_{12}(u) & \cdots & L_{1N}(u) \\ L_{21}(u) & L_{22}(u) & \cdots & L_{2N}(u) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ L_{N1}(u) & L_{N2}(u) & \cdots & L_{NN}(u) \end{pmatrix} \tag{2.4}$$

dépendant d'un paramètre spectral u, telle que les quantités conservées H_i peuvent être obtenues à l'aide des valeurs propres de cette matrice.
Soit une valeur propre $z(u)$ de cette matrice de Lax. Le vecteur propre associé $\Omega(u)$

$$L(u)\Omega(u) = z(u)\Omega(u) \tag{2.5}$$

est alors appelé la fonction de Baker-Akhiezer associé à la valeur propre $z(u)$. Pour être bien défini, ce vecteur propre doit être normalisé, cela est fait en imposant un N-uplet de fonctions $(\alpha_1(u), \dots, \alpha_N(u))$ telles que la fonction de Baker-Akhiezer vérifie la relation

$$\sum_{i=1}^{N} \alpha_i(u)\Omega_i(u) = 1 \tag{2.6}$$

où les $\Omega_i(u)$ sont les composantes du vecteur propre $\Omega(u)$.
L'intérêt de cette fonction du point de vue des systèmes intégrables classique est que son étude permet en général d'obtenir un ensemble de variables canoniques séparées. En effet, les pôles x_i de cette fonction sont, dans de nombreux cas, des variables du système qui commutent au sens de Poisson. Les variables conjuguées sont alors

fournies par la valeur propre correspondante $z_i \equiv z(x_i)$ ou par une fonction de cette valeur propre.
Le fait que les variables obtenues soient séparées peut se comprendre de la façon suivante. z_i étant la valeur propre associée au vecteur $\Omega(x_i)$, on a l'annulation

$$\det(z_i - L(x_i)) = 0 \tag{2.7}$$

Remarquons ensuite que le déterminant $\det(z - L(u))$ peut se décomposer sous la forme

$$\det(z - L(u)) = \sum_{n=0}^{N} c_n(u) z^n \tag{2.8}$$

où les fonctions c_n sont des variables du système. Ces variables sont des invariants spectraux de la matrice $L(u)$ [1] et peuvent donc s'exprimer à l'aide des quantités H_j. Ainsi, l'équation (2.7) ne fait intervenir que le couple de variables conjuguées (x_i, z_i) et les quantités H_j, et joue le rôle d'équation de séparation des variables (2.3).
La méthode exposée ici demande cependant plusieurs vérifications. Tout d'abord, il faut bien vérifier que la fonction de Baker-Akhiezer admet bien D pôles, que ces pôles sont en involution et qu'ils forment, avec les valeurs propres correspondantes, un ensemble de variables canoniques, ce qui n'est pas a priori vrai pour toutes les normalisations (2.6). Il existe en effet certains modèles, comme la chaîne XYZ [179], où seules certaines normalisations permettent d'obtenir des variables canoniques séparées.
La caractérisation des pôles de la fonction de Baker-Akhiezer se fait en général en utilisant les résidus de cette fonction. En effet, en notant $\Omega^{(i)}$ le résidu de Ω en $u = x_i$, on a les conditions

$$L(x_i)\Omega^{(i)} = z_i \Omega^{(i)} \quad \text{et} \quad \sum_{n=1}^{N} \alpha_n(x_i)\Omega_n^{(i)} = 0 \tag{2.9}$$

Ces conditions se traduisent par le fait que la matrice $N+1 \times N$ constituée du vecteur ligne $(\alpha_j(x_i))$ et de la matrice $L(x_i)$ est de rang $N-1$, ce qui est équivalent, entre autres, à l'annulation simultanée des deux déterminants

$$\begin{vmatrix} \alpha_1(x_i) & \alpha_2(x_i) & \dots & \alpha_N(x_i) \\ L_{21}(x_i) & L_{22}(x_i) - z_i & \dots & L_{2N}(x_i) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ L_{N1}(x_i) & L_{N2}(x_i) & \dots & L_{NN}(x_i) - z_i \end{vmatrix} \tag{2.10}$$

et

$$\begin{vmatrix} \alpha_1(x_i) & \alpha_2(x_i) & \dots & \alpha_N(x_i) \\ L_{11}(x_i) - z_i & L_{12}(x_i) & \dots & L_{1N}(x_i) \\ L_{31}(x_i) & L_{32}(x_i) & \dots & L_{3N}(x_i) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ L_{N1}(x_i) & L_{N2}(x_i) & \dots & L_{NN}(x_i) - z_i \end{vmatrix} \tag{2.11}$$

1. Dans le cas où $L(u)$ est diagonalisable, ce sont, à un signe près, les polynômes symétriques en les valeurs propres de $L(u)$

Il est alors possible de combiner ces deux annulations pour obtenir une seule équation, dont les solutions sont les pôles de la fonction de Baker-Akhiezer. Par exemple, dans le cas $N = 2$, ces pôles sont la solution de la fonction

$$B(u) \equiv \alpha_1(u)^2 L_{12}(u) - \alpha_1(u)\alpha_2(u)(L_{11}(u) - L_{22}(u)) - \alpha_{22}(u)^2 L_{21}(u) = 0 \quad (2.12)$$

2.1.3 Un exemple d'application des fonctions de Baker-Akhiezer : GL(N)

Nous avons vu que l'existence d'une matrice de Lax et la commutativité au sens de Poisson de ses valeurs propres est équivalente à l'existence d'une matrice r vérifiant l'équation (1.15). Cette équivalence est également vraie dans le cas d'une matrice de Lax dépendant d'un paramètre spectral, la relation s'écrivant alors

$$\{L_1(u), L_2(v)\} = [r_{12}(u,v), L_1(u)] - [r_{21}(v,u), L_2(v)] \quad (2.13)$$

Dans le cas d'une matrice r antisymétrique, ce qui se traduit en présence d'un paramètre spectral par la relation

$$r_{12}(u,v) = -r_{21}(v,u) \quad (2.14)$$

non dynamique et ne dépendant que de la différence des deux paramètres $u-v$, cette relation impose à la matrice r de satisfaire l'équation de Yang-Baxter classique, similaire à (1.19)

$$[r_{12}(u), r_{13}(u+v)] + [r_{12}(u), r_{23}(v)] + [r_{13}(u+v), r_{23}(v)] = 0 \quad (2.15)$$

Il est alors possible d'étudier de manière générique les solutions de cette équation, et de classifier les systèmes intégrables suivant les matrices r associées aux matrices de Lax.

Une construction possible pour obtenir une solution de l'équation de Yang-Baxter classique est donnée, pour une algèbre de Lie semi-simple $\mathcal{G}$, par la formule

$$r_{12}(u) \equiv \frac{\rho}{u} \sum_\alpha I_\alpha \otimes I_\alpha \quad (2.16)$$

avec I_α une base de l'algèbre de Lie, orthonormale selon la forme de Killing de l'algèbre.

Prenons le cas particulier de l'algèbre de Lie $gl(N)$. Dans ce cas, la formule précédente donne la matrice r

$$r_{12}(u) \equiv \frac{\rho}{u}\mathbb{P}_{12} \quad (2.17)$$

avec $\mathbb{P}_{12}$ la matrice de permutation entre les espaces 1 et 2. Il se trouve alors qu'une normalisation (2.6) constante et non dynamique, c'est-à-dire que $\alpha(u)$ ne dépend ni de u ni des variables dynamiques du système, permet de construire des variables canoniques séparées. Pour simplifier, prenons

$$\alpha_i(u) \equiv \delta_{i0} \quad (2.18)$$

L'annulation des déterminants (2.10) et (2.11) permet alors de construire à l'aide des éléments de la matrice de Lax un polynôme B dont les racines sont les pôles de la fonction de Baker-Akhiezer, ainsi qu'un autre polynôme A dont les valeurs en les x_i sont les z_i. En particulier, pour $N = 2$, ces deux polynômes sont donnés par

$$B(u) = L_{21}(u) \quad \text{et} \quad A(u) = L_{11}(u) \tag{2.19}$$

Les formules pour N quelconque sont données en [170].

2.2 Séparation des variables quantique

Le concept de séparation des variables peut se transposer au cas de modèles quantiques [174, 180, 182, 183, 128, 15, 16]. Dans ce cas, le but de la méthode est de trouver un ensemble de $2D$ opérateurs x_i et p_i satisfaisant les relations de commutation

$$[x_i, x_j] = [p_i, p_j] = 0 \quad \text{et} \quad [x_i, p_j] = i\hbar\delta_{ij} \tag{2.20}$$

tels qu'il existe D relations de la forme

$$\Phi_i(x_i, p_i, H_1, \dots, H_D) = 0 \tag{2.21}$$

dans lesquelles H_j est une famille d'opérateurs qui commutent entre eux et avec le Hamiltonien. Ces relations permettent alors de simplifier le problème, en le transformant en plusieurs problèmes auxiliaire de moindre complexité. En effet, il est possible de représenter les opérateurs x_i et p_i comme les opérateurs multiplication et dérivation agissant sur des fonctions $\mathbb{C}^D \to \mathbb{C}$, ce qui permet de voir les relations (2.21) comme des équations différentielles. Si Ψ est une solution de ces équations différentielles, il est alors possible de la factoriser sous la forme

$$\Psi(x_1, \dots, x_D) = \prod_i \Psi_i(x_i) \tag{2.22}$$

où les Ψ_i sont des fonctions à une variable satisfaisant l'équation différentielle (2.21).

En particulier, il est possible de généraliser la méthode de la fonction de Baker-Akhiezer au cas quantique, et de caractériser les opérateurs x_i comme étant les zéros d'un certain opérateur polynomial $B(\lambda)$, et les opérateurs p_i comme étant les valeurs prises par un autre opérateur polynomial $A(\lambda)$, c'est-à-dire $p_i \equiv A(x_i)$.
Ces polynômes $A(\lambda)$ et $B(\lambda)$ peuvent en particulier être obtenus dans le cadre de la méthode de la diffusion inverse quantique. De tels résultats ont été obtenus tout d'abord dans le cadre de la chaîne de Toda par Sklyanin [174], puis en particulier pour les modèles de la chaîne XXX [180] , du modèle de sinh-Gordon [176], et plus récemment dans le cas du modèle τ_2 [91] et du modèle de sine-Gordon [157].
Dans la suite de la thèse, nous allons utiliser cette méthode dans le cas d'une dimension auxiliaire égale à deux, c'est-à-dire que les matrices de Lax et de monodromie

seront des matrices de taille 2×2. Lorsque ces matrices vérifient une relation de commutation régie par la matrice R à 6-vertex, c'est-à-dire une matrice de la forme

$$R(\lambda) = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & b(\lambda) & c(\lambda) & \\ & c(\lambda) & b(\lambda) & \\ & & & 1 \end{pmatrix} \tag{2.23}$$

elles vérifient en particulier, en notant pour la matrice de monodromie

$$T(\lambda) = \begin{pmatrix} A(\lambda) & B(\lambda) \\ C(\lambda) & D(\lambda) \end{pmatrix} \tag{2.24}$$

la relation de commutation

$$[B(\lambda), B(\mu)] = 0 \quad \forall \lambda, \mu \in \mathbb{C} \tag{2.25}$$

Dans le cas où l'opérateur B est diagonalisable (ce n'est pas toujours le cas, un contre-exemple étant donné par la chaîne XXX avec conditions périodiques), ces relations de commutation montrent qu'il existe une base commune pour cette famille d'opérateurs, chacune de ses valeurs propres étant un polynôme en λ. Il est alors possible de déterminer les opérateurs zéros de $B(\lambda)$, c'est-à-dire des opérateurs $\boldsymbol{\eta}_i$, diagonaux dans la base propre de $B(\lambda)$ tels qu'on ait la relation

$$B(\lambda) \propto \prod_i (\lambda - \boldsymbol{\eta}_i) \tag{2.26}$$

Ces zéros étant diagonaux dans une même base, ils commutent entre eux. De plus, les relations de commutation régies par la matrice R impliquent alors que l'opérateur $A(\lambda)$, pris en les valeurs propres de ces zéros, correspond à l'opérateur impulsion conjugué (c'est à dire que l'action de A pris aux points appropriés sur un vecteur propre de B donnera un autre vecteur propre de B). La donnée de ces deux familles d'opérateurs correspond alors à la construction des variables quantiques séparées du modèle.
De plus, il est possible de réécrire par interpolation l'action des quatre opérateurs constituant la matrice de monodromie dans la base propre de $B(\lambda)$. Cette réécriture permet alors une caractérisation du spectre de l'opérateur de transfert, la trace de la matrice de monodromie, par ces variables quantiques séparées. Cette caractérisation est la donnée d'équations de Baxter locales. Une condition de compatibilité de ces équations de Baxter locales permet alors une caractérisation du spectre de l'opérateur de transfert, et donc du Hamiltonien du modèle.

Dans la perspective de l'obtention des facteurs de forme des opérateurs locaux du modèle dans le cadre de la méthode de la diffusion inverse quantique, la caractérisation du spectre précède la caractérisation des états propres du Hamiltonien et la résolution du problème inverse. Le chapitre suivant est consacré à la résolution de ces problèmes dans le cadre du modèle de sine-Gordon.

Chapitre 3

Application au modèle de sine-Gordon

La section précédente a fourni un aperçu de la façon dont la méthode de séparation des variables de Sklyanin se base sur le cadre de la méthode de la diffusion inverse quantique, permettant ainsi d'obtenir une caractérisation du spectre du modèle. Dans la représentation des variables séparées en question, $B(\lambda)$ s'écrit comme un opérateur diagonal, alors que $A(\lambda)$ et $D(\lambda)$ sont des sommes d'opérateurs de translation. Les équations permettant de caractériser le spectre de l'opérateur de transfert, c'est-à-dire l'opérateur $A(\lambda) + D(\lambda)$, peuvent, une fois écrites dans la représentation des variables séparées, se factoriser en un ensemble d'équations elles mêmes séparées et donc solubles. Ces équations, chacune ne faisant intervenir qu'une seule variable séparée, sont des équations de Baxter.

Dans la perspective de déterminer les facteurs de forme des champs locaux, la détermination des éléments propres de l'opérateur de transfert ne suffit cependant pas. Il faut également exprimer les vecteurs propres de cet opérateur en termes d'une base associée aux variables séparées et calculer leur produit scalaire. De plus, initialement, seuls les éléments de l'algèbre de Yang-Baxter A, B, C et D peuvent s'exprimer en termes des variables séparées. Pour calculer les facteurs de forme des opérateurs de champs locaux, il est de plus nécessaire de pouvoir exprimer ceux-ci en termes de ces générateurs de l'algèbre de Yang-Baxter, et donc des variables séparées, procédure qui par analogie avec le cas classique porte le nom de *résolution du problème inverse quantique*. Cette procédure va être dans un premier temps appliqué au modèle de sine-Gordon, et plus particulièrement à une version discrétisée de ce modèle, tout d'abord en rappelant les résultats issus de [157, 154] puis en présentant les résultats de l'article [77].

3.1 Position du problème

Le modèle de sine-Gordon est l'un des modèles les plus étudiés des systèmes intégrables. Le cas classique peut être résolu par la méthode de la diffusion inverse classique. Il existe également plusieurs résultats aidant à comprendre le cas quantique. En volume fini, l'approche utilisée par Destri et de Vega [61] implique une « fermionisation »du modèle de sine-Gordon vers le modèle de Thirring massif. Une fois cette opération effectuée, la résolution peut se faire par ansatz de Bethe algébrique. Toutefois, il n'a pas encore été montré que cette approche, limitée au cas du volume fini, caractérise tous les états du spectre de sine-Gordon. De plus, l'ansatz de Bethe algébrique utilisée nécessite une démonstration séparée de la complétude des solutions. En volume infini, les matrices-S de diffusion ont été décrites [217, 218, 219], ce qui permet de caractériser complètement la dynamique des particules de ce modèle. De plus, la structure du problème fournit un ensemble d'équations pour les facteurs de forme [111, 46, 185, 186, 189], équations régies par les matrices-S. La donnée de ces matrices-S permet donc d'obtenir les équations caractérisant l'ensemble des facteurs de forme locaux [187, 188, 167, 55] ; le lien précis entre les facteurs de forme et les opérateurs locaux n'est hélas pas accessible en toute généralité dans ce cadre, ce qui a motivé notre approche.

3.1.1 Présentation du modèle, matrice de Lax

Dans le cas classique, le modèle est une théorie des champs en dimension 1 + 1 décrite par le Hamiltonien

$$H_{sG} \equiv \int_0^R (\partial_x \phi)^2 + \Pi^2 + 8\pi\mu \cos(2\beta\phi) \tag{3.1}$$

avec le champ ϕ satisfaisant les conditions périodiques $\phi(x+R,t) = \phi(x,t)$ et le crochet de Poisson $\{\Pi(x,t), \phi(y,t)\} = 2\pi\delta(x-y)$. L'approche du cas quantique se fera ici en utilisant la paramétrisation présentée dans [67, 93]. Dans cette approche, les champs ϕ et Π sont discrétisés et quantifiés par la définition de $2N$ opérateurs ϕ_n et Π_m, $(n,m) \in [\![1,N]\!]^2$, satisfaisant

$$[\phi_n, \Pi_m] = 2\pi i \delta_{n,m} \tag{3.2}$$

et leurs exponentielles

$$\mathrm{v}_n \equiv e^{-i\beta\phi_n} \text{ et } \mathrm{u}_n \equiv e^{i\beta\Pi_n/2} \tag{3.3}$$

Ces exponentielles satisfont les relations de commutation

$$\mathrm{u}_n \mathrm{v}_m = q^{\delta_{n,m}} \mathrm{v}_m \mathrm{u}_n \text{ avec } q \equiv e^{-i\pi\beta^2} \tag{3.4}$$

Notons que cette paramétrisation génère un ensemble de N algèbres de Weyl $\mathcal{W}_n$. En ces termes, la matrice de Lax associée au modèle de sine-Gordon s'écrit

$$L_n(\lambda) \equiv \kappa_n \begin{pmatrix} \mathrm{u}_n(q^{-1/2}\kappa_n \mathrm{v}_n + q^{1/2}\kappa_n^{-1}\mathrm{v}_n^{-1}) & (\lambda_n \mathrm{v}_n - \lambda_n^{-1}\mathrm{v}_n^{-1})/i \\ (\lambda_n \mathrm{v}_n^{-1} - \lambda_n^{-1}\mathrm{v}_n)/i & \mathrm{u}_n^{-1}(q^{1/2}\kappa_n^{-1}\mathrm{v}_n + q^{-1/2}\kappa_n \mathrm{v}_n^{-1}) \end{pmatrix} \tag{3.5}$$

avec $\lambda_n \equiv \lambda/\xi_n$ et κ_n et ξ_n $2N$ constantes complexes, paramètres du modèle. En effet, la matrice de transfert (c'est-à-dire la trace dans l'espace auxiliaire du produit de N matrices de Lax) permet d'exprimer un certain opérateur H_N qui, dans la limite $N \to \infty$ et avec les bonnes valeurs pour les paramètres κ et ξ, permet de retrouver le Hamiltonien du modèle de sine-Gordon. C'est par ce biais qu'étudier cette version discrétisée (qui a son intérêt propre) aide à la compréhension de la théorie continue.

3.1.2 Le spectre du modèle de sine-Gordon dans le cadre de la séparation des variables

Les résultats brièvement rappelés ici sont issus de [157, 154]. Dans la section suivante, ils seront adaptés, démontrés et commentés dans le cas très similaire du modèle de Potts chiral.

Pour simplifier le propos, nous nous limiterons ici au cas d'une chaîne de longueur impaire. Prendre cette longueur paire ne fait qu'imposer quelques termes supplémentaires, sans changer fondamentalement la méthode. Ces termes apparaissant aussi dans le cadre de l'étude du modèle τ_2, ils sont ici laissés de côté et seront traités dans la section suivante.

Relation de Yang-Baxter et cyclicité Le schéma de résolution global étant similaire à celui utilisé pour l'ansatz de Bethe algébrique, la matrice de Lax est construite de façon à satisfaire la relation de Yang-Baxter

$$R(\lambda,\mu)(L_n(\lambda)\otimes\mathbb{1})(\mathbb{1}\otimes L_n(\mu) = (\mathbb{1}\otimes L_n(\mu))(L_n(\lambda)\otimes\mathbb{1})R(\lambda,\mu) \tag{3.6}$$

avec $R(\lambda,\mu)$ la matrice 6-vertex définie sur le produit tensoriel de deux espaces de dimension deux par

$$R(\lambda,\mu) = \begin{pmatrix} q\lambda\mu^{-1}-q^{-1}\lambda^{-1}\mu & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda\mu^{-1}-\lambda^{-1}\mu & q-q^{-1} & 0 \\ 0 & q-q^{-1} & \lambda\mu^{-1}-\lambda^{-1}\mu & 0 \\ 0 & 0 & 0 & q\lambda\mu^{-1}-q^{-1}\lambda^{-1}\mu \end{pmatrix} \tag{3.7}$$

La matrice de monodromie

$$T(\lambda) = L_N(\lambda)\cdot L_{N-1}(\lambda)\ldots L_1(\lambda)\cdot L_1(\lambda) = \begin{pmatrix} A(\lambda) & B(\lambda) \\ C(\lambda) & D(\lambda) \end{pmatrix} \tag{3.8}$$

est une matrice 2×2 dont chaque élément est un opérateur défini sur le produit tensoriel $\bigotimes \mathcal{W}_n$. Ces opérateurs $A(\lambda)$, $B(\lambda)$, $C(\lambda)$ et $D(\lambda)$ définissent l'algèbre de Yang-Baxter. Un résultat classique de la méthode de la diffusion inverse quantique est que $T(\lambda)$ satisfait également l'équation de Yang-Baxter

$$R(\lambda,\mu)(T(\lambda)\otimes\mathbb{1})(\mathbb{1}\otimes T(\mu) = (\mathbb{1}\otimes T(\mu))(T(\lambda)\otimes\mathbb{1})R(\lambda,\mu) \tag{3.9}$$

Les conséquences principales de cette équation sont que les opérateurs $B(\lambda)$ et $B(\mu)$ commutent pour tous nombres complexes λ et μ, et que la famille d'opérateur à un paramètre $\{A(\lambda)+D(\lambda)\}$ est une famille dont tous les éléments commutent entre eux. L'opérateur $\mathcal{T}(\lambda) \equiv A(\lambda)+D(\lambda)$ est appelé l'opérateur de transfert. Enfin, il est possible de définir le déterminant quantique de la matrice de monodromie, qui est un élément central de l'algèbre de Yang-Baxter. Cet élément est donné par

$$\det_q T(\lambda) \equiv A(\lambda)D(q^{-1}\lambda) - B(\lambda)C(q^{-1}\lambda) \tag{3.10}$$

Dans la suite du propos, nous allons supposer que le nombre β^2 est rationnel, avec

$$\beta^2 = \frac{p'}{p} \text{ avec } p \text{ impair, } p' \text{ pair et } p \wedge p' = 1 \tag{3.11}$$

Ces conditions imposent la cyclicité $q^p = 1$. En particulier, les puissances u_n^p et v_n^p sont centrales. Il est alors possible de définir une représentation cyclique à droite et une représentation cyclique à gauche pour chaque algèbre de Weyl, chacune de dimension p. Plus précisément, soit une famille de $2N$ nombres complexes u_n et v_n, $n \in [\![1, N]\!]$, tels que $\forall n$, $\mathrm{u}_n^p = u_n^p \mathbb{1}$ et $\mathrm{v}_n^p = v_n^p \mathbb{1}$. La représentation à droite de l'algèbre $\mathcal{W}_n$ est définie par p états $|k\rangle_n$, $k \in [\![0, p-1]\!]$ et les actions

$$\begin{aligned} \mathrm{v}_n|k\rangle_n &\equiv v_n q^k |k\rangle_n \qquad (3.12)\\ \mathrm{u}_n|k\rangle_n &\equiv u_n|k-1\rangle_n \qquad (3.13) \end{aligned}$$

avec la condition de cyclicité $|k+p\rangle_n = |k\rangle_n, \forall k$.
Pour définir la représentation à gauche de l'algèbre $\mathcal{W}_n$, dans le cas où les opérateurs u_n et v_n sont unitaires et où les états à gauche sont les duaux des états à droite, c'est-à-dire que ${}_n\langle k|k'\rangle_n = \delta_{k,k'}, \forall (k,k') \in [\![0, p-1]\!]^2$, on obtient alors les actions à gauche

$$\begin{aligned} {}_n\langle k|\mathrm{v}_n &\equiv v_n q^k {}_n\langle k| \qquad (3.14)\\ {}_n\langle k|\mathrm{u}_n &\equiv u_n {}_n\langle k+1| \qquad (3.15) \end{aligned}$$

Hermiticité et valeurs moyennes Les éléments de l'algèbre de Yang-Baxter satisfont, sous certaines contraitnes, des relations d'hermiticité. En fait, si les familles de paramètres κ_n et ξ_n, $n \in [\![1, N]\!]$, sont tels que $\forall n, \kappa_n^2 \in \mathbb{R}$ et $\forall n, \xi_n^2 \in \mathbb{R}$ et qu'il existe un nombre $\epsilon \in \{1, -1\}$ tel que

$$\forall n, -\frac{\kappa_n \xi_n}{\kappa_n^* \xi_n^*} = \epsilon \tag{3.16}$$

alors on a les relations d'hermiticité

$$\begin{pmatrix} A^\dagger(\lambda) & B^\dagger(\lambda) \\ C^\dagger(\lambda) & D^\dagger(\lambda) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} D(\lambda^*) & C(\epsilon\lambda^*) \\ B(\epsilon\lambda^*) & A(\lambda^*) \end{pmatrix} \tag{3.17}$$

Ces relations se traduisent en particulier par le fait que $\mathcal{T}(\lambda)$ est autoadjoint si λ est un nombre réel.
Les valeurs moyennes d'un opérateur O sont définies par

$$\mathcal{O}(\lambda) = \prod_{k=0}^{p-1} O(q^k\lambda) \tag{3.18}$$

Dans le cas des éléments de la matrice de monodromie, ces valeurs moyennes $\mathcal{O}(\lambda)$ sont des polynômes en λ^p. De plus, nous avons la proposition suivante :

Proposition 3.1. *Les valeurs moyennes des générateurs de l'algèbre de Yang-Baxter sont des éléments centraux de cette algèbre, et satisfont les relations d'hermiticité*

$$(\mathcal{A}(\lambda))^* = \mathcal{D}(\lambda^*) \text{ et } (\mathcal{B}(\lambda))^* = \epsilon\mathcal{C}(\lambda^*) \tag{3.19}$$

Soit

$$\mathcal{L}_n(\lambda) \equiv \begin{pmatrix} q^{p/2}u_n^p(\kappa_n^{2p}v_n^p - v_n^{-p}) & \kappa_n^p(\lambda^p\xi_n^{-p}v_n^p - \lambda^{-p}\xi_n^p v_n^{-p}) \\ \kappa_n^p(\lambda^p\xi_n^{-p}v_n^{-p} - \lambda^{-p}\xi_n^p v_n^p) & q^{p/2}u_n^{-p}(\kappa_n^{2p}v_n^{-p} - v_n^p) \end{pmatrix} \tag{3.20}$$

la matrice constituée des valeurs moyennes des éléments de la matrice de Lax au site n*. On a alors*

$$\mathcal{L}_N(\lambda)\cdot\mathcal{L}_{N-1}(\lambda)\ldots\mathcal{L}_2(\lambda)\cdot\mathcal{L}_1(\lambda) = \begin{pmatrix} \mathcal{A}(\lambda) & \mathcal{B}(\lambda) \\ \mathcal{C}(\lambda) & \mathcal{D}(\lambda) \end{pmatrix} \tag{3.21}$$

En particulier, dans le cas où $\forall n, u_n = v_n = 1$,

$$\mathcal{A}(\lambda) = \mathcal{D}(\lambda) \text{ et } \mathcal{B}(\lambda) = \mathcal{C}(\lambda) \tag{3.22}$$

Dans ce dernier cas, les puissances $2p$ des zéros de $B(\lambda)$ sont soit réelles, soit conjuguées deux à deux.

Représentation par séparation des variables Il est possible de définir une représentation par séparation des variables pour les éléments de la matrice de monodromie. Dans cette représentation, $B(\lambda)$ est un élément diagonal, et il est possible de montrer que son spectre est simple pour des valeurs génériques des paramètres.
Il existe des nombres complexes Z_a, $a \in [\![1, N]\!]$, déterminés par la proposition précédente, tels que

$$\mathcal{B}(\lambda) = \prod_{n=1}^{N} \frac{\kappa_n^p}{i^p} \prod_{a=1}^{N} (\lambda^p/Z_a - Z_a/\lambda^p) \tag{3.23}$$

Pour tout $a \in [\![1, N]\!]$, soit $\eta_a^{(0)}$ une racine p-ième fixée de Z_a. Ces nombres sont fixés pour que la famille $\eta_a^{(0)}$ soit composée de nombre réels ou conjugués deux à deux. Notons $\eta_a^{(h)} \equiv q^h\eta_a^{(0)}$. Alors pour toute famille h_a de N entiers, le nombre

$$b_{\boldsymbol{h}}(\lambda) \equiv \prod_{n=1}^{N} \frac{\kappa_n}{i} \prod_{a=1}^{N} \left(\lambda/\eta_a^{(h_a)} - \eta_a^{(h_a)}/\lambda\right) \tag{3.24}$$

est une valeur propre de $B(\lambda)$, avec la notation $\boldsymbol{h} \equiv (h_1, \ldots, h_N) \in \mathbb{Z}^N$. Notons $\langle\boldsymbol{h}|$ son vecteur propre à gauche et $|\boldsymbol{h}\rangle$ son vecteur propre à droite. La commutativité des éléments de la famille $B(\lambda)$ et la simplicité de son spectre indiquent que ces états ne dépendent pas de λ.
Les actions à gauche des opérateurs $A(\lambda)$ et $D(\lambda)$ sont issues des équations de Yang-Baxter,

$$\langle\boldsymbol{k}|A(\lambda) = \sum_{a=1}^{N}\prod_{b\neq a} \frac{\lambda/\eta_b^{(k_b)} - \eta_b^{(k_b)}/\lambda}{\eta_a^{(k_a)}/\eta_b^{(k_b)} - \eta_b^{(k_b)}/\eta_a^{(k_a)}} a(\eta_a^{(k_a)})\langle\boldsymbol{k} - \delta_a| \tag{3.25}$$

$$\langle\boldsymbol{k}|D(\lambda) = \sum_{a=1}^{N}\prod_{b\neq a} \frac{\lambda/\eta_b^{(k_b)} - \eta_b^{(k_b)}/\lambda}{\eta_a^{(k_a)}/\eta_b^{(k_b)} - \eta_b^{(k_b)}/\eta_a^{(k_a)}} d(\eta_a^{(k_a)})\langle\boldsymbol{k} + \delta_a| \tag{3.26}$$

avec la notation $\boldsymbol{k} \pm \delta_a \equiv (k_1, \dots, k_a \pm 1, \dots, k_N)$ et les coefficients $a(\lambda)$ et $d(\lambda)$ fixés[1] par

$$a(\lambda) \equiv (-i)^N \prod_{n=1}^{N} \frac{\kappa_n}{\lambda_n} (1 + iq^{-1/2}\lambda_n \kappa_n)(1 + iq^{-1/2}\lambda_n \kappa_n^{-1}) \text{ et } d(\lambda) = q^N a(-q\lambda) \tag{3.27}$$

Les actions à droite de ces opérateurs sont très similaires

$$A(\lambda)|\boldsymbol{k}\rangle = \sum_{a=1}^{N} |\boldsymbol{k} + \delta_a\rangle \prod_{b \neq a} \frac{\lambda/\eta_b^{(k_b)} - \eta_b^{(k_b)}/\lambda}{\eta_a^{(k_a)}/\eta_b^{(k_b)} - \eta_b^{(k_b)}/\eta_a^{(k_a)}} \bar{a}(\eta_a^{(k_a)}) \tag{3.28}$$

$$D(\lambda)|\boldsymbol{k}\rangle = \sum_{a=1}^{N} |\boldsymbol{k} - \delta_a\rangle \prod_{b \neq a} \frac{\lambda/\eta_b^{(k_b)} - \eta_b^{(k_b)}/\lambda}{\eta_a^{(k_a)}/\eta_b^{(k_b)} - \eta_b^{(k_b)}/\eta_a^{(k_a)}} \bar{d}(\eta_a^{(k_a)}) \tag{3.29}$$

avec les coefficients $\bar{a}(\lambda)$ et $\bar{d}(\lambda)$ reliés par

$$\bar{a}(q^{-1}\lambda)\bar{d}(\lambda) = a(\lambda)d(q^{-1}\lambda) = \det_q T(\lambda) \tag{3.30}$$

Caractérisation du spectre Soit $|t\rangle$ un vecteur propre à droite de l'opérateur de transfert, de vecteur propre $t(\lambda)$, et $\Psi_t(\boldsymbol{k}) \equiv \langle \boldsymbol{k}|t\rangle$ son produit scalaire avec les vecteurs propres à gauche de $B(\lambda)$. Réécrire l'équation aux valeurs propres $\mathcal{T}(\lambda)|t\rangle = t(\lambda)|t\rangle$ dans la représentation par séparation des variables à gauche montre qu'on a le système de pseudo-relations de Baxter

$$t(\eta_a^{(h_a)})\Psi_t(\boldsymbol{k}) = a(\eta_a^{(h_a)})\Psi_t(\boldsymbol{k} - \delta_a) + d(\eta_a^{(h_a)})\Psi_t(\boldsymbol{k} + \delta_a) \tag{3.31}$$

pour tout $a \in [\![1, N]\!]$ et toute famille d'entiers $(k_1, \dots, k_N)$. Notons que ces équations sont séparées, c'est-à-dire que chacune ne fait intervenir qu'une seule variable η_a : c'est la raison pour laquelle on parle de représentation par séparation des variables. En gardant a constant et en faisant varier k_a, on obtient un système de p équations linéaires portant sur p inconnues ayant une solution non nulle, ce qui aboutit à l'annulation d'un déterminant. Il est possible de caractériser ainsi les éléments du spectre de l'opérateur de transfert.

Proposition 3.2. *Soit le déterminant*

$$D_t(\lambda) = \begin{vmatrix} t(\lambda) & -d(\lambda) & 0 & \dots & 0 & -a(\lambda) \\ -a(q\lambda) & t(q\lambda) & d(q\lambda) & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & -a(q^{p-2}\lambda) & t(q^{p-2}\lambda) & -d(q^{p-2}\lambda) \\ -d(q^{p-1}\lambda) & 0 & \dots & 0 & -a(q^{p-1}\lambda) & t(q^{p-1}\lambda) \end{vmatrix} \tag{3.32}$$

alors l'ensemble des valeurs propres de l'opérateur de transfert correspond à l'ensemble des polynômes de Laurent P de degré $(N-1)/2$ en λ^2, c'est-à-dire de la forme $P(\lambda) = c_1\lambda^{N-1} + c_2\lambda^{N-3} + \dots + c_N\lambda^{-N+1}$, solution de l'équation fonctionnelle $D_P(\lambda) = 0$.

1. Une fois a fixé, d est donné par la relation $a(\lambda)d(q^{-1}\lambda) = \det_q T(\lambda)$.

Décomposition de l'identité et états propres de l'opérateur de transfert La donnée des actions dans les bases des variables séparées droite et gauche de l'opérateur $A(\lambda)$ permet d'obtenir des formules de récurrence pour le produit scalaire des états $\langle \boldsymbol{k}|$ et $|\boldsymbol{k}'\rangle$.

Proposition 3.3. *On a*

$$\langle \boldsymbol{k}|\boldsymbol{k}'\rangle = \delta_{\boldsymbol{k},\boldsymbol{k}'} C_N \frac{\prod_{a=1}^{N}\prod_{i=1}^{k_a} a(\eta_a^{(i)})/\bar{a}(\eta_a^{(i-1)})}{\prod_{b<a}\left(\eta_a^{(k_a)}/\eta_b^{(k_b)} - \eta_b^{(k_b)}/\eta_a^{(k_a)}\right)} \tag{3.33}$$

avec C_N une constante.

Ce résultat permet de faire la décomposition en projecteurs suivante :

$$\mathbb{1} = \sum_{\boldsymbol{h}\in[\![1,p]\!]^N} \frac{|\boldsymbol{h}\rangle\langle \boldsymbol{h}|}{\langle \boldsymbol{h}|\boldsymbol{h}\rangle} \tag{3.34}$$

$$= \sum_{\boldsymbol{h}\in[\![1,p]\!]^N} \prod_{b<a}\left((\eta_a^{(h_a)})^2 - (\eta_b^{(h_b)})^2\right) \frac{|\boldsymbol{h}\rangle\langle \boldsymbol{h}|}{\prod_{a=1}^{N}\omega_a(\eta_a^{(h_a)})} \tag{3.35}$$

avec

$$\omega_a(\eta_a^{(h_a)}) \equiv \left(\eta_a^{(h_a)}\right)^{N-1} \prod_{i=1}^{h_a} a(\eta_a^{(i)})/\bar{a}(\eta_a^{(i-1)}) \tag{3.36}$$

En particulier, ce résultat permet d'exprimer les composantes des états propres de l'opérateur de transfert dans la base propre des $B(\lambda)$

Proposition 3.4. *Dans la base des variables séparées, les états propres de l'opérateur de transfert s'écrivent*

$$\langle t| = \sum_{\boldsymbol{h}\in[\![1,p]\!]^N} \prod_{a=1}^{N} \frac{\bar{Q}_t(\eta_a^{(h_a)})}{\omega_a(\eta_a^{(h_a)})} \prod_{b<a}\left((\eta_a^{(h_a)})^2 - (\eta_b^{(h_b)})^2\right) \langle \boldsymbol{h}| \tag{3.37}$$

avec $\bar{Q}_t(\lambda)$ solution de l'équation de Baxter

$$t(\lambda)\bar{Q}_t(\lambda) = \bar{a}(\lambda)\bar{Q}_t(q\lambda) + \bar{d}(\lambda)\bar{Q}_t(q^{-1}\lambda) \tag{3.38}$$

et

$$|t\rangle = \sum_{\boldsymbol{h}\in[\![1,p]\!]^N} \prod_{a=1}^{N} \frac{Q_t(\eta_a^{(h_a)})}{\omega_a(\eta_a^{(h_a)})} \prod_{b<a}\left((\eta_a^{(h_a)})^2 - (\eta_b^{(h_b)})^2\right) |\boldsymbol{h}\rangle \tag{3.39}$$

avec $Q_t(\lambda)$ solution de l'équation de Baxter

$$t(\lambda)Q_t(\lambda) = a(\lambda)Q_t(q^{-1}\lambda) + d(\lambda)Q_t(q\lambda) \tag{3.40}$$

3.2 Problème inverse

3.2.1 Factorisations de la matrice de Lax

La méthode utilisée ici est similaire à celle de [162] et utilise la factorisation de la matrice de Lax en produit de projecteurs.

Proposition 3.5. *Soit une matrice formée d'opérateurs sur un espace quelconque,* $T(\lambda) = \begin{pmatrix} A(\lambda) & B(\lambda) \\ C(\lambda) & D(\lambda) \end{pmatrix}$*, satisfaisant les relations de Yang-Baxter.*

1. *Si* $\det_q T(\lambda) = 0$ *et* $B(\lambda)$, $B(q^{-1}\lambda)$ *sont inversibles, alors il existe quatre opérateurs* P_1, P_2, Q_1 *et* Q_2 *non uniques tels que*

$$T(\lambda) = \begin{pmatrix} P_1 \\ P_2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} Q_1 & Q_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P_1 Q_1 & P_1 Q_2 \\ P_2 Q_1 & P_2 Q_2 \end{pmatrix} \tag{3.41}$$

   Par exemple, on peut prendre $P_1 = \mathbb{1}$, $P_2 = D(\lambda)B(\lambda)^{-1}$, $Q_1 = A(\lambda)$ *et* $Q_2 = B(\lambda)$.

2. *Réciproquement, s'il existe quatre opérateurs* P_1, P_2, Q_1 *et* Q_2 *tels que*

$$T(\lambda) = \begin{pmatrix} P_1 \\ P_2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} Q_1 & Q_2 \end{pmatrix} \tag{3.42}$$

   et $B(\lambda)$, $B(q^{-1}\lambda)$ *sont inversibles, alors* $\det_q T(\lambda) = 0$.

Démonstration. 1. On définit $P_1 = \mathbb{1}$, $P_2 = D(\lambda)B(\lambda)^{-1}$, $Q_1 = A(\lambda)$ et $Q_2 = B(\lambda)$, ce qui mène trivialement à trois des relations $T_{i,j} = P_i Q_j$. L'annulation du déterminant quantique se traduit par $D(\lambda)A(q^{-1}\lambda) = C(\lambda)B(q^{-1}\lambda)$. Les relations de Yang-Baxter menant à $B(\lambda)A(q^{-1}\lambda) = A(\lambda)B(q^{-1}\lambda)$, on a $P_2 Q_1 = D(\lambda)B(\lambda)^{-1}A(\lambda) = D(\lambda)A(q^{-1}\lambda)B(q^{-1}\lambda)^{-1} = C(\lambda)$, ce qui prouve la quatrième relation $T_{i,j} = P_i Q_j$.

2. $B(\lambda)$ étant inversible, P_1 et Q_2 aussi, on a donc $C(\lambda) = P_2 Q_2 (P_1 Q_2)^{-1} P_1 Q_1 = D(\lambda)B(\lambda)^{-1}A(\lambda) = D(\lambda)A(q^{-1}\lambda)B(q^{-1}\lambda)^{-1}$, d'où $D(\lambda)A(q^{-1}\lambda) = C(\lambda)B(q^{-1}\lambda)$ et $\det_q T(\lambda) = 0$

□

Remarque 3.1. La proposition est également valide si $X(\lambda)$ et $X(q^{-1}\lambda)$ sont inversibles, avec $X \in \{A, C, D\}$.

Remarque 3.2. Les opérateurs P_i et Q_j ne sont pas uniques, en effet, soit X un opérateur inversible, si $T_{i,j} = P_i Q_j$, alors $T_{i,j} = \tilde{P}_i \tilde{Q}_j$ avec $\tilde{P}_i = P_i X$ et $\tilde{Q}_j = X^{-1} Q_j$. En fait, cette jauge permet de relier n'importe quelle décomposition en produit de projecteurs à celle évoquée dans la proposition.

Cette proposition permet de factoriser la matrice de Lax aux points où son déterminant quantique s'annule. Nous avons les quatre décompositions

$$\begin{aligned}
L_n(iq^{1/2}\kappa_n\xi_n) &= \kappa_n \begin{pmatrix} \mathrm{u}_n^{1/2}\left(\kappa_n \mathrm{v}_n + \kappa_n^{-1}\mathrm{v}_n^{-1}\right) \\ \mathrm{u}_n^{-1/2}\left(\kappa_n^{-1}\mathrm{v}_n + \kappa_n \mathrm{v}_n^{-1}\right)\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \mathrm{u}_n^{1/2} & \mathrm{u}_n^{-1/2}\end{pmatrix} \\
L_n(-iq^{1/2}\kappa_n\xi_n) &= \kappa_n \begin{pmatrix} \mathrm{u}_n^{1/2}\left(\kappa_n \mathrm{v}_n + \kappa_n^{-1}\mathrm{v}_n^{-1}\right) \\ -\mathrm{u}_n^{-1/2}\left(\kappa_n^{-1}\mathrm{v}_n + \kappa_n \mathrm{v}_n^{-1}\right)\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \mathrm{u}_n^{1/2} & -\mathrm{u}_n^{-1/2}\end{pmatrix} \\
L_n(iq^{1/2}\kappa_n^{-1}\xi_n) &= \kappa_n \begin{pmatrix} \mathrm{u}_n^{1/2} \\ \mathrm{u}_n^{-1/2}\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \left(\kappa_n \mathrm{v}_n + \kappa_n^{-1}\mathrm{v}_n^{-1}\right)\mathrm{u}_n^{1/2} & \left(\kappa_n^{-1}\mathrm{v}_n + \kappa_n \mathrm{v}_n^{-1}\right)\mathrm{u}_n^{-1/2}\end{pmatrix} \\
L_n(-iq^{1/2}\kappa_n^{-1}\xi_n) &= \kappa_n \begin{pmatrix} \mathrm{u}_n^{1/2} \\ -\mathrm{u}_n^{-1/2}\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \left(\kappa_n \mathrm{v}_n + \kappa_n^{-1}\mathrm{v}_n^{-1}\right)\mathrm{u}_n^{1/2} & -\left(\kappa_n^{-1}\mathrm{v}_n + \kappa_n \mathrm{v}_n^{-1}\right)\mathrm{u}_n^{-1/2}\end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Cette décomposition permet de reconstruire certaines combinaisons d'opérateurs locaux. Cette reconstruction est le premier pas vers la résolution du problème inverse, ces combinaisons seront retravaillées par la suite pour obtenir les opérateurs locaux au site 1, puis en tout site n du réseau.

Ces combinaisons découlent de l'observation suivante : si une des matrices de Lax peut se factoriser, toute la matrice de monodromie peut l'être. En effet, si la matrice L_n se décompose en un produit d'un vecteur colonne et d'un vecteur ligne, les matrices des sites $n+1$ à N agiront à droite sur le vecteur colonne pour engendrer un autre vecteur colonne, composé d'opérateurs agissant sur les sites n à N, et celles des sites 1 à $n-1$ agiront à gauche sur le vecteur ligne pour engendrer un autre vecteur ligne, composé d'opérateurs agissant sur les sites 1 à n ; ces transformations permettent donc de factoriser toute la matrice de monodromie. Plus explicitement, si

$$L_n(\lambda) = \begin{pmatrix} P_{n,1}(\lambda) \\ P_{n,2}(\lambda)\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} Q_{n,1}(\lambda) & Q_{n,2}(\lambda)\end{pmatrix} \tag{3.43}$$

on a [2]

$$T(\lambda) = \begin{pmatrix} \tilde{P}_{n,1}(\lambda) \\ \tilde{P}_{n,2}(\lambda)\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \tilde{Q}_{n,1}(\lambda) & \tilde{Q}_{n,2}(\lambda)\end{pmatrix} \tag{3.44}$$

avec les relations

$$\begin{pmatrix} \tilde{P}_{n,1}(\lambda) \\ \tilde{P}_{n,2}(\lambda)\end{pmatrix} = L_N(\lambda)\dots L_{n+1}(\lambda) \cdot \begin{pmatrix} P_{n,1}(\lambda) \\ P_{n,2}(\lambda)\end{pmatrix} \tag{3.45}$$

$$\begin{pmatrix} \tilde{Q}_{n,1}(\lambda) & \tilde{Q}_{n,2}(\lambda)\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Q_{n,1}(\lambda) & Q_{n,2}(\lambda)\end{pmatrix} \cdot L_{n-1}(\lambda)\dots L_1(\lambda) \tag{3.46}$$

Soit λ un zéro du déterminant quantique de L_n. En général, les opérateurs $\tilde{P}_{n,i}(\lambda)$ et $\tilde{Q}_{n,j}(\lambda)$ sont des opérateurs hautement non locaux, faisant intervenir des sommes de produits d'opérateurs agissant sur les sites de 1 à n pour $\tilde{Q}$ et de n à N pour $\tilde{P}$. Cependant, dans le cas $n=1$, on a l'égalité $\tilde{Q}_{n,j}(\lambda) = Q_{n,j}(\lambda)$, et donc une partie des facteurs intervenant dans la décomposition de $T(\lambda)$, ceux intervenant dans le

2. Ici, les fonctions $\lambda \mapsto P_{n,i}(\lambda)$, $\lambda \mapsto Q_{n,j}(\lambda)$, $\lambda \mapsto \tilde{P}_{n,i}(\lambda)$ et $\lambda \mapsto \tilde{Q}_{n,j}(\lambda)$ ne sont définies qu'en quatre points, ceux pour lesquels le déterminant quantique de L_n s'annule

vecteur ligne, est locale et agit sur le site 1. De même, dans le cas $n = N$, le vecteur colonne de la décomposition de $T(\lambda)$ est constituée d'opérateurs locaux agissant sur le site N.
Supposons ici que λ soit un zéro du déterminant quantique de L_1. Pour reconstruire les combinaisons d'opérateurs locaux annoncées, il faut supposer qu'un des générateurs de l'algèbre de Yang-Baxter est inversible. Comme nous nous sommes placés dans la représentation SdV dans laquelle $B(\lambda)$ est diagonal, nous allons supposer qu'en les points où cette factorisation a lieu, les valeurs propres de $B(\lambda)$ sont non nulles, et donc $B(\lambda)$ est inversible.
Dans ce cas, nous avons $B(\lambda) = \tilde{P}_{1,1}(\lambda)\tilde{Q}_{1,2}(\lambda)$ qui est un opérateur inversible, et donc $\tilde{P}_{1,1}(\lambda)$ et $\tilde{Q}_{1,2}(\lambda)$ aussi, avec $B(\lambda)^{-1} = \tilde{Q}_{1,2}(\lambda)^{-1}\tilde{P}_{1,1}(\lambda)^{-1}$. Le calcul de $B(\lambda)^{-1}A(\lambda)$ donne alors

$$B(\lambda)^{-1}A(\lambda) = \tilde{Q}_{1,2}(\lambda)^{-1}\tilde{Q}_{1,1}(\lambda) \tag{3.47}$$

Cet opérateur est un opérateur local, qui n'agit que sur le site 1 ; son expression en termes de u_1 et v_1 dépendra du zéro de $\det_q L_1$ étudié.

Proposition 3.6. *Si $B(\lambda)$ est inversible en $\lambda^{(1)}_{\epsilon,\epsilon'} \equiv \epsilon i q^{1/2}\kappa_1^{\epsilon'}\xi_1$, avec $(\epsilon,\epsilon') \in \{+1,-1\}^2$, il est possible de reconstruire des fonctions de u_1 et v_1 de la façon suivante :*

$$\begin{aligned}
B(\lambda^{(1)}_{\pm 1,+1})^{-1}A(\lambda^{(1)}_{\pm 1,+1}) &= \pm u_1 && (3.48)\\
B(\lambda^{(1)}_{\pm 1,-1})^{-1}A(\lambda^{(1)}_{\pm 1,-1}) &= \pm u_1^{1/2}\frac{\kappa_1 v_1 + \kappa_1^{-1}v_1^{-1}}{\kappa_1^{-1}v_1 + \kappa_1 v_1^{-1}}u_1^{1/2} && (3.49)
\end{aligned}$$

Remarque 3.3. Ce raisonnement peut également s'effectuer dans le cas où λ est un zéro du déterminant quantique de L_N, c'est-à-dire $\lambda = \lambda^{(N)}_{\epsilon,\epsilon'} \equiv \epsilon i q^{1/2}\kappa_N^{\epsilon'}\xi_N$, ce qui mène aux relations

$$\begin{aligned}
D(\lambda^{(N)}_{\pm,+1})B(\lambda^{(N)}_{\pm,+1})^{-1} &= \pm \mathrm{u}_N^{-1/2}\frac{\kappa_N^{-1}\mathrm{v}_N + \kappa_N \mathrm{v}_N^{-1}}{\kappa_N \mathrm{v}_N + \kappa_N^{-1}\mathrm{v}_N^{-1}}\mathrm{u}_N^{-1/2} && (3.50)\\
D(\lambda^{(N)}_{\pm,-1})B(\lambda^{(N)}_{\pm,-1})^{-1} &= \pm \mathrm{u}_N^{-1} && (3.51)
\end{aligned}$$

Remarque 3.4. Nous avons supposé ici que $B(\lambda)$ est inversible, mais des résultats similaires s'obtiennent également dans le cas où $A(\lambda)$, $C(\lambda)$ ou $D(\lambda)$ sont inversibles.

Dans la suite du propos, nous nous intéresserons au cas décrit dans la proposition 3.6, c'est-à-dire le cas où le paramètre spectral est un zéro du déterminant quantique de L_1, qui nous permet de reconstruire certaines fonctions des générateurs de l'algèbre de Weyl au site 1.
Il est possible, à partir de ces fonctions, de réexprimer exactement les générateurs de l'algèbre de Weyl au site 1 et leurs puissances en fonction des générateurs de l'algèbre de Yang-Baxter. Ces relations, détaillées dans la section suivante, constituent une partie importante de la résolution du problème inverse.

3.2.2 Reconstruction des opérateurs locaux

L'expression de u_1, v_1 et de leurs puissances en fonction des générateurs de l'algèbre de Yang-Baxter est possible à partir des résultats de la proposition 3.6. Tout d'abord, remarquons que les puissances de u_1 sont données trivialement par

$$\mathrm{u}_1^k = \left(B(\lambda_{1,1}^{(1)})^{-1}A(\lambda_{1,1}^{(1)})\right)^k = \prod_{i=0}^{k-1} B(q^{-i}\lambda_{1,1}^{(1)})^{-1} \prod_{i=0}^{k-1} A(q^{-i}\lambda_{1,1}^{(1)}) \tag{3.52}$$

la deuxième égalité étant donnée par la relation $B(\lambda)A(q^{-1}\lambda) = A(\lambda)B(q^{-1}\lambda)$, elle-même découlant des relations de Yang-Baxter. L'expression de u_1^{-1} est donnée par le cas particulier $k = p-1$, car $\mathrm{u}_1^p = \mathbb{1}$.

Remarque 3.5. La représentation SdV impose l'inversibilité de tous les opérateurs $B(q^{-i}\lambda)$ avec $i \in \mathbb{Z}$ pour peu que $B(\lambda)$ soit lui-même inversible. En effet, dans le cas où N est impair, la valeur propre à gauche de $B(\lambda)$ sur l'état propre $\langle k_1, \ldots, k_N|$ étant $\prod_{i=1}^N(\lambda/q^{k_i}\eta_i^{(0)} - q^{k_i}\eta_i^{(0)}/\lambda)$, l'inversibilité de $B(\lambda)$ se traduit donc par les inégalités $\lambda^p \neq \left(\eta_i^{(0)}\right)^p$ pour tout entier $i \in 1\ldots N$. Ces inégalités impliquent la non annulation, quel que soit l'entier n, des $\prod_{i=1}^N(q^n\lambda/q^{k_i}\eta_i^{(0)} - q^{k_i}\eta_i^{(0)}/q^n\lambda)$, qui sont les valeurs propres de $B(q^n\lambda)$ lorsque les k_i parcourent les entiers de 0 à $p-1$. Dans le cas où N est pair, le raisonnement est le même, d'où l'existence des opérateurs $B(q^{-i}\lambda_{1,1}^{(1)})^{-1}$.

L'expression des v_1^k, k entier, est plus compliquée à obtenir. Pour cela, observons tout d'abord que l'opérateur

$$B(\lambda_{1,-1})^{-1}A(\lambda_{1,-1}) = \mathrm{u}_1^{1/2}\frac{\kappa_1\mathrm{v}_1 + \kappa_1^{-1}\mathrm{v}_1^{-1}}{\kappa_1^{-1}\mathrm{v}_1 + \kappa_1\mathrm{v}_1^{-1}}\mathrm{u}_1^{1/2} \tag{3.53}$$

est inversible [3], et définissons les opérateurs

$$f_k \equiv \left(B(\lambda_{1,1}^{(1)})^{-1}A(\lambda_{1,1}^{(1)})\right)^k A(\lambda_{1,-1}^{(1)})^{-1}B(\lambda_{1,-1}^{(1)}) \left(B(\lambda_{1,1}^{(1)})^{-1}A(\lambda_{1,1}^{(1)})\right)^{p-k} \tag{3.54}$$

La relation constitutive de l'algèbre de Weyl, c'est-à-dire la relation de commutation $\mathrm{uv} = q\mathrm{vu}$, permet de simplifier l'expression de ces opérateurs :

$$f_k = \mathrm{u}_1^{-1/2}\frac{q^k\kappa_1^{-1}\mathrm{v}_1 + q^{-k}\kappa_1\mathrm{v}_1^{-1}}{q^k\kappa_1\mathrm{v}_1 + q^{-k}\kappa_1^{-1}\mathrm{v}_1^{-1}}\mathrm{u}_1^{-1/2} \tag{3.55}$$

L'égalité $\left(\sum_{i=1}^n(-1)^{i-1}(x\mathrm{v}_1)^{n+1-2i}\right)(x\mathrm{v}_1 + x^{-1}\mathrm{v}_1^{-1}) = x^n\mathrm{v}_1^n + x^{-n}\mathrm{v}_1^{-n}$ valable pour tout complexe x et tout entier positif impair n permet d'écrire

$$f_k = \mathrm{u}_1^{-1/2}\frac{1}{\kappa_1^p\mathrm{v}_1^p + \kappa_1^{-p}\mathrm{v}_1^{-p}}\left(\sum_{i=1}^{p-1}(-1)^i q^{-2ki}\mathrm{v}_1^{-2i}\kappa_1^{p-2i}\left(\kappa_1^{-2} - \kappa_1^2\right) + \left(\kappa_1^{p-2} + \kappa_1^{2-p}\right)\right)\mathrm{u}_1^{-1/2} \tag{3.56}$$

3. En fait, $\left(B(\lambda_{1,-1})^{-1}A(\lambda_{1,-1})\right)^p = 1$, donc l'inverse de $B(\lambda_{1,-1})^{-1}A(\lambda_{1,-1})$ est $\left(B(\lambda_{1,-1})^{-1}A(\lambda_{1,-1})\right)^{p-1}$.

Cette décomposition présente un grand intérêt : elle permet de passer d'une fonction rationnelle en v à une fonction polynomiale, l'opérateur v_1^p étant l'opérateur identité. Il est important de remarquer que cette décomposition dépend du fait que l'on ait choisi une représentation cyclique. Il est alors possible d'extraire les composantes de cette décomposition en faisant une transformée de Fourier discrète : soit un entier $m \in [\![1, p-1]\!]$, on a

$$\frac{1}{p}\sum_{k=1}^{p} q^{2mk} f_k = \frac{1}{\kappa_1^p + \kappa_1^{-p}} \mathrm{u}_1^{-1/2} (-1)^m \mathrm{v}_1^{-2m} \kappa_1^{p-2m} \left(\kappa_1^{-2} - \kappa_1^2\right) \mathrm{u}_1^{-1/2} \tag{3.57}$$

Remarque 3.6. Il existe une p-ième relation, celle correspondant à $m = 0$. Toutefois, elle ne fait pas intervenir de puissance de v_1 et ne sert donc pas pour la reconstruction. Toutefois, elle peut servir de vérification.

$$\frac{1}{p}\sum_{k=1}^{p} f_k = \frac{\kappa_1^{p-2} + \kappa_1^{2-p}}{\kappa_1^p + \kappa_1^{-p}} \mathrm{u}_1^{-1} \tag{3.58}$$

L'exposant $-2m$ associé à l'opérateur v_1 permet d'en calculer toutes les puissances, une fois rappelées la cyclicité $\mathrm{v}_1^p = \mathbb{1}$ avec p impair.

Théorème 3.1. *Les puissances des générateurs de l'algèbre de Weyl au site* 1 *sont reconstruites de la manière suivante :*
pour $n \in \mathbb{Z}$,

$$u_1^n = \left(B(\lambda_{1,1}^{(1)})^{-1} A(\lambda_{1,1}^{(1)})\right)^n \tag{3.59}$$

et, pour $n \in [\![1, p-1]\!]$,

$$\begin{aligned} v_1^n \quad &= \quad (-1)^{\Xi(n)+1} \frac{\kappa_1^p + \kappa_1^{-p}}{p q^{\Xi(n)} \kappa_1^{p-2\Xi(n)} (\kappa_1^2 - \kappa_1^{-2})} \\ &\times \quad \sum_{k=1}^{p} \left(q^{2\Xi(n)k} \left(B(\lambda_{1,1}^{(1)})^{-1} A(\lambda_{1,1}^{(1)})\right)^k A(\lambda_{1,-1}^{(1)})^{-1} B(\lambda_{1,-1}^{(1)}) \left(B(\lambda_{1,1}^{(1)})^{-1} A(\lambda_{1,1}^{(1)})\right)^{p-k+1} \right) \end{aligned} \tag{3.60}$$

avec la fonction $\Xi : n \in [\![1, p-1]\!] \mapsto \begin{cases} p - \frac{n}{2} \in [\![1, p-1]\!] & \textit{si } n \textit{ est pair} \\ \frac{p-n}{2} \in [\![1, p-1]\!] & \textit{si } n \textit{ est impair} \end{cases}$

Remarque 3.7. La reconstruction des puissances de v_1 appelle plusieurs commentaires.

- La restriction sur n vient du fait que le développement (3.56) fait intervenir des puissances de v_1 allant de 1 à $p-1$. La présence d'une puissance de κ_1, nombre a priori quelconque, dépendant de n empêche une extension par cyclicité.
- La fonction Ξ est définie pour être la fonction satisfaisant $n = -2\Xi(n) \pmod p$ et envoyant l'ensemble $[\![1, p-1]\!]$ sur lui-même.
- La présence au dénominateur de $\kappa_1^2 - \kappa_1^{-2}$ traduit le fait que, si $\kappa_1^2 = \kappa_1^{-2}$, on a $\kappa_1 = \pm\kappa_1^{-1}$, et donc les racines du déterminant quantique de L_1 sont confondues deux à deux. Les relations évoquées dans la proposition 3.6 ne produisent que $\pm\mathrm{u}_1$ et la reconstruction de v_1 est impossible.

– Chaque élément de la somme est un produit faisant intervenir exactement p fois l'opérateur A.
– Il est aussi possible d'exprimer les puissances de v_1 comme une combinaison linéaire des $\left(B(\lambda_{1,1}^{(1)})^{-1}A(\lambda_{1,1}^{(1)})\right)^{k-1} B(\lambda_{1,-1}^{(1)})^{-1}A(\lambda_{1,-1}^{(1)})\left(B(\lambda_{1,1}^{(1)})^{-1}A(\lambda_{1,1}^{(1)})\right)^{p-k}$. Bien que cela puisse sembler plus simple à exprimer dans la base SdV dans laquelle B est diagonal, il est possible de simplifier l'expression avec $A^{-1}B$, ce qui sera développé plus loin.

La propriété de factorisation permet de réexprimer les générateurs de l'algèbre de Weyl au site 1 en fonction des éléments de la matrice de monodromie, et donc de résoudre le problème inverse pour les opérateurs du site 1. Toutefois, les expressions fournies par le théorème 3.1 ne sont pas utilisables dans la base des variables séparées, du fait de leur grande complexité. Il est néanmoins possible de simplifier ces expressions.

3.2.3 Problème combinatoire général

Nous allons supposer ici, pour simplifier les formules, que N est impair. Le cas complémentaire est tout à fait similaire à la paramétrisation par SdV du modèle de Potts chiral, traité plus loin.
Remarquons tout d'abord que les formules précédentes ne font intervenir qu'un seul opérateur de l'algèbre de Yang-Baxter, $B(\lambda)^{-1}A(\lambda)$, pris en $\lambda = \lambda_{1,\pm1}^{(1)}$. L'action à gauche de cet opérateur sur un état propre $\langle k_1, \ldots, k_N|$ de $B(\lambda)$ est donnée par

$$B^{-1}A(\lambda) = \sum_{a=1}^{N}\prod_{b\neq a}\frac{1}{\boldsymbol{\eta}_a/\boldsymbol{\eta}_b - \boldsymbol{\eta}_b/\boldsymbol{\eta}_a}\frac{1}{\lambda/\boldsymbol{\eta}_a - \boldsymbol{\eta}_a/\lambda}a(\boldsymbol{\eta}_a)T_a^- \tag{3.61}$$

avec $\boldsymbol{\eta}_a$ l'opérateur coordonnée au site a et T_a^- l'opérateur de décalage au site a [4] :

$$\langle k_1, \ldots, k_N|\boldsymbol{\eta} \equiv \eta_a\langle k_1, \ldots, k_N| = q^{k_a}\eta_a^{(0)}\langle k_1, \ldots, k_N| \tag{3.62}$$

$$\langle k_1, \ldots, k_a, \ldots, k_N|T_a^- \equiv \langle k_1, \ldots, k_a - 1, \ldots, k_N| \tag{3.63}$$

Ils satisfont donc la relation de commutation

$$\boldsymbol{\eta}_a T_b^- = q^{\delta_{a,b}}T_b^-\boldsymbol{\eta}_a \tag{3.64}$$

Remarquons que l'expression de $B(\lambda)^{-1}A(\lambda)$ fait intervenir plusieurs fois des expressions de la forme $X - X^{-1}$, avec X ne dépendant que des opérateurs $\boldsymbol{\eta}_a$ et de nombres complexes. Pour simplifier la notation, dans la suite du propos, nous utiliserons la notation

$$\langle X\rangle = X - X^{-1} \tag{3.65}$$

lorsque X est un nombre ou s'écrit en termes de $\boldsymbol{\eta}_a$. Par exemple, cette notation donne

$$B^{-1}A(\lambda) = \sum_{a=1}^{N}\prod_{b\neq a}\frac{1}{\langle\boldsymbol{\eta}_a/\boldsymbol{\eta}_b\rangle}\frac{1}{\langle\lambda/\boldsymbol{\eta}_a\rangle}a(\boldsymbol{\eta}_a)T_a^- \tag{3.66}$$

4. Ces opérateurs ne sont définis ici que pour l'action à gauche dans la représentation par séparation des variables.

La suite du calcul se rapproche de la formule du multinôme de Newton. En effet, il s'agit de prendre des puissances de la somme (3.61). Toutefois, les termes de cette somme ne commutent pas, d'où un résultat plus compliqué. En utilisant le concept de q-entier et celui de q-multinôme, il est possible néanmoins de se ramener à une forme très proche de celle du multinôme classique.

Définition 3.1. Soit un nombre complexe q non nul. On définit les q-entiers comme les images de l'application $[\,\cdot\,]_q : \mathbb{Z} \to \mathbb{C}$ définie par

$$[n]_q \equiv \frac{q^n - q^{-n}}{q - q^{-1}} \tag{3.67}$$

La q-factorielle est la fonction [5]

$$\begin{aligned} [\,\cdot\,]! \quad : \quad & \mathbb{N} \to \mathbb{C} \\ & 0 \mapsto 1 \\ & n \mapsto [n]! \equiv [1][2]\dots[n] \end{aligned} \tag{3.68}$$

Enfin, le q-multinôme est une fonction similaire au mutinôme classique, qui associe à un entier positif n et à un ensemble de k entiers positifs α_i tels que $\sum_i \alpha_i = n$ le nombre complexe

$$\begin{bmatrix} n \\ \{\alpha_i\} \end{bmatrix} \equiv \frac{[n]!}{\prod_i [\alpha_i]!} \tag{3.69}$$

Remarque 3.8. Ces trois fonctions ont certaines propriétés intéressantes.

- Les entiers quantiques satisfont $[-n] = -[n]$. De plus, la définition peut être simplifiée en
$$[n] = \sum_{i=1}^{n} q^{n+1-2i} \tag{3.70}$$
- Dans la limite $q \to 1$, la remarque précédente montre que la singularité dans la définition des q-entiers est artificielle. En fait, dans cette limite, les trois fonctions définies précédemment tendent vers leurs équivalents classiques. Cette propriété peut être reliée au fait que l'algèbre de Weyl de générateurs a et b définie par $ab = qba$ est une algèbre commutative dans le cas $q = 1$, ce lien est l'objet du point suivant.
- Soit une algèbre de Weyl de générateurs a et b satisfaisant la relation de commutation $ab = qba$. Soit $x \equiv (b - b^{-1})a$, on peut démontrer par récurrence la relation
$$x^n = \prod_{i=0}^{n-1} (q^i b - q^{-i} b^{-1}) a^n = \sum_{i=0}^{n} \begin{bmatrix} n \\ i, n-i \end{bmatrix} (-1)^i q^{(n-2i)(n-1)/2} b^{n-2i} a^n \tag{3.71}$$

  Cette décomposition peut s'interpréter comme la quantification de la formule du binôme de Newton, et donc le q-binôme peut être vu comme la quantification du binôme classique.

5. Pour alléger les notations, l'indice q dans la notation des q-entiers ne sera plus mentionné.

– Dans la limite où q est une racine p-ième de l'unité, $q^p = 1$, on a $[p] = 0$. Ceci implique l'annulation de toutes les q-factorielles $[n]!$ avec $n \geq p$. En ce qui concerne le q-multinôme, le résultat est plus compliqué. Par exemple, $\begin{bmatrix} p \\ \{\alpha_i\} \end{bmatrix}$ vaut 1 s'il existe un m tel que $\alpha_m = p$ (et donc $\alpha_n = 0$ avec $n \neq m$) et 0 dans tous les autres cas.
– Le multinôme classique satisfait la relation de récurrence

$$\begin{pmatrix} m \\ \{\alpha_j\} \end{pmatrix} = \sum_{i=1}^{k} \begin{pmatrix} m-1 \\ \{\alpha_j - \delta_{i,j}\} \end{pmatrix} \tag{3.72}$$

où $\{\alpha_j\}$ est un ensemble de k entiers et $\{\alpha_j - \delta_{i,j}\} \equiv \{\alpha_1, \ldots, \alpha_i - 1, \ldots, \alpha_k\}$. De manière similaire, le q-multinôme satisfait

$$\begin{bmatrix} m \\ \{\alpha_j\} \end{bmatrix} = \sum_{i=1}^{k} q^{c_i} \begin{bmatrix} m-1 \\ \{\alpha_j - \delta_{i,j}\} \end{bmatrix} \tag{3.73}$$

avec $c_i = \sum_{j>i} \alpha_j - \sum_{j<i} \alpha_j$.

Lors du développement de la représentation SdV pour les puissances de u_1, il est possible, via les relations de commutation, de déplacer tous les opérateurs de décalage T_i^- à droite, puis de les regrouper. On obtient, si m est la puissance développée, $\begin{pmatrix} N+m-1 \\ m \end{pmatrix}$ termes dont les coefficients sont donnés par le théorème suivant :

Théorème 3.2. *Soit un ensemble de N algèbres de Weyl engendrées par $\boldsymbol{\eta}_a$ et T_a^-, $a \in [\![1, N]\!]$, satisfaisant les relations de commutation $\boldsymbol{\eta}_a T_b^- = q^{\delta_{a,b}} T_b^- \boldsymbol{\eta}_a$; soit f un polynôme de Laurent à coefficients complexes.*
On a alors

$$\left(\sum_{a=1}^{N} \left(\prod_{b \neq a} \frac{1}{\langle \boldsymbol{\eta}_a / \boldsymbol{\eta}_b \rangle} \right) f(\boldsymbol{\eta}_a) T_a^- \right)^m \tag{3.74}$$

$$= \sum_{\{\alpha_i / \sum_i \alpha_i = m\}} \begin{bmatrix} m \\ \{\alpha_i\} \end{bmatrix} \left(\prod_{i=1}^{N} \prod_{k=0}^{\alpha_i} \left(\prod_{j \neq i} \frac{1}{\langle q^{\alpha_j - k} \boldsymbol{\eta}_i / \boldsymbol{\eta}_j \rangle} \right) f(q^{-k} \boldsymbol{\eta}_i) \right) \prod_{i=1}^{N} (T_i^-)^{\alpha_i}$$

Démonstration. La démonstration se fait sans grande difficulté par récurrence, et utilise l'identité

$$\sum_{a=1}^{n} [\alpha_a] \prod_{i \neq a} \frac{q^{\alpha_a} z_i / z_a - q^{-\alpha_a} z_a / z_i}{q^{\alpha_a - \alpha_i} z_i / z_a - q^{\alpha_i - \alpha_a} z_a / z_i} = \left[\sum_{a=1}^{n} \alpha_a \right] \tag{3.75}$$

valable pour n entiers positifs α_i et n nombres complexes z_i tels que $q^{-\alpha_i} z_i \neq \pm q^{-\alpha_j} z_j$ pour $i \neq j$; cette identité est issue du théorème des résidus appliqué à la fonction holomorphe

$$z \mapsto \frac{1}{z} \prod_i \frac{z - z_i^2}{z - q^{-2\alpha_i} z_i^2} \tag{3.76}$$

$\square$

Remarque 3.9. Utilisé dans le cas où $m = p$, ce théorème permet de simplifier l'expression de $B(\lambda)^{-1}A(\lambda)$. En effet, les seuls coefficients multinomiaux non nuls seront ceux pour lesquels il existe un entier i tel que $\alpha_j = p\delta_{i,j}$, ce qui mène à une simple somme de N termes, tous diagonaux. La relation $\langle k_1, \ldots, k_N | (\boldsymbol{\eta}_a)^p = \left(\eta_a^{(0)}\right)^p \langle k_1, \ldots, k_N|$ mène à la formule

$$\left(B(\lambda)^{-1}A(\lambda)\right)^p = \sum_{a=1}^{N} \prod_{b\neq a} \frac{1}{\left\langle \left(\eta_a^{(0)}/\eta_b^{(0)}\right)^p \right\rangle} \frac{\prod_{k=1}^{p} a(q^{-k}\eta_a^{(0)})}{\left\langle \left(\lambda/\eta_a^{(0)}\right)^p \right\rangle} \tag{3.77}$$

Ainsi, $(B(\lambda)^{-1}A(\lambda))^p$ est, quel que soit λ pour lequel $B(\lambda)$ est inversible, un opérateur proportionnel à l'identité.

3.2.4 Problème combinatoire pour v_1

Une expression similaire pour les puissances de v_1 est plus compliquée à obtenir. Bien qu'il soit possible d'exprimer ces puissances en termes de $B^{-1}A$, les puissances à gauche et à droite rendent l'écriture en termes de puissances de l'opérateur translation assez complexe. Une autre approche, utilisant les relations de Yang-Baxter et la reconstruction du théorème 3.1, va être utilisée ici.
Tout d'abord, les relations de Yang-Baxter (plus particulièrement $B(\lambda)A(q^{-1}\lambda) = A(\lambda)B(q^{-1}\lambda)$) et le caractère central de $\mathcal{B}(\lambda) = \prod_{k=1}^{p} B(q^k\lambda)$ permettent d'obtenir les relations

$$\begin{aligned}\left(B^{-1}(\lambda)A(\lambda)\right)^n &= \prod_{i=0}^{n-1} B(q^i\lambda)^{-1} \prod_{i=0}^{n-1} A(q^i\lambda) = \mathcal{B}(\lambda)^{-1} \prod_{i=n}^{p-1} B(q^i\lambda) \prod_{i=0}^{n-1} A(q^i\lambda) \\ &= \prod_{i=1}^{n} A(q^{-1}\lambda) \prod_{i=1}^{n} B(q^{-1}\lambda)^{-1} = \mathcal{B}(\lambda)^{-1} \prod_{i=1}^{n} A(q^{-1}\lambda) \prod_{i=n+1}^{p} B(q^{-1}\lambda)\end{aligned} \tag{3.78}$$

Ces relations permettent de réécrire l'opérateur f_k défini en 3.55 comme

$$\begin{aligned} f_k &= \left(\mathcal{B}(\lambda_{1,1}^{(1)})\right)^{-2} \prod_{i=1}^{p-k} B(q^{-i}\lambda_{1,1}^{(1)}) \prod_{i=p-k+1}^{p} A(q^{-i}\lambda_{1,1}^{(1)}) \\ &\cdot\ A(\lambda_{1,-1}^{(1)})^{-1} B(q^{-i}\lambda_{1,-1}^{(1)}) \\ &\cdot\ \prod_{i=1}^{p-k} A(q^{-i}\lambda_{1,1}^{(1)}) \prod_{i=p-k+1}^{p} B(q^{-i}\lambda_{1,1}^{(1)}) \end{aligned} \tag{3.79}$$

Un des points intéressants de cette expression est que les produits de A et de B à gauche et à droite se complètent. Or, la forme des relations de Yang-Baxter ne faisant intervenir que A et B permettent en général d'écrire un produit comme la somme d'un terme proportionnel au produit « commuté »et d'un autre terme ; en utilisant les relations de commutation de Yang-Baxter, on peut s'attendre à des simplifications. En particulier, un argument classique permet d'obtenir, pour λ_i des nombres distincts entre eux et distincts d'un nombre μ,

$$\begin{aligned} B(\mu)\prod_i A(\lambda_i) &= \prod_i \frac{1}{b(\lambda_i,\mu)}\prod_i A(\lambda_i)B(\mu) \\ &- \sum_i \frac{c(\lambda_i,\mu)}{b(\lambda_i,\mu)}\prod_{j\neq i}\frac{1}{b(\lambda_j,\lambda_i)}A(\mu)\prod_{j\neq i}A(\lambda_j)B(\lambda_i) \end{aligned} \tag{3.80}$$

En particulier, nous avons

$$\begin{aligned} B(\lambda^{(1)}_{1,-1})\prod_{i=1}^{p-n} A(q^{-i}\lambda^{(1)}_{1,1}) &= \frac{\kappa_1^2-\kappa_1^{-2}}{q^n\kappa_1^2-q^{-n}\kappa_1^{-2}}\prod_{i=1}^{p-n}A(q^{-i}\lambda^{(1)}_{1,1})B(\lambda^{(1)}_{1,-1}) \\ &+ \frac{q^n-q^{-n}}{q^n\kappa_1^2-q^{-n}\kappa_1^{-2}}A(\lambda^{(1)}_{1,-1})\prod_{i=1}^{p-n-1}A(q^{-i}\lambda^{(1)}_{1,1})B(q^n\lambda^{(1)}_{1,1}) \end{aligned} \tag{3.81}$$

où l'absence de somme sur i vient du fait que $\prod_j b(q^{-i}\lambda, q^{-j}\lambda)^{-1} = 0$ s'il existe un j tel que $j = i-1$. L'utilisation de cette égalité mène au résultat intermédiaire

$$\begin{aligned} f_k &= \mathcal{B}^{-1}(\lambda^{(1)}_{1,1})\frac{\kappa_1^2-\kappa_1^{-2}}{q^k\kappa_1^2-q^{-k}\kappa_1^{-2}}\prod_{i=1}^{p-k}B(q^{-i}\lambda^{(1)}_{1,1})A(\lambda^{(1)}_{1,-1})^{-1}B(\lambda^{(1)}_{1,-1})\prod_{i=p-k+1}^{p}B(q^{-i}\lambda^{(1)}_{1,1}) \\ &+ \frac{q^k-q^{-k}}{q^k\kappa_1^2-q^{-k}\kappa_1^{-2}}A(\lambda^{(1)}_{1,1})^{-1}B(\lambda^{(1)}_{1,1}) \end{aligned} \tag{3.82}$$

Pour finir, définissons pour k entier l'opérateur

$$\tilde{A}_k(\lambda) \equiv \frac{q^{1-k}\lambda/\lambda^{(1)}_{1,1} - q^{k-1}\lambda^{(1)}_{1,1}/\lambda}{q\lambda/\lambda^{(1)}_{1,1} - q^{-1}\lambda^{(1)}_{1,1}/\lambda}A(\lambda) + \frac{q^k-q^{-k}}{q\lambda/\lambda^{(1)}_{1,1} - q^{-1}\lambda^{(1)}_{1,1}/\lambda}B(\lambda^{(1)}_{1,1})^{-1}A(\lambda^{(1)}_{1,1})B(\lambda) \tag{3.83}$$

Cet opérateur satisfait les mêmes relations de commutation avec B que l'opérateur A, c'est-à-dire pour tout k et λ

$$\begin{aligned} \tilde{A}_k(\lambda)B(\mu) &= b(\lambda,\mu)B(\mu)\tilde{A}_k(\lambda) + c(\lambda,\mu)\tilde{A}_k(\mu)B(\lambda) \\ B(\lambda)\tilde{A}_k(\mu) &= c(\lambda,\mu)B(\mu)\tilde{A}_k(\lambda) + b(\lambda,\mu)\tilde{A}_k(\mu)B(\lambda) \end{aligned} \tag{3.84}$$

La relation principale vérifiée par cet opérateur est

$$\prod_{i=1}^{p-k}B(q^{-i}\lambda^{(1)}_{1,1})A(\lambda) = \tilde{A}_k(\lambda)\prod_{i=1}^{p-k}B(q^{-i}\lambda^{(1)}_{1,1}) \tag{3.85}$$

qui est issue des équations de Yang-Baxter. Cette relation implique également que $\left[\tilde{A}_k(\lambda), \tilde{A}_k(\mu)\right] = 0$, que $\prod_{i=1}^p \tilde{A}_k(q^i\lambda) = \prod_{i=1}^p A(q^i\lambda)$ et $\left(B(\lambda^{(1)}_{1,1})^{-1}A(\lambda^{(1)}_{1,1})\right)^p = \mathbb{1}$. Pour finir, le théorème 3.1 permet d'exprimer les puissances de v_1 en une combinaison linéaire des opérateurs $f_kB(\lambda^{(1)}_{1,1})^{-1}A(\lambda^{(1)}_{1,1})$ avec

Proposition 3.7. *Les opérateurs intervenant dans la somme reconstruisant v_1 dans le théorème 3.1 peuvent s'écrire*

$$\begin{aligned} f_kB(\lambda^{(1)}_{1,1})^{-1}A(\lambda^{(1)}_{1,1}) &= \frac{\kappa_1^2-\kappa_1^{-2}}{q^k\kappa_1^2-q^{-k}\kappa_1^{-2}}\left(B(\lambda^{(1)}_{1,-1})^{-1}\tilde{A}_k(\lambda^{(1)}_{1,-1})\right)^{p-1}B(\lambda^{(1)}_{1,1})^{-1}A(\lambda^{(1)}_{1,1}) \\ &+ \frac{q^k-q^{-k}}{q^k\kappa_1^2-q^{-k}\kappa_1^{-2}} \end{aligned} \tag{3.86}$$

Ensuite, remarquons que la définition de $\tilde{A}_k$ fait intervenir la somme de deux A, dont un multiplié par deux B. Dans la base SdV où B est diagonal et A est une somme d'opérateurs, cette définition permet tout à fait d'exprimer $\tilde{A}_k$, et donc nous avons

$$B(\lambda)^{-1}\tilde{A}_k(\lambda) = \sum_a \frac{\left\langle q^k\lambda_{1,1}^{(1)}/\boldsymbol{\eta}_a\right\rangle}{\left\langle\lambda_{1,1}^{(1)}/\boldsymbol{\eta}_a\right\rangle}\prod_{b\neq a}\frac{1}{\langle\boldsymbol{\eta}_a/\boldsymbol{\eta}_b\rangle}\frac{1}{\langle\lambda/\boldsymbol{\eta}_a\rangle}a(\boldsymbol{\eta}_a)T_a^- \tag{3.87}$$

Cette expression est très similaire à (3.61), qui donne $B(\lambda)^{-1}A(\lambda)$ dans la base séparée, et le théorème 3.2 s'y applique également, ce qui permet de déterminer les puissances de cet opérateur. Il reste à multiplier une fois à droite par $B(\lambda_{1,1}^{(1)})^{-1}A(\lambda_{1,1}^{(1)})$. Il est possible de regrouper les sommes, de manière similaire au théorème 3.2, pour obtenir le résultat suivant :

Proposition 3.8. *Dans la base de la séparation des variables, on a le développement suivant :*

$$\begin{aligned}
&\left(B(\lambda_{1,-1}^{(1)})^{-1}\tilde{A}_s(\lambda_{1,1}^{(1)})\right)^{p-1}B(\lambda_{1,1}^{(1)})^{-1}A(\lambda_{1,1}^{(1)}) \qquad (3.88)\\
&= \sum_{\{\alpha_i/\sum_i\alpha_i=p\}}\frac{[p-1]!}{\prod_i[\alpha_i]!}\left(\prod_{i=1}^{N}\prod_{k=0}^{\alpha_i}\left(\prod_{j\neq i}\frac{1}{\left\langle q^{\alpha_j-k}\boldsymbol{\eta}_i/\boldsymbol{\eta}_j\right\rangle}\right)f_s(q^{-k}\boldsymbol{\eta}_i)\right)\\
&\quad\times\frac{\langle q^s\kappa_1^2\rangle}{\langle q\rangle}\left(\prod_i\frac{\left\langle q^{s-1}\lambda_{1,1}^{(1)}/\boldsymbol{\eta}_i\right\rangle}{\left\langle q^{\alpha_i+s-1}\lambda_{1,1}^{(1)}/\boldsymbol{\eta}_i\right\rangle}-1\right)\prod_{i=1}^{N}(T_i^-)^{\alpha_i}
\end{aligned}$$

avec

$$f_s(\lambda) \equiv \frac{\left\langle q^s\lambda_{1,1}^{(1)}/\lambda\right\rangle a(\lambda)}{\left\langle\lambda_{1,1}^{(1)}/\lambda\right\rangle\left\langle\lambda_{1,-1}^{(1)}/\lambda\right\rangle} \tag{3.89}$$

Démonstration. La démonstration est similaire à celle du théorème 3.2, en utilisant la relation

$$\sum_i[\alpha_i]\frac{\langle x/z_i\rangle}{\langle q^k y/z_i\rangle}\prod_{j\neq i}\frac{\langle q^{-\alpha_j}z_i/z_j\rangle}{\langle z_i/z_j\rangle} = \frac{\langle q^{\sum_i\alpha_i-k}x/y\rangle}{\langle q\rangle}+\frac{\langle q^k y/x\rangle}{\langle q\rangle}\prod_i\frac{\langle q^{k-\alpha_i}y/z_i\rangle}{\langle q^k y/z_i\rangle} \tag{3.90}$$

elle-même issue de l'étude des résidus et de l'intégrale de contour à l'infini de la fonction méromorphe $z\mapsto\frac{1}{z}\frac{\langle z/x\rangle}{\langle q^{-k}z/y\rangle}\prod_i\frac{\langle q^{-\alpha_i}z/z_i\rangle}{\langle z/z_i\rangle}$. □

Remarque 3.10. L'expression est similaire à celle obtenue pour $\left(B(\lambda_{1,-1}^{(1)})^{-1}\tilde{A}_s(\lambda_{1,1}^{(1)})\right)^p$, avec quelques différences. En particulier, il existe un terme de « structure »

$$\prod_{i=1}^{N}\prod_{k=0}^{\alpha_i}\prod_{j\neq i}\frac{1}{\left\langle q^{\alpha_j-k}\boldsymbol{\eta}_i/\boldsymbol{\eta}_j\right\rangle} \tag{3.91}$$

qui intervient dans toute puissance du type de celle développée dans le théorème 3.2, et qui est le seul terme qui ne soit pas séparable, c'est-à-dire qui puisse être exprimé comme un produit de fonctions faisant intervenir chacune un seul opérateur η. Le coefficient q-multinomial a disparu, il est remplacé par $\frac{[p-1]!}{\prod_i [\alpha_i]!}$ qui en est très proche :

$$\frac{[m-1]!}{\prod_i [\alpha_i]!} = \frac{1}{[m]} \begin{bmatrix} m \\ \{\alpha_i\} \end{bmatrix} \tag{3.92}$$

pour $q^m \neq 1$ et $\sum_i \alpha_i = m$. Toutefois, il n'y a plus l'annulation dès lors que $\{\alpha_i\}$ n'est pas de la forme $\alpha_i = \delta_{i,j}$. Cela permet d'avoir un opérateur qui soit non diagonal dans la base séparée, tout en ayant chaque terme constitué d'un produit de p opérateurs de décalage T_a^-.

Pour finir, l'utilisation du théorème 3.1 et des propositions 3.7 et 3.8 permet d'exprimer les puissances de v_1 sous la forme d'une somme

$$\mathrm{v}_1^k = \sum_{\{\alpha_i / \sum_i \alpha_i = p\}} C^{(k)}_{\{\alpha_i\}} \prod_i (T_i^-)^\alpha_i \tag{3.93}$$

avec les coefficients $C^{(k)}_{\{\alpha_i\}}$ bien déterminés.

3.3 Étude des facteurs de forme

Une fois obtenue la reconstruction des opérateurs locaux en termes des éléments de la matrice de monodromie, il faut déterminer les éléments de matrice de ces opérateurs dans la base propre de la matrice de transfert, qui correspond à la base propre du Hamiltonien. La connaissance de ces éléments de matrice permet d'exprimer des quantités telles que les facteurs de forme ou les fonctions de corrélation, quantités qui porront être reliées à des données physiques concrètes telles que des données de diffusion.

3.3.1 États propres à droite et à gauche

L'étude du spectre du modèle de sine-Gordon effectuée plus haut a permis de déterminer à la fois le spectre de la matrice de transfert, sa simplicité et l'expression de ses vecteurs propres à gauche et à droite dans la base des variables séparées. Nous avons ainsi p^N états à gauche $\langle t|$ et p^N états à droite $|t\rangle$ qui sont les états propres de la trace de la matrice de monodromie avec les mêmes valeurs propres, les $t(\lambda)$.
Sous les conditions 3.16, l'opérateur trace de la matrice de monodromie est hermitien, et donc ses valeurs propres sont réelles, ce qui implique que si $\langle t|$ est un vecteur propre à gauche de la trace, de valeur propre $t(\lambda)$, l'état à droite $(\langle t|)^\dagger$ est vecteur propre de la trace, avec la valeur propre $t(\lambda)$, tout comme l'état $|t\rangle$. La simplicité du spectre de l'opérateur trace implique la proportionnalité entre ces deux vecteurs.
Ainsi, pour toute valeur propre $t(\lambda)$, il existe un complexe α_t tel que $\langle t|^\dagger = \alpha_t |t\rangle$. A priori, ce nombre dépend de la valeur propre $t(\lambda)$ et n'est pas réel, ce qui implique que le nombre $\langle t|t\rangle = \alpha_t^{-1} \|\langle t|\|^2$ n'est pas un réel positif, et donc ne peut être la norme de $\langle t|$. Cela aura des conséquences lors du calcul des éléments de matrice normalisés. En effet, les vecteurs propres étant définis à une constante près, il est nécéssaire de

normaliser les éléments de matrice pour avoir un résultat cohérent. Ainsi, la quantité $\frac{\langle t|X|t\rangle}{\langle t|t\rangle}$ ne dépend pas des constantes associées aux vecteurs $\langle t|$ et $|t\rangle$. Toutefois, cette forme ne peut pas se généraliser aux éléments de matrice entre deux états différents. En effet, dans ce cas, le produit scalaire $\langle t|t'\rangle$ sera nul, car les vecteurs propres à gauche et à droite ont des valeurs propres différentes par l'opérateur trace qui est hermitien, et il faut donc diviser par $\|\langle t|\|\||t'\rangle\|$ pour pouvoir retirer la dépendance en le module des constantes associées aux vecteurs $\langle t|$ et $|t'\rangle$. Le résultat reste dépendant des phases de ces constantes.
Dans le cas présent, on préfèrera diviser par $\langle t|t\rangle^{1/2}\langle t'|t'\rangle^{1/2}$, car l'expression de ces produits scalaires peut se mettre simplement sous la forme d'un déterminant. Toutefois, l'existence de ce facteur de proportionnalité α_t donne la relation

$$\frac{\langle t|X|t'\rangle}{\|\langle t|\|\||t'\rangle\|} = \left(\frac{\alpha_{t'}^*}{\alpha_t}\right)^{1/2} \frac{\langle t|X|t'\rangle}{\langle t|t\rangle^{1/2}\langle t'|t'\rangle^{1/2}} \tag{3.94}$$

et ne permet pas de relier facilement l'élément de matrice normalisé $\frac{\langle t|X|t'\rangle}{\|\langle t|\|\||t'\rangle\|}$ et la quantité $\frac{\langle t|X|t'\rangle}{\langle t|t\rangle^{1/2}\langle t'|t'\rangle^{1/2}}$.
Toutefois, dans le cas où les valeurs propres $t(\lambda)$ et $t'(\lambda)$ sont égales, la démarche reste la même, comme il suffit simplement de diviser par $\langle t|t\rangle$. Remarquons enfin que dans le calcul des fonctions de corrélation, ces constantes α_t s'éliminent car elles font intervenir les modules au carré des facteurs de forme.

3.3.2 Produits scalaires et orthogonalité

Comme mentionné plus haut, les vecteurs propres à gauche et à droite $\langle t|$ et $|t'\rangle$ sont associés aux valeurs propres $t(\lambda)$ et $t'(\lambda)$; si ces valeurs propres sont différentes, le produit scalaire $\langle t|t'\rangle$ sera nul.
Un des avantages de la représentation par séparation des variables est que cette annulation peut se voir directement, en utilisant l'expression des vecteurs propres données en 3.4. En effet, le produit scalaire obtenu en utilisant ces deux expressions (ainsi que le produit scalaire des états propres à gauche et à droite de $B(\lambda)$) peut se simplifier, pour arriver au déterminant d'une matrice $N \times N$. L'annulation de ce déterminant est prouvée en exhibant un vecteur propre de cette matrice, de valeur propre 0.
Le produit scalaire $\langle t|t'\rangle$ peut se mettre sous la forme

$$\langle t|t'\rangle = \sum_{h_1,\ldots,h_N=1}^{p} \prod_{b<a} \left(\left(\eta_a^{(h_a)}\right)^2 - \left(\eta_b^{(h_b)}\right)^2\right) \prod_{a=1}^{N} \frac{\bar{Q}_t(\eta_a^{(h_a)}) Q_{t'}(\eta_a^{(h_a)})}{\omega_a(\eta_a^{(h_a)})} \tag{3.95}$$

Remarque 3.11. Cette forme appelle plusieurs remarques :
- Les fonctions $\bar{Q}_t$ et $Q_{t'}$ sont issues d'équations de Baxter, et sont donc définies à une constante multiplicative près. Cette indétermination se retrouve dans la formule précédente via un facteur global.
- Cette formule comporte un terme « de structure », le produit $\prod_{b<a}((\eta_a^{(h_a)})^2 - (\eta_b^{(h_b)})^2)$, qui entrelace les quantités $\eta_a^{(k)}$ associées au site a. Ce terme est

indépendant des valeurs propre de la matrice de transfert choisie. Les autres termes sont séparés et apportent les données « physiques », c'est-à-dire les données dépendant de la valeur propre de l'opérateur de transfert.

Ce terme « structurel »peut se mettre sous la forme d'un déterminant d'une matrice de Vandermonde, c'est-à-dire une matrice de la forme $V_{i,j} = v_i^{j-1}$ avec $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$, dont le déterminant est

$$\det V = \begin{vmatrix} 1 & v_1 & \cdots & v_1^{n-1} \\ 1 & v_2 & \cdots & v_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & v_n & \cdots & v_n^{n-1} \end{vmatrix} = \prod_{j<i} (v_i - v_j) \tag{3.96}$$

Une des caractéristiques intéressantes de ce déterminant est que les lignes sont « séparées », c'est-à-dire que la ligne i ne fait intervenir que le nombre v_i. Ainsi, les termes séparés supplémentaires vont pouvoir s'insérer dans chacune des lignes, grâce à la multilinéarité du déterminant ; il en sera de même pour les sommes, chacune n'agissant que sur un site.

Le produit scalaire de deux états $\langle t|$ et $|t'\rangle$ peut donc s'écrire sous la forme

$$\langle t|t'\rangle = \det \Phi^{(t,t')} \tag{3.97}$$

avec

$$\Phi_{a,b}^{(t,t')} = \sum_{h=1}^{p} \frac{\bar{Q}_t(\eta_a^{(h)}) Q_{t'}(\eta_a^{(h)})}{\omega_a(\eta_a^{(h)})} \left(\eta_a^{(h)}\right)^{2(b-1)} \tag{3.98}$$

Remarque 3.12. Seule la formule du déterminant de Vandermonde et la multilinéarité du déterminant ont été utilisées pour obtenir cette forme de déterminant à partir des expressions des vecteurs propres $\langle t|$ et $|t'\rangle$. Ainsi, on peut mettre sous cette forme de déterminant tout produit scalaire de deux états qui s'écrivent dans les bases propres de $B(\lambda)$ comme

$$\langle \alpha| = \sum_{h_1,\ldots,h_N=1}^{p} \prod_{a=1}^{N} \frac{\alpha_a(\eta_a^{(h_a)})}{\omega_a(\eta_a^{(h_a)})} \prod_{b<a} \left(\left(\eta_a^{(h_a)}\right)^2 - \left(\eta_b^{(h_b)}\right)^2\right) \langle \eta_1^{(h_1)}, \ldots, \eta_N^{(h_N)}| \tag{3.99}$$

$$|\beta\rangle = \sum_{h_1,\ldots,h_N=1}^{p} \prod_{a=1}^{N} \frac{\beta_a(\eta_a^{(h_a)})}{\omega_a(\eta_a^{(h_a)})} \prod_{b<a} \left(\left(\eta_a^{(h_a)}\right)^2 - \left(\eta_b^{(h_b)}\right)^2\right) |\eta_1^{(h_1)}, \ldots, \eta_N^{(h_N)}\rangle \tag{3.100}$$

Dans le cas $t = t'$, le déterminant obtenu n'est a priori pas un réel positif. Ceci illustre bien le fait que $\langle t|t\rangle$ n'est pas a priori la norme au carré du vecteur $\langle t|$ ou que $\langle t| \neq (|t\rangle)^\dagger$ en général.

La matrice $\Phi_{(t,t')}$ a une action très intéressante sur un vecteur à droite. En effet, la seule dépendance en b de $\Phi_{a,b}^{(t,t')}$ se fait à travers la puissance de $\eta_a^{(h)}$, et donc une somme de ces éléments de matrice avec des coefficients va se traduire par l'écriture d'un polynôme pair pris aux points $\eta_a^{(h)}$. De plus, si on se place dans la jauge imposant $\bar{a}(q^{-1}\lambda) = a(\lambda)$, des simplifications supplémentaires sont possibles. Explicitement, cela donne, si C est le vecteur colonne $C_i \equiv c_i \in \mathbb{C}$,

$$(\Phi^{(t,t')} \cdot C)_i = \Phi_{i,j}^{(t,t')} c_j = \sum_{h=1}^{p} \bar{Q}_t(\eta_i^{(h)}) Q_{t'}(\eta_i^{(h)}) f(\eta_i^{(h)}) \tag{3.101}$$

avec f le polynôme de Laurent de degré $N-1$ défini par $f(\lambda) \equiv \sum_{k=0}^{N-1} c_{k+1}\lambda^{2k-N+1}$, pair dans le cas N impair.
Cette formule permet de trouver simplement un vecteur du noyau de $\Phi^{(t,t')}$. En effet, on sait que t et t' sont des polynômes de Laurent de degré $N-1$ et pairs dans le cas où N est impair, il est donc possible de définir les nombres $t_i \in \mathbb{C}$ et $t'_i \in \mathbb{C}$, $i \in [\![1,N]\!]$, tels que

$$\begin{aligned} t(\lambda) &= \sum_{k=0}^{N-1} t_{k+1}\lambda^{2k-N+1} && (3.102)\\ t'(\lambda) &= \sum_{k=0}^{N-1} t'_{k+1}\lambda^{2k-N+1} && (3.103)\end{aligned}$$

Il existe donc un vecteur $X : X_i \equiv t_i - t'_i$ tel que

$$(\Phi^{(t,t')} \cdot X)_a = \sum_{h=1}^{p} \bar{Q}_t(\eta_a^{(h)})Q_{t'}(\eta_a^{(h)})\left(t(\eta_a^{(h)}) - t'(\eta_a^{(h)})\right) \tag{3.104}$$

Il est alors très simple, en utilisant les équations de Baxter dans la jauge imposée, de montrer que le terme à droite de l'équation précédente est nul. Ainsi, dans le cas où les valeurs propres $t(\lambda)$ et $t'(\lambda)$ sont différentes, le noyau de la matrice $\Phi^{(t,t')}$ n'est pas réduit au vecteur nul, le déterminant de cette matrice est nul ; les états $\langle t|$ et $|t'\rangle$ sont orthogonaux.

3.3.3 Exemple de facteurs de forme

Le calcul menant aux produits scalaires d'états propres de l'opérateur de transfert sous forme de déterminants peut être généralisé pour calculer les facteurs de forme de certains opérateurs locaux. C'est le cas de l'opérateur u_1, reconstruit par $\mathrm{u}_1 = B^{-1}(\lambda_{1,1}^{(1)})A(\lambda_{1,1}^{(1)})$ (voir Proposition 3.6). Il est possible d'exprimer sous la forme d'un unique déterminant les facteurs de forme de cet opérateur ; en fait, il est possible de faire ceci pour tous les opérateurs de la forme $X(\lambda) \equiv B^{-1}(\lambda)A(\lambda)$.
En effet, dans la base de la séparation des variables, l'action à droite de cet opérateur est

$$\begin{aligned} X(\lambda)|\eta_1^{(h_1)},\ldots,\eta_N^{(h_N)}\rangle = \sum_{a=1}^{N} \frac{\bar{a}(\eta_a^{(h_a)})}{\mathrm{K}(\lambda/\eta_a^{(h_a)} - \eta_a^{(h_a)}/\lambda)} \prod_{b\neq a} \frac{1}{\eta_a^{(h_a)}/\eta_b^{(h_b)} - \eta_b^{(h_b)}/\eta_a^{(h_a)}}\\ \times|\eta_1^{(h_1)},\ldots,\eta_a^{(h_a+1)},\ldots,\eta_N^{(h_N)}\rangle \end{aligned} \tag{3.105}$$

Cette action fait intervenir un dénominateur de la forme $\prod_{b\neq a}(\eta_a/\eta_b - \eta_b/\eta_a)$, qui va modifier le déterminant de Vandermonde obtenu en prenant le facteur de forme de cet opérateur entre les états $\langle t|$ et $|t'\rangle$. En effet, on a la relation, pour $c \in [\![1,N]\!]$ fixé et $\{x_i, i \in [\![1,N]\!]\}$, N nombres distincts et arbitraires,

$$\frac{\prod_{b<a}(x_a - x_b)}{\prod_{a\neq c}(x_c - x_a)} = (-1)^{N+c} \prod_{\substack{b<a\\ a\neq c, b\neq c}} (x_a - x_b) \tag{3.106}$$

On voit ainsi que la matrice de Vandermonde obtenue en l'absence d'opérateur, c'est-à-dire dans le cas d'un produit scalaire, est amputée d'une ligne. En revenant à la formule du facteur de forme, on s'aperçoit qu'elle ne fait plus intervenir que des produits séparés :

$$\langle t|X(\lambda)|t'\rangle = \sum_{c=1}^{N} \sum_{h_1,\ldots,h_N=1}^{p} \prod_{a\neq c} \frac{\bar{Q}_t(\eta_a^{(h_a)})Q_{t'}(\eta_a^{(h_a)})\eta_a^{(h_a)}}{\omega_a(\eta_a^{(h_a)})}$$

$$\times \frac{\bar{Q}_t(\eta_c^{(h_c)})Q_{t'}(\eta_c^{(h_c+1)})}{\omega_c(\eta_c^{(h_c)})} \frac{\left(\eta_c^{(h_c)}\right)^{N-1} \bar{a}(\eta_c^{(h_c)})}{\mathrm{K}(\lambda/\eta_c^{(h_c+1)} - \eta_c^{(h_c+1)}/\lambda})(-1)^{N+c} V_c \tag{3.107}$$

avec V_c le déterminant de Vandermonde $\prod_{\substack{b<a \\ a\neq c, b\neq c}} (\eta_a^{(h_a)} - \eta_b^{(h_b)})$, qui est privé d'une ligne et correspond donc à une matrice de taille $N-1 \times N-1$. A présent, notons que le terme $\sum_c (-1)^{N+c} V_c$ correspond au développement d'une matrice de taille $N \times N$ suivant sa dernière colonne, ce qui permet de réorganiser cette somme comme le déterminant d'une matrice de taille N. Cette matrice est séparée, tout comme dans le cas du produit scalaire, ce qui permet, via la multilinéarité du déterminant, de réécrire le facteur de forme

$$\langle t|X(\lambda)|t'\rangle = \det \mathcal{U}^{(t,t')}(\lambda) \tag{3.108}$$

avec $\mathcal{U}^{(t,t')}(\lambda)$ la matrice carrée de taille N dont les éléments sont

$$\mathcal{U}_{a,b}^{(t,t')}(\lambda) = \sum_{h=1}^{p} \frac{\bar{Q}_t(\eta_a^{(h)})Q_{t'}(\eta_a^{(h)})}{\omega_a(\eta_a^{(h)})} \left(\eta_a^{(h)}\right)^{2b-1} \quad \text{si } b \in [\![1, N-1]\!] \tag{3.109}$$

$$\mathcal{U}_{a,N}^{(t,t')}(\lambda) = \sum_{h=1}^{p} \frac{\bar{Q}_t(\eta_a^{(h+1)})Q_{t'}(\eta_a^{(h)})}{\omega_a(\eta_a^{(h)})} \frac{\left(\eta_a^{(h)}\right)^{N-1} \bar{a}(\eta_a^{(h)})}{\mathrm{K}(\lambda/\eta_a^{(h+1)} - \eta_a^{(h+1)}/\lambda)}$$

Cette formule en $\lambda = \lambda_{1,1}^{(1)}$ donne le facteur de forme de l'opérateur u_1. Notons que les $N-1$ premières colonnes de ce déterminant sont indépendantes de λ et sont très similaires à celles du produit scalaire de $\langle t|$ et $|t'\rangle$, en fait on a

$$\mathcal{U}_{a,b}^{(t,t')}(\lambda) = \Phi_{a,b+1/2}^{(t,t')} \text{ avec } b \in [\![1, N-1]\!] \tag{3.110}$$

Cette similarité pourra être utilisée pour calculer de manière simple le facteur de forme normalisé entre les états $\langle t|$ et $|t\rangle$.
Pour finir, remarquons que cette méthode de recomposition d'un déterminant de Vandermonde ne peut pas être directement appliquée aux puissances n (avec $n \in [\![2, p-1]\!]$) de u_1, ni aux puissances de v_1, et donc l'obtention du facteur de forme comme un seul déterminant n'est pas encore possible. En effet, l'expression de ces opérateurs dans la base des variables séparées fait intervenir des dénominateurs entrelaçant différent sites et qui ne sont pas annulés par le numérateur. Notons toutefois que les puissances de u_1 peuvent être obtenues en utlisant la décomposition de l'identité en somme de projecteurs, ce qui mène par exemple pour u_1^2 à

$$\langle t|\mathrm{u}_1^2|t'\rangle = \sum_{\bar{t}\in S} \frac{\langle t|\mathrm{u}_1|\bar{t}\rangle\langle \bar{t}|\mathrm{u}_1|t'\rangle}{\langle \bar{t}|\bar{t}\rangle} \tag{3.111}$$

chacun des trois facteurs pouvant être exprimés sous la forme d'un déterminant de taille N.

Chapitre 4

Application aux modèles τ_2 et Potts chiral

4.1 Position du problème

Les résultats obtenus pour le modèle de sine-Gordon peuvent se généraliser à d'autres modèles. C'est le cas pour le modèle τ_2, élaboré à partir des solutions générales de l'équation de Yang-Baxter $R_{12}(\lambda,\mu)L_1(\lambda)L_2(\mu) = L_2(\mu)L_1(\lambda)R_{12}(\lambda,\mu)$ pour la matrice R de type 6-vertex. Un des intérêts de ce modèle est son lien avec le modèle de Potts chiral [41]. En effet, ce lien, en particulier le fait que la matrice de transfert du modèle de Potts chiral soit un opérateur Q de Baxter pour le modèle τ_2, permet d'obtenir quelques résultats pour le modèle de Potts chiral. Il est possible par exemple de caractériser complètement le spectre de l'opérateur de transfert, via la construction d'un opérateur Q de Baxter par la méthode de séparation des variables. Il s'agit des résultats de l'article [79], qui vont être présentés ici.

4.1.1 Présentation du modèle τ_2

Le modèle τ_2 a historiquement été obtenu à partir de l'équation de Yang-Baxter faisant intervenir la matrice R 6-vertex [41]. Sa matrice de Lax correspond à la solution générale de cette équation. Le lien entre ce modèle et le modèle de Potts chiral a été l'une des premières propriétés obtenues, ce qui a permis, via la construction d'un opérateur Q de Baxter [21], de faire la première analyse du spectre de ce modèle. Une caractérisation plus précise du spectre du modèle a été obtenue par la suite [38, 24], faisant notamment intervenir des relations fonctionnelles supplémentaires entre les matrices de transfert des modèles de Potts chiral et de τ_2. D'autres résultats ont été obtenus dans le cadre du modèle de Potts chiral superintégrable [23, 25, 27], notamment une caractérisation du spectre par ansatz de Bethe [4, 3, 5] des deux modèles. Un autre résultat, le calcul de la magnétisation spontanée du modèle, a fait l'objet de nombreuses études. Tout d'abord prédit de manière perturbative dans le cas superintégrable [6], il n'a été obtenu que récemment, dans un premier temps par Baxter [29, 30], puis par Iorgov *et al.* [91], en se basant sur les éléments de matrices du modèle de Potts chiral superintégrable obtenus par Au-Yang et Perk [8, 9, 10, 12, 13].

Pour finir, notons que le modèle τ_2 et sa matrice de transfert ont déjà été analysés dans le cadre de la séparation des variables [199, 90].

Soit $q \equiv e^{-i\pi p'/p}$, avec p un entier impair et p' un entier pair, une racine de l'unité satisfaisant $q^p = 1$. Soit N algèbres de Weyl $\mathcal{W}_n$ engendrées par les opérateurs u_n et v_n vérifiant les relations de commutation

$$\mathrm{u}_n \mathrm{v}_m = q^{\delta_{n,m}} \mathrm{v}_m \mathrm{u}_n \tag{4.1}$$

Définissons pour l'algèbre produit une représentation de dimension p par les états $|\boldsymbol{z}\rangle \equiv |z_1, \ldots, z_N\rangle, z_i \in \mathbb{C}$ et les relations

$$\mathrm{u}_n|z_1, \ldots, z_N\rangle \equiv z_n|z_1, \ldots, z_N\rangle \tag{4.2}$$

$$\mathrm{v}_n|z_1, \ldots, z_N\rangle \equiv |z_1, \ldots, z_n, \ldots, z_N\rangle \tag{4.3}$$

Le fait que u_n^p commute avec tous les opérateurs impose que les nombres z_i soient des racines p-ièmes de l'unité. Le modèle τ_2 est défini par l'opérateur de Lax au site n :

$$L_n(\lambda) \equiv \begin{pmatrix} \lambda\alpha_n \mathrm{v}_n - \lambda^{-1}\beta_n \mathrm{v}_n^{-1} & \mathrm{u}_n(q^{-1/2}\mathbb{a}_n \mathrm{v}_n + q^{1/2}\mathbb{b}_n \mathrm{v}_n^{-1}) \\ \mathrm{u}_n^{-1}(q^{1/2}\mathbb{c}_n \mathrm{v}_n + q^{-1/2}\mathbb{d}_n \mathrm{v}_n^{-1}) & \lambda^{-1}\gamma_n \mathrm{v}_n - \lambda\delta_n \mathrm{v}_n^{-1} \end{pmatrix} \tag{4.4}$$

où les quantités $\mathbb{a}_n$, $\mathbb{b}_n$, $\mathbb{c}_n$, $\mathbb{d}_n$, α_n, β_n, γ_n et δ_n désignent des constantes associées au site n et qui satisfont les relations

$$\alpha_n\gamma_n = \mathbb{a}_n\mathbb{c}_n \quad \text{et} \quad \beta_n\delta_n = \mathbb{b}_n\mathbb{d}_n \tag{4.5}$$

Cette matrice de Lax vérifie l'équation de Yang-Baxter

$$R(\lambda, \mu)\,(L_n(\lambda) \otimes \mathbb{1})\,(\mathbb{1} \otimes L_n(\mu)) = (\mathbb{1} \otimes L_n(\mu))\,(L_n(\lambda) \otimes \mathbb{1})\,R(\lambda, \mu) \tag{4.6}$$

avec R la matrice 6-vertex

$$R(\lambda, \mu) = \begin{pmatrix} q\lambda\mu^{-1} - q^{-1}\lambda^{-1}\mu & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda\mu^{-1} - \lambda^{-1}\mu & q - q^{-1} & 0 \\ 0 & q - q^{-1} & \lambda\mu^{-1} - \lambda^{-1}\mu & 0 \\ 0 & 0 & 0 & q\lambda\mu^{-1} - q^{-1}\lambda^{-1}\mu \end{pmatrix} \tag{4.7}$$

Il est possible, pour ce modèle de définir un opérateur

$$\Theta \equiv \prod_{n=1}^{N} \mathrm{v}_n \tag{4.8}$$

Cet opérateur commute avec les éléments de l'algèbre de Yang-Baxter $A(\lambda)$ et $D(\lambda)$, et vérifie les relations

$$B(\lambda)\Theta = q\Theta B(\lambda) \text{ et } C(\lambda)\Theta = q^{-1}\Theta C(\lambda) \quad \forall \lambda \in \mathbb{C} \tag{4.9}$$

Cet opérateur commute donc avec la matrice de transfert $\tau_2(\lambda) \equiv A(\lambda) + D(\lambda)$ du modèle. Ses valeurs propres étant des racines p-ièmes de l'unité, il est possible d'associer, à chaque vecteur propre de l'opérateur de transfert, sa valeur propre par cet opérateur. Cela permet une foliation du spectre de l'opérateur de transfert,

$$\Sigma_{\tau_2} = \cup_{k=1}^{p} \Sigma_{\tau_2}^{k} \tag{4.10}$$

où $\Sigma^k_{\tau_2}$ correspond aux spectre des vecteurs propres dont la valeur propre par Θ est q^k. Notons par ailleurs que les asymptotes de la matrice de transfert s'expriment en fonction de cet opérateur :

$$\tau_2(\lambda) \to \Theta a_+ + \Theta^{-1} d_+ (\lambda \to \infty) \tag{4.11}$$

$$\tau_2(\lambda) \to \Theta^{-1} a_- + \Theta d_- (\lambda \to 0) \tag{4.12}$$

avec $a_\pm$ et $d_\pm$ des constantes.
Pour finir, le déterminant quantique est donné par le polynôme

$$\det{}_q M(\lambda) = \prod_{k=1}^{N} (\mathbb{a}_n \mathbb{b}_n \mathbb{c}_n \mathbb{d}_n)^{1/2} (\lambda/\mu_{n,+} - \mu_{n,+}/\lambda)(\lambda/\mu_{n,-} - \mu_{n,-}/\lambda) \tag{4.13}$$

ses zéros étant donnés par

$$\mu_{n,+} \equiv i q^{1/2} (\mathbb{a}_n \beta_n / \mathbb{b}_n \alpha_n)^{1/2} \quad \text{et} \quad \mu_{n,-} \equiv i q^{1/2} (\mathbb{c}_n \beta_n / \mathbb{d}_n \alpha_n)^{1/2} \tag{4.14}$$

4.1.2 Présentation du modèle Potts chiral, lien avec le modèle τ_2

Le modèle de Potts chiral est un modèle sur réseau issu de l'étude de l'équation triangle-étoile, qui intervient dans différents modèles intégrables. De nombreuses solutions de cette équation sont telles que les solutions dépendent de la différence des rapidités des lignes traversant les vertex. Les solutions ayant mené au modèle de Potts chiral ne satisfont pas ces propriétés, ce qui montre sa spécificité.

Ce modèle est associé à l'équation triangle-étoile

$$\sum_{h=1}^{p} \bar{W}_{qp}(q^{-h}a) W_{rp}(q^{-h}c) \bar{W}_{rq}(q^h b^{-1}) = f_{rqp} W_{rq}(c-a) \bar{W}_{rp}(a-b) W_{qp}(c-b) \tag{4.15}$$

où les éléments p, q et r sont des points de $\mathbb{C}^4$, a, b, c et h des entiers et f_{pqr} une constante indépendante des nombres a, b et c. La solution générale de cette équation a été obtenue [40] via des fonctions dilogarithmes. Pour que ces solutions soient valides, les points p, q et r doivent appartenir à une courbe particulière $\mathcal{C}_k$ de $\mathbb{C}^4$, définie par

$$q \in \mathcal{C}_k \Leftrightarrow x_q^p + y_q^p = k(1 + x_q^p y_q^p), \quad k x_q^p = 1 - k' s_q^{-p}, \quad k y_q^p = 1 - k' s_q^p \tag{4.16}$$

avec $q \equiv (a_q, b_q, c_q, d_q)$, $x_q \equiv a_q/d_q$, $y_q \equiv b_q/c_q$, $s_q \equiv d_q/c_q$ et $k^2 + k'^2 = 1$.
Les poids de Boltzmann du modèle sont les solutions de cette équation triangle-étoile, et prennent alors la forme [1] :

$$\frac{W_{qp}(q^{-2n})}{W_{qp}(1)} = \left(\frac{s_q}{s_p}\right)^n \prod_{k=1}^{n} \frac{y_p - q^{-2k} x_q}{y_q - q^{-2k} x_p} \tag{4.17}$$

$$\frac{\bar{W}_{qp}(q^{-2n})}{\bar{W}_{qp}(1)} = (s_q s_p)^n \prod_{k=1}^{n} \frac{q^{-2} x_q - q^{-2k} x_p}{y_p - q^{-2k} y_q} \tag{4.18}$$

1. Le qualificatif « chiral »dans le nom du modèle vient du fait que les quantités $W(n)$ et $W(-n)$, tout comme $\bar{W}(n)$ et $\bar{W}(-n)$, sont a priori différentes

Il est alors possible de définir pour ce modèle sur réseau une matrice de transfert, dont les éléments sont des produits de ces solutions W et $\bar{W}$.

Le lien entre le modèle τ_2 et celui-ci intervient en associant à chaque site n de τ_2 deux points sur la courbe $\mathcal{C}_k$, q_n et r_n, et en prenant un point supplémentaire p, toujours sur $\mathcal{C}_k$, définis par huit égalités similaires à

$$\lambda\alpha_n \equiv -t_p^{1/2} b_{q_n} b_{r_n} \quad \text{et} \quad q^{1/2}\mathbb{a}/r \equiv -(x_p/y_p)^{1/2} c_{q_n} b_{r_n} \tag{4.19}$$

où r est un paramètre fixe et $t_p \equiv x_p y_p$. Alors, sous certaines conditions, la matrice de transfert du modèle de Potts chiral est un opérateur Q de Baxter pour le modèle τ_2. De plus, il est possible de construire un entrelaceur entre les différentes matrices de Lax, c'est-à-dire un opérateur S_{nm} défini sur le produit des algèbres de Weyl $\mathcal{W}_1$ et $\mathcal{W}_2$ tel que $L_1(\lambda)L_2(\lambda)S_{12} = S_{12}L_2(\lambda)L_1(\lambda)$. Ces résultats liant les deux modèles seront mis à contribution plus loin, permettant de décrire les états propres de la matrice de transfert du modèle de Potts chiral et de résoudre le problème inverse pour le modèle τ_2.

4.2 Base des variables séparées

4.2.1 Résultats généraux

Cette section a pour but d'établir la forme générale de la représentation par séparation des variables, c'est-à-dire de la représentation pour laquelle $B(\lambda)$ est diagonal pour tout λ et son spectre est simple. Remarquons tout d'abord que la matrice de Lax dépend du paramètre λ de la façon suivante :

$$L(\lambda) = D_1\lambda + A_1 + D_2\lambda^{-1} \tag{4.20}$$

avec D_1 et D_2 des matrices diagonales et A_1 une matrice antidiagonale, toutes trois indépendantes de λ. Cette remarque fixe les degrés des opérateurs polynomiaux en λ $A(\lambda)$, $B(\lambda)$ et $D(\lambda)$, dont le caractère polynomial sert à établir ces résultats généraux.

Forme générale des représentations par séparation des variables

Théorème 4.1. *Dans les représentations pour lesquelles l'opérateur $B(\lambda)$ est diagonal pour tout λ, les états propres peuvent être caractérisés par la famille d'entiers $\boldsymbol{k} \equiv (k_1, \dots, k_N) \in [\![0, p-1]\!]^N$ de la façon suivante :*

- *On définit les nombres $\eta_a^{(h)} = q^h \eta_a^{(0)}$, avec $(\eta_1^{(0)}, \dots, \eta_N^{(0)})$ une famille de nombres complexes fixés, la famille $\eta_{\boldsymbol{k}}$ est définie par $(\eta_{\boldsymbol{k}})_a \equiv \eta_a^{(k_a)}$.*
- *Les états propres à gauche de $B(\lambda)$ sont notés $\langle \eta_{\boldsymbol{k}}|$, on a*

$$\langle \eta_{\boldsymbol{k}}|B(\lambda) = \eta_N^{(k_N)} b_{\eta_{\boldsymbol{k}}}(\lambda)\langle \eta_{\boldsymbol{k}}| \tag{4.21}$$

avec

$$b_{\eta_{\boldsymbol{k}}}(\lambda) \equiv \prod_{a=1}^{N-1} \left(\lambda/\eta_a^{(k_a)} - \eta_a^{(k_a)}/\lambda\right) \tag{4.22}$$

La simplicité du spectre de $B(\lambda)$ se traduit dans ce cas par les non-égalités $\left(\eta_a^{(0)}\right)^p \neq \left(\eta_b^{(0)}\right)^p$ si $a \neq b \in [\![1, N-1]\!]$.

– *L'action des opérateurs $A(\lambda)$ et $D(\lambda)$ est donnée par*[2]

$$\begin{aligned}
\langle\eta|A(\lambda) &= b_\eta(\lambda)\left[\lambda\eta_A^+\langle q^{-\delta_N}\eta| + \lambda^{-1}\eta_A^-\langle q^{\delta_N}\eta|\right] \\
&+ \sum_{a=1}^{N}\prod_{b\neq a}\frac{\lambda/\eta_b - \eta_b/\lambda}{\eta_a/\eta_b - \eta_b/\eta_a} a^{(SOV)}(\eta_a)\langle q^{-\delta_a}\eta| \qquad (4.23)\\
\langle\eta|D(\lambda) &= b_\eta(\lambda)\left[\lambda\eta_D^+\langle q^{\delta_N}\eta| + \lambda^{-1}\eta_D^-\langle q^{-\delta_N}\eta|\right] \\
&+ \sum_{a=1}^{N}\prod_{b\neq a}\frac{\lambda/\eta_b - \eta_b/\lambda}{\eta_a/\eta_b - \eta_b/\eta_a} d^{(SOV)}(\eta_a)\langle q^{\delta_a}\eta| \qquad (4.24)
\end{aligned}$$

avec

– *$a^{(SOV)}$ et $d^{(SOV)}$ des fonctions complexes telles que*

$$a^{(SOV)}(\eta_r)d^{(SOV)}(q^{-1}\eta_r) = \det_q T(\eta_r) \forall r \in [\![1, N-1]\!] \tag{4.25}$$

– *les nombres*

$$\eta_A^\pm \equiv (\pm 1)^{N-1} a_\pm \prod_{n=1}^{N-1}\eta_n^{\pm 1} \text{ et } \eta_D^\pm \equiv (\pm 1)^{N-1} d_\pm \prod_{n=1}^{N-1}\eta_n^{\pm 1} \tag{4.26}$$

– *la notation*

$$q^{\pm\delta_a}\eta \equiv (\eta_1, \ldots, q^{\pm 1}\eta_a, \ldots, \eta_N) \tag{4.27}$$

Démonstration. Remarquons tout d'abord que la forme de la matrice de Lax et en particulier sa dépendance en λ impose le degré des éléments de l'algèbre de Yang-Baxter : A et D sont des polynômes de Laurent de degré N, alors que B et C sont des polynômes de Laurent de degré $N-1$. De plus, les matrices de Lax satisfont la propriété

$$L_n(-\lambda) = -\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix} \cdot L_n(\lambda) \cdot \begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix} \tag{4.28}$$

ce qui mène simplement aux relations de parité des polynômes

$$A(-\lambda) = (-1)^N A(\lambda), D(-\lambda) = (-1)^N D(\lambda) \tag{4.29}$$

et

$$B(-\lambda) = (-1)^{N-1} B(\lambda), C(-\lambda) = (-1)^{N-1} C(\lambda) \tag{4.30}$$

La commutativité de la famille $B(\lambda)$, c'est-à-dire $[B(\lambda), B(\mu)] = 0$ et le caractère

2. Pour simplifier, les références à $\boldsymbol{k}$ sont omises quand elles ne sont pas nécéssaires pour la compréhension. On a ainsi, entre autres, $\eta_a = \eta_a^{(k_a)}$.

polynomial de B impliquent la commutativité de tous les coefficients polynomiaux de B. Ceci implique que toutes les valeurs propres de $B(\lambda)$ seront des polynômes de Laurent en λ de degré $N-1$. De plus, la relation de parité $B(-\lambda) = (-1)^{N-1}B(\lambda)$ se retrouve à l'identique pour les valeurs propres de $B(\lambda)$.
Soit $\langle\eta|$ un vecteur propre donné de $B(\lambda)$, nous avons

$$\langle\eta|B(\lambda) = b_\eta(\lambda)\langle\eta| \tag{4.31}$$

où $b_\eta(\lambda)$ est un polynôme de Laurent de degré $N-1$ en λ. La propriété de parité évoquée plus haut implique que cette fonction s'écrit sous la forme

$$b_\eta(\lambda) \equiv c_N(\eta)\prod_{i=1}^{N-1}\left(\frac{\lambda}{c_i(\eta)} - \frac{c_i(\eta)}{\lambda}\right) \tag{4.32}$$

où, comme $\langle\eta|$ est fixé, $c_i(\eta)$ est simplement une notation pour une famille de nombres complexes.
Il est possible, en utilisant les relations de Yang-Baxter, de faire le lien entre les différentes valeurs propres de $B(\lambda)$ et ainsi de déterminer une caractérisation pour les nombres $c_i(\eta)$. En effet, une des relation de Yang-Baxter s'écrit

$$B(\lambda)A(\mu) = b(\lambda,\mu)A(\mu)B(\lambda) + c(\lambda,\mu)B(\mu)A(\lambda) \tag{4.33}$$

Soit $\langle\eta|$ un vecteur propre à gauche de $B(\lambda)$. On a alors, d'après (4.32), $\langle\eta|B(c_i(\eta)) = 0, \forall i \in [\![1, N-1]\!]$. Ainsi, prendre $\mu = c_i(\eta), i \in [\![1, N-1]\!]$ dans (4.33) et appliquer cette égalité à $\langle\eta|$ donne

$$\langle\eta|A(c_i(\eta)) = \frac{q\lambda c_i(\eta)^{-1} - q^{-1}\lambda^{-1}c_i(\eta)}{\lambda c_i(\eta)^{-1} - \lambda^{-1}c_i(\eta)} b_\eta(\lambda)\big[\langle\eta|A(c_i(\eta))\big]B(\lambda) \tag{4.34}$$

Le vecteur $\langle\eta^{(i)}| \equiv \langle\eta|A(c_i(\eta))$ est donc lui aussi un vecteur propre de $B(\lambda)$, de valeur propre

$$b_{\eta^{(i)}}(\lambda) = c_N(\eta^{(i)})\prod_{j=1}^{N-1}\left(\frac{\lambda}{c_j(\eta^{(i)})} - \frac{c_j(\eta^{(i)})}{\lambda}\right) = c_N(\eta)\left(\frac{q\lambda}{c_i(\eta)} - \frac{c_i(\eta)}{q\lambda}\right)\prod_{j\neq i}\left(\frac{\lambda}{c_j(\eta)} - \frac{c_j(\eta)}{\lambda}\right) \tag{4.35}$$

On peut alors réorganiser la famille $c_j(\eta^{(i)})$ pour obtenir les égalités

$$c_j(\eta^{(i)}) = q^{-\delta_{i,j}}c_j(\eta) \quad \forall j \in [\![1, N]\!] \tag{4.36}$$

En réitérant le procédé, on voit que, pour toute famille d'entiers $h_i \in [\![0, p-1]\!], i \in [\![1, N-1]\!]$, l'on peut obtenir un état $\langle\eta^{(\boldsymbol{h})}|$ tel que

$$c_i(\eta^{(\boldsymbol{h})}) = q^{-h_i}c_i(\eta) \quad \forall i \in [\![1, N-1]\!] \tag{4.37}$$

La caractérisation du nombre $c_N(\eta)$ passe par la relation de commutation $B(\lambda)\Theta = q\Theta B(\lambda)$. Cette relation implique que $\langle\eta|\Theta$ est un vecteur propre de $B(\lambda)$, de valeur propre $q^{-1}b_\eta(\lambda)$. De plus, étant vraie pour tout λ, cette relation implique de n'utiliser que le facteur commun $c_N(\eta)$. L'action de Θ sur un état sera alors définie par

$$\langle \eta' | \equiv \langle \eta | \Theta \tag{4.38}$$

où $\langle \eta'|$ est un état propre de $B(\lambda)$ caractérisé par

$$c_i(\eta') = q^{-\delta_{i,N}} c_i(\eta) \quad \forall i \in [\![1, N]\!] \tag{4.39}$$

Renommer $c_i(\eta)$ en $\eta_i^{(0)}$ permet au final d'obtenir les équations (4.21) et (4.22).

L'obtention des expressions des opérateurs $A(\lambda)$ et $D(\lambda)$ dans la représentation par séparation des variables se fait simplement par interpolation. En effet, on connaît l'expression de ces polynômes sur un état $\langle \eta|$ en $N-1$ points $\lambda = c_i(\eta)$, ainsi qu'en les asymptotes $\lambda \to \infty$ et $\lambda \to 0$, où ces opérateurs ont proportionnels à $\Theta^{\pm 1}$. Cette interpolation donne les formules (4.23) et (4.24). □

Remarque 4.1. Pour le modèle de sine-Gordon étudié dans la section précédente, dans le cas N pair, les éléments de la matrice de monodromie sont des polynômes de Laurent de même degré que pour le modèle τ_2 étudié ici. La paramétrisation en termes de variables séparées est donc la même, ce qui revient à ajouter au cas impair les variables séparées « asymptotiques »T_N et η_N.

Valeurs moyennes des opérateurs

Soit $O(\lambda)$ un élément de la matrice de monodromie, sa valeur moyenne est définie par

$$\mathcal{O}(\lambda) \equiv \prod_{i=1}^{p} O(q^i \lambda) \tag{4.40}$$

Comme les relations de Yang-Baxter imposent la commutativité des familles $A(\lambda)$, $B(\lambda)$, $C(\lambda)$ et $D(\lambda)$, le produit dans la définition n'est pas ordonné. De plus, les valeurs moyennes sont en fait des fonctions de $\Lambda \equiv \lambda^p$, c'est pourquoi elles seront parfois notées $\mathcal{O}(\Lambda)$ et considérées comme des polynômes en Λ. Dans ce cas, leur degré est de N pour $\mathcal{A}$ et $\mathcal{D}$, et $N-1$ pour $\mathcal{B}$ et $\mathcal{C}$.
Dans le cas de la représentation par séparation des variables, nous avons les résultats suivants :

Théorème 4.2. – *Les valeurs moyennes $\mathcal{A}(\Lambda)$, $\mathcal{B}(\Lambda)$, $\mathcal{C}(\Lambda)$ et $\mathcal{D}(\Lambda)$ sont centrales.*
– *Soit $\mathcal{L}_n(\Lambda)$ la matrice dont les éléments sont les valeurs moyennes des éléments de la matrice de Lax au site n* [3], *et*

$$\mathcal{M}(\Lambda) = \begin{pmatrix} \mathcal{A}(\Lambda) & \mathcal{B}(\Lambda) \\ \mathcal{C}(\Lambda) & \mathcal{D}(\Lambda) \end{pmatrix}. \tag{4.41}$$

3. Explicitement, si $L_n(\lambda) = \begin{pmatrix} L_{n,11}(\lambda) & L_{n,12}(\lambda) \\ L_{n,21}(\lambda) & L_{n,11}(\lambda) \end{pmatrix}$, alors $\mathcal{L}_n(\Lambda) = \begin{pmatrix} \mathcal{L}_{n,11}(\Lambda) & \mathcal{L}_{n,12}(\Lambda) \\ \mathcal{L}_{n,21}(\Lambda) & \mathcal{L}_{n,11}(\Lambda) \end{pmatrix}$ avec $\mathcal{L}_{n,ij}(\Lambda) = \prod_{k=1}^{p} L_{n,ij}(q^k \lambda)$.

Nous avons alors la relation

$$\mathcal{M}(\Lambda) = \mathcal{L}_N(\Lambda) \cdot \mathcal{L}_{N-1}(\Lambda) \dots \mathcal{L}_1(\Lambda) \tag{4.42}$$

Démonstration. La démonstration de ces propositions est très similaire à celle de la Proposition 3 de [157].

- La centralité de $\mathcal{B}(\Lambda)$ se montre en prenant directement son action sur n'importe quel état, ce qui donne

$$\mathcal{B}(\Lambda) = Z_N \prod_{a=1}^{N-1} (\Lambda/Z_a - Z_a/\Lambda) \text{ avec } Z_a \equiv \left(\eta_a^{(0)}\right)^p \tag{4.43}$$

Soit $\langle\eta|$ un état propre de $B(\lambda)$, on a alors la relation

$$\langle\eta|A(\eta_a) = a^{(SOV)}(\eta_a)\langle q^{-\delta_a}\eta|\forall a \in [\![1, n-1]\!] \tag{4.44}$$

En itérant, on a les relations

$$\mathcal{A}(Z_r) = \prod_{k=1}^{p} a^{(SOV)}(q^k\eta_r) \text{ et } \mathcal{D}(Z_r) = \prod_{k=1}^{p} d^{(SOV)}(q^k\eta_r) \tag{4.45}$$

Ces relations, combinées au fait que les asymptotes de $\mathcal{A}(\Lambda)$ et $\mathcal{D}(\Lambda)$ sont centrales en 0 et à l'infini, suffisent pour montrer par interpolation que les valeurs moyennes des opérateurs $A(\lambda)$ et $D(\lambda)$ sont centrales.

- Séparons la chaîne en deux sous-chaînes, notées 2 et 1, pour lesquelles les matrices de monodromie et leur éléments seront notées avec un indice. On a ainsi

$$A(\lambda) = A_2(\lambda)A_1(\lambda) + B_2(\lambda)C_1(\lambda) \tag{4.46}$$

et trois autres relations similaires portant sur $B(\lambda)$, $C(\lambda)$ et $D(\lambda)$. Montrer que ces relations sont également valides pour les valeurs moyennes permettra, par récurrence sur le nombre total de sites, de montrer la relation (4.42).
Sans perte de généralité, considérons le cas de $\mathcal{A}$. Prendre sa valeur moyenne dans l'égalité (4.46) mène à une somme de 2^p termes. deux de ces termes correspondront aux valeurs moyennes de $A_2(\lambda)A_1(\lambda)$ et $B_2(\lambda)C_1(\lambda)$, alors que les 2^p-2 termes restants feront intervenir un nombre de facteurs $A_2(\lambda)$ compris entre 1 et $p-1$. Ces terme ne produiront des valeurs propres modifiées de $B_2(\lambda)$, et seront en contradiction avec le caractère central de $\mathcal{A}(\Lambda)$. La seule possibilité pour préserver cette propriété est l'annulation des termes croisés, et donc on a la relation

$$\mathcal{A}(\Lambda) = \mathcal{A}_2(\Lambda)\mathcal{A}_1(\Lambda) + \mathcal{B}_2(\Lambda)\mathcal{C}_1(\Lambda) \tag{4.47}$$

De manière similaire, on peut montrer les trois autres relations portant sur $\mathcal{B}(\lambda)$, $\mathcal{C}(\lambda)$ et $\mathcal{D}(\lambda)$, ce qui permet donc de prouver la relation (4.42).

□

4.2.2 Construction par récurrence de la base des variables séparées

Construction pour un site Construisons les états

$$\langle q^{h_1}\eta_1^{(0)}| \equiv \sum_{k=1}^{p} \frac{q^{-k(h_1+1/2)}\prod_{r=1}^{k}(q^{r-1/2}\mathbb{a}_1 + q^{-r+1/2}\mathbb{b}_1)}{(\mathbb{a}_1^p + \mathbb{b}_1^p)^{k/p}}\langle 1,k| \tag{4.48}$$

pour $h_1 \in [\![1,p]\!]$. L'action de B sur ces états est [4]

$$\langle q^{h_1}\eta_1^{(0)}|B = q^{h_1}\eta_1^{(0)}\langle q^{h_1}\eta_1^{(0)}| \tag{4.49}$$

avec $\eta_1^{(0)}$ une des racines de $\left(\eta_1^{(0)}\right)^p = q^{p/2}(\mathbb{a}_1^p + \mathbb{b}^p)$. Les actions de $A(\lambda)$ et $D(\lambda)$ sont

$$\langle q^{h_1}\eta_1^{(0)}|A(\lambda) = \lambda\alpha_1\langle q^{h_1-1}\eta_1^{(0)}| - \lambda^{-1}\beta_1\langle q^{h_1+1}\eta_1^{(0)}| \tag{4.50}$$

$$\langle q^{h_1}\eta_1^{(0)}|D(\lambda) = \lambda^{-1}\gamma_1\langle q^{h_1-1}\eta_1^{(0)}| - \lambda\delta_1\langle q^{h_1+1}\eta_1^{(0)}| \tag{4.51}$$

Ce qui correspond bien à la forme recherchée pour un site.

Construction pour N sites La construction par récurrence pour une chaîne de N sites passe par la séparation de cette chaîne en deux sous-chaînes. Soit $M \in [\![1, N-1]\!]$, on définit

$$\begin{pmatrix} A_1(\lambda) & B_1(\lambda) \\ C_1(\lambda) & D_1(\lambda) \end{pmatrix} \equiv L_{N-M}(\lambda)\cdot L_{N-M-1}(\lambda)\cdot\dots\cdot L_1(\lambda) \tag{4.52}$$

$$\begin{pmatrix} A_2(\lambda) & B_2(\lambda) \\ C_2(\lambda) & D_2(\lambda) \end{pmatrix} \equiv L_N(\lambda)\cdot L_{N-1}(\lambda)\cdot\dots\cdot L_{N-M+1}(\lambda) \tag{4.53}$$

l'hypothèse de récurrence montre que les opérateurs $B_1(\lambda)$ et $B_2(\lambda)$ sont diagonaux. Soit respectivement $\langle\chi_1|$ et $\langle\chi_2|$ leurs états propres, les valeurs propres étant caractérisées par les familles de nombres $(\chi_{1,1},\dots,\chi_{1,N-M})$ et $(\chi_{2,1},\dots,\chi_{2,M})$. Par exemple, $\langle\chi_2|B_2(\lambda) = \chi_{2,M}\prod_{a=1}^{M}(\lambda/\chi_a - \chi_a/\lambda)$. Nous allons chercher les états propres de $B(\lambda)$ sous la forme

$$\langle\eta| = \sum_{\chi_1,\chi_2} K(\eta,\chi_2,\chi_1)\langle\chi_2|\otimes\langle\chi_1| \tag{4.54}$$

Notons tout d'abord que les états propres étant définis à une constante multiplicative près, le résultat ne donnera pas les valeurs des coefficients $K(\eta,\chi_2,\chi_1)$, mais uniquement les valeurs des rapports $K(\eta,\chi_2,\chi_1)/K(\eta',\chi_2',\chi_1')$. Fixer un de ces coefficients permettra de déterminer les autres.

4. Pour un site, seuls les opérateurs $A(\lambda)$ et $D(\lambda)$ dépendent de λ.

Dépendance de K par rapport à $\chi_{1,a}, a \in [\![1, N-M]\!]$ et $\chi_{2,a}, a \in [\![1, M]\!]$ On a la décomposition

$$B(\lambda) = A_2(\lambda)B_1(\lambda) + B_2(\lambda)D_1(\lambda) \tag{4.55}$$

Utliser cette décomposition à droite de (4.54) en des valeurs de λ particulières permet d'obtenir des relations simples reliant les coefficients en des points différents. Ainsi, en $\lambda = \chi_{1,a}, a \in [\![1, N-M-1]\!]$ un des zéros de $B_1(\lambda)$, on obtient la relation

$$\frac{K(\eta, \chi_2, q^{-\delta_a}\chi_1)}{K(\eta, \chi_2, \chi_1)} = \frac{\eta_N}{d_1^{(SOV)}(q^{-1}\chi_{1,a})\chi_{2,M}} \frac{\prod_{b=1}^{N-1}(\chi_{1,a}/\eta_b - \eta_b/\chi_{1,a})}{\prod_{b=1}^{M-1}(\chi_{1,a}/\chi_{2,b} - \chi_{2,b}/\chi_{1,a})} \tag{4.56}$$

alors qu'en $\lambda = \chi_{2,a}, a \in [\![1, M-1]\!]$, on obtient

$$\frac{K(\eta, q^{\delta_a}\chi_2, \chi_1)}{K(\eta, \chi_2, \chi_1)} = \frac{\eta_N}{a_2^{(SOV)}(q\chi_{2,a})\chi_{1,N-M}} \frac{\prod_{b=1}^{N-1}(\chi_{2,a}/\eta_b - \eta_b/\chi_{2,a})}{\prod_{b=1}^{N-M-1}(\chi_{2,a}/\chi_{1,b} - \chi_{1,b}/\chi_{2,a})} \tag{4.57}$$

avec $a_2^{(SOV)}$ et $d_1^{(SOV)}$ les fonctions apparaissant dans l'action de $A_2(\lambda)$ et $D_1(\lambda)$ une fois l'hypothèse de récurrence utilisée.

Dépendance de K par rapport à $\chi_{1,N-M}$ et $\chi_{2,M}$ Comme précisé dans a remarque précédente, cette dépendance est déterminée par les asymptotes de $B(\lambda)$. Définissons pour cela les opérateurs $B^{\pm}$ dont l'action dans la base des variables séparées est

$$\langle \eta | B^{\pm} \equiv \eta_N \prod_{i=1}^{N-1} \eta_i^{\mp 1} \langle \eta | \tag{4.58}$$

Ces opérateurs représentent tout simplement les asymptotes de B en $\lambda \to \infty$ pour B^+ et $\lambda \to 0$ pour B^-. La décomposition (4.55) permet d'écrire ces opérateurs en fonction des éléments des deux sous-chaînes :

$$B^{\pm} = a_{2,\pm}\Theta_2^{\pm 1}\chi_{1,N-M} \prod_{i=1}^{N-M-1} \chi_{1,i}^{\mp 1} + d_{1,\pm}\Theta_1^{\mp 1}\chi_{2,M} \prod_{i=1}^{M-1} \chi_{2,i}^{\pm 1} \tag{4.59}$$

L'action de cette décomposition sur les états peut être simplifiée, en définissant les états

$$\overline{\langle \eta_N^{(h_N)}}, \left\{\eta_i^{(h_i)}\right\} | = \overline{\langle \eta_N^{(h_N)}}, \eta_{N-1}^{(h_{N-1})}, \ldots, \eta_1^{(h_1)} | \equiv \sum_{k=1}^{p} q^{kh_N} \langle \eta_N^{(k)}, \eta_{N-1}^{(h_{N-1})}, \ldots, \eta_1^{(h_1)} | \tag{4.60}$$

qui sont les transformées de Fourier discrètes des états propres par rapport à la dernière variable. Par conséquent, ces états sont des états propres de l'opérateur Θ [5] alors que $B(\lambda)$ est un opérateur de décalage pour ces états. Explicitement, on a

$$\overline{\langle \eta_N^{(h_N)}}, \left\{\eta_i^{(h_i)}\right\} | \Theta = q^{h_N} \overline{\langle \eta_N^{(h_N)}}, \left\{\eta_i^{(h_i)}\right\} | \tag{4.61}$$

$$\overline{\langle \eta_N^{(h_N)}}, \left\{\eta_i^{(h_i)}\right\} | B(\lambda) = \eta_N^{(0)} \prod_{n=1}^{N-1} \left(\frac{\lambda}{\eta_n} - \frac{\eta_n}{\lambda}\right) \overline{\langle \eta_N^{(h_N+1)}}, \left\{\eta_i^{(h_i)}\right\} | \tag{4.62}$$

5. Les asymptotes de A et D en $\lambda \to 0$ ou $\lambda \to \infty$ montrent que l'action de l'opérateur Θ dans la base des variables séparées est $\langle \eta | \Theta = \langle q^{-\delta_N} \eta |$.

La relation de récurrence (4.54) peut alors se réécrire

$$\langle \eta_N^{(h_N)}, \eta_{N-1}^{(h_{N-1})}, \ldots, \eta_1^{(h_1)} | = \sum_{\chi_1, \chi_2} \bar{K}(\eta, \chi_2, \chi_1) \overline{\langle \chi_{2,M}, \{\chi_{2,a}\} |} \otimes \overline{\langle \chi_{1,N-M}, \{\chi_{1,a}\} |} \tag{4.63}$$

avec la transformée de Fourier discrète de K

$$\bar{K}(\eta, \left\{\chi_{2,a}^{(h_{2,a})}\right\}, \left\{\chi_{1,b}^{(h_{1,b})}\right\}) \equiv \frac{1}{p^2} \sum_{k,k'=1}^{p} q^{-k' h_{1,N-M} + k h_{2,M}} K(\eta, q^{k\delta_M} \chi_2, q^{k'\delta_{N-M}} \chi_1) \tag{4.64}$$

Finalement, l'action des opérateurs $B^{\pm}$ permet d'obtenir un système de deux équations :

$$\bar{K}(\eta, \chi_2, \chi_1) = x_+ \bar{K}(\eta, \chi_2, q^{-\delta_{N-M}} \chi_1) + y_+ \bar{K}(\eta, q^{-\delta_M} \chi_2, \chi_1) \tag{4.65}$$

$$\bar{K}(\eta, \chi_2, \chi_1) = x_- \bar{K}(\eta, \chi_2, q^{-\delta_{N-M}} \chi_1) + y_- \bar{K}(\eta, q^{-\delta_M} \chi_2, \chi_1) \tag{4.66}$$

avec

$$x_\pm \equiv \frac{a_{2,\pm} \chi_{1,N-M}^{(0)}}{\eta_N^{(0)}} \left(\frac{q^{h_{2,M}} \prod_{i=1}^{N-1} \eta_i}{\prod_{i=1}^{N-M-1} \chi_{1,i}} \right)^{\pm 1} \quad \text{et} \quad y_\pm \equiv \frac{d_{1,\pm} \chi_{2,M}^{(0)}}{\eta_N^{(0)}} \left(\frac{\prod_{i=1}^{N-1} \eta_i}{q^{h_{1,N-M}} \prod_{i=1}^{M-1} \chi_{2,i}} \right)^{\pm 1} \tag{4.67}$$

ce qui mène simplement aux relations de récurrence

$$\frac{\bar{K}(\eta, q^{-\delta_M} \chi_2, \chi_1)}{\bar{K}(\eta, \chi_2, \chi_1)} = \frac{x_- - x_+}{x_- y_+ - x_+ y_-} \quad \text{et} \quad \frac{\bar{K}(\eta, \chi_2, q^{-\delta_{N-M}} \chi_1)}{\bar{K}(\eta, \chi_2, \chi_1)} = \frac{y_+ - y_-}{x_- y_+ - x_+ y_-} \tag{4.68}$$

La connaissance des ces relations de récurrence permet de déterminer complètement (à un facteur global près) $\bar{K}(\eta, \chi_2, \chi_1)$ lorsque $\chi_{2,M}$ et $\chi_{1,N-M}$ varient, ce qui revient à connaître complètement les coefficients $K(\eta, \chi_2, \chi_1)$ lorsque $\chi_{2,M}$ et $\chi_{1,N-M}$ varient.

Dépendance de K par rapport à η Cette dépendance est obtenue en étudiant la décomposition de $D(\lambda)$ sur les sous-chaînes ; en effet, on sait que $\langle \eta | D(\eta_i) = \langle q^{\delta_i} \eta |$, ce qui permet de faire varier précisément η. Cette décomposition est

$$D(\lambda) = D_2(\lambda) D_1(\lambda) + C_2(\lambda) B_1(\lambda) \tag{4.69}$$

De plus, la relation (4.55) et les relations de Yang-Baxter [6] impliquent

$$\langle \eta | B_1(\eta_i) = -\langle \eta | D_1(\eta_i) A_2^{-1}(q\eta_i) B_2(q\eta_i) \tag{4.70}$$

Ces deux relations, conjuguées avec l'écriture de C via le déterminant quantique, permettent d'obtenir finalement, pour tout $i \in [\![1, N-1]\!]$,

$$\langle \eta | D(\eta_i) = -\det{}_q T_2(q\eta_i) \langle \eta | B_2^{-1}(q\eta_i) B_1(\eta_i) \tag{4.71}$$

Il est alors simple de voir qu'on a, pour tout $i \in [\![1, N-1]\!]$,

$$\frac{K(q^{\delta_i}\eta, \chi_2, \chi_1)}{K(\eta, \chi_2, \chi_1)} = -\frac{\det{}_q T_2(q\eta_i)}{d^{(SOV)}(\eta_i)} \frac{\chi_{1,N-M} \prod_{a=1}^{N-M-1} (\eta_i/\chi_{1,a} - \chi_{1,a}/\eta_i)}{\chi_{2,M} \prod_{a=1}^{M-1} (\eta_i/\chi_{2,a} - \chi_{2,a}/\eta_i)} \tag{4.72}$$

6. Via la relation $B(q\lambda)A(\lambda) = A(q\lambda)B(\lambda)$, valide pour tout λ.

Pour finir, les asymptotes de (4.69) donnent la relation

$$\frac{K(q^{\delta_i}\eta, \chi_2, \chi_1)}{K(\eta, q^{\delta_M}\chi_2, q^{\delta_{N-M}}\chi_1)} = \frac{\chi_{2,D}^+ \chi_{1,D}^+ \prod_{a=1}^{M-1} \chi_{2,a} \prod_{a=1}^{N-M-1} \chi_{1,a}}{\eta_D^+ \prod_{a=1}^{N-1} \eta_a} \tag{4.73}$$

Les relations (4.56), (4.57), (4.68), (4.72) et (4.73) permettent donc de construire, par récurrence sur le nombre de sites, les états propres de $B(\lambda)$.

Détermination des constantes $\left(\eta_i^{(0)}\right)^p$, $\mathcal{A}(\eta_i)$ et $\mathcal{D}(\eta_i)$ Les relations (4.56), (4.57) et (4.68), ainsi que la cyclicité $q^p = 1$, imposent des relations sur des quantités comme $\chi_{1,a}^p$, $\prod_{k=1}^p D_1(q^k \chi_{1,i})$ ou encore η_i^p. Toutes ces relations peuvent, par interpolation, être mises sous la forme d'une seule égalité de polynômes :

$$\mathcal{A}_2(\lambda)\mathcal{B}_1(\lambda) + \mathcal{B}_2(\lambda)\mathcal{D}_1(\lambda) = Z_N \prod_{a=1}^{N-1} (\lambda^p/Z_a - Z_a/\lambda^p) \tag{4.74}$$

où, $\mathcal{O}(\lambda)$ désigne la valeur moyenne d'un opérateur générique O en λ, c'est-à-dire

$$\mathcal{O}(\lambda) = \prod_{k=1}^{p} O(q^k \lambda) \tag{4.75}$$

et avec la notation

$$Z_a = \left(\eta_a^{(k)}\right)^p \forall k \in [\![1, p]\!], \forall a \in [\![1, N]\!] \tag{4.76}$$

Les constantes $Z_a, a \in [\![1, n]\!]$ peuvent donc également être déterminées par récurrence via l'étude des zéros et des asymptotes du terme à gauche de l'équation (4.74).
Il est également possible de déterminer par récurrence les valeurs moyennes des opérateurs A et D

4.2.3 Simplicité du spectre de B

Dans le cas du modèle τ_2, il est possible de montrer que la description par séparation des variables permet d'obtenir toutes les valeurs propres de $B(\lambda)$, et que ces valeurs propres sont toutes distinctes. Remarquons tout d'abord que la simplicité de ce spectre, dans la repréentation par SdV, est équivalente à la condition

$$Z_a \neq Z_b \quad \forall a \neq b \quad a, b \in [\![1, N-1]\!] \tag{4.77}$$

Si cette condition est réalisée, on remarque alors que les valeurs propres de $B(\lambda)$ fournies par la méthode SdV génèrent un ensemble de p^N valeurs propres distinctes. Cela signifie que cette méthode permet d'obtenir la totalité des valeurs propres et états propres, et prouve sa complétude.
Pour montrer la simplicité du spectre de $B(\lambda)$ et la complétude de la méthode, il suffit de prouver le théorème suivant :

Théorème 4.3. *Les valeurs des paramètres Z_a, $a \in [\![1, N-1]\!]$, sont distinctes pour presque toutes les valeurs des 6N paramètres $\mathbb{a}_n$, $\mathbb{b}_n$, $\mathbb{c}_n$, $\mathbb{d}_n$, α_n et β_n.*

Démonstration. La démonstration est basée sur l'observation que les N paramètres de la représentation SdV Z_a dépendent des $6N$ paramètres du modèle τ_2. En particulier, il est possible d'écrire

$$Z \equiv (Z_1, \ldots, Z_{N-1}) = f(\alpha_1, \ldots, \alpha_{N-1}) \tag{4.78}$$

où l'on se limite à exprimer les $N-1$ paramètres Z comme une fonction des $N-1$ paramètres $(\alpha_1, \ldots, \alpha_{N-1})$ [7]. f étant une fonction de $\mathbb{C}^{N-1}$ dans lui-même, il est possible d'en exprimer le jacobien,

$$J(\alpha, \beta, \mathbb{a}, \mathbb{b}, \mathbb{c}, \mathbb{d}) = \det\left(\frac{\partial Z_r}{\partial \alpha_s}\right)_{r,s=1\ldots N-1} \tag{4.79}$$

Si ce jacobien est non nul pour certaines valeurs des $6N$ paramètres, la fonction f est inversible, et les paramètres Z seront alors distincts pour toutes les valeurs de $\alpha_i, \quad i \in [\![1, N-1]\!]$ excepté sur une sous-variété (a priori non finie).

Prenons un ensemble de $6N$ paramètres vérifiant les relations

$$\mathbb{a}_n^p + \mathbb{b}_n^p = 0 \text{ et } \mathbb{c}_n^p + \mathbb{d}_n^p = 0 \quad \forall n \in [\![1, N-1]\!] \tag{4.80}$$

La matrice $\mathcal{L}_n$ est alors diagonale pour $n \in [\![1, N-1]\!]$, et un calcul donne l'égalité

$$q^{p/2}(\mathbb{a}_N^p + \mathbb{b}_N^p) \prod_{n=1}^{N-1} \frac{\mathbb{a}_n^p \mathbb{d}_n^p}{\alpha_n^{p/2} \beta_n^{p/2}} \left(\frac{\Lambda \alpha_n^{p/2}}{\beta_n^{p/2}} - \frac{\beta_n^{p/2}}{\Lambda \alpha_n^{p/2}} \right) = Z_N \prod_{a=1}^{N-1} (\Lambda / Z_a - Z_a / \Lambda) \tag{4.81}$$

et on a, pour ces valeurs particulières, $J \neq 0$. La dépendance [8] des paramètres Z en les paramètres du modèle τ_2 implique alors que le jacobien sera non nul pour presque toutes les valeurs de ces $6N$ paramètres. □

4.3 Problème spectral pour τ_2

4.3.1 Équation de Baxter et valeurs propres de τ_2

La caractérisation des valeurs et états propres de l'opérateur τ_2 se fait via l'utilisation d'équations de Baxter. Il s'agit d'équations de la forme

$$t(\lambda)Q(\lambda) = a(\lambda)Q(q^{-1}\lambda) + d(\lambda)Q(q\lambda) \tag{4.82}$$

Le lien entre l'étude des éléments propres de τ_2 et ce type d'équation est donné par la propriété suivante :

7. Les paramètres Z pouvant être déterminés par les équations (4.42) et (4.43), ils ne dépendent que des puissances p des $6N$ paramètres du modèle τ_2

8. Cette dépendance se traduit par le fait que, en notant $\sigma_n(Z)$ le polynôme symétrique de degré n en les variables Z, le quotient $\sigma_n(Z)/\sigma_{N-1}(Z)$ est un polynôme de degré 1 en les puissances p des $6N$ paramètres.

Proposition 4.1. *Soit* $|t\rangle$ *un état propre à droite de* $\tau_2(\lambda)$*, de valeur propre* $t(\lambda)$*. Définissons la fonction*

$$\Psi_t(\eta) \equiv \langle\eta|t\rangle \tag{4.83}$$

où $\langle\eta|$ *est un vecteur propre à gauche de* $B(\lambda)$*. On a alors l'équation*

$$t(\eta_a)\Psi_t(\eta) = a^{(SOV)}(\eta_a)\Psi_t(q^{-\delta_a}\eta) + d^{(SOV)}(\eta_a)\Psi_t(q^{\delta_a}\eta) \tag{4.84}$$

Démonstration. Cette relation se démontre simplement en développant l'égalité

$$\langle\eta|\tau_2(\lambda)|t\rangle = \langle\eta|A(\lambda) + D(\lambda)|t\rangle \tag{4.85}$$

□

La fonction d'onde $\Psi_t(\eta)$ permet de montrer la simplicité du spectre de τ_2. Établissons tout d'abord le lemme suivant :

Lemme 4.1. *Pour presque toutes les valeurs des* $6N$ *paramètres du modèle, les valeurs moyennes des opérateurs* $A(\lambda)$ *et* $D(\lambda)$ *satisfont les inégalités*

$$\mathcal{A}(Z_a) \neq \mathcal{D}(Z_a) \quad \forall a \in [\![1, N-1]\!] \tag{4.86}$$

Démonstration. Définissons la fonction

$$\mathcal{F}_a(\alpha, \beta, \mathbb{a}, \mathbb{b}, \mathbb{c}, \mathbb{d}) \equiv \mathcal{A}(Z_a) - \mathcal{D}(Z_a) \tag{4.87}$$

Comme pour la démonstration de la simplicité du spectre de $B(\lambda)$, la dépendance de $\mathcal{F}$ en les $6N$ paramètres implique qu'il suffit de montrer que cette fonction est non nulle pour une valeur donnée des paramètres pour montrer qu'elle est non nulle pour presque tous les paramètres.
prenons un ensemble de $6N$ paramètres vérifiant

$$\alpha_1\beta_1 = \mathbb{b}_1\mathbb{d}_1 = \mathbb{a}_1\mathbb{c}_1 \text{ et } \mathbb{c}_1^p + \mathbb{d}_1^p \neq \mathbb{a}_1^p + \mathbb{b}_1^p \tag{4.88}$$

$$\mathbb{a}_n = \mathbb{d}_n, \mathbb{b}_n = \mathbb{c}_n, \beta_n = -\mathbb{a}_n\mathbb{b}_n/\alpha_n \quad \forall n \in [\![2, N]\!] \tag{4.89}$$

Dans ce cas, on a $\mathcal{F}_a$ proportionnel à $\mathcal{B}_2(Z_a)$, la valeur moyenne de l'opérateur B obtenu en faisant le produit des matrices de Lax des sites N à 2. Il est possible de montrer que l'annulation de ce facteur n'est possible que si Z_a est un zéro d'ordre au moins deux du déterminant quantique du produit $L_N \dots L_2$. Comme les zéros de ce déterminant quantique sont les nombres $\pm\mathbb{a}_n^p/\alpha_n^p$ et $\pm\mathbb{b}_n^p/\alpha_n^p$ pour $n \in [\![2, N]\!]$, le déterminant quantique n'a en général pas de double zéro, et donc les fonctions $\mathcal{F}_a$ sont non nulles pour presque toutes les valeurs des $6N$ paramètres. □

Ce résultat permet de montrer que le théorème suivant :

Théorème 4.4. *Pour presque toutes les valeurs des* $6N$ *paramètres, le spectre de* $\tau_2(\lambda)$ *est simple.*

Démonstration. Cette simplicité se démontre en supposant qu'il existe deux vecteurs propres ayant la même valeur propre $t(\lambda)$. Notons $\Psi_t(\eta)$ et $\bar{\Psi}_t(\eta)$ leurs fonctions d'ondes respectives. On peut alors définr leur Wronskien de la façon suivante :

$$W_r(\eta) = \Psi_t(\eta)\bar{\Psi}_t(q^{-\delta_r}\eta) - \bar{\Psi}_t(\eta)\Psi_t(q^{-\delta_r}\eta) \quad \forall r \in [\![1, N-1]\!] \tag{4.90}$$

L'utilisation des équations de Baxter (4.84) satisfaites par les fonctions d'onde Ψ_t et $\bar{\Psi}_t$ ainsi que la cyclicité de la représentation mènent alors à l'égalité

$$(\mathcal{A}(Z_r) - \mathcal{D}(Z_r)) \prod_{k=1}^{p} W_r(\eta_1, \ldots, q^k\eta_r, \ldots, \eta_N) \tag{4.91}$$

Le lemme précédent implique alors l'annulation du produit des Wronskiens, qui entraîne à son tour la proportionnalité entre les deux solutions. □

Soit $t(\lambda)$ un élément du spectre de τ_2 dans le sous-ensemble $\Sigma^k_{\tau_2}$ et $Q_t(\eta_r)$ une solution des équations de Baxter discrètes (4.84). La simplicité du spectre impose donc la relation de proportionnalité

$$\Psi_t(\eta) \propto \eta_N^{-k} \prod_{a=1}^{N-1} Q_t(\eta_a) \tag{4.92}$$

dans laquelle le facteur de proportionnalité peut faire intervenir les paramètres Z_a.

4.3.2 Caractérisation du spectre de l'opérateur de transfert via un déterminant

Considérons à présent l'équation de Baxter discrète (4.84). Elle peut s'écrire pour les p valeurs possibles du paramètre η_a, c'est-à-dire pour $\eta_a = q^k\eta_a^{(0)}$, $k \in [\![1, p]\!]$. On obtient alors un ensemble de p équations, faisant intervenir les fonctions t, $a^{(SOV)}$ et $d^{(SOV)}$ en les points $q^k\eta_a^{(0)}$, ainsi que les p quantités $\Psi_t(q^{k\delta_a}\eta)$. Le tout forme un système de p équations linéaires où ces quantités sont les inconnues. L'existence d'une solution non-nulle correspond à l'annulation d'un déterminant, nommément

$$\begin{vmatrix} t(\eta^{(0)}) & -d^{(SOV)}(\eta^{(0)}) & 0 & \cdots & -a^{(SOV)}(\eta^{(0)}) \\ -a^{(SOV)}(q\eta^{(0)}) & t(q\eta^{(0)}) & -d^{(SOV)}(q\eta^{(0)}) & \cdots & 0 \\ 0 & -a^{(SOV)}(q^2\eta^{(0)}) & t(q^2\eta^{(0)}) & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ -d^{(SOV)}(q^{p-1}\eta^{(0)}) & 0 & 0 & \cdots & t(q^{p-1}\eta^{(0)}) \end{vmatrix} \tag{4.93}$$

Il est en fait possible de caractériser le spectre de τ_2 à l'aide de déterminants de ce genre.
Pour cela, définissons les fonctions

$$\mathrm{A}(\lambda) \equiv \prod_{n=1}^{N} (\alpha_n\beta_n)^{1/2}(\lambda/\mu_{n,+} - \mu_{n,+}/\lambda) \tag{4.94}$$

$$\mathrm{D}(\lambda) \equiv \prod_{n=1}^{N} (\frac{\mathbb{a}_n\mathbb{b}_n\mathbb{c}_n\mathbb{d}_n}{\alpha_n\beta_n})^{1/2}(q\lambda/\mu_{n,-} - \mu_{n,-}/q\lambda) \tag{4.95}$$

qui vérifient la relation $\mathrm{A}(\lambda)\mathrm{D}(q^{-1}\lambda) = \det_q M(\lambda)$, et à partir de ces fonctions définissons à nouveau

$$\bar{\mathrm{A}}(\lambda) \equiv \alpha(\lambda)\mathrm{A}(\lambda) \text{ et } \bar{\mathrm{D}}(\lambda) \equiv \alpha(q\lambda)^{-1}\mathrm{D}(\lambda) \tag{4.96}$$

avec α la fonction telle que

$$\prod_{k=1}^{p} \bar{\mathrm{A}}(q^k\lambda) + \prod_{k=1}^{p} \bar{\mathrm{D}}(q^k\lambda) = \mathcal{A}(\Lambda) + \mathcal{D}(\Lambda) \tag{4.97}$$

Cette condition revient à imposer que $\prod_{k=1}^{p} \bar{\mathrm{A}}(q^k\lambda)$ et $\prod_{k=1}^{p} \bar{\mathrm{D}}(q^k\lambda)$ soient les valeurs propres de la matrice des valeurs moyennes $\mathcal{M}(\Lambda)$. Ces fonctions satisfont à leur tour $\bar{\mathrm{A}}(\lambda)\bar{\mathrm{D}}(q^{-1}\lambda) = \det_q M(\lambda)$.
Les fonctions $a^{(SOV)}$ et $d^{(SOV)}$ résultent d'un certain choix de jauge, et sont donc dépendantes de la représentation choisie. Il est nécéssaire d'avoir des fonctions bien définies pour pouvoir caractériser le spectre de τ_2, d'où ces définitions, indépendantes de la représentation choisie.
Pour un polynôme de Laurent de degré N donné, pair si N est pair et impair si N est impair, définissons la fonction

$$\mathrm{D}(\lambda) \equiv \begin{vmatrix} t(\lambda) & -\bar{\mathrm{D}}(\lambda) & 0 & \cdots & -\bar{\mathrm{A}}(\lambda) \\ -\bar{\mathrm{A}}(q\lambda) & t(q\lambda) & -\bar{\mathrm{D}}(q\lambda) & \cdots & 0 \\ 0 & -\bar{\mathrm{A}}(q^2\lambda) & t(q^2\lambda) & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ -\bar{\mathrm{D}}(q^{p-1}\lambda) & 0 & 0 & \cdots & t(q^{p-1}\lambda) \end{vmatrix} \tag{4.98}$$

On peut montrer que cette fonction ne dépend de λ que via sa puissance p, notée Λ, que c'est un polynôme de Laurent de degré maximum N, pair si N est pair et impair si N est impair, et qu'elle peut s'exprimer uniquement en termes de t, de la somme des valeurs moyennes de $\bar{\mathrm{A}}(\lambda)$ et $\bar{\mathrm{D}}(\lambda)$ et de la fonction $\lambda \mapsto \bar{\mathrm{A}}(\lambda)\bar{\mathrm{D}}(q^{-1}\lambda)$. Ceci, combiné aux définitions et propriétés de $\bar{\mathrm{A}}(\lambda)$ et $\bar{\mathrm{D}}(\lambda)$, fait que le déterminant (4.93) peut s'écrire $\mathrm{D}(Z_a)$.
Le polynôme $\mathrm{D}(\Lambda)$ est donc un polynôme de Laurent de degré N qui s'annule, dans le cas où $t(\lambda)$ est une valeur propre de $\tau_2(\lambda)$, en $N-1$ points. Dans ce cas, on a en plus l'annulation des asymptotes de $\mathrm{D}(\Lambda)$ en 0 et à l'infini, ce qui permet, par interpolation, de montrer que $\mathrm{D}(\Lambda) = 0$, ou encore

Proposition 4.2. *Toute valeur propre de l'opérateur $\tau_2(\lambda)$ est solution de l'équation fonctionnelle*

$$\mathrm{D}(\Lambda) = 0 \tag{4.99}$$

L'inclusion est également vraie dans l'autre sens, c'est-à-dire que toute solution $t(\lambda)$ de l'équation fonctionnelle $\mathrm{D}(\lambda) = 0$ est valeur propre de $\tau_2(\lambda)$. En effet, l'annulation du déterminant $\mathrm{D}(\lambda)$ entraîne l'existence d'une solution non nulle aux équations de Baxter discrètes (4.84), et il est alors possible de déterminer des fonctions d'onde qui décrivent un état propre de $\tau_2(\lambda)$. En fixant la jauge $a^{(SOV)}(\lambda) = \bar{\mathrm{A}}(\lambda)$ et $d^{(SOV)}(\lambda) = \bar{\mathrm{D}}(\lambda)$, nous avons le résultat suivant :

Théorème 4.5. Σ_{τ_2} *coïncide avec l'ensemble des fonctions* $t(\lambda)$ *solutions de* $\mathrm{D}(\Lambda) = 0$*. De plus, il est possible de construire un état propre de l'opérateur* τ_2 *correspondant via les fonctions d'onde*

$$\Psi_t(\eta) = \eta_N^{-k} \prod_{a=1}^{N-1} Q_t(\eta_a) \tag{4.100}$$

où la fonction Q_t *est l'unique*[9] *solution de l'équation de Baxter*

$$t(\lambda)Q_t(\lambda) = \bar{\mathrm{A}}(\lambda)Q_t(q^{-1}\lambda) + \bar{\mathrm{D}}(\lambda)Q_t(q\lambda) \tag{4.101}$$

4.3.3 Lien avec l'équation de Bethe

Dans le cas où l'opérateur de transfert $\tau_2(\lambda)$ est autoadjoint et où les $6N$ paramètres du modèle satisfont les relations

$$\prod_{n=1}^{N} \frac{\alpha_h^*}{\alpha_h} = 1, \quad \frac{\mathbb{b}_n}{\mathbb{b}_n^*} = \frac{\mathbb{a}_n}{\mathbb{a}_n^*}, \quad \frac{\alpha_n^*\alpha_{n+1}}{\alpha_n\alpha_{n+1}} = \frac{\mathbb{b}_n\mathbb{b}_{n+1}^*}{\mathbb{b}_n^*\mathbb{b}_{n+1}} \quad \forall n \in [\![1, N]\!], \tag{4.102}$$

alors pour toute valeur propre de l'opérateur de transfert $t(\lambda) \in \Sigma_{\tau_2}^k$, il existe un unique polynôme de la forme

$$Q_t(\lambda) = \lambda^{a_t} \prod_{h=1}^{N(p-1)-a_t-b_t} (\lambda_h - \lambda) \text{ avec } 0 \le a_t \le p-1 \text{ et } 0 \le a_t + b_t \le N(p-1) \tag{4.103}$$

satisfaisant l'équation de Baxter (4.101). Ce polynôme permet de définir un opérateur de Baxter $Q(\lambda)$ par ses actions sur les états propres de l'opérateur de transfert :

$$Q(\lambda)|t\rangle \equiv Q_t(\lambda)|t\rangle \tag{4.104}$$

qui satisfait l'équation de Baxter et les relations de commutation

$$Q(\lambda)\tau_2(\lambda) = \bar{\mathrm{A}}(\lambda)Q(q^{-1}\lambda) + \bar{\mathrm{D}}(\lambda)Q(q\lambda) \tag{4.105}$$

$$[Q(\lambda), Q(\mu)] = 0, \quad [Q(\lambda), \tau_2(\mu)] = 0 \quad \forall \lambda, \mu \in \mathbb{C} \tag{4.106}$$

De plus, les zéros de ce polynôme permettent de relier les valeurs propres de l'opérateur de transfert à des équations de type ansatz de Bethe. En effet, réécrire l'équation de Baxter aux points où la fonction Q_t s'annule donne la relation

$$\frac{a(\lambda_c)}{d(\lambda_c)} = -q^{-2a_t} \prod_{h=1}^{N(p-1)-a_t-b_t} \frac{q\lambda_c - \lambda_h}{q^{-1}\lambda_c - \lambda_h} \quad \forall c \in [\![1, N(p-1) - a_t - b_t]\!] \tag{4.107}$$

Il existe en fait une bijection entre le spectre de l'opérateur de transfert et l'ensemble des solutions de ce système d'équations satisfaisant certaines conditions de conjugaison. Cela permet de reconstruire l'ensemble des valeurs états propres à partir d'un système d'équations de Bethe.

9. L'unicité aux quasi-constantes près, le terme de quasi-constantes désignant les paramètres Z_a.

4.4 Problème inverse

L'étape suivante vers la détermination des facteurs de forme des exponentielles des champs locaux est la résolution du problème inverse, c'est-à-dire leur expression en fonction des éléments de la matrice de monodromie. Cette résolution est en effet nécéssaire pour pouvoir exprimer les opérateurs u_n et v_n dans le cadre de la représentation des variables séparées.
Cette résolution se fait en deux temps. Tout d'abord, les puissances des opérateurs u_1 et v_1 sont exprimées dans la base des variables séparées, ensuite, un « propagateur », opérateur permettant des permutations cycliques sur les sites, est construit à l'aide des poids de Boltzmann du modèle de Potts chiral.
Les résultats exposés ici sont similaires à ceux obtenus dans le cadre du modèle de sine-Gordon avec un nombre impair de sites, c'est pourquoi seuls les points additionnels seront détaillés. L'ensemble des résultats peut être retrouvé dans l'article [78], dont la suite du chapitre est un résumé.

4.4.1 Reconstructions des opérateurs locaux

La reconstruction des opérateurs locaux se fait via la remaque suivante : en les points où le déterminant quantique s'annule, la matrice de monodromie peut se factoriser sous la forme d'un produit de deux vecteurs :

$$M(\mu_{n,\pm}) = \begin{pmatrix} A(\mu_{n,\pm}) & B(\mu_{n,\pm}) \\ C(\mu_{n,\pm}) & D(\mu_{n,\pm}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P_{n,\pm} \\ P'_{n,\pm} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} Q_{n,\pm} & Q'_{n,\pm} \end{pmatrix} \tag{4.108}$$

Lorsque le zéro considéré est un zéro du déterminant quantique de la matrice de Lax au site 1, les quantités Q et Q' ne font intervenir que des opérateurs et des paramètres issus du site 1. De même, lorsque le zéro considéré est un zéro du déterminant quantique de la matrice de Lax au site N, les quantités P et P' ne font intervenir que des opérateurs et des paramètres issus du site N. Dans le premier cas, il est possible d'obtenir des fonctions des éléments de la matrice de monodromie ne faisant intervenir que les quantités Q et Q'. On a ainsi par exemple

$$B^{-1}(\mu_{1,+})A(\mu_{1,+}) = \left(-\frac{\alpha_1\beta_1}{\mathbb{a}_1\mathbb{b}_1}\right)^{1/2} \mathrm{u}_1^{-1} \tag{4.109}$$

En jouant sur la cyclicité du modèle, il est possible d'obtenir le résultat suivant :

Proposition 4.3. *Les puissances des opérateurs u_1 et v_1 peuvent se reconstruire de la façon suivante :*

$$u_1^{-k} = \left(B^{-1}(\mu_{1,+})A(\mu_{1,+})\right)^k \tag{4.110}$$

$$v_n^{2k} = \frac{1}{p}\left(-\frac{\mathbb{d}_1}{\mathbb{c}_1}\right)^k \frac{1+(\mathbb{c}_1/\mathbb{d}_1)^p}{(\mathbb{b}_1\mathbb{c}_1/\mathbb{a}_1\mathbb{d}_1)^{1/2} - (\mathbb{a}_1\mathbb{d}_1/\mathbb{b}_1\mathbb{c}_1)^{1/2}} \sum_{a=0}^{p-1} q^{k(2a+1)}\beta_{a,1} \tag{4.111}$$

avec

$$\beta_{k,1} \equiv \left(B^{-1}(\mu_{1,+})A(\mu_{1,+})\right)^{k+1} A^{-1}(\mu_{1,-})B(\mu_{1,-}) \left(B^{-1}(\mu_{1,+})A(\mu_{1,+})\right)^{-k} \tag{4.112}$$

Bien que cette proposition donne une solution au problème inverse, elle n'est pas utilisable en l'état pour exprimer les opérateurs locaux au site 1 dans la base des variables séparées. En effet, cette reconstruction fait intervenir des produits et des inverses de l'opérateur $A(\lambda)$, qui est, dans la représentation SdV, une somme de termes.
Pour simplifier ces expressions, définissons, uniquement dans le cadre de la représentation à gauche, les opérateurs coordonnés $\boldsymbol{\eta}$ et $T_a^{\pm}$, dont l'action dans la base propre de $B(\lambda)$ est donnée par

$$\langle\eta|\boldsymbol{\eta}_a \equiv \eta_a\langle\eta| \tag{4.113}$$

$$\langle\eta|T_a^{\pm} \equiv \langle q^{\pm\delta_a}\eta| \tag{4.114}$$

Ils satisfont la relation de commutation $T_a^{\pm}\boldsymbol{\eta}_b = q^{\pm\delta_{a,b}}\boldsymbol{\eta}_b T_a^{\pm}$. Avec ces notations, l'opérateur $B^{-1}(\lambda)A(\lambda)$ s'écrit

$$B^{-1}(\lambda)A(\lambda) = a + b + c \tag{4.115}$$

avec les notations

$$a = \frac{\prod_{i=1}^{N-1}\boldsymbol{\eta}_i}{\boldsymbol{\eta}_N}\lambda a_+ T_N^- \tag{4.116}$$

$$b = -\frac{\prod_{i=1}^{N-1}\boldsymbol{\eta}_i^{-1}}{\boldsymbol{\eta}_N}\lambda^{-1} a_- T_N^+ \tag{4.117}$$

$$c = \frac{1}{\boldsymbol{\eta}_N}\sum_{a=1}^{N-1}\prod_{b\neq a}\frac{1}{\boldsymbol{\eta}_a/\boldsymbol{\eta}_b - \boldsymbol{\eta}_b/\boldsymbol{\eta}_a}\frac{\mathsf{a}^{(SOV)}(\boldsymbol{\eta}_a)}{\lambda/\boldsymbol{\eta}_a - \boldsymbol{\eta}_a/\lambda}T_a^- \tag{4.118}$$

Cette expression est la somme de trois termes, dont les relations de commutation sont très simples. On a en effet

$$ba = q^{-2}ab \quad cb = q^2 bc \quad ca = q^{-2}ac \tag{4.119}$$

Il devient alors simple d'exprimer les puissances de l'opérateur $B^{-1}(\lambda)A(\lambda)$ en fonction des puissances de a, b et c, via une version non commutative du multinôme de Newton. Les puissances de a et b sont triviales, alors que celles de c sont exprimées via le Théorème 3.2. Cela permet de développer toutes les puissances de u_1 dans la base des variables séparées.
L'expression des puissances de v_1 se base davantage sur les relations de Yang-Baxter. Elles permettent d'exprimer de manière simple, comme pour le modèle de sine-Gordon avec les Propositions 3.7 et 3.8, ces puissances en fonction de puissances d'opérateurs $B^{-1}A$. Le développement de ces puissances dans la base des variables séparées, évoqué plus haut, permet alors de développer toutes les puissances de v_1 dans la base des variables séparées.

4.4.2 Propagateur pour le modèle τ_2

La construction du propagateur se base sur un résultat issu de [41] : il existe un opérateur défini sur le produit des espaces quantiques de dimension p qui entrelace les matrices de Lax de deux sites consécutifs, c'est-à-dire qu'il existe un opérateur S_{12} tel que

$$\sum_j L_{2,ij}(\lambda)L_{1,jk}(\lambda)S_{12} = \sum_j S_{12}L_{1,ij}(\lambda)L_{2,jk}(\lambda) \quad \forall i,k \in \{1,2\} \tag{4.120}$$

Cet opérateur d'entrelacement est défini, dans le produit tensoriel des bases propres des opérateurs locaux u_1 et v_1, à l'aide du lien qu'il existe entre les modèles de Potts chiral et τ_2. Les paramètres de chaque site sont alors associés à deux points vivant sur la courbe de $\mathbb{C}^4$ caractérisant le modèle de Potts chiral. Les éléments de matrice de cet opérateur d'entrelacement sont alors les produits de quatre poids de Boltzmann du modèle de Potts chiral. Explicitement, on a

$$\langle z_1, z_2|S_{12}|z_1', z_2'\rangle = \bar{W}_{q_2q_1}(z_1/z_2')W_{r_2q_1}(z_1'/z_2')\bar{W}_{r_2r_1}(z_2/z_1')W_{q_2r_1}(z_2/z_1) \tag{4.121}$$

où les paramètres du site n sont associés aux points q_n et r_n.

L'existence de cet opérateur d'entrelacement permet alors de définir un propagateur, c'est-à-dire un opérateur U_n n'agissant que sur les espaces quantiques, de dimension p, tel que

$$U_n L_N(\lambda)L_{N-1}(\lambda)\dots L_1(\lambda)U_n^{-1} = L_{n-1}(\lambda)\dots L_1(\lambda)L_N(\lambda)\dots L_n(\lambda) \tag{4.122}$$

On peut montrer que cet opérateur est égal à un simple produit de matrices de transfert du modèle de Potts chiral associé. Il permet d'étendre les formules (4.110) et (4.111) à tous les sites. Notons

$$\bar{M}_n(\lambda) = \begin{pmatrix} \bar{A}_n(\lambda) & \bar{B}_n(\lambda) \\ \bar{C}_n(\lambda) & \bar{D}_n(\lambda) \end{pmatrix} \equiv L_{n-1}(\lambda)\dots L_1(\lambda)L_N(\lambda)\dots L_n(\lambda) \tag{4.123}$$

On peut alors exprimer les opérateurs locaux u_n et v_n, ainsi que leurs puissances, de la même façon qu'en (4.110) et (4.111), à travers les opérateurs $\bar{A}_n$ et $\bar{B}_n$. Ces opérateurs étant reliés à A et B via les relations

$$\bar{A}_n = U_n A U_n^{-1} \quad \text{et} \quad \bar{B}_n = U_n B U_n^{-1} \tag{4.124}$$

l'utilisation de U_n permet de résoudre le problème inverse, et d'exprimer tous les opérateurs locaux du modèle τ_2 dans la représentation par séparation des variables.

4.5 Étude des facteurs de forme

Les opérateurs locaux du modèle τ_2 ayant été exprimés dans la base des variables séparées, il est nécéssaire, pour obtenir leurs facteurs de forme, de déterminer, dans la représentation par séparation des variables, l'expression des états propres de l'opérateur de transfert, et ce pour les états propres à gauche et à droite.
Les résultats présentés ici sont à nouveau très similaires à ceux exposés plus haut dans le cadre du modèle de sine-Gordon, c'est pourquoi seuls les points n'apparaissant pas précédemment seront détaillés.

4.5.1 États propres de B à gauche et à droite

L'analyse effectuée dans la section 4.2.1, effectuée sur les états propres à gauche, s'applique également aux représentations à droite. On trouve alors que les actions des générateurs de l'algèbre de Yang-Baxter sont

$$B(\lambda)|\eta\rangle = \eta_N b_\eta(\lambda)|\eta\rangle \tag{4.125}$$

$$A(\lambda)|\eta\rangle = b_\eta(\lambda)\left[\lambda\eta_A^+|q^{\delta_N}\eta\rangle + \lambda^{-1}\eta_A^-|q^{-\delta_N}\eta\rangle\right] + \sum_{a=1}^{N}|q^{\delta_a}\eta\rangle\prod_{b\neq a}\frac{\lambda/\eta_b - \eta_b/\lambda}{\eta_a/\eta_b - \eta_b/\eta_a}\bar{a}^{(SOV)}(\eta_a) \tag{4.126}$$

$$D(\lambda)|\eta\rangle = b_\eta(\lambda)\left[\lambda\eta_D^+|q^{-\delta_N}\eta\rangle + \lambda^{-1}\eta_D^-|q^{\delta_N}\eta\rangle\right] + \sum_{a=1}^{N}|q^{-\delta_a}\eta\rangle\prod_{b\neq a}\frac{\lambda/\eta_b - \eta_b/\lambda}{\eta_a/\eta_b - \eta_b/\eta_a}\bar{d}^{(SOV)}(\eta_a) \tag{4.127}$$

avec

$$b_\eta(\lambda) \equiv \prod_{a=1}^{N-1}(\lambda/\eta_a - \eta_a/\lambda) \tag{4.128}$$

et les coefficients $\bar{a}^{(SOV)}$ et $\bar{d}^{(SOV)}$ satisfaisant la condition

$$\bar{d}^{(SOV)}(\lambda)\bar{a}^{(SOV)}(q^{-1}\lambda) = \det_q M(\lambda) \tag{4.129}$$

Cette paramétrisation permet de déterminer le produit scalaire, à une constante près, des états propres à gauche et à droite de B.
Tout d'abord, le produit scalaire de deux états étant caractérisés par deux familles η_a, $a \in [\![1, N]\!]$, est nul, car ls deux états ont des valeurs propres différentes par $B(\lambda)$. Ensuite, la quantité $\langle\eta|A(\eta_a)|q^{-\delta_a}\eta\rangle$ peut être déterminée de deux manières différentes, en faisant agir l'opérateur A à gauche ou à droite, ce qui permet de déterminer la dépendance du produit scalaire par rapport à la famille η_a, $a \in [\![1, N-1]\!]$. La dépendance par rapport à η_N est donnée par l'étude de $\langle\eta|A(\lambda)|q^{-\delta_N}\eta\rangle$, on trouve alors que le produit scalaire est indépendant de η_N. On a alors le résultat

Proposition 4.4. *Le produit scalaire de deux états propres de $B(\lambda)$ $\langle\eta|$ et $|\eta'\rangle$ est donné par*

$$\langle\eta|\eta'\rangle = \delta_{\eta,\eta'}\frac{C_N\prod_{a=1}^{N-1}\prod_{k=1}^{h_a}a^{(SOV)}(q^k\eta_a^{(0)})/\bar{a}^{(SOV)}(q^{k-1}\eta_a^{(0)})}{\prod_{1\leq a<b\leq N-1}(\eta_a/\eta_b - \eta_b/\eta_a)} \tag{4.130}$$

où h_a, $a \in [\![1, N]\!]$ est la famille d'entiers caractérisant[10] *la famille η.*

Remarque 4.2. Le produit scalaire $\langle\eta|\eta\rangle$ n'est pas la norme au carré du vecteur $\langle\eta|$. Ceci vient du fait que les vecteurs propres à droite n'ont pas été construits comme étant adjoints aux vecteurs propres à gauche, et ne le sont pas a priori. Les vecteurs propres à droite sont seulement proportionnels aux adjoints des vecteurs propres à gauche, le facteur de proportionnalité dépendant de la représentation choisie.

10. cf. section 4.2.1

4.5.2 Produit scalaire des états τ_2

Une fois la formule du produit scalaire de deux états propres de B obtenue, il est possible d'exprimer les états propres de l'opérateur de transfert via la décomposition de l'identité sous forme de projecteurs :

$$\mathbb{1} = \sum_\eta \frac{|\eta\rangle\langle\eta|}{\langle\eta|\eta\rangle} \tag{4.131}$$

En effet, les produits scalaires $\langle\eta|t\rangle$ ont été étudiés dans la section 4.3.1, où nous avons vu qu'ils se mettent sous la forme d'un produit de solutions de l'équation de Baxter. De même, il est possible de montrer que les quantités $\langle t|\eta\rangle$ s'expriment comme le produit de solutions d'équations de Baxter similaires. On trouve alors les décompositions

$$|t_k\rangle = \sum_{h_1,\ldots,h_N=1}^{p} \frac{q^k h_N}{p^{1/2}} \prod_{a=1}^{N-1} \frac{Q_{t_k}(\eta_a)}{\omega_a(\eta_a)} \prod_{1\leq a<b\leq N-1} \left(\eta_a^2 - \eta_b^2\right) |\eta\rangle \tag{4.132}$$

$$\langle t_k| = \sum_{h_1,\ldots,h_N=1}^{p} \frac{q^k h_N}{p^{1/2}} \prod_{a=1}^{N-1} \frac{\bar{Q}_{t_k}(\eta_a)}{\omega_a(\eta_a)} \prod_{1\leq a<b\leq N-1} \left(\eta_a^2 - \eta_b^2\right) \langle\eta| \tag{4.133}$$

avec t_k une valeur propre du secteur $\Sigma^k_{\tau_2}$, η la famille paramétrée par $(h_1,\ldots,h_N)$, ω la fonction

$$\omega_a(\eta_a) \equiv \eta_a^{N-1} \prod_{k=1}^{h_a} \frac{a^{(SOV)}(q^k \eta_a^{(0)})}{\bar{a}^{(SOV)}(q^{k-1}\eta_a^{(0)})} \tag{4.134}$$

et les fonctions $Q_{t'_k}$ et $\bar{Q}_{t_k}$ solutions des équations de Baxter

$$t_k(\lambda) Q_{t'_k}(\lambda) = \bar{\mathrm{A}}(\lambda) Q_{t'_k}(q^{-1}\lambda) + \bar{\mathrm{D}}(\lambda) Q_{t'_k}(q\lambda) \tag{4.135}$$

$$t_k(\lambda) \bar{Q}_{t_k}(\lambda) = \bar{\mathrm{D}}(q^{-1}\lambda) \bar{Q}_{t_k}(q^{-1}\lambda) + \bar{\mathrm{A}}(q\lambda) \bar{Q}_{t_k}(q\lambda) \tag{4.136}$$

Remarque 4.3. Définis de cette manière, les états propres à gauche et à droite de la matrice de monodromie ne sont pas a priori adjoints. En particulier, le produit scalaire $\langle t_k|t_k\rangle$ n'est pas en général la norme au carré de l'état propre, dans la mesure où ce produit scalaire n'est pas forcément un réel positif ou nul. Cette remarque est similaire à celle effectuée dans le cadre du modèle de sine-Gordon dans la section 3.3.1.

La décomposition des états propres dans la représentation SdV permet d'écrire le produit scalaire entre deux états propres de l'opérateur de transfert comme un déterminant. En effet, il y a dans ce produit scalaire un déterminant de Vandermonde, sous la forme $\prod(\eta_a^2 - \eta_b^2)$. On a le résultat

Proposition 4.5. *Le produit scalaire des états $\langle t_k|$ et $|t'_{k'}\rangle$, avec $t_k \in \Sigma^k_{\tau_2}$ et $t'_{k'} \in \Sigma^{k'}_{\tau_2}$, s'écrit*

$$\langle t_k|t'_{k'}\rangle = \delta_{k,k'} \det \Phi^{t,t'} \tag{4.137}$$

avec[11]

$$\Phi^{t,t'}_{a,b} \equiv \sum_{h_a=1}^{p} \eta_a^{2(b-1)} \frac{Q_{t'}(\eta_a)\bar{Q}_t(\eta_a)}{\omega_a(\eta_a)} \tag{4.138}$$

11. Ici encore, la famille de paramètres η est associée à la famille d'entiers h, avec $\eta_a = q^{h_a}\eta_a^{(0)}$.

Remarque 4.4. De manière évidente, le produit scalaire de deux états associé à deux valeurs propres différentes est nul. Remarquons qu'il est possible de montrer explicitement que le déterminant s'annule, en construisant un vecteur propre de valeur propre nulle de la matrice associée. En imposant la jauge $a^{(SOV)}(\lambda) = \bar{a}^{(SOV)}(q^{-1}\lambda)$, on a la relation

$$\sum_{b=1}^{N-1} \Phi_{a,b}^{t,t'} c_b = \sum_{h_a=1}^{p} f(\eta_a)\bar{Q}_t(\eta_a)Q_{t'}(\eta_a) \tag{4.139}$$

avec le polynôme

$$f(\lambda) \equiv \sum_{b=1}^{N-1} c_b \lambda^{-N+2b} \tag{4.140}$$

Si les deux valeurs propres t et t' appartiennent au même secteur $\Sigma_{\tau_2}^k$, le polynôme $t(\lambda) - t'(\lambda)$ peut se décomposer de la sorte, et les équations de Baxter permettent de montrer que la somme $\sum_{b=1}^{N-1} \Phi_{a,b}^{t,t'} c_b$ est nulle.

4.5.3 Exemple de facteurs de forme

Ces résultats permettent d'exprimer les facteurs de forme de certains opérateurs locaux en termes de déterminants. C'est le cas par exemple des opérateurs u_n^{-1}, avec

$$\langle t_k | \mathrm{u}_n^{-1} | t'_{k'} \rangle = \left(-\frac{\mathbb{a}_n \mathbb{b}_n}{\alpha_n \beta_n} \right)^{1/2} \frac{\varphi_n^{(t_k)}}{\varphi_n^{(t'_{k'})}} \delta_{k,k'-1} \det \mathcal{U}^{(t,t')}(\mu_{n,+}) \tag{4.141}$$

avec $\varphi_n^{(t_k)}$ et $\varphi_n^{(t'_{k'})}$ les valeurs propres du propagateur U_n et $\mathcal{U}^{(t,t')}(\lambda)$ la matrice :

$$\mathcal{U}_{a,b}^{(t,t')}(\lambda) \equiv \Phi_{a,b+1/2}^{(t,t')} \quad \text{pour} \quad b \in [\![1 N-2]\!], \tag{4.142}$$

$$\begin{aligned} \mathcal{U}_{a,N-1}^{(t,t')}(\lambda) \equiv & \frac{\left(\eta_a^{(0)}\right)^{N-2}}{\eta_N^{(0)}} \sum_{h=1}^{p} \frac{q^{(N-2)h} Q_{t'}(\eta_a^{(0)} q^h)}{\omega_a(\eta_a^{(0)} q^h)} \\ & \times \left[\frac{\bar{Q}_t(\bar{\eta}_a q^{h+1})}{(\lambda/\eta_a^{(0)} q^{h+1} - \eta_a^{(0)} q^{h+1}/\lambda)} \bar{a}^{(SOV)}(\eta_a^{(0)} q^h) \right. \\ & \left. + \bar{Q}_t(\eta_a^{(0)} q^h) \left(a_+ \lambda \left(\bar{\eta}_a q^h\right)^{(N-1)} q^{k'} - \frac{a_-}{\lambda} \left(\eta_a^{(0)} q^h\right)^{-(N-1)} q^{-k'} \right) \right]. \end{aligned} \tag{4.143}$$

Tous les facteurs de forme ne peuvent pas a priori se mettre sous la forme d'un seul déterminant. Il existe toutefois une base d'opérateurs dont les facteurs de forme peuvent s'exprimer en termes d'un seul déterminant, voir l'article [78] pour plus de détails.

Pour finir, il est a priori possible de calculer la magnétisation spontanée pour le modèle de Potts chiral à l'aide de cette approche. Pour le modèle d'Ising, qui est un cas particulier du modèle de Potts, cette quantité, dont le carré est une fonction de corrélation spin-spin pour une distance tendant vers l'infini, a été calculée par Onsager et Kaufman dans les années 40 [37]. Dans le cas du modèle Potts chiral, plus général, il existe une version généralisée de cette quantité (également appelée paramètre d'ordre) et associée à un entier $r \in [\![0, p]\!]$. Sa valeur a tout d'abord été conjecturée par Albertini, McCoy, Perk et Tang [6] puis calculée par Baxter dans le cas du modèle superintégrable [33] en tant que valeur moyenne dans le vide d'un opérateur diagonal. Dans le cadre de l'étude exposée ici, cette valeur moyenne se traduit a priori comme étant celle des puissances de l'opérateur u_1, c'est-à-dire les quantités

$$\mathcal{M}_r \equiv \frac{\langle g.s.|\mathrm{u}_1^r|g.s.\rangle}{\langle g.s.|g.s.\rangle} \tag{4.144}$$

où $|g.s.\rangle$ désigne l'état fondamental du Hamiltonien. Comme cela a été montré, de telles quantités peuvent être exprimées en termes de déterminants pour le modèle de Potts chiral général à l'aide de l'approche par séparation des variables. Par exemple, la formule (4.141) est l'une de ces expressions.

Conclusion

Dans le cadre des modèles intégrables quantiques, la résolution par séparation des variables suit une stratégie bien définie. Il s'agit tout d'abord de construire une matrice de monodromie, de façon similaire au cas de la résolution par ansatz de Bethe algébrique, qui satisfasse les relations de Yang-Baxter (préservant donc l'intégrabilité) et dont la trace génère le Hamiltonien. L'étape suivante est la paramétrisation des éléments de cette matrice en termes d'opérateurs séparés, à l'aide des relations de Yang-Baxter, ce qui revient, dans les cas les plus simples, à exprimer leur action dans la base propre d'un certain opérateur B. Cette paramétrisation permet alors de caractériser le spectre de l'opérateur trace, et donc celui du Hamiltonien, ainsi que leurs états propres, en termes d'un opérateur Q solution d'une équation de Baxter. Elle permet également l'expression des produits scalaires des états propres de B, et par conséquent l'expression précise des états propres de l'opérateur de transfert en termes de ceux de l'opérateur B.

Au delà du spectre, la caractérisation de la dynamique de la théorie commence par la résolution du problème inverse, c'est-à-dire l'expression des opérateurs locaux de la théorie en termes des variables séparées. Cela permet de calculer leurs facteurs de forme dans la base propre du Hamiltonien, et donc les fonctions de corrélation du modèle via la décomposition de l'identité en termes de projecteurs sur cette base.

Nous avons appliqué dans cette thèse cette stratégie au cas du modèle de sine-Gordon (une théorie des champs en dimension $1+1$), dont le spectre avait déjà été caractérisé de cette façon par Niccoli et Teschner, et aux modèles τ_2 et Potts chiral, qui avaient déjà été traités par séparation des variables par Iorgoff *et al.* Pour ce dernier modèle, une caractérisation du spectre similaire à celle du modèle sine-Gordon a été obtenue. Pour les deux modèles, la structure de l'espace des états a été décrite par séparation des variables, en particulier par la donnée du produit scalaire des états propres du Hamiltonien. Nous avons pu montrer que dans ces deux cas, ce produit scalaire est donné par une formule générique de type déterminant, qui semble très générale et simple, et dont la forme ne dépend que de la matrice R.

Des avancées en direction du calcul des fonctions de corrélation pour ces deux modèles ont également été obtenues. Dans un premier temps, la donnée du produit scalaire des états propres du Hamiltonien a permis d'exprimer la décomposition de l'identité, nécessaire au calcul des fonctions de corrélation à l'aide des facteurs de forme. Ensuite, les opérateurs locaux des modèles ont été reconstruits en termes des opérateurs séparés à l'aide de la factorisation des matrices de Lax aux points où le déterminant quantique s'annule et d'opérateurs de type « propagateur ». À la différence des autres résultats, cette reconstruction dépend du modèle et de la représentation du groupe quantique sous-jacent, et non uniquement de la matrice R. Cela a permis le calcul des facteurs de forme des éléments locaux de la théorie dans la base propre du Hamiltonien pour les modèles considérés (sine-Gordon, τ_2 et Potts chiral).

Bien que les résultats obtenus dans cette thèse constituent un pas en avant certain pour le calcul des fonctions de corrélation de ces modèles intégrables par l'approche séparation des variables et facteurs de forme, beaucoup reste à faire pour leur obtention effective. Il faut en particulier être capable de sommer les produits de facteurs de forme, ce qui suppose une forme plus simple pour les facteurs de forme normalisés. Cela permettrait a priori de prendre la limite thermodynamique, c'est-à-dire la limite où le nombre de sites devient infini ; dans le cadre du traitement des théories des champs, cela permettrait de revenir à la théorie de départ et de comparer nos résultats, obtenus à partir des premiers principes, avec ceux découlant des méthodes bootstrap. Il serait aussi intéressant d'étudier le cas température non nulle ainsi que le comportement asymptotique des fonction de corrélation dynamiques. Enfin, une extension de cette méthode au modèle de la chaîne de Heisenberg XXZ anti-périodique est en cours, ce qui constitue un premier pas vers l'objectif de maitriser la limite thermodynamique des formules en termes de déterminants, avec dans ce cas l'avantage d'avoir une comparaison directe avec les résultats obtenus par ansatz de Bethe algébrique. Par ailleurs, une autre direction de travail concerne les modèles intégrables solubles par ansatz de Bethe emboité, comme la chaine XXZ de type sl_n ou le modèle de Hubbard [80, 88, 65]. Dans ce cas, et malgré des progrès récents pour le cas sl_3 [44, 45], il serait particulièrement intéressant de pouvoir utiliser les méthodes développées dans cette thèse ; on peut en effet espérer que les formules de type déterminant pour les produits scalaires et les facteurs de forme soient plus simples dans le cadre de la méthode par séparation des variables (de type Vandermonde habillés) que ceux obtenus jusqu'à ce jour par ansatz de Bethe algébrique.

Bibliographie

[1] M. Ablowitz, D. Kaup, A. Newell, and H. Segur. Method for Solving the Sine-Gordon Equation. *Physical Review Letters*, 30(25) :1262–1264, Jun 1973.

[2] M. J. Ablowitz and H. Segur. *Solitons and Inverse Scattering Transform (SIAM Studies in Applied Mathematics, No. 4).* Society for Industrial and Applied Mathematics, 1981.

[3] G. Albertini, B. M. McCoy, and J. H. H. Perk. Commensurate-incommensurate transition in the ground state of the superintegrable chiral Potts model. *Physics Letters A*, 135 :159, 1989.

[4] G. Albertini, B. M. McCoy, and J. H. H. Perk. Eigenvalue spectrum of the superintegrable chiral Potts model. In M. Jimbo, T. Miwa, and A. Tsuchiya, editors, *Integrable systems in quantum field theory and statistical mechanics*, volume 19 of *Advanced Studies in Pure Mathematics*, page 1. Kinokuniya-Academic, Tokyo, 1989. ISBN : 0123853427.

[5] G. Albertini, B. M. McCoy, and J. H. H. Perk. Level crossing transitions and the massless phases of the superintegrable chiral Potts chain. *Physics Letters A*, 139 :204, 1989.

[6] G. Albertini, B. M. McCoy, J. H. H. Perk, and S. Tang. Excitation spectrum and order parameter for the integrable N-state chiral Potts model. *Nuclear Physics B*, 314 :741, 1989.

[7] V. Arnold. *Mathematical Methods of Classical Mechanics, 2nd ed.* Springer-Verlag, 1989.

[8] H. Au Yang and J. H. H. Perk. Eigenvectors in the superintegrable model I : sl_2 generators. *Journal of Physics A : Mathematical and Theoretical*, 41 :275201, 2008.

[9] H. Au Yang and J. H. H. Perk. Eigenvectors in the superintegrable model II : ground-state sector. *Journal of Physics A : Mathematical and Theoretical*, 42 :375208, 2009.

[10] H. Au Yang and J. H. H. Perk. Identities in the superintegrable chiral Potts model. *Journal of Physics A : Mathematical and Theoretical*, 43 :025203, 2010.

[11] H. Au Yang and J. H. H. Perk. Spontaneous Magnetization of the Integrable Chiral Potts Model. arXiv :1003.4805, March 2010.

[12] H. Au Yang and J. H. H. Perk. Quantum loop subalgebra and eigenvectors of the superintegrable chiral Potts transfer matrices. *Journal of Physics A : Mathematical and Theoretical*, 44 :025205, 2011.

[13] H. Au Yang and J. H. H. Perk. Superintegrable chiral Potts model : Proof of the conjecture for the coefficients of the generating function G(t,u). arXiv :1108.4713v1, 2011.

[14] O. Babelon. On the quantum inverse problem for the closed Toda chain. *Journal of Physics A : Mathematical and General*, 37 :303, 2004.

[15] O. Babelon, D. Bernard, and F. A. Smirnov. Quantization of solitons and the restricted sine-Gordon model. *Communications in Mathematical Physics*, 182 :319–354, 1996.

[16] O. Babelon, D. Bernard, and F. A. Smirnov. Null-Vectors in Integrable Field Theory. *Communications in Mathematical Physics*, 186 :601, 1997.

[17] O. Babelon, D. Bernard, and M. Talon. *Introduction to Classical Integrable Systems*. Cambridge University Press, 2003.

[18] O. Babelon and M. Talon. Separation of variables for the classical and quantum Neumann model. *Nuclear Physics B*, 379(1-2) :321–339, Jul 1992.

[19] M. N. Barber and R. J. Baxter. On the spontaneous order of the eight-vertex model. *Journal of Physics C : Solid State Physics*, 6(20) :2913–2921, Oct 1973.

[20] R. J. Baxter. Corner transfer matrices of the eight-vertex model. I. Low-temperature expansions and conjectured properties. *Journal of Statistical Physics*, 15(6) :485–503, Dec 1976.

[21] R. J. Baxter. *Exactly solved models in statistical mechanics.* London - New York : Academic Press, 1982. ISBN : 978-0-12-083182-1.

[22] R. J. Baxter. Free energy of the solvable chiral Potts model. *Journal of Statistical Physics*, 52(3-4) :639–667, Aug 1988.

[23] R. J. Baxter. The superintegrable chiral potts model. *Physics Letters A*, 133 :185, 1988.

[24] R. J. Baxter. Superintegrable chiral Potts model : Thermodynamic properties, an "inverse" model, and a simple associated Hamiltonian. *Journal of Statistical Physics*, 57 :1, 1989.

[25] R. J. Baxter. Chiral Potts model : Eigenvalues of the transfer matrix. *Physics Letters A*, 146 :110, 1990.

[26] R. J. Baxter. Calculation of the eigenvalues of the transfer matrix of the chiral Potts model. In S. H. Ahn, Il T. Cheon, S. H. Choh, and C. Lee, editors, *Proc. Fourth Asia-Pacific Physics Conference*, pages 42–57. Singapore : World Scientific, 1991.

[27] R. J. Baxter. Chiral Potts model with skewed boundary conditions. *Journal of Statistical Physics*, 73 :461, 1993.

[28] R. J. Baxter. Equivalence of the Two Results for the Free Energy of the Chiral Potts Model. *Journal of Statistical Physics*, 98(3/4) :513–535, 2000.

[29] R. J. Baxter. Derivation of the Order Parameter of the Chiral Potts Model. *Physical Review Letters*, 94 :130602, 2005.

[30] R. J. Baxter. The Order Parameter of the Chiral Potts Model. *Journal of Statistical Physics*, 120 :1, 2005.

[31] R. J. Baxter. A Conjecture for the Superintegrable Chiral Potts Model. *Journal of Statistical Physics*, 132(6) :983–1000, Sep 2008.

[32] R. J. Baxter. Algebraic Reduction of the Ising Model. *Journal of Statistical Physics*, 132(6) :959–982, Sep 2008.

[33] R. J. Baxter. Proof of the determinantal form of the spontaneous magnetization of the superintegrable chiral Potts model. *ANZIAM*, 51 :309–316, January 2009.

[34] R. J. Baxter. Some Remarks on a Generalization of the Superintegrable Chiral Potts Model. *Journal of Statistical Physics*, 137(5-6) :798–813, Dec 2009.

[35] R. J. Baxter. Some comments on developments in exact solutions in statistical mechanics since 1944. *Journal of Statistical Mechanics : Theory and Experiment*, 2010 :P11037, October 2010.

[36] R. J. Baxter. Spontaneous magnetization of the superintegrable chiral Potts model : calculation of the determinant D PQ. *Journal of Physics A : Mathematical and Theoretical*, 43(14) :145002, Apr 2010.

[37] R. J. Baxter. Onsager and Kaufman's calculation of the spontaneous magnetization of the Ising model. *J. Stat. Phys.*, 145 :518–548, March 2011.

[38] R. J. Baxter, V. V. Bazhanov, and J. H. H. Perk. Function relations for transfer matrices of the chiral Potts model. *International Journal of Modern Physics B*, 4 :803, 1990.

[39] R. J. Baxter and S. B. Kelland. Spontaneous polarization of the eight-vertex model. *Journal of Physics C : Solid State Physics*, 7(22) :L403–L406, Nov 1974.

[40] R. J. Baxter, J. H. H. Perk, and H. Au Yang. New solutions of the star-triangle relations for the chiral potts model. *Physics Letters A*, 128 :138, 1988.

[41] V. V. Bazhanov and Yu. G. Stroganov. Chiral Potts Model as a Descendant of the Six-Vertex Model. *Journal of Statistical Physics*, 59 :799–817, 1990.

[42] A. A. Belavin and V. G. Drinfel'd. Solutions of the classical Yang-Baxter equation for simple Lie algebras. *Functional Analysis and Its Applications*, 16(3) :159–180, 1983.

[43] A. A. Belavin and V. G. Drinfel'd. Classical Yang-Baxter equation for simple Lie algebras. *Functional Analysis and Its Applications*, 17(3) :220–221, 1984.

[44] S. Belliard, S. Pakuliak, E. Ragoucy, and N. A. Slavnov. Highest coefficient of scalar products in SU (3)-invariant integrable models. *Journal of Statistical Mechanics : Theory and Experiment*, 2012(09) :P09003, Sep 2012.

[45] S. Belliard, S. Pakuliak, E. Ragoucy, and N. A. Slavnov. The algebraic Bethe ansatz for scalar products in S U (3)-invariant integrable models. *Journal of Statistical Mechanics : Theory and Experiment*, 2012(10) :P10017, Oct 2012.

[46] B. Berg, M. Karowski, and P. Weisz. Construction of Green's functions from an exact S matrix. *Physical Review D*, 19 :2477, 1979.

[47] B. Berg, M. Karowski, P. Weisz, and V. Kurak. Factorized U(n) symmetric S-matrices in two dimensions. *Nuclear Physics B*, 134(1) :125–132, Mar 1978.

[48] H. Bergknoff and H. Thacker. Method for Solving the Massive Thirring Model. *Physical Review Letters*, 42(3) :135–138, Jan 1979.

[49] H. Bergknoff and H. Thacker. Structure and solution of the massive Thirring model. *Physical Review D*, 19(12) :3666–3681, Jun 1979.

[50] H. Bethe. Zur Theorie der Metalle. *Zeitschrift für Physik*, 71 :205–226, 1931.

[51] H. Boos, M. Jimbo, T. Miwa, and F. Smirnov. Hidden Grassmann Structure in the XXZ Model IV : CFT Limit. *Communications in Mathematical Physics*, 299(3) :825–866, Nov 2010.

[52] H. Boos, M. Jimbo, T. Miwa, F. Smirnov, and Y. Takeyama. Hidden Grassmann Structure in the XXZ Model. *Communications in Mathematical Physics*, 272(1) :263–281, Mar 2007.

[53] H. Boos, M. Jimbo, T. Miwa, F. Smirnov, and Y. Takeyama. Hidden Grassmann Structure in the XXZ Model II : Creation Operators. *Communications in Mathematical Physics*, 286(3) :875–932, Mar 2009.

[54] S. Brush. History of the Lenz-Ising Model. *Reviews of Modern Physics*, 39(4) :883–893, Oct 1967.

[55] J. Cardy and G. Mussardo. Form factors of descendent operators in perturbed conformal field theories. *Nuclear Physics B*, 340 :387, 1990.

[56] J. S. Caux, R. Hagemans, and J.-M. Maillet. Computation of dynamical correlation functions of Heisenberg chains : the gapless anisotropic regime. *Journal of Statistical Mechanics : Theory and Experiment*, 2005 :P09003, 2005.

[57] J. S. Caux and J.-M. Maillet. Computation of Dynamical Correlation Functions of Heisenberg Chains in a Magnetic Field. *Physical Review Letters*, 95 :077201, 2005.

[58] D. Creamer, H. Thacker, and D. Wilkinson. Some exact results for the two-point function of an integrable quantum field theory. *Physical Review D*, 23(12) :3081–3084, Jun 1981.

[59] H. J. de Vega and F. Woynarovich. Method for calculating finite size corrections in Bethe ansatz systems : Heisenberg chain and six-vertex model. *Nuclear Physics B*, 251 :439–456, Jan 1985.

[60] C. Destri and H. J. de Vega. Integrable quantum field theories and conformal field theories from lattice models in the light-cone approach. *Physics Letters B*, 201(2) :261–268, Feb 1988.

[61] C. Destri and H. J. de Vega. New thermodynamic Bethe ansatz equations without strings. *Physical Review Letters*, 69 :2313, 1992.

[62] C. Destri and H. J. de Vega. Unified approach to Thermodynamic Bethe Ansatz and finite size corrections for lattice models and field theories. *Nuclear Physics B*, 438(3) :413–454, Apr 1995.

[63] V. G. Drinfel'd. Hamiltonian structures on Lie groups, Lie bialgebras and the geometric meaning of the classical Yang-Baxter equations. *Soviet mathematics, Doklady*, 27 :68–71, 1983.

[64] V. G. Drinfel'd. Quantum groups. In *Proceedings of the International Congress of Mathematicians, Berkeley, California, August 3-11, 1986*. American Mathematical Society, RI, 1987. ISBN : 978-0821801109.

[65] F. H. L. Essler, H. Frahm, F. Göhmann, A. Klümper, and V. E. Korepin. *The One-Dimensional Hubbard Model*. Cambridge University Press, 2005.

[66] F. H. L. Essler, H. Frahm, A. G. Izergin, and V. E. Korepin. Determinant representation for correlation functions of spin-1/2 XXX and XXZ Heisenberg magnets. *Communications in Mathematical Physics*, 174(1) :191–214, Nov 1995.

[67] L. D. Faddeev, E. K. Sklyanin, and L. A. Takhtajan. Quantum inverse problem method : I. *Theoretical and Mathematical Physics*, 40 :688, 1980.

[68] L. D. Faddeev and L. A. Takhtajan. The quantum method of the inverse problem and the Heisenberg XYZ model. *Russian Mathematical Surveys*, 34 : 5 :11, 1979.

[69] L. D. Faddeev and L. A. Takhtajan. *Hamiltonian methods in the theory of solitons*. Springer-Verlag, 1987.

[70] H. Flaschka. On the Toda Lattice. II. *Progress of Theoretical Physics*, 51(3) :703–716, Mar 1974.

[71] H. Flaschka. The Toda lattice. II. Existence of integrals. *Physical Review B*, 9(4) :1924–1925, Feb 1974.

[72] H. Flaschka and D. W. McLaughlin. Canonically Conjugate Variables for the Korteweg-de Vries Equation and the Toda Lattice with Periodic Boundary Conditions. *Progress of Theoretical Physics*, 55(2) :438–456, Feb 1976.

[73] C. S. Gardner, J. M. Greene, M. D. Kruskal, and R. M. Miura. Method for solving the Korteweg-de Vries equation. *Physical Review Letters*, 19 :1095, 1967.

[74] M. Gaudin. *La fonction d'onde de Bethe*. Paris : Masson S. A., 1983.

[75] I. M. Gel'fand and B. M. Levitan. On the determination of a differential equation from its spectral function. In *American mathematical society translations Series 2*, volume 1 of *Translations - American Mathematical Society*, pages 253–304. Providence : American Mathematical Society, 1955. ISBN : 9780821817018.

[76] H. Goldstein. Prehistory of the "Runge-Lenz" vector. *American Journal of Physics*, 43 :737–738, 1975.

[77] N. Grosjean, J.-M. Maillet, and G. Niccoli. On the form factors of local operators in the lattice sine-Gordon model. *Journal of Statistical Mechanics : Theory and Experiment*, 2012(10) :P10006, Oct 2012.

[78] N. Grosjean, J.-M. Maillet, and G. Niccoli. On the form factors of local operators in the chiral Potts and τ_2-model. To appear, 2013.

[79] N. Grosjean and G. Niccoli. The τ_2-model and the chiral Potts model revisited : completeness of Bethe equations from Sklyanin's SOV method. *Journal of Statistical Mechanics : Theory and Experiment*, 2012(11) :P11005, Nov 2012.

[80] M. C. Gutzwiller. Effect of Correlation on the Ferromagnetism of Transition Metals. *Physical Review Letters*, 10(5) :159–162, Mar 1963.

[81] M. C. Gutzwiller. The quantum mechanical Toda lattice, II. *Annals of Physics*, 133(2) :304–331, May 1981.

[82] F. D. M. Haldane. General Relation of Correlation Exponents and Spectral Properties of One-Dimensional Fermi Systems : Application to the Anisotropic S=1/2 Heisenberg Chain. *Physical Review Letters*, 45(16) :1358–1362, Oct 1980.

[83] F. D. M. Haldane. Demonstration of the Luttinger liquid character of Bethe-ansatz-soluble models of 1-D quantum fluids. *Physics Letters A*, 81(2-3) :153–155, Jan 1981.

[84] F. D. M. Haldane. Luttinger liquid theory of one-dimensional quantum fluids. I. Properties of the Luttinger model and their extension to the general 1D interacting spinless Fermi gas. *Journal of Physics C : Solid State Physics*, 14(19) :2585–2609, Jul 1981.

[85] W. R. Hamilton. On the application to dynamics of a general mathematical method previously applied to optics. *British Association Report*, 1834 :513–528, 1834.

[86] W. H. Heintz. Determination of the Runge-Lenz Vector. *American Journal of Physics*, 42 :1078, 1974.

[87] W. Heisenberg. Zur Theorie des Ferromagnetismus. *Zeitschrift für Physik*, 49 :619, 1928.

[88] J. Hubbard. Electron Correlations in Narrow Energy Bands. *Proceedings of the Royal Society A : Mathematical, Physical and Engineering Sciences*, 276(1365) :238–257, Nov 1963.

[89] L. Hulthén. Über das Austauschproblem eines Kristalls. *Arkiv för matematik, astronomi och fysik*, 26A :1, 1938.

[90] N. Iorgov. Eigenvectors of Open Bazhanov-Stroganov Quantum Chain. *Symmetry, Integrability and Geometry : Methods and Applications (SIGMA)*, 2 :19, 2006.

[91] N. Iorgov, S. Pakuliak, V. Shadura, Y. Tykhyy, and G. von Gehlen. Spin Operator Matrix Elements in the Superintegrable Chiral Potts Quantum Chain. *Journal of Statistical Physics*, 139(5) :743–768, Jun 2010.

[92] E. Ising. Beitrag zur Theorie des Ferromagnetismus. *Zeitschrift für Physik*, 31(1) :253–258, Feb 1925.

[93] A. G. Izergin and V. E. Korepin. Lattice version of quantum field theory models in two dimensions. *Nuclear Physics B*, 205 :401–413, 1982.

[94] A. G. Izergin and V. E. Korepin. The quantum inverse scattering method approach to correlation functions. *Communications in Mathematical Physics*, 94(1) :67–92, Mar 1984.

[95] A. G. Izergin and V. E. Korepin. Correlation functions for the Heisenberg XXZ-antiferromagnet. *Communications in Mathematical Physics*, 99(2) :271–302, Jun 1985.

[96] C. G. J. Jacobi. Über die Reduction der Integration der partiellen Diferentialgleichungen erster Ordnung zwischen irgend einer Zahl Variabeln auf die Integration eines einzigen Systemes gewöhntlicher Differentialgleichungen. *Journal für die reine und angewandte Mathematik*, 17 :97–162, 1837.

[97] M. Jimbo. A q-difference analogue of U(g) and the Yang-Baxter equation. *Letters in Mathematical Physics*, 10 :63–69, 1985.

[98] M. Jimbo, K. Miki, T. Miwa, and A. Nakayashiki. Correlation functions of the XXZ model for $\delta < -1$. *Physics Letters A*, 168(4) :256–263, Aug 1992.

[99] M. Jimbo and T. Miwa. *Algebraic Analysis of Solvable Lattice Models (Cbms Regional Conference Series in Mathematics)*. American Mathematical Society, 1994.

[100] M. Jimbo and T. Miwa. *Algebraic analysis of solvable lattice models*. Number 85 in Regional conference series in mathematics. AMS, 1995.

[101] M. Jimbo, T. Miwa, Y. Môri, and M. Sato. Density matrix of an impenetrable Bose gas and the fifth Painlevé transcendent. *Physica D : Nonlinear Phenomena*, 1(1) :80–158, Apr 1980.

[102] M. Jimbo, T. Miwa, Y. Môri, and M. Sato. *Lecture Notes in Physics*. Springer-Verlag, 1980.

[103] M. Jimbo, T. Miwa, and F. Smirnov. Hidden Grassmann structure in the XXZ model III : introducing the Matsubara direction. *Journal of Physics A : Mathematical and Theoretical*, 42(30) :304018, Jul 2009.

[104] M. Jimbo, T. Miwa, and F. Smirnov. Hidden Grassmann Structure in the XXZ Model V : Sine-Gordon Model. *Letters in Mathematical Physics*, 96(1-3) :325–365, Jun 2011.

[105] M. Kac and P. van Moerbeke. A complete solution of the periodic Toda problem. *Proceedings of the National Academy of Sciences*, 72(8) :2879–2880, 1975.

[106] M. Kac and P. van Moerbeke. On Some Periodic Toda Lattices. *Proceedings of the National Academy of Sciences*, 72(4) :1627–1629, 1975.

[107] E. G. Kalnins, V. B. Kuznetsov, and W. Miller. Quadrics on complex Riemannian spaces of constant curvature, separation of variables, and the Gaudin magnet. *Journal of Mathematical Physics*, 35(4) :1710, 1994.

[108] M. Karowski. XIII. Exact S-matrices and form factors in 1 + 1 dimensional field theoretic models with soliton behaviour. *Physics Reports*, 49(2) :229–237, Jan 1979.

[109] M. Karowski and H. J. Thun. Complete S-matrix of the massive thirring model. *Nuclear Physics B*, 130(2) :295–308, Nov 1977.

[110] M. Karowski, H. J. Thun, T. T. Truong, and P. H. Weisz. On the uniqueness of a purely elastic S-matrix in (1+1) dimensions. *Physics Letters B*, 67(3) :321–322, Apr 1977.

[111] M. Karowski and P. H. Weisz. Exact form factors in $(1+1)$-dimensional field theoretic models with soliton behaviour. *Nuclear Physics B*, 139 :455, 1978.

[112] B. Kaufman. Crystal Statistics. II. Partition Function Evaluated by Spinor Analysis. *Physical Review*, 76(8) :1232–1243, Oct 1949.

[113] B. Kaufman. Letter from Lars Onsager to Bruria Kaufman. *Journal of Statistical Physics*, 78(1-2) :585–588, Jan 1995.

[114] B. Kaufman and L. Onsager. Crystal Statistics. III. Short-Range Order in a Binary Ising Lattice. *Physical Review*, 76(8) :1244–1252, Oct 1949.

[115] N. Kitanine, K. K. Kozlowski, J.-M. Maillet, N. A. Slavnov, and V. Terras. On correlation functions of integrable models associated with the six-vertex R-matrix. *Journal of Statistical Mechanics : Theory and Experiment*, 2007 :P01022, 2007.

[116] N. Kitanine, K. K. Kozlowski, J.-M. Maillet, N. A. Slavnov, and V. Terras. Algebraic Bethe ansatz approach to the asymptotic behavior of correlation functions. *Journal of Statistical Mechanics : Theory and Experiment*, 2009 :P04003, 2009.

[117] N. Kitanine, K. K. Kozlowski, J.-M. Maillet, N. A. Slavnov, and V. Terras. On the thermodynamic limit of form factors in the massless XXZ Heisenberg chain. *Journal of Mathematical Physics*, 50 :095209, 2009.

[118] N. Kitanine, K. K. Kozlowski, J.-M. Maillet, N. A. Slavnov, and V. Terras. A form factor approach to the asymptotic behavior of correlation functions in critical models. *Journal of Statistical Mechanics : Theory and Experiment*, 2011(12) :P12010, Dec 2011.

[119] N. Kitanine, J.-M. Maillet, N. A. Slavnov, and V. Terras. Spin-spin correlation functions of the XXZ-1/2 Heisenberg chain in a magnetic field. *Nuclear Physics B*, 641 :487, 2002.

[120] N. Kitanine, J.-M. Maillet, N. A. Slavnov, and V. Terras. Dynamical correlation functions of the XXZ spin-1/2 chain. *Nuclear Physics B*, 729 :558, 2005.

[121] N. Kitanine, J.-M. Maillet, N. A. Slavnov, and V. Terras. Master equation for spin-spin correlation functions of the XXZ chain. *Nuclear Physics B*, 712 :600, 2005.

[122] N. Kitanine, J.-M. Maillet, and V. Terras. Form factors of the XXZ Heisenberg spin-1/2 finite chain. *Nuclear Physics B*, 554 :647, 1999.

[123] N. Kitanine, J.-M. Maillet, and V. Terras. Correlation functions of the XXZ Heisenberg spin-1/2 chain in a magnetic field. *Nuclear Physics B*, 567 :554, 2000.

[124] D. J. Korteweg and G. de Vries. On the Change of Form of Long Waves Advancing in a Rectangular Canal, and on a New Type of Long Stationary Waves. *Philosophical Magazine*, 39 :422–443, 1895.

[125] R. Kubo, M. Toda, and N. Hashitsume. *Statistical physics II : nonequilibrium statistical mechanics*. Berlin ; New York : Springer, 1991.

[126] P. P. Kulish and N. Yu. Reshetikhin. GL3-invariant solutions of the Yang-Baxter equation and associated quantum systems. *Journal of Soviet Mathematics*, 34(5) :1948–1971, Sep 1986.

[127] V. B. Kuznetsov. Quadrics on real Riemannian spaces of constant curvature : Separation of variables and connection with Gaudin magnet. *Journal of Mathematical Physics*, 33(9) :3240, 1992.

[128] V. B. Kuznetsov and E. K. Sklyanin. On Bäcklund transformations for many-body systems. *Journal of Physics A : Mathematical and General*, 31 :2241, 1998.

[129] J.-L. Lagrange, J. Bertrand, and G. Darboux. Mécanique analytique. In *Oeuvres complètes*. A. Blanchard, 1787.

[130] P. Lax. Integrals of nonlinear equations of evolution and solitary waves. *Communications on Pure and Applied Mathematics*, 21 :467–490, 1968.

[131] A. Lenard. Momentum Distribution in the Ground State of the One-Dimensional System of Impenetrable Bosons. *Journal of Mathematical Physics*, 5(7) :930, 1964.

[132] A. Lenard. One-Dimensional Impenetrable Bosons in Thermal Equilibrium. *Journal of Mathematical Physics*, 7(7) :1268, 1966.

[133] W. Lenz. Beiträge zum Verständnis der magnetischen Eigenschaften in festen Körpern. *Physikalische Zeitschrift*, 21 :613–615, 1920.

[134] W. H. Lenz. Über den Bewegungsverlauf und die Quantenzustände der gestörten Keplerbewegung. *Zeitschrift für Physik*, 24 :197, 1924.

[135] E. H. Lieb. Exact Analysis of an Interacting Bose Gas. II. The Excitation Spectrum. *Physical Review*, 130(4) :1616–1624, May 1963.

[136] E. H. Lieb and W. Liniger. Exact Analysis of an Interacting Bose Gas. I. The General Solution and the Ground State. *Physical Review*, 130(4) :1605–1616, May 1963.

[137] E. H. Lieb, T. Schultz, and D. Mattis. Two soluble models of an antiferromagnetic chain. *Annals of Physics*, 16(3) :407–466, Dec 1961.

[138] E. H. Lieb and F. Y. Wu. Two-dimensional ferroelectrics models. In C. Domb and M. S. Green, editors, *Phase Transitions and Critical Phenomena*, pages 331–490. London : Academic, 1972.

[139] J. Liouville. Sur l'équation aux différences partielles $\frac{d^2 \log \lambda}{du dv} \pm \frac{\lambda}{2a^2} = 0$. *Journal de Mathématiques Pures et Appliquées*, 18 :71–72, 1853.

[140] S. L. Lukyanov and A. B. Zamolodchikov. Quantum sine(h)-Gordon model and classical integrable equations. *Journal of High Energy Physics*, 2010(7) :8, Jul 2010.

[141] A. Luther and I. Peschel. Calculation of critical exponents in two dimensions from quantum field theory in one dimension. *Physical Review B*, 12(9) :3908–3917, Nov 1975.

[142] J.-M. Maillet. Heisenberg spin chains : from quantum groups to neutron scattering experiments. In *Séminaire Poincaré X : Espaces quantiques*, 2007.

[143] J.-M. Maillet and V. Terras. On the quantum inverse scattering problem. *Nuclear Physics B*, 575 :627, 2000.

[144] S. V. Manakov. Complete integrability and stochastization of discrete dynamical systems. *Journal of Experimental and Theoretical Physics*, 40 :2, 1975.

[145] V. A. Marchenko. On the reconstruction of the potential energy from phases of the scattered waves. *Doklady Akademii nauk SSSR. Seriâ, Matematika, fizika.*, 104 :695–698, 1955.

[146] B. McCoy, C. Tracy, and T. Wu. Two-Dimensional Ising Model as an Exactly Solvable Relativistic Quantum Field Theory : Explicit Formulas for n-Point Functions. *Physical Review Letters*, 38(15) :793–796, Apr 1977.

[147] B. McCoy and T. Wu. Theory of Toeplitz Determinants and the Spin Correlations of the Two-Dimensional Ising Model. IV. *Physical Review*, 162(2) :436–475, Oct 1967.

[148] B. McCoy and T. Wu. Two-dimensional Ising field theory in a magnetic field : Breakup of the cut in the two-point function. *Physical Review D*, 18(4) :1259–1267, Aug 1978.

[149] B. M. McCoy. Theory of a Two-Dimensional Ising Model with Random Impurities. III. Boundary Effects. *Physical Review*, 188(2) :1014–1031, Dec 1969.

[150] J. B. McGuire. Study of Exactly Soluble One-Dimensional N-Body Problems. *Journal of Mathematical Physics*, 5(5) :622, 1964.

[151] E. W. Montroll, R. B. Potts, and J. C. Ward. Correlations and Spontaneous Magnetization of the Two-Dimensional Ising Model. *Journal of Mathematical Physics*, 4(2) :308, 1963.

[152] G. Mussardo. Off-critical statistical models : Factorized scattering theories and bootstrap program. *Physics Reports*, 218(5-6) :215–379, Oct 1992.

[153] G. Niccoli. Non-diagonal open spin-1/2 XXZ quantum chains by separation of variables : Complete spectrum and matrix elements of some quasi-local operators. arXiv : 1206.0646.

[154] G. Niccoli. Reconstruction of Baxter Q-operator from Sklyanin SOV for cyclic representations of integrable quantum models. *Nuclear Physics B*, 835 :263–283, 2010.

[155] G. Niccoli. Antiperiodic dynamical 6-vertex model I : Complete spectrum by SOV, matrix elements of the identity on separate states and connections to the periodic 8-vertex model. arXiv : 1207.1928, July 2012.

[156] G. Niccoli. Form factors and complete spectrum of XXX antiperiodic higher spin chains by quantum separation of variables. arXiv : 1206.2418, June 2012.

[157] G. Niccoli and J. Teschner. The sine-Gordon model revisited : I. *Journal of Statistical Mechanics : Theory and Experiment*, 2010 :P09014, 2010.

[158] E. Noether and M. A. Tavel. Invariante Variationsprobleme. *Nachrichten von der königlichen Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen*, 1918 :235–257, 1918.

[159] M. A. Olshanetsky and A. M. Perelomov. Classical integrable finite-dimensional systems related to Lie algebras. *Physics Reports*, 71(5) :313–400, May 1981.

[160] M. A.A. Olshanetsky and A. M. Perelomov. Quantum integrable systems related to lie algebras. *Physics Reports*, 94(6) :313–404, Mar 1983.

[161] L. Onsager. Crystal Statistics. I. A Two-Dimensional Model with an Order-Disorder Transition. *Physical Review*, 65(3-4) :117–149, Feb 1944.

[162] T. Oota. Quantum projectors and local operators in lattice integrable models. *Journal of Physics A : Mathematical and General*, 37 :441–452, 2004.

[163] R. Orbach. Linear Antiferromagnetic Chain with Anisotropic Coupling. *Physical Review*, 112 :309, 1958.

[164] W. Pauli. Über das Wasserstoffspektrum vom Standpunkt der neuen Quantenmechanik. *Zeitschrift für Physik*, 36 :336, 1926.

[165] R. G. Pereira, J. Sirker, J. S. Caux, R. Hagemans, J. M. Maillet, S. R. White, and I. Affleck. Dynamical Spin Structure Factor for the Anisotropic Spin-1/2 Heisenberg Chain. *Physical Review Letters*, 96 :257202, 2006.

[166] R. G. Pereira, J. Sirker, J. S. Caux, R. Hagemans, J. M. Maillet, S. R. White, and I. Affleck. Dynamical structure factor at small q for the XXZ spin-1/2 chain. *Journal of Statistical Mechanics : Theory and Experiment*, 2007 :P08022, 2007.

[167] N. Yu. Reshetikhin and F. A. Smirnov. Hidden quantum group symmetry and integrable perturbations of conformal field theories. *Communications in Mathematical Physics*, 131 :157, 1990.

[168] C. D. T. Runge. *Die Vektoranalysis des dreidimensionalen Raumes*. Leipzig : S. Hirzel, 1919.

[169] T. D. Schultz. Note on the One-Dimensional Gas of Impenetrable Point-Particle Bosons. *Journal of Mathematical Physics*, 4(5) :666, 1963.

[170] D. R. D. Scott. Classical functional Bethe ansatz for SL(N) : Separation of variables for the magnetic chain. *Journal of Mathematical Physics*, 35 :5831–5843, 1994.

[171] M. A. Semenov-Tian Shansky. What is a classical r-matrix ? *Functional Analysis and Its Applications*, 17 :259–272, 1983.

[172] M. A. Semenov-Tian Shansky. Dressing transformations and Poisson group actions. In *PRIMS 21*, volume 21 of *Publications of the Research Institute for Mathematical Sciences*, pages 1237–1260. Kyoto University, 1985.

[173] E. K. Sklyanin. Quantum version of the method of inverse scattering problem. *Journal of Soviet Mathematics*, 19 :1546–1595, 1982.

[174] E. K. Sklyanin. The quantum Toda chain. In N. Sanchez, editor, *Non-Linear Equations in Classical and Quantum Field Theory*, volume 226 of *Lecture Notes in Physics*, pages 196–233. Springer Berlin Heidelberg, 1985.

[175] E. K. Sklyanin. On complete integrability of the Landau-Lifschitz equation. Preprint LOMI E-3-79, 1986.

[176] E. K. Sklyanin. Exact quantization of the sinh-Gordon model. *Nuclear Physics B*, 326(3) :719–736, Nov 1989.

[177] E. K. Sklyanin. New approach to the quantum nonlinear Schrodinger equation. *Journal of Physics A : Mathematical and General*, 22(17) :3551–3560, Sep 1989.

[178] E. K. Sklyanin. Poisson structure of a periodic classical XYZ -chain. *Journal of Soviet Mathematics*, 46(1) :1664–1683, Jul 1989.

[179] E. K. Sklyanin. Separation of variables in the Gaudin model. *Journal of Soviet Mathematics*, 47 :2473–2488, 1989.

[180] E. K. Sklyanin. Quantum inverse scattering method. Selected topics. In Ge M.-L., editor, *Quantum groups and quantum integrable systems.* Singapore ; River Edge, NJ : World Scientific, 1992.

[181] E. K. Sklyanin. Separation of variables in the classical integrable SL(3) magnetic chain. *Communications in Mathematical Physics*, 150(1) :181–191, Nov 1992.

[182] E. K. Sklyanin. Separation of Variables. New Trends. *Progress of Theoretical Physics : Supplement*, 118 :35–60, 1995.

[183] E. K. Sklyanin. Separation of variables in the quantum integrable models related to the Yangiany[sl(3)]. *Journal of Mathematical Sciences*, 80(3) :1861–1871, Jun 1996.

[184] N. A. Slavnov. Calculation of scalar products of wave functions and form factors in the framework of the alcebraic Bethe ansatz. *Theoretical and Mathematical Physics*, 79(2) :502–508, May 1989.

[185] F. A. Smirnov. The quantum Gelfand-Levitan-Marchenko equations and form factors in the sine-Gordon model. *Journal of Physics A : Mathematical and General*, 17 :L873, 1984.

[186] F. A. Smirnov. A general formula for soliton form factors in the quantum sine-Gordon model. *Journal of Physics A : Mathematical and General*, 19 :L575, 1986.

[187] F. A. Smirnov. The perturbated $c < 1$ conformal field theories as reduction of sine-Gordon model. *International Journal of Modern Physics A*, 4 :4213, 1989.

[188] F. A. Smirnov. Reductions of the sine-Gordon model as a perturbation of minimal models of conformal field theory. *Nuclear Physics B*, 337 :156, 1990.

[189] F. A. Smirnov. *Form factors in completely integrable models of quantum field theory.* World Scientific, 1992.

[190] F. A. Smirnov. On the deformation of Abelian integrals. *Letters in Mathematical Physics*, 36(3) :267–275, Mar 1996.

[191] F. A. Smirnov. Structure of matrix elements in the quantum Toda chain. *Journal of Physics A : Mathematical and General*, 31(44) :8953–8971, Nov 1998.

[192] B. Sutherland, C. N. Yang, and C. P. Yang. Exact Solution of a Model of Two-Dimensional Ferroelectrics in an Arbitrary External Electric Field. *Physical Review Letters*, 19(10) :588–591, Sep 1967.

[193] H. B. Thacker and D. Wilkinson. Inverse scattering transform as an operator method in quantum field theory. *Physical Review D*, 19 :3660–3665, 1979.

[194] H. G. Vaidya and C. A. Tracy. Crossover scaling function for the one-dimensional XY model at zero temperature. *Physics Letters A*, 68(3-4) :378–380, Oct 1978.

[195] H. G. Vaidya and C. A. Tracy. One-Particle Reduced Density Matrix of Impenetrable Bosons in One Dimension at Zero Temperature. *Physical Review Letters*, 42(1) :3–6, Jan 1979.

[196] L. van Hove. Correlations in Space and Time and Born Approximation Scattering in Systems of Interacting Particles. *Physical Review*, 95 :249, 1954.

[197] L. van Hove. Time-Dependent Correlations between Spins and Neutron Scattering in Ferromagnetic Crystal. *Physical Review*, 95 :1374–1384, 1954.

[198] J.-L. Verdier. Groupes quantiques. In *Séminaire Bourbaki*, 1987.

[199] G. von Gehlen, N. Iorgov, S. Pakuliak, and V. Shadura. The Baxter-Bazhanov-Stroganov model : separation of variables and the Baxter equation. *Journal of Physics A : Mathematical and General*, 39 :7257, 2006.

[200] G. von Gehlen, N. Iorgov, S. Pakuliak, and V. Shadura. Factorized finite-size Ising model spin matrix elements from separation of variables. *Journal of Physics A : Mathematical and Theoretical*, 42(30) :304026, Jul 2009.

[201] G. von Gehlen, N. Iorgov, S. Pakuliak, V. Shadura, and Yu. Tykhyy. Form-factors in the Baxter-Bazhanov-Stroganov model I : norms and matrix elements. *Journal of Physics A : Mathematical and Theoretical*, 40(47) :14117–14138, Nov 2007.

[202] G. von Gehlen, N. Iorgov, S. Pakuliak, V. Shadura, and Yu. Tykhyy. Form-factors in the Baxter-Bazhanov-Stroganov model II : Ising model on the finite lattice. *Journal of Physics A : Mathematical and Theoretical*, 41(9) :095003, Mar 2008.

[203] L. R. Walker. Antiferromagnetic Linear Chain. *Physical Review*, 116 :1089, 1959.

[204] K. Watson. Some General Relations between the Photoproduction and Scattering of *pi* Mesons. *Physical Review*, 95(1) :228–236, Jul 1954.

[205] T. Wu, B. M. McCoy, C. Tracy, and E. Barouch. Spin-spin correlation functions for the two-dimensional Ising model : Exact theory in the scaling region. *Physical Review B*, 13(1) :316–374, Jan 1976.

[206] C. Yang. The Spontaneous Magnetization of a Two-Dimensional Ising Model. *Physical Review*, 85(5) :808–816, Mar 1952.

[207] C. N. Yang. Some Exact Results for the Many-Body Problem in one Dimension with Repulsive Delta-Function Interaction. *Physical Review Letters*, 19 :1312–1315, 1967.

[208] C. N. Yang and C. P. Yang. One-Dimensional Chain of Anisotropic Spin-Spin Interactions. I. Proof of Bethe Hypothesis for Ground State in a Finite System. *Physical Review*, 150(1) :321–327, Oct 1966.

[209] C. P. Yang. Exact Solution of a Model of Two-Dimensional Ferroelectrics in an Arbitrary External Electric Field. *Physical Review Letters*, 19(10) :586–588, Sep 1967.

[210] N. J. Zabusky. Phenomena Associated with the Oscillations of a Nonlinear Model String. In S. Drobot, editor, *Proceedings of the Conference on Mathematical Models in the Physical Sciences*. Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs, New Jersey, 1963.

[211] N. J. Zabusky and M. Kruskal. Interaction of Solitons in a Collisionless Plasma and the Recurrence of Initial States. *Physical Review Letters*, 15(6) :240–243, Aug 1965.

[212] V. E. Zakharov, S. V. Manakov, S. P. Novikov, and L. P. Pitaievski. *Theory of Solitons. The inverse problem method.* Plenum, New-York, 1984.

[213] V. E. Zakharov and A. B. Shabat. Exact theory of two-dimensional self-focusing and one-dimensional self-modulation of waves in non-linear media. *JETP*, 34 :62–69, 1972.

[214] V. E. Zakharov and A. B. Shabat. A scheme for integrating the nonlinear equations of mathematical physics by the method of the inverse scattering problem. I. *Functional Analysis and Its Applications*, 8 : 3 :226–235, 1974.

[215] V. E. Zakharov and A. B. Shabat. Integration of nonlinear equations of mathematical physics by the method of inverse scattering II. *Functional Analysis and Its Applications*, 13 :166–174, 1979.

[216] V. E. Zakharov, L. A. Takhtajan, and L. D. Faddeev. Complete description of solutions of the 'sine-Gordon' equation. *Doklady Akademii nauk SSSR. Seriâ, Matematika, fizika.*, 219 :1334, 1974.

[217] A. B. Zamolodchikov. Exact two-particle S matrix of quantum solitons of the sine-Gordon model. *JETP Letters*, 25 :468, 1977.

[218] A. B. Zamolodchikov and Al. B. Zamolodchikov. Relativistic factorized S-matrix in two dimensions having O(N) isotopic symmetry. *Nuclear Physics B*, 133 :525, 1978.

[219] A. B. Zamolodchikov and Al. B. Zamolodchikov. Factorized S-matrices in two dimensions as the exact solutions of certain relativistic quantum field theory models. *Annals of Physics*, 120 :253, 1979.

Article I

On the form factors of local operators
in the lattice sine-Gordon model

Publié dans
J. Stat. Mech. (2012) P10006

LPENSL-TH-12-04
YITP-SB-12-12

On the form factors of local operators in the lattice sine-Gordon model

N. Grosjean[1], **J. M. Maillet**[2], **G. Niccoli**[3]

Abstract

We develop a method for computing form factors of local operators in the framework of Sklyanin's separation of variables (SOV) approach to quantum integrable systems. For that purpose, we consider the sine-Gordon model on a finite lattice and in finite dimensional cyclic representations as our main example. We first build our two central tools for computing matrix elements of local operators, namely, a generic determinant formula for the scalar products of states in the SOV framework and the reconstruction of local fields in terms of the separate variables. The general form factors are then obtained as sums of determinants of finite dimensional matrices, their matrix elements being given as weighted sums running over the separate variables and involving the Baxter Q-operator eigenvalues.

[1]Laboratoire de Physique, UMR 5672 du CNRS, ENS Lyon, France, nicolas.grosjean@ens-lyon.fr
[2] Laboratoire de Physique, UMR 5672 du CNRS, ENS Lyon, France, maillet@ens-lyon.fr
[3]YITP, Stony Brook University, New York, USA, niccoli@max2.physics.sunysb.edu

Contents

1 Introduction

The computation of general matrix elements and correlation functions of local operators is one of the fundamental problems of quantum field theory and statistical mechanics. These objects contain indeed the key dynamical and measurable quantities of the corresponding physical systems, see e.g. [1–4]. In the integrable (low dimensional) situation [5–11], thanks to the existence of powerful algebraic structures related to the Yang-Baxter algebra (see e.g. [12–20] and references therein), significant progress towards their exact determination has been obtained in the last thirty years. Such results concern in particular models solvable by means of the algebraic Bethe ansatz like the XXZ Heisenberg spin chain [5–9]. They were first obtained at the free fermion point, namely for the Ising model and the Heisenberg chain (for anisotropy Δ equal to zero) [21–24]. Going beyond such a free fermion case involves a deep use of the Yang-Baxter algebra. After historical attempts for the finite chain in the framework of the Bethe ansatz (see [18] and references therein) but leading in fact to implicit representations in terms of dual fields, explicit representations for form factors and correlation functions were first obtained directly in the infinite chain (in the massive regime) [20, 25]. The underlying quantum algebra structure was instrumental there together with a few assumptions on the representation of the Hamiltonian and of the local spin operators within the representation theory of this quantum affine algebra. Similar results for the disordered regime were then derived using the assumption that correlation functions should satisfy q-deformed KZ equations in close analogy with the massive regime [26]. The derivation of these results (both for massive and massless regimes and in the presence of a magnetic field) was later obtained in the framework of the algebraic Bethe ansatz, starting from finite size systems, thanks to the resolution of the quantum inverse scattering problem [27–29]. Further investigations led to the extension of these results to the non-zero temperature case [30, 31] and also to the case of non-trivial (integrable) boundary conditions [32, 33]. The computation of physical (two-point) correlation functions required sophisticated summation techniques of the elementary blocks of correlation functions [34–37] that ultimately led to the exact computation of their asymptotic behavior [38–41]. It is also worth mentioning that controlled numerical summation techniques combined with these exact results on form factors led to the determination of dynamical structure factors in very good agreement with actual neutron scattering experiments on magnetic crystals, see e.g. [42–45]. Another important line of research revealed powerful hidden Grassmann structures that could also be used in the analysis of the conformal limit of these models [46–51]. Finally, it was recently shown how to obtain the asymptotic behavior of the correlation functions for critical systems through their expansion in terms of form factors in the finite volume [52–54].

For more sophisticated systems, like lattice integrable models related to higher rank algebras or for integrable relativistic quantum field theories, the present state of the art is slightly less satisfactory despite considerable efforts.

On the one hand, the bootstrap approach has provided great insights into the structure of the exact scattering matrices [55–61] and form factors of such integrable massive quantum field theories [62–66]. Perturbed conformal field theory[1] (CFT) [72–83] has also been used in this context together with a new understanding of the integrable structure of CFT [84–86]. Several important attempts have also been made to use Sklyanin's separation of variable method (SOV) [87–93] in these more complicated algebraic situations and in particular in the case of infinite dimensional representations associated to the quantum fields [96–103].

[1] See [67–71] and references therein for some literature on conformal field theories.

On the other hand, although these advances lead to invaluable informations on these theories, a direct computation of the form factors and correlation functions starting from the description of their local fields and using the given Hamiltonian dynamics is still missing. The main reason is that although these approaches succeeded to describe more and more efficiently both the space of states of such models and the space of their form factors, the connection between the set of operators used to reach this goal and the local operators of the theory one is interested in has not been found yet. Consequently, the matrix elements and correlation functions of these local fields can at best be identified through indirect arguments. In other words, contrary to the above mentioned finite dimensional cases, the solution of the quantum inverse scattering problem is in general not known in the field theory situation; moreover, it appears very often in these more complicated models (either on the lattice or in the continuum) that the usual algebraic Bethe ansatz is no longer applicable due to the lack of a proper reference state, and that the SOV framework [87–89] has to be considered instead. Although this beautiful method is quite general and powerful to describe the spectrum of these models, the problem of reconstructing the local operators of the corresponding theories in terms of the separate variables is in general still open (see however [100]).

To explain in more detail the main issues of this problem, let us consider in particular the sine-Gordon model which will be the main example analyzed in this article. As we just recall, integrable massive field theories in infinite volume can be solved *on-shell*[2] through the determination of their exact S-matrices [55–61] which completely characterize the particle dynamics. In this particle formulation of the theory a direct access to the local fields is missing and any information about them needs to be extracted from the particle dynamics. The monodromy properties and the singularity structure provide a set of functional equations [62–66] for the form factors of the local fields on asymptotic particle states. These form factor equations are uniquely fixed by the knowledge of the exact S-matrix and the space of their solutions is expected to coincide with that of the local operators of the theory; many results are known on the form factors of local fields, see for example [77–80], [104–114] and references therein for some literature related to sine-Gordon model. However, it is worth pointing out that the form factor equations only contain information on symmetry data of the fields (like charges and spin) and after fixing them to some values, we are still left with an infinite dimensional space of form factor solutions which should correspond to the infinite dimensional space of local fields sharing these data. There is a large literature dedicated to the longstanding problem of the identification of the local fields in the scattering formulation of quantum field theories. Different methods have been introduced to address it; one important line of research is related to the description of massive integrable quantum field theories as (super-renormalizable) perturbations of conformal field theories by relevant local fields [72–83]. This characterization has led to the expectation that the perturbations do not change the structure of the local fields in this way leading to the attempt to classify the local field content of massive theories by that of the corresponding ultraviolet conformal field theories. The latter issue was first addressed in [79] in the simplest massive free theory, namely the Ising model. There a conjecture was introduced defining a correspondence between mild asymptotic behavior at high energy of form factors and chiral local fields. Such a conjecture was justified showing the isomorphism of the space of chiral local fields in the massive and conformal models. The extension of the chiral isomorphism to interacting massive integrable theories was done in [115] for several massive deformations of minimal conformal models, in [116] for the

[2] See for a review [82] and references therein.

sine-Gordon model and in [117] for all its reductions to unitary minimal models[3]. The problem to extend the classification also to non-chiral local fields was analyzed in a series of works [125–128]; in particular, for the massive Lee-Yang model, the first proof that the operator space determined by the particle dynamics coincides with that prescribed by conformal symmetry at criticality was given in [128]. While these are indubitably important results on the global structure of the operator space in massive theories it is worth pointing out that they do not lead to the full identification of particular local fields[4]. In [92] a criterion has been introduced based on the quasi-classical characterization of the local fields; it has been fully described in the special cases of the restricted sine-Gordon model at the reflectionless points for chiral fields and verified on the basis of counting arguments [93]. One should also mention that the new fermionic structures mentioned above in the case of the XXZ lattice model have been used recently to investigate the structure of matrix elements of the sine-Gordon model in the infinite volume limit [94, 95]. Remarkably, in [95] it has been shown that these fermionic operators coincide with those introduced in [93] by identifying the corresponding one-point functions. This makes clear that, in the S-matrix formulation of massive quantum integrable theories in infinite volume, the main open problem remains the absence of a direct reconstruction of the local fields. One of our motivation for the present work is to define an exact setup to solve this problem for one of the most paradigmatic integrable quantum field theory, namely the sine-Gordon model. As a first step we will consider the discretized version of the sine-Gordon field theory on a finite lattice. Moreover we will simplify its dynamics by considering the case for which the representation space of the exponents of the field and conjugated momentum is an arbitrary finite dimensional cyclic representation of the quantum algebra, namely the case where the parameter $q = e^{i\hbar}$ is a root of unity. This case is interesting in its own right [129–131] and we also believe that the treatment of the full continuum theory could then be reached by taking the needed limits; at least, we expect to be able to identify the main ingredients and structures necessary to reach this goal and learn enough to extend it to other models on the lattice or in the continuum.

It is worth to describe schematically the microscopic approach that we intend to follow to solve integrable quantum field theories by the complete characterization of their spectrum and of their dynamics.

The first goal is the solution of the spectral problem, for the lattice and the continuum theories:
i) Solution of the spectral problem for the integrable lattice regularization by the construction of the eigenstates and eigenvalues of the transfer matrix using the SOV method.
ii) Reformulation of the spectrum in terms of nonlinear integral equations (of thermodynamic Bethe ansatz type) and definition of finite volume quantum field theories in the continuum limit.
iii) Derivation of the S matrix and particle description of the spectrum in the infinite volume (IR) limit.
iv) Derivation of the renormalization group fixed point conformal spectrum in the UV limit.

The second goal is the solution of the dynamics along the following steps:
i) Determinant formulae for the scalar product of states in particular involving transfer matrix eigenstates.
ii) Reconstruction of the local operators in terms of the quantum separate variables.
iii) Computation of matrix elements of local operators in the eigenstates basis of the transfer matrix.
iv) Thermodynamic behavior of the above quantities and computation of the physical correlation functions.

[3] An important role in these studies has been played by the fermionic representations of the characters, as derived for different classes of rational conformal field theories in [118–124].

[4] Apart for some of them, like the components of the stress energy tensor, which can be characterized by physical prescription [125] and [127].

In this paper, we develop partly this program for the lattice regularization of the sine-Gordon model while the completion of it taking into account the required limits to the continuum theory in finite and infinite volume case will be addressed in future publications. Hence, we would like to stress that the present paper represents only the first steps towards the determination of the form factors of local fields for the full continuum sine-Gordon model. Nevertheless, we hope that the framework we develop in this paper will indeed lead to this goal and moreover will be useful also for other models.

The possibility to apply the SOV method for the discretized version of the sine-Gordon model in finite dimensional cyclic representations was demonstrated recently in [129], hence opening the question of the computations of matrix elements of local fields in a completely controlled (finite dimensional) setting. The first result of the present paper is to show that the scalar products of states can be computed in this case as finite dimensional determinants involving in particular, for eigenstates of the Hamiltonian, the corresponding eigenvalues of the Baxter Q-operator; orthogonality of different eigenstates can be proven directly from these expressions. Further, we will show that the lattice discretization of the local fields of the sine-Gordon model can be reconstructed explicitly in terms of the separate variables. These two ingredients finally lead to the determination of the matrix elements of the exponential of the local fields of the model between arbitrary eigenstates of the Hamiltonian.

This article is organized as follows. In Section 2 we define the sine-Gordon model on a finite lattice in the cyclic representations and recall the main ingredients of the SOV method in that context. In section 3, we derive the decomposition of the identity in the SOV-basis and the characterization of the transfer matrix eigenstates in this basis. In section 4, we show how to compute the scalar products in the class of separate states in the SOV representations also providing the decomposition of the identity w.r.t. the transfer matrix eigenbasis. The next section is devoted to the reconstruction of the local fields in terms of the separate variables. In Section 6 we use these results to compute the form factors of the local fields in terms of finite size determinants. In the last section we comment on these results and compare them to the existing literature.

2 The sine-Gordon model

We use this section to recall the main results derived in [129, 130] on the spectrum description of the lattice sine-Gordon model.

2.1 Definitions

2.1.1 Classical model

The classical sine-Gordon model can be characterized by the following Hamiltonian density:

$$\mathrm{H}_{SG} \equiv (\partial_x \phi)^2 + \Pi^2 + 8\pi\mu \cos 2\beta\phi \tag{2.1}$$

where the field $\phi(x,t)$ is defined for $(x,t) \in [0,R] \times \mathbb{R}$ with periodic boundary conditions $\phi(x+R,t) = \phi(x,t)$. The dynamics of the model in the Hamiltonian formalism is defined in terms of variables $\phi(x,t)$,

$\Pi(x,t)$ with the following Poisson brackets:

$$\{\Pi(x,t),\phi(y,t)\}=2\pi\delta(x-y). \tag{2.2}$$

The classical integrability of the sine-Gordon model is assured thanks to the representation of the equation of motion by a zerocurvature condition:

$$[\partial_t - V(x,t;\lambda),\partial_x - U(x,t;\lambda)]=0, \tag{2.3}$$

where, by using the Pauli matrices, we have defined:

$$U = \mathrm{k}_1\sigma_1\cos\beta\phi+\mathrm{k}_2\sigma_2\sin\beta\phi-\mathrm{k}_3\sigma_3\Pi, \tag{2.4}$$

$$V = -\mathrm{k}_2\sigma_1\cos\beta\phi-\mathrm{k}_1\sigma_2\sin\beta\phi-\mathrm{k}_3\sigma_3\partial_x\phi, \tag{2.5}$$

$$\mathrm{k}_1=i\beta\,(\pi\mu)^{1/2}\,(\lambda-\lambda^{-1}),\quad \mathrm{k}_2=i\beta\,(\pi\mu)^{1/2}\,(\lambda+\lambda^{-1}),\ \mathrm{k}_3\equiv i\frac{\beta}{2}. \tag{2.6}$$

2.1.2 Quantum lattice regularization

In order to regularize the ultraviolet divergences that arise in the quantization of the model a lattice discretization is introduced. The field variables are discretized according to the standard recipe:

$$\phi_n\equiv\phi(n\Delta),\quad \Pi_n\equiv\Delta\Pi(n\Delta), \tag{2.7}$$

where $\Delta=R/N$ is the lattice spacing. Then, the canonical quantization is defined by imposing that ϕ_n and Π_n are self-adjoint operators satisfying the commutation relations:

$$[\phi_n,\Pi_m]=2\pi i\delta_{n,m}. \tag{2.8}$$

The quantum lattice regularization of the sine-Gordon model[5] that we use here goes back to [13, 132, 133] and is related to formulations which have more recently been studied in [134, 135]. Here, the basic operators are the exponentials of the fields and of the conjugate momenta:

$$\mathsf{v}_n\equiv e^{-i\beta\phi_n},\quad \mathsf{u}_n\equiv e^{i\beta\Pi_n/2}. \tag{2.9}$$

Then, the commutation relations (2.8) imply that the couples of unitary operators (u_n,v_n) generate N independent Weyl algebras $\mathcal{W}_n$:

$$\mathsf{u}_n\mathsf{v}_m=q^{\delta_{nm}}\mathsf{v}_m\mathsf{u}_n\,,\quad q\equiv e^{-i\pi\beta^2}, \tag{2.10}$$

for any $n\in\{1,...,\mathsf{N}\}$. In terms of these basic operators the quantum lattice sine-Gordon model can be characterized by the following Lax matrix[6]:

$$\mathsf{L}_n(\lambda)=\kappa_n\begin{pmatrix}\mathsf{u}_n(q^{-1/2}\mathsf{v}_n\kappa_n+q^{1/2}\mathsf{v}_n^{-1}\kappa_n^{-1}) & (\lambda_n\mathsf{v}_n-(\mathsf{v}_n\lambda_n)^{-1})/i\\ (\lambda_n/\mathsf{v}_n-\mathsf{v}_n/\lambda_n)/i & \mathsf{u}_n^{-1}(q^{1/2}\mathsf{v}_n\kappa_n^{-1}+q^{-1/2}\mathsf{v}_n^{-1}\kappa_n)\end{pmatrix} \tag{2.11}$$

[5]The integrability of the time evolution in the lattice sine-Gordon model is known [132, 136–138] and the most convenient way to formulate it uses the Baxter Q-operators; these operators have been constructed for the closely related chiral Potts model in [139], see [129] for a review and rederivation of these points in the lattice sine-Gordon model.

[6]Here, we make our analysis for the lattice sine-Gordon model leaving the κ_n and ξ_n as free parameters. However, the sine-Gordon model in the continuum limit is reproduced taking suitable limits on these parameters by relating them to the mass μ and the radius R of the compactified space direction of the model.

where $\lambda_n \equiv \lambda/\xi_n$ for any $n \in \{1, ..., \mathsf{N}\}$ with ξ_n and κ_n parameters of the model.

The monodromy matrix $\mathsf{M}(\lambda)$ is defined by:

$$\mathsf{M}(\lambda) \equiv \begin{pmatrix} \mathsf{A}(\lambda) & \mathsf{B}(\lambda) \\ \mathsf{C}(\lambda) & \mathsf{D}(\lambda) \end{pmatrix} \equiv \mathsf{L}_{\mathsf{N}}(\lambda) \cdots \mathsf{L}_1(\lambda), \tag{2.12}$$

and satisfies the quadratic commutation relations:

$$R(\lambda/\mu)\,(\mathsf{M}(\lambda) \otimes 1)\,(1 \otimes \mathsf{M}(\mu)) \;=\; (1 \otimes \mathsf{M}(\mu))\,(\mathsf{M}(\lambda) \otimes 1) R(\lambda/\mu)\,, \tag{2.13}$$

with the 6-vertex R-matrix:

$$R(\lambda) = \begin{pmatrix} q\lambda - q^{-1}\lambda^{-1} & & & \\ & \lambda - \lambda^{-1} & q - q^{-1} & \\ & q - q^{-1} & \lambda - \lambda^{-1} & \\ & & & q\lambda - q^{-1}\lambda^{-1} \end{pmatrix}. \tag{2.14}$$

The elements of $\mathsf{M}(\lambda)$ are the generators of the so-called Yang-Baxter algebra and the commutation relations (2.13) imply the mutual commutativity of the elements of the following one-parameter family of operators:

$$\mathsf{T}(\lambda) \equiv \mathrm{tr}_{\mathbb{C}^2} \mathsf{M}(\lambda), \tag{2.15}$$

the so-called transfer matrix. In the case of a lattice with N even quantum sites, we can also introduce the operator:

$$\Theta \equiv \prod_{n=1}^{\mathsf{N}} \mathsf{v}_n^{(-1)^n}, \tag{2.16}$$

which plays the role of a *grading operator* in the Yang-Baxter algebra:

Proposition 6 of [129] *For the even chain, the charge Θ commutes with the transfer matrix and satisfies the following commutation relations with the generators of the Yang-Baxter algebra:*

$$\Theta \mathsf{C}(\lambda) = q\mathsf{C}(\lambda)\Theta, \quad [\mathsf{A}(\lambda), \Theta] = 0, \tag{2.17}$$

$$\mathsf{B}(\lambda)\Theta = q\Theta\mathsf{B}(\lambda), \quad [\mathsf{D}(\lambda), \Theta] = 0. \tag{2.18}$$

Moreover, the Θ-charge allows to express the asymptotics of the leading generators $\mathsf{A}(\lambda)$ and $\mathsf{D}(\lambda)$:

$$\lim_{\log \lambda \to \mp\infty} \lambda^{\pm \mathsf{N}} \mathsf{A}(\lambda) = \left(\prod_{a=1}^{\mathsf{N}} \frac{\kappa_a \xi_a^{\pm 1}}{i} \right) \Theta^{\mp 1}, \qquad \lim_{\log \lambda \to \mp\infty} \lambda^{\pm \mathsf{N}} \mathsf{D}(\lambda) = \left(\prod_{a=1}^{\mathsf{N}} \frac{\kappa_a \xi_a^{\pm 1}}{i} \right) \Theta^{\pm 1} \tag{2.19}$$

and hence the asymptotic behavior of the transfer matrix:

$$\lim_{\log \lambda \to \mp\infty} \lambda^{\pm \mathsf{N}} \mathsf{T}(\lambda) = \left(\prod_{a=1}^{\mathsf{N}} \frac{\kappa_a \xi_a^{\pm 1}}{i} \right) \left(\Theta + \Theta^{-1} \right). \tag{2.20}$$

2.2 Cyclic representations

In the present article, we will consider representations where both v_m and u_n have discrete spectra; in particular, we will restrict our attention to the case in which q is a root of unity:

$$\beta^2 = \frac{p'}{p}, \qquad p, p' \in \mathbb{Z}^{>0}, \tag{2.21}$$

with p odd and p' even so that $q^p = 1$. The condition (2.21) implies that the powers p of the generators u_n and v_n are central elements of each Weyl algebra $\mathcal{W}_n$. In this case, we can associate a p-dimensional linear space R_n to any site n of the chain and we can define on it a cyclic representation of $\mathcal{W}_n$ as follows:

$$\mathsf{v}_n|k_n\rangle = v_n q^{k_n}|k_n\rangle, \;\; \mathsf{u}_n|k_n\rangle = u_n|k_n - 1\rangle, \quad \forall k_n \in \{0, ..., p-1\}, \tag{2.22}$$

with the cyclicity condition,

$$|k_n + p\rangle = |k_n\rangle. \tag{2.23}$$

The vectors $|k_n\rangle$ define a v_n-eigenbasis of the local space R_n and the parameters v_n and u_n characterize the central elements of the $\mathcal{W}_n$-representation:

$$\mathsf{v}_n^p = v_n^p, \;\; \mathsf{u}_n^p = u_n^p. \tag{2.24}$$

Here, we require the unitarity of the generators u_n and v_n and the orthonormality of the elements of the v_n-eigenbasis w.r.t. the scalar product introduced in R_n.

Let L_n be the linear space dual of R_n and let $\langle k_n|$ be the elements of the dual basis defined by:

$$\langle k_n|k_n'\rangle = (|k_n\rangle, |k_n'\rangle) \equiv \delta_{k_n,k_n'} \quad \forall k_n, k_n' \in \{0, ..., p-1\}. \tag{2.25}$$

From the unitarity of the generators u_n and v_n, the covectors $\langle k_n|$ define a v_n-eigenbasis in the dual space L_n and the following left representation of Weyl algebra $\mathcal{W}_n$:

$$\langle k_n|\mathsf{v}_n = v_n q^{k_n}\langle k_n|, \;\; \langle k_n|\mathsf{u}_n = u_n\langle k_n + 1|, \quad \forall k_n \in \{0, ..., p-1\}, \tag{2.26}$$

with cyclicity condition:

$$\langle k_n| = \langle k_n + p|. \tag{2.27}$$

In the *left* and *right* linear spaces:

$$\mathcal{L}_\mathsf{N} \equiv \otimes_{n=1}^{\mathsf{N}} \mathrm{L}_n, \qquad \mathcal{R}_\mathsf{N} \equiv \otimes_{n=1}^{\mathsf{N}} \mathrm{R}_n, \tag{2.28}$$

the representations of the Weyl algebras $\mathcal{W}_n$ induce cyclic left and right representations of dimension p^N of the monodromy matrix elements, i.e. cyclic representations of the Yang-Baxter algebra. Such representations are characterized by the $4\mathsf{N}$ parameters $\kappa = (\kappa_1, \ldots, \kappa_\mathsf{N})$, $\xi = (\xi_1, \ldots, \xi_\mathsf{N})$, $u = (u_1, \ldots, u_\mathsf{N})$ and $v = (v_1, \ldots, v_\mathsf{N})$. The unitarity of the Weyl algebra generators u_n and v_n implies that the parameters v and u are pure phases and the following Hermitian conjugation properties of the generators of Yang-Baxter algebra hold:

Lemma 1 of [130] *If the parameters of the representation κ_n^2 and ξ_n^2 are real for any $n = 1, \dots, \mathsf{N}$ and satisfy the constrains*

$$\varepsilon \equiv -(\kappa_n \xi_n)/\left(\kappa_n^* \xi_n^*\right) \quad \textit{is uniform along the chain,} \tag{2.29}$$

then it holds:

$$\mathsf{M}(\lambda)^\dagger \equiv \begin{pmatrix} \mathsf{A}^\dagger(\lambda) & \mathsf{B}^\dagger(\lambda) \\ \mathsf{C}^\dagger(\lambda) & \mathsf{D}^\dagger(\lambda) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathsf{D}(\lambda^*) & \mathsf{C}(\varepsilon\lambda^*) \\ \mathsf{B}(\varepsilon\lambda^*) & \mathsf{A}(\lambda^*) \end{pmatrix}, \tag{2.30}$$

which, in particular, implies the self-adjointness of the transfer matrix $\mathsf{T}(\lambda)$ for real λ.

Let us define the average value $\mathcal{O}$ of the elements of the monodromy matrix $\mathsf{M}(\lambda)$ as

$$\mathcal{O}(\Lambda) = \prod_{k=1}^{p} \mathsf{O}(q^k \lambda), \qquad \Lambda = \lambda^p, \tag{2.31}$$

where O can be A, B, C or D and we have to remark that the commutativity of each family of operators $\mathsf{A}(\lambda)$, $\mathsf{B}(\lambda)$, $\mathsf{C}(\lambda)$ and $\mathsf{D}(\lambda)$ implies that the corresponding average values are functions of Λ, so that $\mathcal{B}(\Lambda)$, $\mathcal{C}(\Lambda)$ are Laurent polynomials of degree $[\mathsf{N}]$ while $\mathcal{A}(\Lambda)$, $\mathcal{D}(\Lambda)$ are Laurent polynomials of degree $\bar{\mathsf{N}}$ in Λ, where we are using the notations:

$$[\mathsf{N}] \equiv \mathsf{N} - \mathsf{e}_\mathsf{N}, \quad \bar{\mathsf{N}} \equiv \mathsf{N} + \mathsf{e}_\mathsf{N} - 1, \quad \mathsf{e}_\mathsf{N} \equiv \begin{cases} 1 \text{ for } \mathsf{N} \text{ even}, \\ 0 \text{ for } \mathsf{N} \text{ odd}. \end{cases} \tag{2.32}$$

Proposition 2.1.

a) The average values $\mathcal{A}(\Lambda)$, $\mathcal{B}(\Lambda)$, $\mathcal{C}(\Lambda)$, $\mathcal{D}(\Lambda)$ of the monodromy matrix elements are central elements. Furthermore, they satisfy the following relations:

$$(\mathcal{A}(\Lambda))^* \equiv \mathcal{D}(\Lambda^*), \quad (\mathcal{B}(\Lambda))^* \equiv \epsilon\mathcal{C}(\Lambda^*), \tag{2.33}$$

under complex conjugation in the case of self-adjoint representations.

b) Let

$$\mathcal{M}(\Lambda) \equiv \begin{pmatrix} \mathcal{A}(\Lambda) & \mathcal{B}(\Lambda) \\ \mathcal{C}(\Lambda) & \mathcal{D}(\Lambda) \end{pmatrix}$$

be the 2×2 matrix whose elements are the average values of the elements of the monodromy matrix $\mathsf{M}(\lambda)$, then we have,

$$\mathcal{M}(\Lambda) = \mathcal{L}_\mathsf{N}(\Lambda)\,\mathcal{L}_{\mathsf{N}-1}(\Lambda) \dots \mathcal{L}_1(\Lambda),$$

where

$$\mathcal{L}_n(\Lambda) \equiv \begin{pmatrix} q^{p/2} u_n^p (\kappa_{2n}^p v_n^p + v_n^{-p}) & \kappa_n^p (\Lambda v_n^p / \xi_n^p - \xi_n^p / \Lambda v_n^p)/i^p \\ \kappa_n^p (\Lambda / v_n^p \xi_n^p - \xi_n^p v_n^p / \Lambda)/i^p & q^{p/2} u_n^{-p} (\kappa_{2n}^p v_n^{-p} + v_n^p) \end{pmatrix}, \tag{2.34}$$

is the 2×2 matrix whose elements are the average values of the elements of the Lax matrix $\mathsf{L}_n(\lambda)$.

A similar statement was first proven in [140]. In the present paper, we will be mainly restricted to the case:

$$u_n = 1, \;\; v_n = 1 \quad \text{for} \;\; n = 1, \ldots, \mathsf{N}. \tag{2.35}$$

In these representations it holds:

Lemma 2.1. *The power 2p of the zeros of $B(\lambda)$ are real numbers with possible complex conjugate couples.*

Proof. The previous proposition and the equality

$$\mathcal{C}(\Lambda) = \mathcal{B}(\Lambda), \tag{2.36}$$

which holds for the sine-Gordon representations with $\mathsf{u}_n^p = \mathsf{v}_n^p = 1$, as proven in [129], imply that

$$(\mathcal{B}(\Lambda))^* = \epsilon \mathcal{B}(\Lambda^*), \tag{2.37}$$

and so the statement of the lemma. □

2.3 SOV-representations of the Yang-Baxter algebra

According to Sklyanin's method [87–89], a separation of variables (SOV) representation for the spectral problem of the transfer matrix $\mathsf{T}(\lambda)$ is defined as a representation where the commutative family of operators $\mathsf{B}(\lambda)$ is diagonal. In [129], the following theorem has been shown:

Theorem 1 of [129] *For almost all the values of the parameters κ and ξ of the representation, there exists a SOV representation for the sine-Gordon model, i.e.* $\mathsf{B}(\lambda)$ *is diagonalizable and with simple spectrum.*

The proof of this has been given by a recursive construction of the left cyclic SOV-representations for the sine-Gordon model. Let us recall here the left SOV-representations of the generators of the Yang-Baxter algebra. The Proposition 2.1 fixes the average values of $\mathsf{B}(\lambda)$:

$$\mathcal{B}(\Lambda) = \left(\prod_{n=1}^{\mathsf{N}} \frac{\kappa_n}{i} \right)^p Z_{\mathsf{N}}^{\mathsf{e_N}} \prod_{a=1}^{[\mathsf{N}]} (\Lambda / Z_a - Z_a / \Lambda) \tag{2.38}$$

in terms of the parameters of the representations. Note that the simplicity of the spectrum of $\mathsf{B}(\lambda)$ is equivalent to the requirement $Z_a \neq Z_b$ for any $a \neq b \in \{1, \ldots, \mathsf{N} - \mathsf{e_N}\}$. Moreover, the reality condition of the explicitly known polynomial $\mathcal{B}(\Lambda)$, proven in Lemma 2.1, implies that there exists a N-tupla $\{\eta_1^{(0)}, ..., \eta_{\mathsf{N}}^{(0)}\}$ of p-roots of $\{Z_1, ..., Z_{\mathsf{N}}\}$ which satisfy the requirements:

$$\left(\eta_a^{(0)}\right)^2 \in \mathcal{R} \text{ or } \left(\eta_a^{(0)}\right)^2 \notin \mathcal{R} \rightarrow \; \exists b \in \{1, ..., \mathsf{N}\} \backslash a : \left(\eta_a^{(0)}\right)^2 = \left(\left(\eta_b^{(0)}\right)^2\right)^* . \tag{2.39}$$

We chose such a set as reference point. Then, let $\langle \eta_1^{(k_1)}, ..., \eta_{\mathsf{N}}^{(k_{\mathsf{N}})} | \in \mathcal{L}_{\mathsf{N}}$ be the generic element of a basis of left eigenstates of $\mathsf{B}(\lambda)$:

$$\langle \mathbf{k} | \mathsf{B}(\lambda) = \mathsf{b}_{\mathbf{k}}(\lambda) \langle \mathbf{k} | \;\text{ with }\; \mathsf{b}_{\mathbf{k}}(\lambda) \equiv \left(\prod_{n=1}^{\mathsf{N}} \frac{\kappa_n}{i} \right) \eta_{\mathsf{N}}^{(k_{\mathsf{N}}) \mathsf{e_N}} \prod_{a=1}^{[\mathsf{N}]} (\lambda / \eta_a^{(k_a)} - \eta_a^{(k_a)} / \lambda), \tag{2.40}$$

with the definitions

$$\langle\mathbf{k}|\equiv\langle\eta_1^{(k_1)},...,\eta_{\mathsf{N}}^{(k_{\mathsf{N}})}|,\quad \eta_a^{(k_a)}\equiv q^{k_a}\eta_a^{(0)}\ \forall a\in\{1,\dots,\mathsf{N}\},\quad \mathbf{k}\equiv(k_1,\dots,k_{\mathsf{N}})\in\mathbb{Z}_p^{\mathsf{N}}\,. \tag{2.41}$$

Then the left action of the other Yang-Baxter generators reads:

$$\langle\mathbf{k}|\mathsf{A}(\lambda)=\mathsf{e}_{\mathsf{N}}\frac{\mathsf{b}_{\mathbf{k}}(\lambda)}{\eta_{\mathsf{N}}^{(k_{\mathsf{N}})}}(\frac{\lambda}{\eta_{\mathbf{k},\mathsf{A}}}\langle\mathbf{k}|\mathsf{T}_{\mathsf{N}}^{-}-\frac{\eta_{\mathbf{k},\mathsf{A}}}{\lambda}\langle\mathbf{k}|\mathsf{T}_{\mathsf{N}}^{+})+\sum_{a=1}^{[\mathsf{N}]}\prod_{b\neq a}\frac{(\frac{\lambda}{\eta_b^{(k_b)}}-\frac{\eta_b^{(k_b)}}{\lambda})}{(\frac{\eta_a^{(k_a)}}{\eta_b^{(k_b)}}-\frac{\eta_b^{(k_b)}}{\eta_a^{(k_a)}})}a(\eta_a^{(k_a)})\langle\mathbf{k}|\mathsf{T}_a^{-}, \tag{2.42}$$

$$\langle\mathbf{k}|\mathsf{D}(\lambda)=\mathsf{e}_{\mathsf{N}}\frac{\mathsf{b}_{\mathbf{k}}(\lambda)}{\eta_{\mathsf{N}}^{(k_{\mathsf{N}})}}(\frac{\lambda}{\eta_{\mathbf{k},\mathsf{D}}}\langle\mathbf{k}|\mathsf{T}_{\mathsf{N}}^{+}-\frac{\eta_{\mathbf{k},\mathsf{D}}}{\lambda}\langle\mathbf{k}|\mathsf{T}_{\mathsf{N}}^{-})+\sum_{a=1}^{[\mathsf{N}]}\prod_{b\neq a}\frac{(\frac{\lambda}{\eta_b^{(k_b)}}-\frac{\eta_b^{(k_b)}}{\lambda})}{(\frac{\eta_a^{(k_a)}}{\eta_b^{(k_b)}}-\frac{\eta_b^{(k_b)}}{\eta_a^{(k_a)}})}d(\eta_a^{(k_a)})\langle\mathbf{k}|\mathsf{T}_a^{+}, \tag{2.43}$$

where $\eta_{\mathbf{k},\mathsf{A}}$ and $\eta_{\mathbf{k},\mathsf{D}}$ are defined by:

$$\eta_{\mathbf{k},\mathsf{A}}\equiv\eta_{\mathbf{k},\mathsf{D}}\equiv\frac{\prod_{n=1}^{\mathsf{N}}\xi_n}{\prod_{n=1}^{\mathsf{N}-1}\eta_n^{(k_n)}}, \tag{2.44}$$

and the shift operators $\mathsf{T}_n^{\pm}$ are defined by:

$$\langle\eta_1^{(k_1)},...,\eta_n^{(k_n)},...,\eta_{\mathsf{N}}^{(k_{\mathsf{N}})}|\mathsf{T}_n^{\pm}\equiv\langle\eta_1^{(k_1)},...,\eta_n^{(k_n\pm1)},...,\eta_{\mathsf{N}}^{(k_{\mathsf{N}})}|. \tag{2.45}$$

The operator family $\mathsf{C}(\lambda)$ is uniquely[7] defined by the quantum determinant relation:

$$\det{}_{\mathrm{q}}\mathsf{M}(\lambda)\;\equiv\;\mathsf{A}(\lambda)\mathsf{D}(q^{-1}\lambda)-\mathsf{B}(\lambda)\mathsf{C}(q^{-1}\lambda), \tag{2.46}$$

where $\det_{\mathrm{q}}\mathsf{M}(\lambda)$ is a central element[8] of the Yang-Baxter algebra (2.13) which reads:

$$\det{}_{\mathrm{q}}\mathsf{M}(\lambda)\equiv\prod_{n=1}^{\mathsf{N}}\kappa_n^2(\lambda/\mu_{n,+}-\mu_{n,+}/\lambda)(\lambda/\mu_{n,-}-\mu_{n,-}/\lambda), \tag{2.47}$$

where $\mu_{n,\pm}\equiv i\kappa_n^{\pm1}q^{1/2}\xi_n$. In the representations which satisfy (2.35) the coefficients of the SOV-representations can be fixed by introducing the following Laurent polynomials:

$$a(\lambda)=(-i)^{\mathsf{N}}\prod_{n=1}^{\mathsf{N}}\frac{\kappa_n}{\lambda_n}(1+iq^{-1/2}\lambda_n\kappa_n)(1+iq^{-1/2}\lambda_n/\kappa_n),\quad d(\lambda)=q^{\mathsf{N}}a(-\lambda q), \tag{2.48}$$

Note that these coefficients are related to the quantum determinant by:

$$\det{}_{\mathrm{q}}\mathsf{M}(\lambda)=a(\lambda)d(\lambda/q). \tag{2.49}$$

Note that for the choice of the parameters $\{\kappa_n\}\in i\mathbb{R}^{\mathsf{N}}$ and $\{\xi_n\}\in\mathbb{R}^{\mathsf{N}}$ the numbers $\kappa\equiv\prod_{n=1}^{\mathsf{N}}\kappa_n/i$ and $\mu_{n,\pm}^p$ are real.

[7]Note that the operator $\mathsf{B}(\lambda)$ is invertible except for λ which coincides with one of its zeros, so in general $\mathsf{C}(\lambda)$ is defined by (2.46) just inverting $\mathsf{B}(\lambda)$. This is enough to fix in an unique way $\mathsf{C}(\lambda)$, as it is a Laurent polynomial of degree $[\mathsf{N}]$ in λ.

[8]The centrality of the quantum determinant in the Yang-Baxter algebra was first discovered in [141], see also [142] for an historical note.

2.4 SOV-characterization of the T-spectrum

Let us denote by Σ_{T} the set of the eigenvalue functions $t(\lambda)$ of the transfer matrix $\mathsf{T}(\lambda)$. From the definitions (2.11) and (2.15), Σ_{T} is a subset of $\mathbb{R}[\lambda^2, \lambda^{-2}]_{\bar{\mathsf{N}}/2}$ where $\mathbb{R}[x, x^{-1}]_{\mathsf{M}}$ denotes the linear space over the field $\mathbb{R}$ of the *real* Laurent polynomials of degree M in the variable x:

$$(f(x))^* = f(x^*) \ \ \forall x \in \mathbb{C} \quad \text{with} \ \ f(x) \in \mathbb{R}[x, x^{-1}]_{\mathsf{M}}. \tag{2.50}$$

Note that in the case of N even, the Θ-charge naturally induces the grading $\Sigma_{\mathsf{T}} = \bigcup_{k=0}^{(p-1)/2} \Sigma_{\mathsf{T}}^k$, where:

$$\Sigma_{\mathsf{T}}^k \equiv \left\{ t(\lambda) \in \Sigma_{\mathsf{T}} : \lim_{\log \lambda \to \mp\infty} \lambda^{\pm \mathsf{N}} t(\lambda) = \left(\prod_{a=1}^{\mathsf{N}} \frac{\kappa_a \xi_a^{\pm 1}}{i} \right) (q^k + q^{-k}) \right\}. \tag{2.51}$$

This simply follows from the asymptotics of $\mathsf{T}(\lambda)$ and from its commutativity with Θ.

In the SOV-representations the spectral problem for $\mathsf{T}(\lambda)$ is reduced to the following discrete system of Baxter-like equations in the wave-function $\Psi_t(\mathbf{k}) \equiv \langle \mathbf{k} | \, t \, \rangle$ of a T-eigenstate $| \, t \, \rangle$:

$$t(\eta_r^{(k_r)}) \Psi_t(\mathbf{k}) = a(\eta_r^{(k_r)}) \Psi_t(\mathsf{T}_r^-(\mathbf{k})) + d(\eta_r^{(k_r)}) \Psi_t(\mathsf{T}_r^+(\mathbf{k})) \qquad \forall r \in \{1, ..., [\mathsf{N}]\}. \tag{2.52}$$

Here, we have denoted by $\mathsf{T}_r^{\pm}(\mathbf{k}) \equiv (k_1, \dots, k_r \pm 1, \dots, k_{\mathsf{N}})$ and $a(\eta_r^{(k_r)})$ and $d(\eta_r^{(k_r)})$ the coefficients of the SOV-representation as defined in (2.48). In the case of N even, from the asymptotics of $\mathsf{T}(\lambda)$ given in (2.20), we have to add to the system (2.52) the following equations in the variable $\eta_{\mathsf{N}}^{(k_{\mathsf{N}})}$:

$$\Psi_{t, \pm k}(\mathsf{T}_{\mathsf{N}}^+(\mathbf{k})) \; = \; q^{\mp k} \Psi_{t, \pm k}(\mathbf{k}), \tag{2.53}$$

for the wave function $\Psi_{t, \pm k}(\mathbf{k}) \equiv \langle \mathbf{k} | \, t_{\pm k} \rangle$, where $| \, t_{\pm k} \rangle$ is a simultaneous eigenstate of $\mathsf{T}(\lambda)$ and Θ corresponding to $t(\lambda) \in \Sigma_{\mathsf{T}}^k$ and Θ-eigenvalue $q^{\pm k}$ with $k \in \{0, ..., (p-1)/2\}$.

In the paper [130], a complete characterization of the T-spectrum (eigenvalues and eigenstates) has been given in terms of a certain class of polynomial solutions of a given functional equation. Let us recall here these results; to this aim let us introduce the one-parameter family $D(\lambda)$ of $p \times p$ matrices:

$$D(\lambda) \equiv \begin{pmatrix}
t(\lambda) & -d(\lambda) & 0 & \cdots & 0 & -a(\lambda) \\
-a(q\lambda) & t(q\lambda) & -d(q\lambda) & 0 & \cdots & 0 \\
0 & \ddots & & & & \vdots \\
\vdots & & \cdots & & & \vdots \\
\vdots & & & \cdots & & \vdots \\
\vdots & & & & \ddots & 0 \\
0 & \ldots & 0 & -a(q^{p-2}\lambda) & t(q^{p-2}\lambda) & -d(q^{p-2}\lambda) \\
-d(q^{p-1}\lambda) & 0 & \ldots & 0 & -a(q^{p-1}\lambda) & t(q^{p-1}\lambda)
\end{pmatrix} \tag{2.54}$$

where for now $t(\lambda)$ is just a real even Laurent polynomial of degree $\bar{\mathsf{N}}$ in λ. Then the determinant of the matrix $D(\lambda)$ is an even Laurent polynomial of maximal degree $\bar{\mathsf{N}}$ in $\Lambda \equiv \lambda^p$ and we have the following complete characterization of the transfer matrix spectrum:

Proposition 2.2. *The set Σ_{T} coincides with the set of all the $t(\lambda) \in \mathbb{R}[\lambda^2, \lambda^{-2}]_{\bar{\mathsf{N}}/2}$ solutions of the functional equation:*

$$\det_p D(\Lambda) = 0, \quad \forall \Lambda \in \mathbb{C}. \tag{2.55}$$

Moreover, for N odd the spectrum of $\mathsf{T}(\lambda)$ is simple and the eigenstate $|\, t\rangle$ corresponding to $t(\lambda) \in \Sigma_{\mathsf{T}}$ is characterized by:

$$\Psi_t(\mathbf{k}) \equiv \langle\, \eta_1^{(k_1)}, ..., \eta_{\mathsf{N}}^{(k_{\mathsf{N}})} \,|\, t\,\rangle = \prod_{r=1}^{\mathsf{N}} Q_t(\eta_r^{(k_r)}), \tag{2.56}$$

while for N even the simultaneous spectrum of $\mathsf{T}(\lambda)$ and Θ is simple and the eigenstate $|\, t_{\pm k}\rangle$ corresponding to $t(\lambda) \in \Sigma_{\mathsf{T}}^k$ and Θ-eigenvalue $q^{\pm k}$ with $k \in \{0, ..., (p-1)/2\}$ is characterized by:

$$\Psi_{t,\pm k}(\mathbf{k}) \equiv \langle \eta_1^{(k_1)}, ..., \eta_{\mathsf{N}}^{(k_{\mathsf{N}})} \,|\, t_{\pm k}\rangle = (\eta_{\mathsf{N}}^{(k_{\mathsf{N}})})^{\mp k} \prod_{r=1}^{\mathsf{N}-1} Q_t(\eta_r^{(k_r)}). \tag{2.57}$$

Here,

$$Q_t(\lambda) = \lambda^{a_t} \prod_{h=1}^{(p-1)\mathsf{N}-(b_t+a_t)} (\lambda_h - \lambda), \qquad 0 \leq a_t \leq p-1, \; 0 \leq b_t \leq (p-1)\mathsf{N}, \tag{2.58}$$

$$a_t = 0, \qquad b_t = 0 \;\mathsf{mod}\, p, \quad \textit{for } \mathsf{N} \textit{ odd} \tag{2.59}$$

$$a_t = \pm k \;\mathsf{mod}\, p, \qquad b_t = \pm k \;\mathsf{mod}\, p, \quad \textit{for } \mathsf{N} \textit{ even and } t(\lambda) \in \Sigma_{\mathsf{T}}^k, \tag{2.60}$$

is the unique (up to quasi-constants) real polynomial solution of the Baxter functional equation:

$$t(\lambda) Q_t(\lambda) = a(\lambda) Q_t(\lambda q^{-1}) + d(\lambda) Q_t(\lambda q) \quad \forall \lambda \in \mathbb{C}, \tag{2.61}$$

corresponding to the given $t(\lambda)$, which has been constructed in terms of the cofactors of the matrix $D(\Lambda)$, in Theorems 2 and 3 of [130].

3 Decomposition of the identity in the SOV-basis

The main goal of this section is to obtain the decomposition of the identity in the SOV basis. This is an important step towards the decomposition of any correlation function in terms of matrix elements of local operators in this basis. In the previous sections we recalled how to define a left SOV basis together with the left action of the Yang-Baxter operators on it. To achieve the identity decomposition we need to define a corresponding right SOV basis.

Traditionally, the right states are constructed from the left ones by means of hermitian conjugation. In the case of hermitian B operators, this procedure would lead to right states that are still eigenstates of B by means of its right action. However, from (2.30), we know that the hermitian conjugate of the B operator is the operator C not equal to B. Hence such a procedure (hermitian conjugation of the left SOV basis) would lead to a right SOV basis with respect to the C operator, namely it would be an eigenstate basis for C. Although such a route could eventually lead to an interesting decomposition of the identity, it would result in a very complicated structure of the scalar product of states (in particular, left and right states would have no simple orthogonality properties); moreover, we would not be able to obtain, at least by obvious means, the coefficients in such an identity decomposition in terms of simple determinants. As a consequence, following this path, the structure of the matrix elements of the local operators would hardly be given in terms of determinants as these are usually obtained as rather simple and localized deformations of the corresponding scalar product formula.

Therefore, our strategy will be here quite different : we will construct the right SOV basis such that it will be an eigenstate basis for the right action of the B operators. Hence it will not be obtained as the hermitian conjugate of the left SOV basis; however, due to the simplicity of the B-spectrum, left states will admit natural orthogonality properties with respect to right states. Hence, this procedure will lead to a decomposition of the identity as a single sum over the SOV basis, with coefficients that are not necessarily positive numbers but that are computable by means of rather simple and universal determinant formula. To show this, we will have to compute the action of left B-eigenstates (covectors) on right B-eigenstates (vectors); up to an overall constant these actions are completely fixed by the left and right SOV-representations of the Yang-Baxter algebras when the gauges in the SOV-representations are chosen.

Let us first define the right SOV-representation with respect to the B operator by the following actions:

$$\mathsf{B}(\lambda)|\mathbf{k}\rangle = |\mathbf{k}\rangle \mathsf{b}_{\mathbf{k}}(\lambda), \tag{3.1}$$

$$\mathsf{A}(\lambda)|\mathbf{k}\rangle = \mathsf{e}_{\mathsf{N}}(\mathsf{T}_{\mathsf{N}}^{+}|\mathbf{k}\rangle\frac{\lambda}{\eta_{\mathbf{k},\mathsf{A}}} - \mathsf{T}_{\mathsf{N}}^{-}|\mathbf{k}\rangle\frac{\eta_{\mathbf{k},\mathsf{A}}}{\lambda})\frac{\mathsf{b}_{\mathbf{k}}(\lambda)}{\eta_{\mathsf{N}}^{(k_{\mathsf{N}})}} + \sum_{a=1}^{[\mathsf{N}]}\mathsf{T}_{a}^{+}|\mathbf{k}\rangle\prod_{b\neq a}\frac{(\frac{\lambda}{\eta_b^{(k_b)}} - \frac{\eta_b^{(k_b)}}{\lambda})}{(\frac{\eta_a^{(k_a)}}{\eta_b^{(k_b)}} - \frac{\eta_b^{(k_b)}}{\eta_a^{(k_a)}})}\bar{a}(\eta_a^{(k_a)}), \tag{3.2}$$

$$\mathsf{D}(\lambda)|\mathbf{k}\rangle = \mathsf{e}_{\mathsf{N}}(\mathsf{T}_{\mathsf{N}}^{-}|\mathbf{k}\rangle\frac{\lambda}{\eta_{\mathbf{k},\mathsf{D}}} - \mathsf{T}_{\mathsf{N}}^{+}|\mathbf{k}\rangle\frac{\eta_{\mathbf{k},\mathsf{D}}}{\lambda})\frac{\mathsf{b}_{\mathbf{k}}(\lambda)}{\eta_{\mathsf{N}}^{(k_{\mathsf{N}})}} + \sum_{a=1}^{[\mathsf{N}]}\mathsf{T}_{a}^{-}|\mathbf{k}\rangle\prod_{b\neq a}\frac{(\frac{\lambda}{\eta_b^{(k_b)}} - \frac{\eta_b^{(k_b)}}{\lambda})}{(\frac{\eta_a^{(k_a)}}{\eta_b^{(k_b)}} - \frac{\eta_b^{(k_b)}}{\eta_a^{(k_a)}})}\bar{d}(\eta_a^{(k_a)}), \tag{3.3}$$

on the generic right B-eigenstate $|\mathbf{k}\rangle \equiv |\eta_1^{(k_1)}, ..., \eta_{\mathsf{N}}^{(k_{\mathsf{N}})}\rangle \in \mathcal{R}_{\mathsf{N}}$. Here, the coefficients $\bar{a}(\eta_a)$ and $\bar{d}(\eta_a)$ of the representation are fixed up to the gauge by the condition:

$$\det{}_{\mathrm{q}}\mathsf{M}(\lambda) = \bar{d}(\lambda)\bar{a}(\lambda/q); \tag{3.4}$$

while $\mathsf{C}(\lambda)$ is uniquely defined by the quantum determinant relation (2.47).

3.1 Action of left B-eigenstates on right B-eigenstates

It is worth remarking that both for the right and left SOV-representations we are explicitly asking that the coefficients of the representations of $\mathsf{A}(\lambda)$ and $\mathsf{D}(\lambda)$ depend only on the zeros of $\mathsf{B}(\lambda)$ on which the corresponding shift operator acts; i.e. they are separated w.r.t. the zeros of $\mathsf{B}(\lambda)$. Naturally such requirement is compatible with the Yang-Baxter algebra and the quantum determinant relation but it is not implied by them. The main point that we are going to prove here is that this separation requirement completely fixes the actions of the generic covector in the left SOV-basis on the generic vector in the right SOV-basis. It may be helpful to explain this last statement in terms of the properties of the matrices which define the change of basis to the SOV-basis. Let us define the following isomorphism:

$$\varkappa : (h_1, ..., h_{\mathsf{N}}) \in \{1, ..., p\}^{\mathsf{N}} \rightarrow j = \varkappa(h_1, ..., h_{\mathsf{N}}) \equiv h_1 + \sum_{a=2}^{\mathsf{N}} p^{(a-1)}(h_a - 1) \in \{1, ..., p^{\mathsf{N}}\}, \tag{3.5}$$

then we can write:

$$\langle \mathbf{y}_j | = \langle \mathbf{x}_j | U^{(L)} = \sum_{i=1}^{p^{\mathsf{N}}} U^{(L)}_{j,i} \langle \mathbf{x}_i | \quad \text{and} \quad | \mathbf{y}_j \rangle = U^{(R)} | \mathbf{x}_j \rangle = \sum_{i=1}^{p^{\mathsf{N}}} U^{(R)}_{i,j} | \mathbf{x}_i \rangle, \tag{3.6}$$

where we have used the notations:

$$\langle \mathbf{y}_j | \equiv \langle \eta_1^{(h_1)}, ..., \eta_{\mathsf{N}}^{(h_{\mathsf{N}})} | \text{ and } | \mathbf{y}_j \rangle \equiv | \eta_1^{(h_1)}, ..., \eta_{\mathsf{N}}^{(h_{\mathsf{N}})} \rangle, \text{ for } j = \varkappa(h_1, ..., h_{\mathsf{N}}), \tag{3.7}$$

to represent, respectively, the states of the left and right SOV-basis and:

$$\langle \mathbf{x}_j | \equiv \otimes_{n=1}^{\mathsf{N}} \langle h_n | \quad \text{and} \quad | \mathbf{x}_j \rangle \equiv \otimes_{n=1}^{\mathsf{N}} | h_n \rangle, \text{ for } j = \varkappa(h_1, ..., h_{\mathsf{N}}), \tag{3.8}$$

to represent, respectively, the states of the left and right original v_n-orthonormal basis. Here, $U^{(L)}$ and $U^{(R)}$ are the $p^{\mathsf{N}} \times p^{\mathsf{N}}$ matrices for which it holds:

$$U^{(L)} \mathsf{B}(\lambda) = \Delta_{\mathsf{B}}(\lambda) U^{(L)}, \quad \mathsf{B}(\lambda) U^{(R)} = U^{(R)} \Delta_{\mathsf{B}}(\lambda), \tag{3.9}$$

where $\Delta_{\mathsf{B}}(\lambda)$ is a diagonal $p^{\mathsf{N}} \times p^{\mathsf{N}}$ matrix. The diagonalizability and simplicity of the B-spectrum imply the invertibility of the matrices $U^{(L)}$ and $U^{(R)}$ and the fact that all the diagonal entries of $\Delta_{\mathsf{B}}(\lambda)$ are Laurent polynomials in λ with different zeros. Then the following proposition holds:

Proposition 3.1. *Right and left SOV-basis are right and left* B*-eigenbasis such that the* $p^{\mathsf{N}} \times p^{\mathsf{N}}$ *matrix:*

$$M \equiv U^{(L)} U^{(R)} \tag{3.10}$$

is diagonal and characterized by:

$$M_{jj} = \langle \mathbf{y}_j | \mathbf{y}_j \rangle = \langle \eta_1^{(h_1)}, ..., \eta_{\mathsf{N}}^{(h_{\mathsf{N}})} | \eta_1^{(h_1)}, ..., \eta_{\mathsf{N}}^{(h_{\mathsf{N}})} \rangle = \frac{C_{\mathsf{N}} \prod_{a=1}^{[\mathsf{N}]} \prod_{k_a=1}^{h_a} a(\eta_a^{(k_a)}) / \bar{a}(\eta_a^{(k_a-1)})}{\prod_{1 \leq b < a \leq [\mathsf{N}]} (\eta_a^{(h_a)} / \eta_b^{(h_b)} - \eta_b^{(h_b)} / \eta_a^{(h_a)})}, \tag{3.11}$$

where we have denoted:

$$j = \varkappa(h_1, ..., h_{\mathsf{N}}) \tag{3.12}$$

and C_{N} *is a constant characteristic of the chosen representations.*

Proof. The fact that the matrix M is diagonal is a trivial consequence of the orthogonality of left and right eigenstates corresponding to different eigenvalue of $\mathsf{B}(\lambda)$ and of the simplicity of the B-spectrum. Indeed, defined $i = \varkappa(k_1, ..., k_{\mathsf{N}})$ and $j = \varkappa(h_1, ..., h_{\mathsf{N}})$, the following identities hold:

$$\mathsf{b}_{\mathbf{k}}(\lambda) M_{ij} = \langle \eta_1^{(k_1)}, ..., \eta_{\mathsf{N}}^{(k_{\mathsf{N}})} | \mathsf{B}(\lambda) | \eta_1^{(h_1)}, ..., \eta_{\mathsf{N}}^{(h_{\mathsf{N}})} \rangle, \tag{3.13}$$

$$\mathsf{b}_{\mathbf{h}}(\lambda) M_{ij} = \langle \eta_1^{(k_1)}, ..., \eta_{\mathsf{N}}^{(k_{\mathsf{N}})} | \mathsf{B}(\lambda) | \eta_1^{(h_1)}, ..., \eta_{\mathsf{N}}^{(h_{\mathsf{N}})} \rangle, \tag{3.14}$$

where the identity (3.13) follows acting with $\mathsf{B}(\lambda)$ on the left while the identity (3.14) follows acting with $\mathsf{B}(\lambda)$ on the right. Then in the case $(k_1,...,k_{\mathsf{N}}) \neq (h_1,...,h_{\mathsf{N}})$ the identities (3.13) and (3.14) imply that $M_{ij} = 0$ for any $i \neq j \in \{1,...,p^{\mathsf{N}}\}$.

Now, let us compute the matrix element $\theta_a \equiv \langle \eta_1^{(0)},...,\eta_a^{(1)},...,\eta_{\mathsf{N}}^{(0)}|\mathsf{A}(\eta_a^{(1)})|\eta_1^{(0)},...,\eta_a^{(0)},...,\eta_{\mathsf{N}}^{(0)}\rangle$, where $a \in \{1,...,[\mathsf{N}]\}$. Then using the left action of the operator $\mathsf{A}(\bar{\eta}_a)$ we get:

$$\theta_a = a(\eta_a^{(1)})\langle \eta_1^{(0)},...,\eta_a^{(0)},...,\eta_{\mathsf{N}}^{(0)}|\eta_1^{(0)},...,\eta_a^{(0)},...,\eta_{\mathsf{N}}^{(0)}\rangle \tag{3.15}$$

while using the right action of the operator $\mathsf{A}(\bar{\eta}_a)$ and the orthogonality of right and left B-eigenstates corresponding to different eigenvalues we get:

$$\theta_a = \prod_{b\neq a,b=1}^{[\mathsf{N}]} \frac{(\eta_a^{(1)}/\eta_b^{(0)} - \eta_b^{(0)}/\eta_a^{(1)})}{(\eta_a^{(0)}/\eta_b^{(0)} - \eta_b^{(0)}/\eta_a^{(0)})} \bar{a}(\eta_a^{(0)})\langle \eta_1^{(0)},...,\eta_a^{(1)},...,\eta_{\mathsf{N}}^{(0)}|\eta_1^{(0)},...,\eta_a^{(1)},...,\eta_{\mathsf{N}}^{(0)}\rangle \tag{3.16}$$

and so:

$$\frac{\langle \eta_1^{(0)},...,\eta_a^{(1)},...,\eta_{\mathsf{N}}^{(0)}|\eta_1^{(0)},...,\eta_a^{(1)},...,\eta_{\mathsf{N}}^{(0)}\rangle}{\langle \eta_1^{(0)},...,\eta_a^{(0)},...,\eta_{\mathsf{N}}^{(0)}|\eta_1^{(0)},...,\eta_a^{(0)},...,\eta_{\mathsf{N}}^{(0)}\rangle} = \frac{a(\eta_a^{(1)})}{\bar{a}(\eta_a^{(0)})} \prod_{b\neq a,b=1}^{[\mathsf{N}]} \frac{(\eta_a^{(0)}/\eta_b^{(0)} - \eta_b^{(0)}/\eta_a^{(0)})}{(\eta_a^{(1)}/\eta_b^{(0)} - \eta_b^{(1)}/\eta_a^{(0)})}. \tag{3.17}$$

Then by applying (3.17) h_a times, we get:

$$\frac{\langle \eta_1^{(0)},...,\eta_a^{(h_a)},...,\eta_{\mathsf{N}}^{(0)}|\eta_1^{(0)},...,\eta_a^{(h_a)},...,\eta_{\mathsf{N}}^{(0)}\rangle}{\langle \eta_1^{(0)},...,\eta_a^{(0)},...,\eta_{\mathsf{N}}^{(0)}|\eta_1^{(0)},...,\eta_a^{(0)},...,\eta_{\mathsf{N}}^{(0)}\rangle} = \prod_{k_a=1}^{h_a} \frac{a(\eta_a^{(k_a)})}{\bar{a}(\eta_a^{(k_a-1)})} \prod_{b\neq a,b=1}^{[\mathsf{N}]} \frac{(\eta_a^{(0)}/\eta_b^{(0)} - \eta_b^{(0)}/\eta_a^{(0)})}{(\eta_a^{(h_a)}/\eta_b^{(0)} - \eta_b^{(h_a)}/\eta_a^{(0)})}. \tag{3.18}$$

Now, let us consider explicitly the case of even N. In this case we still have to define the recurrence for $a = \mathsf{N}$. We compute the matrix element:

$$\theta_{\mathsf{N}}(\lambda) \equiv \langle \eta_1^{(0)},...,\eta_{\mathsf{N}-1}^{(0)},\eta_{\mathsf{N}}^{(1)}|\mathsf{A}(\lambda)|\eta_1^{(0)},...,\eta_{\mathsf{N}-1}^{(0)},\eta_{\mathsf{N}}^{(0)}\rangle, \tag{3.19}$$

acting with $\mathsf{A}(\lambda)$ on the right we get:

$$\theta_{\mathsf{N}}(\lambda) \equiv \frac{\lambda \mathsf{b}_{\mathbf{k}}(\lambda)}{\eta_{\mathsf{N}}^{(k_{\mathsf{N}})}\eta_{\mathbf{k},\mathsf{A}}}\langle \eta_1^{(0)},...,\eta_{\mathsf{N}-1}^{(0)},\eta_{\mathsf{N}}^{(1)}|\eta_1^{(0)},...,\eta_{\mathsf{N}-1}^{(0)},\eta_{\mathsf{N}}^{(1)}\rangle, \tag{3.20}$$

while acting on the left we get:

$$\theta_{\mathsf{N}}(\lambda) \equiv \frac{\lambda \mathsf{b}_{\mathbf{k}}(\lambda)}{\eta_{\mathsf{N}}^{(k_{\mathsf{N}})}\eta_{\mathbf{k},\mathsf{A}}}\langle \eta_1^{(0)},...,\eta_{\mathsf{N}-1}^{(0)},\eta_{\mathsf{N}}^{(1)}|\eta_1^{(0)},...,\eta_{\mathsf{N}-1}^{(0)},\eta_{\mathsf{N}}^{(1)}\rangle, \tag{3.21}$$

which simply implies:

$$\langle \eta_1^{(0)},...,\eta_{\mathsf{N}-1}^{(0)},\eta_{\mathsf{N}}^{(1)}|\eta_1^{(0)},...,\eta_{\mathsf{N}-1}^{(0)},\eta_{\mathsf{N}}^{(1)}\rangle = \langle \eta_1^{(0)},...,\eta_{\mathsf{N}-1}^{(0)},\eta_{\mathsf{N}}^{(0)}|\eta_1^{(0)},...,\eta_{\mathsf{N}-1}^{(0)},\eta_{\mathsf{N}}^{(0)}\rangle. \tag{3.22}$$

The previous formula implies, for both N even and odd:

$$\frac{\langle \eta_1^{(h_a)},...,\eta_a^{(h_a)},...,\eta_{\mathsf{N}}^{(h_{\mathsf{N}})}|\eta_1^{(h_a)},...,\eta_a^{(h_a)},...,\eta_{\mathsf{N}}^{(h_{\mathsf{N}})}\rangle}{\langle \eta_1^{(0)},...,\eta_a^{(0)},...,\eta_{\mathsf{N}}^{(0)}|\eta_1^{(0)},...,\eta_a^{(0)},...,\eta_{\mathsf{N}}^{(0)}\rangle} = \prod_{a=1}^{[\mathsf{N}]}\prod_{k_a=1}^{h_a} \frac{a(\eta_a^{(k_a)})}{\bar{a}(\eta_a^{(k_a-1)})} \prod_{1\leq b<a\leq[\mathsf{N}]} \frac{(\frac{\eta_a^{(0)}}{\eta_b^{(0)}} - \frac{\eta_b^{(0)}}{\eta_a^{(0)}})}{(\frac{\eta_a^{(k_a)}}{\eta_b^{(k_b)}} - \frac{\eta_b^{(k_b)}}{\eta_a^{(k_a)}})}. \tag{3.23}$$

To prove it let us observe that (3.18) coincides with (3.23) for $h_2 = ... = h_{\mathsf{N}} = 0$. Now in the case $h_3 = ... = h_{\mathsf{N}} = 0$ with $h_1 \neq 0$ and $h_2 \neq 0$, we get (3.23) by the following factorization:

$$\begin{aligned}\frac{\langle\eta_1^{(h_1)},\eta_2^{(h_2)},...,\eta_{\mathsf{N}}^{(h_{\mathsf{N}})}|\eta_1^{(h_1)},\eta_2^{(h_2)},...,\eta_{\mathsf{N}}^{(h_{\mathsf{N}})}\rangle}{\langle\eta_1^{(0)},\eta_2^{(0)},...,\eta_{\mathsf{N}}^{(0)}|\eta_1^{(0)},\eta_2^{(0)},...,\eta_{\mathsf{N}}^{(0)}\rangle} &= \frac{\langle\eta_1^{(h_1)},\eta_2^{(0)},...,\eta_{\mathsf{N}}^{(h_{\mathsf{N}})}|\eta_1^{(h_1)},\eta_2^{(0)},...,\eta_{\mathsf{N}}^{(h_{\mathsf{N}})}\rangle}{\langle\eta_1^{(0)},\eta_2^{(0)},...,\eta_{\mathsf{N}}^{(0)}|\eta_1^{(0)},\eta_2^{(0)},...,\eta_{\mathsf{N}}^{(0)}\rangle} \\ &\times \frac{\langle\eta_1^{(h_1)},\eta_2^{(h_2)},...,\eta_{\mathsf{N}}^{(h_{\mathsf{N}})}|\eta_1^{(h_1)},\eta_2^{(h_2)},...,\eta_{\mathsf{N}}^{(h_{\mathsf{N}})}\rangle}{\langle\eta_1^{(h_1)},\eta_2^{(0)},...,\eta_{\mathsf{N}}^{(0)}|\eta_1^{(h_1)},\eta_2^{(0)},...,\eta_{\mathsf{N}}^{(0)}\rangle} \\ &= \prod_{a=1}^{2}\prod_{k_a=1}^{h_a}\frac{a(\eta_a^{(k_a)})}{\bar{a}(\eta_a^{(k_a-1)})}\prod_{b=2}^{[\mathsf{N}]}\frac{(\eta_1^{(0)}/\eta_b^{(0)}-\eta_b^{(0)}/\eta_1^{(0)})}{(\eta_1^{(h_1)}/\eta_b^{(0)}-\eta_b^{(0)}/\eta_1^{(h_1)})} \\ &\times \frac{(\eta_2^{(0)}/\eta_1^{(h_1)}-\eta_1^{(h_1)}/\eta_2^{(0)})}{(\eta_2^{(h_2)}/\eta_1^{(h_1)}-\eta_1^{(h_1)}/\eta_2^{(h_2)})}\prod_{b=3}^{[\mathsf{N}]}\frac{(\eta_2^{(0)}/\eta_b^{(0)}-\eta_b^{(0)}/\eta_2^{(0)})}{(\eta_2^{(h_2)}/\eta_b^{(0)}-\eta_b^{(0)}/\eta_2^{(h_2)})},\end{aligned} \tag{3.24}$$

and so on for the generic case. Finally, from (3.23) the statement of the proposition follows being by definition:

$$\frac{M_{ji}}{\langle\mathbf{y}_{p^{\mathsf{N}}}|\mathbf{y}_{p^{\mathsf{N}}}\rangle} \equiv \delta_{i,j}\frac{\langle\eta_1^{(h_1)},\eta_2^{(h_2)},...,\eta_{\mathsf{N}}^{(h_{\mathsf{N}})}|\eta_1^{(h_1)},\eta_2^{(h_2)},...,\eta_{\mathsf{N}}^{(h_{\mathsf{N}})}\rangle}{\langle\eta_1^{(0)},\eta_2^{(0)},...,\eta_{\mathsf{N}}^{(0)}|\eta_1^{(0)},\eta_2^{(0)},...,\eta_{\mathsf{N}}^{(0)}\rangle}. \tag{3.25}$$

□

Remark 2. The diagonal matrix M is mainly fixed by the requirement that the left and right representations have a separate form in the zeros of $\mathsf{B}(\lambda)$. Indeed, this fixes completely the denominator in all the entries of M. Moreover, the constant C_{N} is a function of the representation only via the central elements $(Z_1, ..., Z_{\mathsf{N}})$. In the following, we will fix:

$$C_{\mathsf{N}} \equiv (\eta_{\mathsf{N}}^{(0)}p^{1/2})^{\mathsf{e_N}}, \tag{3.26}$$

this choice just amounts to an overall renormalization of the states. Finally, the products of $a(\lambda)/\bar{a}(\lambda q^{-1})$ in the numerator of each matrix element is fixed from the choice of the gauge done in the SOV-representations. Note that we are always free to take the following gauge:

$$\bar{a}(\lambda q^{-1}) \equiv a(\lambda), \tag{3.27}$$

for which the numerator in (3.11) is C_{N}.

3.2 SOV-decomposition of the identity

The previous results allow to write the following spectral decomposition of the identity $\mathbb{I}$:

$$\mathbb{I} \equiv \sum_{i=1}^{p^{\mathsf{N}}}\mu_i|\mathbf{y}_i\rangle\langle\mathbf{y}_i|, \tag{3.28}$$

in terms of the left and right SOV-basis. Here,

$$\mu_i \equiv \frac{1}{\langle\mathbf{y}_i|\mathbf{y}_i\rangle}, \tag{3.29}$$

is the required analogue of Sklyanin's *measure*[9], which is discrete for the cyclic representations of the sine-Gordon model. Explicitly, the SOV-decomposition of the identity reads:

$$\mathbb{I} \equiv \sum_{h_1,\dots,h_{\mathsf{N}}=1}^{p} \prod_{1\leq b<a\leq[\mathsf{N}]} ((\eta_a^{(h_a)})^2 - (\eta_b^{(h_b)})^2) \frac{|\eta_1^{(h_1)},\dots,\eta_{\mathsf{N}}^{(h_{\mathsf{N}})}\rangle\langle\eta_1^{(h_1)},\dots,\eta_{\mathsf{N}}^{(h_{\mathsf{N}})}|}{C_{\mathsf{N}}\prod_{b=1}^{[\mathsf{N}]}\omega_b(\eta_b^{(h_b)})}, \tag{3.30}$$

where the separate functions $\omega_b(\eta_b^{(h_b)})$ reproduce the numerator in (3.11):

$$\omega_b(\eta_b^{(h_b)}) \equiv \left(\eta_b^{(h_b)}\right)^{[\mathsf{N}]-1} \prod_{k_b=1}^{h_b} a(\eta_b^{(k_b)})/\bar{a}(\eta_b^{(k_b-1)}) \tag{3.31}$$

and they are gauge dependent parameters.

Remark 3. Sklyanin's measure[10] has been first introduced by Sklyanin in his article on quantum Toda chain [87]. There, it has been derived as a consequence of the self-adjointness of the transfer matrix w.r.t. the scalar product. In particular, the Hermitian properties of the operator zeros and their conjugate shift operators have been fixed to assure the self-adjointness of the transfer matrix. In the similar but more involved sinh-Gordon model [101], the problem related to the uniqueness of the definition of this measure has been analyzed. There, it has been proven that the measure is in fact uniquely determined once the positive self-adjointness of the generators $\mathsf{A}(\lambda)$ and $\mathsf{D}(\lambda)$ is required. In the compact case of the sine-Gordon model the method used here insures that the analogue of Sklyanin's measure is uniquely determined up to an overall constant and the choice of gauge, as discussed in the previous remark. Let us mention that the Sklyanin's measure has already been derived in [144] for cyclic representations of the related τ_2-model[11] [148–150]. There the measure has been obtained by a different approach, i.e. by a recursive construction which needs to go through the recursion in the construction of left and right SOV-basis. It is interesting to remark that in our purely algebraic derivation we skip these model dependent features so that the approach we used is suitable for general compact SOV-representations of the 6-vertex Yang-Baxter algebra.

3.3 SOV-representation of left and right T-eigenstates

Up to an overall normalization, the SOV-decomposition of the identity and the SOV-characterization of the transfer matrix spectrum lead to the following representations of the right eigenstate of the transfer matrix $\mathsf{T}(\lambda)$:

$$\begin{aligned}|t_{\pm k}\rangle &= \sum_{i=1}^{p^{\mathsf{N}}} \mu_i \langle \mathbf{y}_i | t_{\pm k}\rangle |\mathbf{y}_i\rangle \\ &= \sum_{h_1,\dots,h_{\mathsf{N}}=1}^{p} \left(\frac{q^{\mp k h_{\mathsf{N}}}}{p^{1/2}}\right)^{\mathsf{e}_{\mathsf{N}}} \prod_{a=1}^{[\mathsf{N}]} Q_t(\eta_a^{(h_a)}) \prod_{1\leq b<a\leq[\mathsf{N}]} ((\eta_a^{(h_a)})^2 - (\eta_b^{(h_b)})^2) \frac{|\eta_1^{(h_1)},\dots,\eta_{\mathsf{N}}^{(h_{\mathsf{N}})}\rangle}{\prod_{b=1}^{[\mathsf{N}]}\omega_b(\eta_b^{(h_b)})},\end{aligned} \tag{3.32}$$

[9] Note that here it cannot be called a measure as the $\mathsf{B}(\lambda)$ operator is not self-adjoint, meaning that in general the μ_i are not positive real numbers. However the above procedure indeed defines a proper decomposition of the identity operator with simple and computable coefficients.

[10] See also [98] for further discussions on the measure.

[11] The SOV analysis for these representations has been first developed in [145].

corresponding to the eigenvalue $t(\lambda) \in \Sigma_{\mathsf{T}}^{k}$, where the index $k \in \{0, ..., (p-1)/2\}$ appears only for N even and indicates that $|t_{\pm k}\rangle$ is also a Θ-eigenstate with eigenvalue $q^{\pm k}$. Here $Q_t(\lambda)$ is the solution of the Baxter equation (3.34) defined in Proposition 2.2. In a similar way we can prove that, up to an overall normalization, the left T-eigenstate has the following SOV-representation:

$$\begin{aligned} \langle t_{\pm k}| &= \sum_{i=1}^{p^{\mathsf{N}}} \mu_i \langle t_{\pm k}|\mathbf{y}_i\rangle\langle\mathbf{y}_i| \\ &= \sum_{h_1,...,h_{\mathsf{N}}=1}^{p} \left(\frac{q^{\pm kh_{\mathsf{N}}}}{p^{1/2}}\right)^{\mathsf{e}_{\mathsf{N}}} \prod_{a=1}^{[\mathsf{N}]} \bar{Q}_t(\eta_a^{(h_a)}) \prod_{1\leq b<a\leq[\mathsf{N}]} (\eta_a^{(h_a)} - \eta_b^{(h_b)}) \frac{\langle \eta_1^{(h_1)}, ..., \eta_{\mathsf{N}}^{(h_{\mathsf{N}})}|}{\prod_{b=1}^{[\mathsf{N}]} \omega_b(\eta_b^{(h_b)})}, \end{aligned} \tag{3.33}$$

where $\bar{Q}_t(\lambda)$ is the unique (up to quasi-constants) polynomial solution of the Baxter functional equation:

$$t(\lambda)\bar{Q}_t(\lambda) = \bar{d}(\lambda)\bar{Q}_t(\lambda q^{-1}) + \bar{a}(\lambda)\bar{Q}_t(\lambda q). \tag{3.34}$$

Remark 4. In the gauge fixed by (3.27), this Baxter equation reads:

$$t(\lambda)\bar{Q}_t(-\lambda) = q^{\mathsf{N}}a(\lambda)\bar{Q}_t(-\lambda q^{-1}) + q^{-\mathsf{N}}d(\lambda)\bar{Q}_t(-\lambda q), \tag{3.35}$$

and so, up to quasi-constants, we have:

$$\bar{Q}_t(\lambda) = \lambda^{\chi_{\mathsf{N}}} Q_t(-\lambda), \qquad \chi_{\mathsf{N}} = \mathsf{N} \bmod p,\ 0 \leq \chi_{\mathsf{N}} \leq p-1. \tag{3.36}$$

4 Decomposition of the identity in the T-eigenbasis

Here we use the results of the previous section to compute the action of covectors on vectors which in the left and right SOV-basis have a *separate form* similar to that of the transfer matrix eigenstates.

4.1 Action of left separate states on right separate states

Let us start giving the following definition of a left $\langle\alpha_k|$ and a right $|\beta_k\rangle$ separate states; they are respectively a covector and a vector which have the following *separate form* in terms of the SOV-decomposition of the identity:

$$\langle\alpha_k| = \sum_{h_1,...,h_{\mathsf{N}}=1}^{p} \left(\frac{q^{kh_{\mathsf{N}}}}{p^{1/2}}\right)^{\mathsf{e}_{\mathsf{N}}} \prod_{a=1}^{[\mathsf{N}]} \alpha_a(\eta_a^{(h_a)}) \prod_{1\leq b<a\leq[\mathsf{N}]} \left(\left(\eta_a^{(h_a)}\right)^2 - \left(\eta_b^{(h_b)}\right)^2\right) \frac{\langle \eta_1^{(h_1)}, ..., \eta_{\mathsf{N}}^{(h_{\mathsf{N}})}|}{\prod_{b=1}^{[\mathsf{N}]} \omega_b(\eta_b^{(h_b)})}, \tag{4.1}$$

$$|\beta_k\rangle = \sum_{h_1,...,h_{\mathsf{N}}=1}^{p} \left(\frac{q^{-kh_{\mathsf{N}}}}{p^{1/2}}\right)^{\mathsf{e}_{\mathsf{N}}} \prod_{a=1}^{[\mathsf{N}]} \beta_a(\eta_a^{(h_a)}) \prod_{1\leq b<a\leq[\mathsf{N}]} \left(\left(\eta_a^{(h_a)}\right)^2 - \left(\eta_b^{(h_b)}\right)^2\right) \frac{|\eta_1^{(h_1)}, ..., \eta_{\mathsf{N}}^{(h_{\mathsf{N}})}\rangle}{\prod_{b=1}^{[\mathsf{N}]} \omega_b(\eta_b^{(h_b)})}, \tag{4.2}$$

where the index k appears only for N even. It is easy to see that such states generate the whole space of states of the model (in particular the T-eigenbasis is just of this type). The interest toward these kind of states is due to the following:

Proposition 4.1. *Let $\langle\alpha_k|$ and $|\beta_{k'}\rangle$ two separate states of the form* (4.1) *and* (4.2)*, respectively, then it holds:*

$$\langle\alpha_k|\beta_{k'}\rangle = \delta^{\mathsf{e}_\mathsf{N}}_{k,k'} \det_{[\mathsf{N}]} ||\mathcal{M}^{(\alpha,\beta)}_{a,b}|| \quad \textit{with} \;\; \mathcal{M}^{(\alpha,\beta)}_{a,b} \equiv \left(\eta_a^{(0)}\right)^{2(b-1)} \sum_{h=1}^{p} \frac{\alpha_a(\eta_a^{(h)})\beta_a(\eta_a^{(h)})}{\omega_a(\eta_a^{(h)})} q^{2(b-1)h}. \tag{4.3}$$

Proof. From the SOV-decomposition, we have:

$$\langle\alpha_k|\beta_{k'}\rangle = \left(\sum_{h_\mathsf{N}=1}^{p} \frac{q^{(k-k')h_\mathsf{N}}}{p}\right)^{\mathsf{e}_\mathsf{N}} \sum_{h_1,\dots,h_{[\mathsf{N}]}=1}^{p} V(\left(\eta_1^{(h_1)}\right)^2, \dots, \left(\eta_{[\mathsf{N}]}^{(h_{[\mathsf{N}]})}\right)^2) \prod_{a=1}^{[\mathsf{N}]} \frac{\alpha_a(\eta_a^{(h_a)})\beta_a(\eta_a^{(h_a)})}{\omega_a(\eta_a^{(h_a)})}, \tag{4.4}$$

where $V(x_1, \dots, x_\mathsf{N}) \equiv \prod_{1\leq b<a\leq[\mathsf{N}]}(x_a - x_b)$ is the Vandermonde determinant. From this formula by using the multilinearity of the determinant w.r.t. the rows we prove the proposition. □

In Section 2.2, we have associated to the linear space $\mathcal{R}_\mathsf{N}$ the structure of an Hilbert space by introducing a scalar product. Then it is clear that the above determinant formula represents also the formula for the scalar product of the two vectors $(\langle\alpha_k|)^\dagger$ and $|\beta_h\rangle$ in $\mathcal{R}_\mathsf{N}$. It is worth pointing out that the vector $(\langle\alpha_k|)^\dagger \in \mathcal{R}_\mathsf{N}$ is a separate state in the right C-eigenbasis, as it simply follows from the hermitian conjugation properties of the Yang-Baxter generators reported in Section 2.2. Then these results can be considered as the SOV analogue of the scalar product formulae [27, 143] computed in the framework of the algebraic Bethe ansatz. However, we want to stress that the determinant formulae obtained here are not restricted to the case in which one of the two states is an eigenstate of the transfer matrix, on the contrary to what happens for the scalar product formulae in the framework of the algebraic Bethe ansatz. Finally, we can prove directly from these formula the following:

Corollary 4.1. *Transfer matrix eigenstates corresponding to different eigenvalues are orthogonal states.*

Proof. Let us denote with $|t_k\rangle$ and $|t'_h\rangle$ two eigenstates of $\mathsf{T}(\lambda)$ with eigenvalues $t_k(\lambda)$ and $t'_h(\lambda)$ for N odd and with Θ eigenvalues q^k and q^h for N even. To prove the corollary, we have to prove that:

$$\det_{[\mathsf{N}]} ||\Phi^{(t,t')}_{a,b}|| = 0 \quad \text{with} \;\; \Phi^{(t,t')}_{a,b} \equiv \left(\eta_a^{(0)}\right)^{2(b-1)} \sum_{c=1}^{p} \frac{Q_{t'}(\eta_a^{(c)})\bar{Q}_t(\eta_a^{(c)})}{\omega_a(\eta_a^{(c)})} q^{2(b-1)c}, \tag{4.5}$$

with $h = k$ for N even. To prove (3.27), it is enough to show the existence of a non-zero vector $\mathsf{V}^{(t,t')}$ such that:

$$\sum_{b=1}^{[\mathsf{N}]} \Phi^{(t,t')}_{a,b} \mathsf{V}^{(t,t')}_b = 0 \qquad \forall a \in \{1, \dots, [\mathsf{N}]\}. \tag{4.6}$$

For simplicity, we construct this vector in the gauge (3.27) where it results:

$$\omega_a(\eta_a^{(h)}) = \left(\eta_a^{(h)}\right)^{[\mathsf{N}]-1}. \tag{4.7}$$

Let us recall that the eigenvalues of the transfer matrix are even Laurent polynomials of degree $\bar{\mathsf{N}}$ of the form:

$$t_h(\lambda) = \mathsf{e}_{\mathsf{N}} \left(\prod_{a=1}^{\mathsf{N}} \frac{\kappa_a \xi_a^{\pm 1}}{i} \right) (q^h + q^{-h})(\lambda^{\mathsf{N}} + \lambda^{-\mathsf{N}}) + \sum_{b=1}^{[\mathsf{N}]} c_b \lambda^{-[\mathsf{N}]-1+2b}, \tag{4.8}$$

$$t'_h(\lambda) = \mathsf{e}_{\mathsf{N}} \left(\prod_{a=1}^{\mathsf{N}} \frac{\kappa_a \xi_a^{\pm 1}}{i} \right) (q^h + q^{-h})(\lambda^{\mathsf{N}} + \lambda^{-\mathsf{N}}) + \sum_{b=1}^{[\mathsf{N}]} c'_b \lambda^{-[\mathsf{N}]-1+2b}, \tag{4.9}$$

so if we define:

$$\mathrm{V}_b^{(t,t')} \equiv c'_b - c_b \quad \forall b \in \{1, ..., [\mathsf{N}]\}, \tag{4.10}$$

it results:

$$\sum_{b=1}^{[\mathsf{N}]} \Phi_{a,b}^{(t,t')} \mathrm{V}_b^{(t,t')} = \sum_{c=1}^{p} Q_{t'}(\eta_a^{(c)}) \bar{Q}_t(\eta_a^{(c)})(t'_h(\eta_a^{(c)}) - t_h(\eta_a^{(c)})). \tag{4.11}$$

We can use now the Baxter equations (2.61) and (3.34), with the chosen gauge (3.27), to rewrite:

$$\begin{aligned} Q_{t'}(\eta_a^{(h_a)})\bar{Q}_t(\eta_a^{(h_a)})(t'(\eta_a^{(h_a)}) - t(\eta_a^{(h_a)})) &= a(\eta_a^{(h_a)})Q_{t'}(\eta_a^{(h_a-1)})\bar{Q}_t(\eta_a^{(h_a)}) \\ &+ d(\eta_a^{(h_a)})Q_{t'}(\eta_a^{(h_a+1)})\bar{Q}_t(\eta_a^{(h_a)}) \\ &- d(\eta_a^{(h_a-1)})Q_{t'}(\eta_a^{(h_a)})\bar{Q}_t(\eta_a^{(h_a-1)}) \\ &- a(\eta_a^{(h_a+1)})Q_{t'}(\eta_a^{(h_a)})\bar{Q}_t(\eta_a^{(h_a+1)}), \end{aligned} \tag{4.12}$$

and by substituting it in (4.11) we get (4.6). □

4.2 Decomposition of the identity in the T-eigenbasis

Let us remark that the diagonalizability and simplicity of the transfer matrix spectrum implies the following decomposition of the identity in the left and right T-eigenbasis:

$$\mathbb{I} = \sum_{k=0}^{\mathsf{e}_{\mathsf{N}}(p-1)/2} \sum_{t_k(\lambda) \in \Sigma_{\mathsf{T}}^k} \frac{|t_k\rangle\langle t_k|}{\langle t_k|t_k\rangle}, \tag{4.13}$$

where

$$\langle t_k|t_k\rangle = \det_{[\mathsf{N}]} ||\Phi_{a,b}^{(t_k,t_k)}|| \text{ with } \Phi_{a,b}^{(t_k,t_k)} \equiv (\eta_a^{(0)})^{2(b-1)} \sum_{c=1}^{p} \frac{Q_t(\eta_a^{(c)})\bar{Q}_t(\eta_a^{(c)})}{\omega_a(\eta_a^{(c)})} q^{2(b-1)c}, \tag{4.14}$$

is the action of the covector $\langle t_k|$ on the vector $|t_k\rangle$ as defined in Section 3.3. It is worth to note that in the representations which defines a normal transfer matrix $\mathsf{T}(\lambda)$, the generic covector $\underline{\langle t_k|} \equiv (|t_k\rangle)^\dagger$, dual to the right T-eigenstate $|t_k\rangle$, is itself a left eigenstate of $\mathsf{T}(\lambda)$ which taking into account the simplicity of the T-spectrum has to satisfy the following identity $\underline{\langle t_k|} \equiv \alpha_{t_k} \langle t_k|$, where $\langle t_k|$ is the left T-eigenstate defined in (3.33). Of course, in these representations the following identities hold:

$$\frac{|t_k\rangle\langle t_k|}{\langle t_k|t_k\rangle} = \frac{|t_k\rangle\underline{\langle t_k|}}{|||t_k\rangle||^2} \tag{4.15}$$

where $\||t_k\rangle\|$ is the positive norm of the eigenvector $|t_k\rangle$ in the Hilbert space $\mathcal{R}_{\mathsf{N}}$. The above discussion implies the relevance of computing explicitly the norm of the transfer matrix eigenstates (3.32) as it allows to fix the relative normalization α_{t_k} thanks to the identity $\alpha_{t_k} = \||t_k\rangle\|^2 / \langle t_k|t_k\rangle$ and then it allows to take these left and right states as the one being the exact dual of the other. This interesting issue is currently under analysis.

5 SOV-representation of local operators

The determination of the scalar product formulae, presented in the previous section, is the first main step to compute matrix elements of local operators. The second one is to get the reconstruction of local operators in terms of the generators of the Yang-Baxter algebra, i.e. to invert the map which from the local operators in the Lax matrices leads to the monodromy matrix elements. Indeed, the solution of such an inverse problem allows to compute the action of local operators on the eigenstates of the transfer matrix. Together with the scalar product formulae it leads to the determination of the matrix elements of local operators.

The first reconstruction of local operators has been achieved in [27], in the case of the XXZ spin 1/2 chain. In [29], it has been extended to fundamental lattice models, i.e. those with isomorphic auxiliary and local quantum space, for which the monodromy matrix becomes the permutation operator at a special value of the spectral parameter. The reconstruction also applies to non-fundamental lattice models, as it was shown in [29] for the higher spin XXX chains by using the fusion procedure [151]. In the case of the sine-Gordon model this type of reconstruction is still missing and the only known results are those given by T. Oota based on the use of quantum projectors [152]. However, it is worth recalling that Oota's results only lead to the reconstruction of some local operators of the lattice sine-Gordon model. In this section, we will show how to obtain all the local operators of the sine-Gordon model for the cyclic representations which occur at rational values of the coupling constant β^2.

5.1 Oota's reconstruction of a class of local operators

Here we recall some of the results of Oota [152] which lead to the reconstruction of a certain class of local operators in the sine-Gordon model.

The Lax operator $\mathsf{L}_n(\lambda)$ has the following factorization in terms of quantum projectors:

$$\mathsf{L}_n(\mu_{n,+}) = P_{n,+}Q_{n,+} \equiv \kappa_n \begin{pmatrix} \mathsf{u}_n^{1/2}\left(\mathsf{v}_n\kappa_n + \mathsf{v}_n^{-1}\kappa_n^{-1}\right) \\ \mathsf{u}_n^{-1/2}\left(\mathsf{v}_n\kappa_n^{-1} + \mathsf{v}_n^{-1}\kappa_n\right) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathsf{u}_n^{1/2} & \mathsf{u}_n^{-1/2} \end{pmatrix}, \tag{5.1}$$

$$\mathsf{L}_n(\mu_{n,-}) = P_{n,-}Q_{n,-} \equiv \kappa_n \begin{pmatrix} \mathsf{u}_n^{1/2} \\ \mathsf{u}_n^{-1/2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \left(\mathsf{v}_n\kappa_n + \mathsf{v}_n^{-1}\kappa_n^{-1}\right)\mathsf{u}_n^{1/2} & \left(\mathsf{v}_n\kappa_n^{-1} + \mathsf{v}_n^{-1}\kappa_n\right)\mathsf{u}_n^{-1/2} \end{pmatrix}, \tag{5.2}$$

when computed in the zeros $\mu_{n,\pm}$ of the quantum determinant; such factorization properties are at the basis of the following Oota's reconstruction.

Proposition 5.1. *The local operators* u_n *and* $\alpha_{0,n} \equiv \left((q^{-1}\mathsf{v}_n^2 + \kappa_n^2)/\left(q^{-1}\mathsf{v}_n^2\kappa_n^2 + 1\right)\right)\mathsf{u}_n^{-1}$ *admit the re-*

constructions:

$$\mathsf{u}_n = \mathsf{U}_n \mathsf{B}^{-1}(\mu_{n,+})\mathsf{A}(\mu_{n,+})\mathsf{U}_n^{-1} = \mathsf{U}_n \mathsf{D}^{-1}(\mu_{n,+})\mathsf{C}(\mu_{n,+})\mathsf{U}_n^{-1}, \tag{5.3}$$

$$\alpha_{0,n} = \mathsf{U}_n \mathsf{A}^{-1}(\mu_{n,-})\mathsf{B}(\mu_{n,-})\mathsf{U}_n^{-1} = \mathsf{U}_n \mathsf{C}^{-1}(\mu_{n,-})\mathsf{D}(\mu_{n,-})\mathsf{U}_n^{-1}, \tag{5.4}$$

where the shift operator U_n *brings the quantum sites from* 1 *to* $n-1$ *to the right end of the chain:*

$$\mathsf{U}_n \mathsf{M}_{1,\dots,\mathsf{N}}(\lambda)\mathsf{U}_n^{-1} \equiv \mathsf{M}_{n,\dots,\mathsf{N},1,\dots,n-1}(\lambda) \equiv \mathsf{L}_{n-1}(\lambda)\cdots \mathsf{L}_1(\lambda)\mathsf{L}_\mathsf{N}(\lambda)\cdots \mathsf{L}_n(\lambda). \tag{5.5}$$

It is then clear that the formulae (5.3)-(5.4) allow to reconstruct all the powers $\mathsf{u}_n^k = \mathsf{U}_n \left(\mathsf{B}^{-1}(\mu_{n,+})\mathsf{A}(\mu_{n,+})\right)^k \mathsf{U}_n^{-1}$ of the local operators u_n but they do not give a direct reconstruction of the local operators v_n; indeed, only rational functions like $(q^{-1}\mathsf{v}_n^2 + \kappa_n^2)/\left(q^{-1}\mathsf{v}_n^2\kappa_n^2 + 1\right)$ are obtained.

Let us make some comments on the shift operators U_n. The definition (5.5) characterizes the shift operator U_n up to a constant and implies, by the cyclicity invariance of the trace, their commutativity with the transfer matrix $\mathsf{T}(\lambda)$. Moreover, in the case of even chain, the shift operators U_n clearly commute also with the Θ-charge. Then, in the cyclic representations of the sine-Gordon model under consideration, the simplicity of the transfer matrix spectrum implies:

$$\mathsf{U}_n|t_k\rangle = \varphi_n^{(t_k)}|t_k\rangle, \tag{5.6}$$

where $|t_k\rangle$ is the generic eigenstate of $\mathsf{T}(\lambda)$ for odd chain and of ($\mathsf{T}(\lambda)$,Θ) for the even chain. In particular, this implies that the shift operators only produce a prefactor in the form factors of local operators which is one if left and right eigenstates are dual of each other[12]. It is worth remarking that in[13] [133], for the special case of highest weight representations of the even lattice sine-Gordon model, it has been shown that:

$$\mathsf{U}_n|t\rangle \propto \prod_{a=1}^{n-1} t(\mu_a)|t\rangle \propto \prod_{a=1}^{n-1} \frac{Q_t(\mu_a/q)}{Q_t(\mu_a)}|t\rangle, \tag{5.7}$$

where μ_a are zeros of the quantum determinant in these representations. This result is interesting as it shows that the shift operators U_n for non-fundamental lattice models, like the sine-Gordon model, are characterized by the same type of eigenvalues they have in fundamental lattice models, like the XXZ spin 1/2 chain. However, the proof of (5.7) presented in [133] is representation dependent, as it is based on the algebraic Bethe ansatz representation of the transfer matrix eigenstates. Then, an independent proof is required for cyclic representations of the sine-Gordon model and it will be given directly in a future publication [153] in the more general cyclic representations of the 6-vertex Yang-Baxter algebra associated to the τ_2-model.

5.2 Inverse problem solution for all local operators

Here, we show how to complete the reconstruction of local operators by solving the inverse problem for the local operators v_n and their powers. The main ingredient used will be the cyclicity of the representations of the sine-Gordon model here analyzed.

[12] Translational invariance for the limit of the homogeneous chain.

[13] This result is there attributed to V. Korepin, private communications.

Let us define the local operators:

$$\beta_{k,n} \equiv \mathsf{u}_n^k \alpha_{0,n} \mathsf{u}_n^{1-k} = \frac{q^{2k-1}\mathsf{v}_n^2 + \kappa_n^2}{q^{2k-1}\mathsf{v}_n^2\kappa_n^2 + 1}, \tag{5.8}$$

then the following proposition holds:

Proposition 5.2. *In the cyclic representations of the sine-Gordon model, the local operators* v_n^{2k} *admit the following reconstruction:*

$$\mathsf{v}_n^{2k} = \frac{(-1)^k\,(v_n^{2p}\kappa_n^{2p} + 1)}{p\kappa_n^{2k}(\kappa_n^2 - \kappa_n^{-2})} \sum_{a=0}^{p-1} q^{-k(2a-1)}\beta_{a,n}, \quad \textit{for } k \in \{1, ..., p-1\}, \tag{5.9}$$

where:

$$\beta_{k,n} = \mathsf{U}_n \left[\left(\mathsf{B}^{-1}(\mu_{n,+})\mathsf{A}(\mu_{n,+})\right)^k \mathsf{A}^{-1}(\mu_{n,-})\mathsf{B}(\mu_{n,-}) \left(\mathsf{B}^{-1}(\mu_{n,+})\mathsf{A}(\mu_{n,+})\right)^{1-k} \right] \mathsf{U}_n^{-1}. \tag{5.10}$$

Proof. In our cyclic representations the local operators u_n and v_n satisfy the property that u_n^p and v_n^p are central, i.e. u_n^p and v_n^p are just numbers u_n^p and v_n^p which characterize our representations. Then the following identity holds:

$$\prod_{j=0}^{p-1}(q^{2j-1}\mathsf{v}_n^2\kappa_n^2 + 1) = 1 + v_n^{2p}\kappa_n^{2p}, \tag{5.11}$$

and so:

$$\frac{v_n^{2p}\kappa_n^{2p} + 1}{q^{2k-1}\mathsf{v}_n^2\kappa_n^2 + 1} = \sum_{a=0}^{p-1}(-1)^a q^{a(2k-1)}\mathsf{v}_n^{2a}\kappa_n^{2a}. \tag{5.12}$$

The previous formula allows to rewrite the rational function $\beta_{k,n}$ as a finite sum in powers of v_n^2:

$$\beta_{k,n} = \frac{v_n^{2p}\kappa_n^{2(p-1)} + \kappa_n^2 + (\kappa_n^2 - \kappa_n^{-2})\sum_{a=1}^{p-1}(-1)^a q^{a(2k-1)}\mathsf{v}_n^{2a}\kappa_n^{2a}}{v_n^{2p}\kappa_n^{2p} + 1}, \tag{5.13}$$

then by taking the discrete Fourier transformation, we get the reconstructions (5.9), plus the sum rules:

$$\sum_{a=0}^{p-1}\beta_{a,n} = \frac{p v_n^{2p}\kappa_n^{2(p-1)} + \kappa_n^2}{v_n^{2p}\kappa_n^{2p} + 1}. \tag{5.14}$$

Finally, the representation (5.10) for the $\beta_{a,n}$ are trivially derived by (5.3)-(5.4). □

Note that thanks to the identities $\mathsf{v}_n^k = \mathsf{v}_n^{2h}/v_n^p$ for $k = 2h - p$ odd integer smaller than p, the formulae (5.9) indeed lead to the reconstruction of all the powers v_n^k for $k \in \{1, ..., p-1\}$. Then the previous proposition together with Oota's reconstructions leads to the announced complete reconstruction of local operators for cyclic representations of the sine-Gordon model.

5.3 SOV-representations of all local operators

In order to compute the action of the local operators v_n^k and u_n^k on eigenstates of the transfer matrix and eventually obtain their form factors, it is necessary to first derive their SOV-representations[14]. Here, we show how these SOV-representations can be obtained from the previously given solutions of the inverse problem. In order to simplify the presentation, we introduce here explicitly the operators[15] $\eta_1, ..., \eta_{\mathsf{N}}, \eta_{\mathsf{A}}$ and η_{D} defined by the following actions on the generic element $\langle \mathbf{k}| \equiv \langle \eta_1^{(k_1)}, ..., \eta_{\mathsf{N}}^{(k_{\mathsf{N}})}|$ of the left B-eigenbasis:

$$\langle \mathbf{k}|\eta_a = \eta_a^{(k_a)}\langle \mathbf{k}|, \ \ \forall a \in \{1, ..., \mathsf{N}\}, \ \ \langle \mathbf{k}|\eta_{\mathsf{A}} = \eta_{\mathbf{k},\mathsf{A}}\langle \mathbf{k}| \ \text{ and } \ \langle \mathbf{k}|\eta_{\mathsf{D}} = \eta_{\mathbf{k},\mathsf{D}}\langle \mathbf{k}|, \tag{5.15}$$

where the corresponding eigenvalues $\eta_a^{(k_a)}$, $\eta_{\mathbf{k},\mathsf{A}}$ and $\eta_{\mathbf{k},\mathsf{D}}$ are the complex numbers defined in Section 2.3. The following lemma is important as it solves the combinatorial problem related to the computations of the SOV-representations of monomials in the Yang-Baxter generators:

Lemma 5.1. *The operator $\left(\mathsf{B}^{-1}(\lambda)\mathsf{A}(\lambda)\right)^k$ has the following left SOV-representation:*

$$\begin{aligned}\left(\mathsf{B}^{-1}(\lambda)\mathsf{A}(\lambda)\right)^k = \mathsf{K}^{-k} \sum_{\substack{\bar{\alpha}\equiv\{\alpha_1,...,\alpha_{\mathsf{N}}\}\in\mathbb{N}_0^{\mathsf{N}}: \\ \sum_{h=1}^{\mathsf{N}}\alpha_h = k}} \begin{bmatrix} k \\ \bar{\alpha} \end{bmatrix} \prod_{j=1}^{\mathsf{N}} \left(\prod_{h=0}^{\alpha_j - 1} \frac{a(\eta_j q^{-h})}{(\lambda q^h/\eta_j - \eta_j/\lambda q^h)} \right. \\ \left. \times \prod_{i\neq j, i=1}^{\mathsf{N}} \prod_{h=\alpha_i-\alpha_j+1}^{\alpha_i} \frac{1}{(\eta_j q^h/\eta_i - \eta_i/\eta_j q^h)} \right) \prod_{j=1}^{\mathsf{N}} \mathsf{T}_j^{-\alpha_j},\end{aligned} \tag{5.16}$$

acting on the state $\langle \eta_1, ..., \eta_{\mathsf{N}}|$, where:

$$\begin{bmatrix} k \\ \bar{\alpha} \end{bmatrix} \equiv \frac{[k]!}{\prod_{j=1}^{\mathsf{N}}[\alpha_j]!}, \ [k]! \equiv [k][k-1]\cdots[1], \ [a] \equiv \frac{q^a - q^{-a}}{q - q^{-1}}. \tag{5.17}$$

Proof. Here we use the commutation relations:

$$\mathsf{T}_a^{\pm}\eta_b = q^{\pm\delta_{ab}}\eta_b\mathsf{T}_a^{\pm}, \tag{5.18}$$

and the following left SOV-representation:

$$\mathsf{B}^{-1}(\lambda)\mathsf{A}(\lambda) = \mathsf{K}^{-1}\sum_{a=1}^{\mathsf{N}} \frac{a(\eta_a)}{(\lambda/\eta_a - \eta_a/\lambda)} \prod_{b\neq a} \frac{1}{(\eta_a/\eta_b - \eta_b/\eta_a)} \mathsf{T}_a^{-1}, \tag{5.19}$$

then the lemma holds for $k = 1$ and we prove it by induction for $k > 1$. Let us take N integers α_i:

$$\sum_{a=1}^{\mathsf{N}} \alpha_i = k, \tag{5.20}$$

[14] To simply the notations we chose to present the results in this subsection only for the case N odd and for the representations with $\mathsf{v}_n^p = \mathsf{u}_n^p = 1$.

[15] To simplify the exposition, we have decided to keep as simple as possible the notations for these operators, we hope that nevertheless the difference with the corresponding eigenvalues is clear.

from which we define the set of integers $I = \{i \in \{1, ..., \mathsf{N}\} : \alpha_i \neq 0\}$ and $C^{(k)}_{\bar{\alpha}}$ as the coefficient of $\prod \mathsf{T}_i^{-\alpha_i}$ in the expansion of the k-th power of $\mathsf{B}^{-1}(\lambda)\mathsf{A}(\lambda)$. By writing $(\mathsf{B}^{-1}(\lambda)\mathsf{A}(\lambda))^k = (\mathsf{B}^{-1}(\lambda)\mathsf{A}(\lambda))^{k-1}\mathsf{B}^{-1}(\lambda)\mathsf{A}(\lambda)$ and by using the induction hypothesis for the power $k-1$ of $\mathsf{B}^{-1}(\lambda)\mathsf{A}(\lambda)$, we have:

$$\begin{aligned} C^{(k)}_{\bar{\alpha}} &= \mathsf{K}^{-k} \sum_{a \in I} \left[\begin{array}{c} k-1 \\ \bar{\alpha} - \bar{\delta}_a \end{array} \right] \\ &\prod_{j=1}^{N} \prod_{h=0}^{\alpha_j - \delta_{a,j} - 1} \left(\frac{a(\eta_j q^{-h})}{(\lambda q^h/\eta_j - \eta_j/\lambda q^h)} \times \prod_{i \neq j, i=1}^{N} \frac{1}{q^{\alpha_i - \delta_{a,i} - h}\eta_j/\eta_i - \eta_i/q^{\alpha_i - \delta_{a,i} - h}\eta_j} \right) \\ &\times \frac{a(\eta_a q^{-\alpha_a + 1})}{(\lambda q^{\alpha_a - 1}/\eta_a - \eta_a/\lambda q^{\alpha_a - 1})} \prod_{i \in I\backslash\{a\}} \frac{1}{q^{\alpha_a - \alpha_i - 1}\eta_i/\eta_a - \eta_a/q^{\alpha_a - \alpha_i - 1}\eta_i}, \end{aligned} \tag{5.21}$$

with $\bar{\delta}_a \equiv (\delta_{1,a}, \ldots, \delta_{\mathsf{N},a})$. The first term in the r.h.s. is the coefficient of $\prod \mathsf{T}_i^{-\alpha_i + \delta_{a,i}}$ in $(\mathsf{B}^{-1}(\lambda)\mathsf{A}(\lambda))^{k-1}$ and the second is the coefficient of T_a^{-1} in $\mathsf{B}^{-1}(\lambda)\mathsf{A}(\lambda)$ once the commutations between $\prod \mathsf{T}_i^{-\alpha_i + \delta_{a,i}}$ and the η_i have been performed. This can be rewritten as:

$$\begin{aligned} C^{(k)}_{\bar{\alpha}} &= \mathsf{K}^{-k} \frac{[k-1]!}{\prod [\alpha_i]!} \left(\prod_{j=1}^{N} \prod_{h=0}^{\alpha_j - 1} \Big(\prod_{i \neq j, i=1}^{N} \frac{1}{q^{\alpha_i - h}\eta_j/\eta_i - \eta_i/q^{\alpha_i - h}\eta_j} \Big) \frac{a(q^{-h}\eta_j)}{(\lambda q^h/\eta_j - \eta_j/\lambda q^h)} \right) \\ &\qquad \times \sum_{a \in I} \Big([\alpha_a] \prod_{i \in I\backslash\{a\}} \frac{q^{\alpha_a}\eta_i/\eta_a - \eta_a/q^{\alpha_a}\eta_i}{q^{\alpha_a - \alpha_i}\eta_i/\eta_a - \eta_a/q^{\alpha_a - \alpha_i}\eta_i} \Big), \end{aligned} \tag{5.22}$$

which leads to our result when we use the relation:

$$\sum_{a=1}^{n} [\alpha_a] \prod_{i \neq a} \frac{q^{\alpha_a}\eta_i/\eta_a - \eta_a/q^{\alpha_a}\eta_i}{q^{\alpha_a - \alpha_i}\eta_i/\eta_a - \eta_a/q^{\alpha_a - \alpha_i}\eta_i} = \left[\sum_{a=1}^{n} \alpha_a \right]. \tag{5.23}$$

The above formula holds for any n, for any set of numbers η_i and for any non-negative integers α_i, all of them being in generic position. This is shown by studying the contour integral and the residues of the function:

$$g(z) = \frac{1}{z} \prod_{i=1}^{n} \frac{z - \eta_i^2}{z - q^{-2\alpha_i}\eta_i^2}. \tag{5.24}$$

□

Remark 5. Let us point out that the power p of $\mathsf{B}^{-1}(\lambda)\mathsf{A}(\lambda)$ is a central element of the Yang-Baxter algebra and it reads:

$$(\mathsf{B}^{-1}(\lambda)\mathsf{A}(\lambda))^p = \mathcal{B}(\Lambda)^{-1}\mathcal{A}(\Lambda), \tag{5.25}$$

as it simply follows from the commutations relations:

$$\mathsf{B}^{-1}(q\lambda)\mathsf{A}(q\lambda) = \mathsf{A}(\lambda)\mathsf{B}^{-1}(\lambda). \tag{5.26}$$

Then, it is important to verify that the same result follows from the previous lemma for $k=p$. In order to prove it, it is enough to use the following properties of the quantum binomials:

$$\left[\begin{array}{c} p \\ \bar{\alpha} \end{array}\right]=\left\{\begin{array}{ll} 1 & \text{if } \exists i\in\{1,...,\mathsf{N}\}:\alpha_i=p\delta_{a,i}\ \forall a\in\{1,...,\mathsf{N}\}, \\ 0 & \text{otherwise,} \end{array}\right. \tag{5.27}$$

from which the formula (5.16) for $k=p$ reads:

$$(\mathsf{B}^{-1}(\lambda)\mathsf{A}(\lambda))^p=\mathsf{\kappa}^{-p}\sum_{a=1}^{p}\frac{\prod_{k=1}^{p}a(q^k\eta_a)}{(\Lambda/Z_a-Z_a/\Lambda)}\prod_{b\neq a}\frac{1}{(Z_b/Z_a-Z_a/Z_b)}, \tag{5.28}$$

and to observe that the r.h.s. of (5.28) indeed coincides with $\mathcal{B}(\Lambda)^{-1}\mathcal{A}(\Lambda)$.

Note that the above lemma gives directly the SOV-representations of the local operators u_n^k and $\alpha_{0,n}^{-k}$ with $k\in\{1,...,p-1\}$ when we fix the parameter λ to $\mu_{n,\varepsilon}$ with $\varepsilon=+$ and $\varepsilon=-$, respectively. Moreover, it allows to derive also the SOV-representations of the local operators v_n^k as it follows:

Corollary 5.1. *The local operators v_n^{2k} with $k\in\{1,...,p-1\}$ have the following left SOV-representation:*

$$\begin{aligned}\mathsf{U}_n^{-1}\mathsf{v}_n^{2k}\mathsf{U}_n=\mathsf{v}_n^{(2k)}+\sum_{a=1}^{\mathsf{N}}\sum_{\substack{\bar{\alpha}\equiv\{\alpha_1,...,\alpha_{\mathsf{N}}\}\in\mathsf{N}_0^{\mathsf{N}}:\\ \sum_{h=1}^{\mathsf{N}}\alpha_h=p-1}}\left[\begin{array}{c} p-1 \\ \bar{\alpha} \end{array}\right]\prod_{j=1}^{\mathsf{N}}\left(\prod_{h=0}^{\alpha_j-1}\frac{a(\eta_j q^{-h})}{(\mu_{n,-}q^h/\eta_j-\eta_j/\mu_{n,-}q^h)}\right.\\ \times\left.\prod_{i\neq j,i=1}^{\mathsf{N}}\prod_{h=\alpha_i-(\alpha_j+\delta_{j,a})+1}^{\alpha_i}\frac{1}{(\eta_j q^h/\eta_i-\eta_i/\eta_j q^h)}\right)\mathsf{v}_{n,(a,\bar{\alpha})}^{(2k)}\prod_{j=1}^{\mathsf{N}}T_j^{-(\alpha_j+\delta_{j,a})},\end{aligned} \tag{5.29}$$

where:

$$\mathsf{v}_n^{(2k)}\equiv\frac{(-1)^k\,(\kappa_n^{2p}+1)}{p\kappa_n^{2k}(\kappa_n^2-\kappa_n^{-2})}\sum_{r=1}^{p}\frac{q^{-k(2r-1)}(q^r-q^{-r})}{q^r\kappa_n^2-q^{-r}\kappa_n^{-2}}, \tag{5.30}$$

$$\begin{aligned}\mathsf{v}_{n,(a,\bar{\alpha})}^{(2k)}\equiv\frac{(-1)^k\,(\kappa_n^{2p}+1)}{p\kappa_n^{2k}(\kappa_n^2-\kappa_n^{-2})}\sum_{r=1}^{p}\frac{q^{-k(2r-1)}(\kappa_n^2-\kappa_n^{-2})a(\eta_a q^{-\alpha_a})}{(q^r\kappa_n^2-q^{-r}\kappa_n^{-2})\,(\mu_{n,+}q^{\alpha_a+r}/\eta_a-\eta_a/\mu_{n,+}q^{\alpha_a+r})}\\ \times\prod_{j=1}^{\mathsf{N}}\prod_{h=0}^{r-1}\frac{(\mu_{n,+}q^{\alpha_j+h}/\eta_j-\eta_j/\mu_{n,+}q^{\alpha_j+h})}{(\mu_{n,+}q^h/\eta_j-\eta_j/\mu_{n,+}q^h)}.\end{aligned} \tag{5.31}$$

Proof. This is a consequence of the previous lemma and of the identities:

$$\mathsf{U}_n^{-1}\beta_{k,n}\mathsf{U}_n=\frac{\kappa_n^2-\kappa_n^{-2}}{q^k\kappa_n^2-q^{-k}\kappa_n^{-2}}\gamma_{k,n}+\frac{q^k-q^{-k}}{q^k\kappa_n^2-q^{-k}\kappa_n^{-2}},\quad \text{for } k\in\{1,...,p-1\}, \tag{5.32}$$

where:

$$\gamma_{k,n}=\mathsf{B}^{-1}(\mu_{n,+}^p)\prod_{j=k}^{p-1}\mathsf{B}(\mu_{n,+}q^j)\mathsf{A}^{-1}(\mu_{n,-})\mathsf{B}(\mu_{n,-})\mathsf{B}^{-1}(\mu_{n,+}q^k)\mathsf{A}(\mu_{n,+}q^k)\prod_{j=0}^{k-1}\mathsf{B}(\mu_{n,+}q^j), \tag{5.33}$$

Now by using the relations:

$$\mathsf{A}^{-1}(\mu_{n,-})\mathsf{B}(\mu_{n,-}) = \left(\mathsf{B}^{-1}(\mu_{n,-})\mathsf{A}(\mu_{n,-})\right)^{p-1}, \tag{5.34}$$

we get the following representations:

$$\begin{aligned}\gamma_{k,n} = &\sum_{a=1}^{\mathsf{N}} \sum_{\substack{\bar{\alpha}\equiv\{\alpha_1,\dots,\alpha_{\mathsf{N}}\}\in\mathsf{N}_0^{\mathsf{N}}:\\ \sum_{h=1}^{\mathsf{N}}\alpha_h=p-1}} \begin{bmatrix} p-1 \\ \bar{\alpha} \end{bmatrix} \prod_{j=1}^{\mathsf{N}} \left(\prod_{h=0}^{\alpha_j-1} \frac{a(\eta_j q^{-h})}{(\mu_{n,-}q^h/\eta_j - \eta_j/\mu_{n,-}q^h)} \right. \\ &\times \left. \prod_{i\neq j,i=1}^{\mathsf{N}} \prod_{h=\alpha_i-(\alpha_j+\delta_{j,a})+1}^{\alpha_i} \frac{1}{(\eta_j q^h/\eta_i - \eta_i/\eta_j q^h)} \right) \frac{a(\eta_a q^{-\alpha_a})}{(\mu_{n,+}q^{\alpha_a+r}/\eta_a - \eta_a/\mu_{n,+}q^{\alpha_a+r})} \\ &\times \prod_{j=1}^{\mathsf{N}} \prod_{h=0}^{r-1} \frac{(\mu_{n,+}q^{\alpha_j+h}/\eta_j - \eta_j/\mu_{n,+}q^{\alpha_j+h})}{(\mu_{n,+}q^h/\eta_j - \eta_j/\mu_{n,+}q^h)} \prod_{j=1}^{\mathsf{N}} \mathsf{T}_j^{-(\alpha_j+\delta_{j,a})},\end{aligned} \tag{5.35}$$

from which our result follows. □

6 Form factors of local operators

In the following we will compute matrix elements (form factors) of the form[16]:

$$\langle t|O_n|t'\rangle \tag{6.1}$$

which by definition are the action of a covector $\langle t| \in \mathcal{L}_{\mathsf{N}}$, a left T-eigenstate defined in (3.33), on the vector obtained by the action of the local operator O_n on the right T-eigenstate $|t'\rangle \in \mathcal{R}_{\mathsf{N}}$ defined in (3.32). Of course, these form factors depend on the normalization of the states $\langle t|$ and $|t'\rangle$ and then it is worth pointing out that nevertheless we can use them to expand m-point functions like:

$$\frac{\langle t|O_{n_1}\cdots O_{n_{\mathrm{m}}}|t\rangle}{\langle t|t\rangle}. \tag{6.2}$$

Indeed, by definition these m-point functions are normalization independent and by using m-1 times the decomposition of the identity (4.13), we get the expansions:

$$\frac{\langle t|O_{n_1}\cdots O_{n_{\mathrm{m}}}|t\rangle}{\langle t|t\rangle} = \sum_{t^{(1)}(\lambda),\dots,t^{(\mathrm{m}-1)}(\lambda)\in\Sigma_{\mathsf{T}}} \frac{\langle t|O_{n_1}|t^{(1)}\rangle\langle t^{(\mathrm{m}-1)}|O_{n_{\mathrm{m}}}|t\rangle \prod_{a=2}^{\mathrm{m}-1}\langle t^{(a-1)}|O_{n_a}|t^{(a)}\rangle}{\langle t|t\rangle \prod_{a=1}^{\mathrm{m}-1}\langle t^{(a)}|t^{(a)}\rangle}, \tag{6.3}$$

where in the r.h.s there are exactly the form factors (6.1) that we are going to compute in this paper.

[16] To simplify the notations in this introduction to Section 6 we are omitting the index $k \in \{0, ..., (p-1)/2\}$ in the transfer matrix eigenstates which are required in the case of even chain.

6.1 Form factors of u_n

In this section we use the SOV-representations of local operators to give some examples of completely resummed form factors.

Proposition 6.1. *Let $\langle t_k|$ and $|t'_{k'}\rangle$ be two eigenstates of the transfer matrix $\mathsf{T}(\lambda)$, then it holds:*

$$\langle t_k|\mathsf{u}_n|t'_{k'}\rangle = \frac{\varphi_n^{(t_k)}}{\varphi_n^{(t'_{k'})}} \left(\delta_{k,k'+1}\right)^{\mathsf{e}_\mathsf{N}} \det_{[\mathsf{N}]}(||\mathcal{U}_{a,b}^{(t,t')}(\mu_{n,+})||), \tag{6.4}$$

where $\varphi_n^{(t_k)}$ and $\varphi_n^{(t'_{k'})}$ are the eigenvalues of the shift operator U_n and $||\mathcal{U}_{a,b}^{(t,t')}(\lambda)||$ is the $[\mathsf{N}]\times[\mathsf{N}]$ matrix:

$$\mathcal{U}_{a,b}^{(t,t')}(\lambda) \equiv \Phi_{a,b+1/2}^{(t,t')} \text{ for } b\in\{1,...,[\mathsf{N}]-1\}, \tag{6.5}$$

$$\begin{aligned}\mathcal{U}_{a,[\mathsf{N}]}^{(t,t')}(\lambda) \equiv{}& \frac{\left(\eta_a^{(0)}\right)^{[\mathsf{N}]-1}}{\mathsf{K}\eta_\mathsf{N}^{(0)\mathsf{e}_\mathsf{N}}} \sum_{h=1}^{p} \frac{q^{([\mathsf{N}]-1)h} Q_{t'}(\eta_a^{(h)})}{\omega_a(\eta_a^{(h)})} \left[\frac{\bar{Q}_t(\eta_a^{(h+1)})}{(\lambda/\eta_a^{(h+1)} - \eta_a^{(h+1)}/\lambda)} \bar{a}(\eta_a^{(h)})\right.\\ &\left. + \mathsf{e}_\mathsf{N}\bar{Q}_t(\eta_a^{(h)}) \left(\frac{\lambda}{\prod_{j=1}^{\mathsf{N}}\xi_j}\left(\eta_a^{(h)}\right)^{[\mathsf{N}]} q^{k'} + \frac{\prod_{j=1}^{\mathsf{N}}\xi_j}{\lambda}\left(\eta_a^{(h)}\right)^{-[\mathsf{N}]} q^{-k'}\right)\right],\end{aligned} \tag{6.6}$$

where $\mathsf{K}\equiv \prod_{n=1}^{\mathsf{N}} \kappa_n/i$.

Proof. The right SOV-representation of the operator $\mathsf{B}^{-1}(\lambda)\mathsf{A}(\lambda)$ reads:

$$\mathsf{B}^{-1}(\lambda)\mathsf{A}(\lambda)|\mathbf{k}\rangle = \frac{\mathsf{e}_\mathsf{N}}{\eta_\mathsf{N}}\left(\frac{\lambda}{\eta_\mathsf{A}}\mathsf{T}_\mathsf{N}^{+} + \frac{\eta_\mathsf{A}}{\lambda}\mathsf{T}_\mathsf{N}^{-}\right)|\mathbf{k}\rangle + \sum_{a=1}^{[\mathsf{N}]}\mathsf{T}_a^{+}|\mathbf{k}\rangle \frac{\bar{a}(\eta_a)}{\mathsf{K}\eta_\mathsf{N}^{\mathsf{e}_\mathsf{N}}(\lambda/\eta_a q - \eta_a q/\lambda)} \prod_{b\neq a}\frac{1}{(\eta_a/\eta_b - \eta_b/\eta_a)}, \tag{6.7}$$

Let us denote with $[\mathsf{B}^{-1}(\lambda)\mathsf{A}(\lambda)]$ the second term on the r.h.s. of (6.7). Then, we observe that from the SOV-decomposition of the T-eigenstates, we have:

$$\begin{aligned}\langle t_k|[\mathsf{B}^{-1}(\lambda)\mathsf{A}(\lambda)]|t'_{k'}\rangle ={}& \left(\frac{\sum_{h_\mathsf{N}=1}^{p} q^{(k-1-k')h_\mathsf{N}}}{p\eta_\mathsf{N}^{(0)}}\right)^{\mathsf{e}_\mathsf{N}} \sum_{a=1}^{[\mathsf{N}]}\sum_{h_1,...,h_{[\mathsf{N}]}=1}^{p} V(\left(\eta_1^{(h_1)}\right)^2,...,\left(\eta_{[\mathsf{N}]}^{(h_{[\mathsf{N}]})}\right)^2)\\ &\times \prod_{b\neq a,b=1}^{[\mathsf{N}]} \frac{\eta_b^{(h_b)} Q_{t'}(\eta_b^{(h_b)})\bar{Q}_t(\eta_b^{(h_b)})}{\omega_b(\eta_b^{(h_b)})((\eta_a^{(h_a)})^2 - (\eta_b^{(h_b)})^2)}\\ &\times \frac{\bar{Q}_t(\eta_a^{(h_a+1)})Q_{t'}(\eta_a^{(h_a)})}{\omega_a(\eta_a^{(h_a)})\mathsf{K}} \frac{\left(\eta_a^{(h_a)}\right)^{[\mathsf{N}]-1} \bar{a}(\eta_a^{(h_a)})}{(\lambda/\eta_a^{(h_a+1)} - \eta_a^{(h_a+1)}/\lambda)},\end{aligned} \tag{6.8}$$

and so:

$$\langle t_k|[\mathsf{B}^{-1}(\lambda)\mathsf{A}(\lambda)]|t'_{k'}\rangle=\left(\frac{\delta_{k,k'+1}}{\eta_{\mathsf{N}}^{(0)}}\right)^{\mathsf{e}_{\mathsf{N}}}\sum_{a=1}^{[\mathsf{N}]}\underbrace{\sum_{h_1,\ldots,h_{\mathsf{N}}=1}^{p}}_{h_a\text{ is missing.}}\underbrace{\hat{V}_a(\left(\eta_1^{(h_1)}\right)^2,...,\left(\eta_{[\mathsf{N}]}^{(h_{[\mathsf{N}]})}\right)^2)}_{\text{(We have removed the row }a.)}$$
$$\times\prod_{b\neq a,b=1}^{[\mathsf{N}]}\frac{\eta_b^{(h_b)}Q_{t'}(\eta_b^{(h_b)})\bar{Q}_t(\eta_b^{(h_b)})}{\omega_b(\eta_b^{(h_b)})}$$
$$\times(-1)^{[\mathsf{N}]+a}\sum_{h_a=1}^{p}\frac{\bar{Q}_t(\eta_a^{(h_a+1)})Q_{t'}(\eta_a^{(h_a)})\left(\eta_a^{(h_a)}\right)^{[\mathsf{N}]-1}\bar{a}(\eta_a^{(h_a)})}{\omega_a(\eta_a^{(h_a)})\mathsf{K}(\lambda/\eta_a^{(h_a+1)}-\eta_a^{(h_a+1)}/\lambda)},\tag{6.9}$$

bringing the sum over $(h_1,...,\widehat{h_a},...,h_{[\mathsf{N}]})$ inside the Vandermonde determinant $\hat{V}_a$, we have that the above expression is just the expansion of the determinant:

$$\langle t_k|[\mathsf{B}^{-1}(\lambda)\mathsf{A}(\lambda)]|t'_{k'}\rangle=\left(\delta_{k,k'+1}\right)^{\mathsf{e}_{\mathsf{N}}}\det_{[\mathsf{N}]}(||\left[\mathcal{U}_{a,b}^{(t,t')}(\lambda)\right]||),\tag{6.10}$$

where $\left[\mathcal{U}_{a,b}^{(t,t')}(\lambda)\right]$ coincides with $\Phi_{a,b+1/2}^{(t,t')}$ for $b\in\{1,...,[\mathsf{N}]-1\}$, while:

$$\left[\mathcal{U}_{a,[\mathsf{N}]}^{(t,t')}(\lambda)\right]\equiv\frac{\left(\eta_a^{(0)}\right)^{[\mathsf{N}]-1}}{\mathsf{K}\bar{\eta}_{\mathsf{N}}^{\mathsf{e}_{\mathsf{N}}}}\sum_{h=1}^{p}\frac{q^{([\mathsf{N}]-1)h}Q_{t'}(\eta_a^{(h)})\bar{Q}_t(\eta_a^{(h+1)})}{\omega_a(\eta_a^{(h)})(\lambda/\eta_a^{(h+1)}-\eta_a^{(h+1)}/\lambda)}\bar{a}(\eta_a^{(h)}).\tag{6.11}$$

Now let us compute the matrix elements:

$$\langle t_k|\eta_{\mathsf{N}}^{-1}\eta_{\mathsf{A}}^{\mp}\mathsf{T}_{\mathsf{N}}^{\pm}|t'_{k'}\rangle=\left(\frac{\sum_{h_{\mathsf{N}}=1}^{p}q^{(k-1-k')h_{\mathsf{N}}}}{p\eta_{\mathsf{N}}^{(0)}\prod_{j=1}^{\mathsf{N}}\xi_j^{\pm1}}\right)^{\mathsf{e}_{\mathsf{N}}}\sum_{h_1,\ldots,h_{[\mathsf{N}]}=1}^{p}V(\left(\eta_1^{(h_1)}\right)^2,...,\left(\eta_{[\mathsf{N}]}^{(h_{[\mathsf{N}]})}\right)^2)$$
$$\times\prod_{b=1}^{[\mathsf{N}]}\frac{\left(\eta_b^{(h_b+k')}\right)^{\pm1}Q_{t'}(\eta_b^{(h_b)})\bar{Q}_t(\eta_b^{(h_b)})}{\omega_b(\eta_b^{(h_b)})},\tag{6.12}$$

and so:

$$\langle t_k|\eta_{\mathsf{N}}^{-1}\eta_{\mathsf{A}}^{\mp}\mathsf{T}_{\mathsf{N}}^{\pm}|t'_{k'}\rangle=\left(\frac{q^{\pm k'}\delta_{k,k'+1}}{\eta_{\mathsf{N}}^{(0)}\prod_{j=1}^{\mathsf{N}}\xi_j^{\pm1}}\right)^{\mathsf{e}_{\mathsf{N}}}\det_{[\mathsf{N}]}(||\Phi_{a,b\pm1/2}^{(t,t')}||).\tag{6.13}$$

By using the fact that $[\mathsf{N}]-1$ columns are common in the matrix of formula (6.10) and in those of (6.13), we get our result. Let us remark that the above result holds for any value of λ. □

Remark 6. It is worth pointing out that the form factors of u_n are written in terms of a determinant of a matrix whose elements coincide with those of the scalar product, except for the last line which is modified by the presence of the local operator. It is then interesting to recall that a similar statement holds for the form factors of the local operators in the XXZ spin 1/2 chain.

6.2 Suitable operator basis for form factor computations

In this section we introduce an operator basis which can be conveniently used to describe all local operators. The interest toward this basis is due to the fact that the form factors of its elements are simple being represented by a determinant formula.

6.2.1 Basis of elementary operators

Let us introduce the following operators:

$$\mathcal{O}_{a,k} \equiv \frac{\mathsf{B}(\eta_a^{(p+k-1)})\mathsf{B}(\eta_a^{(p+k-2)})\cdots\mathsf{B}(\eta_a^{(k+1)})\mathsf{A}(\eta_a^{(k)})}{p\eta_{\mathsf{N}}^{\mathsf{e_N}(p-1)}\mathsf{K}^{(p-1)}\prod_{b\neq a,b=1}^{[\mathsf{N}]}(Z_a/Z_b - Z_b/Z_a)} \text{ with } k\in\{0,...,p-1\}, \tag{6.14}$$

where the $\eta_a^{(k)}$ are fixed in Section 2.3.

Lemma 6.1. *The operators $\mathcal{O}_{a,k}$ satisfy the following properties:*

$$\mathcal{O}_{a,k}\mathcal{O}_{a,h} \text{ is non-zero if and only if } h = k-1, \tag{6.15}$$

and

$$\mathcal{O}_{a,k}\mathcal{O}_{a,k-1}\cdots\mathcal{O}_{a,k+1-p}\mathcal{O}_{a,k-p} = \frac{\mathcal{A}(Z_a)}{\prod_{b\neq a,b=1}^{[\mathsf{N}]}(Z_a/Z_b - Z_b/Z_a)}\mathcal{O}_{a,k}. \tag{6.16}$$

Moreover the following commutation relations hold:

$$\eta_{\mathsf{A}}\mathcal{O}_{a,k} = q\mathcal{O}_{a,k}\eta_{\mathsf{A}}, \quad [\eta_{\mathsf{N}},\mathcal{O}_{a,k}] = [\Theta,\mathcal{O}_{a,k}] = 0, \tag{6.17}$$

and

$$\mathcal{O}_{a,k}\mathcal{O}_{b,h} = \frac{(\eta_a^{(k-h+1)}/\eta_b^{(0)} - \eta_b^{(0)}/\eta_a^{(k-h+1)})}{(\eta_a^{(k-h-1)}/\eta_b^{(0)} - \eta_b^{(0)}/\eta_a^{(k-h-1)})}\,\mathcal{O}_{b,h}\mathcal{O}_{a,k} \tag{6.18}$$

for $a \neq b \in \{1,...,[\mathsf{N}]\}$.

Proof. The first property follows from $\mathcal{B}(Z_a) = 0$, where $\mathcal{B}(\Lambda)$ is the average value of $\mathsf{B}(\lambda)$. By the definition of $\mathcal{O}_{a,k}$ it is clear that:

$$\langle\eta_1^{(k_1)},...,\eta_a^{(h)},...,\eta_{\mathsf{N}}^{(k_{\mathsf{N}})}|\mathcal{O}_{a,k} = \frac{a(\eta_a^{(k)})\delta_{h,k}}{\prod_{b\neq a,b=1}^{\mathsf{N}}(\eta_a^{(k)}/\eta_b^{(k_b)} - \eta_b^{(k_b)}/\eta_a^{(k)})}\langle\eta_1^{(k_1)},...,\eta_a^{(k-1)},...,\eta_{\mathsf{N}}^{(k_{\mathsf{N}})}|, \tag{6.19}$$

so that the second property simply follows. To prove the last property we have to use the Yang-Baxter commutation relation:

$$(\lambda/\mu - \mu/\lambda)\mathsf{A}(\lambda)\mathsf{B}(\mu) = (\lambda/q\mu - \mu q/\lambda)\mathsf{B}(\mu)\mathsf{A}(\lambda) + (q-q^{-1})\mathsf{B}(\lambda)\mathsf{A}(\mu) \tag{6.20}$$

we have before to move the $\mathsf{A}(\eta_a^{(k)})$ to the right through all the $\mathsf{B}(\eta_a^{(j)})$, remarking that only the first term of the r.h.s of (6.20) survives, and after to move the $\mathsf{A}(\eta_a^{(h)})$ to the left. □

Let us introduce now the following monomials which we will call *elementary operators:*

$$\mathcal{E}^{(\alpha_1,\ldots,\alpha_r)}_{(k,k_0)^{\mathsf{e}_\mathsf{N}},(a_1,k_1),\ldots,(a_r,k_r)} \equiv \eta_\mathsf{N}^{-\mathsf{e}_\mathsf{N} k} \left(\frac{\Theta}{\eta_\mathsf{A}}\right)^{\mathsf{e}_\mathsf{N} k_0} \mathcal{O}^{(\alpha_1)}_{a_1,k_1} \cdots \mathcal{O}^{(\alpha_r)}_{a_r,k_r}, \tag{6.21}$$

where $\sum_{h=1}^{r} \alpha_h \leq p$, $k, k_i \in \{0, ..., p-1\}$, $a_i < a_j \in \{1, ..., [\mathsf{N}]\}$ for $i < j \in \{1, ..., [\mathsf{N}]\}$ and:

$$\mathcal{O}^{(\alpha)}_{a,k} \equiv \mathcal{O}_{a,k} \mathcal{O}_{a,k-1} \cdots \mathcal{O}_{a,k+1-\alpha}, \text{ with } \alpha \in \{1, ..., p\}. \tag{6.22}$$

Then the following lemma holds:

Lemma 6.2. *For any $n \in \{1, ..., \mathsf{N}\}$, the set of the elementary operators dressed by the shift operator U_n:*

$$\mathsf{U}_n \mathcal{E}^{(\alpha_1,\ldots,\alpha_r)}_{(k,k_0)^{\mathsf{e}_\mathsf{N}},(a_1,k_1),\ldots,(a_r,k_r)} \mathsf{U}_n^{-1}, \tag{6.23}$$

is a basis in the space of the local operators at the quantum site n.

Proof. The space of the local operators in site n is generated by u_n^k and v_n^k for $k \in \{1, ..., p-1\}$. Proceeding as done in Proposition 5.2 we have in particular the possibility to show that an alternative local basis is defined by the operators:

$$\mathsf{u}_n^k = \mathsf{U}_n \left(\mathsf{B}^{-1}(\mu_{n,+})\mathsf{A}(\mu_{n,+})\right)^k \mathsf{U}_n^{-1}, \tag{6.24}$$

$$\tilde{\beta}_{k,n} = \mathsf{U}_n \left(\mathsf{B}^{-1}(\mu_{n,+})\mathsf{A}(\mu_{n,+})\right)^k \mathsf{B}^{-1}(\mu_{n,-})\mathsf{A}(\mu_{n,-}) \left(\mathsf{B}^{-1}(\mu_{n,+})\mathsf{A}(\mu_{n,+})\right)^{p-1-k} \mathsf{U}_n^{-1} \tag{6.25}$$

for $k \in \{1, ..., p-1\}$. Then to prove the lemma we just have to show that the above operators are linear combinations of those defined in (6.21). Note that for $\lambda^p \neq Z_a$ with $a \in \{1, ..., [\mathsf{N}]\}$, the operator $\mathsf{B}^{-1}(\lambda)$ is invertible and by the centrality of the average values we can write:

$$\mathsf{B}^{-1}(\lambda)\mathsf{A}(\lambda) = \frac{\mathsf{B}(\lambda q^{p-1})\mathsf{B}(\lambda q^{p-2}) \cdots \mathsf{B}(\lambda q)\mathsf{A}(\lambda)}{\mathcal{B}(\Lambda)}. \tag{6.26}$$

Now the operator $\mathsf{B}(\lambda q^{p-1})\mathsf{B}(\lambda q^{p-2}) \cdots \mathsf{B}(\lambda q)\mathsf{A}(\lambda)$ is an even Laurent polynomial of degree:

$$(p-1)[\mathsf{N}] + \mathsf{N} - 1 + \mathsf{e}_\mathsf{N} = \begin{cases} p\mathsf{N} - 1 & \text{for } \mathsf{N} \text{ odd} \\ p(\mathsf{N}-1) + 1 & \text{for } \mathsf{N} \text{ even} \end{cases}$$

in λ. So for N odd to completely characterize it we have to fix its value in $p\mathsf{N}$ distinguished points and we are free to chose these points coinciding with the zeros of the operator $\mathsf{B}(\lambda)$. For N even, we have to add to the B-zeros the values at the infinity, so that by using the corresponding interpolation formula for $\mathsf{B}(\lambda q^{p-1})\mathsf{B}(\lambda q^{p-2}) \cdots \mathsf{B}(\lambda q)\mathsf{A}(\lambda)$, we derive:

$$\mathsf{B}^{-1}(\lambda)\mathsf{A}(\lambda) = \frac{\mathsf{e}_\mathsf{N}}{\eta_\mathsf{N}} \left(\frac{\lambda\Theta}{\eta_\mathsf{A}} + \frac{\eta_\mathsf{A}}{\lambda\Theta}\right) + \frac{1}{\eta_\mathsf{N}^{\mathsf{e}_\mathsf{N}}} \sum_{a=1}^{[\mathsf{N}]} \sum_{k=0}^{p-1} \frac{\mathcal{O}_{a,k}}{(\lambda/\eta_a^{(k)} - \eta_a^{(k)}/\lambda)}. \tag{6.27}$$

From the previous formula and the representation (6.24)-(6.25), we have that the local operators u_n^k and $\tilde{\beta}_{k,n}$ are linear combinations of the monomials $\mathsf{U}_n \eta_\mathsf{N}^{-\mathsf{e}_\mathsf{N} h} \left(\frac{\Theta}{\eta_\mathsf{A}}\right)^{\mathsf{e}_\mathsf{N} h_0} \mathcal{O}_{a_1,h_1} \cdots \mathcal{O}_{a_s,h_s} \mathsf{U}_n^{-1}$ for $s \leq p$, $a_i \in$

$\{1, ..., [\mathsf{N}]\}$ and $h, h_i \in \{0, ..., p-1\}$. For any monomial $\mathcal{O}_{a_1,h_1} \cdots \mathcal{O}_{a_s,h_s}$ we can use the commutation rules (6.18) to rewrite it in a way that operators with the same index a are adjacent, we can order them in a way that $a_i < a_j$ for $i < j \in \{1, ..., [\mathsf{N}]\}$ and we can apply the rule (6.15) to say if the monomial is zero or not. Finally, by using the property (6.16), we have:

$$\mathcal{O}_{a,k}^{(p+\alpha)} = \frac{\mathcal{A}(Z_a)}{\prod_{b\neq a,b=1}^{\mathsf{N}}(Z_a/Z_b - Z_b/Z_a)} \mathcal{O}_{a,k}^{(\alpha)}, \tag{6.28}$$

and so it is clear that all the non-zero monomials $\mathcal{O}_{a_1,h_1} \cdots \mathcal{O}_{a_s,h_s}$ can be written in the form (6.21). □

6.2.2 Form factors of elementary operators

As anticipated the interest in the above definition of elementary operators is the simplicity of their form factors:

Lemma 6.3. *Let $\langle t_k|$ and $|t'_{k'}\rangle$ be two eigenstates of the transfer matrix $\mathsf{T}(\lambda)$, then it holds:*

$$\langle t_k|\mathcal{E}^{(\alpha_1,...,\alpha_r)}_{(h,h_0)^{\mathsf{e_N}},(a_1,h_1),...,(a_r,h_r)}|t'_{k'}\rangle = \frac{\delta^{\mathsf{e_N}}_{k,k'+h} q^{\mathsf{e_N} h_0 k'}}{\eta_{\mathsf{N}}^{(0)h\mathsf{e_N}} \prod_{j=1}^{\mathsf{N}} \xi_j^{\mathsf{e_N} h_0}} \mathsf{f}_{(\mathsf{e_N}h_0,\{\alpha\},\{a\})} \det_{[\mathsf{N}]+rp-g}(||\mathrm{O}_{a,b}^{(\mathsf{e_N}h_0,\{\alpha\},\{a\})}||), \tag{6.29}$$

where $||\mathrm{O}_{a,b}^{(\mathsf{e_N}h_0,\{\alpha\},\{a\})}||$ is the $([\mathsf{N}]+rp-g) \times ([\mathsf{N}]+rp-g)$ matrix of elements:

$$\mathrm{O}^{(\mathsf{e_N}h_0,\{\alpha\},\{a\})}_{a,\sum_{h=1}^{m-1}(p-\alpha_h+1)+j_m} \equiv \left(\eta_{a_m}^{(h_m+j_m)}\right)^{4(a-1)} \quad \text{for } j_m \in \{0, ..., p-\alpha_m\}, \quad m \in \{1, ..., r\}, \tag{6.30}$$

$$\mathrm{O}^{(\mathsf{e_N}h_0,\{\alpha\},\{a\})}_{a,\sum_{h=1}^{r}(p-\alpha_h+1)+i} \equiv \Phi^{(t,t')}_{b_i,a+(\mathsf{e_N}h_0+g)/2} \qquad \text{for } i \in \{1, ..., [\mathsf{N}]-r\}, \quad g \equiv \sum_{h=1}^{r} \alpha_h, \tag{6.31}$$

for any $a \in \{1, ..., [\mathsf{N}]+rp-g\}$. Here, we have defined $\{b_1, ..., b_{[\mathsf{N}]-r}\} \equiv \{1, ..., [\mathsf{N}]\}\backslash\{a_1, ..., a_r\}$ with elements ordered by $b_i < b_j$ for $i < j$ and

$$\mathsf{f}_{(\mathsf{e_N}h_0,\{\alpha\},\{a\})} \equiv \frac{\prod_{i=1}^{r} Q_{t'}(\eta_{a_i}^{(h_i-\alpha_i)}) \bar{Q}_t(\eta_{a_i}^{(h_i)}) \frac{\left(\eta_{a_i}^{(h_i)}\right)^{\mathsf{e_N}h_0+\alpha_i([\mathsf{N}]-r)}}{\omega_{a_i}(\eta_{a_i}^{(h_i)})} \prod_{h=0}^{\alpha_i-1} a(\eta_{a_i}^{(h_i-h)})}{\prod_{i=1}^{r}\prod_{h=0}^{\alpha_i-1}\prod_{j=1}^{i-1}\left(\frac{\eta_{a_i}^{(h_i+\alpha_i-h)}}{\eta_{a_j}^{(h_j)}} - \frac{\eta_{a_j}^{(h_j)}}{\eta_{a_i}^{(h_i+\alpha_i-h)}}\right)\prod_{j=i+1}^{r}\left(\frac{\eta_{a_i}^{(h_i)}}{\eta_{a_j}^{(h_j+h)}} - \frac{\eta_{a_j}^{(h_j+h)}}{\eta_{a_i}^{(h_i)}}\right)}$$
$$\times \frac{(-1)^{\sum_{i=1}^{r}(a_i-i)} \prod_{i=1}^{r} q^{-([\mathsf{N}]-r)\alpha_i(\alpha_i-1)/2} V((\eta_{a_1}^{(h_1)})^2, ..., (\eta_{a_r}^{(h_r)})^2)}{\prod_{i=1}^{r}\prod_{j=1}^{[\mathsf{N}]-r}(Z_{a_i}^2 - Z_{b_j}^2) V((\eta_{a_1}^{(h_1)})^2, ..., (\eta_{a_1}^{(h_1+p-\alpha_1)})^2, ..., (\eta_{a_r}^{(h_r)})^2 ..., (\eta_{a_r}^{(h_r+p-\alpha_r)})^2))}, \tag{6.32}$$

where $V(x_1, ..., x_{\mathsf{N}}) \equiv \prod_{1\leq b<a\leq \mathsf{N}}(x_a - x_b)$ is the Vandermonde determinant.

Proof. The operator $\eta_{\mathsf{N}}^{-\mathsf{e}_{\mathsf{N}}h}\left(\frac{\Theta}{\eta_{\mathsf{A}}}\right)^{\mathsf{e}_{\mathsf{N}}h_0}$ act in the following way on the state $\langle t_k|$:

$$\begin{aligned}\langle t_k|\eta_{\mathsf{N}}^{-\mathsf{e}_{\mathsf{N}}h}\left(\frac{\Theta}{\eta_{\mathsf{A}}}\right)^{\mathsf{e}_{\mathsf{N}}h_0} &= \\ &= \left(\frac{q^{h_0(k-h)}}{(\eta_{\mathsf{N}}^{(0)})^2\prod_{j=1}^{\mathsf{N}}\xi_j^{h_0}}\right)^{\mathsf{e}_{\mathsf{N}}}\sum_{k_1,\dots,k_{\mathsf{N}}=1}^{p}\left(\frac{q^{(k-h)h_{\mathsf{N}}}}{p^{1/2}}\right)^{\mathsf{e}_{\mathsf{N}}}\prod_{a=1}^{[\mathsf{N}]}(\eta_a^{(k_a)})^{h_0\mathsf{e}_{\mathsf{N}}}\bar{Q}_t(\eta_a^{(k_a)}) \\ &\times\prod_{1\le b<a\le[\mathsf{N}]}((\eta_a^{(k_a)})^2-(\eta_b^{(k_b)})^2)\frac{\langle\eta_1^{(k_1)},\dots,\eta_{\mathsf{N}}^{(k_{\mathsf{N}})}|}{\prod_{b=1}^{[\mathsf{N}]}\omega_b(\eta_b^{(k_b)})}.\end{aligned} \tag{6.33}$$

From the formula (6.19), it follows:

$$\langle\eta_1^{(k_1)},\dots,,\dots,\eta_{a_i}^{(f)},\dots,\eta_{\mathsf{N}}^{(k_{\mathsf{N}})}|\mathcal{O}_{a_i,h_i}^{(\alpha_i)}=\frac{\prod_{h=0}^{\alpha_i-1}a(\eta_{a_i}^{(h_i-h)})\delta_{f,h_i}\langle\eta_1^{(k_1)},\dots,,\dots,\eta_{a_i}^{(h_i-\alpha_i)},\dots,\eta_{\mathsf{N}}^{(k_{\mathsf{N}})}|}{\prod_{b\neq a_i,b=1}^{[\mathsf{N}]}\prod_{h=0}^{\alpha_i-1}(\eta_{a_i}^{(h_i-h)}/\eta_b^{(k_b)}-\eta_b^{(k_b)}/\eta_{a_i}^{(h_i-h)})}. \tag{6.34}$$

So we can compute also the action of $\mathcal{O}_{a_1,h_1}^{(\alpha_1)}\cdots\mathcal{O}_{a_r,h_r}^{(\alpha_r)}$ just taking into account the order of the operators in the monomial which leads by the scalar product formula to:

$$\begin{aligned}\langle t_k|\mathcal{E}_{(h,h_0)^{\mathsf{e}_{\mathsf{N}}},(a_1,h_1),\dots,(a_r,h_r)}^{(\alpha_1,\dots,\alpha_r)}|t'_{k'}\rangle &= \left(\frac{q^{h_0(k-h)}}{(\eta_{\mathsf{N}}^{(0)})^h\prod_{j=1}^{\mathsf{N}}\xi_j^{h_0}}\right)^{\mathsf{e}_{\mathsf{N}}}\sum_{k_1,\dots,k_{\mathsf{N}}=1}^{p}\left(\frac{q^{[(k-h)-k']k_{\mathsf{N}}}}{p}\right)^{\mathsf{e}_{\mathsf{N}}}\prod_{a=1}^{[\mathsf{N}]}(\eta_a^{(k_a)})^{h_0\mathsf{e}_{\mathsf{N}}} \\ &\times\prod_{i=1}^{r}\frac{\prod_{h=0}^{\alpha_i-1}a(\eta_{a_i}^{(h_i-h)})\delta_{k_{a_i},h_i}}{\prod_{j=1}^{[\mathsf{N}]-r}\prod_{h=0}^{\alpha_i-1}(\eta_{a_i}^{(h_i-h)}/\eta_{b_j}^{(k_{b_j})}-\eta_{b_j}^{(k_{b_j})}/\eta_{a_i}^{(h_i-h)})} \\ &\times\prod_{i=1}^{r}\prod_{h=0}^{\alpha_i-1}\frac{\prod_{j=i+1}^{r}(\eta_{a_i}^{(h_i-h)}/\eta_{a_j}^{(h_j)}-\eta_{a_j}^{(h_j)}/\eta_{a_i}^{(h_i-h)})^{-1}}{\prod_{j=1}^{i-1}(\eta_{a_i}^{(h_i-h)}/\eta_{a_j}^{(h_j-\alpha_j)}-\eta_{a_j}^{(h_j-\alpha_j)}/\eta_{a_i}^{(h_i-h)})} \\ &\times\prod_{j=1}^{[\mathsf{N}]-r}\frac{Q_{t'}(\eta_{b_j}^{(k_{b_j})})\bar{Q}_t(\eta_{b_j}^{(k_{b_j})})}{\omega_{b_j}(\eta_{b_j}^{(k_{b_j})})}\prod_{i=1}^{r}\frac{Q_{t'}(\eta_{a_i}^{(h_i-\alpha_i)})\bar{Q}_t(\eta_{a_i}^{(h_i)})}{\omega_{a_i}(\eta_{a_i}^{(h_i)})} \\ &\times V((\eta_1^{(h_1)})^2,\dots,(\eta_{[\mathsf{N}]}^{(h_{[\mathsf{N}]})})^2).\end{aligned} \tag{6.35}$$

Let us remark that the sum $\sum_{k_1,\dots,k_{\mathsf{N}}=1}^{p}$ reduces to $\delta_{k,k'+h}^{\mathsf{e}_{\mathsf{N}}}$ times the sum $\sum_{k_{b_1},\dots,k_{b_{[\mathsf{N}]-r}}=1}^{p}$ for the presence of the $\prod_{i=1}^{r}\delta_{k_{a_i},h_i}$. Now we multiply each term of the sum by:

$$\begin{aligned}1 &= \prod_{\epsilon=\pm1}\prod_{i=1}^{r}\prod_{j=1}^{[\mathsf{N}]-r}\prod_{h=-p+\alpha_i}^{-1}((\eta_{a_i}^{(h_i-h)})^2-(\eta_{b_j}^{(k_{b_j})})^2)^{\epsilon} \\ &\times\left(\frac{V((\eta_{a_1}^{(h_1)})^2,\dots,(\eta_{a_1}^{(h_1+p-\alpha_1)})^2,\dots,(\eta_{a_r}^{(h_r)})^2\dots,(\eta_{a_r}^{(h_r+p-\alpha_r)})^2))}{V((\eta_{a_1}^{(h_1)})^2,\dots,(\eta_{a_r}^{(h_r)})^2)}\right)^{\epsilon}\end{aligned} \tag{6.36}$$

here the power $+1$ leads to the construction of the Vandermonde determinant:

$$V(\underbrace{(\eta_{a_1}^{(h_1)})^2,\dots,(\eta_{a_1}^{(h_1+p-\alpha_1)})^2}_{p-\alpha_1+1\text{ columns}},\dots,\underbrace{(\eta_{a_r}^{(h_r)})^2,\dots,(\eta_{a_r}^{(h_r+p-\alpha_r)})^2}_{p-\alpha_r+1\text{ columns}},\underbrace{(\eta_{b_1}^{(k_{b_1})})^2,\dots,(\eta_{b_{[\mathsf{N}]-r}}^{(k_{b_{[\mathsf{N}]-r}})})^2}_{[\mathsf{N}]-r\text{ columns}}), \tag{6.37}$$

and the sum $\sum_{k_{b_1},\dots,k_{b_{[\mathsf{N}]-r}}=1}^{p}$ becomes sum over columns and after some algebra we get our formula. $\square$

It is interesting to point out that the last $[\mathsf{N}]-r$ columns of the matrix $||\mathrm{O}_{a,b}^{(\mathsf{e}_\mathsf{N}h_0,\{\alpha\},\{a\})}||$ are just those of the scalar product.

Remark 7. For the similarity of the model and representations considered, it is natural to cite the series of works [144–147]. There, in the framework of cyclic SOV-representations, first results on the matrix elements of local operators appear. However, it is worth saying that these quantities are there computed only for the restriction[17] of the τ_2-model to the generalized Ising model. In particular, the matrix elements of u_1 are computed and the results are not presented in a determinant form.

7 Conclusion and outlook

7.1 Results

In this article we have considered the lattice sine-Gordon model in cyclic representations and we have solved in this case two fundamental problems for the computation of matrix elements of local operators:

- Scalar products: determinant of $\mathsf{N}\times\mathsf{N}$ matrices whose matrix elements are sums over the spectrum of each quantum separate variable of the product of the coefficients of states, this being for all the left/right separate states in the SOV-basis.
- Inverse problem solution: reconstruction of all local operators in terms of standard Sklyanin's quantum separate variables.

Further, we have shown how these results lead to the computation of matrix elements of all local operators. At first, standard[18] Sklyanin's quantum separate variables are suitable for solving the transfer matrix spectral problem. Indeed, the transfer matrix spectrum (eigenvalues & eigenstates) admits a simple and complete characterization in terms of Baxter-equation solutions in this SOV-basis. Then the inverse problem solution allows to write the action of any local operator on transfer matrix eigenstates as finite sums of separate states in the SOV-basis. Hence, the matrix elements of any local operator are written as finite sums of determinants of the resulting scalar product formulae.

We have explicitly developed this program characterizing the matrix elements of the local operators u_n and α_n by one determinant formulae in terms of matrices obtained by modifying a single row in the scalar product matrices. Moreover, we have constructed an operator basis whose matrix elements are in turn written by one determinant formulae. The matrices involved have rows which coincide with those of the scalar product matrix or with those of the Vandermonde matrix computed in the spectrum of the separate variables.

[17] It can be compared to the restriction to the case $q^2=1$ for the even sine-Gordon chain.

[18] Coinciding with the operator-zeros of one of the Yang-Baxter algebra generators, like $B(\lambda)$ or $C(\lambda)$.

7.2 Comparison with previous SOV-results

In the literature of quantum integrable models there exist several results on matrix elements of local operators which can be traced back to applications of separation of variable methods. In this section, we try to recall the most relevant ones as they allow for an explicit comparison with our results. It leads to a universal picture emerging in the characterization of matrix elements by SOV-methods.

7.2.1 On the reconstruction of local operators

One important motivation for our work was to introduce a well defined setup which allows to solve the longstanding problem of the identification of local operators in the continuum sine-Gordon model thanks to the reconstructions achieved on the lattice. Then, it should also allow for the identification of form factor solutions of the continuous theory by implementing well defined limits from our lattice formulae.

Even if methodologically different, it is worth recalling the semi-classical reconstruction presented by Babelon, Bernard and Smirnov in [92] for chiral local operators of the restricted sine-Gordon model (in the infinite volume) at the reflectionless points, $\beta^2 = 1/(1+\nu)$ with $\nu \in \mathbb{Z}^{\geq 0}$. The classical sine-Gordon model admits a SOV description: each n-soliton solution $\varphi(x,t)$ of the equation of motion can be represented in terms of n-separate variables A_j, which in the BBS choice [92] lead to the representations:

$$e^{i\varphi} = \prod_{j=1}^{n} \frac{\mathrm{A}_j}{\mathrm{B}_j}, \tag{7.1}$$

where the B_j are integrals of motion. The formula (7.1) represents classically a SOV reconstruction of the local fields when restricted to the n-soliton sector. In [92], this reconstruction has been extended to the quantum model in each n-solitons sector by quantizing the separate variables[19] A_j and the conjugate momenta as operators which generate n independent Weyl algebras with parameter $\tilde{q} = e^{i\pi\frac{\beta^2}{1-\beta^2}} = e^{i\frac{\pi}{v}}$. This extension and the consequent identifications of primary fields and their chiral descendants in the perturbed minimal models $\mathrm{M}_{1,1+\nu}$ are justified by the following indirect but strong arguments: a) The n-multiple integrals of the form (36) in [92] which represent the n-solitons to n-solitons form factors[20] of chiral left operators at the reflectionless points are reproduced from the semi-classical limit. b) The counting of these form factor solutions allows the reconstruction of the chiral characters of $\mathrm{M}_{1,1+\nu}$ [93]. Further support to (7.1) was given by Smirnov's work on semi-classical form factors[21] of the continuous KdV model in finite volume [98]; there the form factors of [92] were reproduced by taking the infinite volume limit of the KdV semi-classical ones.

Let us remark that in our lattice regularization of the sine-Gordon model, choosing as quantum separate

[19] A fundamental point is the introduction of appropriate Hermitian conjugation properties and the characterization of the spectrum of the Weyl algebra generators.

[20] Note that these are solutions of the form factor equations and so they surely represent local fields in the S-matrix formulation of the restricted sine-Gordon model.

[21] On the basis of this last Smirnov's work, Lukyanov has introduced his conjecture for the finite temperature expectations values of exponential fields in finite volume for the shG-model [99].

variables standard[22] Sklyanin's ones, the reconstruction of the exponential fields is not of the simple form given in (7.1). Then, the following question is relevant: is it possible to find a SOV representation of the quantum lattice sine-Gordon model where the exponential fields are simply written as a product of generators of the SOV representations?

A natural idea can be to implement a change of basis in the quantum separate variables from Sklyanin's ones to a new set; an interesting example of this approach was used by Babelon in [100] which has provided a simple reconstruction of the lattice quantum Toda local operators in terms of a set of quantum separate variables defined by a change of variables from the Sklyanin's ones. However, it is worth pointing out that, for a new SOV representation to be really useful for the computation of matrix elements, it should not only give a simple reconstruction of the local operators but also keep the solution of the transfer matrix spectral problem and the scalar product formulae as simple as for original Sklyanin's variables. Let us comment that a reconstruction like (7.1) can be formally derived at the quantum level implementing the special limit

$$\kappa_n / i \rightarrow +\infty \tag{7.2}$$

on the following reconstruction formula of the lattice sine-Gordon model:

$$\frac{(q^{-1}\mathsf{v}_n^2 + \kappa_n^2)}{(q^{-1}\mathsf{v}_n^2\kappa_n^2 + 1)} = \mathsf{U}_n \mathsf{A}^{-1}(\mu_{n,-})\mathsf{B}(\mu_{n,-})\mathsf{B}^{-1}(\mu_{n,+})\mathsf{A}(\mu_{n,+})\mathsf{U}_n^{-1} \; . \tag{7.3}$$

The result for an even chain reads

$$\mathsf{v}_n^{-2h} = \frac{\Theta^{2h}}{\prod_{a\neq n,a=1}^{\mathsf{N}} \xi_a^{2h}} \mathsf{U}_n \prod_{a=1}^{\mathsf{N}-1} \eta_a^{2h} \mathsf{U}_n^{-1}, \;\; h \in \{1, .., p-1\} \tag{7.4}$$

in terms of Sklyanin's separate variables. It is possible to argue that the previous limit can be consistently interpreted as a chiral deformation of the lattice sine-Gordon model to chiral KdV models [135, 154]. In a future publication, we will analyze the cyclic representations[23] of these chiral KdV models showing our statement on the reconstruction formulae and computing the matrix elements. It is worth pointing out that the form factors of the r.h.s. of (7.4) are trivial to compute in our SOV framework and are written by one determinant formulae which differ w.r.t. the scalar product only for $h \in \{1, .., p-1\}$ rows.

7.2.2 On the matrix elements of local operators

In the case of the quantum integrable Toda chain [87], Smirnov [98] has derived in the framework of Sklyanin's SOV determinant formulae for the matrix elements of a conjectured basis of local operators which look very similar to our formulae. The main difference is due to the different nature of the spectrum of the quantum separate variables in the two models. In fact, in the case of the lattice Toda model, Sklyanin's measure is continuous (continuous SOV-spectrum) while it is discrete in the case of the cyclic lattice sine-Gordon model. The elements of the matrices whose determinants give the form factor formulae are then

[22] The same is true if we take the products of the operator zeros of $\mathsf{C}(\lambda)$ but also of $\mathsf{A}(\lambda)$ and $\mathsf{D}(\lambda)$, i.e. for all possibilities to construct the SOV representations by the simplest Sklyanin's method.

[23] Here, we are referring to compact representations of chiral KdV models where the generators of the local Weyl algebras are unitary operators. The spectrum of the non-compact versions was instead analyzed by SOV and Q-operator method in [103].

expressed as “convolutions”, over the spectrum of the separate variables, of Baxter equations solutions plus contributions coming from the local operators. In the case of Smirnov’s formulae they are true integrals, the SOV-spectrum being continuous, while in our formulae they are “discrete convolutions” , the SOV-spectrum being discrete. Let us comment that the need to conjecture[24] the form of a basis of local operators in [98] is due to the lack of a direct reconstruction of local operators in terms of Sklyanin’s separate variables.

In the case of the infinite volume quantum sine-Gordon field theory, the form factors of local operators [66] have also a form similar to the one predicted by SOV. This similarity can be made explicit considering the n-soliton form factors for the restricted sine-Gordon theory at the reflectionless points in formula (31) of [92]. Then, for the local fields interpreted as primary operators in [92], the corresponding form factors can be easily rewritten as determinants of $n \times n$ matrices whose elements are integral convolutions of n-soliton wave functions (the ψ-functions (32)) plus contributions coming from the local operators.

The rough picture that seems to emerge is that by performing the IR limit on our lattice form factors the lattice wave functions factorized in terms of Q-operator eigenvalues have to converge to the infinite volume n-soliton wave functions. To which extent this picture can be confirmed and clarified by a detailed analysis of the thermodynamic limit starting from our lattice sine-Gordon model results is of course an interesting question to which we would like to answer in the future.

7.3 Outlook

It is worth mentioning that we didn’t succeed yet to express the matrix elements of discretized exponential of the sine-Gordon field in terms of one simple determinant formula. Hence our next natural project is the simplification of the present representation; this is also important in view of the attempt to extend our results from the lattice to the continuous finite and infinite volume limits. The main goal here is to derive the known form factors of the IR limit, starting from our lattice form factors, in this way solving the longstanding problem of the identifications of local fields in the S-matrix characterization of the infinite volume sine-Gordon model.

Beyond the sine-Gordon model we want to point out the potential generality of the method we have introduced here to compute matrix elements of local operators for quantum integrable models. The main ingredients used to develop it are the reconstruction of local operators in Sklyanin’s SOV representations and the scalar product formulae for the transfer matrix eigenstates (and general separate states). The emerging picture is the possibility to apply this method to a whole class of integrable quantum model which were not tractable with other methods. This is in particular the case for lattice integrable quantum models to which the algebraic Bethe ansatz does not apply. The first remarkable case is given by the τ_2-model in general representations which are of special interest for their connection to the chiral Potts model. This will be the next model that we will analyze by our technique due to the similarity of its cyclic representations with those of the sine-Gordon model.

There are also many other examples which are interesting and for which, on the one hand, the reconstruction of the local operators can be deduced from [29] and, on the other hand, the description of the spectrum can

[24]The consistency of this conjecture is there verified by a counting argument based on the existence of an appropriate set of null conditions for the “integral convolutions”.

be given by Sklyanin's quantum separation of variables. For all these models the possibility to apply our method for the computation of matrix elements is very concrete and moreover the results are expected to have a completely similar form to the ones shown in the present article.

Acknowledgments

We would like to thank N. Kitanine, K. K. Kozlowski, B. M. McCoy, E. Sklyanin, V. Terras and J. Teschner for their interest in this work. J. M. M. is supported by CNRS. N. G. and J. M. M. are supported by ANR grant ANR-10-BLAN-0120-04-DIADEMS. G. N. is supported by National Science Foundation grants PHY-0969739. G. N. gratefully acknowledge the YITP Institute of Stony Brook for the opportunity to develop his research programs and the privilege to have stimulating discussions on the present paper and on related subjects with B. M. McCoy. Moreover, G. N. would like to thank the Theoretical Physics Group of the Laboratory of Physics at the ENS Lyon and the Mathematical Physics Group at the IMB of the University of Dijon for their hospitality.

Bibliography

[1] L. Van Hove, Phys. Rev. **95** (1954) 249.

[2] L. Van Hove, Phys. Rev. **95** (1954) 1374.

[3] R. Kubo, J. Phys. Soc. Japan **12** (1957) 570.

[4] R. Kubo, M. Toda, N. Hashistume, *Statistical Physics II*, Springer-Verlag, 1985.

[5] W. Heisenberg, Z. Phys. **49** (1928) 619.

[6] H. Bethe, Z. Phys. **71** (1931) 205.

[7] L. Hulthén, Arkiv Mat. Astron. Fys. **26A** (1938) 1.

[8] R. Orbach, Phys. Rev. **112** (1958) 309.

[9] L. R. Walker, Phys. Rev. **116** (1959) 1089.

[10] E. Lieb, T. Shultz and D. Mattis, Ann. Phys. **16** (1961) 407.

[11] E. Lieb and D. Mattis (eds.), *Mathematical Physics in One Dimension*, New York: Academic Press, 1966.

[12] C. N. Yang, Phys. Rev. Lett. **19** (1967) 1312.

[13] L. D. Faddeev, E. K. Sklyanin and L. A. Takhtajan, Theor. Math. Phys. **40** (1980) 688.

[14] L. D. Faddeev and L. A. Takhtajan, Russ. Math. Surveys, **34** : 5 (1979) 11.

[15] H. B. Thacker, Rev. Mod. Phys. **53** (1981) 253.

[16] R. J. Baxter, *Exactly solved models in statistical mechanics*, London–New York: Academic Press, 1982.

[17] M. Gaudin, *La Fonction d'Onde de Bethe*, Paris: Masson, 1983.

[18] V. E. Korepin, N. M. Bogoliubov, A. G. Izergin, *Quantum Inverse Scattering Method and Correlation Functions*, Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1993.

[19] L. D. Faddeev, in: Les Houches Lectures *Quantum Symmetries*, eds A. Connes et al, North Holland, 1998.

[20] M. Jimbo and T. Miwa, *Algebraic analysis of solvable lattice models*, AMS, 1995.

[21] B. M. McCoy, Phys. Rev. **173** (1968) 531.

[22] B. M. McCoy, C. A. Tracy and T. T. Wu, Phys. Rev. Lett. **38** (1977) 793.

[23] M. Sato, T. Miwa, M. Jimbo, Publ. Res. Int. Math. Sci. **14** (1978) 223; **15** (1979) 201, 577, 871; **16** (1980) 531.

[24] B. M. McCoy, J. H. H. Perk and T. T. Wu, Phys. Rev. Lett. **46** (1981) 757.

[25] M. Jimbo, K. Miki, T. Miwa and A. Nakayashiki, Phys. Lett. A **168** (1992) 256.

[26] M. Jimbo and T. Miwa, J. Phys. A: Math. Gen. **29** (1996) 2923.

[27] N. Kitanine, J. M. Maillet and V. Terras, Nucl. Phys. B **554** (1999) 647.

[28] N. Kitanine, J. M. Maillet, and V. Terras, Nucl. Phys. B **567** (2000) 554.

[29] J. M. Maillet and V. Terras, Nucl. Phys. B **575** (2000) 627.

[30] F. Göhmann, A. Klümper and A. Seel, J. Phys. A: Math. Gen. **37** (2004) 7625.

[31] F. Göhmann, A. Klümper and A. Seel, J. Phys. A: Math. Gen. **38** (2005) 1833.

[32] N. Kitanine, K. K. Kozlowski, J. M. Maillet, G. Niccoli, N. A. Slavnov and V. Terras, J. Stat. Mech. (2007) P10009.

[33] N. Kitanine, K. K. Kozlowski, J. M. Maillet, G. Niccoli, N. A. Slavnov and V. Terras, J. Stat. Mech. (2008) P07010.

[34] N. Kitanine, J. M. Maillet, N. A. Slavnov and V. Terras, Nucl. Phys. B **641** (2002) 487.

[35] N. Kitanine, J. M. Maillet, N. A. Slavnov and V. Terras, Nucl. Phys. B **712** (2005) 600.

[36] N. Kitanine, J. M. Maillet, N. A. Slavnov and V. Terras, Nucl. Phys. B **729** (2005) 558.

[37] N. Kitanine, K. K. Kozlowski, J. M. Maillet, N. A. Slavnov and V. Terras, J. Stat. Mech. (2007) P01022.

[38] N. Kitanine, K. K. Kozlowski, J. M. Maillet, N. A. Slavnov and V. Terras, J. Math. Phys. **50** (2009) 095209.

[39] N. Kitanine, K. K. Kozlowski, J. M. Maillet, N. A. Slavnov and V. Terras, J. Stat. Mech. (2009) P04003.

[40] K. K. Kozlowski, J. M. Maillet, N. A. Slavnov, J. Stat. Mech. (2011) P03018.

[41] K. K. Kozlowski, J. M. Maillet, N. A. Slavnov, J. Stat. Mech. (2011) P03019.

[42] J. S. Caux and J. M. Maillet, Phys. Rev. Lett. **95** (2005) 077201.

[43] J. S. Caux, R. Hagemans, and J. M. Maillet, J. Stat. Mech. (2005) P09003.

[44] R. G. Pereira, J. Sirker J, J. S. Caux, R. Hagemans, J. M. Maillet, S. R. White and I. Affleck, Phys. Rev. Lett. **96** (2006) 257202.

[45] R. G. Pereira, J. Sirker J, J. S. Caux, R. Hagemans, J. M. Maillet, S. R. White and I. Affleck, J. Stat. Mech. Theory Exp. (2007) P08022.

[46] H. Boos, M. Jimbo, T. Miwa, F. Smirnov and Y. Takeyama, Comm. Math. Phys. **272** (2007) 263.

[47] H. Boos, M. Jimbo, T. Miwa, F. Smirnov and Y. Takeyama, Comm. Math. Phys. **286** (2009) 875.

[48] H. Boos, M. Jimbo, T. Miwa and F. Smirnov, J. Math. Phys. **50** (2009) 095206.

[49] M. Jimbo, T. Miwa and F. Smirnov, J. Phys. A **42** (2009) 304018.

[50] H. Boos, M. Jimbo, T. Miwa and F. Smirnov, Comm. Math. Phys. **299** (2010) 825.

[51] H. Boos, SIGMA **7** 007 (2011).

[52] N. Kitanine, K. K. Kozlowski, J. M. Maillet, N. A. Slavnov and V. Terras, J. Stat. Mech. (2011) P05028.

[53] N. Kitanine, K. K. Kozlowski, J. M. Maillet, N. A. Slavnov and V. Terras, J. Stat. Mech. (2011) P12010.

[54] N. Kitanine, K. K. Kozlowski, J. M. Maillet, N. A. Slavnov and V. Terras, *Form factor approach to dynamical correlation functions in critical models*, arXiv:math-ph/1206.2630.

[55] A. B. Zamolodchikov, JEPT Lett. **25** (1977) 468.

[56] A. B. Zamolochikov, Al. B. Zamolodhikov, Nucl. Phys. B **133** (1978) 525; Moscow preprint ITE P- 112 (1977).

[57] A. B. Zamolodchikov and Al. B. Zamolodchikov, Ann. Phys. **120** (1979) 253.

[58] M. Karowski, H.J. Thun, T.T. Truong and P. Weisz, Phys. Lett. B **67** (1977) 321.

[59] M. Karowski, H.J. Thun, Nucl. Phys. B **130** (1977) 295.

[60] B. Berg, M. Karowski, V. Kurak and P. Weisz, Nucl. Phys. B **134** (1978) 125.

[61] M. Karowski, Phys. Rep. **49** (1979) 229.

[62] M. Karowski and P. Weisz, Nucl. Phys. B **139** (1978) 445.

[63] B. Berg, M. Karowski and P. Weisz, Phys. Rev. D **19** (1979) 2477.

[64] F. A. Smirnov, J. Phys. A **17** (1984) L873.

[65] F. A. Smirnov, J. Phys. A **19** (1986) L575.

[66] F. A. Smirnov, *Form factors in completely integrable models of quantum field theory*, Adv. Series in Math. Phys. **14**, World Scientific, 1992.

[67] M. A. Virasoro, Phys. Rev. D **1** (1970) 2933.

[68] A. A. Belavin, A. M. Polyakov, A. B. Zamolodchikov, Nucl. Phys. B **241** (1984) 333.

[69] P. Ginsparg, in: *Fields, Strings and Critical Phenomena*, Les Houches Lecture Notes 1988, eds. E. Brézin and J. Zinn-Justin, Elsevier, New York, 1989.

[70] J. L. Cardy, in: *Fields, Strings and Critical Phenomena*, Les Houches Lecture Notes 1988, eds. E. Brézin and J. Zinn-Justin, Elsevier, New York, 1989.

[71] P. Di Francesco, P. Mathieu and D. Sénéchal, *Conformal Field Theory*, Springer, New York (1997).

[72] A. B. Zamolodchikov, JETP Lett. **46** (1987) 160.

[73] A. B. Zamolodchikov, Int. J. Mod. Phys. A **3** (1988) 743.

[74] A. B. Zamolodchikov, Adv. Stud. Pure Math. **19** (1989) 641.

[75] A. B. Zamolodchikov, JETP Lett. **43** (1986) 730.

[76] J. Cardy, Phys. Rev. Lett. **60** (1988), 2709.

[77] F. A. Smirnov, Int. J. Mod. Phys. A **4** (1989) 4213.

[78] N.Yu. Reshetikhin and F.A. Smirnov, Comm. Math. Phys. **131** (1990) 157.

[79] J. Cardy and G. Mussardo, Nucl. Phys. B **340** (1990) 387.

[80] F. A. Smirnov, Nucl. Phys. B **337** (1990) 156.

[81] Al.B. Zamolodchikov, Nucl. Phys. B **348** (1991) 619.

[82] G. Mussardo, Phys. Rep. **218** (1992) 215.

[83] R. Guida, N. Magnoli, Nucl. Phys. B **471** (1996) 361.

[84] V. V. Bazhanov, S. L. Lukyanov and A. B. Zamolodchikov, Comm. Math. Phys. **177** (1996) 381.

[85] V. V. Bazhanov, S. L. Lukyanov and A. B. Zamolodchikov, Comm. Math. Phys. **190** (1997) 247.

[86] V. V. Bazhanov, S. L. Lukyanov and A. B. Zamolodchikov, Comm. Math. Phys. **200** (1999) 297.

[87] E. K. Sklyanin, Lect. Notes Phys. **226** (1985) 196.

[88] E. K. Sklyanin, *Quantum inverse scattering method. Selected topics*. In: *Quantum groups and quantum integrable systems*, World Scientific, 1992.

[89] E. K. Sklyanin, Prog. Theor. Phys. Suppl. **118** (1995) 35.

[90] V. B. Kuznetsov, E. K. Sklyanin J. Phys. A **31** (1998) 2241.

[91] E. K. Sklyanin, *Backlund transformations and Baxter's Q-operator* in *Integrable systems: from classical to quantum* (2000), 227, CRM Proc. Lecture Notes, **26** Amer. Math. Soc, Providence, RI, 2000 (Montreal, QC, 1999).

[92] O. Babelon, D. Bernard, F. A. Smirnov, Comm. Math. Phys. **182** (1996) 319.

[93] O. Babelon, D. Bernard, F. Smirnov, Comm. Math. Phys. **186** (1997) 601.

[94] M. Jimbo, T. Miwa and F. Smirnov, Lett. Math. Phys. **96** (2011) 325.

[95] M. Jimbo, T. Miwa and F. Smirnov, Nucl. Phys. B **852** (2011) 390.

[96] E. K. Sklyanin, J. Phys. A **22** (1989) 3551.

[97] E. K. Sklyanin, Nucl. Phys. B **326** (1989) 719.

[98] F. Smirnov, J. Phys. A **31** (1998) 8953.

[99] S. Lukyanov, Nucl. Phys. B **612** (2001) 391.

[100] O. Babelon, J. Phys. A **37** (2004) 303.

[101] A. G. Bytsko, J. Teschner, J. Phys. A **39** (2006) 12927.

[102] J. Teschner, Nucl. Phys. B **799** (2008) 403.

[103] A. Bytsko, J. Teschner, *The integrable structure of nonrational conformal field theory*, hepth-0902.4825v2.

[104] A. Fring, G. Mussardo and P. Simonetti, Nucl. Phys. B **393** (1993) 413.

[105] A. Fring, G. Mussardo and P. Simonetti, Phys. Lett. B **307** (1993) 83.

[106] A. Koubek and G. Mussardo, Phys. Lett. B **311** (1993) 193.

[107] C. Ahn, G. Delfino and G. Mussardo, Phys. Lett. B **317** (1993) 573.

[108] G. Mussardo and P. Simonetti, Int. J. Mod. Phys. A **9** (1994) 3307.

[109] A. Koubek, Nucl. Phys. B **428** (1994) 655

[110] G. Delfino and G. Mussardo, Nucl. Phys. B **455** (1995) 724.

[111] G. Delfino, P. Simonetti and J. L. Cardy, Phys. Lett. B **387** (1996) 327.

[112] H. Babujian, A. Fring, M. Karowski, A. Zapletal, Nucl. Phys. B **538** (1999) 535.

[113] H. Babujian, M. Karowski, Nucl. Phys. B **620** (2002) 407.

[114] H. Babujian, M. Karowski, J. Phys. A **35** (2002) 9081.

[115] A. Koubek, Nucl. Phys. B **435** (1995) 703.

[116] F. Smirnov, Nucl. Phys. B **453** (1995) 807.

[117] M. Jimbo, T. Miwa, Y. Takeyama, *Counting minimal form factors of the restricted sine-Gordon model*, arXiv:math-ph/0303059v6.

[118] R. Kedem, T.R. Klassen, B.M. McCoy, E. Melzer, Phys. Lett. B **304** (1993) 263.

[119] R. Kedem, T.R. Klassen, B.M. McCoy, E. Melzer, Phys. Lett. B **307** (1993) 68.

[120] S. Dasmahapatra, R. Kedem, T.R. Klassen, B.M. McCoy, E. Melzer, J. Mod. Phys. B **7** (1993) 3617.

[121] B.L. Feigin, T. Nakanishi, H. Ooguri, Int. J. Mod. Phys. A **7** (Suppl. 1A) (1992) 217.

[122] W. Nahm, A. Recknagel, M. Terhoeven, Mod. Phys. Lett. A **8** (1993) 1835.

[123] R. Kedem, B.M. McCoy and E. Melzer, *The sums of Rogers, Schur and Ramanujan and the Bose-Fermi correspondence in 1+1 dimensional quantum field theory*, in : *Recent Progress in Statistical Mechanics and Quantum Field Theory*, ed. P. Bouwknegt et all., World Scientific, Singapore, 1995.

[124] A. Berkovich and B.M. McCoy, *Rogers-Ramanujan identities: A century of progress from mathematics to physics*, Proceedings of ICM98 Documenta Mathematica, (Bielefeld, Germany: Deutscher Mathematiker-Vereinigung) Extra volume ICM 1998, **3** (1998) 163.

[125] G. Delfino and G. Niccoli, Nucl. Phys. B **707** (2005) 381.

[126] G. Delfino and G. Niccoli, J. Stat. Mech. (2005) P04004.

[127] G. Delfino and G. Niccoli, JHEP 05 (2006) 035.

[128] G. Delfino and G. Niccoli, Nucl. Phys. B **799** [FS] (2008) 364.

[129] G. Niccoli and J. Teschner, J. Stat. Mech. (2010) P09014.

[130] G. Niccoli, Nucl. Phys. B **835** (2010) 263-283.

[131] G. Niccoli, JHEP **03** (2011) 123.

[132] A.G. Izergin, V.E. Korepin, Nucl. Phys. B **205** (1982) 401.

[133] V. O. Tarasov, I. A. Takhtadzhyan and L. D. Faddeev, Theor. Math. Phys. **57**, **2** (1983) 1059.

[134] L. D. Faddeev, *Current-like variables in massive and massless integrable models*, Lectures delivered at the International School of Physics Enrico Fermi (Villa Monastero, Varenna, Italy), 1994, arXiv:hep-th/9408041.

[135] L.D. Faddeev, A. Yu. Volkov, Lett. in Math. Phys. **32** (1994) 125.

[136] V. Bazhanov, A. Bobenko, N. Reshetikhin, Comm. Math. Phys. **175** no. 2 (1996) 377.

[137] L.D. Faddeev, A. Yu. Volkov, Theor. Math. Phys. **92** (1992) 837.

[138] A. Bobenko, N. Kutz and U. Pinkall, Phys. Lett. A **177** (1993) 399.

[139] V.V. Bazhanov, *Chiral Potts model and the discrete sine-Gordon model at roots of unity*, arXiv:hep-th/0809.2351.

[140] V. Tarasov, *Cyclic monodromy matrices for the R-matrix of the six-vertex model and the chiral Potts model with fixed spin boundary conditions.* Infinite analysis, Parts A, B (Kyoto, 1991), 963, Adv. Ser. Math. Phys., **16**, River Edge, NJ: World Sci. Publ., 1992.

[141] A. G. Izergin and V. E. Korepin, Dokl. Akad. Nauk **259** (1981) 76.

[142] A. G. Izergin and V. E. Korepin, *A lattice model related to the nonlinear Schroedinger equation*, arXiv:0910.0295.

[143] N. A. Slavnov, Theor. Math. Phys. **79** (1989) 502.

[144] G. von Gehlen, N. Iorgov, S. Pakuliak, V. Shadura and Yu Tykhyy, J. Phys. A: Math. Theor. **40** (2007) 14117.

[145] G. von Gehlen, N. Iorgov, S. Pakuliak and V. Shadura, J. Phys. A: Math. Gen. **39** (2006) 7257.

[146] G. von Gehlen, N. Iorgov, S. Pakuliak, V. Shadura and Yu Tykhyy, J. Phys. A: Math. Theor. **41** (2008) 095003.

[147] G von Gehlen, N Iorgov, S Pakuliak, V Shadura, J. Phys. A: Math. Theor. **42** (2009) 304026.

[148] V.V. Bazhanov, Yu. G. Stroganov, J. Stat. Phys. **59** (1990) 799.

[149] R. J. Baxter, V. V. Bazhanov and J. H. H. Perk , Int. J. Mod. Phys. B **4** (1990) 803.

[150] R. J. Baxter, J. Stat. Phys. **117** (2004) 1.

[151] P. P. Kulish, N. Y. Reshetikhin, and E. K. Sklyanin, Lett. Math. Phys. **5** (1981) 393.

[152] T. Oota, J. Phys. A: Math. Gen. **37** (2004) 441.

[153] N. Grosjean, J. M. Maillet, G. Niccoli, *On form factors of local operators in the τ_2 and Chiral Potts models*, to appear.

[154] S.Novikov, S.Manakov, L.Pitaevski, V.Zakharov, *Theory of Solitons*, New York: Consultants Bureau, 1984.

Article II

The τ_2-model and the chiral Potts model revisited

Publié dans
J. Stat. Mech. (2012) P11005

LPENSL-TH-12-5
YITP-SB-12-17

The τ_2-model and the chiral Potts model revisited: completeness of Bethe equations from Sklyanin's SOV method

N. Grosjean[1] **and G. Niccoli**[2],

Abstract The most general cyclic representations of the quantum integrable τ_2-model are analyzed. The complete characterization of the τ_2-spectrum (eigenvalues and eigenstates) is achieved in the framework of Sklyanin's Separation of Variables (SOV) method by extending and adapting the ideas first introduced in [1, 2]: i) The determination of the τ_2-spectrum is reduced to the classification of the solutions of a given functional equation in a class of polynomials. ii) The determination of the τ_2-eigenstates is reduced to the classification of the solutions of an associated Baxter equation. These last solutions are proven to be polynomials for a quite general class of τ_2-self-adjoint representations and the completeness of the associated Bethe ansatz type equations is derived. Finally, the following results are derived for the inhomogeneous chiral Potts model: i) Simplicity of the spectrum, for general representations. ii) Complete characterization of the chiral Potts spectrum (eigenvalues and eigenstates) and completeness of Bethe ansatz type equations, for the self-adjoint representations of τ_2-model on the chiral Potts algebraic curves.

[1]Laboratoire de Physique, UMR 5672 du CNRS, ENS Lyon, France, nicolas.grosjean@ens-lyon.fr
[2]YITP, Stony Brook University, New York 11794-3840, USA, niccoli@max2.physics.sunysb.edu

Contents

1 Introduction

The quantum integrable τ_2-model has been first introduced in [3] where its Lax operator was constructed as a general solution to the Yang-Baxter equations w.r.t. the standard trigonometric 6-vertex R-matrix. There the analysis of the spectrum (eigenvalues) was made by the standard construction [4] of the Baxter Q-operator for the subvariety of the cyclic representations parameterized by points on the algebraic curves[1] associated to the integrable chiral Potts (chP) model[2]. This last operator was shown to coincide with the transfer matrix of the chP-model, in this way a first remarkable connection between these two apparently very different models[3] was established. The eigenvalues analysis was further developed in [12, 13] where additional functional equations for the transfer matrices of these two models, like those corresponding to the fusion hierarchy[4] of commuting transfer matrices[5], were shown. In the special case of the superintegrable chP-model, the role of Bethe ansatz type equations for the spectral analysis was first pointed out in [16, 17, 18]. In [19] the algebraic Bethe ansatz (ABA) description of the superintegrable chP-spectrum was rigorously introduced on the basis of the connection between the τ_2-model and the chP-model. In particular, the Bethe ansatz construction was applied to the τ_2-transfer matrix, which led to the reproduction of the Baxter results [20, 21, 22] on the subset of the *spin-translation*-invariant eigenvectors of the superintegrable chP-model. Subsequently, the eigenvector analysis in the superintegrable representations has been further developed by different authors [23]-[26]. It is worth mentioning that in all these analysis the underlying Onsager algebra [27] and a realization of the sl_2 loop algebra [28], which are coexisting symmetries for these superintegrable representations [6, 11, 29]-[32], have played fundamental roles.

Beyond the spectrum characterization for the chP model, one important issue which has attracted much of the attention in the existing literature has been the computation of the spontaneous magnetization of the model. The formula for this order parameter was first conjectured in [33] from perturbative calculations based on the finite size analysis of this model in the special class of superintegrable representations. On the basis of some natural analyticity assumptions, a first derivation of this formula was given only recently by Baxter in [34, 35] by using a technique introduced by Jimbo et al. [36]. The main reason which has prevented the use of more standard techniques, like the corner transfer matrix [4], is in the very nature of the chiral Potts model for which the rapidity variables live on higher genus curves and so the standard difference property is not satisfied [37]. Only the recent introduction by Baxter [38, 39] of a more general version of the Onsager algebra for the special class of superintegrable representations of chP model has provided the required algebraic framework to prove the spontaneous magnetization formula [33] starting from direct computations on the finite lattice of matrix elements of the spin operators. These matrix elements in the superintegrable chP model have been analyzed in a series of papers by Au-Yang and Perk [23, 25], [40]- [42] and their factorized form first conjectured by Baxter [43] has been proven[6] by Iorgov et al [46] and used to derive the spontaneous magnetization formula conjectured in [33]. It is moreover worth recalling that, always in the algebraic framework of this more general Onsager algebra, Baxter has also first conjectured [47] and successively proven [48] a determinant formula for the spontaneous magnetization of the superintegrable chiral Potts model, this result is also used for a further derivation of the known formula of the order parameter in the thermodynamical limit.

Finally, let us recall that more recently [49] Baxter has extended the eigenvalues analysis of the τ_2-model to completely general cyclic representations. The main tool used there was the construction of a generalized Q-operator which satisfies the Baxter equation with the τ_2-transfer matrix[7] and the consequent extension to these representations of the functional relations

[1]These curves are parametrized by the equations required for the periodicity of dilogarithm functions, i.e. (3.5) of [3].

[2]It has been first characterized as a p-state one-dimensional quantum model [5, 6] and then as a two-dimensional classical lattice model in statistical mechanics [7]-[11].

[3]The differences between them are simply expressed in the 2-dimensional statistical mechanics formulation. Both are characterized by Boltzmann weights which satisfy the star-triangle (Yang-Baxter) equations but while those of the τ_2-model satisfy the ordinary difference property in the rapidities those of the chP-model do not. In fact, one of the interesting properties of the chP-model is that its weights are uniformized by curves of genus $g > 1$, hence they cannot satisfy the difference property. Let us recall that the first solutions of the star-triangle equations with this non-difference property were obtained in [7, 8, 9], while in [10, 11] the general solutions for the chP-model were derived.

[4]The approach of fusion hierarchy of commuting transfer matrices was first introduced in [14, 15].

[5]The τ_2-transfer matrix is the second element in this hierarchy, this explains the name given to the model.

[6]Note that factorized formulas for the spin matrix elements exist also for the 2D Ising model [44] and for the quantum XY-chain [45].

[7]There, it was considered as a kind of generalized chiral Potts model transfer matrix, however, the fact that even the commutativity of

for the fused transfer matrices.

Let us comment that, in the above literature, the spectral analysis suffers in general from at least one of the following problems: i) Analysis reduced to the eigenvalues only: no eigenstates construction for the functional methods based only on the Baxter Q-operator and the fusion matrices. ii) Reduced applicability: the ABA applies only to very special representations of the τ_2-model and of the chP-model. iii) Lack of completeness proof, i.e. the completeness of the spectrum description is not assured for these methods. In particular, this last problem affects almost all the Bethe ansatz methods[8], which leads to the characterization of the spectrum by solutions of an associated system of Bethe ansatz type equations.

A rigorous proof of the completeness of these spectrum characterizations is then a fundamental goal which was achieved in the literature only for a few examples of integrable quantum models, including for example the XXX Heisenberg model [63] and the cyclic representations of the lattice sine-Gordon model [64]. In [65] a set of rules to count solutions of Bethe's ansatz equations has been introduced for the case of the 3-state superintegrable chP-model. These rules have been obtained by combining a finite size study of eigenvalues with a generalization of the string hypothesis approach and their ability to count the complete set of states has been there proven. A similar analysis has been also addressed in [66] for the reduction of the 3-state Potts model to the trivial algebraic curve case, i.e. the Fateev-Zamolodchikov model [67], see also [68] and [69] for further applications of this method. However, in the general p-state chP-model and τ_2-model the proof of completeness for the existing spectrum characterizations are so far missing.

One of our main motivation to the present paper is to define a spectrum characterization which applies for completely general inhomogeneous representations[9] of these models for which we can prove exactly the completeness. We succeed to do it in the framework of Sklyanin's SOV method [70]-[72], which for the τ_2-model was first developed[10] in [76]. The eigenvector analysis developed by Iorgov in [77] was there used and expanded to define the SOV-representations for the transfer matrix of the τ_2-model. The construction of these SOV-representations is obtained by a recursion procedure on the chain size inspired by the papers [78, 79] on the SOV spectrum of quantum Toda chain and the paper [80] for the q-deformed quantum Toda chain. In the case of cyclic representations [81] of integrable quantum models the SOV spectrum characterization is given in terms of solutions of an associated finite system of Baxter-like equations. Then, it is worth recalling that in [76], the functional relations of fusion and truncation of transfer matrices were proven to be equivalent to the SOV characterization, leading to the derivation of a functional equation reformulation for the τ_2-spectrum.

In this paper, we prove that for completely general cyclic representations the τ_2-transfer matrix (completed with the Θ-charge for some subvariety of representations) has simple spectrum[11]. This new and central result allows us to prove that the characterizations of the τ_2 eigenvalues and eigenstates are complete. Similar statements are also proven for the inhomogeneous chP-transfer matrix. Then, we classify the self-adjoint representations of these models as they allow us to prove further powerful properties of the spectrum. In the τ_2-self-adjoint representations, the SOV characterization leads to the reconstruction of the τ_2-eigenbasis which, for the reduction to representations on the chP algebraic curves, are proven to be a simultaneous eigenbasis of the inhomogeneous chP-transfer matrix. Furthermore, we show that there exists a quite general subvariety of τ_2-self-adjoint representations, for which we can reconstruct the eigenvalues and the full basis of eigenstates in terms of solutions of an associated system of Bethe ansatz type equations. Finally, we prove the same statement of completeness for the chP-spectrum, which corresponds to the restriction of these τ_2-self-adjoint representations on the chP algebraic curves.

---

the elements of such operator family is not given leaves the definition of generalized chP-model only formal.

[8] As the coordinate Bethe ansatz [50, 4, 51], the algebraic Bethe ansatz [52]-[60], the analytic Bethe ansatz [61, 62].

[9] As the very specific superintegrable chiral Potts representation has attracted a large interest, it is worth to clarify that our analysis does not apply directly to the superintegrable case; for more details see Remark 7.

[10] See also the series of works [73, 74, 75] where first results concerning the computation of the form factors of local operators by SOV were achieved for the special (2-state) case of the generalized Ising model. In [73], as first step in these calculations, the problem of deriving the normalization of the B-eigenstates from their recursive constructions was addressed.

[11] This simplicity implies that the fused transfer matrices do not really add further information to the spectrum characterization.

1.1 Organization of the paper

The paper is organized as follows. In section 2 we introduce the τ_2-model for general cyclic representations, pointing out its main properties and characterizing the representations for which its transfer matrix is self-adjoint. In section 3 we characterize the spectrum (eigenvalues and eigenstates) for the most general representations by using the quantum separation of variables only. In particular, we prove the simplicity of the τ_2-spectrum and that the reformulation of the SOV spectrum in terms of solutions of a given functional equation is indeed complete. In section 4 we consider the restriction of the τ_2-model to self-adjoint representations for which we show that a proper[12] Baxter Q-operator is naturally induced from our SOV-characterization of the τ_2-spectrum. Moreover, we characterize the most general τ_2-representations for which such a Baxter Q-operator is polynomial in the spectral variable, leading to the proof of the completeness of the associate Bethe ansatz equations. In section 5 we introduce an inhomogeneous version of the chiral Potts model and we characterize all its eigenstates by those constructed for the τ_2-transfer matrix. Moreover, we prove the normality of the chiral Potts transfer matrix for the self-adjoint τ_2-representations on the chP algebraic curves, which completely characterizes the chiral Potts spectrum (eigenvalues and eigenstates) in terms of the one of the τ_2-model. Finally, we prove that there exist representations for which the simultaneous spectrum of chiral Potts model and τ_2-model is completely characterized by polynomial solutions to an associated Baxter equation in this way proving a completeness statements for the solutions to Bethe ansatz equations. In appendix A, we give, in some details, the construction of the SOV representation for the τ_2-model. In appendix B, we reproduce, adapting to our notation, the Baxter construction of the generalized Baxter Q-operator for the τ_2-model, to point out the connections with our SOV construction of the τ_2-spectrum. Finally, appendix C describes in the most general framework of cyclic representation some useful technical results.

2 The τ_2-model

In this section we recall the definition and first properties of the τ_2-model in the framework of the quantum inverse scattering method (QISM) [52]-[60]. On the contrary of the general tendency in the literature of the τ_2-model (see for example [76]), we choose to use in this paper the Lax operator which satisfies the Yang-Baxter equation w.r.t. the (untwisted) 6-vertex R-matrix, as originally introduced in [3]. We make this choice as it allows us to relate more naturally the general SOV spectrum characterization of the τ_2-model with that obtained in the papers [64, 1, 2] for the lattice sine-Gordon [55, 108] model which is associated to some special class of cyclic representations [81] of the 6-vertex Yang-Baxter algebra. This also explain the use of different notations in the Lax operator w.r.t. those used in [3]. Our motivation to this symmetrical description is due to our interest to generalize to the τ_2-model the results presented in [107] for the lattice sine-Gordon model on the exact computation of the matrix elements of local operators in the SOV framework. Indeed, one of our main motivations to the present paper is to define the complete SOV spectrum setup of the τ_2-model required to implement this generalization.

2.1 Definitions and first properties

The Lax operator which describes the τ_2-model can be parametrized as follows[13]:

$$\mathsf{L}_n(\lambda) \equiv \left(\begin{array}{cc} \lambda \alpha_n \mathsf{v}_n - \beta_n \lambda^{-1} \mathsf{v}_n^{-1} & \mathsf{u}_n \left(q^{-1/2} \mathbb{a}_n \mathsf{v}_n + q^{1/2} \mathbb{b}_n \mathsf{v}_n^{-1} \right) \\ \mathsf{u}_n^{-1} \left(q^{1/2} \mathbb{c}_n \mathsf{v}_n + q^{-1/2} \mathbb{d}_n \mathsf{v}_n^{-1} \right) & \gamma_n \mathsf{v}_n / \lambda - \delta_n \lambda \mathsf{v}_n^{-1} \end{array} \right), \tag{2.1}$$

where the $\mathbb{a}_n$, $\mathbb{b}_n$, $\mathbb{c}_n$, $\mathbb{d}_n$, α_n, β_n, γ_n and δ_n are constants associated to the site n that satisfy the relations:

$$\alpha_n \gamma_n = \mathbb{a}_n \mathbb{c}_n, \quad \beta_n \delta_n = \mathbb{b}_n \mathbb{d}_n, \tag{2.2}$$

[12]Here we are pointing out that this Q-operator define a one-parameter family of commuting operators which commute with the τ_2-transfer matrix.

[13]Let us comment that our motivation to introduce the symbols $\mathbb{a}_n$, $\mathbb{b}_n$, $\mathbb{c}_n$, $\mathbb{d}_n$ for the parameters of the Lax operator is to better distinguish them from the coordinates of the points on the chP curves which in the literature on chiral Potts model are generally denoted by $(a_{\mathrm{p}}, b_{\mathrm{p}}, c_{\mathrm{p}}, d_{\mathrm{p}})$.

and we have denoted with u_n and v_n the generators of the local Weyl algebras:

$$\mathsf{u}_n \mathsf{v}_m = q^{\delta_{n,m}} \mathsf{v}_m \mathsf{u}_n \quad \forall n, m \in \{1, ..., \mathsf{N}\}. \tag{2.3}$$

We will study the case where $q \equiv e^{-i\pi\beta^2}$ is a p-root of unity:

$$\beta^2 = \frac{p'}{p}, \quad p \equiv 2l+1, p' \equiv 2l' \text{ and } l, l' \in \mathbb{Z}^{>0} \quad \rightarrow \quad q^p = 1, \tag{2.4}$$

with p and p' coprime integers[14]. In this case we can define a finite-dimensional representation of dimension p for each Weyl algebra $\mathcal{W}_n$ by introducing the states:

$$|\, \mathbf{z} \,\rangle \equiv |\, z_1, \ldots, z_\mathsf{N} \,\rangle \text{ with } z_i \in \mathbb{S}_p \equiv \{q^{2n}; n = 0, \ldots, 2l\} \text{ and } i \in \{1, ..., \mathsf{N}\}, \tag{2.5}$$

for which we have:

$$\begin{aligned} \mathsf{v}_n \,|\, z_1, \ldots, z_\mathsf{N} \rangle &= |\, z_1, \ldots, q z_n, \ldots, z_\mathsf{N} \rangle \,, \\ \mathsf{u}_n \,|\, z_1, \ldots, z_\mathsf{N} \rangle &= z_n |\, z_1, \ldots, z_\mathsf{N} \rangle \,. \end{aligned} \tag{2.6}$$

From the Lax operators, we can define the monodromy matrix by:

$$\mathsf{M}(\lambda) = \begin{pmatrix} \mathsf{A}(\lambda) & \mathsf{B}(\lambda) \\ \mathsf{C}(\lambda) & \mathsf{D}(\lambda) \end{pmatrix} \equiv \mathsf{L}_\mathsf{N}(\lambda) \cdots \mathsf{L}_1(\lambda), \tag{2.7}$$

which satisfies the quadratic relation known as the Yang-Baxter relation:

$$R(\lambda/\mu)\, (\mathsf{M}(\lambda) \otimes 1)\, (1 \otimes \mathsf{M}(\mu)) \;=\; (1 \otimes \mathsf{M}(\mu))\, (\mathsf{M}(\lambda) \otimes 1) R(\lambda/\mu)\,, \tag{2.8}$$

w.r.t. the six-vertex (standard untwisted) R-matrix:

$$R(\lambda) = \begin{pmatrix} q\lambda - q^{-1}\lambda^{-1} & & & \\ & \lambda - \lambda^{-1} & q - q^{-1} & \\ & q - q^{-1} & \lambda - \lambda^{-1} & \\ & & & q\lambda - q^{-1}\lambda^{-1} \end{pmatrix}. \tag{2.9}$$

The elements of $\mathsf{M}(\lambda)$ then generate a representation $\mathcal{R}_\mathsf{N}$ of dimension p^N of the so-called Yang-Baxter algebra. In particular, the commutation relations (2.8) lead to the relation $[\mathsf{B}(\lambda), \mathsf{B}(\mu)] = 0$ for all λ and μ, and also to the mutual commutativity of the elements of the one-parameter family of operators:

$$\tau_2(\lambda) \equiv \operatorname{tr}_{\mathbb{C}^2} \mathsf{M}(\lambda) \;= \mathsf{A}(\lambda) + \mathsf{D}(\lambda), \tag{2.10}$$

known as transfer matrix. Let us introduce the operator[15]:

$$\Theta \equiv \prod_{n=1}^{\mathsf{N}} \mathsf{v}_n, \tag{2.11}$$

which plays the role of a *grading operator* in the Yang-Baxter algebra[16]:

Lemma 1. *Θ commutes with the transfer matrix. Moreover, it satisfies the following commutation relations with the elements of the monodromy matrix:*

$$\Theta \mathsf{C}(\lambda) \;=\; q \mathsf{C}(\lambda) \Theta, \quad [\mathsf{A}(\lambda), \Theta] = 0, \tag{2.12}$$

$$\mathsf{B}(\lambda) \Theta \;=\; q \Theta \mathsf{B}(\lambda), \quad [\mathsf{D}(\lambda), \Theta] = 0. \tag{2.13}$$

[14] Our choice for the root of unit q is done to simplify the presentation avoiding the introduction of reducible representations which appear under the other possible choices: p odd or even and p' odd coprime integers. Of course, the analysis can be also developed for this last choices of roots of unit; then, it is relevant to recall that the spectrum analysis done in [12] for the representations which correspond to the chP curves applies to all these types of roots of unit. Note that in the chP literature the p is generally indicated with N.

[15] This operator is generally named spin shift operator and denoted with the symbol X in the previous literature on chP-model. Much of its properties presented in this subsection has already been analyzed, for example in [**?**, 23].

[16] The proof of the lemma is given following the same steps of that of Proposition 6 of [64].

Besides, the Θ-charge allows to express the asymptotics of the transfer matrix in $\lambda \to 0$ and in $\lambda \to \infty$; in particular, from the known form of the Lax operator, we derive the following expansions:

$$\mathsf{A}(\lambda) = \left(\lambda^{\mathrm{N}}\Theta \prod_{a=1}^{\mathrm{N}} \alpha_n + (-1)^{\mathrm{N}}\lambda^{-\mathrm{N}}\Theta^{-1} \prod_{a=1}^{\mathrm{N}} \beta_a\right) + \sum_{i=1}^{\mathrm{N}-1} \mathsf{A}_i \lambda^{\mathrm{N}-2i}, \tag{2.14}$$

$$\mathsf{D}(\lambda) = \left(\lambda^{-\mathrm{N}}\Theta \prod_{a=1}^{\mathrm{N}} \gamma_a + (-1)^{\mathrm{N}}\lambda^{\mathrm{N}}\Theta^{-1} \prod_{a=1}^{\mathrm{N}} \delta_a\right) + \sum_{i=1}^{\mathrm{N}-1} \mathsf{D}_i \lambda^{\mathrm{N}-2i}, \tag{2.15}$$

with A_i and D_i being operators, and so[17]

$$\lim_{\log\lambda \to \mp\infty} \lambda^{\pm \mathrm{N}} \tau_2(\lambda) = \left(\Theta^{\mp 1} a_{\mp} + \Theta^{\pm 1} d_{\mp}\right), \tag{2.16}$$

where:

$$a_+ \equiv \prod_{a=1}^{\mathsf{N}} \alpha_a, \quad a_- \equiv (-1)^{\mathsf{N}} \prod_{a=1}^{\mathsf{N}} \beta_a, \quad d_+ \equiv (-1)^{\mathsf{N}} \prod_{a=1}^{\mathsf{N}} \delta_a, \quad d_- \equiv \prod_{a=1}^{\mathsf{N}} \gamma_a. \tag{2.17}$$

Let us denote by Σ_{τ_2} the set of the eigenvalues $t(\lambda)$ of the transfer matrix $\tau_2(\lambda)$, then:

$$\Sigma_{\tau_2} \subset \mathbb{C}_{even}[\lambda, \lambda^{-1}]_{\mathsf{N}} \text{ for } \mathsf{N} \text{ even}, \quad \Sigma_{\tau_2} \subset \mathbb{C}_{odd}[\lambda, \lambda^{-1}]_{\mathsf{N}} \text{ for } \mathsf{N} \text{ odd}, \tag{2.18}$$

where $\mathbb{C}_\epsilon[x, x^{-1}]_{\mathrm{M}}$ is the linear space of the Laurent polynomials over the field $\mathbb{C}$ of degree M in the variable x that are even or odd, as stated in the index ϵ. The Θ-charge allows to introduce the grading $\Sigma_{\tau_2} = \bigcup_{k=0}^{2l} \Sigma_{\tau_2}^k$, where:

$$\Sigma_{\tau_2}^k \equiv \left\{ t(\lambda) \in \Sigma_{\tau_2} : \lim_{\log\lambda \to \mp\infty} \lambda^{-\mathsf{N}} t(\lambda) = \left(q^{\mp k} a_{\mp} + q^{\pm k} d_{\mp}\right) \right\}, \tag{2.19}$$

where to any $t(\lambda) \in \Sigma_{\tau_2}^k$ corresponds simultaneous eigenstates of $\tau_2(\lambda)$ and Θ with Θ-eigenvalue q^k.

2.1.1 Quantum determinant

The quantum determinant:

$$\det{}_{\mathrm{q}} \mathsf{M}(\lambda) \equiv \mathsf{A}(\lambda)\mathsf{D}(q^{-1}\lambda) - \mathsf{B}(\lambda)\mathsf{C}(q^{-1}\lambda), \tag{2.20}$$

is a central element[18] of the Yang-Baxter algebra (2.8) which has the factorized form:

$$\det{}_{\mathrm{q}} \mathsf{M}(\lambda) = \prod_{n=1}^{\mathsf{N}} \det{}_{\mathrm{q}} \mathsf{L}_n(\lambda), \tag{2.21}$$

where:

$$\det{}_{\mathrm{q}} \mathsf{L}_n(\lambda) \equiv (\mathsf{L}_n(\lambda))_{11} (\mathsf{L}_n(\lambda/q))_{22} - (\mathsf{L}_n)_{12} (\mathsf{L}_n)_{21}, \tag{2.22}$$

are the local quantum determinants, which explicitly read:

$$\begin{aligned} \det{}_{\mathrm{q}} \mathsf{M}(\lambda) &= \prod_{n=1}^{\mathsf{N}} k_n \left(\frac{\lambda}{\mu_{n,+}} - \frac{\mu_{n,+}}{\lambda}\right)\left(\frac{\lambda}{\mu_{n,-}} - \frac{\mu_{n,-}}{\lambda}\right) \\ &= (-q)^{\mathsf{N}} \prod_{n=1}^{\mathsf{N}} \frac{\beta_n \mathbb{a}_n \mathbb{c}_n}{\alpha_n} \left(\frac{1}{\lambda} + q^{-1} \frac{\mathbb{b}_n \alpha_n}{\mathbb{a}_n \beta_n} \lambda\right)\left(\frac{1}{\lambda} + q^{-1} \frac{\mathbb{d}_n \alpha_n}{\mathbb{c}_n \beta_n} \lambda\right), \end{aligned} \tag{2.23}$$

where:

$$k_n \equiv (\mathbb{a}_n \mathbb{b}_n \mathbb{c}_n \mathbb{d}_n)^{1/2}, \quad \mu_{n,h} \equiv \begin{cases} i q^{1/2} (\mathbb{a}_n \beta_n / \alpha_n \mathbb{b}_n)^{1/2} & h = +, \\ i q^{1/2} (\mathbb{c}_n \beta_n / \alpha_n \mathbb{d}_n)^{1/2} & h = -. \end{cases} \tag{2.24}$$

[17] Here, we have used the short notation $\lim_{\log\lambda \to \pm\infty}$, where $-$ stands for the $\lim_{\lambda \to 0}$ and $+$ stands for the $\lim_{\lambda \to +\infty}$.

[18] See [82] and also [83] for an historical note on the centrality of the quantum determinant in the Yang-Baxter algebra.

2.2 Self-adjoint representations

Here, we introduce the representations of the τ_2-model which correspond to a self-adjoint transfer matrix which will be analyzed in the section 4.

Lemma 2. *Let $\epsilon \in \{-1,+1\}$, if the parameters of the representation satisfy the constrains:*

$$\mathbb{c}_n = -\epsilon \mathbb{b}_n^*, \;\; \mathbb{d}_n = -\epsilon \mathbb{a}_n^*, \;\; \beta_n = \epsilon\left(\mathbb{a}_n^* \mathbb{b}_n\right)/\alpha_n^*, \tag{2.25}$$

then the generators of the Yang-Baxter algebra obey the following Hermitian conjugation relations:

$$\mathsf{M}(\lambda)^\dagger \equiv \left(\begin{array}{cc} \mathsf{A}^\dagger(\lambda) & \mathsf{B}^\dagger(\lambda) \\ \mathsf{C}^\dagger(\lambda) & \mathsf{D}^\dagger(\lambda) \end{array}\right) = \left(\begin{array}{cc} \mathsf{D}(\lambda^*) & -\epsilon \mathsf{C}(\lambda^*) \\ -\epsilon \mathsf{B}(\lambda^*) & \mathsf{A}(\lambda^*) \end{array}\right), \tag{2.26}$$

which, in particular, imply that the transfer matrix $\tau_2(\lambda)$ is self-adjoint for real λ. Besides, the quantum determinant has the expression[19]*:*

$$\det_{\mathrm{q}} \mathsf{M}(\lambda) = q^{\mathsf{N}} \prod_{n=1}^{\mathsf{N}} \frac{|\mathbb{a}_n|^2 |\mathbb{b}_n|^2}{|\alpha_n|^2} \left(\frac{1}{\lambda} + \epsilon q^{-1} \frac{|\alpha_n|^2}{|\mathbb{a}_n|^2} \lambda\right)\left(\frac{1}{\lambda} + \epsilon q^{-1} \frac{|\alpha_n|^2}{|\mathbb{b}_n|^2} \lambda\right). \tag{2.27}$$

Proof. It is simple to observe that the Lax operator of the τ_2-model satisfies the equation (2.26), which can be also written as:

$$\left(\mathsf{L}_n(\lambda)\right)^\dagger = \sigma_{1+\delta_{1,\epsilon}} \mathsf{L}_n(\lambda^*)\, \sigma_{1+\delta_{1,\epsilon}} \quad \longrightarrow \quad \mathsf{M}(\lambda)^\dagger = \sigma_{1+\delta_{1,\epsilon}} \mathsf{M}(\lambda^*)\, \sigma_{1+\delta_{1,\epsilon}}, \tag{2.28}$$

that is (2.26) holds by definition of $\mathsf{M}(\lambda)$. □

3 SOV characterization of τ_2-spectrum: most general representations

In this section we recall and adapt to our notations the SOV representations of the τ_2-model and the SOV description of its transfer matrix spectrum which were first introduced in [76]. Moreover, we use the subsections 3.5 and 3.7 to give our main results on the spectrum for the most general representations of the τ_2-model. In subsection 3.5, we prove the simplicity of the τ_2-spectrum and we use it to prove the completeness of the wave function factorization ansatz in SOV. In subsection 3.7, we prove that the SOV characterization of the τ_2-spectrum admit a complete reformulation in terms of solutions to given functional equations.

3.1 SOV representations

According to Sklyanin's method [70, 71, 72], a separation of variables (SOV) representation for the spectral problem of $\tau_2(\lambda)$ is given by a representation where the commutative family of operators $\mathsf{B}(\lambda)$ is diagonal and it has simple spectrum[20].

Theorem 1. *For almost all the values of the parameters of the representation, there exists a SOV representation for the τ_2-model, i.e. $\mathsf{B}(\lambda)$ is diagonalizable and has simple spectrum.*

Proof. See appendix A for a constructive proof of this statement. □

Let $\langle\, \boldsymbol{\eta}_{\mathbf{k}}\,|$ be the generic element of a basis of eigenvectors of $\mathsf{B}(\lambda)$:

$$\langle\, \boldsymbol{\eta}_{\mathbf{k}}\,| \mathsf{B}(\lambda) \,=\, \eta_{\mathsf{N}}^{(k_{\mathsf{N}})}\, b_{\boldsymbol{\eta}_{\mathbf{k}}}(\lambda)\, \langle\, \boldsymbol{\eta}_{\mathbf{k}}\,|, \qquad b_{\boldsymbol{\eta}_{\mathbf{k}}}(\lambda) \,\equiv\, \prod_{a=1}^{\mathsf{N}-1} \left(\lambda/\eta_a^{(k_a)} - \eta_a^{(k_a)}/\lambda\right), \tag{3.1}$$

[19] Remark that it only depends on the modulus of the parameters of Lax operators.

[20] This is the requirement that the quantum separate variables (the operator zeros of $\mathsf{B}(\lambda)$) have indeed separate spectrum, statement that we explicitly prove in appendix A.3.

and

$$\boldsymbol{\eta}_{\mathbf{k}} \in \mathsf{Z}_{\mathsf{B}} \;\equiv\; \{\, (\eta_1^{(k_1)} \equiv q^{k_1}\eta_1^{(0)}, \ldots, \eta_{\mathsf{N}}^{(k_{\mathsf{N}})} \equiv q^{k_{\mathsf{N}}}\eta_{\mathsf{N}}^{(0)})\,;\, \mathbf{k} \equiv (k_1, \ldots, k_{\mathsf{N}}) \in \mathbb{Z}_p^{\mathsf{N}} \,\}\,, \tag{3.2}$$

where $\eta_a^{(0)}$ are constants that are defined in appendix A. Here, the simplicity of the spectrum of $\mathsf{B}(\lambda)$ is equivalent to the requirement $\left(\eta_a^{(0)}\right)^p \neq \left(\eta_b^{(0)}\right)^p$ for any $a \neq b \in \{1, \ldots, \mathsf{N}-1\}$. The actions of the generators $\mathsf{A}(\lambda)$ and $\mathsf{D}(\lambda)$ of the Yang-Baxter algebra on arbitrary states[21] $\langle\, \boldsymbol{\eta}|$ are interpolation formulae obtained by using their known asymptotics and their action computed in the zeros of $\mathsf{B}(\lambda)$ which are completely fixed by the Yang-Baxter commutations relations[22]:

$$\langle\, \boldsymbol{\eta}\,|\mathsf{A}(\lambda) \;=\; b_{\boldsymbol{\eta}}(\lambda)\left[\lambda\eta_{\mathsf{A}}^{(+)}\langle\, q^{-\delta_{\mathsf{N}}}\boldsymbol{\eta}\,| + \lambda^{-1}\eta_{\mathsf{A}}^{(-)}\langle\, q^{\delta_{\mathsf{N}}}\boldsymbol{\eta}\,|\right] + \sum_{a=1}^{\mathsf{N}-1}\prod_{b\neq a}\frac{\lambda/\eta_b - \eta_b/\lambda}{\eta_a/\eta_b - \eta_b/\eta_a}\,\mathtt{a}^{(SOV)}(\eta_a)\,\langle\, q^{-\delta_a}\boldsymbol{\eta}\,|\,, \tag{3.3}$$

$$\langle\, \boldsymbol{\eta}\,|\mathsf{D}(\lambda) \;=\; b_{\boldsymbol{\eta}}(\lambda)\left[\lambda\eta_{\mathsf{D}}^{(+)}\langle\, q^{\delta_{\mathsf{N}}}\boldsymbol{\eta}\,| + \lambda^{-1}\eta_{\mathsf{D}}^{(-)}\langle\, q^{-\delta_{\mathsf{N}}}\boldsymbol{\eta}\,|\right] + \sum_{a=1}^{\mathsf{N}-1}\prod_{b\neq a}\frac{\lambda/\eta_b - \eta_b/\lambda}{\eta_a/\eta_b - \eta_b/\eta_a}\,\mathtt{d}^{(SOV)}(\eta_a)\,\langle\, q^{\delta_a}\boldsymbol{\eta}\,|\,, \tag{3.4}$$

where we have defined:

$$\eta_{\mathsf{A}}^{(\pm)} = (\pm 1)^{\mathsf{N}-1}a_{\pm}\prod_{n=1}^{\mathsf{N}-1}\eta_n^{\pm 1}, \qquad \eta_{\mathsf{D}}^{(\pm)} = (\pm 1)^{\mathsf{N}-1}d_{\pm}\prod_{n=1}^{\mathsf{N}-1}\eta_n^{\pm 1}, \tag{3.5}$$

and the states $\langle\, q^{\pm\delta_a}\boldsymbol{\eta}\,|$ are defined by:

$$\langle\, q^{\pm\delta_a}\boldsymbol{\eta}\,| \equiv \langle\, \eta_1, \ldots, q^{\pm 1}\eta_a, \ldots, \eta_{\mathsf{N}}\,| \tag{3.6}$$

and $\mathtt{a}^{(SOV)}(\eta_a)$ and $\mathtt{d}^{(SOV)}(\eta_a)$ are coefficients which have to satisfy the quantum determinant condition:

$$\det{}_{\mathrm{q}}\mathsf{M}(\eta_r) \;=\; \mathtt{a}^{(SOV)}(\eta_r)\mathtt{d}^{(SOV)}(q^{-1}\eta_r)\,, \quad \forall r = 1, \ldots, \mathsf{N}-1\,. \tag{3.7}$$

Let us remark that the $\mathtt{a}^{(SOV)}(\eta_r)$ and $\mathtt{d}^{(SOV)}(\eta_r)$ are fixed up to the following gauge transformations:

$$\bar{\mathtt{a}}^{(SOV)}(\eta_r) \;=\; \mathtt{a}^{(SOV)}(\eta_r)\frac{f(\eta_r q^{-1})}{f(\eta_r)}\,, \qquad \bar{\mathtt{d}}^{(SOV)}(\eta_r) \;=\; \mathtt{d}^{(SOV)}(\eta_r)\frac{f(\eta_r q)}{f(\eta_r)}\,, \tag{3.8}$$

which leave unchanged the quantum determinant condition and just produce the following renormalization in the states of the B-eigenbasis:

$$\langle\, \boldsymbol{\eta}\,| \;\rightarrow\; \prod_{r=1}^{\mathsf{N}-1} f^{-1}(\eta_r)\langle\, \boldsymbol{\eta}\,|\,. \tag{3.9}$$

Finally, $\mathsf{C}(\lambda)$ is uniquely[23] defined by the quantum determinant relation.

3.2 Average values of Yang Baxter generators as central elements

We define the average value $\mathcal{O}$ of the elements of the monodromy matrix $\mathsf{M}(\lambda)$ by:

$$\mathcal{O}(\Lambda) \;\equiv\; \prod_{k=1}^{p}\mathsf{O}(q^k\lambda)\,, \qquad \Lambda \;\equiv\; \lambda^p, \tag{3.10}$$

where O can be A, B, C or D and the commutativity of the families $\mathsf{A}(\lambda)$, $\mathsf{B}(\lambda)$, $\mathsf{C}(\lambda)$ and $\mathsf{D}(\lambda)$ implies that $\mathcal{A}(\Lambda)$, $\mathcal{D}(\Lambda)$ are Laurent polynomials of degree N while $\mathcal{B}(\Lambda)$, $\mathcal{C}(\Lambda)$ are Laurent polynomials of degree $\mathsf{N}-1$ in Λ. Then the following proposition holds:

[21]From here on to simplify the notation, we will omit the subscript $\mathbf{k}$ in $\boldsymbol{\eta}_{\mathbf{k}}$ as well as the superscript (k_a) in the $\eta_a^{(k_a)}$ and we will reintroduce them only when it will be strictly required.

[22]See for example section page 21 of [71].

[23]Note that the operator $\mathsf{B}(\lambda)$ is invertible except for λ which coincides with a zero of B, so in general $\mathsf{C}(\lambda)$ is defined by (4.5) just inverting $\mathsf{B}(\lambda)$. This is enough to fix in an unique way the operator C as it is a Laurent polynomial of degree $\mathsf{N}-1$ in λ.

Proposition 1.

a) The average values $\mathcal{A}(\Lambda)$, $\mathcal{B}(\Lambda)$, $\mathcal{C}(\Lambda)$, $\mathcal{D}(\Lambda)$ of the monodromy matrix elements are central. Besides, they satisfy the relation:

$$(\mathcal{A}(\Lambda))^* = \mathcal{D}(\Lambda^*), \quad (\mathcal{B}(\Lambda))^* = -\epsilon\mathcal{C}(\Lambda^*), \tag{3.11}$$

in the case of self-adjoint representations.

b) Let[24]

$$\mathcal{M}(\Lambda) \equiv \begin{pmatrix} \mathcal{A}(\Lambda) & \mathcal{B}(\Lambda) \\ \mathcal{C}(\Lambda) & \mathcal{D}(\Lambda) \end{pmatrix} \tag{3.12}$$

be the 2×2 matrix whose elements are the average values of the elements of the monodromy matrix $\mathsf{M}(\lambda)$, it holds then:

$$\mathcal{M}(\Lambda) = \mathcal{L}_{\mathsf{N}}(\Lambda)\,\mathcal{L}_{\mathsf{N}-1}(\Lambda)\,\dots\,\mathcal{L}_1(\Lambda), \tag{3.13}$$

where:

$$\mathcal{L}_n(\Lambda) \equiv \begin{pmatrix} \Lambda\alpha_n^p - \beta_n^p/\Lambda & q^{p/2}(\mathbb{a}_n^p + \mathbb{b}_n^p) \\ q^{p/2}(\mathbb{c}_n^p + \mathbb{d}_n^p) & \gamma_n^p/\Lambda - \Lambda\delta_n^p \end{pmatrix} \tag{3.14}$$

is the 2×2 matrix whose elements are the average values of the elements of the Lax matrix $L_n(\lambda)$.

Proof of a). $\mathcal{B}(\Lambda)$ is central as it follows by taking directly the average of (3.1) in the SOV representations:

$$\mathcal{B}(\Lambda) = Z_{\mathsf{N}} \prod_{a=1}^{\mathsf{N}-1} (\Lambda/Z_a - Z_a/\Lambda), \qquad Z_a \equiv \eta_a^p = \left(\eta_a^{(0)}\right)^p. \tag{3.15}$$

From $q^p = 1$, we have that $\mathcal{A}(Z_r)$ and $\mathcal{D}(Z_r)$ are central and related to the coefficients $\mathsf{a}^{(SOV)}(\eta_r^{(k)})$ and $\mathsf{d}^{(SOV)}(\eta_r^{(k)})$ by

$$\mathcal{A}(Z_r) \equiv \prod_{k=1}^{p} \mathsf{a}^{(SOV)}(\eta_r^{(k)}), \qquad \mathcal{D}(Z_r) \equiv \prod_{k=1}^{p} \mathsf{d}^{(SOV)}(\eta_r^{(k)}), \qquad \forall r \in \{1, \dots, \mathsf{N}-1\}. \tag{3.16}$$

$\mathcal{A}(\Lambda)\Lambda^{\mathsf{N}}$ and $\mathcal{D}(\Lambda)\Lambda^{\mathsf{N}}$ are polynomials in Λ^2 of degree N. The relations (3.16) and the simplicity of the B-spectrum give N points in which these polynomials are central elements, and the centrality of the asymptotics of $\mathcal{A}(\lambda)$ and $\mathcal{D}(\lambda)$, as trivially follows from (2.14)-(2.15), yields the centrality of $\mathcal{A}(\Lambda)$ and $\mathcal{D}(\Lambda)$. □

Proof of b). By using that $\mathsf{B}(\lambda)$ is diagonalizable and with simple spectrum in the entire chain as well as in each subchain, the point *b)* follows inductively by the simple extension to our representations of the recursion relations on the averages of the Yang-Baxter generators of Proposition 3 of [64].

□

Remark 1. It is simple to argue that the averages $\mathcal{A}(\Lambda)$, $\mathcal{B}(\Lambda)$, $\mathcal{C}(\Lambda)$ and $\mathcal{D}(\Lambda)$ of the Yang-Baxter generators completely characterize the gauge-invariant parameters of the SOV representation as once they are fixed then the SOV representation of the Yang-Baxter generators is uniquely defined up to gauge transformations. This remark also implies that the maximal number of independent gauge-invariant complex parameters entering in our cyclic representations of the 6-vertex Yang-Baxter algebra is 4N+2 on a N-site lattice. These parameters maybe chosen to be the central average values Z_r, $Z_{\mathsf{A}}^{\pm}$, $Z_{\mathsf{D}}^{\pm}$, $\mathcal{A}(Z_r)$, $\mathcal{D}(Z_r)$ plus the N coefficients fixing the Laurent polynomial $\mathcal{C}(\Lambda)$ in the Λ power expansion. Moreover, relation (3.11) tells us that for the self-adjoint representations the maximal number of independent gauge-invariant complex parameters reduces to 2N+1. Let us comment that in our parametrization of the Lax operator we use 6 complex parameters α_n^p, β_n^p, $\mathbb{a}_n^p$, $\mathbb{b}_n^p$, $\mathbb{c}_n^p$, $\mathbb{d}_n^p$, for any quantum site. For $\mathsf{N} \equiv 1$, they represent just an equivalent choice for the independent gauge-invariant complex parameters while it is clear that for $\mathsf{N} > 1$ they lead to an over counting[25] and so there will

[24] A similar statement was first proven in [81].

[25] Let us mention that in the literature of τ_2-model the corresponding Lax operator is in general described by 5 parameters, see for example [76]; this just amounts to normalize our Lax operator. Within this choice the independent gauge-invariant parameters reduce to 4N+1 and it is clear that for $\mathsf{N} > 1$ also this parametrization lead to an over counting.

be different choices of our 6N complex parameters which will produce the same independent gauge-invariant parameters. Proposition 1 defines uniquely the mapping between these two set of parameters and allows to establish that $\mathcal{A}(\Lambda)$, $\mathcal{B}(\Lambda)$, $\mathcal{C}(\Lambda)$ and $\mathcal{D}(\Lambda)$ are polynomials of maximal degree 1 in each of our 6N complex parameters.

3.3 Choice of the gauge in the SOV representations of the τ_2-model

Let us define the following functions of one complex variable λ:

$$\bar{\mathrm{A}}(\lambda) \equiv \alpha(\lambda)\mathrm{A}(\lambda), \qquad \bar{\mathrm{D}}(\lambda) \equiv \alpha^{-1}(q\lambda)\mathrm{D}(\lambda), \tag{3.17}$$

where $\mathrm{A}(\lambda)$ and $\mathrm{D}(\lambda)$ are the Laurent polynomials in λ defined by:

$$\mathrm{A}(\lambda) \equiv \prod_{n=1}^{\mathsf{N}} (\beta_n \alpha_n)^{1/2} (\frac{\lambda}{\mu_{n,+}} - \frac{\mu_{n,+}}{\lambda}), \qquad \mathrm{D}(\lambda) \equiv \prod_{n=1}^{\mathsf{N}} (\frac{\mathbb{a}_n \mathbb{b}_n \mathbb{c}_n \mathbb{d}_n}{\alpha_n \beta_n})^{1/2} (\frac{q\lambda}{\mu_{n,-}} - \frac{\mu_{n,-}}{q\lambda}) \tag{3.18}$$

and the function $\alpha(\lambda)$ is defined by the requirement:

$$\prod_{n=1}^{p} \bar{\mathrm{A}}(\lambda q^n) + \prod_{n=1}^{p} \bar{\mathrm{D}}(\lambda q^n) = \mathcal{A}(\Lambda) + \mathcal{D}(\Lambda). \tag{3.19}$$

Note that this last condition is a second order equation in the average $\prod_{n=1}^{p} \alpha(q^n \lambda)$ and then we have only two possible choices for the averages of the functions $\bar{\mathrm{A}}(\lambda)$ and $\bar{\mathrm{D}}(\lambda)$. Here, we make the following choice:

$$\prod_{n=1}^{p} \bar{\mathrm{A}}(\lambda q^n) = \Omega_+(\Lambda), \quad \prod_{n=1}^{p} \bar{\mathrm{D}}(\lambda q^n) = \Omega_-(\Lambda), \tag{3.20}$$

where $\Omega_\pm$ are the two eigenvalues of the 2×2 matrix $\mathcal{M}(\Lambda)$ composed by the averages of the Yang-Baxter generators characterized by the conditions:

$$\Omega_+(Z_r) = \mathcal{A}(Z_r), \quad \Omega_-(Z_r) = \mathcal{D}(Z_r) \quad \forall r \in \{1, ..., \mathsf{N}-1\}. \tag{3.21}$$

Then, it is simple to verify that the functions $\bar{\mathrm{A}}(\lambda)$ and $\bar{\mathrm{D}}(\lambda)$ satisfy the conditions:

$$\det_{\mathrm{q}} \mathsf{M}(\lambda) = \bar{\mathrm{A}}(\lambda)\bar{\mathrm{D}}(\lambda/q), \quad \forall \lambda \in \mathbb{C}, \tag{3.22}$$

$$\prod_{k=1}^{p} \bar{\mathrm{A}}(\eta_r^{(k)}) = \mathcal{A}(Z_r), \quad \prod_{k=1}^{p} \bar{\mathrm{D}}(\eta_r^{(k)}) = \mathcal{D}(Z_r), \quad \forall r \in \{1, \dots, \mathsf{N}-1\}, \tag{3.23}$$

and we can use them to fix properly a gauge in the SOV representations by setting:

$$\mathsf{a}^{(SOV)}(\eta_r^{(k)}) \equiv \bar{\mathrm{A}}(\eta_r^{(k)}), \qquad \mathsf{d}^{(SOV)}(\eta_r^{(k)}) \equiv \bar{\mathrm{D}}(\eta_r^{(k)}), \quad \forall r \in \{1, \dots, \mathsf{N}-1\}, \ k \in \{0, \dots, p-1\}, \tag{3.24}$$

indeed, with this choice the SOV coefficients satisfy both the required conditions (3.7) and (3.16).

3.4 SOV representation of τ_2-spectrum

The spectral problem for $\tau_2(\lambda)$ in the SOV representations is equivalent to the following discrete system of Baxter-like equations for the wave-function $\Psi_t(\boldsymbol{\eta}) \equiv \langle \boldsymbol{\eta} \,|\, t \rangle$ of a τ_2-eigenstate $|\, t \rangle$:

$$t(\eta_r)\Psi_t(\boldsymbol{\eta}) \;=\; \mathsf{a}^{(SOV)}(\eta_r)\Psi_t(q^{-\delta_r}\boldsymbol{\eta}) + \mathsf{d}^{(SOV)}(\eta_r)\Psi_t(q^{\delta_r}\boldsymbol{\eta}) \qquad \forall r \in \{1, ..., \mathsf{N}-1\}, \tag{3.25}$$

plus the equation in the variable η_{N}:

$$\Psi_t(q^{\delta_{\mathsf{N}}}\boldsymbol{\eta}) \;=\; q^{-k}\Psi_t(\boldsymbol{\eta}), \tag{3.26}$$

for $t(\lambda) \in \Sigma_{\tau_2}^k$ with $k \in \{0, ..., 2l\}$ where $(\eta_1, ..., \eta_{\mathsf{N}}) \in \mathsf{Z}_{\mathsf{B}}$ and

$$q^{\pm\delta_r}\boldsymbol{\eta} \equiv (\eta_1, \dots, q^{\pm 1}\eta_r, \dots, \eta_{\mathsf{N}}). \tag{3.27}$$

Indeed, the equations (3.25) trivially follows computing the matrix elements $\langle\, \boldsymbol{\eta}\, | \tau_2(\eta_r) |\, t\, \rangle$. In particular, the l.h.s. of (3.25) is obtained by acting with $\tau_2(\eta_r)$ on the eigenstate $|\, t\, \rangle$ while the r.h.s. is obtained by acting with $\tau_2(\eta_r)(\equiv \mathsf{A}(\eta_r) + \mathsf{D}(\eta_r))$ on the state $\langle\, \boldsymbol{\eta}\, |$ and using the SOV representation of the actions (3.3) and (3.4). Finally, the equations (3.26) are derived computing the asymptotics on λ of the matrix elements $\langle\, \boldsymbol{\eta}\, | \tau_2(\lambda) |\, t\, \rangle$ and using once again (3.3) and (3.4) plus the known asymptotics (2.19) of the τ_2-eigenvalues.

The main point in the system of equations (3.25)-(3.26) is that it is separate w.r.t. each set of zeros η_r. Then it is natural search for wave function solutions according to the following factorized form:

$$\Psi_t(\boldsymbol{\eta}) \propto \eta_{\mathsf{N}}^{-k} \prod_{r=1}^{\mathsf{N}-1} Q_t(\eta_r) \qquad \text{for } t(\lambda) \in \Sigma_{\tau_2}^{k}, \tag{3.28}$$

where the $Q_t(\eta_r)$ is a solution of the discrete system of Baxter-like equations (3.25) for the fixed $r \in \{1, ..., \mathsf{N}-1\}$. The fact that the above factorize ansatz describes the complete set of τ_2-wave functions however has to be proven and we will address this fundamental point in the next section.

3.5 Simplicity of τ_2-spectrum and completeness of the wave function factorization ansatz in SOV

In this section we show that the spectrum of the transfer matrix $\tau_2(\lambda)$ is non-degenerate (or simple). This important result allows us to prove in particular that the factorized form (3.28) for the coefficients of the τ_2-eigenstate in the SOV representations is complete, i.e. all the τ_2-eigenstates admit this separate representation. Let us first prove that:

Lemma 3. *For almost all the values of the parameters* $(\alpha_n^p, \beta_n^p, \mathbb{a}_n^p, \mathbb{b}_n^p, \mathbb{c}_n^p, \mathbb{d}_n^p)$ *the average values of the monodromy matrix elements* $\mathsf{A}(\lambda)$ *and* $\mathsf{D}(\lambda)$ *satisfy the inequalities:*

$$\mathcal{A}(Z_a) \neq \mathcal{D}(Z_a), \qquad \forall a \in \{1, ..., \mathsf{N}-1\}, \tag{3.29}$$

where Z_a *are the zeros of the average value of* $\mathsf{B}(\lambda)$.

Proof. Let us define the functions[26]:

$$\mathcal{F}_a(\alpha_n^p, \beta_n^p, \mathbb{a}_n^p, \mathbb{b}_n^p, \mathbb{c}_n^p, \mathbb{d}_n^p) \equiv \mathcal{A}_{\mathsf{N}}(Z_a) - \mathcal{D}_{\mathsf{N}}(Z_a), \quad \forall a \in \{1, ..., \mathsf{N}-1\}. \tag{3.30}$$

Let us remark that the $\mathcal{F}_a$ are at least continuous functions w.r.t. the τ_2-parameters. Indeed, the coefficients of the averages of the Yang-Baxter generators in the Λ power expansions are order 1 polynomials in these parameters for the Proposition 1 and the zeros $Z_1, \ldots, Z_{\mathsf{N}-1}$ (up to permutations) are bi-continuous functions[27] of the coefficients of the average of $\mathsf{B}(\lambda)$. Then, it is sufficient to show that the functions $\mathcal{F}_a$ are nonzero for some special value of the $\alpha_n^p, \beta_n^p, \mathbb{a}_n^p, \mathbb{b}_n^p, \mathbb{c}_n^p, \mathbb{d}_n^p$ in order to prove that they are nonzero for almost all the values of these parameters, which will prove the lemma. Note that the following identities hold:

$$\mathcal{F}_a \Big|_{\begin{cases} \alpha_1\beta_1 = \mathbb{b}_1\mathbb{d}_1 = \mathbb{c}_1\mathbb{a}_1 \ \text{ with } (\mathbb{c}_1^p + \mathbb{d}_1^p) \neq (\mathbb{a}_1^p + \mathbb{b}_1^p) \\ \mathbb{d}_n = \mathbb{a}_n, \mathbb{c}_n = \mathbb{b}_n, \beta_n = -\mathbb{b}_n\mathbb{a}_n/\alpha_n, \ n \in \{2, ..., \mathsf{N}\}, \end{cases}} = q^{p/2}((\mathbb{c}_1^p + \mathbb{d}_1^p) - (\mathbb{a}_1^p + \mathbb{b}_1^p))\mathcal{B}_{\mathtt{2},\mathsf{N}-1}(Z_a), \tag{3.31}$$

Here, we have used the decomposition of the chain in a first subchain $\mathtt{1}$, formed by the site 1, and a second subchain $\mathtt{2}$, formed by the remaining sites. We also have used the identities:

$$(\mathcal{C}_{\mathtt{1},1} - \mathcal{B}_{\mathtt{1},1}) = q^{p/2}((\mathbb{c}_1^p + \mathbb{d}_1^p) - (\mathbb{a}_1^p + \mathbb{b}_1^p)), \qquad \mathcal{A}_{\mathtt{1},1}(\Lambda) = \mathcal{D}_{\mathtt{1},1}(\Lambda), \tag{3.32}$$

$$\mathcal{B}_{\mathtt{2},\mathsf{N}-1}(\Lambda) = \mathcal{C}_{\mathtt{2},\mathsf{N}-1}(\Lambda), \qquad \mathcal{D}_{\mathtt{2},\mathsf{N}-1}(\Lambda) = \mathcal{A}_{\mathtt{2},\mathsf{N}-1}(\Lambda), \tag{3.33}$$

which follows by using Proposition 1 for the special choice of the parameters done in (3.31). Then, we have only to show that we can always take $\mathcal{B}_{\mathtt{2},\mathsf{N}-1}(Z_a) \neq 0$ for any $a \in \{1, ..., \mathsf{N}-1\}$.

[26] From here, we will use the index N when it will be needed to point out that we are referring to the chain with N sites and we will omit it otherwise.

[27] See for example the proof given in [84].

Note that from the identities:

$$\det_{\mathrm{q}}\mathcal{M}_{2,\,\mathsf{N}-1}(\Lambda) = (\mathcal{A}_{2,\,\mathsf{N}-1}(\Lambda))^2 - (\mathcal{B}_{2,\,\mathsf{N}-1}(\Lambda))^2, \tag{3.34}$$

$$\mathcal{B}_{\mathsf{N}}(\Lambda) = \mathcal{A}_{1,\,1}(\Lambda)\mathcal{B}_{2,\,\mathsf{N}-1}(\Lambda) + \mathcal{B}_{1,\,1}\mathcal{A}_{2,\,\mathsf{N}-1}(\Lambda), \tag{3.35}$$

we have that $\mathcal{B}_{2,\,\mathsf{N}-1}(Z_a) = 0$ if and only if Z_a is a double zero of $\det_{\mathrm{q}}\mathcal{M}_{2,\,\mathsf{N}-1}(\Lambda)$. However, this is not the case in general: by averaging the quantum determinant (2.23), we get the formula:

$$\det_{\mathrm{q}}\mathcal{M}_{2,\,\mathsf{N}-1}(\Lambda) \equiv \prod_{n=2}^{\mathsf{N}} \mathbb{a}_n^p \mathbb{b}_n^p \prod_{h=\pm 1} (\Lambda/M_{n,h} - M_{n,h}/\Lambda), \quad M_{n,+} = \mathbb{a}_n^p/\alpha_n^p,\ M_{n,-} = \mathbb{b}_n^p/\alpha_n^p, \tag{3.36}$$

so the function $\det_{\mathrm{q}}\mathcal{M}_{2,\,\mathsf{N}-1}(\Lambda)$ has not double zeros for general values of the parameters $\mathbb{a}_n,\ \mathbb{b}_n,\ \alpha_n$. □

Theorem 2. *For almost all the values of the parameters of the τ_2-representations, the spectrum of $\tau_2(\lambda)$ is simple and the τ_2-wave functions have all the factorized form (3.28).*

Proof. Let $t(\lambda) \in \Sigma_{\tau_2}$ and let us denote with $\Psi_t(\boldsymbol{\eta})$ and $\bar{\Psi}_t(\boldsymbol{\eta})$ two solution of the system (3.25) and (3.26). Then, let us define the q-Wronskian:

$$W_{t,r}(\boldsymbol{\eta}) = \Psi_t(\boldsymbol{\eta})\,\bar{\Psi}_t(q^{-\delta_r}\boldsymbol{\eta}) - \bar{\Psi}_t(\boldsymbol{\eta})\,\Psi_t(q^{-\delta_r}\boldsymbol{\eta}), \quad \forall r \in \{1, ..., \mathsf{N}-1\}, \tag{3.37}$$

which by the system of Baxter-like equations (3.25) satisfies the equations:

$$\mathtt{a}^{(SOV)}(\eta_r)\,W_{t,r}(\boldsymbol{\eta}) = \mathtt{d}^{(SOV)}(\eta_r)\,W_{t,r}(q^{\delta_r}\boldsymbol{\eta}), \quad \forall r \in \{1, ..., \mathsf{N}-1\}. \tag{3.38}$$

Thanks to the cyclicity the averages of the above equations read:

$$(\mathcal{A}(Z_r) - \mathcal{D}(Z_r))\,\mathcal{W}_{t,r}(\boldsymbol{\eta}) = 0 \quad \text{with} \quad \mathcal{W}_{t,r}(\boldsymbol{\eta}) \equiv \prod_{k=0}^{2l} W_{t,r}(\eta_1, \ldots, q^k\eta_r, \ldots, \eta_{\mathsf{N}}), \tag{3.39}$$

which by Lemma 3 and (3.25) implies:

$$W_{t,r}(\boldsymbol{\eta}) = 0, \quad \forall \boldsymbol{\eta} \in \mathsf{Z}_{\mathsf{B}} \text{ and } \forall r \in \{1, ..., \mathsf{N}-1\}. \tag{3.40}$$

By using the same steps we can also prove that the ratios:

$$\Psi_t(q^{\delta_r}\boldsymbol{\eta})\,/\Psi_t(\boldsymbol{\eta}), \quad \forall r \in \{1, ..., \mathsf{N}-1\}, \tag{3.41}$$

do not depend from the values of the η_a for any $a \in \{1, ..., \mathsf{N}-1\}\backslash r$ and then we can always write:

$$\frac{\Psi_t(q^{\delta_r}\boldsymbol{\eta})}{\Psi_t(\boldsymbol{\eta})} = \frac{Q_t(q\eta_r)}{Q_t(\eta_r)}, \quad \forall r \in \{1, ..., \mathsf{N}-1\}, \tag{3.42}$$

where $(Q_t(\eta_r^{(0)}), ..., Q_t(\eta_r^{(p-1)}))$ is the unique (up to the normalization $Q_t(\eta_r^{(0)})$) solution to the system of second order difference equations (3.25) for the given $r \in \{1, ..., \mathsf{N}-1\}$. □

Let us comment that that we have chosen to provide the proof of the τ_2-spectrum simplicity going through Lemma 3 however it is interesting to remark that this proof can be also given by generalizing to the present representations the proof presented in Proposition 5 of [64] by using as probe representations the same representations that we use in this paper in appendix A.3 to prove the B-spectrum simplicity.

3.6 Characterization of τ_2-eigenvalues as solutions of a functional equation

Let us introduce the one-parameter family $D(\lambda)$ of $p \times p$ matrix:

$$D(\lambda) \equiv \begin{pmatrix} t(\lambda) & -\bar{\text{D}}(\lambda) & 0 & \cdots & 0 & -\bar{\text{A}}(\lambda) \\ -\bar{\text{A}}(q\lambda) & t(q\lambda) & -\bar{\text{D}}(q\lambda) & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & & & & \vdots \\ \vdots & & \cdots & & & \vdots \\ \vdots & & & \cdots & & \vdots \\ \vdots & & & & \ddots & 0 \\ 0 & \ldots & 0 & -\bar{\text{A}}(q^{2l-1}\lambda) & t(q^{2l-1}\lambda) & -\bar{\text{D}}(q^{2l-1}\lambda) \\ -\bar{\text{D}}(q^{2l}\lambda) & 0 & \ldots & 0 & -\bar{\text{A}}(q^{2l}\lambda) & t(q^{2l}\lambda) \end{pmatrix}, \tag{3.43}$$

where for now $t(\lambda)$ is only a Laurent polynomial of degree N in λ, even for N even and odd for N odd.

Lemma 4. *The determinant of the matrix $D(\lambda)$ is a Laurent polynomial of maximal degree N in $\Lambda \equiv \lambda^p$, even for N even and odd for N odd.*

Proof. Let us start observing that $D(\lambda q)$ is obtained from $D(\lambda)$ by exchanging the first and p-th column and then the first and p-th row, so that

$$\det_p D(\lambda q) = \det_p D(\lambda) \quad \forall \lambda \in \mathbb{C}, \tag{3.44}$$

then $\det_p D(\lambda)$ is a function of Λ. Let us observe now that $\det_p D(\Lambda)$ admits the following expansion:

$$\begin{aligned} \det_p D(\Lambda) \quad = \quad & -(\mathcal{A}(\Lambda) + \mathcal{D}(\Lambda)) - \text{A}(\lambda)\text{D}(\lambda/q) \det_{2l-1} D_{(1,2l+1),(1,2l+1)}(\lambda) \\ & -\text{A}(\lambda q)\text{D}(\lambda) \det_{2l-1} D_{(1,2),(1,2)}(\lambda) + t(\lambda) \det_{2l} D_{1,1}(\lambda), \end{aligned} \tag{3.45}$$

where $D_{(h,k),(h,k)}(\lambda)$ denotes the $(2l-1) \times (2l-1)$ sub-matrix of $D(\lambda)$ obtained removing the rows and columns h and k. The *tridiagonality* of the matrices $D_{1,1}$, $D_{(1,2),(1,2)}$, $D_{(1,2l+1),(1,2l+1)}$ implies that their determinants coincide with those of the matrices obtained substituting the functions $\bar{\text{A}}(\lambda)$, $\bar{\text{D}}(\lambda)$ with the Laurent polynomials $\text{A}(\lambda)$, $\text{D}(\lambda)$. Then, the lemma follows as all the terms in the expansions (3.45) are Laurent polynomials with the same properties stated in the lemma. □

The interest toward the function $\det_p D(\Lambda)$ comes from the following result:

Lemma 5. *Any $t(\lambda) \in \Sigma_{\tau_2}$ is a solution of the functional equation:*

$$\det_p D(\Lambda) \equiv 0. \tag{3.46}$$

Proof. First note that the determinant $\det_p D(\Lambda)$ depends from the coefficients $\bar{\text{A}}(\mu)$ and $\bar{\text{D}}(\mu/q)$ only through their products (3.22) computed in $\mu \equiv q^a\lambda$ with $a = 1, ..., p$ (i.e. by the quantum determinant) and the sum of their averages (3.19) computed in Λ (i.e. by the sum of the averages of the operators A and D). Indeed, this statement trivially follows from the expansion (3.45) and from the tridiagonality of the matrices $D_{1,1}$, $D_{(1,2),(1,2)}$, $D_{(1,2l+1),(1,2l+1)}$.

From the previous lemma, we only have to show that the determinant is zero in $\mathsf{N} - 1$ points, and that the asymptotics in $\pm\infty$ are also zero. Let us observe that the SOV characterization of the τ_2-spectrum implies that the system of equations (3.25) admits a non-zero solution, i.e. $t(\lambda) \in \Sigma_{\tau_2}$ only if:

$$\det_p D(\eta_a^p) = 0 \quad \forall a \in \{1, ..., \mathsf{N} - 1\} \quad \text{and} \quad (\eta_1, ..., \eta_{\mathsf{N}}) \in \mathsf{Z}_{\mathsf{B}}. \tag{3.47}$$

Indeed, the SOV coefficients lead to the same values of the quantum determinant and the averages of A and D in the zeros of B. Besides, we have:

$$\lim_{\log \Lambda \to \mp\infty} \Lambda^{\pm \mathsf{N}} \det_p D(\Lambda) = 0, \tag{3.48}$$

which simply follows by observing that:

$$\lim_{\log\Lambda\to\mp\infty}\Lambda^{\pm\mathsf{N}}\det_p D(\Lambda)=-\det_p\left\|a_\mp\delta_{i,j-1}+d_\mp\delta_{i,j+1}-(q^{\mp k}a_\mp+q^{\pm k}d_\mp))\delta_{i,j}\right\|=0, \tag{3.49}$$

for $t(\lambda)\in\Sigma_{\tau_2}^k$ and $k\in\{0,...,2l\}$. □

Remark 2. The same type of functional equation $\det D(\Lambda)=0$ also appears for different quantum integrable models in [85, 86, 87]. There, it stands for the functional relations which result from the truncated fusions of transfer matrix eigenvalues. In the case of the τ_2-model this type of fusion leads to the same type of equation, as it has been derived in [12, 13, 49, 76]. It is for example interesting to remark that for the reduction of the τ_2-representation to those parametrized by points on the chiral Potts curves the characterization (3.43) appears in (5.5) of [12]. There the case $p=3$ and $\mathsf{N}=3$ is explicitly investigated and (3.43) can be solved by determining the coefficients of the power expansion of $t(\lambda)$ in $t(\lambda)$. In the next section, we will show that any $t(\lambda)$, Laurent polynomial of degree N in λ even for N even and odd for N odd, solution of the equation (3.43) define a τ_2-eigenvalue for the general inhomogeneous representations that here we are analyzing. This in particular means that for these inhomogeneous representations problems like the appearance of spurious solutions of the equation (3.43) do not not occur.

3.7 Complete reformulation of SOV characterization of τ_2-spectrum by functional equations

Thanks to the previous results we can give a complete characterization of the τ_2-spectrum (eigenvalues and eigenstates) by functional equations:

Theorem 3. *Σ_{τ_2} coincides with the set of solutions to:*

$$\det_p D(\Lambda)=0,\quad\forall\Lambda\in\mathbb{C}, \tag{3.50}$$

in the class of functions (2.18). Then, we can associate a τ_2-eigenstate:

$$\Psi_t(\boldsymbol{\eta})\equiv\langle\,\eta_1,...,\eta_{\mathsf{N}}\,|\,t\,\rangle=\eta_{\mathsf{N}}^{-k}\prod_{r=1}^{\mathsf{N}-1}Q_t(\eta_r), \tag{3.51}$$

to any $t(\lambda)\in\Sigma_{\tau_2}^k$, where $Q_t(\lambda)$ is the unique solution (up to quasi-constants) corresponding to $t(\lambda)$ of the Baxter equation:

$$t(\lambda)Q_t(\lambda)=\bar{\mathrm{A}}(\lambda)Q_t(\lambda/q)+\bar{\mathrm{D}}(\lambda)Q_t(q\lambda). \tag{3.52}$$

Proof. Lemma 5 implies that any element of Σ_{τ_2} is a solution of (3.50). The reverse inclusion is given by the fact that the condition (3.50) is just the requirement of the existence of a non-zero solution $Q_t(\lambda)$ of the equation (3.52). Then, $t(\lambda)$ and the $\Psi_t(\boldsymbol{\eta})$ defined in (3.51) are solutions of the discrete system of Baxter-like equations (3.25) and (3.26) and so they define a τ_2-eigenvalue and the corresponding τ_2-eigenstate. Let us show that $Q_t(\lambda)$ is unique; denoting with $\bar{Q}_t(\lambda)$ any other solution, we can define the q-Wronskian:

$$W_t(\lambda)\;=\;Q_t(\lambda)\bar{Q}_t(q^{-1}\lambda)-\bar{Q}_t(\lambda)Q_t(q^{-1}\lambda)\,, \tag{3.53}$$

which by the Baxter equation satisfies the equation:

$$\bar{\mathrm{A}}(\lambda)\,W_t(\lambda)\;=\;\bar{\mathrm{D}}(\lambda)\,W_t(q\lambda)\,. \tag{3.54}$$

Thanks to the cyclicity the average of the above equation reads:

$$\Big(\prod_{k=1}^{p}\bar{\mathrm{A}}(\lambda q^k)-\prod_{k=1}^{p}\bar{\mathrm{D}}(\lambda q^k)\Big)\,\mathcal{W}_t(\Lambda)\;=0\quad\text{with}\quad\mathcal{W}_t(\Lambda)\equiv\prod_{k=1}^{p}W_t(\lambda q^k), \tag{3.55}$$

which implies $W(\lambda)\equiv 0$, indeed it holds:

$$\prod_{k=1}^{p}\bar{\mathrm{A}}(\lambda q^k)\neq\prod_{k=1}^{p}\bar{\mathrm{D}}(\lambda q^k)\qquad\forall\lambda^{2p}\in\mathbb{C}\setminus\mathrm{Z}_{\mathcal{P}}, \tag{3.56}$$

where $\mathrm{Z}_{\mathcal{P}}$ is the set of the zeros of the following polynomial of degree $2\mathsf{N}$ in Λ^2:

$$\mathcal{P}(\Lambda) \equiv 4\Lambda^{2\mathsf{N}}(\Omega_+(\Lambda) - \Omega_-(\Lambda))^2 = \Lambda^{2\mathsf{N}}\{(\mathcal{A}(\Lambda) - \mathcal{D}(\Lambda))^2 - 4\mathcal{B}(\Lambda)\mathcal{C}(\Lambda)\}. \tag{3.57}$$

It is then easy to see that this implies that $\bar{Q}_t(\lambda) \equiv Q_t(\lambda)$ up to quasi-constant normalization. □

Remark 3. It is worth making a remark on the Baxter equation (3.52) comparing it to those already appearing in the literature of the τ_2-model this also allow us to justify the different notations introduced in this paper for the coefficients of these equations. The equation (3.52) has been here derived by the only use of SOV, following [1], for the most general representations of the τ_2-model. In the same general framework of τ_2-representations and on the basis of his Q-operator method, Baxter has before derived in [49] a Baxter equation which we reproduce in (B.37) with coefficients $a_B(\lambda)$ and $d_B(\lambda)$ defined in (B.38)-(B.39). The equations (3.52) and the eigenvalue version of (B.37) may be a priori different equations; however, in appendix B.5 we prove that these equations are indeed gauge equivalent, i.e. the couples of their coefficients are gauge equivalent:

$$\exists f(\lambda) : a_B(\lambda) = \bar{\mathrm{A}}(\lambda)\frac{f(\lambda/q)}{f(\lambda)}, \quad d_B(\lambda) = \frac{f(\lambda q)}{f(\lambda)}\bar{\mathrm{D}}(\lambda) \quad \forall\lambda \in \mathbb{C}. \tag{3.58}$$

Let us moreover point out that for the reduction of the τ_2-representations to those for which the chiral Potts model does exist the Baxter equation (B.37) reduces to that which links together the τ_2-trasfer matrix and the chiral Potts transfer matrix which was first derived in [3, 12]. We reproduced it in (5.7) and we use the pedex BS for their coefficients. Let us remark that the previous discussion also implies that the couples of coefficients $(\bar{\mathrm{A}}(\lambda), \bar{\mathrm{D}}(\lambda))$ and $(a_{BS}(\lambda), d_{BS}(\lambda))$ are gauge equivalent for the reduction to the chiral Potts case.

4 Characterization of τ_2-spectrum: self-adjoint representations

In this section we present one of our main result of the paper i.e. the completeness of the τ_2-spectrum (eigenvalues and eigenstates) description in terms of solutions of an associated system of Bethe equations. We first show that for general self-adjoint representations one can naturally define a Q-operator and then we restrict our attention to special self-adjoint representations of the τ_2-model for which we prove that the Baxter equation (3.52) is gauge equivalent to one with Laurent polynomial coefficients $\mathtt{a}(\lambda)$ and $\mathtt{d}(\lambda)$, see (4.5). Then, similarly to the case of the sine-Gordon model described in [64, 1, 2], we show that for these self-adjoint representations the transfer matrix spectrum (eigenvalues and eigenstates) is completely characterized in terms of **polynomial** solutions of the associated functional Baxter equation. Moreover, we prove the **completeness** of the set of the transfer matrix eigenstates constructed by using SOV from the solutions of the associated Bethe ansatz equations.

4.1 SOV reconstruction of a Baxter Q-operator

One interesting feature of the self-adjoint representations of the τ_2-model is due to the use of the spectral theorem. The $\tau_2(\lambda)$ transfer matrix is then proven to be diagonalizable and the Theorem 3 leads to the construction of the τ_2-eigenbasis; this in particular means that the self-adjointness of $\tau_2(\lambda)$ forces the Baxter equation (3.52) to have a complete set of independent solutions. Moreover, it is interesting to note that in the self-adjoint representations, from the results of our SOV analysis, a Baxter Q-operator for the τ_2-model is automatically reconstructed. In particular, we can define the operator:

$$\mathrm{Q}(\lambda)|t\rangle \equiv Q_t(\lambda)|t\rangle \tag{4.1}$$

where $Q_t(\lambda)$ satisfies the Baxter equation (3.52) with $t(\lambda) \in \Sigma_t$ and $|t\rangle$ is the corresponding τ_2-eigenstate. Then, the set of the τ_2-eigenstates being complete and the function $Q_t(\lambda)$ being uniquely defined (up to quasi constants), the operator $\mathrm{Q}(\lambda)$ is well defined, up to a quasi-constant scalar quantity, and clearly satisfies the properties:

$$\mathrm{Q}(\lambda)\tau_2(\lambda) = \bar{\mathrm{A}}(\lambda)\mathrm{Q}(\lambda/q) + \bar{\mathrm{D}}(\lambda)\mathrm{Q}(\lambda q), \quad [\mathrm{Q}(\lambda), \mathrm{Q}(\mu)] = 0, \quad [\tau_2(\lambda), \mathrm{Q}(\mu)] = 0 \ \ \forall\lambda, \mu \in \mathbb{C}. \tag{4.2}$$

4.2 Construction of polynomial Baxter equation solutions from τ_2-eigenvalues

Let us consider the subvariety in the self-adjoint τ_2-representations characterized by the constrains:

$$\prod_{h=1}^{N}\frac{\alpha_h^*}{\alpha_h}=1,\qquad \frac{\mathbb{b}_n}{\mathbb{b}_n^*}=\frac{\mathbb{a}_n}{\mathbb{a}_n^*},\qquad \frac{\alpha_{n+1}^*\alpha_n^*}{\alpha_{n+1}\alpha_n}=\frac{\mathbb{b}_{n+1}^*\mathbb{b}_n}{\mathbb{b}_{n+1}\mathbb{b}_n^*},\qquad \forall n\in\{1,...,\mathsf{N}\}. \tag{4.3}$$

Lemma 6. *The Laurent polynomials:*

$$\mathtt{a}(\lambda)\equiv i^{\mathsf{N}}\prod_{n=1}^{\mathsf{N}}\frac{\beta_n}{\lambda}(1-i^{(1+\epsilon)/2}q^{-1/2}\frac{|\alpha_n|}{|\mathbb{a}_n|}\lambda)(1-i^{(1+\epsilon)/2}q^{-1/2}\frac{|\alpha_n|}{|\mathbb{b}_n|}\lambda),\qquad \mathtt{d}(\lambda)\equiv q^{\mathsf{N}}\mathtt{a}(-\lambda q), \tag{4.4}$$

where $\epsilon=\pm$, satisfy the equations:

$$\det{}_q\mathsf{M}(\lambda)=\mathtt{a}(\lambda)\mathtt{d}(\lambda/q),\quad \forall\lambda\in\mathbb{C}, \tag{4.5}$$

and

$$\mathcal{A}(\Lambda)+\mathcal{D}(\Lambda)=\prod_{n=1}^{p}\mathtt{a}(\lambda q^n)+\prod_{n=1}^{p}\mathtt{d}(\lambda q^n),\quad \forall\lambda\in\mathbb{C}. \tag{4.6}$$

Proof. The condition (4.5) is trivially verified. The condition (4.6) is instead a consequence of Proposition 6 and, in particular, of the average properties (B.63)-(B.64) once we prove that the coefficients $\mathtt{a}(\lambda)$ and $a_B(\lambda)$, defined in (B.38), have the same average values. This last statement trivially follows by direct verification once we make the identifications:

$$r_n\equiv\left(-\epsilon\frac{\mathbb{b}_{n-1}\alpha_{n-1}}{\mathbb{b}_{n-1}^*\alpha_{n-1}^*}\right)^{1/2}=\left(-\epsilon\frac{\alpha_n^*\mathbb{a}_n}{\alpha_n\mathbb{a}_n^*}\right)^{1/2}\qquad \forall n\in\{1,...,\mathsf{N}\}, \tag{4.7}$$

which are consistent with the requirement of cyclicity (B.22) under the constrains (4.3). □

Remark 4. Let us remark that the lemma can also be proven under the condition:

$$\mathcal{A}(\Lambda)=\mathcal{D}(\Lambda), \tag{4.8}$$

and that the self-adjoint τ_2-representations for which (4.8) holds also in any quantum site, i.e. those for which $(\alpha_1,...,\alpha_{\mathsf{N}},\mathbb{a}_1,...,\mathbb{a}_{\mathsf{N}},\mathbb{b}_1,...,\mathbb{b}_{\mathsf{N}})\in\mathbb{R}^{3\mathsf{N}}$, but this is a proper subvariety of the one defined in (4.3).

It is worth remarking that, in the class of self-adjoint representations defined by the constrain (4.3), it results:

$$a_+=d_+\quad\text{and}\quad a_-=d_-. \tag{4.9}$$

Then, in these representations, the transfer matrix spectrum presents a double degeneracy for $|k|\neq0$, since the asymptotic behaviour of a $t(\lambda)\in\Sigma_{\tau_2}^k$ and a $t'(\lambda)\in\Sigma_{\tau_2}^{-k}$ coincide. Such a degeneracy in the τ_2-spectrum is resolved by the Θ-charge, i.e. the couple $(\tau_2(\lambda),\Theta)$ has simple spectrum. The proof of this last statement can be given by adapting the proofs of Proposition 5 and Lemma 2 of [64] to these self-adjoint representations of the τ_2-model.

Theorem 4. *Let us take a $t(\lambda)\in\Sigma_{\tau_2}^k$, then there exists, up to multiplicative quasi-constants, a unique polynomial of the form:*

$$Q_t(\lambda)=\lambda^{a_t}\prod_{h=1}^{2l\mathsf{N}-(b_t+a_t)}(\lambda_h-\lambda),\qquad 0\leq a_t\leq 2l,\ 0\leq b_t+a_t\leq 2l\mathsf{N}, \tag{4.10}$$

which satisfy the Baxter equation:

$$t(\lambda)Q_t(\lambda)=\mathtt{a}(\lambda)Q_t(\lambda q^{-1})+\mathtt{d}(\lambda)Q_t(\lambda q)\quad\forall\lambda\in\mathbb{C}, \tag{4.11}$$

where:

$$a_t=\pm k\ \mathsf{mod}\,p,\qquad b_t=\pm k\ \mathsf{mod}\,p. \tag{4.12}$$

Proof. The uniqueness up to multiplicative quasi-constants is a consequence of Theorem 3. So we only have to prove the existence of such a polynomial $Q_t(\lambda)$ and the fact that it has the form defined in (4.10) and (4.12). First, let us define the matrix $\tilde{D}(\lambda)$ by replacing $\bar{\mathtt{A}}$ and $\bar{\mathtt{D}}$ by $\mathtt{a}$ and $\mathtt{d}$ in $D(\lambda)$. From the Lemma 6 and since the determinant of $D(\lambda)$ only depends of $\bar{\mathtt{A}}$ and $\bar{\mathtt{D}}$ via their average values and the quantum determinant, $D(\lambda)$ and $\tilde{D}(\lambda)$ have the same determinant. It is worth noticing that the condition $t(\lambda) \in \Sigma_{\tau_2}^k$ implies that the $p \times p$ matrix $\tilde{D}(\lambda)$ has rank $2l$ for any $\lambda \in \mathbb{C}\backslash\{0\}$. Then denoting with

$$\mathrm{C}_{i,j}(\lambda) = (-1)^{i+j} \det_{2l} \tilde{D}_{i,j}(\lambda) \tag{4.13}$$

the (i, j) *cofactor* of the matrix $\tilde{D}(\lambda)$, the matrix of elements these cofactors has rank 1 and so the vectors:

$$\mathrm{V}_i(\lambda) \equiv (\mathrm{C}_{i,1}(\lambda), \mathrm{C}_{i,2}(\lambda), ..., \mathrm{C}_{i,2l+1}(\lambda))^{\mathsf{T}} \in \mathbb{C}^p \quad \forall i \in \{1, ..., 2l+1\} \tag{4.14}$$

satisfy the proportionality conditions:

$$\mathrm{V}_i(\lambda)/\mathrm{C}_{i,1}(\lambda) = \mathrm{V}_j(\lambda)/\mathrm{C}_{j,1}(\lambda) \quad \forall i, j \in \{1, ..., 2l+1\},\ \forall \lambda \in \mathbb{C}. \tag{4.15}$$

These conditions implies:

$$\mathrm{C}_{2,2}(\lambda)/\mathrm{C}_{2,1}(\lambda) = \mathrm{C}_{1,2}(\lambda)/\mathrm{C}_{1,1}(\lambda), \tag{4.16}$$

and for (C.1) we can rewrite it as:

$$\mathrm{C}_{1,1}(\lambda q)/\mathrm{C}_{1,2l+1}(\lambda q) = \mathrm{C}_{1,2}(\lambda)/\mathrm{C}_{1,1}(\lambda). \tag{4.17}$$

Moreover, from the relation:

$$\mathrm{C}_{1,2l+1}(\lambda) = q^{\mathsf{N}} \mathrm{C}_{1,2}(-\lambda/q), \tag{4.18}$$

which follows from (C.1) and (C.2), (4.16) is also equivalent to:

$$\mathrm{C}_{1,1}(\lambda q)\mathrm{C}_{1,1}(\lambda) = q^{\mathsf{N}} \mathrm{C}_{1,2}(\lambda)\mathrm{C}_{1,2}(-\lambda) = q^{-\mathsf{N}} \mathrm{C}_{1,2l+1}(\lambda)\mathrm{C}_{1,2l+1}(-\lambda), \tag{4.19}$$

and from the condition $\det_p \tilde{D}(\Lambda) = 0$, we have:

$$t(\lambda)\mathrm{C}_{1,1}(\lambda) = \mathtt{a}(\lambda)\mathrm{C}_{1,2l+1}(\lambda) + \mathtt{d}(\lambda)\mathrm{C}_{1,2}(\lambda). \tag{4.20}$$

Let us note that all the cofactors are Laurent polynomial of maximal degree[28] $2l\mathsf{N}$ in λ:

$$\mathrm{C}_{i,j}(\lambda) = \mathrm{c}_{i,j} \lambda^{-2l\mathsf{N}+a_{i,j}} \prod_{h=1}^{4l\mathsf{N}-(a_{i,j}+b_{i,j})} (\lambda_h^{(i,j)} - \lambda), \tag{4.21}$$

as it follows from the form of $\mathtt{a}(\lambda)$, $\mathtt{d}(\lambda)$ and $t(\lambda) \in \Sigma_{\tau_2}$. Thanks to formula (C.2), the cofactor $\mathrm{C}_{1,1}(\lambda) \in \mathbb{C}[\lambda, \lambda^{-1}]_{2l\mathsf{N}}$ is even in λ:

$$\mathrm{C}_{1,1}(\lambda) = \mathrm{c}_{1,1} \lambda^{-2l\mathsf{N}+2\tilde{a}_{1,1}} \prod_{i=1}^{2l\mathsf{N}-(\tilde{a}_{1,1}+\tilde{b}_{1,1})} (\lambda_i^{(1,1)} - \lambda)(\lambda_i^{(1,1)} + \lambda), \tag{4.22}$$

then the cofactor equation (4.19) implies:

$$a_{1,2} = 2\tilde{a}_{1,1} \equiv 2\bar{a}, \quad b_{1,2} = 2\tilde{b}_{1,1} \equiv 2\bar{b}, \quad \mathrm{c}_{1,2}^2 = \mathrm{c}_{1,1}^2 q^{-2(\mathsf{N}+\bar{b})} \tag{4.23}$$

and:

$$\left(\lambda_i^{(1,1)}\right)^2 = \left(\lambda_i^{(1,2)}\right)^2 \equiv \bar{\lambda}_i^2, \quad \left(\lambda_{i+2l\mathsf{N}-(\bar{a}+\bar{b})}^{(1,2)}\right)^2 = \left(\bar{\lambda}_i/q\right)^2, \tag{4.24}$$

with $\bar{\lambda}_i \neq 0$ for any $i \in \{1, ..., 2l\mathsf{N} - (\bar{a} + \bar{b})\}$ with $\bar{a}$ and $\bar{b} \in \mathbb{Z}^{\geq 0}$. Then, we can write:

$$\mathrm{C}_{1,1}(\lambda) = \mathrm{c}_{1,1} \lambda^{-2l\mathsf{N}+2\bar{a}} \prod_{i=1}^{2l\mathsf{N}-(\bar{a}+\bar{b})} (\bar{\lambda}_i + \lambda)(\bar{\lambda}_i - \lambda), \tag{4.25}$$

$$\mathrm{C}_{1,2}(\lambda) = \mathrm{c}_{1,2} q^{\bar{a}+b+\mathsf{N}} \lambda^{-2l\mathsf{N}+2\bar{a}} \prod_{i=1}^{2l\mathsf{N}-(\bar{a}+\bar{b})} (\bar{\lambda}_i + \lambda)(\epsilon_i \bar{\lambda}_i - \lambda q), \tag{4.26}$$

[28] The $a_{i,j}$ and $b_{i,j}$ are non-negative integers and $\lambda_h^{(i,j)} \neq 0$ for any $h \in \{1, ..., 4l\mathsf{N} - (a_{i,j} + b_{i,j})\}$.

where the $\epsilon_i = \pm 1$. The property (C.12), the relations (4.18) and (4.17) imply that $\forall i, \epsilon_i = 1$. Let us now introduce the polynomials $\overline{\text{C}}_{1,1}(\lambda)$, $\overline{\text{C}}_{1,2l+1}(\lambda)$ and $\overline{\text{C}}_{1,2}(\lambda)$ defined by simplifying the common factors in $\text{C}_{1,1}(\lambda)/\text{c}_{1,1}$, $\text{C}_{1,2l+1}(\lambda)/\text{c}_{1,2l+1}$ and $\text{C}_{1,2}(\lambda)/\text{c}_{1,2}$, respectively. Then, $\overline{\text{C}}_{1,1}(\lambda)$ has the form:

$$\overline{\text{C}}_{1,1}(\lambda) = \prod_{h=1}^{\mathsf{N}_{1,1}} (\lambda_h - \lambda), \quad \text{with } \mathsf{N}_{1,1} \leq 2l\mathsf{N} - (\bar{a} + \bar{b}). \tag{4.27}$$

Here and in the following, we will write $Z_{f(\lambda)}$ to denote the set of the zeros of the function $f(\lambda)$, then it holds:

$$Z_{\overline{\text{C}}_{1,1}(\lambda)} \subset \{\bar{\lambda}_1, ..., \bar{\lambda}_{2l\mathsf{N}-(\bar{a}+\bar{b})}\}, \quad 0 \notin Z_{\overline{\text{C}}_{1,1}(\lambda)}, \quad \text{s}_{p,\lambda_0} \not\subset Z_{\overline{\text{C}}_{1,1}(\lambda)}, \tag{4.28}$$

for any $\text{s}_{p,\lambda_0} \equiv (\lambda_0, q\lambda_0, ..., q^{2l}\lambda_0)$, a p-string of center $\lambda_0 \in \mathbb{C}$. Now, since by definition $Z_{\overline{\text{C}}_{1,1}(\lambda)} \cap Z_{\overline{\text{C}}_{1,2}(\lambda)} = Z_{\overline{\text{C}}_{1,1}(\lambda)} \cap Z_{\overline{\text{C}}_{1,2l+1}(\lambda)} = \emptyset$, equation (4.17) implies:

$$\overline{\text{C}}_{1,2l+1}(\lambda) = q^{\mathsf{N}_{1,1}} \overline{\text{C}}_{1,1}(\lambda q^{-1}), \quad \overline{\text{C}}_{1,2}(\lambda) = q^{-\mathsf{N}_{1,1}} \overline{\text{C}}_{1,1}(\lambda q). \tag{4.29}$$

Then, equation (4.20) can be written as a Baxter equation for the polynomial $\overline{\text{C}}_{1,1}(\lambda)$:

$$t(\lambda)\overline{\text{C}}_{1,1}(\lambda) = \bar{\mathtt{a}}(\lambda)\overline{\text{C}}_{1,1}(\lambda q^{-1}) + \bar{\mathtt{d}}(\lambda)\overline{\text{C}}_{1,1}(\lambda q), \tag{4.30}$$

with coefficients $\bar{\mathtt{a}}(\lambda) \equiv q^{\mathsf{N}_{1,1}}\varphi\mathtt{a}(\lambda)$ and $\bar{\mathtt{d}}(\lambda) \equiv q^{-\mathsf{N}_{1,1}}\varphi^{-1}\mathtt{d}(\lambda)$ and $\varphi \equiv \text{c}_{1,1}/\text{c}_{1,2} = \text{c}_{1,2l+1}/\text{c}_{1,1}$. Note that the consistence[29] of the above equation implies that φ is a p-root of the unit and then, by (4.23), we have $\varphi \equiv q^{(\bar{b}+\mathsf{N})}$.

Let us define now the polynomial

$$Q_t(\lambda) \equiv \lambda^{a_t}\overline{\text{C}}_{1,1}(\lambda) = \lambda^{a_t} \prod_{h=1}^{2l\mathsf{N}-(a_t+b_t)} (\lambda_h - \lambda), \tag{4.31}$$

where:

$$\mathsf{N}_{1,1} \equiv 2l\mathsf{N} - (a_t + b_t), \quad a_t \in \{0, ..., 2l\}, \quad b_t \equiv \bar{b} + mp, m \in \mathbb{Z}^{\geq 0}; \tag{4.32}$$

then $q^{-a_t} \equiv q^{\mathsf{N}_{1,1}}\varphi$, $Q_t(\lambda)$ is the desired solution of the Baxter equation (4.11) which belongs to $\mathbb{C}[\lambda]_{2l\mathsf{N}}$. The characterizations (4.12) are then trivial consequences of the asymptotics of $t(\lambda) \in \Sigma_{\tau_2}^k$ plus those of the coefficients of the Baxter equation (4.11) satisfied by $Q_t(\lambda)$. □

Lemma 7. *The polynomial solution $Q_t(\lambda)$ of the Baxter equation (4.11) associated to $t(\lambda) \in \Sigma_{\tau_2}$ is a ϵ-real polynomial, i.e. it satisfies the following complex-conjugation condition:*

$$(Q_t(\lambda))^* \equiv Q_t(\epsilon\lambda^*) \qquad \forall\lambda \in \mathbb{C}, \tag{4.33}$$

where $\epsilon = \pm 1$ is the discrete parameter defined in (2.25). Then, the Baxter Q-operator defined in (4.1), is ϵ-self-adjoint and it is a polynomial of maximal degree $2l\mathsf{N}$ in the spectral parameter λ.

Proof. Let us remark that the self-adjointness of the transfer matrix $\tau_2(\lambda)$ and its parity properties imply:

$$(t(\lambda))^* \equiv t(\lambda^*) \quad \text{and} \quad t(-\lambda) \equiv (-1)^{\mathsf{N}} t(\lambda) \quad \forall\lambda \in \mathbb{C}, \tag{4.34}$$

while the coefficients of the Baxter equations satisfy the complex-conjugation conditions:

$$(\mathtt{a}(\lambda))^* \equiv \epsilon^{\mathsf{N}} \mathtt{d}(\epsilon\lambda^*) \quad \forall\lambda \in \mathbb{C}. \tag{4.35}$$

Then, under complex conjugation, the Baxter equation reads:

$$t(\epsilon\lambda^*) (Q_t(\lambda))^* = \mathtt{d}(\epsilon\lambda^*) \left(Q_t(\lambda q^{-1})\right)^* + \mathtt{a}(\epsilon\lambda^*) (Q_t(\lambda q))^* \quad \forall\lambda \in \mathbb{C}, \tag{4.36}$$

and so the injectivity of the map $t(\lambda) \in \Sigma_{\tau_2} \to Q_t(\lambda) \in \mathbb{C}[\lambda]_{2l\mathsf{N}}$ implies the condition (4.33). □

[29] The proof of this statement coincides step by step with the proof given in Theorem 2 of [1].

Remark 5. For any $t(\lambda) \in \Sigma_{\tau_2}$ the Theorem 4 defines a link between the corresponding polynomial solution of the Baxter equation and a determinant of a $(p-1) \times (p-1)$ tridiagonal matrix. Let us note then in literature there exist also other determinant characterizations of solutions of the Baxter equation. In the quantum periodic Toda chain, linear combinations of determinants of semi-infinite tridiagonal matrices allow to express these solutions [88, 89, 78]. A careful analysis of the τ_2-model in the limit $\beta^2 \to \bar{\beta}^2$ with $\bar{\beta}^2$ irrational (i.e. $p',\ p \to +\infty$) is of clear interest as the dimension of the representation of the Weyl algebra $\mathcal{W}_n$ and the size of the tridiagonal matrix, related to the Baxter equation solution, diverge. Subsequently, one could ponder whether the characterization which holds in the case of the quantum periodic Toda chain also applies to the τ_2-model for irrational $\bar{\beta}^2$. This could lead to a reformulation[30] of the τ_2-spectrum in terms of solutions of nonlinear integral equations (NLIE) related to the results in [92]. Interestingly, another DDV-type[31] NLIE reformulation can be introduced and it describe the complete τ_2-spectrum thanks to the completeness of the Bethe ansatz.

4.3 Completeness of Bethe ansatz type equations

The previous analysis leads to the complete characterization of the transfer matrix spectrum (eigenvalue and eigenstate) in terms of real (in the case $\epsilon = 1$) or imaginary ($\epsilon = -1$) polynomial solutions of the Baxter equation (4.11).

Proposition 2. *To any τ_2-self-adjoint representation which further satisfies the conditions (4.3) is associated a system of Bethe ansatz type equations and there exists a one to one map between the set of all the p-strings free and ϵ-self-adjoint solutions of it and the set Σ_{τ_2}.*

Proof. Let us construct the isomorphism. Theorem 4 and the previous lemma imply that to any $t(\lambda) \in \Sigma^k_{\tau_2}$ it is associated one and only one p-strings free and ϵ-self-adjoint[32] solution $(\lambda_1, \dots, \lambda_{2l\mathsf{N}-(a_t+b_t)})$ of the system of Bethe ansatz equations:

$$\frac{\mathtt{a}(\lambda_c)}{\mathtt{d}(\lambda_c)} = -q^{2a_t} \prod_{h=1}^{2l\mathsf{N}-(a_t+b_t)} \frac{(q\lambda_c - \lambda_h)}{(\lambda_c/q - \lambda_h)}, \quad \forall c \in \{1, ..., 2l\mathsf{N} - (a_t + b_t)\}, \tag{4.37}$$

with $a_t = \pm k \bmod p,\ b_t = \pm k \bmod p$.

Conversely, given a p-strings free and ϵ-self-adjoint solution of (4.37) with $a = \pm b \bmod p$, then it defines uniquely a ϵ-real polynomial $Q(\lambda)$ by the equation (4.10). Now, by using $Q(\lambda)$ we can construct the function:

$$t(\lambda) \ = \ (\mathtt{a}(\lambda)Q(q^{-1}\lambda) + \mathtt{d}(\lambda)Q(q\lambda))/Q(\lambda)\,, \tag{4.38}$$

which thanks to the Bethe equations (4.37) is nonsingular for $\lambda = \lambda_c,\ \forall c \in \{1, \dots, 2l\mathsf{N} - (a+b)\}$ and is a ϵ-real Laurent polynomial of degree N in λ. Moreover, we can also construct two states $|\, t_{\pm a}\,\rangle$ by inserting $Q(\lambda)$ in equation (3.51). So, $t(\lambda)$ and $\Psi_t(\boldsymbol{\eta}) \equiv \langle \eta_1, ..., \eta_\mathsf{N}\,|\,t\,\rangle$ satisfy the system (3.25) and (3.26), for $k = \pm a$. Then the fixed solution of the Bethe equation allows us to reconstruct uniquely the τ_2-eigenvalue $t(\lambda)$ and the simultaneous eigenstates $|\, t_{\pm a}\,\rangle$ of $\tau_2(\lambda)$ and Θ, with Θ-eigenvalue $q^{\pm a}$. □

Note that the previous results can be rephrased as *completeness of the Bethe ansatz type equations generated by SOV*, as from this type of Bethe solutions we can reconstruct the complete set of τ_2-eigenstates.

[30]NLIE has been used first to reformulate the spectrum of integrable quantum models in [90, 91]. Similar NLIE were presented in [92] and also in [93, 94, 95, 96].

[31]This type of NLIE was introduced and analyzed in [97]-[103] for the fermionic lattice regularizations of the sine-Gordon model, see also [104] for a related model.

[32]It means that the tuple $(\lambda_1, \dots, \lambda_{2l\mathsf{N}-(a_t+b_t)})$ satisfies the following property under complex conjugation:

$$(\lambda_1^*, \dots, \lambda^*_{2l\mathsf{N}-(a_t+b_t)}) = (\epsilon\lambda_{\pi(1)}, \dots, \epsilon\lambda_{\pi(2l\mathsf{N}-(a_t+b_t))})$$

where π is a permutation of the indexes $\{1, ..., 2l\mathsf{N} - (a_t + b_t)\}$.

5 Spectrum characterization of the inhomogeneous chiral Potts model

In [3] Bazhanov and Stroganov have proven the following remarkable connections between the integrable chiral Potts model and the τ_2-model:

i) The fundamental R-matrix intertwining the τ_2-Lax operator in the quantum space is given by the product of four chiral Potts Boltzmann weights.

ii) The transfer matrix of the chiral Potts model is a Baxter Q-operator for the τ_2-model.

Both these statements are true when the τ_2-model is restricted to parametrization by points on the algebraic curves[33] $\mathcal{C}_k$. In this section, we first recall known properties [3, 12] of the chiral Potts model and then in subsection 5.2 we prove the spectrum simplicity of the most general inhomogeneous chiral Potts transfer matrix and use the property ii) to characterize the eigenstates by the SOV construction. In subsection 5.3, we prove that the chiral Potts transfer matrix is normal for the representations for which the τ_2-transfer matrix is self-adjoint and we use it to provide the SOV characterization of their simultaneous eigenbasis. Finally, in subsection 5.4, we prove the existence of chiral Potts representations for which the complete spectrum is characterized by a system of Bethe ansatz equations.

5.1 Transfer matrix of chiral Potts model as Baxter operator of τ_2-model on the chP curves

Let us consider the following tuple p$\equiv (a_{\rm p}, b_{\rm p}, c_{\rm p}, d_{\rm p}) \in \mathbb{C}^4$ and let us introduce the following notations:

$$x_{\rm p} \equiv a_{\rm p}/d_{\rm p},\;\; y_{\rm p} \equiv b_{\rm p}/c_{\rm p},\;\; s_{\rm p} \equiv d_{\rm p}/c_{\rm p},\; t_{\rm p} \equiv x_{\rm p}y_{\rm p},\;\; k^2 + (k^{'})^2 = 1, \tag{5.1}$$

then the algebraic curve $\mathcal{C}_k$ of modulus k is by definition the locus of the points p which satisfy the equations:

$$x_{\rm p}^p + y_{\rm p}^p = k(1 + x_{\rm p}^p y_{\rm p}^p),\quad k x_{\rm p}^p = 1 - k^{'} s_{\rm p}^{-p},\quad k y_{\rm p}^p = 1 - k^{'} s_{\rm p}^p. \tag{5.2}$$

Similarly to [3], we can introduce the parametrization:

$$\begin{array}{ll}
\lambda\alpha_n \equiv -t_{\rm p}^{-1/2} b_{{\rm q}_n} b_{{\rm r}_n}, & \mathbb{b}_n/rq^{1/2} \equiv (x_{\rm p}/y_{\rm p})^{1/2} a_{{\rm q}_n} d_{{\rm r}_n}/q^2,\\
\beta_n/\lambda \equiv -t_{\rm p}^{1/2} d_{{\rm q}_n} d_{{\rm r}_n}, & q^{1/2}\mathbb{a}_n/r \equiv -(x_{\rm p}/y_{\rm p})^{1/2} c_{{\rm q}_n} b_{{\rm r}_n},\\
\delta_n\lambda \equiv q^{-2} t_{\rm p}^{-1/2} a_{{\rm q}_n} a_{{\rm r}_n}, & q^{1/2}\mathbb{d}_n r \equiv -(y_{\rm p}/x_{\rm p})^{1/2} d_{{\rm q}_n} a_{{\rm r}_n},\\
\gamma_n/\lambda \equiv t_{\rm p}^{1/2} c_{{\rm q}_n} c_{{\rm r}_n}, & q^{-1/2}\mathbb{c}_n r \equiv (y_{\rm p}/x_{\rm p})^{1/2} b_{{\rm q}_n} c_{{\rm r}_n},
\end{array} \tag{5.3}$$

of the τ_2-Lax operator in terms of the points p, ${\rm q}_n$ and ${\rm r}_n$ of the curve (5.2) of modulus k. Note that we can identify:

$$r \equiv (y_{\rm p}/x_{\rm p})^{1/2}, \tag{5.4}$$

so that the off-diagonal elements of the τ_2-Lax operator do not depend on the point p on the curve and the parameter $t_{\rm p}^{-1/2}$ is then proportional to our spectral parameter:

$$t_{\rm p}^{-1/2} \equiv \lambda/\mathsf{c}_0. \tag{5.5}$$

Then, we can introduce the operator $\mathsf{T}_\lambda^{\rm chP}$, characterized by the kernel[34]:

$$\mathsf{T}_\lambda^{\rm chP}(\mathsf{z}, \mathsf{z}') \equiv \langle \mathsf{z}|\mathsf{T}_\lambda^{\rm chP}|\mathsf{z}'\rangle = \prod_{n=1}^{\mathsf{N}} W_{{\rm q}_n{\rm p}}(z_n/z_n')\bar{W}_{{\rm r}_n{\rm p}}(z_n/z_{n+1}'), \tag{5.6}$$

[33] See the next subsection for precise definitions.

[34] For a direct comparison see formula (4.12) of [105] with the following identifications:

$$z_j \equiv q^{2\sigma_j'},\;\; z_j' \equiv q^{2\sigma_j}\;\; \forall j \in \{1, ..., \mathsf{N}\}.$$

Note that $\mathsf{T}_\lambda^{\rm chP}$ is well defined, the W-functions (B.1) being cyclic functions of their arguments.

in the left and right u_n-eigenbasis (2.5), where the functions W and $\bar{W}$ are defined in (B.1). $\mathsf{T}_\lambda^{\text{chP}}$ coincides with the transfer matrix of the inhomogeneous chiral Potts model [3]. As anticipated, $\mathsf{T}_\lambda^{\text{chP}}$ is a Baxter Q-operator w.r.t. the τ_2-transfer matrix:

$$\tau_2(\lambda)\mathsf{T}_\lambda^{\text{chP}} = a_{\text{BS}}(\lambda)\mathsf{T}_{\lambda/q}^{\text{chP}} + d_{\text{BS}}(\lambda)\mathsf{T}_{q\lambda}^{\text{chP}}, \tag{5.7}$$

where the coefficients read:

$$\begin{aligned} a_{\text{BS}}(\lambda) &= (-1)^N \prod_{n=1}^{N} \beta_n f_{\text{pq}_n\text{r}_n}\left(\frac{1}{\lambda} + q^{-1}\frac{\alpha_n \mathbb{d}_n}{\beta_n \mathbb{c}_n}\lambda\right)\frac{1 + \frac{q^{1/2}\lambda \mathbb{b}_n}{\beta_n r}}{1 + \frac{\lambda\alpha_n}{q^{1/2} r \mathbb{c}_n}}, & (5.8)\\ d_{\text{BS}}(\lambda) &= (-1)^N \prod_{n=1}^{N} \beta_n f_{\text{pq}_n\text{r}_n}\left(\frac{1}{\lambda} + q\frac{\alpha_n \mathbb{b}_n}{\beta_n \mathbb{a}_n}\lambda\right)\frac{1 - \frac{\lambda \mathbb{d}_n r}{q^{1/2}\beta_n}}{1 - \frac{q^{1/2} r\lambda\alpha_n}{\mathbb{a}_n}}, & (5.9)\end{aligned}$$

and:

$$f_{\text{pq}_n\text{r}_n} = \frac{W_{\text{q}_n\text{p}}(z(l))}{W_{\text{q}_n\text{p}}(z(0))}\frac{\bar{W}_{\text{r}_n\text{p}}(z(l))}{\bar{W}_{\text{r}_n\text{p}}(z(0))}. \tag{5.10}$$

Note that to write these coefficients we have inverted the formulae (5.3):

$$\begin{aligned} \frac{x_{\text{q}_n}}{y_{\text{p}}} &= -q^{3/2}\frac{\lambda \mathbb{b}_n}{\beta_n r}, \quad \frac{x_{\text{r}_n}}{x_{\text{p}}} = q^{1/2}\frac{\lambda \mathbb{d}_n r}{\beta_n}, & (5.11)\\ \frac{y_{\text{q}_n}}{x_{\text{p}}} &= q^{-1/2}\frac{r\lambda\alpha_n}{\mathbb{a}_n}, \quad \frac{y_{\text{r}_n}}{y_{\text{p}}} = -q^{1/2}\frac{\lambda\alpha_n}{r\mathbb{c}_n}, \quad s_{\text{q}_n}s_{\text{r}_n} = -\frac{\alpha_n\beta_n}{\mathbb{c}_n\mathbb{a}_n}. & (5.12)\end{aligned}$$

It is worth pointing out that while the Baxter equation (5.7) holds in the general inhomogeneous representations, the commutativity properties:

$$[\tau_2(\lambda), \mathsf{T}_\lambda^{\text{chP}}] = 0, \quad [\mathsf{T}_\lambda^{\text{chP}}, \mathsf{T}_\mu^{\text{chP}}] = 0 \quad \forall \lambda, \mu \in \mathbb{C} \tag{5.13}$$

only hold under the further restrictions:

$$\text{q}_n \equiv \text{r}_n \quad \forall n \in \{1, ..., \mathsf{N}\}. \tag{5.14}$$

Moreover, we also have:

$$[\Theta, \mathsf{T}_\lambda^{\text{chP}}] = 0, \tag{5.15}$$

as it simply follows by computing the matrix elements on the left and right u_n-eigenbasis:

$$\begin{aligned} \langle \mathsf{z}|\Theta\mathsf{T}_\lambda^{\text{chP}}|\mathsf{z}'\rangle &= \langle z_1/q, ..., z_{\mathsf{N}}/q|\mathsf{T}_\lambda^{\text{chP}}|\mathsf{z}'\rangle = \prod_{n=1}^{\mathsf{N}} W_{\text{q}_n\text{p}}(z_n/qz'_n)\bar{W}_{\text{r}_n\text{p}}(z_n/qz'_{n+1})\\ &= \langle \mathsf{z}|\mathsf{T}_\lambda^{\text{chP}}|qz'_1, ..., qz'_{\mathsf{N}}\rangle = \langle \mathsf{z}|\mathsf{T}_\lambda^{\text{chP}}\Theta|\mathsf{z}'\rangle. & (5.16)\end{aligned}$$

5.2 General representations: spectrum simplicity and eigenstates characterization

Let us denote with $\mathcal{R}_{\mathsf{N}}^{\text{chP}}$ the subvariety of the τ_2-representations obtained imposing (5.14) which is parametrized by:

$$\begin{aligned} \alpha_n &= -b_{\text{q}_n}^2/\mathsf{c}_0, \quad \mathbb{b}_n = -\mathbb{d}_n/q = -a_{\text{q}_n}d_{\text{q}_n}/q^{3/2}, & (5.17)\\ \beta_n &= -\mathsf{c}_0 d_{\text{q}_n}^2, \quad \mathbb{c}_n = -\mathbb{a}_n q = b_{\text{q}_n}c_{\text{q}_n}q^{1/2}, & (5.18)\end{aligned}$$

and:

$$\mathsf{c}_0 \in \mathbb{C}, \quad \text{q}_n \in \mathcal{C}_k, \quad k \in \mathbb{C}. \tag{5.19}$$

Now, for the representations $\mathcal{R}_{\mathsf{N}}^{\text{chP}}$, we can prove:

Proposition 3. *All right and left eigenstates of the transfer matrix T_λ^{chP} are eigenstates of $\tau_2(\lambda)$ with corresponding eigenvalues related by the functional Baxter equation:*

$$t(\lambda) = \frac{a_{BS}(\lambda)\mathsf{q}_{\lambda/q}^{chP} + d_{BS}(\lambda)\mathsf{q}_{q\lambda}^{chP}}{\mathsf{q}_\lambda^{chP}}, \tag{5.20}$$

where q_λ^{chP} denotes the T_λ^{chP}-eigenvalue. Moreover, for almost all the representations in $\mathcal{R}_{\mathsf{N}}^{chP}$, q_λ^{chP} is non-degenerate and the simultaneous eigenstate of $(\mathsf{T}_\lambda^{chP}, \tau_2(\lambda))$ is the one associated to the eigenvalue $t(\lambda)$ as constructed in Theorem 3.

Proof. The first statement concerning right eigenstates is a simple and well known consequence of the Baxter equation (5.7) from which we also have that the corresponding τ_2-eigenvalue $t(\lambda)$ is given by (5.20). To prove the statement for left eigenstates we also have to use the first commutation relation in (5.13). Now, the fact that the τ_2-spectrum is simple for almost all the representations in $\mathcal{R}_{\mathsf{N}}^{\text{chP}}$ implies the remaining statements of the proposition, once we recall that the τ_2-spectrum characterization of Theorem 3 holds for completely general representations and so in particular for $\mathcal{R}_{\mathsf{N}}^{\text{chP}}$. □

Remark 6. There exists a proper subvariety of $\mathcal{R}_{\mathsf{N}}^{\text{chP}}$ for which $\tau_2(\lambda)$ has double degeneracy eigenvalues. In these representations we have shown that the degeneracy is resolved by the charge Θ then, thanks to the commutativity (5.15), it is the simultaneous spectrum of Θ and $\mathsf{T}_{\lambda}^{\text{chP}}$ that is simple here.

5.3 Self-adjoint representations: complete spectrum characterization

The Proposition 3 characterizes completely the $\mathsf{T}_{\lambda}^{\text{chP}}$-eigenspace showing that it is contained in the τ_2-eigenspace. The reverse inclusion of eigenspaces however is not proven for general $\mathcal{R}_{\mathsf{N}}^{\text{chP}}$. To clarify this point it is worth to remark that while $\mathsf{T}_{\lambda}^{\text{chP}}$ and $\tau_2(\lambda)$ are both one-parameter families of commuting operators, their mutual commutativity is proven only when the spectral parameters coincide, see (5.13). This means that we cannot argue, by using this commutativity only[35], that the τ_2-eigenstates are eigenstates of $\mathsf{T}_{\lambda}^{\text{chP}}$; in fact, there may be some residue degeneracy in the τ_2-spectrum for fixed value of the spectral parameter. Note that the simplicity property of τ_2-spectrum only says that, taken any two different τ_2-eigenstates, the corresponding two τ_2-eigenvalue functions are not identical. This is a less strong statement that: for any τ_2-eigenstate $|\,t\,\rangle$ there exists at least one value λ_t of the spectral parameter such that the τ_2-eigenvalue in λ_t is non-degenerate. If this last statement can be shown, the commutativity (5.13) implies the coincidence of the τ_2 and $\mathsf{T}_{\lambda}^{\text{chP}}$-eigenspaces.

Of course, the diagonalizability of $\mathsf{T}_{\lambda}^{\text{chP}}$ defines a sufficient criterion to overcome deeper analysis of the τ_2-spectrum degeneracy. Indeed, in this case the Proposition 3 directly implies that the $\mathsf{T}_{\lambda}^{\text{chP}}$-eigenbasis is simultaneously a τ_2-eigenbasis. Then it is relevant to know the precise characterization of the representations of $\mathcal{R}_{\mathsf{N}}^{\text{chP}}$ for which the chiral Potts transfer matrix $\mathsf{T}_{\lambda}^{\text{chP}}$ is proven to be diagonalizable. Here, we prove that this holds in particular for the representations on the non-trivial curves for which the τ_2-transfer matrix is self-adjoint. Let us denote with $\mathcal{R}_{\mathsf{N}}^{\text{ChP,s-adj}} \equiv \mathcal{R}_{\mathsf{N}}^{\text{chP}} \cap \mathcal{R}_{\mathsf{N}}^{\text{S-adj}}$ such subset of $\mathcal{R}_{\mathsf{N}}^{\text{chP}}$, then the following characterization holds:

Lemma 8. *The subvariety $\mathcal{R}_{\mathsf{N}}^{\text{ChP,s-adj}}$ is characterized by (5.17)-(5.19) and the following points q_n on the chP curves:*

$$q_n = (a_{q_n}, \epsilon q \epsilon_{0,n} a^*_{q_n}, \epsilon_{0,n} d^*_{q_n}, d_{q_n}) \in \mathcal{C}_k, \quad \epsilon_{0,n} = \pm 1, \quad k^* = \epsilon k, \tag{5.21}$$

where we have fixed $\mathsf{c}_0 = 1$, just to simplify the parametrization.

Proof. This subvariety is parametrized by:

$$\beta_n = -\frac{(\mathbb{a}^*_n)^2}{q\alpha^*_n}, \quad \mathbb{d}_n = -\epsilon \mathbb{a}^*_n, \quad \mathbb{c}_n = -\mathbb{a}_n q, \quad \mathbb{b}_n = \epsilon \mathbb{a}^*_n / q, \tag{5.22}$$

with:

$$\alpha_n = -(q a^*_{\mathrm{q}_n})^2, \quad \mathbb{a}_n = -\epsilon q^{1/2} a^*_{\mathrm{q}_n} d^*_{\mathrm{q}_n}, \tag{5.23}$$

where the point q_n is characterized by (5.21). Indeed, it is a trivial check to verify that the above parametrization satisfies both the condition (2.25) and those defining $\mathcal{R}_{\mathsf{N}}^{\text{chP}}$. The ϵ-reality condition on the modulus k of the chP curves is then derived from the equation of the curve[36]:

$$k = \frac{\varphi^p_{x_{\mathrm{q}_n}} + \epsilon \varphi^{-p}_{x_{\mathrm{q}_n}}}{\epsilon |x_{\mathrm{q}_n}|^p + 1/|x_{\mathrm{q}_n}|^p}, \tag{5.24}$$

where we have denoted $x_{\mathrm{q}_n} = \varphi_{x_{\mathrm{q}_n}} |x_{\mathrm{q}_n}|$ with $\varphi_{x_{\mathrm{q}_n}}$ the phase of x_{q_n}. □

[35]Note that the reverse statement is proven thanks to the Baxter equation (5.7).

[36]It is worth noticing that for $\epsilon = 1$ the equation (5.24) implies the following restriction on the modulus of the curve $k \in]-1, 1[$.

Lemma 9. *Let q be a point on the algebraic curve characterized by the condition (5.21), then the W-functions (B.1) satisfy the following property under complex conjugation:*

$$\left(\frac{W_{qp}(z(n))}{W_{qp}(z(0))}\right)^* = \frac{\bar{W}_{qp}(z(p-n))}{\bar{W}_{qp}(z(0))} \quad \forall z \in \mathbb{S}_p, \tag{5.25}$$

where we have the following restriction on the point p$\in \mathcal{C}_k$, with $k^* = \epsilon k$:

$$x_p^* = \epsilon q^{-1} x_p, \ \ y_p^* = \epsilon q y_p, \quad s_p^* = s_p. \tag{5.26}$$

Proof. It is important to point out that the restrictions on the point p are compatible with the condition p$\in \mathcal{C}_k$. Now, by the definition (B.1) and the condition (5.21) satisfied by the point q and (5.26), we have:

$$\left(\frac{W_{\mathrm{qp}}(z(n))}{W_{\mathrm{qp}}(z(0))}\right)^* = (s_{\mathrm{p}} s_{\mathrm{q}})^{-n} \prod_{k=0}^{n-1} \frac{y_{\mathrm{p}} - q^{2k} y_{\mathrm{q}}}{q^{-2} x_{\mathrm{q}} - q^{2k} x_{\mathrm{p}}} \tag{5.27}$$

where we have used that $s_{\mathrm{q}}^* = s_{\mathrm{q}}^{-1}$ and $s_{\mathrm{p}}^* = s_{\mathrm{p}}$. Once we use the cyclicity condition satisfied by the $\bar{W}_{\mathrm{qp}}(z)$, the r.h.s. of the above equation coincides with the r.h.s. of (5.25). □

Proposition 4. *For any representation in $\mathcal{R}_{\mathsf{N}}^{\mathit{chP,s\text{-}adj}}$, the inhomogeneous chiral Potts transfer matrix $\mathsf{T}_\lambda^{\mathit{chP}}$ is a one-parameter family of normal operators w.r.t. the points p defined in (5.26). In particular, it satisfies the following Hermitian conjugation property:*

$$\left(\mathsf{T}_\lambda^{\mathit{chP}}\Big|_{(p,q_n)}\right)^\dagger = g_{(p,q_n)} \ \hat{\mathsf{T}}_\lambda^{\mathit{chP}}\Big|_{(p,q_n)}, \quad g_{(p,q_n)} \equiv \prod_{n=1}^{\mathsf{N}} \frac{W_{q_np}^*(z(0))\bar{W}_{q_np}^*(z(0))}{W_{q_np}(z(0))\bar{W}_{q_np}(z(0))}, \tag{5.28}$$

where $\hat{\mathsf{T}}_\lambda^{\mathit{chP}}$ is the second chiral Potts transfer matrix defined by:

$$\hat{\mathsf{T}}_\lambda^{\mathit{chP}}\Big|_{(p,q_n)}(z,z') \equiv \langle z|\hat{\mathsf{T}}_\lambda^{\mathit{chP}}|z'\rangle = \prod_{n=1}^{\mathsf{N}} W_{q_np}(z_{n+1}/z'_n)\bar{W}_{q_np}(z_n/z'_n). \tag{5.29}$$

Proof. The proof of (5.28) is a simple consequence of the previous lemma, then the known commutativity [3]:

$$[\mathsf{T}_\lambda^{\mathrm{chP}}\big|_{(\mathrm{p},\mathrm{q}_n)}, \hat{\mathsf{T}}_{\lambda'}^{\mathrm{chP}}\Big|_{(\mathrm{p}',\mathrm{q}_n)}] = 0 \quad \forall \mathrm{p}, \mathrm{p}' \in \mathcal{C}_k, \tag{5.30}$$

implies the statement of normality thanks to (5.26). □

Let us denote with $\Sigma_{\mathsf{T}_\lambda^{\mathrm{chP}}}$ the set of all the eigenvalue functions of $\mathsf{T}_\lambda^{\mathrm{chP}}$, then:

Theorem 5. *For any representation in $\mathcal{R}_{\mathsf{N}}^{\mathit{chP,s\text{-}adj}}$ the formula (5.20) defines a one-to-one map between the eigenvalue sets $\Sigma_{\mathsf{T}_\lambda^{\mathit{chP}}}$ and Σ_{τ_2}. Moreover, Theorem 3 allows to construct the full ($\mathsf{T}_\lambda^{\mathit{chP}}, \tau_2(\lambda), \Theta$)-eigenbasis associating to any $t(\lambda) \in \Sigma_{\tau_2}$ the corresponding eigenstate.*

Proof. The diagonalizability of $\mathsf{T}_\lambda^{\mathrm{chP}}$ implies, thanks to Proposition 3, that $\mathsf{T}_\lambda^{\mathrm{chP}}$ shares with $\tau_2(\lambda)$ and Θ a complete set of eigenstates from which the statement about the eigenvalue functions follows. Then, the map (5.20) being an isomorphism, we can label all the eigenstates of $\mathsf{T}_\lambda^{\mathrm{chP}}$ in terms of the eigenvalues of $\tau_2(\lambda)$ and Θ and, by using Theorem 3, we can construct the entire simultaneous eigenbasis. □

Remark 7. It is worth to clarify that the relevant case of the superintegrable chiral Potts model does not fit directly in the general class of representations $\mathcal{R}_{\mathsf{N}}^{\mathrm{chP,s\text{-}adj}}$ here analyzed. Indeed, superintegrable chiral Potts model corresponds to a very special homogeneous representation characterized by:

$$x_{\mathrm{q}_n}^p \equiv y_{\mathrm{q}_n}^p = \frac{1+k'}{k}, \quad x_{\mathrm{r}_n}^p \equiv y_{\mathrm{r}_n}^p = \frac{1+k'}{k} \quad \forall n \in \{1, ..., \mathrm{N}\}, \tag{5.31}$$

for which $\mathsf{B}(\lambda)$ and $\mathsf{C}(\lambda)$ are nilpotent as it is simple to verify that (5.31) implies:

$$\mathbb{b}_n^p + \mathbb{a}_n^p = 0, \ \ \mathbb{c}_n^p + \mathbb{d}_n^p = 0 \quad \forall n \in \{1, ..., \mathsf{N}\}, \tag{5.32}$$

and so SOV method does not apply. It is however interesting to point out that taking the following homogeneous limit on the parameters of a $\mathcal{R}_{\mathsf{N}}^{\text{chP,s-adj}}$ representation on a lattice with $\mathsf{N}+1$ sites:

$$a_{\mathrm{q}_n}^p/(a_{\mathrm{q}_n}^p)^* \to \epsilon\, d_{\mathrm{q}_n}^p/(d_{\mathrm{q}_n}^p)^* \quad \forall n \in \{1, ..., \mathsf{N}\}, \tag{5.33}$$

while keeping $a_{\mathrm{q}_{\mathsf{N}+1}}^p/\left(a_{\mathrm{q}_{\mathsf{N}+1}}^p\right)^* \neq \epsilon d_{\mathrm{q}_{\mathsf{N}+1}}^p/\left(d_{\mathrm{q}_{\mathsf{N}+1}}^p\right)^*$, we generate a representation which is of superintegrable type on the sub-lattice with N sites while it keeps non-nilpotent $\mathsf{B}(\lambda)$ and $\mathsf{C}(\lambda)$ operators on the entire lattice[37]. Then, it is natural to expect that in the large N limit both our spectrum description and the computations of the matrix elements of local operators presented in [106] should reproduce under the homogeneous limit (5.33) also the known results of the superintegrable case.

5.4 Completeness of Bethe ansatz type equations

Let us denote with $\bar{\mathcal{R}}_{\mathsf{N}}^{\text{chP,s-adj}}$ the subset of $\mathcal{R}_{\mathsf{N}}^{\text{chP,s-adj}}$ for which the constrains (4.3) are satisfied. Then the following characterization holds:

Lemma 10. *In the case of* N *even, the subvariety* $\bar{\mathcal{R}}_{\mathsf{N}}^{chP,s\text{-}adj}$ *is characterized by (5.17)-(5.19) and the points* q_n *on the curves (5.21) with moreover:*

$$a_{q_{2n+i}} = \pm\bar{\epsilon}_{2n+i}^{1/2}\varphi_{a_{q_1}}^{(1-2\delta_{i,0})}q^{2\delta_{i,0}}|a_{q_{2n+i}}|,\ d_{q_{2n+i}} = \pm\epsilon_{1,2n+i}^{1/2}\bar{\epsilon}_{2n+i}^{-1/2}\left(\varphi_{a_{q_1}}/q\right)^{(2\delta_{i,0}-1)}|d_{q_{2n+i}}|,\ \ i=0,1, \tag{5.34}$$

where $\varphi_{a_{q_1}}$ *is the phase of* a_{q_1} *and*

$$\bar{\epsilon}_n = \prod_{h=1}^{n-1}\epsilon_{2,h}, \quad \epsilon_{1,n} = \pm 1, \quad \epsilon_{2,n} = \pm 1, \tag{5.35}$$

where we have to exclude the case $\epsilon_{1,n} = -\epsilon$ *for all* $n \in \{1, ..., \mathsf{N}\}$.

In the case of N *odd,* $\bar{\mathcal{R}}_{\mathsf{N}}^{chP,s\text{-}adj}$ *is obtained by the further requirements:*

$$\varphi_{a_{q_1}}^2 = \pm q^2, \quad \epsilon_{1,n} = \epsilon \quad \forall n \in \{1, ..., \mathsf{N}\}. \tag{5.36}$$

Proof. Let us impose the second and third conditions of (4.3), these together with (5.22) imply:

$$\left(\frac{\mathbb{a}_n^*}{\mathbb{a}_n}\right)^2 = q^2, \quad \frac{\alpha_{n+1}^*}{\alpha_{n+1}} = \frac{\alpha_n}{\alpha_n^*}, \tag{5.37}$$

from which the first condition in (4.3) is automatically satisfied for N even while it imposes $\alpha_n \in \mathbb{R}$ for N odd. The conditions (5.37) imply for the points q_n the constrains:

$$\frac{d_{\mathrm{q}_n}}{d_{\mathrm{q}_n}^*} = \epsilon_{1,n}q^2\frac{a_{\mathrm{q}_n}^*}{a_{\mathrm{q}_n}}, \quad q^2\frac{a_{\mathrm{q}_{n+1}}^*}{a_{\mathrm{q}_{n+1}}} = \epsilon_{2,n}\frac{a_{\mathrm{q}_n}}{q^2 a_{\mathrm{q}_n}^*}, \tag{5.38}$$

with $\epsilon_{i,n} = \pm 1$. Then, the parametrization for the points q_n is given by (5.21) plus (5.34) and the equations of the curves for these points q_n read:

$$k = (\epsilon_{1,2n+i}\epsilon)^{(1-\delta_{i,0})}\,\bar{\epsilon}_{2n+i}\,(\epsilon_{1,2n+i})^{1/2}\,\frac{\varphi_{a_{\mathrm{q}_1}}^{2p} + \epsilon_{1,2n+i}\epsilon\varphi_{a_{\mathrm{q}_1}}^{-2p}}{\epsilon|x_{\mathrm{q}_{2n+i}}|^p + 1/|x_{\mathrm{q}_{2n+i}}|^p}. \tag{5.39}$$

In the case N even we do not have to add further constraints, and it is then clear that the subvariety $\bar{\mathcal{R}}_{\mathsf{N}}^{\text{chP,s-adj}}$ can be for example parameterized by $(k, |d_{\mathrm{q}_1}|, |a_{\mathrm{q}_1}|, |a_{\mathrm{q}_2}|, ..., |a_{\mathrm{q}_\mathsf{N}}|)$. It is simple to verify that the equations (5.22) and (5.34) imply:

$$\mathbb{a}_n^p = \epsilon_{1,n}(\mathbb{a}_n^p)^*, \quad \mathbb{d}_n^p = \epsilon\epsilon_{1,n}\mathbb{c}_n^p, \quad \mathbb{b}_n^p = \epsilon\epsilon_{1,n}\mathbb{a}_n^p, \tag{5.40}$$

which explain the need to exclude the configuration $\epsilon_{1,n} = -\epsilon$ for all $n \in \{1, ..., \mathsf{N}\}$. Indeed, it leads to nilpotent $\mathsf{B}(\lambda)$ and $\mathsf{C}(\lambda)$. In the case N odd we have still to impose $\alpha_n \in \mathbb{R}$, which reads:

$$\varphi_{a_{\mathrm{q}_1}}^2 = \pm q^2. \tag{5.41}$$

[37]This last statement is shown for more general representations in appendix A.3.

In this case, only the choices:

$$\epsilon_{1,n} = \epsilon \quad \forall n \in \{1, ..., \mathsf{N}\}, \tag{5.42}$$

lead to non-trivial curves, $k \neq 0$:

$$k = \frac{\pm 2\bar{\epsilon}_n \epsilon^{1/2}}{\epsilon |x_{\mathsf{q}_n}|^p + 1/|x_{\mathsf{q}_n}|^p}, \tag{5.43}$$

and so it is clear that the subvariety $\bar{\mathcal{R}}_{\mathsf{N}}^{\text{chP,s-adj}}$ can be for example parameterized by $(k, |a_{\mathsf{q}_1}|, ..., |a_{\mathsf{q}_\mathsf{N}}|)$. □

The interest toward these representations is due to the complete characterization of the chP-eigenvalues by the ϵ-self-adjoint solutions of the associated Bethe equations (4.37).

Theorem 6. *For any representation in $\bar{\mathcal{R}}_{\mathsf{N}}^{chP,s\text{-}adj}$, there is a one to one map between $\Sigma_{\mathsf{T}_\lambda^{chP}}$ and the set of all the ϵ-self-adjoint solutions of the system of Bethe ansatz type equations (4.37).*

Proof. The isomorphism stated in the above theorem is just the composition of two isomorphisms. First, since by definition $\bar{\mathcal{R}}_{\mathsf{N}}^{\text{chP,s-adj}} \subset \mathcal{R}_{\mathsf{N}}^{\text{chP,s-adj}}$, the isomorphism defined in Theorem 5 holds and (5.20) associates to any eigenvalue $\mathsf{q}_\lambda^{\text{chP}} \in \Sigma_{\mathsf{T}_\lambda^{\text{chP}}}$ one and only one $t(\lambda) \in \Sigma_{\tau_2}$, and vice versa. Then, we can use the Theorem 4 to uniquely associate the ϵ-real polynomial $Q(\lambda)$ defined by (4.10) whose zeros define a ϵ-self-adjoint solution of the Bethe system of equations (4.37). The uniqueness of the polynomial $Q(\lambda)$ is proven as in Theorem 3, indeed for any representation in $\bar{\mathcal{R}}_{\mathsf{N}}^{\text{chP,s-adj}}$, the coefficients of the Baxter equation (4.11) have different average values:

$$\frac{\prod_{n=1}^p \mathtt{a}(\lambda q^n)}{\prod_{n=1}^p \mathtt{d}(\lambda q^n)} = (-1)^{\mathsf{N}} \prod_{n=1}^{\mathsf{N}} \frac{(1 - i^{p(1+\epsilon)/2} |x_{\mathsf{q}_n}|^2 \Lambda)^2}{(1 + i^{p(1+\epsilon)/2} |x_{\mathsf{q}_n}|^2 \Lambda)^2} \neq 1. \tag{5.44}$$

□

6 Outlook

In the paper [107] an approach has been developed in the framework of the quantum inverse scattering method (QISM) [52]-[60] to achieve the complete solution of lattice integrable quantum models by the exact characterization of their spectrum and the computation of the matrix elements of local operators. In particular, in [107] the approach has been developed for the relevant case of the lattice quantum sine-Gordon model [55, 108] associated by QISM to some special cyclic representations [81] of the 6-vertex Yang-Baxter algebra, and it can be considered as the generalization to this SOV framework of the Lyon group method[38]. One of our motivations to the present work is to define the required SOV setup to generalize the approach used in [107] to the τ_2-model associated to the most general cyclic representations of the 6-vertex Yang-Baxter algebra, such a generalization will be presented in [106]. There, the obtained reconstruction of local operators in terms of quantum separate variables and the derived determinant formula for the scalar products of states are used to compute the form factors of local operators on the transfer matrix eigenstates and to express them as sums of determinants given by simple modifications of the scalar product ones.

Finally, it is worth mentioning that this approach is not restricted to cyclic representations of 6-vertex Yang-Baxter algebras, as it is addressed to the large class of integrable quantum models whose spectrum (eigenvalues & eigenstates) can be determined by implementing Sklyanin's quantum separation of variables. Such a statement has already been verified for some key quantum integrable models associated to highest weight representations of the Yang-Baxter algebras and their generalization.

Acknowledgements. We would like to thank J.-M. Maillet and B. McCoy for stimulating discussions on related subjects and for the interest shown in this work and J.-M. Maillet for his attentive reading of the paper. N. G. is supported by the ENS Lyon and ANR grant ANR-10-BLAN-0120-04-DIADEMS. N. G would like to thank the YITP Institute of Stony Brook

[38]Let us remark that this method has been introduced in [109] in the algebraic Bethe ansatz (ABA) framework for the spin-1/2 XXZ quantum chain [50, 110] with periodic boundary conditions.

for hospitality. G. N. is supported by National Science Foundation grants PHY-0969739. G. N. gratefully acknowledge the YITP Institute of Stony Brook for the opportunity to develop his research programs. G. N. would like to thank the Theoretical Physics Group of the Laboratory of Physics at ENS-Lyon for hospitality, under support of ANR-10-BLAN-0120-04-DIADEMS, which made possible this collaboration.

A Constructive proof of the existence of cyclic SOV representations

In the following subsections we will show by recursive construction the Theorem 1. The appendix A.1 and A.2 reproduce in our notations results first obtained in [76, 77], where the construction of B-eigenstate has been implemented adapting to the general τ_2-representations the recursive approach first introduced in [78, 79, 80]. Finally, in appendix A.3, we prove that for general values of the parameters of the τ_2-representations the recursive B-spectrum construction is complete and the B-spectrum is simple. These last results are just central to complete the proof of Theorem 1 and do not appear in the previous literature on the τ_2-model.

A.1 Recursive construction of B-eigenstates

We will construct the eigenstates $\langle\,\boldsymbol{\eta}\,|$ of $\mathsf{B}(\lambda)\equiv\mathsf{B}_{\mathrm{N}}(\lambda)$ recursively by induction on N. In particular, assuming we have the B_{M}-eigenbasis for any $\mathrm{M}<\mathsf{N}$, the eigenstates $\langle\,\boldsymbol{\eta}\,|$ of $\mathsf{B}_{\mathrm{N}}(\lambda)$ can be written in the following form

$$\langle\,\boldsymbol{\eta}\,| = \sum_{\boldsymbol{\chi}_1}\sum_{\boldsymbol{\chi}_2} K_{\mathrm{N}}(\,\boldsymbol{\eta}\,|\,\boldsymbol{\chi}_2|\boldsymbol{\chi}_1\,)\,\langle\,\boldsymbol{\chi}_2\,|\otimes\langle\,\boldsymbol{\chi}_1\,|\,, \tag{A.1}$$

in terms of $\langle\,\boldsymbol{\chi}_2\,|$ and $\langle\,\boldsymbol{\chi}_1\,|$, respectively, the B_{M}-eigenstates and the $\mathsf{B}_{\mathrm{N-M}}$ -eigenstates with eigenvalues defined as in (3.1) by the tuples $\boldsymbol{\chi}_2=(\chi_{2a})_{a=1,\dots,\mathrm{M}}$ and $\boldsymbol{\chi}_1=(\chi_{1a})_{a=1,\dots,\mathrm{N-M}}$. Computing the *kernel* $K_{\mathrm{N}}(\,\boldsymbol{\eta}\,|\,\boldsymbol{\chi}_2|\boldsymbol{\chi}_1\,)$ will give the recursive construction of the states $\langle\,\boldsymbol{\eta}\,|$.

SOV-representation for $\mathsf{N}=1$*:* let us construct first the SOV representation for $\mathsf{N}=1$. We introduce the states:

$$\langle\eta_1^{(0)}q^{h_1}|\equiv\sum_{k=1}^{p}\frac{q^{-k(h_1+1/2)}\prod_{r=1}^{k}(q^{r-1/2}\mathbb{a}_1+q^{-(r-1/2)}\mathbb{b}_1)}{(\mathbb{a}_1^p+\mathbb{b}_1^p)^{k/p}}\langle 1,k|,\quad\forall h_1\in\{1,...,p\}, \tag{A.2}$$

where $\langle 1,k|$ are the states of the v_1-eigenbasis. $\langle\eta_1^{(0)}q^{h_1}|$ for $h_1\in\{1,...,p\}$ then defines a B_1-eigenbasis:

$$\langle\eta_1^{(0)}q^{h_1}|\mathsf{B}_1=\eta_1^{(0)}q^{h_1}\langle\eta_1^{(0)}q^{h_1}|\qquad\text{with}\quad\left(\eta_1^{(0)}\right)^p\equiv q^{p/2}(\mathbb{a}_1^p+\mathbb{b}_1^p). \tag{A.3}$$

Subsequently, $\mathsf{A}_1(\lambda)$ and $\mathsf{D}_1(\lambda)$ have the following representation in the B_1-eigenbasis:

$$\langle\eta_1^{(0)}q^{h_1}|\mathsf{A}_1(\lambda)=\lambda\alpha_1\langle\eta_1^{(0)}q^{h_1-1}|-\beta_1\lambda^{-1}\langle\eta_1^{(0)}q^{h_1+1}|,\qquad\langle\eta_1^{(0)}q^{h_1}|\mathsf{D}_1(\lambda)=\gamma_1\lambda^{-1}\langle\eta_1^{(0)}q^{h_1-1}|-\delta_1\lambda\langle\eta_1^{(0)}q^{h_1+1}|. \tag{A.4}$$

A.1.a Reconstruction of the kernel $K_{\mathrm{N}}(\,\boldsymbol{\eta}\,|\,\boldsymbol{\chi}_2|\boldsymbol{\chi}_1\,)$ *w.r.t.* $\chi_{2\;a=1,\dots,\mathrm{M}-1}$ *and* $\chi_{1\;a=1,\dots,\mathrm{N-M}-1}$.

The decomposition

$$\mathsf{B}_{\mathrm{N}}(\lambda)=\mathsf{A}_{2\;\mathrm{M}}(\lambda)\mathsf{B}_{1\;\mathrm{N-M}}(\lambda)+\mathsf{B}_{2\;\mathrm{M}}(\lambda)\mathsf{D}_{1\;\mathrm{N-M}}(\lambda) \tag{A.5}$$

implies that the matrix elements of the kernel $K_{\mathrm{N}}(\,\boldsymbol{\eta}\,|\,\boldsymbol{\chi}_2;\boldsymbol{\chi}_1\,)$ satisfy the equations

$$\begin{aligned}\big(\mathsf{A}_{2\;\mathrm{M}}(\lambda)\mathsf{B}_{1\;\mathrm{N-M}}(\lambda)+\mathsf{B}_{2\;\mathrm{M}}(\lambda)\mathsf{D}_{1\;\mathrm{N-M}}(\lambda)\big)^t\,K_{\mathrm{N}}(\,\boldsymbol{\eta}\,|\,\boldsymbol{\chi}_2;\boldsymbol{\chi}_1\,)\\ =\eta_{\mathrm{N}}\prod_{a=1}^{\mathsf{N}-1}(\lambda/\eta_a-\eta_a/\lambda)\;K_{\mathrm{N}}(\,\boldsymbol{\eta}\,|\,\boldsymbol{\chi}_2;\boldsymbol{\chi}_1\,)\,,\end{aligned} \tag{A.6}$$

where O^t stays for the transpose of an operator O. Taking

$$\chi_{1a}q^{h_1}\notin\mathrm{Z}_{\det_{\mathrm{q}}\mathsf{M}_{1,\mathrm{N-M}}(\lambda)},\;\;\chi_{2b}q^{h_2}\notin\mathrm{Z}_{\det_{\mathrm{q}}\mathsf{M}_{2,\mathrm{M}}(\lambda)}\;\;\text{and}\;\;\chi_{1a}q^{h_1}\neq\chi_{2b}q^{h_2}, \tag{A.7}$$

where $h_i \in \{1, ..., p\}$, $a \in \{1, ..., \mathsf{N} - \mathrm{M}\}$ and $b \in \{1, ..., \mathrm{M}\}$, the previous equations can be written as recursion relations for the kernel w.r.t. χ_{1a} and χ_{2b} by simply fixing $\lambda = \chi_{1\, a=1,...,\mathrm{N-M}-1}$ and $\lambda = \chi_{2\, b=1,...,\mathrm{M}-1}$. Indeed, for $\lambda = \chi_{1a}$ the (A.6) leads to

$$\begin{aligned} K_{\mathrm{N}}(\boldsymbol{\eta}\,|\,\boldsymbol{\chi}_2|q^{-\delta_a}\boldsymbol{\chi}_1)\ \mathtt{d}_1^{(SOV)}(q^{-1}\chi_{1a})\ \chi_{2\,\mathrm{M}} \prod_{b=1}^{\mathrm{M}-1}(\chi_{1a}/\chi_{2b} - \chi_{2b}/\chi_{1a}) \\ = K_{\mathrm{N}}(\boldsymbol{\eta}\,|\,\boldsymbol{\chi}_2;\boldsymbol{\chi}_1)\ \eta_{\mathrm{N}} \prod_{b=1}^{\mathsf{N}-1}(\chi_{1a}/\eta_b - \eta_b/\chi_{1a}), \end{aligned} \tag{A.8}$$

while for $\lambda = \chi_{2a}$ it holds

$$\begin{aligned} K_{\mathrm{N}}(\boldsymbol{\eta}\,|\,q^{\delta_a}\boldsymbol{\chi}_2|\boldsymbol{\chi}_1)\ \mathtt{a}_2^{(SOV)}(q^{+1}\chi_{2a})\ \chi_{1\,\mathrm{N-M}} \prod_{b=1}^{\mathsf{N}-\mathrm{M}-1}(\chi_{2a}/\chi_{1b} - \chi_{1b}/\chi_{2a}) \\ = K_{\mathrm{N}}(\boldsymbol{\eta}\,|\,\boldsymbol{\chi}_2;\boldsymbol{\chi}_1)\ \eta_{\mathrm{N}} \prod_{b=1}^{\mathsf{N}-1}(\chi_{2a}/\eta_b - \eta_b/\chi_{2a}). \end{aligned} \tag{A.9}$$

Here $\mathtt{d}_1^{(SOV)}(\chi_{1a})$ and $\mathtt{a}_2^{(SOV)}(\chi_{2a})$ are the known coefficients of the SOV representations in the subchains $\mathtt{1}$ and $\mathtt{2}$ while $q^{\pm\delta_r}$ is defined in (3.27).

A.1.b Reconstruction of the kernel $K_{\mathrm{N}}(\boldsymbol{\eta}\,|\,\boldsymbol{\chi}_2|\boldsymbol{\chi}_1)$ w.r.t. $\chi_{2\,\mathrm{M}}$ and $\chi_{1\,\mathrm{N-M}}$.

In the τ_2-model the form of the asymptotics of the Yang-Baxter generators w.r.t. λ leads to some complication in the computation of the recursions satisfied by the kernel w.r.t. the variables $\chi_{2\,\mathrm{M}}$ and $\chi_{1\,\mathrm{N-M}}$. Here, we show that just doing a discrete Fourier transform w.r.t. these variables we get a simpler characterization. Let us introduce the state:

$$\overline{\langle\eta_{\mathrm{N}}^{(0)}q^{h_{\mathrm{N}}}}, \eta_{\mathrm{N}-1}^{(0)}q^{h_{\mathrm{N}-1}}, ..., \eta_1^{(0)}q^{h_1}| = \sum_{k_{\mathrm{N}}=1}^{p} q^{k_{\mathrm{N}}h_{\mathrm{N}}}\langle\eta_{\mathrm{N}}^{(0)}q^{k_{\mathrm{N}}}, \eta_{\mathrm{N}-1}^{(0)}q^{h_{\mathrm{N}-1}}, ..., \eta_1^{(0)}q^{h_1}|, \tag{A.10}$$

then it is an eigenstates of the Θ-charge:

$$\overline{\langle\eta_{\mathrm{N}}^{(0)}q^{h_{\mathrm{N}}}}, \{\eta_i\}|\Theta_{\mathrm{N}} = q^{h_{\mathrm{N}}}\overline{\langle\eta_{\mathrm{N}}^{(0)}q^{h_{\mathrm{N}}}}, \{\eta_i\}| \tag{A.11}$$

and moreover it holds:

$$\overline{\langle\eta_{\mathrm{N}}^{(0)}q^{h_{\mathrm{N}}}}, \{\eta_i\}|\mathsf{B}_{\mathrm{N}}(\lambda) = \eta_{\mathrm{N}}^{(0)} \prod_{n=1}^{\mathsf{N}-1}\left(\frac{\lambda}{\eta_n} - \frac{\eta_n}{\lambda}\right)\overline{\langle\eta_{\mathrm{N}}^{(0)}q^{h_{\mathrm{N}}+1}}, \{\eta_i\}|. \tag{A.12}$$

Note that by using the recursion formula (A.1) and the representation (A.10) we get:

$$\langle\eta_{\mathrm{N}}^{(0)}q^{h_{\mathrm{N}}}, \{\eta_i\}| = \sum_{\boldsymbol{\chi}_1}\sum_{\boldsymbol{\chi}_2} \bar{K}_{\mathrm{N}}(\boldsymbol{\eta}\,|\,\boldsymbol{\chi}_2|\boldsymbol{\chi}_1)\overline{\langle\chi_{2,\,\mathrm{M}}}, \{\chi_{2,\,a}\}| \otimes \overline{\langle\chi_{1,\,\mathrm{N-M}}}, \{\chi_{1,\,a}\}|, \tag{A.13}$$

with

$$\begin{aligned} &\bar{K}_{\mathrm{N}}(\boldsymbol{\eta}|\chi_{2,\,\mathrm{M}}^{(0)}q^{h_{2,\,\mathrm{M}}}, \{\chi_{2,\,a}\}|\chi_{1,\,\mathrm{N-M}}^{(0)}q^{h_{1,\,\mathrm{N-M}}}, \{\chi_{1,\,a}\}) = \\ &\frac{1}{p^2}\sum_{k_{2,\,\mathrm{M}},k_{1,\,\mathrm{N-M}}=1}^{p} q^{-(k_{1,\,\mathrm{N-M}}h_{1,\,\mathrm{N-M}}+k_{2,\,\mathrm{M}}h_{2,\,\mathrm{M}})}K_{\mathrm{N}}(\boldsymbol{\eta}|\chi_{2,\,\mathrm{M}}^{(0)}q^{k_{2,\,\mathrm{M}}}, \{\chi_{2,\,a}\}|\chi_{1,\,\mathrm{N-M}}^{(0)}q^{k_{1,\,\mathrm{N-M}}}, \{\chi_{1,\,a}\}). \end{aligned} \tag{A.14}$$

To obtain the dependence of $\bar{K}_{\mathrm{N}}$ w.r.t. $\chi_{2,\,\mathrm{M}}$ and $\chi_{1,\,\mathrm{N-M}}$, let us introduce the asymptotic operators $\mathsf{B}_{\mathrm{N}}^{(\mp)}$ whose action reads:

$$\langle\,\boldsymbol{\eta}\,|\mathsf{B}_{\mathrm{N}}^{(\mp)} \equiv (\mp1)^{(\mathsf{N}-1)} \lim_{\log\lambda\to\mp\infty} \lambda^{\pm(\mathsf{N}-1)}\langle\,\boldsymbol{\eta}\,|\mathsf{B}_{\mathrm{N}}(\lambda) = \eta_{\mathrm{N}} \prod_{i=1}^{\mathsf{N}-1}\eta_i^{\pm1}\langle\,\boldsymbol{\eta}\,|, \tag{A.15}$$

while the decomposition (A.5) implies:

$$\mathsf{B}_{\mathrm{N}}^{(\mp)} = a_{\mp,2}\Theta_2^{\mp}\chi_{1,\,\mathrm{N-M}} \prod_{i=1}^{\mathsf{N}-\mathrm{M}-1}\chi_{1,\,i}^{\pm1} + d_{\mp,1}\Theta_1^{\pm}\chi_{2,\,\mathrm{M}} \prod_{i=1}^{\mathrm{M}-1}\chi_{2,\,i}^{\pm1}. \tag{A.16}$$

Acting on the generic state $\langle \eta_{\mathsf{N}}^{(0)}, \{\eta_i\}|$ with $\mathsf{B}_{\mathsf{N}}^{(\mp)}$ we get a system of two equations:

$$\bar{K}_{\mathsf{N}}(\boldsymbol{\eta}\,|\,\boldsymbol{\chi}_{2}|\boldsymbol{\chi}_{1}) = \mathsf{x}_\epsilon \bar{K}_{\mathsf{N}}(\boldsymbol{\eta}\,|\,\boldsymbol{\chi}_{2}|q^{-\delta_{\mathsf{N-M}}}\boldsymbol{\chi}_{1}) + \mathsf{y}_\epsilon \bar{K}_{\mathsf{N}}(\boldsymbol{\eta}\,|\,q^{-\delta_{\mathsf{M}}}\boldsymbol{\chi}_{2}|\boldsymbol{\chi}_{1}), \qquad \epsilon = \pm 1. \tag{A.17}$$

Here the coefficients read:

$$\mathsf{x}_\epsilon \equiv \frac{a_{\epsilon,2} q^{\epsilon h_{2,\,\mathsf{M}}} \chi^{(0)}_{1,\,\mathsf{N-M}} \prod_{i=1}^{\mathsf{N-M}-1} \chi_{1,\,i}^{-\epsilon}}{\eta_{\mathsf{N}}^{(0)} \prod_{i=1}^{\mathsf{N}-1} \eta_i^{-\epsilon}}, \qquad \mathsf{y}_\epsilon \equiv \frac{d_{\epsilon,1} q^{-\epsilon h_{1,\,\mathsf{N-M}}} \chi^{(0)}_{2,\,\mathsf{M}} \prod_{i=1}^{\mathsf{M}-1} \chi_{2,\,i}^{-\epsilon}}{\eta_{\mathsf{N}}^{(0)} \prod_{i=1}^{\mathsf{N}-1} \eta_i^{-\epsilon}}. \tag{A.18}$$

Then solving this system we get our result:

$$\frac{\bar{K}_{\mathsf{N}}(\boldsymbol{\eta}\,|\,q^{-\delta_{\mathsf{M}}}\boldsymbol{\chi}_{2}|\boldsymbol{\chi}_{1})}{\bar{K}_{\mathsf{N}}(\boldsymbol{\eta}\,|\,\boldsymbol{\chi}_{2}|\boldsymbol{\chi}_{1})} = \frac{\mathsf{x}_- - \mathsf{x}_+}{\mathsf{x}_-\mathsf{y}_+ - \mathsf{x}_+\mathsf{y}_-}, \qquad \frac{\bar{K}_{\mathsf{N}}(\boldsymbol{\eta}\,|\,\boldsymbol{\chi}_{2}|q^{-\delta_{\mathsf{N-M}}}\boldsymbol{\chi}_{1})}{\bar{K}_{\mathsf{N}}(\boldsymbol{\eta}\,|\,\boldsymbol{\chi}_{2}|\boldsymbol{\chi}_{1})} = \frac{\mathsf{y}_+ - \mathsf{y}_-}{\mathsf{x}_-\mathsf{y}_+ - \mathsf{x}_+\mathsf{y}_-}. \tag{A.19}$$

A.1.c Reconstruction of the kernel $K_{\mathsf{N}}(\boldsymbol{\eta}\,|\,\boldsymbol{\chi}_{2};\boldsymbol{\chi}_{1})$ w.r.t. η.

The formula

$$\mathsf{D}_{\mathsf{N}}(\lambda) = \mathsf{D}_{2\ \mathsf{M}}(\lambda)\mathsf{D}_{1\ \mathsf{N-M}}(\lambda) + \mathsf{C}_{2\ \mathsf{M}}(\lambda)\mathsf{B}_{1\ \mathsf{N-M}}(\lambda) \tag{A.20}$$

implies the identity

$$\langle \boldsymbol{\eta}|\mathsf{D}_{\mathsf{N}}(\eta_i) = -\mathrm{det_q}\mathsf{M}_{2\ \mathsf{M}}(q\eta_i)\langle \boldsymbol{\eta}|\mathsf{B}^{-1}_{2\ \mathsf{M}}(q\eta_i)\mathsf{B}_{1\ \mathsf{N-M}}(\eta_i), \tag{A.21}$$

writing $\mathsf{C}_{2\ \mathsf{M}}(\lambda)$ by the quantum determinant $\mathrm{det_q}\mathsf{M}_{2\ \mathsf{M}}(\lambda)$ in the subchain 2 and using

$$\langle \boldsymbol{\eta}|\mathsf{B}_{1\ \mathsf{N-M}}(\eta_i) = -\langle \boldsymbol{\eta}|\mathsf{D}_{1\ \mathsf{N-M}}(\eta_i)\mathsf{A}^{-1}_{2\ \mathsf{M}}(q\eta_i)\mathsf{B}_{2\ \mathsf{M}}(q\eta_i). \tag{A.22}$$

Then, the following recursion relations is obtained for kernel $K_{\mathsf{N}}(\boldsymbol{\eta}\,|\,\boldsymbol{\chi}_{2};\boldsymbol{\chi}_{1})$ w.r.t. $\eta_{i=1,\dots,\mathsf{N}-1}$:

$$\frac{K_{\mathsf{N}}(q^{\delta_i}\boldsymbol{\eta}\,|\,\boldsymbol{\chi}_{2};\boldsymbol{\chi}_{1})}{K_{\mathsf{N}}(\boldsymbol{\eta}\,|\,\boldsymbol{\chi}_{2};\boldsymbol{\chi}_{1})} = -\frac{\mathrm{det_q}\mathsf{M}_{2\ \mathsf{M}}(q\eta_i)}{d_{\mathsf{N}}(\eta_i)} \frac{\chi_{1\mathsf{N-M}} \prod_{a=1}^{\mathsf{N-M}-1} (\eta_i/\chi_{1a} - \chi_{1a}/\eta_i)}{\chi_{2\mathsf{M}} \prod_{a=1}^{\mathsf{M}-1} (q\eta_i/\chi_{2a} - \chi_{2a}/q\eta_i)}. \tag{A.23}$$

Finally, (A.20) leads to the following recursion relation which fix the dependence of the kernel w.r.t. η_{N}:

$$\frac{K_{\mathsf{N}}(q^{\delta_{\mathsf{N}}}\boldsymbol{\eta}\,|\,\boldsymbol{\chi}_{2};\boldsymbol{\chi}_{1})}{K_{\mathsf{N}}(\eta\,|\,q^{\delta_{\mathsf{M}}}\boldsymbol{\chi}_{2};q^{\delta_{\mathsf{N-M}}}\boldsymbol{\chi}_{1})} = \frac{\chi^{(+)}_{2\ \mathsf{D}}\chi^{(+)}_{1\ \mathsf{D}} \prod_{b=1}^{\mathsf{M}-1} \chi_{2\ b} \prod_{b=1}^{\mathsf{N-M}-1} \chi_{1\ b}}{\eta^{(+)}_{\mathsf{D}} \prod_{a=1}^{\mathsf{N}-1} \eta_a}. \tag{A.24}$$

A.2 Gauge-invariant SOV dates: Z_r, $Z_{\mathsf{A}}^{(\pm)}$, $Z_{\mathsf{D}}^{(\pm)}$, $\mathcal{A}(Z_r)$, $\mathcal{D}(Z_r)$

The recursion relations (A.8)-(A.9) and (A.19) and the requirement of cyclicity give a system of N algebraic equations in the N unknowns $Z_a \equiv \eta_a^p$:

$$\mathcal{D}_{1\,\mathsf{N-M}}(\chi_{1a}^p)\, \chi_{2\mathsf{M}}^p \prod_{b=1}^{\mathsf{M}-1} (\chi_{1a}^p/\chi_{2b}^p - \chi_{2b}^p/\chi_{1a}^p) = \eta_{\mathsf{N}}^p \prod_{b=1}^{\mathsf{N}-1} (\chi_{1a}^p/\eta_b^p - \eta_b^p/\chi_{1a}^p), \tag{A.25}$$

$$\mathcal{A}_{2\,\mathsf{M}}(\chi_{2a}^p)\, \chi_{1\mathsf{N-M}}^p \prod_{b=1}^{\mathsf{N-M}} (\chi_{2a}^p/\chi_{1b}^p - \chi_{1b}^p/\chi_{2a}^p) = \eta_{\mathsf{N}}^p \prod_{b=1}^{\mathsf{N}-1} (\chi_{2a}^p/\eta_b^p - \eta_b^p/\chi_{2a}^p), \tag{A.26}$$

and

$$Z_{\mathsf{N}} \prod_{n=1}^{\mathsf{N}-1} Z_n^{\pm 1} = (\pm 1)^{\mathsf{N}-1} a^p_{2,\pm} Z_{1\ \mathsf{N-M}} \prod_{a=1}^{\mathsf{N-M}-1} Z^{\pm 1}_{1\ a} + (\pm 1)^{\mathsf{N}-1} d^p_{1,\pm} Z_{2\ \mathsf{M}} \prod_{a=1}^{\mathsf{M}-1} Z^{\pm 1}_{2\ a} \tag{A.27}$$

where we have used (3.5) in the subchains 1 and 2 to express $Z^{(\pm)}_{2,\,\mathsf{A}} \prod_{a=1}^{\mathsf{M}-1} Z^{\pm 1}_{2\ a}$ and $Z^{(\pm)}_{1,\,\mathsf{D}} \prod_{a=1}^{\mathsf{N-M}-1} Z^{\pm 1}_{1\ a}$. The above system of equations completely determines the Z_a in terms of χ_{2a}^p, χ_{1a}^p, as we can rewrite it in terms of the following Laurent polynomial equation:

$$\mathcal{A}_{\mathsf{M}}(\Lambda)\mathcal{B}_{\mathsf{N-M}}(\Lambda) + \mathcal{B}_{\mathsf{M}}(\Lambda)\mathcal{D}_{\mathsf{N-M}}(\Lambda) = Z_{\mathsf{N}} \prod_{a=1}^{[\mathsf{N}]} (\Lambda/Z_a - Z_a/\Lambda), \tag{A.28}$$

as a consequence of the simplicity of the spectrum of $\mathsf{B}(\lambda)$ in both the subchains $\mathtt{1}$ and $\mathtt{2}$. Note that the l.h.s. of the above equation is formed out of the known average values of the monodromy matrix elements in the subchains $\mathtt{1}$ and $\mathtt{2}$. So the Z_a for $a \in \{1, ..., \mathsf{N}-1\}$ are fixed determining the zeros of the known Laurent polynomial at the l.h.s. of (A.28). The cyclicity allows to fix the remaining gauge-invariant SOV dates:

$$\mathcal{D}_{\mathsf{N}}(Z_i) = -\text{det}_{\text{q}}\mathcal{M}_{\text{M}}(Z_i)\frac{\mathcal{B}_{\mathsf{N}-\text{M}}(Z_i)}{\mathcal{B}_{\text{M}}(Z_i)}, \;\; \mathcal{A}_{\mathsf{N}}(Z_i) = -\text{det}_{\text{q}}\mathcal{M}_{\mathsf{N}-\text{M}}(Z_i)\frac{\mathcal{B}_{\text{M}}(Z_i)}{\mathcal{B}_{\mathsf{N}-\text{M}}(Z_i)}, \tag{A.29}$$

for any $i \in \{1, ..., \mathsf{N}-1\}$ where:

$$\text{det}_{\text{q}}\mathcal{M}_X(\Lambda) \equiv \prod_{a=1}^{p} \text{det}_{\text{q}}\mathsf{M}_X(q^a\lambda), \;\; X = \text{M}, \mathsf{N}-\text{M}, \mathsf{N}. \tag{A.30}$$

where it holds:

$$\text{det}_{\text{q}}\mathcal{M}_X(\Lambda) = \mathcal{A}_X(\Lambda)\mathcal{D}_X(\Lambda) - \mathcal{B}_X(\Lambda)\mathcal{C}_X(\Lambda), \;\; X = \text{M}, \mathsf{N}-\text{M}. \tag{A.31}$$

A.3 B-spectrum completeness and simplicity

Let us prove that the previously constructed set of B-eigenstates $\langle\, \boldsymbol{\eta}\,|$ is complete by showing that there are p^{N} distinct B-eigenvalues.

Proposition 5. *The SOV dates Z_r with $r \in \{1, ..., \mathsf{N}-1\}$ are all distinct for almost all the values of the parameters α_n^p, β_n^p, $\mathbb{a}_n^p$, $\mathbb{b}_n^p$, $\mathbb{c}_n^p$, $\mathbb{d}_n^p$ of the τ_2-model.*

Proof. From the functional dependence[39] of $Z_1, \ldots, Z_{\mathsf{N}-1}$ w.r.t. these parameters we just have to prove that the Jacobian:

$$J(\alpha^p, \beta^p, \mathbb{a}^p, \mathbb{b}^p, \mathbb{c}^p, \mathbb{d}^p) \equiv \det\left(\frac{\partial Z_r}{\partial \alpha_s^p}\right)_{r,s=1,\ldots,\mathsf{N}-1} \neq 0 \tag{A.32}$$

does not vanish for some special values to derive $J \neq 0$ for almost all the values of the parameters. In fact, for $J \neq 0$, the map $Z = Z(\alpha_1^p, \ldots, \alpha_{\mathsf{N}-1}^p)$ is invertible from which the claim of the proposition follows.
To show that (A.32), let us consider the representations which satisfy the following constrains:

$$\mathbb{b}_n^p + \mathbb{a}_n^p = 0, \;\; \mathbb{c}_n^p + \mathbb{d}_n^p = 0 \;\;\; \forall n \in \{1, ..., \mathsf{N}-1\}, \tag{A.33}$$

while we leave the representation in the site N unrestricted. Then the averages (3.14) simplify to:

$$\mathcal{L}_n(\Lambda) \equiv \begin{pmatrix} \Lambda\alpha_n^p - \beta_n^p/\Lambda & 0 \\ 0 & \gamma_n^p/\Lambda - \Lambda\delta_n^p \end{pmatrix} \qquad \forall n \in \{1, ..., \mathsf{N}-1\}\,. \tag{A.34}$$

Then by (3.13) we can compute the l.h.s. of (A.28) and we obtain:

$$q^{p/2}(\mathbb{a}_{\mathsf{N}}^p + \mathbb{b}_{\mathsf{N}}^p)\prod_{n=1}^{\mathsf{N}-1}\frac{\mathbb{a}_n^p\mathbb{d}_n^p}{\alpha_n^{p/2}\beta_n^{p/2}}(\frac{\Lambda\alpha_n^{p/2}}{\beta_n^{p/2}} - \frac{\beta_n^{p/2}}{\Lambda\alpha_n^{p/2}}) = Z_{\mathsf{N}}\prod_{a=1}^{\mathsf{N}-1}(\frac{\Lambda}{Z_a} - \frac{Z_a}{\Lambda}), \tag{A.35}$$

and then $J \neq 0$ trivially follows. We can then define $\eta_a^{(0)}$ as a p-root of Z_a. They satisfy $\left(\eta_a^{(0)}\right)^p \neq \left(\eta_b^{(0)}\right)^p$ for any $a \neq b \in \{1, \ldots, \mathsf{N}-1\}$. $\square$

Finally, keeping in any subchain the representation of the B-spectrum simple, the Theorem 1 follows by induction.

[39] See Remark 1 and the proof of Lemma 3.

B Baxter Q-operator construction for general τ_2-model

In [49], Baxter has extended the construction of the Q-operator by gauge transformations of [3] to the τ_2-model for general cyclic representations not restricted to those parameterized by points on chP algebraic curves. The main tool there was a generalization of the discrete dilogarithm functions. In particular, he has remarked that asking the cyclicity only for the products of couples of these functions does not prevent the Q-operator from being well defined for general cyclic representations of the model. Here, we reproduce and adapt Baxter construction in our notations and we point out some interesting connection with the SOV construction.

B.1 Dilogarithm functions on the algebraic curves $\mathcal{C}_k$

B.1.1 Dilogarithm functions

The dilogarithm functions have been previously introduced and analyzed in [111, 95]. Here we use the notation:

$$\frac{W_{\text{qp}}(z(n))}{W_{\text{qp}}(z(0))} = (\frac{s_{\text{q}}}{s_{\text{p}}})^n \prod_{k=1}^{n} \frac{y_{\text{p}} - q^{-2k} x_{\text{q}}}{y_{\text{q}} - q^{-2k} x_{\text{p}}}, \qquad \frac{\bar{W}_{\text{qp}}(z(n))}{\bar{W}_{\text{qp}}(z(0))} = (s_{\text{p}} s_{\text{q}})^n \prod_{k=1}^{n} \frac{q^{-2} x_{\text{q}} - q^{-2k} x_{\text{p}}}{y_{\text{p}} - q^{-2k} y_{\text{q}}}, \tag{B.1}$$

where $z(n) = q^{-2n}$, $\forall n \in \{0, ..., 2l\}$. They are solutions of the following recursion relations:

$$\frac{W_{\text{qp}}(zq)}{W_{\text{qp}}(zq^{-1})} = -z \frac{s_{\text{p}}}{s_{\text{q}}} \frac{x_{\text{p}}}{y_{\text{p}}} q^{-1} \frac{1 - \frac{y_{\text{q}}}{x_{\text{p}}} q z^{-1}}{1 - \frac{x_{\text{q}}}{y_{\text{p}}} q^{-1} z}, \quad \frac{\bar{W}_{\text{qp}}(zq)}{\bar{W}_{\text{qp}}(zq^{-1})} = -\frac{q z^{-1}}{s_{\text{p}} s_{\text{q}}} \frac{y_{\text{p}}}{x_{\text{p}}} \frac{1 - \frac{y_{\text{q}}}{y_{\text{p}}} q^{-1} z}{1 - \frac{x_{\text{q}}}{x_{\text{p}}} q^{-1} z^{-1}}. \tag{B.2}$$

If the points p and q belong to the curves $\mathcal{C}_k$, they are well defined functions of $z \in \mathbb{S}_p$ which satisfy the cyclicity condition:

$$\frac{\bar{W}_{\text{qp}}(z(p))}{\bar{W}_{\text{qp}}(z(0))} = 1, \qquad \frac{W_{\text{qp}}(z(p))}{W_{\text{qp}}(z(0))} = 1. \tag{B.3}$$

B.1.2 Recursion relations

It is worth defining the following three discrete automorphisms of the $\mathcal{C}_k$-curve:

$$i) \qquad \Xi : \text{p} = (a_{\text{p}}, b_{\text{p}}, c_{\text{p}}, d_{\text{p}}) \in \mathcal{C}_k \ \rightarrow \Xi(\text{p}) = (q a_{\text{p}}, q b_{\text{p}}, c_{\text{p}}, d_{\text{p}}) \in \mathcal{C}_k, \tag{B.4}$$

$$ii) \qquad \Delta : \text{p} = (a_{\text{p}}, b_{\text{p}}, c_{\text{p}}, d_{\text{p}}) \in \mathcal{C}_k \rightarrow \Delta(\text{p}) = (q b_{\text{p}}, a_{\text{p}}, q d_{\text{p}}, c_{\text{p}}) \in \mathcal{C}_k, \tag{B.5}$$

$$iii) \qquad \Upsilon : \text{p} = (a_{\text{p}}, b_{\text{p}}, c_{\text{p}}, d_{\text{p}}) \in \mathcal{C}_k \rightarrow \Upsilon(\text{p}) = (-q^2 d_{\text{p}}, c_{\text{p}}, b_{\text{p}}, -a_{\text{p}}) \in \mathcal{C}_k. \tag{B.6}$$

If the points p and q belong to the curves $\mathcal{C}_k$, the W-functions satisfy the following recursion w.r.t. the action of Ξ on the point p:

$$\frac{W_{\text{qp}}(qz)}{W_{\text{q}\Xi(\text{p})}(z)} = z^{1/2} \frac{W_{\text{qp}}(z(l))}{W_{\text{qp}}(z(0))} \frac{1 - \frac{x_{\text{q}}}{y_{\text{p}}} q^{-1}}{1 - \frac{x_{\text{q}}}{y_{\text{p}}} q^{-1} z}, \qquad \frac{W_{\text{qp}}(qz)}{W_{\text{q}\Xi^{-1}(\text{p})}(z)} = z^{1/2} \frac{W_{\text{qp}}(z(l))}{W_{\text{qp}}(z(0))} \frac{1 - \frac{y_{\text{q}}}{x_{\text{p}}} q z^{-1}}{1 - \frac{y_{\text{q}}}{x_{\text{p}}} q}, \tag{B.7}$$

and

$$\frac{\bar{W}_{\text{qp}}(qz)}{\bar{W}_{\text{q}\Xi(\text{p})}(z)} = z^{-1/2} \frac{\bar{W}_{\text{qp}}(z(l))}{\bar{W}_{\text{qp}}(z(0))} \frac{1 - \frac{y_{\text{q}}}{y_{\text{p}}} q^{-1} z}{1 - \frac{y_{\text{q}}}{y_{\text{p}}} q^{-1}}, \qquad \frac{\bar{W}_{\text{qp}}(qz)}{\bar{W}_{\text{q}\Xi^{-1}(\text{p})}(z)} = z^{-1/2} \frac{\bar{W}_{\text{qp}}(z(l))}{\bar{W}_{\text{qp}}(z(0))} \frac{1 - \frac{x_{\text{q}}}{x_{\text{p}}} q}{1 - \frac{x_{\text{q}}}{x_{\text{p}}} q z^{-1}}. \tag{B.8}$$

B.2 Parametrization of τ_2-model by points in $\mathbb{C}^3$

Let us implement the following gauge transformation on the τ_2-Lax operator:

$$\tilde{\mathsf{L}}_n(\lambda) \equiv \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1/r_{n+1} z'_{n+1} & 1 \end{pmatrix} \mathsf{L}_n(\lambda) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1/r_n z'_n & 1 \end{pmatrix}, \tag{B.9}$$

where $r_n \in \mathbb{C}$ and

$$z'_n \in \mathbb{S}_p \equiv \{q^{2h}, \ h = 1, .., p\}. \tag{B.10}$$

We associate to the tuple $(a_{\rm v}, b_{\rm v}, c_{\rm v}, d_{\rm v}) \in \mathbb{C}^4$ the following point:

$$\mathrm{v} \equiv (x_{\rm v} \equiv a_{\rm v}/d_{\rm v}, y_{\rm v} \equiv b_{\rm v}/c_{\rm v}, s_{\rm v} \equiv d_{\rm v}/c_{\rm v}) \in \mathbb{C}^3, \tag{B.11}$$

and we define:

$$t_{\rm v} \equiv x_{\rm v} y_{\rm v}. \tag{B.12}$$

Now, let us consider the point $\bar{\mathrm{p}} \equiv (x_{\bar{\rm p}}, y_{\bar{\rm p}}, s_{\bar{\rm p}}) \in \mathbb{C}^3$ and from it the points:

$$\bar{\mathrm{p}}_n \equiv (x_{\bar{\rm p}}/\sigma_n, y_{\bar{\rm p}}\sigma_n, s_{\bar{\rm p}}\sigma_n) \in \mathbb{C}^3\,, \quad \sigma_n \in \mathbb{C}, \quad \forall n \in \{1, ..., \mathsf{N}\}, \tag{B.13}$$

then it holds:

$$t_{\bar{\rm p}_n} = t_{\bar{\rm p}}. \tag{B.14}$$

We can introduce the following parametrization:

$$\begin{array}{ll}
\lambda\alpha_n \equiv -t_{\bar{\rm p}}^{-1/2} b_{{\rm q}_n} b_{{\rm r}_n}, & \mathbb{b}_n/r_n q^{1/2} \equiv (x_{\bar{\rm p}_n}/y_{\bar{\rm p}_n})^{1/2} a_{{\rm q}_n} d_{{\rm r}_n}/q^2, \\
\beta_n/\lambda \equiv -t_{\bar{\rm p}}^{1/2} d_{{\rm q}_n} d_{{\rm r}_n}, & q^{1/2}\mathbb{a}_n/r_n \equiv -(x_{\bar{\rm p}_n}/y_{\bar{\rm p}_n})^{1/2} c_{{\rm q}_n} b_{{\rm r}_n}, \\
\delta_n\lambda \equiv q^{-2} t_{\bar{\rm p}}^{-1/2} a_{{\rm q}_n} a_{{\rm r}_n}, & q^{1/2}\mathbb{d}_n r_{n+1} \equiv -(y_{\bar{\rm p}_{n+1}}/x_{\bar{\rm p}_{n+1}})^{1/2} d_{{\rm q}_n} a_{{\rm r}_n}, \\
\gamma_n/\lambda \equiv t_{\bar{\rm p}}^{1/2} c_{{\rm q}_n} c_{{\rm r}_n}, & q^{-1/2}\mathbb{c}_n r_{n+1} \equiv (y_{\bar{\rm p}_{n+1}}/x_{\bar{\rm p}_{n+1}})^{1/2} b_{{\rm q}_n} c_{{\rm r}_n},
\end{array} \tag{B.15}$$

of the gauge transformed Lax parameters in terms of the points $\bar{\mathrm{p}}_n$ and the set of $2\mathsf{N}$ points q_n and r_n. Note that we can identify:

$$r_n \equiv (y_{\bar{\rm p}_n}/x_{\bar{\rm p}_n})^{1/2} = \sigma_n (y_{\bar{\rm p}}/x_{\bar{\rm p}})^{1/2}, \tag{B.16}$$

so that the off-diagonal elements of the τ_2-Lax operator are independent from the points $\bar{\mathrm{p}}_n$ and the parameter $t_{\bar{\rm p}}$ is related to our spectral parameter by:

$$t_{\bar{\rm p}} \propto \lambda^{-2}. \tag{B.17}$$

It is a simple exercise to derive from the above parametrization (B.15) the relations:

$$\frac{x_{{\rm q}_n}}{y_{\bar{\rm p}_n}} = -q^{3/2}\frac{\lambda\mathbb{b}_n}{\beta_n r_n}, \quad \frac{x_{{\rm r}_n}}{x_{\bar{\rm p}_{n+1}}} = q^{1/2}\frac{\lambda\mathbb{d}_n r_{n+1}}{\beta_n}, \tag{B.18}$$

$$\frac{y_{{\rm q}_n}}{x_{\bar{\rm p}_n}} = q^{-1/2}\frac{r_n\lambda\alpha_n}{\mathbb{a}_n}, \quad \frac{y_{{\rm r}_n}}{y_{\bar{\rm p}_{n+1}}} = -q^{1/2}\frac{\lambda\alpha_n}{r_{n+1}\mathbb{c}_n}, \quad s_{{\rm q}_n}s_{{\rm r}_n} = -\frac{\alpha_n\beta_n}{\mathbb{c}_n\mathbb{a}_n}. \tag{B.19}$$

B.3 Generalized dilogarithm functions

Let us fix $2\mathsf{N}+1$ points $(\bar{\mathrm{p}},\mathrm{q}_1, ...,\mathrm{q}_{\mathsf{N}},\mathrm{r}_1, ...,\mathrm{r}_{\mathsf{N}}) \in (\mathbb{C}^3)^{(2\mathsf{N}+1)}$, then we can define the following N functions:

$$\mathsf{Y}_\lambda^{(n)}(z_n|z'_n, z'_{n+1}) \equiv \mathsf{N}_{{\rm q}_n\bar{\rm p}_n}(z'_n)\bar{\mathsf{N}}_{{\rm r}_n\bar{\rm p}_{n+1}}(z'_{n+1}) W_{{\rm q}_n\bar{\rm p}_n}(z_n/z'_n)\bar{W}_{{\rm r}_n\bar{\rm p}_{n+1}}(z_n/z'_{n+1}), \tag{B.20}$$

of the three variables $(z_n, z'_n, z'_{n+1}) \in \mathbb{S}_p^3$, where:

$$\mathsf{N}_{{\rm q}_n\bar{\rm p}_n}(z'_n) \equiv \left(\frac{s_{\bar{\rm p}}^p(\sigma_n^p y_{{\rm q}_n}^p - x_{\bar{\rm p}}^p)}{s_{{\rm q}_n}^p(\sigma_n^p y_{\bar{\rm p}}^p - x_{{\rm q}_n}^p)}\right)^{h'_n/p}, \quad \bar{\mathsf{N}}_{{\rm r}_n\bar{\rm p}_{n+1}}(z'_{n+1}) \equiv \left(\frac{\sigma_{n+1}^p y_{\bar{\rm p}}^p - y_{{\rm r}_n}^p}{s_{\bar{\rm p}}^p s_{{\rm r}_n}^p(\sigma_{n+1}^p x_{{\rm r}_n}^p - x_{\bar{\rm p}}^p)}\right)^{h'_{n+1}/p} \tag{B.21}$$

and $z'_n \equiv q^{2h'_n} \in \mathbb{S}_p$, while the points $(\bar{\mathrm{p}}_1, ..., \bar{\mathrm{p}}_{\mathsf{N}}) \in (\mathbb{C}^3)^{\mathsf{N}}$ are defined by (B.13) where the $(\sigma_1, ..., \sigma_{\mathsf{N}}) \in \mathbb{C}^{\mathsf{N}}$ are fixed by the conditions:

$$s_{{\rm q}_n}^p s_{{\rm r}_n}^p \frac{\sigma_{n+1}^p x_{{\rm r}_n}^p - x_{\bar{\rm p}}^p}{\sigma_{n+1}^p y_{\bar{\rm p}}^p - y_{{\rm r}_n}^p}\,\frac{\sigma_n^p y_{\bar{\rm p}}^p - x_{{\rm q}_n}^p}{\sigma_n^p y_{{\rm q}_n}^p - x_{\bar{\rm p}}^p} = 1 \qquad \forall n \in \{1, ..., \mathsf{N}\}. \tag{B.22}$$

Note that the $\mathsf{Y}_\lambda^{(n)}(z_n|z'_n, z'_{n+1})$ are well defined functions of the three variables $(z_n, z'_n, z'_{n+1}) \in \mathbb{S}_p^3$. Indeed, they satisfy the cyclicity conditions w.r.t. z'_n and z'_{n+1} thanks to the normalization functions defined in (B.21) while the cyclicity w.r.t. z_n is given by the conditions (B.22).

B.3.1 Recursion relations

The generalized dilogarithm functions satisfy the recursions:

$$\frac{\mathsf{Y}_{\lambda}^{(n)}(z_n q^{-1}|z_n', z_{n+1}')}{\mathsf{Y}_{\lambda}^{(n)}(z_n q|z_n', z_{n+1}')} = s_{\mathrm{q}_n} s_{\mathrm{r}_n} \frac{\sigma_n z_n'}{\sigma_{n+1} z_{n+1}'} \frac{\left(1 - \frac{x_{\mathrm{q}_n}}{y_{\bar{\mathrm{p}}_n}} q^{-1} \frac{z_n}{z_n'}\right)}{\left(1 - \frac{y_{\mathrm{q}_n}}{x_{\bar{\mathrm{p}}_n}} q \frac{z_n'}{z_n}\right)} \frac{\left(1 - \frac{x_{\mathrm{r}_n}}{x_{\bar{\mathrm{p}}_{n+1}}} q^{-1} \frac{z_{n+1}'}{z_n}\right)}{\left(1 - \frac{y_{\mathrm{r}_n}}{y_{\bar{\mathrm{p}}_{n+1}}} q^{-1} \frac{z_n}{z_{n+1}'}\right)}, \tag{B.23}$$

as it simply follows from the recursions (B.2). Moreover, we can use the recursions (B.7)-(B.8) to derive:

$$\frac{\mathsf{Y}_{\lambda}^{(n)}(z_n q|z_n', z_{n+1}')}{\mathsf{Y}_{\lambda/q}^{n}(z_n|z_n', z_{n+1}')} = \left(\frac{z_{n+1}'}{z_n'}\right)^{1/2} f_{\bar{\mathrm{p}}_n \bar{\mathrm{p}}_{n+1} \mathrm{q}_n \mathrm{r}_n} \frac{1 - \frac{x_{\mathrm{q}_n}}{y_{\bar{\mathrm{p}}_n}} q^{-1}}{1 - \frac{x_{\mathrm{q}_n}}{y_{\bar{\mathrm{p}}_n}} q^{-1} \frac{z_n}{z_n'}} \frac{1 - \frac{y_{\mathrm{r}_n}}{y_{\bar{\mathrm{p}}_{n+1}}} q^{-1} \frac{z_n}{z_{n+1}'}}{1 - \frac{y_{\mathrm{r}_n}}{y_{\bar{\mathrm{p}}_{n+1}}} q^{-1}}, \tag{B.24}$$

and

$$\frac{\mathsf{Y}_{\lambda}^{(n)}(z_n q|z_n', z_{n+1}')}{\mathsf{Y}_{q\lambda}^{n}(z_n|z_n', z_{n+1}')} = \left(\frac{z_{n+1}'}{z_n'}\right)^{1/2} f_{\bar{\mathrm{p}}_n \bar{\mathrm{p}}_{n+1} \mathrm{q}_n \mathrm{r}_n} \frac{1 - \frac{y_{\mathrm{q}_n}}{x_{\bar{\mathrm{p}}_n}} q \frac{z_n'}{z_n}}{1 - \frac{y_{\mathrm{q}_n}}{x_{\bar{\mathrm{p}}_n}} q} \frac{1 - \frac{x_{\mathrm{r}_n}}{x_{\bar{\mathrm{p}}_{n+1}}} q}{1 - \frac{x_{\mathrm{r}_n}}{x_{\bar{\mathrm{p}}_{n+1}}} q \frac{z_{n+1}'}{z_n}}, \tag{B.25}$$

where:

$$f_{\bar{\mathrm{p}}_n \bar{\mathrm{p}}_{n+1} \mathrm{q}_n \mathrm{r}_n} = \frac{W_{\mathrm{q}_n \bar{\mathrm{p}}_n}(z(l))}{W_{\mathrm{q}_n \bar{\mathrm{p}}_n}(z(0))} \frac{\bar{W}_{\mathrm{r}_n \bar{\mathrm{p}}_{n+1}}(z(l))}{\bar{W}_{\mathrm{r}_n \bar{\mathrm{p}}_{n+1}}(z(0))}. \tag{B.26}$$

B.4 Baxter operator construction by gauge transformation

Here, we present explicitly the construction of the Baxter Q-operator which can be seen as a "generalized chiral Potts" transfer matrix and the computation of the coefficients of the corresponding Baxter equation.

B.4.1 Q-operator

Let us define the kernel of the Q-operator by the ansatz:

$$\mathsf{Q}_{\lambda}(\mathrm{z}, \mathrm{z}') \equiv \langle \mathrm{z}|\mathsf{Q}_{\lambda}|\mathrm{z}'\rangle = \prod_{n=1}^{\mathsf{N}} \mathsf{Y}_{\lambda}^{(n)}(z_n|z_n', z_{n+1}'), \tag{B.27}$$

where $\langle \mathrm{z}|$ and $|\mathrm{z}\rangle$ are the generic elements of the left and right u_n-eigenbasis and the $\mathsf{Y}_{\lambda}^{(n)}(z_n|z_n', z_{n+1}')$ are defined in (B.23). So the recursion (B.23), by using the parameter identifications (B.18)-(B.19), reads:

$$\frac{\mathsf{Y}_{\lambda}^{(n)}(z_n q^{-1}|z_n', z_{n+1}')}{\mathsf{Y}_{\lambda}^{(n)}(z_n q|z_n', z_{n+1}')} = -\frac{r_n z_n'}{r_{n+1} z_{n+1}'} \frac{\alpha_n \beta_n}{\mathbb{c}_n \mathbb{a}_n} \frac{\left(1 + \frac{q^{1/2} \lambda \mathbb{b}_n}{\beta_n r_n} \frac{z_n}{z_n'}\right) \left(1 - \frac{\lambda \mathbb{d}_n r_{n+1}}{q^{1/2} \beta_n} \frac{z_{n+1}'}{z_n}\right)}{\left(1 - \frac{q^{1/2} r_n \lambda \alpha_n}{\mathbb{a}_n} \frac{z_n'}{z_n}\right) \left(1 + \frac{\lambda \alpha_n}{q^{1/2} r_{n+1} \mathbb{c}_n} \frac{z_n}{z_{n+1}'}\right)}, \tag{B.28}$$

and then:

$$\langle \mathrm{z}|\tilde{L}_n(\lambda)_{21} \mathsf{Q}_{\lambda}|\mathrm{z}'\rangle = \prod_{h \neq n, h=1}^{\mathsf{N}} \mathsf{Y}_{\lambda}^{(h)}(z_h|z_h', z_{h+1}') \tilde{\mathrm{L}}_n(\lambda)_{21} \mathsf{Y}_{\lambda}^{(n)}(z_n|z_n', z_{n+1}') \overset{(B.28)}{=} 0, \tag{B.29}$$

i.e. the defining condition of the Q-operator.

B.4.2 Baxter equation

Let us derive the Baxter equation, from the condition (B.29), we have that:

$$\langle \mathrm{z}|\tau_2(\lambda) \mathsf{Q}_{\lambda}|\mathrm{z}'\rangle \equiv \prod_{n=1}^{\mathsf{N}} \tilde{\mathrm{L}}_n(\lambda)_{11} \mathsf{Y}_{\lambda}^{(n)}(z_n|z_n', z_{n+1}') + \prod_{n=1}^{\mathsf{N}} \tilde{\mathrm{L}}_n(\lambda)_{22} \mathsf{Y}_{\lambda}^{(n)}(z_n|z_n', z_{n+1}'), \tag{B.30}$$

where:

$$\tilde{\mathrm{L}}_n(\lambda)_{11}\mathsf{Y}_\lambda^{(n)}(z_n|z'_n,z'_{n+1}) = [(\lambda\alpha_n - \frac{\mathbb{a}_n z_n}{q^{1/2}r_n z'_n})\mathrm{v}_n - (\beta_n/\lambda + \frac{q^{1/2}\mathbb{b}_n z_n}{r_n z'_n})\mathrm{v}_n^{-1}]\mathsf{Y}_\lambda^{(n)}(z_n|z'_n,z'_{n+1})$$

$$\overset{(B.28)}{=} -\beta_n(q^{-1}\frac{\alpha_n\mathbb{d}_n}{\beta_n\mathbb{c}_n}\lambda + \frac{1}{\lambda})\frac{\left(1+\frac{q^{1/2}\lambda\mathbb{b}_n}{\beta_n r_n}\frac{z_n}{z'_n}\right)}{\left(1+\frac{\lambda\alpha_n}{q^{1/2}r_n\mathbb{c}_n}\frac{z_n}{z'_{n+1}}\right)}\mathrm{v}_n^{-1}\mathsf{Y}_\lambda^{(n)}(z_n|z'_n,z'_{n+1}), \tag{B.31}$$

and:

$$\tilde{\mathrm{L}}_n(\lambda)_{22}\mathsf{Y}_\lambda^{(n)}(z_n|z'_n,z'_{n+1}) = [(\gamma_n/\lambda + \frac{\mathbb{a}_n z_n}{q^{1/2}r_{n+1}z'_{n+1}})\mathrm{v}_n - (\delta_n\lambda - \frac{q^{1/2}\mathbb{b}_n z_n}{r_{n+1}z'_{n+1}})\mathrm{v}_n^{-1}]\mathsf{Y}_\lambda^{(n)}(z_n|z'_n,z'_{n+1})$$

$$\overset{(B.28)}{=} -\frac{r_n z'_n}{r_{n+1}z'_{n+1}}\beta_n(q\frac{\alpha_n\mathbb{b}_n}{\beta_n\mathbb{a}_n}\lambda + \frac{1}{\lambda})\frac{(1-\frac{\lambda\mathbb{d}_n r}{q^{1/2}\beta_n}\frac{z'_{n+1}}{z_n})}{\left(1-\frac{q^{1/2}r\lambda\alpha_n}{\mathbb{a}_n}\frac{z'_n}{z_n}\right)}\mathrm{v}_n^{-1}\mathsf{Y}_\lambda^{(n)}(z_n|z'_n,z'_{n+1}). \tag{B.32}$$

Now the recursions (B.24)-(B.25), by (B.18)-(B.19), read:

$$\frac{\mathsf{Y}_\lambda^{(n)}(z_n q|z'_n,z'_{n+1})}{\mathsf{Y}_{\lambda/q}^{n}(z_n|z'_n,z'_{n+1})} = \left(\frac{z'_{n+1}}{z'_n}\right)^{1/2} f_{\bar{\mathrm{p}}_n\bar{\mathrm{p}}_{n+1}\mathrm{q}_n\mathrm{r}_n}\frac{1+\frac{q^{1/2}\lambda\mathbb{b}_n}{\beta_n r_n}}{1+\frac{q^{1/2}\lambda\mathbb{b}_n}{\beta_n r_n}\frac{z_n}{z'_n}}\frac{1+\frac{\lambda\alpha_n}{q^{1/2}r_{n+1}\mathbb{c}_n}\frac{z_n}{z'_{n+1}}}{1+\frac{\lambda\alpha_n}{q^{1/2}r_{n+1}\mathbb{c}_n}}, \tag{B.33}$$

and

$$\frac{\mathsf{Y}_\lambda^{(n)}(z_n q|z'_n,z'_{n+1})}{\mathsf{Y}_{q\lambda}^{n}(z_n|z'_n,z'_{n+1})} = \left(\frac{z'_{n+1}}{z'_n}\right)^{1/2} f_{\bar{\mathrm{p}}_n\bar{\mathrm{p}}_{n+1}\mathrm{q}_n\mathrm{r}_n}\frac{1-\frac{q^{1/2}r_n\lambda\alpha_n}{\mathbb{a}_n}\frac{z'_n}{z_n}}{1-\frac{q^{1/2}r_n\lambda\alpha_n}{\mathbb{a}_n}}\frac{1-\frac{\lambda\mathbb{d}_n r_{n+1}}{q^{1/2}\beta_n}}{1-\frac{\lambda\mathbb{d}_n r_{n+1}}{q^{1/2}\beta_n}\frac{z'_{n+1}}{z_n}}. \tag{B.34}$$

So using (B.33) we get:

$$\begin{aligned}\tilde{\mathrm{L}}_n(\lambda)_{11}\mathsf{Y}_\lambda^{(n)}(z_n|z'_n,z'_{n+1}) &= -\left(\frac{z'_{n+1}}{z'_n}\right)^{1/2}\beta_n(q^{-1}\frac{\alpha_n\mathbb{d}_n}{\beta_n\mathbb{c}_n}\lambda + \frac{1}{\lambda})\frac{1+\frac{q^{1/2}\lambda\mathbb{b}_n}{\beta_n r_n}}{1+\frac{\lambda\alpha_n}{q^{1/2}r_{n+1}\mathbb{c}_n}} \\ &\quad \times f_{\bar{\mathrm{p}}_n\bar{\mathrm{p}}_{n+1}\mathrm{q}_n\mathrm{r}_n}\mathsf{Y}_{\lambda/q}^{n}(z_n|z'_n,z'_{n+1}),\end{aligned} \tag{B.35}$$

and analogously using (B.34) we get:

$$\begin{aligned}\tilde{\mathrm{L}}_n(\lambda)_{22}\mathsf{Y}_\lambda^{(n)}(z_n|z'_n,z'_{n+1}) &= -\frac{r_n}{r_{n+1}}\left(\frac{z'_n}{z'_{n+1}}\right)^{1/2}\beta_n(q\frac{\alpha_n\mathbb{b}_n}{\beta_n\mathbb{a}_n}\lambda + \frac{1}{\lambda})\frac{1-\frac{\lambda\mathbb{d}_n r_{n+1}}{q^{1/2}\beta_n}}{1-\frac{q^{1/2}r_n\lambda\alpha_n}{\mathbb{a}_n}} \\ &\quad \times f_{\bar{\mathrm{p}}_n\bar{\mathrm{p}}_{n+1}\mathrm{q}_n\mathrm{r}_n}\mathsf{Y}_{q\lambda}^{n}(z_n|z'_n,z'_{n+1}).\end{aligned} \tag{B.36}$$

Finally, we have the Baxter equation:

$$\tau_2(\lambda)\mathsf{Q}_\lambda = a_B(\lambda)\mathsf{Q}_{\lambda/q} + d_B(\lambda)\mathsf{Q}_{q\lambda}, \tag{B.37}$$

with coefficients which read:

$$a_B(\lambda) = (-1)^{\mathsf{N}}\prod_{n=1}^{\mathsf{N}}\beta_n f_{\bar{\mathrm{p}}_n\bar{\mathrm{p}}_{n+1}\mathrm{q}_n\mathrm{r}_n}(\frac{1}{\lambda} + q^{-1}\frac{\alpha_n\mathbb{d}_n}{\beta_n\mathbb{c}_n}\lambda)\frac{1+\frac{q^{1/2}\lambda\mathbb{b}_n}{\beta_n r_n}}{1+\frac{\lambda\alpha_n}{q^{1/2}r_{n+1}\mathbb{c}_n}}, \tag{B.38}$$

$$d_B(\lambda) = (-1)^{\mathsf{N}}\prod_{n=1}^{\mathsf{N}}\beta_n f_{\bar{\mathrm{p}}_n\bar{\mathrm{p}}_{n+1}\mathrm{q}_n\mathrm{r}_n}(\frac{1}{\lambda} + q\frac{\alpha_n\mathbb{b}_n}{\beta_n\mathbb{a}_n}\lambda)\frac{1-\frac{\lambda\mathbb{d}_n r_{n+1}}{q^{1/2}\beta_n}}{1-\frac{q^{1/2}r_n\lambda\alpha_n}{\mathbb{a}_n}}. \tag{B.39}$$

Remark 8. It is worth pointing out that these proofs hold also for the case of the τ_2-model on the chP curves just imposing that the r_n in (B.16) are all equal to the r in (5.4) plus the requirement that q_n and r_n are on the curve.

B.5 Connection between generalized Baxter $\mathbb{Q}$-operator and SOV construction

In the next two subsections we point out the connection among the averages of the coefficients of the Baxter equation (B.37) and the averages values of the Yang-Baxter operators in this way establishing the connection with the coefficients of the SOV-representations.

B.5.1 Averages of Baxter equation coefficients as eigenvalues of $\mathcal{M}(\Lambda)$

In this subsection we show that the averages of the coefficients of the Baxter equation and the cyclicity parameters $\{\sigma_1^p, ..., \sigma_{\mathsf{N}}^p\}$ are completely characterized in terms of the matrix $\mathcal{M}(\Lambda)$ composed by the averages of the Yang-Baxter generators. In particular, the averages of the Baxter equation coefficients (B.38) and (B.39) coincide with the eigenvalues of $\mathcal{M}(\Lambda)$ while the eigenstates of $\mathcal{M}(\Lambda)$ fix the $\{\sigma_1^p, ..., \sigma_{\mathsf{N}}^p\}$.

B.5.1.a Matrix characterization of cyclicity conditions

Let us recall that in appendix B.3, we have introduced the cyclicity conditions (B.22) to assure that the generalized Y-functions are well defined. These cyclicity conditions plus the closure condition $\sigma_{\mathsf{N}+1}^p = \sigma_1^p$ fix the parameters $\{\sigma_1^p, ..., \sigma_{\mathsf{N}}^p\}$. In particular, the following matrix characterization holds:

Lemma 11. *Let us define the* 2×2 *complex matrices:*

$$\mathbb{A}_n = A_n \cdots A_2 A_1, \tag{B.40}$$

with

$$A_n = \begin{pmatrix} s_{q_n}^p s_{r_n}^p x_p^p y_p^p - y_{q_n}^p y_{r_n}^p & x_p^p y_{r_n}^p - s_{q_n}^p s_{r_n}^p x_p^p x_{q_n}^p \\ s_{q_n}^p s_{r_n}^p y_p^p x_{r_n}^p - y_p^p y_{q_n}^p & x_p^p y_p^p - s_{q_n}^p s_{r_n}^p x_{q_n}^p x_{r_n}^p \end{pmatrix}, \tag{B.41}$$

then

$$\sigma_{n+1}^p = f_{\mathbb{A}_n}(\sigma_1^p) \tag{B.42}$$

and σ_1^p *is a solution of the quadratic fix-point equation:*

$$\sigma_1^p = f_{\mathbb{A}_{\mathsf{N}}}(\sigma_1^p). \tag{B.43}$$

Here, we have defined:

$$f_A(x) \equiv \frac{ax+b}{cx+d} \qquad \textit{for any } 2\times 2 \textit{ complex matrix} \qquad A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}. \tag{B.44}$$

Proof. Let us point out that the cyclicity conditions (B.22) can be seen as recursion relations on the σ_n^p parameters. In particular, the cyclicity conditions for the couple $(\sigma_n^p, \sigma_{n+1}^p)$ is clearly equivalent to:

$$\sigma_{n+1}^p = f_{A_n}(\sigma_n^p). \tag{B.45}$$

It is worth to recall now that (B.44) defines a group morphism between $GL(2, \mathbb{C})$ and the group of Möbius transformation:

$$f_{AB} = f_A \circ f_B \quad \forall A, B \in GL(2, \mathbb{C}). \tag{B.46}$$

Then, from this property we derive (B.42), which for $n = \mathsf{N}$ and by the closure condition $\sigma_{\mathsf{N}+1}^p = \sigma_1^p$ gives (B.43). □

B.5.1.b Solution of cyclicity conditions and averages of Baxter equation coefficients

Proposition 6. *Let us denote:*

$$\mathcal{M}(\Lambda) \begin{pmatrix} e_+^+ \\ e_+^- \end{pmatrix} = \Omega_+(\Lambda) \begin{pmatrix} e_+^+ \\ e_+^- \end{pmatrix}, \quad \mathcal{M}(\Lambda) \begin{pmatrix} e_-^+ \\ e_-^- \end{pmatrix} = \Omega_-(\Lambda) \begin{pmatrix} e_-^+ \\ e_-^- \end{pmatrix}, \tag{B.47}$$

then we have one of the following cases:

$$\sigma_1^p = -(x_p/y_p)^{p/2} e_+^+/e_+^-, \quad \prod_{n=1}^{p} a_B(\lambda q^n) = \Omega_+(\Lambda), \quad \prod_{n=1}^{p} d_B(\lambda q^n) = \Omega_-(\Lambda), \tag{B.48}$$

$$\sigma_1^p = -(x_p/y_p)^{p/2} e_-^+/e_-^-, \quad \prod_{n=1}^{p} a_B(\lambda q^n) = \Omega_-(\Lambda), \quad \prod_{n=1}^{p} d_B(\lambda q^n) = \Omega_+(\Lambda). \tag{B.49}$$

Proof. Let x and y be two complex numbers and define:

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = A \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \tag{B.50}$$

it holds:

$$f_A \left(\frac{x}{y} \right) = \frac{x'}{y'}. \tag{B.51}$$

Let (h_1, k_1) a couple of complex numbers such that $\sigma_1^p = h_1/k_1$, then we can define the following sequence:

$$\begin{pmatrix} h_n \\ k_n \end{pmatrix} = \mathbb{A}_{n-1} \begin{pmatrix} h_1 \\ k_1 \end{pmatrix} \tag{B.52}$$

which satisfies the property $\sigma_n^p = h_n/k_n$ thanks to (B.42), (B.50) and (B.52). So the closure relation (B.43) is equivalent to the solution of the spectral problem for the 2×2 complex matrix $\mathbb{A}_{\mathsf{N}}$:

$$\Lambda_{\mathbb{A}_{\mathsf{N}}} \begin{pmatrix} h_1 \\ k_1 \end{pmatrix} = \mathbb{A}_{\mathsf{N}} \begin{pmatrix} h_1 \\ k_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} h_{\mathsf{N}+1} \\ k_{\mathsf{N}+1} \end{pmatrix}. \tag{B.53}$$

From the definition (B.52), it is simple to show that the sequence (h_n, k_n) enjoys the interesting property:

$$\frac{k_{n+1}}{k_n} = \left(x_p^p y_p^p - x_{r_n}^p y_{r_n}^p \right) \frac{\sigma_n^p y_{q_n}^p - x_p^p}{\sigma_{n+1}^p x_{r_n}^p - x_p^p}, \quad \frac{h_n}{h_{n+1}} = \frac{1}{\det A_n} \left(x_p^p y_p^p - x_{q_n}^p y_{q_n}^p \right) \frac{\sigma_{n+1}^p y_p^p - x_{r_n}^p}{\sigma_n^p y_p^p - x_{q_n}^p}, \tag{B.54}$$

from which we derive:

$$\prod_{h=1}^{p} a_B(\lambda q^h) = \frac{k_{\mathsf{N}+1}}{k_1} \prod_{n=1}^{N} \left(\frac{t_p \lambda \alpha_n}{\mathbb{a}_n \mathbb{c}_n} \right)^{-p}, \quad \prod_{h=1}^{p} d_B(\lambda q^h) = \det \mathbb{A}_{\mathsf{N}} \frac{h_1}{h_{\mathsf{N}+1}} \prod_{n=1}^{N} \left(\frac{t_p \lambda \alpha_n}{\mathbb{a}_n \mathbb{c}_n} \right)^{-p}, \tag{B.55}$$

being:

$$\prod_{h=1}^{p} a_B(\lambda q^h) = \prod_{n=1}^{N} \frac{\left(x_p^p y_p^p - x_{r_n}^p y_{r_n}^p \right)}{\left(\frac{t_p \lambda \alpha_n}{\mathbb{a}_n \mathbb{c}_n} \right)^p} \frac{\sigma_n^p y_{q_n}^p - x_p^p}{\sigma_{n+1}^p x_{r_n}^p - x_p^p}, \tag{B.56}$$

$$\prod_{h=1}^{p} d_B(\lambda q^h) = \prod_{n=1}^{N} \frac{\left(x_p^p y_p^p - x_{q_n}^p y_{q_n}^p \right)}{\left(\frac{t_p \lambda \alpha_n}{\mathbb{a}_n \mathbb{c}_n} \right)^p} \frac{\sigma_{n+1}^p y_p^p - x_{r_n}^p}{\sigma_n^p y_p^p - x_{q_n}^p}. \tag{B.57}$$

To write the above averages formulae for the coefficients $a_B(\lambda)$ and $d_B(\lambda)$, we have used the formulae (B.38) and (B.39), the correspondence (B.15) and the fact that from the definition (B.26) of $f^2_{\bar{\mathrm{p}}_n \bar{\mathrm{p}}_{n+1} \mathrm{q}_n \mathrm{r}_n}$, we have:

$$\prod_{a=0}^{p-1} \Xi^a \left(f^2_{\bar{\mathrm{p}}_n \bar{\mathrm{p}}_{n+1} \mathrm{q}_n \mathrm{r}_n} \right) = \left(s_{\mathrm{q}_n}^p s_{\mathrm{r}_n}^p \frac{\sigma_{n+1}^p x_{\mathrm{r}_n}^p - x_{\mathrm{p}}^p}{\sigma_{n+1}^p y_{\mathrm{p}}^p - y_{\mathrm{r}_n}^p} \frac{\sigma_n^p y_{\mathrm{p}}^p - x_{\mathrm{q}_n}^p}{\sigma_n^p y_{\mathrm{q}_n}^p - x_{\mathrm{p}}^p} \right)^{2l} \underset{(B.22)}{=} 1. \tag{B.58}$$

Now remarking that:

$$\frac{k_{\mathsf{N}+1}}{k_1} = \left(\frac{h_1}{h_{\mathsf{N}+1}} \right)^{-1} = \Lambda_{\mathbb{A}_{\mathsf{N}}} \quad \text{and} \quad \det \mathbb{A}_{\mathsf{N}} = \Lambda_{\mathbb{A}_{\mathsf{N}}} \Lambda'_{\mathbb{A}_{\mathsf{N}}}, \tag{B.59}$$

with $\Lambda'_{\mathbb{A}_{\mathsf{N}}}$ the second eigenvalue of $\mathbb{A}_{\mathsf{N}}$, we obtain:

$$\prod_{h=1}^{p} a_B(\lambda q^h) = \Lambda_{\mathbb{A}_{\mathsf{N}}} \prod_{n=1}^{N} \left(\frac{t_p \lambda \alpha_n}{\mathbb{a}_n \mathbb{c}_n} \right)^{-p}, \quad \prod_{h=1}^{p} d_B(\lambda q^h) = \Lambda'_{\mathbb{A}_{\mathsf{N}}} \prod_{n=1}^{N} \left(\frac{t_p \lambda \alpha_n}{\mathbb{a}_n \mathbb{c}_n} \right)^{-p}. \tag{B.60}$$

Finally, to derive our results we have just to remark that the following identities hold:

$$A_n = \left(\frac{t_p \lambda \alpha_n}{\mathbb{a}_n \mathbb{c}_n} \right)^p \begin{pmatrix} -(x_p/y_p)^{p/2} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \mathcal{L}_n(\Lambda) \begin{pmatrix} -(x_p/y_p)^{-p/2} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \tag{B.61}$$

where $\mathcal{L}_n(\Lambda)$ is the average matrix (3.14) and so by Proposition 1:

$$\mathbb{A}_{\mathsf{N}} = \left(\prod_{n=1}^{N} \frac{t_p \lambda \alpha_n}{\mathbb{a}_n \mathbb{c}_n} \right)^p \begin{pmatrix} -(x_p/y_p)^{p/2} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \mathcal{M}(\Lambda) \begin{pmatrix} -(x_p/y_p)^{-p/2} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}. \tag{B.62}$$

□

B.5.2 Relations to the averages of the SOV coefficients

The following identities:

$$\prod_{n=1}^{p} a_B(\lambda q^n) + \prod_{n=1}^{p} d_B(\lambda q^n) = \mathcal{A}(\Lambda) + \mathcal{D}(\Lambda), \tag{B.63}$$

$$\prod_{n=1}^{p} a_B(\lambda q^n) d_B(\lambda q^n) = \det \mathcal{M}(\Lambda) = \prod_{i=1}^{p} \det{}_{\mathsf{q}} \mathsf{M}_{\mathsf{N}}(\lambda q^i), \tag{B.64}$$

are simply consequences of Proposition 6. They are important as they explicitly imply that the sum and the product of the averages of the Baxter equation coefficients are Laurent polynomials in Λ. Let us define the following set of complex numbers:

$$\mathsf{z}_{\mathsf{B}} \equiv \cup_{a=1}^{N-1} \cup_{k_a=0}^{p-1} \{\eta_a^{(k_a)}\} \tag{B.65}$$

where the $\eta_a^{(k_a)}$ were defined in (3.2), then we can prove:

Lemma 12. *It is possible to fix:*

$$\sigma_1^p\big|_{\lambda \in \mathsf{z}_{\mathsf{B}}} \neq 0, \tag{B.66}$$

then, under this choice, the following identities holds:

$$\mathcal{A}(\Lambda) = \prod_{n=1}^{p} a_B(\lambda q^n), \quad \mathcal{D}(\Lambda) = \prod_{n=1}^{p} d_B(\lambda q^n), \quad \forall \lambda \in \mathsf{z}_{\mathsf{B}}. \tag{B.67}$$

Proof. Let us remark that from Proposition 6 it holds:

$$\sigma_{1,\epsilon}^p = -(x_p/y_p)^{p/2} \frac{\mathcal{A}(\Lambda) - \mathcal{D}(\Lambda) + \epsilon\sqrt{(\mathcal{A}(\Lambda) - \mathcal{D}(\Lambda))^2 - 4\mathcal{B}(\Lambda)\mathcal{C}(\Lambda)}}{2}, \tag{B.68}$$

with $\epsilon = \pm$, then in the zeros of $\mathsf{B}(\lambda)$, we have:

$$\sigma_{1,+}^p = -(x_p/y_p)^{p/2} \left(\mathcal{A}(\Lambda) - \mathcal{D}(\Lambda)\right) \quad \text{or} \quad \sigma_{1,-}^p = 0. \tag{B.69}$$

Then it is clear that with the choice $\epsilon = +$ it holds:

$$\left.\prod_{n=1}^{p} a_B(\lambda q^n)\right|_{\epsilon=+} = \mathcal{A}(\Lambda), \qquad \forall \lambda \in \mathsf{z}_{\mathsf{B}}, \tag{B.70}$$

and so our statement (B.67) follows once we use the quantum determinant relation (B.64) at the zeros of $\mathsf{B}(\lambda)$:

$$\mathcal{A}(\Lambda)\mathcal{D}(\Lambda) = \det{}_{\mathsf{q}} \mathcal{M}_{\mathsf{N}}(\Lambda), \quad \forall \lambda \in \mathsf{z}_{\mathsf{B}}. \tag{B.71}$$

□

The Lemma 12 and the characterization of the coefficients of the Baxter equation (3.52) implies that we can always chose:

$$\prod_{n=1}^{p} \bar{\mathrm{A}}(\lambda q^n) = \prod_{n=1}^{p} a_B(\lambda q^n), \qquad \prod_{n=1}^{p} \bar{\mathrm{D}}(\lambda q^n) = \prod_{n=1}^{p} d_B(\lambda q^n). \tag{B.72}$$

The above average identities imply that there exist two functions $g(\lambda)$ and $f(\lambda)$ such that:

$$a_B(\lambda) = \frac{g(\lambda)}{g(\lambda/q)} \bar{\mathrm{A}}(\lambda), \qquad d_B(\lambda) = \frac{f(\lambda)}{f(q\lambda)} \bar{\mathrm{D}}(\lambda), \tag{B.73}$$

here we show that in fact these relations are stronger being:

$$g(\lambda) \propto f(\lambda). \tag{B.74}$$

The above statement follows by remarking that:

$$\frac{a_B(\lambda)d_B(\lambda/q)}{\bar{\mathrm{A}}(\lambda)\bar{\mathrm{D}}(\lambda/q)}=N_B(\lambda), \tag{B.75}$$

where:

$$N_B(\lambda)=\prod_{n=1}^{\mathsf{N}}\left(f_{\bar{\mathrm{p}}_n\bar{\mathrm{p}}_{n+1}\mathrm{q}_n\mathrm{r}_n}f_{\Xi(\bar{\mathrm{p}}_n)\Xi(\bar{\mathrm{p}}_{n+1})\mathrm{q}_n\mathrm{r}_n}\left(-\frac{\beta_n\alpha_n}{\mathbb{a}_n\mathbb{c}_n}\right)\frac{1+\frac{q^{1/2}\lambda\mathbb{b}_n}{\beta_n r_n}}{1+\frac{\lambda\alpha_n}{q^{1/2}r_{n+1}\mathbb{c}_n}}\frac{1-\frac{\lambda\mathbb{d}_n r_{n+1}}{q^{3/2}\beta_n}}{1-\frac{r_n\lambda\alpha_n}{q^{1/2}\mathbb{a}_n}}\right), \tag{B.76}$$

and from the following:

Lemma 13. *The function $N_B(\lambda)$ is the identity for all the representations of the τ_2-model.*

Proof. Let us rewrite the functions $f_{\bar{\mathrm{p}}_n\bar{\mathrm{p}}_{n+1}\mathrm{q}_n\mathrm{r}_n}$ by using their definition (B.26) and the parametrization (B.18)-(B.19); then they reads:

$$f_{\bar{p}_n,\bar{p}_{n+1},q_n,r_n}=\left(-\frac{\sigma_{n+1}}{\sigma_n}\frac{r_n^2}{r_{n+1}^2}\frac{\alpha_n\beta_n}{\mathbb{a}_n\mathbb{c}_n}\right)^l\prod_{k=1}^{l}\frac{1+q^{-2k}q^{3/2}\frac{\mathbb{b}_n}{\beta_n}\frac{\lambda}{r_n}}{1+q^{-2k}q^{1/2}\frac{\alpha_n}{\mathbb{c}_n}\frac{\lambda}{r_{n+1}}}\frac{1-q^{2k}q^{-3/2}\frac{\mathbb{d}_n}{\beta_n}\lambda r_{n+1}}{1-q^{2k}q^{-1/2}\frac{\alpha_n}{\mathbb{a}_n}\lambda r_n}, \tag{B.77}$$

and we can write:

$$N_B(\lambda)=\prod_{n=1}^{N}\left[\left(-\frac{\beta_n\alpha_n}{\mathbb{a}_n\mathbb{c}_n}\right)^p\frac{1+q^{p/2}\left(\frac{\mathbb{b}_n}{\beta_n}\frac{\lambda}{r_n}\right)^p}{1+q^{p/2}\left(\frac{\alpha_n}{\mathbb{c}_n}\frac{\lambda}{r_{n+1}}\right)^p}\frac{1-q^{p/2}\left(\frac{\mathbb{d}_n}{\beta_n}\lambda r_{n+1}\right)^p}{1-q^{p/2}\left(\frac{\alpha_n}{\mathbb{a}_n}\lambda r_n\right)^p}\right]. \tag{B.78}$$

Thanks to the cyclicity conditions (B.22) the r. h. s. of the last equation is 1 as announced. □

Remark 9. Let us point out that for general representations the generalized Baxter Q-operator is not proven to define a commuting family w.r.t. the spectral parameter λ as well as it is not proven to commute with $\tau_2(\lambda)$. In this general setting the eigenstates of $\tau_2(\lambda)$ are not necessarily eigenstates of the generalized Baxter Q-operator. Vice versa, the Baxter equation (B.37) implies that any eigenstate of the generalized Baxter Q-operator is also eigenstate of $\tau_2(\lambda)$ which so will be still constructed as explained in Theorem 3. Finally, let us remark that the previous results on the coefficients implies that the Baxter equations characterizing the generalized Baxter Q-operator and the Baxter Q-operator constructed by SOV coincide up to a gauge transformation.

C Properties of the cofactors $\mathrm{C}_{i,j}(\lambda)$

Lemma 14. *Let $t(\lambda)$ be a real Laurent polynomial of degree N in λ, then the cofactors of the matrix $D(\lambda)$ satisfy the following identities:*

$$\mathrm{C}_{h+i,k+i}(\lambda)=\mathrm{C}_{h,k}(\lambda q^i)\quad\forall i,h,k\in\{1,...,2l+1\}, \tag{C.1}$$

$$\mathrm{C}_{1,1}(\lambda)=\mathrm{C}_{1,1}(-\lambda),\quad \mathrm{C}_{2,1}(\lambda)=q^{\mathsf{N}}\mathrm{C}_{1,2}(-\lambda). \tag{C.2}$$

and:

$$(\mathrm{C}_{1,1}(\lambda))^*\equiv\mathrm{C}_{1,1}(\epsilon\lambda^*),\quad (\mathrm{C}_{1,2}(\lambda))^*\equiv\mathrm{C}_{1,2l+1}(\epsilon\lambda^*). \tag{C.3}$$

Proof. The proof of properties (C.1) and (C.2) coincides step by step with that given in Lemma 4 of [1]. Let us prove the property (C.3) for the cofactor $\mathrm{C}_{1,1}(\lambda)=\det_{2l}D_{1,1}(\lambda)$, where:

$$D_{1,1}(\lambda)\equiv\left\|t(\lambda q^h)\delta_{h,k}-\mathtt{a}(\lambda q^h)\delta_{h,k+1}-\mathtt{d}(\lambda q^h)\delta_{h,k-1}\right\|_{1\leq h\leq 2l,1\leq k\leq 2l}, \tag{C.4}$$

then by the properties under complex conjugation of $t(\lambda)$ and being $\mathtt{a}(\lambda)^*\equiv\epsilon^{\mathsf{N}}\mathtt{d}(\epsilon\lambda^*)$ it holds:

$$(D_{1,1}(\lambda))^*\equiv\left\|\epsilon^{\mathsf{N}}\left(t(\epsilon\lambda^*q^h)\delta_{h,k}-\mathtt{d}(\epsilon\lambda^*q^{p-h})\delta_{h,k+1}-\mathtt{a}(\lambda^*q^{p-h})\delta_{h,k-1}\right)\right\|_{1\leq h\leq 2l,1\leq k\leq 2l}, \tag{C.5}$$

Let $D^{\mathcal{C}}_{1,1}$ be the $2l \times 2l$ matrix of columns:

$$C_a^{D^{\mathcal{C}}_{1,1}} \equiv C_{p-a}^{D_{1,1}}, \quad \forall a \in \{1, ..., 2l\}, \tag{C.6}$$

where C_a^X denotes the column a of the matrix X, and let $D^{\mathcal{C},\mathcal{R}}_{1,1}$ be the $2l \times 2l$ matrix of rows:

$$R_a^{D^{\mathcal{C},\mathcal{R}}_{1,1}} \equiv R_{p-a}^{D^{\mathcal{C}}_{1,1}}, \quad \forall a \in \{1, ..., 2l\}, \tag{C.7}$$

where R_a^X denotes for the row a of the matrix X, then the following identity holds:

$$\det_{2l} D^{\mathcal{C},\mathcal{R}}_{1,1}(\epsilon\lambda^*) \equiv (\det_{2l} D_{1,1}(\lambda))^* \quad \rightarrow \quad (\mathsf{C}_{1,1}(\lambda))^* \equiv \mathsf{C}_{1,1}(\epsilon\lambda^*). \tag{C.8}$$

Analogously, it holds:

$$(\det_{2l-1} D_{(1,2),(1,2)}(\lambda))^* \equiv \epsilon^{\mathsf{N}} \det_{2l-1} D_{(1,2),(1,2)}(\epsilon\lambda^*/q), \tag{C.9}$$

and by using the expansions:

$$\mathsf{C}_{1,2l+1}(\lambda) = \prod_{h=1}^{2l} \mathtt{a}(\lambda q^h) + \mathtt{d}(\lambda/q) \det_{2l-1} D_{(1,2),(1,2)}(\lambda/q), \tag{C.10}$$

$$\mathsf{C}_{1,2}(\lambda) = \prod_{h=1}^{2l} \mathtt{d}(\lambda q^h) + \mathtt{a}(\lambda q) \det_{2l-1} D_{(1,2),(1,2)}(\lambda). \tag{C.11}$$

the second identity in (C.3) is just a consequence of (C.9). □

Lemma 15. *For any $t(\lambda) \in \Sigma_{\mathcal{T}_2}$ the following identities are verified:*

$$Z_{\mathsf{C}_{1,1}(\lambda)} \cap Z_{\mathsf{C}_{1,2}(\lambda)} \equiv Z_{\mathsf{C}_{1,1}(\lambda)} \cap Z_{\mathsf{C}_{1,2l+1}(\lambda)}, \tag{C.12}$$

and

$$\exists\, s_{p,\lambda_0} \subset Z_{\mathsf{C}_{1,1}(\lambda)} \quad \Rightarrow \quad s_{p,\lambda_0} \cap Z_{\mathsf{C}_{1,2}(\lambda)} \neq \emptyset, \tag{C.13}$$

for $s_{p,\lambda_0} \equiv (\lambda_0, q\lambda_0, ..., q^{2l}\lambda_0)$ any p-string.

Proof. The proof of identity (C.12) follows step by step the proof given in Lemma 5 of the paper [1]. Let us assume that (C.13) is not satisfied, then (4.17) implies that $\mathsf{s}_{p,\lambda_0} \subset Z_{\mathsf{C}_{1,2l+1}(\lambda)}$ from which (4.20) holds only if $\mathsf{s}_{p,\lambda_0} \subset Z_{\mathtt{d}(\lambda)}$, which is not verified by the definition of $\mathtt{d}(\lambda)$. □

References

[1] G. Niccoli, Nucl. Phys. B **835** (2010) 263.

[2] G. Niccoli, JHEP **03** (2011) 123.

[3] V. V. Bazhanov, Yu. G. Stroganov, J. Stat. Phys. **59** (1990) 799.

[4] R. J. Baxter, *Exactly Solved Models in Statistical Mechanics*, London–New York: Academic Press, 1982.

[5] S. Howes, L.P. Kadanoff and M. den Nijs, Nucl. Phys. B **215** (1983) 169.

[6] G. von Gehlen and V. Rittenberg, Nucl. Phys. B **257** (1985) 351.

[7] H. Au-Yang, B. M. McCoy, J. H. H. Perk, S. Tang and M. Yan, Phys. Lett. A **123** (1987) 219.

[8] B. M. McCoy, J. H. H. Perk, S. Tang and C. H. Sah, Phys. Lett. A **125** (1987) 9.

[9] H. Au-Yang, B. M. McCoy, J. H. H. Perk and S. Tang in *Algebraic Analysis. Vol. I. Papers dedicated to Professor Mikio Sato on the occasion of his sixtieth birthday, edited by M. Kashiwara and T. Kawai*, Academic Press, 1988.

[10] R. J. Baxter, J. H. H. Perk and H. Au-Yang, Phys. Lett. A **128** (1988) 138.

[11] H. Au-Yang, J. H. H. Perk, *Onsager's star triangle equation: Master key to the integrability*, in *Advanced Studies in Pure Mathematics* **19**, Kinokuniya-Academic, 1989; J. H. H. Perk, Proc. Symp. Pure Math. **49** I (1989) 341.

[12] R. J. Baxter, V. V. Bazhanov and J. H. H. Perk , Int. J. Mod. Phys. B **4** (1990) 803.

[13] R. J. Baxter, J. Stat. Phys. **57** (1989) 1.
[14] P. P. Kulish, N. Y. Reshetikhin and E. K. Sklyanin, Lett. Math. Phys. **5** (1981) 393.
[15] A. N. Kirillov, N. Yu. Reshetikhin, J. Phys. A **20** (1987) 1565.
[16] G. Albertini, B. M. McCoy and J. H. H. Perk, Adv. Study in Pure Math. **19** (1989) 1.
[17] G. Albertini, B. M. McCoy and J. H. H. Perk, Phys. Lett. A **135** (1989) 159.
[18] G. Albertini, B. M. McCoy and J. H. H. Perk, Phys. Lett. A **139** (1989) 204.
[19] V. O. Tarasov, Phys. Lett. A **147** (1990) 487.
[20] R. J. Baxter, Phys. Lett. A **133** (1988) 185.
[21] R. J. Baxter, Phys. Lett. A **146** (1990) 110.
[22] R. J. Baxter, J. Stat. Phys. **73** (1993) 461.
[23] H. Au-Yang and J. H. H. Perk, J. Phys. A: Math. Theor. **41** (2008) 275201.
[24] A. Nishino, T. Deguchi, J. Stat. Phys. **133** (2008) 587.
[25] H. Au-Yang and J. H. H. Perk, J. Phys. A: Math. Theor. **42** (2009) 375208.
[26] S. S. Roan, *Eigenvectors of an Arbitrary Onsager Sector in Superintegrable τ_2-model and Chiral Potts Model*, arXiv:1003.3621.
[27] L. Onsager, Phys. Rev. **65** (1944) 117.
[28] K. Fabricius, B. M. McCoy, MathPhys Odyssey, ed. M.Kashiwara and T.Miwa, Progress in Math Phys **23** (2001) 119.
[29] B. Davies, J. Phys. A: Math. Gen. **23** (1990) 2245.
[30] E. Date and S. S. Roan, Czech. J. Phys. **50** (2000) 37; S. S. Roan, J. Stat. Mech. (2005) P09007.
[31] A. Nishino and T. Deguchi, Phys. Lett. A **356** (2006) 366.
[32] S. S. Roan, J. Phys. A: Math. Theor. **40** (2007) 1481; S. S. Roan, J. Stat. Mech. (2009) P08012.
[33] G. Albertini, B. M. McCoy, J. H. H. Perk and S. Tang, Nucl. Phys. B **314** (1989) 741.
[34] R. J. Baxter, Phys. Rev. Lett. **94** (2005) 130602.
[35] R. J. Baxter, J. Stat. Phys. **120** (2005) 1.
[36] M. Jimbo, T. Miwa and A. Nakayashiki, J. Phys. A: Math. Gen. **26** (1993) 2199.
[37] R. J. Baxter, *Corner transfer matrices in statistical mechanics*, arXiv:cond-mat/0611167.
[38] R. J. Baxter, J. Stat. Phys. **132** (2008) 959.
[39] R. J. Baxter, J. Stat. Phys. **137** (2009) 798.
[40] H. Au-Yang and J. H. H. Perk, J. Phys. A: Math. Theor. **43** (2010) 025203.
[41] H. Au-Yang and J. H. H. Perk, J. Phys. A: Math. Theor. **44** (2011) 025205.
[42] H. Au-Yang and J. H. H. Perk, *Superintegrable chiral Potts model: Proof of the conjecture for the coefficients of the generating function G(t,u)*, arXiv:1108.4713v1.
[43] R. J. Baxter, J. Stat. Phys. **132** (2008) 983.
[44] A. Bugrij, O. Lisovyy, Phys. Lett. A **319** (2003) 390; A. Bugrij, O. Lisovyy, Theor. Math. Phys. **140** (2004) 987.
[45] N. Iorgov, J. Phys. A: Math. Theor. **44** (2011) 335005.
[46] N. Iorgov, S. Pakuliak, V. Shadura, Yu Tykhyy and G. von Gehlen, J. Stat. Phys. **139** (2010) 743.
[47] R. J. Baxter, J. Phys. A: Math. Gen. **43** (2010) 145002.
[48] R. J. Baxter, ANZIAM J. **51** (2010) 309.
[49] R. J. Baxter, J. Stat. Phys. **117** (2004) 1.
[50] H. Bethe, Z. Phys. **71** (1931) 205.
[51] F. C. Alcaraz, M. N. Barber, M. T. Batchelor, R. J. Baxter and G. R. W. Quispel, J. Phys. A **20** (1987) 6397.
[52] E. K. Sklyanin and L. D. Faddeev, Sov. Phys. Dokl. **23** (1978) 902.
[53] L. D. Faddeev and L. A. Takhtajan, Russ. Math. Surveys, **34**: 5 (1979) 11.
[54] P. P. Kulish and E. K. Sklyanin, Phys. Lett. A **70** (1979) 461.
[55] L. D. Faddeev, E. K. Sklyanin and L. A. Takhtajan, Theor. Math. Phys. **57** (1980) 688.
[56] L. D. Faddeev, Sov. Sci. Rev., Sect. C: Math. Phys. Rev. **1** (1980) 107.
[57] E. K. Sklyanin, J. Sov. Math. **19** (1982) 1546.
[58] P. P. Kulish and E. K. Sklyanin, *Integrable Quantum Field Theories* in *Lecture Notes in Physics* **151**, Berlin: Springer-Verlag, 1982.

[59] L. D. Faddeev in *Les Houches lectures 1982*, Elsevier Science Publishing, 1984.
[60] L. D. Faddeev, *How Algebraic Bethe Ansatz works for integrable model*, arXiv:hep-th/9605187v1.
[61] N. Yu. Reshetikhin, Lett. Math. Phys. **7** (1983) 205.
[62] N. Yu. Reshetikhin, Sov. Phys. JETP **57** (1983) 691.
[63] E. Mukhin, V. O. Tarasov and A. Varchenko, Comm. Math. Phys. **288** (2009) 1.
[64] G. Niccoli and J. Teschner, J. Stat. Mech. (2010) P09014.
[65] G. Albertini, S. Dasmahapatra and B. McCoy, Nucl. Phys. B **396** (1993) 506.
[66] G. Albertini, S. Dasmahapatra and B. McCoy, Int. J. Mod. Phys. A **7** Suppl. 1 (1992) 1.
[67] V. A. Fateev and A. B. Zamolodchikov, Phys. Lett. A **92** (1982) 37.
[68] K. Fabricius and B. M. McCoy, J. Stat. Phys. **103** (2001) 647.
[69] R. I. Nepomechie and F. Ravanini, J. Phys. A **36** (2003) 11391.
[70] E. K. Sklyanin, Lect. Notes Phys. **226** (1985) 196.
[71] E. K. Sklyanin, *Quantum inverse scattering method. Selected topics* in: *Quantum groups and quantum integrable systems*, World Scientific, 1992.
[72] E. K. Sklyanin, Prog. Theor. Phys. Suppl. **118** (1995) 35.
[73] G. von Gehlen, N. Iorgov, S. Pakuliak, V. Shadura and Yu. Tykhyy, J. Phys. A **40** (2007) 14117.
[74] G. von Gehlen, N. Iorgov, S. Pakuliak, V. Shadura and Yu. Tykhyy, J. Phys. A **41** (2008) 095003.
[75] G von Gehlen, N Iorgov, S Pakuliak, V Shadura, J. Phys. A: Math. Theor. **42** (2009) 304026.
[76] G. von Gehlen, N. Iorgov, S. Pakuliak and V. Shadura, J. Phys. A **39** (2006) 7257.
[77] N. Iorgov, *Eigenvectors of Open BazhanovStroganov Quantum Chain*, in *Symmetry, Integrability and Geometry: Methods and Applications* Vol. 2 (2006) Paper 019.
[78] S. Kharchev, D. Lebedev, Lett. Math. Phys. **50** (1999) 53.
[79] S. Kharchev and D. Lebedev, JETP Lett. **71** (2000) 235.
[80] S. Kharchev, D. Lebedev and Semenov-Tian-Shansky, Comm. Math. Phys. **225** (2002) 573.
[81] V. O. Tarasov, *Cyclic monodromy matrices for the R-matrix of the six-vertex model and the chiral Potts model with fixed spin boundary conditions.* Infinite analysis, Parts A, B (Kyoto, 1991), 963, Adv. Ser. Math. Phys., **16**, River Edge, NJ: World Sci. Publ., 1992.
[82] A. G. Izergin and V. E. Korepin, Dokl. Akad. Nauk **259** (1981) 76.
[83] A. G. Izergin and V. E. Korepin, *A lattice model related to the nonlinear Schroedinger equation*, arXiv:0910.0295v1.
[84] G. Harris and C. Martin, Proceeding of the American Mathematical Society, Vol. 100 Numb. 2 1987.
[85] V. V. Bazhanov and N. Yu. Reshetikhin, Int. J. Mod. Phys. A **4** (1989) 115.
[86] R. I. Nepomechie, J. Stat. Phys. **111** (2003) 1363.
[87] R. I. Nepomechie, J. Phys. A **37** (2004) 433.
[88] V. Pasquier and M. Gaudin, J. Phys. A **25** (1992) 5243.
[89] M. Gutzwiller, Ann. of Phys. **133** (1981) 304.
[90] A. Klümper, P. A. Pearce, J. Stat. Phys. **64** (1991) 13.
[91] A. Klümper, M. Batchelor, P. A. Pearce, J. Phys. A **23** (1991) 3111.
[92] K. K. Kozlowski, J. Teschner, *TBA for the Toda chain*, Proceedings of the Infinite Analysis 09, Kyoto, Japan, *New Trends In Quantum Integrable Systems*, World Scientific (2010) 195.
[93] V. V. Bazhanov, S. L. Lukyanov and A. B. Zamolodchikov, Comm. Math. Phys. **177** (1996) 381.
[94] Al. B. Zamolodchikov, J. Phys. A **39** (2006) 12863.
[95] A. Bytsko, J. Teschner, J. Phys. A **39** (2006) 12927.
[96] J. Teschner, Nucl. Phys. B **799** (2008) 403.
[97] C. Destri, H. J. De Vega, Phys. Rev. Lett. **69** (1992) 2313.
[98] C. Destri, H. J. de Vega, Nucl. Phys. B **438** (1995) 413.
[99] C. Destri, H. J. de Vega, Nucl. Phys. B **504** (1997) 621.
[100] D. Fioravanti, A. Mariottini, E. Quattrini and F. Ravanini, Phys. Lett. B **390** (1997) 243.
[101] G. Feverati, F. Ravanini, G. Takacs, Phys. Lett. B **430** (1998) 264; Nucl. Phys. B **540** (1999) 543.

[102] G. Feverati, *Finite Volume Spectrum of Sine-Gordon Model and its Restrictions*, Ph.D. Thesis, Bologna University (2000), arXiv:hep-th/0001172v1.

[103] F. Ravanini, *Finite Size Effects in Integrable Quantum Field Theories*, hep-th/0102148.

[104] D. Fioravanti, M. Rossi, J. Phys. A **34** (2001) L567; J. Phys. A **35** (2002) 3647; JHEP **07** (2003) 031; JHEP **08** (2003) 042.

[105] V. V. Bazhanov, *Chiral Potts model and the discrete Sine-Gordon model at roots of unity*, Preprint arXiv:hep-th/0809.2351v2.

[106] N. Grosjean, J. M. Maillet, G. Niccoli, *On form factors of local operators in the τ_2-model and the chiral Potts model*, to appear.

[107] N. Grosjean, J. M. Maillet, G. Niccoli, *On form factors of local operators in the lattice sine-Gordon model*, arXiv:1203.6307v1.

[108] A. G. Izergin and V. E. Korepin, Nucl. Phys. B **205** (1982) 401.

[109] N. Kitanine, J. M. Maillet and V. Terras, Nucl. Phys. B **554** (1999) 647.

[110] W. Heisenberg, Z. Phys **49** (1928) 619.

[111] L. D. Faddeev and R. M. Kashaev, Mod. Phys. Lett. A **9** (1994) 427.

Article III

On the form factors of local operators in the Bazhanov-Stroganov and chiral Potts models

En cours de soumission auprès des Annales Henri Poincaré

LPENSL-TH-13-??
CNYITP-13-??

On the form factors of local operators in the τ_2 and chiral Potts models

N. Grosjean[1], **J. M. Maillet**[2], **G. Niccoli**[3]

Abstract

We consider general cyclic representations of the 6-vertex Yang-Baxter algebra and analyze the associated quantum integrable systems, the so-called τ_2 model, and the corresponding chiral Potts model on finite size lattices. We first determine the *propagator operator* in terms of the chiral Potts transfer matrices and we compute the scalar product of *separate states* (including the transfer matrix eigenstates) as a single determinant formulae in the framework of Sklyanin's quantum separation of variables. Then, we construct a basis of operators whose form factors are also characterized by a single determinant formulae. This implies that the form factors of any local operator are expressed as finite sums of determinants. Among these form factors written in determinant form are in particular those which will reproduce the chiral Potts order parameters in the thermodynamic limit.

[1] Laboratoire de Physique, UMR 5672 du CNRS, ENS Lyon, France, nicolas.grosjean@ens-lyon.fr
[2] Laboratoire de Physique, UMR 5672 du CNRS, ENS Lyon, France, maillet@ens-lyon.fr
[3] YITP, Stony Brook University, New York, USA, niccoli@max2.physics.sunysb.edu

Contents

1 Introduction

In the paper [1] we developed an approach in the framework of the quantum inverse scattering method (QISM) [2]-[14] to achieve the complete solution of lattice integrable quantum models by the exact characterization of their spectrum and the computation of the matrix elements of local operators in the eigenstates basis. This approach is addressed to the large class of integrable quantum models whose spectrum (eigenvalues and eigenstates) can be determined by implementing Sklyanin's quantum separation of variables (SOV) method [15]-[17]. It can be considered as the generalization to this SOV framework of the Lyon group method[1] for the computation of matrix elements of local operators in the algebraic Bethe ansatz settings. In [1] the approach has been developed for the lattice quantum sine-Gordon model [5, 14] associated by QISM to cyclic representations [53] of the 6-vertex Yang-Baxter algebra. More in detail, in [54]-[56] the complete SOV spectrum characterization has been constructed for the lattice quantum sine-Gordon model while in [1] the scalar product of separate states and the matrix elements of local operators have been computed. In the present article we implement this approach for the quantum models associated by QISM to the most general cyclic representations of the 6-vertex Yang-Baxter algebra, i.e. the inhomogeneous τ_2-model and subsequently the chiral Potts (chP) model [57]-[72], by exploiting the well known links between these two models [57]. We first build our two central tools for computing matrix elements of local operators, i.e. the expression of the scalar products of separate states in terms of a determinant formula and the local fields reconstruction in terms of quantum separated variables (by solving the so called quantum inverse scattering problem). Then, we use these results to compute the form factors of local operators on the transfer matrix eigenstates and to express them as sums of determinants given by simple deformations of the ones giving the scalar product of states.

1.1 Literature summary

Let us first summarize some known results concerning these quantum integrable models and that are relevant for our present work. In [57] the τ_2-model was introduced from its Lax operator built as a general solution to the Yang-Baxter equation associated to the 6-vertex R-matrix. For a specific subset of cyclic representations, in which the parameters lie on the algebraic curves associated to the chP-model, the construction of the Baxter Q-operator allowed for the analysis of the spectrum (eigenvalues). This Q-operator was shown to coincide with the transfer matrix of the integrable Z_p chP-model [60]-[68]; in this way a first remarkable connection between these two apparently very different models[2] was established. Additional functional equations of fusion hierarchy type[3] for commuting transfer matrices[4] were

[1]This method has been introduced in [18] in the framework of the algebraic Bethe ansatz (ABA) [2]-[5] for the spin-1/2 XXZ quantum chain [19]-[27] with periodic boundary conditions and then further developed in [28]-[40]. The extension of this method to the higher spin XXX quantum chains and to the open spin-1/2 XXZ quantum chains [46]-[52] with diagonal boundary conditions has been respectively implemented in [41]-[42] and [43]-[45].

[2]Note that in a 2-dimensional statistical mechanics formulation both models have Boltzmann weights which satisfy the star-triangle equations. However, while the weights of the τ_2-model satisfy the difference property in the rapidities those of the chP-model do not. It is worth recalling that the first solutions of the star-triangle equations with this non-difference property were obtained in [69, 70, 71] while in [64] the general solutions for the chP-model were derived.

[3]The approach of fusion hierarchy of commuting transfer matrices was first introduced in [73, 74].

[4]The τ_2-transfer matrix is the second element in this hierarchy, this explains the name given by Baxter to the model.

then exhibited in [58]. Bethe ansatz type equations play an important role in the special sub-variety of the super-integrable chP-model as it was first shown in [60, 61, 62]. The connection between the τ_2-model and the chP-model allowed to introduce rigorously [72] the description of the super-integrable chP spectrum using algebraic Bethe ansatz. The Bethe ansatz construction was applied to the τ_2-transfer matrix, thus obtaining in a different way the Baxter results [67] on the subset of the translation-invariant eigenvectors of the super-integrable chP-model[5]. More recently, the extension of the eigenvalue analysis of the τ_2-model to completely general cyclic representations was done by Baxter [59]. The main tool used there was the construction of a generalized Q-operator which satisfies the Baxter equation with the τ_2-transfer matrix and the extension to these representations of the functional relations of the fused transfer matrices.

Another important feature of the chP-model which has been the subject of recent attention is the spontaneous magnetization. This order parameter was first described in [77] on the basis of perturbative calculations developed for the special class of super-integrable representations[6]. The first non perturbative derivation of this order parameter was achieved only recently by Baxter under some natural analyticity assumptions and the use of a technique introduced by Jimbo et al. [80]. More classical techniques, like the corner transfer matrix [81], could not be used, mainly because of the very nature of the chP-model [82]. The proof of the spontaneous magnetization formula [77] starting from direct computations on the finite lattice of matrix elements of the spin operators could only be achieved after the recent introduction by Baxter [83, 84] of a generalized version of the Onsager algebra for the special class of super-integrable representations of chP-model. The matrix elements used for this proof have been first analyzed by Au-Yand and Perk in a series of papers [75, 76], [85]-[87] for the case of the super-integrable chP-model. Their factorized form, first conjectured by Baxter [88], has been proven[7] by Iorgov et al [89] and used to derive the spontaneous magnetization formula conjectured in [77]. Finally, it is worth recalling that, in the algebraic framework of generalized Onsager algebra, Baxter has also first conjectured [92] and successively proven in [93] a determinant formula for the spontaneous magnetization of the super-integrable chP-model; this result is also used for a further derivation of the known formula of the order parameter in the thermodynamical limit.

1.2 Motivations for the use of SOV

Let us comment that in the literature we just recalled, the spectral analysis has usually one or more of the following problems: there is no eigenstates construction for the functional methods based only on the Baxter Q-operator and the fusion of transfer matrices. The ABA applies only to very special representations of the τ_2-model as well as the algebraic framework of the generalized Onsager algebra is proven to exist only in the class of super-integrable representations of chiral Potts model. The proof of the completeness is not ensured by these methods and it was so far missing in the general p-state chP-model and τ_2-model. Existing results about this issue are mainly restricted to the case of the 3-state super-integrable chP-model [94] and to the reduction of the 3-state Potts model to the trivial algebraic

[5]For further analysis of the eigenstates of super-integrable chP-model see also [75, 76].

[6]This case both obeys Yang-Baxter integrability [64] and has an underlying Onsager algebra [63].

[7]Note that factorized formulas for the spin matrix elements exist also for the 2D Ising model [90] and for the quantum XY-chain [91].

curve case [95], i.e. the Fateev-Zamolodchikov model [96], see also [97] and [98] for further applications of this method.

The circumstance interesting for us is that, in the case of the cyclic representations of the τ_2-model for which the algebraic Bethe ansatz does not apply, Sklyanin's quantum SOV can be developed to analyze the system. This means that, for most[8] of the representations of this model, we have the opportunity to use the SOV method, which appears quite promising as it leads to both the eigenvalues and the eigenstates of the τ_2-transfer matrix with a complete spectrum construction if some simple conditions are satisfied. The SOV analysis of these representations was first introduced[9] in [99] and further developed in [104]. Here we will use these SOV results as setup for the computation of the form factors of local operators. Let us recall that in [104], the functional equation characterization of the transfer matrix spectrum has been derived purely on the basis of the SOV spectrum characterization[10] together with a first proof of the completeness of the system of equations of Bethe ansatz type[11] for some classes of representations of τ_2-model and chP-model and the simplicity of these transfer matrix spectra in the inhomogeneous models.

Beyond these motivations on the spectrum analysis, the summary presented in the previous subsection makes clear that the computations of matrix elements of local operators are so far mainly confined to the special class of super-integrable representations of chP-model as they were derived in the algebraic framework of the generalized Onsager algebra. This stresses the relevance of our approach in quantum separation of variables which leads to form factors of local operators and applies to generic representations of τ_2-model and chiral Potts model to which the methods based on generalized Onsager algebra do not apply up to now.

2 The τ_2-model

We use this section to give our notations and to briefly recall the main results derived in [104] on the spectrum description by SOV of the τ_2-model and chiral Potts model that are useful for our purposes.

[8]The values of the parameters of the representations for which ABA applies define a proper sub-variety in the full space of the parameters of the representations of the τ_2-model.

[9]There the eigenvector analysis developed in [100] was used to obtain the SOV representations of the τ_2-model. See also the series of works [101, 102, 103] where the form factors of local spin operators were computed by SOV for the special case (p=2) of the generalized Ising model.

[10] Note that for cyclic representations the SOV does not lead directly to the spectrum characterization by functional equations and so, in particular, it does not lead to Bethe equations.

[11]For Bethe ansatz methods, as the coordinate Bethe ansatz [20, 81, 105], the algebraic Bethe ansatz [3, 4, 5] and the analytic Bethe ansatz [106, 107], a proof of the completeness was achieved only for few integrable quantum models, see as concrete examples [108] for the XXX Heisenberg model, [109] for the infinite XXZ spin chain with domain wall boundary conditions and [110] for the nonlinear quantum Schroedinger model.

2.1 The τ_2-model: definitions and first properties

We define in the N sites of the chain N local Weyl algebras $\mathcal{W}_n$ and denote by u_n and v_n their generators:

$$\mathsf{u}_n \mathsf{v}_m = q^{\delta_{n,m}} \mathsf{v}_m \mathsf{u}_n \quad \forall n, m \in \{1, ..., \mathsf{N}\}. \tag{2.1}$$

The Lax operator of the τ_2-model reads[12]:

$$\mathsf{L}_n(\lambda) \equiv \begin{pmatrix} \lambda\alpha_n \mathsf{v}_n - \beta_n \lambda^{-1} \mathsf{v}_n^{-1} & \mathsf{u}_n \left(q^{-1/2} \mathbb{a}_n \mathsf{v}_n + q^{1/2} \mathbb{b}_n \mathsf{v}_n^{-1}\right) \\ \mathsf{u}_n^{-1} \left(q^{1/2} \mathbb{c}_n \mathsf{v}_n + q^{-1/2} \mathbb{d}_n \mathsf{v}_n^{-1}\right) & \gamma_n \mathsf{v}_n / \lambda - \delta_n \lambda / \mathsf{v}_n \end{pmatrix}, \tag{2.2}$$

where α_n, β_n, γ_n, δ_n, $\mathbb{a}_n$, $\mathbb{b}_n$, $\mathbb{c}_n$ and $\mathbb{d}_n$ are constants associated to the site n of the chain subject to the relations :

$$\alpha_n \gamma_n = \mathbb{a}_n \mathbb{c}_n, \qquad \beta_n \delta_n = \mathbb{b}_n \mathbb{d}_n. \tag{2.3}$$

The monodromy matrix of the model is defined in terms of the Lax operators by:

$$\mathsf{M}(\lambda) = \begin{pmatrix} \mathsf{A}(\lambda) & \mathsf{B}(\lambda) \\ \mathsf{C}(\lambda) & \mathsf{D}(\lambda) \end{pmatrix} \equiv \mathsf{L}_{\mathsf{N}}(\lambda) \cdots \mathsf{L}_1(\lambda). \tag{2.4}$$

It satisfies the quadratic Yang-Baxter relation :

$$R(\lambda/\mu)\,(\mathsf{M}(\lambda) \otimes 1)\,(1 \otimes \mathsf{M}(\mu)) \;=\; (1 \otimes \mathsf{M}(\mu))\,(\mathsf{M}(\lambda) \otimes 1) R(\lambda/\mu)\,, \tag{2.5}$$

driven by the six-vertex (standard) R-matrix:

$$R(\lambda) = \begin{pmatrix} q\lambda - q^{-1}\lambda^{-1} & & & \\ & \lambda - \lambda^{-1} & q - q^{-1} & \\ & q - q^{-1} & \lambda - \lambda^{-1} & \\ & & & q\lambda - q^{-1}\lambda^{-1} \end{pmatrix}. \tag{2.6}$$

Then the elements of $\mathsf{M}(\lambda)$ generate a representation $\mathcal{R}_{\mathsf{N}}$ of the so-called Yang-Baxter algebra. In particular, (2.5) yields the relation $[\mathsf{B}(\lambda), \mathsf{B}(\mu)] = 0$, for all λ and μ, and the mutual commutativity of the elements of the one parameter family of transfer matrix operators:

$$\tau_2(\lambda) \equiv \operatorname{tr}_{\mathbb{C}^2} \mathsf{M}(\lambda) \;= \mathsf{A}(\lambda) + \mathsf{D}(\lambda). \tag{2.7}$$

Let us introduce the operator:

$$\Theta = \prod_{n=1}^{\mathsf{N}} \mathsf{v}_n, \tag{2.8}$$

which plays the role of a *grading operator* in the Yang-Baxter algebra[13]:

Lemma 2.1. ***(Lemma 1 of [104])*** *Θ commutes with the transfer matrix and satisfies the following commutation relations with the entries of the monodromy matrix:*

$$\begin{aligned} \Theta \mathsf{C}(\lambda) &= q\mathsf{C}(\lambda)\Theta, \quad [\mathsf{A}(\lambda), \Theta] = 0, & (2.9) \\ \mathsf{B}(\lambda)\Theta &= q\Theta\mathsf{B}(\lambda), \quad [\mathsf{D}(\lambda), \Theta] = 0. & (2.10) \end{aligned}$$

[12]Up to different notations, this Lax operator coincides with the one introduced in [57].

[13]The proof of the lemma is given following the same steps of that of Proposition 6 of [54].

Besides, the Θ-charge allows to express the following asymptotics in both $\lambda \to 0$ and $\lambda \to \infty$ of the leading operators of the Yang-Baxter algebras:

$$\mathsf{A}(\lambda) = \left(\lambda^{\mathsf{N}}\Theta \prod_{a=1}^{\mathsf{N}} \alpha_n + (-1)^{\mathsf{N}} \lambda^{-\mathsf{N}} \Theta^{-1} \prod_{a=1}^{\mathsf{N}} \beta_a\right) + \sum_{i=1}^{\mathsf{N}-1} \mathsf{A}_i \lambda^{\mathsf{N}-2i}, \tag{2.11}$$

$$\mathsf{D}(\lambda) = \left(\lambda^{-\mathsf{N}}\Theta \prod_{a=1}^{\mathsf{N}} \gamma_a + (-1)^{\mathsf{N}} \lambda^{\mathsf{N}} \Theta^{-1} \prod_{a=1}^{\mathsf{N}} \delta_a\right) + \sum_{i=1}^{\mathsf{N}-1} \mathsf{D}_i \lambda^{\mathsf{N}-2i}, \tag{2.12}$$

with A_i and D_i being operators, and so

$$\lim_{\log\lambda \to \mp\infty} \lambda^{\pm\mathsf{N}} \tau_2(\lambda) = \left(\Theta^{\mp 1} a_{\mp} + \Theta^{\pm 1} d_{\mp}\right), \tag{2.13}$$

where $\lim_{\log\lambda\to-\infty}$ means $\lim_{\lambda\to 0}$, $\lim_{\log\lambda\to+\infty}$ means $\lim_{\lambda\to\infty}$ and:

$$a_+ \equiv \prod_{a=1}^{\mathsf{N}} \alpha_a, \quad a_- \equiv (-1)^{\mathsf{N}} \prod_{a=1}^{\mathsf{N}} \beta_a, \quad d_+ \equiv (-1)^{\mathsf{N}} \prod_{a=1}^{\mathsf{N}} \delta_a, \quad d_- \equiv \prod_{a=1}^{\mathsf{N}} \gamma_a. \tag{2.14}$$

We only consider here representations for which the Weyl algebra generators u_n and v_n are unitary operators; then the following Hermitian conjugation properties of the generators of Yang-Baxter algebra hold:

Lemma 2.2. ***(Lemma 2 of [104])*** *Let $\epsilon \in \{+1, -1\}$, then under the following constrains on the parameters:*

$$\mathbb{c}_n = -\epsilon \mathbb{b}_n^*, \quad \mathbb{d}_n = -\epsilon \mathbb{a}_n^*, \quad \beta_n = \epsilon\left(\mathbb{a}_n^* \mathbb{b}_n\right)/\alpha_n^*, \qquad , \tag{2.15}$$

the generators of the Yang-Baxter algebra satisfy the following transformations under Hermitian conjugation:

$$\mathsf{M}(\lambda)^\dagger \equiv \begin{pmatrix} \mathsf{A}^\dagger(\lambda) & \mathsf{B}^\dagger(\lambda) \\ \mathsf{C}^\dagger(\lambda) & \mathsf{D}^\dagger(\lambda) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathsf{D}(\lambda^*) & -\epsilon\mathsf{C}(\lambda^*) \\ -\epsilon\mathsf{B}(\lambda^*) & \mathsf{A}(\lambda^*) \end{pmatrix}, \tag{2.16}$$

which, in particular, imply the self-adjointness of the transfer matrix $\tau_2(\lambda)$ for real λ.

2.2 Cyclic representations

Here, we will consider representations where both v_n and u_n have discrete spectra; in particular, we will restrict our attention to the case in which q is a root of unity:

$$q = e^{-i\pi\beta^2}, \quad \beta^2 = \frac{p'}{p}, \qquad p, p' \in \mathbb{Z}^{>0}, \tag{2.17}$$

with p odd and p' even being two co-prime numbers so that $q^p = 1$. The condition (2.17) implies that the powers p of the generators u_n and v_n are central elements of each Weyl algebra $\mathcal{W}_n$. In this case, we fix them to the identity:

$$\mathsf{v}_n^p = 1, \quad \mathsf{u}_n^p = 1. \tag{2.18}$$

We associate a p-dimensional linear space R_n to any site n of the chain and we can define on it the following cyclic representation of $\mathcal{W}_n$:

$$\mathsf{v}_n|k_n\rangle \equiv q^{k_n}|k_n\rangle, \;\; \mathsf{u}_n|k_n\rangle \equiv |k_n - 1\rangle, \quad \forall k_n \in \{0, ..., p-1\}, \tag{2.19}$$

with the following cyclicity condition:

$$|k_n + p\rangle \equiv |k_n\rangle. \tag{2.20}$$

The vectors $|k_n\rangle$ define a v_n-eigenbasis of the local space R_n. Let L_n be the linear space dual of R_n and let $\langle k_n|$ be the elements of the dual basis defined by:

$$\langle k_n|k_n'\rangle = (|k_n\rangle, |k_n'\rangle) \equiv \delta_{k_n,k_n'} \quad \forall k_n, k_n' \in \{0, ..., p-1\}. \tag{2.21}$$

From the unitarity of the generators u_n and v_n, the covectors $\langle k_n|$ define a v_n-eigenbasis in the dual space L_n and the following left representation of Weyl algebra $\mathcal{W}_n$ results induced:

$$\langle k_n|\mathsf{v}_n = q^{k_n}\langle k_n|, \;\; \langle k_n|\mathsf{u}_n = \langle k_n + 1|, \quad \forall k_n \in \{0, ..., p-1\}, \tag{2.22}$$

with cyclicity condition:

$$\langle k_n| = \langle k_n + p|. \tag{2.23}$$

In the *left* and *right* linear spaces:

$$\mathcal{L}_{\mathsf{N}} \equiv \otimes_{n=1}^{\mathsf{N}} \mathrm{L}_n, \quad \mathcal{R}_{\mathsf{N}} \equiv \otimes_{n=1}^{\mathsf{N}} \mathrm{R}_n, \tag{2.24}$$

the representations of the Weyl algebras $\mathcal{W}_n$ induce cyclic left and right representations of dimension p^{N} of the monodromy matrix elements, i.e. of the Yang-Baxter algebra. In the following, we will denote with $\mathcal{R}_{\mathsf{N}}^{\text{S-adj}}$ the sub-variety of the space of representations $\mathcal{R}_{\mathsf{N}}$ defined by the condition (2.15).

2.2.1 Centrality of operator averages

Let us define the average value $\mathcal{O}$ of any operator matrix element O of the monodromy matrix $\mathsf{M}(\lambda)$ as

$$\mathcal{O}(\Lambda) \,=\, \prod_{k=1}^{p} \mathsf{O}(q^k\lambda)\,, \qquad \Lambda \,=\, \lambda^p, \tag{2.25}$$

then the commutativity of each family of operators $\mathsf{A}(\lambda)$, $\mathsf{B}(\lambda)$, $\mathsf{C}(\lambda)$ and $\mathsf{D}(\lambda)$ implies that the corresponding average values are functions of Λ.

Proposition 2.1. ***(Proposition 1 of [104])***

a) The average values $\mathcal{A}(\Lambda)$, $\mathcal{B}(\Lambda)$, $\mathcal{C}(\Lambda)$, $\mathcal{D}(\Lambda)$ of the monodromy matrix elements are central elements. Furthermore, they satisfy the following relations:

$$(\mathcal{A}(\Lambda))^* \equiv \mathcal{D}(\Lambda^*), \quad (\mathcal{B}(\Lambda))^* \equiv -\epsilon\mathcal{C}(\Lambda^*), \tag{2.26}$$

under complex conjugation in the case of self-adjoint representations $\mathcal{R}_{\mathsf{N}}^{\textit{S-adj}}$.

b) Let

$$\mathcal{M}(\Lambda) \equiv \left(\begin{array}{cc} \mathcal{A}(\Lambda) & \mathcal{B}(\Lambda) \\ \mathcal{C}(\Lambda) & \mathcal{D}(\Lambda) \end{array}\right) \tag{2.27}$$

be the 2×2 matrix made of the average values of the elements of the monodromy matrix $\mathsf{M}(\lambda)$*, then it holds:*

$$\mathcal{M}(\Lambda) = \mathcal{L}_{\mathsf{N}}(\Lambda)\,\mathcal{L}_{\mathsf{N}-1}(\Lambda)\,\ldots\,\mathcal{L}_1(\Lambda)\,, \tag{2.28}$$

where:

$$\mathcal{L}_n(\Lambda) \equiv \left(\begin{array}{cc} \Lambda\alpha_n^p - \beta_n^p/\Lambda & q^{p/2}(\mathbb{a}_n^p + \mathbb{b}_n^p) \\ q^{p/2}(\mathbb{c}_n^p + \mathbb{d}_n^p) & \gamma_n^p/\Lambda - \Lambda\delta_n^p \end{array}\right), \tag{2.29}$$

is the 2×2 matrix made of the average values of the elements of the Lax matrix $\mathsf{L}_n(\lambda)$*.*

2.2.2 Quantum determinant

The following linear combination of products of the Yang-Baxter generators:

$$\mathrm{det_q}\mathsf{M}(\lambda) \equiv \mathsf{A}(\lambda)\mathsf{D}(\lambda/q) - \mathsf{B}(\lambda)\mathsf{C}(\lambda/q), \tag{2.30}$$

is called quantum determinant and it is central[14] in this algebra. It admits the following factorized form:

$$\mathrm{det_q}\mathsf{M}(\lambda) = \prod_{n=1}^{\mathsf{N}} \mathrm{det_q}\mathsf{L}_n(\lambda), \tag{2.31}$$

in terms of the local quantum determinants:

$$\mathrm{det_q}\mathsf{L}_n(\lambda) \equiv (\mathsf{L}_n(\lambda))_{11}\,(\mathsf{L}_n(\lambda/q))_{22} - (\mathsf{L}_n)_{12}\,(\mathsf{L}_n)_{21}\,. \tag{2.32}$$

In the τ_2-model it reads:

$$\begin{aligned} \mathrm{det_q}\mathsf{M}(\lambda) &= \prod_{n=1}^{\mathsf{N}} k_n\Big(\frac{\lambda}{\mu_{n,+}} - \frac{\mu_{n,+}}{\lambda}\Big)\Big(\frac{\lambda}{\mu_{n,-}} - \frac{\mu_{n,-}}{\lambda}\Big) \\ &= (-q)^{\mathsf{N}} \prod_{n=1}^{\mathsf{N}} \frac{\beta_n\mathbb{a}_n\mathbb{c}_n}{\alpha_n}\Big(\frac{1}{\lambda} + q^{-1}\frac{\mathbb{b}_n\alpha_n}{\mathbb{a}_n\beta_n}\lambda\Big)\Big(\frac{1}{\lambda} + q^{-1}\frac{\mathbb{d}_n\alpha_n}{\mathbb{c}_n\beta_n}\lambda\Big), \end{aligned} \tag{2.33}$$

where:

$$k_n \equiv (\mathbb{a}_n\mathbb{b}_n\mathbb{c}_n\mathbb{d}_n)^{1/2}\,, \quad \mu_{n,h} \equiv \left\{\begin{array}{ll} iq^{1/2}\,(\mathbb{a}_n\beta_n/\alpha_n\mathbb{b}_n)^{1/2} & h = +, \\ iq^{1/2}\,(\mathbb{c}_n\beta_n/\alpha_n\mathbb{d}_n)^{1/2} & h = -. \end{array}\right. \tag{2.34}$$

Moreover, for the representations that satisfy (2.15) the quantum determinant reads[15]:

$$\mathrm{det_q}\mathsf{M}(\lambda) = q^{\mathsf{N}} \prod_{n=1}^{\mathsf{N}} \frac{|\mathbb{a}_n|^2|\mathbb{b}_n|^2}{|\alpha_n|^2}\Big(\frac{1}{\lambda} + \epsilon q^{-1}\frac{|\alpha_n|^2}{|\mathbb{a}_n|^2}\lambda\Big)\Big(\frac{1}{\lambda} + \epsilon q^{-1}\frac{|\alpha_n|^2}{|\mathbb{b}_n|^2}\lambda\Big). \tag{2.35}$$

[14]The centrality of the quantum determinant in the Yang-Baxter algebra was first discovered in [111], see also [112].

[15]Remark that it depends on the parameters in Lax operators only through their modules.

Let us define the following functions that will be crucial in the rest of the paper:

$$\bar{\mathrm{A}}(\lambda) \equiv \alpha(\lambda)\mathrm{A}(\lambda), \qquad \bar{\mathrm{D}}(\lambda) \equiv \alpha^{-1}(q\lambda)\mathrm{D}(\lambda) \tag{2.36}$$

where:

$$\mathrm{A}(\lambda) \equiv \prod_{n=1}^{\mathsf{N}} (\beta_n \alpha_n)^{1/2} (\frac{\lambda}{\mu_{n,+}} - \frac{\mu_{n,+}}{\lambda}), \qquad \mathrm{D}(\lambda) \equiv \prod_{n=1}^{\mathsf{N}} (\frac{\mathbb{a}_n \mathbb{b}_n \mathbb{c}_n \mathbb{d}_n}{\alpha_n \beta_n})^{1/2} (\frac{q\lambda}{\mu_{n,-}} - \frac{\mu_{n,-}}{q\lambda}). \tag{2.37}$$

They always satisfy the condition:

$$\det_{\mathrm{q}} \mathsf{M}(\lambda) = \bar{\mathrm{A}}(\lambda)\bar{\mathrm{D}}(\lambda/q), \tag{2.38}$$

while the function $\alpha(\lambda)$ is defined by the requirement:

$$\prod_{n=1}^{p} \bar{\mathrm{A}}(\lambda q^n) + \prod_{n=1}^{p} \bar{\mathrm{D}}(\lambda q^n) = \mathcal{A}(\Lambda) + \mathcal{D}(\Lambda). \tag{2.39}$$

Note that this last condition is a second order equation in the average $\prod_{n=1}^{p} \alpha(q^n\lambda)$ and then we have only two possible choices for the averages of the functions $\bar{\mathrm{A}}(\lambda)$ and $\bar{\mathrm{D}}(\lambda)$:

$$\prod_{n=1}^{p} \bar{\mathrm{A}}(\lambda q^n) = \Omega_{\epsilon}(\Lambda), \quad \prod_{n=1}^{p} \bar{\mathrm{D}}(\lambda q^n) = \Omega_{-\epsilon}(\Lambda), \tag{2.40}$$

where $\epsilon = \mp$ and $\Omega_{\pm}$ are the two eigenvalues of the 2×2 matrix $\mathcal{M}(\Lambda)$ composed by the averages of the Yang-Baxter generators.

2.3 SOV-representations of the Yang-Baxter algebra

According to Sklyanin's method [15, 16, 17], a separation of variables (SOV) representation for the spectral problem of the transfer matrix $\tau_2(\lambda)$ is defined as a representation where the commutative family of operators $\mathsf{B}(\lambda)$ is diagonal. In [104], the following theorem has been proven:

Theorem 2.1. ***(Theorem 1 of [104])*** *For almost all the values of the parameters of the representation, there exists a SOV representation for the τ_2-model; in this case $\mathsf{B}(\lambda)$ is diagonalizable and has simple spectrum.*

Let us recall here the left SOV-representations of the generators of the Yang-Baxter algebra for the τ_2-model. Let $\langle\, \boldsymbol{\eta}_{\mathbf{k}} \,|$ be the generic element of a basis of eigenvectors of $\mathsf{B}(\lambda)$:

$$\langle\, \boldsymbol{\eta}_{\mathbf{k}} \,| \mathsf{B}(\lambda) \;=\; \eta_{\mathsf{N}}\, b_{\boldsymbol{\eta}_{\mathbf{k}}}(\lambda) \,\langle\, \boldsymbol{\eta}_{\mathbf{k}} \,|, \qquad b_{\boldsymbol{\eta}_{\mathbf{k}}}(\lambda) \equiv \prod_{a=1}^{\mathsf{N}-1} \left(\lambda/\eta_a^{(k_a)} - \eta_a^{(k_a)}/\lambda\right), \tag{2.41}$$

and

$$\boldsymbol{\eta}_{\mathbf{k}} \in \mathsf{Z}_{\mathsf{B}} \;\equiv\; \left\{ (\eta_1^{(k_1)} \equiv q^{k_1}\eta_1^{(0)}, \dots, \eta_{\mathsf{N}}^{(k_{\mathsf{N}})} \equiv q^{k_{\mathsf{N}}}\eta_{\mathsf{N}}^{(0)})\,;\, \mathbf{k} \equiv (k_1, \dots, k_{\mathsf{N}}) \in \mathbb{Z}_p^{\mathsf{N}} \right\}, \tag{2.42}$$

where $\eta_a^{(0)}$ are fixed constants[16] of the representations. For simplicity, when possible we will omit the subscript $\mathbf{k}$ in $\langle \boldsymbol{\eta}_{\mathbf{k}} |$. The action of the remaining generators of the Yang-Baxter algebra on arbitrary states$\langle \boldsymbol{\eta} |$ reads:

$$\langle \boldsymbol{\eta} |\mathsf{A}(\lambda) = b_{\boldsymbol{\eta}}(\lambda) \left[\lambda \eta_{\mathsf{A}}^{(+)} \langle q^{-\delta_{\mathsf{N}}} \boldsymbol{\eta} | + \lambda^{-1} \eta_{\mathsf{A}}^{(-)} \langle q^{\delta_{\mathsf{N}}} \boldsymbol{\eta} |\right] + \sum_{a=1}^{\mathsf{N}-1} \prod_{b\neq a} \frac{\lambda/\eta_b - \eta_b/\lambda}{\eta_a/\eta_b - \eta_b/\eta_a} \, \mathtt{a}^{(SOV)}(\eta_a) \langle q^{-\delta_a} \boldsymbol{\eta} | , \tag{2.43}$$

$$\langle \boldsymbol{\eta} |\mathsf{D}(\lambda) = b_{\boldsymbol{\eta}}(\lambda) \left[\lambda \eta_{\mathsf{D}}^{(+)} \langle q^{\delta_{\mathsf{N}}} \boldsymbol{\eta} | + \lambda^{-1} \eta_{\mathsf{D}}^{(-)} \langle q^{-\delta_{\mathsf{N}}} \boldsymbol{\eta} |\right] + \sum_{a=1}^{\mathsf{N}-1} \prod_{b\neq a} \frac{\lambda/\eta_b - \eta_b/\lambda}{\eta_a/\eta_b - \eta_b/\eta_a} \, \mathtt{d}^{(SOV)}(\eta_a) \langle q^{\delta_a} \boldsymbol{\eta} | , \tag{2.44}$$

where:

$$\eta_{\mathsf{A}}^{(\pm)} = (\pm 1)^{\mathsf{N}-1} a_{\pm} \prod_{n=1}^{\mathsf{N}-1} \eta_n^{\pm 1}, \qquad \eta_{\mathsf{D}}^{(\pm)} = (\pm 1)^{\mathsf{N}-1} d_{\pm} \prod_{n=1}^{\mathsf{N}-1} \eta_n^{\pm 1}, \tag{2.45}$$

and the states $\langle q^{\pm\delta_a} \boldsymbol{\eta} |$ are defined by:

$$\langle q^{\pm\delta_a} \boldsymbol{\eta} | \equiv \langle \eta_1, \ldots, q^{\pm 1}\eta_a, \ldots, \eta_{\mathsf{N}} | . \tag{2.46}$$

Finally, $\mathsf{C}(\lambda)$ is uniquely defined by the quantum determinant relation. The expressions (2.43) and (2.44) contain complex-valued coefficients $\mathtt{a}^{(SOV)}(\eta_a)$ and $\mathtt{d}^{(SOV)}(\eta_a)$ which completely characterize the SOV representation. These coefficients have to be solution of the quantum determinant conditions:

$$\det{}_{\mathrm{q}}\mathsf{M}(\eta_r) = \mathtt{a}^{(SOV)}(\eta_r)\mathtt{d}^{(SOV)}(q^{-1}\eta_r) , \quad \forall r = 1, \ldots, \mathsf{N}-1 , \tag{2.47}$$

and of the average conditions:

$$\mathcal{A}(Z_r \equiv \eta_r^p) \equiv \prod_{k=1}^{p} \mathtt{a}^{(SOV)}(q^k \eta_r) , \qquad \mathcal{D}(Z_r) \equiv \prod_{k=1}^{p} \mathtt{d}^{(SOV)}(q^k \eta_r) , \qquad \forall r \in \{1, \ldots, \mathsf{N}-1\}. \tag{2.48}$$

In a SOV representation, some freedom is left in the choice of $\mathtt{a}^{(SOV)}(\eta_r)$ and $\mathtt{d}^{(SOV)}(\eta_r)$. It can be parametrized by the gauge transformation:

$$\tilde{\mathtt{a}}^{(SOV)}(\eta_r) = \mathtt{a}^{(SOV)}(\eta_r)\frac{f(\eta_r q^{-1})}{f(\eta_r)} , \qquad \tilde{\mathtt{d}}^{(SOV)}(\eta_r) = \mathtt{d}^{(SOV)}(\eta_r)\frac{f(\eta_r q)}{f(\eta_r)} ; \tag{2.49}$$

which just amounts to the following change of normalization for the states of the B-eigenbasis:

$$\langle \boldsymbol{\eta} | \to \prod_{r=1}^{\mathsf{N}-1} f^{-1}(\eta_r) \langle \boldsymbol{\eta} | . \tag{2.50}$$

[16]Here, the simplicity of the spectrum of $\mathsf{B}(\lambda)$ is equivalent to the requirement $\left(\eta_a^{(0)}\right)^p \neq \left(\eta_b^{(0)}\right)^p$ for any $a \neq b \in \{1, \ldots, \mathsf{N}-1\}$.

Similarly, we can construct a right SOV-representation of the Yang-Baxter generators by the following actions:

$$\mathsf{B}(\lambda)|\boldsymbol{\eta}\rangle = |\boldsymbol{\eta}\rangle\eta_{\mathsf{N}}b_{\boldsymbol{\eta}}(\lambda)\,, \tag{2.51}$$

$$\mathsf{A}(\lambda)|\boldsymbol{\eta}\rangle = [|q^{\delta_{\mathsf{N}}}\boldsymbol{\eta}\rangle\eta_{\mathsf{A}}^{(+)}\lambda + |q^{-\delta_{\mathsf{N}}}\boldsymbol{\eta}\rangle\frac{\eta_{\mathsf{A}}^{(-)}}{\lambda}]b_{\boldsymbol{\eta}}(\lambda) + \sum_{a=1}^{\mathsf{N}-1}|q^{\delta_a}\boldsymbol{\eta}\rangle\prod_{b\neq a}\frac{(\lambda/\eta_b - \eta_b/\lambda)}{(\eta_a/\eta_b - \eta_b/\eta_a)}\bar{\mathsf{a}}^{(SOV)}(\eta_a), \tag{2.52}$$

$$\mathsf{D}(\lambda)|\boldsymbol{\eta}\rangle = [|q^{-\delta_{\mathsf{N}}}\boldsymbol{\eta}\rangle\eta_{\mathsf{D}}^{(+)}\lambda + |q^{\delta_{\mathsf{N}}}\boldsymbol{\eta}\rangle\frac{\eta_{\mathsf{D}}^{(-)}}{\lambda}]b_{\boldsymbol{\eta}}(\lambda) + \sum_{a=1}^{\mathsf{N}-1}|q^{-\delta_a}\boldsymbol{\eta}\rangle\prod_{b\neq a}\frac{(\lambda/\eta_b - \eta_b/\lambda)}{(\eta_a/\eta_b - \eta_b/\eta_a)}\bar{\mathsf{d}}^{(SOV)}(\eta_a), \tag{2.53}$$

where $|\boldsymbol{\eta}\rangle \in \mathcal{R}_{\mathsf{N}}$ is the right B-eigenstate corresponding to the generic $\boldsymbol{\eta} \in \mathsf{Z}_{\mathsf{B}}$. The coefficients $\bar{\mathsf{a}}^{(SOV)}(\eta_a)$ and $\bar{\mathsf{d}}^{(SOV)}(\eta_a)$ are solutions of the same average (2.48) and quantum determinant:

$$\det{}_{\mathrm{q}}\mathsf{M}(\eta_r) \;=\; \bar{\mathsf{d}}^{(SOV)}(\eta_r)\bar{\mathsf{a}}^{(SOV)}(q^{-1}\eta_r)\,, \quad \forall r = 1,\ldots,\mathsf{N}-1 \tag{2.54}$$

conditions while $\mathsf{C}(\lambda)$ is uniquely defined by the quantum determinant relation (2.30).

2.3.1 SOV-decomposition of the identity

The diagonalizability of the Yang-Baxter generator $\mathsf{B}(\lambda)$ and the simplicity of its spectrum imply the following spectral decomposition of the identity $\mathbb{I}$ in terms of the B-eigenbasis:

$$\mathbb{I} \equiv \sum_{\mathbf{k}\in\mathbb{Z}_p^{\mathsf{N}}} \mu_{\mathbf{k}}|\boldsymbol{\eta}_{\mathbf{k}}\rangle\langle\boldsymbol{\eta}_{\mathbf{k}}|, \tag{2.55}$$

where:

$$\mu_{\mathbf{k}} \equiv \langle\boldsymbol{\eta}_{\mathbf{k}}|\boldsymbol{\eta}_{\mathbf{k}}\rangle^{-1} \quad \forall\,\mathbf{k} \in \mathbb{Z}_p^{\mathsf{N}}, \tag{2.56}$$

is the equivalent of the so-called Sklyanin's measure[17]. The non-Hermitian character of the operator family $\mathsf{B}(\lambda)$ clearly implies that, for generic $\mathbf{k} \in \mathbb{Z}_p^{\mathsf{N}}$, $(|\boldsymbol{\eta}_{\mathbf{k}}\rangle)^{\dagger}$ and $\langle\boldsymbol{\eta}_{\mathbf{k}}|$ are not proportional covectors in $\mathcal{L}_{\mathsf{N}}$; then, $\mu_{\mathbf{k}}$ is not a standard positive definite measure in our cyclic representations. Nevertheless, we will show that the above formula defines a proper orthogonal decomposition of the identity operator.

Now we compute[18] this "measure" $\mu_{\mathbf{k}}$ and we show that up to an overall constant (i.e. a constant w.r.t. $\mathbf{k} \in \mathbb{Z}_p^{\mathsf{N}}$) it is completely fixed by the given left and right SOV-representations of the Yang-Baxter algebras when the gauges are fixed.

[17] Sklyanin's measure has been first introduced by Sklyanin in his article [15] on quantum Toda chain, [114]-[116]; see also [117] and [118] for further discussions on the measure in the quantum Toda chain and in the sinh-Gordon model, respectively.

[18] Let us recall that this measure has been first derived in [101] for cyclic representations of τ_2-model [57, 58, 59] through the recursion in the construction of left and right SOV-basis.

Proposition 2.2. *The following identities hold:*

$$
\begin{aligned}
\langle \boldsymbol{\eta}_{\mathbf{k}} | \boldsymbol{\eta}_{\mathbf{h}} \rangle &= \langle \boldsymbol{\eta}_{\mathbf{h}} | \boldsymbol{\eta}_{\mathbf{h}} \rangle \prod_{j=1}^{\mathsf{N}} \delta_{k_i,h_i}, \ \ \forall \mathbf{k}, \mathbf{h} \in \mathbb{Z}_p^{\mathsf{N}}, & (2.57)\\
\mu_{\mathbf{h}} &= \frac{\prod_{1\leq a<b\leq \mathsf{N}-1}((\eta_a^{(h_a)})^2 - (\eta_b^{(h_b)})^2)}{C_{\mathsf{N}} \prod_{a=1}^{\mathsf{N}-1} \omega_a(\eta_a^{(h_a)})}, \ \ \forall \mathbf{h} \in \mathbb{Z}_p^{\mathsf{N}}, & (2.58)
\end{aligned}
$$

where:

$$
\omega_a(\eta_a^{(h_a)}) \equiv \left(\eta_a^{(h_a)}\right)^{\mathsf{N}-1} \prod_{l_a=1}^{h_a} \mathsf{a}^{(SOV)}(\eta_a^{(l_a)})/\bar{\mathsf{a}}^{(SOV)}(\eta_a^{(l_a-1)}) \tag{2.59}
$$

are gauge dependent parameters and C_{N} in the formula for $\mu_{\mathbf{h}}$ is a constant w.r.t. $\mathbf{h} \in \mathbb{Z}_p^{\mathsf{N}}$. Then, the SOV-decomposition of the identity explicitly reads:

$$
\mathbb{I} \equiv \sum_{h_1,\ldots,h_{\mathsf{N}}=1}^{p} \prod_{1\leq a<b\leq \mathsf{N}-1} ((\eta_a^{(h_a)})^2 - (\eta_b^{(h_b)})^2) \frac{|\eta_1^{(h_1)}, \ldots, \eta_{\mathsf{N}}^{(h_{\mathsf{N}})}\rangle\langle \eta_1^{(h_1)}, \ldots, \eta_{\mathsf{N}}^{(h_{\mathsf{N}})}|}{C_{\mathsf{N}} \prod_{b=1}^{\mathsf{N}-1} \omega_b(\eta_b^{(h_b)})}, \tag{2.60}
$$

Note that the constant C_{N} can be put equal to one by a trivial (constant) gauge transformation that does not affect the functions $\mathsf{a}^{(SOV)}$ and $\bar{\mathsf{a}}^{(SOV)}$.

Proof. Computing $\langle \boldsymbol{\eta}_{\mathbf{k}} | \mathsf{B}(\lambda) | \boldsymbol{\eta}_{\mathbf{h}} \rangle$, we get:

$$
(b_{\boldsymbol{\eta}_{\mathbf{k}}}(\lambda) - b_{\boldsymbol{\eta}_{\mathbf{h}}}(\lambda))\langle \boldsymbol{\eta}_{\mathbf{k}} | \boldsymbol{\eta}_{\mathbf{h}} \rangle = 0 \quad \forall \lambda \in \mathbb{C}, \ \forall \mathbf{k}, \mathbf{h} \in \mathbb{Z}_p^{\mathsf{N}} \tag{2.61}
$$

and then the simplicity of the spectrum of $\mathsf{B}(\lambda)$ implies (2.57). To compute $\mu_{\mathbf{h}}$, we compute the following matrix elements $\theta_a \equiv \langle \eta_1^{(h_1)}, \ldots, \eta_a^{(h_a-1)}, \ldots, \eta_{\mathsf{N}}^{(h_{\mathsf{N}})} | \mathsf{A}(\eta_a^{(h_a-1)}) | \eta_1^{(h_1)}, \ldots, \eta_a^{(h_a)}, \ldots, \eta_{\mathsf{N}}^{(h_{\mathsf{N}})} \rangle$, by using first the left action of $\mathsf{A}(\eta_a^{(h_a-1)})$, then the right action of $\mathsf{A}(\eta_a^{(h_a-1)})$ together with (2.57) and finally equating the two results we get:

$$
\begin{aligned}
\frac{\langle \eta_1^{(h_1)}, \ldots, \eta_a^{(h_a)}, \ldots, \eta_{\mathsf{N}}^{(h_{\mathsf{N}})} | \eta_1^{(h_1)}, \ldots, \eta_a^{(h_a)}, \ldots, \eta_{\mathsf{N}}^{(h_{\mathsf{N}})} \rangle}{\langle \eta_1^{(h_1)}, \ldots, \eta_a^{(h_a-1)}, \ldots, \eta_{\mathsf{N}}^{(h_{\mathsf{N}})} | \eta_1^{(h_1)}, \ldots, \eta_a^{(h_a-1)}, \ldots, \eta_{\mathsf{N}}^{(h_{\mathsf{N}})} \rangle} &= \delta_{a,\mathsf{N}} + (1-\delta_{a,\mathsf{N}}) \frac{\mathsf{a}^{(SOV)}(\eta_a^{(h_a)})}{\bar{\mathsf{a}}^{(SOV)}(\eta_a^{(h_a-1)})} \\
&\quad \times \prod_{b\neq a, b=1}^{\mathsf{N}-1} \frac{(\eta_a^{(h_a-1)}/\eta_b^{(h_b)} - \eta_b^{(h_b)}/\eta_a^{(h_a-1)})}{(\eta_a^{(h_a)}/\eta_b^{(h_b)} - \eta_b^{(h_b)}/\eta_a^{(h_a)})},
\end{aligned} \tag{2.62}
$$

from which (2.58) simply follows. □

2.4 SOV-characterization of τ_2-spectrum

Let us denote with Σ_{τ_2} the set of the eigenvalue functions $t(\lambda)$ of the transfer matrix $\tau_2(\lambda)$, then:

$$
\Sigma_{\tau_2} \subset \mathbb{C}_{even}[\lambda, \lambda^{-1}]_{\mathsf{N}} \text{ for } \mathsf{N} \text{ even}, \quad \Sigma_{\tau_2} \subset \mathbb{C}_{odd}[\lambda, \lambda^{-1}]_{\mathsf{N}} \text{ for } \mathsf{N} \text{ odd}, \tag{2.63}
$$

where $\mathbb{C}_\epsilon[x,x^{-1}]_{\mathsf{M}}$ denotes the linear space in the field $\mathbb{C}$ of the Laurent polynomials of degree M in the variable x which are even or odd as stated in the index ϵ. The Θ-charge naturally induces the grading $\Sigma_{\tau_2} = \bigcup_{k=0}^{2l} \Sigma_{\tau_2}^k$, where:

$$\Sigma_{\tau_2}^k \equiv \left\{ t(\lambda) \in \Sigma_{\tau_2} : \lim_{\log \lambda \to \mp\infty} \lambda^{\pm \mathsf{N}} t(\lambda) = \left(q^{\mp k} a_{\mp} + q^{\pm k} d_{\mp} \right) \right\}. \tag{2.64}$$

This simply follows from the asymptotics of $\tau_2(\lambda)$ and from its commutativity with Θ. In particular, any $t_k(\lambda) \in \Sigma_{\tau_2}^k$ is a τ_2-eigenvalue corresponding to simultaneous eigenstates of $\tau_2(\lambda)$ and Θ with Θ-eigenvalue q^k.

2.4.1 Eigenvalues and wave-funtions

In the SOV representations the spectral problem for $\tau_2(\lambda)$ is reduced to the following discrete system of Baxter-like equations in the wave-function $\Psi_t(\boldsymbol{\eta}) \equiv \langle \boldsymbol{\eta} \,|\, t \,\rangle$ of a τ_2-eigenstate $|\, t\,\rangle$:

$$t(\eta_r)\Psi_t(\boldsymbol{\eta}) \;=\; \mathtt{a}^{(SOV)}(\eta_r)\Psi_t(q^{-\delta_r}\boldsymbol{\eta}) + \mathtt{d}^{(SOV)}(\eta_r)\Psi_t(q^{\delta_r}\boldsymbol{\eta}) \qquad \forall r \in \{1,...,\mathsf{N}-1\}, \tag{2.65}$$

plus the following equation in the variable η_{N}:

$$\Psi_t(q^{\delta_{\mathsf{N}}}\boldsymbol{\eta}) \;=\; q^{-k}\Psi_t(\boldsymbol{\eta}), \;\text{ where }\; q^{\pm\delta_r}\boldsymbol{\eta} \equiv (\eta_1, \dots, q^{\pm 1}\eta_r, \dots, \eta_{\mathsf{N}}), \tag{2.66}$$

for $t(\lambda) \in \Sigma_{\tau_2}^k$ with $k \in \{0,...,2l\}$. Let us introduce the one parameter family $D(\lambda)$ of $p \times p$ matrix:

$$D(\lambda) \equiv \begin{pmatrix} t(\lambda) & -\bar{\mathtt{D}}(\lambda) & 0 & \cdots & 0 & -\bar{\mathtt{A}}(\lambda) \\ -\bar{\mathtt{A}}(q\lambda) & t(q\lambda) & -\bar{\mathtt{D}}(q\lambda) & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & & & & \vdots \\ \vdots & & \cdots & & & \vdots \\ \vdots & & & \cdots & & \vdots \\ t\vdots & & & & \ddots & 0 \\ 0 & \ldots & 0 & -\bar{\mathtt{A}}(q^{2l-1}\lambda) & t(q^{2l-1}\lambda) & -\bar{\mathtt{D}}(q^{2l-1}\lambda) \\ -\bar{\mathtt{D}}(q^{2l}\lambda) & 0 & \ldots & 0 & -\bar{\mathtt{A}}(q^{2l}\lambda) & t(q^{2l}\lambda) \end{pmatrix} \tag{2.67}$$

then when we make the following choice of gauge for the left SOV-representation:

$$\mathtt{a}^{(SOV)}(\lambda) \equiv \bar{\mathtt{A}}(\lambda), \qquad \mathtt{d}^{(SOV)}(\lambda) \equiv \bar{\mathtt{D}}(\lambda), \tag{2.68}$$

it holds:

Theorem 2.2. ***(Theorems 2, 3 and 4 of [104])*** *For almost all the values of the parameters of a τ_2-representation, the spectrum of $\tau_2(\lambda)$ is simple. Moreover:*

I) Σ_{τ_2} coincides with the set of functions in (2.63) which are solutions of the functional equation:

$$\det_p D(\Lambda) = 0, \quad \forall \Lambda \in \mathbb{C}. \tag{2.69}$$

Then, up to an overall normalization, we can fix the τ_2-eigenstate corresponding to $t_k(\lambda) \in \Sigma^k_{\tau_2}$ by:

$$\Psi_{t_k}(\boldsymbol{\eta}) \equiv \langle\, \eta_1, ..., \eta_{\mathsf{N}} \,|\, t_k \,\rangle = \eta_{\mathsf{N}}^{-k} \prod_{r=1}^{\mathsf{N}-1} Q_{t_k}(\eta_r), \tag{2.70}$$

where $Q_{t_k}(\lambda)$ is the only solution (up to quasi-constants) corresponding to $t_k(\lambda)$ of the Baxter equation:

$$t_k(\lambda) Q_{t_k}(\lambda) = \bar{\mathrm{A}}(\lambda) Q_{t_k}(\lambda/q) + \bar{\mathrm{D}}(\lambda) Q_{t_k}(q\lambda). \tag{2.71}$$

II) In the self-adjoint representations of the τ_2-model under the further constrains:

$$\prod_{h=1}^{N} \frac{\alpha_h^*}{\alpha_h} = 1, \qquad \frac{\mathbb{b}_n}{\mathbb{b}_n^*} = \frac{\mathbb{a}_n}{\mathbb{a}_n^*}, \qquad \frac{\alpha_{n+1}^*\alpha_n^*}{\alpha_{n+1}\alpha_n} = \frac{\mathbb{b}_{n+1}^*\mathbb{b}_n}{\mathbb{b}_{n+1}\mathbb{b}_n^*}, \qquad \forall n \in \{1, ..., \mathsf{N}\}. \tag{2.72}$$

The functions $\bar{\mathrm{A}}(\lambda)$ and $\bar{\mathrm{D}}(\lambda)$ are gauge equivalent to the Laurent polynomials:

$$\mathsf{a}(\lambda) \equiv i^{\mathsf{N}} \prod_{n=1}^{\mathsf{N}} \frac{\beta_n}{\lambda}(1 - i^{(1+\epsilon)/2} q^{-1/2} \frac{|\alpha_n|}{|\mathbb{a}_n|}\lambda)(1 - i^{(1+\epsilon)/2} q^{-1/2} \frac{|\alpha_n|}{|\mathbb{b}_n|}\lambda), \qquad \mathsf{d}(\lambda) \equiv q^{\mathsf{N}} \mathsf{a}(-\lambda q), \tag{2.73}$$

respectively, and for any $t_k(\lambda) \in \Sigma^k_{\tau_2}$, we can construct uniquely up to quasi-constants a ϵ-real polynomial[19,20]*:*

$$Q_{t_k}(\lambda) = \lambda^{a_{t_k}} \prod_{h=1}^{2l\mathsf{N}-(b_{t_k}+a_{t_k})} (\lambda_h - \lambda), \quad 0 \leq a_{t_k} \leq 2l, \ 0 \leq b_{t_k} + a_{t_k} \leq 2l\mathsf{N}, \tag{2.74}$$

which is a solution of the Baxter functional equation (2.71) in the gauge (2.73) and:

$$a_{t_k} = \pm k \ \mathsf{mod}\, p, \qquad b_{t_k} = \pm k \ \mathsf{mod}\, p. \tag{2.75}$$

2.4.2 Eigenvectors and eigencovectors

The SOV-decomposition of the identity (2.60) and the results of the previous subsections imply that the state:

$$|t_k\rangle = \sum_{h_1,...,h_{\mathsf{N}}=1}^{p} \frac{q^{kh_{\mathsf{N}}}}{p^{1/2}} \prod_{a=1}^{\mathsf{N}-1} Q_{t_k}(\eta_a^{(h_a)}) \prod_{1 \leq a < b \leq \mathsf{N}-1} ((\eta_a^{(h_a)})^2 - (\eta_b^{(h_b)})^2) \frac{|\eta_1^{(h_1)}, ..., \eta_{\mathsf{N}}^{(h_{\mathsf{N}})}\rangle}{\prod_{b=1}^{\mathsf{N}-1} \omega_b(\eta_b^{(h_b)})}, \tag{2.76}$$

is, up to an overall normalization, the only right τ_2-eigenstate associated to $t_k(\lambda) \in \Sigma^k_{\mathsf{T}}$. Here, $Q_{t_k}(\lambda)$ is the only solution (up to quasi-constants) of the Baxter equation:

$$t_k(\lambda) Q_{t_k}(\lambda) = \bar{\mathrm{A}}(\lambda) Q_{t_k}(\lambda q^{-1}) + \bar{\mathrm{D}}(\lambda) Q_{t_k}(\lambda q), \tag{2.77}$$

[19] i.e. it satisfies the following complex-conjugation conditions: $(Q_t(\lambda))^* \equiv Q_t(\epsilon\lambda^*)\ \forall \lambda \in \mathbb{C}$.

[20] Note that $Q_t(\lambda)$ has been constructed in terms of the cofactors of the matrix $D(\Lambda)$ in Theorem 3 of [104].

as defined in Theorem 2.2. Similarly, we can prove that the state:

$$\langle t_k| = \sum_{h_1,\dots,h_{\mathsf{N}}=1}^{p} \frac{q^{kh_{\mathsf{N}}}}{p^{1/2}} \prod_{a=1}^{\mathsf{N}-1} \bar{Q}_{t_k}(\eta_a^{(h_a)}) \prod_{1\leq a<b\leq \mathsf{N}-1} ((\eta_a^{(h_a)})^2 - (\eta_b^{(h_b)})^2) \frac{\langle \eta_1^{(h_1)},\dots,\eta_{\mathsf{N}}^{(h_{\mathsf{N}})}|}{\prod_{b=1}^{\mathsf{N}-1}\omega_b(\eta_b^{(h_b)})}, \tag{2.78}$$

is, up to an overall normalization, the only left τ_2-eigenstate associated to $t_k(\lambda) \in \Sigma_{\mathsf{T}}^k$. Here, $\bar{Q}_{t_k}(\lambda)$ is the only solution (up to quasi-constants) of the Baxter equation:

$$t_k(\lambda)\bar{Q}_{t_k}(\lambda) = \bar{\mathrm{D}}(\lambda/q)\bar{Q}_{t_k}(\lambda/q) + \bar{\mathrm{A}}(\lambda q)\bar{Q}_{t_k}(\lambda q), \tag{2.79}$$

when we make the following choice of gauge for the right SOV-representation:

$$\bar{\mathsf{a}}^{(SOV)}(\lambda) \equiv \bar{\mathrm{A}}(\lambda q), \qquad \bar{\mathsf{d}}^{(SOV)}(\lambda) \equiv \bar{\mathrm{D}}(\lambda/q). \tag{2.80}$$

3 The inhomogeneous chiral Potts model

3.1 Definitions and first properties

The connections between the integrable chiral Potts model and the τ_2-model restricted to parametrization by points on the algebraic curves $\mathcal{C}_k$ were first remarked in [57]. We can summarize them as follows:
I) the fundamental R-matrix intertwining the τ_2-Lax operator in the quantum space is given by the product of four chiral Potts Boltzmann weights;
II) the transfer matrix of the chiral Potts model is a Baxter Q-operator for the τ_2-model.
Let us recall here how the spectrum of the inhomogeneous chiral Potts transfer matrix is characterized by SOV construction thanks to the property (II). The algebraic curve $\mathcal{C}_k$ of modulus k is by definition the locus of the points $\mathrm{p} \equiv (a_{\mathrm{p}}, b_{\mathrm{p}}, c_{\mathrm{p}}, d_{\mathrm{p}}) \in \mathbb{C}^4$ which satisfy the equations:

$$x_{\mathrm{p}}^p + y_{\mathrm{p}}^p = k(1 + x_{\mathrm{p}}^p y_{\mathrm{p}}^p), \quad kx_{\mathrm{p}}^p = 1 - k' s_{\mathrm{p}}^{-p}, \quad ky_{\mathrm{p}}^p = 1 - k' s_{\mathrm{p}}^p, \tag{3.1}$$

where:

$$x_{\mathrm{p}} \equiv a_{\mathrm{p}}/d_{\mathrm{p}}, \;\; y_{\mathrm{p}} \equiv b_{\mathrm{p}}/c_{\mathrm{p}}, \;\; s_{\mathrm{p}} \equiv d_{\mathrm{p}}/c_{\mathrm{p}}, \, t_{\mathrm{p}} \equiv x_{\mathrm{p}} y_{\mathrm{p}}, \;\; k^2 + (k')^2 = 1. \tag{3.2}$$

Let us introduce the following cyclic dilogarithm functions[21]; here we use the notation:

$$\frac{W_{\mathrm{qp}}(z(n))}{W_{\mathrm{qp}}(z(0))} = (\frac{s_{\mathrm{q}}}{s_{\mathrm{p}}})^n \prod_{k=1}^{n} \frac{y_{\mathrm{p}} - q^{-2k} x_{\mathrm{q}}}{y_{\mathrm{q}} - q^{-2k} x_{\mathrm{p}}}, \qquad \frac{\bar{W}_{\mathrm{qp}}(z(n))}{\bar{W}_{\mathrm{qp}}(z(0))} = (s_{\mathrm{p}} s_{\mathrm{q}})^n \prod_{k=1}^{n} \frac{q^{-2} x_{\mathrm{q}} - q^{-2k} x_{\mathrm{p}}}{y_{\mathrm{p}} - q^{-2k} y_{\mathrm{q}}}, \tag{3.3}$$

where $z(n) = q^{-2n}$, $n \in \{0, ..., 2l\}$. They are solutions of the following recursion relations:

$$\frac{W_{\mathrm{qp}}(zq)}{W_{\mathrm{qp}}(zq^{-1})} = -z \frac{s_{\mathrm{p}}}{s_{\mathrm{q}}} \frac{x_{\mathrm{p}}}{y_{\mathrm{p}}} q^{-1} \frac{1 - \frac{y_{\mathrm{q}}}{x_{\mathrm{p}}} q z^{-1}}{1 - \frac{x_{\mathrm{q}}}{y_{\mathrm{p}}} q^{-1} z}, \quad \frac{\bar{W}_{\mathrm{qp}}(zq)}{\bar{W}_{\mathrm{qp}}(zq^{-1})} = -\frac{qz^{-1}}{s_{\mathrm{p}} s_{\mathrm{q}}} \frac{y_{\mathrm{p}}}{x_{\mathrm{p}}} \frac{1 - \frac{y_{\mathrm{q}}}{y_{\mathrm{p}}} q^{-1} z}{1 - \frac{x_{\mathrm{q}}}{x_{\mathrm{p}}} q^{-1} z^{-1}}. \tag{3.4}$$

[21] They are the Boltzmann weights of the chiral Potts model [64], see also [118, 119]-[128] for the study of the properties of dilogarithm functions.

If the points p and q belong to the curves $\mathcal{C}_k$, they are well defined functions of $z \in \mathbb{S}_p \equiv \{q^{2n}; n = 0, ..., 2l\}$ which satisfy the cyclicity condition:

$$\frac{\bar{W}_{\text{qp}}(z(p))}{\bar{W}_{\text{qp}}(z(0))} = 1, \quad \frac{W_{\text{qp}}(z(p))}{W_{\text{qp}}(z(0))} = 1. \tag{3.5}$$

Then, in the left and right u_n-eigenbasis, the transfer matrix $\mathsf{T}_\lambda^{\text{chP}}$ of the inhomogeneous chiral Potts model[22] [57] is characterized by the following kernel:

$$\mathsf{T}_\lambda^{\text{chP}}(\mathrm{z}, \mathrm{z}') \equiv \langle \mathrm{z}|\mathsf{T}_\lambda^{\text{chP}}|\mathrm{z}'\rangle = \prod_{n=1}^{\mathsf{N}} W_{\text{q}_n\text{p}}(z_n/z'_n)\bar{W}_{\text{r}_n\text{p}}(z_n/z'_{n+1}), \tag{3.6}$$

where:

$$\lambda = t_{\text{p}}^{-1/2}\mathsf{c}_0, \quad \text{p}, \text{r}_n, \text{q}_n \in \mathcal{C}_k, \mathsf{c}_0 \in \mathbb{C}. \tag{3.7}$$

Let us denote with $\mathcal{R}_{\mathsf{N}}^{\text{chP}}$ the sub-variety of the τ_2-representations defined by the following parametrization of the τ_2-Lax operator in terms of points of the curve:

$$\alpha_n = -b_{\text{q}_n}^2/\mathsf{c}_0, \quad \mathbb{b}_n = -\mathbb{d}_n/q = -a_{\text{q}_n}d_{\text{q}_n}/q^{3/2}, \tag{3.8}$$

$$\beta_n = -\mathsf{c}_0 d_{\text{q}_n}^2, \quad \mathbb{c}_n = -\mathbb{a}_n q = b_{\text{q}_n}c_{\text{q}_n}q^{1/2}, \tag{3.9}$$

and $\text{q}_n \in \mathcal{C}_k$, $k \in \mathbb{C}$. $\mathsf{T}_\lambda^{\text{chP}}$ is then a Baxter Q-operator[23] w.r.t. the τ_2-transfer matrix in $\mathcal{R}_{\mathsf{N}}^{\text{chP}}$:

$$\tau_2(\lambda)\mathsf{T}_\lambda^{\text{chP}} = a_{\text{BS}}(\lambda)\mathsf{T}_{\lambda/q}^{\text{chP}} + d_{\text{BS}}(\lambda)\mathsf{T}_{q\lambda}^{\text{chP}}, \tag{3.10}$$

$$[\tau_2(\lambda), \mathsf{T}_\lambda^{\text{chP}}] = 0, \quad [\Theta, \mathsf{T}_\lambda^{\text{chP}}] = 0, \quad [\mathsf{T}_\lambda^{\text{chP}}, \mathsf{T}_\mu^{\text{chP}}] = 0 \quad \forall \lambda, \mu \in \mathbb{C}, \tag{3.11}$$

with a_{BS} and d_{BS} defined in (5.8) and (5.9) of [104].

3.2 SOV-spectrum characterization

Theorem 3.1. ***(Proposition 3, Theorem 5 and Lemma 13 of [104])*** *For almost all the representations in $\mathcal{R}_{\mathsf{N}}^{chP}$ the spectrum of the chiral Potts transfer matrix T_λ^{chP} is simple. Moreover:*

I) All right and left eigenstates of the chiral Potts transfer matrix T_λ^{chP} are eigenstates of $\tau_2(\lambda)$ and they admit the SOV construction presented in point I) of Theorem 2.2. The solution $Q_t(\lambda)$ of the functional Baxter equation (2.71) is gauge equivalent to the corresponding T_λ^{chP}-eigenvalue q_λ^{chP} being the coefficients $a_{BS}(\lambda)$ and $d_{BS}(\lambda)$ of (3.10) gauge equivalent to the SOV-ones:

$$a_{BS}(\lambda) = h_{BS}(\lambda)\bar{\mathrm{A}}(\lambda) \qquad d_{BS}(\lambda) = h_{BS}^{-1}(\lambda q)\bar{\mathrm{D}}(\lambda). \tag{3.12}$$

[22] For a direct comparison see formula (4.12) of [83] with the following identifications:

$$z_j \equiv q^{2\sigma'_j}, \;\; z'_j \equiv q^{2\sigma_j} \;\; \forall j \in \{1, ..., \mathsf{N}\}.$$

Note that $\mathsf{T}_\lambda^{\text{chP}}$ is well defined since the W-functions (3.3) are cyclic functions of their arguments.

[23] It is worth pointing out that while the Baxter equation (3.10) holds in the general inhomogeneous representations the commutativity properties are proven only under the further restrictions $\text{q}_n \equiv \text{r}_n \quad \forall n\{1, ..., \mathsf{N}\}$ under which is characterized $\mathcal{R}_{\mathsf{N}}^{\text{chP}}$.

Here $h_{BS}(\lambda)$ is a function whose average value is 1 for any $\lambda \in \mathbb{C}$.

II) In the sub-variety $\mathcal{R}_{\mathsf{N}}^{chP,S\text{-}adj} \equiv \mathcal{R}_{\mathsf{N}}^{chP} \cap \mathcal{R}_{\mathsf{N}}^{S\text{-}adj}$, characterized by (3.8)-(3.9) under the following constrains:

$$q_n = (a_{q_n}, \epsilon q \epsilon_{0,n} a_{q_n}^*, \epsilon_{0,n} d_{q_n}^*, d_{q_n}) \in \mathcal{C}_k, \quad \epsilon_{0,n} = \pm 1, \quad k^* = \epsilon k, \tag{3.13}$$

the operator T_λ^{chP} is normal and $\tau_2(\lambda)$ is self-adjoint. Then, point I) of Theorem 2.2 allows to construct the full simultaneous ($\mathsf{T}_\lambda^{chP}, \tau_2(\lambda), \Theta$)-eigenbasis associating to any $t(\lambda) \in \Sigma_{\tau_2}$ the corresponding eigenstate.

4 Decomposition of the identity in τ_2-eigenbasis

4.1 Action of left separate states on right separate states

Here we compute the action of covectors on vectors which in the left and right SOV-basis have a *separate form* similar to that of the transfer matrix eigenstates. To be more precise, let us start giving the following definition of a left $\langle \alpha_k |$ and a right $| \beta_k \rangle$ separate states characterized by the given arbitrary set of functions α_a and β_a:

$$\langle \alpha_k | = \sum_{h_1,...,h_{\mathsf{N}}=1}^{p} \frac{q^{k h_{\mathsf{N}}}}{p^{1/2}} \prod_{a=1}^{\mathsf{N}-1} \alpha_a(\eta_a^{(h_a)}) \prod_{1 \leq a < b \leq \mathsf{N}-1} \left(\left(\eta_a^{(h_a)}\right)^2 - \left(\eta_b^{(h_b)}\right)^2\right) \frac{\langle \eta_1^{(h_1)}, ..., \eta_{\mathsf{N}}^{(h_{\mathsf{N}})} |}{\prod_{b=1}^{\mathsf{N}-1} \omega_b(\eta_b^{(h_b)})}, \tag{4.1}$$

$$| \beta_k \rangle = \sum_{h_1,...,h_{\mathsf{N}}=1}^{p} \frac{q^{-k h_{\mathsf{N}}}}{p^{1/2}} \prod_{a=1}^{\mathsf{N}-1} \beta_a(\eta_a^{(h_a)}) \prod_{1 \leq a < b \leq \mathsf{N}-1} \left(\left(\eta_a^{(h_a)}\right)^2 - \left(\eta_b^{(h_b)}\right)^2\right) \frac{| \eta_1^{(h_1)}, ..., \eta_{\mathsf{N}}^{(h_{\mathsf{N}})} \rangle}{\prod_{b=1}^{\mathsf{N}-1} \omega_b(\eta_b^{(h_b)})}. \tag{4.2}$$

Proposition 4.1. *Let $\langle \alpha_k |$ and $| \beta_h \rangle$ two separate states of the form (4.1) and (4.2), respectively, then it holds:*

$$\langle \alpha_k | \beta_h \rangle = \delta_{k,h} \det_{\mathsf{N}-1} || \mathcal{M}_{a,b}^{(\alpha,\beta)} || \quad \text{with} \quad \mathcal{M}_{a,b}^{(\alpha,\beta)} \equiv \left(\eta_a^{(0)}\right)^{2(b-1)} \sum_{h=1}^{p} \frac{\alpha_a(\eta_a^{(h)}) \beta_a(\eta_a^{(h)})}{\omega_a(\eta_a^{(h)})} q^{2(b-1)h}. \tag{4.3}$$

Proof. From the SOV-decomposition, we have:

$$\langle \alpha_k | \beta_h \rangle = \sum_{h_{\mathsf{N}}=1}^{p} \frac{q^{(k-h) h_{\mathsf{N}}}}{p} \sum_{h_1,...,h_{\mathsf{N}-1}=1}^{p} V((\eta_1^{(h_1)})^2, ..., (\eta_{\mathsf{N}-1}^{(h_{\mathsf{N}-1})})^2) \prod_{a=1}^{\mathsf{N}-1} \frac{\alpha_a(\eta_a^{(h_a)}) \beta_a(\eta_a^{(h_a)})}{\omega_a(\eta_a^{(h_a)})}, \tag{4.4}$$

where $V(x_1, ..., x_{\mathsf{N}}) \equiv \prod_{1 \leq a < b \leq \mathsf{N}-1} (x_a - x_b)$ is the Vandermonde determinant. Then from the identity:

$$\delta_{k,h} = \sum_{h_{\mathsf{N}}=1}^{p} \frac{q^{(k-h) h_{\mathsf{N}}}}{p} \quad \text{when } q \text{ is a } p\text{-root of unit and } h, k \in \mathbb{Z}_p \tag{4.5}$$

and by using the multilinearity of the determinant w.r.t. the rows we prove the proposition. □

It is worth remarking that the previous determinant formulae define also scalar products for vectors in $\mathcal{R}_{\mathsf{N}}$ which have a separate form in the right B-eigenbasis and in the dual of the left B-eigenbasis. Indeed,

$(\langle\alpha_k|)^\dagger \in \mathcal{R}_{\mathsf{N}}$ is a separate vector in the basis of $\mathcal{R}_{\mathsf{N}}$ formed out of the $(\langle\eta_{\mathbf{k}}|)^\dagger$ dual states of the left B-eigenbasis. Then these results can be considered as the SOV analogue of the scalar product formulae [113, 18] computed for Bethe states in the framework of the algebraic Bethe ansatz. Note that this formula is not restricted to the case in which one of the two states is an eigenstate of the transfer matrix. It is also interesting to remark that the previous scalar product formulae allow to prove directly that the action of a transfer matrix eigencovector on an eigenvector corresponding to different eigenvalue is zero.

Corollary 4.1. *Let $t_h(\lambda)$ and $t'_h(\lambda) \in \Sigma^h_{\tau_2}$ and $\langle t_h|$ and $|t'_h\rangle$ the τ_2-eigenstates defined in Section 2.4.2, then for $t_h(\lambda) \neq t'_h(\lambda)$ the $\mathsf{N}\times\mathsf{N}$ matrix $\mathcal{M}^{(t_h,t'_h)}_{a,b}$ has rank equal or smaller than $\mathsf{N}-1$. Indeed, the non-zero $\mathsf{N}\times 1$ vector $V^{(t_h,t'_h)}$ defined by:*

$$V^{(t_h,t'_h)}_b \equiv c'_b - c_b \quad \forall b \in \{1,...,\mathsf{N}\}, \tag{4.6}$$

where:

$$t_h(\lambda) \;=\; \sum_{\epsilon=\pm1}\left(q^{\epsilon h}a_\epsilon + q^{-\epsilon h}d_\epsilon\right)\lambda^{\epsilon\mathsf{N}} + \sum_{b=1}^{\mathsf{N}-1} c_b\lambda^{-\mathsf{N}-2+2b}, \tag{4.7}$$

$$t'_h(\lambda) \;=\; \sum_{\epsilon=\pm1}\left(q^{\epsilon h}a_\epsilon + q^{-\epsilon h}d_\epsilon\right)\lambda^{\epsilon\mathsf{N}} + \sum_{b=1}^{\mathsf{N}-1} c'_b\lambda^{-\mathsf{N}-2+2b}, \tag{4.8}$$

is an eigenvector of $||\mathcal{M}^{(t_h,t'_h)}_{a,b}||$ corresponding to the eigenvalue zero.

Proof. Note that under the choice (2.68) for the left gauge and (2.80) for the right gauge, it holds:

$$\omega_a(\eta^{(h)}_a) = (\eta^{(h)}_a)^{\mathsf{N}-2}, \tag{4.9}$$

and then by the definitions (4.6), (4.7) and (4.8) it holds:

$$\sum_{b=1}^{\mathsf{N}} \mathcal{M}^{(t_h,t'_h)}_{a,b}\mathrm{V}^{(t_h,t'_h)}_b = \sum_{h=0}^{2s_a} Q_{t'_h}(\eta^{(h)}_a)\bar{Q}_{t_h}(\eta^{(h)}_a)(t'_h(\eta^{(h)}_a) - t_h(\eta^{(h)}_a)). \tag{4.10}$$

The desired result:

$$\sum_{b=1}^{\mathsf{N}} \Phi^{(t_h,t'_h)}_{a,b}\mathrm{V}^{(t_h,t'_h)}_b = 0 \quad \forall a \in \{1,...,\mathsf{N}\}, \tag{4.11}$$

then follows as the Baxter equations (2.77) and (2.79) allow to write:

$$\begin{aligned} Q_{t'_h}(\eta^{(k)}_a)\bar{Q}_{t_h}(\eta^{(k)}_a)(t'_h(\eta^{(k)}_a) - t_h(\eta^{(k)}_a)) = {}& (\bar{\mathrm{D}}(\eta^{(k+1)}_a)Q_{t'_h}(\eta^{(k+1)}_a) + \bar{\mathrm{A}}(\eta^{(k-1)}_a)Q_{t'_h}(\eta^{(k-1)}_a))\bar{Q}_t(\eta^{(k)}_a) \\ & - (\bar{\mathrm{A}}(\eta^{(k)}_a)\bar{Q}_{t_h}(\eta^{(k+1)}_a) + \bar{\mathrm{D}}(\eta^{(k)}_a)\bar{Q}_{t_h}(\eta^{(k-1)}_a))Q_{t'_h}(\eta^{(k)}_a), \end{aligned} \tag{4.12}$$

which substituted in (4.10) implies (4.11). □

4.2 Decomposition of the identity in τ_2-eigenbasis

In the representations for which the $\tau_2(\lambda)$ is diagonalizable then the simplicity of its spectrum plus the explicit characterizations of its left and right eigenstates implies that the following decomposition of the identity:

$$\mathbb{I} = \sum_{k=0}^{p-1} \sum_{t(\lambda)\in\Sigma_{\tau_2}^k} \frac{|t_k\rangle\langle t_k|}{\langle t_k|t_k\rangle}, \tag{4.13}$$

where

$$\langle t_k|t_k\rangle = \det_{\mathsf{N}-1} ||\mathcal{M}_{a,b}^{(t_k,t_k)}|| \text{ with } \mathcal{M}_{a,b}^{(t_k,t_k)} \equiv (\eta_a^{(0)})^{2(b-1)} \sum_{c=1}^{p} \frac{Q_{t_k}(\eta_a^{(c)})\bar{Q}_{t_k}(\eta_a^{(c)})}{\omega_a(\eta_a^{(c)})} q^{2(b-1)c}, \tag{4.14}$$

is the action of the covector $\langle t_k|$ on the vector $|t_k\rangle$ as defined in Section 2.4.2. Note that in the representations which define a normal $\tau_2(\lambda)$ the simplicity of the spectrum implies the following identity:

$$(|t_k\rangle)^\dagger \equiv \alpha_{t_k}\langle t_k| \text{ where } \alpha_{t_k} = \frac{\||t_k\rangle\|^2}{\langle t_k|t_k\rangle} \in \mathbb{C} \tag{4.15}$$

for any eigenvector $|t_k\rangle$ of $\tau_2(\lambda)$. For these special representations, it is then clear the interest in computing the norm $\||t_k\rangle\|$ as it allows to write left and right τ_2-eigenstates as one the exact dual of the other.

5 Propagator for the τ_2-model

In this section we construct the propagator operator along the chain of the τ_2-model for the representations parametrized by points on the chP curves.

5.1 Fundamental R-matrix of the τ_2-model

In the next proposition we report adapting to our notations a fundamental result of the paper [57].

Proposition 5.1 ([57]). *Let* $\mathsf{S}_{(q_1,r_1|q_2,r_2)}$ *be the operator defined on the tensor product of two p-dimensional spaces by:*

$$\langle z_1, z_2|\mathsf{S}_{(q_1,r_1|q_2,r_2)}|z_1', z_2'\rangle \equiv \bar{W}_{q_2q_1}(z_1/z_2')W_{r_2q_1}(z_1'/z_2')\bar{W}_{r_2r_1}(z_2/z_1')W_{q_2r_1}(z_2/z_1), \tag{5.1}$$

Then, $\mathsf{S}_{(q_1,r_1|q_2,r_2)}$ *is the fundamental R-matrix intertwining the* τ_2*-Lax operator in the quantum space, i.e. it holds:*

$$\mathsf{L}_{02}(\lambda|q_2,r_2)\mathsf{L}_{01}(\lambda|q_1,r_1)\mathsf{S}_{(q_1,r_1|q_2,r_2)} = \mathsf{S}_{(q_1,r_1|q_2,r_2)}\mathsf{L}_{01}(\lambda|q_1,r_1)\mathsf{L}_{02}(\lambda|q_2,r_2). \tag{5.2}$$

Proof. Let us just point out that the proof can be obtained by proving it for any matrix element $(i_1, i_2)\in \{1,2\} \times \{1,2\}$. Indeed, taking the matrix elements on the quantum states $\langle z_1, z_2|$ and $|z''_1, z''_2\rangle$, the proposition simply follows from the identities:

$$\sum_{z'_2,z'_2\in\mathbb{S}_p,j=1,2} (\mathsf{L}_{02})^{i_2,j}_{z_2 z'_2}(\lambda|\mathrm{q}_2,\mathrm{r}_2)\,(\mathsf{L}_{01})^{j,i_1}_{z_1 z'_1}(\lambda|\mathrm{q}_1,\mathrm{r}_1)\langle z'_1,z'_2|\mathsf{S}_{(\mathrm{q}_1,\mathrm{r}_1|\mathrm{q}_2,\mathrm{r}_2)}|z''_1,z''_2\rangle = \sum_{z'_2,z'_2\in\mathbb{S}_p,j=1,2} \langle z_1,z_2|\mathsf{S}_{(\mathrm{q}_1,\mathrm{r}_1|\mathrm{q}_2,\mathrm{r}_2)}|z'_1,z'_2\rangle\,(\mathsf{L}_{01})^{i_1,j}_{z'_1 z''_1}(\lambda|\mathrm{q}_1,\mathrm{r}_1)\,(\mathsf{L}_{02})^{j,i_2}_{z'_2 z''_2}(\lambda|\mathrm{q}_2,\mathrm{r}_2), \tag{5.3}$$

once the elements of $\mathsf{L}_{0\mathrm{i}}$ are rewritten in terms of the points of $\mathcal{C}_k$ and we use the definition of the functions W and $\bar{W}$. □

5.2 Propagator for the τ_2-model

The first transfer matrix of the chP-model has been defined in (3.6) while the second chP-transfer matrix reads:

$$\hat{\mathsf{T}}^{\mathrm{chP}}_{\lambda_\mathrm{p},(\mathrm{p}|\{\mathrm{q}_n,\mathrm{r}_n\})}(\mathsf{z},\mathsf{z}') \equiv \langle \mathsf{z}|\hat{\mathsf{T}}^{\mathrm{chP}}_{\lambda_\mathrm{p},(\mathrm{p}|\{\mathrm{q}_n,\mathrm{r}_n\})}|\mathsf{z}'\rangle = \prod_{n=1}^{N} W_{\mathrm{r}_n\mathrm{p}}(z_{n+1}/z'_n)\bar{W}_{\mathrm{q}_n\mathrm{p}}(z_n/z'_n). \tag{5.4}$$

Let us recall that the propagator operator U_n along the τ_2-chain is defined by:

$$\mathsf{U}_n\mathsf{M}_{1,\dots,\mathsf{N}}(\lambda)\mathsf{U}_n^{-1} \equiv \mathsf{M}_{n,\dots,\mathsf{N},1,\dots,n-1}(\lambda) \equiv \mathsf{L}_{n-1}(\lambda)\cdots\mathsf{L}_1(\lambda)\mathsf{L}_\mathsf{N}(\lambda)\cdots\mathsf{L}_n(\lambda), \tag{5.5}$$

then we can prove:

Proposition 5.2. *The propagator operator* U_m *has the following representation in terms of the chP-transfer matrices:*

$$\mathsf{U}_m^{-1} \equiv \mathsf{T}^{chP}_{\lambda_{r_1},(r_1|\{q_n,r_n\})}\hat{\mathsf{T}}^{chP}_{\lambda_{q_1},(q_1|\{q_n,r_n\})}\cdots\mathsf{T}^{chP}_{\lambda_{r_{m-1}},(r_{m-1}|\{q_n,r_n\})}\hat{\mathsf{T}}^{chP}_{\lambda_{q_{m-1}},(q_{m-1}|\{q_n,r_n\})}. \tag{5.6}$$

Proof. The previous proposition implies that the operator $\mathsf{S}_{(\mathrm{q}_1,\mathrm{r}_1|\mathrm{q}_2,\mathrm{r}_2)}$ satisfies the following equation

$$\left(\mathsf{S}_{(\mathrm{q}_1,\mathrm{r}_1|\mathrm{q}_2,\mathrm{r}_2)}\right)^{-1}\mathsf{L}_{02}(\lambda|\mathrm{q}_2,\mathrm{r}_2)\mathsf{L}_{01}(\lambda|\mathrm{q}_1,\mathrm{r}_1)\mathsf{S}_{(\mathrm{q}_1,\mathrm{r}_1|\mathrm{q}_2,\mathrm{r}_2)} = \mathsf{L}_{01}(\lambda|\mathrm{q}_1,\mathrm{r}_1)\mathsf{L}_{02}(\lambda|\mathrm{q}_2,\mathrm{r}_2), \tag{5.7}$$

then it is simple to verify that:

$$\begin{aligned}&\left(\mathsf{S}_{(\mathrm{q}_1,\mathrm{r}_1|\mathrm{q}_2,\mathrm{r}_2)}\mathsf{S}_{(\mathrm{q}_1,\mathrm{r}_1|\mathrm{q}_3,\mathrm{r}_3)}\cdots\mathsf{S}_{(\mathrm{q}_1,\mathrm{r}_1|\mathrm{q}_\mathsf{N},\mathrm{r}_\mathsf{N})}\right)^{-1}\mathsf{L}_{0\mathsf{N}}(\lambda|\mathrm{q}_\mathsf{N},\mathrm{r}_\mathsf{N})\cdots\mathsf{L}_{02}(\lambda|\mathrm{q}_2,\mathrm{r}_2)\mathsf{L}_{01}(\lambda|\mathrm{q}_1,\mathrm{r}_1)\\ &\times\left(\mathsf{S}_{(\mathrm{q}_1,\mathrm{r}_1|\mathrm{q}_2,\mathrm{r}_2)}\mathsf{S}_{(\mathrm{q}_1,\mathrm{r}_1|\mathrm{q}_3,\mathrm{r}_3)}\cdots\mathsf{S}_{(\mathrm{q}_1,\mathrm{r}_1|\mathrm{q}_\mathsf{N},\mathrm{r}_\mathsf{N})}\right) = \mathsf{L}_{01}(\lambda|\mathrm{q}_1,\mathrm{r}_1)\mathsf{L}_{0\mathsf{N}}(\lambda|\mathrm{q}_\mathsf{N},\mathrm{r}_\mathsf{N})\cdots\mathsf{L}_{02}(\lambda|\mathrm{q}_2,\mathrm{r}_2)\end{aligned} \tag{5.8}$$

Let us compute the matrix elements:

$$\langle z|\mathsf{T}^{\mathrm{chP}}_{\lambda_{\mathrm{r}_1},(\mathrm{r}_1|\{\mathrm{q}_n,\mathrm{r}_n\})}\hat{\mathsf{T}}^{\mathrm{chP}}_{\lambda_{\mathrm{q}_1},(\mathrm{q}_1|\{\mathrm{q}_n,\mathrm{r}_n\})}|z''\rangle = \sum_{z'}\langle z|\mathsf{T}^{\mathrm{chP}}_{\lambda_{\mathrm{r}_1},(\mathrm{r}_1|\{\mathrm{q}_n,\mathrm{r}_n\})}|z'\rangle\langle z'|\hat{\mathsf{T}}^{\mathrm{chP}}_{\lambda_{\mathrm{q}_1},(\mathrm{q}_1|\{\mathrm{q}_n,\mathrm{r}_n\})}|z''\rangle \tag{5.9}$$

Using the relations $\bar{W}_{pp}(z/z') = \delta_{z,z'}$ and $W_{pq}(z)W_{qp}(z) = 1$, we get:

$$\begin{aligned}\langle z|\mathsf{T}^{\text{chP}}_{\lambda_{\mathrm{r}_1},(\mathrm{r}_1|\{\mathrm{q}_n,\mathrm{r}_n\})}\hat{\mathsf{T}}^{\text{chP}}_{\lambda_{\mathrm{q}_1},(\mathrm{q}_1|\{\mathrm{q}_n,\mathrm{r}_n\})}|z''\rangle &= \sum_{z'}\delta_{z_1,z'_2}\delta_{z'_1,z''_1}\prod_{n\geq 2}\langle z'_n, z_n|\mathsf{S}_{(\mathrm{q}_1,\mathrm{r}_1|\mathrm{q}_n,\mathrm{r}_n)}|z'_{n+1}, z''_n\rangle & (5.10)\\ &= \langle z_1,\dots,z_{\mathsf{N}}|\mathsf{S}_{(\mathrm{q}_1,\mathrm{r}_1|\mathrm{q}_2,\mathrm{r}_2)}\cdots\mathsf{S}_{(\mathrm{q}_1,\mathrm{r}_1|\mathrm{q}_{\mathsf{N}},\mathrm{r}_{\mathsf{N}})}|z''_1,\dots,z''_{\mathsf{N}}\rangle & (5.11)\end{aligned}$$

Let us use the notation $\bar{\mathsf{S}}_i = \mathsf{T}^{\text{chP}}_{\lambda_{\mathrm{r}_i},(\mathrm{r}_i|\{\mathrm{q}_n,\mathrm{r}_n\})}\hat{\mathsf{T}}^{\text{chP}}_{\lambda_{\mathrm{q}_i},(\mathrm{q}_i|\{\mathrm{q}_n,\mathrm{r}_n\})}$, then (5.8) can be rewritten as it follows:

$$\bar{\mathsf{S}}_1^{-1}\mathsf{L}_{0\mathsf{N}}(\lambda|\mathrm{q}_{\mathsf{N}},\mathrm{r}_{\mathsf{N}})\cdots\mathsf{L}_{02}(\lambda|\mathrm{q}_2,\mathrm{r}_2)\mathsf{L}_{01}(\lambda|\mathrm{q}_1,\mathrm{r}_1)\bar{\mathsf{S}}_1 = \mathsf{L}_{01}(\lambda|\mathrm{q}_1,\mathrm{r}_1)\mathsf{L}_{0\mathsf{N}}(\lambda|\mathrm{q}_{\mathsf{N}},\mathrm{r}_{\mathsf{N}})\cdots\mathsf{L}_{02}(\lambda|\mathrm{q}_2,\mathrm{r}_2) \tag{5.12}$$

and acting similarly with the others $\bar{\mathsf{S}}_n$ with $n > 1$ it holds:

$$\begin{aligned}&\bar{\mathsf{S}}_n^{-1}\mathsf{L}_{0n-1}(\lambda|\mathrm{q}_{n-1},\mathrm{r}_{n-1})\cdots\mathsf{L}_{01}(\lambda|\mathrm{q}_1,\mathrm{r}_1)\mathsf{L}_{0\mathsf{N}}(\lambda|\mathrm{q}_{\mathsf{N}},\mathrm{r}_{\mathsf{N}})\cdots\mathsf{L}_{0n+1}(\lambda|\mathrm{q}_{n+1},\mathrm{r}_{n+1})\mathsf{L}_{0n}(\lambda|\mathrm{q}_n,\mathrm{r}_n)\bar{\mathsf{S}}_n\\ &= \mathsf{L}_{0n}(\lambda|\mathrm{q}_n,\mathrm{r}_n)\cdots\mathsf{L}_{01}(\lambda|\mathrm{q}_1,\mathrm{r}_1)\mathsf{L}_{0\mathsf{N}}(\lambda|\mathrm{q}_{\mathsf{N}},\mathrm{r}_{\mathsf{N}})\cdots\mathsf{L}_{0n+2}(\lambda|\mathrm{q}_{n+2},\mathrm{r}_{n+2})\mathsf{L}_{0n+1}(\lambda|\mathrm{q}_{n+1},\mathrm{r}_{n+1}), \quad (5.13)\end{aligned}$$

from which defining:

$$\begin{aligned}\mathsf{U}_n^{-1} &= \bar{\mathsf{S}}_1\bar{\mathsf{S}}_2\dots\bar{\mathsf{S}}_{n-1} & (5.14)\\ &= \mathsf{T}^{\text{chP}}_{\lambda_{\mathrm{r}_1},(\mathrm{r}_1|\{\mathrm{q}_n,\mathrm{r}_n\})}\hat{\mathsf{T}}^{\text{chP}}_{\lambda_{\mathrm{q}_1},(\mathrm{q}_1|\{\mathrm{q}_n,\mathrm{r}_n\})}\dots\mathsf{T}^{\text{chP}}_{\lambda_{\mathrm{r}_{n-1}},(\mathrm{r}_{n-1}|\{\mathrm{q}_n,\mathrm{r}_n\})}\hat{\mathsf{T}}^{\text{chP}}_{\lambda_{\mathrm{q}_{n-1}},(\mathrm{q}_{n-1}|\{\mathrm{q}_n,\mathrm{r}_n\})}, & (5.15)\end{aligned}$$

U_n surely satisfies the equation (5.5) which defines the propagator. □

It is worth noticing that the eigenvalues of the two chP transfer matrices on the eigenstates of the τ_2-transfer matrix are characterized according to the discussion made in Section 3.2, then the eigenvalues of U_m are also known. Moreover, let us point out that:

$$\lambda_{\mathrm{q}_n} = i\left(q\frac{\mathbb{a}_n\beta_n}{\alpha_n\mathbb{b}_n}\right)^{1/2}, \quad \lambda_{\mathrm{r}_n} = i\left(q\frac{\mathbb{c}_n\beta_n}{\alpha_n\mathbb{d}_n}\right)^{1/2}, \tag{5.16}$$

i.e. we are computing the Q-operators, $\mathsf{T}^{\text{chP}}_{\lambda_{\mathrm{r}_n}}\hat{\mathsf{T}}^{\text{chP}}_{\lambda_{\mathrm{q}_n}}$, in the zeros of the quantum determinant of the τ_2-model. In the case of self-adjoint representations on trivial curves (like for sine-Gordon model) we have up to an overall constant:

$$\mathsf{U}_m^{-1} \equiv \mathsf{Q}_{\lambda_{\mathrm{r}_1}}\mathsf{Q}_{\lambda^*_{\mathrm{q}_1}}\cdots\mathsf{Q}_{\lambda_{\mathrm{r}_{m-1}}}\mathsf{Q}_{\lambda^*_{\mathrm{q}_{m-1}}}. \tag{5.17}$$

The case of Bethe anzatz representations correspond to the case $\mathrm{q}_n = \mathrm{r}_n$, i.e. the two zeros of the quantum determinant coincide up to p-roots of units. In this case and in the homogeneous case we reproduce the known result of [129] for the propagator.

6 SOV-representation of local operators

The determination of the scalar product formulae is the first main step to compute matrix elements of local operators. The second one is to get the reconstruction of local operators in terms of the generators of the Yang-Baxter algebra, i.e. to invert the map from the local operators in the Lax matrices to the monodromy matrix elements. Indeed, the solution of such an inverse problem allows to compute the action of local operators on the eigenstates of the transfer matrix which together with the scalar product formulae leads to the determination of the matrix elements of local operators.

The first reconstruction of local operators has been achieved in [18], in the case of the XXZ spin 1/2 chain. In [28], then the solution has been extended to fundamental lattice models, i.e. those with isomorphic auxiliary and local quantum space, for which the monodromy matrix becomes the permutation operator at a special value of the spectral parameter. The reconstruction also applies to non-fundamental lattice models, as it was shown in [28] for the higher spin XXX chains by using the fusion procedure [73]. In the case of the τ_2-model this type of reconstruction is still missing and the only known results are those given by T. Oota based on the use of quantum projectors [130]. However, it is worth recalling that Oota's results only lead to the reconstruction of some local operators of the lattice τ_2-model. In this section, we will show how to obtain all the local operators of the τ_2-model for the cyclic representations which occur for q a p-root of unit.

6.1 Oota's reconstruction of a class of local operators

Here we recall some of the results of Oota's paper [130] which lead to the reconstruction of a class of local operators in the τ_2-model. The Lax operator $\mathsf{L}_n(\lambda)$ has the following factorization in terms of quantum projectors:

$$\mathsf{L}_n(\mu_{n,+}) \equiv \begin{pmatrix} (\mathsf{L}_n)_{12}\,\mathsf{u}_n^{-1/2} f_n \\ (\mathsf{L}_n)_{21}\,\mathsf{u}_n^{1/2} f_n^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathsf{u}_n^{-1/2} f_n & \mathsf{u}_n^{1/2} f_n^{-1} \end{pmatrix}, \tag{6.1}$$

$$\mathsf{L}_n(\mu_{n,-}) \equiv \begin{pmatrix} g_n \mathsf{u}_n^{1/2} \\ g_n^{-1} \mathsf{u}_n^{-1/2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} g_n \mathsf{u}_n^{1/2}\,(\mathsf{L}_n)_{21} & g_n^{-1} \mathsf{u}_n^{-1/2}\,(\mathsf{L}_n)_{12} \end{pmatrix}, \tag{6.2}$$

where $(\mathsf{L}_n)_{ij}$ stays for the matrix element i, j of the Lax operator and:

$$f_n \equiv \left(-\frac{\alpha_n \beta_n}{\mathbb{a}_n \mathbb{b}_n}\right)^{1/4}, \quad g_n \equiv \left(-\frac{\alpha_n \beta_n}{\mathbb{c}_n \mathbb{d}_n}\right)^{1/4}. \tag{6.3}$$

when computed in the zeros $\mu_{n,\pm}$ of the quantum determinant; such a factorization properties are at the basis of the following Oota's reconstructions:

Proposition 6.1. *The local operators* u_n *and*

$$\alpha_{0,n} \equiv \left(\frac{-\mathbb{c}_n \mathbb{b}_n^2}{\alpha_n \beta_n \mathbb{d}_n}\right)^{1/2} \left(\frac{1 + q^{-1}(\mathbb{a}_n/\mathbb{b}_n)\mathsf{v}_n^2}{1 + q^{-1}(\mathbb{c}_n/\mathbb{d}_n)\mathsf{v}_n^2}\right) \mathsf{u}_n, \tag{6.4}$$

admit the reconstructions:

$$\mathsf{u}_n^{-1} = \left(-\frac{\mathbb{a}_n \mathbb{b}_n}{\alpha_n \beta_n}\right)^{1/2} \mathsf{U}_n \mathsf{B}^{-1}(\mu_{n,+}) \mathsf{A}(\mu_{n,+}) \mathsf{U}_n^{-1} = \left(-\frac{\mathbb{a}_n \mathbb{b}_n}{\alpha_n \beta_n}\right)^{1/2} \mathsf{U}_n \mathsf{D}^{-1}(\mu_{n,+}) \mathsf{C}(\mu_{n,+}) \mathsf{U}_n^{-1}, \tag{6.5}$$

$$\alpha_{0,n} = \mathsf{U}_n \mathsf{A}^{-1}(\mu_{n,-}) \mathsf{B}(\mu_{n,-}) \mathsf{U}_n^{-1} = \mathsf{U}_n \mathsf{C}^{-1}(\mu_{n,-}) \mathsf{D}(\mu_{n,-}) \mathsf{U}_n^{-1}. \tag{6.6}$$

Oota's formulae (6.5)-(6.6) clearly allow to reconstruct all the powers $\mathsf{u}_n^{-k} = \mathsf{U}_n \left(\mathsf{B}^{-1}(\mu_{n,+})\mathsf{A}(\mu_{n,+})\right)^k \mathsf{U}_n^{-1}$ of the local operators u_n but they do not give a direct reconstruction of the local operators v_n; indeed, only rational functions like $\left(1 + q^{-1}(\mathbb{a}_n/\mathbb{b}_n)\mathsf{v}_n^2\right) / \left(1 + q^{-1}(\mathbb{c}_n/\mathbb{d}_n)\mathsf{v}_n^2\right)$ are obtained.

6.2 Inverse problem solution for all local operators

Here, we show how to complete the reconstruction of local operators by solving the inverse problem for the local operators v_n and their powers. The main ingredient used will be the cyclicity of the representations of the τ_2-model here analyzed. Let us define the local operators:

$$\beta_{k,n} \equiv \left(\mathsf{U}_n \mathsf{A}^{-1}(\mu_{n,+})\mathsf{B}(\mu_{n,+})\mathsf{U}_n^{-1}\right)^{-k-1} \alpha_{0,n} \left(\mathsf{U}_n \mathsf{A}^{-1}(\mu_{n,+})\mathsf{B}(\mu_{n,+})\mathsf{U}_n^{-1}\right)^{k} \tag{6.7}$$

then the following proposition holds:

Proposition 6.2. *In the cyclic representations of the τ_2-model, the local operators v_n^{2k} admit the following reconstruction:*

$$\mathsf{v}_n^{2k} = \frac{1}{p}\left(-\frac{\mathbb{d}_n}{\mathbb{c}_n}\right)^k \frac{1 + (\mathbb{c}_n/\mathbb{d}_n)^p}{(\mathbb{b}_n\mathbb{c}_n/\mathbb{a}_n\mathbb{d}_n)^{1/2} - (\mathbb{a}_n\mathbb{d}_n/\mathbb{b}_n\mathbb{c}_n)^{1/2}} \sum_{a=0}^{p-1} q^{k(2a+1)}\beta_{a,n}\,. \tag{6.8}$$

Proof. In our cyclic representations the local operators u_n and v_n satisfy the property that u_n^p and v_n^p are central, i.e. u_n^p and v_n^p are just numbers that we have fixed to 1 in our representations. Then the following identity holds:

$$\frac{1 + (\mathbb{c}_n/\mathbb{d}_n)^p}{1 + q^{-2k-1}(\mathbb{c}_n/\mathbb{d}_n)\mathsf{v}_n^2} = \sum_{i=0}^{p-1}\left(-q^{-2k-1}(\mathbb{c}_n/\mathbb{d}_n)\mathsf{v}_n^2\right)^i . \tag{6.9}$$

The previous formula and the reconstruction (6.5)-(6.6) allow to rewrite the rational function $\beta_{k,n}$ as a finite sum in powers of v_n^2:

$$\begin{aligned}\beta_{k,n} \;&=\; \frac{(\mathbb{b}_n\mathbb{c}_n/\mathbb{a}_n\mathbb{d}_n)^{1/2} + (\mathbb{a}_n\mathbb{d}_n/\mathbb{b}_n\mathbb{c}_n)^{1/2}(\mathbb{c}_n/\mathbb{d}_n)^p}{1 + (\mathbb{c}_n/\mathbb{d}_n)^p} \\ &+\; \frac{(\mathbb{b}_n\mathbb{c}_n/\mathbb{a}_n\mathbb{d}_n)^{1/2} - (\mathbb{a}_n\mathbb{d}_n/\mathbb{b}_n\mathbb{c}_n)^{1/2}}{1 + (\mathbb{c}_n/\mathbb{d}_n)^p} \sum_{a=1}^{p-1}(-1)^a q^{-a(2k+1)}\left(\frac{\mathbb{c}_n}{\mathbb{d}_n}\right)^a \mathsf{v}_n^{2a},\end{aligned} \tag{6.10}$$

then by taking the discrete Fourier transformation, we get the reconstructions (6.8), plus the sum rules

$$\sum_{a=0}^{p-1}\beta_{a,n} = p\frac{(\mathbb{b}_n\mathbb{c}_n/\mathbb{a}_n\mathbb{d}_n)^{1/2} + (\mathbb{a}_n\mathbb{d}_n/\mathbb{b}_n\mathbb{c}_n)^{1/2}(\mathbb{c}_n/\mathbb{d}_n)^p}{1 + (\mathbb{c}_n/\mathbb{d}_n)^p}. \tag{6.11}$$

□

Note that thanks to the identities $\mathsf{v}_n^k = \mathsf{v}_n^{2h}/v_n^p$, for $k = 2h - p$ odd integer smaller than p, the formulae (6.8) indeed lead to the reconstruction of all the powers v_n^k for $k \in \{1, ..., p-1\}$. Then the previous proposition together with Oota's reconstructions leads to the announced complete reconstruction of local operators for cyclic representations of the τ_2-model.

6.3 SOV-representations of all local operators

In order to compute the action of the local operators v_n^k and u_n^k on eigenstates of the transfer matrix and eventually obtain their form factors it is necessary to derive before their SOV-representations. Here, we show how these SOV-representations can be obtained from the previously given solutions of the inverse problem. To this aim the two lemmas that we will present in the following are important, as they solve the combinatorial problem related to the computation of the SOV-representations of the local operators (6.5)-(6.6).

Let us introduce, the coordinate operators $\hat{\boldsymbol{\eta}}_i$ for $i \in \{1, ..., \mathsf{N}\}$, $\hat{\boldsymbol{\eta}}_{\mathsf{A}}^{(\pm)}$ and $\hat{\boldsymbol{\eta}}_{\mathsf{D}}^{(\pm)}$ such that:

$$\langle \boldsymbol{\eta}|\hat{\boldsymbol{\eta}}_i \equiv \eta_i \langle \boldsymbol{\eta}|, \quad \langle \boldsymbol{\eta}|\hat{\boldsymbol{\eta}}_{\mathsf{A}}^{(\pm)} \equiv \eta_{\mathsf{A}}^{(\pm)} \langle \boldsymbol{\eta}|, \ \ \langle \boldsymbol{\eta}|\hat{\boldsymbol{\eta}}_{\mathsf{D}}^{(\pm)} \equiv \eta_{\mathsf{D}}^{(\pm)} \langle \boldsymbol{\eta}|, \tag{6.12}$$

and the operator $\mathsf{T}_i^{\pm}$ are defined on the left anf right SOV-representations by[24]:

$$\langle \boldsymbol{\eta}|\mathsf{T}_i^{\pm} \equiv \langle q^{\pm\delta_i}\boldsymbol{\eta}|, \qquad \mathsf{T}_i^{\pm}|\boldsymbol{\eta}\rangle \equiv |q^{\mp\delta_i}\boldsymbol{\eta}\rangle \tag{6.13}$$

and clearly the commutation relations hold:

$$\mathsf{T}_i^{\pm}\hat{\boldsymbol{\eta}}_j = q^{\pm\delta_{i,j}}\hat{\boldsymbol{\eta}}_j \mathsf{T}_i^{\pm}. \tag{6.14}$$

Lemma 6.1. *We have the expansion*

$$\left(\hat{\boldsymbol{\Omega}}(f)\right)^k = \sum_{\substack{\vec{\alpha}=\{\alpha_1 \ldots \alpha_{N-1}\} \\ \sum \alpha_i = k}} \begin{bmatrix} k \\ \vec{\alpha} \end{bmatrix} \prod_{i=1}^{\mathsf{N}-1} \left(\prod_{h=0}^{\alpha_i - 1} f(q^{-h}\hat{\boldsymbol{\eta}}_i) \prod_{j\neq i} \frac{1}{q^{\alpha_j - h}\hat{\boldsymbol{\eta}}_i/\hat{\boldsymbol{\eta}}_j - q^{-\alpha_j + h}\hat{\boldsymbol{\eta}}_j/\hat{\boldsymbol{\eta}}_i} \right) \prod_{i=1}^{\mathsf{N}-1} (\mathsf{T}_i^{-})^{\alpha_i} \tag{6.15}$$

for the operator

$$\hat{\boldsymbol{\Omega}}(f) = \sum_{a=1}^{\mathsf{N}-1} \prod_{b\neq a} \frac{1}{\hat{\boldsymbol{\eta}}_a/\hat{\boldsymbol{\eta}}_b - \hat{\boldsymbol{\eta}}_b/\hat{\boldsymbol{\eta}}_a} f(\hat{\boldsymbol{\eta}}_a)\mathsf{T}_a^{-}, \tag{6.16}$$

with

$$\begin{bmatrix} k \\ \vec{\alpha} \end{bmatrix} \equiv \frac{[k]!}{\prod_{j=1}^{\mathsf{N}-1}[\alpha_j]!}, \ [k]! \equiv [k][k-1]\cdots[1], \ [a] \equiv \frac{q^a - q^{-a}}{q - q^{-1}}. \tag{6.17}$$

Proof. The lemma holds for $k = 1$ and we prove it by induction for $k > 1$. Let us take $\mathsf{N} - 1$ integers α_i:

$$\sum_{i=1}^{\mathsf{N}-1} \alpha_i = k, \tag{6.18}$$

from which we define the set of integers $I = \{i \in \{1, ..., \mathsf{N} - 1\} : \alpha_i \neq 0\}$ and $\hat{\mathbf{C}}_{\vec{\alpha}}^{(k)}$ as the operator coefficient of $\prod \mathsf{T}_i^{-\alpha_i}$ (put to the left) in the expansion of the k-th power of $\hat{\boldsymbol{\Omega}}(f)$. By writing $(\hat{\boldsymbol{\Omega}}(f))^k =$

[24] It is worth remarking that from the definition of the SOV-representations of the generators of the Yang-Baxter algebra, given in Section 2.3, and the definitions in (6.13), it follows that the SOV-representation of the charge Θ coincides with the operator $\mathsf{T}_{\mathsf{N}}^{-}$.

$(\hat{\mathbf{\Omega}}(f))^{k-1}\hat{\mathbf{\Omega}}(f)$ and by using the induction hypothesis for the power $k-1$ of $\hat{\mathbf{\Omega}}(f)$, we have:

$$\hat{\mathbf{C}}_{\vec{\alpha}}^{(k)} = \sum_{a\in I} \begin{bmatrix} k-1 \\ \vec{\alpha}-\vec{\delta}_a \end{bmatrix} \prod_{j=1}^{\mathsf{N}-1} \prod_{h=0}^{\alpha_j-\delta_{a,j}-1} \left(f(q^{-h}\hat{\boldsymbol{\eta}}_j) \times \prod_{i\neq j, i=1}^{\mathsf{N}-1} \frac{1}{q^{\alpha_i-\delta_{a,i}-h}\hat{\boldsymbol{\eta}}_j/\hat{\boldsymbol{\eta}}_i - \hat{\boldsymbol{\eta}}_i/q^{\alpha_i-\delta_{a,i}-h}\hat{\boldsymbol{\eta}}_j} \right)$$
$$\times f(\hat{\boldsymbol{\eta}}_a q^{-\alpha_a+1}) \prod_{i\in I\backslash\{a\}} \frac{1}{q^{\alpha_a-\alpha_i-1}\hat{\boldsymbol{\eta}}_i/\hat{\boldsymbol{\eta}}_a - \hat{\boldsymbol{\eta}}_a/q^{\alpha_a-\alpha_i-1}\hat{\boldsymbol{\eta}}_i}, \tag{6.19}$$

with $\vec{\delta}_a \equiv (\delta_{1,a}, \ldots, \delta_{\mathsf{N},a})$. The first term in r.h.s. is the coefficient of $\prod \mathsf{T}_i^{-\alpha_i+\delta_{a,i}}$ in $(\hat{\mathbf{\Omega}}(f))^{k-1}$ and the second is the coefficient of T_a^{-1} in $\hat{\mathbf{\Omega}}(f)$ once the commutations between $\prod \mathsf{T}_i^{-\alpha_i+\delta_{a,i}}$ and the $\hat{\boldsymbol{\eta}}_i$ have been performed. This can be rewritten as:

$$\hat{\mathbf{C}}_{\vec{\alpha}}^{(k)} = \frac{[k-1]!}{\prod[\alpha_i]!} \left(\prod_{j=1}^{\mathsf{N}-1} \prod_{h=0}^{\alpha_j-1} (\prod_{i\neq j, i=1}^{\mathsf{N}-1} \frac{1}{q^{\alpha_i-h}\hat{\boldsymbol{\eta}}_j/\hat{\boldsymbol{\eta}}_i - \hat{\boldsymbol{\eta}}_i/q^{\alpha_i-h}\hat{\boldsymbol{\eta}}_j}) f(q^{-h}\hat{\boldsymbol{\eta}}_j) \right)$$
$$\times \sum_{a\in I} ([\alpha_a] \prod_{i\in I\backslash\{a\}} \frac{q^{\alpha_a}\hat{\boldsymbol{\eta}}_i/\hat{\boldsymbol{\eta}}_a - \hat{\boldsymbol{\eta}}_a/q^{\alpha_a}\hat{\boldsymbol{\eta}}_i}{q^{\alpha_a-\alpha_i}\hat{\boldsymbol{\eta}}_i/\hat{\boldsymbol{\eta}}_a - \hat{\boldsymbol{\eta}}_a/q^{\alpha_a-\alpha_i}\hat{\boldsymbol{\eta}}_i}), \tag{6.20}$$

which leads to our result when we use the relation:

$$\sum_{a=1}^{n} [\alpha_a] \prod_{i\neq a} \frac{q^{\alpha_a}\eta_i/\eta_a - \eta_a/q^{\alpha_a}\eta_i}{q^{\alpha_a-\alpha_i}\eta_i/\eta_a - \eta_a/q^{\alpha_a-\alpha_i}\eta_i} = \left[\sum_{a=1}^{n} \alpha_a \right]. \tag{6.21}$$

The above formula holds for any n, for any set of numbers η_i and for any non-negative integers α_i. This is shown by studying the contour integral and the residues of the function

$$g(z) = \frac{1}{z} \prod \frac{z-\eta_i^2}{z-q^{-2\alpha_i}\eta_i^2}. \tag{6.22}$$

□

Lemma 6.2. *The SOV-representation of the powers of $B^{-1}(\lambda)A(\lambda)$ are given by*

$$\left(B^{-1}(\lambda)A(\lambda)\right)^m = \sum_{i+j+k=m} \frac{(-1)^j}{\hat{\boldsymbol{\eta}}_{\mathsf{N}}^m} \left(\lambda \prod_{a=1}^{\mathsf{N}-1} \hat{\boldsymbol{\eta}}_a \right)^{i-j} a_+^i a_-^j q^{\frac{i(i-1)-j(j-1)}{2}} \begin{bmatrix} m \\ i,j,k \end{bmatrix} \hat{\boldsymbol{\sigma}}(\lambda)^k \mathsf{T}_{\mathsf{N}}^{j-i} \tag{6.23}$$

with

$$\hat{\boldsymbol{\sigma}}(\lambda) = \sum_{a=1}^{\mathsf{N}-1} \prod_{b\neq a} \frac{1}{\hat{\boldsymbol{\eta}}_a/\hat{\boldsymbol{\eta}}_b - \hat{\boldsymbol{\eta}}_b/\hat{\boldsymbol{\eta}}_a} \frac{\mathsf{a}^{(SOV)}(\hat{\boldsymbol{\eta}}_a)}{\lambda/\hat{\boldsymbol{\eta}}_a - \hat{\boldsymbol{\eta}}_a/\lambda} \mathsf{T}_a^-, \tag{6.24}$$

where the powers of $\hat{\boldsymbol{\sigma}}(\lambda)$ are given by the previous lemma.

Proof. Let $\hat{\mathbf{a}}$, $\hat{\mathbf{b}}$ and $\hat{\mathbf{c}}$ be three operators satisfying the relations

$$\hat{\mathbf{b}}\hat{\mathbf{a}} = q^{-2}\hat{\mathbf{a}}\hat{\mathbf{b}}, \hat{\mathbf{c}}\hat{\mathbf{b}} = q^2\hat{\mathbf{b}}\hat{\mathbf{c}}, \hat{\mathbf{c}}\hat{\mathbf{a}} = q^{-2}\hat{\mathbf{a}}\hat{\mathbf{c}} \tag{6.25}$$

It is easy to prove by induction that

$$\left(\hat{\mathbf{a}}+\hat{\mathbf{b}}+\hat{\mathbf{c}}\right)^m = \sum_{i+j+k=m} q^{k(j-i)-ij} \begin{bmatrix} m \\ i,j,k \end{bmatrix} \hat{\mathbf{a}}^i \hat{\mathbf{b}}^j \hat{\mathbf{c}}^k \tag{6.26}$$

The SOV-representation of $B^{-1}(\lambda)A(\lambda)$ is the sum of three main terms,

$$\hat{\mathbf{a}} = \frac{\prod_{i=1}^{\mathsf{N}-1} \hat{\boldsymbol{\eta}}_i}{\hat{\boldsymbol{\eta}}_{\mathsf{N}}} \lambda a_+ \mathsf{T}_{\mathsf{N}}^- \tag{6.27}$$

$$\hat{\mathbf{b}} = -\frac{\prod_{i=1}^{\mathsf{N}-1} \hat{\boldsymbol{\eta}}_i^{-1}}{\hat{\boldsymbol{\eta}}_{\mathsf{N}}} \lambda^{-1} a_- \mathsf{T}_{\mathsf{N}}^+ \tag{6.28}$$

$$\hat{\mathbf{c}} = \frac{1}{\hat{\boldsymbol{\eta}}_{\mathsf{N}}} \sum_{a=1}^{\mathsf{N}-1} \prod_{b\neq a} \frac{1}{\hat{\boldsymbol{\eta}}_a/\hat{\boldsymbol{\eta}}_b - \hat{\boldsymbol{\eta}}_b/\hat{\boldsymbol{\eta}}_a} \frac{\mathsf{a}^{(SOV)}(\hat{\boldsymbol{\eta}}_a)}{\lambda/\hat{\boldsymbol{\eta}}_a - \hat{\boldsymbol{\eta}}_a/\lambda} \mathsf{T}_a^- \tag{6.29}$$

Since they satisfy the commutation relations (6.25), the power of $B^{-1}(\lambda)A(\lambda)$ can be computed using the formula (6.26), which ends the proof. □

Remark 1. The quantum multinomials have the property

$$\begin{bmatrix} p \\ \vec{\alpha} \end{bmatrix} = \begin{cases} 1 & \text{if } \exists i \in \{1,...,\mathsf{N}-1\} : \alpha_i = p\delta_{a,i}\ \forall a \in \{1,...,\mathsf{N}-1\}, \\ 0 & \text{otherwise}, \end{cases} \tag{6.30}$$

This property yields that the power p of $\mathsf{B}^{-1}(\lambda)\mathsf{A}(\lambda)$ is a central element of the Yang-Baxter algebra and it reads:

$$(\mathsf{B}^{-1}(\lambda)\mathsf{A}(\lambda))^p = \mathcal{B}(\Lambda)^{-1}\mathcal{A}(\Lambda), \tag{6.31}$$

result which is consistent with the commutations relations:

$$\mathsf{B}^{-1}(q\lambda)\mathsf{A}(q\lambda) = \mathsf{A}(\lambda)\mathsf{B}^{-1}(\lambda). \tag{6.32}$$

The two previous lemmas allow to expand the SOV-representation of the operators u_n^k. However, they do not apply directly to the expansion of v_n. The aim of the following lemma is to transform the operators $\beta_{k,n}$, whose linear combination gives the powers of v_n.

Lemma 6.3. *The operator $\hat{\boldsymbol{\beta}}_{k,n}$ has the following expansion:*

$$\begin{aligned}\hat{\boldsymbol{\beta}}_{k,n} &= \frac{\mathcal{B}(\mu_{n,-}^p)}{\mathcal{A}(\mu_{n,-}^p)\mathcal{B}(\mu_{n,+}^p)} \frac{\mu_{n,+}/\mu_{n,-} - \mu_{n,-}/\mu_{n,+}}{q^k\mu_{n,+}/\mu_{n,-} - q^{-k}\mu_{n,-}/\mu_{n,+}} \\ &\quad \times B^{-1}(\mu_{n,+})A(\mu_{n,+}) \prod_{i=1}^{p-k} B(q^{-i}\mu_{n,+}) \left(B^{-1}(\mu_{n,-})A(\mu_{n,-})\right)^{p-1} \prod_{i=p-k+1}^{p} B(q^{-i}\mu_{n,+}) \\ &+ \frac{q^k - q^{-k}}{q^k\mu_{n,+}/\mu_{n,-} - q^{-k}\mu_{n,-}/\mu_{n,+}} \end{aligned} \tag{6.33}$$

Proof. A simple induction on the Yang-Baxter relation $B(\lambda)A(q^{-1}\lambda) = A(\lambda)B(q^{-1}\lambda)$ shows that

$$\left(A^{-1}(\lambda)B(\lambda)\right)^k = \prod_{i=1}^{k} B(q^{-i}\lambda) \prod_{i=1}^{k} A^{-1}(q^{-i}\lambda) = \prod_{i=0}^{k-1} A^{-1}(q^{i}\lambda) \prod_{i=0}^{k-1} B(q^{i}\lambda) \tag{6.34}$$

From the definition of the average values of operators, we get

$$\left(A^{-1}(\lambda)B(\lambda)\right)^k = \mathcal{A}(\Lambda)^{-1} \prod_{i=1}^{p-k} A(q^{-i}\lambda) \prod_{i=p-k+1}^{p} B(q^{-i}\lambda) \tag{6.35}$$

$$\left(A^{-1}(\lambda)B(\lambda)\right)^{-k} = \mathcal{B}(\Lambda)^{-1} \prod_{i=1}^{p-k} B(q^{-i}\lambda) \prod_{i=p-k+1}^{p} A(q^{-i}\lambda) \tag{6.36}$$

It also yields

$$\left(A^{-1}(\lambda)B(\lambda)\right)^p = \mathcal{A}^{-1}(\Lambda)\mathcal{B}(\Lambda) \tag{6.37}$$

and

$$A^{-1}(\lambda)B(\lambda) = \mathcal{A}^{-1}(\Lambda)\mathcal{B}(\Lambda)\left(B^{-1}(\lambda)A(\lambda)\right)^{p-1} \tag{6.38}$$

Standard arguments give the relation

$$\begin{aligned} B(\mu_{n,-}) \prod_{i=1}^{p-k} A(q^{-i}\mu_{n,+}) &= \frac{q^k - q^{-k}}{q^k\mu_{n,+}/\mu_{n,-} - q^{-k}\mu_{n,-}/\mu_{n,+}} A(\mu_{n,-}) \prod_{i=1}^{p-k-1} A(q^{-i}\mu_{n,+}) B(q^k\mu_{n,+}) \\ &+ \frac{\mu_{n,+}/\mu_{n,-} - \mu_{n,-}/\mu_{n,+}}{q^k\mu_{n,+}/\mu_{n,-} - q^{-k}\mu_{n,-}/\mu_{n,+}} \prod_{i=1}^{p-k} A(q^{-i}\mu_{n,+}) B(\mu_{n,-}) \end{aligned} \tag{6.39}$$

Eventually, the use of these relations proves the lemma. □

7 Form factors of local operators

7.1 Form factors of u_n^{-1} and $\alpha_{0,n}^{-1}$

In this section we use the SOV-representations of local operators to give some first example of completely resummed form factors.

Proposition 7.1. *Let $\langle t_k|$ and $|t'_{k'}\rangle$ be two eigenstates of the transfer matrix $\tau_2(\lambda)$, then it holds:*

$$\langle t_k|\mathsf{u}_n^{-1}|t'_{k'}\rangle = \left(-\frac{\mathbb{a}_n\mathbb{b}_n}{\alpha_n\beta_n}\right)^{1/2} \frac{\varphi_n^{(t_k)}}{\varphi_n^{(t'_{k'})}} \delta_{k,k'-1} \det_{\mathsf{N}-1}(||\mathcal{U}_{a,b}^{(t_k,t'_{k'})}(\mu_{n,+})||), \tag{7.1}$$

where $\varphi_n^{(t_k)}$ and $\varphi_n^{(t'_{k'})}$ are the eigenvalues of the shift operator U_n and $||\mathcal{U}_{a,b}^{(t_k,t'_{k'})}(\lambda)||$ is the $(\mathsf{N}-1)\times$

$(\mathsf{N}-1)$ *matrix:*

$$\mathcal{U}_{a,b}^{(t_k,t'_{k'})}(\lambda) \equiv \mathcal{M}_{a,b+1/2}^{(t_k,t'_{k'})} \text{ for } b \in \{1,...,\mathsf{N}-2\}, \tag{7.2}$$

$$\mathcal{U}_{a,\mathsf{N}-1}^{(t_k,t'_{k'})}(\lambda) \equiv \frac{1}{\eta_{\mathsf{N}}^{(0)}} \sum_{h=1}^{p} \frac{\left(\eta_a^{(h)}\right)^{\mathsf{N}-2} Q_{t'_{k'}}(\eta_a^{(h)})}{\omega_a(\eta_a^{(h)})} \left[\frac{\bar{Q}_{t_k}(\eta_a^{(h+1)})}{(\lambda/\eta_a^{(h+1)} - \eta_a^{(h+1)}/\lambda)} \bar{\mathsf{a}}^{(SOV)}(\eta_a^{(h)}) \right.$$
$$\left. + \bar{Q}_{t_k}(\eta_a^{(h)}) \left(a_+ \lambda \left(\eta_a^{(h)}\right)^{\mathsf{N}-1} q^{k'} - \frac{a_-}{\lambda} \left(\eta_a^{(h)}\right)^{-(\mathsf{N}-1)} q^{-k'} \right) \right]. \tag{7.3}$$

Proof. The SOV-representation of the operator $\mathsf{B}^{-1}(\lambda)\mathsf{A}(\lambda)$ reads:

$$\mathsf{B}^{-1}(\lambda)\mathsf{A}(\lambda) = \frac{1}{\hat{\boldsymbol{\eta}}_{\mathsf{N}}} \left(\lambda \hat{\boldsymbol{\eta}}_{\mathsf{A}}^{(+)} \mathsf{T}_{\mathsf{N}}^- + \frac{\hat{\boldsymbol{\eta}}_{\mathsf{A}}^{(-)}}{\lambda} \mathsf{T}_{\mathsf{N}}^+ \right) + \sum_{a=1}^{\mathsf{N}-1} \mathsf{T}_a^- \frac{\bar{\mathsf{a}}^{(SOV)}(\hat{\boldsymbol{\eta}}_a)}{\hat{\boldsymbol{\eta}}_{\mathsf{N}}(\lambda/\hat{\boldsymbol{\eta}}_a q - \hat{\boldsymbol{\eta}}_a q/\lambda)} \prod_{b\neq a} \frac{1}{(\hat{\boldsymbol{\eta}}_a/\hat{\boldsymbol{\eta}}_b - \hat{\boldsymbol{\eta}}_b/\hat{\boldsymbol{\eta}}_a)}. \tag{7.4}$$

Let us denote with $[\mathsf{B}^{-1}(\lambda)\mathsf{A}(\lambda)]$ the second term on the r.h.s. of (7.4). Then, we observe that from the SOV-decomposition of the τ_2-eigenstates, we have:

$$\langle t_k|[\mathsf{B}^{-1}(\lambda)\mathsf{A}(\lambda)]|t'_{k'}\rangle = \frac{\sum_{h_{\mathsf{N}}=1}^{p} q^{(k+1-k')h_{\mathsf{N}}}}{p\eta_{\mathsf{N}}^{(0)}} \sum_{a=1}^{\mathsf{N}-1} \sum_{h_1,...,h_{\mathsf{N}-1}=1}^{p} V(\left(\eta_1^{(h_1)}\right)^2, ..., \left(\eta_{\mathsf{N}-1}^{(h_{\mathsf{N}-1})}\right)^2)$$
$$\times \prod_{b\neq a, b=1}^{\mathsf{N}-1} \frac{\eta_b^{(h_b)} Q_{t'_{k'}}(\eta_b^{(h_b)}) \bar{Q}_{t_k}(\eta_b^{(h_b)})}{\omega_b(\eta_b^{(h_b)})((\eta_a^{(h_a)})^2 - (\eta_b^{(h_b)})^2)}$$
$$\times \frac{\bar{Q}_{t_k}(\eta_a^{(h+1)}) Q_{t'_{k'}}(\eta_a^{(h_a)})}{\omega_a(\eta_a^{(h_a)})} \frac{\left(\eta_a^{(h_a)}\right)^{(\mathsf{N}-2)} \bar{\mathsf{a}}^{(SOV)}(\eta_a^{(h_a)})}{(\lambda/\eta_a^{(0)} q^{h_a+1} - \eta_a^{(0)} q^{h_a+1}/\lambda)}, \tag{7.5}$$

and so:

$$\langle t_k|[\mathsf{B}^{-1}(\lambda)\mathsf{A}(\lambda)]|t'_{k'}\rangle = \frac{\delta_{k,k'-1}}{\eta_{\mathsf{N}}^{(0)}} \sum_{a=1}^{\mathsf{N}-1} \underbrace{\sum_{h_1,...,h_{\mathsf{N}}=1}^{p}}_{h_a \text{ is missing.}} \underbrace{\hat{V}_a(\left(\eta_1^{(h_1)}\right)^2, ..., \left(\eta_{\mathsf{N}-1}^{(h_{\mathsf{N}-1})}\right)^2)}_{\text{(We have removed the row } a.)}$$
$$\times \prod_{b\neq a, b=1}^{\mathsf{N}-1} \frac{\eta_b^{(h_b)} Q_{t'_{k'}}(\eta_b^{(h_b)}) \bar{Q}_{t_k}(\eta_b^{(h_b)})}{\omega_b(\eta_b^{(h_b)})}$$
$$\times (-1)^{(\mathsf{N}-1+a)} \sum_{h_a=1}^{p} \frac{\bar{Q}_{t_k}(\eta_a^{(0)} q^{h_a+1}) Q_{t'_{k'}}(\eta_a^{(h_a)}) \left(\eta_a^{(h_a)}\right)^{(\mathsf{N}-2)} \bar{\mathsf{a}}^{(SOV)}(\eta_a^{(h_a)})}{\omega_a(\eta_a^{(h_a)})(\lambda/\eta_a^{(h_a+1)} - \eta_a^{(h_a+1)}/\lambda)}, \tag{7.6}$$

bringing the sum over $(h_1, ..., \widehat{h_a}, ..., h_{\mathsf{N}-1})$ inside the Vandermonde determinant $\hat{V}_a$, we have that the above expression is just the expansion of the determinant:

$$\langle t_k|[\mathsf{B}^{-1}(\lambda)\mathsf{A}(\lambda)]|t'_{k'}\rangle = \delta_{k,k'-1} \det_{\mathsf{N}-1}(|| \left[\mathcal{U}_{a,b}^{(t_k,t'_{k'})}(\lambda)\right] ||), \tag{7.7}$$

where $\left[\mathcal{U}_{a,b}^{(t_k,t'_{k'})}(\lambda)\right]$ coincides with $\mathcal{M}_{a,b+1/2}^{(t_k,t'_{k'})}$ for $b \in \{1, ..., \mathsf{N}-2\}$, while:

$$\left[\mathcal{U}_{a,\mathsf{N}-1}^{(t_k,t'_{k'})}(\lambda)\right] \equiv \frac{\left(\eta_a^{(0)}\right)^{\mathsf{N}-2}}{\eta_{\mathsf{N}}^{(0)}} \sum_{h=1}^{p} \frac{q^{(\mathsf{N}-2)h} Q_{t'_{k'}}(\eta_a^{(h)}) \bar{Q}_{t_k}(\eta_a^{(h_a+1)})}{\omega_a(\eta_a^{(h)})(\lambda/\eta_a^{(h_a+1)} - \eta_a^{(h_a+1)}/\lambda)} \bar{\mathsf{a}}^{(SOV)}(\eta_a^{(h)}). \tag{7.8}$$

Now let us compute the matrix elements:

$$\langle t_k|\hat{\boldsymbol{\eta}}_{\mathsf{N}}^{-1}\hat{\boldsymbol{\eta}}_{\mathsf{A}}^{(\pm)}\mathsf{T}_{\mathsf{N}}^{\mp}|t'_{k'}\rangle = \frac{\pm a_{\pm} q^{\pm k'} \sum_{h_{\mathsf{N}}=1}^{p} q^{(k+1-k')h_{\mathsf{N}}}}{p\eta_{\mathsf{N}}^{(0)}} \sum_{h_1,\dots,h_{\mathsf{N}-1}=1}^{p} V(\left(\eta_1^{(h_1)}\right)^2, \dots, \left(\eta_{\mathsf{N}-1}^{(h_{\mathsf{N}-1})}\right)^2)$$
$$\times \prod_{b=1}^{\mathsf{N}-1} \frac{\left(\eta_b^{(h_b)}\right)^{\pm 1} Q_{t'_{k'}}(\eta_b^{(h_b)}) \bar{Q}_{t_k}(\eta_b^{(h_b)})}{\omega_b(\eta_b^{(h_b)})}, \tag{7.9}$$

and so:

$$\langle t_k|\hat{\boldsymbol{\eta}}_{\mathsf{N}}^{-1}\hat{\boldsymbol{\eta}}_{\mathsf{A}}^{(\pm)}\mathsf{T}_{\mathsf{N}}^{\mp}|t'_{k'}\rangle = \frac{\pm a_{\pm} q^{\pm k'} \delta_{k,k'-1}}{\eta_{\mathsf{N}}^{(0)}} \det_{\mathsf{N}-1}(||\mathcal{M}_{a,b\pm 1/2}^{(t_k,t'_{k'})}||). \tag{7.10}$$

By using the fact that $\mathsf{N}-2$ columns are common in the matrix of formula (7.7) and in those of (7.10), we get our result. Let us remark that the above result holds for any value of λ. □

Remark 2.

I) It is worth pointing out that the form factors of u_n^{-1} are written in terms of a determinant of a matrix whose elements coincide with those of the scalar product except for the last line which is modified by the presence of the local operator. It is then interesting to recall that a similar statement holds for the form factors of the local operators in the XXZ spin 1/2 chain [18].

II) The matrix elements $\langle t_k|\alpha_{0,n}^{-1}|t'_{k'}\rangle$ of the local operators $\alpha_{0,n}^{-1}$ are given by:

$$\langle t_k|\alpha_{0,n}^{-1}|t'_{k'}\rangle = \frac{\varphi_n^{(t_k)}}{\varphi_n^{(t'_{k'})}} \delta_{k,k'-1} \det_{\mathsf{N}-1}(||\mathcal{U}_{a,b}^{(t_k,t'_{k'})}(\mu_{n,-})||). \tag{7.11}$$

III) In the case of general representations $\mathcal{R}_{\mathsf{N}}$ the matrix elements $\langle t_k|\mathsf{u}_n|t'_{k'}\rangle$ can be computed by using the reconstruction:

$$\mathsf{u}_n = \left(-\frac{\alpha_n\beta_n}{\mathbb{a}_n\mathbb{b}_n}\right)^{1/2} \mathsf{U}_n\mathsf{C}^{-1}(\mu_{n,+})\mathsf{D}(\mu_{n,+})\mathsf{U}_n^{-1}, \tag{7.12}$$

in the SOV C-representation. Here, we do not make this explicitly as the result will have the same type of form presented for $\langle t_k|\mathsf{u}_n^{-1}|t'_{k'}\rangle$; the difference will be that all the quantities will be written in the SOV C-representation.

7.2 Suitable operator basis for form factor computations

In this section we introduce an operator basis which can be conveniently used to describe all local operators. The interest toward this basis is due to the fact that the form factors of its elements are represented by a determinant formula.

7.2.1 Basis of elementary operators

Let us introduce the following operators:

$$\mathcal{O}_{a,k} \equiv \frac{\mathsf{B}(\eta_a^{(p+k-1)})\mathsf{B}(\eta_a^{(p+k-2)})\cdots\mathsf{B}(\eta_a^{(k+1)})\mathsf{A}(\eta_a^{(k)})}{p\hat{\boldsymbol{\eta}}_{\mathsf{N}}^{p-1}\prod_{b\neq a,b=1}^{\mathsf{N}-1}(Z_a/Z_b - Z_b/Z_a)} \text{ with } k \in \{0,...,p-1\}, \tag{7.13}$$

Lemma 7.1. *The operators $\mathcal{O}_{a,k}$ satisfy the followings properties:*

$$\mathcal{O}_{a,k}\mathcal{O}_{a,h} \text{ is non-zero if and only if } h = k-1, \tag{7.14}$$

and

$$\mathcal{O}_{a,k}\mathcal{O}_{a,k-1}\cdots\mathcal{O}_{a,k+1-p}\mathcal{O}_{a,k-p} = \frac{\mathcal{A}(Z_a)}{\prod_{b\neq a,b=1}^{\mathsf{N}-1}(Z_a/Z_b - Z_b/Z_a)}\mathcal{O}_{a,k}. \tag{7.15}$$

Moreover the following commutation relations hold:

$$\hat{\boldsymbol{\eta}}_{\mathsf{A}}^{(\pm)}\mathcal{O}_{a,k} = q^{\mp 1}\mathcal{O}_{a,k}\hat{\boldsymbol{\eta}}_{\mathsf{A}}^{(\pm)}, \ \ [\hat{\boldsymbol{\eta}}_{\mathsf{N}}, \mathcal{O}_{a,k}] = [\mathsf{T}_{\mathsf{N}}^{-}, \mathcal{O}_{a,k}] = 0, \tag{7.16}$$

and

$$\mathcal{O}_{a,k}\mathcal{O}_{b,h} = \frac{(\eta_a^{(k-h+1)}/\eta_b^{(0)} - \eta_b^{(0)}/\eta_a^{(k-h+1)})}{(\eta_a^{(k-h-1)}/\eta_b^{(0)} - \eta_b^{(0)}/\eta_a^{(k-h-1)})}\,\mathcal{O}_{b,h}\mathcal{O}_{a,k} \tag{7.17}$$

for $a \neq b \in \{1,...,\mathsf{N}-1\}$.

Proof. The first property follows from $\mathcal{B}(Z_a) = 0$, where $\mathcal{B}(\Lambda)$ is the average value of $\mathsf{B}(\lambda)$. By the definition of $\mathcal{O}_{a,k}$ it is clear that:

$$\langle \eta_1,...,\eta_a^{(h)},...,\eta_{\mathsf{N}}|\mathcal{O}_{a,k} = \frac{a(\eta_a^{(k)})\delta_{h,k}}{\prod_{b\neq a,b=1}^{\mathsf{N}}(\eta_a^{(k)}/\eta_b - \eta_b/\eta_a^{(k)})}\langle \eta_1,...,\eta_a^{(k-1)},...,\eta_{\mathsf{N}}|, \tag{7.18}$$

so that the second property simply follows. To prove the last property we have to use the Yang-Baxter commutation relation:

$$(\lambda/\mu - \mu/\lambda)\mathsf{A}(\lambda)\mathsf{B}(\mu) = (\lambda/q\mu - \mu q/\lambda)\mathsf{B}(\mu)\mathsf{A}(\lambda) + (q-q^{-1})\mathsf{B}(\lambda)\mathsf{A}(\mu) \tag{7.19}$$

we have before to move the $\mathsf{A}(\eta_a^{(k)})$ to the right through all the $\mathsf{B}(\eta_b^{(j)})$, for $j \neq h$, remarking that only the first term of the r.h.s of (7.19) survives, and after to move the $\mathsf{A}(\eta_b^{(h)})$ to the left. □

Let us introduce now the following monomials which we will call *elementary operators:*

$$\mathcal{E}_{k,k_0,(a_1,k_1),...,(a_r,k_r)}^{(\alpha_1,...,\alpha_r)} \equiv \hat{\boldsymbol{\eta}}_{\mathsf{N}}^{-k}\left(\hat{\boldsymbol{\eta}}_{\mathsf{A}}^{(+)}\mathsf{T}_{\mathsf{N}}^{-}\right)^{k_0}\mathcal{O}_{a_1,k_1}^{(\alpha_1)}\cdots\mathcal{O}_{a_r,k_r}^{(\alpha_r)}, \tag{7.20}$$

where $\sum_{h=1}^{r}\alpha_h \leq p$, $k, k_i \in \{0,...,p-1\}$, $a_i < a_j \in \{1,...,\mathsf{N}-1\}$ for $i < j \in \{1,...,\mathsf{N}-1\}$ and:

$$\mathcal{O}_{a,k}^{(\alpha)} \equiv \mathcal{O}_{a,k}\mathcal{O}_{a,k-1}\cdots\mathcal{O}_{a,k+1-\alpha}, \text{ with } \alpha \in \{1,...,p\}. \tag{7.21}$$

Then the following lemma holds:

Lemma 7.2. *For any $n \in \{1, ..., \mathsf{N}\}$, the set of the elementary operators dressed by the shift operator U_n:*

$$\mathsf{U}_n \mathcal{E}^{(\alpha_1,...,\alpha_r)}_{k,k_0,(a_1,k_1),...,(a_r,k_r)} \mathsf{U}_n^{-1}, \tag{7.22}$$

is a basis in the space of the local operators at the quantum site n.

Proof. The space of the local operators in site n is generated by u_n^k and v_n^k for $k \in \{1, ..., p-1\}$. Proceeding as done in Proposition 6.2 we have in particular the possibility to show that an alternative local basis is defined by the operators:

$$\mathsf{u}_n^{-k} = \mathsf{U}_n \left(\mathsf{B}^{-1}(\mu_{n,+})\mathsf{A}(\mu_{n,+})\right)^k \mathsf{U}_n^{-1}, \tag{7.23}$$

$$\tilde{\beta}_{k,n} = \mathsf{U}_n \left(\mathsf{B}^{-1}(\mu_{n,+})\mathsf{A}(\mu_{n,+})\right)^k \mathsf{B}^{-1}(\mu_{n,-})\mathsf{A}(\mu_{n,-}) \left(\mathsf{B}^{-1}(\mu_{n,+})\mathsf{A}(\mu_{n,+})\right)^{p-1-k} \mathsf{U}_n^{-1} \tag{7.24}$$

for $k \in \{1, ..., p-1\}$. To prove the lemma, we only have to show that the above operators are linear combinations of those defined in (7.20). Note that for $\lambda^p \neq Z_a$ with $a \in \{1, ..., \mathsf{N}-1\}$, the operator $\mathsf{B}^{-1}(\lambda)$ is invertible and from the centrality of the average values we can write:

$$\mathsf{B}^{-1}(\lambda)\mathsf{A}(\lambda) = \frac{\mathsf{B}(\lambda q^{p-1})\mathsf{B}(\lambda q^{p-2}) \cdots \mathsf{B}(\lambda q)\mathsf{A}(\lambda)}{\mathcal{B}(\Lambda)}. \tag{7.25}$$

Now the operator $\mathsf{B}(\lambda q^{p-1})\mathsf{B}(\lambda q^{p-2}) \cdots \mathsf{B}(\lambda q)\mathsf{A}(\lambda)$ is an even Laurent polynomial of degree $p(\mathsf{N}-1)+1$ in λ. So that by using the interpolation formula for $\mathsf{B}(\lambda q^{p-1})\mathsf{B}(\lambda q^{p-2}) \cdots \mathsf{B}(\lambda q)\mathsf{A}(\lambda)$, we derive:

$$\mathsf{B}^{-1}(\lambda)\mathsf{A}(\lambda) = \frac{1}{\hat{\boldsymbol{\eta}}_{\mathsf{N}}} \left(\lambda \hat{\boldsymbol{\eta}}_{\mathsf{A}}^{(+)} \mathsf{T}_{\mathsf{N}}^{-} + \frac{\hat{\boldsymbol{\eta}}_{\mathsf{A}}^{(-)}}{\lambda} \mathsf{T}_{\mathsf{N}}^{+} \right) + \frac{1}{\hat{\boldsymbol{\eta}}_{\mathsf{N}}} \sum_{a=1}^{\mathsf{N}-1} \sum_{k=0}^{p-1} \frac{\mathcal{O}_{a,k}}{(\lambda/\eta_a^{(k)} - \eta_a^{(k)}/\lambda)}. \tag{7.26}$$

From the previous formula and the representation (7.23)-(7.24), we have that the local operators u_n^{-k} and $\tilde{\beta}_{k,n}$ are linear combinations of the monomials:

$$\mathsf{U}_n \hat{\boldsymbol{\eta}}_{\mathsf{N}}^{-h} \left(\hat{\boldsymbol{\eta}}_{\mathsf{A}}^{(+)} \mathsf{T}_{\mathsf{N}}^{-} \right)^{h_0} \mathcal{O}_{a_1,h_1} \cdots \mathcal{O}_{a_s,h_s} \mathsf{U}_n^{-1} \tag{7.27}$$

for $s \leq p$, $a_i \in \{1, ..., \mathsf{N}-1\}$ and $h, h_i \in \{0, ..., p-1\}$. For any monomial $\mathcal{O}_{a_1,h_1} \cdots \mathcal{O}_{a_s,h_s}$ we can use the commutation rules (7.17) to rewrite it in a way that operators with the same index a are adjacent, we can order them in a way that $a_i < a_j$ for $i < j \in \{1, ..., \mathsf{N}-1\}$ and we can apply the rule (7.14) to say if the monomial is zero or not. Finally, by using the property (7.15), we have:

$$\mathcal{O}_{a,k}^{(p+\alpha)} = \frac{\mathcal{A}(Z_a)}{\prod_{b \neq a, b=1}^{\mathsf{N}} (Z_a/Z_b - Z_b/Z_a)} \mathcal{O}_{a,k}^{(\alpha)}, \tag{7.28}$$

and so it is clear that all the non-zero monomials $\mathcal{O}_{a_1,h_1} \cdots \mathcal{O}_{a_s,h_s}$ can be written in the form (7.20). □

7.2.2 Form factors of elementary operators

As anticipated the interest in the above definition of elementary operators is the simplicity of their form factors:

Lemma 7.3. *Let $\langle t_k|$ and $|t'_{k'}\rangle$ be two eigenstates of the transfer matrix $\tau_2(\lambda)$, then it holds:*

$$\langle t_k|\mathcal{E}^{(\alpha_1,\dots,\alpha_r)}_{(h,h_0,(a_1,h_1),\dots,(a_r,h_r))}|t'_{k'}\rangle = \frac{\delta_{k,k'+h}a_+^{h_0}q^{h_0k'}}{(\eta_{\mathsf{N}}^{(0)})^h}\,\mathsf{f}_{(h_0,\{\alpha\},\{a\})}\det_{\mathsf{N}-1+rp-g}(||\mathrm{O}^{(h_0,\{\alpha\},\{a\})}_{a,b}||), \tag{7.29}$$

where $||\mathrm{O}^{(h_0,\{\alpha\},\{a\})}_{a,b}||$ is the $(\mathsf{N}-1+rp-g)\times(\mathsf{N}-1+rp-g)$ matrix of elements:

$$\mathrm{O}^{(h_0,\{\alpha\},\{a\})}_{a,\sum_{h=1}^{m-1}(p-\alpha_h+1)+j_m} \equiv \left(\eta^2_{a_m}q^{2j_m}\right)^{2(a-1)} \quad \text{for } j_m\in\{0,\dots,p-\alpha_m\},\ \ m\in\{1,\dots,r\}, \tag{7.30}$$

$$\mathrm{O}^{(h_0,\{\alpha\},\{a\})}_{a,\sum_{h=1}^{r}(p-\alpha_h+1)+i} \equiv \Phi^{(t,t')}_{b_i,a+(h_0+g)/2}, \qquad \text{for } i\in\{1,\dots,\mathsf{N}-1-r\},\quad g\equiv\sum_{h=1}^{r}\alpha_h, \tag{7.31}$$

for any $a\in\{1,\dots,\mathsf{N}-1+rp-g\}$. Here, we have defined $\{b_1,\dots,b_{\mathsf{N}-1-r}\}\equiv\{1,\dots,\mathsf{N}-1\}\backslash\{a_1,\dots,a_r\}$ with elements ordered by $b_i<b_j$ for $i<j$ and

$$\begin{aligned}\mathsf{f}_{(h_0,\{\alpha\},\{a\})} \equiv{}& \frac{\prod_{i=1}^{r}Q_{t'}(\eta_{a_i}q^{-\alpha_i})\bar{Q}_t(\eta_{a_i})\left(\eta_{a_i}^{h_0+\alpha_i(\mathsf{N}-1-r)}/\omega_{a_i}(\eta_{a_i})\right)\prod_{h=0}^{\alpha_i-1}a(\eta_i q^{-h})}{\prod_{i=1}^{r}\prod_{h=0}^{\alpha_i-1}\prod_{j=1}^{i-1}(q^{\alpha_j-h}\eta_{a_i}/\eta_{a_j}-\eta_{a_j}/q^{\alpha_j-h}\eta_{a_i})\prod_{j=i+1}^{r}(\eta_{a_i}/q^h\eta_{a_j}-\eta_{a_j}q^h/\eta_{a_i})}\\ &\times\frac{(-1)^{\sum_{i=1}^{r}(a_i-i)}\prod_{i=1}^{r}q^{-(\mathsf{N}-1-r)\alpha_i(\alpha_i-1)/2}V(\eta^2_{a_1},\dots,\eta^2_{a_r})}{\prod_{i=1}^{r}\prod_{j=1}^{\mathsf{N}-1-r}(Z^2_{a_i}-Z^2_{b_j})V(\eta^2_{a_1},\eta^2_{a_1}q^2,\dots,\eta^2_{a_1}q^{2(p-\alpha_1)},\dots,\eta^2_{a_r},\eta^2_{a_r}q^2,\dots,\eta^2_{a_r}q^{2(p-\alpha_r)})},\end{aligned} \tag{7.32}$$

where $V(x_1,\dots,x_{\mathsf{N}})\equiv\prod_{1\le a<b\le\mathsf{N}}(x_a-x_b)$ is the Vandermonde determinant and we have used the notation:

$$\eta_{a_m}\equiv\eta^{(h_m)}_{a_m}. \tag{7.33}$$

Proof. The operator $\hat{\boldsymbol{\eta}}_{\mathsf{N}}^{-h}(\hat{\boldsymbol{\eta}}_{\mathsf{A}}^{(+)}\mathsf{T}_{\mathsf{N}}^{-})^{h_0}$ acts in the following way on the state $\langle t_k|$:

$$\begin{aligned}\langle t_k|\hat{\boldsymbol{\eta}}_{\mathsf{N}}^{-h}(\hat{\boldsymbol{\eta}}_{\mathsf{A}}^{(+)}\mathsf{T}_{\mathsf{N}}^{-})^{h_0} ={}& \frac{a_+^{h_0}q^{h_0(k-h)}}{(\eta_{\mathsf{N}}^{(0)})^h}\sum_{h_1,\dots,h_{\mathsf{N}}=1}^{p}\frac{q^{(k-h)h_{\mathsf{N}}}}{p^{1/2}}\prod_{a=1}^{\mathsf{N}-1}(\eta_a^{(h_a)})^{h_0}\bar{Q}_t(\eta_a^{(h_a)})\\ &\times\prod_{1\le a<b\le\mathsf{N}-1}((\eta_a^{(h_a)})^2-(\eta_b^{(h_b)})^2)\frac{\langle\eta_1^{(h_1)},\dots,\eta_{\mathsf{N}}^{(h_{\mathsf{N}})}|}{\prod_{b=1}^{\mathsf{N}-1}\omega_b(\eta_b^{(h_b)})}.\end{aligned} \tag{7.34}$$

From the formula (7.18), it follows:

$$\langle\eta_1,\dots,\eta^{(f)}_{a_i},\dots,\eta_{\mathsf{N}}|\mathcal{O}^{(\alpha_i)}_{a_i,h_i} = \frac{\prod_{h=0}^{\alpha_i-1}a(\eta_{a_i}q^{-h})\delta_{f,h_i}\langle\eta_1,\dots,\eta_{a_i}q^{-\alpha_i},\dots,\eta_{\mathsf{N}}|}{\prod_{b\neq a_i,b=1}^{\mathsf{N}-1}\prod_{h=0}^{\alpha_i-1}(\eta_{a_i}q^{-h}/\eta_b-\eta_b/\eta_{a_i}q^{-h})}, \tag{7.35}$$

where η_{a_i} is defined in (7.33). So we can compute also the action of $\mathcal{O}^{(\alpha_1)}_{a_1,h_1}\cdots\mathcal{O}^{(\alpha_r)}_{a_r,h_r}$ just taking into account the order of the operators in the monomial which leads by the scalar product formula to:

$$\begin{aligned}\langle t_k|\mathcal{E}^{(\alpha_1,\dots,\alpha_r)}_{(h,h_0,(a_1,h_1),\dots,(a_r,h_r))}|t'_{k'}\rangle &= \frac{a_+^{h_0} q^{h_0(k-h)}}{(\eta_{\mathsf{N}}^{(0)})^h} \sum_{k_1,\dots,k_{\mathsf{N}}=1}^{p} \frac{q^{[(k-h)-k']k_{\mathsf{N}}}}{p} \prod_{a=1}^{\mathsf{N}-1} (\eta_a^{(h_a)})^{h_0} \\ &\times \prod_{i=1}^{r} \frac{\prod_{h=0}^{\alpha_i-1} a(\eta_{a_i} q^{-h}) \delta_{k_{a_i},h_i}}{\prod_{j=1}^{\mathsf{N}-1-r} \prod_{h=0}^{\alpha_i-1} (\eta_{a_i} q^{-h}/\eta_{b_j}^{(k_{b_j})} - \eta_{b_j}^{(k_{b_j})}/\eta_{a_i} q^{-h})} \\ &\times \prod_{i=1}^{r} \prod_{h=0}^{\alpha_i-1} \frac{\prod_{j=i+1}^{r} (\eta_{a_i} q^{-h}/\eta_{a_j} - \eta_{a_j}/\eta_{a_i} q^{-h})^{-1}}{\prod_{j=1}^{i-1} (\eta_{a_i} q^{\alpha_j - h}/\eta_{a_j} - \eta_{a_j}/\eta_{a_i} q^{\alpha_j - h})} \\ &\times \prod_{j=1}^{\mathsf{N}-1-r} \frac{Q_{t'}(\eta_{b_j}^{(k_{b_j})}) \bar{Q}_t(\eta_{b_j}^{(k_{b_j})})}{\omega_{b_j}(\eta_{b_j}^{(k_{b_j})})} \prod_{i=1}^{r} \frac{Q_{t'}(\eta_{a_i} q^{-\alpha_i}) \bar{Q}_t(\eta_{a_i})}{\omega_{a_i}(\eta_{a_i})} V(\eta_1^2, \dots, \eta_{\mathsf{N}-1}^2).\end{aligned} \tag{7.36}$$

Let us remark that the sum $\sum_{k_1,\dots,k_{\mathsf{N}}=1}^{p}$ reduces to $\delta_{k,k'+h}$ times the sum $\sum_{k_{b_1},\dots,k_{b_{\mathsf{N}-(r+1)}}=1}^{p}$ for the presence of the $\prod_{i=1}^{r} \delta_{k_{a_i},h_i}$, where:

$$\{a_1, \dots, a_r\} \cup \{b_1, \dots, b_{\mathsf{N}-(r+1)}\} = \{1, \dots, \mathsf{N}-1\}. \tag{7.37}$$

Now we multiply each term of the sum by:

$$\begin{aligned} 1 = &\prod_{\epsilon=\pm 1} \prod_{i=1}^{r} \prod_{j=1}^{\mathsf{N}-1-r} \prod_{h=-p+\alpha_i}^{-1} (\eta_{a_i}^2 q^{-2h} - (\eta_{b_j}^{(k_{b_j})})^2)^{\epsilon} \\ &\times \left(\frac{V(\eta_{a_1}^2, \eta_{a_1}^2 q^2, \dots, \eta_{a_1}^2 q^{2(p-\alpha_1)}, \dots, \eta_{a_r}^2, \eta_{a_r}^2 q^2, \dots, \eta_{a_r}^2 q^{2(p-\alpha_r)})}{V(\eta_{a_1}^2, \dots, \eta_{a_r}^2)} \right)^{\epsilon} \end{aligned} \tag{7.38}$$

here the power $+1$ leads to the construction of the Vandermonde determinant:

$$V(\underbrace{\eta_{a_1}^2, \dots, \eta_{a_1}^2 q^{2(p-\alpha_1)}}_{p-\alpha_1+1 \text{ columns}}, \dots, \underbrace{\eta_{a_r}^2, \dots, \eta_{a_r}^2 q^{2(p-\alpha_r)}}_{p-\alpha_r+1 \text{ columns}}, \underbrace{(\eta_{b_1}^{(k_{b_1})})^2, \dots, (\eta_{b_{(\mathsf{N}-1)-r}}^{(k_{b_{(\mathsf{N}-1)-r}})})^2}_{(\mathsf{N}-1)-r \text{ columns}}), \tag{7.39}$$

and the sum $\sum_{k_{b_1},\dots,k_{b_{\mathsf{N}-(r+1)}}=1}^{p}$ becomes sum over columns and after some algebra we get our formula. □

It is interesting to point out that the last $\mathsf{N}-1-r$ columns of the matrix $||\mathsf{O}_{a,b}^{(\mathsf{e}_{\mathsf{N}} h_0, \{\alpha\}, \{a\})}||$ are just those of the scalar product while the others are those of the Vandermonde determinant computed in particular zeros of $\mathsf{B}(\lambda)$.

7.3 The chiral Potts model order parameters

The results presented in the previous subsections are as well results for the matrix elements of local operators in the inhomogeneous chiral Potts model. In particular, let $|t_k\rangle$ and $|t'_{k'}\rangle$ be two eigenstates of the chiral Potts transfer matrix, then the matrix elements:

$$\langle t_k|\mathsf{u}_n^{-1}|t'_{k'}\rangle, \quad \langle t_k|\alpha_{0,n}^{-1}|t'_{k'}\rangle \quad \text{and} \quad \langle t_k|\mathcal{E}^{(\alpha_1,...,\alpha_r)}_{(h,h_0,(a_1,h_1),...,(a_r,h_r))}|t'_{k'}\rangle$$

are given respectively by the formulae (7.1), (7.11) and (7.29). Furthermore, in the representations $\mathcal{R}_{\mathsf{N}}^{\text{chP,S-adj}}$ the formulae (7.1), (7.11) and (7.29) are always matrix elements of the corresponding local operators on chiral Potts eigenstates. As clarified bellow, some of these matrix elements generate the chiral Potts order parameters under the homogeneous and the thermodynamic limits.

7.3.1 Local Hamiltonians and order parameters

It is worth recalling that the following local quantum Hamiltonians:

$$H \equiv H_0 + kH_1, \;\; H_0 \equiv \sum_{n=1}^{\mathsf{N}} \left[\sum_{r=1}^{p-1} f_r(\theta)\mathsf{u}_n^r \mathsf{u}_{n+1}^{-r}\right], \;\; H_1 \equiv \sum_{n=1}^{\mathsf{N}} \left[\sum_{r=1}^{p-1} f_r(\bar{\theta})\mathsf{v}_n^r\right], \tag{7.40}$$

$$f_r(\theta) \equiv \frac{e^{i(2r-p)\theta/p}}{\sin \pi r/p}, \quad \cos\bar{\theta} = \frac{\cos\theta}{k}, \;\; e^{i(2\theta-\pi)/p} \equiv \frac{x_{\mathrm{q}_n}}{y_{\mathrm{q}_n}} = \frac{x_{\mathrm{r}_n}}{y_{\mathrm{r}_n}}, \tag{7.41}$$

first constructed by von Gehlen and Rittenberg [65], commute with the homogeneous Z_p chP transfer matrices. Indeed, they are generated by derivative of these transfer matrices w.r.t. the spectral parameter, see for example [60] for a derivation. Then the order parameters associated to the homogeneous Z_p chP models:

$$\mathcal{M}_r \equiv \frac{\langle g.s.|\mathsf{u}_1^r|g.s.\rangle}{\langle g.s.|g.s.\rangle}, \quad \forall r \in \{1, ..., p-1\} \tag{7.42}$$

admit a natural interpretation as spontaneous magnetizations in terms of the spin chain formulation associated to these local Hamiltonians. They have been mainly analyzed in the special representations associated to the super-integrable Z_p chP model, characterized by the following constrains:

$$x_{\mathrm{q}_n}^p = y_{\mathrm{q}_n}^p = x_{\mathrm{r}_n}^p = y_{\mathrm{r}_n}^p = \frac{1+k'}{k}, \; \forall n \in \{1, ..., \mathsf{N}\} \;\; \rightarrow \;\; \bar{\theta} = \theta = \pi/2. \tag{7.43}$$

In these special representations the Z_p chP model also has an underlying Onsager algebra [63] generated by the two components H_0 and H_1 of the local quantum Hamiltonians. The following thermodynamic limits:

$$\mathcal{M}_r = (1-k^2)^{\frac{r(p-r)}{2p^2}}, \quad \forall r \in \{1, ..., p-1\} \tag{7.44}$$

have been first argued by perturbative computations in [77] and then proven with techniques[25] which apply only starting from finite lattice computations in the super-integrable case. Nevertheless, as argued in [86], the formulae (7.44) should hold true for the general homogeneous Z_p chP models. It is then relevant pointing out that our approach should give us the possibility to prove this statement for general representations without the need to be restricted to the super-integrable case and our SOV results already provide simple determinant formulae for the matrix elements associated to $\mathcal{M}_{p-1}$ in the finite size and inhomogeneous regime.

[25] See Section 1.1 for an historical recall.

8 Conclusion and outlook

8.1 Conclusions

In this article we have considered general cyclic representations of the 6-vertex Yang-Baxter algebra on N-sites finite lattices and analyzed the associated τ_2-model and consequently the chiral Potts model. We have derived a reconstruction for all local operators in terms of standard Sklyanin's quantum separate variables and characterized by one determinant formulae of $\mathsf{N}\times\mathsf{N}$ matrices the scalar products of separate states. These findings imply that the action of any local operator on transfer matrix eigenstates reduces to a finite sum of separate states which allows to characterize matrix elements of any local operator as finite sum of determinants of the scalar product type. Moreover, we have obtained: form factors of the local operators u_n and $\alpha_{0,n}$ expressed by one determinant formulae obtained by modifying a single row in the scalar product matrices; form factors of a basis of operators expressed by one determinant formulae obtained by modifying the scalar product matrices by introducing rows which coincide with those of Vandermonde's matrix computed in the spectrum of the separate variables.

Let us comment that it would be desirable to get also for the generators v_n of the local Weyl algebras simple one determinant formulae as for the generators u_n, this interesting issue is currently under investigation. One important motivation to derive form factors of local operators by simple determinant formulae is for their use as efficient tools for the computations of correlation functions. The decomposition of the identity (4.13) allows to write correlation functions in spectral series of form factors and so it allows to analyzed numerically them mainly by the same tools developed in [131] in the ABA framework and used in the series of works[26] [131]-[137]. Indeed, in our SOV framework we have determinant representations of the form factors and eventually complete characterization of the transfer matrix spectrum in terms of the solutions of a system of Bethe equations type. Let us mention that in a recent series of papers [145]-[155] the problem to compute the asymptotic behavior of correlation functions has been successfully addressed[27] with a method which is in principle susceptible to be extended to any (integrable) quantum model possessing determinant representations for the form factors of local operators [154] and so also to the models analyzed by our approach in the SOV framework.

Finally, let us remark that the originality and interest of our current results are also due to the fact that matrix elements of local operators were so far mainly confined to the special class of super-integrable representations of $\mathbb{Z}_p$ chiral Potts model. As these representations can be obtained by taking well defined limits on the parameters of a generic (non-super-integrable) representation to which SOV applies, it is then an interesting issue to investigate how from our form factor results one can reproduce also those known in the super-integrable case. About this point it is worth mentioning that in the special case (p=2) of the generalized Ising model, it was already remarked in [89] that the matrix elements of the local spin operators obtained in the SOV framework in [102] admit factorized forms similar to those conjectured in [84] and proven in [89] for the super-integrable $\mathbb{Z}_p$ cases for general $p \geq 2$.

[26]By this numerical approach, relevant physical observables (like the so called dynamical structure factors) were evaluated and successfully compared with the measurements accessible by neutron scattering experiments [138]-[144].

[27]These results have been also successfully compared with those obtained previously with a method relying mainly on the Riemann-Hilbert analysis of related Fredholm determinants [156]-[158].

In a future paper, we will analyze the homogeneous and thermodynamic limits focusing the attention on the derivation of the order parameter formulae for the general homogeneous Z_p chiral Potts models. These formulae were proven with techniques working only in the super-integrable case but they are expected to be true [86] for the general homogeneous Z_p chiral Potts models. Our approach should give access to a proof of this statement from the finite lattice in general representations and we find encouraging the fact that the matrix element describing the order parameter:

$$\mathcal{M}_{p-1} \equiv \frac{\langle g.s.|\mathsf{u}_1^{-1}|g.s.\rangle}{\langle g.s.|g.s.\rangle} \tag{8.1}$$

admits simple determinant formula in our approach.

8.2 Outlook

It is worth recalling that in the literature of quantum integrable models there exist some results on form factors derived by different applications of separation of variable methods. For a more detailed analysis of the most relevant preexisting results and an explicit comparison with those obtained by our method in separation of variables we address the reader to [1]. Here, we want just recall the Smirnov's results [117], in the case of the integrable quantum Toda chain [15], [114]-[116] and those of Babelon, Bernard and Smirnov [159, 160], in the case of the restricted sine-Gordon at the reflectionless points. In both these cases form factors of local operators were argued[28] to have a determinant form. A strong similarity in the form of the results appears: the elements of the matrices whose determinants give the form factors are expressed as "convolutions", over the spectrum of each separate variable, of the product of the corresponding separate components of the wave functions times contributions associated to the action of local operators. It is then remarkable that also our results fall in this general form. This observation and the potential generality of the SOV method leads to the expectation of an universality in the SOV characterization of form factors.

A natural project is then to develop explicitly our method for a set of fundamental integrable quantum models providing determinant representations for form factors. This SOV method is not restricted to the case of cyclic representation and applies to a large class of integrable quantum models which were not tractable with other methods and in particular by algebraic Bethe ansatz. There exist already several key integrable quantum models associated by QISM to highest weight representations of the Yang-Baxter algebras and generalization of it for which this program has been developed. In [163, 164, 165] and [166] our approach has been respectively implemented for the spin-1/2 XXZ and the spin-s XXX inhomogeneous quantum chains with antiperiodic boundary conditions, for the spin-1/2 XXZ open quantum chains with quite general non-diagonal boundary conditions [46]-[52] and finally for the spin-1/2 representations

[28] The absence of a direct reconstruction of the local operators in terms of the Sklyanin's quantum separate variables was the motivation in [117, 160] to use some well educate guess relying on counting arguments for the characterization of local operators basis and to use semi-classical arguments relying on the classical SOV-reconstruction for the identification of primary fields [159, 162]. Note that a reconstructions of local operators in the lattice Toda model have been achieved in [161] in terms of a set of quantum separate variables defined by a change of variables in terms of the original Sklyanin's quantum separate variables.

of highest weight type of the dynamical 6-vertex Yang-Baxter algebra. In all these models the universality we just discussed in the structure of the matrix elements of local operator has been verified.

Acknowledgements

N. G. is supported by the ENS Lyon and ANR grant ANR-10-BLAN-0120-04-DIADEMS. N. G would also like to thank the YITP Institute of Stony Brook for hospitality. J. M. M. is supported by CNRS, ENS Lyon and by the grant ANR-10-BLAN-0120-04-DIADEMS. G. N. is supported by National Science Foundation grants PHY-0969739. G. N. gratefully acknowledge the YITP Institute of Stony Brook for the opportunity to develop his research programs. G. N. would like to thank theTheoretical Physics Group of the Laboratory of Physics at ENS-Lyon for hospitality, under support of ANR-10-BLAN- 0120-04-DIADEMS, which made possible this collaboration.

References

[1] N. Grosjean, J. M. Maillet, G. Niccoli, J. Stat. Mech. P10006 (2012).

[2] E.K. Sklyanin and L.D. Faddeev, Sov. Phys. Dokl. **23** (1978) 902.

[3] L.D. Faddeev and L.A. Takhtajan, Russ. Math. Surveys, **34** : 5 (1979) 11.

[4] P.P. Kulish and E.K. Sklyanin, Phys. Lett. A **70** (1979) 461.

[5] L.D. Faddeev, E.K. Sklyanin, L.A. Takhtajan, Theor. Math. Phys. **40** (1979) 688.

[6] L.D. Faddeev, Sov. Sci. Rev. C: Math. Phys. **1** (1980) 107-155.

[7] E.K. Sklyanin, J. Sov. Math. **19** (1982) 1546-1596.

[8] P.P. Kulish and E.K. Sklyanin, Lect. Notes Phys. **151** (1982) 61.

[9] L. D. Fadeev. Integrable models in $1 + 1$ dimensional quantum field theory. In J.-B. Zuber and R. Stora, editors, *Recent Advances in Field Theory and Statistical Mechanics, Les Houches, Session XXXIX*, pages 561-608. Amsterdam: North Holland Publishing Company, June 1984. ISBN: 0444866752.

[10] L.D. Fadeev, *How Algebraic Bethe Ansatz works for integrable model*, hep-th/9605187v1.

[11] M. Jimbo, *Yang Baxter Equation in Integrable Systems*, Adv. Ser. Math. Phys. **10**, Singapore: World Scientific, 1990. ISBN: 978-981-02-0120-3.

[12] B. S. Shastry, S. S. Jha and V. Singh, *Exactly Solvable Problems in Condensed Matter and Relativistic Field Theory*, Lect. Notes Phys. **242** (1985).

[13] H. B. Thacker, Rev. Mod. Phys. **53** (1981) 253.

[14] A. G. Izergin and V. E. Korepin, Nucl. Phys. B **205** (1982) 401-413.

[15] E. K. Sklyanin, Lect. Notes Phys. **226** (1985) 196-233.

[16] E. K. Sklyanin. Quantum Inverse Scattering Method. Selected Topics. In M.-L. Ge, editor, *Quantum Group and Quantum Integrable Systems: Nankai Lectures on Mathematical Physics*. Singapore: World Academic, July 1992. ISBN: 978-9810207458. hep-th/9211111.

[17] E. K. Sklyanin, Prog. Theor. Phys. Suppl. **118** (1995) 35-60.

[18] N. Kitanine, J. M. Maillet and V. Terras, Nucl. Phys. B **554** (1999) 647.

[19] W. Heisenberg, Z. Phys. **49** (1928) 619.

[20] H. Bethe, Z. Phys. **71** (1931) 205.

[21] L. Hulthen, Ark. Mat. Astron. Fys. **26** (1938) 1.

[22] R. Orbach, Phys. Rev. **112** (1958) 309.

[23] L. R. Walker, Phys. Rev. **116** (1959) 1089.

[24] C. N. Yang and C. P. Yang, Phys. Rev. **150** (1966) 321.
[25] C. N. Yang and C. P. Yang, Phys. Rev. **150** (1966) 327.
[26] M. Gaudin, *La Fonction d'onde de Bethe*, Paris, Masson, 1983. ISBN: 9782225796074.
[27] E. H. Lieb and D. C. Mattis, *Mathematical Physics in One Dimension*, New-York: Academic, 1966. ISBN: 978-0124487505.
[28] J. M. Maillet and V. Terras, Nucl. Phys. B **575** (2000) 627.
[29] A. G. Izergin, N. Kitanine, J. M. Maillet, and V. Terras, Nucl. Phys. B **554** (1999) 679.
[30] N. Kitanine, J. M. Maillet, and V. Terras, Nucl. Phys. B **567** (2000) 554.
[31] N. Kitanine, J. M. Maillet, N. A. Slavnov, and V. Terras, Nucl. Phys. B **641** (2002) 487.
[32] N. Kitanine, J. M. Maillet, N. A. Slavnov, and V. Terras, Nucl. Phys. B **642** (2002) 433.
[33] N. Kitanine, J. M. Maillet, N. A. Slavnov, and V. Terras, J. Phys. A **35** (2002) L385.
[34] N. Kitanine, J. M. Maillet, N. A. Slavnov, and V. Terras, J.Phys. A **35** (2002) L753.
[35] N. Kitanine, J. M. Maillet, N. A. Slavnov, and V. Terras, Nucl. Phys. B **712** (2005) 600.
[36] N. Kitanine, J. M. Maillet, N. A. Slavnov, and V. Terras, Nucl. Phys. B **729** (2005) 558.
[37] N. Kitanine, J. M. Maillet, N. A. Slavnov, and V. Terras, J. Phys. A **38** (2005) 7441.
[38] N. Kitanine, J. M. Maillet, N. A. Slavnov, and V. Terras, J. Stat. Mech. L09002 (2005).
[39] N. Kitanine, J. M. Maillet, N. A. Slavnov, and V. Terras, *On the algebraic Bethe Ansatz approach to the correlation functions of the XXZ spin-1/2 Heisenberg chain*, in Recent Progress in Solvable lattice Models, RIMS Sciences Project Research 2004 on Method of Algebraic Analysis in Integrable Systems, RIMS, Kyoto, Kokyuroku, 1480, 14 (2006); hep-th/0505006.
[40] N. Kitanine, K. Kozlowski, J. M. Maillet, N. A. Slavnov, V. Terras, J. Stat. Mech. P01022 (2007).
[41] N. Kitanine, J. Phys. A: Math. Gen. **34** (2001) 8151.
[42] O. A. Castro-Alvaredo, J. M. Maillet, J. Phys. A **40** (2007) 7451.
[43] N. Kitanine, K.K. Kozlowski, J.M. Maillet, G. Niccoli, N.A. Slavnov, V. Terras, J. Stat. Mech. P10009 (2007).
[44] K. K. Kozlowski, J.Stat.Mech. P02006 (2008).
[45] N. Kitanine, K. Kozlowski, J. M. Maillet, G. Niccoli, N. A. Slavnov, V. Terras, J. Stat. Mech. P07010 (2008).
[46] E. K. Sklyanin, J. Phys. A: Math. Gen. **21** (1988) 2375.
[47] I. V. Cherednik, Theor. Math. Phys. **61** (1984) 977.
[48] P. P. Kulish and E. K. Sklyanin, J. Phys. A: Math. Gen. **24** (1991) L435.
[49] L. Mezincescu and R. Nepomechie, Int. J. Mod. Phys. A **6** (1991) 5231.
[50] P. P. Kulish and E.K. Sklyanin, J. Phys. A: Math. Gen. **25** (1992) 5963.
[51] S. Ghoshal and A. Zamolodchikov, Int. J. Mod. Phys. A **9** (1994) 3841.
[52] S. Ghoshal and A. Zamolodchikov, Int. J. Mod. Phys. A **9** (1994) 4353.
[53] V. Tarasov, Int. J. Mod. Phys. A 07 (1992) 963.
[54] G. Niccoli and J. Teschner, J. Stat. Mech. P09014 (2010).
[55] G. Niccoli, Nucl. Phys. B **835** (2010) 263.
[56] G. Niccoli, JHEP03(2011)123.
[57] V.V. Bazhanov, Yu. G. Stroganov, J. Stat. Phys. **59** (1990) 799.
[58] R.J. Baxter, V.V. Bazhanov and J.H.H. Perk, Int. J. Mod. Phys. B **4** (1990) 803.
[59] R.J. Baxter, J. Stat. Phys. **117** (2004) 1.
[60] G. Albertini, B.M. McCoy and J.H.H. Perk, *Eigenvalue spectrum of the super-integrable chiral Potts model*, 1989 *Integrable Systems in Quantum Field Theory and Statistical Mechanics* (Adv. Stud. Pure Math. vol 19) ed M Jimbo, T Miwa and A Tsuchiya (Tokyo: Kinokuniya) pp 1-55. ISBN: 9780123853424.
[61] G. Albertini, B.M. McCoy and J.H.H. Perk, Phys. Lett. A **135** (1989) 159.
[62] G. Albertini, B.M. McCoy and J.H.H. Perk, Phys. Lett. A **139** (1989) 204.
[63] Au-Yang H, McCoy B M, Perk J H H, Tang S and Yan M-L, Phys. Lett. A **123** (1987) 219.

[64] R.J. Baxter, J.H.H. Perk and H. Au-Yang, Phys. Lett. A **128** (1988) 138.
H. Au-Yang and J. H. H. Perk, *Onsagers star triangle equation: master key to integrability*, 1989 *Integrable Systems in Quantum Field Theory and Statistical Mechanics* (Adv. Stud. Pure Math. vol 19) ed M Jimbo, T Miwa and A Tsuchiya (Tokyo: Kinokuniya) pp 57-94. ISBN: 9780123853424.

[65] G. von Gehlen and V. Rittenberg, Nucl. Phys. B **257** (1985) 351.

[66] J. H. H. Perk, *Star-triangle equations, quantum Lax pairs, and higher genus curves*, 1989 *Proc. 1987 Summer Research Institute on Theta Functions* (Proc. Symp. Pure Math. vol 49) ed R C Gunning and L Ehrenpreis (Providence, RI: American Mathematical Society) pp 341-354. ISBN: 9780821814857.

[67] R.J. Baxter, Phys. Lett. A **133** (1989) 185.

[68] R.J. Baxter, J. Stat. Phys. **57** (1989) 1.

[69] H. Au-Yang, B. M. McCoy, J. H. H. Perk, S. Tang, and M. Yan, Phys. Lett. A **123** (1987) 219.

[70] B. M. McCoy, J. H. H. Perk, S. Tang, and C. H. Sah, Phys. Lett. A **125** (1987) 9.

[71] H. Au-Yang, B. M. McCoy, J. H. H. Perk, and S. Tang, *Solvable models in statistical mechanics and Riemann surfaces of genus greater than one*, 1988 *Papers Dedicated to Professor Mikio Sato on the Occasion of His Sixtieth Birthday* vol I, ed M Kashiwara and T Kawai (San Diego: Academic) pp 29-40. ISBN: 9780124004658.

[72] V. O. Tarasov Phys. Lett. A **147** (1990) 487.

[73] P. P. Kulish, N. Y. Reshetikhin, and E. K. Sklyanin, Lett. Math. Phys. **5** (1981) 393.

[74] A. N. Kirillov and N. Y. Reshetikhin, J. Phys. A: Math Gen. **20** (1987) 1565.

[75] H. Au-Yang and J. H. H. Perk, J. Phys. A: Math. Theor. **41** (2008) 275201.

[76] H. Au-Yang and J. H. H. Perk, J. Phys. A: Math. Theor. **42** (2009) 375208.

[77] G. Albertini, B. M. McCoy, J. H. H. Perk and S. Tang, Nucl. Phys. B **314** (1989) 741.

[78] R. J. Baxter, Phys. Rev. Lett. **94** (2005) 130602.

[79] R. J. Baxter, J. Stat. Phys. **120** (2005) 1.

[80] M. Jimbo, T. Miwa and A. Nakayashiki, J. Phys. A: Math. Gen. **26** (1993) 2199.

[81] R.J. Baxter, *Exactly Solved Models in Statistical Mechanics*, London: Academic, 1982. ISBN: 9780120831821. See also here.

[82] R. J. Baxter, *Corner transfer matrices in statistical mechanics*, cond-mat/0611167.

[83] R. J. Baxter, J. Stat. Phys. **132** (2008) 959.

[84] R. J. Baxter, J. Stat. Phys. **137** (2009) 798.

[85] H. Au-Yang and J. H. H. Perk, J. Phys. A: Math. Theor. **43** (2010) 025203.

[86] H. Au-Yang and J. H. H. Perk, J. Phys. A: Math. Theor. **44** (2011) 025205.

[87] H. Au-Yang and J. H. H. Perk, *super-integrable chiral Potts model: Proof of the conjecture for the coefficients of the generating function G(t,u)*, 1108.4713v1.

[88] R. J. Baxter, J. Stat. Phys. **132** (2008) 983.

[89] N. Iorgov, S. Pakuliak, V. Shadura, Yu Tykhyy and G. von Gehlen, J. Stat. Phys. **139** (2009) 743.

[90] A. Bugrij, O. Lisovyy, Theor. Math. Phys. **140** (2004) 987.

[91] N. Iorgov, J. Phys. A: Math. Theor. **44** (2011) 335005.

[92] R. J. Baxter, J. Phys. A: Math. Theor. **43** (2010) 145002.

[93] R. J. Baxter, ANZIAM J. **51** (2010) 309.

[94] S. Dasmahapatra, R. Kedem and B. McCoy, Nucl. Phys. B **396** (1993) 506.

[95] G. Albertini, S. Dasmahapatra and B. McCoy, Int. J. Mod. Phys. A **7**:supp01a (1992) 1.

[96] V. A. Fateev and A. B. Zamolodchikov, Phys. Lett. A **92** (1982) 37.

[97] K. Fabricius and B. McCoy, J. Stat. Phys. **103** (2001) 647.

[98] R. I. Nepomechie and F. Ravanini, J. Phys. A **36** (2003) 11391.

[99] G. von Gehlen, N. Iorgov, S. Pakuliak and V. Shadura, J. Phys. A: Math. Gen. **39** (2006) 7257.

[100] N. Iorgov, SIGMA **2** (2006) 019.

[101] G. von Gehlen, N. Iorgov, S. Pakuliak, V. Shadura and Yu Tykhyy, J. Phys. A: Math. Theor. **40** (2007) 14117.
[102] G. von Gehlen, N. Iorgov, S. Pakuliak, V. Shadura and Yu Tykhyy, J. Phys. A: Math. Theor. **41** (2008) 095003.
[103] G von Gehlen, N Iorgov, S Pakuliak, V Shadura, J. Phys. A: Math. Theor. **42** (2009) 304026.
[104] N. Grosjean and G. Niccoli, J. Stat. Mech. P11005 (2012).
[105] F.C. Alcaraz, M.N. Barber, M.T. Batchelor, R.J. Baxter and G.R.W. Quispel, J. Phys. A **20** (1987) 6397.
[106] N.Y. Reshetikhin, Lett. Math. Phys. **7** (1983) 205.
[107] N.Y. Reshetikhin, JETP **57** (1983) 691.
[108] E. Mukhin, V. Tarasov, A. Varchenko, Comm. Math. Phys. **288** (2009) 1.
[109] D. Orlando, S. Reffert and N. Reshetikhin, *On domain wall boundary conditions for the XXZ spin Hamiltonian*, arXiv:0912.0348.
[110] C. Korff, *Cylindric versions of specialised Macdonald functions and a deformed Verlinde algebra*, arXiv:1110.6356.
[111] A. G. Izergin and V. E. Korepin, Doklady Akademii Nauk **259** (1981) 76, also available on arXiv 0910.0295.
[112] A. G. Izergin and V. E. Korepin, *A lattice model related to the nonlinear Schroedinger equation*, arXiv: 0910.0295
[113] N. A. Slavnov, Theor. Math. Phys. **79** (1989) 502.
[114] M. Gutzwiller, Ann. of Phys. **133** (1981) 304.
[115] V. Pasquier and M. Gaudin, J. Phys. A **25** (1992) 5243.
[116] S. Kharchev, D. Lebedev, Lett. Math. Phys. **50** (1999) 53.
[117] F. Smirnov, J. Phys. A: Math. Gen. **31** (1998) 8953.
[118] A. Bytsko, J. Teschner, J. Phys. A **39** (2006) 12927.
[119] L.D. Faddeev and R.M. Kashaev, Mod. Phys. Lett. A **9** (1994) 427.
[120] L.D. Faddeev, Lett. Math. Phys. **34** (1995) 249.
[121] S.N.M. Ruijsenaars, J. Math. Phys. **38** (1997) 1069.
[122] S.L.Woronowicz, Rev. Math. Phys. **12** (2000) 873.
[123] B. Ponsot and J. Teschner, Commun. Math. Phys. **224** (2001) 613.
[124] R.M. Kashaev, J. Stat. Phys. **102** (2001) 923.
[125] R.M. Kashaev. *The quantum dilogarithm and Dehn twists in quantum Teichmüller theory*, 2001 *Integrable structures of exactly solvable two-dimensional models of quantum field theory* (Nato Science Series II: (closed), vol. 35) ed Pakuliak S and von Gehlen G (Dordrecht : Kluwer) pp 211-221. ISBN: 978-0-7923-7183-0.
[126] A. Bytsko and J. Teschner, Comm. Math. Phys. **240** (2003) 171.
[127] J. Teschner, Class. Quant. Grav. **18** (2001) R153
J. Teschner, Int. J. Mod. Phys. A **19**:supp02 (2004) 436.
[128] A. Yu. Volkov, Comm. Math. Phys. **258** (2005) 257.
[129] V.O. Tarasov, I,. A. Takhtadzhyan and L.D. Faddeev, Theo. Math. Phys. **57** 2 (1983) 1059.
[130] T. Oota, J. Phys. A: Math. Gen. **37** (2004) 441.
[131] J.-S. Caux, J.-M. Maillet, Phys. Rev. Lett. **95** (2005) 077201.
[132] J.-S. Caux, R. Hagemans, J.-M. Maillet, J. Stat. Mech. P09003 (2005).
[133] R. G. Pereira, J. Sirker, J.-S. Caux, R. Hagemans, J. M. Maillet, S. R. White, I. Affleck, Phys. Rev. Lett. **96** (2006) 257202.
[134] R. Hagemans, J.-S. Caux and J. M. Maillet. *How to Calculate Correlation Functions of Heisenberg Chains* in *Proceedings of the "Tenth Training Course in the Physics of Correlated Electron Systems and High-Tc Superconductors", Salerno, Oct 2005*, AIP Conference Proceedings 846 (2006) 245.
[135] R. G. Pereira, J. Sirker, J.-S. Caux, R. Hagemans, J. M. Maillet, S. R. White, I. Affleck, J. Stat. Mech. P08022 (2007).

[136] J. Sirker, R. G. Pereira, J.-S. Caux, R. Hagemans, J. M. Maillet, S. R. White, I. Affleck, *Boson decay and the dynamical structure factor for the XXZ chain at finite magnetic field* in *Proceedings SCES '07, Houston*, Physica B **403** (2008) 1520.

[137] J. S. Caux, P. Calabrese and N. A. Slavnov, J. Stat. Mech. P01008 (2007).

[138] F. Bloch, Phys. Rev. **50** (1936) 259.

[139] J. S. Schwinger, Phys. Rev. **51** (1937) 544.

[140] O. Halpern and M. H. Johnson, Phys. Rev. **55** (1938) 898.

[141] L. Van Hove, Phys. Rev. **95** (1954) 249.

[142] L. Van Hove, Phys. Rev. **95** (1954) 1374.

[143] W. Marshall and S. W. Lovesey, *Theory of Thermal Neutron Scattering*, Oxford: Clarenton Press, 1971. ISBN: 9780198512547.

[144] R. Balescu, *Equilibrium and Nonequilibrium Statistical Mechanics*, New York: Wiley, 1975. ISBN: 978-0471046004.

[145] N. Kitanine, K. K. Kozlowski, J. M. Maillet, N. A. Slavnov, V. Terras, J. Math. Phys. **50** (2009) 095209.

[146] K. K. Kozlowski, J. Math. Phys. **50** (2009) 095205.

[147] N. Kitanine, K. K. Kozlowski, J. M. Maillet, N. A. Slavnov, V. Terras, *Thermodynamic limit of particle-hole form factors in the massless XXZ Heisenberg chain*, arXiv: 1003.4557.

[148] K.K. Kozlowski, J.M. Maillet, N.A. Slavnov, J. Stat. Mech. P03018 (2011).

[149] K. K. Kozlowski, J. M. Maillet, N. A. Slavnov, J. Stat. Mech. P03019 (2011).

[150] K. K. Kozlowski, *Low-T asymptotic expansion of the solution to the Yang-Yang equation*, arXiv: 1112.6199.

[151] K. K. Kozlowski, *On Form Factors of the conjugated field in the non-linear Schrödinger model*, arXiv: 1105.1052.

[152] K. K. Kozlowski, *Large-distance and long-time asymptotic behavior of the reduced density matrix in the non-linear Schrödinger model*, arXiv: 1101.1626.

[153] K. K. Kozlowski, V. Terras, *Long-time and large-distance asymptotic behavior of the current-current correlators in the non-linear Schrödinger model*, arXiv: 1101.0844.

[154] N. Kitanine, K. K. Kozlowski, J. M. Maillet, N. A. Slavnov, V. Terras, *Form factor approach to the asymptotic behavior of correlation functions in critical models*, arXiv: 1110.0803.

[155] K. K. Kozlowski, B. Pozsgay, *Surface free energy of the open XXZ spin-1/2 chain*, arXiv: 1201.5884.

[156] N. Kitanine, K. K. Kozlowski, J. M. Maillet, N. A. Slavnov, V. Terras, Comm. Math. Phys. **291** (2009) 691.

[157] N. Kitanine, K. K. Kozlowski, J. M. Maillet, N. A. Slavnov, V. Terras, J. Stat. Mech. P04003 (2009).

[158] K. K. Kozlowski, *Riemann–Hilbert approach to the time-dependent generalized sine kernel*, arXiv:1011.5897.

[159] O. Babelon, D. Bernard, F. Smirnov, Comm. Math. Phys. **182** (1996) 319.

[160] O. Babelon, D. Bernard, F. Smirnov, Comm. Math. Phys. **186** (1997) 601.

[161] O. Babelon, J. Phys. A **37** (2004) 303.

[162] F. Smirnov, *Quasi-classical Study of Form Factors in Finite Volume*, arXiv:hep-th/9802132.

[163] G. Niccoli,Nucl. Phys. B **870**: (2013) 397.

[164] G. Niccoli, *Antiperiodic higher spin XXX quantum chains by separation of variables: Form factors and complete spectrum*, arXiv:1206.2418.

[165] G. Niccoli, J. Stat. Mech. (2012) P10025.

[166] G. Niccoli, J. Phys. A: Math. Theor. **46** (2013) 075003.