



**HAL**  
open science

# Contribution à l'étude de l'écroutissement isotrope et anisotrope en grandes déformations élastoplastiques

Abdelwaheb Dogui

► **To cite this version:**

Abdelwaheb Dogui. Contribution à l'étude de l'écroutissement isotrope et anisotrope en grandes déformations élastoplastiques. Mécanique des matériaux [physics.class-ph]. Université Pierre et Marie Curie - Paris VI, 1983. Français. NNT : . tel-00851020

**HAL Id: tel-00851020**

**<https://theses.hal.science/tel-00851020>**

Submitted on 11 Aug 2013

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

# THESE

présentée pour l'obtention du

**DIPLOME DE DOCTEUR DE 3EME CYCLE**  
**UNIVERSITE PIERRE ET MARIE CURIE**

**- PARIS VI -**

**- 1983 -**

SPECIALITE : "Mécanique appliquée à la construction"

OPTION : "Mécanique des matériaux"

par :

**Abdelwaheb DOGUI**

## **CONTRIBUTION A L'ETUDE DE L'ECROUISSAGE ISOTROPE ET ANISOTROPE EN GRANDES DEFORMATIONS ELASTOPLASTIQUES**

Souténue le 9 mai 1983 devant la Commission composée de:

MM:	J. LEMAITRE	Président
	F. SIDOROFF	Rapporteur
	J.J. MOREAU	} Examineurs
	P. LADEVEZE	
	G. TOUZOT	

LABORATOIRE DE MECANIQUE DES SOLIDES  
ECOLE CENTRALE DE LYON  
36 Av. Guy de Collongue  
69130 - ECULLY

A mon père, sans qui je n'aurais  
pu effectuer ce travail

Je remercie,

Monsieur F. SIDOROFF, Professeur à l'Ecole Centrale  
de Lyon, qui ne m'a jamais refusé un conseil et qui a été pour moi  
beaucoup plus qu'un Directeur de Thèse.

Messieurs les Professeurs JJ.MOREAU, J.LEMAITRE,  
P. LADEVEZE et G. TOUZOT, pour avoir accepté de participer à ce Jury.

Toute l'équipe du Laboratoire de Mécanique des Solides  
de l'Ecole Centrale de Lyon.

Enfin, j'exprime ma reconnaissance à Mme VALLA pour  
tout le temps qu'elle a passé dans la frappe de cette thèse.

TABLE DES MATIERES

NOTATIONS	5
INTRODUCTIONS	7
CHAP.I. ECROUISSAGE ISOTROPE	15
I.1. Petites déformations	
I.2. Formulation variables internes	
I.3. Généralisation directe de la loi incrémentale	
I.3.1. Représentation lagrangienne	
I.3.2. Représentation lagrangienne réactualisée	
I.3.3. Représentation eulérienne	
I.4. Commentaires sur les lois $\alpha^J = \alpha(\alpha)[D]$ et $\pi^J = \alpha(\pi)[D]$	
I.4.1. Différences entre les deux lois	
I.4.2. Formulation variationnelle	
I.4.3. Identification - Illustration du comportement	
CHAP.II. ECROUISSAGE ANISOTROPE	33
Résumé	
II.1. Introduction	
II.2. Théorie 1 en grandes déformations	
II.2.1. Présentation de la théorie	
2.1.1. Ecriture de l'énergie libre	
2.1.2. Ecriture de la dissipation	
2.1.3. Petites déformations élastiques	
2.1.4. Différents types d'anisotropies	
II.2.2. Anisotropie plastique induite	
2.2.1. Lois de comportement - Critère de plasticité	
2.2.2. Cas triaxial	
2.2.3. Traction-torsion	
2.2.4. Conclusions	
II.2.3. Anisotropie élastique induite	
2.3.1. Energie libre	
2.3.2. Lois de comportement	
2.3.3. Anisotropie élastique	
II.3. Théorie 2 en grandes déformations	
II.3.2. Présentation de la théorie	
II.3.2. Petites déformations élastiques	

Résumé

III.1. Petites déformations

III.1.1. Première écriture

III.1.2. Deuxième écriture

III.1.3. Ecriture incrémentale

III.2. Formulation variables internes

III.2.1. Théorie 1

2.1.1. Energie libre -Dissipation

2.1.2. Ecriture incrémentale

2.1.3. Petites déformations élastiques

2.1.4. Symétrie de  $\bar{\mathcal{E}}(\alpha, \mathbb{M}^p)$

III.2.2. Théorie 2

2.2.1. Énergie libre - Dissipation

2.2.2. Ecriture incrémentale

2.2.3. Petites déformations élastiques

2.2.4. Symétrie de  $\bar{\mathcal{E}}(\pi, \alpha)$

III.3. Généralisation directe de l'écriture incrémentale  
(Théorie 3)

III.4. Comparaison entre les théories

III.4.1. Cas triaxial

III.4.2. Petites déformations élastiques

III.4.3. Cas général

III.5. Généralisation de la théorie 2 - Théorie générale

III.5.1. Généralisation de la théorie 2

III.5.2. Théorie générale de l'écrouissage cinématique  
en grandes déformations

III.6. Simulations numériques

III.6.1. Sollicitations triaxiales

6.1.1. Evolution de la surface seuil

6.1.2. Courbes d'écrouissage

### III.6 (suite)

#### III.6.2. Petites déformations élastiques (solicitations non triaxiales)

6.2.1. Différentes lois à comparer

6.2.2. Réponse à une sollicitation de  
traction - torsion

a - cinématique

b - Elasticité

c - Plasticité

d - Réponse à un essai de torsion

e - Evolution de la surface seuil

CONCLUSIONS 121

BIBLIOGRAPHIE 127

#### ANNEXES

Annexe I. Ecrouissage isotrope 133

Annexe II. Ecrouissage anisotrope -  
Ecriture de la dissipation 137

Annexe III. Dérivées objectives 145

Annexe IV Fonctions isotropes 157

Annexe V. Un modèle elasto-plastique standard  
avec écrouissage isotrope et  
cinématique 163

NOTATIONS

La plupart des notations utilisées ici sont celles de {8}, {38 - 40}

$\mathbb{X}$ :	Tenseur de second ordre	
$\text{tr}(\mathbb{X})$ :	Trace de $\mathbb{X}$	$\text{tr}(\mathbb{X}) = X_{ii}$
$\det(\mathbb{X})$ :	Déterminant de $\mathbb{X}$	
$\mathbb{X}\mathbb{Y}$ :	Produit de deux tenseurs $\mathbb{X}$ et $\mathbb{Y}$	$(\mathbb{X}\mathbb{Y})_{ij} = X_{ik} Y_{kj}$
$\mathbb{1}$ :	Tenseur unité du second ordre	$(\mathbb{1})_{ij} = \delta_{ij}$
$\mathbb{X}^D$ :	Déviateur de $\mathbb{X}$	$\mathbb{X}^D = \mathbb{X} - \frac{1}{3} \text{tr}(\mathbb{X}) \mathbb{1}$
$\mathbb{X}^S$ :	Partie symétrique de $\mathbb{X}$	$(\mathbb{X}^S)_{ij} = \frac{1}{2} (X_{ij} + X_{ji})$
$\mathbb{X}^A$ :	Partie antisymétrique de $\mathbb{X}$	$(\mathbb{X}^A)_{ij} = \frac{1}{2} (X_{ij} - X_{ji})$
$\mathbb{X}^T$ :	Transposé de $\mathbb{X}$	$(\mathbb{X}^T)_{ij} = X_{ji}$
$\mathbb{X}^{-1}$ :	Inverse de $\mathbb{X}$	$\mathbb{X}\mathbb{X}^{-1} = \mathbb{X}^{-1}\mathbb{X} = \mathbb{1}$
$X_I$ :	Invariants principaux de $\mathbb{X}$	$\begin{cases} X_I = \text{tr}(\mathbb{X}) \\ X_{II} = \frac{1}{2} [\text{tr}^2(\mathbb{X}) - \text{tr}(\mathbb{X}^2)] \\ X_{III} = \det(\mathbb{X}) \end{cases}$
$X_{II}$ :		
$X_{III}$ :		
$\frac{\partial \mathbb{X}}{\partial X}$ :	Tenseur du second ordre	$(\frac{\partial \mathbb{X}}{\partial X})_{ij} = \frac{\partial \mathbb{X}}{\partial X_{ij}}$
$\frac{\partial^2 \mathbb{X}}{\partial X \partial Y}$ :	Tenseur du 4 <sup>è</sup> ordre	$(\frac{\partial^2 \mathbb{X}}{\partial X \partial Y})_{ijkl} = \frac{\partial^2 \mathbb{X}}{\partial X_{ij} \partial X_{kl}}$
$\mathcal{D}(\mathbb{X})[\mathbb{Y}]$ :	Application d'un tenseur du 4 <sup>è</sup> ordre dépendant de $\mathbb{X}$ sur un tenseur du second ordre $\mathbb{Y}$	$[\mathcal{D}(\mathbb{X})[\mathbb{Y}]]_{ij} = \mathcal{D}_{ijke}(\mathbb{X}) Y_{ke}$

$$\langle f \rangle = \begin{cases} 0 & \text{si } f \leq 0 \\ f & \text{si } f > 0 \end{cases}$$

$$\mathbb{X}:\mathbb{X} = X_{ij} X_{ji}$$

$$\dot{\mathbb{X}} = \frac{d\mathbb{X}}{dt} : \text{Dérivée particulière de } \mathbb{X} \text{ par rapport au temps}$$

Tenseurs gradients

• Totale :	$\mathbb{F} = \mathbb{I}\mathbb{R}\mathbb{U} = \mathbb{V}\mathbb{I}\mathbb{R}$	$\left\{ \begin{array}{l} \mathbb{U} : \text{Tenseur de déformation pure droit} \\ \mathbb{V} : \text{Tenseur de déformation pure gauche} \\ \mathbb{I}\mathbb{R} : \text{Tenseur de rotation } (\mathbb{I}\mathbb{R}\mathbb{I}\mathbb{R}^T = \mathbb{1}) \end{array} \right.$
• Elastique :	$\mathbb{F}^e = \mathbb{I}\mathbb{R}^e \mathbb{U}^e = \mathbb{V}^e \mathbb{I}\mathbb{R}^e$	
• Plastique :	$\mathbb{F}^p = \mathbb{I}\mathbb{R}^p \mathbb{U}^p = \mathbb{V}^p \mathbb{I}\mathbb{R}^p$	$\underline{\mathbb{F}} = \mathbb{F}^e \mathbb{F}^p$

$$J = \det(F) \quad J^e = \det(F^e) \quad J^p = \det(F^p)$$

$$J = \frac{\rho_0}{\rho} \quad \left\{ \begin{array}{l} \rho_0 : \text{masse volumique à l'état initial} \\ \rho : \text{masse volumique à l'état actuel déformé} \end{array} \right.$$

Déformations

- . Petites déformations :  $\mathcal{E} = \mathcal{E}^e + \mathcal{E}^p$
  - . Grandes déformations :
    - $\mathcal{C}$  : Tenseur des dilatations ou tenseur de Cauchy-Green droit  $\mathcal{C} = F^T F$
    - $\mathcal{E}$  : Tenseur des déformations de Green-Lagrange  $\mathcal{E} = \frac{1}{2} (\mathcal{C} - \mathcal{I})$
    - $\mathcal{B}$  : Tenseur de Cauchy-Green gauche  $\mathcal{B} = F F^T$
    - $\mathcal{A}$  : Tenseur des déformations d'Euler-Almansi
    - $\mathcal{b}$  : Tenseur des déformations de Hencky  $\mathcal{b} = \text{Log } \mathcal{B}$
- $$\mathcal{B}^e = F^e F^{eT} \quad \mathcal{B}^p = F^p F^{pT} \quad \mathcal{B}^e = \frac{1}{2} \text{Log} (\mathcal{B}^e) \quad \mathcal{B}^p = \frac{1}{2} \text{Log} (\mathcal{B}^p) \quad \mathcal{A} = \frac{1}{2} (\mathcal{I} - \mathcal{B}^{-1})$$

Contraintes

- . Petites déformations :  $\mathcal{D}$  : Tenseur des contraintes
  - . Grandes déformations :
    - $\mathcal{T}$  : Tenseur des contraintes de Cauchy
    - $\mathcal{K}$  : Tenseur des contraintes de Kirchhoff
    - $\mathcal{M}$  : Premier tenseur de Piola-Kirchhoff
    - $\mathcal{S}$  : Second tenseur de Piola-Kirchhoff
- $$\mathcal{T} = \frac{1}{J} \mathcal{M} F^T = \frac{1}{J} F \mathcal{S} F^T = \frac{1}{J} \mathcal{K}$$

Vitesses des déformations

- . Petites déformations :  $\mathcal{L} = \mathcal{L}^e + \mathcal{L}^p$
  - . Grandes déformations :  $\mathcal{L}$  : Tenseur gradient des vitesses
- $$\mathcal{L} = \mathcal{D} + \mathcal{W} \quad \left\{ \begin{array}{l} \mathcal{D} = \mathcal{L}^s : \text{Tenseur Taux de déformations} \\ \mathcal{W} = \mathcal{L}^a : \text{Tenseur Taux de rotations} \end{array} \right.$$

$$\mathcal{L}^e = \mathcal{D}^e + \mathcal{W}^e$$

$$\mathcal{L}^p = \mathcal{D}^p + \mathcal{W}^p$$

$$\mathcal{D}^p = \mathcal{I} R^e \mathcal{D}^p \mathcal{I} R^{eT}$$

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}^e + F^e \mathcal{L}^p F^{e-1}$$



# **INTRODUCTION**

## INTRODUCTION

La modélisation du comportement des matériaux a occupé et occupe encore de nombreux chercheurs. La majorité des lois de comportement qui ont été proposées jusqu'à ces dernières années, pour les métaux, sont basées sur l'hypothèse des petites perturbations (petits déplacements et petites déformations). Ceci est tout-à-fait justifié dans la plupart des cas et surtout dans les calculs des structures. L'hypothèse petites déformations par contre, n'est plus justifiée si, comme dans le cas de la mise en forme, les déformations peuvent atteindre des valeurs importantes, (des déformations de l'ordre de 100% sont courantes), d'où l'utilité et la nécessité de développer des modélisations en grandes déformations.

Il n'est bien sûr pas question de remettre en cause toutes les hypothèses qui ont mené à telle loi de comportement mais il faut étudier ce que deviennent ces hypothèses dans le cas où les déformations et la géométrie varient d'une manière finie; c'est le but de notre travail :

Etudier l'extension aux grandes déformations des lois de comportement petites déformations et dégager l'apport de la théorie grandes déformations.

Nous allons nous limiter, dans cette étude, aux modèles de comportements élastoplastiques avec écrouissage, en remarquant que la méthodologie suivie pour ces modèles pourra, sans difficulté majeure, être étendue à d'autres modèles (viscoplastiques...). Nous envisagerons essentiellement les modèles petites déformations obtenues par construction thermodynamique et basées sur l'hypothèse du matériau standard généralisé.

Un même modèle de comportement petites déformations, peut être écrit de différentes manières (écriture par variables internes, écriture incrémentale ...). Il est bien connu que l'extension aux grandes déformations de deux écritures différentes du même modèle petites déformations n'aboutit généralement pas au même modèle grandes déformations {38}.

La difficulté essentielle liée aux grandes déformations est la variation non négligeable de la géométrie de la configuration matérielle déformée par rapport à celle non déformée. Il en résulte que les mesures des contraintes, des déformations, des vitesses de contraintes, des vitesses de déformation... qui sont uniques en petites déformations, ne le sont plus dans ce cas-là, d'où la question suivante :

Quelles mesures faut-il choisir, pour les contraintes, les déformations, les vitesses des contraintes, les vitesses des déformations...? Ces différentes mesures mènent-elles aux mêmes résultats ?

Méthodes d'approche utilisées :  
=====

. Deux approches seront essentiellement étudiées : l'extension aux grandes déformations de l'écriture par variables internes et l'extension directe des lois incrémentales.

Approche variables internes {36}: Elle consiste à étendre aux grandes déformations l'écriture de l'énergie libre spécifique qui a mené à la loi incrémentale petites déformations. Le problème étant de définir et choisir les variables d'état dont va dépendre l'énergie libre. Les difficultés géométriques interviennent alors de manière importante.

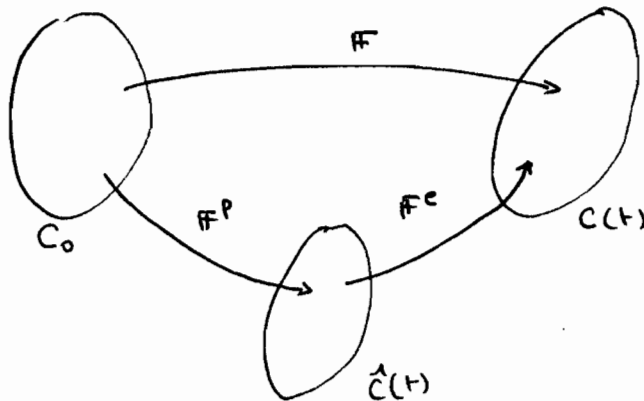
Généralisation directe de la loi incrémentale : le problème étant le choix des tenseurs des contraintes, des déformations, des vitesses des contraintes et des vitesses des déformations à utiliser à la place de  $\mathbb{T}$ ,  $\mathbb{E}$ ,  $\dot{\mathbb{T}}$  et  $\dot{\mathbb{E}}$ , dans le cas des petites déformations.

L'avantage d'une telle démarche est sa simplicité puisqu'elle escamote complètement l'étude de la décomposition des déformations en déformations élastiques et plastiques. L'inconvénient étant la multiplicité des modèles possible et le fait que nombre d'entre eux ne sont pas physiquement satisfaisants.

Cinématique des grandes déformations élastoplastiques :  
=====

Nous partons de l'idée de base qu'un matériau élastoplastique est un matériau élastique par rapport à une configuration naturelle locale. Naturelle parcequ'elle est définie par le relâchement des contraintes, locale car on ne peut la définir, dans le cas général, que localement autour d'un point matériel.

Cette décomposition se traduit par la décomposition multiplicative du gradient des déformations :  $\mathbb{F} = \mathbb{F}^e \mathbb{F}^p$



$\mathbb{F}^p$  étant la transformation de la configuration initiale à la configuration naturelle locale et  $\mathbb{F}^e$  est la transformation de la configuration naturelle à la configuration actuelle.

La décomposition ci-dessus ne définit la configuration naturelle qu'à une rotation près ; deux approches différentes sont actuellement utilisées pour remédier à ce problème {36-38},{42}.

- . Approche dite de la configuration intermédiaire : {18-19},{21},{33},{35}

On accepte l'indétermination de la rotation. Il faut donc imposer aux lois de comportements d'être invariables par rotation de la configuration intermédiaire. C'est l'approche que nous utiliserons.

Approche dite du trièdre directeur : {20-24-25-26},{42}

On fixe l'orientation de la configuration naturelle locale qui sera définie par un trièdre directeur lié directement (mono cristal) ou statistiquement (polycristal) à la structure du matériau.

Conditions que doit satisfaire une loi de comportement "correcte"  
=====

Toute loi de comportement, par sa nature intrinsèque, doit satisfaire aux conditions suivantes :

. Principe d'indifférence matérielle : La loi doit être invariante par changement du repère d'observation {23}.

. Cohérence thermodynamique : La loi de comportement ne doit pas contredire les principes de la thermodynamique : c'est la raison qui nous pousse à nous intéresser plutôt aux lois construites dans un cadre thermodynamique; cela ne sous entend pas que d'autres méthodes de construction ne soient pas satisfaisantes.

. Comportement "physiquement satisfaisant". La réponse d'une loi de comportement ne doit pas être en contradiction avec des résultats expérimentaux ou des hypothèses "solidement vérifiées". Il est bien évident que cette condition est très vague surtout en grandes déformations où l'expérimentation est encore très mal développée. Il faut remarquer que les grandes déformations mènent souvent, à cause de la variation géométrique, à des phénomènes qui paraissent à première vue physiquement non satisfaisants, mais qui, en réalité, ne le sont pas. La courbe d'écroutissement isotrope en compression et en traction, par exemple, si on la trace dans le plan contrainte déformation d'Almansi fait paraître une asymétrie entre la courbe de traction et de compression; il ne faut pas en conclure rapidement que ceci est en contradiction avec le modèle isotrope puisque ce phénomène est lié au choix de la mesure des déformations; ce phénomène disparaît si on trace la courbe dans le plan contrainte déformation logarithmique.

En conclusion, il faut faire très attention pour comprendre ce qui vient de la géométrie et ce qui vient de la physique des matériaux.

Les lois élastoplastiques doivent satisfaire, en plus des conditions ci-dessus, aux conditions suivantes :

. Existence d'une configuration naturelle relâchée : les déformations plastiques étant les déformations qui subsistent après relâchement des contraintes.

. Comportement élastique à partir de la configuration relachée :  
Le comportement doit être élastique si on n'atteint pas le seuil de plasticité. Le comportement est dit élastique, s'il existe une relation biunivoque entre les contraintes et les déformations. Les contraintes sont nulles si les déformations le sont et vice versa.

. Incompressibilité plastique : en fait, cette condition est une hypothèse, mais il semble qu'elle est solidement vérifiée; nous considérerons donc que dans notre esprit, un modèle élastoplastique est par définition incompressible plastiquement.

#### Hypothèses de Travail =====

Anisotropie induite : nous supposons que le matériau étudié est initialement isotrope mais qu'il peut devenir anisotrope après écrouissage. Nous utiliserons donc, dans l'approche variables internes (voir ci-dessus), la décomposition élastoplastique par la méthode : configuration intermédiaire. Pour classer les différents types d'anisotropies d'écrouissage, nous utiliserons les définitions suivantes

. Ecrouissage cinématique : déplacement de la surface seuil dans le plan des contraintes sans aucune déformation.

. Anisotropie plastique induite : déformation de la surface - seuil (on exclut l'écrouissage cinématique)

. Anisotropie élastique induite : modification des propriétés élastiques au cours de l'écrouissage.

Petites déformations élastiques : c'est une hypothèse que nous utiliserons souvent car elle facilite énormément les calculs et simplifie les résultats. Cette hypothèse est bien vérifiée pour les métaux puisque, en général, le module d'Young est très grand devant les contraintes et même si les déformations sont grandes, les déformations élastiques n'atteignent généralement pas le 1%.

Matériaux standard généralisés {13} Dans l'écriture variables internes, nous utiliserons presque toujours la méthode classique de construction des lois de comportement basée sur la thermodynamique

des processus irréversibles et les hypothèses des matériaux standard généralisés. Notre démarche sera la suivante {36}:

. Ecriture de l'énergie libre en fonction des variables internes d'état.

. Ecriture de la dissipation qui nous permet de définir les forces thermodynamiques associées aux variables d'état et les flux thermodynamiques.

. Choix d'un critère de plasticité qui dépend des forces thermodynamiques et éventuellement des variables internes d'état.

. Ecriture des lois d'évolution des variables internes en écrivant qu'elles appartiennent au sous-différentiel de la fonction seuil (hypothèse de normalité généralisée).

Nous remarquons que ce choix est dû uniquement à sa commodité.

Différents chapitres

=====

Bien que le comportement élastoplastique avec écrouissage isotrope en grandes déformations soit déjà bien développé (Sidoroff {39}, Lubarda et Lee {21}, et déjà largement mis en oeuvre numériquement ( {7}, {9}, {28},... ) Nous lui consacrerons quand même le Chapitre I.

Le chapitre II sera consacré à l'écrouissage anisotrope. Nous développerons un modèle basé sur l'hypothèse que la variable interne tensorielle d'écrouissage est un tenseur des déformations plastiques. Nous montrerons qu'avec ce modèle, on peut rendre compte d'un écrouissage cinématique, d'une anisotropie élastique et plastique induite. Nous développerons surtout l'anisotropie élastique et plastique induite. Nous proposerons à la fin du chapitre une méthodologie pour construire un autre modèle qui suppose que la variable interne d'écrouissage n'est pas le tenseur des déformations plastiques, la détermination de cette variable tensorielle se faisant à partir de sa loi d'évolution.

Le chapitre III sera consacré à l'écrouissage cinématique : c'est la partie la plus importante de notre travail. Nous reprenons le modèle présenté au Chapitre II que nous développerons. Nous développerons aussi le modèle esquissé à la fin du chapitre II et nous montrerons que ces deux modèles peuvent s'intégrer dans une théorie plus générale et qu'ils sont des modèles obtenus pour des choix particuliers de dérivées objectives de la variable interne d'écrouissage. Nous montrerons en particulier que dans le cas triaxial où les directions principales des contraintes et des déformations sont constantes, toutes les lois sont équivalentes.

Dans chaque cas, les différents modèles proposés seront analysés et comparés dans diverses situations (déformations triaxiales, petites déformations élastiques ...). Le comportement sera illustré par quelques simulations numériques.

En conclusion, nous essayerons de dégager une méthodologie générale pour l'extension aux grandes déformations d'un modèle petites déformations donné.



# CHAPITRE I

ECROUISSAGE ISOTROPE

CHAPITRE I : ECROUISSAGE ISOTROPE

I - 1. PETITES DEFORMATIONS

Pour étudier l'élastoplasticité, avec écrouissage isotrope, en petites déformations, on part souvent de l'écriture de l'énergie libre

$$(1) \quad \Psi = \Psi^e(\underline{\underline{\epsilon}}^e) + \mathcal{F}(p)$$

$$(2) \quad \Psi^e = \frac{1}{2} \frac{E}{1+\nu} \left\{ \epsilon_{ij}^e \epsilon_{ij}^e + \frac{\nu}{1-2\nu} \epsilon_{kk}^e \right\}$$

où  $\underline{\underline{\epsilon}}^e$  est le tenseur des déformations élastiques ( $\underline{\underline{\epsilon}}^e = \underline{\underline{\epsilon}} - \underline{\underline{\epsilon}}^p$ )  
 $p$  est la variable interne scalaire d'écrouissage isotrope et  
 $\mathcal{F}$  est l'énergie d'écrouissage.

Les déformations élastiques ne dissipant pas, la dissipation s'écrit :

$$(3) \quad \underline{\underline{\sigma}} : \dot{\underline{\underline{\epsilon}}}^p - A \dot{p} \geq 0 \quad \underline{\underline{\sigma}} = \frac{\partial \Psi^e}{\partial \underline{\underline{\epsilon}}^e} \quad A = \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial p}$$

$A$  est la force thermodynamique associée à  $p$ , elle caractérise physiquement la dilatation de la surface seuil dans l'espace des contraintes.

On choisit un critère de plasticité, par exemple le critère de Von Mises, le plus classiquement utilisé pour les métaux :

$$(4) \quad f(\underline{\underline{\sigma}}, A(p)) = |\underline{\underline{D}}| - A(p) - \sqrt{\frac{2}{3}} \sigma_e \leq 0 \quad |\underline{\underline{D}}| = (\underline{\underline{D}} : \underline{\underline{D}})^{1/2}$$

$\underline{\underline{D}}$  étant le déviateur des contraintes ( $\underline{\underline{D}} = \underline{\underline{\sigma}} - \frac{1}{3} h(\underline{\underline{\sigma}}) \mathbb{1}$ )

Pour un matériau standard généralisé, on écrit :

$$(5) \quad \left\{ \begin{array}{l} \dot{\underline{\underline{\epsilon}}}^p = \lambda \frac{\partial f}{\partial \underline{\underline{\sigma}}} = \lambda \frac{\underline{\underline{D}}}{|\underline{\underline{D}}|} \\ \dot{p} = -\lambda \frac{\partial f}{\partial A} = \lambda = (\dot{\underline{\underline{\epsilon}}}^p : \dot{\underline{\underline{\epsilon}}}^p)^{1/2} \end{array} \right.$$

$p$  apparaît donc comme la déformation plastique cumulée.

En écrivant qu'en charge  $\dot{f} = 0$ , on peut calculer  $\lambda$  et on arrive à la loi incrémentale :

$$(6) \quad \dot{\sigma} = \frac{E}{1+\nu} \left\{ \dot{\epsilon} + \frac{\nu}{1-2\nu} \text{tr}(\dot{\epsilon}) \mathbb{1} - \frac{\langle \mathbb{D} : \dot{\epsilon} \rangle}{|\mathbb{D}|} \left[ 1 + \frac{1+\nu}{E} A'(p) \right]^{-1} \frac{\mathbb{D}}{|\mathbb{D}|} \right\}$$

$$(7) \quad \dot{\epsilon} = \frac{1+\nu}{E} \dot{\sigma} - \frac{\nu}{E} \text{tr}(\dot{\sigma}) \mathbb{1} + \frac{\langle \mathbb{D} : \dot{\sigma} \rangle}{A'(p)} \frac{\mathbb{D}}{|\mathbb{D}|^2}$$

$A'(p)$  est le module d'écrouissage que l'on peut déterminer par identification à partir d'un essai uniaxial de traction ( $A'(p) = 0$  pour la plasticité parfaite et donc seule l'écriture (6) a un sens dans ce cas).

Pour généraliser ce modèle de comportement aux grandes déformations, on peut soit généraliser l'écriture (1) (formulation variables internes) soit généraliser directement la loi de comportement incrémentale (6 ou 7) en choisissant parmi les tenseurs définissant : les contraintes, les vitesses des contraintes, les déformations et les vitesses de déformations, ceux qui sont les plus adéquats.

## I - 2. FORMULATION VARIABLES INTERNES

Plusieurs travaux ont été publiés sur l'écrouissage isotrope en grandes déformations. Citons par exemple les travaux de F. Sidoroff {39}, Mandel {22-24} Lubarda et Lee {21}. Ces derniers utilisent toujours la décomposition multiplicative du gradient des déformations :  $\mathbb{F} = \mathbb{F}^e \mathbb{F}^p$ . Pour caractériser la configuration relâchée, on peut utiliser soit la démarche configuration intermédiaire indéfinie à une rotation près (Sidoroff {39} - Lee {21}) soit introduire un trièdre directeur (Mandel {22-24}). Dans ce cas, les deux méthodes mènent au même résultat puisque le corps est et reste isotrope.

On écrit {39} :  $\Psi = \Psi(\mathbb{B}^e) + \Phi(p)$

$\mathbb{B}^e = \mathbb{F}^e \mathbb{F}^{eT}$  définit bien les déformations élastiques dans la configuration actuelle, il est invariant par rotation de la configuration intermédiaire.

On peut utiliser un autre tenseur pour définir les déformations élastiques (par exemple,  $\mathbb{I}B^e = \frac{1}{2} \text{Log}(\mathbb{I}B^e)$ ), mais puisqu'on s'intéresse surtout au cas où les déformations élastiques restent petites, tout autre choix mène à une écriture équivalente au premier ordre.

On arrive à l'écriture de la dissipation :

$$(8) \quad \pi : \bar{\mathbb{D}}^p - A \dot{\rho} \geq 0 \quad A = \rho \frac{\partial \phi}{\partial \rho} \quad \pi = 2\rho \mathbb{I}B^e \frac{\partial \psi}{\partial \mathbb{I}B^e}$$

$\pi$  : tenseur des contraintes de Cauchy, et  $\bar{\mathbb{D}}^p = \mathbb{I}R^e (\mathbb{I}\dot{F}^p \mathbb{I}F^{p-1})^S \mathbb{I}R^{eT}$  est l'équivalent de  $\dot{\mathbb{E}}^p$  en petites déformations, il est objectif et invariant par rotation de la configuration intermédiaire.  $\bar{\mathbb{D}}^p$  est le transporté de  $\mathbb{D}^p = (\mathbb{I}\dot{F}^p \mathbb{I}F^{p-1})^S$  de la configuration intermédiaire à la configuration actuelle par la rotation élastique.

Pour un matériau standard généralisé, et en utilisant un critère de plasticité isotrope sous la forme :

$$(9) \quad f(\pi) - A \leq 0$$

$$\text{on a : } \bar{\mathbb{D}}^p = \lambda \frac{\partial f}{\partial \pi} \quad \dot{\rho} = -\lambda \frac{\partial f}{\partial A} = \lambda = (\bar{\mathbb{D}}^p : \bar{\mathbb{D}}^p)^{1/2} \left[ \frac{\partial f}{\partial \pi} : \frac{\partial f}{\partial \pi} \right]^{-1/2}$$

On peut ensuite, en utilisant l'hypothèse des petites déformations élastiques, arriver à la loi incrémentale : 39

$$\mathbb{D} = \frac{1+\nu}{E} \pi^J - \frac{\nu}{E} k(\pi^J) \mathbb{I} + \frac{1}{A'(\rho)} \left\langle \frac{\partial f}{\partial \pi} : \pi^J \right\rangle \frac{\partial f}{\partial \pi}$$

ou

$$\pi^J = \frac{E}{1+\nu} \left\{ \mathbb{D} + \frac{\nu}{1-2\nu} k(\mathbb{D}) \mathbb{I} - \left( \frac{\partial f}{\partial \pi} : \mathbb{D} \right) \left[ \frac{1+\nu}{E} A'(\rho) + \frac{\partial f}{\partial \pi} : \frac{\partial f}{\partial \pi} \right]^{-1} \frac{\partial f}{\partial \pi} \right\}$$

$\pi^J$  : dérivée de Jauman de  $\pi$

$\mathbb{D}$  : Tenseur taux de déformations.

Cette loi s'écrit, avec le critère de Von Mises :  $f(\pi) = |\pi^0|_F (\pi^0 : \pi^0)^{1/2}$

$$(10) \quad \pi^J = \frac{E}{1+\nu} \left\{ \mathbb{D} + \frac{\nu}{1-2\nu} k(\mathbb{D}) \mathbb{I} - \left\langle \frac{\pi^0}{|\pi^0|} : \mathbb{D} \right\rangle \left[ 1 + \frac{1+\nu}{E} A'(\rho) \right]^{-1} \frac{\pi^0}{|\pi^0|} \right\}$$

$$\dot{\rho} = \lambda = (\bar{\mathbb{D}}^p : \bar{\mathbb{D}}^p)^{1/2}$$

C'est donc la généralisation de (6) en prenant  $\pi$ ,  $\pi^J$ ,  $\mathbb{D}$ ,  $\bar{\mathbb{D}}^p$  à la place respectivement de  $\mathbb{D}$ ,  $\dot{\mathbb{D}}$ ,  $\dot{\mathbb{E}}$ ,  $\dot{\mathbb{E}}^p$ .

(8) peut être écrite d'une autre manière :

$$(8') \quad \alpha : \bar{D}^p - A_0 \dot{p} \geq 0 \quad A_0 = \rho_0 \frac{\partial \Phi}{\partial p} \quad \alpha = \frac{\rho_0}{\rho} \pi = 2 \rho_0 B^c \frac{\partial \Psi}{\partial B^c}$$

$\alpha$  étant le tenseur des contraintes de Kirchhoff. Dans le cas des petites déformations élastiques,  $\alpha$  est égal à  $\pi$  au premier ordre (variation de volume de l'ordre de  $\epsilon^c$  d'après l'incompressibilité plastique).

au lieu d'écrire (9), on peut écrire :

$$(9') \quad f(\alpha) - A \leq 0$$

et donc

$$\bar{D}^p = \lambda \frac{\partial f}{\partial \alpha} \quad \dot{p} = -\lambda \frac{\partial f}{\partial A} = \lambda$$

En suivant la même démarche de calcul qu'en (39) et en utilisant  $\alpha$  à la place de  $\pi$ , on arrive à la loi incrémentale (voir annexe I).

$$(11) \quad \alpha^J = \frac{E}{1+\nu} \left\{ D + \frac{\nu}{1-2\nu} k(D) 1 - \frac{\langle \alpha^0 : D \rangle}{|\alpha^0|} \left[ 1 + \frac{1+\nu}{E} A'(\rho_0) \right]^{-1} \frac{\alpha^0}{|\alpha^0|} \right\}$$

Nous verrons dans la suite, l'intérêt de l'écriture (11) par rapport à (10).

Remarquons que Lee et Lubarda (21) arrivent aussi à la loi (11).

### I - 3. GENERALISATION DIRECTE DE LA LOI INCREMENTALE

Que choisir parmi les tenseurs des contraintes et des déformations pour mettre à la place de  $\sigma$ ,  $\epsilon$ ,  $\mathcal{E}$  et  $\dot{\mathcal{E}}$  dans l'écriture (6) ?

Les possibilités semblent à première vue nombreuses, nous allons montrer dans ce qui suit, que seules les lois (10) et (11) sont "correctes".

Pour que le principe d'indifférence matérielle soit vérifié, il faut utiliser soit des tenseurs Lagrangiens (dans la configuration initiale), soit des tenseurs eulériens (dans la configuration actuelle) mais objectifs.

I.3.1. Représentation lagrangienne :

Les déformations sont représentées par le tenseur des déformations de Lagrange  $\mathbb{E}$  ( $\mathbb{E} = \frac{1}{2}(\mathbb{F}^T \mathbb{F} - \mathbb{1})$ ) et les contraintes par le second tenseur de Piola-Kirchhoff  $\mathbb{S} = \frac{\rho_0}{\rho} \mathbb{F}^{-1} \boldsymbol{\pi} \mathbb{F}^{-1T}$

On est donc tenté d'écrire :

$$(12) \text{ a.b.c. } \dot{\mathbb{E}} = \dot{\mathbb{E}}^e + \dot{\mathbb{E}}^p \quad \dot{\mathbb{E}}^e = \frac{1+\nu}{E} \dot{\mathbb{S}} - \frac{\nu}{E} \text{tr}(\dot{\mathbb{S}}) \mathbb{1} \quad \dot{\mathbb{E}}^p = \lambda \frac{\mathbb{S}^D}{|\mathbb{S}^D|}$$

$$(13) \quad f(\mathbb{S}, \rho) = |\mathbb{S}^D| - A(\rho) - \sqrt{\frac{2}{3}} \sigma \leq 0 \quad \dot{p} = \lambda = (\dot{\mathbb{E}}^p : \dot{\mathbb{E}}^p)^{1/2}$$

Ce qui permet d'avoir la loi incrémentale :

$$(14) \quad \dot{\mathbb{E}} = \frac{1+\nu}{E} \dot{\mathbb{S}} - \frac{\nu}{E} \text{tr}(\dot{\mathbb{S}}) \mathbb{1} + \frac{\langle \mathbb{S}^D : \dot{\mathbb{S}} \rangle}{|\mathbb{S}^D| A'(\rho)} \frac{\mathbb{S}^D}{|\mathbb{S}^D|}$$

$$(14 \text{ bis}) \quad \text{ou} \quad \dot{\mathbb{S}} = \frac{E}{1+\nu} \left\{ \dot{\mathbb{E}} + \frac{\nu}{1-2\nu} \text{tr}(\dot{\mathbb{E}}) \mathbb{1} - \left[ 1 + \frac{1+\nu}{E} A'(\rho) \right]^{-1} \left\langle \frac{\mathbb{S}^D : \dot{\mathbb{E}}}{|\mathbb{S}^D|} \right\rangle \frac{\mathbb{S}^D}{|\mathbb{S}^D|} \right\}$$

Incompressibilité plastique :

Il est aisé de vérifier, par exemple dans un essai de traction, que les déformations plastiques définies par (12.c) sont bien celles qui subsistent après relâchement des contraintes. Par contre, avec cette loi on a  $\text{tr}(\dot{\mathbb{E}}^p) = 0$  et ceci ne permet pas de vérifier l'incompressibilité plastique. Si dans un essai de traction, on note  $e_i$ ,  $e_i^p$  respectivement les composantes diagonales (les seules non nulles) de  $\mathbb{E}$  et  $\mathbb{E}^p$  et  $\lambda_i$ ,  $\lambda_i^p$  celles de  $\mathbb{F}$  et  $\mathbb{F}^p$ , alors nous avons :

$$e_2^p = e_3^p = -\frac{e_1^p}{2} = \frac{\lambda_1^p - 1}{2} = -\frac{\lambda_1^p - 1}{4}$$

et donc :  $J^p = \det(\mathbb{F}^p) = \lambda_1^p \lambda_2^p \lambda_3^p = \frac{\lambda_1^p}{2} (3 - \lambda_1^p) \neq 1$

$J^p$  s'annule donc pour  $\lambda_1^p \approx \sqrt{3}$  ou  $\epsilon_1^p = \text{Log} \lambda_1^p \approx 0,55$

Remarquons que  $J = \det(\mathbb{F})$  s'annule aussi (dans le cas de la traction) pour  $\epsilon = \text{Log} \lambda \approx 0,6$ , ceci est bien sûr physiquement inacceptable puisque ceci revient à dire que la masse volumique  $\rho$  devient infinie pour une déformation de l'ordre de 60%.

Module d'Young

Le module d'Young est défini par la pente de la courbe  $\sigma = \sigma(\epsilon)$  au cours d'un essai de traction, où  $\sigma$  est la contrainte de Cauchy et  $\epsilon$  est la déformation logarithmique.

La loi (14) impose la constance du module élastique, au cours des déformations dans le plan (  $S, e$  ) ce qui implique sa variation dans le plan (  $\sigma, \epsilon$  ), variation qui n'est pas du tout négligeable. La courbe de la figure(I.1) permet d'illustrer la variation du module d'Young défini de la manière ci-dessus en fonction de  $\epsilon^p$  .

Avant écrouissage, en supposant que les déformations élastiques restent petites, on a :  $\sigma \approx E \epsilon$   
Après écrouissage, avec la même hypothèse sur les déformations élastiques, on a :  $\sigma \approx \tilde{E}(\lambda^p) \epsilon^e$  avec  $\epsilon^e = \text{Log } \lambda^e$  ,  $\lambda^e$  étant défini par  $\lambda^e = \frac{\lambda}{\lambda^p}$  et  $\lambda^p$  étant la valeur de  $\lambda$  après relâchement des contraintes.

On trouve :  $\frac{\tilde{E}}{E} \approx \frac{2\lambda^{p3}}{3-\lambda^{p2}} \approx \frac{2e^{3\epsilon^p}}{3-e^{2\epsilon^p}}$

Remarquons enfin que cette variation du module d'Young, correspond à une augmentation du module.

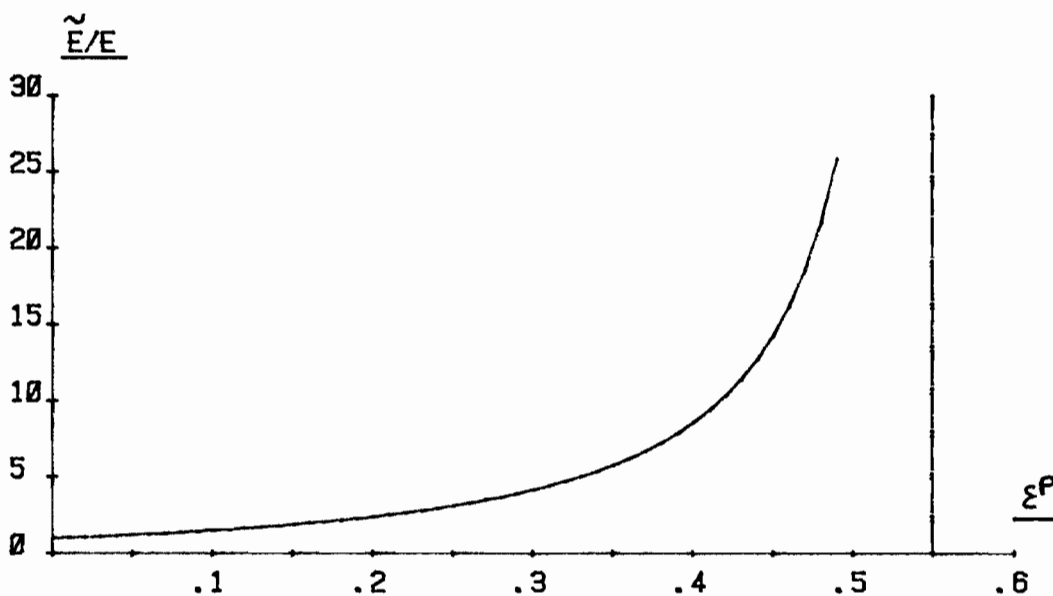


Fig.I.1. Variation du module d'Young

Plasticité parfaite

La plasticité parfaite est définie par le choix de  $\mathbf{A}'(p) = 0$  dans la loi (14 bis), et donc pour un essai de traction nous avons  $\mathbf{S} = \mathbf{S}_e$  en charge ( $\mathbf{S}_e$  est la composante de  $\mathbf{S}$ ). Dans la figure (I-2) nous avons représenté les courbes  $\mathbf{S}(e)$  et  $\sigma(\epsilon)$  pour un essai de traction en plasticité parfaite ; remarquons que la courbe  $\sigma(\epsilon)$  est loin d'être constante en charge.

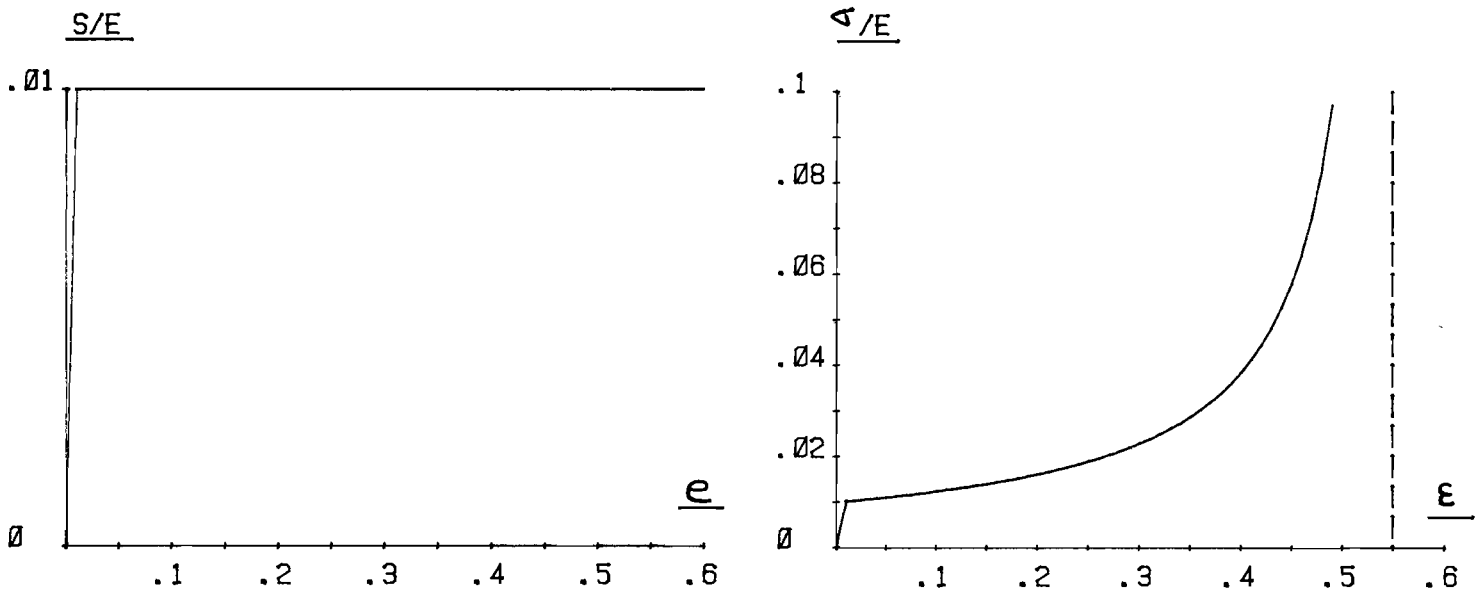


Fig.I.2. Plasticité parfaite

Conclusion

Pour les raisons citées ci-dessus : incompressibilité plastique non vérifiée, module d'Young variable au cours de la déformation, plasticité parfaite mal définie, nous pouvons conclure que la modélisation (14) n'est pas satisfaisante.

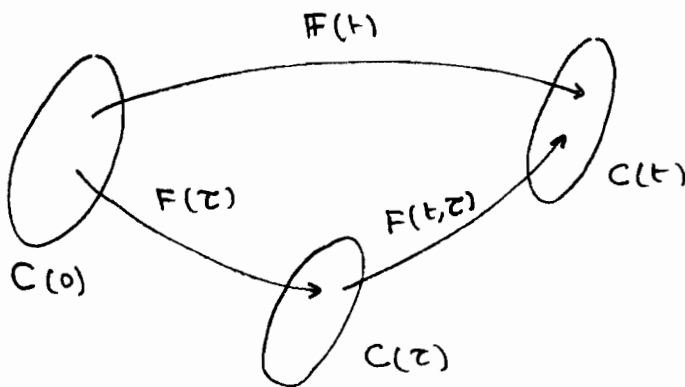


1.3.2. Représentation lagrangienne réactualisée :

On peut penser que, pour éviter les difficultés liées à la dépendance par rapport à une configuration de référence, on peut utiliser la représentation lagrangienne réactualisée (la configuration de référence est la configuration actuelle). On écrit donc une relation entre  $\dot{\mathbf{E}}_r(t)$  et  $\dot{\mathbf{S}}_r(t)$  avec :

$$\dot{\mathbf{E}}_r(t) = \frac{\partial \mathbf{E}(t, \tau)}{\partial \tau} \Big|_{\tau=t} \quad \dot{\mathbf{S}}_r(t) = \frac{\partial \mathbf{S}(t, \tau)}{\partial \tau} \Big|_{\tau=t}$$

$$\mathbf{E}(t, \tau) = \frac{1}{2} (\mathbf{F}^T(t, \tau) \mathbf{F}(t, \tau) - \mathbf{1})$$



or,  $\dot{\mathbf{E}}_r(t) = \mathbb{D}$  et  $\dot{\mathbf{S}}_r(t) = \boldsymbol{\pi}^T$ ,  $\boldsymbol{\pi}^T$  étant la dérivée objective de Trusdell du tenseur des contraintes de Cauchy, et nous nous ramenons à une écriture eulérienne avec un choix particulier du tenseur définissant les vitesses de contraintes. Nous verrons dans ce qui suit que cette loi n'est pas correcte elle non plus.

1.3.3. Représentation eulérienne.

Le tenseur taux de déformations  $\mathbb{D} = (\dot{\mathbf{F}} \mathbf{F}^{-1})^S$ , qui est objectif, s'impose pour remplacer  $\dot{\mathbf{E}}$  dans (14), par contre, pour les contraintes, on peut utiliser soit  $\boldsymbol{\pi}$  le tenseur de Cauchy, soit  $\boldsymbol{\alpha}$  le tenseur de Kirchhoff ( $\boldsymbol{\alpha} = J \boldsymbol{\pi}$ ).

Remarquons que si les déformations élastiques restent petites et s'il y a incompressibilité plastique  $\boldsymbol{\alpha}$  et  $\boldsymbol{\pi}$  sont égaux à des termes du second ordre en déformations élastiques.

Pour que le principe d'indifférence matérielle soit vérifié, nous devons utiliser, pour les vitesses des contraintes, des dérivées objectives.

Parmi les dérivées objectives, citons :

Dérivée de Trusdell :  $\dot{\alpha}^T = \dot{\alpha} - \omega \alpha + \alpha \omega^T + \alpha h(D)$

Dérivées sous la forme :  $\dot{\alpha}^\alpha = \dot{\alpha}^J + \alpha (D\alpha + \alpha D)$

si  $\alpha = 0$  c'est la dérivée de Jauman, qui est la dérivée dans le repère corotationnel

si  $\alpha = 1$  c'est la dérivée convective contravariante  $\dot{\alpha}^c$

si  $\alpha = -1$  " " covariante  $\dot{\alpha}_c$

Ecrivons donc que :  $D = D^c + D^p$   $D^c = \frac{1+\nu}{E} \dot{\alpha}^\alpha - \frac{\nu}{E} h(\alpha^\alpha) \mathbb{1}$   $D^p = \lambda \frac{\alpha^0}{|\alpha^0|}$

$$f(\alpha, p) = |\alpha^0| - A_0(p) - \sqrt{\frac{2}{3}} \sigma_c \leq 0 \quad \dot{p} = \dot{\lambda} = (D^p : D^p)^{1/2}$$

Pour calculer  $\lambda$ , nous écrivons que  $\dot{f} = 0$  soit donc :  $\lambda = \frac{\langle \alpha^0 : \dot{\alpha} \rangle}{|\alpha^0| A'_0(p)}$

Soit donc  $D = \frac{1+\nu}{E} \dot{\alpha}^\alpha - \frac{\nu}{E} h(\alpha^\alpha) \mathbb{1} + \frac{\langle \alpha^0 : \dot{\alpha} \rangle}{|\alpha^0| A'_0(p)} \frac{\alpha^0}{|\alpha^0|}$

Pour avoir la loi incrémentale voulue, il faut remplacer dans  $\langle \alpha^0 : \dot{\alpha} \rangle$ ,  $\dot{\alpha}$  par  $\dot{\alpha}^\alpha$  or :

$$\langle \alpha^0 : \dot{\alpha} \rangle = \langle \alpha^0 : \dot{\alpha}^J \rangle \neq \langle \alpha^0 : \dot{\alpha}^\alpha \rangle \neq \langle \alpha^0 : \dot{\alpha}^T \rangle$$

et seule donc la dérivée de Jauman peut être utilisée, soit :

$$D = \frac{1+\nu}{E} \dot{\alpha}^J - \frac{\nu}{E} h(\alpha^J) \mathbb{1} + \frac{\langle \alpha^0 : \dot{\alpha}^J \rangle}{|\alpha^0| A'_0(p)} \frac{\alpha^0}{|\alpha^0|}$$

On aurait pu faire la même chose en prenant  $\pi$  au lieu de  $\alpha$  et nous voyons donc que seules les lois (10) et (11) déjà trouvées en 3.1. sont acceptables.

Remarquons aussi, pour éliminer complètement les lois avec  $\alpha^\alpha$  ( $\alpha \neq 0$ ) que la réponse d'une telle loi, dans un essai de traction donne :

$$\dot{\epsilon}^e \left( 1 - 2\alpha \frac{\sigma}{E} \right) = \frac{1}{E} \left( 1 + \frac{4\alpha}{3} \frac{\sigma}{A'_0(p)} \right) \dot{\epsilon}$$

et donc le module d'élasticité dépendra de l'écouissage si  $\alpha \neq 0$

En conclusion, seules les lois (10) et (11) semblent être correctes; remarquons qu'il est bien clair que ces lois vérifient l'hypothèse de l'incompressibilité plastique puisque  $\frac{d}{dt}(\det(F^p))=0$  est équivalent à  $h(D^p) = 0$  ce qui est bien le cas :

$$\frac{d}{dt}[\det(F^p)] = \det(F^p) \left[ \frac{dF^p}{dt} : F^{p-1} \right] = \det(F^p) h(D^p)$$

I - 4. COMMENTAIRES SUR LES LOIS  $\alpha^J = \mathcal{L}(\alpha)[0]$  et  $\pi^J = \mathcal{L}(\pi)[0]$

I.4.1. : Différence entre les 2 lois :

La différence entre les lois (10) et (11) est du second ordre par rapport aux déformations élastiques. Cette différence est due au changement de volume donc à l'élasticité.

Si on appelle  $\pi_T$  et  $\pi_C$  les tenseurs des contraintes obtenues pour un même état de déformations par respectivement la loi (10) et la loi (11), nous avons :

$$\alpha = \frac{\rho}{\rho_0} \pi \approx (1 + h(\epsilon^e)) \pi$$

$$(10) \Rightarrow \pi_T = \frac{E}{1+\nu} \left( \epsilon^e + \frac{\nu}{1-2\nu} h(\epsilon^e) \mathbb{1} \right)$$

$$(11) \Rightarrow \alpha = \frac{E}{1+\nu} \left( \epsilon^e + \frac{\nu}{1-2\nu} h(\epsilon^e) \mathbb{1} \right)$$

$$\text{donc } \pi_C = \pi_T \left( 1 + \frac{(1-2\nu)}{E} h(\pi_T) \right) = \pi_T (1 + h(\epsilon^e))$$

Pour un essai de traction, nous avons :

$$\frac{\sigma_C - \sigma_T}{\sigma_T} = \frac{1-2\nu}{E} \sigma_T$$

I.4.2. Formulation variationnelle :

En vue de l'utilisation de la loi incrémentale en grandes déformations dans des codes de calculs numériques (éléments finis), une formulation variationnelle doit être définie. On montre (14) que dans le cas général, l'existence d'un potentiel  $\phi$  défini par la relation (24) mène à une formulation variationnelle symétrique (matrice de rigidité symétrique), ce qui facilite énormément les résolutions numériques. On montre, en outre, que l'existence de  $\phi$  est équivalente à celle de  $\mathcal{U}$  (relation (24)).

$$(24) \quad \pi_i^T = \frac{\partial \phi}{\partial F_i} \quad \Leftrightarrow \quad \pi_i^J = \frac{\partial \mathcal{U}}{\partial D_i} \quad (\pi_i^T = J F^{-1} \pi_i)$$

A partir de (24), on peut conclure que toute loi incrémentale de la forme :

$$(25) \quad \pi_{ij}^J = L_{ijkl} D_{kl} \quad L_{ijkl} = L_{jikl} = L_{klij}$$

mène à une formulation variationnelle symétrique ce qui est le cas pour la loi (11) et non pour la loi(10).

L'écriture variationnelle peut être obtenue facilement à partir des équations d'équilibre :

$$(26) \quad \pi_{ij,j} + \dot{f}_i = 0$$

En multipliant (26) par un champ de vitesses virtuelles  $\Delta v_i$  et en intégrant sur un domaine de la configuration de référence  $V_0$  on obtient :

$$(27) \quad \int_{V_0} \pi_{ij} \Delta \left( \frac{\partial v_i}{\partial X_j} \right) dV_0 - \int_{V_0} \dot{f}_i \Delta v_i dV_0 - \int_{S_0} F_i \Delta v_i dS_0 = -P_i - P_e = 0$$

$F_i$  et  $\dot{f}_i$  sont respectivement les forces de surface et de volume par unité de surface et de volume initiaux.

On peut avec un peu plus de calcul, trouver l'écriture eulérienne de (27) soit :

$$(28) \quad - P_i = \int_V \frac{\rho}{\rho_0} \tau_{ij}^T \delta D_{ij} dV + \int_V T_{ij} \delta \left( \frac{1}{2} L_{ki} L_{kj} - D_{ki} D_{kj} \right) dV$$

$$P_i - \int_V f_i \delta v_i dV - \int_S F_i \delta v_i dS = 0$$

où

$$\delta L_{ij} = \frac{\partial \delta v_i}{\partial x_j} \quad ; \quad \delta D_{ij} = \frac{1}{2} (\delta L_{ij} + \delta L_{ji})$$

On vérifie bien que si  $\tau_{ij}^T = L_{ijk} e_l$  avec  $L_{ijk} = L_{kij} = L_{jki}$  alors la formulation variationnelle est symétrique.

#### I.4.3. Identification - Illustration du comportement :

Pour pouvoir utiliser les lois (10) ou (11), il faut identifier  $E$ ,  $\nu$  et  $A(\rho)$  ou  $A_0(\rho)$ , ce qui se fait facilement à partir d'une courbe expérimentale d'écrouissage en traction  $\sigma(\epsilon)$  ou  $\tau(\epsilon)$  où  $\sigma$  est la contrainte de Cauchy ( $\tau$  la contrainte de Kirchhoff) et  $\epsilon$  est la déformation logarithmique (même méthodologie que pour le cas des petites déformations).

Remarquons que dans le cas de la traction, et plus généralement dans le cas triaxial, on a :

$$D = \dot{R} \quad R = \frac{1}{2} \text{Log}(IB) = \text{Log}(IV) = \text{Log}(IF)$$

Les relations (10) ou (11) sont donc exactement analogues à la relation (6) en remplaçant  $\epsilon$  par  $R$ ,  $\epsilon^e$  par  $R^e$ ,  $\epsilon^p$  par  $R^p$  (c'est-à-dire en utilisant les déformations logarithmiques) et donc tout ce qui a été fait en petites déformations peut être étendu aux grandes déformations en utilisant les déformations logarithmiques.

L'utilisation de la dérivée de Jauman mène quelquefois à des comportements bizarres (on verra un exemple au chapitre III); pour montrer que ce n'est pas le cas pour les lois (10) ou (11) nous avons représenté les réponses à un essai de traction et un essai de torsion d'une loi (10) identifiée à partir de la loi monodimensionnelle :

$$\sigma - \sigma_e = K (\epsilon^p)^n$$

(Tous les détails des calculs sont en annexe I).

Traction :

On considère une éprouvette de traction, de section  $S_0$  et de longueur  $L_0$  avant déformation, soumise à un effort axial  $F$ . En appelant  $\sigma$  la contrainte de Cauchy et  $L$  la longueur de l'éprouvette après déformation, nous avons :

$$\frac{\sigma}{E} = \frac{\sigma_c}{E} + \frac{k}{E} \epsilon^n$$

$$\epsilon = \text{Log} \left( \frac{L}{L_0} \right) = \frac{\sigma}{E} + \epsilon^p$$

$$\frac{F}{ES_0} = \left[ 1 + (1-2\nu) \frac{\nu}{E} \right] \frac{\sigma}{E} e^{-\epsilon}$$

Les figures I-3, I-4 et I-5 représentent les courbes  $\frac{\sigma}{E}(\epsilon)$ ,  $\frac{F}{ES_0}(\epsilon)$  et  $\frac{F}{ES_0} \left( \frac{L-L_0}{L_0} \right)$  pour des valeurs différentes de  $\frac{k}{E}$  et  $n$ .

Torsion :  $\pi : \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & T \\ 0 & T & 0 \end{pmatrix}$

La loi (10) donne la réponse (voir annexe 1) :

$$\mathbb{F} : \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \gamma \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \gamma = \gamma^c + \gamma^p$$

et

$$\gamma^c = \frac{2(1+\nu)}{E} T \quad \gamma^p = \sqrt{3} \left[ \frac{\sqrt{2}}{k} (T - T_c) \right]^{1/n}$$

La figure I-6 représente la courbe  $\frac{T}{E}(\gamma)$  pour  $\frac{k}{E} = 0,005$  et  $n = 0,3$

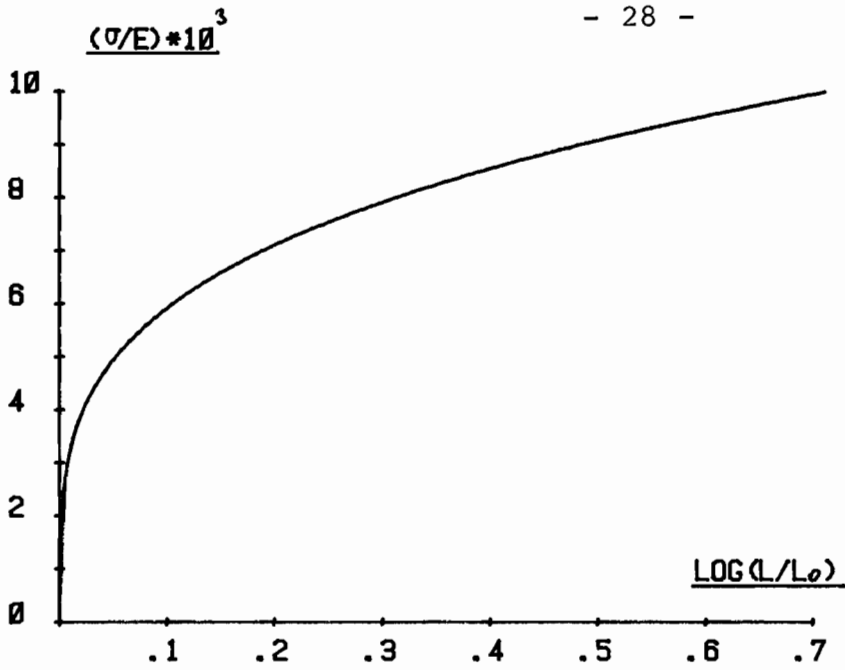


Fig.I.3.a.

$\sigma_e/E = 0.001$
$K/E = 0.01$
$n = 0.3 \quad \nu = 0.3$

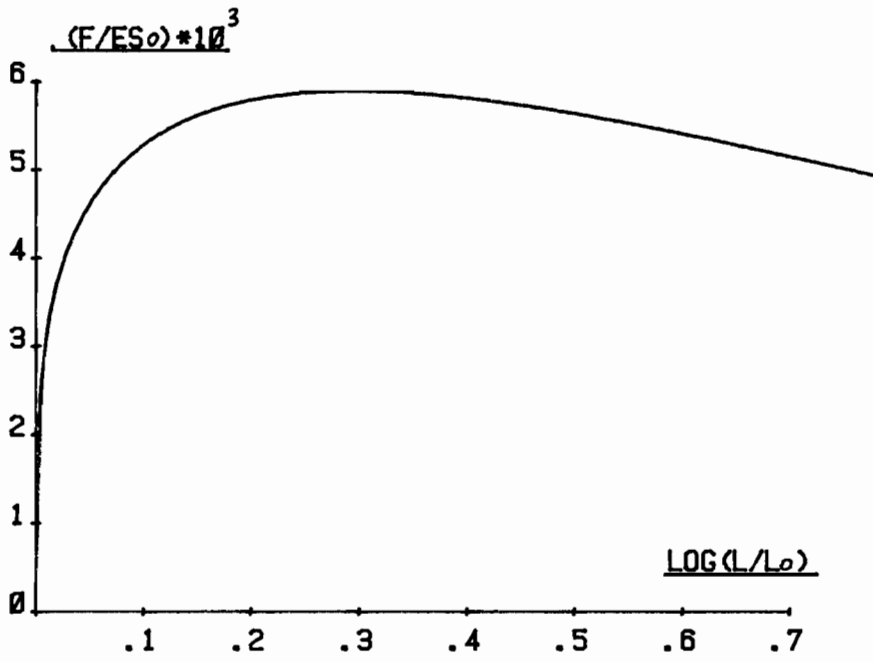


Fig.I.3.b.

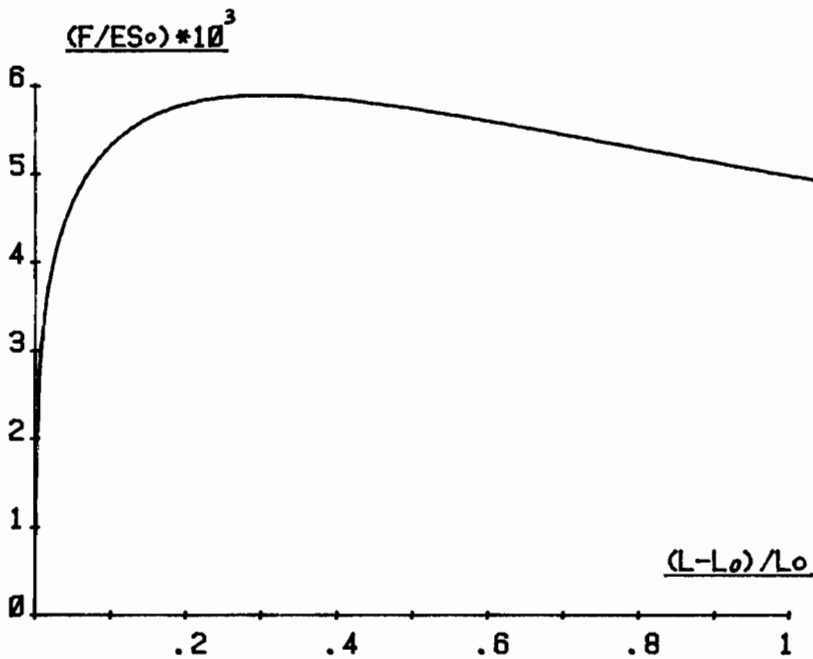


Fig.I.3.c.

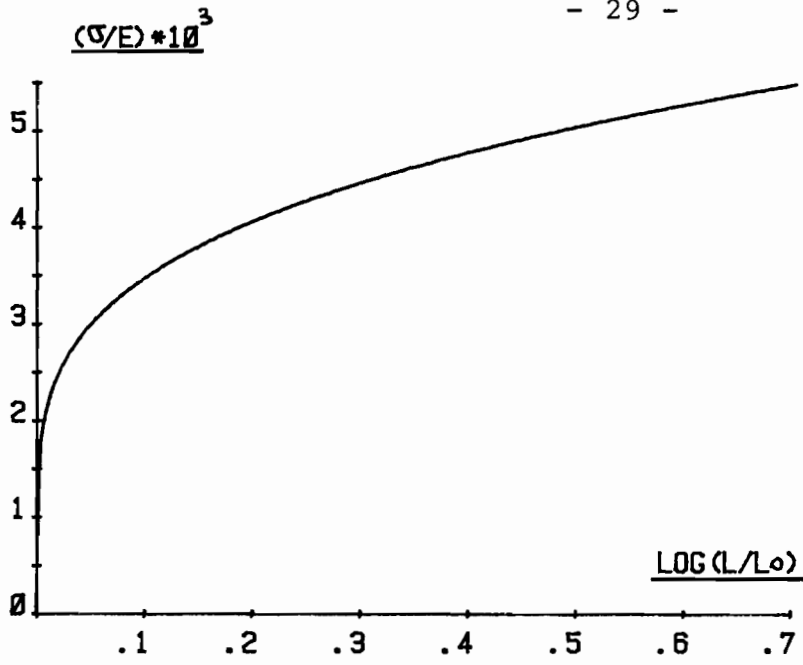


Fig.I.4.a.

$\sigma_e/E = 0.001$
$K/E = 0.005$
$n = 0.3 \quad \nu = 0.3$

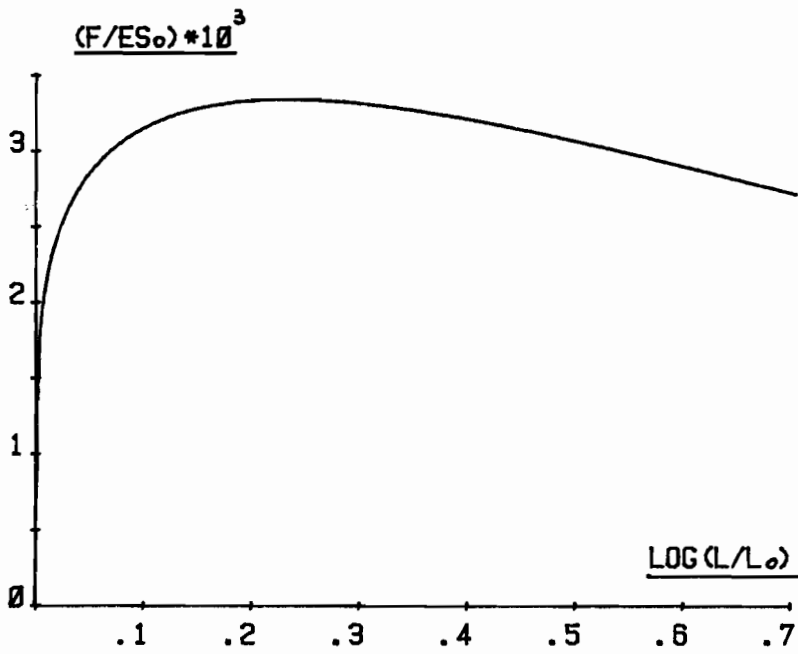


Fig.I.4.b.

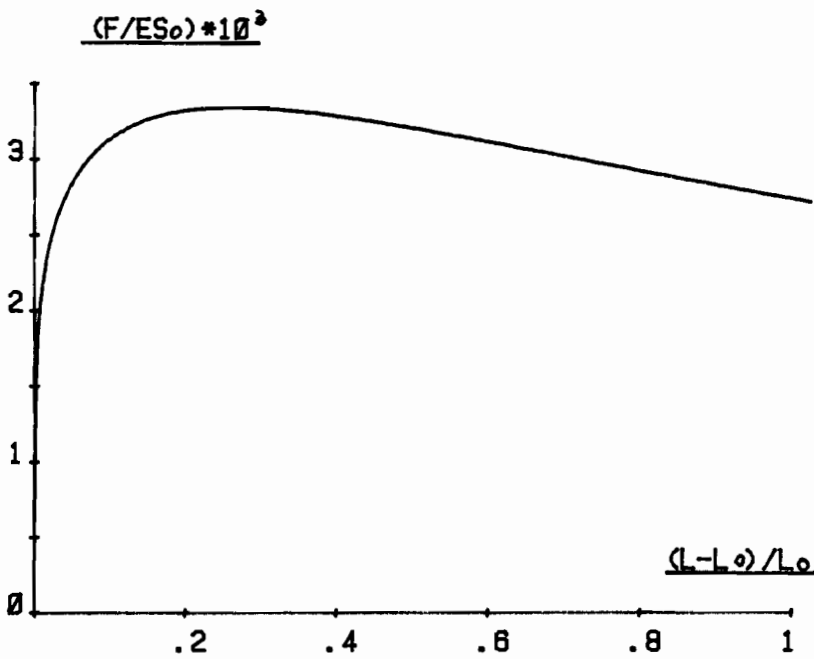


Fig.I.4.c.



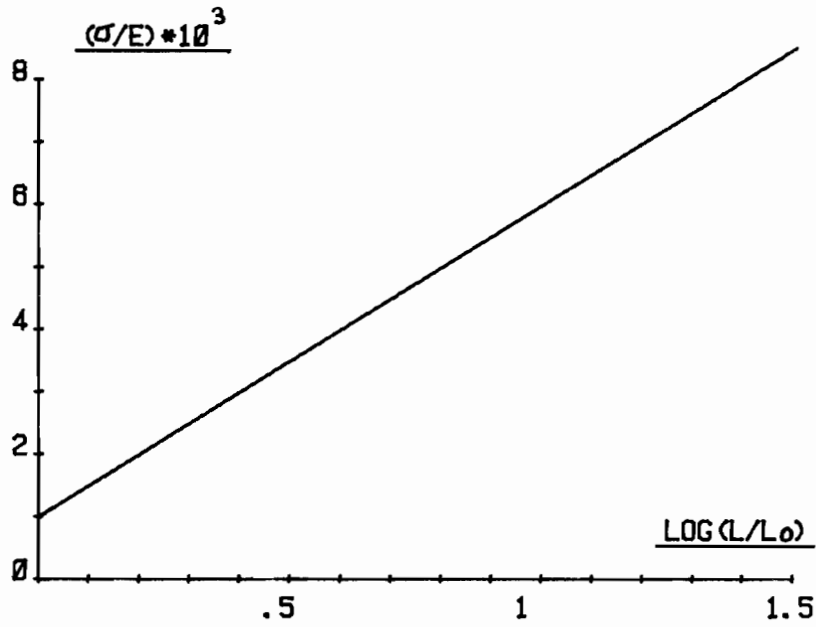


Fig.I.5.a.

$\sigma_e/E=0.001$
$K/E=0.005$
$n=1 \quad \nu=0.3$

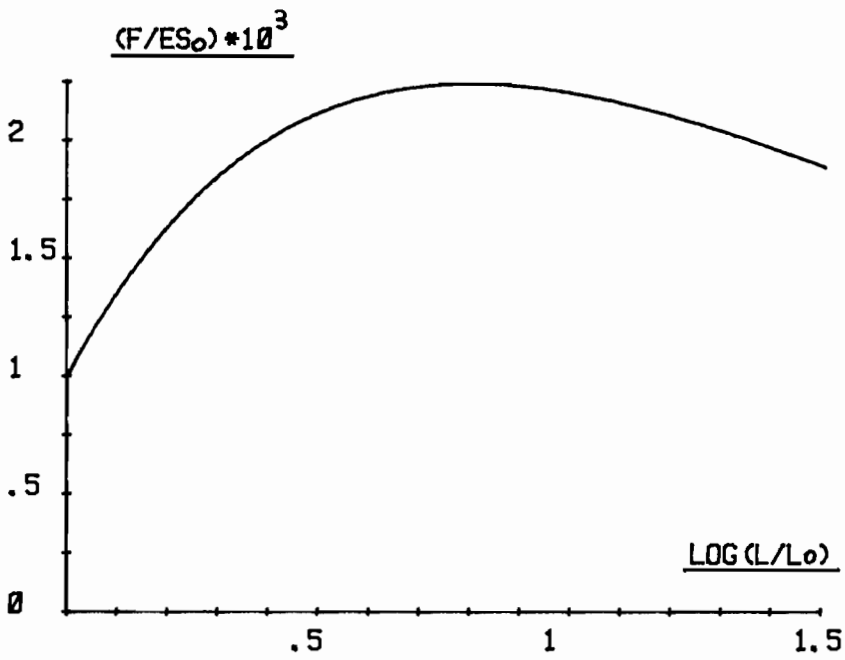


Fig.I.5.b.

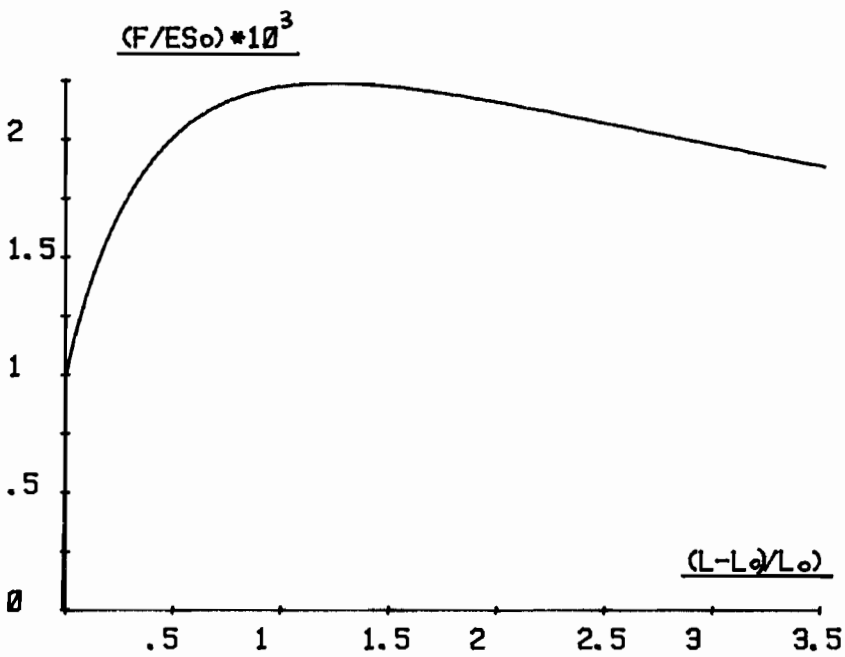


Fig.I.5.c.

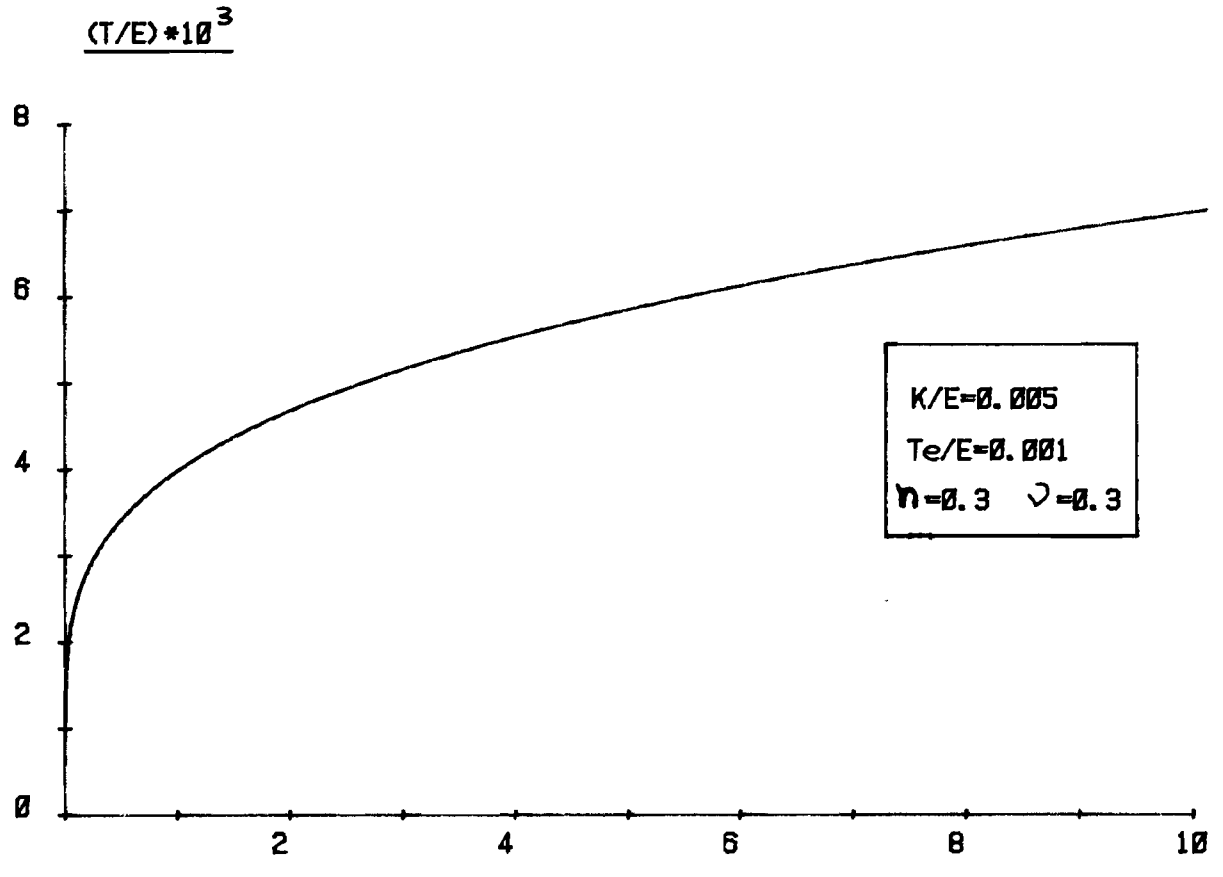


Fig. I.6.

# CHAPITRE II

ECROUISSAGE ANISOTROPE

## CHAPITRE II : ECROUISSAGE ANISOTROPE

### Résumé

Pour décrire une anisotropie d'écroissage, il faut introduire des variables internes tensorielles. Nous présentons, dans ce chapitre, un modèle élasto-plastique standard généralisé, dans lequel les déformations plastiques sont les variables internes d'écroissage. (Nous utiliserons deux mesures eulériennes différentes des déformations plastiques.)

Nous montrerons qu'avec ce modèle, on peut tenir compte d'un écroissage cinématique (Translation de la surface seuil de plasticité), d'une anisotropie plastique induite (déformation de la surface seuil de plasticité) et d'une anisotropie élastique induite (modification des propriétés élastiques après écroissage).

Nous développerons dans ce chapitre l'anisotropie plastique et élastique induite, l'écroissage cinématique fera l'objet du chapitre III.

A la fin de ce chapitre, nous présenterons un autre modèle d'écroissage anisotrope développé en introduisant une variable interne tensorielle qui ne sera reliée aux déformations plastiques que par sa loi d'évolution. Cette méthode sera surtout développée dans le cas d'un écroissage cinématique au chapitre III.

## II.1 INTRODUCTION

Le comportement réel des matériaux supposés élastoplastiques est, en général, loin d'être isotrope. Ceci est particulièrement apparent si ces matériaux sont soumis à des sollicitations complexes (chargements cycliques, traction torsion ...) ou si, par leur mode de fabrication, ils ont une structure anisotrope (tôles laminées, barres étirées ...).

Il est donc indispensable de développer des modèles de comportements qui rendent compte d'une part, de l'anisotropie initiale du matériau et d'autre part, de l'anisotropie induite par l'écrouissage.

Dans ce travail, nous nous limiterons au cas de l'anisotropie induite..

Comme il a été mentionné en introduction, notre travail consiste essentiellement à étendre aux grandes déformations des modèles déjà développés en petites déformations.

Le modèle le plus simple d'écrouissage anisotrope développé en petites déformations et qui, maintenant est bien compris, est le modèle d'écrouissage cinématique standard qui est la généralisation au cas tridimensionnel du modèle monodimensionnel de Prager. Ce modèle ne permet pas de rendre compte de phénomènes tel que la déformation de la surface de plasticité ou le " rochet" dans les chargements cycliques. {27}

La modélisation de l'anisotropie induite, en dehors du modèle cinématique standard, reste un problème largement ouvert même en petites déformations. La majorité des modèles proposés {5}-~~{7}~~ -{31}-{32}. sont des modèles de type cinématique non standard développés pour rendre compte de phénomènes particuliers constatés au cours de chargements particuliers.

La majorité de ces modèles sont basés sur l'hypothèse que la variable interne d'écrouissage anisotrope dont dépend l'énergie libre est un tenseur symétrique du second ordre  $\alpha$ ;  $\alpha$  pouvant être :

- soit le tenseur des déformations plastiques  $\epsilon^p$  lui-même (théorie 1)

- soit reliée aux déformations plastiques par l'intermédiaire de sa loi d'évolution : (théorie 2).

Nous allons développer essentiellement la théorie 1, en remarquant que le modèle que nous présentons au début de ce chapitre a déjà été présenté en {8} et {41}.

En fin de ce chapitre, nous esquisserons la théorie 2 qui sera développée de manière détaillée au chapitre III dans le cas de l'écroutissement cinématique.

II- 2 THEORIE 1 EN GRANDES DEFORMATIONS

II- 2.1. Présentation de la théorie

2.1.1. Ecriture de l'énergie libre

Nous cherchons à introduire, comme paramètres thermodynamiques, deux tenseurs  $\alpha^e$  et  $\alpha^p$  qui respectivement mesurent les déformations élastiques et plastiques. C'est le choix de ces tenseurs qui pose problème.

Nous écrivons pour l'énergie libre spécifique :

$$(1) \quad \Psi = \Psi(\alpha^e, \alpha^p)$$

L'écriture (1) doit être invariante par changement de référentiel (principe d'indifférence matérielle) et invariante par rotation de la configuration intermédiaire (C'est le point de vue que nous avons adopté au départ).

Le matériau étant supposé initialement isotrope,  $\Psi$  doit donc être isotrope en  $\alpha^e$  et  $\alpha^p$ , c'est-à-dire :

$$(2) \quad \Psi(Q\alpha^e Q^T, Q\alpha^p Q^T) = \Psi(\alpha^e, \alpha^p)$$

pour tout  $Q$  orthogonal .

En utilisant les théorèmes de représentation des fonctions isotropes {2.3} et sachant que  $\alpha^e$  et  $\alpha^p$  sont symétriques,  $\Psi$  est fonction des invariants suivants :

$$(3.a) \quad h(\alpha^e), h(\alpha^{e^2}), h(\alpha^{e^3}) \quad : \text{termes élastiques}$$

$$(3.b) \quad h(\alpha^p), h(\alpha^{p^2}), h(\alpha^{p^3}) \quad : \text{termes plastiques}$$

$$(3.c) \quad h(\alpha^e \alpha^p), h(\alpha^{e^2} \alpha^p), h(\alpha^e \alpha^{p^2}), h(\alpha^{e^2} \alpha^{p^2}) \quad : \text{termes de couplage}$$

Pour que  $\alpha^e$  et  $\alpha^p$  puissent prétendre mesurer les déformations élastiques et plastiques, il faut que leurs valeurs propres soient uniquement fonctions des allongements principaux respectivement élastiques et plastiques.

Si  $\Psi$  n'est fonction que des termes (3.a) et 3.b), quelque soit le choix de  $\alpha^e$  et  $\alpha^p$ ,  $\Psi$  s'écrit sous la forme :

$$(4) \quad \Psi = \Psi(\delta_i^e, \delta_i^p)$$

où  $\delta_i^e$  et  $\delta_i^p$  sont respectivement les allongements élastiques et plastiques principaux. Nous dirons, dans ce cas, qu'il y a double isotropie de  $\Psi$  par rapport à  $\alpha^e$  et  $\alpha^p$  puisque :

$$(5) \quad \Psi(Q_1 \alpha^e Q_1^T, Q_2 \alpha^p Q_2^T) = \Psi(\alpha^e, \alpha^p)$$

pour tout  $Q_1$  et  $Q_2$  orthogonaux. On peut donc s'attendre à ce que, dans ce cas, deux choix différents pour  $\alpha^e$  et  $\alpha^p$  mènent à des résultats équivalents.

Au contraire, si  $\Psi$  est en plus fonction des termes (3.c), des choix différents pour  $\alpha^e$  et  $\alpha^p$  mèneront à des écritures différentes de  $\Psi$  et donc à des théories différentes. En effet, les termes (3.c) sont fonctions, en plus des allongements élastiques et plastiques principaux, de l'orientation relative des directions principales de  $\alpha^e$  et  $\alpha^p$ .

Pour avoir une écriture homogène de  $\Psi$ ,  $\alpha^e$  et  $\alpha^p$  doivent être de même nature, c'est-à-dire tous les deux eulériens ou lagrangiens ou dans la configuration intermédiaire.

Les déformations élastiques sont bien définies par  $C^e = F^e T F^e$  dans la configuration intermédiaire et par  $B^e = F^e F^e T$  dans la configuration actuelle.

Les déformations plastiques sont représentées par  $C^p = F^p T F^p$  dans la configuration de référence et par  $B^p = F^p F^p T$  dans la configuration intermédiaire.

La première idée est de travailler dans la configuration intermédiaire et on écrit :

$$(6) \quad \Psi = \Psi(C^e, B^p)$$

$C^e$  et  $B^p$  ne sont pas invariants par rotation de la configuration intermédiaire, mais  $\Psi$  étant isotrope, on doit avoir

$$(7) \quad \Psi(R^e C^e R^e T, R^e B^p R^e T) = \Psi(C^e, B^p) = \Psi(B^e, H^p)$$

$$(8) \quad H^p = R^e B^p R^e T = W e^{-1} B W e^{-1}$$



$B^e$  et  $H^p$  sont deux tenseurs eulériens, invariants par rotation de la configuration intermédiaire et définissent bien respectivement les déformations élastiques et plastiques.

Nous appelons Théorie 1.a. la théorie développée à partir de (7)  
L'écriture (7) a son équivalent lagrangien :

$$\Psi(B^e, H^p) = \Psi(R^{eT} C^e R^e, C^p)$$

et c'est donc la même écriture qui a été proposée par NAGHADI et TRAPP {33}

$H^p$  est le transporté à la configuration initiale par l'intermédiaire de  $R^e$  de  $B^p$ , on peut l'interpréter d'une autre manière {41}  
Voir figure (II.1)

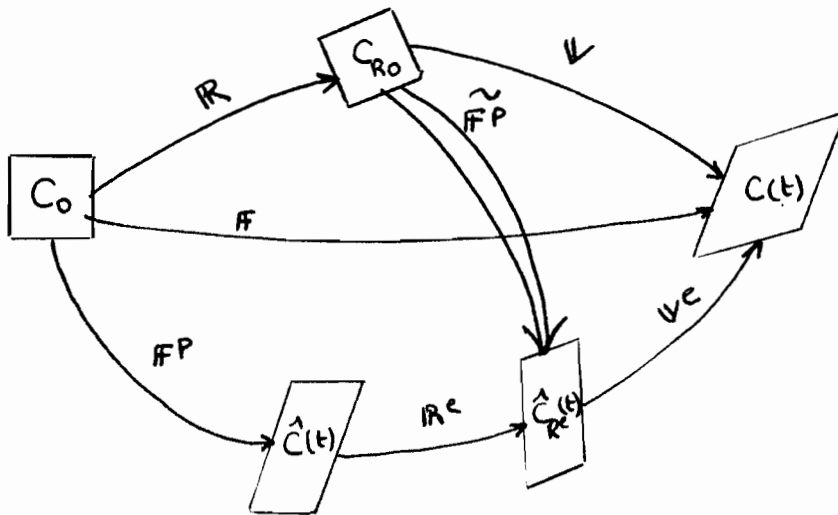


Fig.II.1 - Déformations plastiques

$C_0$  : configuration de référence

$C_{Ro}$  : " " " tournée par la rotation totale  $R$

$C(t)$  : configuration actuelle

$\hat{C}(t)$  : " intermédiaire

$\hat{C}_{Re}(t)$  : " " tournée par la rotation élastique  $R^e$   
(ou configuration intermédiaire choisie par  $R^e = 1$ )

$\tilde{F}^P$  définit bien le passage d'une configuration  $(C_{RO})$  non déformée à une configuration déformée plastiquement  $(\hat{C}_{Re}(t))$ . Les déformations plastiques peuvent donc être définies soit par :

$$(9) \quad \tilde{B}^P = \tilde{F}^P \tilde{F}^{PT} = H^P = V^{e-1} B V^{e-1} = IR^e B^P IR^{eT}$$

soit par :

$$(10) \quad \tilde{C}^P = \tilde{F}^{PT} F^P = G^P = V B^{e-1} V = IR^e C^P IR^{eT}$$

Nous avons bien sûr :

$$(11) \quad \tilde{F}^P = IR^e F^P IR^{eT} \quad \tilde{B}^P = IR^e B^P IR^{eT} \quad H^P = \tilde{B}^P G^P \tilde{B}^{PT}$$

$H^P$  et  $G^P$  sont deux tenseurs eulériens, ils ont les mêmes valeurs propres fonctions uniquement des allongements plastiques principaux mais ils ont des directions principales différentes.

$H^P$  et  $G^P$  sont tous les deux invariants par rotation de la configuration intermédiaire et on peut proposer une deuxième écriture de l'énergie libre : théorie l.b.

$$(12) \quad \Psi = \Psi(B^e, G^P) = \Psi(IR^{eT} B^e IR^e, C^P)$$

Il est bien évident que les écritures (7) et (12) sont équivalentes dans le cas de double isotropie.

Les écritures (7) et (12) sont-elles les seules possibles ?

Pour les déformations élastiques, on peut utiliser soit  $C^e$ , soit  $B^e$  et pour les déformations plastiques, soit  $C^P$ , soit  $B^P$ .

On peut donc choisir une combinaison de deux tenseurs parmi ces quatre, mais pour que l'écriture de  $\Psi$  soit correcte, il faut vérifier le principe d'indifférence matérielle, l'invariance par rotation de la configuration intermédiaire et l'isotropie de la configuration de référence. Il est facile de vérifier que quel que soit le choix de  $\alpha^e$  ( $\alpha^e = C^e$ ,  $\alpha^e = B^e$  ou  $\alpha^e$  isotrope en  $C^e$  ou  $B^e$ ) et de  $\alpha^P$  ( $\alpha^P = C^P$ ,  $\alpha^P = B^P$  ou  $\alpha^P$  isotrope en  $C^P$  ou  $B^P$ ) on se ramène toujours à l'une des deux écritures (7) ou (12).

2.1.2. Ecriture de la dissipation

Pour pouvoir écrire, selon la démarche classique du matériau standard généralisé, la loi d'évolution de  $H^P$  ou de  $G^P$ , on doit déterminer la force et le flux thermodynamiques associés à  $H^P$  ou  $G^P$ .

On écrit donc la dissipation soit :

$$(13) \quad \frac{\rho_0}{\rho} \dot{\Phi} = \alpha : \mathbb{D} - \rho_0 \dot{\Psi} \geq 0$$

On démontre en annexe II que (13) s'écrit :

$$(14) \quad \frac{\rho_0}{\rho} \dot{\Phi} = (\alpha - \alpha^e) : \mathbb{D} + \alpha^P : \mathbb{D}^P \geq 0$$

Théorie 1.a.

$$(15.a.) \quad \alpha^e = 2 \rho_0 \mathbb{V}^e \frac{\partial \Psi}{\partial \mathbb{B}^e} \mathbb{V}^e$$

$$(16.a.) \quad \alpha^P = 2 \rho_0 \left( \mathbb{B}^e \frac{\partial \Psi}{\partial \mathbb{B}^e} - \frac{\partial \Psi}{\partial H^P} H^P \right)$$

Théorie 1.b.

$$(15.b.) \quad \alpha^e = \rho_0 \left( \mathbb{B}^e \frac{\partial \Psi}{\partial \mathbb{B}^e} + \frac{\partial \Psi}{\partial \mathbb{B}^e} \mathbb{B}^e \right) + \hat{\alpha}^e$$

$$\hat{\alpha}^e = \frac{4}{V_1 V_2 - V_{12}} \left\{ \mathcal{X}(N-1) \left[ G^P \frac{\partial \Psi}{\partial G^P} \right]^A \mathbb{V}^{-1} \right\}^S = \frac{4}{V_1 V_2 - V_{12}} \left\{ V_1 V_2 \mathbb{V}^{-1} \left( \frac{\partial \Psi}{\partial G^P} G^P \right)^A + \mathbb{V} \left( \frac{\partial \Psi}{\partial G^P} G^P \right)^A \mathbb{B} \right\}^S$$

$$(16.b.) \quad \alpha^P = 2 \rho_0 \left\{ \mathbb{V}^e \frac{\partial \Psi}{\partial \mathbb{B}^e} \mathbb{V}^e - \mathbb{V}^e \mathbb{V}^{-1} \mathbb{V} \frac{\partial \Psi}{\partial G^P} \mathbb{V} \mathbb{V}^e \right\}$$

$$\mathcal{X}(\mathbb{A})[\mathbb{H}] \text{ est la solution de l'équation : } \mathbb{A} \mathbb{X} + \mathbb{X} \mathbb{A} = \mathbb{H} \quad \{37\}$$

Nous vérifions bien que dans le cas de double isotropie, les deux théories 1.a. et 1.b. mènent aux mêmes résultats. En effet, puisque dans ce cas  $\frac{\partial \Psi}{\partial \mathbb{B}^e}$  et  $\mathbb{B}^e$ ,  $\frac{\partial \Psi}{\partial H^P}$  et  $H^P$ ,  $\frac{\partial \Psi}{\partial G^P}$  et  $G^P$  commutent et donc (15.a) est équivalente à (15.b).

Pour montrer que (16.a) est équivalente à (16.b), il suffit de remarquer, compte tenu de (11) que dans le cas de double isotropie :

$$(17) \quad \frac{\partial \Psi}{\partial G^P} = \mathbb{R}^{P^T} \frac{\partial \Psi}{\partial H^P} \mathbb{R}^{P^P}$$

et donc  $\mathbb{V}^e \mathbb{V}^{-1} \mathbb{V} \frac{\partial \Psi}{\partial G^P} \mathbb{V} \mathbb{V}^e = H^{P^T} \frac{\partial \Psi}{\partial H^P} H^{P^P} = \frac{\partial \Psi}{\partial H^P} H^P$ .

A partir de (14) on prend :

$$(18) \quad \alpha = \alpha^e \quad \bar{\sigma}^p = \lambda \frac{\partial f}{\partial \alpha^p}$$

où  $f$  est la fonction seuil qui doit dépendre de la force thermodynamique  $\alpha^p$  et éventuellement de la variable interne d'état  $H^p$  (ou  $G^p$ ) soit :

$$(19) \quad f = f(\alpha^p, H^p) \quad \text{ou} \quad f = f(\alpha^p, G^p)$$

### 2.1.3. Petites déformations élastiques

En utilisant l'hypothèse petites déformations élastiques, nous allons faire un développement limité de l'énergie libre autour de  $\mathbb{E}^e = \frac{1}{2} (\mathbb{B}^e - \mathbb{1})$ .

Remarquons tout d'abord :

- la configuration intermédiaire devant être libre de contraintes, on doit donc avoir  $\alpha = \alpha^e = 0$  pour  $\mathbb{B}^e = \mathbb{1}$ , ce qui d'après (15.a) et (15.b.), impose une condition supplémentaire sur  $\Psi$  :

$$(20) \quad \frac{\partial \Psi}{\partial \mathbb{B}^e} = 0 \quad \text{pour} \quad \mathbb{B}^e = \mathbb{1}$$

- si les déformations plastiques sont nulles ( $\mathbb{B}^p = \mathbb{1}$  donc  $H^p = G^p = \mathbb{1}$ ) nous devons avoir, pour retrouver la forme classique du seuil initial,  $\alpha^p = \alpha$ , soit d'après (16.a) et (16.b) :

$$(21) \quad \frac{\partial \Psi}{\partial H^p} = 0 \quad \text{pour} \quad H^p = \mathbb{1} ; \quad \frac{\partial \Psi}{\partial G^p} = 0 \quad \text{pour} \quad G^p = \mathbb{1} .$$

Compte tenu de ces remarques, l'énergie libre s'écrit en négligeant les termes d'ordre supérieur à deux par rapport aux déformations élastiques :

$$(22) \quad \Psi = \Psi_0(H^p) + \frac{1}{2} \mathbb{E}^e : A(H^p) [\mathbb{E}^e]$$

et la même chose en utilisant  $G^p$  au lieu de  $H^p$ .

$\Psi_0$  est isotrope en  $\mathbb{H}^p$  donc  $\Psi_0(\mathbb{H}^p) = \Psi_0(\mathbb{G}^p)$  .

Les seuls invariants dont peut dépendre  $\Psi$  qui varient selon le choix de  $\mathbb{H}^p$  ou  $\mathbb{G}^p$  sont les suivants :  $k(\mathbb{e}^e)k(\mathbb{e}^e\mathbb{H}^p)$ ,  $k(\mathbb{e}^e\mathbb{H}^p)$ ,  $k(\mathbb{e}^e)k(\mathbb{e}^e\mathbb{H}^p)$ ,  $k(\mathbb{e}^e\mathbb{H}^p)$  et la même chose pour  $\mathbb{G}^p$  . Or si on néglige les termes supérieurs à l'ordre deux en  $\mathbb{e}^e$  :

$$k(\mathbb{e}^e)k(\mathbb{e}^e\mathbb{H}^p) = k(\mathbb{e}^e)k(\mathbb{e}^e\mathbb{G}^p) + \theta(\mathbb{e}^e)$$

$$(23) \quad k(\mathbb{e}^e)k(\mathbb{e}^e\mathbb{H}^p) = k(\mathbb{e}^e)k(\mathbb{e}^e\mathbb{G}^p) + \theta(\mathbb{e}^e)$$

$$k(\mathbb{e}^e\mathbb{H}^p) = k(\mathbb{e}^e\mathbb{G}^p) + \theta(\mathbb{e}^e)$$

et donc l'écriture  $\Psi(\mathbb{e}^e, \mathbb{H}^p) \simeq \Psi(\mathbb{e}^e, \mathbb{G}^p)$  dans ce cas et la théorie 1.a. est équivalente à la théorie 1.b.

En négligeant les termes supérieurs en  $\mathbb{e}^e$  , les lois (15.a.), (15.b.), (16.a.) et (16.b.) deviennent identiques :

$$(24) \quad \alpha = \alpha^e = \beta \frac{\partial \Psi}{\partial \mathbb{e}^e}$$

$$(25) \quad \alpha^p = \alpha - \mathbb{k} \quad \mathbb{k} = 2\beta \frac{\partial \Psi}{\partial \mathbb{H}^p} \mathbb{H}^p$$

#### 2.1.4. Différents types d'anisotropie

Le terme  $\Psi_0(\mathbb{H}^p)$  dans (22) n'influe que sur  $\mathbb{k}$  qui, vu la forme du critère de plasticité (19) représente le déplacement de la surface seuil dans l'espace des contraintes, il caractérise donc un écrouissage cinématique . Si le tenseur élastique du 4<sup>e</sup> ordre  $\mathbb{A}$  dépend de  $\mathbb{H}^p$  , ceci implique que l'écrouissage modifie les propriétés élastiques du matériau, c'est ce que nous appelons : anisotropie élastique induite. Et enfin, la dépendance paramétrique du critère de plasticité de  $\mathbb{H}^p$  (ou  $\mathbb{G}^p$  ) permet de rendre compte d'une déformation de la surface seuil au cours de l'écrouissage : c'est ce que nous appelons : anisotropie plastique induite.

Pour analyser ces différents types d'anisotropie , nous allons les étudier séparément.

Dans les paragraphes qui vont suivre, nous allons étudier l'anisotropie plastique, puis élastique induite; nous consacrerons le chapitre III à l'écrouissage cinématique.

II - 2.2. Anisotropie plastique induite

2.2.1. Lois de comportement - critère de plasticité

En supposant les déformations élastiques petites, et pour tenir compte d'une anisotropie plastique induite, nous écrivons :

$$(26) \quad \rho_0 \psi = \frac{1}{2} \mathbb{E}^e : A_0 [\mathbb{E}^e] = \frac{E}{2(1+\nu)} \left\{ (\mathbb{E}^e : \mathbb{E}^e) + \frac{\nu}{1-2\nu} k^2(\mathbb{E}^e) \right\} \quad \mathbb{E}^e \approx \mathbb{E}^e$$

$$(27) \quad f(\alpha, \mathbb{E}^p) - k \leq 0$$

$\mathbb{E}^p$  pouvant être n'importe quel tenseur isotrope en  $H^p$  ou  $G^p$ . Dans la suite, nous choisirons  $\mathbb{E}^p$  de manière à ce qu'il s'annule avec les déformations plastiques.

$$(28) \quad \bar{\mathbb{D}}^p = \lambda \frac{\partial f}{\partial \alpha}$$

$$(29) \quad \alpha = \frac{E}{1+\nu} \left\{ \mathbb{E}^e + \frac{\nu}{1-2\nu} k(\mathbb{E}^e) \mathbb{1} \right\}$$

La plasticité n'intervient que pour modifier la surface seuil. Pour compléter le modèle, il faut choisir la forme de  $f(\alpha, \mathbb{E}^p)$ .  $f$  étant isotrope par rapport à  $\alpha$  et  $\mathbb{E}^p$ , la théorie de représentation des fonctions isotropes trouve bien son utilisation dans ce cas {2-3}.

Dans le cas général,  $f$  est fonction des 10 invariants ;

Pour simplifier la forme de  $f$  et la rendre utilisable, nous allons choisir  $f$  quadratique en  $\alpha$  de manière à retrouver, dans le cas des petites déformations, les critères classiques utilisés.  $f$  s'écrit donc :

$$(30) \quad f(\alpha, \mathbb{E}^p) = b_0 k(\alpha^2) + b_1 k(\alpha^t \mathbb{E}^p) + b_2 k(\alpha^2 \mathbb{E}^{p^2}) - [a_{00} k^2(\alpha) + a_{11} k^2(\mathbb{E}^p \alpha) + a_{22} k^2(\mathbb{E}^{p^2} \alpha) + 2a_{10} k(\mathbb{E}^p \alpha) k(\alpha) + 2a_{20} k(\mathbb{E}^{p^2} \alpha) k(\alpha) + 2a_{12} k(\mathbb{E}^p \alpha) k(\mathbb{E}^{p^2} \alpha)]$$

L'hypothèse d'incompressibilité plastique se traduit par l'invariance de  $f$  si on ajoute à  $\alpha$  un tenseur sphérique : dans ce cas (27) s'écrit :

$$(31) \quad \sum_{\alpha=0}^2 \sum_{\beta=0}^2 a_{\alpha\beta} [tr(\mathbb{E}^{p^\alpha} \alpha^2) k(\mathbb{E}^{p^\beta}) - k(\mathbb{E}^{p^\alpha} \alpha) k(\mathbb{E}^{p^\beta} \alpha)] - 2\sigma_c^2 \leq 0 \quad a_{\alpha\beta} = a_{\beta\alpha}$$

Les coefficients  $a_{\alpha\beta}$  dépendent, en principe, des trois invariants de  $e^p$ , mais cette dépendance représente, comme le remarque Boehler, [4] un écrouissage isotrope, que le plus souvent nous représenterons plutôt par un scalaire  $\kappa(e^p)$  dans (27). Nous supposons donc que ces coefficients sont constants, et sans perdre de généralités, nous prenons  $a_{00} = 1$ .

Dans le cas général, on peut écrire (31) en se plaçant dans le repère principal de  $e^p$ , sous la forme :

$$(32) \quad A_3 (\tau_{11} - \tau_{22})^2 + A_2 (\tau_{33} - \tau_{11})^2 + A_1 (\tau_{22} - \tau_{33})^2 + B_3 \tau_{12}^2 + B_2 \tau_{13}^2 + B_1 \tau_{23}^2 - 2\sigma_e^2 \leq 0$$

où les  $\tau_{ij}$  sont les composantes de  $\tau$  dans le repère principal de  $e^p$  et les  $e_i$  sont les valeurs propres de  $e^p$ .

$A_1, A_2, A_3, B_1, B_2$ , et  $B_3$  sont uniquement fonctions des valeurs propres de  $e^p$  soit :

$$(33) \quad A_1 = \sum_{\alpha=0}^2 \sum_{\beta=0}^2 a_{\alpha\beta} e_2^\alpha e_3^\beta \quad A_2 = \sum_{\alpha=0}^2 \sum_{\beta=0}^2 a_{\alpha\beta} e_1^\alpha e_3^\beta \quad A_3 = \sum_{\alpha=0}^2 \sum_{\beta=0}^2 a_{\alpha\beta} e_2^\alpha e_1^\beta$$

$$(34) \quad B_1 = \sum_{\alpha=0}^2 \sum_{\beta=0}^2 a_{\alpha\beta} (e_1^\beta + e_2^\beta + e_3^\beta) (e_2^\alpha + e_3^\alpha)$$

$$B_2 = \sum_{\alpha=0}^2 \sum_{\beta=0}^2 a_{\alpha\beta} (e_1^\beta + e_2^\beta + e_3^\beta) (e_1^\alpha + e_3^\alpha)$$

$$B_3 = \sum_{\alpha=0}^2 \sum_{\beta=0}^2 a_{\alpha\beta} (e_1^\beta + e_2^\beta + e_3^\beta) (e_2^\alpha + e_1^\alpha)$$

A un instant donné de la déformation plastique, (32) est donc un critère de Hill, il est symétrique en traction et compression et avant toute déformation plastique ( $e^p = 0$ ), il se ramène au critère de Von Mises :

$$h(\tau^D) - \frac{2}{3} \sigma_e^2 \leq 0$$

### 2.2.2. Cas triaxial

Si les directions principales des contraintes et des déformations sont fixes, et donc s'il n'y a pas de rotations, (32) s'écrit :

$$(35) \quad A_3 (\tau_1 - \tau_2)^2 + A_2 (\tau_3 - \tau_1)^2 + A_1 (\tau_2 - \tau_3)^2 - 2\sigma_e^2 \leq 0$$

ou encore :

$$(36) \quad \alpha_1 \tau_1^{D^2} + \alpha_2 \tau_2^{D^2} + \alpha_3 \tau_3^{D^2} - \frac{2}{3} \sigma_c^2 \leq 0$$

avec :

$$(37) \quad \begin{cases} \alpha_1 = \frac{1}{3} [2A_2 + 2A_3 - A_1] & A_1 = \frac{1}{3} [2\alpha_2 + 2\alpha_3 - \alpha_1] \\ \alpha_2 = \frac{1}{3} [2A_1 + 2A_3 - A_2] & A_2 = \frac{1}{3} [2\alpha_1 + 2\alpha_3 - \alpha_2] \\ \alpha_3 = \frac{1}{3} [2A_1 + 2A_2 - A_3] & A_3 = \frac{1}{3} [2\alpha_1 + 2\alpha_2 - \alpha_3] \end{cases}$$

où  $\tau_i$  sont les composantes de  $\alpha$  et  $\tau_i^D$  celles de  $\alpha^D$ .

Dans le plan déviatoire des contraintes\*, en faisant un changement de repère (voir fig. II.2), (35) ou (36) s'écrivent sous la forme :

$$(38) \quad uX^2 + vY^2 \leq 1$$

$$X = \frac{3}{2} \left[ \cos \theta \frac{\tau_1^D}{\sigma_c} + \sin \theta \left( \frac{\tau_3^D - \tau_2^D}{\sqrt{3} \sigma_c} \right) \right]$$

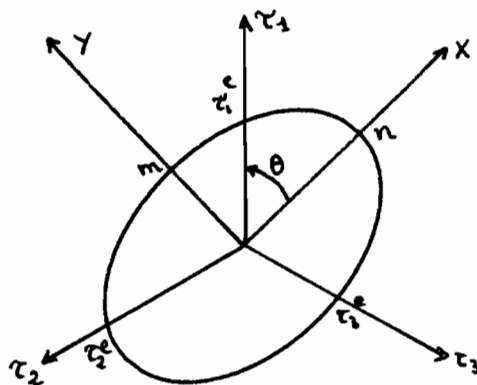
$$Y = \frac{3}{2} \left[ \sin \theta \frac{\tau_1^D}{\sigma_c} - \cos \theta \left( \frac{\tau_3^D - \tau_2^D}{\sqrt{3} \sigma_c} \right) \right]$$

$$\operatorname{tg} 2\theta = \frac{\sqrt{3}(\alpha_2 - \alpha_3)}{\alpha_2 + \alpha_3 - 2\alpha_1} = \frac{\sqrt{3}(A_3 - A_2)}{2A_1 - A_2 - A_3}$$

$$u = \frac{1}{3} \left[ A_1 + A_2 + A_3 + \frac{A_2 + A_3 - 2A_1}{2 \cos 2\theta} \right]$$

$$v = \frac{1}{3} \left[ A_1 + A_2 + A_3 - \frac{A_2 + A_3 - 2A_1}{2 \cos 2\theta} \right]$$

Si les coefficients  $u, v$  sont correctement choisis pour avoir  $u > 0$  et  $v > 0$  (38) est donc l'équation d'une ellipse.



$$n = \frac{1}{\sqrt{4}}$$

$$m = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

Figure II.2 : Représentation du critère dans le plan déviatoire (triaxial)

\* La représentation dans le plan déviatoire n'est évidemment valable que dans le cas triaxial.



Les coefficients  $A_i$  peuvent être identifiés, à un instant donné de la déformation plastique, par trois essais de traction dans les directions 1, 2 et 3. En notant  $\sigma_c^e$  la limite élastique dans la direction  $i$ , nous avons :

$$(39) \quad \begin{aligned} A_1 &= \sigma_c^2 \left[ \frac{1}{\tau_2^2 e_2^2} + \frac{1}{\tau_3^2 e_2^2} - \frac{1}{\tau_1^2 e_2^2} \right] & \frac{\tau_1^e}{\sigma_c} &= \left[ \frac{2}{A_2 + A_3} \right]^{1/2} \\ A_2 &= \sigma_c^2 \left[ \frac{1}{\tau_1^2 e_1^2} + \frac{1}{\tau_3^2 e_1^2} - \frac{1}{\tau_2^2 e_1^2} \right] & \frac{\tau_2^e}{\sigma_c} &= \left[ \frac{2}{A_1 + A_3} \right]^{1/2} \\ A_3 &= \sigma_c^2 \left[ \frac{1}{\tau_1^2 e_3^2} + \frac{1}{\tau_2^2 e_3^2} - \frac{1}{\tau_3^2 e_3^2} \right] & \frac{\tau_3^e}{\sigma_c} &= \left[ \frac{2}{A_1 + A_2} \right]^{1/2} \end{aligned}$$

En vue de visualiser l'évolution de la surface seuil au cours de l'écroutissage, nous allons supposer que dans (31) seul  $u_{10} = a$  n'est pas nul : c'est le terme le plus significatif si les déformations plastiques sont petites. Nous n'attachons pas beaucoup d'importance à ce choix, notre seul but étant d'illustrer le comportement.

(31) dévient alors :

$$(40) \quad h(\sigma^0) \left( 1 + \frac{a}{3} h(\sigma^0) \right) + a h(\sigma^0 \alpha^0) \leq \frac{2}{3} \sigma_c^2$$

et donc d'après (33) :

$$A_1 = 1 + a(h(\sigma^0) - e_1^0) \quad A_2 = 1 + a(h(\sigma^0) - e_2^0) \quad A_3 = 1 + a(h(\sigma^0) - e_3^0)$$

et donc :

$$(41) \quad \text{tg}(2\theta) = \frac{\sqrt{3}(e_2^0 - e_3^0)}{h(\sigma^0) - 3e_1^0} \quad \text{ne dépend pas de } a.$$

$$(42) \quad \left\{ \begin{aligned} u &= 1 + \frac{a}{3} \left[ 2h(\sigma^0) + \frac{3e_1^0 - h(\sigma^0)}{2\cos 2\theta} \right] \\ v &= 1 + \frac{a}{3} \left[ 2h(\sigma^0) - \frac{3e_1^0 - h(\sigma^0)}{2\cos 2\theta} \right] \end{aligned} \right\} \Rightarrow u+v = 1 + \frac{4}{3} a h(\sigma^0)$$

$$(43) \quad \left\{ \begin{aligned} \frac{\tau_1^e}{\sigma_c} &= \left[ 1 + \frac{a}{2} (h(\sigma^0) + e_1^0) \right]^{-1/2} \\ \frac{\tau_2^e}{\sigma_c} &= \left[ 1 + \frac{a}{2} (h(\sigma^0) + e_2^0) \right]^{-1/2} \\ \frac{\tau_3^e}{\sigma_c} &= \left[ 1 + \frac{a}{2} (h(\sigma^0) + e_3^0) \right]^{-1/2} \end{aligned} \right.$$

Si l'écroutissage se fait par traction dans la direction 1 ( $e_2^0 = e_3^0$ )  
alors :

$$(44) \quad \theta = 0 \quad u = 1 + \frac{a}{2} (h(\sigma^0) + e_1^0) \quad v = 1 + \frac{a}{3} (h(\sigma^0) + 3e_2^0)$$

$$(45) \quad \frac{\sigma_e}{\sigma_c} = \left[ 1 + \frac{a}{2} (k(\epsilon^p) + e^{p_2}) \right]^{-1/2}$$

$$(46) \quad \frac{\sigma_e}{\sigma_c} = \frac{\sigma_3^e}{\sigma_c} = \left[ 1 + \frac{a}{2} (k(\epsilon^p) + e^{p_2}) \right]^{-1/2}$$

Le choix de  $\epsilon^p$  a donc une influence sur le comportement obtenu. Dans ce qui va suivre, nous allons choisir :

$$(47) \quad \epsilon^p = \frac{1}{2} (\sigma^p - 1) = \frac{1}{2} (\mu^p - 1) = \frac{1}{2} (18^p - 1)$$

. Evolution de la surface de plasticité : écrouissage en traction et sollicitations triaxiales.

Nous supposons donc que les sollicitations sont triaxiales, l'écrouissage se fait par traction et que  $\epsilon^p = \frac{1}{2} (18^p - 1)$ .

Nous allons étudier l'évolution de la surface seuil dans le plan déviatoire.

Nous posons :

$$\mathbb{F}^p : \begin{pmatrix} \lambda^p & 0 & 0 \\ 0 & \lambda^{p-1/2} & 0 \\ 0 & 0 & \lambda^{p-1/2} \end{pmatrix} \text{ et } \quad \epsilon^p = \frac{1}{2} \text{Log } \lambda^p$$

Les relations (44), (45) et (46) deviennent :

$$(48) \quad u = 1 - a \left[ 1 - \frac{1}{2} (e^{2\epsilon^p} + e^{-\epsilon^p}) \right] \quad v = 1 - a \left[ 1 - \frac{1}{6} (e^{2\epsilon^p} + 5e^{-\epsilon^p}) \right]$$

$$(49) \quad \frac{\sigma_e}{\sigma_c} = \left[ 1 - a \left( 1 - \frac{1}{2} (e^{2\epsilon^p} + e^{-\epsilon^p}) \right) \right]^{-1/2}$$

$$(50) \quad \frac{\sigma_3^e}{\sigma_c} = \left[ 1 - a \left( 1 - \frac{1}{6} (e^{2\epsilon^p} + 5e^{-\epsilon^p}) \right) \right]^{-1/2}$$

Pour avoir un critère acceptable, il faut que  $u$  et  $v$  restent positives.  $u$  s'annule pour :

$$(51) \quad a = \left[ 1 - \frac{1}{2} (e^{2\epsilon^p} + e^{-\epsilon^p}) \right]^{-1} = y_1(\epsilon^p)$$

et  $v$  pour :

$$(52) \quad a = \left[ 1 - \frac{1}{6} (e^{2\epsilon^p} + 5e^{-\epsilon^p}) \right]^{-1} = y_2(\epsilon^p)$$

Les seules valeurs de  $\alpha$  qui n'annulent ni  $u$  ni  $v$ , quel que soit  $\epsilon^p$  sont celles comprises entre 0 et environ 12,5 (Voir Figure II.3)

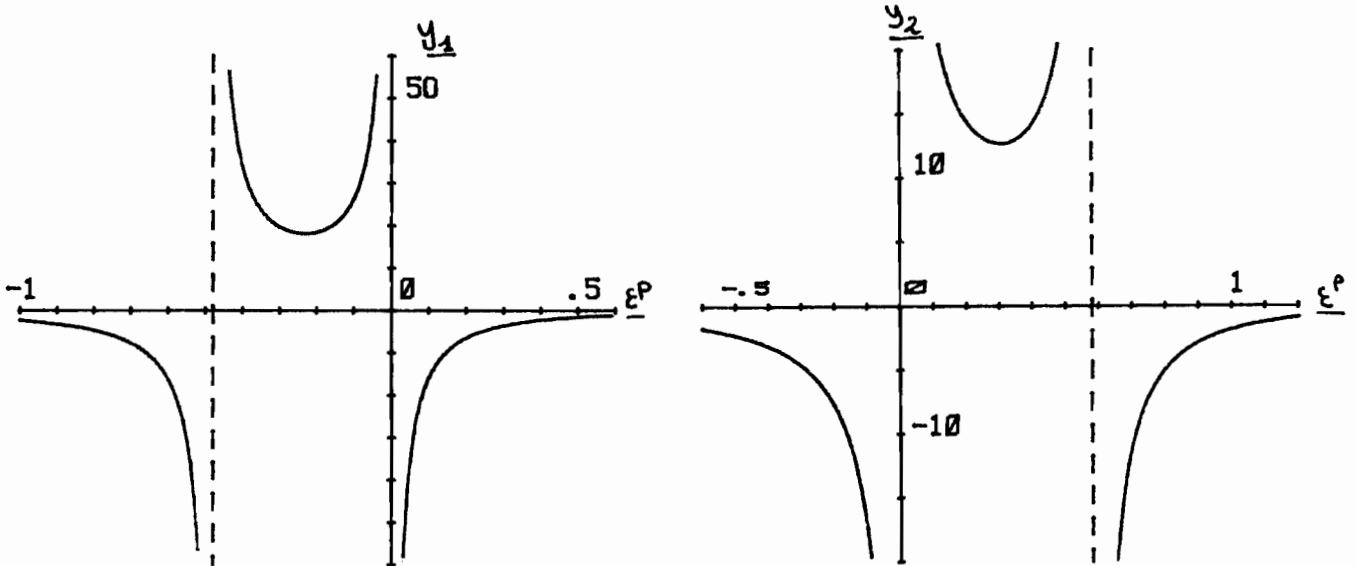


Figure II.3  $y_1(\epsilon^p)$  et  $y_2(\epsilon^p)$

Remarquons que si  $\alpha$  est négatif et assez faible en valeur absolue,  $u$  et  $v$  ne s'annulent que pour des valeurs élevées de  $\epsilon^p$ .

En utilisant l'hypothèse que les déformations plastiques sont petites, (49) et (50) deviennent :

$$(53) \quad \frac{\tau_1^e}{\sigma_c} \approx 1 - \frac{\alpha}{4} \epsilon^p \quad \frac{\tau_2^e}{\sigma_c} \approx 1 + \frac{\alpha}{8} \epsilon^p \approx \frac{1}{2} (3 - \frac{\tau_1^e}{\sigma_c})$$

si  $\alpha > 0$  :  $-\tau_1^e$  décroît au cours de l'écroutissage et s'annule à l'infini (écroutissage négatif), ceci n'est pas très gênant puisque, dans la majorité des cas, l'anisotropie plastique induite est couplée avec un autre type d'écroutissage (cinématique isotrope).

Pour des valeurs de  $\alpha$  faibles, la décroissance est lente au départ (palier) puis décroît plus rapidement. (voir courbes II.4.a.b.c)

$-\tau_2^e$  commence par croître, puis à partir d'une valeur de  $\epsilon^p \approx 0,14$ , il décroît pour s'annuler à l'infini. La croissance initiale est d'autant plus faible que  $\alpha$  est petit.

Si  $a < 0$  :-  $\tau^e$  est toujours croissant et tend vers l'infini pour une valeur  $\epsilon_{L1}^p$  finie de la déformation plastique dépendante de  $a$ . Plus  $a$  est grand en valeur absolue, plus  $\epsilon_{L1}^p$  est petit : pour  $a = -0,02$ ,  $\epsilon_{L1}^p \approx 2,32$  et pour  $a = -1$   $\epsilon_{L1}^p \approx 0,63$  (voir figure II.5.a.b.c)

-  $\tau_2^e$  décroît jusqu'à une valeur de  $\epsilon^p$  puis croît pour devenir infini pour une valeur finie  $\epsilon_{L2}^p > \epsilon_{L1}^p$ .

La valeur de  $\tau_2^e$  minimale est toujours positive.

La décroissance initiale est d'autant plus faible que la valeur absolue de  $a$  est petite.

Nous avons représenté, dans les figures II.6.a et b. les traces de la surface seuil dans le plan déviatoire au cours de l'écroutissage ( $a = 1$  et  $a = -1$ ).

### 2.2.3. Traction torsion

Au cours d'une sollicitation de traction torsion, (32) s'écrit :

$$(54) \quad \frac{A_3 + A_2}{2} \tau_{11}^2 + \frac{B_3}{2} \tau_{12}^2 \leq \sigma_e^2$$

Si  $\frac{A_2 + A_3}{2}$  et  $\frac{B_3}{2}$  sont positifs, (54) est l'équation d'une ellipse dans le plan  $\tau_{11}, \tau_{12}$  dont les axes principaux sont les axes  $\tau_{11}$  et  $\tau_{22}$ . Dans ce cas nous avons, en supposant que seul  $a_{10} = a$  est non nul :

$$(55) \quad \frac{\tau_{11}^e}{\sigma_e} = \left( \frac{2}{A_2 + A_3} \right)^{1/2} = \left[ 1 + \frac{a}{2} (\kappa(\epsilon^p) + \epsilon^p) \right]^{-1/2}$$

$$(56) \quad \frac{\tau_{12}^e}{\sigma_e} = \left( \frac{2}{B_3} \right)^{1/2} = \frac{1}{\sqrt{3}} \left[ 1 + \frac{a}{6} (5\kappa(\epsilon^p) - 3\epsilon^p) \right]^{-1/2}$$

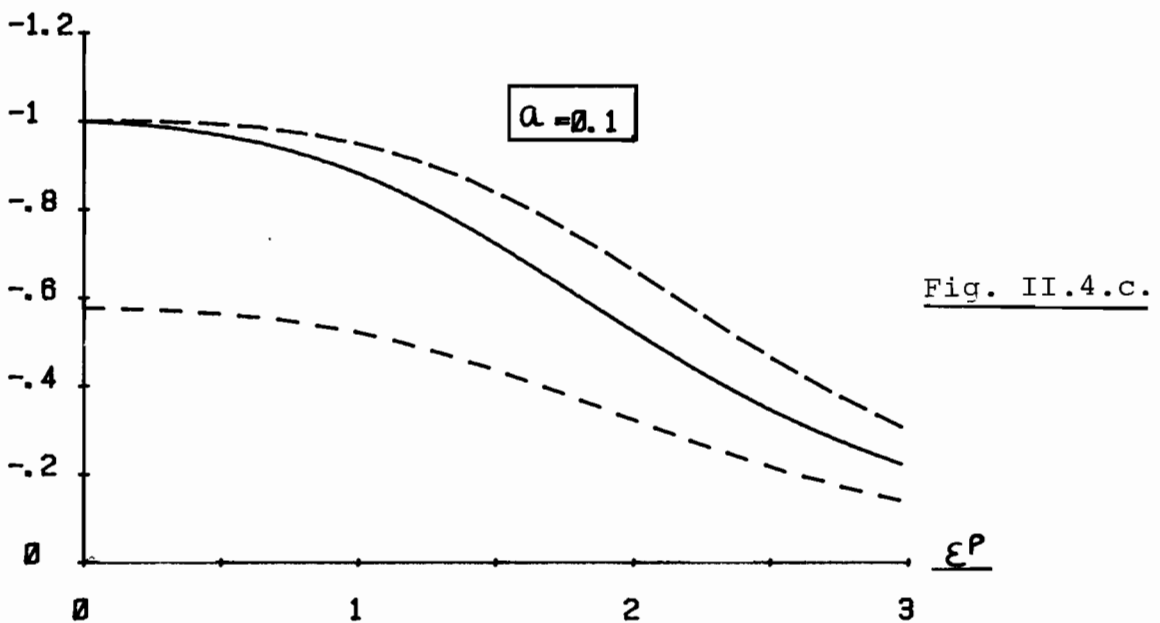
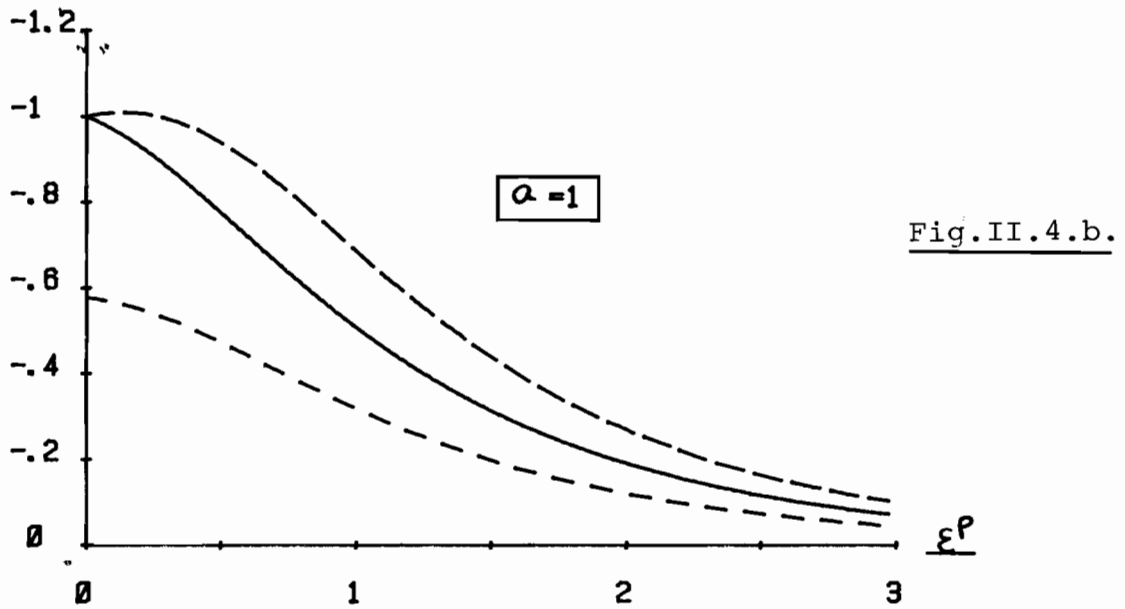
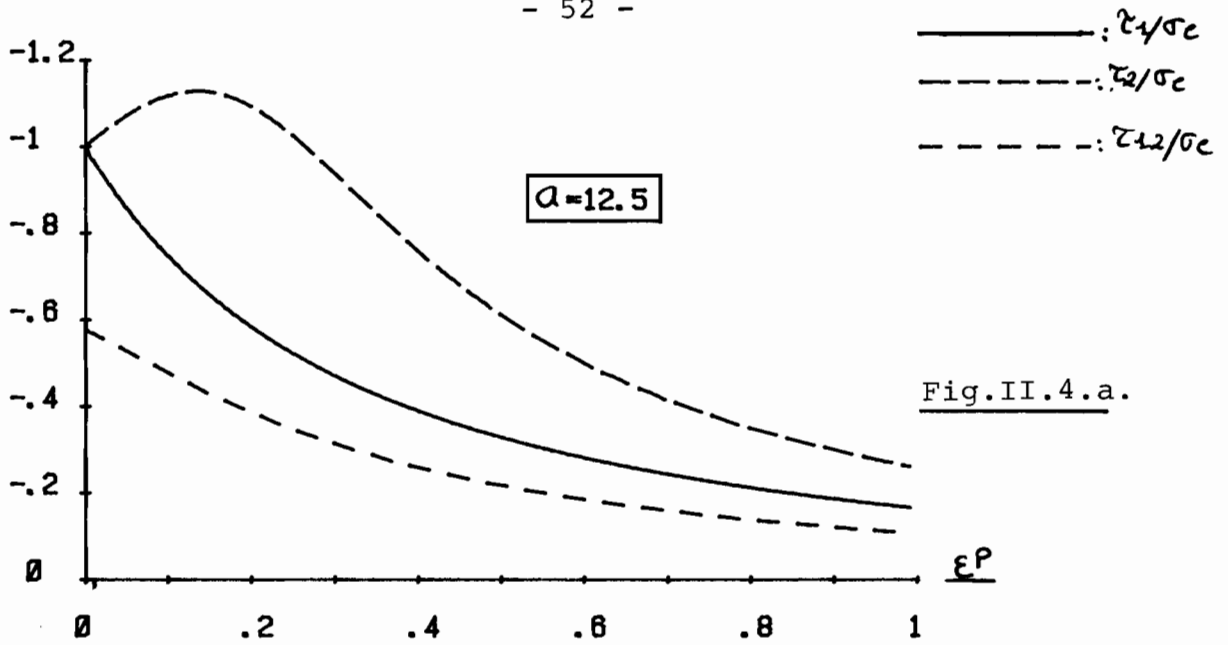
Si l'écroutissage se fait par traction et en prenant le même choix de  $\epsilon^p$  que ci-dessus (47), (55) est la même que (49) et (56) devient

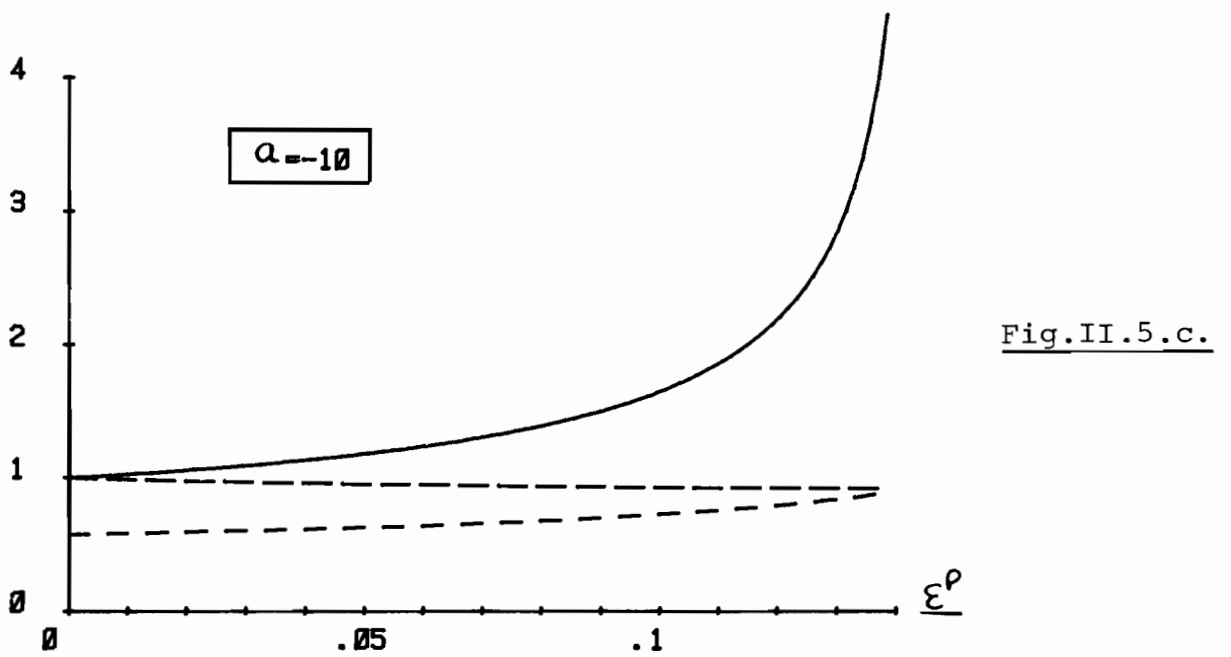
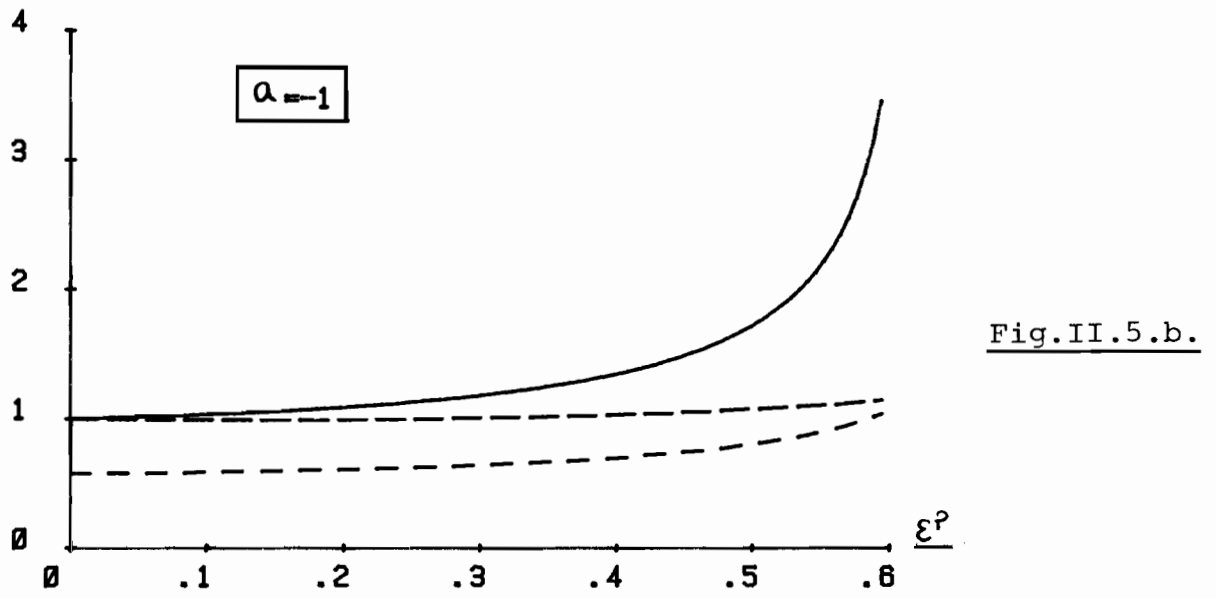
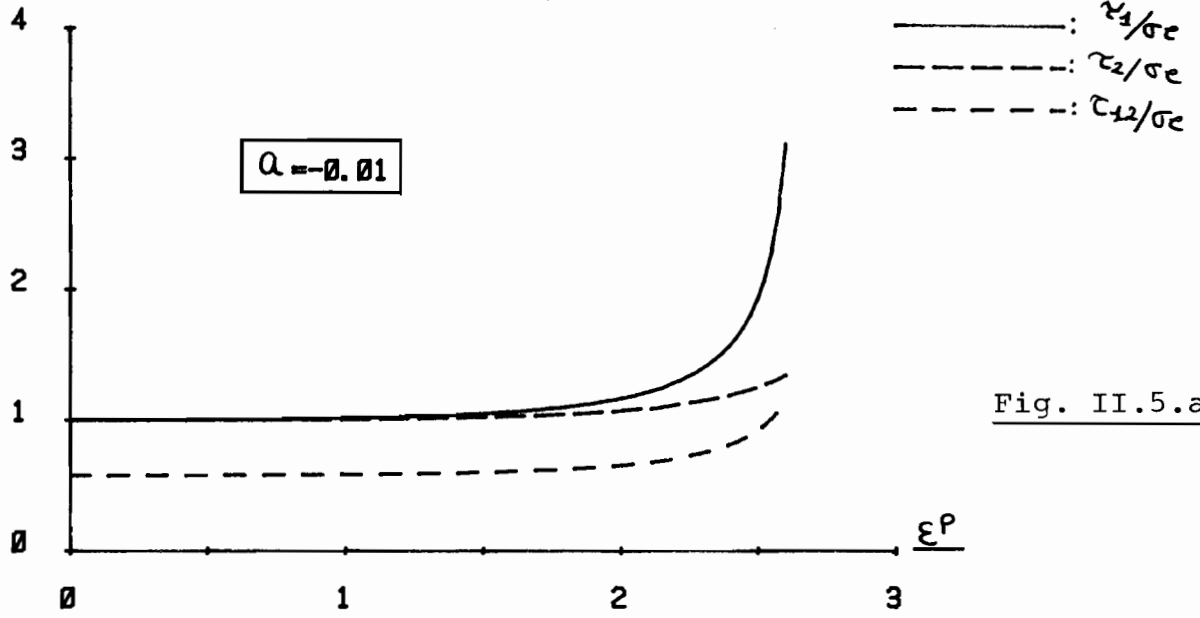
$$(57) \quad \frac{\tau_{12}^e}{\sigma_e} = \frac{1}{\sqrt{3}} \left[ 1 - a \left( 1 - \frac{1}{2} (5e^{2\epsilon^p} + 7e^{-\epsilon^p}) \right) \right]^{-1/2}$$

Si  $a$  est positif,  $\tau_{12}^e$  décroît pour s'annuler à l'infini. Si  $a$  est négatif, alors  $\tau_{12}^e$  croît jusqu'à devenir infini pour une déformation plastique finie (voir Figure II.4.a.b.c et II.5.a.b.c).

Remarquons que si les déformations plastiques sont petites (57) devient

$$(58) \quad \frac{\tau_{12}^e}{\sigma_e} = \frac{1}{\sqrt{3}} \left( 1 - \frac{a}{8} \epsilon^p \right)$$





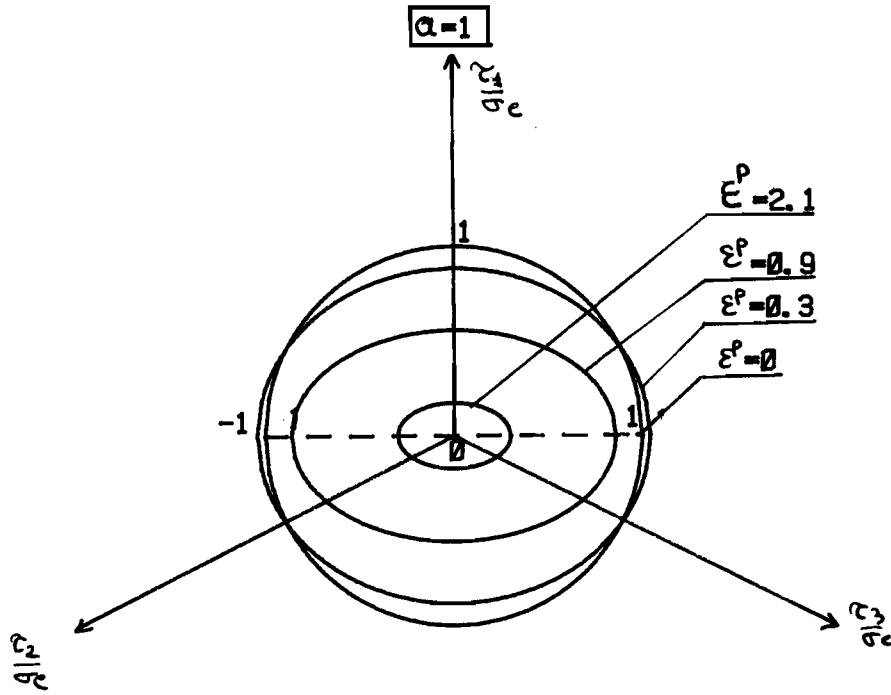


Fig. II.6.a.

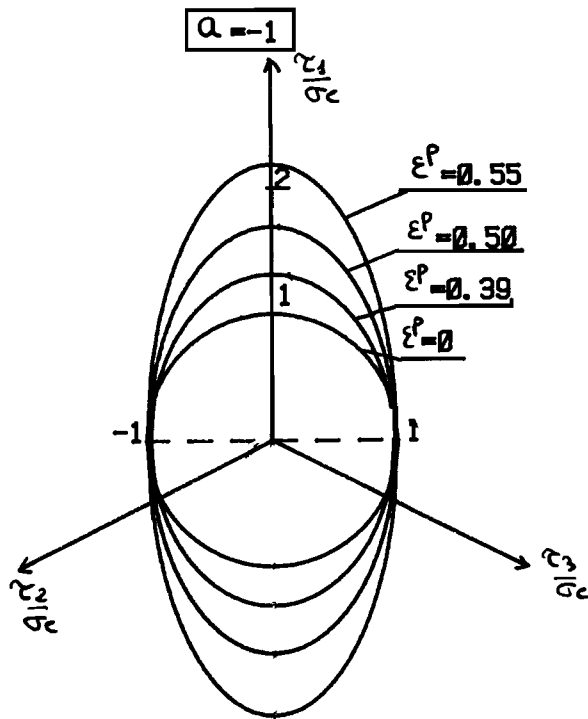


Fig. II.6.b.

2.2.4. Conclusions

Les courbes des figures II.4 et II.5 montrent bien que si l'on veut rendre compte, sensiblement, d'une anisotropie plastique induite, Il faut utiliser la théorie des grandes déformations. En effet, pour décrire une déformation assez importante de la surface seuil, en utilisant l'hypothèse des petites déformations, il faut choisir  $\alpha$  grand en valeur absolue, or dans ce cas, la différence entre la réponse d'une loi grande déformation et celle d'une loi linéarisée est bien sensible, (pour  $\alpha = 12,5$  à  $\epsilon^p = 0,2$ , l'erreur absolue est de 36%). Pour des valeurs de  $\alpha$  faibles en valeur absolue ( $\alpha = 0,1$ ), pour une modification du seuil  $\tau_1^c$  par exemple de 20% ( $\epsilon^p = 1,3$ ), l'erreur absolue sur  $\tau_1^c$  que l'on a en utilisant l'hypothèse des petites déformations est du même ordre soit 20% et donc là aussi l'hypothèse des petites déformations est grossière.

Toutes les courbes que nous avons tracées ont été pour un choix particulier de  $\epsilon^p$  (voir 47). Avec les mêmes hypothèses ci-dessus et en prenant un autre choix de  $\epsilon^p$  :

(55)  $\epsilon^p = \frac{1}{2} \text{Log}_2(18^p)$

les relations (48), (49), (50) et (57) deviennent :

(56)  $u = 1 + \frac{\alpha}{2} \epsilon^p \quad v = 1 - \frac{\alpha}{2} \epsilon^p$

(57)  $\frac{\tau_1^c}{\sigma_e} = [1 + \frac{\alpha}{2} \epsilon^p]^{-1/2} \quad \frac{\tau_2^c}{\sigma_e} = [1 - \frac{\alpha}{2} \epsilon^p]^{-1/2} \quad \frac{\tau_{12}^c}{\sigma_e} = \frac{1}{\sqrt{3}} [1 + \frac{\alpha}{4} \epsilon^p]^{-1/2}$

Dans ce cas,  $u$  s'annule pour  $\epsilon^p = -\frac{2}{\alpha}$  et  $v$  pour  $\epsilon^p = \frac{2}{\alpha}$ ; quelle que soit la valeur de  $\alpha$ , il existe donc toujours une valeur de  $\epsilon^p$  qui annule soit  $u$  soit  $v$ . (voir figure II.7). Cette valeur est d'autant plus grande que la valeur absolue de  $\alpha$  est faible.

(Voir courbes de la figure II.8)

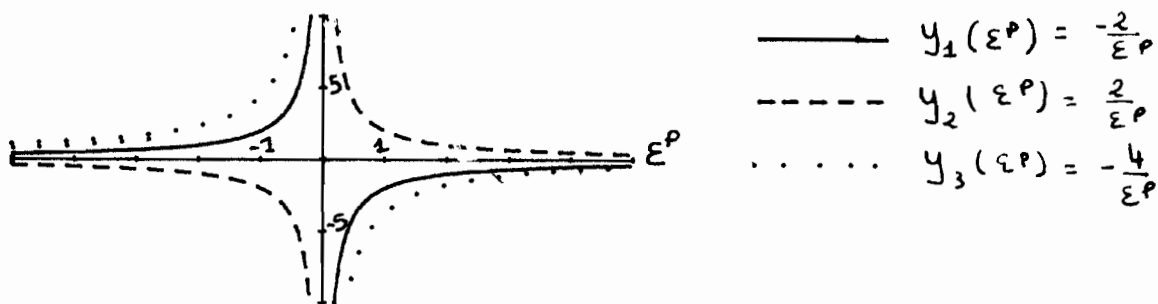


Fig II.7  $y_1(\epsilon^p), y_2(\epsilon^p), y_3(\epsilon^p)$



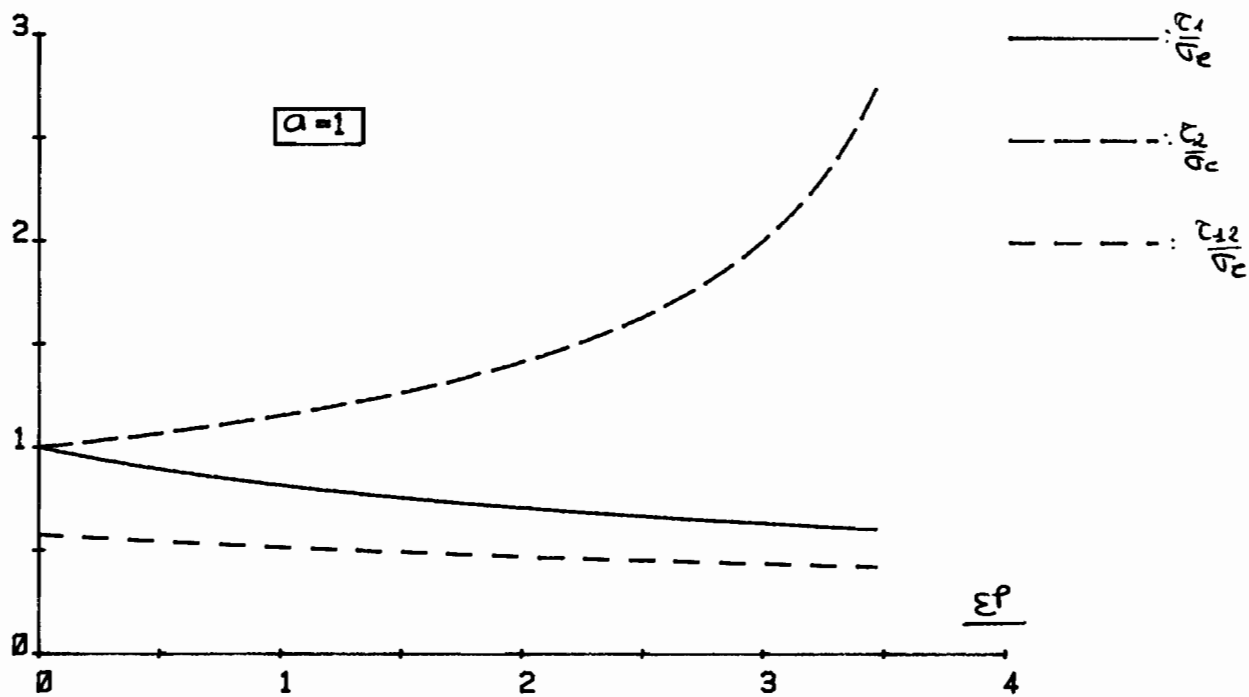


Fig. II.8.a.

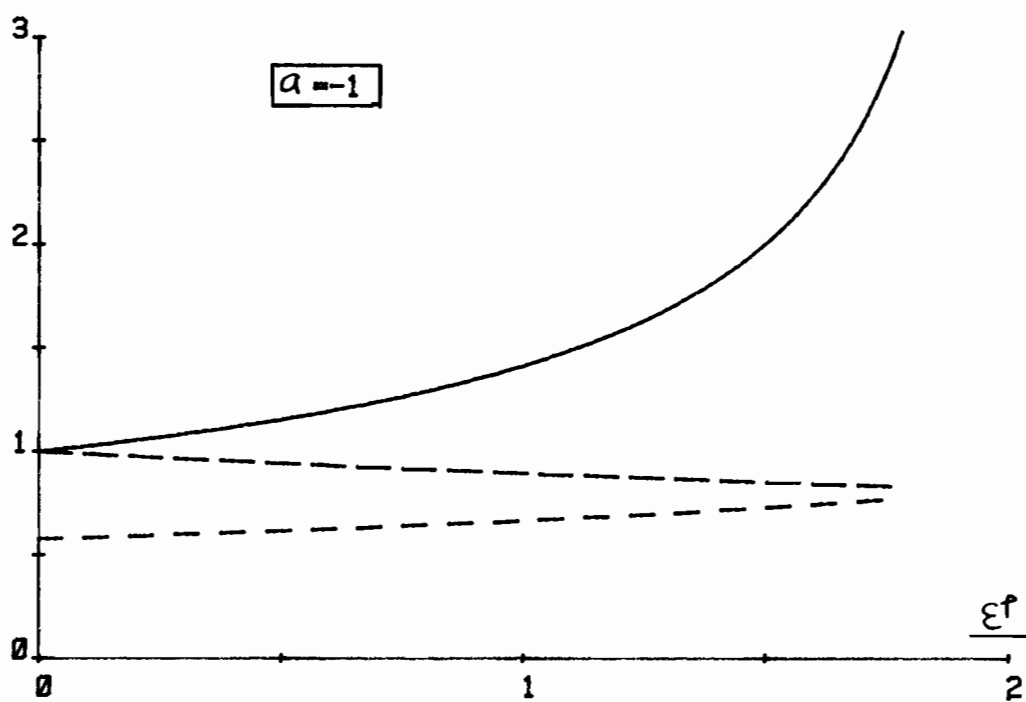


Fig. II.8.b.

Nous n'avons développé, dans ce paragraphe II.2.2., que l'anisotropie plastique induite (déformation de la surface seuil) mais il est bien évident que pour avoir un modèle qui corresponde à une réalité physique, il faut accoupler l'anisotropie plastique induite avec un autre type d'écroutissage (isotrope ou cinématique). En fait, dans (40) il y a déjà de l'écroutissage isotrope si  $h(\epsilon^p)$  n'est pas nul, pour n'avoir que de l'anisotropie plastique induite, on peut prendre :

$$(58) \quad h(\alpha^0) + a h(\epsilon^p \alpha^0) \leq \frac{2}{3} \sigma_c^2$$

Pour un choix de  $\epsilon^p$  tel que (55), le critère (58) est équivalent à (40) mais pour un autre choix tel que  $h(\epsilon^p) \neq 0$ , alors les deux critères sont différents :

Pour un choix de  $\epsilon^p = \frac{1}{2} (B^p - 1)$  et pour un écroutissage par traction, les relations (48), (49), (50) et (57) deviennent :

$$(59) \quad u = 1 - \frac{a}{2} \left[ 1 - \frac{1}{3} (2e^{2\epsilon^p} + e^{-\epsilon^p}) \right] \quad v = 1 - \frac{a}{2} (1 - e^{-\epsilon^p})$$

$$(60) \quad \frac{\sigma_{12}^e}{\sigma_e} = \left\{ 1 - \frac{a}{2} \left[ 1 - \frac{1}{3} (2e^{2\epsilon^p} + e^{-\epsilon^p}) \right] \right\}^{-1/2}$$

$$(61) \quad \frac{\sigma_{23}^e}{\sigma_e} = \left\{ 1 - \frac{a}{2} \left[ 1 - \frac{1}{6} (e^{2\epsilon^p} + 5e^{-\epsilon^p}) \right] \right\}^{-1/2}$$

$$(62) \quad \frac{\sigma_{13}^e}{\sigma_c} = \frac{1}{\sqrt{3}} \left\{ 1 - \frac{a}{2} \left[ 1 - \frac{1}{2} (e^{2\epsilon^p} + e^{-\epsilon^p}) \right] \right\}^{-1/2}$$

$u$  s'annule pour :

$$a = 2 \left[ 1 - \frac{1}{3} (2e^{2\epsilon^p} + e^{-\epsilon^p}) \right]^{-1} = y_1(\epsilon^p)$$

et  $v$  s'annule pour :

$$a = 2 \left[ 1 - e^{-\epsilon^p} \right]^{-1} = y_2(\epsilon^p)$$

Les seules valeurs de  $a$  qui n'annulent ni  $u$  ni  $v$  quel que soit  $\epsilon^p$  sont celles comprises entre 0 et 2 (voir figure II.9).

$\frac{\sigma_{12}^e}{\sigma_e}$  devient infinie pour :

$$a = 2 \left[ 1 - \frac{1}{2} (e^{2\epsilon^p} + e^{-\epsilon^p}) \right]^{-1} = y_3(\epsilon^p)$$

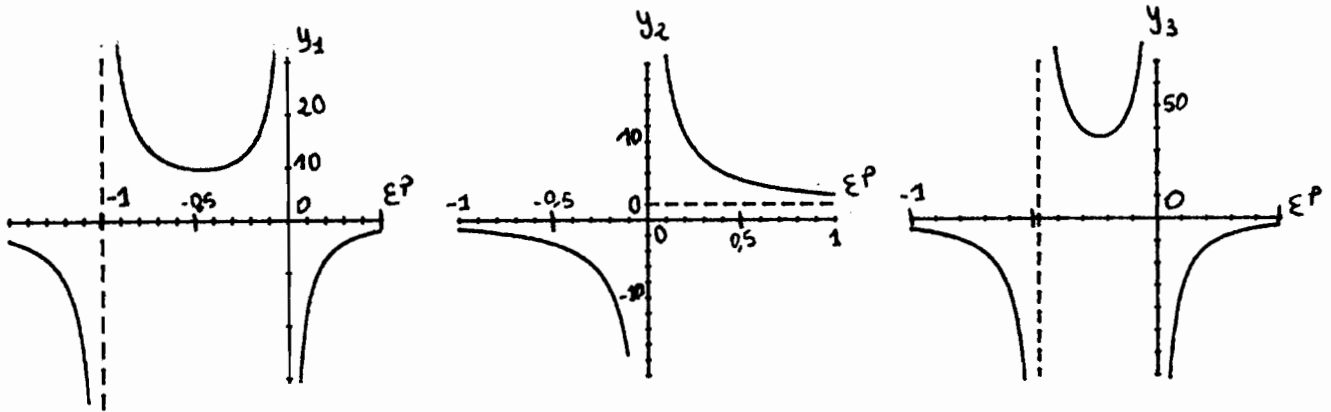


Figure.II.9.  $y_1(\epsilon^p), y_2(\epsilon^p), y_3(\epsilon^p)$

Tous les commentaires sur  $\tau_1^c$ ,  $\tau_2^c$  et  $\tau_3^c$  faits précédemment restent valables. (voir courbes des Figures II.10. a. b. c. d. e. f.)

La construction de notre modèle est très proche de celle de Boehler {2,3} La différence entre les travaux de Boehler et les nôtres réside essentiellement en trois points :

- Notre modèle est élastoplastique alors que celui de Boehler est rigide plastique.
- Notre modèle est basé sur la loi de normalité généralisée alors que Boehler ne fait pas cette hypothèse.
- Le modèle de Boehler tient compte également d'une anisotropie initiale alors que nous nous sommes limités à l'anisotropie induite.

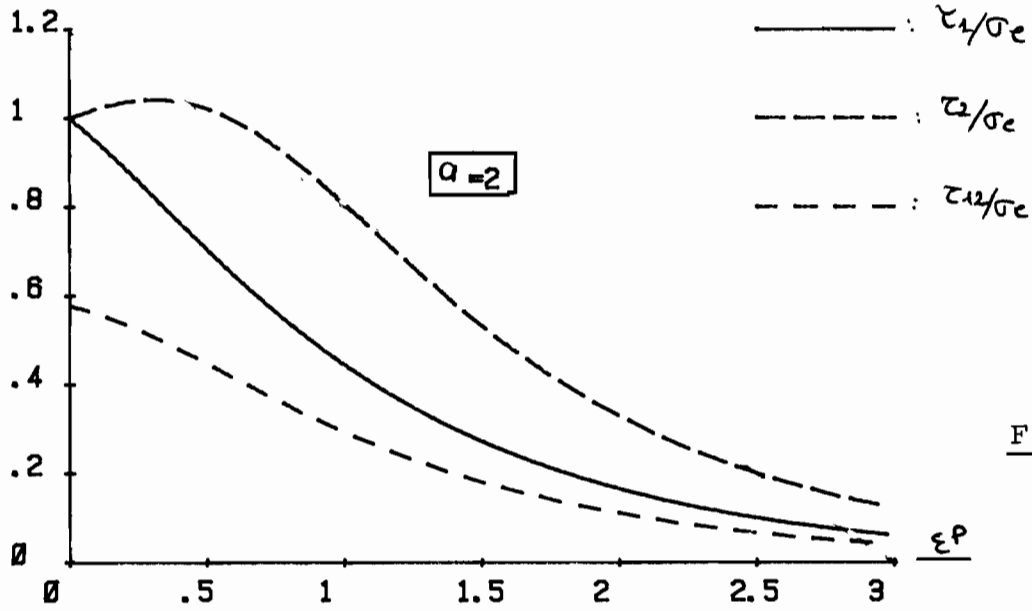


Fig. II.10.a.

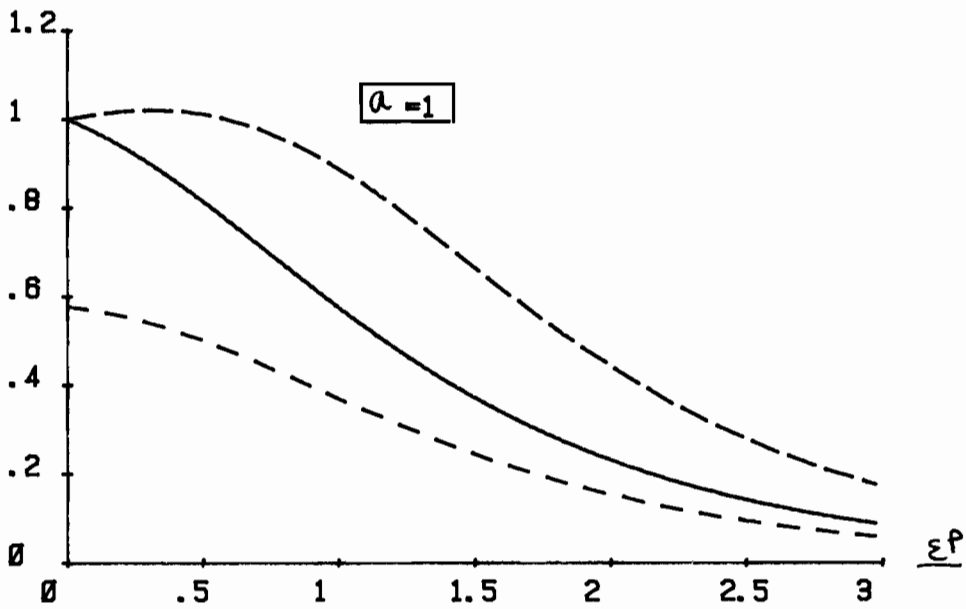


Fig. II.10.b.

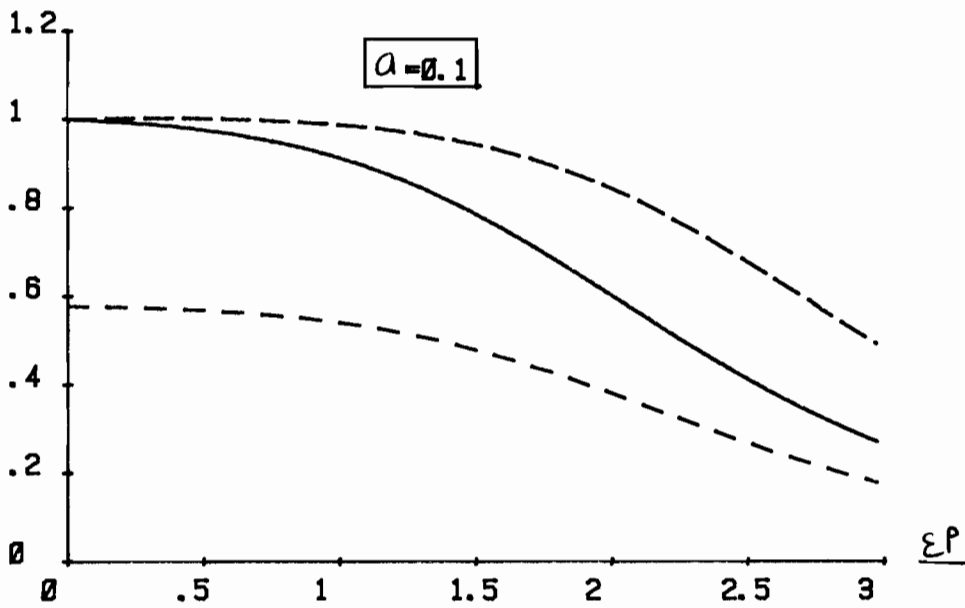
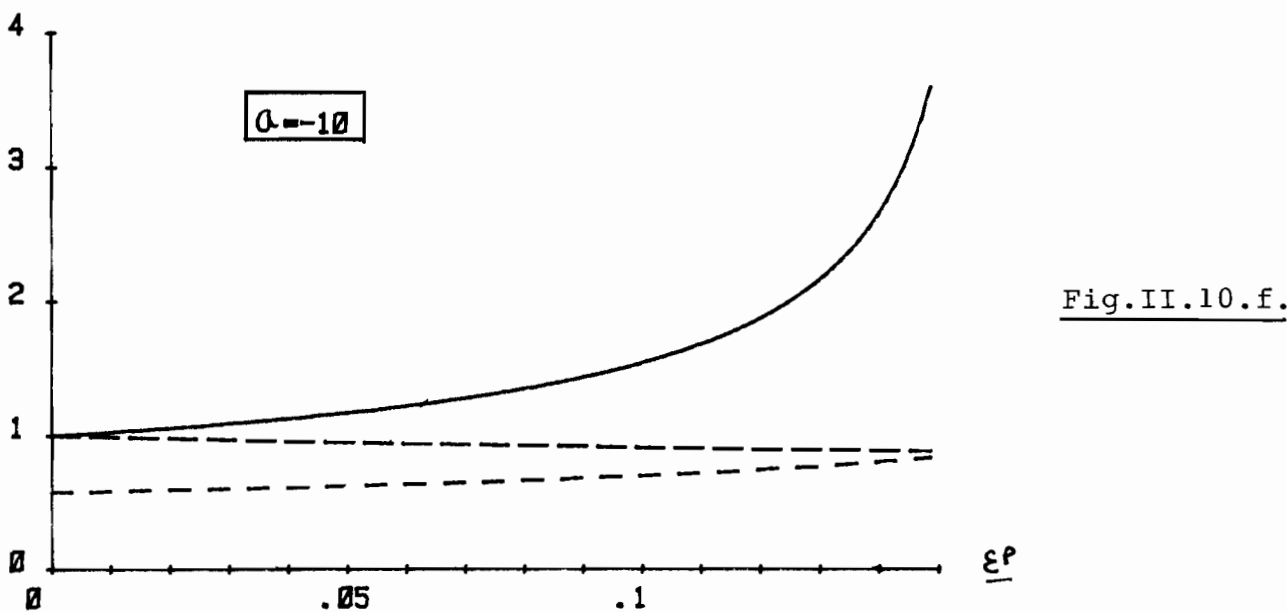
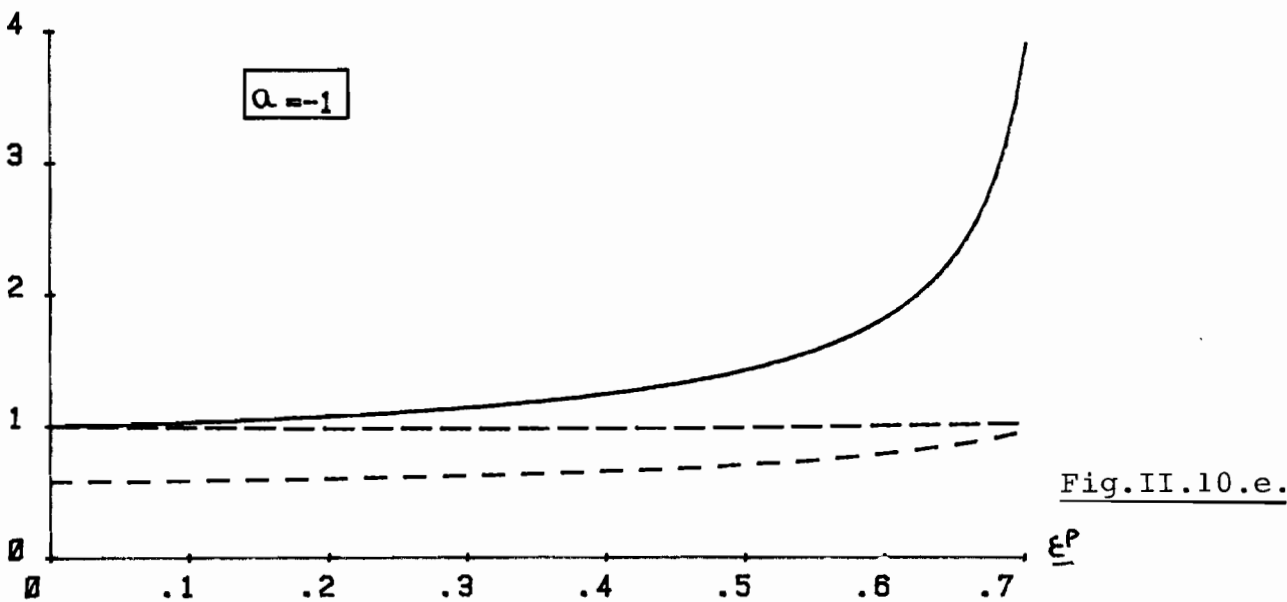
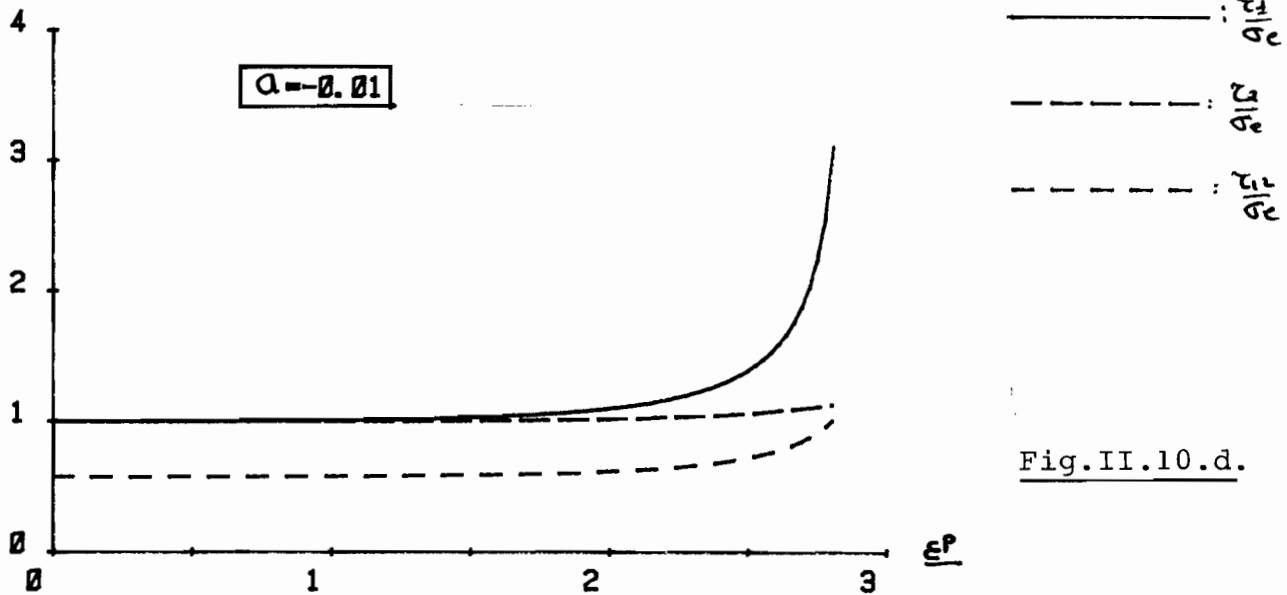


Fig. II.10.c.



II.2.3. Anisotropie élastique induite

2.3.1. Energie libre

On ne garde de (22) que le terme quadrique en  $\mathbf{e}^e$ . Nous allons développer la théorie l.a., sachant que dans le cas des petites déformations élastiques, la différence entre la théorie l.a. et l.b. est de l'ordre deux par rapport à  $\mathbf{e}^e$ . Dans le cas général,  $\Psi$  s'écrit sous la forme :

$$\Psi = f_1(\mathbf{e}^p) h(\mathbf{e}^e) + f_2(\mathbf{e}^p) h(\mathbf{e}^e)^2 + f_3(\mathbf{e}^p) h(\mathbf{e}^e \mathbf{e}^p) + f_4(\mathbf{e}^p) h(\mathbf{e}^e \mathbf{e}^e \mathbf{e}^p) + f_5(\mathbf{e}^p) h(\mathbf{e}^p) h(\mathbf{e}^e \mathbf{e}^e) + f_6(\mathbf{e}^p) h(\mathbf{e}^e) h(\mathbf{e}^e \mathbf{e}^p) + f_7(\mathbf{e}^p) h^2(\mathbf{e}^e \mathbf{e}^p) + f_8(\mathbf{e}^p) h(\mathbf{e}^e \mathbf{e}^p) h(\mathbf{e}^e \mathbf{e}^e \mathbf{e}^p) + f_9 h^2(\mathbf{e}^e \mathbf{e}^e \mathbf{e}^p)$$

Cette forme de  $\Psi$  reste trop générale. En vue d'arriver à une loi simple d'anisotropie induite, nous allons nous limiter aux termes du second ordre en  $\mathbf{e}^p = \frac{1}{2} (\mathbf{H}^p - \mathbb{1})$  : les termes les plus significatifs si les déformations plastiques sont petites (Les termes du premier ordre disparaissent à cause de la condition  $\frac{\partial \Psi}{\partial \mathbf{H}^p} = 0$  pour  $\mathbf{H}^p = \mathbb{1}$ )

Tenant compte de l'incompressibilité plastique, nous avons :

$$\det(\mathbf{H}^p) = \det(\mathbb{1} + 2\mathbf{e}^p) = 1 + 2h(\mathbf{e}^p) + 0(\mathbf{e}^p)^2 = \mathbb{1}$$

et on voit que les termes en  $h(\mathbf{e}^p)$  sont de l'ordre de  $\mathbf{e}^p^2$ ,  $\Psi$  s'écrit donc :

$$(63) \quad \beta \Psi = \frac{E}{2(1+\nu)} \left\{ [1 + a_1 h(\mathbf{e}^p)] h(\mathbf{e}^e) + \left[ \frac{\nu}{1+\nu} + a_2 h(\mathbf{e}^p) \right] h^2(\mathbf{e}^e) + b_1 (h(\mathbf{e}^e \mathbf{e}^p))^2 + b_2 h(\mathbf{e}^p \mathbf{e}^e \mathbf{e}^p) + 2b_3 (h(\mathbf{e}^e \mathbf{e}^p) h(\mathbf{e}^e)) \right\}$$

2.3.2. Lois de comportement

Avec l'hypothèse petites déformations élastiques, nous avons :

$$\boldsymbol{\alpha} = \boldsymbol{\alpha}^e \approx \boldsymbol{\alpha}^p \approx \beta \frac{\partial \Psi}{\partial \mathbf{e}^e}$$

ce qui permet d'écrire la loi élastique  $\boldsymbol{\alpha}(\mathbf{e}^e)$  :

$$(64) \quad \boldsymbol{\alpha} = \frac{E}{1+\nu} \left\{ \mathbf{e}^e + \frac{\nu}{1+\nu} h(\mathbf{e}^e) \mathbb{1} + [a_2 h(\mathbf{e}^p) h(\mathbf{e}^e) + b_3 h(\mathbf{e}^e \mathbf{e}^p)] \mathbb{1} + a_1 h(\mathbf{e}^p) \mathbf{e}^e + b_2 [\mathbf{e}^e \mathbf{e}^p]^s + b_1 h(\mathbf{e}^e \mathbf{e}^p) \mathbf{e}^p + b_3 h(\mathbf{e}^e) \mathbf{e}^p \right\}$$

Pour écrire la loi d'évolution des déformations plastiques, on peut, par exemple, utiliser le critère de Von Mises :

$$(65) \quad |\boldsymbol{\alpha}| - k \leq 0 \quad |\boldsymbol{\alpha}| = (\boldsymbol{\alpha}^0 : \boldsymbol{\alpha}^0)^{1/2}$$

et donc :

$$(66) \quad \overline{\mathbf{D}}^p = \lambda \frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\alpha}} = \lambda \frac{\boldsymbol{\alpha}^0}{|\boldsymbol{\alpha}|}$$

La loi (64) introduit cinq paramètres à identifier (à part  $E$  et  $\nu$ ) ce qui est beaucoup. On constate que ces paramètres introduisent deux effets :

- Les termes  $a_1$  et  $a_2$ , correspondent à une modification isotrope des coefficients élastiques.

- Les termes  $b_1$ ,  $b_2$  et  $b_3$  correspondent à une anisotropie de la loi. Pour pouvoir étudier ces deux effets avec un exemple simple, nous ne garderons qu'un terme de chaque type :  $a_1$  pour le premier type puisqu'il influe sur le déviateur des déformations alors que  $a_2$  n'influe que sur la partie sphérique;  $b_1$  pour le second type à cause de sa simplicité par rapport aux autres termes et donc nous prenons la loi :

$$(67) \quad \alpha = \frac{E}{1+\nu} \left\{ \frac{\nu}{1-2\nu} h(\epsilon^p) \mathbb{1} + \epsilon^e + a_1 h(\epsilon^p) \epsilon^e + b_1 h(\epsilon^e \epsilon^e) \epsilon^p \right\}$$

### 2.3.3. Anisotropie élastique

En écrivant la relation (67) sous forme matricielle, on a :

$$\begin{pmatrix} \tau_{11} \\ \tau_{22} \\ \tau_{33} \\ \tau_{23} \\ \tau_{31} \\ \tau_{12} \end{pmatrix} = \frac{E}{1+\nu} \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} & 0 & 0 & 0 \\ A_{22} & A_{22} & A_{23} & 0 & 0 & 0 \\ A_{33} & A_{32} & A_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & A_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & A_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & A_{66} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \epsilon^e_{11} \\ \epsilon^e_{22} \\ \epsilon^e_{33} \\ \epsilon^e_{23} \\ \epsilon^e_{31} \\ \epsilon^e_{12} \end{pmatrix}$$

$$A_{11} = \frac{(1-\nu)}{(1-2\nu)} + a_1 h(\epsilon^p) + b_1 \epsilon^p_1{}^2$$

$$A_{22} = \frac{(1-\nu)}{(1-2\nu)} + a_1 h(\epsilon^p) + b_1 \epsilon^p_2{}^2$$

$$A_{44} = A_{55} = A_{66} = 1 + a_1 h(\epsilon^p)$$

$$A_{33} = \frac{(1-\nu)}{(1-2\nu)} + a_1 h(\epsilon^p) + b_1 \epsilon^p_3{}^2$$

où  $\tau_{ij}$  sont les composantes de  $\alpha$  dans le repère principal de  $\epsilon^p$  et  $\epsilon^p_i$  les valeurs propres de  $\epsilon^p$ .

Dans le cas général, la loi est orthotrope avec la particularité  $A_{44} = A_{55} = A_{66}$  ce qui est accidentel et dû à notre choix du terme  $a_1$ .

Pour une déformation plastique de traction ( $e_{22}^p = e_{33}^p$ ), la loi présente une isotropie transverse.

Pour visualiser l'influence des déformations plastiques, nous allons étudier séparément les termes modifiant les propriétés élastiques d'une manière isotrope et ceux d'une manière anisotrope et ceci au cours d'une déformation plastique de traction.

a. Modification anisotrope des propriétés élastiques ( $a_1 = 0$ )

La loi élastique est :

$$(68) \quad \alpha = \frac{\epsilon}{1+\nu} \left\{ \frac{\nu}{1-2\nu} h(\epsilon^p) \mathbb{1} + \epsilon^e + b_1 h(\epsilon^e \epsilon^p) \epsilon^p \right\}$$

qui peut s'inverser :

$$(69) \quad \epsilon^e = \frac{1+\nu}{E} \alpha - \frac{\nu}{E} h(\alpha) \mathbb{1} + \frac{b_1}{h} \left[ \frac{1+\nu}{E} h(\alpha \epsilon^p) - \frac{\nu}{E} h(\alpha) h(\epsilon^p) \right] \left[ \frac{\nu}{1+\nu} h(\epsilon^p) \mathbb{1} - \epsilon^p \right]$$

$$(70) \quad h = 1 + b_1 \left( h(\epsilon^p)^2 - \frac{\nu}{1+\nu} h^2(\epsilon^p) \right)$$

En notant :  $E_1, \nu_{21}$  Mod. d'Young et **coéf.** de Poisson dans la direction 1 (direction longitudinale)

$E_2, \nu_{12}, \nu_{32}$  Mod. d'Young et **coéf.** de Poisson dans la direction 2 ou 3 (direction transversale)

on a :

$$\begin{pmatrix} \epsilon_{11}^e \\ \epsilon_{22}^e \\ \epsilon_{33}^e \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{E_1} & -\frac{\nu_{21}}{E_2} & -\frac{\nu_{21}}{E_2} \\ -\frac{\nu_{12}}{E_1} & \frac{1}{E_2} & -\frac{\nu_{32}}{E_2} \\ -\frac{\nu_{12}}{E_1} & -\frac{\nu_{32}}{E_2} & \frac{1}{E_3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tau_{11} \\ \tau_{22} \\ \tau_{33} \end{pmatrix} \quad \frac{\nu_{21}}{E_2} = \frac{\nu_{12}}{E_1}$$

$$\epsilon_{12}^e = \frac{1+\nu}{E} \tau_{12} \quad \epsilon_{13}^e = \frac{1+\nu}{E} \tau_{13} \quad \epsilon_{23}^e = \frac{1+\nu}{E} \tau_{23}$$

$$(71) \quad \frac{1}{E_1} = \frac{1}{E} \left\{ 1 - \frac{b_1}{h} (1+\nu) \left[ \epsilon_1^p - \frac{\nu}{1+\nu} h(\epsilon^p) \right]^2 \right\} = \frac{1}{E} \left\{ \frac{1+2b_1(1-2\nu)\epsilon_1^p{}^2}{h} \right\}$$



$$(72) \quad \frac{1}{E_2} = \frac{1}{E_1} \left\{ 1 - \frac{b_1}{h} (1+\nu) \left[ e_2^p - \frac{\nu}{1+\nu} h(\epsilon^p) \right]^2 \right\} = \frac{1}{E_h} \left\{ 1 + b_1 [(1-\nu)(e_1^p + e_2^p) - 2\nu e_1^p e_2^p] \right\}$$

$$(73) \quad \frac{\nu_{21}}{E_2} = \frac{\nu_{12}}{E_1} = \frac{\nu}{E} \left\{ 1 - \frac{b_1}{h} \left[ h(\epsilon^p)(e_1^p + e_2^p) - \frac{\nu}{1+\nu} h^2(\epsilon^p) - \frac{1+\nu}{\nu} e_1^p e_2^p \right] \right\} = \frac{\nu}{E_h} \left\{ 1 + b_1 \left( \frac{1-2\nu}{\nu} \right) e_1^p e_2^p \right\}$$

$$(74) \quad \frac{\nu_{22}}{E_2} = \frac{\nu}{E} \left\{ 1 - \frac{b_1}{h} \left[ 2h(\epsilon^p) e_2^p - \frac{\nu}{1+\nu} h^2(\epsilon^p) - \frac{1+\nu}{\nu} e_2^p \right] \right\} = \frac{\nu}{E_h} \left\{ 1 + b_1 \left[ e_1^p + e_2^p \left( \frac{1-\nu}{\nu} \right) - 2 e_1^p e_2^p \right] \right\}$$

$$(75) \quad \nu_{21} = \nu \left\{ \frac{1 + b_1 \left( \frac{1-2\nu}{\nu} \right) e_1^p e_2^p}{1 + b_1 [(1-\nu)(e_1^p + e_2^p) - 2\nu e_1^p e_2^p]} \right\} \quad \nu_{12} = \nu \left\{ \frac{1 + b_1 \left( \frac{1-2\nu}{\nu} \right) e_1^p e_2^p}{1 + 2b_1 (1-2\nu) e_2^p} \right\} \quad \nu_{32} = \nu \left\{ \frac{1 + b_1 \left[ \frac{e_1^p + e_2^p (1-\nu)}{\nu} - 2 e_1^p e_2^p \right]}{1 + b_1 [(1-\nu)(e_1^p + e_2^p) - 2\nu e_1^p e_2^p]} \right\}$$

- Les courbes des figures II.11 et II.12 représentent l'évolution de  $E_1$ ,  $E_2$ ,  $\nu_{21}$ ,  $\nu_{12}$  et  $\nu_{32}$  en fonction de  $\epsilon^p$ : déformation plastique logarithmique (au cours d'un essai de traction ou de compression) pour différentes valeurs de  $b_1$ .

$$e_1^p = \frac{1}{2} (e^{2\epsilon^p} - 1) \quad e_2^p = \frac{1}{2} (e^{-2\epsilon^p} - 1)$$

Pour que les résultats obtenus par ce modèle soient physiquement acceptables, il faut que les différents coefficients élastiques restent positifs, ce qui limite le domaine d'utilisation de ce modèle.

- si  $b_1 > 0$ : Fig.(II.11.a - II.11.b - II.12.a. et II.12.b)
  - $\nu_{12}$  et  $\nu_{21}$  s'annulent en même temps pour une valeur de  $\epsilon^p = \epsilon_L^p$  dépendante de  $b_1$ .  $\epsilon_L^p$  est d'autant plus grande que  $b_1$  est petit.
  - $E_1$  et  $E_2$  sont croissants avec  $|\epsilon^p|$
- si  $b_1 < 0$ : Fig.(II.13.a- II.13.b - II.14.a et II.14.b)
  - $\nu_{32}$  s'annule pour une valeur de  $|\epsilon^p|$  d'autant plus grande que  $b_1$  est petit en valeur absolue.
  - $E_1$  et  $E_2$  sont décroissants avec  $|\epsilon^p|$ . Ils s'annulent pour une valeur de  $|\epsilon^p|$  supérieure à celle annulant  $\nu_{32}$ .

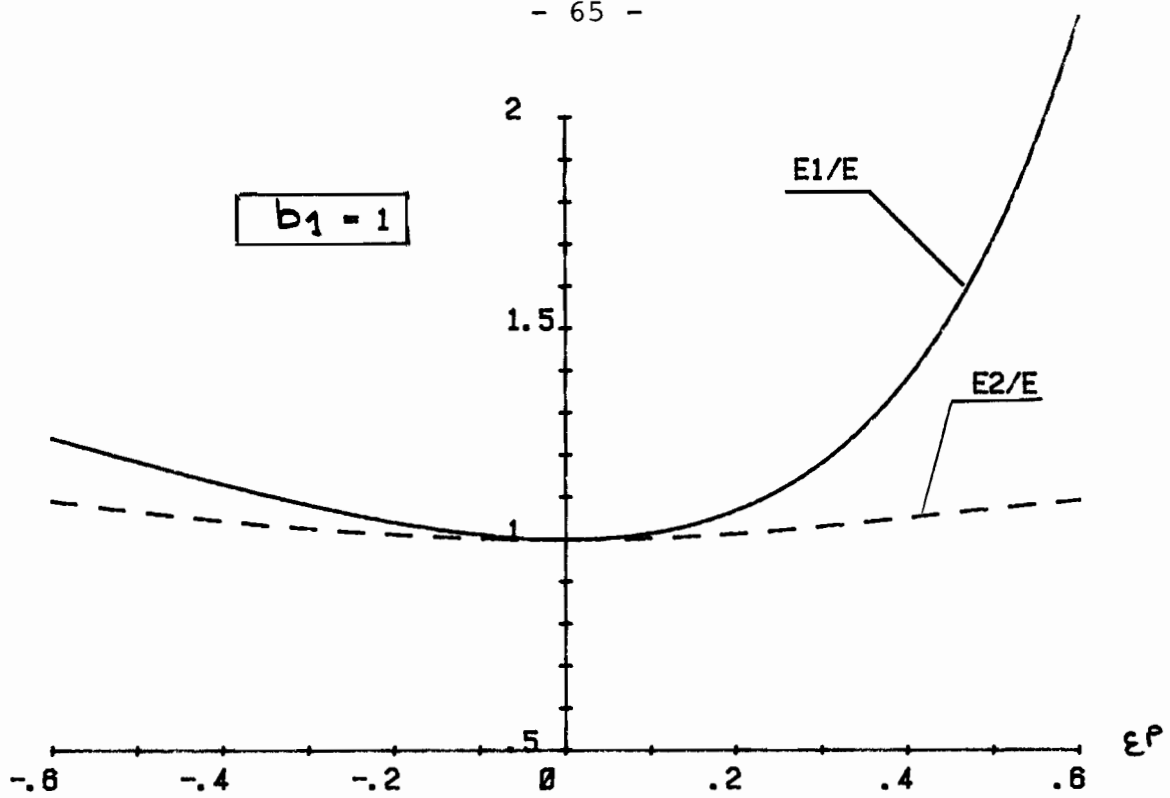


Fig.II.11.a.

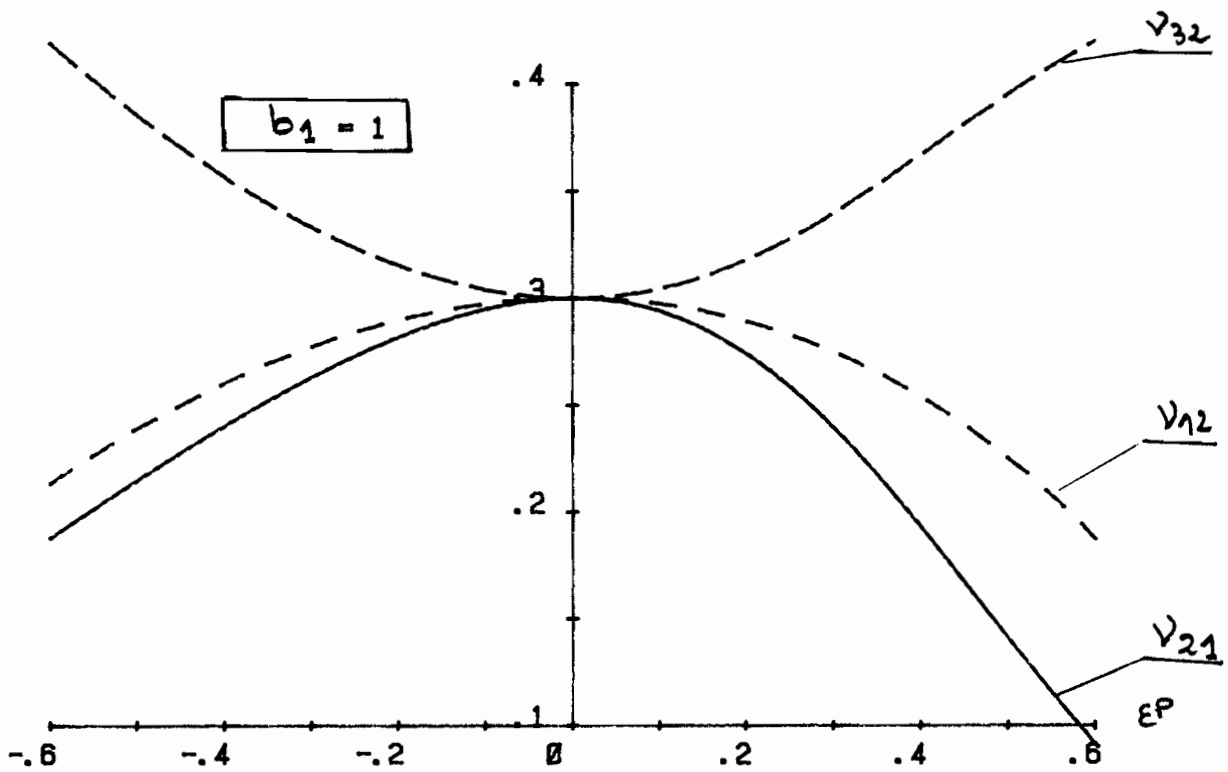


Fig.II.11.b.

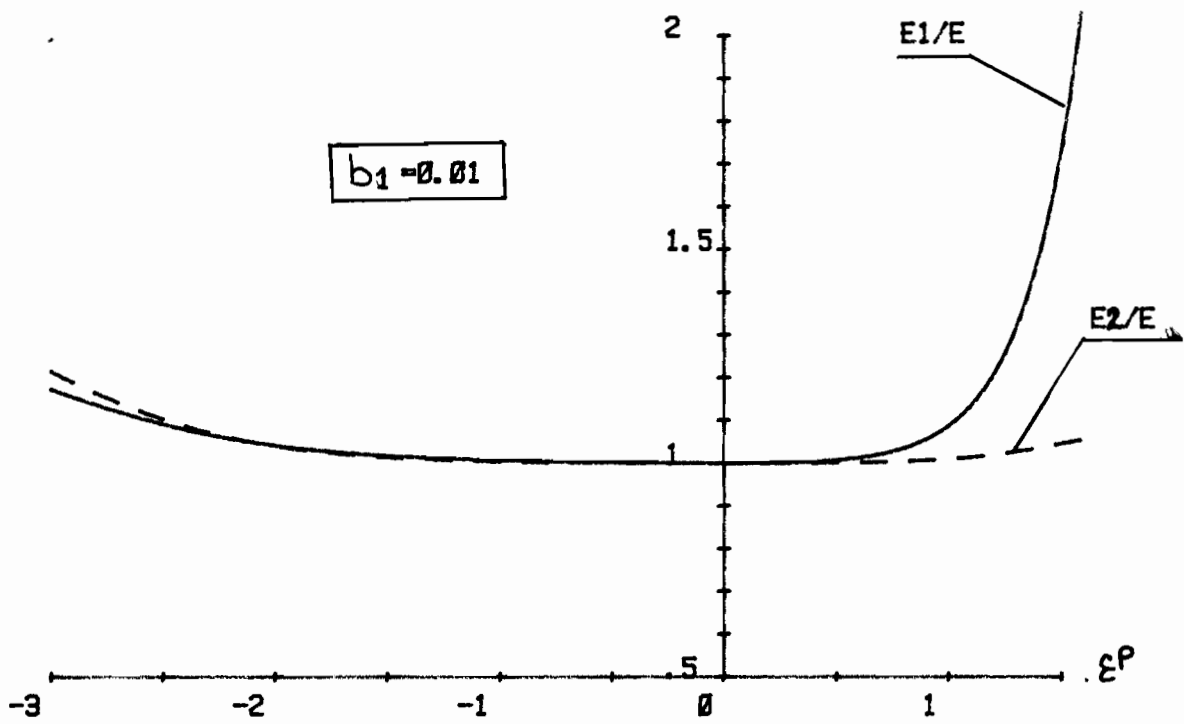


Fig.II.12.a.

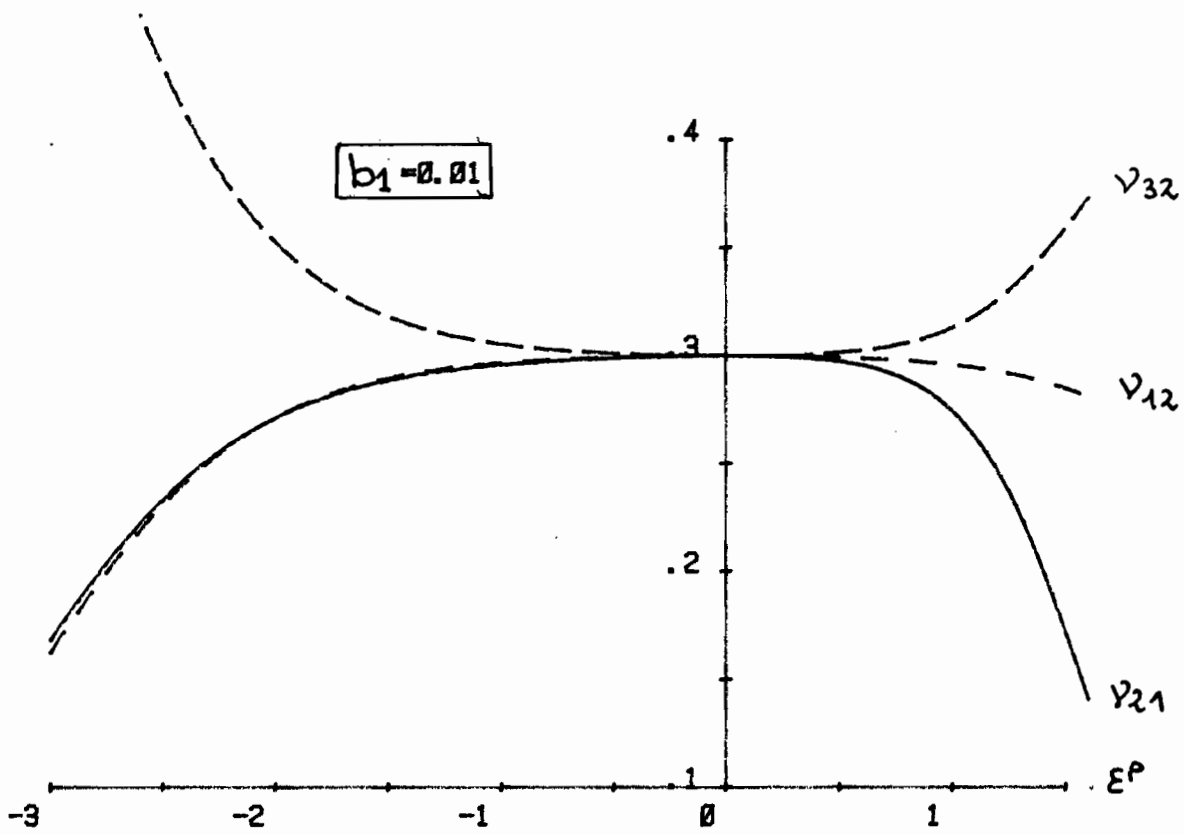


Fig. II.12.b.

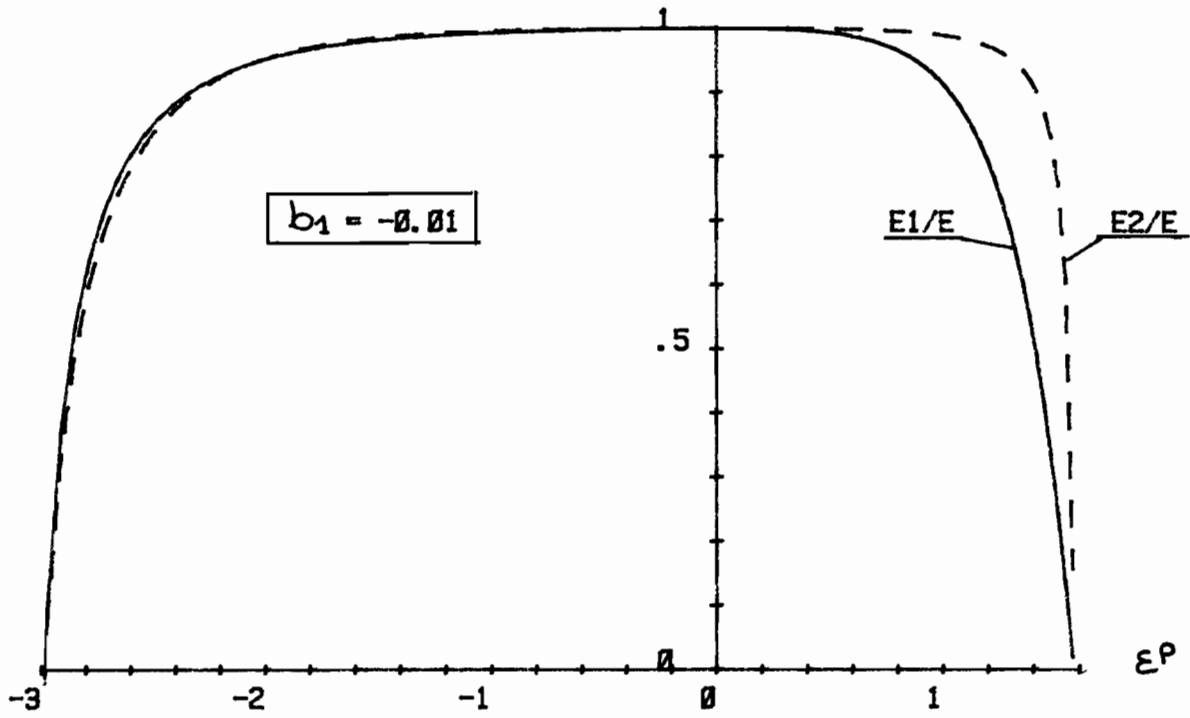


Fig.II.13.a.

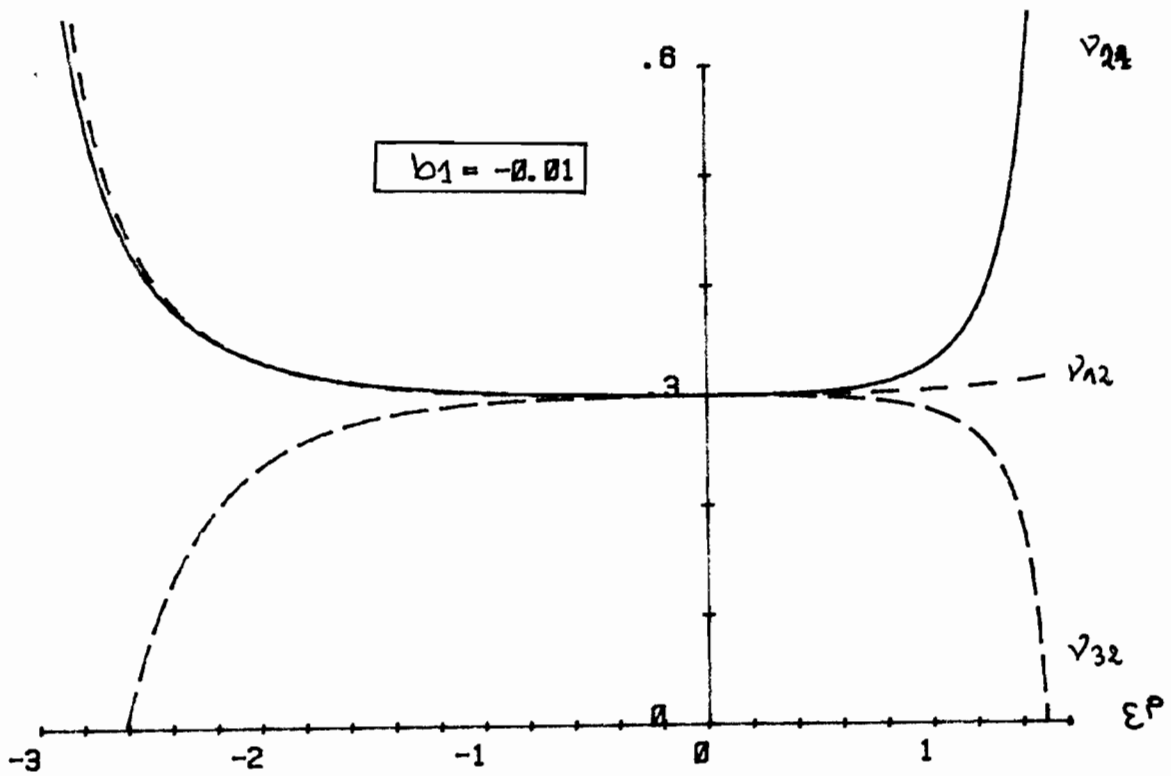


Fig.II.13.b.

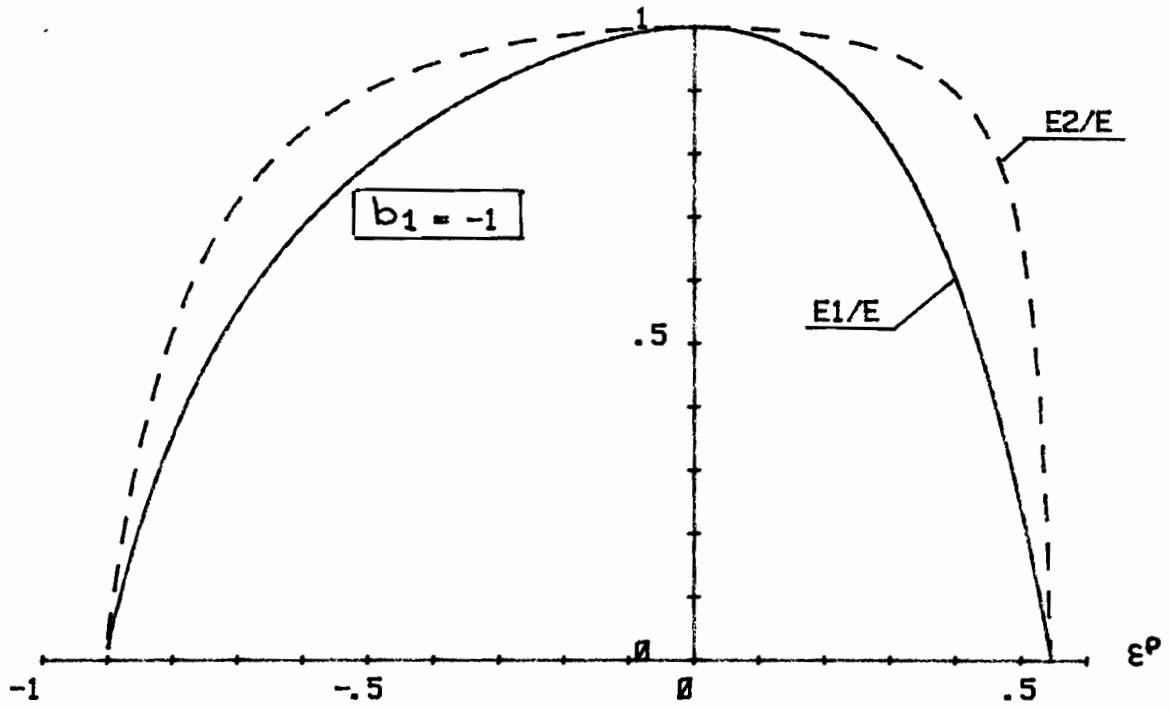


Fig.II.14.a.

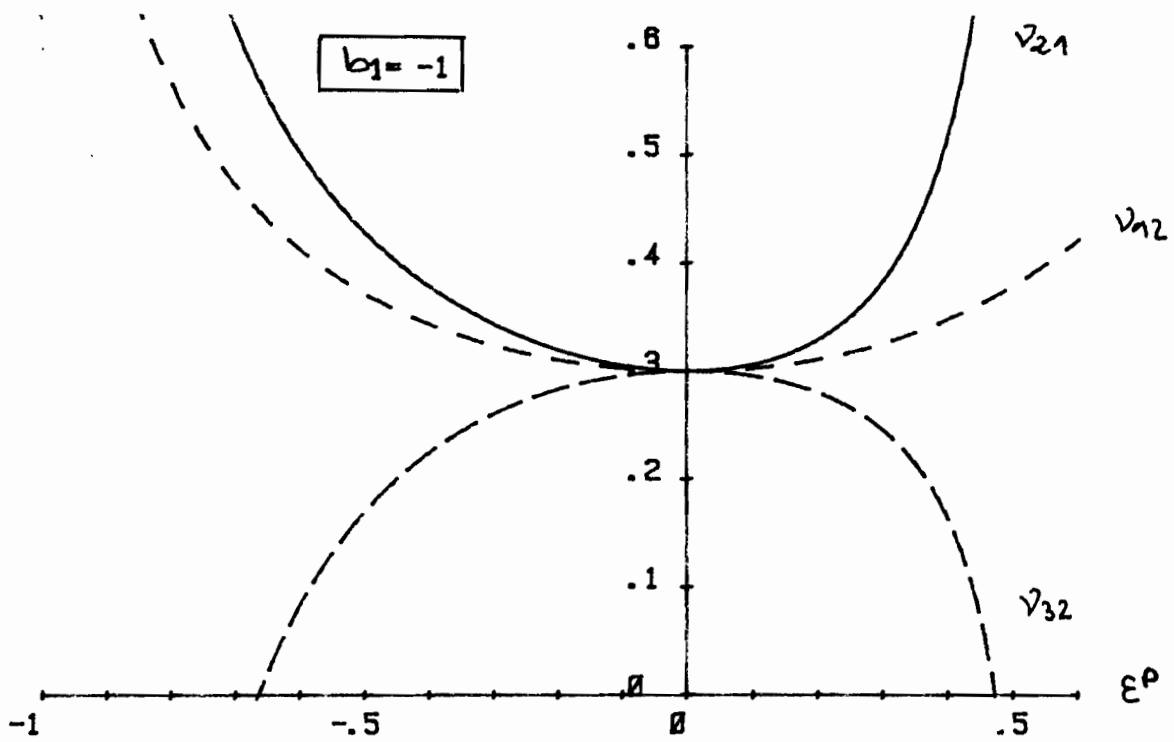


Fig.II.14.b.

b. Modification isotrope des propriétés élastiques ( $b_1 = 0$ )

La loi devient :

$$(76) \quad \alpha = \frac{E}{1+\nu} \left\{ \frac{\nu}{1-\nu} h(\epsilon^p) \mathbb{1} + (1 + a_1 h(\epsilon^p)) \epsilon^e \right\}$$

qui s'écrit aussi :

$$(77) \quad \alpha = \frac{E'}{1+\nu'} \left\{ \frac{\nu'}{1-\nu'} h(\epsilon^p) \mathbb{1} + \epsilon^e \right\}$$

où

$$(78) \quad \frac{E'}{E} = \frac{1+\nu + a_1 h(\epsilon^p) (1-\nu) - 2\nu a_1^2 h^2(\epsilon^p)}{(1+\nu) (1 - 2\nu a_1 h(\epsilon^p))}$$

$$(79) \quad \nu' = \frac{\nu}{1 - 2\nu a_1 h(\epsilon^p)}$$

Les courbes des figures II.15 et II.16 représentent l'évolution de  $E'/E$  et  $\nu'/\nu$  au cours d'un essai de traction en fonction de la déformation plastique logarithmique  $\epsilon^p$ , pour différentes valeurs de  $a_1$

Le matériau étant isotrope,  $\nu'$  ne doit pas dépasser 0,5 ni  $E'$  s'annuler, ce qui limite le domaine d'utilisation de ce modèle.

- si  $a_1 > 0$  : Fig. (II.15.a.) et (II.15.b.)

$E'$  et  $\nu'$  sont croissants en fonction de la déformation plastique et tendent vers l'infini pour  $h(\epsilon^p) = \frac{1}{2\nu a_1}$

plus  $a_1$  est petit, plus la croissance est lente.

- si  $a_1 < 0$  : Fig. (II.16.a.) et (II.16.b.)

$E'$  et  $\nu'$  sont décroissants,  $E'$  s'annule pour une valeur de  $\epsilon^p$  d'autant plus grande que  $a_1$  est petit en valeur absolue.

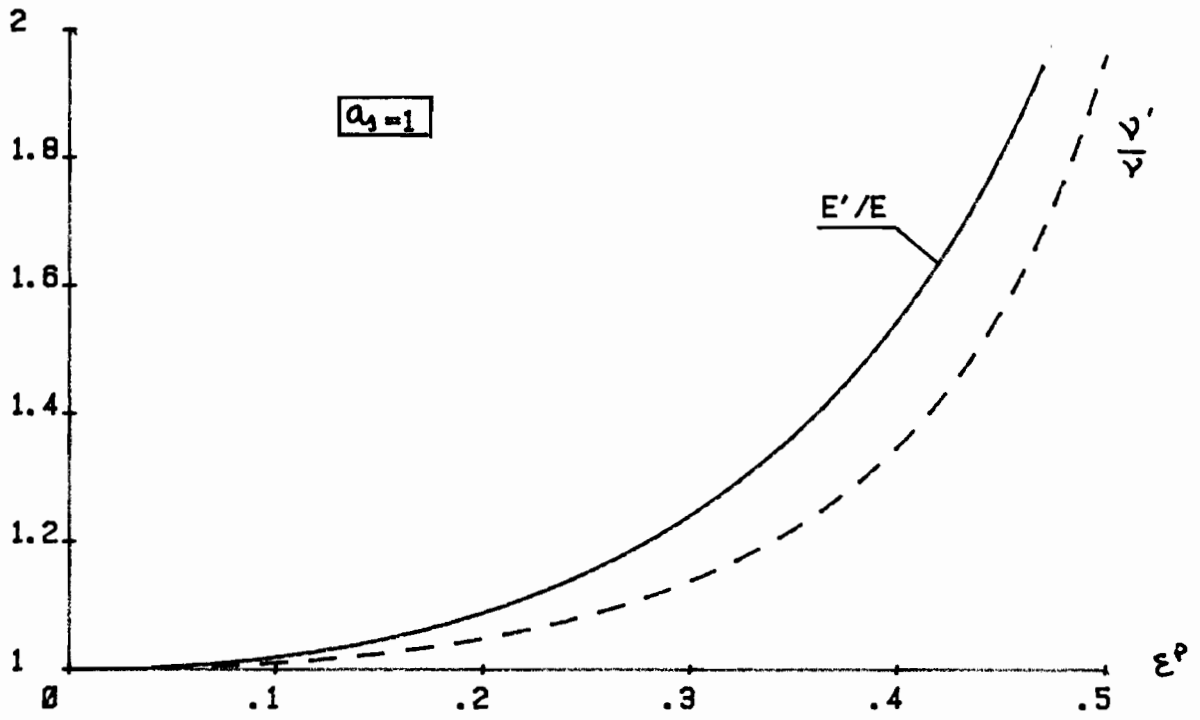


Fig. II.15.a.

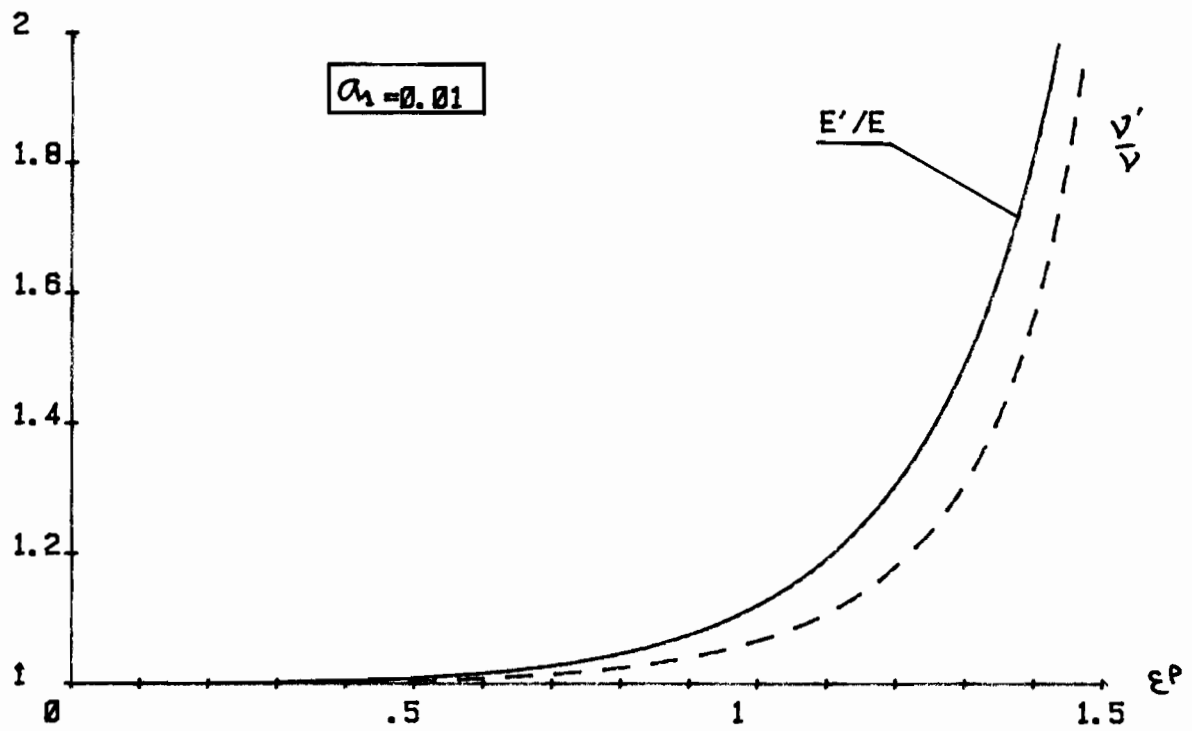


Fig. II.15.b

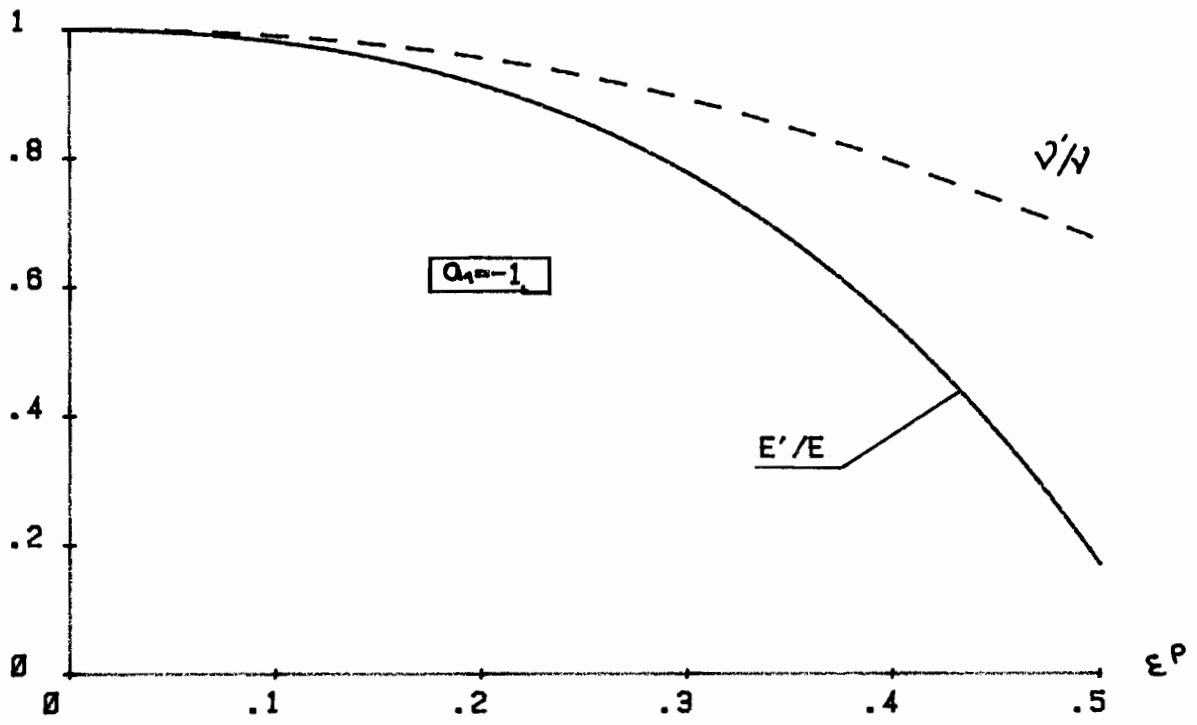


Fig.II.16.a.

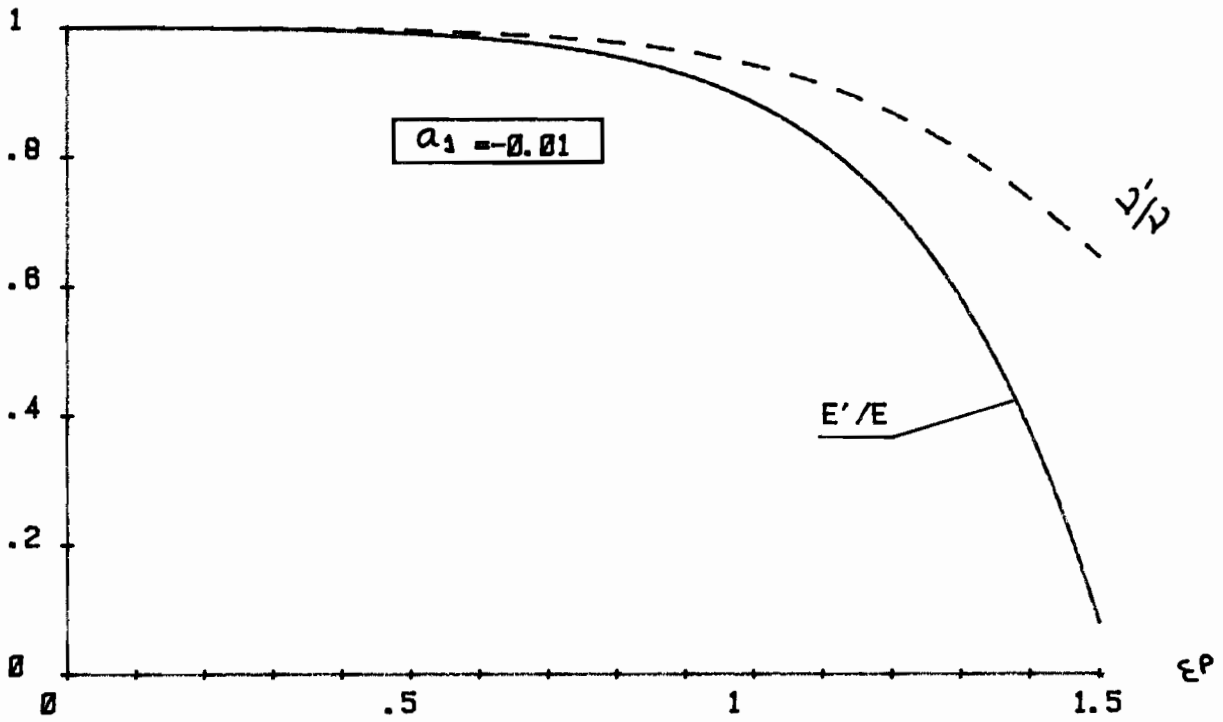


Fig.II.16.b.



II.3. THEORIE 2 EN GRANDES DEFORMATIONS

II.3.1. Présentation de la théorie

La variable interne tensorielle d'écroûissage est maintenant supposée différente du tenseur de déformations plastiques ( $H^p$  ou  $C^p$ ). Nous écrivons à la place de (7) ou (9)

$$(80) \quad \Psi = \Psi(B^e, \alpha)$$

$$\text{donc : } \dot{\Psi} = \frac{\partial \Psi}{\partial B^e} : \dot{B}^e + \frac{\partial \Psi}{\partial \alpha} : \dot{\alpha}$$

Pour avoir une écriture objective, il faut utiliser une dérivée objective de  $\alpha$ . A cause de l'isotropie de  $\Psi$  par rapport à  $B^e$  et  $\alpha$ , quel que soit  $A$  tenseur antisymétrique :

$$(81) \quad \frac{\partial \Psi}{\partial B^e} : (B^e A - A B^e) + \frac{\partial \Psi}{\partial \alpha} : (\alpha A - A \alpha) = 0$$

Nous montrerons au chapitre III pour l'écroûissage cinématique, que le choix de la dérivée objective a une grande influence sur le modèle obtenu dans le cas des sollicitations autres que triaxiales. Nous allons dans ce cas utiliser la dérivée de Jauman, la plus classiquement utilisée soit :

$$(82) \quad \dot{\Psi} = \frac{\partial \Psi}{\partial B^e} : B^e \overset{\circ}{D} + \frac{\partial \Psi}{\partial \alpha} : \alpha \overset{\circ}{D} \quad B^e \overset{\circ}{D} = B^e D + D B^e - 2V^e \overset{\circ}{D}^p V^e$$

et donc la dissipation s'écrit :

$$(83) \quad (\alpha - B^e \frac{\partial \Psi}{\partial B^e} - \frac{\partial \Psi}{\partial B^e} B^e) : D + (2\rho_0 V^e \frac{\partial \Psi}{\partial B^e} V^e) : \overset{\circ}{D}^p - \rho_0 \frac{\partial \Psi}{\partial \alpha} : \alpha \overset{\circ}{D} \geq 0$$

Nous prenons donc :

$$(84) \quad \begin{aligned} \text{a. } \alpha &= 2 \left( B^e \frac{\partial \Psi}{\partial B^e} \right)^s \\ \text{b. } \alpha^e &= 2\rho_0 V^e \frac{\partial \Psi}{\partial B^e} V^e & \text{t} &= \rho_0 \frac{\partial \Psi}{\partial \alpha} \end{aligned}$$

Nous choisirons un critère sous la forme :

$$(85) \quad f(\alpha^e, \text{t}; \alpha)$$

est fonction des forces thermodynamiques  $\alpha^e$  et  $\text{t}$  et éventuellement de la variable interne d'état  $\alpha$ .

A partir de l'hypothèse du matériau standard généralisé, les lois d'évolution sont les suivantes :

$$(86) \quad \overline{D}^p = \lambda \frac{\partial f}{\partial \alpha} e \quad \alpha^J = \lambda \frac{\partial f}{\partial \alpha}$$

### II.3.2. Petites déformations élastiques

En utilisant les mêmes raisonnements qu'en 2.1.3. ,  $\Psi$  s'écrit :

$$(87) \quad \Psi = \Psi^p(\alpha) + \frac{1}{2} e^e : A(\alpha) [e^e]$$

et les lois (84.a) et (84.b) deviennent :

$$(88) \quad \alpha = \alpha^e = \rho_0 \frac{\partial \Psi^e}{\partial e^e}$$

Si on ne veut tenir compte que d'un écrouissage cinématique, cas qui sera développé au chapitre III, on prend :

$$(89) \quad \Psi = \Psi^e(e^e) + \Psi^p(\alpha)$$

$$(90) \quad f = f(\alpha^p) \leq 0 \quad \alpha^p = \alpha - t$$

Pour tenir compte d'une anisotropie plastique induite, on peut raisonner de deux façons : la première consiste à dire que l'énergie libre ne dépend que des déformations élastiques et que le critère lui, dépend de  $\alpha$  : soit :

$$(91) \quad \Psi = \Psi^e(e^e) \quad f = f(\alpha, \alpha) \quad \overline{D}^p = \lambda \frac{\partial f}{\partial \alpha}$$

Dans ce cas ,  $\alpha$  n'est pas défini. Si on le définit en fonction de  $\kappa^p$  ou  $\omega^p$  , on revient à la même théorie l.A. On peut aussi le définir à partir d'une loi d'évolution quelconque.

La deuxième façon de raisonner est de considérer que l'énergie libre est la somme d'une énergie élastique et d'une énergie d'écrouissage, et prendre une fonction seuil qui dépend de  $t$  force thermodynamique associée à  $\alpha$  , soit :

$$(92) \quad \Psi = \Psi^e(e^e) + \Psi^p(\alpha) \quad f = f(\alpha, t) \quad \overline{D}^p = \lambda \frac{\partial f}{\partial \alpha} \quad \frac{D\alpha}{Dt} = \lambda \frac{\partial f}{\partial t}$$

où  $\frac{D\alpha}{Dt}$  est une dérivée objective telle que  $\frac{\partial \Psi^p}{\partial \alpha} : \frac{D\alpha}{Dt} = \frac{\partial f^p}{\partial \alpha} : \dot{\alpha}$

Dans les deux cas, la théorie 2 est plus générale que la théorie 1 puisque le choix de l'évolution de  $\alpha$  est plus vaste que dans la théorie 1.

Pour tenir compte d'une anisotropie élastique induite, on prend  $\Psi$  quadratique en  $\mathcal{E}^e$  mais dépendant de  $\alpha$  :

$$(93) \quad \Psi = \frac{1}{2} \mathcal{E}^e : A(\alpha) [ \mathcal{E}^e ] \quad f(\alpha, t) \leq 0 \quad \dot{\alpha}^p = \lambda \frac{\partial f}{\partial \alpha} \quad \dot{\alpha}^s = \lambda \frac{\partial f}{\partial t}$$

La modification de la surface seuil est négligeable puisque  $t$  est au second ordre par rapport aux déformations élastiques. Le choix de  $f(\alpha, t)$  influe sur l'évolution de  $\alpha$  au cours du temps. On peut prendre par exemple :

$$(94) \quad f(\alpha, t) = f(\alpha - t)$$

et donc  $\dot{\alpha}^s = \dot{\alpha}^p$

Ce n'est bien sûr pas le seul choix possible.

Compte tenu de l'arbitraire du choix des lois d'évolution de  $\alpha$ , nous n'allons pas développer les différents modèles que l'on peut obtenir; les démarches sont d'ailleurs équivalentes à celles de II.2.2. et II.2.3.

Dans le chapitre III, nous nous étendrons davantage sur ce sujet, dans le cas particulier de l'érouissage cinématique.

# CHAPITRE III

ECROUISSAGE CINEMATIQUE

CHAPITRE III : ECROUISSAGE CINEMATIQUE

Résumé :  
=====

Pour aboutir à l'écriture incrémentale unique du modèle d'écrouissage cinématique en petites déformations, on peut partir de deux écritures différentes de l'énergie libre en utilisant comme variables internes d'écrouissage soit les déformations élastiques, soit un tenseur  $\alpha$  variable associé à  $\mathbf{t}$  : déplacement du centre de la surface seuil dans l'espace des contraintes. On démontre que  $\alpha$  est, à une constante près, égale à  $\mathcal{E}^P$  : déformations plastiques.

Suivant que l'on étend aux grandes déformations l'une des deux écritures de l'énergie libre ou l'écriture incrémentale, on n'aboutit pas toujours au même modèle.

Nous allons étudier dans ce chapitre les différents modèles d'écrouissage cinématique en grandes déformations obtenues suivant que l'on étende les écritures :

$$\Psi = \Psi^e(\mathcal{E}^e) + \Psi^p(\mathcal{E}^p) \implies \text{théorie (1)}$$

$$\Psi = \Psi^e(\mathcal{E}^e) + \Psi^p(\alpha) \implies \text{théorie (2)}$$

$$\text{écriture incrémentale} \implies \text{théorie (3)}$$

On montrera que :


- toutes ces théories sont équivalentes dans le cas triaxial
- la théorie (3) est équivalente, dans le cas des petites déformations élastiques, à la théorie (2).
- la théorie (2) peut être généralisée et la théorie (1) deviendra un cas particulier de cette généralisation.

On étudiera :

- l'influence du choix de l'écriture  $\Psi^p(\varepsilon^p)$  ou  $\Psi^p(\alpha)$
- la différence qualitative entre la théorie (1) et la théorie (2) (La théorie (3) étant équivalente à (2) dans le cas des petites déformations élastiques, le seul que l'on développera numériquement).

Pour cela, on choisira deux écritures différentes de  $\Psi^p(\varepsilon^p)$  et  $\Psi^p(\alpha)$  et on étudiera la réponse à des essais de traction, torsion, traction torsion de ces différents modèles.

III - 1. PETITES DEFORMATIONS

En petites déformations, la loi incrémentale du modèle d'écoulement cinématique, extension au cas tridimensionnel du modèle de Prager  peut s'obtenir de deux façons différentes suivant le choix des variables internes d'écoulement dans l'écriture de l'énergie libre :

III - 1.1. 1ère écriture

Hypothèse 1 :

$$(1.a) \quad \Psi = \Psi^e(\mathcal{E}^e) + \Psi^p(\mathcal{E}^p)$$

donc 
$$(\sigma - \rho \frac{\partial \Psi^e}{\partial \mathcal{E}^e}) : \dot{\mathcal{E}}^e + (\sigma - \mathfrak{t}) : \dot{\mathcal{E}}^p \geq 0 \quad \mathfrak{t} = \rho \frac{\partial \Psi^p}{\partial \mathcal{E}^p}$$

soit 
$$\sigma = \rho \frac{\partial \Psi^e}{\partial \mathcal{E}^e}$$

Dans le cas général, en supposant  $\Psi^e$  et  $\Psi^p$  isotropes et les déformations plastiques incompressibles et en négligeant les termes du second ordre par rapport à  $\mathcal{E}^e$  et  $\mathcal{E}^p$ ,  $\sigma$  et  $\mathfrak{t}$  s'écrivent :

$$(1.b) \quad \left\{ \begin{array}{l} \sigma = \frac{E}{1+\nu} \left\{ \mathcal{E}^e + \frac{\nu}{1-2\nu} k(\mathcal{E}^e) \mathbb{1} \right\} \\ \mathfrak{t} = G_1 \mathcal{E}^p \end{array} \right.$$

Hypothèse 2 :

$$(2) \quad f(\sigma^p) \leq 0 \quad \sigma^p = \sigma - \mathfrak{t}$$

$\mathfrak{t}$  représente la translation du centre de la surface seuil dans l'espace des contraintes.

Hypothèse 3 : Matériau standard généralisé :

$$(3) \quad \dot{\mathcal{E}}^p = \lambda \frac{\partial f}{\partial \sigma^p}$$

III - 1.2. 2ème écriture

Hypothèse 1 :

(1.a bis)  $\Psi = \Psi^c(\mathbb{E}^e) + \Psi^p(\alpha)$

donc  $(\sigma - \rho \frac{\partial \Psi^c}{\partial \mathbb{E}^e}) : \dot{\mathbb{E}}^e + \sigma : \dot{\mathbb{E}}^p - k \dot{\alpha} \geq 0 \quad k = \rho \frac{\partial \Psi^p}{\partial \alpha}$

soit  $\sigma = \rho \frac{\partial \Psi^c}{\partial \mathbb{E}^e}$

Hypothèse 2 :

(2. bis)  $f(\sigma^p) \leq 0 \quad \sigma^p = \sigma \cdot k$

Hypothèse 3 : Matériau standard généralisé :

(3. bis)  $\left\{ \begin{array}{l} \dot{\mathbb{E}}^p = \lambda \frac{\partial f}{\partial \sigma^p} \\ \dot{\alpha} = -\lambda \frac{\partial f}{\partial k} = \lambda \frac{\partial f}{\partial \sigma^p} \end{array} \right\} \Rightarrow \dot{\alpha} = \dot{\mathbb{E}}^p$

et donc  $\alpha$  est, à une constante près, égale à  $\mathbb{E}^p$  et on se ramène à la première écriture.

III - 1.3. Ecriture incrémentale

A partir des hypothèses ci-dessus, on arrive facilement à la loi incrémentale :

(4)  $\left\{ \begin{array}{l} \dot{\mathbb{E}} = \frac{1+\nu}{E} \dot{\sigma} - \frac{\nu}{E} k(\dot{\sigma}) \mathbb{1} + \frac{1}{G_1} \left\langle \frac{\partial f}{\partial \sigma^p} : \dot{\sigma} \right\rangle \left[ \frac{\partial f}{\partial \sigma^p} : \frac{\partial f}{\partial \sigma^p} \right]^{-1} \frac{\partial f}{\partial \sigma^p} \\ \text{ou} \quad \dot{\sigma} = \frac{E}{1+\nu} \left\{ \dot{\mathbb{E}} + \frac{\nu}{1-\nu} k(\dot{\mathbb{E}}) \mathbb{1} - \left\langle \frac{\partial f}{\partial \sigma^p} : \dot{\mathbb{E}} \right\rangle \left[ \frac{\partial f}{\partial \sigma^p} : \frac{\partial f}{\partial \sigma^p} (1 + \frac{1+\nu}{E} G_1) \right]^{-1} \frac{\partial f}{\partial \sigma^p} \right\} \end{array} \right.$

Dans ce qui va suivre, nous allons étendre ces différentes écritures (écriture 1, écriture 2 et écriture incrémentale) du même modèle petites déformations, aux grandes déformations, et nous allons montrer que ces écritures ne mènent pas, en général à un même modèle grandes déformations.



III - 2. FORMULATION VARIABLES INTERNES

III - 2.1. Théorie 1

2.1.1. Energie libre, dissipation

Hypothèse 1 :

On a montré au chapitre II que, pour obtenir l'écroûissage cinématique (en visant surtout l'hypothèse des petites déformations élastiques), on écrit :

$$(5) \quad \Psi = \Psi^e(B^e) + \Psi^p(H^p)$$

On est dans le cas de double isotropie et donc la théorie 1.a. coïncide avec la théorie 1.b.

A partir de (5), la dissipation s'écrit :

$$(6.a) \quad (\alpha - \mu) : \overline{D}^p \leq 0$$

$$(6.b) \quad \alpha = 2\beta \frac{\partial \Psi^e}{\partial B^e} B^e = \beta \frac{\partial \Psi^e}{\partial \log(B^e)} \quad B^e = \frac{1}{2} \text{Log}(B^e)$$

$$(6.c) \quad \mu = 2\beta \frac{\partial \Psi^p}{\partial H^p} H^p = \beta \frac{\partial \Psi^p}{\partial \log(H^p)} \quad H^p = \frac{1}{2} \text{Log}(H^p)$$

Remarquons que dans ce cas,  $\mu$  n'est fonction que de  $H^p$  ses directions principales sont celles de  $H^p$  et ses valeurs propres sont uniquement fonctions de celles de  $H^p$  et donc des allongements plastiques principaux.

Hypothèse 2 : Critère de plasticité (fonction seuil)

$$(7) \quad f(\alpha^{pd}) \leq 0 \quad \alpha^{pd} = (\alpha - \mu)^D$$

Hypothèse 3 : Matériau standard généralisé :

D'après (6.a) on écrit :

$$(8) \quad \overline{D}^p = \lambda \frac{\partial f}{\partial \alpha^{pd}}$$

écriture qui généralise (3)

Pour écrire une loi de comportement basée sur la théorie 1. il reste à :

- 1 - Choisir l'écriture  $\Psi^e(B^e)$  et  $\Psi^p(H^p)$ , ou ce qui revient au même, choisir l'écriture des relations  $\alpha(B^e)$  et  $\beta(H^p)$ .
- 2 - Choisir la fonction seuil; dans les calculs qui vont suivre, nous utiliserons toujours, pour fixer les idées, le critère de von Mises :

$$(9) \quad |\alpha^{pp}| - \sqrt{\frac{2}{3}} \sigma_e \leq 0 \quad |\alpha^{pp}| = (\alpha^{pp} : \alpha^{pp})^{1/2}$$

### 2.1.2. Ecriture incrémentale

On veut arriver à une écriture sous la forme :

$$(10) \quad \frac{D\alpha}{Dt} = \mathcal{G}(\alpha, H^p) [D]$$

où  $\frac{D\alpha}{Dt}$  est une dérivée objective de  $\alpha$

En annexe II, nous définissons une nouvelle dérivée objective voisine de celle de Jauman  $\alpha^J$  mais relative au taux de rotation plastique, soit :

$$(11.a) \quad \tilde{\alpha} = \dot{\alpha} + \alpha \tilde{W} - \tilde{W} \alpha = R^e \left\{ \overbrace{(R^{eT} \dot{\alpha} R^e)}^{\bullet} + (R^{eT} \alpha R^e) W^p - W^p (R^{eT} \alpha R^e) \right\} R^{eT}$$

$$(11.b) \quad \tilde{W} = \dot{R}^e R^{eT} + R^e W^p R^{eT}$$

$$(11.c) \quad \tilde{W} = W - \frac{2}{V_I^e V_{II}^e - V_{III}^e} \left\{ V_I^e V_{II}^e (D + \bar{D}^p) V^{e-1} + B^e (D + \bar{D}^p) W^e \right\}^A$$

où  $V_I^e$ ,  $V_{II}^e$ ,  $V_{III}^e$  sont les invariants principaux de  $W^e$

$$V_I^e = \text{tr}(W^e) \quad V_{II}^e = \frac{1}{2} \left( \text{tr}^2(W^e) - \text{tr}(W^e{}^2) \right) \quad V_{III}^e = \det(W^e)$$

On démontre en annexe 3 que :

$$(12.a) \quad \begin{cases} B^{eJ} = D B^e + B^e D - 2 V^e \bar{D}^p V^e \\ \tilde{B}^e = 2 V^e D V^e - B^e \bar{D}^p - \bar{D}^p B^e \end{cases}$$

$$(12.b) \quad \begin{cases} H^{pJ} = 2 [H^p \bar{D}^p]^S + H^p A - A H^p \\ \tilde{H}^p = 2 [H^p \bar{D}^p]^S \end{cases} \quad A = W - \tilde{W}$$

Compte tenu des relations (12.b), on utilisera plutôt la dérivée  $\tilde{X}$  que celle de Jauman en remarquant qu'avec l'hypothèse des petites déformations élastiques,  $\tilde{X}$  et  $X^J$  sont égaux au premier ordre ( $W \simeq \tilde{W}$ ) et que dans le cas général :

$$(13) \quad X^J = \tilde{X} + \frac{4}{V_1^e V_2^e - V_3^e} \left\{ X \left[ V_1^e V_2^e (D + \bar{D}^p) V^{e-1} + B^e (D + \bar{D}^p) V^e \right]^A \right\}^S$$

D'après (6.b) :  $\tilde{\alpha} = \alpha(B^e)$  donc  $\tilde{\alpha} = \frac{\partial \alpha}{\partial B^e} [B^e]$  et donc

$$(14) \quad \tilde{\alpha} = \frac{\partial \alpha}{\partial B^e} [2 V^e D V^e - B^e \bar{D}^p - \bar{D}^p B^e]$$

$$(15) \quad \tilde{\alpha} = \frac{\partial \alpha}{\partial B^e} \left[ 2 V^e D V^e - \lambda \left( B^e \frac{\partial f}{\partial \alpha^p} + \frac{\partial f}{\partial \alpha^p} B^e \right) \right]$$

Il reste donc à calculer  $\lambda$  en fonction de  $D$ .

$$(16) \quad \dot{f} = 0 = \frac{\partial f}{\partial \alpha^p} : (\tilde{\mathbb{E}}^D - \mathbb{E}^D)$$

d'après (6.c) :  $\mathbb{E} = \mathbb{E}(H^p)$  donc  $\tilde{\mathbb{E}} = \frac{\partial \mathbb{E}}{\partial H^p} [H^p \bar{D}^p + \bar{D}^p H^p]$  et donc

$$(17) \quad \lambda = \frac{1}{h_1} \left( \frac{\partial f}{\partial \alpha^p} : \tilde{\alpha} \right)$$

$$(18) \quad h_1 = \frac{\partial f}{\partial \alpha^p} : \frac{\partial \mathbb{E}}{\partial H^p} \left[ H^p \frac{\partial f}{\partial \alpha^p} + \frac{\partial f}{\partial \alpha^p} H^p \right]$$

ou encore en fonction de  $D$ :

$$(19) \quad \lambda = \left( \frac{\partial f}{\partial \alpha^p} : \frac{\partial \alpha}{\partial B^e} [2 V^e D V^e] \right) \left\{ h_1 + \frac{\partial f}{\partial \alpha^p} : \frac{\partial \alpha}{\partial B^e} \left[ B^e \frac{\partial f}{\partial \alpha^p} + \frac{\partial f}{\partial \alpha^p} B^e \right] \right\}^{-1}$$

soit en reportant (19) dans (15), on arrive à la loi incrémentale dans le cas général :

$$(20) \quad \tilde{\alpha} = \tilde{\alpha}(\alpha, H^p)(D) = \frac{\partial \alpha}{\partial B^e} \left[ 2 V^e D V^e - \left\langle \frac{\partial f}{\partial \alpha^p} : \frac{\partial \alpha}{\partial B^e} [2 V^e D V^e] \right\rangle \left\{ h_1 + \frac{\partial f}{\partial \alpha^p} : \frac{\partial \alpha}{\partial B^e} \left[ B^e \frac{\partial f}{\partial \alpha^p} + \frac{\partial f}{\partial \alpha^p} B^e \right] \right\}^{-1} \right]$$

Remarquons, qu'en utilisant (13), on peut écrire aussi :

$$(21) \quad \alpha^J = \bar{\Sigma}(\alpha, H^P) [D]$$

### 2.1.3. Petites déformations élastiques

Soit  $\mathcal{E}^e$  le tenseur des petites déformations élastiques :

$$(22) \quad \mathcal{E}^e \approx \frac{1}{2} (B^e - 1) \approx W^e - 1 \approx W^e \quad B^e = \frac{1}{2} \text{Log} (B^e)$$

Quelle que soit la forme de  $\Psi^e(B^e)$ , on peut toujours se ramener, au premier ordre, à la relation :

$$(23) \quad \alpha = \frac{E}{1+\nu} \left\{ \mathcal{E}^e + \frac{\nu}{1-2\nu} k(\mathcal{E}^e) 1 \right\}$$

Il est facile de démontrer que si les déformations élastiques restent petites, on a :

$$(24) \quad D = \mathcal{E}^{eJ} + \bar{D}^P + \theta(\mathcal{E}^{e2})$$

$$(25) \quad W = \tilde{W} + \theta(\mathcal{E}^e)$$

et donc d'après (23), (24) et (25) et l'incompressibilité plastique :

$$(26) \quad \alpha^J \approx \tilde{\alpha} = \frac{E}{1+\nu} \left\{ D + \frac{\nu}{1-2\nu} k(D) 1 - \bar{D}^P \right\} + \theta(\mathcal{E}^e)$$

(19) devient donc :

$$(27) \quad \lambda = \left( \frac{\partial f}{\partial \alpha^P} : D \right) \left[ \frac{1+\nu}{E} h_1 + \frac{\partial f}{\partial \alpha^P} : \frac{\partial f}{\partial \alpha^P} \right]^{-1}$$

Soit donc l'écriture incrémentale :

$$(28) \quad \alpha^J = \frac{E}{1+\nu} \left\{ D + \frac{\nu}{1-2\nu} k(D) 1 - \left\langle \frac{\partial f}{\partial \alpha^P} : D \right\rangle \left[ \frac{\partial f}{\partial \alpha^P} : \frac{\partial f}{\partial \alpha^P} + \frac{1+\nu}{E} h_1 \right]^{-1} \frac{\partial f}{\partial \alpha^P} \right\}$$

$$D = \frac{1+\nu}{E} \alpha^J - \frac{\nu}{E} k(\alpha^J) 1 + \frac{1}{h_1} \left\langle \frac{\partial f}{\partial \alpha^P} : \alpha^J \right\rangle \frac{\partial f}{\partial \alpha^P}$$

$$h_1 = \frac{\partial f}{\partial \alpha^P} : \frac{\partial k}{\partial H^P} \left[ H^P \frac{\partial f}{\partial \alpha^P} + \frac{\partial f}{\partial \alpha^P} H^P \right]$$

$$\alpha^P = \alpha - k \quad k = k(H^P)$$

Remarques :

1. Les relations (28) sont valables dans le cas où les déformations élastiques sont petites et sont, dans ce cas, les lois générales issues des hypothèses 1, 2 et 3.
2. Le choix de l'écriture de  $\Psi^P(H^P)$  influe sur la valeur de  $h_1$  et de  $h$  et donc de  $\frac{\partial \Psi}{\partial \mathcal{R}^P}$

Nous comparerons, à la fin de ce chapitre, deux choix différents de  $\Psi^P(H^P)$ .

#### 2.1.4. Symétrie de $\bar{\mathcal{T}}(\mathcal{R}, H^P)$

Dans le cas général, on peut écrire à partir de (13) et (14)

$$\mathcal{T}_{ij}^J = \mathcal{D}_{ijke}^{e1} D_{ke} - \mathcal{D}_{ijke}^{e2} \bar{D}_{ke}$$

En écrivant dans le cas général  $\mathcal{D}_{ijke}^{e1}$  et  $\mathcal{D}_{ijke}^{e2}$  en fonction des dérivées premières et secondes de  $\Psi^e$  par rapport aux invariants principaux de  $B^e$ , on démontre (voir annexe IV) que :

$$(29) \quad \mathcal{D}_{ijke}^{e1} = \mathcal{D}_{klij}^{e1} = \mathcal{D}_{jickl}^{e1}$$

$$\text{et} \quad \mathcal{D}_{ijke}^{e2} = \mathcal{D}_{klij}^{e2} = \mathcal{D}_{jickl}^{e2}$$

Dans le cas général, on peut écrire de même :

$$\tilde{\mathcal{T}}_{ij} = \mathcal{D}_{ijke}^P \bar{D}_{ke}^P$$

avec (voir annexe 4) :

$$(30) \quad \mathcal{D}_{ijke}^P = \mathcal{D}_{klij}^P = \mathcal{D}_{jickl}^P$$

En petites déformations élastiques :  $\mathcal{T}^J \approx \tilde{\mathcal{T}}$  et donc :

$$(31) \quad \begin{aligned} \mathcal{T}_{ij}^J &\approx \mathcal{D}_{ijke}^P \bar{D}_{ke}^P \\ \mathcal{D}_{ijke}^{e1} &= \frac{E}{1+\nu} \left\{ \delta_{ik} \delta_{je} + \frac{\nu}{1-2\nu} \delta_{ij} \delta_{ke} \right\} \\ \mathcal{D}_{ijke}^{e2} &= -\frac{E}{1+\nu} \delta_{ik} \delta_{je} \end{aligned}$$

En utilisant (29), (31) et (27), on arrive à :

$$\begin{aligned} \tau_{ij}^J &= \bar{\tau}_{ijke} D_{ke} \\ (32) \quad \bar{\tau}_{ijke} &= \frac{E}{1+\nu} \left\{ \delta_{ik} \delta_{je} + \frac{\nu}{1-2\nu} \delta_{ij} \delta_{ke} - \frac{1}{h_1} \left( \frac{\partial f}{\partial \alpha^p} \right)_{ij} \left( \frac{\partial f}{\partial \alpha^p} \right)_{ke} \right\} \end{aligned}$$

et on constate facilement que :

$$\bar{\tau}_{ijke} = \bar{\tau}_{krej} = \bar{\tau}_{jike}$$

ceci dans le cas des petites déformations élastiques.

III - 2.2. Théorie 2

La théorie 2 est celle qui consiste à étendre l'écriture (1.a.bis)

2.2.1. Energie libre dissipation

Hypothèse 1 :

$$(33) \quad \begin{aligned} \Psi &= \Psi^e(\mathbb{B}^e) + \Psi^p(\alpha) & \alpha &: \text{variable interne} \\ \dot{\Psi} &= \frac{\partial \Psi^e}{\partial \mathbb{B}^e} : \dot{\mathbb{B}}^e + \frac{\partial \Psi^p}{\partial \alpha} : \dot{\alpha} & & \text{tensorielle d'écrouissage} \\ \dot{\Psi} &= 2 \frac{\partial \Psi^e}{\partial \mathbb{B}^e} : \mathbb{B}^e : (\mathbb{D} - \overline{\mathbb{D}}^p) + \frac{\partial \Psi^p}{\partial \alpha} : \dot{\alpha} \end{aligned}$$

Pour avoir une écriture objective, il faut utiliser au lieu de  $\dot{\alpha}$ , une dérivée objective  $\frac{D\alpha}{Dt}$  telle que :

$$(34) \quad \frac{\partial \Psi^p}{\partial \alpha} : \dot{\alpha} = \frac{\partial \Psi^p}{\partial \alpha} : \frac{D\alpha}{Dt}$$

Nous choisirons pour le moment la dérivée de Jauman qui est habituellement utilisée; (nous reviendrons ultérieurement sur la discussion du choix de  $\frac{D\alpha}{Dt}$ ).

La dissipation s'écrit donc :

$$(\alpha - 2\rho_0 \frac{\partial \Psi^e}{\partial \mathbb{B}^e} : \mathbb{B}^e) : \mathbb{D} + 2\rho_0 \frac{\partial \Psi^e}{\partial \mathbb{B}^e} : \mathbb{B}^e : \overline{\mathbb{D}}^p - \rho_0 \frac{\partial \Psi^p}{\partial \alpha} : \alpha^J$$

En utilisant ladémarche classique, on a :

$$(35) \quad \alpha = 2\rho_0 \frac{\partial \Psi^e}{\partial \mathbb{B}^e} : \mathbb{B}^e$$

et donc :

$$(36) \quad \alpha : \overline{\mathbb{D}}^p - \mathfrak{k} : \alpha^J \leq 0$$

en posant :  $\mathfrak{k} = \rho_0 \frac{\partial \Psi^p}{\partial \alpha}$

Hypothèse 2 : Fonction seuil

$$(37) \quad f(\alpha^p) \leq 0 \quad \alpha^p = \alpha - \mathfrak{k}$$

$\mathfrak{k}$  est donc le déplacement de la surface seuil dans l'espace des contraintes et  $\alpha$  est la variable thermodynamique associée à  $\mathfrak{k}$ .

Hypothèse 3 : Matériau standard généralisé

d'après (36) on écrit :

$$(38) \quad \bar{D}^P = \lambda \frac{\partial f}{\partial \alpha}$$

$$(39) \quad \alpha^J = -\lambda \frac{\partial f}{\partial \mu} = \lambda \frac{\partial f}{\partial \alpha}$$

Et on trouve donc la loi d'évolution de  $\alpha$  et la relation de  $\alpha$  avec les déformations plastiques :

$$(40) \quad \alpha^J = \bar{D}^P$$

Remarquons que dans ce cas, les directions principales de  $\mu$  étant celles de  $\alpha$ , elles ne sont pas, dans le cas général, les mêmes que celles de  $H^P$  (comme pour la théorie 1).

Pour écrire une loi de comportement basée sur la théorie 2, il reste à :

1. Choisir l'écriture de  $\Psi^e(B^e)$  et  $\Psi^p(\alpha)$ , ou ce qui revient au même, choisir l'écriture des relations  $\alpha(B^e)$  et  $\mu(\alpha)$ .

2. Choisir la fonction seuil.

2.2.2. Ecriture incrémentale

En utilisant la même démarche que pour la théorie 1, on a :

$$(41) \quad \alpha^J = \frac{\partial \alpha}{\partial B^e} [D B^e + B^e D - 2\lambda W^e \frac{\partial f}{\partial \alpha^P} W^e]$$

$$(42) \quad \lambda = \frac{1}{h_2} \left\langle \frac{\partial f}{\partial \alpha^P}; \alpha^J \right\rangle$$

$$(43) \quad h_2 = \frac{\partial f}{\partial \alpha^P}; \frac{\partial \mu}{\partial \alpha} \left[ \frac{\partial f}{\partial \alpha^P} \right]$$

ou en fonction de  $D$  :

$$(44) \quad \lambda = \left( \frac{\partial f}{\partial \alpha^P}; \frac{\partial \alpha}{\partial B^e} [D B^e + B^e D] \right) \left\{ h_2 + \frac{\partial f}{\partial \alpha^P}; \frac{\partial \alpha}{\partial B^e} [W^e \frac{\partial f}{\partial \alpha^P} W^e] \right\}^{-1}$$

et donc la loi incrémentale :



$$(45) \quad \alpha^J = \bar{\Sigma}(\alpha, \alpha) = \frac{\partial \alpha}{\partial B^c} \left[ \mathbb{D} B^c + B^c \mathbb{D} - 2 \left\langle \frac{\partial f}{\partial \alpha^p} : \frac{\partial \alpha}{\partial B^c} \left[ \mathbb{D} B^c + B^c \mathbb{D} \right] \right\rangle \left\{ h_2 + \frac{\partial f}{\partial \alpha^p} : \frac{\partial \alpha}{\partial B^c} \left[ \text{ve} \frac{\partial f}{\partial \alpha^p} \text{ve} \right] \right\}^{-1} \right]$$

2.2.3. Petites déformations élastiques

En utilisant les mêmes remarques sur les déformations élastiques qu'en 2.1.3., on a :

$$(46) \quad \lambda = \left( \frac{\partial f}{\partial \alpha^p} : \mathbb{D} \right) \left[ \frac{1+\nu}{E} h_2 + \frac{\partial f}{\partial \alpha^p} : \frac{\partial f}{\partial \alpha^p} \right]^{-1}$$

et donc l'écriture incrémentale :

$$\alpha^J = \frac{E}{1+\nu} \left\{ \mathbb{D} + \frac{\nu}{1-2\nu} k(\mathbb{D}) \mathbb{1} - \left\langle \frac{\partial f}{\partial \alpha^p} : \mathbb{D} \right\rangle \left[ \frac{\partial f}{\partial \alpha^p} : \frac{\partial f}{\partial \alpha^p} + \frac{1+\nu}{E} h_2 \right]^{-1} \frac{\partial f}{\partial \alpha^p} \right\}$$

ou  $\mathbb{D} = \frac{1+\nu}{E} \alpha^J - \frac{\nu}{E} k(\alpha^J) \mathbb{1} + \frac{1}{h_2} \left\langle \frac{\partial f}{\partial \alpha^p} : \alpha^J \right\rangle \frac{\partial f}{\partial \alpha^p}$

$$(47) \quad h_2 = \frac{\partial f}{\partial \alpha^p} : \frac{\partial \mathbb{t}}{\partial \alpha} \left[ \frac{\partial f}{\partial \alpha^p} \right]$$

$$\alpha^p = \alpha - \mathbb{t} \quad \mathbb{t} = \mathbb{t}(\alpha)$$

Remarques :

1. Le choix de l'écriture de  $\Psi^p(\alpha)$  influe sur la valeur de  $h_2$  et de  $\mathbb{t}$  et donc de  $\frac{\partial f}{\partial \alpha^p}$
2. Les relations (47) sont sous la même forme que (28), malgré ceci, et malgré les différents choix possibles suivant l'écriture de  $\Psi^p(\mathbb{H}^p)$  et  $\Psi^p(\alpha)$  les relations (47) et (28) sont différentes puisque pour la théorie 1, les directions principales de  $\mathbb{t}$  sont toujours celles de  $\mathbb{H}^p$  ce qui n'est pas le cas pour la théorie 2.

2.2.4. Symétrie de  $\bar{\Sigma}(\alpha, \alpha)$

Dans le cas où les déformations élastiques restent petites, les relations (47) étant sous la même forme que (28), la symétrie de  $\bar{\Sigma}(\alpha, \alpha)$  est donc évidente.

III - 3. GENERALISATION DIRECTE DE L'ECRITURE INCREMENTALE (Théorie 3).

---

On veut donc généraliser directement l'écriture incrémentale (4) sans introduire la décomposition  $F = F^e F^p$

Les raisonnements utilisés dans le chapitre I restant valables, nous nous bornerons à une généralisation eulérienne avec la dérivée de Jauman. On écrit donc simplement :

$$(48) \quad D = D^e + D^p$$

$$(49) \quad D^e = \frac{1+\nu}{E} \alpha^J - \frac{\nu}{E} h(\alpha^J) \mathbb{1}$$

$$(50) \quad D^p = \lambda \frac{\partial f}{\partial \alpha^p} \quad \alpha^p = \alpha - \alpha$$

$$(51) \quad h^J = G_1 D^p$$

$$(52) \quad \lambda = \frac{1}{G_1} \left\langle \frac{\partial f}{\partial \alpha^p} : \alpha^J \right\rangle \left[ \frac{\partial f}{\partial \alpha^p} : \frac{\partial f}{\partial \alpha^p} \right]^{-1} \frac{\partial f}{\partial \alpha^p}$$

Il faut remarquer que les tenseurs  $D^e$  et  $D^p$  ainsi définis n'ont pas de signification cinématique précise.

Cette généralisation correspond à l'écriture de (4) dans le repère corotationnel lié au mouvement. Les déformations élastiques et plastiques ( $e^e$  et  $e^p$ ) seront donc définies par :

$$(53) \quad e^{eJ} = D^e \quad \text{donc} \quad e^e = \frac{1+\nu}{E} \alpha - \frac{\nu}{E} h(\alpha) \mathbb{1}$$

$$(54) \quad e^{pJ} = D^p$$

si on définit  $e$  avec :

$$(55) \quad e^J = D$$

on aura alors :  $e = e^e + e^p$

Si les déformations élastiques sont petites, (48) est équivalente à (24) et (54) à (40) et on démontre facilement que la théorie 3 est équivalente au choix particulier  $\psi^p(\alpha) = \frac{1}{2} G_1 \alpha : \alpha$  dans la théorie 2.

### III - 4. COMPARAISONS ENTRE LES DIFFERENTES THEORIES

#### III - 4.1. Cas triaxial

Dans la cas triaxial, les rotations étant nulles, le taux de rotation l'est aussi et donc la dérivée de Jauman est égale à la dérivée particulaire .

En plus, nous avons les relations :

$$(56) \quad \dot{b} = D \quad \dot{h}^p = D^p - \bar{D}^p \quad \dot{b}^e = D^e \quad H^p = B^p \quad h^p = b^p \quad \text{etc...}$$

Il est donc facile de constater que dans ce cas, toutes les théories 1,2 et 3 sont équivalentes. ( la théorie 3 correspond à un choix particulier de  $\Psi(H^p)$  ) puisque dans ce cas, nous avons :

$$(57) \quad e^e = b^e \quad e^p = b^p \quad \alpha = H^p = B^p = e^p$$

Il apparait donc que la différence entre les théories 1,2 et 3 n'est due qu'aux rotations.

#### 4.2. Petites déformations élastiques

Comme il a été remarqué précédemment :

- la théorie 3 est un cas particulier de la théorie 2.
- la théorie 2 est différente dans le cas général de la théorie 1, cette différence venant des rotations.

#### 4.3. Cas général

- La différence entre la théorie 2 et la théorie 1 est due à la différence dans la définition de  $\mathbf{t}$  tenseur de déplacement du centre de la surface seuil dans l'espace des contraintes. Et plus précisément, c'est l'orientation des directions principales de  $\mathbf{t}$  qui diffère d'une théorie à l'autre.

Comme l'orientation, dans la théorie 2, des directions principales de  $\mathbf{t}$  est définie par la relation (40) et plus précisément par le choix de la dérivée objective utilisée, choix qui a été arbitraire, nous allons, dans le paragraphe suivant, étudier

d'autres choix de dérivées objectives, c'est à dire généraliser la théorie 2.

- La théorie 3 diffère des deux autres théories dans la définition même des déformations élastiques et plastiques. Ce problème a déjà été longuement débattu dans la littérature; puisque dans le cas qui nous intéresse (petites déformations) la théorie 3 est un cas particulier de la théorie 2, nous n'en parlerons pas davantage.

III - 5. GENERALISATION DE LA THEORIE 2 - THEORIE GENERALE

III - 5.1. Généralisation de la théorie 2

Le choix de la dérivée de Jauman dans l'écriture (34) n'est pas le seul choix possible, toute autre dérivée objective qui vérifie la relation (34) peut être utilisée. Le choix de  $\frac{D\alpha}{Dt}$  détermine l'orientation des directions principales de  $\alpha$  donc de  $\underline{t}$ , alors que dans la théorie 1, les directions principales de  $\underline{t}$  sont toujours celles de  $\underline{h}^p$ . Une question se pose donc :

La théorie 1 ne peut-elle pas s'écrire de la même manière que la théorie 2 mais pour un choix différent de  $\frac{D\alpha}{Dt}$  ?

On démontre en annexe (3) que :

$$(58) \quad \underline{D}^p = \underline{h}^p + \underline{h}^p \underline{w}^{p*} - \underline{w}^{p*} \underline{h}^p - [ \underline{w}^p (\underline{w}^{p*} - \underline{r}^p \underline{r}^{pT}) \underline{w}^{p-1} ]^s$$

où  $\underline{w}^{p*}$  est le taux de rotation des directions principales de  $\underline{h}^p$  ou  $\underline{h}^p = \frac{1}{2} \text{Log}(\underline{B}^p)$

$$\underline{w}^{p*} = \underline{Q}^{pT} \underline{Q}^p$$

si  $\underline{Q}^p$  est la rotation des directions principales de  $\underline{h}^p$

D'après (58) nous avons alors :

$$(59) \quad \underline{D}^p = \underline{h}^p + \underline{h}^p (\underline{r}^c \underline{r}^{cT} + \underline{r}^c \underline{w}^{p*} \underline{r}^{cT}) - (\underline{r}^c \underline{r}^{cT} + \underline{r}^c \underline{w}^{p*} \underline{r}^{cT}) \underline{h}^p - [ \underline{H}^p \underline{w}^p (\underline{r}^c \underline{w}^{p*} \underline{r}^{cT} - \underline{r}^c \underline{r}^p \underline{r}^{pT} \underline{r}^{cT}) \underline{H}^p ]^s$$

Si nous définissons  $\frac{D\alpha}{Dt}$  par :

$$(60) \quad \frac{D\alpha}{Dt} = \alpha + \alpha (\underline{r}^c \underline{r}^{cT} + \underline{r}^c \underline{w}^{p*} \underline{r}^{cT}) - (\underline{r}^c \underline{r}^{cT} + \underline{r}^c \underline{w}^{p*} \underline{r}^{cT}) \alpha - [ \exp^{\frac{1}{2}(2\alpha)} (\underline{r}^c \underline{w}^{p*} \underline{r}^{cT} - \underline{r}^c \underline{r}^p \underline{r}^{pT} \underline{r}^{cT}) \exp^{-\frac{1}{2}(2\alpha)} ]^s$$

où  $\underline{w}^{p*}$  est le taux de rotation des directions principales de  $\underline{r}^{cT} \alpha \underline{r}^c$ , la relation (40) devient :

$$(61) \quad \frac{D\alpha}{Dt} = \underline{D}^p \iff \alpha = \underline{h}^p$$

$\frac{D\alpha}{Dt}$  est bien objective (voir annexe III) et à cause de l'isotropie de  $\underline{Y}^p(\alpha)$ , la relation (34) est bien vérifiée.

La théorie 1 correspond donc bien à un choix particulier de  $\frac{D\alpha}{Dt}$ .

Ceci nous permet de définir un cadre général englobant toutes les écritures, avec variables internes, de l'écoulement cinématique en grandes déformations :

III - 5.2. Théorie générale de l'écoulement cinématique en grandes déformations :

. Choix de  $\Psi^e(B^e)$   $\implies$  choix de la relation  $\alpha(B^e)$   
Dans le cas des petites déformations élastiques, ce choix est unique au 1er ordre par rapport aux déformations élastiques.

. Choix de  $\Psi^p(\alpha)$   $\implies$  choix de la relation  $\mathfrak{k}(\alpha)$   
Nous allons comparer le comportement de deux lois obtenues à partir de deux choix différents de  $\mathfrak{k}(\alpha)$ .

Choix A :  $\mathfrak{k} = G_1 \alpha$

Choix B :  $\mathfrak{k} = \frac{1}{2} G_1 (\exp(2\alpha) - 1)$

. Choix de  $\frac{D\alpha}{Dt}$   $\implies$  Détermine la relation entre  $\alpha$  et les déformations plastiques et en particulier l'orientation des directions principales de  $\mathfrak{k}$  par rapport à celles de  $\mathfrak{M}^p$ .

Nous allons comparer le comportement de deux lois obtenues à partir de deux choix différents de  $\frac{D\alpha}{Dt}$

Choix 1 : correspondant à la théorie 1 : directions principales de  $\mathfrak{k}$  les mêmes que celle de  $\mathfrak{M}^p$ .

Choix 2 :  $\frac{D\alpha}{Dt} = \alpha^J$  théorie 2.

Il serait intéressant d'étudier d'autres choix possibles de  $\frac{D\alpha}{Dt}$  nous ne l'avons pas fait par manque de temps. On pourrait par exemple, au lieu de dériver dans le repère corotationnel total, dériver dans le repère corotationnel plastique, soit :

en posant :  $\alpha^P = R^T \alpha R^e$  considerer :

$$\frac{D\alpha}{Dt} = R^e [\alpha^P + \alpha^P W^P - W^P \alpha^P] R^{eT}$$

Ceci revient à prendre  $\frac{D\alpha}{Dt} = \alpha^{\tilde{}}$  or, dans le cas des petites déformations élastiques  $\alpha^{\tilde{}} \simeq \alpha^J$  et ce choix ne rapporte pas quelque chose de plus par rapport au choix 2.

On notera dans la suite :

Loi 1.A :  $k = G_1 H^P$

Loi 1.B :  $k = \frac{1}{2} G_1 (H^P - 1)$

Loi 2.A :  $k = G_1 \alpha \quad \alpha^J = \bar{\alpha}^P$

Loi 2.B :  $k = \frac{1}{2} G_1 (\exp(2\alpha) - 1) \quad \alpha^J = \bar{\alpha}^P$

### III - 6 SIMULATIONS NUMERIQUES

#### III - 6.1. Sollicitations triaxiales

Toutes les théories étant équivalentes, nous allons comparer les deux choix A. et B. Dans tout ce qui va suivre, nous utiliserons le critère de Von Mises sous la forme :

$$(82) \quad f(\alpha^P) = |\alpha^{PP}| - \sqrt{\frac{2}{3}} \sigma_e \leq 0 \quad |\alpha^{PP}| = (\alpha^{PP}; \alpha^{PP})^{1/2}$$

##### 6.1.1. Evolution de la surface seuil

Pour visualiser le déplacement de la surface seuil, nous allons la tracer dans le plan déviation des contraintes. Cette représentation n'a de sens que dans le cas triaxial.

(62) s'écrit :

$$(63) \quad (\tau_1^D - t_1^D)^2 + (\tau_2^D - t_2^D)^2 + (\tau_3^D - t_3^D)^2 - \frac{2}{3} \sigma_e^2 \leq 0$$

où  $\tau_i^D$  et  $t_i^D$  sont les composantes diagonales (les seules non nulles) de respectivement  $\tau^D$  et  $t^D$ .

Dans le plan déviatoire (63) décrit un cercle décentré (Centre I) et de rayon  $R = \sigma_e$  (voir figure III.1)

$$\begin{aligned} \vec{OI} &= t_1^D \vec{k}_1 + t_2^D \vec{k}_2 + t_3^D \vec{k}_3 \\ &= \frac{\sqrt{3}}{2} (t_3^D - t_2^D) \vec{i} + \frac{3}{2} t_1^D \vec{k}_1 \end{aligned}$$

$$\vec{OH} = \tau_1^D \vec{k}_1 + \tau_2^D \vec{k}_2 + \tau_3^D \vec{k}_3$$

$$\begin{aligned} \vec{IH} &= (\tau_1^D - t_1^D) \vec{k}_1 + (\tau_2^D - t_2^D) \vec{k}_2 \\ &\quad + (\tau_3^D - t_3^D) \vec{k}_3 \end{aligned}$$

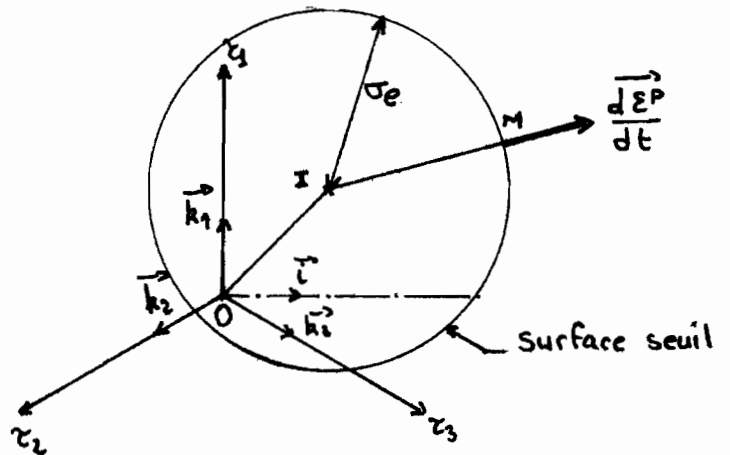


Fig.III.1. Surface de plasticité dans le plan déviatoire  
(cas triaxial)

Il est aisé de vérifier que :

$$\frac{d\vec{\varepsilon}^P}{dt} = \lambda \frac{\sqrt{3}}{2} \frac{\vec{IH}}{|\vec{IH}|} \quad \frac{d\vec{\varepsilon}^P}{dt} = \dot{\varepsilon}_1^P \vec{k}_1 + \dot{\varepsilon}_2^P \vec{k}_2 + \dot{\varepsilon}_3^P \vec{k}_3 \quad \varepsilon_i^P = \text{Log} \lambda_i^P \quad \lambda_i^P \text{ comp. de } \vec{\varepsilon}^P.$$

En petites déformations, le centre de la surface seuil se déplace dans la même direction que  $\vec{\varepsilon}^P$  ( $\frac{d\vec{OI}}{dt} = k \frac{d\vec{\varepsilon}^P}{dt}$ );

qu'en est-il pour les grandes déformations ?

Nous supposons, pour simplifier les calculs, que le matériau à l'instant initial était écroui par une traction dans la direction 1 et que nous allons exercer sur lui une sollicitation triaxiale (voir Fig. III.2)



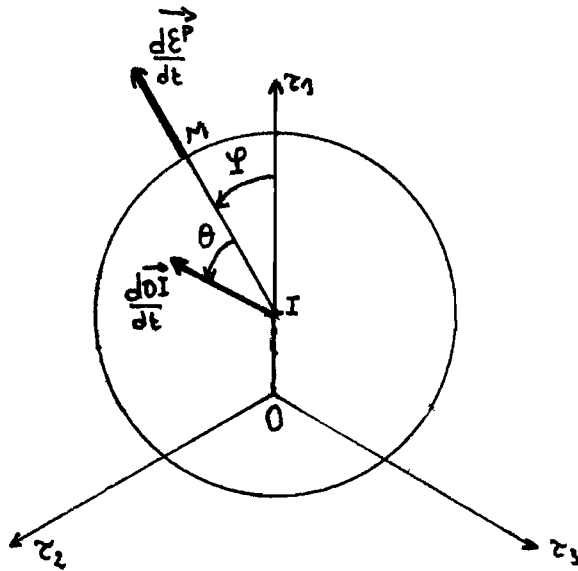


Fig. (III.2) Déplacement du centre de la surface de plasticité.

Il a été montré dans [8] qu'avec le choix B,  $\theta$  est non nul et varie en fonction de  $\psi$  (nature de la sollicitation) selon les courbes de la figure (III.3).

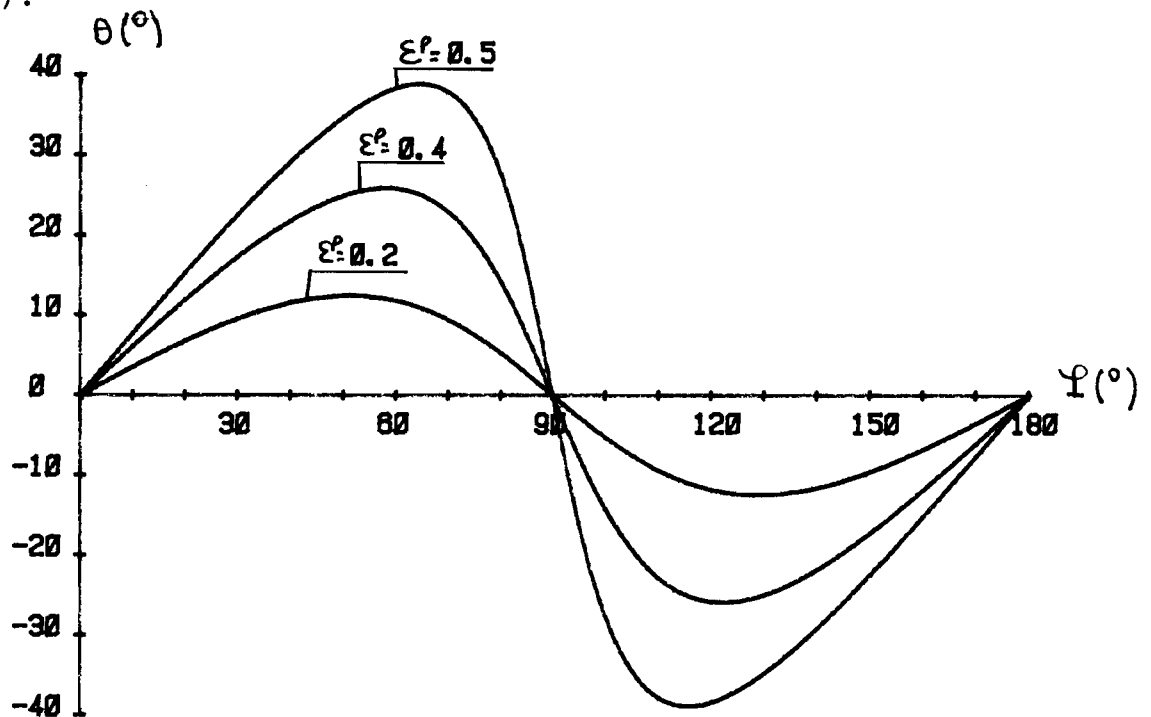


Fig. (III.3) Evolution de  $\theta$  en fonction de  $\psi$ : Choix B.

Pour le choix A,  $\theta$  est nul quelque soit  $\psi$ , en effet il est aisé de voir que :

$$\frac{d\vec{\sigma}}{dt} = G_1 \frac{d\vec{\varepsilon}^p}{dt}$$

En conclusion le Choix A permet d'avoir exactement les mêmes propriétés de normalités que dans le cas des petites déformations, ce n'est pas le cas pour le choix B.

6.1.2. Courbes d'écroissage

$$F^e = \begin{pmatrix} \lambda_1^e & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2^e & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3^e \end{pmatrix} \quad F^p = \begin{pmatrix} \lambda_1^p & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2^p & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3^p \end{pmatrix} \quad F = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix} \quad \lambda_i = \lambda_1^e \lambda_1^p \text{ etc...}$$

$$D = F F^{-1} = \begin{pmatrix} \dot{\epsilon}_1 & 0 & 0 \\ 0 & \dot{\epsilon}_2 & 0 \\ 0 & 0 & \dot{\epsilon}_3 \end{pmatrix} \quad D^p = \begin{pmatrix} \dot{\epsilon}_1^p & 0 & 0 \\ 0 & \dot{\epsilon}_2^p & 0 \\ 0 & 0 & \dot{\epsilon}_3^p \end{pmatrix} \quad D^e = \begin{pmatrix} \dot{\epsilon}_1^e & 0 & 0 \\ 0 & \dot{\epsilon}_2^e & 0 \\ 0 & 0 & \dot{\epsilon}_3^e \end{pmatrix} \quad \begin{aligned} \epsilon_i &= \text{Log } \lambda_i \\ \epsilon_i^e &= \text{Log } \lambda_i^e \\ \epsilon_i^p &= \text{Log } \lambda_i^p \end{aligned}$$

et nous avons :

$$D = D^e + D^p$$

$$\dot{\epsilon}_i = \dot{\epsilon}_i^e + \dot{\epsilon}_i^p$$

c'est donc la même écriture que pour les petites déformations

Traction - Compression :  $\alpha = \begin{pmatrix} \sigma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

Nous ne faisons pas l'hypothèse des petites déformations élastiques.

$$D^e = \dot{b}^e = \frac{1+\nu}{E} \alpha - \frac{\nu}{E} \text{tr}(\alpha) \mathbb{1} \quad \text{donc :} \quad \begin{aligned} \epsilon_1^e &= \epsilon^e = \sigma/E \\ \epsilon_2^e &= \epsilon_3^e = -\nu \epsilon^e \end{aligned}$$

$$\bar{D}^p = \lambda \frac{\alpha^p}{|\alpha^p|} \quad \text{donc} \quad \begin{aligned} \epsilon_1^p &= \epsilon^p \\ \epsilon_2^p &= \epsilon_3^p = -\frac{\epsilon^p}{2} \end{aligned}$$

$$\epsilon = \epsilon^p + \frac{\sigma}{E}$$

En cas de charge, nous avons :

Choix A :  $\epsilon^p = \frac{2}{3} \left( \frac{\sigma - \delta \sigma^e}{G_1} \right)$   $\delta = 1$  en Traction  
 $\delta = -1$  en Compression

Choix B :  $e^{2\epsilon^p} - e^{-\epsilon^p} = 2 \left( \frac{\sigma - \delta \sigma^e}{G_1} \right)$

Une fois de plus, la relation  $\sigma(\epsilon)$  pour le choix A est exactement la même que pour le cas des petites déformations. Le modèle A correspond dans le cas triaxial, au modèle petites déformations. Toutes les relations petites déformations sont transposables directement aux grandes déformations en prenant  $\epsilon_i^e = \text{Log } \lambda_i^e$  et  $\epsilon_i^p = \text{Log } \lambda_i^p$  et sont équivalentes aux relations obtenues par le modèle A.

Nous vérifions bien qu'au premier ordre en  $\epsilon^p$ , le modèle A et le modèle B sont équivalents.

Si on considère un cylindre soumis à une traction axiale  $F$ ; avant déformation, il a une longueur  $L$  et un rayon  $R$ . Après déformation, la longueur est  $l$  et le rayon  $r$ . Après décharge, la longueur devient  $l^p$  et le rayon  $r^p$ .

En supposant que l'essai est homogène, nous avons :

$$F: \begin{pmatrix} \frac{F}{L} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{F}{R} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{F}{R} \end{pmatrix} \quad F^p: \begin{pmatrix} \frac{F^p}{L^p} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{F^p}{R^p} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{F^p}{R^p} \end{pmatrix}$$

Dans le cadre de la théorie des petites déformations, la déformation considérée est soit la déformation logarithmique :

$$\epsilon = \text{Log} \frac{l}{L} \quad \epsilon^p = \text{Log} \frac{l^p}{L^p} \quad \epsilon^e = \epsilon - \epsilon^p$$

soit l'allongement unitaire relatif:

$$\alpha = \frac{l}{L} - 1 \quad \alpha^p = \frac{l^p}{L^p} - 1 \quad \alpha^e = \alpha - \alpha^p$$

au premier ordre:  $\alpha \approx \epsilon$  ;  $\alpha^p \approx \epsilon^p$

$$\epsilon^e \approx \alpha^e \approx \frac{\sigma}{E}$$

Si on utilise les mêmes notations pour le cas des grandes déformations, nous avons encore :  $\epsilon = \epsilon^e + \epsilon^p$  ;  $\epsilon^e = \sigma/E$

mais :  $\alpha = \alpha^p(1 + \alpha^e) + \alpha^e$  ;  $\alpha^e = e^{\sigma/E} - 1$  ;  $\alpha^e = \lambda^e - 1$

Si les déformations élastiques sont petites :  $\alpha^e \approx \epsilon^e = \sigma/E$

Pour illustrer la différence entre les courbes  $\sigma(\epsilon)$  et  $\sigma(\alpha)$ , nous avons tracé les courbes suivantes :

Figure 4 :  $\frac{\sigma^e}{E} = 0,05$   $\frac{\alpha_1}{E} = 0,1$  (choix A)

$$\frac{\sigma}{E} = \frac{\sigma}{E}(\alpha) \quad \text{en prenant successivement :}$$

- 1:  $\alpha = \alpha^p$   $\longrightarrow$  déformations élastiques négligées
- 2:  $\alpha = \alpha^p + \sigma/E$   $\longrightarrow$  relation que l'on est tenté d'écrire sans réfléchir
- 3:  $\alpha = \alpha^p(1 + \frac{\sigma}{E}) + \sigma/E$   $\longrightarrow$  modèle avec l'hypothèse des petites déform.élasti.
- 4:  $\alpha = \alpha^p(1 + \alpha^e) + \alpha^e$   $\longrightarrow$  modèle grandes déformations élastiques  
 $\alpha^e = e^{\sigma/E} - 1$

On constate que la différence entre la relation 3 et la relation 4 est négligeable, bien que les déformations élastiques soient de 20% ce qui nous permet de conclure que l'hypothèse "petites déformations" est bien acceptable (pour les métaux,  $\sigma/\epsilon$  n'atteindra jamais 20%.)

La différence entre les courbes avec les relations 1 et 2 et celle avec les relations 3 et 4 est bien notable.

$$\text{à } \frac{\sigma}{\epsilon} = 15\% \quad \frac{\alpha_4 - \alpha_1}{\alpha_4} = 25\% ; \quad \frac{\alpha_4 - \alpha_2}{\alpha_4} = 13\% ; \quad \frac{\alpha_4 - \alpha_3}{\alpha_4} = 2\%$$

Les courbes de la figure III-5, représentent l'évolution de  $\sigma/\epsilon$  en fonction de  $\alpha$  pour la compression et la traction (Choix A et B)

Les courbes des figures III-6 et III-7 représentent l'évolution de  $\sigma/\epsilon$  en fonction de  $\epsilon$  pour des valeurs différentes de  $\frac{\sigma_1}{\epsilon}$  (Choix A et B).

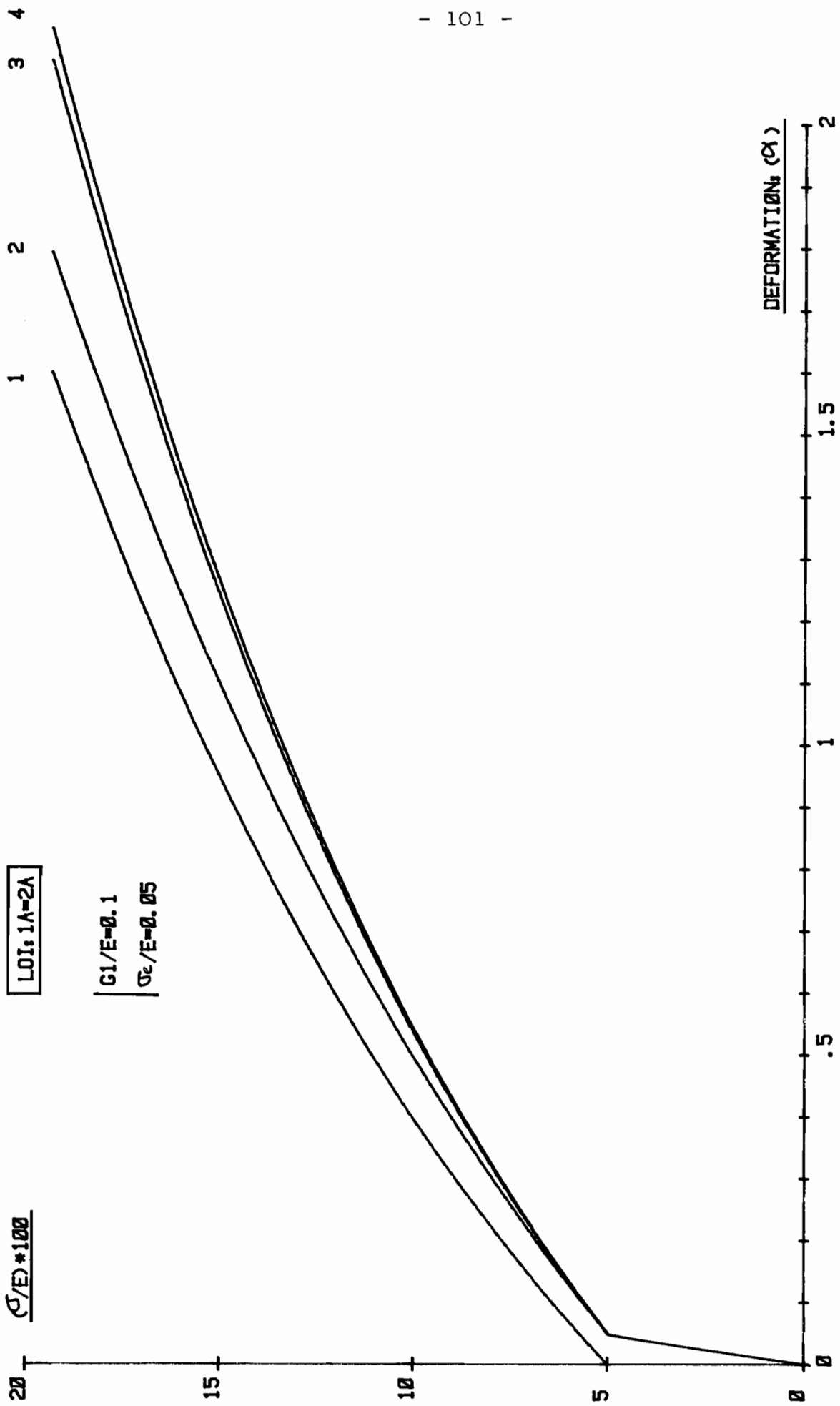


Fig. III.4.

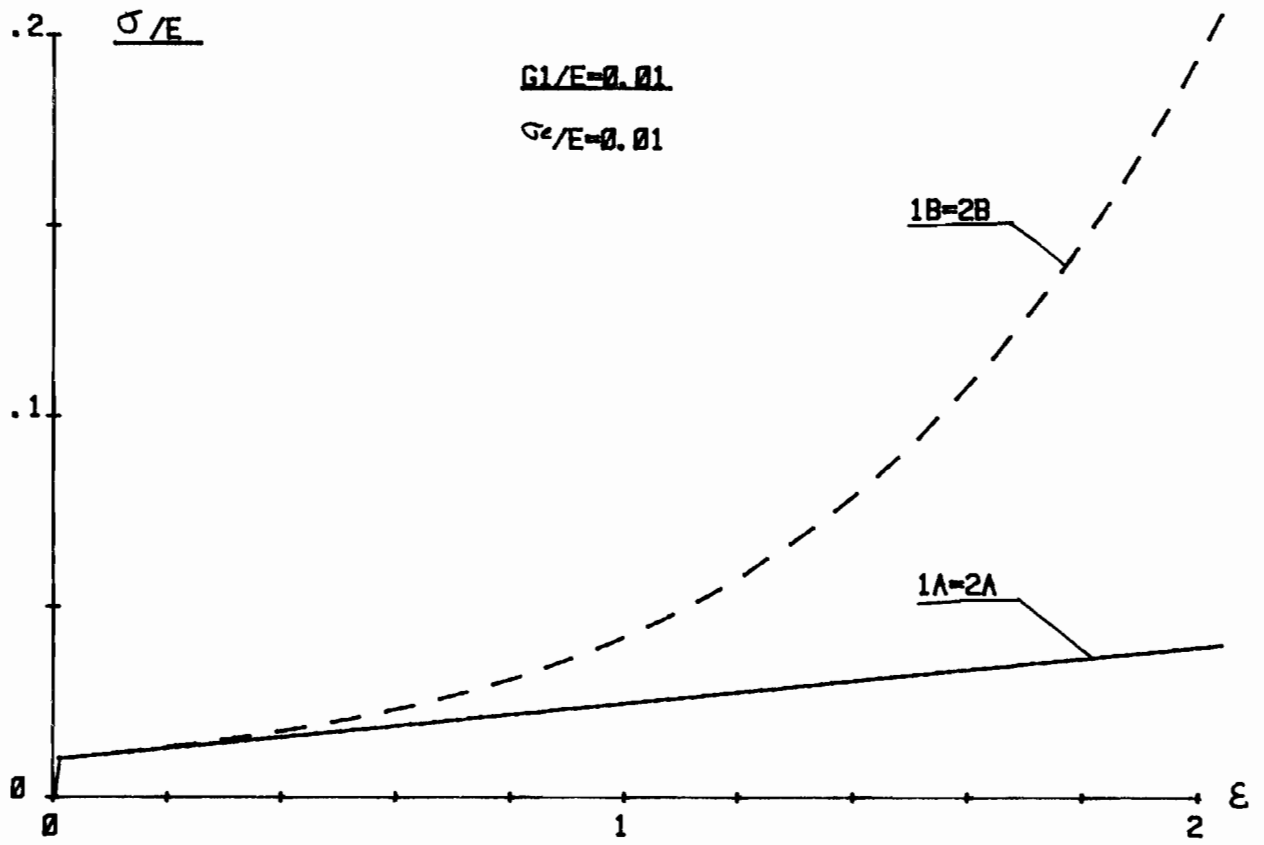


Fig.III.6.

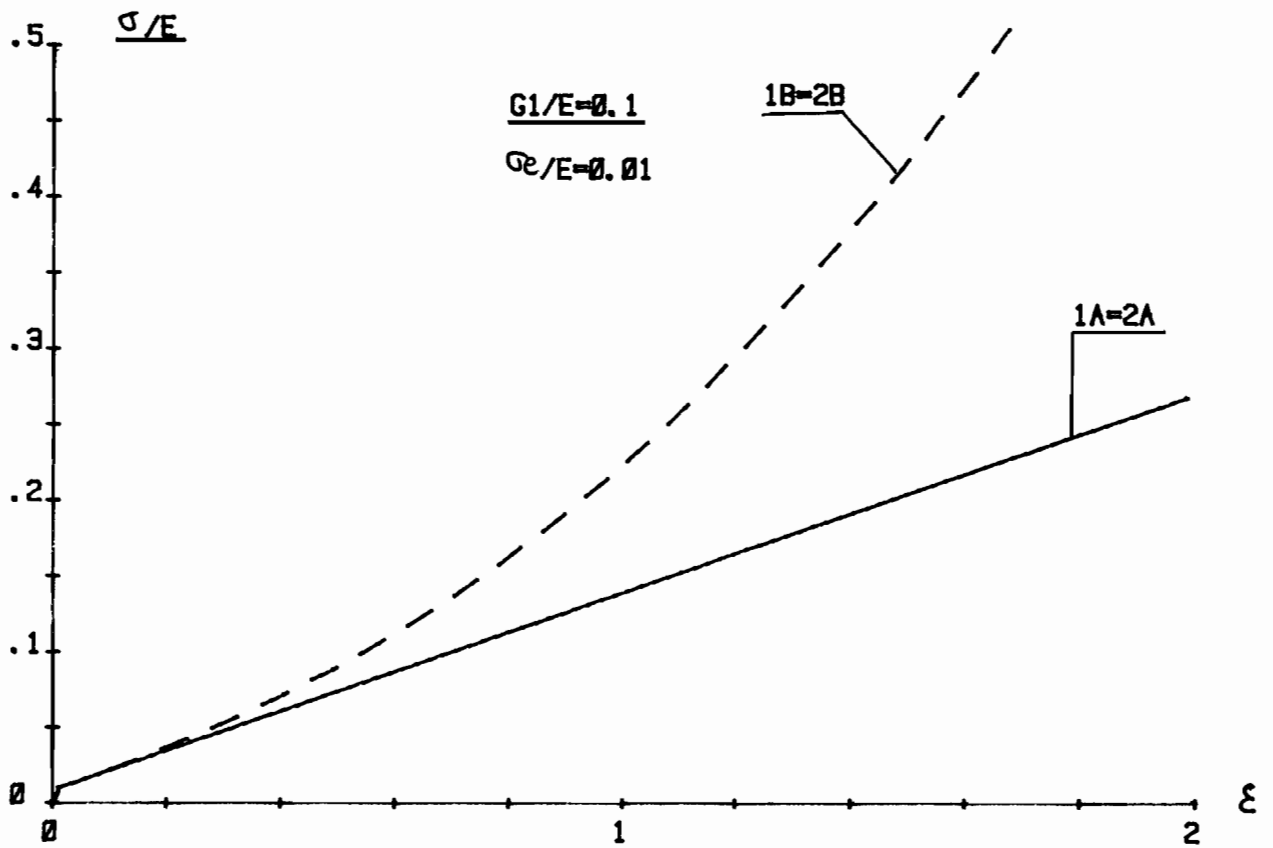


Fig.III.7.

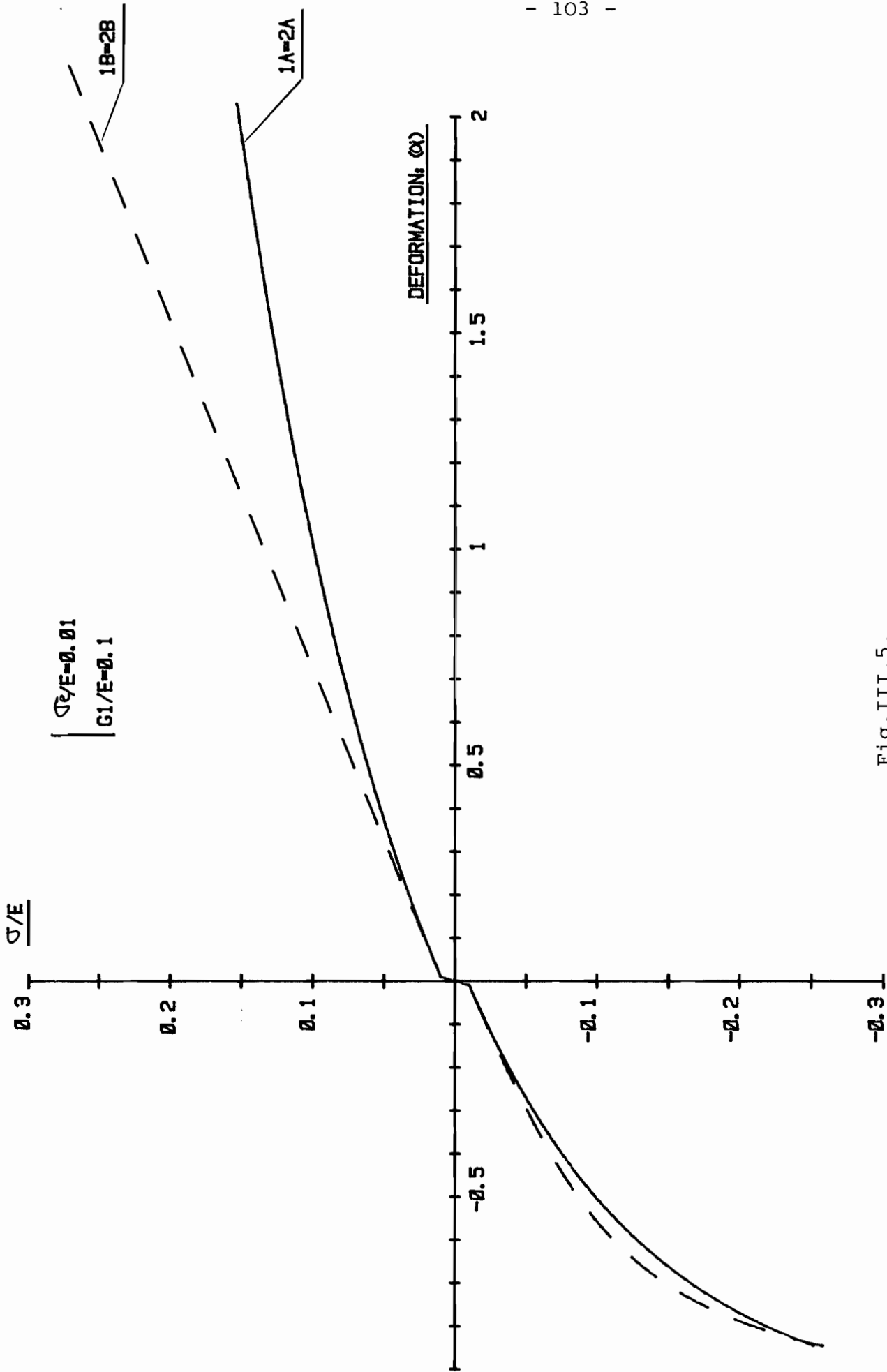


Fig. III.5.

III - 6.2. Petites déformations élastiques (solllicitations non triaxiales)

6.2.1. Différentes lois à comparer

En utilisant le critère de Von Mises (62) toutes les lois (1A, 1b, 2A, 2B) se ramènent à :

$$(64) \quad \begin{cases} D = \varepsilon^p + \bar{D}^p \\ \varepsilon^e = \frac{1+\nu}{E} \alpha - \frac{\nu}{E} h(\alpha) - 1 \\ \bar{D}^p = \frac{1}{h} < \frac{\alpha^{p0}}{|\alpha^{p0}|} : \frac{\alpha^J}{G_L} > \frac{\alpha^{p0}}{|\alpha^{p0}|} \end{cases} \quad \alpha^p = \alpha - h \quad h = G_L \varepsilon^p$$

$\varepsilon^p$  et  $h$  sont différents suivant les lois.

Soit  $\mathcal{L}(X)$  le tenseur du quatrième ordre défini par :

$$(65) \quad \mathcal{L}(X) = \frac{\partial X}{\partial X} \quad \mathcal{L}^{-1}(X) = \frac{\partial X}{\partial X} \quad X = \frac{1}{2} \text{Log}(X)$$

On peut donc écrire  $X^J$  en fonction de  $\alpha^J$  :

$$X^J = \mathcal{L}(X) [\alpha^J] \quad \alpha^J = \mathcal{L}^{-1}(X) [X^J]$$

avec ceci nous avons :

$$(66) \quad \left\{ \begin{array}{ll} \text{Loi 1A : } \varepsilon^p = h^p & h = \frac{\alpha^{p0} : \mathcal{L}(h^p) [2(h^p \alpha^{p0})^S]}{|\alpha^{p0}|^2} \\ \text{Loi 1B : } \varepsilon^p = \frac{1}{2} (h^p - 1) & h = \frac{\alpha^{p0} : (\alpha^{p0} h^p)}{|\alpha^{p0}|^2} \\ \text{Loi 2A : } \varepsilon^p = \alpha \quad \alpha^J = \bar{D}^p & h = 1 \\ \text{Loi 2B : } \varepsilon^p = \frac{1}{2} [\exp(-2\alpha) - 1] & h = \frac{\alpha^{p0} : \mathcal{L}^{-1}(\alpha) [\alpha^{p0}]}{2|\alpha^{p0}|^2} \end{array} \right.$$



6.2.2. Réponse à une sollicitation de traction Torsion

On considère un tube mince (fig. III.9) soumis à une sollicitation de type Traction-Torsion (traction dans la direction  $\vec{e}_3$  et torsion dans le plan  $\vec{e}_1, \vec{e}_2$  ).

Nous supposons, l'épaisseur du tube étant petite, que l'état de contraintes est homogène dans une section droite.

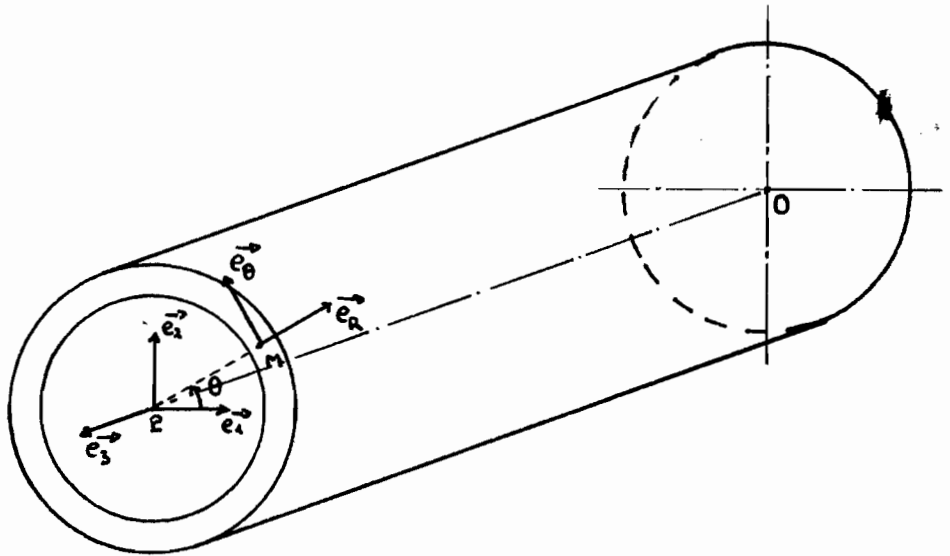


Fig.(III.9) Tube mince en torsion

a) cinématique.

Le repère  $\vec{e}_1^0, \vec{e}_2^0, \vec{e}_3^0$  est un repère fixe.

— . Avant déformation, tout point matériel  $M$  peut être repéré par ses coordonnées polaires :

$$\vec{OM}^0 = (R_0 + k H_0) \vec{e}_R^0 + z_0 \vec{e}_3^0 \quad \vec{e}_R^0 = \cos \theta_0 \vec{e}_1^0 + \sin \theta_0 \vec{e}_2^0$$

$R_0$  : rayon moyen avant déformation

$H_0$  : épaisseur moyenne du tube avant déformation

$z_0$  : position de la section droite envisagée avant déformation

$k$  : paramètre permettant de positionner le point  $M$  entre  $R$  mini et  $R$  maxi

$$-\frac{1}{2} \leq k \leq \frac{1}{2}$$

— . Après déformation, le tube prenant une épaisseur  $\hat{R}$ , un rayon moyen  $r$ , la section droite tournant d'un angle  $\omega$  et se déplaçant à la position  $z$ ; le point matériel  $M$  peut être repéré par :

$$\vec{OM} = (r + k \hat{R}) \vec{e}_r + z \vec{e}_3 \quad \vec{e}_r = \cos(\theta_0 + \omega) \vec{e}_1^0 + \sin(\theta_0 + \omega) \vec{e}_2^0$$

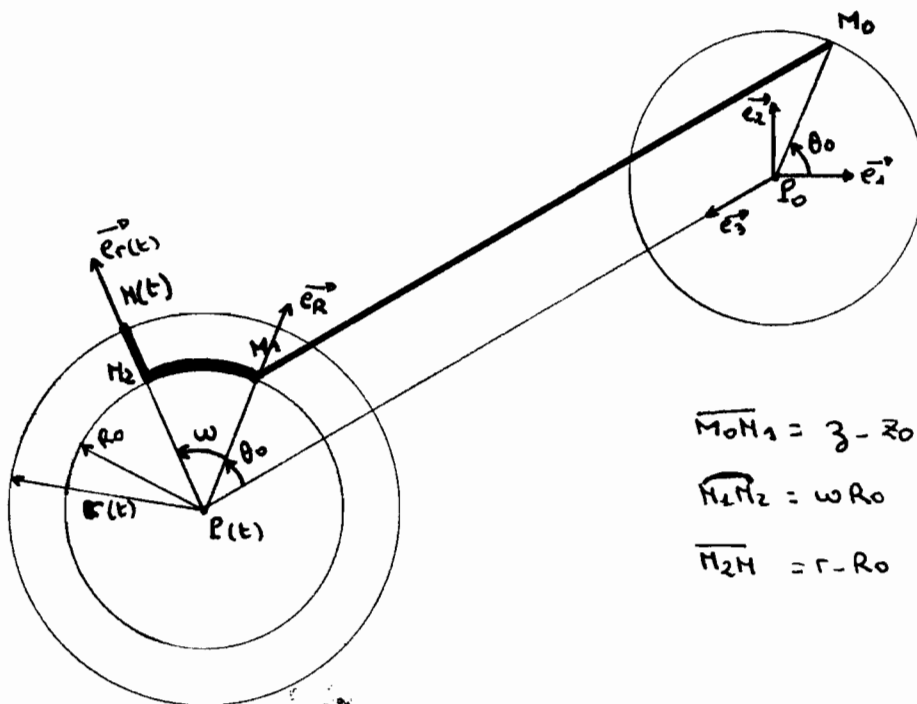


Fig.III.10.

La déformation peut donc être définie par : (Fig. III.10)

- dilatation suivant  $\vec{e}_3$  :  $\frac{z}{z_0}$

- déplacement dû à la rotation :  $S = \frac{\omega R_0}{z_0}$

- dilatation radiale :  $\frac{r}{R_0}$

Et on obtient un tenseur gradient de déformation :  $F$  dont les composantes, si on considère  $\vec{e}_{R_0}, \vec{e}_{\theta_0}, \vec{e}_z$  comme repère de référence et  $\vec{e}_r, \vec{e}_\omega, \vec{e}_z$  comme repère actuel :

$$F : \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \lambda_2 S \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix} \quad \lambda_1 = \frac{h}{H_0} \quad \lambda_2 = \frac{r}{R_0} \quad \lambda_3 = \frac{z}{z_0}$$

Le gradient des vitesses s'écrit dans le repère  $\vec{e}_r, \vec{e}_\omega, \vec{e}_z$  :  $V = D + W$

$$D : \begin{pmatrix} \dot{\epsilon}_1 & 0 & 0 \\ 0 & \dot{\epsilon}_2 & \dot{\gamma}/2 \\ 0 & \dot{\gamma}/2 & \dot{\epsilon}_3 \end{pmatrix} \quad W : \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dot{\gamma}/2 \\ 0 & -\dot{\gamma}/2 & 0 \end{pmatrix} \quad \epsilon_i = \text{Log } \lambda_i \quad \dot{\gamma} = \frac{\lambda_2}{\lambda_3} \dot{s}$$

On peut définir de la même manière  $F^P, D^P, W^P$  et ensuite  $F^e, D^e, W^e$ . L'écriture de  $F^e$  et  $F^P$  n'étant définie qu'à une rotation près, si nous choisissons  $F^P$  de la même forme que  $F$ , alors  $F^e$  aura aussi la même forme.

b) Elasticité

En écrivant que  $B^e \approx 1 + 2 \xi^e$  avec  $\xi^e = \frac{1+\nu}{E} \left( \tau - \frac{\nu}{1+\nu} k(\tau) \right)$ ,  $\tau$  ayant les composantes  $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \tau \\ 0 & \tau & 0 \end{pmatrix}$  dans le repère  $\vec{e}_r, \vec{e}_\omega, \vec{e}_z$ , nous

obtenons les composantes de  $F^e$ :

$$F^e : \begin{pmatrix} \lambda_1^e & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2^e & \lambda_2^e S^e \\ 0 & 0 & \lambda_3^e \end{pmatrix} \quad \lambda_1^e \approx \lambda_2^e \approx 1 - \nu \frac{\sigma}{E}$$

$$\lambda_3^e = 1 + \frac{\sigma}{E}$$

$$\lambda_4^e \approx S^e \approx \frac{\tau}{G} \quad G = \frac{E}{2(1+\nu)}$$

Ceci n'est bien sûr valable que si  $\frac{\sigma}{E} \ll 1$  et  $\frac{\tau}{G} \ll 1$ .

En écrivant que  $\mathbb{V}^e = \mathbb{F}^e \mathbb{R}^e T$  est symétrique, on peut déterminer  $\mathbb{R}^e$ :

$$\mathbb{R}^e = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \tau/2G \\ 0 & -\tau/2G & 1 \end{pmatrix}$$

$\mathbb{R}^e$  étant petit ( $\frac{\tau}{2G} \ll 1$ ), nous prendrons alors dans la suite :

$$\mathbb{H}^p \simeq \mathbb{B}^p \quad \mathbb{D}^p \simeq \mathbb{D}^p \quad \mathbb{W} = \mathbb{R}^e \mathbb{R}^e T + \mathbb{M}^e \mathbb{W}^p \mathbb{R}^e T \simeq \mathbb{W}^p$$

c) Plasticité

Soient  $a_{ij}$  les composantes de  $\frac{\alpha^{PD}}{|\alpha^{PD}|}$  dans le repère  $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$  on a :

$$a_{12} = a_{13} = 0$$

$$a_{ii} = 0$$

$$a_{ij} a_{ij} = 1$$

Les lois d'évolution des déformations plastiques s'écrivent :

$$\mathbb{D}^p \simeq \mathbb{D}^p = \lambda \frac{\alpha^{PD}}{|\alpha^{PD}|} = \frac{1}{h} \left\langle \frac{\alpha^{PD}}{|\alpha^{PD}|} : \frac{\alpha^D}{G_1} \right\rangle \frac{\alpha^{PD}}{|\alpha^{PD}|} \quad |\alpha^{PD}| = \sqrt{\frac{2}{3}} \sigma_e$$

ce qui permet d'écrire :

$$(67) \quad \dot{\varepsilon}_1^p = \frac{a_{11}}{2a_{23}} \frac{\lambda_2^p}{\lambda_3^p} \dot{\gamma}^p$$

$$(68) \quad \dot{\varepsilon}_2^p = \frac{a_{22}}{2a_{23}} \frac{\lambda_2^p}{\lambda_3^p} \dot{\gamma}^p$$

$$(69) \quad \dot{\varepsilon}_3^p = \frac{a_{33}}{2a_{23}} \frac{\lambda_2^p}{\lambda_3^p} \dot{\gamma}^p$$

$$(70) \quad \frac{\lambda_2^p}{\lambda_3^p} \dot{\gamma}^p = \frac{2 a_{23} (2 a_{23} \dot{\gamma}/G_1 + a_{33} \dot{\sigma}/G_1)}{h - 2 \left[ \frac{\tau}{G_1} (a_{33} - a_{22}) - \frac{\sigma}{G_1} a_{23} \right]}$$

Pour les lois 2A, 2B il faut en plus écrire les lois d'évolution des composantes de  $\alpha$  soit :

$$(71) \quad \dot{\alpha}_{11} = \dot{\varepsilon}_1^p \quad \text{donc} \quad \alpha_{11} = \varepsilon_1^p$$

$$(72) \quad \left. \begin{aligned} \dot{\alpha}_{22} &= \alpha_{23} \dot{\gamma}^p + \dot{\varepsilon}_2^p \\ \dot{\alpha}_{33} &= -\alpha_{23} \dot{\gamma}^p + \dot{\varepsilon}_3^p \end{aligned} \right\} \quad \text{donc} \quad \alpha_{22} + \alpha_{33} = \varepsilon_2^p + \varepsilon_3^p$$

$$(74) \quad \dot{\alpha}_{23} = \frac{\dot{\gamma}^p}{2} (1 + \alpha_{33} - \alpha_{22})$$

La résolution de ce système différentiel ne peut se faire que numériquement. Nous utiliserons dans la suite la méthode de résolution de Rounge Kutta.

d) Réponse à un essai de torsion : (  $\sigma = 0$  )

Dans le cas de la torsion (  $\sigma = 0$  ),  $a_{11}$ ,  $a_{22}$  et  $a_{33}$  ne dépendent que des déformations poastiques . En s'aidant de la relation exprimant le seuil de plasticité (  $a_{ij} a_{ij} = 1$  ), on peut déterminer  $a_{23}$  en fonction des autres composants de  $\frac{\sigma^{p0}}{12\tau^{p0}}$

soit : 
$$a_{23}^2 = 1 - (a_{11}^2 + a_{22}^2 + a_{33}^2)$$

Les relations (67), (68) et (69) ne dépendent donc plus que des déformations plastiques.

Pour déterminer  $\alpha$ , on écrit d'après (62) :

$$(75) \quad \left( \frac{\alpha}{G_1} - e_{23}^p \right)^2 = \frac{2}{3} \frac{\sigma_e^2}{G_1^2} a_{23}^2 = \frac{2}{3} \frac{\sigma_e^2}{G_1^2} [1 - A]$$

$$A = a_{11}^2 + a_{22}^2 + a_{33}^2 = \frac{3}{2} \frac{G_1^2}{\sigma_e^2} [ e_{11}^{p0} + e_{22}^{p0} + e_{33}^{p0} ]$$

où les  $e_{ij}^p$  et  $e_{ij}^{p0}$  sont les composantes de  $\mathcal{E}^p$  et  $\mathcal{E}^{p0}$  respectivement.

Remarquons, dès maintenant, que A ne doit pas dépasser l'unité, or A varie avec les déformations plastiques et dépend paramétriquement du coefficient  $\frac{G_1}{\sigma_e}$ ; il faudra donc s'attendre à ce que le choix de  $\frac{G_1}{\sigma_e}$  soit limité.

Loi 1 A :  $\mathcal{E}^p = \mathcal{H}^p$

- $\vec{e}_r, \vec{e}_\omega, \vec{e}_z$  : repère d'observation .
- $\vec{e}_r, \vec{e}_{\tau_1}, \vec{e}_{\tau_3}$  : repère principal de  $\alpha$  .
- $\vec{e}_r, \vec{e}_{h_2}, \vec{e}_{h_3}$  : repère principal de  $\mathcal{H}^p$  ou de  $\mathcal{H}^p$  .

Soit  $\theta_h$  la rotation du repère principal de  $\mathcal{H}^p$  par rapport au repère d'observation, voir (Fig. III.10)

$$\begin{aligned} \operatorname{tg}(2\theta_h) &= \frac{2H_{23}^p}{H_{22}^p - H_{33}^p} \\ \operatorname{tg}(2\Psi_h) &= \frac{H_{33}^p - H_{22}^p}{2H_{23}^p} \end{aligned}$$

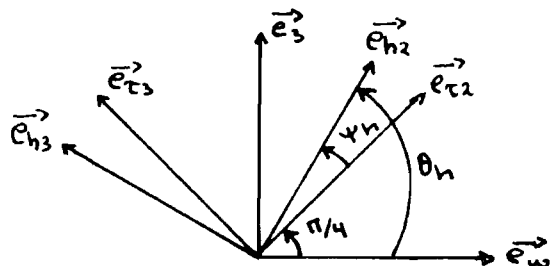


Fig. III.10 Directions principales

La résolution de ce système différentiel ne peut se faire que numériquement. Nous utiliserons dans la suite la méthode de résolution de Rounge Kutta.

d) Réponse à un essai de torsion : (  $\sigma = 0$  )

Dans le cas de la torsion (  $\sigma = 0$  ),  $a_{11}$ ,  $a_{22}$  et  $a_{33}$  ne dépendent que des déformations poastiques . En s'aidant de la relation exprimant le seuil de plasticité (  $a_{ij} a_{ij} = 1$  ), on peut déterminer  $a_{23}$  en fonction des autres composants de  $\frac{\alpha^{pp}}{|\alpha^{pp}|}$

soit :

$$a_{23}^2 = 1 - (a_{11}^2 + a_{22}^2 + a_{33}^2)$$

Les relations (67), (68) et (69) ne dépendent donc plus que des déformations plastiques.

Pour déterminer  $\alpha$  , on écrit d'après (62) :

$$(75) \quad \left( \frac{\alpha}{G_1} - e_{23}^{pp} \right)^2 = \frac{2}{3} \frac{\sigma_e^2}{G_1^2} a_{23}^2 = \frac{2}{3} \frac{\sigma_e^2}{G_1^2} [1 - A]$$

$$A = a_{11}^2 + a_{22}^2 + a_{33}^2 = \frac{3}{2} \frac{G_1^2}{\sigma_e^2} [ e_{11}^{pp} + e_{22}^{pp} + e_{33}^{pp} ]$$

où les  $e_{ij}^{pp}$  et  $e_{ij}^{pp}$  sont les composantes de  $\mathcal{E}^p$  et  $\mathcal{E}^{pp}$  respectivement.

Remarquons , dès maintenant, que A ne doit pas dépasser l'unité, or A varie avec les déformations plastiques et dépend paramétriquement du coefficient  $\frac{G_1}{\sigma_e}$  ; il faudra donc s'attendre à ce que le choix de  $\underline{G_1}$  soit limité.

Loi 1 A :  $\mathcal{E}^p = \mathcal{H}^p$

- $\vec{e}_r, \vec{e}_w, \vec{e}_z$  : repère d'observation .
- $\vec{e}_r, \vec{e}_{\tau_2}, \vec{e}_{\tau_3}$  : repère principal de  $\alpha$  .
- $\vec{e}_r, \vec{e}_{h_2}, \vec{e}_{h_3}$  : repère principal de  $\mathcal{H}^p$  ou de  $\mathcal{H}^p$  .

Soit  $\theta_h$  la rotation du repère principal de  $\mathcal{H}^p$  par rapport au repère d'observation , voir (Fig. III.10)

$$\text{tg}(2\theta_h) = \frac{2H_{23}^p}{H_{22}^p - H_{33}^p}$$

$$\text{tg}(2\psi_h) = \frac{H_{33}^p - H_{22}^p}{2H_{23}^p}$$

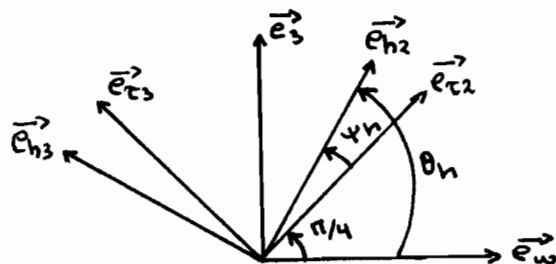


Fig. III.10 Directions principales

Au départ,  $H_{33}^p = H_{22}^p = 1$ ,  $H_{23}^p = 0$ ,  $\theta_h = \pi/4$  et  $\Psi_h = 0$

Soient  $H_i^p$  les valeurs propres de  $H^p$

$$H_1^p = H_{11}^p = \lambda_1^p$$

$$H_2^p = \frac{H_{22}^p + H_{33}^p}{2} + \frac{H_{23}^p}{\cos 2\Psi_h} = \frac{\lambda_2^p (1 + s^p) + \lambda_3^p}{2} + \frac{\lambda_2^p \lambda_3^p s^p}{\cos 2\Psi_h}$$

$$H_3^p = \frac{H_{22}^p + H_{33}^p}{2} - \frac{H_{23}^p}{\cos 2\Psi_h} = \frac{\lambda_2^p (1 + s^p) + \lambda_3^p}{2} - \frac{\lambda_2^p \lambda_3^p s^p}{\cos 2\Psi_h}$$

Et donc les composantes de  $H^p$  dans  $\vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_z$  :

$$h_{11}^p = \varepsilon_1^p$$

$$h_{22}^p = -\frac{\varepsilon_1^p}{2} - \frac{\sin 2\Psi_h}{4} \text{Log} \frac{H_2^p}{H_3^p}$$

$$h_{33}^p = -\frac{\varepsilon_1^p}{2} + \frac{\sin 2\Psi_h}{4} \text{Log} \frac{H_2^p}{H_3^p}$$

$$h_{23}^p = \frac{1}{4} \cos 2\Psi_h \text{Log} \frac{H_2^p}{H_3^p}$$

On peut donc écrire les composantes  $a_{ij}$  :

$$a_{11} = \frac{1}{3} (-2h_{11}^p + h_{22}^p + h_{33}^p) \frac{G_1}{\sqrt{\frac{2}{3}} \sigma_e}$$

$$a_{22} = \frac{1}{3} (h_{11}^p - 2h_{22}^p + h_{33}^p) \frac{G_2}{\sqrt{\frac{2}{3}} \sigma_e}$$

$$a_{33} = \frac{1}{3} (h_{11}^p + h_{22}^p - 2h_{33}^p) \frac{G_3}{\sqrt{\frac{2}{3}} \sigma_e}$$

$$a_{23} = \left( \frac{\tau}{G_1} - h_{23}^p \right) \frac{G_1}{\sqrt{\frac{2}{3}} \sigma_e}$$

On constate aisément que la solution du problème donne :

$$\underline{\underline{\varepsilon_1^p = 0}}$$

c'est-à-dire que le tube garde la même épaisseur au cours de la déformation.

Il ne reste donc qu'une seule équation à intégrer :

$$(76) \quad d\varepsilon^p = \frac{-e_{33}^{p0} e^{-2\varepsilon^p}}{2 \left[ \frac{\sigma_c^2}{3G_1^2} - e_{33}^{p0} \right]^{1/2}} ds^p$$

avec :

$$e_{33}^{p0} = \frac{\sin 2\psi_h}{4} \operatorname{Log} \left( \frac{(1+s^p^2 + \lambda^p^4) \cos 2\psi_h + 2\lambda^p^2 s^p}{(1+s^p^2 + \lambda^p^4) \cos 2\psi_h - 2\lambda^p^2 s^p} \right)$$

$$\operatorname{tg}(2\psi_h) = \frac{1+s^p^2 - \lambda^p^4}{2\lambda^p^2 s^p}$$

sachant que :  $\lambda = \lambda_3 = \frac{1}{\lambda_2^p}$   $\varepsilon^p = \varepsilon_3 = -\varepsilon_2$

$\frac{\sigma_c}{G_1}$  doit être choisi de manière à ce que A n'atteigne pas l'unité :

$$(77) \quad A = \frac{3G_1^2}{\sigma_c^2} e_{33}^{p0}$$

$\varepsilon$  se calcule par la relation (75) soit :

$$(78) \quad \frac{\varepsilon}{G_1} = \sqrt{\frac{2}{3}} \frac{\sigma_c}{G_1} [1-A]^{1/2} + e_{33}^p$$

$$e_{33}^p = \frac{\cos 2\psi_h}{4} \operatorname{Log} \left( \frac{(1+s^p^2 + \lambda^p^4) \cos 2\psi_h + 2\lambda^p^2 s^p}{(1+s^p^2 + \lambda^p^4) \cos 2\psi_h - 2\lambda^p^2 s^p} \right)$$

Loi 1 B :  $\varepsilon^p = \frac{1}{2} (\eta^p - 1)$

La détermination des  $Q_{ij}$  est immédiate. On constate que dans ce cas,

$$\underline{\varepsilon^p_1 = \varepsilon^p_3} \quad \left( \frac{h}{H_0} = \frac{3}{\varepsilon_0} \right)$$

et donc il ne reste qu'une seule équation à intégrer :

$$(79) \quad d\varepsilon^p = \frac{-e_{33}^{p0} e^{-3\varepsilon^p}}{2 \left[ \frac{\sigma_c^2}{3G_1^2} - e_{33}^{p0} \right]^{1/2}} ds^p$$

sachant que :  $\lambda^p = \lambda_1^p = \lambda_3^p = \frac{1}{\sqrt{\lambda_2^p}}$   $\varepsilon^p = \varepsilon_1 = \varepsilon_3 = -\frac{1}{2} \varepsilon_2$

$$(80) \quad A = 9 \frac{G_1^2}{\sigma_c^2} e_{33}^{p0}$$

$$(81) \quad \frac{\varepsilon}{G_1} = \sqrt{\frac{2}{3}} \frac{\sigma_c}{G_1} [1-A]^{1/2} + e_{33}^{p0}$$

$$e_{23}^{p0} = \frac{s^p}{2\lambda^p}$$



Loi 2.A. :  $\epsilon^P = \alpha \quad \alpha^J = \bar{D}^P$

Les  $\alpha_{ij}$  s'écrivent directement en fonction des  $\alpha_i^j$ . On a dans ce cas :

$$\underline{\alpha_{11} = \epsilon^P_1 = 0}$$

en Notant :  $\alpha = \alpha_{33} = -\alpha_{22}$

$$\epsilon^P = \epsilon^P_{33} = -\epsilon^P_{22}$$

Il reste à résoudre un système de trois équations différentielles :

$$(82) \quad \begin{cases} d\alpha = \left[ 1 + \frac{2\alpha_{23}}{\alpha} \left( \frac{\sigma_c^2}{3G_1^2} - \alpha^2 \right)^{1/2} \right] d\epsilon^P \\ d\alpha_{23} = - \left( \frac{1+2\alpha}{\alpha} \right) \left[ \frac{\sigma_c^2}{3G_1^2} - \alpha^2 \right]^{1/2} d\epsilon^P \\ d\epsilon^P = - \frac{\alpha}{2} e^{-2\epsilon^P} \left[ \frac{\sigma_c^2}{3G_1^2} - \alpha^2 \right]^{-1/2} d\alpha \end{cases}$$

$$(83) \quad A = 3 \frac{G_1^2}{\sigma_c^2} \alpha^2$$

$$(84) \quad \frac{\pi}{G_1} = \sqrt{\frac{2}{3}} \frac{\sigma_c}{G_1} [1-A]^{1/2} + \alpha_{23}$$

Loi 2.B. :  $\epsilon^P = \frac{1}{2} [\exp(2\alpha) - 1] \quad \alpha^J = \bar{D}^P$

En faisant le même raisonnement que pour 1.A., on peut calculer les composantes de  $\epsilon^P$  en fonction de celles de  $\alpha$  et de  $\psi_\alpha$  ou  $\psi_\alpha$

soit :

$$(85) \quad \text{tg } 2\psi_\alpha = \frac{\alpha_{33} - \alpha_{22}}{2\alpha_{23}}$$

$$(86.a) \quad \alpha_1 = \alpha_{11}$$

$$(86.b) \quad \alpha_2 = \frac{\alpha_{22} + \alpha_{33}}{2} + \frac{\alpha_{23}}{\cos 2\psi_\alpha}$$

$$(86.c) \quad \alpha_3 = \frac{\alpha_{22} + \alpha_{33}}{2} - \frac{\alpha_{23}}{\cos 2\psi_\alpha}$$

$$(87.a) \quad \epsilon^P_{11} = \frac{1}{2} (e^{2\alpha_{11}} - 1)$$

$$(87.b) \quad \epsilon^P_{22} = \frac{1}{2} \left[ \frac{1}{2} (e^{2\alpha_2} + e^{2\alpha_3}) + \sin 2\psi_\alpha (e^{2\alpha_3} - e^{2\alpha_2}) - 1 \right]$$

$$(87.c) \quad e^{p_{33}} = \frac{1}{2} \left[ \frac{1}{2} (e^{2\alpha_2} + e^{2\alpha_3}) - \sin 2\psi_\alpha (e^{2\alpha_3} - e^{2\alpha_2}) - 1 \right]$$

$$(87.d) \quad e^{p_{23}} = \frac{1}{2} \cos 2\psi_\alpha (e^{2\alpha_2} - e^{2\alpha_3})$$

Dans ce cas,  $\Sigma^p_1 = \Sigma^p_3$  n'est pas solution et on doit résoudre un système de 5 Equations différentielles : 2 parmi les relations (67), (68) et (69), 2 parmi les relations (77), (78), et (79) et la relation (74) La détermination de  $\gamma$  se fait par la relation :

$$(88) \quad \frac{\gamma}{G_1} = \sqrt{\frac{2}{3}} \frac{\sigma_c}{G_1} [1 - A]^{1/2} + \alpha_{23}$$

$$(89) \quad A = \frac{G_1^2}{\sigma_c^2} (e^{p_{11}^2} + e^{p_{22}^2} + e^{p_{33}^2} - e^{p_{11}}e^{p_{22}} - e^{p_{11}}e^{p_{33}} - e^{p_{22}}e^{p_{33}})$$

Résultats numériques - (Torsion)

Les courbes des figures III.11.a.b.c.d. représentent l'évolution de  $\left(\frac{\tau - \tau_e}{G_1}\right)$  en fonction de  $s^p$  pour des valeurs différentes de  $\frac{\sigma_e}{G_1}$

On constate que pour les lois 2A et 2B, si  $\frac{\sigma_e}{G_1}$  est assez élevé, la courbe  $\left(\frac{\tau - \tau_e}{G_1}\right)$  oscille, ce phénomène est d'autant plus visible que  $\frac{\sigma_e}{G_1}$  est grand (voir courbes des figures III.12.a., III.12.b.)

Pour des valeurs faibles de  $\frac{\sigma_e}{G_1}$ , ce phénomène n'existe pas, mais  $\frac{\sigma_e}{G_1}$  ne doit pas être trop faible sinon A atteindra l'unité et donc il n'y aura plus de solution pour  $\tau$ .

Remarquons aussi que si l'on veut tenir compte d'une déformation plastique assez importante en supposant les déformations élastiques petites, il ne faut pas prendre  $\frac{\sigma_e}{G_1}$  trop faible.

Ce phénomène d'oscillation n'existe pas pour les lois 1A et 1B, nous avons tracé dans la figure III.13, pour  $\frac{\sigma_e}{G_1} = 5$  les courbes  $\left(\frac{\tau - \tau_e}{G_1}\right)(s^p)$  pour les lois 1A, 1B, 2A et 2B et pour des valeurs de  $s^p$  jusqu'à 7 (ce qui est très important).

Les courbes de la figure III.14 représentent l'évolution de  $\epsilon_3^p$ , en fonction de  $s^p$  pour les lois 1A, 1B, 2A et 2B et pour  $\frac{\sigma_e}{G_1} = 5$ .

Les courbes de la figure III.15 représentent l'évolution de  $\alpha_{23}$  en fonction de  $s^p$  par les lois 1A et 1B. ( $\frac{\sigma_e}{G_1} = 5$ )

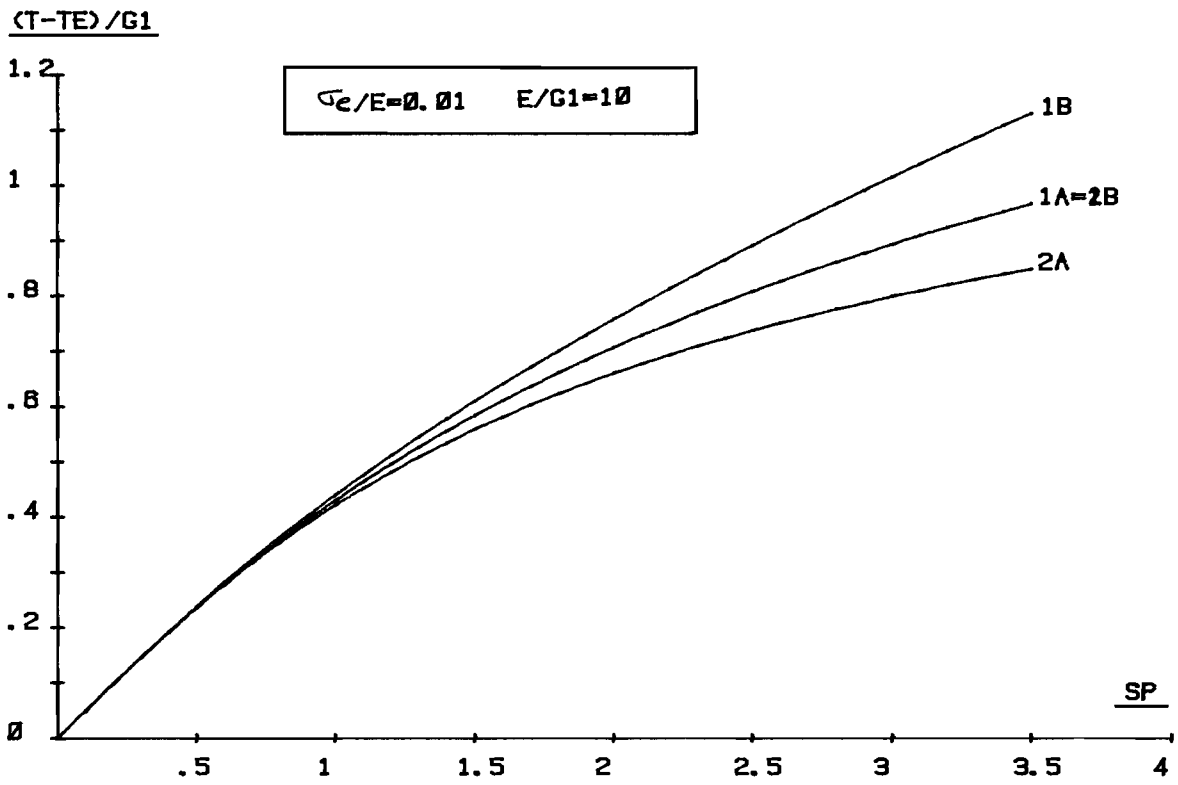


Fig.III.11.a.

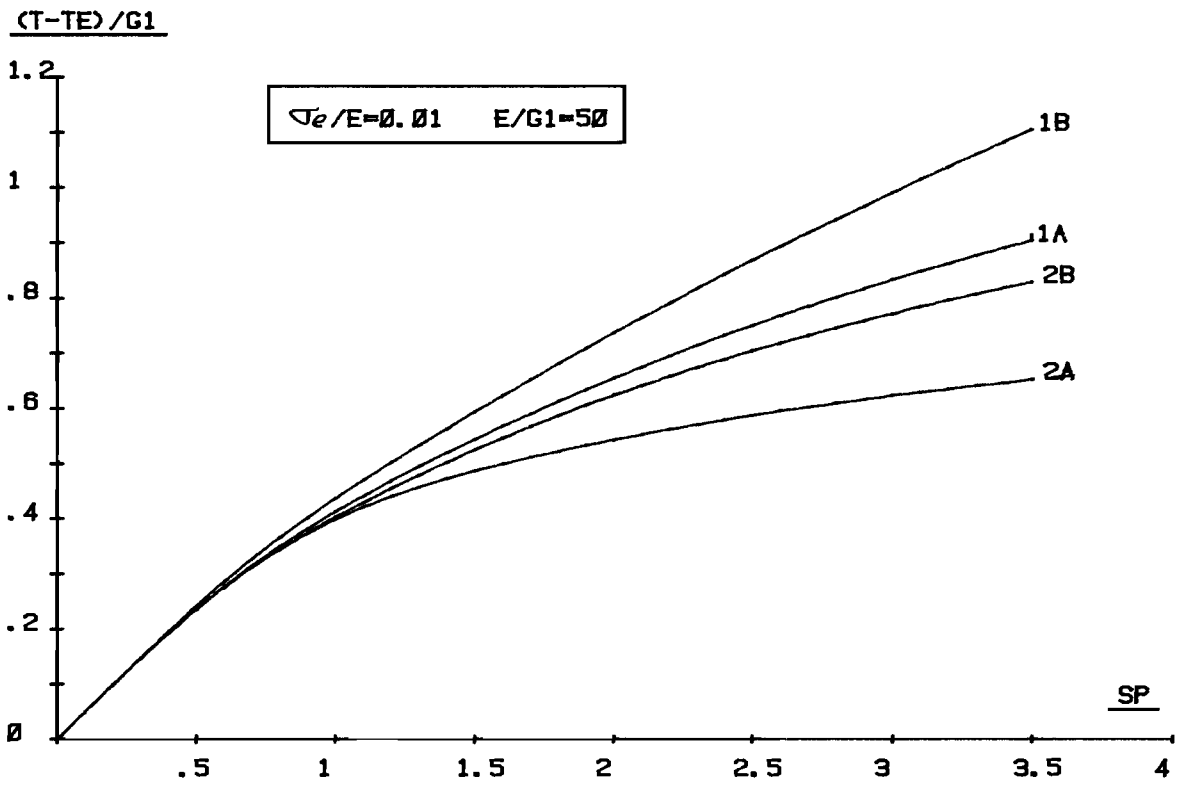


Fig.III.11.b.

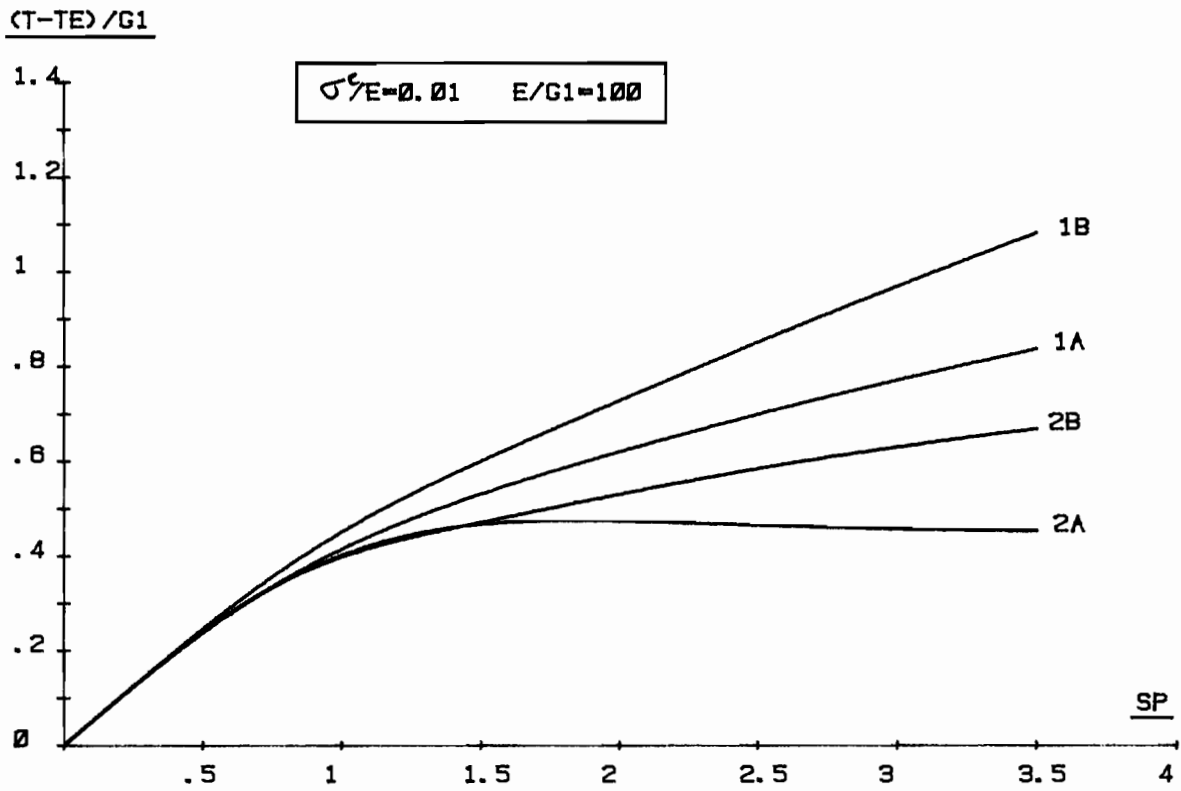


Fig.III.11.c.

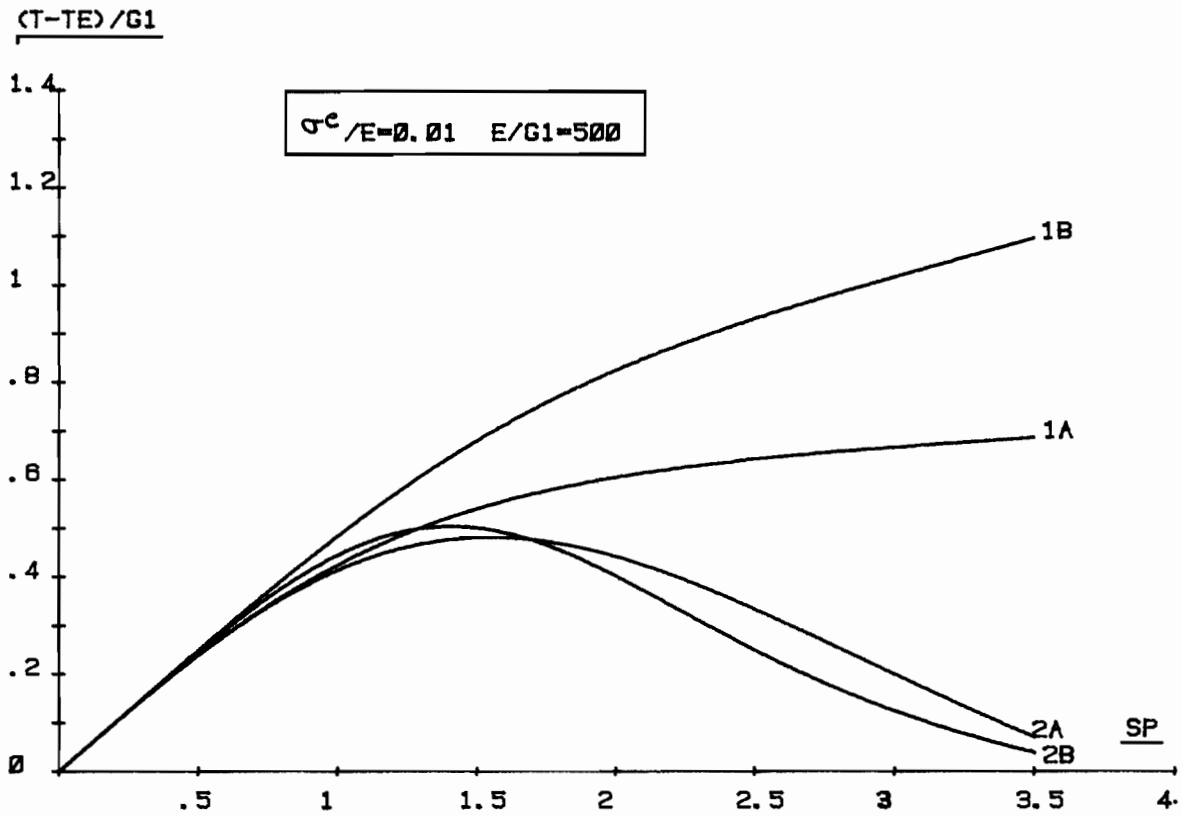
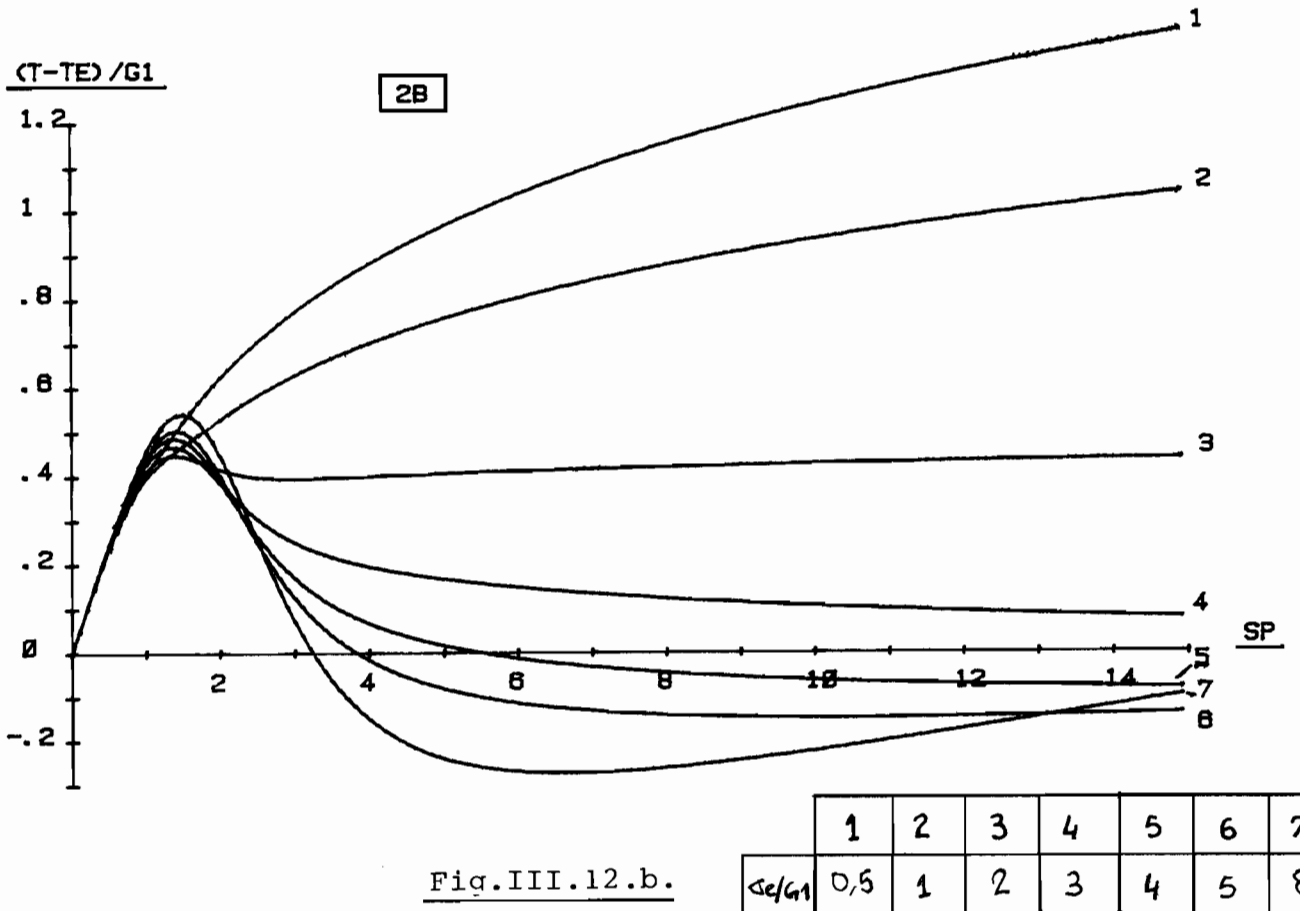
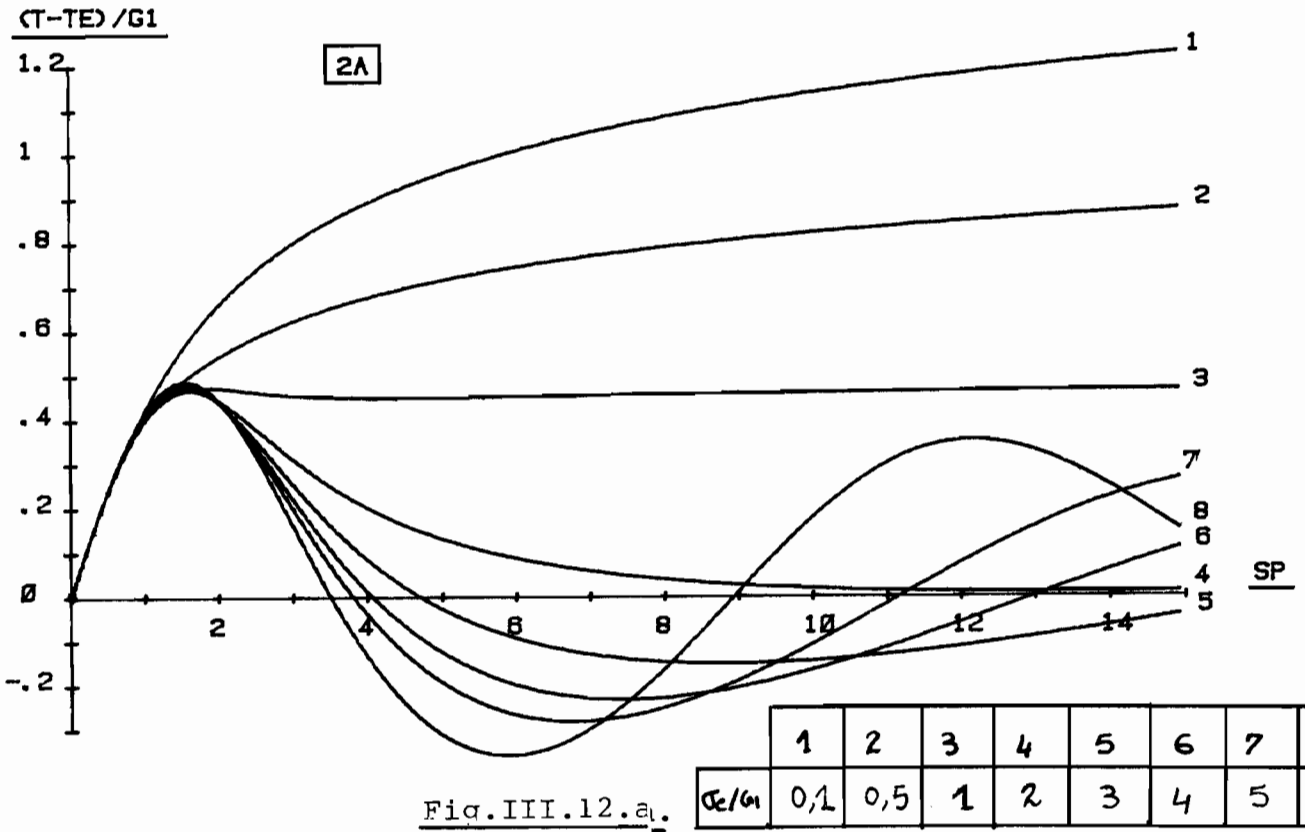


Fig.III.11.d.



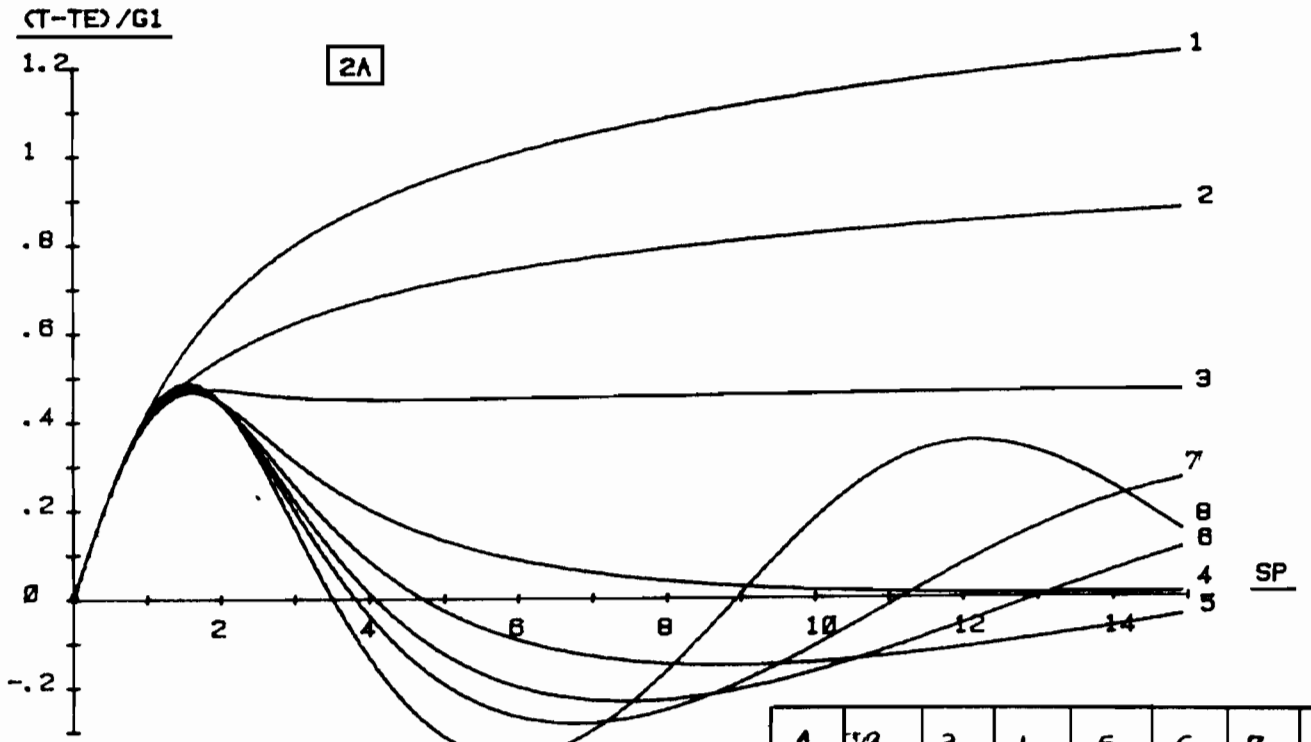


Fig. III.12.a.

	1	2	3	4	5	6	7	8
$G_e/G_1$	0,1	0,5	1	2	3	4	5	8

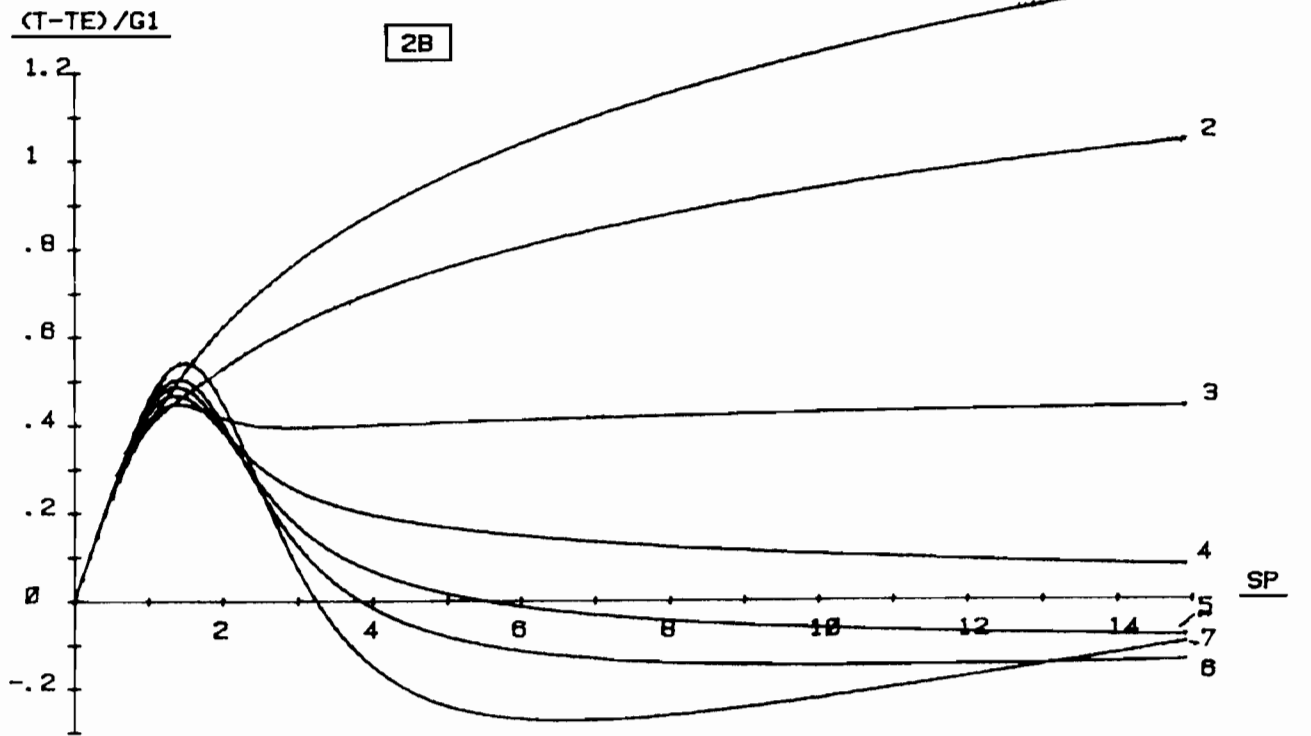


Fig. III.12.b.

	1	2	3	4	5	6	7
$G_e/G_1$	0,5	1	2	3	4	5	8

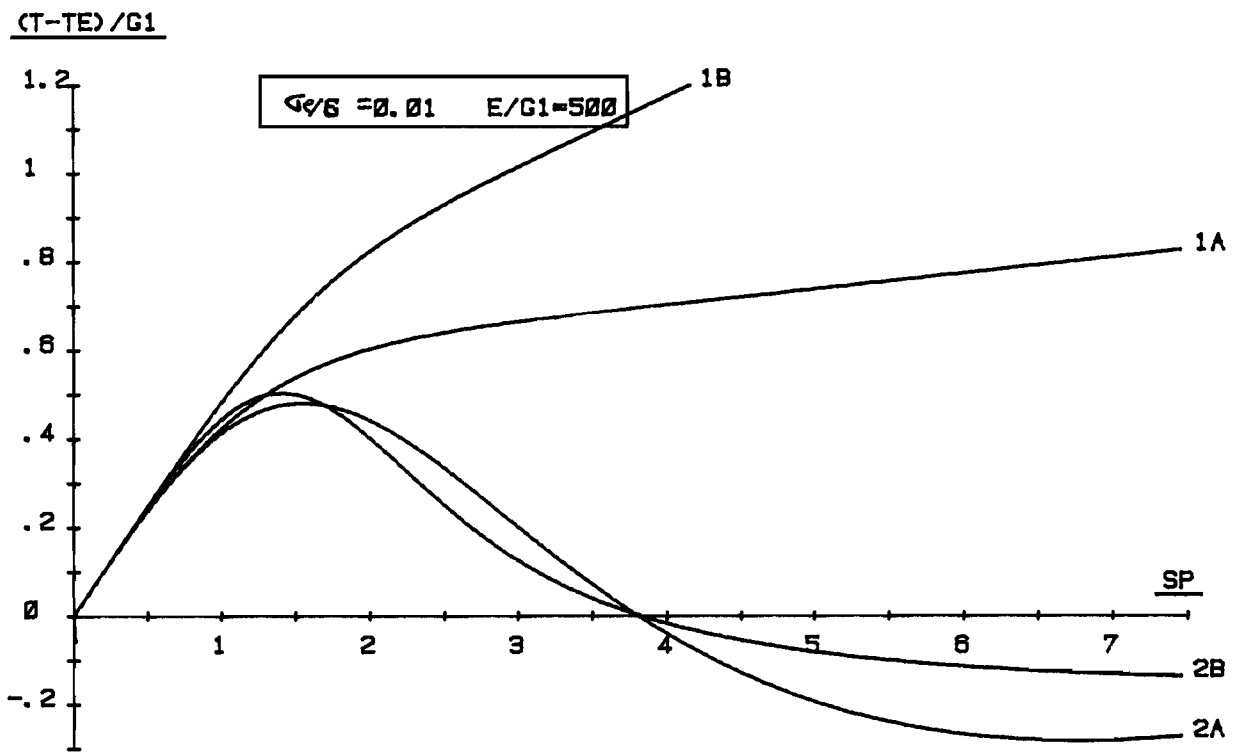


Fig.III.13.

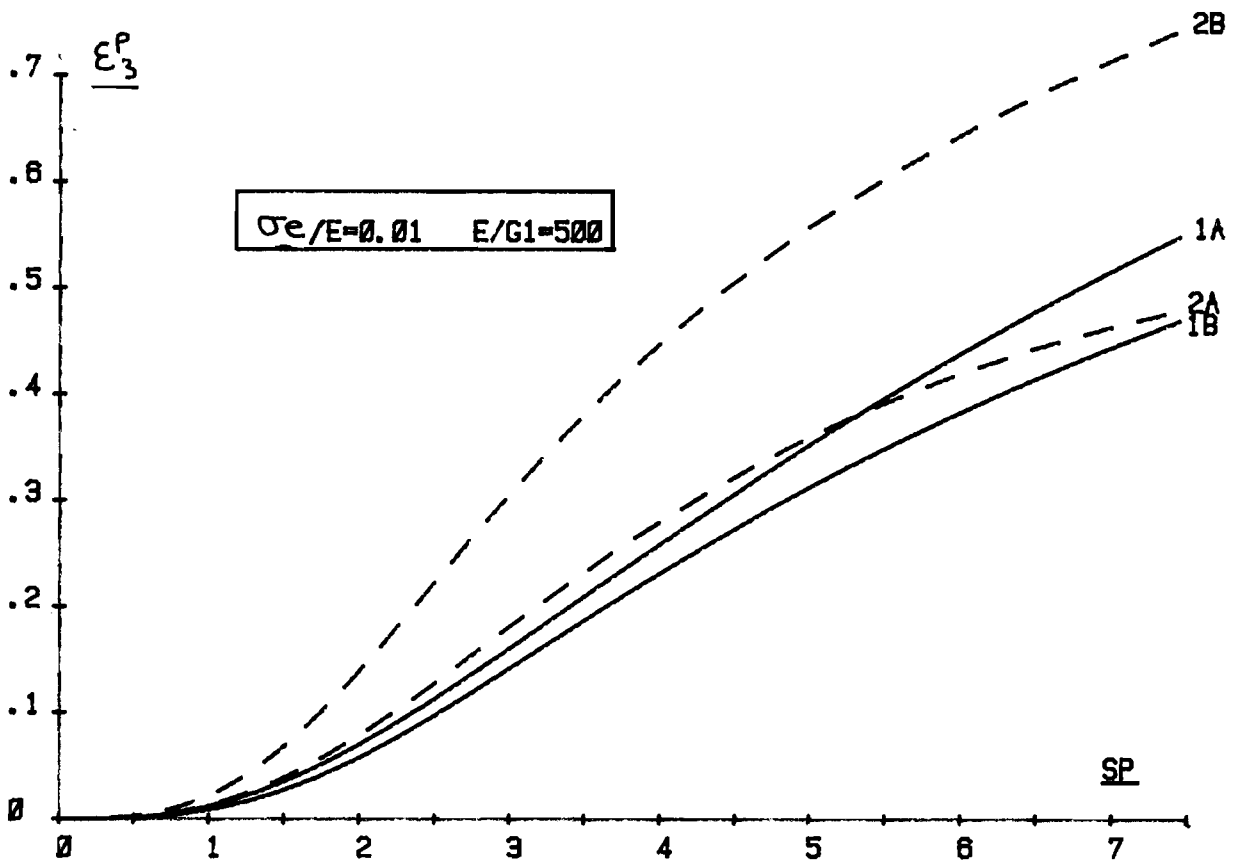


Fig.III.14.



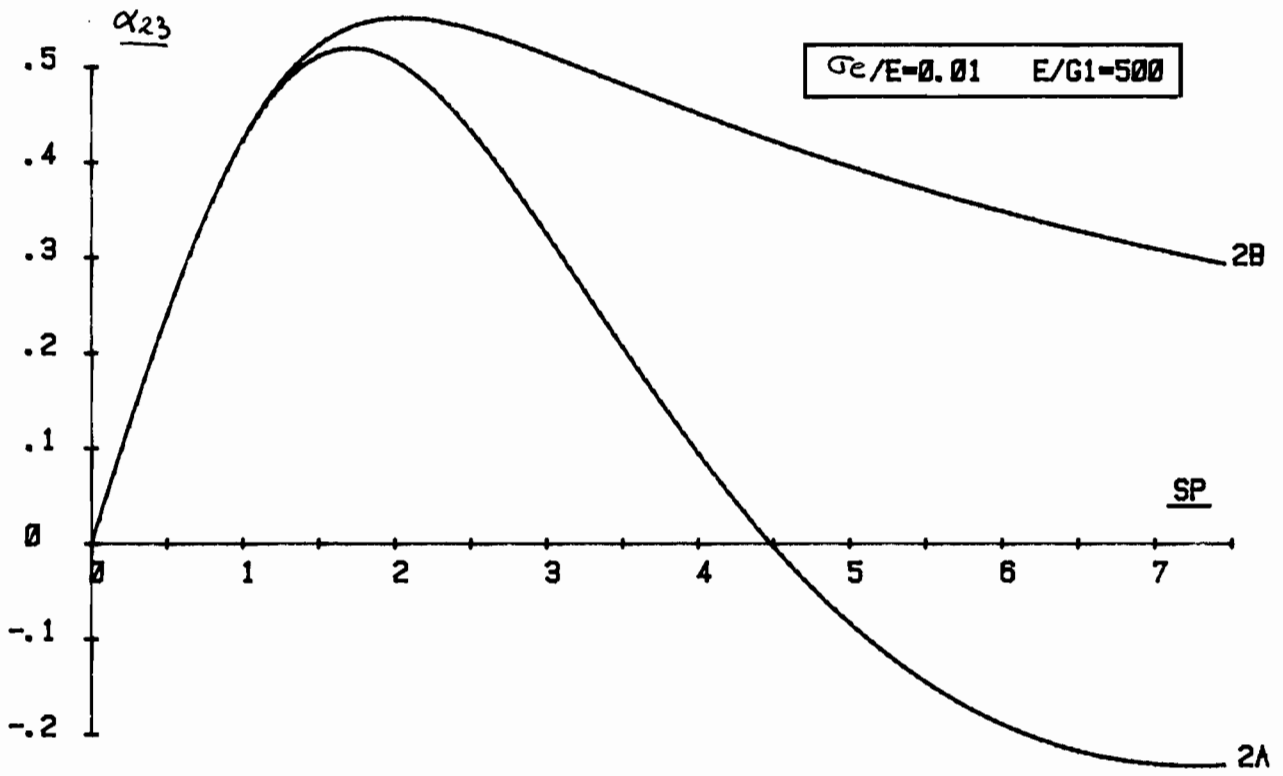


Fig.III.15.

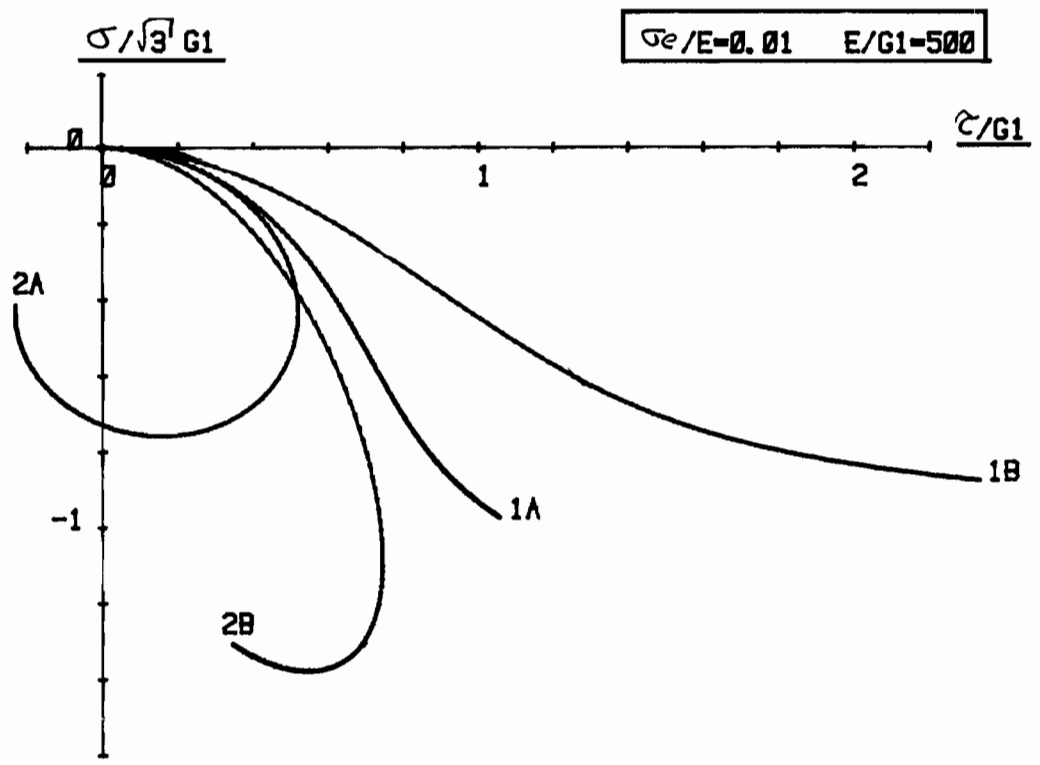


Fig.III.16.

# **CONCLUSIONS**

## CONCLUSIONS

Notre travail est une contribution à l'étude de l'élastoplasticité en grandes déformations (en supposant les déformations élastiques petites).

Notre but était essentiellement :

1. D'étendre aux grandes déformations des modèles petites déformations.
2. De décrire les difficultés et l'apport de la théorie des grandes déformations.
3. De dégager une méthodologie générale permettant l'extension aux grandes déformations de n'importe quelle loi petites déformations.

### . Ecouissage isotrope

L'extension aux grandes déformations de la loi de comportement de Prandtl-Reuss isotrope avec écouissage isotrope est maintenant bien acquise (dans le cadre de l'hypothèse des petites déformations élastiques) : les seules lois "correctes" sont les lois ( 10 ) et ( 11 ) du chapitre I. Ces lois sont équivalentes au premier ordre par rapport aux déformations élastiques.

L'unicité du modèle en grandes déformations vient essentiellement du fait que la variable interne d'écouissage est un scalaire et donc que le problème du choix de la dérivée objective à utiliser pour définir la loi d'évolution de la variable interne (problème rencontré dans le cas de l'écouissage cinématique) ne se pose pas dans ce cas.

### . Ecouissage cinématique

Le seul modèle d'écouissage cinématique linéaire standard peut s'étendre de plusieurs manières aux grandes déformations. En effet, plusieurs lois peuvent être proposées (Chapitre II) et qui qualitativement différent les unes des autres.

Pour proposer un modèle avec écrouissage cinématique, il faut écrire trois lois :

- a. La loi élastique  $\alpha(\xi^e)$  : les déformations élastiques étant petites, ce sera la loi linéaire classique.
- b. La loi d'évolution des déformations plastiques. Si le modèle est standard, la loi doit s'écrire :

$$\bar{D}^P = \lambda \frac{\partial f}{\partial \alpha^P} \quad \alpha^P = \alpha - \mathfrak{k}$$

- c. La loi d'évolution du tenseur  $\mathfrak{k}$ , déplacement du centre de la surface seuil. C'est essentiellement à partir de là que les lois diffèrent.

$\mathfrak{k}$  est la force thermodynamique associée à la variable interne d'écrouissage  $\alpha$ .  $\mathfrak{k}$  est donc fonction isotrope de  $\alpha$ .  
 Suivant le choix que l'on fait sur la relation entre  $\mathfrak{k}$  et  $\alpha$ , on peut obtenir des comportements qualitativement différents : c'est donc là une première différence entre les lois que l'on peut obtenir et une première latitude de choix.

La deuxième différence entre les lois est la définition de la variable interne  $\alpha$  selon qu'on la relie aux déformations plastiques directement ou par l'intermédiaire de sa loi d'évolution.

Dans le premier cas, c'est  $\mathfrak{k}$  qui est directement défini, sa loi d'évolution découle immédiatement de celle des déformations plastiques, donc la seule possibilité de choix est la forme de la relation :

$$(1) \quad \mathfrak{k}(\mathfrak{H}^P)$$

Dans le second cas, c'est la loi d'évolution de  $\mathfrak{k}$  qui est définie sous la forme générale :

$$(2) \quad \frac{D\mathfrak{k}}{Dt} = \frac{\partial \mathfrak{k}}{\partial \alpha} \left[ \frac{D\alpha}{Dt} \right] = \frac{\partial \mathfrak{k}}{\partial \alpha} \left[ \bar{D}^P \right]$$

A la liberté précédente ( $\mathbb{k}(\alpha)$ ) se superpose donc le choix de la dérivée objective  $\frac{D\mathbb{k}}{Dt}$  qui vérifie :

$$\mathbb{k} : \frac{D\mathbb{k}}{Dt} = \mathbb{k} : \dot{\mathbb{k}} \quad (\text{voir annexe III})$$

Tant qu'il n'y a aucune raison valable qui pousse à choisir une dérivée objective particulière, ce choix reste arbitraire.

Il semble donc qu'il soit préférable de choisir la première méthode et ceci pour trois raisons :

- La première est que dans ce cas, la définition de  $\mathbb{k}$  est directe et non pas par l'intermédiaire de sa loi d'évolution. Le problème du choix de la dérivée objective ne se pose donc pas.
- La seconde est que le choix de la fonction  $\mathbb{k}(\mathbb{M}^p)$  fournit déjà un degré de liberté permettant d'avoir des modèles qualitativement différents.
- La troisième raison enfin est que le choix arbitraire d'une dérivée objective peut introduire, dans le comportement, des singularités purement géométriques comme nous l'avons constaté au Chapitre III concernant les lois 2A et 2B utilisant la dérivée de Jauman.

Malheureusement, on ne peut pas toujours utiliser la première méthode, c'est le cas par exemple avec le modèle cinématique non linéaire proposé par J.L.Chaboche {5} et D.Marquis {27}.

Ce modèle est construit en posant :

$$(3) \quad \Psi = \Psi^e(\mathbb{E}^e) + \Psi^p(\alpha) + W(p)$$

$$(4) \quad f(\mathbb{M}, \alpha, R) = (\mathbb{M} - \mathbb{M})_n^0 - R - R_0 \leq 0 \quad \mathbb{M} = \frac{\partial \Psi^p}{\partial \alpha} \quad R = \frac{\partial W}{\partial p}$$

$$(5) \quad \dot{\mathbb{E}}^p = \lambda \frac{\partial f}{\partial \mathbb{M}} \quad \dot{p} = (\dot{\mathbb{E}}^p : \dot{\mathbb{E}}^p)^{1/2}$$

et au lieu de prendre, comme dans le cas du matériau standard généralisé,

$$\dot{\alpha} = \lambda \frac{\partial f}{\partial \alpha}, \text{ on prend :}$$

$$(6) \quad \dot{\alpha} = \dot{\mathbb{E}}^p - \Phi(p) * \dot{p}$$

Si  $\Phi(p)$  est positif, la dissipation est toujours positive ou nulle.

Pour étendre ce modèle aux grandes déformations, on va être amené à étendre la relation (6) et donc on va être confronté au problème du choix de la dérivée objective de  $\alpha$ .

On écrit :

$$(7) \quad \Psi = \Psi^e(B^e) + \Psi^p(\alpha) + W(p)$$

la dissipation s'écrit donc :

$$(8) \quad \alpha : \bar{D}^p - k : \dot{\alpha} - R \dot{p} \leq 0 \quad \alpha = 2\beta_0 \frac{\partial \Psi^e}{\partial B^e} \quad k = \beta_0 \frac{\partial \Psi^p}{\partial \alpha} \quad R = \frac{dW}{dP}$$

On choisit le critère sous la forme :

$$(9) \quad (\alpha - k)_D - R - R_0 \leq 0$$

et donc :

$$(10) \quad \bar{D}^p = \lambda \frac{\partial f}{\partial \alpha} \quad \dot{p} = (\bar{D}^p : \bar{D}^p)^{1/2}$$

$$(11) \quad \frac{D\alpha}{Dt} = \bar{D}^p - \phi(p) k \dot{p}$$

$\frac{D\alpha}{Dt}$  est une dérivée objective qui vérifie la relation

$$(12) \quad k : \frac{D\alpha}{Dt} = k : \dot{\alpha}$$

Le choix de  $\frac{D\alpha}{Dt}$  est multiple et tant que l'on n'a pas une raison précise pour en utiliser une seule, le problème reste ouvert.

C'est là une des difficultés essentielles de la théorie des grandes déformations.

#### . Anisotropie plastique et élastique induite.

Pour tenir compte sensiblement d'une déformation de la surface seuil ou d'une modification des propriétés élastiques par écrouissage, on ne peut pas se passer de la théorie des grandes déformations (voir chapitre II).

C'est donc là un apport non négligeable de la théorie des grandes déformations.

Nous avons, dans notre travail, (chapitre II), présenté un cadre pour l'étude de ces deux phénomènes, les exemples particuliers que nous avons développés ont juste un but d'illustration. Pour pouvoir approfondir cette étude, il faut disposer de données expérimentales qui malheureusement manquent actuellement.

. Cas triaxial ( pas de rotation)

Dans ce cas, toutes les difficultés liées à l'objectivité, aux choix des dérivées objectives, ... n'existent plus et donc tous les modèles qui diffèrent à cause de ces problèmes sont dans ce cas équivalents.

L'extension aux grandes déformations de modèles petites déformations, est quasiment directe, il suffit d'utiliser les déformations logarithmiques puisque dans ce cas :

$$\dot{B} = \frac{1}{2} \text{Log } B = \dot{B}^c + \dot{B}^p \quad \dot{D} = \dot{D}^c + \dot{D}^p \quad \dot{D}^c = \dot{B}^c \quad \dot{D}^p = \dot{B}^p$$

. Difficultés de la théorie grandes déformations

La première difficulté est le choix de la mesure des déformations à utiliser. Nous avons vu, par exemple, dans le chapitre III (différence entre la loi 1A et 1B) que des choix différents peuvent mener à des comportements qualitativement différents.

Le seul juge, dans ce cas, est l'expérience, or jusqu'à nos jours, l'expérimentation en grandes déformations est peu développée.

La deuxième difficulté est le choix des dérivées objectives si l'on a à définir une loi d'évolution. Dans ce cas, des influences purement géométriques peuvent s'introduire dans la loi de comportement si ce choix n'est pas correctement fait.

Nous pensons que pour résoudre ce problème, il faut développer encore l'étude théorique et bien sûr, avoir des données expérimentales plus précises.

. Méthodologie d'extension aux grandes déformations de lois petites déformations.

Nous pouvons tirer deux remarques essentielles de cette étude :

1. Il semble qu'il est préférable d'étendre les hypothèses de base qui ont permis la construction du modèle, que d'étendre sa loi incrémentale directement.
2. En présence de variables internes tensorielles, il est toujours préférable de définir ces variables internes directement que par l'intermédiaire d'une loi d'évolution.

. Matériau initialement isotrope.

C'est une des hypothèses de base de notre travail. Pour pouvoir décrire une anisotropie initiale, il faut introduire d'autres variables internes, c'est une seconde étape d'étude qu'il faudra certainement développer.

Remarquons que souvent, une anisotropie initiale peut être considérée comme une anisotropie induite par rapport à une autre configuration de référence.

. Petites déformations élastiques.

Cette hypothèse nous a permis de développer assez loin les modèles proposés puisqu'elle simplifie beaucoup les formules. Il est bien évident que l'on peut développer les modèles proposés en n'utilisant pas cette hypothèse : la démarche sera la même mais les formules seront plus compliquées . Ce cas ne semble pas présenter d'intérêt pratique.

. Modèle avec écrouissage isotrope et cinématique.

Nous avons développé séparément tous les cas types d'écrouissage. En annexe ( Annexe V ) nous développons en détail un modèle avec écrouissage cinématique et isotrope en vue de son utilisation dans des codes de calcul numérique.



## BIBLIOGRAPHIE

---

- 1 BALTOV - SAWCZUCK (1975)  
"A rule of anisotropic hardening".  
Acta Mecanica -
- 2 BOEHLER J.P. (1975)  
"Contributions Théoriques et expérimentales à l'étude  
des milieux plastiques anisotropes".  
Thèse de Docteur es Sciences - Univ.Scient.& Med. Grenoble
- 3 BOEHLER J.P. ( 1978 )  
"Lois de comportement anisotrope des milieux continus".  
Journal de Mécanique, Vol. 17 n° 2 - 1978 - pp.153-190
- 4 BOEHLER J.P.- RACLIN J. (1980)  
"Evolution du critère de plasticité des tôles minces  
d'acier doux préformées".  
Rapport GRECO N° 14/1980.
- 5 CHABOCHE J.L. (1977)  
"Sur l'utilisation des variables internes d'état pour la  
description du comportement viscoplastique et de la  
rupture par endommagement".  
Symposium Franco-Polonais - Problèmes non linéaires de  
mécanique - Cracovie 1977-
- 6 CORDEBOIS J.P. - LADEVEZE P. (1981)  
"Critère de striction des tôles anisotropes embouties".  
Rapport GRECO n° 26/1981.
- 7 DETRAUX J.M. - ROELANDT J.M.- TOUZOT G. (1981)  
"Formulation et exemple de calcul de plaque entaillée en  
grandes déformations élastoplastiques".  
Rapport GRECO N° 39/1981.

- 8 DOGUI A. - SIDOROFF F. (1981)  
"Anisotropic hardening in large elastoplastic strain"  
Colloque CNRS. Anisotropie -Villard-de-Lans Juin 1981
- 9 DROBYSZ S. - DESBORDES O. (1982)  
"Simulations numériques de lois de comportement  
élastoplastiques en grandes déformations".  
Rapport GRECO N° 74/1982.
- 10 GERMAIN P. (1973)  
"Cours de mécanique des milieux continus" T.I : théorie  
générale.  
Editeur MASSON - Paris
- 11 GREEN A.E. - NAGHDI P.M. (1965)  
"A general theory of an elastic plastic continuum".  
Archives for Rational Mechanics and Analysis.  
Vol. 18 - 1965 - pp. 251/281.
- 12 GREEN A.E. - NAGHDI P.M. (1971)  
"Some Remarks on elastic plastic deformations at  
finite strain".  
Int. J. of Engineering science. Vol.9 -1971 -pp.1219/1229
- 13 HALPHEN B. - NGUYEN QUOC SON (1975)  
"Sur les matériaux standard généralisés".  
Journal de Mécanique - Vol 14 N° 1 - 1975 -
- 14 HILL R. (1959)  
"Some basic principles in the mechanics of solids  
without a natural time".  
J. Mech. Phys. & Solids - 1959- Vol.7 - pp.209/225
- 15 HILL R. (1968)  
"On constitutive inequalities for simple materials" I ".  
J.Mech. Phys. & Solids - 1968 -Vol.16 -pp.229/242

- 16 HILL R. (1968)  
"On constitutive inequalities for simple materials. II".  
J. Mech. Phys. & Solids - 1968- Vol.16 - pp.315/322.
- 17 LADEVEZE P. (1980)  
"Sur la théorie de la plasticité en grandes dzformations".  
Rapport interne n° 9 - ENSET Cachan 1980.
- 18 LEE E.H. (1969)  
"Elastic plastic deformation at finite strains".  
J.App.Mech. Vol. 36 - 1969 - P.1/6
- 19 LEE E.H. (1981)  
"Some comments on elastic plastic analysis".  
Int.J.Solids Structures - Vol. 17 - 1981 - pp.859/872.
- 20 LEE E.H.- MALLET R.L. - WERTHEIMER T.B. (1981)  
"Stress analysis for kinemating hardening in finite  
deformation plasticity".  
Sudam Report n° 81-11 - December 1981.
- 21 LUBARDA V.A. - LEE E.H. (1980)  
"A correct definition of elastic and plastic deformation  
and its computational significance".  
Sudam Report - n° 80-1 - January 1980.
- 22 MANDEL J. (1971)  
"Plasticité classique et viscoplasticité".  
Cours C.I.S.M. - Udine - Springer 1971.
- 23 MANDEL J. (1974)  
"Introduction à la mécanique des milieux continus déformables".  
Académie Polonaise de Sciences I.R.F.T. Edit.Scient. Pologne.
- 24 MANDEL J. (1973)  
"Equations constitutives et directeurs dans les milieux  
plastiques et viscoplastiques".  
Int.J. Solids Structures - 1973 - Vol.9 - pp.725/740.

- 25 MANDEL J. (1981)  
"Sur la définition de la vitesse de déformation élastique  
et sa relation avec la vitesse de contraintes".  
Int.J. Solids . Structures - 1981 - Vol.17 - pp.873/878.
- 26 MANDEL J. (1982)  
"Définition d'un repère privilégié pour l'étude des transfor-  
mations anélastiques du polycristal".  
Journal de Mécanique théorique et appliquée.Vol.1 n° 1 1982  
pp.7/23.
- 27 MARQUIS D. (1979)  
"Modélisation et identification de l'écrouissage anisotrope  
des métaux".  
Thèse de 3è cycle - ENSET Paris IV.
- 28 Mc MEEKING R.M. - RICE J.R. (1975)  
"Finite element formulation for problems of large elastic  
plastic deformation".  
Int. J.Solids Structures - 1975- Vol.11 - pp.601/616.
- 29 Mc MEEKING R.M. (1982)  
"The finite strain tension -trosion Test of a thin-walled  
tube of elastic-plastic material".  
Int.J.Solids -Structures- Vol.18 - N°3 - pp. 199/204 - 1982.
- 30 MICHNO - FINDLEY (1976)  
"An historical per spective of Yield surface investigations  
for metals".  
Int. J. Of Non Linear Mechanics - 1976 - Vol.11 - pp.59/82.
- 31 MROZ Z. (1967)  
"In the description of anisotropic workhardening".  
J.Mech.Phys. Solids - Vol.15 - 1967 - pp.163/175.
- 32 MRØZ Z. - SHRIVASTAVA H.P. - DUBEY R.N.  
" Yield Criterium and the hardening rule for a plastic solid"  
ZAMN 53 , pp.625/633.

- 33 NAGHDI D.M. - TRAPP J.A. (1974)  
"On finite elastic-plastic deformation of metals".  
J.Appl.Mech. Vol. 41 - 1974 - pp. 245/260
- 34 PREDELEANU M. (1980)  
"Sur le calcul des grandes déformations élastoplastiques".  
Rapport GRECO N° 17/1890.
- 35 SIDOROFF F. (1973)  
"The geometrical concept of intermediate configuration and  
elastic plastic finite strain".  
Archives of Mechanics - 1973 - 25.2. pp. 299/308.
- 36 SIDOROFF F. (1975)  
"On the formulation of plasticity and viscoplasticity with  
internal variables".  
Archives of Mechanics - 1975 - 27.5.6. - pp. 807/829.
- 37 SIDOROFF F. (1978)  
"Sur l'équation tensorielle  $\dot{A} + A = H$ "  
C.R. Acad.Sc. Paris - T. 286 - 9 janvier 1978.
- 38 SIDOROFF F. (1981)  
"Formulations élastoplastiques en grandes déformations".  
Rapport GRECO N° 29/1981.
- 39 SIDOROFF F. (1982)  
"Incremental constitutive equations for large strain  
elastoplasticity".  
Int.J. Engin. Sc. Vol. 20 - 1982 - pp. 19/26.
- 40 SIDOROFF F. (1982)  
"Cours sur les grandes déformations".  
Rapport GRECO n° 51/1982.
- 41 SIDOROFF F. (1982)  
"Ecrouissage cinématique et anisotropie induite en grandes  
déformations élastoplastiques".
- 42 STOLZ C. (1982)  
Contribution à l'étude des grandes transformations en élasto."  
Thèse de Docteur Ingénieur .E.C.N.P.(1982)

# **ANNEXES**

ECROUISSAGE ISOTROPE

1. Ecriture de la loi  $\alpha(D)$

On se propose de refaire un calcul analogue à celui en {39} mais en utilisant  $\alpha$  au lieu de  $\pi$ . On utilisera les mêmes hypothèses d'incompressibilité plastique, d'isotropie initiale et de matériaux standard généralisés.

On part comme en {39} de l'écriture de l'énergie libre :

$$(1) \quad \Psi = \Psi^e(B^e) + \Phi(p) \quad p: \text{variable interne d'écouissage}$$

En écrivant la dissipation, on arrive aisément aux relations suivantes :

$$\alpha = 2\rho_0 B^e \frac{\partial \Psi}{\partial B^e} = \alpha(B^e)$$

$$\alpha : \dot{D}^p - A_0 \dot{p} \geq 0 \quad A_0 = \rho_0 \frac{\partial \Phi}{\partial p} = \rho_0 \Phi'(p)$$

En choisissant une fonction seuil de la forme :

$$(2) \quad \mathcal{F}(\alpha, A_0) = f(\alpha) - A_0 \leq 0$$

et en supposant le matériau standard généralisé, on écrit :

$$(3) \quad \dot{D}^p = \lambda \frac{\partial f}{\partial \alpha}$$

$$(4) \quad \dot{p} = -\lambda \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial A_0} = \lambda$$

Il reste à calculer  $\lambda$  en fonction de  $D$  et  $\dot{D}^p$  ou de  $\alpha^J$ , pour cela on écrit que  $f' - A_0 = 0$  en charge, soit donc :

$$\frac{\partial f}{\partial \alpha} : \alpha^J - A_0(p) \dot{p} = \frac{\partial f}{\partial \alpha} : \alpha^J - A_0(p) \lambda = 0$$

soit

$$(5) \quad \lambda = \frac{\langle \frac{\partial f}{\partial \alpha} : \alpha^J \rangle}{A_0(p)}$$

Dans le cas où les déformations élastiques restent petites, on peut prendre  $\Psi^e(B^e)$  de manière à avoir :

$$(6) \quad \mathcal{E}^e \approx \frac{1}{2} (B^e - \mathbb{1}) = \frac{1+\nu}{E} \alpha - \frac{\nu}{E} k(\alpha) \mathbb{1}$$

et donc :  $\epsilon^p = D - \bar{D}^p = \frac{1+\nu}{E} \alpha - \frac{\nu}{E} k(\alpha) \lambda$

soit  $D = \frac{1+\nu}{E} \alpha^J - \frac{\nu}{E} k(\alpha^J) \lambda + \frac{\langle \frac{\partial f}{\partial \alpha} : \alpha^J \rangle}{A'_0(p)} \frac{\partial f}{\partial \alpha}$

En utilisant le critère de Von Mises :

(7)  $|\alpha^p| - A_0(p) \leq 0 \quad |\alpha^p| = (\alpha^p : \alpha^p)^{1/2}$

On arrive à la relation :

(8) 
$$\left\{ \begin{array}{l} D = \frac{1+\nu}{E} \alpha^J - \frac{\nu}{E} k(\alpha^J) \lambda + \frac{\langle \alpha^p : \alpha^J \rangle}{A'_0(p) |\alpha^p|} \frac{\alpha^p}{|\alpha^p|} \\ \alpha^J = \frac{E}{1+\nu} \left\{ D + \frac{\nu}{1-2\nu} k(D) \lambda - \frac{\langle \alpha^p : D \rangle}{|\alpha^p| (1 + \frac{4\nu}{E} A'_0)} \frac{\alpha^p}{|\alpha^p|} \right\} \end{array} \right.$$

avec :

$\dot{p} = (\bar{D}^p : \bar{D}^p)^{1/2}$

La loi  $\alpha(D)$  trouvée est donc exactement équivalente à celle  $\pi(D)$  trouvée en {39}.

2. Identification de  $A(p)$  et  $A_0(p)$

L'identification se fait à partir d'un essai de traction.

La courbe expérimentale que l'on peut avoir facilement est la courbe :  $\frac{F}{S_0} = R(\epsilon^p)$  où  $F$  est la force exercée sur une éprouvette de section initiale  $S_0$  et  $\epsilon^p$  la déformation plastique logarithmique.

Identification de  $A(p)$

La loi de comportement donne : (  $\sigma$  étant la contrainte de Cauchy)

$$\left. \begin{array}{l} \dot{p} = \sqrt{\frac{3}{2}} \dot{\epsilon}^p \\ \dot{\sigma} = \sqrt{\frac{3}{2}} A'(p) \dot{p} \\ \epsilon = \epsilon^e + \epsilon^p = \frac{\sigma}{E} + \epsilon^p \\ \sigma = \frac{F}{S} \\ S = \frac{S_0}{\rho} S_0 e^{-\epsilon} = [1 + (1-2\nu) \epsilon^e] S_0 e^{-\epsilon} \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{array}{l} A(p) = \left(1 + \frac{2\nu}{E} \alpha\right) \sqrt{\frac{2}{3}} \alpha \\ \alpha = h\left(\sqrt{\frac{2}{3}} p\right) e^{\sqrt{\frac{2}{3}} p} \end{array}$$



Identification de  $A_0(p)$

La loi de comportement donne : ( $\tau$  étant la contrainte de Kirchhoff)

$$\left. \begin{aligned} \dot{\rho} &= \sqrt{\frac{2}{3}} \dot{\epsilon}^p \\ \dot{\tau} &= \sqrt{\frac{2}{3}} A'_0(p) \dot{\rho} \\ \epsilon &= \epsilon^e + \epsilon^p = \frac{\tau}{E} + \epsilon^p \\ \tau &= \frac{\rho_0}{\rho} \frac{F}{S} = \frac{F}{S_0} e^{\epsilon} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \begin{aligned} A_0(p) &= \left(1 + \frac{\tau}{E}\right) \sqrt{\frac{2}{3}} x \\ x &= h \left(\sqrt{\frac{2}{3}} \rho\right) e^{\sqrt{\frac{2}{3}} \rho} \end{aligned}$$

La différence entre  $A(p)$  et  $A_0(p)$  est donc de l'ordre deux par rapport aux déformations élastiques.

3. Loi  $\pi(D)$  identifiée à partir de la loi  $\sigma - \sigma_e = k \epsilon^p$

Pour un essai de traction, nous avons :

$$\rho = \sqrt{\frac{2}{3}} \epsilon^p \quad \sigma = \sqrt{\frac{2}{3}} A(\rho)$$

En prenant :  $\sigma = \sigma_e + k \epsilon^p$  nous avons alors :

$$A(\rho) = \sqrt{\frac{2}{3}} \left\{ \sigma_e + k \left(\frac{\rho}{\sqrt{\frac{2}{3}}}\right)^{n/2} \rho^{n/2} \right\} \quad A'(\rho) = n k \left(\frac{\rho}{\sqrt{\frac{2}{3}}}\right)^{\frac{n-1}{2}} \rho^{n-1}$$

essai de torsion :

On considère la torsion d'un tube assez mince pour pouvoir supposer que l'état de contraintes et de déformations est homogène.

La cinématique du tube mince en torsion est étudiée au Chapitre III , page 97, on pose :

$$F: \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \gamma \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix} \quad F^e: \begin{pmatrix} \lambda_1^e & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2^e & \gamma^e \\ 0 & 0 & \lambda_3^e \end{pmatrix} \quad F^p: \begin{pmatrix} \lambda_1^p & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2^p & \gamma^p = \lambda_2^p s^p \\ 0 & 0 & \lambda_3^p \end{pmatrix} \quad \pi: \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & T \\ 0 & T & 0 \end{pmatrix}$$

En supposant les déformations élastiques petites, nous avons :

$$\epsilon^e \approx \frac{1}{2} (1B^e - 1) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1+\nu}{E} T \\ 0 & \frac{1+\nu}{E} T & 0 \end{pmatrix} \quad \text{donc: } \gamma^e = 2 \left(\frac{1+\nu}{E}\right) T ; \lambda_i^e = 1$$

$$D^p \approx 1D^p = \begin{pmatrix} \dot{\epsilon}_1^p & 0 & 0 \\ 0 & \dot{\epsilon}_2^p & \frac{\dot{\lambda}_2^p}{\lambda_2^p} s^p \\ 0 & \frac{\dot{\lambda}_2^p}{\lambda_2^p} s^p & \dot{\epsilon}_3^p \end{pmatrix} \quad \epsilon_i^e = \log \lambda_i^e$$

$$1D^p = \lambda \frac{\pi^D}{1\pi^D} \quad \text{donc: } \begin{cases} \dot{\epsilon}_i^p = 0 & \lambda_i^p = 1 \\ \gamma^p = s^p \end{cases}$$

$$\dot{p} = (\overline{\overline{\sigma}}^p : \overline{\overline{\sigma}}^p)^{1/2} \quad \text{donc:} \quad \dot{p} = \frac{\dot{\gamma}^p}{\sqrt{2}} \quad p = \frac{\gamma^p}{\sqrt{2}}$$

$$|\Pi^0| - A(p) = 0 \quad \text{donc:} \quad \sqrt{2} T = \sqrt{\frac{2}{3}} \left\{ \sigma_e + K \left( \frac{2}{3} \right)^{n/2} \frac{\gamma^p h}{2^{n/2}} \right.$$

$$T = T_e + \frac{K}{\sqrt{2} 3^{n/2}} \gamma^p h \quad T_e = \frac{\sigma_e}{\sqrt{3}}$$

$$\gamma = \gamma^p + 2 \frac{(1+\nu)}{E} T$$

Sachant que la rotation unitaire de la section droite ( $\omega$ ) est :

$$\omega = \frac{\gamma}{R}$$

R étant le rayon moyen du tube.

$$\gamma = \underbrace{\frac{2(1+\nu)}{E} T}_{\text{élastique}} + \sqrt{3} \underbrace{\left[ \frac{\sqrt{2}}{K} (T - T_e) \right]^{1/n}}_{\text{plastique}}$$

élastique

plastique

ANNEXE II

ECROUISSAGE ANISOTROPE - ECRITURE DE LA DISSIPATION

1. Calcul de  $H^{PJ}$

1.1. Résultats préliminaires

(1)  $\underline{H^P = IR^e B^P IR^{eT}}$  donc  $\dot{H}^P = \dot{R}^e IR^{eT} H^P + H^P IR^e \dot{R}^{eT} + IR^e \dot{B}^P IR^{eT}$   
 $= \dot{R}^e IR^{eT} H^P - H^P \dot{R}^e IR^{eT} + IR^e (\dot{I} B^P + B^P \dot{I} B^T) IR^{eT}$   
 $= \dot{D}^P H^P + H^P \dot{D}^P - H^P (\dot{R}^e IR^{eT} + IR^e \dot{W}^P IR^{eT}) + (\dot{R}^e IR^{eT} + IR^e \dot{W}^P IR^{eT}) H^P$

Soit donc :

(2)  $H^{PJ} = \dot{D}^P H^P + H^P \dot{D}^P + H^P (\dot{W} - \dot{\tilde{W}}) - (\dot{W} - \dot{\tilde{W}}) H^P$   
 (3)  $\dot{\tilde{W}} = \dot{R}^e IR^{eT} + IR^e \dot{W}^P IR^{eT}$

Vu les résultats ci-dessus, on peut définir une autre dérivée objective  $\tilde{H}^P$  définie par :

(4)  $\tilde{H}^P = \dot{H}^P + H^P \dot{\tilde{W}} - \dot{\tilde{W}} H^P = 2 (\dot{D}^P H^P)^S$

$\tilde{H}^P$  est la dérivée dans le repère corotationnel plastique, en effet:

(5)  $\tilde{H}^P = IR^e ( \dot{B}^P + B^P \dot{W}^P - \dot{W}^P B^P ) IR^{eT}$

Remarquons que  $\dot{\tilde{W}}$  est invariant par rotation de la configuration intermédiaire, en effet, si on prend :

$IR^{e'} = IR^e Q$  alors  $IR^{P'} = Q^T IR^P$   $IF^{P'} = Q^T IF^P$   $\dot{W}^{P'} = Q^T \dot{W} + Q^T \dot{W}^P Q$   
 et donc :  $\dot{\tilde{W}}' = \dot{\tilde{W}}$

(6)  $\underline{H^P = \mathbb{V}e^{-1} B^P \mathbb{V}e^{-1}}$  donc  $H^{PJ} = \mathbb{V}e^{-1J} \mathbb{V}e^J \dot{H}^P + H^P \mathbb{V}e \mathbb{V}e^{-1J} + \mathbb{V}e^{-1} (\dot{D} B^P + B^P \dot{D}) \mathbb{V}e^{-1}$   
 or  $\mathbb{V}e^{-1J} = - \mathbb{V}e^{-1} \mathbb{V}e^J \mathbb{V}e^{-1}$   
 donc  $H^{PJ} = 2 (\mathbb{V}e^{-1} \dot{D} \mathbb{V}e^J H^P)^S - 2 (\mathbb{V}e^{-1} \mathbb{V}e^J H^P)^S$

Soit :

$H^{PJ} = 2 (\mathbb{V}e^{-1} (\dot{D} \mathbb{V}e^J - \mathbb{V}e^J) H^P)^S$

(7)  $\underline{L = \dot{F}F^{-1}}$  
$$L = \dot{F}^c F^{c-1} + F^c \dot{F}^p F^{p-1} F^{c-1}$$

$$= \dot{V}^c V^{c-1} + V^c \dot{R}^c R^{c-1} V^{c-1} + V^c \dot{D}^p V^{c-1} + V^c \dot{R}^c W^p R^{c-1} V^{c-1}$$

$$= V^c \dot{V}^c V^{c-1} + W + V^c (\dot{W} - W) V^{c-1} + V^c \dot{D}^p V^{c-1}$$

(8) donc : 
$$D = V^c \dot{V}^c V^{c-1} + V^c (\dot{W} - W) V^{c-1} + V^c \dot{D}^p V^{c-1}$$

(9) 
$$(V^{c-1} D V^c)^S = (V^{c-1} V^c \dot{V}^c)^S + \dot{D}^p$$

(9) est l'écriture équivalente à  $\dot{\tilde{E}} = \dot{E}^c + \dot{E}^p$  en petites déformations. De (9) on peut déduire  $B^{cJ}$  :

$$V^{c-1} V^c \dot{V}^c + V^c \dot{V}^c V^{c-1} = V^{c-1} D V^c + V^c D V^{c-1} - 2 \dot{D}^p$$

donc

$$V^c \dot{V}^c V^c + V^c V^c \dot{V}^c = D B^c + B^c D - 2 V^c \dot{D}^p V^c$$

Soit :

(10) 
$$B^{cJ} = D B^c + B^c D - 2 V^c \dot{D}^p V^c$$

On peut aussi à partir de (8) calculer  $\tilde{B}^c$  :

(11) 
$$V^c D V^c = V^c V^c \dot{V}^c + B^c (W - \tilde{W}) + B^c \dot{D}^p$$

$$V^c D V^c = (V^c V^c \dot{V}^c)^S + (B^c (W - \tilde{W}))^S + (B^c \dot{D}^p)^S$$

Soit :

(12) 
$$\tilde{B}^c = 2 V^c D V^c - B^c \dot{D}^p - \dot{D}^p B^c$$

et donc :

(13) 
$$B^{cJ} + \tilde{B}^c = 2 (B^c (D - \dot{D}^p))^S + 2 V^c (D - \dot{D}^p) V^c$$

Pour pouvoir calculer  $H^{pJ}$  en fonction de  $D$  et  $\dot{D}^p$  sans introduire  $(W - \tilde{W})$  il faut calculer  $V^c \dot{V}^c$  ou  $(W - \tilde{W})$  en fonction de  $D$  et  $\dot{D}^p$ , or :

(14) 
$$V^c \dot{V}^c = \mathcal{X}(V^c) [B^{cJ}]$$

$\mathcal{X}(A) [H]$  est la solution de l'équation  $A X + X A = H$

$$B^{cJ} - \tilde{B}^c = 2 [(D + \dot{D}^p) B^c]^S - 2 V^c (D + \dot{D}^p) V^c$$

Donc :

(15) 
$$B^c (W - \tilde{W}) - (W - \tilde{W}) B^c = 2 [(D + \dot{D}^p) B^c]^S - 2 V^c (D + \dot{D}^p) V^c$$

1.2. Solution de l'équation  $AA^* + A^*A = IH$

Nous supposons  $A$ ,  $A^*$  et  $IH$  symétriques. La solution de cette équation est dans {37}

$$AA^* + A^*A = IH$$

$$(16) \quad X = \frac{1}{2I - II} \left\{ \left[ (I^2 - II) IH - (A^2 IH + IH/A^2) \right] + \sum_{\alpha=0}^2 (A^\alpha : IH) \varphi_\alpha(A) \right\}$$

$$I = k(A) \quad II = \frac{1}{2} (k^2(A) - k(A^2)) \quad III = \det(A)$$

$$\varphi_0(A) = \frac{1}{2} III (I/A^2 + A^{-1})$$

$$\varphi_1(A) = \frac{1}{2} (IA - I^2 A^{-1})$$

$$\varphi_2(A) = \frac{1}{2} (I/A^{-1} + II)$$

On pose :

$$(17) \quad \Sigma = \sum_{\alpha=0}^2 (A^\alpha : IH) \varphi_\alpha(A)$$

Calcul de  $\Sigma$

$$\Sigma = k(IH) \varphi_0(A) + (A : IH) \varphi_1(A) + (A^2 : IH) \varphi_2(A)$$

$$\Sigma = \frac{1}{2} k(IH) III (I/A^2 + A^{-1}) + \frac{1}{2} (A : IH) (IA - I^2 A^{-1}) + \frac{1}{2} (I/A^{-1} + II) (A^2 : IH)$$

La généralisation des théorèmes de Cayley-Hamilton à trois tenseurs  $M$ ,  $N$  et  $P$  du second ordre dans l'espace tridimensionnel donne :

$$(18) \quad \begin{aligned} & MNP + IPMIN + IMPIN + INPM + IPMIN + INIMP - IM (k(INP) - k(N)k(IP)) - IN (k(MIP) - k(M)k(IP)) \\ & - IP (k(MN) - k(M)k(N)) - (NP + IPN) k(M) - (PM + IMP) k(N) - (NM + MIN) k(P) \\ & - II \left\{ k(M)k(N)k(P) - k(M)k(IPN) - k(N)k(MIP) - k(IP)k(MIN) + k(MINIP) + k(IPINIM) \right\} = 0 \end{aligned}$$

En utilisant ce théorème pour :

$$\underline{1: IM = IA = IN \quad IP = IH} \quad \text{nous avons :}$$

$$2/A^2 IH + 2IH/A^2 + 2IAH/A - 2IA (k(AH) - k(A)k(IH)) - IH (k(A^2) - k(A)k(IH)) - 2k(A)(IAH + IH/A)$$

$$- 2(k(H)A^2 - II) \left[ k^2(A) IH - 2k(A)k(H/A) - k(A^2)k(H) + 2k(A^2H) \right] = 0$$

$$\text{Soit : } 2(A^2H + IH/A^2) + 2IAH/A + 2II IH - 2I(AH + IH/A) = k(H) \left[ -2IA + 2/A^2 + 2II \right] + k(AH) \left[ 2/A - 2I \right] + k(A^2H) (2II)$$

$$k(H) \left[ -2IA + 2/A^2 + 2II \right] + k(AH) \left[ 2/A - 2I \right] + 2k(A^2H) II = 2(A^2H + IH/A^2) + 2IAH/A + 2II IH - 2I(AH + IH/A)$$

$$(19) \quad \boxed{III k(H) A^{-1} + k(AH) (IA - II) + k(A^2H) II = 2(A^2H)^S + IAH/A + II IH - 2I(AH)^S}$$

2:  $M = A^{-1}$   $N = A$   $P = H$

$$\begin{aligned} & 4H + A^{-1}HA + HA/A^{-1} - A^{-1} \left( k(AH) - I k(H) \right) - A \left( k(A^{-1}H) - \frac{\sigma}{\Omega} k(H) \right) \\ & - H \left( 3 - \frac{\sigma \Omega}{\Omega} \right) - \frac{\sigma}{\Omega} (AH + H/A) - I (H/A^{-1} + A^{-1}H) - 2 \Omega k(H) \\ & - \Omega \left\{ \frac{\sigma \Omega}{\Omega} k(H) - \frac{\sigma}{\Omega} k(AH) - I k(A^{-1}H) - 3 k(H) + 2 k(H) \right\} = 0 \end{aligned}$$

Soit :  $k(H) \left[ I A^{-1} + \frac{\sigma}{\Omega} A \bullet \left( 1 + \frac{\sigma \Omega}{\Omega} \right) \Omega \right] + k(AH) \left[ -A^{-1} + \frac{\sigma}{\Omega} \Omega \right] + k(A^{-1}H) \left[ -A + I \Omega \right] =$   
 $-H \left( 1 + \frac{\sigma \Omega}{\Omega} \right) - 2 (A^{-1} H/A)^S + \frac{2\sigma}{\Omega} (AH)^S + 2I (A^{-1}H)^S$

En multipliant les deux termes par III et en remarquant que :

$\Omega A^{-1} = A^2 - I A + \Omega \Omega$  donc :  $\Omega k(A^{-1}H) = k(A^2H) - I k(AH) + \Omega k(H)$

on a :  $k(H) \left[ \Omega I A^{-1} - \Omega \Omega \right] + k(AH) \left[ (\Omega - I^2) \Omega - \Omega A^{-1} + I A \right] + k(A^{-1}H) \left[ I \Omega - A \right] =$   
 $H (-\Omega - I \Omega) - 2 \Omega (A^{-1} H/A)^S + 2 \Omega (AH)^S + 2 I \Omega (A^{-1} H)^S$

En multipliant les deux termes par  $\frac{1}{2} A^{-1}$  nous trouvons :

$$(19) \quad \frac{1}{2} \Omega k(H) \left[ I A^{-2} - A^{-1} \right] + \frac{1}{2} k(AH) \left[ (\Omega - I^2) A^{-1} - \Omega A^{-2} + I \Omega \right] + \frac{1}{2} k(A^{-1}H) \left[ I A^{-1} - \Omega \right] = -\Omega (H/A^{-1})^S + \frac{1}{2} (\Omega - I^2) H + \frac{1}{2} I \Omega A^{-1} H/A^{-1} - \frac{1}{2} AH/A + I(AH)^S$$

En faisant la somme (18) + (19) on aboutit à :

$$(20) \quad \Sigma = 2 (A^2H)^S + \frac{1}{2} AH/A + \frac{1}{2} (3\Omega - I^2)H - \Omega (H/A^{-1})^S - I(AH)^S + \frac{1}{2} I \Omega A^{-1} H/A^{-1}$$

La solution de l'équation  $Ax + xA = H$  s'écrit donc, dans le cas où  $x$ ,  $A$  et  $H$  sont symétriques, I, II, et III étant les invariants principaux de  $A$  :

$$(21) \quad x = \frac{1}{2(\Omega - \Omega)} \left\{ (I^2 + \Omega)H + AH/A - 2\Omega (H/A^{-1})^S + I \Omega A^{-1} H/A^{-1} - 2I (AH)^S \right\}$$

1.3. Calcul de  $H P^J$  :

$W e^J$  est la solution  $x$  pour :

$$A = W e \quad H = 2 (IDBC)^S - 2 W e \Omega P W e$$

donc :  $W e^{-1} W e^J = A^{-1} x = \frac{1}{2} (A^{-1} H/A^{-1}) + \frac{1}{2 \Omega - \Omega} \left\{ (H/A)^A + I (AH/A^{-1})^A + I^2 (A^{-1}H)^A \right\}$

$$\frac{1}{2} (A^{-1} H/A^{-1}) = (W e^{-1} \Omega W e)^S - \Omega P$$

$$(H/A)^A = (\Omega W e^3 + \Omega W e \Omega W e)^A - 2 (W e \Omega P W e)^A$$

$$= \left\{ (I^2 - \Omega) \Omega W e + (\Omega - I \Omega) \Omega + I \Omega \Omega W e^{-1} + I W e \Omega W e - \Omega \Omega W e + \Omega W e \Omega W e \right\}^A - 2 \left\{ I W e \Omega P W e - I W e \Omega P + \Omega W e \Omega P W e^{-1} \right\}^A$$

$$(H/A)^A = \left\{ (I^2 - 2\Omega) \Omega W e + I \Omega \Omega W e^{-1} + \Omega W e^{-1} \Omega W e \right\}^A - 2 \left\{ \Omega W e \Omega P W e^{-1} - \Omega W e \Omega P \right\}^A$$

$$\begin{aligned} (A^{-1}HA)^A &= \{ W^e D W^e + W^e D W^e - 2 B^e D^p \}^A \\ &= \{ (I^2 - II) W^e D W^e + (III - I II) D W^e - 2 I W^e D^p - 2 III W^e D^p \}^A \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (A^{-1}HA)^A &= \{ W^e D W^e + W^e D - 2 D^p W^e \}^A \\ &= \{ I W^e D W^e - I W^e D + W^e D - 2 D^p W^e \}^A \end{aligned}$$

donc :  $W^e D W^e = (W^e D W^e)^S - D^p + \frac{1}{II-III} \{ 2 I W^e (D - D^p) + 2 I III (D + D^p) W^e + (I III II) W^e D W^e + 2 III W^e (D + D^p) W^e \}^A$

$$= W^e D W^e - D^p + \frac{2}{II-III} \{ I W^e (D + D^p) + I III (D + D^p) W^e + III W^e (D + D^p) W^e \}^A$$

Soit :

$$(22) \quad W^e D W^e = W^e D W^e - D^p + \frac{2}{II-III} \{ I III (D + D^p) W^e + B^e (D + D^p) W^e \}^A$$

Le calcul de  $HP^J$  est donc maintenant immédiat :

$$(23) \quad HP^J = 2 (D^p HP)^S - \frac{4}{II-III} \left\{ [ I III (D + D^p) W^e + B^e (D + D^p) W^e ]^A HP \right\}^S$$

On peut aussi calculer  $(W - \tilde{W})$  :

$$(24) \quad (W - \tilde{W}) = (W^e D W^e)^A - (W^e D W^e)^A = \frac{2}{II-III} \{ I III (D + D^p) W^e + B^e (D + D^p) W^e \}^A$$

$$I = h(W^e) \quad II = \frac{1}{2} (h^2(W^e) - h(B^e)) \quad III = \det(W^e)$$

$$(25) \quad II - III = (V_1^e + V_2^e)(V_1^e + V_3^e)(V_2^e + V_3^e) \quad V_i^e : \text{valeurs propres de } W^e$$

La relation (25) permet de montrer que I , II, III ne s'annule pas puisque les valeurs propres de  $W^e$  sont toujours positifs.

1.4. Cas particuliers :

. Cas triaxial :

$$\mathbb{H}^P \mathbb{J} = \dot{\mathbb{H}}^P = \dot{\mathbb{B}}^P = 2 \bar{\mathbb{D}}^P \mathbb{H}^P = 2 \mathbb{D}^P \mathbb{B}^P$$

. Petites déformations élastiques

$$\mathbb{V}^e \approx \mathbb{1} + \mathbb{E}^e$$

$$\mathbb{H}^P \mathbb{J} \approx 2 \left\{ \bar{\mathbb{D}}^P \mathbb{H}^P - \left( (\mathbb{1} + \bar{\mathbb{D}}^P) \mathbb{E}^e \right)^A \mathbb{H}^P \right\}^S$$

$$\approx 2 \left\{ \left( \bar{\mathbb{D}}^P + \frac{1}{2} (\mathbb{E}^e \bar{\mathbb{D}}^P - \bar{\mathbb{D}}^P \mathbb{E}^e) + \frac{1}{2} (\mathbb{E}^e \mathbb{D} - \mathbb{D} \mathbb{E}^e) \right) \mathbb{H}^P \right\}^S$$

$$\boxed{\mathbb{H}^P \mathbb{J} \approx 2 \left[ \bar{\mathbb{D}}^P \mathbb{H}^P \right]^S}$$



2. Calcul de  $G^{PJ}$

$$\begin{aligned}
 (26) \quad \underline{G^P} &= W B C^{-1} W \\
 G^{PJ} &= W^J W^{-1} G^P + G^P W^{-1} W^J + W B C^{-1} W \\
 G^{PJ} &= 2(W^J W^{-1} G^P)^S - W B C^{-1} B C^J B C^{-1} W \\
 G^{PJ} &= 2(W^J W^{-1} G^P)^S + 2W W C^{-1} D^P W C^{-1} W - 2(W B C^{-1} W)^S \\
 G^{PJ} &= 2((W^J W^{-1} - W D W^{-1}) G^P)^S + 2W W C^{-1} D^P W C^{-1} W
 \end{aligned}$$

D'après la relation (22)

$$(27) \quad W^J W^{-1} - W D W^{-1} = \frac{2}{V_I V_B - V_D} \left( V_I V_B W^{-1} D + W D B \right)^A$$

$V_I, V_B, V_D$ : Invariants principaux de  $W$

$$(28) \quad \boxed{G^{PJ} = 2W W C^{-1} D^P W C^{-1} W + \frac{4}{V_I V_B - V_D} \left\{ (V_I V_B W^{-1} D + W D B)^A G^P \right\}^S}$$

$$\begin{aligned}
 (29) \quad \underline{G^P} &= R C^P R^T \\
 G^{PJ} &= R C^P R^T + 2[G^P(W - R R^T)]^S \\
 &= 2W W C^{-1} D^P W C^{-1} W + 2[G^P(W - R R^T)]^S
 \end{aligned}$$

$$(30) \quad \boxed{W - R R^T = \frac{2}{V_I V_B - V_D} \left( V_I V_B D W^{-1} + B D W \right)^A}$$

3. Calcul de la dissipation : (2.1.2. du Chapitre II)

3.1. Théorie l.a.

$$\begin{aligned}
 (31) \quad \underline{\Psi} &= \Psi(B C^e, H P) \\
 \dot{\Psi} &= \frac{\partial \Psi}{\partial B C^e} : \dot{B C^e} + \frac{\partial \Psi}{\partial H P} : \dot{H P} \\
 &= \frac{\partial \Psi}{\partial B C^e} : B \dot{C}^e + \frac{\partial \Psi}{\partial H P} : \dot{H}^P \\
 &= 2V C \frac{\partial \Psi}{\partial B C^e} W C^e : D - 2 \left( B C^e \frac{\partial \Psi}{\partial B C^e} - \frac{\partial \Psi}{\partial H P} H P \right) : D^P
 \end{aligned}$$

$$\rho_0 \dot{\Phi} = \alpha : D - \rho_0 \dot{\Psi} = (\alpha - \alpha^e) : D + \alpha^e : D^P$$

$$\begin{aligned}
 (32) \quad \alpha^e &= 2\rho_0 V C \frac{\partial \Psi}{\partial B C^e} W C^e \\
 \alpha^P &= 2\rho_0 \left( B C^e \frac{\partial \Psi}{\partial B C^e} - \frac{\partial \Psi}{\partial H P} H P \right)^S = 2\rho_0 \left( B C^e \frac{\partial \Psi}{\partial B C^e} - \frac{\partial \Psi}{\partial H P} H P \right)
 \end{aligned}$$

3.2. Théorie 1.b.

(33)  $\underline{\Psi = \Psi(1B^e, G^p)}$

$$\dot{\Psi} = \frac{\partial \Psi}{\partial 1B^e} : 1B^{eT} + \frac{\partial \Psi}{\partial 1B^e} : G^{pT}$$

$$\frac{\partial \Psi}{\partial 1B^e} : 1B^{eT} = \left( \frac{\partial \Psi}{\partial 1B^e} 1B^e + 1B^e \frac{\partial \Psi}{\partial 1B^e} \right) : 1D - 2 \text{vec} \frac{\partial \Psi}{\partial 1B^e} \text{vec} 1D^P$$

$$\frac{\partial \Psi}{\partial G^p} : G^{pT} = 2 \text{vec}^{-1} W \frac{\partial \Psi}{\partial G^p} W \text{vec}^{-1} : 1D^P + \pi^1 e : 1D$$

$$\begin{aligned} \pi^1 e : 1D &= \frac{\partial \Psi}{\partial G^p} : \frac{4}{V_I V_{II} V_{III}} \left\{ (V_I V_{III} W^{-1} 1D + W 1D 1B) A G^p \right\}^S \\ &= \frac{2}{V_I V_{II} V_{III}} \left( \frac{\partial \Psi}{\partial G^p} G^p - G^p \frac{\partial \Psi}{\partial G^p} \right) : (V_I V_{III} W^{-1} 1D + W 1D 1B)^A \\ &= \frac{2}{V_I V_{II} V_{III}} \left( V_I V_{III} W^{-1} \left( \frac{\partial \Psi}{\partial G^p} G^p \right)^A + W \left( \frac{\partial \Psi}{\partial G^p} G^p \right)^A 1B \right) : 1D \end{aligned}$$

$$\pi^1 e = \frac{4}{V_I V_{II} V_{III}} \left\{ V_I V_{III} W^{-1} \left( \frac{\partial \Psi}{\partial G^p} G^p \right)^A + W \left( \frac{\partial \Psi}{\partial G^p} G^p \right)^A 1B \right\}^S$$

$$\frac{\rho_0}{\rho} \dot{\Phi} = (\pi - \pi^e) : 1D + \pi^p : 1D^P$$

(34)

$$\left\{ \begin{aligned} \pi^e &= \rho_0 \left( 1B^e \frac{\partial \Psi}{\partial 1B^e} + \frac{\partial \Psi}{\partial 1B^e} 1B^e \right) + \pi^1 e \\ \pi^1 e &= \frac{4}{V_I V_{II} V_{III}} \left\{ V_I V_{III} W^{-1} \left( \frac{\partial \Psi}{\partial G^p} G^p \right)^A + W \left( \frac{\partial \Psi}{\partial G^p} G^p \right)^A 1B \right\}^S \\ \pi^p &= 2\rho_0 \left\{ \text{vec} \frac{\partial \Psi}{\partial 1B^e} \text{vec} - \text{vec}^{-1} W \frac{\partial \Psi}{\partial G^p} W \text{vec}^{-1} \right\} \end{aligned} \right.$$

## ANNEXE III

### DERIVEES OBJECTIVES

#### I. GENERALITES

Nous avons vu au chapitre III l'importance des dérivées objectives vérifiant la relation (1) où  $\Psi$  est une fonction isotrope de  $\alpha$ ,  $\frac{D\alpha}{Dt}$  est la dérivée objective de  $\alpha$  et  $\dot{\alpha}$  est la dérivée totale particulière de  $\alpha$  par rapport à un repère de référence  $R(0, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ :

$$(1) \quad \frac{\partial \Psi}{\partial \alpha} : \frac{D\alpha}{Dt} = \frac{\partial \Psi}{\partial \alpha} : \dot{\alpha} \iff \alpha : \frac{D\alpha}{Dt} = \alpha : \dot{\alpha}$$

Avant d'aborder la définition de quelques dérivées objectives vérifiant cette propriété, il est bon de préciser quelques notions essentielles.

#### I.1. Description des déformations

On veut étudier la transformation d'un corps matériel entre un état initial de référence et un état actuel à l'instant  $t$ , on définit :

- Configuration de référence ( $C_0$ ) : Positions des points matériels du corps à l'état initial. Tout point matériel P sera défini par les coordonnées spatiales de sa position  $M_0$  dans cette configuration. Pour simplifier les calculs, nous supposons que ces coordonnées sont cartésiennes relatives à un repère  $R_0(0, \vec{e}_{01}, \vec{e}_{02}, \vec{e}_{03})$

$$(2) \quad \vec{0}_0 M_0 = \vec{X}^p = X_I \vec{e}_{0I}$$

- Configuration actuelle ( $C(t)$ ) : Positions des points matériels du corps à l'instant  $t$  actuel. Le même point matériel coïncidant avec  $M_0$  à l'état de référence, coïncidera avec un point  $M$  de la configuration actuelle. Cette configuration sera définie par l'intermédiaire du repère d'observation  $R$ .

$$(3) \quad \vec{0}M^p = \vec{x}^p = x_i \vec{e}_i \qquad \vec{x}^p = \vec{x}^p(\vec{X}^p, t)$$

- Tenseur gradient de la transformation :  $\mathbb{F}$

Un point matériel  $P'$  infiniment voisin de  $P$  coïncide à l'état initial avec un point  $M'_0$  et à l'état actuel avec un point  $M'$  ; la théorie du premier gradient permet d'écrire :

$$(4) \quad \begin{cases} d\vec{x} = \mathbb{F} d\vec{X} \\ dx_i = F_{ij} dX_j \end{cases} \quad \begin{matrix} d\vec{x} = \overline{MM'} \\ dx_i = \frac{\partial x_i}{\partial X_j} \end{matrix} \quad \begin{matrix} d\vec{X} = \overline{M_0M'_0} \\ F_{ij} = \frac{\partial x_i}{\partial X_j} \end{matrix}$$

Remarques :

1.  $\mathbb{F}$  est la transformation qui permet le passage de la configuration de référence à la configuration actuelle.
2.  $\mathbb{F}$  n'est pas un tenseur habituel puisqu'il est défini à moitié dans la configuration de référence et à moitié dans la configuration actuelle. Au cours d'un changement de repère d'observation de la configuration actuelle, il ne se transforme pas comme un tenseur normal :

$$(5) \quad R \rightarrow R' \quad \vec{e}_i = Q_{ij} \vec{e}'_j \quad \Rightarrow \quad F_{ij} \longrightarrow F'_{ij} = Q^T_{ce} F_{ej}$$

3.  $\mathbb{F}$  est décomposable en une partie symétrique et une rotation :

$$(6) \quad \mathbb{F} = \mathbb{R} \mathbb{U} = \mathbb{V} \mathbb{R}$$

$\mathbb{R}$  : Tenseur de rotation  
 $\mathbb{U}$  : Tenseur de déformation pure droit  
 $\mathbb{V}$  : Tenseur de déformation pure gauche

Déformations

Pour décrire la déformation du corps, il faut définir la transformation du produit scalaire :

$$(7) \quad \begin{cases} d\vec{x}_1 \cdot d\vec{x}_2 = d\vec{X}_1 \cdot \mathbb{C} d\vec{X}_2 \\ (d\vec{x}_1 \cdot d\vec{x}_2 - d\vec{X}_1 \cdot d\vec{X}_2) = 2 d\vec{X}_1 \cdot \mathbb{E} d\vec{X}_2 \end{cases} \quad \begin{matrix} \mathbb{C} = \mathbb{F}^T \mathbb{F} = \mathbb{U}^2 \\ \mathbb{E} = \frac{1}{2} (\mathbb{C} - \mathbb{1}) \end{matrix}$$

$$(8) \quad \begin{cases} d\vec{X}_1 \cdot d\vec{X}_2 = d\vec{x}_1 \cdot \mathbb{B}^{-1} d\vec{x}_2 \\ (d\vec{x}_1 \cdot d\vec{x}_2 - d\vec{X}_1 \cdot d\vec{X}_2) = 2 d\vec{x}_1 \cdot \mathbb{A} d\vec{x}_2 \end{cases} \quad \begin{matrix} \mathbb{B} = \mathbb{F} \mathbb{F}^T = \mathbb{V}^2 \\ \mathbb{A} = \frac{1}{2} (\mathbb{1} - \mathbb{B}^{-1}) \end{matrix}$$

- $\mathbb{C}$  et  $\mathbb{E}$  sont deux tenseurs qui agissent sur des vecteurs de la configuration de référence : Tenseurs Lagrangiens : leurs composantes ne dépendent pas du repère  $R$  paramétrant la configuration actuelle.
- $\mathbb{B}$  et  $\mathbb{A}$  agissent sur des vecteurs de la configuration actuelle : tenseurs Eulériens. Leurs composantes ne dépendent pas du repère  $R_0$  paramétrant la configuration de référence.

$\mathbb{B}$  et  $\mathbb{C}$  sont symétriques donc diagonalisables : soit  $\vec{b}_i$  le repère principal de  $\mathbb{B}$  et  $\vec{c}_i$  celui de  $\mathbb{C}$ . Un cube d'arête  $dl_0$  dans la configuration de référence dont les arêtes sont parallèles aux  $\vec{c}_i$  se transforme en un parallélépipède rectangle d'arêtes  $dl_i$  parallèles aux  $\vec{b}_i$  dans la configuration actuelle (voir Figure 1).

Il est bien évident que les  $\vec{b}_i$  et les  $\vec{c}_i$  changent au cours du temps.

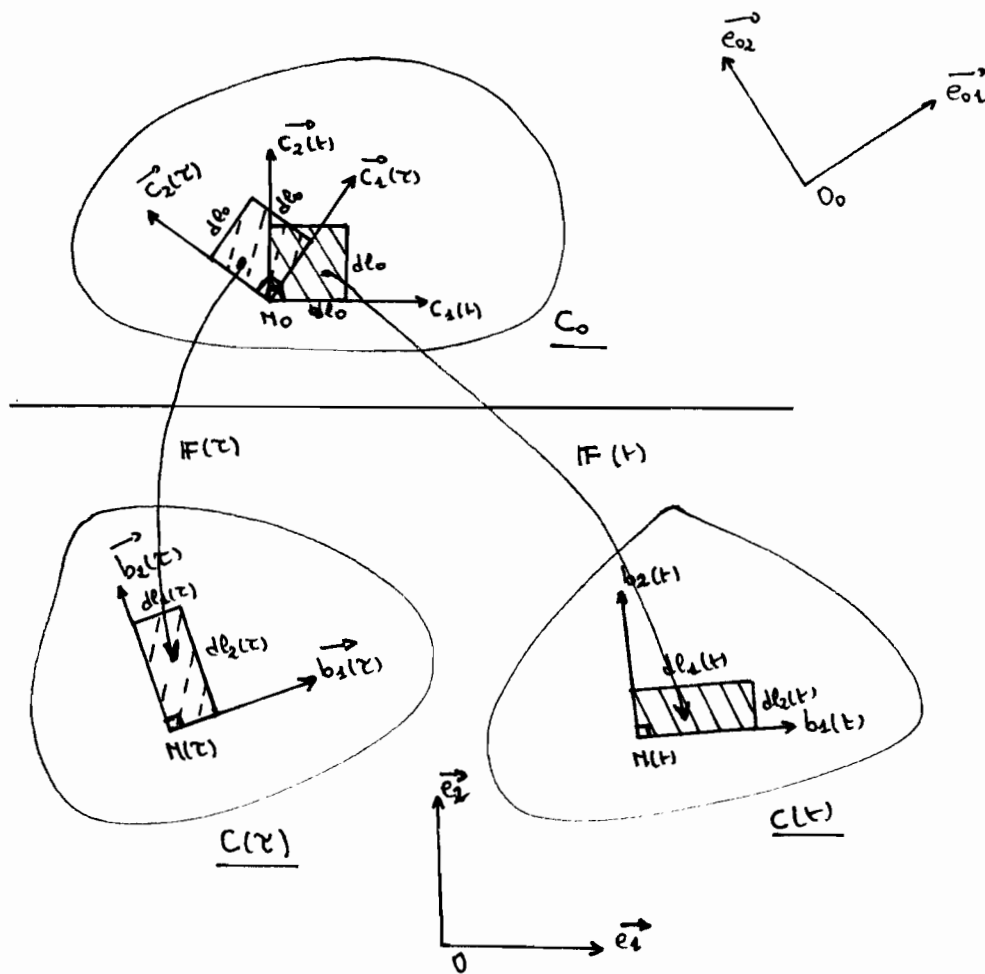


Figure 1.

On définit les allongements principaux par :

$$(8) \quad \alpha_i = \frac{d\rho_i}{d\rho_0}$$

Dans la suite, on notera  $\underline{\alpha}$  la matrice diagonale ( $\alpha_{11}=\alpha_1, \alpha_{22}=\alpha_2, \alpha_{33}=\alpha_3, \alpha_{ij}=0 \text{ si } i \neq j$ )  
Les  $\alpha_i$  ne dépendent pas du repère d'observation.

Pour définir complètement la transformation, il faut définir l'orientation des  $\vec{b}_i$  et  $\vec{c}_i$ , orientation qui dépendra du choix de  $R_0$  et  $R$  :

Soit :

$$(9) \quad \begin{aligned} \vec{c}_i &= \psi_{ij} \vec{e}_{0j} & \vec{b}_i &= \varphi_{ij} \vec{e}_j \\ \Psi &= \psi_{ij} \vec{c}_i \otimes \vec{c}_j = \psi_{ij} \vec{e}_{0i} \otimes \vec{e}_{0j} \\ \Phi &= \varphi_{ij} \vec{b}_i \otimes \vec{b}_j = \varphi_{ij} \vec{e}_i \otimes \vec{e}_j \end{aligned}$$

$\otimes$  désigne le produit tensoriel. Dans la suite, on notera par  $\underline{\psi}$  la matrice  $[\psi_{ij}]$  et par  $\underline{\varphi}$  la matrice  $[\varphi_{ij}]$ .

Avec les notations ci-dessus, nous avons :

$$(10) \quad \begin{cases} \mathbb{U} = \alpha_1 \vec{c}_1 \otimes \vec{c}_1 + \alpha_2 \vec{c}_2 \otimes \vec{c}_2 + \alpha_3 \vec{c}_3 \otimes \vec{c}_3 = \alpha_{ij} \vec{c}_i \otimes \vec{c}_j \\ \mathbb{V} = \alpha_1 \vec{b}_1 \otimes \vec{b}_1 + \alpha_2 \vec{b}_2 \otimes \vec{b}_2 + \alpha_3 \vec{b}_3 \otimes \vec{b}_3 = \alpha_{ij} \vec{b}_i \otimes \vec{b}_j \end{cases}$$

$$(11) \quad \begin{cases} \mathbb{F} = \alpha_1 \vec{b}_1 \otimes \vec{c}_1 + \alpha_2 \vec{b}_2 \otimes \vec{c}_2 + \alpha_3 \vec{b}_3 \otimes \vec{c}_3 = \alpha_{ij} \vec{b}_i \otimes \vec{c}_j \\ \mathbb{R} = \delta_{ij} \vec{b}_i \otimes \vec{c}_j \end{cases}$$

Les relations (11) montrent le fait que  $\mathbb{F}$  et  $\mathbb{R}$  sont deux tenseurs "anormaux" puisqu'ils sont définis à moitié dans la configuration de référence et à moitié dans la configuration actuelle.

Remarque :

Si à un instant donné, on connaît les composantes de  $\mathbb{F}$ , on peut donc calculer  $\mathbb{U}$  et  $\mathbb{V}$  et donc déterminer tous les paramètres définis ci-dessus. Une difficulté existe quand même dans le cas où, au moins, deux allongements principaux sont égaux; dans ce cas, les repères principaux de  $\mathbb{V}$  et de  $\mathbb{U}$  ne sont pas uniques : nous reviendrons sur ce point dans la suite.

I. 2. Vitesse des déformations

Description Lagrangienne :

$$(12) \quad \begin{aligned} \dot{\vec{x}} &= \dot{\mathbb{F}} \vec{X} \\ (\dot{\vec{x}}_1 - \dot{\vec{x}}_2) &= \dot{\vec{X}}_1 \dot{\mathbb{C}} \vec{X}_2 \end{aligned}$$

Description Eulérienne :

$$(13) \quad \begin{aligned} \dot{\vec{x}} &= \mathbb{L} \vec{dx} & \mathbb{L} &= \dot{\mathbb{F}} \mathbb{F}^{-1} \\ (\dot{\vec{x}}_1 - \dot{\vec{x}}_2) &= \mathbb{L} \vec{dx}_1 \mathbb{D} \vec{dx}_2 \\ \mathbb{D} &= \mathbb{L}^S = \frac{1}{2} (\mathbb{L} + \mathbb{L}^T) & & : \text{tenseur taux de déformations} \\ \mathbb{W} &= \mathbb{L}^A = \frac{1}{2} (\mathbb{L} - \mathbb{L}^T) & & : \text{tenseur taux de rotations} \\ \mathbb{L} &= \mathbb{D} + \mathbb{W} = \dot{\mathbb{V}} \mathbb{V}^{-1} + \mathbb{V} \mathbb{R} \dot{\mathbb{R}}^T \mathbb{V}^{-1} = \mathbb{R} \dot{\mathbb{R}}^T + \mathbb{R} \dot{\mathbb{U}} \mathbb{U}^{-1} \mathbb{R}^T \end{aligned}$$

Le point au dessus indique la dérivée totale particulière par rapport au repère d'observation (R).

I.3. Changement de repère d'observation

Les tenseurs des déformations définis ci-dessus sont intrinsèques donc indépendants du repère d'observation, par contre, les tenseurs Eulériens du type taux en dépendent :

Soit le changement de repère suivant : (R')

$$(14) \quad \vec{e}_i' = Q_{ij} \vec{e}_j \quad \mathbb{F} = \varphi_{lk}^T \varphi_{ki}^T \alpha_{ij} \vec{e}_i \otimes \vec{e}_j$$

$$\mathbb{L}' = \left. \frac{d\mathbb{F}}{dt} \right|_{R'} \mathbb{F}^{-1} = (Q \dot{Q}^T + \varphi_{ij}^T \dot{\varphi}_{ij} + \varphi_{ij}^T \dot{\alpha}_{ij} \alpha_{ij}^{-1} \varphi_{ij})_{ij} \vec{e}_i' \otimes \vec{e}_j'$$

$$(15) \quad \mathbb{L}' = \mathbb{L} + (Q \dot{Q}^T)_{ij} \vec{e}_i' \otimes \vec{e}_j'$$

$\mathbb{L}$  étant défini par :  $\mathbb{L} = \left. \frac{d\mathbb{F}}{dt} \right|_R \mathbb{F}^{-1}$

D'après la relation (15) nous avons :

$$(16) \quad \mathbb{D} = \mathbb{D} \quad \mathbb{W}' = \mathbb{W} + \varphi_{ij}^T \dot{\varphi}_{ij} \vec{e}_i' \otimes \vec{e}_j'$$

On dit que  $\mathbb{D}$  est un tenseur objectif puisqu'il ne dépend pas du repère d'observation.

Remarque :

L'objectivité est souvent définie d'une autre manière :  
un tenseur  $\mathbb{D}$  est objectif si, après une superposition d'une rotation  
à la cinématique ( $\mathbb{F}' = \mathbb{Q}^T \mathbb{F}$ ),  $\mathbb{D}$  se transforme en :

$$\mathbb{D}' = \mathbb{Q}^T \mathbb{D} \mathbb{Q}$$

Cette définition est bien sûr équivalente à la précédente, et elle  
est assez souvent plus commode.

1.4. Dérivation dans deux repères différents.

Si  $\mathbb{X}$  est un tenseur Eulérien, il est aisé de montrer que :

$$(17) \begin{cases} \overset{\circ}{\mathbb{X}} = \dot{\mathbb{X}} + \mathbb{X} \mathbb{W}^o - \mathbb{W}^o \mathbb{X} \\ \mathbb{W}^o = \dot{\mathbb{Q}}^T \mathbb{Q} \end{cases}$$

$\dot{\mathbb{X}}$  : Dérivée totale par rapport au temps dans le repère  $R(\vec{e}_i)$

$\overset{\circ}{\mathbb{X}}$  : Dérivée totale par rapport au temps dans le repère  $R'(\vec{e}'_i)$

avec :

$$(18) \quad \vec{e}'_i = Q_{ij} \vec{e}_j \qquad \mathbb{Q} = Q_{ij} \vec{e}_i \otimes \vec{e}_j = Q_{ij} \vec{e}'_i \otimes \vec{e}'_j$$



II. DERIVEES OBJECTIVES

Une dérivée est dite objective si elle ne dépend pas du repère d'observation. La dérivée objective s'annule donc pour un mouvement rigide du corps matériel.

Beaucoup de dérivées objectives ont été déjà définies; citons par exemple :

1) Dérivée de Jauman :

$$\dot{\pi}^J = \dot{\pi} + \pi \omega - \omega \pi$$

Cette dérivée vérifie la relation (1)

2) Dérivées sous la forme :

$$\dot{\pi}^\alpha = \dot{\pi}^J + \alpha (\omega \pi + \pi \omega)$$

Dans le cas général si  $\alpha \neq 0$ , cette dérivée ne vérifie pas la relation (1).

3) Dérivée de Truesdell

$$\dot{\pi}^T = \dot{\pi} - \omega \pi + \pi \omega^T + \pi \kappa(\omega)$$

Dans le cas général  $\kappa(\omega) \kappa(\pi^2)$  n'est pas nul et donc la relation (1) n'est pas vérifiée.

Nous allons dans ce qui va suivre proposer d'autres dérivées objectives vérifiant la relation (1).

II.1. Dérivée dans le repère principal

Soit  $\mathbb{X}$  un tenseur Eulérien symétrique et soit  $\dot{\mathbb{X}} = \frac{d\mathbb{X}}{dt}$  la dérivée totale de  $\mathbb{X}$  par rapport au temps dans le repère d'observation  $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ .  $\mathbb{X}$  et  $\dot{\mathbb{X}}$  sont diagonalisables et on pose :

- $x_1, x_2$  et  $x_3$  : les valeurs propres de  $\mathbb{X}$  à l'instant  $t$
- $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$  : les valeurs propres de  $\dot{\mathbb{X}}$  à l'instant  $t$
- $\alpha_{ij}$  : les composantes de  $\dot{\mathbb{X}}$  dans le repère principal de  $\mathbb{X}$
- $\vec{x}_1, \vec{x}_2, \vec{x}_3$  : le repère principal de  $\mathbb{X}$
- $\vec{\alpha}_1, \vec{\alpha}_2, \vec{\alpha}_3$  : le repère principal de  $\dot{\mathbb{X}}$

$$(19) \quad \vec{x}_i = Q_{ij} \vec{e}_j \qquad \vec{\alpha}_i = A_{ij} \vec{e}_j$$

On notera :

- $X = [x_{ij}]$  : matrice des composantes de  $\mathbb{X}$  dans la base  $\vec{e}_i$
- $\underline{X}^d = [X^d_{ij}]$  : matrice diagonale des composantes de  $\mathbb{X}$  dans son repère principal
- $\underline{\alpha} = [\alpha_{ij}]$  : matrice des composantes de  $\dot{\mathbb{X}}$  dans le repère principal de  $\mathbb{X}$
- $\underline{\alpha}^d = [\alpha^d_{ij}]$  : matrice des valeurs propres de  $\dot{\mathbb{X}}$

On suppose dans un premier cas que les valeurs propres de  $\mathbb{X}$  sont différentes, les directions principales sont donc uniques, il n'y a donc aucune ambiguïté pour les déterminer. Sur ces directions, on peut définir plusieurs repères orthonormes, on peut par exemple choisir arbitrairement à un instant initial un repère particulier, puis le suivre par continuité (par exemple prendre  $x_1 > x_2 > x_3$  )

$$(20) \quad \underline{X}^d = Q X Q^T \qquad Q = Q_{ij} \vec{e}_i \otimes \vec{e}_j = Q_{ij} \vec{x}_i \otimes \vec{x}_j$$

L'orientation des  $\vec{x}_i$  par rapport aux  $\vec{e}_i$  peut se faire par l'intermédiaire des angles d'Euler, soit (Fig.2).

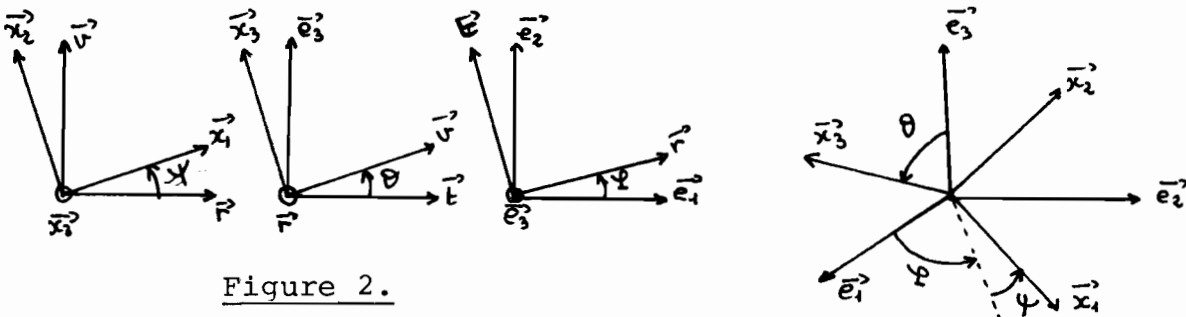


Figure 2.

Dans ce cas  $Q = Q_3 Q_2 Q_1$

$$(21) \quad Q_1: \begin{pmatrix} \cos\psi & \sin\psi & 0 \\ -\sin\psi & \cos\psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad Q_2: \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & \sin\theta \\ 0 & -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \quad Q_3: \begin{pmatrix} \cos\phi & \sin\phi & 0 \\ -\sin\phi & \cos\phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$(22) \quad Q = \begin{pmatrix} \cos\psi \cos\phi - \sin\psi \sin\phi \cos\theta & \cos\psi \sin\phi + \sin\psi \cos\phi \cos\theta & \sin\psi \sin\theta \\ -\sin\psi \cos\phi - \cos\psi \sin\phi \cos\theta & -\sin\psi \sin\phi + \cos\psi \cos\phi \cos\theta & \cos\psi \sin\theta \\ \sin\psi \cos\theta & -\cos\psi \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

$$(23) \quad \begin{cases} \vec{x}_i = Q_{ij} \vec{e}_j & \text{donc} & \vec{x}'_i = Q_{ij} Q^T_{je} \vec{x}_e \\ \vec{x}'_i = W^d_{ij} \vec{x}_j & & W^d = -Q_{ij} Q^T_{je} \\ \dot{\mathbb{X}} = \dot{x}_{ij} \vec{e}_i \otimes \vec{e}_j = \dot{x}'_{ij} \vec{x}'_i \otimes \vec{x}'_j \Rightarrow \dot{x}'_{ij} = \dot{x}_{kl} W^d_{ki} W^d_{lj} & \vec{x}'_i \otimes \vec{x}'_j = W^d_{ik} W^d_{jl} \dot{x}_{kl} \vec{x}_k \otimes \vec{x}_l \end{cases}$$

Par définition, nous noterons :

$$(24) \quad \dot{\mathbb{X}}^* = \dot{X}_{ij}^d \bar{x}_i^* \otimes \bar{x}_j^* \quad : \text{dérivée totale dans le repère principal de } \mathbb{X}$$

$$(25) \quad \mathbb{W}^* = \omega_{ik}^{*d} \bar{x}_i^* \otimes \bar{x}_k^* = \dot{\mathbb{Q}}^T \mathbb{Q} = \dot{\mathbb{Q}}^T \mathbb{Q} : \text{tenseur taux de rotation des directions principales de } \mathbb{X}$$

et donc :

$$(26) \quad \dot{\mathbb{X}} = \dot{\mathbb{X}}^* - \mathbb{X} \mathbb{W}^* + \mathbb{W}^* \mathbb{X}$$

Les composantes de  $\mathbb{W}^*$  dans le repère  $\bar{x}_i^*$  sont :

$$(27) \quad \mathbb{W}_{/x_i^*}^* : \underline{\mathbb{W}}^{*d} = \begin{pmatrix} 0 & \omega_3^{*d} & -\omega_2^{*d} \\ -\omega_3^{*d} & 0 & \omega_1^{*d} \\ \omega_2^{*d} & -\omega_1^{*d} & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{aligned} \omega_1^{*d} &= \dot{\theta} \cos \psi + \dot{\psi} \sin \theta \sin \psi \\ \omega_2^{*d} &= \dot{\psi} \cos \psi \sin \theta - \dot{\theta} \sin \psi \\ \omega_3^{*d} &= \dot{\psi} \cos \theta + \dot{\theta} \end{aligned}$$

La dérivée  $\dot{\mathbb{X}}^*$  est bien sûr objective, mais la connaissance de  $\dot{\mathbb{X}}^*$  uniquement ne permet pas de déterminer  $\dot{\mathbb{X}}$ , il faut en plus connaître  $\mathbb{W}^*$ , le problème étant qu'il peut exister des cas où  $\mathbb{W}^*$  n'est pas défini, nous reviendrons sur ce point dans la suite.

$\dot{\mathbb{X}}^*$  vérifie la relation (1).

• calcul de  $\mathbb{W}^*$

D'après la relation (26), en écrivant les différents tenseurs dans le repère  $\bar{x}_i^*$ , on a :

$$(28) \quad \underline{\dot{\mathbb{X}}} = \underline{\dot{\mathbb{X}}}^d - \underline{\mathbb{X}}^d \underline{\mathbb{W}}^{*d} + \underline{\mathbb{W}}^{*d} \underline{\mathbb{X}}^d$$

ce qui permet d'écrire :

$$(29) \quad \dot{X}_1 = \alpha_{11} \quad \dot{X}_2 = \alpha_{22} \quad \dot{X}_3 = \alpha_{33}$$

$$(30) \quad \omega_3^{*d} (X_2 - X_1) = \alpha_{12} \quad \omega_2^{*d} (X_1 - X_3) = \alpha_{13} \quad \omega_1^{*d} (X_3 - X_2) = \alpha_{23}$$

donc si  $X_1 \neq X_2 \neq X_3$ ,  $\mathbb{W}^*$  et  $\dot{\mathbb{X}}^*$  se déterminent d'une manière unique en fonction de  $\dot{\mathbb{X}}$  et  $\mathbb{X}$ .

Le problème se pose par contre si, par exemple,  $X_1 = X_2 = X_3$ .

. Cas :  $X_1 = X_2 = X$

Dans ce cas, les directions principales de  $\mathbb{X}$  ne sont pas uniques et tout repère autour de  $\vec{x}_3$  est repère principal, c'est-à-dire, tout  $\vec{x}'_i$  défini par la relation (31) est repère principal de  $\mathbb{X}$

$$(31) \quad \vec{x}'_i = K_{ij} \vec{x}_j \quad K = \begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha & 0 \\ -\sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Ceci revient à dire que quelque soit  $\psi$ , le repère est principal, on a :

$$(32) \quad \begin{cases} X_{11} = X + \sin^2\psi \sin^2\theta (X_3 - X) & X_{12} = -\cos\psi \sin\psi \sin^2\theta (X_3 - X) \\ X_{22} = X + \cos^2\psi \sin^2\theta (X_3 - X) & X_{13} = \sin\psi \cos\theta \sin\theta (X_3 - X) \\ X_{33} = X_3 - \sin^2\theta (X_3 - X) & X_{23} = -\cos\psi \cos\theta \sin\theta (X_3 - X) \end{cases}$$

et la rotation  $\psi$  n'intervient pas.

Si  $\dot{X}_1 = \dot{X}_2 = \dot{X}$  donc  $\alpha_{11} = \alpha_{22}$  et si  $\alpha_{12} = 0$  alors la définition de  $\mathbb{W}^*$  n'est pas unique mais la définition de  $\mathbb{X}^*$  l'est, en effet, dans ce cas, quelque soit  $\mathbb{W}^{*d}$ , les relations (30) sont toujours vérifiées et  $\mathbb{W}^* \mathbb{X} = \mathbb{X} \mathbb{W}^*$  n'en dépend pas.

Si  $\alpha_{12}$  n'est pas nul, alors on ne peut pas définir  $\mathbb{X}^*$ .

Ce calcul mérite d'être poursuivi, il se peut que si  $\dot{X}_1 = \dot{X}_2$  alors obligatoirement  $\dot{\alpha}_{12} = 0$ .

. Calcul de  $\mathbb{D}$  en fonction de  $\mathbb{b}^*$

Il est bien clair que  $\mathbb{b}^*$ ,  $\mathbb{B}^*$ ,  $\mathbb{b}$  et  $\mathbb{B}$  commutent ( $\mathbb{b} = \frac{1}{2} \text{Log } \mathbb{B}$ ) et que :

$$(33) \quad \mathbb{b}^* = \mathbb{V}^* \mathbb{V}^{-1}$$

$$\mathbb{L} = \mathbb{V} \mathbb{V}^{-1} + \mathbb{V} \mathbb{R} \mathbb{R}^T \mathbb{V}^{-1}$$

$$= \mathbb{V}^J \mathbb{V}^{-1} - \mathbb{V} \mathbb{W} \mathbb{W} \mathbb{V}^{-1} + \mathbb{W} + \mathbb{V} \mathbb{R} \mathbb{R}^T \mathbb{V}^{-1}$$

donc :

$$\mathbb{D} = \mathbb{V}^J \mathbb{V}^{-1} - \mathbb{V} \mathbb{W} \mathbb{W} \mathbb{V}^{-1} + \mathbb{V} \mathbb{R} \mathbb{R}^T \mathbb{V}^{-1}$$

soit

$$\begin{aligned} [\mathbb{V}^{-1} \mathbb{D} \mathbb{V}]^S &= [\mathbb{V}^{-1} \mathbb{V}^J]^S \\ &= [\mathbb{V}^{-1} \mathbb{V}^J - \mathbb{V}^{-1} \mathbb{W} \mathbb{W} \mathbb{V}^{-1}]^S \\ &= [\mathbb{V}^{-1} \mathbb{V}^* + \mathbb{V}^{-1} (\mathbb{W}^* - \mathbb{W}) \mathbb{V}]^S \\ &= \mathbb{b}^* + [\mathbb{V}^{-1} (\mathbb{W}^* - \mathbb{W}) \mathbb{V}]^S \end{aligned}$$

$$(34) \quad \begin{aligned} [\mathbb{V}^{-1} \mathbb{D} \mathbb{V}]^S &= \mathbb{b}^* + [\mathbb{V}^{-1} (\mathbb{W}^* - \mathbb{W}) \mathbb{V}]^S \\ &= \mathbb{b}^J + 2 [\mathbb{b} (\mathbb{W}^* - \mathbb{W})]^S + [\mathbb{V}^{-1} (\mathbb{W}^* - \mathbb{W}) \mathbb{V}]^S \end{aligned}$$

ou encore :

$$\begin{aligned} \mathbb{D} &= (\dot{V}V^{-1})^S + (V \dot{R}R^T V^{-1})^S \\ &= \mathbb{B}^* + [V (\dot{R}R^T - \omega^* V^{-1})]^S \\ (35) \quad \mathbb{D} &= \mathbb{B}^* + (V (\dot{R}R^T - \omega^*) V^{-1})^S \end{aligned}$$

Remarquons que  $\mathbb{D}$  étant objectif, on peut définir une nouvelle dérivée objective d'un tenseur  $\mathbb{X}$  en posant :

$$(36) \quad \frac{D\mathbb{X}}{Dt} = \mathbb{X}^* + \left[ \exp(\mathbb{X}) (\dot{R}R^T - \omega^*) \exp(\mathbb{X})^{-1} \right]^S$$

Cette dérivée vérifie la relation (1) à cause de l'isotropie de  $\exp(\mathbb{X})$ . ( $\omega^*$  dans (36) est le taux de rotation des directions principales de  $\mathbb{X}$ ).

### II.2. Dérivée dans un repère tourné par la rotation $R$

$$(37) \quad \mathbb{X}^R = R \left( \dot{R}^T \mathbb{X} R \right) R^T$$

$$(38) \quad \mathbb{X}^R = \dot{\mathbb{X}} + \mathbb{X} \omega^R - \omega^R \mathbb{X} \quad \omega^R = \dot{R}R^T$$

$$(39) \quad \mathbb{X}^R = \mathbb{X}^J + (\omega - \omega^R) \mathbb{X} - \mathbb{X} (\omega - \omega^R)$$

D'après la relation (30) de l'annexe II :

$$\omega - \omega^R = \frac{2}{V_F V_R \cdot V_{10}} (V_F V_{10} \mathbb{D} V^{-1} + \mathbb{B} \mathbb{D} V)^A$$

$\mathbb{X}^R$  est objective et vérifie la relation (1) mais elle dépend de la configuration de référence.

### II.3. Transformations élastoplastiques

$$(40) \quad \mathbb{F} = \mathbb{F}^e \mathbb{F}^p$$

Tout ce qui a été dit pour la transformation totale  $\mathbb{F}$ , peut se redire pour  $\mathbb{F}^p$ . On peut donc définir d'autres nouvelles dérivées objectives en faisant attention à ce qu'elles soient invariantes par rotation de la configuration intermédiaire.

Un exemple de construction de dérivée objective est la construction de  $\tilde{X}$  de l'annexe II qui est la dérivée dans le repère corotationnel plastique.

La relation (35) permet d'écrire :

$$D^P = B^P + (W^P (n^P n^{PT} - W^P) W^{P-1})^S$$

où  $W^P$  est le taux de rotation du repère principal de  $B^P$ .

$D^P$  n'est pas invariant par rotation de la configuration intermédiaire, mais  $\bar{D}^P$  l'est :

$$\bar{D}^P = R^c D^P R^{cT} = R^c \left[ B^P + (W^P (n^P n^{PT} - W^P) W^{P-1})^S \right] R^{cT}$$

Soit  $\bar{D}^P = \mathcal{D} (I_1^P, I_4^P, I_5^P, W^P, n^P n^{PT})$

On peut donc définir une dérivée objective :

$$\frac{D\alpha}{Dt} = \mathcal{D} (\alpha, \exp \alpha, \alpha, W^P, n^P n^{PT})$$

où  $W^P$  sera le taux de rotation des directions principales de  $R^c \alpha R^c$  c'est ce qui a été fait en III.5.1. du Chapitre III.

#### II.4. Conclusions :

Plusieurs dérivées objectives peuvent être proposées, par exemple, nous avons :

$$D = \mathcal{D}_1 (I_1, I_3) = \mathcal{D}_2 \left( \frac{1}{2} (I_3 - I_1), \frac{1}{2} I_3 \right) = \mathcal{D}_3 (W - U, W^J) \text{ etc...}$$

et on peut toujours définir :

$$\frac{D\alpha_1}{Dt} = \mathcal{D}_1 (\alpha, \alpha^J) \quad \frac{D\alpha_2}{Dt} = \mathcal{D}_2 (\alpha, \alpha^J) \quad \frac{D\alpha_3}{Dt} = \mathcal{D}_3 (\alpha, \alpha^J) \text{ etc...}$$

Le problème étant de donner une signification physique à ces dérivées. Pour cela, une étude plus approfondie de la géométrie est nécessaire.

ANNEXE IV

FONCTIONS ISOTROPES

Dans cette annexe, nous présentons quelques propriétés des fonctions isotropes qui ont été utilisées dans nos calculs.

1. Fonction scalaire isotrope d'un tenseur symétrique  $\Psi(\mathbb{B})$

1.1. Calcul de  $\frac{\partial \Psi}{\partial B_{ij}}$

(1)  $\Psi = \Psi(\mathbb{B}) \iff \Psi = \Psi(B_I, B_{II}, B_{III})$

$\Psi$ : fonction isotrope de  $\mathbb{B}$

$\mathbb{B}$ : tenseur symétrique du second ordre

$B_I, B_{II}, B_{III}$ : invariants principaux de  $\mathbb{B}$

$$\begin{cases} B_I = \kappa(\mathbb{B}) \\ B_{II} = \frac{1}{2} [\kappa^2(\mathbb{B}) - \kappa(\mathbb{B}^2)] \\ B_{III} = \det(\mathbb{B}) \end{cases}$$

(2)  $\left(\frac{\partial \Psi}{\partial \mathbb{B}}\right)_{ij} = \frac{\partial \Psi}{\partial B_{ij}} = \Psi_I \frac{\partial B_I}{\partial B_{ij}} + \Psi_{II} \frac{\partial B_{II}}{\partial B_{ij}} + \Psi_{III} \frac{\partial B_{III}}{\partial B_{ij}}$

$$\Psi_I = \frac{\partial \Psi}{\partial B_I} \quad \Psi_{II} = \frac{\partial \Psi}{\partial B_{II}} \quad \Psi_{III} = \frac{\partial \Psi}{\partial B_{III}}$$

•  $\frac{\partial B_I}{\partial B_{ij}} \quad \frac{\partial B_I}{\partial B_{ij}} = \frac{\partial}{\partial B_{ij}} (B_{kk}) = \delta_{ij} \quad \frac{\partial B_I}{\partial B_{ij}} =$

$$\frac{\partial B_I}{\partial B_{ij}} = \delta_{ij} \quad \frac{\partial B_I}{\partial \mathbb{B}} = \mathbb{1}$$

•  $\frac{\partial B_{II}}{\partial B_{ij}} \quad \frac{\partial B_{II}}{\partial B_{ij}} = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial B_{ij}} (B_{kk} B_{ll} - B_{kl} B_{lk}) = B_I \delta_{ij} - B_{ij}$

$$\frac{\partial B_{II}}{\partial B_{ij}} = B_I \delta_{ij} - B_{ij} \quad \frac{\partial B_{II}}{\partial \mathbb{B}} = B_I \mathbb{1} - \mathbb{B}$$

•  $\frac{\partial B_{III}}{\partial B_{ij}} \quad \mathbb{B}^2 \bullet B_I \mathbb{B} + B_{II} \mathbb{1} - B_{III} \mathbb{B}^{-1} = 0$

$$B_{III} \kappa(\mathbb{B}^{-1}) = B_{II} \quad B_{III} = \frac{B_{II}}{\kappa(\mathbb{B}^{-1})}$$

$$\frac{\partial B_{III}}{\partial B_{ij}} = \frac{\partial B_{II}}{\partial B_{ij}} \frac{B_{III}}{B_{II}} - \frac{B_{III}^2}{B_{II}} \frac{\partial \kappa(\mathbb{B}^{-1})}{\partial B_{ij}}$$

$$B_{in}(B^{-1})_{nj} = \delta_{ij} \quad \frac{\partial B_{in}}{\partial B_{ke}} (B^{-1})_{nj} + B_{in} \frac{\partial (B^{-1})_{nj}}{\partial B_{ke}} = 0$$

$$\frac{\partial (B^{-1})_{nj}}{\partial B_{ke}} B_{in} = - \frac{\partial B_{in}}{\partial B_{ke}} (B^{-1})_{nj}$$

$$\frac{\partial (B^{-1})_{nj}}{\partial B_{ke}} B_{ni}(B^{-1})_{im} = - \frac{\partial B_{in}}{\partial B_{ke}} (B^{-1})_{nj}(B^{-1})_{im}$$

$$\frac{\partial (B^{-1})_{nj}}{\partial B_{ke}} \delta_{nm} = - (B^{-1})_{lj} (B^{-1})_{km}$$

(3)  $\frac{\partial (B^{-1})_{jm}}{\partial B_{ke}} = - (B^{-1})_{je} (B^{-1})_{km}$

$$\frac{\partial \ln(B^{-1})}{\partial B_{ij}} = \frac{\partial (B^{-1})_{kk}}{\partial B_{ij}} = - (B^{-1})_{ki} (B^{-1})_{kj} = - (B^{-2})_{ij}$$

$$\frac{\partial B_{III}}{\partial B_{ij}} = (B_I \delta_{ij} - B_{ij}) \frac{B_{III}}{B_I} + \frac{B_{III}^2}{B_I} (B^{-2})_{ij}$$

$$\frac{\partial B_{III}}{\partial B} = \frac{B_{III}}{B_I} (B + B_I \mathbb{1} + B_{III} B^{-2}) = B_{III} B^{-1}$$

(4)  $\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial B_I}{\partial B} = 1 \\ \frac{\partial B_{II}}{\partial B} = -B + B_I \mathbb{1} \\ \frac{\partial B_{III}}{\partial B} = B_{III} B^{-1} \\ \frac{\partial \Psi}{\partial B} = -\Psi_{II} B + (\Psi_I + \Psi_{II} B_I) \mathbb{1} + \Psi_{III} B_{III} B^{-1} \end{array} \right.$

1.2. Calcul de  $\frac{\partial^2 \Psi}{\partial B^2}$

On pose :

$$\Psi_I = \frac{\partial \Psi}{\partial B_I} \quad \Psi_{II} = \frac{\partial \Psi}{\partial B_{II}} \quad \Psi_{III} = \frac{\partial \Psi}{\partial B_{III}}$$

$$\Psi_{I,I} = \frac{\partial^2 \Psi}{\partial B_I^2} \quad \Psi_{I,II} = \frac{\partial^2 \Psi}{\partial B_I \partial B_{II}} \quad \Psi_{I,III} = \frac{\partial^2 \Psi}{\partial B_I \partial B_{III}}$$

$$\Psi_{II,II} = \frac{\partial^2 \Psi}{\partial B_{II}^2} \quad \Psi_{II,III} = \frac{\partial^2 \Psi}{\partial B_{II} \partial B_{III}} \quad \Psi_{III,III} = \frac{\partial^2 \Psi}{\partial B_{III}^2}$$

(5)  $\left( \frac{\partial^2 \Psi}{\partial B^2} \right)_{ijke} = \frac{\partial^2 \Psi}{\partial B_{ij} \partial B_{ke}} = \Psi_{I,I} \delta_{ke} \delta_{ij} + \Psi_{II,II} [B_I^2 \delta_{ke} \delta_{ij} + B_{II} B_{II} - B_I (B_{ij} \delta_{ke} + B_{ke} \delta_{ij})]$

$$+ \Psi_{III,III} B_{III}^2 (B^{-1})_{lk} (B^{-1})_{ij} + \Psi_{I,II} [2B_I \delta_{ke} \delta_{ij} - (B_{II} \delta_{ij} + B_{II} \delta_{ke})]$$

$$+ \Psi_{II,III} B_{III} [B_I ((B^{-1})_{ij} + (B^{-1})_{ij}) - (B^{-1})_{lk} B_{ij} + (B^{-2})_{ij} B_{II}]$$

$$+ \Psi_{III,III} B_{III} [(B^{-1})_{lk} \delta_{ij} + B^{-1}_{ji} \delta_{ke}] + \Psi_{II} [\delta_{ke} \delta_{ij} - \delta_{kj} \delta_{ie}] + \Psi_{III} B_{III} [(B^{-1})_{lk} (B^{-1})_{ij} - (B^{-1})_{ij} (B^{-1})_{lk}]$$



On vérifie que :

$$(6) \quad \left( \frac{\partial^2 \Psi}{\partial B^2} \right)_{ijke} = \left( \frac{\partial^2 \Psi}{\partial B^2} \right)_{iche} = \left( \frac{\partial^2 \Psi}{\partial B^2} \right)_{keij}$$

1.3. Quelques propriétés

$$(7) \quad \left\| \frac{\partial \Psi}{\partial B} B = B \frac{\partial \Psi}{\partial B} \right.$$

$$(8) \quad \left\| \frac{\partial^2 \Psi}{\partial B^2} [ \Omega B - B \Omega ] = \Omega \frac{\partial^2 \Psi}{\partial B} - \frac{\partial \Psi}{\partial B} \Omega \right.$$

donc en particulier :

$$\frac{\partial^2 \Psi}{\partial B^2} [ B^T ] = \frac{\partial^2 \Psi}{\partial B^2} [ B ] + \frac{\partial \Psi}{\partial B} \Omega - \Omega \frac{\partial \Psi}{\partial B}$$

1.4. Calcul de  $\frac{\partial \alpha}{\partial B^c}$  et de  $\alpha^J$  : (2.1.4. du Chapitre III)

$$(9) \quad \alpha = 2\rho_0 B^c \frac{\partial \Psi}{\partial B^c} = \alpha(B^c)$$

$$(10) \quad \alpha^J = \frac{\partial \alpha}{\partial B^c} [ B^{cJ} ] = \delta^{e1} [ 10 ] - \delta^{e2} [ 10^p ]$$

$$\left( \frac{\partial \alpha}{\partial B^c} \right)_{ijke} = \rho_0 \left[ \left( \frac{\partial \Psi}{\partial B^c} \right)_{ej} \delta_{ki} + \left( \frac{\partial \Psi}{\partial B^c} \right)_{kj} \delta_{ei} + 2 B^c_{im} \left( \frac{\partial^2 \Psi}{\partial B^2} \right)_{mike} \right]$$

$$(11) \quad \frac{1}{\rho_0} \left( \frac{\partial \alpha}{\partial B^c} \right)_{ijke} = \Psi_I [ \delta_{ej} \delta_{ki} + \delta_{kj} \delta_{ei} ] + \Psi_{II} [ B_I^2 (\delta_{ej} \delta_{ki} + \delta_{kj} \delta_{ei}) + 2 B_{ij}^c \delta_{ke} - (B_{ej}^c \delta_{ki} + B_{kj}^c \delta_{ei} + B_{ei}^c \delta_{kj} + B_{ek}^c \delta_{ej}) ] + \Psi_{III} B_{im}^c [ 2 \delta_{ij} (B^{e-1})_{pk} ] + 2 \Psi_{I,I} \delta_{ke} B_{ij}^c + 2 \Psi_{II,II} [ B_I^2 \delta_{kp} B_{ij}^c + B_{im}^c B_{mj}^c B_{pk}^c - B_I^c (B_{mj}^c B_{im}^c \delta_{ke} + B_{ek}^c B_{ij}^c) ] + 2 \Psi_{III,III} B_{im}^c \delta_{ij} B_{ke}^{e-1} + 2 \Psi_{I,II} [ 2 B_I^c B_{ij}^c \delta_{ke} - (B_{ij}^c B_{ke}^c + B_{im}^c B_{mj}^c \delta_{ke}) ] + 2 \Psi_{I,III} B_{im}^c [ B_{ij}^c (B^{e-1})_{ke} + \delta_{ij} \delta_{ke} ] + 2 \Psi_{II,III} B_{im}^c [ B_I^c (B^{e-1})_{pk} B_{ij}^c + \delta_{ij} \delta_{ke} ] - (B^{e-1})_{pk} B_{im}^c B_{mj}^c + B_{ek}^c \delta_{ij} ]$$

Dans le cas général :

$$\left( \frac{\partial \alpha}{\partial B^c} \right)_{ijke} \neq \left( \frac{\partial \alpha}{\partial B^c} \right)_{keij}$$

(12)  $B^{eJ} = 2 [D B^e]^S - 2 W^e D^e V^e$

En appliquant (11) à  $B^{eJ}$  on a :

(13) 
$$\frac{1}{\rho_0} \Phi^{e1}{}_{ijke} = \Psi_I [ \delta_{ik} B^e{}_{lj} + B^e{}_{je} \delta_{kj} + B^e{}_{ik} \delta_{ej} + B^e{}_{jk} \delta_{ei} ]$$

$$+ \Psi_{II} [ B^e{}_I (B^e{}_{ih} \delta_{aj} + B^e{}_{jk} \delta_{eh} + B^e{}_{aj} \delta_{ki} + B^e{}_{ji} \delta_{kh}) + 4 B^e{}_{ij} B^e{}_{ke} - (B^{e2})_{je} \delta_{ki} + (B^{e2})_{ie} \delta_{kj}$$

$$+ (B^{e2})_{jk} \delta_{ei} + (B^{e2})_{ik} \delta_{ej} + 2 B^e{}_{kj} B^e{}_{ei} + 2 B^e{}_{ik} B^e{}_{ej} ]$$

$$+ 4 \Psi_{III} B^e{}_{ij} \delta_{he} + 4 \Psi_{I,II} B^e{}_{ij} B^e{}_{ek} + 4 \Psi_{III,0} B^e{}_{ij} \delta_{he}$$

$$+ 4 \Psi_{0,II} [ B^e{}_I (B^e{}_{ij} B^e{}_{ek}) + (B^{e2})_{ij} (B^{e2})_{ke} - B^e{}_I ((B^{e2})_{ij} B^e{}_{ke} + B^e{}_{ij} (B^{e2})_{ek}) ]$$

$$+ 4 \Psi_{I,0} [ 2 B^e{}_I B^e{}_{ij} B^e{}_{ke} - B^e{}_{ij} (B^{e2})_{ke} - (B^{e2})_{ij} B^e{}_{ke} ]$$

$$+ 4 \Psi_{I,III} B^e{}_{ij} [ B^e{}_{ij} \delta_{he} + \delta_{ij} B^e{}_{he} ]$$

$$+ 4 \Psi_{II,0} B^e{}_{ij} [ B^e{}_I (B^e{}_{ij} \delta_{he} + \delta_{ij} B^e{}_{he}) - (\delta_{he} (B^{e2})_{ij} + (B^{e2})_{he} \delta_{ij}) ]$$

et on vérifie que :

(14)  $\Phi^{e1}{}_{ijke} = \Phi^{e1}{}_{jike} = \Phi^{e1}{}_{keij}$

(15) 
$$\frac{1}{\rho_0} \Phi^{e2}{}_{ijke} = \Psi_I [ V^e{}_{jh} V^e{}_{ie} + V^e{}_{je} V^e{}_{ih} ] + 2 \Psi_{III} B^e{}_{ij} \delta_{he} + 2 \Psi_{I,II} B^e{}_{ij} B^e{}_{ke}$$

$$+ \Psi_{II} [ B^e{}_I (V^e{}_{jh} V^e{}_{ie} + V^e{}_{je} V^e{}_{ih}) + 2 B^e{}_{ij} B^e{}_{ke} - (V^e{}_{ik} (V^{e3})_{ej} + V^e{}_{ie} (V^{e3})_{kj} + V^e{}_{kj} (V^{e3})_{ei} + V^e{}_{ji} (V^{e3})_{kh}) ]$$

$$+ 2 \Psi_{0,II} [ B^e{}_I B^e{}_{ij} B^e{}_{ke} + (B^{e2})_{ij} (B^{e2})_{ke} - B^e{}_I ((B^{e2})_{ij} B^e{}_{ke} + B^e{}_{ij} (B^{e2})_{ek}) ]$$

$$+ 2 \Psi_{III,0} B^e{}_{ij} ( \delta_{ij} \delta_{he} ) + 2 \Psi_{I,0} [ 2 B^e{}_I B^e{}_{ij} B^e{}_{ke} - (B^e{}_{ij} (B^{e2})_{ke} + (B^{e2})_{ij} B^e{}_{ke} ) ]$$

$$+ 2 \Psi_{II,0} B^e{}_{ij} [ B^e{}_I ( \delta_{he} B^e{}_{ij} + \delta_{ij} B^e{}_{he} ) - ( \delta_{he} (B^{e2})_{ij} + (B^{e2})_{he} \delta_{ij} ) ]$$

$$+ 2 \Psi_{I,III} B^e{}_{ij} [ B^e{}_{ij} \delta_{he} + \delta_{ij} B^e{}_{he} ]$$

On vérifie que :

(16)  $\Phi^{e2}{}_{ijke} = \Phi^{e2}{}_{heij} = \Phi^{e2}{}_{jike}$

1.5. Calcul de  $H^J$  (2.1.4. du Chapitre III)

(17)  $H = 2 \rho_0 H^p \frac{\partial \Psi}{\partial H^p} = H(H^p) \quad H^J = \frac{\partial H}{\partial H^p} [H^p J] = 2 \frac{\partial H}{\partial H^p} [(H^p D^p)^S] = \Phi^p [D^p]$

on a :

(18) 
$$\frac{1}{\rho_0} \Phi^p{}_{ijke} = \Psi_I [ \delta_{ik} H^p{}_{lj} + H^p{}_{je} \delta_{kj} + H^p{}_{ik} \delta_{ej} + H^p{}_{jk} \delta_{ei} ]$$

$$+ \Psi_{II} [ H^p{}_I (H^p{}_{ih} \delta_{aj} + H^p{}_{jk} \delta_{eh} + H^p{}_{aj} \delta_{ki} + H^p{}_{ji} \delta_{kh}) + 4 H^p{}_{ij} H^p{}_{ke} - (H^{p2})_{je} \delta_{ki} + (H^{p2})_{ie} \delta_{kj}$$

$$+ (H^{p2})_{jk} \delta_{ei} + (H^{p2})_{ik} \delta_{ej} + 2 H^p{}_{kj} H^p{}_{ei} + 2 H^p{}_{ik} H^p{}_{ej} ]$$

$$+ 4 \Psi_{I,II} H^p{}_{ij} H^p{}_{ek} + 4 \Psi_{I,0} [ 2 H^p{}_I H^p{}_{ij} H^p{}_{ke} - H^p{}_{ij} (H^{p2})_{ke} - (H^{p2})_{ij} H^p{}_{ke} ]$$

$$+ 4 \Psi_{0,0} [ H^p{}_I (H^p{}_{ij} H^p{}_{ke}) + (H^{p2})_{ij} (H^{p2})_{ke} - H^p{}_I ((H^{p2})_{ij} H^p{}_{ke} + H^p{}_{ij} (H^{p2})_{ek}) ]$$

Soit :

(19)  $\Phi^p{}_{ijke} = \Phi^p{}_{keij} = \Phi^p{}_{jike}$

2. Fonction scalaire isotrope de deux tenseurs symétriques

(20)  $\Psi = \Psi(B, H)$

$B, H$ : Deux tenseurs symétriques du second ordre.

(21)  $\Psi = \Psi(kB, kB^2, kB^3, kH, kH^2, kH^3, kB^2H, kB^3H^2, kB^2H^2)$

On pose :

$k(B) = B_1 \quad k(B^2) = B_2 \quad k(B^3) = B_3 \quad k(H) = H_1 \quad k(H^2) = H_2 \quad k(H^3) = H_3$

$k(BH) = A_{11} \quad k(B^2H) = A_{21} \quad k(BH^2) = A_{12} \quad k(B^2H^2) = A_{22}$

Soit :

$\frac{\partial B_1}{\partial B} = 1 \quad ; \quad \frac{\partial B_2}{\partial B} = 2B \quad ; \quad \frac{\partial B_3}{\partial B} = 3B^2 \quad ; \quad \frac{\partial H_1}{\partial H} = 1 \quad ; \quad \frac{\partial H_2}{\partial H} = 2H \quad ; \quad \frac{\partial H_3}{\partial H} = 3H^2$

$\frac{\partial A_{11}}{\partial B} = H \quad ; \quad \frac{\partial A_{12}}{\partial B} = H^2 \quad ; \quad \frac{\partial A_{21}}{\partial B} = BH + HB \quad ; \quad \frac{\partial A_{22}}{\partial B} = H^2B + BH^2$

$\frac{\partial A_{11}}{\partial H} = B \quad ; \quad \frac{\partial A_{12}}{\partial H} = HB + BH \quad ; \quad \frac{\partial A_{21}}{\partial H} = B^2 \quad ; \quad \frac{\partial A_{22}}{\partial H} = B^2H + HB^2$

Soit :

(22) 
$$\left\{ \begin{aligned} \frac{\partial \Psi}{\partial B} &= \frac{\partial \Psi}{\partial B_1} 1 + 2 \frac{\partial \Psi}{\partial B_2} B + 3 \frac{\partial \Psi}{\partial B_3} B^2 + \frac{\partial \Psi}{\partial A_{11}} H + \frac{\partial \Psi}{\partial A_{12}} H^2 + \frac{\partial \Psi}{\partial A_{21}} (BH + HB) + \frac{\partial \Psi}{\partial A_{22}} (H^2B + BH^2) \\ \frac{\partial \Psi}{\partial H} &= \frac{\partial \Psi}{\partial H_1} 1 + 2 \frac{\partial \Psi}{\partial H_2} H + 3 \frac{\partial \Psi}{\partial H_3} H^2 + \frac{\partial \Psi}{\partial A_{11}} B + \frac{\partial \Psi}{\partial A_{12}} (HB + BH) + \frac{\partial \Psi}{\partial A_{21}} B^2 + \frac{\partial \Psi}{\partial A_{22}} (B^2H + HB^2) \end{aligned} \right.$$

Dans le cas général :  $\frac{\partial \Psi}{\partial B} B \neq B \frac{\partial \Psi}{\partial B}$  et  $\frac{\partial \Psi}{\partial H} H \neq H \frac{\partial \Psi}{\partial H}$  par contre :

(23) 
$$\boxed{\frac{\partial \Psi}{\partial B} B + \frac{\partial \Psi}{\partial H} H = B \frac{\partial \Psi}{\partial B} + H \frac{\partial \Psi}{\partial H}}$$

$\frac{\partial \Psi}{\partial B} B = B \frac{\partial \Psi}{\partial B} \iff \frac{\partial \Psi}{\partial H} H = H \frac{\partial \Psi}{\partial H} \iff \frac{\partial \Psi}{\partial A_{11}} = \frac{\partial \Psi}{\partial A_{21}} = \frac{\partial \Psi}{\partial A_{22}} = \frac{\partial \Psi}{\partial A_{12}} = 0$

ANNEXE V

UN MODELE ELASTO-PLASTIQUE STANDARD AVEC ECROUISSAGE  
ISOTROPE ET CINEMATIQUE

1. Hypothèses

- Ecrouissage isotrope et cinématique

(1)  $\alpha^p = \alpha - k$

- Critère de Von Mises

(2)  $|\alpha^{pD}| - A_0(p) - K \leq 0 \quad |\alpha^{pD}| = (\alpha^{pD} : \alpha^{pD})^{1/2}$

- Petites déformations élastiques

(3)  $\alpha = \frac{E}{1+\nu} (\epsilon^e + \frac{\nu}{1-2\nu} k \epsilon^e \mathbb{1}) \quad \epsilon^e \approx \frac{1}{2} (13^e - \mathbb{1}) \approx \nu^e \mathbb{1}$

- Matériau standard généralisé

(4)  $\dot{\alpha}^p = \lambda \frac{\alpha^{pD}}{|\alpha^{pD}|} \quad \dot{p} = \lambda = (\dot{\alpha}^p : \dot{\alpha}^p)^{1/2}$

- Choix de  $k$

(5)  $k = \frac{1}{2} G_1 (11^p - \mathbb{1})$

2. Ecriture incrementale

(6) 
$$\begin{cases} \mathbb{D} = \mathbb{D}^e + \mathbb{D}^p \\ \mathbb{D}^e = \frac{1+\nu}{E} \alpha^J - \frac{\nu}{E} k (\alpha^J) \mathbb{1} \\ \mathbb{D}^p = \left\langle \frac{\alpha^{pD} : \alpha^J}{|\alpha^{pD}|} \right\rangle \left[ G_1 \frac{\alpha^{pD} 11^p : \alpha^{pD}}{|\alpha^{pD}|^2} + A'(p) \right]^{-1} \frac{\alpha^{pD}}{|\alpha^{pD}|} \end{cases}$$

(7) 
$$\alpha^J = \frac{E}{1+\nu} \left\{ \mathbb{D} + \frac{\nu}{1-2\nu} k (\mathbb{D}) \mathbb{1} - \frac{\langle \alpha^{pD} : \mathbb{D} \rangle}{|\alpha^{pD}| + \frac{1+\nu}{E} G_1 \frac{\alpha^{pD} 11^p : \alpha^{pD}}{|\alpha^{pD}|^2} + \frac{1+\nu}{E} A'(p)} \frac{\alpha^{pD}}{|\alpha^{pD}|} \right\}$$

Si à un instant donné on connaît :

$$\alpha, H^p \text{ donc } \psi, p, A'(p) \text{ et } D$$

On peut alors calculer  $\alpha^J$  par la relation (7) sachant que :

$$\alpha^{p^D} = (\alpha - \psi)^D = \alpha^D - \psi^D = \alpha - \frac{1}{3} h(\alpha) \Delta t - \psi + \frac{1}{3} h(\psi) \Delta t$$

On calcule ensuite :

$$(8) \quad \left\{ \begin{array}{l} \bar{D}^p = D - \frac{4+p}{E} \alpha^J + \frac{2}{E} h(\alpha^J) \Delta t \\ \dot{p} = (\bar{D}^p : \bar{D}^p)^{\frac{1}{2}} \\ H^{p^J} \approx 2 (\bar{D}^p H^p)^S \end{array} \right.$$

Ce qui permet de calculer  $\alpha$ ,  $H^p$  et  $p$  à l'instant suivant.