



HAL
open science

Contribution à l'analyse des modèles aux tensions de Reynolds pour l'interaction choc turbulence

Bruno Audebert

► **To cite this version:**

Bruno Audebert. Contribution à l'analyse des modèles aux tensions de Reynolds pour l'interaction choc turbulence. Mécanique des fluides [physics.class-ph]. Université Pierre et Marie Curie - Paris VI, 2006. Français. NNT: . tel-00850928

HAL Id: tel-00850928

<https://theses.hal.science/tel-00850928>

Submitted on 9 Aug 2013

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

UNIVERSITÉ DE PARIS 6 - PIERRE ET MARIE CURIE
en collaboration avec
L'OFFICE NATIONAL DE RECHERCHES ET D'ÉTUDES AÉROSPATIALES

Numéro :

--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--

THÈSE

pour obtenir le grade de

DOCTEUR DE L'UNIVERSITÉ PARIS 6

Discipline : MÉCANIQUE

École Doctorale Science Mécanique et Aéroacoustique

présentée et soutenue publiquement par

Bruno AUDEBERT

le 19 Décembre 2006

Titre :

Contribution à l'analyse des modèles aux tensions de Reynolds pour l'interaction choc turbulence

Directeur de thèse : Claude BASDEVANT

Encadrant : Frédéric COQUEL

Jury :

MM.	Claude BASDEVANT,	Université de Paris 13,	<i>directeur de thèse</i>
	Frédéric COQUEL,	Université de Paris 6,	<i>examineur</i>
	Sergey GAVRILYUK,	Université d'Aix-Marseille 3,	<i>rapporteur</i>
	Henri GOUIN,	Université d'Aix-Marseille 3,	<i>président du jury</i>
	Jean-Marc HÉRARD,	EDF,	<i>rapporteur</i>
	Claude MARMIGNON,	ONERA,	<i>membre invité</i>
	Pierre SAGAUT,	Université de Paris 6,	<i>examineur</i>

à mes parents, à mon frère et ma soeur, à Anne,

Remerciements

Contrairement aux apparences ou aux croyances populaires, une recherche doctorale est loin d'être un travail d'ermite où le malheureux apprenti chercheur, aux cheveux hirsutes et au pull à carreaux, se confronte aux problèmes scientifiques les plus ardues dans un endroit reculé et dans l'ignorance la plus totale de ses patrons, de ses collègues et de la lumière du jour. Au contraire, une thèse c'est d'abord un lieu, le laboratoire, mais surtout des personnes, qu'il s'agisse des encadrants, des collègues ingénieurs et thésards ou de toute autre rencontre au détour d'un couloir. Ce petit aparté constitue donc pour moi un lieu privilégié où je peux enfin remercier toutes les personnes ayant participé de près ou de loin à cet épisode de ma vie.

La majeure partie de ce travail a été réalisée au Département de Simulation Numérique des écoulements et Aéroacoustique de l'ONERA à Châtillon. Je remercie en premier lieu l'office pour avoir entièrement financé cette thèse.

Je remercie vivement Monsieur Philippe Morice, directeur du DSNA, ainsi que Monsieur Jean-Pierre Veillot, chef de l'unité MNES, de m'avoir accueilli dans leur équipe. J'y ai particulièrement apprécié les conditions de travail et les moyens importants mis à la disposition des thésards.

Je tiens à remercier le Professeur Claude Basdevant de l'Université Paris 13 d'avoir accepté de diriger cette thèse, de m'avoir fait confiance et d'avoir répondu présent à mes diverses sollicitations.

Le Professeur Henri Gouin de l'Université d'Aix-Marseille 3 m'a fait l'honneur de présider mon jury, je l'en remercie sincèrement. Je remercie également le Professeur Pierre Sagaut de l'Université Paris 6 pour sa participation au jury.

J'exprime mes plus vifs remerciements au Professeur Sergey Gavriluk de l'Université d'Aix-Marseille 3 et à Monsieur Jean-Marc Hérard, ingénieur chercheur à EDF, pour avoir accepté d'être les rapporteurs de ce mémoire. Leurs remarques pertinentes ont permis de l'enrichir et l'attention qu'ils lui ont portée en font toute sa valeur à mes yeux.

N'oublions pas qu'une thèse est avant tout une formation. À ce titre, je peux affirmer sans hésitation que j'ai bénéficié d'un encadrement exceptionnel. C'est souvent le hasard qui nous amène à choisir un sujet de thèse plutôt qu'un autre, et je me rends compte à présent de la chance que j'ai eue de rencontrer Frédéric Coquel et Claude

Marmignon. Ceux-ci ont été de véritables soutiens tout au long de cette thèse. Leur gentillesse n'a d'égale que leurs inépuisables connaissances. Une relation d'amitié, bien plus qu'une relation hiérarchique, s'est instaurée entre nous, contribuant grandement au très bon déroulement de cette thèse et au souvenir agréable que j'en garderai.

J'exprime ma profonde reconnaissance à Claude Marmignon pour son aide précieuse dans le domaine du calcul scientifique, sa disponibilité, son humilité et ses encouragements.

Je ne sais comment remercier Frédéric Coquel à qui je dois beaucoup. Je reste admiratif devant ses extraordinaires connaissances, non seulement en analyse numérique et en sciences en général, mais aussi sur le monde qui nous entoure. Nos discussions, qu'elles aient été scientifiques ou non, ont toujours été enrichissantes et souvent l'occasion de franches rigolades. Je le remercie sincèrement pour son sens de la pédagogie, ses grandes qualités humaines, sa disponibilité et ses conseils avisés et patients, que ce soit pour la thèse, les voyages ou mon avenir. Je ne peux qu'espérer que notre collaboration ne s'arrêtera pas là.

Les aléas de la thèse m'ont amené à rôder pendant presque un an au laboratoire Jacques-Louis Lions de l'Université Paris 6. Je tiens donc à remercier le Professeur Yvon Maday, directeur de ce laboratoire, de m'avoir accueilli, ainsi que Marie Postel de m'avoir fait une petite place dans son bureau. Plus généralement, mes plus vifs remerciements aux différents chercheurs de ce laboratoire que j'ai pu côtoyer, en particulier Christophe Chalons pour ses conseils, son soutien et sa disponibilité, et Frédéric Lagoutière qui a su égayer mes nombreux week-ends passés au laboratoire JLL.

Ces mêmes aléas m'ont également conduit à travailler sur mon manuscrit durant ma première année chez EDF. Je souhaite remercier à cette occasion Monsieur Etienne Brière, chef du département Mécanique de Fluides, Énergies et Environnement d'EDF R&D, ainsi que Monsieur Vincent Maupu chef du groupe I85 Écoulements et Turbomachines de ce même département, de m'avoir accordé un mois pour terminer la rédaction de ce mémoire. Ce petit délai a finalement permis de grands choses.

Je suis persuadé que l'ambiance de travail est un facteur primordial à la réussite d'un travail quel qu'il soit. Les différents thésards et stagiaires de l'ONERA ont fini de me convaincre. Ils ont tous contribué à l'aboutissement de cette recherche doctorale, je les remercie chaleureusement. Bien sûr, plusieurs générations se sont succédées. Il y a d'abord eu les anciens : Éric "Igor" le repent et ses théories radicales sur tous les sujets, Bruno "Chibre" et son humour rose, Noël et ses prises de tête scientifiques toujours intéressantes, Ronan l'acteur, Mathieu "Gros Mat" le décontracté, adepte du travail en calebar et désormais collègue, Élodie et Frédérique, dignes représentantes de la gent féminine. Sont venus ensuite les camarades de promo, Sébastien "Herbert" le discret aux tacles affûtés, Lutz "Achhh" roi du jet chaud instable et des problèmes de coeur, Fabrice "Quasifab" le danseur de salsa et contradicteur infatigable, Chi-Tuan "Chichi" optimisateur fou, roi du Michel et à nouveau collègue. Plus tard, sont arrivés : Frédéric "Fred" incollable sur les inconnus, Guillaume "Guigui 2" ses étouffements et sa Guiguette, Guillaume "Bill" le jardinier interpolateur, Olivier "Keket" le colloc' surfeur de courbure et Élixa à l'échelle multiple. Enfin, nous ont rejoints les plus jeunes, bien sympathiques : Olivier, François et Géraldine.

La thèse est aussi une aventure où les plus grands obstacles ne sont pas nécessairement scientifiques. Je remercie donc mes amis qui ont su me remonter le moral dans les moments difficiles. Merci aussi à ma famille : mes parents pour leur soutien indéfectible depuis mes plus jeunes années, leurs encouragements et leur amour qui m'ont apporté la confiance nécessaire pour aboutir dans mes études et me lancer dans la vie. Mon frère et ma soeur qui par leurs attentions ont toujours su me montrer qu'ils étaient avec moi.

Mes derniers remerciements vont à mon plus grand soutien durant cette période pas toujours facile à vivre, Anne qui a su être présente, de bon conseil et m'a littéralement soutenu au jour le jour. Sa relecture attentive de tous mes travaux, et sa connaissance de la langue de Shakespeare m'ont été plus que précieux. Je ne la remercierai jamais assez de sa patience pour cette interminable thèse et de ne m'avoir jamais reproché les nombreux week-ends passés au laboratoire. L'aboutissement de ce travail lui doit beaucoup et je lui en suis extrêmement reconnaissant.

Table des matières

Remerciements	5
Introduction	13
1 Choix du modèle RSM	25
1.1 Contexte de l'étude	25
1.2 Les modèles RSM	27
1.2.1 Réalisabilité	28
1.2.2 Objectivité	30
1.2.3 Ordre de grandeur	31
1.3 Le modèle retenu	33
I Propriétés du modèle retenu	35
2 Fonctions cinétiques et relations de saut généralisées	36
2.1 Position du problème	36
2.2 Le cadre conservatif : solutions choc et critères de sélection	37
2.3 Le cadre non conservatif : ambiguïté des produits	40
2.4 Profil de choc visqueux et solution choc	41
2.5 Couple d'entropies et relations de saut généralisées	43
2.6 Notion de solutions faibles pour un système hyperbolique non conservatif	44
3 Propriétés élémentaires du système	47
3.1 Écriture du modèle pour les ondes planes	47
3.2 Hyperbolicité du modèle de fluide parfait	49
3.3 Nature des champs	52
3.4 Ondes vraiment non linéaires et relations de saut ambiguës	53
3.5 Ondes linéairement dégénérées et absence d'ambiguïté	53
3.6 Lois d'évolution supplémentaires	54
3.6.1 Problème de fluide parfait	55
3.6.2 Lois d'évolution supplémentaires en présence de viscosité	58
4 Premiers enseignements de l'analyse onde progressive	59
4.1 Adimensionnement du système d'EDP	60
4.2 Le système d'EDO	63
4.2.1 Réduction du système dynamique	63

4.3	Quelques implications de l'analyse onde progressive	71
4.3.1	Dépendance au tenseur diffusif	71
4.3.2	Un phénomène de surcompression dans un cas limite	73
4.4	La correction de Ristorcelli	80
II	Analyse onde progressive et fonctions cinétiques	84
5	Importance de la correction de Ristorcelli, cadre isotherme	85
5.1	Le système d'EDP adimensionné	86
5.2	Le système d'EDO dans le cadre isotherme	87
5.3	Analyse du système d'EDO	90
5.3.1	Théorème de la variété centrale	90
5.3.2	Linéarisée du système au voisinage d'un point stationnaire . . .	91
5.3.3	Décomposition en un sous-système autonome et un système linéaire à coefficients variables	92
5.3.4	Sous-système autonome en (η, \mathcal{I})	93
5.3.5	Rôle de \mathcal{T}_{ris} dans le phénomène de compression	97
5.3.6	Système linéaire à coefficients variables pour (Y_+, Y_-)	100
5.4	Relations de saut généralisées et fonctions cinétiques	110
5.5	Qualification de l'amplitude de l'échelle de temps de Ristorcelli	113
5.5.1	Absence de surcompression et production de turbulence longitudinale	114
5.5.2	Une contrainte numérique liée à la détermination des fonctions cinétiques	117
5.5.3	Lien entre le taux de compression de sortie η_R et l'amplitude des échelles de temps \mathcal{T}_{ris}	122
5.5.4	Analyse de l'échelle de temps \mathcal{T}_{ris} à β et M variables	123
5.5.5	Synthèse concernant les échelles de temps de Ristorcelli admissibles	127
5.6	Approximation numérique des fonctions cinétiques	129
5.6.1	Lien entre le système d'EDO et les fonctions cinétiques	129
5.6.2	Résolution du système d'EDO	131
5.6.3	Élimination de la singularité en $H = 0$	138
5.6.4	Mise en oeuvre	141
6	Cadre anisotherme	151
6.1	Le système d'EDP adimensionné	152
6.2	Le système d'EDO dans la cadre anisotherme	154
6.3	Analyse du système d'EDO	156
6.3.1	Linéarisée du système au voisinage d'un point stationnaire . . .	156
6.3.2	Surcompressivité	159
6.3.3	À propos de la compressivité des solutions onde progressive . .	160
6.3.4	Propriétés du système en (Y_+, Y_-) nécessaires à l'intégration numérique	161
6.3.5	Expression des points stationnaires	164
6.4	Relations de saut généralisées et fonction cinétique	166

6.5	Approximation numérique du système d'EDO et de la fonction cinétique	169
6.5.1	Résolution du système d'EDO	169
6.5.2	Élimination de la singularité en $H = 0$	179
6.5.3	Mise en oeuvre	183
7	Le problème de Riemann dans le cadre anisotherme	201
7.1	Solutions chocs	201
7.2	Le problème de Riemann	204
7.2.1	Courbes de choc	207
7.2.2	Courbes de détente	210
7.2.3	Existence et unicité	212
7.3	Illustrations numériques	213
7.3.1	Double détente	214
7.3.2	Double choc	214
7.3.3	Tube à choc de Sod turbulent	214
III	Stabilité du choc dans un cadre non conservatif	222
8	Stabilité structurelle du choc droit	223
8.1	Théorie	223
8.1.1	Relations cinétiques et conditions de stabilité structurelle . . .	223
8.1.2	Linéarisation et critère de stabilité structurelle	226
8.1.3	Prise en compte d'un changement de variables	231
8.1.4	Stabilité structurelle et modèle RSM	234
8.2	Application au cadre isotherme avec correction de Ristorcelli	235
8.2.1	Condition de stabilité structurelle	235
8.3	Application au cadre anisotherme sans correction de Ristorcelli	241
8.3.1	Condition de stabilité structurelle	241
8.3.2	Deux cas particuliers : Euler et Navier-Stokes à deux pressions	247
9	Stabilité multidimensionnelle du choc plan	251
9.1	Le problème du choc plan perturbé et sa linéarisation	252
9.1.1	Préambule : notion de couche interne pour un choc plan non perturbé	252
9.1.2	Perturbation d'un choc plan : notations et premières définitions de la stabilité	256
9.1.3	Couche interne pour un choc plan perturbé	258
9.1.4	Le problème de couplage via une couche interne perturbée . . .	260
9.1.5	Le problème de couplage via des relations cinétiques	261
9.1.6	Linéarisation du problème de couplage	269
9.1.7	Exemple de la linéarisation des relations de saut généralisées dans le cadre isotherme avec correction de Ristorcelli	274
9.1.8	Lien avec le problème de la stabilité structurelle du choc droit .	278
9.2	Condition de Lopatinski en présence de fonctions cinétiques	279
9.2.1	Relation de dispersion	280
9.2.2	Évaluation des éléments spectraux dans le déterminant de Lopatinski	286

9.3	Application au cadre isotherme avec correction de Ristorcelli	288
9.3.1	Systèmes d'inconnues et notations	288
9.3.2	Détermination du vecteur ${}^t D_{\mathbf{u}}^{-1} \mathbf{v}(\mathbf{u}_R) \Lambda_1(\mathbf{u}_R, k, \omega)$	290
9.3.3	Linéarisation des relations de saut généralisées	294
9.3.4	À propos des relations de la forme adimensionnée du déterminant de Lopatinski	297
9.3.5	Principe de l'argument	297
9.3.6	Propriété d'homogénéité du déterminant de Lopatinski et applications	300
9.3.7	Une méthode numérique basée sur le principe de l'argument	303
9.3.8	Cartes de stabilité	304
9.4	Application au cadre anisotherme sans correction de Ristorcelli	316
9.4.1	Systèmes d'inconnues et notations	316
9.4.2	Détermination du vecteur ${}^t D_{\mathbf{u}}^{-1} \mathbf{v}(\mathbf{u}_R) \Lambda_1(\mathbf{u}_R, k, \omega)$	318
9.4.3	Linéarisation des relations de saut généralisées	321
9.4.4	À propos des relations de la forme adimensionnée du déterminant de Lopatinski	326
9.4.5	Propriété d'homogénéité du déterminant de Lopatinski et applications	328
9.4.6	Condition de stabilité pour les équations d'Euler	331
9.5	Cartes de stabilité	333
IV Annexes		341
A Overcompressive versus compressive shock solutions in second order turbulent closures		342
1	The PDE model	343
1.1	Preamble	343
1.2	Presentation of the PDE model	346
1.3	Basic properties of the PDE model	348
1.4	Entropy pairs and equivalent formulations	350
2	Traveling wave analysis	352
2.1	The dynamical system	353
2.2	On basic properties of Σ^4 at equilibrium points	356
2.3	Heteroclinic solutions of the reduced dynamical system Σ^2	358
3	Heteroclinic orbits of the homogeneous linear system $\Sigma^{\mathbf{Y}}$	364
3.1	Time asymptotics for a class of Riccati equations	366
3.2	Time asymptotics for Y_{\pm}	371
4	The asymptotic system and the Riemann problem	376
4.1	Shock solutions	376
4.2	The Riemann problem	378
4.3	Shock curves	379
4.4	Rarefaction curves	380
4.5	Existence and uniqueness	381

B Hybrid Godunov-Glimm method for a nonconservative hyperbolic system with kinetic relations	383
Bibliographie	397

Introduction

L'ensemble des travaux proposés dans cette thèse concerne l'interaction entre onde de choc et turbulence pleinement développée au sein d'un écoulement.

Par onde de choc, on entend ici un profil de compression s'étendant sur une zone de variation caractérisée par une échelle d'extension très petite. Cette échelle est d'autant plus petite que nous nous intéressons à une turbulence pleinement développée et donc à un nombre de Reynolds très élevé.

De nombreuses expériences montrent qu'à la traversée d'une onde de choc, un champ turbulent initialement isotrope, devient anisotrope dans la direction normale à cette onde de choc (voir par exemple les références [20], [19], [6], [42], [24], [23] [39], [40]). Dans ce contexte, nous étudions ici des modélisations dédiées à l'étude de la turbulence compressible anisotrope. Il s'agit de modèles aux tensions de Reynolds ou modèles RSM (Reynolds Stress Models) correspondant à une fermeture du second ordre pour les équations de Navier-Stokes moyennées.

Il existe dans la littérature un très grand nombre de modèles RSM qui, d'après la physique, devraient tous prendre en compte le flux de masse turbulent en raison de la nature compressible de l'écoulement. Dans le processus de moyenne des équations de Navier-Stokes compressibles, ce terme résulte de la différence entre la moyenne de Reynolds et la moyenne de Favre, respectivement adaptée aux écoulements incompressibles et compressibles. En pratique, ce terme est le plus souvent, sinon toujours, négligé dans les applications.

Dans cette thèse, nous montrons que le flux de masse turbulent joue un rôle essentiel dans la modélisation de l'interaction entre la turbulence et les mécanismes de compression dans un choc.

En effet, dès que ce terme est négligé dans la modélisation RSM, nous établissons théoriquement qu'une onde de choc peut devenir violemment instable lors d'une interaction avec la turbulence. Ce phénomène d'instabilité survient pour des nombres de Mach et des nombres de Mach turbulent, certes élevés, mais atteignables dans certaines applications aéronautiques. Une onde de choc violemment instable est en réalité non observable, ce qui est *a priori* une aberration puisque il est connu depuis les années cinquante (voir Erpenbeck [26] ou D'yakov [22]) que les chocs régis par les équations instantanées sont stables dans le cadre des gaz parfaits polytropiques.

Afin de mettre en évidence le rôle fondamental du flux de masse turbulent dans l'interaction onde de choc turbulence, nous devons faire face à deux difficultés de fond.

La première difficulté est d'ordre mathématique. Elle provient du fait que le système considéré s'écrit sous forme non conservative : même en l'absence de flux de masse turbulent, il n'existe pas de changement de variable permettant de formuler les équations sous une forme totalement conservative. Dans un cadre non conservatif, la signification d'une solution choc doit être précisée car il n'existe pas suffisamment de relations de Rankine-Hugoniot classiques permettant de la caractériser. De plus, la théorie existante de la stabilité des chocs ne concerne que les systèmes sous forme conservative.

La deuxième difficulté est d'ordre physique. Si il existe plusieurs modèles pour le flux de masse turbulent, un seul d'entre eux, dû à Ristorcelli [57], est réalisable et induit une caractérisation entropique. Ces deux propriétés sont indispensables à toute étude de solutions choc avant même d'envisager leurs éventuelles propriétés de stabilité. On retient donc ici la forme proposée par Ristorcelli que nous appellerons, dans toute la suite, correction de Ristorcelli. La véritable difficulté est alors que cette correction nécessite la modélisation d'une échelle de temps pour laquelle on dispose de très peu d'informations dans la littérature existante.

Notre étude propose deux réponses à ces deux difficultés majeures.

Concernant la difficulté mathématique, nous proposons d'utiliser la théorie récente des fonctions cinétiques [10] associées à la définition d'un ensemble complet de relations de saut généralisées permettant de caractériser les solutions choc. Ces fonctions cinétiques correspondent à des taux de dissipation d'entropie dans les chocs. Nous montrons que cet outil permet de proposer une généralisation naturelle des conditions de stabilité multidimensionnelle introduites par Erpenbeck [26] et D'yakov [22] dans un cadre conservatif.

Concernant la difficulté d'ordre physique, nous montrons que la définition précise de l'échelle de temps associée à la correction de Ristorcelli influe déjà sur la stabilité structurelle du choc droit en une dimension d'espace. Puisque nous souhaitons étudier la stabilité multidimensionnelle du choc, il faut prêter une attention toute particulière au choix de cette échelle. De plus, ses conséquences sur l'ordre de grandeur des composantes du tenseur de Reynolds sont cruciales. L'amplitude de l'échelle de temps doit être choisie suffisamment grande pour éviter l'instabilité violente multidimensionnelle du choc, mais pas trop grande pour respecter les observations expérimentales établissant la création de turbulence longitudinale lors de l'interaction choc turbulence. La caractérisation est menée par une étude fine des propriétés des profils de viscosité associés au choc.

Présentation générale des résultats

Dans ce paragraphe, nous présentons de manière informelle les résultats de nos travaux obtenus dans un cadre isotherme pour une analyse exhaustive des conséquences de la correction de Ristorcelli sur la stabilité des chocs, et pour une analyse partielle dans le cadre anisotherme. Nous en expliquons les raisons techniques ultérieurement.

Nous avons affirmé que les solutions choc d'un modèle RSM sont susceptibles d'être violemment instables contrairement aux solutions choc des équations instantanées. Il convient d'éclairer l'origine de cette différence.

Les travaux de Brun, Hérard, Jeandel et Uhlmann [13] (voir également la thèse d'Uhlmann [66]) sont les premiers à souligner la forme réellement non conservative des équations d'un modèle RSM, pour en décrire la véritable structure des familles d'ondes associées au modèle de fluide parfait. Cette structure est représentée sur la figure (1) pour une turbulence statistiquement bidimensionnelle : contrairement aux trois familles d'ondes associées aux équations instantanées (deux familles acoustiques encadrant des ondes de transport), deux familles d'ondes supplémentaires viennent s'intercaler dans le cadre des modèles moyennés. Celles-ci sont ignorées de l'ensemble des autres travaux portés à notre connaissance. Ces ondes sont linéairement dégénérées et traduisent l'existence de phénomènes nouveaux sur la composante tangentielle au front de choc de la vitesse (ainsi que sur les composantes tangentielles du tenseur de Reynolds). Les premières et dernières familles d'ondes, dites ondes extrêmes dans la suite, sont de nature acoustique : elles sont ainsi responsables de la formation de chocs. Ces ondes sont elles-mêmes le siège de phénomènes tangentiels nouveaux : la composante tangentielle de la vitesse n'est plus constante à la traversée d'un choc, contrairement aux équations instantanées. L'apparition de ces deux nouveaux types de phénomènes tangentiels dans les modèles moyennés est à l'origine des phénomènes d'instabilité rapportés, pour des raisons différentes.

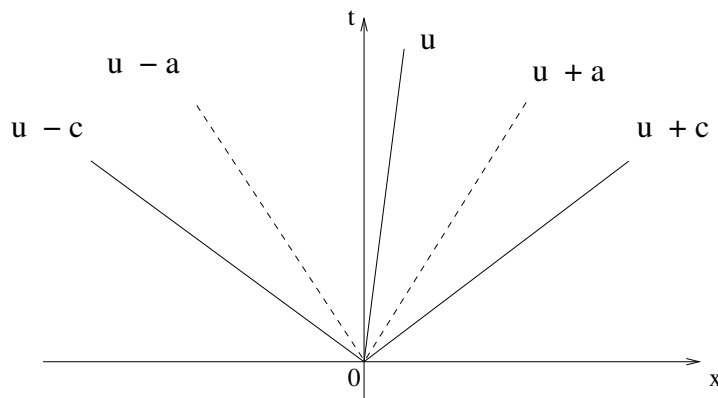


FIG. 1 – Structure en ondes

Dans un premier temps, les phénomènes tangentiels décrits par les deux nouvelles

familles d'onde sont, en l'absence de la correction de Ristorcelli, responsables des phénomènes d'instabilité les plus violents.

Brun, Hérard, Jeandell et Uhlmann [13] ont établi que si les phénomènes propagatifs décrits par ces deux familles d'ondes supplémentaires ne sont pas pris en compte sur un plan numérique, alors la solution discrète subit des oscillations temporelles entraînant une instabilité violente pour tout pas de temps et toute résolution spatiale. Ces auteurs ont montré que respecter ces ondes au niveau discret stabilise le calcul. Sur le plan théorique, nous montrons que ces ondes supplémentaires peuvent être à l'origine d'instabilités violentes dès que l'échelle de temps de la correction de Ristorcelli n'est pas correctement définie. Nous ignorons à ce jour si les deux résultats d'instabilités que nous venons de rapporter entretiennent un lien.

Expliquons de manière informelle les mécanismes responsables de l'apparition des phénomènes d'instabilité tels que prévus dans notre étude. Il ressort que les ondes supplémentaires sont susceptibles d'interagir de manière négative avec les profils de compression associés aux ondes extrêmes, pour conduire à des phénomènes de surcompression. La surcompression se traduit ici par l'existence de caractéristiques associées à deux familles d'ondes distinctes s'intersectant simultanément dans le choc, comme l'illustre la figure (2).

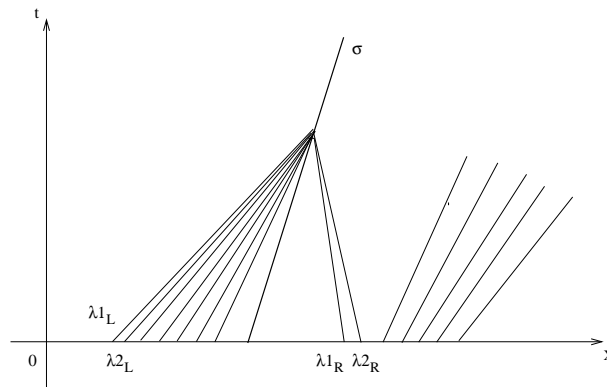


FIG. 2 – Comportement typique des caractéristiques lors du phénomène de surcompression

Lorsqu'il est surcompresssif, le choc droit est montré être structurellement instable en théorie conservative. Cette instabilité est très violente : le choc n'est même pas observable. Dans le présent contexte non conservatif, les conséquences sont encore plus négatives. Au niveau visqueux, il est impossible de définir de manière unique l'état de sortie d'un profil de compression. En d'autres termes, nous ne pouvons même pas définir ce qu'est un choc lorsque survient le phénomène de surcompression.

Expliquons qualitativement l'origine du phénomène de surcompression lorsque la correction de Ristorcelli est négligée : l'étude des profils de viscosité montrent qu'une onde de compression peut devenir le siège d'une production anormalement élevée de turbulence longitudinale (la composante R_{11} du tenseur de Reynolds, si x_1 représente

la direction normale au choc). Or, la vitesse de propagation des ondes supplémentaires croît avec cette composante R_{11} . Dès que cette dernière devient trop grande, la famille d'ondes intermédiaires, immédiatement adjacente à une famille d'ondes acoustiques portant un choc, se propage trop vite de part et d'autre de ce choc pour venir s'y intersecter.

De manière tout aussi qualitative, décrivons l'importance de la correction de Ristorcelli. Son effet est de faire d'autant diminuer la composante R_{11} dans la compression que l'échelle de temps est choisie grande. Nous montrons en fait que les grandes amplitudes de l'échelle de temps de la correction de Ristorcelli suffisent, en dehors de toute forme précise de l'échelle de temps, à éviter le phénomène de surcompression. Soulignons tout de suite que nous montrons qu'il est possible d'éviter la surcompression sans contredire les observations expérimentales de production de turbulence longitudinale à la traversée d'un choc.

Nous venons d'indiquer en quoi l'existence de phénomènes tangentiels liés à l'existence d'ondes supplémentaires dans les modèles moyennés peuvent être responsables de l'impossibilité de définir des solutions choc dès que l'amplitude de l'échelle de temps de la correction de Ristorcelli n'est pas choisie suffisamment grande.

En considérant des amplitudes suffisamment grandes nous sommes assurés de pouvoir définir des solutions choc, mais encore faut-il que celles-ci soient observables, c'est-à-dire stables, déjà sous l'action de perturbations monodimensionnelles puis sous l'action de perturbations multidimensionnelles.

Soulignons désormais en quoi la forme précise de l'échelle de temps est également importante pour éviter l'apparition d'instabilités violentes résultant d'autres phénomènes tangentiels, dûs cette fois aux familles d'ondes extrêmes. L'utilisation de fonctions cinétiques pour la construction d'un ensemble de relations de saut généralisées nous permet de proposer une extension très naturelle des conditions de stabilité structurelle du choc droit dues à Majda [51], puis des conditions de stabilité multidimensionnelles introduites par Erpenbeck [26] et D'yakov [22] dans le cadre conservatif. Rapportons simplement que dans toutes ces théories l'absence de surcompression est un prérequis à la stabilité, puis que la stabilité structurelle est nécessaire à la stabilité multidimensionnelle. Les conditions que nous proposerons font intervenir de manière naturelle la correction de Ristorcelli par son amplitude mais également par ses variations, à savoir ses gradients. Cette nouveauté implique que non seulement l'amplitude de la correction est importante mais également que sa définition précise joue un rôle central. L'analyse montre en particulier que cette forme précise peut être responsable de l'instabilité structurelle du choc droit même quand celui-ci n'est plus surcompressif grâce à une amplitude convenable.

Si l'on veut garantir que les causes d'instabilité multidimensionnelles ne résultent pas d'une instabilité structurelle (instabilité exceptionnelle en dynamique des gaz comme le souligne Serre [62]), il faut porter une grande attention à la définition précise de l'échelle de temps de Ristorcelli. La littérature existante sur le sujet ne conduit malheureusement pas à un choix exhaustif. Nous montrons dans ces travaux qu'il est

possible de proposer des formes d'échelles de temps de Ristorcelli, ainsi que des amplitudes associées, de sorte à éviter les phénomènes d'instabilité monodimensionnelle. Nous sommes donc en mesure d'étudier l'influence d'une correction de Ristorcelli sur les propriétés de stabilité véritablement multidimensionnelle d'un choc en interaction avec la turbulence. La principale conclusion est qu'il est nécessaire pour les formes précises utilisées de choisir des amplitudes plus grandes que celles garantissant l'absence de surcompression. Les formes précises proposées pour l'échelle de temps sont spécialisées aux profils de viscosité, et nous n'avons pas cherché à les étendre dans un contexte plus général.

La qualification précise des échelles de temps de Ristorcelli repose sur une analyse fine des profils de viscosité associés aux solutions choc. Cette analyse des solutions onde progressive doit, par ailleurs, permettre de définir des fonctions cinétiques, *i.e.* les taux de dissipation d'entropie intervenant dans les relations de saut généralisées. Cette analyse sur les profils de compression pour le modèle de la physique, *i.e.* avec une équation d'énergie, est difficile. Nous n'avons pas su la mener. Nous avons donc dû nous résoudre, avec une certaine frustration, à la version isotherme des équations pour mener l'analyse exhaustive requise. Il est certain qu'une version barotrope ne change pas nos conclusions. Nous pensons que ces dernières sont transposables au modèle complet, *i.e.* anisotherme. Nous vérifions dans ce manuscrit que le modèle complet développe bien les mêmes pathologies que le modèle isotherme sans correction de Ristorcelli, et ce pour les mêmes raisons (R_{11} croît trop lors de la compression), certes pour une gamme de nombres adimensionnés moins restrictives (nombre de Mach et nombre de Mach turbulent). En conséquence, nous estimons que la correction de Ristorcelli continue de jouer un rôle majeur pour le modèle anisotherme dans la définition des solutions choc et leurs propriétés de stabilité.

Pour conclure cette présentation générale des résultats, soulignons que la caractérisation des solutions choc pour le modèle non conservatif, sur la base de fonctions cinétiques, permet également de développer des techniques d'approximation numérique. Indiquons simplement qu'il existe suffisamment d'entropies indépendantes pour mettre en place les techniques d'approximation introduites par Berthon, Coquel [8], puis Chalons, Coquel [15] dans le cadre de la turbulence compressible isotrope. Nous avons consacré six mois de cette thèse à étendre cette technique aux modèles anisotropes avec énergie, c'est-à-dire sans correction de Ristorcelli. Nous avons choisi de supprimer de ce mémoire le chapitre décrivant l'extension proposée. Le lecteur trouvera néanmoins en annexe B une brève description de cette méthode dans un acte de congrès.

Plan détaillé des travaux

Chapitre 1 : Choix du modèle RSM

Dans ce chapitre, après avoir rappelé le contexte de l'étude, nous expliquons notre choix d'un modèle RSM particulier. Dans un premier temps, ce choix est guidé par deux propriétés physiques essentielles que doit vérifier notre modèle, à savoir la réalisabilité et l'objectivité. Enfin, une discussion sur l'ordre de grandeur des différents termes présents dans les équations moyennées, nous permettra de finaliser notre choix pour l'étude des solutions choc.

Première partie : Propriétés du modèle retenu

Chapitre 2 : Fonctions cinétiques et relations de saut généralisées

Ce chapitre présente un cadre mathématique permettant de comprendre les solutions de modèles non conservatifs de la physique, en présence de perturbations visqueuses dans le régime des grands nombres de Reynolds. L'absence de formulation conservative pour le modèle de fluide parfait implique qu'il n'existe pas de relations de Rankine-Hugoniot classiques en nombre suffisant pour caractériser les solutions choc du modèle limite. Nous rappelons ici comment définir ces solutions choc à partir de leur profil de viscosité. Nous soulignons que la notion de solutions choc dépend en général intrinsèquement de la nature précise des mécanismes dissipatifs sous-jacents, contrairement au cadre purement conservatif. Après les travaux de Coquel, Berthon, LeFloch [10], nous proposons d'utiliser la notion d'entropie, de manière à garder un souvenir précis de ces mécanismes dissipatifs. Nous décrivons sous quelles conditions cette notion d'entropie permet de compléter les relations de Rankine-Hugoniot manquantes, par l'introduction de relations de saut généralisées. Ces nouvelles relations de saut sont explicitement construites sur la connaissance des taux de dissipation d'entropie prenant place au sein d'un front de choc. La valeur précise de ces taux de dissipation conduit à introduire la notion de fonctions cinétiques. Leur nombre et leur définition dépendent de la forme précise des perturbations visqueuses retenues dans la modélisation des mécanismes dissipatifs.

Chapitre 3 : Propriétés élémentaires du système

Ce chapitre décrit plusieurs propriétés des solutions ondes planes du modèle aux tensions de Reynolds choisi précédemment. Ces propriétés sont indispensables à l'étude des chocs plans, véritable objet du mémoire.

En négligeant dans un premier temps les mécanismes visqueux, nous énonçons que le système du premier ordre ainsi obtenu est hyperbolique. Nous montrons que seules les ondes associées aux deux valeurs propres extrêmes sont de nature non linéaire. Ainsi, seules ces ondes sont responsables de la formation de chocs. Nous établissons que la détermination des relations de saut à la traversée des chocs est ambiguë. En revanche, nous vérifions que toutes les autres ondes discontinues naturellement associées aux valeurs propres intermédiaires sont parfaitement définies.

De manière à caractériser les solutions chocs à l'aide de relations cinétiques confor-

mément au chapitre 2, nous exhibons toutes les lois de conservation supplémentaires du système du premier ordre. L'effet des mécanismes dissipatifs sur chacune des entropies mathématiques est ensuite précisé. Afin de disposer de toutes les entropies permises par le système du premier ordre, nous justifions en quoi nous pouvons dorénavant supposer, sans restriction, la non nullité du taux de turbulence longitudinal. Nous concluons ce chapitre en indiquant que les lois supplémentaires disponibles ne conduisent pas, en toute généralité, à un changement de variable permettant de réexprimer le modèle RSM sous la forme d'un système hyperbolique de lois de conservation en présence d'une régularisation visqueuse non conservative. En anticipant les résultats à venir, nous soulignons qu'un tel changement de variable deviendra licite dans le cas des solutions onde progressive. Cette propriété autorisera dès lors, la caractérisation des ondes de choc grâce à un ensemble complet de relations cinétiques.

Chapitre 4 : Premiers enseignements de l'analyse onde progressive

Ce chapitre expose quelques premières conséquences importantes de l'analyse onde progressive sur la nature des mécanismes de compression susceptibles de prendre place au sein des profils de viscosité.

La motivation principale est de souligner que ces mécanismes de compression ne sont pas correctement décrits par le modèle retenu lorsque le nombre de Mach turbulent devient grand, et ce pour des valeurs modérées du nombre de Mach ($M > 2$). Une modélisation plus fine, tenant compte de la nature compressible de l'écoulement, devient alors nécessaire.

Dans un premier temps, nous construisons la forme réduite adimensionnée du système différentiel gouvernant les solutions onde progressive en ignorant toute modélisation supplémentaire, pour constater qu'il s'agit d'un système dynamique de grande taille composé de quatre équations fortement non linéairement couplées.

De manière à faire émerger la nécessité d'une correction, nous proposons dans un second temps d'adopter une hypothèse de modélisation consistant à négliger les mécanismes visqueux tangentiels pour ne garder que les mécanismes visqueux longitudinaux. Son intérêt est ici d'éclairer dans les faits les mécanismes de compression, et nous soulignons que cette hypothèse ne sera plus de mise dans toute la suite.

Nous obtenons, au titre de la simplification proposée, que les profils de viscosité deviennent surcompressifs lorsque le nombre de Mach turbulent est grand. Cette propriété de surcompression persistera dans les prochains chapitres, sans hypothèse simplificatrice, avec des conséquences certes différentes mais tout aussi négatives, sur cette fois l'unicité des solutions onde progressive.

Nous montrons qu'à l'origine de ce phénomène de surcompression, sont responsables des valeurs anormalement élevées de la composante longitudinale R_{11} du tenseur de Reynolds. Nous invoquons alors une correction de modélisation, négligée le plus souvent, et dite correction de Ristorcelli. Comme nous l'avons déjà souligné, cette correction n'existe qu'à cause de la nature compressible des écoulements étudiés en étant la conséquence des différences entre moyenne de Favre et moyenne de Reynolds. Nous indiquons en quoi cette correction diminue l'amplitude de R_{11} lors de la compression. Cette propriété suggère qualitativement la possibilité d'éviter toute surcompression, à la condition de choisir la correction de Ristorcelli suffisamment forte par l'intermédiaire de l'amplitude de l'échelle de temps associée. Les chapitres suivants montrent

que le choix de cette amplitude joue un rôle central dans l'unicité des solutions onde progressive, mais également dans la stabilité structurelle, puis multidimensionnelle, des solutions chocs associées.

Seconde partie : Analyse onde progressive et fonctions cinétiques

Chapitre 5 : Importance de la correction de Ristorcelli, cadre isotherme

Ce chapitre est entièrement consacré à l'étude de l'influence physique et mathématique de la correction de Ristorcelli sur les profils de compression dans un cadre simplifié, à savoir celui d'une loi de pression isotherme. Cette simplification autorise une analyse exhaustive de l'importance de la correction de Ristorcelli. Nous aurions pu considérer une loi de pression barotrope, avec les hypothèses classiques associées, sans modifier les conclusions de l'analyse. Le choix d'une pression isotherme conduit à simplifier la structure algébrique de plusieurs expressions, et facilite donc, dans une certaine mesure, la lecture des calculs. Dans un premier temps, nous montrons que si l'échelle de temps associée à la correction de Ristorcelli n'est pas choisie suffisamment grande au sein du profil, alors l'accident de surcompression survient. Le phénomène de surcompression se traduit ici par l'existence d'une infinité de solutions ondes progressives se propageant à la même vitesse σ , issues d'un même état gauche \mathbf{u}_L et connectant une infinité d'états \mathbf{u}_R distincts. Cette situation est bien entendu inacceptable. Nous montrons que choisir des échelles de temps \mathcal{T}_{ris} suffisamment grandes restaure systématiquement l'unicité de la solution onde progressive, et donc l'unicité de \mathbf{u}_R , à \mathbf{u}_L et σ fixés. Ce résultat permet alors de définir la limite de fluide parfait des profils de compression, à savoir les solutions ondes de choc.

Dans un deuxième temps, nous montrons que la composante R_{12} du tenseur de Reynolds garde un signe constant tout le long du profil de compression, de sorte que $R_{12}(\mathbf{u}_R)$ possède le même signe que $R_{12}(\mathbf{u}_L)$ dans la solution choc limite. Cette propriété de conservation du signe conduit à un ensemble complet de relations de Rankine-Hugoniot généralisées permettant de caractériser les solutions chocs. Ces relations de Rankine-Hugoniot généralisées font intervenir deux fonctions cinétiques. Nous nous attacherons alors à montrer comment estimer numériquement ces deux fonctions nécessaires à la caractérisation des solutions chocs. Cette estimation repose sur l'intégration numérique du système dynamique gouvernant les solutions onde progressive et nous expliquons comment aborder cette intégration difficile. Auparavant, il faut néanmoins fixer une échelle de temps de Ristorcelli. Nous montrons en effet que l'amplitude de cette échelle de temps a de nombreuses conséquences sur les propriétés physiques des profils, ainsi que sur les propriétés mathématiques de la solution onde progressive associée. Nous étudions précisément les conséquences de cette amplitude, afin de définir numériquement des couples de fonctions cinétiques possédant des propriétés physiques acceptables. La motivation première de cette étude est de parvenir à contrôler les conséquences de cette amplitude, tout en rendant possible la détermination des fonctions cinétiques. Soulignons que l'ensemble des propriétés mises en avant dans ce chapitre joueront un rôle central dans l'analyse à venir de la stabilité structurelle, puis multidimensionnelle, des solutions chocs.

Chapitre 6 : Cadre anisotherme

Dans ce chapitre, nous étudions le système dynamique gouvernant les solutions onde progressive dans le cadre du modèle anisotherme. Par modèle anisotherme, nous entendons le modèle général avec énergie présenté dans le chapitre 4, mais sans correction de Ristorcelli et pour un fluide parfaitement conducteur. Malgré ces deux hypothèses simplificatrices, le système étudié reste complexe, l'accident de surcompression pouvant désormais survenir en l'absence de correction de Ristorcelli. De plus, contrairement au cadre isotherme du chapitre précédent, nous ne serons pas en mesure de démontrer un résultat théorique d'existence et d'unicité de la solution onde progressive dans le cas où l'état de sortie n'est pas surcompressif. Cependant, nous élaborerons une méthode numérique qui, par construction, permettra de démontrer numériquement ce résultat. Les deux hypothèses principales, pour pouvoir effectuer cette intégration, étant la stricte décroissance du taux de compression (hypothèse que nous n'avons pas pu démontrer faute de temps) ainsi que la non surcompressivité de l'état de sortie comme précisé ci-dessus. Nous montrerons qu'il est toujours possible de respecter cette dernière hypothèse par un choix judicieux des nombres adimensionnés du problème. Dans ce cas, de nombreuses propriétés, déjà démontrées en isotherme, restent valables. En revanche, si l'accident de surcompression survient, nous n'aurons aucun résultat, qu'il soit théorique ou numérique, indiquant que toutes les trajectoires convergent mais vers une limite à chaque fois différente comme en isotherme. C'est pourquoi nous n'étudierons jamais ce cas.

Sous ces deux hypothèses, nous montrons que la composante R_{12} du tenseur de Reynolds garde un signe constant tout le long du profil de compression, de sorte que $R_{12}(\mathbf{u}_R)$ possède le même signe que $R_{12}(\mathbf{u}_L)$ dans la solution choc limite. Cette propriété de conservation du signe conduit à un ensemble complet de relations de Rankine-Hugoniot généralisées, permettant de caractériser les solutions chocs. Ces relations de Rankine-Hugoniot généralisées font intervenir une unique fonction cinétique. L'objectif principal de ce chapitre est alors de calculer cette fonction cinétique. Ce calcul repose sur l'intégration numérique du système gouvernant les solutions ondes progressives. Nous proposons à cette fin une méthode permettant d'aborder cette intégration difficile. Une fois l'intégration réalisée nous nous attacherons aussi à commenter les propriétés physiques de la solution onde progressive ainsi calculée.

Chapitre 7 : Le problème de Riemann

Ce chapitre est consacré à l'étude de l'existence et de l'unicité des solutions du problème de Riemann pour le modèle anisotherme. Cette étude est rendue possible par l'analyse onde progressive du chapitre précédent, puisque celle-ci a permis le calcul de la fonction cinétique conduisant à un ensemble complet de relations de Rankine-Hugoniot généralisées. L'analyse du problème de Riemann dans le cadre isotherme est menée dans la prépublication [4] jointe à la thèse en annexe A. Ici, les états \mathbf{u}_G et \mathbf{u}_D composant la donnée initiale seront toujours supposés ne pas mener à l'accident de surcompression dans les ondes extrêmes éventuelles. Nous renvoyons le lecteur aux travaux de Hérard *et al* [13], [9] et aux travaux de Coquel, Chalons [16] pour l'étude de l'existence et l'unicité des solutions du problème de Riemann pour divers modèles de turbulence. Nous montrons ici que la composante R_{12} du tenseur de Reynolds garde le même signe que la donnée initiale dans les chocs mais aussi les détenteurs associées

aux ondes extrêmes. Cette propriété sera essentielle pour le traitement numérique du modèle anisotherme proposé dans l'acte de congrès en annexe B.

Troisième partie : Stabilité du choc et cadre non conservatif

Chapitre 8 : Stabilité structurelle du choc droit

Dans ce chapitre, nous proposons une théorie de la stabilité structurelle pour les solutions chocs d'un système hyperbolique non linéaire sous forme non conservative. Nous montrons que le formalisme des relations cinétiques autorise une extension naturelle des conditions de stabilité énoncées dans le cadre conservatif par Majda en 1984 [51]. L'exposé de la théorie n'est mené que dans le cas des solutions chocs associées aux champs extrêmes par souci de simplicité. L'extension proposée montre que le respect des conditions géométriques de Lax est nécessaire à la stabilité structurelle, mais n'est pas suffisant : une condition de non annulation d'une version étendue du déterminant de Majda, tel qu'introduit dans ce chapitre, est demandée. Nous appliquons cette théorie aux modèles RSM analysés dans ce manuscrit, à la fois dans le cadre des modèles isotherme et anisotherme.

Dans le cadre isotherme, nous considérons des corrections de Ristorcelli admissibles au sens de l'analyse proposée au chapitre 5. Les conditions géométriques de Lax sont donc, par définition, vérifiées, quelle que soit la force de la solution choc considérée. Nous montrons que ces solutions chocs sont systématiquement stables sous la condition que le taux de compression de sortie, dans le profil visqueux, est une fonction décroissante du Mach M . Ainsi, pour les corrections de Ristorcelli considérées dans cette thèse, les solutions chocs associées aux ondes extrêmes du modèle isotherme sont toujours structurellement stables.

Dans le cadre anisotherme, où aucune correction de Ristorcelli n'est invoquée, nous montrons que, tant que les conditions géométriques de Lax sont vérifiées, aucune instabilité structurelle des solutions chocs n'apparaît.

Les résultats de cette analyse de stabilité structurelle sont importants à l'étude de la stabilité multidimensionnelle des chocs, puisque nous verrons, dans le chapitre suivant qui lui est consacré, qu'elle en constitue un prérequis.

Chapitre 9 : Stabilité multidimensionnelle du choc plan

Dans ce chapitre, nous proposons une théorie de stabilité linéaire multidimensionnelle des solutions choc plan pour un système hyperbolique sous forme non conservative. Nous montrons que le formalisme des fonctions cinétiques autorise, de nouveau, une extension naturelle des conditions de stabilité énoncées dans le cadre conservatif. Cette théorie linéaire a été introduite par Erpenbeck [26] et D'yakov [22] dans les années cinquante dans le contexte des équations d'Euler, puis étendue dans sa version non linéaire à des systèmes hyperboliques généraux par Majda [51], au début des années quatre-vingt. L'exposé de l'extension linéaire que nous proposons, n'est mené que dans le cas des chocs plans associés aux champs extrêmes, par souci de simplicité. La théorie obtenue constitue une extension naturelle des conditions dites de Lopatinski, impliquant en particulier le respect des conditions géométriques de Lax, mais également la condition de stabilité structurelle du choc droit.

De manière à pouvoir appliquer cette théorie aux modèles RSM en plusieurs dimensions d'espace, nous ne pouvons pas faire l'hypothèse de l'existence d'un changement de variable permettant de réexprimer, de manière multidimensionnelle, le modèle de fluide parfait sous la forme d'un système de lois de conservation en présence d'un terme source mesure concentré sur les chocs. Cette propriété est vraie pour les modèles de turbulence isotrope non conservatifs étudiés dans les travaux de Berthon [7] et de Chalons [14], mais est fausse ici dans le cas de la turbulence anisotrope.

Les modèles que nous étudions prennent la forme d'un système hyperbolique conservatif en présence de perturbations visqueuses non conservatives, seulement de manière directionnelle, à savoir dans leur formulation quasi 1D (et lorsque la composante tangentielle R_{12} garde un signe constant). Nous montrons toutefois que cette propriété directionnelle conjuguée à la propriété d'invariance par rotation des équations, permet d'analyser la stabilité des solutions choc plan sous l'action de perturbations multidimensionnelles. Cette analyse repose sur l'étude des équations gouvernant la couche interne du profil de choc perturbé et s'appuie sur des travaux récents dus à Guès et Williams [34]. Une conséquence importante de notre analyse de la couche interne est que les fonctions cinétiques, définies dans la caractérisation des solutions choc plan non perturbées, peuvent être utilisées en l'état pour aborder l'analyse des perturbations multidimensionnelles de ces solutions. Nous appliquons la théorie proposée aux modèles RSM dans les cadres isotherme et anisotherme.

Dans le cadre isotherme, nous considérons des corrections de Ristorcelli garantissant la stabilité structurelle du choc droit. Nous montrons que l'amplitude de l'échelle de temps associée à ces corrections, doit être choisie plus grande que celle garantissant la stabilité structurelle, afin d'éviter l'apparition d'instabilités multidimensionnelles violentes.

Dans le cadre anisotherme, où aucune correction de Ristorcelli n'est invoquée, nous montrons que des instabilités multidimensionnelles violentes peuvent apparaître dans le cas où les conditions de stabilité structurelle sont satisfaites, *i.e.* avant toute violation des conditions géométriques de Lax.

Chapitre 1

Choix du modèle RSM

Dans ce chapitre, après avoir rappelé le contexte de l'étude, nous expliquons notre choix d'un modèle RSM particulier. Dans un premier temps, ce choix est guidé par deux propriétés physiques essentielles que doit vérifier notre modèle, à savoir la réalisabilité et l'objectivité. Enfin, une discussion sur l'ordre de grandeur des différents termes présents dans les équations moyennées, nous permettra de finaliser notre choix pour l'étude des solutions choc.

1.1 Contexte de l'étude

Dans ce mémoire, nous nous intéressons à des écoulements compressibles en turbulence pleinement développée. Pour une telle turbulence, le nombre de Reynolds est très élevé, typiquement de l'ordre de 10^7 . Cette turbulence est caractérisée par un spectre étendu de dimensions de tourbillons et de fréquences associées. La taille des plus gros tourbillons est de l'ordre de grandeur du domaine occupé par le fluide. En revanche, la taille des plus petits tourbillons est déterminée par les forces visqueuses. Dynamiquement, les gros tourbillons interagissent avec le mouvement moyen, en extraient de l'énergie cinétique et la fournissent aux agitations à grandes échelles. Les structures turbulentes s'étirent ensuite les unes les autres et c'est cet allongement de filets tourbillonnaires qui produit le passage de l'énergie à des échelles de plus en plus petites, jusqu'à ce que la viscosité la dissipe : c'est la cascade d'énergie. Pour un nombre de Reynolds élevé, cette zone de cascade d'énergie est très étendue. En conséquence, si l'on part du principe que les équations de Navier-Stokes décrivent parfaitement le mouvement instantané d'un tel écoulement, il suffirait de résoudre directement ces équations pour plusieurs réalisations, avec conditions aux limites aléatoires, pour accéder au mouvement turbulent. C'est l'objet des méthodes de type DNS pour lesquelles il faut, bien sûr, que le pas du maillage soit plus petit que l'échelle de la dissipation qui correspond à la plus petite échelle observée. À basse vitesse, le rapport entre l'échelle énergétique et l'échelle de la dissipation est de l'ordre de $R_\lambda^{\frac{3}{4}}$, où R_λ est le nombre de Reynolds basé sur la micro-échelle de Taylor. Le nombre de points du maillage nécessaire à la capture de toutes les échelles de la turbulence sera donc de l'ordre de $R_\lambda^{\frac{9}{4}}$. Ainsi, si on veut gagner un facteur 100 sur le nombre de Reynolds, cela revient à multiplier le nombre de points par $3 \cdot 10^4$ et à diviser le pas de temps par environ 32. Pour un temps simulé identique, le temps de calcul aug-

mente alors comme $R_\lambda^{\frac{3}{4}} \times R_\lambda^{\frac{9}{4}} = R_\lambda^3$, c'est-à-dire d'un facteur 10^6 . Même si les progrès concernant les capacités des calculateurs augmentent très rapidement, il semble encore inaccessible de calculer des écoulements en turbulence pleinement développée lorsque le nombre de Reynolds est de 10^7 . Une approche, devant cet état de fait, consiste à utiliser des méthodes statistiques. Celles-ci apparaissent naturellement puisque la turbulence est un phénomène complexe, désordonné, fluctuant et instationnaire. Le hasard caractéristique de la turbulence prend sa source dans la sensibilité aux conditions initiales, les irrégularités inévitables de celles-ci pouvant bouleverser totalement la structure détaillée de l'écoulement. En outre, il n'est parfois pas intéressant de connaître parfaitement toutes les échelles de temps et d'espace du mouvement turbulent mais seulement certaines données statistiques (mouvement moyen, coefficients de frottements, de pression, portance). La technique la plus répandue consiste alors à décomposer le mouvement, et ainsi toutes ses grandeurs caractéristiques, en une partie moyenne et une partie fluctuante de moyenne nulle. Ceci entraîne bien sûr une perte d'information qu'il faut réintroduire sous forme d'hypothèses physiques : c'est le problème de fermeture. À cause des non-linéarités des équations de Navier-Stokes, le fait de moyenniser conduit à l'apparition de nouveaux termes, appelés moments, dont on peut obtenir des équations d'évolution. Cependant, ces nouvelles équations font toujours intervenir des moments d'ordre plus élevé. Il faut donc faire une hypothèse supplémentaire pour fermer les équations. Nous nous plaçons donc dans le contexte des équations de Navier-Stokes moyennées (RANS). Il faut alors choisir une fermeture. Ceci nous est indiqué par le type d'écoulement auquel nous nous intéressons.

Le contexte est celui des écoulements compressibles. Un écoulement est dit compressible quand les variations de masse volumique, ainsi que les variations de température, ne sont plus négligeables. Il peut y avoir plusieurs raisons à cela. Par exemple lors de transferts de chaleurs importants ou si l'on mélange différents gaz à différentes températures. Ceci est à distinguer des variations de masse volumique et de température caractérisées par un nombre de Mach élevé. Dans ce cas les variations du volume de la particule fluide sont dues aux variations de pression. Il s'agit précisément du cadre de notre étude. Quand le nombre de Mach devient suffisamment important, les effets de compressibilité affectent non seulement l'écoulement moyen (associé aux grandes échelles) mais aussi l'écoulement turbulent. On parle alors de turbulence compressible. Les équations de Navier-Stokes dans le contexte des écoulements compressibles présentent des zones de variation des grandeurs moyennes extrêmement rapides. Dans ces zones, les gradients de ces grandeurs peuvent être très élevés (zone de compression ou de détente). Dans la limite des grands nombres de Reynolds, ces zones de variation très rapides peuvent être assimilées à des discontinuités de type ondes de choc. Ces zones de variation rapide sont par essence même anisotropes car la compression ou la détente du fluide a souvent lieu dans une direction privilégiée. De nombreuses expériences (voir par exemple les références [20], [19], [6], [42], [24], [23] [39], [40]) ainsi que des calculs DNS (voir [46], [45], [47]) montrent qu'à la traversée d'une onde de choc, un champ turbulent initialement isotrope, devient anisotrope principalement dans la direction normale à cette onde de choc. L'anisotropie est donc essentielle pour expliquer la physique des écoulements où la turbulence compressible est primordiale. C'est par exemple le cas de l'interaction entre une onde de choc et un champ turbulent. Ce constat nous a fait choisir une fermeture de la turbulence pour les équations moyennées de Navier-Stokes par les modèles aux tensions de Reynolds ou modèles

RSM (Reynolds Stress Models). En effet, ces modèles prennent en compte l'ensemble des composantes du tenseur de Reynolds et donc l'anisotropie du champ turbulent (pour l'obtention de ces équations, voir par exemple [66], [29],[2], [30], [68]). Il existe dans la littérature un grand nombre de modélisations pour l'ensemble des termes inconnus apparaissant dans les équations aux tensions de Reynolds. Nous renvoyons à Uhlmann [66] pour une étude bibliographique récente et très complète sur ce sujet. Un choix doit donc être fait quant au modèle retenu dans cette étude. Ce modèle doit être adapté au contexte des écoulements compressibles en turbulence pleinement développée et plus particulièrement au calcul d'interaction choc turbulence. Pour cela nous considérerons un milieu infini, où l'influence de parois ne se fera pas sentir, pour pouvoir se focaliser sur l'étude des profils de choc ou de détente, c'est-à-dire des zones où les variations rapides du champ moyen dominent l'écoulement.

1.2 Les modèles RSM

Les modèles RSM prennent en compte les équations de l'ensemble des composantes du tenseur de Reynolds $R_{ij} = \overline{\rho u_i'' u_j''}$. La notation barre représente la moyenne de Reynolds et la notation tilda, la moyenne pondérée par la masse ou moyenne de Favre, plus adaptée aux écoulements compressibles. Dans le cas général, ces équations s'écrivent formellement :

$$\begin{aligned} \partial_t \left(\overline{\rho u_i'' u_j''} \right) + \partial_{x_k} \left(\overline{\rho u_i'' u_j'' u_k} \right) = & \underbrace{P_{ij}}_I + \underbrace{\partial_{x_k} \left(\overline{\rho D_{ijk}^T} \right)}_{II} + \underbrace{\partial_{x_k} \left(\overline{\rho D_{ijk}^V} \right)}_{III} \\ & + \underbrace{\Pi_{ij}}_{IV} + \underbrace{\overline{\rho \epsilon}_{ij}}_V + \underbrace{M_{ij}}_{VI}. \end{aligned} \quad (1.1)$$

- I : Terme dit de production qui génère la turbulence par action des gradients de vitesse du champ moyen. Ce terme ne nécessite pas de modélisation. En revanche tous les termes restant doivent être modélisés.
- II : Diffusion turbulente. Ce terme comprend le transport diffusif par les corrélations triples de vitesse et la diffusion par les fluctuations de pression qui sont tous les deux à l'origine de la diffusion turbulente.
- III : Diffusion visqueuse faisant intervenir la viscosité dynamique μ du fluide considéré.
- IV : Pression-déformation qui redistribue l'énergie entre les composantes du tenseur de Reynolds. Ce terme est généralement séparé en deux contributions, une lente et une rapide. La partie rapide fait intervenir des gradients de vitesse moyenne et correspond aux fluctuations de pression qui se développent lors d'une distorsion rapide. La partie lente est un terme ne faisant intervenir que les fluctuations de vitesse et permet le retour à l'isotropie des composantes du tenseur de Reynolds même en l'absence de gradients de vitesse ou de pression du champ moyen. Une estimation grossière de ce terme montre qu'il est proportionnel au tenseur de Reynolds et à la dissipation visqueuse (voir plus loin).
- V : Dissipation visqueuse ou dissipation irréversible d'énergie cinétique.
- VI : Production enthalpique. Ce terme prend en compte la production de la

turbulence due aux interactions entre le flux de masse turbulent (différence entre les moyennes de Reynolds et de Favre) et les gradients de pression moyenne.

Mis à part le terme de production I, qui est exact, tous les autres termes nécessitent une modélisation car ils dépendent des fluctuations de pression ou de vitesse inconnues. Comme tout problème de fermeture en turbulence, un moment d'ordre supérieur apparaît dans les équations. Ici, il s'agit de la corrélation triple responsable de la diffusion turbulente. Des équations pourraient être données pour ces corrélations mais la complexité de cette approche n'a pas été retenue. Les modèles RSM possèdent des propriétés intrinsèques qu'il faut respecter lorsque l'on désire modéliser chacun des termes. Il s'agit de la réalisabilité et de l'objectivité.

1.2.1 Réalisabilité

De nombreuses définitions de la réalisabilité existent et les définitions changent parfois d'un auteur à l'autre. Nous nous référons ici aux travaux précurseurs de Schumann [60], Du Vachat [67] et Lumley [50] pour les modèles RSM. Leurs définitions s'étendent facilement au cas compressible à condition d'imposer la positivité de la masse volumique et de la pression, ce qui permet de définir une température et assure la positivité de l'énergie interne. Les différentes définitions de la réalisabilité reposent sur le fait que pour avoir une énergie cinétique non négative, la vitesse doit être réelle et positive. Ceci étant bien sûr valable pour les grandeurs instantanées, moyennes et fluctuantes. La conséquence de ce résultat [60] est que le tenseur de Reynolds est une matrice semi-définie positive et vérifie donc l'ensemble des inégalités suivantes :

$$\begin{cases} \delta_1^\alpha = R_{\alpha\alpha} \geq 0, & (1.2) \\ \delta_2^\alpha = R_{\beta\beta}R_{\gamma\gamma} - R_{\beta\gamma}^2 \geq 0, & \alpha \neq \beta \neq \gamma & (1.3) \\ \delta_3 = Det(\mathbf{R}) \geq 0, & (1.4) \end{cases}$$

où il n'y a pas de sommation sur les indices grecs. La condition (1.3) implique que les corrélations croisées $R_{\alpha\beta}$ sont bornées en amplitude par les autocorrélations correspondantes $R_{\alpha\alpha}$ et $R_{\beta\beta}$. Cela correspond au respect de l'inégalité de Cauchy-Schwarz si l'on se rappelle que les tensions de Reynolds sont des grandeurs statistiques moyennées (par une moyenne d'ensemble par exemple). Moyennant une réécriture [60], la condition (1.4) impose des règles à suivre sur les corrélations croisées. Le fait que le tenseur de Reynolds soit une matrice semi-définie positive permet de formuler de manière équivalente les inégalités (1.2), (1.3) et (1.4) à l'aide des invariants de cette matrice. L'avantage de cette nouvelle formulation est qu'elle ne dépend plus du repère de départ où l'on a choisi d'exprimer les tensions de Reynolds. Si l'on note $\lambda_{(\alpha)}$ les trois valeurs propres du tenseur de Reynolds et (I_1, I_2, I_3) ses trois invariants principaux, ce tenseur vérifie :

$$\begin{cases} \lambda_{(\alpha)} \geq 0, \\ I_1 = R_{11} + R_{22} + R_{33} \geq 0, \\ I_2 = R_{11}R_{22} - R_{12}^2 + R_{11}R_{33} - R_{13}^2 + R_{22}R_{33} - R_{23}^2 \geq 0, \\ I_3 = Det(R_{\alpha\beta}) \geq 0. \end{cases} \quad (1.5)$$

On montre aussi que :

$$\begin{cases} I_1 = I = Tr(\mathbf{R}) \geq 0, \\ I_2 = II = \frac{1}{2!} (Tr(\mathbf{R})^2 - Tr(\mathbf{R}^2)) \geq 0, \\ I_3 = III = \frac{1}{3!} (Tr(\mathbf{R})^3 - 3Tr(\mathbf{R})Tr(\mathbf{R}^2) + 2Tr(\mathbf{R}^3)) \geq 0, \end{cases} \quad (1.6)$$

où \mathbf{R} représente le tenseur de Reynolds. La notation (I, II, III) est celle utilisée en turbulence. Lumley [50] utilise plutôt les invariants du tenseur d'anisotropie. L'école américaine (Lumley, Speziale, Reynolds) définit ce tenseur par :

$$b_{ij} = \frac{\widetilde{u_i'' u_j''}}{2k} - \frac{1}{3} \delta_{ij},$$

où δ_{ij} est le symbole de Kronecker. Notons que l'école de l'Université de Manchester (Launder *et al*, Hanjalic,...) utilise la définition $a_{ij} = 2b_{ij}$. Ce tenseur étant de trace nulle, les expressions (1.6) se simplifient :

$$I_b = b_{ii} = 0; \quad II_b = -\frac{1}{2} b_{ij} b_{ji}; \quad III_b = \frac{1}{3} b_{ij} b_{jk} b_{ki}. \quad (1.7)$$

Lumley introduit alors la carte des invariants d'anisotropie qui traduit les relations (1.7) dans le plan (II_b, III_b) . Il s'agit d'un domaine quasi triangulaire dans lequel les résultats d'un modèle doivent rester inscrits. Plus simplement, Schumann a montré que le condition nécessaire et suffisante pour que le tenseur de Reynolds soit une matrice semi-définie positive est :

$$\begin{cases} \delta_1^1 = R_{11} \geq 0, & (1.8) \\ \delta_2^3 = R_{11}R_{22} - R_{12}^2 \geq 0, & (1.9) \\ \delta_3 = Det(\mathbf{R}) \geq 0, & (1.10) \end{cases}$$

On a alors la définition suivante pour la réalisabilité faible :

Définition 1.2.1 (Réalisabilité faible). Une fermeture du second ordre est faiblement réalisable si elle vérifie les inégalités (1.8), (1.9) et (1.10) avec une masse volumique et une pression positive.

Cette réalisabilité est dite faible car elle ne précise pas le comportement des tensions de Reynolds en cas d'annulation de ces inégalités. Si $f = \{\delta_1^1, \delta_2^3, \delta_3\}$, Schumann [60] et Lumley [50] proposent que, au voisinage de l'annulation, la fonction f soit localement concave quand on suit son évolution le long des lignes de courant. Ainsi ce comportement d'oscillateur aura tendance à ramener f dans le domaine de réalisabilité en cas d'annulation [50]. On définit alors :

Définition 1.2.2 (Réalisabilité forte). Une fermeture du second ordre est fortement réalisable si $f = \{\delta_1^1, \delta_2^3, \delta_3\}$ vérifie :

$$f \geq 0 \cup f = 0 \implies (d_t(f) = 0 \cup d_{tt}(f) \geq 0),$$

où la notation $d_t f$ représente la dérivée particulaire de la grandeur f . Certaines fermetures imposent une condition encore plus forte en interdisant l'annulation, c'est l' "over-realizability" :

Définition 1.2.3 (“Over-realizability”). Une fermeture du second ordre est “over-realizable” si $f = \{\delta_1^1, \delta_2^3, \delta_3\}$ vérifie :

$$f \geq 0 \cup f = 0 \implies (d_t(f) \geq 0).$$

Lumley [50] a montré que les équations exactes vérifient la réalisabilité forte.

Proposition 1.2.4 (Réalizabilité forte du système exact). *Le système exact (1.1) des équations régissant les modèles RSM est fortement réalisable au sens de la définition (1.2.2).*

En conséquence, toute modélisation des termes inconnus devra au moins respecter la réalisabilité faible, et tant que possible, la forte réalisabilité.

1.2.2 Objectivité

Une propriété essentielle souvent oubliée pour la modélisation des termes inconnus est l’objectivité des équations. Il convient, avant toute modélisation, de voir si le modèle exact étudié possède cette propriété ou non. Une expression est objective si elle est indépendante du repère de référence choisi pour la représenter. De manière plus formelle, la notion d’objectivité trouve la définition suivante :

Définition 1.2.5 (Objectivité). Une expression est dite objective, si pour tout changement de référentiel de la forme :

$$x^* = Q(t)x + b(t), \quad t^* = t + c,$$

un champ de vecteur V se transforme selon :

$$V^* = QV,$$

et un tenseur R selon :

$$R^* = Q R {}^t Q,$$

où c est une constante réelle, b un champ de vecteur arbitraire dépendant du temps et Q un tenseur orthogonal dépendant du temps.

Remarquons que cette définition prend en compte les transformations galiléennes mais ne s’y réduit pas. Speziale [64] a prouvé que les corrélations doubles de vitesse sont objectives. De plus toutes les contributions aux équations exactes du tenseur de Reynolds le sont aussi à l’exception du terme de production qui, par la transformation précédente, fait apparaître un terme supplémentaire lié à la rotation du repère (ce nouveau terme d’accélération est analogue à un terme de Coriolis). Cependant celui-ci ne nécessitant pas de modélisation, il peut être facilement pris en compte si le repère de référence est soumis à une rotation. Speziale en déduit un résultat très intéressant. A l’exception du terme de production, qui est exact, tous les autres termes à modéliser dans les équations des modèles RSM doivent être objectifs.

Proposition 1.2.6 (Objectivité du système exact). *Le système complet (1.1) est objectif pour toute accélération de translation du repère de référence. De plus, à l’exception du terme exact de production, toutes les expressions intervenant dans les équations du système (1.1) sont objectives.*

Il en résulte que toute modélisation de ces termes doit respecter en toute logique l’objectivité.

1.2.3 Ordre de grandeur

Nous allons maintenant discuter les termes du système exact (1.1) dans le contexte des écoulements compressibles en turbulence pleinement développée. Nous nous intéressons essentiellement, dans ce travail, à des écoulement de fortes compressions ou expansions comme les ondes de choc et les ondes de détente, et de leur interaction avec le champ turbulent. Or, à la traversée d'une onde de choc ou d'une onde de détente, les gradients de vitesse et de pression du champ moyen deviennent très élevés sur une très faible épaisseur. On peut donc supposer que nous sommes dans le cas de la Théorie de la Distorsion Rapide (RDT). Le temps caractéristique de la turbulence ($\frac{\Lambda}{\sqrt{2k}}$ avec Λ une échelle intégrale déduite par exemple de l'autocorrélation de vitesse longitudinale) est très grand devant le temps caractéristique ($\frac{L}{U}$) de l'action des gradients de champ moyen :

$$\frac{\sqrt{2k}L}{U\Lambda} \ll 1. \quad (1.11)$$

Dussauge [21] a considéré cette hypothèse pour une détente d'un écoulement supersonique turbulent. Il considère que la vitesse moyenne et la densité moyenne varient comme ΔU et $\Delta \rho$. Les grandeurs U et ρ sont des ordres de grandeur représentatifs de la vitesse moyenne et de la densité moyenne. L'échelle de longueur décrivant l'action des gradients moyens est L . Pour les composantes du tenseur de Reynolds, il considère que $\overline{u'_i u'_j} \simeq 2k$ en décomposition et moyenne de Reynolds, le chiffre 1 représentant la direction principale de l'expansion. L'échelle de longueur de la turbulence correspond à l'échelle intégrale Λ . Il compare alors la validité de l'hypothèse (1.11) avec des résultats expérimentaux. Il utilise la valeur $\Lambda = 0.25\delta$, où δ est l'épaisseur de la couche limite, valeur préconisée par Bestion [11] même si la compressibilité n'est pas prise en compte dans cette échelle intégrale. Il calcule la valeur du rapport (1.11) sur deux lignes de courant et trouve qu'il est inférieur à 0.2 ce qui lui permet de valider l'hypothèse (1.11). Dès lors, si cette condition est remplie, on peut alors considérer que le taux de dissipation de l'énergie cinétique turbulente par unité de masse ϵ ne varie pas de manière significative dans la distorsion et celle-ci peut être supposée rapide. En effet, une évaluation des ordres de grandeur donne :

$$\frac{|\epsilon_{ij}|}{|I|} \simeq \left| \frac{(2k)^{\frac{3}{2}}}{\Lambda} \delta_{ij} \right| \times \left| \frac{L}{2k\Delta U} \right| \simeq \left| \frac{\sqrt{2k}L}{\Delta U\Lambda} \right| \ll 1, \quad (1.12)$$

Dussauge mesure ce nouveau rapport sur les deux mêmes lignes de courant et trouve 0.1 et 0.2. En conséquence la dissipation visqueuse (terme V) dans les équations (1.1) peut être négligée. Dussauge évalue ensuite les termes II et III. Tout d'abord, il néglige la diffusion visqueuse III faisant intervenir la viscosité dynamique μ . Comme nous nous plaçons loin des parois, cette hypothèse semble naturelle. De plus une rapide évaluation du rapport de ce terme par le terme de production I donne :

$$\frac{III}{I} \simeq \frac{1}{Re} \frac{U}{\sqrt{2k}}$$

Dans la gamme de nombre de Reynolds considéré et loin des parois, il est raisonnable de supposer ce terme petit dans les zones de compression ou de détente. Concernant

les corrélations triples, Dussauge utilise la décomposition en moyenne de Reynolds :

$$d_{x_k} \overline{\rho u'_i u'_j u'_k} = d_{x_k} (\overline{u'_i u'_j u'_k}) + \overline{u'_i u'_j u'_k} \frac{1}{\bar{\rho}} d_{x_k} \bar{\rho}.$$

Il suppose alors que la turbulence est complètement atténuée par la distorsion. On a :

$$\begin{cases} d_{x_k} (\overline{u'_i u'_j u'_k}) \simeq \frac{(2k)^{\frac{3}{2}}}{L}, \\ \overline{u'_i u'_j u'_k} \frac{1}{\bar{\rho}} d_{x_k} \bar{\rho} \simeq (2k)^{\frac{3}{2}} \frac{\Delta \rho}{\rho L}. \end{cases}$$

Ainsi, le rapport de la diffusion turbulente sur la production implique les deux inégalités suivantes :

$$\begin{cases} \frac{\sqrt{2k}}{\Delta U} \ll 1, & (1.13) \\ \frac{\sqrt{2k} \Delta \rho}{\Delta U \rho} \ll 1. & (1.14) \end{cases}$$

Il calcule ces deux rapports pour les deux mêmes lignes de courant et trouve 0.4 pour (1.13) et 0.2 pour (1.14). Le fait de considérer le premier rapport négligeable peut être remis en question. Cependant, il a considéré que la diffusion était négligeable sur l'ensemble de la ligne de courant et donc en aval de la zone d'expansion, ce qui n'est plus vrai. Il évalue d'une autre manière le terme de diffusion turbulent et trouve qu'il correspond à 15% du terme de production I. Comme nous nous intéressons exclusivement aux zones de compression ou d'expansion rapide, il paraît raisonnable de négliger le terme de diffusion turbulente. Finalement, les phénomènes diffusifs (II, III et V) sont considérés comme négligeables par rapport aux termes de production (I et VI).

Concernant la pression déformation lente, une modélisation de ce terme est proposée par Rotta [58] et reprise par Lumley [50]. Cette modélisation du terme lent est la plus simple et s'écrit :

$$\Pi_{ij}^{lent} = \bar{\rho} C \epsilon \left(\frac{\widetilde{u''_i u''_j}}{2k} - \frac{1}{3} \delta_{ij} \right).$$

Une première estimation de ce terme montre qu'il est de l'ordre de grandeur de la dissipation. En vertu de l'inégalité (1.12), ce terme est négligeable. Concernant le terme de production enthalpique VI faisant intervenir le flux de masse turbulent $\overline{u''_i}$, Dussauge montre qu'il possède des valeurs comparables au terme de production I pour des nombres de Mach modérés. En effet, la théorie SRA [56] (Strong Reynolds Analogy) permet de relier les fluctuations de température aux fluctuations de vitesse par la relation instantanée suivante :

$$\frac{T''}{T} = \frac{\rho'}{\rho} = (\gamma - 1) M^2 \frac{u''_1}{u_1}. \quad (1.15)$$

Cette hypothèse, un peu forte, est bien supportée par l'expérience pour les écoulements supersoniques [56], [71]. Debiève, Gouin et Gaviglio [19] ont montré que cette hypothèse s'appliquait aussi à des écoulements à forte compression (interaction choc

turbulence) et à forte expansion. A l'aide de cette hypothèse, Dussauge évalue le terme de production enthalpique et trouve :

$$\frac{VI}{I} \simeq (\gamma - 1)M^2.$$

Ainsi pour des nombres de Mach raisonnables, ces deux termes sont du même ordre de grandeur dans le cas d'une distorsion rapide. Le flux de masse turbulent est très souvent négligé. Il a pourtant une importance cruciale dans les chocs comme nous le verrons dans la suite (voir le chapitre 5). Enfin, Dussauge simplifie le terme de pression déformation rapide et le garde dans son modèle. En définitive, à la traversée d'une onde de compression ou d'une onde de détente, seuls les termes de production (I et VI) ainsi que la partie rapide de la pression déformation (IV) restent à modéliser. Un certain nombre d'expériences confirme la prédominance des termes (I, IV, VI) dans le cas d'une interaction choc turbulence (voir [20], [19], [31], [23]) ou d'une détente (voir [21],[31]). Des calculs de DNS, bien que difficiles car demandant trop de ressources dans le profil de choc, semblent confirmer cette tendance (voir [46], [45], [47]).

Nous allons faire une hypothèse forte concernant le terme de pression déformation rapide : nous ne le considérerons jamais dans la suite. En effet, comme nous l'avons vu (proposition (1.2.6)), toute modélisation du terme de pression déformation rapide doit être objective, puisque le terme correspondant dans les équations exactes l'est. Cependant aucun modèle de la littérature ne vérifie cette propriété [41], [64] qui nous apparaît pourtant essentielle. Finalement, seuls les termes I et VI seront retenus dans notre étude sur des écoulements à forte compression ou expansion (onde de choc et de détente). En conséquence, une modélisation est nécessaire pour le flux de masse turbulent $\overline{u_i''}$. Plusieurs modèles ont été proposés dans la littérature. Nous avons retenu un modèle particulier, le plus simple (loi de premier gradient) proposé par Ristorcelli [57]. En effet, c'est le seul modèle réalisable et objectif [66]. Il s'écrit :

$$\overline{u_i''} = \frac{\mathcal{T}_{ris}}{\bar{\rho}} \widetilde{u_i''} \widetilde{u_j''} \partial_{x_j} \bar{\rho}.$$

Nous verrons par la suite qu'il permet de plus une caractérisation entropique du modèle en respectant l'inégalité de Clausius Duheim sur l'entropie physique. Ristorcelli propose bien sûr une définition pour l'échelle de temps \mathcal{T}_{ris} qu'il appelle τ :

$$\tau = \frac{\frac{M_t k}{\epsilon}}{1 + \frac{M_t}{2(\frac{\mathcal{P}}{\epsilon} - 1)}}. \quad (1.16)$$

où M_t est un Mach turbulent, k , l'énergie cinétique turbulent, ϵ , la dissipation et \mathcal{P} , une échelle de production de la turbulence. Nous avons délibérément renommé cette échelle de temps pour la comprendre d'une manière générale sans considérer la valeur particulière proposée par Ristorcelli.

1.3 Le modèle retenu

Par consistance avec les choix qui ont été faits concernant le modèle RSM retenu, la diffusion turbulente doit aussi être négligée dans l'équation de l'énergie totale (voir par exemple [66] pour une écriture complète de cette équation). Il reste à modéliser le

flux de chaleur turbulent dans cette équation par un modèle thermique classique de type algébrique avec un nombre de Prandtl turbulent Pr_t et une viscosité turbulente μ_t constants :

$$-\bar{\rho}e''\widetilde{u_j''} = \partial_{x_j} \left(\frac{\mu_t}{Pr_t} \widetilde{e} \right) = \partial_{x_j} \left(\frac{\mu_t c_v}{Pr_t} \widetilde{T} \right).$$

Si l'on définit classiquement la conductivité turbulente par $\kappa_t = \frac{\mu_t c_v}{Pr_t}$, on a :

$$-\bar{\rho}e''\widetilde{u_j''} = \partial_{x_j} \left(\kappa_t \widetilde{T} \right).$$

L'équation sur l'énergie totale E s'écrit alors :

$$\partial_t(\bar{\rho}\widetilde{E}) + \partial_{x_j} \left((\bar{\rho}\widetilde{E} + \bar{p})\widetilde{u_j} + \bar{\rho}\widetilde{u_i}''\widetilde{u_j''} \right) = \partial_{x_j} \left(2\mu\widetilde{u_i}''\widetilde{s_{ij}^D} + (\kappa + \kappa_t)\partial_{x_j}\widetilde{T} - \bar{p}\frac{\mathcal{T}_{ris}}{\bar{\rho}}\widetilde{u_j''}''\widetilde{u_k''}''\partial_{x_k}\bar{\rho} \right), \quad (1.17)$$

où l'on reconnaît dans le membre de gauche la diffusion visqueuse, la conduction thermique et la contribution du flux de masse turbulent $\widetilde{u_i''}$. La contribution de la pression moyenne multipliée par la vitesse moyenne, ainsi que la contribution des tensions de Reynolds, ont été mis dans le membre de droite comme faisant intégralement partie du système du premier ordre extrait. Ceci sera en effet utile pour la suite. Finalement, avec le modèle RSM retenu, le système complet s'écrit :

$$\left\{ \begin{array}{l} \partial_t\bar{\rho} + \partial_{x_j}(\bar{\rho}\widetilde{u_j}) = 0, \\ \partial_t(\bar{\rho}\widetilde{u_i}) + \partial_{x_j} \left(\bar{\rho}\widetilde{u_i}\widetilde{u_j} + \delta_{ij}\bar{p} + \bar{\rho}\widetilde{u_i''}''\widetilde{u_j''}'' \right) = \partial_{x_j} \left(2\mu\widetilde{s_{ij}^D} \right), \\ \partial_t(\bar{\rho}\widetilde{E}) + \partial_{x_j} \left((\bar{\rho}\widetilde{E} + \bar{p})\widetilde{u_j} + \bar{\rho}\widetilde{u_i}''\widetilde{u_j''}'' \right) = \partial_{x_j} \left(2\mu\widetilde{u_i}''\widetilde{s_{ij}^D} + (\kappa + \kappa_t)\partial_{x_j}\widetilde{T} - \bar{p}\frac{\mathcal{T}_{ris}}{\bar{\rho}}\widetilde{u_j''}''\widetilde{u_k''}''\partial_{x_k}\bar{\rho} \right), \\ \partial_t \left(\bar{\rho}\widetilde{u_i''}''\widetilde{u_j''}'' \right) + \partial_{x_k} \left(\bar{\rho}\widetilde{u_i''}''\widetilde{u_j''}''\widetilde{u_k} \right) + \left(\bar{\rho}\widetilde{u_i''}''\widetilde{u_k''}''\partial_{x_k}\widetilde{u_j} + \bar{\rho}\widetilde{u_j''}''\widetilde{u_k''}''\partial_{x_k}\widetilde{u_i} \right) = \\ \qquad \qquad \qquad - \frac{\mathcal{T}_{ris}}{\bar{\rho}} \left(\widetilde{u_i''}''\widetilde{u_k''}''\partial_{x_k}\bar{\rho}\partial_{x_j}\bar{p} + \widetilde{u_j''}''\widetilde{u_k''}''\partial_{x_k}\bar{\rho}\partial_{x_i}\bar{p} \right). \end{array} \right.$$

Enfin, nous nous plaçons dans le cas d'une turbulence statistiquement bidimensionnelle [9]. Ainsi, nous supposons :

$$\widetilde{u_3} = 0, \quad \widetilde{u_i''}''\widetilde{u_3''}'' = 0 \quad \forall i \in [1, 2] \text{ et } \partial_{x_3}X = 0, \quad (1.18)$$

quelle que soit la grandeur représentée par X .

Première partie

Propriétés du modèle retenu

Chapitre 2

Fonctions cinétiques et relations de saut généralisées

Ce chapitre présente un cadre mathématique permettant de comprendre les solutions de modèles non conservatifs de la physique, en présence de perturbations visqueuses dans le régime des grands nombres de Reynolds. L'absence de formulation conservative pour le modèle de fluide parfait implique qu'il n'existe pas de relations de Rankine-Hugoniot classiques en nombre suffisant, pour caractériser les solutions choc du modèle limite. Nous rappelons ici comment définir ces solutions choc à partir de leur profil de viscosité. Nous soulignons que la notion de solutions choc dépend en général intrinsèquement de la nature précise des mécanismes dissipatifs sous-jacents, contrairement au cadre purement conservatif. Après les travaux de Berthon, Coquel, LeFloch [10], nous proposons d'utiliser la notion d'entropie, de manière à garder un souvenir précis de ces mécanismes dissipatifs. Nous décrivons sous quelles conditions cette notion d'entropie permet de compléter les relations de Rankine-Hugoniot manquantes, par l'introduction de relations de saut généralisées. Ces nouvelles relations de saut sont explicitement construites sur la connaissance des taux de dissipation d'entropie prenant place au sein d'un front de choc. La valeur précise de ces taux de dissipation conduit à introduire la notion de fonctions cinétiques. Leur nombre et leur définition dépendent de la forme précise des perturbations visqueuses retenues dans la modélisation des mécanismes dissipatifs. La définition des solutions choc via des relations de saut avec fonctions cinétiques s'avère particulièrement utile à l'étude de la stabilité de ces solutions choc, dans le contexte des modèles aux tensions de Reynolds.

2.1 Position du problème

Nous rappelons dans cette section certaines propriétés élémentaires des solutions de systèmes hyperboliques non linéaires avec perturbations visqueuses de la forme :

$$\partial_t \mathbf{u}^\epsilon + \mathcal{A}(\mathbf{u}^\epsilon) \partial_x \mathbf{u}^\epsilon = \epsilon \partial_x \left(\mathcal{D}(\mathbf{u}^\epsilon) \partial_x \mathbf{u}^\epsilon \right), \quad x \in \mathbb{R}, \quad t > 0, \quad (2.1)$$

où l'inconnue \mathbf{u}^ϵ appartient à un espace des états $\Omega_{\mathbf{u}}$, ouvert convexe de \mathbb{R}^n avec $n > 1$. L'application à valeur matricielle $\mathcal{D} : \mathbf{u} \in \Omega_{\mathbf{u}} \rightarrow \mathcal{D}(\mathbf{u}) \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^n)$ traduit des mécanismes dissipatifs, alors que l'application régulière $\mathcal{A} : \mathbf{u} \in \Omega_{\mathbf{u}} \rightarrow \mathcal{A}(\mathbf{u}) \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^n)$ modélise des phénomènes propagatifs de vitesses finies. En conséquence, la matrice

$\mathcal{A}(\mathbf{u})$ est toujours supposée diagonalisable sur \mathbb{R} pour tout état $\mathbf{u} \in \Omega_{\mathbf{u}}$. Lorsque $\mathcal{A}(\mathbf{u})$ coïncide avec la matrice jacobienne d'une certaine fonction flux, *i.e.* $\mathcal{A}(\mathbf{u}) = \nabla_{\mathbf{u}}\mathbf{G}(\mathbf{u})$ avec $\mathbf{G} : \Omega_{\mathbf{u}} \rightarrow \mathbb{R}^n$, le système (2.1) est dit conservatif. Lorsqu'il n'existe pas de telle fonction \mathbf{G} , le système (2.1) est dit non conservatif. Dans (2.1), ϵ désigne un paramètre réel positif et représente typiquement l'inverse d'un nombre de Reynolds. Dans les applications poursuivies, le nombre de Reynolds est grand, typiquement de l'ordre de 10^6 , de sorte que ϵ est un petit paramètre responsable de l'existence de petites échelles dans les solutions considérées. Ces échelles sont dans les faits trop petites pour pouvoir être restituées correctement par des méthodes numériques usuelles, pour un coût raisonnable. Nous sommes contraints de devoir comprendre les solutions de (2.1) dans la limite d'un paramètre ϵ évanescent. Il convient donc de donner un sens aux équations (2.1) dans la limite $\epsilon \rightarrow 0^+$, qui formellement s'écrivent :

$$\partial_t \mathbf{u} + \mathcal{A}(\mathbf{u}) \partial_x \mathbf{u} = 0, \quad x \in \mathbb{R}, \quad t > 0, \quad (2.2)$$

où il est raisonnable d'avoir supposé que $\epsilon \partial_x (\mathcal{D}(\mathbf{u}^\epsilon) \partial_x \mathbf{u}^\epsilon)$ tende vers zéro au sens des distributions. Cette écriture est formelle car la nature hyperbolique du système du premier ordre (2.2) fait qu'il est nécessaire, en toute généralité, de donner un sens faible à de telles équations. Il est en effet bien connu qu'un système hyperbolique n'admet pas en général de solutions régulières : des **discontinuités** peuvent apparaître en temps fini, pour des **données initiales régulières**. Par simplicité dans la discussion, nous ne parlons que d'ondes de choc, à savoir des discontinuités associées à des champs non linéaires, supposés ici vraiment non linéaires.

Une onde de choc correspond à une fonction discontinue de la forme particulière :

$$\mathbf{u}(x, t) = \mathbf{u}_L + (\mathbf{u}_R - \mathbf{u}_L) H(x - \sigma t), \quad x \in \mathbb{R}, \quad t > 0, \quad (2.3)$$

où $H : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ désigne la fonction de Heavyside, *i.e.* :

$$H(y) = 0, \quad y < 0; \quad H(y) = 1, \quad y > 0. \quad (2.4)$$

La discontinuité considérée se propage donc à la vitesse $\sigma \in \mathbb{R}$, en séparant deux états \mathbf{u}_L et \mathbf{u}_R de $\Omega_{\mathbf{u}}$. Nous souhaitons, de cette fonction discontinue, qu'elle soit solution du système limite (2.2). Quel que soit le sens à donner à (2.2) pour une telle fonction, on ne peut espérer définir de solution quels que soient les états \mathbf{u}_L , \mathbf{u}_R et la vitesse σ . Des conditions de compatibilité, dites relations de saut, doivent les lier et leur obtention dépend intrinsèquement de la nature conservative ou non conservative du modèle complet (2.1).

2.2 Le cadre conservatif : solutions choc et critères de sélection

Il est utile de rappeler brièvement sous quelles conditions la fonction discontinue (2.3) est une solution physiquement acceptable du modèle de fluide parfait, sous l'hypothèse $\mathcal{A}(\mathbf{u}) = \nabla_{\mathbf{u}}\mathbf{G}(\mathbf{u})$, de sorte que (2.2) trouve la forme conservative :

$$\partial_t \mathbf{u} + \partial_x \mathbf{G}(\mathbf{u}) = 0, \quad x \in \mathbb{R}, \quad t > 0. \quad (2.5)$$

Dans un premier temps, exiger de (2.3) d'être solution de (2.5) consiste à évaluer :

$$\partial_t \mathbf{u}(x, t) = -\sigma(\mathbf{u}_R - \mathbf{u}_L)\delta_{x-\sigma t}, \quad (2.6)$$

en rappelant que $\delta_{y=0}$ correspond à la dérivée, au sens des distributions, de la fonction de Heavyside $H(y)$ définie en (2.4). Puis, dans un second temps, il convient d'observer l'identité, déduite de la définition (2.4) :

$$\mathbf{G}(\mathbf{u}(x, t)) = \mathbf{G}(\mathbf{u}_L) + \left(\mathbf{G}(\mathbf{u}_R) - \mathbf{G}(\mathbf{u}_L) \right) H(x - \sigma t), \text{ p.p. } x \in \mathbb{R}, t > 0, \quad (2.7)$$

pour calculer :

$$\partial_x \mathbf{G}(\mathbf{u}(x, t)) = \left(\mathbf{G}(\mathbf{u}_R) - \mathbf{G}(\mathbf{u}_L) \right) \delta_{x-\sigma t}. \quad (2.8)$$

Dès lors, la fonction (2.3) résout les équations (2.5), au sens des distributions, si et seulement si :

$$\left(-\sigma(\mathbf{u}_R - \mathbf{u}_L) + \left(\mathbf{G}(\mathbf{u}_R) - \mathbf{G}(\mathbf{u}_L) \right) \right) \delta_{x-\sigma t} = 0.$$

Il faut donc exiger de $\mathbf{u}_L, \mathbf{u}_R$ dans $\Omega_{\mathbf{u}}$, et $\sigma \in \mathbb{R}$, de satisfaire les conditions classiques de Rankine-Hugoniot :

$$-\sigma(\mathbf{u}_R - \mathbf{u}_L) + \left(\mathbf{G}(\mathbf{u}_R) - \mathbf{G}(\mathbf{u}_L) \right) = 0. \quad (2.9)$$

Un résultat célèbre, dû à Lax (voir Godlewski, Raviart [32], Serre [61]), établit, sous une hypothèse de type "convexité de $\mathbf{G}(\mathbf{u})$ " (*i.e.* champs tous vraiment non linéaires pour simplifier), qu'il existe localement n familles de solutions choc au système des n équations algébriques (2.9). Plus précisément, étant **fixé un état \mathbf{u}_L dans $\Omega_{\mathbf{u}}$** et étant **donnée $\sigma \in \mathbb{R}$** suffisamment proche d'une valeur propre $\lambda_j(\mathbf{u}_L)$, j choisi arbitrairement dans $\{1, \dots, n\}$, alors il existe, dans un voisinage de \mathbf{u}_L , une branche de solutions \mathbf{u}_R , dite courbe de j -choc, notée $\mathbf{u}_R^j(\mathbf{u}_L, \sigma)$, issue de \mathbf{u}_L et de force $|\sigma - \lambda_j(\mathbf{u}_L)|$, avec la propriété $\mathbf{u}_R^j(\mathbf{u}_L, \lambda_j(\mathbf{u}_L)) = \mathbf{u}_L$. Il est bien connu que ce résultat d'existence locale devient global pour la dynamique des gaz usuels (voir Godlewski, Raviart [32]).

Dans toute la suite, nous faisons uniquement référence à la courbe de 1-choc, puisque seule celle-ci fera l'objet d'une analyse dans le cadre des modèles RSM. Les propriétés d'invariance galiléenne permettent de transposer les résultats obtenus à l'autre famille d'ondes extrêmes, *i.e.* à la courbe de n -choc, ainsi qu'il sera détaillé en temps utile. Dorénavant, nous omettons donc l'indice j .

Il est bien connu que tous les états \mathbf{u}_R composant localement la courbe de 1-choc $\mathbf{u}_R(\mathbf{u}_L, \sigma)$, \mathbf{u}_L fixé et $\sigma \in \mathbb{R}$ donnée, ne conduisent pas à une solution discontinue physiquement acceptable. Un critère de sélection doit être proposé. Il en existe de plusieurs types et nous renvoyons le lecteur à l'ouvrage de Dafermos [18] pour une revue comparative.

Les conditions géométriques de Lax, utilisées dans la construction par Lax de la partie admissible d'une courbe de choc $\mathbf{u}_R(\mathbf{u}_L, \sigma)$, expriment la nature compressive d'un choc dans la physique des écoulements. Ces conditions impliquent en particulier l'encadrement suivant pour un 1-choc :

$$\lambda_1(\mathbf{u}_R) < \sigma < \lambda_1(\mathbf{u}_L), \quad (2.10)$$

de sorte que σ doit être convenablement prescrite afin de satisfaire $\sigma < \lambda_1(\mathbf{u}_L)$, l'état \mathbf{u}_L étant fixé. Indiquons que les inégalités (2.10) ne suffisent pas à caractériser la nature compressive d'un 1-choc, pour un système hyperbolique général. Nous y reviendrons dans le détail. De plus, notons simplement que ces conditions ne font pas référence aux mécanismes dissipatifs présents dans le modèle complet (2.1).

Il est utile à la suite de rappeler un second critère de sélection, construit quant à lui sur une conséquence des mécanismes dissipatifs intervenant aux petites échelles de taille ϵ . Ce critère repose sur l'existence de lois de conservation scalaire supplémentaires, non triviales, pour les solutions régulières du système de fluide parfait (2.5). Par supplémentaire et non triviale, on entend ici un couple d'application $(\mathcal{U}, \mathcal{F})$, avec $\mathcal{U} : \mathbf{u} \in \Omega_{\mathbf{u}} \rightarrow \mathcal{U}(\mathbf{u}) \in \mathbb{R}$ une fonction **non linéaire**, et $\mathcal{F} : \mathbf{u} \in \Omega_{\mathbf{u}} \rightarrow \mathcal{F}(\mathbf{u}) \in \mathbb{R}$ une fonction astreinte à la condition de compatibilité :

$${}^t\nabla_{\mathbf{u}}\mathcal{F}(\mathbf{u}) = {}^t\nabla_{\mathbf{u}}\mathcal{U}(\mathbf{u})\mathcal{A}(\mathbf{u}), \quad \mathbf{u} \in \Omega_{\mathbf{u}}, \quad (2.11)$$

où nous rappelons que $\mathcal{A}(\mathbf{u}) = \nabla_{\mathbf{u}}\mathbf{G}(\mathbf{u})$. Sous la condition (2.11), une solution régulière de (2.5), *i.e.* vérifiant :

$$\partial_t\mathbf{u} + \mathcal{A}(\mathbf{u})\partial_x\mathbf{u} = 0, \quad (2.12)$$

conduit, après produit scalaire de ces équations avec $\nabla_{\mathbf{u}}\mathcal{U}(\mathbf{u})$ à la loi scalaire :

$$\partial_t\mathcal{U}(\mathbf{u}) + \partial_x\mathcal{F}(\mathbf{u}) = 0. \quad (2.13)$$

Un tel couple $(\mathcal{U}, \mathcal{F})$ est dit couple d'entropie. Il est dit, de plus, consistant avec les mécanismes dissipatifs impliqués dans le modèle complet (2.1), dès que :

$$\nabla_{\mathbf{u}\mathbf{u}}^2\mathcal{U}(\mathbf{u})\mathcal{D}(\mathbf{u}) \geq 0, \quad \mathbf{u} \in \Omega_{\mathbf{u}}, \quad (2.14)$$

où la matrice $\nabla_{\mathbf{u}\mathbf{u}}^2\mathcal{U}(\mathbf{u})$ désigne la hessienne de \mathcal{U} (voir Serre [61]). En prenant le produit scalaire du système (2.1) avec $\nabla_{\mathbf{u}}\mathcal{U}(\mathbf{u}^\epsilon)$, pour une solution \mathbf{u}^ϵ (légitimement) régulière, nous obtenons classiquement l'analogue de la loi supplémentaire (2.13), mais en présence des petites échelles visqueuses :

$$\partial_t\mathcal{U}(\mathbf{u}^\epsilon) + \partial_x\mathcal{F}(\mathbf{u}^\epsilon) = \epsilon\partial_x\left({}^t\nabla_{\mathbf{u}}\mathcal{U}(\mathbf{u}^\epsilon)\mathcal{D}(\mathbf{u}^\epsilon)\partial_x\mathbf{u}^\epsilon\right) - \epsilon\left(\partial_x\mathbf{u}^\epsilon, \nabla_{\mathbf{u}\mathbf{u}}^2\mathcal{U}(\mathbf{u}^\epsilon)\mathcal{D}(\mathbf{u}^\epsilon)\partial_x\mathbf{u}^\epsilon\right). \quad (2.15)$$

Il convient de noter que le dernier terme du membre de droite constitue le seul terme sous forme non conservative de (2.15) et que ce produit scalaire est signé grâce à l'hypothèse de matrice semi-définie positive exprimée en (2.14) :

$$\left(\partial_x\mathbf{u}^\epsilon, \nabla_{\mathbf{u}\mathbf{u}}^2\mathcal{U}(\mathbf{u}^\epsilon)\mathcal{D}(\mathbf{u}^\epsilon)\partial_x\mathbf{u}^\epsilon\right) \geq 0. \quad (2.16)$$

De sorte à obtenir une conséquence des mécanismes dissipatifs dans la limite $\epsilon \rightarrow 0^+$, il convient d'observer que si \mathbf{u}^ϵ converge, dans une topologie convenable, vers une solution limite \mathbf{u} du système de fluide parfait (2.5), alors cette solution vérifie (au sens des distributions) en plus l'inégalité suivante, dite inégalité d'entropie :

$$\partial_t\mathcal{U}(\mathbf{u}) + \partial_x\mathcal{F}(\mathbf{u}) \leq 0, \quad x \in \mathbb{R}, \quad t > 0. \quad (2.17)$$

Soulignons que cette inégalité est en général stricte dès que la solution limite est discontinue. En effet, il est raisonnable d'espérer de la quantité conservative $\epsilon\partial_x\left({}^t\nabla_{\mathbf{u}}\mathcal{U}(\mathbf{u}^\epsilon)\mathcal{D}(\mathbf{u}^\epsilon)\partial_x\mathbf{u}^\epsilon\right)$

qu'elle tende vers zéro, au sens des distributions, lorsque $\epsilon \rightarrow 0$. En revanche, la contribution non conservative $-\epsilon \left(\partial_x \mathbf{u}^\epsilon, \nabla_{\mathbf{u}\mathbf{u}}^2 \mathcal{U}(\mathbf{u}^\epsilon) \mathcal{D}(\mathbf{u}^\epsilon) \partial_x \mathbf{u}^\epsilon \right)$ ne s'annule pas dans cette limite, mais converge, au sens des mesures, vers une mesure borélienne bornée concentrée sur les chocs de la solution limite \mathbf{u} , en s'annulant partout ailleurs. La valeur de cette mesure dans un choc, n'est autre que la dissipation d'entropie accompagnant un choc physiquement admissible. Dans un cadre conservatif, on ne fait pas référence à la valeur précise de cette mesure, pour ne garder que son signe négatif (voir [32], [61], [18] pour les détails). Une fonction discontinue de la forme (2.3) est dite alors solution choc admissible de (2.5), si à \mathbf{u}_L et σ donnés, $\mathbf{u}_R = \mathbf{u}_R(\mathbf{u}_L, \sigma)$ est solution des conditions de saut (2.9), en vérifiant :

$$-\sigma \left(\mathcal{U}(\mathbf{u}_R) - \mathcal{U}(\mathbf{u}_L) \right) + \left(\mathcal{F}(\mathbf{u}_R) - \mathcal{F}(\mathbf{u}_L) \right) < 0. \quad (2.18)$$

Soulignons bien que l'inégalité (2.18) est dans une large mesure indépendante de la forme **précise** des mécanismes dissipatifs, au sens où plusieurs tenseurs dissipatifs distincts satisfont dans la pratique la condition (2.14).

Nous retenons donc, en résumé, qu'une fonction discontinue, de la forme (2.3), est solution du système conservatif (2.5), au sens classique des distributions, si et seulement si, l'état \mathbf{u}_L étant fixé, la vitesse σ étant convenablement prescrite ($\lambda_1(\mathbf{u}_L) > \sigma$, pour un 1-choc), l'état \mathbf{u}_R est solution des conditions de Rankine-Hugoniot (2.9) et de l'inégalité d'entropie (2.18). Il importe de nouveau de souligner que l'état \mathbf{u}_R ne dépend que de l'état \mathbf{u}_L et de la vitesse σ , et qu'en aucun cas, il ne dépend de la forme **précise** des mécanismes dissipatifs modélisés par $\mathcal{D}(\mathbf{u})$ dans le modèle complet (2.1), au sens où des mécanismes distincts, compatibles avec (2.14), conduisent à sélectionner la même solution choc entropique. Cette assertion est vraie lorsque les champs sont tous vraiment non linéaires (pour simplifier) et nous renvoyons le lecteur à Dafermos [18] pour les détails.

2.3 Le cadre non conservatif : ambiguïté des produits

Lorsque $\mathcal{A}(\mathbf{u})$ ne coïncide pas avec la matrice jacobienne d'une certaine fonction flux, il n'est plus possible de définir uniquement une solution choc, *i.e.* caractériser $\mathbf{u}_R = \mathbf{u}_R(\mathbf{u}_L, \sigma)$, pour $\mathbf{u}_L \in \Omega_{\mathbf{u}}$ et $\sigma \in \mathbb{R}$ donnés, par la **seule connaissance** du modèle de fluide parfait :

$$\partial_t \mathbf{u} + \mathcal{A}(\mathbf{u}) \partial_x \mathbf{u} = 0, \quad x \in \mathbb{R}, \quad t > 0. \quad (2.19)$$

La difficulté vient de ce que le produit d'une mesure par une fonction discontinue ne trouve pas de valeur unique, au sens classique des distributions. Le produit $\mathcal{A}(\mathbf{u}) \partial_x \mathbf{u}$ est dit ambigu.

De sorte à ancrer cette affirmation, nous illustrons cette ambiguïté en considérant l'exemple le plus simple du produit de la fonction de Heavyside $H(y)$, introduite en (2.4), par la mesure de Dirac $\delta_{y=0}$. Partons de l'identité suivante :

$$H(y)^\alpha = H(y), \quad \alpha > 1,$$

pour la dérivée formellement selon la variable y :

$$\alpha H(y)^{\alpha-1} \times H'(y) \propto H'(y),$$

où le symbole \propto indique que le membre de gauche devrait coïncider avec le membre de droite. En rappelant que $H'(y) = \delta_{y=0}$, nous obtenons la relation :

$$\alpha H(y) \times \delta_{y=0} \propto \delta_{y=0},$$

puisqu'il est de nouveau $H^{\alpha-1}(y) = H(y)$, avec $\alpha > 1$. Soit en définitive :

$$H(y) \times \delta_{y=0} \propto \frac{1}{\alpha} \delta_{y=0}, \quad (2.20)$$

pour tout réel $\alpha > 1$. Ce résultat, *a priori* absurde, si l'on comprend le signe \propto comme le signe $=$, exprime seulement l'indétermination du produit $H(y) \times \delta_{y=0}$ au sens classique des distributions. Durant les deux dernières décennies, plusieurs théories mathématiques ont été proposées pour donner un sens au symbole \propto . Citons la théorie de la famille des chemins due à DalMaso, LeFloch et Murat [53] ou encore la théorie des fonctions généralisées développée par Colombeau [17]. Nous ne les exposons pas ici puisque nous ne les utiliserons pas. Nous soulignons simplement que ces théories offrent un cadre adressant toutes les valeurs possibles d'un produit non conservatif du type $\mathcal{A}(\mathbf{u})\partial_x \mathbf{u}$ en permettant d'en privilégier (*i.e.* définir) une valeur particulière, choisie *a priori* parmi toutes les autres. Il faut donc procéder à un choix et nous soulignons qu'il ne peut pas en être autrement. C'est là la raison pour laquelle la caractérisation des familles de solutions choc d'un système non conservatif ne peut être décidée par la seule connaissance des équations de fluide parfait. Il convient d'en revenir au modèle complet, dont les solutions sont supposées régulières, pour exhiber une information, dans la limite $\epsilon \rightarrow 0$, permettant de procéder au choix.

2.4 Profil de choc visqueux et solution choc

LeFloch [48] est le premier à avoir proposé de définir les solutions choc d'un système non conservatif (2.19) en analysant les profils de viscosité associés au modèle avec perturbations visqueuses (2.1). Cette approche est bien sûr naturelle, mais il importe de souligner, après LeFloch [48], qu'il faut expressément fixer la définition du tenseur \mathcal{D} modélisant les mécanismes dissipatifs. En effet, la forme précise de \mathcal{D} influe en général sur la définition des solutions choc, et ce contrairement au cadre conservatif. Considérer deux matrices de diffusion non proportionnelles conduit en général à deux familles de solutions choc distinctes pour le modèle de fluide parfait. Dans ce paragraphe, nous nous efforçons de mettre en évidence cette propriété de dépendance. Un profil de choc visqueux correspond à une solution particulière du système avec perturbation visqueuse (2.1), dite solution onde progressive. Pour un paramètre $\epsilon > 0$ fixé, il s'agit d'une solution régulière de la forme :

$$\begin{cases} \mathbf{u}^\epsilon(x, t) = \mathbf{w}^\epsilon(x - \sigma t) \equiv \mathbf{w}^\epsilon(\xi), \\ \lim_{\xi \rightarrow -\infty} \mathbf{w}^\epsilon(\xi) = \mathbf{u}_L, \quad \lim_{\xi \rightarrow +\infty} \mathbf{w}^\epsilon(\xi) = \mathbf{u}_R, \quad \lim_{\xi \rightarrow \pm\infty} d_\xi \mathbf{w}^\epsilon(\xi) = 0, \end{cases} \quad (2.21)$$

où $\sigma \in \mathbb{R}$ désigne la vitesse de propagation de l'onde et $\mathbf{u}_L, \mathbf{u}_R$ deux états dans $\Omega_{\mathbf{u}}$. Une solution de (2.1), de la forme (2.21), doit donc être solution du système différentiel ordinaire :

$$\left(\mathcal{A}(\mathbf{w}^\epsilon) - \sigma Id \right) d_\xi \mathbf{w}^\epsilon = \epsilon d_\xi \left(\mathcal{D}(\mathbf{w}^\epsilon) d_\xi \mathbf{w}^\epsilon \right), \quad \xi \in \mathbb{R}. \quad (2.22)$$

En introduisant la fonction $\mathbf{w} : \mathbb{R} \rightarrow \Omega_{\mathbf{u}}$ définie par :

$$\mathbf{w} \left(\frac{\xi}{\epsilon} \right) = \mathbf{w}^\epsilon(\xi), \quad (2.23)$$

on constate que \mathbf{w} doit être solution du système différentiel suivant, libre du paramètre ϵ :

$$\left(\mathcal{A}(\mathbf{w}) - \sigma Id \right) d_\xi \mathbf{w} = d_\xi \left(\mathcal{D}(\mathbf{w}) d_\xi \mathbf{w} \right), \quad \xi \in \mathbb{R}, \quad (2.24)$$

en vérifiant les mêmes conditions asymptotiques que celles imposées en (2.21) :

$$\lim_{\xi \rightarrow -\infty} \mathbf{w}(\xi) = \mathbf{u}_L, \quad \lim_{\xi \rightarrow +\infty} \mathbf{w}(\xi) = \mathbf{u}_R, \quad \lim_{\xi \rightarrow \pm\infty} d_\xi \mathbf{w}(\xi) = 0. \quad (2.25)$$

En d'autres termes, il est possible de déduire de la solution de (2.24)-(2.25), la solution \mathbf{w} de (2.22) pour tout $\epsilon > 0$ donné par l'opération de remise à l'échelle (2.23).

De nombreux auteurs ont établi des conditions suffisantes sur la matrice de viscosité \mathcal{D} , assurant l'existence au problème (2.24)-(2.25) de solutions onde progressive de faible amplitude. Nous renvoyons aux travaux de Majda, Pego [52], ainsi qu'aux références citées. Rapportons simplement que pour une matrice de diffusion admissible, un état $\mathbf{u}_L \in \Omega_{\mathbf{u}}$ étant fixé, l'existence d'un état \mathbf{u}_R (avec \mathbf{u}_R au voisinage de \mathbf{u}_L) est obtenue à la condition de prescrire convenablement la vitesse de propagation σ :

$$\sigma < \lambda_1(\mathbf{u}_L).$$

Un état \mathbf{u}_L étant fixé dans (2.25) et une vitesse convenablement choisie dans (2.24), supposons l'existence d'une solution \mathbf{w} de (2.24) connectant un état \mathbf{u}_R à l'infini. Équipés de cette solution, nous pouvons définir la famille de solutions onde progressive $\{\mathbf{w}^\epsilon\}_{\epsilon>0}$, par la remise à l'échelle (2.23), vérifiant toutes les conditions asymptotiques exprimées en (2.21). Il est possible de vérifier que cette famille de solutions converge, lorsque ϵ tend vers zéro, vers la fonction discontinue :

$$\mathbf{u}(x, t) = \mathbf{u}_L + (\mathbf{u}_R - \mathbf{u}_L)H(x - \sigma t), \quad x \in \mathbb{R}, \quad t > 0. \quad (2.26)$$

Cette construction a conduit LeFloch [48] à proposer :

Définition 2.4.1. La fonction discontinue (2.26) est dite solution choc du système de fluide parfait (2.2), compatible avec la matrice de viscosité \mathcal{D} dans (2.1).

La compatibilité de la solution choc avec la matrice de viscosité \mathcal{D} exprime ici que l'état \mathbf{u}_R dépend non seulement de l'état \mathbf{u}_L et de la vitesse σ , mais également de la forme précise de \mathcal{D} . Autrement dit, la définition des solutions choc pour un système non conservatif dépend intrinsèquement de la régularisation visqueuse choisie. Si le système considéré avait été conservatif, une telle dépendance n'aurait pas été de mise. En effet, et sous l'hypothèse $\mathcal{A}(\mathbf{u}) = \nabla_{\mathbf{u}} \mathbf{G}(\mathbf{u})$ pour une certaine fonction flux, le système différentiel du second ordre (2.24) aurait pu être intégré une première fois de $-\infty$ à ξ , pour conduire au système dynamique du premier ordre :

$$\mathcal{D}(\mathbf{w}) d_\xi \mathbf{w} = -\sigma(\mathbf{w}(\xi) - \mathbf{u}_L) + \mathbf{G}(\mathbf{w}(\xi)) - \mathbf{G}(\mathbf{u}_L), \quad \xi \in \mathbb{R}.$$

Les conditions asymptotiques formulées en (2.25) impliqueraient alors, dans la limite $\xi \rightarrow +\infty$, la condition de compatibilité suivante entre \mathbf{u}_R et \mathbf{u}_L , σ :

$$-\sigma(\mathbf{u}_R - \mathbf{u}_L) + \mathbf{G}(\mathbf{u}_R) - \mathbf{G}(\mathbf{u}_L) = 0,$$

qui ne sont autres que les conditions de Rankine-Hugoniot classiques dont nous avons déjà discuté. Dans le cas d'un système non conservatif, il est impossible d'intégrer une première fois (2.24). Nous sommes contraints de considérer un système dynamique du premier ordre étendu, formulé dans $\mathbb{R}^n \times \Omega_{\mathbf{u}}$:

$$\begin{cases} d_\xi \mathbf{w} = \mathcal{D}^{-1}(\mathbf{w})\mathbf{r}, \\ d_\xi \mathbf{r} = (\mathcal{A}(\mathbf{w}) - \sigma Id)\mathcal{D}^{-1}(\mathbf{w})\mathbf{r}, \end{cases} \quad (2.27)$$

où, par simplicité, nous avons temporairement supposé $\mathcal{D}(\mathbf{w})$ inversible. Les conditions asymptotiques (2.25) se transcrivent selon :

$$\lim_{\xi \rightarrow -\infty} (\mathbf{r}, \mathbf{w}(\xi)) = (0, \mathbf{u}_L), \quad \lim_{\xi \rightarrow +\infty} (\mathbf{r}, \mathbf{w}(\xi)) = (0, \mathbf{u}_R). \quad (2.28)$$

Or tout couple $(\mathbf{r}, \mathbf{w}) \in \mathbb{R}^n \times \Omega_{\mathbf{u}}$ de la forme $(0, \mathbf{u})$, avec \mathbf{u} arbitrairement choisi dans $\Omega_{\mathbf{u}}$ annule le champ de vecteur du système autonome (2.27) et constitue donc un point stationnaire. En conséquence de la théorie classique des systèmes dynamiques autonomes (voir [70]), tout couple de la forme $(0, \mathbf{u})$, avec $\mathbf{u} \in \Omega_{\mathbf{u}}$ arbitraire, est candidat à être joint dans la limite $\xi \rightarrow +\infty$ par les solutions hétéroclines de (2.27). En d'autres termes, l'existence d'une solution hétérocline de (2.27) pour une vitesse σ convenablement prescrite, et issue d'un couple $(0, \mathbf{u}_L)$ dans le passé, *i.e.* en $-\infty$, ne s'accompagne d'aucune information sur la forme précise du couple $(0, \mathbf{u}_R)$ joint dans le futur, *i.e.* en $+\infty$. Seule une intégration numérique de la solution hétérocline concernée sur \mathbb{R}_ξ tout entier, menée à partir de la donnée $(0, \mathbf{u}_L)$ dans le passé, autorise la détermination du point stationnaire recherché $(0, \mathbf{u}_R)$. Puisque le détail de la solution hétérocline est affecté par la matrice de viscosité, nous déduisons qu'en toute généralité, \mathbf{u}_R dépend de \mathbf{u}_L et de σ , mais également de la forme précise de \mathcal{D} . Nous illustrerons cette dépendance au chapitre 4, dans le cadre des modèles RSM.

2.5 Couple d'entropies et relations de saut généralisées

Supposons que le système de fluide parfait non conservatif admet un couple d'entropie $(\mathcal{U}, \mathcal{F})$ compatible avec la matrice de viscosité \mathcal{D} au sens de la condition (2.14). Examinons alors l'information qu'apporte ce couple d'entropie dans la caractérisation des solutions onde progressive du modèle avec perturbations visqueuses. Une solution \mathbf{w}^ϵ du système différentiel (2.22) vérifie la loi d'évolution scalaire supplémentaire, déduite de (2.15) :

$$\begin{aligned} -\sigma d_\xi \mathcal{U}(\mathbf{w}^\epsilon) + d_\xi \mathcal{F}(\mathbf{w}^\epsilon) = \\ \epsilon d_\xi \left({}^t \nabla_{\mathbf{u}} \mathcal{U}(\mathbf{w}^\epsilon) \mathcal{D}(\mathbf{w}^\epsilon) d_\xi \mathbf{w}^\epsilon \right) - \epsilon \left(d_\xi \mathbf{w}^\epsilon, \nabla_{\mathbf{u}\mathbf{u}}^2 \mathcal{U}(\mathbf{w}^\epsilon) \mathcal{D}(\mathbf{w}^\epsilon) d_\xi \mathbf{w}^\epsilon \right), \end{aligned} \quad (2.29)$$

où cette fois, les termes du premier ordre trouvent une forme conservative, alors que les mécanismes dissipatifs font apparaître une contribution non conservative : la dissipation d'entropie. L'intégration sur \mathbb{R}_ξ tout entier de cette loi conduit à :

$$-\sigma \left(\mathcal{U}(\mathbf{u}_R) - \mathcal{U}(\mathbf{u}_L) \right) + \mathcal{F}(\mathbf{u}_R) - \mathcal{F}(\mathbf{u}_L) = -\epsilon \int_{\mathbb{R}_\xi} \left(d_\xi \mathbf{w}^\epsilon, \nabla_{\mathbf{u}\mathbf{u}}^2 \mathcal{U}(\mathbf{w}^\epsilon) \mathcal{D}(\mathbf{w}^\epsilon) d_\xi \mathbf{w}^\epsilon \right) d\xi,$$

compte-tenu des conditions asymptotiques formulées en (2.21). Puisque, pour tout $\epsilon > 0$ fixé, l'opération de remise à l'échelle (2.23) conduit à l'identité suivante :

$$\epsilon \int_{\mathbb{R}_\xi} \left(d_\xi \mathbf{w}^\epsilon, \nabla_{\mathbf{u}\mathbf{u}}^2 \mathcal{U}(\mathbf{w}^\epsilon) \mathcal{D}(\mathbf{w}^\epsilon) d_\xi \mathbf{w}^\epsilon \right) d\xi = \int_{\mathbb{R}_\xi} \left(d_\xi \mathbf{w}, \nabla_{\mathbf{u}\mathbf{u}}^2 \mathcal{U}(\mathbf{w}) \mathcal{D}(\mathbf{w}) d_\xi \mathbf{w} \right) d\xi,$$

où \mathbf{w} désigne la solution de (2.24) issue de l'état donné dans le passé \mathbf{u}_L , et joignant un état \mathbf{u}_R dans le futur à la vitesse $\sigma \in \mathbb{R}$ fixée, nous déduisons la relation scalaire suivante, liant l'état \mathbf{u}_R aux données \mathbf{u}_L et σ , indépendante de ϵ comme attendue :

$$-\sigma \left(\mathcal{U}(\mathbf{u}_R) - \mathcal{U}(\mathbf{u}_L) \right) + \mathcal{F}(\mathbf{u}_R) - \mathcal{F}(\mathbf{u}_L) = \mathcal{C}_\mathcal{D}(\mathbf{u}_L, \sigma), \quad (2.30)$$

où la fonction $\mathcal{C}_\mathcal{D} : (\mathbf{u}_L, \sigma) \in \Omega_{\mathbf{u}} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathcal{C}_\mathcal{D}(\mathbf{u}_L, \sigma) \in \mathbb{R}^-$ est définie par :

$$\mathcal{C}_\mathcal{D}(\mathbf{u}_L, \sigma) = \int_{\mathbb{R}_\xi} \left(d_\xi \mathbf{w}, \nabla_{\mathbf{u}\mathbf{u}}^2 \mathcal{U}(\mathbf{w}) \mathcal{D}(\mathbf{w}) d_\xi \mathbf{w} \right) d\xi. \quad (2.31)$$

La fonction $\mathcal{C}_\mathcal{D}(\mathbf{u}_L, \sigma)$ est dite **fonction cinétique**. La terminologie retenue est héritée de la notion de relation cinétique introduite en théorie des changements de phase. Nous renvoyons le lecteur aux travaux d'Abeyaratne, Knowles [1] et à ceux de Truskivnosky [65]. Nous renvoyons aussi le lecteur aux travaux de Berthon, Coquel, LeFloch [10] pour son introduction dans le contexte des systèmes hyperboliques non conservatifs. La dépendance retenue ici pour exprimer l'intégrale (2.31) est déduite de la propriété suivante : à un tenseur de dissipation \mathcal{D} fixé, la solution hétérocline \mathbf{w} est construite par la donnée de \mathbf{u}_L dans $\Omega_{\mathbf{u}}$ et σ convenablement prescrit dans \mathbb{R} .

La loi scalaire (2.30) ainsi définie peut être comprise comme une relation de saut liant l'état \mathbf{u}_R aux données \mathbf{u}_L et σ dans la solution choc (2.26). Cette relation est qualifiée, dans la suite, de généralisée car son membre de droite n'est pas nul : il correspond, par construction, au bilan de dissipation d'entropie du couple $(\mathcal{U}, \mathcal{F})$ pour la solution choc (2.26). Il est utile de noter que cette solution vérifie, sous forme EDP, la loi scalaire :

$$\partial_t \mathcal{U}(\mathbf{u}) + \partial_x \mathcal{F}(\mathbf{u}) = \mathcal{C}_\mathcal{D}(\mathbf{u}_L, \sigma) \delta_{x-\sigma t}, \quad x \in \mathbb{R}, \quad t > 0. \quad (2.32)$$

2.6 Notion de solutions faibles pour un système hyperbolique non conservatif

Les considérations développées dans le précédent paragraphe nous permettent de proposer un cadre mathématique adapté dans les applications aux modèles RSM à l'introduction d'une formulation faible des équations de fluide parfait déduites de (2.1) dans la limite $\epsilon \rightarrow 0^+$.

Remarquons dans un premier temps qu'il existe autant de relations de saut généralisées non triviales, de la forme (2.30), qu'il existe de couples d'entropie $(\mathcal{U}, \mathcal{F})$.

Soulignons dans un second temps, que pour les équations de la physique, les composantes du vecteur inconnu \mathbf{u} ne sont rarement, sinon jamais, toutes gouvernées par des équations sous forme non conservative. Il convient donc de distinguer les p composantes $\{u^{(j)}\}_{1 \leq j \leq p}$ de \mathbf{u} , de nature non conservative avec $1 \leq p \leq n$, des $n - p$ composantes conservatives $\{u^{(j)}\}_{p < j \leq n}$.

En conséquence, dès qu'il existe au moins p couples d'entropie $\{(\mathcal{U}_i, \mathcal{F}_i)\}_{1 \leq i \leq p}$ dont

les gradients $\{\nabla_{\mathbf{u}}\mathcal{U}_i(\mathbf{u})\}_{1 \leq i \leq p}$ sont linéairement indépendants, nous disposons de n relations de saut liant l'état \mathbf{u}_R aux données \mathbf{u}_L et σ , via p fonctions cinétiques $\mathcal{C}_{\mathcal{D}}^{(i)} : \Omega_{\mathbf{u}} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^-$ selon :

$$\begin{cases} -\sigma(\mathcal{U}_j(\mathbf{u}_R) - \mathcal{U}_j(\mathbf{u}_L)) + \mathcal{F}_j(\mathbf{u}_R) - \mathcal{F}_j(\mathbf{u}_L) = \mathcal{C}_{\mathcal{D}}^{(j)}(\mathbf{u}_L, \sigma), & 1 \leq j \leq p, \\ -\sigma(u_R^{(j)} - u_L^{(j)}) + f_j(\mathbf{u}_R) - f_j(\mathbf{u}_L) = 0, & p < j \leq n. \end{cases} \quad (2.33)$$

$$\begin{cases} -\sigma(u_R^{(j)} - u_L^{(j)}) + f_j(\mathbf{u}_R) - f_j(\mathbf{u}_L) = 0, & p < j \leq n. \end{cases} \quad (2.34)$$

Définissons alors la transformation $\mathbf{u} \rightarrow \mathbf{v}(\mathbf{u}) = \{v_j(\mathbf{u})\}_{1 \leq j \leq n}$ en posant :

$$\begin{cases} v_j(\mathbf{u}) = \mathcal{U}_j(\mathbf{u}), & 1 \leq j \leq p, \\ v_j(\mathbf{u}) = u^{(j)}, & p < j \leq n, \end{cases} \quad (2.35)$$

en soulignant que $\mathbf{u} \rightarrow \mathbf{v}(\mathbf{u})$ n'a aucune raison de réaliser *a priori* un changement de variable. Avec ces notations, les relations (2.33)-(2.34) trouvent la forme suivante :

$$-\sigma(\mathbf{v}(\mathbf{u}_R) - \mathbf{v}(\mathbf{u}_L)) + \mathbf{F}(\mathbf{v}(\mathbf{u}_R)) - \mathbf{F}(\mathbf{v}(\mathbf{u}_L)) = \mathcal{C}_{\mathcal{D}}(\mathbf{u}_L, \sigma), \quad (2.36)$$

où nous définissons la fonction cinétique à valeur vectorielle $\mathcal{C}_{\mathcal{D}} : \Omega_{\mathbf{u}} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ en posant :

$$\mathcal{C}_{\mathcal{D}}(\mathbf{u}_L, \sigma) = \left(\{\mathcal{C}_{\mathcal{D}}^{(j)}\}_{1 \leq j \leq p}, 0 \right). \quad (2.37)$$

L'analyse onde progressive, responsable de l'écriture (2.36) au sens du précédent paragraphe, assure l'existence d'un $\mathbf{v}_R = \mathbf{v}(\mathbf{u}_R)$ solution des relations de saut (2.36) pour \mathbf{u}_L et σ fixés. S'il est possible de définir de manière unique l'état \mathbf{u}_R en tant que solution des équations $\mathbf{v}(\mathbf{u}_R) = \mathbf{v}_R$, alors \mathbf{u}_R est connue en fonction de \mathbf{u}_L et σ , la matrice de viscosité \mathcal{D} étant fixée dans la définition de la fonction cinétique à valeur vectorielle définie en (2.37).

Sous cette hypothèse d'inversibilité en \mathbf{u}_R , nous dirons que (2.36)-(2.37) constituent un ensemble complet de relations de saut généralisées.

Deux hypothèses fortes ont été formulées ici, à savoir premièrement l'existence d'au moins p couples d'entropie de gradients linéairement indépendants, et deuxièmement la détermination unique de l'état \mathbf{u}_R par les relations de saut (2.36)-(2.37).

Nous rapportons que les travaux de Berthon [7] et Chalons [14], consacrés aux modèles de turbulence isotrope à p échelles ($p \leq 1$), mettent en évidence l'existence de $(p+1)$ entropies de gradients linéairement indépendants (soit une de plus que nécessaire) avec la propriété $\mathbf{u} \rightarrow \mathbf{v}(\mathbf{u})$ inversible pour tout $\mathbf{u} \in \Omega_{\mathbf{u}}$, \mathbf{u} étant défini en (2.35) pour p quelconques d'entre elles. En d'autres termes il existe, dans ces travaux, plusieurs ensembles complets de relations de saut généralisées (à savoir p) décrivant de manière équivalente les mêmes solutions chocs :

$$\mathbf{u}_R(\mathbf{u}_L, \sigma; \mathcal{D}).$$

Dans le présent manuscrit, nous établissons que les modèles RSM étudiés possèdent également $(p+1)$ entropies de gradients linéairement indépendants, soit une de plus que nécessaire. Ici, le nombre p prend la valeur 3. La détermination unique de l'état \mathbf{u}_R solution de (2.36)-(2.37) est rendue possible par la connaissance du signe des composantes de \mathbf{u}_L . Plus précisément, le signe de certaines composantes de \mathbf{u}_R (à

savoir R_{12}) ne peut être déduit de la seule connaissance de $\mathbf{v}(\mathbf{u}_R)$, mais l'analyse onde progressive établira que les signes incriminés sont les mêmes que ceux de \mathbf{u}_L . En conséquence, il existe encore un ensemble complet de relations de saut généralisées de la forme (2.36)-(2.37) permettant de décrire l'état de sortie \mathbf{u}_R d'une solution choc se propageant à la vitesse σ et issue d'un état \mathbf{u}_L donné.

Après Berthon, Coquel, LeFloch [10], ces propriétés nous permettent de proposer un sens faible aux équations avec perturbations visqueuses, dans la limite $\epsilon \rightarrow 0^+$ en considérant (pour simplifier ici) le cadre des fonctions Lipschitz continues par morceaux au sens de la définition suivante :

Définition 2.6.1. Une fonction Lipschitz continue par morceaux est dite solution du modèle de fluide parfait associé au modèle complet (2.1) dans la limite $\epsilon \rightarrow 0^+$, si et seulement si :

- dans les zones de régularité de la fonction \mathbf{u} , celle-ci vérifie au sens usuel :

$$\partial_t \mathbf{u} + \mathcal{A}(\mathbf{u}) \partial_x \mathbf{u} = 0, \quad (2.38)$$

- à la traversée d'un choc se propageant à la vitesse σ , les traces à droite et à gauche de \mathbf{u} vérifient les relations de saut généralisées :

$$-\sigma \left(\mathbf{v}(\mathbf{u}_+) - \mathbf{v}(\mathbf{u}_-) \right) + \mathbf{F}(\mathbf{v}(\mathbf{u}_+)) - \mathbf{F}(\mathbf{v}(\mathbf{u}_-)) = \mathcal{C}_{\mathcal{D}}(\mathbf{u}_-, \sigma). \quad (2.39)$$

Notons que nous ne faisons pas explicitement référence à un critère de sélection entropique des solutions choc, puisque la construction de (2.39) résulte directement d'une procédure de régularisation visqueuse.

Il est possible de donner une écriture condensée à (2.38)-(2.39), motivée par (2.32), en considérant une solution Lipschitz continue par morceaux du modèle de fluide parfait, pour laquelle $\mathbf{u} \rightarrow \mathbf{v}(\mathbf{u})$ réalise un changement de variable. Nous verrons dans le cadre des modèles RSM que cette propriété sera satisfaite pour des données initiales $\mathbf{u}_0(x)$, où $R_{12}^0(x)$ garde un signe constant pour $x \in \mathbb{R}$. Ce signe sera conservé dans la solution $R_{12}(x, t)$. L'écriture condensée est alors :

$$\partial_t \mathbf{v}(\mathbf{u}) + \partial_x \mathbf{F}(\mathbf{v}(\mathbf{u})) = \Upsilon_{\mathbf{u}}, \quad x \in \mathbb{R}, \quad t > 0, \quad (2.40)$$

où $\Upsilon_{\mathbf{u}}$ est une mesure borélienne bornée concentrée sur les ondes de choc et s'annulant partout ailleurs, dont la masse est telle que les relations de saut généralisées (2.39) sont vérifiées. Pour simplifier, nous noterons souvent (2.40) selon :

$$\partial_t \mathbf{v} + \partial_x \mathbf{F}(\mathbf{v}) = \Upsilon_{\mathbf{v}}, \quad (2.41)$$

avec un léger abus de langage.

Chapitre 3

Propriétés élémentaires du système

Ce chapitre décrit plusieurs propriétés des solutions ondes planes du modèle aux tensions de Reynolds choisi précédemment. Ces propriétés sont indispensables à l'étude des chocs plans, véritable objet du mémoire.

En négligeant dans un premier temps les mécanismes visqueux, nous énonçons que le système du premier ordre ainsi obtenu est hyperbolique. Nous montrons que seules les ondes associées aux deux valeurs propres extrêmes sont de nature non linéaire. Ainsi, seules ces ondes sont responsables de la formation de chocs. Nous établissons que la détermination des relations de saut à la traversée des chocs est ambiguë. En revanche, nous vérifions que toutes les autres ondes discontinues naturellement associées aux valeurs propres intermédiaires sont parfaitement définies.

De manière à caractériser les solutions chocs à l'aide de relations cinétiques conformément au chapitre 2, nous exhibons toutes les lois de conservation supplémentaires du système du premier ordre. L'effet des mécanismes dissipatifs sur chacune des entropies mathématiques est ensuite précisé. Afin de disposer de toutes les entropies permises par le système du premier ordre, nous justifions en quoi nous pouvons dorénavant supposer, sans restriction, la non nullité du taux de turbulence longitudinal. Nous concluons ce chapitre en indiquant que les lois supplémentaires disponibles ne conduisent pas, en toute généralité, à un changement de variable permettant de réexprimer le modèle RSM sous la forme d'un système hyperbolique de lois de conservation en présence d'une régularisation visqueuse non conservative. En anticipant les résultats à venir, nous soulignons qu'un tel changement de variable deviendra licite dans le cas des solutions onde progressive. Cette propriété autorisera dès lors, la caractérisation des ondes de choc grâce à un ensemble complet de relations cinétiques.

3.1 Écriture du modèle pour les ondes planes

En utilisant l'invariance du modèle par rotation fixe des axes, nous formulons sans restriction les équations gouvernant les solutions ondes planes dans la direction \mathbf{e}_1 premier vecteur de la base cartésienne $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2)$:

$$\left\{ \begin{array}{l} \partial_t \rho + \partial_x(\rho u) = 0, \\ \partial_t(\rho u) + \partial_x(\rho u^2 + p + R_{11}) = \partial_x(\mu \partial_x u), \\ \partial_t(\rho v) + \partial_x(\rho uv + R_{12}) = \partial_x(\nu \partial_x v), \\ \partial_t(\rho E) + \partial_x((\rho E + p + R_{11})u + R_{12}v) = \partial_x(\mu u \partial_x u + \nu v \partial_x v) + \partial_x(\kappa \partial_x T), \\ \partial_t R_{11} + \partial_x(R_{11}u) + 2R_{11} \partial_x u = 0, \\ \partial_t R_{22} + \partial_x(R_{22}u) + 2R_{12} \partial_x v = 0, \\ \partial_t R_{12} + \partial_x(R_{12}u) + R_{11} \partial_x v + R_{12} \partial_x u = 0, \\ \partial_t R_{33} + \partial_x(R_{33}u) = 0. \end{array} \right. \quad (3.1)$$

Ici, u et v sont respectivement la vitesse axiale et la vitesse transversale. Les viscosités dynamiques sont telles que $\mu = \frac{4}{3}\nu$. En conséquence, nous formulons l'hypothèse de modélisation suivante :

$$0 < \nu < \mu. \quad (3.2)$$

Cette hypothèse nous sera utile lors de l'étude onde progressive. La conductivité thermique totale κ est choisie constante. Nous considérons la loi des gaz parfaits, pour définir la loi de pression, soit :

$$p = \rho r T, \quad (3.3)$$

où $r = (\gamma - 1)c_v$ est la constante habituelle des gaz parfaits et c_v est la chaleur spécifique à volume constant. Le gaz parfait sera considéré polytropic et nous prendrons le coefficient adiabatique $\gamma > 1$ constant dans toute la suite. L'énergie totale trouve alors la définition suivante :

$$\rho E = \frac{p}{\gamma - 1} + \rho \frac{u^2}{2} + \rho \frac{v^2}{2} + \frac{R_{11}}{2} + \frac{R_{22}}{2}, \quad (3.4)$$

où l'on a soustrait l'équation gouvernant $\frac{R_{33}}{2}$ à l'équation d'évolution de l'énergie totale permettant ainsi d'enlever la contribution de cette tension de Reynolds dans la définition de l'énergie. Remarquons ensuite que la dernière équation du système (3.1) est découplée des autres équations. Il s'agit juste d'une équation de transport. Sans aucune restriction, on peut supprimer cette dernière équation de notre système.

Donnons dès à présent une formulation condensée des équations. À cette fin, nous introduisons le vecteur inconnu \mathbf{u} défini par :

$$\mathbf{u} = (\rho, \rho u, \rho v, \rho E, R_{11}, R_{12}, R_{22}). \quad (3.5)$$

Le système étudié s'écrit alors, avec des notations claires, sous la forme :

$$\partial_t \mathbf{u} + \mathcal{A}(\mathbf{u}) \partial_x \mathbf{u} = \partial_x(\mathcal{D}(\mathbf{u}) \partial_x \mathbf{u}). \quad (3.6)$$

L'espace des phases naturellement associé à (3.6) est le suivant :

$$\begin{aligned} \Omega_{\mathbf{u}} = \{ & \mathbf{u} = (\rho, \rho u, \rho v, \rho E, R_{11}, R_{12}, R_{22}) \in \mathbb{R}^7, \rho > 0, p(\mathbf{u}) > 0, \\ & (u, v) \in \mathbb{R}^2, R_{ii} \geq 0, i = (1, 2), R_{11}R_{22} - R_{12}^2 \geq 0 \}, \end{aligned} \quad (3.7)$$

où $p(\mathbf{u})$ est déduit de la fermeture (3.4). Les restrictions imposées sur les tensions de Reynolds dans (3.7) correspondent aux conditions de réalisabilité du modèle RSM

discutées dans le chapitre précédent. Rappelons que le tenseur de Reynolds doit être semi-défini positif de sorte que $R_{11} \geq 0$, $R_{22} \geq 0$ et $R_{12}^2 \leq R_{11}R_{22}$ en vertu de l'inégalité de Cauchy-Schwarz.

Notons que la matrice $\mathcal{A}(\mathbf{u})$ dans (3.6) ne coïncide pas avec la matrice Jacobienne d'une certaine fonction flux. En d'autres termes, (3.6) s'écrit naturellement sous forme non conservative.

Un adimensionnement des équations, détaillé dans le chapitre suivant et motivé par l'étude des ondes planes en turbulence pleinement développée, fera clairement apparaître l'existence d'un petit paramètre $\epsilon > 0$ dans les équations considérées. Ici ϵ correspond à l'inverse d'un nombre de Reynolds qui est très grand dans les applications envisagées. Ainsi et en anticipant, les solutions étudiées sont régies après remise à l'échelle par les équations suivantes :

$$\partial_t \mathbf{u}^\epsilon + \mathcal{A}(\mathbf{u}^\epsilon) \partial_x \mathbf{u}^\epsilon = \epsilon \partial_x (\mathcal{D}(\mathbf{u}^\epsilon) \partial_x \mathbf{u}^\epsilon). \quad (3.8)$$

Sous cette forme, ces équations doivent être considérées comme un système non linéaire du premier ordre en présence d'une perturbation visqueuse.

3.2 Hyperbolicité du modèle de fluide parfait

Dans cette section, nous examinons les propriétés du modèle de fluide parfait déduit de (3.6) en négligeant formellement les phénomènes dissipatifs :

$$\partial_t \mathbf{u} + \mathcal{A}(\mathbf{u}) \partial_x \mathbf{u} = 0. \quad (3.9)$$

Les propriétés d'hyperbolicité de (3.9) reposent alors sur la proposition suivante :

Proposition 3.2.1. *Le système du premier ordre (3.9) est hyperbolique dans $\Omega_{\mathbf{u}}$ et admet les valeurs propres suivantes :*

$$\begin{aligned} \lambda_1(\mathbf{u}) &= u - c(\mathbf{u}), \\ \lambda_2(\mathbf{u}) &= u - a(\mathbf{u}), \\ \lambda_3(\mathbf{u}) = \lambda_4(\mathbf{u}) = \lambda_5(\mathbf{u}) &= u, \\ \lambda_6(\mathbf{u}) &= u + a(\mathbf{u}), \\ \lambda_7(\mathbf{u}) &= u + c(\mathbf{u}). \end{aligned} \quad (3.10)$$

avec :

$$c^2(\mathbf{u}) = \frac{\gamma p}{\rho} + 3 \frac{R_{11}}{\rho}, \quad a^2(\mathbf{u}) = \frac{R_{11}}{\rho}, \quad a^2(\mathbf{u}) < c^2(\mathbf{u}), \quad (3.11)$$

de sorte que l'encadrement suivant a lieu :

$$\lambda_1(\mathbf{u}) < \lambda_2(\mathbf{u}) \leq \lambda_3(\mathbf{u}) = \lambda_4(\mathbf{u}) = \lambda_5(\mathbf{u}) \leq \lambda_6(\mathbf{u}) < \lambda_7(\mathbf{u}). \quad (3.12)$$

Ce résultat est établi dans [66], [13] par exemple. Remarquons après Hérard [35] que l'hyperbolicité du système est fortement liée à la réalisabilité faible par l'intermédiaire de la définition de $\Omega_{\mathbf{u}}$. En effet et par exemple, $a^2(\mathbf{u})$ désigne une quantité positive si et seulement si $R_{11} \geq 0$. Remarquons également que la vitesse du son $c(\mathbf{u})$, devant désigner un nombre réel, dépend classiquement de la pression p mais aussi de la

turbulence axiale R_{11} .

Ensuite, il est attendu que $\lambda_1(\mathbf{u})$ et $\lambda_7(\mathbf{u})$ soient de nature acoustique. La vitesse du son $c(\mathbf{u})$ correspond à la célérité des ondes acoustiques dans le milieu turbulent considéré pour la pression totale $\Pi = p + R_{11}$, pression qui apparaît naturellement dans l'équation de quantité de mouvement sur u et dans l'équation sur l'énergie totale E . En anticipant sur la forme lagrangienne (3.9) du système (3.14), l'équation du second ordre sur la pression totale Π s'écrit en effet :

$$\partial_{tt}^2 \Pi - c_l^2(\mathbf{u}_l) \partial_{mm}^2 \Pi = 0,$$

où classiquement, la vitesse du son lagrangienne $c_l(\mathbf{u}_l)$ est liée à la vitesse du son eulérienne $c(\mathbf{u})$ par $c_l(\mathbf{u}_l) = \rho c(\mathbf{u})$ et où m représente la variable lagrangienne de débit massique (\mathbf{u}_l est ici l'inconnue lagrangienne).

Contrairement à la dynamique des gaz habituelle, deux valeurs propres intermédiaires sont apparues, $\lambda_2(\mathbf{u})$ et $\lambda_6(\mathbf{u})$ distinctes de la vitesse u dès que $R_{11} > 0$. Ces deux nouvelles valeurs propres seront vues être à l'origine de phénomènes tangentiels non triviaux dès que $R_{12} \neq 0$. La nouvelle célérité $a(\mathbf{u})$, associée à ces deux nouvelles valeurs propres, correspond à la vitesse des phénomènes propagatifs en v et R_{12} ayant lieu dans un matériau turbulent pour lequel les variables (ρ, u, p, R_{11}) seraient constantes. En anticipant à nouveau sur la forme lagrangienne (3.9) du système (3.14), de rapides manipulations des équations entraînent en effet :

$$\begin{cases} \partial_{tt}^2 v - a_l^2(\mathbf{u}_l) \partial_{mm}^2 v = 0, \\ \partial_{tt}^2 R_{12} - a_l^2(\mathbf{u}_l) \partial_{mm}^2 R_{12} = 0. \end{cases}$$

Encore une fois, la vitesse lagrangienne $a_l(\mathbf{u}_l)$ est liée à la vitesse eulérienne $a(\mathbf{u})$ par $a_l(\mathbf{u}_l) = \rho a(\mathbf{u})$.

Afin de prolonger cette discussion, il importe de faire la remarque importante suivante.

Remarque 3.2.2. Il est facile de vérifier à partir de l'équation gouvernant R_{11} , que choisir une donnée initiale pour le problème de Cauchy du système (3.1) telle que $R_{11}(x, 0) = 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$ conduit à des solutions telles que $R_{11}(x, t) = 0$ pour tout temps positif. Dans ce cas, cela impose $R_{12}(x, t) = 0$ pour tout temps afin de respecter la condition de réalisabilité $R_{11}R_{22} - R_{12}^2 \geq 0$ formulée dans (3.7). Ainsi, pour une telle donnée initiale, le système d'EDP (3.1) correspond aux équations de Navier-Stokes usuelles avec une équation de transport découplée sur $\frac{R_{22}}{\rho}$. Afin de concentrer l'analyse qui va suivre sur le cas important $R_{12} \neq 0$, nous supposons que $R_{11}(x, 0) > 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$ (sauf mention explicite du contraire) de manière à considérer l'espace des phases suivant :

$$\Omega_{\mathbf{u}}^+ = \{\mathbf{u} \in \Omega_{\mathbf{u}} \mid R_{11} > 0\}. \quad (3.13)$$

Comme nous le verrons dans la suite, les solutions de (3.1) dont la donnée initiale est dans $\Omega_{\mathbf{u}}^+$, y restent pour tout temps positif. Cela va nous permettre de donner des lois supplémentaires non triviales pour les solutions régulières de (3.1) avec une composante tangentielle $R_{12}(x, t) \neq 0$.

Démonstration. de la proposition (3.2.1). Nous proposons de tirer profit d'un résultat dû à Wagner [69] exprimant l'équivalence des propriétés d'hyperbolicité en coordonnées eulériennes et lagrangiennes pour les systèmes de la physique. Nous privilégions

ici les coordonnées lagrangiennes car la forme notablement plus simple des équations permet de vérifier très facilement plusieurs propriétés utiles à la compréhension de la structure des équations : nature des champs, caractérisation des invariants et détermination des entropies mathématiques.

Dans les coordonnées lagrangiennes (t, m) , temps et débit massique, le système (3.9) s'écrit pour l'inconnue lagrangienne $\mathbf{u}_l = (\tau, u, p, R_{11}, v, R_{12}, R_{22})$:

$$\begin{cases} \partial_t \tau - \partial_m u = 0, \\ \partial_t u + \partial_m (p + R_{11}) = 0, \\ \partial_t p + (\gamma \rho p) \partial_m u = 0, \\ \partial_t R_{11} + 3\rho R_{11} \partial_m u = 0, \\ \partial_t v + \partial_m (R_{12}) = 0, \\ \partial_t R_{12} + \rho R_{11} \partial_m v + 2\rho R_{12} \partial_m u = 0, \\ \partial_t R_{22} + \rho R_{22} \partial_m u + 2\rho R_{12} \partial_m v = 0. \end{cases} \quad (3.14)$$

On remarque alors que les quatre premières équations sur (τ, u, p, R_{11}) sont découplées des trois autres. Ce système réduit, constitué par les quatre premières équations, correspond à des équations d'Euler à deux pressions indépendantes (voir [7]) où la pression totale est $\Pi = p + R_{11}$. Ainsi, il est possible de déduire la vitesse des ondes acoustiques en coordonnées lagrangiennes en additionnant la troisième et la quatrième équation :

$$c_l(\mathbf{u}_l) = \rho \sqrt{\frac{\gamma p}{\rho} + 3 \frac{R_{11}}{\rho}}.$$

En rappelant la relation entre la vitesse du son lagrangienne $c_l(\mathbf{u}_l)$ et sa version en coordonnées eulériennes $c(\mathbf{u})$:

$$c(\mathbf{u}) = \frac{c_l(\mathbf{u}_l)}{\rho},$$

nous déduisons la valeur de la vitesse du son eulérienne dans (3.11). Remarquons ensuite que les deux équations sur (v, R_{12}) sont découplées de la dernière équation sur (R_{22}) . Nous sommes donc confrontés à un système faiblement couplé. Sous cette forme, il est très facile de trouver les valeurs propres de la matrice $\mathcal{A}(\mathbf{u})$, ainsi que ses vecteurs propres à gauche et à droite, donnés par les matrices suivantes, où le numéro de la colonne correspond au numéro de la valeur propre correspondante pour la variable d'état $(\tau, u, v, p, R_{11}, R_{22}, R_{12})$:

$$\mathcal{R} = \begin{pmatrix} \tau & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -\tau \\ c & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & c \\ \frac{2R_{12}c\tau}{c^2-a^2} & a & 0 & 0 & 0 & a & \frac{2R_{12}c\tau}{c^2-a^2} \\ -\gamma p & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \gamma p \\ -3\rho a^2 & 0 & 0 & -1 & u & 0 & 3\rho a^2 \\ -(R_{22} + \frac{4R_{12}^2\tau}{c^2-a^2}) & -2R_{12} & 0 & 0 & 1 & 2R_{12} & R_{22} + \frac{4R_{12}^2\tau}{c^2-a^2} \\ -\frac{2R_{12}c^2}{c^2-a^2} & -\rho a^2 & 0 & 0 & 0 & \rho a^2 & \frac{2R_{12}c^2}{c^2-a^2} \end{pmatrix} \quad (3.15)$$

$$\mathcal{L} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \gamma\rho p & 3\rho^2 a^2 & R_{11}R_{22} - 4R_{12}^2 & 0 & 0 \\ -\rho c & -\frac{2R_{12}a\tau}{c^2-a^2} & 0 & 0 & 0 & \frac{2R_{12}a\tau}{c^2-a^2} & \rho c \\ 0 & \rho a & 0 & 0 & 0 & -\rho a & 0 \\ 1 & \frac{2R_{12}\tau}{c^2-a^2} & 1 & 0 & 0 & \frac{2R_{12}\tau}{c^2-a^2} & 1 \\ 1 & \frac{2R_{12}\tau}{c^2-a^2} & 0 & 1 & 0 & \frac{2R_{12}\tau}{c^2-a^2} & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a^2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & -2R_{12}\tau & -1 & 0 \end{pmatrix} \quad (3.16)$$

□

Remarquons que $a(\mathbf{u})$ et $c(\mathbf{u})$ ne peuvent jamais être égales de par leurs définitions.

3.3 Nature des champs

Nous précisons dans ce paragraphe la nature non linéaire ou linéaire des ondes se propageant avec les vitesses caractéristiques exhibées par la proposition (3.2.1). Rappelons (voir [32]) qu'après Lax, un k -champ est dit vraiment non linéaire (VNL) si et seulement si :

$$(\nabla_{\mathbf{u}}\lambda_k(\mathbf{u}) \cdot r_k(\mathbf{u})) \neq 0, \quad \forall \mathbf{u} \in \Omega_{\mathbf{u}}, \quad (3.17)$$

alors qu'il est linéairement dégénéré (LD) si et seulement si :

$$(\nabla_{\mathbf{u}}\lambda_k(\mathbf{u}) \cdot r_k(\mathbf{u})) = 0, \quad \forall \mathbf{u} \in \Omega_{\mathbf{u}}. \quad (3.18)$$

Il est alors connu que les champs VNL, contrairement aux champs LD, conduisent en général à l'apparition de discontinuités en temps fini pour des solutions associées à des données initiales aussi régulières que souhaité. La nature linéairement dégénérée ou vraiment non linéaire des champs est donnée par le lemme suivant :

Lemme 3.3.1 (Nature des champs). *Les valeurs propres $\lambda_1(\mathbf{u})$ et $\lambda_7(\mathbf{u})$ sont associées à des champs vraiment non linéaires (VNL), alors que les valeurs propres $(\lambda_i(\mathbf{u}))_{i=2,6}$ sont associées à des champs linéairement dégénérés (LD).*

Les champs (3,4,5) coïncident clairement avec une onde de contact : en effet, les discontinuités associées se propagent à la vitesse $\sigma = u$. Dans la suite, nous appellerons l'ensemble de ces trois champs l'onde de contact. On fera référence aux deux autres champs intermédiaires par les champs LD tangentiels pour la raison suivante :

Lemme 3.3.2. *A la traversée des discontinuités associées aux champs 2 et 6, seules peuvent être discontinues les variables v et R_{12} .*

Nous renvoyons le lecteur à [66] pour la preuve de ces deux résultats basée sur les définitions (3.17) et (3.18) des vecteurs propres à droite de la matrice (3.15). Les deux paragraphes suivants examinent de manière importante l'ambiguïté éventuelle des produits non conservatifs impliqués dans (3.9) en présence des discontinuités associées aux différents champs.

3.4 Ondes vraiment non linéaires et relations de saut ambiguës

La présence de champs vraiment non linéaires implique que les solutions du système (3.1) développent en général des discontinuités en temps fini pour des données initiales choisies aussi régulières que souhaité. Considérons donc une solution discontinue (onde de choc) associée aux champs extrêmes du modèle eulérien, séparant deux états constants \mathbf{u}_L et \mathbf{u}_R et se propageant à la vitesse σ . Montrons alors que les produits non conservatifs du système (3.1) sont nécessairement ambigus. Des considérations classiques montrent que le débit relatif $m = \rho_L(u_L - \sigma) = \rho_R(u_R - \sigma)$ ne peut être nul [32], en conséquence de quoi (ρ, u, p) ne peuvent être continus à la traversée d'une telle onde. Ainsi, le produit $3R_{11}\partial_x u$, intervenant dans l'équation gouvernant R_{11} , ne peut pas être nul dès que R_{11} est non nul. Dès lors, l'identité suivante :

$$3R_{11}\partial_x u = -\left(\partial_t R_{11} + \partial_x R_{11}u\right) = -m \left[\frac{R_{11}}{\rho} \right] \delta_{x-\sigma t},$$

valable au sens des mesures, montre, avec $m \neq 0$, que R_{11} ne peut être continue. Par ailleurs, supposant R_{12} continue, l'équation gouvernant v implique la continuité de v . Or l'équation alors vérifiée par R_{12} impliquerait à son tour l'identité suivante :

$$R_{12}\partial_x u = -\left(\partial_t R_{12} + \partial_x R_{12}u\right) = -m \left[\frac{R_{12}}{\rho} \right] \delta_{x-\sigma t},$$

ce qui, pour $R_{12} \neq 0$ conduit à une impossibilité. En conséquence, les produits non conservatifs impliqués dans le système (3.1) sont ambigus. Chacun conduit à devoir multiplier une fonction discontinue par une mesure. Avant de traiter cette difficulté, il importe de vérifier la présence de produits ambigus à la traversée de discontinuités associées aux champs LD intermédiaires. C'est l'objet de la section suivante.

3.5 Ondes linéairement dégénérées et absence d'ambiguïté

Les ondes simples associées à un k -champ linéairement dégénéré (*i.e.* liant deux états constants \mathbf{u}_L et \mathbf{u}_R) sont naturellement discontinues (voir [32]). Il est connu que ces discontinuités se propageant à la vitesse $\sigma = \lambda_k(\mathbf{u}_L) = \lambda_k(\mathbf{u}_R)$ peuvent être caractérisées par les invariants de Riemann associés à la k -onde LD considérée. En effet (voir [32]), deux états \mathbf{u}_L et \mathbf{u}_R peuvent être séparés par une discontinuité associée à un k -champ linéairement dégénéré si et seulement si les k -invariants de Riemann évalués sur \mathbf{u}_L et \mathbf{u}_R coïncident. Nous vérifions dans ce paragraphe que cette caractérisation ne s'accompagne d'aucune ambiguïté dans les produits non conservatifs présents dans (3.9). Les invariants de Riemann des ondes linéairement dégénérées sont donnés par le lemme suivant (voir également Uhlmann [66] ou Hérard *et al* [13], [9]).

Lemme 3.5.1 (Invariants de Riemann LD). *Soit $\mathbf{u} \in \Omega_{\mathbf{u}}^+$ ($R_{11} > 0$) de sorte que les valeurs propres $(\lambda_2(\mathbf{u}), u, \lambda_6(\mathbf{u}))$ soient distinctes, alors à la traversée des discon-*

tinuités associées aux champs LD, les quantités suivantes sont conservées :

$$I_R^{3..5} = \{u, R_{12}, v, p + R_{11}\}, \quad (3.19)$$

$$I_R^2 = \left\{ u, R_{11}, \rho, v + \frac{R_{12}}{\sqrt{\rho R_{11}}}, R_{11}R_{22} - R_{12}^2, p \right\} \quad (3.20)$$

$$I_R^6 = \left\{ u, R_{11}, \rho, v - \frac{R_{12}}{\sqrt{\rho R_{11}}}, R_{11}R_{22} - R_{12}^2, p \right\} \quad (3.21)$$

Vérifions que la continuité des k -invariants de Riemann à la traversée d'une k -onde discontinue LD implique qu'il n'y a pas d'ambiguïté dans les produits non conservatifs présents dans (3.9). Ces produits sont les suivants :

$$\left\{ \begin{array}{l} 2R_{11}\partial_x u, \quad \text{équations sur } R_{11}, \end{array} \right. \quad (3.22)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} 2R_{12}\partial_x v, \quad \text{équations sur } R_{22}, \end{array} \right. \quad (3.23)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} R_{11}\partial_x v, \quad \text{équations sur } R_{12}, \end{array} \right. \quad (3.24)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} R_{12}\partial_x u, \quad \text{équations sur } R_{12}, \end{array} \right. \quad (3.25)$$

Intéressons nous d'abord à une onde de contact. La continuité des invariants de Riemann associés implique la continuité de u et de v . Ainsi, les quatre produits non conservatifs précédents ne sont pas ambigus car il ne s'agit pas du produit d'une mesure par une fonction de Heaviside.

Pour le 2-champ, u reste constant à travers toute discontinuité de ce champ mais v ne l'est pas. Dans ces conditions les produits non conservatifs (3.22) et (3.25) ne sont pas ambigus pour les mêmes raisons que précédemment. R_{11} étant un invariant de Riemann du 2-champ, le produit non conservatif (3.24) n'est pas ambigu car il s'agit du produit d'une fonction de Dirac par une fonction continue. Il n'y a pas d'indétermination dans ce cas. Pour le produit non conservatif (3.23), il faut réécrire l'équation sur R_{22} comme suit :

$$\partial_t R_{22} + \partial_x (R_{22}u) + 2(R_{12} + v\sqrt{\rho R_{11}})\partial_x v - \sqrt{\rho R_{11}}\partial_x v^2 = 0,$$

de manière à faire intervenir l'invariant de Riemann $R_{12} + v\sqrt{\rho R_{11}}$ associé à ce 2-champ, en ayant observé que $\sqrt{\rho R_{11}}$ est lui même un invariant. Ces différents invariants étant constants, les produits non conservatifs ne sont pas ambigus.

On procède de même pour le 5-champ mais en utilisant l'invariant de Riemann $R_{12} - v\sqrt{\rho R_{11}}$ correspondant. Nous venons ainsi de prouver, que pour les ondes linéairement dégénérées, les produits non conservatifs présents dans le système initial (3.1) ne sont pas ambigus.

3.6 Lois d'évolution supplémentaires

Conformément au chapitre 2, nous nous proposons ici de caractériser toutes les lois d'évolution supplémentaires susceptibles de conduire à la définition de solutions chocs grâce à un ensemble complet de relations de saut généralisées construites sur des relations cinétiques. Rappelons que les lois recherchées prennent la forme d'une loi de conservation du premier ordre en présence le plus souvent d'une perturbation du second ordre sous forme non conservative. Il s'agit donc dans un premier temps d'exhiber toutes les entropies mathématiques du système de fluide parfait (3.9) puis de préciser l'effet des mécanismes visqueux sur chacune de ces entropies.

3.6.1 Problème de fluide parfait

Dans un premier temps, nous allons donner toutes les lois de conservation supplémentaires du système de fluide parfait (3.9).

Lois générales

Nous introduisons ici deux lois de conservation portant sur l'entropie physique et sur un des mineurs du tenseur de Reynolds satisfaites par les solutions régulières du modèle quasi 1D (3.9). Il est possible de vérifier que ces lois de conservation demeurent vraies pour les solutions du modèle à plusieurs dimensions d'espace (voir en particulier [9] et les références incluses). Introduisons l'entropie spécifique d'un gaz parfait polytropic définie par :

$$s(\mathbf{u}) = c_v \ln \frac{p}{\rho^\gamma}. \quad (3.26)$$

Elle conduit à la loi de conservation donnée par le lemme suivant (renvoyons en effet à l'équation gouvernant p dans la formulation lagrangienne (3.14)) :

Lemme 3.6.1. *Les solutions régulières du modèle de fluide parfait (3.9) vérifient la loi de conservation suivante sur l'entropie physique (3.26) :*

$$\partial_t(\rho s(\mathbf{u})) + \partial_x(\rho s(\mathbf{u})u) = 0.$$

La deuxième loi de conservation générale est liée au déterminant \mathcal{D} du tenseur de Reynolds, ici exprimé en dimension 2. Ce mineur est défini par :

$$\mathcal{D}(\mathbf{u}) = (R_{11}R_{22} - R_{12}^2)\tau^4. \quad (3.27)$$

Lemme 3.6.2. *Le mineur \mathcal{D} du tenseur de Reynolds conduit pour les solutions régulières du modèle de fluide parfait (3.9) à la loi de conservation suivante :*

$$\partial_t(\rho \mathcal{D}(\mathbf{u})) + \partial_x(\rho \mathcal{D}(\mathbf{u})u) = 0.$$

Démonstration. Cette équation s'obtient facilement en combinant les équations sur les composantes du tenseur de Reynolds et l'équation de continuité. \square

Lois directionnelles

Nous allons donner trois nouvelles lois de conservation dans le cas du fluide parfait, valables pour le problème formulé dans une direction privilégiée : la direction normale à une onde plane. Ces lois ne seront donc valables que pour le système monodimensionnel (3.1) où nous rappelons que la direction x a été choisie sans restriction. Ces lois concernent une nouvelle entropie normale \mathcal{I} , une énergie normale E_n (E_x ici) et deux énergies tangentielles E_t (E_y ici) et \mathcal{W} définies par :

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathcal{I}(\mathbf{u}) = R_{11}\tau^3, \end{array} \right. \quad (3.28)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \rho E_n(\mathbf{u}) = \frac{p}{\gamma - 1} + \rho \frac{u^2}{2} + \frac{R_{11}}{2}, \end{array} \right. \quad (3.29)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \rho E_t(\mathbf{u}) = \rho \frac{v^2}{2} + \frac{R_{12}^2}{2R_{11}}, \end{array} \right. \quad (3.30)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \rho \mathcal{W}(\mathbf{u}) = R_{22} - \frac{R_{12}^2}{R_{11}} = \rho \frac{\mathcal{D}(\mathbf{u})}{\mathcal{I}(\mathbf{u})} \end{array} \right. . \quad (3.31)$$

L'entropie \mathcal{I} est associée à la pression partielle R_{11} qui vient s'ajouter à la pression thermodynamique p dans le système (3.1). Son coefficient d'adiabaticité correspondant est 3. La définition précise de la vitesse du son $c(\mathbf{u})$ s'en trouve éclairée, puisque l'on peut écrire :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial p}{\partial \rho} \Big|_{s(\mathbf{u})} = \frac{\gamma p}{\rho}, \\ \frac{\partial R_{11}}{\partial \rho} \Big|_{\mathcal{I}(\mathbf{u})} = \frac{3R_{11}}{\rho}, \\ \frac{\partial \Pi}{\partial \rho} \Big|_{s(\mathbf{u}), \mathcal{I}(\mathbf{u})} = \frac{\gamma p}{\rho} + \frac{3R_{11}}{\rho} = c^2(\mathbf{u}). \end{array} \right.$$

Nous avons déjà vu qu'en coordonnées lagrangiennes, les variables (τ, u, p, R_{11}) étaient découplées des variables (v, R_{12}) , elles-mêmes découplées de la variable R_{22} . E_n quantifie l'énergie associée aux variables isotropes (τ, p) et aux variables normales (u, R_{11}) , alors que E_t et \mathcal{W} quantifient les énergies associées aux autres variables (v, R_{12}, R_{22}) intrinsèquement tangentielles. Ces nouvelles lois de conservation sont données par le lemme suivant :

Lemme 3.6.3. *Les solutions régulières du modèle de fluide parfait (3.9) vérifient les lois de conservation suivantes :*

$$\partial_t(\rho \mathcal{I}(\mathbf{u})) + \partial_x(\rho \mathcal{I}(\mathbf{u})u) = 0, \quad (3.32)$$

$$\partial_t(\rho E_n(\mathbf{u})) + \partial_x([\rho E_n(\mathbf{u}) + p + R_{11}]u) = 0, \quad (3.33)$$

$$\partial_t(\rho E_t(\mathbf{u})) + \partial_x(\rho E_t(\mathbf{u})u + R_{12}v) = 0, \quad (3.34)$$

$$\partial_t(\rho \mathcal{W}(\mathbf{u})) + \partial_x(\rho \mathcal{W}(\mathbf{u})u) = 0. \quad (3.35)$$

Remarquons que l'équation sur la quantité $\rho \mathcal{W} = \frac{\rho \mathcal{D}}{\mathcal{I}}$, qui peut se déduire des équations sur $\rho \mathcal{D}$ et $\rho \mathcal{I}$, est en fait redondante. Cependant, dans la suite, nous préférons utiliser $\rho \mathcal{W}$ plutôt que $\rho \mathcal{D}$ car cette quantité se conserve même en présence du flux de masse turbulent dans les équations. Une interprétation physique de ces quantités n'est pas aisée. La quantité $\mathcal{I}(\mathbf{u})$ est associée au premier mineur du tenseur de Reynolds. Elle correspond à l'entropie, de coefficient d'adiabaticité 3, de la pression partielle R_{11} intervenant dans la pression totale $\Pi = p + R_{11}$ et présente dans l'équation de quantité de mouvement sur u et l'équation sur l'énergie totale E . La quantité $\mathcal{D}(\mathbf{u})$ est quant à elle associée au deuxième mineur. En anticipant sur la suite (formules (7.9) et (7.10) du chapitre 7), ces deux quantités sont de plus des invariants de Riemann pour les ondes 1 et 7. La quantité $\mathcal{W}(\mathbf{u})$ est une combinaison de ces deux mineurs. L'énergie normale $E_n(\mathbf{u})$ ne dépend que de (ρ, u, p, R_{11}) . C'est donc une fonction d'invariants de Riemann pour les ondes 2 et 6 (voir formules (3.20) et (3.21)). Elle quantifie l'énergie dans la direction normale aux ondes planes. L'énergie $E_t(\mathbf{u})$, qui quantifie une partie de l'énergie tangentielle, s'interprète comme étant la contribution énergétique permettant de compléter l'énergie totale selon :

$$\rho E = \rho E_n + \rho \frac{\mathcal{W}}{2} + \rho E_t.$$

Il existe donc au total cinq lois d'évolution supplémentaires indépendantes à savoir les équations sur $\rho s, \rho \mathcal{I}, \rho E_n, \rho E_t$ et $\rho \mathcal{W}$. Toute autre loi de conservation sera une combinaison (linéaire ou non) de ces cinq équations.

Démonstration. L'équation (3.32) est obtenue très facilement en combinant l'équation de continuité et l'équation gouvernant R_{11} . Rappelons que l'énergie totale E se décompose comme suit :

$$\rho E = \rho E_t + \rho E_n + \rho \frac{\mathcal{W}}{2}.$$

Ainsi, l'équation (3.33) se déduira immédiatement des équations sur l'énergie totale et des équations sur E_t et \mathcal{W} . Concentrons nous sur ces deux variables. Il est facile d'obtenir l'équation suivante à partir des équations sur R_{12} et R_{11} :

$$\partial_t \left(\frac{R_{12}^2}{2R_{11}} \right) + \partial_x \left(\frac{R_{12}^2}{2R_{11}} u \right) + R_{12} \partial_x v = 0. \quad (3.36)$$

En multipliant l'équation sur ρv par v et en utilisant l'équation de continuité, on a :

$$\partial_t \left(\rho \frac{v^2}{2} \right) + \partial_x \left(\rho \frac{v^2}{2} u \right) + v \partial_x R_{12} = 0.$$

En additionnant ces deux dernières équations, on obtient l'équation (3.34). Finalement, en soustrayant à l'équation en R_{22} , le double de l'équation (3.36), on obtient l'équation de conservation (3.35).

Il reste à prouver qu'il n'en existe pas d'autre. Pour cela anticipons sur la section suivante et supposons que nous pouvons prendre \mathcal{I} et \mathcal{D} comme nouvelles variables pour notre système, à la place de R_{11} et R_{22} . Prenons l'entropie physique s à la place de E , ce changement de variable classique est admissible. Intéressons nous alors à l'état $\mathbf{v} = (\tau, u, v, s, \mathcal{I}, \mathcal{D}, R_{12})$ en coordonnées lagrangiennes. Le système correspondant est le suivant :

$$\begin{cases} \partial_t \tau - \partial_m u = 0, \\ \partial_t u + \partial_m (p + R_{11}) = 0, \\ \partial_t v + \partial_m R_{12} = 0, \\ \partial_t s = 0, \\ \partial_t \mathcal{I} = 0, \\ \partial_t \mathcal{D} = 0, \\ \partial_t R_{12} + \rho R_{11} \partial_m v + 2\rho R_{12} \partial_m u = 0, \end{cases}$$

Pour trouver toutes les lois d'évolution supplémentaires au système (3.1), il est équivalent de chercher celles du système ci-dessus. Soit $(\mathcal{U}, \mathcal{F}) : \Omega_{\mathbf{v}} \rightarrow \mathbb{R}$, une nouvelle entropie mathématique et son flux associé. Trouver toutes les lois d'évolution supplémentaires revient à résoudre le système d'équations différentielles ordinaires suivants :

$${}^t \nabla_{\mathbf{u}} \mathcal{F}(\mathbf{v}) = {}^t \nabla_{\mathbf{u}} \mathcal{U}(\mathbf{v}) \mathcal{B}(\mathbf{v}),$$

où \mathcal{B} est la matrice équivalente à \mathcal{A} , mais pour le nouveau système ci-dessus en coordonnées lagrangiennes. La matrice \mathcal{B} étant très creuse, les calculs sont simplifiés. On trouve alors, comme seule possibilité, hormis des combinaisons non linéaires en \mathcal{I} , \mathcal{D} et s des combinaisons linéaires supplémentaires avec les quantités E_n , E_t . \square

3.6.2 Lois d'évolution supplémentaires en présence de viscosité

Nous allons réécrire chacune des six équations précédentes en présence des phénomènes visqueux. Rappelons que les équations sur l'entropie physique s et sur le mineur \mathcal{D} seront toujours valables pour le système multidimensionnel. En revanche, les équations exhibées pour $(\mathcal{I}, E_n, E_t, \mathcal{W})$ ne seront valables que dans une direction privilégiée, ici la direction x . La loi d'évolution sur le mineur \mathcal{D} sera traitée à part car elle est redondante avec celle sur \mathcal{W} .

Lemme 3.6.4. *Pour un fluide visqueux, on a les lois supplémentaires suivantes :*

$$\partial_t(\rho\mathcal{I}(\mathbf{u})) + \partial_x(\rho\mathcal{I}(\mathbf{u})u) = 0, \quad (3.37)$$

$$\partial_t(\rho\mathcal{W}(\mathbf{u})) + \partial_x(\rho\mathcal{W}(\mathbf{u})u) = 0, \quad (3.38)$$

$$\begin{aligned} \partial_t(\rho E_n(\mathbf{u})) + \partial_x([\rho E_n(\mathbf{u}) + p + R_{11}]u) &= \partial_x(\mu u \partial_x u) + \nu(\partial_x v)^2, \\ &+ \partial_x(\kappa \partial_x T), \end{aligned} \quad (3.39)$$

$$\partial_t(\rho E_t(\mathbf{u})) + \partial_x(\rho E_t(\mathbf{u})u + R_{12}v) = \partial_x(\nu v \partial_x v) - \nu(\partial_x v)^2 \quad (3.40)$$

$$\begin{aligned} \partial_t(\rho s(\mathbf{u})) + \partial_x(\rho s(\mathbf{u})u) &= \frac{1}{T}(\mu(\partial_x u)^2 + \nu(\partial_x v)^2) \\ &+ \kappa \left(\frac{\partial_x T}{T} \right)^2 + \partial_x \left(\frac{\kappa}{T} \partial_x T \right). \end{aligned} \quad (3.41)$$

Notons simplement que (3.37), (3.39) et (3.41) valent déjà dans le cas des équations de Navier-Stokes à deux pressions lorsqu'aucun mécanisme diffusif ne joue sur R_{11} (voir [7] et [14]). L'obtention de ces lois est simple et laissée au lecteur.

Notons qu'en conséquence des lois sur $\rho\mathcal{I}$ et $\rho\mathcal{W}$, la loi d'évolution sur la quantité $\rho\mathcal{D}$ reste une loi de conservation :

$$\partial_t(\rho\mathcal{D}(\mathbf{u})) + \partial_x(\rho\mathcal{D}(\mathbf{u})u) = 0, \quad (3.42)$$

Ce lemme nous propose deux candidats, $\rho\mathcal{I}$ et $\rho\mathcal{W}$, pour un changement de variables. Il est simple de vérifier que ce changement de variables est admissible sur $\Omega_{\mathbf{u}}$ et nous permet de ne conserver, dans un premier temps, qu'une seule variable non conservative, R_{12} par exemple. Il en va différemment des trois autres lois. Leur dépendance au carré en R_{12} indique qu'il n'existe pas de changement de variables permettant de mettre le système du premier ordre extrait sous forme totalement conservative, le produit non conservatif concernant exclusivement le tenseur visqueux. Cependant, dans le contexte particulier des ondes planes, une propriété de non changement de signe de R_{12} va rendre ces changements de variables admissibles. C'est l'objet du chapitre suivant.

Chapitre 4

Premiers enseignements de l'analyse onde progressive

Ce chapitre expose quelques premières conséquences importantes de l'analyse onde progressive sur la nature des mécanismes de compression susceptibles de prendre place au sein des profils de viscosité.

La motivation principale est de souligner que ces mécanismes de compression ne sont pas correctement décrits par le modèle retenu lorsque le nombre de Mach turbulent devient grand, et ce pour des valeurs modérées du nombre de Mach ($M > 2$). Une modélisation plus fine, tenant compte de la nature compressible de l'écoulement, devient alors nécessaire.

Dans un premier temps, nous construisons la forme réduite adimensionnée du système différentiel gouvernant les solutions onde progressive en ignorant toute modélisation supplémentaire, pour constater qu'il s'agit d'un système dynamique de grande taille composé de quatre équations fortement non linéairement couplées.

De manière à faire émerger la nécessité d'une correction, nous proposons dans un second temps d'adopter une hypothèse de modélisation consistant à négliger les mécanismes visqueux tangentiels pour ne garder que les mécanismes visqueux longitudinaux. Son intérêt est ici d'éclairer dans les faits les mécanismes de compression, et nous soulignons que cette hypothèse ne sera plus de mise dans toute la suite.

Nous obtenons, au titre de la simplification proposée, que les profils de viscosité deviennent surcompressifs lorsque le nombre de Mach turbulent est grand. Cette propriété de surcompression persistera dans les prochains chapitres, sans hypothèse simplificatrice, avec des conséquences certes différentes mais tout aussi négatives, sur cette fois l'unicité des solutions onde progressive.

Nous montrons qu'à l'origine de ce phénomène de surcompression, sont responsables des valeurs anormalement élevées de la composante longitudinale R_{11} du tenseur de Reynolds. Nous invoquons alors une correction de modélisation, négligée le plus souvent, et dite correction de Ristorcelli. Comme nous l'avons déjà souligné, cette correction n'existe qu'à cause de la nature compressible des écoulements étudiés en étant la conséquence des différences entre moyenne de Favre et moyenne de Reynolds. Nous indiquons en quoi cette correction diminue l'amplitude de R_{11} lors de la compression. Cette propriété suggère qualitativement la possibilité d'éviter toute surcompression, à la condition de choisir la correction de Ristorcelli suffisamment forte par l'intermé-

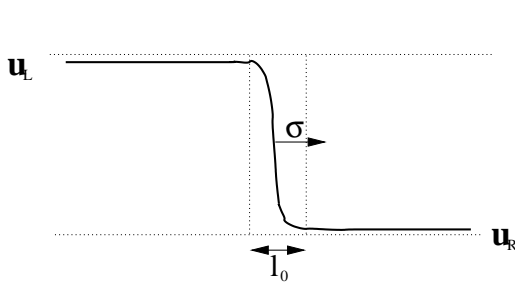


FIG. 4.1 – Solution onde progressive

Grandeurs moyennes :	ρ	ρ_L
	u	c_L
	v	c_L
	p	$\rho_L c_L^2$
	E	c_L^2
	t	$\frac{l_0}{c_L}$
	T	$\frac{c_L^2}{c_v}$
Grandeurs turbulentes :	R_{11}	$\rho_L a_L^2$
	R_{22}	$\rho_L a_L^2$
	R_{12}	$\rho_L a_L^2$

TAB. 4.1 – Adimensionnements choisis

naire de l'amplitude de l'échelle de temps associée. Les chapitres suivants montrent que le choix de cette amplitude joue un rôle central dans l'unicité des solutions onde progressive, mais également dans la stabilité structurelle, puis multidimensionnelle, des solutions chocs associées.

4.1 Adimensionnement du système d'EDP

Dans cette section, nous proposons un adimensionnement des équations adapté à l'analyse des solutions onde progressive. Rappelons qu'il s'agit d'étudier l'existence et l'unicité éventuelle d'états $\mathbf{u}_R \in \Omega_{\mathbf{u}}$, susceptibles d'être joints dans le futur par une solution régulière de la forme (2.21) (voir le chapitre 2) :

$$\begin{cases} \mathbf{u}^\epsilon(x, t) = \mathbf{w}^\epsilon(x - \sigma t) \equiv \mathbf{w}^\epsilon(\xi), \\ \lim_{\xi \rightarrow -\infty} \mathbf{w}^\epsilon(\xi) = \mathbf{u}_L, \quad \lim_{\xi \rightarrow +\infty} \mathbf{w}^\epsilon(\xi) = \mathbf{u}_R, \quad \lim_{\xi \rightarrow \pm\infty} d_\xi \mathbf{w}^\epsilon(\xi) = 0, \end{cases} \quad (4.1)$$

se propageant à une vitesse $\sigma \in \mathbb{R}$ prescrite et connectant dans le passé un état $\mathbf{u}_L \in \Omega_{\mathbf{u}}$ fixé.

Conformément à la remarque (3.2.2), nous privilégions dans toute l'étude des données $\mathbf{u}_L \in \Omega_{\mathbf{u}}^+$: *i.e.* telles que $R_{11}^L > 0$. L'analyse nous conduira alors à distinguer deux cas selon que R_{12}^L est nulle ou non. Nous décrivons dans le tableau (4.1) un adimensionnement construit sur la donnée \mathbf{u}_L et indépendant de la nullité éventuelle de R_{12}^L . Les vitesses $c_L = c(\mathbf{u}_L)$ et $a_L = a(\mathbf{u}_L)$ figurant dans ce tableau correspondent aux vitesses de propagation (3.11) rentrant dans la caractérisation hyperbolique du modèle EDP. L'échelle de longueur représentative du problème onde progressive étudié est représentée par l_0 . Il s'agit de l'épaisseur du profil reliant les états constants \mathbf{u}_L et \mathbf{u}_R . Soulignons que, physiquement, lorsque la turbulence de l'écoulement augmente, l'importance relative des effets visqueux diminue (autrement dit, le nombre de Reynolds augmente) et l'épaisseur du profil l_0 diminue. Nous noterons les grandeurs adimensionnées comme précédemment. Les équations deviennent :

$$\left\{ \begin{array}{l} \partial_t \rho + \partial_x(\rho u) = 0, \\ \partial_t(\rho u) + \partial_x(\rho u^2 + p + \beta^2 R_{11}) = \partial_x \left(\frac{1}{Re} \partial_x u \right), \\ \partial_t(\rho v) + \partial_x(\rho uv + \beta^2 R_{12}) = \partial_x \left(\frac{\nu}{\mu} \frac{1}{Re} \partial_x v \right), \\ \partial_t(\rho E) + \partial_x((\rho E + p + \beta^2 R_{11})u + \beta^2 R_{12}v) = \\ \quad \partial_x \frac{1}{Re} \left(u \partial_x u + \frac{\nu}{\mu} v \partial_x v \right) + \partial_x \left(\frac{1}{Re Pr} \partial_x T \right), \\ \partial_t R_{11} + \partial_x(R_{11}u) + 2R_{11}\partial_x u = 0, \\ \partial_t R_{22} + \partial_x(R_{22}u) + 2R_{12}\partial_x v = 0, \\ \partial_t R_{12} + \partial_x(R_{12}u) + R_{11}\partial_x v + R_{12}\partial_x u = 0, \end{array} \right. \quad (4.2)$$

où l'énergie trouve la définition suivante :

$$\rho E = \frac{p}{\gamma - 1} + \rho \frac{u^2}{2} + \rho \frac{v^2}{2} + \beta^2 \frac{R_{11}}{2} + \beta^2 \frac{R_{22}}{2}. \quad (4.3)$$

Les nombres de Reynolds et de Prandtl apparaissent classiquement :

$$\left\{ \begin{array}{l} Re = \frac{\rho L^0 c_l}{\mu}, \end{array} \right. \quad (4.4)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} Pr = \frac{\mu c_v}{\kappa} = \frac{1}{\gamma} Pr. \end{array} \right. \quad (4.5)$$

Dans (4.2), le nombre adimensionnel β est défini par :

$$\beta = \frac{a_L}{c_L} = \sqrt{\frac{R_{11}^L}{\gamma p_L + 3R_{11}^L}}. \quad (4.6)$$

Ce nombre correspond à un Mach turbulent directionnel. Notons que ce nombre appartient par construction à l'intervalle $[0, \frac{1}{\sqrt{3}}[$.

Associés à la vitesse de propagation σ de l'onde progressive, nous définissons deux nombres de Mach relatif :

$$\left\{ \begin{array}{l} M_c(\mathbf{u}) = \frac{u - \sigma}{c(\mathbf{u})}, \\ M_a(\mathbf{u}) = \frac{u - \sigma}{a(\mathbf{u})}. \end{array} \right. \quad (4.7)$$

Le premier est naturel puisque l'on étudie les ondes progressives associées au premier champ de vitesse caractéristique $u - c(\mathbf{u})$. Le second nombre de Mach $M_a(\mathbf{u})$ jouera un rôle central dans toute l'analyse à venir. Par souci de simplicité et tant qu'il n'y a pas de risque de confusion, nous notons dans la suite des développements :

$$M = M_c(\mathbf{u}_L), \quad M_a = M_a(\mathbf{u}_L). \quad (4.8)$$

Remarquons que les nombres β , M et M_a sont liés par la relation :

$$M = \beta M_a. \quad (4.9)$$

Remarque 4.1.1. Les définitions des nombres de Mach relatif M et de Mach turbulent β diffèrent de celles classiquement utilisées. En anticipant les développements à venir, nous rapportons que l'analyse onde progressive demandera à des fins d'existence de comparer $M = M(\mathbf{u}_L)$ à 1 et à des fins d'unicité de comparer $M_a(\mathbf{u}_R)$ à 1. En ce sens, les définitions proposées sont naturelles.

Pour être complet, comparons les aux définitions classiques. Ces dernières reposent sur la vitesse usuelle des ondes acoustiques pour un gaz parfait polytropique donnée par $c_{gp}^2 = \frac{\gamma p_L}{\rho_L}$ et considèrent :

$$\begin{cases} M_{\text{euler}} = \frac{u_L - \sigma}{c_{gp}^L}, \\ M_t = \frac{\sqrt{R_{11}^L \tau_L}}{c_{gp}^L}. \end{cases} \quad (4.10)$$

Nous avons donc la correspondance :

$$\begin{cases} M = \frac{M_{\text{euler}}}{\sqrt{3M_t^2 + 1}}, \\ M_a = \frac{M_{\text{euler}}}{M_t}, \\ \beta = \frac{M_t}{\sqrt{3M_t^2 + 1}}. \end{cases}$$

Ceci termine notre remarque.

Dans la suite de l'étude, il convient de distinguer le cas d'une donnée $\mathbf{u}_L \in \Omega_{\mathbf{u}}^+$ avec R_{12}^L nulle ou non nulle. Lorsque $R_{12}^L \neq 0$, il apparaît judicieux d'affiner l'adimensionnement proposé en adimensionnant l'inconnue R_{12} par R_{12}^L de sorte à faire intervenir le nouveau nombre adimensionnel α défini par :

$$\alpha = \frac{R_{12}^L}{R_{11}^L}. \quad (4.11)$$

Ce nombre sera appelé dans la suite coefficient d'anisotropie puisqu'il mesure l'intensité relative de la composante tangentielle R_{12} du tenseur de Reynolds relativement à la composante normale R_{11} . Concernant la composante R_{22} , nous conservons l'adimensionnement par $\rho_L a_L^2$ tel que proposé dans le tableau (4.1). Toutefois, nous signalons qu'il apparaîtra naturellement plus tard dans l'étude un dernier nombre adimensionnel ζ défini par :

$$\zeta = \sqrt{\frac{R_{22}^L}{R_{11}^L}}, \quad (4.12)$$

de sorte que la valeur adimensionnée du mineur $\mathcal{D}(\mathbf{u}_L)$ introduit en (3.27) s'écrit :

$$\mathcal{D}_L = \mathcal{D}(\mathbf{u}_L) = \zeta^2 - \alpha^2. \quad (4.13)$$

La condition de réalisabilité $\mathcal{D}_L \geq 0$ fixe donc une contrainte naturelle entre ζ^2 et α^2 . Nous concluons ce paragraphe en récapitulant dans le tableau (4.2) les nombres adimensionnés qui interviendront dans toute l'analyse qui suit :

$$\begin{aligned}
M_c(\mathbf{u}) &= \frac{u - \sigma}{c(\mathbf{u})} & M_a(\mathbf{u}) &= \frac{u - \sigma}{a(\mathbf{u})} \\
M &= M(\mathbf{u}_L) & M_a &= M_a(\mathbf{u}_L) \\
\beta &= \frac{a_L}{c_L} & \alpha &= \frac{R_{12}^L}{R_{11}^L} & \zeta &= \sqrt{\frac{R_{22}^L}{R_{11}^L}}
\end{aligned}$$

TAB. 4.2 – Nombres adimensionnés associés au problème onde progressive

4.2 Le système d'EDO

Nous formulons dans cette section le système dynamique gouvernant les solutions onde progressive de (4.2). À cette fin, nous caractérisons les invariants algébriques, au nombre de trois, permettant de réduire la taille du système considéré de 7 à 4 équations fortement couplées. De manière importante, nous introduisons un changement de variables faisant intervenir les invariants de Riemann des ondes 2 et 6 suivants (voir lemme (3.5.1)) :

$$v + \frac{R_{12}}{\sqrt{\rho R_{11}}}, \quad v - \frac{R_{12}}{\sqrt{\rho R_{11}}}. \quad (4.14)$$

La formulation du système dynamique ainsi obtenu jouera un rôle central dans toute l'analyse.

Nous soulignons que le système est proposé sous forme adimensionnée sans changer les notations décrivant les inconnues, à l'exception du volume spécifique τ dont nous désignerons par η la version adimensionnée pour des raisons historiques liées au déroulé de la thèse.

4.2.1 Réduction du système dynamique

Nous nous intéressons aux équations satisfaites par une solution onde progressive remise à l'échelle $\epsilon = \frac{1}{Re}$, *i.e.* de la forme $\mathbf{w}(Re\xi)$. De manière à exhiber rapidement les invariants du système dynamique, nous proposons de formuler les équations dans les variables admissibles $(\rho, \rho u, \rho v, \rho E, \rho \mathcal{I}, \rho \mathcal{D}, R_{12})$.

Par ailleurs, l'invariance galiléenne du système étudié permet de ramener l'étude au cas d'une vitesse de propagation σ nulle :

$$\sigma = 0. \quad (4.15)$$

En d'autres termes, nous nous plaçons dans le repère de l'onde progressive pour formuler les équations :

$$\left\{ \begin{array}{l} d_\xi(\rho u) = 0, \\ d_\xi(\rho u^2 + p + \beta^2 R_{11}) = d_\xi(d_\xi u), \\ d_\xi(\rho uv + \beta^2 R_{12}) = d_\xi\left(\frac{\nu}{\mu} d_\xi v\right), \\ d_\xi[(\rho E + p + \beta^2 R_{11})u + \beta^2 R_{12}v] = d_\xi\left(ud_\xi u + \frac{\nu}{\mu} v d_\xi v + \frac{1}{Pr} d_\xi T\right), \\ d_\xi(\rho \mathcal{I}u) = 0, \\ d_\xi(\rho \mathcal{D}u) = 0, \\ d_\xi(R_{12}u) + R_{11}d_\xi v + R_{12}d_\xi u = 0. \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} (4.16) \\ (4.17) \\ (4.18) \\ (4.19) \\ (4.20) \\ (4.21) \\ (4.22) \end{array}$$

Notons que dans l'instant nous utilisons la forme adimensionnée des équations (4.2) ne particularisant pas la non nullité éventuelle de R_{12}^L dans la donnée $\mathbf{u}_L \in \Omega_{\mathbf{u}}^+$. L'équation (4.16) implique que le flux de masse adimensionné $m = \rho u$ est un invariant algébrique du système. On peut par exemple fixer sa valeur par référence à l'état \mathbf{u}_L en $-\infty$. Dans ce cas et puisque $\sigma = 0$, il se confond avec le Mach relatif exprimé sur \mathbf{u}_L , soit sous forme adimensionnée :

$$M = m = \frac{u_L}{c_L}. \quad (4.23)$$

Remarque 4.2.1. L'expression (4.23) laisse sous-entendre que M est implicitement fixé par le choix de la donnée \mathbf{u}_L . Toutefois, (4.23) résulte de l'hypothèse $\sigma = 0$, autorisée par l'invariance galiléenne du modèle. Nous avons privilégié cette hypothèse car elle est agréable à la suite de l'exposé.

En d'autres termes, M pourra varier dans toute la suite en modifiant uniquement la définition de la vitesse $u_L(\sigma)$ dans un état de référence \mathbf{u}_L^{ref} fixé. Les nombres réduits α et β introduits dans le tableau (4.2) ne s'en trouvent pas affectés. Nous pouvons donc raisonner à (α, β) fixés et à M variable.

L'invariant (4.23) ne peut pas être nul pour une onde de choc puisque sinon la vitesse $u(\xi)$ sera identiquement nulle pour tout $\xi \in \mathbb{R}$. Il est alors facile de vérifier que l'onde recherchée est d'amplitude nulle.

En invoquant de nouveau l'invariance galiléenne du modèle, il suffit de restreindre l'étude aux ondes progressives associées au premier champ caractéristique pour lequel il est classique que $m > 0$ (voir [62] par exemple). Il est connu [62] que les ondes progressives relevant du dernier champ caractéristique (*i.e.* avec $m < 0$) se déduisent des précédentes en échangeant le rôle des états \mathbf{u}_L et \mathbf{u}_R tout en renversant le signe

des vitesses. On peut alors réécrire le système précédent grâce à l'invariant (4.23) :

$$\left\{ \begin{array}{l} d_\xi M = 0, \end{array} \right. \quad (4.24)$$

$$Md_\xi u + d_\xi(p + \beta^2 R_{11}) = d_\xi(d_\xi u), \quad (4.25)$$

$$Md_\xi v + d_\xi(\beta^2 R_{12}) = d_\xi\left(\frac{\nu}{\mu}d_\xi v\right), \quad (4.26)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} Md_\xi E + d_\xi[(p + \beta^2 R_{11})u + \beta^2 R_{12}v] = \\ d_\xi\left(ud_\xi u + \frac{\nu}{\mu}vd_\xi v + \frac{1}{Pr}d_\xi T\right), \end{array} \right. \quad (4.27)$$

$$Md_\xi \mathcal{I} = 0, \quad (4.28)$$

$$Md_\xi \mathcal{D} = 0, \quad (4.29)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} Md_\xi(R_{12}\eta) + R_{11}d_\xi v + R_{12}d_\xi u = 0. \end{array} \right. \quad (4.30)$$

La non nullité de M donne immédiatement l'existence de deux nouveaux invariants algébriques :

$$\mathcal{I}(\xi) = \mathcal{I}_L, \quad \mathcal{D}(\xi) = \mathcal{D}_L, \quad \xi \in \mathbb{R}. \quad (4.31)$$

L'écriture proposée conduit au résultat très important suivant :

Lemme 4.2.2.

- Supposons $R_{12}^L = 0$, alors une solution onde progressive de (4.24)-(4.30) est telle que $R_{12}(\xi) = 0$ et $v(\xi) = v_L$ pour tout $\xi \in \mathbb{R}$.
- Supposons $R_{12}^L \neq 0$, alors $R_{12}(\xi)$ garde le même signe que R_{12}^L pour tout temps ξ fini.

Démonstration. Il est aisé de vérifier que les fonctions $R_{12}(\xi) = 0, v(\xi) = v_L$ pour $\xi \in \mathbb{R}$ sont solutions des équations (4.26) et (4.30) et donc du système dynamique. Dès lors et dans un premier temps, en privilégiant un état \mathbf{u}_L avec $R_{12}^L = 0$, une solution onde progressive connectant dans le passé \mathbf{u}_L et vérifiant $R_{12}(\xi) = 0$ et $v(\xi) = v_L$ pour tout $\xi \in \mathbb{R}$ convient.

Dans un second temps, nous déduisons que si R_{12}^L est choisie non nulle, alors $R_{12}(\xi)$ garde nécessairement le même signe que R_{12}^L pour tout temps ξ fini dans une éventuelle solution onde progressive connectant l'état \mathbf{u}_L concerné. Il s'agit d'une conséquence d'un résultat classique des systèmes dynamiques autonomes (voir [69]) exprimant que deux solutions distinctes ne peuvent pas s'intersecter en temps fini. Puisque l'hyperplan $\{R_{12} = 0\}$ dans l'espace des états permet de définir toute une famille de solutions telle $R_{12}(\xi) = 0$ pour tout $\xi \in \mathbb{R}$, une onde progressive issue d'un état \mathbf{u}_L avec R_{12}^L non nulle, ne peut pas voir sa composante R_{12} s'annuler en un temps fini ξ_0 . Ceci conclut la preuve. \square

De plus, l'hypothèse $R_{12}^L = 0$ conduit à la propriété $R_{12}(\xi) = 0$, et donc à la constance de la vitesse tangentielle $v(\xi)$ à la traversée de l'onde progressive à l'instar des équations de Navier-Stokes habituelles. Dans toute la suite nous considérons des données $\mathbf{u}_L \in \Omega_{\mathbf{u}}^+$ avec $R_{12}^L \neq 0$ conduisant à des phénomènes tangentiels non triviaux. Sans restriction, nous allons supposer $R_{12}^L > 0$ de sorte que $R_{12}(\xi)$ reste positif pour tout temps fini. En effet, le cas $R_{12}^L < 0$ et donc $R_{12}(\xi) < 0$ se déduit du précédent en échangeant les signes de R_{12} et de v dans le système d'EDO (4.24)-(4.30). Pour le constater, il suffit de multiplier (4.26) et (4.30) par -1 en remarquant que (4.27)

reste inchangée.

De manière à décrire précisément la compétition entre les phénomènes tangentiels et normaux dans l'hypothèse $R_{12}^L \neq 0$, nous suggérons conformément au chapitre précédent d'adimensionner R_{12} par R_{12}^L de sorte à faire apparaître le coefficient d'anisotropie $\alpha = \frac{R_{12}^L}{R_{11}^L}$. Puisque $R_{12}^L > 0$, ce nombre sera positif dans toute la suite, sauf mention explicite du contraire.

Le système d'EDO (4.24)-(4.30) prend la forme suivante :

$$\left\{ \begin{array}{l} d_\xi M = 0, \\ Md_\xi u + d_\xi(p + \beta^2 R_{11}) = d_\xi(d_\xi u), \\ Md_\xi v + d_\xi(\alpha\beta^2 R_{12}) = d_\xi\left(\frac{\nu}{\mu}d_\xi v\right), \\ Md_\xi E + d_\xi[(p + \beta^2 R_{11})u + \alpha\beta^2 R_{12}v] = \\ \qquad \qquad \qquad d_\xi\left(ud_\xi u + \frac{\nu}{\mu}vd_\xi v + \frac{1}{Pr}d_\xi T\right), \\ Md_\xi \mathcal{I} = 0, \\ Md_\xi \mathcal{D} = 0, \\ Md_\xi(R_{12}\eta) + \frac{1}{\alpha}R_{11}d_\xi v + MR_{12}d_\xi \eta = 0. \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} (4.32) \\ (4.33) \\ (4.34) \\ (4.35) \\ (4.36) \\ (4.37) \\ (4.38) \end{array}$$

Notons que les valeurs adimensionnées des invariants algébriques $\mathcal{I}(\xi)$ et $\mathcal{D}(\xi)$ introduits dans (4.31) sont respectivement :

$$\mathcal{I}(\xi) = \mathcal{I}_L = 1, \quad \mathcal{D}(\xi) = \mathcal{D}_L = \zeta^2 - \alpha^2, \quad (4.39)$$

avec les notations données dans le tableau (4.2). Ces deux nouveaux invariants nous permettent de réduire le système dynamique à 4 équations tout en simplifiant l'équation portant sur l'énergie totale en vertu de la proposition suivante :

Proposition 4.2.3. *Le système non linéaire d'EDO gouvernant les solutions ondes progressives de (4.2) admet les trois invariants algébriques suivants :*

$$\left\{ \begin{array}{l} M(\xi) = (\rho u)(\xi) = \frac{u_L}{c_L}, \\ \mathcal{I}(\xi) = (R_{11}\eta^3)(\xi) = 1, \\ \mathcal{D}(\xi) = ((R_{11}R_{22} - \alpha^2 R_{12}^2)\eta^4)(\xi) = \zeta^2 - \alpha^2, \end{array} \right.$$

si bien que le système se réduit à :

$$\left\{ \begin{array}{l} Md_\xi \eta = M^2[\eta] + [p + \beta^2 R_{11}], \\ \frac{1}{Pr}d_\xi T = M[H(\eta, T, v, R_{12})], \\ \frac{\nu}{\mu}d_\xi v = M[v] + \alpha\beta^2[R_{12}], \\ Md_\xi(R_{12}\eta) + \frac{1}{\alpha}R_{11}d_\xi v + MR_{12}d_\xi \eta = 0, \end{array} \right. \quad (4.40)$$

avec la notation $[X] = X(\xi) - X_L$ et où l'on a les définitions suivantes :

$$\begin{cases} H(\eta, T, v, R_{12}) = \frac{p\eta}{\gamma - 1} + h(\eta) - \frac{(v - \bar{v}_L)^2}{2} + \frac{\alpha\beta^2}{M}(v - \bar{v}_L) + \frac{\alpha^2\beta^2}{2}R_{12}^2\eta^4, \\ h(\eta) = \frac{\beta^2}{2}(\eta^{-2} - 1) - M^2\frac{(\eta - 1)^2}{2} + \frac{1 + (\gamma - 3)\beta^2}{\gamma}(\eta - 1), \\ \bar{v}_L = \frac{v_L}{c_L}. \end{cases} \quad (4.41)$$

Remarquons donc que H se compose de l'énergie interne en gaz parfait polytropique, d'une partie longitudinale $h(\eta)$ et d'une partie tangentielle faisant intervenir R_{12} et v . Un changement de variables permet de donner une forme qui sera très utile par la suite. C'est l'objet de la proposition suivante :

Proposition 4.2.4. *En définissant le changement de variables admissible suivant :*

$$(v, R_{12}) \longrightarrow (Y_+, Y_-) : \begin{cases} Y_+ = X + \beta R_{12}\eta^2, \\ Y_- = X - \beta R_{12}\eta^2, \end{cases} \quad (4.42)$$

avec $X = \frac{1}{\alpha}(v - \bar{v}_L) - \frac{\beta^2}{M}$, alors le système d'EDO gouvernant les solutions ondes progressives s'écrit en variables (η, T, Y_+, Y_-) :

$$\begin{cases} Md_\xi\eta = (\gamma - 1)\frac{T}{\eta} + M^2(\eta - 1) + \beta^2\eta^{-3} - \frac{1 + (\gamma - 3)\beta^2}{\gamma\eta}, \\ \frac{1}{Pr}d_\xi T = M[H(\eta, T, (Y_- - Y_+))], \\ \frac{\nu M}{\mu}d_\xi Y_+ = \frac{M\eta^2 - \beta}{2\eta^4} ((M\eta^2 + \beta)Y_+ + (M\eta^2 - \beta)Y_-), \\ \frac{\nu M}{\mu}d_\xi Y_- = \frac{M\eta^2 + \beta}{2\eta^4} ((M\eta^2 + \beta)Y_+ + (M\eta^2 - \beta)Y_-). \end{cases} \quad (4.43)$$

Ici, nous avons :

$$H(\eta, T, (Y_- - Y_+)) = T + h(\eta) - \frac{\alpha^2}{2}Y_+Y_-,$$

avec $h(\eta)$ définie en (4.41).

Nous donnerons les démonstrations de ces deux propositions à la fin de ce chapitre. Remarquons que les nouvelles variables Y_+ et Y_- ont une signification précise. En écriture dimensionnée, ces variables sont :

$$\begin{cases} Y_+ = v + \frac{R_{12}}{\sqrt{\rho R_{11}}} - \left(v_L + \frac{R_{12}^L}{m} \right), \\ Y_- = v - \frac{R_{12}}{\sqrt{\rho R_{11}}} - \left(v_L + \frac{R_{12}^L}{m} \right), \end{cases}$$

qui désignent deux invariants de Riemann respectivement pour la 2-onde et la 6-onde linéairement dégénérées. De plus, on observe que l'importance du changement de variables proposé repose aussi sur le fait que :

$$M\eta^2 \pm \beta = \beta\left(\frac{M\eta^2}{\beta} \pm 1\right) = \beta(M_a(\xi) \pm 1), \quad (4.44)$$

où $M_a(\xi) = \frac{u(\xi)}{a(\xi)}$ désigne le nombre de Mach relatif construit sur la deuxième onde caractéristique tel que défini en (4.7). L'expression précédente fait apparaître la comparaison relativement à 1 de ce nombre de Mach. Une telle comparaison jouera un rôle central dans la suite.

Nous concluons cette section en établissant les deux propositions précédentes.

Démonstration. de la proposition 4.2.3. Les équations sur η , v et R_{12} s'obtiennent en intégrant (4.33) et (4.34) et en remarquant que l'invariant M implique l'égalité :

$$d_\xi u = M d_\xi \eta.$$

Il nous reste à exhiber la forme particulière que prend l'équation sur l'énergie.

L'énergie totale adimensionnée s'écrit :

$$E = \frac{p\eta}{\gamma - 1} + \frac{u^2}{2} + \frac{v^2}{2} + \beta^2 \frac{R_{11}\eta}{2} + \beta^2 \frac{R_{22}\eta}{2}.$$

Utilisons les valeurs des invariants \mathcal{I} et \mathcal{D} données en (4.39) pour y éliminer R_{11} et R_{22} :

$$\begin{cases} R_{11} = \eta^{-3}, \\ R_{22} = \alpha D_L \eta^{-1} + \alpha^2 R_{12}^2 \eta^3. \end{cases}$$

Si bien que l'énergie totale devient :

$$E = \frac{p\eta}{\gamma - 1} + \frac{u^2}{2} + \frac{v^2}{2} + \frac{\beta^2}{2} \eta^{-2} + \frac{\alpha^2 \beta^2}{2} R_{12}^2 \eta^4 + \frac{\alpha \beta^2 D_L}{2}.$$

Ceci nous permet d'obtenir une expression pour la dérivée de l'énergie totale par rapport à ξ :

$$M d_\xi E = M u d_\xi u + M v d_\xi v + M d_\xi \chi \tag{4.45}$$

avec :

$$\chi = \frac{p\eta}{\gamma - 1} + \frac{\beta^2}{2} (\eta^{-2} - 1) + \frac{\alpha^2 \beta^2}{2} R_{12}^2 \eta^4.$$

Multiplions l'équation (4.33) gouvernant u par u et l'équation (4.34) gouvernant v par v :

$$\begin{cases} M u d_\xi u = d_\xi (u d_\xi u) - (d_\xi u)^2 - u d_\xi (p + \beta^2 R_{11}), \end{cases} \tag{4.46}$$

$$\begin{cases} M v d_\xi v = d_\xi \left(\frac{\nu}{\mu} v d_\xi v \right) - \frac{\nu}{\mu} (d_\xi v)^2 - \alpha \beta^2 v d_\xi R_{12}. \end{cases} \tag{4.47}$$

Remplaçons les expressions (4.46),(4.47) et (4.45) dans l'équation (4.35) gouvernant l'énergie totale :

$$M d_\xi \chi + K_1 d_\xi u + K_2 d_\xi v = d_\xi \left(\frac{1}{P_r} d_\xi T \right). \tag{4.48}$$

avec :

$$\begin{cases} K_1 = p + \beta^2 R_{11} - d_\xi u, \\ K_2 = \alpha \beta^2 R_{12} - \frac{\nu}{\mu} d_\xi v. \end{cases}$$

En intégrant les équations (4.33) et (4.34) de $-\infty$ à ξ et en remarquant que $d_\xi u = Md_\xi \eta$ et que pour une onde progressive $(d_\xi X)_L = (d_\xi X)(-\infty) = 0$, K_1 et K_2 se réécrivent :

$$\begin{cases} K_1 = -M^2(\eta - 1) + \frac{1 + (\gamma - 3)\beta^2}{\gamma}, \\ K_2 = \alpha\beta^2 - M(v - \bar{v}_L). \end{cases}$$

On a alors, par une simple intégration :

$$\begin{cases} K_1 d_\xi u = Md_\xi \left(\frac{1 + (\gamma - 3)\beta^2}{\gamma}(\eta - 1) - M^2 \frac{(\eta - 1)^2}{2} \right), \\ K_2 d_\xi v = Md_\xi \left(\frac{\alpha\beta^2}{M}(v - \bar{v}_L) - \frac{(v - \bar{v}_L)^2}{2} \right). \end{cases}$$

En remplaçant dans (4.48), le résultat escompté s'en suit :

$$Md_\xi H = Md_\xi \chi + K_1 d_\xi u + K_2 d_\xi v = d_\xi \left(\frac{1}{Pr} d_\xi T \right).$$

avec :

$$H = \frac{p\eta}{\gamma - 1} + h(\eta) - \frac{(v - \bar{v}_L)^2}{2} + \frac{\alpha\beta^2}{M}(v - \bar{v}_L) + \frac{\alpha^2\beta^2}{2} R_{12}^2 \eta^4,$$

et :

$$h(\eta) = \frac{\beta^2}{2}(\eta^{-2} - 1) - M^2 \frac{(\eta - 1)^2}{2} + \frac{1 + (\gamma - 3)\beta^2}{\gamma}(\eta - 1).$$

□

Démonstration. de la proposition 4.2.4. La démonstration est constituée de trois points : l'obtention des équations en (Y_+, Y_-) , la réécriture de la fonction H grâce à ces nouvelles variables puis l'obtention du second membre de l'équation en η .

– Équations en (Y_+, Y_-) :

Intégrons dans un premier temps l'équation (4.34) sur v , après réécriture, on obtient :

$$\alpha M \left(\frac{1}{\alpha}(v - \bar{v}_L) - \frac{\beta^2}{M} \right) + \alpha\beta^2 R_{12} = \frac{\nu}{\mu} d_\xi v.$$

Cela suggère de poser :

$$\begin{cases} X = \frac{1}{\alpha}(v - \bar{v}_L) - \frac{\beta^2}{M}, \\ d_\xi X = \frac{1}{\alpha} d_\xi v. \end{cases}$$

Après simplification par α et multiplication par M , cette équation devient :

$$\frac{\nu M}{\mu} d_\xi X = M^2 X + M\beta^2 R_{12}. \quad (4.49)$$

Intéressons nous dans un second temps à l'équation (4.38) sur R_{12} et multiplions-la par η en rappelant que $R_{11} = \eta^{-3}$:

$$d_\xi (MR_{12}\eta^2) + \frac{1}{\alpha}\eta^{-2} d_\xi v = 0. \quad (4.50)$$

De manière à y introduire l'équation précédente, multiplions la par $\beta \frac{\nu}{\mu}$:

$$\frac{\nu M}{\mu} d_{\xi}(\beta R_{12} \eta^2) = -\beta \eta^{-2} (MX + \beta R_{12}). \quad (4.51)$$

Remplaçons alors R_{12} par $R_{12} \eta^2 \eta^{-2}$ dans les deux équations (4.49) et (4.51) de manière à les symétriser davantage, on obtient finalement :

$$\begin{cases} \frac{\nu M}{\mu} d_{\xi} X = M^2 X + M \beta \eta^{-2} (\beta R_{12} \eta^2), \\ \frac{\nu M}{\mu} d_{\xi} (\beta R_{12} \eta^2) = -\beta \eta^{-2} (MX + \beta \eta^{-2} (\beta R_{12} \eta^2)). \end{cases}$$

Ce système suggère de poser :

$$\begin{cases} Y_+ = X + \beta R_{12} \eta^2, \\ Y_- = X - \beta R_{12} \eta^2, \end{cases}$$

Soit :

$$\begin{cases} X = \frac{1}{2} (Y_+ + Y_-), \\ \beta R_{12} \eta^2 = \frac{1}{2} (Y_+ - Y_-). \end{cases} \quad (4.52)$$

$$(4.53)$$

En substituant ces expressions dans le dernier système obtenu, on déduit le résultat escompté.

– Réécriture de H

Effectuons le calcul suivant :

$$-\frac{\alpha^2}{2} (Y_+ Y_-) = -\frac{(v - \bar{v}_L)^2}{2} + \frac{\alpha \beta^2}{M} (v - \bar{v}_L) + \frac{\alpha^2 \beta^2}{2} R_{12}^2 \eta^4 - \frac{\alpha^2 \beta^4}{2M^2}.$$

On reconnaît alors la partie anisotrope de H au dernier terme près, une constante qui ne joue aucun rôle puisque H n'intervient dans le système que par son saut. Moyennant une redéfinition de H , on peut donc écrire :

$$H(\eta, T, (Y_+ Y_-)) = \frac{p\eta}{\gamma - 1} + h(\eta) - \frac{\alpha^2}{2} Y_+ Y_- = T + h(\eta) - \frac{\alpha^2}{2} Y_+ Y_-.$$

– Équation sur η

Intégrons à nouveau l'équation (4.33) sur u et multiplions la par η en se souvenant que $d_{\xi} u = M d_{\xi} \eta$ et $R_{11} = \eta^{-3}$:

$$M \eta d_{\xi} \eta = p \eta + M^2 \eta (\eta - 1) + \beta^2 \eta^{-2} - \frac{1 + (\gamma - 3) \beta^2}{\gamma}, \quad (4.54)$$

ce qui, en divisant par η les deux membres de cette équation, donne le résultat. \square

4.3 Quelques implications de l'analyse onde progressive

Nous mettons en évidence dans cette section quelques résultats de l'analyse onde progressive, à venir dans les chapitres suivants ou obtenus ici au titre d'une hypothèse simplificatrice.

Le premier résultat concerne la dépendance relativement à la forme du tenseur dissipatif de l'état de sortie $\mathbf{u}_R(\mathbf{u}_L, \sigma)$ d'une solution onde progressive issue d'un état \mathbf{u}_L fixé et se propageant à une vitesse σ donnée. Nous l'exhibons ici relativement au rapport des viscosités $\frac{\mu}{2\nu}$. Nous indiquons que cette dépendance est faible lorsque $\gamma = 1.4$ pour des valeurs pratiques du nombre de Mach turbulent β et qu'elle va en s'amplifiant avec β . Soulignons toutefois que toute étude numérique par une méthode de volumes finis montrera une sensibilité plus franche à la dissipation numérique artificielle (voir l'article de congrès en annexe B).

Le second paragraphe constitue la véritable motivation de cette section. Il indique sous une hypothèse simplificatrice que le modèle RSM retenu n'est pas satisfaisant dans la description des solutions onde progressive dès que le nombre de Mach turbulent β est suffisamment grand. Lorsque $\gamma = 1.4$, les valeurs incriminées correspondent peu à la pratique, mais pour $\gamma = 1.2$, cas d'un gaz chaud, ces valeurs sont réalistes. Nous soulignons que le modèle prédit une trop grande augmentation de la tension de Reynolds R_{11} à la traversée d'un profil de compression. Ces valeurs anormalement élevées peuvent se traduire par un phénomène de surcompression dont nous rappelons la définition. Nous soulignons que ce phénomène de surcompression, aux conséquences négatives sur l'existence et l'unicité des solutions onde progressive, persistera sans hypothèse simplificatrice.

Nous invoquons alors une correction du modèle RSM, négligée le plus souvent, dite correction de Ristorcelli. Nous indiquons en quoi cette correction diminue la composante R_{11} lors d'une compression. Cette propriété suggère qualitativement la possibilité d'éviter toute surcompression. Les chapitres suivants montreront que cette correction joue un rôle central dans l'existence et l'unicité des solutions onde progressive mais également dans la stabilité structurelle et multidimensionnelle des solutions chocs associées.

4.3.1 Dépendance au tenseur diffusif

Anticipons sur la résolution numérique des ondes progressives qui sera présentée dans le chapitre 6 consacré au cadre anisotherme. L'ensemble des figures suivantes ((4.2), a, b et c) obtenues pour $\gamma = 1.4$, permet d'illustrer la dépendance relativement au tenseur diffusif de l'état de sortie $\mathbf{u}_R(\mathbf{u}_L, \sigma)$ dans une solution onde progressive issue d'un état \mathbf{u}_L fixé et se propageant à une vitesse σ donnée. Nous avons privilégié ici la composante R_{12} de l'état de sortie \mathbf{u}_R qui, tout comme la composante v , s'est trouvée être la plus sensible à la dépendance rapportée.

Physiquement le rapport prend la valeur $\frac{\mu}{2\nu} = \frac{2}{3}$ et la composante R_{12}^R est représentée en trait plein dans ce cas. Diminuer, respectivement augmenter artificiellement la valeur $\frac{\mu}{2\nu}$ (figurée en pointillés, respectivement en tirets), permet d'étudier la dépendance de R_{12}^R relativement à ce rapport. On constate que cette dépendance est d'autant plus importante que le nombre de Mach turbulent β est élevé. En effet, si pour $\beta = 0.1$, la dépendance est de l'ordre du pourcent, celle-ci augmente nettement

et passe à environ 10% pour $\beta = 0.25$, jusqu'à devenir de l'ordre de 50% lorsque β est proche de sa valeur limite $\frac{1}{\sqrt{3}}$.

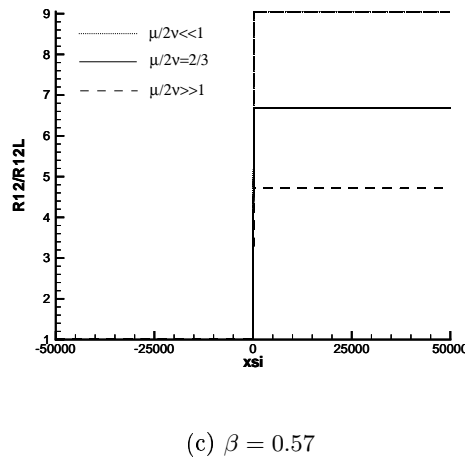
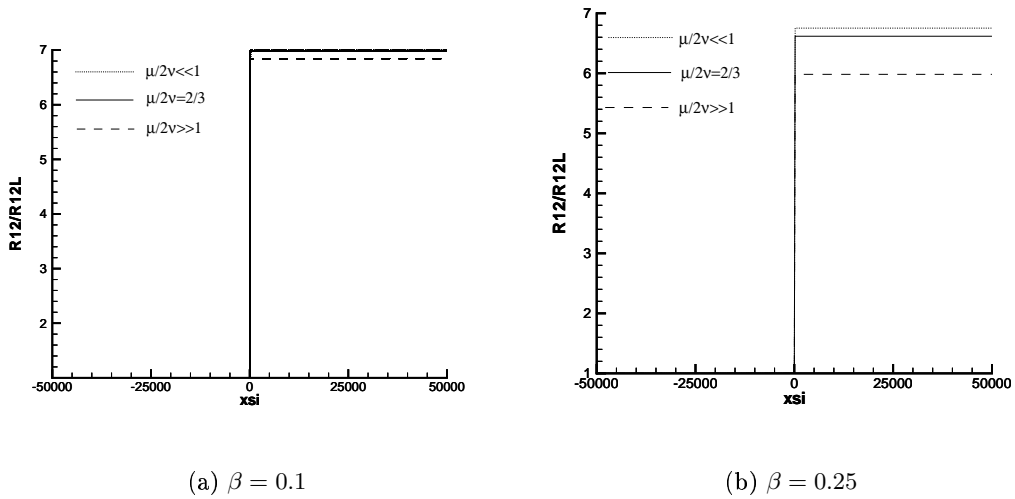


FIG. 4.2 – Dépendance de la composante R_{12} au tenseur diffusif

$$\cdots \frac{\mu}{2\nu} \ll 1, \quad \text{—} \frac{\mu}{2\nu} = \frac{2}{3}, \quad \text{---} \frac{\mu}{2\nu} \gg 1.$$

Nous retiendrons donc que s'il existe une influence du rapport $\frac{\mu}{2\nu}$ sur l'état de sortie $\mathbf{u}_R(\mathbf{u}_L, \sigma)$, celle-ci reste faible pour des valeurs pratiques du Mach turbulent β dans le cas $\gamma = 1.4$. Néanmoins, il faut se garder de toute conclusion hâtive sur l'approximation numérique des solutions chocs déduites de l'analyse onde progressive. L'article de congrès donné en annexe B propose une méthode numérique et montrera que la dissipation artificielle agissant sur toutes les équations entachera d'erreurs appréciables la capture de R_{12} et de v .

4.3.2 Un phénomène de surcompression dans un cas limite

Conditions de Lax : phénomènes de compression et de surcompression

Nous rappelons quelques définitions classiques [61] basées sur la comparaison de la vitesse de propagation σ d'une onde compressive aux valeurs propres exprimées respectivement sur l'état d'entrée \mathbf{u}_L et de sortie \mathbf{u}_R . Ces définitions sont motivées par l'étude des propriétés de stabilité de la solution choc $\mathbf{u}_L + (\mathbf{u}_R - \mathbf{u}_L)H(x - \sigma t)$ (voir chapitre 8). Elles ne sont données ici que dans le cas du premier champ. Tout d'abord, un état \mathbf{u}_L étant fixé (voir remarque (4.2.1)), nous rappelons [61] qu'une solution onde progressive associée au premier champ n'existe que si la vitesse de propagation σ est prescrite sous la condition suivante :

$$\lambda_1(\mathbf{u}_L) = u_L - c(\mathbf{u}_L) > \sigma. \quad (4.55)$$

Les propriétés de vraie non linéarité du champ considéré impliquent que l'existence d'un éventuel état de sortie \mathbf{u}_R entraîne :

$$\lambda_1(\mathbf{u}_R) = u_R - c(\mathbf{u}_R) < \sigma. \quad (4.56)$$

Notons que les inégalités (4.55) et (4.56) expriment que les nombres de Mach relatif $M(\mathbf{u}_L)$ et $M(\mathbf{u}_R)$ doivent être respectivement tels que :

$$M(\mathbf{u}_L) > 1, \quad M(\mathbf{u}_R) < 1.$$

L'origine mathématique de ces conditions familières sera donnée dans le prochain chapitre à l'occasion de l'exposé du théorème de la variété centrale.

En rappelant que $a(\mathbf{u}_L) < c(\mathbf{u}_L)$, la condition (4.55) entraîne :

$$\lambda_2(\mathbf{u}_L) = u_L - a(\mathbf{u}_L) > \lambda_1(\mathbf{u}_L) = u_L - c(\mathbf{u}_L) > \sigma. \quad (4.57)$$

Le nombre de Mach relatif $M_a(\mathbf{u}_L)$ doit donc vérifier :

$$M_a(\mathbf{u}_L) > 1. \quad (4.58)$$

Concernant l'état de sortie \mathbf{u}_R , deux cas de figure peuvent se présenter, soit $M_a(\mathbf{u}_R) > 1$, soit $M_a(\mathbf{u}_R) < 1$. Le premier cas correspond aux conditions d'entrelacement de Lax :

$$\lambda_2(\mathbf{u}_L) > \lambda_1(\mathbf{u}_L) > \sigma, \quad \lambda_1(\mathbf{u}_R) < \sigma < \lambda_2(\mathbf{u}_R). \quad (4.59)$$

Sous ces conditions, le profil de choc est dit **compressif**.

Dans le second cas se traduisant par :

$$\lambda_2(\mathbf{u}_L) > \lambda_1(\mathbf{u}_L) > \sigma, \quad \lambda_1(\mathbf{u}_R) < \lambda_2(\mathbf{u}_R) \leq \sigma, \quad (4.60)$$

le profil de choc est dit **surcompressif**. La figure (4.3) illustre alors le fait que deux familles de caractéristiques différentes s'intersectent dans le choc.

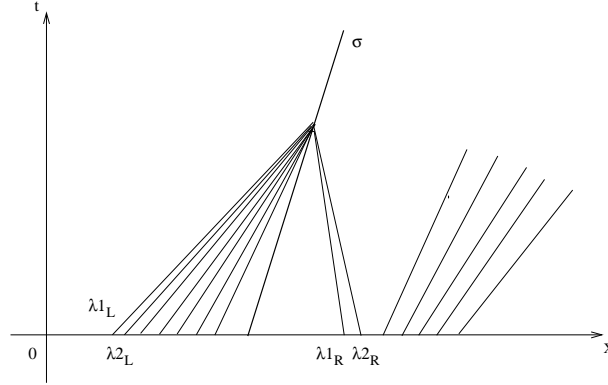


FIG. 4.3 – Comportement typique des caractéristiques lors du phénomène de surcompression

Nous verrons au chapitre (8) que les conditions de Lax (4.59) sont nécessaires à la stabilité structurelle du choc monodimensionnel $\mathbf{u}_L + (\mathbf{u}_R - \mathbf{u}_L)H(x - \sigma t)$. En d'autres termes, un choc surcompressif ne sera pas structurellement stable.

Phénomène de surcompression dans le cas limite $\frac{\nu}{\mu} = 0$

Notre objectif est d'éclairer la raison pour laquelle les profils de choc sont susceptibles d'être surcompressifs dès que le nombre de Mach turbulent β est suffisamment grand, le nombre de Mach relatif M étant supérieur à deux. Cette raison tient à la trop forte augmentation de la tension de Reynolds R_{11} à la traversée des profils décrits par le modèle RSM actuellement retenu.

Afin de mettre en évidence cette raison, nous adoptons l'hypothèse non physique $\frac{\nu}{\mu} = 0$. Soulignons que le phénomène de surcompression sera de nouveau exhibé pour la même raison dans le cas physique $\frac{\mu}{2\nu} = \frac{2}{3}$ dans les chapitres suivants mais au terme d'une analyse considérablement plus difficile.

L'hypothèse $\frac{\nu}{\mu} = 0$ conduit à une intégration explicite de $Y_+(\xi)$ et $Y_-(\xi)$ facilitant dès lors l'étude de l'évolution de $\eta(\xi)$ dans le profil et donc du nombre de Mach $M_a(\mathbf{u}(\xi)) = \frac{M\eta^2(\xi)}{\beta}$. Notons que la condition $M_a(\mathbf{u}(\xi)) > 1$ équivaut à :

$$M^2\eta^4(\xi) - \beta^2 > 0. \quad (4.61)$$

En rappelant que $\eta_L = \eta(-\infty) = 1$, l'inégalité $M^2 - \beta^2 > 0$ équivaut à (4.58) et est donc vraie dès que (4.55) est satisfaite.

Proposition 4.3.1. *Dans le cas $\frac{\nu}{\mu} = 0$, supposons (4.55) satisfaite. Tant que $M_a(\mathbf{u}(\xi)) > 1$, i.e. tant que (4.61) est vraie, alors $Y_+(\xi)$ et $Y_-(\xi)$ sont donnés par :*

$$\begin{cases} Y_+(\xi) = \frac{\beta}{M} \sqrt{\frac{(M\eta(\xi)^2 - \beta)(M^2 - \beta^2)}{M\eta(\xi)^2 + \beta}}, \\ Y_-(\xi) = -\frac{\beta}{M} \sqrt{\frac{(M\eta(\xi)^2 + \beta)(M^2 - \beta^2)}{M\eta(\xi)^2 - \beta}}. \end{cases} \quad (4.62)$$

Démonstration. Soulignons que l'on ne peut pas repartir du système (4.43) dans le cas $\frac{\nu}{\mu} = 0$ puisque nous avons eu besoin dans la preuve de la proposition (4.2.4) de multiplier une équation par $\frac{\nu}{\mu}$. Nous en revenons donc à l'équation sur v dans le système initial (4.40) pour écrire lorsque $\frac{\nu}{\mu} = 0$:

$$M[v] + \alpha\beta^2[R_{12}] = 0.$$

Cette équation donne trivialement :

$$\begin{cases} v = \bar{v}_L - \frac{\alpha\beta^2}{M}(R_{12} - 1), \\ d_\xi v = -\frac{\alpha\beta^2}{M}d_\xi R_{12}. \end{cases} \quad (4.63)$$

$$\quad (4.64)$$

Pour R_{12} , nous avons besoin de l'équation (4.50) établie dans la démonstration de la proposition 4.2.4. Cette équation s'écrit :

$$M\alpha d_\xi(R_{12}\eta^2) + \eta^{-2}d_\xi v = 0.$$

Substituons (4.64), dans l'équation ci-dessus, après quelques calculs on obtient sous la condition (4.61) (Rappelons que la composante R_{12} a été supposée strictement positive) :

$$\frac{d_\xi R_{12}}{R_{12}} = -\frac{1}{2} \frac{d_\xi(M^2\eta^4 - \beta^2)}{M^2\eta^4 - \beta^2},$$

que l'on peut intégrer de $-\infty$ à ξ . En substituant l'expression de R_{12} dans (4.63), celle de v s'en déduit immédiatement. On obtient ainsi :

$$\begin{cases} v(\xi) = \bar{v}_L - \frac{\alpha\beta^2}{M} \left(\sqrt{\frac{M^2 - \beta^2}{M^2\eta^4(\xi) - \beta^2}} - 1 \right), & \forall \xi \in \mathbb{R} \\ R_{12}(\xi) = \sqrt{\frac{M^2 - \beta^2}{M^2\eta^4(\xi) - \beta^2}}, & \forall \xi \in \mathbb{R} \end{cases} \quad (4.65)$$

$$\quad (4.66)$$

Les expressions de $Y_+(\xi)$ et $Y_-(\xi)$ se déduisent des expressions (4.65) et (4.66). \square

Les formules (4.62) indiquent clairement que la condition $M_a(\mathbf{u}(\xi)) > 1$, *i.e.* tant que (4.61) est vraie, est nécessaire pour donner un sens à $Y_+(\xi)$ et $Y_-(\xi)$. Ces formules montrent ensuite directement que le produit $Y_+Y_-(\xi)$ est un invariant algébrique du système d'EDO :

Proposition 4.3.2. *Dans le cas $\frac{\nu}{\mu} = 0$ et tant que (4.61) est vraie, nous avons :*

$$[(Y_+Y_-)] = (Y_+Y_-)(\xi) - (Y_+Y_-)_L = 0. \quad (4.67)$$

La propriété (4.67) simplifie considérablement l'étude de l'évolution de $\eta(\xi)$ et $T(\xi)$ dans une éventuelle solution onde progressive. En effet, la validité des EDO gouvernant η et T dans le système (4.43) ne dépend pas de la valeur du rapport $\frac{\nu}{\mu}$. Ces EDO s'écrivent donc compte tenu de la constance du produit $Y_+Y_-(\xi)$:

$$\begin{cases} Md_\xi\eta = (\gamma - 1)\frac{T}{\eta} + M^2(\eta - 1) + \beta^2\eta^{-3} - \frac{1 + (\gamma - 3)\beta^2}{\gamma\eta}, \\ \frac{1}{Pr}d_\xi T = M[T + h(\eta)], \end{cases} \quad (4.68)$$

$$(4.69)$$

avec :

$$h(\eta) = \frac{\beta^2}{2}(\eta^{-2} - 1) - M^2 \frac{(\eta - 1)^2}{2} + \frac{1 + (\gamma - 3)\beta^2}{\gamma}(\eta - 1).$$

Il s'agit d'un système autonome en η et T dont l'étude des solutions onde progressive peut être réalisée indépendamment de la condition (4.61) stipulant $M_a(\mathbf{u}(\xi)) > 1$. Nous allons donc mener cette étude afin de tester *a posteriori* la validité de (4.61). Il est possible de vérifier que le système (4.68) correspond à la forme réduite adimensionnée du système dynamique suivant :

$$\begin{cases} d_\xi(\rho u) = 0, \\ d_\xi(\rho u^2 + p + R_{11}) = d_\xi(\mu d_\xi u), \\ d_\xi(\rho E + p + R_{11})u = d_\xi(\mu u d_\xi u) + d_\xi(\kappa d_\xi T), \\ d_\xi(\rho R_{11} \tau^3 u) = 0, \end{cases}$$

où $\rho E = \frac{p}{\gamma-1} + \rho \frac{u^2}{2} + \frac{R_{11}}{2}$. En d'autres termes, les solutions onde progressive de (4.68) correspondent aux solutions onde progressive d'un modèle de Navier-Stokes à deux lois de pression polytropiques p et R_{11} . Il s'agit d'une version simplifiée de systèmes étudiés dans [14] où l'existence et l'unicité (à une translation près) de solution onde progressive sont établies sous la condition (4.55). Rapportons de plus que cette analyse établit :

$$\xi \rightarrow \eta(\xi) \text{ est strictement décroissante, pour tout } \xi \in \mathbb{R}. \quad (4.70)$$

Dès lors, sous la condition (4.55), les travaux [14] impliquent que le système (4.68) admet une unique solution onde progressive dont l'état de sortie (η_R, T_R) vérifie :

$$\begin{cases} (\gamma - 1) \frac{T_R}{\eta_R} + M^2(\eta_R - 1) + \beta^2 \eta_R^{-3} - \frac{1 + (\gamma - 3)\beta^2}{\gamma \eta_R} = 0, \\ T_R + h(\eta_R) = T_L. \end{cases} \quad (4.71)$$

Des manipulations algébriques simples montrent alors que η_R doit être la première racine inférieure à $\eta_L = 1$ de la fonction :

$$\mathcal{G}(\eta) = \frac{1 - \eta}{\eta^2} \left(\frac{\gamma + 1}{\gamma - 1} M^2 \eta^3 - \left(\frac{2}{\gamma - 1} + M^2 + 2 \frac{\gamma - 3}{\gamma - 1} \beta^2 \right) \eta^2 + \frac{\gamma - 3}{\gamma - 1} \beta^2 (\eta + 1) \right). \quad (4.72)$$

Étudions la fonction $\mathcal{G}(\eta)$:

Proposition 4.3.3. *Sous l'hypothèse (4.55), la fonction $\mathcal{G}(\eta)$ est convexe et admet deux racines :*

$$\mathcal{G}(\eta_R) = \mathcal{G}(\eta_L = 1) = 0, \text{ avec } \eta_R < 1.$$

Démonstration. Cette démonstration repose sur les propriétés suivantes concernant la fonction $\mathcal{G}(\eta)$:

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathcal{G}''(\eta) = -\left(6\frac{3-\gamma}{\gamma-1}\beta^2\eta^{-4} + 2\frac{\gamma+1}{\gamma-1}M^2\right) < 0, \end{array} \right. \quad (4.73)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \lim_{\eta \rightarrow 0} \mathcal{G}'(\eta) = +\infty; \mathcal{G}'(1) = \frac{2}{\gamma-1}(1-M^2) < 0, \end{array} \right. \quad (4.74)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \lim_{\eta \rightarrow 0} \mathcal{G}(\eta) = -\infty; \mathcal{G}(1) = 0, \end{array} \right. \quad (4.75)$$

Ici, l'hypothèse de compression (4.55) est nécessaire à (4.74). Elle garantit $\eta_R < 1$. En effet, la propriété (4.73) prouve la convexité et la stricte décroissance de la dérivée $\mathcal{G}'(\eta)$. La deuxième propriété prouve que la dérivée ne s'annule qu'une seule fois. La fonction \mathcal{G} est donc croissante puis décroissante après avoir atteint un maximum au point d'annulation η_{max} de $\mathcal{G}'(\eta)$. Enfin la dernière propriété permet d'affirmer que \mathcal{G} s'annule deux fois, en $\eta = \eta_L = 1$ et en $\eta = \eta_0 < 1$. En effet, \mathcal{G} étant strictement croissante sur l'intervalle $[0, \eta_{max}]$, c'est une bijection de $[0, \eta_{max}]$ sur $] -\infty, \mathcal{G}(\eta_{max}) > 0]$. On en déduit alors le résultat. \square

L'allure typique de $\mathcal{G}(\eta)$ est donnée sur la figure (4.4). Ayant ainsi caractérisé le

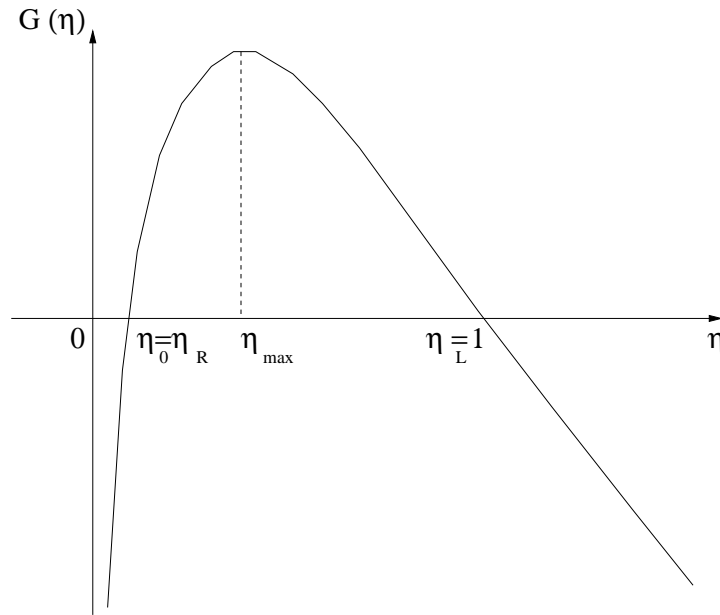


FIG. 4.4 – Allure typique de la fonction $\mathcal{G}(\eta)$

taux de compression en sortie η_R avec la propriété $\eta(\xi) > \eta_R$, pour tout $\xi \in \mathbb{R}$ (voir 4.70), nous sommes en mesure de vérifier *a posteriori* la validité de l'hypothèse (4.61) exprimant $M_a(\eta(\xi)) > 1$ pour tout $\xi \in \mathbb{R}$. Il s'agit donc d'analyser la validité de :

$$M\eta^2(\xi) - \beta > 0, \quad i.e. \eta(\xi) > \eta_c = \sqrt{\frac{\beta}{M}}, \quad \text{pour tout } \xi \in \mathbb{R}. \quad (4.76)$$

Il s'agit donc de vérifier puisque $\eta(\xi) > \eta_R$ avec $\lim_{\eta(\xi) \rightarrow \infty} \eta(\xi) = \eta_R$:

$$\eta_R > \eta_c = \sqrt{\frac{\beta}{M}}. \quad (4.77)$$

Or, la proposition (4.3.3) établit que η_R et η_L sont les deux seules racines de $\mathcal{G}(\eta) = 0$. Le graphe de $\mathcal{G}(\eta)$ figuré en (4.4) indique alors que $\mathcal{G}(\eta(\xi)) > 0$ pour tous les taux de compression $\eta(\xi)$ rencontrés entre η_R et η_L . Dès lors, la condition (4.77) est vraie si et seulement si $\mathcal{G}(\eta_c) = \mathcal{G}(\sqrt{\frac{\beta}{M}}) < 0$.

Les figures ((4.5), a, b et c) représentent les régions du plan (M, β) suivant le signe de $\mathcal{G}(\sqrt{\frac{\beta}{M}})$. On remarque que le phénomène de surcompression se produit dès que β est suffisamment grand et ce pour des valeurs de $M > 2$. On remarque que pour $\gamma = 1.6$ (figure (4.5), a), le phénomène surcompressif n'arrive quasiment jamais et que pour $\gamma = 1.2$ (cas des gaz chauds, figure (4.5), c), il survient pour des valeurs raisonnables de β (de l'ordre de 0.1). Notons que pour le cas intermédiaire $\gamma = 1.4$, la surcompressivité survient pour des valeurs du Mach turbulent très grandes et rares dans la pratique.

Pour conclure ce paragraphe, notons que lorsque le phénomène de surcompression survient, l'hypothèse non physique $\frac{\nu}{\mu} = 0$ conduit à l'explosion de Y_- (annulation de Y_+) lorsque pour un certain ξ_c , $\eta(\xi_c)$ coïncide avec η_c . Nous soulignons que pour les valeurs $0 < \nu < \mu$, incluant donc le cas physique, l'analyse établira la persistance du phénomène de surcompression. Il se traduira par le défaut d'unicité des solutions onde progressive : \mathbf{u}_L étant fixé et σ prescrit selon (4.55), il existera une infinité d'états de sortie \mathbf{u}_R bornés pouvant être connectés à \mathbf{u}_L . Cette multiplicité d'états de sortie n'est bien sûr pas admissible.

Nécessité d'une correction dans les modèles RSM

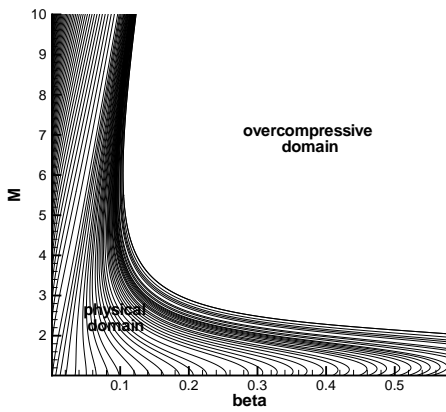
Nous donnons ici une explication qualitative de l'origine du phénomène de surcompression. Ce phénomène trouve son origine dans le fait que R_{11} devient trop grand dans le profil de compression. Rappelons que, dans le cas du 1-choc, la caractéristique associée à la deuxième onde à pour pente :

$$\lambda_2(\mathbf{u}_R) = u_R - \sqrt{R_{11}^R \tau_R}.$$

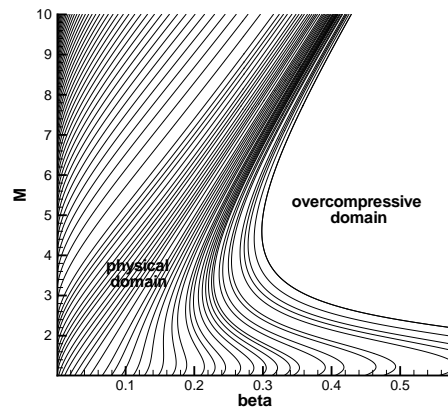
Ainsi, cette pente peut devenir inférieure à σ , la vitesse du choc, si $R_{11}\tau_R$ devient trop grand pendant la compression (voir figure (4.6)). C'est ce qui arrive dans le cas d'un choc surcompressif. Ici, $\mathcal{I} = R_{11}\tau^3$ est un invariant du système en présence de viscosité. Ainsi, pour une onde de choc, le taux de compression diminuant avec le nombre de Mach, la conservation de \mathcal{I} entraîne que $R_{11}\tau_R$ augmente comme τ^{-2} .

Ce problème de surcompression n'existe pas pour les équations de Navier-Stokes instantanées. Cela suggère que nous avons oublié une information dans la modélisation des équations gouvernant les composantes du tenseur de Reynolds. Il existe en effet une correction dans la littérature. Elle correspond à la prise en compte du flux de masse turbulent :

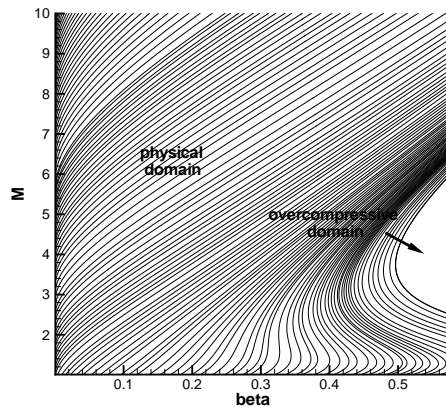
$$\overline{u_i''} = -\frac{\overline{\rho' u_i'}}{\overline{\rho}} = -\frac{\overline{\rho' u_i''}}{\overline{\rho}},$$



(a) $\gamma = 1.2$



(b) $\gamma = 1.4$



(c) $\gamma = 1.6$

FIG. 4.5 – Régions du plan (M, β) où le phénomène de surcompression intervient pour différentes valeurs du coefficient d'adiabaticité γ

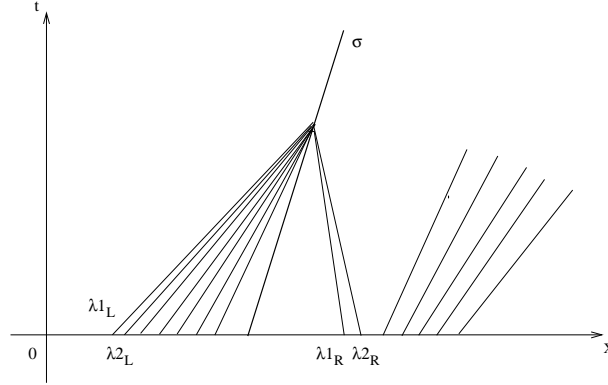


FIG. 4.6 – Comportement typique des caractéristiques lors du phénomène de surcompression

dont l'existence est due à la différence entre les moyennes de Favre et de Reynolds. Le seul modèle réalisable, objectif et à caractérisation entropique dans la littérature est proposé par Ristorcelli [57] :

$$\overline{u_i''} = \frac{\mathcal{T}_{ris}}{\rho} \widetilde{u_i''} \widetilde{\rho}_{,i},$$

où \mathcal{T}_{ris} est une échelle de temps. Il s'agit, de plus, de la modélisation la plus simple possible sous forme de loi de premier gradient. Celle-ci intervient dans les équations sur les composantes de Reynolds. Elle est parfois appelée production enthalpique et correspond à :

$$PE = -\overline{u_i'' \bar{p}_{,j}} - \overline{u_j'' \bar{p}_{,i}}$$

La correction intervient aussi dans l'équation sur l'énergie totale par l'intermédiaire du terme :

$$\text{Correction énergétique} = -(\overline{\bar{p} u_j''})_{,j}.$$

Ristorcelli propose une valeur pour cette échelle, celle-ci est donnée par la relation (1.16). Cependant nous ne prendrons pas en compte cette valeur dans la suite. Pour des raisons techniques qui apparaîtront dans le prochain chapitre, nous considérerons l'échelle de temps \mathcal{T}_{ris} non pas constante, mais plutôt comme fonction régulière de ρ et $\mathcal{I} = R_{11} \tau^3$ que nous préciserons.

4.4 La correction de Ristorcelli

Dans cette section, nous réécrivons les EDP en présence de la correction de Ristorcelli pour mettre en évidence que cette correction fait décroître $\mathcal{I} = R_{11} \tau^3$ dans un profil de compression et ce d'autant plus que l'échelle de temps \mathcal{T}_{ris} est choisie grande. Cette observation suggère, du moins qualitativement, que la correction de Ristorcelli peut permettre d'éviter l'accident de surcompression.

Nous allons directement écrire les équations adimensionnées selon le tableau (4.1) en présence de la correction de Ristorcelli. Nous aurons besoin de la nouvelle constante

de temps adimensionnée :

$$\overline{\mathcal{T}}_{ris} = \frac{\mathcal{T}_{ris}CL}{l_0}.$$

Par simplicité dans les notations, nous écrivons, sans risque de confusion, \mathcal{T}_{ris} en lieu et place de $\overline{\mathcal{T}}_{ris}$. Le système s'écrit :

$$\left\{ \begin{array}{l} \partial_t \rho + \partial_x(\rho u) = 0, \\ \partial_t(\rho u) + \partial_x(\rho u^2 + p + \beta^2 R_{11}) = \partial_x \left(\frac{1}{Re} \partial_x u \right), \\ \partial_t(\rho v) + \partial_x(\rho uv + \beta^2 R_{12}) = \partial_x \left(\frac{\nu}{\mu} \frac{1}{Re} \partial_x v \right), \\ \partial_t(\rho E) + \partial_x((\rho E + p + \beta^2 R_{11})u + \beta^2 R_{12}v) = \\ \quad \partial_x \frac{1}{Re} \left(u \partial_x u + \frac{\nu}{\mu} v \partial_x v \right) + \partial_x \left(\frac{1}{RePr} \partial_x T \right) - \beta^2 \partial_x \left(\mathcal{T}_{ris} p R_{11} \frac{\partial_x \rho}{\rho^2} \right), \\ \partial_t R_{11} + \partial_x(R_{11}u) + 2R_{11} \partial_x u = -2\mathcal{T}_{ris} R_{11} \frac{\partial_x \rho \partial_x p}{\rho^2}, \\ \partial_t R_{22} + \partial_x(R_{22}u) + 2R_{12} \partial_x v = 0, \\ \partial_t R_{12} + \partial_x(R_{12}u) + R_{11} \partial_x v + R_{12} \partial_x u = -\mathcal{T}_{ris} R_{12} \frac{\partial_x \rho \partial_x p}{\rho^2}, \end{array} \right. \quad (4.78)$$

Notons que la correction de Ristorcelli intervient non seulement dans les équations aux tensions de Reynolds mais également dans l'équation sur l'énergie totale. En conséquence, les lois d'évolution supplémentaires exhibées au chapitre précédent vont être modifiées.

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathcal{I}(\mathbf{u}) = R_{11} \eta^3, \\ \mathcal{D}(\mathbf{u}) = (R_{11} R_{22} - R_{12}^2) \eta^4, \\ s(\mathbf{u}) = \ln \frac{p}{\rho^\gamma}, \\ \rho E_n(\mathbf{u}) = \frac{p}{\gamma - 1} + \rho \frac{u^2}{2} + \beta^2 \frac{R_{11}}{2}, \\ \rho E_t(\mathbf{u}) = \rho \frac{v^2}{2} + \beta^2 \frac{R_{12}^2}{2R_{11}}, \\ \rho \mathcal{W}(\mathbf{u}) = R_{22} - \frac{R_{12}^2}{R_{11}}, \end{array} \right.$$

où l'énergie totale se décompose comme suit :

$$\rho E = \rho E_n(\mathbf{u}) + \rho E_t(\mathbf{u}) + \beta^2 \rho \frac{\mathcal{W}(\mathbf{u})}{2}.$$

Les lois d'évolution de ces lois supplémentaires sont données par :

Lemme 4.4.1. *Pour un fluide visqueux, les cinq lois d'évolution supplémentaires vérifiées par les solutions du système (4.78) sont les suivantes :*

$$\partial_t(\rho\mathcal{I}(\mathbf{u})) + \partial_x(\rho\mathcal{I}(\mathbf{u})u) = -2\mathcal{T}_{ris}\rho\mathcal{I}(\mathbf{u})\frac{\partial_x\rho\partial_x p}{\rho^2}, \quad (4.79)$$

$$\partial_t(\rho\mathcal{D}(\mathbf{u})) + \partial_x(\rho\mathcal{D}(\mathbf{u})u) = -2\mathcal{T}_{ris}\rho\mathcal{D}(\mathbf{u})\frac{\partial_x\rho\partial_x p}{\rho^2}, \quad (4.80)$$

$$\begin{aligned} \partial_t(\rho E_n(\mathbf{u})) + \partial_x([\rho E_n(\mathbf{u}) + p + \beta^2 R_{11}]u) &= \partial_x\left(\frac{1}{Re}u\partial_x u\right) + \frac{1}{Re}\frac{\nu}{\mu}(\partial_x v)^2, \\ &+ \partial_x\left(\frac{1}{RePr}\partial_x T\right) - \beta^2\partial_x\left(\mathcal{T}_{ris}pR_{11}\frac{\partial_x\rho}{\rho^2}\right), \end{aligned} \quad (4.81)$$

$$\partial_t(\rho E_t(\mathbf{u})) + \partial_x(\rho E_t(\mathbf{u})u + \beta^2 R_{12}v) = \partial_x\left(\frac{1}{Re}\frac{\nu}{\mu}v\partial_x v\right) - \frac{1}{Re}\frac{\nu}{\mu}(\partial_x v)^2 \quad (4.82)$$

$$\begin{aligned} \partial_t(\rho s(\mathbf{u})) + \partial_x(\rho s(\mathbf{u})u) &= \frac{1}{ReT}\left((\partial_x u)^2 + \frac{\nu}{\mu}(\partial_x v)^2\right) \\ &+ \frac{1}{RePr}\left(\frac{\partial_x T}{T}\right)^2 + \partial_x\frac{1}{RePr}\left(\frac{1}{T}\partial_x T\right) \\ &- (\gamma - 1)\beta^2\partial_x\left(\mathcal{T}_{ris}R_{11}\frac{\partial_x\rho}{\rho}\right) \\ &+ (\gamma - 1)\beta^2\mathcal{T}_{ris}R_{11}\left(\frac{\partial_x\rho}{\rho}\right)^2. \end{aligned} \quad (4.83)$$

La démonstration du lemme (4.4.1) est laissée au lecteur. Soulignons que l'équation sur $\rho\mathcal{W}$ est inchangée :

$$\partial_t(\rho\mathcal{W}(\mathbf{u})) + \partial_x(\rho\mathcal{W}(\mathbf{u})u) = 0,$$

en écrivant que $\mathcal{W} = \frac{\mathcal{D}(\mathbf{u})}{\mathcal{I}(\mathbf{u})}$. Remarquons que l'équation sur l'entropie physique $\rho s(\mathbf{u})$ nous confirme que le modèle proposé par Ristorcelli est bien à caractérisation entropique puisque deux termes supplémentaires apparaissent dans cette équation, l'un est positif et l'autre est sous forme conservative (voir [66]).

Soulignons désormais l'intérêt de la correction de Ristorcelli dans la maîtrise du phénomène de surcompression. Qualitativement, son effet sur l'équation (4.79) est de faire diminuer \mathcal{I} et donc R_{11} . En effet, cette correction, dont le signe est négatif dans les profils de compression (p et ρ augmentent), agit comme un terme de relaxation :

$$\partial_t\mathcal{I} + u\partial_x\mathcal{I} = +2\mathcal{T}_{ris}\frac{\partial_x\rho\partial_x p}{\rho}(0 - \mathcal{I}), \quad \frac{\partial_x\rho\partial_x p}{\rho} > 0, \quad (4.84)$$

envoyant \mathcal{I} , et donc R_{11} , vers zéro en temps infini. Nous verrons plus précisément que, dans le cas isotherme, la présence de ce terme permet alors d'éviter l'accident de surcompression dès que la constante de temps \mathcal{T}_{ris} est suffisamment grande, en un sens qui sera précisé. La correction de Ristorcelli semble donc jouer un rôle intéressant. Cependant, nous avons délibérément choisi de ne pas présenter le modèle complet dès le début car nous ne la considérerons pas dans le cas anisotherme. La raison principale en est la trop grande difficulté technique posée par le système dynamique résultant. Afin d'illustrer cette difficulté, exhibons, sans démonstration, le système d'EDO à cinq équations et cinq inconnues qu'il faudrait résoudre pour trouver la

solution onde progressive dans le cas général. Nous rappelons qu'il est utile de changer l'adimensionnement de R_{12} dès que $R_{12}^L \neq 0$ pour prendre en compte l'anisotropie dans les profils onde progressive. C'est ce qui est fait pour exprimer le système d'EDO suivant :

$$\left\{ \begin{array}{l} Md_\xi \eta = \mathcal{A}(\eta, T, \mathcal{I}), \\ \frac{1}{Pr} d_\xi T = \mathcal{B}(\eta, T, \mathcal{I}, Y_-, Y_+), \\ Md_\xi \mathcal{I} = \mathcal{C}(\eta, T, \mathcal{I}), \\ \frac{\nu M}{\mu} d_\xi Y_+ = \frac{M\eta^2 - \beta\sqrt{\mathcal{I}}}{2\eta^4} \left((M\eta^2 + \beta\sqrt{\mathcal{I}})Y_+ + (M\eta^2 - \beta\sqrt{\mathcal{I}})Y_- \right), \\ \frac{\nu M}{\mu} d_\xi Y_- = \frac{M\eta^2 + \beta\sqrt{\mathcal{I}}}{2\eta^4} \left((M\eta^2 + \beta\sqrt{\mathcal{I}})Y_+ + (M\eta^2 - \beta\sqrt{\mathcal{I}})Y_- \right), \end{array} \right. \quad (4.85)$$

avec :

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathcal{A}(\eta, T, \mathcal{I}) = (\gamma - 1) \frac{T}{\eta} + M^2(\eta - 1) + \beta^2 \eta^{-3} \mathcal{I} - \frac{1 + (\gamma - 3)\beta^2}{\gamma \eta}, \\ \mathcal{B}(\eta, T, \mathcal{I}, Y_-, Y_+) = M[H_{ris}(\eta, T, \mathcal{I}, Y_-, Y_+)] - (\gamma - 1)\beta^2 \mathcal{T}_{ris} \frac{T\mathcal{I}}{M\eta^4} \mathcal{A}(\eta, T, \mathcal{I}), \\ \mathcal{C}(\eta, T, \mathcal{I}) = 2\mathcal{T}_{ris} \frac{\mathcal{I}Pr}{M\eta^2} \mathcal{A}(\eta, T, \mathcal{I}) \mathcal{B}(\eta, T, \mathcal{I}, Y_-, Y_+) - 2\mathcal{T}_{ris} \frac{\mathcal{I}T}{M^2\eta^3} (\mathcal{A}(\eta, T, \mathcal{I}))^2, \\ H_{ris}(\eta, T, \mathcal{I}, Y_-, Y_+) = T + h_1(\eta, \mathcal{I}) + h_2(\mathcal{I}, Y_+, Y_-) - \frac{\alpha^2}{2} Y_+ Y_-, \\ h_1(\eta, \mathcal{I}) = \frac{\beta^2}{2} (\eta^{-2} \mathcal{I} - 1) - M^2 \frac{(\eta - 1)^2}{2} + \frac{1 + (\gamma - 3)\beta^2}{\gamma} (\eta - 1), \\ h_2(\mathcal{I}, Y_+, Y_-) = \frac{\alpha^2}{8} (Y_+ - Y_-)^2 \frac{\mathcal{I} - 1}{\mathcal{I}}. \end{array} \right.$$

Remarquons que si l'on égalise formellement $\mathcal{T}_{ris} = 0$ (la correction de Ristorcelli est enlevée), puis $\mathcal{I} = 1$ (\mathcal{I} est invariant), alors $h_1(\eta, \mathcal{I}) = h(\eta)$ et $h_2(\mathcal{I}, Y_+, Y_-) = 0$. Dans ce cas $H_{ris}(\eta, T, \mathcal{I}, Y_-, Y_+) = H(\eta, T, (Y_+ Y_-))$ et l'on récupère le système (4.43). Le système complet (4.85) est de grande taille. De plus, nous avons mis en évidence le fait que l'accident de surcompression intervient pour $\eta < \eta_c$ avec η_c petit et donc loin de $\eta_L = 1$. Ceci indique que nous ne pouvons pas restreindre l'étude au cas d'onde progressive d'amplitude suffisamment faible puisque pour celle-ci l'accident de surcompression ne peut pas survenir. Il s'agit donc d'étudier les solutions ondes progressives de grande amplitude. A cette fin, le flot doit généralement présenter des propriétés de monotonie en nombre suffisant afin d'exhiber simplement des régions positivement invariantes compactes.

Deuxième partie

Analyse onde progressive et fonctions cinétiques

Chapitre 5

Importance de la correction de Ristorcelli, cadre isotherme

Ce chapitre est entièrement consacré à l'étude de l'influence physique et mathématique de la correction de Ristorcelli sur les profils de compression dans un cadre simplifié, à savoir celui d'une loi de pression isotherme. Cette simplification autorise une analyse exhaustive de l'importance de la correction de Ristorcelli. Nous aurions pu considérer une loi de pression barotrope, avec les hypothèses classiques associées, sans modifier les conclusions de l'analyse. Le choix d'une pression isotherme conduit à simplifier la structure algébrique de plusieurs expressions à venir, et facilite donc, dans une certaine mesure, la lecture des calculs. Dans un premier temps, nous montrons que si l'échelle de temps associée à la correction de Ristorcelli n'est pas choisie suffisamment grande au sein du profil, alors l'accident de surcompression survient. Le phénomène de surcompression se traduit ici par l'existence d'une infinité de solutions ondes progressives se propageant à la même vitesse σ , issues d'un même état gauche \mathbf{u}_L et connectant une infinité d'états \mathbf{u}_R distincts. Cette situation est bien entendu inacceptable. Nous montrons que choisir des échelles de temps \mathcal{T}_{ris} suffisamment grandes restaure systématiquement l'unicité de la solution onde progressive, et donc l'unicité de \mathbf{u}_R , à \mathbf{u}_L et σ fixés. Ce résultat permet alors de définir la limite de fluide parfait des profils de compression, à savoir les solutions ondes de choc.

Dans un deuxième temps, nous montrons que la composante R_{12} du tenseur de Reynolds garde un signe constant tout le long du profil de compression, de sorte que $R_{12}(\mathbf{u}_R)$ possède le même signe que $R_{12}(\mathbf{u}_L)$ dans la solution choc limite. Cette propriété de conservation du signe autorise l'utilisation d'un changement de variable construit sur l'énergie tangentielle ρE_t , conduisant à un ensemble complet de relations de Rankine-Hugoniot généralisées permettant de caractériser les solutions chocs. Ces relations de Rankine-Hugoniot généralisées font intervenir deux fonctions cinétiques, respectivement sur l'énergie tangentielle ρE_t et sur l'entropie $\rho \mathcal{I}$. Nous nous attachons alors à montrer comment estimer numériquement ces deux fonctions nécessaires à la caractérisation des solutions chocs. Cette estimation repose sur l'intégration numérique du système dynamique gouvernant les solutions onde progressive et nous expliquons comment aborder cette intégration difficile. Auparavant, il faut néanmoins fixer une échelle de temps de Ristorcelli. Nous montrons en effet que l'amplitude de cette échelle de temps a de nombreuses conséquences sur les propriétés physiques des

profils, ainsi que sur les propriétés mathématiques de la solution onde progressive associée. Nous étudions précisément les conséquences de cette amplitude, afin de définir numériquement des couples de fonctions cinétiques possédant des propriétés physiques acceptables. La motivation première de cette étude est de parvenir à contrôler les conséquences de cette amplitude, tout en rendant possible la détermination des fonctions cinétiques. Soulignons que l'ensemble des propriétés mises en avant dans ce chapitre joueront un rôle central dans l'analyse à venir de la stabilité structurelle, puis multidimensionnelle, des solutions chocs.

5.1 Le système d'EDP adimensionné

Nous donnons ici la forme adimensionnée du système d'EDP (4.78) sous l'hypothèse d'une loi de pression isotherme :

$$p = \rho T_0,$$

où T_0 prend en compte la constante des gaz parfaits r . Ainsi, p n'étant fonction que de ρ , l'énergie totale n'est plus une inconnue, mais devient fonction des autres variables et trouve la définition suivante :

$$\rho E(\mathbf{u}) = -\rho T_0 \ln \tau + \rho \frac{u^2}{2} + \rho \frac{v^2}{2} + \frac{R_{11}}{2} + \frac{R_{22}}{2},$$

où par commodité, le vecteur des six inconnues $(\rho, \rho u, \rho v, R_{11}, R_{22}, R_{12})$ sera encore noté \mathbf{u} . En remarquant que la vitesse du son associée aux deux ondes extrêmes s'écrit dans le cadre isotherme :

$$c^2(\mathbf{u}) = T_0 + 3 \frac{R_{11}}{\rho},$$

nous notons que l'adimensionnement retenu au chapitre précédent conduit à remplacer T_0 par :

$$\frac{T_0}{c_L^2} = 1 - 3\beta^2.$$

On vérifie que les deux ondes extrêmes sont toujours vraiment non linéaires. Le système gouvernant l'inconnue \mathbf{u} s'écrit :

$$\left\{ \begin{array}{l} \partial_t \rho + \partial_x \rho u = 0, \\ \partial_t \rho u + \partial_x (\rho u^2 + \beta^2 R_{11} + \rho(1 - 3\beta^2)) = \partial_x \left(\frac{1}{Re} \partial_x u \right), \\ \partial_t \rho v + \partial_x (\rho u v + \beta^2 R_{12}) = \partial_x \left(\frac{\nu}{\mu} \frac{1}{Re} \partial_x v \right), \\ \partial_t R_{11} + \partial_x (R_{11} u) + 2R_{11} \partial_x u = -2\mathcal{T}_{ris} R_{11} (1 - 3\beta^2) \left(\frac{\partial_x \rho}{\rho} \right)^2, \\ \partial_t R_{22} + \partial_x (R_{22} u) + 2R_{12} \partial_x v = 0, \\ \partial_t R_{12} + \partial_x (R_{12} u) + R_{11} \partial_x v + R_{12} \partial_x u = -\mathcal{T}_{ris} R_{12} (1 - 3\beta^2) \left(\frac{\partial_x \rho}{\rho} \right)^2. \end{array} \right. \quad (5.1)$$

Les lois d'évolution (4.79) et (4.80) portant respectivement sur $\mathcal{I}(\mathbf{u})$ et $\mathcal{D}(\mathbf{u})$ deviennent :

$$\left\{ \begin{array}{l} \partial_t(\rho\mathcal{I}(\mathbf{u})) + \partial_x(\rho\mathcal{I}(\mathbf{u})u) = -2\mathcal{T}_{ris}(1 - 3\beta^2)\rho\mathcal{I}(\mathbf{u}) \left(\frac{\partial_x\rho}{\rho}\right)^2, \\ \partial_t(\rho\mathcal{D}(\mathbf{u})) + \partial_x(\rho\mathcal{D}(\mathbf{u})u) = -2\mathcal{T}_{ris}(1 - 3\beta^2)\rho\mathcal{D}(\mathbf{u}) \left(\frac{\partial_x\rho}{\rho}\right)^2, \end{array} \right. \quad (5.2)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \partial_t(\rho\mathcal{I}(\mathbf{u})) + \partial_x(\rho\mathcal{I}(\mathbf{u})u) = -2\mathcal{T}_{ris}(1 - 3\beta^2)\rho\mathcal{I}(\mathbf{u}) \left(\frac{\partial_x\rho}{\rho}\right)^2, \\ \partial_t(\rho\mathcal{D}(\mathbf{u})) + \partial_x(\rho\mathcal{D}(\mathbf{u})u) = -2\mathcal{T}_{ris}(1 - 3\beta^2)\rho\mathcal{D}(\mathbf{u}) \left(\frac{\partial_x\rho}{\rho}\right)^2, \end{array} \right. \quad (5.3)$$

alors que la quantité $\mathcal{W}(\mathbf{u})$ se conserve :

$$\partial_t(\rho\mathcal{W}(\mathbf{u})) + \partial_x(\rho\mathcal{W}(\mathbf{u})u) = 0, \quad \text{avec } \mathcal{W}(\mathbf{u}) = \frac{\mathcal{D}(\mathbf{u})}{\mathcal{I}(\mathbf{u})}. \quad (5.4)$$

Enfin, l'équation (4.82) gouvernant l'énergie tangentielle $\rho E_t(\mathbf{u})$ garde la même forme dans le cadre isotherme :

$$\partial_t(\rho E_t(\mathbf{u})) + \partial_x(\rho E_t(\mathbf{u})u + \beta^2 R_{12}v) = \partial_x \left(\frac{1}{Re} \frac{\nu}{\mu} v \partial_x v \right) - \frac{1}{Re} \frac{\nu}{\mu} (\partial_x v)^2. \quad (5.5)$$

Elle jouera un rôle important dans ce chapitre.

5.2 Le système d'EDO dans le cadre isotherme

Nous exprimons le système dynamique gouvernant les ondes progressives associées au premier champ. Ce système est écrit en choisissant un état \mathbf{u}_L et en prescrivant une vitesse de propagation σ satisfaisant (4.55). Ici, \mathbf{u}_L est choisi tel que $R_{11}^L > 0$. La remarque formulée au chapitre précédent, conduisant à la solution $R_{12}(\xi) = 0$ et $v(\xi) = \frac{\nu_L}{c_L}$ pour tout $\xi \in \mathbb{R}$ dès que $R_{12}^L = 0$, vaut toujours. En effet, l'échelle de temps de Ristorcelli est multipliée par R_{12} dans l'équation gouvernant cette inconnue (voir le système (5.1)). Nous menons donc l'étude avec $R_{12}^L \neq 0$ et sans restriction avec $R_{12}^L > 0$ (voir paragraphe (4.2.1)). Nous adoptons, sans les rappeler, les hypothèses et les notations introduites dans la section (4.2.1). Le principal résultat de ce paragraphe est le suivant :

Proposition 5.2.1. *Le système d'EDO gouvernant les solutions onde progressive du système (5.1) est donné par :*

$$\left\{ \begin{array}{l} Md_\xi \eta = \mathcal{F}(\eta, \mathcal{I}), \\ Md_\xi \mathcal{I} = -2\mathcal{T}_{ris} \frac{(1 - 3\beta^2)}{M^2} \frac{\mathcal{I}}{\eta^3} \mathcal{F}^2(\eta, \mathcal{I}), \\ \frac{\nu M}{\mu} d_\xi Y_+ = \frac{M\eta^2 - \beta\sqrt{\mathcal{I}}}{2\eta^4} \left((M\eta^2 + \beta\sqrt{\mathcal{I}})Y_+ + (M\eta^2 - \beta\sqrt{\mathcal{I}})Y_- \right), \\ \frac{\nu M}{\mu} d_\xi Y_- = \frac{M\eta^2 + \beta\sqrt{\mathcal{I}}}{2\eta^4} \left((M\eta^2 + \beta\sqrt{\mathcal{I}})Y_+ + (M\eta^2 - \beta\sqrt{\mathcal{I}})Y_- \right), \end{array} \right. \quad (5.6)$$

avec :

$$\mathcal{F}(\eta, \mathcal{I}) = M^2(\eta - 1) + (1 - 3\beta^2) \left(\frac{1}{\eta} - 1 \right) + \beta^2 \left(\frac{\mathcal{I}}{\eta^3} - 1 \right). \quad (5.7)$$

Les définitions de (Y_+, Y_-) sont identiques à celles proposées en (4.42). Soulignons que les équations gouvernant ces deux grandeurs sont semblables à celles établies en (4.43). Elles sont ici remarquablement indépendantes de la correction de Ristorcelli. Cette dernière ne figure que dans l'équation fixant l'évolution de \mathcal{I} et donc de R_{11} . Il importe de noter que puisque \mathcal{T}_{ris} est supposée ne pas dépendre de v et R_{12} , les équations gouvernant η et \mathcal{I} sont indépendantes de Y_+ et Y_- .

Démonstration. La démonstration est en deux parties :

– équations en η et \mathcal{I} :

L'équation en u , avec $d_\xi u = M d_\xi \eta$, devient :

$$M^2 d_\xi \eta + d_\xi \left(\beta^2 \frac{\mathcal{I}}{\eta^3} + \frac{1 - 3\beta^2}{\eta} \right) = M d_\xi (d_\xi \eta),$$

qui intégrée une fois de $-\infty$ à ξ donne immédiatement le résultat. Pour \mathcal{I} , la traduction de l'équation sur $\rho\mathcal{I}$ en onde progressive donne :

$$M d_\xi \mathcal{I} = -2\mathcal{T}_{ris}(1 - 3\beta^2)\mathcal{I} \frac{(d_\xi \eta)^2}{\eta^3}, \quad (5.8)$$

où l'on remplace $d_\xi \eta$ par $\frac{\mathcal{F}(\eta, \mathcal{I})}{M}$.

– équations en Y_+ et Y_- :

Les équations d'évolution sur v et R_{12} sont données par :

$$\left\{ \begin{array}{l} M d_\xi v + \alpha \beta^2 d_\xi R_{12} = d_\xi \left(\frac{\nu}{\mu} d_\xi v \right), \end{array} \right. \quad (5.9)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} M d_\xi (R_{12} \eta) + \frac{1}{\alpha} R_{11} d_\xi v + M R_{12} d_\xi \eta = -\mathcal{T}_{ris} \frac{1 - 3\beta^2}{\eta^2} R_{12} (d_\xi \eta)^2, \end{array} \right. \quad (5.10)$$

On intègre (5.9) et on utilise la notation $X = \frac{1}{\alpha}(v - \bar{v}_L) - \frac{\beta^2}{M}$ pour écrire :

$$M X + \beta^2 R_{12} = \frac{\nu}{\mu} d_\xi X. \quad (5.11)$$

On cherche ensuite une équation sur $\frac{1}{\sqrt{\mathcal{I}}}$ à partir de l'équation (5.8) que l'on multiplie par $-\frac{1}{2\mathcal{I}^{\frac{3}{2}}}$, soit :

$$M d_\xi \left(\frac{1}{\sqrt{\mathcal{I}}} \right) = \mathcal{T}_{ris} \frac{1 - 3\beta^2}{\eta^3 \sqrt{\mathcal{I}}} (d_\xi \eta)^2. \quad (5.12)$$

On multiplie l'équation (5.10) par η :

$$M d_\xi (R_{12} \eta^2) + R_{11} \eta d_\xi X = -\mathcal{T}_{ris} \frac{1 - 3\beta^2}{\eta} R_{12} (d_\xi \eta)^2. \quad (5.13)$$

Puis, on multiplie (5.13) par $\frac{1}{\sqrt{\mathcal{I}}}$ que l'on additionne à (5.12) multipliée par $R_{12} \eta^2$, soit :

$$M d_\xi \left(\frac{R_{12} \eta^2}{\sqrt{\mathcal{I}}} \right) + \frac{R_{11} \eta}{\sqrt{\mathcal{I}}} d_\xi X = 0. \quad (5.14)$$

De manière à introduire l'équation (5.11) dans l'équation précédente, multiplions la par $\frac{\nu}{\mu}\beta$. L'équation (5.14) se réécrit alors :

$$\frac{\nu}{\mu}Md_\xi \left(\beta \frac{R_{12}\eta^2}{\sqrt{\mathcal{I}}} \right) + \beta \frac{R_{11}\eta}{\sqrt{\mathcal{I}}} (MX + \beta^2 R_{12}) = 0. \quad (5.15)$$

Si l'on remarque que :

$$R_{12} = \frac{\sqrt{\mathcal{I}}}{\eta^2} \frac{R_{12}\eta^2}{\sqrt{\mathcal{I}}},$$

alors (5.11) multipliée par M et (5.15) deviennent :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\nu}{\mu}Md_\xi \left(\beta \frac{R_{12}\eta^2}{\sqrt{\mathcal{I}}} \right) = -\beta \frac{\sqrt{\mathcal{I}}}{\eta^2} \left(MX + \beta \frac{\sqrt{\mathcal{I}}}{\eta^2} \left(\beta \frac{R_{12}\eta^2}{\sqrt{\mathcal{I}}} \right) \right), \end{array} \right. \quad (5.16)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\nu}{\mu}Md_\xi X = M^2 X + M\beta \frac{\sqrt{\mathcal{I}}}{\eta^2} \left(\beta \frac{R_{12}\eta^2}{\sqrt{\mathcal{I}}} \right). \end{array} \right. \quad (5.17)$$

Ce système suggère d'introduire de nouveau :

$$\left\{ \begin{array}{l} Y_+ = X + \frac{\beta R_{12}\eta^2}{\sqrt{\mathcal{I}}}, \\ Y_- = X - \frac{\beta R_{12}\eta^2}{\sqrt{\mathcal{I}}}. \end{array} \right. \quad (5.18)$$

Soit :

$$\left\{ \begin{array}{l} X = \frac{1}{2}(Y_+ + Y_-), \\ \frac{\beta R_{12}\eta^2}{\sqrt{\mathcal{I}}} = \frac{1}{2}(Y_+ - Y_-), \end{array} \right. \quad (5.19)$$

qui permet d'obtenir, après quelques réarrangements, les équations en (Y_+, Y_-) cherchées. \square

Remarque 5.2.2. L'évaluation de Y_+ et Y_- conduit à :

$$\left\{ \begin{array}{l} Y_+(-\infty) = Y_+(\mathbf{u}_L) = \beta \left(1 - \frac{\beta}{M} \right), \end{array} \right. \quad (5.20)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} Y_-(-\infty) = Y_-(\mathbf{u}_L) = -\beta \left(1 + \frac{\beta}{M} \right). \end{array} \right. \quad (5.21)$$

Ainsi et sous la condition (4.55), *i.e.* $M > 1$, nous sommes assurés que :

$$Y_+(-\infty) > 0, \quad Y_-(-\infty) < 0.$$

Ensuite, notons que la formule (5.19) conduit à définir :

$$R_{12}(\xi) = \frac{\sqrt{\mathcal{I}(\xi)}}{2\beta\eta^2(\xi)} (Y_+(\xi) - Y_-(\xi)). \quad (5.22)$$

Dès lors, si $Y_+(\xi)$ et $Y_-(\xi)$ gardent un signe constant le long du profil (respectivement $Y_+(\xi) > 0$ et $Y_-(\xi) < 0$), nous sommes assurés que la grandeur adimensionnée $R_{12}(\xi)$ reste positive. En conséquence, la grandeur dimensionnée $\overline{R_{12}}(\xi)$ garde le même signe que R_{12}^L .

5.3 Analyse du système d'EDO

5.3.1 Théorème de la variété centrale

Dans ce paragraphe, nous rappelons un résultat mathématique important concernant le comportement des solutions d'un système différentiel de taille n , $n > 1$:

$$d_\xi X = \mathbb{F}(X), \quad \mathbb{F} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n, \quad (5.23)$$

au voisinage d'un point stationnaire X_s du champ de vecteur \mathbb{F} , *i.e.* tel que :

$$\mathbb{F}(X_s) = 0.$$

Le système (5.23) étant autonome, il est connu [70] que les solutions considérées ne peuvent atteindre X_s qu'en temps infini ; soit en temps positif, soit en temps négatif. Étant donné un point stationnaire X_s de \mathbb{F} , le théorème de la variété centrale, introduit ci-dessous, précise sous quelles conditions il existe des solutions de (5.23) connectant X_s en temps positif (dans le futur) et/ou en temps négatif (dans le passé). Les conditions proposées portent uniquement sur les propriétés spectrales de la linéarisée de \mathbb{F} en X_s définies comme suit.

Supposons le champ de vecteur \mathbb{F} de classe $C^{r+1}(\mathbb{R}^n)$. Soit X_s un point stationnaire de \mathbb{F} . Considérons $\nabla_X \mathbb{F}(X_s)$, la linéarisée de \mathbb{F} en X_s et définissons :

- $T^s(X_s)$ l'espace vectoriel engendré par les vecteurs propres associés aux valeurs propres de partie réelle strictement négative de $\nabla_X \mathbb{F}(X_s)$;
- $T^i(X_s)$ l'espace vectoriel engendré par les vecteurs propres associés aux valeurs propres de partie réelle strictement positive de $\nabla_X \mathbb{F}(X_s)$;
- $T^c(X_s)$ l'espace vectoriel engendré par les vecteurs propres associés aux valeurs propres de partie réelle nulle de $\nabla_X \mathbb{F}(X_s)$.

Les espaces introduits correspondent respectivement à l'espace tangent stable, à l'espace tangent instable et à l'espace tangent central en X_s . L'un quelconque de ces espaces peut être réduit au vecteur nul, mais la théorie demande $\mathbb{R}^n = T^s(X_s) \oplus T^i(X_s) \oplus T^c(X_s)$.

Munis de cette décomposition de \mathbb{R}^n , nous avons alors :

Théorème 5.3.1. *Soit X_s un point stationnaire de \mathbb{F} appartenant à $C^{r+1}(\mathbb{R}^n)$. Alors il existe trois variétés $W^s(X_s)$, $W^i(X_s)$ et $W^c(X_s)$ de classe C^{r+1} , C^{r+1} et C^r telles que :*

- $X_s \in W^s(X_s) \cap W^i(X_s) \cap W^c(X_s)$;
- $W^s(X_s)$ est tangente à $T^s(X_s)$, $W^i(X_s)$ est tangente à $T^i(X_s)$ et $W^c(X_s)$ est tangente à $T^c(X_s)$;
- si $\exists \xi$ tel que $X(\xi) \in W^s(X_s)$, alors $\lim_{\xi \rightarrow +\infty} X(\xi) = X_s$;
- si $\exists \xi$ tel que $X(\xi) \in W^i(X_s)$, alors $\lim_{\xi \rightarrow -\infty} X(\xi) = X_s$;

la variété $W^s(X_s)$ est appelée stable, $W^i(X_s)$ est la variété instable et $W^c(X_s)$ la variété centrale.

En d'autres termes, une solution $X(\xi)$ de (5.23) ne peut atteindre un point stationnaire X_s dans le futur, $\lim_{\xi \rightarrow +\infty} X(\xi) = X_s$ (respectivement dans le passé $\lim_{\xi \rightarrow -\infty} X(\xi) = X_s$), que si $W^s(X_s)$ est non vide à savoir $T^s(X_s) \neq \emptyset$ (respectivement $W^i(X_s)$ non vide, $T^i(X_s) \neq \emptyset$). Dans ce cas, l'ensemble des solutions atteignant X_s dans le futur

(respectivement dans le passé) forment une variété $W^s(X_s)$ dont la dimension est celle de $T^s(X_s)$ (respectivement $W^i(X_s)$ de dimension égale à celle de $T^i(X_s)$).

Énonçons rapidement les implications du résultat précédent dans l'étude de l'existence des solutions onde progressive. Le système dynamique réduit (5.6) prend la forme (5.23) en introduisant :

$$X = (\eta, \mathcal{I}, Y_+, Y_-),$$

puis une définition immédiate de $\mathbb{F}(X) : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^4$. Ce système est construit sur la donnée de l'état $X_L = (1, 1, Y_+^L, Y_-^L)$ (dédit de \mathbf{u}_L et de σ) qui est par construction un point stationnaire de \mathbb{F} .

Il s'agit donc de comprendre sous quelles conditions sur \mathbf{u}_L et σ , la variété $W^i(X_L)$ est non vide et conduit à atteindre un point stationnaire X_R dans le futur pour lequel nécessairement $W^s(X_R)$ est non vide.

5.3.2 Linéarisée du système au voisinage d'un point stationnaire

Un point stationnaire $X_s = (\eta_s, \mathcal{I}_s, Y_+^s, Y_-^s)$ du système dynamique réduit (5.6) vérifie par définition :

$$\begin{cases} \mathcal{F}(\eta_s, \mathcal{I}_s) = 0, \\ \mathcal{G}(\eta_s, \mathcal{I}_s, Y_+^s, Y_-^s) = \left((M\eta_s^2 + \beta\sqrt{\mathcal{I}_s})Y_+^s + (M\eta_s^2 - \beta\sqrt{\mathcal{I}_s})Y_-^s \right) = 0, \end{cases}$$

où $\mathcal{F}(\eta, \mathcal{I})$ a été définie en (5.7).

Nous énonçons sans démonstration le résultat calculatoire suivant :

Proposition 5.3.2. *La linéarisée du champ de vecteur du système (5.6) en un point stationnaire X_s admet les valeurs propres réelles suivantes :*

$$\begin{cases} \lambda_1(X_s) = \frac{M}{M_c^2(X_s)}(M_c^2(X_s) - 1), \\ \lambda_2(X_s) = \frac{\mu}{\nu} \frac{M}{M_a^2(X_s)}(M_a^2(X_s) - 1), \\ \lambda_3(X_s) = 0, \lambda_4(X_s) = 0, \end{cases} \quad (5.24)$$

où les nombres de Mach relatifs $M_c(X_s)$ et $M_a(X_s)$ vérifient :

$$M_c^2(X_s) = \frac{M^2\eta_s^2}{1 + 3\beta^2 \left(\frac{\mathcal{I}_s}{\eta_s^2} - 1 \right)}, \quad M_a(X_s) = \frac{M\eta_s^2}{\beta\sqrt{\mathcal{I}_s}}.$$

Conformément au paragraphe précédent, la connaissance des valeurs propres (5.24) permet de caractériser en X_s la dimension des variétés stables, instables et centrales. Concernant dans un premier temps l'étude du point critique X_L déduit de la donnée \mathbf{u}_L , nous réexprimons la condition (4.55) imposée à la vitesse de propagation σ :

$$M_a^2(X_L) > M_c^2(X_L) = M > 1,$$

de sorte que :

$$\begin{cases} \lambda_1(X_L) = \frac{1}{M}(M^2 - 1) > 0, \\ \lambda_2(X_L) = \frac{\mu \beta^2}{\nu M}(M_a^2(X_L) - 1) = \frac{\mu}{M\nu}(M^2 - \beta^2) > 0. \end{cases}$$

En invoquant l'hypothèse de modélisation (3.2), $\frac{\mu}{\nu} > 1$, on vérifie alors que :

$$\lambda_2(X_L) - \lambda_1(X_L) > \frac{1}{M_a^2(X_L)M} (M_a^2(X_L) - M^2) > 0,$$

c'est-à-dire $\lambda_1(X_L) \neq \lambda_2(X_L)$. Les valeurs propres nulles $\lambda_3(X_L) = \lambda_4(X_L) = 0$ étant semi-simples, la linéarisée du champ de vecteur en X_L est diagonalisable. Il est utile à la suite de donner l'expression des vecteurs propres à droite associés à $\lambda_1(X_L)$ et $\lambda_2(X_L)$:

$$r_1(X_L) = \begin{pmatrix} \frac{\nu M_a(X_L)}{\mu \beta^2} (\lambda_2(X_L) - \lambda_1(X_L)) \\ 0 \\ M_a(X_L) - 1 \\ M_a(X_L) + 1 \end{pmatrix}, \quad r_2(X_L) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ M_a(X_L) - 1 \\ M_a(X_L) + 1 \end{pmatrix}.$$

En conclusion, et sous la condition (4.55), *i.e.* $M > 1$, la variété instable $W^i(X_L)$ est de dimension deux. Nous montrerons dans le paragraphe suivant que (4.55) est nécessaire.

Dans un second temps, étudions un point stationnaire X_R susceptible d'être atteint dans le futur par une solution onde progressive issue de X_L . Si un tel point stationnaire existe, nécessairement $W^s(X_R) \neq 0$. Nous verrons au paragraphe suivant que sous la condition (4.55), X_R existe systématiquement, avec $0 < M_c(X_R) < 1$: *i.e.* $\lambda_1(X_R) < 0$. Rappelons que $M_a(X_R) > M_c(X_R)$. Deux cas de figure sont à distinguer selon que $M_a(X_R) > 1$ (*i.e.* $\lambda_2(X_R) > 0$) ou $M_a(X_R) \leq 1$ ($\lambda_2(X_R) \leq 0$). En supposant $M_a(X_R) > 1$, alors l'hypothèse de modélisation (3.2), $0 < \nu < \mu$, implique :

$$\lambda_2(X_R) - \lambda_1(X_R) > \frac{M}{M_a^2(X_R)M_c^2(X_R)} (M_a^2(X_R) - M_c^2(X_R)) > 0,$$

et il existe une base de diagonalisation pour la linéarisée en X_R . En supposant $M_a(X_R) < 1$, on peut vérifier qu'hormis un cas exceptionnel, la base de diagonalisation existe toujours.

En conclusion pour l'état droit, on retiendra que dès que la condition $M > 1$ est vraie, X_R existe (voir prochain paragraphe) avec :

$$\begin{cases} \dim(W^s(X_R)) = 1, & \text{si } M_a(X_R) > 1, \\ \dim(W^s(X_R)) = 2, & \text{si } M_a(X_R) < 1. \end{cases}$$

5.3.3 Décomposition en un sous-système autonome et un système linéaire à coefficients variables

L'analyse du système dynamique (5.6) que nous développons dans la suite s'appuie fortement sur la propriété que les deux premières équations gouvernant η et \mathcal{I} sont

découplées de celles gouvernant Y_+ et Y_- . Il est donc possible d'étudier dans un premier temps les solutions du sous-système dynamique suivant :

$$\begin{cases} Md_\xi \eta = \mathcal{F}(\eta, \mathcal{I}), \\ Md_\xi \mathcal{I} = -2\mathcal{T}_{ris} \frac{1 - 3\beta^2}{M^2} \frac{\mathcal{I}}{\eta^3} \mathcal{F}(\eta, \mathcal{I})^2, \end{cases} \quad (5.25)$$

où nous rappelons que :

$$\mathcal{F}(\eta, \mathcal{I}) = M^2(\eta - 1) + (1 - 3\beta^2) \left(\frac{1}{\eta} - 1 \right) + \beta^2 \left(\frac{\mathcal{I}}{\eta^3} - 1 \right). \quad (5.26)$$

Dès qu'il existe une solution $(\eta(\xi), \mathcal{I}(\xi))$ de (5.25) connectant le point stationnaire $(\eta_L, \mathcal{I}_L) = (1, 1)$ dans le passé, à un autre point stationnaire (η_R, \mathcal{I}_R) dans le futur, nous sommes conduits à analyser les solutions du système linéaire en (Y_+, Y_-) à coefficients variables donnés par $\eta(\xi)$ et $\mathcal{I}(\xi)$:

$$\begin{cases} \frac{\nu M}{\mu} d_\xi Y_+ = \frac{M\eta^2(\xi) - \beta\sqrt{\mathcal{I}(\xi)}}{2\eta^4(\xi)} \left((M\eta^2(\xi) + \beta\sqrt{\mathcal{I}(\xi)})Y_+(\xi) + (M\eta^2(\xi) - \beta\sqrt{\mathcal{I}(\xi)})Y_-(\xi) \right), \\ \frac{\nu M}{\mu} d_\xi Y_- = \frac{M\eta^2(\xi) + \beta\sqrt{\mathcal{I}(\xi)}}{2\eta^4(\xi)} \left((M\eta^2(\xi) + \beta\sqrt{\mathcal{I}(\xi)})Y_+(\xi) + (M\eta^2(\xi) - \beta\sqrt{\mathcal{I}(\xi)})Y_-(\xi) \right). \end{cases} \quad (5.27)$$

Les solutions considérées doivent vérifier la condition asymptotique :

$$\begin{cases} \lim_{\xi \rightarrow -\infty} Y_+(\xi) = Y_+^L = \beta \left(1 - \frac{\beta}{M} \right), \\ \lim_{\xi \rightarrow -\infty} Y_-(\xi) = Y_-^L = -\beta \left(1 + \frac{\beta}{M} \right). \end{cases} \quad (5.28)$$

5.3.4 Sous-système autonome en (η, \mathcal{I})

Dans ce paragraphe, nous montrons que sous la condition (4.55), *i.e.* $M > 1$, il existe systématiquement une unique solution hétérocline de (5.25) issue de $(\eta_L, \mathcal{I}_L) = (1, 1)$ dans le passé, et joignant dans le futur un point stationnaire (η_R, \mathcal{I}_R) . Ce résultat vaut dès que $\mathcal{T}_{ris} \geq 0$ et est indépendant de la forme précise de cette échelle de temps. Le point stationnaire atteint dans le futur ne dépend que de (M, β) et de la définition précise de \mathcal{T}_{ris} , *i.e.* :

$$\eta_R = \eta_R(M, \beta; \mathcal{T}_{ris}), \quad \mathcal{I}_R = \mathcal{I}_R(M, \beta; \mathcal{T}_{ris}).$$

Nous établissons que si \mathcal{T}_{ris} n'est pas choisie suffisamment grande, alors pour toute valeur de $\beta > 0$, il existe systématiquement un nombre de Mach critique $M_*(\beta) > 1$ au delà duquel le nombre de Mach $M_a(\eta_R, \mathcal{I}_R)$ en sortie est nécessairement inférieur à un. En d'autres termes, si \mathcal{T}_{ris} présente des valeurs trop petites, une éventuelle solution onde progressive du système dynamique complet (5.6) est nécessairement surcompressive pour tout $M > M_*(\beta)$.

En revanche, nous prouvons qu'il est toujours possible de choisir \mathcal{T}_{ris} suffisamment grande en fonction de M et de β pour éviter l'accident de surcompression.

Pour établir ces résultats, nous supposons une définition prescrite de l'échelle de temps de Ristorcelli. Nous débutons l'analyse à β et M fixés pour ensuite faire varier ces nombres réduits. Tant que leurs valeurs sont fixées, nous omettrons le plus souvent d'explicitier la dépendance de diverses expressions relativement à M et β afin de simplifier les notations. Lorsque ces nombres varieront (voir remarque (4.2.1)), nous rétablirons les dépendances requises.

Nous commençons par caractériser les points stationnaires (η_s, \mathcal{I}_s) du sous-système (5.25). Ils sont tels que :

$$\mathcal{F}(\eta_s, \mathcal{I}_s) = 0,$$

ce qui permet d'explicitier \mathcal{I}_s en fonction de η_s ; les nombres β et M étant fixés :

$$\mathcal{I}_s = f(\eta_s) := \eta_s^2 \left(\frac{M^2 + 1 - 2\beta^2}{\beta^2} \eta_s - \frac{M^2}{\beta^2} \eta_s^2 - \frac{1 - 3\beta^2}{\beta^2} \right). \quad (5.29)$$

Nous énonçons sans démonstration le résultat suivant :

Proposition 5.3.3. *La linéarisée du champ de vecteur de (5.25) admet les valeurs propres :*

$$\lambda_1(\eta_s, \mathcal{I}_s) = \frac{M}{M_c^2(\eta_s, \mathcal{I}_s)} (M_c^2(\eta_s, \mathcal{I}_s) - 1), \lambda_2(\eta_s, \mathcal{I}_s) = 0. \quad (5.30)$$

Dès que $M_c(\eta_s, \mathcal{I}_s) \neq 1$, il existe une base de diagonalisation et le vecteur propre associé à la valeur propre non nulle $\lambda_1(\eta_s, \mathcal{I}_s)$ s'écrit :

$$r_1(\eta_s, \mathcal{I}_s) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (5.31)$$

En conséquence du théorème de la variété centrale, le signe de $M_c(\eta_s, \mathcal{I}_s) - 1$ fixe la nature répulsive ou attractive du point stationnaire (η_s, \mathcal{I}_s) . En particulier, on ne peut partir dans le passé du point (η_L, \mathcal{I}_L) que si et seulement si $\lambda_1(\eta_L, \mathcal{I}_L) > 0$, *i.e.* $M > 1$. La condition (4.55) est donc nécessaire à l'existence d'une solution onde progressive du système dynamique complet (5.6). Nous supposerons toujours à l'avenir $M > 1$.

La variété instable $W^i(\eta_L, \mathcal{I}_L)$ est de dimension 1 et est tangente au vecteur $(1, 0)$ dans le plan (η, \mathcal{I}) . Deux trajectoires sont donc issues de (η_L, \mathcal{I}_L) dans le passé : la première avec $\eta(\xi) < \eta_L = 1$ et la seconde avec $\eta(\xi) > 1$, pour ξ suffisamment négatif. Nous montrons dans la suite que seule la première trajectoire conduit à une solution hétérocline.

La démonstration s'appuie fortement sur les propriétés du graphe de la fonction $f(\eta)$ introduite en (5.29) et décrivant dans le plan (η, \mathcal{I}) le lieu de tous les points stationnaires. Ce graphe se déduit du résultat suivant établi à la fin de ce paragraphe :

Proposition 5.3.4. *Fixons β dans $[0, \frac{1}{\sqrt{3}}[$ et $M > 1$, alors la fonction $f(\eta) : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ admet deux racines positives :*

$$f(\underline{\eta}) = f(\bar{\eta}) = 0, \quad \text{avec } \underline{\eta} < \bar{\eta},$$

ainsi que deux extrema :

$$f'(\eta_{min}) = f'(\eta_{max}) = 0 \quad \text{avec } \eta_{min} < \eta_{max},$$

ordonnés de la façon suivante :

$$\eta_{min} < \underline{\eta} < \eta_{max} < \bar{\eta}.$$

L'allure de la fonction $f(\eta)$ est donnée sur la figure (5.1).

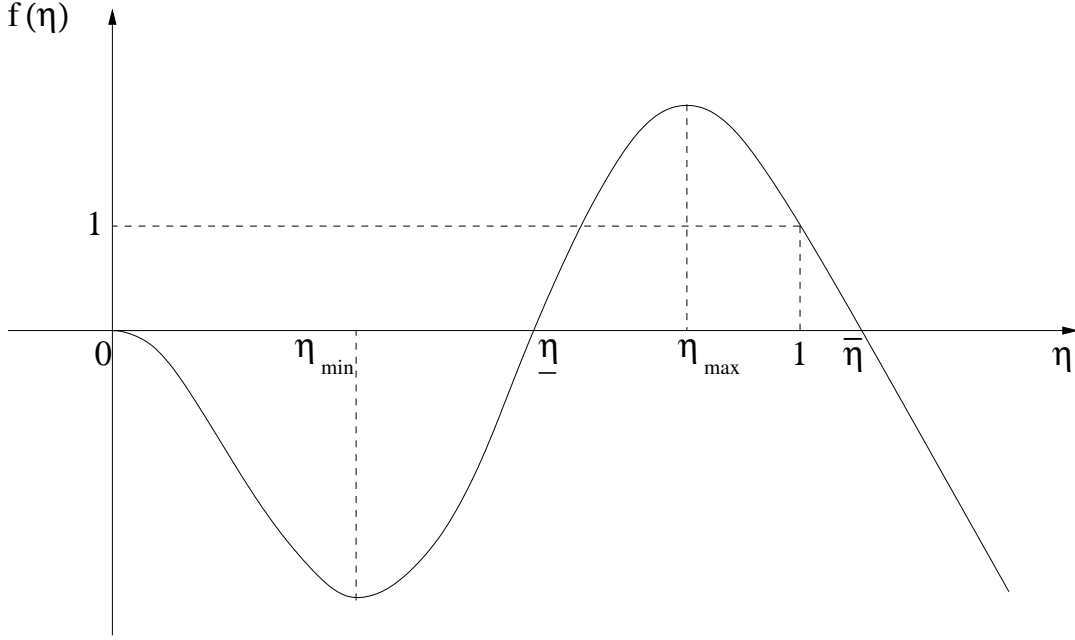


FIG. 5.1 – Allure typique de la fonction $f(\eta)$

La partie utile de son graphe correspond à la région :

$$\mathcal{D}_1 = \{(\eta, \mathcal{I}) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+, 0 < \mathcal{I} \leq \mathcal{I}_L = 1\}. \quad (5.32)$$

Pour toute valeur de $\mathcal{T}_{ris} \geq 0$, nous allons en effet vérifier que les deux trajectoires issues de (η_L, \mathcal{I}_L) restent dans \mathcal{D}_1 pour tout temps fini.

Premièrement, la propriété $d_\xi \mathcal{I} \leq 0$ implique que $\mathcal{I}(\xi)$ ne peut que décroître dans le futur et donc ne pas excéder $\mathcal{I}_L = 1$. Ensuite et afin d'établir que $\mathcal{I}(\xi)$ ne peut pas s'annuler en temps fini, nous remarquons que toute donnée initiale $(\eta(0), \mathcal{I}(0))$ avec $\mathcal{I}(0) = 0$, conduit à une solution $(\eta(\xi), \mathcal{I}(\xi))$ avec $\mathcal{I}(\xi) = 0$ sur l'intervalle maximal d'existence. Or, pour un système autonome, deux solutions distinctes à un instant donné ne peuvent pas s'intersecter en temps fini, ce qui donne la conclusion.

En conséquence, les seuls points stationnaires (η_R, \mathcal{I}_R) atteignables dans le futur vérifient :

$$0 \leq \mathcal{I}_R = f(\eta_R) \leq 1.$$

Notons que si $\mathcal{T}_{ris} = 0$, nécessairement $\mathcal{I}_R = 1$, alors que $\mathcal{T}_{ris} > 0$ implique $\mathcal{I}_R < 1$. À β et M fixés, il faut s'attendre de manière heuristique à ce que \mathcal{I}_R décroisse lorsque \mathcal{T}_{ris} augmente. Cette intuition sera confirmée dans la suite.

Revenons aux deux trajectoires issues de (η_L, \mathcal{I}_L) dans le passé. La trajectoire démarant avec $\eta(\xi) > \eta_L = 1$ est exclue grâce à la proposition suivante :

Proposition 5.3.5. *Fixons β dans $[0, \frac{1}{\sqrt{3}}[$ et $M > 1$, il n'existe pas d'orbite hétérocline du sous-système autonome en (η, \mathcal{I}) dans le domaine \mathcal{D}_1 telle que $\eta > 1$.*

La preuve est reportée à la fin de ce paragraphe. Nous montrons en fait que la trajectoire étudiée entrant dans \mathcal{D}_1 avec $\eta > 1$ en temps ξ suffisamment négatif ne peut pas revenir pour des temps ultérieurs sur le lieu des points stationnaires $(\eta_s, \mathcal{I}_s) = f(\eta_s)$ inclus dans \mathcal{D}_1 . Graphiquement, l'impossibilité résulte de la propriété du champ de vecteurs de pointer partout vers l'extérieur d'un voisinage immédiat de ce lieu.

Considérons désormais la trajectoire issue de (η_L, \mathcal{I}_L) avec $\eta(\xi) < \eta_L = 1$ pour ξ suffisamment négatif. Celle-ci reste la seule trajectoire susceptible de connecter un point stationnaire dans le futur. On a alors le résultat positif suivant :

Proposition 5.3.6. *Fixons β dans $[0, \frac{1}{\sqrt{3}}[$ et $M > 1$, alors pour toute valeur finie de $\mathcal{T}_{ris} \geq 0$, il existe une unique solution onde progressive (à une translation près) associée au sous-système en (η, \mathcal{I}) du système (5.6) connectant $(\eta_L, \mathcal{I}_L) = (1, 1)$ dans le passé à (η_R, \mathcal{I}_R) dans le futur avec $\eta_R < 1$ et $0 < \mathcal{I}_R \leq 1$.*

La preuve, courte, est donnée ici.

Démonstration. En temps suffisamment négatif, la trajectoire $(\eta(\xi), \mathcal{I}(\xi))$ étudiée est située sous la courbe $f(\eta)$. Dès lors et pour tous les temps considérés, nous avons $\mathcal{F}(\eta(\xi), \mathcal{I}(\xi)) < 0$ de sorte que $\xi \rightarrow \eta(\xi)$ décroît strictement. Or, un changement de monotonie en un temps fini ξ_0 ultérieur est impossible car il exigerait l'annulation de $\mathcal{F}(\eta, \mathcal{I})$, c'est à dire $\mathcal{I}(\xi_0) = f(\eta(\xi_0))$. La trajectoire aurait donc atteint le lieu des points stationnaires en un temps fini, ce qui est impossible dans le cadre d'un système autonome (voir [70]). Enfin, on peut montrer que $\mathcal{I}_R > 0$ (voir l'article [4] donné dans en annexe A) à la condition de ne considérer que des valeurs finies de \mathcal{T}_{ris} . \square

Soulignons dès à présent que la propriété :

$$\xi \rightarrow \eta(\xi) \text{ strictement décroissante pour tout } \xi \in \mathbb{R}, \quad (5.33)$$

exhibée dans la preuve précédente jouera un rôle très important dans la suite.

Pour conclure ce paragraphe, nous donnons les preuves attendues. Concernant la proposition (5.3.5) :

Démonstration. Puisque la semi-orbite est tangente à r_1^L en (η_L, \mathcal{I}_L) , le graphe de la fonction $\mathcal{I} = f(\eta)$ implique l'existence d'un temps $L > 0$ suffisamment grand tel que pour tout $\xi < -L < 0$, $\eta(\xi) > \eta_L = 1$ avec $0 < \mathcal{I}(\xi) \leq 1$. Autrement dit, $\mathcal{F}(\eta, \mathcal{I})$ peut être rendu plus grand que $\epsilon > 0$ pour tout ϵ suffisamment petit donné (voir la figure (5.1)). Pour un tel ϵ , on introduit dans le plan (η, \mathcal{I}) la courbe $\mathcal{I}^\epsilon(\xi)$ à partir de $\mathcal{F}(\eta, \mathcal{I}^\epsilon)$ comme frontière du domaine $\mathcal{D}_2^\epsilon = \{(\eta, \mathcal{I}) \in \mathcal{D}_1; \mathcal{F}(\eta, \mathcal{I}) \geq \epsilon\}$. Prouvons alors que, pour $\epsilon > 0$ suffisamment petit, cette frontière est une frontière d'entrée : le semi-flot positif pointe vers \mathcal{D}_2^ϵ . La proposition (5.3.5) s'en suit puisque les points critiques du sous-système en (η, \mathcal{I}) sont tels que $\mathcal{F}(\eta, \mathcal{I}) = 0$. A cette fin, observons que le produit scalaire du champ de vecteur $F(X)$ défini par $d_\xi X = F(X)$ et $X = (\eta, \mathcal{I})$,

avec la normale unitaire \mathbf{n} de la frontière précédemment définie s'écrit :

$$\begin{aligned} F(X) \cdot \mathbf{n} &= \epsilon \left(\left(M^2 - \frac{1-3\beta^2}{\eta^2} - \frac{3\beta^2}{\eta^4} \right) - 2\mathcal{T}_{ris} \frac{\beta^2 \mathcal{I}(1-3\beta^2)}{M^2 \eta^6} \epsilon \right), \\ &\geq \epsilon \left(M^2 - 1 - 2\mathcal{T}_{ris} \frac{\beta^2(1-3\beta^2)}{M^2} \epsilon \right), \end{aligned}$$

puisque $\eta > 1$ et $\mathcal{I} \leq 1$. Comme $M > 1$, il existe un $\epsilon_0 > 0$ tel que $M^2 - 1 \geq \epsilon_0$. En conséquence, et dès que $\mathcal{T}_{ris} > 0$, il suffit de choisir $\epsilon > 0$ tel que :

$$\epsilon < \frac{\epsilon_0}{2\mathcal{T}_{ris} \frac{\beta^2(1-3\beta^2)}{M^2}},$$

pour obtenir $F(X) \cdot \mathbf{n} > 0$, ce qui conclut la démonstration. \square

Concernant enfin la proposition (5.3.4), on a la démonstration suivante :

Démonstration. Cette démonstration repose sur les propriétés suivantes de la fonction $f(\eta)$:

$$\left\{ \begin{array}{l} f'(\eta) = \eta \left(-\frac{4M^2}{\beta^2} \eta^2 + \frac{3}{\beta^2} (M^2 + 1 - 2\beta^2) \eta - \frac{2}{\beta^2} (1 - 3\beta^2) \right), \end{array} \right. \quad (5.34)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \lim_{\eta \rightarrow +\infty} f'(\eta) = -\infty; f'(0) = 0, \end{array} \right. \quad (5.35)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \lim_{\eta \rightarrow +\infty} f(\eta) = -\infty; f(0) = 0; f(1) = 1 > 0. \end{array} \right. \quad (5.36)$$

Selon (5.34), la dérivée $f'(\eta)$ admet trois racines $(0, \eta_{min}, \eta_{max})$, en effet le discriminant Δ_f associé au polynôme du second degré en η annulant $f'(\eta)$ est strictement positif en rappelant que par hypothèse $M > 1$ et que l'on a $\beta^2 < \frac{1}{\sqrt{3}}$:

$$\Delta_f = 9(M^2 + 1 - 2\beta^2)^2 - 32M^2(1 - 3\beta^2) > 0.$$

Ainsi $f(\eta)$ admet d'abord un minimum puis un maximum puisque la limite en $+\infty$ de la dérivée est strictement négative. En $\eta = 0$, la dérivée est nulle et l'on se dirige vers le minimum de $f(\eta)$ par des valeurs négatives de η . Or il existe au moins un point tel que $f(\eta)$ est positive. Il s'agit de $\eta = 1$ avec $f(1) = 1$. Donc $f(\eta)$ doit nécessairement devenir positive pour atteindre son maximum et donc $f(\eta)$ admet deux racines positives puisque elle tend vers $-\infty$ pour η tendant vers $+\infty$. De plus, on a :

$$f'(1) = \frac{1 - M^2}{\beta^2} < 0.$$

Cela implique alors que $\eta = 1 > \eta_{max}$. Les variations de la fonction $f(\eta)$ imposent donc l'ordonnement des racines et des extrema attendus. \square

5.3.5 Rôle de \mathcal{T}_{ris} dans le phénomène de compression

Nous établissons ici que l'amplitude de l'échelle de temps de Ristorcelli joue un rôle décisif sur la nature compressive ou surcompressive de l'éventuelle solution onde progressive du système dynamique complet (5.6). Si une telle solution existe, ses composantes en η et \mathcal{I} coïncident nécessairement avec l'unique solution hétérocline du

sous-système (5.25). Examinons l'influence de \mathcal{T}_{ris} sur $(\eta_R, \mathcal{I}_R = f(\eta_R))$.

Les valeurs de M et β joueront un rôle, nous noterons donc le taux de compression de sortie $\eta_R = \eta_R(M, \beta; \mathcal{T}_{ris})$.

Le choix $\mathcal{T}_{ris} = 0$ conduit à $\mathcal{I}(\xi) = 1$ pour tout ξ alors que $\mathcal{T}_{ris} > 0$ implique clairement $\mathcal{I}(\xi) < \mathcal{I}_L = 1$ dans la solution hétérocline du sous-système (5.25). Ainsi, $\mathcal{I}_R = 1$ pour $\mathcal{T}_{ris} = 0$ et $\mathcal{I}_R < 1$ pour $\mathcal{T}_{ris} > 0$. Or, d'après le graphe de $f(\eta)$ caractérisant les points stationnaires, les points $(\eta_R, \mathcal{I}_R = f(\eta_R))$ atteignables dans le futur sont situés sur la partie croissante de $f(\eta)$. En conséquence, nous avons :

$$\eta_R(M, \beta, \mathcal{T}_{ris}) < \eta_R(M, \beta, \mathcal{T}_{ris} = 0). \quad (5.37)$$

Intéressons nous plus particulièrement au cas $\mathcal{T}_{ris} = 0$, de manière à exhiber une conséquence importante de la proposition (5.3.6) concernant le système complet. Considérons le nombre de Mach défini sur la deuxième onde lorsque $\mathcal{T}_{ris} = 0$, c'est à dire quand $\mathcal{I} = 1$:

$$M_a = \frac{M\eta^2}{\beta\sqrt{\mathcal{I}}} = \frac{M\eta^2}{\beta}.$$

On en déduit qu'il existe un unique $\eta_c(M, \beta) = \sqrt{\frac{\beta}{M}}$ tel que $M_a = 1$. Notons que $\eta_c(M, \beta) < 1$. Pour β dans $[0, \frac{1}{\sqrt{3}}[$, étudions alors l'existence de nombres de Mach M tels que $\eta_R(M, \beta; 0)$ soient inférieurs à $\eta_c(M, \beta)$ conduisant à $M_a(\eta_R(M, \beta; 0), \mathcal{I}_R = 1) < 1$.

Or, d'après la preuve de la proposition (5.3.6), $\mathcal{F}(\eta, \mathcal{I})$ reste négative le long de la solution hétérocline et ne s'annule qu'en les points stationnaires. Dès lors, étudier les nombres de Mach M tels que $\eta_R(M, \beta, 0) < \eta_c(M, \beta)$ revient à étudier les points (M, β) tels que $\mathcal{F}(\eta_c(M, \beta), 1) < 0$, c'est à dire :

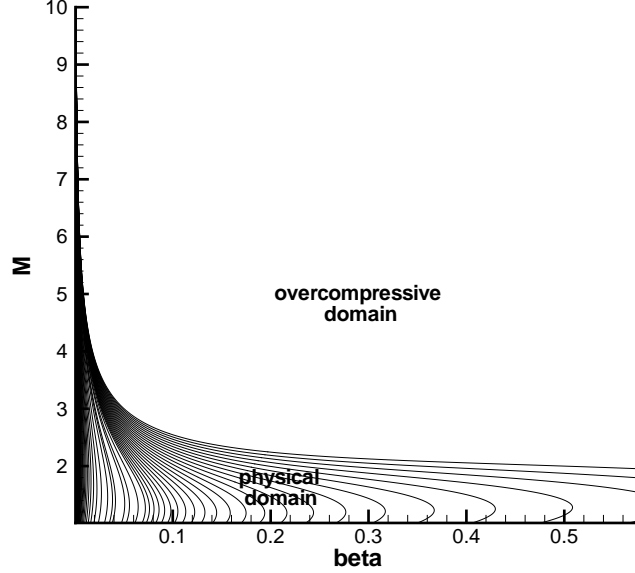
$$\mathcal{F}(\eta_c, 1) = M^2 \left(\sqrt{\frac{\beta}{M}} - 1 \right) + (1 - 3\beta^2) \left(\sqrt{\frac{M}{\beta}} - 1 \right) + \beta^2 \left(\left(\frac{M}{\beta} \right)^{\frac{3}{2}} - 1 \right) < 0. \quad (5.38)$$

Or $\lim_{M \rightarrow +\infty} \mathcal{F} \left(\sqrt{\frac{\beta}{M}}, 1 \right) = -\infty$ pour tout $\beta \in [0, \frac{1}{\sqrt{3}}[$, de sorte que M suffisamment grand convient. Cette fonction peut être facilement étudiée numériquement. La figure (5.2) représente en noir les valeurs positives de cette fonction dans le quadrant positif (β, M) . Il existe donc une courbe régulière $\beta \rightarrow M_*(\beta)$ qui sépare le quadrant positif (β, M) en deux régions : une première région $\{(\beta, M); 1 < M < M_*(\beta)\}$ telle que $M_a(\beta, M, 0) > 1$ et une deuxième région $\{(\beta, M); M > M_*(\beta)\}$ telle que $M_a(\beta, M, 0) < 1$. Ce dernier domaine représente une région où le phénomène de sur-compression arrive. On a donc le résultat suivant :

Proposition 5.3.7. *Lorsque que l'on considère $\mathcal{T}_{ris} = 0$, alors pour tout $\beta > 0$, il existe un nombre de Mach suffisamment grand à partir duquel l'hétérocline solution du système dynamique complet, si elle existe, correspond à un profil de surcompression.*

Ainsi dans le cas où $\mathcal{T}_{ris} = 0$, on est sûr d'obtenir des profils surcompressifs dès que M est grand à $\beta > 0$ fixé.

Prouvons maintenant que l'on peut alors choisir \mathcal{T}_{ris} suffisamment grande pour que l'état de sortie $(\eta_R(M, \beta; \mathcal{T}_{ris}), \mathcal{I}_R = f(\eta_R))$ soit tel que $M_a(\eta_R, \mathcal{I}_R) > 1$ pour $\beta \in$


 FIG. 5.2 – graphe de $\mathcal{F}(\eta_c, 1) \geq 0$ dans le quadrant positif (β, M)

$[0, \frac{1}{\sqrt{3}}[$ et $M > 1$ fixés. Cette propriété permet ainsi d'envisager l'existence d'un profil compressif classique. Pour cela, remarquons que d'après la propriété (5.33) de stricte décroissance de $\eta(\xi)$ dans la solution hétérocline, le changement de variable $\eta \rightarrow \xi(\eta)$ est admissible. Il est ainsi possible de comprendre $\mathcal{I}(\xi)$ comme une fonction de η . Dans la variable η , l'EDO gouvernant \mathcal{I} s'écrit :

$$d_\eta \mathcal{I} = -2\mathcal{T}_{ris} \frac{1 - 3\beta^2}{M^2} \frac{\mathcal{I}}{\eta^3} \mathcal{F}(\eta, \mathcal{I}) \geq 0, \quad (5.39)$$

avec une inégalité stricte dès que $\eta \in]\eta_R, 1[$. En effet, rappelons que $\mathcal{F}(\eta, \mathcal{I}) < 0$ en dehors des points stationnaires, le long de la solution considérée.

Intéressons nous alors à l'intervalle $[\eta_{max}, \frac{1+\eta_{max}}{2}]$ où $d_\xi \eta = \frac{1}{M} \mathcal{F} < 0$. Conformément à notre motivation, nous choisissons ici $\mathcal{T}_{ris}(\eta, \mathcal{I}(\eta))$ strictement positive, soit en introduisant sa borne inférieure \mathcal{T}_{min} :

$$0 < \mathcal{T}_{min} < \mathcal{T}_{ris}(\eta, \mathcal{I}(\eta)), \quad \eta \in \left[\eta_{max}, \frac{1 + \eta_{max}}{2} \right]. \quad (5.40)$$

On a alors le résultat suivant :

Proposition 5.3.8. *Soient $\beta \in [0, \frac{1}{\sqrt{3}}[$ et M tel que $1 < M < \infty$, alors \mathcal{T}_{ris} peut être choisie suffisamment grande dans (5.40) de telle sorte que l'état de sortie satisfasse nécessairement :*

$$M_a^R = \frac{M\eta_R^2}{\beta\sqrt{\mathcal{I}_R}} > 1.$$

La démonstration établira clairement que tous les états $(\eta(\xi), \mathcal{I}(\xi))$ le long du profil de compression vérifient $M_a(\xi) > 1$, à la condition de choisir \mathcal{T}_{ris} suffisamment grande.

Démonstration. Sur l'intervalle considéré $[\eta_{max}, \frac{1+\eta_{max}}{2}]$, on peut écrire :

$$-2 \frac{1 - 3\beta^2}{M^2} \frac{\mathcal{F}(\eta, \mathcal{I})}{\eta^3} > L > 0.$$

En utilisant la borne inférieure \mathcal{T}_{min} de \mathcal{T}_{ris} sur cet intervalle, la formule (5.39) et l'inégalité précédente conduisent à l'estimation suivante :

$$d_\eta \mathcal{I} \geq \mathcal{T}_{min} L \mathcal{I}, \quad \eta \in \left[\eta_{max}, \frac{1 + \eta_{max}}{2} \right].$$

En intégrant cette dernière inégalité entre η_{max} et $\frac{1+\eta_{max}}{2}$, on obtient :

$$\mathcal{I}(\eta_{max}) \leq \mathcal{I} \left(\frac{1 + \eta_{max}}{2} \right) e^{-\mathcal{T}_{min} L \frac{1 - \eta_{max}}{2}},$$

où $\frac{1 - \eta_{max}}{2} > 0$. En conséquence, $\mathcal{I}(\eta_{max})$ peut être rendu aussi petit que l'on veut en choisissant \mathcal{T}_{min} suffisamment grande. De plus, lorsque $\eta \in [\eta_R, \eta_{max}]$, comme $d_\eta \mathcal{I} \geq 0$ (5.39), on a nécessairement $\mathcal{I}(\eta_R) \leq \mathcal{I}(\eta_{max})$, d'où le résultat recherché. \square

5.3.6 Système linéaire à coefficients variables pour (Y_+, Y_-)

Nous étudions dans ce paragraphe le comportement en temps grand positif des solutions Y_+ et Y_- du système linéaire à coefficients variables (5.27) construit sur l'unique solution onde progressive du sous-système autonome (5.25). Les solutions (Y_+, Y_-) étudiées sont astreintes à la condition asymptotique (5.28) exprimée en $-\infty$. Nous montrons que dès que $M_a(\eta_R, \mathcal{I}_R) < 1$, *i.e.* dans le cas d'une échelle de temps de Ristorcelli prenant des valeurs trop petites, l'existence d'une infinité de solutions $Y_+(\xi)$ et $Y_-(\xi)$ obéissant à (5.28) et atteignant des valeurs $Y_+(+\infty)$ et $Y_-(+\infty)$ toutes distinctes.

En revanche, lorsque \mathcal{T}_{ris} est choisie suffisamment grande de sorte à satisfaire $M_a(\eta_R, \mathcal{I}_R) > 1$, nous établissons l'existence et l'unicité de la solution. De plus, $Y_+(\xi)$ et $Y_-(\xi)$ sont montrés dans ce cas garder un signe constant, à savoir respectivement positif et négatif, de sorte que la formule de représentation (5.19) garantit que la grandeur dimensionnée $\overline{R}_{12}(\xi)$ garde le même signe que R_{12}^L le long du profil.

Notons que nous excluons de l'analyse le cas exceptionnel $M_a(\eta_R, \mathcal{I}_R) = 1$ réclamant des développements supplémentaires dont l'intérêt nous a semblé artificiel.

Nouvelle écriture

Nous allons réécrire le système 2×2 que doit vérifier le couple (Y_+, Y_-) à l'aide du nombre de Mach exprimé sur la deuxième onde M_a . On suppose donc ici résolu en ξ le sous-système en (η, \mathcal{I}) grâce à la proposition (5.3.6) qui assure l'unicité d'une telle solution onde progressive pour ces deux inconnues. Dès lors, le nombre de Mach

M_a associé à la deuxième onde peut être construit à partir de cette unique solution en posant :

$$M_a(\xi) = \frac{M\eta^2(\xi)}{\beta\sqrt{\mathcal{I}(\xi)}}. \quad (5.41)$$

On reconnaît l'expression de $M_a(\xi)$ dans le système (5.27) :

$$\begin{cases} d_\xi Y_+ = \frac{\mu M}{2\nu} \frac{M_a(\xi) - 1}{M_a^2(\xi)} ((M_a(\xi) + 1)Y_+ + (M_a(\xi) - 1)Y_-), \\ d_\xi Y_- = \frac{\mu M}{2\nu} \frac{M_a(\xi) + 1}{M_a^2(\xi)} ((M_a(\xi) + 1)Y_+ + (M_a(\xi) - 1)Y_-). \end{cases} \quad (5.42)$$

Notons que par construction (voir la condition (4.55)), nous avons :

$$M_a(-\infty) = \lim_{\xi \rightarrow -\infty} M_a(\xi) > 1, \quad (5.43)$$

alors que $M_a(+\infty) = \lim_{\xi \rightarrow +\infty} M_a(\xi)$ peut être supérieur ou inférieur à un, selon le choix de l'échelle de temps de Ristorcelli. La régularité de $\eta(\xi)$ et $\mathcal{I}(\xi)$ assure la régularité de la fonction $M_a(\xi)$. Énonçons un résultat de monotonie de la fonction $M_a(\xi)$ pour ξ suffisamment grand :

Lemme 5.3.9. *Considérons la famille de solutions onde progressive paramétrée par $\mathcal{T}_{ris} \in \mathbb{R}_+$. Il existe $L(\mathcal{T}_{ris}) > 0$ qui peut être rendu aussi grand que l'on veut en choisissant \mathcal{T}_{ris} suffisamment grande tel que :*

$$\begin{cases} d_\xi M_a(\eta, \mathcal{I})(\xi) > 0, & \forall |\xi| < L, \\ d_\xi M_a(\eta, \mathcal{I})(\xi) < 0, & \forall |\xi| > L. \end{cases}$$

La preuve de ce résultat est donnée ici.

Démonstration. Nous rappelons que nécessairement $\mathcal{F}(\eta, \mathcal{I}) < 0$ le long de la trajectoire en (η, \mathcal{I}) , tout en s'annulant aux deux points stationnaires. En conséquence de l'équation (5.39), l'équation exprimée en variable indépendante η pour le Mach évalué sur la deuxième onde $M_a(\eta, \mathcal{I}(\eta))$ est donnée par :

$$d_\eta M_a(\eta, \mathcal{I}) = M_a(\eta, \mathcal{I}) \left(\mathcal{T}_{ris} \frac{1 - 3\beta^2 \mathcal{F}(\eta, \mathcal{I})}{M^2} \frac{1}{\eta^3} + \frac{2}{\eta} \right).$$

En conséquence, si \mathcal{T}_{ris} est suffisamment grande alors $d_\eta M_a(\eta, \mathcal{I}) < 0$ pour η différent de η_R ou $\eta_L = 1$, et $d_\eta M_a(\eta, \mathcal{I}) > 0$ pour η suffisamment proche de η_R ou η_L . Le résultat attendu exprimé en la variable ξ s'en déduit en rappelant que $\eta \rightarrow \xi(\eta)$ est strictement décroissante. \square

Premières propriétés

Le système (5.42) est un système linéaire à coefficients variables que l'on peut écrire sous la forme condensée :

$$d_\xi \mathbf{Y} = \mathcal{A}(\xi) \mathbf{Y}, \quad \mathbf{Y} = {}^t(Y_+, Y_-), \quad \xi \in \mathbb{R}. \quad (5.44)$$

Il est classiquement connu [70] que pour toute donnée initiale prescrite $(Y_+(0), Y_-(0))$ à l'instant $t = 0$, la solution d'un tel système linéaire existe globalement en temps et est unique. Dans notre cas, c'est le comportement asymptotique en temps grand de ces solutions qui nous intéresse. Nous allons maintenant donner quelques propriétés du système (5.42). Remarquons que les points stationnaires de (5.42) sont tels que :

$$(M_a^s + 1)Y_+^s + (M_a^s - 1)Y_-^s = 0. \quad (5.45)$$

En conséquence, on a le lemme suivant :

Lemme 5.3.10. *Les points stationnaires du système(5.42) sont tels que en $-\infty$:*

$$Y_+Y_-(-\infty) < 0,$$

et en $+\infty$ deux cas sont possibles :

$$\begin{cases} Y_+Y_-(+\infty) \leq 0, & \text{si } M_a(+\infty) > 1, \\ Y_-Y_+(+\infty) \geq 0, & \text{sinon.} \end{cases} \quad (5.46)$$

Démonstration. En $-\infty$, le résultat provient de (5.43). En $+\infty$, le résultat s'obtient de manière analogue sur des considérations de signe de $M_a(+\infty) - 1$. \square

D'autres propriétés importantes dans la suite concernent le produit Y_+Y_- , le rapport $\frac{Y_+}{Y_-}$ ou son inverse.

Lemme 5.3.11. *Les solutions de (5.42) sont telles que le produit $(Y_+Y_-)(\xi)$ croît avec $\xi \in \mathbb{R}$.*

Démonstration. Le résultat s'obtient en remarquant que l'équation gouvernant $Y_+Y_-(\xi)$ est la suivante :

$$d_\xi Y_+Y_- = \frac{\mu}{2\nu} \frac{M}{M_a(\xi)^2} \left((M_a(\xi) + 1)Y_+ + (M_a(\xi) - 1)Y_- \right)^2 \geq 0, \quad \xi \in \mathbb{R}. \quad (5.47)$$

\square

La conséquence immédiate de ce lemme et du précédent est que le produit Y_+Y_- étant négatif en $-\infty$, il peut s'annuler au plus une fois pour garder ensuite un signe constant positif. Cependant pour obtenir un état de sortie non surcompressif en $+\infty$, il doit toujours rester négatif d'après (5.46). En d'autres termes, il est attendu que dans un profil compressif $Y_+(\xi)$ et $Y_-(\xi)$ gardent un signe constant en rappelant que $Y_+Y_-(-\infty) < 0$. En revanche, dans un profil surcompressif $Y_+(\xi)$ ou $Y_-(\xi)$ change nécessairement de signe. Puisque nous avons exclu le cas exceptionnel $M_a(+\infty) = 1$, on se place dans le cas :

$$|M_a(+\infty) - 1| > \epsilon_0. \quad (5.48)$$

pour un certain paramètre $\epsilon_0 > 0$ fixé, suffisamment petit. Nous rappelons de plus la propriété établie par le lemme (5.3.9) de monotonie de $M_a(\xi)$:

$$d_\xi M_a(\xi) < 0, \quad \forall \xi > L, \quad (5.49)$$

pour une constante L suffisamment grande. Voyons maintenant le rapport $\frac{Y_+}{Y_-}$ et son inverse.

Lemme 5.3.12. *Les rapports $\frac{Y_+}{Y_-}$ et $\frac{Y_-}{Y_+}$ vérifient les équations suivantes :*

$$\begin{cases} d_\xi \left(\frac{Y_+}{Y_-} \right) = \frac{\mu}{2\nu} \frac{M}{M_a^2(\xi)} \left((M_a(\xi) - 1)^2 - (M_a(\xi) + 1)^2 \left(\frac{Y_+}{Y_-} \right)^2 \right), \\ d_\xi \left(\frac{Y_-}{Y_+} \right) = \frac{\mu}{2\nu} \frac{M}{M_a^2(\xi)} \left((M_a(\xi) + 1)^2 - (M_a(\xi) - 1)^2 \left(\frac{Y_-}{Y_+} \right)^2 \right). \end{cases}$$

Démonstration. Il s'agit de simples manipulations algébriques des équations du système (5.42). \square

Dès lors, considérons les changements de variable suivants :

$$\begin{cases} t(\xi) = \int_0^\xi \frac{\mu}{2\nu} \frac{M(M_a(s) + 1)^2}{M_a^2(s)} ds, & \xi \in \mathbb{R}, \\ \theta(\xi) = \int_L^\xi \frac{\mu}{2\nu} \frac{M(M_a(s) - 1)^2}{M_a^2(s)} ds, & \xi > L. \end{cases} \quad (5.50)$$

$$\begin{cases} \theta(\xi) = \int_L^\xi \frac{\mu}{2\nu} \frac{M(M_a(s) - 1)^2}{M_a^2(s)} ds, & \xi > L. \end{cases} \quad (5.51)$$

Le changement de variable (5.51) n'est admissible que si $M_a(\xi) \neq 1$, c'est la raison pour laquelle on impose (5.48) telle que, quitte à prendre une constante L éventuellement plus grande que celle figurant en (5.49), on assure que $M_a(\xi) - 1$ garde un signe fixe pour tout $\xi > L$ et ne peut donc pas s'annuler. On a alors le lemme suivant :

Lemme 5.3.13. *Si l'on considère les changements de variables admissibles (5.50) et (5.51), alors les rapports $r_1 = \frac{Y_+}{Y_-}$ et $r_2 = \frac{Y_-}{Y_+}$ sont gouvernés par les deux équations de Riccati suivantes :*

$$\begin{cases} d_t r_1 = q^2(t) - r_1^2, & \text{avec } q(t) = \frac{M_a(\xi(t)) - 1}{M_a(\xi(t)) + 1}, \quad \xi \in \mathbb{R}, \\ d_\theta r_2 = p^2(\theta) - r_2^2, & \text{avec } p(\theta) = \frac{M_a(\xi(\theta)) + 1}{M_a(\xi(\theta)) - 1}, \quad \xi > L. \end{cases} \quad (5.52)$$

$$\begin{cases} d_\theta r_2 = p^2(\theta) - r_2^2, & \text{avec } p(\theta) = \frac{M_a(\xi(\theta)) + 1}{M_a(\xi(\theta)) - 1}, \quad \xi > L. \end{cases} \quad (5.53)$$

Soulignons de nouveau que L choisi suffisamment grand assure que $M_a(\xi) - 1$ ne s'annule pas pour $\xi > L$. En conséquence, $p(\theta)$ est bornée. De plus, la régularité de $M_a(\xi)$ implique que les fonctions $q(t)$ et $p(\theta)$ sont régulières.

Les équations en r_1 et en r_2 joueront un rôle distinct selon que $M_a(+\infty) > 1$ ou $M_a(+\infty) < 1$. Selon le changement de variable en t ou en θ ainsi retenu, on déduit une équation qui nous sera particulièrement utile par la suite, sur Y_- pour le changement de variable en t et sur Y_+ pour le changement de variable en θ :

$$\begin{cases} d_t Y_- = (r_1(t) + q(t)) Y_-, & t \in \mathbb{R}, \end{cases} \quad (5.54)$$

$$\begin{cases} d_\theta Y_+ = (r_2(\theta) + p(\theta)) Y_+, & \theta > \theta(L), \end{cases} \quad (5.55)$$

avec $r_1(t)$ (respectivement $r_2(\theta)$) solution de (5.52) (respectivement (5.53)). Ces équations seront importantes pour l'étude du comportement asymptotique en temps de Y_+ et Y_- . Puisque $r_1(t)$ (respectivement $r_2(\theta)$) peut être étudié indépendamment de Y_+ et Y_- , la connaissance du comportement en temps grand de $r_1(t) + q(t)$ (respectivement $r_2(\theta) + p(\theta)$) suggère clairement à partir de (5.54) une estimation sur le comportement en temps grand de Y_- puis de $Y_+ = r_1 Y_-$ (respectivement de Y_+ puis $Y_- = r_2 Y_+$). Il faut donc nous intéresser au comportement asymptotique en temps d'une équation de Riccati de la forme (5.52) ou (5.53).

Comportement asymptotique de l'équation de Riccati

Nous nous intéressons ici au comportement en temps positif des solutions de l'équation de Riccati suivante :

$$r' = q^2(t) - r^2, \quad r(0) = r_0 \in \mathbb{R}, \quad (5.56)$$

où $q(t)$ est une fonction régulière satisfaisant :

$$\|q\|_{L^\infty(\mathbb{R}_+)} < +\infty, \quad q(0) > 0, \quad \lim_{t \rightarrow +\infty} |q(t)| > 0. \quad (5.57)$$

Notons qu'ici q réfère indépendamment à la fonction du temps intervenant dans (5.52) ou (5.53). Nous verrons que les conditions exigées en (5.57) seront vérifiées selon que l'on travaille avec $M_a(+\infty) > 1$ ou $M_a(+\infty) < 1$.

Remarquons qu'en conséquence de (5.57), il existe une constante L suffisamment grande et un paramètre $\epsilon(L) > 0$ suffisamment petit, tels que :

$$|q(t)| > \epsilon(L), \quad \forall t > L. \quad (5.58)$$

Nous rappelons que, conformément à la section précédente, nous excluons le cas exceptionnel $\lim_{t \rightarrow +\infty} q(t) = 0$ qui constitue un cas peu intéressant. Pour étudier le comportement asymptotique des solutions de (5.56), nous avons besoin d'une propriété supplémentaire :

$$q^2(t) \text{ est strictement croissante en } t, \quad \forall t > T, \quad T \text{ suffisamment grand.} \quad (5.59)$$

Conformément à (5.58), nous choisissons T suffisamment grand pour que l'on ait en plus $q(t) > 0$, pour tout $t > T$. Nous verrons en temps utile que la propriété de monotonie (5.59) est satisfaite dans le contexte des équations (5.52) et (5.53). Concernant le comportement asymptotique des solutions de l'équation de Riccati (5.56), nous avons le résultat essentiel suivant :

Proposition 5.3.14. *Sous la condition (5.57), les solutions de (5.56) se scindent en trois classes distinctes :*

- (i) *des solutions bornées pour tout temps fini et telles que $r(t) > 0$ pour tout $t > t(r_0)$ avec $t(r_0)$ un temps fini dépendant de la donnée initiale r_0 ,*
- (ii) *une unique solution $r^s(t)$ bornée pour tout temps fini et telle que $r^s(t) < 0$ pour tout $t \geq 0$,*
- (iii) *des solutions $r(t)$ qui explosent pour un temps fini $t(r_0)$, avec $\lim_{t \rightarrow t(r_0)^\pm} r(t) = \pm\infty$ et $r(t) > 0$ pour tout $t > t(r_0)$.*

Si l'on se donne une solution de classe (i) avec pour donnée initiale \bar{r}_0 et une solution de classe (iii) avec pour donnée initiale \underline{r}_0 , alors $\underline{r}_0 < \bar{r}_0$ et la donnée initiale $r^s(0)$ pour la solution de classe (ii) appartient à $[\underline{r}_0, \bar{r}_0]$. Le graphe de r^s séparent les graphes des solutions de classe (i) de ceux des solutions de classe (iii).

Si l'on suppose en plus (5.59), alors les solutions de classe (i) et (iii) sont telles que :

$$0 < \lim_{t \rightarrow +\infty} r(t) = |q(+\infty)| < \infty, \quad 0 < \lim_{t \rightarrow +\infty} \int^t (|q(s)| - r(s)) ds < \infty. \quad (5.60)$$

En revanche, l'unique solution $r^s(t)$ de la classe (ii) vérifie :

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} r^s(t) = -|q(+\infty)|, \quad -\infty < \lim_{t \rightarrow +\infty} \int^t (|q(s)| + r^s(s)) ds < 0. \quad (5.61)$$

Le graphe de la solution r^s est appelé une séparatrice (voir [38]). La preuve de cette proposition est donnée dans l'article [4] donné en annexe A. Soulignons que les estimations (5.60) et (5.61) sont précisément motivées par les formules de représentation (5.54) et (5.55)

La proposition (5.3.14) permet une caractérisation géométrique représentée sur la figure (5.3), valable pour des temps t suffisamment grands de sorte que (5.58) et (5.59) soient satisfaites. Introduisons à cette fin, dans le plan (r, t) , les courbes :

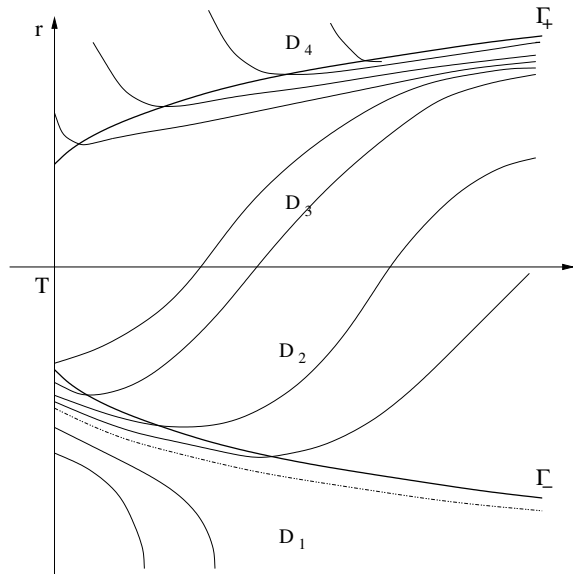


FIG. 5.3 – Flot de l'équation de Riccati

$$\Gamma_-(t) = \{t \geq T; -|q(t)|\}, \quad \Gamma_+ = \{t \geq T; +|q(t)|\}, \quad (5.62)$$

respectivement strictement décroissante et strictement croissante. Leurs graphes ainsi que l'axe des temps t séparent le plan (r, t) en quatre domaines $\{D_i\}_{1 \leq i \leq 4}$ (voir figure (5.3)). Les propriétés des solutions de (5.56) impliquent les propriétés géométriques suivantes. Tout d'abord Γ_- (respectivement l'axe t) est une condition d'entrée pour D_2 (respectivement une condition de sortie) possédant la propriété que toute trajectoire dans ce domaine rentre dans le domaine 3 en temps fini (solution de classe (i)). De plus, une trajectoire dans D_1 (solution de classe (iii)) quitte ce domaine en temps fini le long d'une asymptote verticale pour successivement rentrer dans D_4 le long de cette même asymptote puis dans D_3 . Finalement, le domaine D_3 est positivement invariant puisque le flot pointe à l'intérieur de ce même domaine D_3 : en effet, Γ_+ où la pente du flot devient nulle, est une fonction strictement croissante de t . Autrement dit, étant donnée une solution r de classe (i) ou (iii), il existe un temps fini $t(r_0) > 0$ suffisamment grand tel que :

$$0 < r(t) < |q(t)|, \quad r'(t) > 0, \quad \forall t \geq t(r_0).$$

Seule l'unique solution r^s de classe (ii), avec $r^s(t) < 0$ n'obéit pas à l'assertion précé-

dente, mais satisfait :

$$r^s(t) < -|q(t)| < 0, \quad \forall t \geq 0.$$

sinon $r^s(t)$ finirait toujours par entrer dans le domaine D_3 et rester positive. Grâce à la proposition essentielle (5.3.14), on va pouvoir qualifier le comportement asymptotique de la différence de toute trajectoire en Y_+ ou Y_- par rapport à une solution de référence Y_{\pm}^* .

Comportement asymptotique de Y_{\pm}

Dans ce paragraphe, nous obtenons le résultat attendu ; à savoir que tant que $M_a(+\infty) > 1$, *i.e.* tant que les conditions d'entrelacement de Lax (4.59) sont satisfaites grâce à une échelle de temps de Ristorcelli suffisamment grande, alors il existe une unique solution onde progressive du système dynamique complet (5.6) avec $Y_+(\xi) > 0$ et $Y_-(\xi) < 0$ pour tout $\xi \in \mathbb{R}$.

En revanche, dès que $M_a(+\infty) < 1$, *i.e.* dans le régime surcompressif, nous obtenons une infinité de solutions onde progressive connectant des valeurs $Y_+(+\infty)$ et $Y_-(+\infty)$ toutes distinctes.

En dehors de ce résultat, il importe de retenir que dans le seul cas d'intérêt physique $M_a(+\infty) > 1$, les solutions $Y_+(\xi)$ et $Y_-(\xi)$ du système linéaire à coefficients variables (5.27) explosent **toutes** en temps positif **sauf une**, précisément la solution qu'il convient de retenir pour définir l'onde progressive recherchée. Cette dichotomie dictera la stratégie d'intégration numérique du système linéaire (5.27) qu'il faudra développer afin d'approcher les inconnues $Y_+(+\infty)$ et $Y_-(+\infty)$.

Ce paragraphe a pour résultat principal le théorème suivant :

Théorème 5.3.15.

1. *Supposons que $\lim_{\xi \rightarrow +\infty} M_a(+\infty) > 1$, alors il existe exactement une seule solution \mathbf{Y}^s uniformément bornée en temps. Cette solution satisfait $Y_+^s(\xi) > 0$, $Y_-^s(\xi) < 0$, pour tout $\xi \in \mathbb{R}$. De plus, $Y_+^s(\xi)$ (respectivement $Y_-^s(\xi)$) tend vers une limite positive $Y_+^s(+\infty)$ (respectivement une limite négative $Y_-^s(+\infty)$) quand ξ tend vers $+\infty$. Ces deux limites étant liées par :*

$$Y_+^s(+\infty) = -\frac{M_a(+\infty) - 1}{M_a(+\infty) + 1} Y_-^s(+\infty).$$

2. *Supposons que $\lim_{\xi \rightarrow +\infty} M_a(+\infty) < 1$, alors toutes les solutions \mathbf{Y} restent uniformément bornées en temps. Étant donnée \mathbf{Y} , il existe un temps fini $\xi(\mathbf{Y})$, qui est unique et tel que $Y_+(\xi)Y_-(\xi) > 0$ pour tout $\xi > \xi(\mathbf{Y})$. De plus, $Y_+(\xi)$ (respectivement $Y_-(\xi)$) tend vers une limite non nulle $l_+(\mathbf{Y})$ (respectivement une limite non nulle $l_-(\mathbf{Y})$), quand ξ tend vers $+\infty$. Pour deux solutions indépendantes \mathbf{Y}^1 et \mathbf{Y}^2 , $l_+(\mathbf{Y}^1) \neq l_+(\mathbf{Y}^2)$ et $l_-(\mathbf{Y}^1) \neq l_-(\mathbf{Y}^2)$ mais ces limites satisfont toujours :*

$$\frac{l_+(\mathbf{Y}^1)}{l_-(\mathbf{Y}^1)} = \frac{l_+(\mathbf{Y}^2)}{l_-(\mathbf{Y}^2)} = -\frac{M_a(+\infty) - 1}{M_a(+\infty) + 1} > 0.$$

La preuve complète de ce théorème se trouve dans l'article [4] donné en annexe A. Il permet de prouver que le respect des conditions d'entrelacement de Lax est essentiel pour garantir l'unicité de la solution du système complet. Dans le cas contraire

on obtient en effet une infinité de solutions toutes différentes les unes des autres connectant chacune des couples $(Y_+(+\infty), Y_-(+\infty))$ distincts, ce qui est inacceptable physiquement. Nous allons donner quelques éléments de démonstration dans la suite. La démonstration de ce théorème nécessite le premier résultat suivant :

Proposition 5.3.16. *Pour toute solution donnée \mathbf{Y} , sauf au plus une, il existe un temps fini $\xi(\mathbf{Y})$, qui est unique, tel que $Y_+Y_-(\xi) \geq 0$ pour tout $\xi \geq \xi(\mathbf{Y})$ avec une stricte inégalité dès que $\xi > \xi(\mathbf{Y})$.*

Donnons une conséquence importante de ce résultat. Toute solution donnée \mathbf{Y} , sauf au plus une, satisfait $Y_+Y_-(+\infty) > 0$. En effet, selon l'équation (5.47), le produit $Y_+Y_-(\xi)$ est une fonction strictement croissante de ξ . Ainsi, comme $Y_+Y_-(\infty) < 0$, dès que celui-ci s'annule en un temps $\xi(\mathbf{Y})$, il reste positif pour tout $\xi \geq \xi(\mathbf{Y})$. Or, selon (5.46), les points critiques sont tels que $Y_+Y_-(+\infty) < 0$ pour $M_a(+\infty) > 1$ (pas d'accident de surcompression qui assure l'unicité de la solution selon le théorème (5.3.15)). Ainsi, quand $M_a(+\infty) > 1$, il existe au plus une solution \mathbf{Y} permettant de connecter le point critique $\mathbf{Y}(-\infty)$ dans le passé au point critique désiré $\mathbf{Y}(+\infty)$ dans le futur avec la propriété que $Y_+Y_-(+\infty) < 0$. Inversement, quand $M_a(+\infty) < 1$, une infinité de solutions \mathbf{Y} peuvent exister.

Démonstration. La démonstration se base sur la proposition (5.3.14) donnant le comportement des solutions de l'équation de Riccati en $r = \frac{Y_+}{Y_-}$ et qui assure qu'il existe toujours un temps pour lequel toutes les trajectoires $r = \frac{Y_+}{Y_-}$ deviennent positives (et donc le produit) sauf pour au plus une seule r^s . \square

Pour démontrer la première partie du théorème (5.3.15), il est judicieux d'étudier l'évolution en temps de la différence entre deux solutions arbitraires. On se donne à cette fin, n'importe quelle trajectoire de référence \mathbf{Y}^* . On définit alors, pour toute solution \mathbf{Y} :

$$\Delta\{\mathbf{Y}\}(\xi) = {}^t(\Delta_+\{\mathbf{Y}\}(\xi), \Delta_-\{\mathbf{Y}\}(\xi)) = \mathbf{Y} - \mathbf{Y}^*, \quad \xi \in \mathbb{R}.$$

De manière évidente on a $\lim_{\xi \rightarrow -\infty} \Delta\{\mathbf{Y}\} = 0$ pour toute solution \mathbf{Y} donnée. De plus, grâce au théorème de la variété centrale, on est capable d'évaluer comment commence la trajectoire de Δ_{\pm} . En effet, les trajectoires en $\xi = -\infty$ appartiennent, pour ξ suffisamment proche de $-\infty$, au sous-espace T^i engendré par r_1^L et r_2^L tangent à la variété instable \mathcal{W}^i . Ces vecteurs ont été donnés par (5.25). On en déduit, pour toute solution \mathbf{Y} :

$$\begin{cases} Y_+ = Y_+^L + \epsilon(M_a^L - 1) + \mathcal{O}(\epsilon^2), \\ Y_- = Y_-^L + \epsilon(M_a^L + 1) + \mathcal{O}(\epsilon^2), \end{cases} \quad (5.63)$$

soit, après un développement limité en ϵ :

$$\Delta_+\{\mathbf{Y}\} = \left(\frac{M_a^L - 1}{M_a^L + 1} + \mathcal{O}(\epsilon - \epsilon^*) \right) \Delta_-\{\mathbf{Y}\},$$

suffisamment proche du point critique en $\xi = -\infty$. Cependant, comme \mathbf{Y} et \mathbf{Y}^* sont deux solutions indépendantes du système linéaire (5.44), $\Delta_+\{\mathbf{Y}\}$ et $\Delta_-\{\mathbf{Y}\}$ ne

peuvent s'annuler en même temps. En conséquence, on en déduit que, pour toute solution \mathbf{Y} distincte de \mathbf{Y}^* , le produit $\Delta_+\{\mathbf{Y}\}\Delta_-\{\mathbf{Y}\}(\xi) > 0$ pour tout $\xi < -L(\mathbf{Y})$. De manière à étendre ce résultat pour tout ξ , remarquons que $\Delta\mathbf{Y}$ est solution du système linéaire suivant ($\mathcal{A}(\xi)$ définie en (5.44)) :

$$d_\xi \Delta\{\mathbf{Y}\} = \mathcal{A}(\xi)\Delta\{\mathbf{Y}\}, \quad \xi \in \mathbb{R}.$$

pour lequel nous déduisons l'inégalité suivante sur le produit $\Delta_+\{\mathbf{Y}\}\Delta_-\{\mathbf{Y}\}(\xi)$, analogue à celle trouvée pour $Y_+Y_-(\xi)$:

$$d_\xi (\Delta_+\{\mathbf{Y}\}\Delta_-\{\mathbf{Y}\}) (\xi) \geq 0.$$

Nous avons ainsi prouvé le lemme suivant :

Lemme 5.3.17. *Soit deux solutions indépendantes Y^1 et Y^2 données, alors $(Y_+^2 - Y_+^1)(\xi)(Y_-^2 - Y_-^1)(\xi) > 0$ pour tout temps $\xi \in \mathbb{R}$.*

En conséquence, on a le résultat très important que $\Delta_+\{\mathbf{Y}\}(\xi)$ et $\Delta_-\{\mathbf{Y}\}(\xi)$ garde le même signe constant pour tout ξ , soit positif, soit négatif. Ce signe étant donné par la donnée initiale $\mathbf{Y}(0)$ et $\mathbf{Y}^*(0)$ en (5.63). Nous pouvons maintenant énoncer un résultat sur le comportement asymptotique de la différence entre deux solutions à la base de la preuve du théorème (5.3.15).

Proposition 5.3.18.

1. *Supposons $\lim_{\xi \rightarrow +\infty} M_a(\xi) > 1$, alors pour toute solution \mathbf{Y} , les différences $|\Delta_+\{\mathbf{Y}\}|$ et $|\Delta_-\{\mathbf{Y}\}|$ tendent toutes les deux vers $+\infty$ avec ξ .*
2. *Supposons $\lim_{\xi \rightarrow +\infty} M_a(\xi) < 1$, alors pour toute solution \mathbf{Y} donnée, la différence $|\Delta_+\{\mathbf{Y}\}|$ (respectivement $|\Delta_-\{\mathbf{Y}\}|$) tend vers une limite finie positive $|d_+(\mathbf{Y})|$ (respectivement $|d_-(\mathbf{Y})|$) quand ξ tend vers $+\infty$. De plus, $d_\pm(\mathbf{Y}^1) \neq d_\pm(\mathbf{Y}^2)$ pour toute paire de solutions indépendantes $(\mathbf{Y}^1, \mathbf{Y}^2)$.*

Dans les deux cas, tous les rapports $|\Delta_+\{\mathbf{Y}\}|/|\Delta_-\{\mathbf{Y}\}|$ tendent vers la même limite finie :

$$\lim_{\xi \rightarrow +\infty} \frac{|\Delta_+\{\mathbf{Y}\}|}{|\Delta_-\{\mathbf{Y}\}|}(\xi) = \left| \frac{M_a(+\infty) - 1}{M_a(+\infty) + 1} \right| > 0.$$

La démonstration de ce résultat se trouve dans l'article [4] donné en annexe A. L'idée est ici d'utiliser le théorème sur les solutions de l'équation de Riccati (5.3.14) appliqué aux rapports $|\Delta_+\{\mathbf{Y}\}|/|\Delta_-\{\mathbf{Y}\}|$ ou l'inverse. Selon le lemme (5.3.17) sur le produit de ces deux grandeurs qui est toujours positif pour tout $\xi \in \mathbb{R}$, les deux rapports sont aussi toujours strictement positifs et constituent des solutions de classe (i) des équations de Riccati qui les gouvernent (respectivement les équations (5.52) et (5.53)), à condition de prouver que les fonctions $q^2(t)$ et $p^2(\theta)$ sont strictement croissantes. Ce résultat se prouve aisément pour le rapport $|\Delta_+\{\mathbf{Y}\}|/|\Delta_-\{\mathbf{Y}\}|$ avec le changement de variable en t (5.50) et la fonction $q^2(t)$ dans le cas où $M_a(+\infty) < 1$. Dans le cas contraire $M_a(+\infty) > 1$, il faut utiliser le rapport $|\Delta_-\{\mathbf{Y}\}|/|\Delta_+\{\mathbf{Y}\}|$ avec le changement de variable en θ (5.51) et la fonction $p^2(\theta)$. Rappelons en effet que ce changement de variable n'est valable que pour $\xi > L$, ce qui est suffisant car nous regardons le comportement asymptotique et $M_a(+\infty) > 1$, soit $M_a(\xi) > 1$ pour ξ

suffisamment grand. Il s'agit alors d'utiliser les résultats asymptotiques donnés en fin de proposition sur les solutions de l'équation de Riccati (5.3.14) pour trouver une limite explicite pour $\Delta_{-}\{\mathbf{Y}\}$ avec le changement de variable en t selon l'équation (5.54) et $\Delta_{+}\{\mathbf{Y}\}$ avec le changement de variable en θ selon l'équation (5.55). On en déduit alors les limites des différences $\Delta_{\pm}\{\mathbf{Y}\}$ quand ξ tend vers $+\infty$. Enfin, le fait que les limites soient toutes différentes dans le cas $M_a(+\infty) < 1$ s'obtient par contradiction grâce au lemme (5.3.17).

Un corollaire se déduit de la proposition (5.3.18) et permet de prouver la première partie du théorème (5.3.15).

Corollaire 5.3.19. *Supposons que $M_a(+\infty) > 1$, alors les solutions \mathbf{Y} se scindent en trois classes distinctes :*

- (I) *des solutions avec $Y_{-}(\xi) < 0$ pour tout $\xi \in \mathbb{R}$ et $Y_{+}(\xi) < 0$ pour tout $\xi > \xi(\mathbf{Y})$, telles que $\lim_{\xi \rightarrow +\infty} Y_{+}(\xi) = \lim_{\xi \rightarrow +\infty} Y_{-}(\xi) = -\infty$,*
- (II) *une unique solution avec $Y_{+}^s(\xi) > 0$ et $Y_{-}^s(\xi) < 0$ pour tout $\xi \in \mathbb{R}$ et possédant des limites finies $\lim_{\xi \rightarrow +\infty} Y_{\pm}^s(\xi)$,*
- (III) *des solutions avec $Y_{+}(\xi) > 0$ pour tout $\xi \in \mathbb{R}$ et $Y_{-}(\xi) > 0$ pour $\xi > \xi(\mathbf{Y})$ et telles que $\lim_{\xi \rightarrow +\infty} Y_{+}(\xi) = \lim_{\xi \rightarrow +\infty} Y_{-}(\xi) = +\infty$.*

Les classes (I) et (III) sont non vides.

Nous renvoyons encore à l'article [4], donné en annexe A, pour une démonstration détaillée. En voici le principe. Remarquons que, puisque le signe de $\Delta_{\pm}\{\mathbf{Y}\}$ est constant et peut être soit positif soit négatif (lemme (5.3.17)), la proposition (5.3.18) nous permet d'affirmer que les solutions \mathbf{Y} se scindent en deux classes pour lesquelles $\lim_{\xi \rightarrow +\infty} \Delta_{\pm} = +\infty$ et $\lim_{\xi \rightarrow +\infty} \Delta_{\pm} = -\infty$. Ce résultat est vrai pour toute solution \mathbf{Y}^* . Si l'on choisit alors \mathbf{Y}^s comme solution de référence (il en existe au plus une uniformément bornée en temps), alors cela implique nécessairement que toute solution \mathbf{Y} donnée, sauf au plus une, explose en temps avec soit $\lim_{\xi \rightarrow +\infty} |Y_{+}| = +\infty$ ou $\lim_{\xi \rightarrow +\infty} |Y_{-}| = +\infty$. En fait, $Y_{+}(\xi)$ et $Y_{-}(\xi)$ explosent toujours simultanément et avec le même signe. En effet, l'équation (5.47) implique que $Y_{+}Y_{-}(\xi) > Y_{+}Y_{-}(-\infty)$ qui est borné et négatif. On en déduit que ce produit ne peut pas tendre vers $-\infty$ et que, en conséquence, on ne peut pas avoir des limites de signes opposées pour $Y_{+}(\xi)$ et $Y_{-}(\xi)$ quand ξ tend vers $+\infty$. De plus, lorsque $M_a(+\infty) > 1$, $|(M_a(\xi) + 1)Y_{+}(\xi) + (M_a(\xi) - 1)Y_{-}(\xi)|$ tend vers $+\infty$ dès que $Y_{+}(\xi)$ ou $Y_{-}(\xi)$ explose en temps. Or, on retrouve ce terme dans les deux équations (5.42) sur Y_{+} et Y_{-} , ce qui implique que ces deux quantités tendent vers l'infini en même temps. La proposition (5.3.16) permet d'obtenir les deux signes et que les solutions \mathbf{Y} , sauf au plus une, se scindent en deux classes (I) et (III). Pour l'unique solution \mathbf{Y}^s , il est facile de prouver par contradiction que nécessairement $Y_{+}^s(\xi) > 0$ et $Y_{-}^s(\xi) < 0$. En effet, dans le cas contraire, la proposition (5.3.16) implique qu'il existe alors un temps tel que le produit devient positif et donc le rapport aussi. Le rapport constitue alors une solution de classe (i) de l'équation de Riccati, ce qui prouve que $\lim_{\xi \rightarrow +\infty} |Y_{+}^s(\xi)| = \lim_{\xi \rightarrow +\infty} |Y_{-}^s(\xi)| = +\infty$, puisque alors il suffit d'utiliser le changement de variable en θ (5.51) et l'équation (5.55) sur $Y_{+}(\theta)$ correspondante, pour voir que le comportement asymptotique donné par la proposition (5.3.14) sur l'équation de Riccati avec le rapport $\frac{Y_{-}}{Y_{+}}$ implique ce résultat. D'où la contradiction. On montre que

la solution Y_{\pm}^s est uniformément bornée en temps (voir l'article [4] donné en annexe A).

Il reste alors à prouver la deuxième partie du théorème (5.3.15). La proposition (5.3.18), concernant le comportement asymptotique des différences $\Delta_{\pm}\{\mathbf{Y}\}$ lorsque $M_a(+\infty) < 1$, implique que toutes ces différences restent bornées en temps. Ainsi, si il existe une solution bornée en temps, toutes les autres le seront. Or, on peut en trouver une bornée. En effet, la proposition (5.3.16) implique qu'il existe un temps pour lequel le produit $Y_+Y_-(\xi)$ devient positif et donc le rapport $\frac{Y_+}{Y_-}$ aussi. Si l'on utilise cette fois le changement de variable en t (5.50), alors le comportement asymptotique de la proposition sur l'équation de Riccati (5.3.14) et l'équation sur $Y_-(t)$ (5.54) entraînent que Y_- admet une limite finie et donc Y_+ aussi puisque le rapport tend vers $-|q(+\infty)|$ qui est borné. Enfin la proposition (5.3.18) permet de conclure que toutes les limites finies sont différentes. Ainsi se termine la démonstration du théorème (5.3.15).

5.4 Relations de saut généralisées et fonctions cinétiques

À compter de cette section, l'échelle de temps de Ristorcelli sera toujours supposée suffisamment grande de sorte à éviter l'accident de surcompression et ce dans une plage de Mach relatif M et de Mach turbulent β à préciser. L'existence d'échelles de temps convenables dans la plage considérée est assurée par la proposition (5.3.8). Le théorème (5.3.15) garantit alors l'existence d'une unique solution onde progressive atteignant un état \mathbf{u}_R dans le futur, issue d'un état \mathbf{u}_L fixé et se propageant à une vitesse σ prescrite selon la condition (4.55) (voir la remarque (4.2.1)).

L'objectif de cette section est de caractériser les relations de saut généralisées satisfaites par l'état \mathbf{u}_R ainsi joint. La caractérisation proposée est menée conformément au chapitre 2 et s'appuie sur la définition de fonctions cinétiques.

L'utilisation de fonctions cinétiques déduites de l'existence d'un ensemble suffisant de couples d'entropie est possible grâce au résultat suivant :

Lemme 5.4.1. *Soient \mathbf{u}_L fixé et σ une vitesse prescrite selon la condition (4.55), i.e. $M > 1$, alors l'unique solution onde progressive de vitesse σ issue de \mathbf{u}_L et atteignant un état \mathbf{u}_R dans le futur est telle que :*

$$\begin{cases} \text{Si } R_{12}^L \neq 0, & \text{alors } R_{12}(\xi)R_{12}^L > 0, \forall \xi \in \mathbb{R}, \text{ avec } R_{12}^L R_{12}^R > 0. \\ \text{Si } R_{12}^L = 0, & \text{alors } R_{12}(\xi) = 0, \forall \xi \in \mathbb{R}. \end{cases} \quad (5.64)$$

Ainsi que nous l'avons souligné au début du paragraphe (5.2), la propriété $R_{12}^R = 0$, dès que $R_{12}^L = 0$, résulte de ce que $R_{12}(\xi) = 0$ et $v(\xi) = v_L$ sont solutions du système dynamique (5.6).

L'inégalité (5.64) exprimant que $R_{12}(\xi)$ et R_{12}^L possèdent le même signe est une conséquence du théorème (5.3.15) assurant que sous la condition $M_a(+\infty) > 1$, nous avons $Y_+(\xi) > 0$ et $Y_-(\xi) < 0$ pour tout $\xi \in \mathbb{R}$, y compris dans la limite ξ infini. La formule adimensionnée (5.19) :

$$R_{12}(\xi) = \frac{\sqrt{\mathcal{I}(\xi)}}{2\beta\eta^2(\xi)} (Y_+(\xi) - Y_-(\xi)),$$

garantit le résultat escompté (voir remarque (5.2.2)).

Avec ce résultat, rappelons que les ondes progressives étudiées, solutions régulières du système d'EDP (4.2), vérifient également la loi d'évolution supplémentaire (5.5) gouvernant l'énergie tangentielle :

$$\rho E_t = \rho \frac{v^2}{2} + \alpha^2 \beta^2 \frac{R_{12}^2}{2R_{11}}. \quad (5.65)$$

L'état \mathbf{u}_L étant donné et donc le signe de R_{12}^L étant connu, il est alors possible de déduire de la connaissance de $(\rho(\xi), \rho v(\xi), \rho \mathcal{I}(\xi))$ et de $\rho E_t(\xi)$ dans la solution onde progressive, la valeur de $R_{12}(\xi)$ puisque son signe est celui de R_{12}^L .

En d'autres termes, un état \mathbf{u}_L étant donné, l'application $\mathbf{u} = (\rho, \rho u, \rho v, \rho \mathcal{I}, \rho \mathcal{W}, R_{12}) \rightarrow \mathbf{v}(\mathbf{u}) = (\rho, \rho u, \rho v, \rho \mathcal{I}, \rho \mathcal{W}, \rho E_t)$ réalise un changement de variable admissible dans l'étude de la solution onde progressive.

Avec la nouvelle variable $\mathbf{v}(\mathbf{u})$, l'onde progressive est solution de :

$$\left\{ \begin{array}{l} -\sigma d_\xi \rho + d_\xi(\rho u) = 0, \\ -\sigma d_\xi(\rho u) + d_\xi(\rho u^2 + p(\rho) + \beta^2 R_{11}) = d_\xi(d_\xi u), \\ -\sigma d_\xi(\rho v) + d_\xi(\rho uv + \alpha \beta^2 R_{12}) = d_\xi\left(\frac{\nu}{\mu} d_\xi v\right), \\ -\sigma d_\xi(\rho \mathcal{I}) + d_\xi(\rho \mathcal{I} u) = -2\mathcal{T}_{ris}(1 - 3\beta^2)\rho \mathcal{I}(d_\xi \eta)^2, \\ -\sigma d_\xi(\rho \mathcal{W}) + d_\xi(\rho \mathcal{W} u) = 0, \\ -\sigma d_\xi(\rho E_t) + d_\xi(\rho E_t u + \alpha \beta^2 R_{12} v) = d_\xi\left(\frac{\nu}{\mu} v d_\xi v\right) - \frac{\nu}{\mu}(d_\xi v)^2. \end{array} \right. \quad (5.66)$$

Après une intégration en ξ sur \mathbb{R} tout entier de ces équations, nous en déduisons un ensemble complet de relations de saut généralisées :

Proposition 5.4.2. *À partir de tout \mathbf{u}_L fixé, et de toute vitesse σ prescrite selon la condition (4.55), i.e. $M > 1$, nous définissons les deux fonctions cinétiques adimensionnées suivantes :*

$$\left\{ \begin{array}{l} \kappa_{\mathcal{I}}(\mathbf{u}_L, \sigma) = -\frac{1}{M} \int_{\mathbb{R}} \left(2\mathcal{T}_{ris}(1 - 3\beta^2) \frac{\mathcal{I}}{\eta^3}(\xi)(d_\xi \eta)^2 \right) (\mathbf{u}(\xi; \mathbf{u}_L, \sigma)) d\xi, \end{array} \right. \quad (5.67)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \kappa_{E_t}(\mathbf{u}_L, \sigma) = -\frac{1}{M} \int_{\mathbb{R}} \frac{\nu}{\mu} (d_\xi v)^2 (\mathbf{u}(\xi; \mathbf{u}_L, \sigma)) d\xi, \end{array} \right. \quad (5.68)$$

où $\mathbf{u}(\cdot; \mathbf{u}_L, \sigma)$ représente l'unique solution onde progressive issue de \mathbf{u}_L et se propageant à la vitesse σ et $M = \frac{u_L - \sigma}{c(\mathbf{u}_L)} > 1$.

Alors, l'état \mathbf{u}_R joint dans le futur vérifie :

$$u_R - c(\mathbf{u}_R) < \sigma < u_L - c(\mathbf{u}_L), \quad \sigma < u_R - a(\mathbf{u}_R),$$

et est l'unique solution de l'ensemble de conditions de Rankine-Hugoniot généralisées sous forme adimensionnée :

$$\left\{ \begin{array}{l} -\sigma[\rho] + [\rho u] = 0, \\ -\sigma[\rho u] + [\rho u^2 + p(\rho) + \beta^2 R_{11}] = 0 \\ -\sigma[\rho v] + [\rho uv + \alpha \beta^2 R_{12}] = 0, \\ -\sigma[\rho \mathcal{I}] + [\rho \mathcal{I} u] = M \kappa_{\mathcal{I}}(\mathbf{u}_L, \sigma), \\ -\sigma[\rho \mathcal{W}] + [\rho \mathcal{W} u] = 0, \\ -\sigma[\rho E_t] + [\rho E_t u + \alpha \beta^2 R_{12} v] = M \kappa_{E_t}(\mathbf{u}_L, \sigma). \end{array} \right. \quad (5.69)$$

Dans ces relations de saut, il faut choisir R_{12}^R sous forme dimensionnée telle que $R_{12}^R R_{12}^L > 0$ si $R_{12}^L \neq 0$ et $R_{12}^R = 0$ sinon.

Remarque 5.4.3. Nous avons choisi dans les définitions des fonctions cinétiques une renormalisation par M . Ce choix est agréable à la suite des calculs puisque, en particulier, il conduit à $[\mathcal{I}] = \kappa_{\mathcal{I}}$. Rappelons, en effet, que le débit relatif $m = \rho_L(u_L - \sigma)$, sous sa forme adimensionnée, correspond au nombre de Mach M .

Selon les relations de saut (5.69), il suffit de connaître les deux fonctions cinétiques $\kappa_{\mathcal{I}}(\mathbf{u}_L, \sigma)$ et $\kappa_{E_t}(\mathbf{u}_L, \sigma)$ afin de caractériser entièrement $\mathbf{u}_R(\mathbf{u}_L, \sigma)$. En toute généralité, la détermination de $\kappa_{\mathcal{I}}$ et κ_{E_t} à \mathbf{u}_L et σ donnés, requiert l'intégration numérique sur \mathbb{R} du système dynamique (5.66) gouvernant la solution onde progressive considérée. Ainsi, l'échelle de temps \mathcal{T}_{ris} étant prescrite de sorte à éviter l'accident de surcompression, la fonction cinétique $\kappa_{\mathcal{I}}$ peut être déduite de l'intégration numérique du sous-système (5.25) gouvernant η et \mathcal{I} . Celui-ci ne dépend que des nombres réduits β et M . En conséquence, $\kappa_{\mathcal{I}}$ sous forme adimensionnée n'est fonction que de β et M :

$$\kappa_{\mathcal{I}} = \kappa_{\mathcal{I}}(M, \beta).$$

Cette fonction cinétique pourra être tabulée pour une plage de β et de M à définir. Concernant la détermination de la seconde fonction cinétique, le résultat suivant montre que κ_{E_t} peut être définie par une intégration numérique sur \mathbb{R} du système linéaire à coefficients variables (5.27) gouvernant $Y_+(\xi)$ et $Y_-(\xi)$:

Proposition 5.4.4. *Le long d'une solution onde progressive de (5.66), l'identité suivante a lieu :*

$$\frac{\nu}{\mu}(d_{\xi}v)^2 = \frac{\alpha^2 M}{2} d_{\xi}(Y_+ Y_-), \quad \xi \in \mathbb{R},$$

de sorte que :

$$\kappa_{E_t}(\mathbf{u}_L, \sigma) = -\frac{1}{M} \int_{\mathbb{R}} \frac{\nu}{\mu} (d_{\xi}v)^2 d\xi = -\frac{\alpha^2}{2} [Y_+ Y_-]. \quad (5.70)$$

Soulignons que le système linéaire à coefficients variables (5.27) ne dépend que des nombres réduits M et β de sorte que la forme adimensionnée (5.70) dépendant de α^2 au travers d'une seule multiplication dans le cadre isotherme, ne requiert qu'une tabulation en M et β sur une plage à définir.

En conclusion, on retiendra que la détermination d'un état \mathbf{u}_R à partir de \mathbf{u}_L et σ donnés sous la condition (4.55) peut être menée grâce à l'ensemble des relations de saut généralisées (5.69) en ne connaissant uniquement que la tabulation de deux fonctions scalaires $\kappa_{\mathcal{I}}$ et κ_{E_t} à deux variables M et β . Le Mach turbulent β pourra être choisi dans son intervalle naturel $[0, \frac{1}{\sqrt{3}}[$ et nous restreindrons le Mach relatif M à l'intervalle $[1, 10]$.

Bien évidemment, les valeurs précises des fonctions cinétiques $\kappa_{\mathcal{I}}$ et κ_{E_t} dépendent du rapport des viscosités $\frac{\nu}{\mu}$ et de l'échelle de temps de Ristorcelli choisie. Le choix de cette échelle de temps est cruciale et il convient d'analyser plus finement ses conséquences à la fois sur le plan de la physique que sur celui des mathématiques. C'est l'objet de la prochaine section.

Démonstration. de la proposition (5.4.4) Nous reprenons ici les notations et certaines formules de la preuve de la proposition (5.2.1).

L'élevation au carré de la relation (5.11) conduit à :

$$\left(\frac{\nu}{\mu}d_\xi X\right)^2 = (MX + \beta^2 R_{12})^2.$$

En remarquant que $d_\xi X = \frac{1}{\alpha}d_\xi v$, nous avons :

$$\left(\frac{\nu}{\mu}d_\xi v\right)^2 = \alpha^2 \left(MX + \frac{\beta\sqrt{\mathcal{I}}}{\eta^2} \left(\frac{\beta R_{12}\eta^2}{\sqrt{\mathcal{I}}}\right)\right)^2.$$

Les définitions (5.18) de Y_+ et Y_- conduisent à réécrire l'identité précédente selon :

$$\begin{aligned} \left(\frac{\nu}{\mu}\right)^2 (d_\xi v)^2 &= \frac{\alpha^2}{4} \left(\left(M + \frac{\beta\sqrt{\mathcal{I}}}{\eta^2}\right) Y_+ + \left(M - \frac{\beta\sqrt{\mathcal{I}}}{\eta^2}\right) Y_- \right)^2 \\ &= \frac{\alpha^2 M^2}{4M_a^2} ((M_a + 1)Y_+ + (M_a - 1)Y_-)^2. \end{aligned}$$

Or, nous avons établi dans la preuve du lemme (5.3.11) :

$$d_\xi Y_+ Y_- = \frac{\mu}{2\nu} \frac{M}{M_a^2} ((M_a + 1)Y_+ + (M_a - 1)Y_-)^2 \geq 0, \quad \xi \in \mathbb{R}.$$

Le résultat escompté s'en déduit alors. □

5.5 Qualification de l'amplitude de l'échelle de temps de Ristorcelli

L'objectif de cette section est d'affiner notre analyse des conséquences de la correction de Ristorcelli sur les profils de compression. Cette correction nécessite la définition d'une échelle de temps \mathcal{T}_{ris} .

Notre véritable motivation est de mesurer les conséquences de la correction en fonction de l'amplitude d'une échelle de temps de Ristorcelli, au delà de la description de toute forme particulière. Nous montrons en effet que si cette amplitude doit être choisie suffisamment grande afin d'éviter l'accident de surcompression, celle-ci ne saurait être trop grande sans conséquence négative sur la physique d'un profil de compression.

Parallèlement aux contraintes dictées par la physique, nous énonçons une contrainte mathématique visant à permettre l'intégration numérique délicate des profils en Y_+ et Y_- et donc à la tabulation de la fonction cinétique κ_{E_i} introduite dans la section précédente.

Nous montrons qu'il est possible de définir les échelles de temps \mathcal{T}_{ris} conciliant les conditions introduites. Nous proposons en particulier à la fin de cette section une classe d'échelles de temps paramétrées relativement à leurs amplitudes. Au delà de la classe introduite, nous soulignons qu'ici, nous importe réellement l'analyse des conséquences de l'amplitude de \mathcal{T}_{ris} sur les profils de compression. Cette motivation ne trouvera toute son importance que dans l'analyse de stabilité structurelle, puis multidimensionnelle, des solutions chocs.

5.5.1 Absence de surcompression et production de turbulence longitudinale

Nous savons que l'amplitude de \mathcal{T}_{ris} doit être suffisante afin d'éviter l'accident de surcompression, mais il ne faudrait pas devoir choisir cette dernière trop grande. En effet, l'effet direct de la correction de Ristorcelli est de faire diminuer $\mathcal{I} = R_{11}\tau^3$ à la traversée d'un profil de compression avec une constante de temps dictée par \mathcal{T}_{ris} , à β et M fixés. Rappelons que $\eta(\xi)$ décroît mais reste borné inférieurement par $\underline{\eta}(M, \beta) > 0$ à M et β fixés. Ainsi, prendre \mathcal{T}_{ris} croissante fait décroître $\mathcal{I}_R = \mathcal{I}(+\infty)$ en sortie de profil jusqu'à réaliser la décroissance du taux de turbulence longitudinale $R_{11}^R = R_{11}(+\infty) < R_{11}^L = 1$. Or, il est expérimentalement établi ([20], [19], [6], [42], [24], [23] [39], [40], voir également des calculs DNS [46], [45], [47]) que le taux de turbulence longitudinale doit croître en sortie de profil de compression. En conséquence, il convient avant tout de vérifier sous quelle condition il est possible d'éviter l'accident de surcompression, *i.e.* $M_a(\mathbf{u}_R) > 1$, tout en autorisant la création de turbulence longitudinale, *i.e.* sous forme adimensionnée $R_{11}(\mathbf{u}_R) > 1$.

Nous étudions donc ici l'existence d'échelles de temps \mathcal{T}_{ris} garantissant qu'une solution onde progressive stationnaire (*i.e.* avec l'hypothèse non restrictive $\sigma = 0$) issue d'un état \mathbf{u}_L vérifiant $M > 1$, joint un état \mathbf{u}_R vérifiant simultanément, et sous forme adimensionnée :

$$\begin{cases} M_a(\mathbf{u}_R) = \frac{u_R}{a(\mathbf{u}_R)} = \frac{M\eta_R^2}{\beta\sqrt{\mathcal{I}_R}} > 1, \\ R_{11}(\mathbf{u}_R) = \frac{\mathcal{I}_R}{\eta_R^3} > 1. \end{cases} \quad (5.71)$$

$$\quad (5.72)$$

Nous montrons qu'il est possible de concilier ces deux conditions tant que $\beta < \beta_* = 0.5$ et ce pour tout nombre de Mach $M > 1$. Notons que la valeur $\beta_* = 0.5$ est très proche de la borne supérieure $\frac{1}{\sqrt{3}}$ et qu'elle ne saurait donc constituer une limitation dans la pratique.

Afin d'établir ce résultat, nous commençons par noter que les conditions (5.71) et (5.72) ne dépendent que de η_R et \mathcal{I}_R . Elles reposent donc sur l'étude du sous-système (5.25) dont nous savons que les propriétés sont conditionnées par les valeurs des nombres réduits M et β .

Ici, nous raisonnons à M et β fixés et nous reprenons les notations introduites au paragraphe (5.3.4). Puisque η_R et \mathcal{I}_R constituent par définition un point stationnaire de (5.25), \mathcal{I}_R est lié à η_R par la relation (5.29) :

$$\mathcal{I}_R = f(\eta_R) := \eta_R^2 \left(\frac{M^2 + 1 - 2\beta^2}{\beta^2} \eta_R - \frac{M^2}{\beta^2} \eta_R^2 - \frac{1 - 3\beta^2}{\beta^2} \right), \quad (5.73)$$

avec $0 < f(\eta_R) < 1$.

Il est donc possible de réexprimer les conditions (5.71) et (5.72) uniquement en terme de η_R , à savoir :

$$\begin{cases} M_a(\eta_R) = \frac{M\eta_R^2}{\beta\sqrt{f(\eta_R)}} > 1, \\ R_{11}(\eta_R) = \frac{f(\eta_R)}{\eta_R^3} > 1. \end{cases} \quad (5.74)$$

$$\quad (5.75)$$

Rappelons que η_R dépend de (M, β) et de \mathcal{T}_{ris} , $\eta_R = \eta_R(M, \beta; \mathcal{T}_{ris})$, avec la propriété $\eta_R(M, \beta; \mathcal{T}_{ris}) \in [\underline{\eta}(M, \beta), \eta_R(M, \beta; \mathcal{T}_{ris} = 0)]$ (voir la proposition (5.3.4) et l'inégalité (5.37)). Nous nous intéressons exclusivement au cas de paramètres (M, β) tels que $\eta_R = \eta_R(M, \beta; \mathcal{T}_{ris} = 0) < \eta_c(M, \beta) = \sqrt{\frac{\beta}{M}}$ pour lequel l'accident de surcompression survient nécessairement lorsque $\mathcal{T}_{ris} = 0$.

À (M, β) fixés, il importe de remarquer qu'un choix convenable de $\mathcal{T}_{ris} > 0$ permet d'atteindre toute valeur de η_0 choisi dans l'intervalle $]\underline{\eta}(M, \beta), \eta_R(M, \beta; \mathcal{T}_{ris} = 0)[$.

En effet, pour η_0 fixé, il suffit de fabriquer mathématiquement $\mathcal{T}_{ris} = \mathcal{T}_{ris}(\mathcal{I})$ avec la propriété $\mathcal{T}_{ris}(\mathcal{I}) > 0$ pour $\mathcal{I} \in]\mathcal{I}_0 = f(\eta_0), 1[$ et $\mathcal{T}_{ris}(\mathcal{I}) = 0$ pour $\mathcal{I} \in]0, f(\eta_0)[$. La proposition (5.3.8) montre alors qu'en réexprimant \mathcal{I} en fonction de η dans la solution onde progressive, il est toujours possible de choisir $\mathcal{T}_{ris}(\mathcal{I}) > 0$ de sorte à obtenir en $\eta = \eta_{max}$, $\mathcal{I}(\eta_{max}) = f(\eta_0)$. Ainsi, $\mathcal{T}_{ris}(\mathcal{I})$ s'annulant en $f(\eta_0)$, nous assurons $\mathcal{I}(\eta) = f(\eta_0)$ pour tout $\eta < \eta_{max}$. Cette construction fournit un point stationnaire $(\eta_R, \mathcal{I}_R) = (\eta_0, f(\eta_0))$ qui est le résultat recherché.

En conséquence, à M et β fixés, faire varier l'amplitude de \mathcal{T}_{ris} revient à faire parcourir à $\eta_R(M, \beta; \mathcal{T}_{ris})$ l'intervalle $]\underline{\eta}(M, \beta), \eta_R(M, \beta; \mathcal{T}_{ris} = 0)[$.

Cette constatation permet de ramener l'étude de l'existence d'échelles de temps \mathcal{T}_{ris} conciliant (5.74) et (5.75) à l'existence de valeurs de η dans $]\underline{\eta}(M, \beta), \eta_R(M, \beta; \mathcal{T}_{ris} = 0)[$ telles que :

$$\begin{cases} \frac{M^2}{\beta^2} \eta^4 - f(\eta) > 0, & (5.76) \\ f(\eta) - \eta^3 > 0. & (5.77) \end{cases}$$

Concernant la condition (5.76), nous énonçons :

Lemme 5.5.1. *Fixons M et β de sorte que $\eta_R(M, \beta; \mathcal{T}_{ris} = 0) < \eta_c(M, \beta)$. Alors, il existe une unique solution $\eta_{Max}(M, \beta) \in]\underline{\eta}(M, \beta), \eta_R(M, \beta; \mathcal{T}_{ris} = 0)[$ de l'équation $\frac{M^2}{\beta^2} \eta^4 - f(\eta) = 0$. De plus, la condition (5.76), i.e. $M_a(\mathbf{u}_R) > 1$, est satisfaite pour tout $\eta \in]\underline{\eta}(M, \beta), \eta_{Max}(M, \beta)[$.*

La preuve de ce résultat est reportée à la fin du paragraphe. Notons qu'il exprime de manière plus précise le fait qu'il est toujours possible de choisir \mathcal{T}_{ris} de sorte à assurer $M_a(\mathbf{u}_R) > 1$ au sens où un \mathcal{T}_{ris} constant atteignant $\eta_{Max}(M, \beta)$ constitue la borne inférieure stricte des échelles de temps constantes admissibles.

Concernant la condition (5.77), nous avons :

Lemme 5.5.2. *Fixons M et β de sorte que $\eta_R(M, \beta; \mathcal{T}_{ris} = 0) < \eta_c(M, \beta)$. Alors, il existe une unique solution $\eta_{Min}(M, \beta) \in]\underline{\eta}(M, \beta), \eta_R(M, \beta; \mathcal{T}_{ris} = 0)[$ de l'équation $f(\eta) - \eta^3 = 0$. De plus, la condition (5.77), i.e. $R_{11}(\mathbf{u}_R) > 1$, est satisfaite pour tout $\eta \in]\eta_{Min}(M, \beta), \eta_R(M, \beta; \mathcal{T}_{ris} = 0)[$.*

La preuve est donnée à la fin du paragraphe.

De nouveau indiquons que ce résultat exprime que le choix d'un \mathcal{T}_{ris} constant atteignant $\eta_{Min}(M, \beta) < \eta_{Max}(M, \beta)$ constitue la borne supérieure stricte des échelles de temps constantes admissibles.

Les lemmes (5.5.1) et (5.5.2) conduisent donc à qualifier l'amplitude de l'échelle de temps de Ristorcelli à M et β fixés, en exigeant que le taux de compression

$\eta_R(M, \beta; \mathcal{T}_{ris})$ réalisé vérifie :

$$\eta_R(M, \beta; \mathcal{T}_{ris}) \in]\eta_{Min}(M, \beta), \eta_{Max}(M, \beta)[. \quad (5.78)$$

Le résultat suivant indique sous quelle condition en (M, β) , l'intervalle précédent est non vide :

Lemme 5.5.3. *Pour tout $M > 1$, nous avons $\eta_{Min}(M, \beta) < \eta_{Max}(M, \beta)$ si et seulement si $\beta < 0.5$.*

Nous concluons cette section en proposant les preuves des résultats présentés.

Démonstration. du lemme (5.5.1).

Le taux de compression recherché η_{Max} est, par définition, solution de l'équation $\frac{M^2}{\beta^2}\eta^4 - f(\eta) = 0$, soit, de manière équivalente, solution de $\vartheta(\eta) = \frac{\beta^2 f(\eta)}{M^2 \eta^4} = 1$, soit :

$$\vartheta(\eta) = \frac{1}{\eta} \left(1 - \eta + \frac{1 - 3\beta^2}{M^2} \left(1 - \frac{1}{\eta} \right) + \frac{\beta^2}{M^2} \right) = 1. \quad (5.79)$$

Étudions la dérivée de la fonction $\vartheta(\eta)$ ainsi définie :

$$\vartheta'(\eta) = \frac{1}{\eta^2} \left(2 \frac{1 - 3\beta^2}{M^2} \frac{1}{\eta} - \frac{M^2 + 1 - 2\beta^2}{M^2} \right).$$

Comme $\lim_{\eta \rightarrow 0^+} \vartheta' = +\infty$, la fonction $\vartheta(\eta)$ admet un maximum sur $]0, +\infty[$ défini par :

$$\eta_{loc} = \frac{2(1 - 3\beta^2)}{M^2 + 1 - 2\beta^2}.$$

En remarquant que :

$$\lim_{\eta \rightarrow 0^+} \vartheta(\eta) = -\infty, \quad \lim_{\eta \rightarrow +\infty} \vartheta(\eta) = -1,$$

on en déduit les variations de la fonction $\vartheta(\eta)$ sur $]0, +\infty[$. Dès lors, notons que $\vartheta(\eta_R(M, \beta; \mathcal{T}_{ris} = 0)) = \frac{\eta_c^4}{\eta_R^4(M, \beta; \mathcal{T}_{ris} = 0)}$ puisque $f(\eta_R(M, \beta; \mathcal{T}_{ris} = 0)) = \mathcal{I}(\eta_R(M, \beta; \mathcal{T}_{ris} = 0)) = 1$ par définition de la fonction $f(\eta)$ sur ce point stationnaire particulier. Rappelons alors que, par hypothèse, on a $\eta_R(M, \beta; \mathcal{T}_{ris} = 0) < \eta_c < 1$, ce qui implique nécessairement que $\vartheta(\eta_R(M, \beta; \mathcal{T}_{ris} = 0)) > 1$. De plus, comme $f(\underline{\eta}) = 0$ par définition de $\underline{\eta}$, on en déduit que $\vartheta(\underline{\eta}) = 0$. Or, les variations de la fonction $\vartheta(\eta)$ entraîne qu'il existe deux annulations de cette fonction sur $]0, +\infty[$. Dès lors, $\underline{\eta}$ ne peut correspondre qu'à la première annulation, sinon, puisque $\underline{\eta} < \eta_R(M, \beta; \mathcal{T}_{ris} = 0)$, on aurait $\vartheta(\eta_R(M, \beta; \mathcal{T}_{ris} = 0)) < 0$.

Enfin, les variations de la fonction $\vartheta(\eta)$ implique également que la fonction $\vartheta(\eta) - 1$ admet deux annulations η_1 et η_2 sur $]0, +\infty[$, avec nécessairement $\underline{\eta} < \eta_1 < \eta_R(M, \beta; \mathcal{T}_{ris} = 0) < \eta_2$, puisque encore une fois $\vartheta(\eta_R(M, \beta; \mathcal{T}_{ris} = 0)) > 1$. On en déduit que la fonction $\vartheta(\eta) - 1$ ne peut s'annuler qu'une et une seule fois en η_{Max} (correspondant à η_1) sur l'intervalle $]\underline{\eta}, \eta_R(M, \beta; \mathcal{T}_{ris} = 0)[$. De plus, pour tout $\eta < \eta_{Max}$, on a $\vartheta(\eta) < 1$ (selon les variations de $\vartheta(\eta)$) et donc $\frac{M^2}{\beta^2}\eta^4 - f(\eta) > 0$ qui est la condition (5.76) recherchée. \square

Démonstration. du lemme (5.5.2). Le taux de compression recherché η_{Min} est tel que $f(\eta) = \eta^3$, il est donc solution de l'équation suivante :

$$f(\eta) - \eta^3 = \frac{M^2\eta^2}{\beta^2} \left(\frac{M^2 + 1 - 3\beta^2}{M^2} \eta - \eta^2 - \frac{1 - 3\beta^2}{M^2} \right) = 0. \quad (5.80)$$

Le polynôme du second degré entre parenthèses admet $\eta = 1$ comme racine évidente. Il se réécrit donc :

$$(\eta - 1) \left(\frac{1 - 3\beta^2}{M^2} - \eta \right) = 0.$$

Ainsi sur l'intervalle d'étude $\eta \in [\underline{\eta}, \eta_R(M, \beta; \mathcal{T}_{ris} = 0) < 1]$, η_{Min} est unique et vaut :

$$\eta_{Min} = \frac{1 - 3\beta^2}{M^2}.$$

De plus, pour tout η se situant entre les deux racines η_{Min} et 1 du polynôme du second degré dans (5.80), *i.e.* $\eta_{Min} < \eta < 1$, celui-ci est positif (puisque du signe opposé à son coefficient du terme de plus haut degré), ce qui implique, selon (5.80), que $f(\eta) - \eta^3 > 0$, qui est la condition (5.77) recherchée. \square

Démonstration. du lemme (5.5.3) Selon les deux démonstrations précédentes, pour respecter (5.76), il faut $\eta_R(M, \beta; \mathcal{T}_{ris}) < \eta_{Max}(M, \beta)$ et pour respecter (5.77), il faut $\eta_R(M, \beta; \mathcal{T}_{ris}) > \eta_{Min}(M, \beta)$. En définitive, respecter ces deux conditions revient à avoir $\eta_R(M, \beta; \mathcal{T}_{ris})$ dans $[\eta_{Min}(M, \beta), \eta_{Max}(M, \beta)]$. Cependant, pour que cet intervalle existe, il faut s'assurer que $\eta_{Min}(M, \beta) < \eta_{Max}(M, \beta)$. À cette fin, rappelons que, selon la démonstration du lemme (5.5.1) :

$$\eta < \eta_{Max} \iff \vartheta(\eta) = \frac{1}{\eta} \left(1 - \eta + \eta_{Min} \left(1 - \frac{1}{\eta} \right) + \eta_c^4 \right) < 1,$$

en se rappelant que $\eta_{Min} = \frac{1-3\beta^2}{M^2}$ et $\eta_c = \sqrt{\frac{\beta}{M}}$. Évaluons cette inégalité pour $\eta = \eta_{Min}$. Quelques calculs simples conduisent à :

$$\eta_{Min} < \eta_{Max} \iff \eta_{Min} = \frac{1 - 3\beta^2}{M^2} > \eta_c^4 = \frac{\beta^2}{M^2},$$

soit $\beta < 0.5$ qui est le résultat recherché. \square

5.5.2 Une contrainte numérique liée à la détermination des fonctions cinétiques

Dans ce paragraphe, nous considérons exclusivement des échelles de temps \mathcal{T}_{ris} dont l'amplitude, à β et M fixés, permet de réaliser les conditions $M_a(\mathbf{u}_R) > 1$ et $R_{11}(\mathbf{u}_R) > 1$, c'est-à-dire

$$\eta_R(M, \beta; \mathcal{T}_{ris}) \in]\eta_{Min}(M, \beta), \eta_{Max}(M, \beta)[. \quad (5.81)$$

Le lemme (5.5.3) nous assure l'existence de telles échelles de temps tant que β reste inférieur à une borne inaccessible dans les applications.

Notre principale motivation est ici d'analyser l'existence d'échelles de temps vérifiant

par ailleurs une condition imposée par la détermination des fonctions cinétiques $\kappa_{\mathcal{I}}$ et κ_{E_t} , à β et M fixés.

Ainsi que nous l'avons souligné dans la section (5.4), le calcul de $\kappa_{\mathcal{I}}(M, \beta)$ peut être obtenu en intégrant numériquement le sous-système (5.25) gouvernant η et \mathcal{I} , \mathcal{T}_{ris} étant prescrite. L'évaluation de $\kappa_{E_t}(M, \beta, \alpha)$ se déduit alors de la connaissance de $M_a(\xi) = \frac{M\eta^2(\xi)}{\beta\sqrt{\mathcal{I}(\xi)}}$ par intégration numérique du système linéaire à coefficients variables (5.27) pour $Y_+(\xi)$ et $Y_-(\xi)$. À β et M fixés, la détermination de $Y_+(\infty)$ et $Y_-(\infty)$ donnant $\kappa_{E_t}(M, \beta, \alpha)$ par la relation (5.70), s'accompagne d'une difficulté numérique de fond.

Le théorème (5.3.15) nous apprend en effet que les solutions $Y_+(\xi)$ et $Y_-(\xi)$ du système (5.27) explosent toutes en temps infini sauf une, précisément celle que nous recherchons. En conséquence, toute perturbation en temps positif de cette solution particulière ne peut résulter qu'en une instabilité, à savoir $\lim_{\xi \rightarrow +\infty} |Y_{\pm}(\xi)| = +\infty$. Nous montrons dans la suite comment maîtriser cette difficulté en adoptant une stratégie d'intégration rétrograde en temps, basée sur la propriété de décroissance de $\xi \rightarrow \eta(\xi)$ (voir (4.70)). Cette propriété est acquise indépendamment de la forme précise de \mathcal{T}_{ris} mais elle ne suffira pas à notre propos. Nous aurons besoin de la propriété supplémentaire :

$$\xi \rightarrow M_a(\xi) \text{ est décroissante strictement pour tout } \xi \in \mathbb{R}. \quad (5.82)$$

La validité de cette propriété, à β et M fixés, dépend du choix de l'échelle de temps \mathcal{T}_{ris} .

Étant donnée son importance, nous imposons à cette propriété d'être satisfaite *a priori* et non pas vérifiée *a posteriori*. En effet, nous aurions pu, à β et M fixés, choisir \mathcal{T}_{ris} constante puis intégrer le sous-système (5.25) en (η, \mathcal{I}) pour constater d'une part la validité de (5.81) et d'autre part la propriété de décroissance espérée. Nous avons estimé trop aléatoire une telle approche.

Ainsi, nous proposons dans les deux paragraphes suivants une famille d'échelles de temps vérifiant par construction la condition (5.81) ainsi que la propriété de décroissance exigée (5.82). Il restera alors à fixer les variations d'amplitude d'une échelle de temps particulière lorsque les nombres M et β varient. Ce sera l'objet du deuxième paragraphe où nous nous efforcerons de garder un lien avec la physique.

Un changement de fonction inconnue

Nous cherchons ici à faire un lien entre la forme d'une échelle de temps \mathcal{T}_{ris} et la propriété de monotonie $\xi \rightarrow M_a(\xi)$ est décroissante à β et M fixés. À cette fin, nous utilisons la décroissance de $\xi \rightarrow \eta(\xi)$ autorisant l'utilisation de η comme variable d'évolution le long du profil compressif. Nous traduisons donc la propriété de monotonie recherchée par :

$$\eta \rightarrow M_a(\eta) = \frac{M\eta^2}{\beta\sqrt{\mathcal{I}(\eta)}} \text{ est croissante pour tout } \eta \in]\eta_R(M, \beta, \mathcal{T}_{ris}), 1[. \quad (5.83)$$

Rappelons l'EDO satisfaite par $\mathcal{I}(\eta)$:

$$d_{\eta}\mathcal{I} = -2\mathcal{T}_{ris} \frac{1 - 3\beta^2 \mathcal{I}}{M^2 \eta^3} \mathcal{F}(\eta, \mathcal{I}), \quad (5.84)$$

pour observer que si, bien sûr, la donnée de $\mathcal{T}_{ris}(\eta, \mathcal{I}(\eta)) = \mathcal{T}_{ris}(\eta)$ conduit à définir implicitement $\mathcal{I}(\eta)$, inversement la donnée de $\mathcal{I}(\eta)$ permet de définir $\mathcal{T}_{ris}(\eta)$ par la relation :

$$\mathcal{T}_{ris}(\eta) = -\frac{M^2\eta^3}{2(1-3\beta^2)} \frac{1}{\mathcal{F}(\eta, \mathcal{I}(\eta))} \frac{d_\eta \mathcal{I}(\eta)}{\mathcal{I}(\eta)}. \quad (5.85)$$

Cette remarque autorise un lien entre une échelle de temps \mathcal{T}_{ris} et la propriété de monotonie recherchée (5.83).

À β et M fixés, l'idée est donc d'analyser l'existence d'échelles de temps $\mathcal{T}_{ris}(\eta)$ vérifiant (5.83) en faisant varier l'ensemble des fonctions $\eta \in [\eta_R(M, \beta), 1] \rightarrow \mathcal{I}(\eta) \in [\mathcal{I}(\eta_R) = f(\eta_R(M, \beta)), 1]$ avec $\eta_R(M, \beta)$ choisi arbitrairement dans l'intervalle $]\eta_{Min}(M, \beta), \eta_{Max}(M, \beta)[$ de sorte à garantir $M_a(\eta_R(M, \beta)) > 1$ et $R_{11}(\eta_R(M, \beta)) > 1$.

Il apparaît judicieux de proposer un changement de fonction inconnue, obtenu en adoptant la formule de représentation suivante :

$$\mathcal{I}(\eta) = \exp(\ln(f(\eta_R)\Gamma(\eta))), \quad (5.86)$$

où le taux de compression η_R est donné dans $]\eta_{Min}(M, \beta), \eta_{Max}(M, \beta)[$, à M et β fixés.

Ici, la fonction auxiliaire $\eta \in [\eta_R, 1] \rightarrow \Gamma(\eta)$ est supposée régulière avec les propriétés suivantes :

$$\Gamma(\eta_R) = 1, \quad \Gamma(1) = 1, \quad (5.87)$$

de sorte à garantir respectivement $\mathcal{I}(\eta_R) = f(\eta_R)$ et $\mathcal{I}(1) = 1$. Nous imposons à $\Gamma(\eta)$ d'être décroissante :

$$\Gamma'(\eta) \geq 0, \quad \text{pour } \eta \in [\eta_R, 1], \quad (5.88)$$

avec :

$$\Gamma'(\eta_R) = 0, \quad \Gamma'(1) = 0. \quad (5.89)$$

En effet, notons que la dérivée logarithmique de $\mathcal{I}(\eta)$ défini par (5.86) conduit à :

$$\Gamma'(\eta) = \frac{d_\eta \mathcal{I}}{\mathcal{I}} = -2\mathcal{T}_{ris} \frac{1-3\beta^2}{M^2} \frac{1}{\eta^3} \mathcal{F}(\eta, \mathcal{I}) \geq 0.$$

De sorte que (5.88) est nécessaire à $\mathcal{T}_{ris}(\eta) \geq 0$ (Rappelons que $\mathcal{F}(\eta, \mathcal{I}(\eta)) < 0$ tant que $\eta \in]\eta_R, 1[$), alors que (5.89) garantit qu'en $\eta = 1$ et $\eta = \eta_R$, nous obtenons bien un point stationnaire :

$$d_\eta \mathcal{I}(\eta_R) = d_\eta \mathcal{I}(1) = 0.$$

Finalement, nous vérifions ci-dessous que l'échelle de temps $\mathcal{T}_{ris}(\eta)$ donnée par (5.85) reste bornée en les points stationnaires η_R et 1 où $\mathcal{F}(\eta_R, \mathcal{I}_R) = \mathcal{F}(1, 1) = 0$.

Démonstration. Soit (η_s, \mathcal{I}_s) un point stationnaire. Rappelons que l'échelle de temps de Ristorcelli est donnée par la formule de représentation (5.85) rappelée ici :

$$\mathcal{T}_{ris}(\eta) = -\frac{M^2\eta^3}{2(1-3\beta^2)} \frac{1}{\mathcal{F}(\eta, \mathcal{I}(\eta))} \frac{d_\eta \mathcal{I}(\eta)}{\mathcal{I}(\eta)} \equiv -\frac{M^2}{2(1-3\beta^2)} \frac{Num(\eta)}{Deno(\eta)},$$

avec :

$$\begin{cases} Num(\eta) = \eta^3 \frac{d_\eta \mathcal{I}(\eta)}{\mathcal{I}(\eta)} = \eta^3 \Gamma'(\eta), \\ Deno(\eta) = \mathcal{F}(\eta, \mathcal{I}(\eta)). \end{cases}$$

Or, $\Gamma'(\eta_s) = 0$ et $\mathcal{F}(\eta_s) = 0$, si bien qu'il faut utiliser la règle de l'Hospital pour évaluer \mathcal{T}_{ris} aux points stationnaires. Ainsi, aux points stationnaires, on a :

$$\lim_{\eta \rightarrow \eta_s} \mathcal{T}_{ris}(\eta) = -\frac{M^2}{2(1-3\beta^2)} \lim_{\eta \rightarrow \eta_s} \frac{d_\eta \text{Num}(\eta)}{d_\eta \text{Deno}(\eta)}. \quad (5.90)$$

Pour que \mathcal{T}_{ris} soit bien définie par cette formule aux points stationnaires, il suffit donc de vérifier que :

$$\lim_{\eta \rightarrow \eta_s} d_\eta \text{Deno}(\eta) = \lim_{\eta \rightarrow \eta_s} d_\eta \mathcal{F}(\eta, \mathcal{I}(\eta)) \neq 0.$$

Rappelons la définition de $\mathcal{F}(\eta, \mathcal{I}(\eta))$ donnée par la formule (5.26) :

$$\mathcal{F}(\eta, \mathcal{I}(\eta)) = M^2(\eta - 1) + (1 - 3\beta^2) \left(\frac{1}{\eta} - 1 \right) + \beta^2 \left(\frac{\mathcal{I}(\eta)}{\eta^3} - 1 \right),$$

et remarquons que :

$$\begin{aligned} \lim_{\eta \rightarrow \eta_s} \frac{d}{d\eta} \mathcal{F}(\eta, \mathcal{I}(\eta)) &= \lim_{\eta \rightarrow \eta_s} \left(\frac{\partial \mathcal{F}(\eta, \mathcal{I}(\eta))}{\partial \eta} + \frac{\partial \mathcal{F}(\eta, \mathcal{I}(\eta))}{\partial \mathcal{I}} \frac{d\mathcal{I}(\eta)}{d\eta} \right), \\ &= \lim_{\eta \rightarrow \eta_s} \frac{\partial}{\partial \eta} \mathcal{F}(\eta, \mathcal{I}(\eta)), \end{aligned}$$

puisque $d_\eta \mathcal{I}(\eta_s) = 0$ par définition d'un point stationnaire. Dès lors un calcul simple nous donne :

$$\lim_{\eta \rightarrow \eta_s} \frac{d}{d\eta} \mathcal{F}(\eta, \mathcal{I}(\eta)) = \frac{1}{\eta_s^2} \left(M^2 \eta_s - \left((1 - 3\beta^2) + 3\beta^2 \frac{\mathcal{I}_s}{\eta_s^2} \right) \right).$$

On remarque alors que la vitesse du son adimensionnée $c^2(\mathbf{u}_s)$ et le nombre de Mach relatif $M_c^2(\mathbf{u}_s)$ sont donnés par :

$$\begin{cases} c^2(\mathbf{u}_s) = (1 - 3\beta^2) + 3\beta^2 \frac{\mathcal{I}_s}{\eta_s^2}, \\ M_c^2(\mathbf{u}_s) = \frac{\eta_s^2 M^2}{c^2(\mathbf{u}_s)}, \end{cases}$$

de sorte que la limite se réécrit :

$$\lim_{\eta \rightarrow \eta_s} \frac{d}{d\eta} \mathcal{F}(\eta, \mathcal{I}(\eta)) = \frac{c^2(\mathbf{u}_s)}{\eta_s^2} (M_c^2(\mathbf{u}_s) - 1).$$

Sur le point stationnaire \mathbf{u}_L , on a $M_c^2(\mathbf{u}_L) = M^2 > 1$ par hypothèse. Sur le point stationnaire \mathbf{u}_R , on a nécessairement, à cause du théorème de la variété centrale, $M_c^2(\mathbf{u}_R) < 1$, si bien que dans les deux cas :

$$\lim_{\eta \rightarrow \eta_s} \frac{d}{d\eta} \mathcal{F}(\eta, \mathcal{I}(\eta)) \neq 0.$$

Ceci garantit une échelle de temps \mathcal{T}_{ris} bornée aux points stationnaires et donnée par la formule (5.90) en ces points. \square

Une famille particulière d'échelle de temps \mathcal{T}_{ris}

Nous montrons de manière explicite dans ce paragraphe qu'il existe des échelles de temps \mathcal{T}_{ris} représentées de manière équivalente par la relation (5.85) via la fonction auxiliaire $\Gamma(\eta)$ introduite dans (5.86) garantissant la stricte croissance de $\eta \rightarrow M_a(\eta)$ pour tout $\eta \in [\eta_R(M, \beta), 1]$. Ici, les nombres réduits M et β sont de nouveau fixés. Le choix le plus simple dans la certification *a priori* de la croissance de $\eta \rightarrow M_a(\eta)$, que nous ayons pu exhiber, correspond à :

$$\Gamma(\eta) = -\ln\left(\frac{\eta^2}{\eta_R^3(M, \beta)}\right) \frac{(\ln \eta)^2}{(\ln \eta_R(M, \beta))^3}. \quad (5.91)$$

Il est possible de vérifier que ce choix satisfait les conditions (5.87), (5.88), (5.89). Des calculs donnés à la fin de cette section montrent que la propriété de stricte croissance $\eta \rightarrow M_a(\eta)$ est garantie pour un tel choix tant que $\eta_R(M, \beta)$ est choisi dans une restriction de l'intervalle admissible $]\eta_{Min}(M, \beta), \eta_{Max}(M, \beta)[$. Cette restriction vise à imposer au point stationnaire ($\eta_R, \mathcal{I}_R = f(\eta_R)$) de satisfaire :

$$\eta_R^{\frac{8}{3}}(M, \beta) < \mathcal{I}_R = f(\eta_R(M, \beta)). \quad (5.92)$$

Nous établissons qu'il existe une unique racine $\eta_{Mono}(M, \beta) > \eta_{Min}(M, \beta)$, à l'équation $f(\eta) - \eta^{\frac{8}{3}} = 0$ telle que $f(\eta) - \eta^{\frac{8}{3}} > 0$ pour tout $\eta \in]\eta_{Mono}(M, \beta), \eta_R(M, \beta, \mathcal{T}_{ris} = 0)[$.

Dès lors tant que :

$$\eta_{Mono}(M, \beta) < \eta_{Max}(M, \beta), \quad (5.93)$$

il est possible de choisir η_R dans l'intervalle restreint $]\eta_{Mono}(M, \beta), \eta_{Max}(M, \beta)[$ de sorte à garantir simultanément $M_a(\eta_R) > 1$, $R_{11}(\eta_R) > 1$ et la propriété de croissance pour $\eta \rightarrow M_a(\eta)$. Nous avons vérifié numériquement que l'inégalité (5.93) est satisfaite pour tout $M > 1$ tant que le nombre de Mach turbulent β reste inférieur à la borne supérieure $\beta_{sup} = 0.36$.

Cette borne est très grande dans les applications et nous ne la considérons pas comme une restriction.

Terminons ce paragraphe en montrant que l'application $\eta \rightarrow M_a(\eta)$ est strictement croissante tant que l'inégalité (5.92) est satisfaite.

Démonstration. Pour faire ressortir la condition permettant la stricte croissance de l'application $\eta \rightarrow M_a(\eta)$, il suffit d'étudier sous quelle condition la dérivée logarithmique de la fonction $\vartheta(\eta) = \frac{1}{M_a^2(\eta)}$ donnée par :

$$\frac{d_\eta \vartheta(\eta)}{\vartheta(\eta)} = \ln(f(\eta_R)) \Gamma'(\eta) - \frac{4}{\eta},$$

est négative. Pour cela nous avons besoin de la dérivée de la fonction $\Gamma(\eta)$:

$$\Gamma(\eta)' = -\frac{6 \ln \eta}{\eta (\ln \eta_R)^3} \ln\left(\frac{\eta}{\eta_R}\right),$$

de sorte que la dérivée logarithmique se réécrit :

$$\frac{d_\eta \vartheta(\eta)}{\vartheta(\eta)} = -\frac{4}{\eta} \left(1 + \frac{3}{2} \ln(f(\eta_R)) \frac{\ln \eta}{(\ln \eta_R)^3} \ln\left(\frac{\eta}{\eta_R}\right) \right) \equiv -\frac{4}{\eta} \varphi(\eta).$$

Étudions donc la fonction $\varphi(\eta)$. Remarquons dans un premier temps que $\varphi(1) = \varphi(\eta_R) = 1$ puis étudions le signe de la dérivée de $\varphi(\eta)$:

$$\varphi'(\eta) = \frac{3 \ln(f(\eta_R))}{2 (\ln \eta_R)^3} \ln \left(\frac{\eta^2}{\eta_R} \right).$$

Ainsi $\varphi(\eta)$ admet un unique extremum en $\eta_* = \sqrt{\eta_R}$, puisque $\mathcal{I}_R = f(\eta_R) < 1$. Par ailleurs, on a :

$$\varphi'(1) = -\frac{3 \ln(f(\eta_R))}{2 (\ln \eta_R)^2} > 0,$$

puisque, de nouveau, $\mathcal{I}_R = f(\eta_R) < 1$. La fonction $\varphi(\eta)$ réalise $\varphi(1) = \varphi(\eta_R) = 1$ avec $\varphi'(1) > 0$. L'extremum réalisé en $\eta_* = \sqrt{\eta_R}$ est donc nécessairement un minimum. Finalement, pour que la dérivée logarithmique de la fonction $\vartheta(\eta)$ soit négative pour tout $\eta \in]\eta_R, 1]$, il faut que $\varphi(\eta)$ reste positive. Il résulte de l'étude de la fonction $\varphi(\eta)$ qu'il suffit alors que son unique minimum soit strictement positif. Évaluons-le pour en déduire sous quelle condition cela est vrai :

$$\varphi(\eta_*) = 1 - \frac{3 \ln(f(\eta_R))}{8 \ln \eta_R} > 0 \iff f(\eta_R) > \eta_R^{\frac{8}{3}},$$

qui est la condition (5.92) recherchée. \square

5.5.3 Lien entre le taux de compression de sortie η_R et l'amplitude des échelles de temps \mathcal{T}_{ris}

Au terme des précédents paragraphes, nous nous sommes assurés de l'existence d'échelles de temps garantissant d'une part l'absence du phénomène de surcompression $M_a(\eta_R(M, \beta; \mathcal{T}_{ris})) > 1$, la production de turbulence longitudinale à la traversée du profil de compression $R_{11}(\eta_R(M, \beta; \mathcal{T}_{ris})) > 1$ et d'autre part, la stricte décroissance de l'application $\eta \rightarrow M_a(\eta)$ le long du profil de compression joignant $\eta_L = 1$ à $\eta_R(M, \beta; \mathcal{T}_{ris})$ de manière à rendre possible l'évaluation numérique de la fonction cinétique κ_{E_t} à β et M fixés.

Nous avons proposé à cette fin une famille d'échelle de temps \mathcal{T}_{ris} représentée par les formules (5.85), (5.86) via le choix de la fonction $\Gamma(\eta)$ donnée en (5.91). Les propriétés escomptées sont vraies par construction dès que le taux de compression de sortie η_R est choisi dans l'intervalle $]\eta_{Mono}(\beta, M), \eta_{Max}(\beta, M)[$ à β et M fixés, $\beta < 0.36$ et $M > 1$.

Commentons l'influence du choix d'une valeur particulière de η_R à β et M donnés, fixant \mathcal{T}_{ris} dans la famille considérée en terme de l'amplitude de l'échelle de temps résultante.

Rappelons que plus l'amplitude de \mathcal{T}_{ris} est grande, plus la valeur de \mathcal{I}_R est petite. Or, η_R et \mathcal{I}_R sont reliés par la relation $\mathcal{I}_R = f(\eta_R)$. La figure (5.1), donnant le graphe de la fonction f , montre que f est croissante pour tous les η_R envisageables. Ainsi, plus l'amplitude de \mathcal{T}_{ris} est grande, plus la valeur de η_R est petite. Dès lors et réciproquement, prendre η_R proche de la borne supérieure $\eta_{Max}(\beta, M)$ revient à privilégier les plus petites amplitudes admissibles de \mathcal{T}_{ris} assurant $M_a(\eta_R) > 1$. Prendre en revanche η_R proche de la borne inférieure $\eta_{Mono}(\beta, M)$ revient à privilégier les plus grandes amplitudes admissibles de \mathcal{T}_{ris} garantissant la décroissance de $\eta \rightarrow M_a(\eta)$ dans la famille considérée.

5.5.4 Analyse de l'échelle de temps \mathcal{T}_{ris} à β et M variables

Jusqu'à présent, nous avons analysé les échelles de temps \mathcal{T}_{ris} en fixant les nombres adimensionnés β et M . La famille que nous avons proposée est paramétrée par l'amplitude de \mathcal{T}_{ris} via le choix de $\eta_R \in]\eta_{Mono}(M, \beta), \eta_{Max}(M, \beta)[$. Cette famille permettra, dans le prochain paragraphe, l'évaluation numérique d'une famille de fonctions cinétiques $\kappa_{\mathcal{I}}(M, \beta)$ et $\kappa_{E_t}(M, \beta, \alpha)$ à α , β et M fixés. À ces fonctions cinétiques correspondront une famille de solutions chocs toujours décrites à β et M fixés.

L'étude à venir de la stabilité structurelle puis multidimensionnelle des solutions chocs ainsi définies, montrera que les gradients des applications $(M, \beta) \rightarrow \kappa_{\mathcal{I}}(M, \beta)$ et $(M, \beta, \alpha) \rightarrow \kappa_{E_t}(M, \beta, \alpha)$ interviennent dans l'analyse.

Il convient donc ici de préciser l'application $(M, \beta) \rightarrow \eta_R(M, \beta)$ fixant les fonctions cinétiques $\kappa_{\mathcal{I}}(M, \beta)$ et $\kappa_{E_t}(M, \beta, \alpha)$.

À cet égard et en anticipant sur la suite, l'étude de la stabilité des solutions chocs mettra en évidence l'importance centrale de la propriété suivante :

$$M \rightarrow \eta_R(M, \beta) \text{ est décroissante à } \beta \text{ fixé.} \quad (5.94)$$

Soulignons que la décroissance du taux de compression lorsque le Mach relatif augmente est une propriété classique dans la dynamique des gaz usuels.

La principale motivation de ce paragraphe est de définir une famille d'application $(M, \beta) \rightarrow \eta_R(M, \beta)$ paramétrée par l'amplitude de l'échelle de temps \mathcal{T}_{ris} et vérifiant par construction la propriété de monotonie (5.94). En effet, nous démontrerons plus tard dans ce mémoire que cette propriété n'est pas suffisante et que l'amplitude de \mathcal{T}_{ris} sera de nouveau déterminante pour assurer la stabilité linéaire des solutions chocs. De sorte à permettre la stabilité multidimensionnelle des chocs plans, il apparaîtra en effet que l'amplitude de \mathcal{T}_{ris} doit être supérieure à celle requise pour l'absence du phénomène de surcompression.

De manière à construire les applications $(M, \beta) \rightarrow \eta_R(M, \beta)$ sensibles à l'amplitude de l'échelle de temps \mathcal{T}_{ris} , nous proposons de postuler une loi de production de turbulence longitudinale $R_{11}^R = \psi(\eta_R)$ où ψ est une fonction indépendante de β et M et astreinte à des conditions à préciser.

Avant d'énoncer ces conditions, il convient de noter que la donnée de ψ détermine la valeur du taux de compression de sortie puisque par ailleurs R_{11}^R et η_R sont liés par $R_{11}^R = \frac{\mathcal{I}_R}{\eta_R^3} = \frac{1}{\eta_R^3} f(\eta_R)$.

Le taux de compression η_R doit donc être une racine de $\psi(\eta) - \frac{1}{\eta^3} f(\eta) = 0$, soit, après quelques réarrangements, une racine de la fonction $\phi(\eta, M, \beta)$ suivante :

$$\phi(\eta, M, \beta) = (\eta - 1) + \frac{1 - 3\beta^2}{M^2} \left(\frac{1}{\eta} - 1 \right) + \frac{\beta^2}{M^2} (\psi(\eta) - 1). \quad (5.95)$$

Ainsi résoudre $\phi(\eta_R(M, \beta)) = 0$ pour β et M variables, permet de définir l'application $(M, \beta) \rightarrow \eta_R(M, \beta)$.

Les conditions que doit respecter $\psi(\eta)$ ne sont rien d'autres que le respect de la condition (5.76) de non surcompressivité, de la condition (5.92) de monotonie de $\eta \rightarrow M_a(\eta)$, ainsi que l'unicité du taux de compression de sortie $\eta_R(M, \beta) < \eta_c(M, \beta)$ et la propriété (5.94) de monotonie de $\eta(M, \beta)$ par rapport à M . Ces conditions sont énoncées dans la proposition suivante :

Proposition 5.5.4. *Soit une fonction $\psi(\eta)$ convexe vérifiant l'inégalité suivante :*

$$\frac{1}{\eta^{\frac{1}{3}}} < \psi(\eta) < \frac{\eta}{\eta_c^4}; \text{ avec } \eta_{Mono}(M, \beta) < \eta < \eta_c(M, \beta), \quad (5.96)$$

alors il existe une unique racine $\eta_R(M, \beta) < \eta_c(M, \beta)$ de l'équation $\phi(\eta, M, \beta) = 0$, avec la propriété que la fonction $M \rightarrow \eta_R(M, \beta)$ est strictement décroissante.

Remarque 5.5.5. Nous avons jusqu'alors supposé que les taux de compression de sortie $\eta_R(M, \beta)$ restaient inférieurs au taux de compression critique $\eta_c(M, \beta)$, ceci afin de simplifier les démonstrations. De manière à étendre la discussion au cas d'un taux de compression compris entre $\eta_c(M, \beta)$ et 1, nous proposons de choisir la loi de production de turbulence longitudinale $\psi(\eta)$ de manière à satisfaire les inégalités suivantes :

$$\frac{1}{\eta^{\frac{1}{3}}} < \psi(\eta) < \min\left(\frac{\eta}{\eta_c^4}, \frac{1}{\eta^3}\right); \text{ avec } \eta_{Mono}(M, \beta) < \eta < 1. \quad (5.97)$$

Exiger l'inégalité $\psi(\eta) < \frac{1}{\eta^3}$ assure que $\mathcal{I}(\eta_R) = \psi(\eta_R)\eta_R^3 \leq 1$. Notons que nous avons bien $\min\left(\frac{\eta}{\eta_c^4}, \frac{1}{\eta^3}\right) = \frac{\eta}{\eta_c^4}$ dès que $\eta < \eta_c(M, \beta)$.

Démonstration. Dans un premier temps, il faut assurer :

$$\eta_R(M, \beta) \in [\eta_{mono}(M, \beta), \eta_{Max}(M, \beta)].$$

La première borne imposant la condition (5.92) de la stricte croissance de la fonction $\eta \rightarrow M_a(\eta)$ et la deuxième borne permettant la condition (5.71), *i.e.* $M_a(\eta) > 1$. Ainsi, la condition (5.92) est équivalente à :

$$\psi(\eta_R) = R_{11}(\eta_R) = \frac{\mathcal{I}(\eta_R)}{\eta_R^3} > \frac{\eta_R^{\frac{8}{3}}}{\eta_R^3} = \frac{1}{\eta_R^{\frac{1}{3}}},$$

et la condition (5.71) est équivalente à :

$$\psi(\eta_R) = R_{11}(\eta_R) < \frac{M^2}{\beta^2} \eta_R = \frac{\eta_R}{\eta_c^4}, \quad \forall (M, \beta) \text{ tels que } \eta_R(M, \beta) < \eta_c(M, \beta),$$

si bien que la fonction $\psi(\eta)$ doit vérifier :

$$\frac{1}{\eta^{\frac{1}{3}}} < \psi(\eta) < \frac{\eta}{\eta_c^4}, \quad \text{avec } \eta < \eta_c(M, \beta).$$

Dans un deuxième temps, il faut vérifier que la racine $\eta_R(M, \beta)$ de l'équation $\phi(\eta, M, \beta) = 0$ est unique et est bien décroissante en M à β fixé. Pour cela, étudions la fonction $\phi(\eta, M, \beta)$. Sa dérivée seconde, à (M, β) fixés, est donnée par :

$$\phi''(\eta) = 2 \frac{1 - 3\beta^2}{M^2} \frac{1}{\eta^3} + \frac{\beta^2}{M^2} \psi(\eta)'',$$

si bien que $\psi(\eta)$ strictement convexe impose que $\phi(\eta, M, \beta)$ est aussi strictement convexe. Évaluons alors le signe de $\phi(\eta, M, \beta)$ en $\eta_{Mono}(M, \beta)$ et en $\eta_c(M, \beta)$ à (M, β) fixés.

$$\begin{aligned}\phi(\eta_{Mono}) &= (\eta_{Mono} - 1) + \frac{1 - 3\beta^2}{M^2} \left(\frac{1}{\eta_{Mono}} - 1 \right) + \frac{\beta^2}{M^2} \left(\frac{f(\eta_{Mono})}{\eta_{Mono}^3} - 1 \right) \\ &+ \frac{\beta^2}{M^2} \left(\psi(\eta_{Mono}) - \frac{f(\eta_{Mono})}{\eta_{Mono}^3} \right).\end{aligned}$$

Le membre de droite de la première ligne est nul par définition de $f(\eta)$ lieu des points critiques. Le membre de droite de la seconde ligne est positif car $f(\eta_{Mono}) = \eta_{Mono}^{\frac{8}{3}}$, de sorte que par hypothèse :

$$\psi(\eta_{Mono}) > \frac{f(\eta_{Mono})}{\eta_{Mono}^3} = \frac{1}{\eta_{Mono}^{\frac{1}{3}}}.$$

On en déduit donc que :

$$\phi(\eta_{Mono}) > 0 \text{ pour } \eta > \eta_{Mono}.$$

L'évaluation de $\phi(\eta, M, \beta)$ en $\eta_c(M, \beta)$, à (M, β) fixés, donne :

$$\begin{aligned}\phi(\eta_c) &= (\eta_c - 1) + \frac{1 - 3\beta^2}{M^2} \left(\frac{1}{\eta_c} - 1 \right) + \frac{\beta^2}{M^2} \left(\frac{1}{\eta_c^3} - 1 \right) \\ &+ \frac{\beta^2}{M^2} \left(\psi(\eta_c) - \frac{1}{\eta_c^3} \right).\end{aligned}$$

La première ligne coïncide avec $\frac{1}{M^2} \mathcal{F}(\eta_c, 1)$. Or, on se situe dans la région des nombres (M, β) tels que $\mathcal{F}(\eta_c, 1) < 0$ (accident de surcompression quand $\mathcal{T}_{ris} = 0$, voir la formule (5.38)). De plus, selon la borne supérieure dans (5.96), on a $\psi(\eta_c) < \frac{1}{\eta_c^3}$. Ces deux dernières inégalités impliquent :

$$\phi(\eta_c) < 0 \text{ pour } \eta < \eta_c.$$

En résumé, la fonction $\phi(\eta)$ étant strictement convexe, elle admet au plus deux zéros. Or, $\phi(\eta_{Mono}) > 0$ et $\phi(\eta_c) < 0$. Ceci implique nécessairement qu'il existe un unique zéro $\eta_R(M, \beta)$ tel que :

$$\eta_{Mono}(M, \beta) < \eta_R(M, \beta) < \eta_c(M, \beta).$$

De plus, dans un voisinage de $\eta_R(M, \beta)$, on a $\phi'(\eta_R(M, \beta)) < 0$ car $\phi(\eta_c(M, \beta)) < 0$ pour tous les (M, β) considérés.

Pour conclure cette démonstration, il reste à nous assurer que $M \rightarrow \eta_R(M, \beta)$ ainsi définie est bien strictement décroissante, *i.e.* $\frac{\partial \eta_R}{\partial M}(M, \beta) < 0$. Dérivons donc la fonction $\phi(\eta_R, M, \beta)$ à β fixés :

$$\frac{d\phi(\eta, M, \beta)}{dM} = \frac{\partial \phi}{\partial \eta} \frac{\partial \eta_R}{\partial M}(M, \beta) + \frac{\partial \phi}{\partial M}(\eta_R, M, \beta). \quad (5.98)$$

Le raisonnement ci dessus sur l'étude des variations en η de $\phi(\eta, M, \beta)$ à (M, β) fixés impliquent que :

$$\frac{\partial \phi}{\partial \eta}(\eta_R, M, \beta) < 0.$$

De plus :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \phi}{\partial M}(\eta_R, M, \beta) &= -\frac{2}{M} \left(\frac{1-3\beta^2}{M^2} \left(\frac{1}{\eta_R} - 1 \right) + \frac{\beta^2}{M^2} (\psi(\eta_R) - 1) \right) \\ &= -\frac{2}{M} (1 - \eta_R), \end{aligned}$$

puisque $\phi(\eta_R(M, \beta), M, \beta) = 0$. La formule (5.98) implique alors le résultat suivant :

$$\frac{\partial \eta_R}{\partial M}(M, \beta) = \frac{2}{M} \frac{1}{\frac{\partial \phi}{\partial \eta}(\eta_R, M, \beta)} (1 - \eta_R(M, \beta)) < 0,$$

puisque $\eta_R(M, \beta) > 1$. On a alors le résultat escompté sur la monotonie du taux de compression de sortie $\eta_R(M, \beta)$ en fonction du nombre de Mach relatif M à β fixé. \square

Pour conclure ce paragraphe, nous donnons ici le lien entre la fonction $\psi(\eta)$ et l'amplitude de l'échelle de temps \mathcal{T}_{ris} . Supposons pour cela deux fonctions $\psi_1(\eta)$ et $\psi_2(\eta)$ telles que, par hypothèse, on ait :

$$\psi_1(\eta) < \psi_2(\eta). \quad (5.99)$$

Notre objectif est alors de montrer que $\psi_1(\eta)$ vient avec une échelle de temps \mathcal{T}_{ris} plus grande que celle induite par $\psi_2(\eta)$. Il faut donc établir $\eta_1^R(M, \beta) < \eta_2^R(M, \beta)$, où $\eta_i^R(M, \beta)$ est racine de $\phi_i(\eta, M, \beta) = 0$ pour $i = \{1, 2\}$, conformément aux variations de \mathcal{T}_{ris} avec le taux de compression de sortie déjà discutées plus haut. Remarquons que :

$$\phi_2(\eta) - \phi_1(\eta) = \frac{\beta^2}{M^2} (\psi_1(\eta) - \psi_2(\eta)) > 0,$$

par l'hypothèse (5.99). Il s'en suit que :

$$\phi_2(\eta_2^R) - \phi_1(\eta_2^R) > 0.$$

Or, $\phi_2(\eta_2^R) = 0$, si bien que $\phi_1(\eta_2^R) < 0$. La démonstration précédente de la proposition (5.5.4) sur l'existence et l'unicité de la racine $\eta_1^R(M, \beta)$ implique alors que $\eta_1^R(M, \beta) < \eta_2^R(M, \beta)$, ce qui est le résultat désiré (voir le paragraphe intitulé lien avec l'amplitude des échelles de temps de Ristorcelli).

Dans les applications, on privilégie la famille de lois suivantes :

$$\psi_N(\eta) = \frac{N}{\eta^{\frac{1}{3}}}, \text{ avec } N \in \mathbb{R} > 1, \eta < \eta_c(M, \beta),$$

de sorte que $\psi_N(\eta) > \frac{1}{\eta^{\frac{1}{3}}}$. La satisfaction de la contrainte $\psi_N(\eta) < \frac{\eta}{\eta_c^4}$ conduit à une restriction de la plage de β à N fixés. La figure (5.6), donnée plus loin lors de la résolution numérique du système d'EDO, illustre cette restriction.

Conformément à ce qui précède, choisir $N_1 < N_2$ pour définir les lois ψ_{N_1} et ψ_{N_2} avec $\psi_{N_1} < \psi_{N_2}$, consiste à privilégier une amplitude de \mathcal{T}_{ris} plus grande pour le choix N_1 que le choix N_2 . En anticipant sur les résultats à venir, les figures suivantes (5.4) donnant le taux de turbulence longitudinale en fonction de β à M fixé, confirment la propriété $R_{11}(N_1, M, \beta) < R_{11}(N_2, M, \beta)$.

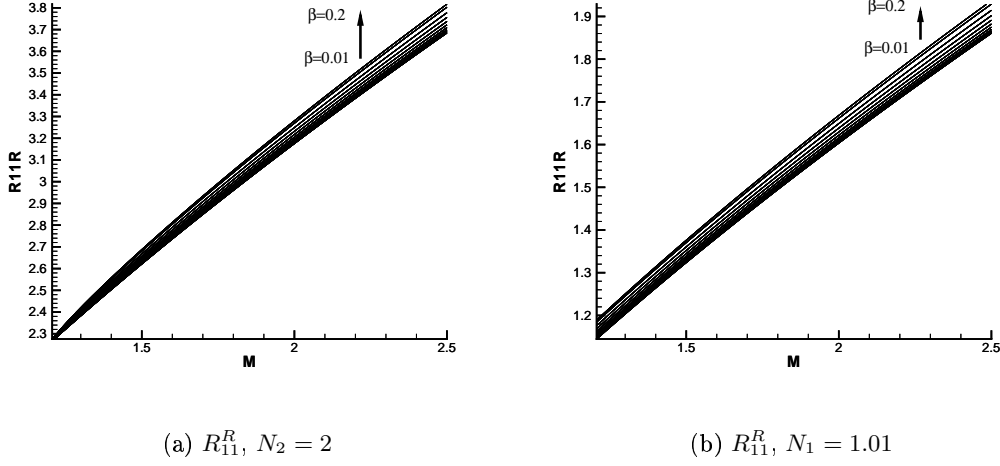


FIG. 5.4 – Valeurs de R_{11}^R de sortie en fonction du nombre de Mach et pour différentes valeurs de β en isotherme avec deux corrections de Ristorcelli différentes : $N_1 = 1.01$ et $N_2 = 2$

5.5.5 Synthèse concernant les échelles de temps de Ristorcelli admissibles

L'étude que nous venons de mener a montré qu'il existe des échelles de temps de Ristorcelli permettant de combiner simultanément les conditions suivantes :

$$M_a(\mathbf{u}_R) > 1, \quad \frac{R_{11}(\mathbf{u}_R)}{R_{11}(\mathbf{u}_L)} > 1, \quad (5.100)$$

ainsi que :

$$\xi \rightarrow M_a(\xi) \text{ est strictement décroissante pour tout } \xi \in \mathbb{R}, \quad (5.101)$$

et enfin :

$$M \rightarrow \eta_R(\beta, M) \text{ est décroissante à } \beta \text{ fixé.} \quad (5.102)$$

Rappelons succinctement que les deux premières conditions imposent aux échelles de temps admissibles d'être suffisamment grandes, de manière à éviter l'accident de surcompression, mais sans l'être trop pour continuer à respecter la contrainte physique naturelle sur le taux de production de turbulence longitudinale de sortie. La troisième propriété, quant à elle, est nécessaire pour l'intégration numérique du système d'EDO gouvernant $(Y_+(\xi), Y_-(\xi))$ en vue d'évaluer la fonction cinétique $\kappa_{Et}(\alpha, \beta, M)$. La dernière condition, naturelle en dynamique des gaz classiques, interviendra de manière centrale dans la propriété de stabilité structurelle du choc droit.

L'existence de telles échelles de temps admissibles a été obtenue en les définissant par la donnée d'applications $\eta \rightarrow \mathcal{I}(\eta)$ convenables, grâce à la formule de représentation :

$$\mathcal{I}_{ris}(\eta) = -\frac{M^2 \eta^3}{2(1-3\beta^2)} \frac{1}{\mathcal{F}(\eta, \mathcal{I}(\eta))} \frac{d_\eta \mathcal{I}(\eta)}{\mathcal{I}(\eta)}. \quad (5.103)$$

L'obtention de telles applications $\mathcal{I}(\eta)$ repose sur la donnée d'une fonction convexe $\psi(\eta)$ vérifiant les inégalités :

$$\frac{1}{\eta^{\frac{1}{3}}} < \psi(\eta) < \min\left(\frac{\eta}{\eta_c^4}, \frac{1}{\eta^3}\right). \quad (5.104)$$

La donnée d'un telle fonction revient à postuler une loi de production de turbulence longitudinale $R_{11}^R = \psi(\eta_R(\beta, M))$, où le taux de compression de sortie $\eta_R(\beta, M)$ est l'unique racine, distincte de $\eta_L = 1$, de l'équation suivante :

$$\phi(\eta, M, \beta) = (\eta - 1) + \frac{1 - 3\beta^2}{M^2} \left(\frac{1}{\eta} - 1\right) + \frac{\beta^2}{M^2} (\psi(\eta) - 1) = 0. \quad (5.105)$$

Disposant de ce taux de compression de sortie, l'application $\eta \rightarrow \mathcal{I}(\eta)$ est alors définie par :

$$\mathcal{I}(\eta) = \exp(\ln(f(\eta_R(\beta, M))\Gamma(\eta, \eta_R(\beta, M))), \quad \eta_R(\beta, M) \leq \eta \leq 1, \quad (5.106)$$

avec :

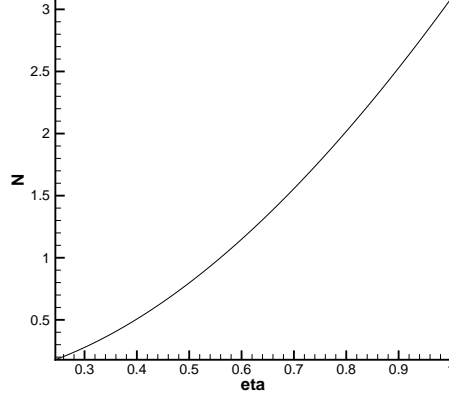
$$\begin{cases} f(\eta_R(\beta, M)) = \mathcal{I}_R = \eta_R^3(\beta, M)\psi(\eta_R(\beta, M)), & (5.107) \\ \Gamma(\eta, \eta_R(\beta, M)) = -\ln\left(\frac{\eta^2}{\eta_R^3(\beta, M)}\right) \frac{(\ln \eta)^2}{(\ln \eta_R(\beta, M))^3}. & (5.108) \end{cases}$$

Rappelons que les conditions escomptées (5.100), (5.101) et (5.102) sont alors simultanément satisfaites pour tout nombre de Mach turbulent $\beta \in [0, 0.36]$ et pour tout nombre de Mach $M > 1$. Notons, par ailleurs, que se donner deux fonctions $\psi_1(\eta)$ et $\psi_2(\eta)$ telles que $\psi_1(\eta) < \psi_2(\eta)$, revient à considérer une échelle de temps \mathcal{T}_{ris} plus grande pour $\psi_1(\eta)$ que pour $\psi_2(\eta)$.

Des expériences numériques exhaustives indiquent que les échelles de temps de Ristorcelli (adimensionnées) données par la formule de représentation (5.103) prennent des valeurs de l'ordre de l'unité. À titre d'exemple, en choisissant $\psi(\eta) = \frac{2}{\eta^{\frac{1}{3}}}$, ainsi que $(M, \beta) = (2, 0.1)$, la figure (5.5) donne le graphe de la fonction suivante (pour des raisons historiques liées au décours de la thèse) :

$$\mathcal{N}(\eta) = 2 \frac{1 - 3\beta^2}{M^2} \mathcal{T}_{ris}(\eta).$$

Ici, le coefficient multiplicatif $2 \frac{1 - 3\beta^2}{M^2}$ trouve la valeur 0.44 de sorte que la figure (5.5) montre que le nombre adimensionné \mathcal{T}_{ris} varie entre 0.4 et 6.


 FIG. 5.5 – Valeurs typiques de $\mathcal{N}(\eta) = 2\frac{1-3\beta^2}{M^2}\mathcal{T}_{ris}(\eta)$

5.6 Approximation numérique des fonctions cinétiques

Dans cette section, nous décrivons comment déterminer l'état de sortie \mathbf{u}_R d'un profil de compression, un état \mathbf{u}_L et une vitesse de propagation σ étant donnés. La détermination d'un tel état de sortie repose sur l'intégration numérique du système d'EDO gouvernant la solution onde progressive. Nous faisons bien évidemment le choix d'une échelle de temps admissible au sens de la section précédente. L'objectif principal de cette étude numérique est de pouvoir calculer les fonctions cinétiques $\kappa_{\mathcal{I}}$ et κ_{E_t} définies à la section (5.4) dans la formulation des relations de saut généralisées. Nous concluons cette section en illustrant numériquement l'ordre de grandeur des deux fonctions cinétiques $\kappa_{\mathcal{I}}$ et κ_{E_t} ainsi que leur comportement en fonction des nombres réduits α , β et M . Cette étude est menée pour deux corrections de Ristorcelli présentant des amplitudes d'échelle de temps \mathcal{T}_{ris} différentes et nous analysons qualitativement leurs influences sur les états de sortie $(\eta_R, R_{11}^R, R_{12}^R, R_{22}^R)$.

5.6.1 Lien entre le système d'EDO et les fonctions cinétiques

Par souci de clarté pour le lecteur, nous rappelons ici les relations de saut généralisées satisfaites par un 1-choc de Lax séparant deux états \mathbf{u}_L et \mathbf{u}_R et se propageant à la vitesse σ . Ces relations s'écrivent conformément à la proposition (5.4.2) sous forme adimensionnée :

$$\begin{cases} -\sigma[\rho] + [\rho u] = 0, \\ -\sigma[\rho u] + [\rho u^2 + p(\rho) + \beta^2 R_{11}] = 0 \\ -\sigma[\rho v] + [\rho uv + \alpha\beta^2 R_{12}] = 0, \\ -\sigma[\rho \mathcal{I}] + [\rho \mathcal{I} u] = M\kappa_{\mathcal{I}}(\mathbf{u}_L, \sigma), \\ -\sigma[\rho \mathcal{W}] + [\rho \mathcal{W} u] = 0, \\ -\sigma[\rho E_t] + [\rho E_t u + \alpha\beta^2 R_{12} v] = M\kappa_{E_t}(\mathbf{u}_L, \sigma), \end{cases} \quad (5.109)$$

où les fonctions cinétiques trouvent les définitions théoriques suivantes :

$$\left\{ \begin{array}{l} \kappa_{\mathcal{I}}(\mathbf{u}_L, \sigma) = -\frac{1}{M} \int_{\mathbb{R}} \left(2\mathcal{T}_{ris}(1 - 3\beta^2) \frac{\mathcal{I}}{\eta^3}(\xi) (d_\xi \eta)^2 \right) (\mathbf{u}(\xi; \mathbf{u}_L, \sigma)) d\xi, \end{array} \right. \quad (5.110)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \kappa_{E_t}(\mathbf{u}_L, \sigma) = -\frac{1}{M} \int_{\mathbb{R}} \frac{\nu}{\mu} (d_\xi v)^2 (\mathbf{u}(\xi; \mathbf{u}_L, \sigma)) d\xi. \end{array} \right. \quad (5.111)$$

Ici, la fonction $\mathbf{u}(\xi; \mathbf{u}_L, \sigma)$ désigne la solution onde progressive de vitesse σ issue de \mathbf{u}_L et joignant l'état \mathbf{u}_R . Ainsi la détermination de $\kappa_{\mathcal{I}}(\mathbf{u}_L, \sigma)$ et $\kappa_{E_t}(\mathbf{u}_L, \sigma)$, l'état \mathbf{u}_L et la vitesse de propagation σ étant donnés, requiert, *a priori*, l'intégration numérique sur \mathbb{R} de la solution onde progressive $\mathbf{u}(\xi; \mathbf{u}_L, \sigma)$. Nous exploitons l'analyse développée au paragraphe (5.4) pour préciser la nature des intégrations numériques à réaliser.

Évaluation de la fonction cinétique $\kappa_{\mathcal{I}}$

Conformément à la remarque (5.4.3), l'identité suivante a lieu :

$$\kappa_{\mathcal{I}}(\mathbf{u}_L, \sigma) = \mathcal{I}(\mathbf{u}_R) - \mathcal{I}(\mathbf{u}_L).$$

Nous utilisons cette dernière pour calculer cette fonction cinétique. En effet, l'existence d'échelles de temps \mathcal{T}_{ris} admissibles a été obtenue par la donnée de l'application $\eta \rightarrow \mathcal{I}(\eta)$ selon la formule :

$$\mathcal{I}(\eta) = \exp \left(\ln \left(\eta_R^3(\beta, M) \psi(\eta_R(\beta, M)) \right) \Gamma(\eta, \eta_R(\beta, M)) \right), \quad \eta_R(\beta, M) \leq \eta \leq 1, \quad (5.112)$$

qui implique clairement que la fonction cinétique $\kappa_{\mathcal{I}}$ est alors elle aussi connue sans résolution du système dynamique :

$$\kappa_{\mathcal{I}}(\mathbf{u}_L, \sigma) = \exp \left(\ln \left(\eta_R^3(\beta, M) \psi(\eta_R(\beta, M)) \right) \Gamma(\eta_R(\beta, M), \eta_R(\beta, M)) \right) - 1. \quad (5.113)$$

Cette identité indique que la fonction cinétique adimensionnée $\kappa_{\mathcal{I}}(\mathbf{u}_L, \sigma)$ ne dépend que du nombre de Mach M et du nombre de Mach turbulent β , conformément à la discussion proposée à la section (5.4). On écrira dorénavant $\kappa_{\mathcal{I}}(\beta, M)$ en lieu et place de $\kappa_{\mathcal{I}}(\mathbf{u}_L, \sigma)$. Par ailleurs, puisque par construction (voir formule 5.108) :

$$\Gamma(\eta_R(\beta, M), \eta_R(\beta, M)) = 1,$$

nous obtenons la formule définition importante dans la suite :

$$\kappa_{\mathcal{I}}(\beta, M) = \eta_R^3(\beta, M) \psi(\eta_R(\beta, M)) - 1. \quad (5.114)$$

Évaluation de la fonction cinétique κ_{E_t}

Selon la proposition (5.4.4), la fonction cinétique $\kappa_{E_t}(\mathbf{u}_L, \sigma)$ ne dépend également que des nombres sans dimension (α, β, M) et trouve la formule de représentation suivante :

$$\kappa_{E_t}(\alpha, \beta, M) = -\frac{1}{M} \int_{\mathbb{R}} \frac{\nu}{\mu} (d_\xi v)^2 d\xi = -\frac{\alpha^2}{2} [Y_+ Y_-]. \quad (5.115)$$

Il est donc nécessaire de déterminer numériquement la solution onde progressive. Rappelons, en effet, que sous la condition (5.126) impliquant l'absence de surcompression,

le théorème (5.3.15) entraîne que le système linéaire gouvernant $(Y_+(\xi), Y_-(\xi))$ admet une infinité de solutions satisfaisant les conditions asymptotiques :

$$\lim_{\xi \rightarrow -\infty} Y_+(\xi) = \beta \left(1 - \frac{\beta}{M}\right), \quad \lim_{\xi \rightarrow -\infty} Y_-(\xi) = -\beta \left(1 + \frac{\beta}{M}\right).$$

qui explosent toutes en temps infini sauf une unique solution $(Y_+^*(\xi), Y_-^*(\xi))$ vérifiant :

$$\lim_{\xi \rightarrow +\infty} Y_+^*(\xi) = Y_+^*(+\infty; \beta, M) > 0, \quad \lim_{\xi \rightarrow +\infty} Y_-^*(\xi) = Y_-^*(+\infty; \beta, M) < 0.$$

Ces limites privilégiées doivent être calculées par intégration de la solution onde progressive. Ces limites une fois disponibles, la fonction cinétique κ_{E_t} est tabulée grâce à la formule suivante :

$$\kappa_{E_t}(\alpha, \beta, M) = -\frac{\alpha^2}{2} \left(Y_+^*(+\infty; \beta, M) Y_-^*(+\infty; \beta, M) + \beta^2 \left(1 - \frac{\beta^2}{M^2}\right) \right). \quad (5.116)$$

5.6.2 Résolution du système d'EDO

Nous rappelons ici la forme du système dynamique gouvernant les solutions onde progressive après la remise à l'échelle suivante :

$$\xi \longrightarrow \frac{2\nu}{\mu M} \xi',$$

permettant de le réécrire comme suit :

$$\begin{cases} d_\xi \eta = \frac{2\nu}{\mu M^2} \mathcal{F}(\eta, \mathcal{I}), & (5.117) \end{cases}$$

$$\begin{cases} d_\xi \mathcal{I} = -\frac{4\nu}{\mu} \mathcal{I}_{ris} \frac{(1-3\beta^2)}{M^4} \frac{\mathcal{I}}{\eta^3} \mathcal{F}^2(\eta, \mathcal{I}), & (5.118) \end{cases}$$

$$\begin{cases} d_\xi Y_+ = \left(1 - \frac{1}{M_a(\xi)}\right) \left(\left(1 + \frac{1}{M_a(\xi)}\right) Y_+ + \left(1 - \frac{1}{M_a(\xi)}\right) Y_- \right), & (5.119) \end{cases}$$

$$\begin{cases} d_\xi Y_- = \left(1 + \frac{1}{M_a(\xi)}\right) \left(\left(1 + \frac{1}{M_a(\xi)}\right) Y_+ + \left(1 - \frac{1}{M_a(\xi)}\right) Y_- \right), & (5.120) \end{cases}$$

où les primes ont été omis par souci de simplification des écritures. La fonction $\mathcal{F}(\eta, \mathcal{I})$ est donnée par :

$$\mathcal{F}(\eta, \mathcal{I}) = M^2(\eta - 1) + (1 - 3\beta^2) \left(\frac{1}{\eta} - 1\right) + \beta^2 \left(\frac{\mathcal{I}}{\eta^3} - 1\right).$$

Rappelons que l'échelle de temps de Ristorcelli a été définie, conformément à la section précédente, par la donnée d'une application $\eta \rightarrow \mathcal{I}(\eta)$ qui est donc connue. En conséquence, le système d'EDO se découple alors en une EDO scalaire gouvernant $\eta(\xi)$:

$$d_\xi \eta = \frac{2\nu}{\mu M^2} \mathcal{F}(\eta, \mathcal{I}(\eta)), \quad (5.121)$$

et un système linéaire à coefficients variables sur $(Y_+(\xi), Y_-(\xi))$:

$$\begin{cases} d_\xi Y_+ = \left(1 - \frac{1}{M_a(\eta(\xi))}\right) \left(\left(1 + \frac{1}{M_a(\eta(\xi))}\right) Y_+ + \left(1 - \frac{1}{M_a(\eta(\xi))}\right) Y_- \right), \\ d_\xi Y_- = \left(1 + \frac{1}{M_a(\eta(\xi))}\right) \left(\left(1 + \frac{1}{M_a(\eta(\xi))}\right) Y_+ + \left(1 - \frac{1}{M_a(\eta(\xi))}\right) Y_- \right), \end{cases} \quad (5.122)$$

avec :

$$M_a(\eta(\xi)) = \frac{M\eta^2(\xi)}{\beta\sqrt{\mathcal{I}(\eta(\xi))}}, \quad \xi \in \mathbb{R},$$

où $\xi \rightarrow \eta(\xi)$ est solution de (5.121). Nous nous intéressons ici à la solution de (5.121) vérifiant la condition asymptotique suivante :

$$\lim_{\eta \rightarrow -\infty} \eta(\xi) = 1, \quad (5.123)$$

et aux solutions de (5.122) vérifiant les conditions asymptotiques :

$$\lim_{\xi \rightarrow -\infty} Y_+(\xi) = \beta \left(1 - \frac{\beta}{M}\right), \quad \lim_{\xi \rightarrow -\infty} Y_-(\xi) = -\beta \left(1 + \frac{\beta}{M}\right). \quad (5.124)$$

Soulignons que les échelles de temps de Ristorcelli retenues dans cette étude conduisent aux propriétés suivantes :

$$\xi \rightarrow M_a(\eta(\xi)) \text{ est strictement décroissante pour tout } \xi \text{ dans } \mathbb{R}, \quad (5.125)$$

avec :

$$\lim_{\xi \rightarrow +\infty} M_a(\eta(\xi)) = M_a(+\infty) > 1. \quad (5.126)$$

Remarquons que, d'après ces deux dernières propriétés, on a aussi :

$$M_a(\eta(\xi)) > 1, \text{ pour tout } \xi \text{ dans } \mathbb{R}. \quad (5.127)$$

Ces propriétés seront très utiles à la suite.

La résolution numérique du problème (5.121)-(5.123), bien que posé sur \mathbb{R} tout entier, ne pose pas de difficultés de principe. L'essentiel des difficultés est lié à la résolution numérique du problème (5.122)-(5.124). En effet, le théorème (5.3.15) implique que sous la condition (5.126) traduisant l'absence du phénomène de surcompression, le système linéaire (5.122) admet une **infinité** de solutions **satisfaisant les conditions asymptotiques** (5.124) qui **exploisent toutes en temps infini** sauf précisément une unique solution $(Y_+^*(\xi), Y_-^*(\xi))$ vérifiant :

$$\lim_{\xi \rightarrow +\infty} Y_+^*(\xi) = Y_+^*(+\infty) > 0, \quad \lim_{\xi \rightarrow +\infty} Y_-^*(\xi) = Y_-^*(+\infty) < 0, \quad (5.128)$$

avec la propriété :

$$\left(1 + \frac{1}{M_a(+\infty)}\right) Y_+^*(+\infty) + \left(1 - \frac{1}{M_a(+\infty)}\right) Y_-^*(+\infty) = 0. \quad (5.129)$$

Rappelons, selon la formule (5.116), que ces quantités inconnues $Y_+(\xi)$ et $Y_-(\xi)$ sont précisément recherchées pour calculer le fonction cinétique κ_{E_t} . L'existence d'une infinité de solutions vérifiant les conditions asymptotiques (5.124) explosant toute en temps infini, sauf une, précisément celle recherchée, semble rendre caduque toute tentative d'approximation numérique directe du problème (5.122)-(5.124).

Pour contourner ces difficultés, nous suggérons, à l'aide d'un changement de fonctions inconnues, de ramener le problème sur un compact en temps $[0, H_{max}]$, avec $0 < H_{max} < \infty$, pour une nouvelle variable de temps H . Ces différentes transformations sont autorisées par les propriétés (5.125), (5.126) et (5.127) issues du choix de l'échelle de temps de Ristorcelli, conformément à l'analyse de la section précédente. Le problème est reformulé de manière rétrograde au sens où $H \rightarrow 0$ correspond à $\xi \rightarrow +\infty$, alors que $H \rightarrow H_{max}$ correspond à $\xi \rightarrow -\infty$. L'objectif est donc ici de fixer une donnée initiale en $H = 0$ qui est inconnue puisque devant être construite sur $\lim_{\xi \rightarrow +\infty} Y_+(\xi) = Y_+^*(+\infty)$ et $\lim_{\xi \rightarrow +\infty} Y_-(\xi) = Y_-^*(+\infty)$. Nous soulignons ici comment exploiter les propriétés connues sur ces limites, de manière à lever les difficultés précédemment discutées. Ces limites vérifient par construction la propriété d'**annulation** (5.129) et, grâce à (5.128) et (5.126), la propriété de **non annulation** suivante :

$$\left(1 + \frac{1}{M_a(+\infty)}\right) Y_+^*(+\infty) - \left(1 - \frac{1}{M_a(+\infty)}\right) Y_-^*(+\infty) \neq 0. \quad (5.130)$$

Nous proposons de tirer partie de ces deux propriétés en introduisant un changement de fonctions inconnues $(z_+(\xi), z_-(\xi))$ donné à un facteur multiplicatif près par :

$$\left(1 + \frac{1}{M_a(\xi)}\right) Y_+(\xi) + \left(1 - \frac{1}{M_a(\xi)}\right) Y_-(\xi),$$

et :

$$\left(1 + \frac{1}{M_a(\xi)}\right) Y_+(\xi) - \left(1 - \frac{1}{M_a(\xi)}\right) Y_-(\xi),$$

avec les propriétés

$$\lim_{\xi \rightarrow +\infty} z_+(\xi) = 0, \quad \lim_{\xi \rightarrow +\infty} z_-(\xi) \neq 0. \quad (5.131)$$

Dans la nouvelle variable de temps $H \in [0, H_{max}]$, les fonctions $(z_+(H), z_-(H))$ seront solutions d'un système linéaire de la forme :

$$\begin{cases} d_H z_- = -z_+, \\ d_H z_+ = -G(H)z_+ - z_-, \end{cases} \quad (5.132)$$

où $G(H)$ est une fonction positive, régulière sur $]0, H_{max}[$ avec :

$$\lim_{H \rightarrow 0^+} G(H) = +\infty.$$

Ce système est fermé par la donnée initiale $z_+(0)$ et $z_-(0)$. D'après (5.131), nous avons :

$$z_+(0) = 0, \quad z_-(0) \neq 0, \quad (5.133)$$

avec $z_-(0)$ inconnue. Nous proposons d'exploiter la nullité de $z_+(0)$, la non nullité de $z_-(0)$, ainsi que la **linéarité** du système précédent pour introduire le changement d'inconnues suivant :

$$Z_+(H) = \frac{z_+(H)}{z_-(0)}, \quad Z_-(H) = \frac{z_-(H)}{z_-(0)}, \quad (5.134)$$

solutions du système :

$$\begin{cases} d_H Z_- = -Z_+, \\ d_H Z_+ = -G(H)Z_+ - Z_-, \end{cases} \quad (5.135)$$

avec, par construction, la donnée initiale suivante parfaitement connue :

$$Z_+(0) = 0, \quad Z_-(0) = 1. \quad (5.136)$$

Des développements en série de Laurent de $Z_+(H)$ et $Z_-(H)$ au voisinage de $H = 0$ permettront enfin d'éliminer la singularité à cet endroit. Nous pourrons alors approcher la solution $Z_+(H)$ et $Z_-(H)$ par intégration numérique du problème de Cauchy (5.135)-(5.136) et obtenir une approximation de $\lim_{H \rightarrow H_{max}} Z_-(H) = Z_-(H_{max})$. Or, dans notre formulation rétrograde, cette limite coïncide avec une limite en ξ tendant vers $-\infty$ et donc avec les conditions asymptotiques (5.124). En d'autres termes, $z_-(H_{max})$ est connue par la donnée de (5.124) et la valeur de $M_a(-\infty) = \frac{M}{\beta}$. Après une estimation numérique de $Z_-(H_{max})$, la valeur de $z_-(0) = \frac{z_-(H_{max})}{Z_-(H_{max})}$ peut être déterminée numériquement et donne alors accès aux fonctions $z_+(H)$ et $z_-(H)$ grâce aux définitions (5.134).

Un premier changement d'inconnues et de variable de temps

Conformément au précédent paragraphe, considérons dans un premier temps :

$$\begin{cases} y_+(\xi) = \left(1 + \frac{1}{M_a(\eta(\xi))}\right) Y_+(\xi) + \left(1 - \frac{1}{M_a(\eta(\xi))}\right) Y_-(\xi), \\ y_-(\xi) = \left(1 + \frac{1}{M_a(\eta(\xi))}\right) Y_+(\xi) - \left(1 - \frac{1}{M_a(\eta(\xi))}\right) Y_-(\xi). \end{cases}$$

Ces expressions réalisent un premier changement de fonctions inconnues grâce à la propriété (5.127). De sorte à simplifier les écritures, il est utile d'introduire la fonction suivante :

$$h(\eta(\xi)) = \frac{1}{M_a(\eta(\xi))}, \quad \xi \in \mathbb{R}, \quad (5.137)$$

avec les propriétés suivantes, immédiatement héritées de (5.125), (5.126) et (5.127) :

$$\xi \rightarrow h(\eta(\xi)) \text{ est strictement croissante pour tout } \xi \text{ dans } \mathbb{R}, \quad (5.138)$$

et :

$$0 < h(\eta(\xi)) < 1, \text{ pour tout } \xi \text{ dans } \mathbb{R}. \quad (5.139)$$

Des calculs simples, non donnés ici, montrent que les nouvelles inconnues $y_+(\xi)$ et $y_-(\xi)$ doivent être solutions du système à coefficients variables :

$$\begin{cases} d_\xi y_- = \frac{d_\xi h(\eta(\xi))}{1 - h^2(\eta(\xi))} (y_+ - h(\eta(\xi))y_-), \\ d_\xi y_+ = 2(1 - h^2(\eta(\xi)))y_+ + \frac{d_\xi h(\eta(\xi))}{1 - h^2(\eta(\xi))} (y_- - h(\eta(\xi))y_+). \end{cases} \quad (5.140)$$

Remarque 5.6.1. Il importe de souligner que le système gouvernant les inconnues $y_+(\xi)$ et $y_-(\xi)$ n'est bien défini que si la fonction $\xi \rightarrow 1 - h^2(\eta(\xi))$ ne s'annule pas pour tout ξ dans \mathbb{R} . Or, cette condition de non annulation est précisément satisfaite ici grâce à l'inégalité (5.139). Rappelons que cette inégalité est une conséquence de l'absence de phénomène de surcompression, c'est-à-dire $M_a(\mathbf{u}_R) > 1$, et de la propriété de stricte décroissance de la fonction $\xi \rightarrow M_a(\xi)$ pour tout ξ dans \mathbb{R} . Le caractère bien posé du système (5.140) joue un rôle crucial dans la détermination numérique de la fonction cinétique κ_{E_t} . Ceci explique l'importance que nous avons accordée à la définition d'échelles de temps de Ristorcelli admissibles dans la satisfaction des deux propriétés rapportées.

De manière à ramener le système (5.140) écrit sur \mathbb{R}_ξ tout entier à un compact, il est naturel, dans un premier temps, d'utiliser le taux de compression comme nouvelle variable de temps (rappelons que $\xi \rightarrow \eta(\xi)$ est strictement décroissante sur \mathbb{R}_ξ à valeurs dans $[\eta_R(\beta, M), 1]$). Soulignons que conformément à la stratégie de choix de la correction de Ristorcelli résumé au paragraphe (5.5.5), l'application $\eta \rightarrow M_a(\eta)$, et donc $\eta \rightarrow h(\eta)$, est explicitement connue, ainsi que le taux de compression de sortie $\eta_R(\beta, M)$. Les nombres M et β étant implicitement fixés, nous noterons simplement ce taux η_R . La division des équations du système (5.140) par $d_\xi \eta$ montre que, dans la variable $\eta \in [\eta_R, 1]$, les inconnues $y_+(\eta)$ et $y_-(\eta)$ doivent être solutions de :

$$\begin{cases} d_\eta y_- = \frac{d_\eta h(\eta)}{1 - h^2(\eta)} (y_+ - h(\eta)y_-), \\ d_\eta y_+ = \frac{\mu M^2 (1 - h^2(\eta))}{\nu \mathcal{F}(\eta, h(\eta))} y_+ + \frac{d_\eta h(\eta)}{1 - h^2(\eta)} (y_- - h(\eta)y_+), \end{cases}$$

où conformément à la définition de $d_\xi \eta$ (voir l'EDO (5.121)), nous avons introduit avec un léger abus de notations :

$$\mathcal{F}(\eta, h(\eta)) = M^2(\eta - 1) + (1 - 3\beta^2) \left(\frac{1}{\eta} - 1 \right) + \beta^2 \left(\frac{M^2}{\beta^2} \eta h^2(\eta) - 1 \right).$$

Nous proposons d'effectuer un second et dernier changement de variable de temps motivés par les propriétés (5.138) et (5.139), dont la transcription en variable η est :

$$\eta \rightarrow h(\eta) \text{ est strictement décroissante, avec } 0 < h(\eta) < 1, \text{ pour tout } \eta \in [\eta_R, 1], \quad (5.141)$$

de sorte que :

$$-\frac{d_\eta h(\eta)}{1 - h^2(\eta)} > 0, \quad \eta \in [\eta_R, 1]. \quad (5.142)$$

Cette propriété conduit au changement de variable important suivant :

Proposition 5.6.2. *La fonction positive définie par :*

$$H(\eta) = - \int_{\eta_R}^{\eta} \frac{d_v h(v)}{1 - h^2(v)} dv = \frac{1}{2} \ln \frac{(1 + h(\eta_R))(1 - h(\eta))}{(1 - h(\eta_R))(1 + h(\eta))}, \quad (5.143)$$

pour $\eta \in [\eta_R, 1]$, réalise un changement de variable de temps admissible dont l'inverse défini de $[0, H(1)]$ à valeurs dans $[\eta_R, 1]$ est donné par :

$$\eta(H) = h^{-1} \left(\frac{1 - \lambda e^{2H}}{1 + \lambda e^{2H}} \right), \quad \text{avec } \lambda = \frac{1 - h(\eta_R)}{1 + h(\eta_R)}. \quad (5.144)$$

Dans la nouvelle variable de temps H , les inconnues $y_-(H)$ et $y_+(H)$ doivent être solutions du système linéaire suivant :

$$\begin{cases} d_H y_- = -(y_+ - \vartheta(H)y_-), \\ d_H y_+ = -G(H)y_+ - (y_- - \vartheta(H)y_+), \end{cases} \quad (5.145)$$

où nous avons successivement posé :

$$\vartheta(H) = \frac{1 - \lambda e^{2H}}{1 + \lambda e^{2H}}, \quad (5.146)$$

et

$$G(H) = \frac{\mu M^2}{\nu} \frac{(1 - \vartheta^2(H))^2}{\mathcal{F}(\eta(H), \vartheta(H))} \frac{1}{(d_\eta h)(\eta(H))}, \quad (5.147)$$

avec

$$\mathcal{F}(\eta(H), \vartheta(H)) = M^2(\eta(H) - 1) + (1 - 3\beta^2) \left(\frac{1}{\eta(H)} - 1 \right) + \beta^2 \left(\frac{M^2}{\beta^2} \eta(H) \vartheta^2(H) - 1 \right). \quad (5.148)$$

Il est utile de noter les relations suivantes entre la nouvelle variable de temps H et l'ancienne ξ : $H \rightarrow 0^+$ correspond à $\xi \rightarrow +\infty$, alors que $H \rightarrow H(1)$ correspond à $\xi \rightarrow -\infty$. Ainsi et conformément à la section précédente décrivant nos motivations, prescrire une donnée initiale en $H = 0$ pour le système (5.145) consiste bien à faire référence aux valeurs en $\xi = +\infty$ de $Y_+^*(+\infty)$ et $Y_-^*(+\infty)$ avec la propriété :

$$y_+(H = 0) = 0, \quad y_-(H = 0) \neq 0. \quad (5.149)$$

Symétriquement, les valeurs de y_- et y_+ en $H(1)$ sont liées aux conditions asymptotiques (5.124) en $-\infty$. Pour simplifier les écritures, nous notons $H_{max} = H(1)$. Par ailleurs et puisque de nouveau $H = 0$ et $H = H_{max}$ correspondent dans les faits à des points stationnaires du système dynamique (5.117) - (5.120) et donc de l'EDO (5.121) gouvernant η , nous avons nécessairement :

$$\lim_{H \rightarrow 0^+} \mathcal{F}(\eta(H), \vartheta(H)) = \lim_{H \rightarrow H_{max}^-} \mathcal{F}(\eta(H), \vartheta(H)) = 0$$

($\mathcal{F}(\eta, \vartheta)$ n'est autre que $d_\xi \eta$ exprimée en la variable H), de sorte que :

$$\lim_{H \rightarrow 0^+} G(H) = \lim_{H \rightarrow H_{max}^-} G(H) = +\infty.$$

Enfin et puisque $\mathcal{F}(\eta(H), \vartheta(H)) < 0$ pour tout $H \in [0, H_{max}]$ (grâce à $d_\xi \eta < 0$ pour tout $\xi \in \mathbb{R}$) et $(d_\eta h)(\eta(H)) < 0$ par (5.141), nous avons la propriété :

$$H \rightarrow G(H) \text{ est une fonction positive régulière sur }]0, H_{max}[. \quad (5.150)$$

Derniers changements de fonctions inconnues

Le système linéaire (5.145) peut être simplifié par l'introduction de la fonction :

$$F_{int}(H) = \exp \left(- \int_0^H \vartheta(t) dt \right), \quad H \in [0, H_{max}], \quad (5.151)$$

dont la forme explicite est :

$$F_{int}(H) = \frac{1}{1+\lambda} e^{-H} (1 + \lambda e^{2H}), \quad H \in [0, H_{max}]. \quad (5.152)$$

Après multiplication des équations composant le système (5.145) par la fonction (5.151), il est possible de vérifier que les nouvelles fonctions inconnues :

$$z_+(H) = F_{int}(H)y_+(H), \quad z_-(H) = F_{int}(H)y_-(H), \quad H \in [0, H_{max}],$$

doivent être solutions du système linéaire :

$$\begin{cases} d_H z_- = -z_+, \\ d_H z_+ = -G(H)z_+ - z_-, \end{cases} \quad (5.153)$$

où la définition de la fonction $G(H)$ donnée dans la proposition (5.6.2) reste inchangée. Notons, suite à (5.149), que la donnée initiale en $H = 0$, naturellement associée à (5.153), vérifie :

$$z_+(H = 0) = y_+(H = 0) = 0, \quad z_-(H = 0) = y_-(H = 0) \neq 0, \quad (5.154)$$

où $z_-(H = 0)$ est inconnue. Soulignons de nouveau qu'à l'instant final H_{max} , correspondant à $\xi = -\infty$ dans la variable originelle, et donc à la condition asymptotique (5.124), on a :

$$Y_+^L = \lim_{\xi \rightarrow -\infty} Y_+(\xi) = \beta \left(1 - \frac{\beta}{M}\right), \quad Y_-^L = \lim_{\xi \rightarrow -\infty} Y_-(\xi) = -\beta \left(1 + \frac{\beta}{M}\right), \quad (5.155)$$

de sorte que les quantités $z_+(H_{max})$ et $z_-(H_{max})$ sont explicitement données par :

$$\begin{cases} z_+(H_{max}) = 0, \\ z_-(H_{max}) = F_{int}(H_{max}) \left((1 + h(\eta_L)) Y_+^L - (1 - h(\eta_L)) Y_-^L \right) = 2\beta F_{int}(H_{max}) \left(1 - \frac{\beta^2}{M^2}\right) \neq 0. \end{cases} \quad (5.156)$$

car $h(\eta_L) = \frac{1}{M_a(-\infty)} = \frac{\beta}{M}$.

Remarque 5.6.3. Puisque les valeurs finales $z_+(H_{max})$ et $z_-(H_{max})$ sont connues, on pourrait être tenté de renverser le signe du temps en $-H$ pour intégrer de $-H_{max}$ avec ces données jusqu'à l'instant $H = 0$. Toutefois, en échangeant H en $-H$, on passe de $-G(H)$ à $G(-H)$. Dès lors, les propriétés d'**explosion** de G par **valeurs positives** :

$$\lim_{H \rightarrow 0^+} G(H) = \lim_{H \rightarrow H_{max}^-} G(H) = +\infty,$$

s'opposent à une telle approche. Ce constat est directement lié à l'existence d'une infinité de solutions pour le problème direct, explosant toutes en temps sauf une.

Conformément à la présentation de la méthode, nous exploitons la condition d'annulation de $z_+(0)$ et la condition de non annulation de $z_-(0)$ en introduisant un dernier changement de fonctions inconnues :

$$Z_+(H) = \frac{z_+(H)}{z_-(0)}, \quad Z_-(H) = \frac{z_-(H)}{z_-(0)}, \quad H \in [0, H_{max}]. \quad (5.157)$$

Ces fonctions inconnues doivent être solutions du système linéaire à coefficients variables :

$$\begin{cases} d_H Z_- = -Z_+, \\ d_H Z_+ = -G(H)Z_+ - Z_-, \end{cases} \quad (5.158)$$

équipée de la donnée initiale :

$$\begin{cases} Z_+(H=0) = 0, \\ Z_-(H=0) = 1. \end{cases} \quad (5.159)$$

Il s'agit donc d'intégrer numériquement la solution de ce problème sur l'intervalle $[0, H_{max}]$ de manière à obtenir une approximation de $Z_-(H_{max})$. Rappelons en effet que grâce aux formules de représentation (5.156), nous connaissons la valeur exacte de $Z_-(H_{max})$ (alors que $Z_+(H_{max}) = 0$) :

$$Z_-(H_{max}) = \frac{2\beta F_{int}(H_{max})(1 - \frac{\beta^2}{M^2})}{z_-(0)}. \quad (5.160)$$

Cette relation permet une estimation de $z_-(0)$ et donc de $y_-(0)$, soit, en conséquence, des valeurs recherchées $Y_+^*(+\infty)$ et $Y_-^*(+\infty)$ nécessaires à l'évaluation (5.116) de la fonction cinétique $\kappa_{Et}(\beta, M)$. Ceci conclut la présentation du problème à résoudre.

5.6.3 Élimination de la singularité en $H = 0$

La singularité de la fonction $G(H)$ en $H = 0$ interdit de pouvoir débiter la résolution numérique du problème d'EDO (5.158)-(5.159) à partir de l'instant $H = 0$. Nous suggérons d'approcher cette solution en résolvant le problème suivant, posé sur un intervalle $[H_0, H_{max}]$, $H_0 > 0$ donné, suffisamment petit :

$$\begin{cases} d_H Z_- = -Z_+, \\ d_H Z_+ = -G(H)Z_+ - Z_-, \end{cases} \quad (5.161)$$

équipée d'une donnée initiale à l'instant H_0 : $(Z_+(H_0), Z_-(H_0))$, où $Z_+(H_0)$ et $Z_-(H_0)$ sont estimés à partir d'un développement formel en série en $H = 0$ de la solution du problème originel (5.158)-(5.159).

Ces développements reposent sur un développement en série de Laurent de la fonction $G(H)$, comme l'indique le résultat suivant :

Proposition 5.6.4. *Supposons que la fonction $G(H)$ admette le développement en série de Laurent suivant en $H = 0$:*

$$G(H) = \frac{G_{-1}}{H} + \sum_{i=0}^{\infty} G_i H^i,$$

alors la solution $Z_+(H)$ et $Z_-(H)$ du problème (5.158), (5.159) admet le développement formel en série en $H = 0$ suivant :

$$\begin{cases} Z_-(H) = \sum_{i=0}^{\infty} Z_i H^i, \\ Z_+(H) = \sum_{i=1}^{\infty} i Z_i H^{i-1}, \end{cases}$$

avec pour coefficients :

$$\begin{cases} Z_0 = 1, \\ Z_1 = 0, \\ Z_{p+1} = \frac{1}{(p+1)(p+G_{-1})} \left(Z_{p-1} - \sum_{k=0}^{p-1} (p-k)Z_{p-k}G_k \right), \quad p > 1. \end{cases} \quad (5.162)$$

Notons que $Z_+(0)$ est nul, alors que $Z_-(0) = Z_0$ vaut 1. Il s'agit de la donnée initiale prescrite en (5.159). Par ailleurs, en rappelant que $G(H)$ est une fonction qui tend vers $+\infty$ en $H = 0$, nous sommes assurés de la positivité du coefficient G_{-1} dans le développement en série de Laurent. En conséquence, tous les termes du développement en série de $Z_+(H)$ et $Z_-(H)$ sont bien définis.

Démonstration. Le développement de $Z_+(H)$ s'obtient en dérivant celui de $Z_-(H)$, d'après la première équation du système (5.158). Pour trouver le développement de $Z_-(H)$ en $H = 0$, remarquons que, d'après le système (5.158), $Z_-(H)$ doit être solution de l'équation scalaire du second ordre suivante :

$$d_{HH}Z_- + G(H)d_HZ_- - Z_- = 0,$$

avec la donnée initiale :

$$Z_-(0) = 1, \quad d_HZ_-(0) = -Z_+(0) = 0.$$

En remplaçant le développement de $G(H)$ dans cette équation et en la multipliant par H , on obtient le résultat par identification des coefficients. \square

Armés de ces développements, la donnée initiale $(Z_+(H_0), Z_-(H_0))$, pour le système (5.158) posé sur l'intervalle $[H_0, H_{max}]$, peut être approchée par les développements tronqués suivants :

$$\begin{cases} Z_-(H_0) = 1 + \sum_{i=1}^N Z_i H_0^i + \mathcal{O}(H^{N+1}), \\ Z_+(H_0) = 0 + \sum_{i=1}^N i Z_i H_0^{i-1} \mathcal{O}(H^N), \end{cases} \quad (5.163)$$

où dans les applications numériques nous avons choisi $N = 3$ et $H_0 = 10^{-10}$. Les formules (5.163) nécessitent la connaissance des deux premiers coefficients du développement en série de Laurent de la fonction $G(H)$, donnés ci-après :

$$\begin{cases} G_{-1} = \frac{\tilde{G}_{-1}}{X_1} > 0, \\ G_0 = \tilde{G}_0 - \tilde{G}_{-1} \frac{X_2}{X_1^2}, \end{cases}$$

avec les notations suivantes :

$$\begin{aligned} X_1 &= -\frac{4\lambda}{\eta_R(1+\lambda)^2} \frac{1}{h'(\eta_R)}, \\ X_2 &= -\frac{4\lambda}{(1+\lambda)^4} \frac{(h'(\eta_R))^2(1-\lambda^2) + 2\lambda h''(\eta_R)}{\eta_R(h'(\eta_R))^3}, \end{aligned} \quad (5.164)$$

et :

$$\begin{cases} \tilde{G}_{-1} = -\frac{\mu}{\nu} \frac{\eta_R^2(1-h^2(\eta_R))^2}{2h(\eta_R)(\eta_R^2(1-3h^2(\eta_R)) - a_0)} \neq 0, \\ \tilde{G}_0 = \left(\frac{8h^2(\eta_R)}{1-h^2(\eta_R)} + \frac{h''(\eta_R)\eta_R^2}{2h(\eta_R)} \right) \tilde{G}_{-1} + 2\frac{\nu}{\mu} \tilde{G}_{-1}^2 \frac{(a_0 + \eta_R^4 h(\eta_R) h''(\eta_R)) h(\eta_R)}{\eta_R^2(1-h^2(\eta_R))^2}. \end{cases} \quad (5.165)$$

Dans (5.165) la constante a_0 est donnée par :

$$a_0 = \frac{1 - 3\beta^2}{M^2},$$

et les notations $h(\eta_R)$, $h'(\eta_R)$ et $h''(\eta_R)$ désignent successivement la valeur de la fonction $h(\eta) = \frac{1}{M_a(\eta)}$ en η_R , puis de sa dérivée et de sa dérivée seconde toujours au même point.

Nous concluons cette section en donnant les éléments permettant d'obtenir le développement en série de Laurent de la fonction $G(H)$.

Démonstration. Avec les notations de la proposition (5.6.2), il s'agit de proposer un développement en série de Laurent de la fonction :

$$G(H) = \frac{\mu M^2}{\nu} \frac{(1 - \vartheta^2(H))^2}{\mathcal{F}(\eta(H), \vartheta(H))} \frac{1}{(d_\eta h)(\eta(H))}, \quad (5.166)$$

où ϑ et \mathcal{F} sont respectivement définies en (5.146) et (5.148). En remarquant que, par construction, $\vartheta(H) = h \circ \eta(H)$, nous proposons de réécrire $G(H)$ sous la forme suivante :

$$G(H) = G \circ \eta(H) = \frac{\mu M^2}{\nu} \frac{(1 - (h \circ \eta(H))^2(H))^2}{\mathcal{F}(\eta(H), h \circ \eta(H))} \frac{1}{(d_\eta h) \circ \eta(H)}.$$

Ce jeu d'écriture permet de clairement comprendre la fonction $G(H)$ comme la composée de la fonction $G(\eta)$ et de la fonction $\eta(H)$: l'obtention du développement en $H = 0$ de $G(H)$ peut être dès lors déduit du développement de la fonction $G(\eta)$ en $\eta_R = \eta(H = 0)$, suivi du développement de la fonction $\eta(H)$ en $H = 0$. Il suffira alors de prendre la composée de ces deux développements.

De manière à développer $G(\eta)$ en $\eta = \eta_R$, nous proposons de développer en la variable $x = \frac{\eta - \eta_R}{\eta_R}$, la fonction suivante en $x = 0$:

$$G(x) = \frac{\mu}{\nu} \frac{(1 - h^2(\eta_R(x+1)))^2}{\left(\eta_R x - \frac{a_0}{\eta_R} \left(\frac{x}{1+x} \right) - \eta_R (h^2(\eta_R) - (1+x)h^2(\eta_R(1+x))) \right) d_x h(\eta_R(1+x))},$$

où nous avons utilisé la formulation équivalente de $\mathcal{F}(\eta, h(\eta))$ (voir (5.148)) privilégiant le taux de compression de sortie η_R et non plus le taux de compression d'entrée $\eta_L = 1$:

$$\frac{1}{M^2} \mathcal{F}(\eta, h(\eta)) = -(\eta - \eta_R) - \frac{1 - 3\beta^2}{M^2} \left(\frac{1}{\eta} - \frac{1}{\eta_R} \right) + \eta_R h^2(\eta) - \eta h^2(\eta).$$

En cherchant le développement en série de Laurent de la fonction $G(x)$ autour de $x = 0$ sous la forme :

$$G(x) = \sum_{i=-1}^{+\infty} \tilde{G}_i x^i,$$

des calculs fastidieux montrent que les deux premiers coefficients sont donnés par les formules (5.165).

Développons maintenant la fonction $x(H)$ en $H = 0$:

$$x(H) = \frac{\eta(H) - \eta_R}{\eta_R} = \frac{1}{\eta_R} \left(h^{-1} \left(\frac{1 - \lambda e^{2H}}{1 + \lambda e^{2H}} \right) - \eta_R \right),$$

où l'on rappelle que :

$$h \circ \eta(H) = \left(\frac{1 - \lambda e^{2H}}{1 + \lambda e^{2H}} \right).$$

En cherchant le développement de la fonction $x(H)$ sous la forme suivante :

$$x(H) = \sum_{i=0}^{+\infty} X_i H^i,$$

nous obtenons que le premier coefficient est nul et que les deux coefficients suivants sont donnés par les formules (5.164). Le développement composé de $G(H) = G \circ \eta(H)$ s'en suit. \square

5.6.4 Mise en oeuvre

Choix d'une loi de production de turbulence longitudinale ψ , implication sur la plage des nombres réduits

Selon le paragraphe de synthèse (5.5.5) dévolu aux échelles de temps de Ristorcelli admissibles, il convient de fixer une loi de production de turbulence longitudinale, afin de définir l'échelle de temps de Ristorcelli utilisée par la formule de représentation (5.103). Cette loi de production $\psi(\eta)$ est astreinte à vérifier les inégalités suivantes :

$$\frac{1}{\eta^{\frac{1}{3}}} < \psi(\eta) < \min \left(\frac{\eta}{\eta_c^4(\beta, M)}, \frac{1}{\eta^3} \right), \quad (5.167)$$

où $\eta_c(\beta, M) = \sqrt{\frac{\beta}{M}}$. Rappelons que la validité de ces inégalités, reposant sur la satisfaction de :

$$\frac{1}{\eta^{\frac{1}{3}}} < \min \left(\frac{\eta}{\eta_c^4(\beta, M)}, \frac{1}{\eta^3} \right), \quad \eta < 1,$$

est conditionnée par les valeurs des nombres réduits β et M . Nous avons ainsi vérifié qu'elles étaient satisfaites pour tout nombre de Mach $M > 1$, à la condition de choisir $\beta \in [0, 0.36]$. Dans la pratique, nous faisons choix d'une loi de production de la forme suivante :

$$\psi_N(\eta) = \frac{N}{\eta^{\frac{1}{3}}}, \quad N > 1, \quad (5.168)$$

de sorte à satisfaire la borne inférieure. Nous aurions pu imposer, dans la définition de cette loi, la satisfaction de la borne supérieure, en privilégiant la définition :

$$\min \left(\frac{N}{\eta^{\frac{1}{3}}}, \frac{\eta}{\eta_c^4(\beta, M)}, \frac{1}{\eta^3} \right), \quad \eta < 1,$$

définition continue en η , mais non dérivable. Nous avons préféré ne pas utiliser cette définition non différentiable puisque nous aurons besoin d'évaluer des dérivées de la loi de production $\psi_N(\eta)$ ultérieurement, dans les chapitres consacrés à la stabilité structurelle et multidimensionnelles du choc droit. En conséquence, et pour $N > 1$ fixé dans (5.168), nous devons limiter la plage des paramètres β et M , de sorte à vérifier l'inégalité :

$$\psi_N(\eta) < \min \left(\frac{\eta}{\eta_c^4(\beta, M)}, \frac{1}{\eta^3} \right) = \frac{\eta}{\eta_c^4(\beta, M)}, \quad (5.169)$$

pour $\eta < \eta_c(\beta, M)$, condition d'apparition de l'accident de surcompression lorsque $\mathcal{T}_{ris} = 0$. Nous choisissons systématiquement le nombre de Mach dans l'intervalle $[1, 10]$. La satisfaction de l'inégalité précédente pour $\eta < \eta_c(\beta, M)$, nous conduit alors à restreindre le choix de β à un intervalle de la forme $[0, \beta_{lim}(N)]$, où la borne supérieure $\beta_{lim}(N) > 0$ dépend de la valeur de N retenue dans la définition de la loi de production (5.168). Clairement, plus N est grand, plus $\beta_{lim}(N)$ est petit. La détermination de cette borne supérieure est menée numériquement. Nous obtenons ainsi $\beta_{lim}(N = 1.01) = 0.35$, valeur proche de la borne supérieure 0.36 obtenue pour les inégalités (5.167). Nous avons calculé $\beta_{lim}(N = 10) = 0.14$. Dans notre analyse de stabilité des solutions chocs, il est apparu pertinent de limiter le choix de N à l'intervalle $[1.01, 2]$, avec pour la borne supérieure $\beta_{lim}(N = 2) = 0.28$. Cette dernière borne nous est apparue suffisamment grande pour ne pas constituer une réelle limitation dans les applications. La figure (5.6) permet d'obtenir la borne supérieure $\beta_{lim}(N)$ en fonction du paramètre N pour la plage de Mach $M \in [1, 10]$. Rappelons que la violation de l'inégalité (5.169) correspond à l'apparition du phénomène de surcompression sur l'état de sortie \mathbf{u}_R , i.e. $M_a(\mathbf{u}_R) = 1$ (M_a^R désigne sur la figure (5.6) la valeur de $M_a(\mathbf{u}_R) = M_a^R$).

M_a^R . Rappelons que le fait de garantir la monotonie de la fonction $\eta \rightarrow \vartheta(\eta)$ restreint le domaine d'étude en (M, β) . Nous avons choisi de nous intéresser à une plage de Mach relatif $M \in [1, 10]$. La figure (5.6) représente le cas limite où $M_a^R = 1$, dans le plan (M, β) . On remarque alors que pour la plage de Mach retenue, il existe un β_{lim} , obtenu pour $M = 10$ pour lequel on est sûr que $M_a^R > 1$ pour tout $\beta < \beta_{lim}$ et pour tout $M \in [1, 10]$. Ce β_{lim} dépend bien sûr de N . Plus N est grand, plus β_{lim} est petit. Par exemple, pour $N = 1.01$, $\beta_{lim} \simeq 0.35$ et pour $N = 10$, $\beta_{lim} \simeq 0.14$. Dans l'analyse de stabilité multidimensionnelle des chocs plans, nous avons limité l'analyse aux cas pertinents $N = 1.01$ et $N = 2$. Pour le choix $N = 2$, nous observons la valeur

$\beta_{lim} = 0.28$ sur la plage $M \in [1, 10]$. Cette borne supérieure nous est apparue grande dans les applications.

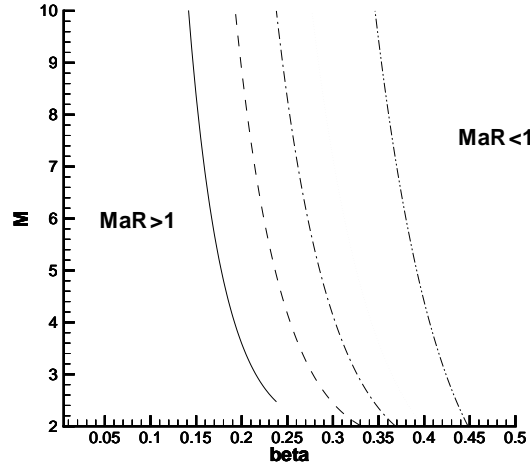


FIG. 5.6 – Limite de β en fonction du paramètre N choisi dans la fonction $\psi_N(\eta)$ pour la plage de Mach $M \in [1, 10]$

— $N = 10$, - - - $N = 5$, - · - · - $N = 3$, · · · · $N = 2$, - - - - - $N = 1.01$

Intégration numérique du système en (Y_+, Y_-) pour la tabulation de la fonction cinétique κ_{Et}

Nous commençons par fixer $N > 1$, puis à (β, M) fixés dans $[0, \beta_{lim}(N)] \times [1, 10]$, nous calculons le taux de compression de sortie $\eta_R(\beta, M)$ comme l'unique racine, strictement inférieure à l'unité, de l'équation :

$$\phi_N(\eta, M, \beta) = (\eta - 1) + \frac{1 - 3\beta^2}{M^2} \left(\frac{1}{\eta} - 1 \right) + \frac{\beta^2}{M^2} (\psi_N(\eta) - 1) = 0. \quad (5.170)$$

Le calcul est mené par une méthode de Newton. La connaissance de $\eta_R(\beta, M)$ donne accès à la fonction : $\eta \rightarrow \mathcal{I}(\eta)$ définie en (5.106) puis à la fonction $\eta \rightarrow h(\eta) = \frac{1}{M_a(\eta)} = \frac{\beta \sqrt{\mathcal{I}(\eta)}}{M\eta^2}$, et enfin à la fonction $\eta \rightarrow H(\eta)$ définie en (5.143), et, par inversion, à la fonction $H \rightarrow \eta(H)$, donnant le changement de variable en temps introduit dans la proposition (5.6.2). Cette fonction $H \rightarrow \eta(H)$ n'est pas connue explicitement. Il est donc nécessaire de l'inverser numériquement. Une méthode de Newton, initialisée en $\eta = \eta_R(\beta, M)$, a toujours donné satisfaction. Cette procédure permet alors d'évaluer la fonction $H \rightarrow G(H)$ intervenant dans le système linéaire (5.158). De manière à résoudre le problème approché :

$$\begin{cases} d_H Z_- = -Z_+, \\ d_H Z_+ = -G(H)Z_+ - Z_-, \end{cases} \quad (5.171)$$

équipée de la donnée initiale :

$$\begin{cases} Z_+(H=0) = 0, \\ Z_-(H=0) = 1, \end{cases} \quad (5.172)$$

nous utilisons une méthode de Runge–Kutta à pas adaptatifs du cinquième ordre décrite au chapitre (15.2) page 607 de l’ouvrage classique Numerical Recipies. Cette méthode nécessite la définition d’un critère d’arrêt correspondant à l’instant où l’on atteint H_{max} , explicitement donné par :

$$H_{max} = \frac{1}{2} \ln \frac{(1 + h(\eta_R))(1 - h(\eta_L))}{(1 - h(\eta_R))(1 + h(\eta_L))}, \text{ avec } h(\eta_L) = \eta_c^2(\beta, M).$$

Or, lorsque H tend vers H_{max} , la fonction $G(H)$ explose par valeurs positives. On ne peut donc pas intégrer jusqu’à H_{max} et nous avons besoin ici d’un critère d’arrêt. Celui-ci est obtenu en rappelant que $Z_+(H)$ tend vers 0 lorsque H tend vers H_{max} , et que $Z_-(H)$ tend vers une limite finie $Z_-(H_{max})$. Nous proposons alors d’estimer l’écart entre $Z_-(H_{max})$ et $Z_-(H)$ par la formule des accroissements finis :

$$|Z_-(H_{max}) - Z_-(H)| \leq \max_{H \leq t \leq H_{max}} |d_H Z_-(t)| |H_{max} - H|.$$

En rappelant que $d_H Z_-(H) = -Z_+(H)$, nous proposons alors le test d’arrêt suivant :

$$|Z_+(H)| |H_{max} - H| \leq \epsilon_0, \quad (5.173)$$

où ϵ_0 est un petit paramètre à préciser. Dans les applications, ϵ_0 est fixé à la valeur 10^{-9} . La formule (5.160) permet de calculer $z_-(0)$ et donne accès aux formules de représentation suivantes de (Y_+, Y_-) en la variable H :

$$\begin{cases} Y_+(H) = z_-(0) \frac{1 + \lambda}{4} e^H (Z_+(H) + Z_-(H)), \\ Y_-(H) = z_-(0) \frac{1 + \lambda}{4\lambda e^H} (Z_+(H) - Z_-(H)). \end{cases}$$

Nous disposons ainsi des valeurs approchées $Y_+^*(+\infty)$ et $Y_-^*(+\infty)$, nécessaires au calcul de la fonction cinétique $\kappa_{E_t}(\alpha, \beta, M)$, données par les formules suivantes :

$$\begin{cases} Y_+^*(+\infty) = \frac{z_-(0)}{2(1 + h(\eta_R))}, \\ Y_-^*(+\infty) = \frac{z_-(0)}{2(1 - h(\eta_R))}. \end{cases}$$

Il suffit ensuite de faire varier β dans l’intervalle $[0, \beta_{lim}]$, et M dans l’intervalle $[1, 10]$, pour construire la fonction cinétique donnée par la formule (5.116).

Illustrations numériques

L’objectif est ici d’illustrer numériquement les relations liant le choix d’une loi de production de turbulence longitudinale $\psi_N(\eta)$ à l’amplitude de l’échelle de temps de Ristorcelli résultante. Nous voulons illustrer que choisir N décroissant fait croître

l'amplitude de cette échelle de temps, en étudiant numériquement l'évolution des composantes du tenseur de Reynolds, évaluées sur l'état de sortie \mathbf{u}_R :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{R_{11}^R}{\rho_L a_L^2} = \frac{\mathcal{I}_R}{\eta_R^3}, \end{array} \right. \quad (5.174)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{R_{12}^R}{R_{12}^L} = \frac{\sqrt{\mathcal{I}_R}}{2\beta\eta_R^2} (Y_+^*(+\infty) - Y_-^*(+\infty)), \end{array} \right. \quad (5.175)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{R_{22}^R}{\rho_L a_L^2} = \frac{1}{\eta_R} \left((\zeta^2 - \alpha^2) \frac{1}{\mathcal{I}} + \frac{\alpha^2}{4\beta^2} (Y_+^*(+\infty) - Y_-^*(+\infty))^2 \right), \end{array} \right. \quad (5.176)$$

où $\zeta^2 = \frac{R_{22}^L}{R_{11}^L} = \frac{R_{22}^L}{\rho_L a_L^2}$. Nous verrons alors que la correction fait diminuer considérablement le taux de turbulence longitudinale de sortie. Dans un deuxième temps, nous augmenterons la plage de Mach de manière à montrer que l'on évite désormais l'accident de surcompression, contrairement au cas sans correction où nous avons vu, avec la figure (5.2) précisant l'apparition du phénomène de surcompression en fonction du nombre de Mach, que l'on était très rapidement limité en nombre de Mach à β fixé. Sur la figure (5.7), on représente $R_{11}^R = R_{11}(\mathbf{u}_R)$ et $R_{12}^R = R_{12}(\mathbf{u}_R)$ en fonction du nombre de Mach pour le cas isotherme sans correction de Ristorcelli. On voit que l'on est rapidement limité en M par l'accident de surcompression, et ce conformément à la figure (5.2). Toujours conformément à cette figure, nous représentons une plage de Mach assez limitée : $M \in [1, 2.5]$. Les différentes courbes correspondent à un β croissant de 0.005 à 0.2. Quand les courbes s'arrêtent brusquement, cela correspond à l'accident de surcompression pour lequel toutes les grandeurs ont été égalisées à la valeur inaccessible -1 par convention. On remarque que sans la correction de Ristorcelli, le taux de turbulence longitudinale R_{11}^R atteint des valeurs très grandes en sortie. Il augmente avec le Mach et l'inverse du Mach turbulent, allant jusqu'à plus de 200 pour des Mach de 2.5 et des Mach turbulents de 0.005. De même, R_{12}^R peut être très grand en sortie. Il augmente aussi avec le Mach et l'inverse du Mach turbulent.

Sur la figure (5.7, c), nous constatons qu'en l'absence de la correction de Ristorcelli, l'application $M \rightarrow \eta_R(\beta, M)$, à β fixé, est décroissante.

La formule (5.176) indique que $R_{22}^R = R_{22}(\mathbf{u}_R)$ dépend du coefficient d'anisotropie α . On représente alors sur la figure (5.8) deux familles de courbes, en traits pleins et en traits discontinus, pour deux valeurs de α différentes. Encore une fois, on remarque que R_{22}^R peut devenir très grand.

Intéressons nous maintenant aux résultats obtenus avec la correction de Ristorcelli. On représente R_{11}^R , R_{12}^R et η_R pour la même plage de Mach allant de 1.1 à 2.5 et pour deux corrections. Une correction faible pour laquelle $N = 2$ et une correction forte $N = 1.01$ (qui est quasiment la correction la plus forte possible puisque la limite inférieure du paramètre N est 1). Sur la figure (5.9), on voit que le principal intérêt de la correction de Ristorcelli est de diminuer considérablement le taux de turbulence longitudinale. Celui-ci reprend des valeurs raisonnables environ 100 fois moins grandes (de 3.6 à 3.8 pour la correction faible et de 1.8 à 1.9 pour la correction forte en fonction de la valeur de β). Il en va de même pour R_{12}^R qui prend des valeurs dix fois moins grandes (de 4.5 à 5.5 pour la correction faible et de 3.3 à 3.7 pour la correction forte en fonction de la valeur de β). Remarquons qu'entre la correction faible ($N = 2$) et la correction forte ($N = 1.01$), les valeurs atteintes par R_{11}^R et R_{12}^R sont deux fois moins grandes. C'est pour cette raison que nous qualifions la correction pour $N = 2$ de faible

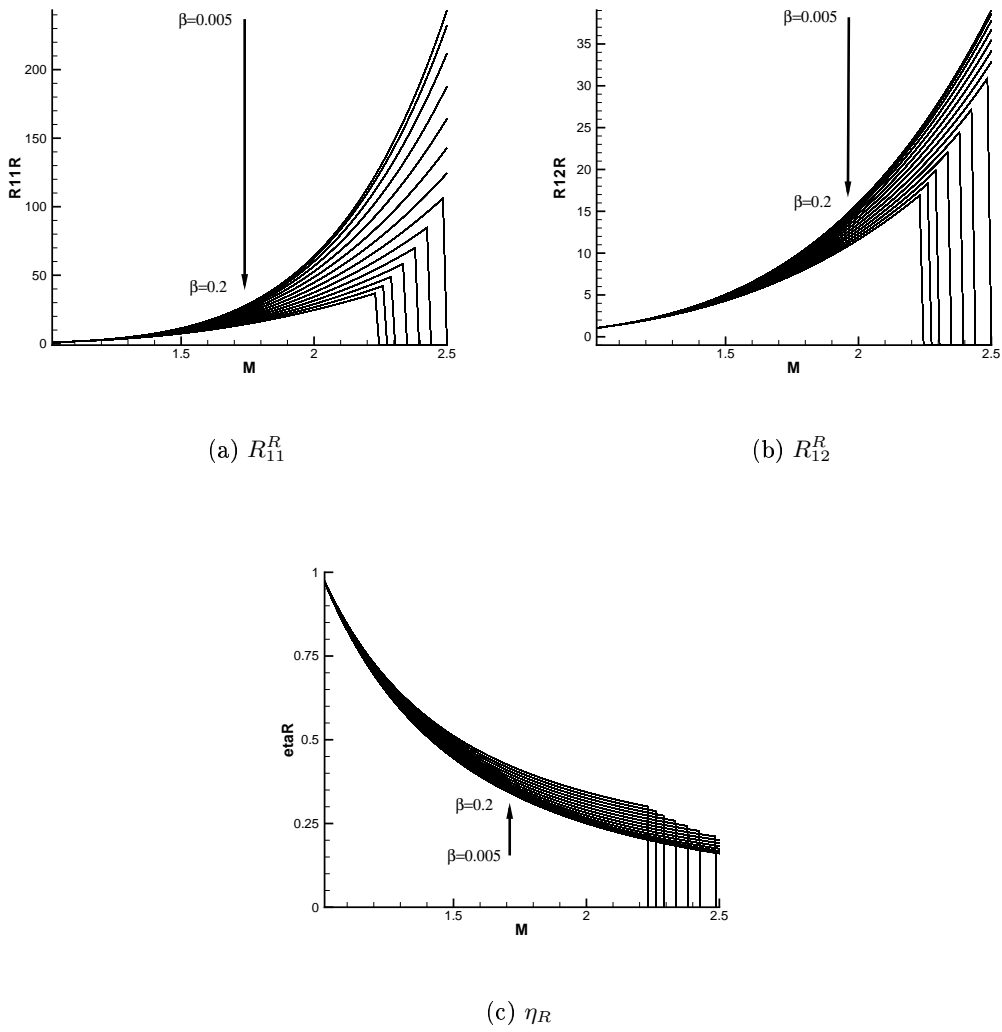


FIG. 5.7 – Valeurs de R_{11}^R , R_{12}^R et η_R de sortie en fonction du nombre de Mach en isotherme sans correction de Ristorcelli et pour différentes valeurs de β

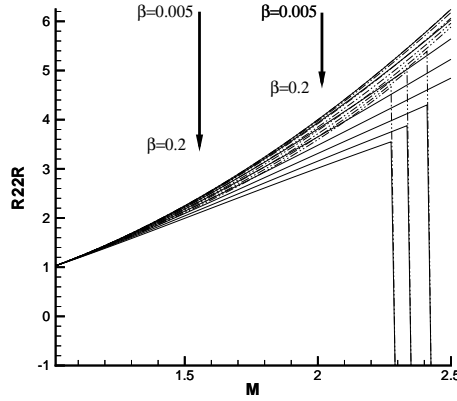


FIG. 5.8 – Valeurs de R_{22}^R de sortie en fonction du nombre de Mach en isotherme sans correction de Ristorcelli et pour différentes valeurs de β

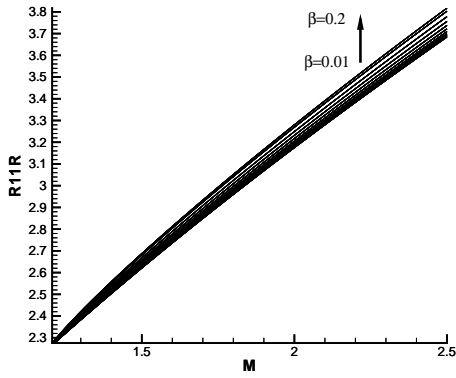
— $\alpha = 0.1$, - - - - $\alpha = 0.5$

et que nous ne nous intéressons pas à des corrections telles que $N > 2$. Conformément à ce que nous avons exigé, nous constatons, figures (5.9, e et f), la propriété de stricte décroissance de l'application $M \rightarrow \eta_R(\beta, M)$ à β fixé.

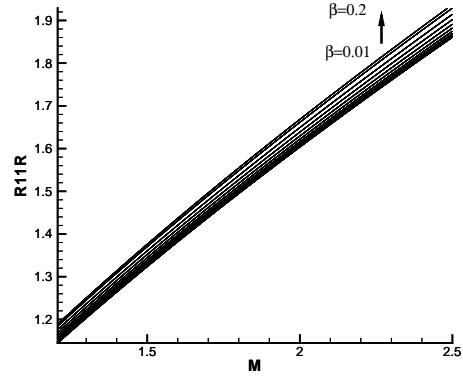
Intéressons nous maintenant à R_{22}^R . La figure (5.10) indique que, contrairement aux deux autres composantes R_{11}^R et R_{12}^R du tenseur de Reynolds, la correction de Ristorcelli a peu d'influence sur la valeur obtenue sans correction. Elle a cependant légèrement augmenté, ce qui laisse penser que la correction de Ristorcelli contribue à transformer R_{11}^R et R_{12}^R en R_{22}^R .

Pour conclure, nous examinons l'amplitude des deux fonctions cinétiques $\kappa_{\mathcal{I}}$ et κ_{E_t} , avec et sans correction de Ristorcelli. Dans le cas sans correction, seule κ_{E_t} existe. On la représente divisée par α (en effet α apparaît uniquement en facteur dans son expression) sur la figure (5.11). Ainsi cette fonction cinétique ne dépend plus du coefficient d'anisotropie. La fonction cinétique adimensionnée est très petite (elle varie de 10^{-8} à 10^{-2} environ, selon β). On voit qu'elle est, de plus, strictement décroissante avec le Mach, ce qui n'était pas forcément une propriété attendue. Enfin, la discontinuité éventuelle de son graphe représente l'apparition de l'accident de Lax pour lequel sa valeur a été arbitrairement égalisée à -1 .

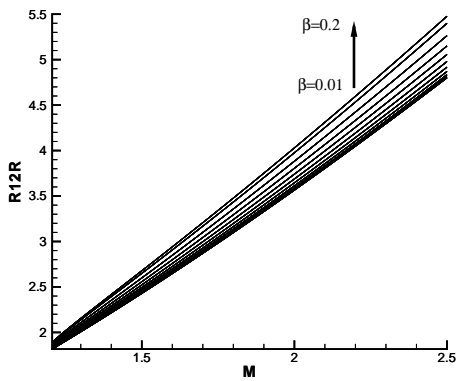
On représente κ_{E_t} et $\kappa_{\mathcal{I}}$ sur la figure (5.12), mais cette fois en présence de la correction de Ristorcelli. Concernant la fonction cinétique κ_{E_t} divisée par α , on remarque que celle-ci est encore plus petite (elle prend des valeurs entre 10^{-10} et 10^{-3} environ en fonction de β) que sans correction. De plus, plus la correction est forte, plus la fonction cinétique est petite. La masse du produit non conservatif avec correction est donc plus petite que sans correction (divisée par 10, voir 100 en fonction de β). La correction améliore donc aussi la non conservativité du système et, plus la correction est forte, "moins le système est non conservatif" en ce qui concerne l'équation sur ρE_t . Notons que la fonction cinétique κ_{E_t} est encore strictement décroissante et négative.



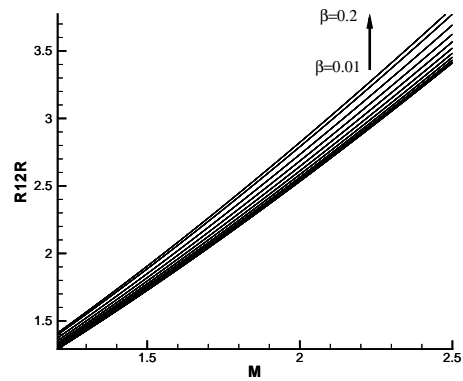
(a) $R_{11}^R, N = 2$



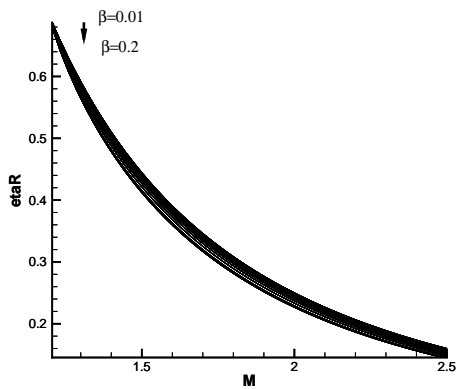
(b) $R_{11}^R, N = 1.01$



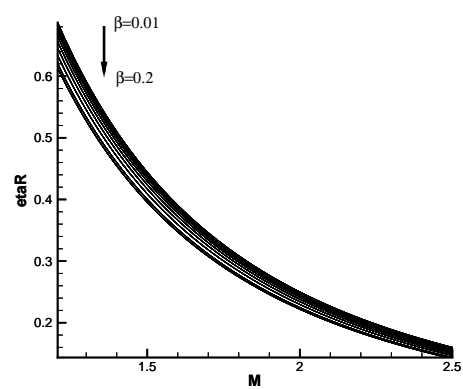
(c) $R_{12}^R, N = 2$



(d) $R_{12}^R, N = 1.01$



(e) $\eta_R, N = 2$



(f) $\eta_R, N = 1.01$

FIG. 5.9 – Valeurs de R_{11}^R , R_{12}^R et η_R de sortie en fonction du nombre de Mach et pour différentes valeurs de β en isotherme avec deux corrections de Ristorcelli différentes

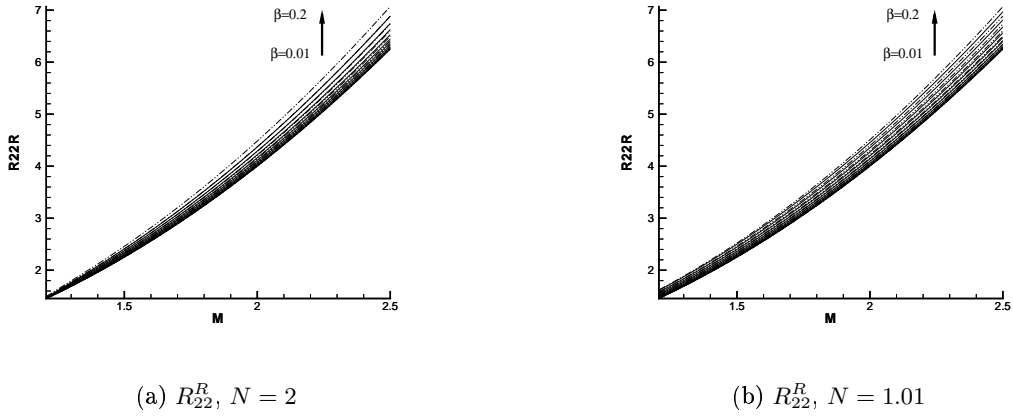


FIG. 5.10 – Valeurs de R_{22}^R de sortie en fonction du nombre de Mach et pour différentes valeurs de β en isotherme avec deux corrections de Ristorcelli différentes

—— $\alpha = 0.1$, - - - - $\alpha = 0.5$

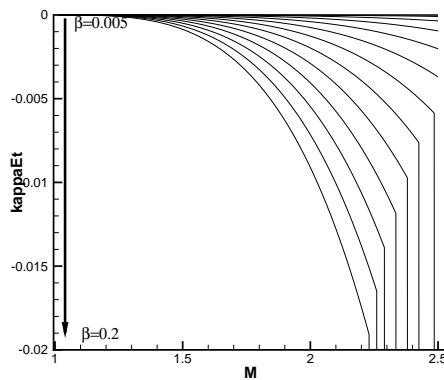
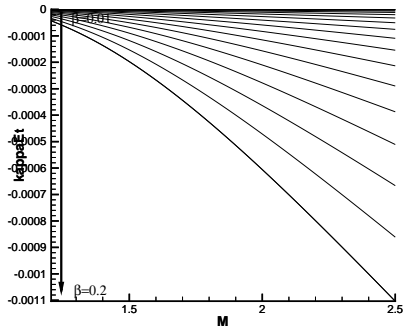
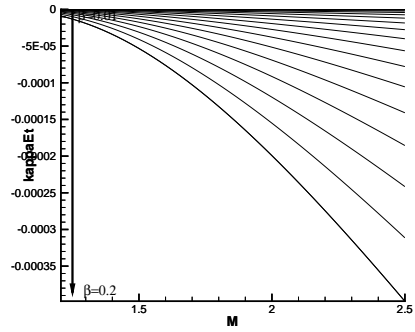


FIG. 5.11 – Valeurs de κ_{E_t} en fonction du nombre de Mach en isotherme sans correction de Ristorcelli et pour différentes valeurs de β .

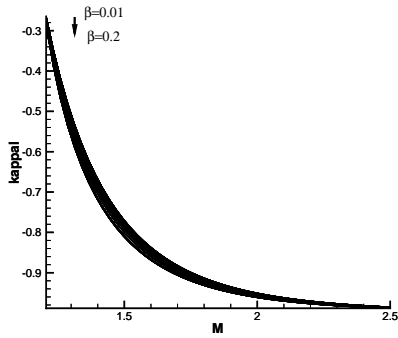
Enfin, on peut représenter la deuxième fonction cinétique $\kappa_{\mathcal{I}}$. Celle-ci est aussi négative (en accord avec sa définition) et strictement décroissante, ce qui n'était pas évident au départ. Elle est plus importante quand la correction est plus forte. Ses valeurs ne sont pas du tout négligeables contrairement à κ_{E_t} . Finalement, le dernier point important est que la correction permet bien d'éviter l'accident de surcompression.



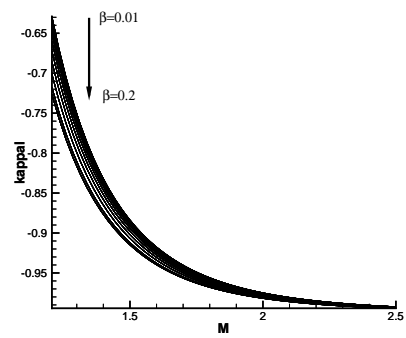
(a) κ_{E_t} , $N = 2$



(b) κ_{E_t} , $N = 1.01$



(c) $\kappa_{\mathcal{I}}$, $N = 2$



(d) $\kappa_{\mathcal{I}}$, $N = 1.01$

FIG. 5.12 – Valeurs de κ_{E_t} et $\kappa_{\mathcal{I}}$ en fonction du nombre de Mach et pour différentes valeurs de β en isotherme avec deux corrections de Ristorcelli différentes

— $\alpha = 0.1$, - - - - $\alpha = 0.5$

Chapitre 6

Cadre anisotherme

Dans ce chapitre, nous étudions le système dynamique gouvernant les solutions onde progressive dans le cadre du modèle anisotherme. Par modèle anisotherme, nous entendons le modèle général avec énergie présenté dans le chapitre 4, mais sans correction de Ristorcelli et pour un fluide parfaitement conducteur. Malgré ces deux hypothèses simplificatrices, le système étudié reste complexe, l'accident de surcompression pouvant désormais survenir en l'absence de correction de Ristorcelli. De plus, contrairement au cadre isotherme du chapitre précédent, nous ne serons pas en mesure de démontrer un résultat théorique d'existence et d'unicité de la solution onde progressive dans le cas où l'état de sortie n'est pas surcompressif. Cependant, nous élaborerons une méthode numérique qui, par construction, permettra de démontrer numériquement ce résultat. Les deux hypothèses principales, pour pouvoir effectuer cette intégration, étant la stricte décroissance du taux de compression (hypothèse que nous n'avons pas pu démontrer faute de temps) ainsi que la non surcompressivité de l'état de sortie comme précisé ci-dessus. Nous montrerons qu'il est toujours possible de respecter cette dernière hypothèse par un choix judicieux des nombres réduits (α, β, M) . Dans ce cas, de nombreuses propriétés, déjà démontrées en isotherme, restent valables. En revanche, si l'accident de surcompression survient, nous n'aurons aucun résultat, qu'il soit théorique ou numérique, indiquant que toutes les trajectoires convergent mais vers une limite à chaque fois différente comme en isotherme. C'est pourquoi nous n'étudierons jamais ce cas.

Sous ces deux hypothèses, nous montrons que la composante R_{12} du tenseur de Reynolds garde un signe constant tout le long du profil de compression, de sorte que $R_{12}(\mathbf{u}_R)$ possède le même signe que $R_{12}(\mathbf{u}_L)$ dans la solution choc limite. Cette propriété de conservation du signe, permet d'utiliser un changement de variable construit sur l'énergie tangentielle ρE_t , conduisant à un ensemble complet de relations de Rankine-Hugoniot généralisées, permettant de caractériser les solutions chocs. Ces relations de Rankine-Hugoniot généralisées font intervenir une unique fonction cinétique sur l'énergie tangentielle ρE_t . En effet, l'absence de la correction de Ristorcelli entraîne que l'entropie $\rho \mathcal{I}$ est désormais gouvernée par une loi de conservation. En conséquence, il n'y a plus besoin d'une fonction cinétique pour fermer la relation de Rankine-Hugoniot généralisée associée et le système en anisotherme ne nécessite la définition que d'une seule fonction cinétique sur l'énergie tangentielle. L'objectif principal de ce chapitre est alors de calculer les relations de Rankine-Hugoniot généralisées par l'intermédiaire de la fonction cinétique associée à l'énergie tangentielle. Ce calcul

repose sur l'intégration numérique du système gouvernant les solutions ondes progressives. Nous proposons à cette fin une méthode permettant d'aborder cette intégration difficile. Une fois l'intégration réalisée nous nous attacherons aussi à commenter les propriétés physiques de la solution onde progressive ainsi calculée. Enfin, soulignons que l'ensemble des propriétés mises en avant dans ce chapitre, ainsi que la résolution numérique de la fonction cinétique, joueront un rôle central dans l'analyse à venir de la stabilité structurelle, puis multidimensionnelle, des solutions chocs.

6.1 Le système d'EDP adimensionné

Dans cette section, nous rappelons le système étudié dans le cadre anisotherme et nous rappelons quelques-unes de ses propriétés. Le système d'EDP adimensionné (4.78) a été exprimé avec conductivité thermique et correction de Ristorcelli pour un gaz parfait polytropique. Nous le particularisons ici en supposant le fluide parfaitement conducteur (la conductivité thermique κ est nulle ou encore le nombre de Prandtl Pr est infini) et en négligeant la correction de Ristorcelli. Ces simplifications sont faites conformément aux motivations exposées à la fin du chapitre 4 concernant la difficulté de résoudre le système d'EDO complet (4.85) gouvernant la solution onde progressive dans le cas général. En égalisant formellement $\kappa = 0$ (ou $Pr = +\infty$) et $\mathcal{T}_{ris} = 0$ dans (4.78), nous obtenons :

$$\left\{ \begin{array}{l} \partial_t \rho + \partial_x(\rho u) = 0, \\ \partial_t(\rho u) + \partial_x(\rho u^2 + p + \beta^2 R_{11}) = \partial_x \left(\frac{1}{Re} \partial_x u \right), \\ \partial_t(\rho v) + \partial_x(\rho uv + \beta^2 R_{12}) = \partial_x \left(\frac{\nu}{\mu} \frac{1}{Re} \partial_x v \right), \\ \partial_t(\rho E) + \partial_x((\rho E + p + \beta^2 R_{11})u + \beta^2 R_{12}v) = \partial_x \frac{1}{Re} \left(u \partial_x u + \frac{\nu}{\mu} v \partial_x v \right), \\ \partial_t R_{11} + \partial_x(R_{11}u) + 2R_{11} \partial_x u = 0, \\ \partial_t R_{22} + \partial_x(R_{22}u) + 2R_{12} \partial_x v = 0, \\ \partial_t R_{12} + \partial_x(R_{12}u) + R_{11} \partial_x v + R_{12} \partial_x u = 0, \end{array} \right. \quad (6.1)$$

où l'énergie totale du gaz parfait polytropique trouve la définition suivante :

$$\rho E = \frac{p}{\gamma - 1} + \rho \frac{u^2}{2} + \rho \frac{v^2}{2} + \beta^2 \frac{R_{11}}{2} + \beta^2 \frac{R_{22}}{2}. \quad (6.2)$$

Le nombre adimensionné β , appelé nombre de Mach turbulent, utilisé dans (6.1)-(6.2) est toujours celui du tableau (4.2) donné au chapitre 4 et Re représente bien sûr un nombre de Reynolds (voir formule (4.4)) déduit de l'adimensionnement, particulier aux ondes progressives, employé ici. Contrairement au cadre isotherme précédent, l'énergie totale est désormais une inconnue du système. Le vecteur des sept inconnues $(\rho, \rho u, \rho v, \rho E, R_{11}, R_{22}, R_{12})$ sera encore noté \mathbf{u} . La proposition (3.2.1) nous permet d'affirmer que le système du premier ordre extrait de (6.1) est hyperbolique. Les deux champs extrêmes sont vraiment non linéaires, alors que tous les autres champs sont

linéairement dégénérés. Rappelons que l'existence de champs vraiment non linéaires rend ambigus les produits non conservatifs du système (6.1) et la définition de relations de saut permettant de caractériser les solutions chocs dans la limite d'un nombre de Reynolds infini. En revanche, les discontinuités associées aux champs linéairement dégénérés ne rendent pas ambigus ces mêmes produits non conservatifs.

Les lois d'évolution supplémentaires adimensionnées (4.79)-(4.83), données dans le cas général avec correction de Ristorcelli et conductivité thermique, deviennent :

$$\left\{ \begin{array}{l} \partial_t(\rho\mathcal{I}(\mathbf{u})) + \partial_x(\rho\mathcal{I}(\mathbf{u})u) = 0, \\ \partial_t(\rho\mathcal{D}(\mathbf{u})) + \partial_x(\rho\mathcal{D}(\mathbf{u})u) = 0, \\ \partial_t(\rho E_n(\mathbf{u})) + \partial_x((\rho E_n(\mathbf{u}) + p + \beta^2 R_{11})u) = \partial_x\left(\frac{1}{Re}u\partial_x u\right) + \frac{1}{Re}\frac{\nu}{\mu}(\partial_x v)^2, \\ \partial_t(\rho E_t(\mathbf{u})) + \partial_x(\rho E_t(\mathbf{u})u + \beta^2 R_{12}v) = \partial_x\left(\frac{1}{Re}\frac{\nu}{\mu}v\partial_x v\right) - \frac{1}{Re}\frac{\nu}{\mu}(\partial_x v)^2, \\ \partial_t(\rho s(\mathbf{u})) + \partial_x(\rho s(\mathbf{u})u) = \frac{1}{ReT}\left((\partial_x u)^2 + \frac{\nu}{\mu}(\partial_x v)^2\right), \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} (6.3) \\ (6.4) \\ (6.5) \\ (6.6) \\ (6.7) \end{array}$$

où l'on rappelle les définitions suivantes :

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathcal{I}(\mathbf{u}) = R_{11}\eta^3, \\ \mathcal{D}(\mathbf{u}) = (R_{11}R_{22} - R_{12}^2)\eta^4, \\ \rho E_n(\mathbf{u}) = \frac{p}{\gamma - 1} + \rho\frac{u^2}{2} + \beta^2\frac{R_{11}}{2}, \\ \rho E_t(\mathbf{u}) = \rho\frac{v^2}{2} + \beta^2\frac{R_{12}^2}{2R_{11}}, \\ s(\mathbf{u}) = \ln\frac{p}{\rho^\gamma}. \end{array} \right. \quad (6.8)$$

La loi d'évolution sur $\mathcal{W}(\mathbf{u}) = R_{22} - \frac{R_{12}^2}{R_{11}} = \frac{\mathcal{D}(\mathbf{u})}{\mathcal{I}(\mathbf{u})}$ est inchangée :

$$\partial_t(\rho\mathcal{W}(\mathbf{u})) + \partial_x(\rho\mathcal{W}(\mathbf{u})u) = 0, \quad (6.9)$$

Notons que l'énergie totale se décompose toujours comme suit :

$$\rho E = \rho E_n(\mathbf{u}) + \rho E_t(\mathbf{u}) + \beta^2\rho\frac{\mathcal{W}(\mathbf{u})}{2}. \quad (6.10)$$

Introduisons aussi l'énergie particulière suivante :

$$\rho\xi(\mathbf{u}) = \rho E_n(\mathbf{u}) + \rho E_t(\mathbf{u}). \quad (6.11)$$

Cette nouvelle énergie est gouvernée par la même loi d'évolution que l'énergie totale (voir le système (6.1)) puisqu'à une dimension d'espace la quantité $\rho\mathcal{W}(\mathbf{u})$ se conserve selon (6.9). Ainsi, il pourra être intéressant d'utiliser cette énergie pour l'étude de la stabilité structurelle du choc droit afin de simplifier certains calculs. En revanche, elle ne pourra être utilisée pour l'étude de la stabilité multidimensionnelle puisque $\rho\mathcal{W}(\mathbf{u})$ ne se conserve plus à deux dimensions d'espace.

Remarquons enfin que, contrairement au cadre isotherme précédent avec correction de Ristorcelli, les quantités $\rho\mathcal{I}(\mathbf{u})$ et $\rho\mathcal{D}(\mathbf{u})$ sont désormais gouvernées par des lois de conservation. Nous verrons, dans la suite, que ceci implique qu'il suffit désormais d'une seule fonction cinétique sur $\rho E_t(\mathbf{u})$ pour définir les relations de saut généralisées.

6.2 Le système d'EDO dans la cadre anisotherme

Nous donnons ici le système d'EDO gouvernant les ondes progressives associées au premier champ, un état \mathbf{u}_L étant donné et une vitesse de propagation σ étant prescrite. À nouveau, l'état \mathbf{u}_L est choisi tel que $R_{11}^L > 0$ et nous rappelons que l'étude est menée ici avec $R_{12}^L \neq 0$ et même sans restriction $R_{12}^L > 0$ selon le lemme (4.2.2). Les notations utilisées ici sont celles de la section (4.2.1), nous ne les rappellerons pas toutes ici. Notons simplement que l'adimensionnement du système d'EDP diffère de celui du système d'EDO par l'adimensionnement de la composante R_{12} du tenseur de Reynolds qui n'est plus $\rho_L a_L^2$ comme pour les autres composantes, mais $R_{12}^L > 0$. Ceci a pour but de décrire précisément la compétition entre les phénomènes tangentiels et normaux dans l'hypothèse $R_{12}^L \neq 0$. Ce nouvel adimensionnement fait apparaître le coefficient d'anisotropie α défini par :

$$\alpha = \frac{R_{12}^L}{R_{11}^L}. \quad (6.12)$$

Rappelons aussi qu'il apparaîtra plus tard dans l'étude un dernier nombre adimensionnel ζ défini par :

$$\zeta = \sqrt{\frac{R_{22}^L}{R_{11}^L}}, \quad (6.13)$$

de sorte que la valeur adimensionnée du mineur $\mathcal{D}(\mathbf{u}_L)$ introduit en (6.8) s'écrit :

$$\mathcal{D}_L = \mathcal{D}(\mathbf{u}_L) = \zeta^2 - \alpha^2. \quad (6.14)$$

La condition de réalisabilité $\mathcal{D}_L \geq 0$ fixe donc une contrainte naturelle entre ζ^2 et α^2 . L'ensemble des adimensionnements, donnés dans le tableau (4.2) du chapitre 4 est finalement rappelé ici :

$$\begin{aligned} M_c(\mathbf{u}) &= \frac{u - \sigma}{c(\mathbf{u})} & M_a(\mathbf{u}) &= \frac{u - \sigma}{a(\mathbf{u})} \\ M &= M(\mathbf{u}_L) & M_a &= M_a(\mathbf{u}_L) \\ \beta &= \frac{a_L}{c_L} & \alpha &= \frac{R_{12}^L}{R_{11}^L} & \zeta &= \sqrt{\frac{R_{22}^L}{R_{11}^L}} \end{aligned}$$

TAB. 6.1 – Nombres adimensionnels associés au problème onde progressive

Munis de ces notations, nous pouvons dès lors énoncer le résultat suivant :

Proposition 6.2.1. *Le système d'EDO gouvernant les solutions onde progressive du système (6.1) est donné par :*

$$\left\{ \begin{aligned} M d_\xi \eta &= \frac{(\gamma - 1)}{2\eta} (\alpha^2 [Y_+ Y_-] - \mathcal{G}(\eta)), \\ \frac{\nu M}{\mu} d_\xi Y_+ &= \frac{M\eta^2 - \beta}{2\eta^4} ((M\eta^2 + \beta)Y_+ + (M\eta^2 - \beta)Y_-), \\ \frac{\nu M}{\mu} d_\xi Y_- &= \frac{M\eta^2 + \beta}{2\eta^4} ((M\eta^2 + \beta)Y_+ + (M\eta^2 - \beta)Y_-), \end{aligned} \right. \quad (6.15)$$

avec :

$$\begin{aligned} \mathcal{G}(\eta) &= \frac{1-\eta}{\eta^2} \\ &\times \left(\frac{\gamma+1}{\gamma-1} M^2 \eta^3 - \left(\frac{2}{\gamma-1} + M^2 + 2 \frac{\gamma-3}{\gamma-1} \beta^2 \right) \eta^2 + \frac{\gamma-3}{\gamma-1} \beta^2 (\eta+1) \right) = 0, \end{aligned} \quad (6.16)$$

Les définitions de (Y_+, Y_-) sont identiques à celles données en (4.42).

Démonstration. Le système d'EDO a été établi dans le chapitre 4 en présence de conductivité thermique. Ainsi, selon les propositions (4.2.3) et (4.2.4), les équations gouvernant (Y_+, Y_-) sont toujours valables sans conductivité thermique. La différence essentielle, lorsque l'on suppose $Pr \rightarrow +\infty$, est que désormais $\mathcal{H}(\eta, Y_+, Y_-)$ est un invariant du système (la notation de cet invariant, noté H dans les chapitres précédents, a été volontairement changée en \mathcal{H} pour éviter un conflit de notation lors de la résolution numérique du système d'EDO au paragraphe (6.5.1)). Cette constatation permet de réécrire la pression p en fonction de (η, Y_+, Y_-) selon :

$$p(\eta, Y_+, Y_-) = \frac{(\gamma-1)\alpha^2}{2\eta} [Y_+ Y_-] - \frac{\gamma-1}{\eta} h_{\mathcal{H}}(\eta) + \frac{1-3\beta^2}{\gamma\eta},$$

où la fonction $h_{\mathcal{H}}(\eta)$ (notée $h(\eta)$ dans les chapitres précédents et dont la notation a changé ici, toujours pour éviter un conflit de notation lors de la résolution numérique du système d'EDO au paragraphe (6.5.1)) est donnée par :

$$h_{\mathcal{H}}(\eta) = \frac{\beta^2}{2} \left(\frac{1}{\eta^2} - 1 \right) - \frac{M^2}{2} (\eta-1)^2 + \frac{1+(\gamma-3)\beta^2}{\gamma} (\eta-1).$$

Dès lors, en remplaçant $p = (\gamma-1) \frac{T}{\eta}$ par l'expression ci-dessus dans le membre de droite de l'équation en η (voir la première équation du système (4.43)), on obtient, après quelques calculs, le résultat recherché et la définition de la fonction $\eta \rightarrow \mathcal{G}(\eta)$. \square

On a toujours les conditions asymptotiques suivantes :

$$\left\{ \begin{array}{l} \lim_{\xi \rightarrow -\infty} \eta(\xi) = \eta(-\infty) = \eta(\mathbf{u}_L) = \eta_L = 1, \\ \lim_{\xi \rightarrow -\infty} Y_+(\xi) = Y_+(-\infty) = Y_+(\mathbf{u}_L) = Y_+^L = \beta \left(1 - \frac{\beta}{M} \right), \\ \lim_{\xi \rightarrow -\infty} Y_-(\xi) = Y_-(-\infty) = Y_-(\mathbf{u}_L) = Y_-^L = -\beta \left(1 + \frac{\beta}{M} \right). \end{array} \right. \quad (6.17)$$

$$\lim_{\xi \rightarrow -\infty} Y_+(\xi) = Y_+(-\infty) = Y_+(\mathbf{u}_L) = Y_+^L = \beta \left(1 - \frac{\beta}{M} \right), \quad (6.18)$$

$$\lim_{\xi \rightarrow -\infty} Y_-(\xi) = Y_-(-\infty) = Y_-(\mathbf{u}_L) = Y_-^L = -\beta \left(1 + \frac{\beta}{M} \right). \quad (6.19)$$

Ainsi, sous la condition (4.55), *i.e.* $M > 1$, nous sommes assurés que :

$$Y_+(-\infty) = Y_+^L > 0, \quad Y_-(-\infty) = Y_-^L < 0.$$

De plus, la démonstration de la proposition (4.2.4) nous assure que (voir formule (4.53)) :

$$R_{12}(\xi) = \frac{1}{2\beta\eta^2(\xi)} (Y_+(\xi) - Y_-(\xi)), \quad (6.20)$$

formule analogue à celle (5.22) trouvée dans le cadre isotherme puisque désormais $\mathcal{I}(\xi) = \mathcal{I}(-\infty) = \mathcal{I}_L = 1$ est un invariant du système d'EDO. Ainsi, selon (6.20), si $Y_+(\xi) > 0$ et $Y_-(\xi) < 0$ pour tout $\xi \in \mathbb{R}$, alors la composante adimensionnée $R_{12}(\xi)$ du tenseur de Reynolds gardera un signe constant. Autrement dit, la grandeur dimensionnée $\overline{R}_{12}(\xi)$ gardera le même signe que R_{12}^L , soit le signe positif ici.

Enfin, notons que la fonction $\mathcal{G}(\eta)$, déjà définie pour l'étude du cas $\frac{\nu}{\mu} = 0$ par la formule (4.72) possède l'allure typique représentée sur la figure (4.4). Les propriétés de cette fonction ont été énoncées dans la proposition (4.3.3). Bien sûr, la première racine de \mathcal{G} , que l'on appellera η_0 dans la suite, n'est plus le taux de compression de sortie comme dans le cas particulier $\frac{\nu}{\mu} = 0$. En revanche, la seconde racine de \mathcal{G} est bien le taux de compression en entrée $\eta(-\infty) = \eta_L = 1$ puisque le saut $[Y_+Y_-] = (Y_+Y_-)(\xi) - (Y_+Y_-)(-\infty)$, évalué en $\xi = -\infty$, est nul.

6.3 Analyse du système d'EDO

Dans cette section, nous donnons des propriétés utiles aux développements futurs de ce chapitre, concernant les solutions onde progressive. Contrairement au cadre isotherme, il ne ressortira de ce chapitre aucun théorème d'existence et d'unicité des solutions onde progressive. Conformément à notre motivation exposée précédemment, nous nous donnons les moyens d'approcher numériquement les solutions du système d'EDO (6.15) pour prouver *a posteriori*, et numériquement, un résultat d'existence et d'unicité analogue à celui donné dans le théorème (5.3.15).

6.3.1 Linéarisée du système au voisinage d'un point stationnaire

Dans ce paragraphe, nous étudions le comportement des solutions du système différentiel (6.15), écrit formellement sous la forme :

$$d_\xi X = \mathbb{F}(X), \quad \mathbb{F} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad (6.21)$$

au voisinage d'un point stationnaire X_s du champ de vecteur \mathbb{F} tel que :

$$\mathbb{F}(X_s) = 0.$$

Ici, le vecteur X de \mathbb{R}^3 prend la forme :

$$X = (\eta, Y_+, Y_-),$$

et le champ de vecteur $\mathbb{F}(X) : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ trouve une définition immédiate, déduite du système (6.15). Le système (6.15) est un système autonome. À ce titre, ses solutions ne peuvent atteindre un point stationnaire X_s qu'en temps infini (voir [70]) ; soit en temps positif, soit en temps négatif. Encore une fois, c'est le théorème de la variété centrale qui permet de préciser sous quelles conditions il existe des solutions de (6.15) connectant X_s dans le futur et/ou dans le passé. Ainsi, nous utilisons les notations et définitions du paragraphe (5.3.1), du chapitre 5, concernant le théorème de la variété centrale (5.3.1), dont nous rappelons ici l'énoncé, valable pour un système différentiel général de taille n :

Théorème 6.3.1. *Soit X_s un point stationnaire de \mathbb{F} appartenant à $C^{r+1}(\mathbb{R}^n)$. Alors il existe trois variétés $W^s(X_s)$, $W^i(X_s)$ et $W^c(X_s)$ de classe C^{r+1} , C^{r+1} et C^r telles que :*

- $X_s \in W^s(X_s) \cap W^i(X_s) \cap W^c(X_s)$;
- $W^s(X_s)$ est tangente à $T^s(X_s)$, $W^i(X_s)$ est tangente à $T^i(X_s)$ et $W^c(X_s)$ est tangente à $T^c(X_s)$;
- si $\exists \xi$ tel que $X(\xi) \in W^s(X_s)$, alors $\lim_{\xi \rightarrow +\infty} X(\xi) = X_s$;
- si $\exists \xi$ tel que $X(\xi) \in W^i(X_s)$, alors $\lim_{\xi \rightarrow -\infty} X(\xi) = X_s$;

la variété $W^s(X_s)$ est appelée stable, $W^i(X_s)$ est la variété instable et $W^c(X_s)$ la variété centrale.

Dans notre cas, le système (6.15) est construit sur la donnée initiale $X_L = (1, Y_+^L, Y_-^L)$ (voir les formules (6.17)-(6.19)) déduite de \mathbf{u}_L et de σ , et est par construction un point stationnaire de \mathbb{F} . Il s'agit donc ici d'étudier les propriétés spectrales de la linéarisée de \mathbb{F} au voisinage de X_s . Cette étude permettra de déduire sous quelles conditions portant sur \mathbf{u}_L et sur σ , la variété $W^i(X_L)$ est non vide et conduit à atteindre un point stationnaire X_R dans le futur pour lequel $W^s(X_R)$ est non vide.

Un point stationnaire $X_s = (\eta_s, Y_+^s, Y_-^s)$ du système dynamique (6.15) est tel que :

$$\begin{cases} \alpha^2 \left((Y_+ Y_-)_s - (Y_+ Y_-)_L \right) - \mathcal{G}(\eta_s) = 0, \\ (M\eta_s^2 + \beta)Y_+^s + (M\eta_s^2 - \beta)Y_-^s = 0, \end{cases} \quad (6.22)$$

où $\mathcal{G}(\eta)$ a été définie en (6.16).

Remarque 6.3.2 (Avertissement sur la dépendance des points stationnaires par rapport aux nombres adimensionnels). La première équation de (6.22), ainsi que la définition (6.16) de la fonction $\mathcal{G}(\eta)$, suggèrent clairement la dépendance suivante du taux de compression de sortie vis-à-vis des nombres adimensionnels :

$$\text{Le taux de compression de sortie dépend de } (\alpha^2, \beta^2, M^2) : \eta_R(\alpha^2, \beta^2, M^2). \quad (6.23)$$

En revanche, la deuxième équation de (6.22) montre plutôt une dépendance en (α, β, M) de (Y_+^R, Y_-^R) . Cependant, rappelons que $M > 0$, $\beta > 0$ par construction et que l'on a supposé sans restriction $R_{12}^L > 0$, soit $\alpha > 0$. Ainsi pour des raisons historiques liées à la tabulation de l'état de sortie \mathbf{u}_R , nous avons préféré travailler en (α^2, β^2, M^2) .

Nous énonçons alors, sans démonstration, le résultat calculatoire suivant :

Proposition 6.3.3. *La linéarisée du champ de vecteur du système (6.15) en un point stationnaire X_s admet les valeurs propres réelles suivantes :*

$$\begin{cases} \lambda_1(X_s) = \frac{M}{M_c^2(X_s)}(M_c^2(X_s) - 1), \\ \lambda_2(X_s) = \frac{\mu}{\nu} \frac{M}{M_a^2(X_s)}(M_a^2(X_s) - 1), \\ \lambda_3(X_s) = 0, \end{cases} \quad (6.24)$$

où les nombres de Mach relatifs $M_c(X_s)$ et $M_a(X_s)$ vérifient :

$$M_c^2(X_s) = \frac{M^2 \eta_s}{1 + (3 - \gamma)\beta^2 \left(\frac{1}{\eta^3} - 1 \right) + \gamma M^2 (1 - \eta)}, \quad M_a(X_s) = \frac{M}{\beta} \eta^2. \quad (6.25)$$

Nous donnons ici les éléments pour trouver la formule concernant le Mach relatif $M_c(X_R)$ exprimé sur l'état de sortie car cela nous sera utile par la suite. Le Mach relatif exprimé sur l'état de sortie X_R est donné par :

$$M_c^2(X_R) = \left(\frac{c_L}{c_R} \right)^2 M^2 \eta_R^2,$$

avec :

$$\begin{cases} \left(\frac{c_R}{c_L} \right)^2 = \frac{p_R}{\rho_L c_L^2} \gamma \eta_R + 3 \frac{\beta^2}{\eta_R^2}, \\ \frac{p_R}{\rho_L c_L^2} = \frac{1 - 3\beta^2}{\gamma} - M^2(\eta_R - 1) - \beta^2 \left(\frac{1}{\eta^3} - 1 \right), \end{cases}$$

où les dépendances en les nombres réduits ont été omises par souci de clarté dans les écritures. Notons que la dernière expression ci-dessus a été trouvée grâce à la relation de saut de l'équation sur u . On en déduit alors que :

$$\left(\frac{M}{M_c(X_R)} \right)^2 = \frac{\gamma - 1}{2\eta_R} (d_\eta \mathcal{G})(\eta_R) + M^2, \quad (6.26)$$

C'est cette dernière expression qui permet de trouver la formule de la proposition précédente.

Conformément au théorème de la variété centrale (5.3.1), les dimensions des variétés stables, instables et centrales se déduisent des valeurs propres (6.24).

Concernant le point stationnaire X_L déduit de la donnée \mathbf{u}_L , la condition (4.55) sur la vitesse de propagation σ se réécrit comme suit :

$$M_a^2(X_L) > M_c^2(X_L) = M > 1.$$

Ces inégalités permettent de déduire le signe des valeurs propres non nulles :

$$\begin{cases} \lambda_1(X_L) = \frac{1}{M}(M^2 - 1) > 0, \\ \lambda_2(X_L) = \frac{\mu}{\nu} \frac{\beta^2}{M} (M_a^2(X_L) - 1) = \frac{\mu}{M\nu} (M^2 - \beta^2) > 0. \end{cases}$$

Enfin, l'hypothèse de modélisation (3.2), stipulant que $\frac{\mu}{\nu} > 1$, implique :

$$\lambda_2(X_L) - \lambda_1(X_L) > \frac{1}{M_a^2(X_L)M} (M_a^2(X_L) - M^2) > 0.$$

Les trois valeurs propres étant distinctes, la linéarisée du champ de vecteur en X_L est diagonalisable et les vecteurs propres à droite associés aux valeurs propres $\lambda_1(X_L)$ et $\lambda_2(X_L)$ sont donnés par :

$$r_1(X_L) = \begin{pmatrix} \frac{\nu}{\mu} \frac{M_a(X_L)}{\beta^2} (\lambda_2(X_L) - \lambda_1(X_L)) \\ M_a(X_L) - 1 \\ M_a(X_L) + 1 \end{pmatrix}, \quad r_2(X_L) = \begin{pmatrix} 0 \\ M_a(X_L) - 1 \\ M_a(X_L) + 1 \end{pmatrix}.$$

Finalement, sous la condition (4.55), la variété instable $W^i(X_L)$ est de dimension deux.

Concernant le point stationnaire X_R pouvant être atteint dans le futur par une solution onde progressive issue de X_L , et contrairement au cadre isotherme, nous ne pourrions exhiber dans ce chapitre de théorème d'existence (et d'unicité) d'un tel état. Cependant, nous montrerons *a posteriori* et numériquement ce résultat pour $M_a(X_R) > 1$. L'existence d'un tel point stationnaire, sous la condition (4.55), implique alors $0 < M_c(X_R) < 1$: *i.e.* $\lambda_1(X_R) < 0$. Pour montrer cela, rappelons que $M_a(X_R) > M_c(X_R)$. Comme en isotherme, on a alors deux cas de figure à distinguer selon que $M_a(X_R) > 1$ (*i.e.* $\lambda_2(X_R) > 0$) ou $M_a(X_R) \leq 1$ ($\lambda_2(X_R) \leq 0$).

Dans le cas $M_a(X_R) > 1$ (absence de surcompression), pour que $W^s(X_R)$ soit non vide, on doit avoir $0 < M_c(X_R) < 1$: *i.e.* $\lambda_1(X_R) < 0$. De plus, si $M_a(X_R) > 1$, l'hypothèse de modélisation (3.2), $\frac{\mu}{\nu} > 1$, implique

$$\lambda_2(X_R) - \lambda_1(X_R) > \frac{M}{M_a^2(X_R)M_c^2(X_R)} (M_a^2(X_R) - M_c^2(X_R)) > 0,$$

et il existe une base de diagonalisation pour la linéarisée en X_R . Si maintenant on suppose $M_a(X_R) < 1$ (accident de surcompression) alors nécessairement $M_c(X_R) < 1$ puisque $M_a(X_R) > M_c(X_R)$. On peut ensuite vérifier, qu'hormis un cas particulier, la base de diagonalisation existe toujours.

Finalement, concernant l'état droit, sous la condition (4.55), s'il existe un point stationnaire X_R , alors il vérifie :

$$\begin{cases} \dim(W^s(X_R)) = 1, & \text{si } M_a(X_R) > 1, \\ \dim(W^s(X_R)) = 2, & \text{si } M_a(X_R) < 1. \end{cases}$$

6.3.2 Surcompressivité

Dans ce paragraphe nous rappelons que l'accident de surcompression peut survenir en l'absence de correction de Ristorcelli. Nous raisonnons dans un premier temps à (α, β, M) fixés.

Dans le chapitre 4, un cas particulier, $\frac{\nu}{\mu} = 0$, a été étudié. Dans ce cas, les points stationnaires η_s sont donnés par les racines de $\mathcal{G}(\eta)$. À ce titre l'étude de cette fonction a fait l'objet de la proposition (4.3.3) que nous rappelons ici :

Proposition 6.3.4. *Sous l'hypothèse (4.55), la fonction $\mathcal{G}(\eta)$ est convexe et admet deux racines :*

$$\mathcal{G}(\eta_R(\alpha^2, \beta^2, M^2)) = \mathcal{G}(\eta_L = 1) = 0, \text{ avec } \eta_R(\alpha^2, \beta^2, M^2) < 1.$$

Notons les propriétés suivantes concernant la fonction $\mathcal{G}(\eta)$ importantes pour la suite :

$$\begin{cases} \mathcal{G}''(\eta) = -\left(6\frac{3-\gamma}{\gamma-1}\beta^2\eta^{-4} + 2\frac{\gamma+1}{\gamma-1}M^2\right) < 0, & (6.27) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \lim_{\eta \rightarrow 0} \mathcal{G}'(\eta) = +\infty; \mathcal{G}'(1) = \frac{2}{\gamma-1}(1-M^2) < 0, & (6.28) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \lim_{\eta \rightarrow 0} \mathcal{G}(\eta) = -\infty; \mathcal{G}(1) = 0. & (6.29) \end{cases}$$

Ces propriétés permettent de donner l'allure de la fonction $\mathcal{G}(\eta)$ selon la figure (4.4). Dans le cas particulier $\frac{\nu}{\mu} = 0$ (voir la section (4.3.2) du chapitre 4), il est clair que si $\mathcal{G}\left(\sqrt{\frac{\beta}{M}}\right) = \mathcal{G}(\eta_c(\beta, M)) < 0$, alors on a nécessairement $\eta_R(\beta, M) > \eta_c(\beta, M)$ (*i.e.* $M_a^R > 1$), puisque η_R est l'unique racine différente de l'unité de $\mathcal{G}(\eta)$, et l'accident de surcompression n'a pas lieu. Inversement, si $\mathcal{G}(\eta_c(\beta, M)) > 0$, alors on est certain que l'accident de surcompression survient.

Dans le cas général $0 < \nu < \mu$, la condition $\mathcal{G}(\eta_c(\beta, M)) > 0$ n'implique pas nécessairement l'accident de surcompression. En effet, nous verrons par la suite que pour qu'il existe un point stationnaire dans le futur $\eta_R(\alpha^2, \beta^2, M^2)$, il faut nécessairement que $\mathcal{G}(\eta_R(\alpha^2, \beta^2, M^2)) > 0$. Ainsi, le taux de compression de sortie est tel que :

$$\eta_0(\beta, M) < \eta_R(\alpha^2, \beta^2, M^2) < \eta_L = 1,$$

où $\eta_0(\beta, M)$ est l'unique racine de $\mathcal{G}(\eta)$ différente de l'unité sous la condition (4.55). En revanche, si l'on suppose $\mathcal{G}(\eta_c(\beta, M)) < 0$, alors le graphe de la fonction $\mathcal{G}(\eta)$ implique nécessairement que $\eta_c(\beta, M) < \eta_0(\beta, M)$ et donc que $\eta_R(\alpha^2, \beta^2, M^2) > \eta_c(\beta, M)$, l'accident de surcompression n'a pas lieu.

En conclusion de ce paragraphe, si l'on fait désormais varier (M, β) , les figures ((4.5), a, b et c) représentent en noir les régions du plan (M, β) telles que $\mathcal{G}(\eta_c(\beta, M)) < 0$ selon le coefficient adiabatique γ choisi, c'est-à-dire les zones où on est certain que le phénomène de surcompression ne se produit pas. En revanche, fixer (M, β) (à α fixé) dans la zone représentée en blanc, n'implique pas nécessairement l'accident de surcompression (au moins au voisinage de la courbe noire). Il faut pouvoir évaluer précisément $\eta_R(\alpha^2, \beta^2, M^2)$ par rapport à $\eta_c(\beta, M)$ pour pouvoir conclure, et notamment donner l'influence de α (par l'intermédiaire du terme $\alpha^2[Y_+Y_-]$ dans la formule (6.22) donnant le lieu des points stationnaires en η). Nous verrons, après avoir résolu numériquement le système d'EDO, dans le chapitre consacré à la stabilité multidimensionnelle, que tant que $\alpha < 1$, qui est une limite difficilement atteignable dans les applications, ce coefficient d'anisotropie a finalement peu d'influence sur la zone de surcompressivité telle que représentée figure ((4.5), b). Celle-ci permet donc bien de faire la distinction entre domaine physique et domaine surcompressif pour tout α dans les limites prescrites par la physique et nous la donnons à nouveau en figure (6.1).

Dans toute la suite, nous supposons que (α, M, β) sont fixés de telle manière que l'accident de surcompression ne survient jamais, soit l'hypothèse forte suivante :

$$(\alpha, M, \beta) \text{ sont choisis tels que } M_a(+\infty) = M_a^R > 1. \quad (6.30)$$

Dans la pratique, il suffit de fixer (M, β) suffisamment petit grâce à la figure ((4.5), b) et de prendre $\alpha \in [0, 1]$.

6.3.3 À propos de la compressivité des solutions onde progressive

Comme nous l'avons souligné dans les motivations de ce chapitre, notre but principal est ici de pouvoir calculer les relations de Rankine-Hugoniot généralisées, et donc la fonction cinétique sur l'énergie tangentielle ρE_t . N'ayant pas de résultat d'existence et d'unicité de la solution onde progressive, nous allons donner les propriétés nécessaires à l'intégration numérique des solutions onde progressive pour vérifier numériquement

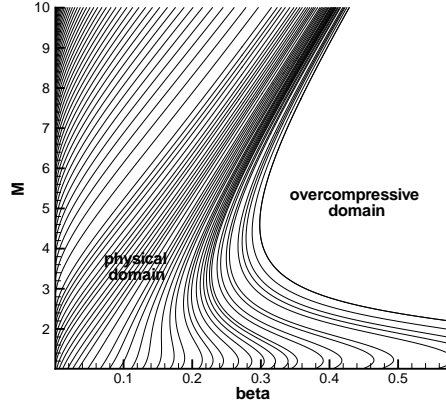


FIG. 6.1 – Régions du plan (M, β) où le phénomène de surcompression intervient pour $\gamma = 1.4$

et *a posteriori* l'existence et l'unicité de la solution. La propriété essentielle dont nous avons besoin est la décroissance du taux de compression par rapport à la variable ξ . Un grand nombre de propriétés, que nous donnerons par la suite, dépendront de cette hypothèse centrale. Faute de temps, nous n'avons pu la démontrer théoriquement. Nous supposerons donc, dans toute la suite, la propriété suivante :

$$\xi \rightarrow \eta(\xi) \text{ est strictement décroissante pour tout } \xi \in \mathbb{R}. \quad (6.31)$$

En anticipant sur la résolution numérique présentée plus loin, nous montrons sur la figure (6.2) que cette hypothèse sera vérifiée après intégration numérique du système d'EDO (6.15).

6.3.4 Propriétés du système en (Y_+, Y_-) nécessaires à l'intégration numérique

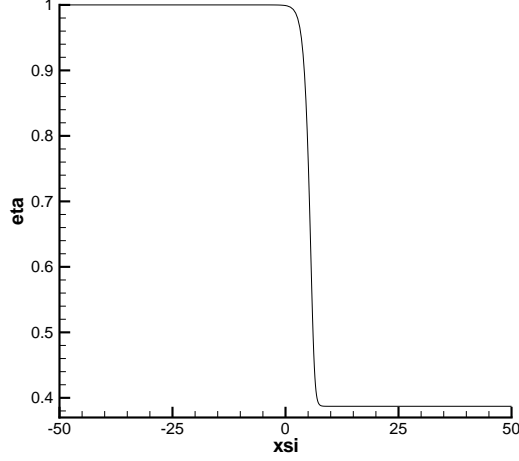
Dans ce paragraphe, nous discutons brièvement chacune des propriétés dont nous aurons besoin pour l'intégration numérique du système d'EDO (6.15). Rappelons que les deux hypothèses (6.30) et (6.31) sont ici essentielles :

- l'état de sortie n'est pas surcompressif : $M_a(+\infty) > 1$,
- le taux de compression de sortie est une fonction décroissante de ξ : $d_\xi \eta < 0$, $\forall \xi \in \mathbb{R}$.

Ainsi, sous les hypothèses de travail (6.30) et (6.31), l'ensemble des propriétés nécessaires est le suivant :

- le Mach construit sur la deuxième onde est toujours supérieur à l'unité :

$$M_a(\xi) > 1, \quad \forall \xi \in \mathbb{R}, \quad (6.32)$$


 FIG. 6.2 – Décroissance de $\xi \rightarrow \eta(\xi)$ pour $(M = 2, \beta = 0.1, \alpha = 0.01)$.

- les quantités $Y_+(\xi)$ et $(Y_-(\xi))$ gardent un signe constant :

$$Y_+(\xi) > 0, Y_-(\xi) < 0, \forall \xi \in \mathbb{R}, \quad (6.33)$$

- la trajectoire $\xi \rightarrow \eta(\xi)$ étant supposée unique, le sous-système en (Y_+, Y_-) admet une infinité de solutions satisfaisant les conditions asymptotiques (6.18) et (6.19) qui explosent toutes en temps infini sauf précisément une unique solution $(Y_+^*(\xi), Y_-^*(\xi))$ vérifiant :

$$\lim_{\xi \rightarrow +\infty} Y_+^*(\xi) = Y_+^*(+\infty) > 0, \quad \lim_{\xi \rightarrow +\infty} Y_-^*(\xi) = Y_-^*(+\infty) < 0, \quad (6.34)$$

avec la propriété :

$$\left(1 + \frac{1}{M_a(+\infty)}\right) Y_+^*(+\infty) + \left(1 - \frac{1}{M_a(+\infty)}\right) Y_-^*(+\infty) = 0. \quad (6.35)$$

Ces différentes propriétés vont maintenant être discutées en s'appuyant fortement sur le chapitre consacré au cadre isotherme et notamment sur la section (5.3.6). Ces propriétés serviront à justifier les changements de variables utilisés lors de l'intégration numérique, ainsi que leur choix. La dernière propriété sur le comportement de la solution du sous-système en (Y_+, Y_-) repose sur l'hypothèse forte de l'existence et l'unicité d'une trajectoire en $\eta(\xi)$, hypothèse que nous ne pourrions pas démontrer. Dans un premier temps, et conformément à la section (5.3.6), nous allons réécrire le sous-système en (Y_+, Y_-) à l'aide du nombre de Mach construit sur la deuxième onde $M_a(\xi)$. On suppose donc l'existence et l'unicité d'une solution onde progressive pour l'inconnue $\eta(\xi)$, si bien que le sous-système en (Y_+, Y_-) de (6.15) peut se réécrire :

$$\begin{cases} \frac{\nu M}{\mu} d_\xi Y_+ = \frac{M\eta^2(\xi) - \beta}{2\eta^4(\xi)} ((M\eta^2(\xi) + \beta)Y_+ + (M\eta^2(\xi) - \beta)Y_-), \\ \frac{\nu M}{\mu} d_\xi Y_- = \frac{M\eta^2(\xi) + \beta}{2\eta^4(\xi)} ((M\eta^2(\xi) + \beta)Y_+ + (M\eta^2(\xi) - \beta)Y_-), \end{cases} \quad (6.36)$$

Le nombre de Mach associé à la deuxième onde peut être construit à partir de cette unique solution selon :

$$M_a(\xi) = \frac{M}{\beta} \eta^2(\xi). \quad (6.37)$$

Ainsi, on reconnaît l'expression de $M_a(\xi)$ dans (6.36) :

$$\begin{cases} d_\xi Y_+ = \frac{\mu M}{2\nu} \frac{M_a(\xi) - 1}{M_a^2(\xi)} ((M_a(\xi) + 1)Y_+ + (M_a(\xi) - 1)Y_-), \\ d_\xi Y_- = \frac{\mu M}{2\nu} \frac{M_a(\xi) + 1}{M_a^2(\xi)} ((M_a(\xi) + 1)Y_+ + (M_a(\xi) - 1)Y_-). \end{cases} \quad (6.38)$$

Contrairement à l'isotherme, on a alors directement la monotonie de la fonction $\xi \rightarrow M_a(\xi)$ en fonction de la monotonie de $\xi \rightarrow \eta(\xi)$ puisque (6.37) implique :

$$d_\xi M_a(\xi) = 2 \frac{M}{\beta} \eta d_\xi \eta < 0.$$

On a donc, sous l'hypothèse (6.31), le résultat suivant :

$$\xi \rightarrow M_a(\xi) \text{ est strictement décroissante pour tout } \xi \in \mathbb{R}. \quad (6.39)$$

Rappelons alors que $M_a(-\infty) = M_a(\mathbf{u}_L) = \frac{M}{\beta} > 1$, de sorte que sous l'hypothèse (6.30), la stricte décroissance de $\xi \rightarrow M_a(\xi)$ (6.39) implique la propriété attendue (6.32).

Concernant la propriété (6.33), remarquons que l'équation gouvernant $Y_+ Y_-(\xi)$ est la suivante :

$$d_\xi Y_+ Y_- = \frac{\mu}{2\nu} \frac{M}{M_a(\xi)^2} ((M_a(\xi) + 1)Y_+ + (M_a(\xi) - 1)Y_-)^2 \geq 0, \quad \xi \in \mathbb{R}. \quad (6.40)$$

Or, les points critiques (Y_+^s, Y_-^s) sont tels que (voir formule (6.22)) :

$$(M_a^s + 1)Y_+^s + (M_a^s - 1)Y_-^s = 0,$$

si bien que l'hypothèse (6.30), ainsi que les conditions asymptotiques (6.18) et (6.19), impliquent nécessairement :

$$Y_+ Y_-(-\infty) < 0, \quad Y_+ Y_-(+\infty) \leq 0. \quad (6.41)$$

Cette constatation entraîne alors le résultat suivant :

$$\text{Le produit } \xi \rightarrow (Y_+ Y_-)(\xi) \text{ est croissant et négatif pour tout } \xi \in \mathbb{R}. \quad (6.42)$$

Ainsi $Y_+(\xi)$ et $Y_-(\xi)$ gardent un signe constant pour tout $\xi \in \mathbb{R}$. Plus précisément, les conditions asymptotiques (6.18) et (6.19) donnent leurs signes et impliquent la propriété (6.33) recherchée.

Concernant enfin les propriétés (6.34) et (6.35), nous ne rappellerons pas ici toute la démarche faite en isotherme pour les obtenir. Soulignons cependant que de simples manipulations algébriques des équations du système (6.64) induisent que le rapport $\frac{Y_-}{Y_+}$ vérifie toujours l'équation suivante :

$$d_\xi \left(\frac{Y_-}{Y_+} \right) = \frac{\mu}{2\nu} \frac{M}{M_a^2(\xi)} \left((M_a(\xi) + 1)^2 - (M_a(\xi) - 1)^2 \left(\frac{Y_-}{Y_+} \right)^2 \right). \quad (6.43)$$

Sous les hypothèses (6.30) et (6.31) entraînant la propriété (6.32), le changement de variable suivant est alors admissible :

$$\theta(\xi) = \int_0^\xi \frac{\mu}{2\nu} \frac{M(M_a(s) - 1)^2}{M_a^2(s)} ds, \quad \xi \in \mathbb{R}, \quad (6.44)$$

si bien que l'équation (6.43) se réécrit :

$$d_\theta r = p^2(\theta) - r^2, \quad \text{avec } r = \frac{Y_-}{Y_+} \text{ et } p(\theta) = \frac{M_a(\xi(\theta)) + 1}{M_a(\xi(\theta)) - 1}, \quad \xi \in \mathbb{R}. \quad (6.45)$$

On reconnaît alors une équation de Riccati, dont la fonction $\theta \rightarrow p(\theta)$ possède les propriétés suivantes selon (6.32) :

$$\|p\|_{L^\infty(\mathbb{R}^+)} < +\infty, \quad q(0) > 0, \quad \lim_{\theta \rightarrow +\infty} |p(\theta)| > 0.$$

À ces propriétés s'ajoutent :

$$\theta \rightarrow p^2(\theta) \text{ est strictement croissante en } \theta, \forall \theta \in \mathbb{R},$$

puisque :

$$(p^2(\theta))' = -4 \frac{M_a(\xi(\theta)) + 1}{(M_a(\xi(\theta)) - 1)^3} d_\theta M_a(\xi(\theta)),$$

et $\xi \rightarrow M_a(\xi)$ décroissante en ξ et donc en θ selon (6.44). Nous retrouvons ainsi le comportement asymptotique de $Y_\pm(\xi)$ du chapitre 5, section (5.3.6), consacré au cadre isotherme. Encore une fois, les hypothèses (6.30) et (6.31), respectivement sur la non surcompression en sortie et la stricte décroissance de $\eta \rightarrow \eta(\xi)$, ainsi que l'existence et l'unicité d'une trajectoire en $\eta(\xi)$, sont essentielles. Elles permettent alors d'obtenir les propriétés (6.34) et (6.35) désirées en suivant le cheminement déjà donné dans le cadre isotherme. Notons que si $M_a(-\infty) < 1$, alors on ne peut plus rien dire.

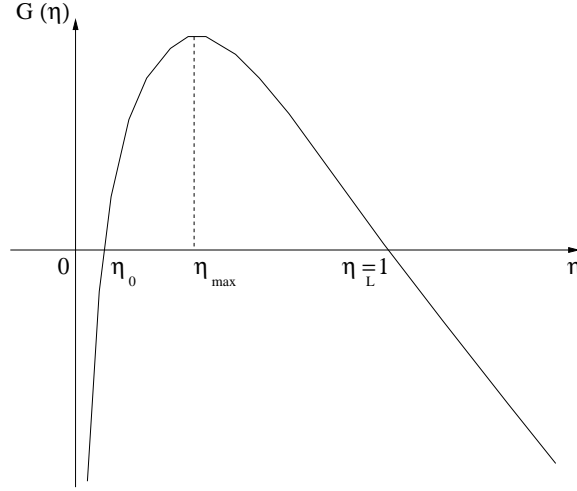
6.3.5 Expression des points stationnaires

Nous terminons cette section en donnant les conditions nécessaires à l'obtention de points stationnaires dans le futur pour des trajectoires issues des conditions asymptotiques (6.17)-(6.19), ainsi que l'expression de $(Y_+(+\infty), Y_-(+\infty)) = (Y_+^R, Y_-^R)(\alpha^2, \beta^2, M^2)$ en fonction de $\eta_R(\alpha^2, \beta^2, M^2)$. Les conditions asymptotiques (6.17)-(6.19) conduisent à la donnée initiale $X_L = (1, Y_+^L, Y_-^L)$ déduite de \mathbf{u}_L et de σ qui est par construction un point stationnaire. Nous raisonnons ici à (α, β, M) fixés tels que l'hypothèse (6.30) est vérifiée.

Rappelons que les points stationnaires $X_s = (\eta_s, Y_+^s, Y_-^s)$ du système dynamique (6.15) vérifient :

$$\begin{cases} \alpha^2 \left((Y_+ Y_-)_s - (Y_+ Y_-)_L \right) - \mathcal{G}(\eta_s) = 0, & (6.46) \\ (M_a^s + 1) Y_+^s + (M_a^s - 1) Y_-^s = 0, & (6.47) \end{cases}$$

où la fonction $\eta \rightarrow \mathcal{G}(\eta)$ est donnée par (6.16). L'étude de cette fonction a fait l'objet de la proposition (6.27) conduisant à la représentation graphique que nous rappelons ici sur la figure (6.3). Sur cette figure $\eta_0(\beta, M)$ est l'unique racine différente de l'unité


 FIG. 6.3 – Allure typique de la fonction $\mathcal{G}(\eta)$

et $\eta_{max}(\beta, M)$ est le lieu du maximum de la fonction $\mathcal{G}(\eta)$. L'allure de cette fonction va nous permettre d'encadrer le taux de compression de sortie $\eta_R(\alpha^2, \beta^2, M^2)$. Rappelons, à ce titre, la propriété (6.42) stipulant que le produit $(Y_+ Y_-)(\xi)$ est croissant pour tout $\xi \in \mathbb{R}$, si bien que le saut $[Y_+ Y_-] = (Y_+ Y_-)(+\infty) - (Y_+ Y_-)_L$ est positif. Il s'en suit que pour qu'un taux de compression de sortie $\eta_R(\alpha^2, \beta^2, M^2)$ annulant (6.46) existe, alors on a nécessairement :

$$\mathcal{G}(\eta_R(\alpha^2, \beta^2, M^2)) \geq 0. \quad (6.48)$$

Ceci implique en particulier le premier encadrement suivant :

$$\eta_0(\beta, M) \leq \eta_R(\alpha^2, \beta^2, M^2) \leq \eta_L = 1.$$

De plus, nous avons vu, lors de l'étude de la linéarisée du système (6.15) autour des points stationnaires, que pour qu'un point stationnaire existe il faut que $W^s(X_R)$ soit non vide, ce qui dans le cas $M_a(X_R) > 1$ implique que $0 < M_c(X_R) < 1$. Ainsi, la formule (6.26) donnant la dérivée de la fonction $\mathcal{G}(\eta)$ évaluée en X_R :

$$\frac{\gamma - 1}{2\eta_R(\alpha^2, \beta^2, M^2)} (d_\eta \mathcal{G})(\eta_R(\alpha^2, \beta^2, M^2)) = \frac{M^2}{M_c^2(X_R)} (1 - M_c^2(X_R)) > 0.$$

entraîne l'encadrement plus précis suivant :

$$\eta_0(\beta, M) \leq \eta_R(\alpha^2, \beta^2, M^2) \leq \eta_{max}(\beta, M), \quad (6.49)$$

Enfin, la propriété (6.42) entraîne aussi que le produit $(Y_+ Y_-)(\xi)$ est négatif pour tout $\xi \in \mathbb{R}$. Ainsi (6.46) implique la condition suivante :

$$-\alpha^2 (Y_+ Y_-)_L(\beta^2, M^2) - \mathcal{G}(\eta_R(\alpha^2, \beta^2, M^2)) > 0. \quad (6.50)$$

Cette dernière condition sera importante pour l'intégration numérique du système d'EDO (6.15). Ainsi, si le taux de compression de sortie existe, il respecte nécessairement l'encadrement (6.49) et la condition (6.50). Dans ce cas, des manipulations

algébriques évidentes des équations (6.46) et (6.47) conduisent aux formules suivantes concernant les états de sortie $Y_{\pm}(+\infty) = Y_{\pm}^R(\alpha^2, \beta^2, M^2)$:

$$\begin{cases} Y_+^R(\alpha^2, \beta^2, M^2) = \frac{1}{\alpha} \sqrt{\frac{M_a^R(\alpha^2, \beta^2, M^2) - 1}{M_a^R(\alpha^2, \beta^2, M^2) + 1}} \sqrt{-\alpha^2(Y_+Y_-)_L - \mathcal{G}(\eta_R(\alpha^2, \beta^2, M^2))}, \\ Y_-^R(\alpha^2, \beta^2, M^2) = -\frac{1}{\alpha} \sqrt{\frac{M_a^R(\alpha^2, \beta^2, M^2) + 1}{M_a^R(\alpha^2, \beta^2, M^2) - 1}} \sqrt{-\alpha^2(Y_+Y_-)_L - \mathcal{G}(\eta_R(\alpha^2, \beta^2, M^2))}. \end{cases} \quad (6.51)$$

Le signe de ces deux quantités étant obtenu grâce à la propriété (6.33). Ces formules impliquent donc par construction :

$$\left(1 + \frac{1}{M_a^R(\alpha^2, \beta^2, M^2)}\right) Y_+^R(\alpha^2, \beta^2, M^2) + \left(1 - \frac{1}{M_a^R(\alpha^2, \beta^2, M^2)}\right) Y_-^R(\alpha^2, \beta^2, M^2) = 0, \quad (6.52)$$

ainsi que :

$$\begin{aligned} & \left(1 + \frac{1}{M_a^R(\alpha^2, \beta^2, M^2)}\right) Y_+^R(\alpha^2, \beta^2, M^2) - \left(1 - \frac{1}{M_a^R(\alpha^2, \beta^2, M^2)}\right) Y_-^R(\alpha^2, \beta^2, M^2) \\ & = 2 \frac{\sqrt{(M_a^R)^2(\alpha^2, \beta^2, M^2) - 1}}{\alpha M_a^R(\alpha^2, \beta^2, M^2)} \sqrt{-\alpha^2(Y_+Y_-)_L - \mathcal{G}(\eta_R(\alpha^2, \beta^2, M^2))}. \end{aligned} \quad (6.53)$$

Ces deux dernières formules seront très utiles lors de l'intégration numérique.

6.4 Relations de saut généralisées et fonction cinétique

On suppose dans cette section l'existence d'une unique solution onde progressive atteignant un état \mathbf{u}_R dans le futur, issue d'un état \mathbf{u}_L fixé et se propageant à une vitesse σ prescrite selon la condition (4.55), *i.e.* $M > 1$. Cette hypothèse est forte puisque nous n'avons aucun résultat de ce type contrairement au cas isotherme. Cependant, nous prouverons numériquement l'existence et l'unicité de la solution onde progressive dans la section suivante. Pour cela, deux hypothèses sont nécessaires, conformément aux paragraphes précédents. Il s'agit de l'hypothèse (6.31) de stricte décroissance de $\xi \rightarrow \eta(\xi)$ et de l'hypothèse (6.30) imposant la non surcompressivité de l'état de sortie. Rappelons que pour garantir (6.30), il suffit de fixer (α, β, M) dans une plage adéquate grâce à la figure ((4.5), b).

On cherche alors à caractériser les relations de saut généralisées satisfaites par l'état \mathbf{u}_R joint par cette unique onde progressive. La caractérisation proposée s'appuie sur la définition de fonctions cinétiques conformément au chapitre 2. L'utilisation de fonctions cinétiques déduites de l'existence d'un ensemble suffisant de couples d'entropie est possible grâce au lemme suivant :

Lemme 6.4.1. *Soient \mathbf{u}_L fixé et σ une vitesse prescrite selon la condition (4.55), alors l'unique solution onde progressive de vitesse σ issue de \mathbf{u}_L et atteignant un état \mathbf{u}_R dans le futur est telle que :*

$$\begin{cases} \text{Si } R_{12}^L \neq 0, & \text{alors } R_{12}(\xi)R_{12}^L > 0, \forall \xi \in \mathbb{R}, \text{ avec } R_{12}^L R_{12}^R > 0. \\ \text{Si } R_{12}^L = 0, & \text{alors } R_{12}(\xi) = 0, \forall \xi \in \mathbb{R}. \end{cases} \quad (6.54)$$

La propriété $R_{12}^R = 0$, dès que $R_{12}^L = 0$, résulte de ce que $R_{12}(\xi) = 0$ et $v(\xi) = v_L$ sont solutions du système dynamique (6.15). L'inégalité (6.54) est une conséquence de la propriété (6.33) assurant que, sous la condition (6.30) (*i.e.* $M_a(+\infty) > 1$), les quantités $Y_+(\xi)$ et $Y_-(\xi)$ gardent un signe constant et sont telles que $Y_+(\xi) > 0$ et $Y_-(\xi) < 0$ pour tout $\xi \in \mathbb{R}$. Ainsi, la formule adimensionnée (6.20) :

$$R_{12}(\xi) = \frac{1}{2\beta\eta^2(\xi)} (Y_+(\xi) - Y_-(\xi)),$$

garantit le résultat escompté (voir le paragraphe (6.2)).

Rappelons que les ondes progressives sont aussi solutions d'une loi d'évolution supplémentaire (6.6) sur l'énergie tangentielle :

$$\rho E_t = \rho \frac{v^2}{2} + \alpha^2 \beta^2 \frac{R_{12}^2}{R_{11}}.$$

Muni du lemme précédent, on peut dès lors affirmer que l'application suivante :

$$\mathbf{u} = (\rho, \rho u, \rho v, \rho E, \rho \mathcal{I}, \rho \mathcal{W}, R_{12}) \rightarrow \mathbf{v}(\mathbf{u}) = (\rho, \rho u, \rho v, \rho E, \rho \mathcal{I}, \rho \mathcal{W}, \rho E_t),$$

constitue un changement de variable admissible dans l'étude de la solution onde progressive. Celle-ci est alors solution du système suivant exprimé à l'aide de la nouvelle variable $\mathbf{v}(\mathbf{u})$:

$$\left\{ \begin{array}{l} -\sigma d_\xi \rho + d_\xi(\rho u) = 0, \\ -\sigma d_\xi(\rho u) + d_\xi(\rho u^2 + p + \beta^2 R_{11}) = d_\xi(d_\xi u), \\ -\sigma d_\xi(\rho v) + d_\xi(\rho u v + \alpha \beta^2 R_{12}) = d_\xi\left(\frac{\nu}{\mu} d_\xi v\right), \\ -\sigma d_\xi(\rho E) + d_\xi\left((\rho E + p + \beta^2 R_{11})u + \alpha \beta^2 R_{12}v\right) = d_\xi\left(ud_\xi u + \frac{\nu}{\mu} v d_\xi v\right), \\ -\sigma d_\xi(\rho \mathcal{I}) + d_\xi(\rho \mathcal{I} u) = 0, \\ -\sigma d_\xi(\rho \mathcal{W}) + d_\xi(\rho \mathcal{W} u) = 0, \\ -\sigma d_\xi(\rho E_t) + d_\xi(\rho E_t u + \alpha \beta^2 R_{12}v) = d_\xi\left(\frac{\nu}{\mu} v d_\xi v\right) - \frac{\nu}{\mu} (d_\xi v)^2. \end{array} \right. \quad (6.55)$$

Après une intégration sur \mathbb{R} tout entier de ces équations, sous couvert d'unicité de la solution onde progressive que nous démontrerons seulement de façon numérique dans la prochaine section, nous en déduisons un ensemble complet de relations de saut généralisées :

Proposition 6.4.2. *À partir de tout \mathbf{u}_L fixé, et de toute vitesse σ prescrite selon la condition (4.55), *i.e.* $M > 1$, nous définissons la fonction cinétique adimensionnée suivantes :*

$$\kappa_{E_t}(\mathbf{u}_L, \sigma) = -\frac{1}{M} \int_{\mathbb{R}} \frac{\nu}{\mu} (d_\xi v)^2(\mathbf{u}(\xi; \mathbf{u}_L, \sigma)) d\xi \quad (6.56)$$

où $\mathbf{u}(\cdot; \mathbf{u}_L, \sigma)$ représente l'unique solution onde progressive issue de \mathbf{u}_L et se propageant à la vitesse σ et $M = \frac{u_L - \sigma}{c(\mathbf{u}_L)} > 1$.

Alors, l'état \mathbf{u}_R joint dans le futur vérifie :

$$u_R - c(\mathbf{u}_R) < \sigma < u_L - c(\mathbf{u}_L), \quad \sigma < u_R - a(\mathbf{u}_R),$$

et est l'unique solution de l'ensemble de conditions de Rankine-Hugoniot généralisées sous forme adimensionnée :

$$\begin{cases} -\sigma[\rho] + [\rho u] = 0, \\ -\sigma[\rho u] + [\rho u^2 + p + \beta^2 R_{11}] = 0 \\ -\sigma[\rho v] + [\rho uv + \alpha\beta^2 R_{12}] = 0, \\ -\sigma[\rho E] + [(\rho E + p + \beta^2 R_{11})u + \alpha\beta^2 R_{12}v] = 0, \\ -\sigma[\rho \mathcal{I}] + [\rho \mathcal{I}u] = 0, \\ -\sigma[\rho \mathcal{W}] + [\rho \mathcal{W}u] = 0, \\ -\sigma[\rho E_t] + [\rho E_t u + \alpha\beta^2 R_{12}v] = M\kappa_{E_t}(\mathbf{u}_L, \sigma). \end{cases} \quad (6.57)$$

Dans ces relations de saut, il faut choisir R_{12}^R sous forme dimensionnée telle que $R_{12}^R R_{12}^L > 0$ si $R_{12}^L \neq 0$ et $R_{12}^R = 0$ sinon.

Remarquons qu'à la différence du cadre isotherme, nous avons besoin d'une unique fonction cinétique pour fermer le système des relations de saut généralisées, puisque désormais $\rho \mathcal{I}$ est gouvernée par une loi de conservation.

La formule (6.56) montre qu'il faut intégrer le système dynamique (6.15) gouvernant la solution onde progressive pour pouvoir déterminer la fonction cinétique κ_{E_t} . Le lien entre les quantités (η, Y_+, Y_-) du système d'EDO et la fonction cinétique est donné par la proposition suivante :

Proposition 6.4.3. *Le long d'une solution onde progressive de (6.55), l'identité suivante a lieu :*

$$\frac{\nu}{\mu}(d_\xi v)^2 = \frac{\alpha^2 M}{2} d_\xi(Y_+ Y_-), \quad \xi \in \mathbb{R},$$

de sorte que :

$$\kappa_{E_t}(\mathbf{u}_L, \sigma) = -\frac{1}{M} \int_{\mathbb{R}} \frac{\nu}{\mu}(d_\xi v)^2 d\xi = -\frac{\alpha^2}{2} [Y_+ Y_-]. \quad (6.58)$$

La preuve est analogue à celle de la proposition (5.4.4) donnée dans le cadre isotherme. Rappelons que les points stationnaires du système dynamique (6.15) sont tels que (voir la formule (6.46)) :

$$-\alpha^2 \left((Y_+ Y_-)_R(\alpha^2, \beta^2, M^2) - (Y_+ Y_-)_L(\alpha^2, \beta^2, M^2) \right) = -\mathcal{G}(\eta_R(\alpha^2, \beta^2, M^2)),$$

si bien que la formule (6.58) montre que la fonction cinétique dépend des nombres adimensionnels (α^2, β^2, M^2) (voir la remarque (6.3.2)). En pratique, la fonction cinétique sera tabulée grâce à la formule suivante :

$$\kappa_{E_t}(\alpha^2, \beta^2, M^2) = -\frac{1}{2} \mathcal{G}(\eta_R(\alpha^2, \beta^2, M^2)). \quad (6.59)$$

Pour calculer la fonction cinétique, il suffit donc de connaître le taux de compression de sortie $\eta_R(\alpha^2, \beta^2, M^2)$.

6.5 Approximation numérique du système d'EDO et de la fonction cinétique

Dans cette section, nous décrivons la méthode numérique permettant d'évaluer la solution onde progressive pour tout $\xi \in \mathbb{R}$. En particulier, cette méthode permet de calculer l'état de sortie \mathbf{u}_R d'un profil de compression issu d'un état \mathbf{u}_L donné, une vitesse de propagation σ étant prescrite. L'état de sortie étant connu, la détermination de l'unique fonction cinétique κ_{E_t} définie par (6.56) permettant de fermer les relations de Rankine-Hugoniot généralisées (6.57), est alors possible. En pratique, celle-ci sera tabulée en fonction des nombres réduits (α^2, β^2, M^2) grâce à la formule (6.59).

Cette étude numérique repose sur les deux hypothèses fondamentales (6.31) de stricte décroissance du taux de compression $\xi \rightarrow \eta(\xi)$ et (6.30) de non surcompressivité de l'état de sortie, *i.e.* $M_a(\mathbf{u}_R) = M_a^R > 1$. Ces deux hypothèses permettent de déduire les quatre propriétés (6.32), (6.33), (6.34), (6.35) (voir le paragraphe (6.3.4)) permettant de justifier les différents changements de variable réalisés, ainsi que les choix concernant l'intégration que nous développons dans la suite.

La méthode numérique décrite ici joue un rôle essentiel dans le cadre anisotherme puisqu'elle permet de prouver numériquement, et *a posteriori*, l'existence et l'unicité de la solution onde progressive.

Nous concluons cette section en illustrant numériquement l'ordre de grandeur de la fonction cinétique, ainsi que son comportement en fonction des nombres réduits α , β et M . Bien que l'objectif principal de cette étude numérique soit la détermination de cette fonction cinétique, nous commentons également l'allure et le comportement de la solution onde progressive dans son ensemble puisque le cadre anisotherme constitue un contexte physique réaliste.

6.5.1 Résolution du système d'EDO

La méthode que nous allons présenter ici est très proche de celle développée dans le cadre isotherme (voir la section (5.6.2)) et repose aussi sur la résolution du sous-système en (Y_+, Y_-) . Cependant, il existe deux différences essentielles entre anisotherme et isotherme (liées au fait de considérer l'énergie). En anticipant sur les prochains développements, disons que le taux de compression de sortie $\eta_R(\alpha^2, \beta^2, M^2)$ est désormais une inconnue pour la résolution du sous-système en (Y_+, Y_-) et le système à résoudre concrètement (en (z_+, z_-) , voir (5.6.2) pour les notations ou les développements ci-après) n'est plus linéaire. Nous montrons ici comment traiter ces deux nouvelles difficultés.

Considérons la remise à l'échelle suivante :

$$\xi \longrightarrow \frac{2\nu}{\mu M} \xi',$$

et rappelons la forme du système dynamique gouvernant les solutions onde progressive avec cette remise à l'échelle :

$$\begin{cases} d_\xi \eta = \frac{\nu}{\mu} \frac{\gamma - 1}{M^2 \eta} (\alpha^2 [Y_+ Y_-] - \mathcal{G}(\eta)), \end{cases} \quad (6.60)$$

$$\begin{cases} d_\xi Y_+ = \left(1 - \frac{1}{M_a(\xi)}\right) \left(\left(1 + \frac{1}{M_a(\xi)}\right) Y_+ + \left(1 - \frac{1}{M_a(\xi)}\right) Y_- \right), \end{cases} \quad (6.61)$$

$$\begin{cases} d_\xi Y_- = \left(1 + \frac{1}{M_a(\xi)}\right) \left(\left(1 + \frac{1}{M_a(\xi)}\right) Y_+ + \left(1 - \frac{1}{M_a(\xi)}\right) Y_- \right), \end{cases} \quad (6.62)$$

où les primes ont été omis par souci de simplification des écritures. La fonction $\mathcal{G}(\eta)$ est donnée par :

$$\begin{aligned} \mathcal{G}(\eta) &= \frac{1 - \eta}{\eta^2} \\ &\times \left(\frac{\gamma + 1}{\gamma - 1} M^2 \eta^3 - \left(\frac{2}{\gamma - 1} + M^2 + 2 \frac{\gamma - 3}{\gamma - 1} \beta^2 \right) \eta^2 + \frac{\gamma - 3}{\gamma - 1} \beta^2 (\eta + 1) \right) = 0, \end{aligned} \quad (6.63)$$

Contrairement au cadre isotherme, on ne peut plus découpler le système en une équation sur $\eta(\xi)$ et un système linéaire à coefficients variables sur (Y_+, Y_-) . Cependant, en remarquant que le Mach construit sur la deuxième onde est une fonction de $\eta(\xi)$ puisque :

$$M_a(\eta(\xi)) = \frac{M}{\beta} \eta^2(\xi),$$

nous pouvons réinterpréter le sous-système en (Y_+, Y_-) comme suit :

$$\begin{cases} d_\xi Y_+ = \left(1 - \frac{1}{M_a(\eta(\xi))}\right) \left(\left(1 + \frac{1}{M_a(\eta(\xi))}\right) Y_+ + \left(1 - \frac{1}{M_a(\eta(\xi))}\right) Y_- \right), \\ d_\xi Y_- = \left(1 + \frac{1}{M_a(\eta(\xi))}\right) \left(\left(1 + \frac{1}{M_a(\eta(\xi))}\right) Y_+ + \left(1 - \frac{1}{M_a(\eta(\xi))}\right) Y_- \right), \end{cases} \quad (6.64)$$

Supposons alors qu'il existe une trajectoire $\xi \rightarrow \eta(\xi)$ issue de la condition asymptotique :

$$\lim_{\xi \rightarrow -\infty} \eta(\xi) = 1. \quad (6.65)$$

Nous pouvons ainsi chercher, dans un premier temps, les solutions du sous-système (6.64) réinterprété en $\eta(\xi)$ et vérifiant les conditions asymptotiques (6.18)-(6.19) suivantes :

$$\lim_{\xi \rightarrow -\infty} Y_+(\xi) = \beta \left(1 - \frac{\beta}{M}\right), \quad \lim_{\xi \rightarrow -\infty} Y_-(\xi) = -\beta \left(1 + \frac{\beta}{M}\right). \quad (6.66)$$

L'utilisation de l'hypothèse (6.31) de stricte décroissance de $\xi \rightarrow \eta(\xi)$ est alors cruciale, notamment pour pouvoir exprimer le sous-système en variable η . Une fois les solutions en $Y_+(\eta)$ et $Y_-(\eta)$ calculées, on pourra réinterpréter l'équation en $\eta(\xi)$ comme suit :

$$d_\xi \eta = \frac{\nu}{\mu} \frac{\gamma - 1}{M^2 \eta} (\alpha^2 (Y_+ Y_-(\eta) - (Y_+ Y_-)_L) - \mathcal{G}(\eta)), \quad (6.67)$$

pour en déduire $\eta(\xi)$, puis $(Y_+(\xi), Y_-(\xi))$. Il faut bien sûr préciser la réinterprétation du sous-système en $\eta(\xi)$, ce que nous ferons un peu plus loin.

Pour cela, la deuxième hypothèse (6.30) de non surcompressivité de l'état de sortie, *i.e.* $M_a(+\infty) > 1$ est elle aussi centrale. En effet, nous avons vu au paragraphe (6.3.4), qu'avec l'hypothèse (6.31), elle permettait de démontrer les quatre propriétés (6.39), (6.32), (6.34) et (6.35) que nous rappelons ici :

$$\left\{ \begin{array}{l} \xi \rightarrow M_a(\xi) \text{ est strictement décroissante pour tout } \xi \in \mathbb{R}, \\ M_a(\eta(\xi)) > 1, \text{ pour tout } \xi \in \mathbb{R}, \\ \lim_{\xi \rightarrow +\infty} Y_+(\xi) = Y_+^*(+\infty) > 0, \quad \lim_{\xi \rightarrow +\infty} Y_-(\xi) = Y_-^*(+\infty) < 0, \\ \left(1 + \frac{1}{M_a(+\infty)}\right) Y_+^*(+\infty) + \left(1 - \frac{1}{M_a(+\infty)}\right) Y_-^*(+\infty) = 0. \end{array} \right. \quad (6.68)$$

$$\left. \begin{array}{l} \xi \rightarrow M_a(\xi) \text{ est strictement décroissante pour tout } \xi \in \mathbb{R}, \\ M_a(\eta(\xi)) > 1, \text{ pour tout } \xi \in \mathbb{R}, \end{array} \right\} \quad (6.69)$$

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{\xi \rightarrow +\infty} Y_+(\xi) = Y_+^*(+\infty) > 0, \quad \lim_{\xi \rightarrow +\infty} Y_-(\xi) = Y_-^*(+\infty) < 0, \end{array} \right\} \quad (6.70)$$

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{\xi \rightarrow +\infty} Y_+(\xi) = Y_+^*(+\infty) > 0, \quad \lim_{\xi \rightarrow +\infty} Y_-(\xi) = Y_-^*(+\infty) < 0, \\ \left(1 + \frac{1}{M_a(+\infty)}\right) Y_+^*(+\infty) + \left(1 - \frac{1}{M_a(+\infty)}\right) Y_-^*(+\infty) = 0. \end{array} \right\} \quad (6.71)$$

La difficulté principale concernant la résolution du sous-système en (Y_+, Y_-) , la trajectoire en $\eta(\xi)$ étant supposée connue, est toujours la même qu'en isotherme et provient du cinquième point du paragraphe (6.3.4) que nous rappelons ici :

sous l'hypothèse (6.30) de non surcompressivité de l'état de sortie et la trajectoire $\xi \rightarrow \eta(\xi)$ étant supposée unique, le sous-système en (Y_+, Y_-) admet une **infinité** de solutions **satisfaisant les conditions asymptotiques** (6.66) qui **exploisent toutes en temps infini** sauf précisément une unique solution $(Y_+^*(\xi), Y_-^*(\xi))$ vérifiant (6.70), avec la propriété (6.71).

Pour contourner cette difficulté, nous proposons de nous inspirer de la méthode numérique proposée en isotherme au paragraphe (5.6.2). Nous suggérons ainsi, à l'aide d'un changement de fonctions inconnues, de ramener le problème sur un compact en temps $[0, H_{max}]$, avec $0 < H_{max} < \infty$, pour une nouvelle variable de temps H qui sera liée à η conformément aux discussions précédentes. Ceci est possible grâce aux propriétés (6.30), (6.68) et (6.69). Le problème est reformulé de manière rétrograde au sens où $H \rightarrow 0$ correspond à $\xi \rightarrow +\infty$, alors que $H \rightarrow H_{max}$ correspond à $\xi \rightarrow -\infty$. Il faut donc fixer une donnée initiale en $H = 0$ qui est inconnue puisque devant être construite sur $\lim_{\xi \rightarrow +\infty} Y_+ = Y_+^*(+\infty)$ et $\lim_{\xi \rightarrow +\infty} Y_- = Y_-^*(+\infty)$. Pour cela, il s'agit d'exploiter les propriétés connues sur ces limites. Ces limites vérifient par construction la propriété d'**annulation** (6.71) et, grâce à (6.70) et (6.30), la propriété de **non annulation** :

$$\left(1 + \frac{1}{M_a(+\infty)}\right) Y_+^*(+\infty) - \left(1 - \frac{1}{M_a(+\infty)}\right) Y_-^*(+\infty) \neq 0. \quad (6.72)$$

Nous proposons alors d'utiliser ces deux propriétés en introduisant un changement de fonctions inconnues $(z_+(\xi), z_-(\xi))$ donné à un facteur multiplicatif près par :

$$\left(1 + \frac{1}{M_a(\xi)}\right) Y_+(\xi) + \left(1 - \frac{1}{M_a(\xi)}\right) Y_-(\xi), \quad (6.73)$$

et :

$$\left(1 + \frac{1}{M_a(\xi)}\right) Y_+(\xi) - \left(1 - \frac{1}{M_a(\xi)}\right) Y_-(\xi), \quad (6.74)$$

avec les propriétés

$$\lim_{\xi \rightarrow +\infty} z_+(\xi) = 0, \quad \lim_{\xi \rightarrow +\infty} z_-(\xi) \neq 0. \quad (6.75)$$

Ainsi, dans la nouvelle variable $H \in [0, H_{max}]$, les fonctions $(z_+(H), z_-(H))$ seront solutions d'un système **non linéaire** de la forme :

$$\begin{cases} d_H z_- = -z_+, \\ d_H z_+ = -G(H, z_+, z_-)z_+ - z_-, \end{cases} \quad (6.76)$$

où $G(H, z_+, z_-)$ est une fonction positive, régulière sur $]0, H_{max}[$, dépendant des inconnues (z_+, z_-) selon :

$$G(H, z_+, z_-) = \frac{A(H)}{z_-^2 - z_+^2 - B(H)},$$

avec :

$$\lim_{H \rightarrow 0^+} G(H, z_+, z_-) = +\infty, \quad (6.77)$$

mais :

$$\lim_{H \rightarrow 0^+} A(H) < \infty, \quad \lim_{H \rightarrow 0^+} B(H) < \infty.$$

Ce système est fermé par la donnée initiale $z_+(0)$ et $z_-(0)$. D'après (6.75), nous avons :

$$z_+(0) = 0, \quad z_-(0) \neq 0, \quad (6.78)$$

avec $z_-(0)$ inconnue. Insistons à nouveau sur le fait que, contrairement à l'isotherme, le système (6.76) n'est plus linéaire puisque la fonction $G(H, z_+, z_-)$ dépend de l'inconnue (z_+, z_-) . On ne peut donc plus exploiter la non nullité de $z_-(0)$ pour réaliser l'analogie du changement de variable (5.134) proposé dans le cadre isotherme. Il faut donc pouvoir exprimer $z_-(0)$ pour pouvoir initialiser le développement en série de Laurent de z_+ et z_- au voisinage de $H = 0$ pour lever la singularité (6.77) à cet endroit. Or, selon (6.74), $z_-(0)$ est proportionnel à :

$$\left(1 + \frac{1}{M_a(+\infty)}\right) Y_+^*(+\infty) - \left(1 - \frac{1}{M_a(+\infty)}\right) Y_-^*(+\infty),$$

expression qui a été déterminée en fonction de $\eta_R(\alpha^2, \beta^2, M^2)$, selon la formule (6.53) du paragraphe (6.3.5) étudiant l'expression des points stationnaires. Nous rappelons ici cette formule en omettant les dépendances par rapport aux nombres réduits pour alléger les écritures et en se souvenant que $M_a^R = M_a(+\infty)$ et $Y_{\pm}^R = Y_{\pm}(+\infty)$:

$$\left(1 + \frac{1}{M_a^R}\right) Y_+^R - \left(1 - \frac{1}{M_a^R}\right) Y_-^R = 2 \frac{\sqrt{(M_a^R)^2 - 1}}{\alpha M_a^R} \sqrt{-\alpha^2(Y_+ Y_-)_L - \mathcal{G}(\eta_R)}. \quad (6.79)$$

Ainsi, $z_-(0)$ ne dépend que de $\eta_R(\alpha^2, \beta^2, M^2)$ qui est inconnu. En résumé, si l'on connaît le taux de compression de sortie, des développements en série de Laurent de z_+ et z_- au voisinage de $H = 0$ permettront de lever la singularité à cet endroit et d'intégrer numériquement le problème de Cauchy (6.76)-(6.78). La différence principale avec l'isotherme est que désormais $\eta_R(\alpha^2, \beta^2, M^2)$ est inconnu, cependant l'intégration de ce problème de Cauchy ne dépend que de ce taux de compression de sortie. Nous proposons donc, à (α, β, M) fixés, une stratégie d'estimation de $\eta_R(\alpha^2, \beta^2, M^2)$ reposant sur l'étude des points critiques faite au paragraphe (6.3.5), où nous avons vu que le taux de compression de sortie doit vérifier l'encadrement (6.49) et la condition

(6.50). Pour chaque estimé $\eta_R^{es}(\alpha^2, \beta^2, M^2)$, on intègre le problème de Cauchy (6.76)-(6.78). Si ce taux de compression de sortie particulier n'est pas le bon, le critère de convergence de l'intégration sera atteint en un point $H_{fin} \neq H_{max}$ (nous verrons que H_{max} dépend lui aussi du taux de compression de sortie). Dans la suite de ce paragraphe, nous allons développer plus précisément la stratégie proposée.

Un premier changement d'inconnues et de variable de temps

Nous suivons ici le cheminement déjà présenté en isotherme à la section (5.6.2). Comme suggéré au paragraphe précédent, on considère le changement de fonctions inconnues suivant :

$$\begin{cases} y_+(\xi) = \left(1 + \frac{1}{M_a(\eta(\xi))}\right) Y_+(\xi) + \left(1 - \frac{1}{M_a(\eta(\xi))}\right) Y_-(\xi), \\ y_-(\xi) = \left(1 + \frac{1}{M_a(\eta(\xi))}\right) Y_+(\xi) - \left(1 - \frac{1}{M_a(\eta(\xi))}\right) Y_-(\xi), \end{cases} \quad (6.80)$$

qui est possible grâce à la propriété (6.69). Nous introduisons alors la fonction $h(\eta(\xi))$ définie par :

$$h(\eta(\xi)) = \frac{1}{M_a(\eta(\xi))} = \frac{\beta}{M\eta^2(\xi)}, \quad \xi \in \mathbb{R}, \quad (6.81)$$

destinée à simplifier les écritures et satisfaisant les propriétés suivantes, directement héritées des propriétés (6.68), (6.69) et de l'hypothèse (6.30) :

$$\xi \rightarrow h(\xi) \text{ est strictement croissante pour tout } \xi \in \mathbb{R}, \quad (6.82)$$

et :

$$0 < h(\eta(\xi)) < 1, \text{ pour tout } \xi \in \mathbb{R}. \quad (6.83)$$

Des calculs simples montrent que les nouvelles inconnues $y_+(\xi)$ et $y_-(\xi)$ doivent être solutions du système à coefficients variables :

$$\begin{cases} d_\xi y_- = \frac{d_\xi h(\eta(\xi))}{1 - h^2(\eta(\xi))} (y_+ - h(\eta(\xi)) y_-), \\ d_\xi y_+ = 2(1 - h^2(\eta(\xi))) y_+ + \frac{d_\xi h(\eta(\xi))}{1 - h^2(\eta(\xi))} (y_- - h(\eta(\xi)) y_+). \end{cases} \quad (6.84)$$

Soulignons encore une fois que l'hypothèse (6.30) de non surcompressivité de l'état de sortie et indirectement l'hypothèse (6.31) de stricte décroissance du taux de compression entraînant la propriété de stricte décroissance de $\xi \rightarrow M_a(\xi)$, sont ici essentielles pour que le système gouvernant $y_+(\xi)$ et $y_-(\xi)$ soit bien défini. En effet, elles permettent de démontrer la propriété (6.83) garantissant la non annulation de la fonction $\xi \rightarrow 1 - h^2(\xi)$, pour tout $\xi \in \mathbb{R}$.

Remarquons que le nouveau système (6.84) ne dépend finalement que de $\eta(\xi)$, fonction inconnue dans le cadre anisotherme. Il paraît donc naturel d'utiliser le taux de compression comme nouvelle variable de temps puisque l'hypothèse (6.31) garantit la stricte décroissance de $\xi \rightarrow \eta(\xi)$. De plus, ce changement de variable permet de ramener l'intégration de \mathbb{R}_ξ tout entier à un compact puisque $\xi \rightarrow \eta(\xi)$ est à valeurs dans $[\eta_R(\alpha^2, \beta^2, M^2), 1]$. Rappelons que le taux de compression de sortie est pour l'instant

inconnu. Nous le noterons simplement η_R dans la suite puisque (α, β, M) sont implicitement fixés. La division des équations du système (6.84) par $d_\xi \eta$, montre que dans la variable $\eta \in [\eta_R, 1]$, les inconnues $y_+(\eta)$ et $y_-(\eta)$ doivent être solutions de :

$$\begin{cases} d_\eta y_- = \frac{d_\eta h(\eta)}{1 - h^2(\eta)}(y_+ - h(\eta)y_-), \\ d_\eta y_+ = \frac{\mu M^2 \eta}{(\gamma - 1)\nu} \frac{2(1 - h^2(\eta))}{(\alpha^2(Y_+ Y_- (\eta, y_+, y_-) - (Y_+ Y_-)_L) - \mathcal{G}(\eta))} y_+ + \frac{d_\eta h(\eta)}{1 - h^2(\eta)}(y_- - h(\eta)y_+), \end{cases}$$

où nous avons remplacé $d_\xi \eta$ par son équation (6.60) et où la fonction $\mathcal{G}(\eta)$ a été définie en (6.63). Nous n'avons pas explicité $Y_+ Y_- (\eta, y_+, y_-)$ par souci de simplification dans l'écriture du système. Cependant, notons que selon (6.80), on a :

$$\begin{cases} Y_+(\eta, y_+, y_-) = \frac{1}{2} \frac{M_a(\eta)}{M_a(\eta) + 1} (y_+(\eta) + y_-(\eta)), \\ Y_+(\eta, y_+, y_-) = \frac{1}{2} \frac{M_a(\eta)}{M_a(\eta) - 1} (y_+(\eta) - y_-(\eta)). \end{cases}$$

Nous proposons alors d'effectuer un second et dernier changement de variable de temps, motivés par les propriétés (6.82) et (6.83), que nous rappelons ici en variable η :

$$\eta \rightarrow h(\eta) \text{ est strictement décroissante, avec } 0 < h(\eta) < 1, \text{ pour tout } \eta \in [\eta_R, 1], \quad (6.85)$$

de sorte que :

$$-\frac{d_\eta h(\eta)}{1 - h^2(\eta)} > 0, \quad \eta \in [\eta_R, 1]. \quad (6.86)$$

Cette propriété conduit au changement de variable important suivant :

Proposition 6.5.1. *La fonction positive définie par :*

$$H(\eta, \eta_R) = - \int_{\eta_R}^{\eta} \frac{d_v h(v)}{1 - h^2(v)} dv = \frac{1}{2} \ln \frac{(1 + h(\eta_R))(1 - h(\eta))}{(1 - h(\eta_R))(1 + h(\eta))}, \quad (6.87)$$

pour $\eta \in [\eta_R, 1]$, réalise un changement de variable de temps admissible dont l'inverse, défini de $[0, H(1, \eta_R)]$ à valeurs dans $[\eta_R, 1]$, est donné par :

$$\eta(H) = \eta_c \left(\frac{1 - \lambda e^{2H}}{1 + \lambda e^{2H}} \right), \text{ avec } \lambda = \frac{1 - h(\eta_R)}{1 + h(\eta_R)} \text{ et } \eta_c = \sqrt{\frac{\beta}{M}}. \quad (6.88)$$

Dans la nouvelle variable de temps H , les inconnues $y_-(H)$ et $y_+(H)$ doivent être solutions du système non linéaire suivant :

$$\begin{cases} d_H y_- = -(y_+ - h(H)y_-), \\ d_H y_+ = -G(H, y_+, y_-)y_+ - (y_- - h(H)y_+), \end{cases} \quad (6.89)$$

avec sans ambiguïté :

$$h(H) = \frac{1 - \lambda e^{2H}}{1 + \lambda e^{2H}}, \quad (6.90)$$

et où nous avons posé :

$$G(H, y_+, y_-) = -\frac{\mu M^2}{(\gamma - 1)\nu} \frac{(1 - h^2(H))^2}{\left(\alpha^2 \left(\frac{y_+^2 - y_-^2}{4(1 - h^2(H))} - (Y_+ Y_-)_L\right) - \mathcal{G}(\eta(H))\right)} \frac{\eta^4(H)}{\eta_c^2}, \quad (6.91)$$

avec

$$\begin{aligned} \mathcal{G}(\eta(H)) &= \frac{1 - \eta(H)}{\eta^2(H)} \\ &\times \left(\frac{\gamma + 1}{\gamma - 1} M^2 \eta^3(H) - \left(\frac{2}{\gamma - 1} + M^2 + 2 \frac{\gamma - 3}{\gamma - 1} \beta^2 \right) \eta^2(H) + \frac{\gamma - 3}{\gamma - 1} \beta^2 (\eta(H) + 1) \right) = 0. \end{aligned} \quad (6.92)$$

Plusieurs remarques peuvent être faites à la suite de cette proposition. Tout d'abord, la borne supérieure de l'intervalle d'intégration $H(1, \eta_R)$ dépend explicitement du taux de compression de sortie qui est ici inconnu, contrairement au cadre isotherme. Ensuite, rappelons que $H \rightarrow 0^+$ correspond à $\xi \rightarrow +\infty$, alors que $H \rightarrow H(1, \eta_R)$ correspond à $\xi \rightarrow -\infty$. Ainsi et conformément à la section précédente décrivant nos motivations, prescrire une donnée initiale en $H = 0$ pour le système (6.89) consiste bien à faire référence aux valeurs en $\xi = +\infty$ de $Y_+^*(+\infty)$ et $Y_-^*(+\infty)$ avec la propriété :

$$y_+(H = 0) = 0, \quad y_-(H = 0) \neq 0. \quad (6.93)$$

De même, en $H(1, \eta_R)$, les valeurs de $y_+(H)$ et $y_-(H)$ satisfont aux conditions asymptotiques en $\xi = -\infty$ rappelées en (6.66). Pour simplifier les écritures, nous noterons désormais $H(1, \eta_R) = H_{max}(\eta_R)$.

Concernant le comportement asymptotique de la fonction $G(H, y_+, y_-)$, nous avons :

$$\lim_{H \rightarrow 0^+} G(H, y_+, y_-) = \lim_{H \rightarrow H_{max}(\eta_R)} G(H, y_+, y_-) = +\infty. \quad (6.94)$$

En effet, $H = 0$ et $H = H_{max}(\eta_R)$ correspondent à des points stationnaires du système dynamique (6.60)-(6.62), et donc de l'EDO (6.60) gouvernant η , pour lesquels :

$$\begin{cases} \lim_{H \rightarrow 0^+} \left(\alpha^2 \left((Y_+ Y_-)(\eta(H), y_+, y_-) - (Y_+ Y_-)_L \right) - \mathcal{G}(\eta(H)) \right) = 0, \\ \lim_{H \rightarrow H_{max}(\eta_R)} \left(\alpha^2 \left((Y_+ Y_-)(\eta(H), y_+, y_-) - (Y_+ Y_-)_L \right) - \mathcal{G}(\eta(H)) \right) = 0. \end{cases}$$

Enfin, on a la propriété suivante :

$$H \rightarrow G(H, y_+, y_-) \text{ est une fonction positive régulière sur }]0, H_{max}(\eta_R)[, \quad (6.95)$$

puisque $\alpha^2 \left((Y_+ Y_-)(\eta(H), y_+, y_-) - (Y_+ Y_-)_L \right) - \mathcal{G}(\eta(H)) = d_\xi \eta < 0$ selon l'hypothèse (6.31) de stricte décroissance de $\xi \rightarrow \eta(\xi)$.

Derniers changements de fonctions inconnues

Le système non linéaire (6.89) peut encore être simplifié en introduisant la fonction :

$$F_{int}(H) = \exp \left(- \int_0^H h(t) dt \right), \quad H \in [0, H_{max}(\eta_R)], \quad (6.96)$$

dont la forme explicite est :

$$F_{int}(H) = \frac{1}{1+\lambda} e^{-H} (1 + \lambda e^{2H}), \quad F_{int}(0) = 1, \quad H \in [0, H_{max}(\eta_R)]. \quad (6.97)$$

Après multiplication des équations composant le système (6.89) par la fonction (6.97), il est possible de vérifier que les nouvelles fonctions inconnues :

$$z_+(H) = F_{int}(H)y_+(H), \quad z_-(H) = F_{int}(H)y_-(H), \quad H \in [0, H_{max}(\eta_R)],$$

doivent être solutions du système non linéaire suivant :

$$\begin{cases} d_H z_- = -z_+, \\ d_H z_+ = -G(H, z_+, z_-)z_+ - z_-, \end{cases} \quad (6.98)$$

où après quelques calculs, on obtient la définition de la fonction $H \rightarrow G(H, z_+, z_-)$:

$$G(z_+, z_-, H) = \frac{G_1(H)}{z_-^2 - z_+^2 - G_2(H)}, \quad (6.99)$$

avec :

$$\begin{cases} G_1(H) = C_1 \frac{e^{4H}}{(1 + \lambda e^{2H})^2 (1 - \lambda e^{2H})^2}, \\ G_2(H) = C_2 (\alpha^2 \beta^2 (1 - \eta_c^4) - \mathcal{G}(\eta)), \\ C_1 = \frac{\mu}{\nu} \frac{256M^2}{(\gamma - 1)\alpha^2} \frac{\eta_c^2 \lambda^3}{(1 + \lambda)^2}, \\ C_2 = \frac{16\lambda}{\alpha^2(1 + \lambda)^2}. \end{cases} \quad (6.100)$$

Nous donnons néanmoins deux remarques concernant ces calculs. Il n'y a pas de fonction dépendant de H devant z_-^2 et z_+^2 . Ceci provient du fait que dans la formule (6.91) le coefficient devant y_+^2 et y_-^2 est en fait une constante :

$$\frac{\alpha^2}{4(1 - h^2(H))(F_{int}(H))^2} = \frac{\alpha^2(1 + \lambda)^2}{16\lambda}.$$

De plus, on a pris l'opposé du dénominateur de $G(H, y_+, y_-)$ pour absorber le signe négatif devant l'expression de la formule (6.91). Cependant, la fonction $H \rightarrow G(H, z_+, z_-)$ est toujours positive, ce qui est une propriété primordiale ici.

Soulignons que d'après (6.100), on a les propriétés importantes suivantes :

$$\lim_{H \rightarrow 0^+} G_1(H) < \infty, \quad \lim_{H \rightarrow 0^+} G_2(H) < \infty. \quad (6.101)$$

En pratique, les variables résolues sont en réalité (z_+, z_-) à une constante multiplicative près. En anticipant sur la suite, nous nous sommes aperçus que l'intégration numérique était difficile pour les α petits. Nous suggérons donc de renormaliser la solution et de travailler avec les inconnues :

$$\bar{z}_\pm = \sqrt{\frac{(\gamma - 1)\alpha^2}{512M^2}} z_\pm = C z_\pm.$$

De manière évidente, les nouvelles inconnues sont solutions du même système (6.98) où la fonction $H \rightarrow G(H, \bar{z}_+, \bar{z}_-)$ possède des constantes différentes. En utilisant cette renormalisation et en abandonnant la notation barre pour plus de clarté, on obtient :

$$G(z_+, z_-, H) = \frac{A(H)}{z_-^2 - z_+^2 - B(H)}, \quad (6.102)$$

avec :

$$\begin{cases} A(H) = C_A \frac{e^{AH}}{(1 + \lambda e^{2H})^2 (1 - \lambda e^{2H})^2}, \\ B(H) = C_B (\alpha^2 \beta^2 (1 - \eta_c^4) - \mathcal{G}(\eta)), \\ C_A = \frac{\mu}{2\nu} \frac{\eta_c^2 \lambda^3}{(1 + \lambda)^2}, \\ C_B = \frac{\gamma - 1}{32M^2} \frac{\lambda}{(1 + \lambda)^2}. \end{cases} \quad (6.103)$$

La forme de la constante de renormalisation est une conséquence de ce calcul et de la volonté d'enlever α^{-2} de la constante du numérateur $G_1(H)$ de la fonction $G(H, z_+, z_-)$ donnée en (6.99)-(6.100), ce qui le rendait artificiellement grand pour les α petits. Cette volonté s'explique par le critère qui sera choisi comme fin d'intégration du système et qui sera basé sur le fait que le dénominateur de $G(H, z_+, z_-)$ devient infiniment grand près d'un point critique puisque $d_\xi \eta = 0$ en ce point. Notons que les propriétés (6.101) sont toujours valables :

$$\lim_{H \rightarrow 0^+} A(H) < \infty, \quad \lim_{H \rightarrow 0^+} B(H) < \infty. \quad (6.104)$$

Concernant la donnée initiale (6.93) en $H = 0$, celle-ci devient :

$$z_+(H = 0) = y_+(H = 0) = 0, \quad z_-(H = 0) = C y_-(H = 0) \neq 0, \quad (6.105)$$

puisque $F_{int}(0) = 1$ d'après (6.96). La quantité $z_-(0)$ est toujours inconnue. Soulignons de nouveau qu'à l'instant final $H_{max}(\eta_R)$, correspondant à $\xi = -\infty$ dans la variable originelle, et donc à la condition asymptotique (6.66), on a :

$$Y_+^L = \lim_{\xi \rightarrow -\infty} Y_+(\xi) = \beta \left(1 - \frac{\beta}{M}\right), \quad Y_-^L = \lim_{\xi \rightarrow -\infty} Y_-(\xi) = -\beta \left(1 + \frac{\beta}{M}\right), \quad (6.106)$$

de sorte que les quantités $z_+(H_{max}(\eta_R))$ et $z_-(H_{max}(\eta_R))$ sont explicitement données par :

$$\begin{cases} z_+(H_{max}(\eta_R)) & = 0, \\ z_-(H_{max}(\eta_R)) & = C F_{int}(H_{max}(\eta_R)) ((1 + h(\eta_L)) Y_+^L - (1 - h(\eta_L)) Y_-^L), \\ & = 2C \beta F_{int}(H_{max}(\eta_R)) (1 - \eta_c^4) \neq 0. \end{cases} \quad (6.107)$$

car $h(\eta_L) = \frac{1}{M_a(-\infty)} = \frac{\beta}{M} = \eta_c^2$.

Remarque 6.5.2. Puisque les valeurs finales $z_+(H_{max}(\eta_R))$ et $z_-(H_{max}(\eta_R))$ sont connues, on pourrait être tenté de renverser le signe du temps en $-H$ pour intégrer de

$-H_{max}(\eta_R)$ avec ces données jusqu'à l'instant $H = 0$. Toutefois, en échangeant H en $-H$, on passe de $-G(H, z_+, z_-)$ à $G(-H, z_+, z_-)$. Dès lors, les propriétés d'**explosion** de G par valeurs positives :

$$\lim_{H \rightarrow 0^+} G(H, z_+, z_-) = \lim_{H \rightarrow H_{max}(\eta_R)^-} G(H, z_+, z_-) = +\infty,$$

s'opposent à une telle approche. Ce constat est directement lié à l'existence d'une infinité de solutions pour le problème direct, explosant toutes en temps sauf une.

Contrairement au cadre isotherme, le système (6.98) n'est pas linéaire. On ne peut donc pas exploiter la condition de non annulation de $z_-(0)$ pour utiliser un nouveau changement de fonctions inconnues en divisant (z_+, z_-) par cette quantité et ainsi avoir une condition initiale connue. Il faut ici exprimer explicitement $z_-(0)$. Pour cela remarquons que cette quantité est donnée par :

$$z_-(0) = Cy_-(0) = C \left(\left(1 + \frac{1}{M_a^R}\right) Y_{+R} - \left(1 - \frac{1}{M_a^R}\right) Y_{-}^R \right),$$

où les dépendances par rapport aux nombres réduits ont été consciemment omises et où $M_a^R = M_a(+\infty)$ et $Y_{\pm}^R = Y_{\pm}^*(+\infty)$. Or, au paragraphe (6.3.5) étudiant les points stationnaires, l'expression entre parenthèses a déjà été calculée (voir formule (6.53)), ce qui nous donne pour $z_-(0)$:

$$z_-(0) = 2C \frac{\sqrt{(M_a^R)^2 - 1}}{\alpha M_a^R} \sqrt{-\alpha^2(Y_+ Y_-)_L - \mathcal{G}(\eta_R)}. \quad (6.108)$$

Rappelons que la racine carrée est bien définie en vertu de l'inégalité (6.50) impliquant que le taux de compression de sortie est tel que :

$$-\alpha^2(Y_+ Y_-)_L - \mathcal{G}(\eta_R) > 0.$$

Remarque 6.5.3. Un lien très étroit existe entre l'expression de $z_-(0)$ et l'évaluation de la fonction $B(H)$ en zéro. Afin d'exhiber ce lien, remplaçons la première équation du système (6.98) donnant $z_+ = -d_H z_-$, dans la deuxième équation sur z_+ . On obtient alors une équation du second degré gouvernant l'inconnue z_- :

$$d_{HH} z_- + G(H, z_+, z_-) d_H z_- - z_- = 0.$$

En remplaçant $G(H, z_+, z_-)$ par son expression (6.102), cette équation se réécrit :

$$(z_-^2 + (d_H z_-)^2 - B(H)) (d_{HH} z_- - z_-) + A(H) d_H z_- = 0. \quad (6.109)$$

Ainsi grâce aux propriétés (6.104) et en se rappelant que $z_+(0) = -d_H z_-(0) = 0$ et $z_-(0) \neq 0$, un passage à la limite dans l'équation ci-dessus implique :

$$z_-(0) = \sqrt{B(0)}.$$

Si l'on évalue $\sqrt{B(0)}$ grâce aux formule (6.103) donnant $B(H)$, on récupère effectivement l'expression de $z_-(0)$ donnée en (6.108).

Finalement, la formule (6.108) montre que, à (α, β, M) fixés, la donnée initiale $z_-(0)$ ne dépend que de $\eta_R(\alpha^2, \beta^2, M^2)$. Ainsi, si le taux de compression de sortie est connu, il s'agit alors d'intégrer numériquement la solution du problème de Cauchy suivant, sur l'intervalle $[0, H_{max}(\eta_R)]$:

$$\begin{cases} d_H z_- = -z_+, \\ d_H z_+ = -G(H, z_+, z_-)z_+ - z_-, \end{cases} \quad (6.110)$$

équipée de la donnée initiale :

$$\begin{cases} z_+(0) = 0, \\ z_-(0) = 2C \frac{\sqrt{(M_a^R)^2 - 1}}{\alpha M_a^R} \sqrt{-\alpha^2(Y_+ Y_-)_L - \mathcal{G}(\eta_R)}, \end{cases} \quad (6.111)$$

avec :

$$\begin{cases} M_a^R = \left(\frac{\eta_R}{\eta_c}\right)^2, \\ (Y_+ Y_-)_L = -\beta^2(1 - \eta_c^4), \\ \eta_c = \sqrt{\frac{\beta}{M}}. \end{cases} \quad (6.112)$$

6.5.2 Élimination de la singularité en $H = 0$

Dans ce paragraphe, on suppose que le taux de compression de sortie noté η_R (sans référence aux nombres réduits (α^2, β^2, M^2) qui sont fixés) est connu.

Dès lors, la singularité de la fonction $G(H, z_+, z_-)$ en $H = 0$ interdit de pouvoir débiter la résolution numérique du problème d'EDO (6.110),(6.111) à partir de l'instant $H = 0$. Nous suggérons d'approcher cette solution en résolvant le problème suivant, posé sur un intervalle $[H_0, H_{max}(\eta_R)]$, $H_0 > 0$ donné, suffisamment petit :

$$\begin{cases} d_H z_- = -z_+, \\ d_H z_+ = -G(H, z_+, z_-)z_+ - z_-, \end{cases} \quad (6.113)$$

équipé d'une donnée initiale à l'instant $H_0 : (z_+(H_0), z_-(H_0))$, où $z_+(H_0)$ et $z_-(H_0)$ sont estimés à partir d'un développement formel en série en $H = 0$ de la solution du problème originel (6.110)-(6.111).

Ces développements reposent sur un développement en série de Laurent des fonctions $A(H)$ et $B(H)$. Cependant, les calculs étant beaucoup plus lourds que dans la cadre isotherme, nous n'avons pu démontrer de résultat général analogue à la proposition (5.6.4) du chapitre 5. Nous donnons simplement le résultat tronqué suivant :

Proposition 6.5.4. *Supposons que les fonctions $A(H)$ et $B(H)$ admettent les développements en série de Laurent suivants, en $H = 0$, respectivement à l'ordre trois et quatre :*

$$\begin{cases} A(H) = \sum_{i=0}^2 A_i H^i + \mathcal{O}(H^3), \\ B(H) = \sum_{i=0}^3 B_i H^i + \mathcal{O}(H^4), \end{cases}$$

alors la solution $z_+(H)$ et $z_-(H)$ du problème (6.110)-(6.111) admet le développement en série de Laurent, à l'ordre cinq pour z_- et quatre pour z_+ , en $H = 0$, donné par les formules suivantes :

$$\begin{cases} z_-(H) = \sum_{i=0}^4 z_i H^i + \mathcal{O}(H^5), \\ z_+(H) = \sum_{i=1}^4 i z_i H^{i-1} + \mathcal{O}(H^4), \end{cases}$$

avec :

$$\begin{cases} z_0 = \sqrt{B_0}, \\ z_1 = 0, \\ z_2 = \frac{1}{2} \frac{\sqrt{B_0}}{\phi_0}, \\ z_3 = \frac{1}{3} \frac{\sqrt{B_0}(\phi_0 - 1)}{B_1 \phi_0^3 (1 + \phi_0)} (\phi_0^2 (1 - \psi_0) B_2 + B_0 (1 - \phi_0)), \\ z_4 = \frac{\sqrt{B_0}}{24} \frac{\bar{z}_4}{B_1^2 \phi_0^5 (\phi_0 + 2)(\phi_0 + 1)}, \end{cases}$$

ainsi que :

$$\begin{aligned} \bar{z}_4 = & 6B_1 \phi_0^4 (1 + \phi_0) (1 - \phi_0) (\chi_0 - 1) B_3 + 4B_0^2 (\phi_0 - 6) (\phi_0 - 1)^3 + 3B_1^2 \phi_0^4 (1 + \phi_0) \\ & + 6B_2^2 \phi_0^4 (1 - \phi_0) (2 + \psi_0 (\phi_0 - 3) - \psi_0^2 (\phi_0 - 1)) \\ & + 2B_0 B_2 \phi_0^2 (\phi_0 - 1)^2 (5\psi_0 (\phi_0 - 3) - 2(\phi_0 - 9)), \end{aligned}$$

et où l'on a posé, pour des raisons de clarté :

$$\begin{cases} \phi_0 = \frac{B_1 - A_0}{B_1}, \\ \psi_0 = \frac{A_1}{(1 - \phi_0) B_2}, \\ \chi_0 = \frac{A_2}{(1 - \phi_0) B_3}. \end{cases}$$

Notons que $z_+(0)$ est nul, alors que $z_-(0) = z_0 = \sqrt{B_0} = \sqrt{B(0)}$. Selon la remarque (6.5.3), il s'agit bien de la donnée initiale prescrite en (6.111). Il faudra s'assurer que les coefficients $(B_i)_{i=1,2,3}$ sont bien non nuls pour que les coefficients du développement en série de Laurent de $z_+(H)$ et $z_-(H)$, en $H = 0$, soient bien définis.

Démonstration. Le développement de $z_+(H)$ s'obtient en dérivant celui de $z_-(H)$, d'après la première équation du système (6.110). Pour trouver le développement de $z_-(H)$ en $H = 0$, remarquons que, d'après le système (6.110), $z_-(H)$ doit être solution de l'équation scalaire du second ordre suivante :

$$d_{HH} z_- + G(H, z_+, z_-) d_H z_- - z_- = 0,$$

avec la donnée initiale :

$$z_-(0) = \sqrt{B(0)}, \quad d_H z_-(0) = -z_+(0) = 0.$$

En utilisant l'expression (6.102) de la fonction $G(H, z_+, z_-)$ dans cette équation, et en multipliant par le dénominateur de cette fonction, on obtient :

$$(z_-^2 + (d_H z_-)^2 - B(H)) (d_{HH} z_- - z_-) + A(H) d_H z_- = 0. \quad (6.114)$$

On obtient alors le résultat par identification des coefficients, en remplaçant les développements des fonctions $A(H)$ et $B(H)$ dans cette dernière relation. \square

Armés de ces développements, la donnée initiale $(z_+(H_0), z_-(H_0))$, pour le système (6.110) posé sur l'intervalle $[H_0, H_{max}(\eta_R)]$, peut être approchée par les développements suivants :

$$\begin{cases} z_-(H_0) = \sqrt{B(0)} + \sum_{i=1}^4 z_i H_0^i + \mathcal{O}(H^5), \\ z_+(H_0) = 0 + \sum_{i=1}^4 i z_i H_0^{i-1} + \mathcal{O}(H^4) \end{cases} \quad (6.115)$$

où dans les applications numériques nous avons choisi $H_0 = 10^{-10}$. Les formules (6.115) nécessitent la connaissance des trois premiers coefficients du développement en série de Laurent de la fonction $A(H)$ et les quatre premiers coefficients de celui de la fonction $B(H)$. Pour les coefficients de $A(H)$, on a :

$$\begin{cases} A_0 = C_A \frac{1}{16} \frac{(r^2 + 1)^4}{r^4}, \\ A_1 = C_A \frac{1}{8} \frac{(r^2 + 1)^4 (r^4 + 1)}{r^6}, \\ A_2 = C_A \frac{1}{16} \frac{(r^2 + 1)^4 (3r^8 + 2r^4 + 3)}{r^8}, \end{cases}$$

où l'on a posé $r = \frac{\eta_R}{\eta_c}$. Concernant $B(H)$, les coefficients sont les suivants :

$$\begin{cases} B_0 = C_B (\alpha^2 \beta^2 (1 - \eta_c^4) - \mathcal{G}_0), \\ B_1 = -C_B \mathcal{G}_1, \\ B_2 = -C_B \mathcal{G}_2, \\ B_3 = -C_B \mathcal{G}_3. \end{cases}$$

avec :

$$\begin{cases} \mathcal{G}_0 = \mathcal{G}(\eta_R), \\ \mathcal{G}_1 = \frac{1}{2} \frac{1 - r^4}{r^2 \eta_R^2} (2c\eta_R^4 - b\eta_R^3 + 2a), \\ \mathcal{G}_2 = \frac{1}{8} \frac{1 - r^4}{r^4 \eta_R^2} (8cr^4 \eta_R^4 - b\eta_R^3 (3r^4 + 1) + 8a), \\ \mathcal{G}_3 = \frac{1}{48} \frac{1 - r^4}{r^6 \eta_R^2} (-b\eta_R^3 (15r^8 - 2r^4 + 3) + 16c\eta_R^4 r^4 (3r^4 - 1) + 16a(3 - r^4)), \end{cases}$$

où l'on rappelle que $\mathcal{G}(\eta)$ est donnée par la formule (6.63), et où les nombres (a, b, c, d) trouvent les définitions suivantes :

$$\left\{ \begin{array}{l} a = \frac{\gamma - 3}{\gamma - 1} \beta^2, \\ b = \frac{2}{\gamma - 1} (1 + \gamma M^2 - (3 - \gamma) \beta^2), \\ c = \frac{\gamma + 1}{\gamma - 1} M^2, \\ d = \frac{1}{\gamma - 1} (3(3 - \gamma) \beta^2 - 2 - (\gamma - 1) M^2). \end{array} \right.$$

Nous concluons cette section en donnant les éléments permettant d'obtenir le développement en série de Laurent des fonctions $A(H)$ et $B(H)$ ci dessus.

Démonstration. Avec les notations des formules (6.103), il s'agit de proposer un développement en série de Laurent des fonctions $A(H)$ à l'ordre trois et $B(H)$ à l'ordre quatre en $H = 0$:

$$\left\{ \begin{array}{l} A(H) = C_A \frac{e^{4H}}{(1 + \lambda e^{2H})^2 (1 - \lambda e^{2H})^2}, \\ B(H) = C_B (\alpha^2 \beta^2 (1 - \eta_c^4) - \mathcal{G}(\eta)). \end{array} \right.$$

Pour la fonction $A(H)$, il n'y a pas de difficulté et un logiciel de calculs formels permet de donner le résultat.

Pour développer $B(H)$, remarquons que la fonction $\mathcal{G}(\eta(H))$, donnée en (6.92), peut se réécrire formellement :

$$\mathcal{G}(\eta(H)) = -\frac{a}{\eta^2(H)} + b\eta(H) - c\eta^2(H) + d, \quad (6.116)$$

avec :

$$\left\{ \begin{array}{l} a = \frac{\gamma - 3}{\gamma - 1} \beta^2, \\ b = \frac{2}{\gamma - 1} (1 + \gamma M^2 - (3 - \gamma) \beta^2), \\ c = \frac{\gamma + 1}{\gamma - 1} M^2, \\ d = \frac{1}{\gamma - 1} (3(3 - \gamma) \beta^2 - 2 - (\gamma - 1) M^2). \end{array} \right.$$

La fonction $\eta(H)$ est définie par (voir formule (6.88)) :

$$\eta(H) = \eta_c \left(\frac{1 - \lambda e^{2H}}{1 + \lambda e^{2H}} \right), \text{ avec } \lambda = \frac{1 - h(\eta_R)}{1 + h(\eta_R)} \text{ et } \eta_c = \sqrt{\frac{\beta}{M}}.$$

Dès lors, développer $B(H)$ en $H = 0$, revient à développer $\mathcal{G} \circ \eta(H)$ en $H = 0$. En remplaçant l'expression de $\eta(H)$ dans la formule (6.116), on obtient une fonction de H qui ne pose pas de difficulté particulière quant à son développement en $H = 0$. Un logiciel de calculs formels donne, encore une fois, le résultat escompté. \square

6.5.3 Mise en oeuvre

Estimation et sélection du taux de compression de sortie

Comme nous l'avons vu dans la section précédente, l'intégration numérique du problème de Cauchy (6.110)-(6.111) ne peut être réalisée que si le taux de compression de sortie est connu. Celui-ci permet de déterminer la condition initiale $z_-(0)$ ainsi que la borne supérieure de l'intervalle d'intégration $H_{max}(\eta_R)$. Nous proposons donc d'utiliser les propriétés des points stationnaires, exposées au paragraphe (6.3.5), pour estimer un intervalle discret de taux de compression de sortie admissible, puis d'intégrer le système pour chacun d'entre eux. Nous noterons le taux de compression solution véritable du système par η_R et chacun des taux de compression de sortie estimé par η_R^{es} . Le critère de convergence de chaque calcul est basé sur l'évaluation du dénominateur de la fonction $G(H, z_+, z_-)$. Rappelons que celui-ci correspond à $d_\xi \eta$, si bien que quand $H \rightarrow H_{max}(\eta_R^{es})$, i.e. $\xi \rightarrow -\infty$, on a atteint le point stationnaire correspondant aux conditions asymptotiques (6.65)-(6.66) et ce dénominateur tend vers zéro (voir les formules (6.94)). Quand celui-ci devient inférieur à un petit paramètre ϵ_0 (dans la pratique $\epsilon_0 = 10^{-10}$) on considère que l'on a atteint la borne supérieure $H_{fin}(\eta_R^{es})$ de l'intervalle d'intégration $[0, H_{fin}(\eta_R^{es})]$. Si le taux de compression de sortie estimé n'est pas le bon η_R , alors on est certain que $H_{fin}(\eta_R^{es}) \neq H_{max}(\eta_R)$. On recherche alors le bon η_R parmi l'intervalle des η_R^{es} , en minimisant l'erreur commise sur $H_{fin}(\eta_R^{es})$ par rapport à $H_{max}(\eta_R)$.

Il s'agit donc, dans un premier temps, d'évaluer un intervalle admissible de taux de compression de sortie. Nous avons vu au paragraphe (6.3.5) que celui-ci doit vérifier l'encadrement suivant :

$$\eta_0(\beta, M) < \eta_R(\alpha^2, \beta^2, M^2) < \eta_{max}(\beta, M), \quad (6.117)$$

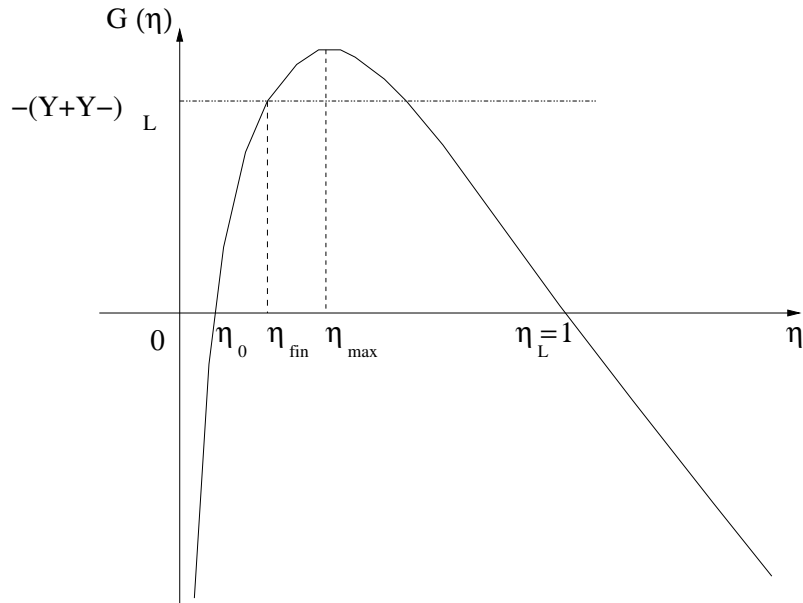
où $\eta_0(\beta, M)$ est l'unique racine différente de l'unité de la fonction $\eta \rightarrow \mathcal{G}(\eta)$ et $\eta_{max}(\beta, M)$, l'unique maximum de cette même fonction. De plus, le taux de compression de sortie doit vérifier la condition (6.50) que nous rappelons ici :

$$-\alpha^2(Y_+Y_-)_L(\beta^2, M^2) - \mathcal{G}(\eta_R(\alpha^2, \beta^2, M^2)) = \frac{B(0)}{C_B} > 0. \quad (6.118)$$

Commençons par fixer (α, β, M) de manière à ne pas avoir d'accident de surcompression pour l'état de sortie (on abandonne alors dans les notations toute dépendance par rapport à ces nombres réduits). Ceci peut être fait grâce à la figure (4.5) pour $\gamma = 1.4$ (voir le paragraphe (6.3.2)). Dès lors, la manière la plus simple de respecter la condition (6.118), et l'encadrement (6.117), consiste à discrétiser η_R de η_0 à η_{max} , et à évaluer $B(0)$. Dès que celui-ci est négatif, on a parcouru toute la plage de η admissible et on a atteint, soit η_{fin} qui correspond au lieu de l'intersection $\mathcal{G}(\eta_R) = -\alpha^2(Y_+Y_-)_L$ conformément à la figure (6.4) (si ce lieu existe), soit η_{max} .

Pour chacun des taux de compression de sortie estimé $\eta_R^{es} \in [\eta_0, \eta_{fin}]$ (ou $\eta_R \in [\eta_0, \eta_{max}]$, si le lieu η_{fin} de l'intersection $\mathcal{G}(\eta_R) = -\alpha^2(Y_+Y_-)_L$ n'existe pas), on intègre le sous-système réécrit en variables (z_+, z_-) :

$$\begin{cases} d_H z_- = -z_+, \\ d_H z_- = -G(H, z_+, z_-)z_+ - z_-, \end{cases} \quad (6.119)$$


 FIG. 6.4 – Plage de η_R admissible pour l'étape de prédiction

équipé de la donnée initiale :

$$\begin{cases} z_+(0) = 0, \\ z_-(0) = 2C \frac{\sqrt{(M_a^R)^2 - 1}}{\alpha M_a^R} \sqrt{-\alpha^2 (Y_+ Y_-)_L - \mathcal{G}(\eta_R)}, \end{cases} \quad (6.120)$$

par une méthode de Runge-Kutta à pas adaptatif du cinquième ordre décrite au chapitre (15.2) page 607 de l'ouvrage classique Numerical Recipies. Cette méthode nécessite la définition d'un critère d'arrêt correspondant à l'instant où l'on atteint la borne supérieure de l'intervalle d'intégration $H_{fin}(\eta_R^{es})$. Or, lorsque H tend vers cette borne, la fonction $G(H, z_+, z_-)$ explose par valeurs positives selon (6.94). En réalité son dénominateur, correspondant à $d_\xi \eta$, tend vers 0 comme mentionné ci-dessus, tandis que, selon la propriété (6.85), son numérateur $2(1 - h^2(\eta(H)))^2 d_\eta h(\eta(H))$ reste borné (en particulier la renormalisation permet à ce critère d'être toujours valable même pour les α petits puisque le numérateur garde une valeur raisonnable). Ainsi, pour chaque η_R^{es} estimé et admissible, on a pu évaluer un $H_{fin}(\eta_R^{es})$ de fin d'intégration dès que le numérateur est inférieur au petit paramètre ϵ_0 . Comme décrit précédemment, ce $H_{fin}(\eta_R^{es})$, lieu de l'explosion du dénominateur de $G(H, z_+, z_-)$ est différent de $H_{max}(\eta_R)$ tant que $\eta_R^{es} \neq \eta_R$. On peut donc calculer la fonction d'erreur suivante :

$$erreur = -\log \left(\left| \frac{H_{max}(\eta_R^{es}) - H_{fin}(\eta_R^{es})}{H_{max}(\eta_R)} \right| \right).$$

pour chaque $\eta_R^{es} \in [\eta_0, \eta_{fin}]$. On évalue alors le maximum de cette fonction, autrement dit le minimum de l'erreur. Ce minimum correspond à l'unique η_R solution du problème. Sur la figure (6.5), on a représenté un exemple de fonction d'erreur pour

($M = 2, \beta = 0.2, \alpha = 0.5$). Dans ce cas $\eta_R^{es} \in [\eta_0, \eta_{fin}] = [0.416176, 0.416754]$. Remarquons que η_{fin} correspond à une très bonne évaluation de fin d'intervalle d'étude pour η_R car il est très proche de η_0 . De plus, plus α est petit, plus η_R coïncide avec la première annulation de $\mathcal{G}(\eta)$ et plus η_0, η_{fin} et η_R sont rapprochés, l'intervalle d'étude devenant très petit. Sur la figure (6.5), le maximum de la fonction correspond à $\eta_R = 0.416236$. En pratique, on raffine encore davantage l'intervalle en repérant à chaque fois l'encadrement du maximum. On obtient alors le taux de compression de sortie à la précision désirée.

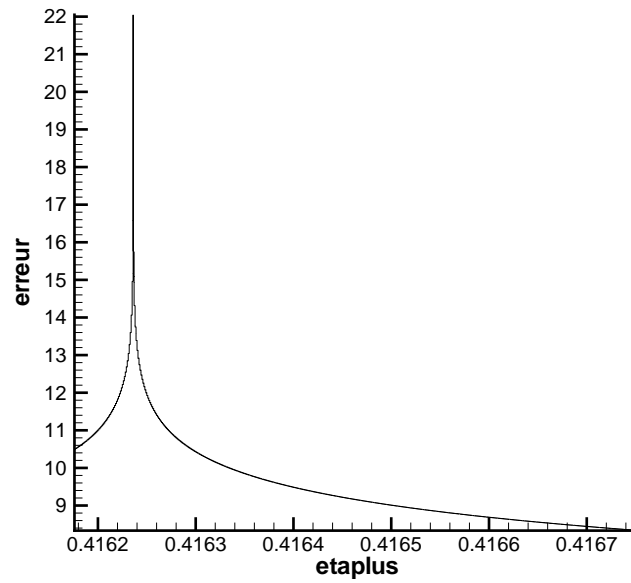


FIG. 6.5 – Fonction logarithme de l'erreur pour l'intégration itérative du système complet en anisotherme avec $(M, \beta, \alpha) = (2, 0.2, 0.5)$

Intégration de $\eta(\xi)$ et interpolation

A ce stade du calcul on connaît le taux de compression de sortie η_R ainsi que l'unique trajectoire en $(z_+, z_-)(H)$ solution du problème de Cauchy (6.110)-(6.111). On a alors accès à $(Y_+, Y_-)(H)$ par les formules suivantes :

$$\begin{cases} Y_+(H) = \frac{1}{2C} \frac{1}{(1 + h(H))F_{int}(H)} (z_+(H) + z_-(H)), \\ Y_-(H) = \frac{1}{2C} \frac{1}{(1 - h(H))F_{int}(H)} (z_+(H) - z_-(H)). \end{cases}$$

En utilisant les formules (6.90) et (6.97), on peut réécrire ces variables plus clairement :

$$\begin{cases} Y_+(H) = \frac{(1 + \lambda) e^H}{4C} (z_+(H) + z_-(H)), \\ Y_-(H) = \frac{(1 + \lambda) e^{-H}}{4C\lambda} (z_+(H) - z_-(H)), \end{cases} \quad (6.121)$$

avec :

$$\lambda = \frac{\eta_R^2 - \eta_c^2}{\eta_R^2 + \eta_c^2}.$$

Notons qu'en particulier, grâce au taux de compression de sortie, on connaît les valeurs approchées $Y_+^*(+\infty)$ et $Y_-^*(+\infty)$ données par les formules (6.51) :

$$\begin{cases} Y_+^*(+\infty) = Y_+^R = \frac{1}{\alpha} \sqrt{\frac{M_a^R - 1}{M_a^R + 1}} \sqrt{-\alpha^2(Y_+Y_-)_L - \mathcal{G}(\eta_R)}, \\ Y_-^*(+\infty) = Y_-^R = -\frac{1}{\alpha} \sqrt{\frac{M_a^R + 1}{M_a^R - 1}} \sqrt{-\alpha^2(Y_+Y_-)_L - \mathcal{G}(\eta_R)}, \end{cases}$$

formules que l'on retrouve en substituant $H = 0$ dans (6.121). On peut ainsi évaluer la fonction cinétique (voir les formules (6.58) et (6.59)) :

$$\begin{aligned} \kappa_{Et}(\alpha^2, \beta^2, M^2) &= -\frac{\alpha^2}{2} \left((Y_+Y_-)_R(\alpha^2, \beta^2, M^2) - (Y_+Y_-)_L(\beta^2, M^2) \right) \\ &= -\frac{1}{2} \mathcal{G}(\eta_R(\alpha^2, \beta^2, M^2)), \end{aligned} \quad (6.122)$$

où l'on a temporairement réexprimé les dépendances par rapport aux nombres réduits. Cependant, on aimerait obtenir aussi le profil de compression pour tout $\xi \in \mathbb{R}$ pour pouvoir l'étudier physiquement par la suite. Il s'agit donc de calculer la trajectoire en $\eta(\xi)$ et de repasser en variable ξ pour (Y_+, Y_-) . Pour cela, il suffit d'utiliser la formule (6.88) qui donne η en fonction de H pour en déduire $(Y_+(\eta), Y_-(\eta))$. On peut alors intégrer l'équation en η en fonction de ξ :

$$d_\xi \eta = \frac{\nu}{\mu} \frac{\gamma - 1}{M^2 \eta} \left(\alpha^2 ((Y_+Y_-)(\eta) - (Y_+Y_-)_L) - \mathcal{G}(\eta) \right).$$

En effet, dès que l'on a besoin dans le second membre d'évaluer $(Y_+(\eta_{curr}), Y_-(\eta_{curr}))$, où η_{curr} est le η au ξ courant de l'intégration, on l'interpole parmi les $(Y_+(\eta), Y_-(\eta))$ calculé lors de l'intégration du sous-système. Des polynômes d'ordre un ont été utilisés à cette fin. On dispose alors d'une discrétisation $\xi \rightarrow \eta(\xi)$. Il faut ensuite, pour chaque $\eta(\xi)$ calculé, restituer $H(\eta(\xi))$ grâce à la formule (6.87) qui donne H en fonction de η . Pour chacun de ces $H(\eta(\xi))$, on interpole la solution en $Y_-(\xi)$ et $Y_+(\xi)$, à partir de la solution $(Y_-(H), Y_+(H))$ calculée pour le sous-système. On obtient ainsi la solution finale $(\eta(\xi), Y_+(\xi), Y_-(\xi))$. Une dernière interpolation est nécessaire pour prendre en compte le changement de variable $\xi \rightarrow \frac{2\nu}{\mu M} \xi'$.

Variable d'état \mathbf{u}

Nous allons donner les formules permettant de récupérer la solution onde progressive exprimée en variable d'état \mathbf{u} définie par :

$$\mathbf{u} = (\rho, u, v, p, R_{11}, R_{12}, R_{22}).$$

Nous repassons ici en variables dimensionnées sans changer les notations. Ces formules se basent sur le calcul de $(\eta(\xi), Y_+(\xi), Y_-(\xi))$ et sur le respect des invariants \mathcal{I} , \mathcal{D} et \mathcal{H} :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\rho(\xi)}{\rho_L} = \frac{1}{\eta(\xi)}, \\ \frac{u(\xi) - u_L}{c_L} = M(\eta(\xi) - 1), \\ \frac{v(\xi) - v_L}{c_L} = \frac{\alpha}{2} (Y_+(\xi) + Y_-(\xi)) + \frac{\alpha\beta^2}{M}, \\ \frac{R_{11}(\xi)}{\rho_L a_L^2} = \frac{1}{\eta^3(\xi)}, \\ \frac{R_{12}(\xi)}{R_{12}^L} = \frac{1}{2\beta\eta^2(\xi)} (Y_+(\xi) - Y_-(\xi)), \\ \frac{R_{22}(\xi)}{\rho_L a_L^2} = \frac{1}{\eta(\xi)} \left((\zeta^2 - \alpha^2) + \frac{\alpha^2}{4\beta^2} (Y_+(\xi) - Y_-(\xi))^2 \right). \end{array} \right.$$

Nous rappelons que le nombre réduit ζ est défini par :

$$\zeta = \sqrt{\frac{R_{22}^L}{R_{11}^L}}.$$

Il sert à mesurer l'intensité relative de la composante R_{22}^L par rapport à la composante R_{11}^L . Ce nombre ne joue aucun rôle dynamique. Il ne sert ici qu'à obtenir les valeurs dimensionnées de la composante R_{22} . Dans l'analyse de la solution onde progressive qui suit, sa valeur sera toujours précisée.

Pour calculer la pression, rappelons que l'invariant \mathcal{H} se conserve pour l'onde progressive en anisotherme sans Ristorcelli (voir la section (6.2)) :

$$\mathcal{H} = \frac{p(\xi)\eta(\xi)}{\gamma - 1} + h_{\mathcal{H}}(\eta(\xi)) - \frac{\alpha^2}{2}(Y_+ Y_-)(\xi),$$

avec :

$$h_{\mathcal{H}}(\eta(\xi)) = \frac{\beta^2}{2} \left(\frac{1}{\eta^2(\xi)} - 1 \right) - \frac{M^2}{2} (\eta(\xi) - 1)^2 + \frac{1 + (\gamma - 3)\beta^2}{\gamma} (\eta(\xi) - 1).$$

On en déduit :

$$\begin{aligned} \frac{p(\xi)}{\rho_L c_L^2} &= (\gamma - 1) \frac{1 - \eta(\xi)}{\eta(\xi)} \left(\beta^2 - \frac{\beta^2(1 + \eta(\xi))}{2\eta^2(\xi)} + \frac{M^2}{2}(1 - \eta(\xi)) \right) \\ &+ \frac{(\gamma - 1)\alpha^2}{2\eta(\xi)} \left((Y_+ Y_-)(\xi) + \beta^2 \left(1 - \frac{\beta^2}{M^2} \right) \right) + \frac{1 - 3\beta^2}{\eta(\xi)} \left(1 - \frac{\gamma - 1}{\gamma} \eta(\xi) \right). \end{aligned}$$

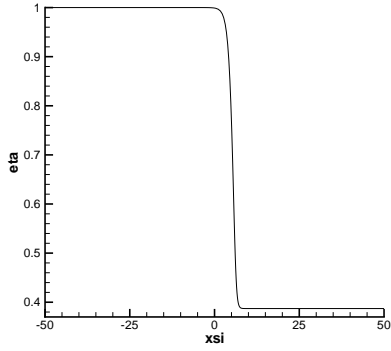
Allure de l'onde progressive

On vérifie que l'allure de l'onde progressive est physiquement acceptable. Nous le vérifions pour des valeurs des nombres adimensionnés suivantes ($M = 2, \beta = 0.1, \alpha = 0.01$). Les valeurs de α et β sont ici raisonnables. En effet la valeur de β correspond

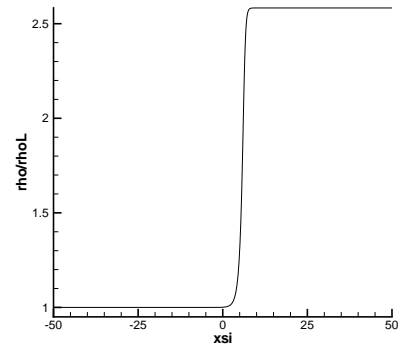
à un nombre de Mach turbulent physique (défini par $M_t = \frac{\sqrt{R_{11}^L \tau_L}}{c_L^L p}$, voir la formule (4.10) du chapitre (4) pour les notations) d'environ 0.1, et la valeur du coefficient d'anisotropie correspond à R_{12}^L cent fois plus petit que R_{11}^L . On vérifie dans ce cas précis que le taux de compression diminue bien dans le profil, autrement dit, la densité ρ augmente (figures (6.6, a et b)). La vitesse axiale u diminue, ce qui correspond au passage d'un écoulement supersonique $M > 1$ à un écoulement subsonique $M < 1$ à travers le profil de compression (figures (6.6, c et d)). Bien sûr, la pression p augmente, tout comme la pression totale de notre système $\Pi = p + R_{11}$ puisqu'il s'agit d'une compression. Cela impose naturellement au taux de turbulence axiale d'augmenter dans le profil de compression (figure (6.7, c)), ce qui est observé dans de nombreuses expériences (voir le contexte de l'étude présentée dans le chapitre 1). Concernant les variables tangentielles, la vitesse tangentielle v diminue dans le profil (figure (6.7, a)). C'est la différence principale avec les équations de Navier-Stokes instantanées pour lesquelles la vitesse tangentielle reste constante à travers le profil. Une partie de la vitesse tangentielle moyenne v se transforme en turbulence tangentielle R_{12} qui elle augmente dans le profil (figure (6.7, b)). Globalement, toutes les tensions de Reynolds augmentent (figures (6.7, b, c et d)). Durant la compression, il y a conversion de mouvement moyen en mouvement turbulent, principalement dans la direction normale à l'onde de compression comme nous allons le voir dans la suite. Sur les figures (6.7, c et d), on représente l'allure du Mach turbulent β et du coefficient d'anisotropie α . Le Mach turbulent augmente dans le profil conformément à l'augmentation du taux de turbulence axiale R_{11} . Cependant R_{11} augmente plus que R_{12} n'augmente et en conséquence le coefficient d'anisotropie diminue. On vérifie aussi l'effet du nombre de Reynolds sur le profil. Plus le nombre de Reynolds est petit, plus la diffusion du profil est importante. Cependant rappelons que nous avons effectué une remise à l'échelle (voir le début de la section (4.2.1) du chapitre 4) en $\frac{1}{Re}$, avant de calculer les ondes progressives. Ainsi, si l'on effectue un zoom en ξ , cela correspond à diminuer le nombre de Reynolds Re et on voit sur la figure (6.8, a) que le profil associé est plus diffusé. Au contraire, augmenter la plage de ξ correspond à augmenter le nombre de Reynolds et la figure (6.8, b) montre que le profil est moins diffusé.

Vecteur vitesse

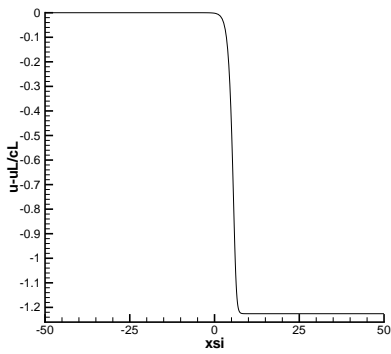
Nous représentons ici le vecteur vitesse. Pour des raisons de clarté, celui-ci se trouve, dans la représentation choisie, toujours au même point $(0, 0)$ au fur et à mesure que l'on progresse le long du profil. On représente en abscisse $\frac{u-u_L}{c_L}$ et en ordonnée $\frac{v}{c_L}$ avec $\frac{v_L}{c_L} = 1$ (cela correspond juste à un choix de représentation). Ainsi, $u - u_L$ sera toujours négatif pour pouvoir passer d'un écoulement supersonique à un écoulement subsonique. Dans un premier temps, voyons l'influence du coefficient d'anisotropie. Quand celui-ci est nul, $\frac{v}{c_L}$ reste constant à 1 et u diminue bien. En revanche, plus α augmente, plus v diminue en valeur absolue, le vecteur tourne vers la gauche et son ordonnée n'est plus égale à 1. Cependant, sur la figure (6.9, a) pour $\alpha = 1$ qui est déjà une valeur importante du coefficient d'anisotropie, la diminution n'est pas très visible. L'influence de α sur la vitesse tangentielle n'est pas très importante. L'effet du Mach relatif et du Mach turbulent est plus visible. Quand β augmente, le saut de vitesse tangentielle augmente contrairement au saut de vitesse normale qui diminue. En effet, il y a création de turbulence R_{11} et d'effets tangentiels au détriment du mouvement



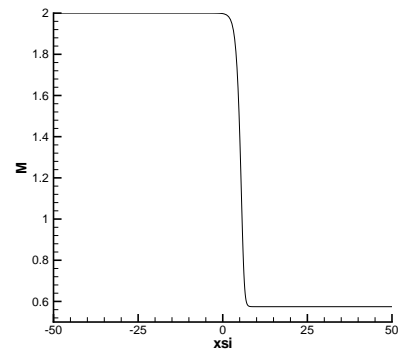
(a) $\eta(\xi)$



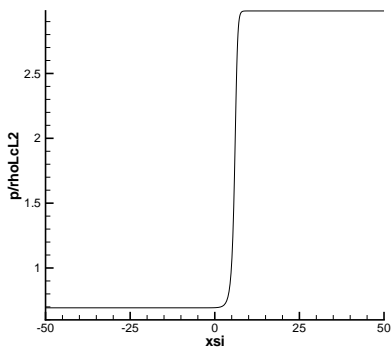
(b) $\rho(\xi)$



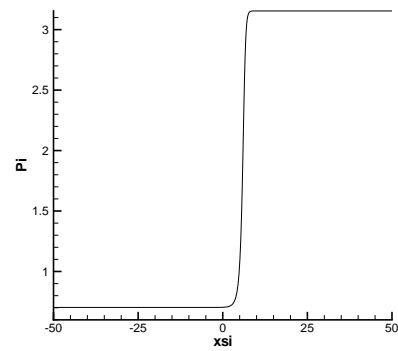
(c) $u(\xi)$



(d) $M(\xi)$

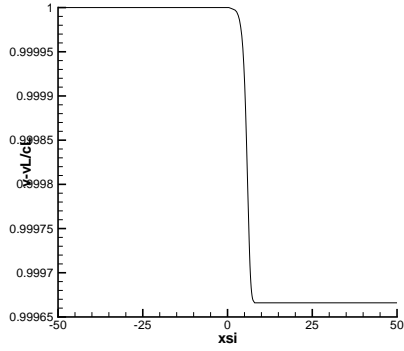


(e) $p(\xi)$

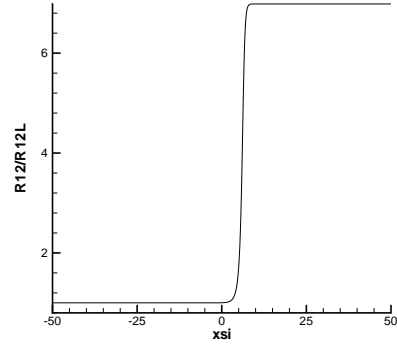


(f) $\Pi(\xi)$

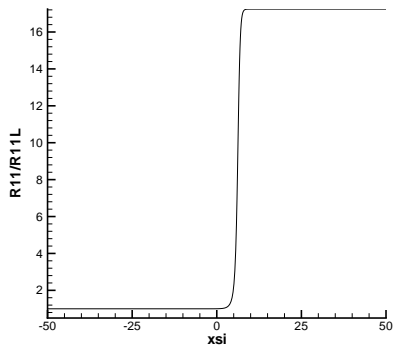
FIG. 6.6 – Allure de l'onde progressive pour différentes variables ($M = 2, \beta = 0.1, \alpha = 0.01, \zeta = 1$) (1)



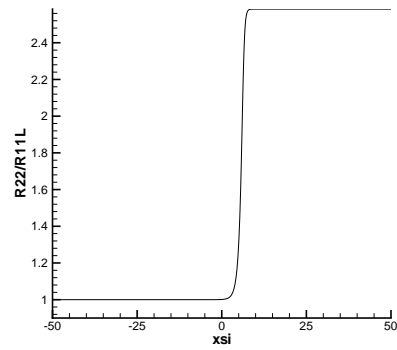
(a) $v(\xi)$



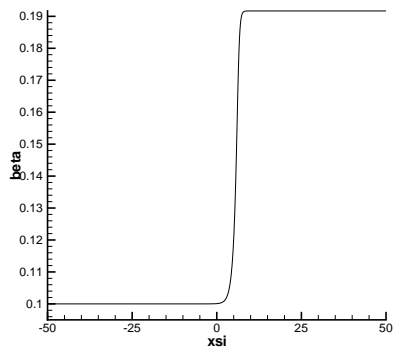
(b) $R_{12}(\xi)$



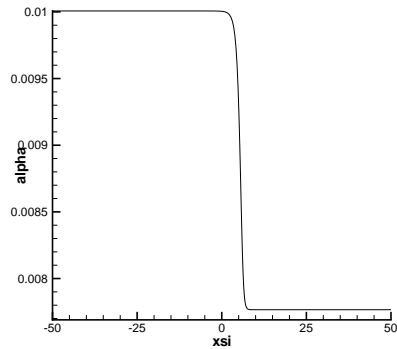
(c) $R_{11}(\xi)$



(d) $R_{22}(\xi)$



(e) $\beta(\xi)$



(f) $\alpha(\xi)$

FIG. 6.7 – Allure de l'onde progressive pour différentes variables ($M = 2, \beta = 0.1, \alpha = 0.01, \zeta = 1$)(2)

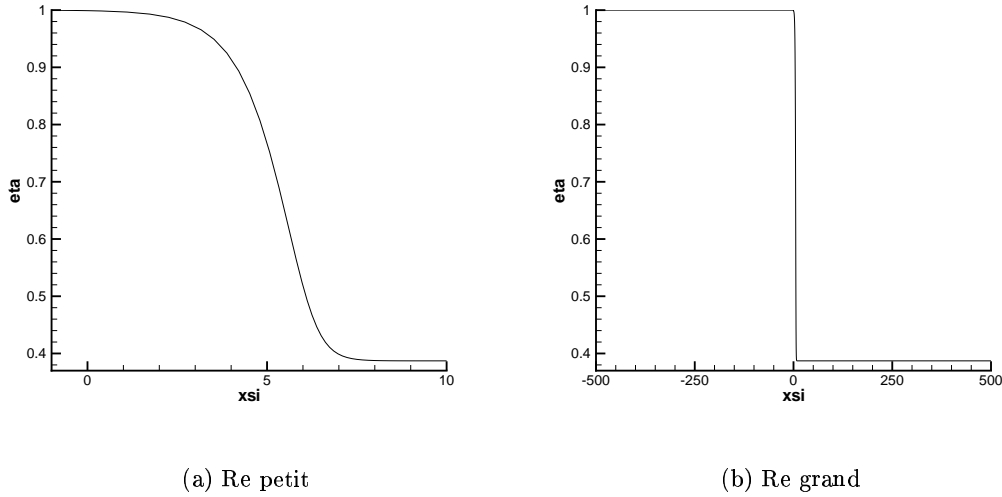


FIG. 6.8 – Effet du nombre de Reynolds sur le profil

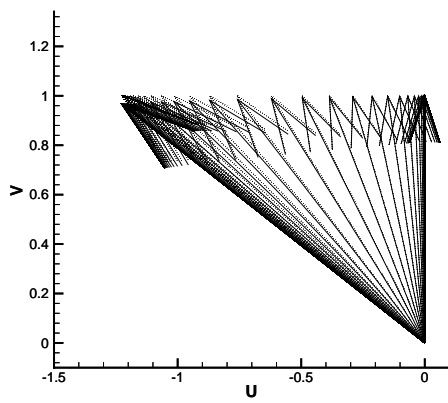
moyen normal (figure (6.9, b)). En revanche, quand le Mach relatif augmente, c'est le mouvement moyen normal qui devient plus important. Le saut de u augmente considérablement alors que le saut de v reste pratiquement constant et faible (figure (6.9, c)).

Comparaison des tensions de Reynolds

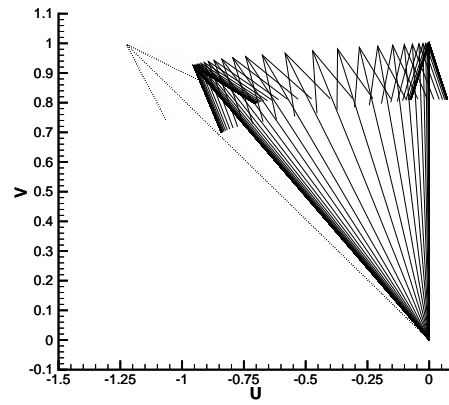
Ici, nous comparons les valeurs des tensions de Reynolds entre elles. La composante R_{12} est ramenée à R_{11}^L , si bien que si $\alpha = 1$, et si $\zeta = 1$, toutes les composantes partent de 1 en $-\infty$. Nous prenons $\zeta = 1$ dans toutes les expériences suivantes. Dans un premier temps, voyons quelle est l'influence du coefficient d'anisotropie. Lorsque celui-ci est petit $\alpha = 0.001$ ou $\alpha = 0.01$, la composante R_{12} est pratiquement nulle tout le long du profil par rapport aux deux autres composantes (figures (6.10, a et b)). Dès que α augmente, cette composante peut devenir comparable voire dépasser R_{22} (figures (6.10, c et d)). Remarquons cependant que le coefficient d'anisotropie n'a pratiquement aucune influence sur les états de sortie en R_{11} et R_{22} qui restent, dans ce cas précis, égaux à environ 17 et 2.2 fois leur valeur en entrée respectivement. Nous pouvons donc imposer $\alpha = 1$ pour l'étude de l'influence des deux autres paramètres de manière à avoir 1 pour toutes les composantes en entrée. L'influence du nombre de Mach turbulent n'est pas évidente : plus celui-ci est grand, plus le taux de turbulence axiale est petit en sortie (figures (6.11)). En fait, il ne faut pas oublier que l'on représente :

$$\frac{R_{11}}{R_{11}^L} = \frac{R_{11}}{\rho_L c_L^2} \frac{1}{\beta^2}.$$

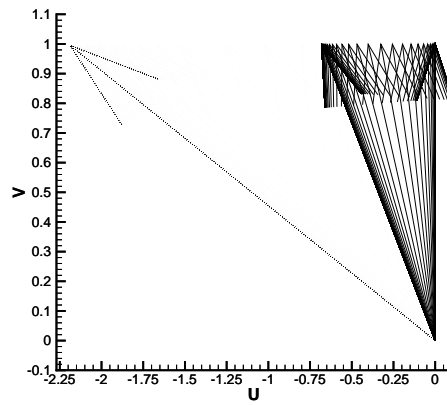
Ainsi, si β augmente le taux de turbulence axiale diminue bien, en revanche la composante R_{11} augmente. Davantage de cette composante est créée. Finalement, on remarque bien que c'est principalement R_{11} qui est créée conformément aux expériences (voir le contexte de l'étude présenté dans le chapitre 1). Cependant, cette création peut être très importante. Quand le nombre de Mach relatif augmente, le taux de turbulence



(a) $\dots \alpha = 0, \text{---} \alpha = 1$

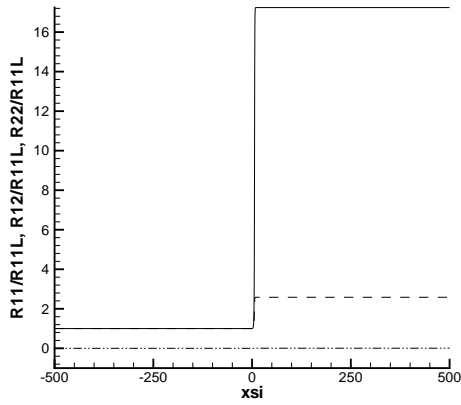


(b) $\dots \beta = 0.1, \text{---} \beta = 0.5$

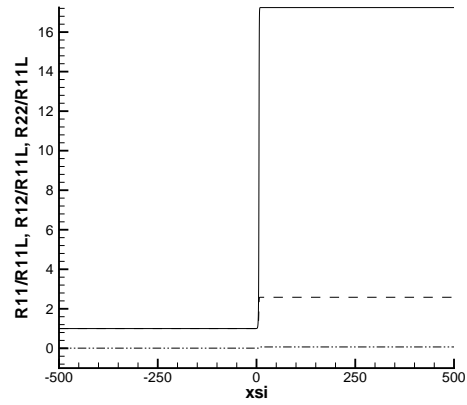


(c) $\dots M = 3, \text{---} M = 1.5$

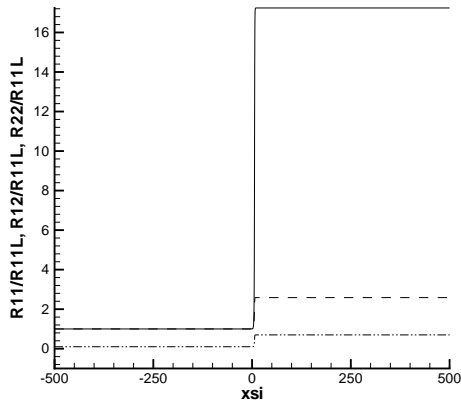
FIG. 6.9 – Vecteur vitesse ramené en $(0,0)$ lorsque ξ évolue. Sauf mention contraire ($M = 2, \beta = 0.1, \alpha = 0.1, \zeta = 1$)



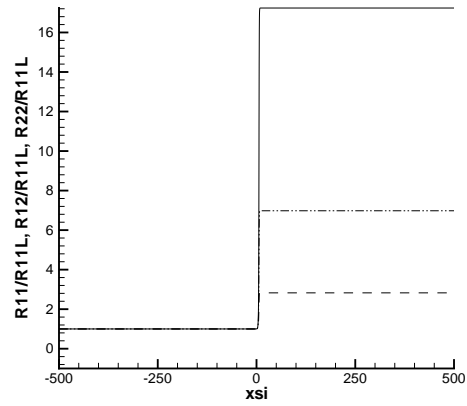
(a) $\alpha = 0.001$



(b) $\alpha = 0.01$



(c) $\alpha = 0.1$



(d) $\alpha = 1$

FIG. 6.10 – Effet du coefficient d'anisotropie sur les composantes du tenseur de Reynolds

——— R_{11} , R_{12} , R_{22}

axiale peut devenir démesurément grand (110 fois R_{11}^L pour $M = 5$). Globalement, toutes les composantes augmentent avec le Mach, mais ce sont principalement R_{12} et R_{11} qui prennent des valeurs trop grandes (figures (6.12)). Ceci vient sûrement du fait que nous avons négligé la correction de Ristorcelli.

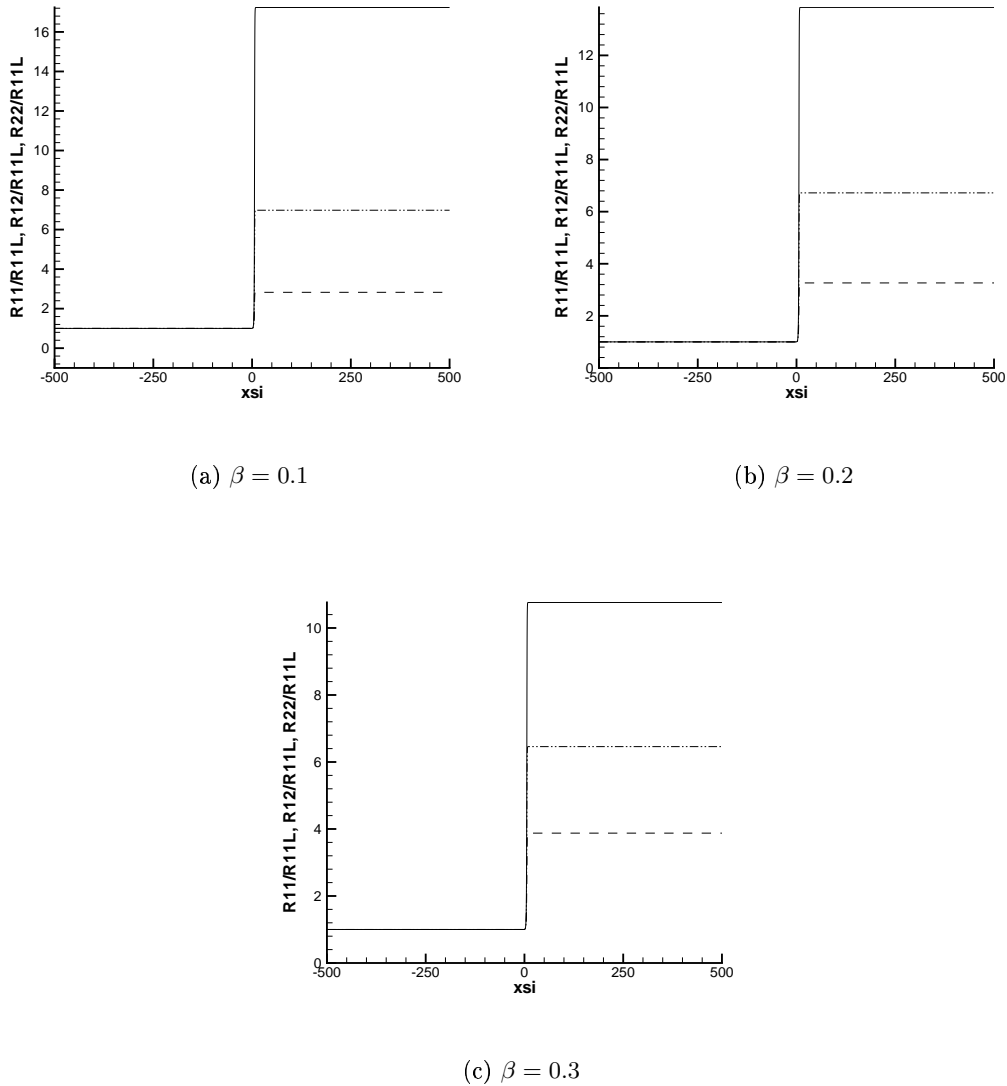
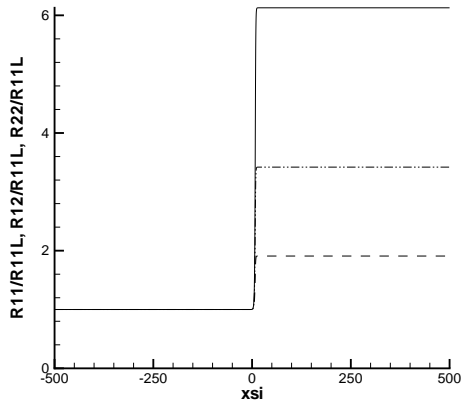


FIG. 6.11 – Effet du Mach turbulent sur les composantes du tenseur de Reynolds

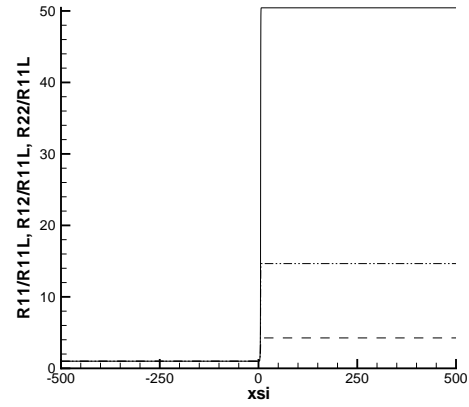
——— R_{11} , R_{12} , - - - - - R_{22}

Dépendance au tenseur diffusif

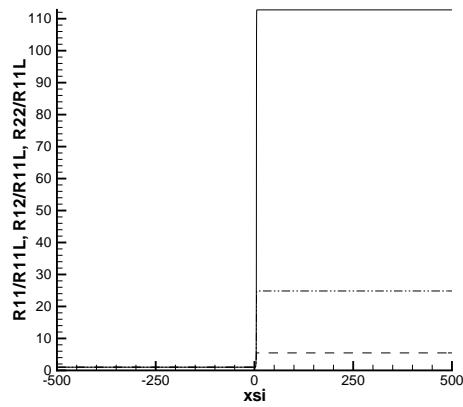
Comme nous l'avons déjà abordé dans la section (4.3.1), l'état de sortie de l'onde progressive dépend de la forme du tenseur diffusif en raison de la présence des pro-



(a) $M = 1.5$



(b) $M = 3$



(c) $M = 5$

FIG. 6.12 – Effet du Mach sur les composantes du tenseur de Reynolds

—— R_{11} , R_{12} , - - - - R_{22}

duits non conservatifs dans le système. Cette dépendance est illustrée ici sous la forme du rapport $\frac{\mu}{2\nu}$. La valeur de ce rapport est donnée par les équations. Il est égal à $\frac{2}{3}$. Cependant, à des fins d'illustration nous allons artificiellement augmenter ou diminuer la valeur de ce rapport. N'oublions pas que tout schéma numérique apporte sa viscosité numérique artificielle qui vient s'ajouter à la viscosité physique. Ainsi, faire varier ce rapport revient à considérer une certaine viscosité numérique due au schéma numérique utilisé. Sur les figures (6.13, a, b et c), on a représenté la composante R_{12} pour différentes valeurs de ce rapport. Une valeur très grande (représentée en tirets) et une valeur très petite (représentée en pointillés) pour lesquelles l'état de sortie R_{12}^R ne varie plus. On remarque que R_{12}^R dépend de la valeur du rapport $\frac{\mu}{2\nu}$, la valeur physique de $\frac{2}{3}$ étant représentée en trait plein. Cette dépendance est de l'ordre du pourcent quand $\beta = 0.1$ qui est une valeur raisonnable. En revanche quand le Mach turbulent augmente, la dépendance augmente. Elle est de 10% pour $\beta = 0.25$ et peut aller jusqu'à 50% pour $\beta = 0.57$ proche du β limite de $\frac{1}{\sqrt{3}}$. Nous avons choisi de représenter cette dépendance pour la composante R_{12} car ce sont principalement les grandeurs tangentielles R_{12} , R_{22} et v qui sont sensibles à la forme du tenseur diffusif. Il en va donc de même pour v et dans une moindre mesure pour R_{22} . Les grandeurs normales (ρ, u, p, R_{11}) ne varient pratiquement pas avec le rapport de viscosité. Pour un Mach turbulent de $\beta = 0.1$ la dépendance est effectivement quasi nulle et pour un $\beta = 0.57$ correspondant pratiquement à la valeur limite, la dépendance est de 0.01%, donc extrêmement faible (figures (6.14, a et b)).

Création d'anisotropie dans le profil

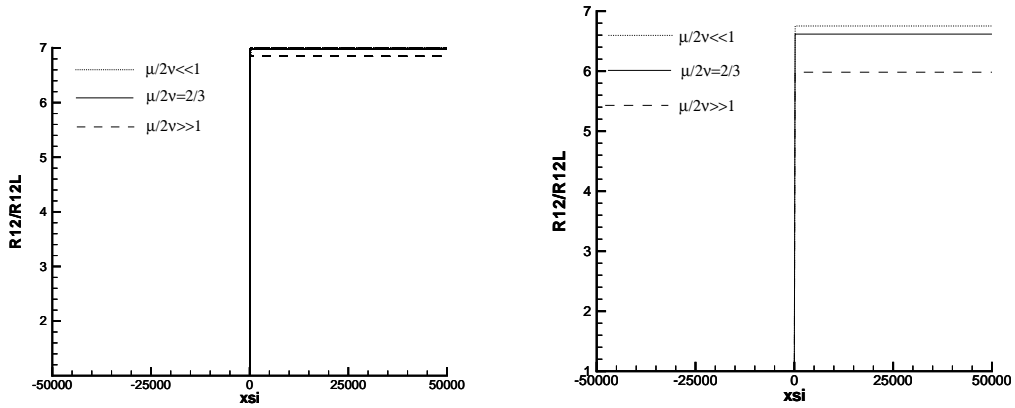
Nous donnons ici une représentation des tensions de Reynolds qui permet d'illustrer la création d'anisotropie dans le profil. Cette représentation a été proposée par Debiève, Gouin et Gaviglio [20]. Le tenseur de Reynolds est associé à une courbe fermée et tracée en coordonnées polaires de telle sorte que chaque point P de cette courbe se trouve à une distance $r = \|\overrightarrow{OP}\| = \frac{\rho \overline{u''_m u''_m}}{\rho}$, qui représente la variance de la fluctuation de vitesse dans la direction $\vec{n} = \overrightarrow{OP}$. Prenons \vec{n} tel que :

$$\vec{n} = \begin{pmatrix} \cos \theta \\ \sin \theta \end{pmatrix},$$

alors :

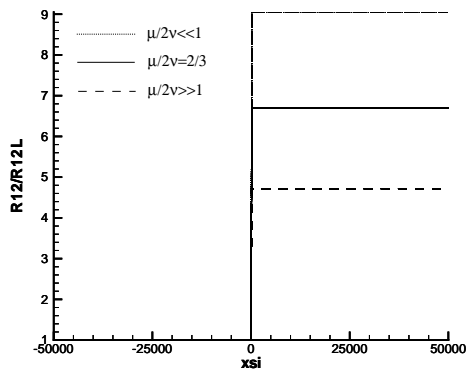
$$r(\theta) = \frac{{}^t \vec{n} \overrightarrow{\mathcal{R}} \vec{n}}{\rho} = \frac{1}{\rho} (\cos^2 \theta R_{11} + \sin^2 \theta R_{22} + 2 \cos \theta \sin \theta R_{12}).$$

Ainsi, sur l'axe des x se trouve la composante R_{11} et sur l'axe des y , la composante R_{22} . Cette représentation va donc nous permettre de représenter le degré d'anisotropie du tenseur de Reynolds et la direction principale des fluctuations. Le Mach turbulent β est pris égal à 0.1 et le Mach relatif à 2. Tout d'abord, partons d'un tenseur de Reynolds isotrope ($\alpha = 0, \zeta = 1$) et représentons cette courbe fermée le long du profil (6.15). On superpose toutes ces courbes afin de les comparer. On voit clairement que le tenseur de Reynolds devient anisotrope dans la direction normale au profil de compression, ce qui est cohérent avec les expériences (voir le contexte de l'étude présenté dans la chapitre 1). C'est principalement R_{11} qui est créé dans le profil. Ceci est aussi vrai



(a) $\beta = 0.1$

(b) $\beta = 0.25$



(c) $\beta = 0.57$

FIG. 6.13 – Dépendance de la composante R_{12} au tenseur diffusif

$$\cdots \frac{\mu}{2\nu} \ll 1, \quad \text{—} \frac{\mu}{2\nu} = \frac{2}{3}, \quad \text{---} \frac{\mu}{2\nu} \gg 1.$$

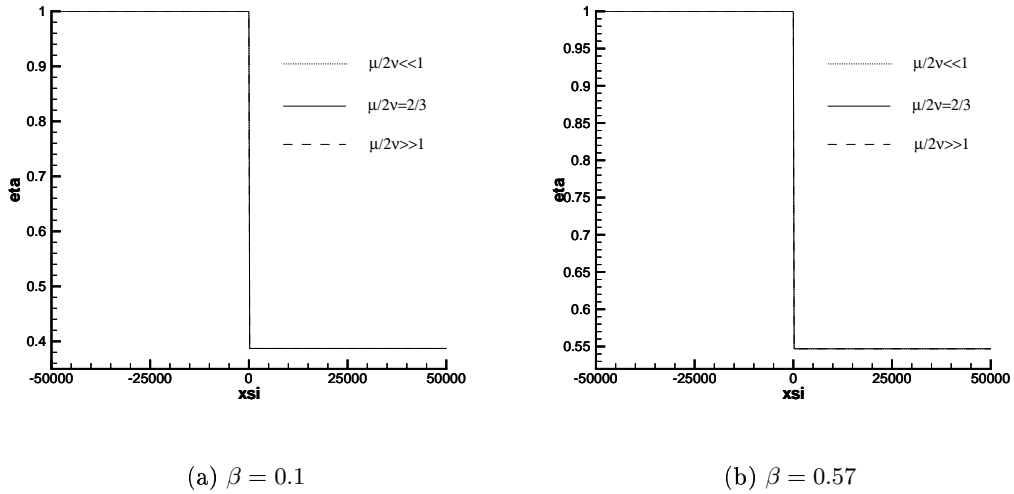


FIG. 6.14 – Dépendance du taux de compression η au tenseur diffusif

$$\cdots \frac{\mu}{2\nu} \ll 1, \quad \text{—} \frac{\mu}{2\nu} = \frac{2}{3}, \quad \text{---} \frac{\mu}{2\nu} \gg 1.$$

si le tenseur de Reynolds est anisotrope initialement ($\alpha = 0.3, \zeta = 0.5$) comme sur la figure (6.16). Remarquons que toutes les tensions de Reynolds augmentent dans le profil, que la donnée initiale soit isotrope ou non.

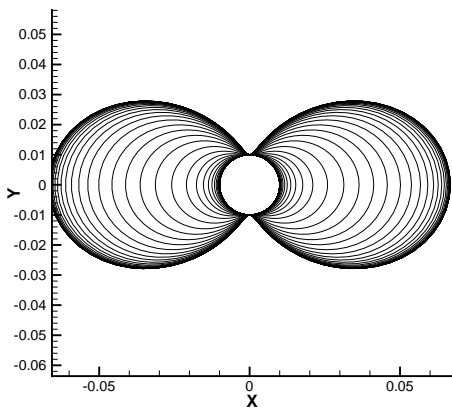


FIG. 6.15 – tenseur de départ isotrope

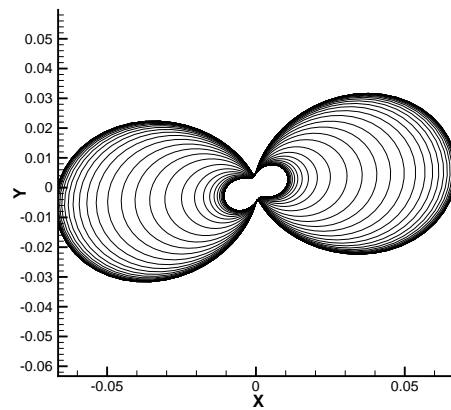


FIG. 6.16 – tenseur de départ anisotrope

Décroissance du taux de compression en fonction du Mach relatif

Une propriété très importante pour pouvoir démontrer la stabilité structurelle du choc droit et l'existence et l'unicité du problème du Riemann est la stricte décroissance du taux de compression en fonction du Mach relatif. On vérifie donc numériquement

la propriété suivante :

$$M^2 \rightarrow \eta_R(\alpha^2, \beta^2, M^2) \text{ est strictement décroissante pour tout } M \in [1, 10], \quad (6.123)$$

à condition que $\alpha \in [0, 1]$ et β soit choisi selon la figure ((4.5), b) pour $\gamma = 1.4$, de manière à garantir la propriété (6.30) : $M_a(+\infty) > 1$. Nous vérifions cette propriété pour plusieurs valeurs de α et de β sur la figure (6.17).

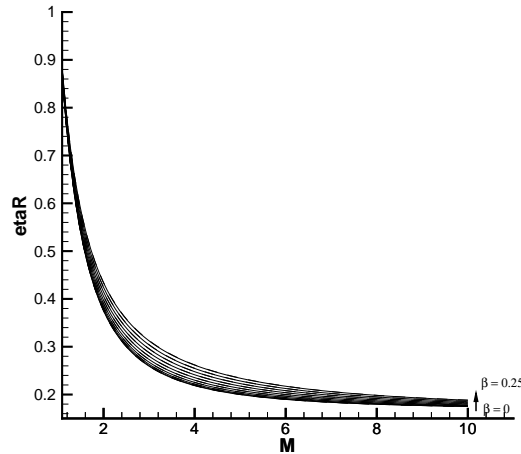


FIG. 6.17 – Stricte décroissance du taux de compression en fonction du Mach relatif

Forme de la fonction cinétique κ_{E_t}

Sur les figures ((6.18) a et b) est représentée la fonction cinétique κ_{E_t} associée à ρE_t en fonction du nombre de Mach et pour β variant entre 0.05 et 0.5.

Lorsque la fonction cinétique est discontinue cela signifie que l'accident de surcompression est survenu pour de tels nombres de Mach relatifs. L'intégration du système d'EDO (6.15) telle que présentée dans la section (6.5.1) n'est alors plus possible puisque celle-ci est basée sur l'hypothèse essentielle (6.30) de non surcompressivité de l'état de sortie. Dans ce cas, la valeur de la fonction cinétique est placée par convention à -1 . On remarque, contrairement au cadre isotherme, que l'on peut redevenir compressif pour des Mach relatifs plus élevés. Cependant, si l'on suppose une augmentation continue du nombre de Mach relatif, il n'est pas physiquement acceptable d'aller plus loin que la première apparition de l'accident de surcompression puisque l'on pressent alors qu'il existe une infinité d'état de sortie \mathbf{u}_R ($\dim(W^s(\mathbf{u}_R)) = 2$ dans ce cas, voir le paragraphe (6.3.1)). Ce phénomène intervient car dans le plan (M, β) la courbe séparant la zone physique du domaine surcompressif (figure (4.5), b) n'est pas une fonction. Celle-ci est multivaluée pour β fixé quand l'accident de surcompression entre en jeu. De plus, on remarque que le calcul n'est pas très bon quand on s'approche de l'accident de Lax lorsque β augmente. Cela vient du fait que le solveur n'est plus performant. Rappelons en effet que celui-ci est basé sur l'hypothèse (6.30) *i.e.* $M_a(+\infty) > 1$, garantissant la non surcompressivité de l'état de sortie (voir la section

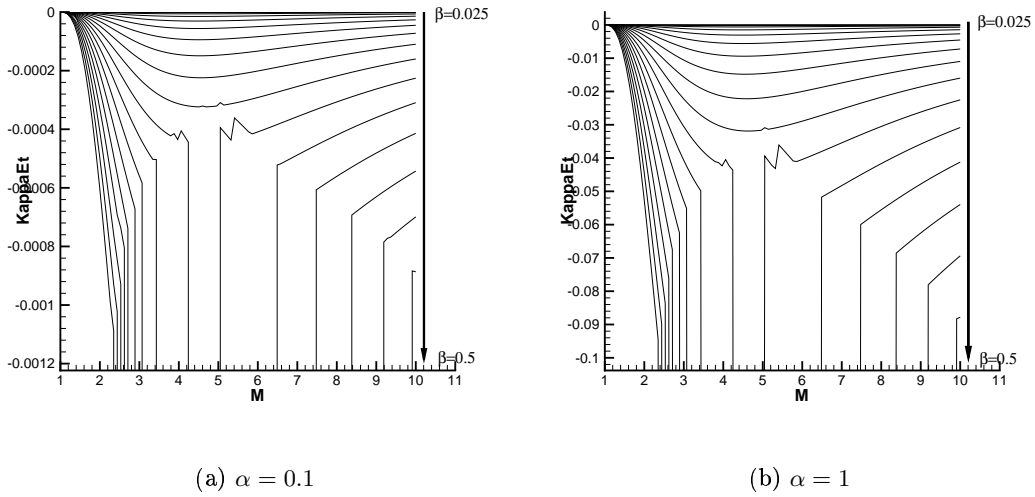


FIG. 6.18 – Forme de la fonction cinétique κ_{E_t} en fonction du Mach pour différents β et différents α

(6.5.1). La fonction cinétique est adimensionnée par mc_L^2 qui peut prendre des valeurs très grandes. Ainsi, contrairement au cadre isotherme, la fonction cinétique κ_{E_t} peut prendre des valeurs importantes surtout quand α et β augmentent. Remarquons enfin que la fonction cinétique est bien négative comme cela était attendu.

Chapitre 7

Le problème de Riemann dans le cadre anisotherme

Ce chapitre est consacré à l'étude de l'existence et de l'unicité des solutions du problème de Riemann pour le modèle anisotherme. Cette étude est rendue possible par l'analyse onde progressive du chapitre précédent, puisque celle-ci a permis le calcul de la fonction cinétique conduisant à un ensemble complet de relations de Rankine-Hugoniot généralisées. L'analyse du problème de Riemann dans le cadre isotherme est menée dans la prépublication [4] jointe à la thèse en annexe A. Ici, les états \mathbf{u}_G et \mathbf{u}_D composant la donnée initiale seront toujours supposés ne pas mener à l'accident de surcompression dans les ondes extrêmes éventuelles. Nous renvoyons le lecteur aux travaux de Hérard *et al* [13], [9] et aux travaux de Coquel, Chalons [16] pour l'étude de l'existence et l'unicité des solutions du problème de Riemann pour divers modèles de turbulence. Nous montrons ici que la composante R_{12} du tenseur de Reynolds garde le même signe que la donnée initiale dans les chocs mais aussi les détenteurs associées aux ondes extrêmes. Cette propriété sera essentielle pour le traitement numérique du modèle anisotherme proposé dans l'acte de congrès en annexe B.

7.1 Solutions chocs

Pour fixer les idées, la variable \mathbf{u} est dans cette section une variable non conservative définie par exemple par :

$$\mathbf{u} = (\rho, \rho u, \rho v, \rho E, \rho \mathcal{I}, \rho \mathcal{W}, R_{12}).$$

De plus, toujours dans cette section, les états gauche et droit de l'onde considérée seront notés \mathbf{u}_L et \mathbf{u}_R pour ne pas confondre avec la donnée initiale du problème de Riemann.

Tant que le phénomène de surcompression n'apparaît pas, la construction numérique de la section (6.5) nous a montré que les solutions choc associées respectivement à la première et à la dernière famille d'onde, sont définies de manière unique. En privilégiant, sans restriction, la première famille, pour tout état $\mathbf{u}_L \in \Omega_{\mathbf{u}}^+ = \{\mathbf{u} \in \Omega_{\mathbf{u}} \mid R_{11} > 0\}$ avec $\Omega_{\mathbf{u}}$ défini par (3.7), il faut considérer une vitesse de propagation σ telle que $M = \frac{u_L - \sigma}{c_L} > 1$ de telle sorte que la solution onde progressive $\mathbf{u}(\xi)$ avec $\epsilon = \frac{1}{Re} = 1$, qui connecte un état de sortie dans $\Omega_{\mathbf{u}}^+$, est unique. Nous

rappelons ici un résultat important qui assure que soit $R_{12}^L R_{12}(\xi) > 0$, soit $R_{12}(\xi) = 0$ pour tout ξ si $R_{12}^L = 0$ (voir le lemme (6.4.1) du chapitre 6) :

Proposition 7.1.1. *Soient \mathbf{u}_L fixé et σ une vitesse prescrite selon la condition (4.55), i.e. $M = \frac{u_L - \sigma}{c_L} > 1$, alors l'unique solution onde progressive de vitesse σ issue de \mathbf{u}_L et atteignant un état \mathbf{u}_R dans le futur est telle que :*

$$\begin{cases} \text{Si } R_{12}^L \neq 0, & \text{alors } R_{12}(\xi) R_{12}^L > 0, \forall \xi \in \mathbb{R}, \text{ avec } R_{12}^L R_{12}^R > 0. \\ \text{Si } R_{12}^L = 0, & \text{alors } R_{12}(\xi) = 0, \forall \xi \in \mathbb{R}. \end{cases} \quad (7.1)$$

Ainsi, la famille onde progressive renormalisée $\{\mathbf{u}^\epsilon\}_{\epsilon > 0}$ nous permet de définir dans la limite $\epsilon \rightarrow 0^+$ un 1-choc de Lax du système limite :

$$\mathbf{u}(x, t) = \mathbf{u}_L + (\mathbf{u}_R - \mathbf{u}_L)H(x - \sigma t), \quad (7.2)$$

telle que $R_{12}^L R_{12}^R > 0$ dès que $R_{12}^L \neq 0$ ou telle que $R_{12}^R = 0$ si $R_{12}^L = 0$. Puisqu'un état $\mathbf{u}_L \in \Omega_{\mathbf{u}}^+$ conduit à un état $\mathbf{u}_R \in \Omega_{\mathbf{u}}^+$, l'énergie tangentielle $\{\rho E_t\}(\mathbf{u}_R)$ dans (3.30) est bien définie et le changement de variable suivant est admissible pour les chocs (mais pas dans le cas général) :

$$\mathbf{u} = (\rho, \rho u, \rho v, \rho E, \rho \mathcal{I}, \rho \mathcal{W}, R_{12}) \rightarrow \mathbf{v} = (\rho, \rho u, \rho v, \rho E, \rho \mathcal{I}, \rho \mathcal{W}, \rho E_t). \quad (7.3)$$

La solution onde progressive est alors solution du système (6.55) exprimé dans la nouvelle variable $\mathbf{v}(\mathbf{u})$. Après une intégration numérique sur \mathbb{R} tout entier de ces équations, nous en déduisons un ensemble complet de relations de saut généralisées conformément au chapitre 2. Ces relations de saut sont données dans la proposition (6.4.2), que nous rappelons ici dans une version dimensionnée :

Proposition 7.1.2. *Pour tout état $\mathbf{u}_L \in \Omega_{\mathbf{u}}^+$ et toute vitesse de propagation σ telle que $M > 1$, on définit la fonction cinétique suivante :*

$$\mathcal{C}_{E_t}(\mathbf{u}_L, \sigma) = - \int_{\mathbb{R}} \nu \{d_\xi v\}^2 (\mathbf{u}(\xi, \mathbf{u}_L, \sigma)) d\xi,$$

où $\mathbf{u}(\cdot, \mathbf{u}_L, \sigma)$ est la solution onde progressive de vitesse σ issue de \mathbf{u}_L . Alors l'état $\mathbf{u}_R \in \Omega_{\mathbf{u}}^+$ de la solution 1-choc (7.2) tel que :

$$u_R - c(\mathbf{u}_R) < \sigma < u_L - c(\mathbf{u}_L), \quad \sigma < u_R - a(\mathbf{u}_R),$$

est l'unique solution des conditions de Rankine-Hugoniot généralisées suivantes :

$$\begin{cases} -\sigma[\rho] + [\rho u] = 0, \\ -\sigma[\rho u] + [\rho u^2 + p + R_{11}] = 0, \\ -\sigma[\rho E] + [(\rho E + p + R_{11})u + R_{12}v] = 0, \\ -\sigma[\rho \mathcal{I}] + [\rho \mathcal{I}u] = 0, \\ -\sigma[\rho v] + [\rho uv + R_{12}] = 0, \\ -\sigma[\rho \mathcal{W}] + [\rho \mathcal{W}u] = 0, \\ -\sigma[\rho E_t] + [\rho E_t u + R_{12}v] = \mathcal{C}_{E_t}(\mathbf{u}_L, \sigma), \end{cases} \quad (7.4)$$

où $R_{12}^L R_{12}^R > 0$ si $R_{12}^L \neq 0$ et $R_{12}^R = 0$ sinon.

La proposition précédente peut être adaptée facilement pour caractériser un 7-choc. Pour les relations de Rankine-Hugoniot, il faut échanger le rôle de L et R dans les sauts et échanger le signe de toutes les vitesses. La fonction cinétique dépendra de l'état droit de départ $\mathcal{C}_{E_t}(\mathbf{u}_R, \sigma)$ et les conditions de Lax deviennent :

$$u_R + c(\mathbf{u}_R) < \sigma < u_L + c(\mathbf{u}_L), \quad \sigma > u_L + a(\mathbf{u}_L).$$

On obtient les relations de Rankine-Hugoniot généralisées grâce à la 7-onde progressive. Rappelons que l'on a le même système d'EDO à résoudre pour une 1-onde ou une 7-onde progressive, où les rôles de L et R ont été échangés. Pour passer du système d'EDO, 1-onde au système d'EDO 7-onde, il suffit de changer ξ en $-\xi$ de manière à intégrer de $+\infty$ vers $-\infty$ et donc de changer le signe de toutes les vitesses (m, u, v, \dots) en échangeant le rôle de L et R . La 7-onde progressive possède une vitesse σ telle que $M = \frac{u_R - \sigma}{c_R} < -1$.

La famille de 1-choc de Lax que nous venons de caractériser par la proposition (7.1.2) doit obéir à la propriété de monotonie suivante concernant le taux de compression :

$$\frac{\partial \eta_R}{\partial M}(M, \beta, \alpha) < 0, \quad M > 1, \beta \in \left[0, \frac{1}{\sqrt{3}}\right], M_a > 1. \quad (7.5)$$

Nous avons vérifié numériquement cette propriété dans la section (6.5.3) du chapitre 6. Nous redonnons en (7.1), la figure obtenue dans cette section.

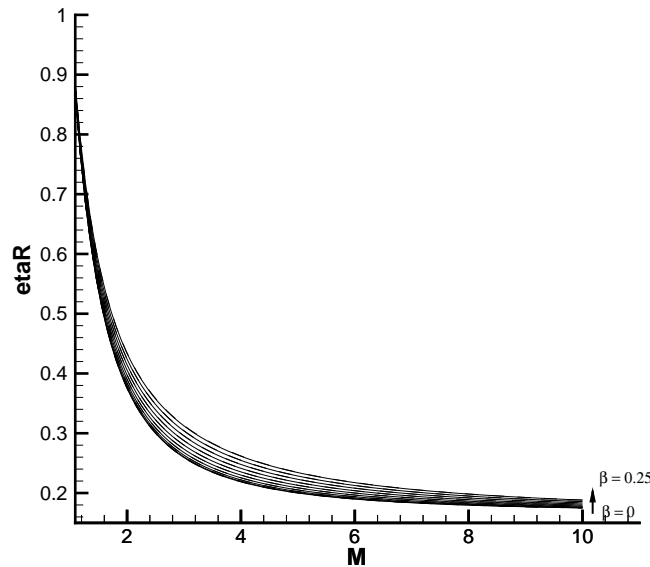


FIG. 7.1 – Stricte décroissance du taux de compression en fonction du Mach relatif

Cette propriété est essentielle pour démontrer l'unicité du problème de Riemann. En effet, comme nous le verrons plus loin, les courbes d'onde peuvent devenir multi-valuées et la solution du problème de Riemann peut ne plus être unique (voir la figure (7.5)).

7.2 Le problème de Riemann

Dans cette partie, nous nous intéressons au problème de Riemann pour le système du premier ordre extrait de (3.1) avec énergie (cadre anisotherme). Pour le cas isotherme avec correction de Ristorcelli, nous renvoyons à la prépublication [4] donnée en annexe A. En effet, la stratégie est exactement la même, si ce n'est qu'en isotherme le vide ne peut jamais apparaître à cause de la contribution isotherme de la pression. De plus, si l'échelle de temps de Ristorcelli est choisie suffisamment grande, l'accident de surcompression peut toujours être évité. Ici, la correction de Ristorcelli n'étant pas prise en compte pour des raisons de complexité trop importante, l'accident de surcompression peut apparaître si le Mach turbulent β est trop grand. Nous supposons donc que les profils ne sont jamais surcompressifs en choisissant une gamme de paramètres (M, β, α) adaptée selon la figure (4.5, b). En particulier, il faudrait trouver les conditions sur $(\mathbf{u}_G, \mathbf{u}_D)$ et donc sur $(M_{G,D}, \beta_{G,D}, \alpha_{G,D})$ pour que les ondes progressives associées ne soient pas surcompressives. Cela n'a pas été fait dans le cadre de ce mémoire. Nous supposons donc l'hypothèse suivante essentielle à tous les raisonnements qui suivent :

Hypothèse 7.2.1. *La donnée initiale $(\mathbf{u}_G, \mathbf{u}_D)$ pour le problème de Riemann est telle que les solutions choc associées aux ondes extrêmes ne deviennent jamais surcompressives.*

Nous allons prouver sous cette condition, l'existence et l'unicité du problème de Riemann pour toutes variables d'état \mathbf{u}_G et \mathbf{u}_D dans $\Omega_{\mathbf{u}}^+ = \{\mathbf{u} \in \Omega_{\mathbf{u}} \mid R_{11} > 0\}$ avec $\Omega_{\mathbf{u}}$ défini par (3.7). L'unicité est ici assurée par la propriété essentielle de la monotonie du taux de compression avec le nombre de Mach M que nous avons vérifié numériquement dans la section (6.5.3) du chapitre 6 (voir figure (7.1)). Nous supposons de plus l'absence de vide qui n'est pas assurée ici contrairement au cas isotherme. Dans un premier temps, rappelons que selon la proposition (3.2.1) concernant l'hyperbolicité du système, la structure en onde est composée d'au moins six états constants séparés par cinq ondes distinctes (figure (7.2)). Rappelons que selon le lemme (3.3.1), seules les

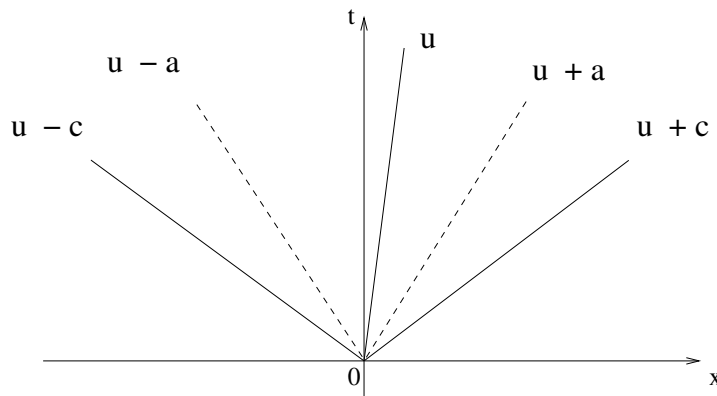


FIG. 7.2 – Structure en ondes

valeurs propres λ_1 et λ_7 sont associées à des champs vraiment non linéaires, toutes les

autres valeurs propres étant associées à des champs linéairement dégénérés. De plus, la proposition (3.3.1) nous assure aussi que toute coalescence des ondes 2 et 6 avec les ondes extrêmes vraiment non linéaires est interdite. Toutes les ondes intermédiaires linéairement dégénérées coïncident avec des discontinuités solutions du système non conservatif formel :

$$\partial_t \mathbf{u} + \mathcal{A}(\mathbf{u}) \partial_x \mathbf{u} = 0, \quad x \in \mathbb{R}, \quad t > 0.$$

où $\mathcal{A}(\mathbf{u})$ n'est pas une matrice jacobienne. Les discussions de la section (3.5) nous assure qu'il n'y a aucune ambiguïté à la traversée des discontinuités associées aux 2 et 6-champs. Seules les discontinuités associées aux ondes 3, 4, 5 sont des discontinuités de contact au sens physique, c'est-à-dire sans traversée de matière. Il peut y avoir a priori coalescence des ces ondes de contact. Cependant, nous avons choisi R_{11}^G dans $\Omega_{\mathbf{u}}^+$. Or, $\mathcal{I} = \frac{R_{11} \tau^3}{R_{11}^G \tau_G^3}$ est constant (égal à un) à la traversée d'une 1-onde de choc. Comme ρ est fini, on en déduit que le taux de turbulence de sortie est strictement positif. On raisonne de même pour $R_{11}^D \in \Omega_{\mathbf{u}}^+$ et une 7-onde de choc. En conséquence, on ne peut avoir coalescence des ondes tangentielles LD avec les ondes de contact. Les invariants de Riemann LD sont donnés par le lemme (3.5.1). Nous les rappelons ici :

$$I_R^{3,4,5} = \{u, R_{12}, v, p + R_{11}\}, \quad (7.6)$$

$$I_R^2 = \left\{ u, R_{11}, \rho, v + \frac{R_{12}}{\sqrt{\rho R_{11}}}, R_{11} R_{22} - R_{12}^2, p \right\}, \quad (7.7)$$

$$I_R^6 = \left\{ u, R_{11}, \rho, v - \frac{R_{12}}{\sqrt{\rho R_{11}}}, R_{11} R_{22} - R_{12}^2, p \right\}. \quad (7.8)$$

Les chocs admissibles des ondes extrêmes sont caractérisés par la proposition (7.1.2). Les invariants de Riemann associés aux ondes extrêmes vraiment non linéaires (VNL) sont donnés par le lemme suivant (voir Uhlmann [66] ou Hérard *et al* [13], [9]) :

Lemme 7.2.2 (Invariants de Riemann VNL). *Les quantités suivantes sont conservées pour des ondes simples associées aux champs extrêmes :*

$$I_R^1 = \left\{ s, \mathcal{I}, u + \int_0^\rho \frac{c}{\rho'} d\rho', v + \int_0^\rho \frac{2cR_{12}}{c^2 - a^2} \frac{d\rho'}{\rho'^2}, R_{12} \exp \left(-2 \int_0^\rho \frac{c^2}{c^2 - a^2} \frac{d\rho'}{\rho'} \right), \mathcal{D} \right\}, \quad (7.9)$$

$$I_R^7 = \left\{ s, \mathcal{I}, u - \int_0^\rho \frac{c}{\rho'} d\rho', v - \int_0^\rho \frac{2cR_{12}}{c^2 - a^2} \frac{d\rho'}{\rho'^2}, R_{12} \exp \left(-2 \int_0^\rho \frac{c^2}{c^2 - a^2} \frac{d\rho'}{\rho'} \right), \mathcal{D} \right\}. \quad (7.10)$$

Finalement, le problème de Riemann revient à trouver les quatre états constants séparés par trois ondes distinctes (voir la figure 7.3) :

$$\mathbf{u}_G \xrightarrow{1\text{-onde}} \mathbf{u}_1 \xleftrightarrow{2\text{-onde}} \mathbf{u}_2 \xleftrightarrow{3,4,5\text{-onde}} \mathbf{u}_3 \xleftrightarrow{6\text{-onde}} \mathbf{u}_4 \xleftarrow{7\text{-onde}} \mathbf{u}_D. \quad (7.11)$$

Le sens des flèches pour les ondes extrêmes sur le schéma (7.11) est important. Le sens de propagation de l'onde est en effet essentiel pour pouvoir déterminer les chocs ou les détente admissibles comme nous le verrons plus loin. Pour les ondes intermédiaires, le sens n'a aucune importance car il n'y a pas de condition d'entropie

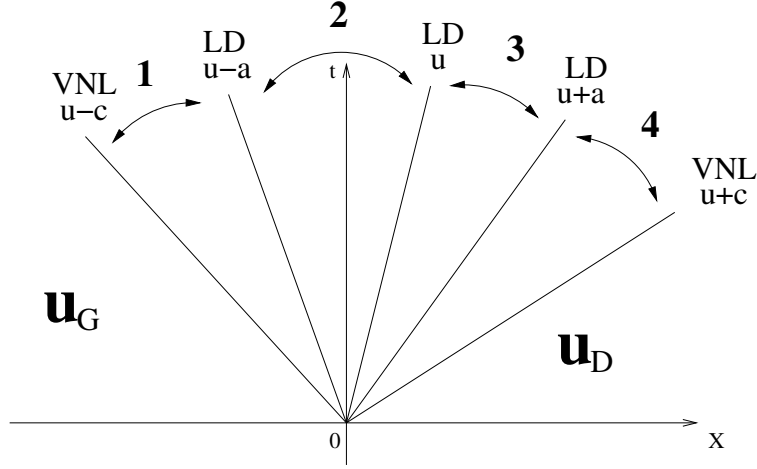


FIG. 7.3 – Le problème de Riemann complet

à respecter pour de telles ondes LD. On définit une 1-onde, comme l'ensemble des états \mathbf{u} qui connectent à droite \mathbf{u}_G par un 1-choc ou une 1-détente :

$$\mathcal{C}_1(\mathbf{u}_G) = \left\{ \mathbf{u} \in \Omega_{\mathbf{u}}^+, \mathbf{u}_G \xrightarrow{1\text{-onde}} \mathbf{u} \right\}, \quad (7.12)$$

et une 7-onde comme l'ensemble des états \mathbf{u} qui connectent à gauche \mathbf{u}_D par un 7-choc ou une 7-détente :

$$\mathcal{C}_7(\mathbf{u}_D) = \left\{ \mathbf{u} \in \Omega_{\mathbf{u}}^+, \mathbf{u} \xleftarrow{7\text{-onde}} \mathbf{u}_D \right\}. \quad (7.13)$$

Il est alors intéressant de se demander si l'on ne peut pas ramener ce problème de \mathbb{R}^7 vers un espace plus petit. Les invariants de Riemann LD nous donnent une première réponse. En effet, à la traversée des discontinuités associées aux champs LD tangentiels, les quantités (ρ, u, p, R_{11}) sont conservées. Cette affirmation est évidente si l'on regarde les invariants I_R^2, I_R^6 (respectivement donnés en (7.7) et (7.8)). Nous pouvons donc projeter les courbes d'onde dans le sous-espace de $\Omega_{\mathbf{u}}^+$ défini par :

$$(\Omega_{\mathbf{u}}^+)_1 = \{ \mathbf{u} \in \Omega_{\mathbf{u}}^+ \mid \rho > 0, u \in \mathbb{R}, p > 0, R_{11} > 0 \}.$$

Dans ce sous-espace, il s'agit d'étudier les intersections des 3 ondes réduites connectant 4 états constants :

$$\mathbf{v}_G \xrightarrow{1\text{-onde}} \mathbf{v}_2 \xleftrightarrow{3,4,5\text{-ondes}} \mathbf{v}_4 \xleftarrow{7\text{-onde}} \mathbf{v}_D.$$

Ainsi, le problème d'intersection des courbes d'ondes précédent possède la même structure que le problème de Riemann de la dynamique des gaz classiques. Il s'agit de trouver quatre états constants séparés par trois ondes associées à deux ondes extrêmes vraiment non linéaires et à une discontinuité de contact se propageant entre celles-ci. De plus, les invariants de Riemann $I_R^{3,4,5}$ en (7.6) nous indiquent que le couple $(u, \Pi = p + R_{11})$ est constant à travers une telle discontinuité. La discontinuité de

contact se propage donc à la vitesse constante u^* et à sa traversée la pression totale $\Pi^* = p^* + R_{11}^*$ est constante. Ceci suggère donc de projeter les courbes d'ondes dans le plan (Π, u) de manière à y étudier leur intersection éventuelle. La monotonie éventuelle de ces courbes d'onde est entièrement prescrite par la stricte décroissance du taux de compression de sortie η_R avec le Mach M (voir figure (7.1)). Finalement le problème de Riemann à résoudre consiste à trouver les états I et II séparés par une discontinuité de contact à travers laquelle la vitesse et la pression totale sont constantes (figure (7.4)). Une fois calculé le couple (u^*, Π^*) par l'intersection des courbes d'onde, on obtient les

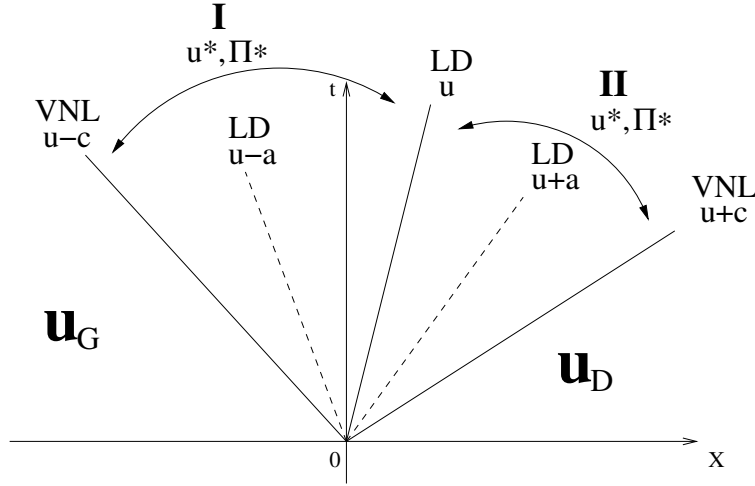


FIG. 7.4 – Le problème de Riemann réduit

états I et II grâce aux invariants de Riemann I_R^1 et I_R^7 (respectivement donnés en (7.9) et (7.10)) ou les relations de Rankine-Hugoniot généralisées (7.4) pour les variables (ρ, u, p, R_{11}) qui sont constantes à travers les ondes LD tangentiellles. Il reste ensuite à déterminer les états $(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_4)$ pour les variables (v, R_{12}) grâce aux invariants I_R^1 et I_R^7 ou les relations de Rankine-Hugoniot généralisées (7.4) qui ne dépendent que du couple (u^*, Π^*) . Finalement, on récupère les états $(\mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3)$ des variables (v, R_{12}) en résolvant un système 2×2 déduit des invariants de Riemann I_R^2 et I_R^6 , car ces quantités sont constantes à travers la discontinuité de contact. R_{22} se déduit en dernier lieu à partir de l'invariant \mathcal{D} à travers les ondes extrêmes et l'invariant $\rho^4 \mathcal{D}$ à travers les deux ondes tangentiellles intermédiaires.

7.2.1 Courbes de choc

Pour tout état $\mathbf{u}_G \in \Omega_{\mathbf{u}}^+$, on définit la courbe 1-choc :

$$\mathcal{S}_1(\mathbf{u}_G) = \left\{ \mathbf{u} \in \Omega_{\mathbf{u}}^+, \mathbf{u}_G \xrightarrow{1\text{-choc}} \mathbf{u} \right\}, \quad (7.14)$$

comme le sous-ensemble de $\Omega_{\mathbf{u}}^+$ composé de la totalité des états \mathbf{u} qui peuvent être connectés par la droite à l'état gauche \mathbf{u}_G par une solution 1-choc. De même, pour tout état $\mathbf{u}_D \in \Omega_{\mathbf{u}}^+$, la courbe 7-choc :

$$\mathcal{S}_7(\mathbf{u}_D) = \left\{ \mathbf{u} \in \Omega_{\mathbf{u}}^+, \mathbf{u} \xleftarrow{7\text{-choc}} \mathbf{u}_D \right\}, \quad (7.15)$$

comme le sous-ensemble de $\Omega_{\mathbf{u}}^+$ composé de la totalité des états \mathbf{u} qui peuvent être connectés par la gauche à l'état droit \mathbf{u}_D par une solution 7-choc.

Nous avons vu dans l'analyse 1-onde progressive que (η_R, Y_+^R, Y_-^R) , et donc toutes les quantités, dépendaient des trois paramètres (M, β, α) que nous rappelons ici, par convenance pour le lecteur (les états gauche et droit de cette 1-onde sont notés ici \mathbf{u}_L et \mathbf{u}_R pour ne pas confondre avec la donnée initiale du problème de Riemann) :

$$M = \frac{u_L - \sigma}{c_L}, \beta = \frac{a_L}{c_L}, \alpha = \frac{R_{12}^L}{R_{11}^L}.$$

Pour une famille de 1-choc caractérisée par la proposition (7.1.2), avec pour état gauche \mathbf{u}_G , on voit que β et α sont fixés. Le seul paramètre qui évolue lors de la résolution du problème de Riemann est la vitesse de propagation σ du 1-choc et donc le nombre de Mach. En conséquence, on peut reparamétriser la famille de 1-choc par M . La famille de 3-choc est, elle, associée à un état droit \mathbf{u}_D et nous avons le même reparamétrage. Grâce à ce reparamétrage, nous allons pouvoir donner des propriétés de monotonie de (u, Π) par rapport au Mach puis de monotonie de $u(\Pi)$.

Lemme 7.2.3.

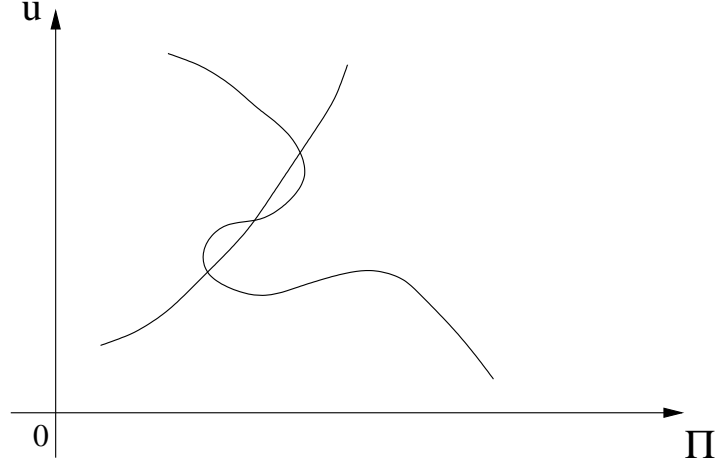
1. *Supposons vraie la propriété de monotonie (7.5), alors la vitesse normale u (respectivement la pression totale $\Pi = p + R_{11}$) est une fonction strictement décroissante du nombre de Mach M de $[1, +\infty[$ dans $] - \infty, u_G]$ (respectivement une fonction strictement croissante dans $[\Pi_G, +\infty[$).*
2. *Si la condition (7.5) n'est pas respectée, les deux fonctions $u(M)$ et $\Pi(M)$ possèdent les mêmes comportements asymptotiques que précédemment mais la propriété de monotonie n'est en général pas vérifiée.*

Démonstration. Pour un 1-choc, le long de $\mathcal{S}_1(\mathbf{u}_G)$, la vitesse normale et la pression totale vérifient les égalités suivantes :

$$\begin{cases} u(M) = u_G - c_G M \left(1 - \frac{\tau(M)}{\tau_G} \right), \\ \Pi(M) = \Pi_G + \rho_G c_G^2 M^2 \left(1 - \frac{\tau(M)}{\tau_G} \right). \end{cases} \quad (7.16)$$

Ces égalités classiques découlent directement des relations de saut généralisées (7.4). La fonction $\tau(M)$ étant une fonction de M allant de $[1, +\infty[$ dans $]0, \tau_G]$, on en déduit le résultat de la proposition. \square

Soulignons que si le taux de compression de sortie du 1-choc s'éloigne trop de la propriété (7.5), la projection de la courbe de 1-choc $\mathcal{S}_1(\mathbf{u}_G)$ dans le plan (Π, u) peut devenir localement une fonction multivaluée (figure (7.5)). Dans ce cas, des considérations classiques montrent que l'on ne peut avoir unicité des solutions du problème de Riemann pour la dynamique des gaz classiques (voir Smith [63] et Menikoff, Plohr [54]). Ce résultat est tout aussi valable dans le cas qui nous intéresse ici puisque l'on a montré que l'on pouvait se ramener à une étude dans le plan (Π, u) .

FIG. 7.5 – Exemple typique d’une courbe d’onde multivaluée dans le plan (Π, u)

On a bien sûr un résultat analogue pour un 7-choc le long de $\mathcal{S}_7(\mathbf{u}_D)$ avec les égalités suivantes :

$$\begin{cases} u(M) = u_D + c_D M \left(1 - \frac{\tau(M)}{\tau_D}\right), \\ \Pi(M) = \Pi_D + \rho_D c_D^2 M^2 \left(1 - \frac{\tau(M)}{\tau_D}\right). \end{cases} \quad (7.17)$$

Bien sûr, dans le cas d’un 7-choc, $\tau(M)$ est une fonction croissante de M (M est maintenant négatif). On en déduit que le sens de variation de $u(M)$ est le même. En revanche le sens de variation de $\Pi(M)$ est inversé par rapport au 1-choc.

Nous avons prouvé numériquement que la propriété (7.5) est vérifiée (voir figure (7.1)). Ainsi, le lemme (7.2.3) nous assure que la fonction Π constitue un changement de variable admissible pour caractériser les projections de $\mathcal{S}_1(\mathbf{u}_G)$ et $\mathcal{S}_7(\mathbf{u}_D)$ dans le plan (Π, u) :

Proposition 7.2.4.

1. Soit un état $\mathbf{u}_G \in \Omega_{\mathbf{u}}^+$. Les états \mathbf{u} le long de $\mathcal{S}_1(\mathbf{u}_G)$ sont donnés par une fonction régulière $\mathbf{u}_1(\Pi)$, $\Pi \in [\Pi_G, +\infty[$, avec la propriété que la vitesse normale $u_1(\Pi)$ est une fonction strictement décroissante de Π dans $] -\infty, u_G]$.
2. Pour tout état $\mathbf{u}_D \in \Omega_{\mathbf{u}}^+$, les états \mathbf{u} le long de $\mathcal{S}_7(\mathbf{u}_D)$ sont tels que $u_7(\Pi)$ est une fonction strictement croissante de Π allant de $[\Pi_D, +\infty[$ dans $[u_D, +\infty[$.

Démonstration. Démontrons le résultat pour la projection de la courbe $\mathcal{S}_1(\mathbf{u}_G)$, le résultat pour la projection de $\mathcal{S}_7(\mathbf{u}_D)$ s’en déduisant immédiatement. Selon le lemme (7.2.3) et la propriété (7.5), la fonction $\tau_1(\Pi)$ est une fonction strictement décroissante de Π dans $]0, \tau_G]$. Des manipulations classiques des relations de Rankine-Hugoniot généralisées (7.4) donnent (voir [32] par exemple) :

$$(u_1(\Pi) - u_G)^2 = (\Pi - \Pi_G) (\tau_G - \tau_1(\Pi)), \quad \Pi \geq \Pi_G.$$

Puisque $\tau_1(\Pi)$ est une fonction strictement décroissante de Π dans $]0, \tau_G]$, on en déduit que $\tau_1(\Pi) < \tau_G$ pour tout $\Pi > \Pi_G$. Or nous avons vu précédemment que $u_1(\Pi) - u_G = \rho_G c_G M(\tau_1(\Pi) - \tau_G)$. Cela implique que pour tout $\Pi > \Pi_G$, $u_1(\Pi) < u_G$ et que la fonction $u_1(\Pi)$ est une fonction décroissante de Π allant de $[\Pi_G, +\infty[$ dans $]-\infty, u_G]$. Dès lors, la formule précédente permet de calculer $u_1(\Pi)$:

$$u_1(\Pi) = u_G - \sqrt{(\Pi - \Pi_G)(\tau_G - \tau_1(\Pi))}. \quad (7.18)$$

□

7.2.2 Courbes de détente

Pour tout état $\mathbf{u}_G \in \Omega_{\mathbf{u}}^+$, on définit la courbe de 1-détente :

$$\mathcal{R}_1(\mathbf{u}_G) = \left\{ \mathbf{u} \in \Omega_{\mathbf{u}}^+, \mathbf{u}_G \xrightarrow{1\text{-détente}} \mathbf{u} \right\},$$

comme le sous ensemble de $\Omega_{\mathbf{u}}^+$ composé de la totalité des états \mathbf{u} qui peuvent être connectés à droite à l'état gauche \mathbf{u}_G par une 1-détente. De même, pour tout état $\mathbf{u}_D \in \Omega_{\mathbf{u}}^+$, on définit la courbe de 7-détente :

$$\mathcal{R}_1(\mathbf{u}_D) = \left\{ \mathbf{u} \in \Omega_{\mathbf{u}}^+, \mathbf{u} \xleftarrow{7\text{-détente}} \mathbf{u}_D \right\},$$

comme le sous ensemble de $\Omega_{\mathbf{u}}^+$ composé de la totalité des états \mathbf{u} qui peuvent être connectés à gauche à l'état droit \mathbf{u}_D par une 7-détente. Ces ondes de détente sont caractérisées par le lemme suivant :

Lemme 7.2.5. *Pour tout état $\mathbf{u}_G \in \Omega_{\mathbf{u}}^+$, la 1-onde de détente $\mathcal{R}(\mathbf{u}_G)$, connectée à l'état gauche \mathbf{u}_G , est composée des états $\mathbf{u} \in \Omega_{\mathbf{u}}^+$ possédant les propriétés suivantes :*

$$u - c(\mathbf{u}) > u_G - c_G, \quad \text{dès que } \mathbf{u} \neq \mathbf{u}_G, \quad (7.19)$$

avec :

$$\begin{cases} \mathcal{I} = \mathcal{I}_G, \\ u = u_G + \int_{\tau_G}^{\tau} \frac{c(v)}{v} dv, \\ \mathcal{W} = \mathcal{W}_G, \\ R_{12}\phi(\mathbf{u}) = R_{12}^G\phi(\mathbf{u}_G), \\ v + \theta(\mathbf{u}) = v_G + \theta(\mathbf{u}_G). \end{cases} \quad (7.20)$$

De même, les états $\mathbf{u} \in \mathcal{R}(\mathbf{u}_D)$ satisfont :

$$u + c(\mathbf{u}) < u_D + c_D, \quad \text{dès que } \mathbf{u} \neq \mathbf{u}_D, \quad (7.21)$$

avec :

$$\begin{cases} \mathcal{I} = \mathcal{I}_D, \\ u = u_D - \int_{\tau_D}^{\tau} \frac{c(v)}{v} dv, \\ \mathcal{W} = \mathcal{W}_D, \\ R_{12}\phi(\mathbf{u}) = R_{12}^D\phi(\mathbf{u}_D), \\ v - \theta(\mathbf{u}) = v_D - \theta(\mathbf{u}_D). \end{cases} \quad (7.22)$$

Par définition, on a :

$$\begin{cases} \phi(\mathbf{u}) = \exp\left(2 \int^\tau \frac{c^2(v)}{c^2(v) - a^2(v)} \frac{dv}{v}\right), \\ \theta(\mathbf{u}) = -2 \int^\tau \frac{c(v)R_{12}(v)}{c^2(v) - a^2(v)} dv. \end{cases}$$

Démonstration. La démonstration de ce lemme se déduit immédiatement des invariants de Riemann \mathcal{I}_R^1 et \mathcal{I}_R^7 définis en (7.9) et (7.10). En effet, un résultat classique sur les ondes de détente (voir [32]) implique que dans une k -onde de détente tous les k -invariants de Riemann sont constants. Les caractérisations (7.19) et (7.21) proviennent de considérations simples sur l'ordonnement des valeurs propres du système données dans la proposition (3.2.1). En effet, pour une 1-détente par exemple, la courbe $\mathcal{R}_1(\mathbf{u}_G)$ connecte à droite l'état \mathbf{u}_G par définition. Ainsi, dans l'onde de détente, on a forcément $\lambda_1(\mathbf{u}) > \lambda_G$, ce qui implique (7.19). De même, pour une 7-détente, on a $\lambda_7(\mathbf{u}) < \lambda_D$ qui implique automatiquement (7.21). \square

Remarque 7.2.6. En conséquence du lemme (7.2.5) et des formules (7.20) pour la 1-détente, et (7.22) pour la 7-détente, on remarque que R_{12} garde le même signe que la donnée initiale, respectivement R_{12}^G pour la 1-détente et R_{12}^D pour la 7-détente, à la traversée de la 1-onde et la 7-onde de détente.

Projetons maintenant ces deux familles de courbe dans le plan (Π, u) . La monotonie de ces courbes dans ce plan est donnée par la proposition suivante :

Proposition 7.2.7. *Pour tout état $\mathbf{u}_G \in \Omega_{\mathbf{u}}^+$, la pression totale Π est une variable naturelle le long de $\mathcal{R}_1(\mathbf{u}_G)$ en définissant chaque état $\mathbf{u} \in \mathcal{R}_1(\mathbf{u}_G)$ par une fonction régulière $\mathbf{u}_1(\Pi)$ de Π dans $]0, \Pi_G]$ où la vitesse normale $u_1(\Pi)$ est une fonction strictement décroissante de Π allant de $]0, \Pi_G]$ dans $[u_G, u_{max}(\mathbf{u}_G)[$ avec $u_{max}(\mathbf{u}_G)$ défini par :*

$$u_{max}(\mathbf{u}_G) = u_G + \lim_{\tau \rightarrow +\infty} \int_{\tau_G}^\tau \sqrt{\frac{\gamma s_G}{\tau^{\gamma+1}} + \frac{3\mathcal{I}_G}{\tau^4}} d\tau, \quad (7.23)$$

où s représente l'entropie physique du gaz parfait polytropique. De même, pour tout état $\mathbf{u}_D \in \Omega_{\mathbf{u}}^+$, les états \mathbf{u} le long de $\mathcal{R}_7(\mathbf{u}_D)$ sont donnés par une fonction régulière $\mathbf{u}_7(\Pi)$ de $\Pi \in]0, \Pi_D]$, la vitesse normale $u_7(\Pi)$ étant une fonction strictement croissante de Π allant de $]0, \Pi_D]$ dans $]u_{min}(\mathbf{u}_D), u_D]$ avec $u_{min}(\mathbf{u}_D)$ défini par :

$$u_{min}(\mathbf{u}_D) = u_D - \lim_{\tau \rightarrow +\infty} \int_{\tau_D}^\tau \sqrt{\frac{\gamma s_D}{\tau^{\gamma+1}} + \frac{3\mathcal{I}_D}{\tau^4}} d\tau. \quad (7.24)$$

Démonstration. Remarquons, dans un premier temps, que pour une 1-détente les invariants de Riemann \mathcal{I}_R^1 sont conservés. Ainsi, on a trivialement :

$$\Pi = \frac{s_G}{\tau^\gamma} + \frac{\mathcal{I}_G}{\tau^3}. \quad (7.25)$$

On en déduit que la fonction $\Pi_1(\tau)$ est strictement décroissante en τ . Cela impose naturellement que $\tau_1(\Pi)$ est une fonction strictement croissante de Π . De plus, toujours grâce aux invariants de Riemann \mathcal{I}_R^1 , on peut réécrire la fonction $u_1(\tau)$:

$$u_1(\tau) = u_G + \int_{\tau_G}^\tau \sqrt{\frac{\gamma s_G}{\tau^{\gamma+1}} + \frac{3\mathcal{I}_G}{\tau^4}} d\tau.$$

On a clairement $d_\tau u_1(\tau) > 0$ et $u_1(\tau)$ est une fonction croissante de τ . Comme $\Pi_1(\tau)$ est strictement décroissante en τ , on en déduit que $u_1(\Pi)$ est strictement décroissante en Π . De plus, $u_1(\tau)$ atteint clairement sa valeur maximale, donnée par (7.23), en $\tau \rightarrow +\infty$, ce qui correspond à $\Pi \rightarrow 0$. Comme $u_1(\Pi)$ est décroissante en Π , c'est aussi la valeur maximale en Π atteinte par $u(\Pi)$. On raisonne de même pour une 3-détente. \square

7.2.3 Existence et unicité

Considérons une donnée initiale arbitraire $(\mathbf{u}_G, \mathbf{u}_D)$ au problème de Riemann. On définit alors la 1-onde par $\mathcal{C}_1(\mathbf{u}_G) = \mathcal{S}_1(\mathbf{u}_G) \cup \mathcal{R}_1(\mathbf{u}_G)$ et la 7-onde par $\mathcal{C}_7(\mathbf{u}_D) = \mathcal{S}_7(\mathbf{u}_D) \cup \mathcal{R}_7(\mathbf{u}_D)$ de manière à compléter les définitions abstraites (7.12) et (7.13). La monotonie de la projection de ces deux courbes dans le plan (Π, u) est donnée par la proposition suivante :

Proposition 7.2.8. *Le long de la 1-onde $\mathcal{C}_1(\mathbf{u}_G)$, la vitesse normale $u_1(\Pi)$ est une fonction régulière strictement décroissante de la pression totale Π allant de $]0, +\infty[$ dans $] -\infty, u_{max}(\mathbf{u}_G)[$, alors que le long de la 7-onde $\mathcal{C}_7(\mathbf{u}_D)$, la vitesse normale $u_7(\Pi)$ est une fonction régulière strictement croissante de la pression totale Π allant de $]0, +\infty[$ dans $]u_{min}(\mathbf{u}_D), +\infty[$.*

Démonstration. Les monotonies de la 1-onde $\mathcal{C}_1(\mathbf{u}_G)$ et de la 7-onde $\mathcal{C}_7(\mathbf{u}_D)$ découlent directement des propriétés de monotonie de $\mathcal{S}_1(\mathbf{u}_G)$ et $\mathcal{R}_1(\mathbf{u}_G)$ d'une part, et de $\mathcal{S}_7(\mathbf{u}_D)$ et $\mathcal{R}_7(\mathbf{u}_D)$ d'autre part, données par les propositions (7.2.4) et (7.2.7). Il reste donc à démontrer que ces deux courbes sont C^1 osculatrices. Pour cela, intéressons-nous à $\mathcal{C}_1(\mathbf{u}_G)$ et prouvons que $\mathcal{S}_1(\mathbf{u}_G)$ et $\mathcal{R}_1(\mathbf{u}_G)$ sont tangentes en $\Pi = \Pi_D$. La formule de représentation (7.20) de $u_1(\tau)$ le long de $\mathcal{R}_1(\mathbf{u}_G)$ peut se réécrire en $u_1(\Pi)$. En effet, pour une 1-détente, la pression totale s'exprime selon (7.25) grâce aux invariants de Riemann I_R^1 sur s et \mathcal{I} . Dérivons cette expression par rapport à τ , on obtient le résultat classique :

$$d\Pi = -\frac{c^2}{\tau^2} d\tau.$$

On en déduit l'expression de $u_1(\Pi)$:

$$u_1(\Pi) = u_G - \int_{\Pi}^{\Pi_G} \frac{1}{\rho(v)c(v)} dv, \quad \forall \Pi < \Pi_G.$$

Dérivons cette expression et évaluons la sur l'état gauche :

$$\left. \frac{du_1}{d\Pi} \right|_{G, \mathcal{R}_1} = -\frac{1}{\rho_G c_G}.$$

Considérons maintenant la formule de représentation (7.18) de $u_1(\Pi)$ le long de $\mathcal{S}_1(\mathbf{u}_G)$. Cette formule nous permet d'évaluer le taux d'accroissement de $u_1(\Pi)$:

$$\frac{u_1(\Pi) - u_G}{\Pi - \Pi_G} = -\sqrt{\frac{\tau_G - \tau_1(\Pi)}{\Pi - \Pi_G}}, \quad \forall \Pi > \Pi_G. \quad (7.26)$$

Or selon la formule (7.16) valable le long de $\mathcal{S}_1(\mathbf{u}_G)$, on a par ailleurs :

$$\frac{\tau_G - \tau_1(\Pi)}{\Pi - \Pi_G} = \frac{1}{(\rho_G c_G^2) M^2}, \quad \forall \Pi > \Pi_G. \quad (7.27)$$

Puisque τ est une fonction C^1 de la pression totale Π , on déduit des deux formules (7.26) et (7.27) et de $M(\Pi_G) = 1$:

$$\left. \frac{du_1}{d\Pi} \right|_{G, \mathcal{S}_1} = -\frac{1}{\rho_G c_G}.$$

Ce qui prouve que $\mathcal{R}_1(\mathbf{u}_G)$ et $\mathcal{S}_1(\mathbf{u}_G)$ sont tangentes en $\Pi = \Pi_G$. Un raisonnement analogue permet de prouver que $\mathcal{R}_7(\mathbf{u}_G)$ et $\mathcal{S}_7(\mathbf{u}_G)$ sont tangentes en $\Pi = \Pi_R$. \square

En conséquence de la monotonie des fonctions $u_1(\Pi)$ et $u_7(\Pi)$ et de leurs comportements asymptotiques établis à la proposition (7.2.8), les projections de courbes d'onde $\mathcal{C}(\mathbf{u}_G)$ et $\mathcal{C}(\mathbf{u}_D)$ doivent toujours s'intersecter en un point (Π^*, u^*) pour tout $(\mathbf{u}_G, \mathbf{u}_D)$ respectant l'hypothèse (7.2.1) dès que :

$$u_{min}(\mathbf{u}_D) < u_{max}(\mathbf{u}_G).$$

Le problème de Riemann admet donc, dans ce cas, au moins une solution. Cependant, la monotonie stricte des fonctions de vitesse normale $u_1(\Pi)$ et $u_7(\Pi)$ implique nécessairement que le couple (Π^*, u^*) est unique dès que celui-ci existe. L'unicité pour tous les états intermédiaires $(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3, \mathbf{u}_4)$, selon le schéma (7.11) est facilement obtenue par les invariants de Riemann $(I_R^1, I_R^2, I_R^{3,4,5}, I_R^6, I_R^7)$, les relations de Rankine-Hugoniot généralisées (7.4) et par l'unicité du couple (Π^*, u^*) (voir le début de la section (7.2)). Considérons alors l'inégalité $u_{max}(\mathbf{u}_G) \leq u_{min}(\mathbf{u}_D)$. Ce cas est responsable de l'apparition du vide comme pour la dynamique des gaz classiques. Nous renvoyons le lecteur à Smith [63] pour une construction de la solution dans le cas du vide. Nous avons ainsi prouvé le théorème suivant :

Théorème 7.2.9 (Existence et unicité du problème de Riemann). *Le problème de Riemann de donnée initiale $(\mathbf{u}_G, \mathbf{u}_D) \in \Omega_{\mathbf{u}}^+$ et respectant l'hypothèse (7.2.1), admet une unique solution en dehors du vide, c'est-à-dire si :*

$$u_{min}(\mathbf{u}_D) < u_{max}(\mathbf{u}_G), \quad (7.28)$$

où ces deux vitesses sont définies respectivement par (7.24) et (7.23).

L'inégalité (7.28) peut se réécrire de manière plus classique :

$$u_D - u_G < \int_0^{\rho_G} \frac{c(\rho, s_G, \mathcal{I}_G)}{\rho} d\rho + \int_0^{\rho_D} \frac{c(\rho, s_D, \mathcal{I}_D)}{\rho} d\rho.$$

7.3 Illustrations numériques

En pratique, nous avons tabulé les états de sortie (η_R, Y_+^R, Y_-^R) de la 1-onde progressive en fonction des trois paramètres (M, β, α) (encore une fois, les états gauche et droit de cette 1-onde sont notés ici \mathbf{u}_L et \mathbf{u}_R pour ne pas confondre avec la donnée initiale du problème de Riemann notée \mathbf{u}_G et \mathbf{u}_D). Nous avons ensuite construit les courbes de 1 et 7-choc associées, que nous avons complétées par les courbes de 1 et 7-détente, par intégration des invariants de Riemann, pour finalement tabuler les 1 et 7-ondes en entier pour les variables $(u_i(\Pi), v_i(\Pi), R_{12}^i(\Pi))_{i=\{1,7\}}$. Nous aurions pu nous contenter de ne tabuler que $u_i(\Pi)_{i=\{1,7\}}$ et de reconstruire $(v_i(\Pi), R_{12}^i(\Pi))$ grâce

aux invariants de Riemann et aux relations de Rankine-Hugoniot généralisées avec la tabulation de la fonction cinétique provenant de l'analyse onde progressive. Trois cas tests vont être présentés ici. Un tube à choc de type Sod, un double choc et une double onde de détente.

7.3.1 Double détente

La donnée initiale pour la double détente figure dans le tableau (7.1). Nous représentons tout d'abord l'intersection des courbes d'onde dans le plan (Π, u) sur la figure (7.6). La 1-onde (respectivement 7-onde) est bien monotone décroissante (respectivement croissante) si bien que l'intersection de ces deux courbes est unique. On remarque aussi l'apparition du phénomène de surcompression pour les pressions Π élevées sur ces deux courbes, caractérisé par une discontinuité des courbes, puisque nous avons imposé la valeur 0 par convention dans ce cas. On représente ensuite les variables normales du problème sur la figure (7.9). Celles-ci sont constantes à la traversée des 2 et 6-ondes (voir les invariants de Riemann associés (3.5.1)) et leurs allures correspondent à une double détente classique que l'on peut rencontrer pour les équations d'Euler. En revanche sur la figure (7.10), les variables tangentielles voient ces ondes LD tangentielles et ne sont pas constantes à leur traversée.

7.3.2 Double choc

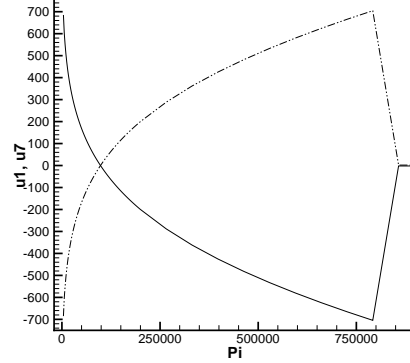
La donnée initiale pour le double choc figure dans le tableau (7.2). On représente l'intersection des 1 et 7-ondes dans le plan (Π, u) . Ces courbes sont bien monotones et admettent une unique intersection. Le phénomène de surcompression y est caractérisé par une discontinuité des courbes. On représente ensuite les variables normales et tangentielles sur les figures (7.11) et (7.12). Comme pour la double détente, les variables normales ne voient pas les ondes LD tangentielles contrairement aux variables tangentielles. Remarquons que $\beta_G = \beta_D \simeq 0.477$ est très élevé et que le coefficient d'anisotropie est faible ($\alpha_G = \alpha_D = 0.05$) dans cette expérience. Cependant, le Mach relatif est lui aussi assez faible ($M_G = |M_D| \simeq 1.16$). Pour de tels valeurs des paramètres, il n'y a ni accident de Lax, ni instabilité forte.

7.3.3 Tube à choc de Sod turbulent

Nous nous intéressons à un tube à choc de Sod turbulent. La donnée initiale pour un tel problème a été proposée par Berthon, Coquel, Hérard et Uhlmann [13]. Elle est rappelée dans le tableau (7.3). La solution est constituée d'une 1-détente, d'un contact et d'un 7-choc pour les variables normales (7.13), la vitesse normale et la pression totale étant bien sûr constantes à la traversée du contact. Cela correspond à un tube à choc de Sod classique pour les équations d'Euler. Pour les variables tangentielles v et R_{12} , la solution est constituée d'une 1-détente, des 2 et 6-ondes puis du 7-choc. Seule R_{22} voit l'ensemble des 7-ondes. Cependant le contact est à peine perceptible sur la figure (7.14, c). Les ondes LD tangentielles ont des amplitudes importantes et sont très resserrées.

ρ_G	1	ρ_D	1
u_G	-100	u_D	100
v_G	0	v_D	0
p_G	10^5	p_D	10^5
R_{11}^G	10^5	R_{11}^D	10^5
R_{22}^G	10^3	R_{22}^D	10^3
R_{12}^G	10^3	R_{12}^D	10^3

TAB. 7.1 – Donnée initiale double détente

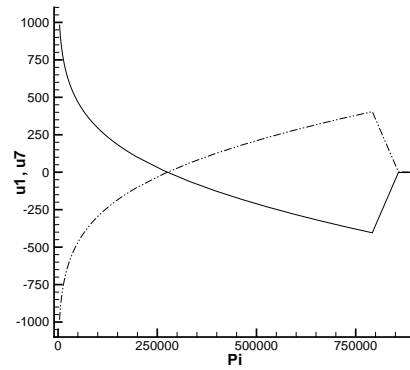


— 1-onde, - - - - - 7-onde.

FIG. 7.6 – Intersection des 1 et 7 ondes dans le plan (Π, u) , double détente

ρ_G	1	ρ_D	1
u_G	100	u_D	-100
v_G	0	v_D	0
p_G	10^5	p_D	10^5
R_{11}^G	10^5	R_{11}^D	10^5
R_{22}^G	10^4	R_{22}^D	10^4
R_{12}^G	$5 \cdot 10^3$	R_{12}^D	$5 \cdot 10^3$

TAB. 7.2 – Donnée initiale double choc

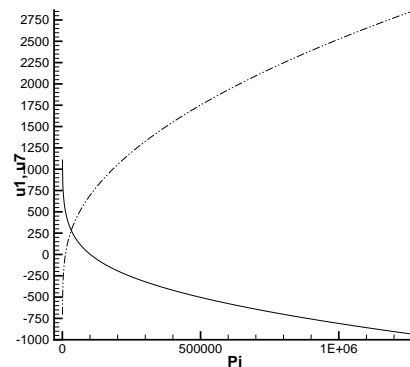


— 1-onde, - - - - - 7-onde.

FIG. 7.7 – Intersection des 1 et 7 ondes dans le plan (Π, u) , double choc

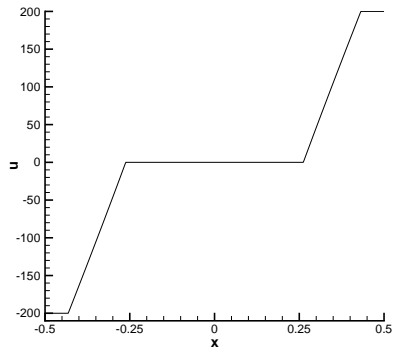
ρ_G	1	ρ_D	0.125
u_G	0	u_D	0
v_G	0	v_D	0
p_G	10^5	p_D	10^4
R_{11}^G	10^3	R_{11}^D	10^3
R_{22}^G	10^3	R_{22}^D	10^3
R_{12}^G	$5 \cdot 10^2$	R_{12}^D	$5 \cdot 10^2$

TAB. 7.3 – Donnée initiale Sod turbulent

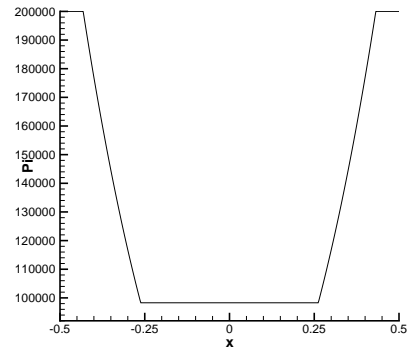


— 1-onde, - - - - - 7-onde.

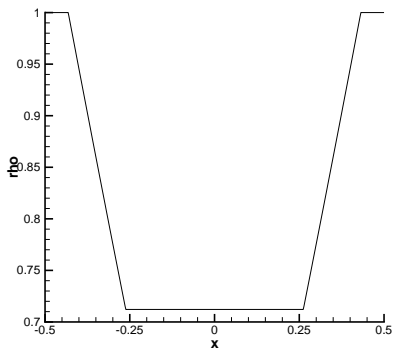
FIG. 7.8 – Intersection des 1 et 7 ondes dans le plan (Π, u) , Sod turbulent



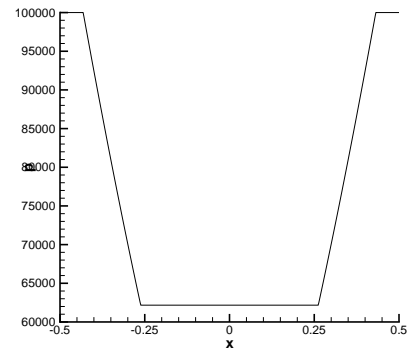
(a) vitesse normale u



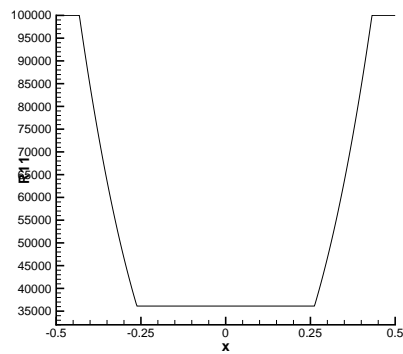
(b) pression totale Π



(c) densité ρ

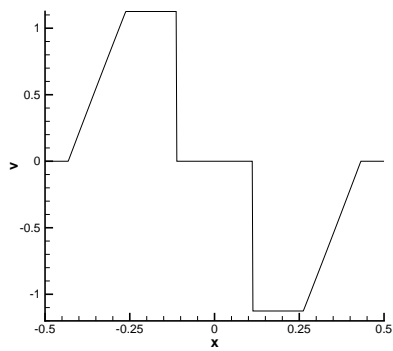


(d) pression p

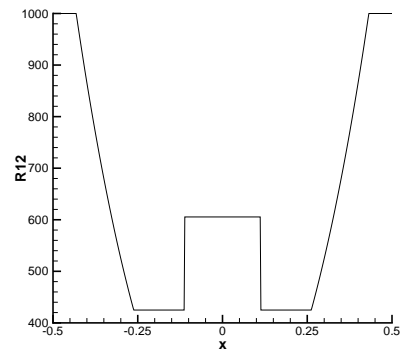


(e) composante R_{11}

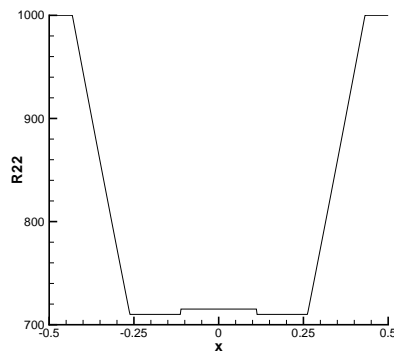
FIG. 7.9 – Variables normales du problème de Riemann pour une double détente



(a) vitesse tangentielle v

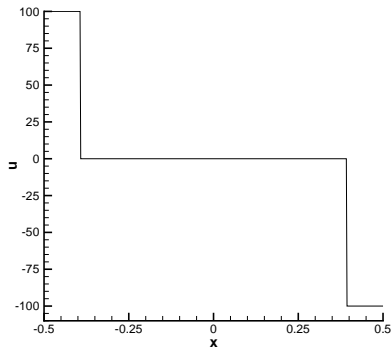


(b) composante R_{12}

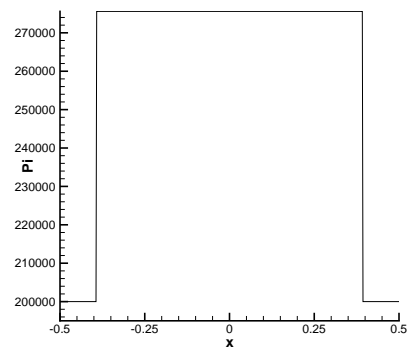


(c) composante R_{22}

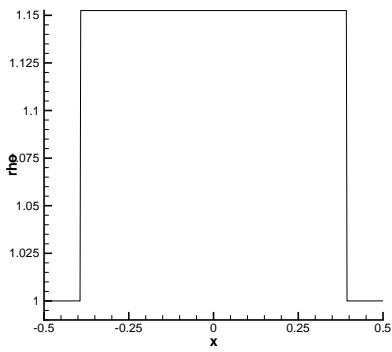
FIG. 7.10 – Variables tangentielles du problème de Riemann pour une double détente



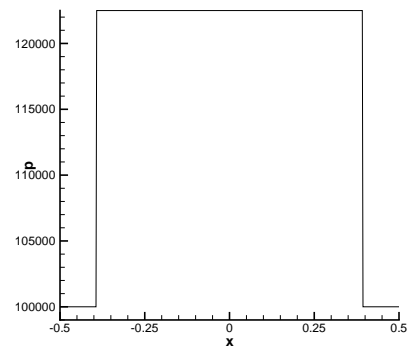
(a) vitesse normale u



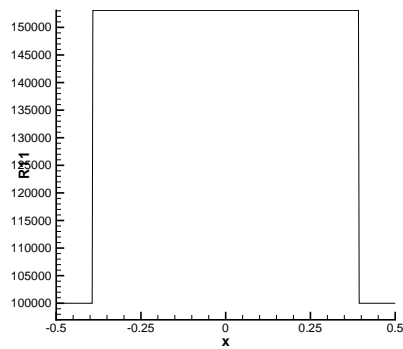
(b) pression totale Π



(c) densité ρ

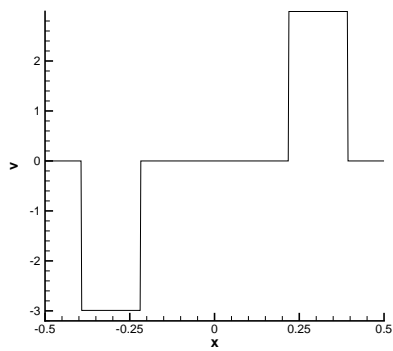


(d) pression p

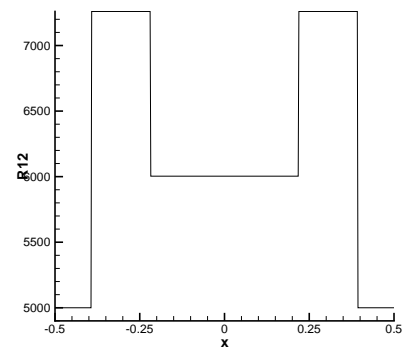


(e) composante R_{11}

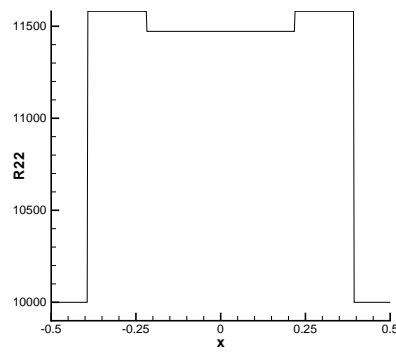
FIG. 7.11 – Variables normales du problème de Riemann pour un double choc



(a) vitesse tangentielle v

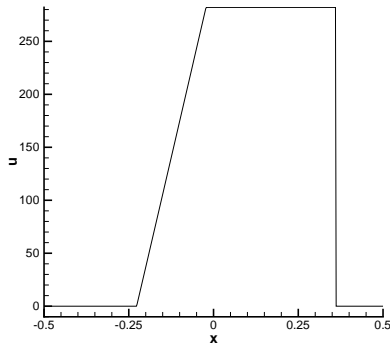


(b) composante R_{12}

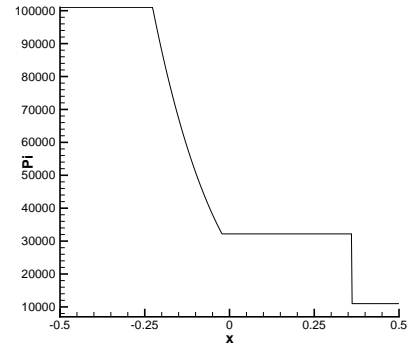


(c) composante R_{22}

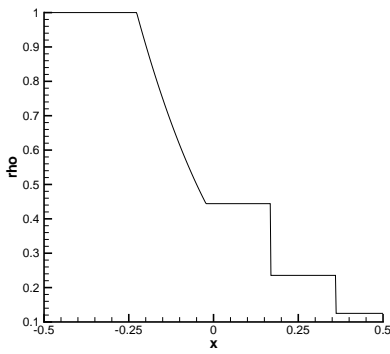
FIG. 7.12 – Variables tangentielles du problème de Riemann pour un double choc



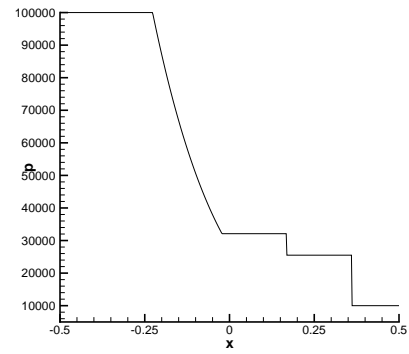
(a) vitesse normale u



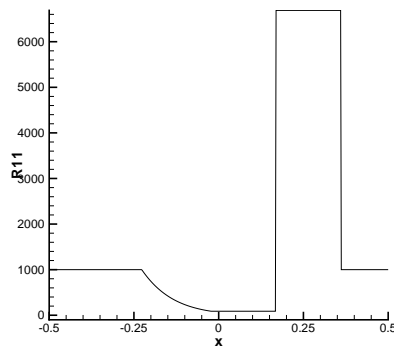
(b) pression totale Π



(c) densité ρ

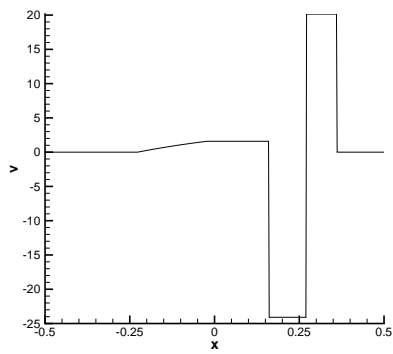


(d) pression p

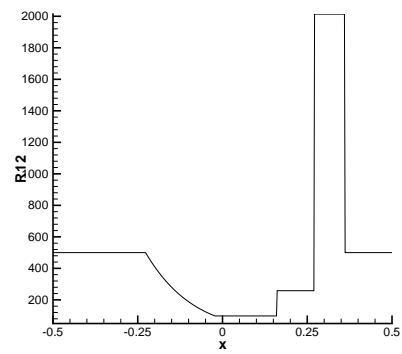


(e) composante R_{11}

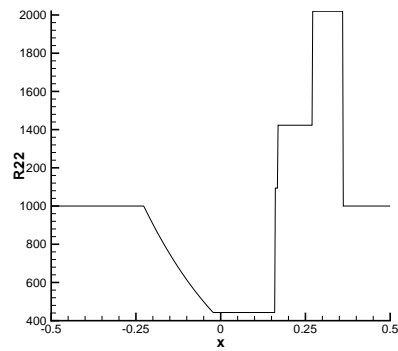
FIG. 7.13 – Variables normales du problème de Riemann pour un tube à choc de Sod



(a) vitesse tangentielle v



(b) composante R_{12}



(c) composante R_{22}

FIG. 7.14 – Variables tangentielles du problème de Riemann pour un tube à choc de Sod

Troisième partie

Stabilité du choc dans un cadre
non conservatif

Chapitre 8

Stabilité structurelle du choc droit

Dans ce chapitre, nous proposons une théorie de la stabilité structurelle pour les solutions chocs d'un système hyperbolique non linéaire sous forme non conservative. Nous montrons que le formalisme des relations cinétiques, présidant à la définition de relations de saut généralisées, tel que développé dans cette thèse, autorise une extension naturelle des conditions de stabilité énoncées dans le cadre conservatif par Majda en 1984 [51]. L'exposé de la théorie n'est mené que dans le cas des solutions chocs associées aux champs extrêmes par souci de simplicité. L'extension proposée montre que le respect des conditions géométriques de Lax est nécessaire à la stabilité structurelle, mais n'est pas suffisant : une condition de non annulation d'une version étendue du déterminant de Majda, tel qu'introduit dans ce chapitre, est demandée. Nous appliquons cette théorie aux modèles RSM analysés dans ce manuscrit, à la fois dans le cadre des modèles isotherme et anisotherme.

Dans le cadre isotherme, nous considérons des corrections de Ristorcelli admissibles au sens de l'analyse proposée au chapitre 5. Les conditions géométriques de Lax sont donc, par définition, vérifiées, quelle que soit la force de la solution choc considérée. Nous montrons que ces solutions chocs sont systématiquement stables sous la condition que le taux de compression de sortie, dans le profil visqueux, est une fonction décroissante du Mach M . Ainsi, pour les corrections de Ristorcelli considérées dans cette thèse, les solutions chocs associées aux ondes extrêmes du modèle isotherme sont toujours structurellement stables.

Dans le cadre anisotherme, où aucune correction de Ristorcelli n'est invoquée, nous montrons que, tant que les conditions géométriques de Lax sont vérifiées, aucune instabilité structurelle des solutions chocs n'apparaît.

Les résultats de cette analyse de stabilité structurelle sont importants à l'étude de la stabilité multidimensionnelle des chocs, puisque nous verrons, dans le chapitre suivant qui lui est consacré, qu'elle en constitue un prérequis.

8.1 Théorie

8.1.1 Relations cinétiques et conditions de stabilité structurelle

L'analyse que nous développons ici, s'appuie sur la démarche proposée par Majda [51] dans le cadre des systèmes hyperboliques conservatifs. Nous montrons que l'utilisation de fonctions cinétiques, dans la définition des relations de saut généralisées,

conduit à une extension simple et naturelle au cadre non conservatif des conditions de stabilité structurelle, introduites par Majda pour des chocs droits associés aux deux champs extrêmes.

Position du problème

Nous examinons dans ce paragraphe la question de la stabilité structurelle du choc droit dans un cadre abstrait et nous soulignerons, en temps utile, en quoi les résultats obtenus s'appliquent aux modèles aux tensions de Reynolds considérés dans cette thèse. Soit donc un système hyperbolique de taille $n \times n$ avec relation cinétique, de la forme :

$$\partial_t \mathbf{v} + \partial_x \mathbf{F}(\mathbf{v}) = \Upsilon_{\mathbf{v}}, \quad (8.1)$$

où l'inconnue $\mathbf{v} \in \Omega_{\mathbf{v}} \subset \mathbb{R}^n$. Ici, $\Upsilon_{\mathbf{v}} : \Omega_{\mathbf{v}} \times \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^n$, désigne une mesure de Borel vectorielle bornée, concentrée sur les chocs d'une solution Lipschitz continue \mathbf{v} de (8.1) et s'annulant partout ailleurs. Nous supposons que le premier champ de (8.1) est non linéaire de manière à étudier la stabilité structurelle d'une 1-onde de choc. Pour les systèmes de la physique, les propriétés d'invariance galiléenne permettent de transposer les résultats de stabilité aux ondes de chocs associées à l'autre champ extrême.

Considérons donc une solution choc de (8.1) associée au premier champ :

$$\mathbf{v}(x, t) = \mathbf{v}_L + (\mathbf{v}_R - \mathbf{v}_L)H(x - \sigma t), \quad (8.2)$$

l'état \mathbf{v}_L et la vitesse σ étant donnés. Ici, l'état $\mathbf{v}_R \in \Omega_{\mathbf{v}}$ doit être solution des relations de saut généralisées :

$$-\sigma(\mathbf{v}_R - \mathbf{v}_L) + (\mathbf{F}(\mathbf{v}_R) - \mathbf{F}(\mathbf{v}_L)) = \mathcal{C}(\mathbf{v}_L, \sigma), \quad (8.3)$$

où $\mathcal{C}(\mathbf{v}_L, \sigma) \in \mathbb{R}^n$ désigne la masse de la mesure vectorielle $\Upsilon_{\mathbf{v}}$, concentrée sur le choc en question. Cette solution du système (8.1), dite solution de référence dans la suite, est associée à la donnée initiale :

$$\mathbf{v}_0(x) = \begin{cases} \mathbf{v}_L, & \text{si } x < 0, \\ \mathbf{v}_R, & \text{si } x > 0. \end{cases}$$

La motivation est ici d'envisager les solutions de (8.1) résultant d'une perturbation infinitésimale de cette donnée initiale, de la forme :

$$\mathbf{v}_0^\epsilon(x) = \begin{cases} \mathbf{v}_{0L}^\epsilon(x) = \mathbf{v}_L + \epsilon \mathbf{w}_0^L(x), & \text{si } x < 0, \\ \mathbf{v}_{0R}^\epsilon(x) = \mathbf{v}_R + \epsilon \mathbf{w}_0^R(x), & \text{si } x > 0, \end{cases} \quad (8.4)$$

où les fonctions \mathbf{w}_0^L et \mathbf{w}_0^R sont choisies très régulières (indéfiniment dérivables). Ici, l'amplitude $\epsilon > 0$ de la perturbation est choisie aussi petite que souhaitée. La solution $\mathbf{v}^\epsilon(x, t)$ du problème de Cauchy (8.1), pour la donnée initiale perturbée (8.4), diffère évidemment de la solution de référence (8.2). En suivant Majda [51], nous dirons que la solution choc est structurellement stable si la solution $\mathbf{v}^\epsilon(x, t)$ peut être rendue arbitrairement proche de cette solution choc, en choisissant l'amplitude ϵ de la perturbation dans (8.4) arbitrairement petite. Puisque la solution de référence est indéfiniment dérivable en dehors d'une discontinuité localisée en $x = \sigma t$, Majda propose

de rechercher $\mathbf{v}^\epsilon(x, t)$ sous la forme d'une fonction très régulière en dehors d'une seule discontinuité localisée en $x^\epsilon(t) = \Phi^\epsilon(t)$ et représentant la position du choc perturbé. Ici, $\Phi^\epsilon(t)$ est une fonction inconnue supposée très régulière avec $\lim_{t \rightarrow 0} \Phi^\epsilon(t) = 0$. Si le choc est stable, une telle forme est en effet attendue, à cause de la régularité des fonctions $\mathbf{w}_0^L(x)$ et $\mathbf{w}_0^R(x)$, au moins sur un intervalle de temps $[0, T_*[$, avec $T_* > 0$ suffisamment petit, dépendant du choix des \mathbf{w}_0^L et \mathbf{w}_0^R dans (8.4). De manière plus précise, $\mathbf{v}^\epsilon(x, t)$ est recherchée sous la forme :

$$\mathbf{v}^\epsilon(x, t) = \begin{cases} \mathbf{v}_L^\epsilon(x, t), & \text{si } x < \Phi^\epsilon(t), \\ \mathbf{v}_R^\epsilon(x, t), & \text{si } x > \Phi^\epsilon(t), \end{cases}$$

avec \mathbf{v}_L^ϵ et \mathbf{v}_R^ϵ très régulières, respectivement solutions de :

$$\begin{cases} \partial_t \mathbf{v}_L^\epsilon + \partial_x \mathbf{F}(\mathbf{v}_L^\epsilon) = 0, & \text{si } x < \Phi^\epsilon(t), t > 0, \\ \lim_{t \rightarrow 0^+} \mathbf{v}_L^\epsilon(x, t) = \mathbf{v}_{0L}^\epsilon(x), & \text{avec } x < 0, \end{cases} \quad (8.5)$$

et :

$$\begin{cases} \partial_t \mathbf{v}_R^\epsilon + \partial_x \mathbf{F}(\mathbf{v}_R^\epsilon) = 0, & \text{si } x > \Phi^\epsilon(t), t > 0, \\ \lim_{t \rightarrow 0^+} \mathbf{v}_R^\epsilon(x, t) = \mathbf{v}_{0R}^\epsilon(x), & \text{avec } x > 0, \end{cases} \quad (8.6)$$

et couplées par la condition de saut généralisée, devant être satisfaite à la traversée du choc perturbé, se déplaçant à la vitesse $\Phi'^\epsilon(t) = d_t \Phi^\epsilon(t)$:

$$\begin{aligned} -\Phi'^\epsilon(t) (\mathbf{v}_R^\epsilon(\Phi^{\epsilon,+}(t), t) - \mathbf{v}_L^\epsilon(\Phi^{\epsilon,-}(t), t)) + (\mathbf{F}(\mathbf{v}_R^\epsilon(\Phi^{\epsilon,+}(t), t)) - \mathbf{F}(\mathbf{v}_L^\epsilon(\Phi^{\epsilon,-}(t), t))) \\ = \\ \mathcal{C}(\mathbf{v}_L^\epsilon(\Phi^{\epsilon,-}(t), t), \Phi'^\epsilon(t)). \end{aligned} \quad (8.7)$$

Ici $\mathbf{v}_R^\epsilon(\Phi^{\epsilon,+}(t), t)$ désigne la trace à droite de $\mathbf{v}^\epsilon(t)$ à l'instant t . Une définition similaire vaut pour $\mathbf{v}_L^\epsilon(\Phi^{\epsilon,+}(t), t)$ en tant que trace à gauche. Les inconnues du problème perturbé sont donc \mathbf{v}_L^ϵ , \mathbf{v}_R^ϵ et Φ^ϵ , gouvernées par le problème de couplage à frontière libre (8.5,8.6)-(8.7).

Puisque la position de la frontière libre est inconnue, il est agréable de proposer un changement de variable permettant de redresser cette frontière sur une position fixe. À cette fin, on introduit :

$$\begin{cases} \hat{t} = t, \\ \hat{x} = x - \Phi^\epsilon(t), \end{cases}$$

de sorte que le choc perturbé est localisé, à chaque instant \hat{t} , en $\hat{x} = 0$. Les nouvelles fonctions inconnues, résultant de ce changement de variables, s'écrivent :

$$\begin{cases} \hat{\mathbf{v}}_L^\epsilon(\hat{x}, \hat{t}) = \mathbf{v}_L^\epsilon(\hat{x} + \Phi^\epsilon(\hat{t}), \hat{t}), \\ \hat{\mathbf{v}}_R^\epsilon(\hat{x}, \hat{t}) = \mathbf{v}_R^\epsilon(\hat{x} + \Phi^\epsilon(\hat{t}), \hat{t}), \end{cases}$$

et doivent être solutions du problème couplé à frontière fixe constitué à gauche de :

$$\begin{cases} \partial_{\hat{t}} \hat{\mathbf{v}}_L^\epsilon + \partial_{\hat{x}} (\mathbf{F}(\hat{\mathbf{v}}_L^\epsilon) - \Phi'^\epsilon(\hat{t}) \hat{\mathbf{v}}_L^\epsilon) = 0, & \text{si } \hat{x} < 0, \hat{t} > 0, \\ \hat{\mathbf{v}}_L^\epsilon(\hat{x}, 0) = \mathbf{v}_{0L}^\epsilon(\hat{x}), & \text{avec } \hat{x} < 0, \end{cases} \quad (8.8)$$

et à droite de :

$$\begin{cases} \partial_t \hat{\mathbf{v}}_R^\epsilon + \partial_{\hat{x}} \left(\mathbf{F}(\hat{\mathbf{v}}_R^\epsilon) - \Phi'^\epsilon(\hat{t}) \hat{\mathbf{v}}_R^\epsilon \right) = 0, & \text{si } \hat{x} > 0, \hat{t} > 0, \\ \hat{\mathbf{v}}_R^\epsilon(\hat{x}, 0) = \mathbf{v}_{0R}^\epsilon(\hat{x}), & \text{avec } \hat{x} > 0, \end{cases} \quad (8.9)$$

avec pour condition de couplage déduite immédiatement de (8.7) :

$$\begin{aligned} -\Phi'^\epsilon(\hat{t}) \left(\hat{\mathbf{v}}_R^\epsilon(0^+, \hat{t}) - \hat{\mathbf{v}}_L^\epsilon(0^-, \hat{t}) \right) + \left(\mathbf{F}(\hat{\mathbf{v}}_R^\epsilon(0^+, \hat{t})) - \mathbf{F}(\hat{\mathbf{v}}_L^\epsilon(0^-, \hat{t})) \right) \\ = \\ \mathcal{C}(\hat{\mathbf{v}}_L^\epsilon(0^-, \hat{t}), \Phi'^\epsilon(\hat{t})). \end{aligned} \quad (8.10)$$

Par souci de simplicité dans les écritures, nous abandonnons, dans toute la suite, la notation chapeau.

8.1.2 Linéarisation et critère de stabilité structurelle

L'amplitude ϵ de la perturbation dans la donnée initiale pouvant être choisie arbitrairement petite, Majda suggère d'étudier l'existence d'une solution à la version linéarisée, en $\epsilon = 0$, du problème couplé (8.8,8.9)-(8.10). À cette fin, il introduit le développement formel suivant (rappelons que la notation chapeau est omise) :

$$\begin{cases} \mathbf{v}_L^\epsilon(x, t) = \mathbf{v}_L + \epsilon \mathbf{w}_L(x, t) + \dots, \\ \mathbf{v}_R^\epsilon(x, t) = \mathbf{v}_R + \epsilon \mathbf{w}_R(x, t) + \dots, \\ \Phi^\epsilon(t) = \sigma t + \epsilon \varphi(t) + \dots, \end{cases}$$

pour obtenir qu'à l'ordre 0 en ϵ , le problème de couplage dégénère sur la condition :

$$-\sigma(\mathbf{v}_R - \mathbf{v}_L) + (\mathbf{F}(\mathbf{v}_R) - \mathbf{F}(\mathbf{v}_L)) = \mathcal{C}(\mathbf{v}_L, \sigma),$$

satisfaite par construction en (8.3).

Au premier ordre en ϵ , les nouvelles inconnues sont $\mathbf{w}_L(x, t)$, $\mathbf{w}_R(x, t)$ et $\varphi(t)$. Celles-ci doivent être solutions du problème de couplage linéarisé, constitué à gauche de :

$$\begin{cases} \partial_t \mathbf{w}_L + (\nabla_{\mathbf{v}} \mathbf{F}(\mathbf{v}_L) - \sigma Id) \partial_x \mathbf{w}_L = 0, & \text{si } x < 0, t > 0, \\ \mathbf{w}_L(x, 0) = \mathbf{w}_0^L(x), & \text{avec } x < 0, \end{cases} \quad (8.11)$$

et à droite de :

$$\begin{cases} \partial_t \mathbf{w}_R + (\nabla_{\mathbf{v}} \mathbf{F}(\mathbf{v}_R) - \sigma Id) \partial_x \mathbf{w}_R = 0, & \text{si } x > 0, t > 0, \\ \mathbf{w}_R(x, 0) = \mathbf{w}_0^R(x), & \text{avec } x > 0, \end{cases} \quad (8.12)$$

les traces en 0 de ces solutions étant astreintes à la condition de couplage suivante :

$$\begin{aligned} (\nabla_{\mathbf{v}} \mathbf{F}(\mathbf{v}_R) - \sigma Id) \mathbf{w}_R(0^+, t) - (\nabla_{\mathbf{v}} \mathbf{F}(\mathbf{v}_L) - \sigma Id) \mathbf{w}_L(0^-, t) - \varphi'(t) (\mathbf{v}_R - \mathbf{v}_L) \\ = \\ \nabla_{\mathbf{v}} \mathcal{C}(\mathbf{v}_L, \sigma) \mathbf{w}_L(0^-, t) + \varphi'(t) \partial_s \mathcal{C}(\mathbf{v}_L, \sigma), \end{aligned} \quad (8.13)$$

où le second membre résulte clairement du développement suivant :

$$\mathcal{C}(\mathbf{v}_L^\epsilon(0^-, t), \Phi'^\epsilon(t)) = \mathcal{C}(\mathbf{v}_L, \sigma) + \epsilon \nabla_{\mathbf{v}} \mathcal{C}(\mathbf{v}_L, \sigma) \mathbf{w}_L(0^-, t) + \epsilon \varphi'(t) \partial_s \mathcal{C}(\mathbf{v}_L, \sigma) + \dots$$

Ici, $\nabla_{\mathbf{v}} \mathcal{C}(\mathbf{v}_L, \sigma)$ désigne une matrice $n \times n$ alors que $\partial_s \mathcal{C}(\mathbf{v}_L, \sigma)$ correspond à un vecteur colonne de \mathbb{R}^n . Après Majda, nous introduisons ici :

Définition 8.1.1. La solution choc (8.2)-(8.3) est dite linéairement structurellement stable si et seulement si le problème de couplage linéarisé (8.11,8.12)-(8.13) admet une unique solution régulière $(\mathbf{w}_L(x, t), \mathbf{w}_R(x, t), \varphi(t))$.

Le principal résultat de cette section est :

Théorème 8.1.2 (Stabilité structurelle). *La solution 1-choc (8.2)-(8.3) est linéairement structurellement stable si et seulement si :*

i) les conditions géométriques de Lax sont satisfaites :

$$\lambda_1(\mathbf{v}_R) < \sigma < \lambda_1(\mathbf{v}_L), \quad \sigma < \lambda_2(\mathbf{v}_R), \quad (8.14)$$

ii) la condition de Majda étendue est vérifiée :

$$\Delta = \text{Det}((\mathbf{v}_R - \mathbf{v}_L) + \partial_s \mathcal{C}(\mathbf{v}_L, s) \Big|_{s=\sigma}, r_2(\mathbf{v}_R), \dots, r_n(\mathbf{v}_R)) \neq 0, \quad (8.15)$$

soit de manière équivalente :

$$\left(l_1(\mathbf{v}_R), (\mathbf{v}_R - \mathbf{v}_L) + \partial_s \mathcal{C}(\mathbf{v}_L, s) \Big|_{s=\sigma} \right) \neq 0, \quad (8.16)$$

où dans le déterminant précédent $\{r_i(\mathbf{v}_R)\}_{2 \leq i \leq n}$ désignent les vecteurs propres à droite de $\nabla_{\mathbf{v}} \mathbf{F}(\mathbf{v}_R)$, associés aux valeurs propres $\{\lambda_i(\mathbf{v}_R)\}_{2 \leq i \leq n}$. Dans le produit scalaire (8.16), $l_1(\mathbf{v}_R)$ désigne le vecteur propre à gauche de cette même matrice, associé à la valeur propre $\lambda_1(\mathbf{v}_R)$.

Soulignons que les conditions (8.14) et (8.16) sont indépendantes. En ce sens, la satisfaction des conditions géométriques de Lax ne suffit pas. La violation de la condition (8.16) se traduit par la non unicité de la solution du problème de Riemann et est liée au phénomène de décomposition spontanée de l'onde de choc en plusieurs ondes d'amplitude comparable. Nous renvoyons le lecteur à Serre [62] pour cette question dans un cadre abstrait, ainsi qu'aux travaux de Flowles [28] et Menikoff-Plohr [54] dans le cas de la dynamique des gaz.

Remarque 8.1.3. Dans le cadre d'un système hyperbolique conservatif (*i.e.* pour lequel $\mathcal{C}(\mathbf{v}_L, \sigma) = 0$), Majda obtient, outre la condition (8.14), la condition suivante :

$$\Delta = \text{Det}((\mathbf{v}_R - \mathbf{v}_L), r_2(\mathbf{v}_R), \dots, r_n(\mathbf{v}_R)) \neq 0.$$

L'introduction des relations cinétiques, pour définir les relations de saut généralisées, offre donc une extension simple et naturelle dans le cadre non conservatif.

Nous terminons cette section en établissant le théorème (8.1.2). La preuve proposée suit l'argumentation développée par Majda [51].

Dans un premier temps, il convient de remarquer que les deux systèmes linéaires (8.11) et (8.12), faisant l'objet de la condition de couplage (8.13), peuvent être reformulés, via un changement de fonctions inconnues, en deux systèmes d'équations de transport. En effet, par hypothèse, la matrice $\nabla_{\mathbf{v}} \mathbf{F}(\mathbf{v}_L)$ (respectivement $\nabla_{\mathbf{v}} \mathbf{F}(\mathbf{v}_R)$) admet une base de vecteurs propres à gauche $\{l_i(\mathbf{v}_L)\}_{1 \leq i \leq n}$ (respectivement $\{l_i(\mathbf{v}_R)\}_{1 \leq i \leq n}$) associés au spectre réel $\{\lambda_i(\mathbf{v}_L)\}_{1 \leq i \leq n}$ (respectivement $\{\lambda_i(\mathbf{v}_R)\}_{1 \leq i \leq n}$). Dès lors, le produit scalaire de (8.11) par chacun des vecteurs $l_j(\mathbf{v}_L)$, $1 \leq j \leq n$, conduit à introduire les

variables caractéristiques $\alpha_j^L(x, t) = (l_j(\mathbf{v}_L), \mathbf{w}_L)(x, t)$, $1 \leq j \leq n$, pour réexprimer (8.11) sous la forme d'un système d'équations de transport découplées :

$$\begin{cases} \partial_t \alpha_j^L + (\lambda_j(\mathbf{v}_L) - \sigma) \partial_x \alpha_j^L = 0, & \text{si } x < 0, t > 0, \\ \alpha_j^L(x, 0) = (l_j(\mathbf{v}_L), \mathbf{w}_L^0(x)), & \text{pour } j \in \{1, \dots, n\}. \end{cases} \quad (8.17)$$

La même propriété vaut pour (8.12) et conduit à :

$$\begin{cases} \partial_t \alpha_j^R + (\lambda_j(\mathbf{v}_R) - \sigma) \partial_x \alpha_j^R = 0, & \text{si } x > 0, t > 0, \\ \alpha_j^R(x, 0) = (l_j(\mathbf{v}_R), \mathbf{w}_R^0(x)), & \text{pour } j \in \{1, \dots, n\}. \end{cases} \quad (8.18)$$

Nous tirons profit de la forme très particulière de (8.17) (respectivement (8.18)) pour résoudre le problème de couplage linéarisé considéré.

À cette fin, nous avons besoin des brefs rappels suivants, donnant accès à une formule de représentation utile.

Solution d'un demi-problème de Cauchy pour une équation de transport

Considérons le problème de Cauchy suivant, posé dans le demi-plan $\mathbb{R}_{x>0}$:

$$\begin{cases} \partial_t \alpha + \mu \partial_x \alpha = 0, & \text{si } x > 0, t > 0, \\ \alpha(x, 0) = \alpha_0(x), \end{cases} \quad (8.19)$$

où la vitesse de propagation μ est un nombre réel fixé.

L'application de la théorie des caractéristiques, licite pour tout temps $t > 0$ dans ce cadre de transport linéaire, conduit très classiquement aux deux configurations géométriques représentées sur la figure (8.1), dictées par le signe de la vitesse μ . Dans

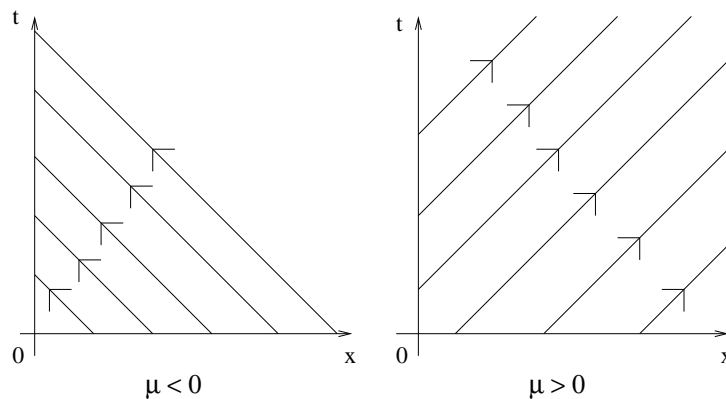


FIG. 8.1 – Théorie des caractéristiques pour une équation de transport linéaire.

le cas $\mu < 0$, aucune condition à la limite ne doit être imposée en $x = 0$: la valeur de la trace de la solution en $x = 0$ étant déterminée à chaque instant t par la formule de représentation :

$$\alpha(x, t) = \alpha_0(x - \mu t).$$

Dans le cas $\mu > 0$, il convient, cette fois, de compléter le problème (8.19) par la donnée d'une condition à la limite en $x = 0$ de la forme :

$$\alpha(0, t) = g(t), \quad (8.20)$$

où $g(t)$ est une fonction à prescrire. Le formule de représentation de la solution est alors conditionnelle selon qu'à l'instant $t > 0$ considéré, la position x vérifie $\mu t - x < 0$ ou $\mu t - x \geq 0$. Dans le premier cas, $\alpha(x, t)$ est dictée par la valeur de la donnée de la condition initiale :

$$\alpha(x, t) = \alpha_0(x - \mu t),$$

alors que dans le second cas, la condition à la limite (8.20) donne la valeur recherchée :

$$\alpha(x, t) = g\left(\frac{\mu t - x}{\mu}\right).$$

Ces rappels sont triviaux mais utiles à la suite. Il est très simple de transposer ces observations au cas d'un problème de Cauchy pour une équation de transport, posé dans le demi-plan $\mathbb{R}_{x < 0}$: le cas $\mu < 0$ exige l'imposition d'une condition à la limite, contrairement au cas $\mu > 0$.

Reformulation du problème de couplage linéarisé

Nous exploitons les rappels élémentaires précédents de sorte à préciser les véritables inconnues du problème de Cauchy (8.17-8.18)-(8.13). Il convient, en effet, de distinguer le signe de chaque vitesse de transport dans les deux demi-problèmes de Cauchy (8.17) et (8.18), respectivement posés dans $\mathbb{R}_{x < 0}$ et $\mathbb{R}_{x > 0}$, pour dénombrer les conditions aux limites à imposer pour chaque demi-problème respectif. Ces conditions aux limites ne peuvent pas être arbitraires mais au contraire doivent résulter de la condition de couplage (8.13).

En considérant, dans un premier temps, le demi-problème de Cauchy (8.17) dans le demi-plan $\mathbb{R}_{x < 0}$:

$$\begin{cases} \partial_t \alpha_j^L + (\lambda_j(\mathbf{v}_L) - \sigma) \partial_x \alpha_j^L = 0, & \text{si } x < 0, t > 0, \\ \alpha_j^L(x, 0) = \alpha_j^{0,L}(x) = (l_j(\mathbf{v}_L), \mathbf{w}_L^0(x)), & \text{pour } j \in \{1, \dots, n\}, \end{cases}$$

nous rappelons que la définition de la solution 1-choc repose sur l'existence du profil de choc visqueux ayant conduit à imposer, par le théorème de la variété centrale, la condition nécessaire :

$$\sigma < \lambda_1(\mathbf{v}_L).$$

Puisque $\lambda_1(\mathbf{v}_L) < \lambda_j(\mathbf{v}_L)$, $j \in \{2, \dots, n\}$, nous avons $\lambda_j(\mathbf{v}_L) - \sigma > 0$ pour tout j dans $\{1, \dots, n\}$, de sorte qu'aucune des équations de transport composant le demi-problème (8.11) ne nécessite l'imposition de conditions aux limites. Nous avons donc la formule de représentation suivante :

$$\mathbf{w}_L(x, t) = \sum_{j=1}^n \alpha_j^{0,L}(x - (\lambda_j(\mathbf{v}_L) - \sigma)t) r_j(\mathbf{v}_L). \quad (8.21)$$

Il en va différemment du demi-problème de Cauchy (8.18) dans le demi-plan $\mathbb{R}_{x>0}$. En effet, l'analyse de l'existence du profil de choc visqueux impose, via le théorème de la variété centrale :

$$\lambda_1(\mathbf{v}_R) - \sigma < 0,$$

de sorte qu'au moins une condition à la limite doit être fournie. Le nombre précis de conditions aux limites dépend de la nature compressive ou surcompressive du profil étudié. Distinguons les deux cas de sorte à faire émerger la nécessité des conditions géométriques de Lax.

Ainsi, supposons respectivement leur satisfaction :

$$\lambda_2(\mathbf{v}_R) - \sigma > 0, \tag{8.22}$$

de sorte que $\lambda_j(\mathbf{v}_R) - \sigma > 0$, $j \in \{3, \dots, n\}$: sous cette hypothèse, il faut trouver $(n - 1)$ conditions aux limites :

$$\alpha_j^R(0, t) = g_j^R(t), \quad 2 \leq j \leq n.$$

Inversement, supposons la violation des conditions de Lax selon :

$$\lambda_2(\mathbf{v}_R) < \sigma < \lambda_3(\mathbf{v}_R) < \dots < \lambda_n(\mathbf{v}_R), \tag{8.23}$$

de sorte que seulement $(n - 2)$ conditions aux limites doivent être imposées :

$$\alpha_j^R(0, t) = g_j^R(t), \quad 3 \leq j \leq n.$$

Ainsi que l'a indiqué la figure (8.1), l'analogie de la formule de représentation (8.21) pour $\mathbf{w}_R(x, t)$ dépend, à l'instant t considéré, du signe de $x - (\lambda_j(\mathbf{v}_R) - \sigma)t$ avec $x > 0$. Afin d'aller au cas le plus intéressant, supposons qu'à l'instant t considéré, x est choisi suffisamment proche de $x = 0$, de sorte que toutes les conditions aux limites à imposer soient actives :

$$\mathbf{w}_R(x, t) = \sum_{j=1}^p \alpha_j^{0,R}(x - (\lambda_j(\mathbf{v}_R) - \sigma)t) r_j(\mathbf{v}_R) + \sum_{j=p+1}^n g_j^R \left(t - \frac{x}{\lambda_j(\mathbf{v}_R) - \sigma} \right) r_j(\mathbf{v}_R), \tag{8.24}$$

avec $p = 1$, lorsque les conditions de Lax sont vraies, et $p = 2$ sinon. Munis des formules de représentation (8.21) et (8.24), nous exploitons la condition de couplage (8.13) afin de déterminer les $(n - p)$ conditions aux limites requises ainsi que l'inconnue $\varphi'(t)$:

$$\begin{aligned} & \sum_{j=1}^p \alpha_j^{0,R}(x - (\lambda_j(\mathbf{v}_R) - \sigma)t) (\lambda_j(\mathbf{v}_R) - \sigma) r_j(\mathbf{v}_R) \\ & \quad + \\ & \sum_{j=p+1}^n g_j^R \left(t - \frac{x}{\lambda_j(\mathbf{v}_R) - \sigma} \right) (\lambda_j(\mathbf{v}_R) - \sigma) r_j(\mathbf{v}_R) \\ & \quad - \\ & \sum_{j=1}^n \alpha_j^{0,L}(x - (\lambda_j(\mathbf{v}_L) - \sigma)t) \left((\lambda_j(\mathbf{v}_L) - \sigma) Id + \nabla_{\mathbf{v}} \mathcal{C}(\mathbf{v}_L, \sigma) \right) r_j(\mathbf{v}_L) \\ & \quad - \\ & \varphi'(t) ((\mathbf{v}_R - \mathbf{v}_L) + \partial_s \mathcal{C}(\mathbf{v}_L, \sigma)) \\ & \quad = \\ & 0 \end{aligned}$$

Il s'agit donc d'exhiber les $(n - p)$ conditions aux limites g_j^R ainsi que $\varphi'(t)$, des n relations suivantes :

$$\begin{aligned}
& \sum_{j=p+1}^n g_j^R \left(t - \frac{x}{\lambda_j(\mathbf{v}_R) - \sigma} \right) (\lambda_j(\mathbf{v}_R) - \sigma) r_j(\mathbf{v}_R) \\
& \quad - \\
& \quad \varphi'(t) ((\mathbf{v}_R - \mathbf{v}_L) + \partial_s \mathcal{C}(\mathbf{v}_L, \sigma)) \\
& \quad = \\
& \sum_{j=1}^n \alpha_j^{0,L} (x - (\lambda_j(\mathbf{v}_L) - \sigma)t) \left((\lambda_j(\mathbf{v}_L) - \sigma) Id + \nabla_{\mathbf{v}} \mathcal{C}(\mathbf{v}_L, \sigma) \right) r_j(\mathbf{v}_L) \\
& \quad - \\
& \sum_{j=1}^p \alpha_j^{0,R} (x - (\lambda_j(\mathbf{v}_R) - \sigma)t) (\lambda_j(\mathbf{v}_R) - \sigma) r_j(\mathbf{v}_R),
\end{aligned} \tag{8.25}$$

où le second membre est entièrement connu. Pour qu'en règle générale (*i.e.* pour toutes données \mathbf{w}_L^0 et \mathbf{w}_R^0 dans la donnée initiale perturbée (8.4)), il existe $(n - p + 1)$ solutions aux n relations (8.25), il faut que $p = 1$, d'où la nécessité des conditions géométriques de Lax exprimées en (8.14) dans le théorème (8.1.2).

Ce point étant acquis, il convient désormais d'assurer l'unicité des n inconnues, représentées ici par $(\{g_j^R\}_{2 \leq j \leq n}, \varphi')$, en tant que solution du système linéaire (8.25). La condition du déterminant de Majda, formulée en (8.15), s'en suit.

Afin d'exprimer l'équivalence de cette condition avec la non nullité du produit scalaire :

$$(l_1(\mathbf{v}_R), (\mathbf{v}_R - \mathbf{v}_L) + \partial_s \mathcal{C}(\mathbf{v}_L, \sigma)) \neq 0,$$

il convient de rappeler que $\lambda_1(\mathbf{v}_R) \neq \lambda_j(\mathbf{v}_R)$, pour $j \in \{2, \dots, n\}$. Des arguments classiques montrent alors (voir par exemple [32]) :

$$(l_1(\mathbf{v}_R), r_j(\mathbf{v}_R)) = 0, \quad j \in \{2, \dots, n\}.$$

Dès lors, pour que le déterminant de Majda (8.15) soit non nul, il est équivalent d'exiger du vecteur $(\mathbf{v}_R - \mathbf{v}_L) + \partial_s \mathcal{C}(\mathbf{v}_L, \sigma)$ de n'être pas colinéaire aux $(n - 1)$ vecteurs $\{r_j(\mathbf{v}_R)\}_{2 \leq j \leq n}$. D'où la condition (8.16) attendue.

8.1.3 Prise en compte d'un changement de variables

Nous réexaminons brièvement la question de la stabilité structurelle d'un choc droit à l'aide d'un changement de variables non conservatif $\mathbf{v} \in \Omega_{\mathbf{v}} \rightarrow \mathbf{u}(\mathbf{v}) \in \Omega_{\mathbf{u}}$ pour décrire l'évolution de la solution choc perturbée dans ses zones de régularité, *i.e.* en dehors de la position choc perturbée. Notre objectif est d'établir l'analogie suivant de la condition de Majda étendue (8.16) :

$$\left({}^t(D_{\mathbf{u}}^{-1} \mathbf{v})(\mathbf{u}_R) \tilde{l}_1(\mathbf{u}_R), \mathbf{v}_R - \mathbf{v}_L + \partial_s \mathcal{C}(\mathbf{v}_L, s) \Big|_{s=\sigma} \right) \neq 0, \tag{8.26}$$

où $\tilde{l}_1(\mathbf{u}_R)$ désigne un vecteur propre à gauche de la matrice :

$$\tilde{\mathcal{A}}(\mathbf{u}_R) = D_{\mathbf{u}}^{-1} \mathbf{v}(\mathbf{u}_R) \nabla \mathbf{F}(\mathbf{v}_R) D_{\mathbf{u}} \mathbf{v}(\mathbf{u}_R),$$

associé à la valeur propre $\lambda_1(\mathbf{u}_R)$. L'intérêt de la condition (8.26) est que la détermination du vecteur propre $\tilde{l}_1(\mathbf{u}_R)$ peut être rendue notablement plus simple que celle du vecteur propre $l_1(\mathbf{v}_R)$ impliqué dans (8.16), pour un choix de changement de variables

rendant la matrice $\tilde{\mathcal{A}}(\mathbf{u}_R)$ très creuse.

Afin d'exhiber la condition (8.26), nous recherchons dans ce paragraphe la solution choc perturbée sous la forme :

$$\mathbf{u}^\epsilon(\hat{x}, \hat{t}) = \begin{cases} \mathbf{u}_L^\epsilon(\hat{x}, \hat{t}), & \text{si } \hat{x} < 0, \\ \mathbf{u}_R^\epsilon(\hat{x}, \hat{t}), & \text{si } \hat{x} > 0, \end{cases}$$

où \mathbf{u}_L^ϵ et \mathbf{u}_R^ϵ sont deux fonctions très régulières des variables \hat{x} et \hat{t} permettant de redresser le choc perturbé en $\hat{x} = 0$ pour tout temps. En omettant les notations chapeaux, les fonctions \mathbf{u}_L^ϵ et \mathbf{u}_R^ϵ doivent être solutions d'un problème couplé à frontière fixe déduit de (8.8), (8.9) et (8.10), et constitué à gauche de :

$$\begin{cases} \partial_t \mathbf{v}(\mathbf{u}_L^\epsilon) + \left(\nabla_{\mathbf{v}} \mathbf{F}(\mathbf{v}(\mathbf{u}_L^\epsilon)) - \Phi'^\epsilon(t) Id \right) \partial_x \mathbf{v}(\mathbf{u}_L^\epsilon) = 0, & \text{si } x < 0, t > 0, \\ \mathbf{u}_L^\epsilon(x, 0) = \mathbf{u}_{0L}^\epsilon(x) = \mathbf{u}(\mathbf{v}_{0L}^\epsilon(x)), \end{cases} \quad (8.27)$$

et à droite de :

$$\begin{cases} \partial_t \mathbf{v}(\mathbf{u}_R^\epsilon) + \left(\nabla_{\mathbf{v}} \mathbf{F}(\mathbf{v}(\mathbf{u}_R^\epsilon)) - \Phi'^\epsilon(t) Id \right) \partial_x \mathbf{v}(\mathbf{u}_R^\epsilon) = 0, & \text{si } x > 0, t > 0, \\ \mathbf{u}_R^\epsilon(x, 0) = \mathbf{u}_{0R}^\epsilon(x) = \mathbf{u}(\mathbf{v}_{0R}^\epsilon(x)), \end{cases} \quad (8.28)$$

avec pour condition de couplage :

$$\begin{aligned} -\Phi'^\epsilon(t) (\mathbf{v}(\mathbf{u}_R^\epsilon(0^+, t)) - \mathbf{v}(\mathbf{u}_L^\epsilon(0^-, t))) + (\mathbf{F}(\mathbf{v}(\mathbf{u}_R^\epsilon(0^+, t))) - \mathbf{F}(\mathbf{v}(\mathbf{u}_L^\epsilon(0^-, t)))) \\ = \\ \mathcal{C}(\mathbf{v}(\mathbf{u}_L^\epsilon(0^-, t)), \Phi'^\epsilon(t)) \end{aligned} \quad (8.29)$$

En introduisant la matrice $\tilde{\mathcal{A}}(\mathbf{u}) = D_{\mathbf{u}}^{-1} \mathbf{v}(\mathbf{u}) \nabla \mathbf{F}(\mathbf{v}) D_{\mathbf{u}} \mathbf{v}(\mathbf{u})$, semblable à $\nabla_{\mathbf{v}} \mathbf{F}(\mathbf{v})$, nous réexprimons de manière équivalente le problème (8.27) sous la forme :

$$\begin{cases} \partial_t \mathbf{u}_L^\epsilon + \left(\tilde{\mathcal{A}}(\mathbf{u}_L^\epsilon) - \Phi'^\epsilon(t) Id \right) \partial_x \mathbf{u}_L^\epsilon = 0, & \text{si } x < 0, t > 0, \\ \mathbf{u}_L^\epsilon(x, 0) = \mathbf{u}_{0L}^\epsilon(x), \end{cases} \quad (8.30)$$

et (8.28) sous la forme :

$$\begin{cases} \partial_t \mathbf{u}_R^\epsilon + \left(\tilde{\mathcal{A}}(\mathbf{u}_R^\epsilon) - \Phi'^\epsilon(t) Id \right) \partial_x \mathbf{u}_R^\epsilon = 0, & \text{si } x > 0, t > 0, \\ \mathbf{u}_R^\epsilon(x, 0) = \mathbf{u}_{0R}^\epsilon(x). \end{cases} \quad (8.31)$$

La version linéarisée de ce problème de couplage s'obtient en introduisant le développement suivant :

$$\begin{cases} \mathbf{u}_L^\epsilon(x, t) = \mathbf{u}_L + \epsilon \mathbf{w}_L(x, t) + \dots, \\ \mathbf{u}_R^\epsilon(x, t) = \mathbf{u}_R + \epsilon \mathbf{w}_R(x, t) + \dots, \\ \Phi^\epsilon(t) = \sigma t + \epsilon \varphi(t) + \dots, \end{cases}$$

où par définition $\mathbf{u}_L = \mathbf{u}(\mathbf{v}_L)$ et $\mathbf{u}_R = \mathbf{u}(\mathbf{v}_R)$. Avec un léger abus de notation, nous continuons à désigner par \mathbf{w}_L et \mathbf{w}_R les corrections au premier ordre en ϵ .

Les inconnues $\mathbf{w}_L(x, t)$, $\mathbf{w}_R(x, t)$ et $\varphi(t)$ du problème de couplage linéarisé en $\epsilon = 0$, doivent être solutions de :

$$\begin{cases} \partial_t \mathbf{w}_L + \left(\tilde{\mathcal{A}}(\mathbf{u}_L) - \sigma Id \right) \partial_x \mathbf{w}_L = 0, & \text{si } x < 0, t > 0, \\ \mathbf{w}_L(x, 0) = \mathbf{w}_0^R(x), \end{cases} \quad (8.32)$$

$$\begin{cases} \partial_t \mathbf{w}_R + (\tilde{\mathcal{A}}(\mathbf{u}_R) - \sigma Id) \partial_x \mathbf{w}_R = 0, & \text{si } x > 0, t > 0, \\ \mathbf{w}_R(x, 0) = \mathbf{w}_0^R(x), \end{cases} \quad (8.33)$$

avec la condition de couplage :

$$\begin{aligned} & -\varphi'(t) (\mathbf{v}_R - \mathbf{v}_L) \\ & + \\ & (\nabla_{\mathbf{v}} \mathbf{F}(\mathbf{v}_R) - \sigma Id) D_{\mathbf{u}} \mathbf{v}(\mathbf{u}_R) \mathbf{w}_R(0^+, t) - (\nabla_{\mathbf{v}} \mathbf{F}(\mathbf{v}_L) - \sigma Id) D_{\mathbf{u}} \mathbf{v}(\mathbf{u}_L) \mathbf{w}_L(0^-, t) \\ & = \\ & \nabla_{\mathbf{v}} \mathcal{C}(\mathbf{v}_L, \sigma) D_{\mathbf{u}} \mathbf{v}(\mathbf{u}_L) \mathbf{w}_L(0^-, t) + \varphi'(t) \partial_s \mathcal{C}(\mathbf{v}_L, \sigma). \end{aligned} \quad (8.34)$$

De nouveau, il convient de remarquer que le système linéaire (8.32) peut être ramené à un système d'équations de transport découplées. En effet, la matrice $\tilde{\mathcal{A}}(\mathbf{u}_L)$ est diagonalisable sur \mathbb{R} puisqu'elle est semblable à $\nabla_{\mathbf{v}} \mathbf{F}(\mathbf{v}(\mathbf{u}_L))$. Dès lors, en introduisant les variables caractéristiques $\alpha_j^L(x, t) = (\tilde{l}_j(\mathbf{u}_L), \mathbf{w}_L)(x, t)$, $1 \leq j \leq n$, où les $\{\tilde{l}_i(\mathbf{u}_L)\}_{1 \leq i \leq n}$ constituent une base de vecteurs propres à gauche de $\tilde{\mathcal{A}}(\mathbf{u}_L)$, (8.32) peut être réexprimée selon :

$$\begin{cases} \partial_t \alpha_j^L + (\lambda_j(\mathbf{u}_L) - \sigma) \partial_x \alpha_j^L = 0, & \text{si } x < 0, t > 0, \\ \alpha_j^L(x, 0) = (\tilde{l}_j(\mathbf{u}_L), \mathbf{w}_0^L(x)), & \text{pour } j \in \{1, \dots, n\}, \end{cases}$$

où $\lambda_j(\mathbf{u}_L)$ désigne la j -ième valeur propre de $\tilde{\mathcal{A}}(\mathbf{u}_L)$ (coïncidant bien sûr avec la j -ième valeur propre $\lambda_j(\mathbf{v}_L)$ de $\nabla_{\mathbf{v}} \mathbf{F}(\mathbf{v}_L)$).

Des arguments identiques s'appliquent à (8.33) et conduisent à :

$$\begin{cases} \partial_t \alpha_j^R + (\lambda_j(\mathbf{u}_R) - \sigma) \partial_x \alpha_j^R = 0, & \text{si } x > 0, t > 0, \\ \alpha_j^R(x, 0) = (\tilde{l}_j(\mathbf{u}_R), \mathbf{w}_0^R(x)), & \text{pour } j \in \{1, \dots, n\}, \end{cases}$$

où $\lambda_j(\mathbf{u}_R)$ coïncide avec la j -ième valeur propre $\lambda_j(\mathbf{v}_R)$ de la matrice jacobienne $\nabla_{\mathbf{v}} \mathbf{F}(\mathbf{v}_R)$.

En supposant que les conditions géométriques de Lax (8.14) sont satisfaites puisqu'elles ont déjà été démontrées nécessaires, nous avons :

$$\lambda_j(\mathbf{u}_L) - \sigma > 0, \quad j \in \{1, \dots, n\},$$

et

$$\lambda_1(\mathbf{u}_R) < \sigma < \lambda_2(\mathbf{u}_R) < \dots < \lambda_n(\mathbf{u}_R).$$

De manière totalement analogue au précédent paragraphe, nous déduisons que $\mathbf{w}_L(x, t)$ est entièrement fixé par le choix de la perturbation dans la donnée initiale :

$$\mathbf{w}_L(x, t) = \sum_{j=1}^n \alpha_j^{0,L} (x - (\lambda_j(\mathbf{u}_L) - \sigma)t) \tilde{r}_j(\mathbf{u}_L),$$

où $\{\tilde{r}_j(\mathbf{u}_L)\}_{1 \leq j \leq n}$ désigne une base de vecteurs propres à droite de $\tilde{\mathcal{A}}(\mathbf{u}_L)$. En revanche, la formule de représentation de $\mathbf{w}_R(x, t)$:

$$\mathbf{w}_R(x, t) = \alpha_1^{0,R} (x - (\lambda_1(\mathbf{u}_R) - \sigma)t) \tilde{r}_1(\mathbf{u}_R) + \sum_{j=2}^n g_j^R \left(t - \frac{x}{\lambda_j(\mathbf{u}_R) - \sigma} \right) \tilde{r}_j(\mathbf{u}_R), \quad (8.35)$$

écrite ici pour x suffisamment proche de $x = 0$ à l'instant t considéré, requiert la détermination de $(n - 1)$ fonctions $\{g_j^R\}_{2 \leq j \leq n}$ pour définir entièrement $\mathbf{w}_R(x, t)$. Ces $(n - 1)$ fonctions inconnues, ainsi que $\varphi'(t)$, doivent de nouveau pouvoir être déterminées de manière unique par la condition de couplage linéarisée (8.34). Avant d'injecter la formule de représentation (8.35), réexprimons cette condition de couplage après multiplication par $D_{\mathbf{u}}^{-1}\mathbf{v}(\mathbf{u}_R)$ pour obtenir :

$$\begin{aligned} & \left(\tilde{\mathcal{A}}(\mathbf{u}_R) - \sigma Id \right) \mathbf{w}_R(0^+, t) - \varphi'(t) D_{\mathbf{u}}^{-1}\mathbf{v}(\mathbf{u}_R) (\mathbf{v}_R - \mathbf{v}_L + \partial_s \mathcal{C}(\mathbf{v}_L, \sigma)) \\ & \quad = \\ & \quad D_{\mathbf{u}}^{-1}\mathbf{v}(\mathbf{u}_R) \nabla_{\mathbf{v}} \mathcal{C}(\mathbf{v}_L, \sigma) D_{\mathbf{u}} \mathbf{v}(\mathbf{u}_L) \mathbf{w}_L(0^-, t) \\ & \quad + \\ & \quad D_{\mathbf{u}}^{-1}\mathbf{v}(\mathbf{u}_R) (\nabla \mathbf{F}(\mathbf{v}_L) - \sigma Id) D_{\mathbf{u}} \mathbf{v}(\mathbf{u}_L) \mathbf{w}_L(0^-, t), \end{aligned}$$

où le membre de droite est entièrement connu. En injectant (8.35) dans le précédent système d'équations, les inconnues $\{g_j^R\}_{2 \leq j \leq n}$ et φ' en sont solutions uniques si et seulement si la condition d'inversibilité suivante a lieu :

$$Det \left(D_{\mathbf{u}}^{-1}\mathbf{v}(\mathbf{u}_R) (\mathbf{v}_R - \mathbf{v}_L + \partial_s \mathcal{C}(\mathbf{v}_L, \sigma)), \tilde{r}_2(\mathbf{u}_R), \dots, \tilde{r}_n(\mathbf{u}_R) \right) \neq 0. \quad (8.36)$$

Puisque $\lambda_1(\mathbf{u}_R)$ est valeur propre simple de $\tilde{\mathcal{A}}(\mathbf{u}_R)$, nous avons de nouveau l'égalité $(\tilde{l}_1(\mathbf{u}_R), \tilde{r}_j(\mathbf{u}_R)) = 0$ pour $j \in \{2, \dots, n\}$, de sorte que la condition (8.36) est équivalente à la non nullité du produit scalaire :

$$\left(\tilde{l}_1(\mathbf{u}_R), D_{\mathbf{u}}^{-1}\mathbf{v}(\mathbf{u}_R) (\mathbf{v}_R - \mathbf{v}_L + \partial_s \mathcal{C}(\mathbf{v}_L, \sigma)) \right) \neq 0,$$

qui n'est autre que la condition de stabilité structurelle attendue (8.26) à une transposition près de la matrice $D_{\mathbf{u}}^{-1}\mathbf{v}(\mathbf{u}_R)$.

8.1.4 Stabilité structurelle et modèle RSM

Nous soulignons en quoi la théorie précédemment développée s'applique aux modèles RSM étudiés dans cette thèse. Cette théorie, bâtie sur les fonctions cinétiques, repose *a priori* sur l'existence d'un changement de variable permettant de réexprimer un système du premier ordre non conservatif sous la forme (8.1). Or pour les modèles RSM, un tel changement de variable ne vaut que si la composante R_{12} du tenseur de Reynolds ne change pas de signe dans la solution. C'est précisément le cas d'une solution choc. Concernant le cas d'une solution choc perturbée par le choix d'un petit paramètre ϵ dans la donnée initiale (8.4), la théorie de la stabilité structurelle énonce des conditions assurant que cette solution perturbée peut être rendue arbitrairement proche de la solution choc exacte, en choisissant le paramètre de perturbation ϵ arbitrairement petit dans (8.4). Les formules de représentation des corrections du premier ordre $\mathbf{w}_L(x, t)$ et $\mathbf{w}_R(x, t)$, obtenues au titre d'une linéarisation du problème en $\epsilon = 0$, attestent de la bornitude de ces fonctions, au demeurant très régulières. En ce sens, et quitte à choisir ϵ suffisamment petit dans la donnée initiale (8.4) de sorte à garantir que $(R_{12})_0^\epsilon(x)$ possède le même signe que R_{12}^L (et donc que R_{12}^R), nous sommes assurés que, quitte à choisir ϵ encore plus petit mais non nul dans (8.4), le signe de $R_{12}^\epsilon(x, t)$ restera constant pour tout temps (tout au moins au titre de l'analyse linéarisée). L'analyse de la stabilité structurelle du choc droit peut donc être légitimement appliquée aux modèles RSM.

8.2 Application au cadre isotherme avec correction de Ristorcelli

Nous analysons dans cette section la stabilité structurelle des solutions 1-onde de choc du modèle RSM isotherme avec correction de Ristorcelli. L'amplitude de l'échelle de temps de Ristorcelli est choisie de manière à satisfaire simultanément les quatre propriétés (5.100), (5.101) et (5.102) mises en avant dans le chapitre 5 consacré au cadre isotherme. Ici, deux de ces propriétés jouent un rôle central. Dans un premier temps, l'absence de surcompression (première inégalité de la propriété (5.100)) dans les profils visqueux garantit la satisfaction des conditions géométriques de Lax, indispensables à la stabilité structurelle des solutions chocs. Il importe donc d'examiner la validité de la seconde condition (8.16) de non annulation du déterminant de Majda (ou de manière équivalente (8.26) dans un jeu de variables à préciser). La satisfaction de cette condition fait jouer un rôle crucial à la propriété (5.102) de décroissance du taux de compression de sortie, relativement au nombre de Mach M , à β fixé.

8.2.1 Condition de stabilité structurelle

De manière à fixer les changements de variables utilisés dans cette étude, nous rappelons que les relations de saut généralisées introduites au paragraphe (5.4) du chapitre 5 s'expriment naturellement dans l'inconnue :

$$\mathbf{v} = (\rho, \rho u, \rho v, \rho \mathcal{I}, \rho E_t, \rho \mathcal{W}).$$

L'étude des vecteurs propres requis dans l'écriture équivalente (8.16) du déterminant de Majda, s'avère particulièrement agréable avec le changement de variable suivant :

$$\mathbf{u} = (\rho, u, v, \mathcal{I}, \mathcal{V}, \mathcal{W}) \rightarrow \mathbf{v}(\mathbf{u}) = (\rho, \rho u, \rho v, \rho \mathcal{I}, \rho E_t, \rho \mathcal{W}), \quad (8.37)$$

où nous rappelons les définitions suivantes (voir le chapitre 5) :

$$\mathcal{V} = \frac{R_{12}\tau^2}{\sqrt{\mathcal{I}}}, \quad \rho E_t = \rho \frac{v^2 + \mathcal{V}^2}{2}. \quad (8.38)$$

Soulignons que le changement de variable inverse $\mathbf{v} \rightarrow \mathbf{u}(\mathbf{v})$ nécessite la détermination univoque de \mathcal{V} à partir de ρ , ρv et ρE_t . Conformément au paragraphe précédent, une telle détermination est rendue possible en considérant des solutions chocs perturbées pour un paramètre de perturbation ϵ choisi suffisamment petit, de sorte que le signe de $R_{12}(x, t)$ et donc celui de $\mathcal{V}(x, t)$ par la formule (8.38), coïncide avec celui de la tension de Reynolds R_{12}^L dans le choc non perturbé. Pour fixer les idées, et sans restriction (voir le lemme (5.4.1) du chapitre 5), nous supposons $R_{12}^L > 0$, de sorte que $\mathcal{V}(\mathbf{v})$ trouve la formule suivante :

$$\mathcal{V}(\mathbf{v}) = +\sqrt{2E_t - v^2}. \quad (8.39)$$

Avec le choix du changement de variable (8.37), nous devons, conformément à la théorie développée dans ce chapitre, étudier les conditions de non annulation du produit scalaire suivant :

$$\Delta_{1D} = \left({}^t(D_{\mathbf{u}}^{-1}\mathbf{v})(\mathbf{u}_R) \tilde{l}_1(\mathbf{u}_R), \mathbf{v}_R - \mathbf{v}_L + \partial_s \mathcal{C}(\mathbf{v}_L, s) \Big|_{s=\sigma} \right). \quad (8.40)$$

L'indice $1D$ sert ici à différencier le produit scalaire ci-dessus, obtenu pour la stabilité structurelle, avec celui que nous étudierons dans le prochain chapitre concernant la stabilité multidimensionnelle. Afin d'explicitier les expressions composant ce produit scalaire, nous rappelons qu'un état \mathbf{v}_L et une vitesse de propagation σ étant fixés convenablement, il existe une unique solution 1-onde de choc destinée à être perturbée :

$$\mathbf{v}(x, t) = \mathbf{v}_L + (\mathbf{v}_R - \mathbf{v}_L)H(x - \sigma t),$$

où l'état \mathbf{v}_R est par construction solution des relations de Rankine-Hugoniot généralisées suivantes :

$$\begin{cases} -\sigma(\rho_R - \rho_L) + ((\rho u)_R - (\rho u)_L) = 0, \\ -\sigma((\rho u)_R - (\rho u)_L) + ((\rho u^2 + \rho T_0 + \rho^3 \mathcal{I})_R - (\rho u^2 + \rho T_0 + \rho^3 \mathcal{I})_L) = 0, \\ -\sigma((\rho v)_R - (\rho v)_L) + ((\rho uv + \rho^2 \sqrt{\mathcal{I}} \mathcal{V})_R - (\rho uv + \rho^2 \sqrt{\mathcal{I}} \mathcal{V})_L) = 0, \\ -\sigma((\rho \mathcal{I})_R - (\rho \mathcal{I})_L) + ((\rho u \mathcal{I})_R - (\rho u \mathcal{I})_L) = \mathcal{C}_I(\mathbf{v}_L, \sigma), \\ -\sigma((\rho E_t)_R - (\rho E_t)_L) + ((\rho u E_t + \rho^2 \sqrt{\mathcal{I}} \mathcal{V} v)_R - (\rho u E_t + \rho^2 \sqrt{\mathcal{I}} \mathcal{V} v)_L) = \mathcal{C}_{E_t}(\mathbf{v}_L, \sigma), \\ -\sigma((\rho \mathcal{W})_R - (\rho \mathcal{W})_L) + ((\rho u \mathcal{W})_R - (\rho u \mathcal{W})_L) = 0. \end{cases} \quad (8.41)$$

Par convenance dans les calculs à venir, et contrairement au paragraphe (5.4) du chapitre 5, ces relations sont écrites ici sous forme dimensionnée. La relation précise entre les définitions des fonctions cinétiques dimensionnées $\mathcal{C}_I(\mathbf{v}_L, \sigma)$, $\mathcal{C}_{E_t}(\mathbf{v}_L, \sigma)$ et leurs homologues adimensionnées $\kappa_{\mathcal{I}}(\beta, M)$ et $\kappa_{E_t}(\alpha, \beta, M)$ telles que proposées au chapitre 5 (voir formule (5.114) et (5.116)), sera précisée en temps utile.

Le vecteur de \mathbb{R}^n , $\partial_s \mathcal{C}(\mathbf{v}_L, s) \Big|_{s=\sigma}$, rentrant dans le produit scalaire (8.40), trouve donc la définition formelle suivante :

$$\partial_s \mathcal{C}(\mathbf{v}_L, s) \Big|_{s=\sigma} = (0, 0, 0, \partial_s \mathcal{C}_{\mathcal{I}}(\mathbf{v}_L, s) \Big|_{s=\sigma}, \partial_s \mathcal{C}_{E_t}(\mathbf{v}_L, s) \Big|_{s=\sigma}, 0). \quad (8.42)$$

Or, des calculs proposés à la fin de ce paragraphe conduisent à l'évaluation dimensionnée suivante du vecteur ${}^t(D_{\mathbf{u}}^{-1} \mathbf{v})(\mathbf{u}_R) \tilde{l}_1(\mathbf{u}_R)$:

$${}^t(D_{\mathbf{u}}^{-1} \mathbf{v})(\mathbf{u}_R) \tilde{l}_1(\mathbf{u}_R) = \begin{pmatrix} \frac{c_R^2}{\rho_R^3} + \frac{c_R u_R}{\rho_R^3} - \frac{\mathcal{I}_R}{\rho_R} \\ -\frac{c_R}{\rho_R^3} \\ 0 \\ \frac{1}{\rho_R} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (8.43)$$

Ainsi, et de manière remarquable, seule la dérivée en σ de la fonction cinétique $\mathcal{C}_{\mathcal{I}}(\mathbf{v}_L, \sigma)$, *i.e.* : $\partial_s \mathcal{C}_{\mathcal{I}}(\mathbf{v}_L, s) \Big|_{s=\sigma}$, contribue au produit scalaire (8.40). Armés de cette constatation, nous sommes en mesure de proposer une formulation dimensionnée du produit scalaire (8.40).

À cette fin, associons à l'état \mathbf{v}_L et à la vitesse σ prescrite, les nombres adimensionnels usuels :

$$M = M_c(\mathbf{v}_L) = \frac{u_L - \sigma}{c_L}, \quad \beta = \frac{a_L}{c_L},$$

respectivement nombre de Mach et nombre de Mach turbulent. Nous aurons également besoin de faire référence au nombre de Mach \mathcal{M}_R , évalué sur l'état de sortie \mathbf{v}_R :

$$\mathcal{M}_R = M_c(\mathbf{v}_R) = \frac{u_R - \sigma}{c_R}, \quad 0 < \mathcal{M}_R < 1. \quad (8.44)$$

La discussion proposée au paragraphe (5.6.1) du chapitre 5, montre que la forme adimensionnée $\kappa_{\mathcal{I}}$ de la fonction cinétique $\mathcal{C}_{\mathcal{I}}$ ne dépend que de ces deux nombres, et nous avons la relation :

$$\mathcal{C}_{\mathcal{I}}(\mathbf{v}_L, \sigma) = m\tau_L^2 a_L^2 \kappa_{\mathcal{I}}(\beta, M), \quad (8.45)$$

où $m = \rho_L(u_L - \sigma)$. Rappelons alors que, selon la formule (5.114), la fonction cinétique $\kappa_{\mathcal{I}}(\beta, M)$ trouve la définition suivante :

$$\kappa_{\mathcal{I}}(\beta, M) = (\eta_R^3(\beta, M)\psi(\eta_R(\beta, M)) - 1). \quad (8.46)$$

Ici, $\eta_R(\beta, M)$ désigne le taux de compression en sortie du profil dont nous rappelons qu'il satisfait nécessairement à :

$$0 < \eta_R(\beta, M) < 1, \quad (8.47)$$

pour tous les β et M considérés. Ensuite dans (8.46), la fonction ψ désigne la loi de production de turbulence longitudinale présidant au choix de l'amplitude de l'échelle de temps de Ristorcelli qui, pour être admissible, exige la satisfaction des conditions :

$$\frac{1}{\eta^3} < \psi(\eta) < \min\left(\frac{\eta}{\eta_c^4(\beta, M)}, \frac{1}{\eta^3}\right). \quad (8.48)$$

Nous renvoyons le lecteur au paragraphe de synthèse (5.5.5) du chapitre 5. En arguant des identités $\partial_\sigma m = -\rho_L$ et $\partial_\sigma M = -\frac{1}{c_L}$, nous obtenons l'expression de la dérivée requise :

$$\partial_s \mathcal{C}_{\mathcal{I}}(\mathbf{v}_L, s) \Big|_{s=\sigma} = -\tau_L^2 a_L^2 \left(\kappa_{\mathcal{I}}(\beta, M) + M \frac{\partial \kappa_{\mathcal{I}}}{\partial M}(\beta, M) \right),$$

où en invoquant (8.46), nous avons :

$$\frac{\partial \kappa_{\mathcal{I}}}{\partial M}(\beta, M) = \eta_R^2(\beta, M) \left(3\psi(\eta_R(\beta, M)) + \eta_R(\beta, M)\psi'(\eta_R(\beta, M)) \right) \frac{\partial \eta_R}{\partial M}(\beta, M).$$

Équipés de ces relations, nous énonçons :

Proposition 8.2.1. *La forme adimensionnée $\bar{\Delta}_{1D}$ du produit scalaire Δ_{1D} introduit en (8.40), s'écrit :*

$$\begin{aligned} \bar{\Delta}_{1D}(\beta, M) &= \frac{\Delta_{1D}}{\tau_L c_L^2} = \eta_R^4(1 - \eta_R) \frac{M^2}{M_R^2} (1 + \mathcal{M}_R) \\ &\quad - \eta_R^3 \beta^2 M \left(3\psi(\eta_R) + \eta_R \psi'(\eta_R) \right) \frac{\partial \eta_R}{\partial M}, \end{aligned} \quad (8.49)$$

où la dépendance de $\eta_R(\beta, M)$ par rapport aux nombres réduits a été omise.

La démonstration de cette identité est reportée à la fin de ce paragraphe. Le principal résultat de ce paragraphe est alors :

Théorème 8.2.2. *Supposons que la loi de production de turbulence longitudinale ψ vérifie l'inégalité différentielle :*

$$3\psi(\eta_R(\beta, M)) + \eta_R(\beta, M)\psi'(\eta_R(\beta, M)) \geq 0, \quad (8.50)$$

pour tous les taux de compression $\eta_R(\beta, M)$ concernés. Supposons, de plus, que l'échelle de temps de Ristorcelli, résultant de la loi ψ , induise la condition de monotonie :

$$M \rightarrow \eta_R(\beta, M) \text{ est décroissante à } \beta \text{ fixé.} \quad (8.51)$$

Alors les solutions 1-onde de choc du modèle isotherme, fermé par ces corrections de Ristorcelli, sont structurellement stables.

Sous les hypothèses (8.50) et (8.51), liées au choix de l'échelle de temps de Ristorcelli via la loi de production ψ , ce théorème résulte directement de la formule (8.49) grâce aux propriétés génériques (8.47) et (8.44), puisque nous déduisons aisément :

$$\overline{\Delta}_{1D}(\beta, M) > 0,$$

pour tous les β et M concernés, à savoir pour tous les couples d'état, vitesse de propagation (\mathbf{v}_L, σ) , conduisant à une 1-onde de choc.

Notons que l'hypothèse (8.50) réclamant $3\psi(\eta_R) + \eta_R\psi'(\eta_R) \geq 0$ pour tous les η_R concernés, implique les inégalités :

$$\eta_R^3\psi(\eta_R) \leq 1, \text{ soit } \mathcal{I}_R = \mathcal{I}(\eta_R) = \eta_R^3 R_{11}^R = \eta_R^3\psi(\eta_R) \leq 1,$$

où les dépendances par rapport aux nombres réduits (β, M) ont été omises. Rappelons que le choix d'une échelle de temps de Ristorcelli $\mathcal{T}_{ris} \geq 0$ fait spontanément décroître $\mathcal{I}(\eta)$ le long du profil de compression, de sorte à assurer $\mathcal{I}_R \leq \mathcal{I}_L = 1$ sous forme adimensionnée. En ce sens, l'hypothèse (8.50) faite sur ψ est naturelle.

Soulignons que le choix des lois de production $\psi_N(\eta) = \frac{N}{\eta^{\frac{1}{3}}}$, $N > 1$ conduit à :

$$3\psi_N(\eta) + \eta\psi'_N(\eta) = \frac{8}{3} \frac{N}{\eta^{\frac{1}{3}}} > 0,$$

et vérifie donc l'hypothèse (8.50) pour tous les taux de compression de sortie $\eta_R(\beta, M)$ avec β et M choisis dans $[0, \beta_{lim}(N)] \times [1, 10]$ conformément au paragraphe (5.6.4). Dans les développements à venir, l'hypothèse (8.50) est donc satisfaite par construction pour les échelles de temps de Ristorcelli que nous considérons dans ce travail.

Il résulte de la satisfaction, par construction, de l'hypothèse (8.50) que la propriété centrale à la validité de la stabilité structurelle est bien la décroissance du taux de compression de sortie $\eta_R(\beta, M)$ relativement au nombre de Mach M , à β fixé. Une trop grande déviation à cette propriété de monotonie résulterait en un phénomène d'instabilité structurelle. Comme nous l'avons déjà rapporté, une telle instabilité se traduirait par un défaut d'unicité dans la solution du problème de Riemann pour le modèle RSM isotherme considéré. Il n'est donc pas étonnant de retrouver de manière centrale l'importance de cette propriété de décroissance dans l'étude du problème de Riemann tel que proposée dans l'article [5] porté en annexe.

La fin de ce paragraphe est consacré à l'exposé des manipulations algébriques conduisant à la forme adimensionnée $\overline{\Delta}_{1D}(\beta, M)$ en (8.49).

Matrice de passage

Nous donnons ici l'expression de la matrice ${}^t(D_{\mathbf{u}}^{-1}\mathbf{v})(\mathbf{u}_R)$ rentrant dans le produit scalaire (8.40). La matrice jacobienne associée au changement de variable :

$$\mathbf{u} = (\rho, u, v, \mathcal{I}, \mathcal{V}, \mathcal{W}) \longrightarrow \mathbf{v}(\mathbf{u}) = (\rho, \rho u, \rho v, \rho \mathcal{I}, \rho E_t, \rho \mathcal{W}),$$

s'écrit évaluée en l'état \mathbf{u}_R :

$$D_{\mathbf{u}}\mathbf{v}(\mathbf{u}_R) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ u_R & \rho_R & 0 & 0 & 0 & 0 \\ v_R & 0 & \rho_R & 0 & 0 & 0 \\ \mathcal{I}_R & 0 & 0 & \rho_R & 0 & 0 \\ \frac{v_R^2 + \mathcal{V}_R^2}{2} & 0 & \rho_R v_R & 0 & \rho_R \mathcal{V}_R & 0 \\ \mathcal{W}_R & 0 & 0 & 0 & 0 & \rho_R \end{pmatrix}.$$

Remarquons que le déterminant de cette jacobienne vaut $Det(D_{\mathbf{u}}\mathbf{v}(\mathbf{u}_R)) = \rho_R^5 \mathcal{V}_R$ qui est différent de zéro puisque R_{12}^R , et donc \mathcal{V}_R par la formule (8.38), est du signe de $R_{12}^L > 0$ (voir paragraphe (8.1.4)). La transposée de l'inverse de cette matrice trouve alors l'expression suivante :

$${}^t(D_{\mathbf{u}}^{-1}\mathbf{v})(\mathbf{u}_R) = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{u_R}{\rho_R} & -\frac{v_R}{\rho_R} & -\frac{\mathcal{I}_R}{\rho_R} & \frac{v_R^2 - \mathcal{V}_R^2}{2\rho_R \mathcal{V}_R} & -\frac{\mathcal{W}_R}{\rho_R} \\ 0 & \frac{1}{\rho_R} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{\rho_R} & 0 & -\frac{v_R}{\rho_R \mathcal{V}_R} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{\rho_R} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{\rho_R \mathcal{V}_R} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{\rho_R} \end{pmatrix}.$$

Vecteur propre à gauche $\tilde{l}_1(\mathbf{u}_R)$

Le système du premier ordre extrait associé à l'inconnue \mathbf{u} est le suivant :

$$\begin{cases} \partial_t \rho + u \partial_x \rho + \rho \partial_x u = 0, \\ \partial_t u + u \partial_x u + \frac{T_0}{\rho} \partial_x \rho + \rho^2 \partial_x \mathcal{I} + 3\rho \mathcal{I} \partial_x \rho = 0, \\ \partial_t v + u \partial_x v + 2\mathcal{V} \sqrt{\mathcal{I}} \partial_x \rho + \frac{\rho \mathcal{V}}{2\sqrt{\mathcal{I}}} \partial_x \mathcal{I} + \rho \sqrt{\mathcal{I}} \partial_x \mathcal{V} = 0, \\ \partial_t \mathcal{I} + u \partial_x \mathcal{I} = 0, \\ \partial_t \mathcal{V} + u \partial_x \mathcal{V} + \rho \sqrt{\mathcal{I}} \partial_x v = 0, \\ \partial_t \mathcal{W} + u \partial_x \mathcal{W} = 0. \end{cases}$$

On en déduit immédiatement la matrice recherchée :

$$B(\mathbf{u}) = D_{\mathbf{u}}^{-1}\mathbf{v}(\mathbf{u}) \mathcal{A}(\mathbf{v}(\mathbf{u})) D_{\mathbf{u}}\mathbf{v}(\mathbf{u}) = \begin{pmatrix} u & \rho & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{T_0}{\rho} + 3\rho \mathcal{I} & u & 0 & \rho^2 & 0 & 0 \\ 2\mathcal{V} \sqrt{\mathcal{I}} & 0 & u & \frac{\rho \mathcal{V}}{2\sqrt{\mathcal{I}}} & \rho \sqrt{\mathcal{I}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & u & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \rho \sqrt{\mathcal{I}} & 0 & u & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & u \end{pmatrix}.$$

Le spectre de cette matrice est bien celui attendu :

$$Sp(\mathcal{B}) = \left\{ u \pm c = u \pm \sqrt{T_0 + 3\rho^2\mathcal{I}}, u \pm a = u \pm \rho\sqrt{\mathcal{I}}, u, u \right\}.$$

On obtient alors le vecteur propre à gauche associé à la valeur propre $u_R - c_R$:

$$\tilde{l}_1(\mathbf{u}_R) = \begin{pmatrix} \frac{c_R^2}{\rho_R^3} \\ \frac{c_R}{\rho_R^2} \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Les expressions de ${}^t(D_{\mathbf{u}}^{-1}\mathbf{v})(\mathbf{u}_R)$ et de $\tilde{l}_1(\mathbf{u}_R)$ permettent de calculer la formule (8.43).

Évaluation du produit scalaire Δ_{1D}

Nous avons tous les éléments pour calculer la valeur du produit scalaire (8.40) décidant de la condition de stabilité structurelle. Nous allons décomposer le calcul de Δ_{1D} en deux parties : $\Delta_{1D} = \Delta_1 + \Delta_2$, où Δ_1 désigne la partie sans contribution de la fonction cinétique et Δ_2 celle avec cette contribution, soit :

$$\begin{cases} \Delta_1 = \left({}^t(D_{\mathbf{u}}^{-1}\mathbf{v})\tilde{l}_1(\mathbf{u}_R), \mathbf{v}_R - \mathbf{v}_L \right), \\ \Delta_2 = \left({}^t(D_{\mathbf{u}}^{-1}\mathbf{v})\tilde{l}_1(\mathbf{u}_R), \partial_s \mathcal{C}(\mathbf{v}_L, s) \Big|_{s=\sigma} \right). \end{cases}$$

Calculons Δ_1 . Il s'agit de multiplier le vecteur (8.43) par le saut de \mathbf{v} . Remarquons que l'on a uniquement besoin de $[\rho]$, $[\rho u]$ et $[\rho\mathcal{I}]$ puisque les autres coefficients en regard dans (8.43) sont nuls. Le produit est donc assez simple. Tous calculs faits, nous obtenons :

$$\Delta_1 = \tau_L c_L^2 \left((1 - \eta_R) \frac{M^2}{\mathcal{M}_R^2} \eta_R^4 (1 + \mathcal{M}_R) + \beta^2 \eta_R (\mathcal{I}_R - 1) \right). \quad (8.52)$$

Pour Δ_2 nous obtenons :

$$\Delta_2 = -\tau_L c_L^2 \eta_R \beta^2 \left(\kappa_I + M \frac{\partial \kappa_I}{\partial M} \right). \quad (8.53)$$

Rappelons alors que $\kappa_I = \mathcal{I}_R - 1$, si bien que la condition de stabilité structurelle $\Delta_{1D} = \Delta_1 + \Delta_2$ dans le cadre isotherme avec la correction de Ristorcelli s'écrit :

$$\Delta_{1D} = \tau_L c_L^2 \left((1 - \eta_R) \frac{M^2}{\mathcal{M}_R^2} \eta_R^4 (1 + \mathcal{M}_R) - \eta_R \beta^2 M \frac{\partial \kappa_I}{\partial M} \right). \quad (8.54)$$

Ceci suffit à établir la proposition (8.2.1) et conclut cette section.

8.3 Application au cadre anisotherme sans correction de Ristorcelli

8.3.1 Condition de stabilité structurelle

Les relations de Rankine-Hugoniot introduites au chapitre 6, paragraphe (6.4), s'expriment naturellement dans la variable :

$$\mathbf{v} = (\rho, \rho u, \rho v, \rho E, \rho \mathcal{I}, \rho E t, \rho \mathcal{W}).$$

Rappelons cependant qu'en une dimension d'espace, la quantité $\rho \mathcal{W}$ se conserve, si bien qu'il est totalement équivalent de travailler avec l'inconnue $\rho \xi = \rho E - \rho \frac{\mathcal{W}}{2}$, introduite en (6.11) au chapitre 6, ce qui simplifiera les calculs (cette énergie est gouvernée par la même loi d'évolution que l'énergie totale classique). On pose donc dans ce chapitre, sans changer les notations :

$$\mathbf{v} = (\rho, \rho u, \rho v, \rho \xi, \rho \mathcal{I}, \rho E t, \rho \mathcal{W}).$$

Pour déterminer les éléments propres du système nécessaires à l'évaluation de l'écriture (8.16) équivalente du déterminant de Majda, il est plus aisé de travailler avec le changement de variable suivant :

$$\mathbf{u} = (\rho, u, v, p, \mathcal{I}, \mathcal{V}, \mathcal{W}) \rightarrow \mathbf{v}(\mathbf{u}) = (\rho, \rho u, \rho v, \rho \xi, \rho \mathcal{I}, \rho E t, \rho \mathcal{W}), \quad (8.55)$$

où l'on rappelle les définitions suivantes :

$$\mathcal{V} = \frac{R_{12} \tau^2}{\sqrt{\mathcal{I}}}, \quad \rho E t = \rho \frac{v^2 + \mathcal{V}^2}{2}. \quad (8.56)$$

Soulignons que le changement de variable inverse $\mathbf{v} \rightarrow \mathbf{u}(\mathbf{v})$ nécessite la détermination univoque de \mathcal{V} à partir de ρ , ρv et $\rho E t$. Conformément au paragraphe précédent, une telle détermination est rendue possible en considérant des solutions chocs perturbées pour un paramètre de perturbation ϵ choisi suffisamment petit, de sorte que le signe de $R_{12}(x, t)$ et donc celui de $\mathcal{V}(x, t)$ par la formule (8.56), coïncide avec celui de la tension de Reynolds R_{12}^L dans le choc non perturbé. Pour fixer les idées, et sans restriction (voir le lemme (6.4.1) du chapitre 6), nous supposons $R_{12}^L > 0$, de sorte que $\mathcal{V}(\mathbf{v})$ trouve la formule suivante :

$$\mathcal{V}(\mathbf{v}) = +\sqrt{2E t - v^2}. \quad (8.57)$$

Muni du changement de variable (8.55), et conformément à la théorie développée précédemment, nous devons étudier les conditions de non annulation du produit scalaire suivant :

$$\Delta_{1D} = \left({}^t(D_{\mathbf{u}}^{-1} \mathbf{v})(\mathbf{u}_R) \tilde{l}_1(\mathbf{u}_R), \mathbf{v}_R - \mathbf{v}_L + \partial_s \mathcal{C}(\mathbf{v}_L, s) \Big|_{s=\sigma} \right). \quad (8.58)$$

L'indice $1D$ sert ici à différencier le déterminant ci-dessus valable en stabilité structurelle, avec celui que nous obtiendrons lors de l'étude de la stabilité multidimensionnelle au chapitre suivant. Nous allons donc expliciter les expressions composant ce produit scalaire. Rappelons ici que la détermination numérique de la solution onde progressive du chapitre 6, nous assure qu'un état \mathbf{v}_L étant fixé, et une vitesse de propagation σ

prescrite, il existe un unique état \mathbf{v}_R , solution 1-onde de choc destinée à être perturbée :

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_L + (\mathbf{v}_R - \mathbf{v}_L)H(x - \sigma t). \quad (8.59)$$

L'hypothèse (6.30), *i.e.* $M_a^R > 1$, est encore une fois cruciale ici puisqu'elle est équivalente à la condition *i*) du théorème (8.1.2). Elle est assurée en choisissant les nombres réduits (α, β, M) selon la figure ((4.5), b) pour $\gamma = 1.4$. L'état de sortie \mathbf{v}_R dans la formule précédente est solution des relations de Rankine-Hugoniot généralisées suivantes :

$$\begin{cases} -\sigma(\rho_R - \rho_L) + ((\rho u)_R - (\rho u)_L) = 0, \\ -\sigma((\rho u)_R - (\rho u)_L) + ((\rho u^2 + p + \rho^3 \mathcal{I})_R - (\rho u^2 + p + \rho^3 \mathcal{I})_L) = 0, \\ -\sigma((\rho v)_R - (\rho v)_L) + ((\rho uv + \rho^2 \sqrt{\mathcal{I}} \mathcal{V})_R - (\rho uv + \rho^2 \sqrt{\mathcal{I}} \mathcal{V})_L) = 0, \\ -\sigma((\rho \xi)_R - (\rho \xi)_L) + (((p + \rho^3 \mathcal{I})u + \rho^2 \sqrt{\mathcal{I}} \mathcal{V}v)_R - ((p + \rho^3 \mathcal{I})u + \rho^2 \sqrt{\mathcal{I}} \mathcal{V}v)_L) = 0, \\ -\sigma((\rho \mathcal{I})_R - (\rho \mathcal{I})_L) + ((\rho u \mathcal{I})_R - (\rho u \mathcal{I})_L) = 0, \\ -\sigma((\rho E_t)_R - (\rho E_t)_L) + ((\rho u E_t + \rho^2 \sqrt{\mathcal{I}} \mathcal{V}v)_R - (\rho u E_t + \rho^2 \sqrt{\mathcal{I}} \mathcal{V}v)_L) = \mathcal{C}_{E_t}(\mathbf{v}_L, \sigma), \\ -\sigma((\rho \mathcal{W})_R - (\rho \mathcal{W})_L) + ((\rho u \mathcal{W})_R - (\rho u \mathcal{W})_L) = 0. \end{cases} \quad (8.60)$$

Ces relations sont ici données sous forme dimensionnée contrairement au chapitre 6, paragraphe (6.4), ceci pour simplifier les calculs à venir. Nous préciserons dans la suite le lien précis entre $\mathcal{C}_{E_t}(\mathbf{v}_L, \sigma)$ et sa version adimensionnée $\kappa_{E_t}(\alpha^2, \beta^2, M^2)$ donnée par la formule (6.59) au chapitre 6.

Le vecteur de \mathbb{R}^n , $\partial_s \mathcal{C}(\mathbf{v}_L, s) \Big|_{s=\sigma}$ du produit scalaire (8.58), trouve donc la définition formelle suivante :

$$\partial_s \mathcal{C}(\mathbf{v}_L, s) \Big|_{s=\sigma} = (0, 0, 0, 0, 0, \partial_s \mathcal{C}_{E_t}(\mathbf{v}_L, s) \Big|_{s=\sigma}, 0).$$

Des calculs donnés à la fin de ce chapitre montreront que :

$${}^t(D_{\mathbf{u}}^{-1} \mathbf{v})(\mathbf{u}_R) \tilde{l}_1(\mathbf{u}_R) = \begin{pmatrix} u_R c_R + (\gamma - 1) \frac{u_R^2}{2} + (3 - \gamma) \rho_R^2 \mathcal{I} \\ -(c_R + (\gamma - 1) u_R) \\ 0 \\ \gamma - 1 \\ \frac{3 - \gamma}{2} \rho_R^2 \\ -(\gamma - 1) \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (8.61)$$

où sans ambiguïté nous avons noté $\mathcal{I} = \mathcal{I}_R = \mathcal{I}_L$ puisque \mathcal{I} est un invariant du système. Notons que, contrairement au cadre isotherme, la dérivée en σ de la fonction cinétique associée à l'énergie tangentielle ρE_t contribue au produit scalaire. Exprimons donc la version adimensionnée de cette dérivée. À cette fin, nous rappelons les nombres adimensionnels habituels, pour \mathbf{v}_L fixé et σ prescrite :

$$M = M_c(\mathbf{v}_L) = \frac{u_L - \sigma}{c_L}, \quad \beta = \frac{a_L}{c_L}, \quad \alpha = \frac{R_{12}^L}{R_{11}^L}, \quad (8.62)$$

respectivement nombre de Mach relatif, nombre de Mach turbulent et coefficient d'anisotropie. Concernant l'état de sortie \mathbf{v}_R , nous définissons le nombre de Mach relatif

\mathcal{M}_R , évalué sur cet état :

$$\mathcal{M}_R = M_c(\mathbf{v}_R) = \frac{u_R - \sigma}{c_R}, \quad 0 < \mathcal{M}_R < 1. \quad (8.63)$$

Dès lors, conformément au paragraphe (6.4) du chapitre 6 sur la fonction cinétique κ_{E_t} , celle-ci ne dépend que de (α^2, β^2, M^2) et est liée à la fonction cinétique dimensionnée $\mathcal{C}_{E_t}(\mathbf{v}_L, \sigma)$ par :

$$\mathcal{C}_{E_t}(\mathbf{v}_L, \sigma) = m c_L^2 \kappa_{E_t}(\alpha^2, \beta^2, M^2), \quad (8.64)$$

où $m = \rho_L(u_L - \sigma)$. Rappelons que la fonction κ_{E_t} est donnée par la formule (6.59) du chapitre 6 selon :

$$\kappa_{E_t}(\alpha^2, \beta^2, M^2) = -\frac{1}{2} \mathcal{G}(\eta_R(\alpha^2, \beta^2, M^2)), \quad (8.65)$$

où la fonction $\mathcal{G}(\eta)$ est définie par (6.16). La quantité $\eta_R(\alpha^2, \beta^2, M^2)$ représente le taux de compression de sortie du profil. Celui-ci vérifie l'encadrement (6.49) du chapitre 6. En particulier, cet encadrement implique :

$$0 < \eta_R(\alpha^2, \beta^2, M^2) < 1, \quad (8.66)$$

pour tous les (α, β, M) considérés, *i.e.* ceux choisis selon la figure ((4.5),b) garantissant l'hypothèse (6.30) de non surcompressivité de l'état de sortie. En remarquant alors que $\partial_\sigma m = -\rho_L$ et $\partial_\sigma M^2 = -\frac{M}{c_L}$, nous obtenons :

$$\partial_s \mathcal{C}_{E_t}(\mathbf{v}_L, s) \Big|_{s=\sigma} = -\rho_L c_L^2 \left(\kappa_{E_t}(\alpha^2, \beta^2, M^2) + 2M^2 \frac{\partial \kappa_{E_t}}{\partial M^2}(\alpha^2, \beta^2, M^2) \right), \quad (8.67)$$

où la formule (8.65) implique :

$$\partial_s \mathcal{C}_{E_t}(\mathbf{v}_L, s) \Big|_{s=\sigma} = \frac{\rho_L c_L^2}{2} \left(\mathcal{G}(\eta_R(\alpha^2, \beta^2, M^2)) + \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial M^2}(\eta_R(\alpha^2, \beta^2, M^2)) \right). \quad (8.68)$$

Nous pouvons alors énoncer la proposition suivante :

Proposition 8.3.1. *La forme adimensionnée $\bar{\Delta}_{1D}$ du produit scalaire Δ_{1D} introduit en (8.58), s'écrit :*

$$\begin{aligned} \bar{\Delta}_{1D} &= \frac{\Delta_{1D}}{\rho_L c_R^2}, \\ &= \frac{(1 - \eta_R)}{\eta_R} \left(\mathcal{M}_R - (\gamma + 2) \mathcal{M}_R^2 + \left(\gamma + \frac{1}{M^2} \right) \frac{\mathcal{M}_R^2}{\eta_R} \right. \\ &\quad \left. + (3 - \gamma) \beta^2 \frac{\mathcal{M}_R^2}{M^2} \frac{1 - \eta_R}{\eta_R^4} (\eta_R^2 + \eta_R + 1) - \frac{2 \mathcal{M}_R^2}{\eta_R (1 - \eta_R)} \frac{\partial \eta_R}{\partial M^2} \mathcal{R}_1(\eta_R) \right), \end{aligned} \quad (8.69)$$

avec :

$$\mathcal{R}_1(\eta) = 1 - M^2 + (\gamma + 1) M^2 (1 - \eta) + \frac{3 - \gamma}{\eta^3} \beta^2 (1 - \eta) (\eta^2 + \eta + 1).$$

Dans ces formules la dépendance du taux de compression de sortie $\eta_R(\alpha^2, \beta^2, M^2)$ par rapport aux nombres réduits (α^2, β^2, M^2) a été omise pour des raisons de clarté des écritures.

La démonstration de cette proposition est reportée à la fin de ce paragraphe. Nous aurons besoin d'une autre écriture de la condition de stabilité structurelle lors de l'étude de stabilité multidimensionnelle du choc plan, que nous formulons ici :

$$\begin{aligned}\overline{\Delta}_{1D}^0 &= \frac{\Delta_{1D}}{\rho_L c_L^2}, \\ &= \frac{M^2}{\mathcal{M}_R^2} \eta_R (1 - \eta_R) \left(\mathcal{M}_R + \frac{\gamma - 1}{2} \mathcal{M}_R^2 + \frac{3 - \gamma}{2} \frac{\mathcal{M}_R^2}{\eta_R} \right. \\ &\quad \left. + \frac{3 - \gamma}{2} \frac{\beta^2 \mathcal{M}_R^2}{M^2 \eta_R^2} \left(\frac{2}{\eta_R^2} - \frac{1}{\eta_R} - 1 \right) + (\gamma - 1) \left(\kappa_{E_t} + 2M^2 \frac{\partial \kappa_{E_t}}{\partial M^2} \right) \right).\end{aligned}\quad (8.70)$$

Contrairement au cadre isotherme, l'expression (8.69) est suffisamment complexe pour nous empêcher d'énoncer un résultat théorique analogue au théorème (8.2.2) du cadre isotherme, concernant son signe éventuel. Seule une étude numérique va nous permettre de conclure. Sur la figure (8.2), on représente la condition de stabilité (8.69) pour $\beta \in [0.05, 0.5]$. En traits pleins, le coefficient d'anisotropie $\alpha = 0.1$ et en traits discontinus $\alpha = 1$. Tout d'abord, on voit que l'accident de surcompression survient quand β augmente à M fixé, conformément à la figure (4.5, b). Dans ce cas, les courbes représentant $\overline{\Delta}_{1D}$ sont discontinues car sa valeur a été fixée à -1 par convention. Tant que l'accident de surcompressivité est évité, la condition de stabilité reste vraie avec Δ_{1D} positif pour tous les β et M concernés, à α fixé. Quand on augmente α (à la valeur 1 que nous considérons comme maximale pour $\zeta = 1$ si l'on veut respecter la positivité du déterminant du tenseur de Reynolds à deux dimensions et donc la réalisabilité : $R_{11}^L R_{22}^L - (R_{12}^L)^2 = \rho_L^2 a_L^4 (\zeta^2 - \alpha^2) \geq 0$), la valeur de Δ_{1D} varie très peu. Elle dépend très faiblement de α . Cette étude numérique nous permet de conclure à la non annulation du déterminant de Majda tant que celui-ci peut être défini, *i.e.* tant que les conditions de Lax sont vraies. À la suite de cette étude numérique, nous énonçons le résultat (numérique) suivant :

Proposition numérique 8.3.2. *Les solutions 1-onde de choc du modèle anisotherme sont (numériquement) structurellement stables tant que les conditions géométriques de Lax sont vérifiées.*

La figure (8.2) montre que le produit scalaire $\overline{\Delta}_{1D}$ est monotone croissant par rapport au nombre de Mach M à (α, β) fixés. Nous suspectons donc, encore une fois, que la propriété de décroissance du taux de compression de sortie relativement au nombre de Mach au carré M^2 , à (α, β) fixés, est essentielle au résultat précédent. La fin de ce paragraphe est consacrée à l'exposé des manipulations algébriques conduisant à la forme adimensionnée $\overline{\Delta}_{1D}$ en (8.69).

Matrice de passage

Nous donnons ici l'expression de la matrice ${}^t(D_{\mathbf{u}}^{-1} \mathbf{v})(\mathbf{u}_R)$ du produit scalaire (8.58). La jacobienne associée au changement de variable :

$$\mathbf{u} = (\rho, u, v, p, \mathcal{I}, \mathcal{V}, \mathcal{W}) \longrightarrow \mathbf{v}(\mathbf{u}) = (\rho, \rho u, \rho v, \rho \xi, \rho \mathcal{I}, \rho E_t, \rho \mathcal{W}),$$

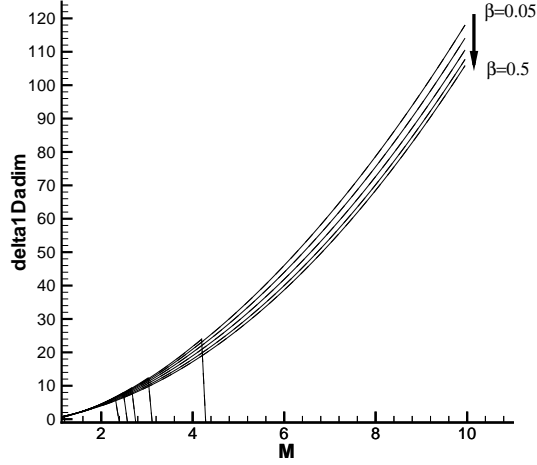


FIG. 8.2 – Condition de stabilité structurelle en anisotherme sans correction de Ristorcelli.

— $\alpha = 0.1$, - - - - $\alpha = 1$

s'écrit, évaluée en l'état \mathbf{u}_R :

$$D_{\mathbf{u}}\mathbf{v}(\mathbf{u}_R) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ u_R & \rho_R & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ v_R & 0 & \rho_R & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \theta & \rho_R u_R & \rho_R v_R & \frac{1}{\gamma-1} & \frac{\rho_R^3}{2} & \rho_R \mathcal{V}_R & 0 \\ \mathcal{I} & 0 & 0 & 0 & \rho_R & 0 & 0 \\ \frac{v_R^2 + \mathcal{V}_R^2}{2} & 0 & \rho_R v_R & 0 & 0 & \rho_R \mathcal{V}_R & 0 \\ \mathcal{W}_R & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \rho_R \end{pmatrix}$$

Avec $\theta = \frac{u_R^2 + v_R^2 + \mathcal{V}_R^2}{2} + \frac{3}{2}\rho_R^2 \mathcal{I}$. Remarquons que l'on a noté $\mathcal{I} = \mathcal{I}_R = \mathcal{I}_L$ sans ambiguïté, puisque c'est un invariant du système lorsqu'il n'y a pas la correction de Ristorcelli. On a immédiatement $\text{Det}((D_{\mathbf{u}}\mathbf{v})_R) = \rho_R^5 \frac{\mathcal{V}_R}{\gamma-1}$ qui est non nul puisque R_{12}^R , et donc \mathcal{V}_R par (8.56), est du signe de $R_{12}^L > 0$ (voir paragraphe 8.1.4). La transposée de l'inverse de cette matrice est alors :

$${}^t(D_{\mathbf{u}}^{-1}\mathbf{v})(\mathbf{u}_R) = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{u_R}{\rho_R} & -\frac{v_R}{\rho_R} & (\gamma-1)\left(\frac{u_R^2}{2} - a_R^2\right) & -\frac{\mathcal{I}}{\rho_R} & \frac{v_R^2 - \mathcal{V}_R^2}{2\rho_R \mathcal{V}_R} & -\frac{\mathcal{W}_R}{\rho_R} \\ 0 & \frac{1}{\rho_R} & 0 & -(\gamma-1)u_R & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{\rho_R} & 0 & 0 & -\frac{v_R}{\rho_R \mathcal{V}_R} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \gamma-1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -(\gamma-1)\frac{\rho_R^2}{2} & \frac{1}{\rho_R} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -(\gamma-1) & 0 & \frac{1}{\rho_R \mathcal{V}_R} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{\rho_R} \end{pmatrix}$$

Vecteur propre à gauche $\tilde{l}_1(\mathbf{u}_R)$

Le système du premier ordre extrait associé à l'inconnue \mathbf{u} est le suivant :

$$\left\{ \begin{array}{l} \partial_t \rho + u \partial_x \rho + \rho \partial_x u = 0, \\ \partial_t u + u \partial_x u + 3\rho \mathcal{I} \partial_x \rho + \frac{1}{\rho} \partial_x p + \rho^2 \partial_x \mathcal{I} = 0, \\ \partial_t v + u \partial_x v + 2\mathcal{V} \sqrt{\mathcal{I}} \partial_x \rho + \frac{\rho \mathcal{V}}{2\sqrt{\mathcal{I}}} \partial_x \mathcal{I} + \rho \sqrt{\mathcal{I}} \partial_x \mathcal{V} = 0, \\ \partial_t p + u \partial_x p + \gamma p \partial_x u = 0, \\ \partial_t \mathcal{I} + u \partial_x \mathcal{I} = 0, \\ \partial_t \mathcal{V} + u \partial_x \mathcal{V} + \rho \sqrt{\mathcal{I}} \partial_x \mathcal{V} = 0, \\ \partial_t \mathcal{W} + u \partial_x \mathcal{W} = 0. \end{array} \right.$$

On en déduit immédiatement la matrice recherchée :

$$\mathcal{B}(\mathbf{u}) = D_{\mathbf{u}}^{-1} \mathbf{v}(\mathbf{u}) \mathcal{A}(\mathbf{v}(\mathbf{u})) D_{\mathbf{u}} \mathbf{v}(\mathbf{u}) = \begin{pmatrix} u & \rho & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3\rho \mathcal{I} & u & 0 & \frac{1}{\rho} & \rho^2 & 0 & 0 \\ 2\mathcal{V} \sqrt{\mathcal{I}} & 0 & u & 0 & \frac{\rho \mathcal{V}}{2\sqrt{\mathcal{I}}} & \rho \sqrt{\mathcal{I}} & 0 \\ 0 & \gamma p & 0 & u & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & u & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \rho \sqrt{\mathcal{I}} & 0 & 0 & u & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & u \end{pmatrix}$$

On vérifie que le spectre de cette matrice est bien celui attendu :

$$Sp(\mathcal{B}) = \left\{ u \pm c = u \pm \sqrt{\frac{\gamma p}{\rho} + 3\rho^2 \mathcal{I}}, u \pm a = u \pm \rho \sqrt{\mathcal{I}}, u, u, u \right\}.$$

On obtient alors le vecteur propre à gauche associée à la valeur propre $u_R - c_R$:

$$\tilde{l}_1(\mathbf{u}_R) = \begin{pmatrix} 3a_R^2 \\ -\rho_R c_R \\ 0 \\ 1 \\ \rho_R^3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (8.71)$$

Les expressions de ${}^t(D_{\mathbf{u}}^{-1} \mathbf{v})(\mathbf{u}_R)$ et de $\tilde{l}_1(\mathbf{u}_R)$ permettent de calculer la formule (8.61).

Évaluation du produit scalaire Δ_{1D}

Nous avons désormais chacun des termes composant le produit scalaire (8.58). Encore une fois, nous décomposons le calcul de la condition de stabilité en deux parties :

$$\begin{aligned} \Delta_1 &= \left({}^t(D_{\mathbf{u}}^{-1} \mathbf{v}) \tilde{l}_1(\mathbf{v}_R), \mathbf{v}_R - \mathbf{v}_L \right), \\ \Delta_2 &= \left({}^t(D_{\mathbf{u}}^{-1} \mathbf{v}) \tilde{l}_1(\mathbf{v}_R), \partial_s \mathcal{C}(\mathbf{v}_L, s) \Big|_{s=\sigma} \right). \end{aligned}$$

Calculons dans un premier temps Δ_1 . Il s'agit de multiplier le vecteur (8.61) par le saut de \mathbf{v} , c'est à dire $[\rho]$, $[\rho u]$, $[\rho \xi]$, $[\rho \mathcal{L}]$ et $[\rho E_t]$ puisque les coefficients en regard des autres sauts dans (8.61) sont nuls. Tous calculs faits, nous obtenons :

$$\Delta_1 = \rho_L c_R^2 \frac{1 - \eta_R}{\eta_R} \left(\mathcal{M}_R + \frac{\gamma - 1}{2} \mathcal{M}_R^2 + \frac{3 - \gamma}{2} \frac{\mathcal{M}_R^2}{\eta_R} + \frac{3 - \gamma}{2} \frac{\beta^2 \mathcal{M}_R^2}{M^2 \eta_R^2} \left(\frac{2}{\eta_R^2} - \frac{1}{\eta_R} - 1 \right) \right), \quad (8.72)$$

Remarquons que l'on a la relation adimensionnée $R_{11}^R = \eta_R^{-3}$ pour remplacer R_{11}^R quand celui-ci intervient.

Pour calculer Δ_2 , il faut multiplier (8.67) par le coefficient en regard dans (8.61) qui est $-(\gamma - 1)$:

$$\Delta_2 = (\gamma - 1) \rho_L c_L^2 \left(\kappa_{E_t} + 2M^2 \frac{\partial \kappa_{E_t}}{\partial M^2} \right). \quad (8.73)$$

En remarquant alors que $c_R^2 = \frac{M^2 \eta_R^2}{\mathcal{M}_R^2} c_L^2$, l'addition des formules (8.72) et (8.73) conduit immédiatement $\rho_L c_L^2 \overline{\Delta}_{1D}^0$ donné en (8.70). Pour établir la proposition (8.3.1) et l'expression de Δ_{1D} associée (8.69), utilisons la formule (8.65) donnant l'expression de la fonction cinétique adimensionnée $\kappa_{E_t}(\alpha^2, \beta^2, M^2)$:

$$\kappa_{E_t}(\alpha^2, \beta^2, M^2) = -\frac{1}{2} \mathcal{G}(\eta_R(\alpha^2, \beta^2, M^2), \beta^2, M^2), \quad (8.74)$$

où la fonction \mathcal{G} est définie par (6.16) :

$$\begin{aligned} \mathcal{G}(\eta, \beta^2, M^2) &= -\frac{3 - \gamma}{\gamma - 1} \frac{\beta^2}{\eta^2} + \frac{2}{\gamma - 1} (1 + \gamma M^2 - (3 - \gamma)\beta^2) \eta - \frac{\gamma + 1}{\gamma - 1} M^2 \eta^2 \\ &+ \frac{1}{\gamma - 1} (3(3 - \gamma)\beta^2 - 2 - (\gamma - 1)M^2). \end{aligned} \quad (8.75)$$

Sa dérivée par rapport à M^2 , à (α, β) fixés, se calcule aisément :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial M^2}(\eta, \beta^2, M^2) &= \frac{1}{\gamma - 1} \left((1 - \eta) ((\gamma + 1)\eta - (\gamma - 1)) + 2 \frac{\partial \eta}{\partial M^2} \mathcal{R}_1(\eta) \right) \quad (8.76) \\ \mathcal{R}_1(\eta) &= 1 - M^2 + (\gamma + 1)M^2(1 - \eta) + \frac{3 - \gamma}{\eta^3} \beta^2 (1 - \eta)(\eta^2 + \eta + 1). \end{aligned}$$

En remarquant que $c_L^2 = \frac{\mathcal{M}_R^2}{M^2 \eta_R^2} c_R^2$ dans (8.73), on obtient $\Delta_{1D} = \Delta_1 + \Delta_2$ grâce aux formules (8.72), (8.73), (8.74), (8.75) et (8.76), comme proposé en (8.69).

8.3.2 Deux cas particuliers : Euler et Navier-Stokes à deux pressions Euler

Il est intéressant de voir si le déterminant Δ_1 , donné par (8.72), dégénère bien quand $\alpha = \beta = 0$, ce qui correspond aux équations d'Euler pour lequel le système peut être mis sous forme totalement conservative. Dans ce cas, il n'y a pas besoin de fonctions cinétiques. Pour cela, nous allons comparer notre résultat (8.72), pour $\alpha = \beta = 0$, à la littérature existante. Le sujet principal de cette littérature est en réalité

la stabilité multidimensionnelle. Cependant, elle mentionne la stabilité structurelle puisque celle-ci est un prérequis nécessaire à l'étude de la stabilité multidimensionnelle, comme nous le verrons dans le chapitre suivant. Un des travaux précurseurs dans le domaine de la stabilité multidimensionnelle est dû à D'yakov [22] et fut repris et traduit par Flowles [28]. Selon D'yakov, un choc de Lax est violemment instable si :

$$j^2 \left. \frac{\partial \tau}{\partial p} \right|_H - 1 - 2\mathcal{M}_R > 0. \quad (8.77)$$

avec $j^2 = m^2$ et $j^2 \left. \frac{\partial \tau}{\partial p} \right|_H$ l'inverse de la dérivée de la courbe de Hugoniot $p = H(\tau)$, reparamétrée par τ . Erpenbeck [25],[26] et Jenssen et Lyng [43] expriment la condition sous la forme :

$$k - 1 + \mathcal{M}_R < 0, \quad (8.78)$$

avec k trouvant la définition suivante :

$$\begin{aligned} k &= 2 - \frac{1}{T} \left. \frac{\partial p}{\partial s} \right|_{\tau} (\tau_L - \tau_R) \mathcal{M}_R^2, \\ &= 2 - \Gamma \mathcal{M}_R^2 \frac{1 - \eta_R}{\eta_R}. \end{aligned} \quad (8.79)$$

où l'on a utilisé le Grunheisen :

$$\Gamma = \frac{\tau_R}{T} \left. \frac{\partial p}{\partial s} \right|_{\tau}, \quad (8.80)$$

$$= \tau_R \left. \frac{\partial p}{\partial e} \right|_{\tau}, \quad (8.81)$$

Ici, e représente l'énergie interne et T la température. Soit $\Gamma = \gamma - 1$ pour un gaz parfait polytropique, ce qui permet de réécrire k dans ce cas particulier qui nous intéresse ici :

$$k = 2 + (\gamma - 1) \mathcal{M}_R^2 \frac{\eta_R - 1}{\eta_R}, \quad (8.82)$$

On peut alors relier (8.77) à (8.78) par un calcul très simple :

$$j^2 \left. \frac{\partial \tau}{\partial p} \right|_H - 1 - 2\mathcal{M}_R = -\frac{1 + \mathcal{M}_R}{2k} (k - 1 + \mathcal{M}_R) > 0, \quad (8.83)$$

ce qui prouve l'équivalence des deux formulations. Erpenbeck [26] utilise (8.80) et trouve comme critère d'instabilité la fonction F_s définie par :

$$F_s = k - 1 + \mathcal{M}_R < 0. \quad (8.84)$$

Jenssen et Lyng [43] trouvent exactement la même expression. Serre utilise plutôt (8.81) et trouve un critère d'instabilité équivalent pour un 3-choc de Lax, ce qui, retraduit pour un 1-choc, donne :

$$1 + \mathcal{M}_R + p_e \left[\frac{1}{\rho} \right] \mathcal{M}_R^2 = 1 + \mathcal{M}_R + (\gamma - 1) \mathcal{M}_R^2 \frac{\eta_R - 1}{\eta_R} < 0. \quad (8.85)$$

Enfin Majda [51] trouve lui aussi le même critère d'instabilité :

$$1 + \mathcal{M}_R - \Gamma(\mu - 1)\mathcal{M}_R^2 = 1 + \mathcal{M}_R + (\gamma - 1)\mathcal{M}_R^2 \frac{\eta_R - 1}{\eta_R} < 0, \quad (8.86)$$

avec :

$$\mu = \frac{1}{\eta_R} = \frac{\rho_R}{\rho_L} > 1.$$

Toutes ces conditions sont donc équivalentes. Cependant, nous choisissons de comparer notre résultat à celui de Serre, car la technique d'obtention du déterminant est la même. Ainsi, Serre trouve :

$$\Delta_s = \rho_L c_R^2 \frac{1 - \eta_R}{\eta_R} \overline{\Delta}_s = \rho_L c_R^2 \frac{1 - \eta_R}{\eta_R} \left(1 + \mathcal{M}_R + (\gamma - 1)\mathcal{M}_R^2 \frac{\eta_R - 1}{\eta_R} \right). \quad (8.87)$$

Pour $\beta = \alpha = 0$, (8.72) devient :

$$\Delta_1 = \rho_L c_R^2 \frac{1 - \eta_R}{\eta_R} \overline{\Delta}_1 = \rho_L c_R^2 \frac{1 - \eta_R}{\eta_R} \left(\mathcal{M}_R + \frac{\mathcal{M}_R^2}{\eta_R} + \frac{\gamma - 1}{2} \mathcal{M}_R^2 \frac{\eta_R - 1}{\eta_R} \right). \quad (8.88)$$

Remarquons alors que :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\mathcal{M}_R}{M} = \frac{c_L}{c_R} \eta_R, \end{array} \right. \quad (8.89)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \left(\frac{c_R}{c_L} \right)^2 = \frac{p_R}{p_L} \eta_R, \end{array} \right. \quad (8.90)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{p_R}{p_L} = -\gamma M^2 (\eta_R - 1) + 1. \end{array} \right. \quad (8.91)$$

On a ainsi :

$$\overline{\Delta}_1 - \overline{\Delta}_s = \left(\frac{c_L}{c_R} \right)^2 \frac{\eta_R}{2} ((\gamma + 1)M^2 \eta_R - (2 + (\gamma - 1)M^2)). \quad (8.92)$$

On reconnaît alors le taux de compression Euler en gaz parfait polytropique, ce qui permet d'affirmer que (8.92) est nulle et de conclure sur l'équivalence entre notre expression et l'expression généralement trouvée. Le résultat suivant qui vient de $[p] = -m^2[\tau]$:

$$(\gamma - 1)\mathcal{M}_R^2 \frac{\eta_R - 1}{\eta_R} = \frac{\gamma - 1}{\gamma} \left(\frac{p_L}{p_R} - 1 \right),$$

nous permet alors de conclure :

$$\overline{\Delta}_s = \frac{1}{\gamma} + \frac{p_L}{p_R} \left(1 - \frac{1}{\gamma} \right) + \mathcal{M}_R > \frac{1}{\gamma} + \mathcal{M}_R > 0.$$

car $p_R \in [p_L, +\infty]$ et $\gamma > 1$ pour un 1-choc de Lax. Ainsi, les chocs de Lax Euler pour les gaz parfaits polytropiques sont toujours structurellement (ou longitudinalement) stables.

Navier-Stokes à deux pressions

Pour $\alpha = 0$, c'est à dire $R_{12} = 0$, le système correspond aux équations de Navier Stokes à deux lois de pression [7]. La pression $p_2 = R_{11}$ jouant ici le rôle de la deuxième pression associée à l'entropie $s_2 = \frac{p_2}{\rho^{\gamma_2}}$, avec $\gamma_2 = 3$. Dans ce cas, selon l'EDO gouvernant η (voir le système (6.15) pour $\alpha = 0$), le taux de compression est tel que $\mathcal{G}(\eta_R) = 0$, soit :

$$\mathcal{G}(\eta_R) = \frac{2M^2(1 - \eta_R)}{(\gamma - 1)} \left(\frac{\gamma + 1}{2} \eta_R - \left(\frac{1}{M^2} + \frac{\gamma - 1}{2} \right) + \frac{3 - \gamma}{2\eta_R^2} \frac{\beta^2}{M^2} (2\eta_R^2 - \eta_R - 1) \right) = 0.$$

Remarquons que si $\beta = 0$ dans cette dernière expression, on retrouve le taux de compression Euler pour un gaz parfait polytropique. L'égalité suivante implique :

$$\frac{3 - \gamma}{2\eta_R^4} \frac{\beta^2 \mathcal{M}_R^2}{M^2} (2\eta_R^2 - \eta_R - 1) = \left(\frac{1}{M^2} + \frac{\gamma - 1}{2} \right) \frac{\mathcal{M}_R^2}{\eta_R^2} - \frac{\gamma + 1}{2} \frac{\mathcal{M}_R^2}{\eta_R},$$

que l'on utilise pour réécrire (8.69) :

$$\Delta_{\alpha=0} = \rho_L c_R^2 \frac{1 - \eta_R}{\eta_R} \left(\theta(\eta_R) + 3 \frac{3 - \gamma}{2} \frac{\beta^2}{\eta_R^4} \frac{\mathcal{M}_R^2}{M^2} (1 - \eta_R^2) \right), \quad (8.93)$$

avec :

$$\begin{cases} \theta(\eta_R) = \left(\frac{\gamma - 1}{2} + \frac{1}{M^2} \right) \frac{\mathcal{M}_R^2}{\eta_R^2} - (\gamma - 1) \frac{\mathcal{M}_R^2}{\eta_R} + \mathcal{M}_R \left(1 + \frac{\gamma - 1}{2} \mathcal{M}_R \right), \\ \theta'(\eta_R) = \frac{(\gamma - 1) \mathcal{M}_R^2}{\eta_R^3} \left(\eta_R - \left(1 + \frac{2}{(\gamma - 1) M^2} \right) \right) = \frac{(\gamma - 1) \mathcal{M}_R^2}{\eta_R^3} (\eta_R - \eta_0) < 0, \\ \theta(1) = \mathcal{M}_R + \frac{\mathcal{M}_R^2}{M^2} > 0, \end{cases}$$

avec $\eta_0 = 1 + \frac{2}{(\gamma - 1) M^2} > 1$. Alors on remarque que $\forall \eta \in]0, 1[$, on a $\theta'(\eta) < 0$. Ainsi, la fonction $\eta \rightarrow \theta(\eta)$ est décroissante sur l'intervalle $[0, 1]$, donc $\theta(\eta_R) > \theta(1) > 0$. On en déduit donc que $\forall \eta_R \in]0, 1[$, $\theta(\eta_R)$ est strictement positive. Ainsi, les chocs de Lax pour les équations de Navier-Stokes à deux lois de pression en gaz parfaits polytropiques sont toujours structurellement (longitudinalement) stables.

Chapitre 9

Stabilité multidimensionnelle du choc plan

Dans ce chapitre, nous proposons une théorie de stabilité linéaire multidimensionnelle des solutions choc plan pour un système hyperbolique sous forme non conservative. Nous montrons que le formalisme des fonctions cinétiques autorise, de nouveau, une extension naturelle des conditions de stabilité énoncées dans le cadre conservatif. Cette théorie linéaire a été introduite par Erpenbeck [26] et D'yakov [22] dans les années cinquante dans le contexte des équations d'Euler, puis étendue dans sa version non linéaire à des systèmes hyperboliques généraux par Majda [51], au début des années quatre-vingt. L'exposé de l'extension linéaire que nous proposons, n'est mené que dans le cas des chocs plans associés aux champs extrêmes, par souci de simplicité. La théorie obtenue constitue une extension naturelle des conditions dites de Lopatinski, impliquant en particulier le respect des conditions géométriques de Lax, mais également la condition de stabilité structurelle du choc droit.

De manière à pouvoir appliquer cette théorie aux modèles RSM en plusieurs dimensions d'espace, nous ne pouvons pas faire l'hypothèse de l'existence d'un changement de variable permettant de réexprimer, de manière multidimensionnelle, le modèle de fluide parfait sous la forme d'un système de lois de conservation en présence d'un terme source mesure concentré sur les chocs. Cette propriété est vraie pour les modèles de turbulence isotrope non conservatifs étudiés dans les travaux de Berthon [7] et de Chalons [14], mais est fausse ici dans le cas de la turbulence anisotrope.

Les modèles que nous étudions prennent la forme d'un système hyperbolique conservatif en présence de perturbations visqueuses non conservatives, seulement de manière directionnelle, à savoir dans leur formulation quasi 1D (et lorsque la composante tangentielle R_{12} garde un signe constant). Nous montrons toutefois que cette propriété directionnelle conjuguée à la propriété d'invariance par rotation des équations, permet d'analyser la stabilité des solutions choc plan sous l'action de perturbations multidimensionnelles. Cette analyse repose sur l'étude des équations gouvernant la couche interne du profil de choc perturbé et s'appuie sur des travaux récents dus à Guès et Williams [34]. Une conséquence importante de notre analyse de la couche interne est que les fonctions cinétiques, définies dans la caractérisation des solutions choc plan non perturbées, peuvent être utilisées en l'état pour aborder l'analyse des perturbations multidimensionnelles de ces solutions. Nous appliquons la théorie proposée aux

modèles RSM dans les cadres isotherme et anisotherme.

Dans le cadre isotherme, nous considérons des corrections de Ristorcelli garantissant la stabilité structurelle du choc droit. Nous montrons que l'amplitude de l'échelle de temps associée à ces corrections, doit être choisie plus grande que celle garantissant la stabilité structurelle, afin d'éviter l'apparition d'instabilités multidimensionnelles violentes.

Dans le cadre anisotherme, où aucune correction de Ristorcelli n'est invoquée, nous montrons que des instabilités multidimensionnelles violentes peuvent apparaître dans le cas où les conditions de stabilité structurelle sont satisfaites, *i.e.* avant toute violation des conditions géométriques de Lax.

9.1 Le problème du choc plan perturbé et sa linéarisation

9.1.1 Préambule : notion de couche interne pour un choc plan non perturbé

Nous rappelons dans cette section le concept de couche interne de choc, utile à l'analyse de la stabilité multidimensionnelle des chocs plans. La théorie de la stabilité multidimensionnelle que nous introduisons, est développée pour un système hyperbolique non conservatif à deux variables d'espace, dont l'écriture abstraite est :

$$\partial_t \mathbf{u} + \mathcal{A}_1(\mathbf{u})\partial_x \mathbf{u} + \mathcal{A}_2(\mathbf{u})\partial_y \mathbf{u} = 0, \quad (9.1)$$

où l'inconnue $\mathbf{u} \in \Omega_{\mathbf{u}} \subset \mathbb{R}^n$, $n > 1$. Ici $\mathcal{A}_1(\mathbf{u})$ et $\mathcal{A}_2(\mathbf{u})$ ne coïncident pas nécessairement avec des matrices jacobiennes.

Quitte à effectuer un changement de repère adéquat, nous supposons que l'axe des x constitue la direction normale au choc plan considéré, de sorte que ce choc plan est une fonction de la forme particulière suivante :

$$\mathbf{u}(t, x, y) = \begin{cases} \mathbf{u}_L, & \text{si } x < \sigma t, y \in \mathbb{R}, t > 0, \\ \mathbf{u}_R, & \text{si } x > \sigma t. \end{cases} \quad (9.2)$$

Une telle fonction discontinue doit être solution, en un sens à préciser, du problème de Cauchy (9.1) pour la donnée initiale :

$$\mathbf{u}_0(x, y) = \begin{cases} \mathbf{u}_L, & \text{si } x < 0, y \in \mathbb{R}, \\ \mathbf{u}_R, & \text{si } x > 0, y \in \mathbb{R}. \end{cases} \quad (9.3)$$

La question est alors classiquement de caractériser l'état à droite \mathbf{u}_R dans la fonction (9.2) étant donné l'état à gauche \mathbf{u}_L , ainsi que la vitesse de propagation σ , de sorte à ce que (9.2) soit solution de (9.1)-(9.3).

La notion de couche interne de choc offre une réponse très précise à cette question, en donnant, en particulier, un sens à la fonction (9.2) en $x = \sigma t$, *i.e.* au sein du front de choc, dès que le système (9.1) peut être considéré comme la limite de fluide parfait d'un modèle avec perturbation visqueuse de la forme :

$$\partial_t \mathbf{u}^\theta + \mathcal{A}_1(\mathbf{u}^\theta)\partial_x \mathbf{u}^\theta + \mathcal{A}_2(\mathbf{u}^\theta)\partial_y \mathbf{u}^\theta = \theta \left(\partial_x \left(\mathcal{D}_1(\mathbf{u}^\theta)\partial_x \mathbf{u}^\theta \right) + \partial_y \left(\mathcal{D}_2(\mathbf{u}^\theta)\partial_y \mathbf{u}^\theta \right) \right), \quad (9.4)$$

où les matrices de viscosité $\mathcal{D}_1(\mathbf{u})$ et $\mathcal{D}_2(\mathbf{u})$ sont fixées une fois pour toute. Par souci de simplicité dans les écritures, nous avons omis les dérivées croisées du tenseur dissipatif, ainsi que toute contribution non conservative à l'opérateur du second ordre. Il ne s'agit pas d'une véritable restriction à notre propos.

Remarque 9.1.1. Contrairement aux autres chapitres, le petit paramètre θ , destiné à tendre vers zéro, désigne l'amplitude de la perturbation visqueuse. Le petit paramètre ϵ est réservé pour décrire l'amplitude des perturbations ultérieures d'un choc plan dans la limite $\theta \rightarrow 0^+$.

De manière à introduire la notion de couche interne, il est commode, en anticipant les développements menés ci-après, de procéder au changement de variables suivant :

$$\begin{cases} \hat{t} = t, \\ \hat{x} = x - \sigma t, \\ \hat{y} = y, \end{cases} \quad (9.5)$$

de sorte que la détermination du choc plan, désormais stationnaire dans ce système de variables, consiste à rechercher une solution du système :

$$\partial_{\hat{t}} \hat{\mathbf{u}} + (\mathcal{A}_1(\hat{\mathbf{u}}) - \sigma Id) \partial_{\hat{x}} \hat{\mathbf{u}} + \mathcal{A}_2(\hat{\mathbf{u}}) \partial_{\hat{y}} \hat{\mathbf{u}} = 0, \quad (9.6)$$

de la forme particulière :

$$\hat{\mathbf{u}}(\hat{t}, \hat{x}, \hat{y}) = \begin{cases} \mathbf{u}_L, & \text{si } \hat{x} < 0, \hat{y} \in \mathbb{R}, \hat{t} > 0, \\ \mathbf{u}_R, & \text{si } \hat{x} > 0, \end{cases} \quad (9.7)$$

cette solution particulière de (9.6) étant associée à la donnée initiale :

$$\hat{\mathbf{u}}_0(\hat{x}, \hat{y}) = \begin{cases} \mathbf{u}_L, & \hat{y} \in \mathbb{R}, \hat{x} < 0, \\ \mathbf{u}_R, & \hat{y} \in \mathbb{R}, \hat{x} > 0. \end{cases} \quad (9.8)$$

Clairement, la solution recherchée (9.7) ne dépend pas du temps de sorte qu'elle coïncide avec la donnée initiale (9.8).

Remarque 9.1.2. Le lecteur pourra être surpris de notre obstination à vouloir garder \hat{y} comme variable du problème (9.6)-(9.8), alors que la donnée (9.8) et donc la solution escomptée (9.7) ne fait intervenir \hat{y} qu'en tant que paramètre muet. Nous préférons garder ici la dépendance en \hat{y} explicitement, de manière à faciliter la lecture des formules à venir.

Notons que dans (9.5) et (9.6), la vitesse σ est fixée, alors que dans (9.8), et donc (9.7), l'état \mathbf{u}_L est implicitement prescrit : il s'agit, dès lors, d'exhiber un état \mathbf{u}_R de sorte que le problème de Cauchy (9.6)-(9.8) admette la fonction (9.7) pour solution. Ainsi que nous l'avons déjà illustré (voir chapitre 4, figure (4.2), a, b et c), la réponse à cette question n'est pas unique dans le cadre d'un système non conservatif. Il convient de faire explicitement référence aux petites échelles θ du modèle avec perturbations visqueuses. La notion de couche interne de choc résulte directement de l'analyse de ces petites échelles. Son objectif est de définir finement la solution (9.7) en précisant comment comprendre une telle solution en $\hat{x} = 0$, pour tout $\hat{y} \in \mathbb{R}$.

Définition 9.1.3. Supposons que le problème différentiel :

$$\begin{cases} (\mathcal{A}_1(\omega) - \sigma Id) d_{\hat{z}}\omega = d_{\hat{z}}(\mathcal{D}_1(\omega)d_{\hat{z}}\omega), & (9.9) \\ \lim_{\hat{z} \rightarrow -\infty} \omega(\hat{z}) = \mathbf{u}_L, \quad \lim_{\hat{z} \rightarrow +\infty} \omega(\hat{z}) = \mathbf{u}_R, \quad \lim_{\hat{z} \rightarrow \pm\infty} d_{\hat{z}}\omega(\hat{z}) = 0, & (9.10) \end{cases}$$

admette une unique solution $\omega(\hat{z})$.

Définissons la fonction :

$$\hat{\mathbf{u}}_*(\hat{z}, \hat{y}) = \omega(\hat{z}), \quad \text{pour tout } \hat{z} \in \mathbb{R} \text{ et } \hat{y} \in \mathbb{R}. \quad (9.11)$$

Alors $\hat{\mathbf{u}}_*$ est dite couche interne du choc plan stationnaire :

$$\hat{\mathbf{u}}(\hat{x}, \hat{y}) = \begin{cases} \mathbf{u}_L, & \hat{x} < 0, \hat{y} \in \mathbb{R}, \\ \mathbf{u}_R, & \hat{x} > 0, \hat{y} \in \mathbb{R}, \end{cases} \quad (9.12)$$

et vérifie les conditions asymptotiques suivantes :

$$\begin{cases} \lim_{\hat{x} \rightarrow 0^-} \hat{\mathbf{u}}(\hat{x}, \hat{y}) = \lim_{\hat{z} \rightarrow -\infty} \hat{\mathbf{u}}_*(\hat{z}, \hat{y}), & \text{pour tout } \hat{y} \in \mathbb{R}, \\ \lim_{\hat{x} \rightarrow 0^+} \hat{\mathbf{u}}(\hat{x}, \hat{y}) = \lim_{\hat{z} \rightarrow +\infty} \hat{\mathbf{u}}_*(\hat{z}, \hat{y}), & \text{pour tout } \hat{y} \in \mathbb{R}. \end{cases} \quad (9.13)$$

À la lecture de (9.13), il faut comprendre dans les formules (9.9), (9.10), (9.11), la variable \hat{z} comme une variable rapide qui permet de “piéger” le graphe de la solution onde progressive ω en $\hat{x} = 0$, pour tout $\hat{y} \in \mathbb{R}$.

Il est utile à l’analyse de la stabilité multidimensionnelle du choc plan, de réexprimer la définition (9.11) de la couche interne du choc plan (9.12) en disant qu’un choc plan solution de (9.1), et compatible avec les petites échelles diffusives décrites dans (9.4), est, dans le changement de variable (9.5) :

- une solution constante de (9.6) égale à \mathbf{u}_L pour $\hat{x} < 0$ et $\hat{y} \in \mathbb{R}$,
- une solution constante de (9.6) égale à \mathbf{u}_R pour $\hat{x} > 0$ et $\hat{y} \in \mathbb{R}$,
- une solution astreinte en $\hat{x} = 0$, et pour $\hat{y} \in \mathbb{R}$, aux conditions de raccordement asymptotiques (9.13) avec la couche interne $\hat{\mathbf{u}}_*$ définie en (9.11).

Avant de donner des éléments conduisant à l’introduction de la définition (9.1.3), il importe de faire le lien entre la couche interne d’un choc plan et l’existence d’un ensemble complet de relations de saut généralisées permettant de caractériser ce choc plan à l’aide de fonctions cinétiques. C’est l’objet du lemme suivant :

Lemme 9.1.4. *Supposons qu’il existe un changement de variable $\omega \rightarrow \mathbf{v}(\omega)$, telle que la matrice $\mathcal{A}_1(\omega)$ du système différentiel (9.9) devienne semblable à une matrice jacobienne $\nabla_{\mathbf{v}}\mathbf{F}_1(\mathbf{v})$ d’une certaine fonction flux \mathbf{F}_1 . Alors, la fonction couche interne de choc $\hat{\mathbf{u}}_*(\hat{z}, \hat{y})$, définie en (9.11), est solution pour tout $\hat{y} \in \mathbb{R}$ d’un système différentiel en variable \mathbf{v} de la forme :*

$$\begin{cases} d_{\hat{z}}(\mathbf{F}_1(\mathbf{v}) - \sigma \mathbf{v}) = \mathcal{R}(\mathbf{v}, d_{\hat{z}}\mathbf{v}, d_{\hat{z}\hat{z}}^2\mathbf{v}), & (9.14) \\ \lim_{\hat{z} \rightarrow -\infty} \mathbf{v}(\hat{z}) = \mathbf{v}(\mathbf{u}_L), \quad \lim_{\hat{z} \rightarrow +\infty} \mathbf{v}(\hat{z}) = \mathbf{v}(\mathbf{u}_R), & (9.15) \end{cases}$$

de sorte qu’après intégration de (9.14) sur $\mathbb{R}_{\hat{z}}$, nous obtenons les relations de saut généralisées suivantes valables pour tout $\hat{y} \in \mathbb{R}$:

$$\left[\mathbf{F}_1(\mathbf{v}(\hat{\mathbf{u}}_*(\hat{z}, \hat{y}))) - \sigma \mathbf{v}(\hat{\mathbf{u}}_*(\hat{z}, \hat{y})) \right]_{\hat{z}=-\infty}^{\hat{z}=+\infty} = \int_{\mathbb{R}_{\hat{z}}} \mathcal{R}(\mathbf{v}, d_{\hat{z}}\mathbf{v}, d_{\hat{z}\hat{z}}^2\mathbf{v})(\omega(\hat{z})) d\hat{z}, \quad (9.16)$$

soit, grâce à (9.15) et aux conditions de raccordement asymptotique (9.13) :

$$-\sigma(\mathbf{v}(\mathbf{u}_R) - \mathbf{v}(\mathbf{u}_L)) + \mathbf{F}_1(\mathbf{v}(\mathbf{u}_R)) - \mathbf{F}_1(\mathbf{v}(\mathbf{u}_L)) = \mathcal{C}(\mathbf{u}_L, \sigma), \quad (9.17)$$

où la fonction cinétique vectorielle $\mathcal{C}(\mathbf{u}_L, \sigma)$ est définie par :

$$\mathcal{C}(\mathbf{u}_L, \sigma) = \int_{\mathbb{R}\hat{z}} \mathcal{R}(\mathbf{v}, d_{\hat{z}}\mathbf{v}, d_{\hat{z}\hat{z}}^2\mathbf{v})(\omega(\hat{z}))d\hat{z}.$$

Nous concluons ce paragraphe en présentant succinctement les développements conduisant à la définition (9.1.3). Le lecteur qui a pris connaissance du chapitre 2 peut néanmoins directement passer à la section suivante.

Nous omettons, par souci de simplicité des écritures, la notation chapeau dans toute la fin de ce paragraphe. Il s'agit ici de définir les solutions choc plan du système hyperbolique (9.1) comme limite de fluide parfait (*i.e.* dans la limite $\theta = 0$) des solutions onde progressive du modèle avec perturbations visqueuses (9.4). Dans le changement de variables (9.5) conduisant à des solutions choc plan stationnaires, nous commençons par fixer (arbitrairement) l'amplitude de la perturbation visqueuse à $\theta = 1$, pour chercher une solution stationnaire $\mathbf{u}_*(x, y)$ du système :

$$\partial_t \mathbf{u} + (\mathcal{A}_1(\mathbf{u}) - \sigma Id) \partial_x \mathbf{u} + \mathcal{A}_2(\mathbf{u}) \partial_y \mathbf{u} = \partial_x (\mathcal{D}_1(\mathbf{u}) \partial_x \mathbf{u}) + \partial_y (\mathcal{D}_2(\mathbf{u}) \partial_y \mathbf{u}), \quad (9.18)$$

vérifiant les conditions asymptotiques :

$$\begin{cases} \lim_{x \rightarrow -\infty} \mathbf{u}_*(x, y) = \mathbf{u}_L, & \lim_{x \rightarrow +\infty} \mathbf{u}_*(x, y) = \mathbf{u}_R, & \text{pour tout } y \in \mathbb{R} \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} \partial_x \mathbf{u}_*(x, y) = 0, & \lim_{x \rightarrow +\infty} \partial_x \mathbf{u}_*(x, y) = 0, & \text{pour tout } y \in \mathbb{R}. \end{cases} \quad (9.19)$$

Les conditions (9.19) étant indépendantes de y , la résolution de ce problème consiste donc clairement à exhiber une fonction ω de la variable x seule, solution du problème différentiel :

$$\left\{ \begin{array}{l} (\mathcal{A}_1(\omega) - \sigma Id) d_x \omega = d_x (\mathcal{D}_1(\omega) d_x \omega), \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} \omega(x) = \mathbf{u}_L, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \omega(x) = \mathbf{u}_R, \quad \lim_{x \rightarrow \pm\infty} d_x \omega(x) = 0, \end{array} \right. \quad (9.20)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow -\infty} \omega(x) = \mathbf{u}_L, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \omega(x) = \mathbf{u}_R, \quad \lim_{x \rightarrow \pm\infty} d_x \omega(x) = 0, \end{array} \right. \quad (9.21)$$

pour ensuite en déduire :

$$\mathbf{u}_*(x, y) = \omega(x), \quad \text{pour tout } y \in \mathbb{R}. \quad (9.22)$$

Supposons dorénavant qu'à \mathbf{u}_L fixé dans (9.21) et à σ (convenablement) prescrit dans (9.20), il existe une unique solution $\omega(x)$ au problème différentiel précédent et donc un unique état \mathbf{u}_R avec $\mathbf{u}_R = \lim_{x \rightarrow +\infty} \omega(x)$.

Équipés de la solution stationnaire (9.22) du problème (9.18)-(9.19), nous définissons la famille de fonctions suivantes pour tout $\theta > 0$:

$$\mathbf{u}_*^\theta(x, y) = \mathbf{u}_* \left(\frac{x}{\theta}, y \right) = \omega \left(\frac{x}{\theta} \right), \quad x \in \mathbb{R}, \quad y \in \mathbb{R}, \quad (9.23)$$

de sorte qu'à $\theta > 0$ fixé, la fonction \mathbf{u}_*^θ est solution stationnaire de :

$$\partial_t \mathbf{u}^\theta + \left(\mathcal{A}_1(\mathbf{u}^\theta) - \sigma Id \right) \partial_x \mathbf{u}^\theta + \mathcal{A}_2(\mathbf{u}^\theta) \partial_y \mathbf{u}^\theta = \theta \left(\partial_x (\mathcal{D}_1(\mathbf{u}^\theta) \partial_x \mathbf{u}^\theta) + \partial_y (\mathcal{D}_2(\mathbf{u}^\theta) \partial_y \mathbf{u}^\theta) \right), \quad (9.24)$$

satisfaisant les conditions asymptotiques :

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \mathbf{u}^\theta(x, y) = \mathbf{u}_L \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \mathbf{u}^\theta(x, y) = \mathbf{u}_R, \quad \text{pour tout } y \in \mathbb{R}. \quad (9.25)$$

Il est possible de vérifier que la famille de fonctions $\{\mathbf{u}_*^\theta\}_{\theta > 0}$ converge fortement dans L^1_{loc} dans la limite $\theta \rightarrow 0^+$ vers la fonction discontinue :

$$\mathbf{u}(x, y) = \begin{cases} \mathbf{u}_L, & x < 0, y \in \mathbb{R}, \\ \mathbf{u}_R, & x > 0, y \in \mathbb{R}, \end{cases} \quad (9.26)$$

qui, par définition est la solution choc plan (9.7) de (9.6) (solution choc dite compatible avec les matrices de viscosité $\mathcal{D}_1(\mathbf{u})$ et $\mathcal{D}_2(\mathbf{u})$ fixées dans le modèle avec perturbations visqueuses (9.4))

Armés de cette construction de la solution choc (9.26), nous sommes en mesure d'introduire la notion de couche de choc conformément à la définition (9.1.3). De manière heuristique, l'effet de la remise à l'échelle (9.23) pour $\theta > 0$ suivie du passage à la limite $\theta \rightarrow 0^+$, est de "piéger" le graphe de $\omega(\frac{x}{\theta})$ et donc celui de $\mathbf{u}_*(\frac{x}{\theta}, y)$ en $x = 0$, pour tout $y \in \mathbb{R}$. De manière plus précise, il convient, dans les définitions (9.23), de remplacer, lors du passage à la limite $\theta \rightarrow 0^+$, la variable renormalisée $\frac{x}{\theta}$, avec $x \in \mathbb{R}$, par une variable rapide $z \in \mathbb{R}$ (*i.e.* $z = \frac{x}{\theta}$), de sorte à compléter la définition du choc plan (9.26) par :

$$\begin{cases} \lim_{x \rightarrow 0^-} \mathbf{u}(x, y) = \lim_{z \rightarrow -\infty} \mathbf{u}_*(z, y), & \text{pour tout } y \in \mathbb{R} \\ \lim_{x \rightarrow 0^+} \mathbf{u}(x, y) = \lim_{z \rightarrow +\infty} \mathbf{u}_*(z, y), & \text{pour tout } y \in \mathbb{R} \end{cases} \quad (9.27)$$

où, par construction, $\mathbf{u}_*(z, y)$ est solution du problème différentiel :

$$\left\{ \begin{array}{l} (\mathcal{A}_1(\mathbf{u}_*) - \sigma Id) d_z \mathbf{u}_* = d_z (\mathcal{D}_1(\mathbf{u}_*) d_z \mathbf{u}_*), \\ \lim_{z \rightarrow -\infty} \mathbf{u}_*(z, y) = \mathbf{u}_L, \quad \lim_{z \rightarrow +\infty} \mathbf{u}_*(z, y) = \mathbf{u}_R, \end{array} \right. \quad \text{pour tout } y \in \mathbb{R}. \quad (9.28)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \lim_{z \rightarrow -\infty} \mathbf{u}_*(z, y) = \mathbf{u}_L, \quad \lim_{z \rightarrow +\infty} \mathbf{u}_*(z, y) = \mathbf{u}_R, \\ \end{array} \right. \quad \text{pour tout } y \in \mathbb{R}. \quad (9.29)$$

Par définition, cette solution $\mathbf{u}_*(z, y)$, avec $z \in \mathbb{R}$ et $y \in \mathbb{R}$, est dite couche interne du choc plan (9.26).

9.1.2 Perturbation d'un choc plan : notations et premières définitions de la stabilité

Nous décrivons dans ce paragraphe les perturbations d'un choc plan dont nous proposons d'étudier la stabilité au sens d'une première définition que nous introduisons.

Par convenance, nous rappelons quelques notations de la section précédente. Nous considérons des solutions choc plan du système (9.1), pour lesquelles les couches internes associées sont supposées satisfaire à l'hypothèse du lemme (9.1.4). En d'autres termes, et à une rotation près des axes, un choc plan désigne ici une fonction $\mathbf{u}(t, x, y)$ de la forme particulière :

$$\mathbf{u}(t, x, y) = \mathbf{u}_L + (\mathbf{u}_R - \mathbf{u}_L)H(x - \sigma t), \quad t > 0, (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad (9.30)$$

solution du problème de Cauchy (9.1) pour la donnée initiale :

$$\mathbf{u}_0(x, y) = \begin{cases} \mathbf{u}_L, & x < 0, y \in \mathbb{R}, \\ \mathbf{u}_R, & x > 0, y \in \mathbb{R}, \end{cases} \quad (9.31)$$

où pour \mathbf{u}_L fixé dans (9.31) et σ convenablement prescrite dans (9.30), l'état \mathbf{u}_R est par construction solution des relations de saut généralisées (9.17) :

$$-\sigma(\mathbf{v}(\mathbf{u}_R) - \mathbf{v}(\mathbf{u}_L)) + \mathbf{F}_1(\mathbf{v}(\mathbf{u}_R)) - \mathbf{F}_1(\mathbf{v}(\mathbf{u}_L)) = \mathcal{C}(\mathbf{u}_L, \sigma), \quad (9.32)$$

pour le changement de variable $\mathbf{u} \rightarrow \mathbf{v}(\mathbf{u})$ considéré au lemme (9.1.4). La solution (9.30) du problème (9.1)-(9.31) ainsi définie, est dite solution de référence dans la suite.

Notre motivation est ici d'examiner des solutions du système bidimensionnel (9.1) résultant d'une perturbation infinitésimale de la donnée initiale (9.31), de la forme :

$$\mathbf{u}_0^\epsilon(x, y) = \begin{cases} \mathbf{u}_{0L}^\epsilon(x, y) = \mathbf{u}_L + \epsilon \mathbf{w}_{0L}(x, y), & x < 0, y \in \mathbb{R}, \\ \mathbf{u}_{0R}^\epsilon(x, y) = \mathbf{u}_R + \epsilon \mathbf{w}_{0R}(x, y), & x > 0, y \in \mathbb{R}, \end{cases} \quad (9.33)$$

où les fonctions \mathbf{w}_{0L} et \mathbf{w}_{0R} sont choisies indéfiniment dérivables. Soulignons que la donnée initiale perturbée dépend ici de la variable normale x ainsi que de la variable tangentielle y . L'amplitude $\epsilon > 0$ de la perturbation dans (9.33) peut être choisie aussi petite que souhaitée dans l'analyse à venir.

La solution $\mathbf{u}^\epsilon(t, x, y)$ du problème de Cauchy (9.1) pour la donnée initiale perturbée (9.33) est bien évidemment distincte de la solution de référence (9.30). À l'instar du chapitre 8 dévolue à la stabilité structurelle du choc droit, la solution choc plan est dite stable si la solution $\mathbf{u}^\epsilon(t, x, y)$ du problème (9.1)-(9.33) peut être rendue arbitrairement proche de la solution de référence (9.30) en choisissant l'amplitude ϵ de la perturbation dans (9.33) arbitrairement petite. Motivés par les travaux de Majda [51], il convient d'affiner cette première notion de stabilité selon la définition suivante :

Définition 9.1.5. Un choc plan est dit violemment instable si une perturbation d'amplitude $\epsilon > 0$ arbitrairement petite, mais non nulle, dans (9.33) conduit à une solution de (9.1) croissant exponentiellement vite en temps. Ce choc est dit neutralement stable si la solution perturbée reste bornée en temps sans s'amortir. Enfin, il est dit stable si l'amplitude de la perturbation décroît en temps.

Nous retrouverons ces distinctions ultérieurement dans l'analyse. Dans l'hypothèse où le choc plan étudié s'avère être stable au sens de la définition proposée, il est légitime de rechercher la solution perturbée $\mathbf{u}^\epsilon(t, x, y)$ sous la forme d'une fonction très régulière (au moins localement en temps) en dehors d'une seule discontinuité localisée le long de la surface :

$$\Sigma^\epsilon = \left\{ (t, x, y) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^2, x = \phi^\epsilon(t, y) \right\}, \quad (9.34)$$

où nous rappelons que x est la variable normale au choc plan, alors que y désigne la variable transverse. Ici $\phi^\epsilon(t, y)$ représente la déformation de la surface du choc plan liée à la perturbation d'amplitude $\epsilon > 0$ dans la donnée (9.33) et doit vérifier $\lim_{t \rightarrow 0^+} \phi^\epsilon(t, y) = 0$ pour tout $y \in \mathbb{R}$.

Ainsi, $\mathbf{u}^\epsilon(t, x, y)$ est recherchée sous la forme :

$$\mathbf{u}^\epsilon(t, x, y) = \begin{cases} \mathbf{u}_L^\epsilon(t, x, y), & t > 0, y \in \mathbb{R}, x < \phi^\epsilon(t, y), \\ \mathbf{u}_R^\epsilon(t, x, y), & t > 0, y \in \mathbb{R}, x > \phi^\epsilon(t, y), \end{cases} \quad (9.35)$$

avec \mathbf{u}_L^ϵ et \mathbf{u}_R^ϵ très régulières, respectivement solutions de :

$$\begin{cases} \partial_t \mathbf{u}_L^\epsilon + \mathcal{A}_1(\mathbf{u}_L^\epsilon) \partial_x \mathbf{u}_L^\epsilon + \mathcal{A}_2(\mathbf{u}_L^\epsilon) \partial_y \mathbf{u}_L^\epsilon = 0, & t > 0, y \in \mathbb{R}, x < \phi^\epsilon(t, y), \\ \lim_{t \rightarrow 0^+} \mathbf{u}_L^\epsilon(t, x, y) = \mathbf{u}_{0L}^\epsilon(x, y), & y \in \mathbb{R}, x < 0, \end{cases} \quad (9.36)$$

et :

$$\begin{cases} \partial_t \mathbf{u}_R^\epsilon + \mathcal{A}_1(\mathbf{u}_R^\epsilon) \partial_x \mathbf{u}_R^\epsilon + \mathcal{A}_2(\mathbf{u}_R^\epsilon) \partial_y \mathbf{u}_R^\epsilon = 0, & t > 0, y \in \mathbb{R}, x > \phi^\epsilon(t, y), \\ \lim_{t \rightarrow 0^+} \mathbf{u}_R^\epsilon(t, x, y) = \mathbf{u}_{0R}^\epsilon(x, y), & y \in \mathbb{R}, x > 0, \end{cases} \quad (9.37)$$

ces deux solutions devant être astreintes à des conditions de couplage à la traversée de la surface Σ^ϵ , conditions de couplage qu'il nous faut formuler. C'est l'objet du paragraphe suivant.

9.1.3 Couche interne pour un choc plan perturbé

Nous proposons d'écrire les conditions de couplage devant lier les problèmes (9.36) et (9.37) à la traversée de la surface de choc perturbé Σ^ϵ , en exhibant le problème différentiel gouvernant la couche interne au sein du front de choc perturbé, à savoir en $x = \phi^\epsilon(t, y)$.

Nous suggérons donc de revenir à la description fine des petites échelles induites par le système avec perturbations visqueuses (9.4), dont les effets sont concentrés dans la couche interne après passage à la limite de type fluide parfait.

Bien sûr, la principale motivation pour revenir au système régularisé (9.4) est que nous attendons, au moins formellement, de la solution $\mathbf{u}^{\theta, \epsilon}(t, x, y)$ du problème de Cauchy régularisé (9.4)-(9.33) d'être une fonction **régulière** pour une amplitude de régularisation $\theta > 0$, indépendamment de l'amplitude de la perturbation $\epsilon > 0$ dans (9.33). En revenant au problème visqueux avec $\theta > 0$, nous évitons donc, d'une part, d'avoir à formuler un problème à surface libre et donc des conditions de couplage à cette même surface libre, et, d'autre part, nous espérons déduire des conditions de couplage naturelles dans la limite de fluide parfait $\theta \rightarrow 0$ en arguant de la limite formelle :

$$\lim_{\theta \rightarrow 0^+} \mathbf{u}^{\theta, \epsilon}(t, x, y) = \mathbf{u}^\epsilon(t, x, y) \text{ presque partout en } (t, x, y). \quad (9.38)$$

Le concept de couche interne répond précisément à notre attente.

Les mécanismes visqueux pour $\theta > 0$ induisent une régularisation de la surface de choc Σ^ϵ définie en (9.34). Les travaux de Guès et Williams [34] montrent qu'il est possible de décrire la position médiane de cette surface régularisée à chaque instant par une fonction régulière $\psi^{\theta, \epsilon}(t, y)$ possédant la propriété :

$$\lim_{\theta \rightarrow 0^+} \psi^{\theta, \epsilon}(t, y) = \phi^\epsilon(t, y), \quad t > 0, y \in \mathbb{R}. \quad (9.39)$$

Puisque notre motivation est de procéder au passage à la limite de fluide parfait $\theta \rightarrow 0^+$ pour une amplitude ϵ de perturbation fixée dans la donnée (9.33), nous omettons, le plus souvent, la dépendance en ϵ dans ce paragraphe pour alléger les notations.

Puisque la position médiane $\psi^\theta(t, y)$ de la régularisation du front de choc perturbé

(9.34) est inconnue, nous la ramenons, comme il est d'usage, sur une position fixe grâce au changement de variables suivant :

$$\begin{cases} \hat{t} = t, \\ \hat{x} = x - \psi^\theta(t, y), \\ \hat{y} = y. \end{cases} \quad (9.40)$$

Le problème de Cauchy satisfait par la solution perturbée régularisée :

$$\widehat{\mathbf{u}}^\theta(\hat{t}, \hat{x}, \hat{y}) = \mathbf{u}^\theta(\hat{t}, \hat{x} + \widehat{\psi}^\theta(\hat{t}, \hat{y}), \hat{y}),$$

avec $\widehat{\psi}^\theta(\hat{t}, \hat{y}) = \psi^\theta(\hat{t}, \hat{y})$, s'écrit alors, pour $\theta > 0$:

$$\begin{aligned} \partial_{\hat{t}} \widehat{\mathbf{u}}^\theta + \left(\mathcal{A}_1(\widehat{\mathbf{u}}^\theta) - \partial_{\hat{t}} \widehat{\psi}^\theta Id - \partial_{\hat{y}} \widehat{\psi}^\theta \mathcal{A}_2(\widehat{\mathbf{u}}^\theta) \right) \partial_{\hat{x}} \widehat{\mathbf{u}}^\theta + \mathcal{A}_2(\widehat{\mathbf{u}}^\theta) \partial_{\hat{y}} \widehat{\mathbf{u}}^\theta = \\ \theta \left(\partial_{\hat{x}} \left(\left(\mathcal{D}_1(\widehat{\mathbf{u}}^\theta) - \partial_{\hat{y}} \widehat{\psi}^\theta \mathcal{D}_2(\widehat{\mathbf{u}}^\theta) \right) \partial_{\hat{x}} \widehat{\mathbf{u}}^\theta \right) + \partial_{\hat{y}} \left(\mathcal{D}_2(\widehat{\mathbf{u}}^\theta) \partial_{\hat{y}} \widehat{\mathbf{u}}^\theta \right) \right), \quad \hat{t} > 0, (\hat{x}, \hat{y}) \in \mathbb{R}^2, \end{aligned} \quad (9.41)$$

avec :

$$\lim_{\hat{t} \rightarrow 0^+} \widehat{\mathbf{u}}^\theta(\hat{t}, \hat{x}, \hat{y}) = \mathbf{u}_0^\epsilon(\hat{x}, \hat{y}), \quad (\hat{x}, \hat{y}) \in \mathbb{R}^2, \quad (9.42)$$

où \mathbf{u}_0^ϵ est la donnée initiale perturbée (9.33). Observons que pour le changement de variables (9.40), $\hat{x} = 0$ correspond, à chaque instant $\hat{t} > 0$ et pour tout $\hat{y} \in \mathbb{R}$, à la position (médiane) de la régularisation du front de choc perturbé. Nous nous attendons donc à voir émerger une couche interne de profil de choc perturbé dans la limite de fluide parfait $\theta \rightarrow 0^+$, précisément en $\hat{x} = 0$, à toute date $\hat{t} > 0$ et pour tout $\hat{y} \in \mathbb{R}$.

De manière à piéger en $\hat{x} = 0$ l'effet des petites échelles décrit par (9.41)-(9.42) dans la limite $\theta \rightarrow 0^+$, nous adoptons l'approche développée par Guès et Williams (voir Métivier [33] pour une présentation simplifiée et [34] pour une présentation rigoureuse). Ceux-ci établissent que le profil de viscosité d'un choc plan perturbé peut être approché, à n'importe quel ordre θ , par un développement de la forme :

$$\widehat{\mathbf{u}}^\theta(\hat{t}, \hat{x}, \hat{y}) = \widehat{\mathbf{u}}_0 \left(\hat{t}, \frac{\hat{x}}{\theta}, \hat{y} \right) + \theta \widehat{\mathbf{u}}_1 \left(\hat{t}, \frac{\hat{x}}{\theta}, \hat{y} \right) + \dots, \quad (9.43)$$

tout en approchant le front visqueux selon :

$$\widehat{\psi}^\theta(\hat{t}, \hat{y}) = \phi(\hat{t}, \hat{y}) + \theta \psi_1(\hat{t}, \hat{y}) + \dots, \quad (9.44)$$

où $\phi(\hat{t}, \hat{y})$ représente la limite de fluide parfait (9.39) de $\widehat{\psi}^\theta(\hat{t}, \hat{y})$. Puisque seule nous importe la description de la limite de fluide parfait $\theta \rightarrow 0^+$, nous n'envisageons que les équations gouvernant le terme dominant $\widehat{\mathbf{u}}_0 \left(\hat{t}, \frac{\hat{x}}{\theta}, \hat{y} \right)$ dans (9.43). Ces équations sont obtenues en injectant ce terme, à $\theta > 0$ fixé, dans le système avec perturbations visqueuses (9.41), pour obtenir que $\widehat{\mathbf{u}}_0 \left(\hat{t}, \frac{\hat{x}}{\theta}, \hat{y} \right)$ doit être solution de :

$$\begin{aligned} \partial_{\hat{t}} \widehat{\mathbf{u}}_0 + \frac{1}{\theta} \left(\mathcal{A}_1(\widehat{\mathbf{u}}_0) - \partial_{\hat{t}} \phi(\hat{t}, \hat{y}) Id - \partial_{\hat{y}} \phi(\hat{t}, \hat{y}) \mathcal{A}_2(\widehat{\mathbf{u}}_0) \right) \partial_{\hat{x}} \widehat{\mathbf{u}}_0 \\ + \mathcal{A}_2(\widehat{\mathbf{u}}_0) \partial_{\hat{y}} \widehat{\mathbf{u}}_0 = \frac{1}{\theta} \partial_{\hat{x}} \left(\left(\mathcal{D}_1(\widehat{\mathbf{u}}_0) - \partial_{\hat{y}} \phi(\hat{t}, \hat{y}) \mathcal{D}_2(\widehat{\mathbf{u}}_0) \right) \partial_{\hat{x}} \widehat{\mathbf{u}}_0 \right) + \theta \partial_{\hat{y}} \left(\mathcal{D}_2(\widehat{\mathbf{u}}_0) \partial_{\hat{y}} \widehat{\mathbf{u}}_0 \right), \end{aligned} \quad (9.45)$$

où nous avons introduit la variable rapide $\hat{z} = \frac{\hat{x}}{\theta}$. Après multiplication par θ et réarrangements, nous avons :

$$\begin{aligned} & \left(\mathcal{A}_1(\hat{\mathbf{u}}_0) - \partial_{\hat{t}}\phi(\hat{t}, \hat{y})Id - \partial_{\hat{y}}\phi(\hat{t}, \hat{y})\mathcal{A}_2(\hat{\mathbf{u}}_0) \right) \partial_{\hat{z}}\hat{\mathbf{u}}_0 \\ & - \partial_{\hat{z}} \left((\mathcal{D}_1(\hat{\mathbf{u}}_0) - \partial_{\hat{y}}\phi(\hat{t}, \hat{y})\mathcal{D}_2(\hat{\mathbf{u}}_0)) \partial_{\hat{z}}\hat{\mathbf{u}}_0 \right) = \theta \left(\theta \partial_{\hat{y}}(\mathcal{D}_2(\hat{\mathbf{u}}_0)\partial_{\hat{y}}\hat{\mathbf{u}}_0) - \mathcal{A}_2(\hat{\mathbf{u}}_0)\partial_{\hat{y}}\hat{\mathbf{u}}_0 - \partial_{\hat{t}}\hat{\mathbf{u}}_0 \right). \end{aligned} \quad (9.46)$$

Dès lors, dans la limite $\theta \rightarrow 0^+$, la fonction $\hat{\mathbf{u}}_0(\hat{t}, \hat{z}, \hat{y})$ doit être solution du système différentiel en la variable rapide \hat{z} suivant, où $\hat{t} > 0$ et $\hat{y} \in \mathbb{R}$ jouent le rôle de paramètres :

$$\left(\mathcal{A}_1(\hat{\mathbf{u}}_0) - \partial_{\hat{t}}\phi(\hat{t}, \hat{y})Id - \partial_{\hat{y}}\phi(\hat{t}, \hat{y})\mathcal{A}_2(\hat{\mathbf{u}}_0) \right) d_{\hat{z}}\hat{\mathbf{u}}_0 = d_{\hat{z}} \left((\mathcal{D}_1(\hat{\mathbf{u}}_0) - \partial_{\hat{y}}\phi(\hat{t}, \hat{y})\mathcal{D}_2(\hat{\mathbf{u}}_0)) d_{\hat{z}}\hat{\mathbf{u}}_0 \right). \quad (9.47)$$

Notons qu'à $\hat{t} > 0$ et $\hat{y} \in \mathbb{R}$ donnés, $\hat{\mathbf{u}}_0(\hat{t}, \hat{z}, \hat{y})$ doit être solution de (9.47) sur $\mathbb{R}_{\hat{z}}$ tout entier. Il convient donc désormais de préciser, toujours à $\hat{t} > 0$ et $\hat{y} \in \mathbb{R}$ donnés, le comportement asymptotique aux infinis. De manière à obtenir les limites requises en $\hat{z} = -\infty$ et $\hat{z} = +\infty$, nous observons que dans l'ansatz (9.43), nous avons, pour toutes valeurs positives de la variable \hat{z} :

$$\hat{\mathbf{u}}_0(\hat{t}, \hat{z}, \hat{y}) = \lim_{\theta \rightarrow 0^+} \hat{\mathbf{u}}^\theta(\hat{t}, \theta\hat{z}, \hat{y}) = \hat{\mathbf{u}}(\hat{t}, 0^+, \hat{y}), \quad (9.48)$$

où $\hat{\mathbf{u}}(\hat{t}, 0^+, \hat{y})$ n'est autre que la trace en 0^+ de la limite de fluide parfait (9.38) de $\hat{\mathbf{u}}^\theta$. Puisque (9.48) doit valoir pour tout $\hat{z} > 0$, nous déduisons la limite escomptée pour chaque $\hat{t} > 0$ et $\hat{y} \in \mathbb{R}$:

$$\lim_{\hat{z} \rightarrow +\infty} \hat{\mathbf{u}}_0(\hat{t}, \hat{z}, \hat{y}) = \hat{\mathbf{u}}(\hat{t}, 0^+, \hat{y}). \quad (9.49)$$

Par un raisonnement identique, mais cette fois pour les valeurs négatives de la variable rapide \hat{z} , nous déduisons :

$$\lim_{\hat{z} \rightarrow -\infty} \hat{\mathbf{u}}_0(\hat{t}, \hat{z}, \hat{y}) = \hat{\mathbf{u}}(\hat{t}, 0^-, \hat{y}). \quad (9.50)$$

9.1.4 Le problème de couplage via une couche interne perturbée

Nous résumons la formulation des équations de fluide parfait gouvernant un choc plan perturbé, telles que nous les avons obtenues au titre des deux paragraphes précédents.

Un choc plan perturbé est analysé en tant que solution du problème de Cauchy (9.1) pour la donnée initiale perturbée (9.33). Cette solution est recherchée sous la forme (9.35), c'est-à-dire dans le changement de variables (9.40) redressant le front du choc perturbé en $\hat{x} = 0$:

$$\hat{\mathbf{u}}^\epsilon(\hat{t}, \hat{x}, \hat{y}) = \begin{cases} \hat{\mathbf{u}}_L^\epsilon(\hat{t}, \hat{x}, \hat{y}), & \hat{t} > 0, \hat{x} < 0, \hat{y} \in \mathbb{R}, \\ \hat{\mathbf{u}}_R^\epsilon(\hat{t}, \hat{x}, \hat{y}), & \hat{t} > 0, \hat{x} > 0, \hat{y} \in \mathbb{R}. \end{cases} \quad (9.51)$$

Les fonctions \mathbf{u}_L^ϵ et \mathbf{u}_R^ϵ , supposées régulières, doivent être respectivement solutions des problèmes de Cauchy suivants :

$$\begin{cases} \partial_{\hat{t}}\hat{\mathbf{u}}_L^\epsilon + \left(\mathcal{A}_1(\hat{\mathbf{u}}_L^\epsilon) - \partial_{\hat{t}}\hat{\phi}^\epsilon(\hat{t}, \hat{y})Id - \partial_{\hat{y}}\hat{\phi}^\epsilon(\hat{t}, \hat{y})\mathcal{A}_2(\hat{\mathbf{u}}_L^\epsilon) \right) \partial_{\hat{x}}\hat{\mathbf{u}}_L^\epsilon \\ \quad + \mathcal{A}_2(\hat{\mathbf{u}}_L^\epsilon)\partial_{\hat{y}}\hat{\mathbf{u}}_L^\epsilon = 0, \hat{t} > 0, \hat{x} < 0, \hat{y} \in \mathbb{R}, \\ \lim_{\hat{t} \rightarrow 0^+} \hat{\mathbf{u}}_L^\epsilon(\hat{t}, \hat{x}, \hat{y}) = \hat{\mathbf{u}}_{0L}^\epsilon(\hat{x}, \hat{y}), \end{cases} \quad (9.52)$$

et :

$$\left\{ \begin{array}{l} \partial_{\hat{t}} \widehat{\mathbf{u}}_R^\epsilon + \left(\mathcal{A}_1(\widehat{\mathbf{u}}_R^\epsilon) - \partial_{\hat{t}} \widehat{\phi}^\epsilon(\hat{t}, \hat{y}) Id - \partial_{\hat{y}} \widehat{\phi}^\epsilon(\hat{t}, \hat{y}) \mathcal{A}_2(\widehat{\mathbf{u}}_R^\epsilon) \right) \partial_{\hat{x}} \widehat{\mathbf{u}}_R^\epsilon \\ \quad + \mathcal{A}_2(\widehat{\mathbf{u}}_R^\epsilon) \partial_{\hat{y}} \widehat{\mathbf{u}}_R^\epsilon = 0, \quad \hat{t} > 0, \quad \hat{x} > 0, \quad \hat{y} \in \mathbb{R}, \\ \lim_{\hat{t} \rightarrow 0^+} \widehat{\mathbf{u}}_R^\epsilon(\hat{t}, \hat{x}, \hat{y}) = \widehat{\mathbf{u}}_{0R}^\epsilon(\hat{x}, \hat{y}), \end{array} \right. \quad (9.53)$$

ces solutions étant astreintes aux conditions de couplage suivantes, formulées en $\hat{x} = 0$, pour chaque couple (\hat{t}, \hat{y}) fixé, avec $\hat{t} > 0$ et $\hat{y} \in \mathbb{R}$:

il existe une solution hétérocline $\omega^\epsilon(\hat{z})$ du système différentiel :

$$\begin{aligned} & \left(\mathcal{A}_1(\omega) - \partial_{\hat{t}} \widehat{\phi}^\epsilon(\hat{t}, \hat{y}) Id - \partial_{\hat{y}} \widehat{\phi}^\epsilon(\hat{t}, \hat{y}) \mathcal{A}_2(\omega) \right) d_{\hat{z}} \omega = \\ & d_{\hat{z}} \left((\mathcal{D}_1(\omega) - \partial_{\hat{y}} \widehat{\phi}^\epsilon(\hat{t}, \hat{y}) \mathcal{D}_2(\omega)) d_{\hat{z}} \omega \right), \end{aligned} \quad (9.54)$$

joignant respectivement $\widehat{\mathbf{u}}_L^\epsilon(\hat{t}, 0^-, \hat{y})$ dans le passé et $\widehat{\mathbf{u}}_R^\epsilon(\hat{t}, 0^+, \hat{y})$ dans le futur :

$$\lim_{\hat{z} \rightarrow -\infty} \omega(\hat{z}) = \widehat{\mathbf{u}}_L^\epsilon(\hat{t}, 0^-, \hat{y}), \quad \lim_{\hat{z} \rightarrow +\infty} \omega(\hat{z}) = \widehat{\mathbf{u}}_R^\epsilon(\hat{t}, 0^+, \hat{y}). \quad (9.55)$$

Afin d'alléger les notations, nous avons omis la dépendance en \hat{t} et \hat{y} dans l'hétérocline ω^ϵ puisque le temps $\hat{t} > 0$ et la variable \hat{y} n'interviennent qu'au titre de paramètres muets dans le problème (9.54)-(9.55).

9.1.5 Le problème de couplage via des relations cinétiques

La principale motivation de ce chapitre est d'énoncer des conditions permettant d'assurer la stabilité linéaire des solutions choc plan. Il importe donc de mener la linéarisation du problème de couplage au voisinage d'une amplitude de perturbation ϵ nulle. Or, la formulation du problème de couplage (9.52)-(9.53)-(9.54)-(9.55) requiert l'introduction en $\hat{x} = 0$, et pour chaque couple (\hat{t}, \hat{y}) , d'un problème différentiel réalisant le couplage de manière asymptotique, *i.e.* aux infinis dans la variable rapide \hat{z} . Il serait plus agréable de disposer d'une condition algébrique, et non plus différentielle, liant directement en $\hat{x} = 0$ les traces $\widehat{\mathbf{u}}_L^\epsilon(\hat{t}, 0^-, \hat{y})$ à $\widehat{\mathbf{u}}_R^\epsilon(\hat{t}, 0^+, \hat{y})$. En d'autres termes, il semble intéressant d'intégrer le système différentiel (9.54) sur $\mathbb{R}_{\hat{z}}$ tout entier, modulo l'introduction d'un changement de variable intéressant. Autrement dit, et à la lecture du lemme (9.1.4) associé à la couche interne du choc plan non perturbé, il convient d'écrire un ensemble complet de relations de saut généralisées liant $\widehat{\mathbf{u}}_L^\epsilon(\hat{t}, 0^-, \hat{y})$ à $\widehat{\mathbf{u}}_R^\epsilon(\hat{t}, 0^+, \hat{y})$ par l'intermédiaire d'une fonction cinétique à valeur vectorielle.

Nous montrons dans ce paragraphe que la propriété d'invariance par rotation, dans une direction fixe de l'espace, des modèles de la physique, permet de recourir aux relations de saut généralisées satisfaites par les solutions ondes planes du modèle bidimensionnel. Dès que ces relations sont disponibles en nombre suffisant, nous pouvons substituer ces relations algébriques au problème de couplage différentiel (9.54)-(9.55). C'est bien évidemment le cas des modèles RSM étudiés dans ce manuscrit. Soulignons qu'il n'est pas nécessaire de retabuler de nouvelles relations cinétiques : les tabulations disponibles au titre des solutions onde plane sont utilisables en l'état. La propriété d'invariance par rotation joue donc ici un rôle essentiel dans l'analyse.

Il est toutefois instructif de mener une étude, certes académique, n'utilisant pas la propriété d'invariance par rotation. Nous avons alors besoin de supposer qu'il existe

un changement de variable permettant de rendre simultanément semblables les matrices $\mathcal{A}_1(\omega)$ et $\mathcal{A}_2(\omega)$, dans (9.54), à deux matrices jacobiniennes. Ce n'est pas le cas des modèles RSM, mais l'opération de linéarisation est bien plus simple et permet d'opérer un lien immédiat avec la théorie purement conservative.

Cas \mathcal{A}_1 et \mathcal{A}_2 semblables à deux matrices jacobiniennes

Nous supposons ici qu'il existe un changement de variable $\mathbf{u} \rightarrow \mathbf{v}(\mathbf{u})$ tel que le système avec perturbation visqueuse (9.4) s'écrive, après multiplication par $D_{\mathbf{u}}\mathbf{v}(\mathbf{u})$, sous la forme suivante :

$$\begin{aligned} \partial_t \mathbf{v}(\mathbf{u}^\theta) + \partial_x \mathbf{F}_1(\mathbf{v}(\mathbf{u}^\theta)) + \partial_y \mathbf{F}_2(\mathbf{v}(\mathbf{u}^\theta)) = \\ \theta D_{\mathbf{u}}\mathbf{v}(\mathbf{u}^\theta) \left(\partial_x (\mathcal{D}_1(\mathbf{u}^\theta) \partial_x (\mathbf{u}^\theta)) + \partial_y (\mathcal{D}_2(\mathbf{u}^\theta) \partial_y (\mathbf{u}^\theta)) \right). \end{aligned} \quad (9.56)$$

En d'autres termes, nous supposons que les matrices $D_{\mathbf{u}}\mathbf{v}(\mathbf{u})\mathcal{A}_1(\mathbf{u})D_{\mathbf{u}}^{-1}\mathbf{v}(\mathbf{u})$ et $D_{\mathbf{u}}\mathbf{v}(\mathbf{u})\mathcal{A}_2(\mathbf{u})D_{\mathbf{u}}^{-1}\mathbf{v}(\mathbf{u})$ coïncident avec les matrices jacobiniennes de deux fonctions flux $\mathbf{F}_1(\mathbf{v}(\mathbf{u}))$ et $\mathbf{F}_2(\mathbf{v}(\mathbf{u}))$. Soulignons que le membre de droite de (9.56), contrairement au membre de gauche, n'a aucune raison de trouver une formulation conservative. Avec les notations du précédent paragraphe, il s'agit dès lors d'analyser un choc plan perturbé, en étudiant pour la donnée initiale (9.33), les propriétés temporelles de trois fonctions $\widehat{\mathbf{u}}_L^\epsilon(\hat{t}, \hat{x}, \hat{y})$, $\widehat{\mathbf{u}}_R^\epsilon(\hat{t}, \hat{x}, \hat{y})$ et $\widehat{\phi}^\epsilon(\hat{t}, \hat{y})$ devant être solutions du problème de couplage à frontière fixe :

$$\begin{cases} \partial_{\hat{t}} \mathbf{v}(\widehat{\mathbf{u}}_L^\epsilon) + \partial_{\hat{x}} \left(\mathbf{F}_1(\mathbf{v}(\widehat{\mathbf{u}}_L^\epsilon)) - \partial_{\hat{t}} \widehat{\phi}^\epsilon(\hat{t}, \hat{y}) \mathbf{v}(\widehat{\mathbf{u}}_L^\epsilon) - \partial_{\hat{y}} \phi^\epsilon(\hat{t}, \hat{y}) \mathbf{F}_2(\mathbf{v}(\widehat{\mathbf{u}}_L^\epsilon)) \right) \\ \quad + \partial_{\hat{y}} \mathbf{F}_2(\mathbf{v}(\widehat{\mathbf{u}}_L^\epsilon)) = 0, \quad \hat{t} > 0, \quad \hat{x} < 0, \quad \hat{y} \in \mathbb{R}, \\ \lim_{\hat{t} \rightarrow 0^+} \mathbf{v}(\widehat{\mathbf{u}}_L^\epsilon(\hat{t}, \hat{x}, \hat{y})) = \mathbf{v}(\widehat{\mathbf{u}}_{0L}^\epsilon(\hat{x}, \hat{y})), \end{cases} \quad (9.57)$$

et :

$$\begin{cases} \partial_{\hat{t}} \mathbf{v}(\widehat{\mathbf{u}}_R^\epsilon) + \partial_{\hat{x}} \left(\mathbf{F}_1(\mathbf{v}(\widehat{\mathbf{u}}_R^\epsilon)) - \partial_{\hat{t}} \widehat{\phi}^\epsilon(\hat{t}, \hat{y}) \mathbf{v}(\widehat{\mathbf{u}}_R^\epsilon) - \partial_{\hat{y}} \phi^\epsilon(\hat{t}, \hat{y}) \mathbf{F}_2(\mathbf{v}(\widehat{\mathbf{u}}_R^\epsilon)) \right) \\ \quad + \partial_{\hat{y}} \mathbf{F}_2(\mathbf{v}(\widehat{\mathbf{u}}_R^\epsilon)) = 0, \quad \hat{t} > 0, \quad \hat{x} > 0, \quad \hat{y} \in \mathbb{R}, \\ \lim_{\hat{t} \rightarrow 0^+} \mathbf{v}(\widehat{\mathbf{u}}_R^\epsilon(\hat{t}, \hat{x}, \hat{y})) = \mathbf{v}(\widehat{\mathbf{u}}_{0R}^\epsilon(\hat{x}, \hat{y})), \end{cases} \quad (9.58)$$

les traces à gauche et à droite en $\hat{x} = 0$ de ces deux solutions étant liées à la déformée $\widehat{\phi}^\epsilon(\hat{t}, \hat{y})$ du choc plan par la condition de couplage :

$$\lim_{\hat{z} \rightarrow -\infty} \mathbf{v}(\omega(\hat{z})) = \mathbf{v}(\widehat{\mathbf{u}}_L^\epsilon(\hat{t}, 0^-, \hat{y})), \quad \lim_{\hat{z} \rightarrow +\infty} \mathbf{v}(\omega(\hat{z})) = \mathbf{v}(\widehat{\mathbf{u}}_R^\epsilon(\hat{t}, 0^+, \hat{y})), \quad \hat{t} > 0, \quad \hat{y} \in \mathbb{R}, \quad (9.59)$$

où $\omega(\hat{z})$, à $\hat{t} > 0$ et $\hat{y} \in \mathbb{R}$ fixés, doit vérifier le système différentiel :

$$\begin{aligned} -\partial_{\hat{t}} \widehat{\phi}^\epsilon(\hat{t}, \hat{y}) d_{\hat{z}} \omega + \\ d_{\hat{z}} \left(\mathbf{F}_1(\mathbf{v}(\omega)) - \partial_{\hat{y}} \widehat{\phi}^\epsilon(\hat{t}, \hat{y}) \mathbf{F}_2(\mathbf{v}(\omega)) \right) = D_{\mathbf{u}}\mathbf{v}(\omega) d_{\hat{z}} \left((\mathcal{D}_1(\omega) - \partial_{\hat{y}} \widehat{\phi}^\epsilon(\hat{t}, \hat{y}) \mathcal{D}_2(\omega)) d_{\hat{z}} \omega \right). \end{aligned} \quad (9.60)$$

De manière à alléger les écritures, nous omettons les notations chapeaux et nous reformulons avec des notations claires, le problème de couplage (9.57)-(9.58)-(9.59) directement en l'inconnue \mathbf{v} . Il s'agit de trouver \mathbf{v}_L^ϵ , \mathbf{v}_R^ϵ et ϕ^ϵ solutions de :

$$\begin{cases} \partial_t \mathbf{v}_L^\epsilon + \partial_x \left(\mathbf{F}_1(\mathbf{v}_L^\epsilon) - \partial_t \phi^\epsilon(t, y) \mathbf{v}_L^\epsilon - \partial_y \phi^\epsilon(t, y) \mathbf{F}_2(\mathbf{v}_L^\epsilon) \right) \\ \quad + \partial_y \mathbf{F}_2(\mathbf{v}_L^\epsilon) = 0, \quad t > 0, \quad x < 0, \quad y \in \mathbb{R}, \\ \lim_{t \rightarrow 0^+} \mathbf{v}_L^\epsilon(t, x, y) = \mathbf{v}_{0L}^\epsilon(x, y) = \mathbf{v}(\mathbf{u}_{0L}^\epsilon(x, y)), \end{cases} \quad (9.61)$$

et :

$$\begin{cases} \partial_t \mathbf{v}_R^\epsilon + \partial_x \left(\mathbf{F}_1(\mathbf{v}_R^\epsilon) - \partial_t \phi^\epsilon(t, y) \mathbf{v}_R^\epsilon - \partial_y \phi^\epsilon(t, y) \mathbf{F}_2(\mathbf{v}_R^\epsilon) \right) \\ \quad + \partial_y \mathbf{F}_2(\mathbf{v}_R^\epsilon) = 0, \quad t > 0, \quad x > 0, \quad y \in \mathbb{R}, \\ \lim_{t \rightarrow 0^+} \mathbf{v}_R^\epsilon(t, x, y) = \mathbf{v}_{0R}^\epsilon(x, y) = \mathbf{v}(\mathbf{u}_{0R}^\epsilon(x, y)), \end{cases} \quad (9.62)$$

avec la condition de couplage liant $\mathbf{v}_L^\epsilon(t, 0^-, y)$, $\mathbf{v}_R^\epsilon(t, 0^+, y)$ à $\phi^\epsilon(t, y)$:

$$\lim_{z \rightarrow -\infty} \omega(z) = \mathbf{v}_L^\epsilon(t, 0^-, y), \quad \lim_{z \rightarrow +\infty} \omega(z) = \mathbf{v}_R^\epsilon(t, 0^+, y), \quad t > 0, \quad y \in \mathbb{R}, \quad (9.63)$$

où à $t > 0$ et $y \in \mathbb{R}$ fixés, $\omega(z)$ doit être solution du système différentiel :

$$-\partial_t \phi^\epsilon(t, y) d_z \omega + d_z \left(\mathbf{F}_1(\omega) - \partial_y \phi^\epsilon(t, y) \mathbf{F}_2(\omega) \right) = \mathcal{R}(\omega, d_z \omega, d_{zz}^2 \omega, \partial_y \phi^\epsilon(t, y)). \quad (9.64)$$

Dans (9.64), nous avons posé :

$$\mathcal{R}(\omega, d_z \omega, d_{zz}^2 \omega, \partial_y \phi^\epsilon(t, y)) = D_{\mathbf{u}} \mathbf{v}(\omega) d_z \left((\mathcal{D}_1(\omega) - \partial_y \phi^\epsilon(t, y) \mathcal{D}_2(\omega)) d_z \omega \right), \quad (9.65)$$

de sorte à souligner que le terme visqueux ne s'écrit pas sous forme conservative. La notation utilisée en (9.65) indique que l'opérateur de régularisation \mathcal{R} ne dépend des paramètres t et y qu'au travers de la dérivée en y de l'inconnue ϕ^ϵ : *i.e.* $\partial_y \phi^\epsilon(t, y)$.

À $t > 0$ et $y \in \mathbb{R}$ fixés, réinterprétons le système différentiel (9.63)-(9.64) en remarquant que $\partial_t \phi^\epsilon(t, y)$ est homogène à une vitesse de propagation : à $\mathbf{v}_L^\epsilon(t, 0^-, y)$ et $\partial_t \phi^\epsilon(t, y)$ donnés, ω doit être une solution onde progressive du système :

$$\partial_t \mathbf{v} + \partial_x \left(\mathbf{F}_1(\mathbf{v}) - \partial_y \phi^\epsilon(t, y) \mathbf{F}_2(\mathbf{v}) \right) = \mathcal{R}(\mathbf{v}, \partial_x \mathbf{v}, \partial_{xx}^2 \mathbf{v}, \partial_y \phi^\epsilon(t, y)), \quad (9.66)$$

se propageant à la vitesse $\partial_t \phi^\epsilon(t, y)$, connectant l'état $\mathbf{v}_L^\epsilon(t, 0^-, y)$ dans le passé et devant joindre dans le futur l'état $\mathbf{v}_R^\epsilon(t, 0^+, y)$.

Supposons qu'une telle solution onde progressive ω existe pour chaque $t > 0$ et $y \in \mathbb{R}$ fixés. Une intégration sur \mathbb{R}_z tout entier du système différentiel (9.64) conduit alors, compte tenu des conditions asymptotiques (9.63), à :

$$\begin{aligned} & -\partial_t \phi^\epsilon(t, y) \left(\mathbf{v}_R^\epsilon(t, 0^+, y) - \mathbf{v}_L^\epsilon(t, 0^-, y) \right) + \\ & \left(\mathbf{F}_1 - \partial_y \phi^\epsilon(t, y) \mathbf{F}_2 \right) \left(\mathbf{v}_R^\epsilon(t, 0^+, y) \right) - \left(\mathbf{F}_1 - \partial_y \phi^\epsilon(t, y) \mathbf{F}_2 \right) \left(\mathbf{v}_L^\epsilon(t, 0^-, y) \right) \\ & = \tilde{\mathcal{C}} \left(\mathbf{v}_L^\epsilon(t, 0^-, y), \partial_t \phi^\epsilon(t, y), \partial_y \phi^\epsilon(t, y) \right), \quad t > 0, \quad y \in \mathbb{R}, \end{aligned} \quad (9.67)$$

où nous avons posé :

$$\tilde{\mathcal{C}} \left(\mathbf{v}_L^\epsilon(t, 0^-, y), \partial_t \phi^\epsilon(t, y), \partial_y \phi^\epsilon(t, y) \right) = \int_{\mathbb{R}_z} \mathcal{R}(\omega, d_z \omega, d_{zz}^2 \omega, \partial_y \phi^\epsilon(t, y)) dz. \quad (9.68)$$

Le système d'équation algébrique (9.67) prend donc la forme d'un ensemble complet de relations de saut généralisées permettant de caractériser l'état $\mathbf{v}_R^\epsilon(t, 0^+, y)$ pour un état $\mathbf{v}_L^\epsilon(t, 0^-, y)$ fixé et une vitesse de propagation $\partial_t \phi^\epsilon(t, y)$ prescrite. Le fonction cinétique à valeur vectorielle $\tilde{\mathcal{C}} : (\mathbf{v}, s_1, s_2) \in \Omega_{\mathbf{v}} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ définie en (9.68), dépend donc naturellement de ces deux dernières données mais également de $\partial_y \phi^\epsilon(t, y)$ au travers de la dépendance du terme visqueux (9.65) en la même quantité.

En résumé, l'analyse d'un choc plan perturbé consiste, pour des données initiales \mathbf{v}_{0L}^ϵ et \mathbf{v}_{0R}^ϵ prescrites, à étudier le comportement en temps de trois fonctions \mathbf{v}_L^ϵ , \mathbf{v}_R^ϵ et ϕ^ϵ , avec \mathbf{v}_L^ϵ solution du problème aux dérivées partielles (9.61), \mathbf{v}_R^ϵ solution du problème (9.62), les traces de ces deux fonctions en $x = 0$ étant liées à l'inconnue ϕ^ϵ , pour chaque $t > 0$ et $y \in \mathbb{R}$ fixés, aux conditions de couplage exprimées par les relations de saut généralisées (9.67). Notons pour conclure qu'en toute généralité, la fonction cinétique vectorielle (9.68) $\tilde{\mathcal{C}} : \Omega_{\mathbf{v}} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$, associée au système (9.66), n'entretient de lien direct avec la fonction cinétique $\mathcal{C} : \Omega_{\mathbf{v}} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ définissant le choc plan non perturbé par (9.32) que lorsque $\partial_y \phi^\epsilon(t, y)$ est identiquement nulle :

$$\tilde{\mathcal{C}}(\mathbf{v}, s, 0) = \mathcal{C}(\mathbf{v}, s) \text{ pour tout } \mathbf{v} \in \Omega_{\mathbf{v}}, s \in \mathbb{R}, \quad (9.69)$$

ce qui n'est évidemment pas le cas d'une perturbation multidimensionnelle d'un choc plan.

Cas d'un système invariant par rotation

Nous montrons dans ce paragraphe que la propriété d'invariance par rotation des systèmes de la physique permet systématiquement de ramener la définition de la relation cinétique $\tilde{\mathcal{C}} : \Omega_{\mathbf{v}} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ à la connaissance de la relation cinétique $\mathcal{C} : \Omega_{\mathbf{v}} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ obtenue au titre de l'analyse quasi monodimensionnelle, à la condition qu'il existe un changement de variable $\mathbf{u} \rightarrow \mathbf{v}(\mathbf{u})$ dépendant de la matrice \mathcal{A}_1 , tel que la matrice $D_{\mathbf{u}}\mathbf{v}(\mathbf{u})\mathcal{A}_1(\mathbf{u})D_{\mathbf{u}}^{-1}\mathbf{v}(\mathbf{u})$ est semblable à la matrice jacobienne d'une fonction flux $\mathbf{F}_1(\mathbf{v}(\mathbf{u}))$. Ainsi que nous l'avons établi aux chapitres 5 et 6, cette propriété est vraie pour les modèles RSM étudiés dans cette thèse. Soulignons bien que nous n'exigeons pas, contrairement au paragraphe précédent que pour le même changement de variable, la matrice $D_{\mathbf{u}}\mathbf{v}(\mathbf{u})\mathcal{A}_2(\mathbf{u})D_{\mathbf{u}}^{-1}\mathbf{v}(\mathbf{u})$ soit simultanément semblable à la matrice jacobienne d'une fonction flux $\mathbf{F}_2(\mathbf{v}(\mathbf{u}))$. Cette exigence supplémentaire est d'ailleurs fautive pour les modèles RSM.

Les systèmes que nous étudions dans cette première partie étant abstraits, nous avons besoin d'introduire des notations permettant d'exprimer la propriété d'invariance par rotation des équations.

Transcription de la propriété d'invariance par rotation des équations dans un cadre abstrait

Repartons des équations gouvernant une inconnue \mathbf{u} dans un repère orthonormé privilégié $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2)$ associé aux coordonnées d'espace (x, y) :

$$\partial_t \mathbf{u} + \mathcal{A}_1(\mathbf{u})\partial_x \mathbf{u} + \mathcal{A}_2(\mathbf{u})\partial_y \mathbf{u} = \partial_x \left(\mathcal{D}_1(\mathbf{u})\partial_x \mathbf{u} \right) + \partial_y \left(\mathcal{D}_2(\mathbf{u})\partial_y \mathbf{u} \right). \quad (9.70)$$

Introduisons un vecteur unitaire fixe $\mathbf{n} \in \mathcal{S}^2$, \mathcal{S}^2 désignant la sphère unité de \mathbb{R}^2 :

$$\mathbf{n} = n_1 \mathbf{e}_1 + n_2 \mathbf{e}_2, \quad n_1^2 + n_2^2 = 1, \quad (9.71)$$

ainsi que \mathbf{n}_\perp , un vecteur unitaire orthogonal à \mathbf{n} , dont l'expression dans la base $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2)$ est :

$$\mathbf{n}_\perp = -n_2\mathbf{e}_1 + n_1\mathbf{e}_2. \quad (9.72)$$

Considérons alors la rotation consistant à amener respectivement \mathbf{e}_1 sur \mathbf{n} et \mathbf{e}_2 sur \mathbf{n}_\perp puis associons à la nouvelle base $(\mathbf{n}, \mathbf{n}_\perp)$ le système de coordonnées :

$$\zeta = \mathbf{X} \cdot \mathbf{n}, \quad \tau = \mathbf{X} \cdot \mathbf{n}_\perp, \quad \text{avec } \mathbf{X} = {}^t(x, y). \quad (9.73)$$

Le changement inverse de coordonnées $x(\zeta, \tau)$, $y(\zeta, \tau)$ se déduit aisément de (9.71), (9.72) et (9.73). Soit $\mathbf{u}(x, y)$ une solution du système (9.70), alors la fonction définie par :

$$\mathbf{u}(\zeta, \tau) = \mathbf{u}(x(\zeta, \tau), y(\zeta, \tau)), \quad (9.74)$$

est solution du système suivant :

$$\begin{aligned} \partial_t \mathbf{u} + \left(n_1 \mathcal{A}_1(\mathbf{u}) + n_2 \mathcal{A}_2(\mathbf{u}) \right) \partial_\zeta \mathbf{u} + \left(-n_2 \mathcal{A}_1(\mathbf{u}) + n_1 \mathcal{A}_2(\mathbf{u}) \right) \partial_\tau \mathbf{u} = \\ \partial_\zeta \left((n_1 \mathcal{D}_1(\mathbf{u}) + n_2 \mathcal{D}_2(\mathbf{u})) \partial_\zeta \mathbf{u} \right) + \partial_\tau \left((-n_2 \mathcal{D}_1(\mathbf{u}) + n_1 \mathcal{D}_2(\mathbf{u})) \partial_\tau \mathbf{u} \right). \end{aligned} \quad (9.75)$$

La propriété d'invariance des équations (9.70) exprime l'existence d'une application :

$$\tilde{\mathbf{u}} : (\mathbf{u}, \mathbf{n}) \in \Omega_{\mathbf{u}} \times \mathcal{S}^2 \rightarrow \tilde{\mathbf{u}}(\mathbf{u}, \mathbf{n}) \in \Omega_{\mathbf{u}}, \quad (9.76)$$

telle que dès que $\mathbf{u}(\zeta, \tau)$ est solution de (9.75), alors la fonction :

$$\tilde{\mathbf{u}}(\zeta, \tau) = \tilde{\mathbf{u}}(\mathbf{u}(\zeta, \tau), \mathbf{n}), \quad (9.77)$$

est solution du système :

$$\partial_t \tilde{\mathbf{u}} + \mathcal{A}_1(\tilde{\mathbf{u}}) \partial_\zeta \tilde{\mathbf{u}} + \mathcal{A}_2(\tilde{\mathbf{u}}) \partial_\tau \tilde{\mathbf{u}} = d_\zeta \left(\mathcal{D}_1(\tilde{\mathbf{u}}) \partial_\zeta \tilde{\mathbf{u}} \right) + \partial_\tau \left(\mathcal{D}_2(\tilde{\mathbf{u}}) \partial_\tau \tilde{\mathbf{u}} \right), \quad (9.78)$$

où $(\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2)$ et $(\mathcal{D}_1, \mathcal{D}_2)$ coïncident avec les matrices introduites dans (9.70).

Remarque 9.1.6. La dépendance en \mathbf{u} et \mathbf{n} retenue pour exprimer l'application (9.76) repose sur la propriété que le vecteur unitaire \mathbf{n}_\perp , orthogonal à \mathbf{n} , se déduit des composantes de \mathbf{n} en (9.71) par la formule (9.72) : *i.e.* $\mathbf{n}_\perp = \mathbf{n}_\perp(\mathbf{n})$. Il est donc licite de ne considérer que \mathbf{u} et \mathbf{n} . Un tel choix simplifiera grandement les calculs à venir.

Il semble difficile, voir impossible, de spécifier plus avant la définition de l'application (9.76) dans le cas général d'une inconnue \mathbf{u} , dont les composantes peuvent être de nature tensorielle : tenseur d'ordre 1 (vecteur), tenseur d'ordre 2 (matrice), *et caetera*. Nous préférons en rester à l'existence de l'application (9.76) permettant, via le changement de coordonnées (9.73), de laisser inchangée la forme des équations. Toutefois, il est utile à la suite de l'exposé de préciser cette application dans le cas du modèle RSM anisotherme.

Exemple du modèle RSM

Considérons, dans le repère privilégié $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2)$, le vecteur \mathbf{u} de composantes :

$$\mathbf{u} = (\rho, u, v, E, R_{11}, R_{12}, R_{22}), \quad (9.79)$$

où (u, v) désignent les composantes du vecteur vitesse $\mathcal{U} \in \mathbb{R}^2$, alors que (R_{11}, R_{12}, R_{22}) correspondent aux composantes de la matrice symétrique des tensions de Reynolds $\mathcal{R} \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^2)$ exprimée dans le repère $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2)$. Introduisons alors les quantités scalaires à l'aide des vecteurs \mathbf{n} et \mathbf{n}_\perp :

$$\begin{aligned} u_n &= (\mathcal{U}, \mathbf{n}), \quad v_n = (\mathcal{U}, \mathbf{n}_\perp), \\ R_{nn} &= (\mathbf{n}, \mathcal{R}\mathbf{n}), \quad R_{n\tau}(\mathbf{n}_\perp, \mathcal{R}\mathbf{n}), \quad R_{\tau\tau} = (\mathbf{n}_\perp, \mathcal{R}\mathbf{n}_\perp), \end{aligned} \quad (9.80)$$

pour définir classiquement l'application (9.76) associée au modèle RSM anisotherme :

$$\tilde{\mathbf{u}}(\mathbf{u}, \mathbf{n}) = (\rho, u_n, v_n, E, R_{nn}, R_{n\tau}, R_{\tau\tau}). \quad (9.81)$$

Conformément à la remarque (9.1.6), il faut comprendre \mathbf{n}_\perp comme une fonction de \mathbf{n} via les relations (9.71), (9.72).

Terminons ce paragraphe en notant que la propriété d'invariance par rotation des équations est bien évidemment indépendante d'un changement d'inconnue $\mathbf{u} \rightarrow \mathbf{v}(\mathbf{u})$. Ainsi, si (9.70) s'écrit dans la nouvelle inconnue $\mathbf{v}(x, t) = \mathbf{v}(\mathbf{u}(x, t))$ avec $\mathbf{u}(x, t)$ solution de (9.70) :

$$\partial_t \mathbf{v} + \mathcal{B}_1(\mathbf{v})\partial_x \mathbf{v} + \mathcal{B}_2(\mathbf{v})\partial_y \mathbf{v} = \mathcal{R}(\mathbf{v}, \partial_x \mathbf{v}, \partial_y \mathbf{v}, \partial_{xx}^2 \mathbf{v}, \partial_{yy}^2 \mathbf{v}), \quad (9.82)$$

avec :

$$\mathcal{R}(\mathbf{v}, \partial_x \mathbf{v}, \partial_y \mathbf{v}, \partial_{xx}^2 \mathbf{v}, \partial_{yy}^2 \mathbf{v}) = D_{\mathbf{u}}\mathbf{v}(\mathbf{u}) \left(\partial_x (\mathcal{D}_1(\mathbf{u})\partial_x \mathbf{u}) + \partial_y (\mathcal{D}_2(\mathbf{u})\partial_y \mathbf{u}) \right), \quad (9.83)$$

alors il existe une application :

$$\tilde{\mathbf{v}} : (\mathbf{v}, \mathbf{n}) \in \Omega_{\mathbf{v}} \times \mathcal{S}^2 \rightarrow \tilde{\mathbf{v}}(\mathbf{v}, \mathbf{n}) \in \Omega_{\mathbf{v}}, \quad (9.84)$$

déduite de (9.76) en posant :

$$\tilde{\mathbf{v}}(\mathbf{v}(\zeta, \tau), \mathbf{n}) = \mathbf{v}(\tilde{\mathbf{u}}(\mathbf{u}(\zeta, \tau), \mathbf{n})),$$

telle que $\tilde{\mathbf{v}}(\zeta, \tau) = \tilde{\mathbf{v}}(\mathbf{v}(\zeta, \tau), \mathbf{n})$ est solution de :

$$\partial_t \tilde{\mathbf{v}} + \mathcal{B}_1(\tilde{\mathbf{v}})\partial_\zeta \tilde{\mathbf{v}} + \mathcal{B}_2(\tilde{\mathbf{v}})\partial_\tau \tilde{\mathbf{v}} = \mathcal{R}(\tilde{\mathbf{v}}, \partial_\zeta \tilde{\mathbf{v}}, \partial_\tau \tilde{\mathbf{v}}, \partial_{\zeta\zeta}^2 \tilde{\mathbf{v}}, \partial_{\tau\tau}^2 \tilde{\mathbf{v}}). \quad (9.85)$$

Ici, \mathcal{B}_1 , \mathcal{B}_2 et \mathcal{R} sont les mêmes objets que ceux introduits en (9.82), (9.83).

Description de la couche interne et invariance par rotation

Nous précisons ici, comment appliquer la propriété d'invariance par rotation des équations de sorte à obtenir une formulation équivalente très utile de la condition de couplage (9.54), entre les problèmes (9.52) et (9.53). À cet égard, nous soulignons que les deux problèmes d'évolution (9.52) et (9.53) restent formulés dans le repère privilégié $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2)$, avec \mathbf{e}_1 normal au choc non perturbé, *i.e.* dans le système de coordonnées (x, y) , afin d'en proposer ultérieurement une linéarisation simple au voisinage d'une amplitude de perturbation nulle $\epsilon = 0$. Les conséquences de l'invariance par rotation ne sont exploitées ici que pour le système différentiel (9.54) gouvernant en $x = 0$

la couche interne du choc plan perturbé dont nous rappelons ici, par convenance, l'expression :

$$-\partial_t \phi^\epsilon(t, y) d_z \omega + \left(\mathcal{A}_1(\omega) - \partial_y \phi^\epsilon(t, y) \mathcal{A}_2(\omega) \right) d_z \omega = d_z \left((\mathcal{D}_1(\omega) - \partial_y \phi^\epsilon(t, y) \mathcal{D}_2(\omega)) d_z \omega \right), \quad (9.86)$$

avec $t > 0$ et $y \in \mathbb{R}$ fixés. Notons bien, de nouveau, que le système différentiel (9.86) est écrit dans le repère $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2)$: la variable rapide z , parcourant \mathbb{R} , réalise une dilatation de la variable lente x , en $x = 0$, alors que la variable tangentielle lente y n'intervient qu'en tant que paramètre fixé, à chaque date $t > 0$.

À $\epsilon > 0$ donné et à $t > 0$ et $y \in \mathbb{R}$ fixés, nous définissons un vecteur unitaire $\mathbf{n}^\epsilon(y, t) \in \mathcal{S}^2$, dès lors lui même fixe, de la manière suivante. L'action d'une perturbation sur le choc plan positionne le front de discontinuité sur la surface de l'espace temps Σ^ϵ , introduite en (9.34). Cette surface Σ^ϵ possède une normale colinéaire au vecteur défini dans $\mathbb{R}_t \times \mathbb{R}_{xy}^2$ pour chaque $t > 0$ et $y \in \mathbb{R}$ par :

$$\frac{1}{\sqrt{1 + |\partial_y \phi^\epsilon(t, y)|^2}} \begin{cases} -\partial_t \phi^\epsilon(t, y) \\ 1 \\ -\partial_y \phi^\epsilon(t, y). \end{cases} \quad (9.87)$$

La projection, à chaque instant $t > 0$, de ce vecteur dans le plan \mathbb{R}_{xy}^2 conduit à définir la **normale unitaire** au profil de choc perturbé localisé en $x = 0$:

$$\mathbf{n}^\epsilon(t, y) = (n_1^\epsilon(t, y), n_2^\epsilon(t, y)) \equiv \frac{1}{\sqrt{1 + |\partial_y \phi^\epsilon(t, y)|^2}} \begin{cases} 1 \\ -\partial_y \phi^\epsilon(t, y) \end{cases}, \quad t > 0, y \in \mathbb{R}. \quad (9.88)$$

Cette normale en espace permet de définir deux nouvelles directions privilégiées pour chaque $t > 0$ et $y \in \mathbb{R}$ fixés : à savoir la direction normale locale au choc perturbé définie par $\mathbf{n}^\epsilon(t, y)$ et la direction tangentielle locale donnée par $\mathbf{n}_\perp^\epsilon(t, y)$, vecteur unitaire orthogonal à $\mathbf{n}^\epsilon(t, y)$. Munis de cette définition, divisons les équations du système différentiel (9.86) par la quantité $\sqrt{1 + |\partial_y \phi^\epsilon(t, y)|^2}$ indépendante de la variable rapide z , pour obtenir :

$$-\frac{\partial_t \phi^\epsilon(t, y)}{\sqrt{1 + |\partial_y \phi^\epsilon(t, y)|^2}} d_z \omega + \left(n_1^\epsilon(y, t) \mathcal{A}_1(\omega) + n_2^\epsilon(t, y) \mathcal{A}_2(\omega) \right) d_z \omega = d_z \left((n_1^\epsilon(t, y) \mathcal{D}_1(\omega) + n_2^\epsilon(t, y) \mathcal{D}_2(\omega)) d_z \omega \right), \quad (9.89)$$

où $n_1^\epsilon(y, t)$ et $n_2^\epsilon(y, t)$ sont les composantes de la normale unitaire introduite en (9.88). Il convient maintenant de rapprocher l'expression du système différentiel (9.89) écrit à $t > 0$ et $y \in \mathbb{R}$ fixés, des équations (9.75) ayant résultées des équations (9.70) par une rotation amenant le vecteur \mathbf{e}_1 sur le vecteur fixe (9.88). Dès lors, la propriété d'invariance par rotation des équations considérées conduit à arguer de l'application $\tilde{\mathbf{u}} : \Omega_{\mathbf{u}} \times \mathcal{S}^2 \rightarrow \Omega_{\mathbf{u}}$ introduite en (9.76), pour réécrire (9.89) de manière équivalente sous la forme :

$$-\frac{\partial_t \phi^\epsilon(t, y)}{\sqrt{1 + |\partial_y \phi^\epsilon(t, y)|^2}} d_z \tilde{\mathbf{u}}(\omega, \mathbf{n}^\epsilon(y, t)) + \mathcal{A}_1(\tilde{\mathbf{u}}(\omega, \mathbf{n}^\epsilon(y, t))) d_z \tilde{\mathbf{u}}(\omega, \mathbf{n}^\epsilon(y, t)) = d_z \left(\mathcal{D}_1(\tilde{\mathbf{u}}(\omega, \mathbf{n}^\epsilon(t, y))) d_z \tilde{\mathbf{u}}(\omega, \mathbf{n}^\epsilon(t, y)) \right). \quad (9.90)$$

De manière à alléger les notations, nous reformulons ces équations en introduisant à $t > 0$ et $y \in \mathbb{R}$ fixés, la fonction $\tilde{\omega}$ de la seule variable rapide z , en posant :

$$\tilde{\omega}(z) = \tilde{\mathbf{u}}(\omega(z), \mathbf{n}^\epsilon(t, y)), \quad t > 0, \quad y \in \mathbb{R} \text{ fixés.} \quad (9.91)$$

Rappelons que pour l'instant, l'amplitude $\epsilon > 0$ de la perturbation est fixée. Ainsi le problème différentiel devient :

$$\left\{ \begin{array}{l} -\frac{\partial_t \phi^\epsilon(t, y)}{\sqrt{1 + |\partial_y \phi^\epsilon(t, y)|^2}} d_z \tilde{\omega} + \mathcal{A}_1(\tilde{\omega}) d_z \tilde{\omega} = d_z \left(\mathcal{D}_1(\tilde{\omega}) d_z \tilde{\omega} \right), \quad t > 0, \quad y \in \mathbb{R} \text{ fixés,} \\ \lim_{z \rightarrow -\infty} \tilde{\omega}(z) = \tilde{\mathbf{u}}(\mathbf{u}_L^\epsilon(t, 0^-, y), \mathbf{n}^\epsilon(t, y)), \\ \lim_{z \rightarrow +\infty} \tilde{\omega}(z) = \tilde{\mathbf{u}}(\mathbf{u}_R^\epsilon(t, 0^+, y), \mathbf{n}^\epsilon(t, y)). \end{array} \right. \quad (9.92)$$

Il importe de remarquer que trouver $\tilde{\omega}(z)$ solution de (9.92)-(9.93), consiste, pour $t > 0$ et $y \in \mathbb{R}$ fixés à exhiber une solution onde progressive du système quasi monodimensionnel suivant :

$$\partial_t \mathbf{u} + \mathcal{A}_1(\mathbf{u}) \partial_x \mathbf{u} = \partial_x \left(\mathcal{D}_1(\mathbf{u}) \partial_x \mathbf{u} \right), \quad (9.94)$$

solution onde progressive se propageant à la vitesse :

$$-\frac{\partial_t \phi^\epsilon(t, y)}{\sqrt{1 + |\partial_y \phi^\epsilon(t, y)|^2}}, \quad (9.95)$$

connectant dans le passé l'état prescrit :

$$\lim_{z \rightarrow -\infty} \tilde{\omega}(z) = \tilde{\mathbf{u}}(\mathbf{u}_L^\epsilon(t, 0^-, y), \mathbf{n}^\epsilon(t, y)), \quad (9.96)$$

et devant joindre dans le futur l'état :

$$\lim_{z \rightarrow +\infty} \tilde{\omega}(z) = \tilde{\mathbf{u}}(\mathbf{u}_R^\epsilon(t, 0^+, y), \mathbf{n}^\epsilon(t, y)). \quad (9.97)$$

Conformément au lemme (9.1.4) associé à la description du choc plan non perturbé, nous supposons l'existence d'un changement de variable $\mathbf{u} \rightarrow \mathbf{v}(\mathbf{u})$ rendant la matrice $\mathcal{A}_1(\mathbf{u})$ semblable à la matrice jacobienne d'une certaine fonction flux $\mathbf{F}_1(\mathbf{v}(\mathbf{u}))$. Sous l'action d'un tel changement de variable, (9.92) devient :

$$\begin{aligned} -\frac{\partial_t \phi^\epsilon(t, y)}{\sqrt{1 + |\partial_y \phi^\epsilon(t, y)|^2}} d_z \mathbf{v}(\tilde{\omega}) + d_z \mathbf{F}_1(\mathbf{v}(\tilde{\omega})) = \\ \mathcal{R}(\tilde{\omega}, d_z \tilde{\omega}, d_z^2 \tilde{\omega}) \equiv D_{\mathbf{u}} \mathbf{v}(\tilde{\omega}) d_z \left(\mathcal{D}_1(\tilde{\omega}) d_z \tilde{\omega} \right), \quad \text{pour } t > 0, \quad y \in \mathbb{R} \text{ fixés.} \end{aligned} \quad (9.98)$$

Ainsi, et dès que la solution onde progressive $\tilde{\omega}$ (9.95)-(9.96)-(9.97) du système (9.94) existe, une intégration sur \mathbb{R}_z tout entier des équations (9.98) conduit au système algébrique suivant :

$$\begin{aligned} -\frac{\partial_t \phi^\epsilon(t, y)}{\sqrt{1 + |\partial_y \phi^\epsilon(t, y)|^2}} \left(\tilde{\mathbf{v}}(\mathbf{v}_R^\epsilon(t, 0^+, y), \mathbf{n}^\epsilon(t, y)) - \tilde{\mathbf{v}}(\mathbf{v}_L^\epsilon(t, 0^-, y), \mathbf{n}^\epsilon(t, y)) \right) \\ + \mathbf{F}_1(\tilde{\mathbf{v}}(\mathbf{v}_R^\epsilon(t, 0^+, y), \mathbf{n}^\epsilon(t, y))) - \mathbf{F}_1(\tilde{\mathbf{v}}(\mathbf{v}_L^\epsilon(t, 0^-, y), \mathbf{n}^\epsilon(t, y))) = \\ \mathcal{C} \left(\tilde{\mathbf{u}}(\mathbf{u}_L^\epsilon(t, 0^-, y), \mathbf{n}^\epsilon(t, y)), \frac{\partial_t \phi^\epsilon(t, y)}{\sqrt{1 + |\partial_y \phi^\epsilon(t, y)|^2}} \right). \end{aligned} \quad (9.99)$$

Dans (9.99), nous avons posé :

$$\mathbf{v}_L^\epsilon(t, 0^-, y) = \mathbf{v}(\mathbf{u}_L^\epsilon(t, 0^-, y)), \quad \mathbf{v}_R^\epsilon(t, 0^+, y) = \mathbf{v}(\mathbf{u}_R^\epsilon(t, 0^+, y)),$$

alors que l'application $\tilde{\mathbf{v}} : \Omega_{\mathbf{v}} \times \mathcal{S}^2 \rightarrow \Omega_{\mathbf{v}}$ n'est autre que l'analogue définie en (9.84) de l'application $\tilde{\mathbf{u}}$ introduite en (9.76), pour le changement de variable $\mathbf{u} \rightarrow \mathbf{v}(\mathbf{u})$. Enfin, la fonction cinétique à valeur vectorielle $\mathcal{C} : \Omega_{\mathbf{u}} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ dans (9.99), est définie par :

$$\mathcal{C} \left(\tilde{\mathbf{u}}(\mathbf{u}_L^\epsilon(t, 0^-, y), \mathbf{n}^\epsilon(t, y)), \frac{\partial_t \phi^\epsilon(t, y)}{\sqrt{1 + |\partial_y \phi^\epsilon(t, y)|^2}} \right) = \int_{-\infty}^{+\infty} D_{\mathbf{u}} \mathbf{v}(\tilde{\omega}) d_z \left(\mathcal{D}_1(\tilde{\omega}) d_z \tilde{\omega} \right) dz. \quad (9.100)$$

Par construction, cette fonction cinétique est associée à la version quasi monodimensionnelle (9.94) du système à deux variables d'espace. En d'autres termes, cette fonction cinétique n'est autre que la fonction cinétique autorisant la définition des relations de saut généralisées (9.17) pour les chocs plans non perturbés. Ce point est crucial dans les applications à venir.

En résumé, l'invariance par rotation des équations d'un système pour lequel $\mathcal{A}_1(\mathbf{u})$ (pour fixer les idées) est semblable à la matrice jacobienne d'une certaine fonction flux $\mathbf{F}_1(\mathbf{v}(\mathbf{u}))$ permet de formuler le problème de stabilité d'un choc plan perturbé en analysant, pour la donnée initiale perturbée (9.33), le comportement temporelle de trois fonctions $\mathbf{u}_L^\epsilon(t, x, y)$, $\mathbf{u}_R^\epsilon(t, x, y)$ et $\phi^\epsilon(t, y)$, où \mathbf{u}_L^ϵ doit être solution du problème (9.52), \mathbf{u}_R^ϵ solution du problème (9.53), les traces en $x = 0$ de ces deux solutions étant liées à $\phi^\epsilon(t, y)$ par les relations de saut généralisées (9.99).

9.1.6 Linéarisation du problème de couplage

À l'instar du chapitre 8 dévolu à l'analyse de la stabilité structurelle du choc droit, nous proposons de formuler un critère de stabilité du choc plan perturbé en analysant la version linéarisé du problème de couplage (9.52)-(9.53)-(9.54)-(9.55) au voisinage d'une amplitude nulle ϵ de la perturbation dans la donnée initiale (9.33). Nous procédons à la linéarisation de ce problème sous les deux régimes d'hypothèses proposées dans la section précédente de manière à bénéficier de l'outil fonction cinétique à valeur vectorielle.

Cas \mathcal{A}_1 et \mathcal{A}_2 semblables à deux matrices jacobiennes

Nous supposons ici l'existence d'un changement de variable $\mathbf{u} \rightarrow \mathbf{v}(\mathbf{u})$ permettant de reformuler le problème de couplage à l'aide des trois fonctions $\mathbf{v}_L^\epsilon(t, x, y)$, $\mathbf{v}_R^\epsilon(t, x, y)$ et $\phi^\epsilon(t, y)$ devant être solutions de (9.61)-(9.62)-(9.67). Afin de procéder à la linéarisation requise, ces trois fonctions reçoivent les développements formels suivants :

$$\begin{cases} \mathbf{v}_L^\epsilon = \mathbf{v}_L + \epsilon \mathbf{w}_L(t, x, y) + \dots, \\ \mathbf{v}_R^\epsilon = \mathbf{v}_R + \epsilon \mathbf{w}_R(t, x, y) + \dots, \\ \phi^\epsilon(t, y) = \sigma t + \epsilon \varphi(t, y) + \dots, \end{cases} \quad (9.101)$$

avec $\mathbf{v}_L = \mathbf{v}(\mathbf{u}_L)$ et $\mathbf{v}_R = \mathbf{v}(\mathbf{u}_R)$. À l'ordre zéro en ϵ , le problème de couplage dégénère clairement sur la condition :

$$-\sigma(\mathbf{v}_R - \mathbf{v}_L) + (\mathbf{F}_1(\mathbf{v}_R) - \mathbf{F}_1(\mathbf{v}_L)) = \tilde{\mathcal{C}}(\mathbf{v}_L, \sigma, 0), \quad (9.102)$$

où $\tilde{\mathcal{C}} : \Omega_{\mathbf{v}} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ désigne la fonction cinétique vectorielle définie en (9.68). La relation de consistance (9.69) avec la fonction cinétique $\mathcal{C} : \Omega_{\mathbf{v}} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ introduite en (9.16) montre que (9.102) coïncide, comme attendu, avec la relation de saut généralisée (9.32) satisfaite par définition par la solution choc plan non perturbé (9.30). Exprimons alors, au premier ordre en ϵ , le problème de couplage (9.61)-(9.62)-(9.67). Selon le développement proposé en (9.101), les nouvelles inconnues sont $\mathbf{w}_L(t, x, y)$, $\mathbf{w}_R(t, x, y)$ et $\varphi(t, y)$. La fonction \mathbf{w}_L doit être solution du problème :

$$\begin{cases} \partial_t \mathbf{w}_L + (\nabla_{\mathbf{v}} \mathbf{F}_1(\mathbf{v}_L) - \sigma Id) \partial_x \mathbf{w}_L + \nabla_{\mathbf{v}} \mathbf{F}_2(\mathbf{v}_L) \partial_y \mathbf{w}_L = 0, & t > 0, x < 0, y \in \mathbb{R}, \\ \lim_{t \rightarrow 0^+} \mathbf{w}_L(t, x, y) = \mathbf{v}(\mathbf{w}_{0L}(x, y)), \end{cases} \quad (9.103)$$

où $\mathbf{w}_{0L}(x, y)$ est la perturbation de la donnée initiale (9.33) pour $x < 0$. Similairement, \mathbf{w}_R doit être solution de :

$$\begin{cases} \partial_t \mathbf{w}_R + (\nabla_{\mathbf{v}} \mathbf{F}_1(\mathbf{v}_R) - \sigma Id) \partial_x \mathbf{w}_R + \nabla_{\mathbf{v}} \mathbf{F}_2(\mathbf{v}_R) \partial_y \mathbf{w}_R = 0, & t > 0, x > 0, y \in \mathbb{R}, \\ \lim_{t \rightarrow 0^+} \mathbf{w}_R(t, x, y) = \mathbf{v}(\mathbf{w}_{0R}(x, y)). \end{cases} \quad (9.104)$$

La condition de couplage devant lier, à chaque instant $t > 0$ et pour chaque $y \in \mathbb{R}$, les traces $\mathbf{w}_L(t, 0^-, y)$ et $\mathbf{w}_R(t, 0^+, y)$ à l'inconnue $\varphi(t, y)$, s'obtient en développant la fonction cinétique vectorielle $\tilde{\mathcal{C}} : (\mathbf{v}, s_1, s_2) \in \Omega_{\mathbf{v}} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \tilde{\mathcal{C}}(\mathbf{v}, s_1, s_2) \in \mathbb{R}^n$ impliquée dans les relations de saut généralisées (9.67) selon :

$$\begin{aligned} \tilde{\mathcal{C}}(\mathbf{v}_L^\epsilon(t, 0^-, y), \partial_t \phi^\epsilon(t, y), \partial_y \phi^\epsilon(t, y)) &= \tilde{\mathcal{C}}(\mathbf{v}_L, \sigma, 0) + \epsilon \nabla_{\mathbf{v}} \tilde{\mathcal{C}}(\mathbf{v}_L, \sigma, 0) \mathbf{w}_L(t, 0^-, y) \\ &+ \epsilon \partial_t \varphi \partial_{s_1} \tilde{\mathcal{C}}(\mathbf{v}_L, \sigma, 0) \\ &+ \epsilon \partial_y \varphi \partial_{s_2} \tilde{\mathcal{C}}(\mathbf{v}_L, \sigma, 0) + \mathcal{O}(\epsilon^2), \end{aligned} \quad (9.105)$$

où $\nabla_{\mathbf{v}} \tilde{\mathcal{C}}$ désigne une matrice carrée de \mathbb{R}^n , et $\partial_{s_1} \tilde{\mathcal{C}}$, $\partial_{s_2} \tilde{\mathcal{C}}$ deux vecteurs de \mathbb{R}^n . Dès lors, la linéarisation au premier ordre des relations de saut généralisées (9.67) s'écrit pour chaque $t > 0$ et $y \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} & -\partial_t \varphi(t, y) (\mathbf{v}_R - \mathbf{v}_L) + (\nabla_{\mathbf{v}} \mathbf{F}_1(\mathbf{v}_R) - \sigma Id) \mathbf{w}_R(t, 0^+, y) \\ & - (\nabla_{\mathbf{v}} \mathbf{F}_1(\mathbf{v}_L) - \sigma Id) \mathbf{w}_L(t, 0^-, y) - \partial_y \varphi(t, y) (\mathbf{F}_2(\mathbf{v}_R) - \mathbf{F}_2(\mathbf{v}_L)) \\ & = \\ & \nabla_{\mathbf{v}} \tilde{\mathcal{C}}(\mathbf{v}_L, \sigma, 0) \mathbf{w}_L(t, 0^-, y) + \partial_t \varphi \partial_{s_1} \tilde{\mathcal{C}}(\mathbf{v}_L, \sigma, 0) + \partial_y \varphi \partial_{s_2} \tilde{\mathcal{C}}(\mathbf{v}_L, \sigma, 0), \end{aligned}$$

condition de couplage pour $(\mathbf{w}_L, \mathbf{w}_R, \varphi)$ que nous réexprimons, pour des raisons à venir, sous la forme :

$$\begin{aligned} & (\nabla_{\mathbf{v}} \mathbf{F}_1(\mathbf{v}_R) - \sigma Id) \mathbf{w}_R(t, 0^+, y) - \partial_t \varphi(t, y) (\mathbf{v}_R - \mathbf{v}_L + \partial_{s_1} \tilde{\mathcal{C}}(\mathbf{v}_L, \sigma, 0)) \\ & - \partial_y \varphi(t, y) (\mathbf{F}_2(\mathbf{v}_R) - \mathbf{F}_2(\mathbf{v}_L) + \partial_{s_2} \tilde{\mathcal{C}}(\mathbf{v}_L, \sigma, 0)) \\ & = \\ & (\nabla_{\mathbf{v}} \mathbf{F}_1(\mathbf{v}_L) - \sigma Id + \nabla_{\mathbf{v}} \tilde{\mathcal{C}}(\mathbf{v}_L, \sigma, 0)) \mathbf{w}_L(t, 0^-, y), \end{aligned} \quad (9.106)$$

Cas d'un système invariant par rotation

De manière à linéariser le problème de couplage avec fonctions cinétiques (9.52)-(9.53)-(9.99), introduisons le développement en ϵ suivant :

$$\begin{cases} \mathbf{u}_L^\epsilon = \mathbf{u}_L + \epsilon \mathbf{w}_L(t, x, y) + \dots, \\ \mathbf{u}_R^\epsilon = \mathbf{u}_R + \epsilon \mathbf{w}_R(t, x, y) + \dots, \\ \phi^\epsilon(t, y) = \sigma t + \epsilon \varphi(t, y) + \dots, \end{cases} \quad (9.107)$$

où avec un léger abus de langage, \mathbf{w}_L et \mathbf{w}_R continuent de désigner les correcteurs du premier ordre. À l'ordre zéro en ϵ , la seule condition non triviale à satisfaire est déduite de (9.99) exprimée en $\epsilon = 0$:

$$\begin{aligned} -\sigma \left(\tilde{\mathbf{v}}(\mathbf{v}(\mathbf{u}_R), \mathbf{n}^{\epsilon=0}(t, y)) - \tilde{\mathbf{v}}(\mathbf{v}(\mathbf{u}_L), \mathbf{n}^{\epsilon=0}(t, y)) \right) + \\ + \mathbf{F}_1(\tilde{\mathbf{v}}(\mathbf{v}(\mathbf{u}_R), \mathbf{n}^{\epsilon=0}(t, y))) - \mathbf{F}_1(\tilde{\mathbf{v}}(\mathbf{v}(\mathbf{u}_L), \mathbf{n}^{\epsilon=0}(t, y))) = \mathcal{C}(\tilde{\mathbf{u}}(\mathbf{u}_L, \mathbf{n}^{\epsilon=0}), \sigma), \end{aligned} \quad (9.108)$$

où pour la formule définition (9.88), nous avons :

$$\mathbf{n}^{\epsilon=0}(t, y) = \begin{cases} 1, \\ 0. \end{cases} \quad (9.109)$$

Réinterprétons alors la quantité $\tilde{\mathbf{v}}(\mathbf{v}(\mathbf{u}_R), (1, 0))$: ce vecteur d'état, exprimé dans le repère $(\mathbf{n}^{\epsilon=0}(t, y), \mathbf{n}_\perp^{\epsilon=0}(t, y))$, résulte de l'état $\mathbf{v}(\mathbf{u}_R)$ exprimé dans le repère $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2)$ après rotation amenant \mathbf{e}_1 sur $\mathbf{n}^{\epsilon=0}(t, y)$. Or, par (9.109), $\mathbf{n}^{\epsilon=0}(t, y) = \mathbf{e}_1$ de sorte que :

$$\tilde{\mathbf{v}}(\mathbf{v}(\mathbf{u}_R), (1, 0)) = \mathbf{v}(\mathbf{u}_R), \quad (9.110)$$

et pour la même raison :

$$\tilde{\mathbf{v}}(\mathbf{v}(\mathbf{u}_L), (1, 0)) = \mathbf{v}(\mathbf{u}_L), \quad \tilde{\mathbf{u}}(\mathbf{u}_L, (1, 0)) = \mathbf{u}_L. \quad (9.111)$$

Ainsi, les conditions algébriques (9.108) coïncident avec les relations de saut généralisées (9.32) :

$$-\sigma \left(\mathbf{v}(\mathbf{u}_R) - \mathbf{v}(\mathbf{u}_L) \right) + \mathbf{F}_1(\mathbf{v}(\mathbf{u}_R)) - \mathbf{F}_1(\mathbf{v}(\mathbf{u}_L)) = \mathcal{C}(\mathbf{u}_L, \sigma),$$

conditions vérifiées par construction par la solution choc plan de référence (9.30).

Exprimons alors le problème de couplage linéarisé au premier ordre en ϵ , dont les trois inconnues $\mathbf{w}_L(t, x, y)$, $\mathbf{w}_R(t, x, y)$ et $\varphi(t, y)$ introduites en (9.107) doivent être solutions. La fonction \mathbf{w}_L doit satisfaire :

$$\begin{cases} \partial_t \mathbf{w}_L + \left(\mathcal{A}_1(\mathbf{u}_L) - \sigma Id \right) \partial_x \mathbf{w}_L + \mathcal{A}_2(\mathbf{u}_L) \partial_y \mathbf{w}_L = 0, & t > 0, x < 0, y \in \mathbb{R}, \\ \lim_{t \rightarrow 0^+} \mathbf{w}_L(t, x, y) = \mathbf{w}_{0L}(x, y), \end{cases} \quad (9.112)$$

où $\mathbf{w}_{0L}(x, y)$ désigne la perturbation de la donnée initiale (9.33) pour $x < 0$. Similairement \mathbf{w}_R doit être solution de :

$$\begin{cases} \partial_t \mathbf{w}_R + \left(\mathcal{A}_1(\mathbf{u}_R) - \sigma Id \right) \partial_x \mathbf{w}_R + \mathcal{A}_2(\mathbf{u}_R) \partial_y \mathbf{w}_R = 0, & t > 0, x > 0, y \in \mathbb{R}, \\ \lim_{t \rightarrow 0^+} \mathbf{w}_R(t, x, y) = \mathbf{w}_{0R}(x, y). \end{cases} \quad (9.113)$$

La condition de couplage devant lier, à chaque instant $t > 0$ et pour chaque $y \in \mathbb{R}$, les traces $\mathbf{w}_L(t, 0^-, y)$ et $\mathbf{w}_R(t, 0^+, y)$ à l'inconnue $\varphi(t, y)$, s'obtient en linéarisant les relations de saut généralisées (9.99). Pour cela, il est nécessaire de linéariser la fonction cinétique $\mathcal{C} : (\mathbf{u}, s) \in \Omega_{\mathbf{u}} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ définie en (9.16). Il s'agit donc, dans un premier temps, de développer au premier ordre en ϵ la fonction $\tilde{\mathbf{u}}(\mathbf{u}_L^\epsilon(t, 0^-, y), \mathbf{n}^\epsilon(t, y))$, où l'application $\tilde{\mathbf{u}} : (\mathbf{u}, \mathbf{e}) \in \Omega_{\mathbf{u}} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \tilde{\mathbf{u}}(\mathbf{u}, \mathbf{e}) \in \Omega_{\mathbf{u}}$ a été introduite en (9.76). De manière à proposer le développement requis, nous figeons tout d'abord l'état perturbé $\mathbf{u}_L^\epsilon(t, 0^-, y)$, pour développer $\tilde{\mathbf{u}}(\mathbf{u}_L^\epsilon, \mathbf{n}^\epsilon)$ autour du vecteur normal $\mathbf{e}_1 = (1, 0) = \mathbf{n}^{\epsilon=0}(t, y)$ (voir la formule (9.109)) :

$$\tilde{\mathbf{u}}(\mathbf{u}_L^\epsilon, \mathbf{n}^\epsilon) = \tilde{\mathbf{u}}(\mathbf{u}_L^\epsilon, \mathbf{e}_1) + \nabla_{\mathbf{e}} \tilde{\mathbf{u}}(\mathbf{u}_L^\epsilon, \mathbf{e}_1)(\mathbf{n}^\epsilon - \mathbf{e}_1) + \dots, \quad (9.114)$$

où nous omettons la dépendance en (t, y) , ici implicitement fixés. Par un raisonnement identique à celui ayant conduit à l'identité (9.111), nous avons la relation suivante, vraie pour tout ϵ :

$$\tilde{\mathbf{u}}(\mathbf{u}_L^\epsilon, \mathbf{e}_1) = \mathbf{u}_L^\epsilon. \quad (9.115)$$

En remarquant que $\mathbf{n}^\epsilon = \mathbf{e}_1 + \mathcal{O}(\epsilon)$, un développement au premier ordre en ϵ du vecteur $\nabla_{\mathbf{e}} \tilde{\mathbf{u}}(\mathbf{u}_L^\epsilon, \mathbf{e}_1)(\mathbf{n}^\epsilon - \mathbf{e}_1)$ conduit nécessairement à :

$$\nabla_{\mathbf{e}} \tilde{\mathbf{u}}(\mathbf{u}_L^\epsilon, \mathbf{e}_1)(\mathbf{n}^\epsilon - \mathbf{e}_1) = \nabla_{\mathbf{e}} \tilde{\mathbf{u}}(\mathbf{u}_L^{\epsilon=0}, \mathbf{e}_1)(\mathbf{n}^\epsilon - \mathbf{e}_1) + \mathcal{O}(\epsilon^2), \quad (9.116)$$

de sorte que par (9.115)-(9.116), l'expression (9.114) s'écrit, pour un état perturbé \mathbf{u}_L^ϵ toujours figé dans l'immédiat :

$$\tilde{\mathbf{u}}(\mathbf{u}_L^\epsilon, \mathbf{n}^\epsilon) = \mathbf{u}_L^\epsilon + \nabla_{\mathbf{e}} \tilde{\mathbf{u}}(\mathbf{u}_L, \mathbf{e}_1)(\mathbf{n}^\epsilon - \mathbf{e}_1) + \mathcal{O}(\epsilon^2). \quad (9.117)$$

Armés de cette relation, nous sommes en mesure de compléter le développement requis en ϵ :

$$\tilde{\mathbf{u}}(\mathbf{u}_L^\epsilon(t, 0^-, y), \mathbf{n}^\epsilon(t, y)) = \mathbf{u}_L + \epsilon \mathbf{w}_L(t, 0^-, y) + \epsilon \nabla_{\mathbf{e}} \tilde{\mathbf{u}}(\mathbf{u}_L, \mathbf{e}_1) \begin{vmatrix} 0 \\ -\partial_y \varphi(t, y) \end{vmatrix} + \mathcal{O}(\epsilon^2), \quad (9.118)$$

où nous avons invoqué la définition (9.88) de la normale perturbée $\mathbf{n}^\epsilon(t, y)$, pour proposer le développement au premier ordre en ϵ suivant :

$$\mathbf{n}^\epsilon(t, y) = \begin{vmatrix} 1 \\ 0 \end{vmatrix} + \epsilon \begin{vmatrix} 0 \\ -\partial_y \varphi(t, y) \end{vmatrix} + \mathcal{O}(\epsilon^2). \quad (9.119)$$

Notons que $\nabla_{\mathbf{e}} \tilde{\mathbf{u}}(\mathbf{u}_L, \mathbf{e}_1)$ désigne une matrice rectangulaire de taille $\mathbb{R}^{n \times 2}$. Le développement en ϵ de la fonction cinétique $\mathcal{C} : (\mathbf{u}, s) \in \Omega_{\mathbf{u}} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ impliquée dans les relations de saut généralisées (9.99) trouve en conséquence la forme suivante :

$$\begin{aligned} \mathcal{C} \left(\tilde{\mathbf{u}}(\mathbf{u}_L^\epsilon(t, 0^-, y), \mathbf{n}^\epsilon(t, y)), \frac{\partial_t \phi^\epsilon(t, y)}{\sqrt{1 + |\partial_y \phi^\epsilon(t, y)|^2}} \right) &= \mathcal{C}(\mathbf{u}_L, \sigma) + \epsilon \nabla_{\mathbf{u}} \mathcal{C}(\mathbf{u}_L, \sigma) \mathbf{w}_L(t, 0^-, y) \\ &+ \epsilon \partial_t \varphi(t, y) \partial_s \mathcal{C}(\mathbf{u}_L, \sigma) \\ &+ \epsilon \nabla_{\mathbf{u}} \mathcal{C}(\mathbf{u}_L, \sigma) \nabla_{\mathbf{e}} \tilde{\mathbf{u}}(\mathbf{u}_L, \mathbf{e}_1) \begin{pmatrix} 0 \\ -\partial_y \varphi(t, y) \end{pmatrix} \\ &+ \mathcal{O}(\epsilon^2), \end{aligned} \quad (9.120)$$

en remarquant que la vitesse de propagation impliquée se linéarise selon :

$$\frac{\partial_t \phi^\epsilon(t, y)}{\sqrt{1 + |\partial_y \phi^\epsilon(t, y)|^2}} = \sigma + \epsilon \partial_t \varphi(t, y) + \mathcal{O}(\epsilon^2). \quad (9.121)$$

Par un raisonnement en tout point identique à celui que nous venons de proposer, il est possible de vérifier que le développement au premier ordre en ϵ de la fonction $\tilde{\mathbf{v}}(\mathbf{v}_L^\epsilon(t, 0^-, y), \mathbf{n}^\epsilon(t, y))$ requis dans la linéarisation de (9.99) s'écrit :

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{v}}(\mathbf{v}_L^\epsilon(t, 0^-, y), \mathbf{n}^\epsilon(t, y)) &= \mathbf{v}(\mathbf{u}_L) + \epsilon D_{\mathbf{u}} \mathbf{v}(\mathbf{u}_L) \mathbf{w}_L(t, 0^-, y) \\ &+ \epsilon \nabla_{\mathbf{e}} \tilde{\mathbf{v}}(\mathbf{v}(\mathbf{u}_L), \mathbf{e}_1) \left(0, -\partial_y \varphi(t, y)\right) + \mathcal{O}(\epsilon^2). \end{aligned} \quad (9.122)$$

Il suffit à cette fin de remarquer que l'analogie de la formule (9.117) est ici :

$$\tilde{\mathbf{v}}(\mathbf{v}(\mathbf{u}_L^\epsilon), \mathbf{n}^\epsilon) = \mathbf{v}(\mathbf{u}_L^\epsilon) + \nabla_{\mathbf{e}} \tilde{\mathbf{v}}(\mathbf{v}(\mathbf{u}_L), \mathbf{e}_1) (\mathbf{n}^\epsilon - \mathbf{e}_1) + \mathcal{O}(\epsilon^2).$$

Un développement analogue vaut pour $\tilde{\mathbf{v}}(\mathbf{v}_R^\epsilon(t, 0^+, y), \mathbf{n}^\epsilon(t, y))$. La formulation de la condition de couplage pour le problème linéarisé se déduit alors des développements (9.120) et (9.122). À chaque instant $t > 0$ et pour chaque $y \in \mathbb{R}$, les traces $\mathbf{w}_L(t, 0^-, y)$ et $\mathbf{w}_R(t, 0^+, y)$ des solutions des problèmes (9.112) et (9.113) sont liées à l'inconnue $\varphi(t, y)$ par :

$$\begin{aligned} & -\sigma \left(D_{\mathbf{u}} \mathbf{v}(\mathbf{u}_R) \mathbf{w}_R(t, 0^+, y) - D_{\mathbf{u}} \mathbf{v}(\mathbf{u}_L) \mathbf{w}_L(t, 0^-, y) \right) \\ & \quad - \partial_t \varphi(t, y) \left(\mathbf{v}(\mathbf{u}_R) - \mathbf{v}(\mathbf{u}_L) \right) \\ & - \sigma \nabla_{\mathbf{e}} \tilde{\mathbf{v}}(\mathbf{v}(\mathbf{u}_R), \mathbf{e}_1) (0, \partial_y \varphi(t, y)) + \sigma \nabla_{\mathbf{e}} \tilde{\mathbf{v}}(\mathbf{v}(\mathbf{u}_L), \mathbf{e}_1) (0, \partial_y \varphi(t, y)) \\ & \quad + \nabla_{\mathbf{v}} \mathbf{F}_1(\mathbf{v}(\mathbf{u}_R)) D_{\mathbf{u}} \mathbf{v}(\mathbf{u}_R) \mathbf{w}_R(t, 0^+, y) \\ & \quad - \nabla_{\mathbf{v}} \mathbf{F}_1(\mathbf{v}(\mathbf{u}_L)) D_{\mathbf{u}} \mathbf{v}(\mathbf{u}_L) \mathbf{w}_R(t, 0^-, y) \\ & \quad + \nabla_{\mathbf{v}} \mathbf{F}_1(\mathbf{v}(\mathbf{u}_R)) \nabla_{\mathbf{e}} \tilde{\mathbf{v}}(\mathbf{v}(\mathbf{u}_R), \mathbf{e}_1) (0, \partial_y \varphi(t, y)) \\ & \quad - \nabla_{\mathbf{v}} \mathbf{F}_1(\mathbf{v}(\mathbf{u}_L)) \nabla_{\mathbf{e}} \tilde{\mathbf{v}}(\mathbf{v}(\mathbf{u}_L), \mathbf{e}_1) (0, \partial_y \varphi(t, y)) \\ & \quad = \\ & \quad \nabla_{\mathbf{u}} \mathcal{C}(\mathbf{u}_L, \sigma) \mathbf{w}_L(t, 0^-, y) \\ & \quad + \partial_t \varphi(t, y) \partial_s \mathcal{C}(\mathbf{u}_L, \sigma) \\ & \quad + \nabla_{\mathbf{u}} \mathcal{C}(\mathbf{u}_L, \sigma) \nabla_{\mathbf{e}} \tilde{\mathbf{u}}(\mathbf{u}_L, \mathbf{e}_1) (0, \partial_y \varphi(t, y)) \end{aligned}$$

Nous réécrivons cette identité, après multiplication par $D_{\mathbf{u}}^{-1}(\mathbf{v}(\mathbf{u}_R))$ selon :

$$\begin{aligned} & \left(\mathcal{A}_1(\mathbf{u}_R) - \sigma Id \right) \mathbf{w}_R(t, 0^+, y) \\ & - \partial_t \varphi(t, y) D_{\mathbf{u}}^{-1} \mathbf{v}(\mathbf{u}_R) \left(\mathbf{v}(\mathbf{u}_R) - \mathbf{v}(\mathbf{u}_L) + \partial_s \mathcal{C}(\mathbf{u}_L, \sigma) \right) \\ & \quad - \partial_y \varphi(t, y) D_{\mathbf{u}}^{-1} \mathbf{v}(\mathbf{u}_R) \mathcal{B}(\mathbf{u}_L, \mathbf{u}_R) \end{aligned} \quad (9.123)$$

$$= D_{\mathbf{u}}^{-1} \mathbf{v}(\mathbf{u}_R) \left(\left(\nabla_{\mathbf{v}} \mathbf{F}_1(\mathbf{v}(\mathbf{u}_L)) - \sigma Id \right) D_{\mathbf{u}} \mathbf{v}(\mathbf{u}_L) + \nabla_{\mathbf{u}} \mathcal{C}(\mathbf{u}_L, \sigma) \right) \mathbf{w}_L(t, 0^-, y),$$

où nous avons introduit $\mathcal{B} : \Omega_{\mathbf{u}} \times \Omega_{\mathbf{u}} \rightarrow \mathbb{R}^n$, définie par :

$$\begin{aligned} \mathcal{B}(\mathbf{u}_L, \mathbf{u}_R) &= \left(\left(\nabla_{\mathbf{v}} \mathbf{F}_1(\mathbf{v}(\mathbf{u}_R)) - \sigma Id \right) \nabla_{\mathbf{e}} \tilde{\mathbf{v}}(\mathbf{v}(\mathbf{u}_R), \mathbf{e}_1) \right. \\ & - \left(\nabla_{\mathbf{v}} \mathbf{F}_1(\mathbf{v}(\mathbf{u}_L)) - \sigma Id \right) \nabla_{\mathbf{e}} \tilde{\mathbf{v}}(\mathbf{v}(\mathbf{u}_L), \mathbf{e}_1) \\ & \left. - \nabla_{\mathbf{u}} \mathcal{C}(\mathbf{u}_L, \sigma) \nabla_{\mathbf{e}} \tilde{\mathbf{u}}(\mathbf{u}_L, \mathbf{e}_1) \right) (0, 1). \end{aligned} \quad (9.124)$$

Conditions de couplage (9.106) versus conditions de couplage (9.123)

Pour conclure cette section, soulignons les points suivants.

Sur le plan théorique, la structure algébrique de la condition de couplage linéarisée (9.123) liant les traces $\mathbf{w}_L(t, 0^-, y)$ et $\mathbf{w}_R(t, 0^-, y)$ aux dérivées de $\varphi(t, y)$ est identique à son homologue dans (9.106). Elles sont néanmoins très différentes ne serait ce que par les hypothèses mathématiques effectuées sur le système (9.1), leurs différences s'affirmant nettement sur le plan des applications. En effet, si l'expression matricielle impliquant la dérivée en y de φ , *i.e.* $\partial_y \varphi(t, y)$, dans (9.123) paraît de prime abord plus complexe que dans (9.106), la supériorité décisive de la formulation (9.123) réside dans l'implication de la fonction cinétique $\mathcal{C} : \Omega_{\mathbf{u}} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ déjà connue et tabulée au titre de l'analyse des solutions choc de la forme quasi monodimensionnelle du système (9.1). Cette propriété s'oppose à la fonction cinétique $\tilde{\mathcal{C}} : \Omega_{\mathbf{u}} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ présente dans (9.106) par son gradient, dont la dépendance fonctionnelle garde la mémoire de la perturbation multidimensionnelle au travers de son troisième argument. Il faudrait tabuler cette nouvelle fonction cinétique en vue des applications, ce qui dans les faits est rendu inutile par la propriété d'invariance par rotation des équations. Nous privilégions donc, dans tous les cas, la condition de couplage (9.123), d'autant que c'est la seule qui, dans le cadre de ce présent manuscrit, corresponde aux propriétés des modèles RSM étudiés.

Au titre des applications à venir, soulignons que l'évaluation des gradients du type $\nabla_{\mathbf{e}} \tilde{\mathbf{u}}(\mathbf{u}_L, \mathbf{e})$, entrant dans la condition de couplage (9.123), sera menée **de manière très simple** en calquant point par point les calculs présentés de manières abstraites à l'occasion des formules (9.114) et (9.120) : à savoir figer les premiers arguments figurant dans toutes les applications $\tilde{\mathbf{v}}(\cdot, \mathbf{n}^\epsilon)$ et $\tilde{\mathbf{u}}(\cdot, \mathbf{n}^\epsilon)$ composant l'ensemble des relations de saut généralisées (9.99) pour développer en ϵ relativement au second argument \mathbf{n}^ϵ , puis développer en ϵ relativement au premier argument, selon l'analogie de la formule (9.117). La linéarisation de la condition de couplage (9.99) s'en trouvera particulièrement simplifiée.

Nous avons jugé utile, à ce niveau de l'exposé, d'illustrer ces considérations théoriques en procédant par l'exemple. Le lecteur peut néanmoins, sans dommage, ignorer dans une première lecture la section suivante pour y revenir une fois entamées les applications de la théorie.

9.1.7 Exemple de la linéarisation des relations de saut généralisées dans le cadre isotherme avec correction de Ristorcelli

Nous illustrons, dans ce paragraphe, le calcul de l'application $\mathcal{B}(\mathbf{u}_L, \mathbf{u}_R)$, définie en (9.124) intervenant dans la condition de couplage linéarisée (9.123), pour le modèle RSM isotherme avec correction de Ristorcelli. À cette fin, nous formulons, dans un premier temps, les relations de saut généralisées pour une solution choc se déplaçant dans une direction normale \mathbf{n} , dans le repère de référence $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2)$, pour, dans un second temps, procéder au développement en ϵ des relations de saut généralisées, dans le cas d'une normale \mathbf{n}^ϵ voisine de \mathbf{e}_1 .

Dans le repère cartésien de référence $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2)$ associé à la solution choc plan non perturbé (9.30), les relations de saut généralisées, formulées dans la direction normale \mathbf{e}_1 à la discontinuité s'écrivent, en vertu de la section (5.4) du chapitre 5, grâce au

changement de variable suivant :

$$\mathbf{u} \rightarrow \mathbf{v}(\mathbf{u}) = (\rho, \rho u, \rho v, \rho \mathcal{I}, \rho E_t, \rho \mathcal{W}), \quad (9.125)$$

où \mathbf{u} est le vecteur d'inconnues défini en (9.79). Nous rappelons, par convenance pour le lecteur, les définitions suivantes :

$$\mathcal{I} = R_{11}\tau^3, \quad \mathcal{V} = \frac{R_{12}\tau^2}{\sqrt{\mathcal{I}}}, \quad \rho E_t = \rho \frac{v^2 + \mathcal{V}^2}{2}, \quad \rho \mathcal{W} = R_{22} - \frac{R_{12}^2}{R_{11}}. \quad (9.126)$$

En faisant choix d'un vecteur unitaire \mathbf{n} destiné à fixer une nouvelle direction normale privilégiée après rotation du vecteur \mathbf{e}_1 , les formules (9.80)-(9.81) définissant l'application $\tilde{\mathbf{u}}(\mathbf{u}, \mathbf{n})$ conduisent clairement à son analogue $\tilde{\mathbf{v}}(\mathbf{v}, \mathbf{n})$, en considérant :

$$\mathbf{v}_{\mathbf{n}} = \tilde{\mathbf{v}}(\mathbf{v}, \mathbf{n}) = (\rho, \rho u_n, \rho v_n, \rho \mathcal{I}_n, \rho E_t^n, \rho \mathcal{W}_n), \quad (9.127)$$

avec les nouvelles définitions, déduites de (9.126) :

$$\mathcal{I}_n = R_{nn}\tau^3, \quad \mathcal{V}_n = \frac{R_{n\tau}\tau^2}{\sqrt{\mathcal{I}_n}}, \quad \rho E_t^n = \rho \frac{v_n^2 + \mathcal{V}_n^2}{2}, \quad \rho \mathcal{W}_n = R_{\tau\tau} - \frac{R_{n\tau}^2}{R_{nn}}, \quad (9.128)$$

où nous explicitons les quantités scalaires introduites en (9.128) en fonction des composantes (n_1, n_2) de la normale \mathbf{n} :

$$\begin{aligned} u_n &= n_1 u + n_2 v, \\ v_n &= -n_2 u + n_1 v, \\ R_{nn} &= n_1^2 R_{11} + n_2^2 R_{22} + 2n_1 n_2 R_{12}, \\ R_{n\tau} &= (n_1^2 - n_2^2) R_{12} + n_1 n_2 (R_{22} - R_{11}), \\ R_{\tau\tau} &= n_2^2 R_{11} + n_1^2 R_{22} - 2n_1 n_2 R_{12}. \end{aligned} \quad (9.129)$$

Avec ces notations, une fonction discontinue $\mathbf{v}(t, x, y)$ séparant deux états \mathbf{v}_L et \mathbf{v}_R et animée d'une vitesse s , définie dans le repère $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2)$ selon :

$$\mathbf{v}(t, x, y) = \mathbf{v}_L + (\mathbf{v}_R - \mathbf{v}_L) H(xn_1 + yn_2 - st), \quad t > 0, \quad (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad (9.130)$$

désigne une solution choc plan se propageant dans la direction normale \mathbf{n} si et seulement si, en introduisant grâce à l'application (9.127) :

$$\mathbf{v}_{\mathbf{n},L} = \tilde{\mathbf{v}}(\mathbf{v}_L, \mathbf{n}), \quad \mathbf{v}_{\mathbf{n},R} = \tilde{\mathbf{v}}(\mathbf{v}_R, \mathbf{n}), \quad (9.131)$$

l'état $\mathbf{v}_{\mathbf{n},R}$ est solution des relations de Rankine-Hugoniot généralisées suivantes :

$$\left\{ \begin{array}{l} -s(\rho_R - \rho_L) + ((\rho u_n)_R - (\rho u_n)_L) = 0, \\ -s((\rho u_n)_R - (\rho u_n)_L) + ((\rho u_n^2 + p(\rho) + \rho^3 \mathcal{I}_n)_R - (\rho u_n^2 + p(\rho) + \rho^3 \mathcal{I}_n)_L) = 0, \\ -s((\rho v_n)_R - (\rho v_n)_L) + ((\rho u_n v_n + \rho^2 \sqrt{\mathcal{I}_n} \mathcal{V}_n)_R - (\rho u_n v_n + \rho^2 \sqrt{\mathcal{I}_n} \mathcal{V}_n)_L) = 0, \\ -s((\rho \mathcal{I}_n)_R - (\rho \mathcal{I}_n)_L) + ((\rho \mathcal{I}_n u_n)_R - (\rho \mathcal{I}_n u_n)_L) = \mathcal{C}_{\mathcal{I}}(\mathbf{v}_{\mathbf{n},L}, s), \\ -s((\rho E_t^n)_R - (\rho E_t^n)_L) \\ \quad + ((\rho E_t^n u_n + \rho^2 \sqrt{\mathcal{I}_n} \mathcal{V}_n v_n)_R - (\rho E_t^n u_n + \rho^2 \sqrt{\mathcal{I}_n} \mathcal{V}_n v_n)_L) = \mathcal{C}_{E_t}(\mathbf{v}_{\mathbf{n},L}, s) \\ -s((\rho \mathcal{W}_n)_R - (\rho \mathcal{W}_n)_L) + ((\rho \mathcal{W}_n u_n)_R - (\rho \mathcal{W}_n u_n)_L) = 0. \end{array} \right. \quad (9.132)$$

Ces relations prenant une forme identique aux conditions de saut (5.69), proposition (5.4.2), reflètent simplement l'invariance par rotation des équations permettant de passer des équations (9.82) dans le repère $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2)$, à leur formulation (9.85) dans le repère $(\mathbf{n}, \mathbf{n}_\perp)$.

Ici, et par convenance pour l'analyse à venir, les relations de saut généralisées (9.132) sont données sous forme dimensionnée. Le lien entre les fonctions cinétiques $\mathcal{C}_{\mathcal{I}}$, \mathcal{C}_{E_t} et leurs homologues adimensionnées $\kappa_{\mathcal{I}}$, κ_{E_t} (voir la section (5.4), chapitre 5) requiert l'introduction du nombre de Mach normal :

$$M_n = M_c(\mathbf{v}_{\mathbf{n},L}) = \frac{u_{n,L} - s}{c_{n,L}}, \quad c_{n,L} = c(\mathbf{v}_{\mathbf{n},L}), \quad (9.133)$$

du nombre de Mach turbulent normal :

$$\beta_n = \beta(\mathbf{v}_{\mathbf{n},L}) = \frac{a_{n,L}}{c_{n,L}}, \quad a_{n,L} = a(\mathbf{v}_{\mathbf{n},L}), \quad (9.134)$$

et du coefficient d'anisotropie normal :

$$\alpha_n = \alpha(\mathbf{v}_{\mathbf{n},L}) = \frac{R_{n\tau}^L}{R_{nn}^L}, \quad (9.135)$$

où les définitions des vitesses $c(\mathbf{v})$ et $a(\mathbf{v})$ introduite à la proposition (3.2.1) du chapitre 3, restent inchangées, *i.e.* :

$$a_n = a(\mathbf{v}_{\mathbf{n}}) = \sqrt{\frac{R_{nn}}{\rho}}, \quad c_n = c(\mathbf{v}_{\mathbf{n}}) = \sqrt{T_0 + 3a_n^2}. \quad (9.136)$$

Armés de ces notations, nous avons :

$$\mathcal{C}_{\mathcal{I}}(\mathbf{v}_{\mathbf{n},L}, s) = m_n \tau_L^2 a_{n,L}^2 \kappa_{\mathcal{I}}(\beta_n, M_n), \quad m_n = \rho(u_n - s), \quad (9.137)$$

où par la propriété d'invariance par rotation des équations, la fonction cinétique adimensionnée $(\beta, M) \rightarrow \kappa_{\mathcal{I}}(\beta, M)$ trouve évidemment la même définition qu'en (5.114), section (5.6) du chapitre 5. De même, nous avons :

$$\mathcal{C}_{E_t}(\mathbf{v}_{\mathbf{n},L}, s) = m_n c_{n,L}^2 \kappa_{E_t}(\alpha_n, \beta_n, M_n), \quad (9.138)$$

avec une définition identique de la fonction cinétique $(\alpha, \beta, M) \rightarrow \kappa_{E_t}(\alpha, \beta, M)$ telle que détaillée en (5.116), section (5.6).

Armés de ces relations, nous pouvons procéder à la linéarisation des relations de saut généralisées (9.99). Pour tout $t > 0$ et $y \in \mathbb{R}$, ces relations de saut caractérisent une solution choc qui, comprise dans le repère de référence $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2)$, se propage dans la direction normale $\mathbf{n}^\epsilon(t, y)$, définie en (9.88), en séparant les traces $\mathbf{u}_L^\epsilon(t, 0^-, y)$ et $\mathbf{u}_R^\epsilon(t, 0^+, y)$ des solutions perturbées \mathbf{u}_L^ϵ et \mathbf{u}_R^ϵ . De manière à alléger les notations, nous désignons par \mathbf{u}^ϵ , l'une quelconque de ces traces, et par \mathbf{u} la quantité non perturbée, puis par \mathbf{n}^ϵ la direction normale de propagation. Rappelons le développement au premier ordre en ϵ de \mathbf{n}^ϵ , donné en (9.119) :

$$\mathbf{n}^\epsilon = \mathbf{e}_1 + \epsilon \begin{vmatrix} 0 \\ -\partial_y \varphi \end{vmatrix} + \mathcal{O}(\epsilon^2). \quad (9.139)$$

Conformément à la démarche proposée au précédent paragraphe, nous débutons la linéarisation par :

Lemme 9.1.7. *La linéarisation partielle au premier ordre en ϵ selon le second argument \mathbf{n}^ϵ du vecteur d'état $\mathbf{v}_{\mathbf{n}^\epsilon}^\epsilon = \tilde{\mathbf{v}}(\mathbf{u}^\epsilon, \mathbf{n}^\epsilon)$, donnée par :*

$$\tilde{\mathbf{v}}(\mathbf{u}^\epsilon, \mathbf{n}^\epsilon) = \mathbf{v}(\mathbf{u}^\epsilon) + \epsilon \nabla_{\mathbf{e}} \tilde{\mathbf{v}}(\mathbf{u}, \mathbf{e}_1)(0, -\partial_y \varphi(t, y)), \quad (9.140)$$

se déduit des formules (9.129) selon :

$$\begin{cases} u_{n^\epsilon}^\epsilon = u^\epsilon - \epsilon v \partial_y \varphi + \mathcal{O}(\epsilon^2), \\ v_{n^\epsilon}^\epsilon = v^\epsilon + \epsilon u \partial_y \varphi + \mathcal{O}(\epsilon^2), \\ R_{n^\epsilon n^\epsilon}^\epsilon = R_{11}^\epsilon - 2\epsilon R_{12} \partial_y \varphi + \mathcal{O}(\epsilon^2), \\ R_{n^\epsilon \tau^\epsilon}^\epsilon = R_{12}^\epsilon + \epsilon (R_{11} - R_{22}) \partial_y \varphi + \mathcal{O}(\epsilon^2), \\ R_{\tau^\epsilon \tau^\epsilon}^\epsilon = R_{22}^\epsilon + 2\epsilon R_{12} \partial_y \varphi + \mathcal{O}(\epsilon^2). \end{cases} \quad (9.141)$$

Dans un second temps, la linéarisation (9.120) des fonctions cinétiques $\mathcal{C}_{\mathcal{I}}(\tilde{\mathbf{u}}(\mathbf{u}^\epsilon, \mathbf{n}^\epsilon), s^\epsilon)$ et $\mathcal{C}_{E_t}(\tilde{\mathbf{u}}(\mathbf{u}^\epsilon, \mathbf{n}^\epsilon), s^\epsilon)$ avec

$$s^\epsilon = \frac{\partial_t \phi^\epsilon}{\sqrt{1 + |\partial_y \phi^\epsilon|^2}} = \sigma + \epsilon \partial_t \varphi + \mathcal{O}(\epsilon^2),$$

requiert, via les formules (9.137) et (9.138), les résultats suivants :

Lemme 9.1.8. *La linéarisation partielle en ϵ de \mathbf{n}^ϵ au voisinage de $\mathbf{n}^{\epsilon=0} = \mathbf{e}_1$, des vitesses (9.136) s'écrit :*

$$\begin{aligned} a_{n^\epsilon}^\epsilon &= a(\tilde{\mathbf{u}}(\mathbf{u}^\epsilon, \mathbf{n}^\epsilon)) = a(\mathbf{u}^\epsilon) - \epsilon a(\mathbf{u}) \frac{R_{12}}{R_{11}} \partial_y \varphi + \mathcal{O}(\epsilon^2), \\ (c_{n^\epsilon}^\epsilon)^2 &= c^2(\tilde{\mathbf{u}}(\mathbf{u}^\epsilon, \mathbf{n}^\epsilon)) = c^2(\mathbf{u}^\epsilon) - 6\epsilon R_{12} \tau \partial_y \varphi + \mathcal{O}(\epsilon^2). \end{aligned} \quad (9.142)$$

La linéarisation partielle de $M_c^2(\tilde{\mathbf{u}}(\mathbf{u}^\epsilon, \mathbf{n}^\epsilon))$, $\beta^2(\tilde{\mathbf{u}}(\mathbf{u}^\epsilon, \mathbf{n}^\epsilon))$ et $\alpha^2(\tilde{\mathbf{u}}(\mathbf{u}^\epsilon, \mathbf{n}^\epsilon))$ est alors :

$$\begin{aligned} (M_{n^\epsilon}^\epsilon)^2 &= M_c^2(\tilde{\mathbf{u}}(\mathbf{u}^\epsilon, \mathbf{n}^\epsilon)) = M_c^2(\mathbf{u}^\epsilon) - 2\epsilon \frac{u - \sigma}{c^2(\mathbf{u})} \partial_t \varphi \\ &\quad + 2\epsilon \left(3M_c^2(\mathbf{u}) \frac{R_{12}\tau}{c^2(\mathbf{u})} - \frac{u - \sigma}{c^2(\mathbf{u})} v \right) \partial_y \varphi + \mathcal{O}(\epsilon^2), \\ (\beta_{n^\epsilon}^\epsilon)^2 &= \beta^2(\tilde{\mathbf{u}}(\mathbf{u}^\epsilon, \mathbf{n}^\epsilon)) = \beta^2(\mathbf{u}^\epsilon) - 2\epsilon \frac{R_{12}\tau}{c^2(\mathbf{u})} (1 - 3\beta^2(\mathbf{u})) \partial_y \varphi + \mathcal{O}(\epsilon^2), \\ (\alpha_{n^\epsilon}^\epsilon)^2 &= \alpha^2(\tilde{\mathbf{u}}(\mathbf{u}^\epsilon, \mathbf{n}^\epsilon)) = \alpha^2(\mathbf{u}^\epsilon) + 2\epsilon \alpha^2(\mathbf{u}) \left(\frac{R_{11} - R_{22}}{R_{12}} - 2\alpha(\mathbf{u}) \right) \partial_y \varphi + \mathcal{O}(\epsilon^2). \end{aligned} \quad (9.143)$$

Les linéarisations partielles de $M_c(\tilde{\mathbf{u}}(\mathbf{u}^\epsilon, \mathbf{n}^\epsilon))$, $\beta(\tilde{\mathbf{u}}(\mathbf{u}^\epsilon, \mathbf{n}^\epsilon))$ et $\alpha(\tilde{\mathbf{u}}(\mathbf{u}^\epsilon, \mathbf{n}^\epsilon))$ se déduisent aisément par composition avec la fonction racine carrée.

Le tableau (9.1) propose la linéarisation partielle des relations de saut généralisées. Son écriture utilise les notations suivantes :

$$[X] = X_R - X_L, [X^\epsilon] = X^\epsilon(t, 0^+, y) - X^\epsilon(t, 0^-, y), \quad (9.144)$$

où X désigne une variable quelconque. La linéarisation complète, à savoir de toute quantité de la forme $[X^\epsilon]$ (9.144), est laissée au lecteur. Un adimensionnement de cette linéarisation complète est proposé ultérieurement.

Pour conclure, commentons brièvement la forme des linéarisées obtenues. Les trois premières relations sont associées à des lois de conservation multidimensionnelles. Elles coïncident clairement avec les expressions qui auraient été obtenues en linéarisant directement ces lois de conservation, sans invoquer l'invariance par rotation des équations. Les trois dernières relations sont en revanche associées à des entropies directionnelles. Les contributions en produit de la dérivée $\partial_y \varphi$, de ces relations, distinctes des fonctions cinétiques et de leurs gradients, sont associées au vecteur $\mathcal{B}(\mathbf{u}_L, \mathbf{u}_R)$ de \mathbb{R}^n défini en (9.124).

$$\left\{ \begin{array}{l} -\sigma[\rho^\epsilon] + [\rho^\epsilon u^\epsilon] - \epsilon \partial_t \varphi[\rho] - \epsilon \partial_y \varphi[\rho v] = 0, \\ -\sigma[\rho^\epsilon u^\epsilon] + [\rho^\epsilon (u^\epsilon)^2 + T_0 \rho^\epsilon + R_{11}^\epsilon] - \epsilon \partial_t \varphi[\rho u] - \epsilon \partial_y \varphi[\rho u v + R_{12}] = 0, \\ -\sigma[\rho^\epsilon v^\epsilon] + [\rho^\epsilon v^\epsilon u^\epsilon + R_{12}^\epsilon] - \epsilon \partial_t \varphi[\rho v] - \epsilon \partial_y \varphi[\rho v^2 + T_0 \rho + R_{22}] = 0, \\ -\sigma[\rho^\epsilon \mathcal{I}^\epsilon] + [\rho^\epsilon \mathcal{I}^\epsilon u^\epsilon] - m a_L^2 \tau_L^2 \kappa_{\mathcal{I}}(\beta, M) - \epsilon \partial_t \varphi[\rho \mathcal{I}] = \epsilon \partial_y \varphi[\rho \mathcal{I} v + 2m R_{12} \tau^3] \\ \quad - \epsilon \partial_t \varphi \beta^2 \left(\kappa_{\mathcal{I}} + M \frac{\partial \kappa_{\mathcal{I}}}{\partial M} \right) - \epsilon \partial_y \varphi m \frac{R_{12}^L \tau_L^2}{c_L^2} \left(2\kappa_{\mathcal{I}} + 3M \beta^2 \frac{\partial \kappa_{\mathcal{I}}}{\partial M} \right) \\ \quad - \epsilon \partial_y \varphi m \frac{R_{12}^L \tau_L^2}{c_L^2} \beta \frac{\partial \kappa_{\mathcal{I}}}{\partial \beta}, \\ -\sigma[\rho^\epsilon E_t^\epsilon] + [\rho^\epsilon E_t^\epsilon u^\epsilon + R_{12}^\epsilon v^\epsilon] - m c_L^2 \kappa_{E_t}(\alpha, \beta, M) - \epsilon \partial_t \varphi[\rho E_t] = \epsilon \partial_y \varphi[\rho E_t v] \\ \quad + \epsilon \partial_y \varphi[-m u v - R_{12}(2u - \sigma)] + \epsilon \partial_y \varphi[(R_{22} - R_{11})v] \\ \quad + \epsilon \partial_y \varphi \left[\frac{m R_{12} \tau}{R_{11}^2} (R_{11} R_{22} - R_{12}^2) \right] - \epsilon \partial_t \varphi \rho_L c_L^2 \left(\kappa_{E_t} + M \frac{\partial \kappa_{E_t}}{\partial M} \right) \\ \quad - 3\epsilon \partial_y \varphi m R_{12}^L \tau_L \left(2\kappa_{E_t} - M \frac{\partial \kappa_{E_t}}{\partial M} \right) + \epsilon \partial_y \varphi \left(\frac{R_{11}^L - R_{22}^L}{R_{12}^L} - 2\alpha \right) m c_L^2 \alpha \frac{\partial \kappa_{E_t}}{\partial \alpha} \\ \quad - \frac{\epsilon}{\beta} \partial_y \varphi m R_{12}^L \tau_L (1 - 3\beta^2) \frac{\partial \kappa_{E_t}}{\partial \beta}, \\ -\sigma[\rho^\epsilon \mathcal{W}^\epsilon] + [\rho^\epsilon \mathcal{W}^\epsilon u^\epsilon] - \epsilon \partial_t \varphi[\rho \mathcal{W}] = \epsilon \partial_y \varphi[\rho \mathcal{W} v] - 2\epsilon \partial_y \varphi \left[\frac{m R_{12} \tau}{R_{11}^2} (R_{11} R_{22} - R_{12}^2) \right]. \end{array} \right.$$

TAB. 9.1 – Linéarisation partielle des relations de Rankine-Hugoniot généralisées dans le cadre isotherme avec correction de Ristorcelli

9.1.8 Lien avec le problème de la stabilité structurelle du choc droit

Nous mettons en évidence ici un lien simple, mais important dans l'analyse à venir, entre la propriété de stabilité structurelle du choc droit et la stabilité multidimensionnelle du choc plan. En particulier, la première propriété est vue constituer un prérequis

à la validité de la seconde.

Afin d'opérer le lien escompté, il suffit de considérer des données initiales perturbées (9.33) de la forme particulière suivante :

$$\mathbf{u}_0^\epsilon(x, y) = \begin{cases} \mathbf{u}_L + \epsilon \mathbf{w}_{0L}(x), & x < 0, y \in \mathbb{R}, \\ \mathbf{u}_R + \epsilon \mathbf{w}_{0R}(x), & x > 0, y \in \mathbb{R}, \end{cases} \quad (9.145)$$

à savoir indépendantes de la variable transverse y . Il est donc attendu que la solution choc plan perturbé $\mathbf{u}^\epsilon(t, x, y)$ du problème de Cauchy (9.1) pour une donnée initiale du type (9.145) soit également indépendante de y . Une telle solution est donc recherchée sous la forme :

$$\mathbf{u}^\epsilon(t, x, y) = \begin{cases} \mathbf{u}_L + \epsilon \mathbf{w}_L(t, x), & t > 0, x < \phi^\epsilon(t), y \in \mathbb{R}, \\ \mathbf{u}_R + \epsilon \mathbf{w}_R(t, x), & t > 0, x > \phi^\epsilon(t), y \in \mathbb{R}, \end{cases}$$

où $\phi^\epsilon(t)$ désigne la position du choc perturbé. En d'autres termes, nous en revenons à la position du problème de stabilité structurelle du choc droit. Notons, à cet égard, que la condition de couplage linéarisée (9.106), avec $\partial_y \varphi(t, y) = 0$, coïncide avec la condition (8.13) du chapitre 8, et que son homologue (9.123), toujours avec $\partial_y \varphi(t, y) = 0$, correspond bien à la condition de couplage linéarisée (8.34) obtenue au titre d'un changement d'inconnue au paragraphe (8.1.3) du chapitre 8.

9.2 Condition de Lopatinski en présence de fonctions cinétiques

Dans cette section, nous introduisons des conditions nécessaires et suffisantes à la stabilité linéaire des solutions choc plan d'un système hyperbolique non conservatif, sous l'action de perturbations multidimensionnelles. Par hypothèse, les systèmes d'équations considérés possèdent la propriété d'invariance par rotation, leur formulation quasi monodimensionnelle dans une direction fixe d'espace étant équivalente, via un changement de variable adéquat, à celle d'un système conservatif 1D, avec fonction cinétique à valeur mesure vectorielle concentrée sur les solutions chocs. Notons que nous ne faisons pas l'hypothèse de matrices $\{\mathcal{A}_i(\mathbf{u})\}_{i=1,2}$ simultanément semblables à des matrices jacobiniennes de fonctions flux. La théorie que nous développons répond donc aux propriétés des modèles RSM étudiés dans ce manuscrit.

La théorie proposée repose, de nouveau, de manière centrale sur l'existence de fonctions cinétiques permettant de formuler un ensemble complet de relations de saut généralisées. Elle étend, de manière naturelle, les conditions introduites par Erpenbeck [26] et D'yakov [22] dans les années 50 et depuis développées par de nombreux auteurs. Ces conditions exigent, d'une part la satisfaction des conditions géométriques de Lax, et d'autre part la non annulation d'une version multidimensionnelle du déterminant de Majda étendu (8.15) introduite au chapitre 8. Cette version multidimensionnelle correspond à une extension naturelle du déterminant dit de Lopatinski (voir par exemple Majda [51], Serre [62] et les références citées dans le cadre conservatif).

Par souci de simplicité, l'analyse est menée pour les chocs plans associés aux ondes extrêmes, en particulierisant, sans restriction, la première famille d'ondes.

9.2.1 Relation de dispersion

Il s'agit de formuler des conditions garantissant que les solutions $\mathbf{w}_L, \mathbf{w}_R, \varphi$ du problème de couplage linéarisé (9.112)-(9.113)-(9.123) soient stables au sens de la définition (9.1.5) : en d'autres termes, l'amplitude des perturbations doit décroître en temps. L'invariance par translation en y et en t du problème, conduit classiquement à proposer une transformation de Laplace en temps t , et de Fourier en y , des EDP composant (9.112) et (9.113). Nous renvoyons le lecteur à l'article de synthèse de Higdon [37] pour les détails techniques, en particulier sur la manière dont il convient de comprendre les données initiales \mathbf{w}_{0L} et \mathbf{w}_{0R} dans les deux problèmes de Cauchy (9.112) et (9.113). Nous n'irons pas plus avant dans ces considérations car il se trouve qu'un zéro du déterminant de Lopatinski (condition d'instabilité du choc plan) correspond à un mode de la forme $e^{\omega t + iky}$ pour un nombre d'onde k réel et une pulsation ω complexe de partie réelle positive. En ce sens, l'analyse par modes normaux suffit à notre propos.

Une décomposition en modes normaux de $\mathbf{w}_L, \mathbf{w}_R, \varphi$, solutions du problème de couplage linéarisé, consiste à examiner des solutions particulières des équations (9.112), (9.113) astreintes à la condition de couplage (9.123), de la forme :

$$\begin{cases} \mathbf{w}_L(t, x, y) = \overline{\mathbf{w}}_L(x)e^{(\omega t + iky)}, & t > 0, x < 0, y \in \mathbb{R}, & (9.146) \\ \mathbf{w}_R(t, x, y) = \overline{\mathbf{w}}_R(x)e^{(\omega t + iky)}, & t > 0, x > 0, y \in \mathbb{R}, & (9.147) \\ \varphi(t, y) = \varphi_0 e^{(\omega t + iky)}, & t > 0, y \in \mathbb{R}, & (9.148) \end{cases}$$

avec $k \in \mathbb{R}$ et $\omega \in \mathbb{C}$, $\mathcal{R}e(\omega) > 0$, donnés. Les nouvelles inconnues sont donc les deux fonctions $\overline{\mathbf{w}}_L$ et $\overline{\mathbf{w}}_R$ de la variable normale x et φ_0 un nombre complexe. Nous exigeons des fonctions amplitudes $\overline{\mathbf{w}}_L$ et $\overline{\mathbf{w}}_R$ d'être bornées, respectivement sur \mathbb{R}_- et \mathbb{R}_+ avec :

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \overline{\mathbf{w}}_L(x) = 0, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \overline{\mathbf{w}}_R(x) = 0. \quad (9.149)$$

Nous verrons que l'exigence de bornitude des amplitudes impliquera le comportement asymptotique (9.149). Si pour un nombre d'onde $k \in \mathbb{R}$ fixé, il existe une pulsation $\omega \in \mathbb{C}$, avec $\mathcal{R}e(\omega) > 0$, conduisant à un triplet $(\overline{\mathbf{w}}_L, \overline{\mathbf{w}}_R, \varphi_0)$ solutions de (9.112)-(9.113)-(9.123), explosant dès lors exponentiellement vite en temps, le choc plan perturbé est dit violemment instable ou encore fortement instable. Si la partie réelle de la pulsation est nulle, *i.e.* $\mathcal{R}e(\omega) = 0$, le choc plan est dit neutralement stable, conformément à la définition (9.1.5).

Remarque 9.2.1. Si les ondes élémentaires (9.146), (9.147), (9.148) sont solutions du problème couplé (9.112)-(9.113)-(9.123), il est facile de vérifier que les fonctions :

$$\begin{cases} \mathbf{w}_{\alpha,L}(t, x, y) = \overline{\mathbf{w}}_L(\alpha x)e^{(\alpha\omega t + i\alpha ky)}, \\ \mathbf{w}_{\alpha,R}(t, x, y) = \overline{\mathbf{w}}_R(\alpha x)e^{(\alpha\omega t + i\alpha ky)}, \\ \varphi_{\alpha}(t, y) = \varphi_0 e^{(\alpha\omega t + i\alpha ky)}, \end{cases}$$

sont encore solutions du problème (9.112)-(9.113)-(9.123) pour tout $\alpha > 0$. Dès lors si la pulsation ω est telle que $\mathcal{R}e(\omega) > 0$, le triplet solution $(\mathbf{w}_{\alpha,L}, \mathbf{w}_{\alpha,R}, \varphi_{\alpha})$ explose exponentiellement vite en temps, avec un taux arbitraire, dans la limite $\alpha \rightarrow +\infty$. C'est la raison pour laquelle le choc plan est dit violemment instable. Dans la pratique, un tel choc n'est pas observable. Le cas d'une pulsation ω , avec $\mathcal{R}e(\omega) = 0$,

correspond à des ondes de surface se déplaçant tangentiellement au profil de choc perturbé. Un exemple typique est fourni par l'équation des ondes en milieu inhomogène, et correspond aux tremblements de terre (voir Serre [61] pour une présentation).

Formuler des conditions garantissant la stabilité revient à exhiber des conditions assurant que le problème (9.112)-(9.113)-(9.123) n'admet pas de solutions de la forme (9.146)-(9.147)-(9.148) vérifiant (9.149) pour k dans \mathbb{R} et ω dans \mathbb{C} , avec $\mathcal{R}e(\omega) \geq 0$. L'absence de telles solutions est traduite ici par une condition de non annulation du déterminant dit de Lopatinski $\Delta(k, \omega)$, avec un nombre d'onde k parcourant \mathbb{R} et une pulsation ω parcourant \mathbb{C} , avec $\mathcal{R}e(\omega) \geq 0$, tel que défini dans le principal résultat de cette section.

Proposition 9.2.2 (Stabilité multidimensionnelle). *Considérons un système hyperbolique (9.1) d'équations invariantes par rotation et équivalent, dans chaque direction fixe d'espace pour un changement de variable $\mathbf{u} \rightarrow \mathbf{v}(\mathbf{u})$, à un système 1D conservatif avec fonction cinétique à valeur vectorielle mesure. Un choc plan (9.30), associé à la première famille d'ondes, est linéairement stable sous l'action de perturbations multidimensionnelles, si et seulement si :*

i) les conditions géométriques de Lax sont satisfaites :

$$\lambda_1(\mathbf{u}_R) < \sigma < \lambda_1(\mathbf{u}_L), \quad \sigma < \lambda_2(\mathbf{u}_R), \quad (9.150)$$

où $\{\lambda_i(\mathbf{u}_R)\}_{1 \leq i \leq n}$ désignent les valeurs propres de la matrice $\mathcal{A}_1(\mathbf{u}_R)$,

ii) pour tout nombre d'onde $k \in \mathbb{R}$ fixé, le déterminant de Lopatinski étendu, $\Delta(k, \omega)$, défini ci-dessous, n'admet aucune racine ω dans le demi-plan complexe $\mathbb{C}^+ = \{\omega \in \mathbb{C} / \mathcal{R}e(\omega) \geq 0\}$:

$$\begin{aligned} \Delta(k, \omega) = & \text{Det} \left(D_{\mathbf{u}}^{-1}(\mathbf{v}(\mathbf{u}_R)) \left(\omega(\mathbf{v}(\mathbf{u}_R) - \mathbf{v}(\mathbf{u}_L)) + \partial_s \mathcal{C}(\mathbf{u}_L, s) \Big|_{s=\sigma} \right) \right. \\ & \left. + ik\mathcal{B}(\mathbf{u}_L, \mathbf{u}_R) \right), r_2^-(\mathbf{u}_R, k, \omega), r_3^-(\mathbf{u}_R, k, \omega), \dots, r_n^-(\mathbf{u}_R, k, \omega) \Big) \neq 0, \end{aligned} \quad (9.151)$$

où l'application $\mathcal{B} : \Omega_{\mathbf{u}} \times \Omega_{\mathbf{u}} \rightarrow \mathbb{R}^n$ a été définie en (9.124). Dans (9.151), et pour $(k, \omega) \in \mathbb{R} \times \mathbb{C}^+$ fixés, les vecteurs $r_i^-(\mathbf{u}_R, k, \omega)$, avec $i \in \{2, \dots, n\}$, correspondent aux $(n-1)$ vecteurs propres à droite associés aux $(n-1)$ valeurs propres $\mu_i(\mathbf{u}_R, k, \omega)$ de partie réelle négative, i.e. $\mathcal{R}e(\mu_i(\mathbf{u}_R, k, \omega)) < 0$, avec $i \in \{2, \dots, n\}$, de la matrice :

$$\mathcal{A}(\mathbf{u}_R, k, \omega) = - \left(\omega Id + ik\mathcal{A}_2(\mathbf{u}_R) \right) \left(\mathcal{A}_1(\mathbf{u}_R) - \sigma Id \right)^{-1}. \quad (9.152)$$

La condition de non annulation du déterminant de Lopatinski (9.151), équivaut à la condition de non annulation du produit scalaire (dans \mathbb{C}^n) suivant :

$$\left({}^t D_{\mathbf{u}}^{-1} \mathbf{v}(\mathbf{u}_R) \Lambda_1(\mathbf{u}_R, k, \omega), \omega(\mathbf{v}(\mathbf{u}_R) - \mathbf{v}(\mathbf{u}_L)) + \partial_s \mathcal{C}(\mathbf{u}_L, s) \Big|_{s=\sigma} + ik\mathcal{B}(\mathbf{u}_L, \mathbf{u}_R) \right), \quad (9.153)$$

où $\Lambda_1(\mathbf{u}_R, k, \omega)$ désigne le vecteur propre à gauche de la matrice (9.152), associée à l'unique valeur propre $\mu_1(\mathbf{u}_R, k, \omega)$ de partie réelle positive, i.e.

$$\mathcal{R}e(\mu_1(\mathbf{u}_R, k, \omega)) > 0. \quad (9.154)$$

En conséquence de cette proposition nous avons :

Corollaire 9.2.3. *Si, pour $k \in \mathbb{R}$, il existe une pulsation $\omega \in \mathbb{C}^+$ telle que :*

- $\mathcal{R}e(\omega) > 0$ et $\Delta(k, \omega) = 0$, alors le 1-choc est dit fortement instable,
- $\mathcal{R}e(\omega) = 0$ et $\Delta(k, \omega) = 0$, alors le 1-choc est dit neutralement stable,

Dans les cas contraires le 1-choc est stable.

Il convient de procéder à plusieurs remarques permettant d'éclairer les conditions de stabilité linéaire mises en avant dans la proposition (9.2.2).

Notons, dans un premier temps, que les conditions géométriques de Lax (9.150) formulées dans l'hypothèse *i*) impliquent $\lambda_i(\mathbf{u}_R) - \sigma \neq 0$ pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$, de sorte que la matrice $\mathcal{A}_1(\mathbf{u}_R) - \sigma Id$ est inversible. En conséquence, la matrice introduite en (9.152) est bien définie. Les conditions de signe sur la partie réelle des valeurs propres de (9.152) seront établies à la fin de ce paragraphe (voir le lemme de Hersh ci après). Soulignons que la validité des conditions géométriques de Lax est, de nouveau, essentielle aux propriétés requises et est indispensable à l'écriture (9.151) du déterminant de Lopatinski, ou de la formulation équivalente (9.153).

Dans un second temps, nous proposons un lien entre le déterminant de Lopatinski (9.151) et le déterminant de Majda (8.15). À cette fin, notons que le nombre d'onde k , entrant dans la définition de la décomposition en modes normaux (9.146)-(9.147)-(9.148), est clairement associé aux contributions tangentielles d'une perturbation. Dès lors, privilégier $k = 0$, conduit à ne considérer que des perturbations longitudinales du choc plan et donc, conformément au paragraphe (9.1.8), à en revenir à l'étude de la stabilité structurelle du choc. Pour $k = 0$, le déterminant de Lopatinski s'écrit, grâce aux règles classiques d'un déterminant :

$$\omega Det \left(D_{\mathbf{u}}^{-1}(\mathbf{v}(\mathbf{u}_R)) \left(\mathbf{v}(\mathbf{u}_R) - \mathbf{v}(\mathbf{u}_L) + \partial_s \mathcal{C}(\mathbf{u}_L, s) \Big|_{s=\sigma} \right), r_2^-, \dots, r_n^- \right), \quad (9.155)$$

avec r_i^- vecteurs propres à droite associés à une valeur propre négative de la matrice réelle $-\left(\mathcal{A}_1(\mathbf{u}_R) - \sigma Id\right)^{-1}$, i.e. associés aux valeurs propres :

$$-\frac{1}{\lambda_j(\mathbf{u}_R) - \sigma} < 0, \quad j \geq 2, \quad (9.156)$$

sous les conditions géométriques de Lax (9.150). Pour $i = \{2, \dots, n\}$, les r_i^- sont donc nécessairement vecteurs propres à droite de la matrice $+\left(\mathcal{A}_1(\mathbf{u}_R) - \sigma Id\right)$, associée aux valeurs propres réelles $\lambda_j(\mathbf{u}_R) - \sigma > 0$. Ainsi pour une pulsation non nulle dans (9.155), la condition de non annulation du déterminant de Lopatinski implique la condition de non annulation du déterminant de Majda (8.15). Nous retrouvons donc, suite au paragraphe (9.1.8), que la stabilité structurelle du choc droit constitue un prérequis à la stabilité multidimensionnelle du choc plan.

Effectuons une dernière remarque concernant le déterminant de Lopatinski d'un système hyperbolique non conservatif, de manière à faire le lien avec la formulation de ce déterminant dans le cadre purement conservatif. Si contrairement aux hypothèses formulées dans la proposition (9.2.2), nous avons supposé l'existence d'un changement de variable $\mathbf{u} \rightarrow \mathbf{v}(\mathbf{u})$ permettant de rendre $\mathcal{A}_1(\mathbf{u})$ et $\mathcal{A}_2(\mathbf{u})$ simultanément semblables aux matrices jacobienes de deux fonctions flux $\mathbf{F}_1(\mathbf{v}(\mathbf{u}))$ et $\mathbf{F}_2(\mathbf{v}(\mathbf{u}))$, nous aurions abouti à la version suivante du déterminant de Lopatinski :

$$\begin{aligned} \tilde{\Delta}(k, \omega) = & \text{Det} \left(D_{\mathbf{u}}^{-1}(\mathbf{v}(\mathbf{u}_R)) \left(\omega \left(\mathbf{v}(\mathbf{u}_R) - \mathbf{v}(\mathbf{u}_L) + \partial_{s_1} \tilde{\mathcal{C}}(\mathbf{u}_L, \sigma, 0) \right) \right. \right. \\ & \left. \left. + ik \left(\mathbf{F}_2(\mathbf{v}(\mathbf{u}_R)) - \mathbf{F}_2(\mathbf{v}(\mathbf{u}_L)) + \partial_{s_2} \tilde{\mathcal{C}}(\mathbf{u}_L, \sigma, 0) \right) \right), r_2^-, \dots, r_n^- \right), \end{aligned} \quad (9.157)$$

avec $\tilde{\mathcal{C}} : \Omega_{\mathbf{u}} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$, la fonction cinétique introduite en (9.68). Dans (9.157), les $(n-1)$ vecteurs $\{r_i^-\}_{2 \leq i \leq n}$ désignent exactement les mêmes vecteurs propres que ceux définis dans la proposition (9.2.2). Nous laissons la vérification de cette assertion au lecteur. Il suffit alors d'annuler formellement les dérivées de la fonction cinétique dans (9.157) pour obtenir :

$$\begin{aligned} \tilde{\Delta}(k, \omega) = & \text{Det} \left(D_{\mathbf{u}}^{-1}(\mathbf{v}(\mathbf{u}_R)) \left(\omega \left(\mathbf{v}(\mathbf{u}_R) - \mathbf{v}(\mathbf{u}_L) \right) \right. \right. \\ & \left. \left. + ik \left(\mathbf{F}_2(\mathbf{v}(\mathbf{u}_R)) - \mathbf{F}_2(\mathbf{v}(\mathbf{u}_L)) \right) \right), r_2^-, \dots, r_n^- \right), \end{aligned} \quad (9.158)$$

formule coïncidant à l'identique avec la définition du déterminant de Lopatinski dans le cadre purement conservatif (voir par exemple Majda [51], Serre [62], [61] et les références citées). En ce sens, (9.157), et donc la définition (9.151) obtenue au titre d'hypothèses plus faibles sur le système non conservatif (9.1), constituent bien une extension naturelle de la condition de stabilité du choc plan en théorie conservative. Nous concluons cette section en donnant la preuve de la proposition (9.2.2).

Nous supposons les conditions géométriques de Lax satisfaites, puisque celles-ci ont été établies nécessaires à la stabilité structurelle du choc droit (voir chapitre 8), cette propriété de stabilité étant un prérequis à la stabilité multidimensionnelle du choc plan, comme nous venons de le discuter.

L'onde élémentaire $\bar{\mathbf{w}}_L(x)e^{(\omega t + ik y)}$ est solution du système d'EDP (9.112) si et seulement si la fonction amplitude $\bar{\mathbf{w}}_L$ vérifie :

$$\left(\omega Id + ik \mathcal{A}_2(\mathbf{u}_L) \right) \bar{\mathbf{w}}_L(x) + \left(\mathcal{A}_1(\mathbf{u}_L) - \sigma Id \right) \frac{d}{dx} \bar{\mathbf{w}}_L(x) = 0, \quad x < 0. \quad (9.159)$$

Puisque $\mathcal{A}_1(\mathbf{u}_L) - \sigma Id$ est inversible en vertu des conditions géométriques de Lax (9.150), l'amplitude $\bar{\mathbf{w}}_L$ doit être solution du système différentiel ordinaire :

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} \bar{\mathbf{w}}_L(x) &= - \left(\mathcal{A}_1(\mathbf{u}_L) - \sigma Id \right)^{-1} \left(\omega Id + ik \mathcal{A}_2(\mathbf{u}_L) \right) \bar{\mathbf{w}}_L(x), \quad x < 0, \\ &= \mathcal{M}(\mathbf{u}_L, \omega, k) \bar{\mathbf{w}}_L(x). \end{aligned} \quad (9.160)$$

La théorie élémentaire des équations différentielles linéaires nous enseigne que (9.160) admet n solutions linéairement indépendantes $\psi_i(x)$, avec $i \in \{1, \dots, n\}$, permettant d'engendrer toutes les solutions de (9.160). Les solutions ψ_i peuvent être choisies sous la forme $e^{\mu x} \mathbf{s}$, où μ désigne une valeur propre de $\mathcal{M}(\mathbf{u}_L, \omega, k)$ et \mathbf{s} un vecteur propre à droite correspondant, ou sous la forme $e^{\mu x} \mathbb{P}(x)$ à coefficients à valeur vectorielle, lorsque μ est associée à un bloc de Jordan. Ces solutions ψ_i subissent donc une variation exponentielle en x , variation fixée par le signe de la partie réelle de la valeur propre μ considérée. Puisque nous exigeons par (9.149) que la fonction amplitude $\overline{\mathbf{w}}_L(x)$ tende vers zéro lorsque $x \rightarrow -\infty$, les solutions admissibles de (9.160) s'obtiennent par combinaison linéaire des ψ_i associés uniquement à des valeurs propres de $\mathcal{M}(\mathbf{u}_L, \omega, k)$ de partie réelle positive. Le résultat suivant du à Hersh [36] (voir également Kreiss [44]) fixe leur nombre :

Lemme 9.2.4 (Hersh). *Supposons $\mathcal{R}e(\omega) > 0$, alors la matrice $\mathcal{M}(\mathbf{u}, \omega, k) = -(\mathcal{A}_1(\mathbf{u}) - \sigma Id)^{-1} (\omega Id + ik\mathcal{A}_2(\mathbf{u}))$, pour $\mathbf{u} \in \Omega_{\mathbf{u}}$ fixé, admet l valeurs propres μ de partie réelle positive et $n - l$ valeurs propres de partie réelle négative, où l désigne le nombre de valeurs propres (nécessairement réelles) négatives de $\mathcal{A}_1(\mathbf{u}) - \sigma Id$.*

Nous rappelons ici la preuve de ce lemme puisque son argumentation nous sera utile dans les applications.

Démonstration. Notons d'abord qu'il n'existe pas de valeur propre de $\mathcal{M}(\mathbf{u}, \omega, k)$ imaginaire pur dès que $\mathcal{R}e(\omega) > 0$. Si $\mu = i\kappa$, $\kappa \in \mathbb{R}$, était valeur propre alors :

$$i\kappa \mathbf{s} = -(\mathcal{A}_1(\mathbf{u}) - \sigma Id)^{-1} (\omega Id + ik\mathcal{A}_2(\mathbf{u})) \mathbf{s}$$

pour un vecteur \mathbf{s} non nul, soit donc :

$$\left(i\kappa (\mathcal{A}_1(\mathbf{u}) - \sigma Id) - ik\mathcal{A}_2(\mathbf{u}) \right) \mathbf{s} = \omega \mathbf{s}.$$

Cette identité implique que ω serait imaginaire pur contrairement à l'hypothèse $\mathcal{R}e(\omega) > 0$, puisque le système est hyperbolique : la matrice $\kappa (\mathcal{A}_1(\mathbf{u}) - \sigma Id) - k\mathcal{A}_2(\mathbf{u})$ diagonalise dans \mathbb{R} quels que soient $(\kappa, k) \in \mathbb{R}^2$.

Écrivons alors $\omega = \eta + i\xi$, avec $\mathcal{R}e(\omega) = \eta > 0$. Nous nous intéressons aux signes des parties réelles des valeurs propres de $\mathcal{M}(\mathbf{u}, \omega, k)$ sur le domaine $\eta > 0$, $\xi \in \mathbb{R}$, $k \in \mathbb{R}$, l'état \mathbf{u} étant fixé. Rappelons que les valeurs propres (racines du polynôme caractéristique) dépendent continûment de η , ξ et k , de sorte que chaque valeur propre $\mu(\eta, \xi, k)$ doit garder une partie réelle de signe constant sur le précédent domaine puisque sinon il existerait des parties de ce domaine sur lesquelles $\mathcal{R}e(\mu(\eta, \xi, k)) = 0$, ce qui contredirait $\eta = \mathcal{R}e(\omega) > 0$ ainsi que nous l'avons établi. Nous pouvons donc évaluer le signe de la partie réelle d'une valeur propre en un point (η, ξ, k) choisi à notre convenance. Privilégions donc :

$$\eta = 1, \quad \xi = 0, \quad k = 0,$$

de sorte à obtenir $\mathcal{M}(\mathbf{u}, \omega = 1, k = 0) = -(\mathcal{A}_1(\mathbf{u}) - \sigma Id)^{-1}$, ce qui montre que $\mathcal{M}(\mathbf{u}, 1, 0)$ diagonalise dans \mathbb{R} en admettant pour valeurs propres, l'opposé de l'inverse des valeurs propres de $\mathcal{A}_1(\mathbf{u}) - \sigma Id$. Ceci conclut la preuve. \square

Armés de ce résultat, revenons au système différentiel (9.160) pour constater que sous les conditions géométriques de Lax (9.150), $\mathcal{M}(\mathbf{u}_L, \omega, k)$ admet des valeurs propres toutes de partie réelle négative puisque $\mathcal{A}_1(\mathbf{u}) - \sigma Id$ possède des valeurs propres réelles exclusivement positives. En d'autres termes, et de manière à satisfaire la condition asymptotique (9.149), l'amplitude $\bar{\mathbf{w}}_L(x)$ doit être choisie identiquement nulle dans (9.146), dès que $\mathcal{R}e(\omega) > 0$, *i.e.* :

$$\bar{\mathbf{w}}_L(x) = 0, \quad x < 0. \quad (9.161)$$

Par un raisonnement en tout point semblable, la fonction amplitude $\bar{\mathbf{w}}_R(x)$ de l'onde élémentaire (9.147), doit être solution du système différentiel :

$$\frac{d}{dx} \bar{\mathbf{w}}_R(x) = \mathcal{M}(\mathbf{u}_R, \omega, k) \bar{\mathbf{w}}_R(x), \quad x > 0,$$

avec $\lim_{x \rightarrow +\infty} \bar{\mathbf{w}}_R(x) = 0$. Cette amplitude doit donc être exclusivement combinaison des solutions élémentaires $\psi_j(x)$ associées aux valeurs propres de partie réelle négative de $\mathcal{M}(\mathbf{u}_R, \omega, k)$. En invoquant le lemme de Hersh, cette matrice admet exactement $(n - 1)$ valeurs propres de partie réelle négative, puisque sous les conditions géométriques de Lax (9.150), $\mathcal{A}_1(\mathbf{u}_R) - \sigma Id$ possèdent $(n - 1)$ valeurs propres positives. En conséquence, l'amplitude $\bar{\mathbf{w}}_R(x)$ dans l'onde (9.147) est cherchée sous la forme suivante, avec $(\omega, k) \in \mathbb{C}^+ \times \mathbb{R}$ et $\mathcal{R}e(\omega) > 0$:

$$\bar{\mathbf{w}}_R(x) = \sum_{j=2}^n \alpha_j \psi_j(x), \quad x > 0, \quad (9.162)$$

où les α_j désignent $(n - 1)$ nombres complexes à définir.

En conséquence de (9.161), (9.162), le triplet (9.146)-(9.147)-(9.148), avec $\mathcal{R}e(\omega) > 0$, est solution particulière du problème de couplage linéarisé (9.112)-(9.113)-(9.123), si et seulement si il existe n nombres complexes $\{\alpha_j\}_{2 \leq j \leq n}$ dans (9.162), et φ_0 dans (9.148), permettant de satisfaire la condition de couplage (9.123), *i.e.* :

$$\begin{aligned} & \sum_{j=2}^n \alpha_j \left(\mathcal{A}_1(\mathbf{u}_R) - \sigma Id \right) \psi_j(0) \\ & - D_{\mathbf{u}}^{-1} \mathbf{v}(\mathbf{u}_R) \left(\omega \varphi_0 \left(\mathbf{v}(\mathbf{u}_R) - \mathbf{v}(\mathbf{u}_L) + \partial_s \mathcal{C}(\mathbf{u}_L, \sigma) \right) + ik \varphi_0 \mathcal{B}(\mathbf{u}_L, \mathbf{u}_R) \right) = 0. \end{aligned} \quad (9.163)$$

Une condition nécessaire et suffisante pour qu'il existe une solution non triviale (*i.e.* $\alpha_j \neq 0, j \in \{2, \dots, n\}$ et $\varphi_0 \neq 0$) à ce système algébrique de n équations, est que le déterminant associé soit nul, *i.e.* :

$$\begin{aligned} & Det \left(D_{\mathbf{u}}^{-1} \mathbf{v}(\mathbf{u}_R) \left(\omega \left(\mathbf{v}(\mathbf{u}_R) - \mathbf{v}(\mathbf{u}_L) + \partial_s \mathcal{C}(\mathbf{u}_L, \sigma) \right) \right. \right. \\ & \left. \left. + ik \mathcal{B}(\mathbf{u}_L, \mathbf{u}_R) \right), \left(\mathcal{A}_1(\mathbf{u}_R) - \sigma Id \right) \psi_2(0), \dots, \left(\mathcal{A}_1(\mathbf{u}_R) - \sigma Id \right) \psi_n(0) \right) = 0. \end{aligned} \quad (9.164)$$

Si cette condition est satisfaite avec $\mathcal{R}e(\omega) > 0$, il y a alors instabilité forte. Les $\psi_j(0)$, $j \in \{2, \dots, n\}$ étant vecteurs propres à droite associés aux $(n - 1)$ valeurs propres de

partie réelle négative de la matrice $-\left(\mathcal{A}_1(\mathbf{u}_R) - \sigma Id\right)^{-1} \left(\omega Id + ik\mathcal{A}_2(\mathbf{u}_R)\right)$, les vecteurs $r_j^-(\mathbf{u}_R, k, \omega) = \left(\mathcal{A}_1(\mathbf{u}_R) - \sigma Id\right) \psi_j(0)$, avec $j \in \{2, \dots, n\}$, forment par construction $(n-1)$ vecteurs propres associés à des valeurs propres de partie réelle négative de la matrice $\mathcal{A}(\mathbf{u}_R, k, \omega) = -\left(\omega Id + ik\mathcal{A}_2(\mathbf{u}_R)\right) \left(\mathcal{A}_1(\mathbf{u}_R) - \sigma Id\right)^{-1}$ définie en (9.152). En conséquence, une condition nécessaire et suffisante pour qu'il n'y ait pas instabilité forte est :

$$\Delta(k, \omega) = Det \left(D_{\mathbf{u}}^{-1} \mathbf{v}(\mathbf{u}_R) \left(\omega \left(\mathbf{v}(\mathbf{u}_R) - \mathbf{v}(\mathbf{u}_L) + \partial_s \mathcal{C}(\mathbf{u}_L, \sigma) \right) + ik\mathcal{B}(\mathbf{u}_L, \mathbf{u}_R) \right), r_2^-(\mathbf{u}_R, k, \omega), \dots, r_n^-(\mathbf{u}_R, k, \omega) \right) \neq 0, (k, \omega) \in \mathbb{R} \times \mathbb{C}^+, \operatorname{Re}(\omega) > 0. \quad (9.165)$$

Une telle condition est usuellement dite condition de Lopatinski. La formulation (9.151) exigeant de $(k, \omega) \in \mathbb{R} \times \mathbb{C}^+$ de ne pas être racines de $\Delta(k, \omega)$, y compris pour $\operatorname{Re}(\omega) = 0$, est dite condition de Lopatinski uniforme. Nous renvoyons à Serre [61] et à Majda [51] pour les raisons de cette terminologie. Nous continuerons à désigner (9.151) sous le vocable de condition de Lopatinski.

De manière à établir la condition équivalente (9.153), rappelons que, sous les conditions géométriques de Lax (9.150), la matrice $-\left(\mathcal{A}_1(\mathbf{u}_R) - \sigma Id\right)^{-1} \left(\omega Id + ik\mathcal{A}_2(\mathbf{u}_R)\right)$, et donc $\mathcal{A}(\mathbf{u}_R, k, \omega)$, admet une unique valeur propre de partie réelle positive, en vertu du lemme de Hersh. Nous notons $\mu_1(\mathbf{u}_R, k, \omega)$ cette valeur propre, et $\Lambda_1(\mathbf{u}_R, k, \omega)$ un vecteur propre correspondant pour la matrice $\mathcal{A}(\mathbf{u}_R, k, \omega)$. Puisque $\mu_1(\mathbf{u}_R, k, \omega)$ est la seule valeur propre de partie réelle positive, nous avons nécessairement :

$$\left(\Lambda_1(\mathbf{u}_R, k, \omega), r_j^-(\mathbf{u}_R, k, \omega) \right) = 0, j = \{2, \dots, n\},$$

de sorte qu'exiger (9.165) équivaut à imposer au vecteur $D_{\mathbf{u}}^{-1} \mathbf{v}(\mathbf{u}_R) \left(\omega \left(\mathbf{v}(\mathbf{u}_R) - \mathbf{v}(\mathbf{u}_L) + \partial_s \mathcal{C}(\mathbf{u}_L, \sigma) \right) + ik\mathcal{B}(\mathbf{u}_L, \mathbf{u}_R) \right)$ de ne pas être orthogonal à $\Lambda_1(\mathbf{u}_R, k, \omega)$. Ceci conclut la preuve de la proposition (9.2.2).

9.2.2 Évaluation des éléments spectraux dans le déterminant de Lopatinski

Les conditions géométriques de Lax (9.150) étant satisfaites par hypothèse ou par construction dans les applications à venir, l'analyse de stabilité multidimensionnelle des chocs plans, associés à la première famille d'ondes, repose sur l'évaluation du produit scalaire (9.153). Pour $(k, \omega) \in \mathbb{R} \times \mathbb{C}^+$ fixés, une telle évaluation requiert la détermination de l'unique valeur propre $\mu_1(\mathbf{u}_R, k, \omega)$ de partie réelle positive de la matrice :

$$\mathcal{A}(\mathbf{u}_R, k, \omega) = -\left(\omega Id + ik\mathcal{A}_2(\mathbf{u}_R)\right) \left(\mathcal{A}_1(\mathbf{u}_R) - \sigma Id\right)^{-1},$$

suivie de celle d'un vecteur propre à gauche associé $\Lambda_1(\mathbf{u}_R, k, \omega)$. La caractérisation des éléments spectraux requis est rendu réductible par la définition de $\mathcal{A}(\mathbf{u}_R, k, \omega)$

en tant que produit d'une matrice par l'inverse d'une autre. Cette complexité algébrique est déjà de mise dans le cadre purement conservatif et nous rappelons, dans cette section, la démarche classique permettant l'évaluation de $\mu_1(\mathbf{u}_R, k, \omega)$, puis de $\Lambda_1(\mathbf{u}_R, k, \omega)$, sans procéder à la construction explicite de $\mathcal{A}(\mathbf{u}_R, k, \omega)$. Nous renvoyons, par exemple, le lecteur à Jenssen et Lyng [43] dans le contexte des équations d'Euler usuelles.

Par convenance, nous omettons dans quelques expressions à venir, la dépendance en k et ω . Il convient d'observer que Λ_1 , vecteur propre à gauche de \mathcal{A} pour l'unique valeur propre μ_1 de partie réelle positive, doit vérifier :

$$\begin{aligned} {}^t\mathcal{A}\Lambda_1 &= -\left({}^t(\mathcal{A}_1(\mathbf{u}_R) - \sigma Id)\right)^{-1}\left(\omega Id + ik{}^t\mathcal{A}_2(\mathbf{u}_R)\right)\Lambda_1 \\ &= \mu_1\Lambda_1, \end{aligned}$$

soit donc, après multiplication par ${}^t(\mathcal{A}_1(\mathbf{u}_R) - \sigma Id)$ et réarrangements :

$$\begin{aligned} {}^t\mathcal{D}(\mathbf{u}_R, \mu_1, k)\Lambda_1 &\equiv {}^t\left(\mu_1(\mathcal{A}_1(\mathbf{u}_R) - \sigma Id) + ik\mathcal{A}_2(\mathbf{u}_R)\right)\Lambda_1 \\ &= -\omega\Lambda_1. \end{aligned} \tag{9.166}$$

En d'autres termes, Λ_1 est nécessairement vecteur propre à gauche de la matrice $\mathcal{D}(\mathbf{u}_R, \mu_1, k)$ associée à la valeur propre $-\omega$. Cette propriété implique, en retour, que nécessairement :

$$Det\left(\mathcal{D}(\mathbf{u}_R, \mu_1, k) + \omega Id\right) = 0. \tag{9.167}$$

Nous exploitons les conséquence spectrales (9.167) et (9.166) en deux temps.

Dans un premier temps, nous notons qu'en conséquence immédiate du lemme de Hersh, il existe une unique solution $\mu_1(k, \omega)$ dans \mathbb{C} , de partie réelle positive à l'équation (9.167), pour chaque $(k, \omega) \in \mathbb{R} \times \mathbb{C}^+$, avec $\mathcal{R}e(\omega) > 0$. Ainsi, proposons-nous :

première étape : trouver l'unique racine $\mu_1 \in \mathbb{C}$ avec $\mathcal{R}e(\mu_1) > 0$ du polynôme en μ_1 (9.167), $(k, \omega) \in \mathbb{R} \times \mathbb{C}^+$ fixés.

$$\tag{9.168}$$

Dans un second temps, une fois déterminée l'unique valeur propre $\mu_1(k, \omega)$, avec $\mathcal{R}e(\mu_1(k, \omega)) > 0$ de $\mathcal{A}(k, \omega)$ par (9.168), la recherche d'un vecteur propre correspondant $\Lambda_1(k, \omega)$ est menée non pas, bien sûr, en caractérisant le sous-espace propre concerné de $\mathcal{A}(k, \omega)$: *i.e.* :

$$\text{trouver } \Lambda_1 \text{ tel que } {}^t\mathcal{A}(k, \omega)\Lambda_1 = \mu_1(k, \omega)\Lambda_1, \tag{9.169}$$

mais en résolvant, d'après (9.166) :

$$\text{trouver } \Lambda_1 \text{ tel que } {}^t\mathcal{D}(\mu_1, k)\Lambda_1 = -\omega(\mu_1, k)\Lambda_1. \tag{9.170}$$

La formule (9.170) dicte alors :

seconde étape : inverser l'application $(k, \omega) \rightarrow \mu_1(k, \omega)$ en ω , pour définir $(\mu_1, k) \rightarrow \omega(\mu_1, k)$,

$$\tag{9.171}$$

puis ensuite :

troisième étape : trouver un vecteur propre $\Lambda_1(\mu_1, k)$ solution de (9.170). (9.172)

Nous concluons alors, d'après (9.169), par :

quatrième étape : Un vecteur propre à gauche associé à la valeur propre $\mu_1(k, \omega)$, $\mathcal{R}e(\mu_1(k, \omega)) > 0$, de $\mathcal{A}(k, \omega)$ est donné par $\Lambda_1(\mu_1(k, \omega), k)$ avec $\Lambda_1(\mu_1, k)$ calculé en (9.172). (9.173)

Ceci conclut le mode opératoire que nous suivrons dans les applications de la théorie aux modèles RSM.

9.3 Application au cadre isotherme avec correction de Ristorcelli

Nous analysons dans cette section l'influence de la correction de Ristorcelli sur la stabilité multidimensionnelle des solutions choc plan du modèle RSM isotherme. L'amplitude de l'échelle de temps de Ristorcelli est choisie de sorte à garantir la stabilité structurelle du choc droit, prérequis à la stabilité multidimensionnelle. Les quatre propriétés (5.100), (5.101) et (5.102), mises en avant au chapitre 5, ainsi que la condition (8.50) formulée dans le théorème (8.2.2), sont en conséquence simultanément satisfaites.

Le principal résultat de cette section est que l'amplitude de l'échelle de temps de Ristorcelli doit être choisie plus grande que celle requise pour l'absence du phénomène de surcompression, de manière à éviter l'instabilité forte des solutions choc plan, pour des nombres de Mach turbulent β et des nombres de Mach relatif M élevés dans la plage $(\beta, M) \in [0, \beta_{lim}(N)] \times [1, 10]$, où $\beta_{lim}(N)$ a été défini dans la section (5.6.4). Des zones de stabilité neutre persistent néanmoins.

La construction du produit scalaire (9.153), équivalent au déterminant de Lopatinski (9.151), requiert des manipulations algébriques fastidieuses dont nous avons choisi d'épargner au lecteur le détail. Soulignons que toutes les étapes de calculs ont été méticuleusement vérifiées et validées. Seules les étapes clefs sont décrites ici. L'écriture développée de ce produit scalaire réclamerait plusieurs pages, en conséquence nous proposons la forme détaillée des deux vecteurs composant ce produit scalaire, sans procéder au produit proprement dit : à savoir le vecteur ${}^t D_{\mathbf{u}}^{-1} \mathbf{v}(\mathbf{u}_R) \Lambda_1(\mathbf{u}_R, k, \omega)$ et le vecteur issu de linéarisation des relations de saut généralisées.

La recherche de zéros éventuels ω dans le demi-plan complexe \mathbb{C}^+ , à un nombre d'onde k fixé, repose sur la propriété d'analyticité et d'homogénéité du déterminant de Lopatinski. Elle est menée numériquement en faisant appel au principe de l'argument que nous rappellerons en temps utile, en exploitant de manière convenable la propriété de stabilité structurelle acquise par construction.

9.3.1 Systèmes d'inconnues et notations

Nous rappelons, par convenance, les principaux jeux d'inconnues entrant dans la présente application. Les équations d'évolution gouvernant le choc plan perturbé dans

les régions de régularité, à savoir en dehors de la surface de discontinuité localisée en $x = 0$, sont formulées en l'inconnue \mathbf{u} , associée au repère de référence $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2)$:

$$\mathbf{u} = \left(\rho, u, v, R_{11}, R_{12}, R_{22} \right). \quad (9.174)$$

La forme développée des équations est sous forme dimensionnée :

$$\begin{cases} \partial_t \rho + u \partial_x \rho + \rho \partial_x u + v \partial_y \rho + \rho \partial_y v = 0, \\ \partial_t u + u \partial_x u + \frac{T_0}{\rho} \partial_x \rho + \frac{1}{\rho} \partial_x R_{11} + v \partial_y u + \frac{1}{\rho} \partial_y R_{12} = 0, \\ \partial_t v + u \partial_x v + \frac{1}{\rho} \partial_x R_{12} + v \partial_y v + \frac{T_0}{\rho} \partial_y \rho + \frac{1}{\rho} \partial_y R_{22} = 0, \\ \partial_t R_{11} + u \partial_x R_{11} + 3R_{11} \partial_x u + v \partial_y R_{11} + 2R_{12} \partial_y u + R_{11} \partial_y v = 0, \\ \partial_t R_{12} + u \partial_x R_{12} + 2R_{12} \partial_x u + R_{11} \partial_x v + v \partial_y R_{12} + 2R_{12} \partial_y v + R_{22} \partial_y u = 0, \\ \partial_t R_{22} + u \partial_x R_{22} + 2R_{12} \partial_x v + R_{22} \partial_x u + v \partial_y R_{22} + 3R_{22} \partial_y v = 0. \end{cases} \quad (9.175)$$

Les matrices $\mathcal{A}_1(\mathbf{u})$ et $\mathcal{A}_2(\mathbf{u})$ associées sont donc clairement données par :

$$\mathcal{A}_1(\mathbf{u}) = \begin{pmatrix} u & \rho & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{T_0}{\rho} & u & 0 & \frac{1}{\rho} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & u & 0 & \frac{1}{\rho} & 0 \\ 0 & 3R_{11} & 0 & u & 0 & 0 \\ 0 & 2R_{12} & R_{11} & 0 & u & 0 \\ 0 & R_{22} & 2R_{12} & 0 & 0 & u \end{pmatrix}. \quad (9.176)$$

$$\mathcal{A}_2(\mathbf{u}) = \begin{pmatrix} v & 0 & \rho & 0 & 0 & 0 \\ 0 & v & 0 & 0 & \frac{1}{\rho} & 0 \\ \frac{T_0}{\rho} & 0 & v & 0 & 0 & \frac{1}{\rho} \\ 0 & 2R_{12} & R_{11} & v & 0 & 0 \\ 0 & R_{22} & 2R_{12} & 0 & v & 0 \\ 0 & 0 & 3R_{22} & 0 & 0 & v \end{pmatrix}. \quad (9.177)$$

Les relations de saut généralisées gouvernant la surface de choc perturbée, localisée en $x = 0$, ont été décrites en (9.132), au paragraphe (9.1.7). Elles reposent sur l'inconnue :

$$\mathbf{v} = \left(\rho, \rho u, \rho v, \rho \mathcal{I}, \rho E_t, \rho \mathcal{W} \right), \quad (9.178)$$

écrites relativement au repère de référence $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2)$.

De manière à simplifier les calculs à venir, nous exploitons l'invariance galiléenne des équations en translatant la vitesse normale u de la solution choc non perturbée de $-\sigma$ et la vitesse tangentielle v de $-v_L$. En d'autres termes, nous supposons dans toute la suite, et sans restriction :

$$\sigma = 0, \quad v_L = 0. \quad (9.179)$$

Notons que la vitesse tangentielle v_R de l'état de sortie \mathbf{u}_R du choc plan non perturbé est distincte de v_L , et est dès lors non nulle dès que la composante R_{12}^L du tenseur de Reynolds est choisie non nulle. Conformément au paragraphe (4.2.1), nous supposons sans restriction :

$$R_{12}^L > 0, \quad \text{soit dès lors } R_{12}^R > 0, \quad (9.180)$$

sauf mention explicite du contraire, *i.e.* $R_{12}^L < 0$, utile dans la suite à l'interprétation des résultats.

Il convient, par ailleurs, de rappeler que la vitesse normale u_R de l'état de sortie \mathbf{u}_R , dans la solution choc plan non perturbé, vérifie nécessairement :

$$u_R > 0. \quad (9.181)$$

En effet, le chapitre 4 a permis d'établir l'invariance du débit relatif $m(\xi) = \rho(\xi)(u(\xi) - \sigma)$ (avec ici $\sigma = 0$) le long du profil de compression, avec la propriété $m = \rho_L u_L > 0$ pour une solution onde compressive associée à la première famille d'onde.

Pour conclure ce paragraphe, fixons quelques notations utilisées dans la suite. Pour alléger les écritures, nous aurons à considérer la nouvelle pulsation $\tilde{\omega}$ définie par :

$$\tilde{\omega} = \frac{\omega + ikv_R}{u_R}, \quad (9.182)$$

où par la propriété de positivité (9.181), les signes de $\mathcal{R}e(\tilde{\omega})$ et $\mathcal{R}e(\omega)$ sont identiques. Par ailleurs, il sera agréable, lors de l'adimensionnement des formules, d'introduire en complément des nombres réduits (α, β, M) , les quantités sans dimension :

$$r = \frac{R_{12}^R}{R_{12}^L}, \quad \zeta^2 = \frac{R_{22}^L}{R_{11}^L}. \quad (9.183)$$

Rappelons d'après la formule adimensionnée (5.22) établie au chapitre 5, que le nombre r trouve la définition suivante :

$$r = \frac{\sqrt{\mathcal{I}_R}}{2\beta\eta_R^2} (Y_+^R - Y_-^R), \quad (9.184)$$

de sorte que ce nombre sans dimension, évalué sur l'état \mathbf{u}_R , ne dépend que de l'état \mathbf{u}_L et de σ , et est donc fonction des nombres réduits $(\alpha, \beta, \zeta, M)$.

9.3.2 Détermination du vecteur ${}^t D_{\mathbf{u}}^{-1} \mathbf{v}(\mathbf{u}_R) \Lambda_1(\mathbf{u}_R, k, \omega)$

L'ensemble des calculs est mené dans un premier temps sous forme dimensionnée, une version adimensionnée est ensuite proposée.

La détermination du vecteur propre $\Lambda_1(\mathbf{u}_R, k, \omega)$ est menée en adoptant le mode opératoire détaillé au paragraphe (9.2.2).

Calcul de $\mu_1(\mathbf{u}_R, k, \omega)$

Le principal résultat est :

Lemme 9.3.1. *Soit une pulsation $\omega \in \mathbb{C}^+$ avec $\mathcal{R}e(\omega) > 0$. L'unique valeur propre $\mu_1(\mathbf{u}_R, k, \omega)$ de partie réelle positive de la matrice $-(\omega Id + ik\mathcal{A}_2(\mathbf{u}_R)) (\mathcal{A}_1(\mathbf{u}_R))^{-1}$ s'écrit :*

$$\mu_1(\mathbf{u}_R, k, \omega) = \frac{-(\omega + ikv_R)u_R + 3ikR_{12}^R \tau_R}{u_R^2 - c_R^2} - \frac{\sqrt{\Xi(\mathbf{u}_R, k, \omega)}}{u_R^2 - c_R^2}, \quad (9.185)$$

où nous avons posé :

$$\Xi(\mathbf{u}_R, k, \omega) = \quad (9.186)$$

$$(\omega + ikv_R)^2 c_R^2 - 6ikR_{12}^R \tau_R (\omega + ikv_R) u_R - k^2 \left(9(R_{12}^R)^2 \tau_R^2 + (u_R^2 - c_R^2)(T_0 + 3R_{22}^R \tau_R) \right).$$

Dans (9.185), la coupure de la fonction complexe racine carrée est choisie coïncider avec \mathbb{R}^- , l'axe des réels négatifs dans le plan complexe \mathbb{C} .

Pour ce choix, la fonction complexe $(k, \omega) \rightarrow \mu_1(\mathbf{u}_R, k, \omega)$ est analytique dans $\mathbb{R} \times \mathbb{C}^+$ avec $\mathcal{R}e(\omega) > 0$, dès que les conditions de réalisabilité sur le tenseur de Reynolds sont satisfaites.

Avec les notations (9.182) et (9.183), la forme adimensionnée de la valeur propre définie en (9.185) est donnée par :

$$\mu_1(\mathbf{u}_R, k, \tilde{\omega}) = \frac{\mathcal{M}_R}{\mathcal{M}_R^2 - 1} \quad (9.187)$$

$$\times \left(-\tilde{\omega} \mathcal{M}_R + 3ik \mathcal{M}_R \frac{\alpha \beta^2}{M^2 \eta_R} r - \sqrt{\left(\tilde{\omega} - ik\rho_+(\mathbf{u}_R) \right) \left(\tilde{\omega} - ik\rho_-(\mathbf{u}_R) \right)} \right),$$

où les nombres réels $\rho_{\pm}(\mathbf{u}_R)$ sont définis par :

$$\rho_{\pm}(\mathbf{u}_R) = 3 \frac{\alpha \beta^2}{M^2 \eta_R} \mathcal{M}_R^2 r \quad (9.188)$$

$$\pm \sqrt{\frac{1 - \mathcal{M}_R^2}{\mathcal{M}_R^2} \left(1 + 3 \frac{\mathcal{M}_R^2}{M^2} \beta^2 \left((\zeta^2 - \alpha^2) \frac{1}{\mathcal{I}_R \eta_R^2} + \frac{\alpha^2 r^2 \eta_R^2}{\mathcal{I}_R} - \frac{\mathcal{I}_R}{\eta_R^4} \right) - 9 \frac{\alpha^2 \beta^4 r^2}{M^4 \eta_R^2} \mathcal{M}_R^4 \right)}.$$

La fonction (9.187), $(k, \tilde{\omega}) \rightarrow \mu_1(\mathbf{u}_R, k, \tilde{\omega})$ est définie dans $\mathbb{R} \times \mathbb{C}^+$ et est analytique pour $\mathcal{R}e(\tilde{\omega}) > 0$.

La propriété d'analyticité rapportée dans ce résultat est attendue dans la théorie générale du déterminant de Lopatinski pour un système hyperbolique (conservatif). Nous la soulignons ici en faisant le lien avec les conditions de réalisabilité du tenseur de Reynolds, que nous avons liées au chapitre 3 à la propriété d'hyperbolicité des modèles RSM. Cette propriété de $\mu_1(\mathbf{u}_R, k, \omega)$ garantit, dans la suite, l'analyticité du produit scalaire (9.153) dans $\mathbb{R} \times \mathbb{C}^+$, avec $\mathcal{R}e(\tilde{\omega}) > 0$. Cette propriété jouera un rôle important dans la recherche des zéros éventuels ω (soit de manière équivalente $\tilde{\omega}$ en (9.182)) dans le demi-plan \mathbb{C}^+ .

Nous concluons ce paragraphe en donnant la preuve du lemme (9.3.1).

Démonstration. Il s'agit d'exhiber l'unique racine $\mu_1 \in \mathbb{C}$, avec $\mathcal{R}e(\mu_1) > 0$, du polynôme en μ :

$$\mathbb{P}_{(k, \omega)}(\mu) = \text{Det}(\mu \mathcal{A}_1(\mathbf{u}_R) + ik \mathcal{A}_1(\mathbf{u}_R) + \omega \text{Id}) = 0, \quad \mathcal{R}e(\omega) > 0. \quad (9.189)$$

En omettant, sans risque de confusion, l'indice R faisant référence à l'état \mathbf{u}_R , ce polynôme se factorise comme suit :

$$\mathbb{P}_{(k, \omega)}(\mu) = (\mu u + \omega + ikv)^2 \quad (9.190)$$

$$\times \left((\mu u + \omega + ikv)^2 - (\mu^2 c^2 - k^2(c^2 - 3a^2 + 3R_{22}\tau) + 6ik\mu R_{12}\tau) \right)$$

$$\times \left((\mu u + \omega + ikv)^2 - (\mu^2 a^2 - R_{22}\tau k^2 + 2ik\mu R_{12}\tau) \right).$$

Il est alors possible d'évaluer explicitement les six racines complexes, $\mu_i(k, \omega)$, $1 \leq i \leq 6$, de ce polynôme. L'objectif est d'étudier le signe de la partie réelle de chacune de ces racines pour n'en retenir que celle de partie réelle positive. La démonstration du lemme de Hersh (9.2.4) montre que les signes de la partie réelle des valeurs propres sont constants sur le domaine $(k, \omega) \in \mathbb{R} \times \mathbb{C}^+$, avec $\mathcal{R}e(\omega) > 0$, et qu'ils peuvent, dès lors, être caractérisés par la connaissance du signe des racines réelles $\mu_i(0, 1)$ du polynôme $\mathbb{P}_{(0,1)}(\mu)$. En préservant l'ordre de chacun des facteurs composant (9.190), nous avons :

$$\mathbb{P}_{(0,1)}(\mu) = (\mu u_R + 1)^2 \left((\mu u_R + 1)^2 - \mu^2 a_R^2 \right) \left((\mu u_R + 1)^2 - \mu^2 c_R^2 \right). \quad (9.191)$$

Les conditions géométriques de Lax (9.150) étant satisfaites, il est aisé de constater que la seule racine de partie réelle positive dans $\mathbb{P}_{(0,1)}(\mu)$ est racine du troisième facteur $\left((\mu u_R + 1)^2 - \mu^2 c_R^2 \right)$, *i.e.* :

$$\mu_1(0, 1) = -\frac{1}{u_R - c_R} > 0. \quad (9.192)$$

Rappelons en effet que nous avons supposé, sans restriction, $\sigma = 0$ en (9.179). Avec cette observation, les deux racines du troisième facteur du polynôme $\mathbb{P}_{(k,\omega)}(\mu)$ en (9.190) sont explicitement données par :

$$\begin{aligned} \mu_{\pm}(k, \omega) = & \frac{-(\omega + ikv)u + 3ikR_{12}\tau}{u^2 - c^2} \\ & \pm \frac{\sqrt{(\omega + ikv)^2 c^2 - 6ikR_{12}\tau(\omega + ikv)u - k^2(9R_{12}^2\tau^2 + (u^2 - c^2)(T_0 + 3R_{22}\tau)}}}{u^2 - c^2}. \end{aligned} \quad (9.193)$$

Il suffit alors de constater que seule la racine $\mu_-(k, \omega)$ avec $(k, \omega) = (0, 1)$ coïncide avec (9.192), de sorte que la propriété d'inertie du signe de la partie réelle de $\mu_1(k, \omega)$ conduit au résultat escompté :

$$\mu_1(k, \omega) = \mu_-(k, \omega).$$

De manière à fixer les propriétés d'analyticité de la fonction complexe $(k, \omega) \rightarrow \mu_1(k, \omega)$ dans $\mathbb{R} \times \mathbb{C}^+$, nous proposons d'étudier sous quelles conditions la quantité $\Xi(\mathbf{u}_R, k, \omega)$ définie en (9.186), et intervenant sous la racine carrée de (9.193), coïncide avec un nombre réel négatif. Rappelons en effet que la coupure de la fonction complexe racine carrée est réalisée sur \mathbb{R}^- . Cette fonction étant alors analytique sur $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}^-$. Il est agréable de mener l'étude en l'inconnue $\tilde{\omega} = \frac{\omega + ikv_R}{u_R}$. La question est donc de caractériser les $(k, \tilde{\omega}) \in \mathbb{R} \times \mathbb{C}^+$, pour lesquels il existe $\chi \in \mathbb{R}$ avec :

$$\Xi(\mathbf{u}_R, k, \tilde{\omega}) = -\chi^2 c_R^2 (< 0), \quad (9.194)$$

i.e. après division par c_R^2 :

$$u_R^2 \tilde{\omega}^2 - \frac{6ikR_{12}^R \tau_R u_R^2}{c_R^2} \tilde{\omega} - \frac{k^2}{c_R^2} \left(9(R_{12}^R)^2 \tau_R^2 + (u_R^2 - c_R^2)(T_0 + 3R_{22}^R \tau_R) \right) + \chi^2 = 0. \quad (9.195)$$

Le discriminant réduit de cette équation du second degré vaut :

$$\frac{k^2}{c_R^2} \left(1 - \frac{u_R^2}{c_R^2} \right) \left(9((R_{12}^R)^2 - R_{11}^R R_{22}^R) - T_0^2 - 3T_0(R_{11}^R + R_{22}^R) \right) - \chi^2. \quad (9.196)$$

En rappelant que $\frac{u_R}{c_R} < 1$, ce discriminant est négatif pour tout χ dans \mathbb{R} , à la condition que le tenseur de Reynolds vérifie la propriété de réalisabilité. Cette propriété est satisfaite par construction dans les modèles RSM étudiés dans ce manuscrit (voir chapitre 4). Puisque (9.196) est systématiquement négatif, l'équation de second degré en $\tilde{\omega}$ (9.195) admet toujours deux racines imaginaires pures, ce qui implique que les $\tilde{\omega}$ réalisant (9.194) sont situés sur l'axe $i\mathbb{R}$ du plan \mathbb{C} . En conséquence $(k, \tilde{\omega}) \rightarrow \mu_1(k, \tilde{\omega})$ est analytique sur $\mathbb{R} \times \mathbb{C}^+$, avec $\mathcal{R}e(\tilde{\omega}) > 0$. Puisque $\mathcal{R}e(\omega) = u_R \mathcal{R}e(\tilde{\omega})$ par (9.181), nous avons $(k, \omega) \rightarrow \mu_1(\mathbf{u}_R, k, \omega)$ analytique sur $\mathbb{R} \times \mathbb{C}^+$, avec $\mathcal{R}e(\omega) > 0$. Enfin, les expressions des nombres réels $\rho_+(\mathbf{u}_R)$ et $\rho_-(\mathbf{u}_R)$ en (9.187) se déduisent des deux racines imaginaires pures de (9.196) pour $\chi = 0$. Ceci conclut la preuve. \square

Calcul de $\Lambda_1(\mathbf{u}_R, k, \omega)$

Conformément à la seconde étape proposée au paragraphe (9.2.2), il convient d'inverser en ω la fonction $(k, \omega) \rightarrow \mu_1(\mathbf{u}_R, k, \omega)$, pour définir, à \mathbf{u}_R fixé, $(k, \mu_1) \rightarrow \omega(k, \mu_1)$. Un calcul explicite donne :

$$\omega(k, \mu_1) = -(\mu_1 u_R + i k v_R) + \sqrt{\mu_1^2 c_R^2 + 6 i k \mu_1 R_{12}^R \tau_R - k^2 (T_0 + 3 R_{22}^R \tau_R)}. \quad (9.197)$$

L'indétermination de signe devant la racine carrée de (9.197) est levée en annulant k , et en exigeant de $\mathcal{R}e(\omega(k, \mu_1)) > 0$.

Le vecteur propre à gauche $\Lambda_1(\mathbf{u}_R, k, \omega)$ est alors déduit des étapes 3 et 4 de la section (9.2.2), et s'écrit en variable $(k, \tilde{\omega}) \in \mathbb{R} \times \mathbb{C}^+$:

$$\Lambda_1(\mathbf{u}_R, k, \omega) = \begin{pmatrix} 0 \\ -\mu_1(\mathbf{u}_R, k, \tilde{\omega}) \rho_R u_R (\mu_1(\mathbf{u}_R, k, \tilde{\omega}) + \tilde{\omega}) \\ -i k \rho_R u_R (\mu_1(\mathbf{u}_R, k, \tilde{\omega}) + \tilde{\omega}) \\ \mu_1^2(\mathbf{u}_R, k, \tilde{\omega}) \\ 2 i k \mu_1(\mathbf{u}_R, k, \tilde{\omega}) \\ -k^2 \end{pmatrix}, \quad (9.198)$$

avec $\mu_1(\mathbf{u}_R, k, \tilde{\omega})$ définie en (9.187), (9.188).

Calcul de ${}^t D_{\mathbf{u}}^{-1} \mathbf{v}(\mathbf{u}_R) \Lambda_1(\mathbf{u}_R, k, \tilde{\omega})$

La jacobienne de la transformation $\mathbf{u} \rightarrow \mathbf{v}(\mathbf{u})$, évaluée en \mathbf{u}_R , s'écrit :

$$D_{\mathbf{u}} \mathbf{v}(\mathbf{u}_R) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ u_R & \rho_R & 0 & 0 & 0 & 0 \\ v_R & 0 & \rho_R & 0 & 0 & 0 \\ -2\mathcal{I}_R & 0 & 0 & \frac{1}{\rho_R^2} & 0 & 0 \\ \frac{v_R^2}{2} & 0 & \rho_R v_R & -\frac{1}{2} \left(\frac{R_{12}^R}{R_{11}^R} \right)^2 & \frac{R_{12}^R}{R_{11}^R} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \left(\frac{R_{12}^R}{R_{11}^R} \right)^2 & -2 \frac{R_{12}^R}{R_{11}^R} & 1 \end{pmatrix}.$$

La transposée de l'inverse de cette matrice est :

$${}^t(D_{\mathbf{u}}^{-1}\mathbf{v}(\mathbf{u}_R)) = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{u_R}{\rho_R} & -\frac{v_R}{\rho_R} & 2\rho_R^2\mathcal{I}_R & \frac{R_{11}^R}{2R_{12}^R}v_R^2 + \frac{R_{12}^R}{\rho_R} & v_R^2 \\ 0 & \frac{1}{\rho_R} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{\rho_R} & 0 & -v_R\frac{R_{11}^R}{R_{12}^R} & -2v_R \\ 0 & 0 & 0 & \rho_R^2 & \frac{\rho_R^2 R_{12}^R}{2R_{11}^R} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{R_{11}^R}{R_{12}^R} & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Nous déduisons alors de l'expression (9.198) exprimant le vecteur propre à gauche $\Lambda_1(\mathbf{u}_R, k, \omega)$, le vecteur ${}^t D_{\mathbf{u}}^{-1}\mathbf{v}(\mathbf{u}_R)\Lambda_1(\mathbf{u}_R, k, \omega)$ recherché :

$${}^t D_{\mathbf{u}}^{-1}\mathbf{v}(\mathbf{u}_R)\Lambda_1(\mathbf{u}_R, k, \omega) = \begin{pmatrix} \mu_1^2(k, \tilde{\omega})(c_R^2 - a_R^2) - k^2(c_R^2 - 3a_R^2) \\ +(\mu_1(k, \tilde{\omega})u_R + ikv_R)(\mu_1(k, \tilde{\omega}) + \tilde{\omega})u_R \\ -k^2v_R^2 + 2ik\mu_1(k, \tilde{\omega})\left(\frac{R_{11}^R}{2R_{12}^R}v_R^2 + \frac{R_{12}^R}{\rho_R}\right) \\ -\mu_1(k, \tilde{\omega})(\mu_1(k, \tilde{\omega}) + \tilde{\omega})u_R \\ -ik(\mu_1(k, \tilde{\omega}) + \tilde{\omega})u_R - 2ik\mu_1(k, \tilde{\omega})v_R\frac{R_{11}^R}{R_{12}^R} + 2k^2v_R \\ \rho_R^2\mu_1(k, \tilde{\omega})(\mu_1(k, \tilde{\omega}) + ik\frac{R_{12}^R}{R_{11}^R}) \\ 2ik\mu_1(k, \tilde{\omega})\frac{R_{11}^R}{R_{12}^R} - 2k^2 \\ -k^2 \end{pmatrix}, \quad (9.199)$$

Remarque 9.3.2. En égalisant formellement k à zéro dans (9.199), nous retrouvons le vecteur ${}^t D_{\mathbf{u}}^{-1}\mathbf{v}(\mathbf{u}_R)\tilde{l}_1(\mathbf{u}_R)$ défini en (8.43) à l'occasion de l'étude de la stabilité structurelle du choc droit, à un facteur multiplicatif près, donné par $\rho_R^3\mu_1^2(0, \tilde{\omega})$. Cette vérification est menée en rappelant que $\mu_1(0, \tilde{\omega}) = -\frac{\tilde{\omega}}{u_R - c_R}$.

La formule partiellement adimensionnée du vecteur (9.199) est donnée dans la tableau (9.2).

9.3.3 Linéarisation des relations de saut généralisées

Le tableau (9.3) donne la linéarisée complète des relations de saut généralisées, avec adimensionnement partiel. Nous renvoyons le lecteur au paragraphe (9.1.7) pour la procédure de linéarisation permettant d'aboutir aux formules proposées.

$${}^t D_{\mathbf{u}}^{-1} \mathbf{v}(\mathbf{u}_R) \Lambda_1(\mathbf{u}_R, k, \tilde{\omega}) = \left\{ \begin{array}{l} c_L^2 \left\{ (\mu_1(\mathbf{u}_R, k, \tilde{\omega}) \tilde{\omega} M^2 \eta_R^2 \right. \\ + \mu_1^2(\mathbf{u}_R, k, \tilde{\omega}) \left((1 + \mathcal{M}_R^2) \frac{M^2 \eta_R^2}{\mathcal{M}_R^2} - \frac{\beta^2 \mathcal{I}_R}{\eta_R^2} \right) \\ - ik \tilde{\omega} \alpha \beta^2 \eta_R (r - 1) \\ + ik \mu_1(\mathbf{u}_R, k, \tilde{\omega}) \alpha \beta^2 \left((1 + r) \eta_R + \frac{\beta^2 \mathcal{I}_R (1 - r)^2}{M^2 \eta_R^3 r} \right) \\ \left. - k^2 \left(\frac{\alpha^2 \beta^4}{M^2} (1 - r)^2 + \frac{M^2 \eta_R^2}{\mathcal{M}_R^2} - 3 \beta^2 \frac{\mathcal{I}_R}{\eta_R^2} \right) \right\} \\ - \mu_1(\mathbf{u}_R, k, \tilde{\omega}) c_R (\mu_1(\mathbf{u}_R, k, \tilde{\omega}) + \tilde{\omega}) \mathcal{M}_R \\ c_R k \left\{ - i \tilde{\omega} \mathcal{M}_R + 2k \frac{\alpha \beta^2 \mathcal{M}_R}{M^2 \eta_R} (1 - r) \right. \\ \left. - i \mu_1(\mathbf{u}_R, k, \tilde{\omega}) \mathcal{M}_R \left(1 + 2 \frac{\beta^2 \mathcal{I}_R (1 - r)}{M^2 \eta_R^4 r} \right) \right\} \\ \rho_L^2 \left\{ \frac{\mu_1^2(\mathbf{u}_R, k, \tilde{\omega})}{\eta_R^2} + ik \mu_1(\mathbf{u}_R, k, \tilde{\omega}) \alpha \frac{r \eta_R}{\mathcal{I}_R} \right\} \\ - 2k^2 + 2ik \mu_1(\mathbf{u}_R, k, \tilde{\omega}) \frac{\mathcal{I}_R}{\alpha \eta_R^3 r} \\ - k^2 \end{array} \right.$$

 TAB. 9.2 – Expression de ${}^t D_{\mathbf{u}}^{-1} \mathbf{v}(\mathbf{u}_R) \Lambda_1(\mathbf{u}_R, k, \tilde{\omega})$ dans le cadre isotherme avec correction de Ristorcelli

$$\left. \begin{aligned}
 & \rho_L c_R \left\{ \tilde{\omega}(1 - \eta_R) + ik \frac{\alpha \beta^2}{M^2} (1 - r) \right\}. \\
 & 0. \\
 & \frac{\rho_L c_L^2 \eta_R}{M_R} \left\{ \tilde{\omega} \alpha \beta^2 (1 - r) + ik \left((1 - 3\beta^2) \left(1 - \frac{1}{\eta_R} \right) \right. \right. \\
 & \left. \left. + \frac{\beta^2}{\eta_R} (\zeta^2 (1 - \eta_R) - \alpha^2) + \frac{\alpha^2 \beta^2 r^2 \eta_R^3}{\mathcal{I}_R} \right) \right\}. \\
 & \tau_L c_L^2 c_R \left\{ \tilde{\omega} \beta^2 \left((\mathcal{I}_R - \eta_R) - \eta_R \left(\kappa_{\mathcal{I}} + M \frac{\partial \kappa_{\mathcal{I}}}{\partial M} \right) \right) \right. \\
 & \left. + ik \alpha \beta^2 \left(\frac{\beta^2}{M^2} (1 - r) + 2(r \eta_R^3 - 1) + \frac{\beta^2}{M^2} (1 - r) \left(\kappa_{\mathcal{I}} + M \frac{\partial \kappa_{\mathcal{I}}}{\partial M} \right) \right. \right. \\
 & \left. \left. - \left(2\kappa_{\mathcal{I}} + 3M \beta^2 \frac{\partial \kappa_{\mathcal{I}}}{\partial M} - \beta \frac{\partial \kappa_{\mathcal{I}}}{\partial \beta} \right) \right) \right\}. \\
 & \frac{\mathcal{M}_R}{\eta_R} \left\{ \rho_L c_L^2 c_R \left\{ \tilde{\omega} \left(\frac{\alpha^2 \beta^2}{2} \left(\frac{\beta^2}{M^2} (1 - r)^2 + \eta_R \left(\frac{r^2 \eta_R^3}{\mathcal{I}_R} - 1 \right) \right) \right. \right. \right. \\
 & \left. \left. - \eta_R \left(\kappa_{E_t} + M \frac{\partial \kappa_{E_t}}{\partial M} \right) \right) \right. \right. \\
 & \left. \left. + ik \alpha \beta^2 \left((\zeta^2 - \alpha^2) \left(\frac{r \eta_R^3}{\mathcal{I}_R} - 1 \right) - 2(r \eta_R - 1) \right. \right. \right. \\
 & \left. \left. + \frac{(r - 1)}{M^2} \left(M^2 \eta_R + \beta^2 \frac{\mathcal{I}_R}{\eta_R^3} - \frac{\beta^2}{\eta_R} (\zeta^2 - \alpha^2) - \frac{\alpha^2 \beta^2 r^2 \eta_R^3}{\mathcal{I}_R} - \frac{\alpha^2 \beta^2}{2} \right) \right. \right. \\
 & \left. \left. + \frac{(1 - r)}{M^2} \left(\kappa_{E_t} + M \frac{\partial \kappa_{E_t}}{\partial M} \right) - 3 \left(2\kappa_{E_t} - M \frac{\partial \kappa_{E_t}}{\partial M} \right) \right. \right. \\
 & \left. \left. + \frac{1}{\alpha \beta^2} \left((1 - \zeta^2) - 2\alpha^2 \right) \frac{\partial \kappa_{E_t}}{\partial \alpha} - \frac{1}{\beta} (1 - 3\beta^2) \frac{\partial \kappa_{E_t}}{\partial \beta} \right) \right\}. \\
 & \rho_L c_L^2 c_R \beta^2 (\zeta^2 - \alpha^2) \left\{ \tilde{\omega}(1 - \eta_R) + ik \alpha \left(\frac{\beta^2}{M^2} (1 - r) + 2 \left(1 - \frac{r \eta_R^3}{\mathcal{I}_R} \right) \right) \right\}.
 \end{aligned} \right\}$$

TAB. 9.3 – Linéarisée des relations de saut généralisées avec adimensionnement dans le cadre isotherme avec correction de Ristorcelli

9.3.4 À propos des relations de la forme adimensionnée du déterminant de Lopatinski

Le déterminant de Lopatinski (9.153) résulte du produit scalaire des deux vecteurs respectivement détaillés dans les tableaux (9.2) et (9.3). Il trouve la forme suivante :

$$\Delta(\mathbf{u}_R, k, \tilde{\omega}) = \rho_L c_L^2 \bar{\Delta}_{2D}(k, \tilde{\omega}),$$

où $\bar{\Delta}_{2D}(k, \tilde{\omega})$ est sans dimension. Le déterminant $\bar{\Delta}_{2D}(k, \tilde{\omega})$ dépend des quatre nombres adimensionnés $(\alpha, \beta, \zeta, M)$. Rappelons en effet que le nombre sans dimension r donné par la formule (9.184), ne dépend que de ces quatre quantités.

L'examen des tableaux (9.2) et (9.3) permet de remarquer que le nombre d'onde k intervient par sa puissance première ou son carré. Sa puissance première intervient systématiquement en produit, ou en rapport, avec le nombre α , *i.e.* changer le signe de k consiste à renverser le signe de R_{12}^L . La définition de ω à partir de $\tilde{\omega}$:

$$\omega = u_R \tilde{\omega} - ikv_R,$$

conduit alors à changer le signe de la vitesse tangentielle v_R . Envisager un nombre d'onde tangentiel $k > 0$, ou $k < 0$, consiste donc à échanger le signe de v et R_{12} dans la solution choc plan considérée. Cette observation doit être rapprochée du fait que, privilégier une onde de choc avec $R_{12}^L < 0$, se déduit du cas $R_{12}^L > 0$, en échangeant simultanément les signes de R_{12} et de v , conformément à l'étude du système dynamique proposée au paragraphe (4.2.1). En anticipant les résultats à venir, nous rapportons que les zones d'instabilité forte ou de stabilité neutre, sont indépendantes du signe de k . En d'autres termes, échanger le signe de R_{12} et v dans une solution choc plan n'affecte pas ses propriétés de stabilité multidimensionnelle.

Il faut maintenant discuter des possibles annulations de $\bar{\Delta}_{2D}(k, \tilde{\omega})$ pour une pulsation $\tilde{\omega}$ de partie réelle positive. Étant donnée la complexité algébrique du déterminant, cette étude est menée numériquement grâce au principe de l'argument que nous rappelons ci-après.

9.3.5 Principe de l'argument

L'analyse complexe propose un outil puissant permettant de dénombrer les zéros éventuels d'une fonction complexe dans un domaine de \mathbb{C} . Il s'agit du principe de l'argument. L'argument d'un nombre complexe z est un anglicisme désignant la phase θ de ce nombre complexe écrit sous forme polaire $z = \rho e^{i\theta}$.

De manière à énoncer ce principe, nous rappelons ce qu'est une fonction méromorphe.

Définition 9.3.3 (Fonction méromorphe). On appelle fonction méromorphe dans un ouvert connexe \mathcal{D} , une fonction $f(z)$ définie et analytique dans un ouvert \mathcal{D}' obtenu en enlevant de \mathcal{D} un ensemble de points isolés, dont chacun est un pôle pour $f(z)$.

Nous avons alors (voir [59] pour une démonstration) :

Théorème 9.3.4 (Principe de l'argument). Soit $f(z)$ une fonction méromorphe non constante dans un ouvert \mathcal{D} . Soit Γ le bord orienté d'un compact K contenu dans \mathcal{D} tel que la fonction complexe f n'ait ni de pôles, ni de racines sur Γ . Alors l'identité suivante a lieu :

$$\frac{1}{2i\pi} \int_{\Gamma} \frac{f'(z)}{f(z)} dz = Z - P, \quad (9.200)$$

où Z désigne la somme des ordres de multiplicité des racines de l'équation :

$$f(z) = 0,$$

contenues dans K , et où P désigne la somme des ordres de multiplicité des pôles de f contenus dans K .

De plus si $\gamma : t \in [a, b] \rightarrow \gamma(t)$ désigne une paramétrisation de la courbe fermée orientée Γ (i.e. allant de $\gamma(a)$ à $\gamma(b) = \gamma(a)$), alors l'argument $\theta(t)$ de la fonction $f(z)$ varie de $\gamma(a)$ à $\gamma(b)$ selon :

$$\frac{1}{2\Pi} (\theta(b) - \theta(a)) = Z - P. \quad (9.201)$$

Dans les applications à venir, les fonctions complexes étudiées sont analytiques dans l'ouvert \mathcal{D} où sont dénombrées leurs racines éventuelles : i.e. elles n'admettent pas de pôles dans \mathcal{D} de sorte que la variation d'argument, ou encore de phase, mesurée le long de la courbe fermée orientée Γ coïncide par (9.201) avec :

$$\frac{1}{2\Pi} (\theta(b) - \theta(a)) = Z. \quad (9.202)$$

Dès lors, dès que cette variation d'argument le long de Γ est nulle, il n'y a pas de racine à $f(z) = 0$ dans le domaine K de bord Γ . En revanche, une variation non nulle trahit l'existence d'au moins une racine dans K .

Le principe de l'argument est également appelé théorème du nombre de tours. Pour appréhender cette terminologie, il convient de constater que le nombre de fois que l'argument $\theta \circ \gamma(t)$ parcourt le cercle trigonométrique, dans le sens trigonométrique pour fixer l'orientation, lorsque $\gamma(t)$ va de $\gamma(a)$ à $\gamma(b)$, correspond au nombre de tours autour de l'origine O qu'effectue le graphe de $f \circ \gamma(t)$ dans le plan ($\mathcal{R}e(f \circ \gamma(t)), \mathcal{I}m(f \circ \gamma(t))$). Il convient de prendre garde à la comptabilisation signée de ce nombre de tours permettant de joindre $f \circ \gamma(a)$ à $f \circ \gamma(b)$. C'est cette propriété géométrique que nous utiliserons dans la suite.

Revenons à l'énoncé du théorème (9.3.4) pour constater que les zéros éventuels d'une fonction analytique sur Γ doivent être évités. La figure (9.1) donne l'exemple typique d'une fonction possédant deux racines imaginaires purs et d'une frontière orientée Γ constituée de deux arcs de cercle permettant de les contourner (ces zéros n'étant dès lors pas comptabilisés dans K). Soulignons que, toujours d'après le théorème (9.3.4), le bord Γ doit être choisi de sorte à assurer que la fonction f y soit analytique. En supposant que pour la figure (9.1), la fonction étudiée est analytique sur \mathbb{C}^+ , avec $\mathcal{R}e(z) > 0$, alors il convient de comprendre (9.1) en arguant que le bord Γ est choisi arbitrairement proche par la droite, mais distinct, de l'axe imaginaire pur $\mathcal{R}e(z) = 0$. Enfin, si l'on souhaite examiner l'existence de zéro sur le demi-plan \mathbb{C}^+ entier, leur dénombrement peut être obtenu en considérant un contour Γ en figure (9.1) avec un rayon R_0 tendant vers l'infini.

Nous concluons cette section en proposant un exemple illustrant très simplement la manière dont nous utiliserons le principe de l'argument dans les sections à venir.

Considérons la fonction analytique sur \mathbb{C} , définie par :

$$f(z) = z^2 - 1, \quad (9.203)$$

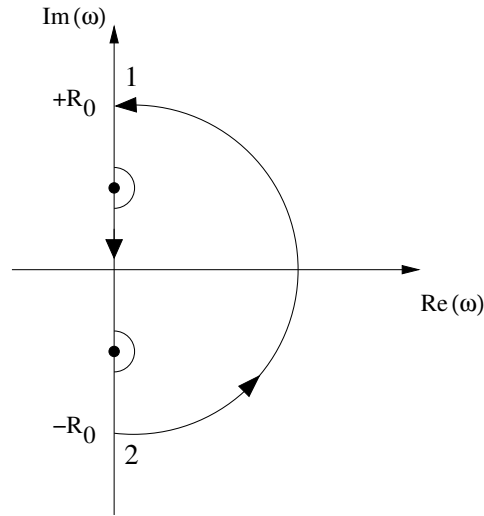


FIG. 9.1 – Allure typique d'un contour Γ pour le demi-plan $\mathcal{R}e(\tilde{\omega}) \geq 0$

admettant les deux racines (réelles) $z_+ = 1$ et $z_- = -1$. Appliquons le principe de l'argument pour comptabiliser les racines de (9.203) dans $\mathbb{C}^+ = \{z \in \mathbb{C}, \mathcal{R}e(z) \geq 0\}$. À cette fin, considérons un bord Γ orienté dans le sens trigonométrique et paramétré par $\gamma(\theta, R) = Re^{i\theta}$, avec $\theta \in [-\frac{\Pi}{2}, \frac{\Pi}{2}]$ et $R > 0$ tendant vers l'infini. Examinons la variation d'argument de la fonction (9.203) lorsque θ parcourt $] -\frac{\Pi}{2}, \frac{\Pi}{2}[$, les bornes étant exclues. Cette variation d'argument équivaut à la variation d'argument de $R^2 e^{2i\theta}$ et vaut donc 2Π . Il nous faut alors estimer la variation d'argument le long de l'axe imaginaire pur. Lorsque $\theta = \frac{\Pi}{2}$, ou $\theta = -\frac{\Pi}{2}$, nous devons étudier $f(\pm iR) = -R^2 - 1$, pour $R \in [0, +\infty[$, nombre réel toujours négatif dont la phase est bien sûr constante : il n'y a donc pas de variation de phase le long de l'axe imaginaire pur. La variation d'argument le long de Γ est donc de 2Π , ce qui donne l'existence d'une seule racine pour la fonction (9.203) dans \mathbb{C}^+ , comme attendu.

Proposons une manière différente d'évaluer le nombre de racines de la fonction (9.203) en considérant :

$$g(z) = \frac{f(z)}{\mathbb{P}(z)}, \quad (9.204)$$

où le polynôme $\mathbb{P}(z)$ est construit de sorte à ce que son terme de plus haut degré coïncide avec celui de $f(z)$ et de sorte à ne pas admettre de racine sur \mathbb{C}^+ . Le choix $\mathbb{P}(z) = (z + 1)^2$ convient. La fonction :

$$g(z) = \frac{z^2 - 1}{(z + 1)^2}, \quad (9.205)$$

est analytique sur \mathbb{C}^+ , ses pôles étant par construction dans \mathbb{C}^- et les zéros de $g(z)$ dans \mathbb{C}^+ étant les mêmes que ceux de $f(z)$. L'intérêt d'avoir choisi $\mathbb{P}(z)$ avec un terme de plus haut degré identique à celui de $f(z)$ vient du fait que, dans l'évaluation de la variation d'argument de $g(z)$ lorsque θ parcourt $] -\frac{\Pi}{2}, \frac{\Pi}{2}[$ dans le régime $R \rightarrow +\infty$,

nous avons :

$$\lim_{R \rightarrow +\infty} g(Re^{i\theta}) = +1, \text{ pour } \theta \in \left] -\frac{\Pi}{2}, \frac{\Pi}{2} \right[, \quad (9.206)$$

de sorte que, contrairement à f en (9.203), la phase ne varie pas. La variation d'argument de g n'est donc à évaluer que sur l'axe imaginaire pur $i\mathbb{R}$ où g reste bornée. Cette propriété de bornitude est très agréable dès que l'on souhaite procéder à une évaluation numérique du nombre de tour qu'effectue le graphe de g dans le plan $(\mathcal{R}e(g), \mathcal{I}m(g))$ lorsque $i\mathbb{R}$ est parcouru en joignant le nombre $g(-i\infty) = 1$ à $g(+i\infty) = 1$. C'est cette stratégie que nous adoptons dans la recherche de zéro éventuel du déterminant de Lopatinski.

9.3.6 Propriété d'homogénéité du déterminant de Lopatinski et applications

Deux propriétés mathématiques du déterminant de Lopatinski facilitent l'application du principe de l'argument au dénombrement de racines $\tilde{\omega}$ de partie réelle positive ou nulle : $\mathcal{R}e(\tilde{\omega}) \geq 0$. Ces deux propriétés sont vraies indépendamment de la nature conservative ou non conservative du système (9.1) et nous renvoyons le lecteur à l'ouvrage de Serre [61] pour une démonstration dans un cadre abstrait.

La première propriété est l'analyticité de l'application $(k, \tilde{\omega}) \in \mathbb{R} \times \mathbb{C}^+ \setminus i\mathbb{R} \rightarrow \overline{\Delta}_{2D}(k, \tilde{\omega})$, qui peut être déduite ici, de la dépendance analytique de la valeur propre $\mu_1(k, \tilde{\omega})$, en $(k, \tilde{\omega}) \in \mathbb{R} \times \mathbb{C}^+$, $\mathcal{R}e(\tilde{\omega}) > 0$, telle qu'établie au lemme (9.3.1). Cette propriété permet la recherche des zéros éventuels $\tilde{\omega}$ dans \mathbb{C}^+ par le principe de l'argument, en faisant choix d'un contour fermé orienté Γ , dont l'allure typique est donnée sur la figure (9.1), avec $R_0 \rightarrow +\infty$, Γ étant immédiatement adjacent par la droite à l'axe des imaginaires purs.

Au titre de la seconde propriété, l'application $(k, \tilde{\omega}) \rightarrow \overline{\Delta}_{2D}(k, \tilde{\omega})$ est nécessairement positivement homogène de degré p , pour un certain nombre $p \in \mathbb{R}$, à savoir :

$$\forall(k, \tilde{\omega}) \in \mathbb{R} \times \mathbb{C}^+, \forall t > 0, \overline{\Delta}_{2D}(tk, t\tilde{\omega}) = t^p \overline{\Delta}_{2D}(k, \tilde{\omega}). \quad (9.207)$$

La théorie du déterminant de Lopatinski montre qu'il est possible de choisir les vecteurs propres à droite $\{r_i^-(\mathbf{u}_R, k, \tilde{\omega})\}_{1 \leq i \leq n}$ positivement homogènes de degré zéro (voir [62]). En conséquence, le déterminant de Lopatinski est homogène de degré un. La valeur précise du degré d'homogénéité dépend du choix de la famille de vecteurs propres. Nous établissons à la fin de cette section que dans notre cas ce degré vaut trois.

En conséquence de la propriété (9.207), nous avons :

$$\overline{\Delta}_{2D}(k, \tilde{\omega}) = |k|^p \overline{\Delta}_{2D}\left(\frac{k}{|k|}, \frac{\tilde{\omega}}{|k|}\right), \tilde{\omega} \in \mathbb{C}^+, k \neq 0, \quad (9.208)$$

de sorte qu'une pulsation $\tilde{\omega}(k)$, avec $\mathcal{R}e(\tilde{\omega}(k)) \geq 0$, racine de $\overline{\Delta}_{2D}(k, \tilde{\omega}) = 0$, avec $k \neq 0$, est telle que :

$$\overline{\Delta}_{2D}\left(1, \frac{\tilde{\omega}}{|k|}\right) = 0, \text{ pour } k > 0, \overline{\Delta}_{2D}\left(-1, \frac{\tilde{\omega}}{|k|}\right) = 0, \text{ pour } k < 0. \quad (9.209)$$

Armés de cette observation, il suffit donc de dénombrer les zéros éventuels $\tilde{\omega}$, avec $\mathcal{R}e(\tilde{\omega}) \geq 0$, de $\overline{\Delta}_{2D}(k, \tilde{\omega})$ en faisant respectivement choix de $k = 1$ et $k = -1$, *i.e.* :

dénombrer les pulsations $\tilde{\omega}$, $\mathcal{R}e(\tilde{\omega}) \geq 0$, telles que $\overline{\Delta}_{2D}(1, \tilde{\omega}) = 0$ ou $\overline{\Delta}_{2D}(-1, \tilde{\omega}) = 0$. (9.210)

Rappelons qu'envisager $k = -1$ au lieu de $k = 1$, consiste à changer le signe de α , *i.e.* à privilégier une onde de choc avec $R_{12}^L < 0$.

L'existence de pulsations $\tilde{\omega}$ dans \mathbb{C}^+ , solutions de (9.210), est étudiée en recherchant deux fonctions auxiliaires $\varphi_+(\tilde{\omega})$ et $\varphi_-(\tilde{\omega})$, analytiques sur $\mathbb{C}^+ \setminus \{i\mathbb{R}\}$, partageant respectivement, par construction, les mêmes racines que $\overline{\Delta}_{2D}(1, \tilde{\omega})$ et $\overline{\Delta}_{2D}(-1, \tilde{\omega})$, avec la propriété (voir le paragraphe précédent) :

$$\lim_{R \rightarrow +\infty} \varphi_+(Re^{i\theta}) = \lim_{R \rightarrow -\infty} \varphi_-(Re^{i\theta}) = 1, \theta \in \left] -\frac{\Pi}{2}, \frac{\Pi}{2} \right[. \quad (9.211)$$

Il s'agit donc de renormaliser $\overline{\Delta}_{2D}(1, \tilde{\omega})$ (respectivement $\overline{\Delta}_{2D}(-1, \tilde{\omega})$) par un polynôme en $\tilde{\omega}$, n'admettant pas de racine sur \mathbb{C}^+ , et possédant le même équivalent en $\tilde{\omega} = Re^{i\theta}$ dans la limite $R \rightarrow \infty$.

Une telle renormalisation est ici rendue possible par la propriété de stabilité structurale du choc droit, garantissant que les limites $\lim_{R \rightarrow +\infty} \varphi_+(Re^{i\theta})$ et $\lim_{R \rightarrow -\infty} \varphi_-(Re^{i\theta})$ ne peuvent être nulles. Une façon de s'en convaincre est de rappeler que pour un nombre d'onde $k = 0$, le déterminant de Lopatinski $\overline{\Delta}_{2D}(0, \tilde{\omega})$ (9.155), coïncide avec le déterminant de Majda que nous savons être positif pour les échelles de temps de Ristorcelli considérées dans cette étude. Nous renvoyons le lecteur au théorème (8.2.2). Dès lors, la propriété d'homogénéité (9.208) implique que la non annulation de $\overline{\Delta}_{2D}(k, \tilde{\omega})$, dans la limite $k \rightarrow 0$, exige la non annulation de $\overline{\Delta}_{2D}(1, \frac{\tilde{\omega}}{k})$, $k > 0$, ou $\overline{\Delta}_{2D}(-1, \frac{\tilde{\omega}}{k})$, avec $k < 0$, dans la limite $|k| \rightarrow 0$, $\tilde{\omega} \in \mathbb{C}^+$ étant fixé. Ce qui n'est autre que le résultat attendu.

Le résultat suivant précise l'équivalent recherché :

Proposition 9.3.5. *L'équivalent de $\overline{\Delta}_{2D}(1, Re^{i\theta})$ (respectivement $\overline{\Delta}_{2D}(-1, Re^{i\theta})$) pour $R \rightarrow +\infty$, avec $\theta \in]-\frac{\Pi}{2}, \frac{\Pi}{2}[$, s'écrit $P_\infty(\beta, M)R^3e^{3i\theta}$, avec :*

$$P_\infty(\beta, M) = \frac{\mathcal{M}_R^3}{(1 - \mathcal{M}_R)^2 \eta_R^3} \overline{\Delta}_{1D}(\beta, M) > 0, \quad (9.212)$$

où $\overline{\Delta}_{1D}(\beta, M)$ désigne la version adimensionnée, introduite en (8.49), du déterminant de Majda (8.40).

Armés de cet équivalent, nous proposons d'étudier l'existence de pulsations $\tilde{\omega}$, $\mathcal{R}e(\tilde{\omega}) \geq 0$, solutions de $\overline{\Delta}_{2D}(1, \tilde{\omega}) = 0$ ou $\overline{\Delta}_{2D}(-1, \tilde{\omega}) = 0$, en dénombrant les racines $\tilde{\omega}$ des fonctions :

$$\varphi_+(\tilde{\omega}) = \frac{\overline{\Delta}_{2D}(1, \tilde{\omega})}{P_\infty(\beta, M)(\tilde{\omega} + 1)^3}, \quad \varphi_-(\tilde{\omega}) = \frac{\overline{\Delta}_{2D}(-1, \tilde{\omega})}{P_\infty(\beta, M)(\tilde{\omega} + 1)^3}. \quad (9.213)$$

Donnons la preuve de la proposition (9.3.5).

Démonstration. Remarquons, dans un premier temps, que $\overline{\Delta}_{2D}(k, \tilde{\omega})$ peut se décomposer comme suit :

$$\begin{aligned} \overline{\Delta}_{2D}(k, \tilde{\omega}) &= f\left(\mu_1^2(\mathbf{u}_R, k, \tilde{\omega})\tilde{\omega}, \mu_1(\mathbf{u}_R, k, \tilde{\omega})\tilde{\omega}^2\right) \\ &+ g\left(ik\tilde{\omega}^2, ik(\mu_1(\mathbf{u}_R, k, \tilde{\omega}))^2, ik\mu_1(\mathbf{u}_R, k, \tilde{\omega})\tilde{\omega}, k^2\tilde{\omega}, \mu_1(\mathbf{u}_R, k, \tilde{\omega})k^2, ik^3\right). \end{aligned} \quad (9.214)$$

De plus, asymptotiquement en $\tilde{\omega}$ dans la relation (9.187), on a :

$$\begin{cases} \mu_1(\mathbf{u}_R, k, \tilde{\omega}) \simeq -\frac{\mathcal{M}_R}{\mathcal{M}_R - 1}\tilde{\omega}; \tilde{\omega} \rightarrow +\infty, \\ \mu_1^2(\mathbf{u}_R, k, \tilde{\omega}) \simeq \frac{\mathcal{M}_R^2}{(\mathcal{M}_R - 1)^2}\tilde{\omega}^2; \tilde{\omega} \rightarrow +\infty, \end{cases} \quad (9.215)$$

si bien que asymptotiquement, la condition de stabilité est équivalente à un polynôme en $\tilde{\omega}^3$ dont le coefficient provient de la somme des coefficients de la fonction $f(\mu_1^2(\mathbf{u}_R, k, \tilde{\omega})\tilde{\omega}, \mu_1(\mathbf{u}_R, k, \tilde{\omega})\tilde{\omega}^2)$. Calculons cette fonction :

$$\begin{aligned} f(\mu_1^2(\mathbf{u}_R, k, \tilde{\omega})\tilde{\omega}, \mu_1(\mathbf{u}_R, k, \tilde{\omega})\tilde{\omega}^2) &= \mu_1(\mathbf{u}_R, k, \tilde{\omega})\tilde{\omega}^2 (M^2\eta_R\mathcal{M}_R(1 - \eta_R)) \\ &+ \mu_1^2(\mathbf{u}_R, k, \tilde{\omega})\tilde{\omega} \left((1 + \mathcal{M}_R^2)\frac{M^2\eta_R}{\mathcal{M}_R}(1 - \eta_R) \right. \\ &+ \left. \frac{\beta^2\mathcal{M}_R}{\eta_R^2} \left((\mathcal{I}_R - 1) - \kappa_{\mathcal{I}} - M\frac{\partial\kappa_{\mathcal{I}}}{\partial M} \right) \right). \end{aligned} \quad (9.216)$$

Dès lors, on en déduit, grâce aux équivalents (9.215) le coefficient P_∞ en $\tilde{\omega}^3$ de la condition de stabilité :

$$\begin{aligned} P_\infty(\beta, M) &= \frac{\mathcal{M}_R^3}{(1 - \mathcal{M}_R)^2\eta_R^3} \left((1 - \eta_R)\frac{M^2\eta_R^4}{\mathcal{M}_R^2}(1 + \mathcal{M}_R) \right. \\ &- \left. \beta^2\eta_R \left(M\frac{\partial\kappa_{\mathcal{I}}}{\partial M} \right) \right), \\ &= \frac{\mathcal{M}_R^3}{(1 - \mathcal{M}_R)^2\eta_R^3} \bar{\Delta}_{1D}(\beta, M). \end{aligned} \quad (9.217)$$

Nous avons prouvé que la condition de stabilité structurelle était strictement positive au paragraphe (8.2.1), ce qui termine la démonstration. \square

Nous concluons ce paragraphe en vérifiant que le déterminant de Lopatinski est homogène de degré trois dans sa formulation équivalente (9.153) pour un choix du vecteur propre à gauche $\Lambda_1(\mathbf{u}_R, k, \tilde{\omega})$ tel que nous l'avons proposé.

Démonstration. Examinons la linéarisation des relations de Rankine-Hugoniot généralisées représentée par le tableau (9.3). On remarque que celle-ci dépend linéairement de $\tilde{\omega}$ et de k . On peut donc écrire cette linéarisation sous la forme :

$$\mathbf{a}\tilde{\omega} + ik\mathbf{b}, \quad (\mathbf{a}, \mathbf{b}) \in \mathbb{C}^6, \quad (9.218)$$

clairement homogène de degré un. Par ailleurs, le tableau (9.2) donnant le vecteur ${}^t D_{\mathbf{u}}^{-1}\mathbf{v}(\mathbf{u}_R)\Lambda_1(\mathbf{u}_R, k, \tilde{\omega})$ permet d'écrire ce dernier sous la forme :

$$\mathbf{a}\mu_1(k, \tilde{\omega})\tilde{\omega} + \mathbf{b}(\mu_1(k, \tilde{\omega}))^2 + \mathbf{c}k\tilde{\omega} + \mathbf{d}k\mu_1(k, \tilde{\omega}) + \mathbf{e}k^2, \quad (\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}, \mathbf{d}) \in \mathbb{C}^6. \quad (9.219)$$

Selon l'expression (9.187) donnant $\mu_1(k, \tilde{\omega})$, on a de manière évidente :

$$\begin{cases} \delta = k^2 \left(\frac{\tilde{\omega}}{|k|} - i\rho_+(\mathbf{u}_R) \right) \left(\frac{\tilde{\omega}}{|k|} - i\rho_-(\mathbf{u}_R) \right) \equiv k^2 \bar{\delta} \left(\frac{\tilde{\omega}}{|k|} \right), \\ \mu_1(k, \tilde{\omega}) = \frac{\mathcal{M}_R}{\mathcal{M}_R^2 - 1} |k| \left(-\frac{\tilde{\omega}}{|k|} \mathcal{M}_R + 3i \frac{\alpha\beta^2}{M^2 \eta_R} r \mathcal{M}_R - \sqrt{\bar{\delta} \left(\frac{\tilde{\omega}}{|k|} \right)} \right) = |k| \bar{\mu}_1^R \left(\frac{\tilde{\omega}}{|k|} \right). \end{cases}$$

Le vecteur ${}^t D_{\mathbf{u}}^{-1} \mathbf{v}(\mathbf{u}_R) \Lambda_1(\mathbf{u}_R, k, \tilde{\omega})$ est donc homogène de degré deux d'après (9.219). Ainsi, le produit scalaire (9.153) est positivement homogène de degré trois, ce qui conclut la preuve. \square

9.3.7 Une méthode numérique basée sur le principe de l'argument

Nous dérivons, dans cette section, une stratégie simple d'évaluation numérique du nombre de zéros des fonctions $\varphi_+(\tilde{\omega})$ et $\varphi_-(\tilde{\omega})$ dans le demi-plan complexe \mathbb{C}^+ . La propriété d'analyticité de ces fonctions pour $\tilde{\omega} \in \mathbb{C}^+$, $\mathcal{R}e(\tilde{\omega}) > 0$, permet l'application du principe de l'argument en faisant choix d'un contour fermé, orienté Γ tel que proposé sur la figure (9.1), immédiatement adjacent à l'axe des imaginaires purs, mais devant contourner par la droite les zéros imaginaires purs éventuels. Pour alléger les notations, nous désignons par φ indépendamment φ_+ ou φ_- . Puisque grâce aux limites (9.211), la variation de l'argument de $\varphi(\tilde{\omega})$ est identiquement nulle dans la paramétrisation θ parcourant $] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$, lorsque $R \rightarrow +\infty$, il suffit de n'étudier cette variation d'argument que le long de l'axe $i\mathbb{R}$. L'étude est menée, de manière équivalente, en comptant le nombre de tours autour de l'origine qu'effectue le graphe de $\varphi \circ \gamma(r)$, avec $\gamma = ir$, dans le plan $(\mathcal{R}e(\varphi), \mathcal{I}m(\varphi))$ au prix d'une reparamétrisation locale, lorsque le réel r parcourt \mathbb{R} , en contournant tous les zéros imaginaires purs de $\varphi(ir)$. Toujours en vertu des limites (9.211), ce graphe réalise un contour fermé joignant le point $(1, 0) = \lim_{r \rightarrow -\infty} \varphi(ir)$, au même point $(1, 0) = \lim_{r \rightarrow +\infty} \varphi(ir)$. Le sens de variation de r est choisi de sorte à démarrer de $(1, 0)$ dans le sens trigonométrique (pour y revenir dans le même sens). Pour fixer les idées, r est supposé croître. Ainsi, dénombrer les tours qu'effectue $\varphi \circ \gamma(r)$ autour de l'origine, lorsque r parcourt \mathbb{R} , équivaut à additionner le nombre de fois que $\varphi \circ \gamma(r)$ franchi l'axe des réels négatifs, dans le sens trigonométrique, en soustrayant du résultat le nombre de fois que $\varphi \circ \gamma(r)$ traverse ce même axe dans le sens opposé.

Il s'agit donc d'exhiber toutes les valeurs $r \in \mathbb{R}$, telles que $\varphi(ir)$ corresponde avec un nombre réel négatif. En d'autres termes, il nous faut calculer toutes les solutions réelles r_- de :

$$\mathcal{I}m(\varphi(ir)) = 0, \quad \text{avec } \mathcal{R}e(\varphi(ir)) < 0. \quad (9.220)$$

Pour une telle valeur r_- , le sens de franchissement du demi-axe \mathbb{R}_- par $\varphi \circ \gamma(r)$ est caractérisé en évaluant $\mathcal{I}m(\varphi(i(r_- + \epsilon_0)))$ et $\mathcal{I}m(\varphi(i(r_- - \epsilon_0)))$, avec $\epsilon_0 > 0$ donné suffisamment petit. En supposant, pour fixer les idées, que le paramètre r varie de manière croissante, alors la différence de signe :

$$\mathcal{I}m(\varphi(i(r_- + \epsilon_0))) - \mathcal{I}m(\varphi(i(r_- - \epsilon_0))) < 0, \quad (9.221)$$

correspond à une traversée de \mathbb{R}_- dans le sens trigonométrique, alors qu'une différence de signe opposé :

$$\mathcal{I}m(\varphi(i(r_- + \epsilon_0))) - \mathcal{I}m(\varphi(i(r_- - \epsilon_0))) > 0, \quad (9.222)$$

correspond à une traversée dans le sens inverse.

Enfin, lorsque r parcourt \mathbb{R} , il faut prendre garde à contourner toutes les racines imaginaires purs de $\varphi(ir)$, à savoir exclure de la paramétrisation un voisinage de r_0 , solution de :

$$\mathcal{I}m(\varphi(ir_0)) = 0, \quad \mathcal{R}e(\varphi(ir_0)) = 0, \quad (9.223)$$

pour reparamétriser localement par un arc de cercle de rayon donné, suffisamment petit, contournant l'imaginaire pur ir_0 , par la droite, comme dans l'exemple de la figure (9.1).

Nous concluons cette section en résumant, de manière algorithmique, les précédentes considérations (9.220), (9.221), (9.222), (9.223), portant sur les parties réelles et imaginaires de $\varphi(ir)$, lorsque r parcourt \mathbb{R} .

1. Calculer les valeurs $r \in \mathbb{R}$, solutions de :

$$\mathcal{I}m(\varphi(ir)) = 0. \quad (9.224)$$

2. Exclure par (9.223), les solutions r_0 , de (9.224), annulant de plus :

$$\mathcal{R}e(\varphi(ir_0)) = 0, \quad (9.225)$$

pour proposer une reparamétrisation locale à l'aide d'un arc de cercle contournant la racine ir_0 . Incréments de la valeur +1, un compteur de contournement.

3. Conserver uniquement les solutions de (9.224) vérifiant :

$$\mathcal{R}e(\varphi(ir)) < 0. \quad (9.226)$$

4. Pour de telles solutions r_- , incrémenter un compteur de franchissement de la valeur +1, dès que :

$$\mathcal{I}m(\varphi(i(r_- + \epsilon_0))) - \mathcal{I}m(\varphi(i(r_- - \epsilon_0))) < 0, \quad (9.227)$$

et dans le cas d'un signe opposé, décrémenter le même compteur de la valeur -1.

5. Une fois joint le point $(1, 0)$, la valeur du compteur de franchissement donne la somme des ordres de multiplicité des racines de $\varphi(\tilde{\omega}) = 0$, avec $\mathcal{R}e(\tilde{\omega}) > 0$. Si ce nombre est non nul, le choc plan étudié est violemment instable. Si ce nombre est nul, ce choc est stable, à la condition que la valeur du compteur de contournement soit nulle. Dans la négative, le choc est alors neutralement stable. Notons que les compteurs de franchissement et de contournement peuvent être simultanément non nuls, le choc est alors évidemment violemment instable.

9.3.8 Cartes de stabilité

Rappelons que le déterminant de Lopatinski $\overline{\Delta}_{2D}$ dépend des quatre nombres adimensionnés $(\alpha, \beta, M, \zeta)$. L'étude de l'annulation de ce déterminant demande donc de fixer ces paramètres dans une certaine plage que nous précisons ci-après. Conformément à la méthode numérique décrite dans le précédent paragraphe, l'étude de l'annulation de $\overline{\Delta}_{2D}$ revient à évaluer le nombre de zéros dans le demi-plan complexe \mathbb{C}^+ , des fonctions $\varphi_+(\tilde{\omega})$ et $\varphi_-(\tilde{\omega})$ données en (9.213). Il suffit pour cela de compter

le nombre de tours qu'effectue le graphe de $\varphi \circ \gamma(r)$ (φ représentant indépendamment φ_+ ou φ_-) autour de l'origine dans le plan $(\mathcal{R}e(\varphi), \mathcal{I}m(\varphi))$, où le contour $\gamma(r) = ir$ matérialise l'axe des imaginaires purs. Une reparamétrisation locale (à l'aide d'un arc de cercle) doit être réalisée, lorsque r parcourt \mathbb{R} , pour contourner les éventuels zéros imaginaires purs de $\varphi(ir)$.

Dans un premier temps, nous allons illustrer cette méthode en représentant le graphe de $\varphi \circ \gamma$ dans le plan $(\mathcal{R}e(\varphi), \mathcal{I}m(\varphi))$ pour certaines valeurs représentatives des nombres réduits $(\alpha, \beta, M, \zeta)$, puis nous ferons parcourir à ces nombres toute leur plage de définition afin de réaliser des cartes de stabilité.

Choix de la plage des nombres réduits

De manière à garantir la stabilité structurelle du choc droit, prérequis nécessaire à toute étude de stabilité multidimensionnelle du choc plan, nous choisissons, bien évidemment, $(\beta, M) \in [0, \beta_{lim}(N)] \times [1, 10]$, où $\beta_{lim}(N)$ a été défini au paragraphe (5.6.4).

Concernant le nombre réduit ζ , nous le choisissons, dans toute la suite, tel que $\zeta^2 = \frac{R_{22}^L}{R_{11}^L} = 1$. Il y a deux raisons principales à ce choix. Tout d'abord, il s'agit de simplifier le propos. Une étude à quatre paramètres devient rapidement trop lourde. La deuxième raison est d'ordre physique. En effet, loin des chocs le terme lent de pression-déformation (bien représenté par le modèle de Rotta [58] par exemple) joue un rôle important et tend à isotropiser les tensions de Reynolds. Il en résulte que l'on peut raisonnablement penser que R_{22}^L sera de l'ordre de R_{11}^L avant le choc (en l'absence de parois).

Dans un même ordre d'idée, et concernant le coefficient d'anisotropie α , nous devrions aussi supposer R_{12}^L très petit, c'est-à-dire α proche de zéro. Cependant, l'analyse onde progressive a montré l'importance des effets tangentiels et nous considérerons donc $\alpha \in [0, 1]$, tout en sachant que les valeurs importantes du coefficient d'anisotropie ne sont certainement pas très acceptables physiquement. De plus, le respect de la positivité déterminant à deux dimensions du tenseur de Reynolds sur l'état gauche (condition de réalisabilité) impose naturellement $\alpha \in [0, 1]$ quand $\zeta = 1$:

$$R_{11}^L R_{22}^L - (R_{12}^L)^2 = \rho_L^2 a_L^4 (\zeta^2 - \alpha^2) \geq 0 \implies \alpha \leq 1. \quad (9.228)$$

Finalement, les quatre nombres réduits sont choisis selon :

$$(\alpha, \beta, M, \zeta) \text{ sont tels que } (\alpha, \beta, M) \in [0, 1] \times [0, \beta_{lim}(N)] \times [1, 10] \text{ et } \zeta = 1. \quad (9.229)$$

Étude de l'influence de (α, β, M) sur la stabilité sans correction de Ristorcelli

Rappelons, tout d'abord, que sans correction de Ristorcelli, nous sommes rapidement limités dans le choix des nombres réduits (β, M) par l'accident de surcompression comme le montre la figure (5.2).

Nous allons nous intéresser à quatre cas afin d'évaluer l'influence qualitative des trois paramètres (α, β, M) . Nous partons d'un choc relativement faible, pour lequel $M = 1.5$, subissant une turbulence raisonnable $\beta = 0.1$, pour examiner l'influence de α , puis nous augmentons, dans un premier temps, $\beta = 0.3$ pour $M = 1.5$ et dans un

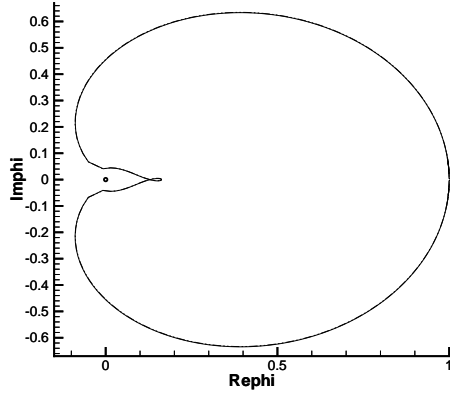
second temps $M = 2$ pour $\beta = 0.1$. Ces trois cas sont stables. Enfin, on augmente simultanément $M = 2$ et $\beta = 0.3$, soit un choc fort subissant une turbulence très importante, pour voir que le choc est violemment instable bien que structurellement stable.

Cas 1 : ($M = 1.5, \beta = 0.1$) influence de α

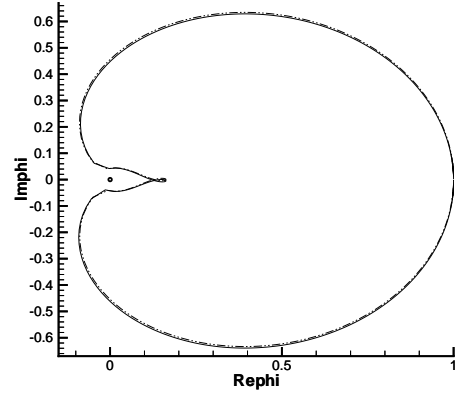
Sur la figure (9.2), on représente donc le graphe de $\varphi \circ \gamma$ dans le plan $(\mathcal{R}e(\varphi), \mathcal{I}m(\varphi))$ pour un nombre de Mach $M = 1.5$ et un Mach turbulent $\beta = 0.1$ et ce pour quatre valeurs du coefficient d'anisotropie $\alpha = (0.01, 0.1, 0.5, 1)$. Remarquons tout d'abord que la fonction débute et finit en 1 conformément à la propriété (9.211) de la fonction φ qui nous a permis de restreindre l'étude à l'axe des imaginaires purs. Nous remarquons aussi sur cette même figure que les courbes pour $k = 1$ et $k = -1$ sont les symétriques l'une de l'autre par rapport à l'axe des réels. Nous avons vérifié numériquement que c'était toujours le cas. Rappelons que choisir le signe de k revient à choisir le signe de R_{12}^L pour le choc plan étudié. La symétrie constatée ici semble donc naturelle car les états de sortie de chocs obtenus avec ces deux conditions initiales opposées sont aussi symétriques. Si on a stabilité pour $k = 1$ (soit $R_{12}^L > 0$), il n'y a *a priori* aucune raison pour que le cas $k = -1$ (soit $R_{12}^L < 0$) devienne instable. Enfin, plus le coefficient d'anisotropie est grand, plus les courbes pour $k = 1$ et $k = -1$ sont distinctes l'une de l'autre. Pour une faible valeur du coefficient d'anisotropie ($\alpha = 0.01$), les deux courbes sont pratiquement superposées. Plus ce coefficient augmente et plus elles se séparent en mettant en évidence la symétrie par rapport à l'axe des réels. Remarquons que le cas $\alpha = 1$ n'est pas très représentatif car il représente une anisotropie du tenseur de Reynolds certainement trop élevée. Il est très rare expérimentalement d'obtenir une turbulence telle que $R_{12}^L = R_{11}^L$ avant une onde de choc (d'autant plus que le terme lent de pression-déformation tend à isotropiser la turbulence). Cependant, ce cas permet de bien mettre en évidence la symétrie pour un Mach faible de 1.5. Les quatre cas de la figure (9.2) sont stables. L'origine étant représentée par un point noir sur la figure, on remarque que la courbe ne fait aucun tour autour de l'origine. En conséquence, il n'y a aucune instabilité forte. Il n'y a pas non plus de racines de φ sur le contour représenté par l'axe des imaginaires purs, ce qui signifie qu'il n'y a pas non plus d'instabilité faible. Numériquement, nous n'avons pas trouvé d'exemple de stabilité faible (au moins une racine de φ sur le contour) dans le cas isotherme sans correction de Ristorcelli. Ceci ne constitue en aucun cas une preuve mais semble montrer que la stabilité faible est un événement exceptionnel dans ce cas.

Cas 2 : ($M = 1.5, \beta = 0.3$) influence de β

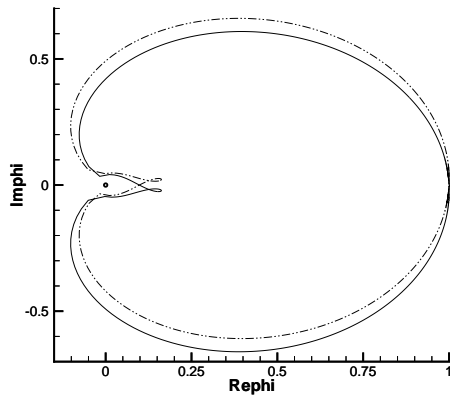
Sur la figure (9.3), le nombre de Mach turbulent a été augmenté ($\beta = 0.3$). Encore une fois, plus le coefficient d'anisotropie est grand, plus la symétrie des courbes en $k = 1$ et $k = -1$ devient évidente. Quand le Mach turbulent est plus grand, cette symétrie est encore plus importante. L'amplitude des courbes est aussi légèrement plus importante. De plus, on se rapproche de l'instabilité forte car les courbes sont proches de l'origine représentée par le point noir. Le fait d'augmenter le Mach turbulent peut déstabiliser le choc comme nous le verrons plus loin.



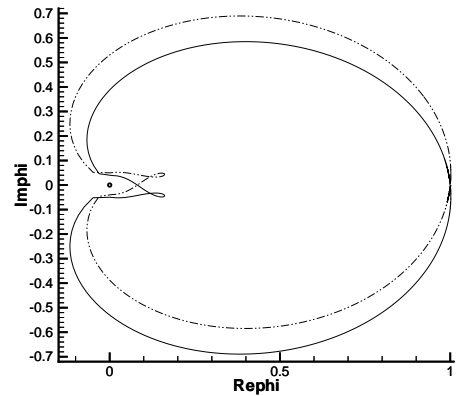
(a) $\alpha = 0.01$



(b) $\alpha = 0.1$



(c) $\alpha = 0.5$



(d) $\alpha = 1$

FIG. 9.2 – Diagramme de stabilité isotherme sans correction de Ristorcelli dans le plan $(\mathcal{R}e(\varphi), \mathcal{I}m(\varphi))$ pour différentes valeurs de α , cas 1 : ($M = 1.5$ et $\beta = 0.1$)

— $k = 1$, - - - - $k = -1$.

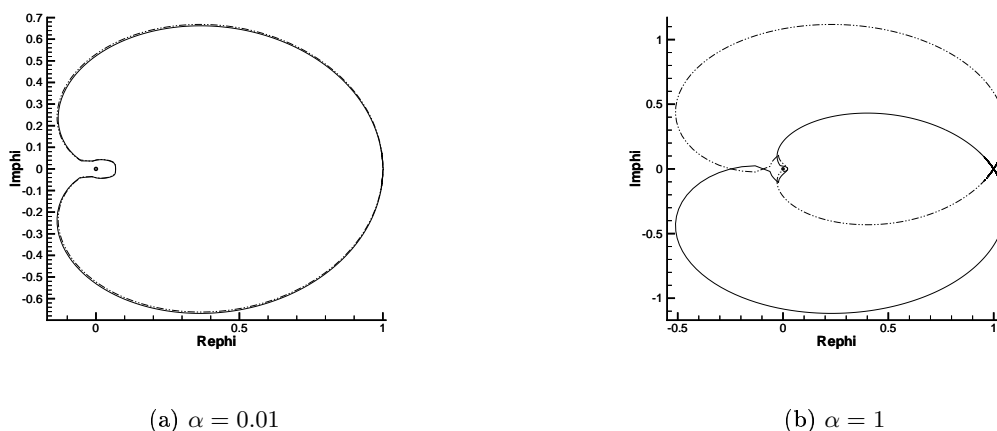


FIG. 9.3 – Diagramme de stabilité isotherme sans correction de Ristorcelli dans le plan $(\mathcal{R}e(\varphi), \mathcal{I}m(\varphi))$ pour différentes valeurs de α , cas 2 : ($M = 1.5$ et $\beta = 0.3$)

— $k = 1$, - - - - $k = -1$.

Cas 3 : ($M = 2, \beta = 0.1$) influence de M

Sur les figures suivantes (9.4), c'est le nombre de Mach M qui a été augmenté par rapport aux figures (9.2). On ne note pas de différence majeure si ce n'est le fait que la symétrie est beaucoup plus évidente pour un Mach plus grand. Il faudrait augmenter le Mach de manière plus importante pour voir une nette différence au niveau de l'amplitude des courbes. Cependant, nous sommes limités en Mach relatif M à β fixé en isotherme sans correction de Ristorcelli par l'accident de surcompression selon la figure (5.2).

Cas 4 : ($M = 2, \beta = 0.3$) une instabilité forte

Augmentons maintenant le nombre de Mach turbulent β de 0.1 à 0.3 toujours pour $M = 2$. Ceci est représenté sur les figures (9.5). On remarque immédiatement que ces deux cas sont instables fortement puisque les courbes font un tour autour de l'origine. En isotherme sans correction de Ristorcelli, on devient très vite instable pour des Mach turbulents importants même si le nombre de Mach est relativement faible.

Influence de la correction de Ristorcelli sur la stabilité multidimensionnelle

Rappelons que l'échelle de temps de Ristorcelli est définie par l'intermédiaire d'une loi de production de turbulence longitudinale, astreinte à vérifier l'inégalité :

$$\frac{1}{\eta^{\frac{1}{3}}} < \psi(\eta_R) < \min\left(\frac{\eta}{\eta_c^4(\beta, M)}, \frac{1}{\eta^3}\right), \quad \eta < 1. \quad (9.230)$$

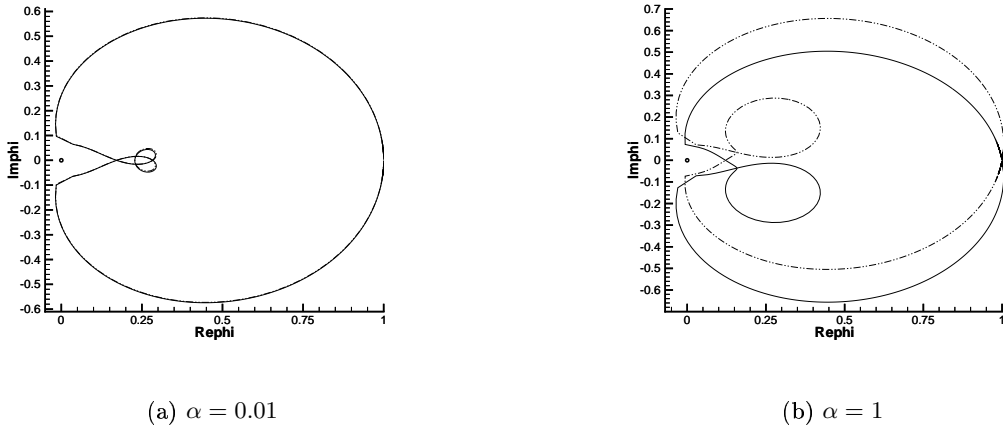


FIG. 9.4 – Diagramme de stabilité isotherme sans correction de Ristorcelli dans le plan $(\mathcal{R}e(\varphi), \mathcal{I}m(\varphi))$ pour différentes valeurs de α , cas 3 : ($M = 2$ et $\beta = 0.1$)

— $k = 1$, - - - - $k = -1$.

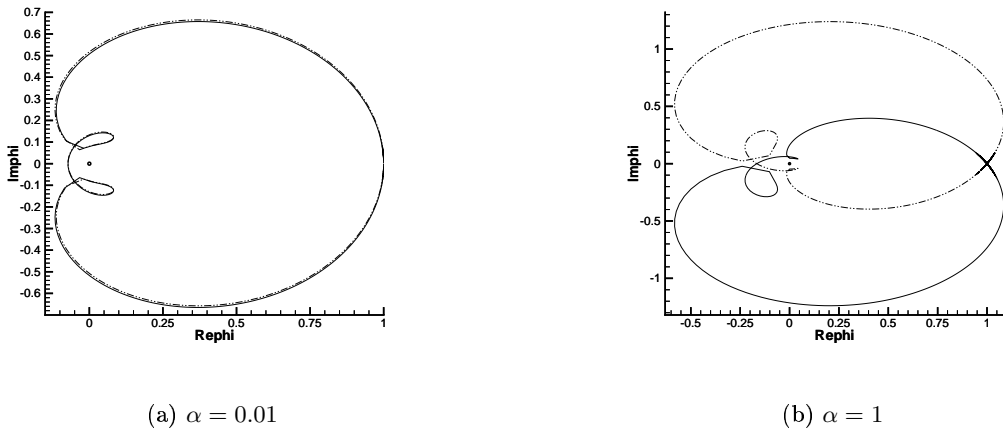


FIG. 9.5 – Diagramme de stabilité isotherme sans correction de Ristorcelli dans le plan $(\mathcal{R}e(\varphi), \mathcal{I}m(\varphi))$ pour différentes valeurs de α , cas 4 : ($M = 2$ et $\beta = 0.3$)

— $k = 1$, - - - - $k = -1$.

Conformément au paragraphe (5.6.4), nous avons choisi dans les applications :

$$\psi(\eta) = \frac{N}{\eta^{\frac{1}{3}}}, N > 1. \quad (9.231)$$

qui satisfait automatiquement la borne inférieure de (9.230). Pour $M \in [1, 10]$, le respect de la borne supérieure nous a conduit à restreindre le choix de β à un intervalle de la forme $[0, \beta_{lim}(N)]$, où $\beta_{lim}(N)$ dépend de la valeur N retenue dans la loi (9.231). Plus N est grand, plus $\beta_{lim}(N)$ est petit (voir la figure (5.6)). De plus, choisir $N_1 < N_2$ pour définir $\psi_{N_1} < \psi_{N_2}$, consiste à privilégier une amplitude \mathcal{T}_{ris} plus grande pour le choix de N_1 , que pour le choix de N_2 (voir le paragraphe (5.5.4)). En conséquence, nous dirons que le paramètre N permet de régler la “force” de la correction de Ristorcelli. Nous nous sommes limités ici à deux corrections, l’une dite forte $N = 1.01$ ($\beta_{lim}(1.01) = 0.35$) et l’autre dite faible avec $N = 2$ ($\beta_{lim}(2) = 0.28$). Rappelons que nous avons vu dans les illustrations numériques de la solution onde progressive au paragraphe (5.6.4) que la correction avec $N = 2$ entraîne un taux de turbulence axiale de sortie deux fois plus grand que lorsque la correction est telle que N est très proche de 1 qui est le maximum. C’est pour cette raison que nous la qualifions de faible. Nous reprenons le cas 4 précédent, instable sans correction de Ristorcelli, avec une correction faible $N = 2$. Nous augmentons ensuite le Mach de 2 à 5, toujours avec $N = 2$, ce qui rend le choc instable. Une correction plus forte $N = 1.01$, le rend à nouveau stable mais pas pour tout α .

Cas 5 ($M = 2, \beta = 0.3$) avec correction faible : stabilité

Nous représentons à nouveau les courbes $\varphi \circ \gamma$, dans le plan $(\mathcal{Re}(\varphi), \mathcal{Im}(\varphi))$. Sur la figure (9.6), la correction est faible ($N = 2$).

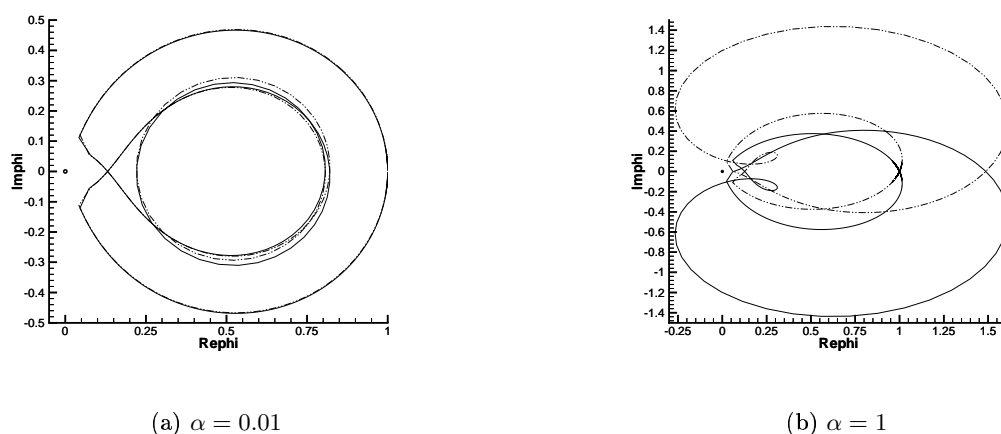


FIG. 9.6 – Diagramme de stabilité isotherme avec correction de Ristorcelli ($N = 2$) dans le plan $(\mathcal{Re}(\varphi), \mathcal{Im}(\varphi))$ pour différentes valeurs de α , cas 5; ($M = 2$ et $\beta = 0.3$)

— $k = 1$, - - - - $k = -1$.

On remarque que ce cas est stable pour $N = 2$ puisque les courbes n'effectuent plus aucun tour autour de l'origine matérialisée par un point noir. La correction de Ristorcelli a permis d'éloigner les courbes de l'origine pour les rendre stables. Les courbes se superposent un peu moins pour $\alpha = 0.01$ mais la symétrie est toujours présente quand α augmente. Les amplitudes des courbes sont sensiblement les mêmes. Remarquons que si l'on avait pris une correction plus faible avec $N = 5$, les courbes n'auraient pas été suffisamment décalées vers la droite pour éviter l'instabilité forte comme le montre la figure (9.7).

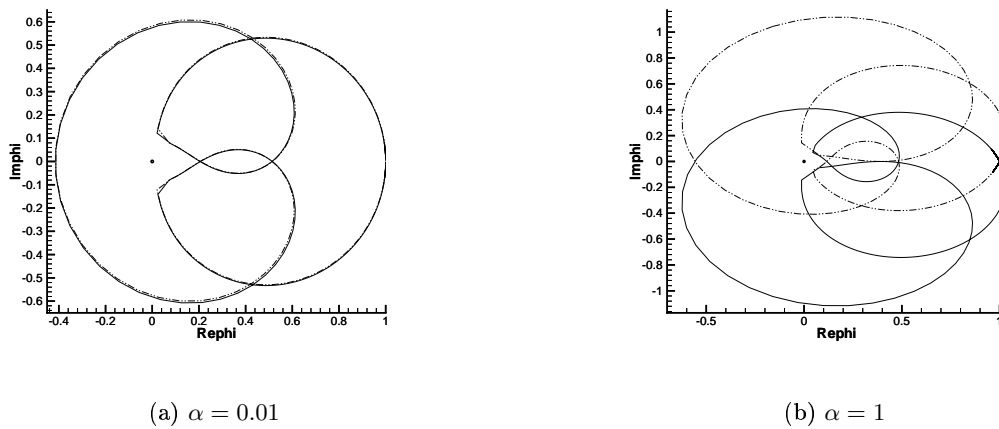


FIG. 9.7 – Diagramme de stabilité isotherme avec correction de Ristorcelli ($N = 5$) dans le plan $(\mathcal{R}e(\varphi), \mathcal{I}m(\varphi))$ pour différentes valeurs de α , cas 5bis : ($M = 2$ et $\beta = 0.3$)

— $k = 1$, - - - - $k = -1$.

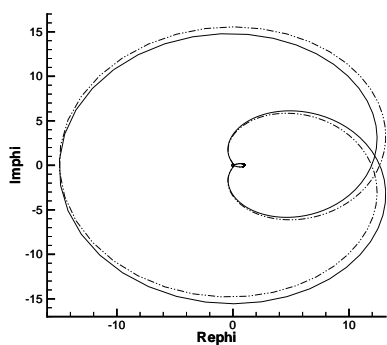
Cas 6 ($M = 5, \beta = 0.3$) avec correction faible ou forte

Augmentons maintenant le nombre de Mach en passant de $M = 2$ à $M = 5$, toujours pour la correction faible ($N = 2$). Les figures (9.8, a et b) montrent alors que les courbes effectuent un tour autour de l'origine et que l'on est de nouveau instable fortement.

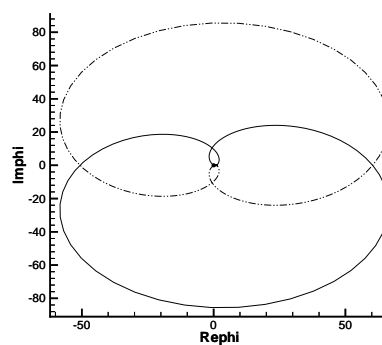
Si l'on diminue alors $N = 1.01$ de manière à augmenter la force de la correction de Ristorcelli, on parvient à redevenir stable pour $\alpha = 0.01$ comme le montre la figure (9.8, c). En revanche, pour $\alpha = 1$ (qui est une valeur certainement trop élevée comme nous l'avons dit précédemment), le choc est à nouveau instable (figure (9.8, d)).

Cartes de stabilité

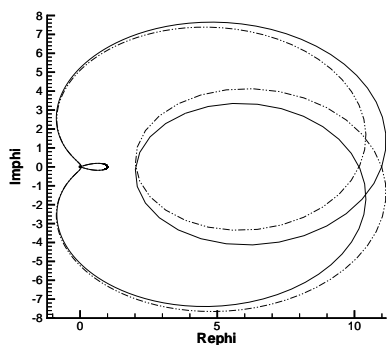
Tous les cas précédents permettent de voir que les trois paramètres (M, β, α) ont tous une influence sur la stabilité multidimensionnelle du choc plan. Nous allons maintenant présenter quelques cartes dans les plans (M, α) et (M, β) pour synthétiser les différents résultats obtenus précédemment. Les nombres réduits (α, β, M) sont donc



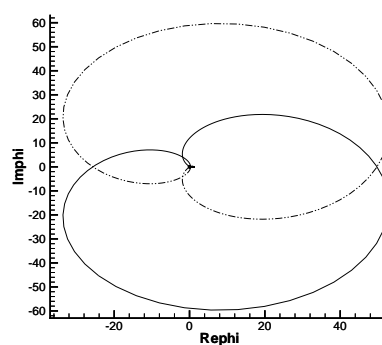
(a) $\alpha = 0.01, N = 2$



(b) $\alpha = 1, N = 2$



(c) $\alpha = 0.01, N = 1.01$



(d) $\alpha = 1, N = 1.01$

FIG. 9.8 – Diagramme de stabilité isotherme pour deux corrections de Ristorcelli ($N = 2, N = 1.01$) dans le plan $(\mathcal{R}e(\varphi), \mathcal{I}m(\varphi))$ pour différentes valeurs de α ($M = 5$ et $\beta = 0.3$)

— $k = 1$, - - - - $k = -1$.

choisis selon (9.229). Notons que quand le Mach turbulent β sera proche de β_{lim} , cela signifiera que le Mach associé à la deuxième onde sera proche de l'unité, tout en lui restant supérieur. Nous allons réaliser des cartes pour $N = 1.01$, c'est-à-dire pour un N le plus grand possible afin d'avoir le β_{lim} le plus grand ($\beta = 0.35$ dans ce cas). C'est *a priori* un N maximum qui garantira une zone de stabilité maximale sur les cartes suivantes. Nous comparerons la carte réalisée pour $N = 1.01$ avec deux autres cartes, une en isotherme sans Ristorcelli et une autre avec une correction plus faible telle que $N = 2$.

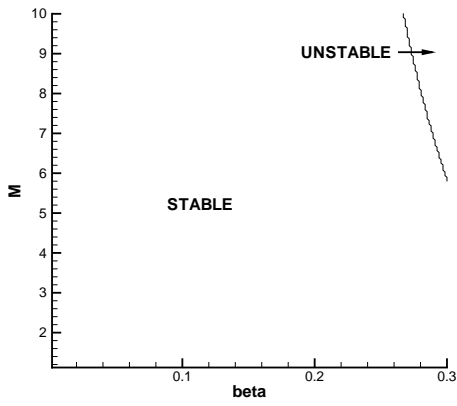
Cartes de stabilité dans le plan (M, β) pour $\alpha = 0.1$ fixé et différentes corrections

La première série de cartes est réalisée dans le plan (M, β) à $\alpha = 0.1$ fixé (voir les figures (9.9)). Tout d'abord, sur la figure (9.9, a), pour une correction forte, on remarque une zone d'instabilité proche de $\beta = 0.3$, c'est-à-dire proche de la zone où $M_a^R \simeq 1$. Cette zone est présente pour tout α . Plus α est petit plus elle tend à se déplacer vers la droite. Plus α est grand, plus la zone d'instabilité est importante et se déplace vers la gauche comme nous le verrons sur les diagrammes dans le plan (M, α) un peu plus loin. Cependant, celle-ci reste toujours dans le voisinage de $\beta = 0.3$. On peut supposer que cette zone est juste due au choix de la fonction ψ . De plus, si l'on compare cette carte à celle obtenue pour $N = 2$ (figure (9.9, c)), on remarque que la zone de stabilité est à nouveau proche du $\beta_{lim} = 0.28$. Cette intuition est aussi confirmée par la carte réalisée en isotherme (figure (9.9, b)) sans correction de Ristorcelli. On y retrouve bien sûr le domaine de surcompressivité comme sur la figure (5.2), mais aussi une zone d'instabilité forte intermédiaire immédiatement en dessous. Cette zone d'instabilité correspond aussi à une zone où le Mach évalué sur la deuxième onde est proche de un car on est proche de l'accident de surcompression.

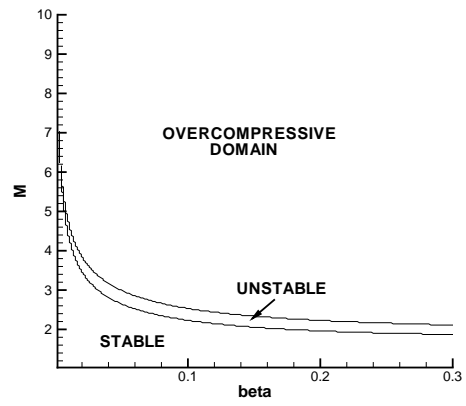
Enfin, il est important de noter qu'avec la correction de Ristorcelli ($N = 1.01$) le domaine de stabilité s'est considérablement accru. Il existe des β assez élevés (typiquement $\beta < 0.25$) tels que l'on soit toujours stable quel que soit le Mach dans la plage $M \in [1, 10]$ par rapport au cas sans correction. Tout l'intérêt de la correction devient ici évident.

Cartes de stabilité dans le plan (M, α) pour $\beta = 0.3$ fixé et différentes corrections

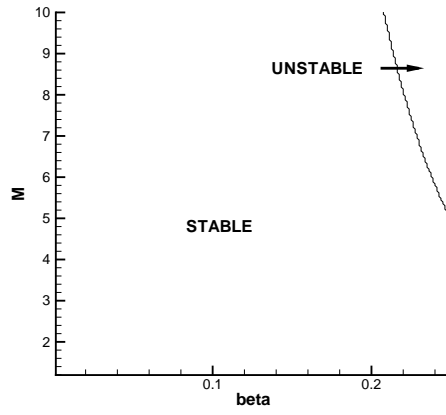
Intéressons nous maintenant au plan (M, α) à β fixé, pour voir l'effet du coefficient d'anisotropie sur la stabilité. Pour cela nous allons nous placer à $\beta = 0.3$ de manière à être sûr d'avoir une zone d'instabilité pour $N = 1.01$. Ceci est représenté sur la figure (9.10, a). Pour $\beta = 0.3$, il existe des Mach (assez élevés : $M > 5, 6$) pour lequel on est toujours instable fortement. Cette zone d'instabilité forte correspond encore une fois à des Mach M_a^R évalués sur la deuxième onde proche de 1 et peut être dû au choix particulier de la loi de production de turbulence longitudinale ψ_N . De plus, une zone de stabilité neutre (correspondant à une racine de φ sur l'axe des imaginaires purs) apparaît. En isotherme sans correction de Ristorcelli (figure (9.10, b)), on est rapidement limité par la zone de surcompression (dès que $M > 2$) conformément à la figure (5.2). Il existe une zone d'instabilité forte proche de l'accident de surcompression. Encore une fois, la correction de Ristorcelli permet d'augmenter considérablement la



(a) $N = 1.01$



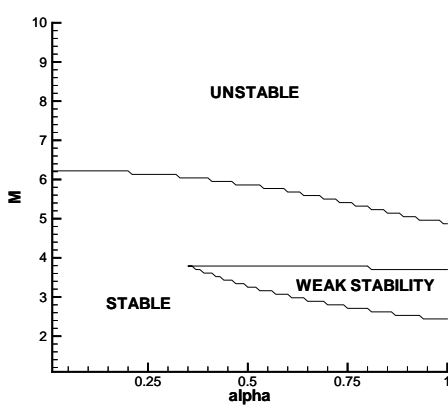
(b) Sans correction



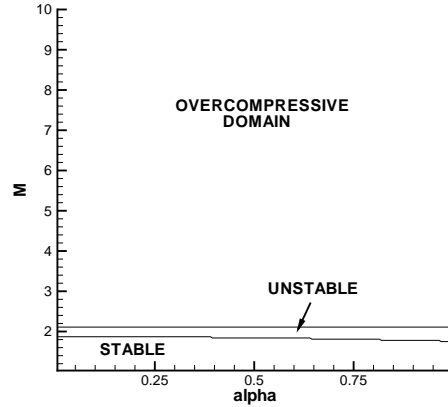
(c) $N = 2$

FIG. 9.9 – Carte de stabilité dans le plan (M, β) à $\alpha = 0.1$ fixé

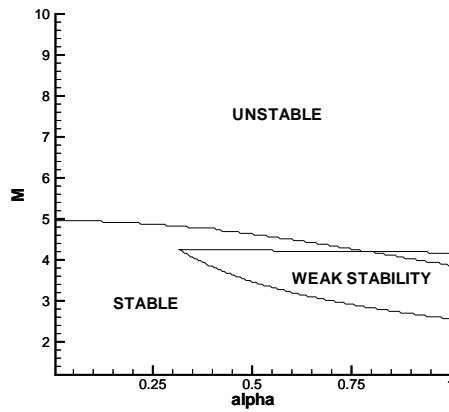
zone de validité du modèle. De plus, nous n'avons jamais observé numériquement de zone de stabilité neutre pour l'isotherme sans correction de Ristorcelli. Pour $N = 2$ (figure(9.10, c)), c'est-à-dire une correction plus faible, la zone de stabilité diminue logiquement mais reste bien supérieure à celle de l'isotherme sans correction.



(a) $N = 1.01, \beta = 0.3$



(b) Sans correction, $\beta = 0.3$



(c) $N = 2, \beta = 0.25$

FIG. 9.10 – Carte de stabilité dans le plan (M, α) à $\beta = 0.3$ fixé

En conclusion, la correction de Ristorcelli permet d'éliminer l'accident de surcompression et d'augmenter considérablement la plage de paramètres (M, β, α) de validité du modèle en repoussant la zone d'instabilité forte pour des Mach relatifs et des Mach turbulents plus élevés. En contrepartie des zones de stabilité faible peuvent apparaître (figures (9.10, a et c)) contrairement au cas isotherme sans correction de Ristorcelli (figure (9.10, b)).

9.4 Application au cadre anisotherme sans correction de Ristorcelli

Nous nous intéressons dans cette section à l'étude de la stabilité multidimensionnelle des solutions choc plan du modèle RSM anisotherme. Rappelons que, pour ce modèle, on ne considère plus la correction de Ristorcelli. Il convient donc de choisir les paramètres (α, β, M) de sorte que l'accident de surcompression ne survienne jamais. Dans la pratique, il suffit pour cela de choisir (M, β) suffisamment petit grâce à la figure (4.5, b), pour $\gamma = 1.4$, et $\alpha \in [0, 1]$ (voir le paragraphe (6.3.2) du chapitre 6). En conséquence, et selon le paragraphe (8.3) du chapitre 8, la stabilité structurelle du choc droit est garantie.

Le principal résultat de cette section est que des instabilités multidimensionnelles violentes peuvent apparaître, dans le cas où les conditions de stabilité structurelles sont satisfaites.

La construction du produit scalaire (9.153) est toute aussi fastidieuse que dans le cadre isotherme. Nous avons donc choisi d'en épargner le détail au lecteur, bien que toutes les étapes de calculs aient été soigneusement vérifiées et validées. Nous ne décrivons ici que les étapes clefs. Encore une fois, en raison de la taille imposante de ce produit scalaire, nous proposons la forme détaillée des deux vecteurs le composant, sans procéder au produit proprement dit : à savoir le vecteur ${}^t D_{\mathbf{u}}^{-1} \mathbf{v}(\mathbf{u}_R) \Lambda_1(\mathbf{u}_R, k, \omega)$ et le vecteur issu de la linéarisation des relations de saut généralisées.

La recherche de zéros éventuels ω dans le demi-plan complexe \mathbb{C}^+ , à un nombre d'onde k fixé, repose sur les propriétés d'analyticité et d'homogénéité du déterminant de Lopatinski. Elle est menée numériquement en faisant appel au principe de l'argument, et en exploitant de manière convenable la propriété de stabilité structurelle acquise par construction. Cette méthode est en tout point identique à celle proposée dans le cadre isotherme au paragraphe (9.3.7).

9.4.1 Systèmes d'inconnues et notations

Les équations d'évolution du choc plan perturbé dans les régions de régularité, à savoir en dehors de la surface de discontinuité en $x = 0$, sont formulées en l'inconnue \mathbf{u} , associée au repère de référence $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2)$:

$$\mathbf{u} = (\rho, u, v, p, R_{11}, R_{12}, R_{22}). \quad (9.232)$$

La forme développée des équations est sous la forme dimensionnée :

$$\left\{ \begin{array}{l} \partial_t \rho + u \partial_x \rho + \rho \partial_x u + v \partial_y \rho + \rho \partial_y v = 0, \\ \partial_t u + u \partial_x u + \frac{1}{\rho} \partial_x p + \frac{1}{\rho} \partial_x R_{11} + v \partial_y u + \frac{1}{\rho} \partial_y R_{12} = 0, \\ \partial_t v + u \partial_x v + \frac{1}{\rho} \partial_x R_{12} + v \partial_y v + \frac{1}{\rho} \partial_y p + \frac{1}{\rho} \partial_y R_{22} = 0, \\ \partial_t p + u \partial_x p + \gamma p \partial_x u + v \partial_y p + \gamma p \partial_y v = 0, \\ \partial_t R_{11} + u \partial_x R_{11} + 3R_{11} \partial_x u + v \partial_y R_{11} + 2R_{12} \partial_y u + R_{11} \partial_y v = 0, \\ \partial_t R_{12} + u \partial_x R_{12} + 2R_{12} \partial_x u + R_{11} \partial_x v + v \partial_y R_{12} + 2R_{12} \partial_y v + R_{22} \partial_y u = 0, \\ \partial_t R_{22} + u \partial_x R_{22} + 2R_{12} \partial_x v + R_{22} \partial_x u + v \partial_y R_{22} + 3R_{22} \partial_y v = 0. \end{array} \right. \quad (9.233)$$

Les matrices $\mathcal{A}_1(\mathbf{u})$ et $\mathcal{A}_2(\mathbf{u})$ sont donc clairement données par :

$$\mathcal{A}_1(\mathbf{u}) = \begin{pmatrix} u & \rho & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & u & 0 & \frac{1}{\rho} & \frac{1}{\rho} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & u & 0 & 0 & \frac{1}{\rho} & 0 \\ 0 & \gamma p & 0 & u & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3R_{11} & 0 & 0 & u & 0 & 0 \\ 0 & 2R_{12} & R_{11} & 0 & 0 & u & 0 \\ 0 & R_{22} & 2R_{12} & 0 & 0 & 0 & u \end{pmatrix}. \quad (9.234)$$

$$\mathcal{A}_2(\mathbf{u}) = \begin{pmatrix} v & 0 & \rho & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & v & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{\rho} & 0 \\ 0 & 0 & v & \frac{1}{\rho} & 0 & 0 & \frac{1}{\rho} \\ 0 & 0 & \gamma p & v & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2R_{12} & R_{11} & 0 & v & 0 & 0 \\ 0 & R_{22} & 2R_{12} & 0 & 0 & v & 0 \\ 0 & 0 & 3R_{22} & 0 & 0 & 0 & v \end{pmatrix}. \quad (9.235)$$

Les relations de saut généralisées gouvernant la surface de choc perturbée, localisée en $x = 0$, reposent, quant à elles, sur l'inconnue :

$$\mathbf{v} = (\rho, \rho u, \rho v, \rho E, \rho \mathcal{I}, \rho E_t, \rho \mathcal{W}), \quad (9.236)$$

et sont écrites relativement au repère de référence $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2)$.

De manière à simplifier les calculs à venir, nous exploitons, tout comme en isotherme, l'invariance galiléenne des équations en translatant la vitesse normale u de la solution choc non perturbée de $-\sigma$ et la vitesse tangentielle v de $-v_L$. En d'autres termes, nous supposons dans toute la suite, et sans restriction :

$$\sigma = 0, \quad v_L = 0. \quad (9.237)$$

Notons que la vitesse tangentielle v_R de l'état de sortie \mathbf{u}_R du choc plan non perturbé est distincte de v_L , et est dès lors non nulle dès que la composante R_{12}^L du tenseur de Reynolds est choisie non nulle. Conformément au paragraphe (4.2.1), nous supposons sans restriction :

$$R_{12}^L > 0, \text{ soit dès lors } R_{12}^R > 0, \quad (9.238)$$

sauf mention explicite du contraire, *i.e.* $R_{12}^L < 0$, utile dans la suite à l'interprétation des résultats.

Il convient, par ailleurs, de rappeler que la vitesse normale u_R de l'état de sortie \mathbf{u}_R , dans la solution choc plan non perturbé, vérifie nécessairement :

$$u_R > 0. \quad (9.239)$$

En effet, le chapitre 4 a permis d'établir l'invariance du débit relatif $m(\xi) = \rho(\xi)(u(\xi) - \sigma)$ (avec ici $\sigma = 0$) le long du profil de compression, avec la propriété $m = \rho_L u_L > 0$ pour une solution onde compressive associée à la première famille d'onde.

Pour conclure ce paragraphe, fixons quelques notations utilisées dans la suite. Pour alléger les écritures, nous aurons à considérer la nouvelle pulsation $\tilde{\omega}$ définie par :

$$\tilde{\omega} = \frac{\omega + ikv_R}{u_R}, \quad (9.240)$$

où par la propriété de positivité (9.239), les signes de $\mathcal{R}e(\tilde{\omega})$ et $\mathcal{R}e(\omega)$ sont identiques. Par ailleurs, il sera agréable, lors de l'adimensionnement des formules, d'introduire en complément des nombres réduits (α, β, M) , les quantités sans dimension :

$$r = \frac{R_{12}^R}{R_{12}^L}, \quad \zeta^2 = \frac{R_{22}^L}{R_{11}^L}. \quad (9.241)$$

Rappelons d'après la formule adimensionnée (6.20) établie au chapitre 6, que le nombre r trouve la définition suivante :

$$r = \frac{1}{2\beta\eta_R^2} (Y_+^R - Y_-^R), \quad (9.242)$$

de sorte que ce nombre sans dimension, évalué sur l'état \mathbf{u}_R , ne dépend que de l'état \mathbf{u}_L et de σ , et est donc fonction des nombres réduits $(\alpha, \beta, \zeta, M)$.

9.4.2 Détermination du vecteur ${}^t D_{\mathbf{u}}^{-1} \mathbf{v}(\mathbf{u}_R) \Lambda_1(\mathbf{u}_R, k, \omega)$

L'ensemble des calculs est mené dans un premier temps sous forme dimensionnée, une version adimensionnée est ensuite proposée.

La détermination du vecteur propre $\Lambda_1(\mathbf{u}_R, k, \omega)$ est menée en adoptant le mode opératoire détaillé au paragraphe (9.2.2).

Calcul de $\mu_1(\mathbf{u}_R, k, \omega)$

Le principal résultat est :

Lemme 9.4.1. *Soit une pulsation $\omega \in \mathbb{C}^+$ avec $\mathcal{R}e(\omega) > 0$. L'unique valeur propre $\mu_1(\mathbf{u}_R, k, \omega)$ de partie réelle positive de la matrice $-(\omega Id + ik\mathcal{A}_2(\mathbf{u}_R)) (\mathcal{A}_1(\mathbf{u}_R))^{-1}$ s'écrit :*

$$\mu_1(\mathbf{u}_R, k\omega) = \frac{-(\omega + ikv_R)u_R + 3ikR_{12}^R\tau_R}{u_R^2 - c_R^2} - \frac{\sqrt{\Xi(\mathbf{u}_R, k, \omega)}}{u_R^2 - c_R^2}, \quad (9.243)$$

où nous avons posé :

$$\Xi(\mathbf{u}_R, k, \omega) = (\omega + ikv_R)^2 c_R^2 - 6ikR_{12}^R\tau_R(\omega + ikv_R)u_R - k^2 \left(9(R_{12}^R)^2\tau_R^2 + (u_R^2 - c_R^2)(\gamma p_{RT} + 3R_{22}^R\tau_R) \right). \quad (9.244)$$

Dans (9.243), la coupure de la fonction complexe racine carrée est choisie coïncider avec \mathbb{R}^- , l'axe des réels négatifs dans le plan complexe \mathbb{C} .

Pour ce choix, la fonction complexe $(k, \omega) \rightarrow \mu_1(\mathbf{u}_R, k, \omega)$ est analytique dans $\mathbb{R} \times \mathbb{C}^+$ avec $\mathcal{R}e(\omega) > 0$, dès que les conditions de réalisabilité sur le tenseur de Reynolds sont satisfaites.

Avec les notations (9.240) et (9.241), la forme adimensionnée de la valeur propre définie en (9.243) est donnée par :

$$\begin{aligned} \mu_1(\mathbf{u}_R, k, \tilde{\omega}) &= \frac{\mathcal{M}_R}{\mathcal{M}_R^2 - 1} \\ &\times \left(-\tilde{\omega}\mathcal{M}_R + 3ik\mathcal{M}_R \frac{\alpha\beta^2}{M^2\eta_R} r - \sqrt{(\tilde{\omega} - ik\rho_+(\mathbf{u}_R))(\tilde{\omega} - ik\rho_-(\mathbf{u}_R))} \right), \end{aligned} \quad (9.245)$$

où les nombres réels $\rho_{\pm}(\mathbf{u}_R)$ sont définis par :

$$\begin{aligned} \rho_{\pm}(\mathbf{u}_R) &= 3 \frac{\alpha\beta^2}{M^2\eta_R} \mathcal{M}_R^2 r & (9.246) \\ &\pm \sqrt{\frac{1 - \mathcal{M}_R^2}{\mathcal{M}_R^2} \left(1 + 3 \frac{\mathcal{M}_R^2}{M^2} \beta^2 \left((\zeta^2 - \alpha^2) \frac{1}{\eta_R^2} + \alpha^2 r^2 \eta_R^2 - \frac{1}{\eta_R^4} \right) - 9 \frac{\alpha^2 \beta^4 r^2}{M^4 \eta_R^2} \mathcal{M}_R^4 \right)}. \end{aligned}$$

La fonction (9.245), $(k, \tilde{\omega}) \rightarrow \mu_1(\mathbf{u}_R, k, \tilde{\omega})$ est définie dans $\mathbb{R} \times \mathbb{C}^+$ et est analytique pour $\mathcal{R}e(\tilde{\omega}) > 0$.

La propriété d'analyticité rapportée dans ce résultat est attendue dans la théorie générale du déterminant de Lopatinski pour un système hyperbolique (conservatif). Nous la soulignons ici en faisant le lien avec les conditions de réalisabilité du tenseur de Reynolds, que nous avons liées au chapitre 3 à la propriété d'hyperbolicité des modèles RSM. Cette propriété de $\mu_1(\mathbf{u}_R, k, \omega)$ garantit, dans la suite, l'analyticité du produit scalaire (9.153) dans $\mathbb{R} \times \mathbb{C}^+$, avec $\mathcal{R}e(\tilde{\omega}) > 0$. Cette propriété jouera un rôle important dans la recherche des zéros éventuels ω (soit de manière équivalente $\tilde{\omega}$ en (9.240)) dans le demi-plan \mathbb{C}^+ .

Nous concluons ce paragraphe en donnant la démonstration du lemme (9.4.1).

Démonstration. Il s'agit d'exhiber l'unique racine $\mu_1 \in \mathbb{C}$, avec $\mathcal{R}e(\mu_1) > 0$, du polynôme en μ :

$$\mathbb{P}_{(k,\omega)}(\mu) = \text{Det}\left(\mu \mathcal{A}_1(\mathbf{u}_R) + ik \mathcal{A}_1(\mathbf{u}_R) + \omega \text{Id}\right) = 0, \quad \mathcal{R}e(\omega) > 0. \quad (9.247)$$

En omettant, sans risque de confusion, l'indice R faisant référence à l'état \mathbf{u}_R , ce polynôme se factorise comme suit :

$$\begin{aligned} \mathbb{P}_{(k,\omega)}(\mu) &= (\mu u + \omega + ikv)^3 & (9.248) \\ &\times \left((\mu u + \omega + ikv)^2 - (\mu^2 c^2 - k^2(c^2 - 3a^2 + 3R_{22}\tau) + 6ik\mu R_{12}\tau) \right) \\ &\times \left((\mu u + \omega + ikv)^2 - (\mu^2 a^2 - R_{22}\tau k^2 + 2ik\mu R_{12}\tau) \right). \end{aligned}$$

On remarque alors que ce polynôme est identique, à un facteur multiplicatif $\mu u + \omega + ikv$ près, à celui obtenu à la section (9.3.2) concernant le cadre isotherme. Il suffit donc de suivre point par point la démonstration correspondante, en remplaçant T_0 par $\gamma p \tau$ si nécessaire, pour aboutir aux différents résultats du lemme (9.4.1). Nous renvoyons donc le lecteur à la démonstration effectuée dans le cadre isotherme. Nous soulignons seulement ici que pour obtenir la forme adimensionnée $\mu_1(\mathbf{u}_R, k, \tilde{\omega})$, il faut bien sûr considérer désormais que $\mathcal{I} = \mathcal{I}_R = \mathcal{I}_L = 1$ est un invariant du système et remplacer R_{11}^R par :

$$R_{11}^R = \frac{1}{\eta_R^3}. \quad (9.249)$$

Cela revient ainsi à remplacer formellement $\mathcal{I}_R = 1$ dans les formules de l'isotherme. Ceci conclut la preuve. \square

Calcul de $\Lambda_1(\mathbf{u}_R, k, \omega)$

Conformément à la seconde étape proposée au paragraphe (9.2.2), il convient d'inverser en ω la fonction $(k, \omega) \rightarrow \mu_1(\mathbf{u}_R, k, \omega)$, pour définir, à \mathbf{u}_R fixé, $(k, \mu_1) \rightarrow \omega(k, \mu_1)$. Un calcul explicite donne :

$$\omega(k, \mu_1) = -(\mu_1 u_R + ikv_R) + \sqrt{\mu_1^2 c_R^2 + 6ik\mu_1 R_{12}^R \tau_R - k^2(\gamma p_{RT} + 3R_{22}^R \tau_R)}. \quad (9.250)$$

L'indétermination de signe devant la racine carrée de (9.250) est levée en annulant k , et en exigeant de $\mathcal{R}e(\omega(k, \mu_1)) > 0$.

Le vecteur propre à gauche $\Lambda_1(\mathbf{u}_R, k, \omega)$ est alors déduit des étapes 3 et 4 de la section (9.2.2), et s'écrit en variable $(k, \tilde{\omega}) \in \mathbb{R} \times \mathbb{C}^+$:

$$\Lambda_1(\mathbf{u}_R, k, \omega) = \begin{pmatrix} 0 \\ -\mu_1(\mathbf{u}_R, k, \tilde{\omega}) \rho_R u_R (\mu_1(\mathbf{u}_R, k, \tilde{\omega}) + \tilde{\omega}) \\ -ik \rho_R u_R (\mu_1(\mathbf{u}_R, k, \tilde{\omega}) + \tilde{\omega}) \\ \mu_1^2(\mathbf{u}_R, k, \tilde{\omega}) - k^2 \\ \mu_1^2(\mathbf{u}_R, k, \tilde{\omega}) \\ 2ik\mu_1(\mathbf{u}_R, k, \tilde{\omega}) \\ -k^2 \end{pmatrix}, \quad (9.251)$$

avec $\mu_1(\mathbf{u}_R, k, \tilde{\omega})$ définie en (9.245), (9.246).

Calcul de ${}^t D_{\mathbf{u}}^{-1} \mathbf{v}(\mathbf{u}_R) \Lambda_1(\mathbf{u}_R, k, \tilde{\omega})$

La jacobienne de la transformation $\mathbf{u} \rightarrow \mathbf{v}(\mathbf{u})$, évaluée en \mathbf{u}_R , s'écrit :

$$D_{\mathbf{u}} \mathbf{v}(\mathbf{u}_R) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ u_R & \rho_R & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ v_R & 0 & \rho_R & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{u_R^2 + v_R^2}{2} & \rho_R u_R & \rho_R v_R & \frac{1}{\gamma-1} & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ -2\mathcal{I} & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{\rho_R} & 0 & 0 \\ \frac{v_R^2}{2} & 0 & \rho_R v_R & 0 & -\frac{1}{2} \left(\frac{R_{12}^R}{R_{11}^R} \right)^2 & \frac{R_{12}^R}{R_{11}^R} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \left(\frac{R_{12}^R}{R_{11}^R} \right)^2 & -2 \frac{R_{12}^R}{R_{11}^R} & 1 \end{pmatrix}.$$

Dans cette expression nous avons sciemment gardé $\mathcal{I} = \mathcal{I}_L = \mathcal{I}_R = 1$. La transposée de l'inverse de cette matrice est :

$${}^t D_{\mathbf{u}}^{-1} \mathbf{v}(\mathbf{u}_R) = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{u_R}{\rho_R} & -\frac{v_R}{\rho_R} & (\gamma-1) \left(\frac{u_R^2}{2} - \rho_R^2 \mathcal{I} \right) & 2\rho_R^2 \mathcal{I} & \frac{R_{11}^R}{2R_{12}^R} v_R^2 + \frac{R_{12}^R}{\rho_R} & v_R^2 \\ 0 & \frac{1}{\rho_R} & 0 & -(\gamma-1)u_R & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{\rho_R} & 0 & 0 & -v_R \frac{R_{11}^R}{R_{12}^R} & -2v_R \\ 0 & 0 & 0 & \gamma-1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -(\gamma-1) \frac{\rho_R^2}{2} & \rho_R^2 & \frac{\rho_R^2 R_{12}^R}{2R_{11}^R} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -(\gamma-1) & 0 & \frac{R_{11}^R}{R_{12}^R} & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{\gamma-1}{2} & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Nous déduisons alors de l'expression (9.251) exprimant le vecteur propre à gauche $\Lambda_1(\mathbf{u}_R, k, \omega)$, le vecteur ${}^t D_{\mathbf{u}}^{-1} \mathbf{v}(\mathbf{u}_R) \Lambda_1(\mathbf{u}_R)$ recherché :

$${}^t D_{\mathbf{u}}^{-1} \mathbf{v}(\mathbf{u}_R) \Lambda_1(\mathbf{u}_R) = \begin{pmatrix} \mu_1^2(k, \tilde{\omega}) \left((\gamma - 1) \frac{u_R^2}{2} - (\gamma - 3) a_R^2 \right) - k^2 (\gamma - 1) \left(\frac{u_R^2}{2} - a_R^2 \right) \\ + \left(\mu_1(k, \tilde{\omega}) u_R + ik v_R \right) \left(\mu_1(k, \tilde{\omega}) + \tilde{\omega} \right) u_R \\ - k^2 v_R^2 + 2ik \mu_1(k, \tilde{\omega}) \left(\frac{R_{11}^R}{2R_{12}^R} v_R^2 + \frac{R_{12}^R}{\rho_R} \right) \\ - \mu_1(k, \tilde{\omega}) \left(\mu_1(k, \tilde{\omega}) + \tilde{\omega} \right) u_R - \left(\mu_1^2(k, \tilde{\omega}) - k^2 \right) (\gamma - 1) u_R \\ - ik \left(\mu_1(k, \tilde{\omega}) + \tilde{\omega} \right) u_R - 2ik \mu_1(k, \tilde{\omega}) \frac{R_{11}^R}{R_{12}^R} v_R + 2k^2 v_R \\ (\gamma - 1) \left(\mu_1^2(k, \tilde{\omega}) - k^2 \right) \\ - (\gamma - 1) \frac{\rho_R^2}{2} \left(\mu_1^2(k, \tilde{\omega}) - k^2 \right) + \rho_R^2 \mu_1^2(k, \tilde{\omega}) + ik \mu_1(k, \tilde{\omega}) \rho_R^2 \frac{R_{12}^R}{R_{11}^R} \\ - (\gamma - 1) \left(\mu_1^2(k, \tilde{\omega}) - k^2 \right) + 2ik \mu_1(k, \tilde{\omega}) \frac{R_{11}^R}{R_{12}^R} - 2k^2 \\ - \frac{\gamma - 1}{2} \mu_1^2(k, \tilde{\omega}) - \frac{\gamma - 3}{2} k^2 \end{pmatrix}, \quad (9.252)$$

Remarque 9.4.2. En égalisant formellement k à zéro dans (9.252), nous retrouvons le vecteur ${}^t D_{\mathbf{u}}^{-1} \mathbf{v}(\mathbf{u}_R) \tilde{l}_1(\mathbf{u}_R)$ défini en (8.61) à l'occasion de l'étude de la stabilité structurelle du choc droit, à un facteur multiplicatif près, donné par $\rho_R^3 \mu_1^2(0, \tilde{\omega})$. Cette vérification est menée en rappelant que $\mu_1(0, \tilde{\omega}) = -\frac{\tilde{\omega}}{u_R - c_R}$.

La formule partiellement adimensionnée du vecteur (9.252) est donnée dans la tableau (9.4).

9.4.3 Linéarisation des relations de saut généralisées

Dans ce paragraphe, nous reprenons point par point la méthode proposée dans le paragraphe (9.1.7) pour le cadre isotherme. Il s'agit donc de calculer l'application $\mathcal{B}(\mathbf{u}_L, \mathbf{u}_R)$, définie en (9.124) intervenant dans la condition de couplage linéarisée (9.123), pour le modèle RSM anisotherme (sans correction de Ristorcelli). À cette fin, rappelons que nous formulons, dans un premier temps, les relations de saut généralisées pour une solution choc se déplaçant dans une direction normale \mathbf{n} , dans le repère de référence $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2)$, pour, dans un second temps, procéder au développement en ϵ des relations de saut généralisées, dans le cas d'une normale \mathbf{n}^ϵ voisine de \mathbf{e}_1 .

Dans le repère cartésien de référence $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2)$ associé à la solution choc plan non perturbé (9.30), les relations de sauts généralisées formulées dans la direction normale \mathbf{e}_1 à la discontinuité s'écrivent, en vertu de la section (6.4) du chapitre 6, grâce au changement de variable suivant :

$$\mathbf{u} \rightarrow \mathbf{v}(\mathbf{u}) = (\rho, \rho u, \rho v, \rho E, \rho \mathcal{I}, \rho E_t, \rho \mathcal{W}), \quad (9.254)$$

$${}^t D_{\mathbf{u}}^{-1} \mathbf{v}(\mathbf{u}_R) \Lambda_1(\mathbf{u}_R, k, \tilde{\omega}) = \left\{ \begin{array}{l} c_L^2 \left\{ \mu_1(\mathbf{u}_R, k, \tilde{\omega}) \tilde{\omega} M^2 \eta_R^2 \right. \\ \left. + \mu_1^2(\mathbf{u}_R, k, \tilde{\omega}) \left(\frac{\gamma+1}{2} M^2 \eta_R^2 + (3-\gamma) \frac{\beta^2}{\eta_R^2} \right) - ik \tilde{\omega} \alpha \beta^2 \eta_R (r-1) \right. \\ \left. + ik \mu_1(\mathbf{u}_R, k, \tilde{\omega}) \alpha \beta^2 \left((1+r) \eta_R + \frac{\beta^2 (1-r)^2}{M^2 \eta_R^3 r} \right) \right. \\ \left. + k^2 \left((\gamma-1) \frac{\beta^2}{\eta_R^2} - \frac{\alpha^2 \beta^4}{M^2} (1-r)^2 - \frac{\gamma-1}{2} M^2 \eta_R^2 \right) \right\}. \\ \\ c_R \left\{ -\mu_1(\mathbf{u}_R, k, \tilde{\omega}) \left(\gamma \mu_1(\mathbf{u}_R, k, \tilde{\omega}) + \tilde{\omega} \right) \mathcal{M}_R + k^2 (\gamma-1) \mathcal{M}_R \right\} \\ \\ c_R k \left\{ -i \tilde{\omega} \mathcal{M}_R + 2k \frac{\alpha \beta^2 \mathcal{M}_R}{M^2 \eta_R} (1-r) \right. \\ \left. - i \mu_1(\mathbf{u}_R, k, \tilde{\omega}) \mathcal{M}_R \left(1 + 2 \frac{\beta^2 (1-r)}{M^2 \eta_R^4 r} \right) \right\}. \\ \\ (\gamma-1) \left\{ \mu_1^2(\mathbf{u}_R, k, \tilde{\omega}) - k^2 \right\}. \\ \\ \rho_L^2 \left\{ \frac{3-\gamma}{2} \frac{\mu_1^2(\mathbf{u}_R, k, \tilde{\omega})}{\eta_R^2} + \frac{\gamma-1}{2} \frac{k^2}{\eta_R^2} + ik \mu_1(\mathbf{u}_R, k, \tilde{\omega}) \alpha r \eta_R \right\}. \\ \\ -(\gamma-1) \mu_1^2(\mathbf{u}_R, k, \tilde{\omega}) - (3-\gamma) k^2 + 2ik \mu_1(\mathbf{u}_R, k, \tilde{\omega}) \frac{1}{\alpha \eta_R^3 r}. \\ \\ -\frac{\gamma-1}{2} \mu_1^2(\mathbf{u}_R, k, \tilde{\omega}) - \frac{3-\gamma}{2} k^2. \end{array} \right. \quad (9.253)$$

 TAB. 9.4 – Expression de ${}^t D_{\mathbf{u}}^{-1} \mathbf{v}(\mathbf{u}_R) \Lambda_1(\mathbf{u}_R, k, \tilde{\omega})$ dans la cadre anisotherme

où \mathbf{u} est le vecteur inconnu défini en (9.232). Nous rappelons, par convenance pour le lecteur, les définitions suivantes :

$$\mathcal{I} = R_{11}\tau^3, \quad \mathcal{V} = \frac{R_{12}\tau^2}{\sqrt{\mathcal{I}}}, \quad \rho E_t = \rho \frac{v^2 + \mathcal{V}^2}{2}, \quad \rho \mathcal{W} = R_{22} - \frac{R_{12}^2}{R_{11}}. \quad (9.255)$$

En faisant choix d'un vecteur unitaire \mathbf{n} destiné à fixer une nouvelle direction normale privilégiée après rotation du vecteur \mathbf{e}_1 , les formules (9.80)-(9.81) définissant l'application $\tilde{\mathbf{u}}(\mathbf{u}, \mathbf{n})$ conduisent clairement à son analogue $\tilde{\mathbf{v}}(\mathbf{v}, \mathbf{n})$, en considérant :

$$\mathbf{v}_n = \tilde{\mathbf{v}}(\mathbf{v}, \mathbf{n}) = (\rho, \rho u_n, \rho v_n, \rho E, \rho \mathcal{I}_n, \rho E_t^n, \rho \mathcal{W}_n), \quad (9.256)$$

avec les nouvelles définitions, déduites de (9.255) :

$$\mathcal{I}_n = R_{nn}\tau^3, \quad \mathcal{V}_n = \frac{R_{n\tau}\tau^2}{\sqrt{\mathcal{I}_n}}, \quad \rho E_t^n = \rho \frac{v_n^2 + \mathcal{V}_n^2}{2}, \quad \rho \mathcal{W}_n = R_{\tau\tau} - \frac{R_{n\tau}^2}{R_{nn}}, \quad (9.257)$$

où nous explicitons les quantités scalaires introduites en (9.257) en fonction des composantes (n_1, n_2) de la normale \mathbf{n} :

$$\begin{aligned} u_n &= n_1 u + n_2 v, \\ v_n &= -n_2 u + n_1 v, \\ R_{nn} &= n_1^2 R_{11} + n_2^2 R_{22} + 2n_1 n_2 R_{12}, \\ R_{n\tau} &= (n_1^2 - n_2^2) R_{12} + n_1 n_2 (R_{22} - R_{11}), \\ R_{\tau\tau} &= n_2^2 R_{11} + n_1^2 R_{22} - 2n_1 n_2 R_{12}. \end{aligned} \quad (9.258)$$

Avec ces notations, une fonction discontinue $\mathbf{v}(t, x, y)$ séparant deux états \mathbf{v}_L et \mathbf{v}_R et animée d'une vitesse s , définie dans le repère $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2)$ selon :

$$\mathbf{v}(t, x, y) = \mathbf{v}_L + (\mathbf{v}_R - \mathbf{v}_L) H(xn_1 + yn_2 - st), \quad t > 0, \quad (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad (9.259)$$

désigne une solution choc plan se propageant dans la direction normale \mathbf{n} si et seulement si, en introduisant grâce à l'application (9.256) :

$$\mathbf{v}_{n,L} = \tilde{\mathbf{v}}(\mathbf{v}_L, \mathbf{n}), \quad \mathbf{v}_{n,R} = \tilde{\mathbf{v}}(\mathbf{v}_R, \mathbf{n}), \quad (9.260)$$

l'état $\mathbf{v}_{n,R}$ est solution des relations de Rankine-Hugoniot généralisées suivantes :

$$\left\{ \begin{array}{l} -s(\rho_R - \rho_L) + ((\rho u_n)_R - (\rho u_n)_L) = 0, \\ -s((\rho u_n)_R - (\rho u_n)_L) + ((\rho u_n^2 + p + \rho^3 \mathcal{I}_n)_R - (\rho u_n^2 + p + \rho^3 \mathcal{I}_n)_L) = 0, \\ -s((\rho v_n)_R - (\rho v_n)_L) + ((\rho u_n v_n + \rho^2 \sqrt{\mathcal{I}_n} \mathcal{V}_n)_R - (\rho u_n v_n + \rho^2 \sqrt{\mathcal{I}_n} \mathcal{V}_n)_L) = 0, \\ -s((\rho E)_R - (\rho E)_L) + (((\rho E + p + \rho^3 \mathcal{I}_n)u_n)_R - ((\rho E + p + \rho^3 \mathcal{I}_n)u_n)_L) = 0, \\ -s((\rho \mathcal{I}_n)_R - (\rho \mathcal{I}_n)_L) + ((\rho \mathcal{I}_n u_n)_R - (\rho \mathcal{I}_n u_n)_L) = 0, \\ -s((\rho E_t^n)_R - (\rho E_t^n)_L) \\ \quad + ((\rho E_t^n u_n + \rho^2 \sqrt{\mathcal{I}_n} \mathcal{V}_n v_n)_R - (\rho E_t^n u_n + \rho^2 \sqrt{\mathcal{I}_n} \mathcal{V}_n v_n)_L) = \mathcal{C}_{E_t}(\mathbf{v}_{n,L}, s) \\ -s((\rho \mathcal{W}_n)_R - (\rho \mathcal{W}_n)_L) + ((\rho \mathcal{W}_n u_n)_R - (\rho \mathcal{W}_n u_n)_L) = 0. \end{array} \right. \quad (9.261)$$

Ces relations prenant une forme identique aux conditions de saut (6.57), proposition (6.4.2), reflètent simplement l'invariance par rotation des équations permettant de passer des équations (9.82) dans le repère $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2)$, à leur formulation (9.85) dans le repère $(\mathbf{n}, \mathbf{n}_\perp)$.

Ici, et par convenance pour l'analyse à venir, les relations de saut généralisées (9.261) sont données sous forme dimensionnée. Le lien entre la fonction cinétique \mathcal{C}_{E_t} et son homologue adimensionnée κ_{E_t} (voir la section (6.4), chapitre 6) requiert l'introduction du carré du nombre de Mach normal :

$$M_n^2 = M_c^2(\mathbf{v}_{\mathbf{n},L}) = \left(\frac{u_{n,L} - s}{c_{n,L}} \right)^2, \quad c_{n,L} = c(\mathbf{v}_{\mathbf{n},L}), \quad (9.262)$$

du carré du nombre de Mach turbulent normal :

$$\beta_n^2 = \beta^2(\mathbf{v}_{\mathbf{n},L}) = \left(\frac{a_{n,L}}{c_{n,L}} \right)^2, \quad a_{n,L} = a(\mathbf{v}_{\mathbf{n},L}), \quad (9.263)$$

et du carré du coefficient d'anisotropie normal :

$$\alpha_n^2 = \alpha^2(\mathbf{v}_{\mathbf{n},L}) = \left(\frac{R_{n\tau}^L}{R_{nn}^L} \right)^2, \quad (9.264)$$

où les définitions des vitesses $c(\mathbf{v})$ et $a(\mathbf{v})$ introduite à la proposition (3.2.1) du chapitre 3, restent inchangées, *i.e.* :

$$a_n = a(\mathbf{v}_{\mathbf{n}}) = \sqrt{\frac{R_{nn}}{\rho}}, \quad c_n = c(\mathbf{v}_{\mathbf{n}}) = \sqrt{\gamma p \tau + 3a_n^2}. \quad (9.265)$$

Armés de ces notations, nous avons :

$$\mathcal{C}_{E_t}(\mathbf{v}_{\mathbf{n},L}, s) = m_n c_{n,L}^2 \kappa_{E_t}(\alpha_n^2, \beta_n^2, M_n^2), \quad m_n = \rho(u_n - s), \quad (9.266)$$

où par la propriété d'invariance par rotation des équations, la fonction cinétique adimensionnée $(\beta, M) \rightarrow \kappa_{E_t}(\alpha^2, \beta^2, M^2)$ trouve évidemment la même définition qu'en (6.59), section (6.4) du chapitre 6.

Armés de ces relations, nous pouvons procéder à la linéarisation des relations de saut généralisées (9.99). Pour tout $t > 0$ et $y \in \mathbb{R}$, ces relations de saut caractérisent une solution choc qui, comprise dans le repère de référence $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2)$, se propage dans la direction normale $\mathbf{n}^\epsilon(t, y)$, définie en (9.88), en séparant les traces $\mathbf{u}_L^\epsilon(t, 0^-, y)$ et $\mathbf{u}_R^\epsilon(t, 0^+, y)$ des solutions perturbées \mathbf{u}_L^ϵ et \mathbf{u}_R^ϵ . De manière à alléger les notations, nous désignons par \mathbf{u}^ϵ , l'une quelconque de ces traces, et par \mathbf{u} la quantité non perturbée, puis par \mathbf{n}^ϵ la direction normale de propagation. Rappelons le développement au premier ordre en ϵ de \mathbf{n}^ϵ , donné en (9.119) :

$$\mathbf{n}^\epsilon = \mathbf{e}_1 + \epsilon \begin{vmatrix} 0 \\ -\partial_y \varphi \end{vmatrix} + \mathcal{O}(\epsilon^2). \quad (9.267)$$

Conformément à la démarche proposée au précédent paragraphe, nous débutons la linéarisation par :

Lemme 9.4.3. *La linéarisation partielle au premier ordre en ϵ selon le second argument \mathbf{n}^ϵ du vecteur d'état $\mathbf{v}_{\mathbf{n}^\epsilon}^\epsilon = \tilde{\mathbf{v}}(\mathbf{u}^\epsilon, \mathbf{n}^\epsilon)$, donnée par :*

$$\tilde{\mathbf{v}}(\mathbf{u}^\epsilon, \mathbf{n}^\epsilon) = \mathbf{v}(\mathbf{u}^\epsilon) + \epsilon \nabla_{\mathbf{e}} \tilde{\mathbf{v}}(\mathbf{u}, \mathbf{e}_1)(0, -\partial_y \varphi(t, y)), \quad (9.268)$$

se déduit des formules (9.258) selon :

$$\begin{cases} u_{n^\epsilon}^\epsilon = u^\epsilon - \epsilon v \partial_y \varphi + \mathcal{O}(\epsilon^2), \\ v_{n^\epsilon}^\epsilon = v^\epsilon + \epsilon u \partial_y \varphi + \mathcal{O}(\epsilon^2), \\ R_{n^\epsilon n^\epsilon}^\epsilon = R_{11}^\epsilon - 2\epsilon R_{12} \partial_y \varphi + \mathcal{O}(\epsilon^2), \\ R_{n^\epsilon \tau^\epsilon}^\epsilon = R_{12}^\epsilon + \epsilon (R_{11} - R_{22}) \partial_y \varphi + \mathcal{O}(\epsilon^2), \\ R_{\tau^\epsilon \tau^\epsilon}^\epsilon = R_{22}^\epsilon + 2\epsilon R_{12} \partial_y \varphi + \mathcal{O}(\epsilon^2). \end{cases} \quad (9.269)$$

Dans un second temps, la linéarisation (9.120) de la fonction cinétique $\mathcal{C}_{E_t}(\tilde{\mathbf{u}}(\mathbf{u}^\epsilon, \mathbf{n}^\epsilon), s^\epsilon)$ avec

$$s^\epsilon = \frac{\partial_t \phi^\epsilon}{\sqrt{1 + |\partial_y \phi^\epsilon|^2}} = \sigma + \epsilon \partial_t \varphi + \mathcal{O}(\epsilon^2),$$

requiert, via la formule (9.266), les résultats suivants :

Lemme 9.4.4. *La linéarisation partielle en ϵ de \mathbf{n}^ϵ au voisinage de $\mathbf{n}^{\epsilon=0} = \mathbf{e}_1$, des vitesses (9.265) s'écrit :*

$$\begin{aligned} a_{n^\epsilon}^\epsilon &= a(\tilde{\mathbf{u}}(\mathbf{u}^\epsilon, \mathbf{n}^\epsilon)) = a(\mathbf{u}^\epsilon) - \epsilon a(\mathbf{u}) \frac{R_{12}}{R_{11}} \partial_y \varphi + \mathcal{O}(\epsilon^2), \\ (c_{n^\epsilon}^\epsilon)^2 &= c^2(\tilde{\mathbf{u}}(\mathbf{u}^\epsilon, \mathbf{n}^\epsilon)) = c^2(\mathbf{u}^\epsilon) - 6\epsilon R_{12} \tau \partial_y \varphi + \mathcal{O}(\epsilon^2). \end{aligned} \quad (9.270)$$

La linéarisation partielle de $M_c^2(\tilde{\mathbf{u}}(\mathbf{u}^\epsilon, \mathbf{n}^\epsilon))$, $\beta^2(\tilde{\mathbf{u}}(\mathbf{u}^\epsilon, \mathbf{n}^\epsilon))$ et $\alpha^2(\tilde{\mathbf{u}}(\mathbf{u}^\epsilon, \mathbf{n}^\epsilon))$ est alors :

$$\begin{aligned} (M_{n^\epsilon}^\epsilon)^2 &= M_c^2(\tilde{\mathbf{u}}(\mathbf{u}^\epsilon, \mathbf{n}^\epsilon)) = M_c^2(\mathbf{u}^\epsilon) - 2\epsilon \frac{u - \sigma}{c^2(\mathbf{u})} \partial_t \varphi \\ &\quad + 2\epsilon \left(3M_c^2(\mathbf{u}) \frac{R_{12}\tau}{c^2(\mathbf{u})} - \frac{u - \sigma}{c^2(\mathbf{u})} v \right) \partial_y \varphi + \mathcal{O}(\epsilon^2), \\ (\beta_{n^\epsilon}^\epsilon)^2 &= \beta^2(\tilde{\mathbf{u}}(\mathbf{u}^\epsilon, \mathbf{n}^\epsilon)) = \beta^2(\mathbf{u}^\epsilon) - 2\epsilon \frac{R_{12}\tau}{c^2(\mathbf{u})} \left(1 - 3\beta^2(\mathbf{u}) \right) \partial_y \varphi + \mathcal{O}(\epsilon^2), \\ (\alpha_{n^\epsilon}^\epsilon)^2 &= \alpha^2(\tilde{\mathbf{u}}(\mathbf{u}^\epsilon, \mathbf{n}^\epsilon)) = \alpha^2(\mathbf{u}^\epsilon) + 2\epsilon \alpha^2(\mathbf{u}) \left(\frac{R_{11} - R_{22}}{R_{12}} - 2\alpha(\mathbf{u}) \right) \partial_y \varphi + \mathcal{O}(\epsilon^2). \end{aligned} \quad (9.271)$$

Les linéarisations partielles de $M_c(\tilde{\mathbf{u}}(\mathbf{u}^\epsilon, \mathbf{n}^\epsilon))$, $\beta(\tilde{\mathbf{u}}(\mathbf{u}^\epsilon, \mathbf{n}^\epsilon))$ et $\alpha(\tilde{\mathbf{u}}(\mathbf{u}^\epsilon, \mathbf{n}^\epsilon))$ se déduisent aisément par composition avec la fonction racine carrée.

Le tableau (9.5) propose la linéarisation partielle des relations de saut généralisées. Son écriture utilise les notations suivantes :

$$[X] = X_R - X_L, [X^\epsilon] = X^\epsilon(t, 0^+, y) - X^\epsilon(t, 0^-, y), \quad (9.272)$$

où X désigne une variable quelconque. La linéarisation complète, à savoir de toute quantité de la forme $[X^\epsilon]$ (9.272), est laissée au lecteur. Un adimensionnement de cette linéarisation complète est proposé dans le tableau (9.6).

Commentons brièvement la forme des linéarisées obtenues. Les quatre premières relations sont associées à des lois de conservation multidimensionnelles. Elles coïncident

$$\left\{ \begin{array}{l}
 -\sigma[\rho^\epsilon] + [\rho^\epsilon u^\epsilon] - \epsilon \partial_t \varphi[\rho] - \epsilon \partial_y \varphi[\rho v] = 0, \\
 -\sigma[\rho^\epsilon u^\epsilon] + [\rho^\epsilon (u^\epsilon)^2 + p^\epsilon + R_{11}^\epsilon] - \epsilon \partial_t \varphi[\rho u] - \epsilon \partial_y \varphi[\rho uv + R_{12}] = 0, \\
 -\sigma[\rho^\epsilon v^\epsilon] + [\rho^\epsilon v^\epsilon u^\epsilon + R_{12}^\epsilon] - \epsilon \partial_t \varphi[\rho v] - \epsilon \partial_y \varphi[\rho v^2 + p + R_{22}] = 0, \\
 -\sigma[\rho^\epsilon E^\epsilon] + [(\rho^\epsilon E^\epsilon + p^\epsilon + R_{11}^\epsilon)u^\epsilon + R_{12}^\epsilon v^\epsilon] - \epsilon \partial_t \varphi[\rho E] \\
 \qquad \qquad \qquad - \epsilon \partial_y \varphi[(\rho E + p + R_{22})v + R_{12}u] = 0, \\
 -\sigma[\rho^\epsilon \mathcal{I}^\epsilon] + [\rho^\epsilon \mathcal{I}^\epsilon u^\epsilon] - \epsilon \partial_t \varphi[\rho \mathcal{I}] = \epsilon \partial_y \varphi[\rho \mathcal{I} v + 2mR_{12}\tau^3], \\
 -\sigma[\rho^\epsilon E_t^\epsilon] + [\rho^\epsilon E_t^\epsilon u^\epsilon + R_{12}^\epsilon v^\epsilon] - mc_L^2 \kappa_{E_t}(\alpha^2, \beta^2, M^2) - \epsilon \partial_t \varphi[\rho E_t] = \epsilon \partial_y \varphi[\rho E_t v] \\
 \qquad + \epsilon \partial_y \varphi[-muv - R_{12}(2u - \sigma)] + \epsilon \partial_y \varphi[(R_{22} - R_{11})v] \\
 \qquad + \epsilon \partial_y \varphi \left[\frac{mR_{12}\tau}{R_{11}^2} (R_{11}R_{22} - R_{12}^2) \right] - \epsilon \partial_t \varphi \rho_L c_L^2 \left(\kappa_{E_t} + 2M^2 \frac{\partial \kappa_{E_t}}{\partial M^2} \right) \\
 \qquad - 6\epsilon \partial_y \varphi m R_{12}^L \tau_L \left(\kappa_{E_t} - M^2 \frac{\partial \kappa_{E_t}}{\partial M^2} \right) + 2\epsilon \partial_y \varphi \left(\frac{R_{11}^L - R_{22}^L}{R_{12}^L} - 2\alpha \right) mc_L^2 \alpha^2 \frac{\partial \kappa_{E_t}}{\partial \alpha^2} \\
 \qquad - 2\epsilon \partial_y \varphi m R_{12}^L \tau_L (1 - 3\beta^2) \frac{\partial \kappa_{E_t}}{\partial \beta^2}, \\
 -\sigma[\rho^\epsilon \mathcal{W}^\epsilon] + [\rho^\epsilon \mathcal{W}^\epsilon u^\epsilon] - \epsilon \partial_t \varphi[\rho \mathcal{W}] = \epsilon \partial_y \varphi[\rho \mathcal{W} v] - 2\epsilon \partial_y \varphi \left[\frac{mR_{12}\tau}{R_{11}^2} (R_{11}R_{22} - R_{12}^2) \right].
 \end{array} \right.$$

TAB. 9.5 – Linéarisation partielle des relations de Rankine-Hugoniot généralisées dans le cadre anisotherme

clairement avec les expressions qui auraient été obtenues en linéarisant directement ces lois de conservation, sans invoquer l'invariance par rotation des équations. Les trois dernières relations sont en revanche associées à des entropies directionnelles. Les contributions en produit de la dérivée $\partial_y \varphi$, de ces relations, distinctes des fonctions cinétiques et de leur gradient, sont associées au vecteur $\mathcal{B}(\mathbf{u}_L, \mathbf{u}_R)$ de \mathbb{R}^n défini en (9.124).

9.4.4 À propos des relations de la forme adimensionnée du déterminant de Lopatinski

Le déterminant de Lopatinski (9.153) résulte du produit scalaire des deux vecteurs respectivement détaillés dans les tableaux (9.4) et (9.6). Il trouve la forme suivante :

$$\Delta(\mathbf{u}_R, k, \tilde{\omega}) = \rho_L c_L^2 c_R \overline{\Delta}_{2D}(k, \tilde{\omega}),$$

où $\overline{\Delta}_{2D}(k, \tilde{\omega})$ est sans dimension. Le déterminant $\overline{\Delta}_{2D}(k, \tilde{\omega})$ dépend des quatre nombres adimensionnés $(\alpha, \beta, \zeta, M)$. Rappelons en effet que le nombre sans dimension r donné

$$\left. \begin{aligned}
 & \rho_L c_R \left\{ \tilde{\omega}(1 - \eta_R) + ik \frac{\alpha \beta^2}{M^2} (1 - r) \right\}. \\
 & 0. \\
 & \frac{\rho_L c_L^2 \eta_R}{\mathcal{M}_R} \left\{ \tilde{\omega} \alpha \beta^2 (1 - r) + ik \left(M^2 (1 - \eta_R) + \beta^2 \left(1 - \frac{1}{\eta_R^3} \right) \right. \right. \\
 & \quad \left. \left. + \frac{\beta^2}{\eta_R} (\zeta^2 (1 - \eta_R) - \alpha^2) + \alpha^2 \beta^2 r^2 \eta_R^3 \right) \right\}. \\
 & \frac{\mathcal{M}_R}{\eta_R} \left\{ \rho_L c_L^2 c_R \eta_R \left\{ \tilde{\omega} \left(\frac{\gamma - 3}{2(\gamma - 1)} \left(M^2 (\eta_R - 1) + \beta^2 \left(\frac{1}{\eta_R^3} - 1 \right) \right) + \frac{\alpha^2 \beta^4}{2M^2 \eta_R} (1 - r)^2 \right. \right. \right. \\
 & \quad \left. \left. + \frac{\alpha^2 \beta^2 r^2}{2} \eta_R^3 + \frac{\beta^2}{2\eta_R} (\zeta^2 (1 - \eta_R) - \alpha^2) \right) - ik \left(\frac{2 + 3\beta^2 (\gamma - 3 + (\gamma - 1) \zeta^2)}{2(\gamma - 1)} \right. \right. \\
 & \quad \left. \left. + \frac{M^2 (3 - 2\eta_R)}{2} - \frac{\beta^2}{\eta_R^3} + \frac{\beta^2}{\eta_R} (\zeta^2 (1 - \eta_R) - \alpha^2) + \alpha^2 \beta^2 r^2 \eta_R^3 \right) \frac{\alpha \beta^2}{M^2 \eta_R} (r - 1) \right. \\
 & \quad \left. \left. + \frac{\alpha \beta^2}{\eta_R} (1 - \eta_R r) \right) \right\}. \\
 & \tau_L c_L^2 c_R \left\{ \tilde{\omega} \beta^2 (1 - \eta_R) + ik \alpha \beta^2 \left(\frac{\beta^2}{M^2} (1 - r) + 2(r \eta_R^3 - 1) \right) \right\}. \\
 & \rho_L c_L^2 c_R \left\{ \tilde{\omega} \left(\frac{\alpha^2 \beta^2}{2} \left(\frac{\beta^2}{M^2} (1 - r)^2 + \eta_R (r^2 \eta_R^3 - 1) \right) \right. \right. \\
 & \quad \left. \left. - \eta_R \left(\kappa_{E_t} + 2M^2 \frac{\partial \kappa_{E_t}}{\partial M^2} \right) \right) + ik \alpha \beta^2 \left((\zeta^2 - \alpha^2) (r \eta_R^3 - 1) - 2(r \eta_R - 1) \right. \right. \\
 & \quad \left. \left. + \frac{(r - 1)}{M^2} \left(M^2 \eta_R + \beta^2 \frac{1}{\eta_R^3} - \frac{\beta^2}{\eta_R} (\zeta^2 - \alpha^2) - \alpha^2 \beta^2 r^2 \eta_R^3 - \frac{\alpha^2 \beta^2}{2} \right) \right. \right. \\
 & \quad \left. \left. + \frac{(1 - r)}{M^2} \left(\kappa_{E_t} + 2M^2 \frac{\partial \kappa_{E_t}}{\partial M^2} \right) - 6 \left(\kappa_{E_t} - M^2 \frac{\partial \kappa_{E_t}}{\partial M^2} \right) \right. \right. \\
 & \quad \left. \left. + \frac{2}{\beta^2} \left((1 - \zeta^2) - 2\alpha^2 \right) \frac{\partial \kappa_{E_t}}{\partial \alpha^2} - 2(1 - 3\beta^2) \frac{\partial \kappa_{E_t}}{\partial \beta^2} \right) \right\}. \\
 & \rho_L c_L^2 c_R \beta^2 (\zeta^2 - \alpha^2) \left\{ \tilde{\omega}(1 - \eta_R) + ik \alpha \left(\frac{\beta^2}{M^2} (1 - r) + 2(1 - r \eta_R^3) \right) \right\}.
 \end{aligned} \right\}$$

TAB. 9.6 – Linéarisée des relations de saut généralisées dans le cadre anisotherme

par la formule (9.242), ne dépend que de ces quatre quantités.

L'examen des tableaux (9.4) et (9.6) permet de remarquer que le nombre d'onde k intervient par sa puissance première ou son carré. Sa puissance première intervient systématiquement en produit, ou en rapport, avec le nombre α , *i.e.* changer le signe de k consiste à renverser le signe de R_{12}^L . La définition de ω à partir de $\tilde{\omega}$:

$$\omega = u_R \tilde{\omega} - ikv_R,$$

conduit alors à changer le signe de la vitesse tangentielle v_R . Envisager un nombre d'onde tangentiel $k > 0$, ou $k < 0$, consiste donc à échanger le signe de v et R_{12} dans la solution choc plan considérée. Cette observation doit être rapprochée du fait que, privilégier une onde de choc avec $R_{12}^L < 0$, se déduit du cas $R_{12}^L > 0$, en échangeant simultanément les signes de R_{12} et de v , conformément à l'étude du système dynamique proposée au paragraphe (4.2.1). En anticipant les résultats à venir, nous rapportons que les zones d'instabilité forte ou de stabilité neutre, sont indépendantes du signe de k . En d'autres termes, échanger le signe de R_{12} et v dans une solution choc plan n'affecte pas ses propriétés de stabilité multidimensionnelle.

Il faut maintenant discuter des possibles annulations de $\overline{\Delta}_{2D}(k, \tilde{\omega})$ pour une pulsation $\tilde{\omega}$ de partie réelle positive. Étant donnée la complexité algébrique du déterminant, cette étude est menée numériquement grâce au principe de l'argument. Ce principe a été rappelé dans le cadre isotherme et nous renvoyons le lecteur à la section (9.3.5) pour son énoncé, ainsi que pour la façon dont celui-ci est utilisé. La méthode numérique employée dans la suite est en tout point identique à celle présentée dans la cadre isotherme à la section (9.3.7). Nous suivrons donc à nouveau les cinq étapes proposées à la fin de cette section, pour étudier les éventuelles annulations de la condition de Lopatinski $\overline{\Delta}_{2D}(k, \tilde{\omega})$.

9.4.5 Propriété d'homogénéité du déterminant de Lopatinski et applications

Comme dans le cadre isotherme (voir section 9.3.6), deux propriétés mathématiques du déterminant de Lopatinski facilitent l'application du principe de l'argument pour dénombrer les racines $\tilde{\omega}$ de partie réelle positive ou nulle : $\mathcal{R}e(\tilde{\omega}) \geq 0$.

La première propriété est l'analyticité de l'application $(k, \omega) \in \mathbb{R} \times \mathbb{C}^+ \setminus i\mathbb{R} \rightarrow \overline{\Delta}_{2D}(k, \tilde{\omega})$ qui peut être déduite de la dépendance analytique de la valeur propre $\mu_1(k, \tilde{\omega})$ en $(k, \tilde{\omega}) \in \mathbb{R} \times \mathbb{C}^+$, $\mathcal{R}e(\tilde{\omega}) > 0$, telle qu'établie au lemme (9.4.1). Encore une fois, cette propriété permet la recherche de zéros éventuels $\tilde{\omega}$ dans \mathbb{C}^+ par le principe de l'argument, à l'aide d'un contour fermé orienté Γ , dont l'allure typique est donné sur la figure (9.1), avec $R_0 \rightarrow +\infty$, Γ étant immédiatement adjacent par la droite à l'axe des imaginaires purs.

La seconde propriété nous enseigne que l'application $(k, \tilde{\omega}) \rightarrow \overline{\Delta}_{2D}(k, \tilde{\omega})$ est positivement homogène de degré 3 :

$$\forall(k, \tilde{\omega}) \in \mathbb{R} \times \mathbb{C}^+, \forall t > 0, \overline{\Delta}_{2D}(tk, t\tilde{\omega}) = t^3 \overline{\Delta}_{2D}(k, \tilde{\omega}). \quad (9.273)$$

Rappelons qu'il est toujours possible de rendre le déterminant de Lopatinski homogène de degré un, en choisissant les vecteurs propres à droite $\{r_i^-(\mathbf{u}_R, k, \tilde{\omega})\}_{1 \leq i \leq n}$ positivement homogènes de degré zéro (voir [62]). Cette propriété nous permet de restreindre

l'étude de la manière suivante (voir section 9.3.6) :

dénombrer les pulsations $\tilde{\omega}$, $\mathcal{R}e(\tilde{\omega}) \geq 0$, telles que $\overline{\Delta}_{2D}(1, \tilde{\omega}) = 0$ ou $\overline{\Delta}_{2D}(-1, \tilde{\omega}) = 0$.
(9.274)

Rappelons qu'envisager $k = -1$ au lieu de $k = 1$, consiste à changer le signe de α , *i.e.* à privilégier une onde de choc avec $R_{12}^L < 0$.

L'existence de pulsations $\tilde{\omega}$ dans \mathbb{C}^+ , solutions de (9.274), est étudiée en recherchant deux fonctions auxiliaires $\varphi_+(\tilde{\omega})$ et $\varphi_-(\tilde{\omega})$, analytiques sur $\mathbb{C}^+ \setminus \{i\mathbb{R}\}$, partageant respectivement, par construction, les mêmes racines que $\overline{\Delta}_{2D}(1, \tilde{\omega})$ et $\overline{\Delta}_{2D}(-1, \tilde{\omega})$, avec la propriété (voir le paragraphe (9.3.5)) :

$$\lim_{R \rightarrow +\infty} \varphi_+(Re^{i\theta}) = \lim_{R \rightarrow -\infty} \varphi_-(Re^{i\theta}) = 1, \theta \in \left] -\frac{\Pi}{2}, \frac{\Pi}{2} \right[. \quad (9.275)$$

Il s'agit donc de renormaliser $\overline{\Delta}_{2D}(1, \tilde{\omega})$ (respectivement $\overline{\Delta}_{2D}(-1, \tilde{\omega})$) par un polynôme en $\tilde{\omega}$, n'admettant pas de racine sur \mathbb{C}^+ , et possédant le même équivalent en $\tilde{\omega} = Re^{i\theta}$ dans la limite $R \rightarrow \infty$.

Une telle renormalisation est ici rendue possible par la propriété de stabilité structurelle du choc droit, garantissant que les limites $\lim_{R \rightarrow +\infty} \varphi_+(Re^{i\theta})$ et $\lim_{R \rightarrow -\infty} \varphi_-(Re^{i\theta})$ ne peuvent être nulles. Une façon de s'en convaincre est de rappeler que pour un nombre d'onde $k = 0$, le déterminant de Lopatinski $\overline{\Delta}_{2D}(0, \tilde{\omega})$ (9.155), coïncide avec le déterminant de Majda que nous savons être positif tant que les conditions géométriques sont satisfaites, ce que nous avons supposé (voir la section (8.3)).

Dès lors, la propriété d'homogénéité (9.273) implique que la non annulation de $\overline{\Delta}_{2D}(k, \tilde{\omega})$, dans la limite $k \rightarrow 0$, exige la non annulation de $\overline{\Delta}_{2D}(1, \frac{\tilde{\omega}}{k})$, $k > 0$, ou $\overline{\Delta}_{2D}(-1, \frac{\tilde{\omega}}{k})$, avec $k < 0$, dans la limite $|k| \rightarrow 0$, $\tilde{\omega} \in \mathbb{C}^+$ étant fixé. Ce qui n'est autre que le résultat attendu.

Le résultat suivant précise l'équivalent recherché :

Proposition 9.4.5. *L'équivalent de $\overline{\Delta}_{2D}(1, Re^{i\theta})$ (respectivement $\overline{\Delta}_{2D}(-1, Re^{i\theta})$) pour $R \rightarrow +\infty$, avec $\theta \in \left] -\frac{\Pi}{2}, \frac{\Pi}{2} \right[$, s'écrit $P_\infty(\beta, M)R^3 e^{3i\theta}$, avec :*

$$P_\infty(\alpha^2, \beta^2, M^2) = \frac{\mathcal{M}_R^3}{(1 - \mathcal{M}_R)^2} \overline{\Delta}_{1D}^0(\alpha^2, \beta^2, M^2) > 0, \quad (9.276)$$

où $\overline{\Delta}_{1D}^0(\alpha^2, \beta^2, M^2)$ désigne la version adimensionnée, introduite en (8.70), du déterminant de Majda (8.40).

Armés de cet équivalent, nous proposons d'étudier l'existence de pulsations $\tilde{\omega}$, $\mathcal{R}e(\tilde{\omega}) \geq 0$, solutions de $\overline{\Delta}_{2D}(1, \tilde{\omega}) = 0$ ou $\overline{\Delta}_{2D}(-1, \tilde{\omega}) = 0$, en dénombrant les racines $\tilde{\omega}$ des fonctions :

$$\varphi_+(\tilde{\omega}) = \frac{\overline{\Delta}_{2D}(1, \tilde{\omega})}{P_\infty(\alpha^2, \beta^2, M^2)(\tilde{\omega} + 1)^3}, \quad \varphi_-(\tilde{\omega}) = \frac{\overline{\Delta}_{2D}(-1, \tilde{\omega})}{P_\infty(\alpha^2, \beta^2, M^2)(\tilde{\omega} + 1)^3}. \quad (9.277)$$

Donnons la preuve de la proposition (9.4.5).

Démonstration. La démonstration est une transposition au cadre anisotherme de celle de la proposition (9.3.5) donnée dans le cadre isotherme.

Remarquons dans un premier temps que $\overline{\Delta}_{2D}(k, \tilde{\omega})$ peut se décomposer comme suit :

$$\begin{aligned} \overline{\Delta}_{2D}(k, \tilde{\omega}) &= f\left(\mu_1^2(\mathbf{u}_R, k, \tilde{\omega})\tilde{\omega}, \mu_1(\mathbf{u}_R, k, \tilde{\omega})\tilde{\omega}^2\right) \\ &+ g\left(ik\tilde{\omega}^2, ik(\mu_1(\mathbf{u}_R, k, \tilde{\omega}))^2, ik\mu_1(\mathbf{u}_R, k, \tilde{\omega})\tilde{\omega}, k^2\tilde{\omega}, \mu_1(\mathbf{u}_R, k, \tilde{\omega})k^2, ik^3\right). \end{aligned} \quad (9.278)$$

De plus, asymptotiquement en $\tilde{\omega}$ dans la relation (9.245), on a :

$$\begin{cases} \mu_1(\mathbf{u}_R, k, \tilde{\omega}) \simeq -\frac{\mathcal{M}_R}{\mathcal{M}_R - 1}\tilde{\omega}; \tilde{\omega} \rightarrow +\infty, \\ \mu_1^2(\mathbf{u}_R, k, \tilde{\omega}) \simeq \frac{\mathcal{M}_R^2}{(\mathcal{M}_R - 1)^2}\tilde{\omega}^2; \tilde{\omega} \rightarrow +\infty, \end{cases} \quad (9.279)$$

si bien que asymptotiquement, la condition de stabilité est équivalente à un polynôme en $\tilde{\omega}^3$ dont le coefficient provient de la somme des coefficients de la fonction $f\left(\mu_1^2(\mathbf{u}_R, k, \tilde{\omega})\tilde{\omega}, \mu_1(\mathbf{u}_R, k, \tilde{\omega})\tilde{\omega}^2\right)$. Calculons cette fonction :

$$\begin{aligned} f\left(\mu_1^2(\mathbf{u}_R, k, \tilde{\omega})\tilde{\omega}, \mu_1(\mathbf{u}_R, k, \tilde{\omega})\tilde{\omega}^2\right) &= \mu_1(\mathbf{u}_R, k, \tilde{\omega})\tilde{\omega}^2 M^2 \mathcal{M}_R \eta_R (1 - \eta_R) \\ &+ \mu_1^2(\mathbf{u}_R, k, \tilde{\omega})\tilde{\omega} \frac{M^2 \eta_R}{\mathcal{M}_R} (1 - \eta_R) \left(-\frac{(3 - \gamma)\beta^2 \mathcal{M}_R^2}{M^2 \eta_R^2} \left(1 + \frac{1}{\eta_R} - \frac{2}{\eta_R^2}\right) \right. \\ &\left. + \left(\frac{\gamma + 1}{2} + \frac{3 - \gamma}{2\eta_R}\right) \mathcal{M}_R^2 \right) + \mu_1^2(\mathbf{u}_R, k, \tilde{\omega})\tilde{\omega} \mathcal{M}_R (\gamma - 1) \left(\kappa_{E_t} + 2M^2 \frac{\partial \kappa_{E_t}}{\partial M^2} \right). \end{aligned} \quad (9.280)$$

Dès lors, on en déduit, grâce aux équivalents (9.279) le coefficient P_∞ en $\tilde{\omega}^3$ de la condition de stabilité :

$$\begin{aligned} P_\infty(\alpha^2, \beta^2, M^2) &= \frac{\mathcal{M}_R^3}{(1 - \mathcal{M}_R)^2} \left(\frac{M^2 \eta_R}{\mathcal{M}_R^2} (1 - \eta_R) \overline{\Delta}_1(\alpha^2, \beta^2, M^2) \right. \\ &\quad \left. + (\gamma - 1) \left(\kappa_{E_t} + 2M^2 \frac{\partial \kappa_{E_t}}{\partial M^2} \right) \right) \\ &= \frac{\mathcal{M}_R^3}{(1 - \mathcal{M}_R)^2} \overline{\Delta}_{1D}^0(\alpha^2, \beta^2, M^2), \end{aligned} \quad (9.281)$$

où $\overline{\Delta}_1(\alpha^2, \beta^2, M^2)$ correspond à la partie adimensionnée de la formule (8.72) du chapitre 8 sur la stabilité structurelle du choc droit, et $\overline{\Delta}_{1D}^0$ est donnée par la formule (8.70) du même chapitre.

Nous avons vu numériquement au paragraphe (8.3) que la condition de stabilité structurelle (8.70) était strictement positive tant que les conditions de Lax étaient satisfaites, ce que nous supposons. Ceci termine la démonstration. \square

Nous concluons ce paragraphe en vérifiant que le déterminant de Lopatinski est homogène de degré trois dans sa formulation équivalente (9.153) pour un choix du vecteur propre à gauche $\Lambda_1(\mathbf{u}_R, k, \tilde{\omega})$ tel que nous l'avons proposé.

Démonstration. Cette démonstration est identique à celle proposée dans le cadre isotherme au paragraphe (9.3.6). Nous l'adaptions ici au cadre anisotherme. Examinons

la linéarisation des relations de Rankine-Hugoniot généralisées représentée par le tableau (9.6). On remarque que celle-ci dépend linéairement de $\tilde{\omega}$ et de k . On peut donc écrire cette linéarisation sous la forme :

$$\mathbf{a}\tilde{\omega} + ik\mathbf{b}, \quad (\mathbf{a}, \mathbf{b}) \in \mathbb{C}^7, \quad (9.282)$$

clairement homogène de degré un. Par ailleurs, le tableau (9.4) donnant le vecteur ${}^t D_{\mathbf{u}}^{-1}\mathbf{v}(\mathbf{u}_R)\Lambda_1(\mathbf{u}_R, k, \tilde{\omega})$ permet d'écrire ce dernier sous la forme :

$$\mathbf{a}\mu_1(k, \tilde{\omega})\tilde{\omega} + \mathbf{b}(\mu_1(k, \tilde{\omega}))^2 + \mathbf{c}k\tilde{\omega} + \mathbf{d}k\mu_1(k, \tilde{\omega}) + \mathbf{e}k^2, \quad (\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}, \mathbf{d}) \in \mathbb{C}^7. \quad (9.283)$$

Selon l'expression (9.245) donnant $\mu_1(k, \tilde{\omega})$, on a de manière évidente :

$$\begin{cases} \delta = k^2 \left(\frac{\tilde{\omega}}{|k|} - i\rho_+(\mathbf{u}_R) \right) \left(\frac{\tilde{\omega}}{|k|} - i\rho_-(\mathbf{u}_R) \right) \equiv k^2 \bar{\delta} \left(\frac{\tilde{\omega}}{|k|} \right), \\ \mu_1(k, \tilde{\omega}) = \frac{\mathcal{M}_R}{\mathcal{M}_R^2 - 1} |k| \left(-\frac{\tilde{\omega}}{|k|} \mathcal{M}_R + 3i \frac{\alpha\beta^2}{M^2 \eta_R} r \mathcal{M}_R - \sqrt{\bar{\delta} \left(\frac{\tilde{\omega}}{|k|} \right)} \right) = |k| \bar{\mu}_1^R \left(\frac{\tilde{\omega}}{|k|} \right). \end{cases}$$

Le vecteur ${}^t D_{\mathbf{u}}^{-1}\mathbf{v}(\mathbf{u}_R)\Lambda_1(\mathbf{u}_R, k, \tilde{\omega})$ est donc homogène de degré deux d'après (9.283). Ainsi, le produit scalaire (9.153) est positivement homogène de degré trois, ce qui conclut la preuve. \square

9.4.6 Condition de stabilité pour les équations d'Euler

Dans cette section, on ne considère pas les dépendances en $(\mathbf{u}_R, k, \tilde{\omega})$ de la valeur propre $\mu_1(\mathbf{u}_R, k, \tilde{\omega})$, et on écrira sans ambiguïté : μ_1 . On ne considère pas non plus les dépendances en (α^2, β^2, M^2) de $\eta_R(\alpha^2, \beta^2, M^2)$. Le rappel des notations des différents articles concernant la condition de Lopatinski pour les équations d'Euler que nous donnons ici, est indépendant des notations de ce manuscrit et ne vaut que pour cette section. Ceci permet une lecture plus aisée des articles auxquels nous renvoyons.

Il est légitime de se demander s'il est possible de récupérer la condition de stabilité multidimensionnelle pour les équations d'Euler telle qu'elle a été obtenue par Erpenbeck [26]. Rappelons que Jenssen et Lyng [43] obtiennent la même expression qu'Erpenbeck en notant $\mu_1 = -\beta$, $\eta_R = r$ et en utilisant la fonction k (à ne pas confondre avec le nombre d'onde), qu'Erpenbeck nomme l , déjà définie en stabilité structurelle (8.79). Flowles [28] a montré que l'expression obtenue par D'yakov [22] était équivalente à celle d'Erpenbeck. Nous allons donc comparer notre résultat à celui d'Erpenbeck pour vérifier si notre condition dégénère bien vers l'expression universellement reconnue par tous ces auteurs. Soulignons, dans un premier temps, que pour bien dégénérer vers le cas Euler, c'est à dire $(\alpha, \beta) \rightarrow 0$, il nous faut supposer $\frac{\alpha}{\beta}$ borné dans $\bar{\Delta}_{2D}(k, \tilde{\omega})$. Ce rapport intervient en effet dans notre condition de stabilité pour les termes faisant intervenir la fonction cinétique κ_{E_t} . Cela vient du fait que pour élaborer toute notre théorie, on a supposé que $R_{11} > 0$.

Dans un premier temps, on s'intéresse à la valeur propre μ_1 obtenue en (9.243)-(9.244) dans laquelle on substitue formellement $R_{11} = R_{12} = R_{22} = 0$:

$$\mu_1 = \frac{1}{\mathcal{M}_R^2 - 1} \left(-\tilde{\omega} \mathcal{M}_R^2 - \sqrt{\tilde{\omega}^2 \mathcal{M}_R^2 + (1 - \mathcal{M}_R^2) k^2} \right) \quad (9.284)$$

où désormais $\mathcal{M}_R = \frac{u_R}{\sqrt{\gamma p_R \tau_R}}$. L'expression (9.284) correspond à celle de μ_1 proposé par Erpenbeck [26] et Jenssen et Lyng [43] qui utilisent comme nous une transformation de Laplace en temps (Jenssen et Lyng ont choisi de travailler avec $\beta = -\mu_1$). On retrouve aussi l'expression proposée par D'yakov [22] et Flowles [28] à condition d'utiliser, comme eux, les modes normaux avec une transformée de Fourier en temps. Pour cela, il suffit d'égaliser formellement $\omega = -i\omega$ et après avoir mis $-i$ en facteur, on retrouve l'expression ci dessus avec $\frac{\omega - kv}{u_R}$ en lieu et place de $\tilde{\omega}$, et un signe positif devant la racine carrée qui correspond bien au signe négatif pour nous. Notons que tous ces auteurs travaillent avec une thermodynamique quelconque et non en gaz parfait polytropic, mais il est logique de retrouver la même expression en utilisant la notation c pour la vitesse du son sans la définir précisément.

Rappelons alors que la condition de stabilité $\overline{\Delta}_{2D}(k, \tilde{\omega})$ peut se décomposer en deux fonctions f et g selon (9.278). La fonction f ayant été calculée lors de l'évaluation de $P_\infty(\alpha^2, \beta^2, M^2)$ par la formule (9.280). Dans le cas où $(\alpha, \beta) \rightarrow 0$, cette fonction devient :

$$f(\mu_1^2 \tilde{\omega}, \mu_1 \tilde{\omega}^2) = M^2 \mathcal{M}_R (1 - \eta_R) \left(\mu_1 \tilde{\omega}^2 \eta_R + \mu_1^2 \tilde{\omega} \left(\frac{\gamma + 1}{2} \eta_R + \frac{3 - \gamma}{2} \right) \right).$$

La fonction g est donnée, quant à elle, par :

$$g(k^2 \tilde{\omega}, \mu_1 k^2) = M^2 \mathcal{M}_R (1 - \eta_R) k^2 \left(\mu_1 + \tilde{\omega} \frac{\gamma - 1}{2} (1 - \eta_R) \right).$$

Avant de sommer ces deux expressions, remarquons que pour $(\alpha, \beta) \rightarrow 0$, la formule (9.250) donnant $\omega(k, \mu_1)$ peut se réécrire :

$$\mathcal{M}_R^2 (\mu_1 + \tilde{\omega})^2 = \mu_1^2 - k^2.$$

En utilisant cette expression dans la somme de f et g , on a :

$$\Delta_{2D}^{euler} = \mathcal{M}_R M^2 (1 - \eta_R) \delta_{euler},$$

avec :

$$\delta_{euler} = (\mu_1 + \tilde{\omega})^2 \tilde{\omega} \eta_R \frac{\gamma - 1}{2} \left(1 - \frac{1}{\eta_R} \right) \mathcal{M}_R^2 + \mu_1 \tilde{\omega} \eta_R (\mu_1 + \tilde{\omega}) + \mu_1^2 \tilde{\omega} + k^2 \mu_1.$$

On reconnaît alors dans cette expression la fonction k de Jenssen et Lyng (8.79). Pour ne pas confondre cette fonction avec le nombre d'onde k , nous utiliserons la notation l employée par Erpenbeck. Rappelons qu'en gaz parfait polytropic, cette fonction trouve la définition suivante (voir la formule (8.82) du chapitre 8) :

$$l = 2 + (\gamma - 1) \left(1 - \frac{1}{\eta_R} \right) \mathcal{M}_R^2.$$

Utilisons cette expression pour réécrire δ_{euler} :

$$\delta_{euler} = (\mu_1 + \tilde{\omega}) \left(\tilde{\omega} \eta_R \frac{l}{2} (\mu_1 + \tilde{\omega}) + (k^2 - \tilde{\omega}^2 \eta_R) + \mathcal{M}_R^2 \tilde{\omega} (\mu_1 + \tilde{\omega}) \right).$$

Enfin, dans le cas $(\alpha, \beta) \rightarrow 0$, μ_1 correspond à la formule (9.284) et se réécrit :

$$\mu_1 + \tilde{\omega} = \frac{1}{1 - \mathcal{M}_R^2} (\tilde{\omega} + s(\tilde{\omega})),$$

avec :

$$s(\tilde{\omega}) = \sqrt{\mathcal{M}_R^2 \tilde{\omega}^2 + (1 - \mathcal{M}_R^2) k^2}.$$

La fonction $s(\tilde{\omega})$ ainsi définie est celle utilisée par Erpenbeck. Notons que pour Jenssen et Lyng, la notation $s(\tilde{\omega})$ correspond à $\tilde{\omega} + s(\tilde{\omega})$. Finalement, on obtient :

$$\delta_{euler} = \left(\frac{V(\tilde{\omega}, \mu_1, k^2)}{1 - \mathcal{M}_R^2} + (\mu_1 + \tilde{\omega}) \tilde{\omega} \eta_R \left(\frac{\mathcal{M}_R^2}{\eta_R} - \frac{l}{2} \right) \right) (\mu_1 + \tilde{\omega}).$$

où :

$$V(\tilde{\omega}, \mu_1, k^2) = \eta_R l \tilde{\omega} (\mu_1 + \tilde{\omega}) + (k^2 - \tilde{\omega}^2 \eta_R) (1 - \mathcal{M}_R^2),$$

correspond à la fonction $V(\tilde{\omega}, \mu_1, k^2)$ de Erpenbeck [26]. Il reste à prouver que l'expression à droite de cette fonction est nulle. Remarquons alors que :

$$\begin{aligned} \frac{l}{2} - \frac{\mathcal{M}_R^2}{\eta_R} &= 1 + \frac{\gamma - 1}{2} \left(1 - \frac{1}{\eta_R} \right) \mathcal{M}_R^2 - \frac{\mathcal{M}_R^2}{\eta_R}, \\ &= \bar{\Delta}_s - \bar{\Delta}_1 \\ &= 0, \end{aligned}$$

où la différence $\bar{\Delta}_s$ et $\bar{\Delta}_1$ définie dans le paragraphe (8.3.2) est bien nulle selon (8.92). Finalement, pour $(\alpha, \beta) \rightarrow 0$, notre condition dégénère en :

$$\begin{aligned} \Delta_{2D}^{euler} &= \rho_L c_L^2 c_R M^2 \mathcal{M}_R (1 - \eta_R) \frac{\mu_1 + \tilde{\omega}}{1 - \mathcal{M}_R^2} (\eta_R l \tilde{\omega} (\tilde{\omega} + s(\tilde{\omega})) + (1 - \mathcal{M}_R^2) (k^2 - \tilde{\omega}^2 \eta_R)), \\ &= \rho_L c_L^2 c_R M^2 \mathcal{M}_R (1 - \eta_R) \frac{\mu_1 + \tilde{\omega}}{1 - \mathcal{M}_R^2} V(\tilde{\omega}, \mu, k^2), \end{aligned}$$

qui correspond bien à l'expression trouvée par Erpenbeck à un facteur multiplicatif près. Remarquons que si l'on écrit $\mu_1 + \tilde{\omega} = \frac{\sqrt{\mu_1^2 - k^2}}{\mathcal{M}_R}$ dans la condition ci-dessus, on obtient exactement le même coefficient multiplicateur que la deuxième méthode utilisée par Jenssen et Lyng [43] (qui est la même que la méthode utilisée ici) à un facteur $\sqrt{\mu_1^2 - k^2}$ près car nous n'avons pas normalisé $\Lambda_1(\mathbf{u}_R, k, \tilde{\omega})$ contrairement à ces auteurs.

Les résultats de cette section permettent ainsi de vérifier partiellement nos calculs de la condition de Lopatinski $\bar{\Delta}_{2D}(k, \tilde{\omega})$ pour le modèle RSM.

9.5 Cartes de stabilité

Rappelons que le déterminant de Lopatinski $\bar{\Delta}_{2D}$ dépend des quatre nombres adimensionnés $(\alpha, \beta, M, \zeta)$. L'étude de l'annulation de ce déterminant demande donc de fixer ces paramètres dans une certaine plage que nous précisons ci-après. Conformément à la méthode numérique décrite dans le paragraphe (9.3.7), l'étude de l'annulation de $\bar{\Delta}_{2D}$ revient à évaluer, dans le demi-plan complexe \mathbb{C}^+ , le nombre de zéros

des fonctions $\varphi_+(\tilde{\omega})$ et $\varphi_-(\tilde{\omega})$ données en (9.277). Il suffit pour cela de compter le nombre de tours qu'effectue le graphe de $\varphi \circ \gamma(r)$ (φ représentant indépendamment φ_+ ou φ_-) autour de l'origine dans le plan $(\mathcal{R}e(\varphi), \mathcal{I}m(\varphi))$, où le contour $\gamma(r) = ir$ matérialise l'axe des imaginaires purs. Une reparamétrisation locale (à l'aide d'un arc de cercle) doit être réalisée, lorsque r parcourt \mathbb{R} , pour contourner les éventuels zéros imaginaires purs de $\varphi(ir)$.

Dans un premier temps, nous allons illustrer cette méthode en représentant le graphe de $\varphi \circ \gamma$ dans le plan $(\mathcal{R}e(\varphi), \mathcal{I}m(\varphi))$ pour certaines valeurs représentatives des nombres réduits $(\alpha, \beta, M, \zeta)$, puis nous ferons parcourir à ces nombres toute leur plage de définition afin de réaliser des cartes de stabilité.

Choix de la plage des nombres réduits

De manière à garantir la stabilité structurelle du choc droit, prérequis nécessaire à toute étude de stabilité multidimensionnelle du choc plan, nous choisissons (α, β, M) selon la figure (4.5, b) pour $\gamma = 1.4$ afin d'éviter le phénomènes de surcompression. Plus précisément, pour $M \in [1, 10]$, le nombre de Mach turbulent est choisi selon cette figure afin que les conditions géométriques de Lax soient toujours satisfaites.

Concernant le nombre réduit ζ , nous le choisissons, dans toute la suite, tel que $\zeta^2 = \frac{R_{22}^L}{R_{11}^L} = 1$. En effet, étudier quatre paramètres implique une étude trop lourde. De plus, loin des chocs, il paraît légitime de supposer que le terme lent de pression déformation (bien représenté par le terme de Rotta [58]) joue un rôle important et tend à isotropiser les tensions de Reynolds. Ainsi, R_{22}^L sera sûrement de l'ordre de R_{11}^L avant le choc (en l'absence de parois).

Dans un même ordre d'idée, et concernant le coefficient d'anisotropie α , nous devrions aussi supposer R_{12}^L petit, c'est-à-dire α proche de zéro. Cependant, l'analyse onde progressive a montré l'importance de ce paramètre. Nous prendrons donc $\alpha \in [0, 1]$. Ce choix dans l'intervalle de α provient du déterminant du tenseur de Reynolds évalué sur l'état gauche à deux dimensions d'espace. Celui-ci est toujours positif pour assurer la réalisabilité forte du système. Cela nous donne :

$$R_{11}^L R_{22}^L - (R_{12}^L)^2 = \rho_L^2 a_L^4 (\zeta^2 - \alpha^2) \geq 0 \implies \alpha \leq 1.$$

De plus, $\alpha = 1$ nous semble être une bonne valeur limite, elle signifie que R_{12}^L est comparable à R_{11}^L avant le choc, ce qui est très rare en pratique.

Finalement, les quatre nombres réduits sont choisis selon :

$$\text{pour } M \in [1, 10], \beta \text{ est choisi selon la figure (4.5, b) avec } \alpha \in [0, 1], \text{ et } \zeta = 1. \quad (9.285)$$

Étude de l'influence de (α, β, M) sur la stabilité

Nous allons nous intéresser à quatre cas afin d'évaluer l'influence qualitative des trois paramètres (α, β, M) . Nous partons d'un choc relativement faible $M = 2$, subissant une turbulence raisonnable $\beta = 0.1$, pour examiner l'influence de α , puis nous augmentons, dans un premier temps, $\beta = 0.3$ pour $M = 2$ et dans un second temps $M = 4$ pour $\beta = 0.1$. Ces deux derniers cas sont stables. Enfin, on augmente simultanément $M = 4$ et $\beta = 0.3$, soit un choc fort subissant une turbulence très importante,

pour voir que le choc est violemment instable bien que structurellement stable.

Cas 1 : ($M = 2, \beta = 0.1$) influence de α

Sur la figure (9.11), on représente donc le graphe de $\varphi \circ \gamma$ dans le plan $(\mathcal{R}e(\varphi), \mathcal{I}m(\varphi))$ pour un nombre de Mach $M = 2$ et un nombre de Mach turbulent $\beta = 0.1$ et ce pour quatre valeurs du coefficient d'anisotropie $\alpha = (0.01, 0.1, 0.5, 1)$.

La fonction débute et finit en 1 conformément à la propriété (9.275) de la fonction φ qui nous a permis de nous restreindre à l'étude sur l'axe des imaginaires purs. Comme en isotherme, les courbes pour $k = 1$ et $k = -1$ sont symétriques par rapport à l'axe des réels. Choisir le signe de k revient à choisir le signe R_{12}^L pour le choc plan étudié. Or, quand on change le signe de R_{12}^L , on obtient des états de sortie symétriques pour R_{12}^R . La symétrie pour les deux valeurs de k semble donc légitime. Nous avons vérifié numériquement qu'il y avait toujours symétrie. Contrairement au cas isotherme, cette symétrie ne s'accroît pas avec α . Elle est même très importante pour $\alpha = 0.01$ et reste à peu près identique pour les autres cas. Sur la figure (9.11), l'origine du repère est figurée par un point noir. On remarque ainsi que la courbe ne fait aucun tour autour de l'origine, que ce soit pour $k = 1$ ou $k = -1$ et ce pour différentes valeurs de α . En conséquence, il n'y a pas d'instabilité forte pour de telles valeurs des paramètres. Cependant, si l'on agrandit la figure (9.11, a) pour $\alpha = 0.01$ autour de l'origine, on remarque qu'il y a une instabilité faible. En effet, sur la figure (9.12), on voit que la courbe a contourné un zéro de φ sur l'axe des imaginaires. Cependant, celui-ci étant contourné par la droite, il en résulte que la courbe ne peut faire de tour autour de l'origine et qu'il s'agit d'une stabilité neutre.

Cas 2 : ($M = 2, \beta = 0.3$) influence de β

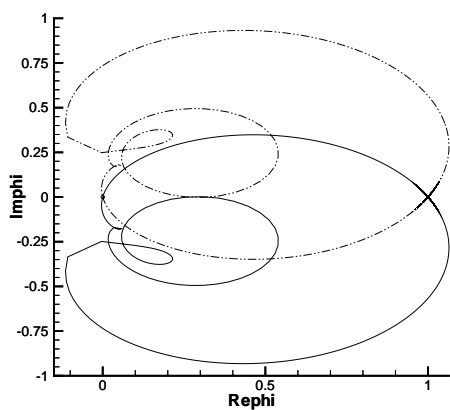
Sur la figure (9.13), on représente la courbe pour une valeur du Mach turbulent $\beta = 0.3$ plus importante, toujours pour $M = 2$. Le coefficient d'anisotropie prend deux valeurs différentes $\alpha = 0.1$ et $\alpha = 1$.

Cette fois, pour ce Mach turbulent, la symétrie entre les courbes en $k = 1$ et $k = -1$ devient plus importante quand α augmente. Remarquons que pour cette valeur de Mach turbulent, on se rapproche de plus en plus de l'instabilité forte car les courbes se sont rapprochées de l'origine. Cependant, ces cas sont encore stables. Comme nous le verrons plus loin, augmenter le Mach turbulent peut déstabiliser le choc en plus de faire survenir l'accident de surcompression.

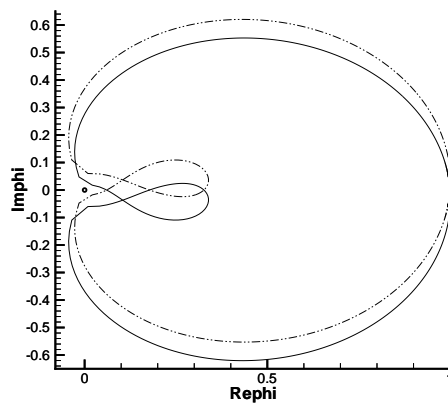
Cas 3 : ($M = 2, \beta = 0.1$) influence de M

Sur les figures suivantes (9.14), nous nous intéressons à l'effet du Mach qui a été augmenté à $M = 4$. Le nombre de Mach turbulent est ramené à une valeur plus raisonnable de 0.1.

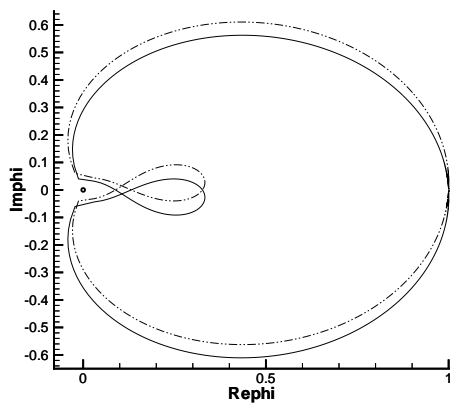
On ne remarque pas de différences majeures dans l'amplitude des courbes. La symétrie ne semble pas trop accentuée par le nombre de Mach, contrairement au cas isotherme. Il faudrait peut être pouvoir augmenter davantage le nombre de Mach pour voir une nette différence, cependant, nous sommes limités par l'accident de surcompression (figure (4.5, b) pour $\gamma = 1.4$).



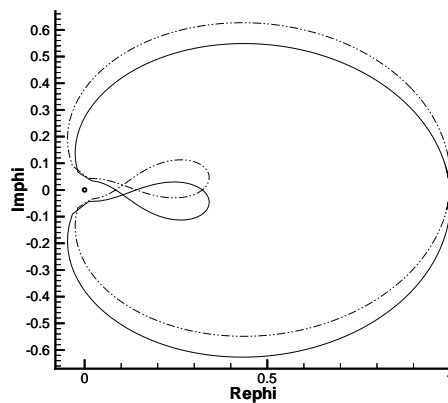
(a) $\alpha = 0.01$



(b) $\alpha = 0.1$



(c) $\alpha = 0.5$



(d) $\alpha = 1$

FIG. 9.11 – Diagramme de stabilité multidimensionnelle anisotherme sans correction de Ristorcelli dans le plan $(\mathcal{R}e(\varphi), \mathcal{I}m(\varphi))$ pour différentes valeurs de α , cas 1 : ($M = 2$ et $\beta = 0.1$)

— $k = 1$, - - - - $k = -1$.

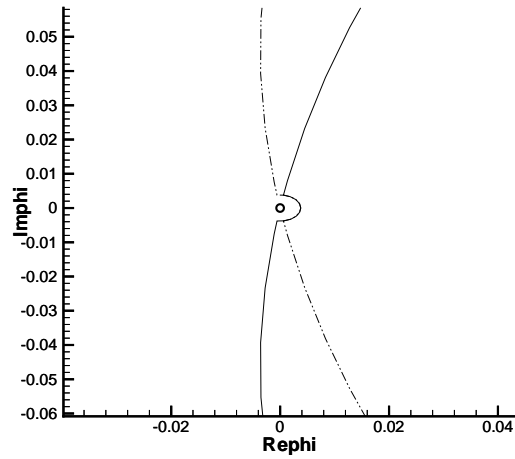
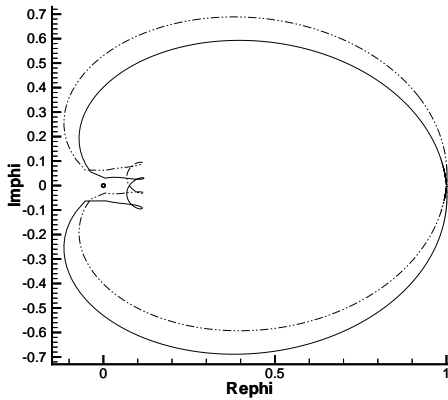
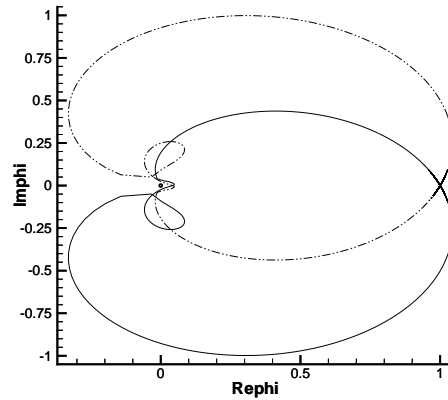


FIG. 9.12 – Zoom autour de l'origine de la condition de stabilité pour le cas 1 : $(M, \beta, \alpha) = (2, 0.1, 0.01)$



(a) $\alpha = 0.1$



(b) $\alpha = 1$

FIG. 9.13 – Diagramme de stabilité multidimensionnelle anisotherme sans correction de Ristorcelli dans le plan $(\mathcal{R}e(\varphi), \mathcal{I}m(\varphi))$ pour différentes valeurs de α , cas 2 : $(M = 2$ et $\beta = 0.3)$

— $k = 1$, - - - - $k = -1$.

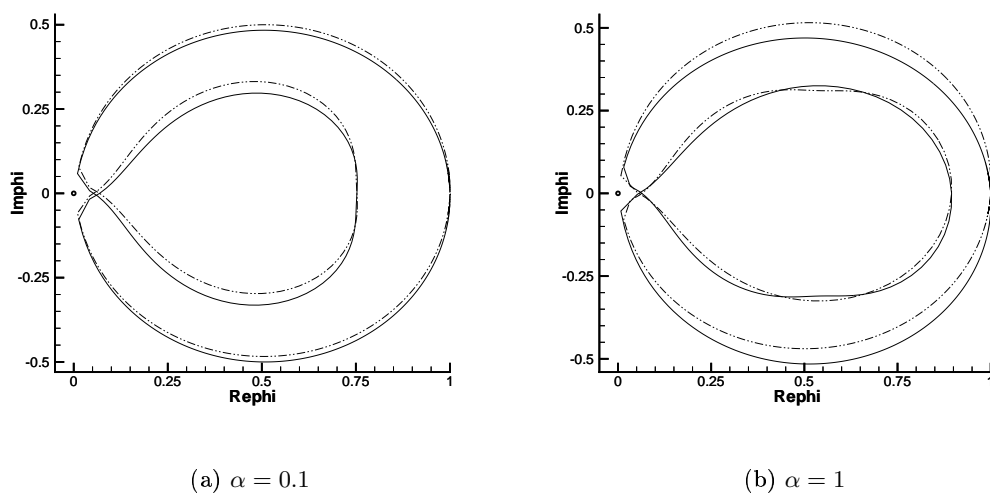


FIG. 9.14 – Diagramme de stabilité multidimensionnelle anisotherme sans correction de Ristorcelli dans le plan $(\mathcal{R}e(\varphi), \mathcal{I}m(\varphi))$ pour différentes valeurs de α , cas 3 : ($M = 4$ et $\beta = 0.1$)

— $k = 1$, - - - - $k = -1$.

Cas 4 : ($M = 2, \beta = 0.3$) une instabilité forte

Si l'on augmente le nombre de Mach turbulent à $\beta = 0.3$, pour un nombre de Mach $M = 2$ semblable au cas 3 précédent, le choc devient instable fortement comme nous pouvons le voir sur la figure (9.15).

La courbe fait clairement un tour autour de l'origine quel que soit le coefficient d'anisotropie. Il y a instabilité forte. Remarquons encore une fois que la symétrie est accentuée pour un Mach turbulent plus grand quand α augmente. Ainsi, en anisotherme sans correction de Ristorcelli, des instabilités fortes peuvent survenir lorsque le Mach turbulent augmente à M fixé, bien que la stabilité structurelle du choc droit soit assurée.

Cartes de stabilité

Les cas étudiés précédemment mettent en évidence que les trois paramètres (M, β, α) ont une influence sur la stabilité forte ou neutre du choc. Nous allons donc présenter quelques cartes dans les plans (M, β) et (M, α) pour synthétiser les différents résultats obtenus précédemment.

Carte de stabilité dans le plan (M, β) pour $\alpha = 0.1$ fixé

Sur la figure (9.16), on représente les zones de stabilité, d'instabilité forte et de

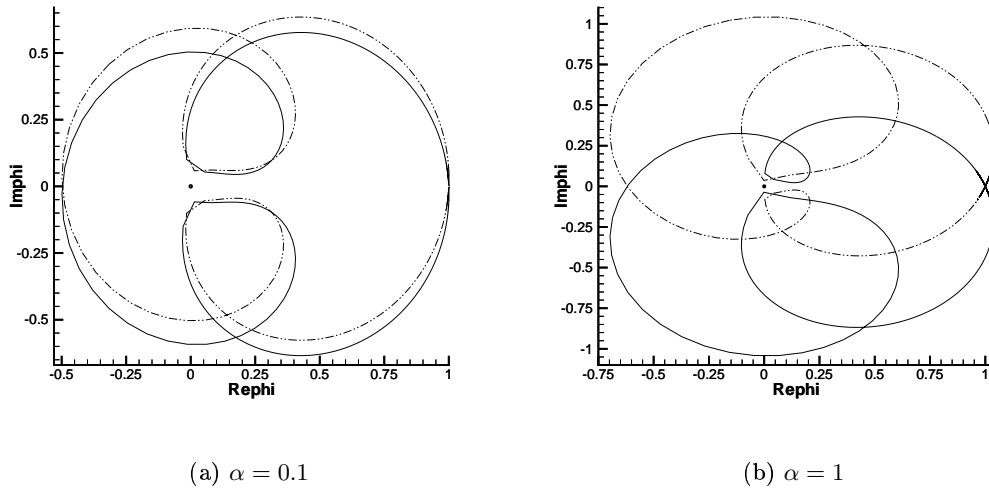


FIG. 9.15 – Diagramme de stabilité multidimensionnelle anisotherme sans correction de Ristorcelli dans le plan $(\mathcal{R}e(\varphi), \mathcal{I}m(\varphi))$ pour différentes valeurs de α , cas 4 : ($M = 4$ et $\beta = 0.3$)

— $k = 1$, - - - - $k = -1$.

surcompressivité dans le plan (M, β) à $\alpha = 0.1$ fixé. On retrouve sur cette carte le domaine de surcompressivité identifié sur la figure (4.5, b). Une zone d’instabilité forte le long du domaine de surcompressivité est apparue. Si l’on se rapproche trop de l’accident de surcompression, et que le Mach associé à la deuxième onde M_a^R devient trop proche de 1, on a instabilité multidimensionnelle forte du choc plan. Il existe tout de même une large plage de Mach turbulent ($\beta \leq 0.18$ qui est une valeur élevée en pratique pour un Mach turbulent) pour laquelle, pour tout nombre de Mach M , le choc plan est toujours multidimensionnellement stable fortement.

Carte de stabilité dans le plan (M, α) pour $\beta = 0.3$ fixé

Sur la deuxième carte, dans le plan (M, α) (à $\beta = 0.3$ fixé pour être sûr d’avoir une zone de surcompression), on remarque que la zone de surcompressivité est indépendante de α pour tout $\alpha \in [0, 1]$ et reste donc la même que sur la carte (9.16). En revanche, plus α augmente, plus la zone d’instabilité forte augmente et envahit la zone de stabilité. Les phénomènes tangentiels déstabilisent le choc plan quand ceux-ci deviennent trop importants. Si le Mach turbulent β est élevé comme sur la carte (9.17) pour laquelle $\beta = 0.3$, la zone de stabilité est très restreinte. Dès que le Mach $M \geq 2.4$ environ, le choc plan est violemment instable, ce qui limite fortement l’utilisation du modèle RSM anisotherme. Cette forte limitation vient sûrement du fait que nous n’avons pas pris en compte la correction de Ristorcelli. Enfin, comme dans le cadre isotherme sans correction de Ristorcelli, remarquons qu’il n’y a aucune zone de stabilité neutre.

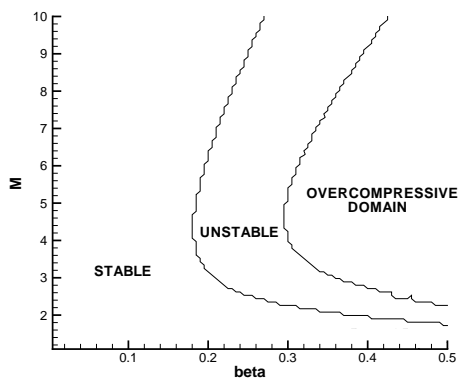


FIG. 9.16 – Carte de stabilité multidimensionnelle en anisotherme dans le plan (M, β) à $\alpha = 0.1$ fixé

En conclusion, on remarque qu'en anisotherme, l'accident de surcompression n'in-

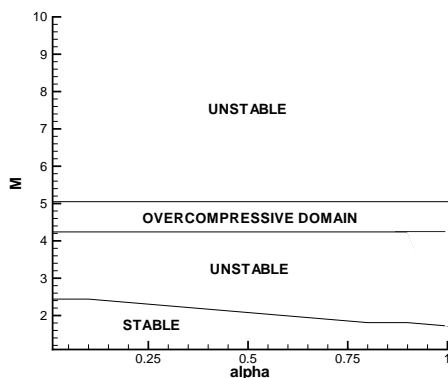


FIG. 9.17 – Carte de stabilité multidimensionnelle en anisotherme dans le plan (M, α) à $\beta = 0.3$ fixé

tervient quasiment jamais en pratique puisque la plage de nombres réduits associés est inatteignable dans la pratique. En revanche, les instabilités multidimensionnelles violentes peuvent arriver pour des valeurs des nombres adimensionnés typiques de certaines applications aéronautiques, et ce bien que la stabilité structurelle du choc droit soit garantie.

Quatrième partie

Annexes

Annexe A

Overcompressive versus compressive shock solutions in second order turbulent closures

Cette annexe fait l'objet d'une version préliminaire d'un article par B. Audebert et F. Coquel.

Overcompressive versus compressive shock solutions in second order turbulent closures

B. Audebert¹ and F. Coquel²

1 The PDE model

1.1 Preamble

The aim of this brief paragraph is twofold. It first introduces the mathematical framework we use in the following to handle a first order system with singular viscous perturbation of the form :

$$\partial_t \mathbf{u}^\epsilon + \mathcal{A}(\mathbf{u}^\epsilon) \partial_x \mathbf{u}^\epsilon = \epsilon \mathcal{B}(\mathbf{u}^\epsilon, \partial_x \mathbf{u}^\epsilon, \partial_{xx} \mathbf{u}^\epsilon), \quad x \in \mathbb{R}, t > 0, \quad (1)$$

In turn, the presentation of the proposed setting explains the properties we seek for a model from the Physics of complex compressible gases.

In (1), the unknown \mathbf{u}^ϵ belongs to some open convex subset $\Omega_{\mathbf{u}} \in \mathbb{R}^n$. The smooth matrix-valued function $\mathcal{A} : \Omega_{\mathbf{u}} \rightarrow \mathbb{R}^{n \times n}$ is supposed to be \mathbb{R} -diagonalizable for all states $\mathbf{u} \in \Omega_{\mathbf{u}}$ while the viscous regularization $\mathcal{B} : \Omega_{\mathbf{u}} \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ is asked at this stage to satisfy $\epsilon \mathcal{B}(\mathbf{u}, \epsilon^{-1} \partial_x \mathbf{u}, \epsilon^{-2} \partial_{xx} \mathbf{u}) = \epsilon^{-1} \mathcal{B}(\mathbf{u}, \partial_x \mathbf{u}, \partial_{xx} \mathbf{u})$ for all $\epsilon > 0$ with $\mathcal{B}(\mathbf{u}, 0, 0) = 0$ for any given $\mathbf{u} \in \Omega_{\mathbf{u}}$. For simplicity in the discussion, all the fields in the underlying hyperbolic model (*i.e.* obtained formally when setting $\epsilon = 0$ in (1)) are temporarily assumed to be genuinely nonlinear. Here, the central assumption is that neither \mathcal{A} coincides with the Jacobian matrix of some given flux function nor \mathcal{B} stands in conservation form. In other words, the nonlinear PDE model (1) exhibits both first order and second order genuine non conservative products. As a consequence, the classical theory of distributions cannot apply to understand (1) in the limit $\epsilon \rightarrow 0^+$ in the usual weak sense. But a weak sense is needed since in general, the underlying nonlinear hyperbolic system in (1), *i.e.* obtained when formally setting $\epsilon = 0$, does not admit smooth solutions : propagating shock waves appears in finite time from smooth initial data. BV functions are expected to bring a suitable framework for studying the singular limit under consideration. After the classical results by Federer [27], BV functions can be manipulated as if they were piecewise Lipschitz continuous functions. For simplicity and without significant loss of generality, we restrict attention to this class of functions.

In the setting of a viscous regularization in full conservation form, *i.e.* when (1) naturally writes :

$$\partial_t \mathbf{u}^\epsilon + \mathcal{A}(\mathbf{u}^\epsilon) \partial_x \mathbf{u}^\epsilon = \epsilon \partial_x (\mathcal{D}(\mathbf{u}^\epsilon) \partial_x \mathbf{u}^\epsilon), \quad x \in \mathbb{R}, t > 0. \quad (2)$$

for some suitable matrix-valued function \mathcal{D} (see Majda, Pego [52]), LeFloch [48] is the first to propose to define shock solutions in the limit system as the limit of traveling

¹O.N.E.R.A., B.P. 72, 29 Avenue de la Division Leclerc, 92322 Châtillon, France.

E-mail : bruno.audebert@ensta.org

²CNRS and Laboratoire Jacques-Louis Lions, UPMC, 75252 Paris cedex 05, France.

E-mail : coquel@ann.jussieu.fr

wave solutions of (2) as ϵ goes to zero. Recall that traveling waves are recovered from smooth solutions of (7) with $\epsilon = 1$, of the form :

$$\begin{aligned} \mathbf{u}(x, t) &= \mathbf{w}(x - \sigma t) = \mathbf{w}(\xi), \\ \lim_{\xi \rightarrow \pm\infty} \mathbf{w}(\xi) &= \mathbf{u}_{\pm}, \quad \lim_{\xi \rightarrow \pm\infty} d_{\xi} \mathbf{w}(\xi) = 0, \end{aligned} \quad (3)$$

where $\sigma \in \mathbb{R}$ denotes the speed of the wave and \mathbf{u}_{-} , \mathbf{u}_{+} are two states in $\Omega_{\mathbf{u}}$. Then for fixed $\epsilon > 0$, the rescaled function $\mathbf{w}_{\epsilon}(\xi) = \mathbf{w}(\xi/\epsilon)$ is nothing other than a traveling wave solution of (2) with the same asymptotics $\lim_{\xi \rightarrow \pm\infty} \mathbf{w}_{\epsilon}(\xi) = \mathbf{u}_{\pm}$. Classical arguments then prove that $\|d_{\xi} \mathbf{w}_{\epsilon}\|_{L^1(\mathbb{R})} = \|d_{\xi} \mathbf{w}\|_{L^1(\mathbb{R})} < \infty$ so that the sequence $\{\mathbf{w}_{\epsilon}\}_{\epsilon > 0}$ converges strongly in $L^1_{loc}(\mathbb{R})$ as ϵ goes to zero to the following step function :

$$\mathbf{u}(x, t) = \mathbf{u}_{-} + (\mathbf{u}_{+} - \mathbf{u}_{-})H(x - \sigma t), \quad (4)$$

After LeFloch, (4) is referred as to a shock solution of the limit system in (2). This shock solution is easily seen to obey the following generalized jump relations :

$$-\sigma(\mathbf{u}_{+} - \mathbf{u}_{-}) + \int_{\mathbb{R}} \mathcal{A}(\mathbf{w}(\xi))d\xi = 0. \quad (5)$$

After [48], we underline that this shock solution is in general and as expected regularization dependent. This has then motivated LeFloch [48], Dal Maso, LeFloch, Murat [53] and LeFloch, Tzavaras [49] to introduce general definitions of first order non conservative products in the BV framework that are again stable under weak convergence.

The setting of viscous regularizations in genuine non conservation form has been considered recently by Berthon, Coquel, LeFloch [10]. The framework they propose is motivated by the following property, met by several models from the Physics : namely, there exists a smooth change of unknown $\mathbf{u} \in \Omega_{\mathbf{u}} \rightarrow \mathbf{v}(\mathbf{u}) \in \Omega_{\mathbf{v}}$ so that the smooth solutions of (1) obey the following equivalent form :

$$\partial_t \mathbf{v}(\mathbf{u}^{\epsilon}) + \partial_x \mathcal{F}(\mathbf{v}(\mathbf{u}^{\epsilon})) = \epsilon \mathcal{R}(\mathbf{v}(\mathbf{u}^{\epsilon}), \partial_x \mathbf{v}(\mathbf{u}^{\epsilon}), \partial_{xx} \mathbf{v}(\mathbf{u}^{\epsilon})), \quad x \in \mathbb{R}, t > 0, \quad (6)$$

which is written for short :

$$\partial_t \mathbf{v}^{\epsilon} + \partial_x \mathcal{F}(\mathbf{v}^{\epsilon}) = \epsilon \mathcal{R}(\mathbf{v}^{\epsilon}, \partial_x \mathbf{v}^{\epsilon}, \partial_{xx} \mathbf{v}^{\epsilon}), \quad x \in \mathbb{R}, t > 0. \quad (7)$$

In contrast with (2), the viscous perturbation in (7) writes in nonconservation form but the underlying first order system now stands in conservation form. We shall comment below on the meaning of such a change of variables. Tackling the formal limit $\epsilon \rightarrow 0^+$ in (7) and provided that suitable estimates on the sequence \mathbf{v}^{ϵ} and its derivatives are satisfied, the nonconservative term $\epsilon \mathcal{R}(\mathbf{v}^{\epsilon}, \partial_x \mathbf{v}^{\epsilon}, \partial_{xx} \mathbf{v}^{\epsilon})$ cannot be expected to converge to zero in the sense of measures as ϵ goes to zero, but instead to a vector-valued bounded Borel measure $\mu_{\mathbf{v}}$ concentrated on the shock discontinuities of the limit function \mathbf{v} . Such a measure vanishes in the region of continuity of \mathbf{v} and has a non trivial mass along any curve of discontinuity of \mathbf{v} . Let us again address the definition of shock solutions of (7) thanks to traveling wave solutions. Along the lines of the previous derivation, the sequence $\{\mathbf{v}_{\epsilon}\}_{\epsilon > 0}$ built when rescaling a traveling wave solution $\tilde{\mathbf{v}}$ of (7) with $\epsilon = 1$ and $\lim_{\xi \rightarrow \pm\infty} \tilde{\mathbf{v}}(\xi) = \mathbf{v}_{\pm}$ is seen to converge strongly in $L^1_{loc}(\mathbb{R})$ in the limit $\epsilon \rightarrow 0^+$ to the following discontinuous function :

$$\mathbf{v}(x, t) = \mathbf{v}_{-} + (\mathbf{v}_{+} - \mathbf{v}_{-})H(x - \sigma t), \quad x \in \mathbb{R}, t > 0. \quad (8)$$

The interest in the derivation of this shock solution stems from its characterization by the following set of generalized Rankine-Hugoniot jump conditions :

$$-\sigma(\mathbf{v}_+ - \mathbf{v}_-) + (\mathcal{F}(\mathbf{v}_+) - \mathcal{F}(\mathbf{v}_-)) = \mathcal{K}(\mathbf{v}_-, \sigma). \quad (9)$$

where the so-called kinetic function $\mathcal{K} : \Omega_{\mathbf{u}} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ is defined thanks to the next identity valid for all $\epsilon > 0$ and derived from (7) :

$$\mathcal{K}(\mathbf{v}_-, \sigma) = \int_{\xi \in \mathbb{R}} \mathcal{R}(\tilde{\mathbf{v}}, \tilde{\mathbf{v}}', \tilde{\mathbf{v}}'') d\xi = \epsilon \int_{\xi \in \mathbb{R}} \mathcal{R}(\mathbf{v}_\epsilon, \mathbf{v}'_\epsilon, \mathbf{v}''_\epsilon) d\xi. \quad (10)$$

In other words, $\mathcal{K}(\mathbf{v}_-, \sigma)$ is nothing other than the mass of the Borel measure $\mu_{\mathbf{v}}$ concentrated on the shock solution (8). The proposed framework has been used on an important class of models encompassing several turbulence as well as multifluid modelings. We refer to [7] for the so-called (k, ϵ) model and variants of it and to [14] for the multi-scale turbulence approach. The interest in the Definition 1.1 remains in that it allows a mathematical framework which turns to be really tractable from the numerical standpoint (see [7], [14] for instance).

Let us now comment on the roots of the equivalent form (7). In that aim, we observe that formally setting $\epsilon = 0$ in (6) gives in terms of components :

$$\partial_t v_i(\mathbf{u}) + \partial_x \mathcal{G}_i(\mathbf{u}) = 0, \quad \mathcal{G}_i(\mathbf{u}) = \mathcal{F}_i(\mathbf{v}(\mathbf{u})), \quad i \in \{1, \dots, n\}, \quad (11)$$

so that by definition, the scalar functions v_i, \mathcal{G}_i play the role of an entropy pair (trivial or non trivial) for smooth solutions of the underlying hyperbolic system in (1). Hence, the i th component of the non conservative second order term \mathcal{R} in (6) is nothing but the associated entropy rate of production. Rephrasing this observation, the existence of a change of unknown $\mathbf{u} \rightarrow \mathbf{v}(\mathbf{u})$ in (6) thus requires the existence of as many additional entropy pairs with independent gradients for (1) than there exist scalar equations involving first order non conservative products in (1). This requirement is met by the class of PDE models studied in [7], [14]. Concerning the system to be dealt with hereafter, we exhibit independent entropy pairs in a sufficient number but with the novelty that they do not allow an uniformly valid change of unknowns in the whole phase space $\Omega_{\mathbf{u}}$. Indeed, the sign of one of the unknowns cannot be recovered from the available entropy pairs. Nevertheless, the traveling wave analysis proves that this unknown keeps a constant sign in the viscous shock profiles. Hence, a left state $\mathbf{v}(\mathbf{u}_-)$ being given and a velocity σ being suitably prescribed, we are still in a position to solve for \mathbf{v}_+ a full set of generalized Rankine-Hugoniot jump conditions of the form (9) while recovering \mathbf{u}_+ from the knowledge of the sign of the incriminated component in \mathbf{u}_- . Hence and motivated by [10], we introduce the following notion of weak solutions based on a kinetic function $\mathcal{K}_{\mathcal{B}}$ built from a prescribed \mathcal{B} in (1) :

Definition 1.1. *Let be defined a smooth kinetic function $\mathcal{K}_{\mathcal{B}}$ from a prescribed \mathcal{B} in (1). A piecewise Lipschitz solution $\mathbf{u} = \mathbf{u}(x, t)$ is called a weak solution of the non conservative limit system in (1) iff in each region of continuity, \mathbf{u} solves in the classical sense :*

$$\partial_t \mathbf{u} + \mathcal{A}(\mathbf{u}) \partial_x \mathbf{u} = 0, \quad (12)$$

while at points of jump, it obeys the generalized Rankine-Hugoniot conditions :

$$-\sigma(\mathbf{v}(\mathbf{u}_+) - \mathbf{v}(\mathbf{u}_-)) + (\mathcal{F}(\mathbf{v}(\mathbf{u}_+)) - \mathcal{F}(\mathbf{v}(\mathbf{u}_-))) = \mathcal{K}_{\mathcal{B}}(\mathbf{u}_-, \sigma). \quad (13)$$

Actually, a direct extension of this notion of weak solutions is used in the following. Indeed, we have so far assumed that all the fields in the underlying hyperbolic system in (14) were genuinely nonlinear. The PDE system to be dealt with hereafter admits genuinely nonlinear but also linearly degenerate fields. As a consequence, both shock and contact discontinuities do coexist in the limit system. We shall prove that all the contact discontinuities arising in the limit $\epsilon \rightarrow 0^+$ never require to multiply a discontinuous function with a Dirac measure in (12). In other words, these contact discontinuities solve (12) in the usual sense of the distributions. Absence of ambiguities for these natural discontinuous solutions is important since by well-known considerations [61], they cannot be reached by traveling wave solutions of (1).

1.2 Presentation of the PDE model

Here, we introduce the first order system with singular viscous perturbation of interest in this paper. After a brief discussion of its physical significance, the required closure equations are stated. The PDE system to be discussed reads :

$$\left\{ \begin{array}{l} \partial_t \rho^\epsilon + \partial_x(\rho u)^\epsilon = 0, \\ \partial_t(\rho u)^\epsilon + \partial_x(\rho u^2 + p(\rho) + R_{11})^\epsilon = \epsilon \partial_x(\mu \partial_x u^\epsilon), \\ \partial_t(\rho v)^\epsilon + \partial_x(\rho u v + R_{12})^\epsilon = \epsilon \partial_x(\nu \partial_x v^\epsilon), \\ \partial_t R_{11}^\epsilon + \partial_x(R_{11} u)^\epsilon + 2R_{11}^\epsilon \partial_x u^\epsilon = -2\epsilon \mathcal{T}_{ris} \frac{R_{11}^\epsilon}{(\rho^\epsilon)^2} \partial_x \rho^\epsilon \times \partial_x p(\rho^\epsilon), \\ \partial_t R_{22}^\epsilon + \partial_x(R_{22} u)^\epsilon + 2R_{12}^\epsilon \partial_x v^\epsilon = 0, \\ \partial_t R_{12}^\epsilon + \partial_x(R_{12} u)^\epsilon + R_{11}^\epsilon \partial_x v^\epsilon + R_{12}^\epsilon \partial_x u^\epsilon = -\epsilon \mathcal{T}_{ris} \frac{R_{12}^\epsilon}{(\rho^\epsilon)^2} \partial_x \rho^\epsilon \times \partial_x p(\rho^\epsilon), \end{array} \right. \quad (14)$$

and we actually address (14) in the regime of a vanishing rescaling parameter $\epsilon \rightarrow 0^+$. Here, ϵ may be thought as the inverse of a Reynolds number. This system falls within the frame of the so-called second order closure models from the Physics of compressible turbulent flows. It governs plane wave solutions of a PDE model in two space dimensions satisfying the principle of material frame indifference. We refer the reader to the book by Mohammadi Pironneau [55] from the mathematical literature and to the one by [] for a presentation from the Physics. Besides the required closure equations, it is worth to briefly point out at this stage the physical meaning of the unknowns entering (14) to justify the natural phase space :

$$\Omega_{\mathbf{u}} = \left\{ \mathbf{u} = (\rho, \rho u, \rho v, R_{11}, R_{12}, R_{22})^T \in \mathbb{R}^6 / \rho > 0, (u, v) \in \mathbb{R}^2, \right. \\ \left. R_{ii} \geq 0, i = 1, 2, R_{11} R_{22} - R_{12}^2 \geq 0 \right\}. \quad (15)$$

The restrictions imposed on the unknowns R_{ij} , $1 \leq i, j \leq 2$ are the so-called realizability conditions of importance in the following. Note that the sign of R_{12} may vary in contrast with R_{ii} , $i = 1, 2$. The PDE model under consideration is deduced from suitable averaging procedures in the Navier-Stokes equations with two space variables intended to filter fluctuations in the flow taking place at a too fine scale. In (14), u and v are the components of $\langle U \rangle = \overline{\rho U} / \overline{\rho}$, a density-weighted average of the instantaneous velocity field U . They respectively denote the normal velocity and tangential velocity in the plane wave solutions under consideration. Next, R_{ij} , $1 \leq i, j \leq 2$, are the components of the so-called symmetric Reynolds stress tensor $\langle U' \otimes U' \rangle$ where U' stands for the departure of U from $\langle U \rangle$. It is therefore natural to respectively

require $R_{ii} = \langle U_i'^2 \rangle \geq 0$ and $R_{12}^2 = \langle U_1' U_2' \rangle^2 \leq \langle U_1'^2 \rangle \langle U_2'^2 \rangle$ in view of a Cauchy-Schwartz inequality.

Let us then state the required closure equations in (14). We assume an isothermal pressure law :

$$p(\rho) = T_0 \rho, \quad T_0 > 0. \quad (16)$$

This assumption uniquely intends to facilitate the forthcoming algebraic considerations since it allows low degree polynomial expressions. We claim that most if not all of the next results extend to the setting of a general pressure law $p(\tau)$ expressed in the specific volume $\tau = 1/\rho$, with the standard assumptions that $p'(\tau) < 0$ and $p''(\tau) > 0$. Next the viscosity coefficients μ and ν are two given positive constants satisfying :

$$0 < \nu < \mu. \quad (17)$$

According to the Physics, the ratio μ/ν is commonly given the value 4/3. The requirement $\mu/\nu > 1$ is actually a nondegeneracy condition in the forthcoming application of the Center Manifold Theorem. Let us now comment on the second order nonconservative product $\partial_x \rho \times \partial_x p(\rho)$ in (14). It basically finds its root in the compressible nature of the flow model under consideration. Introduced by Ristorcelli [57], this term directly stems from the definition of the density-weighted averaging operator devoted to the compressible Navier-Stokes equations (see [57] for the details). It is usually considered as a correction term (from the common incompressible standpoint) and most of the time, it is neglected in the applications. In the present work, this so-called Ristorcelli correction is seen to play a major role in the viscous shock solutions of (14). The associated relaxation parameter \mathcal{T}_{ris} is assumed to be a non negative smooth function $\mathcal{T}_{ris} : (\rho, \partial_x u) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R} \rightarrow \mathcal{T}_{ris}(\rho, \partial_x u) \in \mathbb{R}_+$. In [57], \mathcal{T}_{ris} does depend on $\partial_x u$ and besides ρ may also depend on the unknown \mathbf{u} but solely in terms of $\mathcal{R}_{ii}, i = 1, 2$ and $R_{11}R_{22} - R_{12}^2$ for frame invariance reasons. This additional dependence is neglected for simplicity. In the following, this relaxation parameter is assumed either to be identically zero or to satisfy for any given $\rho > 0$:

$$\mathcal{T}_{ris}(\rho, y) > 0, \quad |y| > 0, \quad \mathcal{T}_{ris}(\rho, 0) = 0. \quad (18)$$

The technical assumption that \mathcal{T}_{ris} vanishes with $\partial_x u$ gives meaning hereafter to natural discontinuous solutions propagating at constant speed u in the limit system (14). To conclude the presentation of the PDE system (14), let us observe from the governing equation for R_{11} that choosing initial data for the Cauchy problem (14) with $R_{11}(x, 0) = 0$ formally leads to solutions with $R_{11}(x, t) = 0$ for all positive times. This in turn enforces $R_{12}(x, t) = 0$ to hold for all times from the realizability condition $R_{11}R_{22} - R_{12}^2 \geq 0$ in (15). We emphasize that this realizability condition is indeed satisfied by the solutions of (14) (see below). Hence, for such initial data, the PDE model (14) reduces to the usual Navier-Stokes equations up to some decoupled transport equation for R_{22}/ρ . This situation is somehow trivial and to light up the analysis without significant loss of generality, we tacitly assume from now on initial data with $R_{11}(x, 0) > 0$ so as to focus on the strengthened version of the phase space :

$$\Omega_{\mathbf{u}}^+ = \left\{ \mathbf{u} \in \Omega_{\mathbf{u}} / R_{11} > 0 \right\}. \quad (19)$$

Solutions of (14) with initial data in $\Omega_{\mathbf{u}}^+$ are seen hereafter to stay in this phase space for all finite positive times. This will allow important nontrivial additional laws for

the smooth solutions of (14) with a non zero tangential Reynolds stress $R_{12}(x, t) \neq 0$ of central interest here.

1.3 Basic properties of the PDE model

In this section, we aim to examine the expected structure of the limit system inherited from (14) at the limit $\epsilon \rightarrow 0^+$. Of specific concern here are the possible ambiguous nonconservative products arising in such a limit. The following first statement asserts that the PDE model (14) is a hyperbolic system with viscous perturbations :

Lemma 1.2. *The underlying first order system in (14), i.e. obtained formally setting $\epsilon = 0$, is hyperbolic over $\Omega_{\mathbf{u}}$. For any given state $\mathbf{u} \in \Omega_{\mathbf{u}}$, it admits the following eigenvalues :*

$$u - c(\mathbf{u}), u - a(\mathbf{u}), u, u + a(\mathbf{u}), u + c(\mathbf{u}) \quad (20)$$

where u is of order of multiplicity 2. The speeds of propagation $a(\mathbf{u})$ and $c(\mathbf{u})$ are given from :

$$0 \leq a^2(\mathbf{u}) = \frac{R_{11}}{\rho} < c^2(\mathbf{u}) = T_0 + 3a^2(\mathbf{u}), \quad (21)$$

so that, with clear notations, eigenvalues can be increasingly arranged according to :

$$\lambda_1(\mathbf{u}) < \lambda_2(\mathbf{u}) \leq \lambda_3(\mathbf{u}) = \lambda_4(\mathbf{u}) \leq \lambda_5(\mathbf{u}) < \lambda_6(\mathbf{u}) \quad (22)$$

The two extreme fields are genuinely nonlinear while all the other intermediate fields are linearly degenerate.

For states $\mathbf{u} \in \Omega_{\mathbf{u}}$ with $R_{11} = 0$, i.e with $a(\mathbf{u}) = 0$, all the intermediate eigenvalues collapse but we stress that a basis of right eigenvectors persists. To get further grasp into the structure of the PDE model (14), it is convenient to reexpress it in Lagrangian coordinates (see Wagner [69] for instance) when formally setting first ϵ to zero. This not only sheds light on discrepancies with the usual setting for gas dynamics but it also provides a convenient tool to check the statements in the present and next sections, of which proofs are mostly left to the reader. To this end, we refer the reader to the equivalence of the Lagrangian and Eulerian frameworks due to Wagner [69]. In the unknown $(\tau, u, R_{11}, v, R_{12}, R_{22})$, the Lagrangian equations under consideration can be seen to read :

$$\left\{ \begin{array}{l} \partial_t \tau - \partial_y u = 0, \\ \partial_t u + \partial_y (T_0 \rho + R_{11}) = 0, \\ \partial_t R_{11} + 3\rho R_{11} \partial_y u = 0, \\ \partial_t v + \partial_y R_{12} = 0, \\ \partial_t R_{12} + \rho R_{11} \partial_y v + 2\rho R_{12} \partial_y u = 0, \\ \partial_t R_{22} + \rho R_{22} \partial_y u + 2\rho R_{12} \partial_y v = 0, \end{array} \right. \quad (23)$$

where classically $\tau = 1/\rho$. In (23), expected $\partial_t R_{ij} \tau$, $1 \leq i, j \leq 2$, have been expanded for convenience and then multiplied by ρ . The first three equations, decoupled from the others, take the form of a Lagrangian system for gas dynamics with total pressure $T_0 \rho + R_{11}$: they are clearly responsible for the two extreme GNL fields in Lemma 1.2 and contribute to one eigenvalue u . The next two equations in (23), decoupled from the last one, give birth to two linearly degenerate fields with symmetric eigenvalues

$-\rho a(\mathbf{u})$ and $+\rho a(\mathbf{u})$ in direct correspondance with respectively $u - a(\mathbf{u})$ and $u + a(\mathbf{u})$ in Lemma 1.2 (see [69]). They allow a non trivial time behavior of the tangential unknowns v and R_{12} , in sharp contrast with the usual Lagrangian setting where v does not depend on time. They actually stay at the core of the reported overcompression phenomenon. The last equation in (23) leads to an additional eigenvalue u in Lemma 1.2.

The existence of genuinely nonlinear fields in (23) allows discontinuities to develop in finite time from smooth initial data. Accross these so-called shock waves, τ , u and R_{11} are governed by a classical system for gas dynamics and thus are known to achieve non trivial jumps. In turn, neither v nor R_{12} can stay continuous as soon as $R_{12} \neq 0$, since otherwise the fifth equation in (23) would require $\rho R_{12} \partial_y u = 0$ to hold in the sense of measures and hence a contradiction. All the nonconservative products in (23) thus exhibit ambiguities along shock waves. This observation obviously equally applies to the shock waves of the Eulerian formulation of (23). The viscous regularization in the full model (14) is proved hereafter to restore uniqueness in the definition of these nonconservative products in the limit $\epsilon \rightarrow 0^+$ provided that the Ristorcelli relaxation term (18) is chosen sufficiently large within the viscous shock profiles. The nonconservative product $\epsilon \partial_x \rho \partial_x p(\rho)$ then gives rise at the limit $\epsilon \rightarrow 0^+$ to a bounded positive Borel measure concentrated on the shock solutions of the limit system.

Next considering diffusion waves of (14) associated with intermediate degenerate fields and propagating at constant speed either $u \pm a(\mathbf{u})$ or u , we first claim that the product $\mathcal{T}_{ris}(\rho^\epsilon, \partial_x u^\epsilon) \partial_x \rho^\epsilon \partial_x p(\rho^\epsilon)$ with \mathcal{T}_{ris} satisfying (18) identically vanishes for any given $\epsilon > 0$. This follows from the next statement :

Lemma 1.3. *Let be given $\mathbf{u} \in \Omega_{\mathbf{u}}^+$. Then the u -Riemann invariants read :*

$$u, \quad p(\rho) + R_{11}, \quad v, \quad R_{12}, \quad (24)$$

while the $(u - a(\mathbf{u}))$ -Riemann (respectively $(u + a(\mathbf{u}))$ -Riemann) invariants write :

$$\rho, \quad u, \quad R_{11}, \quad v + \frac{R_{12}}{\sqrt{\rho R_{11}}} \quad (\text{resp. } v - \frac{R_{12}}{\sqrt{\rho R_{11}}}). \quad (25)$$

We underline that the states \mathbf{u} under consideration are chosen with $R_{11} > 0$ to prevent the collapse of the three intermediate contact discontinuities. The following discussion is easily seen to apply for states $\mathbf{u} \in \Omega_{\mathbf{u}}$. The Riemann invariants in (24)–(25) are easily recovered from the Lagrangian form (23) of the underlying hyperbolic system in (14). Concerning diffusion waves propagating at constant speed $(u - a(\mathbf{u}))$ (respectively $(u + a(\mathbf{u}))$), these do have to connect states \mathbf{u}_- and \mathbf{u}_+ with $\rho_- = \rho_+$, $u_- = u_+$ and $R_{11-} = R_{11+}$ in view of (25). From the first, second and fourth equations in (14), $\rho^\epsilon(x, t) = \rho_-$, $u^\epsilon(x, t) = u_-$ and $R_{11}^\epsilon(x, t) = R_{11-}$ are seen to be solutions. In other words, the diffusion waves under consideration are free from the Ristorcelli correction. Next, the assumption $\mathcal{T}_{ris}(\rho, 0) = 0$ in (18) ensures that the Ristorcelli correction identically vanishes in diffusion waves propagating at constant speed u . Therefore, the discontinuous solutions associated with all the intermediate degenerate fields in the limit $\epsilon \rightarrow 0^+$ must solve the inviscid part of (14), *i.e.* in condensed form :

$$\partial_t \mathbf{u} + \mathcal{A}(\mathbf{u}) \partial_x \mathbf{u} = 0. \quad (26)$$

As a consequence, we now have to verify that the discontinuous solutions under consideration never require to multiply a discontinuous function with a Dirac measure. From well-known considerations [32], [], contact discontinuities in a given LD field can be defined from the associated set of Riemann invariants. Thus invoking again Lemma 1.3, we first examine discontinuous solutions propagating at speed u . From (24), both the normal and tangential velocities stay continuous so that the nonconservative products, involving either $\partial_x u$ or $\partial_x v$, stay free from ambiguities. Next and considering a discontinuous solution with speed of propagation $u - a(\mathbf{u})$, the Riemann invariants in (25) readily give that both governing equations for R_{11} and R_{12} are again free from ambiguities and to conclude, it suffices to observe that :

$$\partial_t R_{22} + \partial_x(R_{22}u) + 2(R_{12} + v\sqrt{\rho R_{11}})\partial_x v - \sqrt{\rho R_{11}}\partial_x v^2 = 0, \quad (27)$$

where $R_{12} + v\sqrt{\rho R_{11}}$ and $\sqrt{\rho R_{11}}$ are continuous. The case of a discontinuity with velocity $u + a(\mathbf{u})$ is similar. To summarize, only the shock solutions coming with the extreme GNL fields in the limit system give rise to ambiguous nonconservative products.

1.4 Entropy pairs and equivalent formulations

In this paragraph, we exhibit all the non trivial entropy pairs of (14) : namely pairs of smooth functions $(\eta, q) : \Omega_{\mathbf{u}}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ for which smooth solutions of (1) obey the additional law :

$$\partial_t \eta(\mathbf{u}^\epsilon) + \partial_x q(\mathbf{u}^\epsilon) = \epsilon \nabla_{\mathbf{u}} \eta(\mathbf{u}^\epsilon) \cdot \mathcal{B}(\mathbf{u}^\epsilon, \partial_x \mathbf{u}^\epsilon, \partial_{xx} \mathbf{u}^\epsilon). \quad (28)$$

As underlined in the preamble, such laws where the left hand side stands in conservation form are known to play a central role in the definition of convenient generalized jump conditions. Let us first state :

Proposition 1.4. *Smooth solutions $\mathbf{u} : \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+ \rightarrow \Omega_{\mathbf{u}}$ of (14) satisfy the following balance equation :*

$$\begin{aligned} \partial_t \{\rho E\}(\mathbf{u}^\epsilon) + \partial_x (\{\rho E\}(\mathbf{u}^\epsilon) u^\epsilon + (p(\rho^\epsilon) + R_{11}^\epsilon) u^\epsilon + R_{12}^\epsilon v^\epsilon) = \\ \epsilon \partial_x (\mu u^\epsilon \partial_x u^\epsilon + \nu v^\epsilon \partial_x v^\epsilon) - \epsilon \mu (\partial_x u^\epsilon)^2 - \epsilon \nu (\partial_x v^\epsilon)^2 - 2\epsilon \mathcal{T}_{ris} \frac{T_0 R_{11}^\epsilon}{(\rho^\epsilon)^2} (\partial_x \rho^\epsilon)^2, \end{aligned} \quad (29)$$

where the total energy ρE is defined by :

$$\{\rho E\}(\mathbf{u}) = \rho \frac{u^2 + v^2}{2} + \rho T_0 \ln\left(\frac{1}{\rho}\right) + \frac{R_{11} + R_{22}}{2}. \quad (30)$$

Introducing $\mathcal{D}(\mathbf{u}) = (R_{11}R_{22} - R_{12}^2)\tau^4$, they obey in addition :

$$\partial_t \{\rho \mathcal{D}\}(\mathbf{u}^\epsilon) + \partial_x \{\rho \mathcal{D}\}(\mathbf{u}^\epsilon) u^\epsilon = -2\epsilon \mathcal{T}_{ris} T_0 \frac{\mathcal{D}(\mathbf{u}^\epsilon)}{\rho^\epsilon} (\partial_x \rho^\epsilon)^2. \quad (31)$$

These laws can be seen to extend to the PDE model (14) with several space variables (see Audebert [3]). By contrast, the next additional laws solely hold for plane wave solutions of the multi-dimensional form of (14) but turn to be of primary importance in the study of these particular solutions. In view of the rotational invariance

of the PDE model under consideration, we stress that the laws to be dealt with are valid in any given fixed direction but with proper definitions of the normal velocity u to the wave and the normal Reynolds tension R_{11} together with proper definitions of the next tangential quantities : v , R_{12} and R_{22} .

Proposition 1.5. *Smooth solutions $\mathbf{u} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+ \rightarrow \Omega_{\mathbf{u}}^+$ of (14) verify :*

$$\begin{aligned} \partial_t \{\rho E_n\}(\mathbf{u}^\epsilon) + \partial_x(\{\rho E_n\}(\mathbf{u}^\epsilon)u^\epsilon + (p(\rho^\epsilon) + R_{11}^\epsilon)u^\epsilon) &= \epsilon \partial_x(\mu u^\epsilon \partial_x u^\epsilon) \\ &- \epsilon \mu (\partial_x u^\epsilon)^2 - 2\epsilon \mathcal{T}_{ris} \frac{T_0 R_{11}^\epsilon}{(\rho^\epsilon)^2} (\partial_x \rho^\epsilon)^2, \end{aligned} \quad (32)$$

where the normal energy ρE_n reads :

$$\{\rho E_n\}(\mathbf{u}) = \rho \frac{u^2}{2} + \rho T_0 \ln\left(\frac{1}{\rho}\right) + \frac{R_{11}}{2}, \quad (33)$$

and also the companion law :

$$\partial_t \{\rho E_t\}(\mathbf{u}^\epsilon) + \partial_x(\{\rho E_t\}(\mathbf{u}^\epsilon)u^\epsilon + R_{12}^\epsilon v^\epsilon) = \epsilon \partial_x(\nu v^\epsilon \partial_x v^\epsilon) - \epsilon \nu (\partial_x v^\epsilon)^2 \quad (34)$$

when defining the tangential energy ρE_t by :

$$\{\rho E_t\}(\mathbf{u}) = \rho \frac{v^2}{2} + \frac{R_{12}^2}{2R_{11}}. \quad (35)$$

In addition, these smooth solutions obey :

$$\partial_t \{\rho \mathcal{W}\}(\mathbf{u}^\epsilon) + \partial_x \{\rho \mathcal{W}\}(\mathbf{u}^\epsilon)u^\epsilon = 0, \quad \{\rho \mathcal{W}\}(\mathbf{u}) = R_{22} - \frac{R_{12}^2}{R_{11}}, \quad (36)$$

together with :

$$\partial_t \{\rho \mathcal{I}\}(\mathbf{u}^\epsilon) + \partial_x \{\rho \mathcal{I}\}(\mathbf{u}^\epsilon)u^\epsilon = -2\epsilon \mathcal{T}_{ris} T_0 \frac{\mathcal{I}(\mathbf{u}^\epsilon)}{\rho^\epsilon} (\partial_x \rho^\epsilon)^2, \quad \mathcal{I}(\mathbf{u}) = R_{11} \tau^3. \quad (37)$$

Let us comment on the additional laws we have put forward. First and with respect to the definition of the phase space $\Omega_{\mathbf{u}}^+$, notice that (37) rewrites (away from vacuum) :

$$\partial_t \mathcal{I}(\mathbf{u}^\epsilon) + u^\epsilon \partial_x \mathcal{I}(\mathbf{u}^\epsilon) = 2\epsilon \mathcal{T}_{ris} T_0 \left(\frac{\partial_x \rho^\epsilon}{\rho^\epsilon}\right)^2 \times (0 - \mathcal{I}(\mathbf{u}^\epsilon)), \quad (38)$$

i.e. (38) is nothing other than a transport equation with relaxation. Classical arguments ensure that for smooth solutions (*i.e.* with a bounded relaxation parameter), $R_{11} = \rho^3 \mathcal{I}(\mathbf{u})$ keeps positive value for all finite times if taken positive in the initial data. The same observation applies to (31) to get the same positivity property for $R_{11} R_{22} - R_{12}^2$. It thus makes sense to consider the additional laws (34) and (36) for solutions of (14) with initial data in $\Omega_{\mathbf{u}}^+$. Observe from the identity $\mathcal{W}(\mathbf{u}) = \mathcal{D}(\mathbf{u})/\mathcal{I}(\mathbf{u})$ that $\mathcal{W}(\mathbf{u})$ also achieves positive values. Notice by the way that $\{\rho E\}(\mathbf{u}) = \{\rho E_n\}(\mathbf{u}) + \{\rho E_t\}(\mathbf{u}) + \frac{1}{2}\{\rho \mathcal{W}\}(\mathbf{u})$: the proposed decomposition of the total energy into normal and tangential energies is of primary importance in this study.

Next, we underline that an exhaustive analysis of the additional conservation laws for smooth solutions of the underlying hyperbolic system in (14), *i.e.* setting formally

$\epsilon = 0$, is conveniently performed in Lagrangian coordinates. The system (23) is seen to only yield the reported Eulerian pairs (η, q) besides some useless nonlinear transforms in $\mathcal{I}(\mathbf{u})$, $\mathcal{W}(\mathbf{u})$ and $\mathcal{D}(\mathbf{u})$. The additional law (36) which governs $\{\rho\mathcal{W}\}(\mathbf{u})$ is actually the only one to take a full conservation form unless \mathcal{T}_{ris} is unexpectably chosen to be identically zero. In other words, the PDE model (14) is in genuine non conservation form. To tackle this difficulty, it is useful to promote the following well-defined change of unknown $\mathbf{u} \in \Omega_{\mathbf{u}}^+ \rightarrow \mathbf{v}(\mathbf{u}) \in \Omega_{\mathbf{v}}^+$, $\mathbf{v} = \mathbf{v}(\mathbf{u}) = \{\rho, \rho u, \rho \mathcal{I}, \rho v, R_{12}, \rho \mathcal{W}\}$ so as to reexpress equivalently (14) under the form :

$$\left\{ \begin{array}{l} \partial_t \rho^\epsilon + \partial_x (\rho u)^\epsilon = 0, \\ \partial_t (\rho u)^\epsilon + \partial_x (\rho u^2 + p(\rho) + R_{11})^\epsilon = \epsilon \partial_x (\mu \partial_x u^\epsilon), \\ \partial_t (\rho \mathcal{I})^\epsilon + \partial_x (\rho \mathcal{I} u)^\epsilon = -2\epsilon \mathcal{T}_{ris} T_0 \frac{\mathcal{I}^\epsilon}{\rho^\epsilon} (\partial_x \rho^\epsilon)^2, \\ \partial_t (\rho v)^\epsilon + \partial_x (\rho u v + R_{12})^\epsilon = \epsilon \partial_x (\nu \partial_x v^\epsilon), \\ \partial_t R_{12}^\epsilon + \partial_x (R_{12} u)^\epsilon + R_{11}^\epsilon \partial_x v^\epsilon + R_{12}^\epsilon \partial_x u^\epsilon = -\epsilon \mathcal{T}_{ris} T_0 \frac{R_{12}^\epsilon}{(\rho^\epsilon)^2} (\partial_x \rho^\epsilon)^2, \\ \partial_t (\rho \mathcal{W})^\epsilon + \partial_x (\rho \mathcal{W} u)^\epsilon = 0. \end{array} \right. \quad (39)$$

Let us stress that since the sign of R_{12} may vary in the solutions of (14), the tangential energy law (35) cannot provide us, in full generality, with a relevant change of variable. We are thus forced to keep R_{12} as an independent variable in the study of the solutions of (39). Nevertheless and focusing on the special class of traveling wave solutions of (39), the next section proves that the tangential Reynolds tension R_{12} keeps a constant sign along the viscous profiles. The PDE (34) ruling the tangential energy law will then play a major role in the derivation of a generalized jump condition.

2 Traveling wave analysis

The forthcoming sections are devoted to the study of the traveling wave solutions associated to the two genuinely nonlinear extreme fields of (39) when choosing $\epsilon = \mu > 0$ without restriction. From Galilean invariance, it suffices to consider the first field. We prove the existence of solutions issuing from an arbitrary prescribed state $\mathbf{u}_- \in \Omega_{\mathbf{u}}^+$ in the past and propagating at any given velocity σ obeying the classical condition $\lambda_1(\mathbf{u}_-) > \sigma$. Existence is achieved whatever the particular shape of the Ristorcelli relaxation parameter $\mathcal{T}_{ris} \geq 0$ is. But assuming an identically zero \mathcal{T}_{ris} and as soon as $R_{12-} \neq 0$, we prove that choosing the Mach number $\mathcal{M}_c(\mathbf{u}_-) \equiv (u_- - \sigma)/c(\mathbf{u}_-)$ large enough, *i.e.* considering traveling waves of sufficiently large strength, systematically results in the existence of infinitely many distinct states $\mathbf{u}_+ \in \Omega_{\mathbf{u}}^+$ which can be connected in the future by traveling wave solutions with speed σ and issuing from \mathbf{u}_- . In contrast, we show that uniqueness can be always recovered provided that \mathcal{T}_{ris} in (18) achieves sufficiently large positive values in a precise sense. Too small values of \mathcal{T}_{ris} lead overcompressive viscous shock profiles when $\mathcal{M}_c(\mathbf{u}_-)$ is large enough :

$$\lambda_1(\mathbf{u}_+) < \sigma < \lambda_1(\mathbf{u}_-), \quad \lambda_2(\mathbf{u}_+) < \sigma, \quad (40)$$

while sufficiently large values of \mathcal{T}_{ris} restore the Lax conditions :

$$\lambda_1(\mathbf{u}_+) < \sigma < \lambda_1(\mathbf{u}_-), \quad \sigma < \lambda_2(\mathbf{u}_+). \quad (41)$$

Indeed and in view of equation (38), relevant Ristorcelli corrections prevent $a^2(\mathbf{u}) = \mathcal{I}\rho^2$ from achieving too large values in the compression profiles so as to ultimately

keep $\sigma < u_+ - a(\mathbf{u}_+)$. Next and with respect to the negative issue (40), note that we exclude from the analysis an exceptional value of the Mach number $\mathcal{M}_c(\mathbf{u}_-)$ giving birth to an end state \mathbf{u}_+ with :

$$\lambda_2(\mathbf{u}_+) = \sigma, \quad i.e. \quad \mathcal{M}_a(\mathbf{u}_+) = \frac{u_+ - \sigma}{a(\mathbf{u}_+)} = 1. \quad (42)$$

Its study requires considerable additional material of artificial interest to our main purpose.

2.1 The dynamical system

In this section, we derive the precise form of the dynamical system which governs the traveling wave solutions we study for existence. Simple but useful geometrical properties induced by the associated vector field are put forward.

Due to Galilean invariance, it suffices to consider the case of a null normal velocity σ , the tangential velocity v_- being suitably prescribed later on. The solutions under interest should then solve :

$$\left\{ \begin{array}{l} d_\xi(\rho u) = 0, \\ d_\xi(\rho u^2 + p + R_{11}) = d_\xi(d_\xi u), \\ d_\xi(\rho uv + R_{12}) = d_\xi\left(\frac{\nu}{\mu}d_\xi v\right), \\ d_\xi(\rho \mathcal{I}u) = -2\mathcal{T}_{ris}\rho \mathcal{I} \frac{d_\xi p}{\rho^2} \frac{d_\xi \rho}{\rho^2}, \\ d_\xi(R_{12}u) + R_{11}d_\xi v + R_{12}d_\xi u = -\mathcal{T}_{ris}R_{12} \frac{d_\xi p}{\rho^2} \frac{d_\xi \rho}{\rho^2}, \\ d_\xi(\rho \mathcal{W}u) = 0. \end{array} \right. \quad (43)$$

Here the Ristorcelli relaxation parameter \mathcal{T}_{ris} has been rescaled by $\mu > 0$ but is still given the same notation. Its dependence on ρ and $\partial_x u$ is omitted most of the time in the following except when precisely required in the analysis. The first equation in (43) implies that the relative mass flux ρu has a constant value denoted by m and as it is well-known, it cannot be zero for the solutions under consideration. Arguing again about the Galilean invariance allows us to solely address viscous profiles for shock solutions associated with the first GNL field. In other words and from now on, we assume without loss of generality that :

$$m > 0. \quad (44)$$

By well-known considerations, traveling wave solutions for the other extreme field, *i.e.* with $m < 0$, are recovered when reversing the sign of ξ and u and exchanging the role of the endpoints \mathbf{u}_- and \mathbf{u}_+ . Let us further notice from (43) that it suffices to restrict ourselves to endpoints \mathbf{u}_- with $(R_{12})_- \geq 0$ since the case of an opposite sign is recovered when multiplying the third and fifth equations by -1 .

Let us now recast (43) under the form of a first order EDO system. From (44), the last equation in (43) leads to the algebraic invariant $\mathcal{W}(\xi) = \mathcal{W}_-$ which no longer plays a role in the analysis. Next, integrating once the second and third equation in

(43) gives with $\tau = m u$ from (44) :

$$\begin{cases} md_\xi\tau = m^2(\tau - \tau_-) + T_0\left(\frac{1}{\tau} - \frac{1}{\tau_-}\right) + \left(\frac{\mathcal{I}}{\tau^3} - \frac{\mathcal{I}_-}{\tau_-^3}\right), \\ md_\xi\mathcal{I} = -2\mathcal{T}_{ris}T_0 \frac{\mathcal{I}}{\tau^3}(d_\xi\tau)^2, \\ \frac{\nu}{\mu}d_\xi v = m v + R_{12}, \\ md_\xi R_{12} + \frac{\mathcal{I}}{\tau^4}d_\xi v + 2m\frac{R_{12}}{\tau}d_\xi\tau = -\mathcal{T}_{ris}T_0 \frac{R_{12}}{\tau^3}(d_\xi\tau)^2, \end{cases} \quad (45)$$

where in view of Galilean invariance, we have prescribed $v_- = -R_{12}^-/m$ without restriction. As already observed at the PDE level in (38), orbits emanating from initial data with $\mathcal{I}(0) = 0$ (*i.e.* with $R_{11}(0) = 0$) are such that $\mathcal{I}(\xi)$ stays identically zero. In addition and for initial data with $R_{12}(0) = 0$, $R_{12}(\xi) = 0$ and $v(\xi) = 0$ are easily seen to solve the last two equations in (45). In other words and since orbits cannot cross in finite times, orbits with $R_{12}(\xi_0) \neq 0$, say $R_{12}(\xi_0) > 0$, at a given time ξ_0 are such that $R_{12}(\xi)$ does not vanish for all finite times and thus keeps a positive sign. We shall see that such a property extends to the limit $\xi \rightarrow +\infty$. This simple observation will play a central role in the definition of generalized jump conditions hereafter. We have thus proved :

Lemma 2.1. *The domains $\{(\tau, \mathcal{I}, v, R_{12})^T \in \mathbb{R}^4, \mathcal{I} > 0\}$ and $\{(\tau, \mathcal{I}, v, R_{12})^T \in \mathbb{R}^4, R_{12} > 0\}$ are positively invariant by the flow.*

From now on, we focus ourselves on orbits in these two invariants domains, *i.e.* on prescribed endstate \mathbf{u}_- with $R_{11-} > 0$ and $R_{12-} > 0$. The case of endstates with $R_{12-} = 0$ and thus $v_- = 0$, *i.e.* so that $R_{12} = v \equiv 0$, is easy and of little interest. To shed further light on the dynamical system (45), it is important to reexpress it in a new unknown obtained when defining :

$$Y_+ = v + \frac{R_{12}\tau^2}{\sqrt{\mathcal{I}}}, \quad Y_- = v - \frac{R_{12}\tau^2}{\sqrt{\mathcal{I}}}, \quad (46)$$

so as to state :

Lemma 2.2. *Traveling wave solutions of (14) should solve in the unknown $(\tau, \mathcal{I}, Y_+, Y_-)$ the next 4×4 -dynamical system, we denote by Σ^4 :*

$$\begin{cases} md_\xi\tau = m^2(\tau - \tau_-) + T_0\left(\frac{1}{\tau} - \frac{1}{\tau_-}\right) + \left(\frac{\mathcal{I}}{\tau^3} - \frac{\mathcal{I}_-}{\tau_-^3}\right), \\ md_\xi\mathcal{I} = -2\mathcal{T}_{ris}T_0 \frac{\mathcal{I}}{\tau^3}(d_\xi\tau)^2, \\ d_\xi Y_+ = \frac{\mu}{2\nu} \frac{m}{\mathcal{M}_a^2(\tau, \mathcal{I})} (\mathcal{M}_a(\tau, \mathcal{I}) - 1) \left((\mathcal{M}_a(\tau, \mathcal{I}) + 1)Y_+ + (\mathcal{M}_a(\tau, \mathcal{I}) - 1)Y_- \right), \\ d_\xi Y_- = \frac{\mu}{2\nu} \frac{m}{\mathcal{M}_a^2(\tau, \mathcal{I})} (\mathcal{M}_a(\tau, \mathcal{I}) + 1) \left((\mathcal{M}_a(\tau, \mathcal{I}) + 1)Y_+ + (\mathcal{M}_a(\tau, \mathcal{I}) - 1)Y_- \right), \end{cases} \quad (47)$$

where we have set :

$$\mathcal{M}_a(\tau, \mathcal{I}) = \frac{m\tau^2}{\sqrt{\mathcal{I}}} \equiv \frac{u}{\sqrt{R_{11}\tau}} > 0. \quad (48)$$

Proof of Lemma 2.2

The second and fourth equations in (45) clearly yield the next identity noticeably free from the Ristorcelli correction :

$$md_\xi \ln \left(\frac{R_{12}}{\sqrt{\mathcal{I}}} \right) + md_\xi \ln(\tau^2) + \frac{\mathcal{I}}{\tau^4 R_{12}} d_\xi v = 0. \tag{49}$$

so that from the third equation, we get :

$$\frac{m\nu}{\mu} d_\xi \left(v \pm \frac{R_{12}\tau^2}{\sqrt{\mathcal{I}}} \right) = \left(m \mp \frac{\sqrt{\mathcal{I}}}{\tau^2} \right) \times (m v + R_{12}). \tag{50}$$

Then, the formulae :

$$v = \frac{1}{2}(Y_+ + Y_-), \quad R_{12} = \frac{\sqrt{\mathcal{I}}}{2\tau^2}(Y_+ - Y_-), \tag{51}$$

give the required conclusion after some rearrangements in the terms.

Let us comment on the definition (46) : notice from $Y_\pm = v \pm R_{12}/\sqrt{\rho R_{11}}$ and Lemma 1.3 that Y_+ (respectively Y_-) is nothing but a Riemann invariant (25) for the linearly degenerate 2-wave propagating at speed $u - a(\mathbf{u})$ with $a(\mathbf{u}) = \sqrt{R_{11}/\rho}$ given in (21) (resp. 6-wave with speed $u + a(\mathbf{u})$). Connections with these intermediate waves are further justified when observing that the function $\mathcal{M}_a(\tau, \mathcal{I})$ given in (48) actually coincides with the ratio $(u - \sigma)/a(\mathbf{u})$ (here, $\sigma = 0$ by convention). In other words, (48) just reads as a relative Mach number but expressed for the 2-wave. Let us stress that the analysis is actually concerned with the first wave for which the relative Mach number reads $(u - \sigma)/c(\mathbf{u})$. As far as the weight $\mathcal{M}_a(\tau, \mathcal{I}) - 1$ in (47) is concerned, let us then keep in mind that :

$$\mathcal{M}_a(\tau, \mathcal{I}) > 1 \Leftrightarrow u - a(\mathbf{u}) > \sigma, \quad \text{while } \mathcal{M}_a(\tau, \mathcal{I}) < 1 \Leftrightarrow u - a(\mathbf{u}) < \sigma. \tag{52}$$

This observation is directly linked to the properties of the dynamical system (47) at equilibrium points to be discussed in the next section.

For convenience in the analysis, (45) is given a dimensionless form based on the prescribed state \mathbf{u}_- when rescaling respectively τ by τ_- , the velocities u and v by the sound speed c_- , the Reynolds stress R_{11} by $(\rho a^2)_-$ with $a_-^2 > 0$ given in (21) and R_{12} by $R_{12-} > 0$. Coming with the proposed rescaling are the next two dimensionless numbers : the Mach number $M = u_-/c_-$ and the so-called turbulent Mach number $\beta = a_-/c_-$. Observe from (44) that $M > 0$ while $\beta \in (0, 1/3)$ from (21). With common abuse in the notations but for simplicity in the discussion, the dimensionless variables are hereafter still denoted respectively by τ, \mathcal{I}, Y_+ and Y_- , with the property that $\tau_- = 1, \mathcal{I}_- = (R_{11}\tau^3)_- = 1$ and :

$$Y_\pm(-\infty) = \pm\beta \left(1 \mp \frac{\beta}{M} \right). \tag{53}$$

The dimensionless form of Σ^4 then reads :

$$\begin{cases} d_\xi \tau = \frac{\mathcal{G}(\tau, \mathcal{I})}{M} \equiv \frac{1}{M} \left(M^2(\tau - 1) + (1 - 3\beta^2)\left(\frac{1}{\tau} - 1\right) + \beta^2\left(\frac{\mathcal{I}}{\tau^3} - 1\right) \right), \\ d_\xi \mathcal{I} = -2\mathcal{T}_{ris} \frac{1 - 3\beta^2}{M^2} \frac{\mathcal{I}}{\tau^3} \mathcal{G}^2(\tau, \mathcal{I}), \\ d_\xi Y_+ = \frac{\mu}{2\nu} \frac{M}{\mathcal{M}_a^2(\tau, \mathcal{I})} (\mathcal{M}_a(\tau, \mathcal{I}) - 1) \left((\mathcal{M}_a(\tau, \mathcal{I}) + 1)Y_+ + (\mathcal{M}_a(\tau, \mathcal{I}) - 1)Y_- \right), \\ d_\xi Y_- = \frac{\mu}{2\nu} \frac{M}{\mathcal{M}_a^2(\tau, \mathcal{I})} (\mathcal{M}_a(\tau, \mathcal{I}) + 1) \left((\mathcal{M}_a(\tau, \mathcal{I}) + 1)Y_+ + (\mathcal{M}_a(\tau, \mathcal{I}) - 1)Y_- \right), \end{cases} \quad (54)$$

where :

$$\mathcal{M}_a(\tau, \mathcal{I}) = \frac{M\tau^2}{\beta\sqrt{\mathcal{I}}} > 0. \quad (55)$$

Here \mathcal{T}_{ris} denotes a dimensionless version of the Ristorcelli relaxation parameter when multiplied by c_- . Clearly, the vector field in (54) is at least continuously differentiable over the following natural phase space :

$$\Omega = \left\{ \omega = (\tau, \mathcal{I}, Y_+, Y_-)^T \in \mathbb{R}^4; \quad \tau > 0, \mathcal{I} > 0, (Y_+, Y_-) \in \mathbb{R}^2 \right\}, \quad (56)$$

so that (54) enters the classical Picard-Lipschitz theory. The next section studies the equilibrium states of (54).

2.2 On basic properties of Σ^4 at equilibrium points

Here, we exhibit some important properties of the linearization $LX(\omega_e)$ of the vector field X in (54) at equilibrium points ω_e , *i.e.* at states satisfying $\mathcal{G}(\tau, \mathcal{I})(\omega_e) = 0$ and $((\mathcal{M}_a(\tau, \mathcal{I}) + 1)Y_+ + (\mathcal{M}_a(\tau, \mathcal{I}) - 1)Y_-)(\omega_e) = 0$. In agreement with (42), we focus on equilibrium states satisfying :

$$\mathcal{M}_a(\omega_e) \neq 1. \quad (57)$$

The exceptional case $\{u/a\}(\omega_e) = 1$ is seen below to coincide with a degenerate case uniquely concerned with equilibrium states in the future. Next introducing $\mathcal{M}_c(\omega_e) = \{u/c\}(\omega_e)$, *i.e.* the Mach number evaluated on the first wave, $LX(\omega_e)$ is seen to admit the following eigenvalues :

$$\kappa_1(\omega_e) = \frac{M}{\mathcal{M}_c^2(\omega_e)} (\mathcal{M}_c^2(\omega_e) - 1), \quad \kappa_2(\omega_e) = \frac{\mu}{\nu} \frac{M}{\mathcal{M}_a^2(\omega_e)} (\mathcal{M}_a^2(\omega_e) - 1), \quad (58)$$

and 0 as a semisimple eigenvalue of multiplicity 2 under the standard nondegeneracy condition :

$$\mathcal{M}_c(\omega_e) \neq 1. \quad (59)$$

Let us next observe from $a(\omega_e) < c(\omega_e)$ in (21) that :

$$\mathcal{M}_a(\omega_e) > \mathcal{M}_c(\omega_e). \quad (60)$$

In the next section, we prove that heteroclinic orbits of Σ^4 exist only if $M = \mathcal{M}_c(\omega_-) > 1$ with as a by product $\mathcal{M}_c(\omega_+) < 1$. Hence necessarily $\mathcal{M}_a(\omega_-) > 1$ while the sign of

$\mathcal{M}_a(\mathbf{u}_-) - 1$ is left undetermined at this stage. Again from (60), assuming $\mathcal{M}_a(\omega_e) > 1$ implies $\kappa_2(\omega_e) > M/\mathcal{M}_a^2(\omega_e)(\mathcal{M}_a^2(\omega_e) - 1)$ since $\mu/\nu > 1$ in view of (17), so that :

$$\kappa_2(\omega_e) - \kappa_1(\omega_e) > \frac{M}{\mathcal{M}_a^2(\omega_e)\mathcal{M}_c^2(\omega_e)}(\mathcal{M}_a^2(\omega_e) - \mathcal{M}_c^2(\omega_e)) > 0. \quad (61)$$

Conversely, assuming $\mathcal{M}_a(\omega_e) < 1$ implies $\kappa_2(\omega_e) \neq \kappa_1(\omega_e)$ except for an exceptional state ω_e in the future at which $LX(\omega_e)$ does not diagonalize. Omitting this degenerate case, equilibrium states satisfying (57)–(59) are seen to be nonhyperbolic points for which the space \mathbb{R}^4 writes as the direct sum of the eigenspaces associated with $LX(\omega_e)$.

Equipped with these properties of $LX(\omega_e)$, we are in a position to apply the Center Manifold Theorem to qualify possible heteroclinic orbit of Σ^4 which connects exponentially fast the prescribed equilibrium state ω_- in the past :

$$\omega_- = \left(1, 1, \beta\left(1 - \frac{\beta}{M}\right), -\beta\left(1 + \frac{\beta}{M}\right) \right), \quad (62)$$

and joins exponentially fast in the future some equilibrium state ω_+ . By well-known considerations, the totality of such heteroclinic orbits lies in the intersection of the unstable manifold $\mathcal{W}^u(\omega_-)$ and the stable manifold $\mathcal{W}^s(\omega_+)$.

As already claimed, heteroclinic orbits of Σ^4 exist only if $M = \mathcal{M}_c(\omega_-) > 1$ with $\mathcal{M}_c(\omega_+) < 1$. Since $\kappa_2(\omega_-) > \kappa_1(\omega_-) > 0$ from (61), the Center Manifold Theorem asserts that the dimension of $\mathcal{W}^u(\omega_-)$ is 2. Conversely and in view of (58), the dimension of $\mathcal{W}^s(\omega_+)$ clearly depends on the sign of $\mathcal{M}_a(\omega_+) - 1$: namely $\dim(\mathcal{W}^s(\omega_+)) = 1$ provided that $\mathcal{M}_a(\omega_+) > 1$ while $\dim(\mathcal{W}^s(\omega_+)) = 2$ when $\mathcal{M}_a(\omega_+) < 1$ (except for an exceptional ω_+). Rephrasing this claim, a possible heteroclinic orbit of Σ^4 satisfies the classical Lax conditions provided that $\dim(\mathcal{W}^s(\omega_+)) = 1$:

$$u_+ - c(\omega_+) < \sigma < u_- - c(\omega_-), \quad \sigma < u_+ - a(\omega_+), \quad (63)$$

while it violates these Lax-conditions when $\dim(\mathcal{W}^s(\omega_+)) = 2$:

$$u_+ - c(\omega_+) < \sigma < u_- - c(\omega_-), \quad u_+ - a(\omega_+) < \sigma, \quad (64)$$

In the next section, we establish that viscous shock profiles of Σ^4 of sufficiently large strength, *i.e.* with M sufficiently large, are necessarily overcompressive when the Ristorcelli correction does not achieve large enough positive values.

The analysis of the heteroclinic orbits of Σ^4 heavily relies on the property that the first two equations in (54) are decoupled from Y_+ and Y_- : indeed the Ristorcelli relaxation term \mathcal{T}_{ris} solely depends on τ and \mathcal{I} . Studying heteroclinic solutions of Σ^4 therefore amounts to analyze first orbits of the reduced dynamical system, denoted by Σ^2 :

$$\begin{cases} d_\xi \tau = \frac{\mathcal{G}(\tau, \mathcal{I})}{M} \equiv \frac{1}{M} \left(M^2(\tau - 1) + (1 - 3\beta^2)\left(\frac{1}{\tau} - 1\right) + \beta^2\left(\frac{\mathcal{I}}{\tau^3} - 1\right) \right), \\ d_\xi \mathcal{I} = -2\mathcal{T}_{ris}(\tau, \mathcal{I}) \frac{1 - 3\beta^2}{M^2} \frac{\mathcal{I}}{\tau^3} \mathcal{G}^2(\tau, \mathcal{I}), \end{cases} \quad (65)$$

joining the prescribed values $(\tau_-, \mathcal{I}_-) = (1, 1)$ in the past to then examine the behavior in time of the solutions of the next homogeneous linear system with variable

coefficients, we denote $\Sigma^{\mathbf{Y}}$:

$$\begin{cases} d_{\xi}Y_+ = \frac{\mu}{2\nu} \frac{M}{\mathcal{M}_a(\xi)^2} (\mathcal{M}_a(\xi) - 1) \left((\mathcal{M}_a(\xi) + 1)Y_+ + (\mathcal{M}_a(\xi) - 1)Y_- \right), \\ d_{\xi}Y_- = \frac{\mu}{2\nu} \frac{M}{\mathcal{M}_a(\xi)^2} (\mathcal{M}_a(\xi) + 1) \left((\mathcal{M}_a(\xi) + 1)Y_+ + (\mathcal{M}_a(\xi) - 1)Y_- \right), \end{cases} \quad (66)$$

where the smooth coefficient :

$$\mathcal{M}_a(\xi) = \mathcal{M}_a(\tau, \mathcal{I})(\xi) \quad \text{for all } \xi \in \mathbb{R}, \quad (67)$$

is built from the heteroclinic orbit(s) of (65). Solutions $(Y_+(\xi), Y_-(\xi))$ of interest must satisfy the required asymptotic condition $\lim_{\xi \rightarrow -\infty} \pm Y_{\pm}(\xi) = \pm Y_{\pm}(-\infty) = \beta(1 \mp \beta/M) > 0$. The behavior of relevant pairs of solutions for sufficiently large negative values of ξ can be further assessed thanks to the characterization of the unstable manifold $\mathcal{W}^u(\omega_-)$. Indeed, the Center Manifold Theorem ensures that $\mathcal{W}^u(\omega_-)$ is tangent to the two dimensional space $T^u(\mathbf{u}_-)$ spanned by the eigenvector associated with $\kappa_1(\omega_-)$:

$$\left(\frac{\nu}{2\mu\beta^2} \mathcal{M}_a(\omega_-)(\kappa_1(\omega_-) - \kappa_2(\omega_-)), 0, \mathcal{M}_a(\omega_-) - 1, \mathcal{M}_a(\omega_-) + 1 \right)^T, \quad (68)$$

and the eigenvector for $\kappa_2(\omega_-)$ given by :

$$(0, 0, \mathcal{M}_a(\omega_-) - 1, \mathcal{M}_a(\omega_-) + 1)^T. \quad (69)$$

Hence, distinct pairs $(Y_+(-L), Y_-(-L))$ in $\mathcal{W}^u(\mathbf{u}_-)$ at a given sufficiently negative time $-L$ can be parametrized according to :

$$\begin{aligned} Y_+^{\epsilon}(-L) &= Y_+(-\infty) + \epsilon(\mathcal{M}_a(\omega_-) - 1) + \mathcal{O}(\epsilon^2), \\ Y_-^{\epsilon}(-L) &= Y_-(-\infty) + \epsilon(\mathcal{M}_a(\omega_-) + 1) + \mathcal{O}(\epsilon^2), \end{aligned} \quad (70)$$

for $\epsilon \in (-\epsilon(-L), \epsilon(-L))$ with $\epsilon(-L) > 0$ small enough. We thus notice that the difference between two distinct orbits, say coming with ϵ_1 and ϵ_2 , verifies at the time under consideration :

$$Y_+^2 - Y_+^1 = \left(\frac{\mathcal{M}_a(\omega_-) - 1}{\mathcal{M}_a(\omega_-) + 1} + \mathcal{O}(\epsilon_2 - \epsilon_1) \right) (Y_-^2 - Y_-^1), \quad (71)$$

where $\mathcal{M}_a(\omega_-) > 1$. This observation is of importance in the following. Conversely, it is also worth to observe from (66) that eventual equilibrium states in the future $Y_{\pm}(+\infty) = \lim_{\xi \rightarrow +\infty} Y_{\pm}(\xi)$, *i.e.* solutions of $(\mathcal{M}_a(+\infty) + 1)Y_+(+\infty) = -(\mathcal{M}_a(+\infty) - 1)Y_+(+\infty)$, necessarily obey :

$$\begin{aligned} Y_+Y_-(+\infty) &\leq 0, & \text{if } \mathcal{M}_a(+\infty) = \lim_{\xi \rightarrow +\infty} \mathcal{M}_a(\xi) > 1, \\ Y_+Y_-(+\infty) &\geq 0, & \text{otherwise.} \end{aligned} \quad (72)$$

2.3 Heteroclinic solutions of the reduced dynamical system Σ^2

The main result of this section is :

Proposition 2.3. *Let be prescribed $\mathbf{u}_- \in \Omega_{\mathbf{u}}^+$ and a given $\sigma \in \mathbb{R}$. Then the reduced dynamical system Σ^2 admits a unique traveling wave solution (up to some translation) issuing from (τ_-, \mathcal{I}_-) and arriving at some pair (τ_+, \mathcal{I}_+) iff :*

$$M = \mathcal{M}_c(\mathbf{u}_-) = \frac{u_-}{c(\mathbf{u}_-)} > 1. \quad (73)$$

We stress that this result does not depend on the precise form of the Ristorcelli relaxation term $\mathcal{T}_{ris}(\rho, \partial_x u)$ in Σ^2 . However, we prove below that the possible heteroclinic solutions of Σ^4 coincide with classical compressive viscous profiles only if $\mathcal{T}_{ris}(\rho, \partial_x u)$ achieves sufficiently large positive values in a precise sense.

To start with, we observe that the linearized vector field in Σ^2 at an equilibrium point $\vartheta_e = (\tau_e, \mathcal{I}_e)$, i.e. at states with $\mathcal{G}(\tau, \mathcal{I})(\vartheta_e) = 0$, admits as eigenvalues $\kappa_1(\vartheta_e) = \frac{M}{\mathcal{M}_c^2(\vartheta_e)}(\mathcal{M}_c^2(\vartheta_e) - 1)$ given in (58) and 0. Under the nondegeneracy condition $\mathcal{M}_c(\vartheta_e) \neq 1$ (59), the corresponding eigenspaces are respectively spanned by $e_1 = (1, 0)$ and $e_2 = (0, 1)$. Since an orbit connects the prescribed state $\vartheta_- = (1, 1)$ in the past to some equilibrium point ϑ_+ in the future iff $\gamma \subset \mathcal{W}^u(\vartheta_-) \cap \mathcal{W}^s(\vartheta_+)$, an obvious requirement for the existence of such an heteroclinic orbit is :

$$\kappa_1(\vartheta_-) > 0, \quad \text{namely} \quad M \equiv \mathcal{M}_c(\vartheta_-) > 1, \quad (74)$$

but such an inequality is precisely the matter of the condition (73) stated in Proposition 2.3. Conversely, an eventual connecting point ϑ_+ in the future necessarily verifies $\mathcal{M}_c(\vartheta_+) < 1$. Now and since the unstable manifold at ϑ_- is one dimensional, there exist locally exactly two solutions of Σ^2 which approach ϑ_- as $\xi \rightarrow -\infty$. Since this unstable manifold is tangent to e_1 , the almost horizontal two negative semiorbits thus approach ϑ_- from the two opposite directions $\tau > \tau_-$ and $\tau < \tau_-$. With clear notations, $\gamma_{>}(\vartheta_-)$ (respectively $\gamma_{<}(\vartheta_-)$) denotes the first (resp. the second) negative semiorbit.

Under the necessary condition (73), we now study the set of equilibrium points ϑ_e , namely pairs (τ_e, \mathcal{I}_e) such that :

$$\mathcal{I}_e \equiv \mathcal{I}(\tau_e) = \frac{\tau_e^2}{\beta^2}((M^2 + 1 - 2\beta^2)\tau_e - M^2\tau_e^2 + (3\beta^2 - 1)). \quad (75)$$

The graph of $\mathcal{I}(\tau_e)$ displayed in figure (1) easily follows from the condition (74) and the estimate $\beta^2 < 1/3$. Namely, three non negative roots are in order, 0, $\underline{\tau}(\beta, M)$, $\overline{\tau}(\beta, M)$ together with two local extrema, a negative minimum at $\tau_{min}(\beta, M)$ and a positive maximum at $\tau_{max}(\beta, M)$ which are interlaced according to :

$$0 < \tau_{min}(\beta, M) < \underline{\tau}(\beta, M) < \tau_{max}(\beta, M) < \tau_- = 1 < \overline{\tau}(\beta, M). \quad (76)$$

The dependence on the parameters (β, M) is dropped hereafter most of the time. Since semiorbits of Σ^2 with initial data $\mathcal{I}(0) = 0$ obey $\mathcal{I}(\xi) = 0$ for all finite times with the obvious estimate $d_\xi \mathcal{I} \leq 0$ in view of $\mathcal{T}_{ris} \geq 0$, we clearly have :

Lemma 2.4. *The domain $\mathcal{D}_1 = \{\vartheta \in \mathbb{R}_+^2; 0 < \mathcal{I} \leq \mathcal{I}_- = 1\}$ is positively invariant.*

As a consequence both positive semiorbits $\gamma_{<}(\vartheta_-)$ and $\gamma_{>}(\vartheta_-)$ emanating from ϑ_- are trapped in \mathcal{D}_1 . Equipped with this, the following assertion discards the semiorbit $\gamma_{>}(\vartheta_-)$:

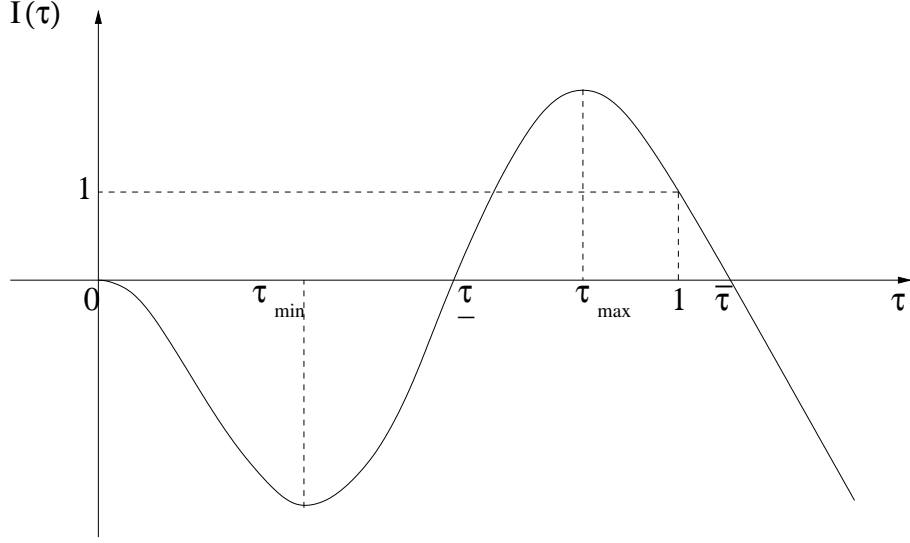


FIG. 1 – Typical shape of the function $\mathcal{I}(\tau)$

Proposition 2.5. *There is no heteroclinic orbit of Σ^2 in the domain $\{\vartheta \in \mathcal{D}_1, \tau > \tau_-\}$.*

Consequently, solely $\gamma_<(\vartheta_-)$ can give rise to a heteroclinic orbit.

Proof of Proposition 2.5

Since the semiorbit $\gamma_>(\vartheta_-)$ is tangent to e_1 at ϑ_- , we clearly get from the graph of $\mathcal{I}(\vartheta_e)$ the existence of a time $L > 0$ sufficiently large, such that for all $\xi < -L < 0$, $\tau(\xi) > \tau_- = 1$ with of course $0 < \mathcal{I}(\xi) \leq 1$. In other words, $\mathcal{G}(\tau, \mathcal{I})(\xi)$ can be made larger than $\epsilon > 0$ for any given ϵ small enough (see figure (1)). For a given such ϵ , let us introduce in the plane (τ, \mathcal{I}) the well defined curve $\mathcal{I}^\epsilon(\tau)$ from $\mathcal{G}(\tau, \mathcal{I}^\epsilon(\tau)) = \epsilon$ to serve as a boundary of the domain $\mathcal{D}_2^\epsilon = \{\vartheta \in \mathcal{D}_1; \mathcal{G}(\tau, \mathcal{I}) \geq \epsilon\}$. Let us prove that for $\epsilon > 0$ small enough, this boundary is actually an entrance boundary : the positive semiflow points into \mathcal{D}_2^ϵ . Lemma 2.5 then follows since the equilibrium points of Σ^2 all satisfy $\mathcal{G}(\tau, \mathcal{I}) = 0$. To this end, let us observe that the scalar product of the vector field $X(\vartheta)$ in Σ^2 with the unit inward normal to the boundary under consideration reads :

$$\begin{aligned} X(\vartheta^\epsilon) \cdot \mathbf{n}(\vartheta^\epsilon) &= \epsilon \left(\left(M^2 - \frac{1-3\beta^2}{\tau^2} - \frac{3\beta^2}{\tau^4} \right) - 2\mathcal{T}_{ris} \frac{\beta^2(1-3\beta^2)\mathcal{I}}{M^2\tau^6} \right), \\ &\geq \epsilon \left(M^2 - 1 - 2\mathcal{T}_{ris} \frac{\beta^2(1-3\beta^2)}{M^2} \right), \end{aligned} \quad (77)$$

since $\tau > 1$ and $\mathcal{I} \leq 1$. But from the necessary condition (74), there exists some $\epsilon_0 > 0$ such that $M^2 - 1 \geq \epsilon_0$. As a consequence and when $\mathcal{T}_{ris} > 0$ in agreement with (18), it suffices to choose $\epsilon > 0$ with :

$$\epsilon < \frac{\epsilon_0}{2\mathcal{T}_{ris} \frac{\beta^2(1-3\beta^2)}{M^2}}, \quad (78)$$

to get $X(\vartheta^\epsilon) \cdot \mathbf{n}(\vartheta^\epsilon) > 0$. This concludes the proof.

Let us now prove that :

Proposition 2.6. *Under the condition (74), the positive semiorbit $\gamma_{<}(\vartheta_-)$ connects to an equilibrium point ϑ_+ in the future. More precisely, considering the domain $\mathcal{D}_3 = \{\vartheta \in \mathcal{D}_1, \mathcal{G}(\tau, \mathcal{I}) < 0\}$ and its boundary :*

$$\mathcal{C}_+ = \{\vartheta \in \overline{\mathcal{D}_3}, \underline{\tau} < \tau < \tau_{max}, \mathcal{G}(\tau, \mathcal{I}) = 0\} \quad (79)$$

then $\vartheta_+ \in \mathcal{C}_+$. In addition, states $\vartheta(\xi)$ along $\gamma_{<}(\vartheta_-)$ are such that $\tau(\xi)$ (respectively $\mathcal{I}(\xi)$) strictly decreases (resp. decreases in the large) for all $\xi \in \mathbb{R}$.

Consequently, there exists exactly one heteroclinic orbit of Σ^2 connecting the prescribed state ϑ_- to some ϑ_+ in \mathcal{C}_+ . Note from the lowerbound $\underline{\tau} < \tau_+$ in (79) that $\mathcal{I}_+ > 0$ (see again figure (1)).

Proof of Proposition 2.6

The semiorbit under consideration clearly emanates from ϑ_- with states ϑ obeying $\mathcal{G}(\tau, \mathcal{I}) < 0$ (see again figure (1)). Therefore as long as these states stay in the domain \mathcal{D}_3 then $\tau(\xi)$ and $\mathcal{I}(\xi)$ meet the reported monotony properties. But the boundary \mathcal{C}_+ in (79) is uniquely made of equilibrium points for Σ^2 . Well-known considerations then imply that \mathcal{C}_+ cannot be reached in finite time so that $\gamma_{<}(\vartheta_-)$ is trapped in \mathcal{D}_3 for all finite time. But $\tau(\xi)$ strictly decreases in this domain : necessarily there exists an equilibrium state ϑ_+ in $\overline{\mathcal{C}_+}$ which is reached in the limit $\xi \rightarrow +\infty$. To conclude the proof, we have to check that $\lim_{\xi \rightarrow \infty} \mathcal{I}(\xi) > 0$ and hence the required conclusion : $\vartheta_+ \in \mathcal{C}_+$. To this end, note first from the smoothness property of the function $\mathcal{T}_{ris}(\vartheta) \equiv \mathcal{T}_{ris}(\rho, d_\xi u)$ in (18) that $\sup_{\vartheta \in \overline{\mathcal{C}_+}} |\mathcal{T}_{ris}(\vartheta)| < \infty$. Then observe that since $\tau(\xi)$ in the heteroclinic orbit $\gamma_{<}(\vartheta_-)$ strictly decreases, the governing equation for \mathcal{I} can be reexpressed in the new undependent variable τ with $\tau : [\tau_+, \tau_-] \rightarrow \xi(\tau) \in (+\infty, -\infty)$:

$$d_\tau \mathcal{I} = 2 \frac{1 - 3\beta^2}{M^2} \frac{\mathcal{T}_{ris}(\tau, \mathcal{I})}{\tau^3} \mathcal{I} \times (-\mathcal{G}(\tau, \mathcal{I})). \quad (80)$$

The function $\mathcal{I}(\tau)$, which we already know to exist with $0 \leq \mathcal{I}(\tau) \leq 1$, is thus a fixed point of $i_0 \rightarrow i = \mathcal{H}(i_0)$ where i is the solution of the auxiliary EDO problem :

$$\begin{cases} d_\tau i = \mathcal{N}(\tau, i_0(\tau)) i \times (q(\tau) - r(\tau) i), & \underline{\tau} \leq \tau \leq \tau_-, \\ i(\tau_-) = 1, \end{cases} \quad (81)$$

built from (80) when considering in place of \mathcal{I} in $\mathcal{T}_{ris}(\tau, \mathcal{I})$ a given smooth function $i_0(\tau)$ with $0 \leq i_0(\tau) \leq 1$, $\tau \in [\underline{\tau}, \tau_-]$. In (81), we thus have set :

$$\begin{aligned} \mathcal{N}(\tau, i_0(\tau)) &= 2 \frac{1 - 3\beta^2}{M^2} \frac{\mathcal{T}_{ris}(\tau, i_0(\tau))}{\tau^3}, \\ q(\tau) &= M^2(1 - \tau) + (1 - 3\beta^2)(1 - \frac{1}{\tau}) + \beta^2, \\ r(\tau) &= \frac{\beta^2}{\tau^3}. \end{aligned} \quad (82)$$

Next, (81) is nothing but a Bernoulli equation and hence the fixed point $\mathcal{I} = \mathcal{H}(\mathcal{I})$ with $0 \leq \mathcal{I}(\eta) \leq 1$ obeys the following representation formula :

$$\mathcal{I}(\tau) = \frac{e^{-Q(\tau)}}{1 - \int_\tau^1 \mathcal{N}(v, \mathcal{I}(v)) r(v) e^{-Q(v)} dv}, \quad Q(\tau) = \int_\tau^1 \mathcal{N}(v, \mathcal{I}(v)) q(v) dv. \quad (83)$$

and hence the required conclusion, $\mathcal{I}_+ = \mathcal{I}(\tau_+) > 0$ since $\sup_{\underline{\tau} \leq \tau \leq 1} |Q(\tau)| < \infty$.

Besides the parameters M and β , the equilibrium point $\vartheta_+ \in \mathcal{C}_+(\beta, M)$ reached in the future obviously also depends on the precise definition of the Ristorcelli correction \mathcal{T}_{ris} in Σ^2 : namely $\vartheta_+ = \vartheta_+(\beta, M; \mathcal{T}_{ris})$. Indeed assuming an identically zero \mathcal{T}_{ris} , then $\vartheta_+(\beta, M; 0)$ obviously comes with $\mathcal{I}_+(\beta, M; 0) = 1$ and some $\tau_+(\beta, M; 0) < \tau_{max}$ while when considering $\mathcal{T}_{ris} > 0$, we have $\mathcal{I}_+(\beta, M; \mathcal{T}_{ris}) < \mathcal{I}_+(\beta, M; 0)$ and hence $\tau_+(\beta, M; \mathcal{T}_{ris}) < \tau_+(\beta, M; 0) < \tau_{max}$.

Let us further analyze the setting $\mathcal{T}_{ris} \equiv 0$ to put forward a major consequence of Proposition 2.6 on the possible traveling wave solutions of the full dynamical system (54). In that aim, let us consider the Mach number evaluated on the second wave $\mathcal{M}_a(\tau, \mathcal{I}) = M\tau^2/(\beta\sqrt{\mathcal{I}})$ given in (55) so as to define the unique solution $\tau_c(\beta, M)$ of $\mathcal{M}_a(\tau, \mathcal{I}) = 1$ when $\mathcal{I} = 1$:

$$\tau_c(\beta, M) = \sqrt{\frac{\beta}{M}}. \quad (84)$$

Then $\beta > 0$ being fixed, let us study for the existence of Mach numbers M such that $\tau_+(\beta, M; 0) < \tau_c(\beta, M)$: namely exit state $\vartheta_+(\beta, M; 0)$ with the property that $\mathcal{M}_a(\vartheta_+(\beta, M; 0)) < 1$. From the proof of Lemma 2.6, achieving the estimate $\tau_+(\beta, M; 0) < \tau_c(\beta, M)$ is clearly equivalent to ask for $\mathcal{G}(\tau_c(\beta, M), 1) < 0$, *i.e.* :

$$M^2\left(\sqrt{\frac{\beta}{M}} - 1\right) + (1 - 3\beta^2)\left(\sqrt{\frac{M}{\beta}} - 1\right) + \beta^2\left(\left(\frac{M}{\beta}\right)^{\frac{3}{2}} - 1\right) < 0. \quad (85)$$

Since $\lim_{M \rightarrow +\infty} \mathcal{G}(\tau_c(\beta, M), 1)/M^2 = -1$, large enough Mach numbers give the required inequality for any given $\beta > 0$. The figure (2) indicates that there actually exists a smooth function $\beta \rightarrow M_c(\beta)$ of which the graph separates the positive quadrant (β, M) into two domains : a first domain $\{(\beta, M); 1 < M < M_c(\beta)\}$ where $\mathcal{M}_a(\vartheta_+(\beta, M; 0)) > 1$ and a second domain $\{(\beta, M); M > M_c(\beta)\}$ with $\mathcal{M}_a(\vartheta_+(\beta, M; 0)) < 1$. Tedious calculations not reported here confirm this observation. The following statement summarizes the above properties :

Lemma 2.7. *Assume an identically zero \mathcal{T}_{ris} in Σ^2 . Then for any given $\beta \in (0, 1/\sqrt{3})$, eventual heteroclinic solutions of the full dynamical system Σ^4 can only yield overcompressive viscous shock profiles when the Mach number M is large enough.*

In contrast with this negative issue, let us now prove that the Ristorcelli correction in Σ^2 can always be chosen sufficiently large so that the exit state $\vartheta_+(\beta, M; \mathcal{T}_{ris})$ satisfies $\mathcal{M}_a(\vartheta_+(\beta, M; \mathcal{T}_{ris})) > 1$. In that aim, let us again invoke the EDO (80) for governing $\mathcal{I}(\tau)$ in the independent variable $\tau \in (\tau_+, 1)$ with $\tau_+ < \tau_{max}$ from (79). Then focusing on the subinterval $[\tau_{max}, (1 + \tau_{max})/2]$ where $d_\xi u = M d_\xi \tau < 0$ so that $\mathcal{T}_{ris}(\tau, \mathcal{I}(\tau))$ can be chosen strictly positive according to the assumption (18). Let us then introduce the following lowerbound :

$$0 < \mathcal{I}_{min} < \mathcal{T}_{ris}(\tau, \mathcal{I}(\tau)), \quad \tau \in [\tau_{max}, (1 + \tau_{max})/2]. \quad (86)$$

Equipped with this notation, we state :

Lemma 2.8. *Let be given $\beta \in (0, 1/\sqrt{3})$ and M , $1 < M < \infty$. Then \mathcal{I}_{min} can be chosen sufficiently large in (86) so that the equilibrium state $\vartheta_+ \in \mathcal{C}_+$ necessarily satisfies :*

$$\mathcal{M}_a(\vartheta_+) = \frac{M}{\beta} \frac{\tau_+^2}{\mathcal{I}_+} > 1. \quad (87)$$

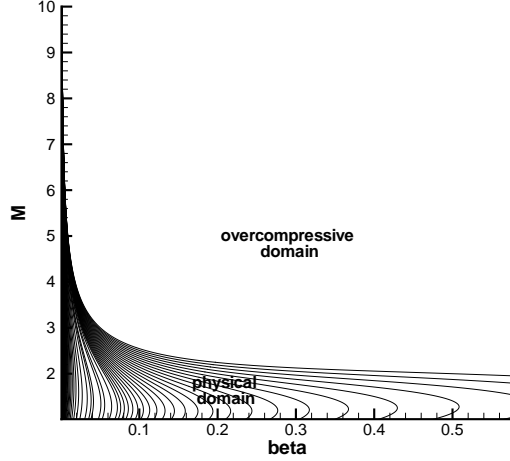


FIG. 2 – Graph of $\mathcal{G}(\tau_c(\beta, M), 1) \geq 0$ in the positive quadrant (β, M)

In other words and provided that the Ristorcelli correction is large enough within the profile, an eventual heteroclinic solution of Σ^4 can only coincide with a classical compressive viscous shock solution.

Proof of Lemma 2.8

We observe that within the subinterval $[\tau_{max}, (1 + \tau_{max})/2]$, the positive quantity $(1 - 3\beta^2)/M^2 \times (-\mathcal{G}(\tau, \mathcal{I}))/\tau^3$ can be lowerbounded by some constant $L > 0$. Hence and from the lowerbound (86) met by \mathcal{I}_{ris} in this subinterval, we infer from the EDO (80) the inequality :

$$d_\tau \mathcal{I} \geq \mathcal{I}_{min} L \mathcal{I}, \quad \tau_{max} \leq \tau \leq \frac{1 + \tau_{max}}{2}, \quad (88)$$

so that integrating from τ_{max} to $(1 + \tau_{max})/2$, we get :

$$\mathcal{I}(\tau_{max}) \leq \mathcal{I}\left(\frac{1 + \tau_{max}}{2}\right) e^{-\mathcal{I}_{min} L \frac{1 - \tau_{max}}{2}} \leq e^{-\mathcal{I}_{min} L \frac{1 - \tau_{max}}{2}}, \quad (89)$$

where $(1 - \tau_{max})/2 > 0$. Therefore, $\mathcal{I}(\tau_{max})$ can be made as small as required when choosing \mathcal{I}_{min} sufficiently large. But for $\tau \in (\tau_+, \tau_{max})$, the estimate $d_\tau \mathcal{I} \geq 0$ deduced from (80) ensures that $\mathcal{I}(\tau_+) \leq \mathcal{I}(\tau_{max})$ and hence the required conclusion since $\tau_+ > 0$ from $\tau_+ > \underline{\tau}$.

Let us close this section with the following statement :

Lemma 2.9. *There exists a finite time $L > 0$, sufficiently large, such that*

$$d_\xi \mathcal{M}_a(\xi) < 0, \quad \text{for all finite time } \xi, \xi \geq L. \quad (90)$$

The time decreasing property of $\mathcal{M}_a(\tau, \mathcal{I})(\xi)$ met for large ξ plays a central role in the time asymptotic analysis of the solutions of linear system (92) we address in the next section.

Proof of Lemma 2.9

Let us first evaluate the τ -derivative $\mathcal{M}_a(\tau, \mathcal{I}(\tau))$ from the EDO (80) governing $\mathcal{I}(\tau)$:

$$d_\tau \mathcal{M}_a(\tau, \mathcal{I}) = \mathcal{M}_a(\tau, \mathcal{I}) \left(\left(\frac{1 - 3\beta^2}{M^2 \tau^3} \right) \times \mathcal{T}_{ris}(\tau, \mathcal{I}(\tau)) \mathcal{G}(\tau, \mathcal{I}) + \frac{2}{\tau} \right), \quad (91)$$

where $\mathcal{G}(\tau, \mathcal{I}) \leq 0$. But since $\mathcal{G}(\vartheta_+) = 0$, we clearly have $d_\tau \mathcal{M}_a(\tau, \mathcal{I}) > 0$ for all τ close enough to τ_+ . Transferring this property in the ξ variable with $d_\xi \tau < 0$ gives the conclusion.

3 Heteroclinic orbits of the homogeneous linear system $\Sigma^{\mathbf{Y}}$

In this section, we study the behavior in large positive times of the solutions (Y_+, Y_-) of the homogeneous linear system $\Sigma^{\mathbf{Y}}$ we rewrite for convenience for the reader :

$$\begin{cases} d_\xi Y_+ = \frac{\mu}{2\nu} \frac{M}{\mathcal{M}_a(\xi)^2} (\mathcal{M}_a(\xi) - 1) \left((\mathcal{M}_a(\xi) + 1) Y_+ + (\mathcal{M}_a(\xi) - 1) Y_- \right), \\ d_\xi Y_- = \frac{\mu}{2\nu} \frac{M}{\mathcal{M}_a(\xi)^2} (\mathcal{M}_a(\xi) + 1) \left((\mathcal{M}_a(\xi) + 1) Y_+ + (\mathcal{M}_a(\xi) - 1) Y_- \right), \end{cases} \quad (92)$$

where the variable coefficient :

$$\mathcal{M}_a(\xi) = \frac{M\tau^2(\xi)}{\beta\sqrt{\mathcal{I}(\xi)}} > 0, \quad \text{for all } \xi \in \mathbb{R}, \quad (93)$$

is built from the unique heteroclinic orbit $\gamma_{<}(\vartheta_-)$ of Σ^2 given in Proposition 2.3. To shorten the notations, (92) is given the clear condensed form :

$$d_\xi \mathbf{Y} = \mathcal{A}(\xi) \mathbf{Y}, \quad \mathbf{Y} = (Y_+, Y_-)^T, \quad \xi \in \mathbb{R}. \quad (94)$$

The properties of $\gamma_{<}(\vartheta_-)$ stated in Proposition 2.6 ensures smoothness in the function $\xi \rightarrow \mathcal{M}_a(\xi) > 0$, $\xi \in \mathbb{R}$. Well-known considerations then give that the solution of (92) with arbitrary prescribed initial data $(Y_+(0), Y_-(0))$ globally exists in time and is unique. Initial data of interest here are prescribed according to the representation formula (70) deduced from the definition of the unstable manifold $\mathcal{W}^u(\omega_-)$. These are thus prescribed at a sufficiently negative time, say $-L < 0$, which can be chosen possibly further negative so that $\mathcal{M}_a(-L) > 1$ in view of $\lim_{\xi \rightarrow -\infty} \mathcal{M}_a(\xi) = M/\beta > 1$. Since a traveling wave solution is defined up to some translation, we choose this time to be zero without restriction but with the important property that :

$$\mathcal{M}_a(0) > 1. \quad (95)$$

Letting the initial data $\mathbf{Y}(0) = (Y_+(0), Y_-(0))$ run in the submanifold of states $\{\omega(0) \in \mathcal{W}^u(\omega_-)\}$ generates a family of solutions of (94) we denote by $\mathcal{F}(\mathbf{Y})$. The time asymptotic behavior of this family of solutions is then given by the main statement in this section :

Theorem 3.1.

1 Assume that $\lim_{\xi \rightarrow +\infty} \mathcal{M}_a(\xi) = \mathcal{M}_a(+\infty) > 1$. Then there exists exactly one uniformly bounded in time solution $\mathbf{Y}^s \in \mathcal{F}(\mathbf{Y})$. This solution satisfies $Y_+^s(\xi) > 0$, $Y_-^s(\xi) < 0$ for all $\xi \in \mathbb{R}$. In addition, $Y_+^s(\xi)$ (respectively $Y_-^s(\xi)$) tends to a positive limit $Y_+^s(+\infty)$ (resp. a negative limit $Y_-^s(+\infty)$) when ξ goes to $+\infty$ linked through the identity :

$$Y_+^s(+\infty) = -\frac{\mathcal{M}_a(+\infty) - 1}{\mathcal{M}_a(+\infty) + 1} \times Y_-^s(+\infty). \quad (96)$$

2 Assume that $\lim_{\xi \rightarrow +\infty} \mathcal{M}_a(\xi) = \mathcal{M}_a(+\infty) < 1$. Then all the solutions $\mathbf{Y} \in \mathcal{F}(\mathbf{Y})$ stay uniformly bounded in time. Let be given $\mathbf{Y} \in \mathcal{F}(\mathbf{Y})$, there exists a finite time $\xi(\mathbf{Y})$, which is unique, such that $Y_+(\xi) \times Y_-(\xi) > 0$ for all $\xi > \xi(\mathbf{Y})$. In addition, $Y_+(\xi)$ (respectively $Y_-(\xi)$) goes to a nonzero limit $l_+(\mathbf{Y})$ (resp. a nonzero limit $l_-(\mathbf{Y})$) when ξ goes to $+\infty$. For two independent solutions in $\mathcal{F}(\mathbf{Y})$, say \mathbf{Y}^1 and \mathbf{Y}^2 , $l_+(\mathbf{Y}^1) \neq l_+(\mathbf{Y}^2)$ and $l_-(\mathbf{Y}^1) \neq l_-(\mathbf{Y}^2)$ but always satisfy :

$$\frac{l_+(\mathbf{Y}^1)}{l_-(\mathbf{Y}^1)} = \frac{l_+(\mathbf{Y}^2)}{l_-(\mathbf{Y}^2)} = -\frac{\mathcal{M}_a(+\infty) - 1}{\mathcal{M}_a(+\infty) + 1} > 0. \quad (97)$$

The proof of the above statement relies on several technical results motivated by time properties of the product $\{Y_+Y_-\}(\xi)$ and the ratio $\{Y_+/Y_-\}(\xi)$ satisfied by a solution \mathbf{Y} of (94). Indeed and considering at first the product, we observe that $Y_+Y_-(\xi)$ increases with ξ in view of the easy estimate :

$$d_\xi Y_+Y_- = \frac{\mu}{2\nu} \frac{M}{\mathcal{M}_a(\xi)^2} \left((\mathcal{M}_a(\xi) + 1)Y_+ + (\mathcal{M}_a(\xi) - 1)Y_- \right)^2 \geq 0, \quad \xi \in \mathbb{R}. \quad (98)$$

Since $Y_+Y_-(-\infty) < 0$ from (53), $Y_+Y_-(\xi)$ may vanish at most once to then keep a positive sign. The necessary condition on eventual equilibrium states ω_+ stated in (72) then expresses that $Y_+Y_-(\xi)$ must actually vanish as soon as $\mathcal{M}_a(+\infty) < 1$ and this in agreement with (97). Next, the ratio $Y_+(\xi)/Y_-(\xi)$ is easily seen to solve :

$$d_\xi \frac{Y_+}{Y_-} = \frac{\mu}{2\nu} \frac{M}{\mathcal{M}_a(\xi)^2} \left((\mathcal{M}_a(\xi) - 1)^2 - (\mathcal{M}_a(\xi) + 1)^2 \left(\frac{Y_+}{Y_-} \right)^2 \right). \quad (99)$$

Consider the strictly increasing function $t : \xi \in (-\infty, +\infty) \rightarrow t(\xi) \in (-\infty, +\infty)$ defined by :

$$t(\xi) = \int_0^\xi \frac{\mu}{2\nu} \frac{M(\mathcal{M}_a(s) + 1)^2}{\mathcal{M}_a(s)^2} ds, \quad \xi \in \mathbb{R}, \quad (100)$$

with inverse $\xi(t)$. Then in the new independent variable $t \equiv t(\xi)$, the differential equation (99) transforms into a Ricatti equation for $r(t) = \{Y_+/Y_-\}(\xi(t))$:

$$r' = q^2(t) - r^2, \quad q(t) = \frac{\mathcal{M}_a(\xi(t)) - 1}{\mathcal{M}_a(\xi(t)) + 1}, \quad r' = d_t r. \quad (101)$$

Here, $q(t)$ is clearly a smooth function, uniformly bounded in time which can vanish only at isolated times. With this respect, observe from $\mathcal{M}_a(0) > 1$ in (95) that at time $t(0) = 0$, $q(0)$ is strictly positive. The behavior for large positive times t of the solutions of the Ricatti equation (101) plays a major role in the analysis and is the matter of the next paragraph.

3.1 Time asymptotics for a class of Ricatti equations

Here, we investigate the behavior in positive time of the solutions of a Ricatti equation of the form :

$$r' = q^2(t) - r^2, \quad r(0) = r_0 \in \mathbb{R}, \quad (102)$$

where $q(t)$ is a smooth function satisfying :

$$\|q\|_{L^\infty(\mathbb{R}_+)} < +\infty, \quad q(0) > 0, \quad \lim_{t \rightarrow +\infty} |q(t)| > 0 \quad (103)$$

Note from (103) that $q(t)$ ultimately takes a constant sign : namely there exists $T > 0$ sufficiently large and some $\epsilon(T) > 0$ small enough such that :

$$|q(t)| > \epsilon(T), \quad \text{for all } t > T. \quad (104)$$

Here and in agreement with (57), the exceptional case $\lim_{t \rightarrow +\infty} q(t) = 0$ is excluded from the analysis since again it is of artificial interest for our main purpose. To study the time asymptotics of the solutions of (102), we assume in addition that :

$$q^2(t) \text{ strictly increases with } t, \text{ for all } t > T, T \text{ sufficiently large.} \quad (105)$$

This hypothesis is only concerned with the behavior in large times t : we tacitly choose T large enough so that in addition (104) is valid for all $t > T$. Assumptions (103)–(105) will be met in the study of either the ratio $Y_+/Y_-(\xi(t))$ with t defined in (100) or the inverse ratio expressed in some other convenient independent variable. The main result of this paragraph is then :

Proposition 3.2. *Under the assumption (103), the solutions of (102) separate into three mutually exclusive classes :*

- (i) *solutions which are bounded for all finite time with $r(t) > 0$ for all $t > t(r_0)$ for some finite time $t(r_0)$ depending on the initial data r_0 ,*
- (ii) *a unique solution $r^s(t)$ bounded for all finite time, with $r^s(t) < 0$ for all $t \geq 0$,*
- (iii) *solutions $r(t)$ which blow up at a finite time $t(r_0)$ with $\lim_{t \rightarrow t(r_0)^\pm} r(t) = \pm\infty$ and $r(t) > 0$ for all $t > t(r_0)$.*

Being given a solution in class (i) with initial data \bar{r}_0 and a solution in class (iii) with initial data \underline{r}_0 then $\underline{r}_0 < \bar{r}_0$ and the initial data $r^s(0)$ for the solution in class (ii) belongs to $]\underline{r}_0, \bar{r}_0[$. The graph of r^s separates those of class (i) from those of class (iii).

Assume in addition (105). Then solutions in class (i) and (iii) obey :

$$0 < \lim_{t \rightarrow +\infty} r(t) = |q(+\infty)| < \infty, \quad 0 < \lim_{t \rightarrow +\infty} \int^t (|q(s)| - r(s)) ds < \infty. \quad (106)$$

In contrast, the unique solution r^s in class (ii) satisfies

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} r^s(t) = -|q(+\infty)|, \quad -\infty < \lim_{t \rightarrow +\infty} \int^t (|q(s)| + r^s(s)) ds < 0. \quad (107)$$

The graph of the solution r^s in class (ii) is called a *separatrix* (see [70] for a general definition). In [38] (pp 171–178), Hille³ gives a proof of the asymptotic properties (106)– (107) for nonvanishing increasing functions $q^2(t)$ but under the more general assumption $\sqrt{t}q(t) \notin L^2(\mathbb{R}^+)$ than the uniform boundedness condition expressed in (103). Again, this stronger hypothesis suffices to our purpose with the benefit that it allows a brief proof within the frame of functions $q(t)$ which ultimately achieve a constant sign. This proof is given hereafter for self-containedness in the present paper. It heavily relies on the property that if $r(t)$ solves (102) then $y(t) = \exp(\int^t r(s)ds)$ is a nonvanishing solution of the next second order linear equation :

$$y'' = q^2(t)y, \quad t \in \mathbb{R}. \quad (108)$$

Let us address the main properties of the not identically zero solutions of (108) in the time interval $[0, \infty)$ so as to transfer them to the study of the solutions $r(t) = y'(t)/y(t)$ of the Ricatti equation (102). Up to some suitable renormalization, it suffices to consider solutions of (108) with initial data :

$$y(0) = 1, \quad y'(0) = y'_0, \quad y'_0 \in \mathbb{R}. \quad (109)$$

Proposition 3.3. *Under the assumption (103), the solutions of the ODE problem (108) with initial data (109) exhibit the following trichotomy :*

- (1) *positive solutions with at most a minimum and such that $\lim_{t \rightarrow +\infty} y(t) = +\infty$,*
- (2) *a unique positive and strictly decreasing solution, denoted by y^s , with $\lim_{t \rightarrow +\infty} y^s(t) = 0$,*
- (3) *strictly decreasing solutions with a single zero and such that $\lim_{t \rightarrow +\infty} y(t) = -\infty$.*

Being given a solution in class (1) with initial data \bar{y}'_0 and a solution in class (3) with initial data \underline{y}'_0 then $\underline{y}'_0 < \bar{y}'_0$ and $y^s(0) \in]\underline{y}'_0, \bar{y}'_0[$. The graph of the solution in class (2) separates those of class (1) from those of class (3).

The proof of this statement is postponed to the end of the present section and actually answers problems 8–12 proposed pp 170 in [38] under the assumption of a nonvanishing $q(t)$. Proposition 3.3 provides a deep insight into the geometry of the flow associated with the Ricatti equation (102). In particular, it will allow the characterization of an important positively invariant domain under the monotony assumption (105). For that purpose, let us infer from the three classes of solutions of (108), the expected three classes of solutions of the Ricatti equation (102) stated in Proposition 3.2. Recall that solutions of (102) are recovered from not identically zero solutions of (108) by the formula $r(t) = y'(t)/y(t)$, $t > 0$. First, a strictly increasing solution y in class (1) leads to a positive solution of (102) for all time $t \geq 0$ while achieving a unique minimum, say at time $t_0 > 0$, gives $r(t) < 0$, $0 \leq t < t_0$ and $r(t) > 0$, $t > t_0$. Next, the unique solution y_s in class (2) gives birth to a unique solution of (102) in class (ii), denoted by r_s , with the property that $r_s(t) < 0$ for all $t > 0$. At last, a decreasing solution y in class (3) admits a single zero, say at time $t_0 > 0$, so that the associated Ricatti solution blows up respectively to $-\infty$ as $t \rightarrow t_0^-$ with $r(t) < 0$, $t > t_0$ (resp. to $+\infty$ as $t \rightarrow t_0^+$ with $r(t) > 0$, $t > t_0$). Equipped with

³The authors wish to thank Gérard Tronel for pointing out to them this reference during the completion of this work

this correspondance, we now analyze the large time behavior of the solutions of (102) for times $t > T$ with T defined in (105) so that $q^2(t) > 0$ strictly increases for all the times under consideration. This allows to introduce in the plane (t, r) the curves :

$$\Gamma_-(t) = \{t \geq 0; -|q(t)|\}, \quad \Gamma_+(t) = \{t \geq 0; +|q(t)|\}, \quad (110)$$

respectively strictly decreasing and strictly increasing. Their graphs and the positive t -axis split the plane (t, r) into four domains $\{D_i\}_{1 \leq i \leq 4}$ (see figure (3)). The properties of the solutions of (108) imply the next geometrical properties on the flow of (102). First, $\Gamma_-(t)$ (respectively the t -axis) is an entrance boundary for D_2 (resp. an exit boundary) with the property that any given trajectory in this domain enters D_3 in finite time. Moreover, a trajectory in D_1 leaves it in finite time along a vertical asymptote to successively enter D_4 along the same asymptote and then D_3 . At last, observe that the domain D_3 is positively invariant since the flow points to the interior of D_3 : indeed and by assumption $\Gamma_+(t)$ where the slope of the flow vanishes, strictly increases with t . In other words, being given a solution r of (102) in class (i) or (iii), there exists a finite positive time $t_0(r) > 0$, sufficiently large, with the property that :

$$0 < r(t) < |q(t)|, \quad r'(t) > 0, \quad \text{for all } t \geq t_0(r). \quad (111)$$

Solely the solution r_s in class (ii), with $r_s(t) < 0, t > 0$, does not obey (111) but satisfies :

$$r^s(t) < -|q(t)| < 0, \quad \text{for all } t \geq 0. \quad (112)$$

since otherwise r_s would ultimately enter D_3 to then be positive. This distinctive property will play a major role in the proof of (106)–(107) in Proposition 3.2.

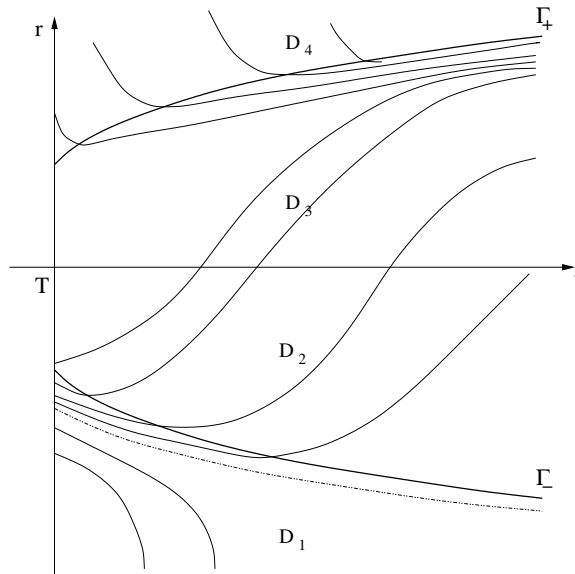


FIG. 3 – Flow of the Riccati equation

Proof of Proposition 3.3 To start with, let us multiply (108) by y to get, after

an integration on the time interval $[t_0, t]$ with $0 \leq t_0 < t$, the identity :

$$y(t)y'(t) - y(t_0)y'(t_0) = \int_{t_0}^t \{y'(s)\}^2 ds + \int_{t_0}^t \{q(s)y(s)\}^2 ds. \quad (113)$$

To go further, let us observe from (108) with $q^2(0) \geq \epsilon$ for some small enough $\epsilon > 0$ that for any given fixed $y'_0 \in \mathbb{R}$ in the initial data (109), there exists a positive time $t(y'_0)$ small enough (depending also on ϵ) such that $y(t) > 0$ and $q^2(t) > 0$ with $t \in [0, t(y'_0)[$: hence, $y'(t)$ strictly increases in this time interval and there exists $\epsilon_0 > 0$ such that $y'(t(y'_0)) \geq y'_0 + \epsilon_0$.

Focusing on data with $y'_0 \geq 0$, (113) with $t_0 = 0$ clearly gives the estimate $y(t)y'(t) \geq \int_0^{t(y'_0)} \{y'\}^2(s) ds > 0$ for $t > t(y'_0)$ from which inequalities $y(t) > 0$ and thus from (108) $y'(t) \geq \epsilon_0$ extend to all $t > t(y'_0)$. In turn note the refined estimate $y(t) > 1$ for $t > 0$. We thus infer the first rough estimate $y(t) \geq \epsilon_0(t - t(y'_0)) + 1 > \epsilon_1 t$ for all $t \geq t(y'_0)$ with $\epsilon_1 > 0$ possibly smaller than ϵ_0 . Hence $\lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = \infty$. Solutions of (108) with $y'_0 \geq 0$ thus belong to class (1) with the property of being strictly increasing.

Considering now $y'_0 < 0$, either $y(t)$ or $y'(t)$ must vanish at a finite time, say t_0 , since otherwise the governing equation (108) easily rises a contradiction in view of the estimate (104) : $q^2(t)$ achieves positive values for all $t > T$, large enough $T > 0$. Notice that they cannot vanish simultaneously since otherwise $u_1(t) = y'(t)$, $u_2(t) = y(t)$ would be, by well-known considerations (see [70] for instance), an identically zero solution of the first order 2×2 system :

$$u'_1 = u_2, \quad u'_2 = q^2(t)u_1. \quad (114)$$

Next, the identity (113) readily implies that $y(t)y'(t)$ vanishes at most once in $[0, \infty)$. Hence for initial data (109) with $y'_0 < 0$, either $y(t)$ or $y'(t)$ must vanish but only once in $[0, \infty)$. Choosing $y'_0 < 0$ close enough to zero ensures with the property that $y'(t)$ strictly increases with t in $[0, t(y'_0)[$ that $y'(t)$ vanishes once in this time interval while necessarily $y(t) > 0$, $t > 0$. The positiveness of $y(t)$ in turn implies from (108) that there exists some $\epsilon_0 > 0$ and a time $t(\epsilon_0)$ with $y'(t) > \epsilon_0$ for all $t > t(\epsilon_0)$. It suffices to choose the time $t(\epsilon_0)$ larger than T in (104). Therefore $\lim_{t \rightarrow +\infty} y(t) = +\infty$ and this proves that solutions of (108) with $y'_0 < 0$ close enough to 0 belong to class (1) but with the property of a unique positive minimum. Now choosing $y'_0 < 0$ sufficiently negative clearly leads to $y(t)$ to vanish at a finite time t_0 while then necessarily $y'(t) < 0$, $t > 0$. In other words, $y(t)$ stays negative for all times $t > t_0$. Similar arguments (left to the reader) as those already developed then prove that $\lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = -\infty$. Solutions of (108) with y'_0 sufficiently negative thus belong to class (3).

Let us now prove the existence of a solution in class (2). For that purpose, we consider the initial data (109) with $y'_0 = 0$ to give rise to an increasing solution $y^0(t)$ of (108) in class (1) for which we already know that the rough estimate $y^0(t) > \epsilon_0 t$ is met for some $\epsilon_0 > 0$ for all $t > t(\epsilon_0)$. We thus infer $(y^0)''(t) > \epsilon_0 q^2(t)t$ in $(t(\epsilon_0), \infty)$ so as to get the refined estimate :

$$(y^0)'(t) > (y^0)'(t(\epsilon_0)) + \epsilon_0 \int_{t(\epsilon_0)}^t s q^2(s) ds, \quad \text{for all } t > t(\epsilon_0). \quad (115)$$

From estimates (104) and (115), we deduce :

$$\lim_{t \rightarrow \infty} (y^0)'(t) = +\infty, \quad \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{y^0(t)}{t^2} = +\infty. \quad (116)$$

Note that as a consequence $1/(y^0)$ belongs to $L^2(\mathbb{R}^+)$. Equipped with this last result, one introduces the following well defined function (see Hille [38]) :

$$y^s(t) = y^0(t) \int_t^\infty \frac{ds}{(y^0)^2(s)}, \quad t > 0, \quad (117)$$

which is seen from direct calculations to be a positive solution of (108). When suitably normalized, it enters the set of initial data (109). Observe that :

$$\begin{aligned} (y^s)'(t) &= (y^0)'(t) \int_t^\infty \frac{ds}{(y^0)^2(s)} - \frac{1}{y^0(t)}, \\ &< \int_t^\infty \frac{(y^0)'(s)ds}{(y^0)^2(s)} - \frac{1}{y^0(t)} = 0, \end{aligned} \quad (118)$$

in view of $(y^0)'(t) < (y^0)'(s)$, $s > t$ (indeed notice from (108) : $(y^0)''(t) > 0, t \geq 0$). This implies that $y^s(t)$ strictly decreases with time to a nonnegative limit as t goes to $+\infty$. But in view of $y^0(t) < y^0(s)$, $s > t$, we have $y^s(t) < \int_t^\infty \frac{ds}{(y^0)^2(s)}$. Then observing that (116) implies that asymptotically $y^0(t) > ct^2$ for some $c > 0$, we get :

$$0 \leq y^s(t) < \int_t^\infty \frac{ds}{(y^0)^2(s)} \rightarrow 0, \quad t \rightarrow \infty, \quad (119)$$

which is the required limit. Let us then check the uniqueness of a solution of (108) in the class (2). To rise a contradiction, assume a distinct solution, say $\tilde{y}^s(t)$ in this class. Then $(u_1, u_2) \equiv ((y^s)', y^s)$ and $(\tilde{u}_1, \tilde{u}_2) \equiv ((\tilde{y}^s)', \tilde{y}^s)$ would provide two independent and uniformly bounded in time solutions of the first order system (114) so as to restore by linear combination all of its solutions from well-known considerations (see [70] for instance). Hence the contradiction since solutions of (108) and thus (114) generically blows up with time. Let us show that the graph of the unique solution y^s in class (2) separates those in class (1) from those in class (3). For that purpose, it suffices to notice that in the (u_1, u_2) plane, no two graphs can intersect since if otherwise there exists a time $t_0 > 0$ with $u_i(t_0) - \tilde{u}_i(t_0) = 0$, $i = 1, 2$ then well-known considerations imply $\{u_i - \tilde{u}_i\}(t) = 0$ for all times. From the above construction, it is clear that solutions in class (1) achieve larger initial data than those in class (3). As a consequence, being given a solution in (1) with initial data \overline{y}'_0 and a solution in (3) with initial data \underline{y}'_0 gives $\underline{y}'_0 < \overline{y}'_0$ and necessarily from the separatrix property : $y^s(0) \in]\underline{y}'_0, \overline{y}'_0[$. This concludes the proof.

To end this paragraph, we solely have to prove the asymptotic properties (106) and (107) .

Proof of Proposition 3.2

Starting with a given solution either in class (i) or in class (iii), we evaluate the time behavior of $\Delta(t) = |q(t)| - r(t)$. The property (111) gives the existence of a large enough but finite time $t(r_0)$ such that $0 < r(t) < |q(t)|$ while $r'(t) > 0$ for all $t > t(r_0)$. We therefore get :

$$r' = q^2(t) - r^2 = \Delta(t)(|q(t)| + r) > 2\Delta(t) \times r, \quad t > t(r_0), \quad (120)$$

so that we deduce :

$$0 < \int_{t(r_0)}^t \Delta(s) ds < \frac{1}{2} \log\left(\frac{r(t)}{r(t_0)}\right) < \frac{1}{2} \log(|q(t)|) - \frac{1}{2} \log(r(t_0)). \quad (121)$$

The uniform boundedness of the function $q(t)$ assumed in (103) then ensures the required integrability property. Next, $r(t)$ strictly increases with t and is upperbounded by $|q(t)|$. As a consequence, $r(t)$ tends to a finite limit l as t goes to $+\infty$ and l necessarily coincides with $|q(+\infty)|$ in view of the estimate $\int^\infty \Delta(s) ds < \infty$. Considering the unique solution r^s in class (ii), this one satisfies (112) : namely $r^s(t) < -|q(t)|$ for all $t \geq 0$. Following Hille [38], we notice from the decreasing property of $r^s(t)$ that :

$$0 < \frac{1}{r^s(t)} - \frac{1}{r^s(0)} = - \int_0^t \frac{(r^s)'(s)}{(r^s)^2(s)} ds = \int_0^t \left(1 - \frac{q^2(s)}{(r^s)^2(s)}\right) ds, \quad (122)$$

and since $r^s(t) < 0$, we get that for all times $t \geq 0$:

$$0 < \int_0^t \left(1 - \frac{q^2(s)}{(r^s)^2(s)}\right) ds < -\frac{1}{r^s(0)}. \quad (123)$$

This proves that $(1 - q^2(t)/(r^s)^2(t)) \in L^1(\mathbb{R}^+)$. But from (112), we get $1 < 1 + |q(t)|/|r^s(t)|$, $t \geq 0$ and thus necessarily $(1 - |q(t)|/|r^s(t)|) \in L^1(\mathbb{R}^+)$. This proves that $r^s(t)$ achieves a finite limit as $t \rightarrow \infty$ with then necessarily $\lim_{t \rightarrow +\infty} r^s(t) = -|q(+\infty)|$. This gives in turn the asserted property $(|q(t)| + r^s(t)) \in L^1(\mathbb{R}^+)$. This concludes the proof.

3.2 Time asymptotics for Y_\pm

Equipped with Proposition 3.2, we give the proof of Theorem 3.1. In that aim, let us first state :

Proposition 3.4. *For any given solution $\mathbf{Y} \in \mathcal{F}(\mathbf{Y})$, except at most one, there exists a finite time $\xi(\mathbf{Y})$, which is unique, such that $\{Y_+ Y_-\}(\xi) \geq 0$ for all $\xi \geq \xi(\mathbf{Y})$ with strict inequality as soon as $\xi > \xi(\mathbf{Y})$.*

The proof of this result is postponed at the end of the present section. Let us stress a consequence of this result. From the estimate (98), as soon as $\{Y_+ Y_-\}(\xi)$ vanishes at a finite time $\xi(\mathbf{Y})$ then $\{Y_+ Y_-\}(\xi) > 0$ for all $\xi > \xi(\mathbf{Y})$. In other words, any given solution $\mathbf{Y} \in \mathcal{F}(\mathbf{Y})$, except at most one, ultimately satisfies $\{Y_+ Y_-\}(+\infty) > 0$. But possible end states $\mathbf{Y}(+\infty)$ in uniformly bounded in time solution $\mathbf{Y} \in \mathcal{F}(\mathbf{Y})$ must obey $\{Y_+ Y_-\}(+\infty) \leq 0$ when $\mathcal{M}_a(+\infty) > 1$ (see indeed (72)). Hence and when $\mathcal{M}_a(+\infty) > 1$, there exists at most one solution $\mathbf{Y} \in \mathcal{F}(\mathbf{Y})$ connecting the prescribed value $\mathbf{Y}(-\infty)$ in the past and a bounded value $\mathbf{Y}(+\infty)$ in the future with the required property that $Y_+(+\infty)Y_-(+\infty) \leq 0$.

To further assess the time asymptotic of $\mathbf{Y} \in \mathcal{F}(\mathbf{Y})$, it is useful to analyze the time evolution of the difference between two arbitrary solutions in $\mathcal{F}(\mathbf{Y})$. Being given a reference solution denoted by \mathbf{Y}^* , arbitrarily chosen in $\mathcal{F}(\mathbf{Y})$, we define for any given other solution \mathbf{Y} :

$$\Delta\{\mathbf{Y}\}(\xi) = (\Delta_+\{\mathbf{Y}\}(\xi), \Delta_-\{\mathbf{Y}\}(\xi))^T = \mathbf{Y}(\xi) - \mathbf{Y}^*(\xi), \quad \xi \in \mathbb{R}. \quad (124)$$

We obviously have $\lim_{\xi \rightarrow -\infty} \Delta\{\mathbf{Y}\}(\xi) = 0$ for any given $\mathbf{Y} \in \mathcal{F}(\mathbf{Y})$. Next, we observe from the definition of the tangent space $T^u(\omega_-)$ spanned by (68)–(69) to the unstable manifold $\mathcal{W}^u(\omega_-)$ that $\Delta_+\{\mathbf{Y}\} = (q(0) + \mathcal{O}(\epsilon))\Delta_-\{\mathbf{Y}\}$, $q(0) > 0$, close enough to the equilibrium state ω_- . But since \mathbf{Y} and \mathbf{Y}^* are independent solutions of the linear ODE system (94), $\Delta_+\{\mathbf{Y}\}(\xi)$ and $\Delta_-\{\mathbf{Y}\}(\xi)$ cannot vanish simultaneously. As a consequence and for any given $\mathbf{Y} \in \mathcal{F}(\mathbf{Y})$ distinct from \mathbf{Y}^* , we deduce that $\Delta_+\{\mathbf{Y}\}(\xi)\Delta_-\{\mathbf{Y}\}(\xi) > 0$ for all $\xi < -L(\mathbf{Y})$, $L(\mathbf{Y})$ large enough. To extend this property to all time ξ , we notice that $\Delta\{\mathbf{Y}\}$ jointly solves :

$$d_\xi \Delta\{\mathbf{Y}\} = \mathcal{A}(\xi)\Delta\{\mathbf{Y}\}, \quad \xi \in \mathbb{R}, \quad (125)$$

from which we infer the analogous estimate to (98) : $d_\xi \Delta_+\{\mathbf{Y}\}\Delta_-\{\mathbf{Y}\}(\xi) \geq 0$. The estimate $\Delta_+\{\mathbf{Y}\}(\xi)\Delta_-\{\mathbf{Y}\}(\xi) > 0$ follows for all $\xi \in \mathbb{R}$. We have thus proved :

Lemma 3.5. *Let be given two independent solutions \mathbf{Y}^1 and \mathbf{Y}^2 in $\mathcal{F}(\mathbf{Y})$. Then $(Y_+^2 - Y_+^1)(\xi) \times (Y_-^2 - Y_-^1)(\xi) > 0$ for all time $\xi \in \mathbb{R}$.*

Hence $\Delta_+\{\mathbf{Y}\}(\xi)$ and $\Delta_-\{\mathbf{Y}\}(\xi)$ keep the same constant sign for all ξ , either positive or negative, the sign being recovered from the initial data $\mathbf{Y}(0)$ and $\mathbf{Y}^*(0)$ in (70). The large time behavior of the difference between two solutions in $\mathcal{F}(\mathbf{Y})$ is given by the next statement :

Proposition 3.6.

1. Assume $\lim_{\xi \rightarrow \infty} \mathcal{M}_a(\xi) > 1$. Then for all $\mathbf{Y} \in \mathcal{F}(\mathbf{Y})$, both $|\Delta_+\{\mathbf{Y}\}(\xi)|$ and $|\Delta_-\{\mathbf{Y}\}(\xi)|$ go to $+\infty$ with ξ .
2. Assume $\lim_{\xi \rightarrow \infty} \mathcal{M}_a(\xi) < 1$. Then for any given $\mathbf{Y} \in \mathcal{F}(\mathbf{Y})$, $|\Delta_+\{\mathbf{Y}\}(\xi)|$ (respectively $|\Delta_-\{\mathbf{Y}\}(\xi)|$) tends to a finite nonzero limit $|d_+(\mathbf{Y})|$ (resp. $|d_-(\mathbf{Y})|$) as ξ goes to ∞ . In addition, $d_\pm(\mathbf{Y}^1) \neq d_\pm(\mathbf{Y}^2)$ for any given pair $(\mathbf{Y}^1, \mathbf{Y}^2)$ of independent solutions in $\mathcal{F}(\mathbf{Y})$.

In both cases, all the ratios $\Delta_+\{\mathbf{Y}\}/\Delta_-\{\mathbf{Y}\}(\xi)$ tend to the same finite limit :

$$\lim_{\xi \rightarrow \infty} \frac{\Delta_+\{\mathbf{Y}\}}{\Delta_-\{\mathbf{Y}\}}(\xi) = \left| \frac{\mathcal{M}_a(+\infty) - 1}{\mathcal{M}_a(+\infty) + 1} \right| > 0. \quad (126)$$

Let us now prove these proposed statements.

Proof of Proposition 3.4

We first recall that for any given $\mathbf{Y} \in \mathcal{F}(\mathbf{Y})$, the ratio Y_+/Y_- takes negative values for $\xi < -L$, L large enough, while it solves the Ricatti equation (99). Let us understand this ratio in the independent variable t introduced in (100) so as to study its evolution in t through the identity $y'(t)/y(t) = Y_+/Y_-(\xi(t))$ where $y(t)$ is a solution of the second order equation (108). Then, the required result follows from Proposition 3.3 : namely, there is a unique solution y^s in class (ii) such that $(y^s)'(t)/y^s(t) < 0$ for all finite time while for any other solution y , there exists a first time $t(y)$ with $y'(t)/y(t) > 0$ for all $t > t(y)$. This concludes the proof.

Proof of Proposition 3.6

Let be given \mathbf{Y} in $\mathcal{F}(\mathbf{Y})$. We note that the ratio $\Delta_+\{\mathbf{Y}\}/\Delta_-\{\mathbf{Y}\}(\xi)$ always stays positive and bounded for all finite times since for such times, both $\Delta_+\{\mathbf{Y}\}(\xi)$ and

$\Delta_{-}\{\mathbf{Y}\}(\xi)$ are bounded with for some $\epsilon_0 > 0$, $\Delta_{+}\{\mathbf{Y}\}(\xi) \times \Delta_{-}\{\mathbf{Y}\}(\xi) \geq \epsilon_0$ for all $\xi \geq \xi(\epsilon_0)$. Let us examine the asymptotic behavior of this ratio depending on the value of $\lim_{\xi \rightarrow \infty} \mathcal{M}_a(\xi) = \mathcal{M}_a(+\infty)$.

Starting with $\mathcal{M}_a(+\infty) = 1 - \epsilon_0$ for some $\epsilon_0 > 0$, we observe that $\mathcal{M}_a(\xi) < 1$ for all $\xi > L$ with $L > 0$ sufficiently large. In view of the decreasing property (90) of $\mathcal{M}_a(\xi)$, choosing L possibly larger, we have in addition that $(\mathcal{M}_a(\xi) - 1)d_{\xi}\mathcal{M}_a(\xi) > 0$ for all the ξ under consideration. Rephrased in term of the independent variable t introduced in (100), the ratio $r\{\mathbf{Y}\}(t) = \Delta_{+}\{\mathbf{Y}\}/\Delta_{-}\{\mathbf{Y}\}(\xi(t))$ is then nothing but a strictly positive solution of the Ricatti equation (101), with the property that :

$$2q(t)q'(t) = 4 \frac{(\mathcal{M}_a(\xi(t)) - 1) \times d_{\xi}\mathcal{M}_a(\xi)}{(\mathcal{M}_a(\xi(t)) + 1)^3} \times \xi'(t) > 0, \quad \text{for all } t > t(L). \quad (127)$$

The assumptions of Proposition 3.2 are therefore satisfied. We infer that the strictly positive solution $r\{\mathbf{Y}\}(t)$ of (101) belongs to class (i) and thus achieves $\lim_{t \rightarrow \infty} r\{\mathbf{Y}\}(t) = |(\mathcal{M}_a(+\infty) - 1)/\mathcal{M}_a(+\infty) + 1| > 0$ together with $0 < \lim_{t \rightarrow +\infty} \int_{t(L)}^t (|q(s)| - r\{\mathbf{Y}\}(s)) ds < +\infty$. Equipped with these properties, we observe that $\Delta_{-}\{\mathbf{Y}\}(t) = \Delta_{-}\{\mathbf{Y}\}(\xi(t))$ solves the next ODE :

$$\Delta_{-}\{\mathbf{Y}\}' = (r\{\mathbf{Y}\}(t) - |q(t)|)\Delta_{-}\{\mathbf{Y}\}, \quad t > t(L), \quad (128)$$

so that the next limit is met :

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \Delta_{-}\{\mathbf{Y}\}(t) = d_{-}(\mathbf{Y}), \quad (129)$$

with a finite $d_{-}(\mathbf{Y})$ given according to :

$$|d_{-}(\mathbf{Y})| = |\Delta_{-}(\mathbf{Y}(L))| \lim_{t \rightarrow \infty} e^{\left(-\int_{t(L)}^t (|q(s)| - r(s)) ds\right)} < +\infty. \quad (130)$$

From Lemma 3.5, we have $|\Delta_{-}(\mathbf{Y}(L))| > 0$ and hence $d_{-}(\mathbf{Y}) \neq 0$. Consequently, we get in turn $\lim_{t \rightarrow +\infty} \Delta_{+}\{\mathbf{Y}\}(t) = d_{+}(\mathbf{Y})$ with :

$$\begin{aligned} 0 < |d_{+}(\mathbf{Y})| &= \lim_{t \rightarrow +\infty} |q(t)\Delta_{-}\{\mathbf{Y}\}(t)| \\ &= \left| \frac{\mathcal{M}_a(+\infty) - 1}{\mathcal{M}_a(+\infty) + 1} \right| \times |d_{-}(\mathbf{Y})| < +\infty. \end{aligned} \quad (131)$$

To conclude, let us prove that two independent solutions \mathbf{Y}^1 and \mathbf{Y}^2 in $\mathcal{F}(\mathbf{Y})$ necessarily obey $d_{\pm}(\mathbf{Y}^1) \neq d_{\pm}(\mathbf{Y}^2)$. Assume without restriction that $d_{+}(\mathbf{Y}^1) = d_{+}(\mathbf{Y}^2)$, to rise a contradiction. Notice that :

$$\Delta_{+}\{\mathbf{Y}^1\}(\xi) - \Delta_{+}\{\mathbf{Y}^2\}(\xi) = Y_{+}^1(\xi) - Y_{+}^2(\xi), \quad (132)$$

so that necessarily $\lim_{\xi \rightarrow +\infty} (Y_{+}^1(\xi) - Y_{+}^2(\xi)) = d_{+}(\mathbf{Y}^1) - d_{+}(\mathbf{Y}^2) = 0$. But prescribing $\mathbf{Y}^* = \mathbf{Y}^2$ in (124), we would end up with $\lim_{\xi \rightarrow +\infty} |\Delta_{+}\{\mathbf{Y}^1; \mathbf{Y}^* = \mathbf{Y}^2\}(\xi)| = \lim_{\xi \rightarrow +\infty} |Y_{+}^1(\xi) - Y_{+}^2(\xi)| > 0$ according to (131), hence the contradiction.

Let us now consider the case $\mathcal{M}_a(+\infty) = 1 + \epsilon_0$ for some $\epsilon_0 > 0$. Let us write safely Δ_{+} (respectively Δ_{-}) in place of $\Delta_{+}\{\mathbf{Y}\}$ (resp. $\Delta_{-}\{\mathbf{Y}\}$). The large time behaviors of $\Delta_{+}(\xi)$ and $\Delta_{-}(\xi)$ are investigated thanks to the time asymptotic of the (inverse) ratio $\Delta_{-}(\xi)/\Delta_{+}(\xi)$, which is a strictly positive solution of :

$$d_{\xi} \frac{\Delta_{-}}{\Delta_{+}} = \frac{\mu}{2\nu} \frac{M}{\mathcal{M}_a(\xi)^2} \left((\mathcal{M}_a(\xi) + 1)^2 - (\mathcal{M}_a(\xi) - 1)^2 \left(\frac{\Delta_{-}}{\Delta_{+}} \right)^2 \right). \quad (133)$$

In view of (90) and choosing $L > 0$ large enough, we have successively for all $\xi > L$, $d_\xi \mathcal{M}_a(\xi) < 0$ so that $\mathcal{M}_a(\xi) > 1$ and hence $(\mathcal{M}_a(\xi) - 1)d_\xi \mathcal{M}_a(\xi) < 0$. This allows to introduce the strictly increasing function $\theta : \xi \in [L, \infty) \rightarrow \theta(\xi) \in [\theta(L), \infty)$ defined by :

$$\theta(\xi) = \int_L^\xi \frac{\mu}{2\nu} \frac{M(\mathcal{M}_a(s) - 1)^2}{\mathcal{M}_a(s)^2} ds, \quad \xi > L, \quad (134)$$

so as to recast (133) into the next Ricatti equation of the new independent variable θ :

$$r' = p^2(\theta) - r^2, \quad p(\theta) = \frac{\mathcal{M}_a(\xi(\theta)) + 1}{\mathcal{M}_a(\xi(\theta)) - 1}, \quad \theta \geq \theta(L). \quad (135)$$

Now $p^2(\theta)$ strictly increases with θ , $\theta \geq \theta(L)$, in view of :

$$(p(\theta)^2)' = 4 \frac{\mathcal{M}_a(\xi(\theta)) + 1}{(\mathcal{M}_a(\xi(\theta)) - 1)^3} \times \xi'(\theta) \times \{-d_\xi \mathcal{M}_a(\xi)\} > 0, \quad \text{for all } \theta \geq \theta(L). \quad (136)$$

Proposition 3.2 applies and means that the strictly positive solution $r(\theta) = \frac{\Delta_-(\xi(\theta))}{\Delta_+(\xi(\theta))}$ of (135) belongs to class (i) and achieves $\lim_{\theta \rightarrow +\infty} r(\theta) = \lim_{\theta \rightarrow +\infty} p(\theta) > 0$ and thus clearly $\lim_{\theta \rightarrow +\infty} \int_{\theta(L)}^\theta (p(s) + r(s)) ds = +\infty$. Let us notice that $\Delta_+(\theta) = \Delta_+(\xi(\theta))$ satisfies :

$$\Delta'_+ = (p(\theta) + r(\theta))\Delta_+(\theta), \quad \theta \geq \theta(L), \quad (137)$$

to get the required limit (with $|\Delta_+(\theta(L))| > 0$ from Lemma 3.5) :

$$\lim_{\theta \rightarrow +\infty} \frac{|\Delta_+(\theta)|}{|\Delta_+(\theta(L))|} = \lim_{\theta \rightarrow +\infty} \exp\left(\int_{\theta(L)}^\theta (p(s) + r(s)) ds\right) = +\infty. \quad (138)$$

We conclude that :

$$\lim_{\theta \rightarrow +\infty} |\Delta_-(\theta)| = (\mathcal{M}_a(+\infty) + 1)/\mathcal{M}_a(+\infty) - 1 \times \lim_{\theta \rightarrow +\infty} |\Delta_+(\theta)| = +\infty. \quad (139)$$

We now turn proving the first part of Theorem 3.1 : namely assuming that $\mathcal{M}_a(+\infty) > 1$. To this end, we prove the following consequence of Proposition 3.6 :

Corollary 3.7. *Assume that $\mathcal{M}_a(+\infty) > 1$. Then with the notations of Proposition 3.4, the solutions $\mathbf{Y} \in \mathcal{F}(\mathbf{Y})$ separate into three mutually exclusive classes :*

- (I) *solutions with $Y_-(\xi) < 0$ for all $\xi \in \mathbb{R}$ and $Y_+(\xi) < 0$ for $\xi > \xi(\mathbf{Y})$, such that*

$$\lim_{\xi \rightarrow +\infty} Y_+(\xi) = \lim_{\xi \rightarrow +\infty} Y_-(\xi) = -\infty,$$
- (II) *at most one solution with $Y_+(\xi) > 0$ and $Y_-(\xi) < 0$ for all $\xi \in \mathbb{R}$ and with finite limits*

$$\lim_{\xi \rightarrow +\infty} Y_\pm(\xi),$$
- (III) *solutions with $Y_+(\xi) > 0$ for all $\xi \in \mathbb{R}$ and $Y_-(\xi) > 0$ for $\xi > \xi(\mathbf{Y})$, such that*

$$\lim_{\xi \rightarrow +\infty} Y_+(\xi) = \lim_{\xi \rightarrow +\infty} Y_-(\xi) = +\infty.$$

Both classes (I) and (III) are non empty.

The existence of solutions $\mathbf{Y} \in \mathcal{F}(\mathbf{Y})$ in both classes (I) and (III) allows to define functions $\theta \rightarrow r(\theta) = Y_-/Y_+(\xi(\theta))$ in the independent variable θ (134), solutions of the Ricatti equation (135), with the following distinctive properties :

Solutions in class (I) verify $\lim_{\theta \rightarrow \theta(\mathbf{Y})^\pm} r(\theta) = 0^\pm$,

Solutions in class (III) verify $\lim_{\theta \rightarrow \theta(\mathbf{Y})^\pm} r(\theta) = \pm\infty$,

where for simplicity, we have set $\theta(\mathbf{Y}) = \theta(\xi(\mathbf{Y}))$. From Proposition 3.2, solutions $\mathbf{Y} \in \mathcal{F}(\mathbf{Y})$ in class (I) all generate Ricatti solutions r in class (i) while solutions \mathbf{Y} in class (III) give birth to solutions r in class (iii). Let us then define $\bar{r}(0) = \max_{\mathbf{Y} \in (I)} Y_-/Y_+(0)$ and $\underline{r}(0) = \min_{\mathbf{Y} \in (III)} Y_-/Y_+(0)$ with $\underline{r}(0) < \bar{r}(0)$ so as to consider the interval $[\underline{r}(0), \bar{r}(0)]$. Again from Proposition 3.2, there exists a unique value $r^s(0) \in [\underline{r}(0), \bar{r}(0)]$ which gives rise to the separatrix Ricatti solution $r^s(\theta)$. In other words, there exists at least one solution $\mathbf{Y}^s \in \mathcal{F}(\mathbf{Y})$ such that :

$$(Y_+^s)' = (p(\theta) + r^s(\theta))Y_+^s, \quad \theta > \theta(0), \quad (140)$$

with $0 < \int^\infty (p(\theta) + r^s(\theta))d\theta < \infty$. Hence $\lim_{\theta \rightarrow +\infty} |Y_+^s(\theta)| < \infty$ and then $\lim_{\theta \rightarrow +\infty} |Y_-^s(\theta)| = p(+\infty)|Y_+^s(+\infty)| < \infty$. \mathbf{Y}^s is then uniformly bounded in time and belongs to class (II). Corollary 3.7 ensures that such a solution is unique. This concludes the proof of the first part of Theorem 3.1.

Let us now prove the second part of Theorem 3.1 : namely addressing the case $\mathcal{M}_a(+\infty) < 1$. Let us first check that all the solutions $\mathbf{Y} \in \mathcal{F}(\mathbf{Y})$ are uniformly bounded in time. Observe from Proposition 3.6 that if there exists at least one uniformly bounded in time solution in $\mathcal{F}(\mathbf{Y})$ then necessarily all others are also uniformly bounded. Proposition 3.4 ensures that for any given solution $\mathbf{Y} \in \mathcal{F}(\mathbf{Y})$, except at most one, there exists a finite time $\xi(\mathbf{Y})$ such that the ratio $Y_+/Y_-(\xi)$ stays positive for all $\xi > \xi(\mathbf{Y})$. This ratio $r(t)$ understood in the time variable t (100) is then a positive solution of the Ricatti equation (101) for $t > t(\mathbf{Y})$. Following the steps of the first part of the proof of Proposition 3.6, it is now routine work to prove that :

$$(Y_-)' = -(|q(t)| - r(t))Y_-, \quad t > t(0), \quad (141)$$

gives rise to a solution Y_- with $\lim_{t \rightarrow +\infty} |Y_-(t)| < \infty$ so to then deduce that $\lim_{t \rightarrow +\infty} |Y_+(t)| < \infty$. Hence all the solution $\mathbf{Y} \in \mathcal{F}(\mathbf{Y})$ are uniformly bounded in time. The property $d_\pm(\mathbf{Y}^1) \neq d_\pm(\mathbf{Y}^2)$ stated for any given pair of independent solutions \mathbf{Y}^1 and \mathbf{Y}^2 in Proposition 3.6 implies the companion property $l_\pm(\mathbf{Y}^1) \neq l_\pm(\mathbf{Y}^2)$ in Theorem 53. This concludes the proof of this Theorem.

Proof of Corollary 3.7 Since $\Delta_\pm\{\mathbf{Y}\}(\xi)$ keeps a constant sign and can be made either positive or negative depending on the initial data $\mathbf{Y}(0)$ and $\mathbf{Y}^*(0)$ in (70), Proposition 3.6 ensures that there exist solutions $\mathbf{Y} \in \mathcal{F}(\mathbf{Y})$ with the following distinctive properties :

- (1) solutions with $\lim_{\xi \rightarrow +\infty} \Delta_\pm\{\mathbf{Y}\}(\xi) = +\infty$,
- (2) solutions with $\lim_{\xi \rightarrow +\infty} \Delta_\pm\{\mathbf{Y}\}(\xi) = -\infty$.

Let us stress that these time asymptotic properties hold true for any given independent solutions \mathbf{Y} and \mathbf{Y}^* : *i.e.* with \mathbf{Y}^* arbitrarily prescribed in $\mathcal{F}(\mathbf{Y})$. As a direct consequence, there exists at most one uniformly bounded in time solution in $\mathcal{F}(\mathbf{Y})$, which we denote \mathbf{Y}^s . In other words, any given solution $\mathbf{Y} \in \mathcal{F}(\mathbf{Y})$, except at most one, blows up with time with either $\lim_{\xi \rightarrow +\infty} |Y_+(\xi)| = +\infty$ or $\lim_{\xi \rightarrow +\infty} |Y_-(\xi)| = +\infty$. Let us check that actually $Y_+(\xi)$ and $Y_-(\xi)$ can blow up in time but necessarily together and with the same infinite limit. In the first hand, the estimate

$Y_+(\xi)Y_-(\xi) > Y_+(-\infty)Y_-(-\infty)$ deduced from (98) discards infinite limits for $Y_+(\xi)$ and $Y_-(\xi)$ with opposite sign as ξ goes to ∞ . Therefore and in view of $\mathcal{M}_a(+\infty) > 1$, $(\mathcal{M}_a(\xi) + 1)Y_+(\xi) + (\mathcal{M}_a(\xi) - 1)Y_-(\xi)$ blows up with time as soon as either $Y_+(\xi)$ or $Y_-(\xi)$ does. This exactly says that in such a case, both $d_\xi Y_+$ and $d_\xi Y_-$ do blow up in time. Hence the required conclusion : the solutions $\mathbf{Y} \in \mathcal{F}(\mathbf{Y})$ obey, up to an exceptional solution, either $\lim_{\xi \rightarrow +\infty} Y_+(\xi) = \lim_{\xi \rightarrow +\infty} Y_-(\xi) = +\infty$ or $\lim_{\xi \rightarrow +\infty} Y_+(\xi) = \lim_{\xi \rightarrow +\infty} Y_-(\xi) = -\infty$. Let us underline that the coexistence of classes (1) and (2) clearly allows both signs. Proposition 3.4 then implies that the solutions $\mathbf{Y} \in \mathcal{F}(\mathbf{Y})$, except at most one, can be split into the classes (I) and (III) introduced in the Corollary 3.7.

Let's assume the existence an exceptional uniformly bounded in time solution \mathbf{Y}^s to prove that necessarily $Y_+(\xi) > 0$ and $Y_-(\xi) < 0$ for all time. For that purpose, let us suppose that $Y_+^s Y_-^s(\xi)$ vanishes at a finite time, say $\xi(\mathbf{Y}^s)$, to rise a contradiction. Indeed, Proposition 3.4 then implies that the ratio $Y_-^s/Y_+^s(\xi)$ stays strictly positive for all time $\xi > \xi(\mathbf{Y}^s)$. Understood in the independent time variable θ introduced in (134), this ratio is nothing but a positive solution of the Riccati equation (135) with $p^2(\theta)$ strictly increasing for θ large enough. Identical steps to those developed in the second part of the proof of Proposition 3.6 apply to get necessarily $\lim_{\theta \rightarrow \infty} |Y_+^s(\xi(\theta))| = \lim_{\theta \rightarrow \infty} |Y_-^s(\xi(\theta))| = +\infty$. Hence the contradiction.

4 The asymptotic system and the Riemann problem

Throughout the forthcoming sections, we always assume that the Ristorcelli relaxation term $\mathcal{T}_{ris}(\rho, \partial_x u)$ in (18) achieves sufficiently large positive values within the viscous shock profiles in the sense of Lemma 2.8 so as to ensure :

$$\lim_{\xi \rightarrow +\infty} \mathcal{M}_a(\xi) > 1. \quad (142)$$

Thus and from now on, the Ristorcelli correction in (14) systematically prevents viscous shock profiles from overcompressivity. In turn, existence and uniqueness of the traveling wave solutions of (14) inferred from Proposition 2.6 and Theorem 3.1 allow a proper handling of the asymptotic regime of a vanishing parameter ϵ in (14) in the sense of Definition 1.1. The Riemann problem for the limit system is then studied.

4.1 Shock solutions

Following the lines of the preamble, for any given state $\mathbf{u}_- \in \Omega_{\mathbf{u}}^+$ we consider a speed of propagation σ prescribed according to (73) so as to give rise to a unique traveling wave solution $\mathbf{u}(\xi)$ of (14) with $\epsilon = 1$ connecting some state $\mathbf{u}_+ \in \Omega_{\mathbf{u}}^+$ in the future. Let us infer an easy but important consequence of Theorem 3.1 :

Proposition 4.1. *Let be given $\mathbf{u}_- \in \Omega_{\mathbf{u}}^+$ with $R_{12-} \neq 0$ and a speed σ satisfying (73). Then states $\mathbf{u}(\xi) \in \Omega_{\mathbf{u}}^+$ in the associated unique heteroclinic orbit obey $R_{12-}R_{12}(\xi) > 0$ for all $\xi \in \mathbb{R}$ with $\lim_{\xi \rightarrow +\infty} R_{12-}R_{12}(\xi) > 0$. For a state \mathbf{u}_- with $R_{12-} = 0$, the tangential Reynolds stress $R_{12}(\xi)$ stays identically zero for all time.*

Recall from the form of the governing EDO system (43) that it suffices to consider states $\mathbf{u}_- \in \Omega_{\mathbf{u}}^+$ with $R_{12-} > 0$, the case of an opposite sign being deduced when

multiplying both R_{12} and v by -1 and thus also Y_+ and Y_- from their definition (46). Thus focusing on states \mathbf{u}_- with $Y_+(-\infty) > 0$ and $Y_-(-\infty) < 0$ (see indeed (62)), the above statement is a direct consequence of the representation formula :

$$R_{12}(\xi) = \frac{\sqrt{I(\xi)}}{2\tau^2(\xi)}(Y_+^s(\xi) - Y_-^s(\xi)), \quad \xi \in \mathbb{R}, \quad (143)$$

where $Y_+^s(\xi)$ (respectively $Y_-^s(\xi)$) keeps strictly positive (resp. negative) values along the profile, including at infinity, as stated in Theorem 3.1 when $\mathcal{M}_a(+\infty) > 1$. Then the family of rescaled traveling wave solutions $\{\mathbf{u}_\epsilon\}_{\epsilon>0}$ allows to define in the limit $\epsilon \rightarrow 0^+$ a Lax 1-shock solution of the limit system :

$$\mathbf{u}(x, t) = \mathbf{u}_- + (\mathbf{u}_+ - \mathbf{u}_-)H(x - \sigma t), \quad (144)$$

with the property that $R_{12-}R_{12+} > 0$ as soon as $R_{12-} \neq 0$ while $R_{12+} = 0$ when $R_{12-} = 0$. Since a state $\mathbf{u}_- \in \Omega_{\mathbf{u}}^+$ leads to $\mathbf{u}_+ \in \Omega_{\mathbf{u}}^+$, the tangential energy $\{\rho E_t\}(\mathbf{u}_+)$ in (35) is well-defined and this motivates the following characterization of the family of Lax 1-shock solutions of the limit system :

Proposition 4.2. *From any given $\mathbf{u}_- \in \Omega_{\mathbf{u}}^+$ and velocity σ prescribed according to (73), let us define the following kinetic functions :*

$$\begin{aligned} \mathcal{K}_{\mathcal{I}}(\mathbf{u}_-, \sigma) &= - \int_{\mathbb{R}} \left\{ 2\mathcal{T}_{ris} \rho \mathcal{I} \frac{d_{\xi} p}{\rho^2} \frac{d_{\xi} \rho}{\rho^2} \right\} (\mathbf{u}(\xi, \mathbf{u}_-, \sigma)) d\xi, \\ \mathcal{K}_{E_t}(\mathbf{u}_-, \sigma) &= - \int_{\mathbb{R}} \nu \left\{ d_{\xi} v \right\}^2 (\mathbf{u}(\xi, \mathbf{u}_-, \sigma)) d\xi, \end{aligned} \quad (145)$$

where $\mathbf{u}(\cdot, \mathbf{u}_-, \sigma)$ denotes the traveling wave solution with speed σ and issuing from \mathbf{u}_- . Then the state $\mathbf{u}_+ \in \Omega_{\mathbf{u}}^+$ in the 1-shock solution (144) with :

$$u_+ - c(\mathbf{u}_+) < \sigma < u_- - c(\mathbf{u}_-), \quad \sigma < u_+ - a(\mathbf{u}_+), \quad (146)$$

is the unique solution of the following generalized Rankine-Hugoniot conditions :

$$\begin{aligned} -\sigma[\rho] + [\rho u] &= 0, \\ -\sigma[\rho u] + [\rho u^2 + p(\rho) + R_{11}] &= 0, \\ -\sigma[\rho \mathcal{I}] + [\rho \mathcal{I} u] &= \mathcal{K}_{\mathcal{I}}(\mathbf{u}_-, \sigma), \\ -\sigma[\rho v] + [\rho v u + R_{12}] &= 0, \\ -\sigma\left[\frac{\rho v^2}{2} + \frac{R_{12}^2}{2R_{11}}\right] + \left[\left(\frac{\rho v^2}{2} + \frac{R_{12}^2}{2R_{11}}\right)u + R_{12}v\right] &= \mathcal{K}_{E_t}(\mathbf{u}_-, \sigma), \\ -\sigma[\rho \mathcal{W}] + [\rho \mathcal{W} u] &= 0, \end{aligned} \quad (147)$$

where for definiteness $R_{12-}R_{12+} > 0$ if $R_{12-} \neq 0$ and $R_{12+} = 0$ otherwise. The 1-shock solution (144) obeys in addition the next entropy like inequality for the total energy (30) :

$$-\sigma[\{\rho E\}(\mathbf{u})] + [(\{\rho E\}(\mathbf{u}) + p(\rho) + R_{11})u + R_{12}v] < 0. \quad (148)$$

This statement simply follows the equivalent form (39) of system (14) when invoking the governing equation (34) for the tangential energy ρE_t in place of the PDE for ruling R_{12} . From classical considerations, the characterization of the family of Lax shock-solutions for the other extreme field can be deduced from the above result.

Let us stress an important additional property to be met by the Ristorcelli correction (14) in the definition of relevant shock-solutions. The associated relaxation term \mathcal{T}_{ris} has been so far assumed to achieve large enough positive values inside the viscous profiles so as to prevent them from overcompressivity. But such a requirement does not preclude in turn the resulting Lax shock solutions from instabilities already in one space variable : namely when considering longitudinal perturbations. In the setting of hyperbolic systems in conservation form, we refer the reader to the pioneering work by Bethe [12] and to the books by Serre [61] for a modern presentation. Extension to hyperbolic systems in non conservation form is addressed in a companion paper [3] where the set of generalized jump conditions (147) based on the kinetic functions (145) plays a major role. In this work, the definition of relevant Ristorcelli parameters \mathcal{T}_{ris} is further restricted so as to force the family of Lax 1-shock solutions to obey the next important monotony property for the dimensionless function $(M, \beta) \rightarrow \tau^+(M, \beta)$, where $\tau^+(M, \beta)$ denotes the specific volume defined in Proposition 2.6 :

$$\frac{\partial}{\partial M} \tau^+(M, \beta) < 0, \quad M > 1, \quad \beta \in (0, \frac{1}{\sqrt{3}}). \quad (149)$$

Note from Proposition 2.6 that $\tau^+(M, \beta) < \tau^+(1, \beta) = \tau_-$ for all $M > 1$ so that with M close enough to 1, the function $\tau^+(M, \beta)$ naturally first strictly decreases as M increases. The condition (149) just expresses that this strict monotony property extends to all $M > 1$. When $\tau^+(M, \beta)$ departs too much from (149) at a first given $M_c > 1$ then the Lax 1-shock solutions characterized in Proposition 4.2 are not stable with respect to longitudinal perturbations. The reader is referred to [3] for a broad class of Ristorcelli parameters enforcing (149) for validity and also for the analysis of the linear stability of Lax shock-solutions in two space variables. In the present paper, the monotony property (149) is a sufficient and generally speaking necessary condition for uniqueness of a solution of the Riemann problem for the limit system we now discuss. Relationships between stability of Lax shocks and uniqueness of solutions in the Riemann problem can be found in Serre [62] and Menikoff, Plohr [54] for instance.

4.2 The Riemann problem

In this section, we study the Riemann problem for the first order limit system within the natural frame of Definition 1.1. We prove the existence of Riemann solutions for arbitrary states \mathbf{u}_L and \mathbf{u}_R in $\Omega_{\mathbf{u}}^+$. Uniqueness in the Riemann solution is ensured by the monotony property (149). Absence of vacuum is due to the fact that the total pressure $\pi = T_0\rho + R_{11}$ receives an isothermal contribution. As expected from the eigenstructure of the underlying hyperbolic system in (14) discussed in Lemma 1.2, the general waves pattern is indeed made of at most five simple waves separating six constant states. Admissible shock solutions in the extreme waves are characterized from Proposition 4.2 while all intermediate linearly degenerate waves systematically coincide with contact discontinuities which solve without ambiguity :

$$\partial_t \mathbf{u} + \mathcal{A}(\mathbf{u}) \partial_x \mathbf{u} = 0, \quad x \in \mathbb{R}, \quad t > 0, \quad (150)$$

in the light of section 1.3. Note from Proposition 2.6 that choosing initial data with \mathbf{u}_L and \mathbf{u}_R in $\Omega_{\mathbf{u}}^+$ prevents the collapse of the intermediate contact discontinuities. Piecing together the elementary waves connecting arbitrary \mathbf{u}_L and \mathbf{u}_R in $\Omega_{\mathbf{u}}^+$ is greatly eased

by the property that the governing equations for ρ , ρu and $\rho \mathcal{I}$ in the limit system are decoupled from the remaining unknowns ρv , R_{12} , $\rho \mathcal{W}$. Such a decoupling first leads us to study the projection of the families of wave curves in the submanifold of $\Omega_{\mathbf{u}}^+$ defined by $\{\rho > 0, u \in \mathbb{R}, \mathcal{I} > 0\}$. There, the waves connection problem merely falls within the frame of a classical gas dynamics problem but with generalized Rankine-Hugoniot conditions. It generically involves four constant states separated by three waves respectively associated to two extreme genuinely nonlinear fields and a contact discontinuity propagating at constant speed u across which the total pressure $\pi = p(\rho) + R_{11}$ is continuous. Waves curves are thus further projected onto the total pressure-velocity plane so as to study their intersection. The eventual monotony property of these projections is entirely dictated by the sign of $\partial_M \tau^+(M, \beta)$: a uniform negative sign results in uniqueness while otherwise, uniqueness is lost in general.

4.3 Shock curves

For any given state $\mathbf{u}_L \in \Omega_{\mathbf{u}}^+$, let us first define the 1-shock curve attached to the left state \mathbf{u}_L :

$$\mathcal{S}_1(\mathbf{u}_L) = \{\mathbf{u} \in \Omega_{\mathbf{u}}^+, \mathbf{u}_L \text{ 1-shock } \mathbf{u}\}, \quad (151)$$

as the subset of $\Omega_{\mathbf{u}}^+$ made of the totality of states \mathbf{u} which can be connected on the right to \mathbf{u}_L by a 1-shock solution. For a given state $\mathbf{u}_R \in \Omega_{\mathbf{u}}^+$, we then introduce the shock curve attached to right state \mathbf{u}_R for the other extreme GNL field :

$$\mathcal{S}_5(\mathbf{u}_R) = \{\mathbf{u} \in \Omega_{\mathbf{u}}^+, \mathbf{u} \text{ 5-shock } \mathbf{u}_R\}, \quad (152)$$

made by definition of the states \mathbf{u} which can be connected on the left to \mathbf{u}_R by a shock-solution in the last extreme field.

Proposition 2.6 allows to introduce the family of 1-shock solutions with \mathbf{u}_L as a left state, where the Mach number $M > 1$ serves as a natural parameter :

Lemma 4.3. *1 Assume the monotony property (149) then the velocity u (respectively the total pressure $\pi = p(\rho) + R_{11}$) is a smooth strictly decreasing function of the Mach number M which maps $[1, +\infty)$ onto $(-\infty, u_L]$ (resp. strictly increasing function with range $[\pi_L, +\infty)$).*

2 When the condition (149) is violated, both functions $u(M)$ and $\pi(M)$ still achieve the reported asymptotic behaviors but monotony properties are lost generally speaking.

Proof. The velocity and the total pressure obey by construction along $\mathcal{S}_1(\mathbf{u}_L)$:

$$\begin{aligned} u(M) &= u_L - \rho_L c_L M \left(1 - \frac{\tau(M)}{\tau_L}\right), \\ \pi(M) &= \pi_L + \rho_L c_L^2 M^2 \left(1 - \frac{\tau(M)}{\tau_L}\right), \end{aligned} \quad (153)$$

where the function $\tau(M)$ is defined from $[1, +\infty)$ to $(0, \tau_L]$ in view of Proposition 2.6. The required conclusions then easily follow.

Let us stress that whenever the function $\tau^+(M)$ departs too much from the decreasing property (149) at a first $M_c > 1$ in a sense already discussed, the projection of the shock curve $\mathcal{S}_1(\mathbf{u}_L)$ in the half plane (π, u) can only result at least locally in a

multivalued curve. In such a case, it is well-known that uniqueness of solutions of the Riemann problem for classical gas dynamics is lost for initial data conveniently built from \mathbf{u}_L . We refer the reader to Smith [63] and to Menikoff, Plohr [54] for instance. Obviously, this negative result immediately transfers to the present setting in view of the reported decoupling property.

From now on, we assume (149) for validity and prove existence and uniqueness of the Riemann solutions. Under (149), Lemma 4.3 ensures that the total pressure π stands for a relevant admissible parameter to characterize the projection of $\mathcal{S}_1(\mathbf{u}_L)$ and $\mathcal{S}_5(\mathbf{u}_R)$ onto the (π, u) plane :

- Proposition 4.4.** *1. Let be given $\mathbf{u}_L \in \Omega_{\mathbf{u}}^+$. States u along $\mathcal{S}_1(\mathbf{u}_L)$ are given as smooth function $u_1(\pi)$, $\pi \in [\pi_L, +\infty)$, with the property that the velocity $u_1(\pi)$ is a strictly decreasing function with range $(-\infty, u_L]$.*
- 2. For any given $\mathbf{u}_R \in \Omega_{\mathbf{u}}^+$, states u along $\mathcal{S}_5(\mathbf{u}_R)$ are such that $u_e(\pi)$ strictly increases with π and maps $[\pi_R, +\infty)$ onto $[u_R, +\infty)$.*

Proof. We only examine the projection of the curve $\mathcal{S}_1(\mathbf{u}_L)$. We observe from Lemma 4.3 and the condition (149) that the function $\tau_1(\pi)$ is a strictly decreasing function of π with range $(0, \tau_L]$. Classical manipulations (see [32]) extend to give :

$$(u_1(\pi) - u_L)^2 = (\pi - \pi_L)(\tau_L - \tau_1(\pi)), \quad \pi \geq \pi_L. \quad (154)$$

But since $u_1(\pi) - u_L = M(\tau_1(\pi) - \tau_L)$ with $M > 1$, $\tau_1(\pi) < \tau_L$ for all $\pi > \pi_L$, we get $u_1(\pi) < u_L$ and the function $u_1(\pi)$ is recovered from (154). The conclusion easily follows from the property of the function $\tau_1(\pi)$.

4.4 Rarefaction curves

The following statement defines the two families of rarefaction curves $\mathcal{R}_1(\mathbf{u}_L)$ and $\mathcal{R}_5(\mathbf{u}_R)$ respectively associated with the first and last fields. These subsets of $\Omega_{\mathbf{u}}^+$ are given clear definitions in correspondance with those of $\mathcal{S}_1(\mathbf{u}_L)$ and $\mathcal{S}_5(\mathbf{u}_R)$. They are characterized by :

Lemma 4.5. *For any given state $\mathbf{u}_L \in \Omega_{\mathbf{u}}^+$, the 1-rarefaction curve $\mathcal{R}_1(\mathbf{u}_L)$ attached to the left state \mathbf{u}_L is made of states $\mathbf{u} \in \Omega_{\mathbf{u}}^+$ with the following properties :*

$$u - c(\mathbf{u}) > u_L - c_L, \quad \text{as soon as } \mathbf{u} \neq \mathbf{u}_L, \quad (155)$$

with

$$\begin{aligned} \mathcal{I} &= \mathcal{I}_L, & u &= u_L + \int_{\tau_L}^{\tau} c(v) \frac{dv}{v}, \\ \mathcal{W} &= \mathcal{W}_L, & \phi(\mathbf{u}) &= \phi(\mathbf{u}_L), & v + \theta(\mathbf{u}) &= v_L + \theta(\mathbf{u}_L). \end{aligned} \quad (156)$$

Symmetrically, states $\mathbf{u} \in \mathcal{R}_5(\mathbf{u}_R)$ satisfy :

$$u + c(\mathbf{u}) < u_R + c_R, \quad \text{as soon as } \mathbf{u} \neq \mathbf{u}_R, \quad (157)$$

with

$$\begin{aligned} \mathcal{I} &= \mathcal{I}_R, & u &= u_R - \int_{\tau_R}^{\tau} c(v) \frac{dv}{v}, \\ \mathcal{W} &= \mathcal{W}_R, & \phi(\mathbf{u}) &= \phi(\mathbf{u}_R), & v - \theta(\mathbf{u}) &= v_R - \theta(\mathbf{u}_R). \end{aligned} \quad (158)$$

Here by definition :

$$\phi(\mathbf{u}) = \exp\left(2 \int^{\tau} \frac{c^2(v)}{T_0 + 2R_{11}(v)} \frac{dv}{v^2}\right), \quad \theta(\mathbf{u}) = -2 \int^{\tau} \frac{c(v)R_{12}(v)}{T_0 + 2R_{11}(v)} \frac{dv}{v}, \quad (159)$$

with $c^2(\tau) = T_0 + 3\mathcal{I}\tau^{-2}$.

The proof of this statement can be found in Audebert [3] and Uhlmann [66]. The projections of these two families of rarefaction curves onto the total pressure-velocity plane are the matter of the next statement :

Proposition 4.6. *For any given state $\mathbf{u}_L \in \Omega_{\mathbf{u}}^+$, the total pressure π serves as a natural parameter along $\mathcal{R}_1(\mathbf{u}_L)$ when defining each state $\mathbf{u} \in \mathcal{R}_1(\mathbf{u}_L)$ from a smooth function $\mathbf{u}_1(\pi)$ of π in $(0, \pi_L]$ where the velocity u_1 is a strictly decreasing function mapping $(0, \pi_L]$ onto $[u_L, u_{max}(\mathbf{u}_L))$ with $u_{max}(\mathbf{u}_L)$ given by :*

$$u_{max}(\mathbf{u}_L) = u_L + \lim_{\tau \rightarrow +\infty} \int_{\tau_L}^{\tau} \frac{c(v)}{v} dv = +\infty. \quad (160)$$

Symmetrically and for any given $\mathbf{u}_R \in \Omega_{\mathbf{u}}^+$, states \mathbf{u} along $\mathcal{R}_5(\mathbf{u}_R)$ are given as a smooth function $\mathbf{u}_5(\pi)$ of $\pi \in (0, \pi_R]$, the velocity $u_5(\pi)$ being a strictly increasing function which maps $(0, \pi_R]$ onto $(u_{min}(\mathbf{u}_R), u_R]$ with $u_{min}(\mathbf{u}_R)$ defined by :

$$u_{min}(\mathbf{u}_R) = u_R - \lim_{\tau \rightarrow +\infty} \int_{\tau_R}^{\tau} \frac{c(v)}{v} dv = -\infty. \quad (161)$$

The proof of this statement directly follows from the definition of $c(\tau)$ in Lemma 4.5 and the easy properties of the function $\tau(\pi)$ defined from the identity $\pi = T_0\tau^{-1} + \mathcal{I}\tau^{-3}$, \mathcal{I} being given.

4.5 Existence and uniqueness

Considering an arbitrary fixed initial data $(\mathbf{u}_L, \mathbf{u}_R)$ throughout this paragraph, we define the following two curves of interest $\mathcal{C}_1(\mathbf{u}_L) = \mathcal{S}_1(\mathbf{u}_L) \cup \mathcal{R}_1(\mathbf{u}_L)$ and $\mathcal{C}_5(\mathbf{u}_R) = \mathcal{S}_5(\mathbf{u}_R) \cup \mathcal{R}_5(\mathbf{u}_R)$. Their projections onto the (π, u) plane have the following distinctive properties :

Proposition 4.7. *Along the curve $\mathcal{C}_1(\mathbf{u}_L)$, the velocity u_1 is a smooth strictly decreasing function of the total pressure π mapping $(0, +\infty)$ onto $(-\infty, +\infty)$ while along the curve $\mathcal{C}_5(\mathbf{u}_R)$, the velocity u_5 smoothly strictly increases with π and with range $(-\infty, +\infty)$.*

Proving that the corresponding shock and rarefactions curves achieve a smooth connection is a classical matter left to the reader (see [32] for instance). As a direct consequence of the reported distinct monotony properties of the velocity functions $u_1(\pi)$ and $u_5(\pi)$ and their asymptotic behavior, the respective projections of the curves $\mathcal{C}_1(\mathbf{u}_L)$ and $\mathcal{C}_5(\mathbf{u}_R)$ must always intersect at a given pair (π^*, u^*) whatever are \mathbf{u}_L and \mathbf{u}_R . But the strict monotony properties of the velocity functions under consideration imply that the pair (π^*, u^*) is necessarily unique. Then uniqueness in the definition of the intermediate states separated by the three distinct contact discontinuities (recall that \mathbf{u}_L and \mathbf{u}_R belong to $\Omega_{\mathbf{u}}^+$) is easily recovered from the Riemann invariants listed in Lemma 1.3. We have therefore proved :

Theorem 4.8. *The Riemann problem with initial data in $(\mathbf{u}_L, \mathbf{u}_R)$ in $\Omega_{\mathbf{u}}^+$ admits a unique solution.*

We underline that the case of initial data with \mathbf{u}_L or \mathbf{u}_R in $\Omega_{\mathbf{u}}$ leads to the same uniqueness result.

Annexe B

Hybrid Godunov-Glimm method for a nonconservative hyperbolic system with kinetic relations

Cette annexe correspond à un acte du congrès ENUMATH 2005, édité par Springer-Verlag.

Hybrid Godunov-Glimm method for a nonconservative hyperbolic system with kinetic relations

Bruno Audebert¹ and Frédéric Coquel²

¹ ONERA, 29 Avenue de la Division Leclerc, 92322 Châtillon, France
bruno.audebert@onera.fr

² CNRS and Laboratoire Jacques-Louis Lions, UPMC, 75252 Paris cedex 05,
 France coquel@ann.jussieu.fr

Summary. We study the numerical approximation of a system from the physics of compressible turbulent flows, in the regime of large Reynolds numbers. The PDE model takes the form of a nonconservative hyperbolic system with singular viscous perturbations. Weak solutions of the limit system are regularization dependent and classical approximate Riemann solvers are known to grossly fail in the capture of shock solutions. Here, the notion of kinetic functions is used to derive a complete set of generalized jump conditions which keeps a precise memory of the underlying viscous mechanism. To enforce for validity these jump conditions, we propose a hybrid Godunov-Glimm method coupled with a local nonlinear correction procedure.

1 Introduction

We examine the numerical approximation of a system governing plane wave solutions of a second order closure model for compressible turbulence in two space dimension [5]. This system has to be tackled in the regime of very large Reynolds numbers and can be given the following nonconservative form :

$$\partial_t \mathbf{u}^\epsilon + \mathcal{A}(\mathbf{u}^\epsilon) \partial_x \mathbf{u}^\epsilon = \epsilon \partial_x (\mathcal{D}(\mathbf{u}^\epsilon) \partial_x \mathbf{u}^\epsilon), \quad x \in \mathbb{R}, t > 0. \quad (1)$$

In the limit $\epsilon \rightarrow 0^+$, solutions involve in general shock waves which turn to be very sensitive with respect to the viscous tensor \mathcal{D} . Motivated by [2],[3],[4], we characterize all the entropy pairs of (1) so as to define precisely their associated dissipation rates (the so-called kinetic relations) when studying traveling waves of (1). This allows us to propose a complete set of generalized jump conditions which keeps full memory of the small scale sensitiveness. Properties of the available entropy pairs lead us to introduce an hybrid Godunov-Glimm method based on exact or approximate Riemann solutions. After [3], [4], this method then receives a local correction intending to keep all the discrete entropy rates in the exact balance prescribed by the kinetic relations.

2 B. Audebert and F. Coquel

2 The PDE model and main properties

The system under interest (see [1] for the physical background) reads :

$$\begin{cases} \partial_t \rho^\epsilon + \partial_x (\rho u)^\epsilon = 0, \\ \partial_t (\rho u)^\epsilon + \partial_x (\rho u^2 + p(\mathbf{u}) + R_{11})^\epsilon = \epsilon \partial_x (\mu \partial_x u^\epsilon), \\ \partial_t (\rho v)^\epsilon + \partial_x (\rho u v + R_{12})^\epsilon = \epsilon \partial_x (\nu \partial_x v^\epsilon), \\ \partial_t (\rho E)^\epsilon + \partial_x \{ (\rho E + p(\mathbf{u}) + R_{11})u + R_{12}v \}^\epsilon = \epsilon \partial_x (\mu u^\epsilon \partial_x u^\epsilon + \nu v^\epsilon \partial_x v^\epsilon), \\ \partial_t R_{11}^\epsilon + \partial_x (R_{11}u)^\epsilon + 2R_{11}^\epsilon \partial_x u^\epsilon = 0, \\ \partial_t R_{22}^\epsilon + \partial_x (R_{22}u)^\epsilon + 2R_{12}^\epsilon \partial_x v^\epsilon = 0, \\ \partial_t R_{12}^\epsilon + \partial_x (R_{12}u)^\epsilon + R_{11}^\epsilon \partial_x v^\epsilon + R_{12}^\epsilon \partial_x u^\epsilon = 0, \end{cases} \quad (2)$$

where $\epsilon > 0$ denotes the inverse of a Reynolds number Re we address in the asymptotic regime $Re \rightarrow \infty$. Here, u and v denote the normal and tangential components of the Favre average $\langle U \rangle$ of the instantaneous velocity U in the 2D compressible Navier-Stokes equations. Next, R_{ij} , $1 \leq i, j \leq 2$, are the components of the symmetric Reynolds stress tensor $\langle U' \times U' \rangle$ where U' stands for the departure of U from $\langle U \rangle$. We assume a polytropic pressure law $p(\mathbf{u})$:

$$p(\mathbf{u}) = (\gamma - 1) \left\{ \rho E - \frac{(\rho u)^2 + (\rho v)^2}{2\rho} - \frac{R_{11} + R_{22}}{2} \right\}, \quad \gamma > 1, \quad (3)$$

while the viscosity coefficients μ and ν are two given positive constants satisfying $0 < \nu < \mu$. The natural phase space $\Omega_{\mathbf{u}} \subset \mathbb{R}^7$ is such that [1] :

$$\rho > 0, (u, v) \in \mathbb{R}^2, p(\mathbf{u}) > 0, R_{ii} \geq 0, i = 1, 2, R_{11}R_{22} - R_{12}^2 \geq 0. \quad (4)$$

The underlying first order system in (2) is hyperbolic for all $\mathbf{u} \in \Omega_{\mathbf{u}}$ with the following increasingly arranged eigenvalues [1] :

$$u - c(\mathbf{u}) < u - a(\mathbf{u}) \leq u, u, u \leq u + a(\mathbf{u}) < u + c(\mathbf{u}), \quad \mathbf{u} \in \Omega_{\mathbf{u}}. \quad (5)$$

where $a^2(\mathbf{u}) = \frac{R_{11}}{\rho} \geq 0$ and $c^2(\mathbf{u}) = \frac{\gamma p(\mathbf{u})}{\rho} + 3a^2(\mathbf{u}) > 0$. The two extreme fields are genuinely nonlinear while all the other intermediate ones are linearly degenerate. It can be proved [1] that solely the discontinuities coming with the extreme fields give rise to ambiguities in the nonconservative products involved in the underlying hyperbolic system. Concerning these shock solutions, being given \mathbf{u}_- in $\Omega_{\mathbf{u}}$ and a speed $\sigma \in \mathbb{R}$, it is well-known [2] that the right state \mathbf{u}_+ cannot be determined without an explicit reference to the precise shape of the viscous tensor \mathcal{D} in (2). Here, the relevant definition of shock solutions follows from smooth solutions of (2) with $\epsilon = 1$, of the form :

$$\mathbf{u}(x, t) = \mathbf{w}(x - \sigma t) = \mathbf{w}(\xi), \quad \lim_{\xi \rightarrow \pm\infty} \mathbf{w}(\xi) = \mathbf{u}_{\pm}. \quad (6)$$

Then for fixed $\epsilon > 0$, the function $\mathbf{w}_\epsilon(\xi) = \mathbf{w}(\xi/\epsilon)$ leads to a traveling wave of (2) with again $\lim_{\xi \rightarrow \pm\infty} \mathbf{w}_\epsilon(\xi) = \mathbf{u}_{\pm}$. Since $\|d_\xi \mathbf{w}_\epsilon\|_{L^1(\mathbb{R})} = \|d_\xi \mathbf{w}\|_{L^1(\mathbb{R})} < \infty$, the sequence $\{\mathbf{w}_\epsilon\}_{\epsilon > 0}$ is seen to converge strongly in $L^1_{loc}(\mathbb{R})$ as $\epsilon \rightarrow 0^+$ to :

Hybrid Godunov-Glimm method for nonconservative systems 3

$$\mathbf{u}(x, t) = \mathbf{u}_- + (\mathbf{u}_+(\sigma, \mathbf{u}_-; \mathcal{D}) - \mathbf{u}_-)H(x - \sigma t), \quad (7)$$

referred to a shock solution [2] of the limit system in (2). The crucial issue stems from the very sensitiveness of \mathbf{u}_+ with respect to \mathcal{D} . Motivated by [2], we propose to encode this sensitiveness by investigating the existence of a change of unknown $\mathbf{u} \in \Omega_{\mathbf{u}} \rightarrow \mathbf{v}(\mathbf{u}) \in \Omega_{\mathbf{v}}$ so that the smooth solutions of (2) obey :

$$\partial_t \mathbf{v}(\mathbf{u}^\epsilon) + \partial_x \mathcal{F}(\mathbf{v}(\mathbf{u}^\epsilon)) = \epsilon \mathcal{R}_{\mathcal{D}}(\mathbf{v}(\mathbf{u}^\epsilon), \partial_x \mathbf{v}(\mathbf{u}^\epsilon), \partial_{xx} \mathbf{v}(\mathbf{u}^\epsilon)). \quad (8)$$

Tackling the formal limit $\epsilon \rightarrow 0^+$ in (8) and assuming suitable estimates on the sequence \mathbf{u}^ϵ and its derivatives, the nonconservative term $\epsilon \mathcal{R}_{\mathcal{D}}(\mathbf{u}^\epsilon, \partial_x \mathbf{u}^\epsilon, \partial_{xx} \mathbf{u}^\epsilon)$ cannot be expected to converge to zero in the sense of measures as $\epsilon \rightarrow 0^+$ but instead to a bounded Borel measure $\Upsilon_{\mathbf{u}}$ concentrated on the shock discontinuities of the limit function \mathbf{u} . Thus and with (8), a shock solution (7) solves the following set of generalized Rankine-Hugoniot jump conditions :

$$-\sigma (\mathbf{v}(\mathbf{u}_+) - \mathbf{v}(\mathbf{u}_-)) + (\mathcal{F}(\mathbf{v}(\mathbf{u}_+)) - \mathcal{F}(\mathbf{v}(\mathbf{u}_-))) = \mathcal{K}_{\mathcal{D}}(\mathbf{u}_-, \sigma). \quad (9)$$

where the so-called kinetic function $\mathcal{K}_{\mathcal{D}} : \Omega_{\mathbf{u}} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^7$ denotes the mass of Borel measure $\Upsilon_{\mathbf{u}}$ given (with little abuse in the notations) from (6) by :

$$\mathcal{K}_{\mathcal{D}}(\mathbf{u}_-, \sigma) = \langle \Upsilon_{\mathbf{w}}, \mathbb{R}_{\xi} \rangle = \int_{\xi \in \mathbb{R}} \mathcal{R}_{\mathcal{D}}(\mathbf{w}, \mathbf{w}', \mathbf{w}'') d\xi. \quad (10)$$

Equivalent forms (8) clearly follow from the characterization of all the entropy pairs of (2). Besides useless nonlinear transforms, these are given by [1] :

$$\partial_t \{\rho E_t\}(\mathbf{u}^\epsilon) + \partial_x \{\{\rho E_t\}(\mathbf{u}^\epsilon) u^\epsilon + R_{12}^\epsilon v^\epsilon\} = \epsilon \partial_x (\nu v^\epsilon \partial_x v^\epsilon) - \epsilon \nu (\partial_x v^\epsilon)^2 \quad (11)$$

with $\{\rho E_t\}(\mathbf{u}) = \rho \frac{v^2}{2} + \frac{R_{12}^2}{2R_{11}}$, the so-called tangential energy, then :

$$\partial_t \{\rho s\}(\mathbf{u}^\epsilon) + \partial_x \{\rho s\}(\mathbf{u}^\epsilon) u^\epsilon = \frac{\epsilon \mu}{T^\epsilon} (\partial_x u^\epsilon)^2 + \frac{\epsilon \nu}{T^\epsilon} (\partial_x v^\epsilon)^2, \quad (12)$$

where $\{\rho s\}(\mathbf{u}) = \rho \log(\frac{p(\mathbf{u})}{\rho^\gamma})$ and at last :

$$\begin{aligned} \partial_t \{\rho \mathcal{W}\}(\mathbf{u}^\epsilon) + \partial_x \{\rho \mathcal{W}\}(\mathbf{u}^\epsilon) u^\epsilon &= 0, & \{\rho \mathcal{W}\}(\mathbf{u}) &= R_{22} - \frac{R_{12}^2}{R_{11}}, \\ \partial_t \{\rho \mathcal{I}\}(\mathbf{u}^\epsilon) + \partial_x \{\rho \mathcal{I}\}(\mathbf{u}^\epsilon) u^\epsilon &= 0, & \mathcal{I}(\mathbf{u}) &= R_{11} \tau^3. \end{aligned} \quad (13)$$

Observe that these additionnal laws are well-defined when focusing on solutions with $R_{11}(x, t) > 0$ of sole real interest, *i.e.* for initial data with $R_{11}(x, 0) > 0$, [1]. If in addition $R_{12}(x, 0) > 0$ then $R_{12}(x, t) > 0$ but the sign of R_{12} may vary in the initial data (see (4)), thus neither ρE_t nor ρs can provide us with a suitable change of variable in full generality. Nevertheless, they are seen below to be valid if one pays attention to traveling wave solutions. Implementing the proposed framework first requires the study of

4 B. Audebert and F. Coquel

traveling waves of (2), say for the first field from frame invariance reasons. Existence is proved [1] under the classical condition $u_- - c(\mathbf{u}_-) > \sigma$. The exit state $\mathbf{u}_+(\sigma, \mathbf{u}_-; \mathcal{D})$ heavily depends on the viscosity ratio ν/μ . Such a dependence can be tracked through the next generalized jump condition :

$$-\sigma [\{\rho E_t\}(\mathbf{u})] + [\{\rho E_t\}(\mathbf{u})u + R_{12}v] = \frac{\langle \Upsilon_{E_t}, \mathbb{R}_\xi \rangle}{\langle \Upsilon_s, \mathbb{R}_\xi \rangle} (-\sigma [\{\rho s\}(\mathbf{u})] + [\{\rho s\}(\mathbf{u})u]), \quad (14)$$

expressing that the jumps in ρE_t and ρs must evolve in the reported proportion. Modifying the ratio ν/μ directly affects the ratio $\langle \Upsilon_{E_t}, \mathbb{R}_\xi \rangle / \langle \Upsilon_s, \mathbb{R}_\xi \rangle$ (see (11)-(12)) and therefore $\mathbf{u}_+(\sigma, \mathbf{u}_-; \mathcal{D})$. This observation is of central importance hereafter. Next, for turbulent Mach numbers $\beta(\mathbf{u}_-) = a(\mathbf{u}_-)/c(\mathbf{u}_-)$ large enough (depending on γ in (3)), viscous profiles are seen to violate the geometric Lax conditions. They are indeed overcompressive :

$$u_+ - c(\mathbf{u}_+) < \sigma < u_- - c(\mathbf{u}_-), \quad \text{but with } u_+ - a(\mathbf{u}_+) < \sigma < u_- - a(\mathbf{u}_-). \quad (15)$$

In our non conservative setting, (15) implies the existence of an infinite number of traveling waves issuing from \mathbf{u}_- and reaching as many distinct states \mathbf{u}_+ . Choosing $\gamma = 1.4$, (15) arises for rather unexpectedly large values of $\beta(\mathbf{u}_-)$ [1] and we tacitly restrict ourselves to moderate values of $\beta(\mathbf{u}_-)$ to ensure uniqueness. Uniqueness implies that R_{12} keeps a constant sign in traveling waves in contrast with arbitrary solutions of (2). This important property clearly allows to express the generalized jump conditions in $\mathbf{v}(\mathbf{u}) = \{\rho, \rho u, \rho v, \rho E, \rho \mathcal{I}, \rho \mathcal{W}, \rho E_t\}$ while recovering the sign of R_{12}^+ from R_{12}^- . The kinetic function (10) reduces to one non trivial component Υ_{E_t} , it has been tabulated in [1] from a suitable numerical integration of (6). Its knowledge has allowed us to prove the monotony of the projections of the resulting shock curves in the plane $(u, p(\mathbf{u}) + R_{11})$. Consequently, the Riemann problem for the limit system in (2) is shown to admit an unique solution for initial data with moderate values of β . The general pattern of Riemann solutions is made of at most five simple waves separating six constant states :

$$\mathbf{u}_L \quad \underline{1 - wave} \quad \mathbf{u}_1 \quad \underline{2 - wave} \quad \mathbf{u}_2 \quad \underline{3 - wave} \quad \mathbf{u}_3 \quad \underline{4 - wave} \quad \mathbf{u}_4 \quad \underline{6 - wave} \quad \mathbf{u}_R, \quad (16)$$

where \mathbf{u}_L and \mathbf{u}_R define the initial data. Here, the intermediate waves systematically coincide with contact discontinuities while across the extreme waves, R_{12} necessarily keeps a constant sign, namely :

$$R_{12}^1 R_{12}^L \geq 0, \quad R_{12}^4 R_{12}^R \geq 0, \quad (17)$$

with respectively strict inequality when $R_{12}^L \neq 0$ (resp. $R_{12}^R \neq 0$). In other words, the sign of R_{12} may only change within the fan of a given Riemann solution [1]. This property is of importance in the sequel.

3 Godunov-Glimm Hybrid method

We propose a Godunov-Glimm hybrid method to approximate the solutions of (2) in the limit $\epsilon \rightarrow 0^+$. In this brief paper, this procedure is exemplified

on the exact Riemann solver for simplicity but the use of approximate solvers is under way. To motivate its introduction, we first emphasize the need for averaging ρE_t , whenever possible, in place of R_{12} within the frame of exact or approximate Godunov methods. In that aim, we approximate a strong shock solution (1) so that R_{12} keeps a constant sign and makes ρE_t to be an admissible change of variable. The results displayed in figure (2) highlight that averaging R_{12} (solid line) at each time step results in unacceptable errors in the capture of the exact shock solution (see [1] for the origin of the failure). By contrast, averaging directly ρE_t (dotted line) yields a much better agreement even if some error still persists. A correction is proposed in the last section but can only take place when suitably averaging ρE_t . Indeed for general initial

ρ_L	1	ρ_R	2.69197
u_L	890.20812	u_R	393.54227
v_L	0	v_R	-1.20350
p_L	10^5	p_R	$4.65756 \cdot 10^5$
R_{11}^L	1443.29897	R_{11}^R	28155.86059
R_{22}^L	10^3	R_{22}^R	2695.73233
R_{12}^L	144.32990	R_{12}^R	1095.34000

Fig. 1. Initial data for a one shock wave

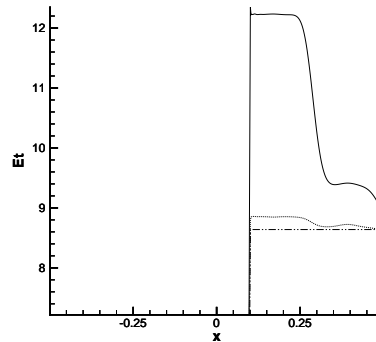


Fig. 2. Tangential energy

data, the sign of $R_{12}(x, t)$ may vary in the solution and prevents us from averaging ρE_t uniformly in each cell. But when approximating such a solution with a sequence of non interacting Riemann solutions, R_{12} keeps locally a constant sign through the extreme waves (responsible for shock solutions) in each successive fans. Roughly speaking, we take advantage of this property when averaging locally in each cell ρE_t wherever R_{12} keeps a constant sign. More precisely, we adopt a three-steps procedure based on a Lagrangian-Eulerian method to simplify the notations. A direct Eulerian method can be derived along the same lines. With classical notations, let be given a piecewise constant approximate solution $\mathbf{u}_{\Delta x}^n(x)$ at time t^n (the space step Δx being constant). This solution is evolved to the next date t^{n+1} according to :

- 1 *Evolution in time.* We solve the the Cauchy problem in Lagrangian coordinates with initial data $\mathbf{w}(y, 0) = \mathbf{w}(\mathbf{u}_{\Delta x}^n(x))$ where $\mathbf{w} = (\tau, u, v, E, \mathcal{I}, R_{12}, \mathcal{W})$. Choosing a CFL less than 1/2, the solution $\mathbf{w}(y, t)$ is made of a sequence

6 B. Audebert and F. Coquel

of noninteracting Riemann solutions $w(\cdot, \mathbf{w}_i^n, \mathbf{w}_{i+1}^n)$ centered at each interface.

- 2 *Local averaging within each cell.* Each Lagrangian cell L_j^n is split into three domains depicted in figure (3). By construction $\mathbf{w}(y, t)$ is nothing but the constant state $(\mathbf{w}_i^{n+1-})_L = w(0+, \mathbf{w}_{i-1}^n, \mathbf{w}_i^n)$ in Ω_i^L : see indeed the wave pattern (16) but expressed in Lagrangian coordinates. The same holds in Ω_i^R with $(\mathbf{w}_i^{n+1-})_R = w(0-, \mathbf{w}_i^n, \mathbf{w}_{i+1}^n)$. Then possible shock solutions only propagate within the domain Ω_i^C where R_{12} keeps a constant sign and this leads us to define an intermediate constant state when averaging the next PDEs over Ω_i^C :

$$\partial_t \mathbf{v} + \partial_y \mathcal{G}(\mathbf{v}) = \Upsilon_{\mathbf{v}}, \quad (18)$$

with $\mathbf{v} = (\rho, u, v, E, \mathcal{I}, E_t, \mathcal{W})$ (i.e. with E_t in place of R_{12}) to get :

$$\left\{ \begin{array}{l} (\mathbf{v}_i^{n+1-})_C = \frac{1}{1-\lambda_l \Delta(\rho a)} \left\{ \mathbf{v}_i^n - \lambda_l \left((\rho a)_{i+\frac{1}{2}}^L \mathbf{v}_{i+\frac{1}{2}}(0^+) + (\rho a)_{i-\frac{1}{2}}^R \mathbf{v}_{i-\frac{1}{2}}(0^+) \right) \right. \\ \left. + \mathcal{G}(\mathbf{v}_{i+\frac{1}{2}}(0^+)) - \mathcal{G}(\mathbf{v}_{i-\frac{1}{2}}(0^+)) \right\} + \lambda_l \sum_{\text{shock} \in L_i^n} \langle \Upsilon_{\mathbf{v}}, L_i^n \rangle \end{array} \right\}, \quad (19)$$

with $\lambda_l = \frac{\Delta t}{\rho_i^n \Delta x}$ and $\Delta(\rho a) = (\rho a)_{i+\frac{1}{2}}^L - (\rho a)_{i-\frac{1}{2}}^R$. We then set $(\mathbf{w}_i^{n+1-})_C = \mathbf{w}((\mathbf{v}_i^{n+1-})_C)$ defining $(R_{12})_i^{n+1-}$ from $(E_t)_i^{n+1-}$ and the sign of $(R_{12})_i^n$.

- 3 *Eulerian step with sampling.* This step amounts to solve transport equations [1] with speed u . Let us introduce $x_{i+\frac{1}{2}}^* = x_{i+\frac{1}{2}} + \Delta t u_{i+\frac{1}{2}}^n$ so as to define the following piecewise constant function in each Eulerian cell at time t^{n+1-} (see figure (4) and [1] for the details):

$$\mathbf{w}_i^{n+1-}(x) = \begin{cases} (\mathbf{w}_{i-1}^{n+1-})_R, & \text{if } x_{i-\frac{1}{2}} < x \leq x_{i-\frac{1}{2}}^*, \\ (\mathbf{w}_i^{n+1-})_L, & \text{if } x_{i-\frac{1}{2}}^* < x \leq x_{i-\frac{1}{2}}^* + (a)_{i-\frac{1}{2}}^R \Delta t, \\ (\mathbf{w}_i^{n+1-})_C, & \text{if } x_{i-\frac{1}{2}}^* + (a)_{i-\frac{1}{2}}^R \Delta t < x \leq x_{i+\frac{1}{2}}^* - (a)_{i+\frac{1}{2}}^L \Delta t, \\ (\mathbf{w}_i^{n+1-})_R, & \text{if } x_{i+\frac{1}{2}}^* - (a)_{i+\frac{1}{2}}^L \Delta t < x \leq x_{i+\frac{1}{2}}^*, \\ (\mathbf{w}_{i+1}^{n+1-})_L, & \text{if } x_{i+\frac{1}{2}}^* < x \leq x_{i+\frac{1}{2}}. \end{cases} \quad (20)$$

In order to define a unique constant state in each cell, we propose to sample the above function with a VanDerCorput sequence $\{\theta(n)\}_{n \geq 0}$, $\theta(n) \in [0, 1]$, as in Glimm method [1] :

$$\mathbf{u}_i^{n+1} = \mathbf{u}(\mathbf{w}_i^{n+1-}(x_{i-1/2} + \theta(n) \Delta x)), \quad i \in \mathbb{Z}. \quad (21)$$

This completes the description of the hybrid method.

4 The nonlinear projection

To motivate the introduction of an additional correction step in the hybrid method, we first comment on the persistence of an error when averaging locally

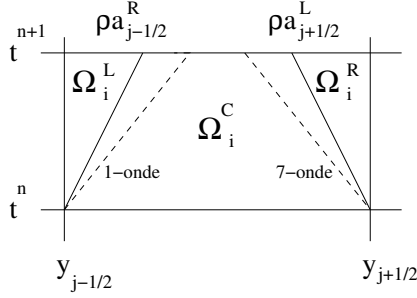


Fig. 3. The Lagrangian cell

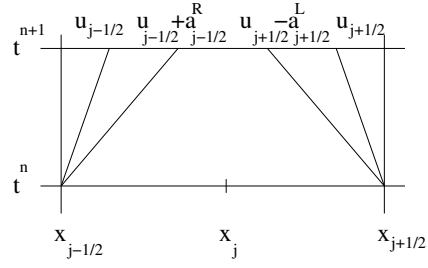


Fig. 4. The Eulerian cell

in each cell ρE_t (see figure (2)). Its roots are found in the property that exact shock solutions are regularization-dependent : the (global or local as well) averaging procedure in each cell induces artificial dissipation, distinct in nature from the exact one. This discrepancy tends to corrupt the discrete shock profiles. Here we propose to enforce the artificial dissipation in the numerical method to mimic the exact dissipation mechanism. Kinetic functions play a central role in the correction procedure. It has been introduced by Berthon, Coquel [3] and then extended in Chalons, Coquel [4] for Navier Stokes equations with several independent entropies. In the present setting, it can be seen [1] that the Lagrangian form of the generalized jump condition (14) is violated in the domain $(\Omega_i^n)_C$ of each Lagrangian cell, exactly where E_t is averaged at each time step. More precisely, E_t and $s(\mathbf{v})$ no longer evolve in the required proportion (14) because of spurious terms of size $\mathcal{O}(\|\mathbf{v}_{i+1}^n - \mathbf{v}_i^n\|^2)$. Clearly, errors are quite large in a discrete shock profile. Underlining again that (14) precisely reflects the sensitiveness of shock solutions to the exact dissipation mechanism, we are led to enforce for validity this generalized jump condition at the discrete level.

In that aim, let us again emphasize that incriminating averages only take place in each domain $(\Omega_i^n)_C$ in the Lagrangian step of the Hybrid method. Let us relabel $(\mathbf{v}_i^{n+1,=})_C$ the resulting prediction. The correction procedure then naturally takes place as a third step just before the sampling and last step. We propose to keep unchanged the local averages of the conservative variables:

$$\begin{aligned} (\tau_i^{n+1,-})_C &= (\tau_i^{n+1,=})_C, & (u_i^{n+1,-})_C &= (u_i^{n+1,=})_C, \\ (v_i^{n+1,-})_C &= (v_i^{n+1,=})_C, & (E_i^{n+1,-})_C &= (E_i^{n+1,=})_C, \\ (\mathcal{I}_i^{n+1,-})_C &= (\mathcal{I}_i^{n+1,=})_C, & (\mathcal{W}_i^{n+1,-})_C &= (\mathcal{W}_i^{n+1,=})_C, \end{aligned} \quad (22)$$

and we recalculate $((E_t)_i^{n+1,-})_C$ as the solution of the next nonlinear algebraic equation :

8 B. Audebert and F. Coquel

$$\begin{aligned} ((E_t)_i^{n+1,-})_C - (E_t)_i^{n+1,*} &= \frac{\sum_{\text{shock} \in L_i^n} \langle \gamma_{E_t, L_i^n} \rangle}{\sum_{\text{shock} \in L_i^n} \langle \gamma_s, L_i^n \rangle} \\ &\times (\{s\} ((\mathbf{v}_i^{n+1,-})_C) - s_i^{n+1,*}) \end{aligned} \quad (23)$$

where

$$\begin{aligned} (E_t)_i^{n+1,*} &= C_l \left((E_t)_i^n - \lambda_l \left((\rho a)_{i+\frac{1}{2}}^L (E_t)_{i+\frac{1}{2}}(0^+) + \right. \right. \\ &\left. \left. (\rho a)_{i-\frac{1}{2}}^R (E_t)_{i-\frac{1}{2}}(0^+) + \Delta (R_{12} v)_{i+\frac{1}{2}}^n \right) \right), \end{aligned} \quad (24)$$

$$s_i^{n+1,*} = C_l \left(\{s\} (\mathbf{v}_i^n) - \lambda_l \left((\rho a)_{i+\frac{1}{2}}^L s_{i-\frac{1}{2}}(0^+) + (\rho a)_{i-\frac{1}{2}}^R s_{i+\frac{1}{2}}(0^+) \right) \right), \quad (25)$$

with $C_l = \frac{1}{1 - \lambda_l \Delta (\rho a)_{i+\frac{1}{2}}^n}$ and $\lambda_l = \frac{\Delta t}{\rho_i^n \Delta x}$. Let underline from (22) that $\{s\}((\mathbf{v}_i^{n+1,-})_C)$ in (23) has to be understood as a nonlinear function of solely $((E_t)_i^{n+1,-})_C$. Solving (23) gives $(\mathbf{w}_i^{n+1,-})_C = \mathbf{w}((\mathbf{v}_i^{n+1,-})_C)$. We are then in a position to apply the last step in the hybrid method : namely, the Eulerian step with sampling. This concludes the algorithm. Figures (5) and (6) illustrate the benefit of the correction technique for a Riemann problem with initial data given below:

$$\begin{aligned} \rho_L = 1, u_L = 100, v_L = 0.2, p_L = 10^5, R_{11}^L = 10^4, R_{22}^L = 7.10^3, R_{12}^L = 5.10^3, \\ \rho_R = 0.9, u_R = -100, v_R = 0, p_R = 10^5, R_{11}^R = 8.10^3, R_{22}^R = 8.10^3, R_{12}^R = 4.510^3. \end{aligned}$$

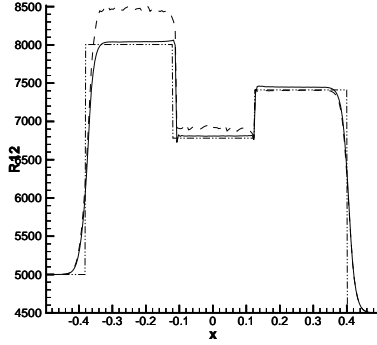


Fig. 5. Tangential component R_{12}

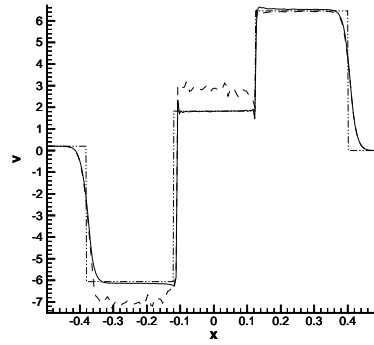


Fig. 6. Transversal velocity

———— Correction - - - - - Without correction ······ Exact solution

References

1. Audebert, B.: Shock Wave-Turbulence Interactions in Reynolds Stress Models. PhD Thesis, ONERA and University Pierre et Marie Curie, France (2006)

2. C. Berthon, Coquel F. and Lefloch, P.G.: Entropy dissipation measure and kinetic relation associated with nonconservative hyperbolic systems, to be submitted.
3. Berthon, C and Coquel, F.: Nonlinear projection methods for multi-entropies Navier-Stokes systems, Innovative methods for numerical solutions of partial differential equations, Hafez M.M. et al., World Scientific, pp 278–304 (2002).
4. Chalons, C. and Coquel F.: The Riemann problem for the multi-pressure Euler system, Journal of Hyperbolic Differential Equations, **2**, 3, pp 745–782 (2005).
5. G. Brun, J. M. Hérard, D. Jeandel and M. Uhlmann, Roe-type Riemann Solver for a Class of Realizable Second Order Closures, IJCFD, 13, 223–249 (2000).

Bibliographie

- [1] R. Abeyaratne and J.K. Knowles. Kinetic relations and the propagation of phase boundary in solids. *Arch. Rational Mech. Anal.*, 114 :119–154, 1991.
- [2] V. Asumitroaie, J. R. Ristorcelli, and D. B. Taulbee. Progress in *Favre-Reynolds stress closures for compressible flows*. *Physics of Fluids*, 11(9) :2696–2719, 1999.
- [3] B. Audebert. Contribution à l’analyse des modèles aux tensions de Reynolds pour l’interaction choc turbulence. *PhD thesis, Université Pierre et Marie Curie Paris VI, France, 2006. Work in progress.*
- [4] B. Audebert and F. Coquel. Compressive versus overcompressive for nonconservative hyperbolic systems. *In preparation.*
- [5] B. Audebert and F. Coquel. Travelling wave analysis for a class of Reynolds stress models. *In preparation.*
- [6] S. Barre, D. Alem, and J. P. Bonnet. Experimental study of a normal shock/homogeneous turbulence interaction. *AIAA journal*, 34 :968–974, 1996.
- [7] C. Berthon. Contribution à l’analyse numérique des équations de Navier-Stokes compressibles à deux entropies spécifiques. Applications à la turbulence compressible. *PhD thesis, Université Pierre et Marie Curie Paris VI, France, January 1999.*
- [8] C. Berthon and F. Coquel. Nonlinear projection scheme to solve systems in nonconservation form. *Innovative Methods in Computational Flow Dynamics*, 2000.
- [9] C. Berthon, F. Coquel, J. M. Hérard, and M. Uhlmann. An approximate solution of the Riemann problem for a realisable second moment turbulent closure. *Shock Waves*, 11(4) :245–269, 2002.
- [10] C. Berthon, F. Coquel, and P. G. LeFloch. Entropy dissipation measure and kinetic relation associated with nonconservative hyperbolic systems. *In preparation.*
- [11] D. Bestion, J. F. Debiève, and J. P. Dussauge. Too-rapid distortions in supersonic flows : Turbulence-shock wave and turbulence-expansion. Structure of complex turbulent shear flows. In R. Dumas and L. Fulachier, editors, *IUTAM Symposium*, pages 289–298, Marseille, France, 1982. Springer.
- [12] H. A. Bethe. The theory of shock wave for an arbitrary equation of state. Report 545, *Office Sci. Res. & Dev.*, 1942.
- [13] G. Brun, J. M. Hérard, D. Jeandel, and M. Uhlmann. An approximate Roe-type Riemann solver for a class of realizable second order closures. *IJCFD*, 13 :223–249, 2000.

-
- [14] C. Chalons. Bilans d'entropie discrets dans l'approximation numérique des chocs non classiques. *Application aux équations de Navier-Stokes multi-pression 2D et à quelques systèmes visco-capillaires*. PhD thesis, Ecole Polytechnique, France, November 2002.
- [15] C. Chalons and F. Coquel. Navier-Stokes equations with several independent pressure laws and explicit predictor-corrector schemes. *Numerisch Math.*, 101(3) :451–478, 2005.
- [16] C. Chalons and F. Coquel. The Riemann problem for the multi-pressure Euler system. *Journal of Hyperbolic Differential Equations*, 2(3) :745–782, 2005.
- [17] J. F. Colombeau. *New Generalized Functions and Multiplication of the Distribution*. North Holland, 1983.
- [18] C. Dafermos. *Hyperbolic Conservation Laws in Continuum Physics*. Heidelberg. Springer Verlag, 2005.
- [19] J. F. Debiève, H. Gouin, and J. Gaviglio. *Momentum and temperature fluxes in a shock wave turbulence interaction*. In *Proceedings of the ICHMT/IUTAM Symposium on the Structure of Turbulence and Heat and Mass Transfer - Dubrovnik, Yugoslavia, pages 1–20, Washington, DC, 1981*. Hemisphere Publishing Co.
- [20] J. F. Debiève, H. Gouin, and J. Gaviglio. *Evolution of the reynolds stress tensor in a shock wave turbulence interaction*. *Indian Journal of Technology*, 20 :90–97, 1982.
- [21] J. P. Dussauge and J. Gaviglio. *The rapid expansion of a supersonic turbulent flow : Role of bulk dilatation*. *Journal of Fluid Mechanics*, 174 :81–112, 1987.
- [22] S. D'yakov. *On the stability of fluid flow and systems of conservation laws in several space variables*. *Journal of Experimental and Theoretical Physics (in Russian)*, 27 :288–295, 1954.
- [23] J. M. Détery. *Experimental investigation of turbulence properties in transonic shock/boundary-layer interactions*. *AIAA Journal*, 21(2) :180–185, 1983.
- [24] J. M. Détery and L. Cambier. *Etudes expérimentales et théoriques de l'interaction onde de choc-couche limite en transsonique et problèmes liés à la modélisation de la turbulence*. T.p. 1985-54, ONERA, 1985.
- [25] J. J. Erpenbeck. *Stability of steady-state equilibrium detonations*. *Physics of Fluids*, 5(5) :604–614, 1961.
- [26] J. J. Erpenbeck. *Stability of step shocks*. *Physics of Fluids*, 5(10) :1181–1187, 1962.
- [27] H. Federer. *Geometric Measure Theory*. Springer-Verlag, 1969.
- [28] G. R. Flowles and G. W. Swan. *Shock wave stability*. *Physics of Fluids*, 18(1) :28–35, 1975.
- [29] R. Friedrich. *Modelling of turbulence in compressible flows*. In A. Hanifi, P. H. Alfredsson, A. V. Johansson, and D. S. Henningson, editors, *Transition, Turbulence and Combustion Modelling*, chapter 5, pages 243–348. Kluwer Academic, June 1998.

- [30] H. Fujiwara, Y. Matsuo, and C. Arakawa. A turbulence model for the pressure-strain correlation term accounting for compressibility effects. *International Journal of Heat and Fluid Flow*, 21 :354–358, 2000.
- [31] J. Gaviglio, J. P. Dussauge, J. F. Debieve, and A. Favre. Behaviour of a turbulent flow, strongly out of equilibrium, at supersonic speeds. *Physic of Fluids*, 20(10) :S179–S192, part II, 1977.
- [32] E. Godlewski and P. A. Raviart. Numerical Approximation of Hyperbolic Systems of Conservation Laws, volume 118 of Applied Mathematical Science. Springer-Verlag, 1996.
- [33] O. Guès, G. Métivier, M. Williams, and K. Zumbrun. Stabilité des profils de chocs multidimensionnels. Exposé conférence Hammamet, rev. Janvier 2005.
- [34] O. Guès and M. Williams. Curved shocks as viscous limits : a boundary layer approach. *Indiana Univ. Math. J.*, 51 :421–450, 2002.
- [35] J. M. Hérard. Analysis of some second moment closures. part i : Incompressible isothermal turbulent flows. *Theoretical and Computational Fluid Dynamics*, 6(4) :213–233, 1994.
- [36] R. Hersh. Mixed problems in several variables. *Journal of Mathematics and Mechanics*, 12(3) :317–334, 1963.
- [37] R. L. Higdon. Initial-boundary value problems for linear hyperbolic systems. *SIAM Review*, 28(2) :177–217, 1986.
- [38] E. Hille. Ordinary Differential Equations in the Complex Domain. Wiley-Interscience Series in Pure and Applied Mathematics. John Wiley & Sons, 1976.
- [39] A. Honkan and J. Andreopoulos. Experiments in a shock wave/homogeneous turbulence interaction. In AIAA 21st Fluid Dynamics, Plasma Dynamics and Lasers Conference, AIAA paper 90-1647, Seattle, WA, June 18-20 1990.
- [40] A. Honkan, C. B. Watkins, and J. Andreopoulos. Experimental study of interactions of shock wave with free-stream turbulence. *Journal of Fluids Engineering*, 116 :763–769, 1994.
- [41] J. M. Hérard. Modèles au second ordre réalisables non dégénérés pour les écoulements turbulents incompressibles. *Compte rendu de l’académie des sciences Paris*, 322(II b) :371–377, 1996.
- [42] L. Jacquin, E. Blin, and P. Geffroy. An experiment on free turbulence/shock wave interaction. In *Turbulent Shear Flow 8*, page 229. Springer-Verlag, Berlin, 1993.
- [43] H. K. Jenssen and G. Lyng. Evaluation of the Lopatinski determinant for the multi-dimensional Euler equations. In S. Friedlander and D. Serre, editors, Stability of Large-Amplitude Shock Waves of compressible Navier-Stokes Equations, volume III of Handbook of Mathematical Fluid Dynamics, chapter Appendix to K. Zumbrun. Elsevier, North-Holland, Amsterdam, 2004.
- [44] H.-O. Kreiss. Initial boundary value problems for hyperbolic systems. *Communications for Pure and Applied Mathematics*, 23 :277–298, 1970.
- [45] S. Lee, S. K. Lele, and P. Moin. Direct numerical simulation of isotropic turbulence interacting with a weak shock wave. *Journal of Fluid Mechanics*, 251 :533–562, 1993.

-
- [46] S. Lee, S.K. Lele, and P. Moin. *Direct numerical simulation and analysis of shock turbulence interaction*. In 29th Aerospace Sciences Meeting, AIAA Paper 91-0523, January 7-10 1991.
- [47] S. Lee, S.K. Lele, and P. Moin. *Interaction of isotropic turbulence with a strong shock wave*. In 32nd Aerospace Sciences Meeting & Exhibit, AIAA Paper 94-0311, January 10-13 1994.
- [48] P. G. LeFloch. *Entropic weak solutions to nonlinear hyperbolic systems in non-conservative form*. Comm. Partial Differential Equations, 13 :669–727, 1988.
- [49] P. G. LeFloch and A.E. Tzavaras. *Representation of weak limits and definition of non-conservative products*. SIAM J. Math. Anal., 30 :1309–1342, 1999.
- [50] J. L. Lumley. *Computational modeling of turbulent flows*. Advances in applied mechanics, 18 :123–176, 1978.
- [51] A. Majda. *Compressible Fluid Flow and Systems of Conservation Laws in Several Space Variables*, volume 53 of Applied Mathematical Sciences. Springer-Verlag, 1984.
- [52] A. Majda and R. Pego. *Stable viscosity matrices for systems of conservation laws*. Journal of Differential Equations, 56 :229–262, 1985.
- [53] Dal Maso, P. H. LeFloch, and F. Murat. *Definition and weak stability of non-conservative products*. J. Math. Pures Appl., 74 :483–548, 1995.
- [54] R. Menikoff and B. J. Plohr. *The Riemann problem for fluid flow of real material*. Reviews of Modern Physics, 61(1) :75–127, 1989.
- [55] B. Mohammadi and O. Pironneau. *Analysis of the k-epsilon Model*. Masson, 1994.
- [56] M. V. Morkovin. *Effects of compressibility on turbulent flows*. In Colloques Internationaux du C.N.R.S., 108, pages 367–380, Paris, France, 1962.
- [57] J. R. Ristorcelli. *A representation for the turbulent mass flux contribution to Reynolds-stress and two-equation closures for compressible turbulence*. Icase technical report 93-88, NASA, 1993.
- [58] J. Rotta. *Statistische theorie nichthomogener turbulenz*. Zeitschrift für Physik, 129 :547–572, 1951.
- [59] W. Rudin. *Real and Complex Analysis*. Third Edition. Higher Mathematics. McGraw-Hill, 1987.
- [60] U. Schumann. *Realizability of Reynolds stress turbulence models*. Physics of fluids, 20(5) :721–725, 1977.
- [61] D. Serre. *Systèmes de lois de conservation I et II*. Art et Sciences. Diderot Editeur, 1996.
- [62] D. Serre. *La transition vers l'instabilité pour les ondes de choc multi dimensionnelles*. Transactions of the American Mathematical Society, 353(12) :5071–5093, 2001.
- [63] R. G. Smith. *The Riemann problem in gas dynamics*. Transaction of the American Mathematical Society, 249(1) :1–50, 1979.
- [64] C. G. Speziale. *Invariance of turbulence closures revisited*. Physics of fluids, 22(6) :1033–1037, 1979.

- [65] L. Truskinovsky. *Kinks versus shocks*. In R. Fosdick H. Slemrod and E. Dunn, editors, *Shock Induced Transitions and Phase Structures in General Media*, volume 52 of IMA Vol. Math. Appl. Springer Verlag, 1993.
- [66] Markus Uhlmann. *Etude de modèles de fermeture au second ordre et contribution à la résolution numérique des écoulements turbulents compressibles*. PhD thesis, École Centrale de Lyon, France, april 1997.
- [67] R. Du Vachat. *Realizability inequalities un turbulent flows*. Physics of fluids, 20(4) :551–556, 1977.
- [68] D. Vandromme. *Turbulence modelling for compressible flows and implementation in Navier-Stokes solvers*. In Lecture Series. Van Karman Institute for Fluid Dynamics, 1991.
- [69] D. H. Wagner. *Equivalence of the Euler and Lagrangian equations of gas dynamics for weak solutions*. Journal of Differential Equations, 68 :118–136, 1987.
- [70] W. Walter. *Ordinary Differential Equations*. Graduate Texts in Mathematics. Springer-Verlag, 1998.
- [71] A. D. Young. *The equations of motion and energy and the velocity profile of a turbulent boundary layer in a compressible fluid*. Report 42, The College of Aeronautics, 1951.

Résumé. Ce travail en mécanique concerne la turbulence compressible anisotrope en interaction avec une onde de choc pour les modèles aux tensions de Reynolds (ou modèles RSM). D'après la physique, la moyenne de Favre, liée à la nature compressible de l'écoulement, impose la prise en compte du flux de masse turbulent, terme souvent négligé en pratique. Nos principaux résultats établissent qu'une onde de choc peut devenir violemment instable lors d'une interaction avec la turbulence, dès que ce terme est négligé ou mal modélisé. Pour autoriser la stabilité structurelle puis multidimensionnelle du choc, nous montrons qu'il est nécessaire de définir une échelle de temps associée dont l'amplitude doit être suffisamment grande et les variations d'amplitude correctement définies. La définition du flux de masse turbulent repose sur la modélisation de Ristorcelli, actuellement la seule à être réalisable, objective et à caractérisation entropique. Ces propriétés nous permettent d'utiliser le concept récent de relations cinétiques pour la définition des solutions chocs dans le cadre non conservatif. En particulier, nous montrons comment généraliser, grâce à ce concept, les conditions de Majda et de Lopatinski pour l'étude de la stabilité monodimensionnelle et multidimensionnelle des solutions chocs dans le cadre non conservatif.

Mots clés : interaction choc turbulence, modèles aux tensions de Reynolds, flux de masse turbulent, profils de choc visqueux, conditions de saut généralisées, fonctions cinétiques, stabilité structurelle et multidimensionnelle, déterminant de Majda et Lopatinski.

Discipline : Mécanique.

A CONTRIBUTION TO THE ANALYSIS OF REYNOLDS STRESS MODELS FOR SHOCK
TURBULENCE INTERACTION

Abstract. This work in mechanics deals with compressible anisotropic turbulence interacting with a shock wave for Reynolds Stress Models. Physically, the turbulent mass flux should be taken into account because of the Favre average linked to the compressible behaviour of the flow. However, this term is mostly neglected. The main results of this work state that a shock wave interacting with turbulence may become strongly unstable as soon as this term is not considered or poorly modelled. To ensure structural and then multidimensional stability of the shock, we prove that it is necessary to define a related time scale with sufficiently high magnitude and correctly defined magnitude variations. The turbulent mass flux is defined thanks to Ristorcelli modelling, until now the only one to be realisable, objective and with entropic characterization. With these properties, we use the recent concept of kinetic relations to define shock solutions in a non conservative framework. With this concept, we show how to generalize the Majda and the Lopatinski conditions to study one-dimensional and multidimensional stability of shock solutions in a non conservative framework.

Key words : Reynolds Stress Models, shock turbulence interaction, turbulent mass flux, viscous shock profiles, generalized jump conditions, kinetic functions, structural and multidimensional stability, Majda and Lopatinski determinant.
