



HAL
open science

Estimation d'erreur de discrétisation dans les calculs par décomposition de domaine

Augustin Parret-Fréaud

► **To cite this version:**

Augustin Parret-Fréaud. Estimation d'erreur de discrétisation dans les calculs par décomposition de domaine. Autre. École normale supérieure de Cachan - ENS Cachan, 2011. Français. NNT : 2011DENS0022 . tel-00846069

HAL Id: tel-00846069

<https://theses.hal.science/tel-00846069>

Submitted on 18 Jul 2013

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

ENSC-2011/289

**THÈSE DE DOCTORAT
DE L'ÉCOLE NORMALE SUPÉRIEURE DE CACHAN**

Présentée par

AUGUSTIN PARRET-FRÉAUD

pour obtenir le grade de

DOCTEUR DE L'ÉCOLE NORMALE SUPÉRIEURE DE CACHAN

Domaine :

MÉCANIQUE

Sujet de la thèse :

**ESTIMATION D'ERREUR DE DISCRÉTISATION DANS LES
CALCULS PAR DÉCOMPOSITION DE DOMAINE**

Soutenue publiquement à Cachan le 28 juin 2011,
après avis des rapporteurs et devant le jury composé de :

M. DANIEL RIXEN	Professeur, Delft University of Technology	<i>Président</i>
M. PEDRO DÌEZ	Professeur, Universitat Politècnica de Catalunya	<i>Rapporteur</i>
M. DAVID DUREISSEIX	Professeur, INSA de Lyon	<i>Rapporteur</i>
M. PATRICK MASSIN	Ingénieur de recherche, EDF R&D	<i>Examineur</i>
M. CHRISTIAN REY	Professeur, ENS de Cachan	<i>Directeur de thèse</i>
M. PIERRE GOSSELET	Chargé de recherche, CNRS	<i>co-Directeur de thèse</i>

*À mes proches, dont la présence a tant
compté tout au long de ces années.*

Je souhaite adresser mes premiers remerciements à Christian et Pierre pour m'avoir proposé ce sujet novateur et original où nombreuses étaient les pistes à explorer et les verrous à identifier. Christian, mon directeur de thèse, dont la personnalité et la pédagogie m'a marqué dès mon passage sur les bancs de l'école : brillant, dynamique, bouillonnant d'idées, parfois impatient, mais toujours bienveillant. Pierr{e,ounet}, mon co-directeur, brillant, toujours disponible, dont la sagesse, la culture et l'écoute m'ont toujours été précieux, et dont il n'existe de mots assez forts pour caractériser les grandes qualités humaines. Je suis très reconnaissant de la confiance et de la liberté que vous avez pu m'accorder tous deux au cours de mes premiers pas d'apprenti chercheur sous votre aile protectrice, première expérience de recherche où succèdent à des moments plus euphoriques des périodes de doute parfois assez longues, au cours desquelles vos conseils et votre soutien est d'autant plus estimable. Au delà de votre complémentarité sur de nombreux aspects, qui fait aussi la force de votre tandem, j'ai toujours senti chez vous cette compréhension de l'humain qui rend agréable le travail à vos côtés, et j'espère avoir de nombreuses occasions futures de vous retrouver.

Ma gratitude s'adresse ensuite aux membres de mon jury de soutenance, en commençant par Pedro Díez et David Dureisseix, mes deux rapporteurs, qui m'ont fait l'honneur d'étudier très consciencieusement mon travail avec leur regard d'expert dans chacune des deux thématiques de cette thèse. J'ai été très heureux que Daniel Rixen m'ait fait l'honneur de présider ce jury, et je me réjouis de commencer une collaboration avec lui. Je remercie enfin Patrick Massin d'avoir apporté un regard proche des préoccupations du monde industriel, regard qui a toute son importance dans notre communauté des sciences appliquées. L'ensemble des remarques et observations formulées dans les rapports ou durant la soutenance constitue une base précieuse en vue des futurs travaux relatifs à cette thématique.

Par ailleurs, l'implantation des développements de cette thèse dans le code de calcul *Z-Set* a représenté une part de ces travaux bien loin d'être négligeable. Travailler durant son doctorat au cœur d'un tel code de portée industrielle est une expérience très intéressante et enrichissante pour appréhender les problématiques liées au calcul scientifique, mais la complexité d'implémentation associée rend cependant la tâche ardue. Cela m'a amené à effectuer des visites régulières à l'équipe *DMSM / MNU* de l'*ONERA*, et particulièrement à Frédéric Feyel (notre gourou *Z-Set*!), Vincent Chiaruttini et Jean-Didier Garaud, que je remercie tous trois. L'accueil y est toujours sympathique, et précieuse fut leur expertise en matière de calcul scientifique. J'espère pouvoir continuer à échanger avec eux dans le futur.

A l'heure où, justement, l'outil informatique occupe une place prépondérante dans le quotidien professionnel, son bon fonctionnement repose sur un ensemble de personnes

dont le travail – parfois ingrat lorsqu’il s’agit de réparer des équipements à des heures avancées de la nuit, par exemple – nous fait bénéficier d’un réseau informatique et d’infrastructures de calcul de qualité. Pour cela, qu’il me soit permis de remercier Philippe Rougeot (notre *Frisou* à tous, l’un des rayons de soleil du laboratoire), Philippe Sanchez, Pierre Lucotte et Arnaud Cruzel pour leur travail au centre de calcul du LMT-Cachan, Stuart McLellan, Sabrina Louison-François et Pascal Soullard, et tant d’autres sur qui repose le réseau l’ENS Cachan. Je tiens par ailleurs à remercier chaleureusement Pascale Boutard, Françoise Hervier et Lydia Matijevic dont l’efficacité et le doigté ont fluidifié l’ensemble des procédures administratives.

J’ai une pensée toute particulière pour un certain nombre de personnes que j’ai pu côtoyer tout au long de ces années et qui ne sont toujours pas citées à ce stade. J’ai partagé avec certaines ma première année d’apprenti chercheur dans la fameuse salle 211, d’autres étaient mes compagnons de bureau les années suivantes, j’ai vécu avec d’autres encore des conférences parfois mémorables (dont en particulier ma première conférence à Bruxelles!), des discussions variées devant une tasse de café au bar du LMT ou des moments musicaux. Certaines d’entre elles sont devenues des ami(e)s proches. Quoi qu’il en soit, je les citerai dans un ordre volontairement alphabétique en essayant autant que possible de minimiser les omissions : *Boubou*, Benjamin Boutin (*Boutinus*), Marion Chambart, Ludovic Chamoin, *Pierre-Etienne* Charbonnel, Jean Coudroy, Geoffrey Desmeure, Clément Desodt, Chloé Dupleix, Nicolas Feld, Éric Florentin, Martin Hautefeuille, Jorge Hinojosa Rebhein, Xavier Jourdain, Grégory Lebon, Hugo Leclerc, *Roque-sane* Marull, Thomas de Larrard *Couderc de Folonge*, Camill{e,ou} Le Mauff, Florent Pled, Aurélie Progneaux, Vincent Roulet, Karin Saavedra Redlich, Lavinia Stefan, Alain Stricher, Julien Waeytens... sans oublier Monsieur ZèBrE bien sûr !

Pour finir, je réserve ces derniers mots à mes très proches. Mes parents tout d’abord, qui m’ont accompagné sur le chemin de la vie tout en me laissant libre de mes orientations, m’ouvrant sur de nombreuses choses et me comblant de patience et de générosité. Maman, Papa, je vous dois tant ! Mes grands parents qui ont été présents durant toutes ces années et qui s’en sont finalement allés à la fin de ce travail. Enfin, une pensée toute particulière pour Corinne, ta présence à mes côtés, ton soutien, tellement plus encore... mais les mots sont ici superflus...

Merci !

RÉSUMÉ

Le contrôle de la qualité des calculs de structure suscite un intérêt croissant dans les processus de conception et de certification. Il repose sur l'utilisation d'estimateurs d'erreur, dont la mise en pratique entraîne un sur-coût numérique souvent prohibitif sur des calculs de grande taille. Le présent travail propose une nouvelle procédure permettant l'obtention d'une estimation garantie de l'erreur de discrétisation dans le cadre de problèmes linéaires élastiques résolus au moyen d'approches par décomposition de domaine. La méthode repose sur l'extension du concept d'erreur en relation de comportement au cadre des décompositions de domaine sans recouvrement, en s'appuyant sur la construction de champs admissibles aux interfaces. Son développement dans le cadre des approches FETI et BDD permet d'accéder à une mesure pertinente de l'erreur de discrétisation bien avant convergence du solveur lié à la décomposition de domaine. Une extension de la procédure d'estimation aux problèmes hétérogènes est également proposée. Le comportement de la méthode est illustré et discuté sur plusieurs exemples numériques en dimension 2.

MOTS-CLEFS : vérification, estimation d'erreur a posteriori, erreur en relation de comportement, décomposition de domaine sans recouvrement, FETI, BDD, calcul parallèle, problèmes hétérogènes.

ABSTRACT

The control of the quality of mechanical computations arouses a growing interest in both design and certification processes. It relies on error estimators the use of which leads to often prohibitive additional numerical costs on large computations. The present work puts forward a new procedure enabling to obtain a guaranteed estimation of discretization error in the setting of linear elastic problems solved by domain decomposition approaches. The method relies on the extension of the constitutive relation error concept to the framework of non-overlapping domain decomposition through the recovery of admissible interface fields. Its development within the framework of the FETI and BDD approaches allows to obtain a relevant estimation of discretization error well before the convergence of the solver linked to the domain decomposition. An extension of the estimation procedure to heterogeneous problems is also proposed. The behaviour of the method is illustrated and assessed on several numerical examples in 2 dimension.

KEY-WORDS : vérification, a posteriori error estimation, constitutive relation error, non-overlapping domain decomposition, FETI, BDD, parallel computation, heterogeneous problems.

TABLE DES MATIÈRES

Résumé	i
Abstract	iii
Introduction	5
1. Estimation de la qualité d'un calcul par éléments finis	11
1.1. Problème modèle et résolution éléments finis	13
1.1.1. Problème modèle	13
1.1.2. Principes variationnels et résultats auxiliaires	15
1.1.3. Problème approché et résolution éléments finis	17
1.1.4. Remarques sur la solution éléments finis	18
1.2. Généralités autour de l'estimation d'erreur sur les solutions éléments finis	19
1.2.1. Convergence de la méthode éléments finis	19
1.2.2. Estimation <i>a posteriori</i>	21
1.2.3. Qualité et performances d'un estimateur d'erreur	23
1.3. Estimateurs d'erreur utilisant le concept d'analyse duale	24
1.3.1. Encadrement de l'énergie de déformation	24
1.3.2. Analyse duale avec extension des conditions aux limites	25
1.3.3. Commentaires	25
1.4. Estimateurs d'erreur par résidus implicites	26
1.4.1. Un premier résultat explicite	27
1.4.2. Estimateurs par patchs d'éléments	29
1.4.3. Estimateurs par éléments	32
1.4.4. Extension à d'autres types de problèmes	34
1.4.5. Commentaires	35
1.5. Estimateurs d'erreur par la relation de comportement	37
1.5.1. Principes	37
1.5.2. Construction de champs statiquement admissibles	39
1.5.3. Extension à d'autres types de problèmes	45
1.5.4. Commentaires	47
1.6. Estimateurs d'erreur exploitant les défauts de régularité	47
1.6.1. Principe	48
1.6.2. Une première approche	48
1.6.3. Reconstruction superconvergente par patchs	49
1.6.4. Quelques variantes	51

1.6.5.	Extension à d'autres types de problèmes	52
1.6.6.	Commentaires	52
1.7.	Estimation d'erreur sur des quantités d'intérêt	53
1.7.1.	Erreur en pollution	53
1.7.2.	Encadrement direct	53
1.7.3.	Approches par extracteurs	54
1.8.	Conclusion partielle	55
2.	Méthodes de décomposition de domaine sans recouvrement	57
2.1.	Cadre de travail	59
2.2.	Mise en équations	62
2.2.1.	Discrétisation des conditions de raccord	63
2.2.2.	Condensation des problèmes locaux	65
2.2.3.	Obtention du problème d'interface global	66
2.2.4.	Approches de résolution	67
2.2.5.	Commentaires	67
2.3.	Approche duale	69
2.3.1.	Principes	69
2.3.2.	Préconditionnement	70
2.3.3.	Problème grossier	71
2.4.	Approche primale	73
2.4.1.	Principes	73
2.4.2.	Préconditionnement	74
2.4.3.	Problème grossier	75
2.5.	Présentation succincte des autres types d'approches	76
2.5.1.	Approches hybrides et recondensées	76
2.5.2.	Approche mixte	78
2.6.	Conclusion partielle	79
3.	Généralités sur l'estimation d'erreur a posteriori en cadre sous-structuré	81
3.1.	Un état des lieux	82
3.1.1.	Analyses mathématiques : estimateurs explicites	83
3.1.2.	Problèmes de contact	84
3.1.3.	FETI et la "Bound Method"	85
3.2.	Une procédure d'estimation d'erreur en cadre sous-structuré	87
3.2.1.	Cadre de travail	88
3.2.2.	Construction des champs cinématiquement admissibles	91
3.2.3.	Construction des champs statiquement admissibles	93
3.3.	Première validation numérique	96
3.4.	Étude et commentaires sur la construction du champ d'inter-effort	100
3.4.1.	Description continue de $\hat{F}_{bh}^{(s)}$	100
3.4.2.	Construction d'une description discontinue de $\hat{F}_{bh}^{(s)}$	104
3.4.3.	Illustration numérique	107
3.5.	Conclusion partielle	111

4. Application au cadre des approches duale et primale	113
4.1. Approche duale	114
4.1.1. Rappel sur l'algorithme FETI	114
4.1.2. Construction des champs d'interface admissibles	115
4.2. Approche primale	118
4.2.1. Rappel sur l'algorithme BDD	118
4.2.2. Construction des champs d'interface admissibles	119
4.3. Exemple numérique	122
4.3.1. Γ -structure	122
4.3.2. Structure fissurée	125
4.4. Conclusion partielle	125
5. Extension aux structures hétérogènes	131
5.1. Cas d'étude	132
5.2. Influence des préconditionneurs hétérogènes	134
5.2.1. Principes et interprétation mécanique	134
5.2.2. Illustration numérique	140
5.3. Procédures de construction de champs admissibles pour des problèmes hétérogènes	140
5.3.1. Principes	140
5.3.2. Illustration numérique	144
5.4. Conclusion partielle	146
Conclusion et perspectives	149

INTRODUCTION

EN rendant possible la réalisation de simulations numériques toujours plus complexes, les progrès constants et soutenus en matière de capacité de calcul permettent de répondre à un besoin inassouvi d'une partie de la communauté scientifique. Celui-ci résulte des exigences croissantes en matière de modélisation des phénomènes physiques, d'une part sur des échelles très grandes, d'autre part à travers l'usage de lois de plus en plus complexes, afin d'approcher au mieux la prédiction des phénomènes réels (citons entre autres la recherche en climatologie, biologie moléculaire ou bien sur les nouveaux matériaux). Ainsi, le célèbre classement *TOP500*¹ des calculateurs selon leurs performances vis à vis du « benchmark » *LINPACK* fait-il apparaître tous les six mois des machines impressionnantes, dont la capacité atteint aujourd'hui 2,57 pétaFLOPS². Cette dynamique résulte bien souvent de politiques spécifiques dont certains aspects les plus récents sont, en France, la création début 2007 du *GENCI*³ offrant à la communauté scientifique un gain en terme de capacités de calcul de plus de 30. Elles ont notamment conduit à la mise en place de plusieurs calculateurs sur 3 centres nationaux et l'acquisition par le CEA⁴ de la machine *Tera-100* qui, avec une performance de calcul de 1,05 pFLOPS, occupait en novembre 2010 le 6^{ème} rang mondial.

Si les moyens de *calcul intensif* furent un temps l'apanage d'une partie restreinte de la communauté scientifique, ils sont désormais plus largement accessibles du fait de l'augmentation constante des capacités de calcul et de la diminution des coûts de fabrication associés. Ainsi leur arrivée dans les bureaux d'études est-elle à l'origine de profonds changements au sein desquels la simulation prend une place d'importance croissante. En particulier, l'un des enjeux majeurs actuels dans un contexte industriel est probablement celui du *Virtual testing*, qui consiste, dans les phases de certification, à remplacer les essais réels par des simulations numériques. En découlent des intérêts indiscutables, tant en matière de réduction des coûts souvent très élevés liés au essais sur des structures réelles (citons à titre d'exemple le domaine de l'aéronautique), que dans les cas où la structure cible est unique (cas du génie civil) et qu'aucun prototype de certification n'est, de fait, réalisable.

Se pose alors la question de la fiabilité des simulations numériques employées, qu'il faut être en mesure de certifier au moyen d'outils adaptés afin de s'assurer que les

1. <http://www.top500.org>

2. 2,57.10¹⁵ opérations par seconde

3. Grand Équipement National de Calcul Intensif (<http://www.genci.fr>)

4. Commissariat à l'Énergie Atomique

résultats obtenus soient proches de la réalité tout en quantifiant l'écart commis par rapport à cette dernière. Toute procédure de calcul peut être schématiquement décomposée en une succession de trois phases distinctes : la *modélisation* du problème étudié, conduisant généralement à un ensemble d'équations aux dérivées partielles posées sur des domaines continus, puis la *discrétisation* du problème constitué par les équations précédentes, préalable à tout traitement informatique, enfin, la *résolution* proprement dite du problème discret obtenu. La fiabilité de toute simulation passera alors par la maîtrise de chaque étape sus-citée. Par la suite, nous laissons de côté la première étape, consistant à décrire à l'aide d'un modèle mathématique et de manière suffisamment fine le comportement de la structure dans un environnement donné, généralement du ressort du physicien. Le numéricien s'intéresse, quand à lui, aux problématiques posées par la maîtrise des deux dernières étapes, que nous détaillons par la suite.

Toute phase de discrétisation d'un problème continu entraîne inévitablement l'obtention d'une solution *approchée* plus ou moins représentative de la solution *exacte* selon le soin apporté à l'approximation numérique. Dès lors, afin de pouvoir certifier la qualité d'un calcul donné, il est nécessaire d'être en mesure d'estimer l'écart — appelé *erreur de discrétisation* — entre cette solution approchée, issue par exemple de l'application de la méthode des éléments finis, et la solution exacte (bien souvent inconnue) du problème continu. Cette thématique, connue sous le nom de *vérification*, fait ainsi l'objet de nombreux travaux de recherche depuis le milieu des années 1970. Les premières tentatives du genre utilisèrent les propriétés de convergence des méthodes des éléments finis afin de majorer l'écart entre les deux solutions. Ces procédures ne permettant pas une estimation précise de l'erreur de discrétisation, de nouvelles méthodes d'estimation dites *a posteriori* leur sont assez rapidement préférées. Une fois la solution approchée obtenue, il s'agit alors d'en étudier les défauts de manière à quantifier son écart par rapport à la solution exacte. Les premiers *estimateurs d'erreur* du genre fournissent une information globale à l'échelle de la structure entière, ainsi qu'une carte de contributions élémentaires particulièrement utile en vue d'obtenir une solution satisfaisant à une précision donnée à l'aide de procédures adaptatives. Plus récemment furent également développées des techniques d'estimation permettant d'évaluer l'erreur commise sur des *quantités d'intérêt* (par exemple, des contraintes de Von-Mises sur des zones locales en temps ou en espace...) particulièrement susceptibles d'intéresser l'ingénieur lorsqu'elles portent sur les aspects dimensionnants d'une structure. Sur ce point précis, la tendance actuelle consiste à élaborer des bornes supérieure et inférieure permettant d'encadrer la solution. On distingue généralement trois approches d'estimation *a posteriori* dans le domaine de la mécanique des structures. La première d'entre elles exploite les défauts de vérification de l'équation d'équilibre inhérents à la résolution approchée par une méthode des éléments finis en déplacement, la deuxième repose sur le concept d'*erreur en relation de comportement*, enfin, la dernière s'appuie sur les défauts de régularité des solutions. En outre, la qualité d'un estimateur est principalement jugée sur sa capacité à fournir une estimation *garantie*, c'est à dire une borne supérieure de l'erreur vraie. Se pose également la question de la *pertinence* des estimations obtenues,

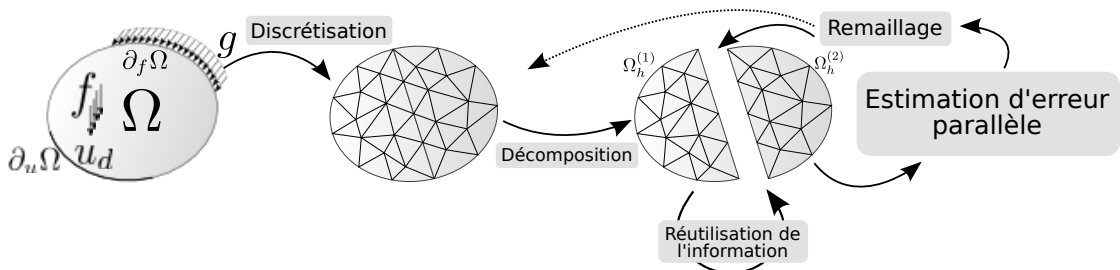
entendue ici comme la proximité entre l'erreur *estimée* et l'erreur *vraie*, et qui suscite aujourd'hui encore de nombreux travaux. Sur ces deux aspects, les méthodes et leurs nombreuses variantes entrant dans la classification précédente restent inégales et la mise en œuvre d'une estimation garantie engendre jusqu'à présent un surcoût de calcul particulièrement important et même prohibitif sur de gros problèmes. De fait, le choix d'un estimateur est généralement le fruit d'un compromis entre qualité attendue et sur-coût de calcul engendré.

Du point de vue résolution proprement dit, remarquons que l'écrasante majorité des calculateurs actuels sont en réalité des *clusters* construits par la mise en parallèle de nombreuses machines ou *nœuds* de calcul. Cette particularité explique d'une part les performances affichées par les calculateurs les plus puissants, largement supérieures à celles prédites par la conjecture de Moore⁵. Elle permet également, d'autre part, une réalisation peu onéreuse de clusters de calcul puissants à l'aide d'un ensemble de composants standards. Ce type d'architectures massivement parallèle connaît néanmoins des limitations dues au caractère distribué de sa mémoire. Chaque processeur n'a en effet accès qu'à la mémoire vive du nœud dont il dépend, d'où une *localisation* des données qui rend ainsi nécessaire le développement de technologies d'*échange* et de communication entre nœuds. Sur ce dernier point, malgré de nombreuses avancées tant au niveau matériel (*Infiniband*) qu'au niveau des protocoles de communication (*Myrinet*, *Ethernet Gigabit*) et des interfaces de programmation applicatives (*MPI*), les performances souffrent encore bien souvent des limitations inhérentes au réseau d'interconnexion entre nœuds. Afin de faire évoluer les pratiques du calcul numérique en direction de simulations de plus en plus complexes, l'adaptation des méthodes numériques aux spécificités susmentionnées apparaît incontournable de manière à profiter pleinement des gains induits par ces nouvelles architectures. Tout algorithme de résolution candidat au parallélisme se devra alors de décomposer un problème initial en un ensemble de problèmes locaux aussi indépendants que possible de manière à minimiser les échanges entre processus, tant en terme de taille que de nombre de communications. Dans ce contexte, les *méthodes de décomposition de domaine*, qui consistent à obtenir un ensemble de problèmes locaux en partitionnant le domaine de définition initial d'un problème aux dérivées partielles en sous-domaines, constituent un élément de réponse adapté. En particulier, les méthodes de décomposition *sans recouvrement* de type *Schur-Krylov* conduisent à la résolution itérative d'un problème condensé sur l'interface entre les sous-domaines, conjointement à des calculs locaux sur chaque sous-domaine pouvant ainsi être effectués en parallèle. La majorité des échanges entre processeurs sont alors relatifs aux données d'interface, de taille réduite par rapport à celles du problème global, et ne concernant que les sous-domaines voisins. En outre, cette dernière classe de méthodes est particulièrement bien adaptée aux problèmes rencontrés en mécanique des solides, qui sont souvent issus de l'assemblage de différentes pièces ou matériaux ayant chacun des caractéristiques spécifiques, et où la notion d'interface est bien réelle. Cela permet notamment la mise en place de formulations et de précon-

5. De manière simplifiée, la conjecture de Moore postule un doublement des capacités de calcul des microprocesseurs tous les dix-huit mois.

ditionneurs consistants vis à vis du contenu mécanique des problèmes étudiés. Soulignons également un autre avantage de ce type de méthode qui réside dans l'utilisation de solveurs de type *Krylov* lors de la résolution itérative du problème d'interface, solveurs dont les propriétés mathématiques permettent le développement de procédures d'accélération de convergence.

Ce travail s'inscrit dans une réflexion générale autour de la mise en place de stratégies parallèles adaptatives pour le calcul de structure, et part d'une constatation selon laquelle la littérature est encore assez pauvre, à l'heure actuelle, en travaux tirant partie des apports réciproques entre vérification et calcul intensif. Or, dans le contexte actuel, le besoin paraît pourtant important de développer des procédures de certification dans le cadre de simulations de grande taille qui seront typiquement résolues par une approche parallèle, mais également de mettre ce type d'approche à la disposition des procédures d'estimation d'erreur dont l'exigence de précision peut engendrer des coûts de calcul additionnels particulièrement élevés. Se pose alors deux principales questions, auxquelles nous avons tenté, à travers ce travail de thèse, de répondre. La première concerne l'adaptation des techniques d'estimation d'erreur au cadre sous-structuré, alors qu'une partie des estimateurs repose sur la résolution de problèmes posés sur des « patches » d'éléments, pour lesquels la localisation des données peut poser problème dans le cas où ceux-ci seraient répartis sur deux sous-structures distinctes. La seconde concerne l'emploi d'un solveur itératif dans la résolution du problème d'interface, et son influence sur la qualité de l'estimation d'erreur lorsque la convergence de celui-ci n'est pas atteinte. Enfin, signalons que l'ensemble des méthodes développées dans ce document a donné lieu à une réflexion et un travail relatif à leur implantation pérenne au sein du code de calcul éléments finis orienté objet *ZeBuLon* (NwNumerics, ONERA, École des Mines de Paris).



□ FIG. 0.1. *Stratégie parallèle adaptative pour le calcul de structures*

Au vu des considérations précédentes et des objectifs de ce travail, le présent document est subdivisé en cinq chapitres distincts. Les deux premiers chapitres sont dédiés à un état de l'art de la littérature relative au contexte de cette thèse tandis que les trois suivants correspondent au cœur du travail effectué.

Le *premier chapitre* brosse un état de l'art relatif aux méthodes d'estimation des erreurs de discrétisation. Y sont présentés les principaux estimateurs d'erreur ainsi que leurs différentes variantes dans le cadre des problèmes linéaires. On insiste dans chacun des

cas sur le caractère garanti ou non de l'estimation ainsi réalisée. En outre, les extensions aux problèmes non-linéaires y sont également mentionnées le cas échéant.

Le *deuxième chapitre* s'attache à décrire les principaux algorithmes associés aux méthodes de décomposition de domaine sans recouvrement. Une fois le cadre de travail sous-structuré introduit dans sa version discrète, les deux principales approches de résolution — l'approche duale et l'approche primale — sont présentées en insistant notamment sur la construction des préconditionneurs adaptés ainsi que la gestion des problèmes grossiers associés. D'autres approches représentatives — les approches hybrides, recondensées et mixtes, y sont ensuite brièvement décrites.

Le *troisième chapitre* rentre dans le vif du sujet relatif à l'estimation d'erreur a posteriori en cadre sous-structuré. Après avoir ébauché un rapide panorama de quelques contributions existantes à cette problématique, on présentera une méthode d'estimation d'erreur reposant sur le concept d'erreur en relation de comportement et permettant d'en étendre de manière simple la validité au cadre sous-structuré. La méthode repose sur la construction de champs d'interface admissibles permettant par la suite la construction parallèle, sur chaque sous-domaine, de champs admissibles à l'échelle de la structure globale en utilisant directement pour cela les outils déjà développés dans un cadre séquentiel par le passé. L'estimateur ainsi obtenu permet de conserver les propriétés intéressantes de l'erreur en relation de comportement tout en fournissant une estimation d'erreur garantie quel que soit l'état des champs d'interface.

Le *quatrième chapitre* s'attache à la mise en place de la technique d'estimation introduite précédemment dans le cadre des approches de décomposition de domaine de type FETI et BDD. On y montre que la construction des champs d'interface admissibles peut s'effectuer à moindre coût en utilisant les champs intermédiaires provenant des étapes de préconditionnement des solveurs. Il en résulte un estimateur performant permettant d'obtenir, sur les exemples traités, une évaluation pertinente de l'erreur en quelques itérations du solveur associé à décomposition de domaine.

Enfin, le *cinquième et dernier chapitre* s'intéresse à la mise en application sur des problèmes hétérogènes des techniques précédemment étudiées. On y constate que le découpage d'une structure hétérogène en sous-structures homogènes permet d'obtenir une estimation d'erreur plus pertinente que celle fournie par les outils séquentiels. D'autre part, l'utilisation de préconditionneurs adaptés aux cas hétérogènes permet de conserver les propriétés de convergence de l'estimateur d'erreur par rapport au solveur du problème d'interface. Enfin, après avoir observé un comportement déficient de l'estimateur d'erreur séquentiel sur l'exemple hétérogène considéré, on propose une amélioration de ce dernier afin de lui restaurer des performances proches de celles observées sur les problèmes décomposés en sous-structures homogènes.

CHAPITRE 1.

ESTIMATION DE LA QUALITÉ D'UN CALCUL PAR ÉLÉMENTS FINIS

Ce chapitre dresse un rapide état de l'art relatif à l'estimation de la qualité d'un calcul éléments finis. Après avoir présenté le cadre de travail de référence utilisé dans l'ensemble de ce document, la problématique de l'estimation des erreurs de discrétisation est introduite. Les principales classes de méthodes y sont ensuite présentées dans le cadre linéaire tandis que leur potentielle extension au cadre non-linéaire est notifiée le cas échéant. Enfin, les méthodes d'estimation d'erreur sur des quantités d'intérêt sont brièvement présentés.

1.1. Problème modèle et résolution éléments finis	13
1.1.1. Problème modèle	13
1.1.2. Principes variationnels et résultats auxiliaires	15
1.1.3. Problème approché et résolution éléments finis	17
1.1.4. Remarques sur la solution éléments finis	18
1.2. Généralités autour de l'estimation d'erreur sur les solutions éléments finis	19
1.2.1. Convergence de la méthode éléments finis	19
1.2.2. Estimation <i>a posteriori</i>	21
1.2.3. Qualité et performances d'un estimateur d'erreur	23
1.3. Estimateurs d'erreur utilisant le concept d'analyse duale	24
1.3.1. Encadrement de l'énergie de déformation	24
1.3.2. Analyse duale avec extension des conditions aux limites	25
1.3.3. Commentaires	25
1.4. Estimateurs d'erreur par résidus implicites	26
1.4.1. Un premier résultat explicite	27

1.4.2.	Estimateurs par patches d'éléments	29
1.4.3.	Estimateurs par éléments	32
1.4.4.	Extension à d'autres types de problèmes	34
1.4.5.	Commentaires	35
1.5.	Estimateurs d'erreur par la relation de comportement	37
1.5.1.	Principes	37
1.5.2.	Construction de champs statiquement admissibles	39
1.5.3.	Extension à d'autres types de problèmes	45
1.5.4.	Commentaires	47
1.6.	Estimateurs d'erreur exploitant les défauts de régularité	47
1.6.1.	Principe	48
1.6.2.	Une première approche	48
1.6.3.	Reconstruction superconvergente par patches	49
1.6.4.	Quelques variantes	51
1.6.5.	Extension à d'autres types de problèmes	52
1.6.6.	Commentaires	52
1.7.	Estimation d'erreur sur des quantités d'intérêt	53
1.7.1.	Erreur en pollution	53
1.7.2.	Encadrement direct	53
1.7.3.	Approches par extracteurs	54
1.8.	Conclusion partielle	55

DE par le nombre et la diversité des travaux réalisés durant ces trois dernières décennies, la thématique relative à l'estimation et au contrôle de la qualité d'un calcul par éléments finis constitue aujourd'hui un domaine au cadre d'application très large. Ce chapitre permettra d'introduire plus en détail le contexte général ainsi que les différentes réponses apportées par la communauté scientifique. Il n'est nullement question d'ébaucher une revue exhaustive du sujet, ce qui ne serait guère possible en un seul chapitre étant donné la richesse de la littérature, mais de présenter quelques points utiles à la bonne compréhension du domaine avant d'aborder la suite de ce travail. Le lecteur désireux d'approfondir le sujet pourra se référer à plusieurs ouvrages de référence, notamment [I. BABUSKA et T. STROUBOULIS, 2001 ; P. LADEVÈZE et J.P. PELLE, 2004 ; STEIN, 2003 ; VERFÜRTH, 1996].

Après avoir rappelé les bases des formulations éléments finis et introduit le cadre général de la vérification, nous présenterons les différentes familles d'estimateurs et détaillerons les principaux développements relatifs à l'estimation d'erreur globale, en se restreignant au cas des problèmes linéaires. Toutefois, en parallèle de cette restriction au contexte linéaire motivée par le cadre de travail de cette thèse, nous dresserons un rapide état des lieux des extensions aux problèmes non-linéaires. Enfin, nous présenterons brièvement les principes de l'estimation des erreurs sur des quantités d'intérêt locales, qui constituent l'essentiel des travaux menés durant la dernière décennie.

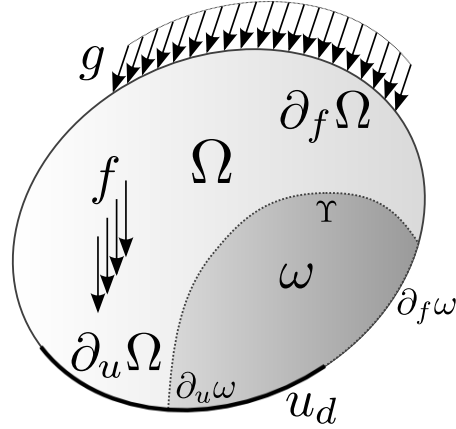
1.1. PROBLÈME MODÈLE ET RÉOLUTION ÉLÉMENTS FINIS

1.1.1. Problème modèle

Afin d'illustrer les différents éléments abordés dans le présent chapitre, considérons (dans le cadre de travail de la mécanique des milieux continus) un problème classique de statique linéaire posé sur un solide décrit par une loi de comportement élastique et évoluant sous l'hypothèse des petites perturbations.

Le solide est modélisé par un domaine ouvert $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ (où d désigne la dimension de l'espace) que l'on supposera borné et régulier. La frontière $\partial\Omega$ de Ω est divisée en deux parties complémentaires $\partial_u\Omega$ et $\partial_f\Omega$ sur lesquelles sont appliquées, respectivement, des conditions aux limites de type Dirichlet et Neumann. Introduisons également un ouvert quelconque $\omega \subset \Omega$ possédant les mêmes propriétés que Ω . On notera de même $\partial_u\omega = \partial\omega \cap \partial_u\Omega$, $\partial_f\omega = \partial\omega \cap \partial_f\Omega$ et $\Upsilon = \partial\omega \setminus (\partial_u\omega \cup \partial_f\omega)$, Υ désignant l'interface entre ω et le reste du domaine Ω .

Dans la suite, $L^2(\omega)$ désigne l'espace de Hilbert des fonctions de carré intégrable sur ω , $H^1(\omega)$ l'espace de Sobolev usuel défini par $H^1(\omega) = \{v \in L^2(\omega) \text{ tel que } Dv \in L^2(\omega)\}$, $H^{1/2}(\partial\omega)$ celui des traces sur $\partial\omega$ des fonctions de $H^1(\omega)$, et $H^{-i}(\cdot)$ l'espace dual de



□ FIG. 1.1. *Problème modèle*

$H^i(\cdot)$. On pourra se reporter à [ADAMS et FOURNIER, 1975] pour plus de détails sur ces espaces fonctionnels.

Le problème mécanique défini sur Ω est alors décrit par un système d'équations aux dérivées partielles elliptique que l'on peut catégoriser comme suit :

– équations de compatibilité :

$$\begin{aligned} \varepsilon(u) &= \frac{1}{2}(\nabla \cdot u^T + \nabla \cdot u) & \text{dans } \Omega \\ u &= u_d & \text{sur } \partial_u \Omega \end{aligned} \quad (1.1a)$$

– équations d'équilibre :

$$\begin{aligned} \operatorname{div}(\sigma) + f &= 0 & \text{dans } \Omega \\ \sigma \cdot n &= g & \text{sur } \partial_f \Omega \end{aligned} \quad (1.1b)$$

– relation de comportement :

$$\sigma = \mathbb{H} : \varepsilon(u) \quad \text{dans } \Omega \quad (1.1c)$$

où u_d désigne le champ de déplacement imposé sur la frontière $\partial_u \Omega$, g le champ d'efforts imposés sur la frontière $\partial_f \Omega$, f le champ d'efforts au sein du domaine Ω et \mathbb{H} l'opérateur de Hooke du matériau considéré.

Afin d'obtenir des solutions à énergie finie, le champ de déplacement $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^d$ sera cherché dans l'espace $[H^1(\Omega)]^d$ et le champ de contrainte $\sigma : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^{d^2}$ dans l'espace $[L^2(\Omega)]^{d^2}$. D'autre part, pour que le problème soit bien posé, nous supposons que $\operatorname{mes}(\partial_u \Omega) > 0$ et que l'opérateur de Hooke \mathbb{H} définit une forme bilinéaire symétrique continue et coercive. Sous ces hypothèses, le problème (1.1a,1.1b,1.1c) possède une solution unique [SALENÇON, 1988].

1.1.2. Principes variationnels et résultats auxiliaires

Introduisons l'espace d'admissibilité $\mathcal{Ca}(\omega)$ des déplacements (ou *espace des champs cinématiquement admissibles*) vérifiant sur ω les équations de comptabilité (1.1a) :

$$\mathcal{Ca}(\omega) = \left\{ v \in [H^1(\omega)]^d \text{ tel que } \text{tr}(v)|_{\partial_u \omega} = u_d \right\} \quad (1.2a)$$

ainsi que l'espace vectoriel associé $\mathcal{Ca}^0(\omega)$ des champs *cinématiquement admissibles à 0* :

$$\mathcal{Ca}^0(\omega) = \left\{ v \in [H^1(\omega)]^d \text{ tel que } \text{tr}(v)|_{\partial_u \omega} = 0 \right\} \quad (1.2b)$$

où $\text{tr} : H^1(\omega) \rightarrow H^{1/2}(\partial\omega)$ désigne l'opérateur de trace.

Nous aurons également recours par la suite au sous-espace $\mathcal{Ca}_\Upsilon(\omega, w_d)$ de $\mathcal{Ca}(\omega)$ à conditions de Dirichlet imposées sur Υ :

$$\mathcal{Ca}_\Upsilon(\omega, w_d) = \left\{ v \in \mathcal{Ca}(\omega) \text{ tel que } \text{tr}(v)|_\Upsilon = w_d \right\} \quad (1.3a)$$

ainsi qu'à son espace vectoriel associé $\mathcal{Ca}_\Upsilon^0(\omega)$:

$$\mathcal{Ca}_\Upsilon^0(\omega) = \left\{ v \in \mathcal{Ca}(\omega) \text{ tel que } \text{tr}(v)|_\Upsilon = 0 \right\} \quad (1.3b)$$

A l'aide des notations ci-dessus, la formulation faible du problème (1.1) s'écrit alors de manière classique :

$$\begin{aligned} \text{Trouver } (u, \sigma) \in \mathcal{Ca}(\Omega) \times [L^2(\Omega)]^{d^2} \text{ vérifiant :} \\ \int_{\Omega} \sigma : \varepsilon(v) \, d\Omega = \int_{\Omega} f \cdot v \, d\Omega + \int_{\partial_f \Omega} g \cdot v \, d\Gamma \quad \forall v \in \mathcal{Ca}^0(\Omega) \\ \sigma = \mathbb{H} : \varepsilon(u) \end{aligned} \quad (1.4)$$

1.1.2.1. Formulation variationnelle en déplacement

En notant $\sigma : [H^1(\Omega)]^d \rightarrow [L^2(\Omega)]^{d^2}$ l'application $\sigma(u) = \mathbb{H} : \varepsilon(u)$ qui à un champ de déplacements donné associe le champ de contraintes associé, la *formulation faible en déplacement* du problème modèle se déduit de (1.4) :

$$\begin{aligned} \text{Trouver } u \in \mathcal{Ca}(\Omega) \text{ vérifiant :} \\ \int_{\Omega} \sigma(u) : \varepsilon(v) \, d\Omega = l(v) \quad \forall v \in \mathcal{Ca}^0(\Omega) \end{aligned} \quad (1.5)$$

$$\text{avec } l(v) = \int_{\Omega} f \cdot v \, d\Omega + \int_{\partial_f \Omega} g \cdot v \, d\Gamma.$$

Notons qu'en introduisant la fonctionnelle représentant l'*énergie potentielle* du système étudié

$$\mathcal{E}p(u) = \mathcal{E}d(u) - l(u) \quad (1.6)$$

où $\mathcal{E}d(u)$ désigne l'énergie de déformation donnée par :

$$\mathcal{E}d(u) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \boldsymbol{\sigma}(u) : \boldsymbol{\varepsilon}(u) d\Omega \quad (1.7)$$

(1.5) est équivalent au problème de minimisation suivant :

$$\begin{aligned} &\text{Trouver } u \in \mathcal{C}a(\Omega) \text{ vérifiant :} \\ &\mathcal{E}p(u) \leq \mathcal{E}p(v) \quad \forall v \in \mathcal{C}a(\Omega) \end{aligned} \quad (1.8)$$

Le champ de contraintes est ensuite calculé par application de la relation de comportement.

1.1.2.2. Formulation variationnelle en contraintes

De même, il est possible de résoudre le problème (1.4) par une *formulation faible en contraintes* en introduisant l'espace des champs statiquement admissibles $\mathcal{S}a(\Omega)$ sur Ω :

$$\mathcal{S}a(\Omega) = \left\{ \tau \in [L^2(\Omega)]^{d^2} \text{ tel que } \tau = \tau^T \text{ et } \int_{\Omega} \tau : \boldsymbol{\varepsilon}(v) d\Omega = l(v), \quad \forall v \in \mathcal{C}a^0(\Omega) \right\}$$

ainsi que l'espace vectoriel associé $\mathcal{S}a^0(\Omega)$ des champs *statiquement admissibles* à 0 :

$$\mathcal{S}a^0(\Omega) = \left\{ \tau \in [L^2(\Omega)]^{d^2} \text{ tel que } \tau = \tau^T \text{ et } \int_{\Omega} \tau : \boldsymbol{\varepsilon}(v) d\Omega = 0, \quad \forall v \in \mathcal{C}a^0(\Omega) \right\}$$

La solution de (1.4) est alors cherchée dans l'espace $\mathcal{S}a(\Omega)$ à travers le problème de minimisation suivant :

$$\begin{aligned} &\text{Trouver } \sigma \in \mathcal{S}a(\Omega) \text{ vérifiant :} \\ &\mathcal{E}c(\sigma) \leq \mathcal{E}c(\tau) \quad \forall \tau \in \mathcal{S}a(\Omega) \end{aligned} \quad (1.9)$$

où

$$\mathcal{E}c(\tau) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \tau : (\mathbb{H}^{-1} : \tau) d\Omega - \int_{\partial_u \Omega} \tau \cdot n \cdot u_d d\Gamma \quad (1.10)$$

désigne l'énergie complémentaire du système.

1.1.2.3. Résultats auxiliaires

Des principes variationnels exposés précédemment découlent plusieurs résultats auxiliaires utiles pour la suite de ce chapitre. Introduisons tout d'abord les traditionnelles *normes énergétiques* en déplacement $\|u\|_{\mathbb{H},\Omega}$ et en contrainte $\|\sigma\|_{\mathbb{H}^{-1},\Omega}$:

$$\|u\|_{\mathbb{H},\Omega} = \left[\int_{\Omega} \boldsymbol{\sigma}(u) : \boldsymbol{\varepsilon}(u) d\Omega \right]^{1/2} = \left[\int_{\Omega} (\mathbb{H} : \boldsymbol{\varepsilon}(u)) : \boldsymbol{\varepsilon}(u) d\Omega \right]^{1/2} \quad (1.11)$$

$$\|\sigma\|_{\mathbb{H}^{-1},\Omega} = \left[\int_{\Omega} \sigma : (\mathbb{H}^{-1} : \sigma) d\Omega \right]^{1/2} \quad (1.12)$$

ainsi qu'une fonctionnelle $e_{\text{rdc},\Omega}$ appelée *erreur en relation de comportement* [P. LADEVÈZE, 1975] et définie par :

$$e_{\text{rdc},\Omega}(v, \tau) = \|\tau - \mathbb{H} : \varepsilon(v)\|_{\mathbb{H}^{-1},\Omega} \quad (1.13)$$

$e_{\text{rdc},\Omega}$ fournit une mesure de la non vérification de la relation de comportement entre les champs u et τ sur Ω et vérifie la propriété fondamentale suivante :

$$e_{\text{rdc},\Omega}(v, \tau) = 0 \Leftrightarrow \tau = \sigma(v) \quad (1.14)$$

□ **REMARQUE 1.1** À l'aide de l'erreur en relation de comportement (1.13), le problème modèle (1.4) peut être reformulé comme :

$$\text{Trouver } (u, \sigma) \in \mathcal{Ca}(\Omega) \times \mathcal{Sa}(\Omega) \text{ vérifiant : } e_{\text{rdc},\Omega}(u, \sigma) = 0 \quad (1.15)$$

En sus du couple (u, σ) solution du problème (1.15), considérons un couple quelconque $(v, \tau) \in \mathcal{Ca}(\Omega) \times \mathcal{Sa}(\Omega)$, on a :

$$\begin{aligned} e_{\text{rdc},\Omega}(v, \tau)^2 &= \|(\tau - \sigma) - \mathbb{H} : \varepsilon(v - u)\|_{\mathbb{H}^{-1},\Omega}^2 \\ &= \|\sigma - \tau\|_{\mathbb{H}^{-1},\Omega}^2 + \|u - v\|_{\mathbb{H},\Omega}^2 - 2 \int_{\Omega} (\sigma - \tau) : \varepsilon(u - v) d\Omega \end{aligned}$$

Or $\int_{\Omega} (\sigma - \tau) : \varepsilon(u - v) d\Omega = 0$ du fait de l'orthogonalité entre les espaces $\mathcal{Ca}^0(\Omega)$ et $\mathcal{Sa}^0(\Omega)$, on obtient alors :

$$\|\sigma - \tau\|_{\mathbb{H}^{-1},\Omega}^2 + \|u - v\|_{\mathbb{H},\Omega}^2 = e_{\text{rdc},\Omega}(v, \tau)^2, \quad \forall (v, \tau) \in \mathcal{Ca}(\Omega) \times \mathcal{Sa}(\Omega) \quad (1.16)$$

Cette relation, connue sous le nom de *théorème de Prager-Synge* [PRAGER et SYNGE, 1947], est d'une importance capitale dans la fiabilité des estimations d'erreur a posteriori.

□ **REMARQUE 1.2** En développant $e_{\text{rdc},\Omega}(v, \tau)$, on peut obtenir une version énergétique de la relation précédente sous la forme :

$$\|\sigma - \tau\|_{\mathbb{H}^{-1},\Omega}^2 + \|u - v\|_{\mathbb{H},\Omega}^2 = 2[\mathcal{E}p(v) + \mathcal{E}c(\tau)], \quad \forall (v, \tau) \in \mathcal{Ca}(\Omega) \times \mathcal{Sa}(\Omega) \quad (1.17)$$

Nous verrons par la suite que cette seconde relation est à la base de l'estimation d'erreur par analyse duale.

1.1.3. Problème approché et résolution éléments finis

Le problème variationnel (1.5) étant de dimension infinie, il est nécessaire, pour en mener une résolution numérique, de se ramener à un problème de dimension finie. Pour cela, la méthode des éléments finis en déplacement [BATHE, 1996 ; CIARLET, 1978 ; O.C. ZIENKIEWICZ et TAYLOR, 1988] consiste à introduire une triangulation Ω_h du domaine Ω

[FREY et GEORGES, 1999], puis à rechercher la solution u dans un sous-espace $\mathcal{C}a_h(\Omega)$ de $\mathcal{C}a(\Omega)$ défini par :

$$\mathcal{C}a_h(\Omega) = \{v_h \in \mathcal{C}a(\Omega) \text{ tel que } v_h|_{E_k} \in \mathbb{P}_p(E_k) \forall E_k \in \Omega_h\} \quad (1.18)$$

où $\mathbb{P}_p(E_k)$ désigne l'espace des polynômes d'ordre p sur l'élément E_k . Le problème variationnel approché s'écrit alors :

$$\begin{aligned} &\text{Trouver } u_h \in \mathcal{C}a_h(\Omega) \text{ vérifiant :} \\ &\int_{\Omega} \boldsymbol{\sigma}(u_h) : \boldsymbol{\varepsilon}(v_h) d\Omega = \int_{\Omega} f \cdot v_h d\Omega + \int_{\partial_f \Omega} g \cdot v_h d\Gamma, \forall v_h \in \mathcal{C}a_h^0(\Omega) \end{aligned} \quad (1.19)$$

Le champ de contrainte approché σ_h est ensuite calculé par application de la relation de comportement :

$$\sigma_h = \boldsymbol{\sigma}(u_h) = \mathbb{H} : \boldsymbol{\varepsilon}(u_h) \quad (1.20)$$

1.1.4. Remarques sur la solution éléments finis

De par le choix de l'espace d'approximation de u_h , vérifiant $\mathcal{C}a_h(\Omega) \subset \mathcal{C}a(\Omega)$, la solution approchée issue d'une méthode éléments finis satisfait également aux conditions de compatibilité (1.1a) et reste donc cinématiquement admissible, malgré divers défauts inhérents au choix de $\mathcal{C}a_h(\Omega)$. Le cas du champ de contrainte σ_h est en revanche plus problématique : d'une part, σ_h est recherché dans l'espace image de $\mathcal{C}a_h(\Omega)$ par la loi de comportement $\boldsymbol{\sigma}$ d'après (1.20), et d'autre part, en vertu de (1.19), l'espace d'admissibilité $\mathcal{S}a^h(\Omega)$ de σ_h est défini par

$$\mathcal{S}a^h(\Omega) = \left\{ \tau_h \in [L^2(\Omega)]^{d^2} \text{ tel que } \tau_h = \tau_h^T \text{ et } \int_{\Omega} \tau_h : \boldsymbol{\varepsilon}(v_h) d\Omega = l(v_h) \forall v_h \in \mathcal{C}a_h^0(\Omega) \right\}$$

et vérifie la relation fondamentale $\mathcal{S}a^h(\Omega) \supset \mathcal{S}a(\Omega)$. Par conséquent, σ_h appartient au singleton engendré par l'intersection de ces deux espaces :

$$\{\sigma_h\} = \mathcal{S}a^h(\Omega) \cap \{\mathbb{H} : \boldsymbol{\varepsilon}(\mathcal{C}a_h(\Omega))\}$$

or sauf cas triviaux, $\mathcal{S}a(\Omega) \cap \{\mathbb{H} : \boldsymbol{\varepsilon}(\mathcal{C}a_h(\Omega))\} = \emptyset$, de sorte que :

$$\sigma_h \notin \mathcal{S}a(\Omega)$$

D'un point de vue mécanique, cette dernière observation a plusieurs conséquences sur le champ de contraintes obtenu, notamment la non vérification :

- des conditions aux limites de Neumann : $\sigma_h \cdot n \neq g$ sur $\partial_f \Omega$;
 - de l'équilibre intérieur sur chaque élément du maillage : $\text{div}(\sigma_h) + f \neq 0$ sur E ;
 - de l'équilibre interne entre les éléments du maillage : $\sigma_h \cdot n_E + \sigma_h \cdot n_{E'} \neq 0$ sur $\partial E \cap \partial E'$;
- où E et E' désignent deux éléments du maillage Ω_h , n_E et $n_{E'}$ leur normale sortante respective.

□ REMARQUE 1.3 D'autres sources d'erreurs peuvent être constatées sur le couple solution approché, provenant pour l'essentiel :

- du non respect de la géométrie initiale par la triangulation éléments finis si celle-ci est trop grossière par rapport à la complexité du domaine ;
- d'une représentation approximative des conditions aux limites du problème, si les données u_d et f sont trop oscillantes par rapport aux fonctions de formes éléments finis ;
- du traitement numérique du problème discret (erreurs de convergence des solveurs, approximation numérique, troncature...).

Par un choix adapté de la triangulation éléments finis et des solveurs numériques associés, ces sources d'erreurs supplémentaires peuvent, dans de nombreux cas, être évitées ou du moins rendues négligeables par rapport aux erreurs de discrétisation précédemment mentionnées, de telle sorte qu'elles ne feront pas l'objet de notre attention dans les méthodes présentées par la suite.

1.2. GÉNÉRALITÉS AUTOUR DE L'ESTIMATION D'ERREUR SUR LES SOLUTIONS ÉLÉMENTS FINIS

Dans la suite de ce chapitre, on note (u, σ) le couple de solutions *exactes* du problème (1.4), et (u_h, σ_h) une solution approchée obtenue par la méthode des éléments finis en déplacement associée à une triangulation Ω_h de Ω .

L'erreur de discrétisation associée au champ de déplacement u_h de la solution approchée est un élément de l'espace $\mathcal{C}a^0(\Omega)$ et s'écrit :

$$e = u - u_h \quad (1.21)$$

□ REMARQUE 1.4 On peut définir de manière similaire une erreur sur le champ de contraintes :

$$e^\sigma = \sigma - \sigma_h \quad (1.22)$$

1.2.1. Convergence de la méthode éléments finis

L'étude mathématique approfondie des méthodes éléments finis, depuis les années 1960, est à l'origine de plusieurs résultats de convergence [AZIZ et I. BABUSKA, 1972 ; CIARLET, 1978]. Ceux-ci reposent notamment sur le *lemme de Céa*, qui stipule (dans sa forme générale) l'existence d'une constante C indépendante de V_h telle que :

$$\|u - u_h\|_{L^2(\Omega)} \leq C \inf_{v_h \in V_h} \|u - v_h\|_{L^2(\Omega)}$$

où u_h est la solution d'un problème variationnel du type de (1.19) recherchée dans un espace d'approximation V_h . Sous réserve de conditions suffisantes de régularité sur la solution u , il est ensuite possible dans le cas général de majorer $\inf_{v_h \in V_h} \|u - v_h\|_{L^2(\Omega)} =$

$d(u, V_h)$ par un terme proportionnel à $C(u)h^\beta$ où $C(u)$ est indépendant de h , aboutissant au résultat suivant :

$$\|u - u_h\|_{L^2(\Omega)} \leq C(u)h^\beta \quad (\beta > 0)$$

La valeur de β dépend de nombreux paramètres inhérents à la nature du problème global (régularité de la solution, du domaine, des diverses conditions aux limites...) et des caractéristiques de la méthode d'approximation utilisée (choix de la triangulation, de la base d'approximation éléments finis...).

□ **REMARQUE 1.5** *Sous certaines hypothèses sur le choix de la triangulation éléments finis [ALLAIRE, 2008 ; CIARLET, 1978] usuellement satisfaites dans de nombreux problèmes et si $u \in H^{p+1}(\Omega)$, il est possible d'affiner le résultat de convergence précédent :*

$$\|u - u_h\|_{H^{p+1}(\Omega)} \leq Ch^p \|D^{p+1}u\|_{L^2(\Omega)}$$

où p désigne le degré maximal de la base de fonctions de forme éléments finis.

Estimation *a priori*

Les résultats précédents sont à l'origine des premières estimations de $\|e\|$, qualifiées d'estimations *a priori* car n'utilisant que les données d'entrée du problème d'approximation (taille de maille, conditions aux limites, propriétés de la solution exacte...). On retiendra notamment le résultat de majoration simplifié suivant :

$$\|e\| \leq Ch^q \tag{1.23}$$

où q désigne :

- pour une solution régulière, le degré maximal d'interpolation p de la base des fonctions de formes éléments finis ;
- pour une solution présentant des singularités, le minimum entre p et l'ordre de la singularité α ($\alpha = \frac{1}{2}$ dans le cas d'une fissure).

Les résultats précédents ne suffisent malheureusement pas pour estimer avec précision l'erreur de discrétisation globale e . Ils dépendent bien souvent de paramètres (regroupés sous la constante C) parfois difficiles à évaluer et fournissent des estimations très pessimistes. En particulier, il n'est pas possible d'accéder par le biais de ce type de méthodes à des contributions locales, pourtant nécessaires pour mener à bien des procédures d'adaptativité. Ce type de résultat (1.23) fournit toutefois des taux de convergence dont l'utilisation s'avère utile, par exemple, afin de déterminer au mieux les nouvelles tailles de maille requises pour atteindre un objectif de précision donné au sein des procédures de remaillage adaptatif.

1.2.2. Estimation *a posteriori*

Les différentes faiblesses dont souffrent les résultats de convergence des méthodes éléments finis lorsqu'ils sont utilisés comme estimateurs *a priori* ont conduit au développement de nouveaux outils plus à même d'estimer avec précision l'erreur de discrétisation et ses contributions locales. Partant du constat selon lequel les solutions approchées présentent bien souvent de nombreux défauts facilement observables, une nouvelle méthode d'estimation d'erreur fut développée à partir de la fin des années 1970. Qualifiée d'estimation *a posteriori*, elle exploite et quantifie les défauts des solutions approchées afin d'aboutir à une estimation plus précise de l'erreur par rapport à la solution réelle.

Avant d'entrer dans le détail des différentes méthodes d'estimation, qui feront l'objet des sections suivantes, mentionnons ci-après quelques éléments et propriétés de base utilisés par la suite.

1.2.2.1. Mise en équation de e

En injectant $u = e + u_h$ dans la formulation faible de l'équilibre (1.5), on montre que e est solution de l'équation suivante, appelée *équation des résidus* :

$$\int_{\Omega} \boldsymbol{\sigma}(e) : \boldsymbol{\varepsilon}(v) \, d\Omega = l(v) - \int_{\Omega} \boldsymbol{\sigma}(u_h) : \boldsymbol{\varepsilon}(v) = \mathcal{R}(v), \quad \forall v \in \mathcal{C}a^0(\Omega) \quad (1.24)$$

Cette équation fondamentale constitue le point de départ du développement d'un grand nombre de méthodes d'estimation d'erreur.

En particulier, pour $v_h \in \mathcal{C}a_h^0(\Omega)$, (1.24) permet d'obtenir la propriété d'orthogonalité classique suivante :

$$\int_{\Omega} \boldsymbol{\sigma}(e) : \boldsymbol{\varepsilon}(v_h) \, d\Omega = \mathcal{R}(v_h) = 0, \quad \forall v_h \in \mathcal{C}a_h^0(\Omega) \Leftrightarrow e \perp \mathcal{C}a_h^0(\Omega) \quad (1.25)$$

qui met en exergue la nécessité de rechercher toute solution e de (1.24), même approchée, dans un espace plus riche que l'espace éléments finis Ω_h utilisé pour la résolution du problème de départ. Ce nouvel espace, noté $\Omega_{\tilde{h}}$, est obtenu en pratique par h ou p raffinement de Ω_h . Nous y reviendrons par la suite.

1.2.2.2. Mesures de l'erreur de discrétisation

Calculer la valeur de e en tout point de Ω revient à résoudre un problème aussi complexe que celui de départ, et est donc hors de portée. Aussi, les estimateurs d'erreur s'attachent plutôt à évaluer une mesure pertinente η^{ex} , appelée *erreur vraie*, de e .

Mesures globales

Dans un premier cas, cette mesure peut être globale sur le domaine Ω et s'exprime généralement à l'aide de la norme énergétique (1.11) de e :

$$\eta^{ex} = \|e\|_{\mathbb{H},\Omega} = \left[\int_{\Omega} \mathbb{H}\varepsilon(e) : \varepsilon(e) d\Omega \right]^{1/2} \quad (1.26)$$

De part son sens physique fort, la norme énergétique est particulièrement adaptée au traitement des problèmes qui nous concernent, tout en étant équivalente aux normes de Sobolev usuelles. On définit alors pour chaque élément E_k du maillage Ω_h une contribution élémentaire à $\|e\|_{\mathbb{H},\Omega}$:

$$\eta_{E_k}^{ex} = \|e\|_{\mathbb{H},E_k} = \left[\int_{E_k} \mathbb{H}\varepsilon(e) : \varepsilon(e) d\Omega \right]^{1/2} \quad \text{avec} \quad \sum_{E_k \in \Omega_h} \|e\|_{\mathbb{H},E_k}^2 = \|e\|_{\mathbb{H},\Omega}^2 \quad (1.27)$$

□ **REMARQUE 1.6** Il est également possible de définir une mesure du même type sur l'écart entre les champs de contraintes exact σ et approché σ_h :

$$\eta^{ex,\sigma} = \|\epsilon\|_{\mathbb{H}^{-1},\Omega} = \|\sigma - \sigma_h\|_{\mathbb{H}^{-1},\Omega} \quad (1.28)$$

Dans le cas linéaire, notons l'égalité entre ces deux mesures : $\eta^{ex} = \eta^{ex,\sigma}$.

On définit par ailleurs une mesure relative η_{rel}^{ex} de η^{ex} , en normant par rapport à l'énergie de déformation $\mathcal{E}d(u)$ de la solution exacte (1.7). Notons qu' $\mathcal{E}d(u)$ n'est naturellement pas accessible directement, mais qu'en vertu de (1.25), on a :

$$\mathcal{E}d(u) = \mathcal{E}d(u_h) + \frac{1}{2} \|e\|_{\mathbb{H},\Omega}^2$$

d'où une expression de η_{rel}^{ex} :

$$\eta_{rel}^{ex} = \frac{\|e\|_{\mathbb{H},\Omega}}{\sqrt{2\mathcal{E}d(u_h) + \|e\|_{\mathbb{H},\Omega}^2}} \quad (1.29)$$

et des contributions élémentaires η_{rel,E_k}^{ex} :

$$\eta_{rel,E_k}^{ex} = \frac{\|e\|_{\mathbb{H},E_k}}{\sqrt{2\mathcal{E}d(u_h) + \|e\|_{\mathbb{H},\Omega}^2}} \quad (1.30)$$

Mesures locales sur des quantités d'intérêt

Les différentes mesures présentées ci-dessus s'attachent à évaluer une erreur *globale* sur le domaine Ω et ses contributions élémentaires. Il est également possible de définir une mesure *locale* de l'erreur à travers la définition d'une quantité d'intérêt $I(u)$ (déplacement en un point de la structure, contrainte de Von-Mises locale...). L'erreur exacte sur la quantité d'intérêt est alors donnée par $I(u) - I(u_h)$.

1.2.3. Qualité et performances d'un estimateur d'erreur

Le calcul de η^{ex} étant hors de portée, le principe des différentes méthodes d'estimation développées consiste à obtenir une mesure approchée η de η^{ex} . Celle-ci ne peut cependant aller sans la connaissance de la qualité de l'approximation ainsi réalisée, ou, en d'autres termes, de la qualité du processus d'estimation d'erreur. Une manière usuelle permettant de quantifier cette qualité repose sur la définition d'un *indice d'efficacité* γ par :

$$\gamma = \frac{\eta}{\eta^{ex}} \quad (1.31)$$

Il en découle qu'un estimateur sera d'autant plus précis que la valeur de γ sera proche de 1, et il sera dit *asymptotiquement exact* ou *consistant* si :

$$\lim_{h \rightarrow 0} \gamma = 1 \quad (1.32)$$

De plus, dans un cadre d'ingénierie, il est fortement souhaitable d'obtenir une borne supérieure de l'erreur *vraie*, ce qui se traduit par la condition $\gamma \geq 1$. Dans ce cas, l'estimateur associé est dit fournir une estimation *garantie* de l'erreur *vraie*.

□ **REMARQUE 1.7** Ajoutons qu'un estimateur η sera dit fournir une mesure équivalente de l'erreur s'il existe un couple de constantes (C_1, C_2) indépendant de la solution telles que :

$$C_2 \eta \leq \eta^{ex} \leq C_1 \eta \quad (1.33)$$

En pratique, le calcul de γ s'effectue en prenant pour solution exacte une solution $u_{\tilde{h}}$ calculée sur un maillage $\Omega_{\tilde{h}}$ très fin. On a alors :

$$\begin{aligned} \eta^{ex} &= \|u - u_h\|_{\mathbb{H}, \Omega} = \left[\|u\|_{\mathbb{H}, \Omega}^2 + \|u_h\|_{\mathbb{H}, \Omega}^2 - 2 \int_{\Omega} \boldsymbol{\sigma}(u) : \boldsymbol{\varepsilon}(u_h) d\Omega \right]^{1/2} \\ &= \sqrt{\|u\|_{\mathbb{H}, \Omega}^2 - \|u_h\|_{\mathbb{H}, \Omega}^2} \quad \text{en vertu de (1.25)} \\ &\approx \sqrt{\|u_{\tilde{h}}\|_{\mathbb{H}, \Omega}^2 - \|u_h\|_{\mathbb{H}, \Omega}^2} \end{aligned}$$

L'évaluation de la qualité des estimateurs d'erreur a fait par le passé l'objet de plusieurs études générales [I. BABUSKA, T. STROUBOULIS et C. S. UPADHYAY, 1997 ; I BABUŠKA, T STROUBOULIS et C. UPADHYAY, 1994 ; I. BABUŠKA, T. STROUBOULIS et al., 1994] portant notamment sur leur comportement vis à vis de la forme du maillage, de la régularité de la solution exacte...

Notons enfin qu'en plus de sa qualité, un estimateur d'erreur peut être également évalué sur ses performances en matière de coût de calcul. En ce sens, les procédures associées ne doivent introduire qu'un coût numérique additionnel le plus faible possible. Malheureusement, nombre d'entre elles induisent souvent un sur-coût de calcul assez important et il est systématiquement nécessaire d'effectuer un compromis entre précision et coût de calcul additionnel.

1.3. ESTIMATEURS D'ERREUR UTILISANT LE CONCEPT D'ANALYSE DUALE

Faisant suite aux travaux de Fraeijns de Veubeke [VEUBEKE, 1965] sur le développement des modèles équilibres au sein des méthodes éléments finis, l'analyse duale constitue, d'un point de vue historique, la première réponse à la problématique de l'estimation d'erreur a posteriori. Elle consiste à utiliser les propriétés des solutions issues de deux analyses éléments finis, l'une reposant sur un modèle déplacement, l'autre sur un modèle équilibre, afin d'évaluer ou d'encadrer l'erreur commise.

1.3.1. Encadrement de l'énergie de déformation

Les premiers développements issus de ce concept [VEUBEKE, 1964] ont été réalisés dans le cadre des hypothèses suivantes :

- homogénéité de l'un des types de conditions aux limites du problème considéré ;
- utilisation d'une procédure de Rayleigh-Ritz lors de la recherche des solutions approchées du problème variationnel.

Dans le cas de problèmes à conditions aux limites de Dirichlet homogènes ($u_d = 0$ sur $\partial_u \Omega$), il est alors possible d'obtenir l'encadrement énergétique suivant :

$$\|\sigma_{h_{CA}}\|_{\mathbb{H}^{-1},\Omega} \leq \|\sigma\|_{\mathbb{H}^{-1},\Omega} \leq \|\sigma_{h_{SA}}\|_{\mathbb{H}^{-1},\Omega}$$

en notant $\sigma_{h_{CA}}$ le champ de contraintes approché issu du modèle en déplacement (1.5) et $\sigma_{h_{SA}}$ celui issu du modèle équilibre provenant de (1.9).

De même, pour des problèmes à conditions en effort nulles ($f = 0$ sur $\partial_f \Omega$ et $g = 0$ sur Ω), on obtient un encadrement inversé du type :

$$\|\sigma_{h_{SA}}\|_{\mathbb{H}^{-1},\Omega} \leq \|\sigma\|_{\mathbb{H}^{-1},\Omega} \leq \|\sigma_{h_{CA}}\|_{\mathbb{H}^{-1},\Omega}$$

Ces deux encadrement permettent, sous les hypothèses ci-dessus, d'obtenir une estimation de l'erreur commise du fait de la discrétisation éléments finis par comparaison des énergies complémentaires associées aux solutions des deux approches en déplacement et en effort :

$$\eta = \left| \|\sigma_{h_{SA}}\|_{\mathbb{H}^{-1},\Omega}^2 - \|\sigma_{h_{CA}}\|_{\mathbb{H}^{-1},\Omega}^2 \right|^{1/2} \quad (1.34)$$

Bien que fournissant un encadrement garanti de l'énergie complémentaire, cette méthode fut peu utilisée par la suite. La raison principale, en sus de la nécessité d'une double analyse éléments finis forcément plus coûteuse, réside probablement dans la trop grande restriction des hypothèses de départ relatives à la nature des conditions aux limites. Soulignons également qu'à l'époque, le manque de développements relatifs à la discrétisation des modèles équilibres rendait leur implantation numérique particulièrement difficile.

1.3.2. Analyse duale avec extension des conditions aux limites

Afin d'obvier à la trop grande restriction d'application de l'analyse duale telle qu'elle fut énoncée par Fraeijs de Veubeke, la méthode précédente fut revisitée [J. DEBONGNIE, ZHONG et P. BECKERS, 1995] et étendue à un cadre de travail permettant l'utilisation de conditions aux limites générales de type Dirichlet/Neumann tout en s'affranchissant de la nécessité d'une approche de type Rayleigh-Ritz lors de la détermination des solutions approchées. Utilisant les propriétés de minimisation des approches variationnelles en déplacement et en contraintes et notamment les résultats auxiliaires présentés en section 1.1.2, la nouvelle méthode constitue un cas particulier d'application de la propriété (1.17) avec :

$$\begin{aligned} v &= u_{h_{CA}} \in \mathcal{C}a(\Omega) \\ \tau &= \sigma_{h_{SA}} \in \mathcal{S}a(\Omega) \end{aligned}$$

Il vient alors :

$$\|\sigma - \sigma_{h_{SA}}\|_{\mathbb{H}^{-1},\Omega}^2 + \|u - u_{h_{CA}}\|_{\mathbb{H},\Omega}^2 = 2[\mathcal{E}p(u_{h_{CA}}) + \mathcal{E}c(\sigma_{h_{SA}})]$$

En définissant l'estimateur d'erreur global comme :

$$\eta = \{2[\mathcal{E}p(u_{h_{CA}}) + \mathcal{E}c(\sigma_{h_{SA}})]\}^{1/2} \quad (1.35)$$

et notant $\|e\|_{\mathbb{H}^{-1},\Omega}$ l'erreur sur le champ de contrainte, on obtient ainsi des bornes garanties sur $\|e\|_{\mathbb{H},\Omega}$ et $\|e\|_{\mathbb{H}^{-1},\Omega}$ de la forme :

$$\|e\|_{\mathbb{H},\Omega} \leq \eta \quad (1.36)$$

$$\|e\|_{\mathbb{H}^{-1},\Omega} \leq \eta \quad (1.37)$$

□ **REMARQUE 1.8** Lorsque les conditions aux limites du problème vérifient les hypothèses des développements de Fraeijs de Veubeke (sec. 1.3.1), on retrouve l'estimateur défini par (1.34) à partir de (1.35). En ce sens, la méthode ici présentée constitue une extension des travaux de Fraeijs de Veubeke centrée non pas sur l'encadrement de bornes énergétiques mais directement sur celui de l'erreur exacte.

1.3.3. Commentaires

La principale difficulté dans la mise en œuvre de cette approche réside dans l'obtention du champ approché $\sigma_{h_{SA}}$ via la résolution d'un problème variationnel en effort. En pratique, ces approches sont devenues accessibles depuis le développement d'éléments spéciaux dédiés aux formulations équilibres [KEMPENEERS, J.-F. DEBONGNIE et Pierre BECKERS, 2009 ; MOITINHO DE ALMEIDA et ALMEIDA PEREIRA, 1996] destinés à s'intégrer plus facilement dans les codes éléments finis existants. Soulignons également que l'augmentation constante des performances des calculateurs rend désormais envisageable de potentielles doubles analyses.

□ **REMARQUE 1.9** Dans les cas linéaires, notons que l'estimateur présenté en (1.35) est très proche de celui défini par l'erreur en relation de comportement (1.13) (cf. partie 1.5) à ceci près que les procédés de reconstruction des champs sont différents. En ce sens, l'analyse duale peut être vue comme un cas particulier d'application des méthodes utilisant l'erreur en relation de comportement dans lequel le champ de contraintes approché admissible $\sigma_{h_{SA}}$ provient de la résolution approchée d'un problème variationnel en efforts. Partageant les mêmes fondements théoriques, les deux approches fournissent des outils vérifiant les mêmes propriétés de majoration garantie de l'erreur exacte.

Notons enfin que cette famille est relativement pauvre en développements portant sur les problèmes non-linéaires. Cependant, nous pouvons mentionner [KEMPENEERS, J.-F. DEBONGNIE et Pierre BECKERS, 2009] une extension de ce type d'estimateurs aux problèmes d'élasto-plasticité à l'aide d'une forme simplifiée de l'erreur au sens de Drucker qui sera brièvement présentée en partie 1.5.3). Notons que la mesure obtenue semble dépourvue de propriété de majoration stricte de l'erreur vraie.

1.4. ESTIMATEURS D'ERREUR PAR RÉSIDUS IMPLICITES

Initialement introduit par les travaux de Babuska et Rheinboldt [I. BABUŠKA et RHEINBOLDT, 1978b], le principe de base des estimateurs sous-jacents repose sur l'exploitation des conditions aux limites f et g ainsi que la solution éléments finis u_h à partir de l'équation des résidus (1.24). Cette dernière traduisant, en mécanique, le non-respect de l'équilibre sur la structure, la famille d'estimateurs associée est également connue sous le nom de *méthodes en résidus d'équilibre*. Pour en illustrer le principe général, repartons de l'expression de (1.24) :

$$\int_{\Omega} \boldsymbol{\sigma}(e) : \boldsymbol{\varepsilon}(v) \, d\Omega = \mathcal{R}(v) \quad \forall v \in \mathcal{C}a^0(\Omega)$$

– d'une part, on peut déduire de ce qui précède :

$$\|e\|_{\mathbb{H},\Omega} = \frac{1}{\|e\|_{\mathbb{H},\Omega}} \int_{\Omega} \boldsymbol{\sigma}(e) : \boldsymbol{\varepsilon}(e) \, d\Omega = \frac{\mathcal{R}(e)}{\|e\|_{\mathbb{H},\Omega}} \leq \sup_{v \in \mathcal{C}a^0(\Omega)} \frac{\mathcal{R}(v)}{\|v\|_{\mathbb{H},\Omega}}$$

– d'autre part, par continuité de la forme bilinéaire :

$$|\mathcal{R}(v)| = \left| \int_{\Omega} \boldsymbol{\sigma}(e) : \boldsymbol{\varepsilon}(v) \, d\Omega \right| \leq \|e\|_{\mathbb{H},\Omega} \|v\|_{\mathbb{H},\Omega} \quad \forall v \in \mathcal{C}a^0(\Omega)$$

d'où le résultat suivant :

$$\eta^{ex} = \|e\|_{\mathbb{H},\Omega} = \sup_{v \in \mathcal{C}a^0(\Omega)} \frac{\mathcal{R}(v)}{\|v\|_{\mathbb{H},\Omega}} \quad (1.38)$$

En vertu de ce qui précède, il apparaît que l'évaluation de $\|e\|_{\mathbb{H},\Omega}$ est directement reliée à celle d'une norme duale du résidu \mathcal{R} dans $H^{-1}(\Omega)$. Cette mesure n'étant pas accessible

directement, le cœur des méthodes associées consiste à calculer une approximation η de η^{ex} à travers l'évaluation d'un ensemble de quantités intermédiaires facilement accessibles. Celles-ci peuvent être évaluées directement, ce qui est le cas pour les premières méthodes associées et qualifiées de méthodes *explicites* (cf. 1.4.1). Cependant, depuis le début des années 1980, les méthodes reposant sur l'évaluation des résidus d'équilibre reposent préférentiellement sur la résolution de séquences de problèmes de petite taille, d'où l'appellation *implicite* donnée à la famille d'estimateurs associés (cf. 1.4.1 et 1.4.2).

1.4.1. Un premier résultat explicite

En exprimant l'équation des résidus sous la forme d'une somme de contributions élémentaires, puis en effectuant une intégration par partie, (1.24) peut s'écrire sous la forme :

$$\int_{\Omega} \boldsymbol{\sigma}(e) : \boldsymbol{\varepsilon}(v) \, d\Omega = \sum_{E \in \mathcal{E}_h} \int_E r_E v \, dE + \sum_{\Gamma \in \mathcal{F}_h} \int_{\Gamma} r_{\Gamma} v \, d\Gamma \quad \forall v \in \mathcal{C}a^0(\Omega) \quad (1.39)$$

où \mathcal{E}_h et \mathcal{F}_h désignent respectivement l'ensemble des éléments et des faces (en dimension 3) ou des bords (en dimension 2) associés au maillage Ω_h . (1.39) fait intervenir la somme de contributions liées :

– d'une part, au *résidu intérieur* défini sur E par :

$$r_E = \operatorname{div}(\boldsymbol{\sigma}_h) + f \quad (1.40)$$

– d'autre part, au *résidu de frontière* défini sur Γ par :

$$r_{\Gamma} = \begin{cases} -(\boldsymbol{\sigma}_h|_E \cdot \boldsymbol{n}_E + \boldsymbol{\sigma}_h|_{E'} \cdot \boldsymbol{n}_{E'}) & (\Gamma \in \partial E \cap \partial E') \\ g - \boldsymbol{\sigma}_h|_E \cdot \boldsymbol{n}_E & (\Gamma \in \partial E \cap \partial_f \Omega) \\ -\boldsymbol{\sigma}_h|_E \cdot \boldsymbol{n}_E & (\Gamma \in \partial E \cap \partial_u \Omega) \end{cases} \quad (1.41)$$

En introduisant un opérateur d'interpolation $\Pi_h : \mathcal{C}a(\Omega) \longrightarrow \mathcal{C}a_h(\Omega)$ [VERFÜRTH, 1997], puis en utilisant la propriété d'orthogonalité (1.25), il vient :

$$\int_{\Omega} \boldsymbol{\sigma}(e) : \boldsymbol{\varepsilon}(v) \, d\Omega = \sum_{E \in \mathcal{E}_h} \int_E r_E (v - \Pi_h v) \, dE + \sum_{\Gamma \in \mathcal{F}_h} \int_{\Gamma} r_{\Gamma} (v - \Pi_h v) \, d\Gamma \quad (1.42)$$

$$\leq \sum_{E \in \mathcal{E}_h} \|r_E\|_{L^2(E)} \|v - \Pi_h v\|_{L^2(E)} + \sum_{\Gamma \in \mathcal{F}_h} \|r_{\Gamma}\|_{L^2(\Gamma)} \|v - \Pi_h v\|_{L^2(\Gamma)} \quad (1.43)$$

par application de l'inégalité de Cauchy-Schwartz. Par la suite, en choisissant Π_h de telle manière à vérifier les inégalités de Poincaré suivantes :

$$\begin{aligned} \|v - \Pi_h v\|_{L^2(E)} &\leq C_1 h_E \|v\|_{H^1(\tilde{\mathcal{E}}_h(E))} \\ \|v - \Pi_h v\|_{L^2(\Gamma)} &\leq C_2 h_{\Gamma}^{1/2} \|v\|_{H^1(\tilde{\mathcal{E}}_h(\Gamma))} \end{aligned}$$

où $\tilde{\mathcal{E}}_h(E)$ et $\tilde{\mathcal{E}}_h(\Gamma)$ désignent l'ensemble des éléments partageant au moins un point avec E et Γ , respectivement, il vient enfin après quelques manipulations supplémentaires :

$$\int_{\Omega} \boldsymbol{\sigma}(e) : \boldsymbol{\varepsilon}(v) \, d\Omega \leq C \|v\|_{\mathbb{H},\Omega} \left[\sum_{E \in \mathcal{E}_h} h_E^2 \|r_E\|_{L^2(E)}^2 + \sum_{\Gamma \in \mathcal{F}_h} h_{\Gamma} \|r_{\Gamma}\|_{L^2(\Gamma)}^2 \right]^{1/2} \quad \forall v \in \mathcal{C}a^0(\Omega)$$

Pour $v = e$, on en déduit donc une majoration de la norme de l'erreur par un terme faisant intervenir la somme des résidus précédemment définis :

$$\|e\|_{\mathbb{H},\Omega} \leq \eta = C \left[\sum_{E \in \mathcal{E}_h} h_E^2 \|r_E\|_{L^2(E)}^2 + \sum_{\Gamma \in \mathcal{F}_h} h_{\Gamma} \|r_{\Gamma}\|_{L^2(\Gamma)}^2 \right]^{1/2} \quad (1.44)$$

□ **REMARQUE 1.10** On peut alors extraire du membre de droite de (1.44) des contributions élémentaires η'_E , utiles pour des procédures adaptatives :

$$\eta'_E{}^2 = h_E^2 \|r_E\|_{L^2(E)}^2 + \frac{1}{2} h_{\Gamma} \|r_{\Gamma}\|_{L^2(\partial E)}^2 \quad \text{vérifiant } C \sum_{E \in \mathcal{E}_h} \eta'_E{}^2 = \eta^2$$

□ **REMARQUE 1.11** D'autre part, il est possible de prendre en compte les erreurs liées à l'interpolation des chargements f et g , conduisant à une majoration de la forme :

$$\|e\|_{\mathbb{H},\Omega} \leq C \left[\eta^2 + \sum_{E \in \mathcal{E}_h} h_E^2 \|f - \Pi_h f\|_{L^2(E)}^2 + \sum_{\Gamma \in \mathcal{F}_h} h_{\Gamma} \|g - \Pi_h g\|_{L^2(\Gamma)}^2 \right]^{1/2}$$

□ **REMARQUE 1.12** Enfin, dans [VERFÜRTH, 1997], une propriété de borne inférieure est également démontrée, faisant intervenir, comme dans la prise en compte des erreurs d'interpolation, les grandeurs $\|f - \Pi_h f\|_{L^2(E)}^2$ et $\|g - \Pi_h g\|_{L^2(\Gamma)}^2$.

Les premiers estimateurs du type de (1.44) furent introduits dans [I. BABUŠKA et RHEINBOLDT, 1979]. Des détails complets sur leur analyse peuvent être notamment trouvés dans [M. AINSWORTH et J. ODEN, 1997 ; VERFÜRTH, 1996]. Il est dit explicites car ne font intervenir que le calcul direct de la norme des résidus intérieurs et de frontières et sont donc simples à mettre en œuvre. Malheureusement, la constante C , qui ne dépend que des caractéristiques du maillage, est souvent inconnue. Il est parfois possible d'en évaluer numériquement une approximation, mais cela conduit souvent à des estimations d'erreur extrêmement pessimistes. D'autre part, la pondération adéquate des contributions internes et de frontières dans l'évaluation de η reste une question ouverte. Pour ces raisons, cet estimateur reste peu utilisé en pratique et lui sont généralement préférées les familles d'estimateurs implicites présentées dans la suite de cette section.

1.4.2. Estimateurs par patches d'éléments

Cet estimateur fut initialement développé dans [I. BABUŠKA et RHEINBOLDT, 1978a] et appelé « *subdomain residual method* ». L'idée générale sous-jacente consiste à partitionner le domaine Ω , puis à rechercher une estimation η à travers la résolution de problèmes locaux de petite taille sur chacun des sous-domaines ainsi générés.

1.4.2.1. Principes de base

En pratique, l'étape de partitionnement de Ω s'effectue sur la base des fonctions de forme éléments finis de Lagrange de degré 1 aux nœuds sommets du maillage. Rappelons qu'une telle base constitue une partition de l'unité du domaine, et vérifie donc la condition :

$$\sum_{i \in \mathcal{S}_h} \varphi_i(x) = 1 \quad \forall x \in \Omega \quad (1.45)$$

où φ_i désigne la fonction de forme de la base correspondant au nœud i et \mathcal{S}_h l'ensemble des nœuds sommets du maillage.

En injectant (1.45) dans (1.24), il vient alors :

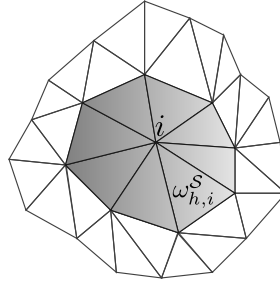
$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \boldsymbol{\sigma}(e) : \varepsilon(v) \, d\Omega &= \int_{\Omega} \boldsymbol{\sigma}(e) : \varepsilon \left(v \sum_{i \in \mathcal{S}_h} \varphi_i \right) \, d\Omega \\ &= \sum_{i \in \mathcal{S}_h} \int_{\Omega} \boldsymbol{\sigma}(e) : \varepsilon(v \varphi_i) \, d\Omega = \sum_{i \in \mathcal{S}_h} \mathcal{R}(v \varphi_i), \quad \forall v \in \mathcal{C}a^0(\Omega) \end{aligned}$$

Par la suite, la première méthode développée consiste à déterminer des contributions ξ_i solutions de problèmes aux conditions aux limites de Dirichlet homogènes posés sur chacun des domaines $\omega_{h,i}^S$ (cf. fig. 1.2) supports des fonctions φ_i (notons au passage que ces sous-domaines forment une partition recouvrante de Ω) :

$$\begin{aligned} \text{Trouver } \xi_i \in \mathcal{C}a_{\Gamma}^0(\omega_{h,i}^S) \text{ vérifiant :} \\ \int_{\omega_{h,i}^S} \boldsymbol{\sigma}(\xi_i) : \varepsilon(v) \, d\Omega = \mathcal{R}(v), \quad \forall v \in \mathcal{C}a_{\Gamma}^0(\omega_{h,i}^S) \end{aligned} \quad (1.46)$$

L'estimateur global est alors obtenu en sommant les mesures des contributions locales précédentes :

$$\eta = \left[\sum_{i \in \mathcal{S}_h} \eta_i^2 \right]^{1/2} = \left[\sum_{i \in \mathcal{S}_h} \|\xi_i\|_{\mathbb{H}, \omega_{h,i}^S}^2 \right]^{1/2} \quad (1.47)$$



□ FIG. 1.2. Exemple de sous-domaine $\omega_{h,i}^S$ associé au nœud i

On peut prouver (cf. [M. AINSWORTH et J. ODEN, 1997]) que η vérifie un encadrement du type de (1.33), ce qui en fait une mesure équivalente de η^{ex} . Cependant, il fournit un résultat de majoration de l'erreur modulo une constante C parfois difficilement évaluable, tout comme dans le cas des résultats explicites précédemment présentés.

Cette méthode souffre également de plusieurs inconvénients qui ont limité son utilisation par le passé. En toute rigueur, elle nécessite de résoudre exactement les équations (1.46) alors qu'on ne peut en pratique en calculer que des approximations¹. D'autre part, elle ne fournit pas de borne supérieure garantie de l'erreur mais, comme dans le cas des estimateurs explicites, des résultats de majorations faisant intervenir des constantes externes souvent inconnues. Toutefois, son principe fut revisité durant la dernière décennie, donnant naissance à une nouvelle classe de méthodes appelées méthodes « flux-free » qui solutionnent certains des défauts susmentionnés.

1.4.2.2. Estimateurs de type "flux-free"

L'un des défauts de la méthode précédente réside dans l'imposition de conditions aux limites de Dirichlet homogènes rendant impossible l'obtention d'une borne supérieure garantie de l'erreur [Pedro DIEZ, Nuria PARES et Antonio HUERTA, 2003]. Dans [CARSTENSEN et FUNKEN, 2000 ; MORIN, NOCHETTO et SIEBERT, 2002 ; PRUDHOMME, NOBILE et al., 2003], les auteurs revisitent la formulation des problèmes locaux en utilisant les propriétés de la partition de l'unité [MELENK et I BABUSKA, 1996] de manière à s'affranchir du calcul des flux à imposer au bord des sous-domaines (d'où l'appellation « flux-free »). Il en résulte une série de problèmes auto-équilibrés. Initialement dérivée pour des problèmes de dimension 1, cette méthode fut ensuite étendue aux problèmes mécaniques de dimension 2 et 3 par [N. PARES, P. DIEZ et A. HUERTA, 2006].

A partir de (1.24) et (1.25), en introduisant un opérateur π_h de projection sur $\mathcal{C}a_h(\Omega)$, il

1. Nous verrons tout au long de ce chapitre que ce point précis affecte de nombreuses méthodes.

vient :

$$\int_{\Omega} \boldsymbol{\sigma}(e) : \varepsilon(v) d\Omega = \sum_{i \in \mathcal{S}_h} \mathcal{R}(\varphi_i(v - \pi_h v)) \quad \forall v \in \mathcal{C}a^0(\Omega)$$

La méthode consiste alors à résoudre les problèmes locaux suivants sur chacun des patchs d'éléments $\omega_{h,i}^{\mathcal{S}}$ au nœud i introduits par la partition de l'unité :

Trouver $\xi_i \in \mathcal{C}a^0(\omega_{h,i}^{\mathcal{S}})$ vérifiant :

$$\int_{\omega_{h,i}^{\mathcal{S}}} \boldsymbol{\sigma}(\xi_i) : \varepsilon(v) d\Omega = \mathcal{R}(\varphi_i(v - \pi_h v)) \quad \forall v \in \mathcal{C}a^0(\omega_{h,i}^{\mathcal{S}}) \quad (1.48)$$

La mesure estimée η de l'erreur est ensuite calculée à l'aide de l'expression (1.47).

L'un des apports majeurs de cette formulation réside dans l'obtention d'une borne supérieure de η^{ex} de la forme :

$$\|e\|_{\mathbb{H},\Omega} \leq \eta \quad (1.49)$$

En effet, en introduisant la solution globale $\xi = \sum_{i \in \mathcal{S}_h} \xi_i$, et en remarquant que :

$$\int_{\Omega} \boldsymbol{\sigma}(\xi) : \varepsilon(e) d\Omega = \sum_{i \in \mathcal{S}_h} \mathcal{R}(\varphi_i(e - \pi_h e)) = \int_{\Omega} \boldsymbol{\sigma}(e) : \varepsilon(e) d\Omega \quad \forall v \in \mathcal{C}a^0(\Omega)$$

on obtient finalement :

$$\begin{aligned} 0 &\leq \|e - \xi\|_{\mathbb{H},\Omega}^2 = \|e\|_{\mathbb{H},\Omega}^2 + \|\xi\|_{\mathbb{H},\Omega}^2 - 2 \int_{\Omega} \boldsymbol{\sigma}(\xi) : \varepsilon(e) d\Omega \\ &\leq \|\xi\|_{\mathbb{H},\Omega}^2 - \|e\|_{\mathbb{H},\Omega}^2 \end{aligned}$$

Ici, l'introduction de l'opérateur de projection π_h est fondamental pour s'assurer de la solvabilité des problèmes locaux (1.48) en dimension 2 ou 3. Le lecteur pourra trouver les détails associés dans [ibid.].

□ **REMARQUE 1.13** Les premiers papiers relatifs à cette méthode utilisent une forme bilinéaire pondérée de la forme :

$$\int_{\omega_{h,i}^{\mathcal{S}}} \phi_i \boldsymbol{\sigma}(e) : \varepsilon(v) d\Omega$$

dans la définition des problèmes locaux (1.48) afin de tenir compte de la partition de l'unité. A titre d'exemple, dans [PRUDHOMME, NOBILE et al., 2003], les fonctions de forme φ_i sont choisies comme pondérations. L'estimateur ainsi construit, bien que constituant également une borne supérieure de l'erreur, semble toutefois moins précis que son homologue issu des problèmes (1.48) [N. PARES, P. DIEZ et A. HUERTA, 2006].

1.4.3. Estimateurs par éléments

Ces méthodes ont été initialement introduites dans [DEMLOWICZ, J. ODEN et T. STROUBOULIS, 1984] sous le nom d'« *élément residual methods* » et rentrent dans la catégorie des méthodes implicites. Leur objectif consiste à rechercher une solution approchée de (1.24) en remplaçant le problème global par un ensemble de problèmes locaux aux conditions aux limites de Neumann posés sur chacun des éléments du maillage éléments finis initial Ω_h .

1.4.3.1. Principes de base

Le fondement de la méthode consiste ainsi à rechercher un ensemble de solutions ξ_E de problèmes locaux de la forme :

Trouver $\xi_E \in \mathcal{C}a^0(E)$ vérifiant :

$$\int_E \boldsymbol{\sigma}(\xi_E) : \boldsymbol{\varepsilon}(v) \, d\Omega = \mathcal{R}_E(v) + \sum_{\Gamma \in \mathcal{F}_h^\mathcal{E}(E)} \int_\Gamma F_E v \, d\Gamma \quad \forall v \in \mathcal{C}a^0(E) \quad (1.50)$$

où $\Gamma \in \mathcal{F}_h^\mathcal{E}(E)$ désigne l'ensemble des faces (ou bords en dimension 2) de l'élément E , \mathcal{R}_E la restriction du résidu à l'élément E et F_E la donnée des conditions aux limites de Neumann sur le bord ∂E . L'estimateur d'erreur associé est ensuite déterminé à partir des solutions locales d'une manière analogue à 1.4.2 à travers la relation :

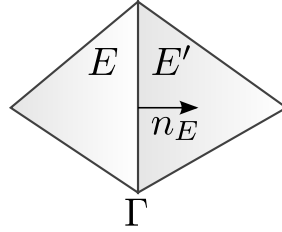
$$\eta = \left[\sum_{E \in \mathcal{E}_h} \eta_E^2 \right]^{1/2} = \left[\sum_{E \in \mathcal{E}_h} \|\xi_E\|_{\mathbb{H},E}^2 \right]^{1/2} \quad (1.51)$$

Dès lors, il apparaît que le point clé de la méthode réside dans un choix approprié de F_E de manière à approcher au mieux le problème global de départ (1.24). Un choix simple consiste à imposer sur ∂E la valeur moyenne des efforts de part et d'autre des bords des éléments, orienté par rapport à n_E (fig. 1.3) :

$$F_{E|\Gamma} = \langle \sigma_{h|\Gamma} \rangle_E = \frac{1}{2} [\sigma_{h|E} - \sigma_{h|E'}] \cdot n_E \approx \langle \sigma_{|\Gamma} \rangle_E \quad (\text{où } \Gamma = \partial E \cap \partial E')$$

On a bien évidemment dans tous les cas $F_{E|\Gamma} = -F_{E'|\Gamma}$ sur $\Gamma = \partial E \cap \partial E'$.

Cette méthode, quoique simple à mettre en œuvre, ne garantit cependant pas la solvabilité des problèmes locaux (1.50). A ce stade, deux manières permettent de contourner le problème. La première consiste à choisir F_E de manière à assurer l'existence des solutions de (1.50). Nous reviendrons sur les détails de cette méthode dans la suite de cette section. La seconde consiste à rechercher des solutions dans un sous-espace régularisant de $\mathcal{C}a^0(E)$. Cet espace peut être, dans le cas d'éléments finis de degré 1, l'espace



□ FIG. 1.3. Exemple de bord Γ et de normale n_E

des *fonctions bulles* [BANK et WEISER, 1985], c'est-à-dire des fonctions de formes de degré supérieur à 1 et nulles au bord des éléments.

Cette seconde solution peut dans certains cas conduire à des évaluations pertinentes de l'erreur. Notamment, l'estimateur associé a été analysé comme consistant lorsqu'un espace d'approximation constitué de fonctions de degré impair sur la base d'éléments quadrangles était utilisé. D'une manière générale, la difficulté revient dans le choix d'un espace de régularisation supprimant les modes parasites provenant du caractère mal posé des problèmes (1.50). Pour plus de détails, le lecteur pourra consulter [M. AINSWORTH, 1996] parmi les diverses analyses menées. Ajoutons cependant que tout comme pour 1.4.1, ce type de méthodes ne peut fournir une borne supérieure stricte.

1.4.3.2. Méthode des résidus équilibrés

Initialement introduite dans [BANK et WEISER, 1985] afin d'obvier aux défauts de l'approche précédente, cette méthode consiste à choisir les champs F_E de manière à assurer la solvabilité des problèmes locaux (1.50). En ce sens, les nouveaux champs imposés, notés \hat{F}_E , seront dit *équilibrés*. La formulation mathématique de l'estimateur donnée dans [M. AINSWORTH et J. ODEN, 1993] repose sur la minimisation de la fonctionnelle associée à (1.24) dans l'espace $\mathcal{C}_h^{disc}(\Omega)$ des champs discontinus par éléments (cf. (1.56)). Des conditions de continuité inter-éléments sont ensuite imposées sous forme de multiplicateurs de Lagrange reliés aux champs \hat{F}_E . Il est alors démontré que sous réserve de l'équilibrage local des quantités \hat{F}_E , l'estimateur donné par (1.51) fournit une borne supérieure de l'erreur :

$$\|e\|_{\mathbb{H},\Omega} \leq \eta \quad (1.52)$$

Notons que cette propriété est valable quelle que soit la forme de \hat{F}_E sous réserve que le multiplicateur de Lagrange associé soit compatible avec la condition de continuité inter-éléments. Ajoutons qu'une approche similaire, dénommée « *hybrid-flux method* », fut développée dans [PARASCHIVOIU et PATERA, 1998] pour les problèmes dont la forme bilinéaire associée est non-symétrique. Nous reviendrons brièvement sur les principes de cette approche en début de chapitre 3 (sec. 3.1.3).

La première méthode de construction de \hat{F}_E fut développée dans le cadre des estimateurs d'erreur par la relation de comportement [P. LADEVEZE et LEGUILLON, 1983]. Nous la détaillerons dans la partie 1.5.2.1. Dans [M. AINSWORTH et J. ODEN, 1993], une méthode dite « *flux splitting* », consiste à rechercher \hat{F}_E sous la forme :

$$\hat{F}_{E|\Gamma} = \langle \sigma_{h|\Gamma} \rangle_E + \alpha_\Gamma \llbracket \sigma_{h|\Gamma} \rrbracket_E \quad (1.53)$$

où $\alpha_\Gamma : \Gamma \rightarrow \mathbb{R}$ est une fonction affine et $\llbracket \sigma_{h|\Gamma} \rrbracket_E$ désigne le saut de σ_h au passage entre deux éléments orienté selon n_E :

$$\llbracket \sigma_{h|\Gamma} \rrbracket_E = \frac{1}{2} [\sigma_{h|E} - \sigma_{h|E'}] \cdot n_E \quad (\text{où } \Gamma = \partial E \cap \partial E')$$

La vérification de la condition ci-dessous permet par la suite la détermination des fonctions α_Γ :

$$\mathcal{R}_E(v^*) + \sum_{\Gamma \in \mathcal{F}_h^\varepsilon(E)} \int_\Gamma F_E v^* d\Gamma = 0 \quad \forall v^* \in \text{CaR}^0(E)$$

où $\text{CaR}^0(E)$ désigne l'ensemble des *mouvements de solide rigide* sur E , c'est-à-dire l'espace défini par :

$$\text{CaR}^0(E) = \{v^* \in \text{Ca}^0(E), \varepsilon(v^*) = 0\} \quad (1.54)$$

1.4.4. Extension à d'autres types de problèmes

Le principe d'estimation d'erreur par résidus d'équilibre suscita un intérêt certain de la communauté internationale depuis ses débuts et fut par conséquent l'objet de nombreux travaux qui permirent assez rapidement son extension à certains types de problèmes non-linéaires. Ainsi trouve-t-on assez rapidement des développements relatifs aux problèmes de flambement [I. BABUŠKA et RHEINBOLDT, 1982].

Peu après, une série de travaux (dont les premiers furent [BASS et J. ODEN, 1987 ; JOHNSON et HANSBO, 1992]) s'attacha à l'extension des méthodes au cas des comportements plastique et viscoplastique. Dans le cas de problèmes indépendants du temps, les approches mises en œuvre consistent en une linéarisation de la loi de comportement au voisinage de la solution éléments finis, et permettent sous certaines hypothèses l'obtention d'une borne supérieure de η [VERFÜRTH, 1996]. Le cas de problèmes d'évolution dépendant du temps est plus complexe, principalement du fait de la prise en compte des effets d'histoire relatifs au chargement du matériau. Dans ce cas, la plupart des approches semblent prendre pour solution de référence celle du problème discrétisé en temps, et ne permettent donc pas l'estimation des erreurs dues à la discrétisation temporelle ainsi que le phénomène de propagation de l'erreur avec le temps. Il en résulte des indicateurs d'erreur intéressants dans une démarche adaptative mais ne fournissant pas de borne garantie de l'erreur vraie.

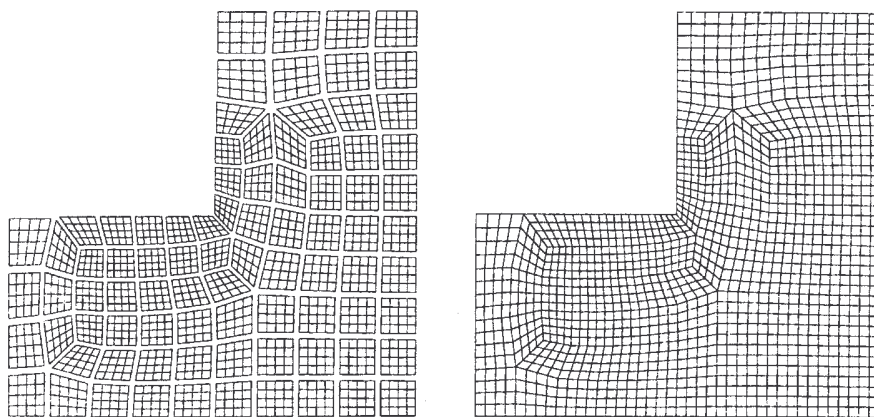
Citons enfin, parmi les autres extensions réalisées, celles relatives à la prise en compte des grandes déformations [BRINK et STEIN, 1998], des problèmes d’acoustique [BOUILLARD et IHLENBURG, 1999], des équations de Stokes [Mark AINSWORTH et J. T. ODEN, 1997] ainsi que du cadre stochastique [J. T. ODEN et al., 2005]. D’autres développements s’attachèrent à l’étude de la modélisation et de la résolution des problèmes hétérogènes [J. ODEN et K.S. VEMAGANTI, 2000 ; K. VEMAGANTI et J. ODEN, 2001], cadre de travail sur lequel nous reviendrons dans le chapitre 5.

1.4.5. Commentaires

Les estimateurs introduits précédemment appellent plusieurs commentaires relatifs aux méthodes reposant sur les résidus implicites.

Tout d’abord, les propriétés de borne supérieure (1.52) et (1.49) requièrent une résolution exacte des problèmes locaux (1.50) et (1.48). Ceci n’étant pas réalisable en pratique, et du fait de la propriété d’orthogonalité (1.25), les solutions locales $\xi_{\tilde{h},i}$ sont alors recherchées sur des espaces d’approximation $\mathcal{C}a_{\tilde{h}}(\Omega)$ issus d’un raffinement de l’espace approché initial $\mathcal{C}a_h(\Omega)$. Ceci revient à estimer l’écart, non plus entre la solution éléments finis u_h et la solution exacte u , mais entre u_h et une solution $u_{\tilde{h}}$ obtenue sur un maillage raffiné $\Omega_{\tilde{h}}$ associé à l’espace $\mathcal{C}a_{\tilde{h}}(\Omega)$. Les estimations de l’erreur $\tilde{\eta}$ ainsi obtenues constituent alors des bornes supérieures d’une erreur $e_{\tilde{h}}$ dite *de référence* et définie par $e_{\tilde{h}} = u_{\tilde{h}} - u_h$:

$$\|e_{\tilde{h}}\|_{\mathbb{H},\Omega} \leq \tilde{\eta} \tag{1.55}$$



□ FIG. 1.4. Exemple de maillage initial Ω_h avec h -raffinement des éléments (gauche) et maillage de référence $\Omega_{\tilde{h}}$ associé (droite) [Antonio HUERTA et Pedro DIEZ, 2000]

□ REMARQUE 1.14 Dans ce cas, notons que la solution approchée globale $\xi_{\tilde{h}} = \sum_{i \in \mathcal{S}_h} \xi_{\tilde{h},i}$ des problèmes (1.48) présente alors des discontinuités inter-éléments, et appartient de ce fait à

l'espace de Sobolev discontinu (« broken space ») $\mathcal{C}a_{\tilde{h}}^{disc}(\Omega)$ défini par :

$$\mathcal{C}a_{\tilde{h}}^{disc}(\Omega) = \bigoplus_{E \in \mathcal{E}_{\tilde{h}}} \mathcal{C}a_{\tilde{h}}(E) \quad (1.56)$$

La borne supérieure approchée (1.55) est en outre liée à ce caractère discontinu [Pedro DIEZ, Nuria PARES et Antonio HUERTA, 2003].

□ **REMARQUE 1.15** La propriété (1.38), permet l'obtention d'une borne inférieure de l'erreur à travers la construction d'un représentant continu de $\xi_{\tilde{h}}$. Dans le cas des estimateurs de type « flux-free », un processus simple consiste à utiliser la partition de l'unité des fonctions de formes lors de la pondération des contributions $\xi_{\tilde{h},i}$ [PRUDHOMME, NOBILE et al., 2003] :

$$\check{\xi}_{\tilde{h}} = \sum_{i \in \mathcal{S}_{\tilde{h}}} \varphi_i \xi_{\tilde{h},i} \leq \|e_{\tilde{h}}\|_{\mathbb{H},\Omega} \quad (1.57)$$

Un processus plus général reposant sur un lissage par éléments a été développé [Pedro DIEZ, Nuria PARES et Antonio HUERTA, 2003] dans le cadre des estimateurs de type « hybrid-flux », mais peut être également appliqué aux estimateurs de type « flux-free » [N. PARES, P. DIEZ et A. HUERTA, 2006].

En pratique, il résulte des approximations précédemment mentionnées la perte du caractère garanti de la borne supérieure sur $\|e\|_{\mathbb{H},\Omega}$. Pour remédier à ce problème, plusieurs solutions furent proposées par la suite. Dans [Antonio HUERTA et Pedro DIEZ, 2000], l'écart entre $\|e\|_{\mathbb{H},\Omega}$ et $\|e_{\tilde{h}}\|_{\mathbb{H},\Omega}$ dû à l'approximation $u_{\tilde{h}} \approx u$ est évalué par :

$$\|u_{\tilde{h}} - u_h\|_{\mathbb{H},\Omega} = \|e_{\tilde{h}}\|_{\mathbb{H},\Omega} \approx \left[1 - \left(\frac{\tilde{h}}{h} \right)^{2p} \right]^{1/2} \|e\|_{\mathbb{H},\Omega}$$

où p désigne le degré d'interpolation des maillages Ω_h et $\Omega_{\tilde{h}}$. Dans [I BABUSKA, T STROUBOULIS et S. GANGARAJ, 1999 ; T. STROUBOULIS, I. BABUSKA et S. K. GANGARAJ, 2000], les auteurs proposent pour leur part d'encadrer $\|e\|_{\mathbb{H},\Omega}$ à l'aide d'un schéma itératif reposant sur l'estimation des erreurs commises lors des résolutions locales. Enfin, une autre manière de retrouver la propriété de borne supérieure sur $\|e\|_{\mathbb{H},\Omega}$ consiste à utiliser une formulation duale [VEUBEKE, 1965] lors de la résolution des problèmes locaux (1.52) et (1.49). Cette méthode a été mise en place dans [N PARES, BONET et al., 2006] dans le cadre des estimateurs implicites par éléments pour des problèmes d'élasticité linéaire en dimension 2. Plus récemment, une première adaptation aux méthodes de type « flux-free » a été proposée dans [COTTEREAU, DIEZ et Antonio HUERTA, 2009], mais cette dernière ne semble pas utilisable pour des éléments de degré $p = 1$, et la qualité de la borne supérieure obtenue dépend de l'ordre de résolution des problèmes locaux.

Une étude des performances des méthodes « hybrid-flux » et « flux-free » a été menée dans [CHOI et PARASCHIVOIU, 2004]. Les deux approches y sont comparées sur des

problèmes de thermique résolus par des éléments finis linéaires et quadratiques. Pour des problèmes résolus à l'aide d'éléments finis linéaires, la méthode « hybrid-flux » y apparaît fournir des bornes plus précises de l'erreur tandis que le coût de calcul de la méthode « flux-free » est moindre. En revanche, lorsque les résolutions utilisent des éléments finis quadratiques, l'approche de type « flux-free » apporte la meilleure précision sur les bornes obtenues et semble être, malgré un coût de calcul supérieur à celui de l'approche « hybrid-lux », le meilleur compromis précision – coût CPU. Précisons que le coût CPU de la méthode « hybrid flux » est dominé par le calcul des flux inter-éléments alors que celui de la méthode « flux-free » provient de l'assemblage et la résolution des problèmes locaux par patches.

1.5. ESTIMATEURS D'ERREUR PAR LA RELATION DE COMPORTEMENT

Cette famille d'estimateurs a été initiée par les travaux de Ladevèze [P. LADEVÈZE, 1975] définissant le concept d'erreur en relation de comportement (1.13) comme la mesure énergétique du résidu associé à la loi de comportement entre deux champs approchés admissibles. La première méthode de ce type a été proposée dans [P. LADEVÈZE et LE-GUILLON, 1983] pour des problèmes de thermique stationnaire.

1.5.1. Principes

Le principe de base des méthodes de cette famille réside dans la construction d'un couple de solutions approchées satisfaisant simultanément les équations de compatibilité (1.1a) et d'équilibre (1.1b). Un tel choix mettant systématiquement en défaut la relation de comportement (le cas contraire signifierait que le couple considéré est déjà solution exacte) (1.1c), le résidu associé est alors exploité afin de quantifier l'écart avec la solution exacte du problème. Faire ainsi porter le doute sur la vérification de la relation de comportement, ensemble d'équations dont la validité est *a priori* moins maîtrisée car souvent établie à partir de données expérimentales diverses, confère à la méthode un fort caractère mécanique .

A la différence des approches utilisant les résidus d'équilibre (sec. 1.4), dont la mise en œuvre repose sur la donnée de l'approche variationnelle en déplacement (1.5) où sont vérifiées *de facto* les équations de compatibilité et la relation de comportement, le point de départ des méthodes utilisant l'erreur en relation de comportement réside dans l'exploitation de la formulation variationnelle à deux champs (1.4) couplée à la construction d'un couple de solutions approchées à partir des équations de compatibilité et d'équilibre sans recours à l'utilisation de la loi de comportement. En ce sens, son positionnement est proche des principes de l'analyse duale (sec. 1.3).

Détaillons à présent le principe de la méthode, en rappelant tout d'abord la définition de la fonctionnelle $e_{\text{rdc},\Omega}$ (sec. 1.1.2.3) traduisant la norme énergétique de l'erreur en relation de comportement (1.13) pour un couple de champs (u, τ) (sec. 1.1.2.3) :

$$e_{\text{rdc},\Omega}(v, \tau) = \|\tau - \mathbb{H} : \varepsilon(v)\|_{\mathbb{H}^{-1},\Omega}$$

ainsi que l'écriture associée (1.15) du problème variationnel à deux champs :

$$\text{Trouver } (u, \sigma) \in \mathcal{C}a(\Omega) \times \mathcal{S}a(\Omega) \text{ vérifiant : } e_{\text{rdc},\Omega}(u, \sigma) = 0$$

A partir d'une solution approchée $(u_h, \sigma_h) \in \mathcal{C}a_h(\Omega) \times \{\mathbb{H} : \varepsilon(\mathcal{C}a_h(\Omega))\}$ de (1.15) obtenue à l'aide d'une approche usuelle de type éléments finis en déplacement, telle que $e_{\text{rdc},\Omega}(u_h, \sigma_h) = 0$ par construction et (sauf cas triviaux) $\sigma_h \notin \mathcal{S}a(\Omega)$, le fondement de la méthode consiste à construire un nouveau couple approché $(\hat{u}_h, \hat{\sigma}_h) \in \mathcal{C}a(\Omega) \times \mathcal{S}a(\Omega)$ appartenant aux domaines d'admissibilité cinématique et statique permettant la définition d'un estimateur d'erreur global η à travers le résidu de l'erreur en relation de comportement :

$$\eta = e_{\text{rdc},\Omega}(\hat{u}_h, \hat{\sigma}_h) = \|\hat{\sigma}_h - \mathbb{H} : \varepsilon(\hat{u}_h)\|_{\mathbb{H}^{-1},\Omega} \quad (1.58)$$

Le domaine d'admissibilité du nouveau couple de solution $(\hat{u}_h, \hat{\sigma}_h)$ permet alors de se placer dans le cadre des hypothèses du théorème de Prager-Synge (1.16) :

$$\|\sigma - \hat{\sigma}_h\|_{\mathbb{H}^{-1},\Omega}^2 + \|u - \hat{u}_h\|_{\mathbb{H},\Omega}^2 = e_{\text{rdc},\Omega}(\hat{u}_h, \hat{\sigma}_h)^2$$

qui confère à η sa propriété de borne supérieure de l'erreur exacte $\|e\|_{\mathbb{H},\Omega}$:

$$\|e\|_{\mathbb{H},\Omega} = \eta^{ex} \leq \eta = e_{\text{rdc},\Omega}(\hat{u}_h, \hat{\sigma}_h) \quad (1.59)$$

Il apparaît dès lors que le point clé de la méthode réside dans la construction du couple de solution admissibles $(\hat{u}_h, \hat{\sigma}_h)$ dont la capacité à approcher le plus fidèlement possible (u, σ) influera directement sur la précision de l'estimateur η .

□ **REMARQUE 1.16** Sur chaque élément $E \in \mathcal{E}_h$, on définit de même les contributions η_E à l'erreur globale comme :

$$\eta_E = e_{\text{rdc},E}(\hat{u}_h, \hat{\sigma}_h) = \|\hat{\sigma}_h - \mathbb{H} : \varepsilon(\hat{u}_h)\|_{\mathbb{H}^{-1},E} \text{ vérifiant } \eta^2 = \sum_{E \in \mathcal{E}_h} \eta_E^2 \quad (1.60)$$

Concernant le champ cinématiquement admissible, le choix $\hat{u}_h = u_h$ est généralement immédiat, la solution u_h obtenue à l'issue des méthodes éléments finis en déplacement étant par construction cinématiquement admissible dans la majorité des cas de figure².

□ **REMARQUE 1.17** Lors de la mise en œuvre de l'erreur en relation de comportement pour des problèmes d'élasticité incompressible, la construction d'une solution admissible en déplacement spécifique \hat{u}_h vérifiant $\text{div}(\hat{u}_h) = 0$ a été proposée dans [P LADEVEZE, MARIN et al., 1992].

2. Voir sur ce point la remarque 1.17.

Tel n'est malheureusement pas le cas pour la solution admissible en contrainte $\hat{\sigma}_h \in \mathcal{S}a(\Omega)$ dont la construction est beaucoup plus ardue et constitue probablement la principale difficulté de mise en œuvre des estimateurs ici présentés. Une réponse possible consiste à choisir une solution $\hat{\sigma}_h$ issue d'une formulation éléments finis en contrainte permettant d'obtenir le meilleur champ approché admissible $\hat{\sigma}_h$. Remarquons que l'on retrouve alors du fait des relations (1.16) et (1.17) l'estimateur issu de l'analyse duale présenté en partie 1.3.2 : en l'occurrence, cette approche présente les mêmes inconvénients relatifs à son surcoût numérique engendré par la nécessité d'une seconde analyse éléments finis globale. Aussi les procédures décrites par la suite consistent-elles à exploiter la donnée du champ approché σ_h de pair avec la description continue des conditions aux limites d'interface au sein de procédures d'équilibrage spécifiques notées \mathcal{F}_{eq} dans le reste du document :

$$\mathcal{F}_{\text{eq}} : (\sigma_h, f, g) \mapsto \hat{\sigma}_h$$

1.5.2. Construction de champs statiquement admissibles

La plupart des développements sous-jacents ont été dominés par des problématiques similaires à celles déjà rencontrées lors de la détermination des champs d'erreur approchés $e = u - u_h$ associés à la mise en œuvre des méthodes des résidus implicites. De même, le but recherché consiste à remplacer un problème de minimisation global en une succession de problèmes locaux indépendants, posés tant au niveau élémentaire que sur des patches d'éléments. On peut distinguer deux approches permettant de mener à bien cet objectif selon que la construction de $\hat{\sigma}_h$ s'effectue à travers des problèmes définis par éléments ou par patches d'éléments³.

1.5.2.1. Équilibrage par éléments

Ce principe d'équilibrage fut le premier à être introduit dans [P. LADEVEZE et LEGUILLON, 1983] pour des problèmes de thermique stationnaire. Il fut ensuite étendu au cas de problèmes élastiques bidimensionnels [P. LADEVEZE, J.-P. PELLE et Ph. ROUGEOT, 1991] et tridimensionnels [P. COOREVITS, DUMEAU et J.-P. PELLE, 1998].

Les procédures associées sont proches de celles relatives aux estimateurs en résidus implicites par éléments (sec. 1.4.3). Elles consistent à déterminer un champ $\hat{\sigma}_h$ à travers la résolution de problèmes de Neumann locaux posés élément par élément. Leur définition nécessite la construction préalable d'un champ d'inter-effort équilibré \hat{F}_h défini sur la frontière ∂E de chaque élément $E \in \mathcal{E}_h$ du maillage Ω_h , vérifiant d'une part l'équilibre avec les chargements f et g du problème et d'autre part le principe de l'action et

3. Nous constaterons cependant que les procédures par éléments utilisent des données d'entrée équilibrées qui doivent, pour être pertinentes, être construites préalablement à l'aide de procédures par patches, de sorte que l'usage de ces derniers paraît inévitable quelle que soit l'approche retenue.

de la réaction entre éléments. Une fois le champ \hat{F}_h construit, les restrictions élémentaires du champ $\hat{\sigma}_h$ sont déterminées à travers la résolution des problèmes suivants :

$$\operatorname{div}(\hat{\sigma}_{h|E}) + f = 0 \quad \text{sur } (E) \quad (1.61a)$$

$$\hat{\sigma}_{h|E} \cdot n_E = \delta_E \hat{F}_h \quad \text{sur } (\partial E) \quad (1.61b)$$

où $\delta_E = \pm 1$ est un coefficient booléen signé assurant la continuité de $\hat{\sigma}_h$ au passage entre deux éléments, ie. vérifiant $\delta_E + \delta_{E'} = 0$ sur $\partial E \cap \partial E'$.

□ **REMARQUE 1.18** *Au sein d'un code éléments finis, en notant $\operatorname{id}(E)$ le rang de l'élément E au sein de la liste des éléments du maillage, δ_E peut être défini sur $\partial E \cap \partial E'$ comme $\delta_E = 1$ pour $\operatorname{id}(E) < \operatorname{id}(E')$ et $\delta_E = -1$ dans le cas contraire.*

Les premières approches de résolution des problèmes (1.61) furent analytiques [P LADEVEZE et MAUDER, 1996 ; P. LADEVEZE, J.-P. PELLE et Ph. ROUGEOT, 1991] et consistèrent à rechercher un champ polynômial sur une subdivision de chaque élément. Des méthodes de résolution numérique reposant sur un raffinement de type h ou p de l'espace d'approximation au niveau de chaque élément leurs sont à présent préférées. Le système (1.61) définissant un espace d'admissibilité $\mathcal{S}a^{\hat{F}_h}(E)$ des champs solutions, $\hat{\sigma}_{h|E}$ est alors déterminé par minimisation d'une énergie complémentaire :

$$\min_{\hat{\sigma}_{h|E} \in \mathcal{S}a^{\hat{F}_h}(E)} \int_{\Omega} (\hat{\sigma}_{h|E} - \sigma_h) : \mathbb{H}^{-1} : (\hat{\sigma}_{h|E} - \sigma_h) d\Omega \quad (1.62)$$

En pratique, (1.62) est résolue par dualité à l'aide d'une approche en déplacement :

Trouver $\hat{\sigma}_{h|E} = \boldsymbol{\sigma}(\tilde{u}) \in \mathcal{S}a(E)$ vérifiant :

$$\int_E \boldsymbol{\sigma}(\tilde{u}) : \varepsilon(v) dE = \int_E f \cdot v dE + \int_{\partial E} \delta_E \hat{F}_h \cdot v_h d\Gamma, \quad \forall v \in \mathcal{C}a^0(E) \quad (1.63)$$

Le problème 1.63 étant de dimension infinie, il est nécessaire d'en faire une résolution approchée et l'influence du choix de l'approximation effectuée sur la qualité de l'estimateur résultant a fait l'objet de plusieurs études. Sur ce point, il a été constaté dans [I. BABUŠKA, T. STROUBOULIS et al., 1994] que le choix d'un espace approché de degré $p+3$ (p étant le degré des éléments finis utilisés) donne le rapport optimal entre précision et coût de calcul. Ce choix est le plus couramment utilisé à ce jour du fait d'une moindre difficulté d'implantation pratique. D'autre part, des études comparatives ont conclu à une meilleure qualité du champ $\hat{\sigma}_h$ obtenu par résolution numérique par rapport à une résolution analytique, particulièrement dans le cas d'éléments distordus [E FLORENTIN, 2002].

Nous présentons par la suite les principaux aspects des méthodes de construction du champ d'inter-effort \hat{F}_h . Notons au passage l'emploi possible de ces techniques dans le cadre de la mise en œuvre des méthodes des résidus équilibrés par éléments 1.4.3,

ces dernières nécessitant en toute rigueur des champs d'interface équilibrés lors de la définition des problèmes de Neumann élémentaires.

Construction des champs \hat{F}_h (méthode EET)

L'ingrédient clé des méthodes de détermination de \hat{F}_h est la définition d'une relation énergétique entre les champs $\hat{\sigma}_h$ et σ_h , appelée *condition de prolongement forte* :

$$\int_E (\hat{\sigma}_h - \sigma_h) \cdot \nabla \varphi_i dE = 0, \quad \forall E \in \mathcal{E}_h, \quad \forall i \in \mathcal{N}_h^E(E) \quad (1.64)$$

où \mathcal{E}_h désigne l'ensemble des éléments du maillage Ω_h et $\mathcal{N}_h^E(E)$ l'ensemble des nœuds de l'élément E . Mécaniquement parlant, remarquons que la relation précédente impose au nouveau champ $\hat{\sigma}_h$ de développer, sur chaque élément, le même travail virtuel que σ_h pour tout déplacement associé aux fonctions de formes éléments finis. L'injection de la condition (1.64) dans la formulation faible de l'équilibre associée aux équations (1.61) permet d'exprimer les valeurs nodales généralisées de \hat{F}_h en fonction de σ_h et des données du problème :

$$\int_{\partial E} \delta_E \hat{F}_h \varphi_i d\Gamma = \sum_{\Gamma_j^E \in \mathcal{F}_h^E(E) \cap \mathcal{F}_h^S(i)} \int_{\Gamma_j^E} \delta_E \hat{F}_h \varphi_i d\Gamma = \int_E (\sigma_h : \varepsilon(\varphi_i) - f \varphi_i) dE, \quad (1.65)$$

$$\forall E \in \mathcal{E}_h, \quad \forall i \in \mathcal{N}_h^E(E)$$

où $\mathcal{F}_h^E(E)$ désigne l'ensemble des faces de E et $\mathcal{F}_h^S(i)$ l'ensemble des faces reliées au sommet i . D'un point de vue pratique, les valeurs nodales généralisées $\hat{\mathbf{F}}_{h,i,\Gamma_j^E}^\varphi = \int_{\Gamma_j^E} \delta_E \hat{F}_h \varphi_i d\Gamma$ sont déterminées nœud par nœud à travers un ensemble de problèmes issus de (1.65) et posés sur les patches d'éléments centrés sur les nœuds i . Le champ continu équilibré \hat{F}_h est alors construit localement sur chaque bord à partir des données correspondantes de $\hat{\mathbf{F}}_{h,i,\Gamma_j^E}^\varphi$ par interpolation sur la restriction sur Γ_j^E des fonctions de formes éléments finis.

L'absence d'unicité des solutions des problèmes locaux définis par (1.65) rend leur simple résolution insuffisante lors de la détermination des grandeurs $\hat{\mathbf{F}}_{h,i,\Gamma_j^E}^\varphi$ de telle sorte qu'ils ne définissent qu'un espace d'admissibilité pour \hat{F}_h (rarement réduit à un singleton). Ce problème se pose en particulier lors de la résolution des problèmes « patches » intérieurs à Ω ou adjacents à $\partial_u \Omega$. Les valeurs de $\hat{\mathbf{F}}_{h,i,\Gamma_j^E}^\varphi$ sont alors complètement déterminées à travers un problème de minimisation aux moindres carrés les reliant à la valeur moyenne des flux des contraintes éléments finis sur les bords correspondants :

$$\min \sum_{\Gamma_j^E \in \mathcal{F}_h^S(i)} \left(\frac{\hat{\mathbf{F}}_{h,i,\Gamma_j^E}^\varphi - \mathbf{F}_{h,i,\Gamma_j^E}^m}{d_{\Gamma_j^E}} \right)^2 \quad \text{avec } \mathbf{F}_{h,i,\Gamma_j^E}^m = \int_{\Gamma_j^E} \frac{1}{2} [\delta_E \sigma_h|_E \cdot n_E + \delta_{E'} \sigma_h|_{E'} \cdot n_{E'}] \varphi_i d\Gamma \quad (1.66)$$

où $d_{\Gamma_j^E}$ désigne la taille de la face correspondante et E' l'élément adjacent à E ayant Γ_j^E comme face commune. Dans le cas correspondant à $\Gamma_j^E \subset \partial_f \Omega$, signalons que les valeurs de $\hat{\mathbf{F}}_{h,i,\Gamma_j^E}^\varphi$ sont directement déterminées par la donnée de la condition de Neumann correspondante, de sorte que :

$$\hat{\mathbf{F}}_{h,i,\Gamma_j^E}^\varphi = \int_{\Gamma_j^E} g\varphi_i d\Gamma \quad \text{sur } \Gamma_j^E \subset \partial_f \Omega$$

□ **REMARQUE 1.19** *On trouvera une description plus détaillée sur certains aspects de cette méthode en partie 5.3.1.*

Construction améliorée

Cette variante a été introduite dans [P LADEVÈZE et Ph ROUGEOT, 1997] pour pallier certaines faiblesses de la construction précédente, notamment dans le cas de concentrations de contraintes ou de distorsions géométriques localisées. Son principe consiste à affaiblir la condition de prolongement (1.64) en imposant l'égalité des travaux virtuels sur les seuls nœuds non sommets des éléments :

$$\int_E (\hat{\sigma}_h - \sigma_h) \cdot \nabla \varphi_i dE = 0, \quad \forall E \in \mathcal{E}_h, \quad \forall i \in \mathcal{N}_h^E(E) \setminus \mathcal{S}_h^E(E) \quad (1.67)$$

La détermination de $\hat{F}_{h|\Gamma}$ sur chaque bord Γ est alors effectuée en séparant ses contributions associées aux nœuds sommets $\hat{F}_{h|\Gamma}^{\mathcal{S}}$ de celles associées aux nœuds intérieurs $\hat{F}_{h|\Gamma}^{\mathcal{M}\setminus\mathcal{S}}$:

$$\hat{F}_{h|\Gamma} = \hat{F}_{h|\Gamma}^{\mathcal{S}} + \hat{F}_{h|\Gamma}^{\mathcal{M}\setminus\mathcal{S}}$$

La condition (1.67) permet alors la détermination immédiate des composantes de $\hat{F}_{h|\Gamma}^{\mathcal{M}\setminus\mathcal{S}}$. La partie « macroscopique » $\hat{F}_{h|\Gamma}^{\mathcal{S}}$ est, quant à elle, déterminée par minimisation de l'énergie complémentaire de la structure sous la condition d'admissibilité statique du champ \hat{F}_h .

Bien que donnant de meilleurs résultats, cette approche est aussi beaucoup plus coûteuse que la précédente du fait de la présence d'un problème de minimisation global. En pratique, son utilisation est restreinte à certaines zones locales pour lesquelles il est nécessaire de corriger le champ $\hat{\sigma}_h$ initialement calculé par la méthode standard. Pour ce faire, le problème de minimisation est traité par un algorithme itératif initialisé avec les résultats de l'approche standard.

□ **REMARQUE 1.20** *L'application de cette méthode sur l'ensemble du domaine Ω pour des éléments finis de degré 1 revient à rechercher le champ $\hat{\sigma}_h$ minimisant l'énergie complémentaire sur Ω , et semble donc équivalente à l'approche duale exposée précédemment (cf. partie 1.3).*

Équilibrage hybride (méthode EESPT)

Cette méthode, inspirée des approches de type « flux-free » (voir par exemple [N. PARES, P. DIEZ et A. HUERTA, 2006]), a été récemment introduite [Pierre LADEVÈZE, Ludovic CHAMOIN et Eric FLORENTIN, 2010] comme alternative à la procédure d'équilibrage standard initialement présentée. Son point de départ repose sur la réécriture de la condition de prolongement (1.64) à l'échelle de la structure complète en utilisant l'espace des fonctions de formes de degré q discontinues entre éléments (où $1 \leq q \leq p$, p désignant le degré d'interpolation initial de la méthode éléments finis) :

$$\sum_{E \in \mathcal{E}_h(\Omega)} \int_E (\hat{\sigma}_h - \sigma_h) : \varepsilon(v_h^d) dE = \int_{\Omega} (\hat{\sigma}_h - \sigma_h) : \varepsilon(v_h^d) d\Omega = 0 \quad (1.68)$$

$$\forall v_h^d \in \mathcal{V}_h^{q, \text{disc}}(\Omega) = \{v_h^d \text{ tel que } v_{h|E} \in \mathbb{P}_q(E_k), \forall E_k \in \Omega_h\}$$

□ **REMARQUE 1.21** Notons que cette écriture permet plusieurs choix de conditions de prolongement suivant le degré q d'interpolation choisi pour $\mathcal{V}_h^{q, \text{disc}}$ et donne ainsi plus de souplesse à la méthode.

La procédure consiste alors à injecter la partition de l'unité définie par les fonctions de formes φ_i de degré q au sein de la condition de prolongement précédente. Par la suite, \hat{F}_h est déterminé comme :

$$\hat{F}_h = \sum_{i \in \mathcal{N}_h(\Omega_h)} \varphi_i \hat{F}_h^{(i)} \quad (1.69)$$

où les quantités $\varphi_i \hat{F}_h^{(i)}$, recherchées sur la base des fonctions de formes éléments finis, sont solutions des problèmes locaux définis sur les « patches » d'éléments $\omega_i^{\mathcal{N}}$ centrés au nœud i :

Trouver $\varphi_i \hat{F}_h^{(i)}$ vérifiant :

$$\sum_{E_k \in \mathcal{E}_h^{\mathcal{N}}(i)} \int_{\partial E_k} \delta_{E_k} \varphi_i \hat{F}_h^{(i)} v_h^d d\Gamma = \int_{\omega_i^{\mathcal{N}}} (\sigma_h : \varepsilon(v_h^d) - f_d v_h^d) d\omega \quad \forall v_h^d \in \mathcal{V}_h^{q, \text{disc}}(\Omega) \quad (1.70)$$

D'une manière générale, les problèmes locaux ci-dessus définissent un espace d'admissibilité des quantités $\varphi_i \hat{F}_h^{(i)}$ mais ne permettent pas d'en assurer l'unicité. La résolution s'effectue alors par minimisation sous contraintes (correspondant à (1.70)) d'une fonction coût du même type de (1.66) dans laquelle la vérification des conditions aux limites de Neumann $\hat{F}_h = g$ (sur $\partial_f \Omega$) est traitée par pénalisation. Cette approche permet alors un traitement systématique des problèmes (1.70), qu'ils soient internes à Ω ou adjacents à $\partial \Omega$ ⁴.

4. Notons qu'il est nécessaire, dans l'approche de construction standard, de différencier le traitement des problèmes « patches » suivant l'appartenance du nœud central à l'intérieur du domaine ou aux frontières $\partial_u \Omega$ et $\partial_f \Omega$.

□ **REMARQUE 1.22** Lorsque la partition de l'unité s'effectue sur la base des fonctions de formes éléments finis du problème initial (ie. $q = p$), remarquons que la méthode hybride permet alors la détermination directe des valeurs nodales de \hat{F}_h alors que la construction standard (qui calcule en premier lieu des valeurs nodales généralisées) nécessite une étape supplémentaire pour arriver au même résultat.

□ **REMARQUE 1.23** Il est possible de retrouver la condition de prolongement fort (1.64) à partir de l'expression de (1.68) en choisissant des fonctions $v_h^{q, \text{disc}} \in \mathcal{V}_h^{q, \text{disc}}(\Omega)$ égales aux fonctions de formes éléments finis sur un élément et nulles partout ailleurs. En ce sens, l'écriture (1.68) peut être considérée comme une généralisation de (1.64).

1.5.2.2. Équilibrage par « patches » d'éléments (méthode SPET)

Ces méthodes consistent à construire un champ de contrainte admissible $\hat{\sigma}_h$ en s'affranchissant de la détermination de champs d'inter-efforts équilibrés \hat{F}_h . L'exploitation de conditions d'équilibre et/ou de prolongement à l'échelle de la structure complète couplée à l'utilisation d'une partition de l'unité permet de se ramener à la résolution de problèmes « patches » similaires à ceux rencontrés dans les méthodes « flux-free ». Les méthodes sous-jacentes sont récentes et d'inspiration directe de [CARSTENSEN et FUNKEN, 2000 ; MORIN, NOCHETTO et SIEBERT, 2002 ; N. PARES, P. DIEZ et A. HUERTA, 2006].

Dans [L. GALLIMARD, 2009], une condition de prolongement similaire à celle de (1.68) est définie à l'aide de la partition de l'unité des fonctions de formes éléments finis associées aux nœuds sommets :

$$\int_{\omega_i^S} ((\hat{\sigma}_h - \sigma_h) \nabla(\varphi_i)) v \, d\omega = 0 \quad \forall v \in \mathcal{C}a^0(\omega_i^S), \forall i \in \mathcal{S}_h(\Omega_h) \quad (1.71)$$

Le champ $\hat{\sigma}_h$ est alors défini (toujours grâce à la partition de l'unité) comme une somme de contributions locales :

$$\hat{\sigma}_h = \sum_{i \in \mathcal{S}_h(\Omega_h)} \varphi_i \hat{\sigma}_h^i = \sum_{i \in \mathcal{S}_h(\Omega_h)} \hat{\sigma}_h^i \quad (1.72)$$

Du fait des conditions d'équilibre et de prolongement, $\hat{\sigma}_h^i$ est solution de problèmes locaux de la forme :

$$\int_{\omega_i^S} \hat{\sigma}_h^i : \varepsilon(v) \, d\omega = \int_{\omega_i^S} (\varphi_i f - \sigma_h \nabla(\varphi_i)) v \, d\omega + \int_{\partial_f \omega_i^S} \varphi_i g v \, d\Gamma \quad \forall v \in \mathcal{C}a^0(\omega_i^S) \quad (1.73)$$

résolus en pratique par une approche cinématique associée à un espace de discrétisation enrichi.

Dans [MOITINHO DE ALMEIDA et MAUNDER, 2009], les auteurs proposent une approche similaire mais utilisant des résolutions par éléments finis équilibre lors du traitement des problèmes locaux. Y sont notamment discutées la stabilité des problèmes « patches » et la suppression des modes cinématiques à déformation nulle inhérents aux approches duales.

1.5.3. Extension à d'autres types de problèmes

L'un des principaux atouts de l'estimation d'erreur en relation de comportement provient de l'extension de son concept de base, sans perte de validité, au cadre de travail des problèmes d'évolution linéaires et non-linéaires. Celles-ci permettent notamment la prise en compte des erreurs de discrétisation temporelle. Nous présentons ci-après les principes élémentaires des deux approches sous-jacentes, qui reposent, pour la première, sur le concept d'*erreur au sens de Drucker*, et pour la seconde, sur celui d'*erreur en dissipation*.

1.5.3.1. Erreur au sens de Drucker

Cette première extension [P. LADEVÈZE, COFFIGNAL et J.P. PELLE, 1983] a été développée pour les problèmes linéaires d'évolution. Elle repose sur la condition de stabilité de Drucker [DRUCKER, 1964], qui s'écrit, pour deux couples déplacement/contrainte (u, σ) et (u', σ') égaux à l'instant initial et vérifiant la loi de comportement (1.1c) :

$$\int_0^t (\sigma - \sigma') : (\dot{\varepsilon}(u) - \dot{\varepsilon}(u')) d\tau \geq 0, \quad \forall t \in [0, T] \quad (1.74)$$

L'erreur au sens de Drucker est alors définie comme suit :

$$e_{\text{dru}, \Omega, T}^2(u_{h_{CA}}, \sigma_{h_{SA}}) = \sup_t \int_{\Omega} \int_0^t (\sigma_{h_{SA}} - \sigma_{h_{CA}}) : (\dot{\varepsilon}_{h_{SA}} - \dot{\varepsilon}_{h_{CA}}) d\tau d\Omega \quad (1.75)$$

où les champs $\varepsilon_{h_{CA}} = \varepsilon(u_{h_{CA}})$ et $\sigma_{h_{SA}}$ vérifient les conditions de compatibilité (1.1a) et d'équilibre (1.1b), respectivement, $\sigma_{h_{CA}} = \boldsymbol{\sigma}(u_{h_{CA}})$ et $\varepsilon_{h_{SA}}$ est obtenu à partir de $\sigma_{h_{SA}}$ par inversion de la loi de comportement.

Cette méthode a été appliquée à des problèmes d'élasto-plasticité [L. GALLIMARD, P. LADEVÈZE et J. P. PELLE, 1996] et étendue par la suite au cadre de la dynamique [J. COMBE, P. LADEVÈZE et J.P. PELLE, 1999]. Sa principale faiblesse réside dans l'absence de lien entre l'estimateur et la solution exacte, et par là même l'absence de borne supérieure garantie de l'erreur exacte. De ce fait, il semble qu'elle soit aujourd'hui peu utilisée au profit de l'erreur en dissipation.

1.5.3.2. Erreur en dissipation

Cette seconde extension a été introduite dans [P. LADEVÈZE, 1989] pour traiter le cas des problèmes non-linéaires d'évolution. S'appuyant sur la formulation par variables internes de la relation de comportement [HALPHEN et NGUYEN, 1975] qui lui confère un fort contenu mécanique, elle permet la généralisation du théorème de Prager-Synge au cadre non-linéaire, rendant ainsi l'estimateur associé garanti par rapport à l'erreur vraie.

Pour rester concis et ne pas rentrer dans les nombreuses subtilités afférentes⁵, nous décrirons la formulation comme une approche utilisant un ensemble de variables internes subdivisé comme suit :

- partie réversible du comportement (notée x^r);
- partie associée aux processus dissipatifs (notée x^d);
- variables duales (notées y).

La loi de comportement est alors subdivisée en deux ensembles :

- les *lois d'état*, de la forme :

$$x^r = \mathbf{\Lambda}(y) \quad (1.76)$$

- les *lois d'évolution*, de la forme :

$$\dot{x}^d = \mathbf{B}(y) \quad (1.77)$$

A ce stade, le principe de l'erreur en dissipation consiste à exploiter le résidu sur les lois d'évolution. L'erreur $e_{\text{diss},\Omega,T}$ s'écrit alors :

$$e_{\text{diss},\Omega,T}^2(\hat{x}_h^d, \hat{y}_h) = \int_0^T \int_{\Omega} [\varphi(\hat{x}_h^d) + \varphi^*(\hat{y}_h) - \hat{y}_h \cdot \dot{\hat{x}}_h^d]_{|t} d\Omega dt \quad (1.78)$$

où (\hat{x}_h, \hat{y}_h^d) représente un couple de solution admissible au sens de l'erreur en dissipation (c'est-à-dire vérifiant les équations de compatibilité (1.1a), d'équilibre (1.1b) ainsi que les lois d'état (1.76)) obtenu à partir d'une solution éléments finis (x_h, y_h) , φ désigne le *pseudo-potentiel de dissipation* associé à l'opérateur \mathbf{B} et φ^* désigne le dual de φ .

En outre, $e_{\text{diss},\Omega,T}$ vérifie des propriétés similaires à celles relatives au cadre linéaire :

$$e_{\text{diss},\Omega,T}^2(\hat{x}^d, \hat{y}) \geq 0 \quad (1.79)$$

$$e_{\text{diss},\Omega,T}^2(\hat{x}^d, \hat{y}) = 0 \iff (\hat{x}, \hat{y}) = (x_{ex}, y_{ex}) \quad (1.80)$$

$$e_{\text{diss},\Omega,T}^2(\hat{x}^d, \hat{y}) = e_{\text{diss},\Omega,T}^2(\hat{x}^d, y_{ex}) + e_{\text{diss},\Omega,T}^2(\hat{x}_{ex}^d, \hat{y}) + E_F(\hat{y} - y_{ex})_{|T} \quad (1.81)$$

où E_F désigne l'énergie libre de la structure. Cette dernière relation est fondamentale en ce sens qu'elle permet d'établir un lien entre l'erreur en dissipation et la solution exacte du problème. Elle peut être vue comme l'extension du théorème de Prager-Synge (1.16) relatif au cas linéaire et confère ainsi à l'estimateur associé sa propriété de borne supérieure sur l'erreur exacte.

De part le caractère unifié de sa formulation, cette approche est souvent utilisée lors de la mise en œuvre de l'erreur en relation de comportement sur des problèmes non-linéaires. Son cadre d'application est donc large, incluant des problèmes de plasticité et viscoplasticité [P LADEVÈZE et N MOËS, 1998], endommagement [Pierre LADEVÈZE, 2001] et contact [LOUF, J.-P. COMBE et J.-P. PELLE, 2003]. Ici encore, l'une des difficultés de mise en œuvre réside dans la construction des champs admissibles, construction qui, par ailleurs, trouve son point de départ dans l'utilisation des outils développés dans le cadre linéaire.

5. Pour une description du formalisme et de ses applications à différents types de matériaux et processus, le lecteur pourra consulter entre autres références [DESMORAT, 1993].

□ **REMARQUE 1.24** *A titre d'exemple, dans le cas d'un matériau viscoélastique décrit par un modèle de Maxwell généralisé (assemblage en parallèle de n systèmes ressort-amortisseur), les variables internes correspondent aux déformations élastiques ε_i^e et inélastique ε_i^p (vérifiant $\varepsilon_i^e + \varepsilon_i^p = \varepsilon$ pour $i = 1..n$) ainsi que les contraintes σ_i (telles que $\sigma = \sum_{i=1}^n \sigma_i$). On a donc $x^r = [\varepsilon_i^e]_i = e^e$, $x^d = [\varepsilon_i^p]_i = e^p$ et $y = [\sigma_i]_i = s$ avec les lois d'état et d'évolution données par $e^e = \mathbf{A}(s)$ et $\dot{e}^p = \mathbf{B}(s)$, respectivement. Sous ces conditions, l'erreur en dissipation s'écrit alors :*

$$e_{\text{diss},\Omega,T}^2(\dot{e}^p, s) = \int_0^T \int_{\Omega} [\varphi(\dot{e}^p) + \varphi^*(s) - s \cdot \dot{e}^p]_{|t} d\Omega dt$$

1.5.4. Commentaires

L'approche ici présentée est probablement celle qui repose sur les concepts mécaniques les plus forts. Tout comme l'approche duale, elle s'appuie sur une formulation à deux champs et traite donc le champ de contrainte non pas comme une quantité liée au déplacement par la relation de comportement mais comme un champ à part entière déterminé séparément via la formulation de l'équilibre du problème. Aussi, les équations de comptabilité et d'équilibres sont considérées comme les plus fiables et utilisées comme telles, tandis que le doute est porté sur la loi de comportement ou d'évolution, dont la connaissance est généralement plus approximative. Ce choix particulier, qui confère à la méthode son caractère mécanique fort, possède plusieurs avantages. En outre, il est alors possible d'établir un lien entre l'estimateur et la solution exacte, ce qui permet l'obtention d'une mesure garantie de l'erreur. Ce choix définit d'autre part un cadre de travail particulièrement bien adapté aux problèmes non-linéaires permettant ainsi de définir des estimateurs garantis dans de nombreux cas de figure en tenant compte de diverses sources d'erreurs (discrétisation spatiale et temporelle). Toutefois, l'un des inconvénients des méthodes associées réside probablement dans leur difficulté d'implantation dans les codes de calculs éléments finis, ainsi que dans un sur-coût de calcul non négligeable. Ces deux derniers points appellent à des études spécifiques afin de rendre ces méthodes suffisamment robustes pour être utilisées intensivement dans les codes industriels.

1.6. ESTIMATEURS D'ERREUR EXPLOITANT LES DÉFAUTS DE RÉGULARITÉ

Cette approche, introduite dans [O. C. ZIENKIEWICZ et J. Z. ZHU, 1987], consiste à exploiter les défauts de régularité du couple (u_h, σ_h) de solutions éléments finis afin d'accéder à une mesure pertinente de l'erreur de discrétisation. La famille associée regroupe deux générations de procédures différant par quelques variantes mineures. Le lecteur trouvera dans [O ZIENKIEWICZ, B BOROOMAND et J ZHU, 1999] une synthèse des principaux développements associés.

1.6.1. Principe

Le principe général des méthodes sous-jacentes consiste à construire une approximation continue $\sigma^\circ = \mathcal{L}_{iss}(\sigma_h)$ du champ de contraintes σ sensée être plus représentative que σ_h . Pour cela, $\sigma^\circ = \mathcal{L}_{iss}(\sigma_h)$ est obtenue à l'aide d'un post-traitement de la solution éléments finis σ_h par un opérateur de lissage \mathcal{L}_{iss} . En considérant ensuite $\sigma^\circ \approx \sigma$, une mesure approchée de l'erreur est construite à l'aide des normes énergétiques :

$$\|\sigma - \sigma_h\|_{\mathbb{H}^{-1},\Omega} = \eta^{ex,\sigma} \approx \eta = \|\sigma^\circ - \sigma_h\|_{\mathbb{H}^{-1},\Omega} \quad (1.82)$$

□ **REMARQUE 1.25** *La procédure de lissage peut également s'appliquer au champ de déplacement u_h , il vient alors après construction de u° :*

$$\|e\|_{\mathbb{H},\Omega} = \eta^{ex} \approx \eta = \|u^\circ - u_h\|_{\mathbb{H},\Omega} \quad (1.83)$$

Tout opérateur de lissage \mathcal{L}_{iss} peut *a priori* être utilisé dans la mise en œuvre de cette méthode. Cependant, il va de soi que la précision de l'estimation obtenue dépend directement de l'écart entre la solution σ° reconstruite et la solution continue σ : le choix de \mathcal{L}_{iss} est alors fondamental pour assurer de bonnes performances à l'estimateur d'erreur associé. En outre, il est possible d'en encadrer l'indice d'efficacité γ à l'aide de la réécriture de (1.83) :

$$\eta = \|(\sigma - \sigma_h) - (\sigma - \sigma^\circ)\|_{\mathbb{H}^{-1},\Omega} = \|\epsilon - \epsilon^\circ\|_{\mathbb{H}^{-1},\Omega} \quad (\text{avec } \epsilon = \sigma - \sigma_h \text{ et } \epsilon^\circ = \sigma - \sigma^\circ)$$

puis par l'application de l'inégalité triangulaire :

$$\left| \|\epsilon\|_{\mathbb{H}^{-1},\Omega} - \|\epsilon^\circ\|_{\mathbb{H}^{-1},\Omega} \right| \leq \eta \leq \|\epsilon\|_{\mathbb{H}^{-1},\Omega} + \|\epsilon^\circ\|_{\mathbb{H}^{-1},\Omega}$$

Il vient alors [O. C. ZIENKIEWICZ et J. Z. ZHU, 1992b] :

$$1 - \frac{\|\epsilon^\circ\|_{\mathbb{H}^{-1},\Omega}}{\|\epsilon\|_{\mathbb{H}^{-1},\Omega}} \leq \gamma = \frac{\eta}{\eta_{ex}} \leq 1 + \frac{\|\epsilon^\circ\|_{\mathbb{H}^{-1},\Omega}}{\|\epsilon\|_{\mathbb{H}^{-1},\Omega}} \quad (1.84)$$

où $\|\epsilon^\circ\|_{\mathbb{H},\Omega} = \|\sigma - \sigma^\circ\|_{\mathbb{H}^{-1},\Omega}$ désigne l'erreur sur le champ lissé. On remarque ainsi que l'évolution de qualité de l'indice d'efficacité global est directement reliée au rapport des vitesses de convergence des champs σ° et σ_h lorsque $h \rightarrow 0$.

1.6.2. Une première approche

Dans sa version originale introduite dans [O. C. ZIENKIEWICZ et J. Z. ZHU, 1987], encore appelée « ZZ1 », la méthode consiste à rechercher le champ lissé, initialement de degré p , sur une base d'approximation de degré $p + 1$. Dans le cas du champ de contraintes,

σ° est ainsi construite sur la base des fonctions de formes éléments finis $(\varphi_i)_i$ en introduisant une famille d'opérateurs symétriques constants $(a_i^\circ)_i$:

$$\sigma^\circ = \sum_{i \in \mathcal{S}_h} a_i^\circ \varphi_i \quad (1.85)$$

La détermination des contraintes nodales $(a_i^\circ)_i$ s'effectue de manière globale ou locale. L'approche globale consiste à approcher σ° de σ_h à l'aide d'une minimisation aux moindres carrés généralement résolue de manière itérative :

$$\min_{(a_i)_i} \|\sigma^\circ - \sigma_h\|_{\mathbb{H}^{-1}, \Omega}$$

Moins coûteuses, les méthodes locales consistent à définir chaque contrainte a_i° comme une moyenne pondérée des valeurs de σ_h aux points de Gauss voisins du nœud i .

L'estimateur ainsi construit est très simple à mettre en œuvre. Cependant, dans bien des cas, le champ de contraintes ainsi lissé n'atteint pas une qualité d'approximation suffisante de σ , altérant inévitablement la précision de l'estimateur. A titre d'exemple, celui-ci peut fortement sous-estimer l'erreur vraie si les fonctions d'interpolation sont de degré pair.

1.6.3. Reconstruction superconvergente par patches

Cette méthode, encore appelée « ZZ2 », a été introduite dans [O. C. ZIENKIEWICZ et J. Z. ZHU, 1992a,b] sous le nom de « *Superconvergent Patch Recovery* » ou *SPR* afin de remédier aux inconvénients de l'approche précédente. Sans modifier le choix de la base d'approximation de σ° (1.85), elle propose une nouvelle procédure de calcul des coefficients $(a_i^\circ)_i$, certes plus coûteuse, mais améliorant considérablement la précision de l'estimation d'erreur.

Le principe se décompose en deux étapes. Tout d'abord, des approximations polynomiales intermédiaires σ_j° du champ de contrainte sont construites sur chaque sous-domaine $\omega_{h,j}^S$ support de la fonction de forme éléments finis φ_j au nœud j :

$$\sigma_j^\circ = \sum_{k \in \mathcal{N}_h(\omega_{h,j}^S)} b_{j,k}^\circ \varphi_k$$

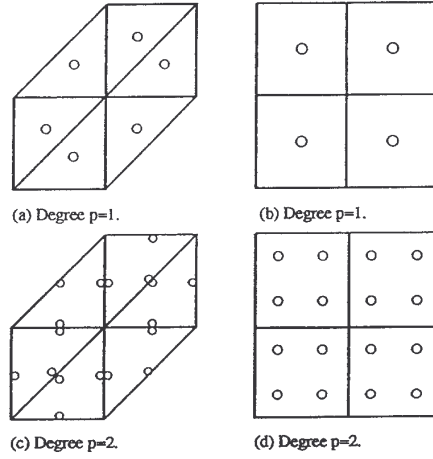
où $b_{j,k}^\circ$ désigne un opérateur du même type que a_i° et $\mathcal{N}_h(\omega_{h,j}^S)$ l'ensemble des nœuds des éléments du domaine $\omega_{h,j}^S$. Pour se faire, chaque famille $(b_{j,k}^\circ)_k$ est déterminée à l'aide d'une minimisation aux moindres carrés sur un ensemble $E_{ch}(E)$ de *points d'échantillonnage* p au sein de chaque élément $E \subset \omega_{h,j}^S$:

$$\min_{(b_{j,k}^\circ)_k} \sum_{E \subset \omega_{h,j}^S} \sum_{p \in E_{ch}(E)} \text{tr} \left[(\sigma_j^\circ(p) - \sigma_h(p))^2 \right] \quad (1.86)$$

Le champ ainsi obtenu est ensuite évalué sur un ensemble de points $i \in E_v(\omega_{h,j}^S)$ du sous-domaine considéré, correspondant généralement aux nœuds intérieurs. Enfin, le calcul de chaque coefficient a_i° s'effectue à l'aide d'une moyenne des valeurs $\sigma_j^\circ(i)$ précédemment obtenues, soit :

$$a_i^\circ = \frac{1}{|P(i)|} \sum_{j \in P(i)} \sigma_j^\circ(i)$$

où $P(i) = \{j \in \mathcal{S}_h(\Omega), i \in E_v(\omega_{h,j}^S)\}$ désigne l'ensemble des nœuds sommets des domaines $\omega_{h,j}^S$ contenant le nœud i .



□ FIG. 1.5. Ensemble de points d'échantillonnage $E_{ch}(E)$ pour quelques éléments usuels [M. AINSWORTH et J. ODEN, 1997]

□ REMARQUE 1.26 Lors de la détermination des coefficients a_i° correspondant aux nœuds frontières du domaine Ω , il est préférable de construire les champs intermédiaires σ_j° sur des domaines plus grands que $\omega_{h,i}^S$ (typiquement des patches à deux rangées d'éléments centrés sur chaque nœud sommet $j \in \mathcal{S}_h(\partial\Omega)$).

Le choix des ensembles $E_{ch}(E)$ de points d'échantillonnage est d'importance dans la mise en œuvre de l'estimateur ici détaillé. La mesure d'erreur sera optimale lorsque ceux-ci seront pris égaux aux points de *superconvergence* des grandeurs dérivées de type contrainte (ou de ceux des grandeurs de type déplacement si la procédure de lissage s'opère sur le champ u_h). Cette propriété confère en effet au champ σ° une vitesse de convergence supérieure à celle de σ_h . En supposant cette dernière de la forme $\|\epsilon\|_{\mathbb{H}^{-1},\Omega} = O(h^p)$, ϵ° vérifie alors $\|\epsilon^\circ\|_{\mathbb{H}^{-1},\Omega} = O(h^{p+\alpha})$ ($\alpha > 0$), ce qui donne d'après (1.84) :

$$1 - |O(h^\alpha)| \leq \gamma \leq 1 + |O(h^\alpha)| \implies \lim_{h \rightarrow 0} \gamma = 1$$

L'estimateur « ZZ2 » est alors consistant sous les hypothèses précédentes.

En pratique, pour le champ de contrainte, les points de superconvergence sont confondus avec les points d'intégration de Gauss en dimension 1. En dimension 2 ou 3, leur existence est établie de manière théorique ou numérique uniquement dans certains cas particuliers de configuration de maillages. Enfin, dans le cas d'éléments trop distordus ou aplatis, la propriété semble disparaître.

1.6.4. Quelques variantes

Plusieurs variantes furent apportées à la méthode « ZZ2 ». Celles-ci portent essentiellement sur la manière de déterminer les coefficients $(b_{j,k}^\circ)_k$. Nous présentons ici succinctement les plus notables d'entre elles.

1.6.4.1. Minimisation sous conditions d'équilibre

Cette variante, initialement introduite dans [WIBERG, ABDULWAHAB et ZIUKAS, 1994], consiste à vérifier de manière approchée l'équilibre local lors de la minimisation de la fonctionnelle (1.86), qui devient alors :

$$\min_{(b_{j,k}^\circ)_k} \sum_{E \subset \omega_{h,j}^S} \sum_{p \in E_{ch}(E)} \left\{ \text{tr} \left[(\sigma_j^\circ(p) - \sigma_h(p))^2 \right] + \beta \int_{\omega_{h,j}^S} (\text{div}(\sigma_j^\circ) + f)^2 d\Omega \right\}$$

où β est un coefficient de pondération. Il semble qu'une technique similaire ait été proposée dans [BLACKER et Ted BELYTSCHKO, 1994].

En pratique, ce type de variante, bien qu'ajoutant un terme « physique » à la minimisation (1.86), semble dégrader les performances de l'estimateur original à l'exception des zones frontalières du domaine. Ceci peut s'expliquer par le fait que le terme ainsi rajouté « perturbe » la minimisation au niveau des points de superconvergence.

1.6.4.2. Reconstruction par patches équilibrés

Cette variante [B. BOROOMAND et O. C. ZIENKIEWICZ, 1997], connue sous le nom de *Recovery of Equilibrium of Patches* « REP », consiste à remplacer la fonctionnelle (1.86) définie sur l'ensemble $E_{ch}(E)$ des points d'échantillonnage par une condition de prolongement identique à celle introduite dans 1.5.2 et définie sur l'ensemble du sous-domaine $\omega_{h,i}^S$. La fonctionnelle (1.86) est alors remplacée par :

$$\min_{(b_{j,k}^\circ)_k} \left[\int_{\omega_{h,i}^S} (\sigma_j^\circ - \sigma_h) \cdot \nabla(\varphi_k) d\Omega \right]^2$$

Le principal avantage de cette méthode réside dans la définition d'une fonctionnelle permettant de s'affranchir de l'utilisation des points de superconvergence. En outre, elle semble afficher des performances similaires à celles de l'estimateur « ZZ2 », leur justification semblant toutefois rester une question ouverte.

1.6.5. Extension à d'autres types de problèmes

Cette famille de méthodes ne fit pas exception une extension aux problèmes autres que linéaires, même si les contributions y sont nettement moins nombreuses que pour les estimateurs reposant sur les défaut d'équilibre ou sur l'erreur en relation de comportement. Mentionnons ainsi une approche par projection du champ de contrainte dans le cadre du contrôle adaptatif de problèmes de dynamique [T. BELYTSCHKO et TABBARA, 1993], et plus récemment l'extension de la méthode « *Superconvergent Patch Recovery* » à des problèmes à comportement élasto-plastique dans [B BORROOMAND et O ZIENKIEWICZ, 1999].

1.6.6. Commentaires

Notons tout d'abord la popularité de cette famille dans le milieu de l'ingénierie du fait de sa facilité d'implantation dans les codes éléments finis, et tout particulièrement du fait que des fonctions de lissage sont souvent présentes dans certains modules des codes éléments finis à des fins d'affichage et de post-traitement des résultats.

Au delà de cette facilité d'implantation, les méthodes associées permettent généralement l'obtention de résultats tout à fait satisfaisants dans de nombreux cas d'utilisation et peuvent ainsi être employées à moindre coût, dans le cadre de procédures de remaillage adaptatif par exemple. Dans [I BABUŠKA, T STROUBOULIS et C. UPADHYAY, 1994], une performance convenable de l'estimateur « ZZ2 » par rapport à celle d'autres types d'estimateurs est observée. Cependant, celui-ci fut plus récemment mis en défaut sur certains problèmes particuliers dans [PRUDHOMME, NOBILE et al., 2003]. En effet, de cette simplicité conceptuelle découle (tout du moins au jour d'aujourd'hui) une absence de propriété de majoration stricte de l'erreur vraie, ce qui constitue le principal défaut de ces méthodes lorsque l'utilisateur souhaite obtenir des bornes garanties.

Enfin, la possibilité d'obtenir une estimation d'erreur pour de nombreux types d'opérateurs de lissage ajoute à la souplesse de la méthode, même si la précision associée sera forcément liée à un choix pertinent de \mathcal{L}_{iss} . Sur ce point, signalons le développement d'un cadre mathématique d'analyse des performances de ce type d'estimateurs en fonction des propriétés de \mathcal{L}_{iss} dans [M. AINSWORTH et J. ODEN, 1997]. Le choix

de ces opérateurs permet également d'établir des liens intéressants entre les estimateurs par lissage de contraintes et ceux utilisant les résidus d'équilibres. Ainsi, les travaux [J ZHU, 1997 ; J.Z. ZHU et ZHANG, 1999] montrent que certains estimateurs du type « résidus d'équilibre » correspondent à un choix particulier de l'opérateur \mathcal{L}_{iss} et peuvent donc être mis en œuvre de manière similaire à l'aide d'une approche par lissage.

1.7. ESTIMATION D'ERREUR SUR DES QUANTITÉS D'INTÉRÊT

Si les méthodes d'estimation précédemment présentées sont utiles pour évaluer la qualité globale d'un calcul, il est souvent nécessaire (et particulièrement dans un contexte de dimensionnement) de pouvoir estimer l'erreur commise sur des quantités plus fines, dites *quantités d'intérêt*. Des exemples de quantité d'intérêt peuvent être aussi bien l'état de contrainte et de déformation en un point que la contrainte de Von Mises sur une zone particulière, et de manière plus générale, toute quantité définie par une fonctionnelle $I(u)$ appliquée à la solution u . Pour accéder à l'erreur commise sur ce type de quantité, l'utilisation des estimateurs globaux n'est généralement pas suffisante, les seules données accessibles étant des contributions élémentaires à l'erreur globale. Cette partie s'attache à présenter très brièvement les points clés relatifs à l'estimation d'erreur sur des quantités d'intérêt.

1.7.1. Erreur en pollution

La première approche de ce type [I. BABUSKA, T. STROUBOULIS, C. S. UPADHYAY et S. K. GANGARAJ, 1995 ; Antonio HUERTA et Pedro DIEZ, 2000] définit le concept de *pollution*, selon lequel l'erreur sur une zone donnée ω provient de deux contributions distinctes : d'une part l'erreur due à la discrétisation de ω , d'autre part un terme de pollution représentant les effets sur ω de l'erreur commise sur le reste du domaine. Le calcul de l'erreur locale s'effectue alors en évaluant les deux termes précités à l'aide de problèmes auxiliaires posés sur le domaine complet.

1.7.2. Encadrement direct

Par ailleurs, une approche simple et heuristique permettant d'évaluer directement et à moindre coût l'erreur locale élémentaire fut développée dans le cadre de l'erreur en relation de comportement [E FLORENTIN, L GALLIMARD et J.P. PELLE, 2002 ; P. LADEVEZE, P. ROUGEOT et al., 1999]. La méthode repose sur l'utilisation d'un processus de reconstruction améliorée du champ de contrainte admissible qui conduit alors à une majoration de l'erreur vraie au niveau élémentaire. Signalons toutefois que s'appuyant sur

une norme énergétique en contraintes, elle ne peut s'appliquer qu'à des quantités d'intérêts liées aux contraintes (un cas particulier relatif à la contrainte de Von Mises fut notamment développé dans [E FLORENTIN, 2002]).

1.7.3. Approches par extracteurs

Ce sous-ensemble regroupe les approches aujourd'hui les plus usitées et faisant l'objet de nombreux travaux visant tant à en améliorer les performances qu'à étendre leur cadre d'application. Ici encore, les premiers développements [BECKER et RANNACHER, 1996] furent relatifs aux problèmes linéaires et regroupent plusieurs méthodes et variantes, parmi lesquelles [P. LADEVEZE, P. ROUGEOT et al., 1999 ; PERAIRE et PATERA, 1998 ; PRUDHOMME et J. ODEN, 1999].

La philosophie sous-jacente consiste à écrire la quantité d'intérêt à l'aide d'une fonctionnelle $I(u)$ dépendant de la solution du problème et définie de manière globale sur le domaine. En supposant l'extracteur I linéaire, l'erreur sur la quantité d'intérêt s'écrit alors :

$$I(u) - I(u_h) = I(u - u_h) = I(e) \quad (1.87)$$

Par la suite, $I(e)$ est reliée au résidu \mathcal{R} par le biais d'une *fonction d'influence* ϕ représentant les effets sur $I(e)$ dus à l'approximation numérique :

$$I(e) = \mathcal{R}(\phi) = \int_{\Omega} \boldsymbol{\sigma}(e) : \boldsymbol{\varepsilon}(\phi) d\Omega \quad (1.88)$$

ϕ est alors solution du problème suivant (dénommé *problème adjoint*) :

$$\begin{aligned} &\text{Trouver } \phi \in \mathcal{C}a^0(\Omega) \text{ vérifiant :} \\ &\int_{\Omega} \boldsymbol{\sigma}(v) : \boldsymbol{\varepsilon}(\phi) d\Omega = \mathcal{R}(v), \quad \forall v \in \mathcal{C}a^0(\Omega) \end{aligned} \quad (1.89)$$

Par la suite, à partir d'une solution approchée $\phi_h \in \mathcal{C}a_h^0(\Omega)$ et de la propriété d'orthogonalité (1.25), $I(e)$ s'écrit :

$$I(e) = \mathcal{R}(\phi) - \mathcal{R}(\phi_h) = \int_{\Omega} \boldsymbol{\sigma}(e) : \boldsymbol{\varepsilon}(\epsilon) d\Omega \quad (1.90)$$

où $\epsilon = \phi - \phi_h$ désigne l'erreur sur le champ auxiliaire. L'utilisation de l'identité du parallélogramme permet d'obtenir, pour tout scalaire κ :

$$I(e) = \frac{1}{4} \left\| \kappa e + \frac{1}{\kappa} \epsilon \right\|^2 - \frac{1}{4} \left\| \kappa e - \frac{1}{\kappa} \epsilon \right\|^2 \quad (1.91)$$

Ce dernier résultat, conjugué au calcul de bornes supérieures et inférieures globales sur e et ϵ , conduit alors à un encadrement de $I(e)$.

On constate que cette approche permet l'évaluation de $I(e)$ (ou du moins son encadrement) à l'aide de la résolution d'un problème adjoint qui ne diffère du problème de référence que par son second membre, et pouvant donc être résolu avec un coût numérique réduit. En outre, l'analyse d'erreur sur ce second problème utilise les mêmes outils d'estimation d'erreur globale relatifs à la détermination de e . Cette dernière remarque souligne l'importance d'outils robustes et fiables d'estimation d'erreur globale comme conditions préalables dans la mise en œuvre de procédures d'estimation d'erreur locale. Ajoutons d'autre part que l'utilisation d'une fonctionnelle I définie de manière globale permet une grande souplesse dans la définition des quantités d'intérêt.

Cette méthode fut étendue par la suite au cadre des problèmes non-linéaires [BECKER et RANNACHER, 2001 ; P LADEVÈZE, 2006], dans lequel se situent la majorité des développements les plus récents. On mentionnera ainsi des extensions aux problèmes de visco-élasticité linéaire [L. CHAMOIN et P. LADEVÈZE, 2008], de dynamique [Pierre LADEVÈZE et WAEYENS, 2009], aux problèmes de Helmholtz [STEFFENS et DíEZ, 2009] et, de manière plus générale, aux problèmes mathématiques de type parabolique [N PARES, P DIEZ et A HUERTA, 2007a,b]. D'autres travaux récents [P. LADEVÈZE et L. CHAMOIN, 2010] portent sur le traitement des quantités d'intérêt ponctuelles et non-linéaires.

1.8. CONCLUSION PARTIELLE

Ce chapitre a permis de dresser un rapide aperçu des aspects liés à la problématique de la vérification des calculs éléments finis, tout en abordant plus spécifiquement les apports relatifs aux estimateurs d'erreur globale pour les problèmes linéaires.

En premier lieu, soulignons que la quasi-totalité des outils présentés sont asymptotiquement exacts, ce qui rend leur utilisation parfaitement envisageable dans des procédures d'adaptativité. Par ailleurs, la plupart d'entre eux (à l'exception des estimateurs par lissage de contraintes) permettent l'obtention – théorique – d'une borne supérieure de l'erreur de discrétisation. Malheureusement, la mise en pratique de la majorité des procédures d'estimation associées (notamment via des résolutions éléments finis en déplacement de problèmes auxiliaires) ne permet pas de conserver cette propriété, ce qui suscite aujourd'hui encore des travaux visant à améliorer le traitement numérique de l'estimateur de manière à retrouver une estimation garantie de l'erreur vraie (principalement à travers des résolutions par approches duales). Il convient cependant de relativiser les conséquences d'une perte théorique de la propriété de majoration sur la qualité des estimations en rappelant les conclusions des différentes études relatives à la qualité des estimateurs [I. BABUŠKA, T. STROUBOULIS et C. S. UPADHYAY, 1997 ; I. BABUŠKA, T. STROUBOULIS et C. UPADHYAY, 1994 ; I. BABUŠKA, T. STROUBOULIS et al., 1994] selon lesquelles un ajustement optimal des paramètres de discrétisation au sein des procédures d'estimation permet de minimiser l'écart de résultat par rapport

à une procédure conduisant à une majoration garantie, tout en conservant une faisabilité numérique acceptable et en restant ainsi très proche du résultat théorique garanti.

À en constater l'abondante littérature durant la dernière décennie, les procédures d'encadrement et d'estimation d'erreur locale constituent l'essentiel des recherches actuelles. Si les premiers travaux étaient relatifs aux mesures locales en espace pour des problèmes linéaires, les recherches se portent désormais sur deux axes distincts : d'une part l'extension des procédures à d'autres classes de problèmes, d'autre part le développement de techniques permettant la mise en œuvre d'autres types de mesure. Le premier axe s'intéresse bien évidemment aux problèmes non-linéaires avec évolution temporelle, mais également à l'extension des méthodes au cadre stochastique [P. LADEVÈZE et E. FLORENTIN, 2006 ; J. T. ODEN et al., 2005] ainsi, récemment, qu'au cadre des méthodes de réduction de modèle [Pierre LADEVÈZE et Ludovic CHAMOIN, 2011]. Outre le développement des méthodes locales pour un ensemble de fonctionnelles définissant des quantités d'intérêt spatio-temporelles, le second axe s'intéresse également à celui d'une nouvelle erreur dite *erreur de modèle* [J. ODEN et K.S. VEMAGANTI, 2000], permettant d'estimer à partir d'une analyse a posteriori l'écart entre un modèle initial et ses simplifications diverses inhérentes à de nombreux processus de résolution numérique. Avec la complexification constante des modèles physiques, ce nouveau type d'erreur s'avère particulièrement prometteur.

Si l'utilité première des procédures de vérification des calculs réside dans une estimation fiable d'une erreur globale ou définie sur une quantité d'intérêt locale, il est également nécessaire de pouvoir optimiser la discrétisation du problème initial afin de réaliser des calculs satisfaisant un objectif de précision initial donné. Ce point précis est assuré par des procédures de remaillage adaptatif sur la base des informations fournies par l'estimateur d'erreur. Nous avons ici écarté les travaux qui en découlent car ils ne sont pas nécessaires à la compréhension de la suite de ce document.

Enfin, si certaines procédures d'estimation d'erreur sont déjà implantées et utilisées dans plusieurs codes éléments finis industriels, signalons qu'à l'exclusion des estimateurs par lissage de contraintes, les outils des autres familles sont souvent ardues à mettre en place et leur utilisation s'accompagne d'importants surcoûts numériques. Aussi, plusieurs travaux portent actuellement sur la mise en place de procédures robustes d'estimation d'erreur garanties à destination du monde industriel. Dans la suite de ce document et à l'aide des méthodes de décomposition de domaine, nous apporterons une réponse à la faisabilité numérique de la mise en œuvre de l'estimateur d'erreur en relation de comportement.

CHAPITRE 2.

MÉTHODES DE DÉCOMPOSITION DE DOMAINE SANS RECOUVREMENT EN MÉCANIQUE DES STRUCTURES

Après avoir présenté les bases des méthodes de décomposition de domaine sans recouvrement dans le cadre des problèmes linéaires, ce chapitre s'attache à la description des principaux algorithmes de résolution associés. Les approches *duale* et *primale*, utilisées dans les développements présentés en seconde partie, seront principalement détaillées tandis que les aspects fondamentaux des autres types d'approches seront brièvement présentés.

2.1. Cadre de travail	59
2.2. Mise en équations	62
2.2.1. Discrétisation des conditions de raccord	63
2.2.2. Condensation des problèmes locaux	65
2.2.3. Obtention du problème d'interface global	66
2.2.4. Approches de résolution	67
2.2.5. Commentaires	67
2.3. Approche duale	69
2.3.1. Principes	69
2.3.2. Préconditionnement	70
2.3.3. Problème grossier	71
2.4. Approche primale	73
2.4.1. Principes	73
2.4.2. Préconditionnement	74
2.4.3. Problème grossier	75

2.5. Présentation succincte des autres types d'approches	76
2.5.1. Approches hybrides et recondensées	76
2.5.2. Approche mixte	78
2.6. Conclusion partielle	79

Le principe de résolution par décomposition de domaine d'un problème donné est assez ancien puisque sa paternité est attribuée à Hermann Schwarz durant la seconde moitié du XIX^{ème} siècle. Dans un article de 1869 [SCHWARZ, 1869], il était alors proposé d'utiliser une décomposition recouvrante lors de la résolution d'un problème aux dérivées partielles sur une géométrie complexe. Le développement des moyens de calcul numérique et notamment l'avènement des architectures parallèles a ravivé depuis bientôt trois décennies l'intérêt porté à ces méthodes. Outre une approche de sous-structuration pour la résolution de problèmes de dynamique [CRAIG et BAMPION, 1968], les premières mises en œuvre du concept dans le cadre du calcul numérique semblent remonter au milieu des années 80. Aujourd'hui, l'utilisation des méthodes sans recouvrement semble préférée dans le domaine de l'ingénierie. Ce caractère non-recouvrant permet en effet une localisation naturelle des données au niveau de chaque sous-structure qui rend possible l'affectation de leur traitement à des processeurs dédiés. Ce processus de décomposition doit toutefois être mené avec un soin particulier apporté à la minimisation des échanges entre sous-structures (et donc entre processeurs). Ces échanges, bien qu'inévitables afin d'assurer l'équivalence avec le problème initial, restent en effet très souvent la première cause de perte de performances dans les approches parallèles. Nonobstant leur existence, nous verrons que l'utilisation d'outils spécifiques confère à ces méthodes des performances particulièrement intéressantes dans un contexte de calcul intensif.

La richesse bibliographique du sujet ne permet pas d'envisager dans ce chapitre une description exhaustive des méthodes de décomposition de domaine sans recouvrement, pour laquelle le lecteur trouvera une revue détaillée dans les références [Pierre GOSSELET et Christian REY, 2006 ; Patrick LE TALLEC, 1994 ; QUARTERONI et VALLI, 1999]. On se limitera donc à présenter les idées et concepts fondamentaux en explicitant quelques aspects dont la connaissance sera utile par la suite et en mentionnant les références utiles à tout lecteur curieux d'approfondir le sujet. Une fois le principe de décomposition non recouvrante introduit, on présentera, dans le cadre des problèmes linéaires, la version discrète de la mise en équation associée. On détaillera par la suite les deux principales approches de résolution *duale* et *primale*, puis on présentera rapidement les principes des approches *hybrides* et *mixtes*. Enfin, on concluera en mentionnant quelques utilisations intéressantes découlant des propriétés des solveurs utilisés ainsi que l'extension de ces méthodes aux problèmes non-linéaires.

2.1. CADRE DE TRAVAIL

Afin d'introduire et d'illustrer les principes des décompositions de domaine sans recouvrement, reprenons le cadre mécanique simple introduit au chapitre précédent en considérant le problème modèle (1.1). Sous les hypothèses de la partie 1.1.1, on rappelle que la modélisation conduit au système d'équations suivant :

– équations de compatibilité :

$$\begin{aligned} \varepsilon(u) &= \frac{1}{2}(\nabla \cdot u^T + \nabla \cdot u) & \text{dans } \Omega \\ u &= u_d & \text{sur } \partial_u \Omega \end{aligned} \quad (1.1a)$$

– équations d'équilibre :

$$\begin{aligned} \operatorname{div}(\sigma) + f &= 0 & \text{dans } \Omega \\ \sigma \cdot n &= g & \text{sur } \partial_f \Omega \end{aligned} \quad (1.1b)$$

– relation de comportement :

$$\sigma = \mathbb{H} : \varepsilon(u) \quad \text{dans } \Omega \quad (1.1c)$$

Considérons à présent le cas général d'une partition de Ω en une famille de \mathcal{N}_{sd} sous-domaines $(\Omega^{(s)})_{1 \leq s \leq \mathcal{N}_{\text{sd}}}$ non recouvrants (cf. figure FIG pour un exemple) :

$$\bar{\Omega} = \bigcup_{s=1}^{\mathcal{N}_{\text{sd}}} \bar{\Omega}^{(s)} \quad \text{et} \quad \Omega^{(s)} \cap \Omega^{(s')} = \emptyset, \quad \forall s \neq s' \quad (2.2)$$

On note $\Upsilon^{(ss')}$ l'interface locale entre deux sous-domaines induite par la décomposition, à partir de laquelle on peut définir des interfaces $\Upsilon^{(s)}$ relatives aux sous-structures ainsi qu'une interface géométrique globale Υ (fig. 2.1) :

$$\Upsilon^{(ss')} = \Upsilon^{(s's)} = \partial \bar{\Omega}^{(s)} \cap \partial \bar{\Omega}^{(s')} \quad (2.3a)$$

$$\Upsilon^{(s)} = \bigcup_{s'} \Upsilon^{(ss')} \quad (s' / \bar{\Omega}^{(s)} \cap \partial \bar{\Omega}^{(s')} \neq \emptyset) \quad (2.3b)$$

$$\Upsilon = \bigcup_{1 \leq s \leq \mathcal{N}_{\text{sd}}} \Upsilon^{(s)} \quad (2.3c)$$

Par ailleurs, le découpage introduisant de fait des supports locaux relatifs aux sous-domaines, on affectera de l'exposant $^{(s)}$ les champs locaux ainsi définis sur chaque $\Omega^{(s)}$.

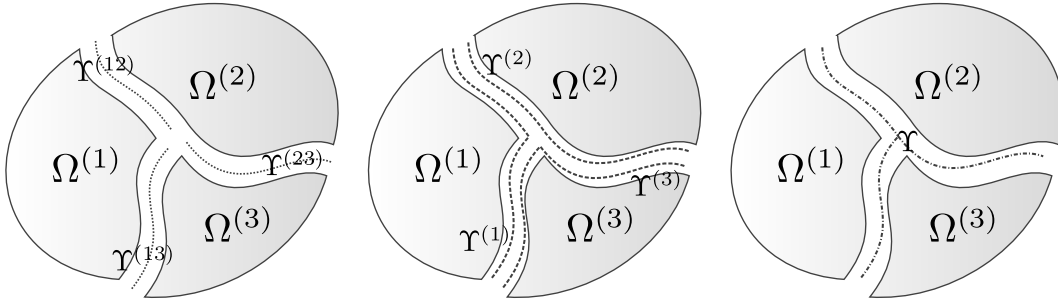
Sur la base de la décomposition ainsi formulée, on peut exprimer aisément la restriction du problème (1.1) sur chaque sous-domaine $\Omega^{(s)}$:

– équations de compatibilité :

$$\begin{aligned} \varepsilon(u^{(s)}) &= \frac{1}{2}(\nabla \cdot u^{(s)T} + \nabla \cdot u^{(s)}) & \text{dans } \Omega^{(s)} \\ u^{(s)} &= u_d & \text{sur } \partial_u \Omega \cap \partial \Omega^{(s)} \end{aligned} \quad (2.4a)$$

– équations d'équilibre :

$$\begin{aligned} \operatorname{div}(\sigma^{(s)}) + f &= 0 & \text{dans } \Omega^{(s)} \\ \sigma^{(s)} \cdot n &= g & \text{sur } \partial_f \Omega \cap \partial \Omega^{(s)} \end{aligned} \quad (2.4b)$$



□ FIG. 2.1. Exemple de décomposition en 3 sous-domaines avec représentation des interfaces $\Upsilon^{(ss')}$, $\Upsilon^{(s)}$ et Υ

– relation de comportement :

$$\sigma^{(s)} = \mathbb{H} : \varepsilon(u^{(s)}) \quad \text{dans } \Omega^{(s)} \quad (2.4c)$$

Malheureusement, la simple écriture des problèmes locaux précédents ne suffit pas à assurer l'équivalence avec le problème global de départ. Il est alors nécessaire d'imposer aux couples de solutions locaux $(u^{(s)}, \sigma^{(s)})$ la vérification de conditions supplémentaires au niveau des interfaces entre sous-domaines :

– d'une part, la continuité des champs de déplacements $u^{(s)}$ locaux :

$$u^{(s)} = u^{(s')} \quad \text{sur } \Upsilon^{(ss')} \quad (2.5)$$

– d'autre part, la validité du principe de l'action et de la réaction entre les sous-structures :

$$\sigma^{(s)} \cdot n^{(s)} + \sigma^{(s')} \cdot n^{(s')} = 0 \quad \text{sur } \Upsilon^{(ss')} \quad (2.6)$$

Après introduction des deux précédentes conditions, l'ensemble des systèmes d'équations (2.4), (2.5) et (2.6) est alors équivalent au problème de départ (1.1). La construction de la solution globale s'effectuera alors au moyen d'un opérateur d'assemblage \mathcal{A} associant à chaque \mathcal{N}_{sd} -uplet de solutions locales $(\bullet^{(s)})_{1 \leq (s) \leq \mathcal{N}_{\text{sd}}}$, noté de manière condensée avec l'exposant \square , le champ assemblé sur Ω , soit pour tout couple déplacement–contrainte :

$$u = \mathcal{A}(u^\square) \Leftrightarrow u|_{\Omega^{(s)}} = u^{(s)} \quad (2.7a)$$

$$\sigma = \mathcal{A}(\sigma^\square) \Leftrightarrow \sigma|_{\Omega^{(s)}} = \sigma^{(s)} \quad (2.7b)$$

En reprenant les espaces introduits dans la partie 1.1.2, on peut aisément associer aux problèmes locaux (2.4) les espaces d'admissibilité cinématique $\mathcal{Ca}(\Omega^{(s)})$ et statique $\mathcal{Sa}(\Omega^{(s)})$. Considérant les conditions de raccord entre sous-structures et l'opérateur \mathcal{A} , l'admissibilité globale de tout couple $(u^\square, \sigma^\square)$ de \mathcal{N}_{sd} -uplet déplacement–contrainte revient alors à vérifier les conditions d'équivalence suivantes :

$$\mathcal{A}(u^\square) \in \mathcal{Ca}(\Omega) \Leftrightarrow \begin{cases} u^{(s)} \in \mathcal{Ca}(\Omega^{(s)}) & \forall s \\ \text{tr}(u^{(s)}) = \text{tr}(u^{(s')}) & \text{sur } \Upsilon^{(ss')}, \forall (s, s') \end{cases} \quad (2.8a)$$

$$\mathcal{A}(\sigma^\square) \in \mathcal{S}a(\Omega) \Leftrightarrow \begin{cases} \sigma^{(s)} \in \mathcal{S}a(\Omega^{(s)}) & \forall s \\ \sigma^{(s)}.n^{(s)} + \sigma^{(s')}.n^{(s')} = 0 & \text{sur } \Upsilon^{(ss')}, \forall (s, s') \end{cases} \quad (2.8b)$$

L'utilisation de la fonctionnelle erreur en relation de comportement permet par la suite une autre écriture du problème sous-structuré :

$$\begin{aligned} \text{Trouver } (\mathcal{A}(u^\square), \mathcal{A}(\sigma^\square)) \in \mathcal{C}a(\Omega) \times \mathcal{S}a(\Omega) \text{ vérifiant :} \\ e_{\text{rdc}, \Omega^{(s)}}(u^{(s)}, \sigma^{(s)}) = 0 \quad (1 \leq s \leq \mathcal{N}_{\text{sd}}) \end{aligned} \quad (2.9)$$

On constate en vertu de ce qui précède que la résolution d'un problème sous-structuré fait intervenir le traitement de \mathcal{N}_{sd} problèmes locaux définis sur chaque sous-domaine $\Omega^{(s)}$. Le caractère non-recouvrant de la décomposition, en permettant d'envisager leur résolution de manière indépendante et donc affecter leur traitement à des processeurs distincts, constitue probablement l'intérêt majeur de cette approche. Notons cependant que la vérification des conditions de raccord impose des phases d'échanges de données au niveau des interfaces $\Upsilon^{(ss')}$ qui doivent, autant que possible, demeurer limitées pour ne pas altérer les performances globales. En pratique, nous verrons par la suite que ce type d'approches s'appuie sur la formulation d'un problème d'interface intégrant d'une manière condensée les contributions des sous-structures (2.4), et dont la résolution s'effectue de manière itérative en imposant la vérification de certaines conditions de raccord.

2.2. MISE EN ÉQUATIONS

La partie précédente ayant permis d'introduire les fondements des méthodes de décomposition domaine sans recouvrement conjointement à la définition des opérateurs fondamentaux associés, on se restreindra par la suite à des descriptions algébriques dans un cadre discret. Le lecteur désireux d'approfondir la formulation continue des méthodes sous-jacentes pourra consulter les références [Patrick LE TALLEC, 1994; P. LE TALLEC, DE ROECK et VIDRASCU, 1991] ainsi que [MAGOULES et F. ROUX, 2006], ce dernier papier abordant de pair les approches continues et discrètes au sein d'une formulation par Lagrangien augmenté.

Considérons à nouveau la triangulation Ω_h de Ω introduite en section 1.1.3 associée à la recherche d'une solution approchée u_h de (1.1) sur une base $(\varphi_i)_i$ de N_{ddl} fonctions de formes de l'espace $\mathcal{C}a_h(\Omega)$ (1.18). En introduisant la matrice $(d \times N_{ddl})$ $\boldsymbol{\varphi}$ des fonctions φ_i ainsi que le vecteur (N_{ddl}) des inconnues nodales en déplacement \mathbf{u} , de sorte que u_h s'exprime comme $u_h = \boldsymbol{\varphi}\mathbf{u}$, on obtient l'écriture algébrique classique du problème approché (1.19),(1.20) :

$$\mathbf{K}\mathbf{u} = \mathbf{f} \quad (2.10)$$

où \mathbf{K} ($N_{ddl} \times N_{ddl}$) désigne la matrice de raideur symétrique et définie positive du domaine Ω_h et \mathbf{f} (N_{ddl}) le vecteur des forces nodales généralisées.

Considérons par la suite une décomposition de Ω_h en un ensemble $(\Omega_h^{(s)})_s$ de sous-domaines non recouvrants de telle sorte que tout élément du maillage n'appartienne qu'à un seul et unique sous-domaine. La validité du cadre de travail des méthodes présentées par la suite nécessite le choix d'une décomposition de type *conforme*. Une telle décomposition requiert la validité d'une correspondance nœud à nœud entre les degrés de liberté de part et d'autre de l'interface conjointement à l'utilisation de modèles et d'espaces d'approximation similaires sur toutes les sous-structures. Remarquons que dans la plupart des cas de figures, le problème discret sous-structuré résultant est obtenu par découpage d'un problème global Ω_h déjà discrétisé et présente donc automatiquement une correspondance nœud à nœud entre sous-domaines au niveau des interfaces. Dans certains cas, comme lors de l'étude de problèmes mécaniques constitués d'entités physiques bien déterminées (problèmes de contacts, assemblages...), la phase de discrétisation peut suivre la phase de découpage, ce qui nécessite alors une attention particulière dans le but d'assurer la validité de la correspondance nœud à nœud.

Dans la suite, on affectera de l'indice i les degrés de liberté intérieurs aux sous-domaines et de l'indice b ceux situés sur l'interface.

2.2.1. Discrétisation des conditions de raccord

De par le caractère conforme des décompositions considérées, l'écriture des conditions de raccord à l'interface dans le cadre discret est grandement simplifiée et se résume à des correspondances nœud à nœud entre les différentes variables en jeu. Celles-ci sont alors assurées à l'aide d'opérateurs d'*assemblage* notés respectivement $\overline{\mathbf{A}}^{(s)}$ et $\underline{\mathbf{A}}^{(s)}$ ($\underline{\mathbf{A}}^{(s)}$ étant une version signée de $\overline{\mathbf{A}}^{(s)}$), qui réalisent des traductions entre la numérotation locale relative à $\Upsilon^{(s)}$ et celle (globale) de Υ . Pour fixer les esprits, nous présentons figure 2.2 un cas particulier de construction des opérateurs $\overline{\mathbf{A}}^{(s)}$ et $\underline{\mathbf{A}}^{(s)}$, ainsi que de l'opérateur de trace discrète $\mathbf{t}^{(s)}$ sur $\Omega^{(s)}$ utilisé par la suite, et défini par :

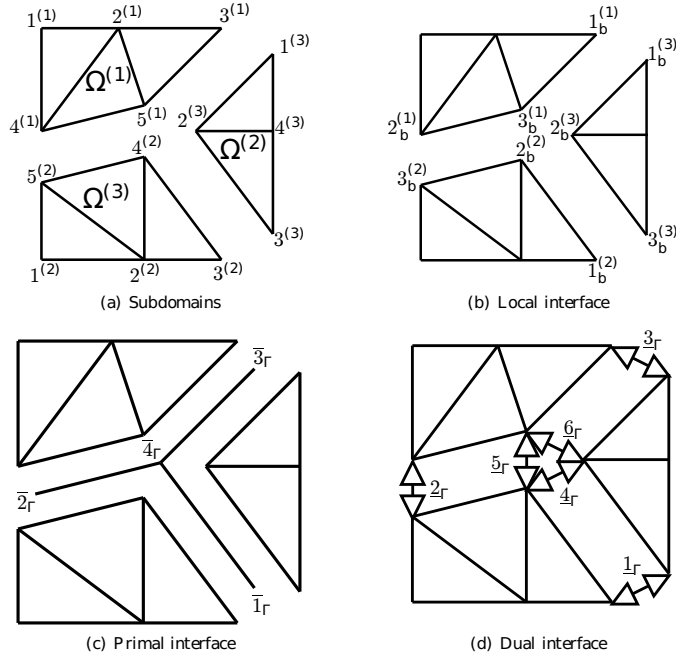
$$\mathbf{x}_b^{(s)} = \mathbf{t}^{(s)} \mathbf{x}^{(s)} \quad (2.11)$$

Les versions discrètes précédemment définies permettent l'écriture de la condition de continuité des déplacements entre sous-structures comme :

$$\sum_s \underline{\mathbf{A}}^{(s)} \mathbf{u}_b^{(s)} = \sum_s \underline{\mathbf{A}}^{(s)} \mathbf{t}^{(s)} \mathbf{u}^{(s)} = \mathbf{0} \quad (2.12)$$

Le traitement de l'équilibre entre les sous-structures nécessite l'introduction d'un représentant nodal $\lambda_b^{(s)}$ des inter-efforts $\sigma^{(s)}.n^{(s)}$ exercés par un domaine sur son domaine adjacent. Par la suite, la condition associée s'écrit alors :

$$\sum_s \overline{\mathbf{A}}^{(s)} \lambda_b^{(s)} = \sum_s \overline{\mathbf{A}}^{(s)} \mathbf{t}^{(s)} \lambda^{(s)} = \mathbf{0} \quad (2.13)$$



$$\mathbf{t}^{\diamond} = \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \end{pmatrix}$$

$$\overline{\mathbf{A}}^{\diamond} = \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \end{pmatrix}$$

$$\underline{\mathbf{A}}^{\diamond} = \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \end{pmatrix}$$

□ FIG. 2.2. Exemple de numérotation locale, globale et des opérateurs de trace et d'assemblage associés

où les valeurs de $\lambda^{(s)}$ associées aux noeuds intérieurs au sous-domaine $\Omega^{(s)}$ sont choisies nulles.

Pour fixer les idées, les relations (2.12), (2.13) s'écrivent dans le cas d'une décomposi-

tion en deux sous-domaines comme :

$$\begin{aligned}\sum_s \underline{\mathbf{A}}^{(s)} \mathbf{u}_b^{(s)} &= \mathbf{u}_b^{(1)} - \mathbf{u}_b^{(2)} = \mathbf{0} \\ \sum_s \overline{\mathbf{A}}^{(s)} \boldsymbol{\lambda}_b^{(s)} &= \boldsymbol{\lambda}_b^{(1)} + \boldsymbol{\lambda}_b^{(2)} = \mathbf{0}\end{aligned}$$

Signalons que les opérateurs d'assemblage ici présentés comportent plusieurs propriétés mathématiques intéressantes, notamment une propriété d'orthogonalité :

$$\sum_s \underline{\mathbf{A}}^{(s)} \overline{\mathbf{A}}^{(s)T} = \mathbf{0} \quad (2.14)$$

A l'aide des outils précédemment introduits, la traduction discrète du problème (2.4),(2.5) et (2.6) s'écrit alors :

$$\mathbf{K}^{(s)} \mathbf{u}^{(s)} = \mathbf{f}^{(s)} + \boldsymbol{\lambda}^{(s)} \quad (1 \leq s \leq \mathcal{N}_{sd}) \quad (2.15a)$$

$$\sum_s \underline{\mathbf{A}}^{(s)} \mathbf{t}^{(s)} \mathbf{u}^{(s)} = \mathbf{0} \quad (2.15b)$$

$$\sum_s \overline{\mathbf{A}}^{(s)} \mathbf{t}^{(s)} \boldsymbol{\lambda}^{(s)} = \mathbf{0} \quad (2.15c)$$

Rappelons que le traitement pratique du système précédent s'effectue à travers la formulation et la résolution d'un problème d'interface. Si les équations d'assemblage (2.15b) et (2.15c) sont bien évidemment directement posées sur l'interface, il reste à exprimer les systèmes traduisant l'équilibre discret des sous-structures (2.15a) en ces mêmes termes, ce qui constitue la phase de condensation des problèmes locaux.

2.2.2. Condensation des problèmes locaux

En groupant les quantités définies à l'intérieur du sous-domaine (affectées de l'indice i) et celles définies sur l'interface (affectées de l'indice b), et en utilisant le représentant discret des inter-efforts $\boldsymbol{\lambda}_b^{(s)}$ précédemment introduit, la version discrète de l'équilibre mécanique sur $\Omega^{(s)}$ s'écrit :

$$\begin{pmatrix} \mathbf{K}_{ii}^{(s)} & \mathbf{K}_{ib}^{(s)} \\ \mathbf{K}_{bi}^{(s)} & \mathbf{K}_{bb}^{(s)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{u}_i^{(s)} \\ \mathbf{u}_b^{(s)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{f}_i^{(s)} \\ \mathbf{f}_b^{(s)} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \mathbf{0}_i^{(s)} \\ \boldsymbol{\lambda}_b^{(s)} \end{pmatrix} \quad (2.16)$$

En exprimant $\mathbf{u}_i^{(s)}$ à partir du premier bloc du système ci-dessus comme :

$$\mathbf{u}_i^{(s)} = \mathbf{K}_{ii}^{(s)-1} \left(\mathbf{f}_i^{(s)} - \mathbf{K}_{ib}^{(s)} \mathbf{u}_b^{(s)} \right)$$

puis en injectant l'expression précédente dans le second bloc de (2.16), on obtient une formulation *condensée* sur l'interface $\Upsilon^{(s)}$ du problème mécanique posé sur la sous-structure $\Omega^{(s)}$:

$$\mathbf{S}^{(s)} \mathbf{u}_b^{(s)} = \mathbf{b}^{(s)} + \boldsymbol{\lambda}_b^{(s)} \quad (2.17)$$

avec

$$\begin{aligned} \mathbf{S}^{(s)} &= \mathbf{K}_{bb}^{(s)} - \mathbf{K}_{bi}^{(s)} \mathbf{K}_{ii}^{(s)-1} \mathbf{K}_{ib}^{(s)} \\ \mathbf{b}^{(s)} &= \mathbf{f}_b^{(s)} - \mathbf{K}_{bi}^{(s)} \mathbf{K}_{ii}^{(s)-1} \mathbf{f}_i^{(s)} \end{aligned}$$

Le système ainsi obtenu fait intervenir le *complément de Schur* $\mathbf{S}^{(s)}$ de la sous-structure $\Omega^{(s)}$, opérateur incontournable calculant les efforts de réaction à l'interface correspondants à un champ de déplacement imposé sur cette même interface. Le second membre $\mathbf{b}^{(s)}$ contient pour sa part la condensation des efforts intérieurs à $\Omega^{(s)}$, en sus de ceux appliqués directement sur l'interface.

□ **REMARQUE 2.1** $\mathbf{S}^{(s)}$ est la version discrète de l'opérateur de Steklov-Poincaré $S^{(s)}$ utilisé notamment dans certaines formulations continues des méthodes de décomposition de domaine :

$$\begin{aligned} S^{(s)} : H^{1/2}(\Upsilon^{(ss')}) &\longrightarrow H^{-1/2}(\Upsilon^{(ss')}) \\ v_{|\Upsilon^{(ss')}}^{(s)} &\longmapsto \sigma^{(s)} \cdot n_{|\Upsilon^{(ss')}}^{(s)} \end{aligned} \quad (2.18)$$

Signalons sur ce point que les champs $\mathbf{u}_b^{(s)}$ et $\boldsymbol{\lambda}_b^{(s)}$ sont des représentations discrètes de champs appartenant, respectivement, à l'espace fonctionnel des traces $H^{1/2}(\Upsilon^{(ss')})$ et à son dual $H^{-1/2}(\Upsilon^{(ss')})$.

2.2.3. Obtention du problème d'interface global

A ce stade, la condensation d'interface des problèmes locaux ainsi obtenue permet d'obtenir à partir de (2.15) la formulation discrète du problème sous-structuré à l'interface :

$$\mathbf{S}^{(s)} \mathbf{u}_b^{(s)} = \mathbf{b}^{(s)} + \boldsymbol{\lambda}_b^{(s)} \quad (1 \leq s \leq \mathcal{N}_{sd}) \quad (2.19a)$$

$$\sum_s \mathbf{A}^{(s)} \mathbf{u}_b^{(s)} = \mathbf{0} \quad (2.19b)$$

$$\sum_s \overline{\mathbf{A}}^{(s)} \boldsymbol{\lambda}_b^{(s)} = \mathbf{0} \quad (2.19c)$$

Afin d'obtenir une écriture plus compacte du système précédent et des développements qui s'en suivent, nous utiliserons dans la suite de ce document les notations « bloc »

suivantes :

$$\mathbf{x}^\diamond = \begin{pmatrix} \vdots \\ \mathbf{x}^{(s)} \\ \vdots \end{pmatrix}, \quad \mathbf{x}^\diamond = (\dots \mathbf{x}^{(s)} \dots), \quad \mathbf{x}^{\diamond T} = \mathbf{x}^{T\diamond}, \quad \mathbf{x}^{\diamond T} = \mathbf{x}^{T\diamond}$$

$$\mathbf{x}^\diamond = \begin{pmatrix} \vdots & & \mathbf{0} \\ & \mathbf{x}^{(s)} & \\ \mathbf{0} & & \vdots \end{pmatrix} \quad (2.20)$$

□ **REMARQUE 2.2** Outre leur aspect synthétique, ces notations permettent également d'avoir une vision du type d'opérations appliquées aux données, en distinguant celles effectuées indépendamment sur chaque sous-domaine et repérées par l'exposant \diamond de celles consistant en des assemblages sur l'interface (exposant \diamond) nécessitant de fait des échanges de données.

Sous ces notations, le problème sous-structuré (2.15) se met alors sous la forme :

$$\mathbf{S}^\diamond \mathbf{u}_b^\diamond = \mathbf{b}^\diamond + \boldsymbol{\lambda}_b^\diamond \quad (2.21a)$$

$$\underline{\mathbf{A}}^\diamond \mathbf{u}_b^\diamond = \mathbf{0} \quad (2.21b)$$

$$\overline{\mathbf{A}}^\diamond \boldsymbol{\lambda}_b^\diamond = \mathbf{0} \quad (2.21c)$$

2.2.4. Approches de résolution

Le système (2.21) ainsi obtenu constitue le point de départ de la formulation des nombreuses stratégies de décomposition de domaine sans recouvrement. Les différentes approches existantes se différencient, à la base, par le choix des variables intervenant lors de leur résolution. La recherche d'un unique déplacement d'interface \mathbf{u}_b satisfaisant (2.21b) constitue le cœur de l'approche *primale*, la résolution revient alors à vérifier la condition d'équilibre des sous-structures (2.21c). L'approche *duale*, à l'inverse, recherche une répartition d'inter-efforts à l'interface $\boldsymbol{\lambda}_b$ vérifiant *a priori* (2.21c), la résolution consistant par la suite à satisfaire à la condition de continuité des déplacements (2.21b). Si ces deux approches sont parmi les plus usitées, d'autres furent développées par la suite. On mentionnera notamment les approches *hybride* ou *recondensées*, consistant à rechercher un champ de déplacement sur une portion de l'interface globale et le champ d'inter-efforts sur son complémentaire, l'approche *mixte*, qui s'intéresse à une combinaison linéaire des grandeurs \mathbf{u}_b et $\boldsymbol{\lambda}_b$, ainsi que l'approche à *trois champs* consistant à rechercher simultanément un champ de déplacement global \mathbf{u}_b parallèlement aux champs locaux d'interfaces \mathbf{u}_b^\diamond et $\boldsymbol{\lambda}_b^\diamond$.

2.2.5. Commentaires

Les approches susmentionnées conduisent à la résolution d'un système posé sur l'interface globale Υ de la forme :

$$\tilde{\mathbf{S}}\tilde{\mathbf{a}}_b = \tilde{\mathbf{b}}_b$$

où l'opérateur $\tilde{\mathbf{S}}$ résulte de l'assemblage d'opérateurs locaux relatifs aux sous-structures. Nous verrons par la suite que ces opérateurs locaux sont généralement les compléments de Schur $\mathbf{S}^{(s)}$ pour l'approche primale, leur inverse pour l'approche duale ou bien des combinaisons plus sophistiquées dans le cas d'autres approches. Le point important réside ici dans le fait que ces opérateurs résultent de l'assemblage de contributions définies sur des sous-domaines. Dans ces conditions, une résolution directe du problème d'interface serait particulièrement coûteuse car elle nécessiterait le calcul explicite des opérateurs locaux, puis leur assemblage en préalable à la factorisation de l'opérateur global d'interface, le tout nécessitant l'échange d'importantes quantités de données. Ainsi, le problème d'interface est traditionnellement résolu par un solveur itératif de type *Gradient Conjugué* ou *GMRes* (suivant le caractère symétrique ou non de l'opérateur $\tilde{\mathbf{S}}$), qui ne requiert que des produits de type vecteur-vecteur ou opérateur-vecteur facilement parallélisables du fait du caractère assemblé de $\tilde{\mathbf{S}}$. D'autre part, le calcul explicite des compléments de Schur locaux est évité par l'utilisation d'un solveur direct sur chacune des sous-structures.

La performance d'un solveur itératif étant fortement liée aux propriétés spectrales de l'opérateur à inverser, l'utilisation de préconditionneurs permet alors de d'améliorer fortement la vitesse de convergence. Nous verrons par la suite que les propriétés de l'opérateur d'interface ont permis la mise place de tels préconditionneurs. Un autre point important des méthodes de décomposition de domaine réside dans leur *extensibilité*, c'est à dire leur capacité à garder un taux de convergence indépendant de la taille du problème et du nombre de sous-domaines. Sur ce point, le cas de l'extensibilité par rapport à la taille du problème est liée au choix de préconditionneur associé à la résolution du problème d'interface. Concernant l'extensibilité par rapport au nombre de sous-domaines (et à la topologie du découpage), nous verrons qu'il est nécessaire d'adjoindre au problème d'interface des problèmes annexes de plus petite taille, appelés problèmes *grossiers* et assurant le transfert des informations « à grandes longueur d'onde » entre les sous-structures durant la convergence du solveur. Signalons enfin que la résolution du problème d'interface par rapport à celle du problème global présente, au delà d'une taille réduite et de l'existence de préconditionneurs optimaux, l'avantage d'un conditionnement de l'opérateur $\tilde{\mathbf{S}}$ variant en $1/h$ alors que celui de l'opérateur de raideur \mathbf{K} varie en $1/h^2$ [F. ROUX, 2003]. En outre, il a été montré mathématiquement [C. FARHAT, J. MANDEL et F. ROUX, 1994 ; KLAWONN et WIDLUND, 2001] qu'une fois équipés des meilleurs préconditionneurs et problèmes grossiers, les problèmes d'interface présentaient un conditionnement κ de la forme :

$$\kappa \simeq C \left(1 + \log \left(\frac{H}{h} \right) \right)^2$$

où h désigne la taille de maille et H celle des sous-domaines.

La suite de ce chapitre sera dédiée à une présentation détaillée des approches duale et primale, en s'intéressant d'abord à l'approche duale car celle-ci permet une introduction plus directe des différents éléments utilisés tout au long de la résolution. Les

similitudes entre le cadre de travail des deux approches seront en outre soulignées. Par la suite, les points essentiels des autres types d'approches seront succinctement mentionnés.

2.3. APPROCHE DUALE

Initialement introduite dans [Charbel FARHAT et F.-X. ROUX, 1991], l'approche duale est généralement connue à travers le nom de son algorithme phare : *FETI (Finite Element Tearing and Interconnecting)*. Elle a bénéficié au fil des années de plusieurs améliorations [C. FARHAT et F. X. ROUX, 1994] lui conférant de bonnes propriétés de performances et de robustesse. En outre, elle est également à l'origine de plusieurs variantes.

2.3.1. Principes

Le principe de l'approche duale consiste à rechercher un champ d'inter-efforts unique λ_b défini sur l'interface globale Υ . Les champs d'inter-efforts locaux $\lambda_b^{(s)}$ sont alors construits à l'aide des opérateurs $\underline{\mathbf{A}}^\diamond$ comme :

$$\lambda_b^\diamond = \underline{\mathbf{A}}^{\diamond T} \lambda_b \quad (2.22)$$

En vertu de la condition d'orthogonalité (2.14), l'équation (2.21c), c'est-à-dire l'équilibre global des champs d'inter-efforts, est alors automatiquement vérifiée. Sous ces conditions, le problème (2.21) devient :

$$\mathbf{S}^\diamond \mathbf{u}_b^\diamond = \mathbf{b}^\diamond + \underline{\mathbf{A}}^{\diamond T} \lambda_b \quad (2.23a)$$

$$\underline{\mathbf{A}}^\diamond \mathbf{u}_b^\diamond = \mathbf{0} \quad (2.23b)$$

Le cœur de la méthode réside en la détermination du champ λ_b assurant la vérification de la condition de continuité des déplacements (2.23b), et nécessite donc l'obtention des champs \mathbf{u}_b^\diamond . Cependant, remarquons que les compléments de Schur locaux $\mathbf{S}^{(s)}$ ne sont pas forcément inversibles. Aussi, la résolution de l'équation (2.23a) nécessite, dans le cas général, un recours à l'inverse généralisée (ou *pseudo inverse*) $\mathbf{S}^{+(s)}$ de $\mathbf{S}^{(s)}$ (inverse de la restriction de chaque opérateur $\mathbf{S}^{(s)}$ à son espace image), par exemple à travers l'utilisation de la pseudo-inverse de Moore-Penrose. L'utilisation d'une inverse généralisée est alors soumise à la condition d'orthogonalité entre le second membre et le noyau (noté $\mathbf{R}_b^{(s)}$) de $\mathbf{S}^{(s)}$, soit en notations condensées :

$$\mathbf{R}_b^{\diamond T} (\mathbf{b}^\diamond + \underline{\mathbf{A}}^{\diamond T} \lambda_b) = \mathbf{0}^\diamond \quad (2.24)$$

□ REMARQUE 2.3 D'un point de vue mécanique, le système (2.23a) représente un ensemble de problèmes locaux posés sur les sous-structures, dont la condition aux limites à l'interface, de type Neumann, est donnée par le champ d'inter-efforts λ_b^\diamond . Les cas de non-inversibilité de \mathbf{S}^\diamond s'interprètent alors par l'absence de conditions aux limites de Dirichlet sur certaines sous-structures. Pour garantir le caractère bien posé des problèmes définis sur sous-structures « flottantes », il est alors nécessaire d'imposer l'équilibre global entre le chargement intérieur et les conditions de Neumann sur les frontières. Cela revient, en d'autres termes, à interdire au chargement l'excitation des modes rigides, ce qui se traduit algébriquement par (2.24).

L'inversion de (2.23a) ainsi muni de la condition (2.24) donne alors :

$$\mathbf{u}_b^\diamond = \mathbf{S}^{+\diamond} (\mathbf{b}^\diamond + \underline{\mathbf{A}}^{\diamond T} \lambda_b) + \mathbf{R}_b^\diamond \alpha^\diamond$$

où $\alpha^{(s)}$ traduit la contribution des champs de modes rigides au déplacement de la sous-structure $\Omega^{(s)}$. L'application de la condition de continuité (2.23b) sur le champ \mathbf{u}_b^\diamond ainsi obtenu conduit au système d'équations désormais classique de l'approche FETI :

$$\begin{pmatrix} \mathbf{S}_d & \mathbf{G}_d \\ \mathbf{G}_d^T & \mathbf{0} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_b \\ \alpha^\diamond \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{b}_d \\ \mathbf{e}^\diamond \end{pmatrix} \quad (2.25)$$

avec les notations :

$$\begin{aligned} \mathbf{S}_d &= \underline{\mathbf{A}}^\diamond \mathbf{S}^{+\diamond} \underline{\mathbf{A}}^{\diamond T} \\ \mathbf{G}_d &= \underline{\mathbf{A}}^\diamond \mathbf{R}_b^\diamond \\ \mathbf{b}_d &= -\underline{\mathbf{A}}^\diamond \mathbf{S}^{+\diamond} \mathbf{b}^\diamond \\ \mathbf{e}^\diamond &= -\mathbf{R}_b^{\diamond T} \mathbf{b}^\diamond \end{aligned}$$

L'approche duale conduit donc à un système d'équations posé sur l'interface globale Υ du problème, l'objectif étant la détermination du champ d'inter-effort équilibré λ_b permettant la vérification des conditions de continuité des déplacements d'interfaces $\mathbf{u}_b^{(s)}$.

2.3.2. Préconditionnement

Rappelons à ce stade la mise en œuvre d'une stratégie itérative lors de la résolution du problème (2.25). Se pose alors la question d'un preconditionnement optimal de l'opérateur \mathbf{S}_d . Remarquons d'une part que la construction de \mathbf{S}_d provient de l'assemblage de contributions locales $\mathbf{S}^{(s)+}$ par les opérateurs $\underline{\mathbf{A}}^{(s)}$, et d'autre part que l'efficacité d'un preconditionneur réside dans sa capacité à réaliser la meilleure approximation possible de l'inverse de l'opérateur sur lequel il s'applique. La stratégie la plus classique

pour la construction d'un préconditionneur $\tilde{\mathbf{S}}_d^{-1}$ consiste alors à réaliser un assemblage pondéré des inverses des opérateurs locaux $\mathbf{S}^{(s)+}$, soit :

$$\tilde{\mathbf{S}}_d^{-1} = \tilde{\mathbf{A}}^\diamond \mathbf{S}^\diamond \tilde{\mathbf{A}}^{T\diamond} \quad (2.26)$$

Dans l'expression précédente, les opérateurs de pondération $\tilde{\mathbf{A}}$ employés peuvent être définis à l'aide des opérateurs d'assemblage et d'opérateurs $\mathbf{M}^{(s)}$ de la manière suivante [KLAWONN et WIDLUND, 2001] :

$$\tilde{\mathbf{A}}^\diamond = \left(\mathbf{A}^\diamond \mathbf{M}^\diamond^{-1} \mathbf{A}^{T\diamond} \right)^+ \mathbf{A}^\diamond \mathbf{M}^\diamond^{-1} \quad (2.27)$$

et vérifient la propriété fondamentale :

$$\mathbf{A}^\diamond \tilde{\mathbf{A}}^{T\diamond} = \mathbf{I} \quad (2.28)$$

En outre, les opérateurs $\mathbf{M}^{(s)}$ utilisés permettent la prise en compte des hétérogénéités éventuelles entre sous-structures [D. J. RIXEN et Charbel FARHAT, 1999], notamment :

- $\mathbf{M}^{(s)} = \mathbf{I}^{(s)}$ pour des problèmes homogènes
- $\mathbf{M}^{(s)} = \text{diag}(\mathbf{K}_{bb}^{(s)})$ pour des problèmes hétérogènes sur des structures compressibles

□ **REMARQUE 2.4** *Le complément de Schur calculant l'effort de réaction d'interface associé à un certain déplacement imposé, son emploi au sein du préconditionneur peut s'interpréter comme la résolution parallèle de problèmes de Dirichlet sur chacune des sous-structures. Un tel type de préconditionneur est alors appelé préconditionneur de Dirichlet.*

□ **REMARQUE 2.5** *Il est possible de substituer à $\mathbf{S}^{(s)}$ une approximation de celui-ci dans l'expression de $\tilde{\mathbf{S}}_d^{-1}$:*

- $\mathbf{S}^{(s)} \approx \mathbf{K}_{bb}^{(s)}$ conduira au préconditionneur lumped ;
- $\mathbf{S}^{(s)} \approx \text{diag}(\mathbf{K}_{bb}^{(s)})$ conduira au préconditionneur superlumped.

Ces approximations réduisent le coût de calcul associé à l'usage du préconditionneur, mais malheureusement au détriment de sa qualité, de sorte que leur choix est lié au compromis du coût additionnel de mise en œuvre par rapport au gain en terme de performances attendu.

2.3.3. Problème grossier

Rappelons que la prise en compte de la condition de compatibilité (2.24) associée à l'utilisation de l'inverse généralisée du complément de Schur définit le problème grossier suivant :

$$\mathbf{G}_d^T \boldsymbol{\lambda}_b = \mathbf{e}^\diamond \quad (2.29)$$

La prise en compte de celui-ci est traitée au sein de l'algorithme de résolution à l'aide d'une opération de projection. Le champ d'inter-effort λ_b est alors cherché itérativement sous la forme :

$$\lambda_b = \lambda_0 + \mathbf{P}_d \lambda^* \quad \text{avec} \quad \mathbf{G}_d^T \lambda_0 = \mathbf{e}^\diamond \quad (2.30)$$

$$\mathbf{G}_d^T \mathbf{P}_d = \mathbf{0}$$

où le projecteur \mathbf{P}_d est généralement choisi comme :

$$\mathbf{P}_d = \mathbf{I} - \mathbf{G}_d (\mathbf{G}_d^T \mathbf{G}_d)^{-1} \mathbf{G}_d^T \quad (2.31)$$

On calcule alors la valeur initiale λ_0 qui peut s'interpréter physiquement comme l'inter-effort correspondant à un problème mécanique similaire dans lequel toutes les sous-structures seraient infiniment rigides, et qui fournit donc la composante à grande longueur de variation de λ :

$$\lambda_0 = \mathbf{G}_d (\mathbf{G}_d^T \mathbf{G}_d)^{-1} \mathbf{e}^\diamond \quad (2.32)$$

tandis que la composante complémentaire λ^* est déterminé itérativement comme solution du problème projeté suivant :

$$\mathbf{P}_d^T \mathbf{S}_d \mathbf{P}_d \lambda^* = \mathbf{P}_d^T (\mathbf{b}_d - \mathbf{S}_d \lambda_0) \quad (2.33)$$

Par ailleurs, le calcul de l'amplitude des modes rigides α^\diamond est en pratique effectué à convergence du solveur à l'aide de la relation ci-dessous :

$$\alpha^\diamond = (\mathbf{G}_d^T \mathbf{G}_d)^{-1} \mathbf{G}_d^T (\mathbf{b}_d - \mathbf{S}_d \lambda) \quad (2.34)$$

Remarquons en effet que leur contributions disparaissent dans le calcul du résidu projeté au cours des itérations du fait de la relation $\mathbf{P}_d^T \mathbf{G}_d$.

En résumé, la technique de résolution consiste ainsi à initialiser l'algorithme avec un champ d'inter-effort λ_0 vérifiant l'admissibilité statique avec les efforts intérieurs sur l'ensemble des sous-structures, puis à rechercher itérativement la partie complémentaire λ^* en assurant cette admissibilité. Soulignons que si l'usage du préconditionneur permet l'extensibilité par rapport à la taille du problème, c'est ce traitement à deux échelles de la recherche de λ_b qui confère à la méthode sa propriété d'extensibilité par rapport à la sous-structuration. L'ensemble de ces opérations est généralement réalisé à travers une méthode de gradient conjugué projeté décrite par l'algorithme 2.1.

□ REMARQUE 2.6 Une écriture plus générale de \mathbf{P}_d fait intervenir un opérateur \mathbf{Q} permettant de représenter la raideur des sous-structures :

$$\mathbf{P}_d = \mathbf{I} - \mathbf{Q} \mathbf{G}_d (\mathbf{G}_d^T \mathbf{Q} \mathbf{G}_d)^{-1} \mathbf{G}_d^T$$

Dans ces conditions, la valeur initiale λ_0 de l'inter-effort et les amplitudes α^\diamond des mouvements de solides rigides sont déterminées par :

$$\lambda_0 = \mathbf{Q} \mathbf{G}_d (\mathbf{G}_d^T \mathbf{Q} \mathbf{G}_d)^{-1} \mathbf{e}^\diamond$$

$$\alpha^\diamond = (\mathbf{G}_d^T \mathbf{Q} \mathbf{G}_d)^{-1} \mathbf{G}_d^T \mathbf{Q} (\mathbf{b}_d - \mathbf{S}_d \lambda)$$

Algorithme 2.1: FETI avec gradient conjugué préconditionné projeté

```
 $\mathbf{P}_d = \mathbf{I} - \mathbf{G}_d (\mathbf{G}_d^T \mathbf{G}_d)^{-1} \mathbf{G}_d^T;$ 
Initialisation :  $\boldsymbol{\lambda}_0 = \mathbf{G}_d (\mathbf{G}_d^T \mathbf{G}_d)^{-1} \mathbf{e}^\diamond;$ 
 $\mathbf{r}_0 = \mathbf{P}_d^T (\mathbf{b}_d - \mathbf{S}_d \boldsymbol{\lambda}_0)$  (résidu initial);
 $\mathbf{z}_0 = \mathbf{P}_d \tilde{\mathbf{S}}_d^{-1} \mathbf{r}_0$ ,  $\mathbf{w}_0 = \mathbf{z}_0$ ,  $j = 0;$ 
while  $\|\mathbf{r}_j\| > \varepsilon \|\mathbf{r}_0\|$  do
   $\mathbf{p}_j = \mathbf{P}_d^T \mathbf{S}_d \mathbf{w}_j;$ 
   $\beta_j = (\mathbf{z}_j, \mathbf{r}_j) / (\mathbf{p}_j, \mathbf{w}_j);$ 
   $\boldsymbol{\lambda}_{j+1} = \boldsymbol{\lambda}_j + \beta_j \mathbf{w}_j;$ 
   $\mathbf{r}_{j+1} = \mathbf{r}_j - \beta_j \mathbf{p}_j$  (résidu à l'itération  $j + 1$ );
   $\mathbf{z}_{j+1} = \mathbf{P}_d \tilde{\mathbf{S}}_d^{-1} \mathbf{r}_{j+1}$  (préconditionnement + projection);
  for  $i \leftarrow 0$  to  $j$  do
     $\gamma_j^i = -(\mathbf{z}_{j+1}, \mathbf{p}_i) / (\mathbf{w}_i, \mathbf{p}_i);$ 
  end
   $\mathbf{w}_{j+1} = \mathbf{z}_{j+1} + \sum_{i=1}^j \gamma_j^i \mathbf{w}_i$  (actualisation de la direction de recherche);
   $j \leftarrow j + 1;$ 
end
 $\boldsymbol{\alpha}^\diamond = (\mathbf{G}_d^T \mathbf{G}_d)^{-1} \mathbf{G}_d^T \mathbf{r}_j$  (détermination des amplitudes de modes rigides);
```

2.4. APPROCHE PRIMALE

L'approche primale a été initialement introduite dans [P. LE TALLEC, DE ROECK et VIDRASCU, 1991]. Tout comme l'approche duale, elle fut l'objet de nombreux travaux orientés vers l'amélioration de sa robustesse et de son extensibilité. A ce jour, sa version la plus utilisée est probablement l'algorithme *BDD* (*Balanced Domain Decomposition*) [Patrick LE TALLEC, 1994; Jan MANDEL, 1993].

2.4.1. Principes

L'esprit de l'approche primale est similaire à celui de son homologue duale, mais l'inconnue recherchée à l'issue de la formation du problème condensé global porte sur le champ de déplacement d'interface \mathbf{u}_b . Les champs de déplacement locaux $\mathbf{u}_b^{(s)}$ sont ensuite construits à l'aide des opérateurs $\overline{\mathbf{A}}^{(s)}$ de manière à vérifier la condition de continuité (2.21b) en vertu de (2.14) :

$$\mathbf{u}_b^\diamond = \overline{\mathbf{A}}^\diamond{}^T \mathbf{u}_b \quad (2.35)$$

Le problème discret (2.21) s'écrit alors :

$$\mathbf{S}^\diamond \overline{\mathbf{A}}^{\diamond T} \mathbf{u}_b = \mathbf{b}^\diamond + \boldsymbol{\lambda}_b^\diamond \quad (2.36a)$$

$$\overline{\mathbf{A}}^\diamond \boldsymbol{\lambda}_b^\diamond = \mathbf{0} \quad (2.36b)$$

On remarque qu'il s'agit donc de déterminer le champ d'interface \mathbf{u}_b assurant l'équilibre des inter-efforts $\boldsymbol{\lambda}_b^\diamond$ associés. L'utilisation de la condition de continuité au sein de (2.36a) conduit à la formulation discrète de l'approche primale :

$$\mathbf{S}_p \mathbf{u}_b = \mathbf{b}_p \quad (2.37)$$

avec :

$$\mathbf{S}_p = \overline{\mathbf{A}}^\diamond \mathbf{S}^\diamond \overline{\mathbf{A}}^{\diamond T}$$

$$\mathbf{b}_p = \overline{\mathbf{A}}^\diamond \mathbf{b}^\diamond$$

2.4.2. Préconditionnement

Le complément de Schur primal global \mathbf{S}_p présentant une structure assemblée similaire à celle de son homologue dual \mathbf{S}_d , le préconditionneur $\tilde{\mathbf{S}}_p^{-1}$ est construit par la même stratégie d'assemblage pondéré d'inverses locales :

$$\tilde{\mathbf{S}}_p^{-1} = \tilde{\mathbf{A}}^\diamond \mathbf{S}^\diamond \tilde{\mathbf{A}}^{\diamond T} \quad (2.38)$$

Les opérateurs de pondération $\tilde{\mathbf{A}}$ s'expriment de manière similaire comme [KLAWONN et WIDLUND, 2001] :

$$\tilde{\mathbf{A}}^\diamond = (\overline{\mathbf{A}}^\diamond \mathbf{M}^\diamond \overline{\mathbf{A}}^{\diamond T})^{-1} \overline{\mathbf{A}}^\diamond \mathbf{M}^\diamond \quad (2.39)$$

et vérifient le même type de propriété que (2.28) :

$$\overline{\mathbf{A}}^\diamond \tilde{\mathbf{A}}^{\diamond T} = \mathbf{I} \quad (2.40)$$

De même, les opérateurs $\mathbf{M}^{(s)}$ intervenant (2.39) sont identiques à ceux rencontrés dans l'approche duale et permettant à nouveau la prise en compte des hétérogénéités éventuelles entre sous-structures [D. J. RIXEN et Charbel FARHAT, 1999].

□ REMARQUE 2.7 La proximité entre les opérateurs de scaling $\tilde{\mathbf{A}}$ et $\underline{\tilde{\mathbf{A}}}$ se traduit notamment par le résultat de complémentarité suivant [P. GOSSELET, C. REY et D. RIXEN, 2003] :

$$\tilde{\mathbf{A}}^{\diamond T} \overline{\mathbf{A}}^\diamond + \underline{\mathbf{A}}^{\diamond T} \underline{\tilde{\mathbf{A}}}^\diamond = \mathbf{I}^\diamond \quad (2.41)$$

□ REMARQUE 2.8 L'inverse du complément de Schur permettant d'associer à un champ d'effort d'interface le déplacement correspondant, son emploi au sein du préconditionneur peut s'interpréter comme la résolution parallèle de problèmes de Neumann sur chacune des sous-structures. Un tel type de préconditionneur est alors appelé préconditionneur de Neumann-Neumann.

2.4.3. Problème grossier

Contrairement à l'approche duale, le problème grossier n'apparaît pas dans la formulation à l'interface de l'approche primale (2.37). Celui-ci est en effet associé à la phase de préconditionnement et provient de l'utilisation de l'inverse généralisé des compléments de Schur dans l'expression de $\tilde{\mathbf{S}}_p^{-1}$. Le préconditionnement étant appliqué au résidu primal $\mathbf{r}_p = \mathbf{b}_p - \mathbf{S}_p \mathbf{u}_b$, la condition d'orthogonalité s'écrit :

$$\mathbf{R}_b^T \diamond \tilde{\mathbf{A}}^T \diamond \mathbf{r} = \mathbf{G}_p^T \mathbf{r} = \mathbf{0} \quad \text{avec} \quad \mathbf{G}_p = \tilde{\mathbf{A}} \diamond \mathbf{R}_b \diamond \quad (2.42)$$

Une approche similaire à celle mise en place dans l'approche FETI est alors utilisée pour traiter la condition ci-dessus. Le champ de déplacement d'interface \mathbf{u}_b est cherché itérativement sous la forme :

$$\mathbf{u}_b = \mathbf{u}_0 + \mathbf{P}_p \mathbf{u}^* \quad (2.43)$$

La condition d'orthogonalité (2.42) se reformule alors comme :

$$\mathbf{G}_p^T \mathbf{r} = \mathbf{G}_p^T (\mathbf{S}_p \mathbf{u}_0 + \mathbf{S}_p \mathbf{P}_p \mathbf{u}^* - \mathbf{b}_p) \quad (2.44)$$

L'initialisation \mathbf{u}_0 est alors choisie de manière à assurer $\mathbf{G}_p^T (\mathbf{S}_p \mathbf{u}_0 - \mathbf{b}_p) = \mathbf{0}$, soit :

$$\mathbf{u}_0 = \mathbf{G}_p (\mathbf{G}_p^T \mathbf{S}_p \mathbf{G}_p)^{-1} \mathbf{G}_p^T \mathbf{b}_p \quad (2.45)$$

Le projecteur \mathbf{P}_p devant alors vérifier $\mathbf{G}_p^T \mathbf{S}_p \mathbf{P}_p = \mathbf{0}$ est défini par :

$$\mathbf{P}_p = \mathbf{I} - \mathbf{G}_p (\mathbf{G}_p^T \mathbf{S}_p \mathbf{G}_p)^{-1} \mathbf{G}_p^T \mathbf{S}_p \quad (2.46)$$

A ce stade, la composante complémentaire \mathbf{u}^* est déterminée à travers la résolution itérative du problème projeté suivant :

$$\mathbf{S}_p \mathbf{P}_p \mathbf{u}^* = \mathbf{b}_p - \mathbf{S}_p \mathbf{u}_0 = \mathbf{P}_p^T \mathbf{b}_p \quad (2.47)$$

On note par ailleurs que si \mathbf{S}_p est symétrique, il vient :

$$\mathbf{S}_p \mathbf{P}_p = \mathbf{P}_p^T \mathbf{S}_p = \mathbf{P}_p^T \mathbf{S}_p \mathbf{P}_p$$

ce qui confère à l'opérateur ci-dessus son caractère symétrique et permet ainsi la résolution du problème (2.47) à l'aide d'une méthode de gradient conjugué projeté décrite par l'algorithme 2.2.

Notons que la condition d'orthogonalité (2.42), introduite dans [Jan MANDEL, 1993 ; Jan MANDEL et TEZAU, 1994] sous le nom de *Balancing Domain Decomposition*, définit un problème grossier du même type que celui rencontré lors de l'approche duale. En outre, elle confère à l'approche primale sa propriété d'extensibilité par rapport à la décomposition ainsi que des performances similaires à celles de l'approche duale.

Algorithme 2.2: BDD avec gradient conjugué préconditionné projeté

```
 $\mathbf{P}_p = \mathbf{I} - \mathbf{G}_p (\mathbf{G}_p^T \mathbf{S}_p \mathbf{G}_p)^{-1} \mathbf{G}_p^T \mathbf{S}_p;$   
Initialisation :  $\mathbf{u}_0 = \mathbf{G}_p (\mathbf{G}_p^T \mathbf{S}_p \mathbf{G}_p)^{-1} \mathbf{G}_p^T \mathbf{b}_p;$   
 $\mathbf{r}_0 = \mathbf{b}_p - \mathbf{S}_p \mathbf{u}_0 = \mathbf{P}_p^T \mathbf{b}_p$  (résidu initial);  
 $\mathbf{z}_0 = \tilde{\mathbf{S}}_p^{-1} \mathbf{r}_0, \mathbf{w}_0 = \mathbf{z}_0, j = 0;$   
while  $\|\mathbf{r}_j\| > \varepsilon \|\mathbf{r}_0\|$  do  
   $\mathbf{p}_j = \mathbf{S}_p \mathbf{P}_p \mathbf{w}_j;$   
   $\beta_j = (\mathbf{z}_j, \mathbf{r}_j) / (\mathbf{p}_j, \mathbf{w}_j);$   
   $\mathbf{u}_{j+1} = \mathbf{u}_j + \beta_j \mathbf{w}_j;$   
   $\mathbf{r}_{j+1} = \mathbf{r}_j - \beta_j \mathbf{p}_j$  (résidu à l'itération  $j + 1$ );  
   $\mathbf{z}_{j+1} = \tilde{\mathbf{S}}_p^{-1} \mathbf{r}_{j+1}$  (préconditionnement + projection);  
  for  $i \leftarrow 0$  to  $j$  do  
     $\gamma_j^i = -(\mathbf{z}_{j+1}, \mathbf{p}_i) / (\mathbf{w}_i, \mathbf{p}_i);$   
  end  
   $\mathbf{w}_{j+1} = \mathbf{z}_{j+1} + \sum_{i=1}^j \gamma_j^i \mathbf{w}_i$  (actualisation de la direction de recherche);  
   $j \leftarrow j + 1;$   
end
```

2.5. PRÉSENTATION SUCCINCTE DES AUTRES TYPES D'APPROCHES

Nous présentons ici les points clefs des approches de décomposition de domaine *hybrides* et *mixtes*. Nous laisserons volontairement de côté l'approche à trois champs, initialement développée dans un cadre de travail non conforme par [BREZZI et MARINI, 1993] tout en notant que leur version conforme [JUSTINO, PARK et FELIPPA, 1997 ; PARK, JUSTINO et FELIPPA, 1997] peut être considérée comme un cas particulier de l'approche FETI [D. J. RIXEN, Charbel FARHAT et al., 1999].

2.5.1. Approches hybrides et recondensées

Cette famille d'approches constitue une unification des deux approches duale et primale sus-présentées. Leur principe réside dans la recherche simultanée d'un champ de déplacement continu \mathbf{u}_p sur un sous-ensemble des degrés de liberté d'interface, et d'un champ d'inter-efforts équilibrés $\boldsymbol{\lambda}_{\bar{p}}$ sur le complémentaire ($b = p \cup \bar{p}$).

En reprenant la démarche de condensation exposée en partie 2.2.2, il est possible d'écrire l'équilibre condensé à l'interface des sous-structures en définissant un complément de Schur hybride $\mathbf{Z}^{(s)}$. La formulation du problème est alors donnée par le système d'équa-

tions suivant :

$$\begin{pmatrix} \mathbf{Z}_{pp}^\diamond & \mathbf{Z}_{p\bar{p}}^\diamond \\ \mathbf{Z}_{\bar{p}p}^\diamond & \mathbf{Z}_{\bar{p}\bar{p}}^\diamond \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{u}_p^\diamond \\ \boldsymbol{\lambda}_{\bar{p}}^\diamond \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{b}_p^\diamond \\ \mathbf{b}_{\bar{p}}^\diamond \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \boldsymbol{\lambda}_p^\diamond \\ \mathbf{u}_{\bar{p}}^\diamond \end{pmatrix} \quad (2.48a)$$

$$\begin{pmatrix} \overline{\mathbf{A}}_p^\diamond & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \underline{\mathbf{A}}_{\bar{p}}^\diamond \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \boldsymbol{\lambda}_p^\diamond \\ \mathbf{u}_{\bar{p}}^\diamond \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \end{pmatrix} \quad (2.48b)$$

$$\begin{pmatrix} \mathbf{u}_p^\diamond \\ \boldsymbol{\lambda}_{\bar{p}}^\diamond \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \overline{\mathbf{A}}_p^\diamond & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \underline{\mathbf{A}}_{\bar{p}}^\diamond \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} \mathbf{u}_p \\ \boldsymbol{\lambda}_{\bar{p}} \end{pmatrix} \quad (2.48c)$$

Il en résulte un problème d'interface dont la particularité est d'être non-symétrique et devant être résolu par un algorithme de type *GMRes*. En outre, la conservation de la structure assemblée du complément de Schur hybride global permet de tirer partie des préconditionneurs des approches duale et primale et de construire un préconditionneur hybride par une stratégie de sommes pondérées similaires à (2.26),(2.38). Cette approche est également équipée de deux problèmes grossiers correspondant à des restrictions de ceux rencontrés précédemment et découlant de la condition de compatibilité associée à l'inversion des compléments de Schur hybrides durant les phases de résolution.

Notons que deux familles de méthodes partagent les principes de cette approche selon la manière de choisir les degrés de liberté associés aux champs primaux et duaux. La formulation présentée ci-dessus correspond aux méthodes de type *hybrides* [Pierre Gosselet et Christian Rey, 2006], qui ont été développées dans un esprit d'unification des approches duale et primale. Le choix des degrés de liberté à associer aux champs primaux et duaux s'effectue ici de manière globale sur les interface en fonction du type de variable représentée. Cela rend l'approche particulièrement adaptée aux problèmes multiphysiques en établissant un cadre permettant de choisir les variables auxquelles appliquer *a priori* les conditions de continuité possédant la signification physique la plus forte.

La seconde famille regroupe les méthodes de type *recondensées*, qui ont été développées notamment dans le cadre des problèmes d'élasticité du quatrième ordre afin de régulariser le problème à l'interface et donc d'éviter le calcul des inverses généralisées rencontrées dans l'approche FETI et dans le préconditionneur de l'approche BDD. L'idée est alors de choisir un sous-ensemble de degrés de libertés selon leur position sur les sous-structures (aux coins dans le cas des plaques et coques, ou bien sur les faces pour les problèmes en dimension 3), puis d'imposer la vérification *a priori* des conditions de continuité et d'équilibres sur ces DDL. On réalise alors une phase de condensation supplémentaire du problème d'interface de manière à éliminer ce sous-groupe de DDL du problème global. Cette approche a notamment donné lieu aux algorithmes de type *FETI-DP* [C Farhat, Pierson et Lesoine, 2000] et *BDDC* [Dohrmann, 2003]. Pour fixer les esprits, la méthode FETI-DP consiste, dans le cadre du formalisme associé au système (2.48), à exprimer \mathbf{u}_p^\diamond à partir de la première ligne

de (2.48a) en utilisant les conditions de continuité et d'équilibre relatifs au couple $(\mathbf{u}_p^\diamond, \boldsymbol{\lambda}_p^\diamond)$:

$$\mathbf{u}_p = \left(\overline{\mathbf{A}}_p^\diamond \mathbf{Z}^\diamond_{pp} \overline{\mathbf{A}}_p^\diamond \right)^{-1} \overline{\mathbf{A}}^\diamond_p (\mathbf{b}_p^\diamond - \mathbf{Z}^\diamond_{p\bar{p}} \boldsymbol{\lambda}_{\bar{p}}^\diamond)$$

La condensation sur les degrés de liberté duaux conduit alors à la résolution d'un problème à l'interface de la forme :

$$\underline{\mathbf{A}}_{\bar{p}}^\diamond \left(\mathbf{Z}^\diamond_{\bar{p}\bar{p}} - \mathbf{S}^\diamond_{\bar{p}\bar{p}} \overline{\mathbf{A}}^\diamond_p \left(\overline{\mathbf{A}}_p^\diamond \mathbf{Z}^\diamond_{pp} \overline{\mathbf{A}}_p^\diamond \right)^{-1} \overline{\mathbf{A}}^\diamond_p \mathbf{Z}^\diamond_{p\bar{p}} \right) \underline{\mathbf{A}}_{\bar{p}}^\diamond \boldsymbol{\lambda}_{\bar{p}} = \mathbf{RHS}$$

Notons que la présence de l'opérateur $\overline{\mathbf{A}}_p^\diamond \mathbf{Z}^\diamond_{pp} \overline{\mathbf{A}}_p^\diamond$ s'interprète comme un problème grossier assurant de fait l'extensibilité de la méthode.

2.5.2. Approche mixte

Le principe des approches mixtes est de résoudre le problème (2.21) en recherchant une inconnue $\boldsymbol{\mu}_b^{(s)}$ combinaison linéaire des inconnues de déplacement et d'effort :

$$\boldsymbol{\mu}_b^{(s)} = \boldsymbol{\lambda}_b^{(s)} + \mathbf{T}_b^{(s)} \mathbf{u}_b^{(s)} \quad (2.49)$$

où $\mathbf{T}_b^{(s)}$ est un opérateur régularisant qui peut être interprété comme une raideur d'interface.

La condition de continuité à l'interface peut alors s'écrire comme :

$$\overline{\mathbf{A}}^{T\diamond} \overline{\mathbf{A}}^\diamond \boldsymbol{\lambda}_b^\diamond + \mathbf{T}_b^\diamond \underline{\mathbf{A}}^{T\diamond} \underline{\mathbf{A}}^\diamond \mathbf{u}_b^\diamond = \mathbf{0}^\diamond \quad (2.50)$$

Par la suite, en choisissant $\mathbf{T}_b^{(s)}$ de manière à assurer l'inversibilité de $(\mathbf{S}^{(s)} + \mathbf{T}_b^{(s)})$, puis en injectant l'expression de $\boldsymbol{\mu}_b^{(s)}$ dans les problèmes à l'interface locaux (2.19a), il vient :

$$\mathbf{u}_b^{(s)} = \left(\mathbf{S}^{(s)} + \mathbf{T}^{(s)} \right)^{-1} \left(\boldsymbol{\mu}_b^{(s)} + \mathbf{b}_p^{(s)} \right) \quad (1 \leq s \leq \mathcal{N}_{sd})$$

L'utilisation de la condition (2.50) au sein des problèmes précédents permet alors d'obtenir la formulation à l'interface de l'approche :

$$\begin{aligned} & \left(\overline{\mathbf{A}}^{T\diamond} \overline{\mathbf{A}}^\diamond - \left(\overline{\mathbf{A}}^{T\diamond} \overline{\mathbf{A}}^\diamond \mathbf{T}_b^\diamond + \mathbf{T}_b^\diamond \underline{\mathbf{A}}^{T\diamond} \underline{\mathbf{A}}^\diamond \mathbf{u}_b^\diamond \right) (\mathbf{S}^\diamond + \mathbf{T}^\diamond)^{-1} \right) \boldsymbol{\mu}_b^\diamond \\ & = \left(\overline{\mathbf{A}}^{T\diamond} \overline{\mathbf{A}}^\diamond \mathbf{T}_b^\diamond + \mathbf{T}_b^\diamond \underline{\mathbf{A}}^{T\diamond} \underline{\mathbf{A}}^\diamond \mathbf{u}_b^\diamond \right) (\mathbf{S}^\diamond + \mathbf{T}^\diamond)^{-1} \mathbf{b}_p^\diamond \end{aligned} \quad (2.51)$$

A la différence des approches précédentes, l'une des particularité réside ici dans l'écriture d'un problème d'interface posé en termes d'inconnues locales. L'introduction de

l'opérateur $\mathbf{T}_b^{(s)}$ confère à cette approche un contenu mécanique fort en ce sens qu'elle permet une formulation du comportement des interfaces. En outre, le choix de celui-ci influera grandement sur les performances de la résolution, qui seront d'autant meilleures que $\mathbf{T}_b^{(s)}$ représentera le plus fidèlement possible le comportement du complémentaire de la sous-structure $\Omega^{(s)}$. En pratique, $\mathbf{T}_b^{(s)}$ est construit à partir du complément de Schur des sous-structures adjacentes, une approximation de celui-ci limitée à quelques couches d'éléments, ou bien à l'aide des approximations *lumped* et *super-lumped*. Dans tous les cas, ces choix sont dictés par le traditionnel compromis à effectuer entre le surcoût de calcul additionnel engendré et l'accroissement des performances globales attendu.

Signalons que les conditions d'interfaces mixtes sont au cœur de plusieurs algorithmes de résolution par décomposition de domaine, notamment l'algorithme *LaTin* [P. LADEVÈZE, 1999; P. LADEVÈZE, LOISEAU et DUREISSEIX, 2001; P. LADEVÈZE, NERON et P. GOSSELET, 2007] ainsi que les méthodes de type *FETI-2LM* [SERIES, FEYEL et F. ROUX, 2003].

2.6. CONCLUSION PARTIELLE

Ce chapitre a permis de présenter les aspects fondamentaux des méthodes de décomposition de domaine sans recouvrement, puis d'exposer les bases des méthodes hybrides et mixtes. Rappelons que l'une des grandes forces de ces approches réside dans la localisation naturelle des données au niveau des sous-structures, rendant alors les algorithmes de résolution naturellement parallélisables. Cette propriété n'est évidemment pas suffisante pour assurer de bonnes performances de résolution si le découpage des calculs entraîne un surcoût numérique important. Pour être efficace, une méthode de décomposition de domaine devra alors vérifier la propriété d'extensibilité, c'est à dire exhiber un taux de convergence invariant avec la taille du problème et la décomposition. Si les premiers algorithmes étaient mis en défaut sur ce point, la force des approches actuelles réside dans le développement de préconditionneurs optimaux permettant d'assurer l'extensibilité par rapport à la taille du problème. L'extensibilité par rapport au nombre de sous-domaines est liée pour sa part au développement des problèmes grossiers, qui permettent de transmettre les informations nécessaires de manière globale sur l'ensemble de la structure (et non plus simplement entre sous-domaines adjacents). Munis de ces outils, les approches ici présentées présentent alors des performances similaires, s'expliquant par leur grande proximité conceptuelle illustrée par le cadre unifié employé. En outre, ces performances ont été démontrées tant sur des problèmes élastiques du second ordre que du quatrième ordre en présence ou non d'hétérogénéités structurelles.

Notons par ailleurs l'importance du choix du découpage en sous-domaines préalable à la résolution. Si la présence des problèmes grossiers permet de traiter le cas de sous-structures flottantes (ie. ne partageant pas une frontière à condition aux limites de

Dirichlet) de manière automatique, rendant ainsi théoriquement possible tout type de découpage, ce dernier doit cependant être mené avec soin et permettre, en premier lieu, le meilleur équilibrage de la charge de calcul sur l'ensemble des sous-domaines. Soulignons également que des structures élancées possèdent bien souvent des opérateurs de raideur mal conditionnés du fait des contrastes de rigidité entre les différents modes. Il conviendra alors de tenir compte de ce point lors de la phase de découpage, en créant autant que possible des sous-structures d'aspect massif.

L'un des autres avantages de ce type d'approches, que nous n'avons évoqué jusqu'alors, repose sur l'usage traditionnel de solveurs itératifs de type Krylov [SAAD, 2000] lors de la résolution du système condensé à l'interface. Ce type de solveurs possède des propriétés mathématiques intéressantes permettant notamment d'envisager l'utilisation de procédures d'accélération de convergence lors de la résolution de séquences de problèmes pour lesquelles l'opérateur d'interface reste invariant. Le principe est alors de garder en mémoire les directions de recherche du solveurs lors des résolutions précédentes afin de les réutiliser sur la résolution courante. Parmi ces procédures figurent notamment *GKC (Generalized Krylov Correction)* [C. REY et LÉNÉ, 1998], *IRKS (Generalized Iterative Reuse of Krylov Subspaces)* [F. RISLER et C. REY, 2000] et *SRKS (Selective Reuse of Krylov Subspaces)* [P. GOSSELET, C. REY et J. PEBREL, 2011 ; Christian REY et Franck RISLER, 1998]. Ces méthodes trouvent ainsi tout leur intérêt lors des procédures de *multi-résolution*, dans lesquelles est conduite une série de calculs différant les uns des autres par une légère modification du second membre et de l'opérateur.

De nombreux travaux portent à présent sur l'extension de ces approches à d'autres types de problèmes, notamment de contact et non-linéaires. Pour les problèmes de contact, citons entre autres une extension de l'approche FETI [DUREISSEIX et C. FAHRAT, 2001]. Concernant les problèmes non-linéaires, une stratégie classique, dite *NKS (Newton-Krylov-Schur)*, consiste à résoudre le problème non-linéaire à l'aide d'un algorithme de Newton classique et à utiliser les méthodes de décomposition de domaine pour paralléliser la résolution des étapes linéaires associées à l'opérateur tangent. L'emploi des techniques d'accélération susmentionnées lors de la résolution des problèmes à chaque incrément permet alors d'accroître les performances globales. Cependant, ce type d'approche perd de son intérêt lors des cas de non-linéarités conduisant à des phases de localisation sur certaines sous-structures. Des pistes de réponse à cette problématique résident alors dans l'introduction d'itérations non-linéaires au niveau des résolutions locales sur les sous-structures [CRESTA et al., 2007] ainsi que sur une formulation dans un cadre non-linéaire des approches duales, primales et mixtes de décomposition de domaine [J. PEBREL, C. REY et P. GOSSELET, 2011 ; J. PEBREL, Christian REY et P. GOSSELET, 2008]. Signalons pour terminer que le cas des décompositions non conformes est, pour sa part, traité à l'aide de méthodes de type *mortars* [BERNARDI, MADAY et PATERA, 1994 ; BERNARDI, MADAY et RAPETTI, 2005] sur lesquelles fut notamment étendue la méthode FETI [STEFANICA, 2005].

CHAPITRE 3.

GÉNÉRALITÉS SUR L'ESTIMATION D'ERREUR A POSTERIORI EN CADRE SOUS-STRUCTURÉ

Ce chapitre traitera de manière générale de l'estimation d'erreur à posteriori en cadre sous-structuré. Après avoir présenté un rapide état des lieux de contributions existantes à cette problématique, on présentera de manière générique une approche d'estimation d'erreur reposant sur la construction de champs d'interface admissibles. Les performances de la méthode seront ensuite illustrées à l'aide d'une étude systématique sur un cas-test simple. Enfin, on approfondira, exemples à l'appui, la question de la reconstruction d'un champ continu d'inter-efforts d'interface.

3.1. Un état des lieux	82
3.1.1. Analyses mathématiques : estimateurs explicites	83
3.1.2. Problèmes de contact	84
3.1.3. FETI et la "Bound Method"	85
3.2. Une procédure d'estimation d'erreur en cadre sous-structuré	87
3.2.1. Cadre de travail	88
3.2.2. Construction des champs cinématiquement admissibles	91
3.2.3. Construction des champs statiquement admissibles	93
3.3. Première validation numérique	96
3.4. Étude et commentaires sur la construction du champ d'inter-effort .	100
3.4.1. Description continue de $\hat{F}_{bh}^{(s)}$	100
3.4.2. Construction d'une description discontinue de $\hat{F}_{bh}^{(s)}$	104
3.4.3. Illustration numérique	107
3.5. Conclusion partielle	111

Les deux précédents chapitres ont apporté, dans le cas particulier des problèmes linéaires, une description des principales approches d'estimation d'erreur a posteriori, puis de celles découlant des méthodes de décomposition de domaine sans recouvrement. Cet état des lieux appelle plusieurs observations. La première d'entre elles provient du fait que la mise en œuvre des estimateurs d'erreur, nécessitant la résolution de plusieurs problèmes auxiliaires, s'accompagne bien souvent d'un surcoût numérique parfois supérieur à celui du problème éléments finis initial. Par conséquent, ces méthodes sont encore trop peu usitées sur des calculs à grand nombre de degrés de liberté, alors même que l'intérêt de celles-ci réside justement dans la certification de calculs de structures réelles dont le modèle sous-jacent est suffisamment représentatif de la réalité. Dans ce contexte, le cadre parallèle des méthodes de décomposition de domaine se révèle particulièrement intéressant afin de réduire le surcoût de calcul lié à la phase d'estimation des erreurs. Ceci impose, bien entendu, l'adaptation des stratégies d'estimation d'erreur actuelles au cadre sous-structuré. D'autre part, rappelons que le calcul par décomposition de domaine, couplé à des solveurs itératifs, entraîne l'apparition d'erreurs de convergence. Celles-ci, portant généralement sur la non vérification des conditions d'interface, ont de fait une incidence sur le calcul de l'erreur de discrétisation. Il est alors nécessaire de tenir compte de cette nouvelle source d'erreur dans l'élaboration d'estimateurs adaptés au cadre sous-structuré. Pour tenir compte de tous ces aspects, il est alors intéressant de mettre en place des relations bidirectionnelles entre les deux sujets ici étudiés.

Ce chapitre tente de mettre en place une procédure d'estimation d'erreur adaptée au cadre de travail issu des méthodes de décomposition de domaine sans recouvrement. Nous dressons tout d'abord un état des lieux des quelques travaux tendant à lier les deux aspects. Nous présentons ensuite un cadre de travail permettant la mise en œuvre d'un estimateur d'erreur en relation de comportement en cadre sous-structuré. La validité de celle-ci est ensuite étudiée sur des exemples correspondant au cas particulier où la convergence (pour un critère donné) du solveur associée à la méthode de décomposition de domaine est atteinte.

3.1. UN ÉTAT DES LIEUX

A l'heure d'aujourd'hui, la littérature semble encore relativement pauvre en travaux liant les aspects décomposition de domaine avec ceux de l'estimation des erreurs de discrétisation. Cette partie s'attachera à présenter les principaux aspects des travaux existants. On distinguera notamment le développement d'estimateurs explicites dans un cadre sous-structuré ainsi que la mise en œuvre de procédures d'estimation d'erreur sur des problèmes de contact. On mentionnera également l'utilisation de solveurs issus des décompositions de domaine à des fins d'optimisation des analyses d'erreur sur des problèmes *a priori* non sous-structurés.

3.1.1. Analyses mathématiques : estimateurs explicites

La communauté des mathématiques appliquées est à l'origine de plusieurs analyses *a posteriori* relatives à des techniques de décompositions de domaine tant recouvrantes que non-recouvrantes. Ces analyses conduisent généralement à l'obtention d'estimateurs *a posteriori* de type explicites (cf. section 1.4.1) adaptés au cadre de calcul sous-structuré. Notons que les motivations associées, au contraire de celles des mécaniciens, ne résident bien souvent pas dans l'évaluation précise et garantie d'une erreur de discrétisation finale, mais dans l'obtention d'informations permettant d'étudier la pertinence d'algorithmes et d'ajuster leur paramètres externes éventuels (termes de pénalisation...). Historiquement, la première analyse de ce type remonte aux années 1999 [OTTO et LUBE, 1999] et fut motivée par la recherche des paramètres de couplage optimaux intervenant dans un algorithme de type Robin-Robin.

Dans un article récent [BERNARDI, CHACÓN REBOLLO et al., 2009] très brièvement présenté ici, une analyse d'erreur *a posteriori* est réalisée sur un algorithme de décomposition de domaine sans recouvrement utilisant un terme de pénalisation sur l'interface. Pour un découpage en deux sous-domaines $\Omega^{(1)}$ et $\Omega^{(2)}$ séparés par une interface Υ , la formulation continue associée s'écrit alors :

$$\begin{aligned} \text{Trouver } (u^{(1)}, u^{(2)}) \in X_1 \times X_2 \\ \sum_{s=1}^2 \int_{\Omega^{(s)}} \nabla u^{(s)} \nabla v^{(s)} d\Omega + \frac{1}{\varepsilon_p} [[u^{(1)} - u^{(2)}, v^{(1)} - v^{(2)}]]_{\Upsilon} \\ = \sum_{s=1}^2 \int_{\Omega^{(s)}} g \cdot v^{(s)} d\Gamma \quad \forall (v^{(1)}, v^{(2)}) \in X_1 \times X_2 \end{aligned} \quad (3.1)$$

où le paramètre de pénalisation de la méthode est noté ε_p , $[[\cdot]]_{\Upsilon}$ désigne de manière générique le produit scalaire sur $L^2(\Upsilon)$ ou $H_{00}^{1/2}(\Upsilon)$ suivant le choix du type de couplage imposé à l'interface et X_s l'espace d'admissibilité des solutions sur $\Omega^{(s)}$. Le travail consiste d'une part, à l'aide d'une analyse de taux de convergence, à déterminer une valeur optimale de ε_p à maillage fixé, et d'autre part, à l'aide d'une analyse *a posteriori*, de proposer un algorithme d'adaptation du maillage de ε_p afin d'obtenir une erreur de discrétisation globale inférieure à une consigne initiale donnée. L'analyse d'erreur *a posteriori*, dont la démarche est similaire à celle relative à l'estimateur explicite introduit en partie 1.4.1, permet d'obtenir des résultats de majoration de la forme :

$$\sum_{s=1}^2 \|u^{(s)} - u_h^{(s)}\|_{H^1(\Omega^{(s)})} \leq C \left\{ \left(1 + \frac{h^\gamma}{\varepsilon_p} \right) \eta_{\Upsilon} + \left(\sum_{s=1}^2 \sum_{E \in \mathcal{E}_h^{(s)}} (\eta_E^{(s)})^2 + h_E^2 \|f - f_h\|_{L^2(E)}^2 \right)^{1/2} \right\} \quad (3.2)$$

où γ est une constante dépendant de la norme $[[\cdot]]_{\Upsilon}$, $\eta_E^{(s)}$ et η_{Υ} désignant :

- les contributions élémentaires à l’erreur de discrétisation globale

$$\eta_E^{(s)} = h_E \|f_h + \Delta u_h^{(s)}\|_{L^2(E)} + \sum_{\Gamma \in \mathcal{F}_h(E)} h_\Gamma^{1/2} \|\partial_{n_E} u_h^{(s)}\|_{L^2(\Gamma)} \quad (3.3)$$

- une mesure de l’erreur associée à la non vérification des conditions d’interface :

$$\eta_\Upsilon = \|u_h^{(1)} - u_h^{(2)}\|_{H_{00}^{1/2}(\Upsilon)} \quad (3.4)$$

Notons que les remarques formulées en partie 1.4.1, notamment concernant la difficulté d’évaluation de la constante C s’appliquent également aux résultats ci-dessus. Ces derniers, malgré leur intérêt indéniable, conduisent à des techniques d’estimations difficiles à mettre en pratique, notamment lorsque le but recherché consiste à obtenir une estimation garantie de l’erreur de discrétisation avec un indice d’efficacité le plus proche possible de l’unité.

3.1.2. Problèmes de contact

Les principaux types d’estimateurs présentés dans le premier chapitre ont été étendus à certains problèmes de contact durant la dernière décennie. Dans le cadre de la mise en œuvre de l’erreur en relation de comportement, signalons notamment les travaux de [P COOREVITS, HILD et JP PELLE, 2000] qui présentent un estimateur avec traitement des cas de maillages incompatibles à l’interface, ainsi que la prise en compte des frottements entre sous-structures [LOUF, J.-P. COMBE et J.-P. PELLE, 2003].

La démarche de mise en œuvre est alors similaire à celle présentée en partie 1.5.1. En se restreignant au cas de contact entre deux sous-structures séparées par une interface Υ , à partir d’une famille de champs préalablement construite et vérifiant les conditions d’admissibilité cinématique et statique $\{(\hat{u}_h^{(s)}, \hat{\sigma}_h^{(s)})_{s=\{1,2\}}, \hat{w}_h^c, \hat{t}_h^c\}$, l’erreur de discrétisation totale peut être exprimée comme :

$$e_{\text{rdc},\Omega}(\hat{u}_h, \hat{\sigma}_h)^2 = \sum_{s=1}^2 e_{\text{rdc},\Omega^{(s)}}(\hat{u}_h^{(s)}, \hat{\sigma}_h^{(s)})^2 + e_{\text{rdc},\Upsilon}^{\text{inter}}{}^2 \quad (3.5)$$

L’expression ci-dessus fait apparaître plusieurs contributions provenant :

- de termes d’erreur de discrétisation relatifs aux sous-structures

$$e_{\text{rdc},\Omega^{(s)}}(\hat{u}_h^{(s)}, \hat{\sigma}_h^{(s)}) = \|\hat{\sigma}_h^{(s)} - \mathbb{H} : \varepsilon(\hat{u}_h^{(s)})\|_{\mathbb{H}^{-1},\Omega^{(s)}} \quad (3.6)$$

- d’un terme mesurant l’erreur au niveau de l’interface

$$e_{\text{rdc},\Upsilon}^{\text{inter}} = \int_{\Upsilon} [\phi(-\hat{w}_h^c) + \phi^*(\hat{t}_h^c) + \hat{t}_h^c \hat{w}_h^c] d\Upsilon \quad (3.7)$$

où \hat{w}^c et \hat{t}^c désignent les sauts de déplacement et les inter-efforts admissibles aux interfaces, respectivement, et (ϕ, ϕ^*) un couple de potentiels convexes issus de la formulation de la loi de comportement du contact à l'interface [SAXCÉ et FENG, 1998].

Notons que les problèmes de contact présentent de manière assez naturelle un cadre sous-structuré. De fait, il n'est pas rare de voir leur résolution traitée à l'aide d'algorithmes issus des méthode de décomposition de domaine. Ce fut notamment le cas dans [BELLEC, 2008] au sein d'une stratégie adaptative de calcul stochastique sur des problèmes de contact. L'estimateur γ est alors mis en œuvre au sein d'un algorithme de type *LaTIN* [P. LADEVÈZE et N. MOËS, 1999] utilisé pour la résolution du problème de contact. Par ailleurs, dans un récent article [L. GALLIMARD et SASSI, 2010], cette même méthode d'estimation est mise en œuvre dans un algorithme de type *Dirichlet-Neumann*. La construction d'un champ d'inter-effort \hat{t}_h^c couplée à l'utilisation de problèmes mécaniques intermédiaires permet alors d'évaluer $e_{\text{rdc},\Omega}(\hat{u}_h, \hat{\sigma}_h)$ quel que soit l'état de convergence de l'algorithme. En outre, des indicateurs destinés à évaluer l'influence particulière des aspects discrétisation et convergence du solveur γ sont proposés.

Dans le cas du contact sans frottement, signalons que les estimateurs ici présentés fournissent une borne supérieure de l'erreur de discrétisation. Cette propriété est due à l'extension du théorème de Prager-Synge (1.16) relatif aux cas de mécanique linéaire [P COOREVITS, HILD et JP PELLE, 2000]. Notons que ces méthodes d'estimation, bien que n'abordant pas les problématiques relatives au cadre de travail du calcul parallèle, constituent un élément de réponse intéressant dans l'objectif d'une procédure d'estimation générique des erreurs de discrétisation en cadre sous-structuré.

3.1.3. FETI et la "Bound Method"

Achevons notre état des lieux en présentant un cas d'application des solveurs issus de la décomposition de domaine à des fins d'optimisation de calculs d'erreur sur des quantités d'intérêts. Dans [PARASCHIVOIU, 2001 ; PARASCHIVOIU et CHOI, 2002], une méthode de type *FETI* est utilisée pour l'encadrement de quantités d'intérêt dans le cadre de problèmes thermique et de convection-diffusion en trois dimensions.

La méthode sous-jacente, nommée « *bound method* » [PARASCHIVOIU et PATERA, 1998] (ou [PARASCHIVOIU, PERAIRE et PATERA, 1997] pour sa formulation fonctionnelle) s'appuie dans son principe général sur l'utilisation d'un maillage « grossier » Ω_h et d'un maillage fin $\Omega_{\tilde{h}}$ obtenu par h -raffinement de Ω_h . Son objectif consiste à obtenir des bornes sur des quantités d'intérêt de la forme $s = l(u)$ (où l désigne une fonctionnelle linéaire et u la solution du problème), en approchant pour cela s par sa solution $s_{\tilde{h}}$ relative au maillage fin $\Omega_{\tilde{h}}$. L'approche de résolution est alors similaire à celles relatives aux estimateurs utilisant les résidus implicites par éléments (cf. partie 1.4.3), et consiste à découper le problème global sur $\Omega_{\tilde{h}}$ en un ensemble de problèmes indépendants sur des patches correspondant aux éléments du maillage grossier Ω_h . Remarquons que la

quantité d'intérêt s_h obtenue sur le maillage fin $\Omega_{\tilde{h}}$ est à rapprocher, du point de vue de son approximation, de l'erreur de *référence* mentionnée en partie 1.4.5. L'équivalence entre les deux problèmes nécessite alors l'imposition de conditions de continuité, qui sont traitées à l'aide de multiplicateurs de Lagrange introduits aux bords des éléments de Ω_h . Par la suite, le découpage du problème fin est vu comme une décomposition de domaine dont les sous-domaines sont constitués par les éléments du maillage grossier.

Le problème discret peut alors s'écrire sous la forme du Lagrangien augmenté suivant (Ne_h désignant le nombre d'éléments de Ω_h) :

$$\mathcal{L}(\mathbf{v}_{\tilde{h}}, \boldsymbol{\mu}_{\tilde{h}}, \boldsymbol{\lambda}_{\tilde{h}}) = \sum_{s=1}^{\text{Ne}_h} \left(\mathbf{v}_{\tilde{h}}^{(s)T} \mathbf{A}_{\tilde{h}}^{(s)} \mathbf{v}_{\tilde{h}}^{(s)} - \mathbf{f}_{\tilde{h}}^{(s)T} \mathbf{v}_{\tilde{h}}^{(s)} + \mathbf{l}_{\tilde{h}}^{(s)T} \mathbf{v}_{\tilde{h}}^{(s)} \right) \quad (3.8a)$$

$$+ \sum_{s=1}^{\text{Ne}_h} \boldsymbol{\mu}_{\tilde{h}}^{(s)T} \left(\mathbf{L}_{\tilde{h}}^{(s)} \mathbf{v}_{\tilde{h}}^{(s)} - \mathbf{f}_{\tilde{h}}^{(s)} \right) \quad (3.8b)$$

$$+ \boldsymbol{\lambda}_{\tilde{h}}^T \sum_{s=1}^{\text{Ne}_h} \mathbf{B}_h^{(s)} \mathbf{v}_h^{(s)} \quad (3.8c)$$

où le terme (3.8a) est spécifique au calcul de la quantité d'intérêt s_h tandis que (3.8b) et (3.8c) traduisent l'imposition de l'équilibre sur chaque sous-domaine et les conditions de continuité, respectivement.

Par la suite, les bornes supérieure et inférieure sur s_h sont calculées en remplaçant les multiplicateurs de Lagrange $\boldsymbol{\mu}_{\tilde{h}}$ et $\boldsymbol{\lambda}_{\tilde{h}}$ par des approximations $\boldsymbol{\mu}_h$ et $\boldsymbol{\lambda}_h$ sur Ω_h . En particulier, le calcul de $\boldsymbol{\lambda}_h$ s'effectue alors à travers :

$$2\mathbf{A}_h^{(s)} \mathbf{u}_h^{(s)} + \mathbf{B}_h^{(s)T} \boldsymbol{\lambda}_h = \mathbf{L}_h^{(s)T} \boldsymbol{\mu}_h^{(s)} + \mathbf{f}_h^{(s)} - \mathbf{l}_h^{(s)}, \quad s = 1, \dots, \text{Ne}_h \quad (3.9a)$$

$$\sum_{s=1}^{\text{Ne}_h} \mathbf{B}_h^{(s)} \mathbf{u}_h^{(s)} = 0 \quad (3.9b)$$

Remarquons à ce stade la structure particulière du système ainsi obtenu qui, de part sa similitude avec celle rencontrée en (2.36), permet le recours à un solveur de type *FETI* lors de sa résolution. Ceci permet de bénéficier des préconditionneurs optimaux de ce type de méthode, ainsi que de la structure additive des différents opérateurs, offrant ainsi une occupation mémoire moindre en comparaison d'une résolution directe, ce qui est particulièrement utile lors de la résolution de problèmes en dimension 3.

Si la méthode sus-présentée fait appel à l'utilisation d'un solveur de type *FETI*, par là même issu de paradigmes liés aux approches par décomposition de domaine, il est difficile de la considérer comme une réponse à la problématique qui nous intéresse. Comme remarqué précédemment, le but est ici similaire à celui des méthodes de constructions par éléments (cf. sections 1.4.3 et 1.5.2.1), consistant à partir d'un maillage de travail en des résolutions indépendantes de problèmes élémentaires posés sur une base d'approximation raffinée (aboutissant à la création d'un maillage fin). La réponse, lors de

la construction des multiplicateurs de Lagrange inhérents à la mise en place de ce type d'approches, consiste alors à proposer la résolution itérative d'un problème global, *a contrario* des méthodes sus-citées qui utilisent des résolutions par patch d'éléments pour atteindre le même but. S'il paraît alors envisageable d'utiliser ce type d'approche dans le contexte des estimateurs par résidus implicites ou lors de la reconstruction de champs statiquement admissibles, son extension à des calculs sous-structurés nécessiterait la mise en place d'une seconde couche de décomposition de domaine appliquée au maillage de travail Ω_h .

3.2. UNE PROCÉDURE D'ESTIMATION D'ERREUR EN CADRE SOUS-STRUCTURÉ

Après avoir présenté un état des lieux des travaux disponibles dans la littérature – travaux qui, à notre connaissance, constituent les rares éléments de réponse à notre problématique – la suite de ce chapitre sera intégralement consacrée à la présentation d'une procédure d'estimation d'erreur en cadre sous-structuré.

Nos travaux proviennent de deux motivations distinctes. En premier lieu, nous cherchons à adapter au cadre sous-structuré les techniques d'estimation d'erreur initialement développées sur des problèmes séquentiels. Afin d'être efficace, c'est à dire de conduire à un parallélisme optimal du processus, cette adaptation doit conduire à des calculs indépendants sur les sous-domaines tout en minimisant autant que possible les échanges à l'interface. En second lieu, il nous paraît intéressant d'exploiter le caractère itératif des solveurs de décomposition de domaine afin de fournir une mesure pertinente d'erreur en l'absence de convergence de la méthode. Ce point suppose de pouvoir accéder à une borne supérieure de l'erreur de discrétisation à tout moment de la résolution itérative du problème global, et principalement en l'absence de vérification des conditions de continuité et d'équilibre entre sous-structures.

La technique générique que nous détaillons ici constitue une extension des estimateurs d'erreur reposant sur *l'erreur en relation de comportement* au cadre de travail générique des décompositions de domaine sans recouvrement présentées dans le chapitre précédent. En outre, les développements présentés se situent dans le cadre des problèmes élastiques linéaires (cf. 1.1).

Ces travaux ont fait l'objet de la première partie d'une publication [A. PARRET-FRÉAUD, C. REY et al., 2010] ainsi que de deux communications [A. PARRET-FRÉAUD, P. GOSSELET et C. REY, 2009 ; A. PARRET-FRÉAUD, P. GOSSELET et C. REY, 2009]. Par ailleurs, une implémentation numérique générique de ceux-ci a été réalisée au sein du code de calcul éléments finis *ZeBuLon* [*Z-set developer manual* 2001 ; *Z-set user manual* 2001].

3.2.1. Cadre de travail

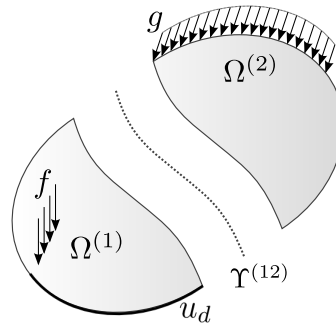
Tout d'abord, rappelons brièvement le principe de fonctionnement de l'erreur en relation de comportement sur le problème modèle (1.1) résolu de manière séquentielle (ie. sans recours à une technique de décomposition de domaine). A partir du couple classique de solutions approchées $(u_h, \sigma_h) \in \mathcal{Ca}_h(\Omega) \times \{\mathbb{H} : \varepsilon(\mathcal{Ca}_h(\Omega))\}$ issu d'une résolution éléments finis en déplacement sur un maillage Ω_h , celui-ci repose sur la construction d'un nouveau couple de solutions $(\hat{u}_h, \hat{\sigma}_h) \in \mathcal{Ca}(\Omega) \times \mathcal{Sa}(\Omega)$ vérifiant l'admissibilité cinématique et statique de manière à faire porter l'approximation issue des éléments finis sur la relation de comportement. La mesure énergétique du résidu associé (1.58) permet alors l'obtention d'une mesure garantie de l'erreur de discrétisation :

$$\eta = [\mathbf{e}_{\text{rdc}, \Omega}(\hat{u}_h, \hat{\sigma}_h)]^{1/2} = \|\hat{\sigma}_h - \mathbb{H} : \varepsilon(\hat{u}_h)\|_{\mathbb{H}^{-1}, \Omega}$$

Lors de la mise en pratique, si la solution u_h issue d'une formulation en déplacement est déjà admissible cinématiquement, de sorte que \hat{u}_h est choisi comme u_h dans la plupart des cas¹, la construction de la solution admissible en contrainte $\hat{\sigma}_h$ constitue la principale difficulté liée à la mise en œuvre de la méthode, en nécessitant le recours à des algorithmes spécifiques (cf. 1.5.2) que nous désignons à l'aide de la notation unifiée \mathcal{F}_{eq} :

$$\hat{\sigma}_h = \mathcal{F}_{\text{eq}}(\sigma_h, g, f) \in \mathcal{Sa}(\Omega)$$

Rappelons notamment qu'en sus de la solution éléments finis σ_h , ces outils exploitent également la donnée des efforts intérieurs et de frontière du problème. En outre, faisant appel à la résolution de problèmes définis sur des patches d'éléments, leur mise en pratique dans un cadre sous-structuré nécessite en l'occurrence un traitement particulier dans le cas des patches traversés par une interface. Nous y reviendrons par la suite.



□ FIG. 3.1. *Décomposition en 2 sous-domaines*

1. Nous ignorons dans la suite du documents les cas particuliers (élasticité incompressible) nécessitant la construction spécifique d'un nouveau champ de déplacement admissible.

On se place à présent dans le cadre de travail sous-structuré introduit au chapitre précédent, en considérant une décomposition du domaine Ω en une famille $(\Omega^{(s)})_{1 \leq s \leq \mathcal{N}_{\text{sd}}}$ de \mathcal{N}_{sd} sous-domaines. Le problème ainsi décomposé s'écrit (2.9) :

$$\begin{aligned} &\text{Trouver } (\mathcal{A}(u^\square), \mathcal{A}(\sigma^\square)) \in \mathcal{Ca}(\Omega) \times \mathcal{Sa}(\Omega) \text{ vérifiant :} \\ &\quad e_{\text{rdc}, \Omega^{(s)}}(u^{(s)}, \sigma^{(s)}) = 0 \quad (1 \leq s \leq \mathcal{N}_{\text{sd}}) \end{aligned}$$

Considérons une approximation éléments finis du problème précédent sans hypothèse de vérification des conditions de continuité (2.5) et d'équilibre (2.6) aux interfaces. Notons que sous ces conditions, l'assemblage des champs de déplacements approchés locaux n'est pas cinématiquement admissible sur la structure complète :

$$u_h^{(s)} \in \mathcal{Ca}_h(\Omega^{(s)}) \quad \text{mais} \quad \mathcal{A}(u_h^\square) \notin \mathcal{Ca}_h(\Omega)$$

Ce cas de figure est notamment rencontré au cours des itérations d'un solveur de décomposition de domaine, lorsque toutes les conditions d'interfaces ne sont pas encore assurées.

Le cadre de travail étant établi, distinguons à présent deux approches possibles permettant l'extension de l'erreur en relation de comportement en présence de décomposition de domaine.

3.2.1.1. Construction parallèle de champs vérifiant l'admissibilité locale

Sur chaque sous-domaine, au cours de la convergence de la méthode de résolution, la solution éléments finis vérifie la propriété :

$$(u_h^{(s)}, \sigma_h^{(s)}) \in \mathcal{Ca}_h(\Omega^{(s)}) \times \left\{ \mathbb{H} : \varepsilon(\mathcal{Ca}_h(\Omega^{(s)})) \right\}$$

Un premier axe de réponse à notre problématique consiste à construire sur chaque sous-domaine un couple de solution admissible de manière indépendante, en utilisant les outils développés dans le cadre séquentiel :

$$(\hat{u}_h^{(s)}, \hat{\sigma}_h^{(s)}) = (u_h^{(s)}, \mathcal{F}_{\text{eq}}(\sigma_h^{(s)}, g, f)) \in \mathcal{Ca}(\Omega^{(s)}) \times \mathcal{Sa}(\Omega^{(s)}) \quad (3.10)$$

Cependant, notons que du fait du cadre de travail qui n'impose pas la vérification des conditions d'interfaces (2.5) et (2.6), la solution globale ainsi reconstruite n'est pas admissible à l'échelle de la structure globale :

$$(\mathcal{A}(\hat{u}_h^\square), \mathcal{A}(\hat{\sigma}_h^\square)) \notin \mathcal{Ca}(\Omega) \times \mathcal{Sa}(\Omega) \quad (3.11)$$

Il est alors nécessaire, lors du calcul de l'erreur en relation de comportement, de prendre en compte une source d'erreur supplémentaire à l'interface provenant de la non-vérification de la continuité des déplacements et de l'équilibre entre les sous-structures. Il vient

alors une expression de $e_{\text{rdc},\Omega}$ similaire à celle utilisée lors des problèmes de contact présentés en partie 3.1.2 :

$$e_{\text{rdc},\Omega}(\hat{u}_h, \hat{\sigma}_h)^2 = \sum_{s=1}^{\mathcal{N}_{\text{sd}}} e_{\text{rdc},\Omega^{(s)}} \left(\hat{u}_h^{(s)}, \hat{\sigma}_h^{(s)} \right)^2 + e_{\text{rdc},\Upsilon}^{\text{inter}}{}^2 \quad (3.12)$$

Cette première approche est simple à mettre en œuvre au niveau du calcul des contributions $e_{\text{rdc},\Omega^{(s)}}(\hat{u}_h^{(s)}, \hat{\sigma}_h^{(s)})$ puisqu'il est possible d'employer directement et en parallèle les algorithmes issus des approches séquentielles. De plus, elle permet de scinder les contributions à l'erreur globale provenant de la discrétisation des sous-structures de celles provenant des interfaces. Objectons cependant qu'il serait souhaitable de développer alors un terme d'interface découplant, autant que possible, les contributions issues des erreurs de discrétisation de celles liées à la non vérification des conditions de raccord (2.5) et (2.6). La principale difficulté réside alors dans l'écriture d'un terme $e_{\text{rdc},\Upsilon}^{\text{inter}}$ qui permette de surcroît l'extension du théorème de Prager-Synge afin d'obtenir une estimation garantie.

3.2.1.2. Construction parallèle de champs vérifiant l'admissibilité globale

Un second axe de réponse à notre problématique consiste à construire un couple de solutions $(\hat{u}_h^{(s)}, \hat{\sigma}_h^{(s)})$ vérifiant simultanément l'admissibilité locale au niveau de chaque sous-structure et celle globale sur la structure assemblée :

$$\begin{aligned} \text{Trouver } (\hat{u}_h^{(s)}, \hat{\sigma}_h^{(s)}) \in \mathcal{Ca}(\Omega^{(s)}) \times \mathcal{Sa}(\Omega^{(s)}), \forall s, \text{ tel que :} \\ (\mathcal{A}(\hat{u}_h^\square), \mathcal{A}(\hat{\sigma}_h^\square)) \in \mathcal{Ca}(\Omega) \times \mathcal{Sa}(\Omega) \end{aligned} \quad (3.13)$$

Dans le cadre d'une décomposition de domaine sans recouvrement, rappelons alors que l'admissibilité globale d'un couple est sujette à la vérification des conditions énoncées en partie 2.1 et portant, en premier lieu, sur l'admissibilité locale des couples sur chaque sous-structure, et en second lieu, sur la continuité des déplacements et d'équilibre des inter-efforts à l'interface :

$$\mathcal{A}(u^\square) \in \mathcal{Ca}(\Omega) \Leftrightarrow \begin{cases} u^{(s)} \in \mathcal{Ca}(\Omega^{(s)}) & \forall s \\ \text{tr}(u^{(s)}) = \text{tr}(u^{(s')}) & \text{sur } \Upsilon^{(ss')}, \forall (s, s') \end{cases} \quad (2.8a)$$

$$\mathcal{A}(\sigma^\square) \in \mathcal{Sa}(\Omega) \Leftrightarrow \begin{cases} \sigma^{(s)} \in \mathcal{Sa}(\Omega^{(s)}) & \forall s \\ \sigma^{(s)}.n^{(s)} + \sigma^{(s')}.n^{(s')} = 0 & \text{sur } \Upsilon^{(ss')}, \forall (s, s') \end{cases} \quad (2.8b)$$

Sous réserve de la vérification des conditions précédentes et du fait de l'absence de recouvrements entre sous-domaines, l'erreur en relation de comportement globale se décompose alors en une somme de contributions locales indépendantes :

$$e_{\text{rdc},\Omega}(\mathcal{A}(\hat{u}_h^\square), \mathcal{A}(\hat{\sigma}_h^\square))^2 = \sum_s \left(e_{\text{rdc},\Omega^{(s)}} \left(\hat{u}_h^{(s)}, \hat{\sigma}_h^{(s)} \right) \right)^2$$

Nous aboutissons alors à une évaluation totalement parallèle en s'affranchissant de la nécessité de la détermination et du calcul de termes spécifiques aux interfaces. L'extension du théorème de Prager-Synge est alors immédiate et assure à l'estimateur sous-structuré les mêmes propriétés de majoration de l'erreur globale η que l'estimateur séquentiel.

Similairement au cas séquentiel, le cœur de la méthode repose alors sur la construction d'un couple vérifiant les conditions (2.8a) et (2.8b). Pour un tel couple, une difficulté supplémentaire se situe au niveau de la vérification de la description continue des conditions à l'interface. La méthode assure dans un premier temps leur vérification, puis les exploite pour construire des couples localement admissibles sur chaque sous-structure tout en satisfaisant leur admissibilité au niveau global.

La suite de la partie sera ainsi consacrée à la vérification pratique des conditions d'admissibilités sus-citées (2.8a) et (2.8b). Nous montrerons en particulier que les procédures spécifiques induites au niveau continu peuvent être transposées au niveau discret en conditions sur les champs nodaux intervenant dans la formulation des algorithmes de décomposition de domaine.

3.2.2. Construction des champs cinématiquement admissibles

Comme rappelé précédemment, un champ de déplacement solution d'une approximation éléments finis d'un problème linéaire est cinématiquement admissible dans la majorité des cas de figure, ce qui assure la vérification de la première condition de (2.8a).

On propose alors, afin de vérifier la seconde condition de (2.8a), d'introduire un champ d'interface continu \hat{u}_{bh} sur la frontière $\Upsilon^{(s)}$ de chaque sous-structure, vérifiant :

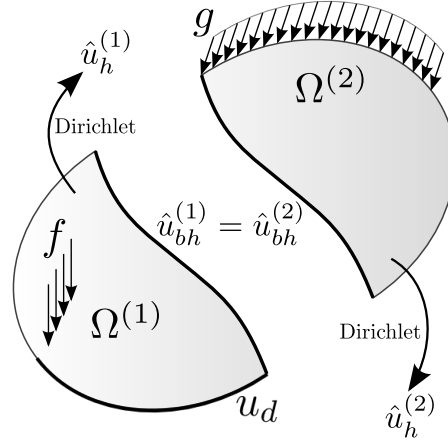
$$\hat{u}_{bh}^{(s)} = \hat{u}_{bh}^{(s')}, \quad \forall (s, s') \quad (3.14)$$

Un champ de déplacement $\hat{u}_h^{(s)}$ vérifiant l'admissibilité globale $\mathcal{A}(\hat{u}_h^\square) \in \mathcal{Ca}(\Omega)$ est alors obtenu par résolution éléments finis sur chaque sous-structure d'un problème mécanique à conditions aux limites Dirichlet données par $\hat{u}_{bh}^{(s)}$ sur $\Upsilon^{(s)}$:

Trouver $\hat{u}_h^{(s)} \in \mathcal{Ca}_{\Upsilon h}(\Omega^{(s)}, \hat{u}_{bh}^{(s)})$ tel que $\check{\sigma}_h^{(s)} = \mathbb{H} : \varepsilon(\hat{u}_h^{(s)})$ vérifie :

$$\int_{\Omega^{(s)}} \check{\sigma}_h^{(s)} : \varepsilon(v_h^{(s)}) d\Omega = \int_{\Omega^{(s)}} f \cdot v_h^{(s)} d\Omega + \int_{\partial_f \Omega^{(s)}} g \cdot v_h^{(s)} d\Gamma \quad \forall v_h^{(s)} \in \mathcal{Ca}_{\Upsilon h}^0(\Omega^{(s)}) \quad (3.15)$$

où $\mathcal{Ca}_{\Upsilon h}(\Omega^{(s)}, \hat{u}_{bh}^{(s)})$ et $\mathcal{Ca}_{\Upsilon h}^0(\Omega^{(s)})$ sont les versions approchées des espaces d'admissibilité cinématique (1.3a) et (1.3b) avec déplacement imposé à l'interface (cf. 1.1.2).



□ FIG. 3.2. Détermination de $\hat{u}_h^{(s)}$

Traitement numérique

Le choix d'une décomposition de domaine de type conforme assure la correspondance des nœuds d'interface entre sous-structures. Dans ce cadre, la transposition discrète de la condition de continuité (3.14) s'effectue simplement comme :

$$\hat{\mathbf{u}}_b^{(s)} = \hat{\mathbf{u}}_b^{(s')}, \quad \forall (s, s') \quad (3.16)$$

ou encore de manière globale :

$$\underline{\mathbf{A}} \hat{\mathbf{u}}_b^\diamond = 0 \quad (3.17)$$

Par la suite, la résolution discrète du problème (3.18) assure la construction du champ $\hat{u}_h^{(s)}$ à partir des valeurs nodales obtenues indépendamment sur chaque sous-domaine :

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{u}}_i^{(s)} &= \mathbf{K}_{ii}^{(s)-1} \left(\mathbf{f}_i^{(s)} - \mathbf{K}_{ib}^{(s)} \hat{\mathbf{u}}_b^{(s)} \right) \\ \hat{u}_h^{(s)} &= \boldsymbol{\varphi}^{(s)} \hat{\mathbf{u}}^{(s)} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{\varphi}_i^{(s)} & \boldsymbol{\varphi}_b^{(s)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{\mathbf{u}}_i^{(s)} \\ \hat{\mathbf{u}}_b^{(s)} \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (3.18)$$

de sorte que :

$$\hat{u}_h = \mathcal{A}(\hat{u}_h^\square) \in \mathcal{Ca}(\Omega)$$

A ce stade, nous constatons que l'introduction du champ d'interface continu, qui constitue le cœur de la méthode, se ramène en réalité à la vérification d'une condition discrète (3.17). Notons que la détermination pratique et optimale de ce champ dépend de l'algorithme de décomposition de domaine utilisé. Ce point sera détaillé dans le chapitre qui suit, lors de l'implantation de la méthode dans certains algorithmes usuels associés aux décompositions de domaine sans recouvrement.

3.2.3. Construction des champs statiquement admissibles

A la différence du cas précédent, tout champ de contraintes éléments finis (hors cas triviaux) ne vérifie *a priori* aucune des deux conditions de (2.8b). Dès lors, nous choisissons d'assurer en premier lieu l'équilibre des inter-efforts d'un point de vue continu. L'utilisation en second lieu des algorithmes de reconstruction \mathcal{F}_{eq} sur la base du champ de contrainte intermédiaire ainsi obtenu permet l'obtention d'un champ de contraintes admissible à l'échelle de la structure assemblée.

Afin de vérifier la condition d'équilibre de (2.8b), nous procédons de manière similaire à la construction de $\hat{u}_h^{(s)}$ en introduisant un champ d'effort continu $\hat{F}_{bh}^{(s)}$ sur la frontière $\Upsilon^{(s)}$ de chaque sous-domaine. La construction de $\hat{F}_{bh}^{(s)}$ doit alors permettre la satisfaction des deux conditions suivantes :

- d'une part, la vérification du principe de l'action et de la réaction entre sous-structures adjacentes :

$$\hat{F}_{bh}^{(s)} + \hat{F}_{bh}^{(s')} = 0 \text{ sur } \Gamma^{(ss')} \quad (3.19)$$

- d'autre part, celle de l'équilibre local de chaque sous-structure soumise à ses chargements intérieurs et de frontière :

$$\int_{\Omega^{(s)}} f^{(s)} \cdot \rho d\Omega + \int_{\partial_f \Omega^{(s)}} g^{(s)} \cdot \rho dS + \int_{\Upsilon^{(s)}} \hat{F}_{bh}^{(s)} \cdot \rho dS = 0 \quad \forall \rho \in \text{CaR}(\Omega^{(s)}) \quad (3.20)$$

Par la suite, tout champ de contrainte $\hat{\sigma}^{(s)}$ solution du problème aux conditions aux limites de Neumann suivant vérifiera alors les deux conditions de (2.8b) :

$$\begin{aligned} \tilde{u}^{(s)} &= u_d && \text{sur } \partial_u \Omega^{(s)} \\ \text{div}(\hat{\sigma}^{(s)}) + f &= 0 && \text{dans } \Omega^{(s)} \\ \hat{\sigma}^{(s)} \cdot n &= g && \text{sur } \partial_f \Omega^{(s)} \\ \hat{\sigma}^{(s)} \cdot n &= \hat{F}_{bh}^{(s)} && \text{sur } \Upsilon^{(s)} \\ \hat{\sigma}^{(s)} &= \mathbb{H} : \varepsilon(\tilde{u}^{(s)}) && \text{dans } \Omega^{(s)} \end{aligned} \quad (3.21)$$

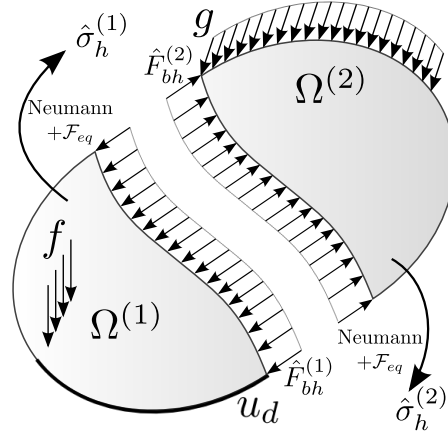
La résolution exacte du problème mécanique précédent étant bien évidemment hors de portée, la construction de $\hat{\sigma}_h^{(s)}$ se déroule alors en deux étapes. La première consiste à construire un champ de contrainte approché intermédiaire $\tilde{\sigma}_h^{(s)}$ issu de la résolution éléments finis de (3.21) :

Trouver $\tilde{u}_h^{(s)} \in \mathcal{Ca}_h(\Omega^{(s)})$ tel que $\tilde{\sigma}_h^{(s)} = \mathbb{H} : \varepsilon(\tilde{u}_h^{(s)})$ vérifie :

$$\begin{aligned} \int_{\Omega^{(s)}} \tilde{\sigma}_h^{(s)} : \varepsilon(v_h^{(s)}) d\Omega &= \int_{\Omega^{(s)}} f \cdot v_h^{(s)} d\Omega + \int_{\partial_f \Omega^{(s)}} g \cdot v_h^{(s)} d\Gamma + \int_{\Upsilon^{(s)}} \hat{F}_{bh}^{(s)} \cdot v_h^{(s)} d\Gamma \\ \forall v_h^{(s)} &\in \mathcal{Ca}_h^0(\Omega^{(s)}) \end{aligned} \quad (3.22)$$

□ REMARQUE 3.1 Dans le cas de sous-structures dites « flottantes », pour lesquelles $\partial_u \Omega^{(s)} = \emptyset$, notons que le champ de déplacement $\tilde{u}_h^{(s)}$ n'est pas unique et que sa détermination numérique s'effectue alors au mouvement de solide rigide près. Ce point n'est cependant pas gênant puisque seule la partie symétrique du gradient de $\tilde{u}_h^{(s)}$ est utilisée ensuite lors du calcul de $\tilde{\sigma}_h^{(s)}$.

A l'issue de la résolution approchée de (3.22), la solution intermédiaire $\tilde{\sigma}_h^{(s)}$ obtenue ne vérifie la seconde condition de (2.8b) qu'au sens des éléments finis. La construction de $\hat{\sigma}_h^{(s)}$ s'effectue ensuite par application de l'algorithme \mathcal{F}_{eq} au champ $\tilde{\sigma}_h^{(s)}$. La prise en compte, au sein de \mathcal{F}_{eq} , de la répartition continue du champ d'effort \hat{F}_{bh} comme condition aux limites de Neumann assure alors la vérification de la seconde condition de (2.8b).



□ FIG. 3.3. Détermination de $\hat{\sigma}_h^{(s)}$

□ REMARQUE 3.2 Du fait des choix effectués lors de la détermination de \hat{F}_{bh} , et notamment celui de la base d'approximation associée, notons que la méthode parallèle présentée ici conduit à la détermination d'un champ statiquement admissible $\hat{\sigma}_h^{(s)}$ différent de celui obtenu par l'application de \mathcal{F}_{eq} sur la structure complète.

□ REMARQUE 3.3 Notons par ailleurs que la problématique de l'obtention d'un champ de contraintes vérifiant l'équilibre entre sous-structures a suscité plusieurs travaux par le passé, parmi lesquels nous citerons [DUVAUT et PISTRE, 1982].

Construction du représentant continu de l'inter-effort

Dans la perspective d'un traitement numérique des développements précédents, il est nécessaire d'introduire un champ d'efforts nodal $\hat{\lambda}_b^{(s)}$ que l'on reliera à \hat{F}_{bh} au moyen de la condition suivante :

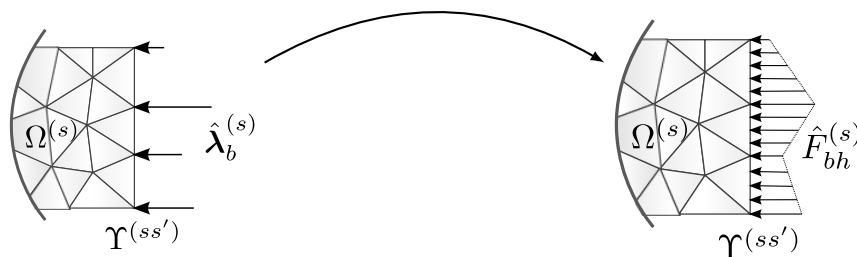
$$\int_{\Gamma^{(s)}} \hat{F}_{bh}^{(s)} \cdot \varphi_{b,i|\Gamma^{(s)}}^{(s)} d\Gamma = \hat{\lambda}_{b,i}^{(s)} \quad (3.23)$$

où $\hat{\lambda}_{b,i}^{(s)}$ désigne la i -ième composante de $\hat{\lambda}_b^{(s)}$ et $\varphi_{b,i|\Upsilon^{(s)}}$ la trace sur $\Upsilon^{(s)}$ de la fonction de forme éléments finis associée au nœud i . D'un point de vue mécanique, (3.23) assure l'égalité entre les travaux virtuels engendrés par les champs continus et discrets pour tout champ de déplacement éléments finis.

En pratique, le champ \hat{F}_{bh} sera construit à partir de $\hat{\lambda}_b^{(s)}$. Se pose alors la question du choix d'une base d'approximation permettant de représenter un champ continu à partir des données nodales $\hat{\lambda}_b^{(s)}$ à disposition. Dans une première approche, il est proposé de construire \hat{F}_{bh} sur la base constituée de la trace sur $\Upsilon^{(s)}$ des fonctions de forme éléments finis (fig. 3.4) :

$$\hat{F}_{bh}^{(s)} = \varphi_{b,\Upsilon^{(s)}} \hat{\mathbf{F}}_b^{(s)} \quad (3.24)$$

où $\hat{\mathbf{F}}_b^{(s)}$ désigne le vecteur des valeurs nodales de $\hat{F}_{bh}^{(s)}$. $\hat{\mathbf{F}}_b^{(s)}$ est alors obtenu à travers de simples inversions de systèmes de petite taille, égale au nombre de nœuds d'interface. Cependant, il est à noter qu'un tel choix impose la vérification de la continuité de \hat{F}_{bh} au passage des nœuds d'interface. Nous verrons par la suite que cette condition entraîne une description plus grossière du champ d'efforts continu et conduit donc à l'obtention d'un champ statiquement admissible de moindre qualité. Nos investigations, notamment en partie 3.4, porteront sur un autre choix de base d'approximation.



□ FIG. 3.4. Représentation continue de \hat{F}_{bh}

Dans ces conditions, on utilisera dans la suite l'appellation générique \mathcal{G}_h pour désigner l'algorithme construisant le représentant continu \hat{F}_{bh} à partir des valeurs discrètes $\hat{\lambda}_b^{(s)}$ suivant la méthode de construction choisie :

$$\hat{F}_{bh}^{(s)} = \mathcal{G}_h(\hat{\lambda}_b^{(s)}) \quad (3.25)$$

Nous reviendrons en partie 3.4 sur détail des procédures associées à \mathcal{G}_h .

Traitement numérique

Le choix effectué à travers la relation (3.23) permet par la suite une transposition directe de (3.19) et (3.20) en conditions discrètes sur $\hat{\boldsymbol{\lambda}}_b^{(s)}$:

$$\overline{\mathbf{A}}^\diamond \hat{\boldsymbol{\lambda}}_b^\diamond = 0 \quad (3.26a)$$

$$\mathbf{R}^{\diamond T} \left(\mathbf{t}^{\diamond T} \hat{\boldsymbol{\lambda}}_b^\diamond + \mathbf{f}^\diamond \right) = 0 \quad (3.26b)$$

□ **REMARQUE 3.4** *L'équivalence entre cette dernière condition et son analogue continu provient de la représentation exacte de tout mouvement de corps rigide sur la base d'approximation éléments finis.*

La résolution discrète de (3.22) permet alors la détermination de $\tilde{\sigma}_h^{(s)}$:

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{u}}^{(s)} &= \mathbf{K}^{(s)+} \left(\mathbf{f}^{(s)} + \mathbf{t}^{(s)T} \hat{\boldsymbol{\lambda}}_b^{(s)} \right) \\ \tilde{\sigma}_h^{(s)} &= \mathbb{H} : \varepsilon(\boldsymbol{\varphi}^{(s)} \tilde{\mathbf{u}}^{(s)}) \end{aligned} \quad (3.27)$$

L'application de \mathcal{F}_{eq} assure ensuite l'admissibilité de $\hat{\sigma}_h^{(s)}$, sous réserve d'imposer à la fois les conditions aux limites de Neumann g du problème ainsi que le représentant continu $\hat{F}_{bh}^{(s)} = \mathcal{G}_h(\hat{\boldsymbol{\lambda}}_b^{(s)})$ de l'inter-effort équilibré sur $\Upsilon^{(s)}$:

$$\hat{\sigma}_h^{(s)} = \mathcal{F}_{\text{eq}} \left(\tilde{\sigma}_h^{(s)}, f^{(s)}, \left\{ g^{(s)}, \hat{F}_{bh}^{(s)} \right\} \right) \quad (3.28)$$

de sorte que :

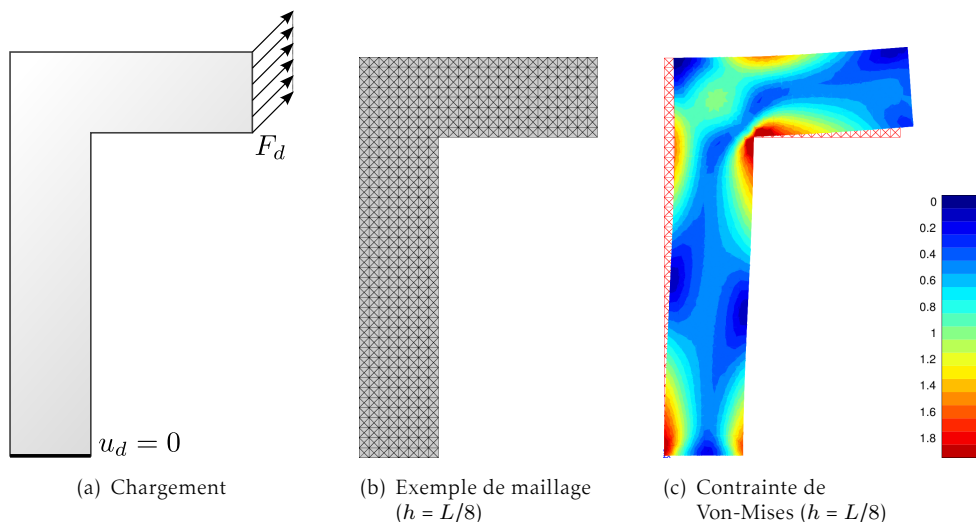
$$\hat{\sigma}_h = \mathcal{A}(\hat{\sigma}_h^\square) \in \mathcal{S}a(\Omega)$$

Sous réserve de la donnée de $\hat{\boldsymbol{\lambda}}_b^{(s)}$, le traitement de ces deux dernières étapes s'effectue indépendamment sur chaque sous-domaine, rendant ainsi la procédure de reconstruction totalement parallèle.

3.3. PREMIÈRE VALIDATION NUMÉRIQUE

Cette partie a pour but d'effectuer une première validation numérique de la méthode présentée. Pour cela, on se place dans le cas particulier où la convergence de la méthode de décomposition de domaine est atteinte préalablement au calcul parallèle de l'erreur. Dans ce cas de figure précis, l'ensemble des conditions de raccord entre sous-structures étant satisfaites, les choix $\hat{\mathbf{u}}_b^{(s)} = \mathbf{u}_b^{(s)}$ et $\hat{\boldsymbol{\lambda}}_b^{(s)} = \boldsymbol{\lambda}_b^{(s)}$ assurent directement la vérification des relations (3.17), (3.26a) et (3.26b).

Nous considérons ici un problème « jouet » relatif à une Γ -structure encadrée à sa base (de largeur L) et soumise sur son extrémité droite à un champ combiné de traction et de cisaillement (fig. 3.5(a)). Le comportement matériau est choisi linéaire élastique isotrope, de module d'Young $E = 2000$ MPa et de coefficient de Poisson $\nu = 0.3$. D'autre part, la modélisation s'effectue sous l'hypothèse des contraintes planes. À titre d'illustration, la figure 3.5(c) représente, dans une configuration déformée du problème, la cartographie du champ de contrainte de Von-Mises, sur laquelle peuvent être remarquées les traditionnelles zones de concentration de contraintes au voisinage du point anguleux et des bords de la zone encadrée.



□ FIG. 3.5. Γ -structure

Par la suite est réalisée une étude systématique du comportement de l'estimateur en fonction de la taille de maille et du nombre de sous-domaines. Pour se faire, on procède dans un premier temps à la génération d'une série de maillage réguliers constitués d'éléments triangulaires de taille caractéristique $h = \frac{L}{m}$ avec $m = 2, 4, 8, 16, 32, 64$. Un exemple d'un tel maillage pour $m = 8$ est représenté figure 3.5(b). Dans un second temps, le problème discrétisé sur la base de chaque maillage précédemment obtenu est résolu de manière séquentielle, puis à l'aide d'une approche par décomposition de domaine sur la base d'une partition de la structure en \mathcal{N}_{sd} sous-domaines (avec $\mathcal{N}_{sd} = 2, 4, 8$ pour $m \leq 4$, $\mathcal{N}_{sd} = 2, 4, 8, 16, 32$ pour $m = 8$, $\mathcal{N}_{sd} = 2, 4, 8, 16, 32, 64$ pour $m = 16, 32$ et enfin $\mathcal{N}_{sd} = 8, 16, 32, 64$ pour $m = 64$, cf. figure 3.8 pour des exemples de ces décompositions dans le cas $m = 16$). Notons que cette étude, comme l'ensemble des exemples montrés dans ce document, ont été réalisés à l'aide du code éléments finis *ZeBuLon* avec des éléments de degré $p = 1$. De plus, les calculs par décomposition de domaine ont été réalisés à l'aide d'approches de type duale et primale, à travers l'utilisation des algorithmes FETI et BDD, respectivement. Les critères de convergence associés, portant sur le saut de déplacement (resp. des inter-efforts) à l'interface, ont été fixés à 10^{-6} .

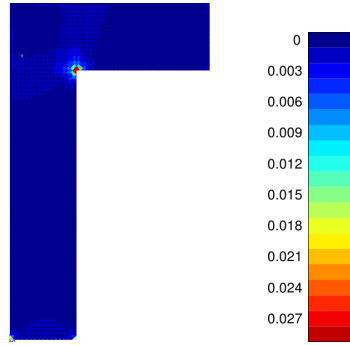
Dans chaque cas de discrétisation, selon le caractère séquentiel ou sous-structuré de la résolution, et à convergence de celle-ci, les estimateurs d'erreur séquentiel $e_{\text{rdc}}^{\text{seq}}$ et parallèle $e_{\text{rdc}}^{\text{ddm}}$ sont calculés par :

$$e_{\text{rdc}}^{\text{seq}} = e_{\text{rdc},\Omega}(\hat{u}_h, \hat{\sigma}_h) \quad (3.29)$$

$$e_{\text{rdc}}^{\text{ddm}} = \sqrt{\sum_{s=1}^{\mathcal{N}_{\text{sd}}} (e_{\text{rdc},\Omega(s)}(\hat{u}^{(s)}, \hat{\sigma}^{(s)}))^2} \quad (3.30)$$

Lors de la mise en œuvre de l'estimateur d'erreur en relation de comportement, nous retenons un choix de p -raffinement de type $p + 3$ lors de la résolution des problèmes élémentaires (1.63) conformément aux recommandations de [I. BABUŠKA, T. STROUBOULIS et al., 1994]. Par ailleurs, une approximation de la norme énergétique e_h de l'erreur vraie est également calculée en utilisant une solution u_{ex} obtenue à l'aide d'un maillage très fin (de l'ordre de 1M ddl) à l'aide de la formule :

$$e_h = \|u_{ex} - u_h\|_{\mathbb{H},\Omega} = \sqrt{\|u_{ex}\|_{\mathbb{H},\Omega}^2 - \|\hat{u}_h\|_{\mathbb{H},\Omega}^2} \quad (3.31)$$



□ FIG. 3.6. Carte des contributions élémentaires $e_{\text{rdc}E}^{\text{seq}}$ à l'erreur séquentielle $e_{\text{rdc}}^{\text{seq}}$ ($h = L/16$)

L'ensemble des résultats obtenus avec l'approche duale (resp. primale) sont regroupés dans le tableau 3.1 (resp. 3.2) tandis que la figure 3.7 représente l'évolution des quantités e_h , $e_{\text{rdc}}^{\text{seq}}$ et $e_{\text{rdc}}^{\text{ddm}}$ en fonction du pas de discrétisation h .

Rappelons à ce stade que la stratégie d'erreur parallèle ici présentée, du fait du choix d'approximation de l'inter-effort continu $\hat{F}_{bh}^{(s)}$ à l'interface, conduit à un champ statiquement admissible et donc une estimation d'erreur a priori différents de ceux obtenus par une approche séquentielle. Il est donc nécessaire de comparer les performances des deux estimateurs à convergence, en fonction de la finesse de discrétisation spatiale, mais également d'investiguer la sensibilité de $e_{\text{rdc}}^{\text{ddm}}$ à la sous-structuration.

Au vu des résultats, nous observons en premier lieu que les estimations mises en œuvre avec des approches duales ne peuvent être distinguées de celles relatives aux approches primales. Notamment, la constatation la plus importante provient du fait que l'estimateur $e_{\text{rdc}}^{\text{ddm}}$ présente une faible dépendance à la sous-structuration et que les estimations

h	$L/2$	$L/4$	$L/8$	$L/16$	$L/32$	$L/64$
# ddl	146	514	1922	7426	29186	115714
e_h	0.1660	0.1056	0.0662	0.0422	0.0273	0.0175
$e_{\text{rdc}}^{\text{seq}}$	0.5711	0.4032	0.2650	0.1737	0.1151	0.0844
\mathcal{N}_{sd}	$e_{\text{rdc}}^{\text{ddm}}$					
2	0.5667	0.4018	0.2647	0.1736	0.1151	
4	0.5759	0.4001	0.2643	0.1738	0.1152	
8	0.5537	0.4000	0.2665	0.1739	0.1154	0.0845
16			0.2689	0.1751	0.1160	0.0847
32			0.2779	0.1788	0.1178	0.0858
64				0.1876	0.1205	0.0867

□ TAB. 3.1. Évolution de l'erreur e_h et des estimateurs $e_{\text{rdc}}^{\text{seq}}$ et $e_{\text{rdc}}^{\text{ddm}}$ en fonction de la taille de maille h pour différents \mathcal{N}_{sd} (résolution par approche duale)

associées restent très proches de celles obtenues séquentiellement. Nous obtenons cependant une légère augmentation des valeurs de $e_{\text{rdc}}^{\text{ddm}}$ avec l'accroissement du nombre de sous-domaines, à discrétisation fixée. Ce point s'explique par l'augmentation de la part des degrés de liberté d'interface par rapport à celle des degrés de liberté internes, alors même que la description continue des inter-efforts d'interface est plus grossière qu'à l'intérieur des sous-domaines, entraînant ainsi la construction d'un champ statiquement admissible de moindre qualité et donc une sur-estimation de l'erreur vraie. Nous constatons toutefois que l'ordre de grandeur de cette sur-estimation est quasiment négligeable par rapport à celui des résultats.

La figure 3.8 montre les cartes des contributions $e_{\text{rdc},E}^{\text{ddm}}$ à l'erreur $e_{\text{rdc}}^{\text{ddm}}$ en fonction du nombre de sous-domaines considéré. La comparaison de ces cartes avec celle relative à $e_{\text{rdc}}^{\text{seq}}$ permet de constater que la décomposition n'a également que très peu d'influence sur les contributions élémentaires qui restent proches de celles obtenues par une estimation séquentielle. Seules quelques différences minimales sont observées au voisinage des interfaces lorsque le ratio H/h (H et h désignant la taille caractéristique des sous-domaines et des éléments, respectivement) devient faible.

Ce premier exemple numérique permet une première validation des performances de notre estimateur parallèle. Nous constatons d'une part que son comportement est proche de son homologue séquentiel et que sa dépendance aux caractéristiques de la sous-structuration (principalement le nombre \mathcal{N}_{sd} de sous-domaines) reste faible, autant du point de vue de l'estimation globale que des contributions élémentaires. Cet exemple nous confirme cependant que le choix simple d'approximation du champ continu d'inter-efforts $\hat{F}_{bh}^{(s)}$, de part sa description trop grossière, conduit généralement à l'obtention d'un champ $\hat{\sigma}_h$ de moindre qualité que celui obtenu par une approche séquentielle, et donc à une légère sur-estimation de l'erreur de discrétisation. Notons toutefois que cette sur-estimation reste généralement assez faible et doit être

h	$L/2$	$L/4$	$L/8$	$L/16$	$L/32$	$L/64$
# ddl	146	514	1922	7426	29186	115714
e_h	0.1660	0.1056	0.0662	0.0422	0.0273	0.0175
$e_{\text{rdc}}^{\text{seq}}$	0.5711	0.4032	0.2650	0.1737	0.1151	0.0844
N_{sd}	$e_{\text{rdc}}^{\text{ddm}}$					
2	0.5667	0.4018	0.2647	0.1736	0.1151	
4	0.5759	0.4001	0.2643	0.1738	0.1152	
8	0.5537	0.4000	0.2665	0.1739	0.1154	0.0845
16			0.2689	0.1752	0.1160	0.0847
32			0.2780	0.1788	0.1178	0.0858
64				0.1876	0.1205	0.0867

□ TAB. 3.2. Évolution de l'erreur e_h et des estimateurs $e_{\text{rdc}}^{\text{seq}}$ et $e_{\text{rdc}}^{\text{ddm}}$ en fonction de la taille de maille h pour différents N_{sd} (résolution par approche primale)

mise au regard des gains en termes de coût de calculs apportés par la décomposition de domaine par rapport à l'estimation séquentielle.

La partie suivante s'attache à étudier sur des exemples les faiblesses liées au choix d'une description continue de $\hat{F}_{bh}^{(s)}$ ainsi qu'à proposer un nouveau choix de discrétisation et une nouvelle méthode de construction.

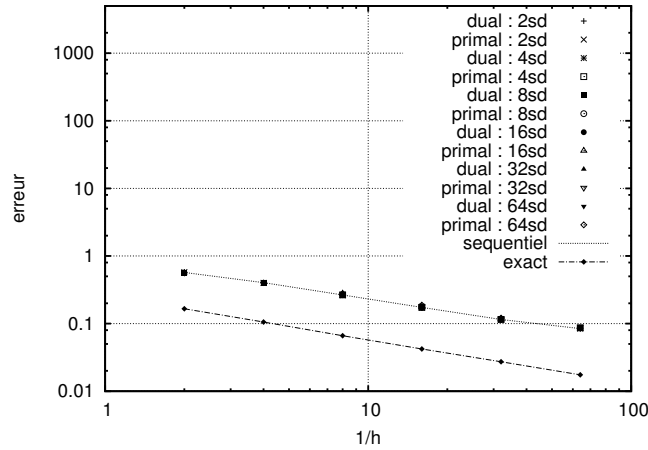
3.4. ÉTUDE ET COMMENTAIRES SUR LA CONSTRUCTION DU CHAMP D'INTER-EFFORT

Après avoir détaillé le processus de construction de $\hat{F}_{bh}^{(s)}$ décrit succinctement en partie 3.2.3 et reposant sur une description continue issue de la base des fonctions de formes éléments finis, nous investiguerons le comportement de l'estimateur associé en fonction de la régularité des interfaces. Dans un second temps, nous proposerons et illustrerons une construction alternative de $\hat{F}_{bh}^{(s)}$ reposant sur une base d'approximation permettant de conserver des discontinuités au passage des nœuds.

3.4.1. Description continue de $\hat{F}_{bh}^{(s)}$

3.4.1.1. Principes

Revenons à présent sur le détail de l'algorithme \mathcal{G}_h assurant la construction du champ continu d'inter-efforts $\hat{F}_{bh}^{(s)}$ à partir de la donnée d'un champ d'inter-efforts discret $\hat{\lambda}_b^{(s)}$.



□ FIG. 3.7. h -convergence de l'erreur e_h et des estimateurs $e_{\text{rdc}}^{\text{seq}}$ et $e_{\text{rdc}}^{\text{ddm}}$

La première approche simple retenue, comme mentionnée précédemment, consiste à construire $\hat{F}_{bh}^{(s)}$ sur la base des fonctions de formes éléments finis. En introduisant le vecteur des valeurs nodales $\hat{\mathbf{F}}_b^{(s)}$ et la matrice $\varphi_{b,\Upsilon}^{(s)} = [\varphi_{b,i|\Upsilon}^{(s)}]$ des traces sur $\Upsilon^{(s)}$ des fonctions de formes $\varphi_{b,i}^{(s)}$ associées aux degrés de libertés d'interface de $\Omega^{(s)}$, $\hat{F}_{bh}^{(s)}$ s'écrit :

$$\hat{F}_{bh}^{(s)} = \varphi_{b,\Upsilon}^{(s)} \hat{\mathbf{F}}_b^{(s)}$$

Par la suite, la vérification des conditions (3.23) s'exprime sous la forme du système matriciel suivant :

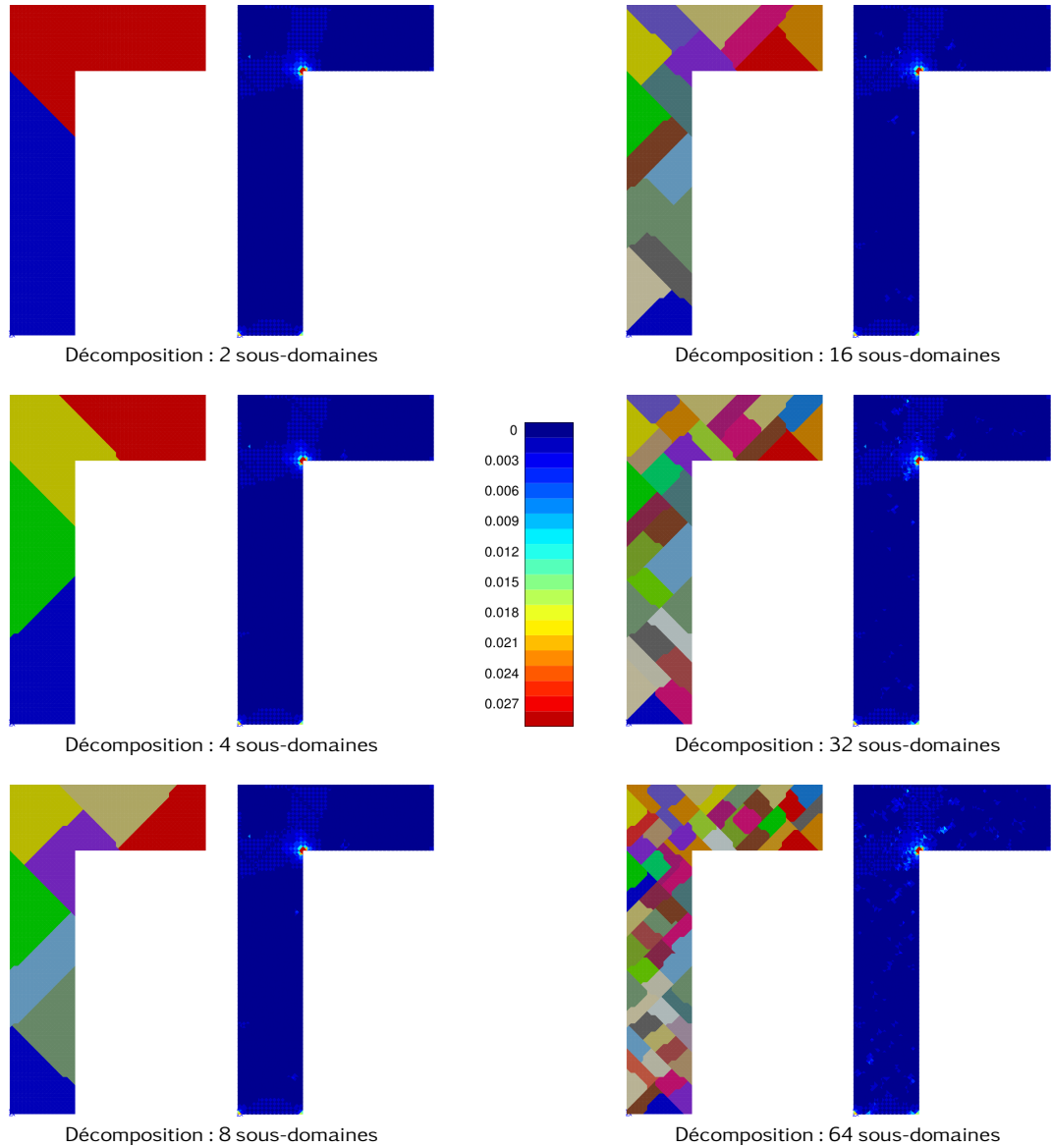
$$\mathbf{M}_{b,\Upsilon}^{(s)} \hat{\mathbf{F}}_b^{(s)} = \hat{\boldsymbol{\lambda}}_b^{(s)} \quad \text{avec} \quad \mathbf{M}_{b,\Upsilon}^{(s)} = \left[\int_{\Upsilon^{(s)}} \varphi_{b,i|\Upsilon}^{(s)} \cdot \varphi_{b,j|\Upsilon}^{(s)} d\Gamma \right]_{(i,j)} \quad (3.32)$$

qui permet alors la détermination des valeurs de $\hat{\mathbf{F}}_b^{(s)}$.

En pratique, ce choix revient donc à inverser de petites matrices de masses d'une taille égale au nombre de nœuds sur l'interface de chaque sous-structure, ce qui conduit à un sur-coût numérique faible par rapport à l'ensemble du processus de résolution.

3.4.1.2. Comportement en fonction de la régularité des interfaces

Malgré sa simplicité de mise en œuvre, le principal défaut de la méthode précédemment exposée réside dans le choix d'une approximation continue de $\hat{F}_{bh}^{(s)}$. D'un point de vue mathématique, la restriction de $\hat{F}_{bh}^{(s)}$ sur $\Upsilon^{(ss')}$ étant un élément de $H^{-\frac{1}{2}}(\Upsilon^{(ss')})$,

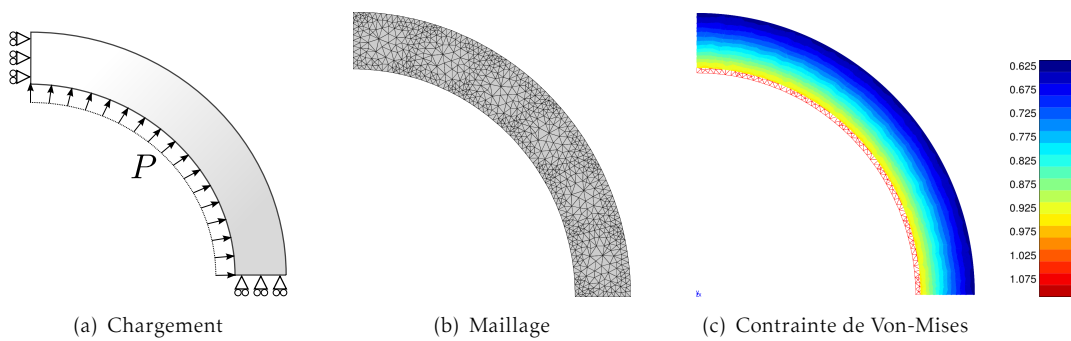


□ FIG. 3.8. Cartes des contributions élémentaires $e_{\text{rdc},E}^{\text{ddm}}$ à $e_{\text{rdc}}^{\text{ddm}}$ en fonction de la décomposition pour $h = L/16$

la continuité aux nœuds issue de l'interpolation éléments finis standard apparaît peu consistante, en particulier lorsque les interfaces entre sous-domaines présentent des points anguleux. Dans ce cas particulier, l'approximation continue de $\hat{F}_{bh}^{(s)}$ peut conduire à un champ statiquement admissible de mauvaise qualité aux voisinage des interfaces et donc sur-évaluer l'erreur de discrétisation globale. Bien que l'exemple précédemment traité en partie 3.3 ait montré des performances quasi comparables entre $e_{\text{rdc}}^{\text{ddm}}$ et $e_{\text{rdc}}^{\text{seq}}$, la suite de ce paragraphe comparera les performances de $e_{\text{rdc}}^{\text{ddm}}$ selon la présence

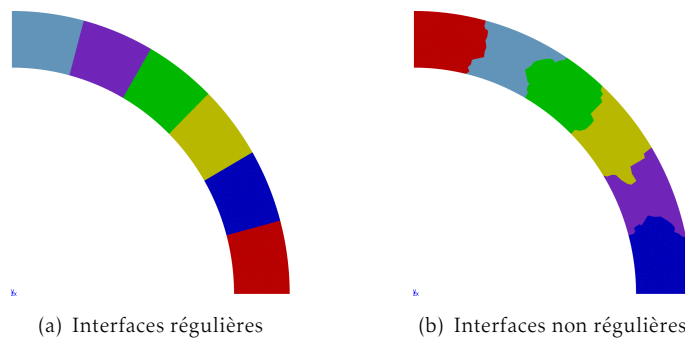
ou non de points anguleux sur les interfaces.

Pour se faire, nous considérons ici le problème d'une enceinte circulaire soumise à une pression P sur sa face interne et dont la face externe est laissée libre. Du fait des symétries, l'étude peut-être restreinte à celle d'un quart de cylindre (fig. 3.9(a)). Les caractéristiques sont les mêmes que pour la Γ -structure : le comportement est choisi linéaire élastique isotrope, de module d'Young $E = 2000$ MPa et de coefficient de Poisson $\nu = 0.3$, et la modélisation est réalisée sous l'hypothèse des contraintes planes. L'approximation éléments finis est réalisée sur la base d'un maillage constitué d'éléments triangles de degré 1 (fig. 3.9(b)). La figure 3.9(c) montre la carte des contraintes de Von-Mises relative au problème. On y remarque l'absence de points singuliers (contrairement à la Γ -structure) et la régularité de la solution, propriétés ayant initialement motivé le choix de ce problème.



□ FIG. 3.9. *Tube*

Nous considérons par la suite deux décompositions de notre structure en $\mathcal{N}_{sd} = 6$ sous-domaines. La première (fig. 3.10(a)) présente des interfaces régulières tandis que la seconde (fig. 3.10(b)), obtenue par découpage automatique, présente des points anguleux.



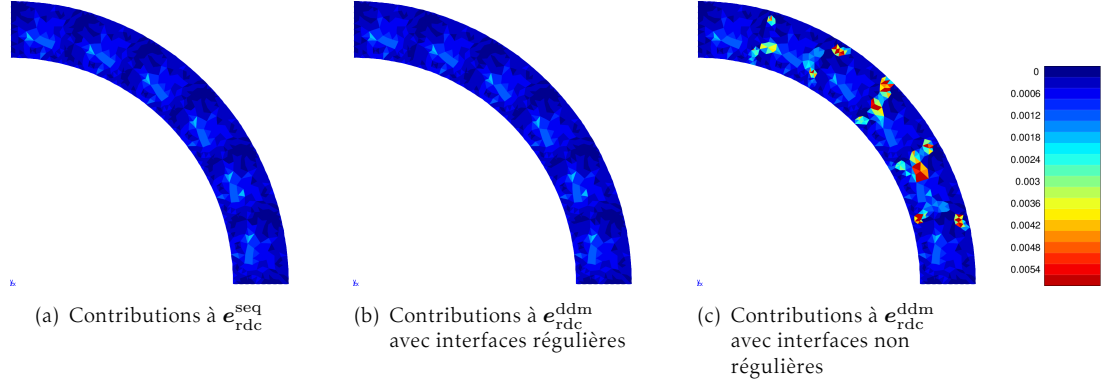
□ FIG. 3.10. *Types de décompositions en 6 sous-domaines étudiés*

En sus de l'estimateur séquentiel e_{rdc}^{seq} , les valeurs de l'estimateur parallèle e_{rdc}^{ddm} sont

calculées dans les deux configurations de découpage précédentes. Le tableau 3.3 regroupe les valeurs globales des estimateurs tandis que les cartes des contributions élémentaires dans les trois cas précédents sont représentées en figure 3.11.

Décomposition	interfaces régulières	interfaces non régulières
$e_{\text{rdc}}^{\text{seq}}$		$2.093.10^{-2}$
$e_{\text{rdc}}^{\text{ddm}}$	$2.100.10^{-2}$	$5.819.10^{-2}$

□ TAB. 3.3. Valeurs de $e_{\text{rdc}}^{\text{seq}}$ et $e_{\text{rdc}}^{\text{ddm}}$



□ FIG. 3.11. Cartes des contributions élémentaires à $e_{\text{rdc}}^{\text{seq}}$ et $e_{\text{rdc}}^{\text{ddm}}$

Alors que la valeur de $e_{\text{rdc}}^{\text{ddm}}$ en présence d'interfaces régulières reste très proche de celle de $e_{\text{rdc}}^{\text{seq}}$, on remarque que la présence d'interfaces non régulières entraîne une importante sur-estimation de l'erreur globale par l'estimateur parallèle, avec un facteur de l'ordre de 2.5. En particulier, la comparaison des contributions élémentaires $e_{\text{rdc},E}^{\text{ddm}}$ dans les trois cas étudiés nous indique clairement que la sur-estimation de l'erreur précédemment observée est concentrée sur certains éléments en contact avec les interfaces.

3.4.2. Construction d'une description discontinue de $\hat{F}_{bh}^{(s)}$

Les observations précédentes mettent en évidence la faiblesse du choix d'une interpolation continue en présence d'interfaces non régulières, qui conduit en effet à l'obtention d'un champ statiquement admissible de piètre qualité altérant la précision de l'estimateur global du fait de la surestimation de certaines contributions locales de l'erreur de discrétisation. Pour tenter de répondre à cette problématique, nous proposons par la suite une méthode alternative de construction de $\hat{F}_{bh}^{(s)}$ reposant sur des conditions de continuité moins fortes et qui peut être vue comme une généralisation de la méthode précédente.

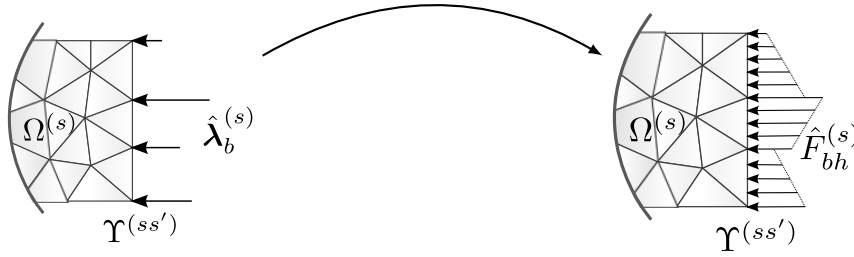
3.4.2.1. Principes

Afin de supprimer la condition de continuité aux nœuds, nous choisissons comme base d'approximation de $\hat{F}_{bh}^{(s)}$ l'espace constitué par la réunion des restrictions élémentaires de la trace sur $\Upsilon^{(s)}$ des fonctions de formes éléments finis (fig. 3.12). Autrement dit :

$$\hat{F}_{bh}^{(s)} \in \left\{ v \text{ tels que } v_\Gamma \in \mathbb{P}_p(\Gamma_k), \forall \Gamma_k \in \mathcal{F}_h^{\mathcal{F}}(\Upsilon^{(s)}) \right\}$$

où $\mathcal{F}_h^{\mathcal{F}}(\Upsilon^{(s)})$ désigne l'ensemble des faces des éléments de Ω_h coïncidant avec $\Upsilon^{(s)}$. En pratique, la nouvelle écriture de $\hat{F}_{bh}^{(s)}$ s'obtient alors en ajoutant aux contributions des fonctions de formes éléments finis celle d'un ensemble $\phi_b^{(s)} = [\phi_{b,k}^{(s)}]$ de fonctions constantes et unitaires sur un élément de l'interface discrétisée et nulle partout ailleurs :

$$\phi_{b,k}^{(s)} = \begin{cases} 1 & \text{sur } \Gamma_k \\ 0 & \text{sur } \Upsilon^{(s)} \setminus \Gamma_k \end{cases} \quad \forall \Gamma_k \in \mathcal{F}_h^{\mathcal{F}}(\Upsilon^{(s)})$$



□ FIG. 3.12. Représentation discontinue de \hat{F}_{bh}

Par la suite, en notant $\hat{\mathbf{F}}_b^c(s)$ les valeurs nodales des composantes continues et $\hat{\mathbf{F}}_b^d(s)$ les amplitudes élémentaires des composantes discontinues, $\hat{F}_{bh}^{(s)}$ s'écrit :

$$\hat{F}_{bh}^{(s)} = \varphi_{b,\Upsilon}^{(s)} \hat{\mathbf{F}}_b^c(s) + \phi_b^{(s)} \hat{\mathbf{F}}_b^d(s) \quad (3.33)$$

et les conditions (3.23) deviennent :

$$[\mathbf{M}_{b,\Upsilon}^{(s)} \quad \tilde{\mathbf{M}}_{b,\Upsilon}^{(s)}] \begin{pmatrix} \hat{\mathbf{F}}_b^c(s) \\ \hat{\mathbf{F}}_b^d(s) \end{pmatrix} = \hat{\lambda}_b^{(s)} \quad \text{avec} \quad \mathbf{M}_{b,\Upsilon}^{(s)} = \left[\int_{\Upsilon^{(s)}} \varphi_{b,i|\Upsilon^{(s)}}^{(s)} \cdot \varphi_{b,j|\Upsilon^{(s)}}^{(s)} d\Gamma \right] \quad (3.34)$$

$$\text{et} \quad \tilde{\mathbf{M}}_{b,\Upsilon}^{(s)} = \left[\int_{\Upsilon^{(s)}} \varphi_{b,i|\Upsilon^{(s)}}^{(s)} \cdot \phi_{b,k}^{(s)} d\Gamma \right]$$

Le problème (3.34) étant sous-déterminé, le champ $\hat{F}_{bh}^{(s)}$ retenu est alors celui minimisant une certaine norme à définir :

$$\hat{F}_{bh}^{(s)} = \underset{\hat{G} \text{ vérifiant (3.34)}}{\text{Arg min}} \|\hat{G}\| \quad (3.35)$$

A ce stade, notons que le choix d'une norme la plus appropriée possible lors de la minimisation précédente reste une question ouverte. Le choix d'une telle norme n'est probablement pas unique et est spécifique à la forme de l'interface : en particulier, une telle norme devrait prendre en compte la présence de points anguleux le cas échéant. Dans la suite, faute d'avoir pour le moment défini de meilleures normes, nous étudierons cette reconstruction conjointement à l'usage de la norme L^2 sur $\Upsilon^{(s)}$ $\|\cdot\|_{L^2(\Upsilon^{(s)})}$ ainsi que de la norme $2 \|\cdot\|_2$:

$$\|\hat{F}_{bh}^{(s)}\|_{L^2(\Upsilon^{(s)})}^2 = \int_{\Upsilon^{(s)}} \hat{F}_{bh}^{(s)2} d\Gamma \quad (3.36a)$$

$$\|\hat{F}_{bh}^{(s)}\|_2^2 = \hat{\mathbf{F}}_b^{c(s)T} \hat{\mathbf{F}}_b^{c(s)} + \hat{\mathbf{F}}_b^{d(s)T} \hat{\mathbf{F}}_b^{d(s)} \quad (3.36b)$$

3.4.2.2. Lien avec l'approximation continue

Ce paragraphe s'attache à étudier le principe de construction précédent en présence de l'utilisation d'une norme L^2 sur $\Upsilon^{(s)}$. Dans ces conditions, $\hat{F}_{bh}^{(s)}$ est solution du problème de minimisation suivant :

$$\underset{\hat{G} \text{ vérifiant (3.34)}}{\min} \|\hat{G}\|_{L^2(\Upsilon^{(s)})}^2 = \underset{\hat{G} \text{ vérifiant (3.34)}}{\min} \int_{\Upsilon^{(s)}} \hat{G}^2 d\Gamma$$

En introduisant les vecteurs des composantes continues $\hat{\mathbf{G}}^c$ et discontinues $\hat{\mathbf{G}}^d$ de G telles que $G = \varphi_{b,\Upsilon}^{(s)} \hat{\mathbf{G}}^c + \phi_b^{(s)} \hat{\mathbf{G}}^d$, le problème de minimisation précédent s'écrit alors :

$$\begin{aligned} \underset{\hat{G} \text{ vérifiant (3.34)}}{\min} \|\hat{G}\|_{L^2(\Upsilon^{(s)})}^2 &= \underset{\mathbf{M}_{b,\Upsilon}^{(s)} \hat{\mathbf{G}}^c + \tilde{\mathbf{M}}_{b,\Upsilon}^{(s)} \hat{\mathbf{G}}^d = \hat{\lambda}_b^{(s)}}{\min} \mathcal{C}(\hat{\mathbf{G}}^c, \hat{\mathbf{G}}^d) \\ \text{avec } \mathcal{C}(\hat{\mathbf{G}}^c, \hat{\mathbf{G}}^d) &= \begin{pmatrix} \hat{\mathbf{G}}^c \\ \hat{\mathbf{G}}^d \end{pmatrix}^T \begin{bmatrix} \mathbf{M}_{b,\Upsilon}^{(s)} & \tilde{\mathbf{M}}_{b,\Upsilon}^{(s)} \\ \tilde{\mathbf{M}}_{b,\Upsilon}^{(s)T} & \tilde{\mathbf{D}}_{b,\Upsilon}^{(s)} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \hat{\mathbf{G}}^c \\ \hat{\mathbf{G}}^d \end{pmatrix} \\ \text{et } \tilde{\mathbf{D}}_{b,\Upsilon}^{(s)} &= \begin{bmatrix} \int_{\Upsilon^{(s)}} \phi_{b,i}^{(s)} \cdot \phi_{b,j}^{(s)} d\Gamma \\ \end{bmatrix}_{(i,j)} \end{aligned}$$

En injectant la condition (3.34) dans l'expression de $\mathcal{C}(\hat{\mathbf{G}}^c, \hat{\mathbf{G}}^d)$, il vient :

$$\begin{aligned} \mathcal{C}(\hat{\mathbf{G}}^c, \hat{\mathbf{G}}^d) &= \begin{pmatrix} \hat{\mathbf{G}}^c \\ \hat{\mathbf{G}}^d \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} \hat{\lambda}_b^{(s)} \\ \tilde{\mathbf{M}}_{b,\Upsilon}^{(s)T} \hat{\mathbf{G}}^c + \tilde{\mathbf{D}}_{b,\Upsilon}^{(s)} \hat{\mathbf{G}}^d \end{pmatrix} \\ &= \hat{\mathbf{G}}^c{}^T \hat{\lambda}_b^{(s)} + \hat{\mathbf{G}}^d{}^T \tilde{\mathbf{M}}_{b,\Upsilon}^{(s)T} \hat{\mathbf{G}}^c + \hat{\mathbf{G}}^d{}^T \tilde{\mathbf{D}}_{b,\Upsilon}^{(s)} \hat{\mathbf{G}}^d \end{aligned}$$

La matrice $\mathbf{M}_{b,\Upsilon}^{(s)}$ étant une matrice de masse symétrique définie positive, et donc inversible, $\hat{\mathbf{G}}^c$ s'exprime en fonction de $\hat{\boldsymbol{\lambda}}_b^{(s)}$ et $\hat{\mathbf{G}}^d$ comme :

$$\hat{\mathbf{G}}^c = \mathbf{M}_{b,\Upsilon}^{(s)-1} \hat{\boldsymbol{\lambda}}_b^{(s)} - \mathbf{M}_{b,\Upsilon}^{(s)-1} \tilde{\mathbf{M}}_{b,\Upsilon}^{(s)T} \hat{\mathbf{G}}^d$$

D'où en utilisant la symétrie de $\mathbf{M}_{b,\Upsilon}^{(s)-1}$ héritée de celle de $\mathbf{M}_{b,\Upsilon}^{(s)}$:

$$\begin{aligned} \mathcal{C}(\hat{\mathbf{G}}^c, \hat{\mathbf{G}}^d) &= \hat{\boldsymbol{\lambda}}_b^{(s)T} \mathbf{M}_{b,\Upsilon}^{(s)-T} \hat{\boldsymbol{\lambda}}_b^{(s)} - \hat{\mathbf{G}}^{dT} \tilde{\mathbf{S}}_{\Upsilon}^{(s)} \hat{\mathbf{G}}^d \\ \text{avec } \tilde{\mathbf{S}}_{\Upsilon}^{(s)} &= \tilde{\mathbf{D}}_{b,\Upsilon}^{(s)} - \tilde{\mathbf{M}}_{b,\Upsilon}^{(s)T} \mathbf{M}_{b,\Upsilon}^{(s)-1} \tilde{\mathbf{M}}_{b,\Upsilon}^{(s)} \end{aligned}$$

Le problème de minimisation (3.35) se réduit alors à :

$$\min_{\mathbf{M}_{b,\Upsilon}^{(s)} \hat{\mathbf{G}}^c + \tilde{\mathbf{M}}_{b,\Upsilon}^{(s)} \hat{\mathbf{G}}^d = \hat{\boldsymbol{\lambda}}_b^{(s)}} \mathcal{C}(\hat{\mathbf{G}}^c, \hat{\mathbf{G}}^d) = \min_{\hat{\mathbf{G}}^d} \hat{\mathbf{G}}^{dT} \tilde{\mathbf{S}}_{\Upsilon}^{(s)} \hat{\mathbf{G}}^d$$

A ce stade, on remarque que la matrice $\tilde{\mathbf{S}}_{\Upsilon}^{(s)}$ constitue le complément de Schur de la traduction discrète de la norme $\|\hat{\mathbf{G}}\|_{L^2(\Upsilon^{(s)})}$ qui est définie positive : $\tilde{\mathbf{S}}_{\Upsilon}^{(s)}$ est donc également définie positive et la minimisation précédente entraîne alors $\hat{\mathbf{G}}^d = \mathbf{0}$. La détermination des composantes continues $\hat{\mathbf{G}}^c = \hat{\mathbf{F}}_b^{c(s)}$ du champ solution est alors identique au cas de description continue 3.4.1.1, en effet, en utilisant l'expression précédemment obtenue de $\hat{\mathbf{G}}^c$, il vient :

$$\hat{\mathbf{F}}_b^{c(s)} = \hat{\mathbf{G}}^c = \mathbf{M}_{b,\Upsilon}^{(s)-1} \hat{\boldsymbol{\lambda}}_b^{(s)}$$

Il apparaît ainsi que la construction du champ $\hat{F}_{bh}^{(s)}$ reposant sur une description discontinue associée à la minimisation de la norme $L^2 \|\hat{\mathbf{G}}\|_{L^2(\Upsilon^{(s)})}$ sur $\Upsilon^{(s)}$ est identique à la construction par description continue de $\hat{F}_{bh}^{(s)}$ initialement utilisée. En ce sens, la procédure de construction décrite en 3.4.2.1 en constitue une extension.

3.4.3. Illustration numérique

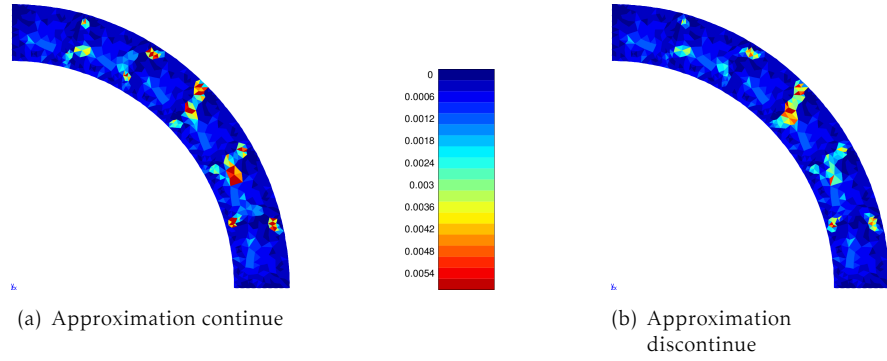
3.4.3.1. Enceinte sous pression

Afin d'illustrer la méthode précédemment introduite, nous reprenons dans un premier temps l'exemple de l'enceinte sous pression présentée au paragraphe 3.4.1.2. Nous calculons à nouveau $e_{\text{rdc}}^{\text{ddm}}$ en utilisant cette fois la description discontinue de $\hat{F}_{bh}^{(s)}$ précédemment introduite associée à la minimisation de la norme 2 (3.36b). Le tableau 3.4 regroupe les résultats associés (notés $e_{\text{rdc}}^{\text{ddm}}$ (disc)) avec ceux précédemment obtenus au paragraphe 3.4.1.2 (notés $e_{\text{rdc}}^{\text{ddm}}$ (cont)). On y remarque que la nouvelle construction de $\hat{F}_{bh}^{(s)}$ permet d'améliorer quelque peu la précision de $e_{\text{rdc}}^{\text{ddm}}$; cependant, l'erreur de discrétisation ainsi calculée reste encore largement surestimée en comparaison avec la

valeur de $e_{\text{rdc}}^{\text{seq}}$. L'observation de la figure 3.13, qui représente les contributions élémentaires $e_{\text{rdc},E}^{\text{ddm}}$ dans les deux cas de constructions de $\hat{F}_{bh}^{(s)}$, confirme les observations précédentes. Cependant, remarquons que la mise en œuvre de l'approximation discontinue en présence d'interfaces régulières entraîne à l'opposée une légère sur-estimation de l'erreur $e_{\text{rdc}}^{\text{ddm}}$. Aussi, si la norme 2 ici employée permet d'améliorer légèrement la précision de $e_{\text{rdc}}^{\text{ddm}}$, elle n'apparaît pas cependant comme étant la norme la plus pertinente dans ce cas de figure.

Décomposition	interfaces régulières	interfaces non-régulières
$e_{\text{rdc}}^{\text{seq}}$		$2.093.10^{-2}$
$e_{\text{rdc}}^{\text{ddm}}$ (cont)	$2.100.10^{-2}$	$5.819.10^{-2}$
$e_{\text{rdc}}^{\text{ddm}}$ (disc)	$2.112.10^{-2}$	$4.526.10^{-2}$

□ TAB. 3.4. Valeurs de $e_{\text{rdc}}^{\text{seq}}$ et $e_{\text{rdc}}^{\text{ddm}}$



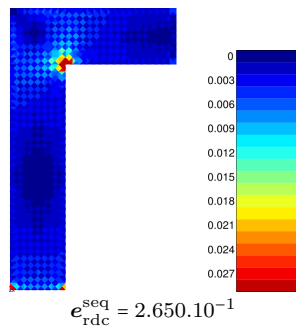
□ FIG. 3.13. Cartes des contributions élémentaires à $e_{\text{rdc}}^{\text{ddm}}$ pour deux choix de construction des champs d'interface (décomposition à interfaces non-régulières)

3.4.3.2. Γ -structure

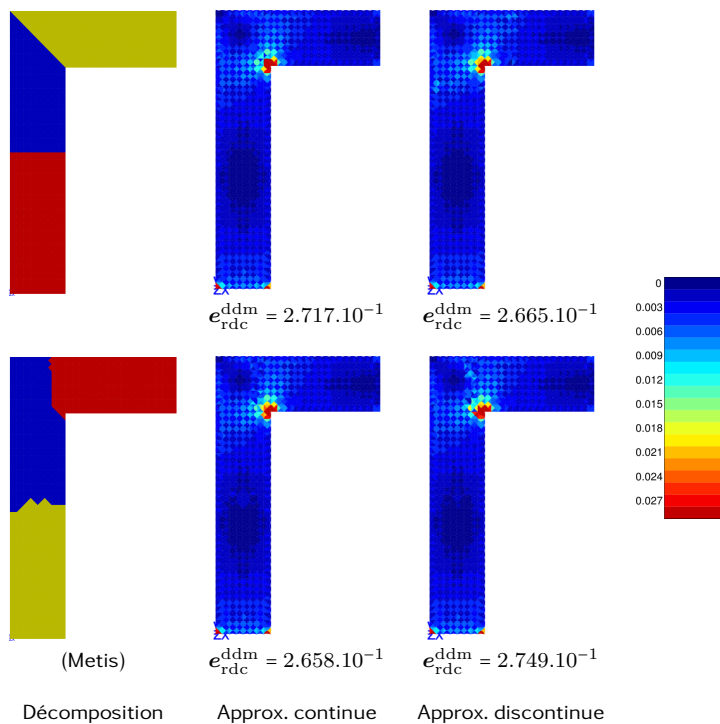
Reprenons ici le cas d'étude présenté au paragraphe 3.3 relatif à une Γ -structure soumise à un chargement simultané en traction cisaillement. Nous considérons, sur la base du maillage de taille caractéristique $h = L/8$, plusieurs cas de décompositions en $\mathcal{N}_{\text{sd}} = 3, 4$ et 7 sous-domaines générant des interfaces soit régulières, soit non-régulières. Par la suite, sur l'ensemble des cas ainsi générés, nous procédons au calcul de $e_{\text{rdc}}^{\text{ddm}}$ sur la base, dans un premier temps, de l'approximation continue de \hat{F}_{bh} , puis, dans un second temps, de l'approximation discontinue associée, comme précédemment, à l'utilisation de la norme 2.

La figure 3.14 rappelle la carte des contributions à $e_{\text{rdc}}^{\text{seq}}$ relatives au calcul séquentiel, avec un choix d'échelle tronquant les valeurs élevées de manière à permettre la visualisation des composantes plus faibles. Les figures 3.15, 3.16 et 3.17 représentent, en sus

de la valeur de l'erreur totale $e_{\text{rdc}}^{\text{ddm}}$, les contributions $e_{\text{rdc},E}^{\text{ddm}}$ dans les différents cas de décomposition en $\mathcal{N}_{\text{sd}} = 3, 4$ et 7 sous-domaines, respectivement. Notons que la quasi-totalité des décompositions sont obtenues en utilisant le découpeur automatique *Metis* en lieu et place de l'outil *SplitMesh* développé à l'ONERA et utilisé lors des études précédentes (seul le cas $\mathcal{N}_{\text{sd}} = 7$ présente deux décompositions obtenues avec chacun de ces outils).

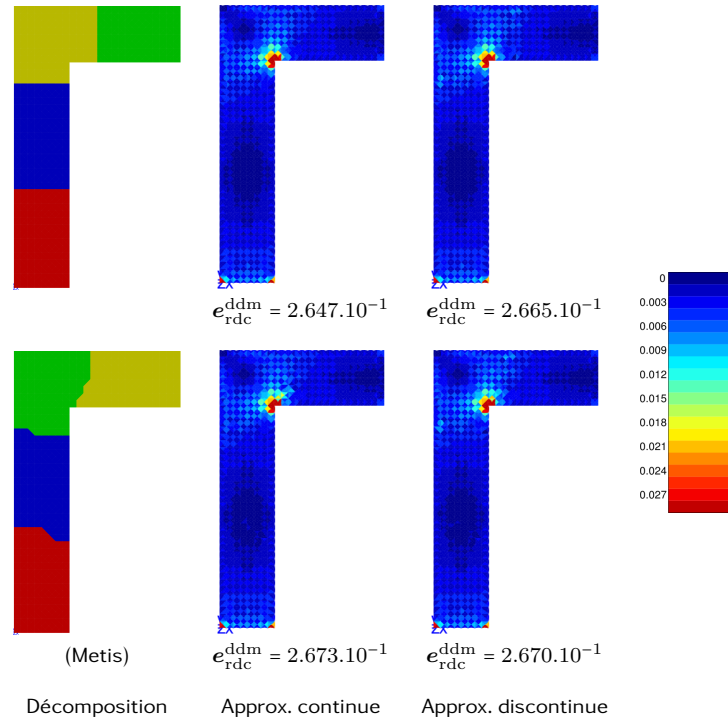


□ FIG. 3.14. Carte des contributions élémentaires $e_{\text{rdc},E}^{\text{seq}}$ à $e_{\text{rdc}}^{\text{seq}}$ ($h = L/8$)



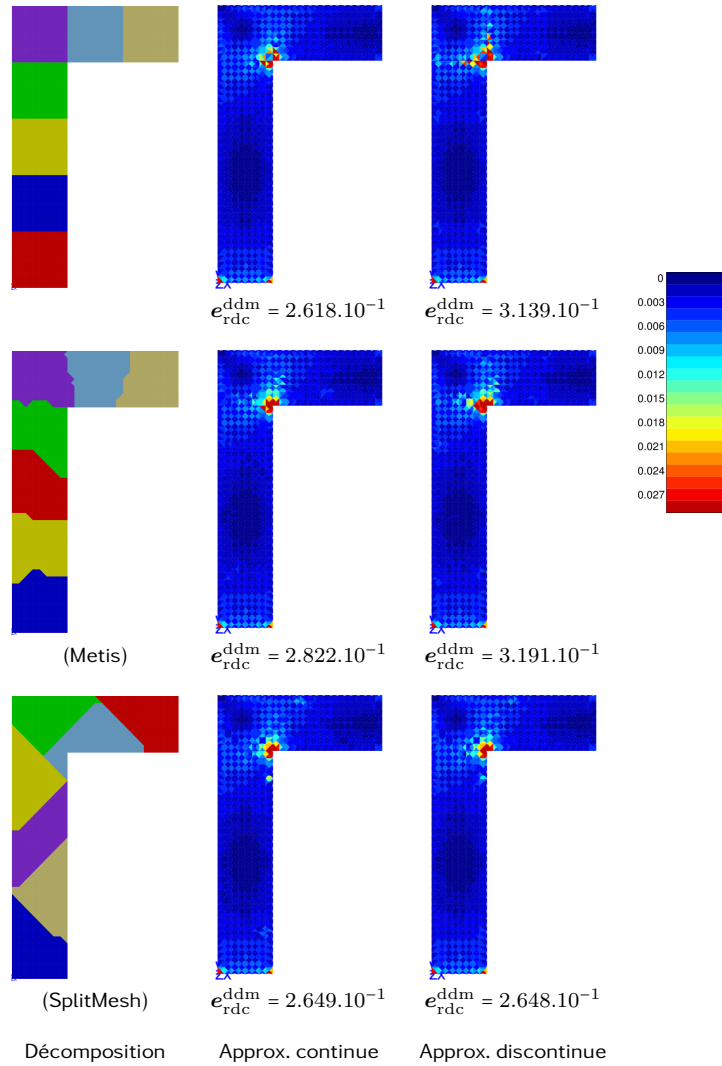
□ FIG. 3.15. Carte des contributions élémentaires $e_{\text{rdc},E}^{\text{ddm}}$ à $e_{\text{rdc}}^{\text{ddm}}$ ($h = L/8, \mathcal{N}_{\text{sd}} = 3$)

L'examen des résultats nous permet de tirer une première constatation relative à leur très forte similarité au point que l'on peut affirmer sur ce cas d'étude que l'estimateur $e_{\text{cr}}^{\text{ddm}}$ est très peu sensible tant à la position et à la régularité des interfaces qu'à



□ FIG. 3.16. Carte des contributions élémentaires $e_{\text{rdc},E}^{\text{ddm}}$ à $e_{\text{rdc}}^{\text{ddm}}$ ($h = L/8$, $\mathcal{N}_{\text{sd}} = 4$)

la méthode de construction de $\hat{F}_{bh}^{(s)}$ choisie. Pour $\mathcal{N}_{\text{sd}} = 3$, un examen plus précis nous montre que l'erreur est légèrement surévaluée lorsqu'une interface, même droite, coupe la zone de singularité, ce qui s'explique par la difficulté à approcher l'évolution des singularités à l'aide d'approximations linéaires par éléments, qu'elles soient continues ou discontinues. Soulignons tout de même que l'approximation discontinue fournit ici des résultats meilleurs. A l'opposé, l'observation du cas $\mathcal{N}_{\text{sd}} = 7$ avec interfaces régulières montre qu'un découpage avec des interfaces traversant la zone de singularité peut parfois engendrer une estimation $e_{\text{rdc}}^{\text{ddm}}$ inférieure à $e_{\text{rdc}}^{\text{seq}}$, résultat qui peut s'expliquer par l'absence de singularités locales au niveau de chaque sous-domaine. D'une manière générale, et contrairement à l'exemple de l'enceinte sous-pression, on constate que l'emploi d'une approximation discontinue avec norme 2 peut aussi bien améliorer que dégrader les résultats par rapport à l'approche continue... Aussi, il est assez difficile ici de tirer des conclusions précises de l'ensemble ces observations, si ce n'est que la norme discrète choisie n'apparaît pas adaptée et qu'un choix approprié de cette dernière dépend probablement du type de problème étudié et demeure à ce stade une question ouverte.



□ FIG. 3.17. Carte des contributions élémentaires $e_{\text{rdc},E}^{\text{ddm}}$ à $e_{\text{rdc}}^{\text{ddm}}$ ($h = L/8$, $\mathcal{N}_{\text{sd}} = 7$)

3.5. CONCLUSION PARTIELLE

Après avoir ébauché en première partie un rapide aperçu de quelques tentatives de réponse apportées à la problématique de l'estimation d'erreur dans un cadre sous-structuré, ce chapitre a permis de présenter une extension de l'erreur en relation de comportement au cadre général des méthodes de décomposition de domaine sans recouvrement. Son premier avantage réside dans la conservation du caractère garanti de la mesure d'erreur avec le passage à la sous-structuration. Pour se faire, le principe sous-jacent consiste à construire un couple de champs solutions admissibles tant au niveau local que global. Cette procédure de construction est purement locale et

peut ainsi être mise en œuvre de manière totalement parallèle sur chacun des sous-domaines. En outre, son fonctionnement se subdivise en deux étapes. En premier lieu sont construits des champs d'interface vérifiant l'admissibilité globale du problème (ie. la continuité des déplacements et l'équilibre des inter-efforts dans le cas des problèmes mécaniques). Puis, en second lieu, la résolution de problèmes sur chaque sous-structure à partir des champs précédemment calculés, couplée à l'utilisation des algorithmes de construction développés dans les cas séquentiels, permet d'obtenir les couples de contraintes admissibles nécessaires au calcul de l'erreur en relation de comportement.

Une étude systématique portant tant sur la convergence de l'estimateur vis à vis du raffinement du maillage que sur le comportement en fonction de différents cas de décomposition de domaine permet d'obtenir de premiers résultats globalement satisfaisants. L'estimateur ainsi réalisé apparaît en effet avoir un comportement très proche de son homologue séquentiel tout en restant peu sensible aux différentes configurations de découpage en sous-domaines.

Cependant, quelques disparités entre résultats que nous attribuons au processus de construction des efforts à l'interface, notamment en présence de points anguleux ou de singularités, nous ont poussé à proposer une nouvelle base d'approximation. Si la nouvelle procédure ainsi obtenue permet de généraliser celle initialement proposée, son application pertinente nécessite toutefois le recours à un processus de minimisation supplémentaire, et donc le choix d'une norme consistante vis à vis de l'inter-effort d'interface. Ce choix restant, à l'heure actuelle, une question ouverte, on retiendra que la mise en œuvre de découpages à interfaces régulières et suffisamment éloignées des points de singularités permet tout de même de maximiser la pertinence de l'estimation.

Notons enfin qu'un aspect fondamental de la méthode, introduit ici de manière générique, réside dans la possibilité d'obtenir des champs admissibles au niveau global et donc une mesure d'erreur garantie, même en cas de non-vérification des conditions de continuité et d'équilibre à l'interface. Ce point permet d'envisager une mise en œuvre de la méthode au sein d'algorithmes de décomposition de domaine quel que soit leur état de convergence. Ce point fait l'objet du chapitre suivant, qui détaille l'implantation de notre procédure au sein des approches duales et primales de décomposition de domaine.

CHAPITRE 4.

APPLICATION AU CADRE DES APPROCHES DUALE ET PRIMALE DE DÉCOMPOSITION DE DOMAINE

Ce chapitre s'attache à des cas d'implantation pratique de la technique générique d'estimation d'erreur introduite au cours du chapitre précédent. Cette implantation se traduit par la mise en place de procédures de reconstruction des champs d'interface au sein des approches usuelles de décomposition de domaine, à savoir FETI et BDD. On montrera notamment comment ces procédures peuvent tirer avantageusement partie du rôle des préconditionneurs optimaux. Enfin, un exemple numérique simple illustrera les performances obtenues.

4.1. Approche duale	114
4.1.1. Rappel sur l'algorithme FETI	114
4.1.2. Construction des champs d'interface admissibles	115
4.2. Approche primale	118
4.2.1. Rappel sur l'algorithme BDD	118
4.2.2. Construction des champs d'interface admissibles	119
4.3. Exemple numérique	122
4.3.1. Γ -structure	122
4.3.2. Structure fissurée	125
4.4. Conclusion partielle	125

Le chapitre précédent a introduit un cadre générique permettant une estimation garantie de l'erreur de discrétisation en cadre sous-structuré, par le biais de la construction, sur chaque sous-domaine, de couples de solutions admissibles au niveau global. Pour se faire, rappelons que cette procédure nécessite le calcul de champs continus d'interface (notés $\hat{u}_{bh}^{(s)}$ et $\hat{F}_{bh}^{(s)}$) vérifiant les conditions de continuité et d'équilibre global entre sous-domaines. En outre, nous avons montré que leur vérification était transposable au niveau discret à travers les relations (3.17), (3.26a) et (3.26b) sur un couple de champs nodaux $(\hat{\mathbf{u}}_b^{(s)}, \hat{\boldsymbol{\lambda}}_b^{(s)})$ à partir desquels sont ensuite construits leurs homologues continus $\hat{u}_{bh}^{(s)}$ et $\hat{F}_{bh}^{(s)}$.

Jusqu'à présent ont été considérés des cas de figures dans lesquels la convergence du solveur associé à la décomposition de domaine constituait un préalable à la mise en application de notre méthode, de sorte que les champs discrets d'interface classiques $(\mathbf{u}_b^{(s)}, \boldsymbol{\lambda}_b^{(s)})$ pouvaient être utilisés tels quels comme point de départ de la construction des champs continus $\hat{u}_{bh}^{(s)}$ et $\hat{F}_{bh}^{(s)}$. On s'intéresse à présent à la mise en œuvre de la procédure d'estimation dans des cas où la convergence du solveur n'est pas atteinte. Le principe de ces derniers étant de relâcher une ou plusieurs conditions d'interface, puis à activer leur vérification de manière itérative, une nouvelle difficulté apparaît alors du fait de la non-satisfaction systématique des conditions (3.17), (3.26a) et (3.26b) par le couple de champs nodaux $(\mathbf{u}_b^{(s)}, \boldsymbol{\lambda}_b^{(s)})$. Par conséquent, cela amène à construire le couple $(\hat{\mathbf{u}}_b^{(s)}, \hat{\boldsymbol{\lambda}}_b^{(s)})$ à l'aide de procédures spécifiques dépendant de l'approche de résolution choisie.

Ce chapitre s'attache à l'implantation de l'estimateur sous-structuré au sein des approches duale et primale de décomposition de domaine afin de rendre possible l'accès à une mesure garantie de l'erreur quel que soit l'état de convergence du solveur associé. Pour se faire, on décrira spécifiquement les procédures permettant de calculer les champs $(\hat{\mathbf{u}}_b^{(s)}, \hat{\boldsymbol{\lambda}}_b^{(s)})$ à partir de $(\mathbf{u}_b^{(s)}, \boldsymbol{\lambda}_b^{(s)})$ dans les deux cas précités. On montrera notamment leur intégration au sein des étapes de préconditionnement des solveurs FETI et BDD avant d'illustrer les résultats sur le cas d'étude systématique du chapitre précédent.

Les travaux ici présentés ont fait l'objet de la seconde partie d'une publication [A. PARRET-FRÉAUD, C. REY et al., 2010] ainsi que de deux communications [A. PARRET-FRÉAUD, P. GOSSELET et C. REY, 2010 ; C. REY, A. PARRET-FRÉAUD et P. GOSSELET, 2010].

4.1. APPROCHE DUALE

4.1.1. Rappel sur l'algorithme FETI

En préalable au processus de reconstruction des champs d'interface, rappelons brièvement le fonctionnement de la méthode FETI, notamment en ce qui concerne la vérification des conditions de raccord à l'interface durant le processus itératif de résolution.

Le lecteur consultera la partie 2.3 et notamment l’algorithme 2.1 pour une description plus complète.

Dans l’approche FETI, l’inconnue est portée sur un champ λ_b à déterminer, à partir duquel on construit les inter-efforts $\lambda_b^{(s)}$ via les opérateurs d’assemblage $\underline{\mathbf{A}}^{(s)}$:

$$\lambda_b^{(s)} = \underline{\mathbf{A}}^{(s)T} \lambda_b \quad (4.1)$$

dont la propriété d’orthogonalité (2.14) avec $\overline{\mathbf{A}}^{(s)}$ permet la vérification *a priori* de la condition d’équilibre entre sous-domaines :

$$\overline{\mathbf{A}}^{\diamond} \lambda_b^{\diamond} = \mathbf{0} \quad (4.2)$$

Par la suite, pour un champ λ_b donné, les champs $\mathbf{u}^{(s)}$ sont calculés par résolution sur chacun des sous-domaines de problèmes aux conditions aux limites de Neumann à l’interface, sous réserve de la validité de l’alternative de Fredholm traduisant l’équilibre des champs $\lambda_b^{(s)}$ par rapport aux mouvements de corps rigides :

$$\mathbf{u}^{(s)} = \mathbf{K}^{(s)+} \left(\mathbf{f}^{(s)} + \mathbf{t}^{(s)T} \underline{\mathbf{A}}^{(s)T} \lambda_b \right) + \mathbf{R}^{(s)} \alpha^{(s)} \quad (4.3a)$$

$$\mathbf{0}^{(s)} = \mathbf{R}^{(s)T} \left(\mathbf{f}^{(s)} + \mathbf{t}^{(s)T} \lambda \right) \quad (4.3b)$$

L’inconnue λ_b est alors déterminée itérativement de manière à satisfaire la continuité des déplacements à l’interface :

$$\begin{aligned} \mathbf{0} &= \underline{\mathbf{A}}^{\diamond} \mathbf{u}_b^{\diamond} \\ &= \underline{\mathbf{A}}^{\diamond} \mathbf{t}^{\diamond} \mathbf{K}^{\diamond+} \mathbf{t}^{\diamond T} \underline{\mathbf{A}}^{\diamond T} \lambda_b + \underline{\mathbf{A}}^{\diamond} \mathbf{t}^{\diamond} \mathbf{K}^{\diamond+} \mathbf{f}^{\diamond} + \underline{\mathbf{A}}^{\diamond} \mathbf{R}_b^{\diamond} \alpha^{\diamond} \end{aligned}$$

On obtient ainsi le problème à l’interface (2.25), résolu de manière itérative, généralement à l’aide d’un algorithme de gradient conjugué projeté et préconditionné (cf. algorithme 2.1).

4.1.2. Construction des champs d’interface admissibles

On s’intéresse à présent au calcul du couple $(\hat{\mathbf{u}}_b, \hat{\lambda}_b)$ à partir de $(\mathbf{u}_b, \lambda_b)$ dans le cas de l’approche FETI.

4.1.2.1. Cas du champ d'inter-efforts

Du fait de la construction des inter-efforts $\lambda_b^{(s)}$ à partir du champ λ_b , la condition (4.2) est constamment vérifiée. D'autre part, l'utilisation d'un projecteur lors de la résolution du problème à l'interface (2.33) assure la vérification de l'alternative de Fredholm (4.3b) à chaque itération du solveur. Ainsi, le choix direct $\hat{\lambda}_b^{(s)} = \lambda_b^{(s)}$ satisfait les conditions (3.26a) et (3.26b). Les algorithmes \mathcal{G}_h et \mathcal{F}_{eq} détaillés en partie 3.2.3 (eqns. 3.27 et 3.28) assurent ensuite la construction des champs $\hat{\sigma}_h^{(s)} \in \mathcal{S}a(\Omega^{(s)})$ vérifiant :

$$\hat{\sigma}_h = \mathcal{A}(\hat{\sigma}_h^\square) \in \mathcal{S}a(\Omega)$$

4.1.2.2. Cas du champ de déplacement

L'obtention des champs discrets d'interface $\hat{\mathbf{u}}_b^{(s)}$ vérifiant (3.17) dans le cadre de la méthode FETI nécessite quelques traitements spécifiques étant donné que la continuité des déplacements est seulement vérifiée à convergence du solveur. Rappelons en particulier que l'utilisation de l'opérateur d'assemblage dual $\underline{\mathbf{A}}^{(s)}$ permet d'obtenir le saut de déplacement à l'interface entre sous-structures au cours des itérations :

$$\llbracket \mathbf{u}_b \rrbracket = \underline{\mathbf{A}}^\diamond \mathbf{u}_b^\diamond \quad (4.4)$$

On cherche à construire les champs $\hat{\mathbf{u}}_b^\diamond$ à partir de \mathbf{u}_b^\diamond et d'un terme correctif $\delta \hat{\mathbf{u}}_b^\diamond$:

$$\hat{\mathbf{u}}_b^\diamond = \mathbf{u}_b^\diamond + \delta \hat{\mathbf{u}}_b^\diamond$$

A ce stade, la vérification de la condition de continuité discrète (3.17) s'écrit :

$$\begin{aligned} \underline{\mathbf{A}}^\diamond \hat{\mathbf{u}}_b^\diamond &= \mathbf{0} \\ &= \llbracket \mathbf{u}_b \rrbracket + \underline{\mathbf{A}}^\diamond \delta \hat{\mathbf{u}}_b^\diamond \end{aligned}$$

On choisit alors de relier les corrections $\delta \hat{\mathbf{u}}_b^\diamond$ à l'expression du saut de déplacement au moyen des opérateurs d'assemblage pondérés $(\tilde{\mathbf{A}}^{(s)})_s$ (cf. (2.27)) utilisés lors des phases de préconditionnement de l'approche FETI :

$$\begin{aligned} \delta \hat{\mathbf{u}}_b^\diamond &= -\tilde{\mathbf{A}}^{\diamond T} \llbracket \mathbf{u}_b \rrbracket \\ \hat{\mathbf{u}}_b^\diamond &= \mathbf{u}_b^\diamond - \tilde{\mathbf{A}}^{\diamond T} \llbracket \mathbf{u}_b \rrbracket \end{aligned} \quad (4.5)$$

Il s'en suit que la relation fondamentale (2.28) entre l'opérateur d'assemblage dual et son homologue pondéré

$$\underline{\mathbf{A}}^\diamond \tilde{\mathbf{A}}^{\diamond T} = \mathbf{I}$$

assure automatiquement la vérification de (3.17). En vertu de ce qui précède, on a en effet :

$$\underline{\mathbf{A}}^\diamond \hat{\mathbf{u}}_b^\diamond = \left(\mathbf{I} - \underline{\mathbf{A}}^\diamond \tilde{\underline{\mathbf{A}}}^\diamond T \right) \|\mathbf{u}_b\| = \mathbf{0}$$

Rappelons qu'une expression générale des opérateurs $\tilde{\underline{\mathbf{A}}}^{(s)}$ est donnée en partie 2.3.2. Dans le cadre de travail des problèmes homogènes, qui sera celui retenu pour les exemples numériques présentés ci-après, ces opérateurs réalisent une pondération des degrés de liberté selon la multiplicité des nœuds d'interface associés, et s'écrivent alors :

$$\tilde{\underline{\mathbf{A}}}^\diamond T = \underline{\mathbf{A}}^\diamond T \left(\underline{\mathbf{A}}^\diamond \underline{\mathbf{A}}^\diamond T \right)^{-1}$$

□ **REMARQUE 4.1** Pour fixer les esprits, dans le cas de deux sous-domaines, l'écriture générale ci-dessus devient :

$$\begin{aligned} \tilde{\underline{\mathbf{A}}}^{(1)T} \|\mathbf{u}_b\| &= -\frac{1}{2} \left(\mathbf{u}_b^{(2)} - \mathbf{u}_b^{(1)} \right) \\ \tilde{\underline{\mathbf{A}}}^{(2)T} \|\mathbf{u}_b\| &= \frac{1}{2} \left(\mathbf{u}_b^{(2)} - \mathbf{u}_b^{(1)} \right) \end{aligned}$$

L'effet des corrections $\delta \mathbf{u}_b^{(1)}$ et $\delta \mathbf{u}_b^{(2)}$ réside alors dans la construction d'un champ d'interface unique $\hat{\mathbf{u}}_b$ par moyenne arithmétique des déplacements de part et d'autre de l'interface :

$$\hat{\mathbf{u}}_b^{(1)} = \hat{\mathbf{u}}_b^{(2)} = \hat{\mathbf{u}}_b = \frac{1}{2} \left(\mathbf{u}_b^{(2)} + \mathbf{u}_b^{(1)} \right)$$

□ **REMARQUE 4.2** La remarque précédente montre — et cela est généralisable dans le cas d'une décomposition en plusieurs sous-domaines avec présence de nœuds d'interface de multiplicité supérieure à 2 — que le champ $\hat{\mathbf{u}}_b$ précédemment évoqué peut être également obtenu directement à partir de la donnée des champs \mathbf{u}_b^\diamond en utilisant les opérateurs d'assemblage pondérés primaux $\tilde{\underline{\mathbf{A}}}^{(s)}$ (cf. 2.4.2) dont on rappelle l'expression dans le cas des problèmes homogènes :

$$\tilde{\underline{\mathbf{A}}}^\diamond T = \overline{\underline{\mathbf{A}}}^\diamond T \left(\overline{\underline{\mathbf{A}}}^\diamond \overline{\underline{\mathbf{A}}}^\diamond T \right)^{-1}$$

Il vient alors :

$$\hat{\mathbf{u}}_b^\diamond = \overline{\underline{\mathbf{A}}}^\diamond T \hat{\mathbf{u}}_b = \overline{\underline{\mathbf{A}}}^\diamond T \tilde{\underline{\mathbf{A}}}^\diamond \mathbf{u}_b^\diamond$$

L'équation (4.5) permet alors d'établir :

$$\begin{aligned} \overline{\underline{\mathbf{A}}}^\diamond T \tilde{\underline{\mathbf{A}}}^\diamond \mathbf{u}_b^\diamond &= \mathbf{u}_b^\diamond - \tilde{\underline{\mathbf{A}}}^\diamond T \|\mathbf{u}_b\| \\ &= \left(\mathbf{I}^\diamond - \tilde{\underline{\mathbf{A}}}^\diamond T \underline{\mathbf{A}}^\diamond \right) \mathbf{u}_b^\diamond \end{aligned}$$

On retrouve alors la relation (2.41) entre opérateurs d'assemblage pondérés :

$$\overline{\underline{\mathbf{A}}}^\diamond T \tilde{\underline{\mathbf{A}}}^\diamond + \tilde{\underline{\mathbf{A}}}^\diamond T \underline{\mathbf{A}}^\diamond = \mathbf{I}^\diamond$$

En développant le saut de déplacement à l'interface, il vient :

$$\begin{aligned}
\llbracket \mathbf{u}_b \rrbracket &= \underline{\mathbf{A}}^{\diamond} \mathbf{t}^{\diamond} \mathbf{K}^{\diamond+} \mathbf{t}^{\diamond T} \underline{\mathbf{A}}^{\diamond T} \boldsymbol{\lambda}_b + \underline{\mathbf{A}}^{\diamond} \mathbf{t}^{\diamond} \mathbf{K}^{\diamond+} \mathbf{f}^{\diamond} + \underline{\mathbf{A}}^{\diamond} \mathbf{R}_b^{\diamond} \boldsymbol{\alpha}^{\diamond} && \text{d'après (4.3a)} \\
&= \mathbf{S}_d \boldsymbol{\lambda}_b - \mathbf{b}_d + \mathbf{G}_d \boldsymbol{\alpha}^{\diamond} \\
&= \left(\mathbf{I} - \mathbf{G}_d (\mathbf{G}_d^T \mathbf{G}_d)^{-1} \mathbf{G}_d^T \right) (\underline{\mathbf{b}}_d - \mathbf{S}_d \boldsymbol{\lambda}) && \text{en vertu de (2.34)} \\
&= \mathbf{P}_d^T (\underline{\mathbf{b}}_d - \mathbf{S}_d \boldsymbol{\lambda}) = \mathbf{r} && \text{par définition de } \mathbf{P}_d
\end{aligned}$$

Il apparaît alors que $\llbracket \mathbf{u}_b \rrbracket$ correspond exactement au résidu projeté \mathbf{r} tel qu'il est calculé au cours des itérations de la méthode FETI résolue par une méthode de gradient conjugué projeté (cf. algorithme 2.1). Il s'en suit que les champs $\hat{\mathbf{u}}_b^{\diamond}$ peuvent être calculés à moindre coût durant l'étape de préconditionnement du solveur et avant résolution des problèmes de Dirichlet locaux :

$$\hat{\mathbf{u}}_b^{\diamond} = \mathbf{u}_b^{\diamond} - \underline{\tilde{\mathbf{A}}}^T \mathbf{r}$$

Cela met en relief l'un des points fondamentaux de cette méthode, qui réside dans le fait que $\mathbf{u}_b^{(s)}$ peut être obtenu pour un surcoût numérique quasi nul en utilisant directement les données disponibles au niveau du préconditionneur de Dirichlet équipant classiquement toute approche de type FETI.

Les champs discrets $\hat{\mathbf{u}}_b^{(s)}$ ainsi obtenus sont alors exploitables à travers les systèmes (3.18) à des fins d'obtention des champs de déplacement admissibles $\hat{u}_h^{(s)} \in \mathcal{Ca}(\Omega^{(s)})$ vérifiant :

$$\hat{u}_h = \mathcal{A}(\hat{u}_h^{\square}) \in \mathcal{Ca}(\Omega)$$

4.2. APPROCHE PRIMALE

4.2.1. Rappel sur l'algorithme BDD

Avant d'aborder le processus de reconstruction des champs d'interfaces relatif à l'approche primale, rappelons les éléments clés de la méthode BDD. Le lecteur se référera à la partie 2.4 et en particulier à l'algorithme 2.2 pour plus de détails.

Au sein de l'approche BDD, l'inconnue est un champ global \mathbf{u}_b à partir duquel sont construits les champs de déplacement d'interface locaux à l'aide des opérateurs d'assemblage $\overline{\mathbf{A}}^{(s)}$:

$$\mathbf{u}_b^{(s)} = \overline{\mathbf{A}}^{(s)T} \mathbf{u}_b \quad (4.6)$$

dont la propriété d'orthogonalité (2.14) avec $\underline{\mathbf{A}}^{(s)}$ permet la vérification *a priori* de la condition de continuité des déplacements entre sous-domaines :

$$\underline{\mathbf{A}}^{\diamond} \mathbf{u}_b^{\diamond} = \mathbf{0} \quad (4.7)$$

Par la suite, pour un champ \mathbf{u}_b donné, les autres quantités sont calculées par résolution sur chacun des sous-domaines de problèmes aux conditions aux limites de Dirichlet à l'interface :

$$\mathbf{u}_i^{(s)} = \mathbf{K}_{ii}^{(s)-1} \left(\mathbf{f}_i^{(s)} - \mathbf{K}_{ib}^{(s)} \overline{\mathbf{A}}^{(s)T} \mathbf{u}_b \right) \quad (4.8a)$$

$$\boldsymbol{\lambda}_b^{(s)} = \mathbf{S}^{(s)} \mathbf{u}_b^{(s)} - \mathbf{b}_p^{(s)} \quad (4.8b)$$

L'inconnue \mathbf{u}_b est alors déterminée itérativement de manière à satisfaire l'équilibre des inter-efforts entre les sous-structures à l'interface :

$$\begin{aligned} \llbracket \boldsymbol{\lambda}_b \rrbracket &= \mathbf{0} = \overline{\mathbf{A}} \diamond \boldsymbol{\lambda}_b \diamond \\ &= \overline{\mathbf{A}} \diamond \mathbf{S} \diamond \overline{\mathbf{A}} \diamond^T \mathbf{u}_b - \overline{\mathbf{A}} \diamond \mathbf{b}_p \diamond \\ &= \mathbf{S}_p \mathbf{u}_b - \mathbf{b}_p \end{aligned}$$

On obtient alors le problème à l'interface (2.37), résolu de manière itérative, généralement à l'aide d'un algorithme de gradient conjugué projeté et préconditionné (cf. algorithme 2.2). Notons en particulier qu'en l'absence de convergence, le saut des efforts à l'interface est directement relié au résidu primal \mathbf{r} :

$$\llbracket \boldsymbol{\lambda}_b \rrbracket = \mathbf{S}_p \mathbf{u}_b - \mathbf{b}_p = \mathbf{r}$$

4.2.2. Construction des champs d'interface admissibles

On s'intéresse à présent au calcul du couple $(\hat{\mathbf{u}}_b, \hat{\boldsymbol{\lambda}}_b)$ à partir de $(\mathbf{u}_b, \boldsymbol{\lambda}_b)$ dans le cas de l'approche BDD.

4.2.2.1. Cas du champ de déplacement

Le cas du champ de déplacement est trivial. En effet, la condition (4.7) étant constamment vérifiée, le choix $\hat{\mathbf{u}}_b^{(s)} = \mathbf{u}_b^{(s)}$ satisfait à (3.17) permet alors la détermination immédiate des champs de déplacements admissibles $\hat{u}_h^{(s)} \in \mathcal{Ca}(\Omega^{(s)})$ vérifiant :

$$\hat{u}_h = \mathcal{A}(\hat{u}_h^\square) \in \mathcal{Ca}(\Omega)$$

4.2.2.2. Cas du champ d'inter-efforts

Les champs $\boldsymbol{\lambda}_b^{(s)}$ n'étant pas équilibrés au cours des itérations d'une méthode de type BDD, mais seulement à convergence de celle-ci, l'obtention des champs $\hat{\boldsymbol{\lambda}}_b^{(s)}$ nécessite un traitement particulier. Rappelons notamment que le saut d'inter-efforts au cours des itérations est accessible à l'aide des opérateurs d'assemblage primaux $\overline{\mathbf{A}}^{(s)}$:

$$\llbracket \boldsymbol{\lambda}_b \rrbracket = \overline{\mathbf{A}} \diamond \boldsymbol{\lambda}_b \diamond \quad (4.9)$$

On construit de même les champs $\hat{\lambda}_b^\diamond$ à l'aide de termes correctifs $\delta\hat{\lambda}_b^\diamond$:

$$\hat{\lambda}_b^\diamond = \lambda_b^\diamond + \delta\hat{\lambda}_b^\diamond$$

La vérification de la condition d'équilibre discrète (3.26a) des inter-efforts entre sous-structures s'écrit alors :

$$\begin{aligned}\bar{\mathbf{A}}^\diamond \hat{\lambda}_b^\diamond &= \mathbf{0} \\ &= \llbracket \lambda_b \rrbracket + \bar{\mathbf{A}}^\diamond \delta\hat{\lambda}_b^\diamond\end{aligned}$$

A ce stade, on utilise de manière similaire à l'approche précédente la propriété fondamentale entre les opérateurs d'assemblage primaux $(\tilde{\mathbf{A}}^{(s)})_s$ équipant les préconditionneurs de l'approche BDD et leurs homologues pondérés (2.40)

$$\bar{\mathbf{A}}^\diamond \tilde{\mathbf{A}}^\diamond T = \mathbf{I}$$

en reliant les termes correctifs $\delta\hat{\lambda}_b^\diamond$ au saut des inter-efforts d'interface à l'aide de $\tilde{\mathbf{A}}^\diamond$:

$$\begin{aligned}\delta\hat{\lambda}_b^\diamond &= -\tilde{\mathbf{A}}^\diamond T \llbracket \lambda_b \rrbracket \\ \hat{\lambda}_b^\diamond &= \lambda_b^\diamond - \tilde{\mathbf{A}}^\diamond T \llbracket \lambda_b \rrbracket\end{aligned}\tag{4.10}$$

La condition d'équilibre discrète (3.26a) des inter-efforts entre sous-structures est alors automatiquement vérifiée :

$$\bar{\mathbf{A}}^\diamond \hat{\lambda}_b^\diamond = \left(\mathbf{I} - \bar{\mathbf{A}}^\diamond \tilde{\mathbf{A}}^\diamond T \right) \llbracket \lambda_b \rrbracket = \mathbf{0}$$

□ REMARQUE 4.3 Dans le cas de deux sous-domaines, l'influence des opérateurs pondérés sur le saut d'inter-efforts s'écrit :

$$\tilde{\mathbf{A}}^{(1)T} \llbracket \lambda_b \rrbracket = \tilde{\mathbf{A}}^{(2)T} \llbracket \lambda_b \rrbracket = \frac{1}{2} \left(\lambda_b^{(1)} + \lambda_b^{(2)} \right)$$

Les corrections $\delta\hat{\lambda}_b^{(1)}$ et $\delta\hat{\lambda}_b^{(2)}$ consistent alors en la construction d'un unique champ d'inter-efforts d'interface $\hat{\lambda}_b$, permettant l'équilibrage entre $\hat{\lambda}_b^{(1)}$ et $\hat{\lambda}_b^{(2)}$:

$$\hat{\lambda}_b^{(2)} = -\hat{\lambda}_b^{(1)} = \hat{\lambda}_b = \frac{1}{2} \left(\lambda_b^{(2)} - \lambda_b^{(1)} \right)$$

□ REMARQUE 4.4 De même, le champ $\hat{\lambda}_b$ peut être également obtenu directement à partir des champs λ_b^\diamond en utilisant les opérateurs d'assemblage pondérés duaux $\tilde{\mathbf{A}}^{(s)}$. Il vient alors :

$$\hat{\lambda}_b^\diamond = \underline{\mathbf{A}}^{T\diamond} \hat{\lambda}_b = \underline{\mathbf{A}}^{T\diamond} \tilde{\mathbf{A}}^\diamond \lambda_b^\diamond$$

L'équation (4.10) permet alors d'établir :

$$\begin{aligned}\underline{\mathbf{A}}^T \diamond \underline{\tilde{\mathbf{A}}} \diamond \boldsymbol{\lambda}_b \diamond &= \boldsymbol{\lambda}_b \diamond - \underline{\tilde{\mathbf{A}}}^T \diamond \|\boldsymbol{\lambda}_b\| \\ &= \left(\mathbf{I} \diamond - \underline{\tilde{\mathbf{A}}}^T \diamond \underline{\mathbf{A}} \diamond \right) \boldsymbol{\lambda}_b \diamond\end{aligned}$$

On retrouve la relation (2.41) entre opérateurs d'assemblage pondérés :

$$\underline{\mathbf{A}}^T \diamond \underline{\tilde{\mathbf{A}}} \diamond + \underline{\tilde{\mathbf{A}}}^T \diamond \underline{\mathbf{A}} \diamond = \mathbf{I} \diamond$$

Il reste alors à vérifier la satisfaction de l'alternative de Fredholm (3.26b) assurant l'équilibre des champs $\hat{\boldsymbol{\lambda}}_b^{(s)}$ vis à vis des modes rigides des sous-structures. Le développement de (3.26b) donne :

$$\begin{aligned}\mathbf{R} \diamond^T \left(\mathbf{t} \diamond^T \hat{\boldsymbol{\lambda}}_b \diamond + \mathbf{f} \diamond \right) &= \mathbf{R}_b \diamond^T \left(\boldsymbol{\lambda}_b \diamond - \underline{\tilde{\mathbf{A}}} \diamond^T \|\boldsymbol{\lambda}_b\| \right) + \mathbf{R} \diamond^T \mathbf{f} \diamond \quad \text{avec } \mathbf{R}_b \diamond = \mathbf{t} \diamond \mathbf{R} \diamond \\ &= \mathbf{R}_b \diamond^T \left(\boldsymbol{\lambda}_b \diamond - \underline{\tilde{\mathbf{A}}} \diamond^T \mathbf{r} + \mathbf{b}_p \diamond \right) \quad \text{avec } \mathbf{R} \diamond^T \mathbf{f} \diamond = \mathbf{R}_b \diamond^T \mathbf{b} \diamond \\ &= \mathbf{R}_b \diamond^T \left(\mathbf{S} \diamond \mathbf{u}_b - \mathbf{b}_p \diamond - \underline{\tilde{\mathbf{A}}} \diamond^T \mathbf{r} + \mathbf{b}_p \diamond \right) \\ &= \mathbf{R}_b \diamond^T \left(\mathbf{S} \diamond \mathbf{u}_b - \underline{\tilde{\mathbf{A}}} \diamond^T \mathbf{r} \right)\end{aligned}$$

En utilisant la symétrie de $\mathbf{S}^{(s)}$ héritée de $\mathbf{K}^{(s)}$, on a :

$$\mathbf{R}_b \diamond^T \mathbf{S} \diamond = \left(\mathbf{S} \diamond \mathbf{R}_b \diamond \right)^T = \mathbf{0} \diamond$$

La condition d'équilibre (2.42) des résidus équipant l'approche BDD assure alors la vérification de (3.26b) :

$$\mathbf{R} \diamond^T \left(\mathbf{t} \diamond^T \hat{\boldsymbol{\lambda}}_b \diamond + \mathbf{f} \diamond \right) = -\mathbf{R}_b \diamond^T \underline{\tilde{\mathbf{A}}} \diamond^T \mathbf{r} = \mathbf{0}$$

A ce stade, les conditions (3.26a) et (3.26b) sur les champs $\hat{\boldsymbol{\lambda}}_b^{(s)}$ obtenus étant satisfaites, les algorithmes \mathcal{G}_h et \mathcal{F}_{eq} assurent alors le reste des étapes permettant la construction des champs $\hat{\sigma}_h^{(s)} \in \mathcal{S}a(\Omega^{(s)})$ de sorte que :

$$\hat{\sigma}_h = \mathcal{A}(\hat{\sigma}_h^\square) \in \mathcal{S}a(\Omega)$$

En outre, l'expression des champs $\hat{\boldsymbol{\lambda}}_b \diamond$ s'écrit alternativement :

$$\hat{\boldsymbol{\lambda}}_b \diamond = \boldsymbol{\lambda}_b \diamond - \underline{\tilde{\mathbf{A}}} \diamond^T \mathbf{r}$$

On observe alors que saut des inter-efforts à l'interface est également disponible au cours des itérations à travers le résidu \mathbf{r} de l'algorithme associé, de sorte que le seul coût numérique supplémentaire associé à la construction de $\hat{\sigma}_h = \mathcal{A}(\hat{\sigma}_h^\square) \in \mathcal{S}a(\Omega)$ provient de l'utilisation des algorithmes \mathcal{G}_h et \mathcal{F}_{eq} .

4.3. EXEMPLE NUMÉRIQUE

4.3.1. Γ -structure

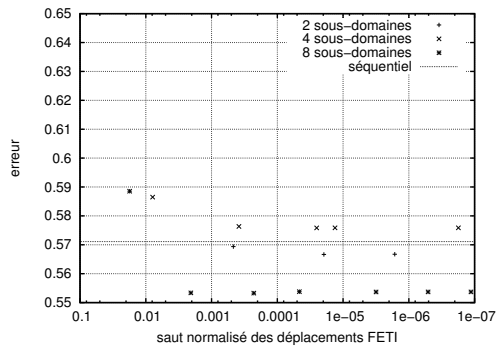
A des fins d'illustration des développements précédents, nous reprenons l'étude du problème associé à une Γ -structure présenté en partie 3.3. Pour l'ensemble des maillages et décompositions en \mathcal{N}_{sd} sous-domaines précédemment générés, on évalue à présent les estimations e_{rdc}^{ddm} au cours des itérations dans les deux cas de résolution correspondant à l'utilisation de solveurs de type FETI ou BDD. En outre, notons que les algorithmes sont ici équipés de leurs meilleurs préconditionneurs connus, à savoir celui de Dirichlet pour FETI et celui de Neumann-Neumann pour BDD. Rappelons également que leur critère de convergence, portant sur le résidu \mathbf{r}^n associé au saut normalisé des déplacements pour FETI et des efforts pour BDD, est fixé à 10^{-6} .

$$\mathbf{r}^n = \frac{\|\mathbf{u}_b^n\|_{\Upsilon}}{\|\mathbf{u}_b^0\|_{\Upsilon}} \quad \text{ou} \quad \mathbf{r}^n = \frac{\|\boldsymbol{\lambda}_b^n\|_{\Upsilon}}{\|\boldsymbol{\lambda}_b^0\|_{\Upsilon}} \quad (4.11)$$

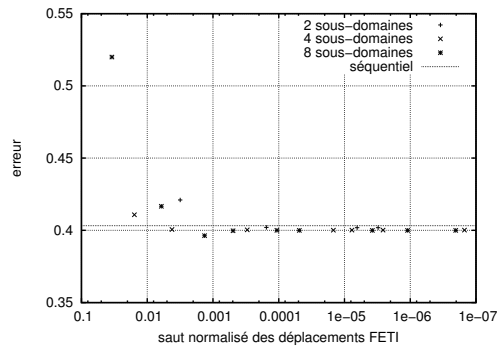
Les figures 5.6 et 4.2 représentent l'évolution de e_{rdc}^{ddm} en fonction du résidu \mathbf{r}^n pour les deux cas de résolution avec les algorithmes FETI et BDD, respectivement.

L'observation des courbes appelle plusieurs remarques. Tout d'abord, notons la similitude des évolutions de e_{rdc}^{ddm} entre les approches FETI et BDD : cette première constatation s'explique par l'équivalence en matière de performances entre les deux approches munies de leur préconditionneurs optimaux. Remarquons ensuite la similarité des courbes de convergence – à discrétisation fixée – entre les différents cas de décomposition. Cette seconde constatation confirme que la procédure d'estimation d'erreur hérite de la propriété d'extensibilité du solveur, ce qui provient de l'utilisation directe des données du préconditionneur lors de la construction du couple de champs discrets $(\hat{\mathbf{u}}_b^{(s)}, \hat{\boldsymbol{\lambda}}_b^{(s)})$. Soulignons enfin, aux vues des résultats, que l'observation fondamentale concerne la rapidité de la convergence de e_{rdc}^{ddm} , de l'ordre de 5 à 8 itérations, par rapport à celle du résidu \mathbf{r}^n du solveur qui est atteinte, en moyenne, autour de 15. En outre, la forme des courbes traduit une évolution rapide de e_{rdc}^{ddm} lors des premières itérations, où l'erreur globale est dominée par une contribution provenant de la non vérification des conditions d'interface qui conduisent au calcul d'un couple $(\hat{u}_h, \hat{\sigma}_h)$ de champs admissibles assez éloigné de la solution exacte (u, σ) .

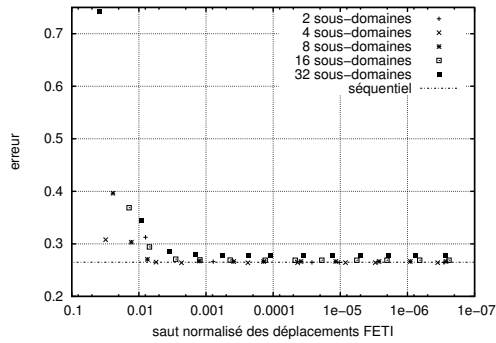
A ce stade, il est intéressant d'étudier une éventuelle corrélation entre la convergence de e_{rdc}^{ddm} et celle de ses contributions élémentaires $e_{cr,E}^{ddm}$. Pour se faire, on représente sur les figures 4.3 et 4.4 l'évolution des contributions $e_{cr,E}^{ddm}$ aux premières itérations et à convergence du solveur, dans les cas $(H = L/8, \mathcal{N}_{sd} = 8)$ et $(H = L/16, \mathcal{N}_{sd} = 16)$. L'observation de ces cartes d'erreur confirme que la stabilisation des estimateurs globaux est directement liée à celle des contributions élémentaires. Lors de la première itération, on remarque ainsi que les contributions les plus importantes se concentrent tant sur les points de singularité qu'au niveau des interfaces entre sous-domaines, traduisant



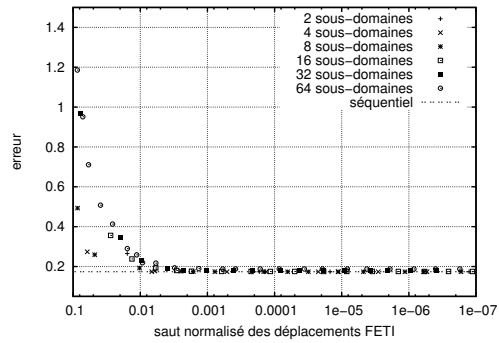
(a) $h = L/2$



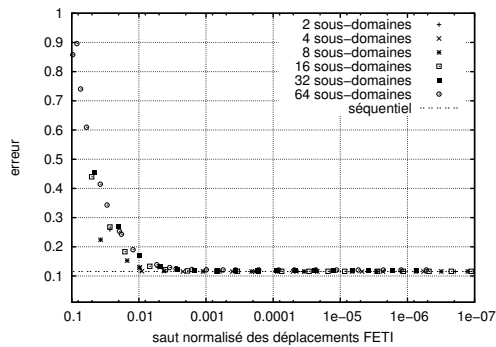
(b) $h = L/4$



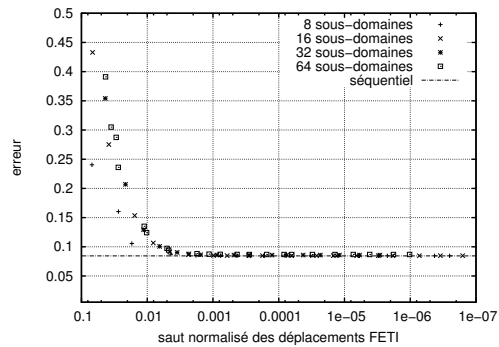
(c) $h = L/8$



(d) $h = L/16$



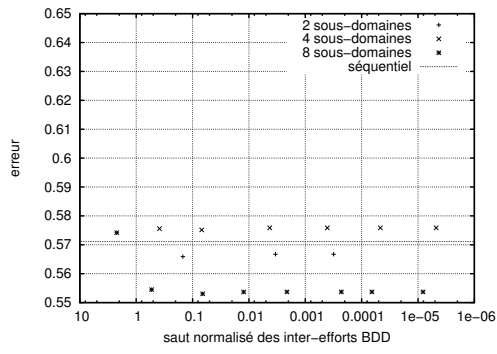
(e) $h = L/32$



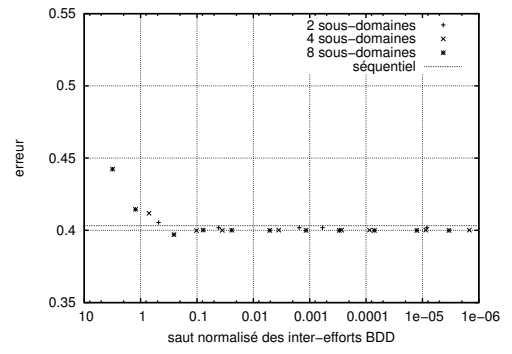
(f) $h = L/64$

□ FIG. 4.1. Évolution de $e_{\text{rdc}}^{\text{ddm}}$ en fonction de la convergence du solveur FETI

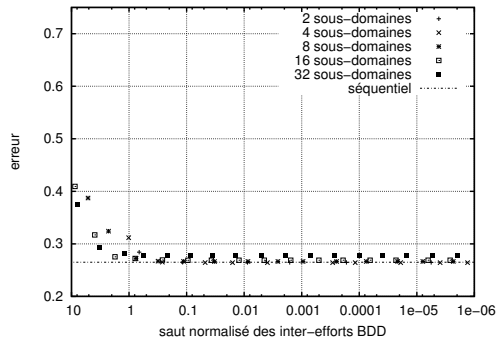
ainsi la mauvaise qualité des champs d'inter-efforts reconstruits en présence de trop fortes discontinuités. Ces contributions aux interfaces s'estompent ensuite en quelques itérations, permettant une convergence rapide de la carte d'erreur. Cet exemple montre notamment la possibilité d'obtenir, en seulement quelques itérations, une carte des contributions élémentaires à l'erreur globale pertinente pouvant être exploitée lors de



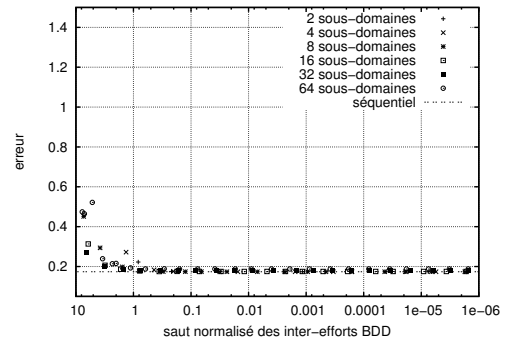
(a) $h = L/2$



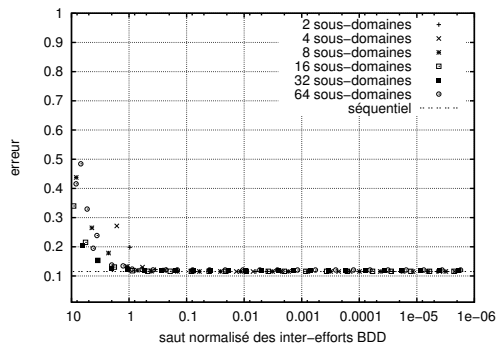
(b) $h = L/4$



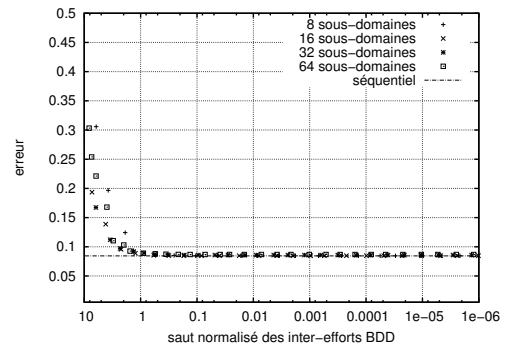
(c) $h = L/8$



(d) $h = L/16$



(e) $h = L/32$



(f) $h = L/64$

□ FIG. 4.2. Évolution de $e_{\text{rdc}}^{\text{ddm}}$ en fonction de la convergence du solveur BDD

procédures d'adaptation de maillage.

4.3.2. Structure fissurée

Au titre d'une autre illustration numérique, étudions à présent les performances de l'estimateur parallèle $e_{\text{rdc}}^{\text{ddm}}$ sur un exemple mécanique déjà utilisé dans la littérature [Pierre LADEVÈZE, Ludovic CHAMOIN et Eric FLORENTIN, 2010 ; N. PARES, P. DIEZ et A. HUERTA, 2006]. Considérons pour cela la structure représentée à la figure 4.5(a), encastée à sa base et au niveau du trou inférieur, soumise à une pression P au niveau du trou supérieur et à un champ de traction d'amplitude F_d perpendiculaire à sa frontière supérieure gauche, et enfin présentant une amorce de fissure au niveau du trou supérieur. La modélisation est conduite sous l'hypothèse des contraintes planes, avec un comportement linéaire élastique isotrope de module d'élasticité $E = 2000 \text{ Pa}$ et de coefficient de poisson $\nu = 0.3$, tandis que la discrétisation est réalisée à l'aide d'éléments triangulaires de degré 1, de telle sorte que le maillage coïncide avec la fissure (fig. 4.5(b)). Les simulations sont réalisées en prenant $P = F_d = 1$. En outre, la figure 4.5(c) représente la carte des contraintes de Von-Mises dans la configuration déformée du problème.

L'estimateur $e_{\text{rdc}}^{\text{ddm}}$ est évalué au cours des itérations d'une résolution du problème par la méthode FETI mise en œuvre sur une décomposition en $\mathcal{N}_{\text{sd}} = 14$ sous-domaines (fig. 4.5(b)) et dont le critère de convergence est fixé comme précédemment à 10^{-6} . La figure 4.6 représente l'évolution de $e_{\text{rdc}}^{\text{ddm}}$ en fonction du résidu \mathbf{r}^n du solveur ainsi que la valeur de $e_{\text{cr}}^{\text{seq}}$ à titre de comparaison. On remarque que l'erreur due au résidu \mathbf{r}^n devient négligeable par rapport à celle due à la discrétisation dès la troisième itération, de sorte que $e_{\text{rdc}}^{\text{ddm}}$ peut être considérée comme ayant atteint sa convergence en 5 itérations, soit bien avant celle du solveur, qui en nécessite pour sa part 14. La figure 4.6 représente l'évolution des contributions élémentaires $e_{\text{cr},E}^{\text{ddm}}$ à $e_{\text{cr}}^{\text{ddm}}$. On y constate que ces dernières, initialement importantes sur une grande partie de la structure du fait du nombre élevé d'interfaces, se stabilisent en quelques itérations de manière similaire à $e_{\text{rdc}}^{\text{ddm}}$ en laissant apparaître les contributions les plus importantes au voisinage des zones à contraintes les plus fortes.

D'une manière générale, les observations ici formulées abondent dans le sens de celles relatives à l'exemple précédent et confirment de fait les performances de l'estimateur $e_{\text{rdc}}^{\text{ddm}}$.

4.4. CONCLUSION PARTIELLE

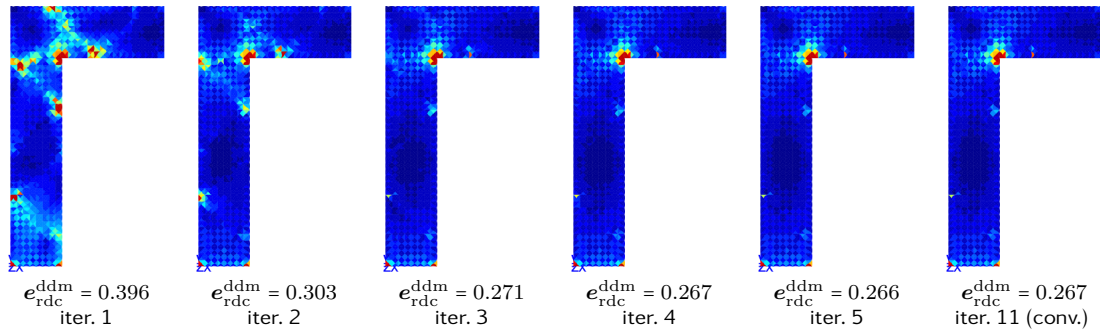
En s'intéressant à la mise en œuvre d'une mesure d'erreur garantie en cadre sous-structuré quel que soit l'état de la convergence du solveur itératif associé, ce chapitre a permis de spécifier l'implantation de notre technique d'estimation en l'appliquant aux approches traditionnelles duale et primale de décomposition de domaine. Rappelons que la condition *sine qua non* liée à une telle mise en œuvre repose sur l'obtention d'un champ discret d'interface vérifiant les conditions de raccord entre sous-

domaines ainsi que l'équilibre local de chacun vis à vis des modes rigides. Dans le cadre des approches FETI et BDD, nous avons montré que l'obtention de tels champs était réalisable pour un coup additionnel négligeable à l'aide de l'exploitation directe des champs intermédiaires calculés lors des étapes de préconditionnement associées aux préconditionneurs usuels existant à ce jour, à savoir ceux de Dirichlet et de Neumann-Neumann.

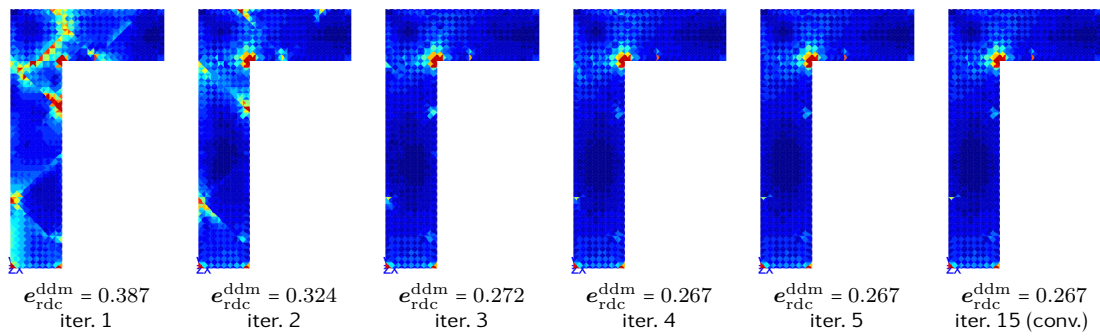
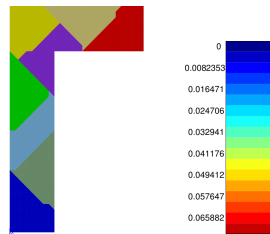
Les résultats numériques traités montrent une convergence rapide de l'estimation d'erreur par rapport à celle du solveur de décomposition de domaine (fixée à 10^{-6}). En outre, la prépondérance de la contribution à l'erreur due à la non vérification des conditions de raccord à l'interface décroît rapidement de sorte qu'il est possible d'obtenir une estimation pertinente de l'erreur de discrétisation en seulement quelques itérations du solveur. Cette observation étant également valable au niveau des cartes de contributions d'erreur, cela laisse entrevoir la possibilité de mener à bien des procédures de remaillage adaptatif au bout d'un nombre réduit d'itérations du solveur global.

Notons par ailleurs que la vitesse de convergence de notre estimateur est à relier aux performances largement éprouvées des solveurs FETI et BDD utilisés. Objectons cependant, en vertu des observations précédentes, que l'estimateur peut être qualifié de convergé dès lors que la part d'erreur due à la non-vérification des conditions d'interface devient négligeable par rapport à celle due à la discrétisation. Il en découle que la convergence de notre estimateur sera d'autant moins rapide que l'erreur de discrétisation sera faible. Sur ce point précis, la prédiction du résidu du solveur suffisant à assurer la convergence de l'estimateur d'erreur demeure une question ouverte sur laquelle une ébauche de réponse pourrait être proposée à travers le découplage des contributions due à la discrétisation de celles dues à l'interface. En outre, des réponses à cette problématique permettraient la définition de nouveaux critères d'arrêt des solveurs reposant non plus sur une condition a priori liée au résidu, mais sur l'état convergé de l'estimateur d'erreur de discrétisation.

Enfin, l'utilisation des données des préconditionneurs lors de la construction des champs discrets d'interface présente, outre un faible coût de calcul additionnel, l'avantage de pouvoir envisager des extensions suivant le type de problème étudié. En effet, d'un point de vue physique, le choix des opérateurs de pondération intervenant dans la formulation des préconditionneurs est d'importance lors de la prédiction du comportement des sous-structures, notamment en ce qui concerne la prise en compte des hétérogénéités structurales. Aussi, sur la base de ces remarques, le chapitre suivant sera consacré à l'estimation des erreurs de discrétisation dans le cas de problèmes hétérogènes.

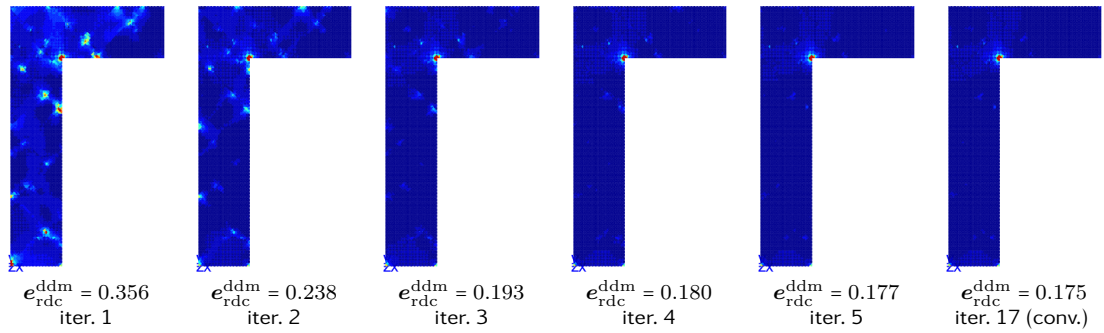


Cas FETI

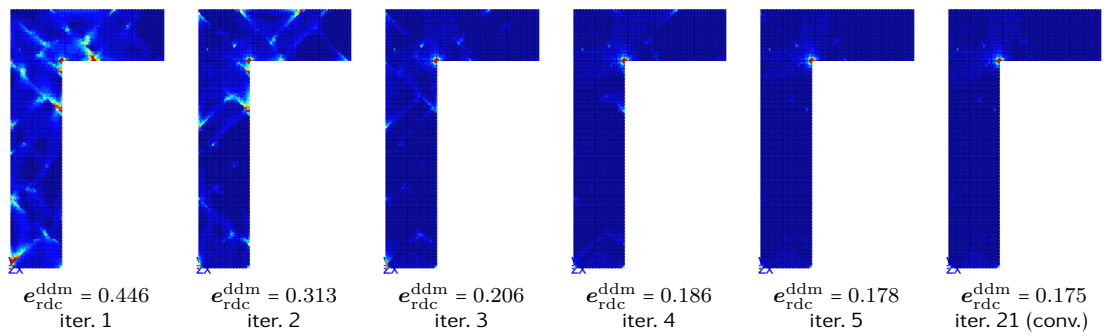
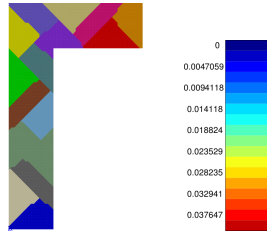


Cas BDD

□ FIG. 4.3. Exemple d'évolution des contributions $e_{\text{rdc},E}^{\text{ddm}}$ en fonction de la convergence du solveur ($H = L/8$, $\mathcal{N}_{\text{sd}} = 8$)

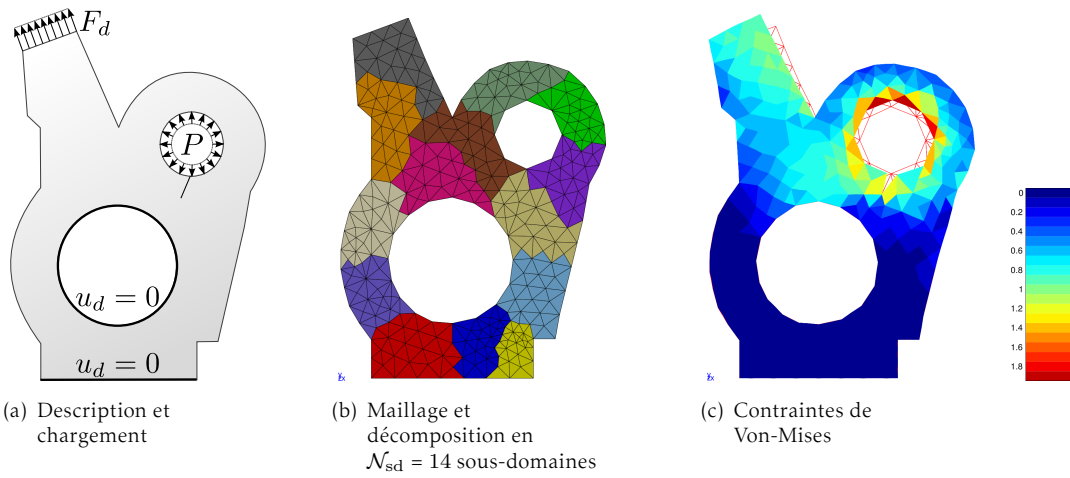


Cas FETI

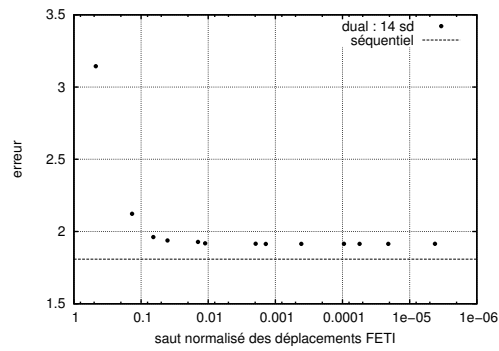


Cas BDD

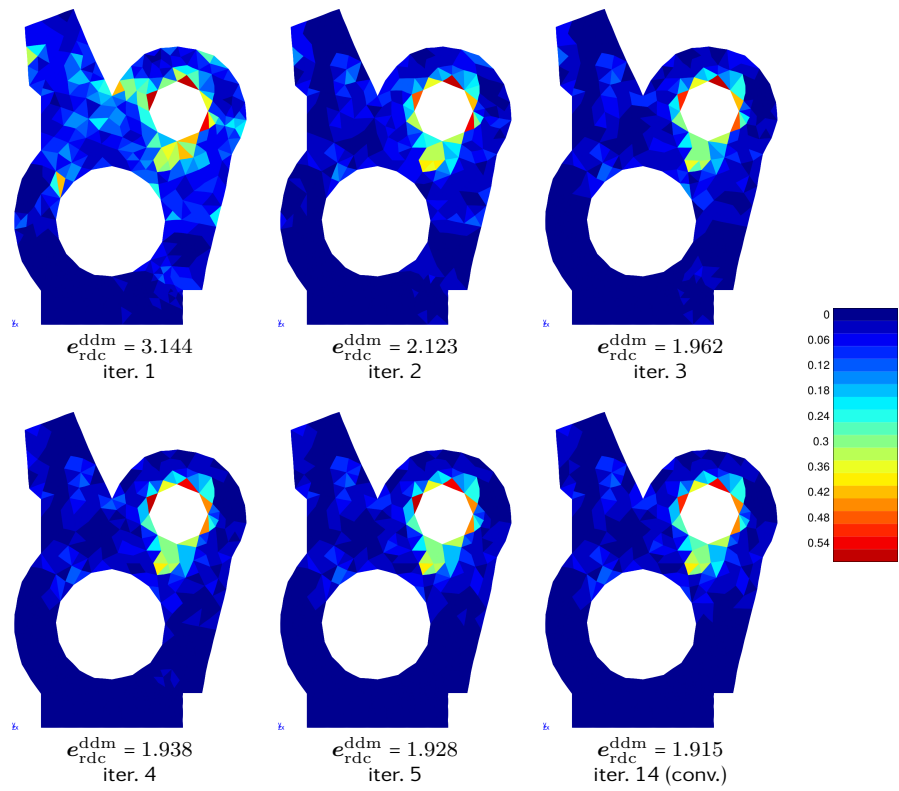
□ FIG. 4.4. Exemple d'évolution des contributions $e_{\text{rdc},E}^{\text{ddm}}$ en fonction de la convergence du solveur ($H = L/16$, $\mathcal{N}_{\text{sd}} = 16$)



□ FIG. 4.5. *Structure fissurée*



□ FIG. 4.6. Évolution de e_{rdc}^{ddm} en fonction de la convergence du solveur FETI



□ FIG. 4.7. Évolution des contributions $e_{rdc,E}^{ddm}$ en fonction de la convergence du solveur

CHAPITRE 5.

EXTENSION AUX STRUCTURES HÉTÉROGÈNES

Ce chapitre s'attache à la mise en œuvre de procédures d'estimation d'erreur dans le cadre de problèmes présentant de fortes hétérogénéités. Sur la base d'un exemple numérique spécifique, on étudiera et illustrera, dans un premier temps l'influence de la décomposition et des préconditionneurs sur l'estimation d'erreur. On proposera, dans un second temps, une première extension simple des estimateurs d'erreur en relation de comportement aux problèmes hétérogènes.

5.1. Cas d'étude	132
5.2. Influence des préconditionneurs hétérogènes	134
5.2.1. Principes et interprétation mécanique	134
5.2.2. Illustration numérique	140
5.3. Procédures de construction de champs admissibles pour des problèmes hétérogènes	140
5.3.1. Principes	140
5.3.2. Illustration numérique	144
5.4. Conclusion partielle	146

Si les techniques d'estimation d'erreur ont été l'objet d'extensions diverses et variées relatives à de nombreux problèmes de mécanique des solides ou des fluides, on constate cependant que la littérature est assez pauvre en travaux relatifs aux problèmes hétérogènes. Sur ces derniers, la paternité des contributions principales semble due à Oden à travers des travaux qui portent sur l'estimation des erreurs de discrétisation et de modèle liées à l'utilisation de procédures d'homogénéisation à niveaux multiples [J. ODEN et K.S. VEMAGANTI, 2000; J. ODEN et ZOHDI, 1997; K. VEMAGANTI et J. ODEN, 2001], à côté d'autres approches plus « mécaniciennes » [SYDENSTRICKER et al., 2005].

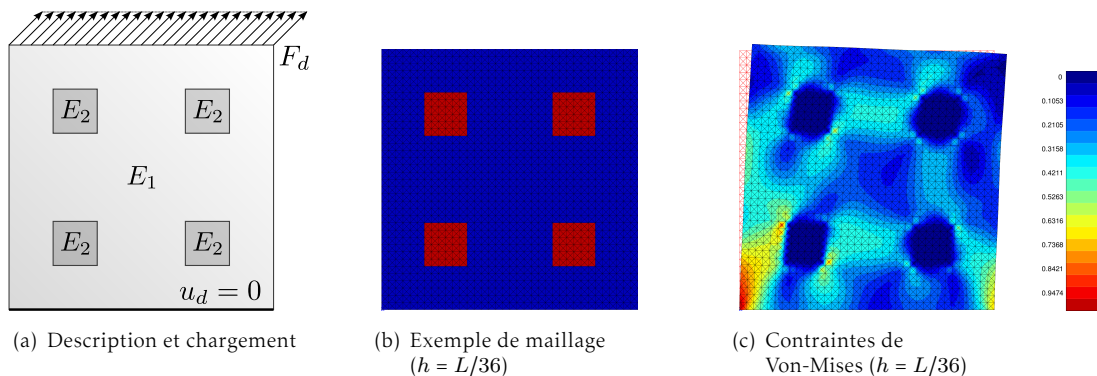
On s'intéresse ici à l'estimation d'erreur a posteriori sur des problèmes fortement hétérogènes dont la modélisation et la résolution se font en l'absence de procédure d'homogénéisation. Sur ce cas de figure, il est connu que la présence d'hétérogénéités portant sur les coefficients des modèles matériaux — se traduisant par des sauts de plusieurs ordres de grandeurs entre zones — rend généralement leur traitement numérique plus difficile que celui de leurs équivalents homogènes. Dans ce cadre, l'utilisation de préconditionneurs adaptés lors de résolution par décomposition de domaine sans recouvrement s'avère particulièrement intéressante en permettant de restaurer au solveur itératif ses performances en terme de convergence, initialement mises en défaut par le caractère hétérogène des problèmes étudiés [D. J. RIXEN et Charbel FARHAT, 1999].

A partir d'un cas d'étude portant sur un problème mécanique exhibant de fortes hétérogénéités relatives à son module d'élasticité ($E_1/E_2 = 10^3$), on s'intéressera aux performances de l'estimation des erreurs de discrétisation dans divers cas de figure. On comparera notamment les résultats d'estimation d'erreur parallèle, en présence de plusieurs cas de décomposition, à ceux obtenus par une procédure séquentielle classique. Après avoir étudié l'influence du choix des bons préconditionneurs sur la convergence de l'estimation d'erreur, on proposera une amélioration de la procédure séquentielle d'estimation d'erreur par la relation de comportement à l'aide d'une extension simple des procédures de construction des champs statiquement admissibles (cf. 1.5.2.1) au cadre de travail hétérogène.

5.1. CAS D'ÉTUDE

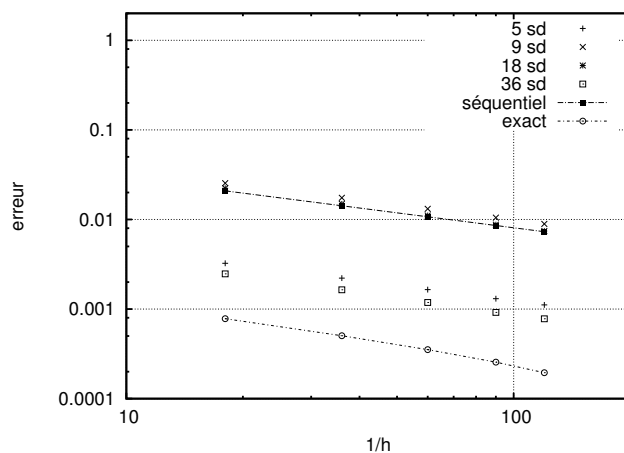
On considère, pour les besoins de l'étude, un problème mécanique en contraintes planes posé sur un domaine carré de côté L encasté à sa base et soumis à un champ de traction-cisaillement sur sa face supérieure (fig. 5.1(a)). Le domaine principal (domaine 1) voit en son sein la présence de quatre inclusions de forme carrée (domaine 2). Le comportement matériau est choisi linéaire, élastique et isotrope. Les paramètres associés (modules d'Young E_i et coefficient de Poisson ν_i) sont fixés à ($E_1 = 2 \cdot 10^5$ Pa, $\nu_1 = 0.3$) dans le domaine principal et à ($E_2 = 200$ Pa, $\nu_2 = 0.2$) dans les inclusions. La figure 5.1(c)

représente la cartographie du champ de contrainte de Von-Mises dans une configuration déformée du problème.



□ FIG. 5.1. *Problème hétérogène*

Par la suite, une étude systématique est réalisée à partir d'une série de maillages de taille caractéristique $h = \frac{L}{m}$ avec $m = 18, 36, 60, 90, 120$ et plusieurs cas de décomposition en $\mathcal{N}_{sd} = 5, 9, 18, 36$ sous-domaines. Un exemple de maillage est donné figure 5.1(b), tandis que les différents cas de décomposition, conduisant alternativement à des sous-structures homogènes ou hétérogènes, sont représentés figure 5.3(c). Les discrétisations éléments finis sont réalisées comme précédemment en utilisant des éléments triangulaires de degré 1. En outre, l'algorithme FETI utilisé lors des calculs parallèles est équipé de préconditionneurs adaptés aux problèmes présentant des hétérogénéités. Nous reviendrons sur ce point et l'influence d'un tel choix de préconditionneurs sur l'estimation d'erreur dans la partie suivante.



□ FIG. 5.2. *h-convergence de l'erreur e_h et des estimateurs e_{rdc}^{seq} et e_{rdc}^{ddm}*

La figure 5.2 représente l'évolution de l'erreur « vraie » e_h (calculée à l'aide de la re-

lation 3.31) et des estimateurs $e_{\text{rdc}}^{\text{seq}}$ et $e_{\text{rdc}}^{\text{ddm}}$ dans les différents cas de décomposition. Si les courbes de h -convergence des différents estimateurs sont en accord avec celle de e_h , on note que les estimations les plus précises sont obtenues pour les cas de décomposition en $\mathcal{N}_{\text{sd}} = 5$ et 36 sous-domaines, tandis que l'estimateur séquentiel et les autres cas de découpage tendent à largement surestimer l'erreur (avec un facteur 10 dans le cas présent). L'observation de la figure 5.3, qui représente les cartes des contributions élémentaires aux estimations globales $e_{\text{rdc}}^{\text{seq}}$ et $e_{\text{rdc}}^{\text{ddm}}$ pour le cas de discrétisation $h = L/36$, confirme les remarques précédentes. On y constate en particulier que l'origine des disparités entre les cas étudiés provient de fortes sur-estimations des contributions élémentaires à l'erreur de discrétisation sur l'interface entre les milieux hétérogènes dans les cas séquentiel et avec décomposition en 9 et 18 sous-domaines. Notons que ces trois cas de figure correspondent à des situations dans lesquelles les domaines d'estimation de l'erreur de discrétisation (la structure entière dans le cas séquentiel) présentent des hétérogénéités. À l'inverse, les cas de décomposition en 5 et 36 sous-structures conduisent à des sous-domaines homogènes sur lesquels l'estimation d'erreur ne présente pas les défauts susmentionnés.

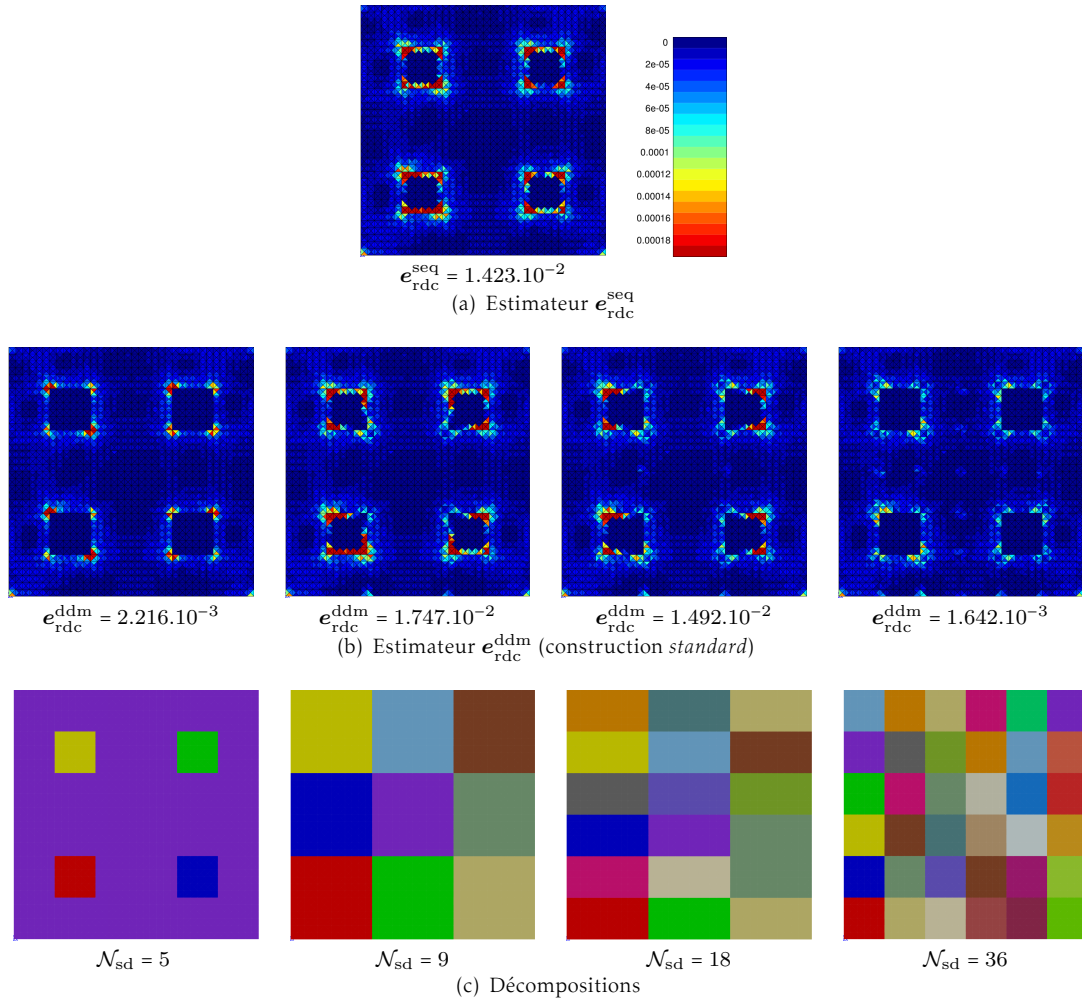
À ce stade, la première conclusion semble être la mise en défaut de l'estimateur séquentiel en présence de fortes hétérogénéités structurales. En particulier, le fait que cet outil soit lui-même utilisé lors du calcul de $e_{\text{cr}}^{\text{ddm}}$ (après détermination des champs d'interfaces admissibles) explique alors les piètres performances de l'estimation dans les cas de décompositions conduisant à des sous-domaines hétérogènes. Il apparaît alors que la mise en œuvre d'une estimation parallèle associée à une décomposition de domaine permettant l'obtention de sous-structures homogènes constitue un premier axe de réponse permettant d'obtenir une estimation satisfaisante des erreurs de discrétisation sur ce type de problème.

5.2. INFLUENCE DES PRÉCONDITIONNEURS HÉTÉROGÈNES

Cette partie s'attache à vérifier l'influence du choix de la classe de préconditionneurs dédiés aux problèmes hétérogènes proposée par [D. J. RIXEN et Charbel FARHAT, 1999]. Après avoir explicité leur fonctionnement et leur intérêt vis à vis de l'obtention d'un couple de champs admissibles à l'interface, on vérifiera leur influence vis à vis des performances en matière d'estimation d'erreur sur l'exemple numérique précédemment introduit.

5.2.1. Principes et interprétation mécanique

Rappelons que l'un des points forts des méthodes duale et primale de décomposition de domaine réside dans l'existence de préconditionneurs adaptés à la classe de problèmes hétérogènes ici considérée. La forme générale des opérateurs d'assemblage pondérés $\tilde{\mathbf{A}}^{(s)}$ (eq. (2.27)) et $\tilde{\tilde{\mathbf{A}}}^{(s)}$ (eq. (2.39)) permet en effet une grande souplesse dans la



□ FIG. 5.3. Carte des contributions élémentaires $e_{\text{rdc}}^{\text{seq}}$ et $e_{\text{rdc}}^{\text{ddm}}$ en fonction des cas de décomposition pour les deux méthodes de reconstruction des champs statiquement admissibles ($h = L/32$)

construction de $\tilde{\mathbf{S}}_d^{-1}$ et $\tilde{\mathbf{S}}_p^{-1}$ à travers le choix des opérateurs $\mathbf{M}^{(s)}$. En particulier, dans le cadre de travail relatif aux problèmes mécaniques de structures présentant de fortes hétérogénéités de module d'élasticité, les préconditionneurs classiques correspondent au choix $\mathbf{M}^{(s)} = \text{diag}(\mathbf{K}_{bb}^{(s)})$, de telle sorte que :

$$\tilde{\mathbf{A}}^{\diamond} = \left[\underline{\mathbf{A}}^{\diamond} \text{diag}(\mathbf{K}_{bb}^{\diamond})^{-1} \underline{\mathbf{A}}^{T\diamond} \right]^{-1} \underline{\mathbf{A}}^{\diamond} \text{diag}(\mathbf{K}_{bb}^{\diamond})^{-1} \quad (5.1a)$$

$$\tilde{\overline{\mathbf{A}}}^{\diamond} = \left[\overline{\mathbf{A}}^{\diamond} \text{diag}(\mathbf{K}_{bb}^{\diamond}) \overline{\mathbf{A}}^{T\diamond} \right]^{-1} \overline{\mathbf{A}}^{\diamond} \text{diag}(\mathbf{K}_{bb}^{\diamond}) \quad (5.1b)$$

Notons que les choix précédents correspondent à la prise en compte de considérations mécaniques sur le traitement des champs d'interfaces qui s'avèrent particulièrement

utiles pour la construction des champs $\hat{\mathbf{u}}_b^\diamond$ et $\hat{\boldsymbol{\lambda}}_b^\diamond$. Dans la suite, nous illustrons cette influence en se restreignant, pour des raisons de lisibilité, au cas d'une décomposition en deux sous-domaines.

5.2.1.1. Approche duale

L'approche duale n'assurant pas la continuité à l'interface des champs \mathbf{u}_b^\diamond au cours des itérations, rappelons que l'application de notre méthode d'estimation d'erreur dans ce cadre nécessite la détermination préalable d'un nouveau champ $\hat{\mathbf{u}}_b^\diamond$ continu à l'interface. Pour se faire, des termes correctifs $\delta\hat{\mathbf{u}}_b^\diamond$ calculés à partir du saut $\llbracket \mathbf{u}_b \rrbracket$ des déplacements à l'interface sont ajoutés à \mathbf{u}_b^\diamond de manière à assurer la continuité de $\hat{\mathbf{u}}_b^\diamond$:

$$\begin{aligned}\hat{\mathbf{u}}_b^\diamond &= \mathbf{u}_b^\diamond + \delta\hat{\mathbf{u}}_b^\diamond = \mathbf{u}_b^\diamond - \tilde{\mathbf{A}}^T \llbracket \mathbf{u}_b \rrbracket \\ \underline{\mathbf{A}}^\diamond \hat{\mathbf{u}}_b^\diamond &= \mathbf{0}\end{aligned}$$

Afin de visualiser l'influence des opérateurs $\tilde{\mathbf{A}}^{(s)}$ tel qu'exprimés en (5.1a), on se restreindra au j -ème degré de liberté d'interface, en notant $\mathbf{u}_{b,j}^{(s)}$ son déplacement relatif à la sous-structure $\Omega^{(s)}$ et $\mathbf{K}_{bb,jj}^{(s)}$ (resp. $\mathbf{K}_{bb,jj}^{-1(s)}$) la j -ème composante diagonale de $\text{diag}(\mathbf{K}_{bb}^{(s)})$ (resp. $\text{diag}(\mathbf{K}_{bb}^{(s)})^{-1}$).

Il vient alors :

$$\left(\tilde{\mathbf{A}}^{(1)T} \llbracket \mathbf{u}_b \rrbracket \right)_i = - \frac{\mathbf{K}_{bb,jj}^{-1(1)}}{\mathbf{K}_{bb,jj}^{-1(1)} + \mathbf{K}_{bb,jj}^{-1(2)}} \left(\mathbf{u}_{b,j}^{(2)} - \mathbf{u}_{b,j}^{(1)} \right) = -\delta\hat{\mathbf{u}}_{b,j}^{(1)} \quad (5.2a)$$

$$\left(\tilde{\mathbf{A}}^{(2)T} \llbracket \mathbf{u}_b \rrbracket \right)_i = \frac{\mathbf{K}_{bb,jj}^{-1(2)}}{\mathbf{K}_{bb,jj}^{-1(1)} + \mathbf{K}_{bb,jj}^{-1(2)}} \left(\mathbf{u}_{b,j}^{(2)} - \mathbf{u}_{b,j}^{(1)} \right) = -\delta\hat{\mathbf{u}}_{b,j}^{(2)} \quad (5.2b)$$

D'où :

$$\begin{aligned}\hat{\mathbf{u}}_{b,j}^{(1)} &= \mathbf{u}_{b,j}^{(1)} + \delta\hat{\mathbf{u}}_{b,j}^{(1)} = \frac{\mathbf{K}_{bb,jj}^{-1(2)} \mathbf{u}_{b,j}^{(1)} + \mathbf{K}_{bb,jj}^{-1(1)} \mathbf{u}_{b,j}^{(2)}}{\mathbf{K}_{bb,jj}^{-1(1)} + \mathbf{K}_{bb,jj}^{-1(2)}} \\ &= \frac{\mathbf{K}_{bb,jj}^{(1)} \mathbf{u}_{b,j}^{(1)} + \mathbf{K}_{bb,jj}^{(2)} \mathbf{u}_{b,j}^{(2)}}{\mathbf{K}_{bb,jj}^{(1)} + \mathbf{K}_{bb,jj}^{(2)}} \\ &= \hat{\mathbf{u}}_{b,j}^{(2)} = \hat{\mathbf{u}}_{b,j}\end{aligned}$$

□ **REMARQUE 5.1** Notons que le retour à un problème homogène à travers l'égalisation des coefficients $\mathbf{K}_{bb,jj}^{-1(1)}$ et $\mathbf{K}_{bb,jj}^{-1(2)}$ dans les expressions (5.2) permet de retrouver les résultats obtenus en partie 4.1.2.2 (remarque 4.1) avec la pondération topologique.

□ REMARQUE 5.2 On observe également, à l'instar de la remarque 4.2, que les composantes du champ $\hat{\mathbf{u}}_b$ peuvent être obtenues directement à partir de la donnée des champs d'interface $\mathbf{u}_b^{(s)}$ en utilisant les opérateurs d'assemblages pondérés primaux $\tilde{\mathbf{A}}^{(s)}$. D'après ce qui précède, il vient en effet :

$$\begin{aligned}\hat{\mathbf{u}}_b &= \tilde{\mathbf{A}}^{(1)} \mathbf{u}_b^{(1)} + \tilde{\mathbf{A}}^{(2)} \mathbf{u}_b^{(2)} \\ \hat{\mathbf{u}}_b^{(1)} &= \overline{\mathbf{A}}^{(1)T} \hat{\mathbf{u}}_b \\ \hat{\mathbf{u}}_b^{(2)} &= \overline{\mathbf{A}}^{(2)T} \hat{\mathbf{u}}_b\end{aligned}$$

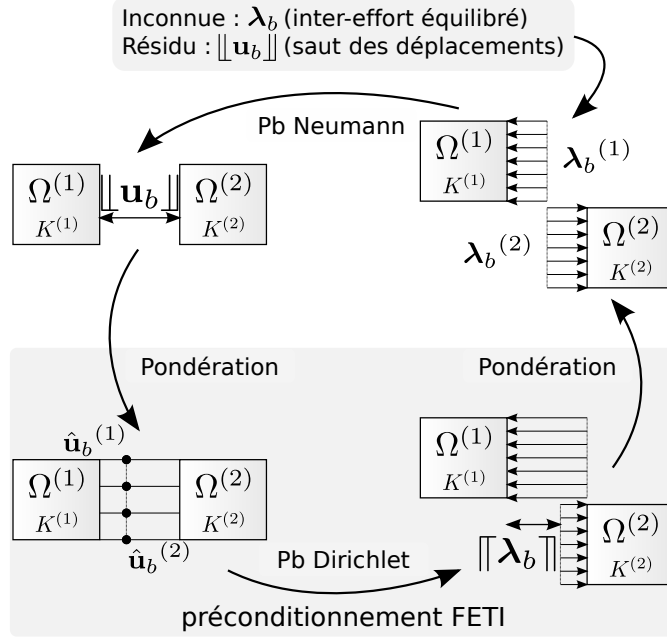
On remarque ainsi que les corrections de déplacement $\delta\hat{\mathbf{u}}_b^{(s)}$ données par (5.2) sont d'autant plus importantes que la rigidité de la sous-structure correspondante est faible. Celles-ci conduisent à l'obtention de $\hat{\mathbf{u}}_b$ par une moyenne pondérée des champs $\mathbf{u}_b^{(s)}$ en fonction de la rigidité apparente de la sous-structure associée. Le champ admissible sera donc d'autant plus proche de celui d'une sous-structure donnée que sa rigidité apparente sera grande ce qui est mécaniquement consistant étant donné que la déformation d'une sous-structure est, à inter-effort d'interface constant, inversement proportionnel à sa rigidité. Autrement dit, les champs $\mathbf{u}_b^{(s)}$ étant associés à un champ d'inter-effort $\boldsymbol{\lambda}_b^{(s)} = \hat{\boldsymbol{\lambda}}_b^{(s)}$ à l'équilibre, les termes correctifs $\delta\hat{\mathbf{u}}_b^{(s)}$ à ajouter pour obtenir le champ d'interface continu $\hat{\mathbf{u}}_b$ doivent engendrer des inter-efforts additionnels perturbant le moins possible le champ d'inter-effort $\boldsymbol{\lambda}_b^{(s)}$ initial.

Enfin, la figure 5.4 représente l'interprétation mécanique d'une itération de l'algorithme FETI et l'exploitation de la phase de préconditionnement en vue de l'obtention des champs $\hat{\mathbf{u}}_b^\diamond$.

5.2.1.2. Approche primale

Rappelons de même que la formulation de l'approche primale n'assure pas l'équilibre des inter-efforts d'interface $\boldsymbol{\lambda}_b^\diamond$ au cours des itérations, de sorte que la phase d'estimation d'erreur parallèle nécessite la détermination préalable d'un champ équilibré $\hat{\boldsymbol{\lambda}}_b^\diamond$. Ce dernier est construit de manière similaire à l'approche duale, en ajoutant à $\boldsymbol{\lambda}_b^\diamond$ des termes correctifs $\delta\hat{\boldsymbol{\lambda}}_b^\diamond$ calculés à partir de la donnée du saut d'inter-efforts $\llbracket \boldsymbol{\lambda}_b \rrbracket$:

$$\begin{aligned}\hat{\boldsymbol{\lambda}}_b^\diamond &= \boldsymbol{\lambda}_b^\diamond + \delta\hat{\boldsymbol{\lambda}}_b^\diamond = \boldsymbol{\lambda}_b^\diamond - \tilde{\mathbf{A}}^\diamond T \llbracket \boldsymbol{\lambda}_b \rrbracket \\ \tilde{\mathbf{A}}^\diamond \hat{\boldsymbol{\lambda}}_b^\diamond &= \mathbf{0}\end{aligned}$$



□ FIG. 5.4. *Interprétation mécanique d'une itération de l'algorithme FETI*

L'influence des opérateurs $\tilde{\mathbf{A}}^{(s)}$ sur les i -ème composantes $\lambda_{b,j}^{(1)}$ et $\lambda_{b,j}^{(2)}$ du champ d'inter-effort de part et d'autre de l'interface s'écrit alors :

$$\left(\tilde{\mathbf{A}}^{(1)T} \llbracket \lambda_b \rrbracket \right)_i = \frac{\mathbf{K}_{bb,jj}^{(1)}}{\mathbf{K}_{bb,jj}^{(1)} + \mathbf{K}_{bb,jj}^{(2)}} (\lambda_{b,j}^{(1)} + \lambda_{b,j}^{(2)}) = -\delta \hat{\lambda}_{b,j}^{(1)} \quad (5.3a)$$

$$\left(\tilde{\mathbf{A}}^{(2)T} \llbracket \lambda_b \rrbracket \right)_i = \frac{\mathbf{K}_{bb,jj}^{(2)}}{\mathbf{K}_{bb,jj}^{(1)} + \mathbf{K}_{bb,jj}^{(2)}} (\lambda_{b,j}^{(1)} + \lambda_{b,j}^{(2)}) = -\delta \hat{\lambda}_{b,j}^{(2)} \quad (5.3b)$$

D'où :

$$\begin{aligned} \hat{\lambda}_{b,j}^{(2)} = \lambda_{b,j}^{(2)} + \delta \hat{\lambda}_{b,j}^{(2)} &= \frac{\mathbf{K}_{bb,jj}^{(1)} \lambda_{b,j}^{(2)} - \mathbf{K}_{bb,jj}^{(2)} \lambda_{b,j}^{(1)}}{\mathbf{K}_{bb,jj}^{(1)} + \mathbf{K}_{bb,jj}^{(2)}} \\ &= \frac{\mathbf{K}_{bb,jj}^{-1(2)} \lambda_{b,j}^{(2)} - \mathbf{K}_{bb,jj}^{-1(1)} \lambda_{b,j}^{(1)}}{\mathbf{K}_{bb,jj}^{-1(1)} + \mathbf{K}_{bb,jj}^{-1(2)}} \\ &= -\hat{\lambda}_{b,j}^{(1)} = \hat{\lambda}_{b,j} \end{aligned}$$

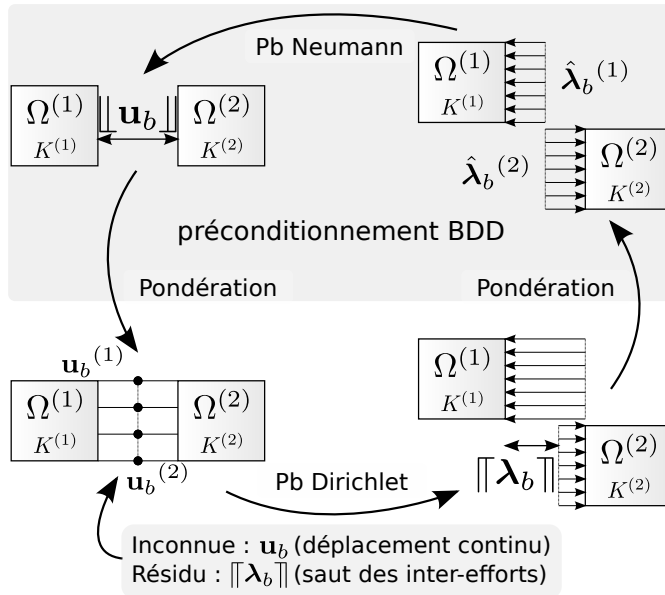
□ REMARQUE 5.3 *De même, le choix $\mathbf{K}_{bb,jj}^{(1)} = \mathbf{K}_{bb,jj}^{(2)}$ permet de retrouver les résultats de la partie 4.1.2.1 (remarque 4.3) obtenus à l'aide des opérateurs d'assemblage réalisant une pondération topologique.*

□ REMARQUE 5.4 Observons également que l'utilisation des opérateurs d'assemblages pondérés duaux $\tilde{\mathbf{A}}^{(s)}$ sur les champs $\boldsymbol{\lambda}_b$ permet d'obtenir directement le champ équilibré $\hat{\boldsymbol{\lambda}}_b$, ce qui étend la remarque 4.4 au cas hétérogène. On a ainsi les relations :

$$\begin{aligned}\hat{\boldsymbol{\lambda}}_b &= \tilde{\mathbf{A}}^{(1)} \boldsymbol{\lambda}_b^{(1)} + \tilde{\mathbf{A}}^{(2)} \boldsymbol{\lambda}_b^{(2)} \\ \hat{\boldsymbol{\lambda}}_b^{(1)} &= \underline{\mathbf{A}}^{(1)T} \hat{\boldsymbol{\lambda}}_b \\ \hat{\boldsymbol{\lambda}}_b^{(2)} &= \underline{\mathbf{A}}^{(2)T} \hat{\boldsymbol{\lambda}}_b\end{aligned}$$

On remarque ici qu'à l'opposé du cas précédent, les corrections $\delta\hat{\boldsymbol{\lambda}}_b^{(s)}$ données par (5.3) sont proportionnelles à la rigidité apparente de la sous-structure. On obtient alors un champ d'inter-efforts équilibrés $\hat{\boldsymbol{\lambda}}_b$ par une moyenne pondérée des champs $\boldsymbol{\lambda}_b^{(s)}$ en fonction de la souplesse apparente des sous-structures associées, de sorte que $\hat{\boldsymbol{\lambda}}_b$ reste proche des inter-efforts provenant des sous-structures les plus souples. Ce choix respecte également les principes de la mécanique étant donné que l'effort d'interface développé par une sous-structure soumise à un déplacement donné est proportionnel à sa raideur. Ainsi, à partir des champs $\boldsymbol{\lambda}_b^{(s)}$ provenant de l'application d'un déplacement continu d'interface $\mathbf{u}_b^{(s)} = \hat{\mathbf{u}}_b^{(s)}$, les corrections $\delta\hat{\boldsymbol{\lambda}}_b^{(s)}$ doivent être choisies de manière à engendrer des déplacements additionnels à l'interface perturbant le moins possible la continuité du champ $\mathbf{u}_b^{(s)}$ initial.

Enfin, la figure 5.5 représente l'interprétation mécanique d'une itération de l'algorithme BDD et l'exploitation de la phase de préconditionnement en vue de l'obtention des champs $\hat{\boldsymbol{\lambda}}_b^\diamond$.



□ FIG. 5.5. Interprétation mécanique d'une itération de l'algorithme BDD

5.2.2. Illustration numérique

La figure 5.6 représente l'évolution, pour les différents cas de discrétisation générés, de l'estimation e_{rdc}^{ddm} en fonction du résidu du solveur FETI équipé des préconditionneurs précédemment présentés. On remarque une convergence très rapide de e_{rdc}^{ddm} , allant de 1 itération dans les cas les plus favorables (correspondant à une décomposition en 5 sous-domaines), à 5 itérations dans ceux les plus défavorables (décomposition en 36 sous-domaines), lorsqu'il en faut généralement une quinzaine pour atteindre la convergence du solveur. En l'occurrence, ce type de préconditionneur s'avère particulièrement efficace quant à la prédiction initiale du champ d'interface recherché, de telle sorte que l'erreur due à la discrétisation devient très vite prépondérante par rapport à celle due à la non-vérification des conditions de raccord entre sous-domaines. Il apparaît ainsi que les performances de notre méthode en matière de convergence sont préservées (et même parfois améliorées) par le choix de préconditionneurs adaptés au cas des problèmes hétérogènes .

5.3. PROCÉDURES DE CONSTRUCTION DE CHAMPS ADMISSIBLES POUR DES PROBLÈMES HÉTÉROGÈNES

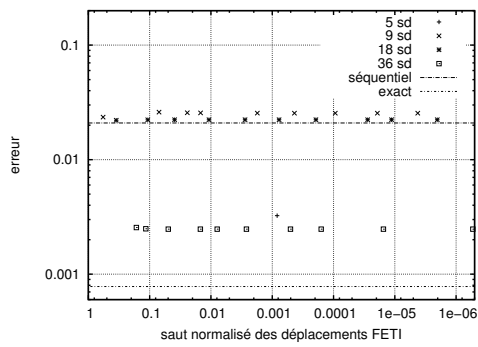
A partir des idées développées dans la mise en œuvre de la classe de préconditionneurs hétérogènes explicitée en 5.2.1, on propose ici une extension simple de la méthode d'estimation d'erreur en relation de comportement au cas des problèmes hétérogènes afin de remédier aux défauts précédemment observés sur l'estimateur séquentiel e_{rdc}^{seq} .

5.3.1. Principes

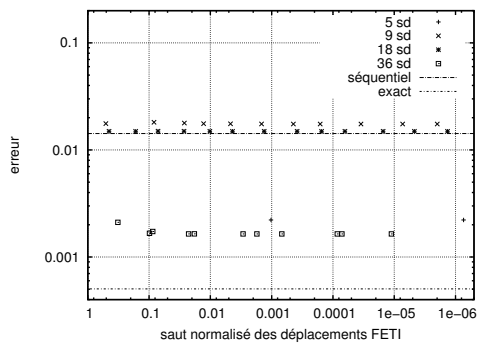
Avant toute chose, précisons que le cadre de développement de notre extension ici présentée est relatif aux problèmes dont l'hétérogénéité se situe au niveau du module d'élasticité. Précisons également que les développements sous-jacents ont été réalisés dans le cadre de la méthode de reconstruction de champs admissibles de type EET présentée en partie 1.5.2.1. Les points essentiels de cette méthode, dont la compréhension est nécessaire en vue de présenter l'extension ici proposée, sont détaillés ci-après.

Le concept initial de ce type de technique est de réaliser un équilibrage élément par élément du champ de contraintes éléments finis σ_h :

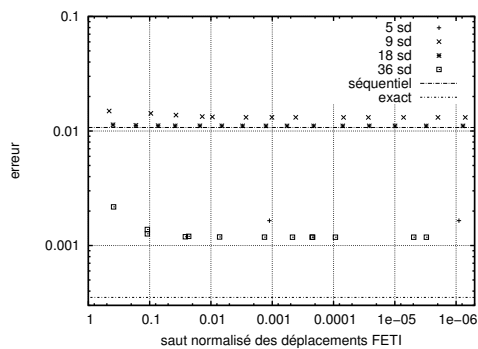
1. en construisant en premier lieu un champ d'inter-efforts équilibrés \hat{F}_h sur les frontières de chaque élément du maillage ;



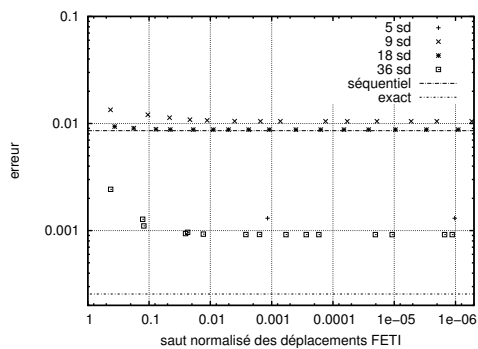
(a) $h = L/18$



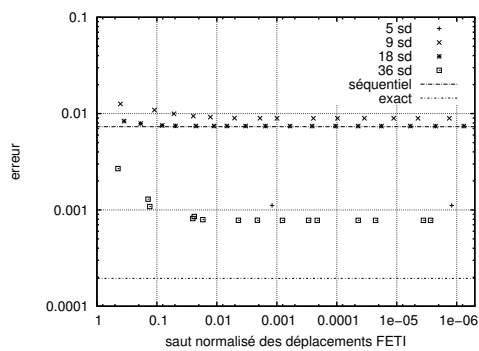
(b) $h = L/36$



(c) $h = L/60$



(d) $h = L/90$



(e) $h = L/120$

□ FIG. 5.6. Évolution de $e_{\text{rdc}}^{\text{ddm}}$ en fonction de la convergence du solveur FETI

2. en cherchant par la suite un champ statiquement admissible $\hat{\sigma}_h$ solution des problèmes élémentaires suivants, où les champs \hat{F}_h précédemment déterminés sont imposés comme conditions aux limites de Neumann afin de satisfaire à l'équilibre

des inter-efforts entre éléments :

$$\begin{aligned} \operatorname{div}(\hat{\sigma}_h|_E) + f &= 0 && \text{sur } (E) \\ \hat{\sigma}_h|_E \cdot n_E &= \delta_E \hat{F}_h && \text{sur } (\partial E) \end{aligned}$$

Notons en premier lieu que la résolution des problèmes locaux ci-dessus ne semble pas poser de problèmes dans le cas hétérogène ici étudié étant donné que les éléments restent localement homogènes. Se pose en revanche la question de la détermination du meilleur champ d'inter-effort \hat{F}_h étant donné que les interfaces entre comportements matériaux sont justement confondues avec les bords des éléments du maillage.

Dans sa version initiale, la méthode EET (cf. 1.5.2.1) consiste à rechercher les champs d'inter-efforts \hat{F}_h à l'aide d'une condition de prolongement dite *forte* (1.64) reliant le champ admissible $\hat{\sigma}_h$ à son homologue éléments finis σ_h , permettant alors d'exprimer \hat{F}_h en fonction de σ_h et des données du problème à travers l'équation (1.65) :

$$\int_{\partial E} \delta_E \hat{F}_h \varphi_i d\Gamma = \sum_{\Gamma_j^E \in \mathcal{F}_h^E(E) \cap \mathcal{F}_h^S(i)} \int_{\Gamma_j^E} \delta_E \hat{F}_h \varphi_i d\Gamma = \int_E (\sigma_h : \varepsilon(\varphi_i) - f \varphi_i) dE, \\ \forall E \in \mathcal{E}_h, \forall i \in \mathcal{N}_h^E(E)$$

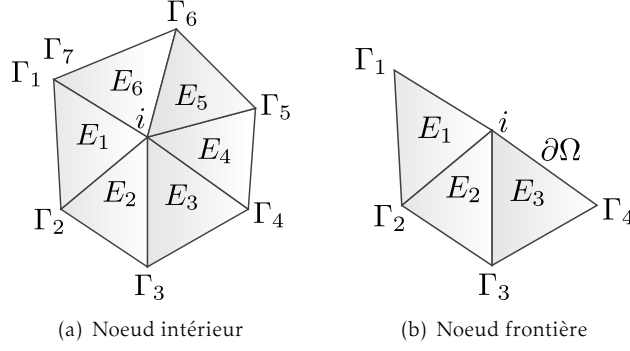
L'exploitation pratique de (1.65) pour chaque fonction de forme φ_i du maillage conduit à rechercher les valeurs nodales généralisées $\hat{\mathbf{F}}_{h,i,\Gamma_j^E}^\varphi = \int_{\Gamma_j^E} \delta_E \hat{F}_h \varphi_i d\Gamma$ de \hat{F}_h sous la forme de problèmes locaux définis sur des « patches » d'éléments centrés aux noeuds i et coïncidant avec le support $\omega_{h,i}^S$ de φ_i . En notant E_i ($i = 1 \dots n$) les éléments de Ω_h contenus dans $\omega_{h,i}^S$ et ordonnés dans le sens direct, et Γ_k ($k = 1 \dots n + 1$) les faces $\Gamma_j^E \in \mathcal{F}_h^S(i)$ également ordonnées dans le sens direct et vérifiant $\Gamma_i = \partial E_{i-1} \cap \partial E_i$ (cf fig. 5.7), les composantes $\hat{\mathbf{F}}_{h,i,\Gamma_k}^\varphi$ sont alors solutions de l'équation :

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{F}}_{h,i,\Gamma_1}^\varphi - \hat{\mathbf{F}}_{h,i,\Gamma_2}^\varphi &= \int_{E_1} (\sigma_h : \varepsilon(\varphi_i) - f \varphi_i) dE \\ \hat{\mathbf{F}}_{h,i,\Gamma_2}^\varphi - \hat{\mathbf{F}}_{h,i,\Gamma_3}^\varphi &= \int_{E_2} (\sigma_h : \varepsilon(\varphi_i) - f \varphi_i) dE \\ &\vdots \\ \hat{\mathbf{F}}_{h,i,\Gamma_n}^\varphi - \hat{\mathbf{F}}_{h,i,\Gamma_{n+1}}^\varphi &= \int_{E_n} (\sigma_h : \varepsilon(\varphi_i) - f \varphi_i) dE \end{aligned} \quad (5.4)$$

où $\Gamma_{n+1} = \Gamma_1$ dans le cas d'un noeud intérieur à Ω_h .

Par la suite, dans le cas où une ou deux faces Γ_k $k \in \{1, n + 1\}$ coïncident avec $\partial_f \Omega$, l'imposition de

$$\hat{\mathbf{F}}_{h,i,\Gamma_k}^\varphi = \int_{\Gamma_k} g \varphi_i d\Gamma \quad \text{sur } \Gamma_k \subset \partial_f \Omega$$



□ FIG. 5.7. Problèmes "patch"

assure alors la détermination de l'ensemble des valeurs $\hat{\mathbf{F}}_{h,i,\Gamma_k}^\varphi$. Dans le cas contraire (ie. lorsque le noeud i est intérieur ou sur la frontière $\partial_u\Omega$), le système (5.4) est sous-déterminé et ne définit qu'un espace d'admissibilité $\mathcal{F}_{\text{ad},h,i}^\varphi$ pour le vecteur $\hat{\mathbf{F}}_{h,i}^\varphi$ de composantes $\hat{\mathbf{F}}_{h,i,\Gamma_j^E}^\varphi$. $\hat{\mathbf{F}}_{h,i}^\varphi$ est alors complètement déterminé à l'aide d'une minimisation sous contraintes d'une fonctionnelle aux moindres carrés :

$$\min_{\hat{\mathbf{F}}_{h,i}^\varphi \in \mathcal{F}_{\text{ad},h,i}^\varphi} \mathcal{L}_{h,i}^\varphi(\hat{\mathbf{F}}_{h,i}^\varphi) \quad \text{avec} \quad \mathcal{L}_{h,i}^\varphi(\hat{\mathbf{F}}_{h,i}^\varphi) = \sum_{\Gamma_j^E \in \mathcal{F}_h^S(i)} \left(\frac{\hat{\mathbf{F}}_{h,i,\Gamma_j^E}^\varphi - \mathbf{F}_{h,i,\Gamma_j^E}^m}{d_{\Gamma_j^E}} \right)^2$$

$$\text{et} \quad \mathbf{F}_{h,i,\Gamma_j^E}^m = \int_{\Gamma_j^E} \frac{1}{2} [\delta_E \sigma_{h|E} \cdot n_E + \delta_{E'} \sigma_{h|E'} \cdot n_{E'}] \varphi_i d\Gamma$$

D'un point de vue mécanique, le problème ci-dessus se résume à chercher le champ d'inter-efforts en équilibre avec les contraintes élémentaires et les forces volumiques le plus proche possible de la moyenne arithmétique des flux de contraintes éléments finis de part et d'autre des frontières des éléments.

Si un tel choix de minimisation semble convenir pour des problèmes homogènes, il semble inadapté dans le cas hétérogène, notamment en présence de fortes variations du module d'élasticité entre les éléments. Dans ce dernier cas, en considérant une frontière entre deux éléments coïncidant avec un saut de module d'élasticité, l'inter-effort admissible à champ de déplacement fixé doit être plus proche du flux de contraintes développé par l'élément adjacent de souplesse la plus grande. En suivant une démarche similaire à celle de la partie 5.2.1.2, on propose ainsi de pondérer les moyennes arithmétiques $\mathbf{F}_{h,i,\Gamma_j^E}^m$ par l'inverse du module d'élasticité E_E et $E_{E'}$ des éléments E et E' correspondants :

$$\tilde{\mathbf{F}}_{h,i,\Gamma_j^E}^m = \int_{\Gamma_j^E} \frac{1}{E_E^{-1} + E_{E'}^{-1}} [E_E^{-1} \delta_E \sigma_{h|E} \cdot n_E + E_{E'}^{-1} \delta_{E'} \sigma_{h|E'} \cdot n_{E'}] \varphi_i d\Gamma \quad (5.5)$$

On définit alors une nouvelle fonctionnelle $\tilde{\mathcal{L}}_{h,i}^\varphi$ comme :

$$\min_{\hat{\mathbf{F}}_{h,i}^\varphi \in \mathcal{F}_{\text{ad},h,i}^\varphi} \tilde{\mathcal{L}}_{h,i}^\varphi(\hat{\mathbf{F}}_{h,i}^\varphi) \quad \text{avec} \quad \tilde{\mathcal{L}}_{h,i}^\varphi(\hat{\mathbf{F}}_{h,i}^\varphi) = \sum_{\Gamma_j^E \in \mathcal{F}_h^S(i)} p_{\Gamma_j^E} \left(\frac{\hat{\mathbf{F}}_{h,i,\Gamma_j^E}^\varphi - \tilde{\mathbf{F}}_{h,i,\Gamma_j^E}^m}{d_{\Gamma_j^E}} \right)^2 \quad (5.6)$$

$$\text{et} \quad p_{\Gamma_j^E} = \max\left(\frac{E_E}{E_{E'}}, \frac{E_{E'}}{E_E}\right) \quad (\text{en notant } \Gamma_j^E = \partial E \cap \partial E')$$

où le terme de pénalisation $p_{\Gamma_j^E}$ permet de minimiser en priorité les termes associés aux hétérogénéités les plus fortes.

□ **REMARQUE 5.5** Notons que la variante ici présentée semble s'étendre également aux récentes constructions de type EESPT qui font également usage de problèmes locaux de minimisation sous contraintes associés aux mêmes types de fonctionnelles que $\mathcal{L}_{h,i}^\varphi(\hat{\mathbf{F}}_{h,i}^\varphi)$.

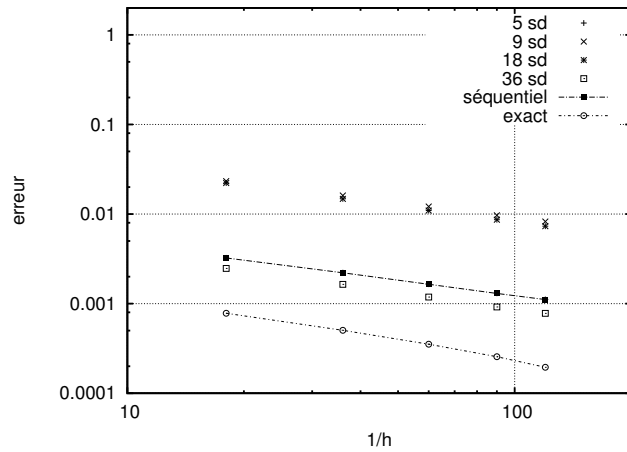
5.3.2. Illustration numérique

5.3.2.1. h -convergence

Afin d'évaluer les apports de la méthode de reconstruction des champs admissibles ainsi introduite, désignée par la suite sous l'appellation *reconstruction pondérée*, celle-ci est employée dans un premier temps au sein des procédures d'estimation d'erreur sur l'étude présentée en partie 5.1.

La figure 5.8 représente l'évolution de e_h et des estimateurs $e_{\text{rdc}}^{\text{seq}}$ et $e_{\text{rdc}}^{\text{ddm}}$ nouvellement obtenus. On constate en premier lieu que la reconstruction pondérée des champs statiquement admissibles ici proposée permet une amélioration substantielle de $e_{\text{rdc}}^{\text{seq}}$, lui conférant une précision similaire à celle obtenue avec les cas de décompositions à sous-structures homogènes. En outre, l'allure des contributions élémentaires $e_{\text{rdc},E}^{\text{seq}}$ (fig. 5.9) et leur comparaison avec celles obtenues par la méthode de construction standard (rappeées sur la figure) au voisinage des interfaces entre inclusions confirme cette observation.

Remarquons cependant que l'amélioration ainsi apportée à l'estimateur parallèle ne modifie quasiment pas les résultats obtenus dans le cas de décompositions à sous-structures hétérogènes ($\mathcal{N}_{\text{sd}} = 9$ et 18), pour lesquelles l'erreur de discrétisation est à nouveau largement surestimée. Sur ce point précis, l'observation des contributions élémentaires $e_{\text{rdc},E}^{\text{ddm}}$ indique une concentration des erreurs au niveau des interfaces entre sous-domaines, et notamment au voisinage des points d'hétérogénéités internes aux sous-structures. Étant donné que l'amélioration proposée repose sur une modification d'une fonction coût qui n'est pas utilisée pour la détermination des inter-efforts entre éléments adjacents aux interfaces, l'influence de la construction *pondérée* semble alors quasi-inexistante concernant les contributions $e_{\text{rdc},E}^{\text{ddm}}$ ici surestimées. Aussi, la piètre performance obtenue dans les deux cas de figure précédents est très probablement à



□ FIG. 5.8. h -convergence de l'erreur e_h et des estimateurs $e_{\text{rdc}}^{\text{seq}}$ et $e_{\text{rdc}}^{\text{ddm}}$ en présence de la procédure de reconstruction pondérée

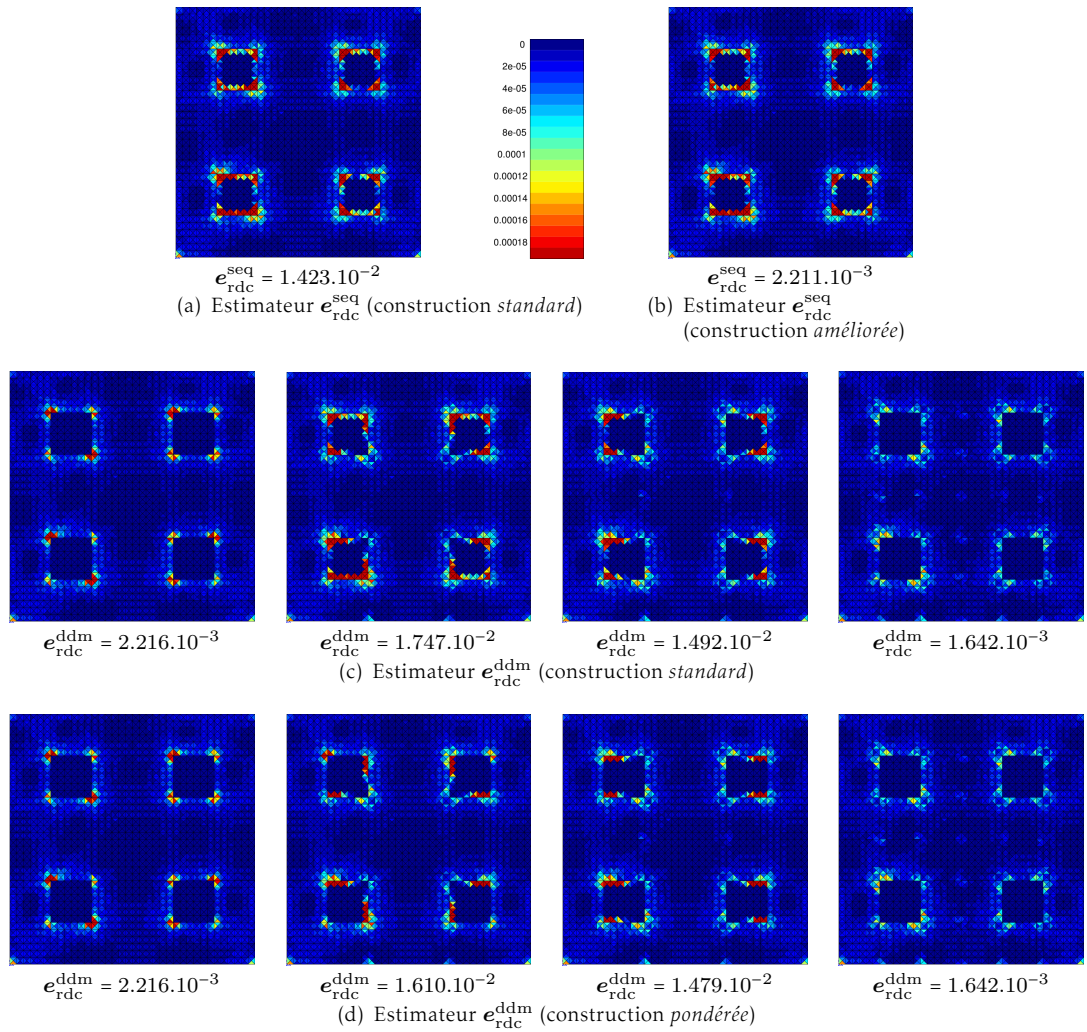
relier au choix d'une représentation continue des champs d'inter-efforts admissibles à l'interface, question déjà largement discutée en partie 3.4. Sur ce dernier point, un axe de réponse à examiner serait d'utiliser la représentation discontinue des champs $\hat{F}_{bh}^{(s)}$ introduite en 3.4.2.1 associée à une norme de type L^2 (3.36a) pondérée par le module d'élasticité des éléments du sous-domaine adjacents à l'interface.

5.3.2.2. Évolution en fonction du rapport E_1/E_2

Intéressons nous en dernier lieu à la sensibilité de l'estimation d'erreur en fonction de l'intensité de l'hétérogénéité portant sur les modules d'élasticité des différentes zones.

Pour ce faire, reprenons le problème 5.1 en fixant les paramètres E_1 , ν_1 et ν_2 à ($E_1 = 2 \cdot 10^6$ Pa, $\nu_1 = \nu_2 = 0.3$) et en affectant à E_2 les valeurs 2, 20, 200, $2 \cdot 10^3$, $2 \cdot 10^4$, $2 \cdot 10^5$, $4 \cdot 10^5$, $1 \cdot 10^6$ et $2 \cdot 10^6$ Pa. Les estimateurs séquentiels et parallèles (pour les 4 cas de décomposition précédents) sont alors calculés sur une discrétisation de taille de maille $h = L/18$.

La figure 5.10(a) (resp. 5.10(b)) représente l'évolution des grandeurs e_h , $e_{\text{cr}}^{\text{seq}}$ et $e_{\text{cr}}^{\text{ddm}}$ en présence du processus de reconstruction *standard* (resp. *pondéré*). Les résultats obtenus confirment à nouveau les observations précédentes. Ainsi, la construction *pondérée* proposée permet d'obtenir un comportement de l'estimateur séquentiel similaire à celui de l'erreur vraie et des estimateurs parallèles, alors que la version initiale de celle-ci conduit à une surestimation de e_h de manière proportionnelle à l'intensité de l'hétérogénéité.

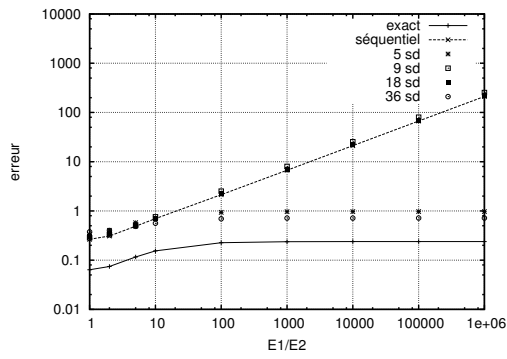


□ FIG. 5.9. Carte des contributions élémentaires $e_{\text{rdc}}^{\text{seq}}$ et $e_{\text{rdc}}^{\text{ddm}}$ en fonction des cas de décomposition pour les deux méthodes de reconstruction des champs statiquement admissibles ($h = L/32$)

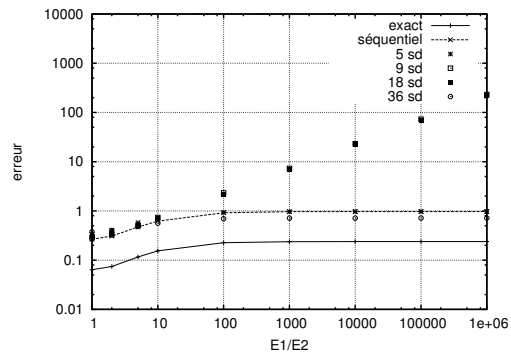
5.4. CONCLUSION PARTIELLE

Ce court chapitre a permis l'étude de la mise en œuvre et des performances de l'estimation d'erreur par décomposition de domaine sur des problèmes hétérogènes.

Dans un premier temps, à partir d'une étude portant sur divers cas de découpage de la structure initiale, il a été constaté que les décompositions conduisant à des sous-structures hétérogènes étaient à proscrire car elles conduisaient à une surestimation notable de l'erreur de discrétisation. Un intérêt additionnel de la décomposition de do-



(a) Construction *standard*



(b) Construction *pondérée*

□ FIG. 5.10. Évolution de l'erreur e_h et des estimateurs $e_{\text{rdc}}^{\text{seq}}$ et $e_{\text{rdc}}^{\text{ddm}}$ en fonction du rapport E_1/E_2 ($h = L/18$)

maine réside alors dans la possibilité d'un découpage d'une structure hétérogène initiale en un ensemble de sous-structures homogènes, sur lesquelles l'estimateur d'erreur parallèle ici développé fournit des résultats d'une précision nettement meilleure. Il a d'autre part été constaté que l'utilisation de préconditionneurs adaptés à la résolution par décomposition de domaine des problèmes hétérogènes permettait de conserver les propriétés de convergence de l'estimateur d'erreur $e_{\text{rdc}}^{\text{ddm}}$ observées au chapitre 4.

Dans un second temps, le problème étudié a mis en évidence une défaillance de la méthode d'estimation d'erreur séquentielle utilisée tant lors des calculs sur les sous-structures qu'à des fins de comparaison — défaillance se traduisant par une surestimation non négligeable de l'erreur de discrétisation. Il a alors été proposé, dans le cas particulier où l'hétérogénéité porte sur les modules d'élasticité des différentes zones du problème, une correction de la procédure de construction des champs admissibles utilisée par l'estimateur séquentiel. En outre, cette correction a permis par la suite d'améliorer substantiellement la qualité de l'estimation séquentielle.

L'observation des points précédents ouvre plusieurs perspectives. Tout d'abord, le comportement des estimateurs pourrait être étudié en présence d'autres types d'hétérogénéités, afin d'améliorer en conséquence les procédures séquentielles de reconstruction de champs admissibles. D'autres part, il serait également intéressant d'aboutir à la formulation d'un estimateur d'erreur parallèle dédié au problèmes hétérogènes dont la précision soit indépendante de la présence potentielle d'hétérogénéités au sein des sous-domaines. Au vu des résultats de la partie 5.3.2.1, il semblerait que l'axe de recherche sur cette seconde problématique se situe au niveau du choix de la représentation continue des inter-efforts admissibles.

CONCLUSION ET PERSPECTIVES

LE développement d'outils de contrôle et d'adaptation des simulations numériques, toujours plus nombreuses dans le milieu de l'ingénierie, apparaît comme une condition *sine qua non* de leur généralisation dans le cadre des phases de dimensionnement et de certification. Dans ce contexte, il nous semble nécessaire d'adapter les méthodes d'estimation d'erreur au cadre des techniques de résolution parallèle de problèmes complexes et volumineux (qui sont ainsi particulièrement susceptibles de cumuler les erreurs). Réciproquement, il apparaît également nécessaire d'exploiter les techniques de parallélisme afin de pouvoir généraliser la pratique de l'estimation d'erreur (qui s'accompagne généralement d'un sur-coût numérique important) au cas des problèmes de grande taille. Partant du constat que la littérature reste assez pauvre en travaux exploitant les apports réciproques entre méthodes d'estimation des erreurs de discrétisation et de décomposition de domaine, notre étude tente d'y apporter quelques éléments de réponse. Pour cela, l'approche retenue consiste en la mise en place, au sein des méthodes de résolution par décomposition de domaine sans recouvrement, d'une procédure d'estimation utilisant le concept d'erreur en relation de comportement.

Dans un premier temps, nous avons proposé une extension générique de l'erreur en relation de comportement au cadre de travail des décompositions de domaine sans recouvrement. Celle-ci permet notamment la conservation de la propriété de borne supérieure, héritée du théorème d'hypercerce de *Prager-Synge*, dans le cas où les conditions d'interface ne sont pas satisfaites. Pour se faire, la procédure nécessite en premier lieu la détermination de champs continus d'interface admissibles (c'est à dire vérifiant les conditions de continuité des déplacements et d'équilibre des inter-efforts, ainsi que l'équilibre des sous-structures par rapport aux modes rigides). En outre, cette détermination peut s'effectuer à partir de la donnée de champs discrets vérifiant le même type de conditions. En second lieu, les champs précédemment obtenus sont employés dans la détermination d'un couple de solutions en déplacement et en contrainte admissibles à l'échelle globale, par résolution parallèle de problèmes posés sur chaque sous-structure et en utilisant pour cela les techniques de reconstruction développées dans le cas séquentiel. Les exemples numériques traités montrent que les résultats donnés par l'estimateur parallèle ainsi réalisé sont peu sensibles à la décomposition et restent très proches de ceux obtenus par des procédures séquentielles reposant sur le même concept. Sur certains cas particuliers, on observe cependant une surestimation de l'erreur, principalement lorsque l'interface est très irrégulière ou bien qu'elle traverse des zones de singularité des champs de contraintes. Ayant attribué cette perte

de performance au choix d'une base d'approximation continue pour représenter l'inter-effort admissible à l'interface, nous en avons proposé une nouvelle construction à l'aide d'une approximation discontinue par éléments couplée à la minimisation d'une fonction coût. Au vu des résultats obtenus, le choix d'une norme adéquate demeure une question ouverte pour laquelle des pistes de réponse sont peut-être à trouver dans l'équilibrage des moments induits à l'interface, ou bien dans une analyse systématique de la topologie de celle-ci.

Dans un deuxième temps, nous avons adapté notre technique générique d'estimation d'erreur parallèle au cas des approches duales et primale de décomposition de domaine. Le point clé se trouve ici dans la construction de champs discrets d'interface vérifiant les conditions de continuité ou d'inter-équilibre. Nous avons montré que les informations nécessaires à une telle construction sont déjà disponibles au niveau des préconditionneurs équipant usuellement les approches de type FETI et BDD, de sorte que l'étape peut ainsi être réalisée à moindre coût. Les exemples numériques traités montrent que la contribution due à la non vérification des conditions d'interface décroît rapidement, de sorte que l'estimation d'erreur et les contributions élémentaires associées se stabilisent généralement en quelques itérations du solveur, et bien avant convergence de ce dernier. Une perspective immédiate réside alors dans le développement de nouveaux critères d'arrêt des solveurs reposant sur la convergence, non plus du résidu d'interface, mais de l'estimation d'erreur, étant entendu qu'une estimation d'erreur complète à chaque itération du solveur serait beaucoup trop coûteuse. Parmi les pistes à explorer, citons le développement d'un terme d'erreur à l'interface dédié, ou bien la prédiction du résidu nécessaire à la convergence à l'aide d'une analyse préliminaire ou bien d'analyses simplifiées à chaque itération. Une seconde perspective concerne l'extension de la méthode au cadre de travail d'autres approches de décomposition de domaine, parmi lesquelles les approches hybrides (notamment FETI-DP et BDDC) et mixtes.

Dans un troisième temps, nous avons étendu le cadre d'application de notre estimateur parallèle aux problèmes hétérogènes. On constate en premier lieu que les préconditionneurs adaptés aux problèmes de ce type permettent de conserver les propriétés de convergence précédemment observées. Du point de vue de l'estimation proprement dite, on remarque que les décompositions conduisant à des sous-structures homogènes permettent d'obtenir les résultats les plus pertinents, généralement supérieurs à ceux obtenus par les procédures séquentielles. En outre, il semble que ceux-ci s'expliquent en partie par l'action du préconditionneur. En second lieu, ayant constaté une défaillance des procédures séquentielles conduisant à une sur-estimation de l'erreur, on propose une extension de ces procédures aux cas hétérogènes, permettant ainsi de restaurer leurs performances habituelles. Cependant, cette extension ne suffit pas à restaurer le même type de performances dans le cas d'une décomposition en sous-structures hétérogènes, ce qui paraît imputable, ici également, à l'approximation continue des inter-efforts à l'interface. Sur ce point précis, une perspective consiste en la mise en place d'une approximation au moins discontinue au passage des hétérogénéités.

Enfin, l'ensemble des méthodes présentées ont été implantées dans un code éléments finis orienté objet (*ZeBuLon*) avec une réflexion sur la hiérarchisation des différentes classes. Il en résulte un outil extensible offrant un cadre de travail couplant les différents éléments étudiés dans cette thèse et permettant de nombreuses évolutions.

En sus des ouvertures précédemment mentionnées, ces travaux suscitent également de nombreuses perspectives plus générales. L'un des intérêts de l'estimation des erreurs de discrétisation réside en effet dans la mise en place de procédures d'*adaptativité*. Celles-ci font appel à des techniques de remaillage [BELLENGER et P. COOREVITS, 2007 ; DíEZ et Antonio HUERTA, 1999 ; P. LADEVEZE, J.-P. PELLE et Ph. ROUGEOT, 1991] permettant de raffiner la discrétisation en fonction des contributions locales à l'erreur. Dans le cadre de travail qui est le notre, la phase de remaillage peut alors s'envisager selon deux approches. On peut opter pour une procédure au niveau séquentiel suivie d'une étape de redécoupage, aboutissant à une approche qui semble la plus simple à mettre en œuvre et permet un équilibrage des charges de calcul (reliées au nombre d'éléments par sous-domaine) immédiat. Une autre approche plus intéressante consiste à effectuer la procédure de remaillage en parallèle sur chaque sous-structure, en conservant de fait la topologie de l'interface. Cette approche peut consister dans un premier temps en un remaillage conforme aux interfaces, puis être éventuellement étendue au cas non conforme (nécessitant alors des éléments de type mortar [BERNARDI, MADAY et PATERA, 1994]). Se posera également la question d'une modification des interfaces, éventuellement par échanges d'éléments, en cas de localisation du raffinement dans certains sous-domaines, afin de répartir convenablement la charge de calcul.

Par ailleurs, notons que les procédures d'adaptativité impliquent la résolution d'une séquence de calculs obtenus par raffinements successifs. Se pose alors la question de la réutilisation de l'information issue de la résolution précédente (sur maillage grossier) afin d'accélérer la résolution suivante (sur maillage raffiné). L'utilisation de solveurs de type Krylov au niveau de la résolution du problème d'interface permet d'envisager de profiter de techniques d'accélération de convergence performantes reposant sur la sélection des vecteurs de Krylov les plus représentatifs [P. GOSSELET, C. REY et J. PEBREL, 2011 ; F. RISLER et C. REY, 2000]. La difficulté provient alors de la phase de remaillage qui peut modifier les opérateurs ainsi que le nombre de degrés de liberté d'interface. Une piste actuellement examinée, dans le cas d'un remaillage parallèle préservant la topologie de l'interface et le caractère conforme de la discrétisation, consiste à ré-interpoler les vecteurs de Krylov de l'ancienne base en fonction de la nouvelle discrétisation de l'interface.

Enfin, une dernière perspective réside dans l'extension des techniques présentées dans ce travail à l'estimation d'erreur sur des quantités d'intérêt locales. Les procédures associées font en effet appel à la résolution d'un second problème, dit problème *adjoint*, dont le chargement dépend de la quantité d'intérêt étudiée et qui doit être résolu de manière précise. La combinaison d'une estimation d'erreur globale sur ce problème adjoint et sur le problème de départ permet alors l'obtention de bornes sur la quantité

d'intérêt recherchée. Ces procédures reposent ainsi avant tout sur les méthodes d'estimation globales, qui ont fait l'objet des développements de cette thèse. Dans notre cadre de travail, se pose alors la question de l'influence de l'approximation continue des inter-efforts à l'interface et celle de la convergence du solveur itératif sur la qualité des bornes obtenues. En outre, nous pensons à terme que les réflexions et recherches sur les trois axes sus-mentionnés permettront des avancées significatives dans la pratique du calcul de structures. Il pourra alors être envisagé des stratégies parallèles, adaptatives et hiérarchiques, permettant non seulement de maîtriser la qualité des calculs réalisés, mais également de converger rapidement vers des solutions fines, tout en profitant pleinement de l'incroyable évolution des moyens de calcul actuels.

BIBLIOGRAPHIE

- ADAMS, R. A. et J. J. F. FOURNIER (1975). *Sobolev Spaces*. Second. T. 140. Pure and Applied Mathematics. Elsevier.
- AINSWORTH, M. (1996). « The influence and selection of subspaces for a posteriori error estimators ». Dans : *Numerische Mathematik* 73.4, p. 399. DOI : [10.1007/s002110050198](https://doi.org/10.1007/s002110050198).
- AINSWORTH, Mark et J. Tinsley ODEN (1997). « A Posteriori Error Estimators for the Stokes and Oseen Equations ». Dans : *SIAM Journal on Numerical Analysis* 34.1, p. 228. DOI : [10.1137/S0036142994264092](https://doi.org/10.1137/S0036142994264092).
- AINSWORTH, M. et J.T. ODEN (1993). « A unified approach to a posteriori error estimation using element residual methods ». Dans : *Numerische Mathematik* 65.1, p. 23–50. DOI : [10.1007/BF01385738](https://doi.org/10.1007/BF01385738).
- (1997). « A posteriori error estimation in finite element analysis ». Dans : *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 142.1-2, p. 1–88. DOI : [10.1016/S0045-7825\(96\)01107-3](https://doi.org/10.1016/S0045-7825(96)01107-3).
- ALLAIRE, G. (2008). *Analyse numérique et optimisation*. École Polytechnique. Ellipses.
- AZIZ, A.K. et I. BABUSKA (1972). *The mathematical foundations of the finite element method with applications to partial differential equations*. New York : Academic Press.
- BABUŠKA, I. et W. C. RHEINBOLDT (1978a). « A-posteriori error estimates for the finite element method ». Dans : *International Journal for Numerical Methods in Engineering* 12.10, p. 1597. DOI : [10.1002/nme.1620121010](https://doi.org/10.1002/nme.1620121010).
- (1978b). « Error estimates for adaptive finite element computation ». Dans : *SIAM journal of Numerical Analysis* 15.4, p. 736–754.
- (1979). « Analysis of optimal finite-element meshes in R^1 ». Dans : *Math. Comp.* 33.146, p. 435–463. ISSN : 0025-5718. DOI : [10.2307/2006290](https://doi.org/10.2307/2006290). URL : <http://dx.doi.org/10.2307/2006290>.
- (1982). « Computational error estimates and adaptive processes for some nonlinear structural problems ». Dans : *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 34.1-3, p. 895. DOI : [10.1016/0045-7825\(82\)90094-9](https://doi.org/10.1016/0045-7825(82)90094-9).
- BABUSKA, I. et T. STROUBOULIS (2001). *The finite element method and its reliability*. Oxford university press.
- BABUSKA, I, T STROUBOULIS et S GANGARAJ (1999). « Guaranteed computable bounds for the exact error in the finite element solution Part I : One-dimensional model problem ». Dans : *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 176.1-4, p. 51. DOI : [10.1016/S0045-7825\(99\)00330-8](https://doi.org/10.1016/S0045-7825(99)00330-8).

- BABUSKA, I., T. STROUBOULIS et C. S. UPADHYAY (1997). « A model study of the quality of a posteriori error estimators for finite element solutions of linear elliptic problems, with particular reference to the behavior near the boundary ». Dans : *International Journal for Numerical Methods in Engineering* 40.14, p. 2521. DOI : [10.1002/\(SICI\)1097-0207\(19970730\)40:14<2521::AID-NME181>3.0.CO;2-A](https://doi.org/10.1002/(SICI)1097-0207(19970730)40:14<2521::AID-NME181>3.0.CO;2-A).
- BABUŠKA, I, T STROUBOULIS et C.S UPADHYAY (1994). « A model study of the quality of a posteriori error estimators for linear elliptic problems. Error estimation in the interior of patchwise uniform grids of triangles ». Dans : *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 114.3-4, p. 307. DOI : [10.1016/0045-7825\(94\)90177-5](https://doi.org/10.1016/0045-7825(94)90177-5).
- BABUSKA, I., T. STROUBOULIS, C. S. UPADHYAY et S. K. GANGARAJ (1995). « A posteriori estimation and adaptive control of the pollution error in the h -version of the finite element method ». Dans : *International Journal for Numerical Methods in Engineering* 38.24, p. 4207. DOI : [10.1002/nme.1620382408](https://doi.org/10.1002/nme.1620382408).
- BABUŠKA, I., T. STROUBOULIS et al. (1994). « Validation of a posteriori error estimators by numerical approach ». Dans : *International Journal for Numerical Methods in Engineering* 37.7, p. 1073. DOI : [10.1002/nme.1620370702](https://doi.org/10.1002/nme.1620370702).
- BANK, Randolph E. et Alan WEISER (1985). « Some A Posteriori Error Estimators For Elliptic Partial Differential Equations ». Dans : *Mathematics of Computation* 44, p. 283–301.
- BASS, J.M. et J.T. ODEN (1987). « Adaptive finite element methods for a class of evolution problems in viscoplasticity ». Dans : *International Journal of Engineering Science* 25.6, p. 623. DOI : [10.1016/0020-7225\(87\)90053-X](https://doi.org/10.1016/0020-7225(87)90053-X).
- BATHE, K.J. (1996). *Finite element procedure in engineering analysis*. Prentice-Hall.
- BECKER, Roland et Rolf RANNACHER (1996). « A Feed-Back Approach to Error Control in Finite Element Methods : Basic Analysis and Examples ». Dans : *East-West J. Numer. Math* 4, p. 237–264.
- (2001). « An optimal control approach to a posteriori error estimation in finite element methods ». Dans : *Acta Numerica* 10. DOI : [10.1017/S0962492901000010](https://doi.org/10.1017/S0962492901000010).
- BELLEÇ, J. (2008). « Prise en compte de la variabilité dans le calcul de structures avec contact ». Thèse de doct. Ecole Normale Supérieure de Cachan.
- BELLENGER, E. et P COOREVITS (2007). « Controlled cost of adaptive mesh refinement in practical 3D finite element analysis ». Dans : *Advances in Engineering Software* 38.11-12, p. 846. DOI : [10.1016/j.advengsoft.2006.08.035](https://doi.org/10.1016/j.advengsoft.2006.08.035).
- BELYTSCHKO, T. et M. TABBARA (1993). « H-Adaptive finite element methods for dynamic problems, with emphasis on localization ». Dans : *International Journal for Numerical Methods in Engineering* 36.24, p. 4245. DOI : [10.1002/nme.1620362409](https://doi.org/10.1002/nme.1620362409).
- BERNARDI, C., T. CHACÓN REBOLLO et al. (2009). « A posteriori error analysis for two non-overlapping domain decomposition techniques ». Dans : *Applied Numerical Mathematics* 59.6, p. 1214. DOI : [10.1016/j.apnum.2008.06.004](https://doi.org/10.1016/j.apnum.2008.06.004).
- BERNARDI, C., Y. MADAY et A.T. PATERA (1994). « A new nonconforming approach to domain decomposition : the mortar element method ». Dans : *Collège de France Seminar XI*. Sous la dir. de H. Brezis & J.-L. Lions. T. XI. Pitman, p. 13.
- BERNARDI, C., Y. MADAY et F. RAPETTI (2005). « Basics and some applications of the mortar element method ». Dans : *GAMM-Mitt* 28.2, p. 97.

- BLACKER, Ted et Ted BELYTSCHKO (1994). « Superconvergent patch recovery with equilibrium and conjoint interpolant enhancements ». Dans : *International Journal for Numerical Methods in Engineering* 37.3, p. 517. DOI : [10.1002/nme.1620370309](https://doi.org/10.1002/nme.1620370309).
- BORROOMAND, B et O ZIENKIEWICZ (1999). « Recovery procedures in error estimation and adaptivity – Part 2 : Adaptivity in nonlinear problems of elasto-plasticity behaviour ». Dans : *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 176.1-4, p. 127. DOI : [10.1016/S0045-7825\(98\)00333-8](https://doi.org/10.1016/S0045-7825(98)00333-8).
- BORROOMAND, B. et O. C. ZIENKIEWICZ (1997). « An improved REP recovery and the effectivity robustness test ». Dans : *International Journal for Numerical Methods in Engineering* 40.17, p. 3247. DOI : [10.1002/\(SICI\)1097-0207\(19970915\)40:17<3247::AID-NME211>3.0.CO;2-Z](https://doi.org/10.1002/(SICI)1097-0207(19970915)40:17<3247::AID-NME211>3.0.CO;2-Z).
- BOUILLARD, P. et F. IHLENBURG (1999). « Error estimation and adaptivity for the finite element method in acoustics : 2D and 3D applications ». Dans : *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 176.1-4, p. 147. DOI : [10.1016/S0045-7825\(98\)00334-X](https://doi.org/10.1016/S0045-7825(98)00334-X).
- BREZZI, F. et L.D. MARINI (1993). « A three-field domain decomposition method ». Dans : *Proceedings of the sixth international conference on domain decomposition methods*, p. 27.
- BRINK, U. et E. STEIN (1998). « A posteriori error estimation in large-strain elasticity using equilibrated local Neumann problems ». Dans : *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 161.1-2, p. 77. DOI : [10.1016/S0045-7825\(97\)00310-1](https://doi.org/10.1016/S0045-7825(97)00310-1).
- CARSTENSEN, Carsten et Stefan A. FUNKEN (2000). « Fully Reliable Localized Error Control in the FEM ». Dans : *SIAM J. Sci. Comput.* 21.4, p. 1465–1484. ISSN : 1064-8275. DOI : <http://dx.doi.org/10.1137/S1064827597327486>.
- CHAMOIN, L. et P. LADEVÈZE (2008). « A non-intrusive method for the calculation of strict and efficient bounds of calculated outputs of interest in linear viscoelasticity problems ». Dans : *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 197.9-12, p. 994. DOI : [10.1016/j.cma.2007.09.021](https://doi.org/10.1016/j.cma.2007.09.021).
- CHOI, H.-W. et M. PARASCHIVOIU (2004). « Adaptive computations of a posteriori finite element output bounds : a comparison of the "hybrid-flux" approach and the "flux-free" approach ». Dans : *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 193.36-38, p. 4001. DOI : [10.1016/j.cma.2004.02.012](https://doi.org/10.1016/j.cma.2004.02.012).
- CIARLET, P. (1978). *The finite element method for elliptic problems*. North Holland.
- COMBE, J.P., P. LADEVÈZE et J.P. PELLE (1999). « Constitutive relation error estimator for transient finite element analysis ». Dans : *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 176.1-4, p. 165. DOI : [10.1016/S0045-7825\(98\)00335-1](https://doi.org/10.1016/S0045-7825(98)00335-1).
- COOREVITS, P., J.-P. DUMEAU et J.-P. PELLE (1998). « Error estimator and adaptivity for three-dimensional finite element analyses ». Dans : *Advances in Adaptive Computational Methods in Mechanics*. T. 47, p. 443. DOI : [10.1016/S0922-5382\(98\)80025-1](https://doi.org/10.1016/S0922-5382(98)80025-1).
- COOREVITS, P, P HILD et JP PELLE (2000). « A posteriori error estimation for unilateral contact with matching and non-matching meshes ». Dans : *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 186.1, p. 65. DOI : [10.1016/S0045-7825\(99\)00105-X](https://doi.org/10.1016/S0045-7825(99)00105-X).

- COTTEREAU, Régis, Pedro DíEZ et Antonio HUERTA (2009). « Strict error bounds for linear solid mechanics problems using a subdomain-based flux-free method ». Dans : *Computational Mechanics* 44.4, p. 533. DOI : [10.1007/s00466-009-0388-1](https://doi.org/10.1007/s00466-009-0388-1).
- CRAIG, R. R. et M. C. C. BAMPTON (1968). « Coupling of Substructures for Dynamic Analyses ». Dans : *Aiaa Journal* 6.7, p. 1313.
- CRESTA, P. et al. (2007). « Nonlinear localization strategies for domain decomposition methods : Application to post-buckling analyses ». Dans : *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 196.8, p. 1436. DOI : [10.1016/j.cma.2006.03.013](https://doi.org/10.1016/j.cma.2006.03.013).
- DEBONGNIE, J.F., H.G. ZHONG et P. BECKERS (1995). « Dual analysis with general boundary conditions ». Dans : *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 122.1-2, p. 183. DOI : [10.1016/0045-7825\(94\)00726-4](https://doi.org/10.1016/0045-7825(94)00726-4).
- DEMROWICZ, L., J.T. ODEN et T. STROUBOULIS (1984). « Adaptive finite elements for flow problems with moving boundaries. Part I : Variational principles and a posteriori estimates ». Dans : *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 46.2, p. 217. DOI : [10.1016/0045-7825\(84\)90063-X](https://doi.org/10.1016/0045-7825(84)90063-X).
- DESMORAT, Rodrigue (Février 1993). *Modèles de comportements mécanique, métallurgique, chimique, électromagnétique, thermique*. Rapport interne 147. Cachan : Laboratoire de Mécanique et de Technologie.
- DÍEZ, Pedro et Antonio HUERTA (1999). « A unified approach to remeshing strategies for finite element h-adaptivity ». Dans : *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 176.1-4, p. 215-229. ISSN : 0045-7825. DOI : [DOI:10.1016/S0045-7825\(98\)00338-7](https://doi.org/10.1016/S0045-7825(98)00338-7). URL : <http://www.sciencedirect.com/science/article/B6V29-40B2XYV-F/2/9a6615a521dbcf44ebbc18dca1aa46bb>.
- DIEZ, Pedro, Nuria PARES et Antonio HUERTA (2003). « Recovering lower bounds of the error by postprocessing implicit residual a posteriori error estimates ». Dans : *International Journal for Numerical Methods in Engineering* 56.10, p. 1465. DOI : [10.1002/nme.620](https://doi.org/10.1002/nme.620).
- DOHRMANN, C.R. (2003). « A preconditioner for substructuring based on constrained energy minimization ». Dans : *SIAM Journal for Scientific Computing* 25, p. 246.
- DRUCKER, D.C. (1964). « On the postulate of stability of material in the mechanics of continua ». Dans : *Journal of Mechanics* 3.2, p. 235-249.
- DUREISSEIX, D. et C. FARHAT (2001). « A numerically scalable domain decomposition method for the solution of frictionless contact problems ». Dans : *International Journal for Numerical Methods in Engineering* 50.12, p. 2643. DOI : [10.1002/nme.140](https://doi.org/10.1002/nme.140).
- DUVAUT, G. et F. PISTRE (1982). « Calcul des vecteurs contraintes en approximation P1 et P2 ». Dans : *Comptes Rendus de l'Académie des Sciences* 295.II, p. 827.
- FARHAT, Charbel et Francois-Xavier ROUX (1991). « A method of finite element tearing and interconnecting and its parallel solution algorithm ». Dans : *International Journal for Numerical Methods in Engineering* 32.6, p. 1205. DOI : [10.1002/nme.1620320604](https://doi.org/10.1002/nme.1620320604).
- FARHAT, C., J. MANDEL et F.X. ROUX (1994). « Optimal convergence properties of the FETI domain decomposition method ». Dans : *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 115.3-4, p. 365. DOI : [10.1016/0045-7825\(94\)90068-X](https://doi.org/10.1016/0045-7825(94)90068-X).
- FARHAT, C, K PIERSON et M LESOINE (2000). « The second generation FETI methods and their application to the parallel solution of large-scale linear and geometrically non-

- linear structural analysis problems ». Dans : *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 184.2-4, p. 333. DOI : [10.1016/S0045-7825\(99\)00234-0](https://doi.org/10.1016/S0045-7825(99)00234-0).
- FARHAT, C. et F. X. ROUX (1994). « Implicit parallel processing in structural mechanics ». Dans : *Computational Mechanics Advances* 2.1. North-Holland, p. 1-124.
- FLORENTIN, E (2002). « Sur l'évaluation de la qualité locale des contraintes éléments finis en élasticité tridimensionnelle ». Thèse de doct. Ecole Normale Supérieure de Cachan.
- FLORENTIN, E, L GALLIMARD et J.P. PELLE (2002). « Evaluation of the local quality of stresses in 3D finite element analysis ». Dans : *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 191.39-40, p. 4441. DOI : [10.1016/S0045-7825\(02\)00389-4](https://doi.org/10.1016/S0045-7825(02)00389-4).
- FREY, P.J. et P.L. GEORGES (1999). *Maillages – Applications aux éléments finis*. Hermes Science.
- GALLIMARD, L. (2009). « A constitutive relation error estimator based on traction-free recovery of the equilibrated stress ». Dans : *International Journal for Numerical Methods in Engineering* 78.4, p. 460. DOI : [10.1002/nme.2496](https://doi.org/10.1002/nme.2496).
- GALLIMARD, L., P. LADEVÈZE et J. P. PELLE (1996). « Error estimation and adaptativity in elastoplasticity ». Dans : *International Journal for Numerical Methods in Engineering* 39.2, p. 189. DOI : [10.1002/\(SICI\)1097-0207\(19960130\)39:2<189::AID-NME849>3.0.CO;2-7](https://doi.org/10.1002/(SICI)1097-0207(19960130)39:2<189::AID-NME849>3.0.CO;2-7).
- GALLIMARD, L. et T. SASSI (2010). « A posteriori error analysis of a domain decomposition algorithm for unilateral contact problem ». Dans : *Computers & Structures* 88.13-14, p. 879. DOI : [10.1016/j.compstruc.2010.04.007](https://doi.org/10.1016/j.compstruc.2010.04.007).
- GOSSELET, Pierre et Christian REY (2006). « Non-overlapping domain decomposition methods in structural mechanics ». Dans : *Archives of Computational Methods in Engineering* 13.4, p. 515. DOI : [10.1007/BF02905857](https://doi.org/10.1007/BF02905857).
- GOSSELET, P., C. REY et J. PEBREL (2011). « Total and selective reuse of Krylov subspaces for the solution to a sequence of nonlinear structural problems ». Submitted.
- GOSSELET, P., C. REY et D. RIXEN (2003). « On the initial estimate of interface forces in FETI methods ». Dans : *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 192.25, p. 2749. DOI : [10.1016/S0045-7825\(03\)00288-3](https://doi.org/10.1016/S0045-7825(03)00288-3).
- HALPHEN, B et Q.S. NGUYEN (1975). « On generalized standard materials (in french) ». Dans : *Journal de Mécanique* 14, p. 39.
- HUERTA, Antonio et Pedro DIEZ (2000). « Error estimation including pollution assessment for nonlinear finite element analysis ». Dans : *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 181.1-3, p. 21. DOI : [10.1016/S0045-7825\(99\)00071-7](https://doi.org/10.1016/S0045-7825(99)00071-7).
- JOHNSON, C. et P. HANSBO (1992). « Adaptive finite element methods in computational mechanics ». Dans : *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 101.1-3, p. 143. DOI : [10.1016/0045-7825\(92\)90020-K](https://doi.org/10.1016/0045-7825(92)90020-K).
- JUSTINO, Manoel R., K. C. PARK et Carlos A. FELIPPA (1997). « An algebraically partitioned FETI method for parallel structural analysis : performance evaluation ». Dans : *International Journal for Numerical Methods in Engineering* 40.15, p. 2739. DOI : [10.1002/\(SICI\)1097-0207\(19970815\)40:15<2739::AID-NME186>3.0.CO;2-0](https://doi.org/10.1002/(SICI)1097-0207(19970815)40:15<2739::AID-NME186>3.0.CO;2-0).
- KEMPENEERS, Martin, Jean-François DEBONGNIE et Pierre BECKERS (2009). « Pure equilibrium tetrahedral finite elements for global error estimation by dual analysis ».

- Dans : *International Journal for Numerical Methods in Engineering* 81.4, p. 513. DOI : [10.1002/nme.2703](https://doi.org/10.1002/nme.2703).
- KLAWONN, Axel et Olof WIDLUND (2001). « FETI and Neumann-Neumann iterative substructuring methods : Connections and new results ». Dans : *Communications on Pure and Applied Mathematics* 54.1, p. 57. DOI : [10.1002/1097-0312\(200101\)54:1<57::AID-CPA3>3.0.CO;2-D](https://doi.org/10.1002/1097-0312(200101)54:1<57::AID-CPA3>3.0.CO;2-D).
- LADEVÈZE, P. (1975). « Comparaison de modèles de milieux continus ». Thèse de doct. Université Pierre et Marie Curie.
- LADEVÈZE, P. (1989). « The large time increments method for analysis of structures with nonlinear behavior described by internal variables (in french) ». Dans : *Comptes Rendus Académie des Sciences – Mécanique, Paris* 309.2, p. 1095.
- LADEVÈZE, P. (1999). *Nonlinear Computational Structural Mechanics – New Approaches and Non-Incremental Methods of Calculation*. Springer Verlag.
- LADEVÈZE, P. (2006). « Upper error bounds on calculated outputs of interest for linear and nonlinear structural problems ». Dans : *Comptes Rendus Mécanique* 334.7, p. 399. DOI : [10.1016/j.crme.2006.04.004](https://doi.org/10.1016/j.crme.2006.04.004).
- LADEVÈZE, P. et L. CHAMOIN (2010). « Calculation of strict error bounds for finite element approximations of non-linear pointwise quantities of interest ». Dans : *International Journal for Numerical Methods in Engineering* 84.13, p. 1638. DOI : [10.1002/nme.2957](https://doi.org/10.1002/nme.2957).
- LADEVÈZE, P., G. COFFIGNAL et J.P. PELLE (1983). « Accuracy of elastoplastic and dynamic analysis ». Dans : *Accuracy Estimates and Adaptive Refinements in Finite Element Computations*. Sous la dir. d'Oliveira BABUSKA Gago et Zienkiewicz EDITORS. Wiley, London, p. 181–203.
- LADEVÈZE, P. et E. FLORENTIN (2006). « Verification of stochastic models in uncertain environments using the constitutive relation error method ». Dans : *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 196.1-3, p. 225. DOI : [10.1016/j.cma.2006.03.006](https://doi.org/10.1016/j.cma.2006.03.006).
- LADEVÈZE, Pierre (2001). « Constitutive relation errors for F.E. analysis considering (visco-) plasticity and damage ». Dans : *International Journal for Numerical Methods in Engineering* 52.56, p. 527. DOI : [10.1002/nme.301](https://doi.org/10.1002/nme.301).
- LADEVÈZE, Pierre et Ludovic CHAMOIN (2011). « On the verification of model reduction methods based on the proper generalized decomposition ». Dans : *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 200.23-24, p. 2032. DOI : [10.1016/j.cma.2011.02.019](https://doi.org/10.1016/j.cma.2011.02.019).
- LADEVÈZE, Pierre, Ludovic CHAMOIN et Eric FLORENTIN (2010). « A new non-intrusive technique for the construction of admissible stress fields in model verification ». Dans : *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 199.9-12, p. 766. DOI : [10.1016/j.cma.2009.11.007](https://doi.org/10.1016/j.cma.2009.11.007).
- LADEVÈZE, Pierre et Julien WAEYTENS (2009). « Model verification in dynamics through strict upper error bounds ». Dans : *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 198.21-26, p. 1775. DOI : [10.1016/j.cma.2008.12.020](https://doi.org/10.1016/j.cma.2008.12.020).

- LADEVÈZE, P. et D. LEGUILLON (1983). « Error Estimate Procedure in the Finite Element Method and Applications ». English. Dans : *SIAM Journal on Numerical Analysis* 20.3, p. 485. ISSN : 00361429. URL : <http://www.jstor.org/stable/2157268>.
- LADEVÈZE, P., O. LOISEAU et D. DUREISSEIX (2001). « A micro–macro and parallel computational strategy for highly heterogeneous structures ». Dans : *International Journal for Numerical Methods in Engineering* 52.12, p. 121. DOI : [10.1002/nme.274](https://doi.org/10.1002/nme.274).
- LADEVÈZE, P., P. MARIN et al. (1992). « Accuracy and optimal meshes in finite element computation for nearly incompressible materials ». Dans : *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 94.3, p. 303. DOI : [10.1016/0045-7825\(92\)90057-0](https://doi.org/10.1016/0045-7825(92)90057-0).
- LADEVÈZE, P. et E.A.W. MAUDER (1996). « A general method for recovering equilibrating element tractions ». Dans : *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 137.2, p. 111. DOI : [10.1016/S0045-7825\(96\)01067-5](https://doi.org/10.1016/S0045-7825(96)01067-5).
- LADEVÈZE, P. et N. MOËS (1998). « A new a posteriori error estimation for nonlinear time-dependent finite element analysis ». Dans : *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 157.1-2, p. 45. DOI : [10.1016/S0045-7825\(97\)00212-0](https://doi.org/10.1016/S0045-7825(97)00212-0).
- LADEVÈZE, P. et N. MOËS (1999). « Adaptive control for finite element analysis in plasticity ». Dans : *Computers & Structures* 73.1-5, p. 45. DOI : [10.1016/S0045-7949\(98\)00284-3](https://doi.org/10.1016/S0045-7949(98)00284-3).
- LADEVÈZE, P., D. NERON et P. GOSSELET (2007). « On a mixed and multiscale domain decomposition method ». Dans : *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 196.8, p. 1526. DOI : [10.1016/j.cma.2006.05.014](https://doi.org/10.1016/j.cma.2006.05.014).
- LADEVÈZE, P. et J.P. PELLE (2004). *Mastering Calculations in Linear and Nonlinear Mechanics*. NY : Springer.
- LADEVÈZE, P., J.-P. PELLE et Ph. ROUGEOT (1991). « Error estimation and mesh optimization for classical finite elements ». Dans : *Engineering Computations* 8.1, p. 69. DOI : [10.1108/eb023827](https://doi.org/10.1108/eb023827).
- LADEVÈZE, P. et Ph. ROUGEOT (1997). « New advances on a posteriori error on constitutive relation in f.e. analysis ». Dans : *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 150.1-4, p. 239. DOI : [10.1016/S0045-7825\(97\)00089-3](https://doi.org/10.1016/S0045-7825(97)00089-3).
- LADEVÈZE, P., P. ROUGEOT et al. (1999). « Local error estimators for finite element linear analysis ». Dans : *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 176.1-4, p. 231. DOI : [10.1016/S0045-7825\(98\)00339-9](https://doi.org/10.1016/S0045-7825(98)00339-9).
- LE TALLEC, Patrick (1994). « Domain decomposition methods in computational mechanics ». Dans : *Comput. Mech. Adv.* 1.2, p. 121–220. ISSN : 0927-7951.
- LE TALLEC, P., Y. H. DE ROECK et M. VIDRASCU (1991). « Domain decomposition methods for large linearly elliptic three-dimensional problems ». Dans : *Journal of Computational and Applied Mathematics* 34.1, p. 93. ISSN : 0377-0427. DOI : [10.1016/0377-0427\(91\)90150-I](https://doi.org/10.1016/0377-0427(91)90150-I).
- LOUF, F., J.-P. COMBE et J.-P. PELLE (2003). « Constitutive error estimator for the control of contact problems involving friction ». Dans : *Computers and Structures* 81.18-19, p. 1759. DOI : [10.1016/S0045-7949\(03\)00200-1](https://doi.org/10.1016/S0045-7949(03)00200-1).
- MAGOULES, F. et F.X. ROUX (2006). « Lagrangian formulation of domain decomposition methods : A unified theory ». Dans : *Applied Mathematical Modelling* 30.7, p. 593. DOI : [10.1016/j.apm.2005.06.016](https://doi.org/10.1016/j.apm.2005.06.016).

- MANDEL, Jan (1993). « Balancing domain decomposition ». Dans : *Communications in Numerical Methods in Engineering* 9.3, p. 233. DOI : [10.1002/cnm.1640090307](https://doi.org/10.1002/cnm.1640090307).
- MANDEL, Jan et Radek TEZAUER (1994). « Convergence Of A Substructuring Method With Lagrange Multipliers ». Dans : *Numerische Mathematik* 73, p. 473–487.
- MELENK, J et I BABUSKA (1996). « The partition of unity finite element method : Basic theory and applications ». Dans : *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 139.1-4, p. 289. DOI : [10.1016/S0045-7825\(96\)01087-0](https://doi.org/10.1016/S0045-7825(96)01087-0).
- MOITINHO DE ALMEIDA, J. P. et O. J. B. ALMEIDA PEREIRA (1996). « A set of hybrid equilibrium finite element models for the analysis of three-dimensional solids ». Dans : *International Journal for Numerical Methods in Engineering* 39.16, p. 2789. DOI : [10.1002/\(SICI\)1097-0207\(19960830\)39:16<2789::AID-NME976>3.0.CO;2-J](https://doi.org/10.1002/(SICI)1097-0207(19960830)39:16<2789::AID-NME976>3.0.CO;2-J).
- MOITINHO DE ALMEIDA, J. P. et E. A. W. MAUNDER (2009). « Recovery of equilibrium on star patches using a partition of unity technique ». Dans : *International Journal for Numerical Methods in Engineering* 79.12, p. 1493. DOI : [10.1002/nme.2623](https://doi.org/10.1002/nme.2623).
- MORIN, Pedro, Ricardo H. NOCHETTO et Kunibert G. SIEBERT (2002). « Local problems on stars : A posteriori error estimators, convergence, and performance ». Dans : *Mathematics of Computation* 72.243, p. 1067. DOI : [10.1090/S0025-5718-02-01463-1](https://doi.org/10.1090/S0025-5718-02-01463-1).
- ODEN, J. Tinsley et al. (2005). « Theory and methodology for estimation and control of errors due to modeling, approximation, and uncertainty ». Dans : *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 194.2-5, p. 195. DOI : [10.1016/j.cma.2003.06.003](https://doi.org/10.1016/j.cma.2003.06.003).
- ODEN, J.T. et K.S. VEMAGANTI (2000). « Estimation of Local Modeling Error and Goal-Oriented Adaptive Modeling of Heterogeneous Materials I. Error Estimates and Adaptive Algorithms ». Dans : *Journal of Computational Physics* 164.1, p. 22. DOI : [10.1006/jcph.2000.6585](https://doi.org/10.1006/jcph.2000.6585).
- ODEN, J.T. et T.I. ZOHDI (1997). « Analysis and adaptive modeling of highly heterogeneous elastic structures ». Dans : *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 148.3-4, p. 367. DOI : [10.1016/S0045-7825\(97\)00032-7](https://doi.org/10.1016/S0045-7825(97)00032-7).
- OTTO, F. C. et G. LUBE (1999). « A Posteriori Estimates for a Non-Overlapping Domain Decomposition Method ». Dans : *Computing* 62.1, p. 27–43.
- PARASCHIVOIU, M. (2001). « A posteriori finite element output bounds in three space dimensions using the FETI method ». Dans : *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 190.49-50, p. 6629. DOI : [10.1016/S0045-7825\(01\)00253-5](https://doi.org/10.1016/S0045-7825(01)00253-5).
- PARASCHIVOIU, M. et H.-W. CHOI (2002). « A posteriori finite element output bounds with adaptive mesh refinement : application to a heat transfer problem in a three-dimensional rectangular duct ». Dans : *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 191.43, p. 4905. DOI : [10.1016/S0045-7825\(02\)00420-6](https://doi.org/10.1016/S0045-7825(02)00420-6).
- PARASCHIVOIU, M. et A.T. PATERA (1998). « A hierarchical duality approach to bounds for the outputs of partial differential equations ». Dans : *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 158.3-4, p. 389. DOI : [10.1016/S0045-7825\(99\)00270-4](https://doi.org/10.1016/S0045-7825(99)00270-4).
- PARASCHIVOIU, M., J. PERAIRE et A.T. PATERA (1997). « A posteriori finite element bounds for linear-functional outputs of elliptic partial differential equations ». Dans : *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 150.1-4, p. 289. DOI : [10.1016/S0045-7825\(97\)00086-8](https://doi.org/10.1016/S0045-7825(97)00086-8).

- PARES, N, J BONET et al. (2006). « The computation of bounds for linear-functional outputs of weak solutions to the two-dimensional elasticity equations ». Dans : *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 195.4-6, p. 406. DOI : [10.1016/j.cma.2004.10.013](https://doi.org/10.1016/j.cma.2004.10.013).
- PARES, N., P. DIEZ et A. HUERTA (2006). « Subdomain-based flux-free a posteriori error estimators ». Dans : *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 195.4-6, p. 297. DOI : [10.1016/j.cma.2004.06.047](https://doi.org/10.1016/j.cma.2004.06.047).
- PARES, N, P DIEZ et A HUERTA (2007a). « Bounds of functional outputs for parabolic problems. Part I : Exact bounds of the discontinuous Galerkin time discretization ». Dans : *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*. DOI : [10.1016/j.cma.2007.08.025](https://doi.org/10.1016/j.cma.2007.08.025).
- (2007b). « Bounds of functional outputs for parabolic problems. Part II : Bounds of the exact solution ». Dans : *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*. DOI : [10.1016/j.cma.2007.08.024](https://doi.org/10.1016/j.cma.2007.08.024).
- PARK, K. C., Manoel R. JUSTINO et Carlos A. FELIPPA (1997). « An algebraically partitioned FETI method for parallel structural analysis : algorithm description ». Dans : *International Journal for Numerical Methods in Engineering* 40.15, p. 2717. DOI : [10.1002/\(SICI\)1097-0207\(19970815\)40:15<2717::AID-NME185>3.0.CO;2-B](https://doi.org/10.1002/(SICI)1097-0207(19970815)40:15<2717::AID-NME185>3.0.CO;2-B).
- PARRET-FRÉAUD, A., P. GOSSELET et C. REY (2009). « Error estimation for sub-structured problems ». Dans : *ADMOS 2009 - 4th International Conference on Adaptive Modeling and Simulation*.
- PARRET-FRÉAUD, A, P GOSSELET et C REY (2009). « Stratégie de calcul adaptatif pour des problèmes sous-structurés ». Dans : *CFM 2009 - 19e Congrès Français de Mécanique*.
- (2010). « Convergence of a discretization error estimator for sub-structured problems based on a fully parallel recovery of admissible fields ». Dans : *ECCM, 10*.
- PARRET-FRÉAUD, A., C. REY et al. (2010). « Fast estimation of discretization error for FE problems solved by domain decomposition ». Dans : *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 199.49-52, 3315–3323. DOI : [10.1016/j.cma.2010.07.002](https://doi.org/10.1016/j.cma.2010.07.002).
- PEBREL, J, C REY et P GOSSELET (2011). *Substructured formulations of nonlinear structural problems. Influence of the interface condition*. In preparation.
- PEBREL, J., Christian REY et P. GOSSELET (2008). « A Nonlinear Dual-Domain Decomposition Method : Application to Structural Problems with Damage ». Dans : *International Journal for Multiscale Computational Engineering* 6.3, p. 251. DOI : [10.1615/IntJMultCompEng.v6.i3.50](https://doi.org/10.1615/IntJMultCompEng.v6.i3.50).
- PERAIRE, J. et A.T. PATERA (1998). « Bounds for linear-functional outputs of coercive partial differential equations : Local indicators and adaptive refinement ». Dans : *Advances in Adaptive Computational Methods in Mechanics*. T. 47, p. 199. DOI : [10.1016/S0922-5382\(98\)80011-1](https://doi.org/10.1016/S0922-5382(98)80011-1).
- PRAGER, W. et J.L. SYNGE (1947). « Approximations in elasticity based on the concept of functions spaces ». Dans : *Quarterly of Applied Mathematics* 5, p. 261–269.
- PRUDHOMME, S., F. NOBILE et al. (2003). « Analysis of a subdomain-based error estimator for finite element approximations of elliptic problems ». Dans : *Numerical Methods for Partial Differential Equations* 20.2, p. 165. DOI : [10.1002/num.10082](https://doi.org/10.1002/num.10082).

- PRUDHOMME, S. et J.T. ODEN (1999). « On goal-oriented error estimation for elliptic problems : application to the control of pointwise errors ». Dans : *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 176.1-4, p. 313. DOI : [10.1016/S0045-7825\(98\)00343-0](https://doi.org/10.1016/S0045-7825(98)00343-0).
- QUARTERONI, Alfio et Alberto VALLI (1999). *Domain decomposition methods for partial differential equations*. Numerical Mathematics and Scientific Computation. New York : Oxford University Press.
- REY, Christian et Franck RISLER (1998). « A Rayleigh–Ritz preconditioner for the iterative solution to large scale nonlinear problems ». Dans : *Numerical Algorithms* 17.3/4, p. 279. DOI : [10.1023/A:1016680306741](https://doi.org/10.1023/A:1016680306741).
- REY, C. et F. LÉNÉ (1998). « Reuse of Krylov Spaces in the Solution of Large-scale Non-linear Elasticity Problems ». Dans : *Ninth International Conference on Domain Decomposition Methods*. Sous la dir. de P.E. BJORSTAD, M.S. ESPEDAL et D.E. KEYES. DOI : [10.1.1.23.5379](https://doi.org/10.1.1.23.5379).
- REY, C, A PARRET-FRÉAUD et P GOSSELET (2010). « A Fully Parallel A Posteriori Error Estimator For Domain Decomposition Methods ». Dans : *WCCM/APCOM 2010*.
- RISLER, F. et C. REY (2000). « Iterative accelerating algorithms with Krylov subspaces for the solution to large-scale non-linear problems ». Dans : *Numerical algorithms* 23, p. 1.
- RIXEN, Daniel J. et Charbel FARHAT (1999). « A simple and efficient extension of a class of substructure based preconditioners to heterogeneous structural mechanics problems ». Dans : *International Journal for Numerical Methods in Engineering* 44.4, p. 489. DOI : [10.1002/\(SICI\)1097-0207\(19990210\)44:4<489::AID-NME514>3.0.CO;2-Z](https://doi.org/10.1002/(SICI)1097-0207(19990210)44:4<489::AID-NME514>3.0.CO;2-Z).
- RIXEN, Daniel J., Charbel FARHAT et al. (1999). « Theoretical comparison of the FETI and algebraically partitioned FETI methods, and performance comparisons with a direct sparse solver ». Dans : *International Journal for Numerical Methods in Engineering* 46.4, p. 501. DOI : [10.1002/\(SICI\)1097-0207\(19991010\)46:4<501::AID-NME685>3.0.CO;2-7](https://doi.org/10.1002/(SICI)1097-0207(19991010)46:4<501::AID-NME685>3.0.CO;2-7).
- ROUX, F.X. (2003). « Parallel solvers based on domain decomposition ».
- SAAD, Y. (2000). *Iterative methods for sparse linear systems*. 3rd edition. PWS Publishing Company.
- SALENÇON, J. (1988). *Mécanique des milieux continus*. École Polytechnique. Ellipses.
- SAXCÉ, G. de et Z.-Q. FENG (1998). « The bipotential method : A constructive approach to design the complete contact law with friction and improved numerical algorithms ». Dans : *Mathematical and Computer Modelling* 28.4-8, p. 225. DOI : [10.1016/S0895-7177\(98\)00119-8](https://doi.org/10.1016/S0895-7177(98)00119-8).
- SCHWARZ, H.A. (1869). « Uber einige abbildungsdufgaben ». Dans : *J. Reine Angew. Math.* 70, p. 105.
- SERIES, L., F. FEYEL et F.X. ROUX (2003). « Une méthode de décomposition de domaine avec deux multiplicateurs de Lagrange ». Dans : *Actes du 16^{me} congrès français de mécanique*.
- STEFANICA, D (2005). « Parallel FETI algorithms for mortars ». Dans : *Applied Numerical Mathematics* 54.2, p. 266. DOI : [10.1016/j.apnum.2004.09.030](https://doi.org/10.1016/j.apnum.2004.09.030).

- STEFFENS, Lindaura Maria et Pedro Díez (2009). « A simple strategy to assess the error in the numerical wave number of the finite element solution of the Helmholtz equation ». Dans : *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 198.15-16, p. 1389. DOI : [10.1016/j.cma.2008.12.005](https://doi.org/10.1016/j.cma.2008.12.005).
- STEIN, E. (2003). *Error controlled Adaptive Finite Elements in Solid Mechanics*. J. Wiley.
- STROUBOULIS, T., I. BABUSKA et S. K. GANGARAJ (2000). « Guaranteed computable bounds for the exact error in the finite element solution – part 2 : bounds for the energy norm of the error in two dimensions ». Dans : *International Journal for Numerical Methods in Engineering* 47.1-3, p. 427. DOI : [10.1002/\(SICI\)1097-0207\(2000110/30\)47:1/3<427::AID-NME779>3.0.CO;2-1](https://doi.org/10.1002/(SICI)1097-0207(2000110/30)47:1/3<427::AID-NME779>3.0.CO;2-1).
- SYDENSTRICKER, R.M. et al. (2005). « A posteriori error estimate for stress analysis of homogeneous and heterogeneous materials : An engineering approach ». Dans : *Finite Elements in Analysis and Design* 42.3, p. 171. DOI : [10.1016/j.finel.2005.06.007](https://doi.org/10.1016/j.finel.2005.06.007).
- VEMAGANTI, K. et J.T. ODEN (2001). « Estimation of local modeling error and goal-oriented adaptive modeling of heterogeneous materials Part II : a computational environment for adaptive modeling of heterogeneous elastic solids ». Dans : *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 190.46-47, p. 6089. DOI : [10.1016/S0045-7825\(01\)00217-1](https://doi.org/10.1016/S0045-7825(01)00217-1).
- VERFÜRTH, R. (1996). *A Review of A Posteriori Error Estimation and Adaptive Mesh-refinement Techniques*. Stuttgart : Wiley-Teubner.
- (1997). *A Review of A Posteriori Error Estimation Techniques for Elasticity Problems*.
- VEUBEKE, B. Fraeijs de (1964). « Upper and lower bounds in matrix structural analysis ». Dans : *AGARDograp* 72, p. 165.
- (1965). « Displacement and equilibrium models in the finite element method by B. Fraeijs de Veubeke, Chapter 9, Pages 145–197 of *Stress Analysis*, Edited by O. C. Zienkiewicz and G. S. Holister, Published by John Wiley & Sons, 1965 ». Dans : *International Journal for Numerical Methods in Engineering* 52.3, p. 287. DOI : [10.1002/nme.339](https://doi.org/10.1002/nme.339).
- WIBERG, Nils-Erik, Fethi ABDULWAHAB et Saulius ZIUKAS (1994). « Enhanced superconvergent patch recovery incorporating equilibrium and boundary conditions ». Dans : *International Journal for Numerical Methods in Engineering* 37.20, p. 3417. DOI : [10.1002/nme.1620372003](https://doi.org/10.1002/nme.1620372003).
- ZHU, J (1997). « A posteriori error estimation – the relationship between different procedures ». Dans : *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 150.1-4, p. 411. DOI : [10.1016/S0045-7825\(97\)00076-5](https://doi.org/10.1016/S0045-7825(97)00076-5).
- ZHU, J.Z. et Zhimin ZHANG (1999). « The relationship of some a posteriori error estimators ». Dans : *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 47, p. 25. DOI : [10.1016/S0922-5382\(98\)80003-2](https://doi.org/10.1016/S0922-5382(98)80003-2).
- ZIENKIEWICZ, O, B BOROOMAND et J ZHU (1999). « Recovery procedures in error estimation and adaptivity – Part 1 : Adaptivity in linear problems ». Dans : *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 176.1-4, p. 111. DOI : [10.1016/S0045-7825\(98\)00332-6](https://doi.org/10.1016/S0045-7825(98)00332-6).
- ZIENKIEWICZ, O.C. et R.L. TAYLOR (1988). *The finite element method : basic formulation and linear problems*. Londres : Mc Graw-Hill.

- ZIENKIEWICZ, O. C. et J. Z. ZHU (1987). « A simple error estimator and adaptive procedure for practical engineering analysis ». Dans : *International Journal for Numerical Methods in Engineering* 24.2, p. 337. DOI : [10.1002/nme.1620240206](https://doi.org/10.1002/nme.1620240206).
- (1992a). « The superconvergent patch recovery and a posteriori error estimates. Part 1 : The recovery technique ». Dans : *International Journal for Numerical Methods in Engineering* 33.7, p. 1331. DOI : [10.1002/nme.1620330702](https://doi.org/10.1002/nme.1620330702).
 - (1992b). « The superconvergent patch recovery and a posteriori error estimates. Part 2 : Error estimates and adaptivity ». Dans : *International Journal for Numerical Methods in Engineering* 33.7, p. 1365. DOI : [10.1002/nme.1620330703](https://doi.org/10.1002/nme.1620330703).
- Z-set developer manual* (2001).
- Z-set user manual* (2001).

TABLE DES FIGURES

0.1. Stratégie parallèle adaptative pour le calcul de structures	8
1.1. Problème modèle	14
1.2. Exemple de sous-domaine $\omega_{h,i}^S$ associé au nœud i	30
1.3. Exemple de bord Γ et de normale n_E	33
1.4. Exemple de maillage initial Ω_h avec h-raffinement des éléments (gauche) et maillage de référence $\Omega_{\tilde{h}}$ associé (droite) [Antonio HUERTA et Pedro DIEZ, 2000]	35
1.5. Ensemble de points d'échantillonnage $E_{ch}(E)$ pour quelques éléments usuels [M. AINSWORTH et J. ODEN, 1997]	50
2.1. Exemple de décomposition en 3 sous-domaines avec représentation des interfaces $\Upsilon^{(ss')}$, $\Upsilon^{(s)}$ et Υ	61
2.2. Exemple de numérotation locale, globale et des opérateurs de trace et d'assemblage associés	64
3.1. Décomposition en 2 sous-domaines	88
3.2. Détermination de $\hat{u}_h^{(s)}$	92
3.3. Détermination de $\hat{\sigma}_h^{(s)}$	94
3.4. Représentation continue de \hat{F}_{bh}	95
3.5. Γ -structure	97
3.6. Carte des contributions élémentaires $e_{rdc,E}^{seq}$ à l'erreur séquentielle e_{rdc}^{seq} ($h = L/16$)	98
3.7. h -convergence de l'erreur e_h et des estimateurs e_{rdc}^{seq} et e_{rdc}^{ddm}	101
3.8. Cartes des contributions élémentaires $e_{rdc,E}^{ddm}$ à e_{rdc}^{ddm} en fonction de la dé- composition pour $h = L/16$	102
3.9. Tube	103
3.10. Types de décompositions en 6 sous-domaines étudiés	103
3.11. Cartes des contributions élémentaires à e_{rdc}^{seq} et e_{rdc}^{ddm}	104
3.12. Représentation discontinue de \hat{F}_{bh}	105
3.13. Cartes des contributions élémentaires à e_{rdc}^{ddm} pour deux choix de construc- tion des champs d'interface (décomposition à interfaces non-régulières)	108
3.14. Carte des contributions élémentaires $e_{rdc,E}^{seq}$ à e_{rdc}^{seq} ($h = L/8$)	109
3.15. Carte des contributions élémentaires $e_{rdc,E}^{ddm}$ à e_{rdc}^{ddm} ($h = L/8$, $\mathcal{N}_{sd} = 3$)	109
3.16. Carte des contributions élémentaires $e_{rdc,E}^{ddm}$ à e_{rdc}^{ddm} ($h = L/8$, $\mathcal{N}_{sd} = 4$)	110
3.17. Carte des contributions élémentaires $e_{rdc,E}^{ddm}$ à e_{rdc}^{ddm} ($h = L/8$, $\mathcal{N}_{sd} = 7$)	111

4.1.	Évolution de $e_{\text{rdc}}^{\text{ddm}}$ en fonction de la convergence du solveur FETI	123
4.2.	Évolution de $e_{\text{rdc}}^{\text{ddm}}$ en fonction de la convergence du solveur BDD	124
4.3.	Exemple d'évolution des contributions $e_{\text{rdc},E}^{\text{ddm}}$ en fonction de la convergence du solveur ($H = L/8, \mathcal{N}_{\text{sd}} = 8$)	127
4.4.	Exemple d'évolution des contributions $e_{\text{rdc},E}^{\text{ddm}}$ en fonction de la convergence du solveur ($H = L/16, \mathcal{N}_{\text{sd}} = 16$)	128
4.5.	Structure fissurée	129
4.6.	Évolution de $e_{\text{rdc}}^{\text{ddm}}$ en fonction de la convergence du solveur FETI	129
4.7.	Évolution des contributions $e_{\text{rdc},E}^{\text{ddm}}$ en fonction de la convergence du solveur	130
5.1.	Problème hétérogène	133
5.2.	h -convergence de l'erreur e_h et des estimateurs $e_{\text{rdc}}^{\text{seq}}$ et $e_{\text{rdc}}^{\text{ddm}}$	133
5.3.	Carte des contributions élémentaires $e_{\text{rdc}}^{\text{seq}}$ et $e_{\text{rdc}}^{\text{ddm}}$ en fonction des cas de décomposition pour les deux méthodes de reconstruction des champs statiquement admissibles ($h = L/32$)	135
5.4.	Interprétation mécanique d'une itération de l'algorithme FETI	138
5.5.	Interprétation mécanique d'une itération de l'algorithme BDD	139
5.6.	Évolution de $e_{\text{rdc}}^{\text{ddm}}$ en fonction de la convergence du solveur FETI	141
5.7.	Problèmes "patch"	143
5.8.	h -convergence de l'erreur e_h et des estimateurs $e_{\text{rdc}}^{\text{seq}}$ et $e_{\text{rdc}}^{\text{ddm}}$ en présence de la procédure de reconstruction pondérée	145
5.9.	Carte des contributions élémentaires $e_{\text{rdc}}^{\text{seq}}$ et $e_{\text{rdc}}^{\text{ddm}}$ en fonction des cas de décomposition pour les deux méthodes de reconstruction des champs statiquement admissibles ($h = L/32$)	146
5.10.	Évolution de l'erreur e_h et des estimateurs $e_{\text{rdc}}^{\text{seq}}$ et $e_{\text{rdc}}^{\text{ddm}}$ en fonction du rapport E_1/E_2 ($h = L/18$)	147

LISTE DES TABLEAUX

3.1. Évolution de l'erreur e_h et des estimateurs e_{rdc}^{seq} et e_{rdc}^{ddm} en fonction de la taille de maille h pour différents N_{sd} (résolution par approche duale) . . .	99
3.2. Évolution de l'erreur e_h et des estimateurs e_{rdc}^{seq} et e_{rdc}^{ddm} en fonction de la taille de maille h pour différents N_{sd} (résolution par approche primale) .	100
3.3. Valeurs de e_{rdc}^{seq} et e_{rdc}^{ddm}	104
3.4. Valeurs de e_{rdc}^{seq} et e_{rdc}^{ddm}	108

LISTE DES ALGORITHMES

2.1. FETI avec gradient conjugué préconditionné projeté	73
2.2. BDD avec gradient conjugué préconditionné projeté	76